



HAL
open science

Hétérogénéité de l'écoulement de fluides à seuil : approche phénoménologique et modélisation élasto-plastique

Guillemette Picard

► **To cite this version:**

Guillemette Picard. Hétérogénéité de l'écoulement de fluides à seuil : approche phénoménologique et modélisation élasto-plastique. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT : . tel-00005119

HAL Id: tel-00005119

<https://theses.hal.science/tel-00005119>

Submitted on 25 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS VII - Denis Diderot

THESE

pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VII

Spécialité : Physique

présentée par

Guillemette Picard

Sujet de la thèse :

**Hétérogénéité de l'écoulement de fluides à seuil :
approche phénoménologique et modélisation élasto-plastique**

Soutenue le 16 février 2004 devant le jury composé de :

M. Armand Ajdari

Mme Christiane Caroli président

M. Luca Cipelletti rapporteur

M. Yves Couder

M. François Lequeux

M. Peter Olmsted rapporteur

invités : **M. Lydéric Bocquet**

M. Olivier Pouliquen

Remerciements

Pour répondre enfin à tous ceux qui m'ont posé la question au cours de ma thèse, trois directeurs de thèse, c'est sûrement trois fois plus déconcertant et trois fois plus riche scientifiquement et humainement. Merci à Armand, Lydéric et François qui ont guidé ce travail de thèse chacun de manière différente et constructive.

Merci à Luca Cipellitti et Peter Olmsted qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, merci à Christiane Caroli, Yves Couder et Olivier Pouliquen d'être membre de mon jury de thèse.

Merci à ceux grâce à qui j'ai surmonté les affres de l'administration, les absurdités de l'informatique ou les doutes de la thèse, Madame Friedelance, Tony, Denis, Lucas, Hélène, Nicolas, Caroline, Virgile...

Merci enfin à mes proches qui connaissent bien leur nom.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Observations expérimentales d'écoulements hétérogènes	9
1.1.1	Rhéologie classique : indices de comportements hétérogènes	9
1.1.2	"Transition de phase" sous écoulement	10
1.1.3	Hétérogénéités d'écoulement sans structure	12
1.1.4	Conclusion	14
1.2	Modélisation d'écoulement de fluides à seuil	15
1.2.1	Echelles de longueur	15
1.2.2	Approche moyennée	15
1.2.3	Approche hétérogène	18
1.3	La démarche que nous avons suivie	20
2	Une approche phénoménologique	23
2.1	Présentation du modèle	24
2.2	Résultats	25
2.2.1	Courbe constitutive croissante : écoulement homogène	25
2.2.2	Courbe constitutive non-monotone : écoulement hétérogène	26
2.3	Perspectives et conclusions	26
2.3.1	Succès et perspectives	26
2.3.2	Limites	27
2.4	Article : A simple model for heterogeneous flows of yield stress fluids	27
3	Une première approche microscopique	41
3.1	Comportement microscopique et effets collectifs	42
3.1.1	Ingrédients du modèle	42
3.1.2	Modèle stochastique	44
3.1.3	Vers un modèle quasi-undimensionnel	45
3.2	Un modèle peu adapté aux écoulements hétérogènes	47
3.2.1	Perspectives et limites	47
3.2.2	D'où viennent les limites de ce modèle?	49
4	Effet mécanique d'un événement plastique unique	53
4.1	Modèle élasto-plastique	54
4.2	Résumé des résultats	54
4.2.1	Effet d'un événement plastique	54
4.2.2	Une image de l'événement plastique	56
4.2.3	Remarque : rôle des corrélations spatiales	57
4.2.4	Vers une modélisation d'un milieu sous écoulement	58

4.3	Article : "Elastic consequences of a single plastic event"	59
5	Dynamique et couplage élastique des événements plastiques	71
5.1	Milieu élasto-plastique piloté par le cisaillement	72
5.2	Dynamique locale.	73
5.2.1	Nature de la relaxation plastique	73
5.2.2	Dynamique locale	75
5.3	Hétérogénéités spatiales : résolution numérique	77
6	Résultats numériques	81
6.1	Paramètres généraux	82
6.2	Milieu bipériodique : résultats numériques	85
6.2.1	Mesures macroscopiques	86
6.2.2	Chutes de la contrainte moyenne spatiale	90
6.2.3	Organisation spatiale	92
6.3	Milieu bipériodique : interprétation	97
6.3.1	Forts taux de cisaillements : régime "homogène"	97
6.3.2	Petits cisaillements : régime "saturé"	98
6.3.3	Cisaillements intermédiaires : organisation spatio-temporelle complexe	99
6.4	Milieu fini : résultats numériques	101
6.4.1	Mesures macroscopiques	101
6.4.2	Organisation spatiale	102
6.4.3	Relaxation plastique de type B	108
6.5	Milieu fini : interprétation	109
6.5.1	Régime transitoire	109
6.5.2	Régime intermittent	109
6.5.3	Rôle de la dynamique	110
6.6	Conclusion	110
7	Conclusion et perspectives	111
A	Discrétisation du propogateur pour la modélisation numérique	115
A.1	En milieu bipériodique	116
A.2	En géométrie confinée	118

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Observations expérimentales d'écoulements hétérogènes	9
1.1.1	Rhéologie classique : indices de comportements hétérogènes	9
1.1.2	"Transition de phase" sous écoulement	10
1.1.3	Hétérogénéités d'écoulement sans structure	12
1.1.4	Conclusion	14
1.2	Modélisation d'écoulement de fluides à seuil	15
1.2.1	Echelles de longueur	15
1.2.2	Approche moyennée	15
1.2.3	Approche hétérogène	18
1.3	La démarche que nous avons suivie	20

Un fluide se caractérise par le fait qu'il s'écoule lorsqu'il est sollicité mécaniquement. On distingue deux classes de fluides sous écoulement. D'une part, les fluides qui présentent une *réponse linéaire*, c'est-à-dire que l'écoulement est proportionnel à la sollicitation : ce sont les fluides dits newtoniens. D'autre part, les fluides qui présentent une réponse *non linéaire* à divers types de sollicitation. Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement à cette dernière catégorie.

Dans un premier temps, la rhéologie "classique" a abordé l'étude de l'écoulement moyen de ces milieux, c'est-à-dire qu'ils ont été caractérisés de manière macroscopique en régime stationnaire et en régime oscillant. En particulier, une des quantités mesurées est la viscosité apparente, définie comme le rapport entre la contrainte de cisaillement moyenne et le taux de cisaillement moyen à l'état stationnaire.

Dans le cas des fluides à réponse linéaire, cette viscosité est indépendante du taux de cisaillement et de la contrainte de cisaillement. A l'inverse, pour les fluides à réponse non-linéaire, la viscosité peut (*i*) augmenter avec le cisaillement, ces fluides s'écoulent de moins en moins facilement, ils sont dits rhéoépaississants ou bien (*ii*) diminuer avec le cisaillement, ces fluides s'écoulent de plus en plus facilement, ils sont dits rhéofluidifiants.

Ce type de réponse suggère que l'écoulement perturbe la structure du fluide. Cela pose diverses questions : quelle est la structure du fluide sous écoulement ? En particulier, est-elle hétérogène ?

Ainsi ces dernières années, un grand nombre d'expériences et de modèles visant à appréhender les caractéristiques microscopiques et transitoires du fluide sous écoulement se sont développés. Ce travail de thèse se situe dans cette tendance.

Dans cette étude, nous proposons une modélisation des écoulements de fluides non linéaires qui permet de décrire des hétérogénéités spatiales. Dans une première section 1.1, nous décrivons le contexte expérimental. Puis, le contexte théorique est développé dans la section 1.2. La section 1.3 propose une description de la démarche que nous avons suivie.

1.1 Observations expérimentales d'écoulements hétérogènes

Devant la diversité des matériaux à réponse non linéaire et de leur comportement, on détaille ici à des fins d'exposé un exemple typique rhéofluidifiant. Les mesures macroscopiques issues de la rhéologie classique peuvent être des indices d'un écoulement hétérogène, elles sont présentées dans la partie 1.1.1. Puis, dans les parties 1.1.2 et 1.1.3, on s'intéresse à la visualisation d'écoulements hétérogènes pour l'exemple détaillé ainsi que pour divers autres systèmes.

1.1.1 Rhéologie classique : indices de comportements hétérogènes

On a choisi de détailler un exemple particulier typique *un système de micelles chargées*, étudié par Cappelaere *et al.* [1]. Il s'agit d'une solution aqueuse concentrée de tensio-actifs (bromure de cethyltriméthylammonium sans sel ajouté), qui s'autoassemblent pour former des micelles cylindriques allongées (diamètre $\approx 1.5nm$) dont la longueur peut atteindre quelques microns. Les propriétés de ce milieu dépendent fortement de la température T et de la fraction massique ϕ .

Le milieu est soumis à un écoulement dans une cellule de Couette cylindrique. Ce dispositif est schématisé figure 1.1. La cellule de Couette permet notamment de mesurer à l'état stationnaire, soit la réponse en contrainte de cisaillement à l'imposition d'un taux de cisaillement, soit la réponse en taux de cisaillement à une contrainte de cisaillement.

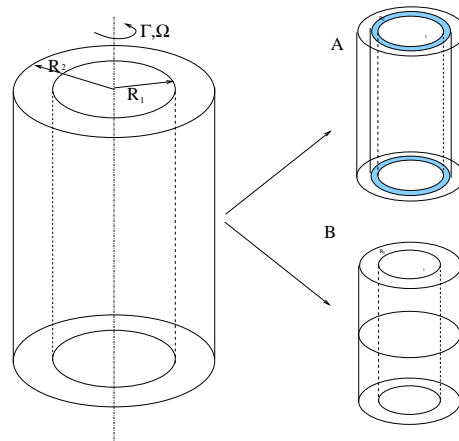


FIGURE 1.1 – *A gauche* Cellule de Couette : Le fluide est cisailé entre deux cylindres concentriques de rayons R_1 appelé *rotor*, et R_2 appelé *stator*, soit en imposant une vitesse au cylindre intérieur, (c'est-à-dire en imposant un taux de cisaillement au fluide) , soit en imposant un couple au cylindre intérieur, (c'est-à-dire en imposant un moment au fluide). *A droite* Deux types de profils hétérogènes : *A* l'interface entre les bande de cisaillement est perpendiculaire au gradient de vitesse (type A). *B* l'interface entre les bandes de cisaillement est perpendiculaire à la vitesse.(type B)

Ces mesures sont représentées par les deux courbes d'écoulement de la figure 1.2. A faible cisaillement, la réponse du milieu est linéaire. Dans une gamme de cisaillement intermédiaire, la réponse du système n'est pas identique selon que l'on impose la contrainte

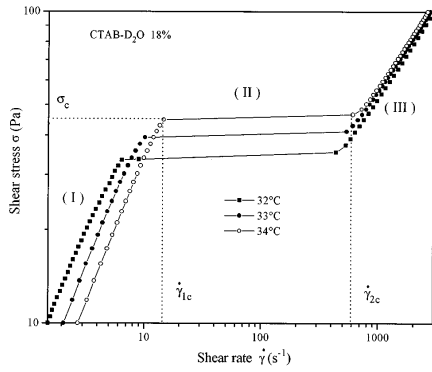


FIG. 3. Shear stress variation of the shear rate as measured for the CTAB-D₂O solution at $\phi=18\%$ using stress controlled rheometry ($T=32^\circ\text{C}$, 33°C , and 34°C). The flow curves exhibit a true discontinuity at a characteristic shear rate $\dot{\gamma}_{1c}$. In the intermediate range, no data points can be collected with the controlled stress rheometry. At rates about $\dot{\gamma}\approx 440\text{ s}^{-1}$, the stress increases again.

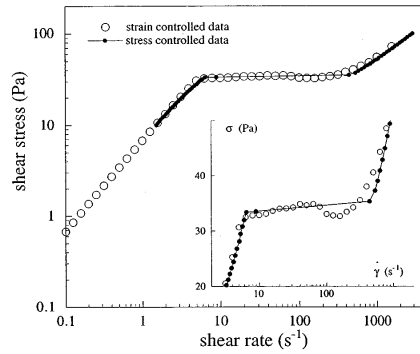


FIG. 4. Comparison between the $\sigma(\dot{\gamma})$ values in a log-log representation obtained with a controlled shear rate (open symbols) and a controlled shear stress (closed symbols) rheometer for the CTAB-D₂O without salt system at $T=32^\circ\text{C}$. Shown in the inset is the variation of the shear stress versus shear rate in a semilogarithmic representation.

FIGURE 1.2 – Figure extraite de l'article [1]. à gauche Dans une cellule de Couette, le système de micelles géantes est soumis à une contrainte imposée, le taux de cisaillement mesuré à l'état stationnaire est reporté sur la figure de droite. à droite Le système est soumis à un taux de cisaillement, la contrainte moyenne mesurée est reportée sur la figure de gauche.

ou que l'on fixe le taux de cisaillement : lorsque l'on impose le taux de cisaillement dans cet intervalle, la contrainte parcourt quasiment un plateau ; lorsque la contrainte est imposée, cette gamme de cisaillement n'est pas atteinte. A fort cisaillement, le milieu est rhéofluidifiant.

Ce comportement particulier observé dans le système de micelles géantes, (plateau ou saut de contrainte) est une caractéristique commune à beaucoup de fluides complexes. Comme nous le verrons dans la suite, il est généralement la signature de comportements hétérogènes complexes. L'étude de ces comportements a nécessité la mise en oeuvre de techniques expérimentales spécifiques permettant d'observer la dynamique locale de ces matériaux.

1.1.2 "Transition de phase" sous écoulement

Une première explication a été proposée pour expliquer le comportement rhéologique macroscopique des micelles géantes que nous venons de décrire : le plateau de contrainte correspond à des cisaillements pour lesquels des bandes (de cisaillement) de structures différentes coexistent, dans le même esprit que la coexistence thermodynamique de deux phases en équilibre.

Des bandes de cisaillement stables

Le système de micelles géantes a été choisi car il permet une visualisation "directe" de ses deux phases par biréfringence. En effet, à la température $T = 32^\circ\text{C}$, et à la concentration $\phi = 18\%$ des expériences, l'échantillon est isotrope au repos. Cependant, la diminution de la température ou l'augmentation de la concentration peut conduire à une transition vers un état nématique, dans lequel les micelles exhibent une orientation préférentielle. Le

cisaillement peut aussi engendrer cette transition de phase, comme le montrent les figures 1.3 où l'on observe également la possibilité d'une coexistence entre les phases isotropes et nématiques. Dans ce cas particulier, en effet, le milieu s'organise en bandes de cisaillement

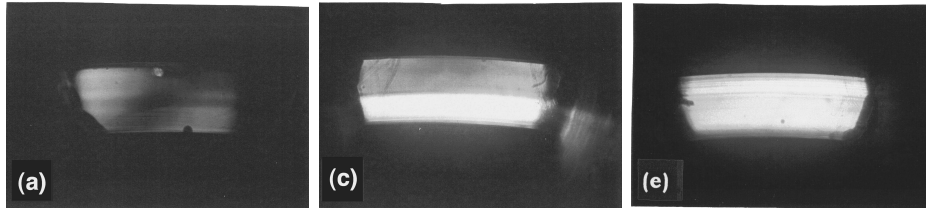


FIGURE 1.3 – Figures extraites de l'article [1]. Dans une cellule de Couette, le système de micelles géantes est soumis à un cisaillement imposé croissant. On visualise une tranche de la cellule de Couette par mesure de la biréfringence du milieu. La cellule a un entrefer de $1,5\text{mm}$. En reprenant les notations de la figure 1.2 : a) le cisaillement imposé appartient au domaine *I*, c) au domaine *II*, e) au domaine *III*.

stables et concentriques, c'est-à-dire que l'interface entre ces bandes est perpendiculaire à la direction du gradient de vitesse. L'orientation de l'interface dans cette géométrie est schématisé figure 1.1, type A.

On résume le comportement sous écoulement de ce système de micelles géantes : à petit cisaillement, le système est isotrope. L'augmentation du cisaillement induit un changement de phase : à fort cisaillement les micelles s'alignent dans la direction de l'écoulement. A cisaillement intermédiaire, ces deux phases coexistent.

Un autre exemple de transition de phase sous écoulement à été observé par Chen et collaborateurs [2] : un cristal colloïdal est cisailé dans une cellule de Couette. Des bandes de structures différentes apparaissent à cisaillement intermédiaire. Les bandes sont stables et l'interface entre les bandes est perpendiculaire à la vorticité, c'est-à-dire de type B sur la figure 1.1. Ces bandes correspondent à la coexistence entre une structure cristalline (qui apparaît à petit cisaillement) et une structure polycristalline qui envahit tout le milieu à grand cisaillement. Dans la structure cristalline, l'écoulement est dû à un glissement plan/plan.

Ces deux exemples sont typiques d'un certain type d'hétérogénéités, des bandes de cisaillement stables, souvent expliquées par une transition de phase dynamique induite par le cisaillement. Cette interprétation prévalait au début de cette thèse. Elle a depuis soulevé plusieurs remarques dont certaines sont exposées dans le paragraphe suivant.

Des écoulements hétérogènes plus complexes

On a présenté ici la transition de phase dans les micelles géantes observées par Capelaere telle qu'elle était comprise au moment de la parution de ces travaux. En 2001, Fisher et Callaghan [3], avec une solution légèrement plus concentrée $\phi = 20\%$ remettent en question l'image implicite d'un écoulement à deux bandes de cisaillement, l'une en phase isotrope faiblement cisillée et l'autre en phase nématique fortement cisillée. En effet, ils observent grâce à la spectroscopie à résonance magnétique nucléaire, que la viscosité de la phase nématique est élevée.

Par ailleurs, d'autres solutions de tensioactifs ont été étudiées récemment avec des techniques expérimentales qui permettent d'explorer l'évolution temporelle des écoulements. Ces observations montrent des profils hétérogènes d'écoulements plus complexes que les bandes de cisaillement stables de type *A* et *B* que nous avons présentées jusque là. Nous en proposons ici quelques exemples.

Salmon [4] et collaborateurs ont étudié un système de Sodium Docétyl Sulfate, d'octanol et d'eau salée. Il se place dans des conditions de température et concentration telles que les tensioactifs sont organisés en oignons à faible cisaillement. Le système est cisailé dans une cellule de Couette. A petit cisaillement les oignons sont désorganisés. A fort cisaillement, la viscosité est plus faible et les oignons sont ordonnés (structure feuilletée). Dans une gamme de cisaillement intermédiaires, il n'y a pas de solution stationnaire et le taux de cisaillement fluctue de manière chaotique. Des bandes instables apparaissent. L'interface entre les bandes est perpendiculaire au gradient de vitesse comme dans la figure 1.1 A (type A) et se déplace de manière chaotique. Une autre solution de tensioactifs étudiée par Courbin et collaborateurs [5] conduit à une coexistence de phases où les oignons ont des diamètres différents, ainsi que pour certains cisaillements à l'oscillation régulière du rayon moyen des oignons.

Observations similaires d'autres systèmes

Ces observations d'écoulements locaux et non stationnaires peuvent être rapprochées d'autres types d'écoulements qui reposent sur une organisation spatiale particulière et locale, sans être pour autant assimilable à des "transitions de phase".

Dans un cristal de glace soumis à une contrainte de cisaillement constante, l'écoulement est dû aux réarrangements des dislocations. Carmen Miguel et collaborateurs ont mis en évidence le caractère intermittent et local de ces écoulements [6]. De la même manière, dans les alliages, l'écoulement est dû à une réorganisation spatiale de défauts, et peut présenter des bandes macroscopiques de déformation, comme le montre la figure 1.4 extraite de l'article [7].

Un autre exemple d'organisation spatiale particulière est celui des milieux granulaires, pour lesquels l'écoulement peut être associé à une diminution de la densité. Losert et collaborateurs [8] observent un écoulement localisé dans un système de granulaires fluidisés cisailé dans une géométrie de Couette. Seule une bande au voisinage de ce cylindre (type A), d'une épaisseur de quelques tailles de grains, est effectivement cisailée. Dans cette bande. Le reste du système est immobile. L'interface entre la bande s'écoulant et le reste du milieu est stable. La densité de grains dans la bande cisailée est inférieure à la densité de grains.

1.1.3 Hétérogénéités d'écoulement sans structure

Pour les exemples de matériaux que nous venons de présenter, la différence de viscosité entre les différents états coexistants dans la cellule de Couette a pu être associée à une différence dans la structure. Il existe également une classe de matériaux pour lesquels les zones de viscosité différente n'ont pas pu (ou peut-être pas encore) être associées à des structures distinctes. Les divers exemples de ces systèmes que l'on a trouvés dans la littérature présentent tous une contrainte seuil : c'est-à-dire qu'ils ne s'écoulent que s'ils sont soumis à une contrainte supérieure à un seuil minimal. Ne sachant pas s'il s'agit d'un cri-

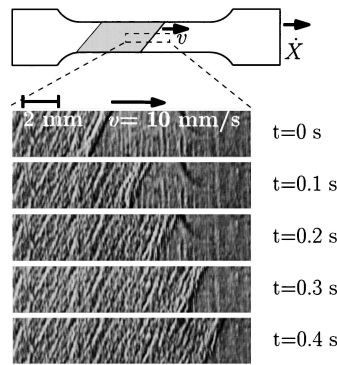


FIG. 1. A traveling deformation front imaged with a shadow-graph technique. The end of the sample is pulled at a constant speed of $127 \mu\text{m/s}$. The front traverses the sample at about a 60° angle, leaving behind a visibly rough surface.

FIGURE 1.4 – L’alliage métallique est étiré à vitesse constante. Dans la zone centrale, on voit apparaître des bandes de cisaillement.

rière nécessaire aux écoulements hétérogènes, on préfère préciser qu’on identifie une classe de matériaux qui présentent les particularités suivantes : *les fluides à seuil dont l’écoulement peut s’organiser de manière hétérogène, sans changement de structure apparent*. Ce travail de thèse porte sur la modélisation d’écoulement de cette classe de fluides. Dans les paragraphes suivants, nous proposons quelques exemples de comportements typiques de ces fluides à seuil.

Des bandes de cisaillement stables

Pignon et collaborateurs [9] mettent en évidence le comportement hétérogène d’une suspension colloïdale de laponite, particules chargées en forme de disque (1-2 nm d’épaisseur et 20-30 nm de diamètre) en milieu aqueux. Le dispositif dans lequel la laponite est cisailée (cône plan) permet d’assurer une contrainte approximativement homogène dans le milieu. Lorsqu’un taux de cisaillement faible est imposé, une bande de matériau d’une épaisseur de quelques tailles de particules, oscille entre un état cisailé et un état non cisailé, le reste du système étant déformé élastiquement, sans écoulement. L’interface est dans la direction perpendiculaire au gradient de vitesse (bande de cisaillement de type A). Ces oscillations localisées font penser à du *stick-slip*. En augmentant le taux de cisaillement imposé, la bande de cisaillement se stabilise. De part et d’autre de cette bande le matériau ne s’écoule pas. Elle s’élargit lorsque le cisaillement est augmenté jusqu’à ce que la zone cisailée remplisse tout l’entrefer du rhéomètre.

Pendant le déroulement de cette thèse, différents articles de Coussot et collaborateurs [10] sont parus mettant en évidence, dans une géométrie de Couette, la séparation en bandes fluides au voisinage du rotor (extérieur) et sans écoulement au voisinage du stator (intérieur) à cisaillement imposé pour différentes suspensions colloïdales dont une suspension de bentonite. Les auteurs ont montré que l’hétérogénéité n’est pas due à la seule hétérogénéité de contrainte inhérente à la géométrie de Couette en réitérant l’expérience dans une géométrie cône plan dans laquelle la contrainte est approximativement homogène.

Debrégeas et collaborateurs [11] ont observé un comportement semblable à celui que nous avons décrit pour des milieux granulaires (dans la partie 1.1.2), avec une mousse bidi-

mensionnelle, c'est-à-dire une monocouche de bulles, confinée dans une cellule de Couette. Une déformation est imposée au système par le déplacement du cylindre intérieur. Dans ce régime quasi-statique, seule une bande de quelques tailles de bulles est cisailée, près du rotor. A la différence des milieux granulaires, dans ce cas, malgré une forte similitude, on ne mesure pas de différence de densité entre les couches cisailées et non cisailées.

Des écoulements hétérogènes plus complexes

Le paragraphe précédent présentait essentiellement des exemples de profils d'écoulements hétérogènes simples où coexistent des bandes de cisaillement stables.

On s'intéresse ici à définir ce qu'on entend par bandes de cisaillement. En effet, dans les exemples des granulaires [8] et des mousses [12], les bandes cisailées font seulement quelques tailles de grains ou de bulles, et il est probablement difficile de déterminer s'il s'agit plutôt de bandes de cisaillement localisées (i.e. l'hétérogénéité est intrinsèque à l'écoulement et localisée au voisinage de la paroi) ou simplement d'un effet de paroi. La difficulté vient alors à définir ce qu'on entend par effet de paroi. Dans une émulsion diluée, Salmon et collaborateurs [13], ont montré la difficulté d'interpréter les cisaillements particuliers mesurés aux voisinages des parois. Ils excluent cependant la justification par un simple film de lubrification responsable d'un glissement du fait de l'épaisseur du film et suggèrent l'existence d'une organisation collective initiée par les parois.

On cite enfin le travail numérique de Varnik et collaborateurs [14] paru également pendant cette thèse qui montre des profils typiques de vitesse hétérogènes dans le cisaillement d'un liquide de Lennard Jones. On peut distinguer deux bandes de cisaillement, mais la position de l'interface entre les bandes n'est pas stable et peut effectuer des oscillations entre les parois confinantes.

Ces exemples d'écoulements hétérogènes de fluides à seuil montrent essentiellement un point commun : la coexistence de régions fluides et de régions presque purement élastiques, c'est-à-dire presque sans écoulement. Cependant la stabilité de cette coexistence, ou son organisation spatiale semblent dépendre fortement du système observé.

1.1.4 Conclusion

En présentant ces différents exemples, on a séparé la première approche macroscopique des écoulements de fluides à réponse non linéaire, du large corpus d'expériences récent qui vise à décrire le comportement local.

La rhéologie classique a ainsi caractérisé les différents comportements (stationnaires) des fluides à partir de leur courbe d'écoulement : rhéofluidifiant, rhéoépaississant, avec une contrainte seuil ou un plateau de contrainte. A partir de ce premier niveau d'observation, diverses approches moyennées, non spécifiques, ont décrit des phénoménologies macroscopiques comparables aux observations. Nous présentons ces approches dans la partie 1.2.2.

Certaines caractéristiques de ces courbes macroscopiques mesurées ont été interprétées comme la signature de comportements hétérogènes. Le développement de diverses techniques expérimentales a progressivement permis une étude locale des écoulements. Parallèlement, deux types de modèles plus microscopiques se sont développés : des modèles spécifiques et des modèles généraux basés sur l'hypothèse que des mécanismes communs à

des systèmes très différents peuvent conduire à des comportements similaires. Ces modèles sont présentés dans la partie 1.2.3.

1.2 Modélisation d'écoulement de fluides à seuil

1.2.1 Echelles de longueur

Avant de poursuivre dans la présentation des approches théoriques macroscopiques puis microscopiques, nous détaillons les échelles de longueurs que supposent cette terminologie en nous appuyant sur l'exemple de mousse. En effet, dans les mousses, l'échelle du réarrangement est directement observable [11, 15, 16].

Dans une mousse, l'échelle élémentaire du milieu est l'échelle de la bulle. Le réarrangement plastique élémentaire concerne un nombre fini de bulles, typiquement quatre bulles. Nous qualifions de *microscopique* cette échelle qui couvre à la fois l'échelle de la bulle et celle du réarrangement élémentaire. L'existence d'une échelle mésoscopique, c'est-à-dire (i) l'existence d'une organisation spatiale collective des réarrangements locaux et (ii) l'existence d'une taille caractéristique de cette organisation spatiale, restent des questions ouvertes. L' *échelle macroscopique* est la taille du système. Les modèles présentés dans la section 1.2.3 sont fondés sur une description microscopique ou mésoscopique.

1.2.2 Approche moyennée

Différents modèles homogènes rendent compte des comportements rhéologiques observés. Certains d'entre eux s'appuient plus ou moins directement sur la conception physique suivante : le milieu sous écoulement est le siège de réarrangements locaux pouvant être déclenchés par le forçage extérieur, les réarrangements voisins ou l'agitation thermique. L'écoulement est le résultat de ces réarrangements. Ces modèles sont construits sur différentes définitions des réarrangements et différentes dynamiques de déclenchements.

Les processus activés

Processus : saut hors d'un puits énergétique

Le modèle SGR ("soft glassy rheology") [17, 18] a été introduit en 1997 pour décrire des systèmes présentant un désordre structural (les émulsions et les suspensions concentrées, les mousses,...) et une dynamique hors équilibre (ces systèmes présentent une contrainte seuil), et est inspiré du modèle de Bouchaud [19].

On considère qu'une particule (gouttelette d'émulsion, bulle...) dans le milieu voit une cage formée par les particules voisines. La particule peut sortir d'une cage, sous l'effet de deux facteurs : la déformation élastique locale, le "bruit" dû au saut des autres particules. Cette interprétation physique est modélisée ainsi : les particules évoluent dans des 'puits énergétiques' (dont la distribution des profondeurs est fixée). Ces barrières énergétiques peuvent être franchies grâce à l'énergie élastique et l'énergie thermique. En effet, le "bruit" est décrit par une température effective fixée manière adhoc. Ce modèle s'est avéré insuffisant pour décrire la rhéologie et les structures spatiales. Son intérêt est surtout d'avoir fait le lien entre le comportement vitreux de ces systèmes et leur rhéologie particulière.

Processus : Réarrangement de particules

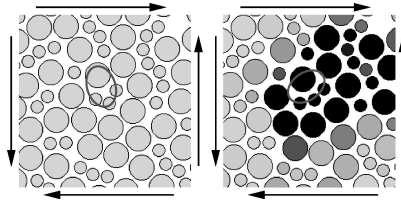


FIG. 8. Closeup picture of a shear transformation zone before and after undergoing transformation. Molecules after transformation are shaded according to their values of D_{min}^2 using the same gray scale as in Fig. 7. The direction of the externally applied shear stress is shown by the arrows. The ovals are included solely as guides for the eye.

FIGURE 1.5 – Figure extraite de la référence [20]. Lors d’une simulation de dynamique moléculaire bidimensionnelle, un taux de cisaillement (représenté par des flèches) est imposé à un ensemble bidisperse de billes dont les interactions sont des interactions de Lennard Jones. Les auteurs remarquent que hormis ces quatre billes repérées par l’ovale, les billes se sont très peu déplacées. Ils définissent ainsi une STZ.

A partir de simulations numériques dans des solides amorphes à température nulle, Falk et Langer ont identifié l’apparition et la disparition de zones de réarrangements [20] abrégées STZ pour "shear transformation zones". Nous avons reproduit une figure (figure 1.5) issue de cet article où une telle zone est isolée. Ainsi, ils identifient un processus de réarrangement spécifique à leur système.

Une théorie champ moyen qui utilise cette observation a été proposée par Langer [21] et par Lemaître [22, 23]. Elle reprend des idées introduites par Spaepen [24] pour les verres métalliques. Par simplicité, on décrit ici en particulier la version scalaire [22]. Les STZ sont de deux types : elles sont le siège de déformations plastiques opposés. La densité des STZ de chaque type est notée n_{\pm} . Le taux de déformation plastique s’écrit donc :

$$\dot{\epsilon}^{pl} = A_0(R_+n_+ - R_-n_-) \quad (1.1)$$

où A_0 est une constante, R_{\pm} le taux de transformation de basculement d’une STZ + à une STZ – et vice versa. Ces taux dépendent de la contrainte et du volume libre local. Les STZ apparaissent et disparaissent dans le milieu du fait de la contrainte de cisaillement locale σ avec la dynamique :

$$\dot{n}_{\pm} = R_{\pm}n_{\pm} - R_{\mp}n_{\mp} + \sigma\dot{\epsilon}^{pl}(A_c - A_a n_{\pm}) \quad (1.2)$$

A_a et A_c sont des constantes.

En ajoutant une dynamique pour le volume libre, la résolution du système non linéaire de trois équations ainsi obtenue conduit à une contrainte seuil et à de la rhéofluidification et dans certains cas à du stick slip. Même s’ils sont basés sur une approche microscopique, il reste délicat d’identifier ce que sont ces deux types de zones et la nature de leur interactions.

Processus : relaxation locale de la contrainte

L’approche scalaire d’Hébraud et Lequeux [25], décrit l’évolution de la distribution de contrainte de cisaillement en s’appuyant sur les considérations microscopiques suivantes : lorsqu’une contrainte seuil microscopique (σ_y) est localement atteinte, la contrainte est localement relaxée avec un temps caractéristique τ . Cette relaxation locale implique une perturbation du champ de contrainte alentour par propagation élastique. On note G_0 le

module élastique du milieu. En "champ moyen", cela donne l'équation d'évolution suivante pour la distribution de contrainte de cisaillement σ :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\sigma, t) &= -G_0 \dot{\gamma} \partial_\sigma P(\sigma, t) + D \partial_{\sigma^2}^2 P(\sigma, t) \\ &- \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau} P(\sigma, t) + \frac{1}{\tau} \int_{\sigma' > \sigma_y} \tau P(\sigma', t) d\sigma' \delta(\sigma), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où H est la fonction de Heaveside, et δ la fonction Dirac. Le premier terme correspond à la déformation élastique globale, les troisième et quatrième termes à la relaxation totale de la contrainte au bout d'un temps caractéristique τ , le deuxième terme correspond à une représentation simplifiée de la perturbation aléatoire générée par les sauts avec :

$$D = \alpha \frac{1}{\tau} \int_{\sigma' > \sigma_y} P(\sigma') d\sigma' \quad (1.4)$$

où α est un paramètre mesurant le rôle de perturbation. La résolution analytique de ces équations en régime stationnaire montre que lorsque $\alpha < \alpha_c = 1/2$, la courbe d'écoulement présente une contrainte seuil qui varie comme $(\alpha - \alpha_c)^{\frac{1}{2}}$, puis une branche rhéofluidifiante à grand cisaillement. Lorsque $\alpha > \alpha_c$, le système s'écoule toujours, c'est-à-dire que des réarrangements se produisent continûment, même à cisaillement $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, ce qui est pathologique.

Le modèle a l'avantage d'introduire la notion d'interactions spatiales et de décrire fidèlement une certaine phénoménologie. Le paramètre α permet de mettre en évidence une transition d'un milieu fluide à un milieu "pâteux", même s'il reste difficile de lui donner un sens physique précis. Ce modèle introduit de façon auto cohérente un bruit dont les propriétés ne sont pas claires, notamment pour $\alpha > \alpha_c$. Derec *et al.* [26] ont dérivé une version discrétisée de ce modèle, c'est-à-dire que la contrainte ne prend que quatre valeurs afin notamment d'étudier la stabilité des solutions trouvées par Hébraud et Lequeux. Une conclusion de ces travaux a été de montrer que la description complète de la répartition de la contrainte sur ces quatre sites n'est pas nécessaire pour la description à petits cisaillement et temps longs, et que le taux de réarrangements (calculé à partir des variables précédentes) suffit à décrire le comportement à basse fréquence du fluide.

Modèle phénoménologique

A partir de la remarque précédente, Derec *et al.* [27] ont construit un modèle phénoménologique décrivant la dynamique d'une variable interne (scalaire), la "fluidité" notée a . Deux remarques fondent ce modèle : i) le cisaillement fluidifie le système, ii) il n'y pas de temps rhéologique de relaxation intrinsèque au système, et le système "vieillit" continûment au repos, les temps de relaxation tendent à devenir très long. Cela est implémenté dans une adaptation simple du modèle visco élastique dit de Maxwell qui lie la contrainte de cisaillement σ au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$:

$$\partial_t \sigma = -a(t)\sigma + G_o \dot{\gamma} \quad (1.5)$$

$$\partial_t a = -f(a) + g(a, \sigma, \dot{\gamma}) \quad (1.6)$$

où les fonctions f (qui décrit le vieillissement spontané) et g (qui décrit la fluidification induite par le cisaillement) sont des fonctions positives. G_o est le module élastique du milieu. Les fonctions f, g sont choisies de façon très générale.

Cette approche décrit très simplement le système avec une variable interne scalaire spécifique à un système, et recouvre en un certain sens, d'autres approches dont l'approche 'STZ' dans une certaine limite ou l'approche proposée par Coussot [10]. Un parallèle entre ces différentes approches peut être trouvé dans les notes de cours des Houches [28].

Cependant, cette démarche ne permet pas d'appréhender l'écoulement à une échelle plus microscopique.

1.2.3 Approche hétérogène

Nous nous intéressons dans cette section aux modèles cherchant à prendre à compte la possibilité d'un écoulement spatialement hétérogène. Pour cela, nous présentons dans une première partie, les approches spécifiques au matériau en écoulement, et dans une deuxième partie des approches plus générales.

Modèles spécifiques

"Transition de phase" sous écoulement On s'intéresse ici aux matériaux dont les observations expérimentales ont été décrites comme des transition de phase sous écoulement. Jusque là, on a utilisé le terme "transitions de phase" entre guillemets, car comparer ce changement de phase induit par le cisaillement avec une transition de phase au sens thermodynamique est une question posée qui probablement l'un des enjeux majeur de la physique hors équilibre [29, 30].

Le groupe d'Olmsted et collaborateurs a modélisé les matériaux dont on observe la coexistence de structures différentes sous écoulement par une transition de phase sous écoulement [31, 32, 33]. Ces modèles sont basés sur le couplage entre la dynamique d'écoulement (Equations de Navier Stokes) et la dynamique de la structure du fluide dans chacune des phases. Ils ont ainsi montré que ces ingrédients sont insuffisants pour déterminer les conditions de coexistence des phases, c'est-à-dire qu'ils permettent seulement d'établir qu'il existe des conditions dans lesquelles des solutions biphasiques peuvent exister avec des interfaces stationnaires.

Une approche phénoménologique a permis de résoudre ces modèles. Lu et collaborateurs [34] ont montré que l'introduction d'un terme non local dans les modèles précédents permet de les résoudre complètement. C'est le cas par exemple du terme diffusif portant sur la contrainte introduit par Radulescu [35, 36], ou de la viscosité non locale introduite par Dhont [37]. Cette approche pose la question de l'origine physique du terme non local.

Dans l'approche d'Olmsted [36], le parallèle avec des transitions de phases 'usuelles' est explicitement introduit dans le modèle, par la définition d'un équivalent des potentiels thermodynamiques, minimums dans chaque phase et égaux lorsqu'elles coexistent .

Butler et Harrowell ont montré que cette dernière approche ne pouvait être suivie dans le cas d'un liquide de Lennard Jones [38]. Ils ont simulé la coexistence entre le liquide et le cristal sous cisaillement, et mis en évidence l'impossibilité d'interpréter cette hétérogénéité comme la coexistence entre deux phases de même potentiel chimique. L'équilibre local de l'interface est dynamique, il est dû à la compétition entre la croissance du cristal et son érosion par le cisaillement à la surface du cristal. Ceci peut également s'appliquer à des problèmes colloïdaux [39]. Cette dernière interprétation suggère que l'organisation spatiale macroscopique peut être particulièrement sensible aux caractéristiques microscopiques de l'interface.

Simulations explicites d'écoulement de mousses Parmi les nombreux modèles de mousses existants, on propose de détailler un modèle particulier. A la suite des expérimentations développées dans la section précédente 1.1.3, Kabla et Debrégeas [12] ont simulé un modèle réaliste de mousses bidimensionnelle en mimiquant des réarrangement locaux des bulles observés dans les expériences. Ces réarrangements plastiques T_1 sont déclenchés chaque fois que la longueur d'une facette de bulle est inférieure à un seuil donné. Dans un régime quasi-statique, après chaque réarrangement, les conditions de l'équilibre mécanique et la minimisation de la tension globale du film sont réalisées. Ainsi, en déformant continûment le système sur une déformation de l'ordre de 10 tailles de bulles, ils observent qu'après un transitoire, les réarrangements se concentrent essentiellement au voisinage de l'une des parois, ce qui correspond à une bande de cisaillement.

Un modèle antérieur proposé par Durian et collaborateurs [40, 41, 42] conduit à d'autres observations. Il est fondé sur un principe différent : il s'agit de sphères répulsives avec des interactions à courte portée. Ils observent un cisaillement homogène dans le milieu et mettent en évidence le caractère intermittent de l'écoulement dans le régime quasistatique.

Modèles élasto-plastiques

Parallèlement aux modèles précédents qui tendent à expliquer les comportements hétérogènes des milieux sous écoulement, il existe des modèles fondés sur l'hypothèse que certains mécanismes qui conduisent à ces comportements ne sont pas spécifiques. En particulier, les théories "élasto-plastiques" s'inspirent de la géophysique [43] et modélisent les écoulements à partir des idées suivantes :

- l'écoulement ou la déformation macroscopique est le résultat d'une organisation collective d'événements plastiques,
- un événement plastique est une relaxation locale, qui se produit lorsqu'un seuil local est atteint,
- un événement plastique génère une perturbation dans tout le milieu par propagation élastique et peut ainsi engendrer d'autres événements plastiques.

Qu'est ce qu'un événement plastique ? La nature et la dynamique d'un événement plastique dépend du modèle. Cependant on s'en donne une représentation générique inspirée des réarrangements dans les mousses grâce à la description données par "Princen" [15]. La déformation locale est élastique. La contrainte croît localement jusqu'à un seuil microscopique. Lorsque ce seuil est franchi, le milieu est localement métastable et il se produit un réarrangement plastique.

Modèles élasto plastiques.

Les modèles élasto-plastique existants se distinguent par la nature de la plasticité et la géométrie du milieu. Nous avons introduit la première version "moyennée" du modèle STZ [20] dans la section 1.2.2, on s'intéresse ici à une deuxième version bidimensionnelle [21].

Dans les deux modèles majeurs qui utilisent des idées introduits par Spaepen dans le cas des verres métalliques [24], Bulatov et Argon [44, 45, 46] et Langer [21] les événements plastiques sont une déformation plastique locale tensorielle. Le taux d'évolution de la plasticité, calculé à partir de considérations énergétiques dépend des variables locales et de la température dans le modèle de Bulatov et Argon.

Dans une série de trois articles, Bulatov et Argon résolvent numériquement ce modèle sur un réseau hexagonal avec des conditions aux limites périodiques ou des conditions aux limites "tampons" (où est dissipée l'énergie). Un résultat du modèle est la localisation du cisaillement à faible température. Il faut noter une particularité de ce modèle : le réarrangement plastique ne conduit pas à restaurer une géométrie initiale, mais une géométrie différente et fonction des contraintes locales.

Langer résout analytiquement son modèle pour un milieu infini soumis à une contrainte de cisaillement. Les réarrangements plastiques, se produisant dans les 'STZ' et sont de deux types distincts. Il montre qu'il existe une gamme de contrainte dans laquelle le comportement homogène est instable.

Cependant, ces deux modèles ne peuvent donner une description réaliste du milieu sous écoulement lorsque le comportement homogène est instable. En effet, Langer montre que la solution homogène est instable, mais ne peut montrer analytiquement la nature de l'écoulement dans cette gamme de cisaillement. Bulatov et Argon résolvent numériquement cette question, mais dans une géométrie peu réaliste qui ne permet pas de décrire un système en écoulement continu.

Dans cette optique, Baret et collaborateurs [47] ont réalisé une simulation numérique bidimensionnelle. Le comportement local est décrit par la contrainte de cisaillement et le déplacement scalaire qui ne peut avoir lieu que dans la direction imposée par la vitesse des parois. Le déplacement peut avoir une composante plastique (déterminée par une dynamique locale). Dans un tel milieu, l'élasticité est anisotrope. La dynamique est extrême, c'est-à-dire qu'un incrément de déformation n'est imposé que lorsque le système est revenu à l'équilibre. L'écoulement est hétérogène, entièrement localisé sur des "lignes" qui traversent le milieu et tendent à s'aligner avec la perpendiculaire au gradient de vitesse. Ces simulations montrent une organisation collective particulière du système cisailé dans une limite quasi-statique. Ces résultats soulèvent deux questions : *i*) l'anisotropie de l'élasticité est elle nécessaire à cette organisation spatiale ? *ii*) Que devient cet organisation spatiale à petit cisaillement ?

Ces modèles élasto-plastiques apparaissent comme une approche riche, mais qui soulève diverses questions.

1.3 La démarche que nous avons suivie

Lorsque cette thèse a débuté, il n'existait pas de modèle simple décrivant le type d'écoulement hétérogène observé dans les fluides à seuil sans changement de structure. Une première partie de ce travail a donc consisté à construire un tel modèle en s'inspirant des approches "moyennées", en particulier du modèle de Derec et collaborateurs. A cette fin, on a tenu compte des remarques tirées des modèles hétérogène de transitions de phase sous écoulement ou d'écoulement granulaires sur la nécessité du terme non local [8]. Cette approche est décrite dans le chapitre 2. Le modèle ainsi construit est très simple. Il est résolu numériquement et donne une zoologie de comportement comparable à la phénoménologie complexe décrite dans la partie expérimentale de cette introduction.

Cependant, ce type de modèle est "frustrant" du point de vue de la compréhension de l'écoulement : malgré les hypothèses minimalistes et raisonnables sur lesquelles il repose, il ne permet pas une compréhension microscopique de l'apparition des hétérogénéités.

Dans un deuxième temps, nous avons donc choisi une approche microscopique du type

des modèles "élastoplastique". Afin de conserver une écriture simple, nous avons d'abord adopté une approche unidimensionnelle, en poursuivant le modèle de Hébraud et Lequeux [25]. Dans le chapitre 3, nous montrons que cette approche simpliste ne permet pas de décrire des écoulements hétérogènes stables.

Les chapitres 4 et 5 décrivent donc deux étapes de la construction d'un modèle bidimensionnel élasto-plastique. La première étape consiste à définir un événement plastique et ses effets mécanique sur le milieu. Lors de cette étape nous avons été amenés à étudier les effets de taille finie et les effets de parois. Dans une seconde étape, nous avons proposé une dynamique locale de la plasticité, et couplé cette dynamique à l'écoulement global du milieu. A la fin de ces deux étapes, nous disposons d'un modèle qui décrit l'écoulement du milieu comme une organisation collective d'événements plastiques, interagissant de manière élastique. Les résultats numériques de ce modèle sont présentés et discutés dans le chapitre 6.

