



Estimation d'une fonction quantile extrême

Laurent Gardes

► To cite this version:

Laurent Gardes. Estimation d'une fonction quantile extrême. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2003. Français. NNT : . tel-00005185

HAL Id: tel-00005185

<https://theses.hal.science/tel-00005185>

Submitted on 2 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Mathématiques Appliquées.

Formation Doctorale : Biostatistique.

École Doctorale : Information, Structures, Systèmes.

présentée et soutenue publiquement

par

Laurent GARDES

le 06/10/2003

Titre

Estimation d'une fonction quantile extrême

Jury

Pierre Jacob Directeur de thèse

Stéphane Girard Directeur de thèse

Armelle Guillou Rapporteur

Ivette Gomes Rapporteur

Jean-Noël Bacro Examineur

Irène Gijbels Examineur

Table des matières

Introduction	4
1 Estimation du support d'un processus de Poisson en utilisant la base de Faber-Schauder	12
1.1 Introduction	12
1.2 Définition de l'estimateur	13
1.2.1 Approximation de la fonction g	14
1.2.2 Estimation de la fonction g	16
1.3 Résultats préliminaires	16
1.3.1 Forme explicite de la fonction noyau H_n	16
1.3.2 Etude de la fonction noyau H_n	17
1.3.3 Etude de la valeur extrême $Y_{n,r}^*$	18
1.4 Convergence uniforme de l'approximation g_n	18
1.5 Convergence de l'estimateur $\hat{g}_n$	19
1.5.1 Convergence en moyenne quadratique	19
1.5.2 Convergence uniforme presque complète	20
1.6 Convergence en loi	21
1.6.1 Cas $d_n = 1$	21
1.6.2 Cas $h_n = o(k_n)$	24
1.7 Simulations	29
2 Rappels sur la théorie des valeurs extrêmes et résultat préliminaire	32
2.1 Théorie des valeurs extrêmes	32
2.1.1 Définition d'une fonction à variations régulières	32
2.1.2 Représentation de Karamata	33
2.1.3 Quelques résultats sur les fonctions à variations régulières	33
2.1.4 Loi des valeurs extrêmes	34
2.1.5 Caractérisation des domaines d'attraction	35
2.1.6 Théorème de Pickands	36
2.2 Un résultat préliminaire	37
2.2.1 Hypothèses	37
2.2.2 Enoncé et démonstration du résultat	38
3 Utilisation de seuils aléatoires pour estimer l'indice de valeur extrême	43
3.1 Introduction	43
3.2 Hypothèses et résultat préliminaire	45
3.3 Définitions des estimateurs de l'indice de valeur extrême	50

TABLE DES MATIÈRES

3.3.1	Idée générale	50
3.3.2	Un estimateur de l'indice de valeur extrême à double seuil	50
3.3.3	Utilisation de quatre seuils aléatoires pour estimer l'indice de valeur extrême . . .	51
3.3.4	Cas particulier de l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$	55
3.4	Convergence en probabilité	56
3.4.1	Convergence en probabilité de $\hat{\xi}_{1,n}$	57
3.4.2	Convergence en probabilité de $\hat{\xi}_{2,n}$	57
3.4.3	Convergence en probabilité de $\hat{\xi}_{3,n}$	60
3.5	Convergence en loi et vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$	62
3.5.1	Convergence en loi	62
3.5.2	Vitesse de convergence optimale	64
3.6	Convergence presque-sûre de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$	65
3.7	Simulations	68
3.7.1	Comparaison de nos trois estimateurs de ξ	68
3.7.2	Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ avec l'estimateur des moments et l'estimateur proposé par Beirlant et <i>al.</i>	73
3.8	Estimation de l'indice de valeur extrême dans le domaine d'attraction de Fréchet	77
3.8.1	Transformation des variables aléatoires	77
3.8.2	Choix et estimation des paramètres M et m	79
3.8.3	Simulations	80
4	Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil	84
4.1	Introduction	84
4.2	Un estimateur de quantile extrême à double seuil	86
4.2.1	Définition de l'estimateur	86
4.2.2	Remarques et commentaires	87
4.2.3	Résultats principaux	88
4.2.4	Simulations	92
4.3	Estimation d'une fonction quantile extrême	108
4.3.1	Hypothèses et résultat préliminaire	108
4.3.2	Estimation de $g_{p_n}(x_0)$ et convergence en probabilité	114
4.3.3	Simulations	115
	Conclusion et perspectives	123
	A Démonstration de la Proposition 1.1	125
	B Etude des fonctions $H(\theta)$ et $G(\theta)$	127
	C Démonstration du Théorème 3.8	132
	D Démonstration du Lemme 4.1	138
	E Démonstration de la propriété (4.29)	145

Introduction

Généralités

Notre motivation première dans ce travail de thèse est l'estimation du support d'une loi de probabilité quand ce dernier est un ensemble borné. Par définition, les points observés font partie du support. Un estimateur du support est alors un ensemble aléatoire construit à l'aide de ces points. Les applications concernant essentiellement des données bidimensionnelles, nous avons restreint l'étude au cas d'un support d'intérieur non vide dans le plan.

Il est clair que les observations qui contiennent de l'information sur le support sont celles qui sont les plus “proches” de la frontière du support. Ces observations peuvent être vues comme des valeurs extrêmes. C'est pour cela que nous avons axé une grande partie de ce travail sur l'étude des valeurs extrêmes d'un échantillon issu d'une loi dont le point terminal est fini. Nous expliquons plus en détail dans la suite de cette introduction comment nous avons mis à profit cette étude pour estimer le support d'une loi de probabilité.

Une idée simple pour estimer un support consiste à prendre une réunion de boules centrées sur les observations. Le rayon de ces boules est choisi convenablement pour assurer la convergence de l'estimateur. Cela ne nécessite pratiquement pas d'hypothèse sur la forme du support (voir Chevalier [16], Devroye et Wise [27]).

Dans le cas où le support est un ensemble convexe, l'estimateur le plus naturel est obtenu en prenant l'enveloppe convexe des observations. Le plus petit ensemble convexe contenant la totalité des observations a la propriété intéressante d'être un résumé exhaustif dans un modèle paramétré par les convexes bornés de $\mathbb{R}^2$ (voir par exemple Efron [29], Hartigan [55], Schneider [76], Ripley et Rasson [75]).

Le cas plus général où le support est délimité par un arc fermé simple de $\mathbb{R}^2$ est beaucoup plus compliqué. Aucun estimateur n'apparaît comme étant “naturel” et la complexité du modèle ne permet pas la définition d'une notion d'exhaustivité. La plupart des auteurs ont simplifié la question en envisageant seulement l'estimation d'un fragment de courbe. C'est ce que nous faisons aussi.

Dans ce travail, nous nous intéressons à un support de la forme :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\},$$

où g est une fonction positive inconnue appelée *frontière du support*. Il nous suffit donc, pour estimer l'ensemble S , de proposer un estimateur de la fonction g . Nous nous intéressons donc à une classe restreinte de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. Cette restriction n'est cependant pas sans justification.

Tout d'abord, comme le signalent Korostelev et Tsybakov [65]), un tel ensemble S peut-être considéré comme étant une partie d'un ensemble du plan plus général.

De plus, savoir estimer un tel ensemble S s'avère aussi utile pour estimer un ensemble connexe étoilé du plan. Il suffit en effet de remarquer qu'un tel ensemble peut-être défini en coordonnées polaires par :

$$\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 < \rho < \Phi(\theta)\},$$

où Φ est une fonction positive inconnue.

Enfin, une telle forme de support convient particulièrement pour modéliser la production optimale d'une entreprise (voir Christensen et Greene [17] et Deprins, Simar et Tulkens [26]). Dans ce cas, les données sont des couples (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ distribués sur le support S où x_i représente l'investissement de l'entreprise (capital, personnel, etc ...) pour obtenir un rendement y_i . La fonction g représente alors la production maximale pouvant être obtenue par l'entreprise.

Présentation du sujet de la thèse et de son évolution

Notre sujet porte sur l'estimation de fonctions quantiles extrêmes pour des lois à support borné. Nous nous sommes très rapidement aperçus que cela nécessite un investissement théorique important sur l'estimation de quantiles extrêmes unidimensionnels ce qui nous a amené à proposer des estimateurs de l'indice de valeur extrême.

La démarche faite dans ce travail va donc de la notion de fonction quantile extrême à celle de quantile extrême unidimensionnel puis à celle d'indice de valeur extrême. Evidemment, le traitement va dans l'autre sens ce qui explique l'organisation des chapitres de cette thèse.

Dans cette partie, nous justifions de façon plus détaillée notre démarche. Dans la partie suivante, nous donnons un aperçu, chapitre par chapitre, des résultats obtenus.

Notre premier travail a consisté à nous familiariser avec l'estimation de la frontière d'un support de la forme de S . Il fait suite aux travaux de Girard et Jacob [42, 43]. Au lieu d'utiliser une base orthonormée pour estimer la fonction g , nous utilisons la base non-Hilbertienne de Faber-Schauder. Dans ce travail, nous faisons l'hypothèse que les données sont uniformément réparties sur le support. Cette hypothèse est très utilisée dans les travaux concernant l'estimation de support (à l'exception de ceux de Devroye et Wise [27] et Härdle, Park et Tsybakov [53]). Elle est cependant restrictive pour de nombreuses applications. Nous avons décidé dans la suite de nous affranchir de cette hypothèse. Cela introduit évidemment une difficulté supplémentaire puisque nous pouvons alors nous trouver dans une situation où il n'y a que très peu de points observés aux abords de la frontière du support.

Ainsi, ce premier travail était une simple entrée en matière, car la question essentielle qui nous était posée était la suivante : disposant des réalisations de n couples de variables aléatoires $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$

indépendants et de même loi qu'un couple (X, Y) distribué sur le support S , nous devons proposer un estimateur de l'ensemble

$$S_{p_n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g_{p_n}(x)\},$$

où $g_{p_n}(x)$, $x \in [0, 1]$, est le quantile extrême d'ordre $p_n < 1/n$ de la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant que $X = x$ (cette fonction de répartition conditionnelle est notée F_Y^x dans la suite). L'ensemble S_{p_n} est donc tel que $P[(X, Y) \in S_{p_n}] = 1 - p_n$. Cette question est plus générale que celle de l'estimation du support qui correspond au cas particulier $p_n = 0$.

Malgré de nombreuses applications comme par exemple l'étude des "clusters" (Hartigan [54]), nous n'avons trouvé que très peu de travaux concernant l'estimation de cet ensemble S_{p_n} . Il nous a donc paru intéressant d'en proposer un estimateur.

La méthode que nous utilisons pour estimer $g_{p_n}(x)$ est similaire à celle des "plus proches voisins" en estimation de la régression. Elle a été par exemple utilisée par Gijbels et Peng [41] pour estimer la fonction frontière g . Plus précisément, nous considérons les variables aléatoires

$$Z_i = \{Y_i I\{|X_i - x| \leq h_n\}, i = 1, \dots, n,$$

où (h_n) est une suite strictement positive qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Autrement dit, nous nous intéressons uniquement aux variables aléatoires Y_i pour lesquelles X_i est "suffisamment proche" de x . En posant des hypothèses de continuité sur la fonction frontière g et sur la fonction de répartition conditionnelle F_Y^x , nous montrons que la fonction de répartition des variables aléatoires $\{Z_i, i = 1, \dots, n\}$ converge vers F_Y^x lorsque n converge vers l'infini.

Ainsi, nous avons pressenti que la question de l'estimation de la fonction quantile extrême en un point x de $[0, 1]$ pouvait être réduite à celle de l'estimation d'un quantile extrême d'ordre p_n en dimension 1.

Dans le déroulement de ce travail, nous avons donc été contraint à un long détour sur l'étude des valeurs extrêmes dans le cas unidimensionnel. Nous nous sommes intéressés notamment à l'estimation de quantiles extrêmes. Autrement dit, disposant d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même fonction de répartition F , nous nous sommes intéressés à la question de l'estimation du nombre x_{p_n} vérifiant :

$$1 - F(x_{p_n}) = p_n,$$

où l'ordre p_n du quantile est strictement inférieur à $1/n$. La difficulté principale dans l'estimation de quantile extrême est qu'avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, le nombre x_{p_n} est strictement supérieur à l'observation maximale de l'échantillon. Nous ne pouvons donc pas estimer x_{p_n} en inversant simplement la fonction de répartition empirique.

L'estimation d'un quantile extrême nécessite en général l'estimation préalable d'un paramètre bien connu sous le nom d'indice de valeur extrême. Nous avons donc consacré une partie de ce travail à l'estimation de cet indice. Comme nous le verrons un peu plus loin, nous proposons trois estimateurs de ce paramètre.

Sans entrer dans les détails pour l'instant, disons un mot sur la méthode que nous avons utilisée pour "puiser" dans l'échantillon l'information sur l'indice de valeur extrême. Nous avons trouvé dans

la littérature essentiellement deux méthodes : la première consiste à utiliser les k plus grandes observations de l'échantillon et la seconde, à utiliser les observations qui dépassent un seuil déterministe (cette dernière méthode est connu sous le nom de méthode P.O.T. (*Peaks Over Thresholds*)). Dans ce travail, nous proposons une méthode originale. Elle consiste à utiliser l'information apportée par des nombres de points qui dépassent des seuils aléatoires. Ces seuils aléatoires sont définis à partir du maximum de l'échantillon. Plus précisément, nous considérons des seuils de la forme $u_n X_{n,n}$ où (u_n) est une suite de $]0, 1[$ et $X_{n,n}$ est le maximum de l'échantillon. Cette méthode présente l'avantage de permettre le calcul de nos estimateurs dans le cas où les données sont censurées par intervalles (c'est à dire des données dont on aurait, sur un ou plusieurs intervalles, relevé uniquement le nombre et non les valeurs). De plus, les seuils aléatoires que nous proposons prennent en compte la forme de la queue de distribution puisqu'ils dépendent de $X_{n,n}$ (ce qui n'est pas le cas pour la méthode P.O.T. où le seuil est déterministe). Cela présente un intérêt tout particulier pour l'estimation de l'ensemble S_{p_n} puisque la forme de la queue de distribution de F_Y^x varie en fonction de x . Les seuils doivent donc être choisis différemment selon la valeur de x .

Description des résultats obtenus chapitre par chapitre

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous nous plaçons dans le cas où les observations sont les réalisations d'une superposition de n copies indépendantes d'un processus ponctuel de Poisson homogène et d'intensité inconnue. Si la fonction g appartient à l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$, nous commençons par une étape d'approximation consistant à tronquer son développement dans la base de Faber-Schauder. Ensuite, nous estimons les premiers coefficients à l'aide d'un ensemble de valeurs extrêmes. Cet estimateur est inspiré de ceux proposés par Girard et Jacob ([42, 43]) qui sont construits en utilisant une base orthonormée de l'espace $L^2[0, 1]$ (base de Haar, base trigonométrique). L'utilisation de la base de Faber-Schauder présente certains avantages par rapport aux estimateurs obtenus en utilisant la base de Haar ou la base trigonométrique. En effet, l'estimateur que nous proposons dans ce chapitre est continu ce qui n'est pas le cas pour la base de Haar. La base trigonométrique fournit quant à elle un estimateur continu mais elle nécessite de supposer que $g(0) = g(1)$. Cette hypothèse n'est pas nécessaire si on utilise la base de Faber-Schauder.

Nous donnons des conditions pour que notre estimateur converge uniformément presque-complètement ainsi qu'en moyenne quadratique intégrée ou uniforme vers la fonction g . Nous déterminons aussi sa loi asymptotique et, en s'inspirant des travaux de Girard et Jacob ([42, 43]), nous proposons une méthode permettant de débiaiser l'estimateur. Signalons que ce chapitre a fait l'objet d'une publication (voir [36]).

Dans la première partie du chapitre 2, nous rappelons le résultat essentiel de la théorie des valeurs extrêmes. Ce résultat, démontré par Gnedenko [44], décrit les limites possibles de la loi du maximum d'un échantillon. Ces lois sont indexées par un paramètre ξ appelé *indice de valeur extrême* et selon son signe, nous distinguons trois domaines d'attraction : Fréchet ($\xi > 0$) qui contient les fonctions de répartition dont la queue est à décroissance polynomiale, Weibull ($\xi < 0$) qui contient la majorité des fonctions de répartition de point terminal fini et Gumbel ($\xi = 0$) qui contient les fonctions de répartition dont la queue est à décroissance exponentielle. Nous énonçons ensuite les conditions d'appartenance d'une fonction de répartition à l'un des trois domaines d'attraction. Ces conditions faisant intervenir des fonctions à variations

régulières, nous en donnons au préalable les principales propriétés. Nous rappelons aussi qu’une fonction de répartition F appartenant au domaine d’attraction de Weibull d’indice $\xi < 0$ s’écrit sous la forme :

$$F(x) = 1 - (x_F - x)^{-1/\xi} \ell[(x_F - x)^{-1}], \quad (1)$$

où $x_F = \sup\{x | F(x) < 1\}$ est le point terminal de F et ℓ est une fonction à variations lentes. La fonction ℓ vérifie pour tout $t > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ell(tx)}{\ell(x)} = 1.$$

De même, nous rappelons qu’une fonction de répartition F appartenant au domaine d’attraction de Fréchet d’indice $\xi > 0$ s’écrit sous la forme :

$$F(x) = 1 - x^{-1/\xi} \ell(x).$$

Dans la seconde partie du chapitre 2, nous présentons un résultat plus original. Nous nous intéressons au comportement asymptotique du nombre de points qui dépassent le seuil aléatoire $u_n X_{n,n}$. Rappelons que (u_n) est une suite de $]0, 1[$ et que $X_{n,n}$ désigne le maximum de l’échantillon $X_1, \dots, X_n$. Plus précisément, si τ_{u_n} désigne ce nombre de points, nous donnons des hypothèses sur la fonction de répartition F pour que

$$\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \xrightarrow{P} 1, \quad (2)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce résultat est essentiel dans notre travail puisque les propriétés des estimateurs que nous proposons en dépendent.

Le chapitre 3 est consacré à l’estimation de l’indice de valeur extrême. Pour ce faire, nous disposons d’un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même fonction de répartition F . Nous supposons que F appartient au domaine d’attraction de Weibull.

Avant de présenter plus en détail le contenu de ce chapitre, rappelons que notre objectif est l’estimation du quantile extrême d’ordre $p_n < 1/n$ de la fonction de répartition F_Y^x . Il est clair que le point terminal de F_Y^x est fini puisque le support S est un ensemble borné du plan. Il paraît donc naturel de supposer que F_Y^x appartient au domaine d’attraction de Weibull d’indice de valeur extrême $\xi(x) < 0$. Cela explique pourquoi nous nous restreignons dans la suite au cas d’une fonction de répartition appartenant au domaine d’attraction de Weibull.

Le premier estimateur que nous introduisons dans ce chapitre utilise deux nombres de points aléatoires τ_{u_n} et τ_{v_n} . Ce sont les nombres de points qui dépassent les seuils $u_n X_{n,n}$ et $v_n X_{n,n}$ où (u_n) et (v_n) sont deux suites distinctes de $]0, 1[$. Plus précisément, nous estimons $\xi < 0$ par :

$$\hat{\xi}_{1,n} = - \frac{\ln[(1 - u_n)/(1 - v_n)]}{\ln(\tau_{u_n}/\tau_{v_n})}.$$

L’idée qui nous a conduit à cet estimateur est la suivante : en utilisant la convergence en probabilité (2) ainsi que l’expression de F donnée en (1), nous avons prouvé que pour n “suffisamment” grand,

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right)^{-\xi} \approx 1. \quad (3)$$

L'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ est alors la solution de l'équation (3) en ξ . Nous montrons que cet estimateur converge en probabilité vers ξ . De plus, nous prouvons sa convergence presque-sûre dans le cas où $\xi < -1$. Nous établissons la normalité asymptotique de l'estimateur dans le cas particulier où $\xi < -1/2$. Nous avons étudié le comportement de $\hat{\xi}_{1,n}$ sur plusieurs simulations. Cet estimateur s'est avéré fortement biaisé principalement lorsque l'indice que nous cherchons à estimer est proche de zéro. Nous n'avons eu un début d'explication de ce phénomène que plus tard. Nous nous sommes aperçus que l'approximation (3) pouvait être obtenue différemment. En effet, en remarquant que pour x "suffisamment" proche du point terminal x_F , la fonction $[1 - F(x)]^{-\xi}$ est approximativement linéaire, nous avons obtenu l'approximation suivante : pour a, b, c et d "assez" proche de x_F ,

$$\frac{[1 - F(a)]^{-\xi} - [1 - F(b)]^{-\xi}}{[1 - F(c)]^{-\xi} - [1 - F(d)]^{-\xi}} \approx \frac{a - b}{c - d}. \quad (4)$$

(Cette approximation signifie simplement que la "pente" entre a et b et la "pente" entre c et d est approximativement la même). L'approximation (3) peut-être alors obtenue en remplaçant a par $u_n X_{n,n}$, b par $X_{n,n}$, c par $v_n X_{n,n}$ et d par $X_{n,n}$ et en utilisant les approximations :

$$1 - F(u_n X_{n,n}) \approx \tau_{u_n}/n, \quad 1 - F(v_n X_{n,n}) \approx \tau_{v_n}/n \text{ et } 1 - F(X_{n,n}) \approx 0.$$

Nous avons alors pensé que l'origine du biais de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ était sans doute dûe au fait que l'on suppose que $1 - F(X_{n,n}) \approx 0$. En effet, si ξ est proche de zéro, $X_{n,n}$ est un estimateur fortement biaisé du point terminal.

