



HAL
open science

Concentration de genre et laminarité

Henry de Thélin

► **To cite this version:**

Henry de Thélin. Concentration de genre et laminarité. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2003. Français. NNT: . tel-00005171

HAL Id: tel-00005171

<https://theses.hal.science/tel-00005171>

Submitted on 1 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
présentée en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES
par

Henry de Thélin

Concentration de genre et laminarité

Soutenue le 11 décembre 2003, devant le jury composé de :

F. Berteloot	professeur, université Toulouse III	examineur
D. Cerveau	professeur, université Rennes I	rapporteur
J. Duval	professeur, université Toulouse III	directeur
N. Sibony	professeur, université Paris Sud	examineur
J-C. Sikorav	professeur, ENS Lyon	rapporteur

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, université Paul Sabatier,
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cédex 4, France.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma vive gratitude à Julien Duval pour son aide, sa disponibilité et sa gentillesse tout au long de cette thèse. Ce fut un réel plaisir de travailler sous sa direction.

Je suis très reconnaissant à François Berteloot et Nessim Sibony de m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury et je remercie plus particulièrement Dominique Cerveau et Jean-Claude Sikorav qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie chaleureusement Yveline Panabière et Agnès Requis dont le travail rend plus facile la vie à l'Université.

Je remercie aussi mes collègues doctorants, et surtout Camille, Laurent et Olivier, car ils ont créé dans notre bureau une atmosphère sympathique et propice au travail.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, et j'adresse toute mon affection à Mathilde qui m'a soutenu tout au long de ces trois années.

Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse à deux problèmes.

Le premier est de savoir si une limite de suite de courbes analytiques conserve un caractère analytique.

Le second concerne la dynamique holomorphe dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On cherche à voir si le genre de courbes du type $C_n = f^{-n}(L)$ (où f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et L une droite projective générique) se concentre dans des zones dynamiquement intéressantes.

Soit C_n une suite de courbes analytiques de la boule unité B de \mathbb{C}^2 . Si l'aire des C_n reste bornée alors, quitte à extraire, C_n converge vers une courbe analytique. C'est le théorème de Bishop (voir [4]).

Quand l'aire n'est plus uniformément majorée, on espère créer une lamination comme limite des C_n . Cependant, un excès de genre peut ôter tout caractère analytique à cette limite : dans l'exemple de Wermer (voir [10]), une suite de courbes dont le genre augmente plus vite que l'aire converge vers un compact ne contenant aucun disque holomorphe.

Notre lamination limite sera comprise dans un sens faible, celui de courant laminaire introduit par E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie dans [2]. Un $(1, 1)$ -courant positif est laminaire s'il s'écrit localement comme une intégrale de courants d'intégration sur une famille de disques, hors d'un ensemble négligeable (voir le paragraphe 1.1.1 pour plus de détails).

L'objet du premier chapitre est alors de démontrer :

Théorème 1. *Soit C_n une suite de courbes analytiques lisses de la boule unité B de \mathbb{C}^2 (s'étendant un peu au-delà de \overline{B}).*

On note A_n l'aire de C_n , G_n le genre de C_n et on suppose que $T_n = \frac{[C_n]}{A_n}$ converge vers un $(1, 1)$ -courant positif fermé T de B (toujours possible quitte à extraire).

Alors, si $G_n = O(A_n)$, T est laminaire.

Cet énoncé est une version locale de résultats précédents, de nature globale dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$: dans [3], Bedford et Smillie montrent que, pour toute suite de courbes rationnelles C_n de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ à singularité unique et irréductible, les

limites de $\frac{[C_n]}{A_n}$ sont laminaires. Dans [8], leur résultat a été étendu par R. Dujardin aux courbes algébriques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de genre en $O(A_n)$ à singularités raisonnables.

L'ingrédient principal, dans leur situation, est la formule de Riemann-Hurwitz. Dans notre cas, on ne peut pas l'utiliser faute de revêtements au-dessus des directions complexes. Cependant, en modifiant un peu les courbes C_n , on obtiendra une inégalité de Riemann-Hurwitz approchée qui permettra de conclure.

Une inégalité de ce type existe déjà dans la théorie d'Ahlfors. On verra (voir l'appendice B), que la méthode utilisée dans la preuve du théorème précédent permet de la retrouver.

Signalons l'intérêt du théorème 1 pour l'étude de courants limites de $\frac{[C_n]}{A_n}$ où C_n est une courbe algébrique lisse de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (par exemple $C_n = f^{-n}(L)$ où f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et L une droite projective générique). En effet, malgré un genre total en $O(A_n^2)$, si on sait trouver un ouvert où le genre se concentre peu (en $O(A_n)$), on en déduit la laminarité des courants limites dans celui-ci. Cela nous conduit naturellement au deuxième chapitre de la thèse : la concentration du genre des courbes lisses précédentes, issues de la dynamique.

A partir d'un endomorphisme holomorphe, f , de degré $d \geq 2$, J.E. Fornæss et N. Sibony ont défini le courant de Green, T , associé à f (voir [12] et [13]), dont le support est l'ensemble de Julia de f . Ce courant possède un potentiel continu : on peut donc définir son auto-intersection $T \wedge T$ (voir [12]). D'autre part, en généralisant un résultat de Fornæss et Sibony (voir [14]), C. Favre et M. Jonsson (voir [11]) ont montré que ce courant est naturel d'un point de vue dynamique : il équirépartit les préimages de droites génériques. En effet, si $C_n = f^{-n}(L)$ avec L une droite générique, alors $\frac{[C_n]}{A_n} = \frac{[C_n]}{d^n}$ converge vers T . Autrement dit, dans notre situation, la laminarité de T se ramène à l'étude du genre de $f^{-n}(L)$.

D'autres approches ont été utilisées pour montrer la laminarité de T dans certaines situations.

En effet, Fornæss et Sibony (voir [15]) ont montré que pour des endomorphismes hyperboliques (dans un sens fort), le courant T est laminaire en dehors du support de la mesure $T \wedge T$.

Dans [1], Bedford et Jonsson considèrent des endomorphismes qui laissent une droite totalement invariante. Dans cette situation, ils montrent que le courant de Green est laminaire dans le bassin d'attraction de cette droite.

Dans ce qui précède, on voit que l'auto-intersection joue un rôle fondamental dans la laminarité. Cela est essentiellement dû au fait qu'un courant à potentiel continu qui s'écrit localement comme une intégrale de courants

d'intégration sur une famille de disques disjoints est d'auto-intersection nulle.

Quand f est un endomorphisme critiquement fini, on verra que le genre de $f^{-n}(L)$ hors d'un petit voisinage du support de $T \wedge T$ est en $O(d^n)$ (pour des droites L génériques). Autrement dit, dans ce cas, le courant de Green est laminaire en dehors du support de $T \wedge T$.

Pour un endomorphisme quelconque, f , on ne sait pas si on a le même contrôle. Cependant, si f est générique, le genre de $f^{-n}(L)$ hors d'un petit voisinage du support de $T \wedge T$ est en $O(d^{n(1+\epsilon)})$. Plus précisément, on a le :

Théorème 2. *Pour f générique parmi les endomorphismes de degré d , on a :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{L \in (\mathbb{P}^2)^*} \text{Genre}(f^{-n}(L) - U) \leq \log d,$$

où U est un petit voisinage du support de $T \wedge T$.

La démonstration de ce théorème se fera essentiellement en deux étapes. En effet, si on admet un instant que les anses de $f^{-n}(L)$ sont infiniment petites, on constate qu'une anse de $f^{-1}(L)$, tirée en arrière par f^{n-1} , se comporte comme $f^{-(n-1)}(x)$ (où x est un point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Autrement dit, la première étape de la démonstration consistera à contrôler le nombre de points de $f^{-n}(x)$ hors d'un petit voisinage du support de $T \wedge T$. Celle-ci s'énonce :

Proposition 1. *Pour f générique parmi les endomorphismes de degré d , on a :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{x \in \mathbb{P}^2} \text{Cardinal}(f^{-n}(x) - U) \leq \log d,$$

où U est un petit voisinage du support de $T \wedge T$.

La seconde étape consistera alors à dominer la taille des anses. Pour cela, on utilisera des modules d'anneaux et des comparaisons aire-longueur.

Sommaire

1	Courants laminaires	1
1.1	Courants laminaires	1
1.2	Cas modèle	7
1.3	Cas général	10
1.3.1	Simplification géométrique des courbes C_n	10
1.3.2	Comment se rapprocher du cas modèle	10
1.3.3	Majoration du nombre de sommets et minoration du nombre d'arêtes	11
2	Concentration du genre	15
2.1	Préliminaires de dynamique holomorphe	15
2.1.1	Définition du courant de Green	15
2.1.2	Mesure de Green	16
2.2	Un exemple : le cas critique fini	17
2.3	Contrôle des préimages des points	20
2.3.1	Entropie topologique	20
2.3.2	Majoration du cardinal d'ensembles (n, δ) -séparés	24
2.3.3	Construction d'ensembles (n, δ) -séparés	25
2.3.4	Fin de la démonstration	27
2.4	Contrôle du genre	28
2.4.1	Un peu de géométrie hyperbolique	28
2.4.2	Construction de la partition dynamique de $f^{-n}(L)$	30
2.4.3	Majoration du genre des préimages de droites	31
2.4.4	Contrôle des longueurs des arêtes de la partition	32
A	Généricité	35
B	Théorie d'Ahlfors	39
B.1	Cas modèle	40
B.2	Cas général	41
B.2.1	Comment se rapprocher du cas modèle	41

B.2.2 Majoration du nombre de sommets et minoration du nombre d'arêtes	43
Bibliographie	47

Chapitre 1

Courants laminaires

Dans ce chapitre, on va donner un critère pour que la limite d'une suite de courbes analytiques de la boule unité de \mathbb{C}^2 soit une lamination (en un sens faible).

Voici le plan de ce texte. Dans un premier paragraphe, on définira la classe des courants laminaires. Dans le second, on démontrera dans un cas modèle le critère qui donne la laminarité des valeurs d'adhérence d'une suite de courbes. L'objectif du dernier paragraphe sera alors de s'y ramener.

1.1 Courants laminaires

Notre référence pour la laminarité est l'article de Bedford, Lyubich et Smillie (voir [2]).

Définition 1.1.1. *Un courant T est **laminé** dans un bidisque, si dans celui-ci il s'écrit $\int_{\tau} [\Delta_t] d\lambda(t)$; ici les Δ_t sont des graphes, deux à deux disjoints, de fonctions holomorphes au-dessus d'une des directions du bidisque, et λ une mesure positive portée par une transversale aux graphes.*

A partir de cette définition, on voit qu'un courant laminé est nécessairement fermé.

D'autre part, les courants laminés ont de bonnes propriétés de compacité, par le théorème de Montel :

Proposition 1.1.1. *Soit T_n une suite de courants laminés dans un bidisque. Si la masse des mesures transverses λ_n reste bornée, alors, quitte à extraire, T_n converge vers un courant T qui est laminé dans le bidisque.*

Preuve. La démonstration de cette proposition va se faire en deux étapes. Dans la première, on va passer à la limite sur certains graphes qui composent

T_n de façon à obtenir un courant T laminé dans le bidisque B . Dans la seconde, on montrera que quitte à extraire une sous-suite, T_n converge vers ce courant T .

Dans toute la suite, on prendra $B = D(0, 1)^2$.

Construction d'un courant T laminé dans B

On prend comme transversale $\tau = \{0\} \times D(0, 1)$. Les courants T_n s'écrivent alors $\int_{\tau} [\Delta_n(t)] d\lambda_n(t)$. Modulo l'extraction d'une sous-suite, on peut supposer que λ_n converge vers une mesure λ .

C'est cette convergence que l'on veut étendre aux graphes $\Delta_n(t)$.

Si Δ_n est une suite de graphes d'applications holomorphes $f_n : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge. Pour faire converger les $\Delta_n(t)$, il s'agit alors de faire des extractions successives : c'est ce procédé que l'on va décrire maintenant.

On fixe k dans \mathbb{N} et on découpe le carré centré en 0 et de longueur 2 (inclus dans τ) en k^2 carrés égaux. Quitte à bouger un peu le quadrillage, on supposera que λ ne charge pas son bord (pour tout k).

Soit C un carré de ce quadrillage chargé par λ et t un point de $C \cap \text{support}(\lambda)$.

La convergence de λ_n vers λ implique l'existence d'une suite $t_{n_j} \in \text{support}(\lambda_{n_j})$ avec t_{n_j} qui tend vers t . On peut donc construire une sous-suite de n_j de sorte que $\Delta_{n_j}(t_{n_j})$ converge vers un graphe qui passe par t .

Par un processus d'extractions successives, on construit une sous-suite $\phi_k(n)$ de façon que la même propriété soit vraie pour les autres carrés du quadrillage chargés par λ .

Les graphes, $\Delta^k(t)$, ainsi obtenus sont disjoints. En effet, si deux d'entre eux se rencontrent, alors les graphes de $T_{\phi_k(n)}$ qui les approximent se croisent encore. Autrement dit, on a construit un courant laminé S_k défini par :

$$S_k = \int_{\tau} [\Delta^k(t)] d\mu_k(t),$$

où μ_k est une discrétisation de λ (i.e. $\mu_k = \sum_{i=1}^{k^2} \lambda(C_i) \delta_{t_i}$ où C_1, \dots, C_{k^2} sont les carrés du quadrillage et les t_i les points de $C_i \cap \text{support}(\lambda)$ considérés précédemment). Le courant S_k sera appelé discrétisation de T .

Maintenant, on peut faire la même chose au cran $k + 1$: on construit une sous-suite $\phi_{k+1}(n) \subset \phi_k(n)$ qui vérifie les propriétés ci-dessus à l'étape $k + 1$. En continuant le procédé, on obtient une famille de graphes sur un ensemble dénombrable et dense du support de λ . D'autre part, l'inclusion de $\phi_{k+1}(n)$ dans $\phi_k(n)$ implique que tous ces graphes sont disjoints dans B .

Cette famille peut alors être fermée par passage à la limite de sorte que tous les points t du support de λ aient un graphe $\Delta(t)$. Les graphes ainsi contruits

sont encore disjoints. Autrement dit, on a fabriqué un courant T laminé dans B défini par :

$$T = \int_{\tau} [\Delta(t)] d\lambda(t),$$

Extraction d'une sous-suite de T_n qui converge vers T

Pour comparer les courants T et T_n , on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que tout couple de graphes disjoints de fonctions holomorphes au-dessus de $D(0, 1)$, (Δ_1, Δ_2) , avec $d(\Delta_1 \cap \tau, \Delta_2 \cap \tau) \leq \delta$ vérifie $d_{C^1}(\Delta_1^r, \Delta_2^r) \leq \epsilon$. Ici Δ_i^r est la partie du graphe Δ_i au-dessus de $D(0, r)$ (avec $0 < r < 1$).*

Preuve. Grâce à l'inégalité de Cauchy, il suffit de montrer $d_{C^0}(\Delta_1^\rho, \Delta_2^\rho) \leq \epsilon$ au lieu de $d_{C^1}(\Delta_1^r, \Delta_2^r) \leq \epsilon$ (avec $r < \rho < 1$).

