



Reconstruction en tomographie locale : introduction d'information à priori basse résolution

Sandrine Rouault-Pic

► To cite this version:

Sandrine Rouault-Pic. Reconstruction en tomographie locale : introduction d'information à priori basse résolution. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT : . tel-00005016

HAL Id: tel-00005016

<https://theses.hal.science/tel-00005016>

Submitted on 23 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Sandrine Rouault-Pic

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
(Arrêtés Ministériels du 5 Juillet 1984 et
du 30 Mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Reconstruction en tomographie locale : Introduction d'information a priori basse résolution

Date de soutenance : 23 Octobre 1996

Composition du Jury :

Président : P.J. Laurent

Rapporteurs : L. Garnero
F. Peyrin

Examineurs : P. Cinquin
L. Desbat
C. Roux

Invitée : A.M. Charvet

Thèse préparée au sein du laboratoire TIMC - IMAG

Remerciements

Je remercie Jacques Demongeot, directeur du laboratoire TIMC, de m'avoir permis d'effectuer ma thèse dans son laboratoire.

Je remercie Philippe Cinquin, qui m'a accueilli dans son équipe "Gestes Médicaux et Chirurgicaux Assistés par Ordinateur" et qui a dirigé ma thèse. J'ai trouvé dans son équipe un enthousiasme peu commun et très motivant.

Laurent Desbat a, pendant ces trois années co-dirigé ma thèse. Non seulement il a contribué largement par ses conseils et son aide à mon travail de thèse, mais il a su à tout moment me motiver et dans des moments plus difficiles me rassurer et m'encourager! Je le remercie profondément pour sa disponibilité, pour son soutien et pour l'amitié qu'il m'a témoignée.

Je remercie Françoise Peyrin et Line Garnero, rapporteurs, pour l'intérêt qu'elles ont porté à mon travail. Leurs remarques et corrections ont largement contribué à la version finale de ce rapport.

Je remercie Anne-Marie Charvet de l'European Synchrotron Radiation Facility (ESRF) pour les données acquises à l'ESRF qu'elle nous a transmises.

Je remercie Pierre-Jean Laurent et Christian Roux pour avoir bien voulu faire partie du jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie Jean François Lebas pour son soutien et son intérêt tout au long mon projet de thèse.

Je remercie chaleureusement la joyeuse équipe GMCAO : Eric Bainville, Catherine Barbe, Georges Bettega, Eric Bittar, Khadija Boutkhil, Yvan Bricault, Guillaume Champleboux, Maribel Chenin, Yves Delnondedieu, Vincent Dessenne, Ali Hamadeh, Delphine Henry, Gelu Ionescu, Stéphane Lavallée, Jean-Marc Lefebvre, François Leitner, Yann Menguy, Corinne Meunier, Olivier Nérot, Olivier Péria, Agnès Poyet, Emmanuel Promayon, Pascal Sautot, Jocelyne Troccaz... .

Je remercie Emmanuelle Bournay pour son aide précieuse.

Je remercie Jean-Noel, pour m'avoir aidée, motivée, encouragée pendant ces trois années. Je remercie mes parents pour leur confiance et leur soutien tout au long des mes études.

Table des matières

1	Tomographie - Généralités	9
1.1	Modèle physique	9
1.2	Définitions-Théorèmes fondamentaux	11
1.2.1	Définitions	11
1.2.2	Inversion de la transformée de Radon	12
1.3	Méthodes classiques de reconstruction	13
1.3.1	Approche analytique : rétroprojection filtrée	13
1.3.2	Approche algébrique	17
1.4	Conclusion	22
2	Reconstruction à partir de données manquantes	23
2.1	Introduction	23
2.2	Problème théorique - Non unicité	24
2.2.1	Définition de problèmes présentant des données manquantes	24
2.2.2	Non-unicité du problème intérieur	24
2.2.3	Reconstruction à une constante additive près	26
2.2.4	Conclusion	28
2.3	Etat de l'art	28
2.3.1	Introduction	28
2.3.2	Approximation des données manquantes	29
2.3.3	Projections sur des Ensembles Convexes	31
2.3.4	Tomographie locale et pseudo-locale	34

2.4	Conclusion	37
3	Maillages adaptatifs	39
3.1	Introduction	39
3.2	Principe	40
3.2.1	Notations	41
3.3	Approche algébrique	42
3.3.1	Système linéaire	42
3.3.2	Algorithme ART	43
3.3.3	Algorithme de gradient conjugué régularisé	44
3.4	Approche analytique : la rétroprojection filtrée	46
3.4.1	La fréquence de coupure	46
3.4.2	Les données	47
3.4.3	Le filtrage et la rétroprojection	51
3.5	Résultats	52
3.5.1	Reconstructions à partir de données simulées	52
3.5.2	Reconstruction à partir de données réelles	54
3.5.3	Conclusion	58
3.6	Mise en correspondance	58
3.6.1	Le problème	58
3.6.2	Utilisation de capteurs externes	59
3.6.3	Mise en correspondance des volumes reconstruits	61
3.6.4	Mise en correspondance directe des jeux de données	62
3.7	Conclusion	63
4	Ondelettes : généralités	64
4.1	Introduction	64
4.2	Définition	65
4.3	Transformée en ondelettes continue	66
4.4	Transformée discrète : structures obliques	67

4.5	Bases orthogonales	70
4.5.1	Définition	70
4.5.2	Construction de bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$: analyse multirésolution	71
4.5.3	Construction de bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^2)$	73
4.6	Algorithmes	74
4.6.1	Décomposition et reconstruction d'un signal unidimen- sionnel	75
4.6.2	Décomposition et reconstruction d'un signal bidimensionnel	76
4.7	Exemples	76
5	Ondelettes et tomographie	80
5.1	Introduction	80
5.2	Approche discrète	82
5.2.1	Reconstruction multirésolution	82
5.2.2	Approche matricielle	85
5.2.3	Rétroprojection et analyse en ondelettes de Haar	89
5.2.4	Décomposition temps-fréquence sous contraintes	91
5.3	Lien entre les décompositions de la fonction à reconstruire et des projections : approche continue	92
5.3.1	Inversion	94
5.3.2	Extension aux ondelettes directionnelles	94
5.4	Décomposition sur l'espace de Radon $Im(\mathbf{R})$	95
5.4.1	Décomposition dans des structures obliques	95
5.4.2	Décomposition en ondelettes-vaguelettes	98
5.5	Localisation et inversion de la transformée de Radon en dimen- sion paire	106
5.5.1	Localisation	106
5.5.2	Inversion locale de la transformée de Radon dans le plan .	110
5.6	Maillages adaptatifs	115

5.7	Implémentation	116
5.7.1	Première série	117
5.7.2	Seconde série	121
5.7.3	Troisième série	125
5.8	Conclusion	126
6	Mise en oeuvre parallèle sur un CRAY T3D	130
6.1	Présentation de la machine et de PVM	130
6.1.1	Le CRAY T3D	130
6.1.2	La bibliothèque PVM	131
6.1.3	Modes de communication	132
6.2	Les matrices “ART” - algorithmes de calcul	134
6.3	Parallélisation des produits “matrice-vecteur” et “matrice transposée- vecteur”	137
6.3.1	Rappel de l’algorithme du gradient conjugué du système régularisé	137
6.3.2	Parallélisation en mode “Ray-tracing”	139
6.3.3	Parallélisation en mode “ray-tracing transposé”	139
6.4	Résultats et discussion	140

Glossaire

Ω	Support de la fonction à reconstruire
$\mathbf{S}^{n-1}$	Sphère unité de $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{S}^1$	Sphère unité de $\mathbb{R}^2$
$\mathbf{R}f$	Transformée de Radon de la fonction f
$Z = \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$	Cylindre unité
$S(\mathbb{R}^n)$	Espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$
$S(Z)$	Espace de Schwartz sur le cylindre Z
$\mathbf{R}^\# g$	Opérateur de rétroprojection appliqué à $g \in S(Z)$
$\mathcal{F}_1 f(\xi)$	Transformée de Fourier unidimensionnelle de $f(x)$
$\mathcal{F}_1 g(\theta, \xi)$	Transformée de Fourier unidimensionnelle par rapport à la variable radiale de la fonction $g(\theta, s)$
$\mathcal{F}_2 f(\xi_1, \xi_2)$	Transformée de Fourier bidimensionnelle de $f(x, y)$
$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$	Produit de convolution dans $\mathbb{R}^n$
$f \star g(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta, s-t)g(\theta, t)dt$	Produit de convolution dans $\mathbb{R}$
$\mathbf{H} \ h(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{s-t} dt$	Transformée de Hilbert de $h \in S(\mathbb{R})$
$H^\alpha = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + \xi ^2)^{\alpha/2} \mathcal{F}_n f \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$	Espace de Sobolev d'ordre α
$H_0^\alpha(\Omega) = \left\{ f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) : \text{supp}(f) \subseteq \overline{\Omega} \right\}$	
$\mathbf{J}_k(t) = \frac{(t/2)^k}{\Gamma((2k+1)/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{its} (1-s^2)^{(2k-1)/2} ds$	Fonction de Bessel d'ordre k , $k > \frac{-1}{2}$

Introduction

L'imagerie médicale est devenue un outil essentiel d'aide au diagnostic et à la chirurgie. Les techniques d'imagerie sont de plus en plus perfectionnées et aboutissent à des résultats assez spectaculaires. En tomographie, les progrès sont surprenants et d'ici peu, nous verrons apparaître de manière routinière des scanners tridimensionnels. Le principal problème posé par cette technique d'imagerie est la dose que l'on doit injecter au patient. En effet, cette technique est basée sur la mesure de l'atténuation d'un rayon X à travers un tissu. Plus la dose est élevée, et en général, plus l'information est précise. Mais, pour des raisons évidentes, la dose doit être limitée et certaines nouvelles techniques en tomographie sont orientées dans cette direction :

- L'utilisation de détecteurs ASi (Amorphous Silicium) de très haute résolution (plans ou non) et de petite taille (jouant un rôle important dans la définition) permet de limiter la dose délivrée à une région d'intérêt. Ce type de détecteurs peut-être utilisé sur la ligne médicale de l'ESRF (European Synchrotron Radiation Facility). En effet la source est quasiment monoénergétique, conduisant à un faisceau étroit ne nécessitant pas de grands détecteurs. En outre pour des détecteurs plans, la résolution diminue quand la taille croît.
- Lors d'un examen médical, on est souvent intéressé à ne reconstruire qu'une partie locale du corps humain; il semble alors raisonnable de ne pas exposer le reste du corps aux radiations, afin de diminuer la dose.

- La diminution du nombre de données à traiter entraîne une diminution du temps de calcul.

La tomographie consiste à recueillir des mesures d'atténuation (projections) d'un rayon X à travers un tissu et à partir de ces projections de reconstruire la carte de densité de ce tissu. En dimension 2, (générer une image 2D à partir de projections 1D), la reconstruction n'est pas locale, c'est-à-dire que la reconstruction d'une fonction en un point x requiert toutes les projections qui intersectent le support de la fonction. Ceci signifie qu'un patient est exposé à une dose relativement importante, même si la zone d'intérêt est petite. Beaucoup de travaux sont menés dans le but de reconstruire localement une région d'intérêt à partir des projections intersectant uniquement cette zone.

Le rapport suit le schéma suivant :

- Le premier chapitre consiste en la description du problème de reconstruction en tomographie.
- Dans le second chapitre, nous décrivons plus particulièrement le problème de tomographie locale et nous donnons également un état de l'art sur le sujet. Nous verrons que les techniques les plus performantes conduisent à des reconstructions qualitatives. Or dans certains cas, il peut s'avérer très intéressant de disposer des cartes exactes de densité; ceci peut servir, par exemple, à comparer deux images faites à des temps différents.
- Dans le troisième chapitre, nous présentons notre approche conduisant à des reconstructions locales quantitatives. Elle est basée sur l'introduction d'information a priori (mise en correspondance avec les projections locales). Les projections locales sont supposées à très haute résolution, ainsi la reconstruction d'une image comprend deux résolutions différentes, une plus haute résolution étant souhaitée dans la région d'intérêt.
- Dans le quatrième chapitre, nous abordons la deuxième partie du travail, qui consiste à appliquer les techniques d'ondelettes au problème de

reconstruction locale en tomographie. Dans ce chapitre, nous présentons rapidement les ondelettes.

- Dans le cinquième chapitre, nous présentons un état de l’art sur les méthodes de reconstruction basées sur les techniques d’ondelettes, et nous proposons une adaptation des techniques existantes pour le problème traité.
- Enfin le dernier chapitre est consacré à une mise en oeuvre parallèle des algorithmes présentés dans le chapitre 3.

Chapitre 1

Tomographie - Généralités

Dans ce chapitre, nous présentons d'une part la modélisation d'un examen de tomodensitométrie et d'autre part les principaux résultats mathématiques liés au problème (voir [30, 59]).

1.1 Modèle physique

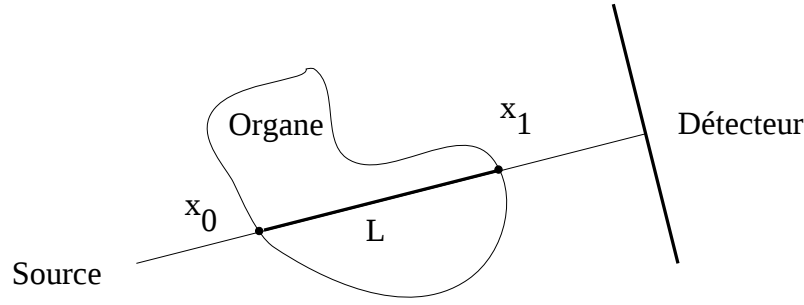
Un examen de tomodensitométrie consiste à recueillir des informations sur l'atténuation d'un rayon X à travers un milieu. Un algorithme de reconstruction permet, à l'aide de ces informations, de retrouver la fonction d'atténuation caractéristique du milieu, des tissus en médecine.

Soit $f(x)$ la fonction d'atténuation au point x du tissu. Supposons-la constante sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$. Soit $\Delta \mathcal{I}$ la variation d'intensité du rayon X au passage dans la zone $x + \Delta x$. Elle est donnée par la loi de Lambert-Beer :

$$\frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} = -f(x)\Delta x$$

En intégrant la fonction $I(x)$ de x_0 à x_1 , $I(x_0)$ étant l'intensité initiale du faisceau et $I(x_1)$ étant l'intensité après passage dans les tissus selon la trajectoire L (voir figure 1.1), nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_0} = e^{-\int_L f(x) dx}$$

FIG. 1.1 - Atténuation sur la trajectoire L du faisceau

La transformation qui permet de passer d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble de ses intégrales sur les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ s'appelle la **transformée de Radon**. Elle s'écrit :

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{\langle x, \theta \rangle = s} f(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

avec $\langle x, \theta \rangle = s$, droite de $\mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t \in \mathbf{S}^1$, $s \in \mathbb{R}$.

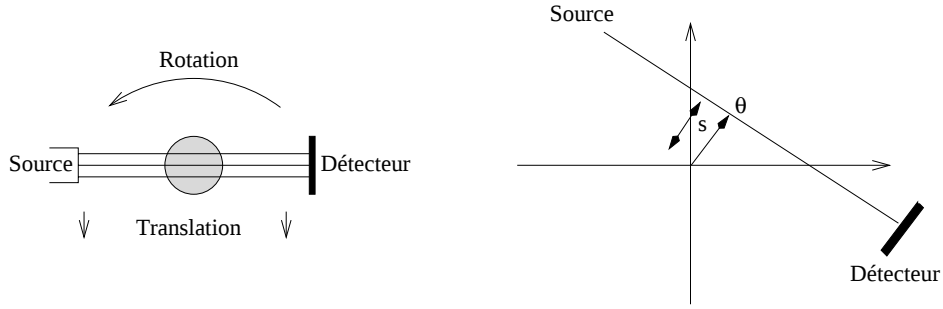
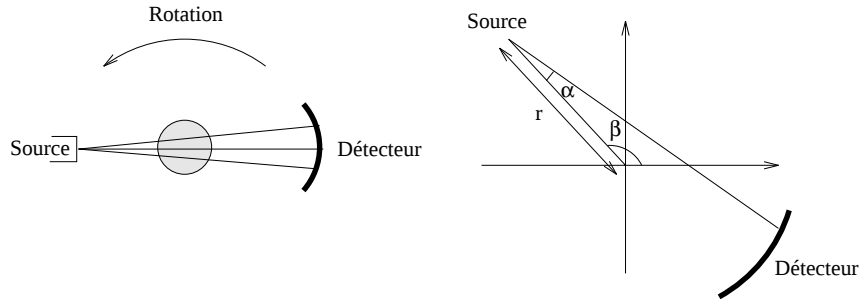
Le problème de reconstruction de $f(x)$ à partir de ses intégrales sur des hyperplans de $\mathbb{R}^2$ est l'inversion de la transformée de Radon. L'arrangement des droites définit la géométrie d'acquisition. On distingue classiquement deux géométries : parallèle et en éventail.

- **Géométrie parallèle** : un système formé par une source et un détecteur, dans une position angulaire donnée, subit des mouvements de translation. Une droite est définie par deux paramètres, le vecteur unitaire de direction $\theta \in \mathbf{S}^1$ et $s \in \mathbb{R}$, le paramètre de translation (voir figure 1.2).

- **Géométrie en éventail (Fan-Beam)** : pour chaque position angulaire, la source est fixe, et les détecteurs sont sur un cône ayant comme point de fuite la source. Le système subit également des rotations. Une droite est définie par deux paramètres angulaires, α et β (voir figure 1.3). On peut se ramener par un changement de variable aux paramètres de la géométrie parallèle :

$$s = r \sin \alpha, \quad \vartheta = \beta + \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (1.2)$$

où r est la distance de la source au centre du domaine étudié.

FIG. 1.2 - *Géométrie parallèle*FIG. 1.3 - *Géométrie en éventail*

1.2 Définitions-Théorèmes fondamentaux

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats classiques sur la transformée de Radon (pour les démonstrations voir [59]). Ils permettent de comprendre, d'analyser les difficultés liées aux données manquantes lors d'un examen de tomodensitométrie. Les définitions de l'opérateur de Radon, de son dual (l'opérateur de rétroprojection) sont données, ainsi que les principaux théorèmes qui constituent les instruments de base de certains algorithmes d'inversion.

1.2.1 Définitions

La transformée de Radon d'une fonction f , définie par l'expression (1.1) est une fonction paire par rapport aux deux variables, c'est-à-dire $\mathbf{R}f(\theta, s) = \mathbf{R}f(-\theta, -s)$ sur le cylindre unité $Z = \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Un résultat essentiel est le théorème de coupe-projection. Il lie la transformée de Fourier de $\mathbf{R}f$ prise en la variable radiale à la transformée de Fourier de f

prise en les deux variables.

Théorème 1.1 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(2\pi)^{(n-1)/2} \mathcal{F}_n f(\sigma\theta) = \mathcal{F}_1 \mathbf{R}f(\theta, \sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$*

Le deuxième résultat concerne l'opérateur de rétroprojection. Nous verrons ultérieurement que ce théorème aboutit à un algorithme standard de reconstruction.

Définition 1.1 *L'opérateur de rétroprojection s'écrit :*

$$\forall g \in S(Z), \mathbf{R}^\# g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta$$

Théorème 1.2 *Pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $g \in S(Z)$, $(\mathbf{R}^\# g) * f = \mathbf{R}^\# (g \star \mathbf{R}f)$*

Le produit de convolution $*$ est dans $\mathbb{R}^n$ alors que le produit de convolution $\star$ agit sur $\mathbb{R}$ (sur la variable radiale de la fonction).

1.2.2 Inversion de la transformée de Radon

La formule d'inversion ([59] p.18) n'est pas directement utilisée dans les algorithmes, mais elle permet de mettre en avant les problèmes de reconstruction liés aux données manquantes, en particulier le caractère non local de l'inversion pour les dimensions paires. Il faut au préalable définir l'opérateur de Riesz :

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{I}^\alpha f)(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \mathcal{F}_n f(\xi), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha < n \quad (1.3)$$

et la transformée de Hilbert :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \forall h \in S(\mathbb{R}), \mathcal{F}_1(\mathbf{H} h)(\sigma) = -i \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{F}_1 h(\sigma)$$

L'opérateur de Riesz peut s'exprimer en fonction de la transformée de Hilbert :

$$\mathbf{I}^{1-n} h = \mathbf{H}^{n-1} h^{(n-1)}, \text{ avec } \mathbf{H}^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \mathbf{H} & , \text{ n pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} & , \text{ n impair} \end{cases}$$

Théorème 1.3 *Soit $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour $\alpha < n$:*

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{\alpha-n+1} g, \quad g = \mathbf{R}f$$

En donnant la forme explicite de $\mathbf{R}^\#$ avec $\alpha = 0$ ([59] p.20), on obtient le résultat :

$$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(\frac{n-2}{2})} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} H g^{(n-1)}(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta & n \text{ pair} \\ (-1)^{(\frac{n-2}{2})} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g^{(n-1)}(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta & n \text{ impair} \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque : $g(\theta, \langle x, \theta \rangle)$ est l'intégrale de f sur des hyperplans passant par x perpendiculaires au vecteur directionnel θ . En dimension impaire, la reconstruction a un caractère local : la fonction est déterminée en un point par l'intégrale sur des hyperplans passant par un voisinage du point (du fait de la dérivée de la transformée de Radon dans la formule d'inversion). Ce n'est pas vrai en dimension paire car la transformée de Hilbert n'est pas locale. Le potentiel de Riesz est donc un opérateur local si et seulement si α est pair dans la relation (1.3).

1.3 Méthodes classiques de reconstruction

Deux types d'approches sont considérées. Elles conduisent toutes deux à des algorithmes de reconstruction. La première approche (analytique) consiste à discrétiser une formule d'inversion établie en continu. La seconde approche (algébrique), part du principe que les données (projections) sont discrétisées. A partir de ces données discrètes, on cherche à reconstruire la fonction de densité. Dans les deux cas, on se place en dimension $n = 2$. On notera p le nombre de rotations de la source et q le nombre de points échantillonnés pour une position angulaire donnée (dans les deux géométries).

1.3.1 Approche analytique : rétroprojection filtrée

Ces méthodes sont basées sur la discrétisation d'une formule d'inversion. Nous présentons plus particulièrement la méthode de rétroprojection filtrée, construite à partir du théorème 1.2. Il s'agit de la méthode la plus couramment utilisée en reconstruction. Il existe d'autres méthodes, par exemple celle basée sur le théorème de coupe-projection 1.1 ([59, 61]). Cette méthode est assez peu utilisée car elle nécessite l'interpolation d'une grille cartésienne à partir de

donnée sur une grille polaire, problème délicat et coûteux. La rétroprojection filtrée est plus couramment implémentée dans les dispositifs industriels.

Méthode de rétroprojection filtrée

Cette méthode s'inspire directement du théorème 1.2 que nous rappelons :

$$\text{Pour } f \in S(\mathbb{R}^n), g \in S(Z), (\mathbf{R}^\# g) * f = \mathbf{R}^\#(g \star \mathbf{R}f)$$

L'idée est de choisir $g = w_b$ tel que $W_b = \mathbf{R}^\# w_b$ soit une bonne approximation de la distribution de Dirac. Ainsi nous avons :

$$f \approx W_b * f = \mathbf{R}^\#(w_b \star \mathbf{R}f)$$

W_b est supposé être un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure b :

$$\mathcal{F}_1 W_b(\sigma) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}_1 \Phi\left(\frac{|\sigma|}{b}\right) \text{ où } 0 \leq \mathcal{F}_1 \Phi \leq 1 \text{ et } \mathcal{F}_1 \Phi(\sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \geq 1 \quad (1.5)$$

Pour plus de détails, voir [59],

Pour calculer $W_b * f$, il faut procéder dans un premier temps à une étape de convolution discrète :

$$w_b^h * g(\theta_j, s) = h \sum_{l=0}^{l=q-1} w_b(s - s_l) g(\theta_j, s_l)$$

puis dans un second temps à une étape de rétroprojection discrète. Pour cela, nous utilisons la formule discrète exacte sur des polynômes trigonométriques pairs de degré $2p$ (voir [59](VII-2)) :

$$\int_{S^1} v(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=1}^p v(\theta_j)$$

Ce qui donne la forme discrète suivante :

$$\mathbf{R}_p^\# v(x) = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=1}^p v(\theta_j, \langle x, \theta_j \rangle) \quad (1.6)$$

On remarque que la complexité de l'algorithme de rétroprojection est en $O(M \times p \times q)$, M étant le nombre de pixels dans l'image, p le nombre de rotations et

q le nombre de mesures par rotation. Or, en pratique, on réduit la complexité d'un ordre. Pour cela, on calcule aux points s_k de la discrétisation les valeurs de convolution. Puis au lieu de calculer la rétroprojection aux points $(\theta_j, \langle x, \theta_j \rangle)$, selon l'équation (1.6), on estime ces valeurs à partir d'une interpolation linéaire entre les valeurs connues de v aux points de discrétisation. A θ_j fixé, on détermine l'indice k tel que $s_k \leq s < s_{k+1}$, $s = \langle x, \theta_j \rangle$, et on calcule l'approximation linéaire entre les deux valeurs $v(\theta_j, s_k)$ et $v(\theta_j, s_{k+1})$. Cette méthode doit être adaptée aux paramètres de la géométrie en éventail.

Géométrie parallèle

Soit (θ_j, s_l) , $j = 0 \dots p-1$, $l = 0 \dots q-1$ les variables définissant les droites de rayonnement, $\theta_j = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_j \\ \sin \vartheta_j \end{pmatrix}$, avec $\vartheta_j = \frac{\pi j}{p}$ et $s_l = \frac{2l}{q-1} - 1$. Les filtres sont définis de façon explicite dans [59] (p.109). Ils doivent être adaptés pour la géométrie en éventail. L'algorithme s'écrit :

– Etape de convolution :

$$v_{j,k} = \frac{2}{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} w_b(s_k - s_l) g(\theta_j, s_l), k = 0 \dots q-1 \quad (1.7)$$

– Etape de rétroprojection : On détermine l'indice k tel que : $s_k \leq s < s_{k+1}$, $s = \langle \theta_j, x \rangle$. La valeur de $v(\theta_j, \langle \theta_j, x \rangle)$ est calculée selon l'approximation linéaire : $v(\theta_j, \langle \theta_j, x \rangle) = (1-u)v(\theta_j, s_k) + uv(\theta_j, s_{k+1})$ avec $u = \frac{s_{k+1}-s}{s_{k+1}-s_k}$. La rétroprojection discrète devient :

$$f_{FB}(x) = \frac{2\pi}{p} \sum_{j=0}^{p-1} ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1}) \quad (1.8)$$

Géométrie fan-beam

Pour travailler en géométrie en éventail et utiliser le filtre w_b , on considère le changement de variables suivant :

$$s = r \sin \alpha, \vartheta = \beta + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

avec r distance de la source au centre du disque unité. Par conséquent, $g(\alpha, \beta) = \mathbf{R}f(\theta, s)$. Il faut écrire la rétroprojection filtrée

$$W_b * f(x) = \int_{\mathbf{S}^1} \int_{-1}^1 w_b(\langle x, \theta \rangle - s) \mathbf{R}f(\theta, s) ds d\theta$$

en fonction des paramètres α et β . Le jacobien de la transformation est $|r \cos \alpha|$. Pour le terme $|\langle x, \theta \rangle - s|$, on définit y comme la projection de x sur la droite de rayonnement et γ comme l'angle entre les vecteurs $-a$ et $x - a$, voir figure 1.4. On a alors $|\langle x, \theta \rangle - s| = |x - y| = |x - a| |\sin(\gamma - \alpha)|$. De plus, le filtre vérifie la propriété : $w_b(\rho s) = \rho^{-2} w_{\rho b}(s)$. La rétroprojection filtrée devient :

$$W_b * f(x) = r \int_0^{2\pi} |x - a|^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_{b|x-a|}(\sin(\gamma - \alpha)) g(\alpha, \beta) |\cos \alpha| d\alpha d\beta$$

La fréquence de coupure est changée en $b|x - a|$. On préférera utiliser une fréquence de coupure fixée $c \geq b|x - a|$, par exemple $c = (1+r)b$. Les paramètres

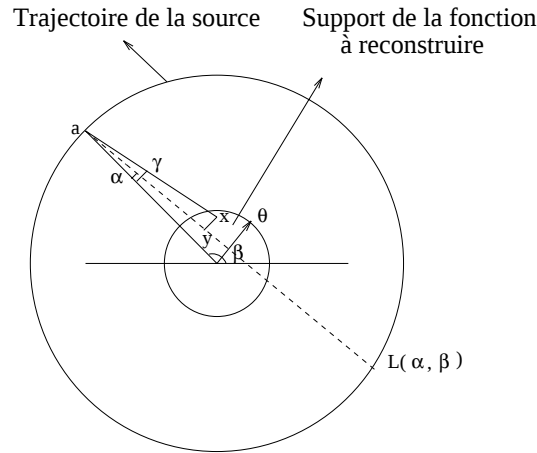


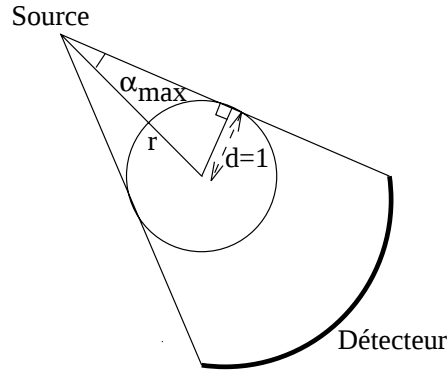
FIG. 1.4 - *Passage des coordonnées parallèles aux coordonnées en éventail*

définissant la géométrie d'acquisition sont discrétisés en $\beta_j = \frac{2\pi j}{p}, j = 0 \dots p-1$ et $\alpha_l = hl - \alpha_{max}$, avec $\alpha_{max} = \arcsin(\frac{1}{r})$ et $h = \frac{2}{q-1} \arcsin(\frac{1}{r})$, r étant la distance entre la source et le centre du disque unité (voir figure 1.5).

L'algorithme est alors similaire au précédent.

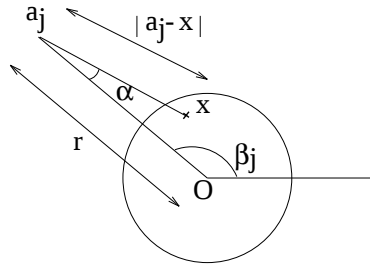
– Etape de convolution : elle est calculée aux points de discrétisation (α_l, β_j) :

$$v_{j,k} = h \sum_{l=0}^{q-1} w_c(\sin(\alpha_k - \alpha_l)) g(\beta_j, \alpha_l) \cos(\alpha_l), k = 0 \dots q-1 \quad (1.9)$$

FIG. 1.5 - Détermination de α_{max}

- Etape de rétroprojection : on détermine l'indice k tel que $\alpha_k \leq \alpha < \alpha_{k+1}$, avec $\alpha = \arccos \frac{\langle a_j, x, a_j \rangle}{|a_j - x||a_j|}$, où a_j est la position de la source déterminée par r et β_j (voir figure 1.6) et on calcule la valeur de la rétroprojection en (α, β_j) par une approximation linéaire : $v(\alpha, \beta_j) = (1 - u)v(\alpha_k, \beta_j) + uv(\alpha_{k+1}, \beta_j)$, où $u = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}$. La rétroprojection discrète s'écrit :

$$f_{FB}(x) = \frac{2\pi r}{p} \sum_{j=0}^p |x - a_j|^{-2} ((1 - u)v_{j,k} + uv_{j,k+1}) \quad (1.10)$$

FIG. 1.6 - Calcul de α en fonction de x et a_j

1.3.2 Approche algébrique

Introduction

Les méthodes algébriques sont basées sur l'hypothèse que les données sont discrètes. Pour calculer une estimation de la solution, plusieurs techniques sont

considérées et aboutissent à des algorithmes différents. Nous présenterons brièvement trois de ces méthodes, ART, SIRT, et les méthodes algébriques directes, pour ensuite se focaliser sur la première méthode, implémentée dans le cadre de notre travail. Pour les méthodes ART et SIRT, on discrétise l'estimation de f cherchée (voir [59, 40, 33]). Pour cela, on choisit un nombre fini de fonctions $\Psi_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, j = 1 \dots M$, et on cherche une solution de la forme :

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^M X_j \Psi_j(x, y) \quad (1.11)$$

Cette méthode conduit au calcul des coefficients X_j , et donc, à la résolution d'un système linéaire.

La fonction est donnée à travers $\mathbf{R}f$, intégrale de f sur des droites d'équation $\langle x, \theta \rangle = s$, où $s \in [-1, +1]$ et $\theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta), \vartheta \in [0, \pi], x \in \Omega = [-1, +1] \times [0, \pi]$. On discrétise s et θ pour obtenir des droites $L_i, i = 1, \dots, N, i = (k - 1)L + l, k = 1 \dots K, l = 1 \dots L, N = KL$ tel que :

$$L_i = \{(x, y) \in \Omega, x \cos \vartheta_k + y \sin \vartheta_k = s_l\}$$

Les données sont discrètes et le problème s'écrit :

$$\langle \Phi_i, f \rangle = \iint_{\Omega} \Phi_i(x, y) f(x, y) dx dy = g_i \quad (1.12)$$

avec :

- $\Phi_i, i = 1, \dots, N$: distributions définissant l'appareil de mesure (par exemple, une indicatrice sur les droites L_i).
- $g_i, i = 1, \dots, N$: mesures réalisées sur f (atténuation de la densité f selon la direction L_i) à travers le corps étudié.

En injectant l'expression (1.11) dans (1.12), on obtient le système linéaire :

$$g_i = \sum_{j=1}^M X_j \langle \Phi_i, \Psi_j \rangle, i = 1, \dots, N \quad (1.13)$$

où

$$A_{ij} = \langle \Phi_i, \Psi_j \rangle \text{ telle que :} \quad (1.14)$$

$$g = AX \quad (1.15)$$

où :

- $g \in \mathbb{R}^N$: vecteur des mesures.
- $X \in \mathbb{R}^M$: vecteur des valeurs de la fonction à reconstruire.
- $A (N, M)$: matrice d'éléments $\langle \Phi_i, \Psi_j \rangle$.

Remarque : en réalité, les données sont bruitées : $g_i = \sum_{j=1}^M X_j \langle \Phi_i, \Psi_j \rangle + e_i$, $i = 1, \dots, N$ où e_i est un bruit (gaussien, poissonnien,...). On le négligera dans la suite.

Un cas courant est de discrétiser en pixels le support de la fonction f et donc de définir les fonctions Ψ_j comme les indicatrices sur les pixels. Un élément de la matrice est alors la longueur de l'intersection entre un pixel et une droite. Ceci correspond aux méthodes ART et SIRT. La différence entre les deux méthodes est la technique de résolution du système obtenu. Dans le cas de ART, la résolution se fait avec la méthode de Kaczmarz (détaillé dans la section suivante) et dans le cas des méthodes SIRT, elle se fait par la méthode de Richardson (voir [33]).

Les méthodes algébriques directes reviennent à calculer la solution de moindres carrés de moindre norme (solution normale f^+) dans un espace de Hilbert (ici $L^2(\mathbb{R}^2)$). Les mesures sont exprimées de manière discrète à l'aide des indicatrices sur les bandes modélisant le rayonnement $g_i = \langle \chi_{L_i}, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ et la solution normale f^+ est : $f^+ = \sum_i f_i \chi_{L_i}$. La résolution d'un tel problème conduit à des matrices bloc-circulantes ([33, 59]) : par exemple, en géométrie parallèle, la fonction Ψ_j est l'indicatrice sur des bandes (le rayonnement n'est plus modélisé par une droite mais par une bande) disposées de telle manière que la matrice des produits scalaires soit bloc-circulante. Le calcul du pseudo-inverse peut être effectué par une méthode de résolution faisant intervenir des transformées de Fourier discrètes pour bloc-diagonaliser la matrice.

Algorithme ART (Algebraic Reconstruction Technic)

On discrétise Ω , le support de la fonction en pixels $S_m, m = 1, \dots, M$, et on fait l'hypothèse que f est constante sur chacun des pixels. Ceci revient à remplacer f par un vecteur X , $X \in \mathbb{R}^M$ tel que la j^{ieme} composante de X est la valeur de f sur S_m . Un élément de la matrice A définie par l'expression (1.14) est donc l'intersection entre une droite de mesure L_i et un pixel P_j :

- $\Phi_i(x, y) = \chi_{L_i}(x, y)$ indicatrice sur la droite.
- $\Psi_j(x, y) = \chi_{S_j}(x, y)$ indicatrice sur le pixel.

donc $A_{i,j} = \#(L_i \cap S_j) = \langle \Phi_i(x, y), \Psi_j(x, y) \rangle$.

Remarque : Si $M = \sqrt{M} \times \sqrt{M}$ est le nombre de pixels dans la grille carrée, L_i rencontre au plus $2\sqrt{M}$ pixels de Ω (voir figure 1.7), donc la matrice A est très creuse (L_j rencontre de 0 à $2\sqrt{M} - 1$ pixels).

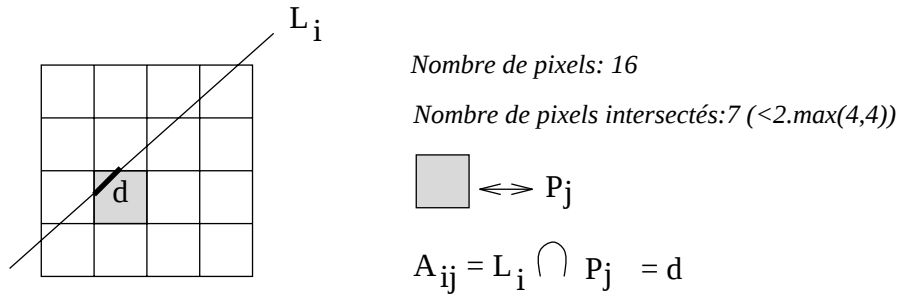


FIG. 1.7 - Matrice

Le système linéaire à résoudre est :

$$A_i^T X = g_i, \quad i = 1, \dots, N \quad A_i^T = (A_{i1}, \dots, A_{iM})^T \quad (1.16)$$

On applique, pour la résolution du système, la méthode de Kaczmarz ([59, 40]), ce qui donne l'itération :

$$X^{(i)} = X^{(i-1)} + \frac{\omega}{|A_i|^2} (g_i - A_i^T X^{(i-1)}) A_i, \quad i = 1, \dots, N$$

ω est un paramètre de relaxation, $0 < \omega < 2$.

Ceci décrit une étape de l'algorithme ART, qui transforme $X_i = X^{(0)}$ en $X_{i+1} = X^{(N)}$.