Nous avons ensuite espéré obtenir un estimateur moins biaisé que $\hat{\xi}_{1,n}$ en procédant de la façon suivante : au lieu de remplacer dans l'approximation (4) b et d par $X_{n,n}$, nous les remplaçons par les seuils aléatoires $w_n X_{n,n}$ et $z_n X_{n,n}$ où (w_n) et (z_n) sont deux suites (non obligatoirement distinctes) de $]0, 1[$ différentes des suites (u_n) et (v_n) . En utilisant les approximations :

$$1 - F(w_n X_{n,n}) \approx \tau_{w_n}/n \text{ et } 1 - F(z_n X_{n,n}) \approx \tau_{z_n}/n,$$

nous avons, pour n assez grand,

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{w_n}^{-\xi}}{\tau_{v_n}^{-\xi} - \tau_{z_n}^{-\xi}} \right) \approx 1. \quad (5)$$

Nous proposons donc d'estimer ξ par la solution $\hat{\xi}_{2,n}$ de l'équation en ξ (5). Nous montrons que si $\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, la solution de l'équation (5) existe et est unique. Cet estimateur s'avère nettement moins biaisé que $\hat{\xi}_{1,n}$. Cependant, il possède une variance plus importante. Cela s'explique entre autre par le fait que nous utilisons quatre seuils aléatoires au lieu de deux.

Ensuite, nous avons naturellement eu envie de proposer un estimateur dont le biais serait de l'ordre de celui de $\hat{\xi}_{2,n}$ et la variance de l'ordre de celle de $\hat{\xi}_{1,n}$. Nous avons finalement eu l'idée de remplacer les nombres a, b, c et d par les mêmes valeurs que pour l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ mais d'approcher $1 - F(X_{n,n})$ non pas par zéro mais par $1/n$. Il est en effet connu que $X_{n,n}$ est un "bon" estimateur du quantile d'ordre $1/n$. Ceci nous a conduit à proposer comme estimateur de ξ l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ défini comme étant la solution de l'équation en θ :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - 1}{\tau_{v_n}^{-\theta} - 1} \right) = 1. \quad (6)$$

Nous montrons que si $1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, alors la solution de l'équation (6) existe et est unique. Le comportement de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ sur les simulations s'est avéré tel que nous l'espérions. Son biais est nettement

inférieur à celui de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ et sa variance plus faible que celle de l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$. L'estimateur de l'indice de valeur extrême le plus intéressant que nous ayons proposé dans ce travail est donc incontestablement $\hat{\xi}_{3,n}$. Nous l'avons comparé, sur plusieurs simulations, à des estimateurs classiques de l'indice de valeur extrême : l'estimateur des moments [25] et l'estimateur proposé par Beirlant et al. [4]).

Concernant l'étude théorique des estimateurs $\hat{\xi}_{2,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$, nous ne disposons pour l'instant que de la convergence en probabilité. Cette étude est compliquée par le fait que ces deux estimateurs ne sont pas définis explicitement.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous nous intéressons à l'estimation de ξ dans le domaine d'attraction de Fréchet. Nous montrons que les variables aléatoires $Y_1^*, \dots, Y_n^*$ avec

$$Y_i^* = \left(1 - \frac{M}{X_i - m + M}\right) I\{X_i > m\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

sont indépendantes et de même fonction de répartition appartenant au domaine d'attraction de Fréchet et cela pour tout $M > 0$ et m . Nous pouvons donc ainsi proposer, à partir des estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$, $\hat{\xi}_{2,n}$ ou $\hat{\xi}_{3,n}$, des estimateurs de l'indice de valeur extrême qui sont valides dans le domaine d'attraction de Fréchet. Cependant, le choix des paramètres M et m s'avère être crucial pour la qualité des estimateurs obtenus. Nous avons donc proposé une méthode ad-hoc permettant de choisir au mieux ces paramètres.

Dans la première partie du chapitre 4, nous nous intéressons à la question de l'estimation du quantile extrême d'une fonction de répartition appartenant au domaine d'attraction de Weibull. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur la même approximation que celle utilisée pour estimer l'indice de valeur extrême. Rappelons que cette approximation est donnée, pour a, b, c et d "assez" proche de x_F , par :

$$\frac{[1 - F(a)]^{-\xi} - [1 - F(b)]^{-\xi}}{[1 - F(c)]^{-\xi} - [1 - F(d)]^{-\xi}} \approx \frac{a - b}{c - d}. \quad (7)$$

En remplaçant dans (7) les nombres b et d par x_{p_n} (qui est le quantile extrême d'ordre p_n que l'on cherche à estimer), nous obtenons l'approximation :

$$\frac{[1 - F(a)]^{-\xi} - p_n^{-\xi}}{[1 - F(c)]^{-\xi} - p_n^{-\xi}} \approx \frac{a - x_{p_n}}{c - x_{p_n}}.$$

En remplaçant ξ par un estimateur $\hat{\xi}_n$ faiblement consistant de ξ , et en utilisant les approximations

$$1 - F(u_n X_{n,n}) \approx \tau_{u_n}/n \text{ et } 1 - F(v_n X_{n,n}) \approx \tau_{v_n}/n,$$

nous en déduisons que pour n "assez" grand :

$$\frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} \approx \frac{x_{p_n} - u_n X_{n,n}}{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}. \quad (8)$$

Nous proposons alors comme estimateur du quantile extrême d'ordre p_n la solution de l'équation en x_{p_n} (8). Celle ci est définie par :

$$\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) = X_{n,n} \frac{v_n [\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}] - u_n [\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}]}{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n}}.$$

Nous montrons que sous certaines conditions et pour tout estimateur $\hat{\xi}_n$ faiblement consistant de ξ , la différence $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_{p_n}$ converge en probabilité vers zéro.

Il est bien connu que l'estimateur "naïf" $X_{n,n}$ est lui aussi un estimateur consistant de x_{p_n} . Cependant, il est fortement biaisé surtout lorsque l'indice de valeur extrême est proche de zéro. Nous nous sommes intéressé dans la suite de ce chapitre à la comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $X_{n,n}$. Nous avons dans un premier temps étudié la vitesse de convergence de notre estimateur dans le cas simple où l'indice de valeur extrême est connu. Nous avons obtenu un majorant de cette vitesse ce qui ne permet pas de faire une comparaison. Nous nous intéressons ensuite à la question de savoir si $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) > X_{n,n}$. En effet, dans le cas contraire, l'estimateur $X_{n,n}$ sera évidemment préférable à $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$. Nous montrons qu'en utilisant $\hat{\xi}_{3,n}$ pour estimer l'indice de valeur extrême, l'estimateur $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_{3,n})$ est alors strictement supérieur à $X_{n,n}$ et cela avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Nous étudions enfin le comportement de notre estimateur sur diverses simulations en le comparant à un estimateur classique de quantile extrême proposé par Dekkers et de Haan [24].

Enfin, dans la deuxième et dernière partie du chapitre 4, nous répondons à la question de l'estimation du quantile extrême d'ordre p_n de la fonction de répartition conditionnelle F_Y^x . Rappelons que la méthode que nous utilisons consiste à considérer les observations

$$Z_i = \{Y_i I\{|X_i - x| \leq h_n\}, i = 1, \dots, n,$$

où (h_n) est une suite strictement positive qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. La fonction de répartition des variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ convergeant vers F_Y^x lorsque n tend vers l'infini, nous proposons d'estimer $g_{p_n}(x)$ par :

$$\hat{g}_{p_n}(x) = Z_{n,n} \frac{v_n[\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n(x)} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n(x)}] - u_n[\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n(x)} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n(x)}]}{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n(x)} - \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n(x)}},$$

où $Z_{n,n}$ est le maximum des observations et $\hat{\xi}_n(x)$ est un estimateur faiblement consistant de $\xi(x)$. τ_{u_n} et τ_{v_n} désignent les nombres de variables aléatoires parmi $Z_1, \dots, Z_n$ qui dépassent les seuils $u_n Z_{n,n}$ et $v_n Z_{n,n}$. Sous des conditions de régularité sur la fonction g et sur la fonction de répartition conditionnelle F_Y^x , nous montrons que $\hat{g}_{p_n}(x) - g_{p_n}(x) \xrightarrow{P} 0$ lorsque n tend vers l'infini et ceci pour tout estimateur $\hat{\xi}_n(x)$ faiblement consistant de $\xi(x)$. Nous prouvons aussi que les estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$, $\hat{\xi}_{2,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$ définis dans le chapitre 3 et calculés à l'aide des variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ sont des estimateurs faiblement consistant de $\xi(x)$.

Pour finir, nous étudions le comportement de l'estimateur $\hat{g}_{p_n}(x)$ sur plusieurs simulations. Nous nous intéressons entre autre à l'influence du choix de la suite (h_n) sur son comportement.

Chapitre 1

Estimation du support d'un processus de Poisson en utilisant la base de Faber-Schauder

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un estimateur du support S d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité inconnue avec

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\}, \quad (1.1)$$

où g est une fonction inconnue et continue appelée *frontière du support*. Il est clair qu'ici l'estimation du support S est équivalente à l'estimation de la fonction g . On considère généralement que les premiers travaux relatifs à l'estimation de support sont dus à Geffroy [38] et Rényi et Sulanke [72, 73]. Geffroy propose d'estimer la frontière du support avec un simple histogramme basé sur les plus grandes observations. Cet estimateur a été étudié et amélioré notamment par Chevalier [16], Bosq [10], et Jacob [59]. Rényi et Sulanke quant à eux considèrent des supports bidimensionnels convexes qu'ils estiment en prenant simplement l'enveloppe convexe des observations. Pour répondre à des questions provenant du domaine de l'économétrie (estimation de la production optimale, etc ...), Deprins, Simar et Tulkens [26] étudient des supports du même type que celui défini en (1.1) mais en supposant que la fonction g est concave et strictement croissante. Ils estiment cette fonction en utilisant l'estimateur DEA (Data Envelopment Analysis) initialement proposé par Farrell [33] et qui est la plus petite fonction concave et strictement croissante enveloppant l'ensemble des observations. L'estimateur DEA peut-être calculé en utilisant une technique de programmation linéaire proposée par Charnes et *al.* [15]. Deprins, Simar et Tulkens [26] proposent aussi l'estimateur FDH (Free Disposal Hull) qui généralise l'estimateur DEA au cas où la fonction g n'est plus supposée concave mais uniquement strictement croissante. La loi asymptotique de l'estimateur DEA a été établie par Gijbels, Mammen, Park et Simar [40] et la vitesse de convergence optimale par Kneip, Park et Simar [62]. Pour d'autres résultats théoriques sur les estimateurs DEA et FDH, voir par exemple Banker [3], Grosskopf [48], Korostelev, Simar et Tsybakov [63, 64].

Dans le cas où la fonction g n'est plus supposée concave et/ou strictement croissante, Korostelev et Tsybakov [65] proposent d'estimer la frontière du support par une fonction polynomiale par morceaux. Ils démontrent (voir aussi Härdle, Park et Tsybakov [53]) que l'estimateur ainsi obtenu est optimal au sens de la théorie minimax pourvu que le degré de régularité de la fonction g soit connu. D'autres résultats

théoriques ainsi que des améliorations de cet estimateur sont donnés par Gayraud [37], Mammen et Tsybakov [66], etc . . .

L'ensemble des estimateurs mentionnés ci-dessus utilisent pour leur construction les observations provenant d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Dans le cas où les observations sont issues d'un processus ponctuel, des estimateurs de la frontière du support S ont été proposés par Jacob et Abbar [60], Jacob et Suquet [61], Abbar et Suquet [1] et Girard et Jacob [42, 43]. Dans le cas d'un processus ponctuel de Poisson, Abbar et Suquet [1] proposent d'approcher la fonction g en tronquant son développement dans une base orthogonale. Leur estimateur de la frontière du support est ensuite obtenu en estimant les coefficients. Les propriétés de ce dernier ont été étudiés par Jacob et Suquet [61] pour la base de Haar et les bases de l'espace C^1 des fonctions de dérivées continues. L'inconvénient de cet estimateur réside dans le fait que l'estimation des coefficients requiert la connaissance de l'intensité du processus ponctuel de Poisson. Girard et Jacob [42, 43] proposent alors d'utiliser des valeurs extrêmes pour estimer ces coefficients. Ils étudient l'estimateur ainsi obtenu dans le cas de la base de Haar [42] et de la base trigonométrique [43].

Dans ce chapitre, on utilise la même méthode d'estimation que celle proposée par Girard et Jacob [42, 43] mais en utilisant la base de Faber-Schauder. Cette base, qui n'est pas une base Hilbertienne, est obtenue en prenant les primitives des fonctions définissant la base de Haar. L'utilisation de cette base a l'avantage de fournir un estimateur continu de la fonction g (au contraire de l'estimateur obtenu avec la base de Haar) et de ne plus avoir à supposer que $g(0) = g(1)$ (ce qui est le cas pour la base trigonométrique).

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans le paragraphe 2, on définit notre estimateur qui s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de valeurs extrêmes. Dans le troisième paragraphe, on donne quelques résultats préliminaires permettant l'étude des propriétés de l'estimateur. Dans le paragraphe suivant, on démontre que l'erreur faite en approchant la fonction g par son développement tronqué dans la base de Faber-Schauder converge uniformément vers zéro. Le paragraphe 5 est consacré à la démonstration des convergences uniforme presque complète, en moyenne quadratique intégrée et en moyenne quadratique uniforme. La convergence en loi est obtenue dans le paragraphe 6 et on reprend la méthode introduite par Girard et Jacob [42, 43] pour proposer un estimateur débiaisé. Enfin, dans le dernier paragraphe, on s'intéresse au comportement de l'estimateur sur une simulation.

1.2 Définition de l'estimateur

On considère un processus ponctuel de Poisson N de mesure moyenne $c\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et c est l'intensité que l'on suppose inconnue. Le support de N est défini de la même manière qu'en (1.1) et on suppose que g appartient à l'espace $C^0[0, 1]$ des fonctions continues sur $[0, 1]$. Dans ce paragraphe, on définit un estimateur de cette fonction. La construction de celui-ci s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on propose une approximation de g en tronquant son développement dans une base de $C^0[0, 1]$ et on estime, dans une seconde étape, les coefficients de cette base en utilisant les "valeurs extrêmes" du processus N . Comme base de $C^0[0, 1]$, nous prenons la base de Faber-Schauder dont nous rappelons ci-dessous la définition.

Soit i un entier strictement positif. On considère les intervalles $J_i = \left[\frac{p_i}{2^{q_i-1}}, \frac{p_i+1}{2^{q_i-1}} \right)$, $i \geq 1$ où p_i et q_i sont déterminés de manière unique par les relations $i = 2^{q_i-1} + p_i$ et $0 \leq p_i < 2^{q_i-1}$ (si $p_i = 2^{q_i-1} - 1$, l'intervalle J_i est fermé à droite). La base de Faber-Schauder est définie par la suite $(e_i)_{i \geq 1}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$ avec

$$e_{-1}(x) = I_{[0,1]}(x) \quad e_0(x) = xI_{[0,1]}(x),$$

et, pour $i \geq 1$,

$$e_i(x) = 2^{q_i} \left[\left(x - \frac{p_i}{2^{q_i-1}} \right) I_{J_{2i}}(x) + \left(\frac{p_i+1}{2^{q_i-1}} - x \right) I_{J_{2i+1}}(x) \right],$$

où $I_A(x) = 1$ si $x \in A$ et zéro sinon. Une propriété importante de la base de Faber-Schauder est que pour toute fonction $g \in C^0[0, 1]$, la somme $\sum_{i \geq -1} a_i(g) e_i$ converge uniformément vers g sur $[0, 1]$, les coefficients $a_i(g)$, $i \geq -1$ étant définis par :

$$a_{-1}(g) = g(0) \quad a_0(g) = g(1) - g(0), \quad (1.2)$$

et, pour $i \geq 1$,

$$a_i(g) = g\left(\frac{2p_i+1}{2^{q_i}}\right) - \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{p_i}{2^{q_i-1}}\right) + g\left(\frac{p_i+1}{2^{q_i-1}}\right) \right]. \quad (1.3)$$

Pour ne pas alourdir inutilement les notations, on écrit dans la suite a_i au lieu de $a_i(g)$.

Remarque 1.1 Si g est une fonction höldérienne d'ordre $\alpha \in]0, 1[$, alors, pour $i \geq 1$, $i = 2^{q_i-1} + p_i$, $0 \leq p_i < 2^{q_i-1}$, on a

$$a_i = \mathcal{O}(2^{-\alpha q_i}). \quad (1.4)$$

En effet, d'après (1.3),

$$a_i = g(\gamma_i) - \frac{1}{2}[g(\alpha_i) + g(\beta_i)] = \frac{1}{2}[g(\gamma_i) - g(\alpha_i)] + \frac{1}{2}[g(\gamma_i) - g(\beta_i)],$$

où γ_i est le milieu de l'intervalle $J_i = [\alpha_i, \beta_i]$. Comme pour $i = 2^{q_i-1} + p_i$, $0 \leq p_i < 2^{q_i-1}$, la longueur de l'intervalle J_i est 2^{-q_i} et puisque g is α -höldérienne, on en déduit facilement (1.4).

1.2.1 Approximation de la fonction g

Soit (h_n) une suite croissante d'entiers tels que $h_n = 2^{k'_n} - 1$, $k'_n \in \mathbb{N}$. On note

$$s_n(g)(x) = \sum_{i=-1}^{h_n} a_i e_i(x)$$

la somme partielle d'ordre h_n de la série $g(x) = \sum_{i \geq -1} a_i e_i(x)$ et on pose $z_j = j/(h_n + 1)$ pour

$j = 0, \dots, h_n + 1$. Nous allons donner une approximation des coefficients a_i , $i = -1, \dots, h_n$ ce qui, d'après (1.2) et (1.3) est équivalent à donner une approximation de la fonction g aux points z_j , $j = 0, \dots, h_n + 1$. On propose ensuite d'approcher la fonction g en remplaçant dans l'expression de $s_n(g)$ les $h_n + 2$ coefficients par leurs approximations. Dans le but de donner une approximation de la fonction g aux points z_j , $j = 0, \dots, h_n + 1$, on divise le support S en k_n cellules $D_{n,r}$ où (k_n) est une suite croissante d'entiers et

$$D_{n,r} = \{(x, y) \in S \mid x \in I_{n,r}\}, \quad I_{n,r} = \left[\frac{r-1}{k_n}, \frac{r}{k_n} \right], \quad r = 1, \dots, k_n. \quad (1.5)$$

Notons $x_r = (2r-1)/(2k_n)$ le milieu de l'intervalle $I_{n,r}$. Dans la suite, on suppose que :

$$k_n = 2d_n(h_n + 1), \quad d_n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Remarque 1.2 Sous la condition (1.6), l'intervalle J_i est l'union des intervalles $I_{n,r}$ pour lesquels $x_r \in J_i$.