Supposons que cela soit faux : on peut donc construire deux suites de disques disjoints $\Delta_{1,n}$ et $\Delta_{2,n}$ avec $d(\Delta_{1,n} \cap \tau, \Delta_{2,n} \cap \tau) \rightarrow 0$ et $d_{C^0}(\Delta_{1,n}^\rho, \Delta_{2,n}^\rho) \geq \epsilon$. Quitte à extraire des sous-suites, $\Delta_{i,n}$ converge vers Δ_i ($i = 1, 2$ au-dessus de $\overline{D(0, \rho)}$). Alors, par construction, Δ_1 rencontre Δ_2 sur τ et $d_{C^0}(\Delta_1^\rho, \Delta_2^\rho) \geq \epsilon$. Autrement dit, juste avant la limite, on a $\Delta_{1,n}$ qui coupe $\Delta_{2,n}$: ce qui est impossible.

◇

Une première conséquence de ce lemme est que le courant T est aussi proche que l'on veut de son discrétisé S_k (si k est grand).

D'autre part, en remplaçant les points t du support de μ_k par leurs approximations dans le support de $\lambda_{\phi_k(n)}$ et les graphes de S_k par les graphes de $T_{\phi_k(n)}$ correspondants, on obtient un courant qui est aussi proche que l'on veut de S_k (donc de T).

Enfin, ce courant est proche de la discrétisation de $T_{\phi_k(n)}$ donc de $T_{\phi_k(n)}$.

La combinaison de ces remarques conduit à la construction d'une sous-suite de T_n qui converge vers T .

◇

On pourrait imaginer définir les courants laminaires comme les courants localement laminés. Dans notre situation, cette définition serait trop forte : il n'y a pas de courants de ce type-là à potentiel continu dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. En effet, un tel courant est d'auto-intersection nulle. D'autre part $\int T \wedge T = 1$ (quitte à normaliser T). Tout ceci nous conduit à une notion plus souple (dite laminarité faible dans [2]) :

Définition 1.1.2. *Un courant T est laminaire, s'il s'écrit comme une somme $\sum T_j$ avec T_j laminé dans U_j , et une compatibilité entre les T_j : quand deux graphes se rencontrent, leur intersection est un disque.*

On va donner deux exemples de courants laminaires : dans le premier, on construira un courant T , d'auto-intersection non nulle, qui est laminaire dans \mathbb{C}^2 . Le second mettra en lumière l'obstacle que joue l'auto-intersection pour la laminarité : on donnera un exemple de courant T qui sera laminaire seulement en dehors du support de son auto-intersection.

Exemple 1. Voir [9].

On considère, dans \mathbb{C}^2 , le courant $T = dd^c \max(\log^+ |z|, \log^+ |w|)$. Il s'écrit comme une somme de courants laminés :

$$\int_{S^1} [\{e^{i\theta}\} \times \mathbb{D}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [\mathbb{D} \times \{e^{i\theta}\}] d\lambda(\theta) + \int_{S^1} [V_\theta] d\lambda(\theta),$$

où λ est la mesure de Lebesgue de S^1 , \mathbb{D} est le disque unité de \mathbb{C} , et V_θ désigne l'ensemble $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2, z = e^{i\theta}w, |z| > 1\}$.

Le courant T est donc laminaire dans \mathbb{C}^2 .

Dans cet exemple, l'auto-intersection de T est la mesure de Lebesgue du tore unité.

Exemple 2. On considère, dans \mathbb{C}^2 , le courant $T = dd^c \log^+ \|z\|$. Par définition T est nul dans la boule unité B . D'autre part, sur $\mathbb{C}^2 - \overline{B}$, T s'écrit $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} [L_a] d\nu(a)$ où ν est la mesure de Lebesgue sur la droite à l'infini et L_a est la droite qui joint l'origine au point a .

Autrement dit, T est laminaire en dehors de la sphère unité.

Maintenant, on peut voir que d'une part l'auto-intersection du courant T est une mesure portée par la sphère et que d'autre part T charge celle-ci.

Enfin, si le courant T était laminaire sur la sphère unité, celle-ci contiendrait nécessairement des disques holomorphes, ce qui est impossible.

Soit C_n une suite de courbes analytiques de la boule unité de \mathbb{C}^2 , d'aire A_n .

La laminarité d'un courant est liée à la présence dans son support de graphes de fonctions holomorphes au-dessus d'une direction complexe.

Pour montrer qu'une limite de $T_n = \frac{[C_n]}{A_n}$ est laminaire, la méthode sera donc de construire de tels graphes dans les courbes C_n , puis de passer à la limite. Pour décrire cette méthode et en montrer les limites, on va traiter deux exemples.

Le premier est celui de Wermer (voir [10]) : on verra qu'un excès de genre pour les courbes C_n entraîne la non-laminarité de la limite.

Dans le second, on traitera le cas opposé où C_n est une suite de disques dans un bicarré $C(0, 1)^2$ avec le bord de C_n inclus dans $\partial C(0, 1) \times C(0, 1)$: cette

fois-ci la limite de T_n sera laminaire.

Exemple 3. L'exemple de Wermer.

On va commencer par décrire la construction des courbes C_n . Le cadre de cet exemple est \mathbb{C}^2 .

Soit D le disque unité de \mathbb{C} et a_n une suite dense de D .

Le point de départ est la courbe C_0 , graphe au-dessus de D , définie par $f_0(z, w) = w = 0$. A partir de celle-ci, on crée une courbe C_1 "en doublant" C_0 au-dessus de a_1 . Plus précisément, C_1 est définie par l'équation $f_1(z, w) = f_0(z, w)^2 - \epsilon_1(z - a_1) = 0$ (où ϵ_n est une suite que l'on précisera). En itérant le procédé, on obtient une suite de courbes C_n de genre environ 2^{2^n} .

On affirme que T , valeur d'adhérence de la suite $\frac{[C_n]}{A_n}$ (ici A_n vaut essentiellement 2^n) n'est pas laminaire. En effet, si K_n désigne un δ_n -voisinage fermé de C_n , on peut choisir les suites ϵ_n et δ_n de sorte que $K_{n+1} \subset K_n$. Si le courant T était laminaire, on aurait donc un disque holomorphe Δ dans $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$. Quitte à réduire ce disque, on peut supposer qu'il est un graphe au-dessus d'un voisinage de a_n (pour des n aussi grands que l'on veut). Autrement dit, on aurait une section continue de $\pi|_{K_n}$ (où $\pi(z, w) = z$) sur un cercle entourant a_n : ce qui est impossible car, par construction, a_n est une valeur critique pour $\pi|_{C_n}$.

On peut raffiner cet exemple : si on ne ramifie pas à chaque étape, on peut construire des courbes C_n de sorte que les valeurs d'adhérences de $\frac{[C_n]}{A_n}$ ne soient pas laminaires et telles que le rapport $\frac{G_n}{A_n}$ tende vers l'infini aussi lentement que l'on veut.

Exemple 4. Cas de genre nul avec une projection propre.

Dans ce paragraphe, la méthode utilisée est celle de Bedford et Smillie (voir [3]).

On notera $C(0, 1)$ le carré de \mathbb{C} centré en 0 dont les côtés sont de longueur 1. Considérons une suite de disques C_n qui ont leur bord dans $\partial C(0, 1) \times C(0, 1)$. L'application $\pi(z, w) = z$ est alors un revêtement de degré $d_n = \int_{C_n} \pi^* \omega$ où ω est la forme kählerienne standard de \mathbb{C} .

Quitte à extraire une sous-suite, $\frac{[C_n]}{A_n}$ converge vers un courant T .

Pour montrer que T est laminaire, on va montrer que le nombre de ramifications pour π est de l'ordre de d_n : cela créera de grands espaces où l'on pourra mettre des graphes de fonctions holomorphes. Afin d'obtenir tout le courant T , on insèrera des graphes de plus en plus petits qui seront construits au-dessus d'un quadrillage de plus en plus fin.

Construction de graphes

On commence par quadriller $C(0, 1)$ en k^2 carrés égaux.

Si Σ est une composante connexe de C_n au-dessus d'un des carrés, on a deux possibilités :

soit la restriction de π à Σ est un homéomorphisme (dans ce cas Σ est appelée bonne île) ;

soit ce n'est pas le cas et on parlera de mauvaise composante.

Par passage à la limite sur les bonnes îles, on obtiendra un courant laminaire. Cependant, si on veut que celui-ci soit égal à T , il faut que le nombre de mauvaises composantes (comptées avec multiplicité par rapport à π) soit faible devant le nombre de bonnes îles.

Pour évaluer le nombre de mauvaises composantes, on va utiliser la formule de Riemann-Hurwitz. En effet, si on note $m(\Sigma)$ la multiplicité de la composante Σ (qui est un disque par le principe du maximum), le nombre de ramifications de $\pi|_{\Sigma}$ est égal à $m(\Sigma) - 1$. Alors, par la formule de Riemann-Hurwitz, on a :

$$\chi(C_n) + \sum_{\Sigma} (m(\Sigma) - 1) = d_n \chi(C(0, 1)) = d_n.$$

D'autre part, si $m(\Sigma) \geq 2$ on a $m(\Sigma) \leq 2(m(\Sigma) - 1)$.

En combinant les deux relations ci-dessus, on obtient donc une majoration du nombre des mauvaises composantes (comptées avec multiplicité) par $2(d_n - 1)$. Autrement dit, il y a au moins $k^2 d_n - 2(d_n - 1) \geq k^2 d_n (1 - \epsilon_k)$ bonnes îles au-dessus du quadrillage (ϵ_k désigne une suite qui converge vers 0 quand k tend vers l'infini).

Grâce à cette minoration, on va montrer que T est laminaire.

Laminarité de T dans le bicarré

Soit $T_{k,n}$ le courant défini par $T_{k,n} = \frac{1}{A_n} \sum_{\text{bonnes îles}} [\Gamma]$ ($T_{k,n}$ est laminé

au-dessus de chaque carré du quadrillage).

Rappelons que $T_n = \frac{[C_n]}{A_n}$.

La minoration du paragraphe précédent nous conduit à :

$$\int T_{k,n} \wedge \pi^* \omega \geq (1 - \epsilon_k) \int T_n \wedge \pi^* \omega,$$

d'où, en remarquant que d_n est majoré par A_n ,

$$\int (T_n - T_{k,n}) \wedge \pi^* \omega \leq \epsilon_k.$$

En utilisant maintenant la proposition de compacité du paragraphe 1.1.1, $T_{k,n}$ converge vers un courant T_k laminé au-dessus des carrés du quadrillage

(quitte à extraire une sous-suite), et on a toujours l'estimée :

$$\int (T - T_k) \wedge \pi^* \omega \leq \epsilon_k,$$

avec $T - T_k \geq 0$ par construction.

Si on raffine de plus en plus le quadrillage (i.e. si k augmente), T_k croît vers un courant T_∞ qui est laminaire (passer de T_k à $T_{k'}$ avec $k' > k$ revient à rajouter des courants laminés qui sont compatibles entre eux). De plus, $T_\infty \leq T$ et $\int (T - T_\infty) \wedge \pi^* \omega \leq 0$.

Maintenant, on considère un point p du bicarré. Si on tourne le bicarré initial, qu'on le diminue dans une direction et qu'on l'agrandit dans l'autre, on obtient un autre bicarré $C_1 \times C_2$ qui contient p , tel que $C_n \cap C_1 \times C_2$ ait son bord dans $\partial C_1 \times C_2$. Par le principe du maximum, l'intersection de C_n avec $C_1 \times C_2$ est toujours composée de disques. Alors, en refaisant le même raisonnement que précédemment avec $\frac{[C_n \cap C_1 \times C_2]}{A_n}$ au lieu de $\frac{[C_n]}{A_n}$ on obtient un courant T'_∞ laminaire avec $\int (T - T'_\infty) \wedge \pi'^* \omega = 0$ (où π' est la projection orthogonale sur C_1).

D'autre part, si $C_1 \times C_2$ est générique pour T_∞ , on a $T'_\infty \geq T_\infty$ sur l'intersection des bicarrés. Autrement dit $T = T'_\infty$ au voisinage de p . Le courant T est donc bien laminaire dans $C(0, 1) \times C(0, 1)$.

On va maintenant passer à la situation générale : le cas non propre.

L'objectif sera de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Soit C_n une suite de courbes analytiques lisses de la boule unité B de \mathbb{C}^2 (s'étendant un peu au-delà de \overline{B}).*

On note A_n l'aire de C_n , G_n le genre de C_n et on suppose que $T_n = \frac{[C_n]}{A_n}$ converge vers un $(1, 1)$ -courant positif fermé T de B (toujours possible quitte à extraire).

Alors, si $G_n = O(A_n)$, T est laminaire.

Dans un premier paragraphe, on va démontrer ce théorème dans un cas modèle. Dans le second, on verra que, quitte à modifier un peu les courbes C_n , la situation réelle n'est pas très éloignée du cas modèle. Cette proximité démontrera alors le théorème.

1.2 Cas modèle

Dans ce paragraphe, on va montrer comment construire de bons disques sur les courbes C_n dans un cas modèle.

On commence par supposer les courbes C_n à géométrie bornée par A_n :
 $L_n + G_n + B_n = O(A_n)$, où :

$L_n =$ longueur du bord de C_n ,

$G_n =$ genre de C_n ,

$B_n =$ nombre de composantes de bord de C_n .

Puis, on se fixe une direction D (qui vérifie $\pi_*T \neq 0$, où π est la projection orthogonale associée à D), et on quadrille le carré $C \subset D$, centré en 0, de côté 2, en $4k^2$ carrés égaux. Un tel quadrillage peut être décomposé en quatre familles de k^2 carrés deux à deux disjoints.

On va partir de la famille Q la moins recouverte. Elle vérifie en particulier :

$$S_n(Q) = \frac{1}{\text{aire de } Q} \int_{C_n \cap \pi^{-1}(Q)} \pi^* \omega \leq S_n = \frac{1}{\text{aire de } C} \int_{C_n} \pi^* \omega$$

où ω est la forme kählérienne standard de \mathbb{C} .

Le but est de démontrer que les composantes connexes de $\pi^{-1}(Q)$ sont majoritairement des **îles** (disques dont le bord se projette sur le bord des carrés de Q).

Le nombre d'îles au-dessus de Q est lié à la caractéristique d'Euler de $C_n - \pi^{-1}(Q)$. En effet, si \mathcal{I} désigne l'ensemble des îles de $\pi^{-1}(Q)$, on a $\chi(C_n - \pi^{-1}(Q)) \geq \chi(C_n) - \#\mathcal{I}$ (enlever une île fait chuter la caractéristique d'Euler de 1). En utilisant alors l'hypothèse sur le genre et le nombre de composantes de bord, on obtient une minoration du nombre d'îles par $-\chi(C_n - \pi^{-1}(Q)) - O(A_n)$.

On va majorer $\chi(C_n - \pi^{-1}(Q))$ pour obtenir une bonne minoration du cardinal de \mathcal{I} . Pour cela, on pave $C - Q$ en croix (voir figure 1.1).