Complexité

- Pour une itération de ART

Pour chaque droite L_i , on détermine les pixels rencontrés par cette droite (et la longueur du segment résultant de cette intersection). On sait que chaque droite rencontre $0(\sqrt{M})$ pixels, M étant le nombre total de pixels sur la grille. Le calcul de la matrice A demande $0(N\sqrt{M})$ calculs d'intersections entre une droite et un pixel, (N étant le nombre de mesures).

- Exemple en géométrie Fan-Beam :
 - p = nombre de sources.
 - q = nombre de mesures par position de source.
 - $NX = NY$ = nombre de pixels sur x et sur y .

Donc $N = p \times q$ et $M = NX \times NY$. Si le système linéaire compte autant d'équations que d'inconnues, alors $NX \times NY = p \times q$. La complexité du problème est : $0(N\sqrt{M}) = 0(\max(p, q)^2 \sqrt{(\max(p, q)^2)}) = 0(\max(p, q)^3)$.

Remarques : il s'agit du coût pour une itération. C'est aussi le coût total pour une méthode analytique (par exemple, la rétroprojection filtrée). Cet algorithme a l'avantage de s'adapter à n'importe quelle géométrie d'acquisition (parallèle, fan-beam). Les modifications dues à la géométrie sont au niveau du calcul de la matrice, la méthode de résolution du système ne changeant pas. En général, la convergence est très rapide, quelques itérations suffisent (3 ou 4). Enfin, l'introduction d'informations a priori dans la reconstruction est facilement réalisable avec de telles méthodes.

1.4 Conclusion

Nous avons évoqué les résultats fondamentaux liés à l'inversion de la transformée de Radon ainsi que les principales méthodes de reconstruction. Ceci va nous permettre d'introduire les problèmes de reconstruction à partir de données manquantes et de mettre en avant les difficultés rencontrées dans le cadre particulier de la tomographie locale. Ensuite nous adapterons les méthodes présentées à notre problème.

Chapitre 2

Reconstruction à partir de données manquantes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous abordons les différentes techniques pour la reconstruction d'une fonction à partir de données manquantes. Après une description des différents types de problèmes présentant des données manquantes, nous nous intéresserons au problème dit "intérieur" (les mesures étant connues sur une région d'intérêt), et plus particulièrement à la non-unicité de la reconstruction. Nous présentons les techniques déjà existantes pour résoudre ce problème. Elles sont généralement basées sur l'approximation des données manquantes et/ou l'introduction de connaissance a priori. Les techniques les plus récentes, tomographie locale et pseudo-locale, techniques très performantes, ne nécessitent pas de connaissance a priori. La tomographie locale permet de reconstruire la racine carrée du laplacien de la fonction f . Or les surfaces de discontinuité de f et celles de la racine carrée du laplacien de f sont identiques. La tomographie pseudo-locale permet maintenant de quantifier les sauts de discontinuité. Les très bons résultats obtenus avec les méthodes de tomographie locale et pseudo-locale laissent supposer que les prochaines techniques industrielles seront basées

sur ces méthodes.

2.2 Problème théorique - Non unicité

2.2.1 Définition de problèmes présentant des données manquantes

Un problème est dit à données complètes si $g = \mathbf{R}f$ est discrétisée sur le domaine $Z = \mathbf{S}^1 \times [-1, +1]$ (on suppose que le support de f est contenu dans le disque unité dans $\mathbb{R}^2$). Si on ne dispose pas des données sur la totalité du domaine Z , le problème de reconstruction est dit à données incomplètes. Voici quelques exemples de problèmes de ce type :

- Le problème intérieur : $\forall \theta \in \mathbf{S}^1$, $\mathbf{R}f(\theta, s)$ n'est donnée que pour $|s| \leq a, 0 < a < 1$. Alors $f(x)$ est à déterminer pour $|x| \leq a$ (voir figure 2.1).
- Le problème extérieur : $\forall \theta \in \mathbf{S}^1$, $\mathbf{R}f(\theta, s)$ n'est donné que pour $|s| \geq a, 0 < a < 1$. Alors $f(x)$ est à déterminer pour $|x| \geq a$.
- Le problème à angle de vue limité : $\mathbf{R}f(\theta, s)$ n'est donné que pour θ dans un sous-ensemble de la demi-sphère unité.

Nous nous intéresserons dans la suite uniquement au problème intérieur.

2.2.2 Non-unicité du problème intérieur

Dans le cas d'un problème intérieur, $\mathbf{R}f(\theta, s)$ est donné sur $Z^a = \mathbf{S}^1 \times [-a, +a], 0 < a < 1$, et $f(x)$ est reconstruite pour $|x| \leq a$. La non-unicité de la solution est démontrée dans [59](p.169). Nous rappelons la démonstration ainsi que les résultats permettant d'établir la non-unicité.

Théorème 2.1 *Soit $g \in S(\mathbb{R})$, et $g(\theta, s) = g(-\theta, -s)$, et soit $p_m(\theta)$ un polynôme homogène de degré m en θ tel que ;*

$$\int_{\mathbb{R}} s^m g(\theta, s) ds = p_m(\theta)$$

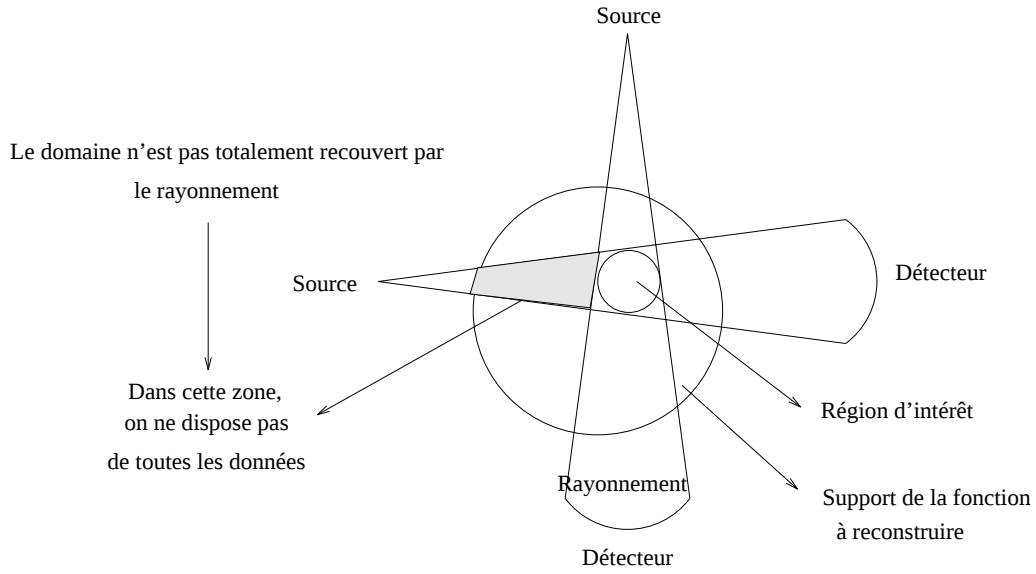


FIG. 2.1 - Données partielles : problème intérieur

Alors, il existe $f \in S(\mathbb{R})$, telle que $g = \mathbf{R}f$. De plus, si $g(\theta, s) = 0$ pour $|s| \geq a$, alors $f(x) = 0$ pour $|x| \geq a$.

Remarque : l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}} s^m g(\theta, s) ds = p_m(\theta)$ polynôme homogène s'établit si $f \in S$. Il suffit d'une part d'écrire la transformée de Radon comme suit :

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy$$

où x est écrit sous la forme $x = s\theta + y, y \in \theta^\perp$. La relation $\langle x, \theta \rangle = s$ devient $\langle s\theta + y, \theta \rangle = s + \langle y, \theta \rangle = s$ car $\langle y, \theta \rangle = 0$. On effectue d'autre part le changement de variable $\langle x, \theta \rangle = s$, pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} s^m \mathbf{R}f(\theta, s) ds = \int_{\mathbb{R}^2} \langle x, \theta \rangle^m f(x) dx$$

On a bien un polynôme homogène de degré m en θ .

Démonstration de la non-unicité

Soit h une fonction paire, dans $C^\infty(\mathbb{R})$, et qui s'annule sur $[-a, a], 0 < a < 1$. Soit $g(\theta, s) = h(|s|)$, radiale et paire. Cette fonction vérifie les hypothèses du

théorème d'existence 2.1 : $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g(\theta, s) = g(-\theta, -s)$ et

$$\int_{\mathbb{R}} s^m g(\theta, s) ds = \int_{\mathbb{R}} s^m h(|s|) ds = p_m(\theta)$$

avec p_m indépendant de θ .

D'après ce théorème, on peut affirmer l'existence d'une solution $u : \exists u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, telle que $\mathbf{R}u = g$. Pour les fonctions radiales, on a la formule d'inversion de manière explicite [59](p.26) :

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{|x|}^{\infty} (s^2 - |x|^2)^{-1/2} h'(s) ds \quad (2.1)$$

Pour $|s| \leq a$, $g(\theta, s) = h(|s|) = 0$, ce qui implique que $\mathbf{R}u = 0$ pour $|s| \leq a$. Pour $|x| < a$, l'intégrale (2.1) n'est pas toujours nulle, suivant le choix de h :

$$u(x) = \frac{-1}{\pi} \int_{|x|}^a (s^2 - |x|^2)^{-1/2} h'(s) ds + \frac{-1}{\pi} \int_a^{\infty} (s^2 - |x|^2)^{-1/2} h'(s) ds$$

Le premier terme est nul mais le second ne l'est pas si $h'(s)$ ne s'annule pas partout sur $[a, \infty[$. Ainsi il existe des fonctions non nulles dans la région d'intérêt pour qui les projections intersectant cette région sont nulles (appartenant au noyau de $\mathbf{R}$) : $\mathbf{R}u = 0$ pour $|s| < a$ n'implique pas $u = 0$ pour $|x| < a$ et l'unicité n'est pas établie. Ces fonctions varient en général peu dans la région d'intérêt, et une approximation grossière des projections manquantes permet d'approcher f dans la région d'intérêt à une constante additive près.

2.2.3 Reconstruction à une constante additive près

La fonction reconstruite nous fournit des informations qualitatives, à une constante additive près [59]. Soit une fonction u tel que $\mathbf{R}u = 0$ sur $I = [-a, a]$. La formule explicite d'inversion dans $\mathbb{R}^2$ ([59], p.21) donne :

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{S}^1} \int_{|s| \geq a} \frac{\mathbf{R}u(\theta, s)'}{\langle x, \theta \rangle - s} ds d\theta$$

En intégrant par partie :

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{S}} \left(\left[\frac{\mathbf{R}u(\theta, s)}{\langle x, \theta \rangle - s} \right]_a^{+\infty} - \int_{|s| \geq a} \frac{\mathbf{R}u(\theta, s)}{(\langle x, \theta \rangle - s)^2} ds \right) d\theta$$

$\mathbf{R}u(\theta, a) = \mathbf{R}u(\theta, +\infty) = 0$ donc :

$$u(x) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_S \int_{|s| \geq a} \frac{\mathbf{R}u(\theta, s)}{(\langle x, \theta \rangle - s)^2} ds d\theta$$

On a alors, pour $|x| \leq b < a$:

$$|u(x) - u(0)| = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{S}^1} \int_{|s| \geq a} \left| \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(\langle x, \theta \rangle - s)^2} \right| |\mathbf{R}u(\theta, s)| ds d\theta$$

$$|u(x) - u(0)| \leq C_1(a, b) \|\mathbf{R}u\|_{L^2} \quad (2.2)$$

avec $C_1(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{|s| \geq a} \left(\frac{1}{(s - b \cos \vartheta)^2} - \frac{1}{s^2} \right)^2 ds d\vartheta \right)^{1/2}$, $\theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$

Les valeurs de $C_1(a, b)$, sont en général très petites, [59] (p.170).

Application directe

Soit g^c un jeu de données complet tel que $g^c = g$ sur I . La résolution de $\mathbf{R}f^c = g^c$ a une solution unique. La fonction $u = f - f^c$ est telle que $\mathbf{R}u = 0$ sur I . On applique donc le résultat précédent (2.2) :

$$|(f - f^c)(x) - (f - f^c)(0)| \leq C_1(a, b) \|g - g^c\|_{L^2(Z-I)} , \quad x \leq b < a$$

Une approximation assez grossière de g dans la zone manquante permet de déterminer f de manière assez précise pour $x \leq b$ à une constante additive près. On obtient un résultat qualitatif, qui montre les variations de f .

Si on s'intéresse à la reconstruction de f sans chercher une approximation de $\mathbf{R}f$ dans la zone manquante, on se tourne naturellement vers les méthodes algébriques de reconstruction qui ne nécessitent pas de jeu complet. Si le jeu est complet, ces méthodes convergent vers la solution de moindre norme de l'équation $g = \mathbf{R}f$ sur I . S'il est incomplet, l'algorithme converge vers une autre solution de moindre norme f^M . On sait majorer la variation $|f - f^M| = u$.

$$|u(x) - u(0)| \leq C_2(a, b) \|f\|_{L_2(\Omega^2)} \quad \text{avec} \quad C_2(a, b) = 2\sqrt{\pi}(1 - a^2)^{1/4} C_1(a, b)$$

Ceci signifie que si $C_2(a, b)$ est suffisamment petit, alors f^M est proche de f ($f^M = f$ à une constante additive près).

2.2.4 Conclusion

Nous avons décrit le problème de la non-unicité de l'inversion de la transformée de Radon en dimension paire, lorsque l'on dispose uniquement des projections intersectant une région d'intérêt. La formule d'inversion écrite en dimension quelconque n fait intervenir essentiellement deux opérateurs, la rétroprojection et le potentiel de Riesz. L'opérateur de rétroprojection, quelque soit la dimension est un opérateur local. Par contre, la localité du potentiel de Riesz dépend de la parité de la dimension considérée. En effet, en dimension impaire, le potentiel de Riesz fait intervenir uniquement des dérivées, et est donc un opérateur local. En dimension paire, il fait intervenir la transformée de Hilbert, qui n'est pas local : la fonction est déterminée en un point à partir des intégrales sur toutes les droites, et non pas sur celles passant dans un voisinage du point. Le problème de reconstruction en dimension 2 n'est ainsi pas local, et n'admet pas de solution unique. Dans ce cadre, pourtant, il est possible, en approximant les données manquantes de reconstruire f à une constante additive près. Dans la section suivante, nous présentons un état de l'art sur les différentes techniques traitant le problème intérieur.

2.3 Etat de l'art

2.3.1 Introduction

Dans la plupart des méthodes traitant de reconstruction à partir de données incomplètes, plusieurs points communs se dégagent :

- Approximation des données manquantes.
- Introduction d'information a priori.

- Reconstruction à partir des données locales seulement.

Nous allons présenter les différentes méthodes existantes énumérées selon les différents points évoqués.

2.3.2 Approximation des données manquantes

Nous avons vu précédemment que l'unicité de la reconstruction est un point crucial pour le problème dit "intérieur". Pour le problème extérieur, l'unicité peut être établie si l'approximation des données manquantes reste dans l'image de l'opérateur de Radon. Nous présenterons notamment trois méthodes faisant appel à une approximation des données manquantes. Les deux premières ([44, 54, 76]) sont mieux adaptées au problème extérieur, et ont été implémentées dans ce sens. La troisième méthode ([51]) spécifique au problème intérieur conduit à une reconstruction qualitative (à une constante additive près).

Approximation des données manquantes dans l'espace de Fourier

Cette méthode explicitée dans [44], est dédiée à la tomographie d'émission. Le dispositif mis en oeuvre est particulier : entre chaque détecteur non courbe (formant une structure polygonale régulière), on observe des "trous" de 5 degrés. Les mesures correspondant au passage d'un rayonnement dans ces "trous" ne sont pas détectées. Pour estimer les données manquantes, un filtrage est opéré dans l'espace des fréquences, en prenant la transformée de Fourier bi-dimensionnelle des mesures. Les fréquences erronées peuvent être localisées et modifiées par un filtrage. Enfin, on calcule la transformée inverse. Cet algorithme est itératif. L'image est ensuite reconstruite par un algorithme standard de rétroprojection filtrée. Cette méthode est appliquée donc à un problème dit à angle limité.

Approximation des données manquantes par un algorithme de rétro-projection filtrée itératif

Cette méthode, explicitée dans [54, 76] a été implémentée sur des dispositifs commercialisés pour traiter le problème extérieur. Elle est aussi basée sur une approximation des données par itérations successives d'un algorithme de rétroprojection. Le but est de trouver une approximation consistante afin de reconstruire une solution unique (l'approximation des données doit se trouver dans l'image de l'opérateur de Radon). Soit $\tilde{g}^i$ l'approximation des données g dans la zone manquante, et g^c les données observées. Le principe de la méthode est de construire un opérateur T tel que $\tilde{g}^i$ soit un point fixe : $T\tilde{g}^i = \tilde{g}^i$. L'algorithme sous-jacent est : $T\tilde{g}_{k+1}^i = Tg_k^i = \mathbf{R}^i C^{im} \mathbf{R}^\# \begin{pmatrix} C^i g_k^i \\ y \end{pmatrix}$. C^{im} est un opérateur de contrainte qui peut servir à améliorer la qualité de l'image et C^i est un opérateur de contrainte sur les données manquantes. Ces contraintes sont considérées comme une connaissance a-priori (voir section 2.3.3).

Approximation par décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{R}$

Cette méthode que l'on doit à A.K. Louis [51, 50] est basée sur la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{R}$, dans le cadre des géométries en éventail c'est-à-dire pour la transformée en rayon X divergent :

$$\mathbf{D}f(a, \theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta) dt$$

Il s'agit de l'intégrale de f sur la demi-droite issue du point a et dans la direction déterminée par θ . En dimension $n = 2$ la transformée de Radon et la transformée en rayon X coïncident. A.K. Louis propose une décomposition en valeurs singulières pour le cas où les projections sont données sur une région d'intérêt [51] ainsi que le problème d'angle limité [50]. Il en déduit une approximation des données manquantes. Les reconstructions à partir de données intérieures ne sont pas quantitatives. L'image, à la frontière de la région d'intérêt, se dégrade, mais elle est nettement améliorée à l'intérieur de celle-ci.

2.3.3 Projections sur des Ensembles Convexes

L'introduction de connaissances a priori sur la fonction à reconstruire peut venir compléter l'approximation des données manquantes. La méthode des "projections sur des ensembles convexes", développée dans [80, 73, 61, 76, 60, 2, 62, 63, 53] sous de multiples formes est basée sur une approche géométrique, utilisant la théorie des projections sur des ensembles convexes dans un espace de Hilbert. Les informations disponibles sur la fonction sont écrites sous la forme de contraintes sur des ensembles convexes fermés. La fonction f à reconstruire est supposée appartenir à une espace de Hilbert H . Chaque type d'information (ou contrainte) sur f est associée à un ensemble convexe fermé $C_i \subset H$, $i = 1 \dots N_c$. Ainsi le problème est :

$$\text{Trouver } f \text{ dans } H \text{ telle que } f \in \cap_{i=1}^{N_c} C_i = \mathcal{C} \quad (2.3)$$

Les conditions d'existence et d'unicité pour la reconstruction de f ainsi que les résultats généraux sur cette approche sont données dans [80, 81]. Pour expliciter l'expression (2.3), on introduit des opérateurs de projections P_i , $i = 1 \dots N_c$, sur les convexes C_i (selon la norme définie dans H). Si $g_i = P_i h$, alors g_i est l'élément appartenant à C_i le plus proche de h (au sens de la norme). Dans ce cadre la solution f cherchée sera un point fixe de l'équation :

$$f_{k+1} = P_c P_{c-1} \dots P_1 f_k, k = 0, 1, \dots$$

On utilisera plutôt la forme :

$$f_{k+1} = T_c T_{c-1} \dots T_1 f_k, k = 0, 1, \dots, \text{ où } T_i = (1 + \lambda_i)I + \lambda_i P_i$$

Les λ_i sont des paramètres de relaxation, avec $0 < \lambda_i < 2$. Si H est un espace de dimension finie alors la séquence $\{f_k\}$ converge au sens de la norme définie dans H vers f .

Plusieurs applications de cette formulation sont étudiées. Les contraintes sont injectées dans l'espace direct, dans le cadre de méthodes algébriques ([60, 2, 63]) ou bien dans l'espace de Fourier ([62, 73]) en utilisant la méthode basée sur

le théorème de coupe-projection 1.1, [59]. Voici quelques exemples de contraintes utilisées dans les méthodes citées :

Représentation des données (en dimension $n = 2$)

Dans les méthodes algébriques, les données sont discrètes et la transformée de Radon est donnée en ces points de discrétisation : $R_i = Rf(s_m, \theta_n)$, $m = 0 \dots N_s - 1$, $n = 0 \dots N_\theta - 1$. Ceci permet de définir les ensembles convexes fermés suivants :

$$\mathcal{C}_i = \{h \in \mathbf{H} ; R_i h = g_i\}$$

La relation $f \in \cap_{i=1}^N \mathcal{C}_i$ est vérifiée. La projection Q d'une fonction $q \in \mathbf{H}$ sur chacun des $\mathcal{C}_i$ s'écrit dans le cas discret :

$$Q(x_k, y_l) = \begin{cases} q(x_k, y_l) & \text{si } \tilde{g}_i = g_i \text{ (} \tilde{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_i q \text{)} \\ q(x_k, y_l) + \frac{g_i - \tilde{g}_i}{\sum_{m=1}^X \sum_{n=1}^Y r_i^2(x_m, y_n)} r_i(x_k, y_l) & \text{si } \tilde{g}_i \neq g_i \end{cases}$$

où :

- g_i est la mesure de f (fonction exacte) sur le rayonnement L_i .
- $\hat{g}_i$ est la mesure estimée de q sur ce même rayonnement.
- $r_i(x_l, y_j)$ est l'intersection entre le pixel (x_l, y_j) et la i^{eme} droite de rayonnement.

Si on applique uniquement ces contraintes, on obtient l'algorithme ART.

Autres exemples de projections

$$\mathcal{C}_{SL} = \{h \in \mathbf{H} ; (x, y) \notin \mathcal{A} \Rightarrow h(x, y) = 0\}, Q = P_{SL} q = \begin{cases} q(x, y) & (x, y) \in \mathcal{A} \\ 0 & (x, y) \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Il s'agit de l'ensemble des fonctions s'annulant en dehors d'une région $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{C}_p = \{h \in \mathbf{H} ; h(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega\}, Q = P_p q = \begin{cases} q(x, y) & q \geq 0 \\ 0 & q < 0 \end{cases}$$

Il s'agit de l'ensemble des fonctions positives.

$$C_E = \{h \in H ; \|h\|^2 \leq E = \rho^2\}, Q = P_E q = \begin{cases} q & \|q\| \leq \rho \\ \sqrt{\frac{E}{\|q\|^2}} q & \|q\| > \rho \end{cases}$$

Il s'agit de l'ensemble des fonctions qui sont bornées en énergie.

$$C_R = \{h \in H ; \|h - f_R\| \leq \epsilon_R\}, Q = P_R q = \begin{cases} q & \|q - f_R\| \leq \epsilon_R \\ f_R + \epsilon_R \frac{q - f_R}{\|q - f_R\|} & \|q - f_R\| > \epsilon_R \end{cases}$$

Il s'agit de l'ensemble des fonctions qui sont à une distance inférieure à ϵ_R d'une fonction de référence f_R .

$$C_{AL} = \{h \in H ; a \leq h \leq b\}, Q = P_{AL} q = \begin{cases} a & q(x, y) < a \\ q(x, y) & a \leq q(x, y) \leq b \\ b & q(x, y) > b \end{cases}$$

Il s'agit de l'ensemble des fonctions qui sont comprises entre les constantes a et b .

En pratique, ces contraintes ont pour but de réduire le diamètre de l'ensemble des solutions, et donc de forcer la fonction reconstruite à être plus proche de f (au sens de la norme).

Prenons le cas de la contrainte C_R : l'efficacité d'une telle projection est directement liée à ϵ_R . Plus ϵ_R est petit, plus la contrainte sur l'ensemble des solutions est forte (plus le diamètre de l'ensemble est petit). Mais si ϵ_R est trop petit, alors on peut avoir: $\mathcal{C}_R \cap \mathcal{C}_0 = \emptyset$, $\mathcal{C}_0 = \cap_{i=1}^N \mathcal{C}_i$. Mais si ϵ_R est trop grand, alors la contrainte peut s'avérer inefficace. Pour un problème intérieur, la fonction de référence f_R peut-être, par exemple :

* Une image reconstruite provenant d'un examen antérieur.

* Une moyenne d'une certaine population

f_R peut également, dans un problème de type données partielles, être utilisée comme information a priori.

2.3.4 Tomographie locale et pseudo-locale

Introduction

En tomographie classique, la reconstruction implique une opération de convolution avec un noyau k qui n'a pas de support compact. Ainsi la reconstruction en un point x requiert les mesures d'atténuation sur toutes les droites du plan contenant x . En tomographie locale, l'objectif est de reconstruire une fonction uniquement à partir de données locales. Dans ce cadre, ce n'est pas la fonction qui est reconstruite mais la racine carrée du laplacien positif, Λf telle que $\mathcal{F}_2(\Lambda f)(\sigma) = \mathcal{F}_2 f(\sigma)|\sigma|$. Cet opérateur Λ supprime les basses fréquences et met en avant les hautes. Le résultat est donc la détection des discontinuités de la fonction. La tomographie locale, ainsi que la tomographie pseudo-locale sont essentiellement qualitatives. Il existe néanmoins pour la tomographie pseudo-locale, un algorithme ([69],chap.4,sect. 4.2) permettant de quantifier les sauts de discontinuité de f . Les algorithmes de tomographie locale et pseudo-locale ont été étudiés et implémentés au sein du laboratoire TIMC par Loïc Benayoun ([6]) et Charles Soussen ([75]).

Tomographie locale

La tomographie locale ([26, 27, 28]) est basée sur la formule d'inversion donnée dans le théorème 1.3 :

$$f = \frac{1}{4\pi} \mathbf{I}^{-\alpha} \mathbf{R}^{\#} \mathbf{I}^{\alpha-1}(\mathbf{R}f)$$

re-écrite en ([59],p.171) :

$$\mathbf{I}^{\alpha} f = \frac{1}{4\pi} \mathbf{R}^{\#} \mathbf{I}^{\alpha-1}(\mathbf{R}f)$$

Si α est impair, $\alpha-1$ est pair, donc $\mathbf{I}^{\alpha-1}$ est local. L'opérateur de rétroprojection est un opérateur local car $\mathbf{R}^{\#}g(x)$ ne dépend que de $g(\theta, < \theta, x >)$ pour tout θ de $\mathbf{S}^1$. Dans la travaux de A. Faridani ([28]), il est montré que $\mathbf{I}^{\alpha}$ possède exactement les mêmes points de discontinuité que f . Il est donc possible de détecter, à partir de données locales, les points de discontinuité de f .

En pratique, on considère $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, et on reconstruit $\mathbf{I}^{-1}f = \Lambda f$ et $\mathbf{I}f = \Lambda^{-1}f$, où Λ est défini en dimension 2 par :

$$\forall f \in H^1, \forall x \in \mathbb{R}^2, \Lambda f = C(2, 1) \sum_{j=1}^2 \frac{x_j}{|x|} * \frac{\partial f}{\partial x_j}, C(2, \alpha) = \frac{\Gamma((2-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi \Gamma(\alpha/2)}$$

$$\forall f \in H^1, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_2(\Lambda f)(\xi) = |\xi| \mathcal{F}_2(f)(\xi) \quad (2.4)$$

L'opérateur Λ est directement lié au laplacien par $\Lambda^2 = -\Delta$ (Δ désigne le laplacien). Pour $n \geq 2$, l'opérateur Λ^{-1} est un opérateur de convolution $R_1 * f(x)$ tel que : $R_1 * f(x) = \int R_1(x-y) f(y) dy$. Le noyau R_1 est la transformée de Fourier inverse de $(2\pi)^{-n/2} |\xi|^{-1}$, c'est-à-dire le noyau de convolution de Riesz :

$$R_1(x) = \frac{1}{\pi |S^{n-2}|} |x|^{1-n} \quad (2.5)$$

Sur un domaine où f est constante (on peut en général supposer la fonction f approximativement constante par morceaux), Λf est convexe (forme de bol) et $\Lambda^{-1}f$ est concave. A. Faridani et al. ont montré dans [27] qu'avec un choix judicieux d'un paramètre $\mu (> 0)$, paramètre dit de contre-bol, $\Lambda f + \mu \Lambda^{-1}f$ est approximativement constante par morceaux. C'est pour cela qu'on ne reconstruit pas directement Λf mais $\Lambda f + \mu \Lambda^{-1}f$. La paramètre μ est tel que $\mu = cr^{-2}$, où r est un réel vérifiant $a \leq r \leq 1$, 1 est le rayon du support de l'objet (sphère unité), a est le rayon de la zone d'intérêt, et c est un réel indépendant de r proche de 6.

La proposition suivante permet d'établir un lien entre la fonction f et les transformations Λf et $\Lambda^{-1}f$.

Proposition 2.1 *La convolution $R_1 * f(x)$ existe (en convergence absolue) pour au moins un x si et seulement si $f \times (1 + |x|)^{1-n} \in L^1$; si c'est le cas, $R_1 * f$ existe presque partout et est localement intégrable. Des relations (2.4) et (2.5), on déduit :*

$$\Lambda^{-1}f(x) = R_1 * f(x) = \int R_1(x-y) f(y) dy$$

et

$$\Lambda f(x) = -R_1 * \Delta f(x) = - \int R_1(x-y) \Delta f(y) dy$$

Pour établir une formule de reconstruction, il est pratique de définir la transformée en rayon divergent (géométrie fan-beam en dimension 2) et la transformée en faisceau parallèle (qui coïncide avec la transformée de Radon en dimension 2) :

Définition 2.1 *La transformée en rayon divergent est définie selon :*

$$\mathbf{D}f(a, \theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta) dt, \quad \theta \in \mathbf{S}^1, \quad t \in \mathbb{R}$$

Définition 2.2 *La transformée en rayon parallèle est définie selon :*

$$\mathbf{P}f(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta) dt, \quad \theta \in \mathbf{S}^1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

La formule de reconstruction locale, établie dans ([74]) est :

Théorème 2.2 *Si $e \in H^{1/2}$, $(1 + |x|)^{-1}e \in L^1$, $\frac{\mathcal{F}_2 e(\xi)}{|\xi|} \in L^1_{loc}$ alors*

$$e * f(x) = \int_C \int_{\mathbf{S}^1} (\mathbf{D}_a f(\theta) + \mathbf{D}_a f(-\theta)) |\langle a, \theta \rangle| k(E_\theta(x - a)) d\theta da$$

où $k = \frac{1}{4R} C(2, 1) \Lambda \mathbf{P}e$. La source est déplacée sur un cercle C de rayon $R > 1$, autour du support de f . E_θ est la projection orthogonale sur le sous-espace $\theta^\perp$.

Pour la tomographie locale, e est remplacé par Λe . En utilisant le résultat : $\Lambda^2 = -\Delta$, le théorème 2.2 devient :

Théorème 2.3 *Si $e \in H^{3/2}$, $(1 + |x|)^{-1}e \in L^1$, alors*

$$\Lambda e * f(x) = \int_C \int_{\mathbf{S}^1} (\mathbf{D}_a f(\theta) + \mathbf{D}_a f(-\theta)) |\langle a, \theta \rangle| K(E_\theta(x - a)) d\theta da$$

avec $K = -\frac{1}{4R} C(2, 1) \Delta \mathbf{P}e$.

De manière générale, le noyau k du théorème 2.2 est tel que $\mathcal{F}_2 k(\xi) = |\xi| \mathcal{F}_2 e(\xi)$, avec $\mathcal{F}_2 e(0, 0) \neq 0$. Ainsi son support n'est pas borné. Par contre le noyau K du théorème 2.3 a un support de petite taille si e a un support borné. Ainsi la reconstruction est locale. Le détail de la méthode en dimension 2 se trouve dans [6].

Tomographie pseudo-locale

La tomographie locale permet donc de détecter les discontinuités d'une image. Mais l'information est entièrement qualitative. La tomographie pseudo-locale, introduite par A. Ramm ([69, 70]), possède également des propriétés de régularité et la fonction reconstruite possède les mêmes sauts de discontinuité que f (ce qui n'est pas le cas en tomographie locale). La tomographie pseudo-locale en dimension 2 s'appuie sur la formule de reconstruction du théorème 1.3, en prenant $\alpha = 0$ et $n = 2$.

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{R}^\# \mathbf{I}^{-1} \mathbf{R} f = \frac{1}{4\pi} \mathbf{R}^\# \mathbf{H}^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{R} f$$

car $\mathbf{I}^{-1}h = \mathbf{H}^{-1}h^{(1)}$, $h^{(1)}$ étant la dérivée première par rapport à la variable radiale. En explicitant la transformée de Hilbert, on aboutit à la formule de reconstruction :

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{S}^1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g(t, \theta)}{\langle x, \theta \rangle - t} dt d\theta \quad (2.6)$$

La formule locale de reconstruction, qui ne conduit pas à f est obtenue en considérant l'intégrale en t dans l'expression (2.6) sur l'intervalle $(\langle x, \theta \rangle - d, \langle x, \theta \rangle + d)$, $d > 0$:

$$f_d(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{S}^1} \int_{\langle x, \theta \rangle - d}^{\langle x, \theta \rangle + d} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g(t, \theta)}{\langle x, \theta \rangle - t} dt d\theta$$

Cette formule est locale car la fonction $f_d(x)$ est calculée à partir des mesures d'atténuation passant par le disque de rayon $|\langle x, \theta \rangle - t| \leq d$.

2.4 Conclusion

Nous avons parcouru les différentes méthodes de reconstruction à partir de données locales. Les plus performantes semblent être les techniques de tomographie locale et pseudo-locale. Cependant même si les sauts de discontinuité sont estimés, les résultats restent qualitatifs. Or, il est préférable, dans certains cas de vouloir une information quantitative. Par exemple, lors de contrôle de tumeur, la densité peut permettre de décider si la tumeur est maligne ou non.

Dans le prochain chapitre, nous présentons une méthode de reconstruction à partir de données locales d'une part, et de connaissance a priori d'autre part, permettant de reconstruire des images quantitatives.

Chapitre 3

Maillages adaptatifs

3.1 Introduction

Nous avons montré dans la section 2.2.3 que si l'on dispose d'un jeu de données locales, alors il est possible de reconstruire la fonction f^l à une constante additive près. L'introduction d'information a priori permettrait d'annuler cette constante.

Dans le cadre de notre travail, le jeu de données locales g^l présente une résolution fine (examen effectué avec un détecteur performant mais de petite taille ou avec une source fortement collimatée). La connaissance a priori est un jeu de données complet, concernant le même organe que pour le jeu local, mais de faible résolution. Le but est, après une mise en correspondance préalable des deux jeux de données, de reconstruire f^l . Dans ce cas, nous reconstruisons effectivement f^l , la constante additive étant nulle. Dans ce chapitre nous présentons les différentes méthodes de reconstruction mises en oeuvre. Ces méthodes sont des adaptations des méthodes classiques de reconstruction. Nous présentons l'adaptation de deux méthodes algébriques, ART et le gradient conjugué régularisé, ainsi que l'adaptation d'une méthode analytique, la rétroprojection filtrée ([71]). Des résultats sur des données simulées et réelles sont données à la fin du chapitre.

3.2 Principe

Deux types d'information sont pris en compte dans la reconstruction :

- L'information a priori : ces mesures forment un jeu de données complet, de faible résolution. On peut par exemple considérer qu'il s'agit d'un premier examen effectué avec un scanner standard.
- L'information locale : ces mesures de très haute résolution concernent une région d'intérêt. On peut par exemple considérer qu'il s'agit d'un examen supplémentaire demandé au vue des résultats d'un examen standard. Cet examen est effectué avec du matériel plus performant que le premier, par exemple avec des détecteurs de haute résolution mais de petite taille, ou bien alors une source fortement collimatée. Ce dernier exemple rentre dans le cadre des expérimentations effectuées à l'European Synchrotron Radiation Facility de Grenoble, sur la ligne médicale ID15. Les données réelles avec lesquelles nous avons testé nos algorithmes proviennent de l'ESRF.

La mise en correspondance des deux jeux de mesures est abordée en fin de chapitre. Cette partie ne rentre pas dans le cadre de ce travail et nous montrerons succinctement les solutions envisagées. Néanmoins, après la fusion, on obtient un jeu de données complet mais à résolution variable, voir figure 3.1.

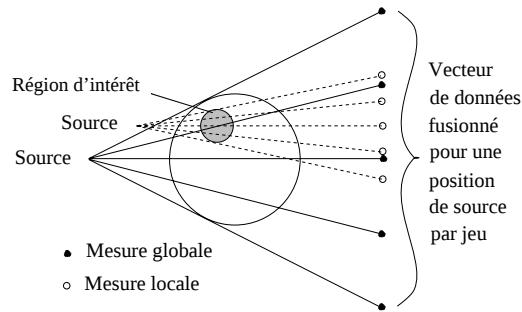


FIG. 3.1 - *Fusion des mesures*

La différence de résolution est aussi prise en compte dans de l'image reconstruite : la résolution en terme de pixels est plus fine dans la région d'intérêt, et plus grossière autour, nécessitant l'utilisation de deux maillages, voir figure 3.2.

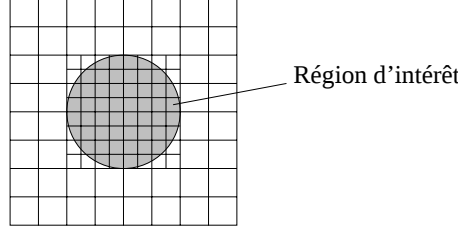


FIG. 3.2 - *Différentes résolutions dans l'image reconstruite*

3.2.1 Notations

Soient d'une part les notations portant sur les mesures et d'autre part les notations portant sur l'image reconstruite :

- G^c : le vecteur des mesures du jeu de données complètes g^c de dimension N^l .
- G^l : le vecteur des mesures du jeu de données locales g^l de dimension N^l .
- G : le vecteur constitué de ces mesures de dimension $N = N^l + N^c$ tel que :

$$G = \begin{pmatrix} G^c \\ G^l \end{pmatrix} \quad G_j = \begin{cases} G_j^c & \text{si } 0 \leq j < N^c \\ G_j^l & \text{si } N^c \leq j < N \end{cases} \quad (3.1)$$

- $\mathcal{I}^c$: la grille de pixels portant sur la totalité du support de l'organe, composée de M^c pixels (grille "basse résolution").
- $\mathcal{I}^l$: la grille de pixels portant sur la région d'intérêt dans l'organe composée de M^l pixels (grille "haute résolution").
- $M = M^c + M^l$: le nombre total de pixels dans l'image.