Posons $\gamma_n = 1/[2(h_n + 1)]$. On approche $g(0)$ par la moyenne des d_n valeurs $\{g(x_r), r \in E\}$ avec $E = \{r = 1, \dots, k_n | I_{n,r} \subset [0, \gamma_n[]$. Autrement dit, on approche $g(0)$ par :

$$\bar{g}(0) = \frac{1}{d_n} \sum_{r=1}^{k_n} g(x_r) I_{[0, \gamma_n[]}(x_r) \quad (1.7)$$

De la même manière, on approche $g(1)$ par :

$$\bar{g}(1) = \frac{1}{d_n} \sum_{r=1}^{k_n} g(x_r) I_{[1-\gamma_n, 1[]}(x_r) \quad (1.8)$$

Enfin, pour $i = 1, \dots, h_n$, on approche $g(z_i)$ par la moyenne des $2d_n$ valeurs $\{g(x_r), r \in E\}$ avec $E = \{r = 1, \dots, k_n | I_{n,r} \subset [z_i - \gamma_n, z_i + \gamma_n[]$. Autrement dit, on approche $g(z_i)$, $i = 1, \dots, h_n$ par

$$\bar{g}(z_i) = \frac{1}{2d_n} \sum_{r=1}^{k_n} g(x_r) I_{[z_i - \gamma_n, z_i + \gamma_n[]}(x_r), \quad i = 1, \dots, h_n. \quad (1.9)$$

En remplaçant dans (1.2) et (1.3) les valeurs de la fonction g aux points z_j , $j = 0, \dots, h_n + 1$ par leurs approximations (1.7)-(1.9), on approche les $h_n + 2$ coefficients de $s_n(g)$ par

$$a_{-1,n} = \bar{g}(0) = \frac{1}{d_n} \sum_{r=1}^{k_n} b_{-1}(x_r) g(x_r) \quad a_{0,n} = \bar{g}(1) - \bar{g}(0) = \frac{1}{d_n} \sum_{r=1}^{k_n} b_0(x_r) g(x_r), \quad (1.10)$$

$$a_{1,n} = \bar{g}(1/2) - \frac{1}{2}[\bar{g}(0) + \bar{g}(1)] = \frac{1}{d_n} \sum_{r=1}^{k_n} b_1(x_r) g(x_r), \quad (1.11)$$

et, pour $i = 2, \dots, h_n$,

$$a_{i,n} = \bar{g}\left(\frac{2p_i + 1}{2^{q_i}}\right) - \frac{1}{2} \left[\bar{g}\left(\frac{p_i}{2^{q_i-1}}\right) + \bar{g}\left(\frac{p_i + 1}{2^{q_i-1}}\right) \right] = \frac{1}{d_n} \sum_{r=1}^{k_n} b_i(x_r) g(x_r). \quad (1.12)$$

où,

$$\begin{aligned} b_{-1}(y) &= I_{[0, \gamma_n[]}(y) & b_0(y) &= (I_{[1-\gamma_n, 1[]} - I_{[0, \gamma_n[]})(y), \\ b_1(y) &= \left(\frac{1}{2} I_{[1/2-\gamma_n, 1/2+\gamma_n[]} - \frac{1}{2} I_{[0, \gamma_n[]} - \frac{1}{2} I_{[1-\gamma_n, 1[]} \right)(y), \end{aligned}$$

et, pour $i = 2, \dots, h_n$,

$$\begin{aligned} b_i(y) &= \left(\frac{1}{2} I_{[\frac{1}{2^{q_i}}-\gamma_n, \frac{1}{2^{q_i}}+\gamma_n[]} - \frac{1}{2} I_{[0, \gamma_n[]} - \frac{1}{4} I_{[\frac{1}{2^{q_i-1}}-\gamma_n, \frac{1}{2^{q_i-1}}+\gamma_n[]} \right)(y), \text{ si } \frac{p_i}{2^{q_i-1}} = 0, \\ b_i(y) &= \left(\frac{1}{2} I_{[\frac{2^{q_i}-1}{2^{q_i}}-\gamma_n, \frac{2^{q_i}-1}{2^{q_i}}+\gamma_n[]} - \frac{1}{4} I_{[\frac{2^{q_i}-1}{2^{q_i-1}}-\gamma_n, \frac{2^{q_i}-1}{2^{q_i-1}}+\gamma_n[]} - \frac{1}{2} I_{[1-\gamma_n, 1[]} \right)(y), \text{ si } \frac{p_i + 1}{2^{q_i-1}} = 1, \\ b_i(y) &= \left(\frac{1}{2} I_{[\frac{2p_i+1}{2^{q_i}}-\gamma_n, \frac{2p_i+1}{2^{q_i}}+\gamma_n[]} - \frac{1}{4} I_{[\frac{p_i}{2^{q_i-1}}-\gamma_n, \frac{p_i}{2^{q_i-1}}+\gamma_n[]} - \frac{1}{4} I_{[\frac{p_i+1}{2^{q_i-1}}-\gamma_n, \frac{p_i+1}{2^{q_i-1}}+\gamma_n[]} \right)(y), \\ &\text{si } p_i \neq 0 \text{ et } p_i \neq 2^{q_i-1} - 1. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de $s_n(g)$ les $h_n + 2$ coefficients par leurs approximations données en (1.10), (1.11) et (1.12), on approche la fonction g par :

$$g_n(x) = \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) g(x_r), \quad x \in [0, 1], \quad (1.13)$$

où la fonction noyau H_n est définie par :

$$H_n(y, x) = \sum_{i=-1}^{h_n} 2(h_n + 1) b_i(y) e_i(x), \quad x \in [0, 1], y \in [0, 1]. \quad (1.14)$$

1.2.2 Estimation de la fonction g

Nous allons à présent définir notre estimateur de g . Dans la suite, notons N^{*n} la somme $N_1 + \dots + N_n$ de n copies indépendantes du processus ponctuel de Poisson N . Les résultats asymptotiques sont donc obtenus en faisant tendre n vers l'infini. En utilisant l'approximation de la fonction g par la fonction g_n , il suffit, pour estimer g , d'estimer $g(x_r)$ pour $r = 1, \dots, k_n$. Or, un estimateur naturel de $g(x_r)$ est obtenu en prenant le maximum des secondes coordonnées du processus ponctuel tronqué $N^{*n}(\cdot \cap D_{n,r})$. En notant $Y_{n,r}^*$ ce maximum, nous proposons donc d'estimer g par :

$$\hat{g}_n(x) = \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) Y_{n,r}^*, \quad x \in [0, 1]. \quad (1.15)$$

1.3 Résultats préliminaires

1.3.1 Forme explicite de la fonction noyau H_n

Pour faciliter l'étude du comportement asymptotique de l'estimateur $\hat{g}_n$, nous donnons ici une écriture simplifiée de la fonction noyau H_n .

Proposition 1.1

Pour $x \in J_{h_n+1}$,

$$H_n(y, x) = \begin{cases} 2(h_n + 1)[1 - (h_n + 1)x] & \text{si } y \in [0, \gamma_n[, \\ (h_n + 1)^2 x & \text{si } y \in [\gamma_n, 3\gamma_n[. \end{cases}$$

Pour $x \in J_{h_n+i}$, $i = 2, \dots, h_n$,

$$H_n(y, x) = \begin{cases} (h_n + 1)[i - (h_n + 1)x] & \text{si } y \in [(2i - 3)\gamma_n, (2i - 1)\gamma_n[, \\ (h_n + 1)[(h_n + 1)x - i + 1] & \text{si } y \in [(2i - 1)\gamma_n, (2i + 1)\gamma_n[. \end{cases}$$

Enfin, pour $x \in J_{2h_n+1}$,

$$H_n(y, x) = \begin{cases} (h_n + 1)^2(1 - x) & \text{si } y \in [(2(h_n + 1) - 3)\gamma_n, (2(h_n + 1) - 1)\gamma_n[, \\ 2(h_n + 1)[(h_n + 1)x - h_n] & \text{si } y \in [(2(h_n + 1) - 1)\gamma_n, 1]. \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat est reportée en annexe (voir Annexe A). Elle est basée sur le résultat suivant qui sera utilisé fréquemment par la suite.

Lemme 1.1 Notons $[a]$ la partie entière de a . Si $x \in [z_p, z_{p+1}[$, où $p \in \{0, \dots, h_n\}$, alors $e_i(x) \neq 0$ si et seulement si :

$$i = -1, \quad i = 0 \text{ ou } i = 2^{k'_n - j - 1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{j+1}} \right\rfloor, \quad j = 0, \dots, k'_n - 1.$$

Démonstration – On a $[z_p, z_{p+1}[= J_{h_n+p+1} = J_{2^{k'_n+p}}$. On montre facilement que si $x \in J_{2^{k'_n+p}}$, alors

$$x \in J_{\left\lfloor \frac{2^{k'_n+p}}{2^j} \right\rfloor} = J_{2^{k'_n-j} + \left\lfloor \frac{p}{2^j} \right\rfloor},$$

pour tout $j \in \{0, \dots, k'_n - 1\}$. Ainsi, d'après la définition de la base de Faber-Schauder, $e_i(x) \neq 0$ si et seulement si :

$$i = -1, \quad i = 0 \text{ ou } i = \left\lfloor \frac{2^{k'_n-j} + \left\lfloor \frac{p}{2^j} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = 2^{k'_n-j-1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{j+1}} \right\rfloor, \quad j = 0, \dots, k'_n - 1.$$

■

1.3.2 Etude de la fonction noyau H_n

Dans la suite, on pose :

$$B_{n,j}(x) = \left(\sum_{r=1}^{k_n} [H_n(x_r, x)]^j \right)^{1/j}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Lemme 1.2 Pour tout $x \in [0, 1]$, on a les propriétés suivantes :

- (i) $B_{n,1}(x) = k_n$,
- (ii) $(h_n + 1)^2 d_n \leq B_{n,2}^2(x) \leq 4(h_n + 1)^2 d_n$,
- (iii) $(h_n + 1)^3 d_n / 2 \leq B_{n,3}^3(x) \leq 8(h_n + 1)^3 d_n$.

Démonstration –

- (i) D'après la Proposition 1.1, si $x \in J_{h_n+i}$, $i = 2, \dots, h_n$,

$$B_{n,1}(x) = \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) = 2d_n(h_n + 1)[i - (h_n + 1)x + (h_n + 1)x - i + 1] = k_n.$$

De plus, si $x \in J_{h_n+1}$,

$$\sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) = 2(h_n + 1)d_n[1 - (h_n + 1)x] + 2d_n(h_n + 1)^2 x = k_n.$$

Enfin, on montre de la même manière que si $x \in J_{2h_n+1}$, alors $B_{n,1}(x) = k_n$, ce qui conclut la démonstration de (i).

(ii) Pour $x \in J_{h_n+i}$, $i = 2, \dots, h_n$, on a :

$$B_{n,2}^2(x) = \sum_{r=1}^{k_n} [H_n(x_r, x)]^2 = 2d_n(h_n + 1)^2 \{[i - (h_n + 1)x]^2 + [(h_n + 1)x - i + 1]^2\}.$$

Notons u la fonction définie sur J_{h_n+i} par :

$$u(x) = [i - (h_n + 1)x]^2 + [(h_n + 1)x - i + 1]^2.$$

En minimisant et maximisant la fonction u sur l'intervalle J_{h_n+i} , on obtient :

$$(h_n + 1)^2 d_n \leq B_{n,2}^2(x) \leq 2(h_n + 1)^2 d_n, \quad x \in J_{h_n+i}, \quad i = 2, \dots, h_n. \quad (1.16)$$

De la même manière que précédemment, on montre que si $x \in J_{h_n+1}$ ou $x \in J_{2h_n+1}$

$$4(h_n + 1)^2 d_n / 3 \leq B_{n,2}^2(x) \leq 4(h_n + 1)^2 d_n, \quad (1.17)$$

(1.16) et (1.17) concluent la démonstration de (ii).

(iii) La démonstration est similaire à celle du Lemme 1.2 (ii). ■

1.3.3 Etude de la valeur extrême $Y_{n,r}^*$

L'estimateur $\hat{g}_n$ étant une combinaison linéaire des k_n valeurs extrêmes $Y_{n,r}^*$ et puisque les variables aléatoires $Y_{n,r}^*$, $r = 1, \dots, k_n$ sont indépendantes, il suffit, pour connaître la loi de $\hat{g}_n$, de connaître la loi de $Y_{n,r}^*$ pour tout $r \in \{1, \dots, k_n\}$. Il est donc essentiel de rappeler ici quelques résultats sur la loi de $Y_{n,r}^*$. Notons $M_{n,r}$ (resp. $m_{n,r}$), le maximum (resp. le minimum) de la fonction g sur l'intervalle $I_{n,r}$. Si $0 \leq y \leq m_{n,r}$, la fonction de répartition de $Y_{n,r}^*$ est définie par :

$$F_{n,r}(y) = P[N^{*n}[D_{n,r} \cap (I_{n,r} \times [y, \infty))] = 0] = \exp \left[\frac{nc}{k_n} (y - k_n \lambda_{n,r}) \right], \quad (1.18)$$

avec $\lambda_{n,r} = \lambda(D_{n,r})$. Sur l'intervalle $[m_{n,r}, M_{n,r}]$, la fonction de répartition de $Y_{n,r}^*$ est inconnue. De plus, si g est une fonction α -höldérienne, $n = o(k_n^{1+\alpha})$ et $k_n = o(n / \ln n)$, alors,

$$\sup_{r=1, \dots, k_n} \left| E(Y_{n,r}^*) - m_{n,r} + \frac{k_n}{nc} \right| = \mathcal{O}(k_n^{-\alpha}) \quad (1.19)$$

et,

$$\sup_{r=1, \dots, k_n} E \left[\left(\frac{Y_{n,r}^* - g(x_r)}{k_n} \right)^2 \right] = \mathcal{O}(n^{-2}). \quad (1.20)$$

Les résultats (1.18), (1.19) et (1.20) sont démontrés dans [42, 43].

1.4 Convergence uniforme de l'approximation g_n

Dans ce paragraphe, on démontre que $(g_n - g)$ converge uniformément vers zéro. Rappelons que, d'après une propriété de la base de Faber-Schauder, $s_n(g)$ converge uniformément vers g , où $s_n(g)$ est la somme tronquée à l'ordre h_n du développement de g dans la base de Faber-Schauder. Ainsi, pour démontrer que $(g_n - g)$ converge uniformément vers zéro, il suffit de démontrer que $(s_n(g) - g_n)$ converge uniformément vers zéro.

Proposition 1.2 Si g est une fonction α -höldérienne, alors g_n converge uniformément vers g .

Démonstration – Comme annoncé dans l'introduction, il suffit de démontrer que

$$\sup_x |s_n(g)(x) - g_n(x)| = o(1).$$

Or,

$$|s_n(g)(x) - g_n(x)| \leq \sum_{i=-1}^{h_n} |a_i - a_{i,n}| e_i(x) \leq \max_i |a_i - a_{i,n}| \sum_{i=-1}^{h_n} e_i(x).$$

D'après (1.2), (1.3) et (1.11), (1.12), et puisque g est une fonction α -holdérienne, on a :

$$\max_i |a_i - a_{i,n}| = \mathcal{O}(1/h_n^\alpha).$$

Le Lemme 1.1 et le fait que pour tout x et i on ait $e_i(x) \leq 1$, impliquent que

$$\sup_x |s_n(g)(x) - g_n(x)| \leq (k'_n + 2) \mathcal{O}(1/h_n^\alpha) = o(1),$$

ce qui conclut la démonstration. ■

1.5 Convergence de l'estimateur $\hat{g}_n$

Dans ce paragraphe, on démontre trois types de convergence pour l'estimateur $\hat{g}_n$.

1.5.1 Convergence en moyenne quadratique

On donne des conditions suffisantes pour que

$$J_1(\hat{g}_n) = \int_0^1 \mathbb{E}[\hat{g}_n(x) - g(x)]^2 dx \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ et,

$$J_2(\hat{g}_n) = \sup_x \mathbb{E}\{[\hat{g}_n(x) - g(x)]^2\} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, où $J_1(\hat{g}_n)$ est l'erreur moyenne quadratique intégrée de l'estimateur $\hat{g}_n$ et $J_2(\hat{g}_n)$ est l'erreur moyenne quadratique uniforme de l'estimateur $\hat{g}_n$.

Théorème 1.1 Si g est une fonction α -höldérienne, $k_n = o(n/\ln n)$ et $n = o(k_n^{1+\alpha})$, alors, $\hat{g}_n$ converge en moyenne quadratique intégrée et en moyenne quadratique uniforme vers g .

Démonstration – D'après le Théorème de Fubini, l'erreur moyenne quadratique intégrée s'écrit :

$$J_1(\hat{g}_n) = \mathbb{E}[\|\hat{g}_n - g\|_2^2].$$

La Proposition 1.2 et le fait que

$$\|\hat{g}_n - g\|_2^2 \leq 2(\|\hat{g}_n - g_n\|_2^2 + \|g_n - g\|_2^2),$$

nous assurent qu'il suffit de s'intéresser au terme $\|\hat{g}_n - g_n\|_2^2$ pour démontrer le théorème. On a :

$$\|\hat{g}_n - g_n\|_2^2 = \int_0^1 \left[\sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \left(\frac{Y_{n,r}^* - g(x_r)}{k_n} \right) \right]^2 dx.$$

Pour simplifier les notations, posons

$$\begin{aligned}
 Y_{n,r} &= \frac{Y_{n,r}^* - g(x_r)}{k_n}. \\
 \mathbb{E}[\|\hat{g}_n - g_n\|_2^2] &= \mathbb{E} \left(\int_0^1 \sum_{r,s=1}^{k_n} Y_{n,r} Y_{n,s} H_n(x_r, x) H_n(x_s, x) dx \right) \\
 &\leq 2 \sup_r \mathbb{E}(Y_{n,r}^2) \int_0^1 \sum_{r,s=1}^{k_n} H_n(x_r, x) H_n(x_s, x) dx \\
 &\leq 2 \sup_r \mathbb{E}(Y_{n,r}^2) \sup_x B_{n,1}^2(x).
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

D'après (1.20) et le Lemme 1.2 (i), on a :

$$\mathbb{E}[\|\hat{g}_n - g_n\|_2^2] = \mathcal{O} \left(\frac{k_n}{n} \right)^2 = o(1),$$

ce qui montre que $\hat{g}_n$ converge en moyenne quadratique intégrée vers g . Comme de plus, la majoration (1.21) est toujours valable pour $J_2(\hat{g}_n) = \sup_x \mathbb{E}\{[\hat{g}_n(x) - g(x)]^2\}$, on en déduit aussi que $\hat{g}_n$ converge en moyenne quadratique uniforme vers g . ■

1.5.2 Convergence uniforme presque complète

Nous allons démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\|\hat{g}_n - g\|_\infty > \varepsilon\} \right] = 0,$$

ou autrement dit que $\hat{g}_n$ converge uniformément presque complètement vers g .

Théorème 1.2 Si g est une fonction α -höldérienne et $k_n = o(n / \ln n)$, alors $\hat{g}_n$ converge uniformément presque complètement vers g .

Démonstration – Il suffit de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\{\|\hat{g}_n - g\|_\infty > \varepsilon\}] < \infty.$$

Pour ce faire, il suffit d'après la Proposition 1.2, de s'intéresser à la quantité $\hat{g}_n - g_n$. On a :

$$\hat{g}_n(x) - g_n(x) = \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) [Y_{n,r}^* - g(x_r)],$$

d'où,

$$\|\hat{g}_n - g_n\|_\infty \leq \sup_x \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \max_r |Y_{n,r}^* - g(x_r)|.$$

On en déduit, d'après le Lemme 1.2 (i), que :

$$\mathbb{P}[\|\hat{g}_n - g_n\|_\infty > \varepsilon] \leq \sum_{r=1}^{k_n} \mathbb{P}[|Y_{n,r}^* - g(x_r)| > \varepsilon].$$

La fonction g étant continue, on sait que pour n suffisamment grand, $M_{n,r} - m_{n,r} < \varepsilon/2$ uniformément en r . Ainsi,

$$\{|Y_{n,r}^* - g(x_r)| > \varepsilon\} \subset \{Y_{n,r}^* < m_{n,r} - \varepsilon/2\},$$

ce qui implique que

$$P[||\hat{g}_n - g_n||_\infty > \varepsilon] \leq \sum_{r=1}^{k_n} F_{n,r}(m_{n,r} - \varepsilon/2),$$

où $F_{n,r}$ est définie en (1.18). On en déduit l'inégalité

$$P[||\hat{g}_n - g_n||_\infty > \varepsilon] \leq k_n \exp\left(-\frac{nc\varepsilon}{2k_n}\right),$$

ce qui conclut la démonstration puisque $k_n = o(n/\ln n)$. ■

1.6 Convergence en loi

Pour démontrer les trois types de convergence de l'estimateur $\hat{g}_n$, nous n'avons pas eu besoin d'imposer une condition sur le rapport des vitesses de convergence des suites (h_n) et (k_n) . Il paraît cependant clair qu'une telle condition est nécessaire pour déterminer la loi asymptotique de l'estimateur $\hat{g}_n$. Dans ce paragraphe, on considère deux cas distincts. Tout d'abord, on suppose que $k_n = 2(h_n + 1)$ (i.e. $d_n = 1$), et on démontre que $(nc/k_n)[\hat{g}_n(x) - g_n(x)]$ converge en loi vers une loi des valeurs extrêmes si x est un nombre dyadique. Ensuite, on suppose que $h_n = o(k_n)$ et on montre que $[nc/B_{n,2}(x)][\hat{g}_n(x) - E(\hat{g}_n(x))]$ converge en loi vers une loi normale centrée et réduite. On propose aussi une méthode pour corriger le biais de notre estimateur et on détermine, pour les cas $k_n = 2(h_n + 1)$ et $h_n = o(k_n)$, la loi asymptotique du nouvel estimateur ainsi obtenu. Ce dernier résultat permet par exemple de construire des intervalles de confiance.