Chapitre 2

Une approche phénoménologique

Sommaire

2.1	Présentation du modèle	24
2.2	Résultats	25
2.2.1	Courbe constitutive croissante : écoulement homogène	25
2.2.2	Courbe constitutive non-monotone : écoulement hétérogène	26
2.3	Perspectives et conclusions	26
2.3.1	Succès et perspectives	26
2.3.2	Limites	27
2.4	Article : A simple model for heterogeneous flows of yield stress fluids	27

Dans ce chapitre, nous proposons un premier niveau de modélisation d'écoulements hétérogènes qui couple un comportement mécanique général (décrit par la loi de Maxwell) à l'évolution des propriétés locales de fluides à seuil (décrite par une loi phénoménologique simple). La résolution de ce modèle montre qu'à partir d'un système a priori simple d'équations couplées on décrit une phénoménologie très riche.

2.1 Présentation du modèle

Ce modèle s'inscrit dans la continuité du modèle proposé par Derec *et al.* [27], une approche homogène exposée dans le chapitre introductif. Dans cette approche, une seule variable interne caractérise le fluide : cette variable est appelée "fluidité", notée a , elle est l'inverse du temps de relaxation mécanique. L'écoulement est décrit par deux scalaires : la contrainte de cisaillement, notée σ , et le taux de cisaillement, noté $\dot{\gamma}$. L'équation d'évolution de la fluidité est due à la compétition entre (i) le vieillissement, c'est-à-dire la relaxation spontanée de la fluidité vers la fluidité nulle, décrit par la fonction $f(\sigma)$ et (ii) le rajeunissement, c'est-à-dire la fluidification du milieu sous l'effet de l'écoulement, décrit par la fonction $g(a, \sigma, \dot{\gamma})$.

Nous exposons brièvement ci-après les ingrédients du modèle hétérogène, dérivé de cette approche. Une justification approfondie se trouve dans l'article inséré à la fin de ce chapitre.

Afin d'étudier les hétérogénéités spatiales, nous nous limitons à une géométrie de cisaillement de dimension un où la vitesse est orientée suivant x et varie suivant z . Le terme non local peut porter sur la contrainte comme dans certains modèles de transition de phases sous écoulement [32, 33, 34, 35] ou sur la fluidité [8, 48], c'est-à-dire sur la variable interne qui caractérise l'écoulement local comme dans le modèle de granulaires sous écoulement. Nous choisissons ici d'ajouter un terme non local à la loi d'évolution locale de la fluidité. De plus, ce terme est choisi diffusif.

Les termes inertiels sont négligés. L'équilibre mécanique impose donc dans cette version de dimension un que la contrainte soit homogène dans le milieu $\sigma(z, t) = \sigma(t)$.

Le système général s'écrit alors :

$$\partial_t \sigma(t) = -a(z, t)\sigma(t) + G_o \dot{\gamma}(z, t) \quad (2.1)$$

$$\partial_t a(z, t) = -f(a(z, t)) + g(a(z, t), \sigma(t), \dot{\gamma}(z, t)) + D \partial_{zz} a(z, t) \quad (2.2)$$

avec les mêmes notations que dans l'introduction. D est un coefficient de diffusion.

Ce système d'équations couplées est d'abord résolu dans le cas homogène. A l'état stationnaire, la contrainte et le taux de cisaillement vérifient $a\sigma = G_o\dot{\gamma}$, $f(a) = g(a, \sigma, \dot{\gamma})$. On en déduit la "courbe constitutive" du milieu, c'est-à-dire la fonction $\sigma(\dot{\gamma})$ qui décrit l'équilibre local du système. L'allure de la courbe constitutive dépend du poids relatif des fonctions f et g . Deux classes de fonctions (f, g) sont pertinentes pour le système qu'on cherche à modéliser.

La première classe comporte les fonctions (f, g) qui donnent une courbe constitutive croissante. La seconde classe comporte les fonctions (f, g) qui donnent une courbe constitutive non monotone, plus précisément une courbe constitutive composée successivement d'une branche croissante à faibles taux de cisaillement, d'une branche décroissante à taux de cisaillements intermédiaires., et d'une branche croissante à forts taux de cisaillement. Nous étudions la dynamique du système pour ces deux classes de fonctions.

Dans le cas où la courbe constitutive est croissante, nous montrons analytiquement que l'écoulement est stable par rapport à une perturbation homogène. Il reste à déterminer la stabilité par rapport à une perturbation hétérogène.

Dans le cas où la contrainte est une fonction décroissante du taux cisaillement, l'écoulement est instable mécaniquement [29, 37]. Afin de modéliser un écoulement hétérogène, on s'intéresse donc en particulier à la seconde classe de fonctions f, g dont la courbe constitutive comporte une branche décroissante, car cette branche est instable.

Nous étudions le système dans une géométrie bordée par deux parois. Le modèle doit donc être complété par le choix des conditions aux parois. La vitesse de glissement aux parois est nulle, le cisaillement global du milieu est donc égal au cisaillement imposé. Il faut aussi fixer des conditions aux parois pour la fluidité. Deux conditions extrêmes ont été développées : soit un gradient de fluidité nul à la paroi, soit une fluidité fixée sur chacune des parois.

Ce modèle et sa résolution sont longuement développés dans l'article inséré à la fin de ce chapitre. La section suivante résume les résultats obtenus.

2.2 Résultats

Dans cette section, nous répondons à la question suivante : avec la dynamique décrite par le système 2.1, 2.2 et la géométrie introduite, quelle est la réponse du milieu à une sollicitation (i) lorsque la courbe constitutive est monotone croissante, et (ii) lorsqu'elle présente une branche décroissante ?

2.2.1 Courbe constitutive croissante : écoulement homogène

Les fonctions f, g sont choisies telles que la courbe constitutive $\sigma(\dot{\gamma})$ est monotone croissante. On montre analytiquement que lorsque la courbe constitutive est croissante, l'écoulement homogène est stable par rapport à une perturbation homogène, à contrainte imposée et à taux de cisaillement imposé.

Pour déterminer la stabilité de l'écoulement homogène par rapport à une perturbation hétérogène spatialement, le système 2.1,2.2 est résolu numériquement. La résolution numérique montre que lorsqu'on impose la contrainte de cisaillement ou le taux de cisaillement, l'écoulement est homogène (aux effets de parois près), et stable par rapport à une per-

turbation hétérogène, quelques soient les conditions aux limites. La courbe d'écoulement macroscopique est donc similaire à la courbe constitutive (les effets de parois induisent simplement un décalage).

2.2.2 Courbe constitutive non-monotone : écoulement hétérogène

On étudie d'abord analytiquement la stabilité de l'écoulement homogène par rapport à une perturbation homogène puis numériquement par rapport à une perturbation hétérogène avec les deux types de conditions à la parois.

1 *A contrainte imposée*, il existe toujours au moins une solution homogène aux effets de parois près, et cette solution est stable. Il faut remarquer :

- Un phénomène d'hystérèse : il existe une gamme de contrainte dans laquelle la valeur du cisaillement (autrement dit, la viscosité du milieu) dépend de l'histoire.
- Une gamme de taux de cisaillement ne peut être atteinte

2 *Lorsqu'on impose un taux de cisaillement global*, l'écoulement homogène est stable. Cette solution n'est pas physique puisque les termes inertiels, négligés dans ce modèle, déstabilisent cette solution. La branche décroissante qui apparaît stable ici ne doit donc pas être retenue. En revanche, il apparaît une autre classe de solutions.

- A petit taux de cisaillement, on observe des oscillations de type 'stick-slip'
- A taux de cisaillement intermédiaire des bandes de cisaillement coexistent : leur nombre et leur position dépendent de l'histoire. Elles peuvent exister au milieu du système ou aux parois.
- A fort taux de cisaillement, l'écoulement est homogène.

Ces résultats sont robustes au changement de conditions aux parois.

2.3 Perspectives et conclusions

2.3.1 Succès et perspectives

La simplicité de ce modèle scalaire a permis une résolution numérique complète dans une géométrie donnée, et l'étude de la stabilité des solutions hétérogènes ainsi que les régimes transitoires. Nous avons ainsi observé que ce système d'équations *a priori* très simple conduit à une phénoménologie riche. Les similarités entre cette phénoménologie et divers résultats expérimentaux sont frappantes ainsi qu'il est détaillé dans l'article inséré en fin de chapitre. La spécificité de ce modèle réside en ce qu'il décrit des comportements de milieux pâteux sous écoulement, c'est-à-dire de milieux qui ne présentent pas de changement de structure.

D'autres modèles récents soit s'inscrivant dans le même type de démarche phénoménologique [49], soit inspirés des modèles de transition de phases sous écoulement [50, 51] conduisent à des systèmes d'équations proches et montrent d'une part des comportements comparables à ceux que nous avons observés et d'autre part des comportements chaotiques. Une des perspectives de cette étude est la sophistication de cette version simple du modèle.

Par ailleurs, le modèle tel que nous l'avons proposé peut être aisément implémenté dans une géométrie cylindrique afin d'être comparé à un riche corpus d'expériences réalisées dans cette géométrie. En effet, dans cette géométrie particulière, la contrainte n'est pas uniforme dans le milieu. Or, les résultats que nous venons de présenter montrent la sensibilité du système à la contrainte, et l'existence de seuils de contrainte. Quelle sont les solutions stables dans cette géométrie ? Quelle est la sensibilité du système à la courbure du cylindre ? Ce type de problématique a été approfondi dans le cas de modèle décrivant des changements de structures par Radulescu *et al* [35], ainsi que dans des expériences [10], et pourrait être développé dans le cas des fluides à seuil.

Toutefois, plutôt que de poursuivre dans cette voie, nous avons préféré revenir sur la construction du modèle lui-même du fait de ses limites développées ci-après.

2.3.2 Limites

L'approche "fluidité" que nous avons développée, ne permet pas d'aborder l'écoulement à une échelle mésoscopique. Les modèles décrivant des transitions de phases sous écoulement introduisent de paramètres de structures identifiables et des dynamiques spécifiques, comme par exemple des modèles de type *Doi* ou *Johnson Segalman* ([31, 35, 36]). Dans notre modèle, nous ne pouvons pas donner d'interprétation à la variable fluidité. Quelle sens a-t-elle au niveau microscopique ?

Dans la suite, nous proposons une description microscopique ou mésoscopique de fluides à seuil en nous attachant à garder une description générale du milieu.

2.4 Article : A simple model for heterogeneous flows of yield stress fluids

L'article suivant a été publié dans *Physical review E* en 2002.

PHYSICAL REVIEW E 66, 051501 (2002)

Simple model for heterogeneous flows of yield stress fluids

Guillemette Picard* and Armand Ajdari

Laboratoire de Physico-Chimie Théorique, UMR CNRS 7083, ESPCI, 10 Rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France

Lydéric Bocquet

Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon, UMR CNRS 5672, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex, France

François Lequeux

Laboratoire de Physico-Chimie Macromoléculaire, UMR CNRS 7615, ESPCI, 10 Rue Vauquelin, F-75231 Paris Cedex 05, France

(Received 7 June 2002; published 5 November 2002)

Various experiments evidence spatial heterogeneities in sheared yield stress fluids. To account for heterogeneities in the velocity gradient direction, we use a simple model corresponding to a nonmonotonic local flow curve and study a simple shear geometry. Different types of boundary conditions are considered. Under controlled macroscopic shear stress Σ , we find homogeneous flow in the bulk and a hysteretic macroscopic stress–shear-rate curve. Under controlled macroscopic shear rate $\dot{\Gamma}$, shear banding is predicted within a range of values of $\dot{\Gamma}$. For small shear rates, stick-slip can also be observed. These qualitative behaviors are robust to changes in the boundary conditions.

DOI: 10.1103/PhysRevE.66.051501

PACS number(s): 83.10.Tv, 83.60.La, 83.60.Rs, 83.10.Gr

I. INTRODUCTION

Complex materials, such as concentrated colloidal suspensions, gels, or foams, often exhibit exotic rheological behavior at low shear [1–11], very different from the Newtonian linear response characterized by a stress Σ linearly proportional to the shear rate $\dot{\Gamma}$ (in scalar language). A term often coined for some of these behaviors is that of “yield stress fluids.” Although often loosely used, it most of the time describes fluids that have one or both of the following properties: when one looks at the steady state flow curve $\Sigma(\dot{\Gamma})$ at low shear, (i) the stress Σ tends to a finite value Σ_Y when the shear rate goes to zero; (ii) no flowing steady state solution exists for stresses smaller than a value Σ_0 . Consequently, at low stresses, the system does not really flow, and these “pastes” often display physical aging in a way rather similar to structural glasses.

A traditional way to apprehend this *macroscopic* rheological nonlinear behavior is to suppose the existence of a *local* relation between the *local* stress σ and the *local* shear rate $\dot{\gamma}$ of one of the forms I to IV in Fig. 1. Classically again, I to III being monotonic can lead to a homogeneous flow so that the macroscopic response is identical to the local flow curve: while II and III correspond to genuine yield stress fluids satisfying both (i) and (ii) above [with $\Sigma_0 = \Sigma_Y = \sigma(\dot{\gamma}=0)$], I yields a power law fluid behavior $\Sigma = A\dot{\Gamma}^\alpha$ which can be experimentally very difficult to tell apart from the yield stress behaviors II and III if α is small. It is classically argued, on the other hand, that the decreasing branch of IV ($d\Sigma/d\dot{\Gamma} < 0$) cannot lead to the corresponding homogeneous situation, as such a flow is unstable with respect to the formation of “shear bands” or domains flowing at different lo-

cal shear rates. This statement is usually substantiated by a simple argument invoking inertial terms (see, for instance, [12]). This type of banding is referred to as “gradient banding” as opposed to “vorticity banding” (coexistence of domains flowing at different local shear stress and common shear rate).

The question then arises of the structure of the heterogeneous flow pattern observed in these conditions (curve IV, gradient banding), of its stability (i.e., are there always steady-state solutions?), and of the resulting macroscopic flow curve $\Sigma(\dot{\Gamma})$ for the steady-state solutions. Investigating this problem in generic terms is very difficult as many underlying dynamical laws involving an unlimited number of “hidden” variables can generate local equations such as IV. In this paper, to make progress, we consequently make a specific choice for this underlying dynamics, which we justify now.

Formally, taking the vertical $\dot{\gamma}=0$ axis as part of the local flow curve, the problem is very similar to the analysis of flow-induced or flow-assisted “phase” transitions for sys-

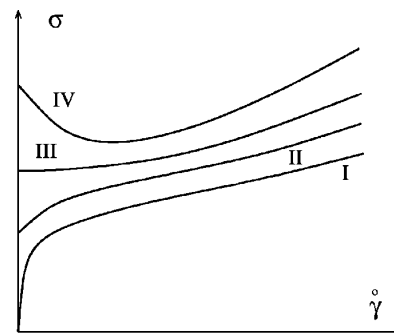


FIG. 1. Schematic representation of possible local steady-state curve $\sigma(\dot{\gamma})$ generating a macroscopic yield stress fluid behavior.

*Electronic address: guillemette@turner.pct.espci.fr

tems with a local nonmonotonic relationship $\sigma(\dot{\gamma})$. For some systems, the change in rheological properties can be ascribed to a structural phase transition occurring under flow: Ramos *et al.* with lyotropic hexagonal phases [2], Diat *et al.* with onions [4], and Britton and Callaghan [1] and Berret *et al.* with wormlike micelles [3] observe a phase transition, and the coexistence of two well defined phases. Such behaviors are quite reminiscent of equilibrium phase transitions, although no general principle applies *a priori* in such out of equilibrium situations [13]. The identification of structural differences between the flowing phases then provides a guide as to what are the most likely relevant local variables beyond the rheological ones: a (nonconserved) nematic order parameter, the (conserved) concentration of a constituent, etc. Related theoretical descriptions have thus tried to describe the coupling between this order parameter and flow in order to obtain a selection criterion for the flow pattern and the resulting macroscopic rheological behavior [13–19].

However, for many yield stress fluids there is no obvious structural difference between the coexisting flowing phases: experimental reports often describe “shear bands” of a flowing “phase” in a stationary “phase” with no clear structural or textural difference between the two parts of the system. Such “soft glassy materials” [8] include gels, pasty systems, concentrated glassy suspensions, and so on. One may cite the work by Raynaud *et al.* [7], where banding is observed in a suspension of bentonite and the interface between the bands is in the velocity-vorticity plane (gradient banding): the system is sheared within a band at the inner moving cylinder, while the rest of the sample remains unsheared. Laponite suspensions also undergo banding for a certain range of imposed shear rates, a range for which the shear stress is almost constant [10]. Noticeably, for a range of lower shear rates stick-slip is observed in this system: a layer reversibly fractures and reheals, showing stationary oscillations in the measured stress. Eventually, one may note that inhomogeneous velocity profiles are also observed in sheared foams [5] and granular pastes [11].

For these systems with no clearly identified structural variable that would distinguish coexisting phases, there is much less guidance for building models. Still, banding is likely to originate from the same basic physical mechanism as for phase separating fluids [20]. Models have therefore been derived along similar lines, which differ by the choice of the hidden variable (equivalent to the order parameter) and of its dynamics [20,22]. In addition, or alternatively, gradient terms were included in the nonmonotonic intrinsic law $\sigma(\dot{\gamma})$ [12,21].

In the present paper we follow the route initiated by Derec *et al.* [23], which has been shown to be a simple though useful guide to understand the interplay between nonlinear rheology and aging properties for yield stress fluids characterized by local flow curves of types I to III [23,24]. In the present work we adapt it to describe local flow curves of type IV, and to take into account spatial heterogeneities.

The essence of the model of [23] is to describe the local state of the system by a single scalar variable that is for convenience taken to be the local relaxation frequency of the

stress (called the “fluidity”), as expressed by a Maxwell equation $\partial_t \sigma = -a(t)\sigma + \dot{\gamma}$ (stress has been rescaled so that the elastic modulus is 1). Then the evolution of the fluidity $a(t)$ results from the competition between (i) *aging*—relaxation rates in the system decrease during the spontaneous evolution of the pasty system, this evolution being itself slower and slower as time passes; and (ii) *flow-induced rejuvenation*—flow induces rearrangements in the system, which in turn increase the fluidity of the system as a feedback mechanism [9,24–26]. This competition results in an equation for a that supplements the Maxwell one: $\partial_t a = -f(a) + g(a, \sigma, \dot{\gamma})$, with f and g positive functions.

Here, to address the question at hand, we focus on choices for f and g leading to local flow curves (local steady states) with a decreasing branch at low values of $\dot{\gamma}$, and we attempt to describe spatial heterogeneities, through a simple diffusion term $D\Delta a$ in the equation describing the evolution of a .

We then study the flow patterns in a simple shear geometry for such a system, when it is driven at either imposed macroscopic shear stress Σ or imposed macroscopic shear rate $\dot{\Gamma}$, and deduce the resulting macroscopic rheological behavior. We will on the way provide analytical and numerical arguments, using when necessary explicit choices for f and g , and pinpoint the role of the boundary conditions. In particular we will show that the model accounts for the following features.

(1) When Σ is imposed, the flow curve jumps in a hysteretic fashion between two branches: one corresponds to no flow but for a wall layer in the vicinity of the walls; the other corresponds to a fully fluidized situation.

(2) When the global shear rate $\dot{\Gamma}$ is imposed, shear banding can occur, as well as sometimes a stick-sliplike oscillating behavior at small shear rate that corresponds to a localized oscillation of the fluidity.

These features will be analyzed in the context of experimental results.

The paper is organized as follows. We recall in Sec. II the basic ingredients of the model in Ref. [23] and propose a generalization to account for inhomogeneities in the system. The homogeneous case is detailed in Sec. III and the stability of the homogeneous solutions is discussed. Heterogeneous solutions are considered in Secs. IV and V. In Sec. IV the controlled stress situation is considered, while in Sec. V the global shear rate is imposed. In Sec. VI, choices made in building the model and the influence of the boundary conditions are discussed.

II. MODEL AND GEOMETRY

In this section we define more clearly the model and the geometry we are going to study, following the physical arguments given in the Introduction. In Sec. II A, we specify further the functions f and g , in Sec. II B we describe the geometry considered and the corresponding description of heterogeneities in the equations, in Sec. II C we define the boundary conditions for both velocity and fluidity, and we summarize in Sec. II D by recalling the resulting set of equations.

SIMPLE MODEL FOR HETEROGENEOUS FLOWS OF ...

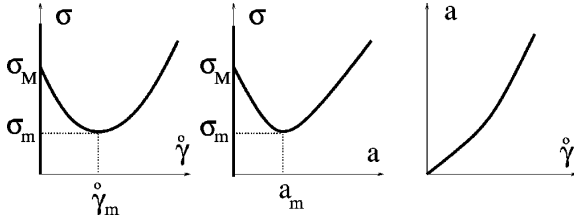


FIG. 2. Schematic drawing of the local steady-state flow curve $\sigma(\dot{\gamma}), \sigma(a), \dot{\gamma}(a)$.

A. Accounting for a nonmonotonic local flow curve

From the Introduction, we start with the model of [23], devised for homogeneous situations:

$$\partial_t \sigma = -a\sigma + \dot{\gamma},$$

$$\partial_t a = -f(a) + g(a, \sigma, \dot{\gamma}). \quad (1)$$

For the sake of explicitness, and with loss of generality, it will often be useful to restrict the choices for the functions f and g appearing in Eq. (1). This is particularly true for the flow-induced rejuvenation term $g(a, \sigma, \dot{\gamma})$ which can take many forms.

Following again Derec *et al.* [23], we take forms corresponding to low values of the stress, shear rate, and fluidity, so that power laws may express a kind of expansion of more general functions. Also, a being a positive scalar, the direction of shear is of no influence so one expects $g(a, \sigma, \dot{\gamma}) = g(a, -\sigma, -\dot{\gamma})$. A simple solution is then $g(a, \sigma, \dot{\gamma}) = h(a)\sigma\dot{\gamma}$.

Then, following the Introduction, we want the steady-state flow curve $\sigma(\dot{\gamma})$ to have a decreasing branch for small but nonzero values of $\dot{\gamma}$ (as sketched in Fig. 2). In that case, the steady-state solutions of the system (1) consist of the vertical axis ($a=0, \dot{\gamma}=0, \sigma$ arbitrary), and solutions given by $\sigma(a) = [f(a)/ah(a)]^{1/2}$ when expressed in the plane s, a . The function $a(\dot{\gamma})$ is a monovalued increasing function, whereas $\sigma(a)$ is multivalued, decreasing for small values of a and then increasing for larger values. The requirements are thus that $f(a)/ah(a)$ has a negative derivative for $0 < a < a_m$ and a positive one for $a_m < a$. The minimum thus reached for a_m corresponds to the minimal value of the stress $\sigma_m = [f(a_m)/a_m h(a_m)]^{1/2}$. Eventually, as for curve IV in Fig. 1, σ tends toward a finite value when $\dot{\gamma}$ goes to zero, which we call σ_M .

When numerical calculation proves necessary to analyze the evolution of the system, we make even more explicit choices regarding f and h , which must of course satisfy the above requirements. We use the simple choice $f(a) = ra^2 + a^4$, $h(a) = r'a + a^2$ with r and r' arbitrary numbers that we vary to check the robustness of our conclusions. That $f(a)$ scales as a^2 for small values of a gives a spontaneous relaxation of a as the inverse of the elapsed time, a situation often referred to as “full aging” (see [23]).

PHYSICAL REVIEW E 66, 051501 (2002)

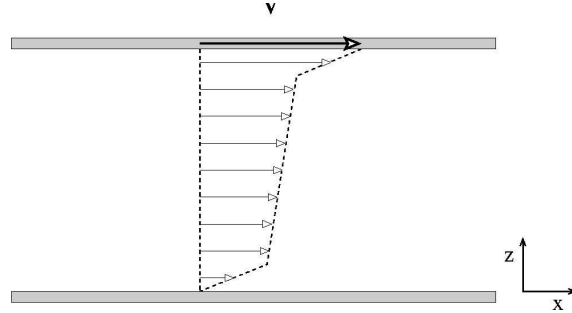


FIG. 3. Geometry: simple shear along x , variations along z only. The flow can be heterogeneous; the example depicted here corresponds to a low fluidity in the bulk and wall layers of higher fluidity close to the wall.

B. Incorporating heterogeneities: Geometry and model

In principle, a general description of heterogeneous flows implies complex algebra describing the evolution of scalar and tensorial quantities through convected derivatives, and writing various conservation equations (for mass, momentum, etc.). We focus here on the simplest flow geometry (simple shear), allowing only variations along one direction, perpendicular to flow and vorticity.

More precisely, we consider our complex fluid to be bounded by two parallel plates located at $z=0$ and $z=H$ (see, e.g., Fig. 3). The top plate moves along x at a velocity V , while the bottom one is immobile, so that the macroscopic shear rate is $\Gamma = V/H$. In this situation we consider laminar flows along x , where the local variables $\sigma = \sigma_{xz}$, $\dot{\gamma}$, and a depend only on z (i.e., not on x and y).

Neglecting acceleration (inertial) terms is a common assumption for such (highly viscous) fluids on the ground of a low Reynolds number. This in general makes the stress divergence free, but in the present geometry it results in the stress being spatially constant so that it is no longer a local variable. We will in this paper make this assumption of fast momentum diffusion, while keeping in mind that by doing so we formally suppress a “mechanical instability” that destabilizes into bands any homogeneous flow solution corresponding to a decreasing part of the local flow curve $d\sigma/d\dot{\gamma} < 0$ (see, e.g., [12,20,27]). In this framework, the local stress depends solely on time, and is identical to the macroscopic stress $\sigma(z, t) = \sigma(t) = \Sigma(t)$.

Now in order to discuss spatial heterogeneities we need to account for the effect on the dynamics of a heterogeneous value of the fluidity. Again, for the sake of simplicity, we model this as a diffusion process in the evolution of the fluidity and correspondingly add a $D\nabla^2 a$ diffusion term to the second equation of (1). This choice corresponds to a picture in which the system is fluidized in a localized region; this triggers spontaneous local relaxations which themselves tend to fluidize the neighborhood of the initial region. Accordingly, we take the “diffusive coefficient” to be a positive constant. A negative value would generate local, small wavelength instabilities that destabilize homogeneous flow even at high shear rates. As we focus here on the instability gener-

PICARD *et al.*

PHYSICAL REVIEW E **66**, 051501 (2002)

ated by the nonmonotonic branch of the local flow curve, and in line with experimental observations [7,9] of homogeneous flow at high shear, we discard this possibility here. In addition, we do not consider other terms formally allowed by symmetry such as $(\nabla a)^2$.

The system is therefore described by the coupled equations

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma(t) &= -a(z,t)\sigma(t) + \dot{\gamma}(z,t), \\ \partial_t a(z,t) &= -f(a(z,t)) + h(a(z,t))\sigma(t)\dot{\gamma}(z,t) + D\partial_{zz}^2 a(z,t). \end{aligned} \quad (2)$$

One may note that in its present form the equation for the fluidity is close to the equation for the granular temperature obtained within the granular hydrodynamics of inelastic beads [28]: the spatial diffusion term accounts in the latter case for “heat” diffusion (according to Fourier law) and the “aging” term corresponds to the energy dissipation term (due to the inelasticity of collisions), which drives the granular material toward a state of zero temperature. Eventually, the granular temperature is indeed a measure of the local fluidity of the granular material.

An important comment is also that the diffusion coefficient D that we took constant here could in principle be a function of a . This would affect the length scale appearing from the competition of $f(a)$ and $D\partial_{zz}^2 a$. If, as in the example at the end of the previous subsection, $f(a) \sim a^2$ for small a , then this length scale depends on the actual value of a : $(D/a)^{1/2}$, indicating algebraic tails for spatial structures of low fluidity.

C. Boundary conditions

The equation for the fluidity and velocity have to be supplemented by boundary conditions at the confining walls at $z=0$ and $z=H$.

We here exclude any direct wall slippage and assume the plates to be sufficiently rough for the plate velocity to be equal to the limit velocity in the fluid approaching the plate (no slip velocity). This is equivalent to

$$\int_0^H dz \dot{\gamma}(z,t) = V(t) = \dot{\Gamma}(t)H. \quad (3)$$

It is important to point out that this hydrodynamic condition is not sufficient: a boundary condition for the fluidity equation is also required. How the walls affect the density, order, and relaxation processes of the fluid in their vicinity is obviously a complex problem with many aspects to it, even for simple liquids [29]. A smooth flat wall can enhance ordering; a rough or chemically disordered one can on the contrary locally disorganize the fluid (relative to what happens in the bulk). The consequences of these on the local relaxation rates being far from trivial [30], we choose here to investigate two limiting simple cases that hopefully bracket the true behavior: (i) a fixed fluidity at the wall

$$a(z=0) = a(z=H) = a_w, \quad (4)$$

and (ii) a zero gradient condition

$$\partial_z a|_{z=0,H} = 0. \quad (5)$$

D. Summary

We summarize here the equations that we will use in the remainder of the paper:

$$\begin{aligned} \partial_t \Sigma &= -a\Sigma + \dot{\gamma}, \\ \partial_t a &= -f(a) + h(a)\Sigma\dot{\gamma} + D\partial_{zz}^2 a, \\ \int_0^H dz \dot{\gamma}(z,t) &= V = \dot{\Gamma}H, \\ a|_{z=0,H} &= a_w \quad \text{or} \quad \partial_z a|_{z=0,H} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\Sigma(t), \dot{\Gamma}(t)$ are global variables whereas $a(z,t)$ and $\dot{\gamma}(z,t)$ are local ones. When explicit choices are necessary to study the corresponding dynamics, we will use $f(a) = ra^2 + a^4$ and $h(a) = r'a + a^2$.

Let us recall that by neglecting the inertial terms we formally suppress the “mechanical instability” that destabilizes the decreasing branch $d\sigma/d\gamma < 0$.

Numerical method. For various cases, it is difficult or impossible to get analytical results and numerical calculation becomes necessary. The evolution equations for the stress and the fluidity, Eq. (6), have been solved numerically using a pseudospectral method, together with a Runge-Kutta integrator [31]. This technique integrates the diffusion part of the time equation for the fluidity in Fourier space, while the nonlinear part is solved in real space. Special care has been taken to avoid aliasing of the solutions. A standard fast Fourier transform algorithm is used for the forward and backward transformations between real and Fourier space.

We wish to use Eqs. (6) to deduce the macroscopic behavior of the system, to analyze the conditions for the existence of a steady state, and to describe the features of the flow. Note that the boundaries appear explicitly, as potential heterogeneities, so that most of the time the structure close to the boundaries will be different from the one in the bulk, allowing the walls to nucleate new “phases” before the bulk. Actually, the absence of noise terms in these equations suppresses the equivalent of homogeneous nucleation in thermodynamics problems. We briefly comment upon the addition of noise when it plays a significant role. In the following three sections, we first consider briefly the formal case of a homogeneous behavior (Sec. III); we then analyze the simpler case of the response to a fixed stress Σ (Sec. IV), before turning to the more complex case of a fixed global shear rate $\dot{\Gamma}$ (Sec. V).

III. HOMOGENEOUS BEHAVIOR

We first analyze briefly the homogeneous case, where we impose the requirement that the fluidity $a(t)$ is independent of z , so that Σ and $\dot{\Gamma}$ are similar to σ and $\dot{\gamma}$. Although slightly redundant with previous discussions of the flow

SIMPLE MODEL FOR HETEROGENEOUS FLOWS OF ...

PHYSICAL REVIEW E 66, 051501 (2002)

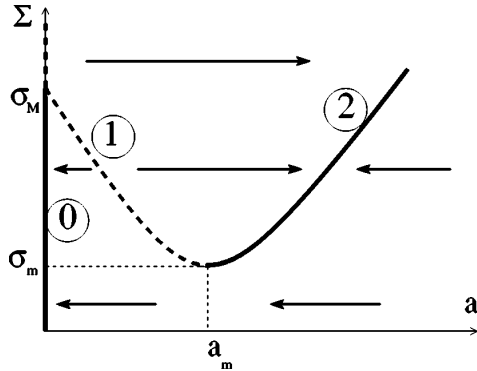


FIG. 4. Schematic description of the evolution of a at fixed stress (horizontal arrows). Stable steady-state branches are in bold; unstable ones in dashed lines.

curve, this analysis will highlight the potential differences between the stability analyses at fixed stress and fixed shear rate. These differences naturally result from the fact that Σ and $\dot{\Gamma}$ are treated on a different footing in Eq. (1).

As previously stated, steady-state solutions consist of three branches.

Branch 0: $\dot{\Gamma}=0$, $a=0$, Σ arbitrary. This corresponds to a frozen, nonflowing system.

Branch 1: $a < a_m$, $\dot{\Gamma} < \dot{\gamma}_m = a_m \sigma_m$, and Σ is a decreasing function of both a and $\dot{\Gamma}$.

Branch 2: $a > a_m$, $\dot{\Gamma} > \dot{\gamma}_m$, and Σ is an increasing function of both a and $\dot{\Gamma}$, from σ_m up to ∞ .

The three solutions (or branches) of fluidity are schematically plotted in the (Σ, a) plane in Fig. 4 [the $(\Sigma, \dot{\Gamma})$ plot has a similar aspect and is identical to the left curve in Fig. 2]. We will use the notation $a_1(\Sigma)$ and $a_2(\Sigma)$ to designate branches 1 and 2 [the two roots of $\Sigma^2 = f(a)/ah(a)$].

A. Imposed stress Σ

The evolution of a homogeneous system at fixed $\Sigma = \sigma$ is truly simple as the Maxwell model yields $\dot{\Gamma} = a\Sigma$ which can be injected in the equation describing the fluidity, so that the evolution of the system is completely described by the sole differential equation

$$\frac{da}{dt} = -\frac{dV_\Sigma}{da}(a), \quad (7)$$

where the “effective potential” V_Σ is

$$V_\Sigma(a) = \int_0^a da' [f(a') - a'h(a')\Sigma^2]. \quad (8)$$

The above equation describes the relaxation of a in the potential V_Σ . Depending on the value of the imposed Σ , this potential has either one or three extrema: for $\Sigma < \sigma_m$, $a = 0$ is the only minimum; for $\sigma_M > \Sigma > \sigma_m$, V_Σ has two minima, $a = 0$ and $a = a_2(\Sigma)$ and a single maximum $a = a_1(\Sigma)$; and for $\Sigma > \sigma_M$, $a = a_2(\Sigma)$ is the only minimum.

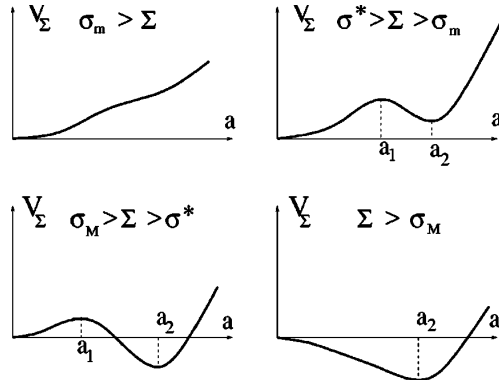


FIG. 5. Effective potential $V_\Sigma(a)$ for the evolution of $a(t)$ in the homogeneous case. Depending on the actual value of Σ , V_Σ has one or two minima.

Linear stability immediately results (see Fig. 4), as the system falls in the potential $V_\Sigma(a)$ along the instantaneous slope at point $a(t)$ (see Fig. 5).

Branch 0 is stable for $\Sigma < \sigma_M$ so that the system evolves to this frozen situation whenever the stress is too weak, $\Sigma < \sigma_m$. At long times the system typically creeps but does not flow, $\dot{\Gamma}(t) = a(t)\Sigma$ with $a(t)$ decreasing (typically algebraically in time) to 0. For example, with the explicit values of f and h proposed above, one has $a(t) \sim 1/t$ so that $\Gamma(t) \sim \Sigma \ln(t)$.

Branch 1 is always unstable, so that for $\sigma_M > \Sigma > \sigma_m$ the system fluidity evolves either to 0 (again leading to creep, not to steady flow) if the initial value of a is smaller than $a_1(\Sigma)$, or toward $a_2(\Sigma)$ in the opposite case. Note that such a behavior is rather similar to the recently reported “viscosity bifurcation” [32]. This similarity remains if the constraint of homogeneity is lifted as will be discussed in Sec. IV. The stable branches 0 and 2 correspond, respectively, to stable nonflowing and flowing states of the system under Σ .

For larger stresses $\Sigma > \sigma_M$ branch 0 is unstable and the fluidity always evolves toward $a_2(\Sigma)$.

Eventually we note that for $\sigma_M > \Sigma > \sigma_m$ the addition of noise to the equation describing the evolution of a could lead the system to select either branch 0 or branch 2, depending on which one corresponds to the lowest value of V_Σ (the noise could allow the system to jump to the more favorable well, although possibly after very long times). Comparing these two values leads to the introduction of a value σ^* that will prove important in the following: for $\sigma_m < \Sigma < \sigma^*$, $0 = V_\Sigma(0) < V_\Sigma(a_2)$ so that branch 0 is the absolute minimum; for $\Sigma > \sigma^*$ branch 2 is the minimum. Formally, σ^* is given by $V_{\sigma^*}(a_2(\sigma^*)) = 0$ (see Fig. 5).

B. Imposed shear rate $\dot{\Gamma}$

Although the steady-state solutions are obviously the same as in the previous case, the dynamics is more complex when $\dot{\Gamma}$ is fixed, as it is governed by the coupled equations for the evolution in time of $\Sigma(t)$ and $a(t)$.

The stability of the steady-state solutions can, however, be examined by linearization around these solutions. The two stable branches 0 and 2 in Fig. 4 described in the case of an imposed stress remain stable. The stability of the decreasing branch 1 at fixed shear rate and with homogeneity imposed depends on the choice of the functions f and h in Eq. (6) (recall that as mentioned in Sec. II B we have formally suppressed the mechanical inertial mode of destabilization). For general f and h , one cannot preclude destabilization of the steady solution (1) to a limit cycle [33]. However, this is not the case with the expressions of Sec. II A $f(a) = ra^2 + a^4$ and $h(a) = r'a + a^2$, for which the branch 1 is always stable (again when homogeneity is enforced).

IV. HETEROGENEOUS FLOW AT IMPOSED STRESS Σ

The situation at imposed fixed stress can be apprehended rather simply starting from the analysis of the homogeneous case mentioned above with its two stable branches 0 and 2. Heterogeneities are generated by the walls, which induce wall layers of different fluidities, with a major effect on the selection of the steady-state flow branch.

A. Imposed fluidity at the wall

We start by considering the case where the walls impose the local value of the fluidity $a|_{z=0,H} = a_w$. The evolution of the system is described by that of $a(z,t)$ from which the shear rate can easily be deduced, $\dot{\gamma}(z,t) = a(z,t)\Sigma$. Formally,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta F_{\Sigma}}{\delta a(z)} \quad (9)$$

which is a rather classical equation describing the local relaxation of a “free energy” $F_{\Sigma}(a(z))$. Here this functional is

$$F_{\Sigma}(a(z)) = \int_0^H \left[V_{\Sigma}(a) + \frac{1}{2} D(\partial_z a)^2 \right] dz, \quad (10)$$

where it is implicitly understood that a equals a_w on the boundaries.

The evolution can be understood as a minimization of F_{Σ} , as $d_t F_{\Sigma} = -\int_0^H dz (\partial_t a)^2 < 0$. Schematically, minima correspond to adopting throughout the sample a value of a minimizing V_{Σ} [i.e., 0 or $a_2(\Sigma)$], and then connecting at the boundaries to the imposed value a_w with a minimal penalty obtained as a compromise between the V_{Σ} term and the square gradient term (a more formal description of these steady-state solutions is given in the Appendix). This leads to steady-state branches in the (Σ, Γ) plane that deviate from the branches 0 and 2 only by the contribution of these wall layers, which shifts the average shear rate by a small term proportional to ℓ/H , where $\ell \sim [Da_w/f(a_w)]^{1/2}$ is the thickness of these layers.

The stability of these branches is now limited by the fact that the walls at a_w can act as nucleating sites for the other phase. For example the “frozen” branch, where fluidity decreases from a_w on the wall to almost zero in the middle,

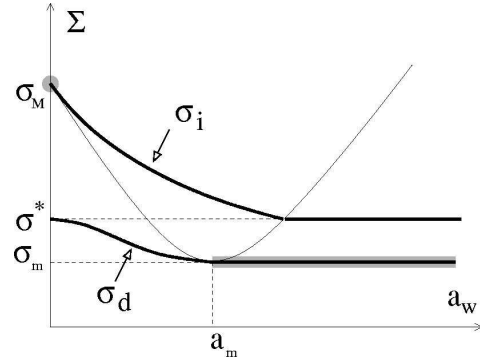


FIG. 6. Threshold values σ_i and σ_d of the stress as a function of the fluidity at the walls a_w . Above σ_i the frozen branch is unstable; below σ_d the fluidized branch is unstable. When the imposed macroscopic stress Σ is between σ_d and σ_i , both branches are stable. Which one is selected depends then on the initial conditions, i.e., on the system’s history. Areas in gray correspond to bulk destabilization (“spinodal”), whereas a simple thick line denotes destabilization from the wall (“heterogenous nucleation”).

ceases to be stable if Σ is increased so that it becomes interesting (in terms of minimizing F_{Σ}) to increase a beyond a_w at the expense of a section of the $a=0$ central part. The threshold roughly corresponds to $V_{\Sigma}(a_w) = V_{\Sigma}(0)$ which defines a maximal value of the stress $\sigma_i(a_w)$ for stability on the pasty branch. Beyond this value, the $a(z)$ solution “slips” into the potential well of branch 2. Similarly, the fluid branch ceases to be stable upon decrease of the stress Σ when the latter reaches the value $\sigma_d(a_w)$ defined by $V_{\sigma_d}(a_w) = V_{\sigma_d}(a_2(\sigma_d))$. It is easy to check that $\sigma_m \leq \sigma_d \leq \sigma^*$, whereas $\sigma^* \leq \sigma_i \leq \sigma_M$. Typical curves for $\sigma_i(a_w)$ and $\sigma_d(a_w)$ are plotted in Fig. 6.

A second process of destabilization exists. If the wall fluidity has extreme values (either low or high) walls may no longer be involved in the destabilization process, which is then “spinodal” (gray areas in Fig. 6).

The conclusion for the macroscopic steady-flow $\Sigma(\Gamma)$ diagram is thus simple. At fixed Σ there are two stable flow curves. For $\Sigma < \sigma_i(a_w)$ a branch exists close to the axis corresponding to a frozen bulk with two layers of finite fluidity close to the walls (as schematized, e.g., in Fig. 2). This branch is indistinguishable from the vertical axis for large values of the thickness H . For $\Sigma > \sigma_d(a_w)$, a fluidized branch exists very close to 2 (identical in the limit $H \rightarrow \infty$), with a flowing bulk, and slightly less fluid wall layers.

In the intermediate range $\sigma_d < \Sigma < \sigma_i$, both branches are stable. The branch actually selected depends on the system history and preparation (initial conditions). This is very compatible with recent observations of a “bifurcation” of the asymptotic viscosity at a given value of the applied stress for a given preparation [32].

If one starts with macroscopic bands of fluidized and frozen material, the fronts between these zones will move so that one typically ends on the fluid branch for $\Sigma > \sigma^*$ and on the frozen branch for $\Sigma < \sigma^*$.

If the stress Σ is varied slowly in a systematic way (i.e.,

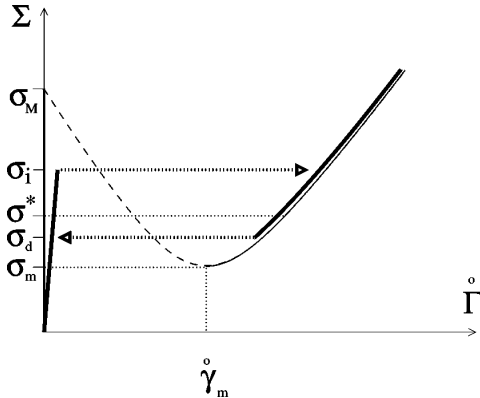


FIG. 7. Macroscopic flow curve at imposed stress Σ (thick lines). The thin lines (dashed and continuous) correspond to the local flow curve of Fig. 2. The value of the fluidity a_w at the walls fixes the location of the limits of stability σ_i and σ_d of the frozen and fluid branches (see Fig. 6). When the stress is varied monotonically, the shear rate suddenly jumps at these values (thick arrows).

increased or decreased), one has the simple hysteretic behavior described by the thick arrows in Fig. 7.

The departure from the homogeneous case described in the previous section is due to the walls, which introduce the parameters H and a_w . Although the former has a moderate role in shifting by a small amount the branches in the diagram (by a term proportional to ℓ/H), the latter controls the position of the instability thresholds, and thus the amplitude $\sigma_i - \sigma_d$ of the hysteresis loop observed macroscopically. (Actually, looking at the details, these threshold stresses depend very slightly on H but this effect is almost invisible numerically. See the Appendix).

The above picture (Fig. 7) is confirmed by numerical simulations by starting from various arbitrary initial conditions and also by submitting the system to ramps of increasing and decreasing stress. These simulations also allow one to follow the destabilization process. Starting from a frozen solution, the bulk is destabilized when $\Sigma = \sigma_i$. This destabilization process is initiated at the wall, where the fluidity is fixed and nonvanishing (acting therefore as a destabilizing nucleus): two fronts of large fluidity are first created at each wall, and then propagate in the material to merge eventually at the middle of the Couette cell to give the homogeneous $a_2(\Sigma)$ bulk solution (Fig. 8).

On the other hand, starting from the fluidized branch, when the stress is decreased this highly sheared solution is destabilized for $\Sigma = \sigma_d$. The destabilization process depends on a_w . If $a_w < a_m$, then $\sigma_d > \sigma_m$ and the destabilization occurs by fronts merging, as previously described, whereas in the reverse case $\sigma_d = \sigma_m$, and the bulk is destabilized as a whole, as a plateau decreasing in time toward zero.