3.3 Approche algébrique

Les méthodes algébriques sont souvent utilisées dans le cas de problèmes à données incomplètes. Ces méthodes s'adaptent facilement à des géométries particulières, sans alourdir la résolution du système linéaire sous-jacent.

3.3.1 Système linéaire

D'après la section 1.3.2, le système linéaire à résoudre est : $AX = G$, où G est défini selon la relation (3.1), X est le vecteur inconnu formé de deux blocs correspondant aux deux régions (dans la région d'intérêt et autour) : $X = (X^c, X^l)^t$, et la matrice A , dite matrice ART est définie selon l'expression (1.14), c'est-à-dire qu'un élément de la matrice est la mesure de l'intersection entre une droite de rayonnement et un pixel. Dans le cas présent, la matrice ART est constituée de quatre blocs, prenant en compte les deux jeux de mesures et les deux résolutions dans l'image :

$$A = \begin{pmatrix} A^{cc} & , & A^{cl} \\ A^{lc} & , & A^{ll} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

avec :

- $A_{ij}^{cc} = \langle \phi_i^c, \psi_j^c \rangle, i = 0 \dots N^c - 1, j = 0 \dots M^c - 1$ est le produit scalaire entre l'indicatrice sur la droite de mesure du jeu complet numéro i et l'indicatrice sur le pixel numéro j de la grille globale.
- $A_{ij}^{cl} = \langle \phi_i^c, \psi_j^l \rangle, i = 0 \dots N^c - 1, j = 0 \dots M^l - 1$ est le produit scalaire entre l'indicatrice sur la droite numéro i de mesure du jeu complet et l'indicatrice sur le pixel numéro j de la grille locale.
- $A_{ij}^{lc} = \langle \phi_i^l, \psi_j^c \rangle, i = 0 \dots N^l - 1, j = 0 \dots M^c - 1$ est le produit scalaire entre l'indicatrice sur la droite numéro i de mesure du jeu local et l'indicatrice sur le pixel numéro j de la grille globale.

- $A_{ij}^{ll} = \langle \phi_i^l, \psi_j^l \rangle, i = 0 \dots N^l - 1, j = 0 \dots M^l - 1$ est le produit scalaire entre l'indicatrice sur la droite numéro i de mesure du jeu local et l'indicatrice sur le pixel numéro j de la grille locale.

De manière plus explicite, on obtient :

$$G_i = \begin{cases} G_i^c &= \sum_{j=0}^{M^c-1} X_j^c \langle \phi_i^c, \psi_j^c \rangle + \sum_{j=M^c}^{M^l-1} X_j^l \langle \phi_i^c, \psi_j^l \rangle & \text{si } 0 \leq i < N^c \\ G_i^l &= \sum_{j=0}^{M^c-1} X_j^c \langle \phi_i^l, \psi_j^c \rangle + \sum_{j=M^c}^{M^l-1} X_j^l \langle \phi_i^l, \psi_j^l \rangle & \text{si } N^c \leq i < N \end{cases} \quad (3.3)$$

La matrice A est très creuse, car au plus $2\sqrt{M^c} + 2\sqrt{M^l}$ éléments par ligne sont non nuls. Un stockage adapté devra être implémenté.

Valeur calculée en un point x quelconque de $[-1, +1]^2$

Suivant la position du point x , deux cas se présentent (voir figure 3.3) :

- Si x est dans la frontière ou à l'intérieur de la région d'intérêt, il appartient au pixel k de la grille locale et au pixel t de la grille globale. La valeur d'atténuation calculée $f(x)$ est $X_k^l + X_t^c$.
- Si x n'est pas dans la région d'intérêt, c'est-à-dire s'il appartient au pixel k de la grille globale alors la valeur calculée $f(x)$ est X_k^c .

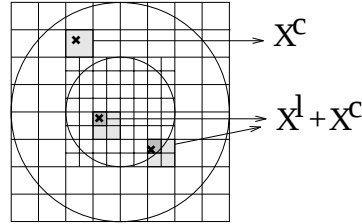


FIG. 3.3 - Valeur calculée au point x

3.3.2 Algorithme ART

L'algorithme ART est inchangé. Seul le calcul de la matrice est modifié et la k^{ieme} itération de l'algorithme s'écrit :

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + \frac{\omega}{|A_i|^2} (G_i - A_i^T X^{(k-1)}) A_i, \quad i = 1, \dots, N$$

ω est un paramètre de relaxation, $0 < \omega < 2$ et A_i est la i^{eme} ligne de la matrice.

3.3.3 Algorithme de gradient conjugué régularisé

Pour résoudre le système linéaire précédemment défini (section 3.2), on utilise ici une méthode de gradient conjugué sur le système régularisé. Pour cela, on régularise selon la méthode de Tikhonov-Philipps ([59]), et les paramètres de régularisation sont estimés par une méthode de validation croisée généralisée [33, 34, 35, 36, 37]. Le problème de minimisation aux moindres carrés régularisée est le suivant :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^M} \|AX - G\|^2 + \tau^c \|\Delta^c X^c\|^2 + \tau^l \|\Delta^l X^l\|^2 \quad (3.4)$$

et la solution régularisée vérifie :

$$S_\tau X_\tau = A^t G, \text{ avec } S_\tau = (A^t A + \tau^c \Delta^c + \tau^l \Delta^l)$$

Puisqu'on utilise deux grilles d'échantillonnages, on introduit deux paramètres de régularisation: $\tau = (\tau^c, \tau^l)$. Le laplacien doit également être adapté au problème. Il faut calculer sa valeur pour chaque pixel, provenant des deux grilles d'échantillonnages. Les laplaciens sont calculés sur chaque grille de manière indépendante. On définit deux opérateurs P^c et P^l agissant sur les valeurs prises par les pixels de chacune des grilles $\mathcal{I}^c$ et $\mathcal{I}^l$:

$$P^c(X_j^c) = \begin{cases} X_j^c & \text{si le pixel } j \text{ est dans le disque unité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P^l(X_j^l) = \begin{cases} X_j^l & \text{si le pixel } j \text{ est dans la région d'intérêt} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Au lieu de calculer ΔX^c et ΔX^l , nous calculons $\Delta P^c X^c$ et $\Delta P^l X^l$. Le problème (3.4) devient :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^M} \|A.PX - G\|^2 + \tau^l \|\Delta^l P^l X^l\|^2 + \tau^c \|\Delta^c P^c X^c\|^2, \quad PX = (P^c X^c, P^l X^l)^t$$

Estimation des paramètres de régularisation

Une technique, pour obtenir une estimation optimale des paramètres de régularisation, est de minimiser la fonction de validation croisée généralisée ([37]), définie ci-dessous :

$$VCG(\tau) = \frac{\frac{1}{M}\|G - G_\tau\|^2}{\left(\frac{1}{M}tr(I - A_\tau)\right)^2}, \text{ avec } A_\tau = AS_\tau^{-1}A^T \text{ et } G_\tau = A_\tau G \quad (3.5)$$

La principale difficulté est le calcul de $tr(I - A_\tau)$. Il requiert le calcul de S_τ^{-1} , problème mal posé et très coûteux. D. Girard a proposé dans [34, 36] de remplacer dans la relation (3.5) $\frac{1}{M}tr(I - A_\tau)$ par un estimateur statistique sans biais. Cet estimateur se construit de la façon suivante :

- ω est un bruit gaussien centré, réduit. $\omega \in IR^M$, $E(\omega) = 0$, $var(\omega) = 1$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_M)^T$.
- Calculer $\omega_\tau = A_\tau \omega$. Pour cela, on ne cherchera pas à inverser S_τ . On introduit un vecteur μ_τ , solution du système $S_\tau \mu_\tau = A^t G$ et, par conséquent, $\omega_\tau = A \mu_\tau$.
- Un estimateur de $\frac{1}{M}tr(I - A_\tau)$ est donné par $T^*(\omega) = \frac{\omega^T(\omega - \omega_\tau)}{\omega^T \omega} = 1 - \frac{\omega^T \omega_\tau}{\omega^T \omega}$.

Le calcul de la fonction $VCG(\tau)$ suit le schéma suivant :

- Choisir des valeurs initiales pour τ^l et τ^c .
 - Générer le vecteur gaussien centré réduit ω .
1. Calcul de la matrice : $S_\tau = A^t A + \tau^l \Delta^l + \tau^c \Delta^c$.
 2. Gradient conjugué pour résoudre le système régularisé : $S_\tau X_\tau = A^t G$.
 3. Calcul du numérateur de la fonction de validation croisée généralisée : $Num = \frac{1}{M}\|G - G_\tau\|^2$, avec $G_\tau = AX_\tau$.
 4. Gradient conjugué pour résoudre le système $S_\tau \mu_\tau = A^t \omega$, puis calcul de $\omega_\tau = A \mu_\tau$.

5. Calcul du dénominateur de la fonction de validation croisée généralisée :

$$Den = (1 - \frac{\omega^T \omega \tau}{\omega^T \omega})^2.$$

6. Calcul de $VCG(\tau) = Num/Den$, et remise à jour des paramètres. L'algorithme est recommencé à partir de 1., tant que le minimum n'est pas atteint.

A τ fixé, le calcul d'une valeur de VCG nécessite deux algorithmes de gradient conjugué. On limitera donc le nombre de valeurs de τ . La valeur minimale est approchée en “essayant” plusieurs valeurs. En pratique, cela suffit pour avoir une estimation satisfaisante des paramètres.

3.4 Approche analytique : la rétroprojection filtrée

Nous rappelons que cette méthode est basée sur le résultat : $W_b \star f = \mathbf{R}^\#(w_b \star \mathbf{R}f)$, avec $W_b = \mathbf{R}^\# w_b$ choisi pour être une approximation de la distribution de Dirac (voir section 1.3.1). Les phases classiques de filtrage et de rétroprojection sont adaptées à la nouvelle géométrie. De plus, deux problèmes apparaissent : le choix de la fréquence de coupure b dans “l'arrangement” des données (la mise en correspondance est supposée effectuée) et la phase de filtrage .

3.4.1 La fréquence de coupure

Soit une fonction f essentiellement b-bande limitée :

$$\int_{|\xi| \geq b} \mathcal{F}_2 f(\xi) d\xi \leq \varepsilon$$

La fréquence de coupe b est telle que au delà de celle-ci $\mathcal{F}_1 \mathbf{R}f$ est négligeable. Cette bande intervient dans le calcul du filtre.

La différence de résolution entre les deux jeux de données conduit à choisir deux fréquences de coupure b^c et b^l dans les deux régions correspondantes R^c (disque unité centré) et R^l (disque de rayon $a, 0 < a \leq 1$ centré). Notons NR^c (resp. NR^l) le nombre de projections pour le jeu de données basse (resp.

haute) résolution et NT^c (resp. NT^l) le nombre de mesures par projections.

Les relations sur les conditions d'échantillonnage données dans [59] sont :

$$b^c < NR^c \text{ et } b^c < \pi \frac{NT^c}{2} \text{ pour la basse résolution}$$

$$b^l < NR^l \text{ et } b^l < \pi \frac{NT^l}{2} \text{ pour la haute résolution}$$

Le nombre de données “idéal” au sens de Shannon est : $NR^c * NT^c = \frac{2b^c{}^2}{\pi}$ (resp. $NR^l * NT^l = \frac{2b^l{}^2}{\pi}$). Le nombre de données dans la région d'intérêt étant supérieur (du à la nature du problème) à celui du jeu de données global, la fréquence de coupure dans la région d'intérêt sera plus élevée. Le passage de b^c à b^l , suivant le paramètre s se fait à l'aide d'une fonction “lissante”, par exemple :

$$b = \begin{cases} b_c & |s| > a \\ \frac{|s|(b_c - b_l)}{a} + b_l & |s| \leq a \end{cases}, \text{ a étant le rayon de la région d'intérêt}$$

3.4.2 Les données

Pour calculer la rétroprojection discrète en un point x , on effectue une approximation linéaire entre les valeurs de la fonction prise aux deux points de discrétisation, par exemple s_k et s_{k+1} tels que pour θ fixé, $\langle x, \theta \rangle = s$ et $s_k \leq s < s_{k+1}$ (en géométrie parallèle). Il faut donc, pour toute valeur de s accéder aux points de discrétisation s_k et s_{k+1} qui encadrent au mieux s . L'indice k ainsi déterminé peut correspondre à une mesure provenant de l'un des deux jeux de mesures. Ceci nécessite un certain “arrangement” préalable des données. Il suit le déroulement suivant :

- Si deux positions de source (correspondant à une projection de chaque jeu de mesures) coïncident, les mesures sont intercalées, voir figure 3.4.
- Si on ne peut pas trouver dans le jeu haute résolution, une position angulaire de la source correspondant au jeu basse résolution :
 - Les données globales sont stockées sans augmentation de la résolution dans la zone correspondant à la région d'intérêt.

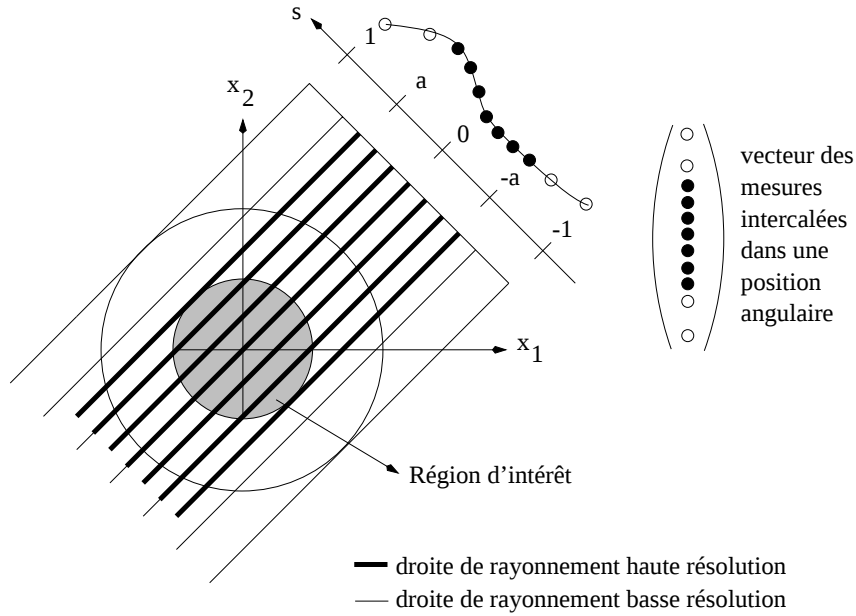


FIG. 3.4 - *arrangement des données lorsque deux positions angulaires coïncident.*

- Les données haute résolution sont locales. Dans une position angulaire, les données manquantes sont estimées à l'extérieur de la zone d'intérêt, voir figure 3.5. Pour cela, on procède à une interpolation des données manquantes à partir des données complètes basse résolution.

Ainsi un ensemble de mesures issu de la fusion du jeu de données basse résolution et du jeu de données locales possède pour une projection, soit une discrétisation régulière (la moins fine), soit une double discrétisation (plus fine dans la zone appartenant à la région d'intérêt), comme le montre la figure 3.6.

Interpolation

La formule d'interpolation utilisée est issue de la généralisation du théorème de Shannon, le théorème de Peterson-Middleton [59](p.62). Nous l'exprimons en dimension $n = 2$. Si une fonction $g \in \mathbb{R}^2$ est échantillonnée sur une grille $\{Wl, l \in \mathbb{Z}^2\}$, où W est une matrice réelle (2×2) non singulière, alors g peut

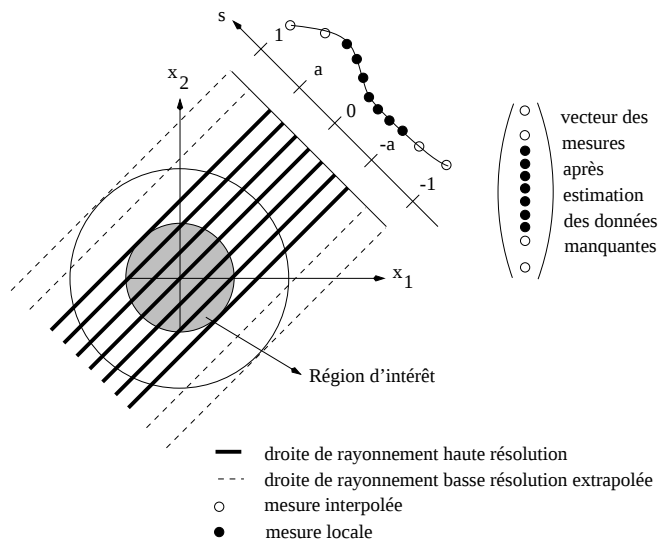


FIG. 3.5 - *estimation des données.*

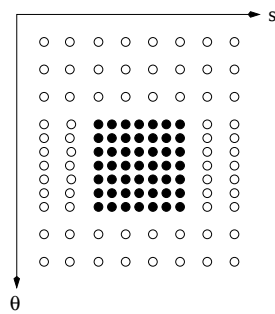


FIG. 3.6 - *Discretisation de l'ensemble des mesure fusionnées.*

être reconstruite à partir de ses valeurs aux points d'échantillonnage $g(Wl)$ selon la formule :

$$S_W g(x) = \frac{\det(W)}{2\pi} \sum_l g(Wl) \mathcal{F}_2 \chi_K(x - Wl) \quad (3.6)$$

où χ_K est la fonction caractéristique sur un ouvert K de $\mathbb{R}^2$. On a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Si les ensembles $\{K + 2\pi(W^{-1})^t k, k \in \mathbb{Z}^2\}$ sont mutuellement disjoints, si $g \in S$, alors il existe une fonction $\chi_x \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$ s'annulant sur K avec $|\chi_x| \leq 1$ telle que :*

$$(S_W g - g)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_x(\xi) \mathcal{F}_1 g(\xi) d\xi$$

La preuve du théorème est donnée dans [59].

Lorsque l'ouvert K contient le support essentiel de la transformée de Fourier de la transformée de Radon de la fonction, la norme $\|S_W g - g\|_\infty$ est petite. Une fois K fixé, on détermine la matrice W telle que les ensembles $\{K + 2\pi(W^{-1})^t k, k \in \mathbb{Z}^2\}$ soient disjoints et $\det(W)$ petit. Le schéma d'échantillonnage est alors défini. On peut ainsi déterminer des schémas d'échantillonnages optimaux, avec $\det W$ minimum (pour plus d'informations, se reporter à [15, 16, 17, 18, 25, 59]).

Application : le but est donc, pour une position angulaire du jeu haute résolution d'interpoler les données manquantes. Pour cela, on utilise uniquement le jeu de données basse résolution, et on interpole aux points voulus les valeurs de la transformée de Radon. On utilise le jeu basse résolution pour limiter le coût de l'interpolation et les résultats obtenus sont satisfaisants. La figure 3.7 montre à gauche l'interpolation des données manquantes à partir des mesures basse résolution et à droite un jeu de mesure fusionné après interpolation. L'interpolation s'écrit :

$$S_W \mathbf{R}f(\theta, s) = \frac{\det(W)}{2\pi} \sum_l \mathbf{R}s(Wl) \mathcal{F}_2 \chi_K((\theta, s) - Wl)$$

où la matrice W est : $W = \begin{pmatrix} \pi/p^c & 0 \\ 0 & 2/(q^c - 1) \end{pmatrix}$, p^c est le nombre de rotations de la source et q^c le nombre de mesures par position de source. K est le carré centré de côté b^c , il satisfait ainsi la condition de non-recouvrement de la transformée de Radon, si la fonction à reconstruire $\mathbf{R}f$ est essentiellement b^c -bande-limitée. Cette approche conduit en pratique à de bons résultats même si la résolution est supposée plus fine dans la région d'intérêt.

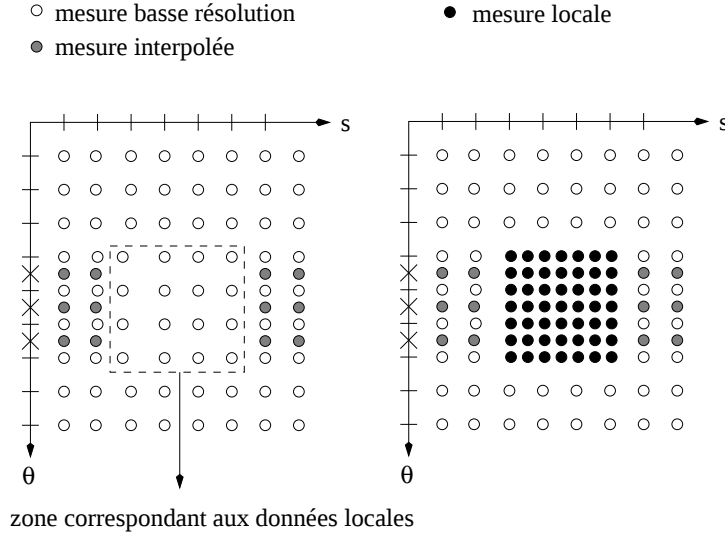


FIG. 3.7 - *Gauche : interpolation des mesures - Droite : jeu de mesures fusionné*

3.4.3 Le filtrage et la rétroprojection

Les étapes de filtrage et de rétroprojection sont similaires à celles utilisées pour une géométrie standard, tout en prenant soin de prendre les bonnes valeurs aux points d'échantillonnage correspondant aux deux jeux de mesures. Le filtre implémenté est celui proposé dans [59] (p.109) dans lequel b varie en fonction de s :

$$w_b(s) = \frac{b^2}{4\pi^2}(u(bs) - v(bs))$$

avec

$$u(s) = \begin{cases} \frac{\cos s - 1}{s^2} + \frac{\sin s}{s}, & s \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & s = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad v(s) = \begin{cases} \frac{2 \cos s}{s^2} + (1 - \frac{2}{s^2}) \frac{\sin s}{s}, & s \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & s = 0 \end{cases}$$

La figure 3.8 montre l'évolution d'un filtre en fonction de s . Le rayon de la région d'intérêt est $a = 0.5$.

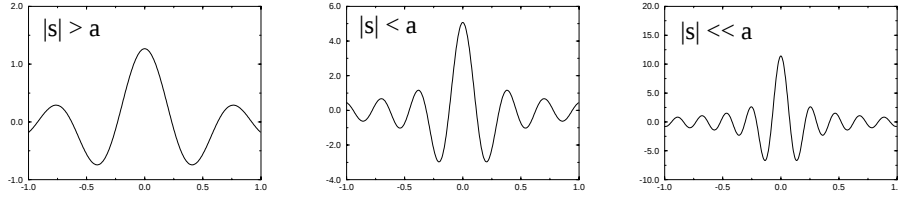


FIG. 3.8 - Evolution d'un filtre w_b , b variant en fonction de s

3.5 Résultats

Nous donnons des reconstructions effectuées à partir de données simulées et réelles. Les données réelles ont été obtenues à l'ESRF sur la ligne médicale ID15. Pour chaque série de tests, une reconstruction à partir des données locales avec une méthode algébrique directe basée sur les pixels naturels est proposée pour comparaison. Cette dernière méthode donne des reconstructions qualitatives.

3.5.1 Reconstructions à partir de données simulées

Le rayon de la région d'intérêt est $a = 0.5$. Pour toutes les reconstructions, le nombre de mesures dans le jeu de données globales est 40×27 et le nombre de pixels autour de la région d'intérêt est 32×32 . Nous avons observé l'amélioration de la reconstruction locale en fonction de l'augmentation du nombre de données locales. La figure 3.9 (gauche) représente le sinogramme des données complètes (40×27 mesures). Les figures 3.9 (centre) et (droite) montre le sinogramme des données locales, avec 40×27 mesures pour la figure du centre et 80×51 mesures sur la figure de droite.

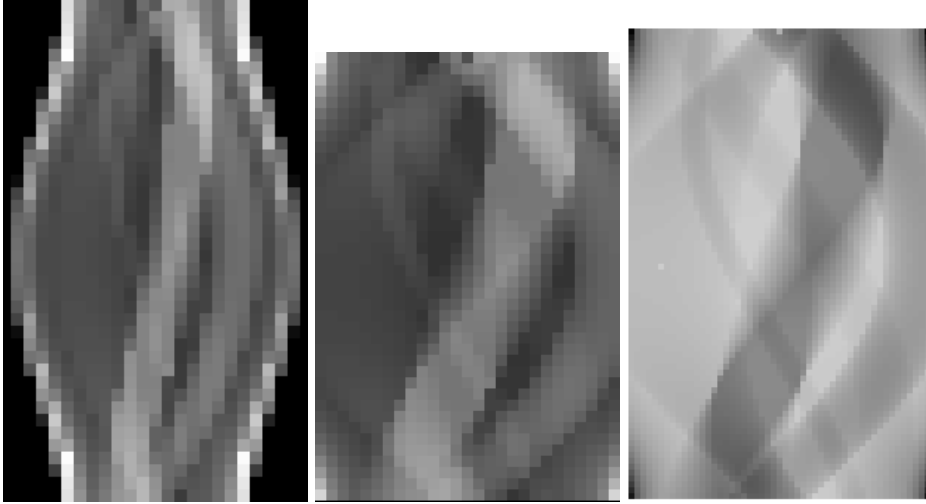


FIG. 3.9 - *Gauche : sinogramme des données complètes (40×27 mesures) - Centre : sinogramme des données locales (40×27 mesures) - Droite : sinogramme des données locales (80×51 mesures).*

Notons f_{in} la fonction reconstruite dans la région d'intérêt et f_{in}^* la fonction exacte dans cette même région. Les trois méthodes de reconstruction (rétro-projection filtrée, ART et gradient conjugué régularisé) donnent des résultats assez similaires. Les meilleurs résultats sont obtenus avec la méthode ART. Le tableau suivant donne un récapitulatif des tests effectués.

fig.	alg.	$\#pixels_{in}$	$\#data_{in}$	$\frac{\ f_{in} - f_{in}^*\ }{\ f_{in}^*\ }$
1	FBP	64×64	80×51	0.158
2	RCG	64×64	80×51	0.179
3	ART	64×64	80×51	0.148
4	ART	64×64	160×103	0.0916
5	ART	32×32	40×27	0.202
6	ART	32×32	80×51	0.121

Pour un nombre de données locales égal à 80×51 , le meilleur résultat est obtenu avec la méthode ART (avec 32×32 pixels), voir les figures 3.11:1,2,3 et lignes du tableau correspondantes. Ce résultat est moins bon que celui ob-

tenu avec le même nombre de données locales mais un plus grand nombre de pixels, voir figures 3.11:3 et 3.11:6 ainsi que les lignes du tableau correspondantes. L'erreur correspondant à la reconstruction 6 est plus faible que la reconstruction 3 car le système est sous-discrétisé pour la première reconstruction et sur-discrétisé pour la seconde.

Dans un deuxième temps, si on augmente le nombre de données locales sans changer le nombre de pixels, l'erreur diminue, voir d'une part les figures 3.11:3 et 3.11:4, et d'autre part les figures 3.11:5 et 3.11:6. La figure 3.10 (gauche) montre la fonction de référence et la figure 3.10 (droite) montre la reconstruction par une méthode algébrique directe.

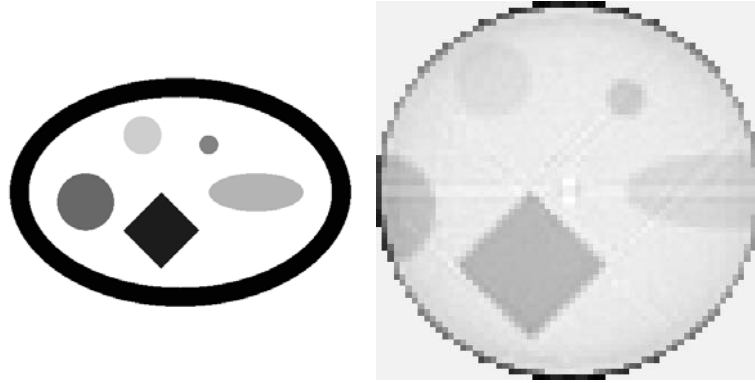


FIG. 3.10 - *Gauche : image de référence - Droite : reconstruction de la région d'intérêt avec une méthode algébrique directe (80×51 données et 64×64 pixels).*

3.5.2 Reconstruction à partir de données réelles

L'objet reconstruit est une coupe de citron. Le rayon de la région d'intérêt est de 0.25. Le nombre de données dont nous disposons est 192×129 . A partir de ce jeu de mesures, nous avons créé un jeu de mesures globales basse résolution comprenant 96×129 mesures (soit 2 fois moins) et un jeu de mesures locales en ne prenant que les mesures passant strictement dans un disque centré de rayon 0.25, soit 192×33 . La figure 3.12 (gauche) montre le sinogramme associé au jeu de mesures complètes et la figure 3.12 (droite) montre le sinogramme associé

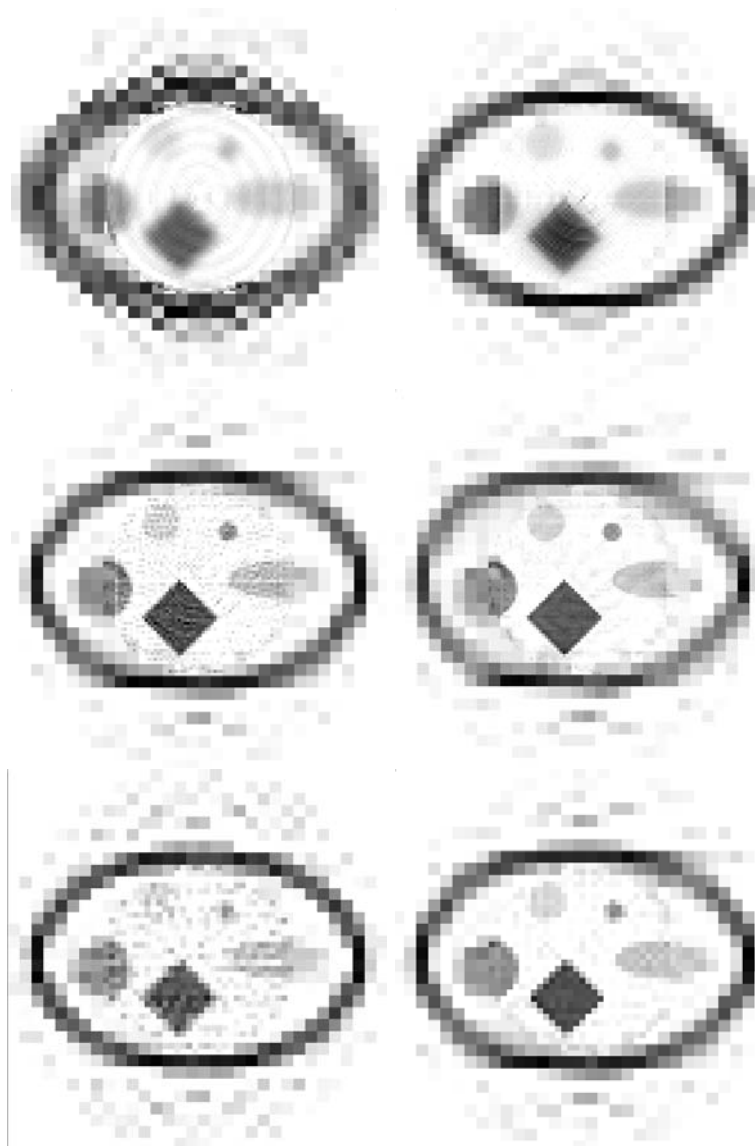


FIG. 3.11 - *Trois premières lignes: Reconstructions à partir des géométries données dans le tableau. Première ligne: 1 - 2. Seconde ligne: 3 - 4. Troisième ligne: 5 - 6.*

au jeu de mesures locales.

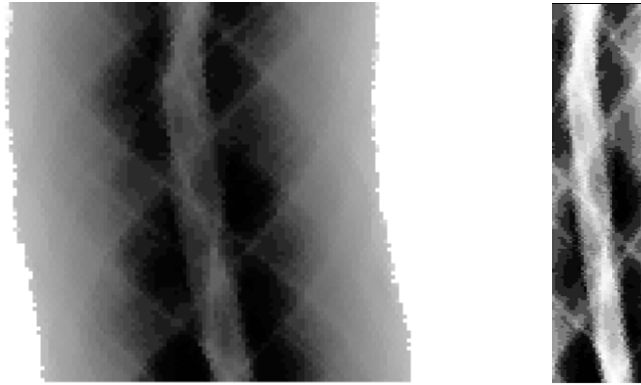


FIG. 3.12 - *Gauche : sinogramme de la coupe de citron pour les données complètes - Droite : sinogramme de la coupe de citron pour les données locales.*

Les figures 3.13 et 3.14 montrent des reconstructions à partir des trois méthodes présentées précédemment. La figure 3.15 (gauche) est un zoom de la région d'intérêt et la figure 3.15 (droite) est la reconstruction obtenue à partir des données locales avec une méthode algébrique directe.

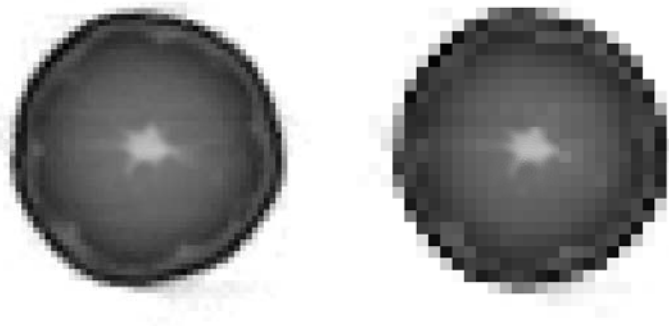


FIG. 3.13 - *Rétroprojection filtrée - Gauche : 64×64 pixels pour les deux grilles (basse et haute résolution) - Droite : 32×32 pixels pour la grille basse résolution et 128×128 pixels à l'intérieur de la région d'intérêt*

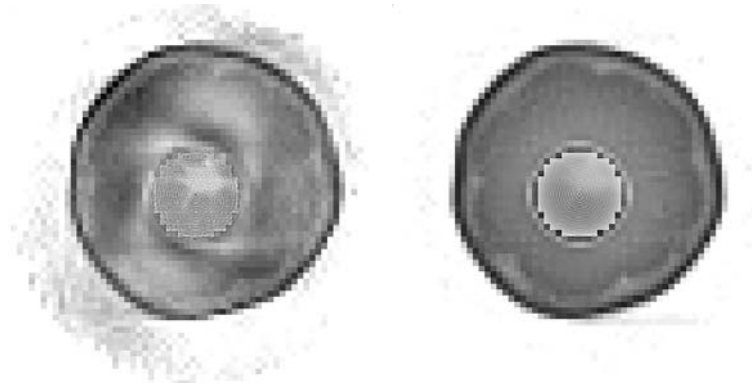


FIG. 3.14 - *Reconstructions avec 64×64 pixels pour les deux grilles (basse et haute résolution) - Gauche : ART - Droite : Gradient conjugué régularisé*

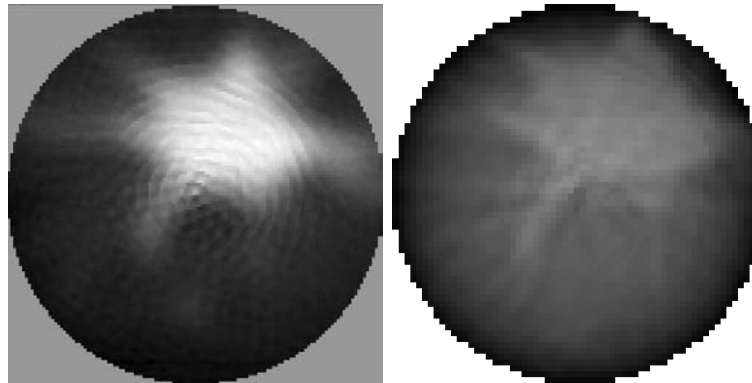


FIG. 3.15 - *Gauche : zoom sur la région d'intérêt reconstruite avec la rétroprojection filtrée. Droite : reconstruction à partir d'une méthode algébrique directe sur les données locales; du fait des problèmes au bord de la région d'intérêt, seulement 80% de la région d'intérêt est représenté.*

3.5.3 Conclusion

Au vu des résultats, il semble que la méthode la plus performante est la méthode ART. Les erreurs calculées sur les simulations sont plus faibles que pour les autres méthodes. De plus si on augmente le nombre de données locales, l'erreur diminue. La qualité de la reconstruction est augmentée si on augmente le nombre de données locales.

3.6 Mise en correspondance

3.6.1 Le problème

L'étape de reconstruction ne peut se faire que si la mise en correspondance des jeux de mesures a été effectuée. Le problème est alors tridimensionnel. En effet, nous considérerons la mise en correspondance de deux volumes ou d'une surface dans un volume, le cas bidimensionnel ne pouvant faire l'objet d'une fusion.

Le problème consiste donc à trouver une transformation entre deux volumes de données. Ces données peuvent correspondre soit aux mesures, soit à la fonction reconstruite, suivant la méthode envisagée.

- Les données à fusionner correspondent aux mesures : le premier volume des mesures à basse résolution est une succession coupes bidimensionnelles. En effet elles proviennent généralement d'une examen scanner classique. Pour avoir effectivement un volume de données, il faut interpoler entre deux coupes. Des techniques développées au sein du laboratoire TIMC permettent aisément de procéder à cette interpolation ([65, 64]).
- Les données à fusionner correspondent aux images reconstruites. Les reconstructions sont calculées indépendamment et les volumes reconstruits sont fusionnées.

Nous présentons une technique de mise en correspondance, utilisant des

capteurs externes; cette technique est déjà utilisée pour beaucoup d'autres problèmes de mise en correspondance et s'avère très performante. Nous présentons également rapidement d'autres techniques, n'utilisant pas de capteurs externes, basées sur des méthodes de corrélation.

3.6.2 Utilisation de capteurs externes

Les capteurs sont utilisés dans l'une, voire les deux modalités d'image. Le capteur est lié à la première modalité (basse résolution) par une relation R^c et à la seconde modalité (haute résolution) par une relation R^l , voir figure 3.16. Ces relations sont estimées par calibrage.