1.6.1 Cas $d_n = 1$

Convergence en loi

Lemme 1.3 Soit a une constante strictement positive. Si g est une fonction α -höldérienne et $n = o(k_n^{1+\alpha})$, alors, pour tout $r \in \{1, \dots, k_n\}$, la fonction de répartition de $(nc/k_n)a[Y_{n,r}^* - g(x_r)]$ converge vers la fonction de répartition définie par :

$$G(u) = \begin{cases} \exp(u/a) & \text{si } u < 0. \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition G est la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes de Weibull de paramètre d'échelle a

Démonstration – Elle est basée sur l'égalité

$$\frac{nc}{k_n}a[Y_{n,r}^* - g(x_r)] = \frac{nc}{k_n}a(Y_{n,r}^* - k_n\lambda_{n,r}) + \frac{nc}{k_n}a[k_n\lambda_{n,r} - g(x_r)].$$

D'après [42, Théorème 4], le premier terme converge en loi vers la loi des valeurs extrêmes de Weibull de paramètre d'échelle a . De plus, puisque $n = o(k_n^{1+\alpha})$, le second terme converge vers zéro ce qui conclut la démonstration. ■

Théorème 1.3 Soit x un nombre dyadique. Sous les conditions du Lemme 1.3 si $d_n = 1$ et :

- (i) si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, alors $S_n(x) = (nc/k_n)[\hat{g}_n(x) - g_n(x)]$ converge en loi vers la loi de densité $g(y) = -4y \exp(2y)$ pour $y < 0$,
- (ii) si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $S_n(x)$ converge en loi vers la loi des valeurs extrêmes de Weibull.

Démonstration –

- (i) Si x est un nombre dyadique, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$x = \frac{i_n - 1}{h_n + 1} = z_{i_n-1},$$

où $i_n = 1 + [(h_n + 1)x]$. Pour $x \in J_{h_n+i_n}$ et $d_n = 1$, on a, si $i_n \neq 1$ et $i_n \neq h_n + 2$ (i.e. $x \neq 0$ et $x \neq 1$) :

$$\hat{g}_n(x) = [i_n - (h_n + 1)x] \left[\frac{Y_{n,2i_n-2}^* + Y_{n,2i_n-1}^*}{2} \right] + [(h_n + 1)x - i_n + 1] \left[\frac{Y_{n,2i_n}^* + Y_{n,2i_n+1}^*}{2} \right]$$

et

$$g_n(x) = [i_n - (h_n + 1)x] \left[\frac{g(x_{n,2i_n-2}) + g(x_{n,2i_n-1})}{2} \right] + [(h_n + 1)x - i_n + 1] \left[\frac{g(x_{n,2i_n}) + g(x_{n,2i_n+1})}{2} \right].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{nc}{2k_n} [i_n - (h_n + 1)x] [Y_{n,2i_n-2}^* - g(x_{n,2i_n-2}) + Y_{n,2i_n-1}^* - g(x_{n,2i_n-1})] \\ &+ \frac{nc}{2k_n} [(h_n + 1)x - i_n + 1] [Y_{n,2i_n}^* - g(x_{n,2i_n}) + Y_{n,2i_n+1}^* - g(x_{n,2i_n+1})], \end{aligned}$$

et pour $n \geq N$,

$$S_n(x) = \frac{nc}{2k_n} [Y_{n,2i_n-2}^* - g(x_{n,2i_n-2})] + \frac{nc}{2k_n} [Y_{n,2i_n-1}^* - g(x_{n,2i_n-1})].$$

D'après le Lemme 1.3, $S_n(x)$ converge en loi vers la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition $G(u) = \exp(2u)$ pour $u < 0$. Un simple calcul montre que $X_1 + X_2$ admet pour densité

$$g(y) = -4y \exp(2y) \text{ pour } y < 0.$$

- (ii) Si $x = 0$ ou $x = 1$, on a respectivement $\hat{g}_n(x) = Y_{n,1}^*$ ou $\hat{g}_n(x) = Y_{n,k_n}^*$. Le Lemme 1.3 conclut la démonstration. ■

Réduction de biais

D'après (1.19), on peut corriger le biais de l'estimateur $Y_{n,r}^*$ de $g(x_r)$ en ajoutant simplement la quantité k_n/nc . Dans un premier temps, on suppose que c est connu. En remplaçant dans l'expression de l'estimateur $\hat{g}_n$, $Y_{n,r}^*$ par $Y_{n,r}^* + k_n/nc$, on obtient un estimateur débiaisé de g défini par :

$$\check{g}_n(x) = \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \left(\frac{Y_{n,r}^*}{k_n} + \frac{1}{nc} \right).$$

Nous allons déterminer la loi asymptotique du nouvel estimateur $\check{g}_n$.

Théorème 1.4 Soit x un nombre dyadique. Si g est une fonction α -höldérienne, $d_n = 1$ et $n = o(k_n^{1+\alpha})$ alors,

- (i) si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $T_n(x) = (nc/k_n)[\check{g}_n(x) - g(x)]$ converge en loi vers la loi de densité $g(y) = -4(y-1)\exp[2(y-1)]$ pour $y < 1$,
- (ii) si $x = 0$ ou $x = 1$, la loi asymptotique de $T_n(x)$ admet la fonction de répartition suivante :

$$G(y) = \begin{cases} \exp(y-1) & \text{si } y < 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration –

- (i) x étant un nombre dyadique, on démontre de la même manière que dans le Théorème 1.3, que pour $x \in J_{h_n+i_n}$ où $i_n = 1 + [(h_n + 1)x]$, $i_n \neq 1$ et $i_n \neq h_n + 2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{nc}{2k_n} \left[Y_{n,2i_n-2}^* + \frac{k_n}{nc} - g(x) \right] + \frac{nc}{2k_n} \left[Y_{n,2i_n-1}^* + \frac{k_n}{nc} - g(x) \right] \\ &= \frac{nc}{2k_n} [Y_{n,2i_n-2}^* - g(x_{n,2i_n-2})] + \frac{nc}{2k_n} [Y_{n,2i_n-1}^* - g(x_{n,2i_n-1})] + 1 \\ &\quad + \frac{nc}{2k_n} [g(x_{n,2i_n-2}) - g(x)] + \frac{nc}{2k_n} [g(x_{n,2i_n-1}) - g(x)]. \end{aligned}$$

Comme g est une fonction α -höldérienne, le Théorème 1.3 et le fait que $n = o(k_n^2)$ concluent la démonstration de (i).

- (ii) La démonstration est similaire à celle de (i). ■

Evidemment, l'estimateur $\check{g}_n$ ne peut-être calculé que si l'intensité c est connu. Nous allons à présent supposer que c est inconnu. Considérons la variable aléatoire défini par :

$$Z_n = \frac{1}{k_n} \sum_{r=1}^{k_n} Z_{n,r}^*, \quad (1.22)$$

où $Z_{n,r}^*$ est le minimum des secondes coordonnées du processus ponctuel tronqué $N^{*n}(\cdot \cap D_{n,r})$. D'après [42], on a :

$$E(Z_n) = \frac{k_n}{nc} + o(n^{-s}) \text{ et } \text{Var}(Z_n) \sim \frac{k_n}{n^2 c^2}, \quad (1.23)$$

où s est un entier aussi grand que l'on veut et où $u_n \sim v_n$ signifie que $u_n = v_n(1 + o(1))$. D'après (1.23), il semble naturel d'estimer $k_n/(nc)$ par Z_n . On en déduit l'estimateur débiaisé de g défini par :

$$\tilde{g}_n(x) = \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \frac{Y_{n,r}^* + Z_n}{k_n}.$$

Théorème 1.5 Sous les hypothèses du Théorème 1.4,

- (i) si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, alors $U_n(x) = (nc/k_n)[\tilde{g}_n(x) - g(x)]$ converge en loi vers la loi de densité $g(y) = -4(y-1)\exp[2(y-1)]$ pour $y < 1$,
- (ii) si $x = 0$ ou $x = 1$, la loi asymptotique de $U_n(x)$ admet comme fonction de répartition :

$$G(y) = \begin{cases} \exp(y-1) & \text{si } y < 1. \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration – Soit $x \in [0, 1]$ un nombre dyadique. D'après le Théorème 1.4, il suffit de démontrer que $(nc/k_n)[\tilde{g}_n(x) - \check{g}_n(x)]$ converge en probabilité vers zéro. Autrement dit, on doit démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P \left[\frac{nc}{k_n} |\check{g}_n(x) - \tilde{g}_n(x)| > \varepsilon \right] = P \left[\frac{nc}{k_n} \left| Z_n - \frac{k_n}{nc} \right| > \varepsilon \right] \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Or, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{nc}{k_n} \left| Z_n - \frac{k_n}{nc} \right| \leq \frac{nc}{k_n} |Z_n - E(Z_n)| + \frac{nc}{k_n} \left| E(Z_n) - \frac{k_n}{nc} \right|$$

D'après (1.23), le second terme converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$(nc/k_n) |E(Z_n) - k_n/(nc)| < \varepsilon/2,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} P \left[\frac{nc}{k_n} |\check{g}_n(x) - \tilde{g}_n(x)| > \varepsilon \right] &\leq P \left[\frac{nc}{k_n} |Z_n - E(Z_n)| > \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{n^2 c^2}{k_n^2} \text{Var}(Z_n) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{k_n} \right), \end{aligned}$$

d'après (1.23). ■

1.6.2 Cas $h_n = o(k_n)$

Convergence en loi

On suppose à présent que les suites (h_n) et (k_n) vérifient la condition $h_n = o(k_n)$. Le résultat suivant nous assure que dans ce cas, la loi asymptotique de l'estimateur $\hat{g}_n$ convenablement normalisé est une loi normale centrée et réduite. Dans la suite, on pose, pour $x \in [0, 1]$:

$$\sigma_n(x) = \frac{B_{n,2}(x)}{nc}.$$

Théorème 1.6 Si g est une fonction α -höldérienne, $n = o(k_n^{\alpha+1/2} h_n^{1/2})$, $h_n = o(k_n)$ et $k_n = o(n/\ln n)$, alors $S_n(x) = \sigma_n^{-1}(x)[\hat{g}_n(x) - E(\hat{g}_n(x))]$ converge en loi vers une loi normale centrée et réduite.

La démonstration de ce théorème utilise un développement de la fonction caractéristique de $S_n(x)$. Or, pour connaître la fonction caractéristique de $S_n(x)$, il suffit de connaître la fonction caractéristique de $Y_{n,r}^*$. D'après [42, Lemme 3], on sait que si g est une fonction α -höldérienne, $k_n = o(n/\ln n)$ alors, pour une suite $(t_{n,r})$ telle que $t_{n,r} = o(n/k_n)$ et $t_{n,r} = o(k_n^{1+2\alpha}/n)$, la fonction caractéristique de $Y_{n,r}^* - m_{n,r}$ au point $t_{n,r}$ admet le développement suivant :

$$\phi_{n,r}(t_{n,r}) = \frac{1 + it_{n,r} \frac{k_n}{nc} \bar{F}_{n,r}(m_{n,r}) + o \left(\left| t_{n,r} \right| \frac{n}{k_n^{1+2\alpha}} \right) + o(n^{-s})}{1 + it_{n,r} \frac{k_n}{nc}}, \quad (1.24)$$

où s est un réel aussi grand que l'on veut et $\bar{F}_{n,r} = 1 - F_{n,r}$. Nous pouvons à présent démontrer le Théorème 1.6.

Démonstration – Posons $\alpha_{n,r} = m_{n,r} - \frac{k_n}{nc}$ et notons $\psi_{n,x}$ la fonction caractéristique de $S_n(x)$.

$$\begin{aligned} \psi_{n,x}(t) &= \exp it \left[\frac{nc}{k_n B_{n,2}(x)} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) (\alpha_{n,r} - E(Y_{n,r}^*)) \right] \\ &\times E \left[\exp it \left(\frac{nc}{k_n B_{n,2}(x)} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) (Y_{n,r}^* - \alpha_{n,r}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Intéressons nous tout d'abord à la quantité

$$T_n(x) = \frac{nc}{k_n B_{n,2}(x)} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) (\alpha_{n,r} - E(Y_{n,r}^*)),$$

et montrons qu'elle converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. On aura ainsi démontré que le premier facteur de (1.25) converge vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leq \frac{nc}{B_{n,2}(x)} \max_{r=1, \dots, k_n} |\alpha_{n,r} - E(Y_{n,r}^*)| \\ &\leq \frac{nc}{\sqrt{d_n}(h_n + 1)} \max_{r=1, \dots, k_n} |\alpha_{n,r} - E(Y_{n,r}^*)|, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 1.2 (i) and (ii). Le résultat (1.19) implique que :

$$|T_n(x)| = \mathcal{O} \left[\frac{n}{\sqrt{d_n}(h_n + 1)k_n^\alpha} \right] = \mathcal{O} \left(\frac{n}{k_n^{\alpha+1/2} h_n^{1/2}} \right) = o(1).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \psi_{n,x}(t) &\sim E \left\{ \exp it \left[\frac{nc}{k_n B_{n,2}(x)} \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \left(Y_{n,r}^* - m_{n,r} + \frac{k_n}{nc} \right) \right] \right\} \\ &= \exp it \left[\frac{k_n}{B_{n,2}(x)} \right] \prod_{r=1}^{k_n} \phi_{n,r}(t_{n,r}), \end{aligned}$$

où $\phi_{n,r}$ est la fonction caractéristique de $Y_{n,r}^* - m_{n,r}$ et $t_{n,r} = \frac{nc H_n(x_r, x) t}{k_n B_{n,2}(x)}$. Pour pouvoir utiliser le développement (1.24), on doit vérifier au préalable que $t_{n,r} = o(n/k_n)$ et $t_{n,r} = o(k_n^{1+2\alpha}/n)$. Or, d'après le Lemme 1.2 (ii) et le fait que pour tout x et r , $H_n(x_r, x) \leq 2(h_n + 1)$ on a :

$$|t_{n,r}| \frac{k_n}{nc} = \frac{H_n(x_r, x) |t|}{B_{n,2}(x)} \leq |t| \frac{2(h_n + 1)}{B_{n,2}(x)} \leq \frac{2|t|}{\sqrt{d_n}} = o(1),$$

et, puisque $n = o(k_n^{1+\alpha})$,

$$|t_{n,r}| \frac{n}{ck_n^{1+2\alpha}} = \left| t_{n,r} \frac{k_n}{nc} \right| \frac{n^2}{k_n^{2(1+\alpha)}} = o(1).$$

Ainsi,

$$\psi_{n,x}(t) \sim \frac{\exp it \left[\frac{k_n}{B_{n,2}(x)} \right]}{\prod_{r=1}^{k_n} \left(1 + it_{n,r} \frac{k_n}{nc} \right)} \quad (1.26)$$

$$\times \prod_{r=1}^{k_n} \left[1 + it_{n,r} \frac{k_n}{nc} \bar{F}_{n,r}(m_{n,r}) + o \left(|t_{n,r}| \frac{n}{k_n^{1+2\alpha}} \right) + o(n^{-s}) \right]. \quad (1.27)$$

Notons $J_n^{(1)}(x)$ le facteur (1.26). D'après le Lemme 1.2 (i), on a :

$$J_n^{(1)}(x) = \prod_{r=1}^{k_n} \frac{\exp(it u_{n,r})}{1 + it u_{n,r}}, \text{ où } u_{n,r} = \frac{H_n(x_r, x)}{B_{n,2}(x)}. \quad (1.28)$$

Un développement de la fonction exponentielle implique que pour $r = 1, \dots, k_n$:

$$\frac{\exp(it u_{n,r})}{1 + it u_{n,r}} = 1 - \frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 + t^3 u_{n,r}^3 w(t u_{n,r}), \quad (1.29)$$

où w est une fonction bornée sur un compact $D \subset \mathbb{R}$ contenant 0. Rappelons maintenant une propriété des nombres complexes dont une démonstration peut-être trouvée par exemple dans [8]. Si $q_1, \dots, q_N$ et $q'_1, \dots, q'_N$, $N \in \mathbb{N}$ sont des nombres complexes tels que, pour tout $r \in \{1, \dots, k_n\}$,

$$|q_r| \leq 1 \text{ et } |q'_r| \leq 1, \quad (1.30)$$

alors, on a l'inégalité :

$$|q_1 \dots q_N - q'_1 \dots q'_N| \leq \sum_{r=1}^N |q_r - q'_r| \quad (1.31)$$

Pour $r = 1, \dots, k_n$, posons

$$q_r = 1 - \frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 + t^3 u_{n,r}^3 w(t u_{n,r}) \text{ et } q'_r = \exp \left(-\frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 \right).$$

Puisque $u_{n,r} = o(1)$, on sait que pour n assez grand et pour tout $r \in \{1, \dots, k_n\}$, on a $t u_{n,r} \in D$. On en déduit facilement que les nombres complexes $\{q_r, r = 1, \dots, k_n\}$ et $\{q'_r, r = 1, \dots, k_n\}$ vérifient la condition (1.30) pour n assez grand. Ainsi, d'après (1.28), (1.29) et (1.31) on a :

$$\left| J_n^{(1)}(x) - \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right| \leq \sum_{r=1}^{k_n} \left| 1 - \frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 + t^3 u_{n,r}^3 w(t u_{n,r}) - \exp \left(-\frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 \right) \right|.$$

$w(t u_{n,r})$ étant borné pour n suffisamment grand, un développement de la fonction exponentielle implique que :

$$\left| 1 - \frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 + t^3 u_{n,r}^3 w(t u_{n,r}) - \exp \left(-\frac{t^2}{2} u_{n,r}^2 \right) \right| = \mathcal{O}(u_{n,r}^3).$$

Ainsi,

$$\left| J_n^{(1)}(x) - \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right| = \mathcal{O} \left[\left(\frac{B_{n,3}}{B_{n,2}} \right)^3 \right]$$

et puisque d'après le Lemme 1.2 (ii) et (iii)

$$\left(\frac{B_{n,3}}{B_{n,2}}\right)^3 \leq \frac{8}{\sqrt{d_n}},$$

on en déduit que $J_n^{(1)}(x) \rightarrow \exp(-t^2/2)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Intéressons nous à présent au facteur (1.27) que l'on note $J_n^{(2)}(x)$. On a :

$$J_n^{(2)}(x) = \prod_{r=1}^{k_n} (1 + iv_{n,r} + v'_{n,r}),$$

où $v_{n,r} = t_{n,r} k_n / (nc) \bar{F}_{n,r}(m_{n,r})$ et $v'_{n,r} = o(t_{n,r} n / k_n^{1+2\alpha}) + o(n^{-s})$. En remarquant que

$$\bar{F}_{n,r}(m_{n,r}) = 1 - \exp\left[\frac{nc}{k_n}(m_{n,r} - k_n \lambda_{n,r})\right] \leq \frac{nc}{k_n}(m_{n,r} - k_n \lambda_{n,r}) = \mathcal{O}\left(\frac{n}{k_n^{1+\alpha}}\right), \quad (1.32)$$

on montre facilement que $|v'_{n,r}| = o(|v_{n,r}|)$. Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$1 \leq |1 + iv_{n,r} + v'_{n,r}| \leq |1 + 2iv_{n,r}| \leq 1 + 2|v_{n,r}|,$$

et,

$$|\arg(1 + iv_{n,r} + v'_{n,r})| \leq |\arg(1 + 2iv_{n,r})| = \arctg(2v_{n,r}) \leq 2|v_{n,r}|,$$

où $\arg(z)$ est l'argument du nombre complexe z . Ainsi,

$$0 \leq \ln |J_n^{(2)}(x)| \leq \sum_{r=1}^{k_n} \ln(1 + 2|v_{n,r}|) \leq 2 \sum_{r=1}^{k_n} |v_{n,r}|, \quad (1.33)$$

et

$$0 \leq |\arg(J_n^{(2)}(x))| \leq \sum_{r=1}^{k_n} |\arg(1 + iv_{n,r} + v'_{n,r})| \leq 2 \sum_{r=1}^{k_n} |v_{n,r}|. \quad (1.34)$$

Or, le Lemme 1.2 (ii), l'inégalité (1.32) et le fait que $n = o(k_n^{\alpha+1/2} h_n^{1/2})$, impliquent que

$$\sum_{r=1}^{k_n} |v_{n,r}| \leq |t| \frac{k_n}{B_{n,2}(x)} \max_r \bar{F}_{n,r}(m_{n,r}) = o(1). \quad (1.35)$$

On déduit de (1.33), (1.34) et (1.35) que $J_n^{(2)}(x) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ce qui implique que $\psi_{n,x}(t) \rightarrow \exp(-t^2/2)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

Réduction de biais

On rappelle que si l'intensité c est connu on définit un estimateur débiaisé de la fonction g par :

$$\check{g}_n(x) = \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \left(\frac{Y_{n,r}^*}{k_n} + \frac{1}{nc} \right).$$

Cet estimateur est obtenu en remplaçant dans l'expression de $\hat{g}_n$, $Y_{n,r}^*$ par $Y_{n,r}^* + \frac{k_n}{nc}$. On détermine, dans le résultat suivant, la loi asymptotique de l'estimateur $\check{g}_n$.