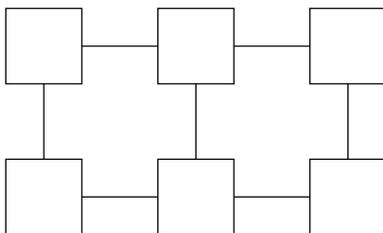


FIG. 1.1 – Pavage en croix. Les carrés font partie de la famille Q . Les croix pavent essentiellement $C - Q$.

A partir de là, on construit un graphe où chaque sommet représente une composante connexe au-dessus d'une croix, et où l'on met une arête entre

deux sommets si les composantes en question sont adjacentes. Dans toute la suite, on identifiera sommets et composantes connexes correspondantes.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \chi(C_n - \pi^{-1}(Q)) &\leq \sum_{\text{sommets}} \chi(\Sigma) - \text{nombre d'arêtes} \\ &\leq s - a \end{aligned}$$

où s est le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes.

La combinaison de cette relation avec la précédente, nous conduit à une minoration du nombre d'îles par $a - s - O(A_n)$. Il nous reste donc à majorer le nombre de sommets et à minorer le nombre d'arêtes.

On va ajouter une hypothèse supplémentaire dans ce paragraphe : nous supposerons que les composantes connexes au-dessus des croix sont des graphes au-dessus de celles-ci.

Le nombre de sommets est alors égal à $k^2 S_n(C - Q)$ où

$$S_n(C - Q) = \frac{1}{\text{aire de } C - Q} \int_{C_n \cap \pi^{-1}(C - Q)} \pi^* \omega.$$

Pour minorer le nombre d'arêtes, on utilise la remarque suivante : si Σ est un sommet et $\nu(\Sigma)$ sa valence (i.e. le nombre d'arêtes qui partent du sommet), on a :

$$L_n \geq \sum_{\text{sommets}} (4 - \nu(\Sigma)) \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{\text{sommets}} \nu(\Sigma) \geq 4k^2 S_n(C - Q) - kO(A_n),$$

ce qui implique :

$$a \geq 2k^2 S_n(C - Q) - kO(A_n).$$

Le nombre d'îles au-dessus de Q est alors minoré par :

$$k^2 S_n - kO(A_n) = k^2 S_n(1 - \epsilon),$$

car la direction D est bien choisie ($\pi_* T \neq 0$).

Les composantes au-dessus de Q sont donc bien majoritairement des îles.

Dans la réalité, on n'aura pas vraiment des graphes au-dessus des croix. Cependant, quitte à modifier un peu les courbes C_n , on ne sera pas loin de cette situation.

1.3 Cas général

1.3.1 Simplification géométrique des courbes C_n

Voici comment on se ramène à des courbes C_n à géométrie bornée par A_n , quitte à rétrécir un peu la boule de départ :

Considérons les trois boules concentriques ρB , $\rho' B$ et B (où ρ' est strictement compris entre ρ et 1). Notons \widetilde{C}_n la courbe obtenue en collant les composantes connexes de $C_n \cap (\rho' B - \rho B)$ qui touchent $\rho \partial B$, à $C_n \cap (\rho B)$. Par le principe du maximum, \widetilde{C}_n a son bord inclus dans $\rho' \partial B$. Nous allons voir que \widetilde{C}_n a un nombre de composantes de bord en $O(A_n)$. En effet, si on coupe C_n suivant ces N composantes de bord, grâce au contrôle du genre on obtient au moins $N - O(A_n)$ composantes connexes Σ dans l'une ou l'autre des calottes sphériques $B - \rho' B$, $\rho' B - \rho B$. Par construction le bord de Σ doit rencontrer les deux sphères bordant la calotte dans laquelle elle se trouve. Un argument d'aire s'appuyant sur le théorème de Lelong (voir [18]) montre alors que $N - O(A_n)$ est un $O(A_n)$, donc N aussi. De plus, quitte à bouger un peu $\rho' \partial B$ et à extraire une sous-suite, on a $\widetilde{L}_n = O(A_n)$ via la formule de coaire (voir [19]).

On s'est donc ramené à une courbe \widetilde{C}_n qui vérifie $\widetilde{L}_n + \widetilde{G}_n + \widetilde{B}_n = O(A_n)$ et qui coïncide avec C_n sur ρB .

Dans la suite, tous les tildes seront oubliés.

1.3.2 Comment se rapprocher du cas modèle

Reprenons la démonstration du paragraphe 1.2 :

On part d'une direction D (qui vérifie $\pi_* T \neq 0$, où π est la projection orthogonale associée à D). On quadrille le carré $C \subset D$, centré en 0, de côté 2 en $4k^2$ carrés égaux (associé à un tel quadrillage, il y a quatre familles de k^2 carrés deux à deux disjoints). On part de la famille Q la moins recouverte (en particulier le nombre moyen de feuillettes $S_n(Q)$ au-dessus de Q est inférieur au nombre moyen de feuillettes S_n au-dessus du quadrillage initial). Puis on pave $C - Q$ en croix comme dans le paragraphe précédent (voir figure 1.1).

Dans le paragraphe 1.2, on s'était placé dans un modèle où les composantes au-dessus des croix étaient des graphes. Ici ce n'est plus vrai, mais on va voir que l'on peut se ramener au cas où la majorité de ces composantes se projettent sur presque toute la croix correspondante.

Si Σ est une composante au-dessus d'une croix, on peut décomposer $\pi(\Sigma)$ en strates : Σ^1 est la partie de $\pi(\Sigma)$ recouverte au moins une fois, ..., Σ^ν celle recouverte ν fois (où ν est la multiplicité maximale de Σ). On note γ_j la partie de $\pi(\partial C_n)$ qui borde Σ^j .

Soit ϵ_k une suite qui tend lentement vers 0 (dans ce texte toute suite tendant vers 0 sera notée ϵ_k).

Alors, si $l(\gamma_j)$ désigne la longueur de γ_j , on peut avoir :

- l'existence d'un j dans $\{1, \dots, \nu\}$ avec lequel $l(\gamma_j) \geq \frac{\epsilon_k}{k}$ (on dira que la strate en question a un bord long),

ou :

- pour tout j dans $\{1, \dots, \nu\}$, $l(\gamma_j) \leq \frac{\epsilon_k}{k}$ (on parlera de bord court).

En utilisant l'inégalité isopérimétrique, on remarque que dans le dernier cas, on a soit :

$$\text{aire de } \Sigma^j \geq (1 - \epsilon_k) \text{aire de la croix}, \text{ pour un certain } j \in \{1, \dots, \nu\}.$$

Soit :

$$\text{aire de } \Sigma^j \leq l(\gamma_j)^2, \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, \nu\}.$$

Dans notre contexte, ce sont les composantes du dernier type qui sont les plus éloignées de la situation propre : on veut donc les enlever.

En ôtant une de ces composantes, on modifie la courbe C_n d'une aire (pour $\pi^*\omega$) au plus égale à $\sum_{j=1}^{\nu} l(\gamma_j)^2 \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\nu} l(\gamma_j)$. En les enlevant toutes, l'aire est donc changée d'au plus $\frac{1}{k}L_n$ qui est négligeable. D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que la longueur de la projection par π du bord de la courbe obtenue en enlevant ces composantes est majorée par $2L_n = O(A_n)$. Enfin, cette nouvelle courbe vérifie toujours $G_n + B_n = O(A_n)$. Dans la suite, on travaillera avec C_n privée de ces composantes, que l'on notera toujours C_n .

Notons \mathcal{I} l'ensemble des îles au-dessus de Q . Dans le paragraphe 1.2 on a vu, via la construction du graphe où chaque sommet représente une composante connexe au-dessus d'une croix, et où l'on met autant d'arêtes entre deux sommets qu'il y a d'arcs en commun dans le bord des composantes correspondantes, que le cardinal de \mathcal{I} est minoré par $a - s - O(A_n)$ (où s est le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes) .

Il nous reste à majorer le nombre de sommets et à minorer le nombre d'arêtes.

1.3.3 Majoration du nombre de sommets et minoration du nombre d'arêtes

Grâce à notre simplification effectuée au paragraphe précédent, on sait qu'un sommet possède une strate qui a soit un bord long, soit une aire supérieure à $(1 - \epsilon_k) \text{aire de la croix} = \frac{3(1 - \epsilon_k)}{k^2}$. D'après l'hypothèse sur la longueur du bord, il y a au plus $\frac{k}{\epsilon_k} O(A_n)$ sommets

qui possèdent une strate avec un bord long.

Pour les sommets qui possèdent une strate d'aire supérieure à $\frac{3(1-\epsilon_k)}{k^2}$, on voit facilement qu'il y en a au plus $S_n(C-Q)\frac{k^2}{(1-\epsilon_k)}$, où $S_n(C-Q)$ est le nombre moyen de feuillettes au-dessus de $C-Q$. On obtient alors une majoration de s par :

$$S_n(C-Q)k^2(1+\epsilon_k) + \frac{k}{\epsilon_k}O(A_n).$$

Passons maintenant à la minoration du nombre d'arêtes.

On se fixe un sommet Σ au-dessus d'une croix. Les côtés de la croix qui ne sont pas dans le bord de Q seront notés $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 .

La composante $\pi(\Sigma)$ contient des strates pour lesquelles on a $l(\gamma_j) \geq \frac{\epsilon_k}{k}$ et d'autres avec cette longueur plus petite que $\frac{\epsilon_k}{k}$. Les strates de la deuxième espèce se divisent en deux catégories : celles qui ont une aire inférieure à $l(\gamma_j)^2$ et celles pour qui cette aire est supérieure à $\frac{3(1-\epsilon_k)}{k^2}$. Si $m(\Sigma)$ désigne le nombre de strates de la dernière sorte, on a :

$$\nu(\Sigma) \geq 4m(\Sigma),$$

où $\nu(\Sigma)$ est la valence du sommet Σ (i.e. le nombre d'arêtes qui en partent). En effet, on peut tout d'abord supposer que l'union des segments α_i ne rencontre pas les valeurs critiques de π . Ensuite, soit γ un sous-segment de α_i choisi de sorte qu'un de ses petits voisinages dans la croix soit inclus dans les $m(\Sigma)$ strates (c'est possible car elles s'emboîtent les unes dans les autres); alors γ se relève en au moins $m(\Sigma)$ arêtes dans Σ .

La minoration de $\sum m(\Sigma)$ entraîne donc celle du nombre d'arêtes $a = \frac{1}{2} \sum \nu(\Sigma)$. Pour l'obtenir, on va minorer l'aire recouverte par les $\sum m(\Sigma)$ strates.

Les strates pour lesquelles la longueur de γ_j est supérieure à $\frac{\epsilon_k}{k}$ sont en nombre au plus égal à $\frac{kO(A_n)}{\epsilon_k}$. L'union de ces éléments est donc d'aire inférieure à $\frac{kO(A_n)}{\epsilon_k} \frac{3}{k^2} = \frac{O(A_n)}{k\epsilon_k}$.

De même, l'ensemble des strates qui ont un petit bord et une aire majorée par $l(\gamma_j)^2$ a une aire majorée par $\frac{\epsilon_k O(A_n)}{k}$.

En combinant ces deux majorations et le fait que l'aire de $C-Q$ est égale à 3, on obtient que l'aire recouverte par les strates qui ont un petit bord et une aire minorée par $\frac{3(1-\epsilon_k)}{k^2}$ est supérieure à :

$$3S_n(C-Q) - \frac{O(A_n)}{k\epsilon_k}.$$

Autrement dit, on a :

$$a \geq 2 \sum_{\text{sommets}} m(\Sigma) \geq 2 \frac{1}{\text{aire de la croix}} \left(3S_n(C-Q) - \frac{O(A_n)}{k\epsilon_k} \right),$$

qui est plus grand que

$$2k^2 S_n(C - Q) - \frac{k}{\epsilon_k} O(A_n).$$

Cela nous conduit à une minoration du nombre d'îles au-dessus de Q par :

$$k^2 S_n(1 - \epsilon_k)$$

parce que la direction D est bien choisie ($\pi_* T \neq 0$) et que $S_n(C - Q) \geq S_n$.

L'estimée précédente implique que Q était quand même bien recouverte. En particulier, si Q' est une famille de carrés, on a $S_n(C - Q') \geq (1 - \epsilon_k) S_n$. On en déduit la présence d'au moins $(1 - \epsilon_k) k^2 S_n$ îles au-dessus de Q' , soit $4(1 - \epsilon_k) k^2 S_n$ îles au-dessus du quadrillage initial.

De plus, un argument d'aire montre que très peu d'entre elles sont ramifiées. On a donc au moins $4(1 - \epsilon_k) k^2 S_n$ **bonnes îles** (graphes au-dessus des carrés du quadrillage) dans les courbes C_n .

Montrons que cela donne la laminarité de T dans B .

Soit $T_{k,n}$ le courant défini par $T_{k,n} = \frac{1}{A_n} \sum_{\text{bonnes îles}} [\Gamma]$ ($T_{k,n}$ est laminé au-

dessus de chaque carré du quadrillage).

Rappelons que $T_n = \frac{[C_n]}{A_n}$.

La minoration du paragraphe précédent nous conduit à :

$$\int T_{k,n} \wedge \pi^* \omega \geq (1 - \epsilon_k) \int T_n \wedge \pi^* \omega,$$

d'où,

$$\int (T_n - T_{k,n}) \wedge \pi^* \omega \leq \epsilon_k.$$

En utilisant maintenant la proposition de compacité du paragraphe 1.1.1, $T_{k,n}$ converge vers un courant T_k laminé au-dessus des carrés du quadrillage (quitte à extraire une sous-suite), et on a toujours l'estimée :

$$\int (T - T_k) \wedge \pi^* \omega \leq \epsilon_k,$$

avec $T - T_k \geq 0$ par construction.

Si on raffine de plus en plus le quadrillage (i.e. si k augmente), T_k croît vers un courant T_∞ qui est laminaire (passer de T_k à $T_{k'}$ avec $k' > k$ revient à rajouter des courants laminés qui sont compatibles entre eux). De plus,

$T_\infty \leq T$ et $\int (T - T_\infty) \wedge \pi^* \omega \leq 0$.

Maintenant, si on prend une autre direction D' générique par rapport à T_∞ et telle que $\pi'_* T \neq 0$ (où π' désigne la projection associée à D'), on construit de même un courant $T'_\infty \leq T$ qui est supérieur à T_∞ et qui vérifie $\int (T - T'_\infty) \wedge \pi'^* \omega = 0$.

Alors $T = T'_\infty$, c'est-à-dire que T est laminaire dans B .

Chapitre 2

Concentration du genre

On considère ici des courbes du type $f^{-n}(L)$ où f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et L une droite projective. Cette suite converge (dans un sens que l'on précisera) vers un courant T appelé courant de Green associé à f .

L'objectif de ce chapitre sera de montrer que la plus grande partie du genre de $f^{-n}(L)$ se concentre sur le support de la mesure $T \wedge T$.