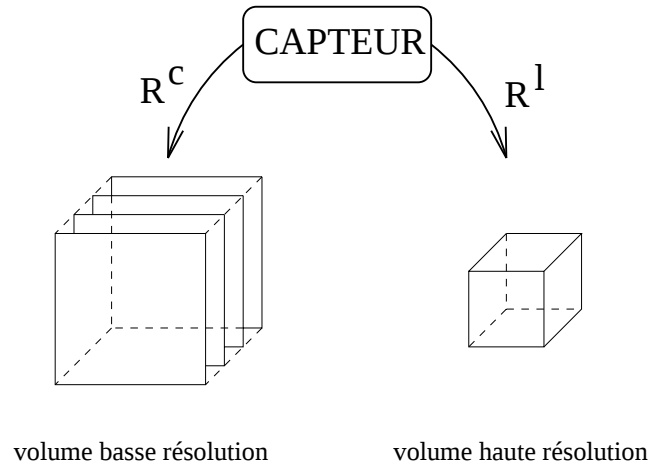


FIG. 3.16 - *Utilisation d'un capteur externe*

On distingue généralement des capteurs de forme et des capteurs de position. Dans le premier cas, le capteur de forme permet d'accéder à des structures anatomiques, comme par exemple la surface du visage ([64]). Il permet d'acquérir un ensemble de points 3D, dont on connaît les coordonnées dans le référentiel du capteur, par calibrage. Rentrent dans ce cadre les capteurs utilisant un balayage laser ([9]) ou bien utilisant un projecteur fixe capable de créer un codage lumineux de la surface (Gray code Range Finder). Dans le second cas, les systèmes de localisation fournissent la position et l'orientation de solides indéformables dans le référentiel lié au localisateur (par calibrage). Ces solides

sont généralement fixés à l’objet que l’on veut localiser. Le système de localisation utilisé au laboratoire est le système Optotrak (une utilisation possible est détaillée dans [49]).

Principe général de la méthode

La mise en correspondance consiste à estimer la relation entre les deux référentiels Ref^c et Ref^l liés aux deux modalités. Dans chaque modalité, la position d’un point de la surface de référence “captée” dans le référentiel associé est assurée par une méthode de calibrage. De plus amples informations sur le calibrage peuvent se consulter dans [9, 10, 29]. La mise en correspondance consiste alors à trouver une transformation T entre les deux référentiels. Dans le cadre de la méthode implémentée au laboratoire, la transformation est supposée rigide, et donc déterminée par 3 paramètres de translation et 3 paramètres de rotation : $M^c = TM^l$, avec 6 inconnues à trouver. Cette transformation est la solution d’un problème de minimisation aux moindres carrés d’une fonction d’erreur estimant la distance entre un point quelconque de la première surface ayant subi la transformation et la deuxième surface. La distance entre un point et une surface est définie comme étant la distance minimale entre le point et tous les points de la surface. Les distances sont signées. Pour éviter de trop nombreux calculs de distance et pour éviter également de stocker un trop grand nombre de valeurs, S. Lavallée et R. Szeliski proposent d’utiliser une structure de données adaptatives : les cartes de distances octree-spline. Cette représentation géométrique a l’avantage de fournir d’autant plus d’informations qu’on est près de la surface de l’objet ([47, 48]).

Remarque

On pourrait éventuellement supprimer le capteur externe dans l’une des deux modalités d’image. En effet si par exemple on reconstruit le volume “haute-résolution” avec une technique de tomographie locale, et que l’on sait extraire

l'information correspondant à la surface acquise dans l'autre modalité avec le capteur, alors on peut envisager une technique de mise en correspondance similaire. Ceci évite d'installer le dispositif externe dans l'un des deux examens, ce qui représente une avantage non négligeable, l'installation de ces dispositifs n'étant pas toujours aisée.

Dans la suite, nous allons aborder les problèmes de mise en correspondance sans utilisation de capteurs.

3.6.3 Mise en correspondance des volumes reconstruits

Il semble difficile de mettre en correspondance les deux jeux de données directement. En effet, les dispositifs sont différents dans les deux processus d'acquisition. Il faut déterminer la transformation entre les sinogrammes 3D. Les sources et les détecteurs peuvent être placés différemment autour du patient. Si on prend l'exemple de deux détecteurs identiques, la valeur aux pixels pourra être totalement différente, la trajectoire du rayon X étant différente, voir figure 3.17. Le recalage est possible si on connaît la position de la source et du

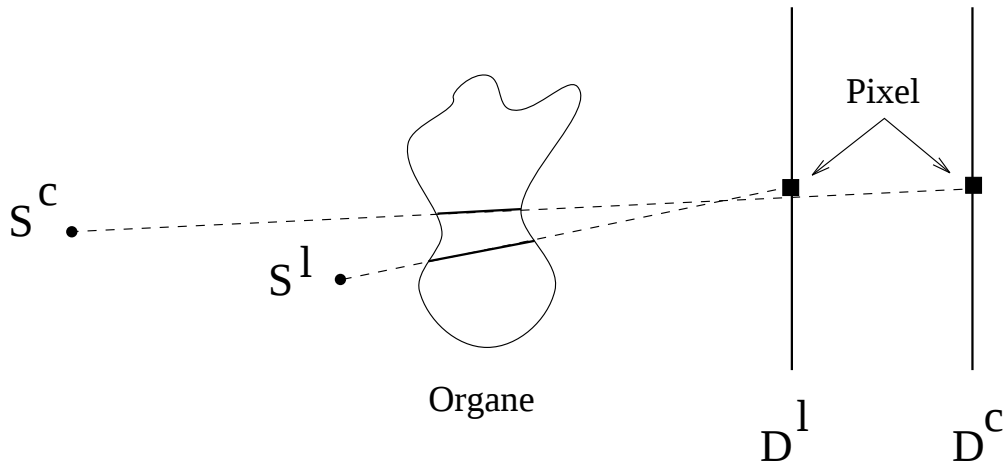


FIG. 3.17 - *Sinogrammes 3D des deux examens*

détecteur par rapport à l'organe dans les deux examens.

Une première solution serait de reconstruire un seul des deux volumes, celui correspondant aux données basse résolution. Le but est alors de situer de ma-

nière précise la géométrie d'acquisition du second jeu de mesures haute résolution dans le volume reconstruit. On pourra calculer dans le volume reconstruit, les projections correspondant à la géométrie d'acquisition des données haute résolution.

On peut également envisager de mettre en correspondance les volumes reconstruits. La région d'intérêt est reconstruite avec une méthode de tomographie locale ou pseudo-locale. Le volume basse-résolution est reconstruit avec la même technique. Le recalage peut alors être effectué avec des méthodes n'utilisant pas de capteurs externes. On utilisera par exemple des méthodes basées sur la maximisation d'informations mutuelles (définies à partir de l'entropie) ([79]) ou bien des méthodes de corrélation ([32]). On pourra également tirer partie des deux résolutions des volumes à mettre en correspondances. Le premier volume pourrait être modélisé à l'aide de surface (dans chaque coupe), discrétisées avec un maillage plus fin dans la région d'intérêt ([31]).

3.6.4 Mise en correspondance directe des jeux de données

Le problème est plus complexe que le précédent. Les dispositifs étant différents dans les deux processus d'acquisition, la transformation entre les sinogrammes 3D doit être déterminée. Une solution est de déterminer la position de la source et du détecteur par rapport à l'organe dans les deux examens. Le recalage sera rendu possible. Une solution est de reconstruire les images préalablement et indépendamment, le centre entre la source et le détecteur apparaissant dans l'image. La mise en correspondance peut alors se faire comme dans la section précédente.

Les techniques envisagées n'ont pas été testées et ne sont à l'heure actuelle que des solutions potentielles à notre problème. Elle devront faire l'objet d'une étude plus détaillée et surtout d'expérimentations.

3.7 Conclusion

Les différentes méthodes que nous proposons apportent une solution nouvelle aux problèmes de tomographie locale. Les méthodes algébriques directes donnent des images de qualité satisfaisante mais qualitatives. Les techniques de λ -tomographie (tomographie locale) et de tomographie pseudo-locale sont très performantes et donnent des images de bonne qualité et précises, mais là encore qualitatives. Notre approche a quelques applications cliniques intéressantes, puisqu'elle propose des reconstructions quantitatives. On peut songer par exemple au suivi d'évolution d'une tumeur, la mesure de densité jouant un rôle décisif dans la détermination éventuelle d'une intervention chirurgicale. La différence précise entre deux niveaux de gris d'un même pixel sur deux images devient importante et l'aspect quantitatif est alors nécessaire pour décider d'un éventuel changement et donc du diagnostic établi par le chirurgien. Notre méthode ne peut être implémentée cliniquement que si le problème de la mise en correspondance a été résolu. Une des techniques de mise en correspondance, basée sur l'utilisation de capteurs externes, pourrait être facilement mise en oeuvre; elle est déjà utilisée pour des expériences en cours de validation clinique, et donne des résultats très performants. Il reste donc à effectuer des tests sur d'autres données réelles et une validation clinique pourra démarrer.

Chapitre 4

Ondelettes : généralités

4.1 Introduction

La décomposition en ondelettes d'un signal sert à extraire des informations à la fois sur l'espace direct, et sur l'espace des fréquences. Il faut donc le décomposer sur des fonctions concentrées en temps et en fréquence. Cette décomposition se heurte au **principe d'incertitude de Heisenberg** :

Le produit de "l'étalement" d'une fonction et de sa transformée de Fourier doit être supérieur à une certaine quantité fixée; d'autre part si F est une fonction à support compact, alors le support de $\mathcal{F}F$ sera $\mathbb{R}$ tout entier, donc l'une des deux fonctions F ou $\mathcal{F}F$ sera totalement délocalisée.

Toutefois, il existe des fonctions assez bien localisées en temps et en fréquence, appelées ondelettes. On approche une fonction f par une série de coefficients calculés à partir de la fonction ondelette dilatée et translatée. Il est possible, dans certains cas de reconstruire la fonction f à partir de ses coefficients. Les fonctions d'ondelettes sont souvent choisies pour leurs propriétés de régularité, de décroissance rapide, On distingue également deux transformées en ondelettes, continue ou discrète. Dans cette section, nous présentons

les outils et résultats utilisés dans les différentes méthodes traitant de la reconstruction par ondelettes. En particulier, nous rappelons les définitions de la transformée en ondelettes continue, les structures obliques, la transformée en ondelettes discrète, les bases orthogonales d'ondelettes, et enfin nous donnons quelques exemples standards d'ondelettes. Dans l'ensemble du chapitre, les résultats sont donnés en dimension $n = 1$ ou $n = 2$; pour une présentation générale sur les ondelettes, se référer à [12, 24, 43, 58, 57]. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont démontrés dans [12, 52, 55].

4.2 Définition

Définition 4.1 *La condition d'admissibilité est la condition nécessaire pour qu'une fonction $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ non nulle soit une ondelette analysante :*

$$C_\phi = 2\pi \int \frac{|\mathcal{F}_1\phi(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi < \infty \quad (4.1)$$

Remarques :

- Si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ ($\mathcal{F}_1\phi$ est alors continue) et si $\mathcal{F}_1\phi(0) = 0$ alors la condition (4.1) est vérifiée.

- Si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_1\phi(0) = 0$ et si on rajoute la condition supplémentaire :

$$\exists \alpha > 0, \int (1 + |x|)^\alpha |\phi(x)| dx < \infty, \text{ alors } |\mathcal{F}_1\phi(\xi)| \leq C|\xi|^\beta, \beta = \min(\alpha, 1)$$

on a alors l'équivalence avec la relation (4.1).

Une famille de fonctions est issue de l'ondelette analysante par translation et par dilatation :

$$\phi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

La fonction $\phi_{a,b}$ est centrée en b . Plus a est grand, plus l'ondelette sera étalée.

En dimension 2, si l'ondelette analysante est invariante par rotation, la condition d'admissibilité s'écrit de la même manière :

$$C_\phi = (2\pi)^2 \int \frac{|\mathcal{F}_2\phi(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi < \infty, \xi \in \mathbb{R}^2, \phi \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad (4.3)$$

Mais en général, les ondelettes en dimension 2 sont orientées, et en plus des paramètres de dilatation et de translation, s'ajoute un paramètre de rotation ζ tel que :

$$\phi_{a,b,\zeta}(x) = |a|^{-1} \phi(r_\zeta^{-1}(\frac{x-b}{a})), a \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}^2$$

La rotation r_ζ est définie par la matrice : $\begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta \\ \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix}$. La condition d'admissibilité s'écrit :

$$C_\phi = (2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_2 \phi(r \cos \zeta, r \sin \zeta)|^2 d\zeta < \infty$$

Afin d'établir d'autres résultats ou simplement d'un point de vue numérique, des propriétés supplémentaires peuvent être assignées à l'ondelette analysante :

- ϕ peut être à support compact (centrée en x_0) ou sinon à décroissance rapide autour de x_0 .
- La transformée de Fourier de ϕ est maximale en $\xi = k_0$, et décroît rapidement autour de cette valeur.

4.3 Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes continue d'un signal 1D (resp. 2D) est fonction de 2 (resp. 4) paramètres, un paramètre de dilatation a , un (resp. deux) paramètres de translation b (et en dimension 2 un paramètre de rotation ζ). On définit à partir de cette famille, la décomposition d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2$:

$$Tf(a, b) = \langle f, \phi_{a,b} \rangle = \int f(x) |a|^{-n/2} \overline{\phi(\frac{x-b}{a})} dx \quad (4.4)$$

Théorème 4.1 *En dimension $N = 1$, on a*

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(a, b) \overline{Tg(a, b)} \frac{1}{a^2} da db = C_\phi \langle f, g \rangle$$

où C_ϕ est définie par l'expression (4.1).

Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut-être reconstruite à partir de ses coefficients définis par la relation (4.4) : Ce qui donne la formule de reconstruction suivante :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = C_\phi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} T f(a, b) \phi_{a,b} db da$$

La démonstration de ce théorème ainsi que d'autres résultats sont donnés dans [3, 12, 39]. En dimension 2, on obtient un résultat similaire :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2), f(x) = C_\phi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} T f(a, \underline{b}, \zeta) \phi_{a, \underline{b}, \zeta} d\zeta d\underline{b} da \quad (4.5)$$

En pratique, on fixe deux paramètres sur quatre, soit a et ζ , soit $\underline{b}$. La transformée devient alors une fonction des deux paramètres restant. On remarque dans l'équation (4.4) que pour des grandes valeurs de a , la transformation met en avant la forme globale du signal. Pour des valeurs de plus en plus petites de l'échelle, sont détectés des détails de plus en plus fins dans le signal, ([3]). D'un point de vue numérique, la transformation est coûteuse. La base n'étant pas orthogonale, l'information obtenue est redondante (voir [3]), Pour envisager une implémentation numérique, l'intégrale est remplacée par une somme discrète faisant intervenir une famille de fonction ϕ_{a_i, ζ_j, b_k} appelée *frame* ou structure oblique, définies par I. Daubechies.

4.4 Transformée discrète : structures obliques

Les structures obliques ou *frame* sont des ensembles de vecteurs non linéairement indépendants dans un espace de Hilbert H . La décomposition d'une fonction dans une telle base n'est pas unique et est redondante. La particularité de ces structures est leur construction, qui est privilégiée par rapport à l'orthogonalité. La décomposition est alors stable et la base est relativement facile à générer. La base formée est issue comme dans la section précédente de dilations, translations (et rotations en dimension 2) d'une ondelette analysante. On restreint les paramètres à des valeurs discrètes : $a = a_0^m, b = nb_0, b_0 > 0, a_0 > 1$, en pratique, $m, n \in \mathbb{Z}$. On considère alors la famille suivante :

$$\phi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \phi(a_0^{-m} x - nb_0), x \in \mathbb{R}$$

Après avoir donné la définition d'une structure oblique nous verrons d'une part que les coefficients calculés caractérisent complètement une fonction et que d'autre part, il est possible de retrouver une fonction à partir de ses coefficients. Les démonstrations des résultats énoncés sont dans [11, 12, 39].

Définition 4.2 Soit l'ensemble de fonctions linéairement indépendantes $\{\phi_j, j = (m, n) \in J\}$, J est l'ensemble des couples d'indices pris par (m, n) , et soit H un Hilbert. Si :

- (1) $\forall j \in J, \phi_j \in H$.
- (2) $\exists$ des constantes A et B , appelées bornes des structures obliques telles que : $\forall f \in H$,

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle \phi_j, f \rangle_H|^2 \leq B\|f\|_H^2 \quad (4.6)$$

alors $\{\phi_j, j \in J\}$ est une structure oblique sur H .

Remarques :

1. Si les fonctions $\{\phi_j, j \in J\}$ sont linéairement indépendantes, alors elles définissent une **base de Riesz** de H .

La famille $\{e_n, n = 1 \dots N\}$ forme une base de Riesz si les e_n sont linéairement indépendants et s'ils vérifient :

$$\exists \alpha > 0, \beta < \infty \text{ tels que } \alpha\|u\|^2 \leq \sum_n |\langle u, e_n \rangle|^2 \leq \beta\|u\|^2, u \in H \quad (4.7)$$

2. Si $A = B \neq 0$ dans la relation (4.6) la base est orthogonale et on a la formule de reconstruction : $f = A^{-1} \sum_{m,n} \langle f, \phi_{m,n} \rangle \phi_{m,n}$.

De plus, à chaque structure oblique, on associe un opérateur F :

Définition 4.3 Si $(\phi_j)_{j \in J}$ est une structure oblique dans H alors l'opérateur induit est un opérateur linéaire de H dans $l^2(J) = \{c = (c_j)_{j \in J}; \|c\|^2 = \sum_{j \in J} |c_j|^2 < \infty\}$ tel que : $(Ff)_j = \langle f, \phi_j \rangle$

D'après l'expression (4.6), F est borné ($\|Ff\|^2 \leq B\|f\|^2$) et on définit F^* l'opérateur adjoint : $F^* = \sum_{j \in J} c_j \phi_j$. La relation (4.6) devient :

$$A \text{ Id} \leq F^* F \leq B \text{ Id}$$

$F^* F$ est inversible et on a : $B^{-1} \text{ Id} \leq (F^* F)^{-1} \leq A^{-1} \text{ Id}$, $A > 0$. En appliquant cet opérateur à l'ensemble des fonctions $\{\phi_j, j \in J\}$, on obtient une autre famille de fonctions $\tilde{\phi}_j = (F^* F)^{-1} \phi_j$.

Théorème 4.2 *La famille de fonctions $(\tilde{\phi}_j)_{j \in J}$ constitue une structure oblique de constante B^{-1} et A^{-1} :*

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2.$$

L'opérateur associé est $\tilde{F} : H \rightarrow l^2(J)$, tel que $(\tilde{F}f)_j = \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle$. Il vérifie les relations : $\tilde{F} = F(F^* F)^{-1}$, $\tilde{F}^* \tilde{F} = (F^* F)^{-1}$, $\tilde{F}^* F = \text{Id} = F^* \tilde{F}$ et $\tilde{F} \tilde{F}^* = F \tilde{F}^*$ est la projection orthogonale de $l^2(J)$ dans $\text{Im}(F) = \text{Im}(\tilde{F})$.

On aboutit ainsi à la relation suivante, qui donne un moyen de retrouver f à partir des produits scalaires $\langle f, \phi_j \rangle$ et elle montre qu'il est possible d'écrire f en fonction des ϕ_j .

$$\sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j = f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\phi}_j \rangle \phi_j$$

Remarques :

1. Si les bornes sont égales à 1, alors la structure oblique est une base orthonormée.
2. Si les bornes sont égales ou sensiblement égales, la reconstruction de f à partir de Ff est numériquement stable. Des estimations et des résultats sur les bornes des structures obliques sont donnés dans [12].

Ces résultats sont généraux et s'appliquent aux ondelettes si elles vérifient la condition d'admissibilité. Celle-ci s'écrit en fonction des bornes A et B de la

structure oblique associée :

Théorème 4.3 *Si la famille $\phi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \phi(a_0^{-m}x - nb_0)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ est une structure oblique sur $L^2(\mathbb{R})$ avec A et B les bornes correspondantes, et si ϕ est une ondelette analysante, alors*

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\mathcal{F}_1 \phi(\xi)|^2}{\xi} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B$$

et

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^{+0} \frac{|\mathcal{F}_1 \phi(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B$$

4.5 Bases orthogonales

4.5.1 Définition

Il est possible également de construire des bases orthogonales dans $L^2(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R}^2)$. La discrétisation est similaire à celle utilisée pour les structures obliques et les valeurs prises pour les paramètres de dilatation et de rotation sont généralement $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$. Le réseau de discrétisation ainsi formé est le réseau dyadique. Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet alors une et une seule décomposition et il est possible de retrouver f à partir de ses coefficients dans la base. Y. Meyer dans [55] définit les ondelettes de classe m , ondelettes satisfaisant des propriétés de régularité et de localisation.

Définition 4.4 *Une ondelette est dite de classe m si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) Si $m = 0$, $\phi(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et si $m \geq 1$, $\phi(x)$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R})$.
- (ii) $\phi(x)$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m , sont à décroissance rapide à l'infini.
- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x) dx = 0, \forall k, 0 \leq k \leq m$.

- (iv) La collection des fonctions $2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Les fonctions $\phi_I = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ sont les ondelettes générées par l'ondelette mère ϕ , et I est un intervalle du réseau dyadique et noté $I = [k2^j, (k+1)2^j[$. L'ondelette ϕ_I est essentiellement concentrée sur I ([55]). On a alors le résultat suivant :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x)$$

4.5.2 Construction de bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$: analyse multirésolution

La plupart des exemples d'analyses multirésolution viennent des suites emboîtées de fonctions splines associées à des raffinements de maillages. Les bases d'ondelettes utilisées sont orthonormées et la transformée est alors inversible : on peut décomposer une fonction dans une base et la reconstruire à partir de ses coefficients d'ondelettes. Une description plus détaillée et complète se trouve dans ([12, 14, 52, 55]).

Définition 4.5 Une analyse multirésolution de $L_2(\mathbb{R})$ est une suite d'espaces emboîtés $V_j, j \in \mathbb{Z}$ ($\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$) de sous-espaces vectoriels fermés de $L_2(\mathbb{R}^2)$ ayant les propriétés suivantes :

- $\cap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}, \overline{\cup_{-\infty}^{+\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.
- $\forall f \in L_2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0$.
- $\forall f \in L_2(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - n) \in V_0$.
- Il existe une fonction $g(x) \in V_0$ telle que la suite $g(x - n), n \in \mathbb{Z}$ soit une base de Riesz de l'espace V_0 (voir la définition (4.7)).

On en déduit la propriété supplémentaire : $\forall f \in V_j, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x - 2^j n) \in V_j$.

On définit une base orthonormée sur chacun des V_j : $\{\phi_{j,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ telle que :

$$\phi_{j,n} = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k), \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Soit P_j la projection orthogonale d'une fonction de $L_2(\mathbb{R})$ sur V_j . Alors, on définit une seconde fonction ψ telle que : $P_{j-1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$, $\forall j, k \in \mathbb{Z}$. La fonction $\psi_{j,k}$ est à valeurs sur un espace W_j qui est le complémentaire de V_j dans V_{j-1} . On a les mêmes propriétés de translation, de dilatation sur $\psi_{j,k}$ que sur $\phi_{j,k}$:

- $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$.
- $\forall f \in L_2(\mathbb{R}), f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0$.
- $\forall f \in L_2(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{Z}, f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(x - n) \in W_0$.

Remarque : ϕ est appelée la fonction d'échelle, et ψ l'ondelette mère.

Définition 4.6 Une analyse multirésolution V_j , $j \in \mathbb{Z}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est r -régulière, $r \in \mathbb{N}^*$ si l'on peut choisir ϕ telle que ([55]) :

$$\left| \frac{d^\alpha}{dx} \phi(x) \right| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \alpha \leq r$$

Pour construire une base orthonormée ([12, 55]), on se donne une fonction une analyse multirésolution r -régulière de $L^2(\mathbb{R})$. On peut trouver dans cette analyse multirésolution une fonction ϕ , qui vérifie les conditions suivantes : $\exists \phi \in V_0$ telle que :

- $\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^k \phi(x) \right| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}, \quad \forall N \geq 1, 0 \leq k \leq r$.
- $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 .

ϕ est le point de départ de la construction de la base orthonormée d'ondelettes. On utilise ses propriétés. On a par définition : $\phi \in V_0$, et $V_0 \subset V_{-1}$. On écrit ϕ dans la base de V_{-1} :

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{-1,n} \text{ avec } h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1$$

Si on développe : $\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n)$ et $\mathcal{F}_1 \phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} \mathcal{F}_1 \phi(\frac{\xi}{2})$.

On en déduit le résultat suivant :

$$\mathcal{F}_1 \phi(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \mathcal{F}_1 \phi\left(\frac{\xi}{2}\right) \text{ avec } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}$$

Ces résultats sont réunis dans un théorème fondamental ([12]) :

Théorème 4.4 *Si une suite d'espaces emboîtés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \in L^2(\mathbb{R})$ est une approximation multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormée d'ondelettes $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ pour $L^2(\mathbb{R})$ telle que (en reprenant les notations précédentes) :*

$$P_{j-1} = P_j + \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \text{ avec } \psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \text{ et } \phi_{j,k} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$$

Une possibilité pour la construction d'une ondelette ψ à partir d'une fonction d'échelle ϕ est :

$$\mathcal{F}_1 \psi(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)} \mathcal{F}_1 \phi(\frac{\xi}{2}) \text{ avec } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}$$

où, de façon équivalente :

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n} \text{ et } \phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n}$$

avec

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle, \quad g_n = (-1)^n h_{1-n}$$

On peut alors construire ψ de deux manières différentes :

- par sa transformée de Fourier : $\mathcal{F}_1 \psi(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)} \mathcal{F}_1 \phi(\frac{\xi}{2})$
- par le filtre de quadrature : $h_n = \langle \phi, \phi_{1,n} \rangle$ et $\psi(x) = \sum_n g_n \phi_{1,n}(x)$ avec $g_n = (-1)^n h_{1-n}$.

4.5.3 Construction de bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^2)$

La méthode la plus courante est d'utiliser le produit tensoriel de deux analyses multirésolutions unidimensionnelles ([12, 52]). On définit les espaces V_i et W_i issus d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. On construit les espaces emboîtés de $L^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{V}_j, j \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$- \mathbf{V}_0 = V_0 \times V_0 = \overline{[F(x, y) = f(x)g(y); f, g \in V_0]}$$

$$- F \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow F(2^j \cdot, 2^j \cdot) \in \mathbf{V}_0$$

Alors les $\mathbf{V}_j$ forment une analyse multirésolution dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$- \dots \mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_{-1} \subset \mathbf{V}_{-2} \dots$$

$$- \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j = 0 \text{ et } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j} = L^2(\mathbb{R}^2)$$

De la même façon qu'en dimension 1, on construit le complémentaire de $\mathbf{V}_j$ dans $\mathbf{V}_{j-1} : \mathbf{W}_j$, tel que $\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j$:

$$\mathbf{W}_j = [(W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j)]$$

Ainsi $\mathbf{W}_j$ est défini en trois parties avec pour chaque partie une base orthonormée. Ceci permet de définir trois ondelettes :

$$- \text{L'ondelette "horizontale"} \Phi^h(x, y) = \phi(x)\psi(y) \text{ (pour l'espace } (V_j \otimes W_j)).$$

$$- \text{L'ondelette "verticale"} \Phi^v(x, y) = \psi(x)\phi(y) \text{ (pour l'espace } (W_j \otimes V_j)).$$

$$- \text{L'ondelette "diagonale"} \Phi^d(x, y) = \psi(x)\psi(y) \text{ (pour l'espace } (W_j \otimes W_j)).$$

Une base orthonormée pour $\mathbf{W}_j$ est :

$$\{\Psi_{j,n_1,n_2}^\lambda; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \lambda = h, v, d\}$$

et pour $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\{\Psi_{j,n_1,n_2}^\lambda; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, \lambda = h, v, d\}$$

Ces ondelettes sont appelées "horizontale", "verticale", ou "diagonale" car les coefficients de la décomposition reflètent les détails horizontaux, verticaux et diagonaux de la fonction ([12, 52]).

4.6 Algorithmes

Dans le cas de bases orthonormées sur le réseau dyadique, S. Mallat ([52]) a proposé des algorithmes pyramidaux de décomposition et reconstruction. Ces

algorithmes sont basés sur des convolutions avec des filtres issus des ondelettes. Ceci est donc très avantageux du point de vue du coût. On en déduit des algorithmes rapides (voir aussi dans [12, 52, 68]). Le détail de la construction des algorithmes est présenté dans [52]. Deux filtres sont définis ainsi que leur miroir associé, à partir de la fonction d'échelle et de l'ondelette (voir le théorème 4.4). Ces algorithmes ne sont performants que si la base est à support compact et donc le nombre de coefficients des filtres est fini.

Soient $H = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le filtre associé à la fonction d'échelle, $\tilde{H} = (h_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$ le filtre miroir associé, et soient $G = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le filtre associé à l'ondelette, $\tilde{G} = (g_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$ le filtre miroir associé, $g_n = (-1)^n h_{1-n}$.

4.6.1 Décomposition et reconstruction d'un signal unidimensionnel

Le principe est de calculer des approximations de f , ainsi que les différences d'informations entre deux étapes successives appelées le signal de détail. Le schéma 4.1 (gauche) représente une étape de la décomposition et le schéma 4.1 (droite) représente une étape de la reconstruction. On note D_j le détail à l'échelle j et C_j les coefficients de la décomposition à l'échelle j .

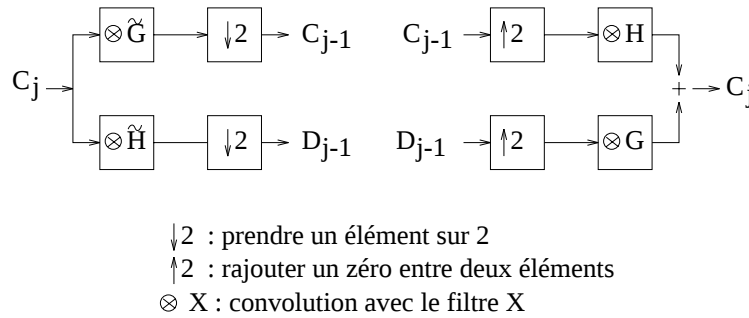


FIG. 4.1 - algorithmes de décomposition (gauche) et de reconstruction (droite) d'un signal unidimensionnel

4.6.2 Décomposition et reconstruction d'un signal bidimensionnel

Le principe est le même que pour la dimension 1. La base est construite à partir du produit tensoriel de deux analyses multirésolutions unidimensionnelles. L'algorithme est une séquence de convolutions discrètes avec les deux filtres issus de la fonction d'échelle et de l'ondelette 1D. Lors de la décomposition, trois types de détails sont construits, horizontal, vertical et diagonal. Le schéma 4.2 (gauche) représente une étape de la décomposition et le schéma 4.2 (droite) représente une étape de la reconstruction. On note C_j les coefficients de la décomposition à l'échelle j , D_j^h le détail horizontal, D_j^v le détail vertical, et D_j^d le détail diagonal.

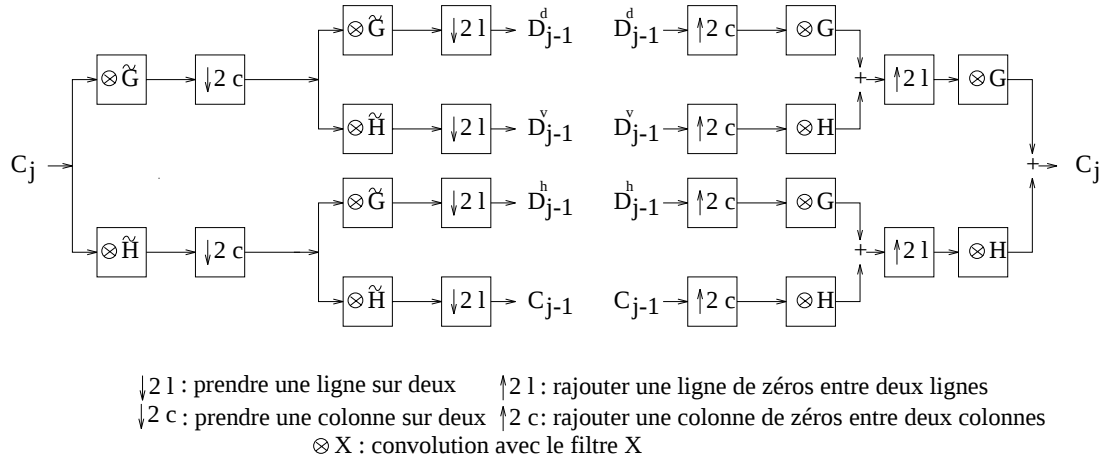


FIG. 4.2 - algorithmes de décomposition (gauche) et de reconstruction (droite) d'un signal bidimensionnel

4.7 Exemples

Dans cette section nous présentons rapidement deux ondelettes, continues que nous avons utilisé dans nos travaux. Nous avons implémenté des ondelettes continues bidimensionnelles, le chapeau mexicain et l'ondelette de Morlet. Le choix de l'ondelette à utiliser est souvent difficile. De manière générale, on choisit

des ondelettes qui ont montré dans la pratique, des résultats satisfaisants.

Deux exemples d'ondelettes sont généralement cités dans le cas continu : l'ondelette de Morlet et le chapeau mexicain. Nous donnerons l'expression bi-dimensionnelle de ces ondelettes extraites de [3] (les formes unidimensionnelles se trouvent dans [12]).

Le chapeau mexicain a été utilisé en particulier en analyse de la vision. Il s'agit du laplacien d'une gaussienne. Cette ondelette a la particularité de détecter les singularités, les discontinuités dans toutes les directions (si on choisit l'ondelette isotropique).

$$\phi(x) = [2 - \langle x, Ax \rangle] e^{-\langle x, Ax \rangle/2} \text{ et } \mathcal{F}_2 \phi(\underline{k}) = |\det(B)| \langle \underline{k}, B\underline{k} \rangle e^{-\langle \underline{k}, B\underline{k} \rangle/2} \quad (4.8)$$

avec A une matrice 2×2 symétrique définie positive. Si $A = \lambda I$, elle est invariante par rotations et donc ne privilégie aucune direction donnée. De manière générale, on choisit $A = \text{diag}(1/\epsilon), \epsilon \geq 1$. La figure 4.3 (gauche) est une représentation de l'ondelette et la figure 4.3 (droite) est une représentation de sa transformée de Fourier.

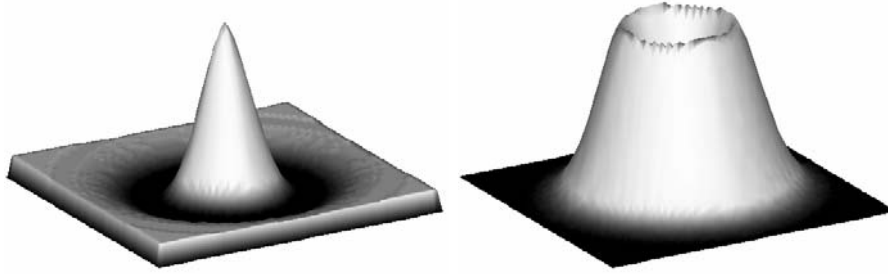


FIG. 4.3 - *Chapeau mexicain (gauche) et transformée de Fourier du chapeau mexicain (droite)*

L'ondelette de Morlet privilégie une direction donnée et est complexe. Elle est adaptée à l'étude de la régularité d'une fonction. On la considère numéri-

quement à support compact. Elle est bien localisée en temps et en fréquence.

$$\phi(x) = e^{i\underline{k}_0 x} e^{-\langle x, Ax \rangle/2} - e^{\langle \underline{k}_0, B\underline{k}_0 \rangle/2} e^{-\langle x, Ax \rangle/2} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{F}_2 \phi(\underline{k}) = |\det B|^{1/2} [e^{-\langle \underline{k} - \underline{k}_0, B(\underline{k} - \underline{k}_0) \rangle/2} - e^{-\langle \underline{k}_0, B\underline{k}_0 \rangle/2} e^{-\langle \underline{k}, B\underline{k} \rangle/2}] \quad (4.10)$$

avec $\underline{k}_0 \in \mathbb{R}^2$, A est une matrice symétrique définie positive et $B = A^{-1}$. On peut choisir $|\underline{k}_0| \geq 5.5$ (voir [3]) pour que le second terme dans les expressions (4.9) et (4.10) soit négligeable (ce terme assure l'admissibilité de l'ondelette). En général, A est diagonale, $A = \text{diag}(1/\epsilon, 1)$. La figure 4.4 et 4.5 représentent le module de l'ondelette de Morlet (à gauche) et la transformée de Fourier réelle (à droite).

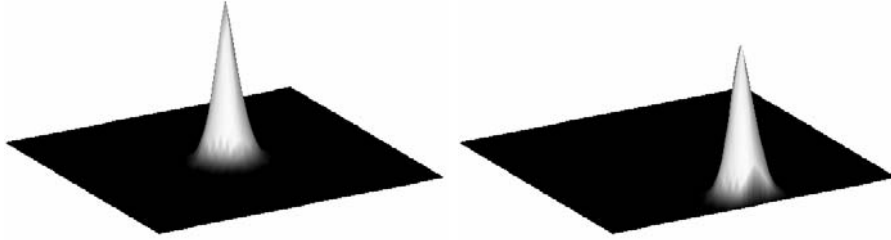


FIG. 4.4 - *Module de l'ondelette de Morlet (gauche) et module de sa transformée de Fourier (droite) $k_0 = (0, 8)^t$ et $\epsilon = 1$*

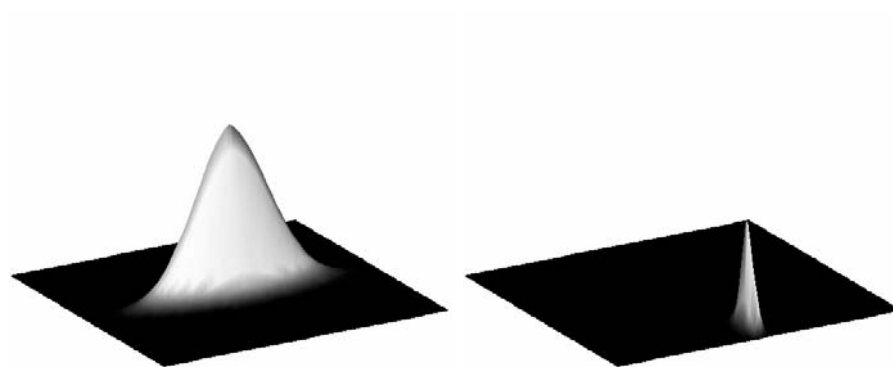


FIG. 4.5 - *Module de l'ondelette de Morlet (gauche) et module de sa transformée de Fourier (droite) $k_0 = (0, 8)^t$ et $\epsilon = 8$*

Chapitre 5

Ondelettes et tomographie

5.1 Introduction

L'intérêt des ondelettes en tomographie provient essentiellement de la remarque suivante :

Si on considère la rétroprojection filtrée $f = \mathbf{R}^\#(w \star \mathbf{R}f(\theta, s))$, $\mathcal{F}_1 w(\sigma) \approx |\sigma|$, on remarque que le filtre n'est localisé ni en temps, ni en fréquence. Une bonne localisation spatiale permettrait également de reconstruire une fonction f à partir de projections partielles (localisées par une décomposition en ondelettes).