Théorème 1.7 Si g est une fonction α -höldérienne, $n \ln(h_n) = o(k_n^{1/2} h_n^{\alpha+1/2})$, $h_n = o(k_n)$ et $k_n = o(n/\ln n)$, alors $S_n(x) = \sigma_n^{-1}(x)[\check{g}_n(x) - g(x)]$ converge en loi vers une loi normale centrée et réduite.

Démonstration – Elle est basée sur le développement suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_n^{-1}(x)[\check{g}_n(x) - g(x)] &= \sigma_n^{-1}(x)[\check{g}_n(x) - E[\check{g}_n(x)]] + \sigma_n^{-1}(x)[E[\check{g}_n(x)] - g_n(x)] \\ &+ \sigma_n^{-1}(x)[g_n(x) - s_n(g)(x)] + \sigma_n^{-1}(x)[s_n(g)(x) - g(x)]. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.6, le premier terme converge en loi vers une loi normale centrée et réduite. Il suffit donc de démontrer que les trois autres termes convergent vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Concernant le second terme, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_n^{-1}(x) |E[\check{g}_n(x)] - g_n(x)| &\leq \sigma_n^{-1}(x) \max_{r=1, \dots, k_n} \left| E(Y_{n,r}^*) + \frac{k_n}{nc} - g(x_r) \right| \\ &= \mathcal{O} \left[\frac{nc}{B_{n,2}(x)k_n^\alpha} \right] = o(1), \end{aligned}$$

d'après (1.19), le Lemme 1.2 (ii) et le fait que $n = o(k_n^{\alpha+1/2} h_n^{1/2})$. Concernant le troisième terme on a :

$$\sigma_n^{-1}(x) |g_n(x) - s_n(g)(x)| \leq \sigma_n^{-1}(x) \sum_{i=-1}^{h_n} |a_i - a_{i,n}| e_i(x).$$

On en déduit, d'après (1.6), le Lemme 1.1 et le fait que $|a_i - a_{i,n}| = \mathcal{O}(1/h_n^\alpha)$, que :

$$\sigma_n^{-1}(x) |g_n(x) - s_n(g)(x)| = \mathcal{O} \left[\frac{nc(k'_n + 2)}{(h_n + 1)^\alpha B_{n,2}(x)} \right] = \mathcal{O} \left[\frac{nc(k'_n + 2)}{\sqrt{d_n}(h_n + 1)^{\alpha+1}} \right] = o(1),$$

d'après le Lemme 1.2 (ii) et le fait que $n \ln(h_n) = o(k_n^{1/2} h_n^{\alpha+1/2})$. Enfin, concernant le quatrième terme, on a :

$$\sigma_n^{-1}(x) |s_n(g)(x) - g(x)| \leq \sigma_n^{-1}(x) \sum_{i \geq h_n} |a_i| e_i(x).$$

D'après (1.4), si $h_n = 2^{q_n-1} + p_n$, $0 \leq p_n \leq 2^{q_n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_n^{-1}(x) |s_n(g)(x) - g(x)| &= \mathcal{O} \left[\sigma_n^{-1}(x) \sum_{j \geq q_n} \frac{1}{2^{\alpha j}} \right] \\ &= \mathcal{O} \left[\sigma_n^{-1}(x) \frac{1}{2^{\alpha(q_n-1)}} \right] = \mathcal{O} \left[\frac{\sigma_n^{-1}(x)}{h_n^\alpha} \right] = \mathcal{O} \left[\frac{nc}{h_n^\alpha B_{n,2}(x)} \right] = o(1), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 1.2 (ii) et le fait que $n = o(k_n^{1/2} h_n^{\alpha+1/2})$. ■

Dans le cas où l'intensité c est inconnu, on définit un estimateur débiaisé de la fonction g par :

$$\tilde{g}_n(x) = \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \left(\frac{Y_{n,r}^* + Z_n}{k_n} \right),$$

où Z_n est défini en (1.22). On donne, dans le résultat suivant, la loi asymptotique de cet estimateur.

Théorème 1.8 Sous les hypothèses du Théorème 1.7, $S_n(x) = \sigma_n^{-1}(x)[\check{g}_n(x) - g(x)]$ converge en loi vers une loi normale centrée et réduite.

Démonstration – D'après le Théorème 1.7, il suffit de démontrer que :

$$\sigma_n^{-1}(x)[\check{g}_n(x) - \tilde{g}_n(x)] = \sigma_n^{-1}(x) \sum_{r=1}^{k_n} H_n(x_r, x) \left(\frac{Z_n}{k_n} - \frac{1}{nc} \right) \xrightarrow{P} 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. D'après le Lemme 1.2 (i),

$$\begin{aligned} \sigma_n^{-1}(x)|[\check{g}_n(x) - \tilde{g}_n(x)]| &= \sigma_n^{-1}(x) \left| Z_n - \frac{k_n}{nc} \right| \\ &\leq \sigma_n^{-1}(x) |Z_n - E(Z_n)| + \sigma_n^{-1}(x) \left| E(Z_n) - \frac{k_n}{nc} \right| \end{aligned}$$

Or, d'après (1.23), le second terme converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, pour n assez grand,

$$\sigma_n^{-1}(x) |E(Z_n) - k_n/nc| < \varepsilon/2,$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} P[\sigma_n^{-1}(x)|[\check{g}_n(x) - \tilde{g}_n(x)]| > \varepsilon] &\leq P[\sigma_n^{-1}(x) |Z_n - E(Z_n)| > \varepsilon/2] \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{k_n}{B_{n,2}^2(x)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h_n}\right), \end{aligned}$$

d'après (1.23) et le Lemme 1.2 (ii). ■

1.7 Simulations

Dans ce paragraphe, on propose d'estimer le support d'un processus ponctuel de Poisson N d'intensité $c = 3$ avec

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

On considère les fonctions g suivantes :

Modèle 1 :

$$g(x) = \exp[-12x^2 + 4x] + 1.$$

Modèle 2 :

$$g(x) = 1 + |3x - 1|^{1/2}.$$

Pour calculer l'estimateur, on utilise les observations obtenues en sommant $n = 100$ copies indépendantes du processus ponctuel de Poisson N . On tronque à l'ordre $h_n = 15$ le développement de g dans la base de Faber-Schauder dont on estime les coefficients en divisant le support S en $k_n = 32$ cellules distinctes. On compare l'estimateur $\hat{g}_n$ et l'estimateur débiaisé $\check{g}_n$ à la fonction g en prenant le modèle 1 (figure 1.1) et le modèle 2 (figure 1.2).

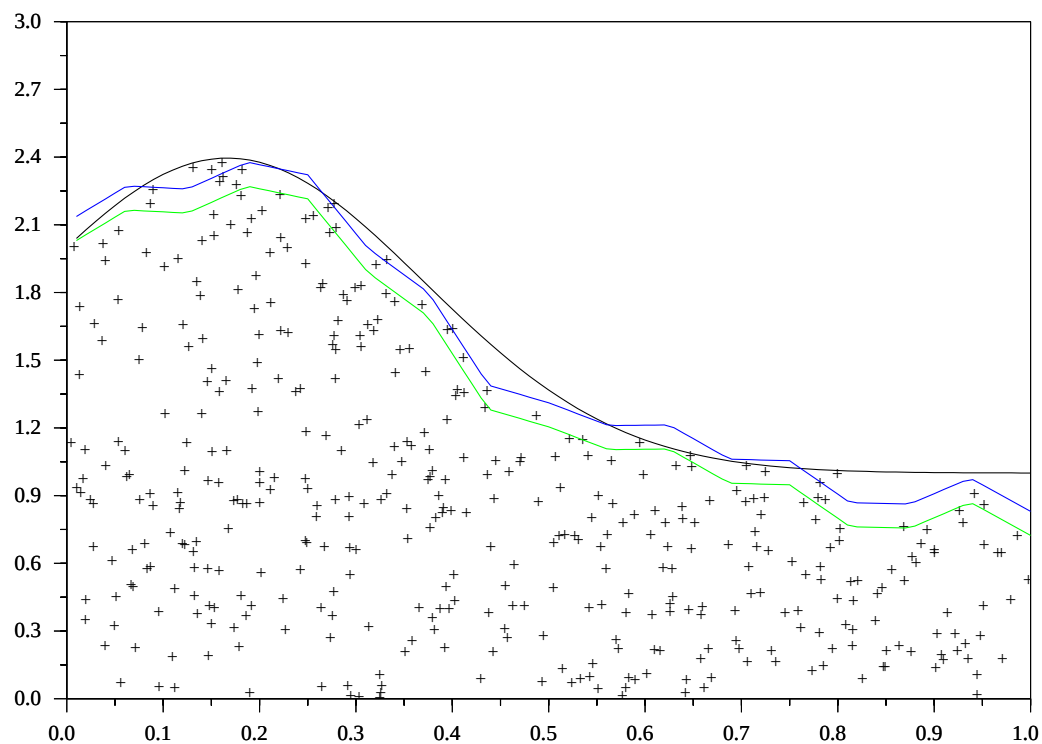


FIG. 1.1 – Comparaison des estimateurs $\hat{g}_n$ (trait gris) et $\check{g}_n$ (trait noir) avec la vraie fonction g pour le modèle 1.

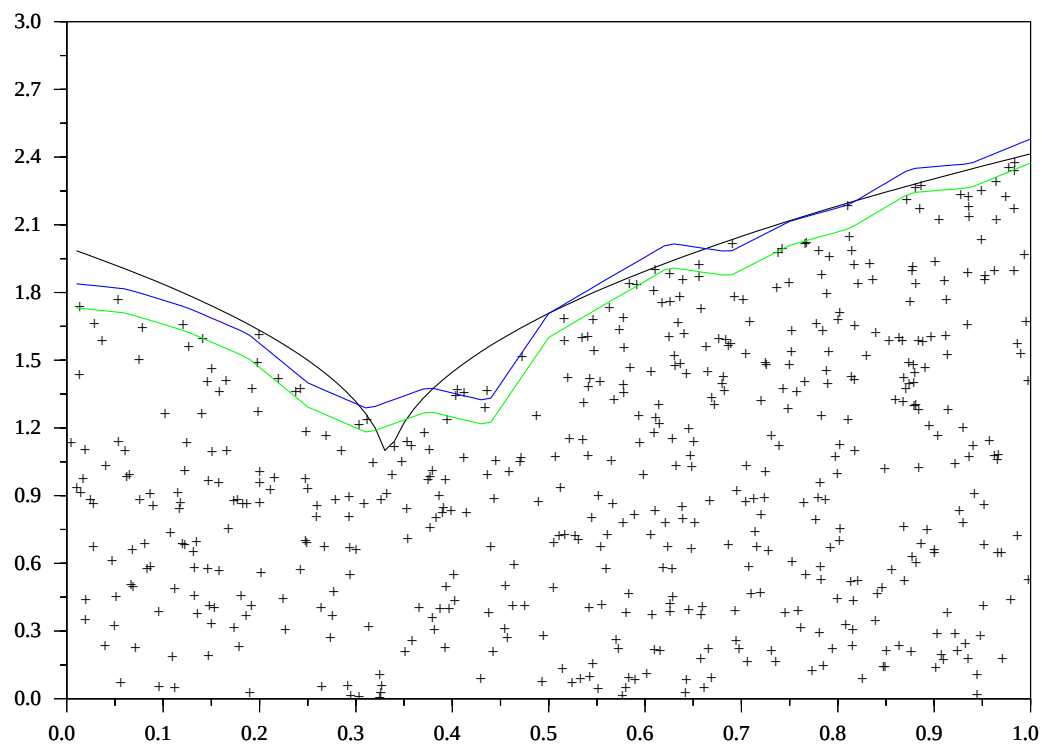


FIG. 1.2 – Comparaison des estimateurs $\hat{g}_n$ (trait gris) et $\check{g}_n$ (trait noir) avec la vraie fonction g pour le modèle 2.

Chapitre 2

Rappels sur la théorie des valeurs extrêmes et résultat préliminaire

On regroupe dans ce chapitre des définitions et des résultats auxquels on fait appel dans les chapitres suivants. On rappelle, dans le premier paragraphe, les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Dans le second paragraphe, on démontre, sous des hypothèses les plus générales possibles, un résultat sur lequel on s'appuie pour définir l'ensemble des estimateurs proposés par la suite (estimateurs de l'indice de valeur extrême, estimateur du quantile extrême).

2.1 Théorie des valeurs extrêmes

On fait ici une brève introduction sur l'étude du comportement asymptotique du maximum d'un échantillon (théorie des valeurs extrêmes). Cette étude faisant appel à la notion de fonctions à variations régulières, on rappelle préalablement la définition de telles fonctions et on en donne quelques propriétés. On donne ensuite un résultat décrivant les limites possibles de la loi du maximum d'un échantillon. Pour plus de détails sur la théorie des valeurs extrêmes, on peut se référer aux ouvrages de Castillo [12], Gumbel [51], Resnick [74] et Galambos [35].

2.1.1 Définition d'une fonction à variations régulières

Définition 2.1 On dit qu'une fonction G est à **variations régulières** d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ (à l'infini) si G est positive à l'infini (i.e. s'il existe A tel que pour tout $x \geq A$, $G(x) > 0$) et si pour tout $t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(tx)}{G(x)} = t^\rho.$$

Dans le cas particulier où $\rho = 0$, on dit que G est une fonction à **variations lentes** (à l'infini). Dans la suite, les fonctions à variations lentes sont notées ℓ (et parfois L). En remarquant que si G est à variations régulières d'indice ρ alors $G(x)/x^\rho$ est à variations lentes, il est facile de montrer qu'une fonction à variations régulières d'indice ρ peut toujours s'écrire sous la forme $x^\rho \ell(x)$. Comme exemple de fonctions à variations lentes, citons la fonction constante, les fonctions $\ln(1+x)$, $\ln[1+1/\ln(1+x)]$, etc ...

2.1.2 Représentation de Karamata

Théorème 2.1 [74, Corollaire du Théorème 0.6]

ℓ est une fonction à variations lentes si et seulement si pour tout $x > 0$,

$$\ell(x) = c(x) \exp \left\{ \int_1^x t^{-1} \varepsilon(t) dt \right\},$$

où c et ε sont des fonctions positives telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in]0, +\infty[\text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Remarque 2.1

- Si la fonction c est constante, on dit que ℓ est **normalisée**.
- Le Théorème 2.1 implique que si ℓ est normalisée alors ℓ est dérivable de dérivée λ avec pour $x > 0$:

$$\lambda(x) = \frac{\varepsilon(x)\ell(x)}{x}.$$

- Soit G une fonction à variations régulières d'indice ρ . En utilisant le fait que $G(x) = x^\rho \ell(x)$, on déduit facilement du Théorème 2.1 que pour tout $x > 0$,

$$G(x) = c(x) \exp \left\{ \int_1^x t^{-1} \rho(t) dt \right\},$$

où c et ε sont des fonctions positives telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in]0, +\infty[\text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho.$$

2.1.3 Quelques résultats sur les fonctions à variations régulières

Lemme 2.1 [74, Proposition 0.5]

Si G est une fonction à variations régulières d'indice ρ alors, pour tout $0 < a < b$,

$$\sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{G(tx)}{G(x)} - t^\rho \right| \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow \infty$.

Lemme 2.2 [9, Théorème 1.5.12]

Soit G une fonction à variations régulières d'indice $\rho > 0$. Il existe une fonction H à variations régulières d'indice $1/\rho$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{H[G(x)]}{x} = 1.$$

Dans ce chapitre ainsi que dans les suivants, on dit que a_n et b_n sont deux suites équivalentes (et on note $a_n \sim b_n$) si $a_n/b_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Lemme 2.3 Soit ℓ une fonction à variations lentes.

- i) Pour tout $\gamma > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \ell(n) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\gamma} \ell(n) = 0.$$

ii) Si a_n et b_n sont deux suites qui convergent vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et telles que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty, \quad (2.1)$$

alors $\ell(a_n) \sim \ell(b_n)$.

Démonstration –

i) La démonstration est évidente en utilisant le résultat donné dans [9, Prop. 1.3.6] et annonçant que pour toutes fonctions à variations lentes ℓ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[\ell(x)]}{\ln(x)} = 0.$$

ii) D'après le Lemme 2.1, on sait que pour tout $0 < a < b$,

$$\sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{\ell(tx)}{\ell(x)} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

lorsque $x \rightarrow \infty$. Pour démontrer ii), il faut démontrer que $|\ell(a_n)/\ell(b_n) - 1| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Or,

$$\left| \frac{\ell(a_n)}{\ell(b_n)} - 1 \right| = \left| \frac{\ell[(a_n/b_n)b_n]}{\ell(b_n)} - 1 \right|.$$

D'après l'hypothèse (2.1), on sait qu'il existe a et b positifs tels qu'à partir d'un certain rang, $a < a_n/b_n < b$. La convergence (2.2) conclut la démonstration. ■

Remarque 2.2 Soit G une fonction à variations régulières d'indice ρ . On déduit facilement du Lemme 2.3 ii) et du fait que $G(x) = x^\rho \ell(x)$, que si a_n et b_n sont deux suites qui convergent vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et vérifiant la condition (2.1), alors $G(a_n) \sim G(b_n)$.

2.1.4 Loi des valeurs extrêmes

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F . Dans la suite on note $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ l'échantillon ordonné. Le résultat principal de la théorie des valeurs extrêmes est le suivant :

Théorème 2.2 Gnedenko [44]

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction de répartition F , il existe un réel ξ et deux suites a_n et $b_n > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x \right] = H_\xi(x),$$

avec, si $\xi > 0$,

$$H_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \exp[-(x)^{-1/\xi}] & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

si $\xi < 0$,

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{-1/\xi}] & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

et si $\xi = 0$,

$$H_0(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.3

- 1) Le Théorème 2.2 est vrai pour la majorité des lois usuelles. Pour plus de précision sur les conditions de régularité sur la fonction de répartition F nécessaires pour avoir le Théorème 2.2, voir par exemple Castillo [12, p. 108] et Galambos [35, p. 54].
- 2) La fonction de répartition H_ξ est appelée **loi des valeurs extrêmes** (que l'on note *EVD* pour *Extreme Value Distribution*). Le paramètre ξ est appelé **indice de valeur extrême**. Si F vérifie le Théorème 2.2, on dit alors que F appartient au **domaine d'attraction** de H_ξ .
- 3) Selon le signe de ξ , on distingue trois domaines d'attraction :
 - si $\xi > 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de **Fréchet**. Ce domaine d'attraction contient les fonctions de répartition à queues lourdes (décroissance polynomiale) comme par exemple la loi de Cauchy, la loi de Pareto, etc ...
 - si $\xi < 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de **Weibull**. Ce domaine d'attraction contient la majorité des fonctions de répartition dont le point terminal est fini (loi uniforme, etc ...)
 - si $\xi = 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de **Gumbel**. Ce domaine d'attraction contient les fonctions de répartition à décroissance exponentielle (loi normale, exponentielle, gamma, lognormale, etc ...).
- 4) Les suites de normalisation a_n et $b_n > 0$ ne sont pas uniques.

2.1.5 Caractérisation des domaines d'attraction

Nous allons donner des conditions sur la fonction de répartition F pour qu'elle appartienne à l'un des trois domaines d'attraction. Dans la suite, on note $x_F = \sup\{x | F(x) < 1\}$ le point terminal de F et $F^\leftarrow(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq y\}$ l'inverse généralisée de F (avec la convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$).