Voici le plan de ce texte : dans un premier paragraphe, on fera quelques rappels de dynamique holomorphe. Dans le second, on démontrera le résultat dans un cas particulier : celui des endomorphismes critiquement finis. La suite sera consacrée au cas général : dans un premier temps, on montrera que les points se concentrent sur le support de $T \wedge T$. Ensuite, via un argument de longueur-aire, on en déduira la concentration du genre.

2.1 Préliminaires de dynamique holomorphe

Dans ce paragraphe, on va rappeler la définition du courant et de la mesure de Green associés à un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, puis on détaillera quelques-unes de leurs propriétés.

2.1.1 Définition du courant de Green

Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$. On notera C_f l'ensemble critique de f . On sait que C_f est une courbe algébrique de degré $3d - 3$ et que le degré topologique de f vaut d^2 . On va maintenant construire le courant de Green associé à f (voir [12]). Soit ω la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

La forme $f^*\omega$ est cohomologue à $d\omega$, on a donc :

$$\frac{f^*\omega}{d} = \omega + dd^c u,$$

où u est une fonction lisse de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

En itérant cette relation, on obtient que :

$$\frac{f^{*n}\omega}{d^n} = \omega + dd^c G_n,$$

avec $G_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u \circ f^i}{d^i}$.

Le fait que la différence $\max_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} |G_{n+k} - G_n|$ est majorée par $\frac{C}{d^n}$ (où C est une constante indépendante de k et n) entraîne que la suite G_n converge uniformément vers une fonction continue $G = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u \circ f^i}{d^i}$. Autrement dit, la suite $T_n = \frac{f^{*n}\omega}{d^n}$ converge vers un courant $T = \omega + dd^c G$.

Par construction, on a :

$$f^*T = dT$$

et

$$\|T\| = \int T \wedge \omega = 1.$$

Le complémentaire du support de T coïncide avec l'ensemble de Fatou (i.e. le plus grand ouvert où la famille $\{f^n\}_{n \geq 0}$ est localement normale).

D'autre part, le courant T est naturel d'un point de vue dynamique : il équirépartit les préimages de droites génériques. En effet, un cas particulier d'un résultat de Favre et Jonsson (voir [11]) généralisant Fornæss et Sibony (voir [14]) montre que la limite des préimages de droites génériques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par f^n converge vers T . Plus précisément :

Théorème 2.1.1. [11]

L'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ telles que :

$$\frac{1}{d^n} f^{n*}[L] \rightarrow T$$

est un sous-ensemble algébrique propre du dual de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

2.1.2 Mesure de Green

Dans la définition de T , la fonction G est continue : on peut donc définir l'auto-intersection $\mu = T \wedge T$. Cette mesure est une probabilité qui vérifie $f^*\mu = d^2\mu$ (voir [12]).

D'autre part, J.-Y. Briend et J. Duval, en généralisant un résultat de Fornæss et Sibony (voir [12]), ont montré qu'elle est naturelle d'un point de vue dynamique :

Théorème 2.1.2. [5]

L'ensemble des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tels que :

$$f^{n*} \delta_a \rightarrow \mu$$

est un sous-ensemble algébrique propre de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Enfin, comme conséquence de l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg (voir [12]), on utilisera le fait que μ ne charge pas les ensembles pluripolaires.

2.2 Un exemple : le cas critiquelement fini

Un endomorphisme holomorphe f est critiquelement fini si son lieu post-critique, $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} f^n(C_f)$, est une courbe algébrique (voir [13]).

Exemple 5. $f = [z^d : w^d : t^d]$. Dans ce cas, on a : $\mathcal{C} = (z = 0) \cup (w = 0) \cup (t = 0)$.

Dans ce paragraphe, on va montrer que le genre des courbes du type $f^{-n}(L)$ (où L est une droite projective générique) se concentre sur le support de $\mu = T \wedge T$. Plus précisément :

Proposition 2.2.1. *Pour un endomorphisme holomorphe critiquelement fini, le genre de l'image réciproque par f^n d'une droite projective générique L , $f^{-n}(L)$, est dominé par $O(d^n)$ en dehors d'un voisinage du support de la mesure μ .*

Corollaire 2.2.1. *Pour un endomorphisme holomorphe critiquelement fini, le courant de Green T est laminaire en dehors du support de la mesure μ .*

Preuve. En utilisant le théorème 2.1.1, on voit que l'on peut prendre une droite L qui vérifie les hypothèses de la proposition précédente ainsi que :

$$\frac{1}{d^n} f^{n*}[L] \rightarrow T.$$

Le corollaire découle alors du théorème 1.1.1 du chapitre précédent.

◇

Remarque 1. Il existe des exemples d'endomorphismes critiquelement finis dont le courant de Green est laminaire seulement en dehors du support de μ . Il suffit de prendre la suspension à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'un exemple de Lattès. C'est une version dynamique de l'exemple 2 du chapitre 1.

Démontrons la proposition 2.2.1.

Pour calculer le genre de $f^{-n}(L)$, on va construire une triangulation de L qui se relèvera en une triangulation de $f^{-n}(L)$ (par triangulation, on entend décomposition en des disques). Pour conclure, il restera alors à faire un calcul de caractéristique d'Euler sur $f^{-n}(L)$.

On va supposer que $f^{-n}(L)$ est lisse (ce qui est vrai pour L générique). D'autre part, on va traiter le cas d'une droite L qui passe par un point a appartenant au support de μ privé de \mathcal{C} telle que $\text{Cardinal}(L \cap \mathcal{C}) = \text{degré de } \mathcal{C} = \tau$ (c'est possible car μ ne charge pas \mathcal{C}). Le cas d'une droite générique se fait d'une manière proche.

Dans la suite, on supposera que a est le pôle nord de L .

Quitte à bouger un peu la droite, on peut supposer que l'intersection des méridiens qui passent par $\mathcal{C} \cap L$ avec l'équateur est constituée de τ points : a_1, \dots, a_τ . On les ordonne via une orientation de l'équateur.

En considérant alors les méridiens qui passent par le milieu des segments $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, \tau - 1$) et $[a_\tau, a_1]$ (où les segments considérés sont situés sur l'équateur), on obtient une triangulation de L avec τ faces, τ arêtes et deux sommets.

Cette triangulation se relève par f^n en une triangulation de $f^{-n}(L)$. En effet, un disque qui rencontre \mathcal{C} en au plus un point se relève en un disque par f^n . On va maintenant calculer le genre de $f^{-n}(L)$ hors d'un γ -voisinage du support de la mesure μ , U_γ .

Soit Γ la réunion des arêtes et des sommets de la triangulation qui sont contenus dans U_γ ;

alors $g(f^{-n}(L) - U_\gamma) \leq g(f^{-n}(L) - \Gamma)$.

D'autre part, une composante connexe de $f^{-n}(L) - \Gamma$ peut être de deux types :

- soit elle ne contient pas d'arête de la triangulation et alors c'est un disque (donc de genre nul),
- soit elle en contient au moins une.

Si \mathcal{Q} désigne les composantes du deuxième type et q leur nombre, on obtient :

$$g(f^{-n}(L) - U_\gamma) \leq q - \frac{\chi(\mathcal{Q})}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{2g(f^{-n}(L) - U_\gamma)}{3} \leq \text{Nombre d'arêtes qui sortent de } U_\gamma,$$

car $-\chi(\mathcal{Q})$ est majoré par le nombre d'arêtes qui sortent de U_γ .

Il reste donc à majorer ce dernier terme.

Les arêtes étant attachées au support de μ , on en déduit que le genre de $f^{-n}(L)$ hors de U_γ est majoré (à une constante près) par le nombre d'arêtes de la triangulation de diamètre supérieur à γ . Il suffit donc de majorer ce terme par $O(d^n)$. C'est l'objet du lemme :

Lemme 2.2.1. *Les préimages par f^n des arêtes de la triangulation de L sont de diamètre inférieur à γ (sauf $O(d^n)$ d'entre elles).*

Preuve. La démonstration de ce lemme repose sur la comparaison aire-diamètre qui suit (voir [5]).

Fait :

Il existe $C > 0$ tel que, pour toute paire de disques holomorphes $D \subset \tilde{D}$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on ait

$$(\text{Diam}(D))^2 \leq C \frac{\text{Aire}(\tilde{D})}{\min(1, \text{Mod}(A))},$$

où A désigne l'anneau $\tilde{D} - D$.

On peut mettre une arête α de la triangulation de L dans un disque D disjoint de \mathcal{C} , de sorte que le module de l'anneau $D - \alpha$ soit égal à une constante m inférieure à 1 et qui ne dépend que de $\mathcal{C} \cap L$.

On note f_i^{-n} les branches inverses de f^n sur D . Les anneaux $f_i^{-n}(D - \alpha)$ ont le même module que celui de $D - \alpha$.

En utilisant le fait précédent, on obtient donc une majoration du carré du diamètre de $f_i^{-n}(\alpha)$ par $\frac{C}{m} \text{Aire}(f_i^{-n}(D))$. Autrement dit, le nombre de branches inverses pour lesquelles le diamètre de $f_i^{-n}(\alpha)$ est supérieur à γ est majoré par $\frac{C}{m\gamma^2} \text{Aire}(f^{-n}(L)) = \frac{C d^n}{m\gamma^2}$. C'est ce que l'on voulait démontrer. ◇

Dans le cas d'un endomorphisme quelconque, si on découpe L avec des disques qui ne rencontrent les valeurs critiques $V = f(C_f)$ qu'en un seul point et que l'on remonte cette triangulation par f , on en obtient une de $f^{-1}(L)$. Cependant les éléments de cette triangulation n'ont aucune raison de continuer à rester des disques quand on les relèvera de nouveau par f (certains d'entre eux peuvent toucher V en plusieurs points). Pour conserver une triangulation, il faudra donc faire un redécoupage.

Lors de cette opération, on pourra garder le contrôle des longueurs des préimages des arêtes (on aura au plus $d^{n(1+\epsilon)}$ arêtes de longueur supérieure à γ). On compensera alors la perte de l'attache par le contrôle en $d^{n(1+\epsilon)}$ du nombre de points de $f^{-n}(x)$ hors de $U_{\frac{\gamma}{2}}$, pour tout point x de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (ce

contrôle sera vrai pour des endomorphismes f génériques). Cela suffira pour majorer le genre car les arêtes qui sortent de U_γ sont composées des arêtes de longueur supérieure à γ , auxquelles on ajoute celles qui ont un sommet hors de $U_{\frac{\gamma}{2}}$.

Autrement dit, on obtiendra le :

Théorème 2.2.1. *Pour f générique parmi les endomorphismes de degré d , on a :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{L \in (\mathbb{P}^2)^*} \text{Genre}(f^{-n}(L) - U_\gamma) \leq \log d.$$

Le plan sera donc le suivant : dans un premier temps on montrera que l'on peut contrôler le nombre de points de $f^{-n}(x)$ hors de $U_{\frac{\gamma}{2}}$ par $d^{n(1+\epsilon)}$. Puis, on verra que cela permet effectivement de majorer le genre de $f^{-n}(L)$ hors de U_γ par $d^{n(1+\epsilon)}$.

2.3 Contrôle des préimages des points

Le contrôle du nombre d'antécédents d'un point x de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ hors de U_γ s'inspire du calcul de l'entropie topologique d'un endomorphisme holomorphe de degré d .

Après quelques rappels sur l'entropie topologique qui incluront les différentes étapes de ce calcul, on passera au contrôle des préimages de points.

2.3.1 Entropie topologique

Comme référence générale pour ce paragraphe, on pourra prendre le livre d'A. Katok et B. Hasselblatt (voir [17]).

L'entropie topologique $h_{\text{top}}(f)$ est définie par :

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\delta > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\max\{\text{Card}(F), F(n, \delta)\text{-séparé}\})$$

où un ensemble est dit (n, δ) -séparé si pour tout couple $(x, y) \in F^2$ on a $d_n(x, y) := \max_{0 \leq q \leq n-1} d(f^q(x), f^q(y)) \geq \delta$.

C'est donc une quantité qui décrit le nombre d'orbites que l'on peut discerner à une erreur δ près après un temps n .

Un endomorphisme f holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est d'entropie topologique $2 \log d$. L'obtention de cette valeur est la combinaison d'une majoration obtenue par M. Gromov (voir [16]) et d'une minoration due à M. Misiurewicz et F. Przytycki (voir [17]).

La majoration repose de manière cruciale sur le théorème de Lelong (voir [18]) :

Théorème 2.3.1. (*Lelong*)

Pour toute boule $B(x, r)$ de \mathbb{C}^n et toute surface analytique Γ dans $B(x, r)$ passant par x , on a :

$$\text{Vol}(\Gamma \cap B(x, r)) \geq Cr^4,$$

où C est une constante indépendante de n .

Si on note $\Gamma_n = \{(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)), x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\}$ le multigraphe de f d'ordre n , on voit qu'un ensemble F (n, δ) -séparé donne un ensemble G δ -séparé dans Γ_n pour la distance produit d_n . En désignant par ω_n la forme kählérienne sur $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))^n$ induite par la forme de Fubini-Study ω sur chaque facteur, on a :

$$\int_{\Gamma_n} \omega_n^2 = \text{vol}(\Gamma_n) \geq \sum_{y \in G} \text{vol}(B_n(y, \frac{\delta}{2}) \cap \Gamma_n)$$

où $B_n(y, \frac{\delta}{2})$ est la boule centrée en y de rayon $\frac{\delta}{2}$ pour la métrique d_n . Le théorème de Lelong nous conduit alors à une minoration du volume de Γ_n par $C(\text{Card}(G))$ (où C est une constante indépendante de n). Autrement dit, l'entropie topologique est majorée par la quantité :

$$\text{lov}(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{vol}(\Gamma_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{\Gamma_n} \omega_n^2$$

qui est égale à

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \sum_{i,j=0}^{n-1} f^{i*} \omega \wedge f^{j*} \omega = 2 \log d,$$

car $f^{i*} \omega$ est cohomologue à $d^i \omega$.

La minoration repose sur la construction d'ensembles (n, δ) -séparés dans les préimages $f^{-n}(x)$ de points x dont les antécédents ne s'approchent pas trop souvent de l'ensemble critique.

Elle s'inscrit dans un cadre plus général, celui des applications de classe C^1 :

Théorème 2.3.2. (*Misiurewicz-Przytycki*)

Si M est une variété lisse, compacte et orientable et $f : M \rightarrow M$ une application de classe C^1 , on a :

$$h_{\text{top}}(f) \geq \log |\text{deg}_{\text{top}}(f)|.$$

Preuve. (Voir [17]).

On se fixe une forme volume ω sur M et $\alpha \in]0, 1[$.

Le jacobien de f est défini par la relation $f^*\omega = Jf \omega$.

L'application f est localement injective sur le compact $B = \{x \in M / |Jf(x)| \geq \epsilon\}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour x et y dans B avec $d(x, y) \leq \delta$ on ait $f(x) \neq f(y)$.

Maintenant, on considère l'ensemble A des points de M dont l'orbite visite peu B , i.e. :

$$A = \{x \in M / \text{Card}(B \cap \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}) \leq (1 - \alpha)n\}.$$

Si x est un point de A , on a :

$$|Jf^n(x)| = \prod_{j=0}^{n-1} |Jf(f^j(x))| < \epsilon^{\alpha n} (\max_{x \in M} |Jf(x)|)^{(1-\alpha)n} < 1,$$

si ϵ est assez petit.