M. Holschneider a établi un premier résultat dans [41], en écrivant la transformée de Radon comme une transformée en ondelettes, l'ondelette étant la distribution de Dirac. De nombreux travaux sont principalement basés sur l'utilisation des ondelettes dans le but de modifier le filtre de la rétroprojection. L'objectif est d'assurer au nouveau filtre une bonne localisation en temps et en fréquence. On évalue les coefficients de la décomposition en ondelettes bidimensionnelles de la fonction à reconstruire f . On définit une ondelette dans $\mathbb{R}^2$, $\psi_a(x) = a^{-1/2} \psi(\frac{x}{a})$. L'idée est d'écrire la formule de rétroprojection filtrée pour la fonction $\psi_a \star f$. On obtient ainsi une formule de reconstruction de $\psi_a \star f$ en fonction des projections de f :

$$\psi_a \star f = \mathbf{R}^\#(\mathbf{R}_\theta \psi_a \star w \star \mathbf{R}_\theta f) = \mathbf{R}^\#(w_{a,\theta} \star \mathbf{R}_\theta f), \quad w_{a,\theta}(t) = (w \star \mathbf{R}_\theta \psi_a)(t)$$

Les coefficients de la décomposition en ondelettes de f sont :

$$c_a(t) = a^{-1/2} \langle f(x), \psi(\frac{x}{a} - t) \rangle = \mathbf{R}^\#(w_{a,\theta} \star \mathbf{R}_\theta f)(x)|_{x=t/a}$$

Localisation du filtre

Si l'ondelette est bien choisie, le filtre $w_{a,\theta}$ est mieux localisé que w . Prenons l'exemple de l'ondelette chapeau mexicain (définie en (4.8)), et prenons pour filtre w celui défini dans [59](p.109) pour les géométries parallèles (en prenant $\varepsilon = 0$) :

$$w_b(s) = \frac{b^2}{4\pi^2} \begin{cases} \frac{\cos(bs)-1}{(bs)^2} + \frac{\sin(bs)}{(bs)} & , s \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , s = 0 \end{cases}$$

La figure 5.1(gauche) visualise de la transformée de Radon de l'ondelette dilatée $\psi_a, a = 0.125$, pour un angle θ quelconque (cette ondelette est invariante par rotation). La figure 5.1 (centre) visualise le filtre w . La fréquence de coupure du filtre b est choisie telle que $b < Npts, b \approx Npts$, $Npts$ étant le nombre de points de discrétisation. La figure 5.1 (droite) représente la convolution des deux fonctions, le filtre et la transformée de Radon de l'ondelette dilatée.

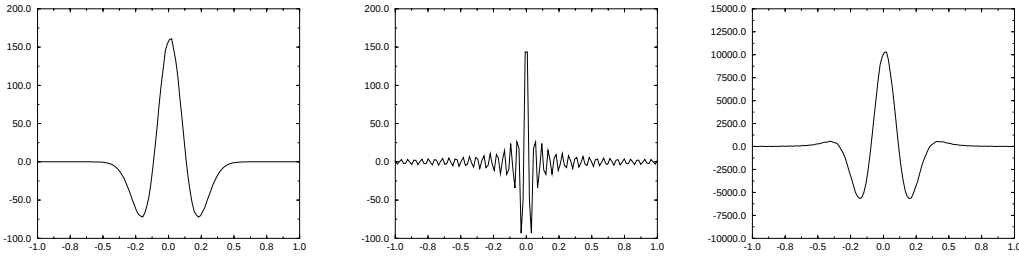


FIG. 5.1 - *Localisation du filtre modifié - Gauche : transformée de Radon de l'ondelette dilatée . Centre : filtre de la rétroprojection filtrée - Droite : filtre modifié par la convolution $w \star \mathbf{R}_\theta \psi_a$*

Cette idée est développée dans toutes les méthodes présentées dans cette section. L'approche et les centres d'intérêt diffèrent. Les méthodes proposant un nouveau filtre adapté à une analyse multirésolution sont tout d'abord présentés ([4, 5, 13, 38, 72], basées sur la transformée en ondelettes discrète. Puis

une approche par la transformée en ondelette continue est abordée ([66, 67]), permettant d'établir un lien entre la décomposition des projections et la décomposition de la fonction à reconstruire. Dans une troisième partie, des méthodes permettant de décomposer la transformée de Radon tout en restant dans l'espace image de l'opérateur sont exposées ([21, 22, 23, 42, 45]). Enfin, dans la dernière partie, l'aspect local de l'inversion est traité ([7, 20, 77, 78]).

5.2 Approche discrète

5.2.1 Reconstruction multirésolution

L'objectif de cette méthode, proposée par A.H. Delaney et Y. Bresler dans [13], est de reconstruire l'approximation de la solution à une certaine résolution à partir des projections. Nous verrons dans la section 5.3 une approche continue et une relation entre les décompositions en ondelette de la solution et de ses projections.

La méthode décrite par les auteurs est appliquée à des problèmes de reconstruction où l'image reconstruite possède une résolution plus fine dans une région d'intérêt.

Préliminaires et notations

L'algorithme de reconstruction standard utilisé est l'algorithme de rétroprojection filtrée : $f(x, y) \approx \mathbf{R}^\#(w \star \mathbf{R}f)$.

La méthode est basée sur la transformée bidimensionnelle discrète. Les filtres passe-haut et passe-bas (et leur miroir) sont établis à partir d'une ondelette et d'une fonction d'échelle unidimensionnelles. Ils seront notés h et g (H et G pour leur transformée de Fourier discrète). Le cas bidimensionnel est construit à partir du produit tensoriel des espaces multirésolutions unidimensionnels. Les ondelettes ainsi formées sont séparables (voir la section 4.5.3).

Soit f_{A_0} , $f \approx f_{A_0}$, l'image discrète (l'approximation à la résolution la plus

fine). Elle est décomposée en une série d'approximations successives $P_{h_l} f_{A_0}$ aux résolutions $l = 1 \dots L$, associée à une série d'images de détail $P_{g_l} f_{A_0}$ aux mêmes résolutions. De manière plus précise, l'approximation d'une image f_{A_μ} , notée $P_{h_l} f_{A_\mu}$ s'écrit en fonction des coefficients de la décomposition en ondelettes :

$$P_{h_l} f_{A_\mu} = \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{A_{\mu+l}} h_l(m - 2^l i) h_l(n - 2^l k)$$

où $f_{A_q}(m, n) = \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{A_0}(i, k) \tilde{h}_q(2^q m - i) \tilde{h}_q(2^q n - k)$, l, μ, q sont des entiers positifs. La séquences $\{f_{A_q}(m, n)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est la séquence des coefficients à la résolution q . De manière similaire, l'image de détail à la résolution l s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{D_{l+\mu}}^{(1)}(i, k) h_l(m - 2^l i) g_l(n - 2^l k) + \\ & \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{D_{l+\mu}}^{(2)}(i, k) g_l(m - 2^l i) h_l(n - 2^l k) + \\ & \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{D_{l+\mu}}^{(3)}(i, k) g_l(m - 2^l i) g_l(n - 2^l k) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} f_{D_q}^{(1)}(m, n) &= \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{A_0}(i, k) \tilde{h}_q(2^q m - i) \tilde{g}_q(2^q n - k) \\ f_{D_q}^{(2)}(m, n) &= \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{A_0}(i, k) \tilde{g}_q(2^q m - i) \tilde{h}_q(2^q n - k) \\ f_{D_q}^{(3)}(m, n) &= \sum_{i,k=-\infty}^{\infty} f_{A_0}(i, k) \tilde{g}_q(2^q m - i) \tilde{g}_q(2^q n - k) \end{aligned}$$

La séquence $\{f_{D_q}^{(p)}(m, n), p \in \{1, 2, 3\}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ forme l'ensemble des coefficients de détail à la résolution q .

Reconstruction

Pour obtenir l'approximation de l'image à reconstruire à une résolution donnée, on pourrait reconstruire la fonction par rétroprojection filtrée, calculer la décomposition (approximation et coefficients de détails) à la résolution souhaitée et enfin calculer à partir de cette décomposition la fonction. Ceci alourdit

la méthode de rétroprojection sans l'améliorer vraiment. Dans la méthode présentée, les étapes sont interverties, et l'algorithme de rétroprojection filtrée est appliqué sur la transformée en ondelettes des projections. On obtient alors la décomposition de l'image à la résolution souhaitée. Le filtre utilisé dans la rétroprojection est modifié et dépend alors des filtres associée à l'ondelette et à la fonction d'échelle utilisée. La formule de reconstruction porte ainsi sur les coefficients de l'approximation et de détail à une résolution donnée. Les auteurs démontrent que :

- Si la fonction $f(x, y)$ est bande-limitée : $\int_{\xi \geq B} |\mathcal{F}_2(\xi)| d\xi \leq \epsilon$.
- Si f_{A_0} est le résultat de la discrétisation de la fonction $f(x, y)$ (supposée B-bande limitée) sur une grille uniforme avec un pas de discrétisation T_0 , tel que $B \leq \frac{\pi}{T_0}$.
- Si T_p est le pas de discrétisation selon la variable radiale des projections tel que $B \leq \frac{\pi}{T_p}$

Alors :

$$f_{A_l}(m, n) = \mathbf{R}_d^\# K_{h_l} \mathbf{R}_d (2^l m \frac{T_0}{T_p}, 2^l n \frac{T_0}{T_p})$$

avec $\mathbf{R}_d^\#$ est la discrétisation de l'opérateur $\mathbf{R}^\#$ et $\mathbf{R}_d$ est la discrétisation de l'opérateur $\mathbf{R}$. Le filtrage $K_{h_l} \mathbf{R} f(m, \theta) = k_{h_l, \theta} * \mathbf{R} f(\theta, m)$ est défini par la transformée de Fourier discrète du filtre $k_{h_l, \theta}(m)$, où pour $|\lambda| \leq \pi$:

$$K_{h_l, \theta}(\lambda) = \frac{T_0}{T_p 2\pi} |\lambda| \overline{H_l}(\lambda \frac{T_0}{T_p} \cos \vartheta) \overline{H_l}(\lambda \frac{T_0}{T_p} \sin \vartheta) W(\lambda), \quad \theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$$

avec W est une fenêtre spectrale égale à 1 sur le support de $F_{A_0}(\lambda)$, c'est-à-dire pour $|\lambda| \leq B T_p$.

De même, pour les coefficients de détail, on a une formule similaire :

$$f_{D_l}^{(p)}(m, n) = \mathbf{R}_d^\# K_{g_l} \mathbf{R}_d (2^l m \frac{T_0}{T_p}, 2^l n \frac{T_0}{T_p})$$

Le filtre associé est défini par sa transformée de Fourier discrète, comme précédemment :

$$K_{g_l, \theta}^{(1)}(\lambda) = \frac{T_0}{T_p 2\pi} |\lambda| \overline{H_l}(\lambda \frac{T_0}{T_p} \cos \vartheta) \overline{G_l}(\lambda \frac{T_0}{T_p} \sin \vartheta) W(\lambda)$$

$$K_{g_l, \theta}^{(2)}(\lambda) = \frac{T_0}{T_p 2\pi} |\lambda \overline{G_l}| \lambda \left(\lambda \frac{T_0}{T_p} \cos \vartheta \right) \overline{H_l} \left(\lambda \frac{T_0}{T_p} \sin \vartheta \right) W(\lambda)$$

$$K_{g_l, \theta}^{(3)}(\lambda) = \frac{T_0}{T_p 2\pi} |\lambda \overline{G_l}| \lambda \frac{T_0}{T_p} \cos \vartheta \overline{G_l} \left(\lambda \frac{T_0}{T_p} \sin \vartheta \right) W(\lambda)$$

Reconstruction localisée

La reconstruction obtenue présente une résolution plus fine dans une partie de l'image. Ceci permet d'une part de réduire la dose administrée au patient et d'autre part de réduire également le coût de l'algorithme. Le principe général est de reconstruire la fonction sur l'ensemble de son support à la résolution la plus faible et de calculer les coefficients de détail jusqu'à la résolution la plus fine dans la région d'intérêt. On pourra ainsi, grâce à l'approximation de la fonction à la résolution la plus faible et aux coefficients de détail, remonter à l'approximation de la fonction à la résolution la plus fine dans la région d'intérêt. Ceci ne peut se concevoir que si les filtres utilisés n'ont qu'un nombre fini de coefficients significatifs (à support compact) car la convolution est alors locale. Il faut tenir compte de la longueur du support du filtre dans la convolution et agrandir suffisamment la région d'intérêt pour obtenir une convolution correcte aux bords. D'autre part, comme il est précisé dans les travaux de T. Olson et J. Destefano ([20]), plus la résolution est faible, et plus le support du filtre est grand et donc plus la région d'intérêt est grande. Ainsi, A. Delaney et Y. Bresler donnent des résultats d'échantillonnage des projections en fonction du support du filtre et de la résolution. On peut ainsi s'autoriser une résolution fine dans la région d'intérêt et moins fine autour sans dégrader pour autant l'image.

5.2.2 Approche matricielle

Cette méthode, développée par M. Bathia dans [4, 5] propose une méthode de reconstruction basée sur la transformée en ondelettes discrète unidimensionnelle des projections. Deux méthodes de reconstruction sont adaptées, la rétroprojection filtrée et l'approche basée sur les pixels naturels. Dans les deux

cas, les projections sont discrétisées sous la forme :

$$y_k(l) = \iint_{\Omega} f(u, v) T_{kl}(u, v) du dv, \quad k = 1, \dots, N_{\theta}, \quad l = 1, \dots, N_s$$

Donc, $y_k = T_k f$ où T_k est une matrice de dimension $N_s \times N_s^2$, (il y a N_s^2 pixels dans l'image), représentant $\{T_{kl}(u, v); l = 1, \dots, N_s\}$. La fonction à reconstruire est discrétisée sur son support en N_s^2 pixels. Etant donné ces projections, l'estimation discrète de la solution :

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{N_{\theta}} T_k^t x_k$$

Dans le cas de la rétroprojection filtrée, le vecteur x_k (de taille N_s) est le résultat du filtrage des données $x_k = K y_k$, pour la position angulaire k . Pour l'ensemble des données, cela s'écrit :

$$x = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix} y$$

Dans le cadre de la seconde approche, le vecteur x est solution du système $y = (T^t T)x$, $C = T^t T$ est la matrice contenant les produits scalaires entre les indicatrices sur les bandes. Cette matrice est de taille importante ($N_{\theta} N_s \times N_{\theta} N_s$) et est pleine.

Notations

La transformée en ondelette unidimensionnelle est notée sous forme matricielle. Il s'agit d'une convolution. La notation matricielle se retrouve dans [68], pour les ondelettes de I. Daubechies. La transformée en ondelettes d'un vecteur s'écrit :

$$Wx = \begin{bmatrix} \xi^{(N-1)} \\ \vdots \\ \xi^{(0)} \\ x^{(0)} \end{bmatrix} = \xi$$

W est unitaire $W^{-1} = W^t$, $x^{(0)}$ est le vecteur des coefficients de la décomposition et $\xi^{(j)}$ est le vecteur de détail à la l'échelle j . Cette représentation décrit la transformée en ondelettes jusqu'à la résolution la plus grande possible. Si on désire avoir une représentation intermédiaire, $x^{(m)}$, on applique l'opérateur matriciel $A(m)$ annulant les $N - m$ sous-vecteurs ξ et ne retenant que l'information associée à l'échelle m :

$$A(m) = \text{BlocDiag}[0_{(2^{N-2^m})}, I_{(2^m)}]$$

où I_q est l'identité de taille $q \times q$ et 0_p est la matrice de zéros de taille $p \times p$. On définit par ailleurs l'opérateur matriciel qui ne retient que le détail à la résolution m , $D(m)$:

$$D(m) = \text{BlocDiag}[0_{(2^{N-2^{m+1}})}, I_{(2^m)}, 0_{(2^m)}]$$

Représentation multi-échelle

On applique la transformation en ondelettes au vecteur x_k :

$$\xi_k = W x_k$$

La représentation multi-échelle de la fonction est :

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{N_\theta} (T_k^t W^t) (W x_k) = \sum_{k=1}^{N_\theta} \mathcal{T}_k^t \xi_k$$

où $\mathcal{T}_k = W T_k$. A la résolution m , les coefficients et le détail associé de la solution sont :

$$\tilde{f}^{(m)} = \sum_{k=1}^{N_\theta} \mathcal{T}_k^t (A(m) \xi_k) \quad , \quad \Delta \tilde{f}^{(m)} = \sum_{k=1}^{N_\theta} \mathcal{T}_k^t (D(m) \xi_k)$$

Pour passer à la résolution supérieure, on a : $\tilde{f}^{(m+1)} = \tilde{f}^{(m)} + \Delta \tilde{f}^{(m)}$.

Adaptation de la rétroprojection filtrée

Dans le cadre de la rétroprojection filtrée, l'algorithme s'écrit :

1. calcul de la matrice $\mathcal{K} = W K W^t$. La matrice résultante est presque diagonale.

2. pour chaque position angulaire k :

- calcul de la transformée des projections : $\eta_k = W y_k$.
- calcul de $\xi_k = \mathcal{K} \eta_k$.
- rétroprojection de ξ_k : $\mathcal{T}_k^t \xi_k$.

3. Calcul de $\sum_k \mathcal{T}_k^t \xi_k$.

Remarque :

$$\begin{aligned} \sum_k \mathcal{T}_k^t \xi_k &= \sum_k \mathcal{T}_k^t \mathcal{K} \eta_k = \sum_k \mathcal{T}_k^t \mathcal{K} W y_k = \sum_k \mathcal{T}_k^t W K W^t W y_k \\ &= \sum_k T_k^t W^t W K y_k = \sum_k T_k^t K y_k = \sum_k T_k^t x_k = \tilde{f} \end{aligned}$$

Adaptation de la méthode basée sur les pixels naturels

Dans cette approche, le vecteur x est déduit de y par la résolution du système $y = T^t T x = C x$, $C = T^t T$. La matrice C est grande et pleine. Une transformation de cette matrice dans une base orthogonale appropriée permet de la rendre creuse et donc d'accélérer la résolution du système. La base choisie dans [5] est la base de Haar, conduisant à une représentation multi-échelle.

Soit W la matrice de transformation multi-échelle unidimensionnelle d'un vecteur de taille N_s . W est unitaire et $W^{-1} = W^t$. On en déduit la matrice $W_b d = \text{BlocDiag}(W)$, formée de N_θ blocs, avec chaque bloc égal à la matrice W . On a :

$$\tilde{f} = \sum_k T_k^t x_k = \sum_k T_k^t W^t W x_k = \sum_k \mathcal{T}_k^t \xi_k$$

Pour calculer ξ_k , on définit le vecteur $\eta_k = W y_k$. L'équation $y_k = C_k x_k$, en utilisant le fait que W est unitaire, devient :

$$y_k = C_k x_k \Leftrightarrow W^t \eta_k = C_k W^t \xi_k \Leftrightarrow \eta_k = W C_k W^t \xi_k$$

La changement de base est donc : $\mathcal{C}_k = W C_k W^t$, et la matrice résultante est creuse (voir [5]). Le système linéaire peut alors être résolu en temps raisonnable.

Cependant l'algorithme classique de reconstruction sous-jacent (méthode algébrique directe) fait intervenir des matrices bloc-circulantes, ce qui est aussi un avantage au niveau du coût de l'algorithme. On peut donc se demander laquelle des deux méthodes est la plus performante.

5.2.3 Rétroprojection et analyse en ondelettes de Haar

J.P. Guédon et Y. Bizais propose une méthode de reconstruction basée sur la rétroprojection filtrée et sur le filtre de Haar ([38]). Le signal est échantillonné dans la base de Haar et ensuite reconstruit par rétroprojection filtrée. Dans une approche classique, la forme discrétisée de la rétroprojection filtrée consiste à évaluer la densité en chaque pixel, en considérant la fonction constante sur chaque pixel de l'image. La fonction est ainsi décomposée dans une base de fonctions indicatrices sur les pixels de l'image. Dans l'approche de J.P. Guédon et Y. Bizais, la fonction à reconstruire est discrétisée dans la base de Haar. Après avoir rappelé la formule de reconstruction établie en continu, ils donnent le schéma de discrétisation classique, puis leur schéma dans la base de Haar.

Approche continue

La rétroprojection filtrée s'écrit, de manière habituelle :

$$\forall f \in S, x, y \in IR, f(x, y) = \mathbf{R}^\#(K\mathbf{R}f(\theta, s))(x, y)$$

où le filtrage $K\mathbf{R}f$ est tel que : $K\mathbf{R}F(\theta, s) = \mathbf{R}f(\theta, s) \star k(s)$, $k(s) = (\mathcal{F}_1^{-1}(\pi|\sigma|))(s)$.

Approche discrète classique

La fonction à reconstruire est supposée constante sur chaque pixel. Cela se traduit par un produit de convolution, c'est-à-dire un préfiltrage par un filtre $b(x, y)$:

$$f_d(k, l) = b(x, y) * f(x, y)|_{x=k, y=l} = \mathbf{R}^\#K(p_b(\theta, s) \star p_f(\theta, s))$$

où $p_b(\theta, s) = \mathbf{R}b(\theta, s)$ et $p_f(\theta, s) = \mathbf{R}f(\theta, s)$. On définit ainsi le filtre $k_b(\theta, s) = Kp_b(\theta, s)$. La forme discrète s'écrit :

$$f_d(k, l) = \mathbf{R}^\#(k_b \star p_f(\theta, s))|_{x=k, y=l}, \quad k_b(\theta, s) = \mathcal{F}_1^{-1}(\pi|\sigma|\mathcal{F}_1 p_b(\theta, \sigma))$$

Approche discrète dans la base de Haar

Une fonction continue peut s'écrire en fonction de ses valeurs échantillonnées dans la base de Haar selon :

$$f_0(x, y) = \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} f_0(k, l) s_{0, \Delta}(x - k, y - l)$$

où Δ est la taille d'un pixel du support de la fonction. La base de Haar est définie comme :

$$s_{0, \Delta}(x, y) = s_{0, \Delta}(x) s_{0, \Delta}(y) \quad \text{et} \quad s_{0, \Delta}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |z| = \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{si } |z| > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

On a alors la forme de reconstruction suivante :

$$f_0(k, l) = \mathbf{R}^\#(K\omega_0(\theta, s) \star p_f(\theta, s))$$

où $\omega_0(\theta, s) = \mathbf{R}s_{0, \Delta}$. Le filtre associé pour la rétroprojection filtrée s'écrit :

$$k_0(\theta, s) = \mathcal{F}_1^{-1}(\pi|\sigma|\mathcal{F}_1(\omega)(\theta, \sigma))$$

Nouveau filtre

La filtre ainsi défini est calculé et les auteurs donnent une forme explicite. La fonction ω s'écrit également sous la forme : $\omega_0(\theta, s) = s_{0, \Delta \cos \vartheta}(t) \star s_{0, \Delta \sin \vartheta}(t)$, $\theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$. Sa transformée de Fourier n'est autre que le produit de deux sinus cardinaux : $\mathcal{F}_1(\omega_0)(\theta, \sigma) = \Delta^2 \text{sinc}(\sigma \Delta \cos \vartheta) \text{sinc}(\sigma \Delta \sin \vartheta)$. Le filtre devient, dans le domaine de Fourier :

$$\mathcal{F}_1(k_0)(\theta, \sigma) = \Delta^2 \pi |\sigma| \text{sinc}(\sigma \Delta \cos \vartheta) \text{sinc}(\sigma \Delta \sin \vartheta)$$

L'inversion donne la forme explicite dans le domaine direct, pour $s \neq 0$ et $\theta \neq 0$:

$$k(\theta, s) = \frac{1}{\pi \sin 2\theta} \left(\log \left| s^2 - \frac{\Delta^2}{4} (1 + \sin 2\theta) \right| - \log \left| s^2 - \frac{\Delta^2}{4} (1 - \sin 2\theta) \right| \right)$$

5.2.4 Décomposition temps-fréquence sous contraintes

Cette méthode, proposée par B. Sahiner et A.E. Yagle dans [72] permet de réduire le bruit dans les images reconstruites. En effet, dans la méthode de rétroprojection filtrée, le filtre K tel que $\mathcal{F}_1 K(\sigma) \approx |\sigma|$ amplifie les composantes hautes fréquences du bruit. Avant donc de reconstruire, les projections sont généralement filtrées dans l'espace fréquentiel, où les fréquences pour lesquelles l'énergie du signal est inférieure à l'énergie du bruit sont annulées. L'idée est d'appliquer ce seuillage dans une représentation temps-fréquence du signal, pour n'annuler les fréquences que dans les régions concernées et ne plus appliquer un filtrage global à l'image. En effet, un filtrage trop brutal nuit à la résolution du signal et inversement un filtrage trop faible n'élimine pas le bruit. Les auteurs utilisent deux types de représentation temps-fréquence, la transformée de Fourier fenêtre et la transformée en ondelettes discrète. Pour la deuxième, le filtrage associé au débruitage est appliqué à la représentation des projections à une échelle donnée. La décomposition des projections, pour une vue donnée (θ fixé) s'écrit :

$$W_{2^l} \mathbf{R}_\theta f(m) = \sum_k g(m - 2k) \mathbf{R}_\theta f_l(k)$$

où

$$\mathbf{R}_\theta f_l(m) = \sum_k h(m - 2k) \mathbf{R}_\theta f_{l-1}(k)$$

h et g sont les filtres associés aux ondelettes. Le seuillage des projections est :

$$W_{2^l} \tilde{\mathbf{R}}_\theta f(m) = W_{2^l} \mathbf{R}_\theta f(m) \mathcal{Z}(l, m)$$

où $\mathcal{Z}(l, m)$ est défini dans le plan temps-fréquence par :

$$\mathcal{Z}(l, m) = \begin{cases} 1 & \text{si } |W_{2^l} \mathbf{R}_\theta f(m)|^2 \geq \mu(l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mu(l)$ est un seuil défini par l'observation.

Dans un deuxième temps, les auteurs présentent une méthode de reconstruction sous contraintes incluant une connaissance a priori de l'image. La contrainte

est que les coefficients de la transformée en ondelettes, à une résolution suffisamment fine sont nuls autour d'une région $\mathcal{A}$. Ceci signifie que cette région correspond à une région dans l'image originale où il y a peu de variations brutales (arêtes,...). Annuler les coefficients dans cette région revient à appliquer un filtre passe-bas. L'avantage ici est que le filtrage devient local à une région. La contrainte est exprimée comme un seuillage sur la valeur absolue de la transformée en ondelettes de l'image. Le problème s'écrit comme un problème de minimisation sous contraintes : étant données les projections $p(\theta, s)$ d'une image $f(x, y)$, et la transformée en ondelettes de l'image $W_l^z f(x, y)$, $z = 0, 1, 2, 3$ donnée sur L résolutions :

- les projections $p(\theta, s)$ sont perturbées en $\tilde{p}(\theta, s)$ pour satisfaire les contraintes sur les ondelettes.
- La distance entre les projections et les projections perturbées est minimisée.

L'image $\tilde{f}(x, y)$ est reconstruite par une rétroprojection filtrée classique à partir des données perturbées. L'avantage de ces deux méthodes est que le filtrage est appliqué dans un espace temps-fréquence et donc local à certaines régions de l'image. Les auteurs remarquent que l'amélioration par un filtrage local est effective sur la globalité de l'image.

5.3 Lien entre les décompositions de la fonction à reconstruire et des projections : approche continue

Cette méthode est proposée par F. Peyrin ([66, 67]). Elle est basée sur la transformée en ondelettes continue. Le principe est d'établir une relation entre la transformée en ondelettes continue des projections (unidimensionnelle par rapport à la variable radiale) et la transformée en ondelettes continue de la

fonction à reconstruire. On obtient ainsi une formule de reconstruction. L'ondelette bidimensionnelle générée à partir de la décomposition des projections est dans un premier temps invariante par rotation, mais une extension est ensuite proposée par les auteurs pour les ondelettes directionnelles.

Résultats préliminaires sur $\mathbf{R}f$

Soit la fonction à reconstruire $f(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support compact. Les projections de f , en géométrie parallèle (voir figure 1.2), s'écrivent :

$$p_\theta(s) = \mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) dx dy, \quad \theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$$

où δ est la distribution de Dirac.

La formule d'inversion utilisée dans cette approche est la rétroprojection filtrée :

$$f(x, y) = \mathbf{R}^\#(p_\theta \star k)(x, y)$$

où k est le noyau de convolution tel que : $\mathcal{F}_1 k(\sigma) = |\sigma|$.

Transformée en ondelettes continue des projections

Soit $\psi(x)$ une ondelette analysante admissible sur $\mathbb{R}$ (voir l'expression (4.1)). La transformée en ondelettes continue des projections (selon la variable radiale s) est :

$$W(\psi, f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} p_\theta(s) \overline{\psi}\left(\frac{s-b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} ds, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

On note $W(\psi, p_\theta)(a, \cdot) = p_\theta \star \overline{\tilde{\psi}}_a$ avec $\psi_a(s) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{s}{a}\right)$ et $\tilde{\psi}_a(s) = \psi_a(-s)$.

Passage à la transformée en ondelettes continue bidimensionnelle de f

On note $S_a = \{W(\psi, p_\theta)(a, \cdot), \theta \in [0, \pi[\}$ l'ensemble des projections à l'échelle a . La fonction $f_a(x, y)$ est l'image reconstruite par rétroprojection filtrée à partir des projections de S_a :

$$f_a(x, y) = \mathbf{R}^\#(p_\theta \star \overline{\tilde{\psi}}_a \star k)(x, y)$$

F. Peyrin ([66, 67]) montre que $f_a(x, y)$ est la transformée en ondelettes bidimensionnelle de f et donne l'ondelette associée :

$$f_a(x, y) = \mathbf{R}^\#(p_\theta \star \bar{\psi}_a \star w)(x, y) = \mathbf{R}^\#(p_\theta \star k)(x, y) * \mathbf{R}^\#(\bar{\psi}_a \star k)(x, y)$$

$$f_a(x, y) = f * \mathbf{R}^\#(\bar{\psi}_a \star k)(x, y)$$

On note $\bar{m}_a(x, y) = \mathbf{R}^\#(\bar{\psi}_a \star k)(x, y)$. La fonction $m_a(x, y)$ peut s'écrire sous la forme :

$$m_a(x, y) = \frac{1}{a\sqrt{a}} \mathbf{R}^\#(\psi \star k)\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$$

Donc $m_a(x, y)$ peut s'interpréter comme la version dilatée à l'échelle a de $m(x, y) = \mathbf{R}^\#(\psi \star k)$. Si la fonction ψ est admissible sur $\mathbb{R}$, alors il est démontré ([66]) que cette fonction est admissible sur $\mathbb{R}^2$. F. Peyrin définit ainsi la transformée en ondelettes continue de f comme étant :

$$W(m, f)(a, x, y) = \sqrt{a} f_a(x, y)$$

5.3.1 Inversion

On peut appliquer la formule de reconstruction classique pour les ondelettes invariantes par rotation (se reporter à la relation (4.5)) :

$$f(x, y) = c_m^{-1} \int_0^\infty (W(m, f)(a, \cdot, \cdot) * m_a)(x, y) \frac{1}{a^2} da$$

avec $c_m = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\mathcal{F}_2 m(u, v)|^2}{|(u, v)|^2} dudv < \infty$ (condition d'admissibilité).

5.3.2 Extension aux ondelettes directionnelles

En plus des paramètres de dilatation et de translation, on rajoute un paramètre de rotation ζ . L'ondelette directionnelle écrite à l'échelle a s'écrit : $\psi_{a, \zeta}(x, y) = \frac{1}{a} \psi(\frac{1}{a} r_\zeta(x, y))$ avec $r_\zeta(x, y) = (x \cos \zeta - y \sin \zeta, x \sin \zeta + y \cos \zeta)$.

La transformée en ondelettes continue d'une fonction f devient :

$$W(\psi, f)(a, \zeta, x, y) = (f * \bar{\psi}_{a, \zeta})(x, y)$$

La formule d'inversion s'écrit :

$$f(x, y) = c_m^{-1} \int_0^\pi \int_0^\infty (W(\psi, f)(a, \zeta, \cdot, \cdot) * m_a)(x, y) \frac{1}{a^2} da$$

avec c_m défini par la relation (5.3.1). Ainsi, en partant de la transformée en ondelettes des projections, on aboutit d'une part à la transformée en ondelettes de la fonction et d'autre part à une formule d'inversion de la transformée de Radon.

5.4 Décomposition sur l'espace de Radon $Im(\mathbf{R})$

5.4.1 Décomposition dans des structures obliques

S. Izen ([42]) définit une décomposition en ondelettes (structures obliques, voir la section 4.4) sur l'espace image de l'opérateur $\mathbf{R}$. Il établit ensuite une relation entre la décomposition sur cet espace et la décomposition dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la fonction à reconstruire. Pour cela, il utilise les résultats sur $\mathbf{R}f$ dans les espaces de Sobolev ([59]).

Estimation de $\mathbf{R}$ dans l'espace de Sobolev $H^{1/2}(Z)$

Soit $H^{1/2}(Z)$ l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ défini sur le cylindre unité Z , muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^{1/2}(Z)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbf{S}^1} \mathcal{F}_1 f(\sigma, \theta) \overline{\mathcal{F}_1 g(\sigma, \theta)} (1 + \sigma^2)^{1/2} d\theta d\sigma$$

La transformée de Fourier est prise par rapport à la variable radiale.

Le théorème suivant donne un encadrement de $\mathbf{R}f$ dans cet espace ([59]) :

Théorème 5.1 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Alors $\mathbf{R}f \in H^{1/2}(Z)$ et*

$$c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\mathbf{R}f\|_{H^{1/2}(Z)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

avec $c = 4\pi$ et $C = 8\sqrt{2}\pi^2$.

L'opérateur Q

Cet opérateur Q définit le lien entre $L^2(\mathbb{R}^2)$, l'espace de la fonction à reconstruire et l'espace $H = \text{Im}(\mathbf{R}) \cap H^{1/2}(\mathbb{Z})$.

Définition 5.1 Soit l'opérateur Q tel que :

$$\begin{aligned} Q &: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow H \\ Q &= \mathbf{R}\Delta_l = \Delta_d\mathbf{R} \end{aligned}$$

où les opérateurs Δ_l et Δ_d sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta_l &: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \\ \mathcal{F}_2\Delta_l f(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|k|^{1/2}(1+|k|^2)^{-1/4}\mathcal{F}_2 f(k) \\ \Delta_d &: H \rightarrow H \\ \mathcal{F}_1\Delta_d\eta(k, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|k|^{1/2}(1+k^2)^{-1/4}\mathcal{F}_1\eta((k, \theta)) \end{aligned}$$

Remarques :

1. $\exists e_1, e_2$ telles que $e_2\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\Delta_l g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq e_1\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$.
2. Les deux opérateurs s'entrelacent : $\mathbf{R}\Delta_l = \Delta_d\mathbf{R}$.
3. Si $\eta \in H$, alors $\Delta_d\eta \in H$.
4. $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle Qf, Qg \rangle_H$, donc $Q : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow H$ est une isométrie.

Cet opérateur permet d'établir un lien entre les deux espaces. Dans la suite, S.Izen met en avant les propriétés des ondelettes sur les deux espaces.

Structure oblique induite sur H

S. Izen démontre que l'opérateur Q préserve la structure oblique :

Théorème 5.2 Soit $\{\phi_\lambda\}$, $\lambda = (i, k, \varepsilon)$, $k = (k_x, k_y)$, $\varepsilon = (h, d, v)$, une structure oblique sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, avec F l'opérateur associé, A, B ses bornes et $\{\tilde{\phi}_\lambda\}$ la structure oblique duale. On définit $\psi_\lambda = Q\phi_\lambda$. Alors $\{\psi_\lambda\}$ est une structure oblique sur H . La structure oblique duale est donnée par $\{Q\tilde{\phi}_\lambda\}$.

Dans L	Dans H
$f = \sum_{\lambda} \langle f, \phi_{\lambda} \rangle \tilde{\phi}_{\lambda}$ $= \sum_{\lambda} \langle f, \tilde{\phi}_{\lambda} \rangle \phi_{\lambda}$	$\eta = \sum_{\lambda} \langle \eta, \psi_{\lambda} \rangle \tilde{\psi}_{\lambda}$ $= \sum_{\lambda} \langle \eta, Q\phi_{\lambda} \rangle Q\tilde{\phi}_{\lambda}$ $= \sum_{\lambda} \langle \eta, \tilde{\psi}_{\lambda} \rangle \psi_{\lambda}$ $= \sum_{\lambda} \langle \eta, Q\tilde{\phi}_{\lambda} \rangle Q\phi_{\lambda}$
Bornes	
$A\ f\ _{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \sum_{\lambda} \langle \phi_{\lambda}, f \rangle _{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq B\ f\ _{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$	$A\ \eta\ _H^2 \leq \sum_{\lambda} \langle \psi_{\lambda}, \eta \rangle _H^2 \leq B\ \eta\ _H^2$

Les deux structures obliques associées ont les mêmes bornes. Donc si l'une constitue une base orthonormée sur son espace, l'autre constitue aussi une base orthonormée.

Formule d'inversion

Soit $\{a_{\lambda}\}$ les coefficients de la décomposition de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dans une structure oblique $\{\phi_{\lambda}\}$. on a la relation :

$$f = \sum_{\lambda} \langle f, \phi_{\lambda} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tilde{\phi}_{\lambda} = a_{\lambda} \tilde{\phi}_{\lambda}$$

$$a_{\lambda} = \langle f, \phi_{\lambda} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle Qf, Q\phi_{\lambda} \rangle_H = \langle Qf, \psi_{\lambda} \rangle_H$$

Pour connaître les coefficients $\{a_{\lambda}\}$, il faut calculer les coefficients de la décomposition de Qf dans la structure oblique sur H , $\{\psi_{\lambda}\} = \{Q\phi_{\lambda}\}$. Cela s'écrit :

$$a_{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbf{S}^1} \underbrace{\overline{\mathcal{F}_1 Qf(\sigma, \theta)}}_{(1)} \underbrace{\mathcal{F}_1 Q\phi_{\lambda}(\sigma, \theta)}_{(2)} (1 + \sigma^2)^{1/2} d\theta d\sigma$$

$$- (1) = \mathcal{F}_1 \triangle_d^{1/2} \mathbf{R}f(\sigma, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\sigma|^{1/2} (1 + |\sigma|^2)^{-1/4} \mathcal{F}_1 \mathbf{R}f(\sigma, \theta).$$

$$- (2) = \mathcal{F}_1 \triangle_d^{1/2} \mathbf{R}\phi_{\lambda}(\sigma, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\sigma|^{1/2} (1 + |\sigma|^2)^{-1/4} \mathcal{F}_1 \mathbf{R}\phi_{\lambda}(\sigma, \theta).$$

En utilisant le théorème de coupe-projection (voir le théorème 1.1), on obtient :

$$(2) = |\sigma|^{1/2} (1 + |\sigma|^2)^{-1/4} \mathcal{F}_2 \phi_{\lambda}(\sigma \cos \vartheta, \sigma \sin \vartheta), \quad \theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$$

La formule d'inversion est donc :

$$a_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{IR} |\sigma| \int_{S^1} \overline{\mathcal{F}_1 \mathbf{R}f(\sigma, \theta)} \mathcal{F}_2 \psi_\lambda(\sigma \cos \vartheta, \sigma \sin \vartheta) d\vartheta d\sigma \quad (5.1)$$

Dans cette méthode, deux approches ont été “combinées” : la première consistant à estimer la décomposition dans l'espace image de l'opérateur de Radon et l'autre consistant à établir un lien entre la décomposition en ondelettes de la fonction à reconstruire et la décomposition en ondelettes des projections.