Domaine d'attraction de Fréchet

Théorème 2.3 F appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice de valeur extrême $\xi > 0$ si et seulement si $x_F = +\infty$ et $1 - F$ est une fonction à variations régulières d'indice $-1/\xi$. Dans ce cas, un choix possible pour les suites a_n et b_n est :

$$a_n = F^\leftarrow\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = 0.$$

Remarque 2.4 On déduit du Théorème 2.3 que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice de valeur extrême $\xi > 0$ si et seulement si $x_F = +\infty$ et $1 - F(x) = x^{-1/\xi} \ell(x)$, où ℓ est une fonction à variations lentes.

Domaine d'attraction de Weibull

Théorème 2.4 F appartient au domaine d'attraction de Weibull avec un indice de valeur extrême $\xi < 0$ si et seulement si $x_F < +\infty$ et $1 - F^*$ est une fonction à variations régulières d'indice $1/\xi$ avec

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ F(x_F - x^{-1}) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, un choix possible pour les suites a_n et b_n est :

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \text{ et } b_n = x_F.$$

Remarque 2.5 On déduit du Théorème 2.3 que F appartient au domaine d'attraction de Weibull avec un indice de valeur extrême $\xi < 0$ si et seulement si $x_F < +\infty$ et $1 - F(x) = (x_F - x)^{-1/\xi} \ell[(x_F - x)^{-1}]$.

Domaine d'attraction de Gumbel

Rappelons tout d'abord la définition d'une fonction de Von-Mises.

Définition 2.2 Soit F une fonction de répartition de point terminal x_F fini ou infini. S'il existe $z < x_F$ tel que

$$1 - F(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F,$$

où $c > 0$ et a est une fonction positive absolument continue de densité a' vérifiant $\lim_{x \uparrow x_F} a'(x) = 0$, alors F est une **fonction de Von-Mises** et a est sa fonction auxiliaire.

Théorème 2.5 F appartient au domaine d'attraction de Gumbel si et seulement si il existe une fonction de Von-Mises F^* telle que pour $z < x < x_F$ on ait :

$$1 - F(x) = c(x)[1 - F^*(x)] = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\},$$

où $c(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow x_F$.

2.1.6 Théorème de Pickands

Le Théorème de Pickands [71] est très utile lorsque on travaille avec des observations qui dépassent un seuil fixé puisqu'il assure que la loi des excès peut-être approchée par une loi de Pareto généralisée. Avant d'énoncer le théorème, nous définissons la loi des excès ainsi que la loi de Pareto généralisée.

Définition 2.3 Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et de point terminal x_F . Pour tout $u < x_F$, la fonction

$$F_u(x) = P[X - u \leq x | X > u], \quad x \geq 0,$$

est appelée la **fonction de répartition des excès** au dessus du seuil u .

Définition 2.4 Soit $\sigma > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. La loi de Pareto généralisée (notée *GPD* pour *Generalized Pareto Distribution*) est définie par sa fonction de répartition $G_{\xi, \sigma}$ avec

$$G_{\xi, \sigma} = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \sigma)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{(-x)} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

où $x \geq 0$ si $\xi \geq 0$ et $0 \leq x \leq -\sigma/\xi$ si $\xi < 0$.

Théorème 2.6 Théorème de Pickands [71]

F appartient au domaine d'attraction de H_ξ si et seulement si

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \sigma(u)}(x)| = 0,$$

où σ est une fonction strictement positive.

2.2 Un résultat préliminaire

Le but de ce paragraphe est d'énoncer et de démontrer, sous des hypothèses les plus générales possibles, un résultat qui sera utilisé dans les chapitres suivants. Plus précisément, on considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même fonction de répartition F (dépendant éventuellement de n). On pose

$$\tau_{u_n} = I\{X_{n,n} > 0\} \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq u_n X_{n,n}\},$$

où I_A est l'indicatrice de l'ensemble A , (u_n) est une suite quelconque de $]0, 1[$ et $X_{n,n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. On donne dans ce paragraphe des conditions suffisantes pour que :

$$\frac{\tau_{u_n}}{E(\tau_{u_n})} \xrightarrow{P} 1. \quad (2.3)$$

2.2.1 Hypothèses

Dans la suite, on note $x_F = \sup\{x | F(x) < 1\}$ le point terminal de F . On suppose que $0 < x_F < +\infty$. On remarque que le fait que $x_F > 0$ implique que

$$P[\tau_{u_n} > 0] = P[X_{n,n} > 0] \rightarrow 1, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Dans les chapitres suivants, on supposera toujours que $x_F > 0$. Si ce n'est pas le cas, une translation des données permet de se ramener au cas $x_F > 0$.

Les hypothèses nécessaires pour démontrer la convergence en probabilité (2.3) sont les suivantes :

$\mathcal{H}1$ – F est dérivable de dérivée f sur $]0, x_F]$.

$\mathcal{H}2$ –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n[1 - F(u_n x_F)]\}^{-1} = 0.$$

Dans la suite, on pose

$$\eta(u_n) = \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \text{ et } \mu(u_n) = \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} dt.$$

$\mathcal{H}3$ –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(u_n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = 0.$$

$\mathcal{H}4$ –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta(u_n)}{1 - F(u_n x_F)} = 0.$$

2.2.2 Enoncé et démonstration du résultat

Théorème 2.7 Sous les hypothèses $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$ et $\mathcal{H}4$,

$$E(\tau_{u_n}) \sim n[1 - F(u_n x_F)] \text{ et } \frac{\tau_{u_n}}{E(\tau_{u_n})} \xrightarrow{P} 1.$$

Remarque 2.6 On déduit du Théorème 2.7 et de l'hypothèse $\mathcal{H}2$ que $E(\tau_{u_n}) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour démontrer le Théorème 2.7, nous allons démontrer une série de résultats intermédiaires. Le premier lemme nous donne l'expression de l'espérance de la variable aléatoire τ_{u_n} .

Lemme 2.4 Sous l'hypothèse $\mathcal{H}1$, $E(\tau_{u_n}) = n p_{n,\xi}$ avec $p_{n,\xi} = [1 - F(u_n x_F)] + \eta(u_n)$.

Démonstration – On remarque dans un premier temps que $\{\tau_{u_n} = 0\} = \{X_{n,n} \leq 0\}$. Donc,

$$P[\tau_{u_n} = 0] = P[X_{n,n} \leq 0] = [F(0)]^n.$$

De plus, en utilisant le fait que la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est invariante par permutation des coordonnées, on a pour $l \geq 1$:

$$\begin{aligned} & P[\tau_{u_n} = l] \\ &= n P[\tau_{u_n} = l, X_1 = X_{n,n} > 0] \\ &= n C_{n-1}^{l-1} P[X_2 \geq u_n X_1, \dots, X_l \geq u_n X_1, X_{l+1} < u_n X_1, \dots, X_n < u_n X_1, X_1 = X_{n,n} > 0] \\ &= n C_{n-1}^{l-1} P[u_n X_1 \leq X_2 < X_1, \dots, u_n X_1 \leq X_l < X_1, X_{l+1} < u_n X_1, \dots, X_n < u_n X_1, X_1 > 0] \end{aligned}$$

et d'après le Théorème de Fubini,

$$P[\tau_{u_n} = l] = n C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt.$$

Nous pouvons à présent calculer l'espérance de τ_{u_n} .

$$\begin{aligned} E(\tau_{u_n}) &= \sum_{l=1}^n n l C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt \\ &= \sum_{l=2}^n (l-1) n C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{l=1}^n n C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt \\ &= n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] f(t) \sum_{l=2}^n C_{n-2}^{l-2} [F(t) - F(u_n t)]^{l-2} [F(u_n t)]^{n-l} dt \\ &\quad + n \int_0^{x_F} f(t) [F(t)]^{n-1} dt \\ &= n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} f(t) dt + n \int_0^{x_F} f(t) [F(t)]^{n-1} dt. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie, on a :

$$n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} f(t) dt = n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n [f(u_n t) - f(t)] [F(t)]^{n-1} dt$$

Ainsi,

$$E(\tau_{u_n}) = n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt,$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Le lemme suivant donne l'expression de la variance de la variable aléatoire τ_{u_n} .

Lemme 2.5 Sous l'hypothèse $\mathcal{H}1$, on a :

$$\text{Var}(\tau_{u_n}) = np_{n,\xi}(1 - p_{n,\xi}) + 2n(n-1)\mu(u_n) - 2n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]\eta(u_n) - n(n-1)[\eta(u_n)]^2.$$

Démonstration – En utilisant l'expression de la loi de τ_{u_n} calculée dans la démonstration du Lemme 2.4, on a :

$$E(\tau_{u_n}^2) = \sum_{l=1}^n n l^2 C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt.$$

En utilisant la décomposition $l^2 = l(l-1) + l$,

$$\begin{aligned} E(\tau_{u_n}^2) &= \sum_{l=2}^n n l(l-1) C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{l=1}^n n l C_{n-1}^{l-1} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt. \end{aligned}$$

En remplaçant l par $(l-2) + 2$ dans la première somme et en remarquant que la deuxième somme est égale à $n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt$, on a :

$$\begin{aligned} E(\tau_{u_n}^2) &= \sum_{l=3}^n n(n-1)(n-2) C_{n-3}^{l-3} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{l=2}^n 2n(n-1) C_{n-2}^{l-2} \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^{l-1} [F(u_n t)]^{n-l} f(t) dt \\ &\quad + n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\ E(\tau_{u_n}^2) &= n(n-1)(n-2) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^2 f(t) \sum_{l=3}^n C_{n-3}^{l-3} [F(t) - F(u_n t)]^{l-3} [F(u_n t)]^{n-l} dt \\ &\quad + 2n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] f(t) \sum_{l=2}^n C_{n-2}^{l-2} [F(t) - F(u_n t)]^{l-2} [F(u_n t)]^{n-l} dt \\ &\quad + n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\ &= n(n-1)(n-2) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^2 [F(t)]^{n-3} f(t) dt \\ &\quad + 2n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} f(t) dt \\ &\quad + n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Or, en intégrant par partie, on montre que

$$\begin{aligned}
 & n(n-1)(n-2) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)]^2 [F(t)]^{n-3} f(t) dt \\
 = & n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]^2 \\
 & - 2n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] f(t) [F(t)]^{n-2} dt \\
 & + 2n(n-1) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} dt.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 E(\tau_{u_n}^2) &= n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]^2 \\
 &+ 2n(n-1) \int_0^{x_F} [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} u_n f(u_n t) dt \\
 &+ n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\
 = & n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]^2 + 2n(n-1) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\
 &- 2n(n-1) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) F(u_n t) [F(t)]^{n-2} dt \\
 &+ n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\tau_{u_n}) &= E(\tau_{u_n}^2) - [E(\tau_{u_n})]^2 \\
 = & n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]^2 + 2n(n-1) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\
 &- 2n(n-1) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) F(u_n t) [F(t)]^{n-2} dt \\
 &+ n[1 - F(u_n x_F)] + n \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\
 &- n^2[1 - F(u_n x_F)]^2 - 2n^2[1 - F(u_n x_F)] \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \\
 &- n^2 \left\{ \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Une réécriture de l'égalité ci-dessus conduit à :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\tau_{u_n}) &= nF(u_n x_F)[1 - F(u_n x_F)] - n[1 - F(u_n x_F)] \int_0^{x_F} u_n f(u_n t)[F(t)]^{n-1} dt \\
 &+ nF(u_n x_F) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t)[F(t)]^{n-1} dt - n \left\{ \int_0^{x_F} u_n f(u_n t)[F(t)]^{n-1} dt \right\}^2 \\
 &+ 2n(n-1) \int_0^{x_F} u_n f(u_n t)[F(t) - F(u_n t)][F(t)]^{n-2} dt \\
 &- 2n(n-1)[1 - F(u_n x_F)] \int_0^{x_F} u_n f(u_n t)[F(t)]^{n-1} dt - n(n-1) \left\{ \int_0^{x_F} u_n f(u_n t)[F(t)]^{n-1} dt \right\}^2 \\
 &= nF(u_n x_F)[1 - F(u_n x_F)] - n[1 - F(u_n x_F)]\eta(u_n) + nF(u_n x_F)\eta(u_n) - n[\eta(u_n)]^2 \\
 &+ 2n(n-1)\mu(u_n) - 2n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]\eta(u_n) - n(n-1)[\eta(u_n)]^2.
 \end{aligned}$$

On conclut la démonstration en remarquant que

$$np_{n,\xi}(1 - p_{n,\xi}) = nF(u_n x_F)[1 - F(u_n x_F)] - n[1 - F(u_n x_F)]\eta(u_n) + nF(u_n x_F)\eta(u_n) - n[\eta(u_n)]^2.$$

■

Nous pouvons à présent démontrer le Théorème 2.7.

Démonstration du Théorème 2.7 – Le Lemme 2.4 et l'hypothèse $\mathcal{H}4$ impliquent que

$$E(\tau_{u_n}) \sim n[1 - F(u_n x_F)]. \quad (2.4)$$

Montrons à présent que $\tau_{u_n}/E(\tau_{u_n}) \xrightarrow{P} 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P \left[\left| \frac{\tau_{u_n}}{E(\tau_{u_n})} - 1 \right| > \varepsilon \right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var} \left[\frac{\tau_{u_n}}{E(\tau_{u_n})} \right] = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\text{Var}(\tau_{u_n})}{[E(\tau_{u_n})]^2}.$$

Or, d'après le Lemme 2.5,

$$\frac{\text{Var}(\tau_{u_n})}{[E(\tau_{u_n})]^2} = \frac{np_{n,\xi}(1 - p_{n,\xi})}{[E(\tau_{u_n})]^2} + \frac{2n(n-1)\mu(u_n)}{[E(\tau_{u_n})]^2} - \frac{2n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]\eta(u_n)}{[E(\tau_{u_n})]^2} - \frac{n(n-1)[\eta(u_n)]^2}{[E(\tau_{u_n})]^2}.$$

Traitons pour commencer le premier terme de la somme. Comme $1 - p_{n,\xi} \leq 1$ et d'après (2.4), on a :

$$\frac{np_{n,\xi}(1 - p_{n,\xi})}{[E(\tau_{u_n})]^2} \leq \frac{np_{n,\xi}}{[E(\tau_{u_n})]^2} \sim n^{-1}[1 - F(u_n x_F)]^{-1}.$$

Le premier terme de la somme converge donc vers zéro d'après l'hypothèse $\mathcal{H}2$. De plus, d'après (2.4) on a :

$$\frac{2n(n-1)\mu(u_n)}{[E(\tau_{u_n})]^2} \sim \frac{2\mu(u_n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après l'hypothèse $\mathcal{H}3$,

$$\frac{2n(n-1)[1 - F(u_n x_F)]\eta(u_n)}{[E(\tau_{u_n})]^2} \sim \frac{2\eta(u_n)}{1 - F(u_n x_F)} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après l'hypothèse $\mathcal{H}4$ et enfin

$$\frac{n(n-1)[\eta(u_n)]^2}{[E(\tau_{u_n})]^2} \sim \left[\frac{\eta(u_n)}{1 - F(u_n x_F)} \right]^2 \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après l'hypothèse $\mathcal{H}4$. Ainsi,

$$\frac{\text{Var}(\tau_{u_n})}{[E(\tau_{u_n})]^2} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ ce qui conclut la démonstration du théorème. ■

Chapitre 3

Utilisation de seuils aléatoires pour estimer l'indice de valeur extrême

3.1 Introduction

Considérons $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F et notons $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ l'échantillon ordonné. On a vu dans le chapitre 2 que pour la majorité des fonctions de répartition F la loi asymptotique de $X_{n,n}$ (convenablement normalisé) est une loi des valeurs extrêmes, cette loi étant indexée par un paramètre noté ξ . Ce paramètre, appelé indice de valeur extrême, apporte une information sur la forme de la queue de distribution de F . Notamment, selon que $\xi > 0$, $\xi < 0$ ou $\xi = 0$, on distingue trois domaines d'attraction : Fréchet, Weibull et Gumbel. Ainsi, de nombreux estimateurs de l'indice de valeur extrême ont été proposés dans la littérature. Les recherches se sont principalement concentrées sur le cas $\xi > 0$ (*i.e.* les fonctions de répartitions dont la queue est à décroissance polynomiale), l'estimateur le plus connu étant l'**estimateur de Hill** [56] défini par :

$$\hat{\xi}_n^H = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(X_{n-j+1,n}) - \ln(X_{n-k,n}),$$

où k est un entier positif ($1 \leq k \leq n$). La consistance faible de cet estimateur a été démontrée par Mason [69] et la consistance forte par Deheuvels et *al.* [23]. La normalité asymptotique a été démontrée entre autres par Davis et Resnick [20], Csörgo et Mason [18], Haeusler et Teugels [52], Goldie et Smith [45], etc ... De nombreux autres estimateurs pour le cas $\xi > 0$ ont été proposés (pour une revue détaillée, voir Csörgo et Viharos [19]).

Le cas général $\xi \in \mathbb{R}$ a été moins étudié. On recense dans la littérature deux méthodes permettant d'estimer $\xi \in \mathbb{R}$. La première consiste à utiliser les k plus grandes observations où k est un entier positif strictement inférieur à n . Comme exemple d'estimateurs basée sur cette méthode, citons :

l'**estimateur des moments** proposé par Dekkers, Einmahl et de Haan [25] et défini par :

$$\hat{\xi}_n^M = H_{k,n} + 1 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{H_{k,n}^2}{S_{k,n}} \right]^{-1}, \quad (3.1)$$

où

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(X_{n-j+1,n}) - \ln(X_{n-k,n}) \text{ et } S_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\ln(X_{n-j+1,n}) - \ln(X_{n-k,n})]^2.$$

Cet estimateur est une généralisation de l'estimateur de Hill. Les auteurs montrent que cet estimateur est consistant et asymptotiquement normal.

L'estimateur de Pickands [71] défini par

$$\hat{\xi}_n^P = [\ln(2)]^{-1} \ln \frac{X_{n-[k/4]+1,n} - X_{n-[k/2]+1,n}}{X_{n-[k/2]+1,n} - X_{n-k+1,n}},$$

où $[k]$ dénote la partie entière de k . L'auteur démontre la consistance faible de son estimateur. La convergence forte ainsi que la normalité asymptotique ont été démontrées par Dekkers et de Haan [24]. Des améliorations de cet estimateur ont été introduites notamment par Drees [28] et Segers [77].

L'estimateur proposé par Beirlant et al. [4] défini par :

$$\hat{\xi}_n^B = [(X^t X)^{-1} X^t Z]_{1,1}, \quad (3.2)$$

où

$$\begin{cases} Z = \left((j+1) \ln \frac{UH_{j,n}}{UH_{j+1,n}} - (j+1) \ln \frac{j+1}{j} + \frac{j+1}{j}, 1 \leq j \leq k-1 \right)^t, \\ X_{.,1} = (1, 1 \leq j \leq k-1)^t, \\ X_{.,2} = \left(\frac{j+1}{k+1}, 1 \leq j \leq k-1 \right)^t, \end{cases}$$

avec

$$UH_{j,n} = X_{n-j,n} \left[\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \ln(X_{n-i+1,n}) - \ln(X_{n-j,n}) \right], \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

(Dans l'expression ci-dessus, A^t désigne la transposée de la matrice A , $A_{i,j}$ dénote l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne et $A_{.,j}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A).

Cet estimateur est une amélioration de l'estimateur proposé par Beirlant et al. [7] en ce sens qu'il corrige l'erreur apportée par la fonction à variations lentes.

On peut aussi citer les estimateurs introduits par Feueverger et Hall [34], Gomes [46], Gomes et Martins [47], de Haan et Resnick [22] et Peng [70].

L'autre méthode consiste à utiliser les observations qui dépassent un seuil déterministe. Cette méthode, appelée méthode P.O.T. (Peaks Over Threshold), est basée sur un résultat de Balkema et de Haan [2] et Pickands [71] assurant que la loi asymptotique des excès au dessus du seuil est une loi de Pareto Généralisée. Cette méthode est utilisée entre autres par Falk [31, 32], Marohn [67, 68], Smith [78] et Castillo et Hadi [13].