Autrement dit, le volume de $f^n(A)$ est strictement inférieur à celui de M . Par le théorème de Sard, on peut donc trouver un point x , valeur régulière de f^n , qui se trouve dans $M - f^n(A)$. En particulier, les points de $f^{-n}(x)$ ne sont pas dans A : leurs orbites visitent donc souvent l'ensemble B .

La suite de la démonstration va se faire en deux étapes. Dans la première, on va construire un ensemble Q_n (n, δ) -séparé inclus dans $f^{-n}(x)$. Dans la seconde, on conclura en minorant le cardinal de Q_n par $N^{(1-\alpha)n}$ (où N est le degré topologique de f).

Dans un premier temps, on part de x et on considère les points de $f^{-1}(x)$ (il y en a au moins N).

Si N d'entre eux sont dans B , on note Q_1 l'ensemble constitué par ces points (on parlera de bonne transition).

Si ce n'est pas le cas, on prend pour Q_1 l'ensemble constitué par une seule préimage de x hors de B (on parlera de mauvaise transition).

Dans tous les cas $Q_1 \subset f^{-1}(x)$ est constitué de valeurs régulières pour f .

En remplaçant maintenant x par les point de Q_1 dans le raisonnement précédent, on construit un ensemble $Q_2 \subset f^{-1}(Q_1) \subset f^{-2}(x)$. Puis, en itérant le procédé, on arrive à un ensemble $Q_n \subset f^{-1}(Q_{n-1}) \subset \dots \subset f^{-n}(x)$.

L'ensemble Q_n obtenu est (n, δ) -séparé.

En effet, si $y_1, y_2 \in Q_n$ et $d(f^k(y_1), f^k(y_2)) \leq \delta$ pour $k = 0, \dots, n - 1$ alors $f^{n-1}(y_1) = f^{n-1}(y_2)$ car de deux choses l'une :

soit $f^{n-1}(y_1)$ et $f^{n-1}(y_2)$ sont dans B et l'égalité provient de la définition de

δ ;

soit $f^{n-1}(y_1)$ ou $f^{n-1}(y_2)$ est dans B^c et alors l'égalité découle du fait que Q_1 est réduit à un point.

A partir de là, on montre de même que $f^{n-2}(y_1) = f^{n-2}(y_2)$ et ainsi de suite jusqu'à $y_1 = y_2$.

La minoration du cardinal de Q_n repose sur la domination du nombre de mauvaises transitions dans une branche inverse de x par αn .

En effet, si on fait une récurrence sur le nombre maximal, k , de mauvaises transitions entre x et un point y de $f^{-n}(x)$, on obtient que le cardinal de Q_n est minoré par N^{n-k} .

On a donc construit un ensemble (n, δ) -séparé dont le cardinal est minoré par $N^{(1-\alpha)n}$. Autrement dit, on a $h_{\text{top}}(f) \geq (1 - \alpha) \log N$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$. Le théorème est donc démontré. ◇

On va maintenant passer au contrôle des préimages des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Il sera valable pour les endomorphismes qui ne possèdent pas de points triples dans l'orbite positive de l'ensemble critique.

La généralité de cette hypothèse sera montrée dans l'annexe A.

Alors le résultat sur le contrôle des préimages de points s'énonce :

Proposition 2.3.1. *Pour f générique parmi les endomorphismes de degré d , on a :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{x \in \mathbb{P}^2} \text{Cardinal}(f^{-n}(x) - U_\gamma) \leq \log d.$$

Ici U_γ désigne toujours le γ -voisinage du support de la mesure $T \wedge T$.

La démonstration de cette proposition ressemble à celle du calcul de l'entropie topologique d'un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré d . En effet, en voici le plan :

Dans un premier temps, on va majorer le cardinal d'un ensemble (n, δ) -séparé hors de U_γ par $d^{n(1+\epsilon)}$. Il s'agit donc de localiser au complémentaire de U_γ l'argument de Gromov. Autrement dit, on sera essentiellement ramené à majorer $\text{vol}(\Gamma_n | U_\gamma^c) = \int_{\Gamma_n | U_\gamma^c} \omega_n \wedge \omega_n$ par $d^{n(1+\epsilon)}$. Ce raisonnement est valable pour tout endomorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

La seconde étape consiste à construire un ensemble (n, δ) -séparé contenu dans un ensemble P_n de points de $f^{-n}(x)$, de cardinal minoré par $\text{Cardinal}(P_n) d^{-2\alpha n}$. C'est dans cette étape que l'on utilise la généralité de f .

Enfin, la démonstration de la proposition découlera immédiatement des deux étapes précédentes.

2.3.2 Majoration du cardinal d'ensembles (n, δ) -séparés

Dans ce paragraphe, on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Pour f un endomorphisme holomorphe quelconque, le cardinal d'un ensemble (n, δ) -séparé hors de U_γ (avec δ petit) est majoré par Cnd^n (où C est une constante qui ne dépend que de δ et γ).*

Preuve. Dans la démonstration, on notera toujours C toute constante qui ne dépend que de δ et γ .

Soit F un ensemble (n, δ) -séparé hors de U_γ . Il induit un ensemble G δ -séparé dans $\Gamma_n|(U_\gamma)^c$.

On a alors,

$$\text{vol}(\Gamma_n|U_{\frac{\delta}{2}}^c) \geq \sum_{y \in G} \text{vol}(B_n(y, \frac{\delta}{2}) \cap \Gamma_n) \geq C \text{Card}(F),$$

par le théorème de Lelong.

On obtient donc une minoration du volume du multigraphe restreint à $U_{\frac{\delta}{2}}^c$ par $C \text{Card}(F)$ (avec δ petit).

Pour dominer le cardinal de F par Cnd^n , il reste donc à majorer $\text{vol}(\Gamma_n|U_{\frac{\delta}{2}}^c)$ par cette même quantité.

Tout d'abord, on a :

$$\text{vol}(\Gamma_n|U_{\frac{\delta}{2}}^c) = \int_{\Gamma_n|U_{\frac{\delta}{2}}^c} \omega_n \wedge \omega_n = \int_{U_{\frac{\delta}{2}}^c} \sum_{i,j=0}^{n-1} f^{i*} \omega \wedge f^{j*} \omega.$$

La majoration de $\text{vol}(\Gamma_n|U_{\frac{\delta}{2}}^c)$ par Cnd^n se déduit donc de celle de

$$\int_{U_{\frac{\delta}{2}}^c} \frac{f^{i*} \omega}{d^i} \wedge \frac{f^{j*} \omega}{d^j}$$

par $C(\frac{1}{d^i} + \frac{1}{d^j})$.

On notera $T_i = \frac{f^{i*} \omega}{d^i}$.

Soit ψ une fonction C^∞ à support compact dans $U_{\frac{\delta}{2}}^c$, comprise entre 0 et 1 et qui vaut 1 sur $U_{\frac{\delta}{2}}^c$. Alors :

$$\int_{U_{\frac{\delta}{2}}^c} T_i \wedge T_j = \int_{U_{\frac{\delta}{2}}^c} \psi T_i \wedge T_j \leq \int \psi T_i \wedge T_j.$$

Mais la dernière intégrale est égale à :

$$\int \psi (T_i - T) \wedge T_j + \int \psi T \wedge (T_j - T)$$

car $\int \psi T \wedge T$ est dominée par $T \wedge T(U_{\frac{\epsilon}{3}}^c)$ qui vaut 0.

Autrement dit, si on sait majorer $\int \psi(T_i - T) \wedge S$ (où S désigne un $(1, 1)$ -courant positif fermé de masse 1) par $\frac{C}{d^i}$, on pourra conclure.

Cependant, en reprenant la construction de T , on a :

$$\int \psi(T_i - T) \wedge S = \int (G_i - G) dd^c \psi \wedge S,$$

c'est-à-dire,

$$\int \psi(T_i - T) \wedge S \leq |G_i - G|_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} |\psi|_{C^2},$$

qui est bien majoré par $\frac{C}{d^i}$.

◇

Remarque 2. En terme d'entropie topologique, on obtient que $h_{\text{top}}(f|U_{\gamma}^c)$ est majorée par $\log d$.

Ici, $h_{\text{top}}(f|U_{\gamma}^c)$ désigne l'entropie topologique de f localisée à U_{γ}^c . Elle est définie par :

$$h_{\text{top}}(f|U_{\gamma}^c) = \sup_{\delta > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\max\{\text{Card}(F), F(n, \delta) \text{ séparé}, F \subset U_{\gamma}^c\}).$$

2.3.3 Construction d'ensembles (n, δ) -séparés

On considère un ϵ -voisinage, C_{ϵ} , de l'ensemble critique de f . L'application f est localement injective sur le complémentaire de C_{ϵ} . Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour x et y dans $(C_{\epsilon})^c$ avec $d(x, y) \leq \delta$ on ait $f(x) \neq f(y)$. Enfin, on prend δ strictement plus petit que ϵ .

L'objectif de ce paragraphe est alors de démontrer :

Lemme 2.3.2. *On peut construire un ensemble (n, δ) -séparé contenu dans un ensemble P_n de points de $f^{-n}(x)$, de cardinal minoré par $\text{Card}(P_n)d^{-2m}$, où m est le nombre maximal de passages de l'orbite d'ordre n d'un point de P_n dans $C_{2\epsilon}$.*

Preuve. La démonstration de ce lemme va se faire en deux étapes. Dans la première, on va construire un ensemble (n, δ) -séparé contenu dans l'ensemble P_n . Dans la seconde, on minorera le cardinal de cet ensemble.

On note P_{n-k} l'ensemble $f^k(P_n)$.

Dans un premier temps, on part de x et on considère les points de $P_1 \subset f^{-1}(x)$.

Parmi eux, il y a ceux qui sont dans $(C_{2\epsilon})^c$ et ceux qui n'y sont pas. On va

garder tous les points qui sont dans la première catégorie. Ensuite, parmi ceux qui sont dans $C_{2\epsilon}$, on ne garde que celui qui a le plus d'antécédents dans P_n . On note Q_1 l'ensemble constitué par ce point et par les points de $P_1 \cap (C_{2\epsilon})^c$. D'autre part, on dira que l'on a eu une mauvaise transition au point de $(C_{2\epsilon})^c$ que l'on a conservé.

En remplaçant maintenant x par les points de Q_1 dans le raisonnement précédent, on construit un ensemble $Q_2 \subset P_2$. Puis, en itérant le procédé, on arrive à un ensemble $Q_n \subset P_n \subset f^{-n}(x)$.

L'ensemble Q_n obtenu est (n, δ) -séparé.

En effet, si $y_1, y_2 \in Q_n$ et $d(f^k(y_1), f^k(y_2)) \leq \delta$ pour $k = 0, \dots, n-1$ alors $f^{n-1}(y_1) = f^{n-1}(y_2)$ car de deux choses l'une :

soit $f^{n-1}(y_1)$ et $f^{n-1}(y_2)$ sont dans $(C_\epsilon)^c$ et l'égalité provient de la définition de δ ;

soit $f^{n-1}(y_1)$ ou $f^{n-1}(y_2)$ est dans C_ϵ et alors ces deux éléments sont dans $C_{2\epsilon}$ (car δ est inférieur à ϵ) et l'égalité découle de la définition de Q_1 .

A partir de là, on montre de même que $f^{n-2}(y_1) = f^{n-2}(y_2)$ et ainsi de suite jusqu'à $y_1 = y_2$.

On a donc construit un ensemble (n, δ) -séparé, Q_n , inclus dans P_n . Il reste à minorer le cardinal de cet ensemble par $\text{Card}(P_n)d^{-2m}$.

On va faire une récurrence sur le nombre maximal k de mauvaises transitions entre x et un point y de P_n (ce nombre varie entre 0 et m). Elle va montrer que le cardinal de Q_n est minoré par $\text{Card}(P_n)d^{-2k}$.

Pour $k = 0$, le résultat est clair car on n'enlève aucun point de P_n .

On va traiter le cas $k = 1$ pour mieux comprendre le procédé.

Si on part d'un point y dans P_n , on a deux possibilités :

- Soit il existe l dans $\{1, \dots, n\}$ tel que $f^l(y)$ soit une mauvaise transition. Dans ce cas, on note $S(y)$ l'ensemble des préimages dans P_n des points de $f^{-1}(f^{(l+1)}(y)) \cap P_{n-l} \cap C_{2\epsilon}$. Comme on ne garde que la branche qui donne le plus de points dans P_n , on en déduit que parmi les points de $S(y)$, il y en a au moins $\text{Card}(S(y))d^{-2}$ qui sont dans Q_n .

- Soit ce l n'existe pas et alors y est dans Q_n . Dans ce cas, on note $S(y) = y$. Maintenant, on peut recommencer avec $z \in P_n - S(y)$ et ainsi de suite. On obtient donc :

$$\text{Card}(Q_n) \geq \text{Card}(P_n)d^{-2}.$$

On suppose la propriété vraie jusqu'au rang k et on veut la montrer au rang $k+1$.

Quand on enlève les points de P_n correspondant aux k premières mauvaises transitions, on obtient un sous-ensemble de P_n (qui contient Q_n) de cardinal minoré par $\text{Card}(P_n)d^{-2k}$.

Dans chaque branche de ce sous-ensemble il reste au plus une mauvaise transition. On se retrouve donc dans le cas $k = 1$ avec ce sous-ensemble à la place de P_n . Autrement dit, on trouve bien une minoration de Q_n par $d^{-2}(\text{Card}(P_n)d^{-2k}) = \text{Card}(P_n)d^{-2(k+1)}$. La récurrence est donc démontrée. Dans notre situation, on sait que le nombre de mauvaises transitions est majoré par m .

On obtient donc une minoration du cardinal de l'ensemble Q_n , (n, δ) -séparé, par $\text{Card}(P_n)d^{-2m}$.

◇

On va maintenant finir la démonstration de la proposition sur le comportement des préimages des points.

2.3.4 Fin de la démonstration

On fixe $\alpha > 0$ et dans toute la suite n sera supposé grand.

On rappelle que l'on considère des endomorphismes holomorphes génériques. Cela signifie que $C_f \cap f^i(C_f) \cap f^j(C_f) = \emptyset$ dès que $i, j \in \mathbb{N}^*$ et $i \neq j$. La généralité de cette condition est démontrée dans l'annexe A.

Soit k tel que $\frac{3}{k} < \alpha$.

Tout d'abord, si ϵ est assez petit, on a $C_{2\epsilon} \cap f^i(C_{2\epsilon}) \cap f^j(C_{2\epsilon}) = \emptyset$ si $i, j \in \{1, \dots, k\}$ et $i \neq j$.

Ensuite, l'application f est localement injective sur le complémentaire de C_ϵ . Il existe donc $\delta = \delta(\alpha, f) > 0$ tel que pour x et y dans $(C_\epsilon)^c$ avec $d(x, y) \leq \delta$ on ait $f(x) \neq f(y)$. Enfin, on prend δ petit devant ϵ et γ .