5.4.2 Décomposition en ondelettes-vaguelettes

Cette méthode proposée par D. Donoho ([21, 22, 23]) conduit à la même formule d'inversion que celle proposée par S. Izen ([42]). Mais les contraintes sur les ondelettes sont plus fortes dans l'approche de D. Donoho. D. Donoho s'appuie sur une méthode basée sur une décomposition en valeurs pseudo-singulières de $\mathbf{R}$. Pour cela, il introduit la notion de vaguelettes, définies par Y. Meyer. La transformée en ondelettes est discrète. E. Kolaczyk ([45]) propose également une autre formule d'inversion basée sur la décomposition en ondelettes-vaguelettes.

Décomposition en valeurs singulières: rappels

On se limite au cas de problèmes mal-posés au sens de Hadamard, linéaires dans des espaces de Hilbert. On dispose d'un opérateur A linéaire borné de H vers K (espaces de Hilbert). Le problème est:

Etant donné $g \in K$, trouver $f \in H$ telle que $Af = g$

Une solution à ce problème est l'ensemble des fonctions qui minimisent $\|Af - g\|$. Ceci a un sens si $g \in Im(A) + (Im(A))^\perp$. On choisit alors la solution de norme minimale et on obtient l'inverse généralisé A^+ (au sens de Moore-Penrose):

Théorème 5.3 $f^+ = A^+g$ est la solution unique de $A^*Af = A^*g$ dans $\overline{Im(A^*)}$

La décomposition en valeurs singulière de A , si elle existe s'écrit:

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k < f, f_k > g_k$$

où (f_k) et (g_k) sont des systèmes orthogonaux dans H et K tels que :

$$A^* g_k = \sigma_k f_k \text{ et } A f_k = \sigma_k g_k$$

Les σ_k sont des nombres positifs, appelés les valeurs singulières de A . Si la séquence des σ_k est bornée, alors A est un opérateur linéaire borné continu de H dans K ayant un adjoint A^* tel que :

$$A^* g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle g, g_k \rangle f_k$$

Théorème 5.4 *Si A admet une décomposition en valeurs singulière, alors*

$$A^+ g = f^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^+ \langle g, g_k \rangle f_k, \quad \sigma_k^+ = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_k} & \text{si } \sigma_k > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette méthode a ses limites. Les fonctions propres f_k sont souvent difficiles à calculer et ne donnent pas toujours des résultats satisfaisants (pas assez lisses,...). On préfère alors utiliser une base dont on connaît la régularité.

Méthode

Soit $y = \mathbf{R}f + z$ où z est un bruit gaussien centré réduit, pris en compte ou non dans l'inversion. La décomposition en ondelettes-vaguelettes (discrète) est basée sur le schéma suivant :

- On se donne 3 types de fonctions, l'une étant une base orthonormée d'ondelettes $2D$, ψ_λ , $\lambda = (j, k, \varepsilon)$, $k = (k_x, k_y)$, $\varepsilon = h, v, d$ (base construite à partir du produit tensoriel d'espaces multirésolution, voir la section 4.5.3), et deux collections de fonctions (u_λ) et (v_λ) non-orthogonales.
- Des relations type "valeurs quasi-singulière" :

$$\mathbf{R}\psi_\lambda = k_j v_\lambda \text{ et } \mathbf{R}^* u_\lambda = k_j \psi_\lambda \quad (5.2)$$

- Une relation de bi-orthogonalité :

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} \quad (5.3)$$

- Des relations de presque-orthogonalité : il existe des constantes b_1, b_2 et c_1, c_2 te

$$b_1 \|u_\lambda\|_{l^2} \leq \left\| \sum_\lambda a_\lambda u_\lambda \right\| \leq b_2 \|u_\lambda\|_{l^2} \text{ et } c_1 \|v_\lambda\|_{l^2} \leq \left\| \sum_\lambda a_\lambda v_\lambda \right\| \leq c_2 \|v_\lambda\|_{l^2} \quad (5.4)$$

Cette décomposition, si elle existe, produit la formule de reconstruction :

$$f = \sum_\lambda \langle \mathbf{R}f, u_\lambda \rangle k_j^{-1} \psi_\lambda$$

Remarques : On aboutit à un algorithme d'inversion. Si on veut travailler avec les données $y = \mathbf{R}f + z$ où z est un bruit gaussien, il faut seuiller les données pour ne retenir que l'information importante. Ce seuil est défini par $\delta_t(y) = \text{sign}(y)(|y| - t)_+$. La reconstruction est alors : $\mathcal{F}f = \sum_\lambda \delta_{t_j}(\langle Y, u_\lambda \rangle k_j^{-1}) \psi_\lambda$

L'opérateur de Radon : un opérateur faiblement inversible

Dans cette section, on donne des résultats portant sur la base, et qui aboutissent à un inverse de $\mathbf{R}$ au sens faible défini ci-dessous.

$\mathbf{R}$ est un opérateur de $D(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Im}(\mathbf{R})$. Le but est de trouver une fonctionnelle continue qui vérifie :

$$c(\cdot) : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$c(\mathbf{R}f) = \langle \psi, f \rangle$$

Si une telle fonctionnelle existe, on peut retrouver de manière stable de l'information sur $\langle \psi, f \rangle$, à partir des données bruitées de $\mathbf{R}f$. Si on observe que $y = \mathbf{R}f + z$, avec z bruit blanc gaussien de norme $\|z\|$, alors :

$$|c(y) - \langle \psi, f \rangle| \leq \|c\| \cdot \|z\|_2$$

et donc $c(y)$ est une bonne approximation de $\langle \psi, f \rangle$ pourvu que $\|z\|_2$ soit suffisamment petit.

Les lemmes suivants nous donnent des indications sur le choix de la fonctionnelle.

Lemme 5.1 *Soit $D(\mathbf{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, les 3 propositions sont équivalentes :*

1. $\exists$ une fonctionnelle linéaire continue bornée $c(\cdot)$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ qui satisfait $c(\mathbf{R}f) = \langle \psi, f \rangle, \forall f \in D(\mathbf{R})$.
2. $\forall f \in D(\mathbf{R}), |\langle \psi, f \rangle| \leq C \cdot \|\mathbf{R}f\|_2$.
3. $\psi \in \text{Im}(\mathbf{R}^\#)$.

Lemme 5.2 *Si $\psi_\lambda \in D(\mathbf{R}) \cap \text{Im}(\mathbf{R}^\#), \forall \lambda$, alors la collection des fonctionnelles (c_λ) représente un inverse non borné de $\mathbf{R}$ dans le sens algébrique suivant : pour toutes les sommes finies $f = \sum_\lambda \alpha_\lambda \psi_\lambda$, on a :*

$$f = \sum_\lambda c_\lambda(\mathbf{R}f) \psi_\lambda$$

$\mathbf{R}$ est un opérateur faiblement inversible.

Remarques :

- c_λ bornée et $\in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow c_\lambda$ admet un représentant de Riesz γ_λ tel que : $c_\lambda(g) = \langle \gamma_\lambda, g \rangle$.

Soit ξ_λ tel que $\xi_\lambda = \mathbf{R}\psi_\lambda$. Alors : $c_\lambda(\xi_\mu) = c_\lambda(\mathbf{R}\psi_\mu) = \langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$, et donc :

$$\langle \gamma_\lambda, \xi_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

Les fonctions γ_λ et ξ_μ sont biorthogonales. On remarque le lien avec la relation (5.3). Les fonction u_λ et v_λ vont dépendre des fonctions γ_λ et ξ_μ .

- Soit G l'opérateur de Gram associé à $\mathbf{R}$, $G = \mathbf{R}^\# \mathbf{R}$. G est faiblement inversible s'il existe une fonctionnelle linéaire s_λ , bornée, vérifiant :

$$s_\lambda(Gf) = \langle \psi_\lambda, f \rangle \tag{5.5}$$

G est un opérateur de $D(G)$ dans $Im(G)$ inclus dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On a $\gamma_\lambda = \mathbf{R}\sigma_\lambda$ et σ_λ est le représentant de Riesz de s_λ . On retrouve la relation de biorthogonalité (5.5) exprimée de manière formelle en fonction de σ_λ .

$$\langle \gamma_\lambda, \xi_\mu \rangle = \langle \mathbf{R}\sigma_\lambda, \mathbf{R}\psi_\mu \rangle = \langle \sigma_\lambda, \mathbf{R}^\# \mathbf{R}\psi_\mu \rangle = \langle \sigma_\lambda, G\psi_\mu \rangle = s_\lambda(G\psi_\mu) = \langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

Détermination des fonctionnelles

On a : $\mathbf{R}_\theta f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s \cos(\vartheta) + t \sin(\vartheta), -s \sin(\vartheta) + t \cos(\vartheta)) dt$, $\theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$.

On applique le théorème de coupe-projection et l'égalité de Parseval :

$$\int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_\theta f(s) \overline{\mathbf{R}_\theta g(s)} ds d\theta = 2\pi \int_{\omega \in \mathbb{R}^2} \mathcal{F}_2 f(\omega) \overline{\mathcal{F}_2 g(\omega)} \cdot \frac{1}{|\omega|} d\omega \quad (5.6)$$

où le produit scalaire $\langle \mathbf{R}_\theta f, \mathbf{R}_\theta g \rangle$ est exprimé dans le cylindre unité Z .

Le premier terme est la représentation de $\langle \mathbf{R}f, \mathbf{R}g \rangle$ et le second la représentation de $\langle \mathbf{R}^\# \mathbf{R}f, g \rangle$ dans le domaine fréquentiel. D'après les relations (5.5) et (5.6) la fonctionnelle s_λ a un représentant σ_λ caractérisé par :

$$\langle \sigma_\lambda, \mathbf{R}^\# \mathbf{R}f \rangle = \langle \psi_\lambda, f \rangle$$

Dans le domaine des fréquences, cela donne :

$$2\pi \int \mathcal{F}_2 f(\omega) \overline{\mathcal{F}_2 \sigma_\lambda(\omega)} \frac{1}{|\omega|} d\omega = \int \mathcal{F}_2 f(\omega) \overline{\mathcal{F}_2 \psi_\lambda(\omega)} d\omega, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

On peut donc écrire de manière formelle :

$$\mathcal{F}_2 \sigma_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\omega| \mathcal{F}_2 \psi_\lambda(\omega)$$

Ainsi, pour trouver γ_λ , le représentant de c_λ , on a la relation $\gamma_\lambda = \mathbf{R}\sigma_\lambda$, et en utilisant le théorème de coupe-projection, on obtient :

$$\gamma_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} |v| \mathcal{F}_2 \psi_\lambda(v \cos \vartheta, v \sin \vartheta) e^{iuv} dv, \quad \lambda = j, k, \varepsilon$$

On écrit la fonction dilatée translatée ψ_λ , $\lambda = j, k, \varepsilon$, $j \in \mathbb{N}$, $k = (k_x, k_y)^t \in \mathbb{N}^2$, $\varepsilon = h, v, d$ (pour différencier les détail horizontaux, verticaux et diagonaux)

en fonction de $\psi_{0,0,\varepsilon} : \psi_{j,k,\varepsilon} = 2^j \psi_{0,0,\varepsilon}(2^j x - k_x, 2^j y - k_y)$. Ceci donne $\gamma_{j,k,\varepsilon}$ en fonction de $\gamma_{0,0,\varepsilon}$:

$$\gamma_{j,k,\varepsilon}(\theta, u) = 2^j \gamma_{0,0,\varepsilon}(2^j u - k_x \cos \vartheta - k_y \sin \vartheta, \theta), \theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$$

et f peut être reconstruite suivant la formule :

$$f = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(\mathbf{R}f) \psi_{\lambda} = \sum_{\lambda} \langle \gamma_{\lambda}, \mathbf{R}f \rangle \psi_{\lambda} \text{ avec } \langle \gamma_{\lambda}, \mathbf{R}\psi_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

Du point de vue des normes :

$$\|\sigma_{\lambda}\| = 2^j \|\sigma_{0,0,\varepsilon}\| \text{ et } \|\gamma_{\lambda}\| = 2^{j/2} \|\gamma_{0,0,\varepsilon}\|$$

Représentation à l'aide de "Vaguelettes"

Il est montré dans [22] que les c_{λ} ont une norme croissant géométriquement avec le degré de résolution, avec un exposant $\alpha = 1/2$, car $\|c_{\lambda}\| = 2^{j/2} \text{Const}$, $\text{Const} = \|\gamma_{0,0,\varepsilon}\|$.

Les fonctions $u_{\lambda} = 2^{-j\alpha} \gamma_{\lambda}$ sont presque normalisées et $\|u_{\lambda}\| = \text{Const}$.

Les fonctions $v_{\lambda} = 2^{j\alpha} R\psi_{\lambda}$ sont également presque normalisées et $\|v_{\lambda}\| = \text{Const}$.

Les conditions énoncées dans le premier paragraphe sont partiellement vérifiées :

- On a ψ_{λ} base d'ondelettes orthogonales. (u_{λ}) et (v_{λ}) sont des familles de fonctions définies comme ci-dessus.
- (u_{λ}) et (v_{λ}) vérifient la relation de bi-orthogonalité : $\langle u_{\lambda}, v_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$.
- Du fait de leur construction, elles vérifient les relations de type "valeurs quasi-singulière" : $R\psi_{\lambda} = 2^{-j/2} v_{\lambda}$ et $\mathbf{R}^{\#} u_{\lambda} = 2^{-j/2} \psi_{\lambda}$.

Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans [22].

Il reste à prouver la relation de "quasi-orthogonalité". Pour cela, il faut rajouter des conditions supplémentaires qui sont très restrictives. Pour démontrer la presque-orthogonalité, on utilise les résultats connus sur les vaguelettes. Les vaguelettes ont été définies par Y.Meyer ([56]). Cette définition ainsi que les résultats permettant d'aboutir à la quasi-orthogonalité sont rappelés dans [22]. Pour la transformée de Radon (d'autres types de problèmes inverses étant abordés), la quasi-orthogonalité est obtenue pour des ondelettes ayant un degré de régularité au moins égal à 4 pour la dimension 2.

Récapitulatif

Soit (ψ_λ) une base orthonormée d'ondelettes à support compact, provenant d'une ondelette mère ayant au moins $M \geq 4$ moments nuls et $M \geq 4$ dérivées continues. Il existe alors une décomposition en ondelettes-vaguelettes avec :

$$\begin{aligned} u_\lambda &= 2^{-j/2} \gamma_\lambda, \quad v_\lambda = 2^{j/2} \mathbf{R} \psi_\lambda \\ \gamma_\lambda &= \mathbf{R} \sigma_\lambda, \quad \mathcal{F}_2 \sigma_\lambda(\omega) = \frac{|\omega|}{2\pi} \mathcal{F}_2 \psi_\lambda(\omega) \\ \gamma_\lambda(u, \theta) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{IR} |v| \mathcal{F}_2 \psi_\lambda(v \cos \vartheta, v \sin \vartheta) e^{iuv} dv \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} f &= \sum_\lambda \langle \mathbf{R} f, u_\lambda \rangle 2^{j/2} \psi_\lambda \\ f &= \sum_\lambda \langle \mathbf{R} f, \gamma_\lambda \rangle \psi_\lambda = \sum_\lambda \langle \mathbf{R} f, \mathbf{R} \sigma_\lambda \rangle \psi_\lambda \end{aligned}$$

Lien avec la méthode précédente (S.Izen)

On utilise le produit scalaire dans $L^2(Z)$, où Z est le cylindre unité: $\langle \mathbf{R} s, \mathbf{R} t \rangle_{L^2(Z)} = \int_0^\pi \int_{IR} \mathbf{R}_\theta s(u) \overline{\mathbf{R}_\theta t(u)} du d\theta$. Donc:

$$\langle \mathbf{R} f, \mathbf{R} \sigma_\lambda \rangle_{L^2(Z)} = \int_0^\pi \int_{IR} \mathbf{R}_\theta f(u) \overline{\mathbf{R}_\theta \sigma_\lambda(u)} du d\theta$$

On émet l'hypothèse que $\mathbf{R}_\theta f$ et $\mathbf{R}_\theta \sigma_\lambda$ appartiennent à $S(Z)$. On utilise alors l'égalité de Parseval:

$$\langle \mathbf{R} f, \mathbf{R} \sigma_\lambda \rangle_{L^2(Z)} = \int_0^\pi \int_{IR} \mathcal{F}_1 \mathbf{R}_\theta f(k) \overline{\mathcal{F}_1 \mathbf{R}_\theta \sigma_\lambda(k)} dk d\theta$$

On applique ensuite le théorème de coupe-projection :

$$\langle \mathbf{R}f, \mathbf{R}\sigma_\lambda \rangle_{L^2(Z)} = \sqrt{2\pi} \int_0^\pi \int_{IR} \mathcal{F}_1 \mathbf{R}_\theta f(k) \overline{\mathcal{F}_2 \sigma_\lambda}(k \cos \vartheta, k \sin \vartheta) dk d\vartheta$$

On remplace $\mathcal{F}_2 \sigma_\lambda(k \cos \vartheta, k \sin \vartheta)$ par $\frac{|k|}{2\pi} \mathcal{F}_2 \psi_\lambda(k \cos \vartheta, k \sin \vartheta)$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}f, \mathbf{R}\sigma_\lambda \rangle &= \sqrt{2\pi} \int_0^\pi \int_{IR} \mathcal{F}_1 \mathbf{R}_\theta f(k) \frac{|k|}{2\pi} \overline{\mathcal{F}_2 \psi_\lambda}(k \cos \vartheta, k \sin \vartheta) dk d\vartheta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{IR} |k| \int_0^\pi \mathcal{F}_1 \mathbf{R}_\theta f(k) \overline{\mathcal{F}_2 \psi_\lambda}(k \cos \vartheta, k \sin \vartheta) dk d\vartheta \end{aligned}$$

On retrouve la même décomposition que celle présentée par S.Izen, décrite dans la relation (5.1). S. Izen prend l'hypothèse que l'ensemble des dilatées-translatées doit former une structure oblique; ici, la base est orthonormée et les ondelettes choisies sont suffisamment régulières.

Un algorithme rapide

Cet algorithme est proposé par E.D. Kolaczyk dans [45]. Il fait le lien entre la décomposition en ondelettes vaguelettes de l'opérateur de Radon et l'opérateur de rétroprojection. Il écrit la formule d'inversion donnée dans le théorème 1.3 pour $\alpha = n - 1, n = 2$:

$$f = \mathcal{F}_2^{-1} \left(\frac{|k|}{4\pi} \mathcal{F}_2(\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f) \right)$$

En utilisant la relation $\langle \mathbf{R}f, \gamma_\lambda \rangle = \langle f, \psi_\lambda \rangle$, on obtient les coefficients de la décomposition en fonction de la rétroprojection des données $g = \mathbf{R}f$:

$$\langle \mathbf{R}f, \gamma_\lambda \rangle = \mathcal{F}_2^{-1} \left(\frac{|k|}{4\pi} \overline{\mathcal{F}_2 \psi_\lambda} \mathcal{F}_2(\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f) \right)$$

avec $\overline{\mathcal{F}_2 \psi_\lambda}(\omega) = \frac{1}{2^j} (\mathcal{F}_2 \psi^\varepsilon)(\frac{-\omega}{2^j})$, en prenant $\lambda = (j, k, \varepsilon)$. Dans cette formulation, le facteur $\mathcal{F}_2(\mathbf{R}^\# \mathbf{R}f)$ n'est calculé qu'une seule fois. L'algorithme pyramidal est donc :

1. Rétroprojection des données
2. FFT bidimensionnelle

3. Pour chaque niveau de résolution $j = C, \dots, J - 1$

- (i) Multiplication par la fonction $|\omega| \overline{\mathcal{F}_2 \psi_\lambda}(\omega), \omega \in \mathbb{R}^{2^j} \times \mathbb{R}^{2^j}$.
- (ii) FFT inverse bidimensionnelle (avec 2^j points dans chaque direction).
- (iii) Prendre un élément sur deux (comme dans l'algorithme de S. Mallat) pour ne retenir que 2^{j-1} points.
- (iv) $j := j - 1$ - retour à (i).

5.5 Localisation et inversion de la transformée de Radon en dimension paire

5.5.1 Localisation

Le résultat énoncé dans ce paragraphe est issu du travail de J. DeStefano et T. Olson ([20]). Ils rappellent le caractère non local de l'inversion de la transformée de Radon en dimension paire et l'importance de ce résultat pour la reconstruction à partir de données manquantes. Pour introduire un caractère local à l'inversion, les auteurs utilisent les ondelettes de I. Daubechies car elles sont bien localisées en temps et en fréquence. Les propriétés de localisation de ces ondelettes ne sont pas modifiées par une convolution. Dans ce cadre, la transformée en ondelettes discrète unidimensionnelle est utilisée; elle porte donc sur les projections $Rf(\theta, s)$, à θ fixé. La fonction f est supposée essentiellement bande limitée sur le cercle de rayon $r, r < \infty$. Les auteurs définissent l'opérateur F par : $F(\mathbf{R}f(\theta, s)) = \mathbf{R}f(\theta, s) \star \mathcal{F}_1^{-1}(|\sigma| \chi_{[-r, r]}(\sigma))(s)$, où $\mathcal{F}_1^{-1}(|\sigma| \chi_{[-r, r]}(\sigma))(s)$ est le filtre utilisé dans la rétroprojection filtrée. Celle-ci s'écrit :

$$f(x) = \int_{\mathbf{S}^1} \mathbf{R}f(\theta, \langle \theta, x \rangle) \star \mathcal{F}_1^{-1}(|\sigma| \chi_{[-r, r]}(\sigma))(\langle \theta, x \rangle) d\theta = \int_{\mathbf{S}^1} F(\mathbf{R}f(\theta, \langle \theta, x \rangle)) d\theta \quad (5.7)$$

La transformée de Radon est alors décomposée en ondelettes :

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(\theta) \phi_{\lambda}, \quad c_{\lambda}(\theta) = \langle \mathbf{R}_{\theta} f, \phi_{\lambda} \rangle \quad (5.8)$$

où $\lambda = j, k, \varepsilon$, avec $j \in \mathbb{N}$ (échelle), $k \in \mathbb{N}^2$ (translation), $\varepsilon = h, v, d$ (détail horizontal, vertical et diagonal). La relation (5.8) est injectée dans la relation (5.7) :

$$f(x) = \int_{\mathbf{S}^1} F\left(\sum_{\lambda} c_{\lambda}(\theta) \phi_{\lambda}(\langle \theta, x \rangle)\right) d\theta = \int_{\mathbf{S}^1} \sum_{\lambda} c_{\lambda}(\theta) F(\phi_{\lambda}(\langle \theta, x \rangle)) d\theta$$

Si l'ondelette est suffisamment régulière, le filtre conserve cette régularité. En fait, si le support de l'ondelette est suffisamment petit, c'est-à-dire si la résolution est suffisamment fine, alors la décomposition en ondelettes est locale, et l'inversion également. Pour les termes de faible résolution, ceci n'est plus vrai. Dans ce cadre, les auteurs poursuivent leur démarche en utilisant la représentation de la transformée de Radon en fonction des polynômes de Chebyshev donnée dans [59] :

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = (1 - s^2)^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} T_l(s) h_l(\theta) \quad (5.9)$$

où les $T_l(s)$ sont les polynômes de Chebyshev de première espèce et les $h_l(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques d'ordre l . Les coefficients de la décomposition sont réécrits en utilisant la relation (5.9) :

$$c_{\lambda}(\theta) = \langle \phi_{\lambda}(s), (1 - s^2)^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} T_l(s) h_s(\theta) \rangle$$

En utilisant l'isométrie de la transformée de Fourier on obtient :

$$c_{\lambda}(\theta) = \langle \mathcal{F}_1 \phi_{\lambda}(\sigma), \sum_{l=0}^{\infty} J_l(\sigma) h_l(\theta) \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \langle \mathcal{F}_1 \phi_{\lambda}(\sigma) J_l(\sigma) \rangle h_l(\theta) \quad (5.10)$$

où les $J_l(\sigma)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce. Les fonctions de Bessel approchent 0 dans des intervalles finis autour de 0. De plus si pour une faible résolution, le support de l'ondelette est très grand, ce qui est le cas, la transformée de Fourier de l'ondelette est bien localisée en fréquence et les valeurs de ψ_{λ} sont très faibles. Ainsi, la fonction de Bessel prend des valeurs non nulles là où ψ_{λ} est presque nulle et inversement. L'expression (5.10) n'a qu'un nombre fini de coefficients significatifs. Seuls les polynômes trigonométriques de faible degré contribuent au calcul des coefficients basse-résolution. La bande-limite

radiale de l'ondelette devient angulaire sur les coefficients de la décomposition en ondelettes.

Théorème 5.5 *Les coefficients d'ondelette $c_{m,n}(\theta)$, quand on les interprète comme des fonctions de la variable θ sont essentiellement bande-limités.*

Les reconstructions sont effectuées à partir de projections portant sur une région d'intérêt pour certaines positions angulaires et complètes pour les autres positions angulaires (voir figure 5.2). Les projections sont complétées en procédant à une interpolation selon la variable angulaire sur les coefficients de la décomposition des projections complètes.

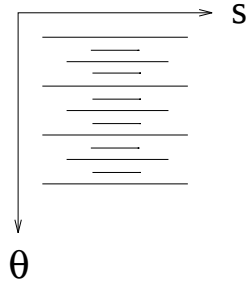


FIG. 5.2 - *Projections incomplètes*

Schéma de l'algorithme

Dans un premier temps, on calcule la décomposition en ondelettes discrètes des projections complètes et locales. Cette décomposition se traduit par un filtrage, phase décrite dans la section 4.6.

La seconde phase consiste à calculer les coefficients de basse résolution pour les angles où les données sont tronquées. Pour cela, on utilise les coefficients issus de la décomposition à partir des projections globales : les valeurs sont interpolées (il s'agit donc d'une interpolation selon la variable angulaire).

On calcule ensuite une transformée en ondelettes inverse, et enfin, un algorithme de reconstruction standard peut être appliqué, voir figure 5.3.

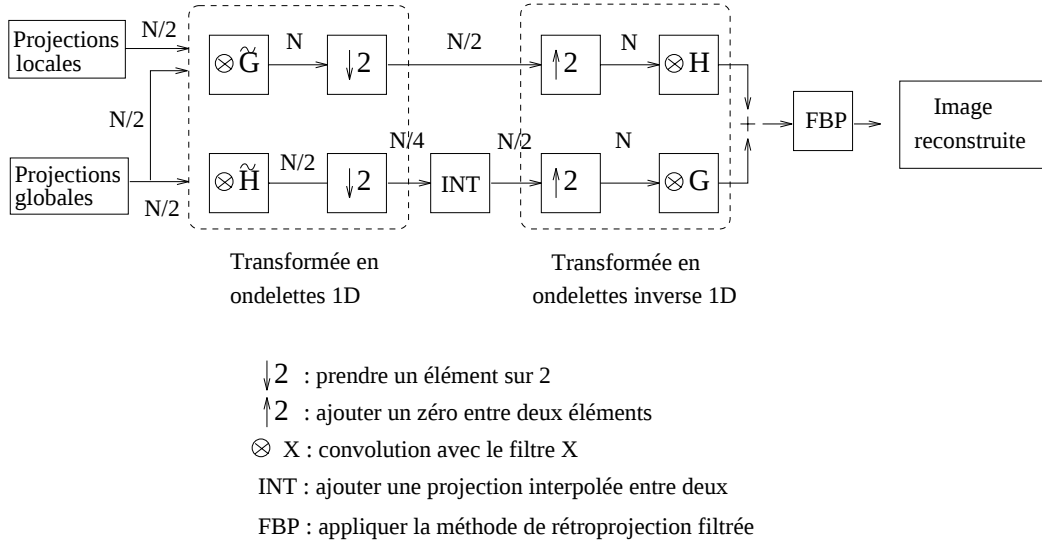


FIG. 5.3 - *Algorithme sur un niveau de résolution: on calcule la transformée en ondelettes discrète des projections fusionnées et des projections uniquement globales. Puis on estime à partir des coefficients issus de la seconde transformation les coefficients basse résolution, par une interpolation selon la variable angulaire. On calcule ensuite la transformée inverse et on peut alors reconstruire par un algorithme standard.*

5.5.2 Inversion locale de la transformée de Radon dans le plan

Cette méthode est proposée par D. Walnut ([78]). Il propose une formule de reconstruction “locale” de f à partir de $\mathbf{R}f$ basée sur la transformée en ondelettes continue. Pour reconstruire la fonction f au point x , seules les projections passant dans une région définie autour de x sont prises en compte. D. Walnut établit un lien entre la transformée en ondelettes continue des projections (unidimensionnelle par rapport à la variable radiale) et la transformée en ondelettes continue de la fonction (bidimensionnelle). Des estimations d’erreurs sont proposées pour la formule de reconstruction “locale”. Après avoir rappelé quelques résultats sur $\mathbf{R}f$ et les ondelettes, nous présentons la formule d’inversion établie par D. Walnut ainsi que les estimations d’erreurs correspondantes.

Résultats préliminaires sur la transformée de Radon

La formule de rétroprojection filtrée $\mathbf{R}^\#(k \star Rf) = f \star \mathbf{R}^\#k$, k étant un filtre défini sur $[0, 2\pi[\times IR$, est explicitée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{IR} k(\theta, s) \mathbf{R}f(\theta, x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta - s) ds d\vartheta \\ &= \int_{IR^2} f(y) \int_0^{2\pi} k(\theta, (x_1 - y_1) \cos \vartheta + (x_2 - y_2) \sin \vartheta) d\vartheta dy \end{aligned}$$

Résultats préliminaires sur les ondelettes

Dans un premier temps, on définit une ondelette Ψ radiale, admissible (voir la relation (4.3)) et bidimensionnelle. Pour calculer les coefficients, on forme la famille des fonctions dilatées et translatées : $\Psi_{a, \underline{b}}(x) = a^{-1} \Psi(\frac{x - \underline{b}}{a})$. On définit également $\Psi_{a, 0}(-x) = \tilde{\Psi}_a(x)$. La transformée en ondelettes continue de la fonction f dans IR^2 s’écrit :

$$W(\Psi, f)(a, \underline{b}) = \int_{IR^2} f(x) \overline{\Psi_{a, \underline{b}}(x)} dx = (f \star \tilde{\Psi}_a)(\underline{b}), \underline{b} \in IR^2, a > 0$$

Définition 5.2 Soient deux fonctions Φ et Ψ définies sur $\mathbb{R}^2$. Elles forment une paire d'ondelettes admissible si les deux fonctions sont admissibles et si :

$$\int_0^\infty \overline{\mathcal{F}_2 \Psi(\sigma \cos \vartheta, \sigma \sin \vartheta)} \mathcal{F}_2 \Phi(\sigma \cos \vartheta, \sigma \sin \vartheta) \frac{d\sigma}{\sigma} = 1, \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi[$$

Le lemme suivant fournit la formule de reconstruction :

Lemme 5.3 Soient Φ et Ψ une paire d'ondelettes radiales, admissibles, $\in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit f définie sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, et soient δ et ϵ tels que $0 < \epsilon < \delta < \infty$. On définit :

$$f^{\epsilon, \delta}(x) = \int_\epsilon^\delta \int_0^\infty W(\Psi, f)(a, \underline{b}) \Phi_{a, \underline{b}}(x) \frac{1}{a^3} d\underline{b} da$$

Alors $f^{\epsilon, \delta} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et

$$\mathcal{F}_2 f^{\epsilon, \delta}(\xi) = \mathcal{F}_2 f(\xi) \int_\epsilon^\delta \frac{\overline{\mathcal{F}_2 \Psi(a|\xi|)} \mathcal{F}_2 \Phi(a|\xi|)}{a} da$$

Lemme 5.4 Soient Φ et Ψ une paire d'ondelettes radiales, admissibles, $\in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, alors :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow \infty} \|f - f^{\epsilon, \delta}\|_2 = 0$$

Remarque : pour des ondelettes Ψ et Φ admissibles, radiales si $\delta \rightarrow \infty$, les basses fréquences de f sont reconstruites, et si $\epsilon \rightarrow 0$, ce sont les hautes fréquences qui sont reconstruites. La convergence est étudiée dans le lemme suivant :

Lemme 5.5

$$B_1 = \int_0^\infty \frac{|\mathcal{F}_2 \Psi(r)|^2}{r} dr, \quad B_2 = \int_0^\infty \frac{|\mathcal{F}_2 \Phi(r)|^2}{r} dr \quad (5.11)$$

On définit $\eta > 0$ et $A > 0$ tels que :

$$\int_A^\infty \frac{|\mathcal{F}_2 \Psi(r)|^2}{r} dr < \eta, \quad \int_A^\infty \frac{|\mathcal{F}_2 \Phi(r)|^2}{r} dr < \eta$$

Alors, si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\|f - f^{\epsilon, \delta}\|_2 \leq c_0(\epsilon) + \eta \|f\|_2 + c_1(f, \delta)$$

avec $c_1(f, \delta)^2 = B_1 B_2 \int_{|\xi| \leq A/\delta} |\mathcal{F}_2 f(\xi)|^2 d\xi$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_0(\epsilon) = 0$.

Si $\delta \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$, on retrouve la formule de reconstruction de f à partir de ses coefficients d'ondelettes. Les estimations d'erreurs sur f sont exprimées en fonction de δ et ϵ , ces paramètres faisant apparaître la localité. Plus δ est grand et ϵ petit, plus la région autour de x sera grande pour reconstruire la fonction f au point x .

Inversion de la transformée de Radon

Pour aboutir à l'inversion, un lien doit être établi entre la transformée en ondelettes des projections et la transformée en ondelettes de la fonction à reconstruire. D. Walnut et C. Berenstein proposent d'établir un lien direct entre les deux ondelettes (unidimensionnelle et bidimensionnelle). Ils utilisent le résultat suivant, exprimé ici en dimension $n = 2$, ([7]) :

Lemme 5.6 *Une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ est radiale s'il existe une fonction f_0 définie sur $[0, +\infty[$ telle que $f(x) = f_0(|x|)$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ est radiale, alors $\mathcal{F}_2 f$ l'est aussi. Dans ce cas, $\mathcal{F}_2 f(\xi) = F_0(|\xi|)$ et $f \in \{f, \mathcal{F}_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)\}$, alors*

$$f_0(r) = 2\pi \int_0^\infty t F_0(t) J_0(2\pi r t) dt$$

Ils définissent une ondelette sur $\mathbb{R}$, admissible et radiale, telle que :

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi[} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}_1 \psi_\theta(\sigma)|^2}{\sigma^3} d\sigma < \infty \quad (5.12)$$

Soit Ψ une ondelette admissible dans $\mathbb{R}^2$ et radiale. On écrit la décomposition de f :

$$W(\Psi, f)(a, \underline{b}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\Psi_{a, \underline{b}}(x)} dx = (f * \tilde{\Psi}_a)(\underline{b}), \underline{b} \in \mathbb{R}^2, a > 0$$

La fonction ψ_θ est liée à Ψ par :

$$\Psi(x) = 4\pi \int_0^\infty \mathcal{F}_1 \psi_\theta(\sigma) J_0(2\pi \sigma |x|) d\sigma$$

ou dans l'espace fréquentiel par :

$$\mathcal{F}_1 \mathbf{R}_\theta \Psi(\sigma) = \mathcal{F}_2 \Psi(\sigma \cos \theta, \sigma \sin \theta) = 2\mathcal{F}_1 \psi_\theta(\sigma) |\sigma|^{-1}, \sigma \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi[\quad (5.13)$$

Par conséquent, on a la relation : $\Psi(x) = \int_0^{2\pi} \psi_\theta(x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta) d\vartheta = \mathbf{R}^\# \psi_\theta$.

On a la formule de reconstruction suivante :

$$W(\Psi, f)(a, b) = a^{-1/2} \int_0^{2\pi} W(\psi_\theta, R_\theta f)(a, b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta) d\vartheta$$

La démonstration des résultats énoncés se trouve dans [7, 78].

Formule locale de reconstruction

Le principal résultat est le théorème donnant la formule de reconstruction “locale” :

Théorème 5.6 *Soit $\{\psi_\theta\}_{\theta \in [0, \pi[}$ une famille de fonctions paires, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admissibles sur $\mathbb{R}$, vérifiant la relation (5.12), telle que la fonction ψ_θ s’annule en dehors de l’intervalle $[-1, +1]$ pour tout $\theta \in [0, \pi[$. Soit Ψ une ondelette admissible définie par l’expression (5.13) et soit Φ une autre ondelette admissible telle que la paire Ψ, Φ forme une paire d’ondelette admissibles. La décomposition par la transformée en ondelettes continue s’écrit :*

$$W(\Psi, f)(a, b) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{S}^1} W(\psi, \mathbf{R}_\theta f)(a, \langle b, \theta \rangle) d\theta$$

De plus, la fonction $f_R^{\epsilon, \delta}(x)$ avec $R > 0, 0 < \epsilon < \delta < \infty, \theta \in [0, 2\pi[$ est le résultat de la reconstruction à partir des coefficients d’ondelettes précédents selon :

$$f_R^{\epsilon, \delta}(x) = \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^\delta a^{-1/2} \int_{|\underline{b}| \leq R+\delta} W(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(a, b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta) \Phi_{a, \underline{b}}(x) \frac{1}{a^3} db d\vartheta da d\theta \quad (5.14)$$

On a dans ce cas également un résultat de convergence :

Théorème 5.7 *Etant donné $\eta > 0, \exists A > 0$ tel que $\forall R > 0$ et $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, on a :*

$$\left(\int_{B(0, R)} |f(x) - f_R^{\epsilon, \delta}(x)|^2 dx \right)^{1/2} = c_0(\epsilon) + \eta \|f\|_2 + (B_1 B_2)^{1/2} \left(\int_{|\xi| \leq A/\delta} |\mathcal{F}_2 f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

B_1, B_2, c_0 sont définis dans les relations (5.11) et (5.5).