Note that the problem is formally very similar to that of wetting transitions in thermodynamics: it reduces to the minimization of a free energy functional that is the sum of squared gradient term $(\partial_z a)^2$ and a potential with two wells $V_\sigma(a)$, with boundary conditions on the walls that can favor one or the other of the phases.

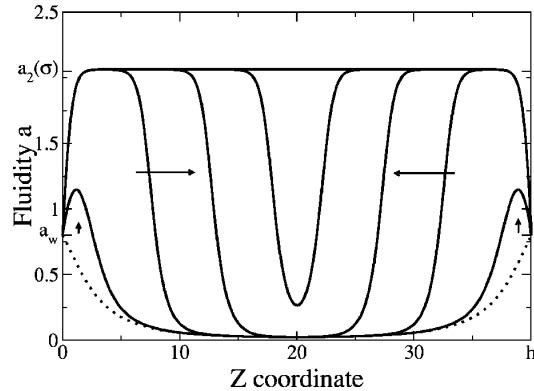


FIG. 8. Destabilization of the frozen bulk by heterogeneous nucleation. The initial state is plotted with dotted lines. As the stress is increased so that $\Sigma \geq \sigma_i$, two fronts come from the walls, as shown by the arrows, before they merge in the center. The steady state is the fluidized bulk. In this simulation $f(a) = a^2 + a^4$, $h(a) = 0.05a + a^2$, $a_w = 0.8$, and $\Sigma = 1.45$.

In this interpretation, the sections $\sigma^* \rightarrow \sigma_i$ on the pasty branch and $\sigma_d \rightarrow \sigma^*$ on the flowing one would be called metastable. The absence of noise in the equations used here makes them absolutely stable. Adding some noise in the bulk equation for a would reduce the metastable branch, bringing the system (possibly after prohibitively long waiting times) to jump from the pasty to the fluid branch at σ^* .

Note that it may be experimentally difficult to detect the hysteresis loop if its amplitude is small (either because $\sigma_i - \sigma_d$ is small or because of the presence of noise), which would make this macroscopic flow curve very similar to a textbook description of a fluid with a yield stress σ^* , with possibly a rather abrupt change of the steady-state shear rate at this value.

B. No flux at the wall: $\partial_z a|_{z=0,H} = 0$

If the boundary conditions are such that $\partial_z a = 0$ on the walls, then the behavior of the system is exactly that obtained in the analysis of the homogeneous model: the system tends to relax any inhomogeneity, and its stable steady-state solutions are those of the homogeneous model, a pasty branch 0 for $\Sigma < \sigma_M$ and a fluid branch 2 for $\Sigma > \sigma_m$. Both branches are stable solutions for $\sigma_m < \Sigma < \sigma_M$. It results in a hysteretic loop of amplitude larger than in the previous case.

So the picture is still quite similar to Fig. 7 above with the following differences: here $\sigma_i = \sigma_M$ and $\sigma_d = \sigma_m$, and the branches follow the local flow curve strictly, with no slight deviation due to wall layers.

Again we have checked the validity of this picture numerically.

V. HETEROGENEITIES AT IMPOSED SHEAR RATE $\dot{\Gamma}$

We now turn to the case where the global shear rate is controlled, i.e., the velocity V of the top wall is fixed, so that

PICARD *et al.*

 PHYSICAL REVIEW E **66**, 051501 (2002)

the average shear rate $\dot{\Gamma}$ is imposed. The dynamics of the system is now more complex and governed by two coupled integro-differential equations, that can be obtained from Eq. (6):

$$\begin{aligned} \partial_t \Sigma &= -\langle a \rangle(t) \Sigma(t) + \dot{\Gamma}, \\ \partial_t a &= -f(a) + ah(a) \Sigma^2(t) + h(a) \Sigma \partial_t \Sigma + D \partial_{zz}^2 a, \end{aligned} \quad (11)$$

where $\langle a \rangle$ is the spatial average of $a(z, t)$,

$$\langle a \rangle(t) = \frac{1}{H} \int_0^H dz a(z, t), \quad (12)$$

and where the boundary conditions are either $a|_{z=0, H} = a_w$ or $\partial_z a|_{z=0, H} = 0$. The local shear rate is given by $\dot{\gamma}(z, t) = \dot{\Gamma} + [a(z, t) - \langle a \rangle(t)] \Sigma$.

This set of dynamic equations leads to a much richer set of situations, as the dynamics of a does not relax a free energy [formally, $\partial_t a = -\delta F_{\Sigma(t)} / \delta a(z) + \frac{1}{2} h(a) \partial_t \Sigma^2$]. As a result, for some values of $\dot{\Gamma}$, the system can have many steady states corresponding to different values of Σ , and for some others none [the system then tends to a limit cycle corresponding to a periodic solution for $a(z, t)$ and for $\Sigma(t)$ that yields a macroscopic stick-slip behavior].

To explore this ensemble of scenarios it is necessary to solve these equations numerically. Our numerical exploration leads to a complex picture. Starting with the case of a fixed fluidity at the walls, we first describe the main features observed, before pointing out more complex features, including the metastability of various patterns of shear bands and the occurrence of localized oscillations. At this stage we have no analytical understanding of some of these features, and of their dependence on the parameters. The behaviors reported here result from numerical simulations with f and h fixed to $f(a) = ra^2 + a^4$ and $h(a) = r'a + a^2$. At the end of this section we turn to the case of zero fluidity gradient at the walls to underline a few differences from the previous case.

A. Imposed fluidity at the wall

We start by analyzing the case where the fluidity at the walls is fixed to a value a_w . Depending on $\dot{\Gamma}$ and a_w different behaviors are observed. The main features are the following. First, the frozen $0 < \Sigma < \sigma_i$ and fluidized $\sigma_d < \Sigma$ branches found at fixed stress (Sec. IV) are also found to be stable at imposed $\dot{\Gamma}$. Second, between two values $\dot{\gamma}_i$ and $\dot{\gamma}_d$ defined in terms of the threshold stresses on these branches (see Fig. 9), the most frequent long time behaviors (which we take as the steady states) are solutions corresponding to the coexistence of “bands” of frozen ($a \approx 0$) and fluidized phases [$a \approx a_2(\sigma^*)$] coexisting at a stress $\Sigma \approx \sigma^*$. Finally, in a narrow vicinity of the transition from the quasihomogeneous branches to this situation of coexisting “shear bands” (i.e., $\dot{\Gamma}$ slightly larger than $\dot{\gamma}_i$ or slightly smaller than $\dot{\gamma}_d$), various phenomena can occur in the vicinity of the wall: nucleation of thin layers of fluidity different from the bulk, or of layers of periodically oscillating fluidity.

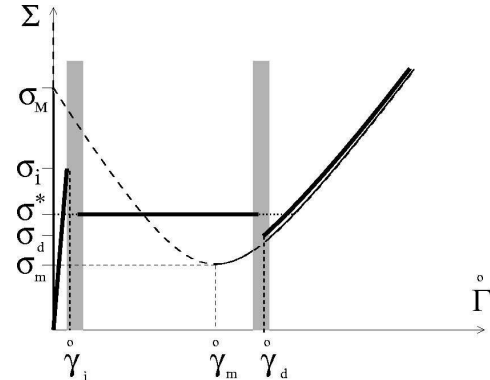


FIG. 9. Schematic macroscopic flow curve at imposed shear rate $\dot{\Gamma}$ (thick lines). Again the thin lines (continuous and dashed) denote the local flow curve. The value of the fluidity at the walls fixes the location of the limit shear rates $\dot{\gamma}_i$ and $\dot{\gamma}_d$ of the frozen and fluid homogeneous branches. Between these values the system tends to segregate into shear bands. At the transition between the two (gray areas), stable or oscillating thin layer structures are observed in the vicinity of the walls.

These behaviors have different signatures as shown on the macroscopic flow curve sketched in Fig. 9.

1. Frozen and fluidized regimes

First, for small and large imposed shear rate $\dot{\Gamma}$ one recovers the solutions obtained at imposed stress: except for small boundary effects, they correspond to the frozen branch 0, and to the fluidized branch 2 of the local flow curve.

Along the fluidized branch, the $\Sigma(\dot{\Gamma})$ relationship almost exactly follows the intrinsic flow curve obtained in the homogeneous case. The frozen branch actually displays an almost vertical section going to zero in the limit of vanishing shear rate $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$ due to the presence of a small wall layer of finite fluidity imposed by the wall a_w and of thickness ℓ .

These domains are limited by the global stresses $\sigma_i(a_w)$ and $\sigma_d(a_w)$, as discussed in Sec. IV. The corresponding shear rates $\dot{\gamma}_i$ and $\dot{\gamma}_d$ can be calculated numerically with the method described in the Appendix.

2. Shear-banding regime

A shear-banding domain connects the two previous frozen and fluidized regions. It corresponds to a coexistence in the shear cell of the frozen and the fluidized states. Its signature on the macroscopic flow curve is a quasiplateau at a stress $\Sigma \sim \sigma^*$. All over the banding domain (for a given a_w), the stress is found to remain in the vicinity of the value σ^* defined in Sec. III by $V_{\sigma^*}(a_2(\sigma^*)) = V_{\sigma^*}(0)$. This approximately fixes the value of the fluidity in the fluidized region to $a^* = a_2(\sigma^*)$, with $a_2(\sigma)$ being the corresponding branch obtained in the homogeneous case (see Sec. III). The shear rate in the fluidized region is approximately given accordingly as $\dot{\gamma}^* = a^* \sigma^*$. The total width of the frozen and fluidized regions are determined by the global constraint on the

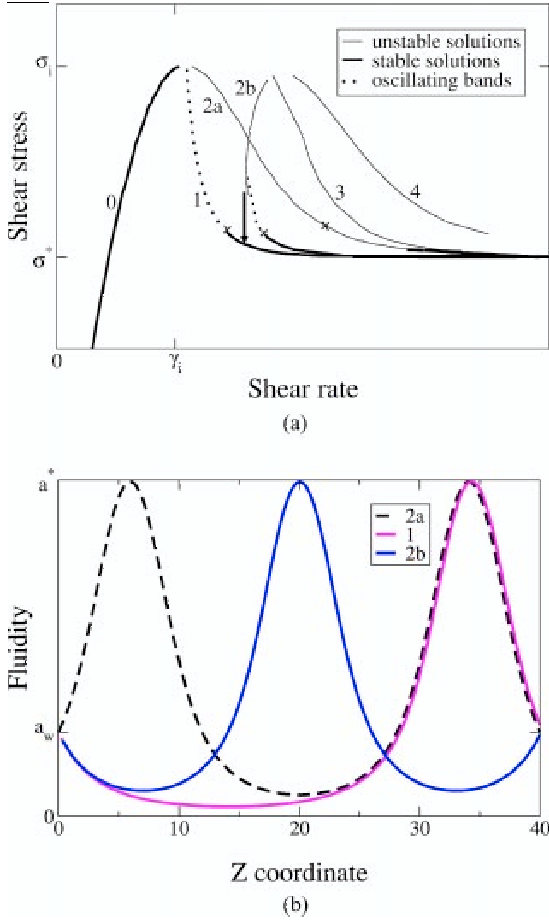


FIG. 10. (a) Calculated steady-state flow curves: the unstable stationary solutions are plotted with thin lines, the stable solutions with thick lines, and the oscillating solutions with dotted lines. The numbers on the branches represent the number of fronts between the fluidized and frozen bands. $r=1$, $r'=0.01$, $H=40$, $a_w=0.25$. (b) Fluidity profiles corresponding to the points marked with crosses on (a) for the branches 2a, 2b, and 1.

total shear rate. The width of the fluidized region h_f is typically given by $h_f \approx H\dot{\Gamma}/\dot{\gamma}^*$, with $\dot{\gamma}^*$ defined above (small boundary effects neglected).

An interesting question concerns the number of fluidized bands: how many fronts between a frozen and a fluidized band can be stabilized for given H , a_w , and $\dot{\Gamma}$? In order to answer this question, a zoom of the quasiplateau is plotted in Fig. 10(a) for given H and a_w . The stable quasiplateau actually consists of parts of the branches representing the steady-state solutions with several fronts (on the figure these stable parts of the branches are plotted with thick lines). The steady-state multifront branches were calculated numerically with the method detailed in the Appendix. The fluidity profiles corresponding to the branches with one and two fronts are represented in Fig. 10(b). Their stability was then examined with the numerical simulation described in Sec. IID.

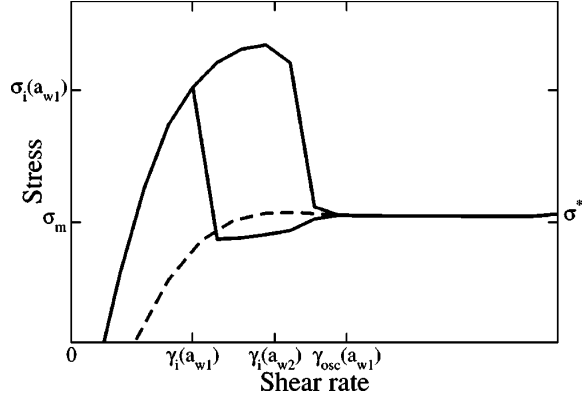


FIG. 11. Behavior at low shear rate for a fixed $H=100$, $r=1$, $r'=0.01$. The solid line corresponds to $a_{w1}=0.3$ and the dashed line to $a_{w2}=1$. In the case of a_{w1} , oscillations are observed, and the envelope of the oscillations is represented.

No analytical characterization was found to the limits of stability of the multifront branches. Beyond these limits, either oscillations are observed, or other stable branches are reached. Their complex dependence on a_w and Σ , is shown in Fig. 11. Note that, with the parameters taken to plot Fig. 10(a), for a small range of $\dot{\Gamma}$ [just left of the middle cross in Fig. 10(a)], two solutions are possible (depending on the history of the system): stable oscillations of a central fluidized layer (branch 2b), and a steady solution with a single fluid layer at the wall (branch 1). In the case of oscillations, when $\dot{\Gamma}$ is further decreased to the limit of stability of branch 2b, the system evolves toward the pattern of branch 1 as indicated by the arrow in Fig. 10(a).

3. Stick-slip behavior

When no stable branch is reached, a time dependent oscillating behavior is evidenced for stress and fluidity. As seen in Fig. 11, this occurs for small wall fluidity and imposed shear rate. This behavior is very reminiscent of stick-slip, a phenomenon commonly encountered in solid friction [33,34]. Here it originates in an oscillating behavior of the fluidity between a frozen state (stick phase) and a partially fluidized state (slip phase).

The fluidization however, occurs only within one layer, the rest of the system being frozen. This spatially localized oscillating behavior resembles a periodic fracture-healing process, as observed, e.g., by Pignon *et al.* [10]. The fluidized layer is localized either close to the wall, or in the middle of the shear cell, its fluidity oscillates between two extremal values, and its thickness is approximately constant. The time evolution of Σ and the maximum fluidity of the layer are plotted in Fig. 12, showing characteristic features of stick-slip behavior.

The system rapidly relaxes to the frozen state, i.e., a very small fluidity, while the stress increases until a limit where the fluidity abruptly increases, i.e., the fluid is suddenly sheared. This sudden increase is due to the penetration of the maximum fluidity in the basin of attraction of the fluidized

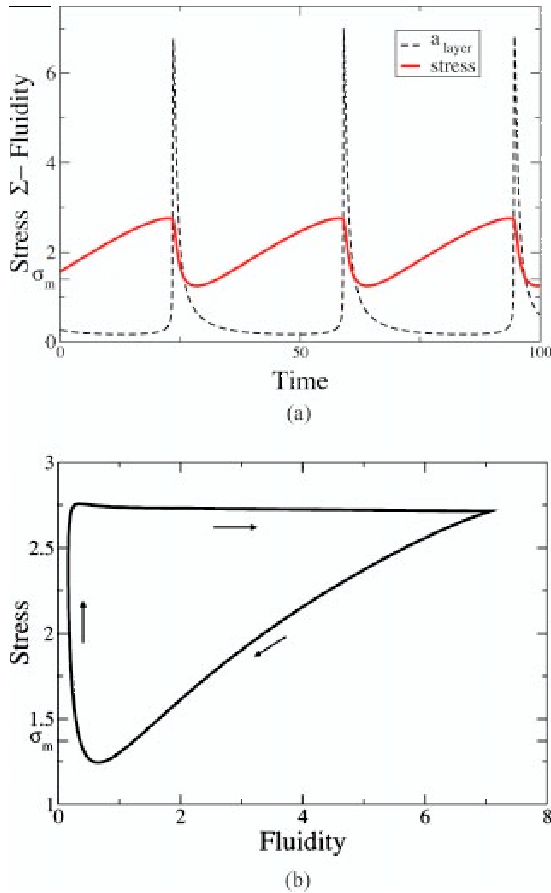


FIG. 12. The amplitudes of the oscillations of the global stress and of the maximum fluidity in the oscillating layer are represented as a function of time (a), and in the plane (a, Σ) (b), in the case $a_w=0.3$, $r=1$, $r'=0.01$, $\Gamma=0.12$. Its width hardly varies.

solution $a_2(\sigma)$, which is enlarged as σ increases. To maintain a fixed global shear rate, σ relaxes quickly and the cycle starts again.

B. No flux at the wall: $\partial_z a|_{z=0, H} = 0$

In the case of a no flux boundary condition and for intermediate values of Γ ($\dot{\gamma}_l < \Gamma < \dot{\gamma}_d$), two very different locally stable sets of solutions of Eqs. (11) and (12) are possible: one is very similar to the solutions obtained above for fixed fluidity at the walls and exhibits shear banding and stick-slip behavior; the other one is the homogeneous solution at fixed shear rate obtained in Sec. III. This peculiarity is associated with the specific form of the boundary condition, which is compatible with a homogeneous fluidity in the cell. Moreover, as discussed in Sec. III, the decreasing branch is linearly stable at fixed shear rate (remember that we have suppressed inertial terms), and no destabilizing mechanism is induced here by the boundaries (in contrast with the fixed wall fluidity case). Formally, the system is thus attracted either by the homogeneous solution or by the inhomogeneous

one, depending on initial conditions (an initial inhomogeneous state often leading to a banded inhomogeneous solution).

The macroscopic flow curve for Eqs. (11) and (12) with the present boundary conditions consists of the following:

(1) The two increasing branches of the local curve (the branches are parts of the local curve as the solutions are homogeneous). Those branches are also stable in the case of imposed stress.

(2) The decreasing branch of the local curve. This is of course an artifact due to our neglecting inertial terms, which suppresses the “mechanical instability” that always destabilizes this branch.

(3) The quasiplateau, with $\Sigma \sim \sigma^*$. As in the case of an imposed fluidity at the wall, it is constituted of parts of multifront branches, which become unstable at different values of the shear rate.

(4) An oscillating domain, for small shear rates, when the single front branch loses its stability.

Ruling out the unphysical decreasing branch, the picture is thus quite similar to Fig. 9 (without the effective wall slip in branch 1 due to the finite wall fluidity there).

C. Comment on the oscillations

Oscillating response under steady driving has recently been numerically observed in a model for shear-thickening materials [35], which in contrast to the present one described the homogeneous behavior of a system (no spatial heterogeneity in the formalism), and the oscillations were shear-rate oscillations at fixed stress. Formally there are some similarities as in both cases a continuous (and thus infinite) set of variables evolves through coupled differential equations with nonmonotonic functions involved, and driven by a global integral constraint. However, in contrast to the situation of [35] where all the variables were involved in the oscillation, here only a limited set of variables are (corresponding to a spatially localized oscillating layer).

In principle a finite number of variables is enough to get an oscillating rheological response (limit cycles) under steady driving [36], so it is no surprise that oscillations show up here given the complexity of the set of equations (11),(12) and the number of variables involved. One may even expect more complex dynamical behavior such as some form of chaotic response [36], but we found none within the set of parameters numerically explored. Clearly, a truly three-dimensional version of this model, with the corresponding nonlinear convective terms, should increase the likeliness of chaotic behavior (even in the absence of inertia [37]).

VI. DISCUSSION

In the present paper we used an extension of a model previously introduced to account for the rheology and aging in pasty systems, in which the steady-state local flow curve is nonmonotonic so that heterogeneous flows can be generated at steady state. The key ingredient of the model is a coupling between the mechanical variables, namely, shear stress or shear rate, and local relaxation within the fluid, characterized

SIMPLE MODEL FOR HETEROGENEOUS FLOWS OF . . .

PHYSICAL REVIEW E 66, 051501 (2002)

by a fluidity. Although analytically very simple, the model yields a rather rich macroscopic phenomenology.

(1) Under controlled stress Σ , the steady-state behavior is schematized in Fig. 7. The fluid undergoes a hysteretic phenomenon if the stress is increased or decreased progressively. The effective yield stress is shown to depend on the fluid history and on the wall conditions. In addition, no banding is observed and there is a discontinuity in shear rate $\dot{\Gamma}$ which occurs at specific values of the stress.

In this case, we have shown that the dynamics reduces to the minimization of a free energy function. This is generalizable to any function f, g describing aging and fluidization, and to more complex diffusion terms $D(a)$. Note that the dynamics was not built as a free energy relaxation but naturally appears this way (see the related discussions in [13]). This gives some generality to the qualitative results, beyond the specific model studied here.

As no noise term was included, the equivalent of homogeneous nucleation in thermodynamics problem was suppressed and boundary conditions play a crucial role in destabilization processes. Hence, the values of the thresholds depend on the boundary conditions. However, the qualitative behavior (hysteretic loop) is rather insensitive to the specific type of boundary condition chosen.

(2) At fixed global shear rate $\dot{\Gamma}$, the macroscopic behavior is schematized in Fig. 9: banding solutions show up, separating a frozen region from a fluidized region. The shear rate within the fluidized band is hardly dependent on the imposed global shear rate, and fixed only by characteristics of the material. Within the banding domain, the thickness of the fluidized region increases (nearly) linearly with the global shear rate $\dot{\Gamma}$ to eventually fill the full shear cell.

At small (total) shear rate, an oscillating behavior of the stress Σ is observed, with features very reminiscent of a classical stick-slip behavior. The system is globally in a frozen state, and fluidizes periodically within a thin layer. Such a behavior compares well with the fracturing and healing process observed by Chen *et al.* [6] and Pignon *et al.* [10]. These localized oscillations are to be contrasted with homogeneous oscillations obtained in other models for different systems (e.g., [35]).

Our observations result from numerical simulations and the influence of the specificity of the modelization of the fluidization and aging remains to be understood. Again, the different thresholds depend on the boundary conditions, but the qualitative behaviors described are robust to changes in the types of boundary conditions. Extension of the present model to a fully three-dimensional description could, however, yield a more complex dynamical behavior.

In conclusion, we suggest that analyzing yield stress fluids close to the yield stress at both constant stress and constant shear rate could provide interesting information. It could also be informative to check the sensitivity of the results to the nature of the surfaces bounding the fluid.

APPENDIX: STATIONARY SOLUTIONS OF EQ. (6)

In this appendix, we detail the steady-state solutions of Eq. (6) recalled here:

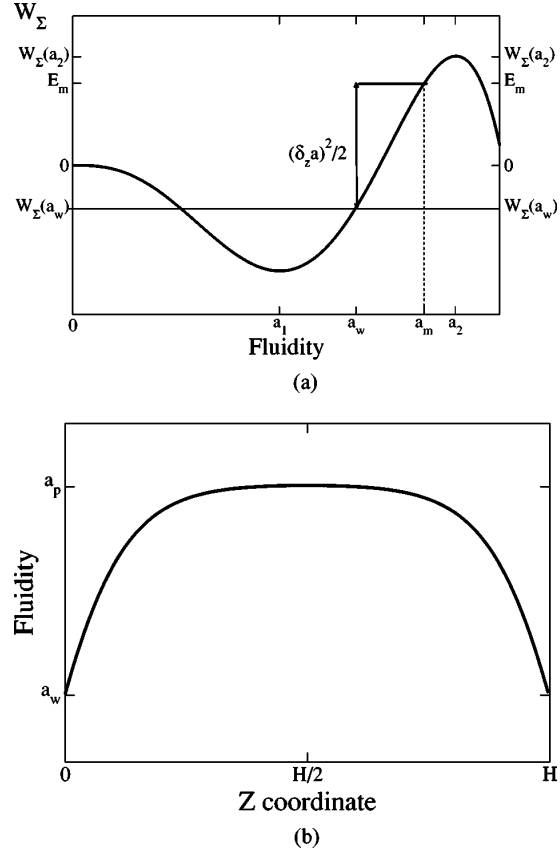


FIG. 13. (a) Potential W_Σ , $\Sigma = 1.44$, $r = 1$, $r' = 0.01$. (b) Fluidity profile for a fluidized bulk. $a_w = 1$, $H = 15$.

$$a(z)\Sigma = \dot{\gamma}(z),$$

$$-f(a(z)) + a(z)h(a(z))\Sigma^2 + D\partial_{zz}^2 a(z) = 0,$$

$$a|_{z=0,H} = a_w \quad \text{or} \quad \partial_z a|_{z=0,H} = 0. \quad (\text{A1})$$

For clarity, the potential $W_\Sigma(a)$ is introduced as $W_\Sigma(a) = -\int_0^a da' [f(a') - a'h(a')\Sigma^2]$. Note that $W_\Sigma = -V_\Sigma$ as defined in Eq. (8). Hence for a given Σ we look for a solution $a(z)$ such that

$$-\partial_a W_\Sigma(a) = D\partial_{zz}^2 a(z),$$

$$a|_{z=0,H} = a_w \quad \text{or} \quad \partial_z a|_{z=0,H} = 0. \quad (\text{A2})$$

The local shear rate is then immediately deduced: $\dot{\gamma}(z) = a(z)\Sigma$.

Equation (A2) can be interpreted as the classical equation of motion of a particle of mass D and position a in the potential W_Σ where z plays the role of time. The energy $E_m = \frac{1}{2}(\partial_z a)^2 + W_\Sigma(a)$ is conserved during the motion.

With this interpretation, the boundary conditions impose initial and final positions (a_w imposed at the walls) or velocities ($\partial_z a = 0$ imposed at the walls).

We choose to detail here the case of an imposed a_w at the wall, and the stress Σ is chosen $\sigma_i > \Sigma > \sigma_d$ (see Sec. IV).

The potential W_Σ is represented in Fig. 13. The extreme values of the mechanical energy E_m are $W_\Sigma(a_w)$ and $W_\Sigma(a_2)$. From the analysis of these solutions, it is possible to progress further in answering a few questions.

(1) *What is the fluidity profile on the frozen and fluidized branches of Figs. 7 and 9?* For a given thickness H , E_m is set so that $a|_{z=0,H} = a_w$ with $\partial_z a|_{z=0} > 0$. With the mechanical analogy, this amounts to fixing the mechanical energy or initial velocity for the particle to leave position a_w , reach a maximum a_m with $\partial_z a|_{a_m} = 0$, and go back to its initial position within a time H .

The fluidity profile is represented in Fig. 13. Note that $E_m = W_\Sigma(a_2)$ corresponds to a fluidized bulk, with an infinite thickness $H \sim \infty$.

With $\partial_z a|_{z=0} > 0$, a profile with a bulk of fluidity higher than a_w is described.

Symmetrically, a profile on the frozen branch, that is, with a bulk fluidity smaller than a_w is described by fixing $\partial_z a|_{z=0} < 0$, and following the same procedure.

(2) *What is the limit of existence for the fluidized bulk solution σ_i ?* $\sigma_i(H, a_w)$ was defined in Sec. IV as the stress beyond which a profile with a frozen bulk can not be observed.

For $H \sim \infty$, $\sigma_i(\infty, a_w)$ is defined by $W_{\sigma_i}(a_w) = 0$. With the mechanical analogy, the mechanical energy E_m is set to 0, that is, the particle leaves its position a_w with a velocity $\partial_z a|_{z=0} \sim 0$, and spends an infinite time at the position $a_m = 0$.

For $\sigma > \sigma_i$, $W_\sigma(a_w) > 0$, and for $a < a_w$, $W_\sigma(a) < W_\sigma(a_w)$. With the mechanical analogy, the particle cannot leave the position a_w with a negative velocity and come back to it after a time H . There is no solution with a frozen bulk.

For a finite H , a frozen bulk requires $E_m \leq 0$; therefore $\sigma_i(H, a_w)$ is slightly smaller than $\sigma_i(\infty, a_w)$, by an amount that scales as H^{-3} .

The situation is symmetric for the definition of $\sigma_d(H, a_w)$, which is found to be slightly larger than $\sigma_d(\infty, a_w)$.

(3) *How can one calculate the fluidity profile for a solution with several bands?* The mechanical energy E_m is now decreased from $\min[W_\Sigma(0), W_\Sigma(a_2)]$ to $W_\Sigma(a_w)$ to find banded stationary solutions: a frozen bulk solution with thickness h_1 and, a fluidized bulk solution with thickness h_2 (both with the same energy E_m) such that $h_1 + h_2 = H$ form together a single interface solution. The same process is derived to find multibanded solutions. Solutions of Fig. 10 were calculated numerically with this method.

-
- [1] M. M. Britton and P. T. Callaghan, *J. Rheol.* **41**, 1365 (1997).
 [2] L. Ramos, F. Molino, and G. Porte, *Langmuir* **16**, 5846 (2000).
 [3] J. F. Berret, G. Porte, and J. P. Decruppe, *Phys. Rev. E* **55**, 1668 (1997).
 [4] O. Diat, D. Roux, and F. Nallet, *Phys. Rev. E* **51**, 3296 (1995).
 [5] G. Debrégeas, H. Tabuteau, and J.-M. di Meglio, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 178305 (2001).
 [6] L. B. Chen, B. J. Ackerson, and C. F. Zukoski, *J. Rheol.* **38**, 193 (1994).
 [7] J. S. Raynaud, P. Moucheront, J. C. Baudez, F. Bertrand, J. P. Guilbaud, and P. Coussot (unpublished); P. Coussot, J. S. Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheront, J. P. Guilbaud, H. T. Huynh, S. Jarny, and D. Lesueur, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 218301 (2002).
 [8] P. Sollich, F. Lequeux, P. Hébraud, and M. E. Cates, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2020 (1997); P. Sollich, *Phys. Rev. E* **58**, 738 (1998).
 [9] M. Cloitre, R. Borrega, and L. Leibler, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4819 (2000); C. Derec, A. Ajdari, G. Ducouret, and F. Lequeux, *C.R. Acad. Sci., Ser. IV Phys. Astrophys.* **1**, 1115 (2000).
 [10] F. Pignon, A. Magnin, and J. M. Piau, *J. Rheol.* **40**, 573 (1996).
 [11] C. Barentin and B. Pouligny (unpublished).
 [12] J. K. G. Dhont, *Phys. Rev. E* **60**, 4534 (1999).
 [13] S. Butler and P. Harrowel, *Nature (London)* **415**, 1008 (2002).
 [14] P. D. Olmsted and C. Y. Lu, *Faraday Discuss.* **112**, 183 (1999).
 [15] P. D. Olmsted, *Europhys. Lett.* **48**, 339 (1999).
 [16] P. D. Olmsted and C. Y. D. Lu, *Phys. Rev. E* **60**, 4397 (1999).
 [17] O. Radulescu, P. D. Olmsted, and C. Y. Lu, *Rheol. Acta* **38**, 606 (1999).
 [18] J. L. Goveas and P. D. Olmsted, *Eur. Phys. J. E* **6**, 79 (2001).
 [19] P. Nozieres and D. Quemada, *Europhys. Lett.* **2**, 129 (1996).
 [20] G. Porte, J. F. Berret, and J. Harden, *J. Phys. II* **7**, 459 (1997).
 [21] C. Y. Lu, P. D. Olmsted, and R. C. Ball, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 642 (2000), and references therein.
 [22] J. R. Pearson, *J. Rheol.* **38**, 309 (1994).
 [23] C. Derec, A. Ajdari, and F. Lequeux, *Eur. Phys. J. E* **4**, 355 (2001).
 [24] C. Derec, Ph.D. thesis, Université Paris VII, 2001.
 [25] J. Kurchan, e-print cond-mat/9812347.
 [26] D. Bonn, S. Tanase, B. Abou, H. Tanaka, and J. Meunier, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 015701 (2002).
 [27] V. Schmitt, C. M. Marques, and F. Lequeux, *Phys. Rev. E* **52**, 4009 (1995).
 [28] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T. C. Lubensky, and J. P. Gollub, *Phys. Rev. E* **65**, 011307 (2002).
 [29] L. Bocquet and J.-L. Barrat, *Phys. Rev. E* **49**, 3079 (1994).
 [30] P. Scheidler, W. Kob, and K. Binder, e-print cond-mat/024164.
 [31] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in Fortran 90: The Art of Parallel Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988).
 [32] P. Coussot, Q. D. Nguyen, H. T. Huynh, and Daniel Bonn, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 175501 (2002).
 [33] I. S. Aranson, L. S. Tsimring, and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. B* **65**, 125402 (2002).
 [34] T. Baumberger, C. Caroli, and O. Ronsin, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 075509 (2002).
 [35] D. A. Head, A. Ajdari, and M. E. Cates, *Europhys. Lett.* **57**, 120 (2002).
 [36] M. E. Cates, D. A. Head, and A. Ajdari, *Phys. Rev. E* **66**, 025202(R) (2002).
 [37] A. Groisman and V. Steinberg, *Europhys. Lett.* **43**, 165 (1998).

Chapitre 3

Une première approche microscopique

Sommaire

3.1	Comportement microscopique et effets collectifs	42
3.1.1	Ingrédients du modèle	42
3.1.2	Modèle stochastique	44
3.1.3	Vers un modèle quasi-undimensionnel	45
3.2	Un modèle peu adapté aux écoulements hétérogènes	47
3.2.1	Perspectives et limites	47
3.2.2	D'où viennent les limites de ce modèle ?	49

Dans ce chapitre, on propose une première approche microscopique. A cette fin, le milieu est décrit par un ensemble bidimensionnel de blocs soumis à un cisaillement global $\dot{\Gamma}$. Le comportement de chaque bloc est élasto-plastique, il est décrit par une dynamique inspirée du modèle introduit par Hébraud et Lequeux [25] et développé dans l'introduction. L'écoulement du milieu résulte de la plasticité des blocs. Les interactions entre les blocs du système sont élastiques, elles sont décrites dans le paragraphe 3.1.1. Le modèle ainsi construit est ensuite moyenné en négligeant certaines corrélations, de sorte qu'on obtient une description dynamique 'quasi-unidimensionnelle' du comportement des lignes de blocs (paragraphe 3.1.3). Cette description est ensuite discutée de façon critique dans la section 3.2, ce qui permet d'en dégager certaines limites. En particulier, ce modèle ne peut décrire un écoulement stationnaire dans lequel des régions figées et des régions en écoulement coexistent.

3.1 Comportement microscopique et effets collectifs

Dans cette section, on introduit un modèle scalaire général, puis on propose une approximation pour le simplifier.

3.1.1 Ingrédients du modèle

Géométrie du système

On se donne la géométrie représentée par la figure 3.1. On considère un milieu infini, périodique de période L dans la direction x , et de taille H dans la direction z . Les parois sont en $z = 0, H$. Le milieu est décrit par un ensemble de $N_x \times N_z$ blocs. L'écoulement est forcé par un cisaillement global noté $\dot{\Gamma}$. Chaque bloc est repéré par une lettre grecque associée à sa coordonnée dans la direction x , et une lettre latine associée à sa coordonnée dans la direction z .

Dans cette approche, l'effet de la convection est négligé. Cela implique que les blocs ne se déplacent pas.

Dynamique locale : blocs élasto-plastiques.

Dans ce modèle scalaire, un bloc à la position i, α est caractérisé par sa contrainte de cisaillement, notée $\sigma_{i\alpha}$, et sa contrainte seuil σ_y qu'on prend identique pour tous les blocs par simplicité.

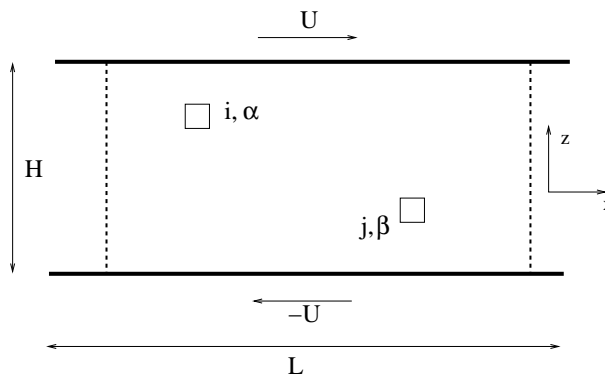


FIGURE 3.1 – Un ensemble de $N_x \times N_z$ blocs piloté par un cisaillement macroscopique $\dot{\Gamma} = \frac{2U}{H}$. Chaque bloc est repéré par ses coordonnées $i\alpha$

Un bloc se *déforme élastiquement*, avec un module élastique μ tant que sa contrainte est inférieure à la contrainte seuil, $\sigma_{i\alpha} < \sigma_y$.

Lorsque $\sigma_{i\alpha} > \sigma_y$, le bloc $i\alpha$ subit un "événement plastique" ou "saut", c'est-à-dire qu'une *relaxation plastique* de $\sigma_{i\alpha}$, de *temps caractéristique* τ s'ajoute à la réponse élastique du bloc. Le bloc est alors à la fois élastique et plastique. La contrainte relaxée par un tel bloc est redistribuée élastiquement dans tout le milieu.

Interactions élastiques entre les blocs

Les interactions entre les blocs sont décrites par l'élasticité linéaire et homogène. On introduit le *propagateur* $\Pi_{\alpha\beta}^{ij}$ ainsi défini : lorsque, du fait d'un événement plastique, la contrainte du bloc $j\beta$ diminue d'une quantité $\sigma_{j\beta}$, la contrainte du bloc i, α passe de $\sigma_{i\alpha}$ à $\sigma_{i\alpha} + \Pi_{\alpha\beta}^{ij}\sigma_{j\beta}$, ce qu'on résume dans le tableau suivant :

$$\begin{aligned} \text{événement plastique en } j, \beta &: \sigma_{j\beta} \rightarrow 0 \\ \text{effet en } i\alpha &: \sigma_{i\alpha} \rightarrow \sigma_{i\alpha} + \Pi_{\alpha\beta}^{ij}\sigma_{j\beta} \end{aligned}$$

La nature de l'événement plastique qui conduit à la relaxation de contrainte détermine l'expression des $\Pi_{\alpha\beta}^{ij}$. Dans cette approche, l'expression exacte du propagateur n'est pas nécessaire. Cependant, quelques remarques générales sur ce propagateur élastique sont utiles pour la suite :

- 1) L'amplitude de la contrainte propagée est décroissante avec la distance à l'événement plastique.
- 2) Le milieu étant périodique dans la direction x , l'effet d'une variation de contrainte dans cette direction ne dépend que de la distance entre les 2 blocs, on peut utiliser la notation :

$$\Pi_{\alpha\beta}^{ij} = \Pi_{\beta\alpha}^{ij} = \Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}$$

- 3) Lorsque le bloc $j\beta$ subit une relaxation plastique, le comportement du bloc n'est pas décrit par l'élasticité, et d'après la définition du propagateur ci-dessus, on a formellement $\Pi_0^{jj} = 0$.

4) On introduit les notations suivantes :

$$\Pi_{\alpha-\beta}^{ij} = \bar{\Pi}^{ij} + \delta\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}$$

avec $\sum_{\kappa=0}^{N_x-1} \delta\Pi_{\kappa}^{ij} = 0$.

Lorsqu'une relaxation plastique d'amplitude $\sigma_{j\beta}$ se produit en $j\beta$, l'équilibre mécanique entre les couches implique que la contrainte moyenne par couche est la même sur toutes les couches du système.

Sur une couche $i \neq j$, la variation de contrainte moyenne due à l'événement plastique en $j\beta$ s'écrit :

$$\frac{1}{N_x} \sum_{\kappa=0}^{N_x-1} \Pi_{\kappa}^{ij} \sigma_{j\beta} = \bar{\Pi}^{ij} \sigma_{j\beta} \quad (3.1)$$

Sur la couche j où se produit l'événement plastique, la contrainte moyenne est la somme de la relaxation plastique et de l'effet dû à l'événement plastique :

$$\frac{1}{N_x} \left(\sum_{\kappa=0}^{N_x-1} \Pi_{\kappa}^{jj} \sigma_{j\beta} - \sigma_{j\beta} \right) = \left(\bar{\Pi}^{jj} - \frac{1}{N_x} \right) \sigma_{j\beta} \quad (3.2)$$

L'équilibre mécanique entre les couches du système implique, pour tout $i \neq j$:

$$\bar{\Pi}^{ij} = \bar{\Pi}^{jj} - \frac{1}{N_x} \quad (3.3)$$

Nous avons décrit dans cette partie la dynamique d'un bloc, et les interactions entre les blocs, nous pouvons donc dans la partie suivante, introduire une description du comportement de l'ensemble des blocs.

3.1.2 Modèle stochastique

Le système des blocs élasto-plastiques est soumis à un taux de cisaillement global $\dot{\Gamma}$. Nous proposons une description stochastique où les $N_x \times N_z$ variables sont les densités de probabilités de contrainte du bloc $i\alpha$ en t notées $P_{i\alpha}(\sigma, t)$. En nous appuyant sur la description précédente de la dynamique d'un bloc et des interactions entre blocs, nous écrivons l'équation d'évolution :

$$\begin{aligned} \partial_t P_{i\alpha}(\sigma, t) &+ \partial_{\sigma}(\mu \dot{\Gamma} P_{i\alpha}(\sigma, t)) = \\ &- \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau} P_{i\alpha}(\sigma, t) \\ &+ \left(\int d\sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_{i\alpha}(\sigma', t) \right) \delta(\sigma) \\ &+ \sum_{(j,\beta) \neq (i,\alpha)} \int d\sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_{j\beta}(\sigma', t) (P_{i\alpha}(\sigma - \Pi_{\alpha-\beta}^{ij} \sigma', t) - P_{i\alpha}(\sigma, t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où H est la fonction de Heaveside, δ la fonction Dirac. L'évolution de la contrainte du bloc $i\alpha$ est due :

- (i) au taux de cisaillement global imposé $\dot{\Gamma}$, ce qui est décrit par le deuxième terme de gauche, ce terme exprime la réponse élastique du bloc $i\alpha$ au forçage global $\dot{\Gamma}$.

(ii) aux événements plastiques, se produisant en $i\alpha$ et dans le reste du milieu. Les trois termes de droites décrivent les effets des événements plastiques.

- le premier terme décrit la relaxation de contrainte du bloc $i\alpha$, du fait d'un événement plastique en $i\alpha$, qui se produit avec une fréquence $1/\tau$ dès que le bloc a franchi son seuil de plasticité σ_y ,
- le deuxième terme représente l'augmentation de la probabilité de contrainte nulle $P_{i\alpha}(0, t)$ due à un événement plastique en $i\alpha$, ce qui relaxe complètement la contrainte du bloc $i\alpha$,
- le dernier terme est l'effet sur le bloc $i\alpha$ des événements plastiques se produisant dans le reste du milieu. Chaque événement plastique en $j\beta \neq i\alpha$, d'amplitude σ' , fait passer le bloc $i\alpha$ de la contrainte $\sigma - \Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma'$ à la contrainte σ (pour le premier terme de la différence), et de la contrainte σ à une contrainte $\sigma + \Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma'$ (pour le deuxième terme de la différence).

3.1.3 Vers un modèle quasi-undimensionnel

Afin de pouvoir poursuivre analytiquement l'étude de ce modèle, on propose dans cette partie deux approximations successives qui permettent de simplifier l'équation 3.4.

Première approximation

Dans un premier temps, on développe l'expression de la différence dans le dernier terme de l'équation 3.4, puis on tronque l'expression obtenue au second ordre, c'est-à-dire :

$$P_{i\alpha}(\sigma - \Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma', t) - P_{i\alpha}(\sigma, t) \approx -(\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma')\partial_\sigma P_{i\alpha}(\sigma, t) + \frac{1}{2}(\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma')^2\partial_\sigma^2 P_{i\alpha}(\sigma, t)$$

A priori cette approximation est peu licite si le bloc $i\alpha$ est proche du bloc qui craque. En effet, dans ce cas, la quantité reçue par le bloc $i\alpha$, $(\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma')$ du fait de l'événement plastique n'est pas nécessairement petite devant la contrainte du bloc $i\alpha$ considéré. Elle permet cependant un premier niveau d'interprétation des différents termes de l'équation précédente 3.4 qui peut alors être écrite :

$$\begin{aligned} \partial_t P_{i\alpha}(\sigma, t) + \partial_\sigma [\mu\dot{\gamma}_{i\alpha}P_{i\alpha}(\sigma, t) - D_{i\alpha}\partial_\sigma P_{i\alpha}(\sigma, t)] = \\ - \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau}P_{i\alpha}(\sigma, t) + \left(\int d\sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau}P_{i\alpha}(\sigma', t) \right) \delta(\sigma) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mu\dot{\gamma}_{i\alpha} = \mu\dot{\Gamma} + \sum_{j\beta} \int d\sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau}P_{j\beta}(\sigma', t)(\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma') \quad (3.6)$$

$$D_{i\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{j\beta} \int d\sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau}P_{j\beta}(\sigma', t)(\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}\sigma')^2 \quad (3.7)$$

L'expression 3.5 fait émerger un coefficient de diffusion local $D_{i\alpha}$ et elle définit le taux de cisaillement local $\dot{\gamma}_{i\alpha}$ qui est la somme du cisaillement global $\dot{\Gamma}$ et des taux de cisaillement dus à tous les événements plastiques se produisant ailleurs dans le milieu. En particulier, lorsque le bloc $j\beta$ est le seul bloc plastique, son taux de cisaillement s'écrit $\dot{\gamma}_{i\alpha} = \dot{\Gamma}$, c'est-à-dire que la relaxation plastique n'induit pas de cisaillement local.