Dans ce chapitre, nous proposons des estimateurs de l'indice de valeur extrême dans le cas particulier où $\xi < 0$ c'est à dire dans le cas où la fonction de répartition appartient au domaine d'attraction de Weibull. Ce domaine contenant la majorité des fonctions de répartition dont le point terminal est fini, les estimateurs pourront être utilisés pour répondre à la question de l'estimation de fonctions quantile extrême

qui nous intéresse dans cette thèse. Pour estimer ξ , nous utilisons une méthode différente des méthodes précitées. On considère en effet, pour construire nos estimateurs, uniquement l'information apportée par des nombres de points qui dépassent des seuils aléatoires. Plus précisément, soit (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) quatre suites distinctes de $]0, 1[$. On note par τ_{u_n} (resp. τ_{v_n} , τ_{w_n} et τ_{z_n}) le nombre de points qui dépassent le seuil aléatoire $u_n X_{n,n}$ (resp. $v_n X_{n,n}$, $w_n X_{n,n}$ et $z_n X_{n,n}$). Les estimateurs proposés dans ce chapitre sont définis par :

$$\hat{\xi}_{1,n} = -\frac{\ln[(1 - u_n)/(1 - v_n)]}{\ln(\tau_{u_n}/\tau_{v_n})},$$

$\hat{\xi}_{2,n}$ qui est la solution de l'équation en θ :

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{w_n}^{-\theta}}{\tau_{v_n}^{-\theta} - \tau_{z_n}^{-\theta}} \right) = 1,$$

et $\hat{\xi}_{3,n}$ qui est la solution de l'équation en θ :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - 1}{\tau_{v_n}^{-\theta} - 1} \right) = 1.$$

Un avantage que l'on peut trouver à utiliser uniquement des nombres de points est que les estimateurs peuvent être calculés même en présence de données censurées par intervalles. De plus, les seuils aléatoires que l'on utilise ont l'avantage de prendre en compte le comportement de la queue de distribution puisqu'ils sont fonction du maximum de l'échantillon.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans le paragraphe 2, on énonce l'ensemble des hypothèses et on démontre que sous ces hypothèses on peut appliquer le Théorème 2.7 énoncé dans le chapitre 2. Ce Théorème est indispensable pour démontrer l'ensemble des résultats de ce chapitre. Dans le troisième paragraphe, on définit les trois estimateurs de l'indice de valeur extrême. La consistance faible de ces estimateurs est établie dans le paragraphe 4. Les paragraphes 5 et 6 sont consacrés à l'étude de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$. On démontre, dans le paragraphe 5, que l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ convenablement normalisé est asymptotiquement normal si $\xi < -1/2$. On en déduit que la vitesse de convergence optimale de cet estimateur est une puissance de n , vitesse qui, à notre connaissance, n'est atteinte par aucun autre estimateur de l'indice de valeur extrême. On démontre ensuite dans le paragraphe 6 que $\hat{\xi}_{1,n}$ converge presque-sûrement vers ξ si $\xi < -1$. Le paragraphe 7 est consacré aux simulations. On compare dans un premier temps les trois estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$, $\hat{\xi}_{2,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$. Il en ressort que l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ est de meilleure qualité en terme de biais et de variance. C'est pourquoi, nous comparons ensuite l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ à l'estimateur des moments $\hat{\xi}_n^M$ et à l'estimateur proposé par Beirlant et al. $\hat{\xi}_n^B$. Enfin, dans le paragraphe 8, on propose une méthode permettant de transformer des variables aléatoires dont la fonction de répartition appartient au domaine d'attraction de Fréchet ($\xi > 0$) en des variables aléatoires dont la fonction de répartition appartient au domaine d'attraction de Weibull, ce qui permet d'utiliser les trois estimateurs pour estimer un indice de valeur extrême strictement positif.

3.2 Hypothèses et résultat préliminaire

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires que l'on suppose indépendantes et de même fonction de répartition F . On suppose que F appartient au domaine d'attraction de Weibull (c'est à dire

que l'indice de valeur extrême ξ est strictement négatif). Rappelons (cf Théorème 2.4) que F appartient au domaine d'attraction de Weibull si et seulement si $x_F = \sup\{x \mid F(x) < 1\} < +\infty$ et

$$F(x) = 1 - (x_F - x)^{-1/\xi} \ell[(x_F - x)^{-1}], \quad (3.3)$$

où ℓ est une fonction à variations lentes à l'infini. On note $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ l'échantillon ordonné. Soit (u_n) une suite de $]0, 1[$, on définit τ_{u_n} par

$$\tau_{u_n} = I\{X_{n,n} > 0\} \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq u_n X_{n,n}\}.$$

Autrement dit, τ_{u_n} est le nombre de points supérieurs au seuil $u_n X_{n,n}$ si $X_{n,n} > 0$. Dans la suite, on suppose que $x_F > 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau_{u_n} > 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X_{n,n} > 0] = 1. \quad (3.4)$$

Si $x_F < 0$, une translation des données permet de se ramener au cas $x_F > 0$. On suppose aussi que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(A1) ℓ est une fonction à variations lentes normalisée. Autrement dit,

$$\ell(x) = c \exp \left\{ \int_1^x t^{-1} \epsilon(t) dt \right\},$$

où c est une constante strictement positive et $\epsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Cette hypothèse implique en particulier que F est dérivable de dérivée f .

(B) f vérifie l'une ou l'autre des assertions ci-dessous :

- i) f est bornée sur $]0, x_F]$.
- ii) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\max_{t \in]0, x_F]} f(u_n t) = f(u_n x_F)$.

Signalons que l'hypothèse **(B)** est vérifiée par exemple par une loi de Pareto généralisée ($F(x) = 1 - (1 + \xi x/\sigma)^{-1/\xi}$, $\sigma > 0$ et $\xi < 0$), par la loi des valeurs extrêmes de Weibull ($F(x) = \exp[-(1 + \xi(x - \mu)/\sigma)^{-1/\xi}]$, $\xi < 0$, $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$) ou par la loi inverse de Burr ($F(x) = 1 - [\beta/(\beta + (M - x)^{-\tau})]^\lambda$, $(\beta, \tau, \lambda) \in (\mathbb{R}^+)^3$).

Dans la suite, on pose $\theta_{1,\xi} = \min\{\xi^2/2, \xi^2/(1 - \xi)\}$.

(C1) Soit (u_n) une suite de $]0, 1[$ qui converge vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Il existe $\delta \in]0, \theta_{1,\xi}[$ tel que $n^{-\delta} = \mathcal{O}(1 - u_n)$.

Nous allons à présent montrer que sous ces hypothèses, on peut appliquer le Théorème 2.7. Autrement dit, nous allons prouver le résultat suivant :

Théorème 3.1 Sous les hypothèses **(A1)**, **(B)** et si (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)** alors :

$$\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \xrightarrow{P} 1, \quad (3.5)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ et

$$E(\tau_{u_n}) \sim n[1 - F(u_n x_F)] \rightarrow +\infty, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Pour démontrer ce théorème, nous devons connaître l'expression de la densité f .

Lemme 3.1 Sous l'hypothèse **(A1)**,

$$f(x) = -1/\xi (x_F - x)^{-1/\xi-1} \ell[(x_F - x)^{-1}][1 + \delta(x)],$$

avec $\delta(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \uparrow x_F$.

Démonstration – Notons λ la dérivée de ℓ (qui existe d'après l'hypothèse **(A1)**). On a :

$$f(x) = -1/\xi (x_F - x)^{-1/\xi-1} \ell[(x_F - x)^{-1}] + (x_F - x)^{-1/\xi-2} \lambda[(x_F - x)^{-1}].$$

Or,

$$\frac{x \lambda(x)}{\ell(x)} = \epsilon(x).$$

Ainsi, si on pose

$$\delta(x) = -\xi \frac{(x_F - x)^{-1} \lambda[(x_F - x)^{-1}]}{\ell[(x_F - x)^{-1}]} = -\xi \epsilon[(x_F - x)^{-1}],$$

alors

$$f(x) = -1/\xi (x_F - x)^{-1/\xi-1} \ell[(x_F - x)^{-1}][1 + \delta(x)],$$

avec $\delta(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \uparrow x_F$. ■

Nous devons aussi connaître l'ordre de grandeur de $\eta(u_n)$. On rappelle que $\eta(u_n)$ est défini par :

$$\eta(u_n) = \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt.$$

Lemme 3.2 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**,

$$\eta(u_n) = \mathcal{O}[\max\{n^\xi L(n), f(u_n x_F) n^\xi L(n)\}],$$

où L est une fonction à variations lentes.

Démonstration – Nous étudions séparément les cas où f vérifie l'hypothèse **(B) i)** et **(B) ii)**.

• Si f vérifie l'hypothèse **(B) i)**, il existe un réel $B > 0$ tel que :

$$\eta(u_n) \leq B \int_0^{x_F} [F(t)]^{n-1} dt. \quad (3.7)$$

Posons $X_{n-1,n-1}^+ = \max(0, X_{n-1,n-1})$, où $X_{n-1,n-1}$ est le maximum de $n - 1$ observations issues de la distribution F . Notons F^+ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\max(0, X_1)$. Evidemment, pour $x \geq 0$, $F^+(x) = F(x)$. Ainsi,

$$\int_0^{x_F} [F(t)]^{n-1} dt = x_F - E[X_{n-1,n-1}^+].$$

La fonction de répartition F appartenant au domaine d'attraction de Weibull, on en déduit que la fonction de répartition F^+ appartient aussi au domaine d'attraction de Weibull. Comme de plus

$$\int_0^{x_F} x F^+(dx) \leq x_F < +\infty,$$

on a, d'après un résultat démontré dans Resnick [74, Prop. 2.1 (ii)],

$$x_F - E[X_{n-1,n-1}^+] \sim \Gamma(1 - \xi) a_{n-1}, \quad (3.8)$$

où Γ est la fonction gamma et $a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$. L'inégalité (3.7) et l'équivalence (3.8) impliquent que si f vérifie l'hypothèse **(B)** i) alors

$$\eta(u_n) = \mathcal{O}(a_{n-1}). \quad (3.9)$$

• Si f vérifie l'hypothèse **(B)** ii), on a :

$$\eta(u_n) \leq f(u_n x_F) \int_0^{x_F} [F(t)]^{n-1} dt,$$

et ainsi d'après (3.8),

$$\eta(u_n) = \mathcal{O}[f(u_n x_F) a_{n-1}]. \quad (3.10)$$

On déduit de (3.9) et (3.10) que :

$$\eta(u_n) = \mathcal{O}[\max\{a_{n-1}, f(u_n x_F) a_{n-1}\}].$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de démontrer que

$$a_n = n^\xi L(n), \quad (3.11)$$

où L est une fonction à variations lentes. En utilisant l'expression de F donnée en (3.3), on remarque que $a_n = n^\xi [\ell(a_n^{-1})]^\xi$. De plus, d'après [74, Démonstration de la Proposition 0.3], on a pour tout $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{[nt]}} = \alpha(t), \quad (3.12)$$

avec $\alpha(t) > 0$ et où $[x]$ désigne la partie entière de x . Le Lemme 2.3 et (3.12) impliquent que $[\ell(a_n^{-1})]^\xi = L(n)$ où L est une fonction à variations lentes, ce qui conclut la démonstration. ■

Puisque $F(t) - F(u_n t) \leq F(t)$ pour tout t , on a :

$$\mu(u_n) = \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t) - F(u_n t)] [F(t)]^{n-2} dt \leq \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt.$$

Ainsi, d'après le Lemme 3.2

$$\mu(u_n) = \mathcal{O}[\max\{n^\xi L(n), n^\xi f(u_n x_F) L(n)\}]. \quad (3.13)$$

Démonstration du Théorème 3.1 – Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que les hypothèses $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$ et $\mathcal{H}4$ du Théorème 2.7 sont vérifiées.

• Hypothèse $\mathcal{H}1$ Elle est vérifiée d'après l'hypothèse **(A1)**.

• Hypothèse $\mathcal{H}2$ D'après l'expression de la fonction de répartition F donnée en (3.3), on a :

$$n^{-1}[1 - F(u_n x_F)]^{-1} = x_F^{1/\xi} n^{-1} (1 - u_n)^{1/\xi} \ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}].$$

Or, (u_n) vérifiant l'hypothèse **(C1)**, il existe $0 < \delta < \theta_{1,\xi}$ tel que $n^{-1} = \mathcal{O}[(1 - u_n)^{1/\delta}]$. Donc,

$$n^{-1}[1 - F(u_n x_F)]^{-1} = \mathcal{O}\{(1 - u_n)^{1/\xi + 1/\delta} \ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]\}.$$

Le fait que $1/\xi + 1/\delta > 0$ et le Lemme 2.3 nous assurent que l'hypothèse $\mathcal{H}2$ est vérifiée.

• Hypothèse $\mathcal{H}3$ Il suffit de démontrer d'après (3.13) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(u_n x_F) n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = 0.$$

Or, d'après l'expression de F donnée en (3.3), on a :

$$\frac{n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = \mathcal{O}\{n^\xi (1 - u_n)^{2/\xi} L(n) \{\ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]\}^{-2}\}.$$

Comme la suite (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)**, il existe $0 < \delta < \theta_{1,\xi}$ tel que $(1 - u_n)^{2/\xi} = \mathcal{O}[n^{-2\delta/\xi}]$. Ainsi,

$$\frac{n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = \mathcal{O}\{n^{\xi - 2\delta/\xi} L(n) \{\ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]\}^{-2}\}.$$

Le fait que $\xi - 2\delta/\xi < 0$ et le Lemme 2.3 impliquent que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = 0.$$

De même, d'après l'expression de F donnée en (3.3) et le Lemme 3.1, on a :

$$\frac{f(u_n x_F) n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = \mathcal{O}\{n^\xi (1 - u_n)^{1/\xi - 1} L(n) \{\ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]\}^{-1}\}.$$

Comme la suite (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)**, il existe $0 < \delta < \theta_{1,\xi}$ tel que $(1 - u_n)^{1/\xi - 1} = \mathcal{O}[n^{\delta - \delta/\xi}]$. Ainsi,

$$\frac{f(u_n x_F) n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = \mathcal{O}\{n^{\xi - \delta/\xi + \delta} L(n) \{\ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]\}^{-1}\}.$$

Le fait que $\xi - \delta/\xi + \delta < 0$ et le Lemme 2.3 impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(u_n x_F) n^\xi L(n)}{[1 - F(u_n x_F)]^2} = 0,$$

ce qui nous assure que l'hypothèse $\mathcal{H}3$ est vérifiée.

• Hypothèse $\mathcal{H}4$ En utilisant le fait que $1 - F(u_n x_F) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on remarque que l'hypothèse $\mathcal{H}4$ se déduit simplement de l'hypothèse $\mathcal{H}3$. ■

3.3 Définitions des estimateurs de l'indice de valeur extrême

Dans ce paragraphe, nous proposons trois estimateurs de l'indice de valeur extrême dans le cas particulier où ce dernier est strictement négatif.

3.3.1 Idée générale

L'idée commune utilisée pour construire les trois estimateurs de ξ est la suivante : ℓ étant une fonction à variations lentes à l'infini, on remarque, d'après l'expression de la fonction de répartition F donnée en (3.3), que $[1 - F(x)]^{-\xi}$ est approximativement linéaire pour x "suffisamment" proche de x_F . Ainsi, pour a, b, c et d "suffisamment" proche de x_F , on a l'approximation :

$$\frac{[1 - F(a)]^{-\xi} - [1 - F(b)]^{-\xi}}{[1 - F(c)]^{-\xi} - [1 - F(d)]^{-\xi}} \approx \frac{a - b}{c - d}. \quad (3.14)$$

En remplaçant dans l'approximation (3.14) les nombres a, b, c et d par des nombres aléatoires suffisamment "proche" de x_F et en résolvant l'équation en ξ qui en découle, nous proposons trois estimateurs de l'indice de valeur extrême.

3.3.2 Un estimateur de l'indice de valeur extrême à double seuil

Pour définir le premier estimateur de ξ , on remplace dans (3.14) a par $u_n X_{n,n}$, b par $X_{n,n}$, c par $v_n X_{n,n}$ et d par $X_{n,n}$ où (u_n) et (v_n) sont deux suites de $]0, 1[$. En utilisant les "approximations" $1 - F(u_n x_F) \approx \tau_{u_n}/n$, $1 - F(v_n x_F) \approx \tau_{v_n}/n$ et $1 - F(X_{n,n}) \approx 0$, on a pour n "assez" grand :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right)^{-\xi} \approx 1. \quad (3.15)$$

Plus précisément, on démontre le résultat suivant :

Théorème 3.2 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < +\infty, \quad (3.16)$$

alors,

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right)^{-\xi} \xrightarrow{P} 1.$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que la fonction à variations lentes $\ell(x)$ tend vers une constante strictement positive lorsque $x \rightarrow +\infty$, alors la condition (3.16) n'est pas nécessaire.

Démonstration – Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right)^{-\xi} = \left[\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right]^{-\xi} \left[\frac{\tau_{v_n}}{n[1 - F(v_n x_F)]} \right]^{\xi} \frac{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - v_n)^{-1}]}.$$

Or, ℓ étant une fonction à variations lentes, on en déduit d'après la condition (3.16) et le Lemme 2.3 ii) que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - v_n)^{-1}]} = 1. \quad (3.17)$$

(Si la fonction à variations lentes $\ell(x)$ tend vers une constante strictement positive lorsque $x \rightarrow +\infty$, la condition (3.16) n'est pas nécessaire pour démontrer la convergence (3.17)). La conclusion de la démonstration est évidente en utilisant la convergence en probabilité (3.5) du Théorème 3.1. ■

En résolvant l'équation (3.15) en ξ , on obtient comme estimateur de l'indice de valeur extrême :

$$\hat{\xi}_{1,n} = -\frac{\ln[(1-u_n)/(1-v_n)]}{\ln(\tau_{u_n}/\tau_{v_n})}. \quad (3.18)$$

L'avantage de cet estimateur est qu'il admet une expression explicite. De plus, $\hat{\xi}_{1,n}$ est toujours négatif. Cependant, pour le construire, on approche $F(X_{n,n})$ par 1 ce qui peut introduire un biais assez important surtout lorsque ξ est proche de zéro (car alors $X_{n,n}$ est un estimateur fortement biaisé du point terminal).

Remarque 3.1 On remarque que l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ n'est défini que si $\tau_{u_n} \neq \tau_{v_n}$. Le lemme suivant nous assure que l'estimateur est défini sur un ensemble dont la probabilité tend vers 1 lorsque la taille de l'échantillon n tend vers l'infini.

Lemme 3.3 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1-u_n}{1-v_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1-u_n}{1-v_n} < 1,$$

alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau_{u_n} = \tau_{v_n}] = 0.$$

Notons que sous les hypothèses du Lemme 3.3, les hypothèses du Théorème 3.2 sont vérifiées.