ψ_θ s'annule en dehors de $[-1, +1]$ donc $(\tilde{\psi}_\theta)_a$ s'annule en dehors de $[-\delta, \delta]$, $a \in [0, \delta]$. Donc :

$$\mathbf{R}_\theta f \star (\tilde{\psi}_\theta)_a(s) = \int_{-\delta}^{+\delta} \mathbf{R}_\theta f(s-t)(\tilde{\psi}_\theta)_a(t)dt = \int_{s-\delta}^{s+\delta} \mathbf{R}_\theta f(u)(\tilde{\psi}_\theta)_a(s-u)du$$

On en déduit alors la formule locale de reconstruction :

Théorème 5.8 *Soit $\psi_\theta \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, admissible, et paire, telle qu'elle satisfait les relations :*

$$\left| \frac{d^k}{d\sigma^k} \mathcal{F}_1 \psi_\theta(\sigma) \right| \leq C(1+|\sigma|)^{-2}, \quad \frac{d^k}{d\sigma^k} \mathcal{F}_1 \psi_\theta(0) = 0$$

Soit Ψ définie comme précédemment, et soit Φ à valeurs réelles, radiale, telle que le support de Φ est contenu dans la boule unité, et telle que la paire Ψ, Φ soit admissible. Alors, pour $\alpha > 0, \theta \in \mathbf{S}^1, f \in L^1 \cap L^2$, on définit :

$$W_\alpha(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(a, s) = W(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(a, s) \chi_{[-\alpha, \alpha]}(s)$$

et pour $R > 0, 0 < \epsilon < \delta$, on définit :

$$f_R^{\epsilon, \delta}(x) = \int_{\mathbf{S}^1} \int_{\epsilon}^{\delta} a^{-1/2} \int_{|b| \leq R+\delta} W_{R+\delta}(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(a, b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta) \Phi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^3} d\vartheta$$

Alors :

$$f_R^{\epsilon, \delta}(x) = f^{\epsilon, \delta}(x), \text{ pour } |x| \leq R$$

On a alors uniquement besoin des projections se trouvant dans l'intervalle $[s - \delta, s + \delta]$ pour calculer le produit de convolution. Ainsi, pour calculer $W(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta)$, on a besoin des projection $\mathbf{R}_\theta f(u)$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $u \in [-R - 2\delta, R + 2\delta]$ (on utilise $|\underline{b}| \leq R + \delta \Rightarrow |b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta| \leq |R + \delta|$). Le calcul de $f_R^{\delta}(x)$, avec $a \in [0, \delta], \theta \in [0, 2\pi[$ requiert les projections de f se trouvant dans une boule centrée en l'origine de rayon $R + 2\delta$. Plus δ est grand, plus la précision est grande également.

Le dernier résultat donne une méthode pour construire une ondelette ψ à partir de l'ondelette bidimensionnelle Ψ radiale et admissible.

Lemme 5.7 *Soit $\Psi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, radiale, admissible, à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un entier $M \geq 2$ tel que $\mathcal{F}_2 \Psi$ ait des dérivées continues*

jusqu'à l'ordre M ; plus précisément, on a :

$$\left| \frac{d^k}{dr^k} \mathcal{F}_2 \Psi(r) \right| \leq C(1 + |r|)^{-3}, \quad k = 0, \dots, M$$

et on suppose que :

$$\frac{d^k}{dr^k} \mathcal{F}_2 \Psi(0) = 0, \quad k = 0, \dots, M - 2$$

On définit alors ψ par :

$$\psi(t) = \int_0^\infty \mathcal{F}_2 \Psi(\sigma) \sigma \cos(2\pi t \sigma) d\sigma$$

Alors ψ est réelle, radiale, admissible telle que :

$$\mathbf{R}^\# \psi = \Psi$$

5.6 Maillages adaptatifs

Notre approche est similaire à celle présentée au chapitre 3. Nous émettons toujours l'hypothèse que nous disposons d'information a priori, donnée sous la forme d'un jeu de mesures complet basse résolution. Cette information vient compléter le jeu de mesures locales haute résolution. Les deux jeux de mesure ont été préalablement mis en correspondance.

Un coefficient de décomposition de f se calcule par :

$$W(\Psi, f)(a, b) = \langle \mathbf{R}_\theta f, k * \mathbf{R}_\theta \Psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbf{S}^1} \int_{[-1, +1]} \mathbf{R}_\theta f(s) (k * \mathbf{R}_\theta \Psi_{a,b})(s) ds d\theta$$

cette formule se discrétise en :

$$W(\Psi, f)(a, b_k) = \sum_{i=0}^{NR} \sum_{j=0}^{NT} g_{ij} k * \mathbf{R}_{\theta_i} \Psi_{a, b_k}(s_j)$$

où NR est le nombre de projections et NT le nombre de mesures par projection, et g_{ij} est la mesure numéro $i * NT + j$. Les mesures g_{ij} sont le résultat de la fusion des deux jeux de mesures complet et local. La fusion est effectuée de la même manière que dans le chapitre 3 : si pour une position de source donnée, seules les mesures locales sont disponibles, alors les mesures sont interpolées

(suivant la basse résolution) pour obtenir des données complètes. Cette partie est décrite dans la section 3.6. La convolution $k * \mathbf{R}_{\theta_i} \Psi_{a,b_k}$ est calculée en tenant compte de la double résolution également. Enfin la double résolution apparaît dans l'image reconstruite. Le paramètre de translation $b = (b_x, b_y)^t$ est discrétisé sur deux grilles d'échantillonnage, la grille correspondant à la région d'intérêt étant plus fine. Le filtre étant ici localisé en temps, la différence de densité à la frontière de la région d'intérêt s'atténue.

5.7 Implémentation

Nous avons effectué trois séries de tests.

- La première consiste à calculer la décomposition de la fonction f en ondelettes, c'est à dire $W(f, \Psi)(a, b)$ à partir des projections complètes $\mathbf{R}f(s, \theta)$.
- La seconde consiste à calculer la décomposition locale de f à partir de la décomposition en ondelettes des projections :
$$W_\alpha(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(a, s) = W(\psi_\theta, \mathbf{R}_\theta f)(a, s) \chi_{[-\alpha, \alpha]}(s).$$
- La troisième consiste à utiliser notre approche et à introduire deux jeux de données (complet et local à des résolutions différentes) et à obtenir une décomposition en ondelettes avec deux résolutions également.

Pour tous les résultats, l'ondelette utilisée est l'ondelette chapeau mexicain. Elle est invariante par rotations, sa transformée de Radon est identique pour chaque valeur de θ . La figure 5.4 montre la largeur du support selon la variable radiale de la transformée de Radon de l'ondelette. Pour une échelle de 1, le support est approximativement compris dans l'intervalle $[-5, 5]$.

On observe également que le support de la transformée de Fourier du chapeau mexicain est inclus dans l'intervalle $[-5, 5]$, pour une échelle $a = 1$. Donc pour une échelle $a = \frac{1}{2^i}, i \in \mathbb{N}$, le support de la transformée de Fourier du

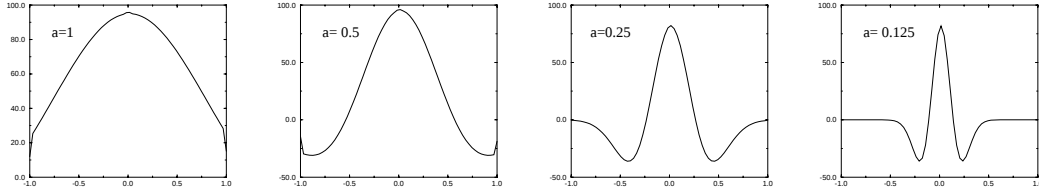


FIG. 5.4 - *Evolution du support de la transformée de Radon de Ψ en fonction du paramètre d'échelle a*

chapeau mexicain est inclus dans l'intervalle $[-2^i * 5, 2^i * 5]$. La figure 5.5 montre l'évolution du support de la transformée de Fourier du chapeau mexicain en fonction de l'échelle a . Nous notons dans la suite C une fréquence de coupure

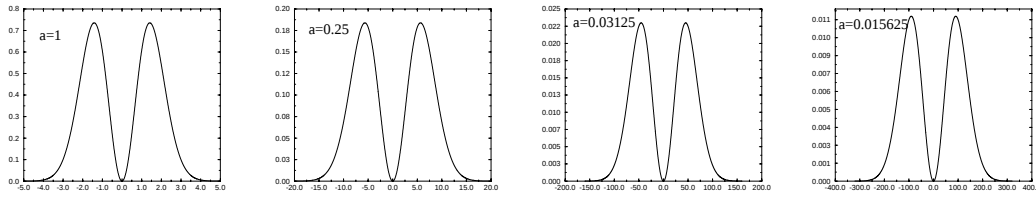


FIG. 5.5 - *Evolution du support de la transformée de Fourier de Ψ en fonction du paramètre d'échelle a*

possible pour chapeau mexicain. Par exemple $C = 20$ pour $a = \frac{1}{4}$.

5.7.1 Première série

Les décompositions sont donc effectuées à partir des projections complètes de la fonction. Deux formules ont été discrétisées.

La première méthode se réfère aux travaux de S.Izen ([42]). La décomposition en ondelettes de la fonction f s'écrit en fonction de la transformée de Fourier des projections :

$$W(f, \Psi)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| \int_{\mathbf{S}} \overline{\mathcal{F}_1 \mathbf{R} f(\sigma, \theta)} \mathcal{F}_2 \Psi_{a,b}(\sigma \cos \vartheta, \sigma \sin \vartheta) d\vartheta d\sigma$$

avec $\theta = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t$.

Cette méthode fait intervenir également la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'ondelette. Cette transformée de Fourier est calculée analytiquement, alors que la transformée de Fourier des projections se calcule par une transformée de Fourier discrète. Nous avons testé cette méthode sur un exemple simple, l'indicatrice sur un carré centré de côté 1, χ_c , pour ainsi calculer de manière analytique la transformée de Fourier des projections (en utilisant le théorème de coupe-projection) : $\mathcal{F}_1 \mathbf{R} \chi_c(\sigma, \theta) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_2 \chi_c(\sigma \cos \theta, \sigma \sin \theta) = \text{sinc}(\frac{\sigma \cos \theta}{2}) \text{sinc}(\frac{\sigma \sin \theta}{2})$.

La seconde méthode se réfère aux travaux de D. Walnut et à ceux de F. Peyrin. La décomposition en ondelettes de la fonction f s'écrit en fonction de ses projections :

$$W(f, \Psi)(a, b) = \int_{\mathbf{S}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_\theta f(s) (k * \mathbf{R}_\theta \Psi_{a,b})(s) ds d\theta = \langle \mathbf{R}_\theta f, k * \mathbf{R}_\theta \Psi_{a,b} \rangle$$

point de vue pratique, si on note $\eta = b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta$, on a :

- $\mathbf{R} \Psi_{a,b}(\theta, s) = \mathbf{R} \Psi_a(\theta, s - \eta)$, avec $\Psi_a(x) = \frac{1}{a} \Psi(\frac{x}{a})$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$.
- $(k * \mathbf{R}_\theta \Psi_{a,b})(s) = (k * \mathbf{R}_\theta \Psi_a)(s - \eta)$.

Les décompositions sont calculées pour des échelles a fixées.

Dans les deux cas, la reconstruction de f à partir de ses coefficients d'ondelettes est :

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} W(f, \Psi)(a, b) \Psi_{a,b}(x, y) \frac{da}{a^3} db$$

Nous avons décomposé f suivant quelques valeurs de a . La reconstruction en fonction de ces valeurs permet de calculer $f^{\epsilon, \delta}$:

$$f^{\epsilon, \delta}(x, y) = \int_{\epsilon}^{\delta} \int_{\mathbb{R}^2} W(f, \Psi)(a, b) \Psi_{a,b}(x, y) \frac{da}{a^3} db \quad (5.15)$$

Résultats

La figure 5.6 montre un exemple de décomposition de l'indicatrice d'un carré à partir de ses projections calculée avec les deux méthodes. Il s'avère que

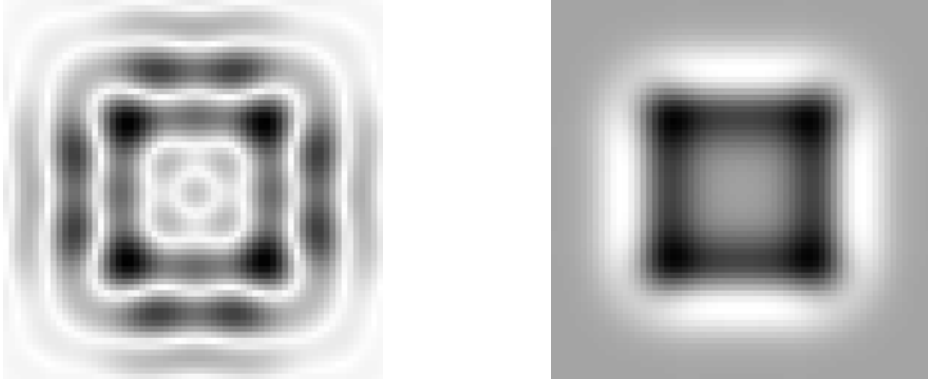


FIG. 5.6 - *Gauche : décomposition à l'échelle $\frac{1}{4}$ à partir des projections dans l'espace des fréquences - Droite : décomposition à l'échelle $\frac{1}{4}$ à partir des projections dans l'espace direct.*

la seconde méthode est nettement meilleure que la première. Les tests suivants seront donc effectués avec la seconde méthode.

Les résultats suivants représentent dans un premier temps des décompositions de la fonction de référence à partir de ses projections. La figure 5.7(gauche) représente la fonction de référence et la figure 5.7(droite) représente son sinogramme.



FIG. 5.7 - *Gauche : image de référence - Droite : sinogramme associé*

Pour chaque décomposition, le nombre de mesures est 64×64 et le nombre de pixels est également 64×64 . Les décompositions sont effectuées pour des valeurs de l'échelle a égales successivement à $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$. Elles sont représentées

sur la figure 5.8.

Remarque : pour une échelle $a \leq \frac{1}{64}$, on observe un recouvrement de spectre. En effet, nous discrétisons l'intervalle $[-1, 1]$ en 64 points, soit un pas de discrétisation $h = \frac{1}{32} = 0.03125$. Pour ne pas avoir de recouvrement de spectre, nous devons satisfaire la relation $h \leq \frac{2\pi}{C}$, C étant la fréquence de coupure du chapeau mexicain définie précédemment. Elle est vérifiée pour $C \leq 200$, et donc pour $a > \frac{1}{64}$.

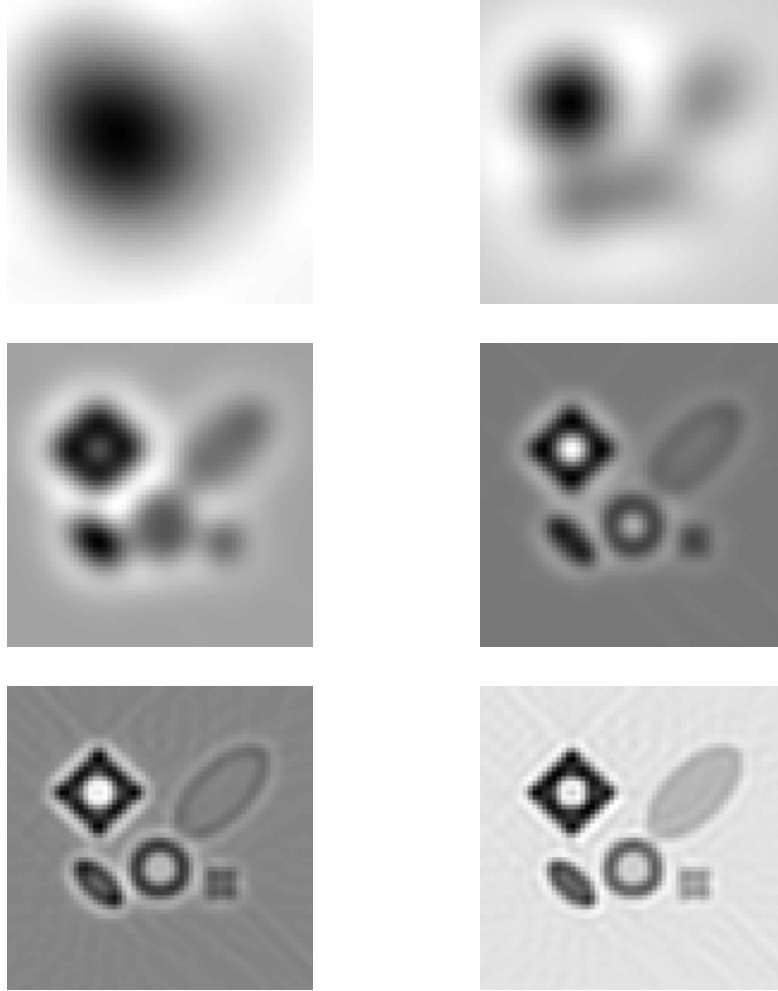


FIG. 5.8 - Décomposition de la fonction test à partir de 64×64 mesures sur 64×64 pixels. Première ligne : $a = \frac{1}{2}$ (gauche) et $a = \frac{1}{4}$ (droite). Seconde ligne : $a = \frac{1}{8}$ (gauche) et $a = \frac{1}{16}$ (droite). Troisième ligne : $a = \frac{1}{32}$ et $a = \frac{1}{64}$ (droite).

Les résultats suivants montrent des reconstructions hiérarchiques de $f^{\epsilon, \delta}$ (voir

la relation 5.15) pour des valeurs de a discrètes. Les reconstructions prennent successivement les décompositions précédentes. Les résultats sont visualisés sur la figure 5.9. Les reconstructions ne sont pas très satisfaisantes. Il faudrait tenir compte de beaucoup plus de coefficients de décomposition (à d'autres échelles que celles déjà calculées) pour améliorer la qualité de l'image. Ceci augmenterait le coût du calcul, déjà relativement élevé.

5.7.2 Seconde série

Nous avons calculé des décompositions en ondelettes locales à partir de projections locales. Nous avons utilisé la même formule que dans la première série mais avec des projections locales. Le rayon de la zone d'intérêt est 0.5.

$$W_{0.5}(\Psi, f)(a, b) = a^{-1/2} \int_{\mathbf{S}} W_{0.5}(\psi_{\theta}, \mathbf{R}_{\theta} f)(a, \langle b, \theta \rangle) d\theta$$

avec

$$W_{0.5}(\Psi, \mathbf{R}_{\theta} f)(a, s) = W(\psi_{\theta}, \mathbf{R}_{\theta} f)(a, s) \chi_{[-0.5, 0.5]}(s)$$

Résultats

- La figure 5.10 représente 4 décompositions à partir des projections locales aux échelles $a = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ respectivement et une reconstruction effectuée à partir de ces 4 décompositions. L'image comporte 64×64 pixels et les décompositions sont calculées à partir de 64×64 mesures.
- La figure 5.11 représente 3 décompositions à partir des projections locales aux échelles $a = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ respectivement et une reconstruction effectuée à partir de ces 3 décompositions. L'image comporte 128×128 pixels et les décompositions sont calculées à partir de 128×128 mesures.

Remarque : pour éviter un éventuel recouvrement de spectre, nous n'avons pas calculé des coefficients pour des échelles trop petites.

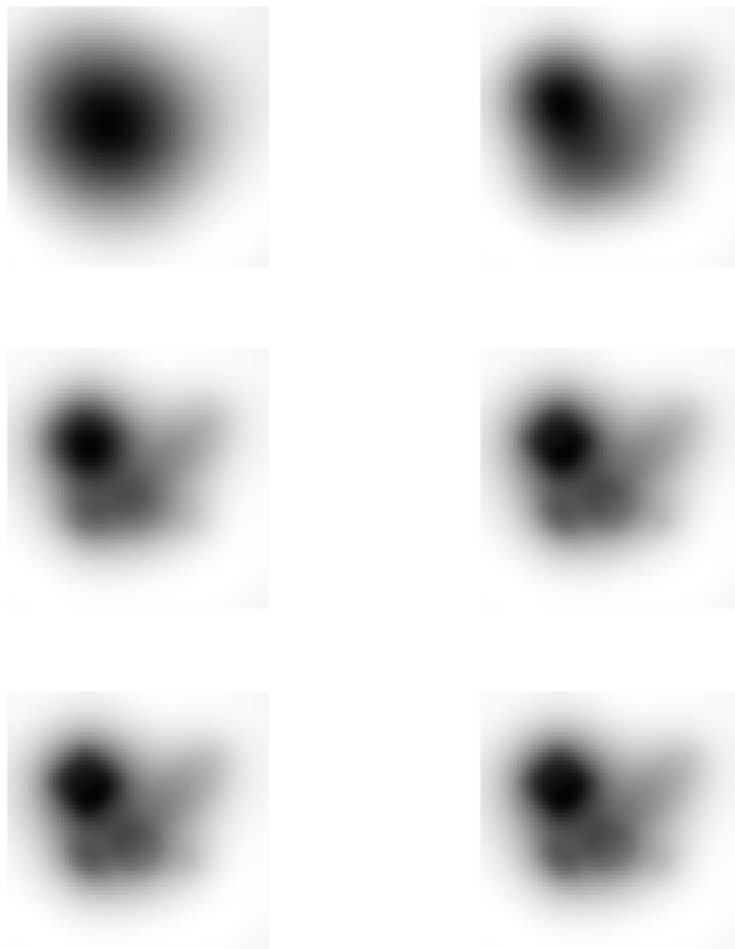


FIG. 5.9 - *Reconstruction de la fonction $f^{\epsilon, \delta}$ à partir de 64×64 mesures sur 64×64 pixels. Première ligne : $a \in \{\frac{1}{2}\}$ (gauche) et $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$ (droite). Seconde ligne : $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$ (gauche) et $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\}$ (droite). Troisième ligne : $a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\}$ (gauche) et $a = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\}$ (droite).*

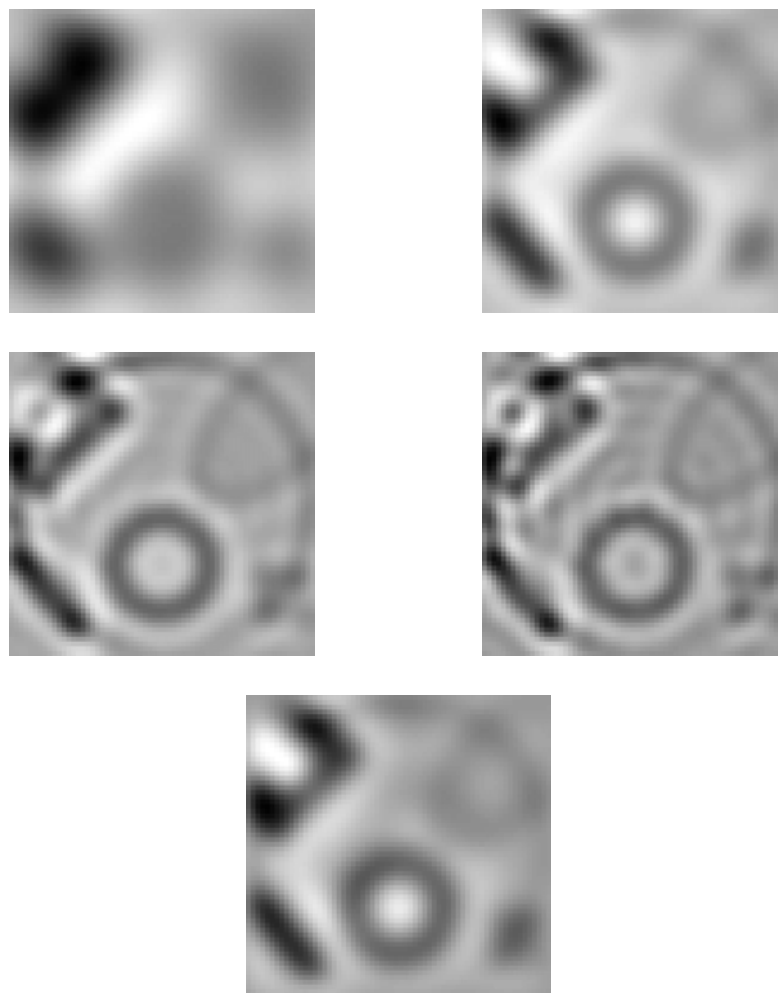


FIG. 5.10 - *Première et seconde ligne : décompositions à partir des projections locales aux échelles $a = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ respectivement - Troisième ligne : reconstruction à partir des 4 décompositions.*

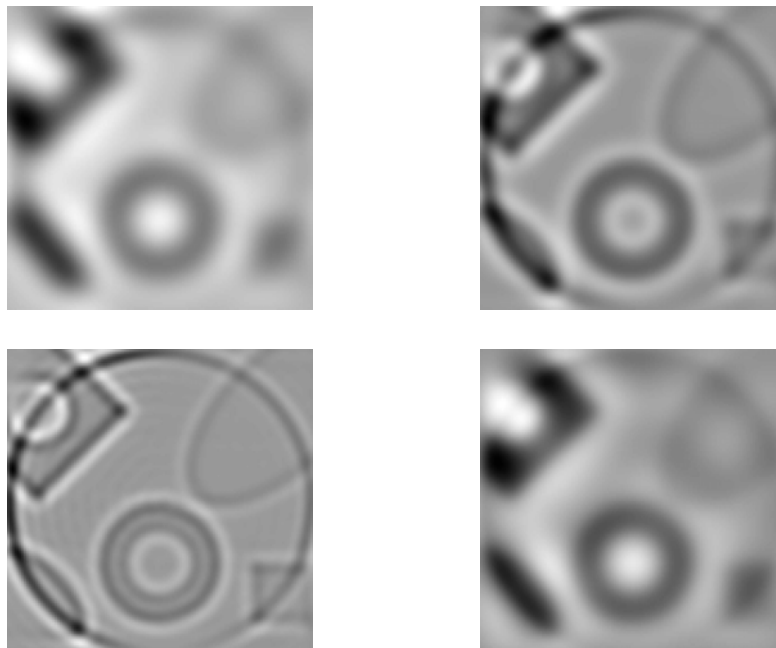


FIG. 5.11 - *Première et seconde ligne (gauche): décompositions à partir des projections locales aux échelles $a = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ respectivement - Seconde ligne (droite): reconstruction à partir des 3 décompositions.*

5.7.3 Troisième série

Comme dans le chapitre 3, les mesures sont données sur deux niveaux de résolution avec une résolution plus fine dans la région d'intérêt. Nous disposons donc de deux jeux de mesures, l'un couvrant $\mathbf{S} \times [-1, +1]$ de faible résolution et l'autre couvrant $\mathbf{S} \times [-0.5, +0.5]$ à haute résolution. La fonction reconstruite possède une résolution fine sur le disque centré de rayon 0.5 et plus grossière autour. Nous rappelons qu'un coefficient de décomposition de f à partir de ses projections se calcule par la relation :

$$W(\Psi, f)(a, b_k) = \sum_{i=0}^{NR_f} \sum_{j=0}^{NT_f} g_{ij} . k * \mathbf{R}_{\theta_i} \Psi_{a, b_k}(s_j)$$

Le premier terme g_{ij} est une mesure appartenant au vecteur des données après mise en correspondance. Le second terme, analytique est calculé au point voulu, suivant la discrétisation. La bande du filtre k est adaptée à la discrétisation et interpolée à la frontière de la région d'intérêt. La convolution s'écrit :

$$k * \mathbf{R}_{\theta} \psi_{a, b}(s) = \int_{\mathbb{R}} k(s - \eta - t) \mathbf{R}_{\theta} \Psi_a(t) dt$$

avec $\Psi_a(x, y) = \frac{1}{a} \Psi(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$ et $\eta = b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta$, b_1 et b_2 étant les paramètres de translation dans la transformée en ondelette.

Décomposition : résultats

Deux séries de tests sont présentées correspondant à des résolutions différentes avec, dans chaque série, les décompositions suivant des valeurs d'échelle a égales à $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, et la reconstruction prenant en compte les 5 échelles. Pour la première série nous disposons de 32×32 mesures pour le jeu complet et 64×64 mesures pour le jeu local. Le nombre de pixels est alors 64×64 dans la région d'intérêt et 32×32 autour. Nous montrons des décompositions sur deux jeux de données simulées. Les figures 5.12 et 5.13 représentent les 5 décompositions effectuées pour la première série pour les deux jeux de mesures.

Remarque : dans pour les résultats précédents, nous ne calculons pas au delà de l'échelle $a = \frac{1}{64}$ afin d'éviter le recouvrement des spectres. En effet, pour la

grille globale, le pas de discrétisation est $h = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$. La fréquence de coupure doit satisfaire $h \leq \frac{2\pi}{C}$ et donc $C \leq 100$ (de manière approximative). Ainsi il y a recouvrement pour $a \leq \frac{1}{32}$. Nous avons néanmoins calculé la décomposition pour $a = \frac{1}{64}$ car dans ce cas, il n'y a pas recouvrement sur la grille globale. En effet, sur cette grille il y a recouvrement pour des échelles $a \leq \frac{1}{128}$. La décomposition pour $a = \frac{1}{64}$ est satisfaisante, alors que pour des échelles plus petites, on observe assez nettement le recouvrement.

Pour la seconde série, le nombre de données locales ainsi que la résolution est identique. Nous augmentons le nombre de données du jeu complet, qui passe à 64×64 pour un nombre de pixels égal (64×64). La figure 5.14 représente les 6 décompositions effectuées pour la seconde série. Pour éviter à nouveau le recouvrement des spectres, nous avons calculé les décompositions pour $a \leq \frac{1}{64}$.

5.8 Conclusion

Nous avons présenté un état de l'art détaillé sur les méthodes de reconstruction en tomographie et en tomographie locale liées aux méthodes d'ondelettes. Le résultat marquant de l'ensemble de ces techniques est la localisation en temps du filtre, ce qui n'est pas le cas dans la méthode classique de rétroprojection filtrée. La méthode de D. Walnut se rapproche ainsi de la tomographie locale. Nous avons également présenté notre approche pour résoudre un problème local, basé sur l'introduction d'information a priori basse résolution. Les résultats obtenus pour cette méthode sont très encourageants. Les décompositions sont, pour des échelles petites, très proches de l'image initiale. Néanmoins il serait difficile de calculer des estimations d'erreurs comme dans le chapitre 3. La fonction reconstruite avec une telle méthode est la fonction définie par D. Walnut, $f^{\epsilon, \delta}$ et non pas f . Il reste donc à étudier dans quelle mesure la fonction $f^{\epsilon, \delta}$ peut approcher f . Ces méthodes, quelqu'elles soient, sont coûteuses. Le chapitre suivant est consacré à la mise en oeuvre parallèle de certains algorithmes.

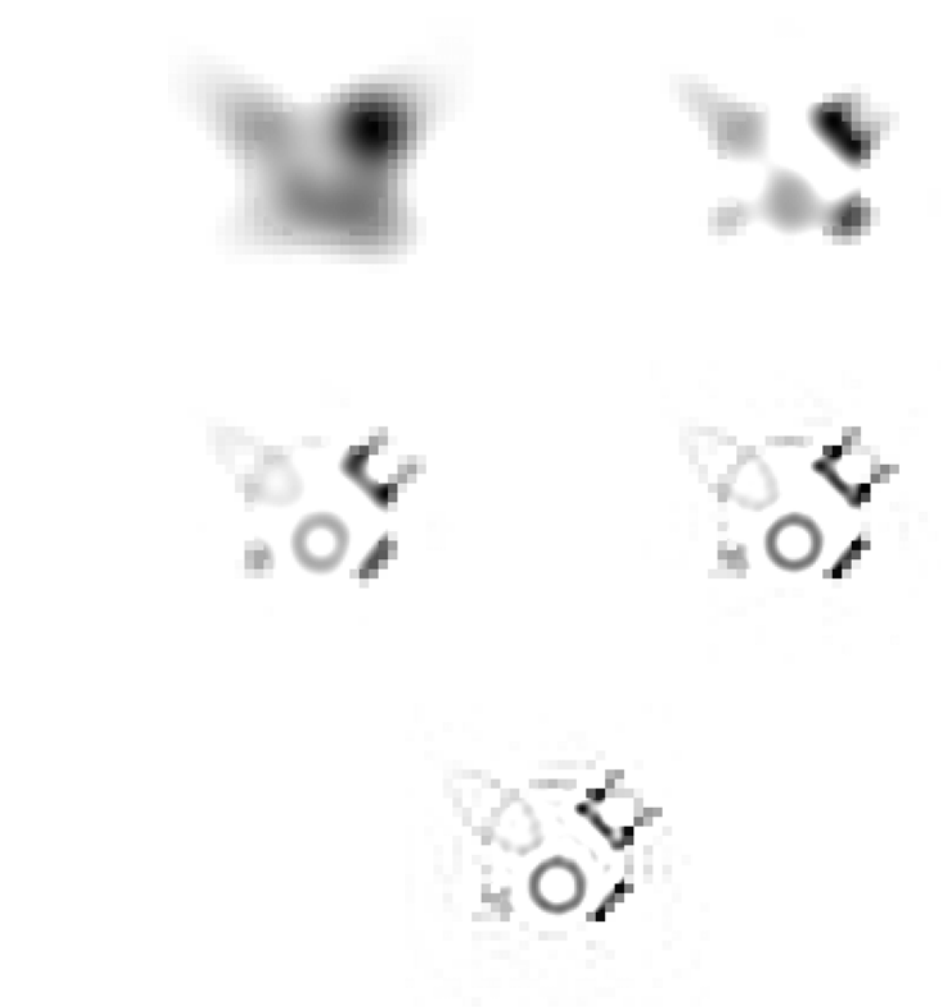


FIG. 5.12 - *Décomposition de la fonction test à partir de 64×64 mesures locales et 32×32 mesures pour le jeu de mesures complet. Le nombre de pixels est 64×64 pixels dans la région d'intérêt et 32×32 autour. Première ligne : $a = \frac{1}{4}$ (gauche) et $a = \frac{1}{8}$ (droite). Seconde ligne : $a = \frac{1}{16}$ (gauche) et $a = \frac{1}{32}$ (droite). Troisième ligne : $a = \frac{1}{64}$.*

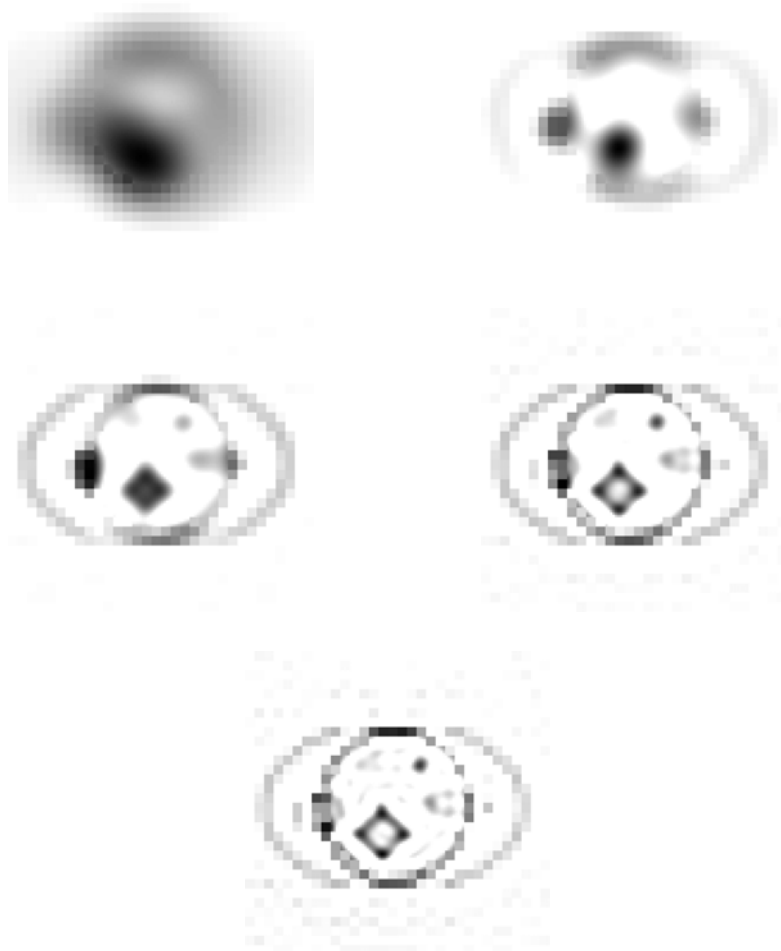


FIG. 5.13 - *Décomposition de la fonction test à partir de 64×64 mesures locales et 32×32 mesures pour le jeu de mesures complet. Le nombre de pixels est 64×64 pixels dans la région d'intérêt et 32×32 autour. Première ligne : $a = \frac{1}{4}$ (gauche) et $a = \frac{1}{8}$ (droite). Seconde ligne : $a = \frac{1}{16}$ (gauche) et $a = \frac{1}{32}$ (droite). Troisième ligne : $a = \frac{1}{64}$.*

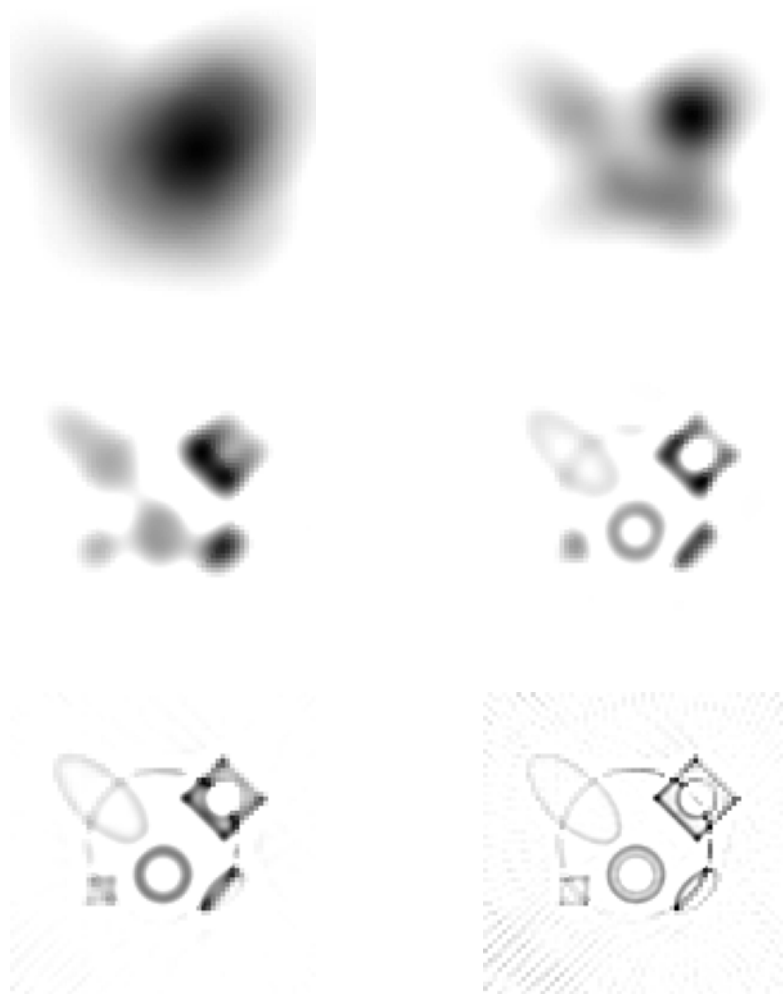


FIG. 5.14 - *Décomposition de la fonction test à partir de 64×64 mesures locales et 64×64 mesures pour le jeu de mesures complet. Le nombre de pixels est 64×64 pixels dans la région d'intérêt et 64×64 autour. Première ligne : $a = \frac{1}{2}$ (gauche) et $a = \frac{1}{4}$ (droite). Seconde ligne : $a = \frac{1}{8}$ (gauche) et $a = \frac{1}{16}$ (droite). Troisième ligne : $a = \frac{1}{32}$ (gauche) et $a = \frac{1}{64}$ (droite).*

Chapitre 6

Mise en oeuvre parallèle sur un CRAY T3D

Etant donnés les temps de calcul et le nombre de données à stocker, nous avons implémenté certaines méthodes (les plus coûteuses) sur une machine massivement parallèle, le CRAY T3D, associée à une bibliothèque de communications par échanges de messages “Parallel Virtual Machine” (PVM). Après une brève description de la machine et des outils utilisés (pour plus d’informations, se reporter à [1] et à [8]), nous présenterons les différentes implémentations effectuées, et enfin pour chacune, les performances obtenues. L’algorithme parallélisé le plus coûteux est le gradient conjugué régularisé. Il fait intervenir des produits matrice-vecteur et matrice transposée-vecteur. Nous présentons deux approches pour le calcul des matrices et des produits associés.