Cette remarque implique une nouvelle condition sur les $\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}$. En effet, nous pouvons maintenant calculer le taux de cisaillement de chaque bloc, et vérifier que le taux de cisaillement moyen est égal au taux de cisaillement imposé. Supposons qu'à un instant donné t , un seul bloc $j\beta$ soit plastique, de contrainte $\sigma_{j\beta} = \sigma_0 > \sigma_y$. Le taux de cisaillement moyen doit être égal au taux de cisaillement global :

$$\frac{1}{N_x N_z} \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{\alpha=1}^{N_x} \dot{\gamma}_{i\alpha} = \dot{\Gamma} + \frac{1}{N_x N_z} \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{N_z} \sum_{\alpha=1}^{N_x} (\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij} \sigma_0) = \dot{\Gamma} \quad (3.8)$$

Ceci implique la condition suivante pour les $\Pi_{|\alpha-\beta|}^{ij}$, qui nous sera utile dans la suite :

$$\sum_{i=1}^{N_z} \sum_{\kappa=0}^{N_x-1} \Pi_{\kappa}^{ij} = 0 \quad (3.9)$$

Deuxième approximation : on néglige les corrélations dans la direction x

On cherche maintenant à passer de ce modèle bidimensionnel difficile à manipuler à un modèle quasi-unidimensionnel, qui décrit les interactions entre des lignes. On introduit donc les variables $P_i(\sigma, t)$, moyennes spatiales des probabilités de contrainte de la ligne i , telles que :

$$P_i(\sigma, t) = \frac{1}{N_x} \sum_{\alpha=1}^{N_x} P_{i\alpha}(\sigma, t) = \ll P_{i\alpha}(\sigma, t) \gg_{\alpha}$$

Pour calculer la moyenne par ligne de l'équation 3.5, on introduit une seconde approximation qui consiste à négliger les corrélations spatiales dans la direction de l'écoulement. C'est-à-dire :

$$\ll P_{j\alpha+\gamma}(\sigma') P_{i\alpha}(\sigma) \gg_{\alpha} \approx P_j(\sigma') P_i(\sigma) \quad (3.10)$$

Avec cette approximation, le calcul de la moyenne de l'équation 3.5 donne :

$$\begin{aligned} \partial_t P_i(\sigma, t) + \partial_{\sigma}(\mu \dot{\epsilon}_i P_i(\sigma, t) - D_i \partial_{\sigma} P_i(\sigma, t)) = \\ - \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau} P_i(\sigma, t) + \left(\int d\sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_i(\sigma', t) \right) \delta(\sigma) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\mu \dot{\gamma}_i = \mu \dot{\Gamma} + \sum_j N_x \bar{\Pi}^{ij} \int d\sigma' \sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_j(\sigma', t) \quad (3.12)$$

$$D_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_z} \left(\sum_{\gamma=0}^{N_x-1} (\Pi_{\gamma}^{ij})^2 \right) \int d\sigma' \sigma'^2 \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_j(\sigma', t) \quad (3.13)$$

Comme précédemment, cette écriture fait émerger un taux de cisaillement par ligne et un coefficient de diffusion par ligne.

On vérifie que le modèle présente les caractéristiques suivantes :

- On pilote le système par le cisaillement global $\dot{\Gamma}$.

En effet, on vérifie grâce aux équations 3.9 et 3.3 que le taux de cisaillement moyen dans le système est bien égal au taux de cisaillement imposé : $\frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} \dot{\gamma}_i = \dot{\Gamma}$.

- Le taux de cisaillement est plus important sur une ligne où il se produit des événements plastiques.

Si les événements plastiques se produisent sur la ligne j seulement, les taux de cisaillement sur toutes les lignes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{i \neq j} &= \dot{\Gamma} + N_x \bar{\Pi}^{ij} \int d\sigma' \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau} \sigma' P_j(\sigma') \\ &= \dot{\Gamma} + N_x \left(\bar{\Pi}^{jj} - \frac{1}{N_x} \right) \int d\sigma' \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau} \sigma' P_j(\sigma') \\ \dot{\gamma}_j &= \dot{\Gamma} + N_x \bar{\Pi}^{jj} \int d\sigma' \frac{H(\sigma - \sigma_y)}{\tau} \sigma' P_j(\sigma')\end{aligned}$$

$\bar{\Pi}^{jj}$ est la contrainte moyenne redistribuée sur la ligne j . Elle peut être calculée avec les relations 3.3 et 3.9, et est positive. Le cisaillement est donc plus important sur la ligne j , $\dot{\gamma}_j > \dot{\gamma}_{i \neq j}$.

- *Evolution de la contrainte moyenne*

Enfin, à partir de 3.11, on écrit l'équation d'évolution de la contrainte moyenne par ligne. $\langle \sigma \rangle_i = \sum_{\alpha=1}^{N_x} \int \sigma' P_{i\alpha}(\sigma') d\sigma' = \int \sigma' P_i(\sigma') d\sigma'$. On obtient :

$$\partial_t \langle \sigma \rangle_i = \mu \dot{\gamma}_i + \int d\sigma' \sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_i(\sigma', t) \quad (3.14)$$

On vérifie en utilisant les propriétés du propagateur que cette expression ne dépend pas de i , ce qui est nécessaire pour l'équilibre mécanique entre les couches.

- *Ce modèle est une généralisation du modèle de Hébraud et Lequeux [25] : dans la limite homogène, les équations 3.11, 3.12, 3.13 reviennent au modèle Hébraud et Lequeux avec une définition particulière du coefficient de diffusion. Dans le cas hétérogène, ce modèle peut être vu comme une généralisation de leur modèle où le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_i$ et le coefficient de diffusion D_i dépendent de ce qui se passe sur les autres lignes.*
- Enfin, on peut rapprocher l'écriture de l'équation d'évolution de la contrainte moyenne 3.14 de l'équation d'évolution de la contrainte dans le modèle de "fluidité" présenté au chapitre précédent, en définissant la fluidité de la couche i ainsi :

$$a = \frac{\int d\sigma' \sigma' H(\sigma' - \sigma_y) P_i(\sigma')}{\tau \int d\sigma' \sigma' P_i(\sigma')}$$

3.2 Un modèle peu adapté aux écoulements hétérogènes

3.2.1 Perspectives et limites

La résolution des équations 3.11, 3.12, 3.13 est complexe. Nous avons préféré étudier des modèles plus restreints. En particulier, deux méthodes différentes détaillées dans la suite ont été mises en oeuvre pour comprendre certains comportements qualitatifs de ce système.

Modèle à 5 sites

On suit dans cette approche le type de démarche proposée par Derec et collaborateurs [26] présenté dans l'introduction. Les valeurs de la contrainte sur chaque ligne sont discrétisées en 5 valeurs : $-2, -1, 0, 1, 2$. Les valeurs $-2, 2$ sont instables. Grâce à ce choix, à l'équilibre, deux lignes voisines de même contrainte moyenne peuvent présenter des distributions de contraintes différentes réparties entre $-1, 0$ et 1 . C'est pourquoi on a utilisé cinq sites et non quatre comme dans le modèle de Derec et collaborateurs. On suit sur chaque ligne i la dynamique de P_i^σ , la probabilité de contrainte moyenne σ de la ligne i . La valeur absolue de la contrainte seuil locale est 2, un bloc qui a atteint sa contrainte seuil relaxe vers la contrainte 0 avec une fréquence $\frac{1}{\tau}$. On dérive de 3.11 la dynamique décrite sur le schéma 3.2.

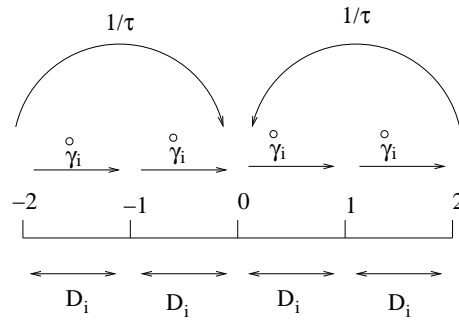


FIGURE 3.2 – Evolution de la contrainte sur une ligne i : La contrainte peut prendre cinq valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$. La contrainte est incrémentée par le taux de cisaillement moyen de la ligne $\dot{\gamma}_i$, et diffuse avec un taux de diffusion D_i . Lorsque les seuils $2, -2$ sont atteints, la contrainte relaxe vers 0 avec un temps caractéristique τ

Nous proposons les équations d'évolution correspondantes :

$$\begin{aligned} \partial_t P_i^{-2} &= -\dot{\gamma}_i P_i^{-2} - \frac{1}{\tau} P_i^{-2} + D_i (P_i^{-1} - P_i^{-2}) \\ \partial_t P_i^{-1} &= \dot{\gamma}_i (P_i^{-2} - P_i^{-1}) + D_i (P_i^{-2} + P_i^0 - 2P_i^{-1}) \\ \partial_t P_i^0 &= \dot{\gamma}_i (P_i^{-1} - P_i^0) + \frac{1}{\tau} (P_i^{-2} + P_i^2) + D_i (P_i^{-1} + P_i^1 - 2P_i^0) \\ \partial_t P_i^1 &= \dot{\gamma}_i (P_i^0 - P_i^1) + D_i (P_i^0 + P_i^2 - 2P_i^1) \\ \partial_t P_i^2 &= \dot{\gamma}_i P_i^1 - \frac{1}{\tau} P_i^2 + D_i (P_i^1 - P_i^2) \end{aligned}$$

Les taux de cisaillement par ligne $\dot{\gamma}_i$ sont déterminés de façon auto-cohérente en fonction des P_i^σ , et des D_i grâce aux deux conditions :

- la contrainte moyenne est la même sur toutes les lignes, c'est-à-dire $(\sum_\sigma \sigma P_i^\sigma)$ est indépendant de i ,
- le cisaillement moyen est le cisaillement imposé, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{N_z} \dot{\gamma}_i = N_z \dot{\Gamma}$.

On se donne arbitrairement diverses expressions possibles pour les coefficients de diffusion locaux D_i . On a en particulier testé deux possibilités :

- Diffusion uniforme dans le milieu $D_i = \sum_{j=1}^{N_z} (P_j^2 + P_j^{-2}) = D$

- La propagation du bruit dû aux événements plastiques sur une ligne n'affecte que les lignes voisines : $D_j = 0$ si $|i - j| > 1$, $D_j = \sum_{j=i-1}^{i+1} (P_j^2 + P_j^{-2})$ sinon

La résolution numérique de ces deux systèmes discrets conduit systématiquement à un écoulement homogène indépendamment du cisaillement imposé, des conditions initiales, de la taille du système, de l'expression des coefficients de diffusion locaux. Dans la mesure où on souhaite décrire des hétérogénéités d'écoulements effectivement observées expérimentalement, on est amené à se poser la question suivante : *a-t-on trop simplifié le système original avec ce type de discrétisation... ou bien l'homogénéité sous écoulement est-elle inhérente au modèle ?*

Evolution des premier et second moments de la distribution

Pour répondre à cette dernière question, on s'intéresse ici seulement à l'équation d'évolution de la contrainte moyenne 3.14 et à l'équation d'évolution de la variance $\mathcal{V}_i = \frac{1}{N_x} \sum_{\alpha=1}^{N_x} \sigma_{\alpha i}^2 - \langle \sigma \rangle_i^2$, sans aucune hypothèse sur la forme des distribution de contrainte. La variance est calculée à partir de l'équation 3.11 en remarquant que :

$$\mathcal{V}_i = \int d\sigma' \sigma'^2 P_i(\sigma') - \langle \sigma \rangle_i^2 \quad (3.15)$$

On obtient ainsi l'équation d'évolution de la variance sur chaque ligne i :

$$\partial_t \mathcal{V}_i = 2D_i - \int d\sigma' \sigma'^2 \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_i(\sigma') + 2 \langle \sigma \rangle_i \int d\sigma' \sigma' \frac{H(\sigma' - \sigma_y)}{\tau} P_i(\sigma') \quad (3.16)$$

où D_i est donné par 3.13.

Les équations 3.16 et 3.13 montrent que ce modèle ne peut décrire en régime stationnaire la coexistence de régions *fluides*, c'est-à-dire de régions où se produisent des événements plastiques, et de régions *figées*, c'est-à-dire dont la déformation est seulement élastique.

En effet, même si on commence avec un milieu figé, dès qu'une ligne k présente des événements plastiques, les coefficients D_i sont non nuls et positifs sur toutes les lignes (c'est clairement vrai si les Π_{κ}^{ij} décrivent des interactions longues portée, c'est vrai de proche en proche lorsqu'ils décrivent des interactions courte portée). L'équation 3.16 montre que la ligne k génère un "bruit" permanent qui augmente la variance de la contrainte d'une ligne $i \neq k$ donnée jusqu'à ce que cette deuxième ligne s'écoule. Le mécanisme interdit la coexistence entre des lignes qui s'écoulent et des lignes qui ne s'écoulent pas, et homogénéise l'écoulement.

Dans la suite, nous expliquons pourquoi l'une des approximations réalisées pour simplifier le modèle fait croître la variance de manière non physique sur les lignes voisines.

3.2.2 D'où viennent les limites de ce modèle ?

Nous reprenons les étapes qui ont menées à la forme finale du modèle 3.11,3.12,3.13. Dans la partie intitulée "deuxième approximation", nous avons négligé les corrélations spatiales dans la direction x . Ainsi, avec cette approximation, on ne fait pas de différence entre :

- 1 le champ de perturbation de la contrainte due aux N_x événements plastiques consécutifs d'un bloc $i\alpha$,

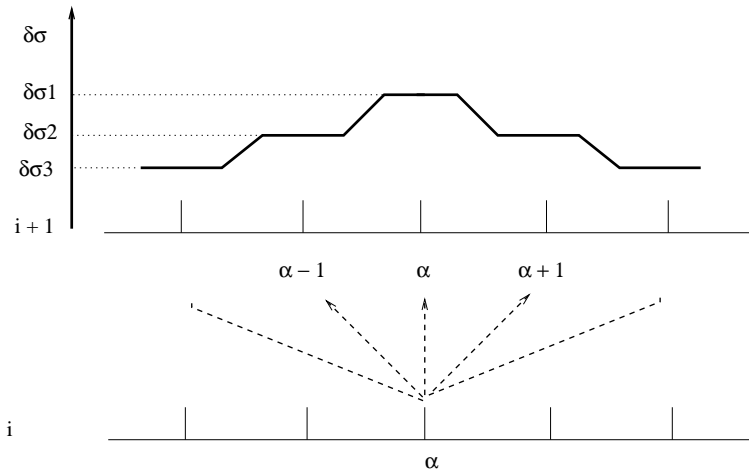


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de la contrainte redistribuée sur la ligne $i + 1$, lorsque le bloc $i\alpha$ subit une chute plastique de contrainte σ_0 . L'amplitude de la contrainte redistribuée s'atténue avec la distance à l'événement plastique $\delta\sigma_1 = \Pi_0^{ii+1}\sigma_0 > \delta\sigma_2 = \Pi_1^{ii+1}\sigma_0 > \delta\sigma_3 = \Pi_2^{ii+1}\sigma_0$

2 et le champ de perturbation de la contrainte dû à la "fracture" d'une ligne i , c'est-à-dire dont les N_x blocs craquent chacun une seule fois.

Afin de comprendre la différence entre ces deux cas dans une situation réelle, on se donne une représentation schématique de l'effet d'un événement plastique de la ligne i sur une ligne $i + 1$ (figure 3.3). (Cette représentation sommaire est confirmée par une étude présentée dans le chapitre suivant 4.)

- 1 Dans le cas 1, lorsque le bloc $i\alpha$ craque N_x fois, la contrainte du bloc voisin $i + 1\alpha$ varie de $N_x \Pi_0^{ii+1}\sigma_0$.
- 2 Dans le cas 2, chaque bloc de la ligne $i + 1$ voit les N_x blocs de la ligne i craquer. Le système étant périodique, la contrainte de tous les blocs de la ligne $i + 1$ diminue de la même quantité $\sum_{\alpha=0}^{N_x} \Pi_{\alpha}^{ii+1}\sigma_0$.

La distribution des contraintes sur la ligne $i + 1$ a été modifiée de façon très différente. Dans les deux cas, la contrainte moyenne a diminué d'une même quantité. Mais, dans le premier cas, on modifie fortement la variance de la distribution de contrainte sur la ligne $i + 1$, alors que dans le second cas, elle n'est pas modifiée du tout.

On voit donc que l'approximation de décorrélation suivant x a supprimé un schéma dans lequel la ligne i pourrait s'écouler continûment sans que la variance de la contrainte de la ligne $i + 1$ ne change. Cette dernière pourrait donc avoir une distribution de contrainte évoluant dans le temps sous l'effet du chargement élastique et de la plasticité de la ligne i sans qu'aucun de ces éléments n'atteigne jamais le seuil σ_y . L'approximation interdit donc une situation plausible de coexistence entre une zone s'écoulant et une zone élastique.

Les corrélations dans la directions x jouent donc un rôle crucial dans les mécanismes conduisant à la coexistence de régions figées et de régions fluides sous écoulement. Il semble donc difficile de se ramener à une approche quasi unidimensionnelle comme cela a été fait dans ce chapitre.

A posteriori, on remarque que dès l'écriture de la relation 3.4, on a négligé un type de corrélation spatiale particulier : à t donné, il existe des corrélations entre $P_{i\alpha}(\sigma, t)$ et

$P_{j\beta}(\sigma', t)$ du fait du déplacement imposé aux parois et du fait de l'équilibre mécanique qui a des conséquences plus complexes que la seule égalité des contraintes moyennes par ligne que nous avons employée. Nous n'avons pas tenu compte de ces corrélations en formulant l'équation 3.4.

Dans une seconde approche microscopique, nous allons conserver une description bidimensionnelle du champ de contrainte, afin de pouvoir tenir compte complètement des corrélations spatiales.

Ainsi, les deux chapitres suivants décrivent les éléments d'une modélisation microscopique bidimensionnelle de l'écoulement. Dans cette modélisation, l'écoulement résulte d'une organisation collective d'événements plastiques. La première étape (décrite dans le chapitre 4 consiste à décrire un événement plastique seul et ses effets sur le milieu, en particulier le champ de contrainte qu'il génère. Dans une seconde étape (décrite dans le chapitre 5, les événements plastiques interagissent.

Chapitre 4

Effet mécanique d'un événement plastique unique

Sommaire

4.1	Modèle élasto-plastique	54
4.2	Résumé des résultats	54
4.2.1	Effet d'un événement plastique	54
4.2.2	Une image de l'événement plastique	56
4.2.3	Remarque : rôle des corrélations spatiales	57
4.2.4	Vers une modélisation d'un milieu sous écoulement	58
4.3	Article : "Elastic consequences of a single plastic event"	59

Les chapitres 4 et 5 décrivent la modélisation microscopique bidimensionnelle de l'écoulement. Dans cette modélisation, l'écoulement résulte d'une organisation collective d'événements plastiques. La première étape, présentée dans ce chapitre, consiste à caractériser un événement plastique seul et la réponse du milieu à un tel événement.

A cette fin, nous proposons une description élasto-plastique très générale du milieu qui nous permet de définir avec précision un "événement plastique" localisé et d'exprimer complètement le champ de déplacement ou le champ de contrainte qu'il induit dans un milieu élastique homogène, isotrope, et incompressible.

4.1 Modèle élasto-plastique

Dans ce modèle, la déformation est la somme d'une déformation plastique et d'une déformation élastique. Le tenseur des contraintes est élastiquement lié au tenseur des déformations élastiques. Les conditions d'équilibre mécanique, et les conditions aux parois, permettent de résoudre complètement ce modèle et d'exprimer analytiquement le champ de déplacement dans le milieu en fonction du champ de déformation plastique, pour diverses géométries du milieu et types de forçage externe. En particulier, nous avons étudié, les cas d'un milieu infini, et d'un milieu fini avec un déplacement imposé aux parois dans un milieu bidimensionnel forcé par un cisaillement simple. Ces résultats sont décrits dans l'article inséré à la fin de ce chapitre.

4.2 Résumé des résultats

4.2.1 Effet d'un événement plastique

Nous avons proposé un modèle élasto-plastique général, qui permet d'exprimer la perturbation induite dans le milieu par une déformation plastique localisée. Dans le cas général, la déformation plastique est tensorielle. Cependant, cette description est une première étape de la modélisation d'un système soumis à un taux de cisaillement global. Nous faisons l'hypothèse que le champ de déformation plastique conserve la symétrie du champ de déformation imposé, cela revient à dire que le champ de déformation plastique est un cisaillement. Un "événement plastique" est un cisaillement plastique localisé.

On résume ici les résultats détaillés dans l'article inséré en fin de chapitre. L'événement plastique est localisé et d'amplitude $a\epsilon_0$, ce qui peut être vu comme un volume (une aire, en deux dimensions) de taille a . Le module élastique est μ .

- dans un milieu infini bidimensionnel, le champ de contrainte de cisaillement $\sigma(r, \theta)$ induit par un cisaillement plastique local est quadripolaire et décroît donc en loi de puissance comme $\frac{1}{r^2}$, où r est la distance à l'événement.

$$\sigma(r, \theta) = 4\mu a^2 \epsilon_0 \frac{1}{\pi} \frac{2}{r^2} \cos(4\theta) \quad (4.1)$$

On peut définir une expression similaire pour le champ de déplacement. Mais on s'intéresse ici en particulier au champ de contrainte de cisaillement.

- Dans un milieu semi infini, lorsque l'événement plastique est localisé au voisinage de la paroi, ses effets sont amplifiés : la décroissance est aussi une loi de puissance en $\frac{1}{r^2}$, mais le préfacteur est multiplié par deux par rapport aux effets dans un milieu infini à très grande distance de l'événement.
- Dans un milieu de taille finie, quelle que soit sa position dans le milieu, un événement plastique génère une relaxation de la contrainte moyennée sur le volume $\langle \delta\sigma \rangle$

$$\langle \delta\sigma \rangle = -\frac{2\mu a^2 \epsilon_0}{HL} \quad (4.2)$$

où H, L sont les tailles du système.

- Dans un milieu de taille finie, de période L dans la direction x , avec des conditions de non glissement sur chacune des deux parois positionnées en $z = 0, H$, le champ de contrainte $\sigma(x, z)$ dû à un champ de cisaillement plastique $\epsilon^{pl}(x, z)$ a été calculé exactement.

Sans entrer dans le détail du calcul, on rappelle quelques éléments de l'expression du champ de contrainte $\sigma(x, z)$. Deux types de transformations sont définies dans ce milieu :

$$\begin{aligned} \sigma(x, z) &= \sum_{m, n \in \mathcal{Z}} e^{ip_m x} e^{iq_n z} \hat{\sigma}^*(m, n) \\ \hat{\epsilon}^{pl*}(m, n) &= \frac{1}{2HL} \int_0^L dx \int_0^H dz \epsilon^{pl}(x, z) (-2i) \sin\left(\frac{2\pi n z}{2H}\right) e^{-i\frac{2\pi m x}{L}} \\ \text{avec } p_m &= \frac{2\pi m}{L}; q_n = \frac{2\pi n}{2H} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le champ de contrainte de cisaillement s'exprime en fonction du tenseur d'Oseen \mathbf{O} et de la fonction de Green \hat{G}^∞ , qui permet de calculer l'effet d'un événement plastique dans un milieu infini :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^*(m, n) &= 2\mu(\hat{G}^\infty(m, n)\hat{\epsilon}^{pl*}(m, n) \\ &\quad + \frac{1}{2}(ip_m \hat{O}_{xy}(m, n) + iq_n \hat{O}_{xx}(m, n))\hat{f}_x(m, n)) \\ \hat{\sigma}^*(0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les forces f_x , qui s'appliquent seulement aux parois $z = 0, H$, sont calculées pour

que le déplacement soit nul sur chacune des deux parois :

$$\begin{aligned} \hat{f}_x(m, n) &= \frac{\sum_1 \frac{2i}{q^4} p'_n (q_m^2 - p_n'^2) \epsilon^{pl*}(m, n')}{\sum_1 \frac{p_n'^2}{\mu q^4}}, \text{ pour } n \text{ impair} \\ \hat{f}_x(m, n) &= \frac{\sum_2 \frac{2i}{q^4} p'_n (q_m^2 - p_n'^2) \epsilon^{pl*}(m, n')}{\sum_2 \frac{p_n'^2}{\mu q^4}}, \text{ pour } n \text{ pair et } m \neq 0 \\ \hat{f}_x(0, n) &= 0 \text{ pour } n \text{ pair} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où \sum_1 représente une somme sur les n' impairs, et \sum_2 représente une somme sur les n' pairs, et $q^2 = p_m^2 + q_n^2$.

Cette relation nous permet de calculer le champ de contrainte de cisaillement induit par un événement plastique représenté sur la figure 4.1 lorsqu'il se situe dans le volume (à gauche), et lorsqu'il se situe au voisinage de la paroi (à droite).

(La discrétisation qui a permis de calculer le champ de contrainte représenté sur ces figures est détaillée dans l'annexe A.2)

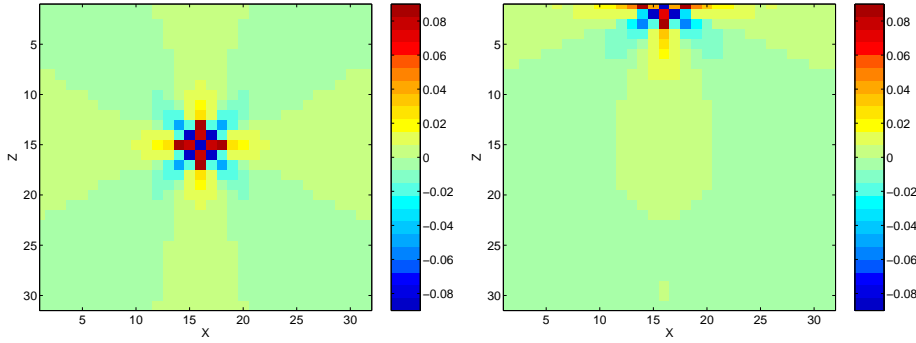


FIGURE 4.1 – Perturbation du champ de contrainte de cisaillement lorsque l'événement plastique a lieu à *gauche* au centre deux système à *droite* au voisinage de la paroi pour un système de taille $N = 31 * 32$, périodique dans la direction x , fini par deux parois dans la direction z .

Dans la suite, on conservera la notation suivante : le champ de contrainte dû à la déformation plastique $\epsilon^{pl}(x', z')$ s'écrit :

$$\sigma(x, z) = 2\mu \int dx' dz' G^H(x - x', z, z') \epsilon^{pl}(x', z') \quad (4.6)$$

Et on sera amené à utiliser la relation dont une démonstration est proposée dans l'article, pour tout x', z' :

$$\int dx dz G^H(x - x', z, z') = -1 \quad (4.7)$$

4.2.2 Une image de l'événement plastique

Dans un article majeur [52], Eshelby détermine analytiquement l'effet d'une déformation plastique au sein d'une inclusion dans un milieu infini élastique isotrope tridimensionnel. L'inclusion est une région donnée du milieu qui subit une déformation plastique homogène $\epsilon^{pl} = \epsilon_0$.

En l'absence de milieu environnant, la déformation dans l'inclusion serait donc ϵ_0 . Du fait du couplage entre l'inclusion et le milieu environnant, à cette déformation de base s'ajoute une perturbation élastique qu'Eshelby calcule dans le milieu environnant ainsi que dans l'inclusion grâce à la démarche suivante :

- (i) La contrainte dans le milieu à l'état initial est nulle. On découpe dans ce milieu une région de volume V que l'on extrait. Après cette opération, la contrainte reste nulle dans la région et dans la matrice.
- (ii) La région extraite est soumise à la déformation homogène ϵ_0 .
- (iii) On applique à la surface de cette région, les forces nécessaires pour qu'elle recouvre sa forme initiale et puisse être incluse dans la matrice.
- (iv) Après l'étape précédente, on a une couche de force localisée sur la surface de l'inclusion, et une matrice de contrainte nulle. L'inclusion a la même forme qu'avant l'extraction. On relaxe la couche de force, la matrice et l'inclusion se déforment élastiquement.

Ce découpage en différentes étapes permet à Eshelby de calculer exactement le champ de déplacement dans le milieu et dans l'inclusion. Dans le cas où la déformation plastique ϵ_0 de l'inclusion correspond à un cisaillement, l'inclusion correspond à un événement plastique tel que nous l'avons défini.

$$\epsilon_0 = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_0 & 0 \\ \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

On compare alors les résultats que nous avons obtenus dans un milieu tri-dimensionnel, en utilisant l'équivalence entre l'événement plastique et le double dipôle de forces ($a, F = a^2\mu\epsilon_0$) détaillée dans l'article, avec les résultats d'Eshelby dans le cas d'une inclusion de volume $V = a^3$, dans un milieu incompressible.

Les deux démarches conduisent à la même expression du champ de perturbation à grande distance de l'événement. On note r la distance à l'inclusion. A grande distance de l'inclusion, $r \gg a$, la perturbation est indépendante de la forme initiale de l'inclusion, et le champ de déplacement s'écrit :

$$u_i = \frac{3a^3\epsilon_0}{2\pi} \frac{r_i r_x r_y}{r^5} \text{ où } i = x, y, z \quad (4.9)$$

Ceci correspond à la perturbation du champ de contrainte de cisaillement :

$$\sigma_{xy} = \frac{3a^3\epsilon_0}{\pi} \left(\frac{1}{r^3} - 10 \frac{r_x^2 r_y^2}{r^7} \right) \quad (4.10)$$

L'accord entre les deux résultats supporte le fait que c'est bien la physique d'Eshelby qui est manifestée sans les différentes géométries décrites dans l'article.

4.2.3 Remarque : rôle des corrélations spatiales

On revient ici sur la conclusion du chapitre précédent exprimée dans la section 3.2.2. On a en effet évoqué la différence entre 1) le champ de contrainte dû à une ligne d'événements plastiques et 2) le champ de contrainte dû à l'effet cumulé d'événements plastiques localisés au même endroit, à partir d'une description très schématique du propagateur.

On peut maintenant exprimer cette différence de manière quantitative, grâce à l'expression 4.5. (Pour réaliser ces calculs, on a été amené à discrétiser l'expression précédente, ce qui est détaillé en annexe A.2). On considère un système discret de 32×31 blocs unitaires susceptible de subir un événement plastique d'amplitude caractéristique de l'événement est $\epsilon_0 = 0.5$, le module élastique vaut $\mu = 1$.

- 1) On a calculé l'effet de 32 événements plastiques consécutifs du bloc central positionné en $\alpha = 16, i = 7$. Ce bloc central relaxe dans ce cas une quantité de contrainte $\delta\sigma \approx -18.3$, qui est redistribuée dans le milieu. Sur la figure 4.2 à gauche, on a reporté la quantité de contrainte redistribuée sur la ligne $i + 1 = 8$.
- 2) De la même manière, on a calculé l'effet sur la ligne $i + 1$ d'une "ligne" d'événements plastiques : chaque élément de la ligne $i = 7$ a craqué une fois.

Ces deux graphes montrent de manière quantitative ce qui a été précédemment évoqué. Dans le premier cas, certains blocs reçoivent de fortes augmentations de contrainte. Par exemple, la contrainte du bloc $i = 8, \alpha = 16$ augmente de 3, et il peut être amené à relaxer à son tour. Dans le second cas, la contrainte de chaque bloc diminue de la même quantité 0.031.

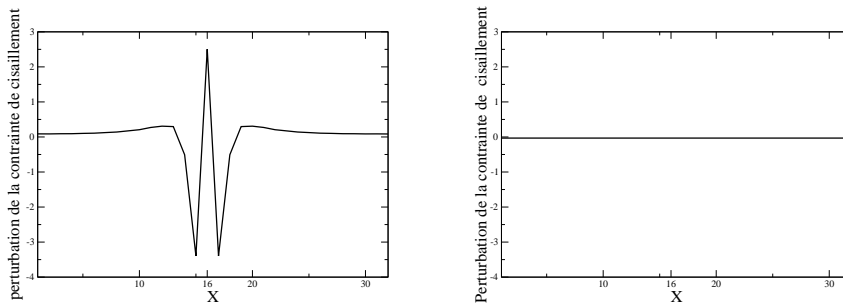


FIGURE 4.2 – $N = 32 \times 31$, le système est périodique dans la direction x , fini par deux parois dans la direction z . à gauche Le bloc central $\alpha = 16, i = 7$ subit 32 événements plastiques. On a représenté la contrainte de cisaillement dû à ces événements plastiques sur l'une ligne voisine $i + 1 = 8$ en fonction de X . à droite Les 32 éléments de la ligne centrale $i = 7$ ont craqué une fois, on a représenté la champ de la contrainte de cisaillement dû à ces événements plastiques sur l'une ligne voisine $i + 1 = 8$ en fonction de X . Tous les éléments de la ligne voient leur contrainte diminuer de $\frac{1}{32} \approx -0.031$

On reprend donc ici la conclusion du chapitre précédent : il faut tenir compte des corrélations dans la direction x qui peuvent jouer donc un rôle crucial dans les mécanismes conduisant à la coexistence de régions figées et de régions fluides sous écoulement.

4.2.4 Vers une modélisation d'un milieu sous écoulement

On a décrit un événement plastique local et ses effets sur l'ensemble du milieu. Ceci constitue la première étape de la modélisation élasto-plastique d'un milieu sous écoulement. La seconde étape présentée dans le chapitre suivant (chapitre 5) consiste à faire interagir les événements plastiques.

4.3 Article : "Elastic consequences of a single plastic event"

L'article suivant a été soumis à *The European Physics Journal E* en Décembre 2003.

Elastic consequences of a single plastic event : a step towards the microscopic modeling of flowing complex media.

Guillemette Picard¹, Armand Ajdari¹, François Lequeux², Lydéric Bocquet³

¹Laboratoire de Physico-Chimie Théorique, UMR CNRS 7083,

²Laboratoire de Physico-Chimie Macromoléculaire, UMR CNRS 7615,

both at ESPCI, 10 rue Vauquelin, F-75005 Paris, France

³Laboratoire PMCN, UMR CNRS 5586, Université Lyon 1,

43 Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

(Dated: January 16, 2004)

With the eventual aim of describing flowing elasto-plastic materials, we focus on the elementary brick of such a flow, a plastic event, and compute the long-range perturbation it elastically induces in a medium submitted to a global shear strain. We characterize the effect of a nearby wall on this perturbation, and quantify the importance of finite size effects. Although for the sake of simplicity most of our explicit formulae deal with a 2D situation, our statements hold for 3D situations as well.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

An increasing body of experiments on macroscopic flow of various complex systems evidence spatially heterogeneous behaviour. We focus here on the (large) sub-class of such systems that display a macroscopic yield stress (among which foams, suspensions, emulsions, colloidal glasses,...). Typically these systems flow homogeneously at large stress/shear rate, whereas at intermediate shear rate they may exhibit spatial coexistence between a flowing and a frozen region [2–6] or intermittent heterogeneous flow [3]. To this point, there is little insight as to whether the mechanisms leading to such macroscopic behaviours are generic or dependent on the specific microscopic structure of the fluid and the corresponding interactions.

A general class of “elasto-plastic” models has been put forward to apprehend those macroscopic behaviour, which was first applied to seismologic modelisation [7]. In these models, the medium first responds elastically to a global forcing (either stress or strain). The deformation or stress can then locally induce a rearrangement or *plastic event*, if a local threshold is reached. Such a plastic event locally relaxes a stress that is elastically redistributed in the medium, and can trigger other local events. In this picture, the macroscopic flow is the outcome of the collectively organized sequence of local rearrangements. Although this mesoscopic description seems very reasonable, many questions remain to be answered for this scenario to be operational. First, what is (are) the basic plastic event(s), and how can it (they) be identified in a given flowing complex material ? Second, what is the constitutive (dynamic) equation that describes such a single plastic event under a local forcing ? Third, how does such an “event”, locally relaxing stress, perturb the surrounding medium ? The answer to this last question is obviously linked to the nature of the plastic event.

As to the first two questions, *i.e.* the nature and the description of the plastic event, various convincing pictures have been proposed in the literature. In a pioneer-

ing work, Bulatov and Argon introduced a phenomenological description of a single plastic event, which allowed them to describe many properties of macroscopic plastic flows [8–10]. In their simulation, the unit cell can undergo several fixed plastic deformations specific to their hexagonal geometry. Later, on the basis of molecular simulations of a Lennard Jones glass under imposed shear stress [11], and building on earlier works by Spaepen and Argon, Falk and Langer introduced the notion of shear transformation zone (STZ), which described a local limited zone where rearrangements occur. The occurrence of very localized plastic events is most easily evidenced in foams [6], where they take the form of T1 rearrangements. Langer [12] then constructed an analytical “mean field” elasto-plastic model, introducing STZ as zones with a plastic tensorial deformation. More recently, Baret *et al.* [13], and Braun [14] performed numerical simulations on lattices, in which a plastic event consists in a local scalar displacement occurring when the local stress reaches a yield stress. Thus, within a very general class of elasto-plastic model, the notion and the description of a plastic event is now well documented and clarified. However, a clear description of the consequences of a localized plastic event on the stress distribution in the material (third question) still needs to be constructed.

This is the purpose of the present paper : using a rather general description for a localized plastic event, we compute the long-range *elastic* perturbation that such an event induces in an elastic material. We characterize its symmetry and amplitude, as well as the way it is modified if the event occurs close to a solid boundary. An *a priori* counter-intuitive result which emerges from our calculations, is the crucial role played by finite size effects in the modeling of flowing elasto-plastic materials. We limit ourselves here to the study of the elastic effects of a single event, and leave for a later report the analysis of the collective organization of the plastic events when the material is flowing.

The paper is organized as follows. In section II we specify the general “elasto-plastic” model that we use: we

assume that the medium is homogeneous and isotropic, as well as incompressible for simplicity. In section III we consider an infinite geometry, and describe a local plastic event induced by shearing and the full characterization of the perturbation it elastically induces. In this case there is no difference between a forcing at imposed stress or imposed strain. In section IV, we focus on finite size geometries, where the system is bounded by solid walls. First, we describe how a wall attenuates the perturbation induced by an event occurring in its vicinity. Secondly, we explicit how in a finite size medium, the perturbation depends on the global forcing. We calculate the average stress relaxation induced by an event at imposed strain, and give explicit formulae to compute the corresponding stress field relaxation everywhere. In section V, we conclude and briefly highlight important consequences for the modeling of flowing systems.

II. ELASTO-PLASTIC MODEL

We assume, following many of the previously quoted studies, that the displacements and deformations are given by the simple superimposition of a plastic flow (the localized plastic events) and an elastic distortion of the medium. We further assume that the medium is homogeneous, isotropic, and linearly elastic. In addition, we focus for simplicity on the incompressible case (the compressible case can be studied following the same lines), so that the elastic properties of the medium are fully described by the shear modulus μ .

Denoting $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ the total displacement vector at position \mathbf{r} , the strain tensor is given by $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t)$. From our hypotheses, this total strain is the sum of an elastic strain and a plastic strain (non-zero only at the locus of plastic events):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{pl} + \boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad (1)$$

Incompressibility corresponds to :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

With the hypotheses of linear elasticity and incompressibility, the total stress tensor is $\mathbf{s} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}$ where p is the pressure and $\boldsymbol{\sigma}$ verifies :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{el} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} - 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{pl} \quad (3)$$

As we have in mind the slow flow of pasty materials we neglect inertial effects so that mechanical equilibrium simply requires :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1}) = 0 \quad (4)$$

We consider the classical situation where an applied shear (either imposed deformation or stress) induces elastic loading of the material, up to the point where it triggers a single localized plastic event. The consequent state of the medium in response to the applied forcing is here the

sum of a purely elastic response to the forcing (denoted with superscripts 0) and of the perturbation induced by the occurrence of the plastic event (denoted with superscripts 1).

With these notations :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}^0 + \boldsymbol{\epsilon}^1 \\ \boldsymbol{\epsilon}^{el} &= \boldsymbol{\epsilon}^{el0} + \boldsymbol{\epsilon}^{el1} \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon}^{pl} = \boldsymbol{\epsilon}^{pl1} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^1 \end{aligned} \quad (5)$$

where $\boldsymbol{\epsilon}^{pl1}$ describes the localized plastic event. To go any further we need to pay attention to the boundary conditions imposed on those fields, which brings us to specify the global geometry of the system. We start below with an infinite medium, before addressing finite-size effects in section IV.

III. INFINITE MEDIUM

We start with the limit case of an infinite medium, where a driving at infinity imposes either an applied shear strain or an applied shear stress. The purely elastic response $\boldsymbol{\epsilon}^{el0}$ is homogeneous. Let us then focus on the perturbation 1 generated by a plastic event described by $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$. If the system is stress driven, the boundary condition for the induced perturbation is:

$$\boldsymbol{\sigma}^1(\infty) \rightarrow 0 \quad (6)$$

whereas for a strain controlled system, the boundary condition reads :

$$\mathbf{u}^1(\infty) \rightarrow 0 \quad (7)$$

Equations (2), (3) and (4) can then be reformulated in a well defined problem for the perturbation field:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}^1 &= 0 \\ \nabla \cdot (2\mu\boldsymbol{\epsilon}^1 - p^1\mathbf{1}) &= 2\mu\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{pl} \end{aligned} \quad (8)$$

which must be solved either with either (6) or (7).

Obviously the problem at hand is directly related to the response of a purely elastic (incompressible, isotropic, homogeneous) system to a punctual force. Let a force \mathbf{f} act on the medium at the position \mathbf{r}' . The displacement field \mathbf{u} at position \mathbf{r} created by this force is given by:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla \cdot (2\mu\boldsymbol{\epsilon} - p\mathbf{1}) + \mathbf{f}\delta(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

The solution of this system, that actually satisfies simultaneously both types of boundary condition ($\boldsymbol{\sigma}(\infty) \rightarrow 0$ and $\mathbf{u}(\infty) \rightarrow 0$), is the Oseen tensor which is most easily dealt with in reciprocal space (we use hats to denote Fourier transforms):

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{f}$$

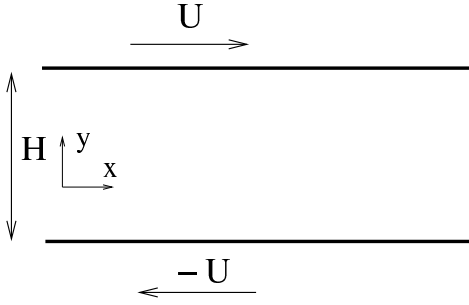


FIG. 1: The medium is sheared in the y direction at constant strain γ , the infinite system of section III corresponds to $H \rightarrow \infty, U \rightarrow \infty$ and $\frac{U}{H} = \gamma/2$

with:

$$\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mu q^2} (\mathbf{1} - \frac{\mathbf{q}\mathbf{q}}{q^2}) \quad (10)$$

With this tool we can construct the solution to the system (8). This solution is clearly also independent of the specific boundary condition (6) or (7), and can be simply written:

$$\hat{\mathbf{u}}^1(\mathbf{q}) = 2\mu \hat{\mathbf{O}}(\mathbf{q}) \cdot (i\mathbf{q} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}) \quad (11)$$

At this point, no assumption has been made on the nature of the plastic event (fully described here by the localized $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}(\mathbf{r})$, or equivalently by $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}(\mathbf{q})$). Therefore this expression gives in a very general form the displacement field induced by a plastic strain in an infinite medium (for both type of boundary conditions). By derivation and using (3) one easily obtains a similar formula in reciprocal space for the stress perturbation σ^1 . Both relations lead in real space to expressions for the propagators for displacement and stress respectively. Rather than producing these formulae in a formal general context we specify to a given geometry first.

A. Plastic events with a simple shear symmetry in 2D

To pursue analytically without dealing with opaque tensorial formulae, we now make the simplifying assumption that the local plastic event has the symmetry of the global forcing which we chose to be that of simple shear. We further focus on the two dimensional case : the $H \rightarrow \infty$ limit of Fig. 1. We stress however that most our conclusions are also valid for the 3D situation (see comments further).

With the hypothesis above, the plastic deformation tensor corresponds to simple shear $\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^{pl} = \boldsymbol{\epsilon}_{yx}^{pl}$, and

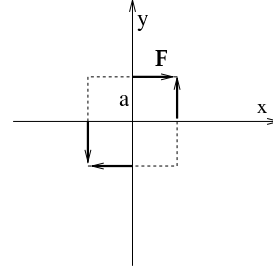


FIG. 2: The perturbation due to a localized plastic shear is equivalent to the perturbation due to a set of two dipoles of forces with $F = a\mu\epsilon_0$.

$\boldsymbol{\epsilon}_{xx}^{pl}, \boldsymbol{\epsilon}_{yy}^{pl}$ are neglected. Expression (11) becomes:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x^1(\mathbf{q}) &= 2\mu (\hat{O}_{xx} \cdot iq_y + \hat{O}_{xy} \cdot iq_x) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{xy}^{pl} \\ \hat{u}_y^1(\mathbf{q}) &= 2\mu (\hat{O}_{xy} \cdot iq_y + \hat{O}_{yy} \cdot iq_x) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{xy}^{pl} \end{aligned} \quad (12)$$

For a localized plastic event $\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^{pl} = \epsilon_0 a^2 \delta(\mathbf{r})$ (i.e. of typical amplitude ϵ_0 and microscopic spatial extent a^2), the perturbation displacement described by (12) is analogous to the displacement induced by a set of two dipoles of forces ($\mathbf{F}, 2a$) as represented on figure 2, with $F = a\mu\epsilon_0$ (or more precisely its limit for $a \rightarrow 0$ with $aF = \mu\epsilon_0 a^2$ kept constant).

The shear stress perturbation corresponding to (12) can be obtained using (3), and reads :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xy}^1 &= 2\mu^2 (q_y^2 \hat{O}_{xx} + q_x^2 \hat{O}_{yy} + 2q_x q_y \hat{O}_{xy}) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{xy}^{pl} \\ &\quad - 2\mu \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{xy}^{pl} \end{aligned} \quad (13)$$

Somewhat similar formulae can be obtained for σ_{xx} and σ_{yy} but we will in the following mostly focus on the shear stress.

We define formally the propagators $\mathbf{P}^\infty, G^\infty$ that describe the consequences in terms of displacement and elastic shear stress of a single plastic event in an infinite medium by:

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \mathbf{P}^\infty(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \boldsymbol{\epsilon}_{xy}^{pl}(\mathbf{r}') \quad (14)$$

$$\sigma_{xy}^1(\mathbf{r}) = 2\mu \int d\mathbf{r}' G^\infty(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \boldsymbol{\epsilon}_{xy}^{pl}(\mathbf{r}') \quad (15)$$

Practically, the propagator for the displacement field can be derived from equation Eq. (12) either with the Fourier Transform or by derivation in real space of the Oseen tensor. The propagator for the shear stress is then deduced from linear elasticity.