Maintenant, en utilisant le paragraphe précédent, si on fixe un point x de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et que l'on note P_n l'ensemble de ses préimages par f^n qui se trouvent hors de U_γ , on peut construire un ensemble (n, δ) -séparé inclus dans P_n de cardinal minoré par $\text{Card}(P_n)d^{-2m}$ (où m est le nombre maximal de passages de l'orbite d'ordre n d'un point de P_n dans $C_{2\epsilon}$).

D'autre part, en utilisant la majoration obtenue dans le lemme 2.3.1, le cardinal de cet ensemble est majoré par Cnd^n (où C est une constante qui ne dépend que de δ et γ).

Autrement dit, on a :

$$\text{Card}(P_n) \leq Cnd^{2m}d^n.$$

Maintenant, si on montre que pour tout point y de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, le nombre de passages de l'orbite d'ordre n de y dans $C_{2\epsilon}$ est majoré par αn (pour n grand), on aura :

$$\text{Card}(P_n) \leq Cnd^{n(2\alpha+1)},$$

et la proposition sera démontrée.

Soit donc A l'ensemble des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont l'orbite visite souvent un 2ϵ -voisinage de l'ensemble critique, i.e. :

$$A = \{x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) / \text{Card}(C_{2\epsilon} \cap \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}) \geq \alpha n\}.$$

Alors A est bien vide :

en effet, soit $y \in A$. Si on prend $m \in \mathbb{N}$ avec $m + k \leq n$, on a :

$$\text{Card}(i \in \{m, \dots, m + k\}, f^i(y) \in C_{2\epsilon}) \leq 2$$

par définition de ϵ . D'où

$$\text{Card}(i \in \{1, \dots, n\}, f^i(y) \in C_{2\epsilon}) \leq 2\left(\left[\frac{n}{k}\right] + 1\right) \leq n\left(\frac{2}{k} + \frac{2}{n}\right) < \alpha n.$$

2.4 Contrôle du genre

Dans ce paragraphe, on va passer à la démonstration du théorème 2.2.1. Dans celle-ci, il suffit de traiter le cas où L est générique. En effet, une majoration du genre de $f^{-n}(L) - U$ pour des droites génériques par $Cd^{(1+\alpha)n}$ (avec C indépendante de L) conduit à la même majoration du genre de $f^{-n}(L) - U$ pour toutes les droites par passage à la limite. Dans toute la suite on supposera donc que $f^{-n}(L)$ est lisse et que L est transverse à l'ensemble postcritique.

Pour majorer le genre de $f^{-n}(L) - U$, on va construire une partition en disques et anneaux de $f^{-n}(L)$ et faire un calcul de caractéristique d'Euler. Cependant, lors de la démonstration du cas critique fini, on a vu que l'on devait contrôler la longueur des arêtes de la triangulation. Dans ce but, on va utiliser ici un peu de géométrie hyperbolique. En effet, si on considère une petite arête dans la partie épaisse d'une surface hyperbolique, on peut l'insérer dans un disque de sorte à contrôler le module de l'anneau ainsi créé. On est donc en mesure d'utiliser un argument longueur-aire.

Voici donc le plan de ce paragraphe : dans un premier temps, on va faire quelques rappels de géométrie hyperbolique, puis on construira la triangulation de $f^{-n}(L)$. Enfin les deux dernières parties seront consacrées d'une part à la majoration du genre et d'autre part au contrôle des longueurs des arêtes de la triangulation.

2.4.1 Un peu de géométrie hyperbolique

Une référence pour ce paragraphe est le livre de P. Buser (voir [6]). Soit S une surface de Riemann. Si le revêtement universel de S est le disque

unité D , on dit que S est hyperbolique.

Dans la suite, on suppose que S est une surface de Riemann hyperbolique. Le revêtement universel $\pi : D \rightarrow S$ permet de définir une métrique complète de courbure -1 sur S à partir de la métrique de Poincaré de D . On l'appelle métrique de Poincaré de S . C'est l'unique métrique complète de courbure -1 dans la classe conforme des métriques définissant la structure complexe de S .

A partir de la métrique de Poincaré de S , μ , on peut définir le rayon d'injectivité en un point p : c'est le plus grand r tel que $\pi|D(q, r)$ soit un plongement (où q est un antécédent de p).

Grâce à lui, on peut décomposer S en deux parties : l'une mince (où le rayon d'injectivité est inférieur à $\text{Argsh}(1)$) et l'autre épaisse.

La topologie de la partie mince est assez simple :

Théorème 2.4.1. *Voir [6].*

La partie mince de S est constituée de cusps et d'anneaux disjoints.

Un cusp est isométrique au cylindre infini $] -\infty, \log 2] \times S^1$ muni de la métrique $ds^2 = d\rho^2 + e^{2\rho} dt^2$.

Un anneau de la partie mince est un voisinage d'une géodésique γ de la forme :

$$\mathcal{C}(\gamma) = \{p \in S, d_\mu(p, \gamma) \leq \text{Argsh}\left(\frac{1}{\text{sh}\left(\frac{1}{2}l_\mu(\gamma)\right)}\right)\}.$$

Il est isométrique au cylindre

$$\left[-\text{Argsh}\left(\frac{1}{\text{sh}\left(\frac{1}{2}l_\mu(\gamma)\right)}\right), \text{Argsh}\left(\frac{1}{\text{sh}\left(\frac{1}{2}l_\mu(\gamma)\right)}\right)\right] \times S^1$$

muni de la métrique $ds^2 = d\rho^2 + l^2(\gamma)ch^2 \rho dt^2$.

Pour montrer la concentration du genre près du support de μ , on va utiliser ce théorème pour fabriquer une partition de $f^{-n}(L)$. Dans ce procédé, il y a une étape statique que l'on va expliciter maintenant : on va produire une partition en disques et anneaux d'une surface de Riemann hyperbolique S quelconque d'aire finie.

La partition sera composée de la partie mince et d'un recouvrement régulier de la partie épaisse par des disques.

On note F un ensemble ϵ -séparé maximal dans la partie épaisse (avec $\epsilon < \text{Argsh}(1)$). L'aire pour une métrique de courbure -1 d'un disque $D(x, \frac{\epsilon}{2})$ avec x dans la partie épaisse est une constante qui ne dépend que de ϵ . Le cardinal de F est donc majoré par $C_{\text{aire}}(S)$ (on note C toute constante qui ne dépend que de ϵ). On recouvre la partie épaisse avec la réunion des disques $D(x, \epsilon)$ (où x décrit F). On en déduit une partition de la partie épaisse par

des disques qui sont les intersections des disques précédents, d'où une partition de S par des disques et des anneaux.

Si x est un élément de F , il y a au plus C points de F dans $D(x, 2\epsilon)$. La partition ci-dessus contient donc un nombre d'arêtes dominé par $C\text{aire}(S)$. C'est cette partition que l'on utilisera pour construire une partition dynamique de $f^{-n}(L)$.

Remarquons enfin que l'aire de S est bornée par sa topologie (grâce à la formule de Gauss-Bonnet). Autrement dit, le nombre d'arêtes de la partition précédente est majoré par $-C\chi(S)$.

2.4.2 Construction de la partition dynamique de $f^{-n}(L)$

On part d'une droite L projective et on note V l'ensemble des valeurs critiques de f .

La première étape consiste à fabriquer une "bonne" partition de L composée de disques et d'anneaux.

Quitte à bouger un peu L , $S = L - L \cap V$ est une surface de Riemann hyperbolique (car V est de degré $3d(d-1) \geq 3$). En utilisant le paragraphe précédent, on peut donc construire une partition de S , donc de L , en des disques et des anneaux. Elle contient au plus $C\text{Card}(L \cap V)$ arêtes.

C'est la "bonne" partition que l'on cherchait.

Par construction, les disques (resp. les anneaux) de la partition de L se relèvent sous forme de disques (resp. d'anneaux). En effet, l'application f est un revêtement de $f^{-1}(L) - f^{-1}(V)$ sur $L - V$. Ainsi, en tirant en arrière par f la partition de L , on en obtient une de $f^{-1}(L)$.

On va maintenant raisonner dans $f^{-1}(L)$ où on veut construire une "bonne" partition. Quitte à bouger un peu les partitions, on supposera dans la suite que les arêtes que l'on construit ne touchent jamais un itéré de V .

Les disques (resp. les anneaux) de $f^{-1}(L)$ qui rencontrent V en au plus un point (resp. qui ne rencontrent pas V) se relèvent par f sous forme de disques (resp. d'anneaux). On ne va donc pas les modifier. Par contre, on va redécouper les disques et anneaux qui n'entrent pas dans les catégories ci-dessus. On va traiter le cas du disque (celui de l'anneau est identique).

On note D un disque de $f^{-1}(L)$ qui touche V en au moins deux points. En doublant D et en enlevant les points de $V \cap D$ ainsi que leurs symétriques, on obtient une surface de Riemann S' hyperbolique.

Comme dans l'étape précédente, on produit une partition de S' en utilisant les anneaux de la partie mince auxquels on ajoute un recouvrement de la partie épaisse par des disques $D(x, \epsilon)$.

Pour des raisons de symétrie, le bord de D dans S' est une géodésique. La partition précédente induit donc une partition de $D - D \cap V$, donc de D , en

disques et anneaux qui contient $C\text{Card}(D \cap V)$ arêtes.

En recommençant ce que l'on vient de faire avec les autres disques et anneaux qui rencontrent V , on construit une "bonne" partition de $f^{-1}(L)$. Si on relève celle-ci par f et que l'on itère le procédé, on aboutit à une partition "dynamique" de $f^{-n}(L)$ en disques et anneaux.

Dans le paragraphe suivant, on va montrer qu'un contrôle des longueurs des arêtes de la partition induit la majoration cherchée du genre de $f^{-n}(L)$ hors U_γ en $d^{n(1+\alpha)}$.

2.4.3 Majoration du genre des préimages de droites

On va procéder ici comme dans le cas critiquement fini.

Soit Γ la réunion des arêtes et des sommets de la partition ainsi obtenue qui sont contenus dans U_γ .

Alors :

$$g(f^{-n}(L) - U_\gamma) \leq g(f^{-n}(L) - \Gamma),$$

et c'est ce dernier terme que l'on va majorer.

Une composante connexe de $f^{-n}(L) - \Gamma$ peut être de deux types. Soit elle ne contient pas d'arête de la triangulation et alors c'est nécessairement un disque ou un anneau (donc de genre nul). Soit elle en contient au moins une. Si \mathcal{C} désigne les composantes du deuxième type et c leur nombre, on obtient :

$$g(f^{-n}(L) - U_\gamma) \leq c - \frac{\chi(\mathcal{C})}{2},$$

Ainsi :

$$\frac{2g(f^{-n}(L) - U_\gamma)}{3} \leq \text{Nombre d'arêtes qui sortent de } U_\gamma.$$

Il reste donc à majorer ce dernier terme.

Si a est une arête qui sort de U_γ , elle entre dans un des deux cas suivants :

1^{er} cas : a possède un sommet hors de $U_{\frac{\gamma}{2}}$.

La majoration du nombre de ces arêtes découle alors du contrôle des préimages des sommets.

On fixe $\alpha > 0$.

Il existe n_0 à partir duquel on a :

$$\max_{x \in \mathbb{P}^2} \text{Card}(f^{-n}(x) \cap U_{\frac{\gamma}{2}}^c) \leq d^{n(1+\alpha)}.$$

Etant donné que le nombre d'arêtes créées au rang k est de l'ordre de Cd^k , on obtient alors une majoration du nombre d'arêtes de $f^{-n}(L)$ qui ont un

sommet hors de $U_{\frac{\gamma}{2}}$ par :

$$\sum_{k=0}^{n-n_0} C d^k d^{(n-k)(1+\alpha)} + \sum_{k=n-n_0+1}^n C d^k d^{2(n-k)}.$$

Le nombre d'arêtes de la partition de $f^{-n}(L)$ qui entrent dans le premier cas est donc majoré par $d^{n(1+2\alpha)}$ (pour n grand).

2^{ème} Cas : Les deux sommets de a sont dans $U_{\frac{\gamma}{2}}$ (en particulier la longueur de a est supérieure à γ).

Une majoration du nombre des arêtes de ce type par $d^{n(1+\alpha)}$ démontrerait le résultat.

C'est ce contrôle qui va être l'objet du paragraphe suivant.

2.4.4 Contrôle des longueurs des arêtes de la partition

On va voir que le contrôle des longueurs des arêtes de la partition de $f^{-n}(L)$ est possible quitte à la bouger un peu. Soit D un disque de $f^{-k}(L)$ qui touche V en au moins deux points (le cas de l'anneau est identique). Rappelons que l'on note S' la surface de Riemann hyperbolique associée à D et μ sa métrique de Poincaré.

Parmi les éléments qui partitionnent D , on a des disques $D(x, \epsilon) \cap D$.

On va voir que quitte à bouger un peu $\partial D(x, \epsilon)$, on peut contrôler les longueurs des préimages par f^{n-k} de $\partial D(x, \epsilon) - \{1 \text{ point}\}$.

Traitons l'exemple d'un disque $D(x, \epsilon) \cap D$ où x est à distance au moins 2ϵ de ∂D .

Sur le disque Δ , constitué de l'anneau $D(x, 2\epsilon) - D(x, \epsilon)$ auquel on a enlevé une géodésique c qui joint $\partial D(x, 2\epsilon)$ à $\partial D(x, \epsilon)$, on peut définir $d^{2(n-k)}$ branches inverses f_j^{-n+k} de f^{n-k} .

D'autre part, si on note ds^2 la métrique ambiante restreinte à $f^{-n}(L)$, $(f_j^{-n+k})^* ds^2$ est conforme à la métrique hyperbolique (écrite en coordonnées polaires) $\mu = dr^2 + \text{sh}^2(r)d\theta^2$ sur Δ . Cela se traduit par :

$$(f_j^{-n+k})^* ds^2 = \rho_j^2 (dr^2 + \text{sh}^2(r)d\theta^2).$$

Voici l'argument longueur-aire donnant le contrôle voulu :

$$\text{aire}(f^{-n+k}(\Delta)) = \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^{2\epsilon} \sum_{j=1}^{d^{2(n-k)}} \rho_j^2 \text{sh}(r) dr d\theta \leq \text{aire}(f^{-n+k}D(x, 2\epsilon)) = a.$$

Il existe donc ϵ_0 dans l'intervalle $[\epsilon, 2\epsilon]$ qui vérifie :

$$\sum_{j=1}^{d^{2(n-k)}} \int_0^{2\pi} \rho_j^2(\epsilon_0, \cdot) d\theta \leq Ca.$$

Donc :

$$\text{Long}(f_j^{-n+k}(\partial D(x, \epsilon_0) - c)) = \int_0^{2\pi} \rho_j \text{sh}(\epsilon_0) d\theta \leq C \left(\int_0^{2\pi} \rho_j^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma$$

sauf un nombre d'indices j majoré par Ca .

Pour la partition de D , on remplace alors $D(x, \epsilon)$ par $D(x, \epsilon_0)$.