6.1 Présentation de la machine et de PVM

6.1.1 Le CRAY T3D

La machine sur laquelle ont été effectués les tests est constituée de 128 processeurs. Chaque processeur possède sa propre mémoire et les connections nécessaires pour communiquer avec n’importe quel autre processeur. Un pro-

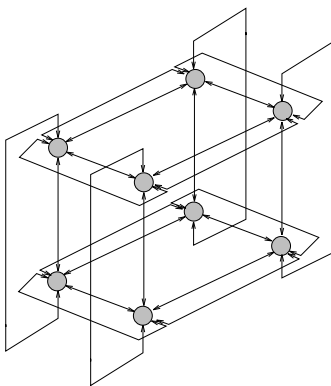
cesseur est doté de trois types de mémoire :

- La mémoire locale, de 64 Mo, c'est-à-dire 8.10^6 mots de 8 octets.
- La mémoire cache qui stocke les données locales les plus fréquemment ou récemment utilisées. Elle comprend 1024 mots de 8 octets, répartis en 256 lignes.
- La mémoire “à distance” qui permet à un processeur d'accéder à la mémoire locale de n'importe quel autre processeur. La distance entre deux processeurs n'augmente le temps de communication que de façon négligeable par rapport au coût même d'une communication, et c'est un point dont nous ne tiendrons pas compte dans la parallélisation.

La communication entre deux processeurs se fait de la façon suivante : deux types d'information transitent : des requêtes et des réponses. De plus, seuls les deux processeurs invoqués dans la communication entrent en jeu. Les processeurs intermédiaires sont transparents pour l'utilisateur, un contrôleur de circuit gérant le trajet des informations. L'information se déplace dans la direction X, puis dans la direction Y et enfin dans la direction Z. Les communications peuvent être plus ou moins explicites. Soit on indique dans le code qu'une information va être communiquée entre certains processeurs, soit, par défaut, une donnée est accessible par tous les processeurs, sans avoir à expliciter sa localisation. Deux processeurs quelconques ont ainsi la possibilité d'échanger des informations. En particulier, les processeurs se trouvant sur les sommets de la structure peuvent communiquer. Si on décrit les liens possibles entre les processeurs d'un réseau, on obtient la structure réelle du CRAY T3D, un tore (voir figure 6.1).

6.1.2 La bibliothèque PVM

Cette bibliothèque permet de faire fonctionner un réseau d'ordinateurs hétérogènes comme une machine parallèle. Un avantage important de PVM est sa


 FIG. 6.1 - *tore tridimensionnel sur 8 processeurs*

portabilité, moyennant une recompilation des codes. Ce système est composé de deux parties :

- Un “démon”, qui réside sur toutes les machines constituant la machine parallèle virtuelle. L'utilisateur lance le démon PVM sur une machine s'il désire qu'elle rejoigne le réseau. Les processus sont différenciés par un identificateur (entier *tid*).
- Une librairie contenant toutes les fonctions de communications, d'interface,... .

Il est par ailleurs possible d'utiliser PVM sur le CRAY T3D. On ne peut faire exécuter qu'un seul processus par processeur, donc chaque processus est identifié par un processeur. Par exemple, si on exécute un programme sur 8 processeurs, ils seront numérotés de 0 à 7, ce qui simplifie l'identification d'un processus pour l'utilisateur.

6.1.3 Modes de communication

Suivant la répartition des données sur les processeurs ou l'algorithme de calcul, plusieurs modes de communication sont envisagés. Les deux modes que nous avons principalement utilisés sont la réduction/diffusion et la circulation

sur un anneau de processeurs.

- La réduction : si chaque processeur possède des résultats partiels, et que ces résultats doivent par exemple être stockés dans un fichier, ils doivent être accessibles. Un processeur est désigné pour recevoir toutes les informations partielles et les stocker dans sa mémoire locale, pour ensuite procéder au stockage dans un fichier, voir figure 6.2.
- La diffusion : l'information doit être donnée à tous les processeurs. Par exemple, la lecture d'un fichier se fait sur un processeur (lecture et stockage dans un buffer), et l'information contenue dans ce buffer est ensuite diffusée à l'ensemble des processeurs.

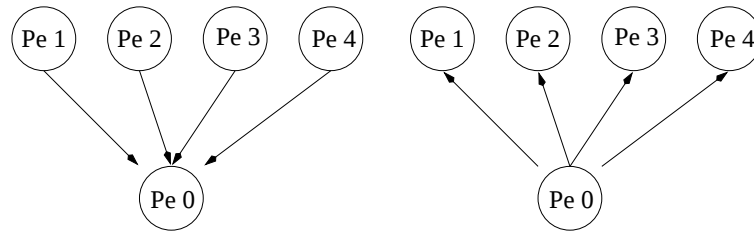


FIG. 6.2 - *Gauche : l'information est récupérée sur le processeur 0 : réduction*
- *Droite : l'information est donnée à tous les processeurs : diffusion*

- La circulation sur un anneau : Elle se produit par exemple quand chaque processeur possède un résultat partiel concernant des données non distribuées. Pour mettre à jour les données, chaque processeur doit envoyer à tous les autres ses informations locales et de plus doit recevoir de tous les autres processeurs les informations qu'ils contiennent. On forme alors une structure en anneau où chaque noeud est un processeur, et les informations stockées dans un buffer circulent de noeud en noeud jusqu'au retour de l'information sur son noeud d'origine, voir figure 6.3.

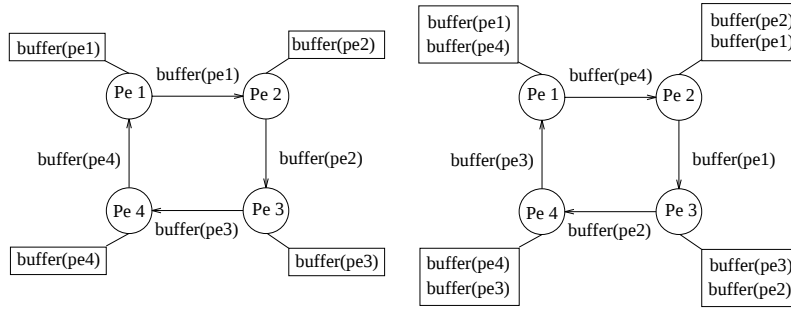


FIG. 6.3 - Circulation sur un anneau

6.2 Les matrices “ART” - algorithmes de calcul

Les modes de calcul et de stockage de la matrice jouent un rôle essentiel dans la parallélisation. Du mode de calcul découle souvent le mode de stockage. On rappelle que Ω est le support de la fonction à discrétiser. Dans le cas des méthodes algébriques (cf § I-4-2), Ω est discrétisé en pixels $S_j, j = 1 \dots M$ (Ω est un carré de côté c). D'autre part, la géométrie de mesures est définie par un ensemble de droites $L_i, i = 1 \dots N$. Un élément A_{ij} de la matrice ART $A(N \times M)$ est la mesure de l'intersection entre une droite L_i et un pixel S_j : $A_{ij} = \#(L_i \cap S_j)$, où $\#E$ désigne la longueur de E . La matrice ainsi définie est creuse, une droite intersectant au plus $2\sqrt{M}$ pixels (cf §I-4-2), mais non structurée. Deux modes de calcul de la matrice sont envisageables :

- Le mode “ray-tracing” consiste à calculer pour chaque droite les intersections avec les pixels rencontrés.
- Le mode “ray-tracing transposé” consiste pour chaque pixel, à calculer les intersections avec les droites qui le coupent.

“Mode Ray-Tracing”

C'est l'algorithme de calcul le plus naturel. Les éléments de la matrice sont calculés ligne par ligne. Pour chaque droite de rayonnement, on suit son parcours dans la grille de pixels et pour chaque pixel intersecté, on calcule cette

intersection. Pour stocker cette matrice, sont définis deux tableaux : le premier contient les valeurs des intersections non nulles et le deuxième, tableau d'indirections contient les numéros des pixels correspondant aux intersections calculées. Si on a N droites de mesure et M pixels alors le tableau T stockant les valeurs des intersections sera de dimension $N \times 2\sqrt{M}$. On ajoutera un tableau d'indirections J tel que $T[i, k] = A(i, J(i, k))$, voir figure 6.4. On aurait pu aussi utiliser un stockage de type morse compressé, le gain en mémoire étant probablement multiplié par 2. Nous avons choisi le premier mode de stockage, la taille des matrices ainsi stockées restant raisonnable. Pour des problèmes de dimension 3, il faudrait utiliser le stockage morse compressé dans la mesure où le stockage est encore envisageable (la matrice n'est généralement pas stockée et les éléments sont recalculés).

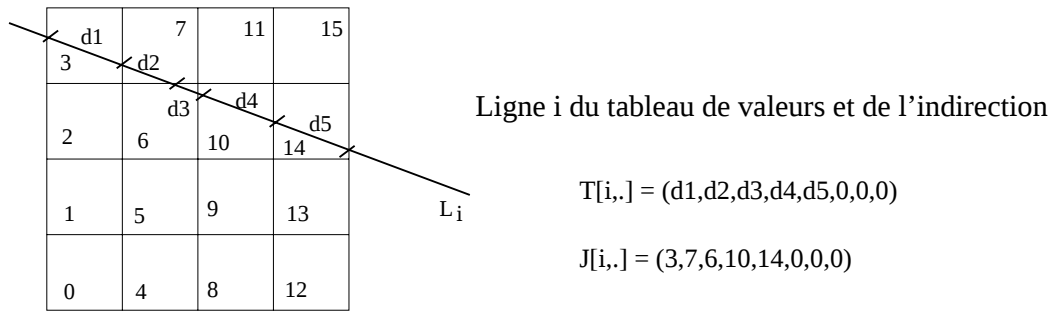


FIG. 6.4 - Mode "ray-tracing"

"Mode Ray-Tracing Transposé"

Les éléments de la matrice sont calculés colonne par colonne. Pour chaque pixel, sont calculées les droites qui le coupent. Prenons le problème en géométrie parallèle : pour chaque position de source donnée, au plus une seule droite doit intersecter un pixel; ceci signifie que l'écart entre deux droites de mesures (pour une position de source donnée) doit être supérieur à la diagonale d'un pixel, voir figure 6.5. Si on note Δs le pas de discrétisation entre deux droites et h la largeur d'un pixel, on a la relation : $\Delta s > h\sqrt{2}$

Si le nombre maximum de droites intersectant un pixel est N^* , et que le

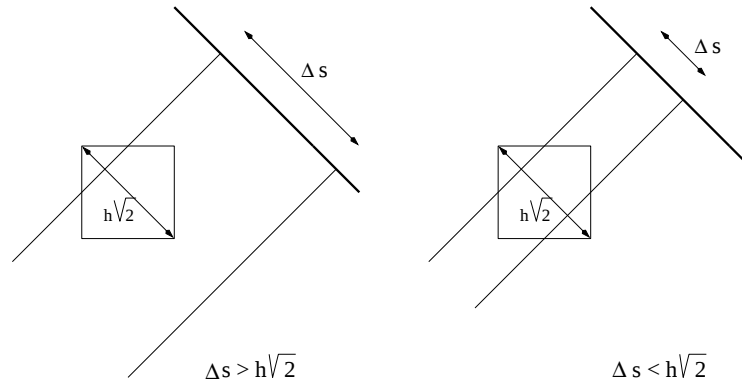


FIG. 6.5 - Droites intersectant un pixel.

nombre de pixels est M alors le tableau stockant les valeurs des intersections sera de dimension $M \times N^*$ et lui sera associé un tableau d'indirections J tel que $T[i, k] = A(J(i, k), k)$ (voir figure 6.6). En pratique, le nombre d'éléments non-nuls est le même, la dimension de la matrice est inchangée par rapport au premier mode de calcul et donc $N^* = N$ (elle est stockée sous sa forme transposée).

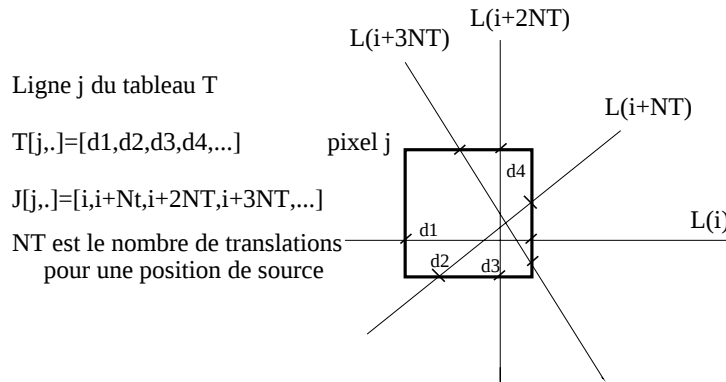


FIG. 6.6 - Mode ray-tracing transposé

6.3 Parallélisation des produits “matrice-vecteur” et “matrice transposée-vecteur”

Dans cette section nous étudions l’influence du mode de calcul sur l’implémentation parallèle de ces deux opérations. Le mode “ray-tracing transposé” semble le plus performant pour une mise en oeuvre parallèle ([19]).

Les produits matrice-vecteur et matrice transposée-vecteur apparaissant dans l’algorithme du gradient conjugué régularisé constituent les opérations les plus coûteuses. Après avoir présenté l’algorithme, nous explicitons la parallélisation de ces deux produits, suivant le mode de calcul de la matrice envisagé.

6.3.1 Rappel de l’algorithme du gradient conjugué du système régularisé

Nous rappelons que le problème de minimisation est :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^M} \|AX - G\|^2 + \tau^l \|\Delta_l X^l\|^2 + \tau^c \|\Delta_c X^c\|^2$$

La solution est donnée par :

$$X_\tau = S_\tau^{-1} A^T G, \text{ avec } S_\tau = (A^t A + \tau^l \Delta^l + \tau^c \Delta^c)$$

où :

- X_τ est la solution régularisée.
- G le vecteur contenant les mesures.
- $\tau = (\tau^c, \tau^l)^t$: les paramètres de régularisation pour la grille de pixels de la région d’intérêt (haute résolution) et la grille de pixels extérieure (basse résolution).
- Δ est un laplacien adapté tel que $\Delta X = (\Delta^l X^l, \Delta^c X^c)^t$.
- A est la matrice ART formée de 4 blocs : $A = \begin{pmatrix} A^{c,c} & A^{c,l} \\ A^{l,c} & A^{l,l} \end{pmatrix}$, $A^{c,c}$ est la matrice d’intersections entre la grille de pixels basse résolution et le jeu

de mesures complet, $A^{c,l}$ est la matrice d'intersections entre la grille de pixels haute résolution et le jeu de mesures complet, $A^{l,c}$ est la matrice d'intersections entre la grille de pixels basse résolution et le jeu de mesures portant sur la région d'intérêt, $A^{l,l}$ est la matrice d'intersections entre la grille de pixels haute résolution et le jeu de mesures portant sur la région d'intérêt.

Le paramètre de régularisation est estimé par validation croisée généralisée stochastique, et cette méthode, pour un paramètre fixé nécessite deux algorithmes de gradient conjugué. La parallélisation sera axée sur cette méthode de résolution.

L'algorithme de gradient conjugué ([46])

– X_0 donné

– $P_0 = R_0 = G - AX_0$

Pour $k = 0, 1, \dots$

$$1. \alpha_k = \frac{\|R_k\|^2}{\langle S_\tau P_k, P_k \rangle}$$

$$2. X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k$$

$$3. R_{k+1} = R_k - \alpha_k S_\tau P_k$$

$$4. \beta_{k+1} = \frac{\|R_{k+1}\|}{\|R_k\|^2}$$

$$5. P_{k+1} = R_{k+1} + \beta_k P_k$$

Le test d'arrêt porte sur $\|R_k\|$.

L'opération la plus coûteuse est le produit $S_\tau P_k = (A^t A + \Delta) P_k$. Il nécessite tout d'abord le calcul de AP_k puis le produit du résultat par A^t .

6.3.2 Parallélisation en mode “Ray-tracing”

Un élément $A(i, j)$ de la matrice devient $T[i, J[i, k]]$, où T est le tableau contenant les valeurs et J le tableau d'indirections. T est de dimensions $N \times 2\sqrt{M}$. Dans ce mode d'adressage, les données sont distribuées de façon naturelle, et la matrice est distribuée en lignes.

Produit $Y = AX$

Si le vecteur X n'est pas distribué (présent dans sa globalité sur tous les processeurs), alors aucune communication n'est effectuée pour le calcul de AX et le vecteur Y est distribué :

```
Pour tout processeur  $PE_l$ 
    pour tout  $i$  distribué sur  $PE_l$ 
         $Y[i] = \sum_k T[i, k]X[J[i, k]]$ 
```

Produit $X = A^t Y$

Sur chaque processeur, on n'obtient que des résultats partiels. Pour que le vecteur X soit présent sur tous les processeurs, il faut envisager de communiquer chaque résultat partiel de chaque processeur sur tous les autres processeurs.

```
Pour tout processeur  $PE_l$ 
    pour tout  $i$  distribué sur  $PE_l$ 
        pour tout  $k$ 
             $X_{PE_l}[J[i, k]] = X_{PE_l}[J[i, k]] + T[i, k]Y[i]$ 
```

Envoyer X_{PE_l} à tous les autres processeurs

Recevoir $X_{PE_{l'}}, l' \neq l, l' = 1 \dots \#PE$

Mise à jour $X_{PE_l} = X_{PE_l} + \sum_{l'=1, l' \neq l}^{\#PE} X_{PE_{l'}}$

6.3.3 Parallélisation en mode “ray-tracing transposé”

Dans ce mode de calcul, A est stockée sous sa forme transposée. Le tableau T est de dimensions $M \times N^*$ et l'indirection associée est telle que : $T^t[j, k] =$

$A(J[j, k], j)$. Le vecteur X est distribué naturellement et A est distribuée en colonnes.

Produit $Y = AX$

Sur chaque processeur, on n'obtient que des résultats partiels. Pour que le vecteur Y soit complet sur tous les processeurs, il faut envisager de communiquer chaque résultat partiel de chaque processeur sur tous les autres processeurs.

```
Pour tout processeur  $PE_l$ 
    pour tout  $j$  distribué sur  $PE_l$ 
         $Y[J[j, k]] = Y[J[j, k]] + T^t[j, k]X[j]$ 
```

Produit $X = A^tY$

Si le vecteur Y est dupliqué sur tous les processeurs, alors aucune communication n'est effectuée pour le calcul de A^tY et le vecteur X est distribué :

```
Pour tout processeur  $PE_l$ 
    pour tout  $j$  distribué sur  $PE_l$ 
         $X[j] = \sum_k T^t[j, k]Y[J[j, k]]$ 
```

6.4 Résultats et discussion

Le coût d'un gradient conjugué a été mesuré, suivant les deux modes de calcul de la matrice. Les tests ont été effectués sur le Cray T3D. Le temps mesuré est le temps maximum d'exécution sur les processeurs : $T = \max_i(T_i)$, où i est le i ème processeur. La figure 6.7 montre les temps mesurés en fonction du nombre de processeurs pris en compte dans l'exécution. Les deux jeux de données ont chacun 80×51 mesures. Le rayon de la région d'intérêt est de 0.5. Le nombre de pixels est le même dans chaque zone : 64×64 , soit une résolution deux fois plus fine dans la région d'intérêt. Les temps séquentiels sont assez similaires. Par contre pour un nombre croissant de processeurs, la différence de comportement devient plus importante. Le mode "ray-tracing transposé" est nettement

meilleur en parallèle. D'autre part, un trop grand nombre de processeurs mis en jeu dégrade les performances et la parallélisation est avantageuse pour 16 processeurs. Le mode "ray-tracing transposé" semble beaucoup mieux adapté à

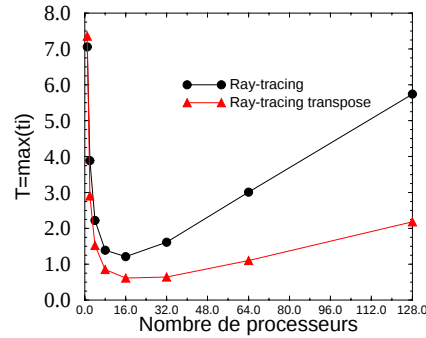


FIG. 6.7 - Mesures de temps sur le Cray T3D

une parallélisation car le vecteur inconnu X est distribué naturellement. Dans le mode "ray-tracing", le vecteur X est stocké sur tous les processeurs, ainsi que les vecteurs intervenant dans l'algorithme de gradient conjugué. Ceci implique des remises à jour de vecteur par réduction, ce qui n'est pas le cas dans le mode "ray-tracing transposé" car ces vecteurs sont alors naturellement distribués. Pour le produit "matrice-vecteur" et "matrice transposée-vecteur", les deux modes de calcul sont similaires. La différence se fait au niveau de la remise à jour des vecteurs dans le gradient conjugué (voir les instructions 2 et 5 de l'algorithme).

Conclusion

Le travail que nous avons présenté peut se résumer en trois parties relativement distinctes.

La première partie a fait l'objet d'une étude détaillée sur les méthodes en tomographie et surtout en tomographie locale. Nous avons dans un premier temps évoqué les difficultés de la reconstruction à partir de données tronquées, et en particulier la non-unicité. Nous avons décrit à travers un état de l'art les différentes méthodes existantes pour résoudre le problème local. La lambdatomographie, ainsi que la tomographie pseudo-locale sont certainement les méthodes les plus performantes et actuellement les plus étudiées. Dans un second temps, nous avons décrit notre approche. Elle est basée sur l'introduction d'information a priori dans le processus de reconstruction. Cette information est donnée sous la forme de projections complètes basse résolution, obtenues par exemple avec un scanner classique. Cette information doit être mise en correspondance avec le jeu de données locales haute résolution dont on dispose (obtenu par exemple avec des détecteurs plans, de haute résolution et de petite taille). La partie de mise en correspondance n'a pas fait partie de notre travail. Nous avons décrit succinctement une méthode utilisant des capteurs externes pour le recalage; cette méthode est assez lourde à mettre en oeuvre car il faut dans au moins l'un des deux examens installer le capteur, calibrer,... . Un travail futur serait d'étudier des méthodes de mise en correspondance sans capteur externe, comme par exemple les méthodes de corrélation. On peut envisager également de nouveaux types de scanner intégrant dans les détecteurs deux résolutions,

l'une plus fine dans une région d'intérêt, ceci toujours dans le but de réduire la dose. Nous avons implémenté des algorithmes standards de reconstruction, en tenant compte d'une part de la différence de résolution des deux jeux de mesures et d'autre part de la haute résolution voulue dans la région d'intérêt. Ces méthodes aboutissent à des solutions quantitatives.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse en ondelettes. Nous avons présenté en détail les différentes méthodes de reconstruction en tomographie générale et locale utilisant l'analyse en ondelettes. De nombreux algorithmes proposés dans la littérature ont été implémentés. L'analyse en ondelettes continues permet d'extraire certaines informations notamment les contours. De plus, les filtres utilisés dans les méthodes classiques et adaptés à l'analyse en ondelettes deviennent locaux. On se rapproche ici de la tomographie locale. En effet, si l'ondelette analysante est à support compact, alors, la reconstruction, même en dimension paire, aura un caractère local. Notre contribution est similaire à la première partie. Nous avons mis en oeuvre certains algorithmes de reconstruction, sur des jeux de données complets, sur des jeux de données ne concernant qu'une région d'intérêt et enfin sur deux jeux de données préalablement mis en correspondance, avec toujours cette différence de résolution dans l'image reconstruite.

La troisième partie, a découlé naturellement des deux premières. En effet, les méthodes de reconstruction sont assez coûteuses et dans notre approche, nous augmentons considérablement la taille du problème. Nous présentons dans cette partie la parallélisation de certains algorithmes. Nous avons comparé les performances de deux parallélisations possibles pour les méthodes de reconstruction algébriques. Ces méthodes aboutissent à un système linéaire. Notre analyse montre que les performances sont modifiées suivant le mode de calcul de la matrice envisagé.

Avant d'envisager une mise en oeuvre clinique de notre méthode, il faudra implémenter la phase de mise en correspondance et le problème en dimension

3. Les algorithmes écrits en 2D devront être adaptés. Une mise en oeuvre parallèle deviendra probablement indispensable. Alors, de nombreux tests sur des données réelles devront être effectués, pour décider de l'implantation de nos méthodes dans un contexte médical.

Bibliographie

- [1] *CRAY MPP Fortran Reference Manual*. SR-2504 6.2.1, 1995.
- [2] A.H. Andersen. Algebraic Reconstruction in C.T. from limited views. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(1), 1989.
- [3] J.P. Antoine, P. Carette, R. Murenzi, and B. Piette. Image Analysis with Two-Dimensional Continuous Wavelet Transform. *Signal Processing*, 31, 1993.
- [4] M. Bathia, W.C. Karl, and A.S. Willsky. A Wavelet-Besed Method for Multiscale Tomographic Reconstruction. *MIT Tech. Rep.*, LIDS-P-2182:237–256, 1993.
- [5] M. Bathia, W.C. Karl, and A.S. Willsky. Using Natural Wavelet Bases and Multiscale Stochastic Models for Tomographic Reconstruction. *MIT Tech. Rep.*, LIDS-P-2196, April 1994.
- [6] L. Benayoun. La tomographie locale. *Rapport de DEA Mathématiques Appliquées - Laboratoire TIMC - Equipe GMCAO*, 1995.
- [7] C. Berenstein and D. Walnut. Local inversion of the radon transform in even dimensions using wavelets. In *Proceedings of the Conference: 75 Years of the Radon Transform*, pages 38–58. International Press Co. Ltd. 1994, 1992.

-
- [8] C. Calvin and L.Colombet. Introduction aux Modèles de Programmation Par Processus Communicants: deux exemples PVM et MPI. *Rapport de Recherche Apache-Parappli/LMC-IMAG Grenoble*, 1995.
 - [9] G. Champleboux. *Utilisation des fonctions splines pour la mise au point d'un capteur tridimensionnel sans contact: quelques applications medicales (in french)*. PhD thesis, Grenoble University, July 1991.
 - [10] G. Champleboux, S. Lavallée, P. Sautot, and P. Cinquin. Accurate calibration of cameras and range imaging sensors, the NPBS method. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1552–1558, Nice France, May 1992.
 - [11] I. Daubechies. The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5), September 1990.
 - [12] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF,SIAM, 1992.
 - [13] A.H. Delaney and Y. Bresler. Multiresolution Tomographic Reconstruction Using Wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(4), 1995.
 - [14] B. Delyon. Ondelettes orthogonales et biorthogonales (version revisee). *Publication interne IRISA - 732*, November 1993.
 - [15] L. Desbat. Efficient sampling on coarse grids in tomography. *Inverse Problems*, 9:251–269, 1993.
 - [16] L. Desbat. Algebraic reconstructions from efficient sampling in tomography. In *Computerized Tomography*, 1995.
 - [17] L. Desbat. Efficient parallel sampling in vector field tomography. *Inverse Problems*, 11:995–1003, 1995.

-
- [18] L. Desbat. Efficient sampling in 3D tomography: parallel schemes. In *Proceedings of the 1995 international meeting on fully 3D image reconstruction in radiology and nuclear medicine*, pages 281–285. CEA-LETI, 1995.
 - [19] L. Desbat, C. Laurent, and S. Rouault. Parallel image reconstruction: work in progress. In A. Montanvert S. Miguët, editor, *IWPIA '95, 4th International Workshop on Parallel Image Analysis*, pages 147–156, 1995.
 - [20] J. DeStefano and T. Olson. Wavelet localization of the radon transform in even dimensions. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium: Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pages 137–140, 1992.
 - [21] D.L. Donoho. Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data. *Report*, 1991.
 - [22] D.L. Donoho. Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet-Vaguelette Decomposition. *Report*, 1992.
 - [23] D.L. Donoho. Wavelet Shrinkage and W.V.D.: a 10-minute tour. *Report*, 1992.
 - [24] C. Gasquet et P. Witomsky. *Analyse de Fourier et Applications, Filtrage, Caclul numérique, Ondelettes*. Masson, 1990.
 - [25] A. Faridani. An application of a multidimensional sampling theorem to computed tomography. In *AMS-IMS-SIAM Conference on Integral Geometry and Tomography*, volume 113, pages 65–80. Comtemporary Mathematics, 1990.
 - [26] A. Faridani. IMA Volume in Mathematics and its Applications. *Results, old and new, in computed tomography*, August 1995.
 - [27] A. Faridani, D. Finch, E.L. Ritman, and K.T. Smith. Local Tomography II. *Preprint*, 1996.

-
- [28] A. Faridani, E.L. Ritman, and K.T. Smith. Local Tomography I. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(2):459–484, 1992.
- [29] O.D. Faugeras and G. Toscani. Camera calibration for 3D computer vision. In *International Workshop on Industrial Applications of Machine Vision and Machine Intelligence*, pages 240–247, Seiken Tokyo Japan, February 1987.
- [30] L. Garnero. *Reconstruction d’images tomographiques à partir d’un ensemble limité de projections*. Orsay, 1987. Thèse d’état.
- [31] L. Garnero. Anatomical data fusion for quantitative reconstruction in cardiac tomoscintigraphy using a spline model of the organs of the thorax. In *Proceedings of the 1995 International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*. CEA-LETI, 1995.
- [32] P. Gerlot-Chiron and Y. Bizais. Registration of multimodality images using a region overlap criterion. *CVGIP: graphical models and image processing*, 54(5):396–406, 1992.
- [33] D. Girard. *Les methodes de regularisation optimales et leurs applications en tomographie*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984.
- [34] D. Girard. A fast Monte-Carlo cross-validation procedure for large least squares problems with noisy data. *rapport de recherche IMAG-TIM3,RR669M*, 1987.
- [35] D. Girard. Optimal regularized reconstruction in Computerized Tomography. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 8(6), 1987.
- [36] D. Girard. Asymptotic optimality of the fast randomized versions of GCV and C_L in ridge regression and regularisation. *Ann. of Stat.*, 19(4):1950–1963, 1991.

-
- [37] G. Golub, M. Heath, and G. Wahba. Generalized Cross Validation for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21:215–224, 1979.
 - [38] J.P. Guédon and Y. Bizais. Bandlimited and Haar Filtered Back-Projection Reconstructions. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(3):430–440, 1994.
 - [39] C.E. Heil and D. Walnut. Continuous and Discrete Wavelet Transforms. *SIAM Review*, 31(4), december 1989.
 - [40] G.T. Herman. *Image Reconstruction from Projections*. New-York, Academic, 1980.
 - [41] M. Holschneider. Inverse Radon Transforms Through Inverse Wavelet Transforms. *Inverse Problems*, 7:853–861, 1991.
 - [42] S.H. Izen. Frames on the Range on the Radon Transform. *Proceedings of CT'94, Novosibirsk*, 1994.
 - [43] S. Jaffard. Algorithmes de transformation en ondelettes. *Annales des ponts et chaussées - 3ème trimestre*, pages 10–30, 1989.
 - [44] J.S. Karp, G. Muehllehner, and R.M. Lewitt. Constrained Fourier Space Method for Compensation of Missing Data in Emission Computed Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(1):21–25, March 1988.
 - [45] E.D. Kolaczyk. *Wavelet methods for the inversion of certain homogeneous linear operators in the presence of noisy data*. Phd,Stanford University, 1994.
 - [46] P. Lascaux and R. Theodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur- Tome II*. Masson, 1987.
 - [47] S. Lavallée, R. Szeliski, and L. Brunie. Matching 3-D smooth surfaces with their 2-D projections using 3-D distance maps. In *SPIE Vol. 1570*

- Geometric Methods in Computer Vision*, pages 322–336, San Diego, CA, July 1991.
- [48] S. Lavalée, R. Szeliski, and L. Brunie. Anatomy-based registration of 3-D medical images, range images, X-ray projections, 3-D models using Octree-Splines. In R. Taylor, S. Lavalée, G. Burdea, and R. Mosges, editors, *Computer Integrated Surgery*, pages 115–143. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [49] S. Lavalée, J. Troccaz, P. Sautot, B. Mazier, P. Cinquin, P. Merloz, and J.P. Chirossel. Computer assisted spine surgery using anatomy-based registration. In R. Taylor, S. Lavalée, G. Burdea, and R. Mosges, editors, *Computer Integrated Surgery*, chapter 32. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [50] A.K. Louis. Incomplete Data Problems in X-Ray Computerized Tomography - I. Singular Value Decomposition of the Limited Angle Transform. *Numerische Mathematik*, 48:251–262, 1986.
- [51] A.K. Louis and A. Rieder. Incomplete Data Problems in X-Ray Computerized Tomography - II. Truncated Projections an Region-of-Interest Tomography. *Numerische Mathematik*, 56:371–383, 1989.
- [52] S. Mallat. A theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), July 1989.
- [53] R.J. Marks, editor. *Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer Verlag, 1992.
- [54] B.P. Medoff, W.R. Brody, M. Nassi, and A. Macovsky. Iterative convolution backprojection algorithms for image reconstruction from limited data. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(11):1493–1500, 1983.

-
- [55] Y. Meyer. *Ondelettes et operateurs, I*. Hermann, 1990.
 - [56] Y. Meyer. *Ondelettes et operateurs, II. Opérateurs de Calderón Zygmund*. Hermann, 1990.
 - [57] Y. Meyer. *Les ondelettes - Algorithmes et Applications*. Armand Colin, 1992.
 - [58] Y. Meyer, S. Jaffard, and O. Rioul. L'analyse par ondelettes. *Pour la Science*, September 1987.
 - [59] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
 - [60] P. Oskoui-Fard and H. Stark. Tomographic Image Reconstruction Using the Theory of Convex Projections . *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(1):45–58, March 1988.
 - [61] H. Peng and H. Stark. Direct Fourier reconstruction in fan-beam tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-6(3), 1987.
 - [62] H. Peng and H. Stark. One-Step Image Reconstruction from Incomplete Data in Computer Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(1), 1989.
 - [63] H. Peng and H. Stark. Image Recovery in Computer Tomography from Partial Fan-Beam Data by Convex Projections. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11(4), 1992.
 - [64] O. Peria. *Fusion d'images morphologiques et fonctionnelles par l'utilisation de capteur intermediaire*. PhD thesis, University Joseph Fourier, Grenoble, France, avril 1996.
 - [65] O. Peria, L. Chevalier, A. Francois-Joubert, J.P. Caravel, S. Dalsoglio, S. Lavallee, and P. Cinquin. Using a 3D position sensor for registration of SPECT and US images of the kidney. In *First International Conference*

- of CVRMed*, Lecture Notes in Computer Science, pages 23–29, Nice, april 1995. Springer-Verlag.
- [66] F. Peyrin, M. Zaim, and R. Goutte. Multiscale Reconstruction of Tomographic Images. *Proc. IEEE-SP Int. Symp. of Time Frequency and Time-Scale Analysis*, 1992.
- [67] F. Peyrin, M. Zaim, and R. Goutte. Construction of Wavelet Decompositions for Tomographic Images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 3:105–121, 1993.
- [68] W.P. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, England, second edition, 1992.
- [69] A.G. Ramm and A.I. Katsevich. *The Radon transform and local tomography*. CRC Press, Inc, 1996. to appear.
- [70] A.G. Ramm and A.I. Katsevitch. New methods for finding vallues of the jumps of a function from its local tomographic data. *Inverse Problems*, 11:1005 – 1023, 1995.
- [71] S. Rouault and L. Desbat. Adaptative reconstruction in tomography from truncated projections with prior complete data. In *Signal and Image Processing and Applications SIPA '96*, pages 15–18. IASTED, 1996.
- [72] B. Sahiner and A.E. Yagle. Reconstruction from Projections Under Time-Frequency Constraints. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(2):193–204, 1995.
- [73] I. Sezan and H. Stark. Tomographic Image Reconstruction from Incomplete View Data by Convex Projections and Direct Fourier Inversion. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-3(2), 1984.

-
- [74] K.T. Smith and F. Keinert. Mathematical foundations of computed tomography. *Applies Optics*, 24(23):3950 – 3957, 1985.
- [75] C. Soussen. Tomographie pseudo-locale. *Rapport de DEA Mathématiques Appliquées - Laboratoire TIMC - Equipe GMCAO*, 1996.
- [76] H. Stark. *Image Recovery Theory and Applications*. Academic Press, 1987.
- [77] D. Walnut. Applications of Gabor and wavelet expansions to the Radon transform. In J.S. Byrnes and al, editor, *Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis with Applications*, pages 187–205. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [78] D. Walnut. Local inversion of the radon transform in the plane using wavelets. In *Proceedings of the SPIE: Mathematical Imaging*, volume 2034, pages 84–90, 1993.
- [79] W.M. Wells, P. Viola, and R. Kikinis. Multi-modal volume registration by maximization of mutual information. In *MRCAS95, Medical Robotics and Computer Assisted Surgery Proc.*, Baltimore, nov. 1995. Wiley.
- [80] D.C. Youla. Generalized Image Restoration by the Method of Alternating Orthogonal Projections. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, cas-25(9):694–702, September 1978.
- [81] D.C. Youla and H. Webb. Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part 1 - Theory . *IEEE Transactions on Medical Imaging*, MI-1(2):81–94, October 1982.