In the present two-dimensional geometry, explicit formulae in reciprocal and real space are:

$$\hat{G}^\infty = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (16)$$

$$G^\infty(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{r^2} \cos(4\theta) \quad (17)$$

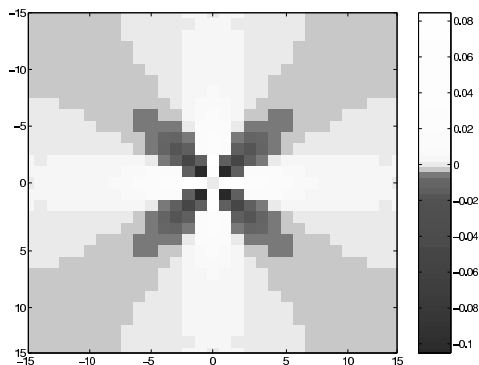


FIG. 3: Perturbation of the shear stress field for a plastic event occurring at the origin in a medium submitted to a shear strain or stress.

Hence, in a system forced with a symmetry of simple shear, the perturbation of the shear stress due to a localized plastic event is of quadrupolar symmetry (see Fig. 3) and decreases with a power law $\frac{1}{r^2}$ in two dimensions (in three dimensional systems, the quadrupolar symmetry is conserved and the power law is $\frac{1}{r^3}$).

B. Global effect of a plastic event :

We now consider more global effects of the same localized plastic event $\hat{\epsilon}_{xy}^{pl}(\mathbf{r}') = a^2 \epsilon_0 \delta(\mathbf{r}')$, namely quantities integrated over a whole layer (of constant y). The following integral rules are easily derived from the previous calculations:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{xy}^1(x, y) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^1(x, y) dx &= \text{Sign}(y) a^2 \epsilon_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} v_y^1(x, y) dx &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

The first equation states that the shear stress resulting from the plastic event is redistributed in such a way that the integrated stress on every layer is unchanged, i.e. there is no net release of stress over a layer, and consequently no change in the net force applied from above on the system! The second relation indicates that the average horizontal displacement in a (horizontal) layer depends only on whether it is above or below the event (but not on its distance to the event), while the third equation expresses that the average vertical displacement over a layer is zero. For simple shear in three dimensions, similar equations hold for quantities integrated over planes perpendicular to the loading displacement gradient.

C. Relation to other studies

Let us now compare the results we have obtained at the end of section A, for the displacement and stress fields induced by a single localized plastic event of simple shear symmetry, to related studies in the literature.

First, our results can be compared with the full analytical description of an elasto-plastic inclusion in an elastic matrix by Eshelby [15]. In that study, plastic shear strain occurs only within the finite-sized inclusion which yields a perturbation of the shear stress around the inclusion. Whatever the explicit shape of the inclusion, the long-range behaviour of that perturbation is strictly identical to the equivalent for the 3D case of expression (14) (as we have checked).

To study collective effects, Baret *et al.* [13] simulated elements with local yield stresses on a 2D-lattice (semi-periodic boundary conditions). In contrast with the present study, they modeled the plastic event by a simple scalar displacement. As a check, we computed the plastic strain tensor corresponding to such a local event in expression (11), and calculated the corresponding perturbed shear stress. This yields a perturbation of dipolar symmetry, consistent with the propagator that they numerically evaluated on their lattice. This provides a validation of our procedure, but mostly underlines that the nature and symmetry of the elementary plastic event seriously affect the propagator describing its consequences, and therefore potentially the collective interplay of such events and the resulting macroscopic flow behaviour. We believe that the form of plastic event used in the present study is more suited for the actual description of the flow of elastoplastic materials.

Kabla and Debrégeas [16] performed an explicit numerical simulation of a two dimensional foam under shear strain. In their quasi-static procedure, at each step the length of the film is minimized at constant bubble volume. They mimic 'T1' event by reorganizing sets of four bubbles when film length decreases below a critical value. They studied the stress rearrangements following such T1 events in their simulation. Averaging over many such events, they found that statistically these stress perturbations have a quadrupolar symmetry (with a slight tilt of the axes with respect to those of the macroscopic shear (x, y) , probably due to a structuration of the foam by the flow into a slightly non-isotropic medium). They observed that this stress field coincides with that generated in an elastic medium by a set of dipoles with the orientation of the global forcing. What is remarkable is that the outcome of their cellular simulation is very consistent with the outcome of the (elastic) continuum approach followed here.

To describe the deformation of plastic amorphous materials, Langer has introduced the concept of introduces shear transformation zones (STZ). In [12], he studies the response of a 2D material to an applied deviatoric stress. The plastic strain tensor is described without any assumption on its orientation. The results in that paper

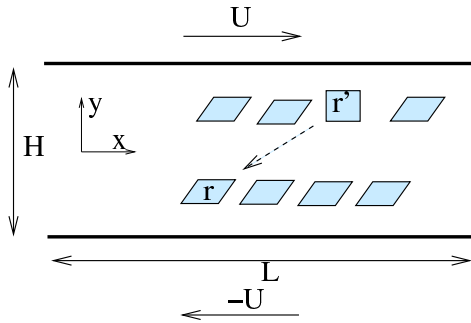


FIG. 4: A shear strain $\frac{2U}{H}$ is applied to a two dimensional elasto-plastic medium. A plastic event occurs at position \mathbf{r}' and is here represented by a square, and we seek for the elastic deformation of the rest of the medium that will add up on the elastic loading symbolized by the parallelograms.

suggest that for a plastic strain tensor with the symmetry of the forcing, the deviatoric stress induced by the STZ is of quadrupolar symmetry, with a power law decrease $\frac{1}{r^4}$. Within our model, we find for such an event also a quadrupolar symmetry but a power law decrease of $\frac{1}{r^2}$, and do not understand this discrepancy.

We now turn to the most important part of our paper, namely the effect of the finite-size geometry on the stress distortion due to a localized event.

IV. FINITE MEDIUM

As in the analysis above, we consider here localized plastic events with the symmetry of the forcing (simple shear), equivalent to a set of two dipoles of forces. Therefore the propagator for such a plastic event can in principle be viewed as the sum of the propagators for the four forces, which brings us back to considerations pertaining to the Green's function for the effect of a single force on the elastic *finite* medium.

We focus on the case of an imposed shear strain represented on figure 4, where two solid walls adhering perfectly to the medium are shifted horizontally.

Therefore the boundary condition for the total displacement field is:

$$\mathbf{u}(x, \pm H/2) = \pm \mathbf{U} \quad (19)$$

We proceed with the same decomposition as in the infinite medium case. The displacement field is the sum of the homogeneous elastic loading and of the perturbation due to the plastic event (again we denote by \mathbf{u}^1, σ^1 the displacement and deviatoric stress tensor induced by the plastic event). The boundary condition for the perturbation in the imposed strain regime is:

$$\mathbf{u}^1(x, \pm H/2) = \mathbf{0} \quad (20)$$

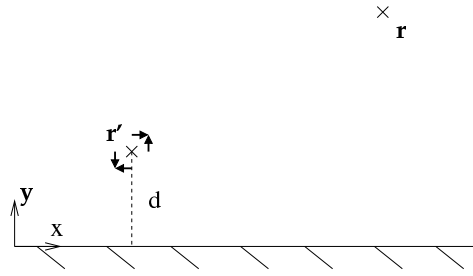


FIG. 5: The plastic event occurs at the vicinity of the wall : $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg d$. The quadrupolar symmetry of the plastic event is assumed not to be affected by the presence of the wall.

The total response of the elasto-plastic medium is then :

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{2Uy}{H} + u_x^1 \\ u_y(x, y) &= u_y^1 \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{2\mu U}{H} + \sigma_{xy}^1(x, y) \end{aligned} \quad (21)$$

A. Wall effects

We show here that the perturbation due to a plastic event occurring in the vicinity of a wall is more rapidly damped than the perturbation due to an elastic event occurring in the bulk.

To be precise, a plastic event is considered to occur in the vicinity of the bottom wall (located at $y_w = -H/2$) if it occurs at a position \mathbf{r}' much closer to the wall than the point \mathbf{r} where the perturbation is calculated. This condition requires $|H/2 + y'| \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, with the notations defined on Figure 5. We also focus here on situations where the second (top) wall is too far to play a role, that is $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll |y' - H/2|$, so that our approach in this subsection practically deals with a semi-infinite geometry.

Again, the effect of a plastic event is equivalent to the sum of that of the four forces represented on Fig. 5. Hence, we first study the displacement field induced by a single force \mathbf{F} at position \mathbf{r}' in the vicinity of the wall.

The displacement field due to a punctual force \mathbf{F} at \mathbf{r}' in a semi infinite medium is the sum of the displacement field due to the punctual force and an *image* with respect to the wall in an infinite medium. This complex image is such that the displacement field it induces exactly cancel out on the wall the displacement generated by the punctual force. Its structure is depicted in Fig. 6 and recalled below [17]. The location of the image is the symmetric of the pole \mathbf{r}' with respect to the wall. This image is the sum of a punctual force $-\mathbf{F}$, two dipoles of forces $(2d\mathbf{e}_x, F_x\mathbf{e}_y)$ and $(2d\mathbf{e}_y, F_y\mathbf{e}_x)$, and two dipoles of potential $(2d\mathbf{e}_x, F_x d/\mu)$ and $(2d\mathbf{e}_y, -F_y d/\mu)$ where $d = |y' + H/2|$ is the distance between the event

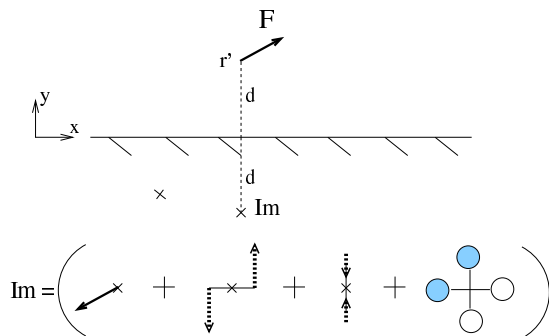


FIG. 6: The displacement field due to a punctual force \mathbf{F} in a semi infinite plane at a position \mathbf{r}' is the sum of the displacement field the same force would induce at \mathbf{r}' in an infinite medium, and that induced by its *image* with respect to the wall also in an infinite medium. The image consists of a punctual force $-\mathbf{F}$, two dipoles of forces of strength $2dF_x$ and $-2dF_y$ respectively, and two dipoles of potential. The resulting asymptotic long range behaviour is that of a quadrupole of strength $2dF_x$.

and the wall. The analytical expression for the corresponding Green function is given in [17]. Its long-range behaviour, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg d$, is dictated by the dipoles of forces in Figure 6, yielding a displacement field that scales a $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

Returning to the effect of a plastic event, where the source is now a set of dipoles as in Figure 2, one could expect a similar cancellation of the first order terms, and thus a far-field displacement scaling as $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$. However inspection of the structure of the image show that such is not the case (see Figure 7): the dipole of horizontal forces is duplicated in its direct image, and the set of dipoles of vertical forces it generates yield a dipole of strength $4aF$. The contributions of the (original) dipole of vertical forces are weaker due to cancelations. Altogether one is left with a dominant term that has the same geometry than in an infinite medium (and a similar $1/r$ decay for the displacement) with an amplitude twice as strong. We have analytically checked that the stress decay is consistent with the above picture, as for a localized event close to the wall we obtain a propagator that is directly related to its equivalent in the absence of the wall Eq. (17) :

$$G_{\text{wall}}(r, \theta) = 2G^{\infty}(r, \theta)(1 + O(d/r)) \quad (22)$$

where clearly $x - x' = r \cos(\theta)$, $y - y' = r \sin(\theta)$. This picture is also consistent with numerical calculations of the propagator for an event next to the wall in a finite geometry, which yields the picture in Fig. 8 (calculation to be described in subsection IVB below).

B. Propagator in a finite thickness medium

In this subsection, we turn to a medium of finite thickness H . We focus again on an imposed strain situation,

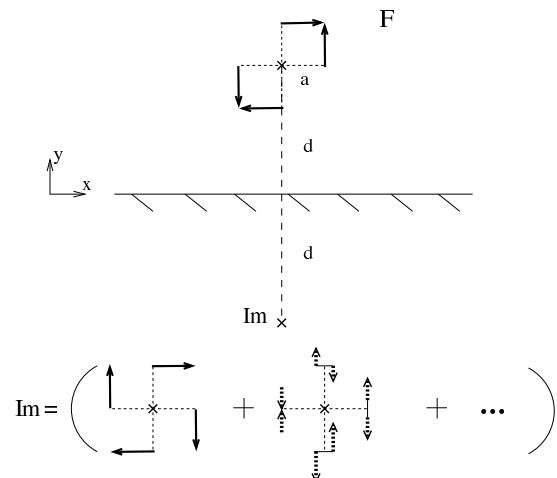


FIG. 7: The displacement field due to two force dipoles in a semi infinite plane is the sum of (i) the displacement field it would induce in an infinite medium and (ii) the displacement field due to its *image* with respect to the wall. This image can be constructed by summing those of the four forces. The contributions represented here (not at scale) are the direct images (solid arrows, all of amplitude F) and the induced force dipoles (dashed arrows, of amplitude $2(d-a)F$ and $2(d+a)F$ for the top and bottom one, of amplitude $2dF$ for the two others). Inspection shows that the net dominant long-range behaviour is that of a quadrupole twice as strong as the original one

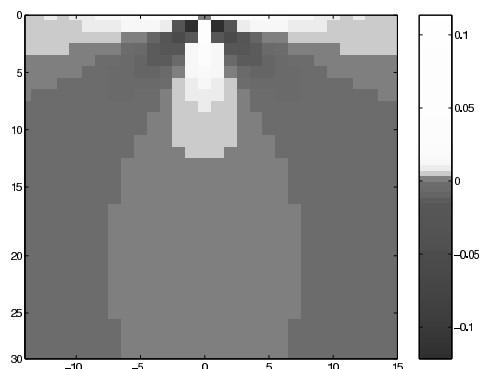


FIG. 8: Perturbation of the shear stress field for a plastic event (plastic deformation of amplitude $\epsilon_0 = 1$) occurring next to the top wall.

and therefore on the problem corresponding to the system of equation (8) together with the no displacement boundary conditions (20). We indicate ways of calculating the propagator in this geometry but mostly emphasize consequences of a single event on integral quantities.

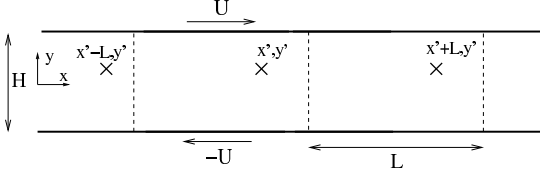


FIG. 9: A periodic array of plastic events at position $x' + kL, y'$.

1. Finite H , Infinite L

A first method to treat the case of a medium of finite thickness and infinite length, consists in the systematic construction of a series of images so as to cancel the displacements on both walls.

In the previous subsection we reported the explicit structure of the image of a punctual force needed to cancel the displacement due to this force on one of the walls. The image with respect to the wall at $H/2$, unfortunately creates a displacement at the wall $-H/2$, so that its own image with respect to the wall $-H/2$ has to be considered, and this process has to be repeated for every image. Thus formally two infinite sums of images are required to express the displacement for a punctual force within two walls. Following this strategy, Pozrikidis [17] performed a full analytical calculation of the deformation field induced by a point force.

Formally, the perturbation due to a plastic event can then be deduced by adding up the consequences of each of the four forces it consists of. This leads to expressions that although exact are heavy to deal with and somewhat opaque. We therefore turn to other methods in the following, focusing on a geometry periodic in the x direction.

2. Finite H, L Periodic : first method

We now focus on a system of thickness H and of finite extent L in the x direction, and consider periodic boundary conditions in that direction. This is equivalent to analyzing in an unbounded geometry the effect of a periodic array of plastic events of a given amplitude at positions $(x' + kL, y')$ with $k \in \mathbb{Z}$ (Figure 9), or formally $\hat{e}_{xy}^{pl}(\mathbf{r}) = a^2 \epsilon_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + kL\mathbf{x}))$. The resulting displacement field \mathbf{u}^1 can then be viewed as the sum of the displacement field induced by a similar periodic array of plastic events *in an infinitely thick medium* \mathbf{u}^∞ and of a correction term \mathbf{v}^H due to the finite size H . $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^\infty + \mathbf{v}^H$ is a function of $x - x', y$ and y' .

The displacement field \mathbf{u}^∞ induced by the periodic array of plastic events in an infinite medium can be expressed using the propagator for a single event (14) :

$$\mathbf{u}^\infty(x, y) = a^2 \epsilon_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}^\infty(x - x' - kL, y') \quad (23)$$

Given its periodicity in the x direction, this expression can be formally decomposed in Fourier series:

$$\mathbf{u}^\infty(x, y) = \mathbf{U}_0^\infty(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{U}_{cn}^\infty(y) \cos(2n\pi x/L) + \mathbf{U}_{sn}^\infty(y) \sin(2n\pi x/L)) \quad (24)$$

From equation (18), the components of the zeroth-mode vector function are:

$$\begin{aligned} U_{0x}^\infty(y) &= \text{Sign}(y - y') a^2 \epsilon_0 / L \\ U_{0y}^\infty(y) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

The correction displacement field \mathbf{v}^H is the solution of incompressible linear elasticity with no source (i.e. the set of equations (3,4) with no plasticity) but with the boundary conditions required to grant that \mathbf{u}^1 is zero on the walls:

$$\mathbf{v}^H(x, \pm H/2) + \mathbf{u}^\infty(x, \pm H/2) = 0 \quad (26)$$

\mathbf{v}^H is thus also periodic and can be written :

$$\mathbf{v}^H(x, y) = \mathbf{V}_0^H(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{V}_{cn}^H(y) \cos(2n\pi x/L) + \mathbf{V}_{sn}^H(y) \sin(2n\pi x/L))$$

where the functions $\mathbf{V}_{cn}^H, \mathbf{V}_{sn}^H$ can be calculated independently (i.e mode by mode) with the boundary conditions: $\mathbf{V}_{cn}^H(\pm H/2) = -\mathbf{U}_{cn}^\infty(\pm H/2)$, $\mathbf{V}_{sn}^H(\pm H/2) = -\mathbf{U}_{sn}^\infty(\pm H/2)$. We skip the full calculation in this subsection (which can be performed e.g. as in the low Reynolds number hydrodynamic study in [18]), as we display in the next subsection an exact expression of the displacement calculated in a framework that is more amenable to numerical simulation.

Instead we focus here on the zeroth mode $\mathbf{V}_0^H(y)$. From equations (25) and (26), its components are simply:

$$\begin{aligned} V_{0x}^H(y) &= -2a^2 \epsilon_0 \frac{y}{HL} \\ V_{0y}^H(y) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

This suffices to deduce consequences of the plastic event in terms of integrals over constant y lines:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{u}^1 dx = L(\mathbf{V}_0^H(y) + \mathbf{U}_0^\infty(y))$$

so that

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} u_x^1(x, y) dx &= -2(a^2 \epsilon_0 \frac{y}{H}) + \text{Sign}(y - y') a^2 \epsilon_0 \\ \int_{-L/2}^{L/2} u_y^1(x, y) dx &= 0 \end{aligned}$$

Then, linear elasticity implies that the overall variation of the force on the top plate due to the plastic event is:

$$\delta F = \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{xy}^1 dx = -2 \frac{\mu \epsilon_0 a^2}{H} \quad (28)$$

The corresponding drop of the average shear stress in the medium is obviously $\delta \langle \sigma \rangle = \delta F / L$.

This exact expression shows that a *single plastic event* (of a given fixed amplitude $\epsilon_0 a^2$) results in the release of the net force exerted by the medium on the walls by a quantity scaling as $\frac{1}{H}$. Remarkably, this quantity is independent on the position of the event in the medium. A corollary is that a finite density of plastic events ϕ , will relax this total force by an amount $\sim (\phi H L) \delta F$, corresponding to a relaxation of the average stress $\delta \langle \sigma \rangle = \delta F / L$ independent of the size of the system.

Note that the integrals over a period L calculated above for the consequences of a periodic array of plastic events, are equal to the integrals over x from $-\infty$ to $+\infty$ in a finite H infinite L geometry for the consequences of a single plastic event. For example, in the latter geometry $\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}^1 dx = -2 \frac{\mu \epsilon_0 a^2}{H}$, which clarifies in what sense equation (18) obtained in the previous section for an infinite medium corresponds to the limit $H \rightarrow \infty$. The global relaxation due to a single plastic event is consequently directly related to the finite size of the system.

An alternative derivation of this finite-size dependence of the force (or average stress) relaxation is proposed in appendix A, which yields a somewhat complementary physical insight.

3. Finite H, L Periodic : second method

Although we aim to focus in this paper on the qualitative aspects presented previously, we propose here an explicit formula for the stress perturbation induced by a localized plastic event in a finite size geometry. The actual expression is presented in reciprocal space, which may appear at first somewhat cumbersome, but turns out to be convenient in numerical calculations. For sake of readability, we provide here only the principles of this two step derivation and the resulting formulae, the details of the calculations being presented in appendix B.

First step: we formally extend the actual system ($0 < y < H$, and L periodic along x) by the following two operations: first an antisymmetric image system is constructed that extends to $-H < y < 0$, then the $2H$ thick resulting system is repeated periodically in the y direction. If the plastic strain in the original system is $\epsilon^{pl}(x, y)$, our construction yields a system without walls that is $2H$ periodic in the y direction, with in the upper half period $H > y > 0$ a plastic strain $\epsilon^{pl*}(x, y) = \epsilon^{pl}(x, y)$, and in the lower half $-H < y < 0$ an *antisymmetric image* plastic strain $\epsilon^{pl*}(x, y) = -\epsilon^{pl}(x, -y)$. This construction ensures that

the overall displacement generated by these strains has an x component that is symmetric by reflection by the planes $y = 0$ and $y = H$, and an y component that is antisymmetric in the same operations. We have therefore generated a solution that satisfies the condition of a zero y component of the displacement on the $y = 0$ and $y = H$ planes (loci of the walls in the original system).

Second step: We now want to cancel the remaining displacements along x without modifying the above result, and without adding sources in the system $0 < y < H$. This can be achieved by adding on the planes $y = 0$ and $y = H$ appropriate force fields f_x directed along x (again asymmetric and $2H$ periodic along y). Given the symmetry and periodicity of the system it is clear that the y displacement on the walls is not modified by this addition.

When this is achieved, we have in the upper half $0 < y < H$, a solution to (8) that satisfies the no displacement boundary condition on the walls (20). The corresponding stress field can be expressed in Fourier series :

$$\sigma^1(x, y) = \sum_{m, n \in \mathcal{Z}} e^{ip_m x} e^{iq_n y} \hat{\sigma}^*(m, n)$$

with $p_m = \frac{2\pi m}{L}$ and $q_n = \frac{2\pi n}{2H}$. It is the sum of the term directly generated by the plastic strains $\hat{\epsilon}^*$ and that due to the added force fields:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^*(m, n) &= 2\mu \{ \hat{G}^\infty(m, n) \epsilon^{pl*}(m, n) \\ &\quad + \frac{1}{2} (ip_m \hat{O}_{xy}(m, n) + iq_n \hat{O}_{xx}(m, n)) \hat{f}_x(m, n) \} \\ \hat{\sigma}^*(0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

The propagator G^∞ and the Oseen tensor \mathbf{O} are the direct counterparts for periodic systems of those defined in section III. Of course the force field f_x in the above expression is itself proportional to the plastic strain; the corresponding formulae are given in appendix B.

Inverting back to real space allows to compute numerically the response to a localized event. We have checked that for a large system the stress created by a plastic event far from the walls according to this formula is close to that obtained analytically in section III for an infinite medium. Similarly, for an event directly neighbour to the wall, we recover the results of subsection IVA for a semi-infinite medium. Fig. 10 represents an intermediate situation : the event occurs in the vicinity of the wall.

V. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

Starting from a general elasto-plastic model, we have computed in different 2D geometries the modification of the shear stress resulting from a localized plastic event with a symmetry of simple shear. We have first calculated the corresponding perturbation in an infinite system forced with a symmetry of shear. The stress field is of quadrupolar symmetry and decreases with a power

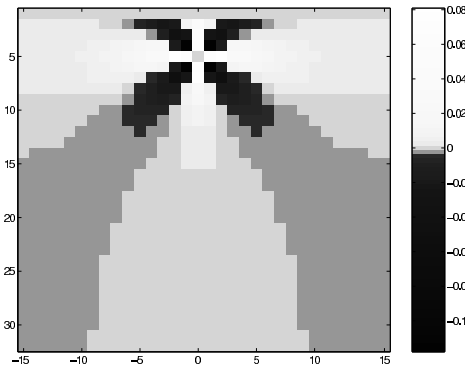


FIG. 10: Perturbation of the shear stress field for a plastic event (plastic deformation of amplitude $\epsilon_0 a^2 = 1$) occurring in the vicinity the wall. The discretization corresponds to $H/a = L/a = 32$

law $\frac{1}{r^2}$ in two dimensions. Then, we showed that the stress field perturbation due to a plastic event occurring close to a wall has a modified near field structure but decays far away with the same law and pattern, although with an amplitude twice as large. Eventually, we have proposed two ways of calculating the perturbation of the stress field due to a plastic event occurring in a finite medium. The first one allowed us to demonstrate in a simple way that a plastic event of a given strain amplitude relaxes the average stress by an amount which is independent of its position (i.e. distance to the walls) and inversely proportional to the size of the system. The second one allowed us to derive explicit expressions that permits calculation of the whole stress field in a finite-size geometry.

The extension of our results to a three dimensional situation is rather straightforward, and the qualitative statements are obviously similar. Also we have focused on a scalar description of plastic strain and induced stress, but the same steps can be taken if one seeks to

describe the whole tensorial stress field generated by plastic events of arbitrary symmetry. Eventually, we have focused in section IV on a situation where the walls were kept fixed during the plastic event. The extension of our results to situations where the force on the plates is kept fixed is immediate: one simply needs to add to our solution a simple shear displacement (corresponding to a stress $-\delta F/L$ with the notations of section IV).

This study is meant to be a first step towards the modeling of the flow of an elasto-plastic material. The next one consists in plugging in a plastic law that describes the onset and evolution of the localized plastic events. Coupling such a local plastic behavior to the long-range elasticity described here should yield interesting collective behaviours and hopefully insights in the flow mechanisms. For such an endeavour our quantification of finite-size effects is important for the steady-state average balance between the stress released by the plastic events and that imposed by the elastic loading. Also the geometry and decay law of the elastic perturbation is to be considered when addressing the emergence of a collective/cooperative organization at low shear rates. Important questions regarding possible spatial and temporal heterogeneities in such flows ([3–6, 16] could be addressed at the light of the present results:

- We have shown that a localized plastic event relaxes the average stress but also modifies the stress pattern on *all* the lines of the system decreasing the stress of some elements but increasing that of others. Does this allow shear banding with a limited zone flowing in coexistence with a non flowing region ?
 - The average stress released during an event of given strain amplitude is independent of the position of the event in the medium, and is the same on all lines. Yet the geometry of the propagator is clearly modified by the proximity of a wall. Do these elements favor a localization of the flow at the wall ?
- These questions will be addressed in a forthcoming publication.

-
- [1] orresponding author: armand.ajdari@espci.fr
- [2] L.J. Chen, B.J. Ackerson, and C.F. Zukowski, *J. Rheol.* **38**,193 (1993).
- [3] F. Pignon, A. Magnin, and J.-M. Piau, *J. Rheol.* **40**,573 (1996).
- [4] F. Varnik, L. Bocquet, J.-L. Barrat, L. Berthier, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 095702 (2003).
- [5] P. Coussot *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 218301 (2002).
- [6] G. Debrégeas, H. Tabuteau, and J.-M. di Meglio, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 178305 (2001).
- [7] K. Chen, P.Bak, Obukhov, *Phys. Rev. A* **43**,625, (1991).
- [8] V.V. Bulatov and A.S. Argon, *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* **2**, 167 (1994).
- [9] V.V. Bulatov and A.S. Argon, *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* **2**, 185 (1994).
- [10] V.V. Bulatov and A.S. Argon, *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.* **2**, 203 (1994).
- [11] M.L. Falk and J.S. Langer, *Phys. Rev. E* **57**, 7192, (1998).
- [12] J.S. Langer, *Phys. Rev. E* **64**, 011504, (2001).
- [13] J. C. Baret, D. Vandembroucq, S. Roux, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 195506 (2002).
- [14] O.M. Braun, J. Roder, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 096102 (2002).
- [15] J.D. Eshelby, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **241**,376 (1957).
- [16] A. Kabla, G. Debrégeas, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 258303 (2003)
- [17] C. Pozrikidis, *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge University Press (1992).
- [18] A. Ajdari, *Phys. Rev. E*, **53**, 4996-5005 (1996).

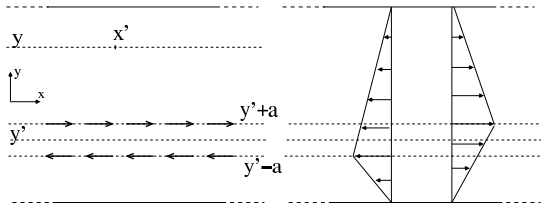


FIG. 11: Left: a continuous line of events at height y' is equivalent, using the representation of Figure 2 for a single event, to two lines of horizontal forces at $y' + a$ and $y' - a$. Right: displacement profiles resulting from the sum of negative forces at $y' - a$ (left), and from the sum of positive forces at height $y' + a$ (right).

APPENDIX A: FINITE SIZE EFFECTS.

We propose an alternative simple approach which gives a different physical insight into the effects of finite size evidenced subsection IV B. The following argument holds equally for an infinite $L \rightarrow \infty$ geometry or for an L periodic medium, and is here presented for the latter. We consider a plastic event occurring at (x', y') described by $\epsilon_{xy}^{pl}(x, y) = \epsilon_0 a^2 \delta(x - x', y - y')$ (and its repeated images along x due to the L periodicity). The stress perturbation is:

$$\sigma_{xy}^1(x, y) = \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-H/2}^{H/2} dy_1 G^{HL}(x - x_1, y, y_1) \epsilon_{xy}^{pl}(x_1, y_1) \quad (\text{A1})$$

which actually defines the propagator G^{HL} for the present periodic medium. The corresponding force release on the bottom of a layer at height y is

$$\delta F = \int_{-L/2}^{L/2} dx \sigma_{xy}^1(x, y) = a^2 \epsilon_0 \int_{-L/2}^{L/2} dx G^{HL}(x - x', y, y') \quad (\text{A2})$$

We remark that this can be rewritten

$$\delta F = \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-H/2}^{H/2} dy_1 G^{HL}(x - x_1, y, y_1) (\epsilon_0 a^2 \delta(y_1 - y')) \quad (\text{A3})$$

which means (see (A1)) that the variation of the integrated stress over a layer at height y (δF) induced by an event occurring at position x', y' , is equal to the stress variation at a site (x', y) induced by a continuous sum of events on a layer y' .

Representing these events by pairs of dipoles, the sum reduces to that of the x components as the y components cancel out upon summation on the line, so that we are looking for the stress generated at (x', y) by the two lines of forces at $y' - a$ and $y' + a$ depicted on Figure 11. The displacement field resulting from each of these sums separately are easily calculated and depicted on the right of Figure 11. For example the second one is the solution of the following problem: on each side of the plane $y = y' - a$, the medium is purely elastic, with no displacement

at the walls, and at $y = y' - a$ a continuous displacement and a jump in the stress of amplitude $\mu \epsilon_0 a$.

The total effect of the continuous line of events is the displacement field presented on the left of Figure 12. The slopes of the profile for $y > y' + a$, and $y < y' - a$ are the same, and correspond to $\delta F = -2 \frac{\mu \epsilon_0 a^2}{H}$, as derived differently in the main text, see equation (28). Remarkably, this value, which corresponds to the force release on the top wall, is independent of the position of the plastic event.

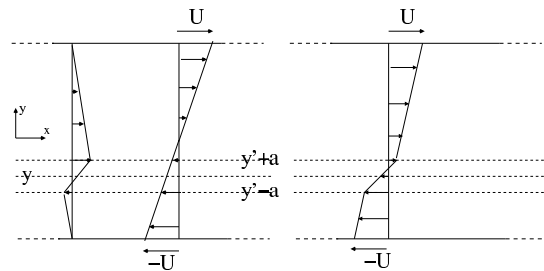


FIG. 12: Left : displacement profile due to the line of events at y' (obtained by summing the two profiles of Fig. 11 right), and schematic description of the elastic loading. Right: total response to the global forcing and a line of plastic event (a homogeneous fracture), obtained by summing the two profiles on the left.

We remark that the deformation profile obtained here is very similar to the one obtained by Kabla and Debrégeas in their explicit simulation of a shear foam [16] (which in their case was the line average consequences of a single local event, equivalent to the present local consequence of a line of events according to the argument below (A3)).

As a follow-up along the same picture, the cumulative displacement after loading plus a continuous line of plastic events is represented on the right of Figure 12 : the total shear in the system is then the homogeneous shear due to the forcing minus the shear release due to the plastic events.

APPENDIX B: STRESS FIELD INDUCED BY A PLASTIC DEFORMATION IN A FINITE MEDIUM

In this appendix we provide the explicit derivation of the stress field change due to a plastic activity in a finite system, follow the strategy outlined in subsection IVB.3. The aim is to obtain the response of the system depicted on figure 9 to a strain solicitation $\epsilon^{pl}(x, y)$ with "stick" boundary conditions on the wall similar to 20. For this calculation we choose to take the origin of the y axis on the bottom wall so that the walls (and thus the boundary conditions) are at $y = 0$ and $y = H$.

a. Geometry of the auxiliary system- To solve this problem, an auxiliary system with no walls is con-

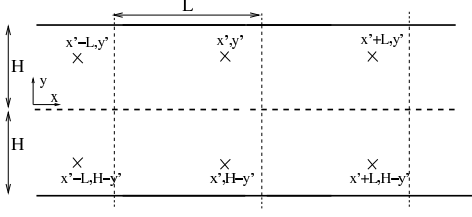


FIG. 13: Auxiliary system corresponding to the real system of figure 9: it is periodic in both direction and symmetric in the y direction. The driving plastic strain field ϵ^{pl*} is anti-symmetric.

structed. Its geometry is that of the original system, symmetrized with respect to $y = 0$, and periodized along y . The new system has thus a period L in the x direction, and a period $2H$ in the y direction, see Fig. 13. Fields in this new system are described by stars. The symmetry with respect to the plane $y = 0$ is made in such a way that the plastic strain is antisymmetric $\epsilon^{pl*}(x, -y) = -\epsilon^{pl*}(x, y)$, which is equivalent in the force dipole representations to having the force fields in the lower half to be the symmetric of that in the upper part $\mathbf{F}^*(x, y) = \mathbf{F}^*(x, -y)$. The symmetry and periodicity of the problem ensures that the displacement field \mathbf{u}^* generated by this plastic strain satisfies verify by symmetry and periodicity :

$$u_y^*(x, 0) = 0; u_y^*(x, H) = 0 \quad (\text{B1})$$

b. Response to a plastic event- This new elastic system is submitted to a plastic strain $\epsilon^{pl*}(x, y) = \epsilon^{pl}(x, y)$ if $y > 0$, and $\epsilon^{pl*}(x, y) = -\epsilon^{pl}(x, -y)$ if $y < 0$. For reasons explained in the text (section IVB.3), a force field f_x^* is added at the location of the walls in the real system, to cancel the displacements $u_x(x, 0)$ and $u_x(x, H)$ created by the plastic strains.

$$f_x^*(x, y) = f_0^*(x)\delta(y) + f_H^*(x)\delta(y - H) \quad (\text{B2})$$

This "no displacement on planes $y = 0$ and $y = H$ " condition is implemented in reciprocal space. We introduce notations for the Fourier series:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(x, y) &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi m x}{L}} e^{i\frac{2\pi n y}{2H}} \hat{\mathbf{u}}^*(m, n) \\ \hat{\mathbf{u}}^*(m, n) &= \frac{1}{2HL} \int dx dy \mathbf{u}^*(x, y) e^{-i\frac{2\pi m x}{L}} e^{-i\frac{2\pi n y}{2H}} \\ p_m &= \frac{2\pi m}{L} ; q_n = \frac{2\pi n}{2H}; q^2 = p_m^2 + q_n^2 \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

From our calculations for an infinite medium in section III, it is logical to write the total displacement using propagators for plastic events and the Oseen propagator for simple forces:

$$\hat{\mathbf{u}}^*(m, n) = \hat{\mathbf{P}}^\infty(m, n)\hat{\epsilon}^{pl*}(m, n) + \hat{\mathbf{O}}(m, n)\hat{f}_x(m, n) \quad (\text{B4})$$

The equations for \mathbf{P}^∞ and the Oseen tensor \mathbf{O} in the present representation (Fourier series) are formally exactly similar to those obtained in (9) and (14) in terms of Fourier transforms (with $q_x \rightarrow p_m$ and $q_y \rightarrow q_n$).

The condition $u^*(x, 0) = 0; u^*(x, H) = 0$ allows to compute $\hat{f}_x^*(m, n)$.

$$\begin{aligned} \hat{f}_x^*(m, n) &= \frac{\sum_1 \frac{2i}{q^4} p_n' (q_m^2 - p_n'^2) \hat{\epsilon}^{pl*}(m, n')}{\sum_1 \frac{p_n'^2}{\mu q^4}}, \\ &\text{for odd } n \\ \hat{f}_x^*(m, n) &= \frac{\sum_2 \frac{2i}{q^4} p_n' (q_m^2 - p_n'^2) \hat{\epsilon}^{pl*}(m, n')}{\sum_2 \frac{p_n'^2}{\mu q^4}}, \\ &\text{for even } n \text{ and } m \neq 0 \\ \hat{f}_x^*(0, n) &= 0 \text{ for even } n \end{aligned}$$

\sum_1 describes the sum over odd values of n' , and \sum_2 the sum over even values of n' .

The shear stress in this geometry can then be derived from the displacement field:

$$\hat{\sigma}^*(m, n) = 2\mu \left(\frac{1}{2} (ip_m \hat{u}_y^*(m, n) + iq_n \hat{u}_x^*(m, n)) - \hat{\epsilon}^{pl*}(m, n) \right) \quad (\text{B5})$$

For symmetry reasons, $\hat{\sigma}^*(0, 0) = 0$.

c. Back to the real system - The displacement field $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ that we have constructed and computed satisfies the elasticity equations for $H > y > 0$ with the plastic strain $\epsilon^{pl}(x, y)$ as only source in that area, and verifies the boundary conditions $u^*(x, 0) = 0$ and $u^*(x, H) = 0$. It is therefore the solution to our initial problem for the real system: for $H > y > 0$, $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, and $\sigma^1(x, y) = \sigma^*(x, y)$. Hence, the expression of the stress as given in Equation (29).

Chapitre 5

Dynamique et couplage élastique des événements plastiques

Sommaire

5.1	Milieu élasto-plastique piloté par le cisaillement	72
5.2	Dynamique locale.	73
5.2.1	Nature de la relaxation plastique	73
5.2.2	Dynamique locale	75
5.3	Hétérogénéités spatiales : résolution numérique	77

Les chapitres 4 et 5 décrivent une modélisation élasto-plastique de l'écoulement de fluides à seuil à deux dimensions. Dans cette modélisation, l'écoulement résulte d'une organisation collective d'événements plastiques. Dans la première étape, présentée dans le chapitre précédent, nous avons défini un événement plastique seul et caractérisé la réponse élastique du milieu à un tel événement.

Dans la seconde étape, présentée dans ce chapitre, le milieu élasto-plastique est soumis à un taux de cisaillement global. La partie 5.1 décrit la réponse élastique de l'ensemble du milieu à un champ de déformation plastique et au forçage global. Puis, dans la partie 5.2, les choix possibles pour la dynamique locale de la plasticité sont discutés.

Enfin, l'écoulement dans le milieu est décrit par le couplage entre (i) la réponse élastique du milieu au taux de cisaillement global et à la plasticité et (ii) la dynamique locale de la plasticité. On propose alors dans la partie 5.3 un schéma de résolution numérique de cette dynamique complexe qui sera exploité dans le chapitre suivant.

5.1 Milieu élasto-plastique piloté par le cisaillement

On décrit un milieu élasto-plastique fini dans la géométrie suivante : le milieu est périodique dans la direction x , de période L et de taille H dans la direction z , comme représenté figure 5.1.

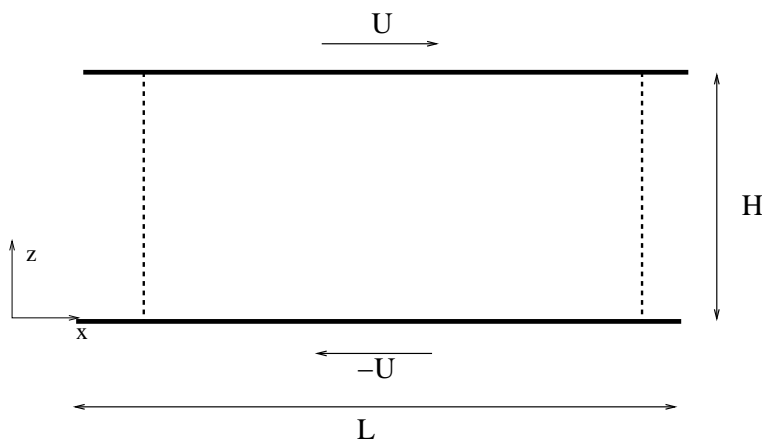


FIGURE 5.1 – Le milieu est périodique dans la direction x et forcé par le cisaillement $\dot{\Gamma} = \frac{2U}{H}$

Les variables locales du modèle sont le taux de cisaillement $\dot{\epsilon}(x, z, t)$ et la contrainte de cisaillement notée $\sigma(x, z, t)$. Le système est piloté par le cisaillement global $\dot{\Gamma}$. Le module élastique du milieu est noté μ , la taille de l'événement plastique a . Le comportement du milieu est décrit par le modèle élasto-plastique présenté au chapitre précédent 4, dont on rappelle les résultats utiles pour la suite.

Le champ de contrainte de cisaillement $\sigma(x, z)$ induit par une déformation plastique ϵ^{pl} est donné par :

$$\sigma(x, z) = 2\mu \int dx' dz' G^H(x - x', z, z') \epsilon^{pl}(x', z') \quad (5.1)$$

G^H tel qu'il a été défini au chapitre précédent contient entièrement l'effet d'un événement plastique, c'est-à-dire la somme de la perturbation élastique due à l'événement plastique et de la relaxation plastique locale. On ne rappelle pas ici l'expression analytique de G^H qui est déduite de l'expression 4.4.

La nature élasto-plastique du milieu ainsi modélisé implique que : (i) la perturbation du champ de contrainte due à n événements plastiques est la somme des perturbations du champ de contrainte dues à chacun des n événements plastiques, (ii) le taux de cisaillement imposé par les parois est imposé de façon homogène dans le milieu.

Dans cette première approche, les termes de convection sont négligés. Cette approximation sera discuté dans la conclusion 6.5 du chapitre suivant.

Ces diverses remarques nous permettent d'écrire l'évolution de la contrainte, elle est la réponse élastique au forçage global $\dot{\Gamma}$ et au cisaillement plastique :

$$\partial_t \sigma(x, z, t) = \mu \dot{\Gamma} + \mu \int dx' dz' G^H(x - x', z, z') \dot{\epsilon}^{pl}(x', z', t) \quad (5.2)$$

Pour compléter le modèle, il reste à spécifier la dynamique de la déformation plastique $\dot{\epsilon}^{pl}$ ce que nous faisons dans la section suivante.

5.2 Dynamique locale.

Dans les systèmes réels les événements plastiques semblent abrupts et déclenchés de façon non linéaire, comme le donne Princen [15] dans sa description des événements $T1$ se produisant dans les mousses. Il existe donc beaucoup de possibilités de modéliser les réarrangements plastiques et peu de guides génériques. Ici, avec une dynamique athermale, nous avons choisi d'introduire explicitement un seuil de contrainte microscopique σ_y . On introduit ainsi un comportement non linéaire au niveau microscopique. D'autres façons d'insérer des non linéarités dans la dynamique locale seront discutées dans la conclusion 6.5 du chapitre suivant.

5.2.1 Nature de la relaxation plastique

Deux possibilités :

La relaxation plastique se déclenche lorsque la contrainte seuil $\sigma_y = 2\mu\epsilon_y^{el}$ (où de manière équivalente un cisaillement élastique maximal) est atteinte. Nous avons été amenés à distinguer deux types de relaxations plastiques différentes. Nous n'avons pas trouvé ce

genre de distinction dans la littérature, bien qu'elle conduise à des comportements collectifs différents comme nous le verrons dans le chapitre 6. C'est pourquoi, la nature de ces deux types de relaxation plastique est détaillée ici.

type A : la relaxation de la contrainte correspond à un cisaillement plastique d'amplitude fixée ϵ_0 . Dans ce cas, la variation de la contrainte locale, due à un tel événement plastique s'écrit (avec la notation 5.1) :

$$\delta\sigma(z') = 2\mu G^H(0, z', z')\epsilon_0 \quad (5.3)$$

La figure 5.2(à gauche) représente la quantité de contrainte $\delta\sigma(z')$ relaxée en fonction de la position de l'événement dans le milieu (cette quantité a été évaluée numériquement avec le procédé de calcul de G^H détaillé en annexe A.2). (i) La figure de gauche montre qu'un événement qui se produit au voisinage d'une paroi induit une relaxation locale de la contrainte plus importante qu'un événement qui se produit dans le volume. (ii) la figure de droite montre que la quantité de contrainte relaxée ne dépend que la distance à la paroi et très peu de la taille du système.