Les disques de taille 2ϵ se recouvrent un nombre fini borné à priori de fois. Autrement dit, les arêtes créées au rang k , mais non incluses dans les préimages des arêtes des étapes précédentes, ont leurs préimages dans $f^{-n}(L)$ de longueur inférieure à γ (sauf Cd^n d'entre elles). Ainsi, en considérant maintenant toutes les étapes k et en remarquant que redécouper une arête créée au rang k dans une étape postérieure ne change rien aux estimées, on en déduit que le nombre d'arêtes de $f^{-n}(L)$ de longueur supérieure à γ est dominé par Cnd^n .

Annexe A

Généricité

Dans cette annexe, on va démontrer la :

Proposition A.0.1. *Pour f générique l'ensemble $C_f \cap f^n(C_f) \cap f^m(C_f)$ est vide pour tous entiers n et m non nuls et distincts.*

Ici f générique signifie que f appartient au complémentaire d'une union dénombrable d'ensembles analytiques propres dans l'ensemble des endomorphismes holomorphes de degré d .

La démonstration de cette proposition reprend celle de Fornæss et Sibony (voir [13]).

On note V_n l'ensemble analytique $\{(y, f) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_d, y \in f^n(C_f)\}$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \neq m$.

En utilisant le théorème de Remmert, on voit que l'ensemble

$$\mathcal{H}_d^{n,m} = \{f \in \mathcal{H}_d \text{ pour lesquels } C_f \cap f^n(C_f) \cap f^m(C_f) \neq \emptyset\}$$

est analytique dans \mathcal{H}_d . En effet, d'une part c'est la projection sur \mathcal{H}_d de l'ensemble analytique $V_0 \cap V_n \cap V_m$. D'autre part, cette projection est propre.

L'ensemble \mathcal{H}_d étant une variété complexe, on a alors deux possibilités :

- Soit $\mathcal{H}_d^{n,m} = \mathcal{H}_d$.

- Soit $\mathcal{H}_d - \mathcal{H}_d^{n,m}$ est un ouvert de Zariski de \mathcal{H}_d (dans le sens : complémentaire d'un ensemble analytique de dimension inférieure).

Si on se trouve dans le deuxième cas pour tout doublet (n, m) de $(\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \neq m$, on pose :

$$\mathcal{H}' = \bigcap_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n \neq m} (\mathcal{H}_d - \mathcal{H}_d^{n,m}).$$

Cet ensemble \mathcal{H}' est dense dans \mathcal{H}_d et tout élément f de \mathcal{H}' vérifie :

$C_f \cap f^n(C_f) \cap f^m(C_f) = \emptyset$ pour tout couple $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \neq n$.

Pour montrer la proposition il reste donc à voir que $\mathcal{H}_d^{n,m} \neq \mathcal{H}_d$, ce qui revient à trouver un endomorphisme f tel que $C_f \cap f^n(C_f) \cap f^m(C_f) = \emptyset$.

Construction de cet endomorphisme :

L'endomorphisme que l'on cherche va être pris sous la forme $f_A = A(g)$ où A est une matrice de $Gl_3(\mathbb{C})$ et $g = [z^d : w^d : t^d]$.

Une telle application vérifie $C_{f_A} = C_0 \cup C_1 \cup C_2$ avec $C_0 = (z = 0)$, $C_1 = (w = 0)$ et $C_2 = (t = 0)$. Il suffit donc de trouver $A \in Gl_3(\mathbb{C})$ telle que pour tout triplet $(m_0, m_1, m_2) \in \{0, 1, 2\}^3$, on ait :

$$C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) = \emptyset.$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment avec

$A_{(m_0, m_1, m_2)} = \{A \in Gl_3(\mathbb{C}), C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) \neq \emptyset\}$ au lieu de $\mathcal{H}_d^{n,m}$ et $Gl_3(\mathbb{C})$ à la place de \mathcal{H}_d , on obtient deux possibilités :

- soit il existe un triplet (m_0, m_1, m_2) avec $A_{(m_0, m_1, m_2)} = Gl_3(\mathbb{C})$;
- soit $\{A \in Gl_3(\mathbb{C}), C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) = \emptyset\}$ est un ouvert de Zariski dans $Gl_3(\mathbb{C})$ et la proposition est démontrée.

La proposition se ramène donc à démontrer le lemme :

Lemme A.0.1. *On fixe un triplet $(m_0, m_1, m_2) \in \{0, 1, 2\}^3$ et un doublet (n, m) de $(\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \neq m$.*

Alors :

$$A_{(m_0, m_1, m_2)} = \{A \in Gl_3(\mathbb{C}), C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) \neq \emptyset\} \neq Gl_3(\mathbb{C}).$$

Preuve. On peut supposer que $m_0 = 0$ (i.e. $C_{m_0} = (z = 0)$).

On va considérer des matrices A de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon & \delta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire,

$$f_A = f_{\epsilon, \delta, \gamma} = [z^d + \epsilon w^d + \delta t^d : w^d + \gamma t^d : t^d].$$

1^{er} cas : $m_0 \neq m_1 \neq m_2$.

Alors si $f = f_{0,0,0}$, on a :

$$C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) = \emptyset,$$

d'où le résultat.

2^{ème} cas : $m_0 = m_1 \neq m_2$, avec par exemple $m_2 = 1$ (i.e. $C_{m_2} = (w = 0)$).
Dans cette situation, on choisit :

$$f = f_{0,\delta,0} = [z^d + \delta t^d : w^d : t^d].$$

D'une part, on a :

$$f^n((z = 0)) = \{[h^n(0) : w : 1]\} \cup [0 : 1 : 0],$$

où $h(z) = z^d + \delta$ et $h^0(0) = 0$.

D'autre part,

$$f^n((w = 0)) = \{[z : 0 : 1]\} \cup [1 : 0 : 0] = (w = 0).$$

Comme $h^n(0)$ est différent de 0 dès que n l'est, on obtient bien :

$$C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) = \emptyset.$$

3^{ème} cas : $m_0 \neq m_1 = m_2$, avec par exemple, $m_1 = m_2 = 1$ (i.e. $C_{m_1} = C_{m_2} = (w = 0)$).

C'est un cas tout à fait semblable au cas précédent. La fonction que l'on prend est :

$$f = f_{0,0,\gamma} = [z^d : w^d + \gamma t^d : t^d].$$

D'une part, on a :

$$f^n((w = 0)) = \{[z : h^n(0) : 1]\} \cup [1 : 0 : 0],$$

où $h(z) = z^d + \gamma$.

D'autre part,

$$(z = 0) = \{[0 : w : 1]\} \cup [0 : 1 : 0].$$

Comme $h^n(0)$ est différent de $h^m(0)$ si n est différent de m , on a bien :

$$C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2}) = \emptyset.$$

4^{ème} cas : $m_0 = m_1 = m_2$ (i.e. $C_{m_0} = C_{m_1} = C_{m_2} = (z = 0)$).
Dans cette situation, on va prendre :

$$f = f_{\epsilon,\delta,0} = [z^d + \epsilon w^d + \delta t^d : w^d : t^d].$$

Pour montrer que $C_{m_0} \cap f_A^n(C_{m_1}) \cap f_A^m(C_{m_2})$ est vide, on va d'abord le voir sur la droite ($t = 0$), puis dans l'ouvert $t \neq 0$.

La droite ($t = 0$) est totalement invariante, on a donc :

$$f^n((z = 0)) \cap (t = 0) = f^n((z = 0) \cap (t = 0)) = [h^n(0) : 1 : 0],$$

avec $h(z) = z^d + \epsilon$.

Autrement dit, $f^n((z = 0))$ ne rencontre pas $f^m((z = 0))$ sur la droite ($t = 0$).

Dans la suite, on se place dans l'ouvert $t \neq 0$.

Un raisonnement par récurrence conduit à :

$$f^n((z = 0)) \cap (t \neq 0) = \{[h^n(0)w^{d^n} + \delta + O(\delta^2) + \delta P_n(w) : w^{d^n} : 1]\},$$

avec $P_n(0) = 0$ et $h(z) = z^d + \epsilon$.

Les points de $f^n((z = 0)) \cap (z = 0)$ vérifient alors l'équation :

$$h^n(0)w^{d^n} + \delta + O(\delta^2) + \delta P_n(w) = 0, \quad (\text{A.1})$$

ce qui implique :

$$w^{d^n} = -\frac{\delta}{h^n(0)}(1 + O(\delta) + P_n(w)).$$

De même, les points de $f^m((z = 0)) \cap (z = 0)$ vérifient :

$$w'^{d^m} = -\frac{\delta}{h^m(0)}(1 + O(\delta) + P_m(w')).$$

Maintenant, s'il existe un point p de $(z = 0) \cap f^n((z = 0)) \cap f^m((z = 0))$, on a :

$$1 \neq \frac{h^m(0)}{h^n(0)} = \frac{1 + O(\delta) + P_m(w')}{1 + O(\delta) + P_n(w)} \quad (\text{A.2})$$

Il faut remarquer ici que w est une fonction, $w(\delta)$, continue en δ . Par ailleurs, on a $w(0) = 0$ car l'équation (A.1) s'écrit en $\delta = 0$:

$$h^n(0)w^{d^n} = 0.$$

On déduit de cette remarque que $P_n(w)$ et $P_m(w)$ tendent vers 0 quand δ tend vers 0 (car $P_n(0) = P_m(0) = 0$).

Pour obtenir une contradiction, il suffit alors de faire converger δ vers 0 dans l'équation (A.2).

◇

Annexe B

Théorie d'Ahlfors

Dans cette annexe, on va présenter quelques résultats de la théorie d'Ahlfors, en particulier l'inégalité de Riemann-Hurwitz approchée. La démonstration qu'on en donne ici utilise les mêmes techniques que celles de la première partie de la thèse et permet ainsi de raccourcir l'argument initial d'Ahlfors (voir par exemple [20]).

Soit $f : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ une application holomorphe entre surfaces de Riemann connexes non constante.

Si f est propre, de degré d , la formule de Riemann-Hurwitz donne la caractéristique d'Euler de Σ en fonction de celle de Σ_0 . Plus précisément :

$$\chi(\Sigma) + \text{nombre de ramifications de } f = d\chi(\Sigma_0)$$

donc $\chi(\Sigma) \leq d\chi(\Sigma_0)$.

Le théorème d'Ahlfors permet d'étendre en quelque sorte cette inégalité au cas non propre. Plus précisément, si S désigne le nombre de feuilletts moyen au-dessus de Σ_0 , i.e. :

$$S = \frac{\text{aire de } f(\Sigma) \text{ comptée avec multiplicité}}{\text{aire de } \Sigma_0},$$

et L , la longueur du bord relatif de Σ (i.e. la longueur de $f(\partial\Sigma) - \partial\Sigma_0$) :

Théorème B.0.2. *On a l'inégalité :*

$$\min(\chi(\Sigma), 0) \leq S\chi(\Sigma_0) + hL,$$

où h est une constante qui ne dépend que de Σ_0 .

Remarque 3. Ce théorème n'a d'intérêt que si $\chi(\Sigma_0)$ est négatif (chose que l'on supposera dans la suite).

Précisons le cadre du théorème. On considère ici des métriques admissibles : elles vérifient une inégalité isopérimétrique linéaire et rendent le bord de Σ_0 régulier dans un sens que l'on précisera ultérieurement. D'autre part, on suppose que le bord de Σ_0 est constitué uniquement de courbes simples fermées et de points.

On va tout d'abord se placer dans le cas où Σ_0 est contenu dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

La surface Σ_0 est bordée par p courbes fermées (ou points) avec p supérieur à 3. Entre celles-ci, on trace p segments β_1, \dots, β_p de façon à obtenir 2 disques : D_1 et D_2 . On peut supposer que les deux disques ont la même aire A .

Dans un premier paragraphe, on va démontrer le théorème dans un cas modèle. Dans le suivant, on verra que, quitte à nettoyer un peu Σ , la situation réelle n'est pas très éloignée du cas modèle. Cette proximité démontrera alors le théorème.

B.1 Cas modèle

Dans ce paragraphe, on supposera que la restriction de f aux composantes connexes de Σ au-dessus des disques D_i est propre et de degré 1.

La topologie de Σ va être lue par un graphe que l'on construit de la façon suivante : chaque sommet représente une composante connexe au-dessus d'un des disques D_i ($i = 1, 2$) et on met autant d'arêtes entre deux sommets qu'il y a d'arcs en commun dans le bord des composantes correspondantes. Dans toute la suite, on identifiera sommets et composantes connexes correspondantes.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma) &= \sum_{\text{sommets}} \chi(\Delta) - \text{nombre d'arêtes} \\ &\leq s - a \end{aligned}$$

où s est le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes.

L'hypothèse que l'on a mise sur Σ implique que le nombre de sommets est égal à :

$$\frac{\text{aire de } f(\Sigma) \text{ comptée avec multiplicité}}{A} = 2S.$$

Pour minorer le nombre d'arêtes, on utilise la remarque suivante : si Δ est un sommet et $\nu(\Delta)$ sa valence (i.e. le nombre d'arêtes qui partent du sommet), on a :

$$L \geq \sum_{\text{sommets}} (p - \nu(\Delta)) \min_{i=1, \dots, p} \text{longueur}(\beta_i),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{\text{sommets}} \nu(\Delta) \geq 2pS - hL,$$

où h est une constante qui ne dépend que de Σ_0 . Dans la suite, on notera toujours h une telle constante.

Grâce à l'inégalité précédente, on obtient la minoration du nombre d'arêtes :

$$a \geq pS - hL.$$

La caractéristique d'Euler de Σ est donc majorée par :

$$(2 - p)S + hL = \chi(\Sigma_0)S + hL.$$

Dans la réalité, la restriction de f aux composantes connexes au-dessus des disques D_i ne sera pas propre ni de degré 1. Cependant, quitte à enlever les sommets de Σ les plus éloignés du cas modèle, on ne sera pas loin de cette situation.

B.2 Cas général

B.2.1 Comment se rapprocher du cas modèle

Avant de passer à la description des mauvais sommets de Σ , on va énoncer et démontrer un lemme qui y contribue.

Lemme B.2.1. *Il existe une constante h qui ne dépend que de D_i , telle que pour toute courbe γ qui touche le bord de D_i en deux points, on a :*

$$\min(\lambda, \lambda') \leq hl(\gamma),$$

où λ et λ' sont les longueurs des deux composantes de $\partial D_i - \gamma$.

Preuve. On commence par coller deux copies de D_i de façon à obtenir une sphère. Sur celle-ci, on considère la métrique obtenue en prenant la métrique admissible sur D_i .

Rappelons que le bord de D_i était supposé régulier. Cela veut dire qu'il existe des constantes h et l_0 telles que : pour tout point p du bord de D_i on a $\text{long}(\partial D_i \cap B(p, l)) \leq hl$ si $l \leq l_0$.

Maintenant, si on note γ une courbe qui possède deux points sur le bord de D_i , on a deux possibilités :

1^{er} cas : $l(\gamma) \geq l_0$ où $l(\gamma)$ désigne la longueur de γ . Alors :

$$\min(\lambda, \lambda') \leq l(\partial D_i) \leq \left(\frac{l(\partial D_i)}{l_0} \right) l(\gamma),$$

et le lemme est démontré.