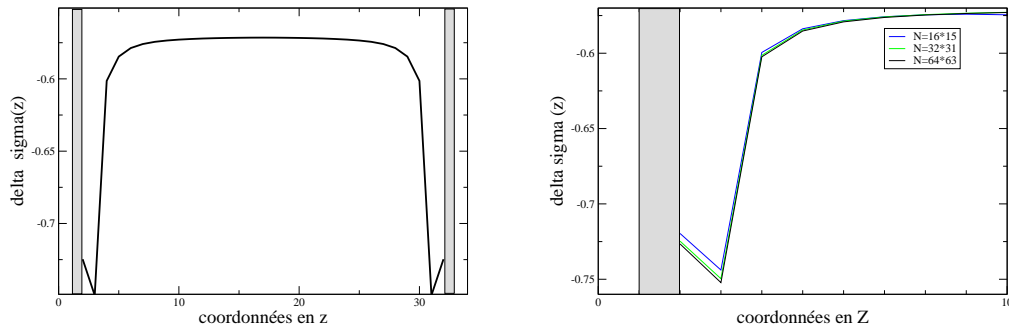


FIGURE 5.2 – à gauche Variation de contrainte $\delta\sigma = 2\mu\epsilon_0 G^H(0, z, z)$, avec $\mu = 1$, $\epsilon_0 = 0.5$. Les parois sont en $z = 1$, $z = 32$. Dans un schéma de type A, la relaxation de contrainte est plus importante au voisinage des parois. à droite Même quantité représentée au voisinage d'une paroi pour différentes tailles de système.

On comprend cette variation de la contrainte relaxée de la façon suivante : le déplacement à la paroi est nul. Donc, en imposant un cisaillement (et donc un déplacement) au voisinage de la paroi d'amplitude ϵ_0 , on impose des gradients de déplacement d'autant plus importants qu'on est proche de la paroi, et ainsi une variation de contrainte plus importante au voisinage de la paroi.

Par ailleurs, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, la variation de la contrainte moyennée sur le volume due à un événement plastique d'amplitude fixée ϵ_0 , ne dépend pas de la position de l'événement dans le milieu, elle est donnée par l'expression 4.2.

type B : l'amplitude de la relaxation de contrainte locale est fixée à $\delta\sigma_0$, ($\delta\sigma_0 < 0$), c'est-à-dire que l'amplitude de l'événement plastique doit être :

$$\epsilon^{pl}(z') = \frac{\delta\sigma_0}{2\mu G^H(0, z', z')} \quad (5.4)$$

Tous les blocs relaxent de la même quantité de contrainte indépendamment de leur position, mais le cisaillement plastique $\epsilon^{pl}(z')$ dépend de la position de l'événement dans le milieu et est inversement proportionnel à $G^H(0, z', z')$. $G^H(0, z', z')$ croît avec la distance aux parois, comme le montre la figure 5.2, donc le cisaillement plastique $\epsilon^{pl}(z')$ croît avec la distance aux parois.

Nous avons vu au chapitre précédent que la variation de la contrainte moyennée sur le volume due à un événement est proportionnelle à l'amplitude en déformation de l'événement plastique, donc dans le cas d'une dynamique de type *B*, la contrainte moyenne relaxée par un événement plastique dépend de la position de l'événement dans le milieu, et croît avec la distance aux parois. Un événement qui se produit dans le volume induit une relaxation de la contrainte moyenne plus importante qu'un événement qui se produit au voisinage de la paroi.

Conclusion

Avec une relaxation plastique de type A, l'écoulement plastique est plus "efficace" au voisinage des parois. Alors qu'avec une relaxation plastique de type B, l'écoulement plastique est plus "efficace" dans le volume. On s'attend donc à des profils d'écoulement très différents, dans le cas où ces profils sont hétérogènes. Le choix d'un type de relaxation ou de l'autre est dépendant des propriétés microscopiques du milieu sous écoulement.

Dans la suite, on choisit de détailler plus particulièrement la dynamique associée à la relaxation plastique de type A. Le modèle est donc présenté pour cette dynamique. Ponctuellement, afin de comparer ces deux types de plasticité, on étudiera aussi la dynamique associée à la relaxation plastique de type B. Les équations d'évolution pour une dynamique de type B, sont alors obtenues à partir des équations d'évolution pour une dynamique de type A, en remplaçant $G^H(x - x', z, z')$ par $\frac{G^H(x - x', z, z')}{G^H(0, z', z')}$.

5.2.2 Dynamique locale

On introduit la non linéarité du comportement microscopique grâce à une loi locale avec un seuil explicite de contrainte noté σ_y . L'évolution de la contrainte locale, dans une représentation inspirée des réarrangements *T1* tels que Princen [15] les décrit, est schématisée sur le graphe 5.3 : le milieu se déforme élastiquement jusqu'à ce que, en un point du système, le seuil de contrainte microscopique soit franchi. Le milieu est localement métastable. Il se produit un événement plastique qui relaxe la contrainte locale.

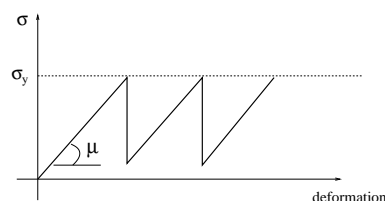


FIGURE 5.3 – Représentation schématisée de l'évolution de la contrainte locale en un point donné du milieu élasto-plastique. La déformation est élastique jusqu'à atteindre une contrainte seuil σ_y . Puis un "événement plastique" s'enclenche, et permet la relaxation de la contrainte locale.

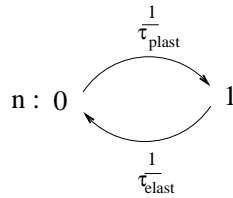
Ce schéma montre qu'il existe au moins deux états possibles à la même contrainte, on ne peut donc décrire cette dynamique avec pour seuls paramètres la contrainte et la déformation locale. Nous avons fait le choix d'introduire une variable $n(x', z')$, une "fonction de phase" telle que :

$$\begin{aligned} n(x', z') &= 1 \text{ si le comportement de l'élément à la position } x', z' \text{ est plastique (et élastique),} \\ n(x', z') &= 0 \text{ si le comportement de l'élément à la position } x', z' \text{ est purement élastique.} \end{aligned}$$

La dynamique est décrite par la contrainte seuil σ_y et trois temps caractéristiques :

- le temps nécessaire au basculement en phase plastique τ_{plast} au delà de σ_y ,
- le temps caractéristique de relaxation mécanique de la contrainte dans la phase plastique τ ,
- et le temps typique de retour à la phase élastique τ_{elast} .

La dépendance en contrainte de ces trois temps peut être plus ou moins sophistiquée. L'évolution de n est donnée par le schéma suivant :



Le saut de la phase élastique à la phase plastique se fait avec un taux τ_{plast}^{-1} qui dépend de la contrainte. Le saut de la phase plastique à la phase élastique se fait avec un taux τ_{elast}^{-1} .

La description de l'évolution de n complète notre modèle, que nous résumons ici : **la dynamique du milieu élasto plastique soumis à un taux de cisaillement global $\dot{\Gamma}$ est décrite par les équations suivantes :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}^{pl}(x', z', t) = \frac{1}{2\mu\tau} n(x', z', t) \sigma(x', y', t) \\ \partial_t \sigma(x, z, t) = \mu \dot{\Gamma} + 2\mu \iint dx' dz' G^H(x - x', z, z') \dot{\epsilon}^{pl}(x', z', t) \\ n(x, z, t) : 0 \rightleftharpoons 1 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

où la dernière ligne rappelle la dynamique de la variable discrète $n(x, z, t)$ développée précédemment.

Pour résoudre ce système, on considère que la contrainte seuil est homogène dans le milieu et on propose des expressions très simples des temps τ_{plast} , et τ_{elast} :

$$\tau_{elast}(\sigma) = \tau_{elast}, \quad \text{quelle que soit la contrainte locale } \sigma \quad (5.6)$$

$$\tau_{plast}(\sigma) = \begin{cases} \tau_{plast} & \text{si } \sigma > \sigma_y \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.7)$$

Bien sûr, le nombre de paramètres peut être limité en prenant simplement $\tau = \tau_{plast} = \tau_{elast}$.

La dynamique que nous venons de décrire inspire plusieurs remarques.

- Le modèle de Princen décrit sur la figure 5.3, apparaît comme un cas limite de cette dynamique pour $\tau\dot{\gamma} \ll 1$, pour lequel la contrainte maximale est très proche de la contrainte seuil.

- Cependant, ce schéma était trop simple pour décrire la réponse à des forts taux de cisaillement. Dans la dynamique que nous proposons, le temps nécessaire au basculement en phase plastique, τ_{plast} , peut être vu comme la durée d'un état métastable, entre le moment où la contrainte local franchit σ_y et le déclenchement de l'événement élastique, la contrainte locale augmente (linéairement avec le taux de cisaillement) au delà de la contrainte seuil.

- Cette dynamique introduit trois temps : τ_{plast} , la durée de la phase élastique métastable, τ_{elast} , la durée de la phase plastique, et τ le temps caractéristique de la relaxation de contrainte. Nous avons dans une première analyse, fixé la valeur de ces trois temps et résolu ainsi le système déterministe 5.5. Dans ce cas, le système est piégé dans des solutions périodiques déterminées par les conditions initiales. Dans la suite, et comme il sera détaillé dans la description du schéma numérique (partie 5.3), nous avons choisi de fixer les durées de la phase métastable et de la phase plastique de manière stochastique : τ_{plast}^{-1} et τ_{elast}^{-1} sont des taux de passage en phase de la phase élastique à la phase plastique, et de phase plastique à la phase élastique. Le désordre ainsi introduit suffit à sortir des solutions périodiques.

- Enfin, on peut remarquer à ce stade que les équations du système 5.5 présentent des similitudes avec le système d'équations 2.2 proposé dans le chapitre 2 et rappelé ici :

$$\begin{cases} \partial_t \sigma(t) &= -a(z, t)\sigma(t) + G_o \dot{\gamma}(z, t) \\ \partial_t a(z, t) &= -f(a(z, t)) + g(a(z, t), \sigma(t), \dot{\gamma}(z, t)) + D\partial_{zz}a(z, t) \end{cases} \quad (5.8)$$

On pourrait en particulier comparer ce système d'équations à un système d'équations de type 5.5, en introduisant une phase plastique n continue, et associer la fluidité a , et la phase plastique. Dans ce cas une différence essentielle entre les deux systèmes réside dans le terme non local. Dans le système d'équations 5.5, le terme non local porte sur la contrainte et est de longue portée, dans le système 5.8 le terme non local porte sur la fluidité et il est diffusif. Ces similitudes et différences seront discutées dans la conclusion au chapitre 7.

5.3 Hétérogénéités spatiales : résolution numérique

Pourquoi ?

La difficulté de la résolution analytique du système 5.5 vient de ce qu'il couple la dynamique locale, dynamique à 'seuil' non linéaire qui doit être exprimée dans l'espace réel, et l'expression très lourde de la propagation élastique dans l'espace réel, alors que cette expression est plus simple dans l'espace réciproque où malheureusement la dynamique locale devient inextricable. On a donc opté pour une résolution numérique.

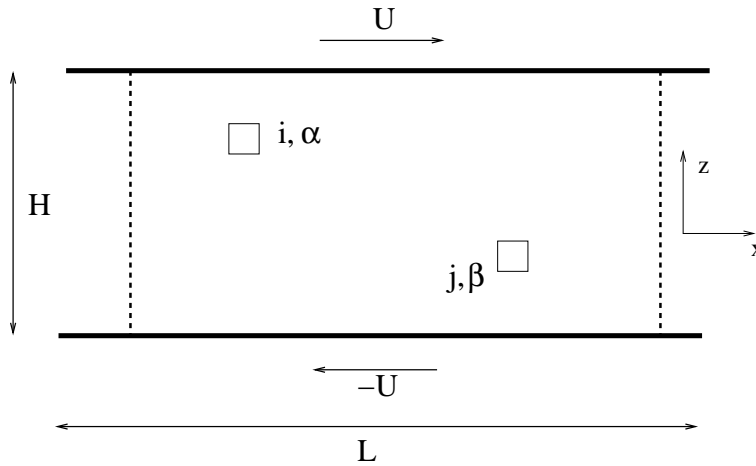


FIGURE 5.4 – Un ensemble de $N_x \times N_z$ blocs piloté par un cisaillement macroscopique $\dot{\Gamma} = \frac{2U}{H}$.

Schéma numérique

On discrétise le milieu continu comme dans le chapitre 3. Le milieu est constitué par un ensemble de blocs de taille a repérés par une lettre latine i dans la direction z , et une lettre grecque dans la direction x . Pour plus de clarté, on rappelle la géométrie du problème sur la figure 5.3. On note $\mathcal{P}_{|\alpha-\beta|}^{ij}$ le *propagateur* discret tel qu'une déformation plastique d'amplitude ϵ_0 en $j\beta$ induit une variation de contrainte $\mathcal{P}_{|\alpha-\beta|}^{ij}\epsilon_0$ en $i\alpha$.

La dynamique du bloc $i\alpha$ est décrite par sa contrainte de cisaillement $\sigma_{i\alpha}$, et sa phase $n_{i\alpha}$. L'évolution de la contrainte du bloc $i\alpha$ s'écrit :

$$\partial_t \sigma_{i\alpha} = \mu \dot{\Gamma} + \sum_{j=1}^{N_z} \sum_{\beta=1}^{N_x} \mathcal{P}_{|\alpha-\beta|}^{ij} \dot{\epsilon}_{j\beta}^{pl}$$

avec $\dot{\epsilon}_{j\beta}^{pl} = \frac{n_{j\beta} \sigma_{j\beta}}{2\mu\tau}$

Dans la partie suivante, nous décrivons l'implémentation de la dynamique de la phase plastique $n_{j\beta}$ dans un schéma numérique.

Dynamique locale.

On a implémenté une version stochastique de la dynamique à trois temps développée précédemment. La phase $n_{i\alpha}$ vaut 1 lorsque le bloc est élasto-plastique, 0 lorsqu'il est élastique.

On note δt le pas de temps numérique. Les *paramètres du système* sont : τ , le temps de relaxation en phase plastique, τ_{elast} le temps de transition plastique vers élastique, τ_{plast} le temps de transition élastique vers plastique lorsque le seuil de contrainte σ_y est atteint. La contrainte seuil σ_y est prise identique pour tous les blocs. A t donné, on tire un nombre aléatoire $0 < w < 1$. Pour tous les $i\alpha$, la phase est changée dans les cas suivants :

- si $n_{i\alpha}(t) = 1$ et $w > \frac{\delta t}{\tau_{elast}}$, le bloc (qui était plastique) devient élastique, i.e. $n_{i\alpha}(t + \delta t) = 0$,

- si $n_{i\alpha}(t) = 0$, $\sigma_{i\alpha}(t) > \sigma_y$ et $w > \frac{\delta t}{\tau_{plast}}$, le bloc (qui était élastique) devient plastique, i.e. $n_{i\alpha}(t + \delta t) = 1$.

Méthode pseudo-spectrale

Echec des simulations dans l'espace réel Dans une première approche, les équations du système 5.5 ont été incrémentées dans l'espace réel. Pour cela on a utilisé l'approximation au premier ordre du propagateur dans un milieu semi-périodique, calculée dans le cas continu et dans l'espace réel $\tilde{G}^H(x - x', z, z')$, dont l'expression a été calculée à partir des relations (23-27) de l'article inséré à la fin du chapitre 4. Puis, diverses discrétisations plus ou moins sophistiquées ont été implémentées. On propose ici deux exemples testés :

$$\mathcal{P}_{\alpha-\beta}^{ij} = \tilde{G}^H((\alpha - \beta)a, (i - 1/2)a, (j - 1/2)a) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{ou bien } \mathcal{P}_{\alpha-\beta}^{ij} &= \frac{1}{4}(\tilde{G}^H((\alpha - \beta)a, (i - 1)a, (j - 1)a) + \tilde{G}^H((\alpha - \beta)a, (i - 1)a, ja) \\ &+ \tilde{G}^H((\alpha - \beta)a, ia, (j - 1)a) + \tilde{G}^H((\alpha - \beta)a, ia, ja) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Tous les types de discrétisation à partir du propagateur dans l'espace réel ont conduit à des simulations numériques divergeant au bout d'un certain nombre de pas de temps. On a pu repousser ce nombre en choisissant des discrétisations plus complexes (du type de 5.10), mais jamais le supprimer. Nous sommes arrivés à la conclusion qu'avec ce type de discrétisations naïves, les conditions d'équilibre mécanique ne sont pas conservées suffisamment précisément, et elles sont cruciales pour maintenir la stabilité numérique du système.

Evolution des contraintes dans l'espace de Fourier Les simulations ont été réalisées avec une méthode dite "pseudo-spectrale" qu'on résume en détaillant le schéma numérique utilisé. A chaque pas de temps,

- dans l'espace réel, on réactualise les phases de tous les blocs avec la dynamique stochastique pour la phase n décrite précédemment (paragraphe 5.3), en fonction des contraintes exprimées dans l'espace réel,
- on exprime, les phases et les contraintes dans l'espace de Fourier,
- on incrémente les contraintes dans l'espace de Fourier,
- on exprime les phases et les contraintes dans l'espace réel.

Ainsi, la mécanique n'est exprimée que dans l'espace de Fourier, où l'on maîtrise mieux les effets de la discrétisation, ce qui permet de garantir plus intrinsèquement que les états successivement générés sont bien des états à l'équilibre.

La discrétisation du propagateur \mathcal{P} dans l'espace de Fourier est détaillée en annexe.

Perspectives A ce stade, nous disposons d'un modèle élasto-plastique prêt à l'implémentation numérique. Dans le chapitre suivant, cette dynamique est implémentée dans deux géométries : une géométrie bipériodique (sans parois), et une géométrie périodique en x , et avec des parois en z .

Chapitre 6

Résultats numériques

Sommaire

6.1	Paramètres généraux	82
6.2	Milieu bipériodique : résultats numériques	85
6.2.1	Mesures macroscopiques	86
6.2.2	Chutes de la contrainte moyenne spatiale	90
6.2.3	Organisation spatiale	92
6.3	Milieu bipériodique : interprétation	97
6.3.1	Forts taux de cisaillements : régime "homogène"	97
6.3.2	Petits cisaillements : régime "saturé"	98
6.3.3	Cisaillements intermédiaires : organisation spatio-temporelle complexe	99
6.4	Milieu fini : résultats numériques	101
6.4.1	Mesures macroscopiques	101
6.4.2	Organisation spatiale	102
6.4.3	Relaxation plastique de type B	108
6.5	Milieu fini : interprétation	109
6.5.1	Régime transitoire	109
6.5.2	Régime intermittent	109
6.5.3	Rôle de la dynamique	110
6.6	Conclusion	110

Dans ce chapitre, on présente les résultats numériques et leurs interprétations obtenus avec le modèle décrit au chapitre précédent dans deux géométries : une géométrie périodique dans les deux directions, et une géométrie finie, c'est-à-dire bornée par des parois dans une direction, et périodique dans l'autre.

Dans ces deux géométries, on observe pour une gamme de taux de cisaillement intermédiaires une organisation spatiotemporelle qui dépend du taux de cisaillement imposé. Dans le cas du milieu avec parois, cela se traduit par un écoulement plus important au niveau des parois que dans le reste du volume.

Pour chaque géométrie, on présente d'abord les résultats numériques, puis on propose une première interprétation de ces résultats, en soulignant ce que nous n'avons pas eu le temps d'approfondir.

6.1 Paramètres généraux

Deux géométries Tous les résultats qui suivent ont été calculés dans deux géométries bidimensionnelles différentes. D'une part, la géométrie bipériodique, c'est-à-dire, périodique et symétrique dans les deux directions, représentée figure 6.1-1), et d'autre part une géométrie semi périodique dans une direction et limitée par deux parois dans l'autre direction, représentée figure 6.1-2).

Les réseaux sont composés de $N = N_x \times N_z$ mailles de taille unitaire. Dans le cas bipériodique, le réseau est carré, c'est-à-dire $N_x = N_z$, alors que dans le cas avec parois, pour des raisons techniques $N_z = N_x - 1$.

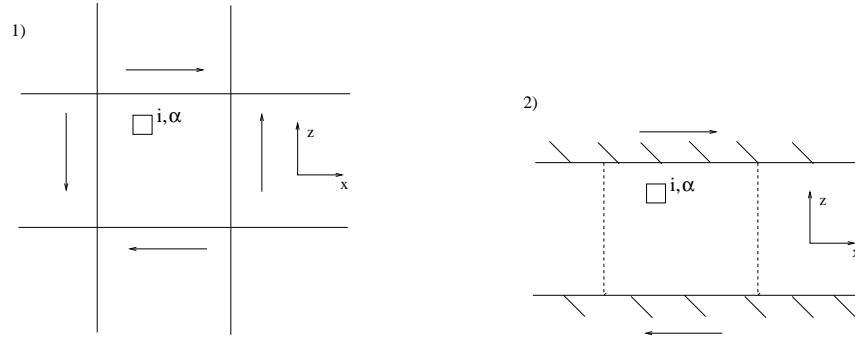


FIGURE 6.1 – 1) Le milieu est bipériodique composé de N blocs. Les flèches symbolisent le cisaillement appliqué au système. Les lettres grecques et latines sont associées respectivement aux abscisses et aux ordonnées. Chaque noeud du réseau représente un bloc caractérisé par sa contrainte $\sigma_{i\alpha}$, et son état élastique ou plastique noté $n_{i\alpha}$. 2) Le milieu est périodique dans la direction x , et fini par des parois dans la direction z .

Equations d'évolution Dans le chapitre précédent, deux types de relaxation plastique ont été distingués. Dans le type A , l'amplitude de l'événement plastique est fixée par la déformation plastique, dans le type B , elle est fixée par la quantité de contrainte relaxée.

Dans la géométrie bipériodique, tous les résultats présentés ont été simulés dans le cas d'une relaxation plastique de nature A . Différents tests réalisés dans le cas d'une relaxation plastique de nature B montrent des comportements qualitatifs similaires. On ne détaille donc pas ce cas là.

En revanche, dans la géométrie semi-finie, la nature de la relaxation plastique joue un rôle sur l'organisation spatiale du système. La plupart des résultats présentés sont calculés avec le type A , mais quelques exemples montrent la différence avec le type B .

On rappelle les équations d'évolution des variables locales $\sigma_{i\alpha}$ et $n_{i\alpha}$ dans ces géométries discrètes avec les notations du chapitre 5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \sigma_{i\alpha}(t) = \mu \dot{\Gamma} + \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{N_z} \sum_{\beta=1}^{N_x} \mathcal{P}_{|\alpha-\beta|}^{ij} n_{j\beta}(t) \sigma_{j\beta}(t) \\ n_{i\alpha}(t) : 0 \rightleftharpoons 1 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où le propagateur $\mathcal{P}_{|\alpha-\beta|}^{ij}$ dépend de la géométrie dans laquelle on se place et de la nature A ou B de la relaxation plastique. Plus précisément, les changements de phases sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{i\alpha} : 1 \rightarrow 0 \quad \text{avec un taux } \tau_{elast}^{-1} \\ n_{i\alpha} : 0 \rightarrow 1 \quad \text{avec un taux } \tau_{plast}^{-1}, \text{ si } \begin{array}{l} \sigma_{i\alpha} > \sigma_y, \\ \text{jamais si } \sigma_{i\alpha} < \sigma_y. \end{array} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

On remarque au passage, que dans le cas d'une relaxation plastique de nature A ,

l'équation d'évolution de la contrainte moyennée sur le volume se simplifie grâce à l'équation A.22 qui implique :

$$\sum_{i=1}^{N_z} \sum_{\kappa=0}^{N_x-1} \mathcal{P}_\kappa^{ij} = -1$$

La dynamique de la contrainte moyenne sur le volume s'écrit donc :

$$\partial_t \sigma = \mu \dot{\Gamma} - \frac{1}{N\tau} \sum_{j=1}^{N_z} \sum_{\beta=1}^{N_x} n_{j\beta} \sigma_{j\beta} \quad (6.3)$$

Paramètres des simulations Les paramètres suivants ont été fixés pour les deux géométries pour toutes les simulations et n'ont pas été modifiés dans le cadre de cette étude :

- la contrainte seuil microscopique est uniforme dans le milieu : $\sigma_y = 1$,
- le temps mécanique de relaxation de la contrainte en phase plastique : $\tau = 1$,
- le temps typique de passage en phase élastique $\tau_{elast} = 1$,
- le temps typique de passage en phase plastique pour $\sigma < \sigma_y$: $\tau_{plast} = 1$

Cela fixe l'échelle de temps et de contrainte.

Dans la suite, on s'intéresse à différentes tailles de système $N = (2 \times 2)(4 \times 4), (8 \times 8), (16 \times 16), (32 \times 32)$ dans la géométrie bipériodique, et les tailles correspondantes dans la géométrie finie. Pour des raisons numériques, on ne peut pas réaliser des simulations avec des systèmes carrés de taille intermédiaires. Il est difficile de réaliser des simulations avec des systèmes plus grands à cause de temps de calcul très longs. Les tailles étudiées permettront néanmoins de dégager certains effets de la taille du système.

Le taux de cisaillement appliqué au système $\dot{\Gamma}$ varie dans un intervalle $[10^{-4}, 10]$.

Le pas de temps numérique a dû être adapté en fonction de la taille du système et du taux de cisaillement. Dans le cas de petits systèmes $N < 16 \times 16$, pour tous cisaillement le pas de temps numérique $dt = 10^{-2}$ est suffisant, c'est-à-dire que toutes les grandeurs mesurées sont insensibles à une diminution du pas de temps. Pour des systèmes plus grands $N > 16 \times 16$ et à grand cisaillement $\dot{\Gamma} > 1$, il faut raffiner le pas de temps $dt = 10^{-3}$, voire $dt = 10^{-4}$ pour les grands systèmes $N = 32 \times 32$.

Observations De manière générale, l'état stationnaire est atteint après des calculs d'une durée de $t' \approx 10/\dot{\Gamma}$, pour les cisaillements $\dot{\Gamma} < 1$ et d'une durée de $t' \approx 100/\dot{\Gamma}$ pour les cisaillements $\dot{\Gamma} > 1$.

On peut alors définir une *moyenne temporelle* d'une quantité mesurée. Elle est moyennée sur une durée $T = 10/\dot{\Gamma}$, pour $t > t'$. Par exemple la moyenne temporelle de la contrainte locale $\sigma_{i\alpha}$ est notée :

$$\langle \sigma_{i\alpha} \rangle_{t=} = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} \sigma_{i\alpha}(t) dt$$

On introduit aussi la notation suivante pour la *moyenne spatiale* de la contrainte à un instant t donné :

$$[\sigma](t) = \frac{1}{N} \sum_i \sum_\alpha \sigma_{i\alpha}(t)$$

Ainsi la moyenne spatio-temporelle du milieu à l'état stationnaire se note :

$$\sigma = \langle [\sigma] \rangle_t$$

Pour caractériser les comportements spatio-temporels complexes observés, ces moyennes sont complétées l'observation de deux quantités. L'*écart type spatial* de la contrainte est défini par :

$$\mathcal{E}_s = \sqrt{\langle [\sigma^2](t) - [\sigma]^2(t) \rangle_t} \quad (6.4)$$

L'*écart type temporel* de la contrainte moyennée sur le volume est défini par :

$$\mathcal{E}_t = \sqrt{\langle [\sigma]^2(t) \rangle_t - \sigma^2} \quad (6.5)$$

6.2 Milieu bipériodique : résultats numériques

Par anticipation et pour guider le lecteur, on expose brièvement les principales caractéristiques qui apparaissent dans la géométrie bipériodique. Elles sont déduites des graphes présentés dans la suite de cette section.

- 1 Lorsque le cisaillement devient très petit, la contrainte moyenne tend vers une contrainte seuil macroscopique (inférieure à la contrainte seuil microscopique) $\sigma_M \approx 0.75 < \sigma_y$, indépendante de la taille du système.
- 2 A fort cisaillement $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c \approx 0.5$, le système présente un régime identifié comme "homogène", (au sens qui sera défini dans la section 6.3)
- 3 A faible cisaillement, on identifie un régime "saturé" (au sens qui sera défini dans la section 6.3). On note de manière générique le taux de cisaillement $\dot{\Gamma}_s(N)$, qui détermine la limite du régime saturé $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_s(N)$. En fait, pour les différentes quantités mesurées, on voit toujours apparaître ce régime saturé, mais son seuil d'apparition varie légèrement en fonction de la quantité mesuré. On le notera par des indices $\dot{\Gamma}_{s1}, \dot{\Gamma}_{s2} \dots$ car il s'agit toujours du même régime. Pour toutes ces quantités $\dot{\Gamma}_s$ est une fonction décroissante de N , qui semble tendre vers 0 lorsque N tend vers l'infini.
- 4 Une organisation spatio temporelle complexe existe dans le régime intermédiaire, $\dot{\Gamma}_s(N) < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$. L'écoulement est intermittent et le profil d'écoulement moyen est différent du profil typique.
- 5 La plasticité se propage statistiquement essentiellement suivant des lignes et des colonnes dans le régime intermédiaire.

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques. Nous proposerons une discussion de ces résultats dans un deuxième temps dans la partie 6.3.

6.2.1 Mesures macroscopiques

On s'intéresse dans cette partie à des mesures macroscopiques, c'est-à-dire moyennées spatialement.

La figure 6.2 représente l'évolution dans le temps de la contrainte $[\sigma](t)$ pour deux taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$ et $\dot{\Gamma} = 1$. A l'état initial, tous les blocs sont en phase élastique, et ont une contrainte nulle. Ainsi, dans un premier temps, la réponse du milieu au taux de cisaillement imposé est élastique et homogène. Cette phase se termine à la date $t = 1/\dot{\Gamma}$ où simultanément, la contrainte de chaque bloc atteint la contrainte seuil microscopique $\sigma_y = 1$. Après quelques $1/\dot{\Gamma}$, le système atteint un régime stationnaire. Pour les faibles taux de cisaillement, la contrainte moyenne est inférieure à la contrainte microscopique.

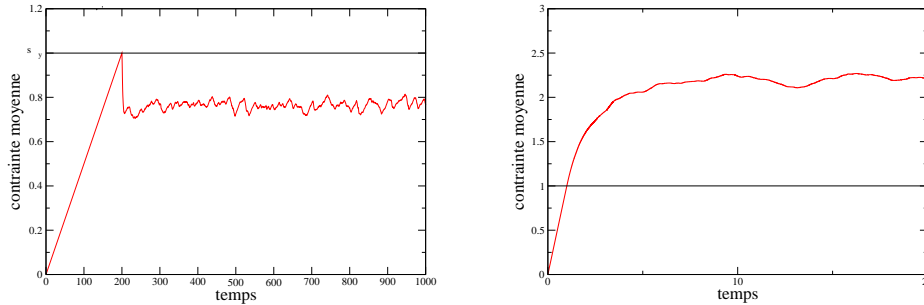


FIGURE 6.2 – Evolution de la contrainte moyennée spatialement pour deux taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$, sur le graphe de gauche et $\dot{\Gamma} = 1$ sur le graphe de droite. A l'état initial, la contrainte est nulle et tous les blocs sont élastiques.

La courbe d'écoulement 6.3, est obtenue ainsi : on impose un cisaillement et on mesure la contrainte moyenne $\langle \sigma \rangle_{i\alpha}$ sur une durée de $\frac{10}{\dot{\Gamma}}$ dans le régime stationnaire.

On voit apparaître un seuil macroscopique $\sigma_M \approx 0.75$ (au sens de contrainte limite quand $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$), et un régime linéaire $\sigma = 2\mu\dot{\Gamma}$ à fort taux de cisaillement. La courbe d'écoulement est très peu dépendante de la taille du système.

Dans les figures suivantes où les quantités représentées décrivent le comportement spatial ou temporel de la contrainte, on identifie trois régimes distincts en fonction du taux de cisaillement. Afin d'étudier la différence entre ces régimes, les quantités mesurées sont adimensionnées par la contrainte moyennée dans l'espace et le temps σ . On remarque donc avant de passer à la description de ces quantités adimensionnée que :

- un plateau dans le régime des faibles cisaillements implique que la quantité non adimensionnée est indépendante du taux de cisaillement. En effet, la contrainte moyenne σ est presque indépendante du taux de cisaillement dans ce régime,
- un plateau dans le régime des forts cisaillements implique que la quantité non adimensionnée varie linéairement avec le taux de cisaillement. En effet, la contrainte moyenne σ varie linéairement avec le taux de cisaillement dans ce régime.

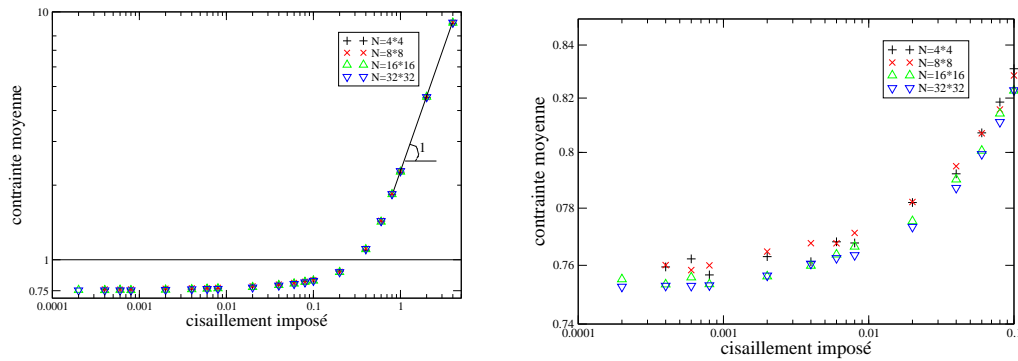


FIGURE 6.3 – **Courbe d'écoulement** : à gauche on impose un cisaillement macroscopique $\dot{\Gamma}$, et on calcule la contrainte moyenne σ du système pour différentes tailles de système $N = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32$. Le trait plein noir représente la contrainte seuil microscopique $\sigma_y = 1$. Lorsque $\dot{\Gamma} \ll 1$, la contrainte est une fonction linéaire du taux de cisaillement ($\sigma \rightarrow 2\mu\dot{\Gamma}$) (représentation log-log) à droite Agrandissement de la zone $[10^{-4} - 10^{-1}]$ (représentation log-lin)

La courbe 6.4 caractérise les **variations spatiales**, elle représente la quantité \mathcal{E}_s tel que définie par l'expression 6.4 adimensionnée par σ en fonction du taux de cisaillement.

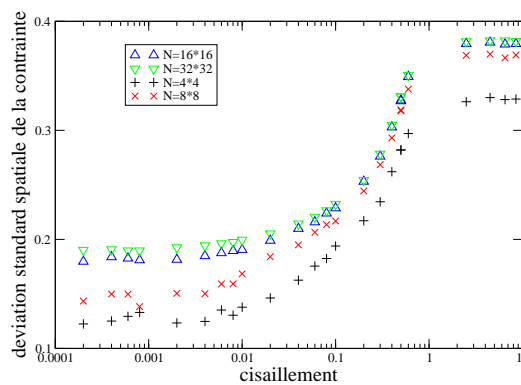


FIGURE 6.4 – **Ecart type spatial de la contrainte adimensionnée** : Pour différents cisaillements et différentes tailles de systèmes, à chaque instant on a calculé l'écart type spatial de la contrainte, puis moyenné la valeur obtenue dans le temps. Cette valeur a ensuite été adimensionnée par la contrainte moyenne (de la figure 6.3).

Cette figure met en évidence trois régimes :

- i) un régime "homogène" pour lequel cette valeur est indépendante de $\dot{\Gamma}$ pour $\dot{\Gamma} \lesssim 0.5$,
- ii) un régime saturé pour lequel un plateau est atteint, à petit cisaillements,
- iii) un régime intermédiaire.

Ces deux derniers régimes sont difficiles à différencier sur ce graphe, ils apparaissent plus clairement lorsqu'on mesure les variations temporelles de la contrainte.

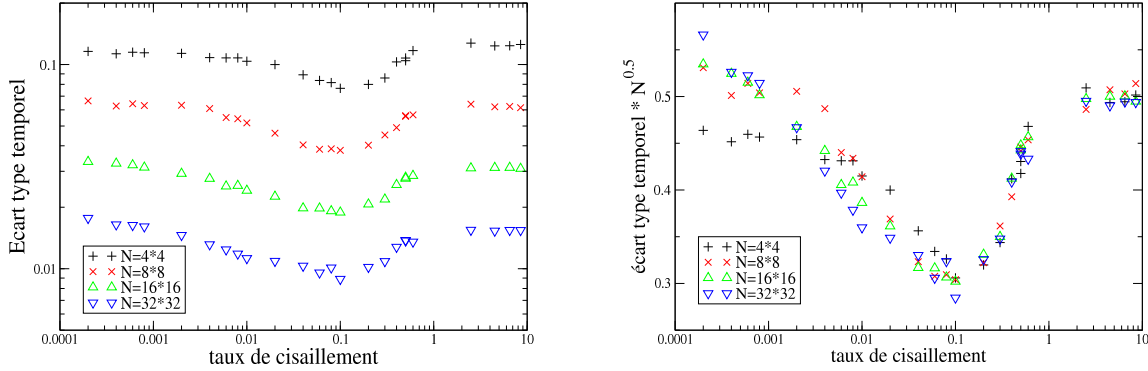


FIGURE 6.5 – **Ecart type temporel de la contrainte moyennée adimensionnée :** à gauche temporelle de la contrainte moyenne spatiale, adimensionnée par la contrainte moyenne en fonction de la taille du système et du cisaillement imposé (représentation log log), à droite Ecart type temporel est multiplié par $N^{0.5}$ et reporté en fonction du taux cisaillement (représentation log linéaire).

Le graphe de gauche de la figure 6.5 caractérise les **variations temporelles** de la contrainte moyennée spatialement, grâce à l'écart type temporel \mathcal{E}_t défini par l'expression 6.5 et adimensionné par la contrainte σ . Le graphe de droite montre que les courbes obtenues pour différentes tailles de système après rescaling ($\times N^{0.5}$) se superposent sur une courbe maîtresse à grand cisaillement. On distingue sur ce graphe quatre régimes :

- un plateau à grands cisaillement $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c \approx 0.5$, qu'on identifie comme le régime "homogène",
- un plateau à petit cisaillement $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_{s1}(N)$, mais on ne peut identifier précisément la dépendance en N du cisaillement critique $\dot{\Gamma}_{s1}(N)$. En particulier pour les plus grands systèmes, il semble que $\dot{\Gamma}_{s1}(N)$ soit inférieur au taux cisaillement minimal que nous pouvons imposer avec une précision numérique raisonnable,
- un régime de décroissance des fluctuations temporelles adimensionnées $\dot{\Gamma}_{s1}(N) < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_m \approx 0.1$,
- un régime de croissance des fluctuations temporelles adimensionnées $0.1 < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$

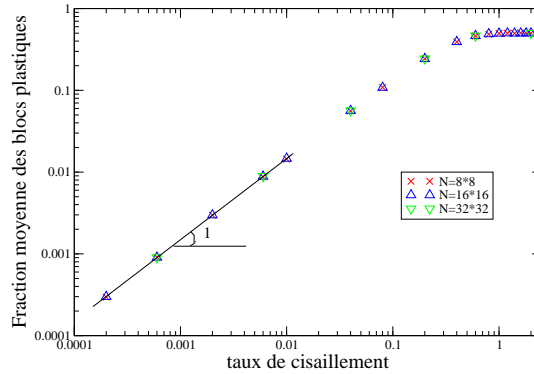


FIGURE 6.6 – **Fraction de plasticité** Fraction moyenne des blocs en phase plastique $\langle [n] \rangle_t$ en fonction du cisaillement pour différentes tailles de système. Lorsque $\dot{\Gamma} < 0.1$, la fraction $\langle [n] \rangle_t$ est une fonction linéaire du taux de cisaillement. Le préfacteur calculé pour $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$: $\langle [n] \rangle_t \rightarrow 1.47\dot{\Gamma}$

La figure 6.6 montre que **la fraction moyenne des blocs en phase plastique** $\langle [n] \rangle_t$ ne présente que deux régimes de cisaillement. Elle est indépendante de la taille du système, elle est une fonction linéaire du cisaillement tant que $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$ puis lorsque $\dot{\Gamma} \approx \dot{\Gamma}_c$ elle atteint un plateau 0.5. c'est-à-dire que la moitié des blocs sont plastiques. Cette quantité ne sature pas à petits cisaillements.

Ces mesures ne permettent pas de comprendre le régime de saturation observé pour certaines quantités. Dans un premier temps, on conserve une approche macroscopique moyenne, et on approfondit la description des variations temporelles de la contrainte moyenne.

6.2.2 Chutes de la contrainte moyenne spatiale

Afin de caractériser l'évolution temporelle de la contrainte moyennée spatialement $[\sigma](t)$, on a défini des chutes de contrainte de la manière suivante : on se donne une durée arbitrairement petite $\delta t = 0.01$. Puis, tous les δt , on relève la valeur de la contrainte moyenne (comme dans la figure 6.2), et mesure l'amplitude de chaque chute de contrainte. Une chute de contrainte se termine en t si $[\sigma](t+\delta t) > [\sigma](t)$. On a ainsi mesuré l'amplitude moyenne de ces chutes de contrainte et vérifié que les valeurs obtenues sont robustes à une diminution de δt .

Les courbes du graphe 6.7 représentent l'**amplitude moyenne des chutes de contrainte adimensionnée** par la contrainte moyenne σ en fonction de la taille du système et du taux de cisaillement.

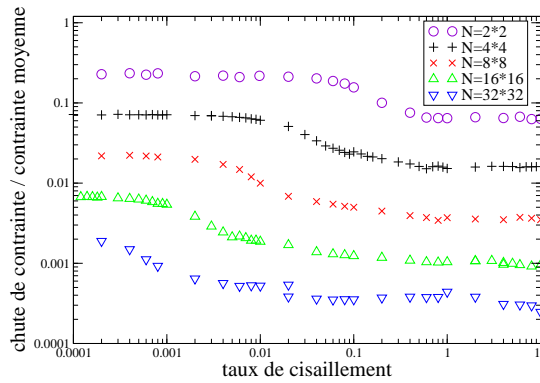


FIGURE 6.7 – **Amplitude moyenne des chutes de contrainte** (c'est-à-dire de la contrainte moyenne spatiale) adimensionnée par la contrainte moyenne en fonction de la taille du système et du cisaillement.

Trois régimes sont mis en évidence par ces courbes : (i) le régime "saturé", à faible cisaillement, $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_{s2}(N)$, (ii) le régime "homogène", à fort cisaillement, $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c$, (iii) et un régime intermédiaire $\dot{\Gamma}_{s2}(N) < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$. Dans les régimes (i) et (ii), chaque courbe présente des plateaux qui dépendent de la taille du système. La valeur de ces deux plateaux en fonction de la taille du système est représentée sur la figure 6.8 à droite. Ce sont des lois de puissance. Pour chaque taille de système, la courbe de chute de contrainte est normalisée par la valeur du plateau à petits cisaillements et représentée en fonction du taux de cisaillement multiplié par N (figure 6.8 à droite). (Pour le système $N = 32 \times 32$, la courbe a été normalisée par la valeur obtenue par extrapolation de la loi de puissance). Ces courbes reportées en fonction du taux de cisaillement $*N$ se superposent sur une courbe maîtresse à petits cisaillements.

Pour cette mesure, le seuil du régime "saturé" (noté ici $\dot{\Gamma}_{s2}(N)$) semble $\propto \frac{1}{N}$. Cette dépendance est surprenante, pour mieux la comprendre on a représenté la durée moyenne d'une chute de contrainte et le nombre moyen de blocs qui deviennent plastiques au cours d'une chute pour deux tailles de système sur les figures 6.9. Ces deux graphes montrent clairement un régime de saturation $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_{s2}(N)$. Ils montrent que seuls quelques blocs sont investis dans une chute de contrainte telle qu'on l'a définie ici. La durée des chutes

de contrainte est du même ordre que $\tau_{elast} = 1$, le temps que dure un événement plastique seul.

Après avoir exploré un aspect temporel et moyenné des chutes de contrainte, dans la partie suivante, on cherche à comprendre quelle organisation spatio-temporelle peut générer de telles amplitudes des chutes.

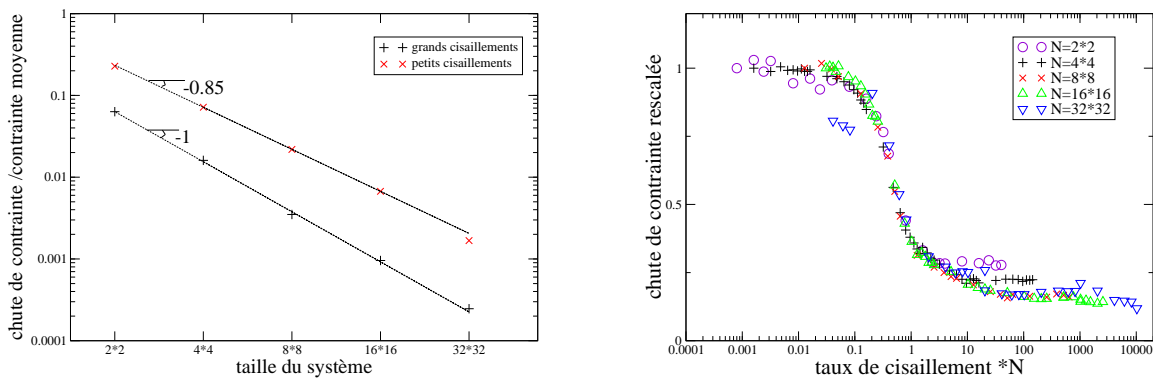


FIGURE 6.8 – à gauche La figure 6.7 montre des plateaux à grand et à petit cisaillement pour chaque taille de système. La valeur de ces deux plateaux en fonction de la taille du système est reportée. Elles sont des lois de puissance. à droite Les courbes de la figure 6.7 ont été normalisées par la valeur du plateau à petit cisaillement, et représentées pour chaque taille de système en fonction de $\dot{\Gamma} * N$. A petits cisaillements, elles se superposent alors sur une courbe maîtresse.