2^{ème} cas : $l(\gamma) \leq l_0$.

Soit p un point de $\gamma \cap \partial D_i$. Si on montre qu'une des deux parties du bord de D_i est incluse dans $B(p, l(\gamma))$, on obtient le résultat en utilisant la régularité de celui-ci.

L'union de γ avec sa copie $\tilde{\gamma}$ sépare deux disques Δ_1 et Δ_2 de la sphère. Par ailleurs, on a $\gamma \subset B(p, l(\gamma))$ et $\tilde{\gamma} \subset B(p, l(\tilde{\gamma})) = B(p, l(\gamma))$. De là : $\gamma \cup \tilde{\gamma} \subset B(p, l(\gamma))$ ce qui implique que Δ_1 ou Δ_2 est inclus dans cette boule. Alors, la partie du bord de D_i qui est dans le disque en question est incluse dans $B(p, l(\gamma))$.

◇

On peut maintenant décrire l'élimination des mauvaises composantes.

Si Δ est une composante au-dessus de D_i , on peut décomposer $f(\Delta)$ en strates : Δ^1 est la partie de $f(\Delta)$ recouverte au moins une fois, ..., Δ^ν celle recouverte ν fois (où ν est la multiplicité maximale de Δ). On note γ_j la partie de $f(\partial\Sigma)$ qui borde Δ^j .

On fixe $\epsilon > 0$ petit. Alors, si $l(\gamma_j)$ désigne la longueur de γ_j , on peut avoir :
- l'existence d'un j dans $\{1, \dots, \nu\}$ avec $l(\gamma_j) \geq \epsilon$ (on dira que la strate en question a un bord long)

ou :

- pour tout j dans $\{1, \dots, \nu\}$, $l(\gamma_j) \leq \epsilon$ (on parlera de bord court).

En utilisant l'inégalité isopérimétrique et le lemme précédent, on remarque que dans le dernier cas, on a soit :

$$\text{aire de } \Delta^j \geq \text{aire de } D_i - hl(\gamma_j) , \text{ pour un certain } j \in \{1, \dots, \nu\}.$$

Soit :

$$\text{aire de } \Delta^j \leq hl(\gamma_j) , \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, \nu\}.$$

Dans notre contexte, ce sont les composantes du dernier type qui sont les plus éloignées de la situation propre : on veut donc les enlever.

En ôtant ces composantes, on modifie l'aire de $f(\Sigma)$ d'au plus hL . D'autre part, la longueur relative de la courbe obtenue en enlevant ces composantes est majorée par hL . Enfin, si on considère le graphe associé (voir le paragraphe B.1) à $\tilde{\Sigma} := \Sigma -$ ces composantes, on a essentiellement :

$$\chi(\Sigma) \leq \chi(\text{graphe}(\tilde{\Sigma})).$$

En effet, si C désigne une composante connexe du graphe de Σ privé du graphe de $\tilde{\Sigma}$, on a :

- Soit $\chi(C) \geq 1$ (donc $\chi(C) = 1$). Dans ce cas C est un arbre égal au graphe de Σ tout entier, et donc :

$$S \leq hL,$$

par définition des composantes de C . Le théorème d'Ahlfors est trivial dans cette situation et ce cas sera définitivement exclu.

- Soit $\chi(C) \leq 0$ et alors $\chi(\text{graphe}(\Sigma)) \leq \chi(\text{graphe}(\Sigma) - C)$.

Autrement dit on a :

$$\chi(\Sigma) \leq \chi(\text{graphe}(\Sigma)) \leq \chi(\text{graphe}(\tilde{\Sigma})).$$

En combinant tout ce qui précède, on voit que majorer $\chi(\text{graphe}(\tilde{\Sigma}))$ par $\tilde{S}\chi(\Sigma_0) + h\tilde{L}$ (avec des notations évidentes) démontre le théorème. On peut donc supposer dans la suite que Σ ne possède plus de mauvaises composantes. L'objectif sera alors de majorer $\chi(\text{graphe}(\Sigma))$ par $S\chi(\Sigma_0) + hL$. Par ailleurs, $\chi(\text{graphe}(\Sigma)) = s - a$, où s est le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes du graphe. La majoration de $\chi(\text{graphe}(\Sigma))$ se ramène donc à majorer s et à minorer a .

B.2.2 Majoration du nombre de sommets et minoration du nombre d'arêtes

Grâce à notre simplification effectuée au paragraphe précédent, on sait qu'un sommet possède une strate qui a soit un bord long, soit une aire supérieure à $\text{aire}(D_i) - hl(\gamma_j) = A - hl(\gamma_j)$.

Il y a au plus $\frac{L}{\epsilon}$ sommets qui possèdent une strate avec un bord long.

Pour les sommets qui possèdent une strate d'aire supérieure à $A - hl(\gamma_j)$, on voit facilement qu'il y en a au plus $2S + hL$. On obtient alors une majoration de s par :

$$2S + hL$$

Passons maintenant à la minoration du nombre d'arêtes.

On se fixe un sommet Δ au-dessus de D_i .

La composante $\pi(\Delta)$ contient des strates pour lesquelles on a $l(\gamma_j) \geq \epsilon$ et d'autres avec cette longueur plus petite que ϵ . Les strates de la deuxième espèce se divisent en deux catégories : celles qui ont une aire inférieure à $hl(\gamma_j)$ et celles pour qui cette aire est supérieure à $A - hl(\gamma_j)$. Si $m(\Delta)$ désigne le nombre de strates de la dernière sorte, on a :

$$\nu(\Delta) \geq pm(\Delta),$$

où $\nu(\Delta)$ désigne la valence du sommet Δ (i.e. le nombre d'arêtes qui en partent). En effet, on peut tout d'abord supposer que l'union des segments β_l ne rencontre pas les valeurs critiques de f . Ensuite, soit γ un sous-segment de β_l choisi de sorte qu'un de ses petits voisinages dans D_i soit inclus dans les $m(\Delta)$ strates (c'est possible car elles s'emboîtent les unes dans les autres

et que $h\epsilon$ peut être supposé petit devant les longueurs des β_l); alors γ se relève en au moins $m(\Delta)$ arêtes dans Δ .

La minoration de $\sum m(\Delta)$ entraîne donc celle du nombre d'arêtes $a = \frac{1}{2} \sum \nu(\Delta)$. Pour l'obtenir, on va minorer l'aire recouverte par les $\sum m(\Delta)$ strates.

Les strates pour lesquelles la longueur de γ_j est supérieure à ϵ sont en nombre au plus égal à $\frac{L}{\epsilon}$. L'union de ces éléments est donc d'aire inférieure à $\frac{L}{\epsilon} \text{aire}(D_i) = hL$.

De même, l'ensemble des strates qui ont un petit bord et une aire majorée par $hl(\gamma_j)$ a une aire majorée par hL .

En combinant ces deux majorations, on obtient que l'aire recouverte par les plaques qui ont un petit bord et une aire minorée par $A - hl(\gamma_j)$ est supérieure à :

$$2AS - hL.$$

Autrement dit, on a :

$$a \geq \frac{p}{2} \sum_{\text{sommets}} m(\Delta) \geq \frac{p}{2} \frac{1}{A} (2AS - 2hL) \geq pS - hL.$$

qui donne une majoration de $\chi(\text{graphe}(\Sigma))$ par :

$$(2 - p)S + hL = \chi(\Sigma_0)S + hL.$$

On va passer au cas où Σ_0 est une surface de Riemann de genre g avec b composantes de bord (qui sont des points ou des courbes simples fermées et lisses).

Pour se ramener à la situation précédente, on découpe Σ_0 avec g courbes fermées simples et lisses de sorte que Σ_0 privée de celles-ci soit une sphère comportant $2g + b$ trous.

Le découpage n'a pas changé la caractéristique d'Euler de Σ_0 . Alors, si on note $\Sigma^1, \dots, \Sigma^N$ les composantes connexes que ce découpage induit sur Σ , on a :

$$\min(\chi(\Sigma^i), 0) \leq \chi(\Sigma_0)S(\Sigma^i) + hL(\Sigma^i),$$

où $S(\Sigma^i)$ est le recouvrement moyen de Σ^i au-dessus de Σ_0 et $L(\Sigma^i)$ la longueur de son bord relatif.

Si jamais on avait $\chi(\Sigma^i) \leq \chi(\Sigma_0)S(\Sigma^i) + hL(\Sigma^i)$, alors :

$$\chi(\Sigma) \leq \sum_{i=1}^N \chi(\Sigma^i) \leq \chi(\Sigma_0)S + hL,$$

et le théorème serait démontré.

Cependant, en reprenant la démonstration précédente (i.e. dans le cas où Σ_0 est contenu dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), on constate qu'il n'y a qu'un seul cas où l'on n'a pas nécessairement $\chi(\Sigma^i) \leq \chi(\Sigma_0)S(\Sigma^i) + hL(\Sigma^i)$: quand Σ^i est un disque composé uniquement de mauvais sommets (i.e. qui ont un petit bord et une petite aire).

On note $(\Sigma^i)_{i \in I}$ l'ensemble de ces mauvais disques.

Maintenant, on a deux possibilités :

soit $\Sigma = \cup_{i \in I} \Sigma^i$, et alors :

$$S \leq hL$$

par définition des mauvais sommets (dans ce cas le théorème est démontré), soit $\Sigma \neq \cup_{i \in I} \Sigma^i$ et alors :

$$\chi(\Sigma) \leq \chi(\Sigma - \cup_{i \in I} \Sigma^i) \leq \sum_{i=1, i \notin I}^N \chi(\Sigma^i) \leq \chi(\Sigma_0)S(\cup_{i \notin I} \Sigma^i) + hL.$$

La première inégalité résulte du fait que les disques Σ^i (avec i dans I) ne sont pas des îles dans Σ .

D'autre part, on a $S(\cup_{i \notin I} \Sigma^i) + S(\cup_{i \in I} \Sigma^i) = S$ et $S(\cup_{i \in I} \Sigma^i) \leq hL$.

Alors, en combinant ces deux relations, on obtient bien :

$$\chi(\Sigma) \leq \chi(\Sigma_0)S + hL.$$

Pour terminer cette annexe, on va donner un corollaire de la théorie d'Ahlfors : le théorème de Picard.

Soit f une application holomorphe non constante de \mathbb{C} à valeur dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors on a une comparaison aire-longueur donnée par le lemme d'Ahlfors :

Lemme B.2.2. *Il existe une suite R_n qui tend vers l'infini telle que :*

$$\frac{\text{Long}(f(\partial D(0, R_n)))}{\text{Aire}(f(D(0, R_n)))} \rightarrow 0.$$

Preuve. Soit ω la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

La métrique $f^*\omega$ est conforme à la métrique standard de \mathbb{C} , on a donc $f^*\omega = \rho^2 |dz|^2$.

Maintenant, on note

$$L(R) = \text{Long}(f(\partial D(0, R))) = \int_0^{2\pi} \rho(Re^{i\theta}) R d\theta,$$

et

$$A(R) = \text{Aire}(f(D(0, R))) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 r dr d\theta.$$

Remarquons que :

$$A'(R) = \int_0^{2\pi} \rho^2 R d\theta.$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$L(R)^2 \leq 2\pi R A'(R),$$

qui implique

$$\frac{L(R)^2}{A(R)^2} \frac{1}{R} \leq 2\pi \frac{A'(R)}{A(R)^2}.$$

Autrement dit, on a :

$$\int_1^\infty \frac{L(R)^2}{A(R)^2} \frac{dR}{R} \leq \frac{2\pi}{A(1)} < \infty,$$

qui donne bien l'existence d'une suite R_n qui tend vers l'infini avec :

$$\frac{L(R_n)}{A(R_n)} \rightarrow 0.$$

◇

Corollaire B.2.1. *Théorème de Picard*

Une application holomorphe f de \mathbb{C} à valeur dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de trois points est constante.

Preuve. On raisonne par l'absurde : soit f une application holomorphe de \mathbb{C} à valeur dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé de trois points, non constante.

En utilisant le lemme précédent, on obtient une suite R_n qui vérifie :

$$\frac{L(R_n)}{A(R_n)} \rightarrow 0.$$

D'autre part, le théorème d'Ahlfors avec $\Sigma = D(0, R_n)$ et Σ_0 égal à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé des trois points, nous conduit à :

$$\min(\chi(D(0, R_n)), 0) = 0 \leq -\frac{A(R_n)}{\text{Aire}(\Sigma_0)} + hL(R_n),$$

c'est-à-dire : $1 \leq h \frac{L(R_n) \text{Aire}(\Sigma_0)}{A(R_n)}$,
ce qui est absurde.

◇

Bibliographie

- [1] E. Bedford et M. Jonsson, *Dynamics of regular polynomial endomorphisms of \mathbb{C}^2* , Amer. J. Math. **122** (2000), 153-212.
- [2] E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV : The measure of maximal entropy and laminar currents*, Invent. Math., **112** (1993), 77-125.
- [3] E. Bedford et J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . V : Critical points and Lyapunov exponents*, J. Geom. Anal., **8** (1998), 349-383.
- [4] E. Bishop, *Conditions for the analyticity of certain sets*, Michigan Math. J., **11** (1964), 289-304.
- [5] J.-Y. Briend et J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , IHES Publ. Math. , **93** (2001), 145-159.
- [6] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser , (1992) .
- [7] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces K3*, Acta Math., **187** (2001), 1-57.
- [8] R. Dujardin, *Laminar currents in \mathbb{P}^2* , Math. Ann., **325** (2003), 745-765.
- [9] J.-P. Demailly, *Courants positifs extrémaux et conjecture de Hodge*, Invent. Math., **69** (1982), 347-374.
- [10] J. Duval et N. Sibony, *Polynomial convexity, rational convexity, and currents*, Duke Math. J., **79** (1995), 487-513.
- [11] C. Favre et M. Jonsson, *Brolin's theorem for curves in two complex dimensions*, à paraître dans les Ann. de l'Inst. Fourier.
- [12] J.E. Fornæss et N. Sibony , *Complex dynamics in higher dimension*, Complex Potential Theory (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **439**, Kluwer, Dordrecht (1994), 131-186.
- [13] J.E. Fornæss et N. Sibony , *Complex dynamics in higher dimension I*, Astérisque, **222** (1994), 201-231.
- [14] J.E. Fornæss et N. Sibony , *Complex dynamics in higher dimension II*, Ann. Math. Studies, **137** (1995), 134-182.

- [15] J.E. Fornæss et N. Sibony , *Hyperbolic maps on \mathbb{P}^2* , Math. Ann., **311** (1998), 305-333.
- [16] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, manuscrit, (1977).
- [17] A. Katok et B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encycl. of Math. and its Appl., vol. 54, Cambridge University Press, (1995).
- [18] P. Lelong , *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **67** (1950), 393-419.
- [19] F. Morgan, *Geometric measure theory*, Academic Press, (1988).
- [20] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer-Verlag, (1970).