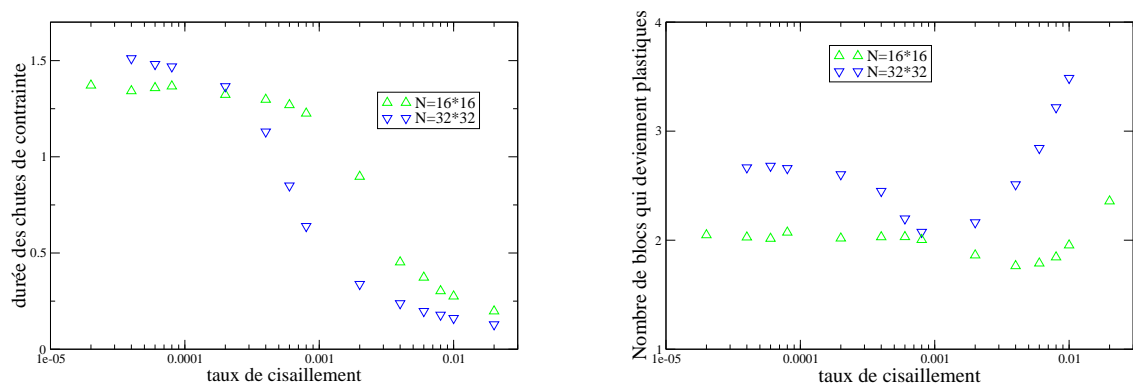


FIGURE 6.9 – à gauche Durée moyenne et à droite nombre moyen de blocs qui deviennent plastiques au cours d'une chute de contrainte pour deux tailles de système $N = 16 \times 16$, $N = 32 \times 32$.

6.2.3 Organisation spatiale

Les outils précédents, essentiellement des mesures macroscopiques à l'état stationnaire, ne peuvent décrire l'organisation spatio-temporelle dans le système. On propose donc dans cette partie des observations de l'organisation spatiale du milieu à la limite du régime de saturation $\dot{\Gamma} \gtrsim \dot{\Gamma}_s(N)$.

Description qualitative de l'organisation spatio-temporelle à faible cisaillement.

Pour un système $N = 16 \times 16$, par exemple, on impose $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$, l'évolution temporelle de la contrainte moyenne spatiale est représentée sur les graphes de gauche de la figure 6.10. Sur le même graphe on a reporté la date du début de cinquante événements plastiques successifs. On voit ainsi des regroupements dans le temps de paquets d'événements [23 – 34],[5 – 16] et d'autres événements isolés 4, 36, 37. Chaque événement conduit à une diminution de la contrainte moyenne. La position de chacun de ces événements dans le système est reportée (6.10-2). Ce dernier graphe met en évidence une organisation spatiale particulière : les cinquante événements se regroupent sur deux lignes et deux colonnes. Un zoom dans le temps de ces deux graphes correspondant à la séquence d'événements [23 – 34] est représenté sur les graphes –3) et –4). On s'est limité sur ces graphes à représenter quelques événements groupés dans le temps, ainsi que leur position dans l'espace. Avec la définition des chutes de contrainte que nous avons proposée dans la partie précédente, la figure 6.10-3) est une suite de trois chutes de contraintes distinctes, c'est-à-dire séparées par des remontées de la contrainte moyenne, qui sont à peine décelables sur ce graphe. Cette série de onze événements dure environ 10 unités de temps, chaque événement a environ une durée unitaire. Les événements ne sont donc pas simultanés. Enfin, ils se produisent sur une ligne et une colonne.

Comparaison qualitative de l'organisation spatiale pour différents taux de cisaillement

La figure 6.11 montre que ce type d'organisation spatiale se poursuit pour un grand nombre d'événements (ici $2N = 512$ événements). La persistance de ce mode d'organisation spatiale est d'autant plus grande que le cisaillement est petit. A faible cisaillement, elle peut conduire à grouper les événements plastiques dans l'espace de sorte qu'un petit nombre de blocs subit plusieurs événements plastiques, tandis que d'autres régions du système restent élastiques. Pour un taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$, le graphe est très contrasté, la plasticité est localisée dans une bande de 2 ou 3 blocs de largeur, et de longueur la taille du système. Dans cette bande, un bloc est amené à craquer 12 fois. Pour un cisaillement dans le régime "homogène", $\dot{\Gamma} = 2$, le contraste est peu marqué.

Après cette description qualitative de l'organisation spatiale du système, nous proposons différentes manières de la quantifier (figures 6.12,6.13, 6.14,6.15).

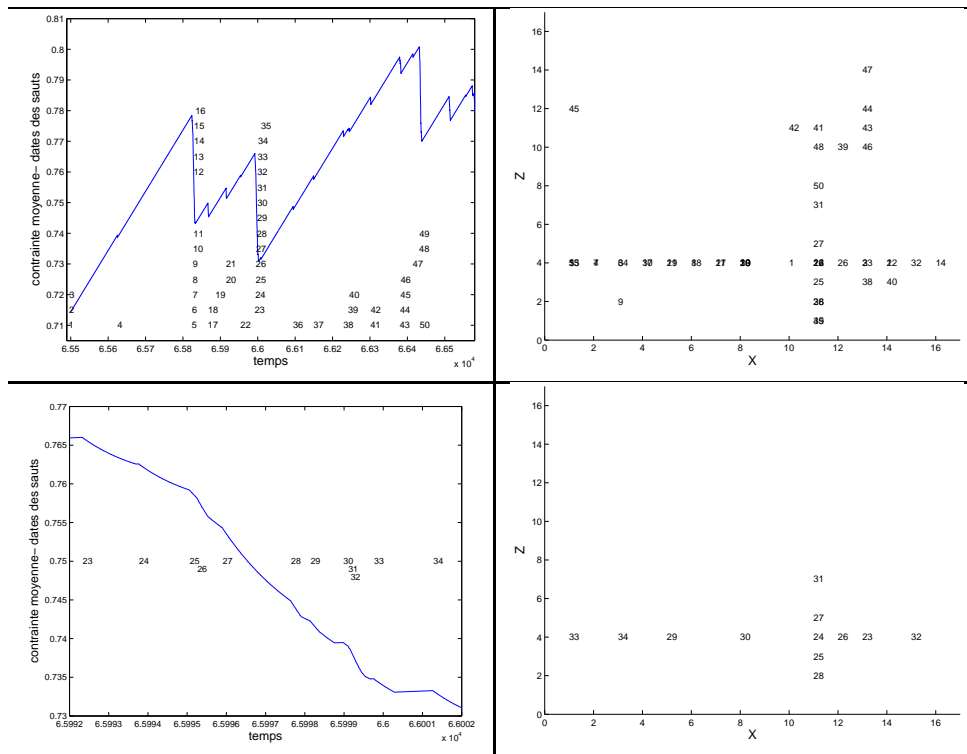


FIGURE 6.10 – $N = 16 \times 16$, $\dot{\Gamma} = 0.0005$ 1) Evolution de la contrainte moyenne (spatiale) dans le temps. Pour chaque événement i , la date du début de l'événement est reportée sur le graphe 2) positions correspondantes des événements. 3) et 4) sont les mêmes graphes sur un petit intervalle de temps, entre le début du 23^e événement et la fin du 34^e événement plastique.

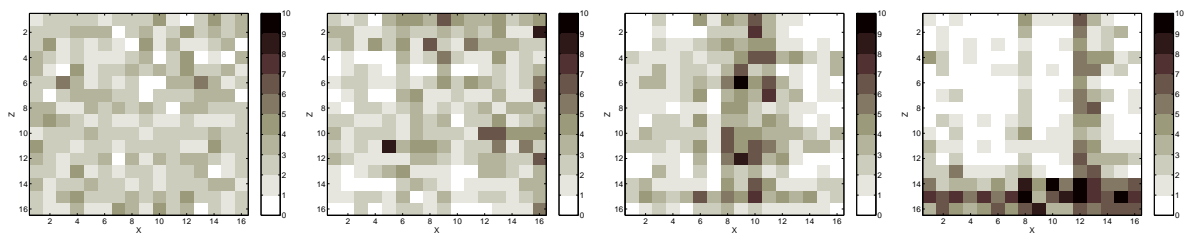


FIGURE 6.11 – Représentation spatiale de l'activité plastique cumulée d'un système (x, z) de taille $N = 16 \times 16$ après $2N = 512$ événements plastiques, soumis à un taux de cisaillement : 1) $\dot{\Gamma} = 2$, 2) $\dot{\Gamma} = 0.05$, 3) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$, 4) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-4}$. On a grisé les blocs en fonction du nombre d'événements plastiques qui se sont produit sur un total de $2N$ événements.

Description quantitative de l'organisation spatiale

Figure 6.12, on a représenté la fraction moyenne des blocs qui subissent plusieurs (au moins deux) événements plastiques lorsque le système subit 10 événements plastiques successifs pour différents taux de cisaillement. Cette quantité décroît lorsque le taux de cisaillement augmente. Deux plateaux à faible taux de cisaillement $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_{s3}$ et à fort taux de cisaillement montrent les régimes saturé et homogène. Les résultats numériques accessibles avec une précision suffisante ne permettent pas de préciser comment $\dot{\Gamma}_{s3}$ décroît avec N .

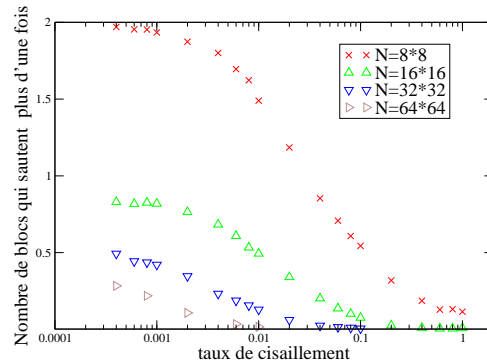


FIGURE 6.12 – Nombre de blocs qui craquent deux fois ou plus sur un total de 10 événements plastiques pour différents cisaillements.

Sur la figure 6.13, on repère la fraction moyenne des blocs qui n'ont jamais sauté après un total de N , $N/2$ et $N/4$ événements plastiques pour quatre tailles de système. Ces courbes montrent trois régimes : des plateaux à petits cisaillements et à grands cisaillements, et un régime intermédiaire. Les changements de régime se produisent pour les même taux de cisaillement $\dot{\Gamma}_{s4}$, indépendamment de la taille du système.

Nous avons choisi de présenter ces deux dernières quantités car, comme les quantités macroscopiques, elles mettent en évidence trois régimes, avec la particularité que le taux de cisaillement $\dot{\Gamma}_s(N)$ qui marque la fin du régime à faible taux de cisaillement, régime saturé dépend de la quantité observée. On retrouve ainsi ce qu'on a observé pour les graphes au niveau macroscopique, les taux de cisaillement de transition dépendent de la mesure, ils sont différents pour les chutes de contraintes de la figure 6.7, ou les variations temporelles de la contrainte moyenne de la figure 6.5.

Les deux derniers graphes décrits présentent une mesure de l'organisation collective, i.e. portant sur un certain nombre de d'événements plastiques successifs (10 pour la figure 6.12 et $2N$ pour la figure 6.13). On s'intéresse maintenant à une mesure liée à deux événements consécutifs. Les quantités précédentes montrent qu'un grand nombre d'événements successifs peuvent être spatialement corrélés, ici on s'intéresse à une "corrélacion de paire".

La figure 6.14 donne une image représentative de la distribution des distances entre deux événements consécutifs pour deux taux de cisaillement ($\dot{\Gamma} = 0.02$ et $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$). Les événements consécutifs ont d'autant plus tendance à se produire sur la même ligne ou la même colonne que le taux de cisaillement est faible.

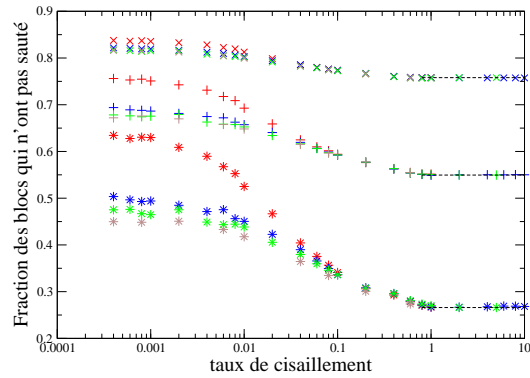


FIGURE 6.13 – Fraction des blocs qui n'ont pas jamais sauté après un total de N événements plastiques (courbes du bas), $N/2$ s (courbes au milieu), ou $N/4$ événements (courbes du haut) pour des systèmes de taille $N = 8 \times 8$ (rouge), $N = 16 \times 16$ (bleu), $N = 32 \times 32$ (vert), $N = 64 \times 64$ (beige). Les pointillés représentent les valeurs dans un cas "homogène", voir détails dans le texte de la section 6.3.

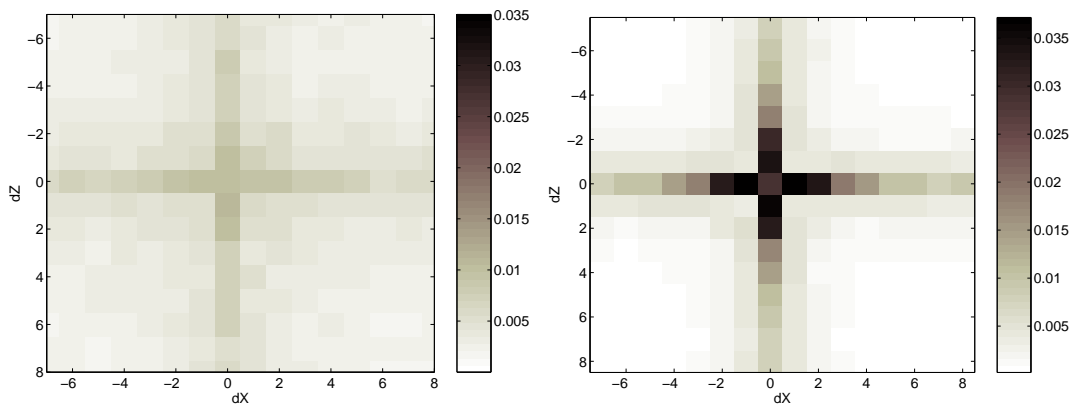


FIGURE 6.14 – dans un système de taille 16×16 , on a calculé la distribution des distances entre les événements plastiques consécutifs pour un taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 0.02$ (*gauche*) et pour un taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$ (*à droite*).

Cette tendance est quantifiée par la figure 6.15, où la fraction des événements plastiques consécutifs qui se produisent sur la même ligne ou sur la même colonne est reportée en fonction du taux de cisaillement. On peut distinguer quatre régimes : (i) un plateau à fort cisaillement dans le régime "homogène" $\dot{\Gamma} > 0.5$, (ii) un plateau à petit cisaillement dans le régime "saturé" $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_{s5}(N)$, (iii) et (iv) un régime intermédiaire qui semble se séparer en deux régimes distincts.

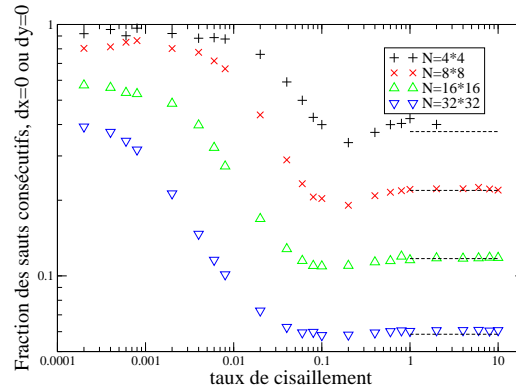


FIGURE 6.15 – 1) Fraction des événements consécutifs qui se produisent sur la même ligne ou sur la même colonne. Les pointillés représentent le régime homogène. Pour une distribution spatiale aléatoire des événements comme décrite dans le texte section 6.3, cette fraction vaut $\frac{N_x + N_y - 2}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ ici

6.3 Milieu bipériodique : interprétation

Les résultats numériques que nous venons d'exposer mettent en évidence trois régimes d'écoulement distincts, en fonction du taux de cisaillement : un régime à faibles taux de cisaillement, un régime intermédiaire et un régime à forts taux cisaillements. A faible taux de cisaillement, la contrainte moyenne tend vers une contrainte seuil macroscopique. Les deux premier régimes présentent une organisation spatio-temporelle complexe. Dans cette section, nous proposons une interprétation de ces résultats.

6.3.1 Forts taux de cisaillements : régime "homogène"

Ce régime est observé à forts taux de cisaillements, c'est-à-dire $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c \approx 0.5$. Les variations spatiales et temporelles, la fraction d'événements plastiques, et l'organisation spatiale deviennent indépendantes du cisaillement. La moitié des blocs sont en phase plastique. (figure 6.6).

Cela vient du choix de la dynamique locale de la plasticité que nous avons fait. En effet, à forts taux de cisaillement, la contrainte de chaque bloc est toujours supérieure à la contrainte seuil microscopique σ_y . Avec les paramètres que nous avons choisis, cela implique que le taux de passage d'un bloc de la phase élastique à la phase plastique, est indépendant de la contrainte du bloc et est égal au taux de passage de phase élastique à la phase plastique. Ceci explique que la moitié des blocs sont en phase plastique.

A partir de cette remarque, on propose une version moyennée de l'équation 6.3 en supposant (i) que la phase et la contrainte sont décorréllées dans l'espace à un instant donné, et (ii) que la moyenne spatiale de la phase $[n](t)$ vaut 1/2. On a alors l'équation d'évolution suivante pour la contrainte moyenne :

$$\partial_t \sigma = \mu \dot{\Gamma} - \frac{\sigma}{2\tau} \quad (6.6)$$

Cela se vérifie en effet sur la courbe d'écoulement 6.3 : à forts taux de cisaillement : $\sigma \rightarrow 2\mu\dot{\Gamma}$. Ainsi, l'évolution de la contrainte moyenne est donnée par une équation de Maxwell.

On revient sur la distribution spatiale des $N/2$ blocs en phase plastique. A un instant t donné, les $N/2$ blocs en phase plastique sont répartis aléatoirement dans le milieu. A l'instant $t + dt$, la répartition spatiale des blocs en phase plastique est corrélée à la répartition spatiale des blocs en phase plastique à l'instant t . Pour comprendre les conséquences de cette distribution spatiale, on fait l'expérience suivante : sur un réseau carré bipériodique de N blocs, défini par la figure 6.1, on se donne une distribution spatiale aléatoire de phases $n_{i\alpha}$, telle que la moitié des phases soient plastiques ($n_{i\alpha} = 1$), et l'autre moitié élastique $n_{i\alpha} = 0$. Cette situation représente l'état initial du système. On incrémente ce système ainsi : chaque bloc en phase plastique a une probabilité 1/2 de passer en phase élastique, et chaque bloc en phase élastique a une probabilité 1/2 de passer en phase plastique. On effectue sur le système spatio-temporel ainsi obtenu les mêmes mesures qu'au système où la phase et la contrainte locales sont couplées, et on compare les quantités qui caractérisent l'organisation spatiale pour des grands cisaillements $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c$. En particulier, pour les figures 6.13,6.15, ces quantités repérées par des pointillés sur tous ces graphes, coïncident exactement.

A grands cisaillements, $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c$, il n'y a pas d'organisation spatiale particulière. A un instant donné, la moitié des blocs sont en phase plastique, et ces blocs sont distribués de façon aléatoire.

6.3.2 Petits cisaillements : régime "saturé"

La contrainte moyenne (figure 6.3), l'écart type temporel de la contrainte moyenne (figure 6.5), l'amplitude ou la durée des chutes de la contrainte moyenne spatiale (figures 6.7, 6.9), ou bien les quantités visant à caractériser l'organisation spatiale (figures 6.13, 6.12, 6.15) présentent toutes un plateau à petits cisaillements en deçà d'un taux de cisaillement seuil $\dot{\Gamma}_{s1}(N), \dot{\Gamma}_{s2}(N), \dot{\Gamma}_{s3}(N), \dot{\Gamma}_{s4}(N) \dots$. Le taux de cisaillement seuil dépend de la quantité observée et de la taille du système. On a pu caractériser la dépendance du seuil en fonction de la taille du système seulement dans le cas de l'amplitude moyenne des chutes de contrainte. Pour cette quantité, le seuil $\dot{\Gamma}_{s2}$ varie en $\frac{1}{N}$. Cette dépendance n'est pas vérifiée pour les autres grandeurs, pour lesquelles on ne sait pas la caractériser à cause de limite numérique. Cependant, le taux de cisaillement seuil est une fonction décroissante de N , la taille du système.

En revanche, la fraction moyenne des blocs en phase plastique $\langle [n] \rangle$ représentée sur la figure 6.6 ne présente pas de plateau. A faible taux de cisaillement, $\langle [n] \rangle$ est un fonction linéaire du taux de cisaillement : $\langle [n] \rangle = 1.47\dot{\Gamma}$. Pour comprendre cette dépendance linéaire, on fait l'hypothèse que la contrainte et la phase plastique sont décorréelées. On a d'après l'équation 6.3,

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^{N_z} \sum_{\beta=1}^{N_x} n_{j\beta} \sigma_{j\beta} \right\rangle = \langle [n] \rangle \sigma$$

Dans cette gamme de taux de cisaillement, la contrainte σ est très peu dépendante du taux de cisaillement. Sous l'hypothèse de décorrélation, la phase moyenne est donc une fonction linéaire du taux de cisaillement, indépendante de la taille du système. La valeur mesurée de la contrainte dans cette gamme de taux de cisaillement, c'est-à-dire de la contrainte seuil macroscopique $\sigma_M = 0.75$, ce qui correspond au préfacteur $\langle [n] \rangle = \frac{1}{0.75} \dot{\Gamma} = 1.33\dot{\Gamma}$. L'hypothèse de décorrélation est donc trop simpliste : cette modélisation naïve nous donne le comportement linéaire observé dans nos simulations mais le préfacteur est différent. On ne comprend pas à ce stade, la nature de la corrélation spatio temporelle qui permettrait d'expliquer que la linéarité de $\langle [n] \rangle$, ainsi que la valeur de la **contrainte seuil macroscopique**.

On propose l'interprétation suivante : les plateaux décrits correspondent à un régime de saturation de l'organisation spatiale. En partant de cisaillement élevés, la taille caractéristique de l'organisation spatio-temporelle croît lorsque le taux de cisaillement décroît. La saturation se produit lorsque la taille de l'organisation spatio-temporelle devient du même ordre de grandeur que la taille du système. Des phénomènes collectifs se déroulent sur la taille du système.

Pour soutenir cette interprétation, il faut caractériser cette organisation spatiale, et sa dépendance en le cisaillement imposé dans le régime intermédiaire où l'organisation spatio-temporelle n'est pas saturée. On ne détaille pas plus le comportement du milieu dans ce régime saturé, car ce régime ne peut pas être observé pour des grands systèmes, ce qu'on résume ainsi : $\dot{\Gamma}_s(N) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

Dans le régime saturé, les phénomènes collectifs s'organisent sur une taille supérieure à la taille du système. Pour des très grands systèmes, ce régime est limité.

6.3.3 Cisaillements intermédiaires : organisation spatio-temporelle complexe

A taux de cisaillement intermédiaires $\dot{\Gamma}_s(N) < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$, le milieu présente une organisation spatio temporelle complexe.

On remarque d'abord que l'écoulement se produit notamment par **bouffées dans le temps de l'activité plastique**. La figure 6.10 montre le regroupement dans le temps de séries d'une dizaine d'événements plastiques sur une durée de l'ordre de la dizaine de fois la durée d'un événements plastique. Lors de ces "bouffées", les événements plastiques se produisent rarement simultanément.

Dans cette géométrie symétrique, **la plasticité s'organise suivant des lignes et des colonnes**. Les figures 6.15 et 6.10, montrent qu'à petit cisaillements, les événements plastiques consécutifs ont tendance à se produire sur la même ligne ou sur la même colonne.

On comprend cette tendance en reprenant l'écriture du propagateur. La figure 6.16 représente l'effet cumulé de un puis de deux puis de trois événements voisins alignés. Le deuxième événement dissymétrise la perturbation, les blocs qui se situent sur la ligne formée avec le premier événement voient leur contrainte augmenter plus que les blocs situés dans la même colonne. Cet effet est renforcé ensuite par le troisième événement. La ligne formée par ces trois blocs voit des augmentations de contrainte beaucoup plus fortes que le reste du milieu.

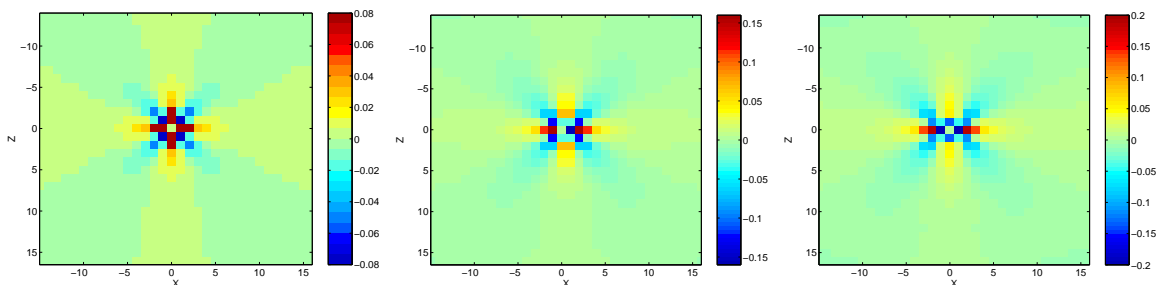


FIGURE 6.16 – 1) perturbation du champ de contrainte dû un seul événement se produisant au centre, 2) à deux événements voisins 3) à trois événements voisins alignés.

La figure 6.16-2) est à rapprocher des distributions de distances entre les événements consécutifs de la figure 6.14.

La plasticité se propage selon les lignes, et les colonnes. Cette tendance est d'autant plus marquée que le taux de cisaillement est faible.

Le système conserve la **mémoire des événements précédents**, autrement dit, l'organisation spatiale en ligne et en colonne persiste sur des très longues durées comme le montrent les figures 6.10, 6.11, 6.13. Elle conduit notamment à un regroupement dans l'espace de l'activité plastique (et donc à des sauts multiples de certains blocs), tandis que certaines régions restent purement élastiques pendant de longues périodes à petit cisaillement.

On peut alors voir l'organisation spatio-temporelle du système comme la compétition entre la 'propagation de la plasticité' sur des lignes ou des colonnes et la nucléation d'événements isolés. Le poids respectif de ces deux phénomènes dépend du taux de cisaillement.

Lorsqu'on diminue le taux cisaillement, la taille de l'organisation spatiale augmente jusqu'à être du même ordre que la taille du système. Sur la figure 6.11-4), à la limite du régime de saturation ($\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$), on voit que les événements se sont organisés surtout sur une bande de quelques blocs de largeur, qui prend toute la longueur du système. On est à la limite du régime saturé. Nous n'avons pas à ce stade compris comment déterminer une taille caractéristique de l'organisation spatiale en fonction du taux de cisaillement

Remarque : Au cours de cet exposé, nous avons évité d'utiliser le mot "avalanche" pour désigner les bouffées intermittentes d'activité plastique, essentiellement parce qu'il nous a semblé recouvrir des propriétés inexistantes dans nos simulations. On rappelle deux particularités des bouffées d'activité plastique. D'une part, avec les paramètres de notre simulations, au cours de ces bouffées les événements plastiques sont très rarement simultanés, et se succèdent le plus souvent. D'autre part, l'organisation spatiale dans le système, n'est pas limitée à ces bouffées, le système a toujours la mémoire de événements plastiques précédents.

Cette description de l'organisation spatiale est valable dans la première partie du régime intermédiaire [$\dot{\Gamma}_s(N) < \dot{\Gamma} < 0.1$]. Dans cet intervalle de taux de cisaillement, les variations temporelles (figure 6.5) diminuent lorsque le taux de cisaillement augmente. Dans la deuxième partie du régime transitoire ($0.1 < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c \approx 0.5$), les variations temporelles (figure 6.5) augmentent lorsque le taux de cisaillement augmente. Nous interprétons ce comportement comme une transition progressive vers le régime homogène. En effet, on approche du régime homogène : la contrainte locale ne relaxe jamais suffisamment pour être inférieure à σ_y , la contrainte seuil microscopique. Les taux de passage des phases élastiques à plastique et vice versa sont donc égaux, et indépendants de la contrainte. Les variations de $n_{i\alpha}$ deviennent indépendantes de la contrainte. On voit en effet que dans ce régime, comme dans le régime homogène les variations spatiales (figure 6.5) se rescalent en \sqrt{N} .

En résumé, dans le régime intermédiaire, les événements plastiques s'organisent spatialement sur des lignes et des colonnes avec une taille qui augmente lorsque le taux de cisaillement décroît. Cela conduit à la coexistence de régions plastiques et de régions élastiques. De plus, certains événements plastiques sont groupés dans le temps, l'écoulement présente des bouffées intermittentes.

6.4 Milieu fini : résultats numériques

On commence par énoncer brièvement les caractéristiques qui apparaissent dans la géométrie finie, c'est-à-dire bornée par deux parois dans une direction, périodique dans l'autre. Ces caractéristiques sont déduites des graphes présentés dans la suite de cette section. L'interprétation des résultats sera proposée dans la section suivante. Les quatre premiers points sont semblables à ceux présentés dans la géométrie bipériodique.

- 1 Lorsque le cisaillement devient très petit, la contrainte moyenne tend vers une contrainte seuil macroscopique (inférieure à la contrainte seuil microscopique) $\sigma_M \approx 0.74 < \sigma_y$, indépendante de la taille du système.
- 2 A fort cisaillement $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c \approx 0.5$, le système présente un régime identifié comme "homogène", (au sens défini dans la section 6.3)
- 3 A faible cisaillement, on identifie un régime "saturé". (au sens défini dans la section 6.3). On note de manière générique $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}'_s(N)$. Comme dans le cas bipériodique, le seuil dépend de la quantité mesurée.
- 4 Une organisation spatio temporelle complexe existe dans le régime intermédiaire, $\dot{\Gamma}'_s(N) < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$. L'écoulement est intermittent et le profil d'écoulement moyen est différent du profil typique.

En revanche certaines caractéristiques concernant la nature de l'organisation spatiale sont spécifiques à la présence des parois dans cette géométrie finie :

- 5 Avec une relaxation plastique de type "A", à faible cisaillement, il existe un long régime transitoire pendant lequel seules les couches au voisinage d'une des parois sont cisailées.
- 6 Avec une relaxation plastique de type "A", dans le régime intermédiaire, les couches au voisinage des parois sont en moyenne plus cisailées que le volume.
- 7 Avec une relaxation plastique de type "B", dans le régime intermédiaire, l'écoulement est intermittent et le taux de cisaillement moyenné dans le temps est homogène dans le milieu.

Les résultats présentés ont été calculés avec une relaxation plastique de type A, sauf lorsque cela est spécifié, c'est-à-dire dans la section 6.4.3.

6.4.1 Mesures macroscopiques

On présente ici deux mesures qui montrent les similarités des résultats avec la géométrie bipériodique. Elles ont été calculées de la même manière que dans la section 6.2.1. La courbe d'écoulement 6.17 a été obtenue en imposant le taux de cisaillement moyen et en mesurant la contrainte moyenne à l'état stationnaire. Comme dans la géométrie bipériodique, la courbe d'écoulement est peu dépendante de la taille du système, et présente une contrainte seuil macroscopique $\sigma_M \approx 0.74$. Pour pouvoir la comparer à la courbe d'écoulement 6.3, on a reporté la courbe d'écoulement dans le cas bipériodique pour une taille de système $N = 16 \times 16$. Celle-ci est légèrement au dessus de la courbe correspondante en taille finie $N = 16 \times 15$ sauf dans le régime homogène où toutes les courbes se superposent.

Les variations temporelles de la contrainte moyenne ont été mesurées comme précédemment : \mathcal{E}/σ est reporté sur le graphe de gauche de la figure 6.18 . Ces courbes

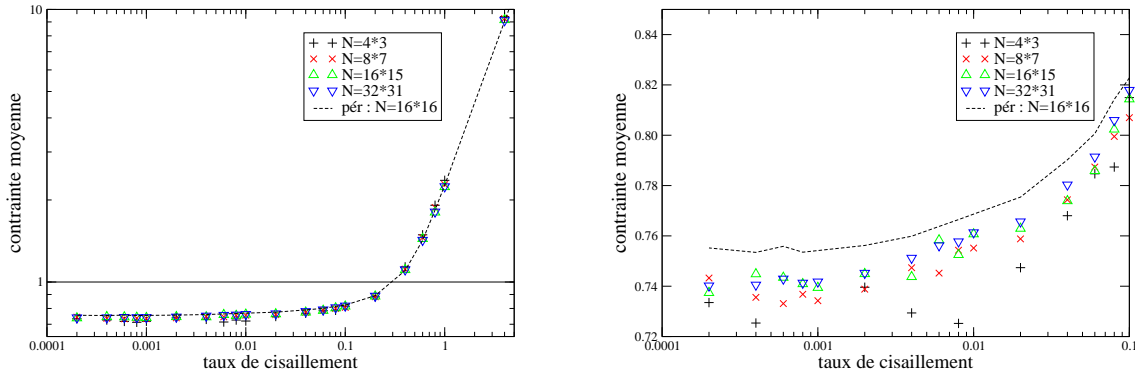


FIGURE 6.17 – **Courbe d'écoulement** : à gauche on impose un cisaillement macroscopique $\dot{\Gamma}$, et on calcule la contrainte moyenne σ du système pour différentes tailles de système $N = 4 \times 3, 8 \times 7, 16 \times 15, 32 \times 31$. Le trait plein noir représente la contrainte seuil microscopique $\sigma_y = 1$. (représentation log-log) à droite Agrandissement de la zone $[10^{-4} - 10^{-1}]$ (représentation log-lin) La courbe d'écoulement dans un système bipériodique de taille $N = 16 \times 16$ (de la figure 6.3) est reportée en pointillés à titre de comparaison.

ont ensuite été normalisées par $N^{0.5}$ sur le graphe de droite. Comme dans la géométrie bipériodique (figure 6.5), quatre régimes sont ainsi mis en évidence :

- un plateau à grands cisaillement $\dot{\Gamma} > \dot{\Gamma}_c \approx 0.5$, qu'on identifie comme le régime "homogène"
- un plateau à petit cisaillement $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}'_s(N)$
- un régime de décroissance des fluctuations temporelles $\dot{\Gamma}'_s(N) < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_m \approx 0.1$
- un régime de croissance des fluctuations temporelles $0.1 < \dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$

Les comportements macroscopiques à l'état stationnaire sont donc très similaires à ceux qui ont été observés dans le cas bipériodique. On s'attend donc à voir émerger des phénomènes collectifs organisés. En introduisant des parois, on a dissymétrisé le système et donné une dynamique différente au bloc en fonction de la distance à la paroi. On va donc chercher à identifier le rôle joué par les parois sur l'organisation spatiale.

6.4.2 Organisation spatiale

Profils moyens

Vu la géométrie du système, on s'est intéressé à des quantités moyennées pour chaque couche parallèle à la paroi. La figure 6.19 représente les profils de cisaillements, c'est-à-dire le cisaillement moyen de chaque ligne pour un système $N = 16 \times 15$ et différents taux de cisaillement. Ces profils sont moyennés sur une durée de $500/\dot{\Gamma}$, ils ont été normalisés par le taux de cisaillement imposé. Pour des cisaillements inférieurs à 0.5, les deux couches voisines des parois sont toujours plus cisillées que le volume, les profils adimensionnés sont indépendants du taux de cisaillement imposé. Puis lorsqu'on augmente le taux de

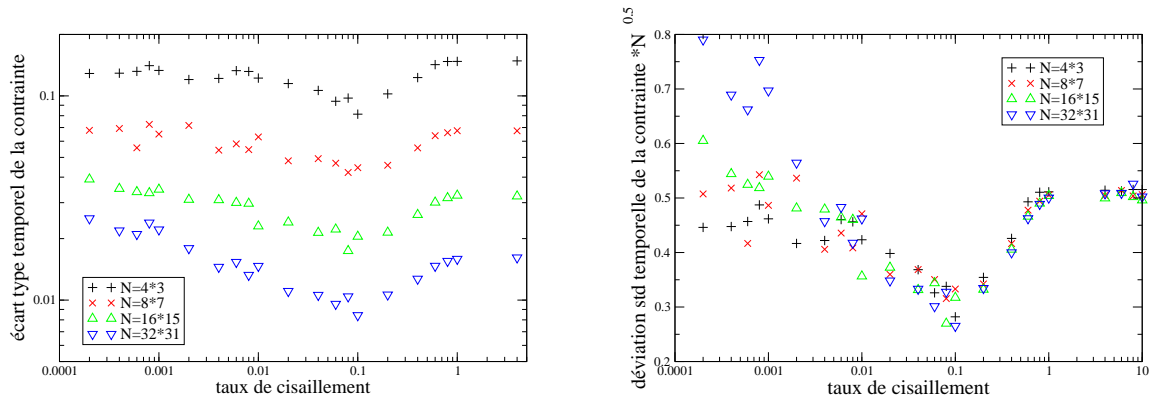


FIGURE 6.18 – à gauche **Ecart type temporel** de la contrainte moyennée sur le volume, adimensionné par la contrainte moyenne en fonction de la taille du système et du cisaillement imposé. à droite L'écart type temporel est multiplié par \sqrt{N} et reporté en fonction du taux de cisaillement

cisaillement l'allure du profil moyen change et tend progressivement vers un profil quasiment homogène atteint pour $\dot{\Gamma} \approx 1$. Les profils de vitesse correspondant à ces deux extrêmes sont représentés le graphe de droite de la figure 6.19.

Il s'agit ici de profils moyennés sur des longues durées, l'étude de l'évolution spatio-temporelle du système montre que ces profils ne sont pas représentatifs du comportement typique sous écoulement dès qu'on sort du régime homogène $\dot{\Gamma} < \dot{\Gamma}_c$.

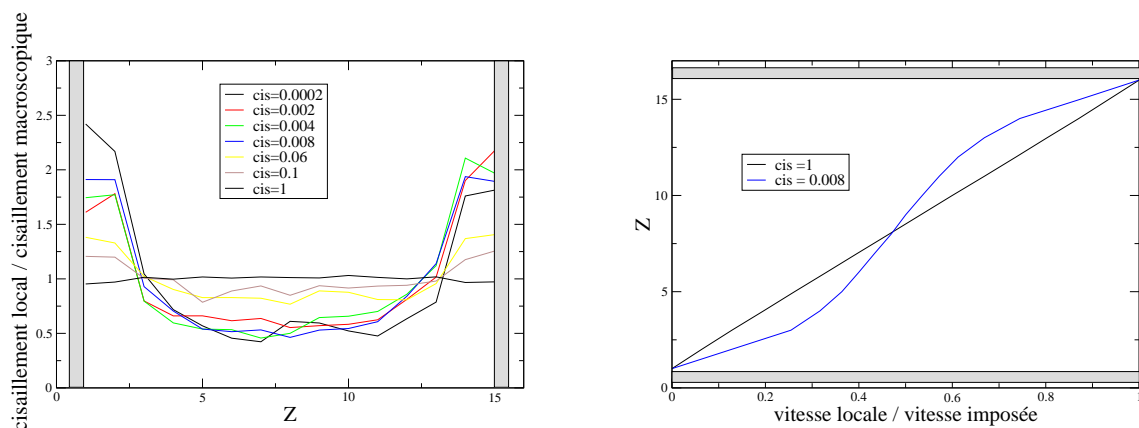


FIGURE 6.19 – $N = 16 \times 15$ 1) A gauche : **Profils moyens** : pour chaque taux de cisaillement imposé, on a représenté le profil moyen, c'est-à-dire le taux de cisaillement moyen par ligne adimensionné par le taux de cisaillement macroscopique. $2.10^{-4} < \dot{\Gamma} < 2.10^{-3}$ 2) A droite : **Profil de vitesse** correspondant pour $\dot{\Gamma} = 0.008$ et $\dot{\Gamma} = 1$

Régime transitoire

Dans la figure 6.21-1), on a représenté l'évolution la déformation cumulée pour chaque couche pour un taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$. A l'état initial, pour tous les blocs, la contrainte est nulle et la phase élastique. A chaque instant, à taux cisaillement imposé, la moyenne des déformations de chaque ligne est égale à la déformation totale.

Pendant un régime transitoire très long (d'une durée de l'ordre $50/\dot{\Gamma}$), les deux couches au voisinage de l'une des deux parois sont très cisailée alors que le reste du milieu ne l'est pas ou très peu. Cela est visible sur la figure 6.21-2). Les couches $n = 1$ et $n = 2$ sont fortement cisailées. Après une déformation globale de 20, ces deux couches ont subi des déformations de l'ordre de 50, c'est-à-dire que l'écoulement de ces deux couches représente 40% de l'écoulement total. La profil de vitesse moyen au cours de régime transitoire est représenté 6.20. La même phénoménologie est obtenue si on part d'un état initial homogène, c'est-à-dire qu'on pré-cisaille le milieu avec un cisaillement $\dot{\Gamma} > 1$. La localisation du cisaillement au cours du régime transitoire a été observée pour différents états initiaux au voisinage l'une ou l'autre des parois.

A fort taux de cisaillement [figure 6.21-3), 6.21-3)], ce régime long transitoire particulier n'existe pas. Très rapidement les déformations cumulées pour chaque ligne correspondent à ce qu'on peut déduire des profils moyens 6.19, c'est-à-dire que le cisaillement au parois est un peu moins important que dans le volume.

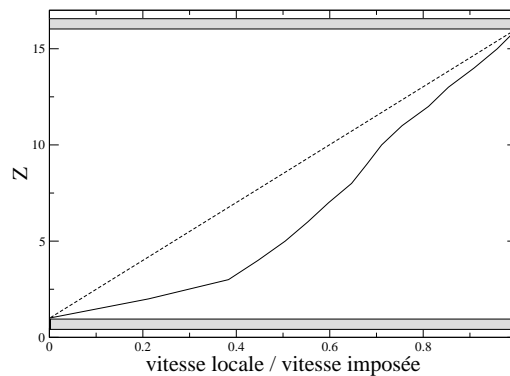


FIGURE 6.20 – $N = 16 \times 15, \dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$: profil de vitesse moyen dans le régime transitoire (pour les 20 premières déformations.)

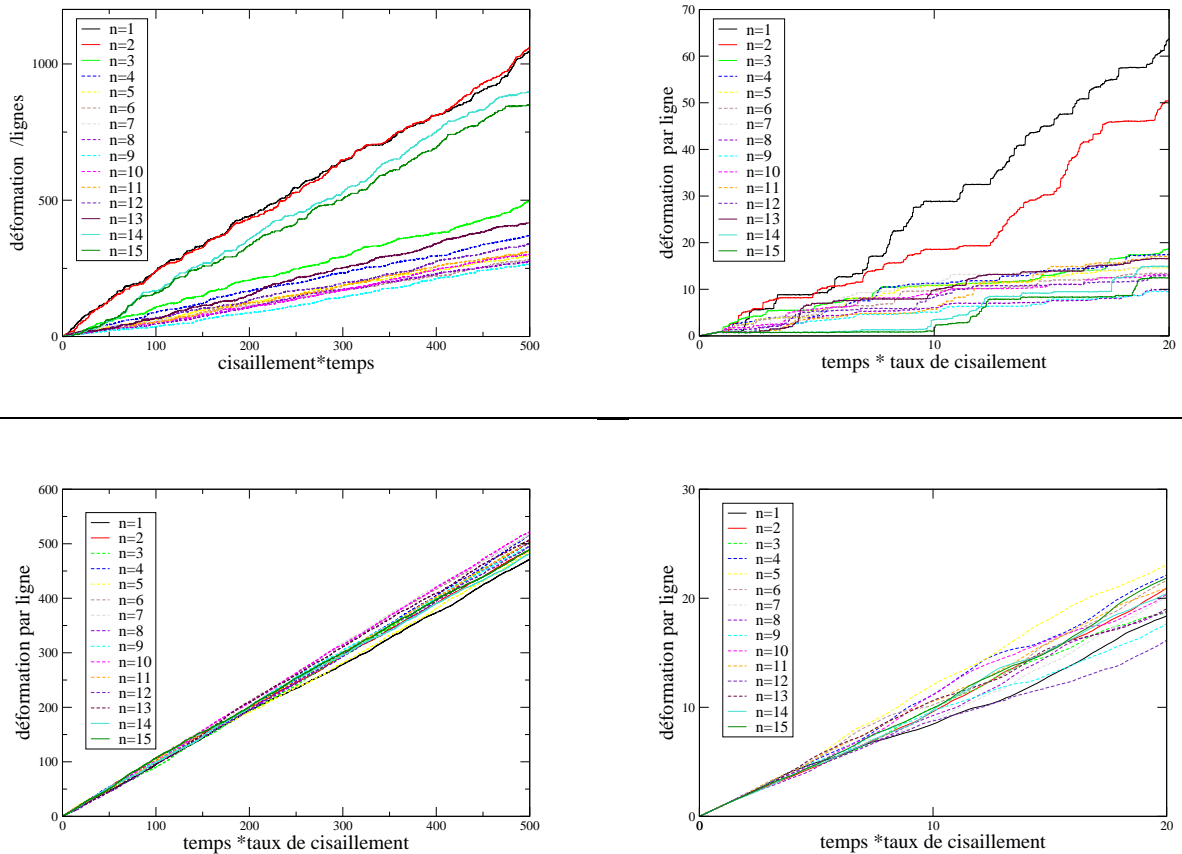


FIGURE 6.21 – $N = 16 \times 15$, Etat initial : système au repos. 1) $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$, déformation cumulée de chacune des 15 couches en fonction de la déformation totale imposé. Les couches sont numérotées de 1 à 15. Les traits continus sont associées aux quatre couches des bords, et les pointillés aux couches dans le volume . 2) $\dot{\Gamma} = 5.10^{-4}$ Zoom sur les 20 premières déformations 3) et 4) mêmes courbes en imposant le taux de cisaillement $\dot{\Gamma} = 2$.

Régime intermittent

On étudie maintenant le comportement spatio temporel après le régime transitoire. Pour comparer l'organisation spatiale dans cette géométrie finie et dans la géométrie bipériodique, la figure 6.22 présente l'activité plastique cumulée de chaque blocs pour une suite de 512 événements consécutifs, comme la figure 6.11 dans la géométrie bipériodique.

La figure 6.22 montre qu'une organisation spatiale se poursuit pour un grand nombre d'événements (ici $2N = 512$ événements). La persistance de ce mode d'organisation spatiale est d'autant plus grande que le cisaillement est petit. Les contrastes sont plus marqués que dans la géométrie bipériodique, et la zone de forte activité plastique, est localisé au voisinage d'une paroi.

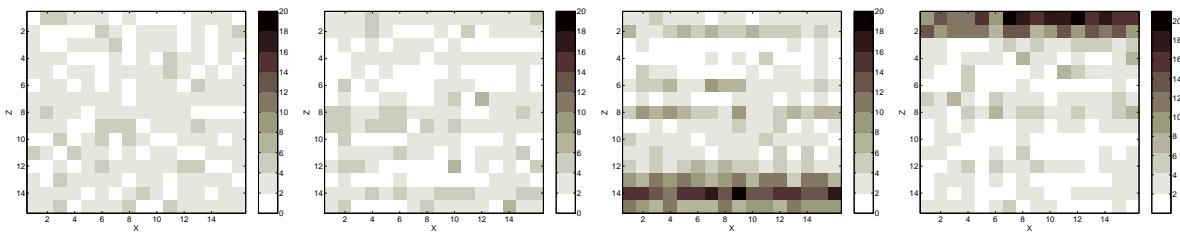


FIGURE 6.22 – Représentation spatiale de l'activité plastique cumulée d'un système (x, z) de taille $N = 16 \times 15$ après 512 événements plastiques, soumis à un taux de cisaillement : 1) $\dot{\Gamma} = 2$, 2) $\dot{\Gamma} = 0.05$, 3) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$, 4) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-4}$. On a grisé les blocs en fonction du nombre d'événements plastiques qui se sont produit sur un total de $2N$ événements.

A faible taux de cisaillement, des zones purement élastique existent dans le volume. Cela peut aussi être observé sur les courbes développées précédemment 6.21 -1) -2) : la déformation sur certaines couches présente des plateaux, le taux de cisaillement de ces couches peut être nul sur des durées de l'ordre de $1/\dot{\Gamma}$.

L'écoulement se produit par bouffées dans le temps et dans l'espace. Une autre visualisation sur les figures 6.23 -1),-2),-3), 4) permet de repérer l'activité plastique de chaque couche en fonction du temps pour différents cisaillements. L'échelle des couleurs est fonction du nombre de blocs qui deviennent plastiques au cours d'une durée $\frac{1}{\dot{\Gamma}}$ nécessaire à une déformation.

A grands taux de cisaillement $\dot{\Gamma} > 0.5$, l'activité plastique semble se répartir de façon à peu près homogène dans le milieu.

A faibles taux de cisaillement, la plasticité se développe par intermittence dans le milieu. La différence d'activité plastique entre le volume et les parois est d'autant plus marquée que le taux de cisaillement est faible. Par ailleurs, les figures -3) et -4) montrent des intervalles de temps pendant lesquels seule la partie supérieure ou la partie inférieure du milieu, c'est-à-dire au voisinage de l'une ou l'autre des parois, présente une activité plastique. Pour mieux le visualiser, on a représenté un de ces intervalles de temps sur la figure 6.24(zoom de la figure 3) à cisaillement $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$.

On voit ainsi que l'écoulement moyen représenté par les profils moyens 6.19 n'est pas représentatif de l'écoulement typique pendant des fenêtres de temps limités, pour des cisaillements $\dot{\Gamma} < 0.1$.

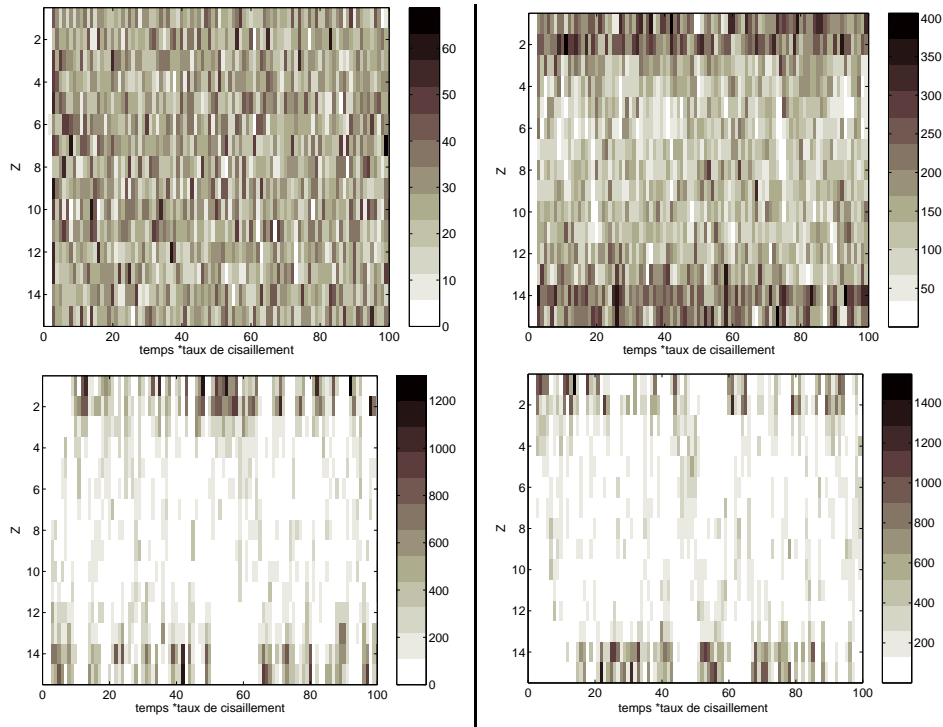


FIGURE 6.23 – $N = 16 \times 15$. Nombre d'événements plastiques sur chaque ligne au cours d'une durée $\frac{1}{\dot{\Gamma}}$, (c'est-à-dire une déformation globale), à différents taux de cisaillements 1) $\dot{\Gamma} = 2$, 2) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-2}$, 3) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$, 4) $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-4}$.

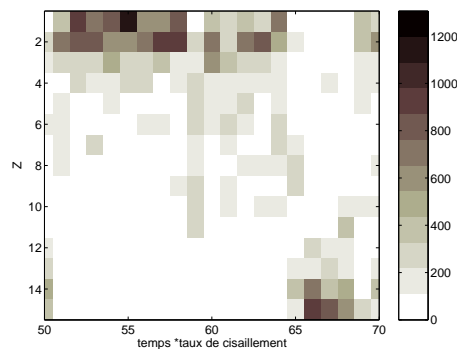


FIGURE 6.24 – $N = 16 \times 15$, $\dot{\Gamma} = 5 \cdot 10^{-3}$ zoom de la figure 6.23-3 pour une fenêtre de temps correspondant à 20 déformations. Nombre d'événements plastiques sur chaque ligne au cours d'une durée $\frac{1}{\dot{\Gamma}}$.

6.4.3 Relaxation plastique de type B

Des simulations réalisées avec la relaxation plastique de type B montrent des régimes macroscopiques similaires. En revanche l'organisation spatiale dans le milieu est spécifique. Le graphe de la figure 6.25 représente les profils moyen d'écoulement dans le régime homogène et dans le régime intermédiaire. On ne retrouve pas le comportement spécifique aux parois observé avec la relaxation plastique de type A .

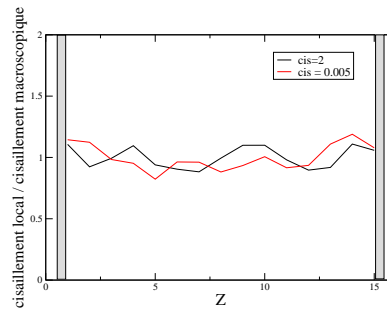


FIGURE 6.25 – $N = 16 \times 15$. Relaxation plastique de type B . Profil moyen adimensionné par le taux de cisaillement macroscopique pour 1) $\dot{\Gamma} = 2$ -2) $\dot{\Gamma} = 5.10^{-3}$.

L'organisation spatiotemporelle correspondant aux profils précédents est décrite par les graphes 6.26. A petit cisaillement, les graphes 2) et 3) montrent des intermittence, qui se produisent dans tout le milieu sans rôle particulier des parois.

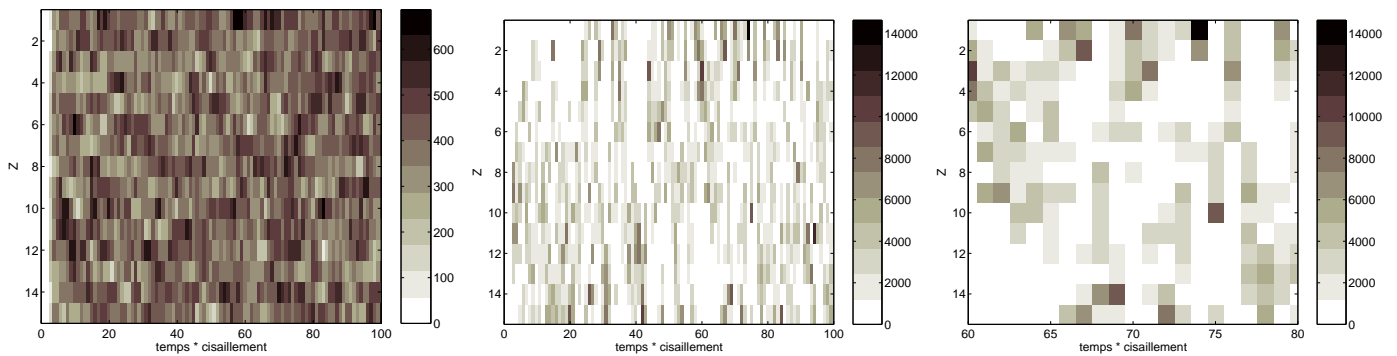


FIGURE 6.26 – $N = 16 \times 15$. Relaxation plastique de type B . Nombre d'événements plastiques sur chaque ligne au cours d'une durée $\frac{1}{F}$, (c'est-à-dire une déformation globale), à différents cisaillements 1) $\dot{\Gamma} = 2$, 2) $\dot{\Gamma} = 5.10^{-3}$ 3) Zoom du graphe précédent pour 20 déformations et $\dot{\Gamma} = 5.10^{-3}$.

6.5 Milieu fini : interprétation

Les simulations réalisées mettent en évidence des similitudes fortes avec le milieu bipériodique. On distingue trois régimes en fonction du taux de cisaillement : un régime "homogène" à fort taux de cisaillement, un régime saturé à faible taux de cisaillement et un régime intermédiaire, avec une organisation spatio-temporelle complexe. Il faut souligner deux points :

- La différence avec les simulations réalisées dans le milieu sans paroi est la géométrie de l'organisation spatio-temporelle.
- La géométrie de l'organisation spatio-temporelle dans le milieu avec paroi dépend de la nature de la relaxation plastique

On ne revient pas sur les régimes homogène et saturé qui ont été développés précédemment dans le cas bipériodique 6.3, mais on se concentre dans cette partie sur le régime intermédiaire où l'organisation spatio temporelle est spécifique à la géométrie avec paroi et au type de dynamique choisi.

6.5.1 Régime transitoire

Avec une relaxation plastique de type A, dans le régime des taux de cisaillement intermédiaires, et des taux de cisaillements faibles, la localisation du cisaillement sur deux couches au voisinage de l'une ou l'autre des parois, a été observée pour différentes situations initiales pendant de longs régimes transitoires. On ne sait pas expliquer la durée de ce régime transitoire, mais elle peut être de l'ordre de quelques dizaines de déformations pour un système de taille $N = 16 \times 15$, et est donc fondamentale à souligner. Nous n'avons pas encore exploré comment varie la durée de ce transitoire avec la taille du système, mais insistons particulièrement sur cette observation : les régimes transitoires, avec un écoulement plus marqué aux parois peuvent avoir des durées longues.

On compare ces résultats aux simulations réalisées par Kabla et Debrégeas [12] d'un modèle spécifique de mousse soumise à une déformation. Ils observent que seules les bulles au voisinages de l'une ou l'autre des parois sont cisailées pendant quelques dizaines de déformation. Ce qui est cohérent avec les résultats présentés précédemment. Dans ce modèle, ils vérifient que les réarrangements plastiques T1, induisent localement un déplacement plastique indépendant du réarrangement, ce qui correspond bien à une relaxation plastique de type A.

6.5.2 Régime intermittent

Enfin, dans ce régime intermédiaire, les simulations mettent un évidence un comportement intermittent, c'est-à-dire que certaines couches ne s'écoulent pas pendant des durées de l'ordre de $1/\dot{\Gamma}$. L'écoulement se produit grâce à des bouffées intermittentes qui ont lieu dans l'ensemble du milieu, et sont plus fréquentes aux parois. Le profil d'écoulement moyen montre un "effet de paroi", c'est-à-dire un écoulement plus marqué sur quelques couches voisines des parois, mais ce n'est pas représentatif de l'écoulement typique du milieu. On peut se représenter l'écoulement typique comme un cisaillement localisé, le plus souvent aux parois. Nous avons manqué de temps pour donner une image plus précise de l'écoulement typique et de sa dépendance en la taille du système.

On compare ce résultat aux simulations de Varnik et collaborateurs [14]. Le cisaillement d'un liquide de Lennard Jones conduit à un écoulement localisé. La bande cisailée est toujours contre l'une des deux parois. Sur des temps longs, la position de la bande peut changer. Le profil typique montre un écoulement localisé sur une paroi ou sur l'autre. D'autre part, comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, Salmon et collaborateurs [4] ont observé des comportements spatio-temporels intermittents dans un système de micelles géantes.

6.5.3 Rôle de la dynamique

Nous avons choisi de présenter quelques résultats numériques calculés avec une relaxation plastique de type B . Cette étude préliminaire montre que la nature de la relaxation plastique joue un rôle crucial dans la géométrie de l'organisation spatiale. La poursuite de cette étude devrait nous permettre de comprendre les mécanismes de la localisation au voisinage des parois, notamment la similitude de l'allure les profils moyens adimensionnés (figure 6.19) et l'allure de la contrainte relaxée en fonction de la distance à la paroi (figure 5.2). Cela reste pour l'instant une question ouverte.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de notre modèle élasto-plastique dont les seuls ingrédients sont :

- une dynamique à seuil locale pour la plasticité,
- une propagation élastique simple,
- la convection négligée.

La résolution numérique dans une géométrie de taille finie, met en évidence deux régimes qui semblent pertinents dans un contexte réaliste : un régime à fort taux de cisaillement où le milieu s'écoule de manière homogène et un régime à taux de cisaillement plus faible, où le milieu s'écoule avec une organisation spatio-temporelle particulière.

Dans ce dernier régime, l'écoulement se produit par intermittences, grâce à des bouffées d'activité plastique. L'intermittence de l'écoulement a une signature macroscopique, par exemple sur les variations temporelles de la contrainte moyenne.

Une observation spatiale moyennée dans le temps montre un profil moyen qui pourrait être assimilé à un simple effet de paroi : les couches au voisinage de chacune des parois sont plus cisillées que le volume. Pourtant, des observations spatio-temporelles montre que ce cisaillement ne peut être décrit ni comme un simple effet de parois, c'est-à-dire un simple "glissement physique", ni comme la simple localisation d'une bande de cisaillement.

En effet, l'activité plastique s'organise spatialement sur des longues durées, avec une fréquence plus grande au niveau des parois. Il faut donc faire particulièrement attention à différencier le profil moyen qui pourrait être interprété comme un écoulement sur les couches voisines des parois, d'un profil typique qui peut présenter le plus souvent une bande de cisaillement proche d'une paroi, parfois, un écoulement plus homogène, parfois une ou plusieurs bandes dans le volume.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Conclusions et perspectives

La première approche décrite dans le chapitre 2 nous a permis d'appréhender la phénoménologie des écoulements hétérogènes de fluide à seuil grâce à un modèle particulièrement simple. Toutefois, cette approche est limitée pour comprendre l'écoulement à un niveau plus microscopique.

Dans une deuxième temps, nous avons donc choisi une approche microscopique. Ainsi nous avons introduit dans les chapitres 3 puis 4,5 et 6 un modèle élasto-plastique dont les ingrédients minimalistes sont les suivants :

- une dynamique à seuil locale pour la plasticité,
- et une propagation élastique simple

Par rapport aux modèles de type élasto-plastiques que nous avons présentés dans l'introduction, il faut insister sur le fait que nous avons pu implémenter ce modèle non spécifique dans une géométrie réaliste et ainsi observer numériquement non seulement la stabilité des solutions homogènes et hétérogènes, mais aussi le comportement sous écoulement du système en régime transitoire et stationnaire. On rappelle brièvement les principaux résultats numériques. Deux régimes sont observés pour des grands systèmes : un régime à fort taux de cisaillement où le milieu s'écoule de manière homogène et un régime à taux de cisaillement plus faibles, où le milieu s'écoule avec une organisation spatio-temporelle particulière. Dans ce dernier régime, l'écoulement se produit par intermittences, grâce à des bouffées d'activité plastique. La taille caractéristique de l'organisation spatiale décroît lorsque le taux de cisaillement augmente. L'écoulement au voisinage de chacune des parois est privilégié. Toutefois, le profil typique peut montrer des bandes de cisaillement sur l'une ou l'autre des parois, (le plus fréquemment) comme des bandes dans le volume, ou un écoulement homogène (plus rarement).

Ces résultats suggèrent diverses perspectives :

- Dans les simulations présentées, nous avons appliqué au système un taux de cisaillement continu. Il peut être intéressant d'étudier la réponse du système à l'arrêt brutal du cisaillement imposé.
- A partir du modèle ainsi construit, et en modifiant le code numérique relativement simplement à l'aide d'une boucle de rétroaction entre la contrainte moyenne et le taux de cisaillement macroscopique, on peut directement simuler un écoulement à **contrainte imposée**. Ceci n'a pas encore été fait pour des questions de temps mais peut être riche.
- Dans ce modèle, nous n'avons pas tenu compte des **termes de convection** : dans les simulations les blocs ne se déplacent pas. Or ces termes peuvent jouer un rôle important sur l'organisation spatio-temporelle. En effet, on reprend la figure 6.16-3), en imaginant qu'elle représente non pas le champ de contrainte dû à trois blocs voisins en phase plastique, mais le champ de contrainte dû un seul bloc en phase plastique qui se déplace sur une ligne. Ainsi, la symétrie du champ de contrainte montre que les termes de convection vont favoriser la propagation de la plasticité dans la direction du déplacement et au contraire brouiller les effets de la propagation de la plasticité dans la direction perpendiculaire au déplacement.
- Dans nos simulations, **l'élasticité est isotrope**. Or les simulations sur les mousses de Kabla et Debrégeas [12] ou les expériences sur les matériaux granulaires de Geng

[53] montre que le milieu devient anisotrope sous cisaillement. Le rôle de l'anisotropie dans la stabilisation d'une bande de cisaillement reste une question ouverte.

- Par ailleurs le modèle ainsi écrit est **scalaire**. Potentiellement la nature tensorielle de l'élasticité et de la plasticité peuvent jouer un rôle dans les mécanisme que nous décrivons.
- Enfin, on a fait ici le choix d'une **dynamique discrète** très simple pour la phase plastique. En particulier, on a fait l'hypothèse que les temps caractéristiques de cette dynamique étaient indépendants de la contrainte de cisaillement. Il s'agit là d'une première approche simpliste. En effet les milieux que nous modélisons présentent, en général, une distribution des temps de relaxation. On avait introduit cela dans le modèle "fluidité" décrit au chapitre 2 grâce à la relaxation algébrique de la fluidité, c'est-à-dire une description du phénomène de vieillissement. A partir du modèle élasto-plastique, il serait simple d'implémenter une dynamique plastique sans temps caractéristique de relaxation, en prenant non pas une phase plastique discrète mais une "fluidité", (peut être interprétée comme un taux de plasticité local), avec, par exemple, pour dynamique locale celle que nous avons proposée dans le chapitre 2.

Cette approche élasto-plastique, a priori basée sur des ingrédients très simples, ouvre donc diverses perspectives.

Annexe A

Discrétisation du propagateur pour la modélisation numérique

Le système d'équations 5.5 du modèle élasto-plastique a été implémenté numériquement dans deux géométries différentes : une géométrie bipériodique et une géométrie périodique suivant x et finie suivant z . L'écriture de ces équations dans un milieu discret a en particulier requis la discrétisation des propagateurs calculés analytiquement dans des milieux continus au chapitre 4. Nous présentons dans cette annexe la discrétisation des propagateurs dans l'espace de Fourier.

A.1 En milieu bipériodique

Géométrie et notations

La géométrie bipériodique est décrite sur la figure A.1.

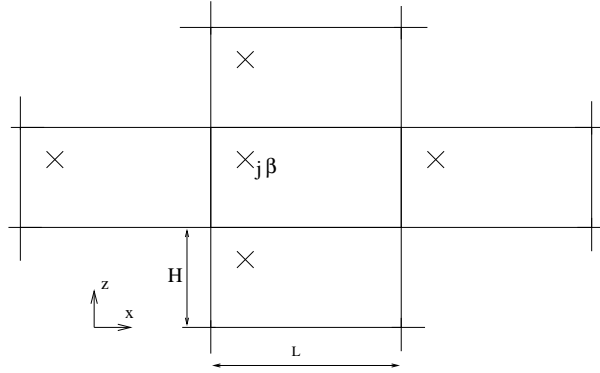


FIGURE A.1 – Le milieu de taille finie $H \times L$ est périodique dans les deux directions. La maille du réseau est a . Les lettres latines repèrent les coordonnées dans la direction x et les lettre grecques repèrent les coordonnées dans la direction z .

Les notations suivantes seront utilisées dans cette section A.1 :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{L}{a} \quad ; \quad N_z = \frac{H}{a} \\ p_m &= \frac{2\pi m}{N_x} \quad , \quad r_n = \frac{2\pi z n}{N_z}, \quad 0 \leq m < N_x, \quad 0 \leq n < N_z \\ x_i &= ia \quad , \quad z_\alpha = \alpha a, \quad 0 \leq i < N_x, \quad 0 \leq \alpha < N_z \end{aligned}$$

Ecriture dans le milieu continu

Dans le milieu continu de la géométrie décrite par la figure A.1, un événement plastique en (x_{ev}, z_{ev}) , de taille caractéristique a et d'amplitude ϵ_0 correspond au champ de déformation plastique :

$$\epsilon^{pl}(x', z') = a^2 \epsilon_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_{ev} - k L) \delta(z' - z_{ev} - \lambda H) \quad (\text{A.1})$$

Le champ de contrainte due à ce champ de déformation plastique est obtenu à partir

des relations (15) et (17) de l'article inséré dans le chapitre 4 :

$$\hat{s}(q_x, q_z) = 2\mu \hat{G}^\infty(q_x, q_z) \hat{\epsilon}^{pl}(q_x, q_z) \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{G}^\infty(q_x, q_z) = -4 \frac{q_x^2 q_z^2}{q^4} \quad (\text{A.3})$$

où les chapeaux représentent la transformation de Fourier, G^∞ est la fonction de Green dans un milieu infini.

Discrétisation

Dans le milieu discret, on utilise la transformation de Fourier discrète suivante :

$$f(x_i, z_\alpha) = \frac{1}{N_x a N_z a} \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_z-1} \tilde{f}(m, n) e^{ip_m x_i} e^{ir_n z_\alpha} \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{f}(m, n) = a^2 \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{\alpha=0}^{N_z-1} f(x_i, z_\alpha) e^{-ip_m x_i} e^{-ir_n z_\alpha} \quad (\text{A.5})$$

Grâce aux équations A.2 et A.3, le champ de contrainte dans le milieu discret est approximé de manière classique lorsque $(m, n) \neq (0, 0)$:

$$\tilde{\sigma}(m, n) = \hat{\sigma}(p_m, r_n) = 2\mu a^2 \epsilon_0 e^{-ip_m x_{ev}} e^{-ir_n z_{ev}} \hat{G}^\infty(p_m, r_n) \quad (\text{A.6})$$

Dans notre modèle, le système est piloté par le taux de cisaillement global, la perturbation du champ de déformation due à l'événement plastique ne doit donc pas modifier le taux de cisaillement global. La perturbation du champ de déformation est la somme du champ de déformation plastique et du champ de déformation élastique induit par l'événement plastique :

$$\tilde{\epsilon}(0, 0) = \tilde{\epsilon}^{pl}(0, 0) + \tilde{\epsilon}^{el}(0, 0) = 0 \quad (\text{A.7})$$

On rappelle $\sigma = 2\mu \epsilon^{pl}$. La condition précédente impose donc :

$$\tilde{\sigma}(0, 0) = -2\mu \epsilon_0 a^2 \tilde{\epsilon}(0, 0) = -2\mu \epsilon_0 a^2 \quad (\text{A.8})$$

On a ainsi discrétisé le champ de contrainte dû à un événement plastique dans l'espace de Fourier discret. On résume ici ces résultats :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}(0, 0) = -2\mu a^2 \epsilon_0 \\ \tilde{\sigma}(m, n) = 2\mu a^2 \epsilon_0 e^{-ip_m x_{ev}} e^{-ir_n z_{ev}} \hat{G}^\infty(p_m, r_n) \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

A.2 En géométrie confinée

Géométrie et notations

La géométrie confinée dans laquelle on simule les équations du modèle élasto-plastique est représentée sur la figure A.2.

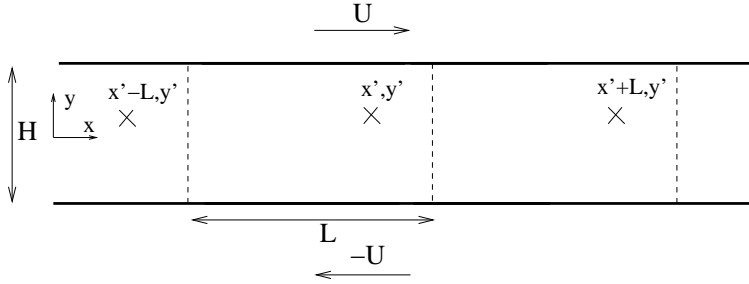


FIGURE A.2 – Le milieu est périodique de période L dans la direction x . Deux parois confinent le milieu en $z = 0, H$.

Cependant pour des raisons techniques développées dans l'annexe *B* de l'article inséré dans le chapitre 4, on introduit la géométrie bipériodique suivante :

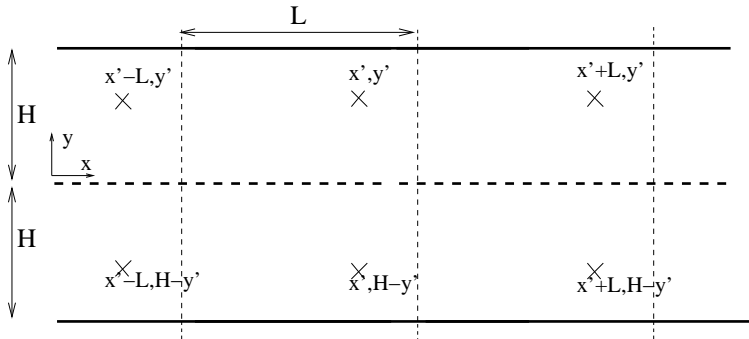


FIGURE A.3 – Le milieu est périodique de période L dans la direction x , et périodique de période $2H$ dans la direction z , ce qui n'a pas été explicitement représenté pour ne pas alourdir le schéma. La demi période $-H < z \leq 0$ est définie par symétrie comme nous le développons ci-après.

Le champ de cisaillement plastique est élargi à la demi période $-H < z \leq 0$ de sorte qu'il soit antisymétrique :

$$\epsilon^{pl}(x, 0) = 0; \epsilon^{pl}(x, -z) = -\epsilon^{pl}(x, z) \quad (\text{A.10})$$

Cela induit en particulier, l'antisymétrie du champ de contrainte :

$$\sigma(x, 0) = 0; \sigma(x, z) = -\sigma(x, -z) \quad (\text{A.11})$$

Dans la géométrie doublement périodique de la figure A.3, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{L}{a} \quad ; \quad N_z = \frac{H}{a} \\ p_m &= \frac{2\pi m}{N_x} \quad , \quad q_n = \frac{2\pi n}{2N_z} \quad , \quad 0 \leq m < N_x, \quad 0 \leq n < 2N_z \\ x_i &= ia \quad , \quad z_\alpha = \alpha a, \quad 0 \leq i < N_x, \quad 0 \leq \alpha < 2N_z \end{aligned}$$

La transformée de Fourier discrète dans cette géométrie s'écrit :

$$f(x_i, z_\alpha) = \frac{1}{N_x a 2N_z a} \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{2N_z-1} \tilde{f}(m, n) e^{ip_m x_i} e^{iq_n z_\alpha} \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{f}(m, n) = a^2 \sum_{p=0}^{N_x-1} \sum_{r=0}^{2N_z-1} f(x_i, z_\alpha) e^{-ip_m x_i} e^{-iq_n z_\alpha} \quad (\text{A.13})$$

Ecriture dans le milieu continu

Dans le milieu continu correspondant à la géométrie de géométrie décrite par la figure A.3, un événement plastique en (x_{ev}, z_{ev}) , de taille caractéristique a et d'amplitude ϵ_0 correspond au champ de déformation plastique :

$$\begin{aligned} \epsilon^{pl}(x', z') &= a^2 \epsilon_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(x' - x_{ev} - kL) \delta(z' - z_{ev} - 2lH) \\ &\quad - \delta(x' - x_{ev} - kL) \delta(z' - z_{ev} + 2lH)] \end{aligned}$$

Le champ de contrainte due à ce champ de déformation plastique dans un milieu continu est donné par les relations 4.5 et de l'article inséré dans le chapitre 4 qu'on rappelle ici :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(m, n) &= 2\mu [\hat{G}^\infty(m, n) \hat{\epsilon}^{pl}(m, n) \\ &\quad + \frac{1}{2} (ip_m \hat{O}_{xy}(m, n) + iq_n \hat{O}_{xx}(m, n)) \hat{f}_x(m, n)] \\ \hat{\sigma}(0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où les chapeaux représentent la transformation de Fourier, et \mathbf{O} le tenseur d'Oseen. Les forces "correctrices" f_x , s'appliquent sur les parois $z = 0, H$ et sont fonctions du champ de déformation plastique.

Discrétisation

Dans un premier temps, nous avons procédé de la même manière que dans la géométrie bipériodique, c'est-à-dire identifiant simplement les transformées de Fourier continues et discrètes :

$$\tilde{\sigma}(m, n) = \hat{\sigma}(q_m, p_n) \quad (\text{A.15})$$

Or, cette approximation ne conserve pas dans l'espace réel discret des propriétés qui semblent cruciales à l'étude des hétérogénéités de l'écoulement, et qui sont vérifiées lorsque le champ de contrainte est exprimé dans le milieu continu :

- (i) La contrainte moyenne $\langle \sigma \rangle_z$ est la même sur toutes les lignes

$$\langle \sigma \rangle_z = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sigma(x_i, z_\alpha), \quad \forall \alpha \quad (\text{A.16})$$

- (ii) La quantité de contrainte $\Delta\sigma$ relaxée par l'ensemble du milieu du fait d'un événement plastique est indépendante de la position (x_{ev}, z_{ev}) de l'événement dans le milieu et proportionnelle à l'amplitude de l'événement :

$$\Delta\sigma = -2\mu a^2 \epsilon_0 = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{\alpha=0}^{N_z-1} \sigma(x_i, z_\alpha) \quad (\text{A.17})$$

Ces deux dernières conditions semblent cruciales à l'étude d'un écoulement hétérogènes. En effet, si elles ne sont pas vérifiées, on peut s'attendre à générer de manière artificielle des hétérogénéités particulières dans l'écoulement. Ces deux conditions impliquent en particulier :

- (iii) Un champ de relaxation uniforme induit une champ de contrainte uniforme.

La perturbation de la contrainte exprimée dans l'expression A.14 comporte deux contributions : une partie principale, exprimée grâce au propagateur dans un milieu infini G^∞ , et une partie correctrice qui assure un déplacement nul aux parois $z = 0, H$. La partie principale ne contribue pas à la moyenne par ligne, le non respect des conditions (i), (ii) et (iii) n'est dû qu'à la contribution de la partie correctrice. On s'intéresse donc seulement à la discrétisation de la partie correctrice dans un premier temps.

A posteriori, on peut comprendre que l'approximation A.15 est peu adaptée à la partie correctrice. En effet, ce type d'approximation revient à identifier la transformée de Fourier de la dérivée des forces correctrices f avec $q_n \tilde{f}(m, n)$. Or les forces correctrices présentent des discontinuités, elles sont non nulles seulement en $z = 0, H$. Nous présentons ici la démarche qui nous a conduit à adopter une discrétisation ad'hoc pour la partie correctrice qui vérifie les trois conditions (i), (ii) et (iii).

On construit cette discrétisation à partir du respect de la condition (iii). Le sens d'un champ plastique homogène dans cette géométrie antisymétrique est particulier. Le champ homogène s'écrit en effet :

$$\begin{aligned} \epsilon(x_i, 0) &= \epsilon(x_i, H) = 0, \quad \forall i \\ \epsilon(x_i, z_\alpha) &= -\epsilon_0, \quad \forall i, 0 < \alpha < N_z \\ \epsilon(x_i, z_\alpha) &= \epsilon_0, \quad \forall i, N_z < \alpha < 2N_z \end{aligned}$$

L'expression de la transformée de Fourier discrète, définie par A.13, du champ de déformation plastique est :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(m, n) &= 0 \text{ si } m \neq 0 \\ \tilde{\epsilon}(0, n) &= 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \tilde{\epsilon}(0, n) &= -2iN_x a^2 \epsilon_0 \frac{\cos(q_n/2)}{\sin(q_n/2)}, \text{ si } n \text{ est impair} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Lorsqu'on calcule la perturbation de la contrainte due au champ de déformation plastique avec l'approximation A.15, on obtient une expression lourde pour la contribution

des forces correctrices, dont on donne simplement l'allure :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(m, n) &= 0 \text{ si } m \neq 0 \\ \tilde{\sigma}(0, n) &= 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \tilde{\sigma}(0, n) &= -\frac{-i\mathcal{K}}{q_n} \text{ si } n \text{ est impair}\end{aligned}\tag{A.19}$$

où \mathcal{K} est une fonction de $\tilde{\epsilon}_0$. Comme cela a été évoqué précédemment, avec ce type d'approximation, le champ de contrainte décrit par A.19 n'est pas homogène, la condition (iii) n'est pas vérifiée.

A ce stade, nous définissons de manière ad'hoc, l'opérateur dérivée partielle par rapport à z dans l'espace de Fourier discret, en identifiant systématiquement dans l'expression A.14, pour la partie correctrice seulement

$$\frac{1}{q_n} \longleftrightarrow 2 \frac{\cos(q_n/2)}{\sin(q_n/2)}\tag{A.20}$$

Par ailleurs, on modifie également l'opérateur dérivée partielle par rapport à x . La dérivée partielle par rapport à x dans l'espace direct discret s'écrit

$$\partial_x f(x_i) = \frac{1}{a}(f(x_i + a/2) - f(x_i - a/2))$$

Cette égalité s'écrit dans l'espace de Fourier discret :

$$\partial_x \tilde{f}(m, n) = 2 \sin(p_m/2) \tilde{f}(m, n)$$

Donc, dans l'expression A.14 de la perturbation du champ de contrainte, on identifie systématiquement, pour la partie correctrice seulement :

$$p_m \longleftrightarrow 2 \sin(p_m/2)\tag{A.21}$$

Grâce à cette réécriture ad'hoc de la partie correctrice de l'expression A.14 en milieu discret, les trois conditions (i), (ii), (iii) sont vérifiées. En particulier, quelque soit la position d'un événement unique d'amplitude ϵ_0 dans le milieu :

$$\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{\alpha=0}^{N_z-1} \sigma(x_i, z_\alpha) = -2\mu a^2 \epsilon_0\tag{A.22}$$

Il est clair que cette procédure redonne la description continue à grande échelle (petits vecteurs d'onde), et constitue de fait une discrétisation reproduisant la physique en jeu.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] E. CAPPELAERE, J.F. BERRET, J.P. DECRUPPE, R. CRESSELY, et P. LINDNER. « Rheology, birefringence, and small-angle neutron scattering in a charged micellar system : Evidence of a shear-induced phase transition ». *Phys. Rev. E*, 56 : 1869, 1997.
- [2] L. B. CHEN, B. J. ACKERSON, et C. F. ZUKOSKI. « Rheological consequences of microstructural transitions in colloidal crystals ». *Journal of Rheology*, 38 : 193, 1994.
- [3] E. FISCHER et P.T. CALLAGHAN. « Velocity profiles in shear-banding wormlike micelles ». *Phys. Rev. E*, 64 : 011591, 2001.
- [4] J.B. SALMON. « Ecoulement d'une phase lamellaire lyotrope : rhéochaos, systèmes dynamique et vélocimétrie locale ». *Thèse de l'université de Bordeaux 1*, 2003.
- [5] L. COURBIN, P. PANIZZA, et J.B. SALMON. « Observation of droplet size oscillations in a two phase fluid under shear flow ». *cond-mat/0303225*, 2003.
- [6] M. Carmen MIGUEL, A. VESPIGNANI, S. ZAPPERI, J. WEISS, et J.R. GRASSO. « Intermittent dislocation flow in viscoplastic deformation ». *Nature*, 413 : 467 – 470, 2001.
- [7] F. MERTENS, S. V. FRANKLIN, et M. MARDER. « Dynamics of Plastic Deformation Fronts in an Aluminum Alloy ». *Phys. Rev. Lett.*, 78 : 4502–4505, 1997.
- [8] W. LOSERT, L. BOCQUET, T. C. LUBENSKY, et J. P. GOLLUB. « Particle Dynamics in Sheared Granular Matter ». *Phys. Rev. Lett.*, 85 : 1428, 2000.
- [9] F. PIGNON, A. MAGNIN, et J.M. PIAU. « Thixotropic colloidal suspensions and flow curves with minimum : Identification of flow regimes and rheometric consequences ». *J. Rheol.*, 40 : 573, 1996.
- [10] P. COUSSOT, J.S. RAYNAUD, F. BERTRAND, P. MOUCHERONT, J. P. GUILBAUD, H. T. HUYNHAND, S. JARNY, et D. LESUEUR. « Coexistence of liquid and solid phases in flowing soft glassy materials ». *Phys. rev. Lett.*, 88 : 218301–1, 2002.
- [11] G. DEBRÉGEAS, H. TABUTEAU, et J.-M di MEGLIO. « Deformation and Flow of a Two-Dimensional Foam under Continuous Shear ». *Phys. Rev. Lett.*, 87 : 178305, 2001.
- [12] A. KABLA et G. DEBRÉGEAS. « Local Stress Relaxation and Shear-banding in a Dry Foam under Shear ». *Phys. Rev. Lett.*, 90 : 258303, 2003.
- [13] J.-B. SALMON, L. BÉCU, S. MANNEVILLE, et A. COLIN. « Towards local rheology of emulsions under Couette flow using Dynamic Light Scattering ». *Eur. Phys. J. E*, 10 : 209, 2003.

- [14] F. VARNIK, L. BOCQUET, et J.-L. BARRAT. « A study of the static yield stress in a binary Lennard-Jones glass ». *cond-mat/0309089*, 2003.
- [15] H.M. PRINCEN. « Rheology of foams of highly concentrated emulsions : Elastic properties and yield stress of a cylindrical model system ». *Journal of Colloid and Interface science*, 91 : 160, 1983.
- [16] F. ROUYER, S. COHEN-ADDAD, Michèle VIGNES-ADLER, et Reinhard HÖHLER. « Dynamics of yielding observed in a three-dimensional aqueous dry foam ». *Phys. Rev. E*, 67 : 021405, 2003.
- [17] P. SOLLICH. « Rheological constitutive equation for a model of Soft Glassy Materials ». *Phys. Rev. E*, 58 : 738, 1998.
- [18] P. SOLLICH, F. LEQUEUX, P. HÉBRAUD, et M. E. CATES. « Rheology of Soft Glassy Materials ». *Phys. Rev. Lett.*, 78 : 2020, 1997.
- [19] J.-P. BOUCHAUD. « Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems ». *J. Phys. France I*, 2 : 1705, 1992.
- [20] M. L. FALK et J. S. LANGER. « Dynamics of viscoplastic deformation in amorphous solids ». *Phys. Rev. E*, 57 : 7192, 1998.
- [21] J.S. LANGER. « Microstructural shear localization in plastic deformation of amorphous solids ». *Phys. Rev. E*, 64 : 011504, 2001.
- [22] A. LEMAÎTRE. « Rearrangements and Dilatancy for Sheared Dense Materials ». *Phys. Rev. Lett.*, 89 : 195503, 2002.
- [23] A. LEMAÎTRE. « A Dynamical Approach to Glassy Materials ». *cond-mat/0206417*, 2003.
- [24] F. SPAEPEN. « A microscopic mechanism for steady state inhomogeneous flow in metallic glasses ». *Acta Metallurgica*, 25 : 407, 1977.
- [25] P. HÉBRAUD et F. LEQUEUX. « Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials ». *Phys. Rev. Lett.*, 81 : 2934, 1998.
- [26] C. DEREK, A. AJDARI, et F. LEQUEUX. « Mechanics near a jamming transition : a minimalist model ». *Faraday Discuss.*, 112 : 195, 1999.
- [27] C. DEREK, A. AJDARI, et F. LEQUEUX. « Rheology and aging : a simple approach ». *Eur. Phys. J. E*, 4 : 355, 2000.
- [28] A. AJDARI. « Mechanical aging and non-linear rheology of concentrated colloidal suspensions : experimental facts and simple models ». *Les Houches-Session LXXVII*, 2003.
- [29] G. PORTE, J.F. BERRET, et J.L. HARDEN. « Inhomogeneous flows of complex fluids : mechanical instability versus non equilibrium phase transition ». *J. Phys. II*, 7 : 459, 1997.
- [30] P. NOZIÈRES et D. QUEMADA. « A possible instability mechanism for plug formation in a sheared suspension flow ». *Europhys. Lett.*, 2 : 129, 1986.
- [31] P.D. OLMSTED et P. M. GOLDBART. « Isotropic-nematic transition in shear flow : state selection, coexistence, phase transitions, and critical behaviour ». *Phys. Rev. A*, 46 : 4966, 1992.
- [32] P.D. OLMSTED et C.-Y. D. LU. « Coexistence and phase separation in sheared fluids ». *Phys. Rev. E*, 56 : 55, 1997.

- [33] P.D. OLMSTED et C.-Y. D. LU. « Phase separation of rigid rod suspensions in the shear flow ». *Phys. Rev. E*, 60 : 4397, 1999.
- [34] C.-Y. D. LU, P.D. OLMSTED, et R.C. BALL. « Effects of nonlocal stress on the determination of shear banding flow ». *Phys. Rev. Lett.*, 84 : 642, 2000.
- [35] O. RADULESCU et P.D. OLMSTED. « Matched asymptotic solutions for the steady banded flow of the diffusive Johnson Segalman model in various geometry ». *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 91 : 143, 2000.
- [36] P.D. OLMSTED, O. RADULESCU, et C.-Y. D. LU. « Johnson Segalman model with a diffusion term in cylindrical Couette flow ». *J. Rheol.*, 44 : 257, 2000.
- [37] J. K. G. DHONT. « A constitutive relation describing the shear banding transition ». *Phys. Rev. E*, 60 : 4534, 1999.
- [38] S. BUTLER et P. HARROWELL. « Factors determining crystal-liquid coexistence under shear ». *Nature*, 415 : 1008, 2002.
- [39] A. AJDARI. « Rheological behavior of a solution of particles aggregating on the containing walls ». *Phys. Rev. E*, 58 : 6294, 1998.
- [40] D. J. DURIAN. « Bubble-scale model of foam mechanics : Melting, nonlinear behavior, and avalanches ». *Phys. rev. E*, 55 : 1739, 1997.
- [41] S. TEWARI, D. SCHIEMANN, D. J. DURIAN, C. M. KNOBLER, S. A. LANGER, et A. J. LIU. « Statistics of shear-induced rearrangements in a two-dimensional model foam ». *Phys. Rev. E*, 60 : 4385, 1999.
- [42] I. K. ONO, S. TEWARI, S. A. LANGER, et A. LIU. « Velocity fluctuations in a steadily sheared model foam ». *Phys. Rev. E*, 67 : 061503, 2003.
- [43] K. CHEN, P. BAK, et S. P. OBUKHOV. « Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes ». *Phys. Rev. A*, 43 : 625, 1991.
- [44] V.V. BULATOV et A.S. ARGON. « A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior : I Numerical approach and strain localisation ». *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2 : 167, 1994.
- [45] V.V. BULATOV et A.S. ARGON. « A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior : II A study of the glass transition and structural relaxation ». *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2 : 185, 1994.
- [46] V.V. BULATOV et A.S. ARGON. « A stochastic model for continuum elasto-plastic behavior : III Plasticity in orderer versus disordered solids. ». *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2 : 203, 1994.
- [47] J.C. BARET, D. VANDEMBROUCQ, et S. ROUX. « An extremal model for amorphous media plasticity ». *Phys. Rev. Lett.*, 89 : 195506, 2002.
- [48] L. BOCQUET, W. LOSERT, D. SCHALK, T.C. LUBENSKY, et J.P. GOLLUB. « Granular Shear Flow Dynamics and Forces : Experiment and Continuum Theory ». *Phys. Rev. E*, page 011307, 2002.
- [49] P. COUSSOT, Q. D. NGUYEN, H. T. HUYNH, et D. BONN. « Viscosity bifurcation in thixotropic, yielding fluids ». *J. Rheol.*, 46 : 573, 2002.
- [50] A. ARADIAN et M.E. CATES. « Flow instabilities in complex fluids : Nonlinear rheology and slow relaxations ». *cond-mat/0310660*, 2003.

-
- [51] S. M. FIELDING et P.D. OLMSTED. « Spatio-temporal oscillations and rheochaos in a simple model of shear banding ». *cond-mat/0310658*, 2003.
- [52] J.D.ESHELBY. « The determination of the elastic field of an Ellipsoidal inclusion, and related problems ». *Proc. Royal Soc.*, A241, 1957.
- [53] J. GENG, G. REYDELLET, E. CLÉMENT, et R.P. BEHRINGER. « Green's function measurements in 2D granular materials ». *Physica D*, 182 : 274, 2003.