Démonstration – Comme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1-u_n}{1-v_n} < 1,$$

on sait qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\frac{1-u_n}{1-v_n} \leq 1 - \varepsilon_0. \quad (3.19)$$

Posons

$$A_n = \left\{ \frac{1-u_n}{1-v_n} \left(\frac{\tau_{v_n}}{\tau_{u_n}} \right)^{-\xi} > 1 - \varepsilon_0 \right\}$$

D'après (3.19), on a pour $n \leq N$

$$P[A_n ; \tau_{u_n} = \tau_{v_n}] = 0.$$

Comme de plus, d'après le Théorème 3.2, $P[A_n] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on conclut la démonstration. ■

3.3.3 Utilisation de quatre seuils aléatoires pour estimer l'indice de valeur extrême

Soit (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) quatre suites de $]0, 1[$. Pour construire le second estimateur de ξ , on remplace dans l'approximation (3.14) a par $u_n X_{n,n}$, b par $w_n X_{n,n}$, c par $v_n X_{n,n}$ et d par $z_n X_{n,n}$. En

utilisant les “approximations” $1 - F(u_n X_{n,n}) \approx \tau_{u_n}/n$, $1 - F(v_n X_{n,n}) \approx \tau_{v_n}/n$, $1 - F(w_n X_{n,n}) \approx \tau_{w_n}/n$ et $1 - F(z_n X_{n,n}) \approx \tau_{z_n}/n$, on a pour n “assez” grand :

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{w_n}^{-\xi}}{\tau_{v_n}^{-\xi} - \tau_{z_n}^{-\xi}} \right) \approx 1. \quad (3.20)$$

L'approximation (3.20) peut aussi être justifiée par le Théorème suivant :

Théorème 3.3 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - u_n} > 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - u_n} < 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - v_n} < 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - u_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - u_n} < +\infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

alors,

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{w_n}^{-\xi}}{\tau_{v_n}^{-\xi} - \tau_{z_n}^{-\xi}} \right) \xrightarrow{P} 1. \quad (3.22)$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $\ell(x)$ converge vers une constante strictement positive lorsque $x \rightarrow +\infty$, alors, on peut remplacer la condition (3.21) par la condition plus faible :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - u_n} < 1 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - v_n} < 1.$$

Démonstration – Pour simplifier les notations, posons, pour toute suite (u_n) :

$$\lambda(u_n) = x_F n^{-\xi} \{ \ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}] \}^{-\xi}.$$

Ainsi,

$$(1 - u_n) \lambda(u_n) = \{ n[1 - F(u_n x_F)] \}^{-\xi}.$$

On remarque que :

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{w_n}^{-\xi}}{\tau_{v_n}^{-\xi} - \tau_{z_n}^{-\xi}} \right) = \underbrace{\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{w_n}^{-\xi}}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)}}_{F_1} \times \underbrace{\frac{(v_n - z_n) \lambda(u_n)}{\tau_{v_n}^{-\xi} - \tau_{z_n}^{-\xi}}}_{F_2}$$

Intéressons nous au facteur F_1 :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\tau_{u_n}^{-\xi}}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)} - \frac{\tau_{w_n}^{-\xi}}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)} \\ &= \left[\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right]^{-\xi} \frac{1 - u_n}{u_n - w_n} - \left[\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right]^{-\xi} \left(\frac{1 - w_n}{u_n - w_n} \right) \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} \\ &= \frac{1 - u_n}{u_n - w_n} \left\{ \left[\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right]^{-\xi} - 1 \right\} - \frac{1 - w_n}{u_n - w_n} \left\{ \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} \left[\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right]^{-\xi} - 1 \right\} - 1. \end{aligned}$$

Or, comme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - u_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - u_n} < 1,$$

on montre, d'après le Lemme 2.3ii), que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ell[x_F^{-1}(1 - w_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]} \right]^{-\xi} = 1.$$

De plus, comme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - u_n} < 1,$$

il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$-\varepsilon^{-1} \leq \frac{1 - u_n}{u_n - w_n} \leq -1 \text{ et } -\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \leq \frac{1 - w_n}{u_n - w_n} \leq 0.$$

Ainsi, d'après la convergence en probabilité (3.5) du Théorème 3.1, on a :

$$\frac{1 - u_n}{u_n - w_n} \left\{ \left[\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right]^{-\xi} - 1 \right\} \xrightarrow{P} 0, \quad (3.23)$$

et

$$\frac{1 - w_n}{u_n - w_n} \left\{ \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} \left[\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right]^{-\xi} - 1 \right\} \xrightarrow{P} 0. \quad (3.24)$$

On déduit de (3.23) et (3.24) que :

$$F_1 \xrightarrow{P} -1.$$

On montre, de la même manière, que le facteur F_2 tend en probabilité vers -1 , ce qui conclut la démonstration. ■

L'approximation (3.20) (ou le Théorème 3.3) nous amènent à considérer l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$ défini comme étant la solution de l'équation en θ :

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{w_n}^{-\theta}}{\tau_{v_n}^{-\theta} - \tau_{z_n}^{-\theta}} \right) = 1. \quad (3.25)$$

On démontre plus loin que si $\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, alors l'équation (3.25) admet une unique solution. De plus, on démontre que sous certaines hypothèses, $P[\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \rightarrow 1$ lorsque n tend vers l'infini. Cet estimateur a l'avantage par rapport à l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ de ne pas être construit en utilisant une approximation de $F(X_{n,n})$ par 1. Il comporte cependant deux inconvénients : il faut choisir quatre suites (au lieu de deux) pour sa construction et il n'admet pas d'expression explicite.

Le lemme suivant nous assure que l'équation (3.25) admet une unique solution sur un ensemble dont la probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Lemme 3.4 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite :

Condition 1

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - z_n} > 0, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - w_n}{1 - z_n} < 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - u_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - u_n} < 1, \end{aligned}$$

Condition 2

$$w_n = z_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - u_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z_n}{1 - u_n} < 1,$$

alors l'équation (3.25) admet une unique solution sur un ensemble dont la probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Notons que sous les hypothèses du Lemme 3.4, les hypothèses du Théorème 3.3 sont vérifiées.

Démonstration – Cette démonstration se décompose en deux étapes : dans la première étape, on démontre que si $\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$ alors l'équation (3.25) admet une unique solution et dans la deuxième étape, on démontre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] = 1,$$

ce qui prouve le Théorème.

Première étape Supposons pour commencer que $\tau_{w_n} < \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$. Ceci implique entre autre que $v_n < u_n < z_n < w_n$ et ainsi que $(v_n - z_n)/(u_n - w_n) > 0$. Posons

$$G_n(\theta) = \frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{w_n}^{-\theta}}{\tau_{v_n}^{-\theta} - \tau_{z_n}^{-\theta}} \right).$$

On sait d'après le Théorème B.1 de l'Annexe B que G_n est prolongeable par continuité au point $\theta = 0$, que G_n est strictement croissante et enfin que

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} G_n(\theta) = 0 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow +\infty} G_n(\theta) = +\infty,$$

ce qui impliquent l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.25). Supposons à présent que $\tau_{w_n} = \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$. Posons

$$H_n(\theta) = \frac{v_n - z_n}{u_n - z_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{z_n}^{-\theta}}{\tau_{v_n}^{-\theta} - \tau_{z_n}^{-\theta}} \right).$$

On sait d'après le Théorème B.1 de l'Annexe B que H_n est prolongeable par continuité au point $\theta = 0$, que G_n est strictement croissante et enfin que

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} H_n(\theta) = 0 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow +\infty} H_n(\theta) = \frac{v_n - z_n}{u_n - z_n}.$$

Or, comme $\tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, on a $v_n < u_n < z_n$ et ainsi $(v_n - z_n)/(u_n - z_n) > 1$, ce qui conclut la démonstration de la première étape.

Deuxième étape Les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) satisfaisant la condition 1 ou 2, on sait qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$,

$$\frac{1 - w_n}{1 - z_n} \leq 1, \frac{1 - z_n}{1 - u_n} \leq 1 - \varepsilon_1 \text{ et } \frac{1 - u_n}{1 - v_n} \leq 1 - \varepsilon_2. \quad (3.26)$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a $\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} \leq \tau_{u_n} \leq \tau_{v_n}$. D'où,

$$P[\{\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}\}^C] = P[\tau_{z_n} = \tau_{u_n} \text{ ou } \tau_{u_n} = \tau_{v_n}] \leq P[\tau_{z_n} = \tau_{u_n}] + P[\tau_{u_n} = \tau_{v_n}],$$

avec A^C qui désigne le complémentaire de l'évènement A . En posant :

$$A_n = \left\{ \frac{1 - z_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{z_n}} \right)^{-\xi} > 1 - \varepsilon_1 \right\} \text{ et } B_n = \left\{ \frac{1 - u_n}{1 - v_n} \left(\frac{\tau_{v_n}}{\tau_{u_n}} \right)^{-\xi} > 1 - \varepsilon_2 \right\},$$

on a pour $n \geq N$:

$$P[A_n ; \tau_{z_n} = \tau_{u_n}] = 0 \text{ et } P[B_n ; \tau_{v_n} = \tau_{u_n}] = 0.$$

Comme d'après le Théorème 3.2, $P[A_n] \rightarrow 1$ et $P[B_n] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on en déduit le résultat annoncé. ■

3.3.4 Cas particulier de l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$

Nous allons à présent proposer un estimateur de ξ qui est un cas particulier de l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$. Pour ce faire, on remplace dans l'approximation (3.20) w_n et z_n par 1. Ainsi, pour n "assez" grand on a l'approximation :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi} - 1} \right) \approx 1. \quad (3.27)$$

Cette approximation peut aussi être justifiée par le résultat suivant.

Théorème 3.4 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < +\infty, \quad (3.28)$$

alors

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi} - 1} \right) \xrightarrow{P} 1.$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que la fonction à variations lentes $\ell(x)$ converge vers une constante strictement positive lorsque $x \rightarrow \infty$, alors la condition (3.28) n'est pas nécessaire.

Démonstration – Remarquons que

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi} - 1} \right) = \underbrace{\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right)^{-\xi}}_A \times \underbrace{\left(\frac{1 - \tau_{u_n}^{\xi}}{1 - \tau_{v_n}^{\xi}} \right)}_B.$$

Or, d'après le Théorème 3.2, $A \xrightarrow{P} 1$. De plus,

$$\tau_{u_n}^{\xi} = \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} n[1 - F(u_n x_F)] \right)^{\xi} \xrightarrow{P} 0, \quad (3.29)$$

d'après la convergence en probabilité (3.5) et la convergence (3.6) du Théorème 3.1. (De la même manière, on montre que $\tau_{v_n}^{\xi} \xrightarrow{P} 0$). Ainsi, $B \xrightarrow{P} 1$, ce qui conclut la démonstration. ■

D'après l'approximation (3.27), on propose d'estimer ξ par $\hat{\xi}_{3,n}$ défini comme étant la solution de l'équation en θ :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - 1}{\tau_{v_n}^{-\theta} - 1} \right) = 1. \quad (3.30)$$

On démontre plus loin que si $1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$ alors la solution de l'équation (3.30) existe et est unique. L'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ a l'avantage supplémentaire par rapport à l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$ de n'utiliser que deux seuils aléatoires pour sa construction. On remarque aussi que la différence avec l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ réside dans le fait que l'on approche $F(X_{n,n})$ par $1 - 1/n$ et non plus par 1. Cette dernière approximation est préférable puisqu'on sait que $X_{n,n}$ est un "bon" estimateur du quantile extrême d'ordre $1/n$.

Le lemme suivant assure que l'équation (3.30) admet une unique solution sur un ensemble dont la probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Lemme 3.5 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < 1,$$

alors l'équation (3.30) admet une unique solution sur un ensemble dont la probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration – Comme pour la preuve du Lemme 3.4, cette démonstration s'effectue en deux étapes : dans la première étape, on démontre que si $1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$ alors la solution de l'équation (3.30) existe et est unique et dans la deuxième étape, on démontre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] = 1.$$

Première étape Elle est évidente en utilisant le Théorème B.1 de l'Annexe B et en remarquant que puisque $\tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, on a $(1 - v_n)/(1 - u_n) > 1$.

Deuxième étape Remarquons que

$$P[1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] = P[\tau_{u_n}^{-1} < 1 ; \tau_{u_n} < \tau_{v_n}].$$

Or comme $\tau_{u_n}^{-1} \xrightarrow{P} 0$ (voir démonstration du Théorème 3.4, (3.29)), on en déduit que :

$$P[1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] = A_n + P[\tau_{u_n} < \tau_{v_n}],$$

où $A_n = P[\tau_{u_n}^{-1} < 1 ; \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] - P[\tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De la même manière que dans la démonstration du Lemme 3.4, on montre que $P[\tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui conclut la démonstration. ■

3.4 Convergence en probabilité

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que les trois estimateurs définis dans le paragraphe précédent convergent en probabilité vers ξ .

3.4.1 Convergence en probabilité de $\hat{\xi}_{1,n}$

Théorème 3.5 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < 1, \quad (3.31)$$

alors $\hat{\xi}_{1,n} \xrightarrow{P} \xi$. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $\ell(x)$ tend vers une constante strictement positive lorsque $x \rightarrow \infty$, alors on peut remplacer la condition (3.31) par la condition plus faible :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < 1. \quad (3.32)$$

Démonstration – Remarquons tout d'abord que les hypothèses du Théorème 3.5 permettent d'utiliser le résultat du Théorème 3.2. Ainsi,

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right)^{-\xi} \xrightarrow{P} 1.$$

En prenant le logarithme, on en déduit que :

$$\ln \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right) - \xi \ln \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right) \xrightarrow{P} 0. \quad (3.33)$$

Or, d'après (3.32), on sait qu'il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\ln \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right) \geq \ln[(1 - \varepsilon)^{-1}] > 0.$$

On peut donc diviser par $\ln[(1 - v_n)/(1 - u_n)]$ dans (3.33) et on en déduit que :

$$\hat{\xi}_{1,n}^{-1} \xrightarrow{P} \xi^{-1},$$

ce qui conclut la démonstration. ■

3.4.2 Convergence en probabilité de $\hat{\xi}_{2,n}$

Théorème 3.6 Sous les hypothèses **(A1)**, **(B)** et si les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite :

Condition 1

$$1 - w_n \sim l_{w,z}(1 - z_n), \quad 1 - u_n \sim l_{u,v}(1 - v_n) \text{ et } 1 - z_n \sim l_{z,u}(1 - u_n),$$

où $l_{w,z}$, $l_{u,v}$ et $l_{z,u}$ sont des constantes appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et vérifiant pour tout $\eta \neq 0$,

$$l_{w,z}^{-\eta} \frac{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{-1}}{1 - (l_{z,u} l_{w,z})^{-1}} \left[\frac{1 - (l_{z,u} l_{w,z})^{\eta-1}}{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{\eta-1}} \right] \neq 1, \quad (3.34)$$

Condition 2

$$w_n = z_n, \quad 1 - u_n \sim l_{u,v}(1 - v_n) \text{ et } 1 - z_n \sim l_{z,u}(1 - u_n),$$

où $l_{u,v}$ et $l_{z,u}$ sont des constantes appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et vérifiant pour tout $\eta \neq 0$,

$$\frac{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{-1}}{1 - l_{z,u}^{-1}} \left[\frac{1 - l_{z,u}^{\eta-1}}{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{\eta-1}} \right] \neq 1, \quad (3.35)$$

alors $\hat{\xi}_{2,n} \xrightarrow{P} \xi$.

Remarque 3.2 La condition (3.34) est satisfaite si on suppose que $l_{w,z} = l_{u,v}$, autrement dit, si

$$\frac{1 - w_n}{1 - z_n} = \frac{1 - u_n}{1 - v_n}.$$

En effet, dans ce cas,

$$l_{w,z}^{-\eta} \frac{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{-1}}{1 - (l_{z,u} l_{w,z})^{-1}} \left[\frac{1 - (l_{z,u} l_{w,z})^{\eta-1}}{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{\eta-1}} \right] = l_{w,z}^{-\eta} \neq 1,$$

pour tout $\eta \neq 0$.

Démonstration – On fait la démonstration pour le cas où les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (z_n) satisfont la Condition 1. La démonstration est identique si c'est la Condition 2 qui est satisfaite. Remarquons pour commencer que sous les hypothèses du Théorème 3.6, on peut utiliser le résultat du Théorème 3.3. Ainsi,

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{w_n}^{-\xi}}{\tau_{v_n}^{-\xi} - \tau_{z_n}^{-\xi}} \right) \xrightarrow{P} 1. \quad (3.36)$$

Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\xi}_{2,n} - \xi| > \varepsilon] = 0. \quad (3.37)$$

Or,

$$P[|\hat{\xi}_{2,n} - \xi| > \varepsilon] = P[|\hat{\xi}_{2,n} - \xi| > \varepsilon ; \tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] + P[|\hat{\xi}_{2,n} - \xi| > \varepsilon ; \{\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}\}^C],$$

où E^C désigne le complémentaire de l'ensemble E . D'après la démonstration du Lemme 3.4 (deuxième étape), on sait que $P[\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ce qui implique que le second terme converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Intéressons nous au premier terme. Posons, pour simplifier les notations,

$$G_{2,n}(\theta) = \frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{w_n}^{-\theta}}{\tau_{v_n}^{-\theta} - \tau_{z_n}^{-\theta}}.$$

Or, si $\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, on a $(v_n - z_n)/(u_n - w_n) > 0$ et, d'après le Théorème B.1 (cf Annexe B), $G_{2,n}$ est une fonction strictement croissante. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & P[|\hat{\xi}_{2,n} - \xi| > \varepsilon ; \tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \\ &= P[\hat{\xi}_{2,n} > \xi + \varepsilon ; \tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] + P[\hat{\xi}_{2,n} < \xi - \varepsilon ; \tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \\ &\leq P\left[\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi + \varepsilon) < 1\right] + P\left[\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi - \varepsilon) > 1\right], \end{aligned}$$

puisque si $\tau_{w_n} \leq \tau_{z_n} < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$ on a, d'après la définition de l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$,

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\hat{\xi}_{2,n}) = 1.$$

Pour démontrer (3.37), il suffit donc de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi - \varepsilon) \leq 1\right] = 1, \quad (3.38)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi + \varepsilon) \geq 1 \right] = 1. \quad (3.39)$$

On va uniquement démontrer la convergence (3.38), la démonstration de (3.39) étant identique. Pour démontrer (3.38), il suffit de démontrer qu'il existe $l' < 1$ tel que

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi - \varepsilon) \xrightarrow{\mathbb{P}} l'.$$

Pour simplifier les notations, posons

$$\lambda(u_n) = x_F^{1-\varepsilon/\xi} n^{-\xi+\varepsilon} \{ \ell[x_F^{-1}(1-u_n)^{-1}] \}^{-\xi+\varepsilon}.$$

Ainsi,

$$(1-u_n)^{1-\varepsilon/\xi} \lambda(u_n) = \{ n[1 - F(u_n x_F)] \}^{-\xi+\varepsilon}.$$

On a :

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi - \varepsilon) = \frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi+\varepsilon} - \tau_{w_n}^{-\xi+\varepsilon}}{\tau_{v_n}^{-\xi+\varepsilon} - \tau_{z_n}^{-\xi+\varepsilon}} \right) = \underbrace{\frac{\tau_{u_n}^{-\xi+\varepsilon} - \tau_{w_n}^{-\xi+\varepsilon}}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)}}_{F_1} \times \underbrace{\frac{(v_n - z_n) \lambda(u_n)}{\tau_{v_n}^{-\xi+\varepsilon} - \tau_{z_n}^{-\xi+\varepsilon}}}_{F_2}.$$

Intéressons nous au facteur F_1 .

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\tau_{u_n}^{-\xi+\varepsilon}}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)} - \frac{\tau_{w_n}^{-\xi+\varepsilon}}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)} \\ &= \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} \frac{(1-u_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{u_n - w_n} - \left(\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} \frac{(1-w_n)^{1-\varepsilon/\xi} \lambda(w_n)}{(u_n - w_n) \lambda(u_n)}. \end{aligned}$$

En posant

$$\rho_n = \frac{u_n - w_n}{(1-u_n)^{1-\varepsilon/\xi} - (1-w_n)^{1-\varepsilon/\xi}},$$

on a :

$$\begin{aligned} \rho_n F_1 &= \rho_n \left\{ \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} \left[\rho_n^{-1} + \frac{(1-w_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{u_n - w_n} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} \frac{(1-w_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{u_n - w_n} \left[\frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} \right] \right\} \\ &= \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} + \rho_n \frac{(1-w_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{u_n - w_n} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} - \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} \left(\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

Or, comme $1 - w_n \sim l_{w,z}(1 - z_n)$ et $1 - z_n \sim l_{z,u}(1 - u_n)$, on a $1 - w_n \sim l_{w,z} l_{z,u}(1 - u_n)$ et ainsi, d'après le Lemme 2.3 ii),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ell[x_F^{-1}(1-w_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1-u_n)^{-1}]} \right)^{-\xi+\varepsilon} = 1.$$

D'après la convergence en probabilité (3.5) du Théorème 3.1, on en déduit donc que :

$$\left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} - \frac{\lambda(w_n)}{\lambda(u_n)} \left(\frac{\tau_{w_n}}{n[1 - F(w_n x_F)]} \right)^{-\xi+\varepsilon} \xrightarrow{P} 0. \quad (3.40)$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \frac{(1 - w_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{u_n - w_n} = [(l_{w,z} l_{z,u})^{-1} - 1]^{-1} < +\infty.$$

Ainsi, la convergence en probabilité (3.5) du Théorème 3.1 et (3.40) impliquent que :

$$\rho_n F_1 \xrightarrow{P} 1. \quad (3.41)$$

De la même manière, si on pose

$$\rho'_n = \frac{(1 - v_n)^{1-\varepsilon/\xi} - (1 - z_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{v_n - z_n},$$

on montre que :

$$\rho'_n F_2 \xrightarrow{P} 1. \quad (3.42)$$

Or,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n \rho'_n)^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} \left[\frac{(1 - u_n)^{1-\varepsilon/\xi} - (1 - w_n)^{1-\varepsilon/\xi}}{(1 - v_n)^{1-\varepsilon/\xi} - (1 - z_n)^{1-\varepsilon/\xi}} \right] \\ &= l_{w,z}^{-\varepsilon/\xi} \frac{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{-1}}{1 - (l_{w,z} l_{z,u})^{-1}} \left[\frac{1 - (l_{w,z} l_{z,u})^{\varepsilon/\xi-1}}{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{\varepsilon/\xi-1}} \right] = l' \neq 1, \end{aligned} \quad (3.43)$$

par hypothèse. Comme d'après (3.36),

$$\frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi) \xrightarrow{P} 1,$$

et comme $G_{2,n}$ est une fonction strictement croissante d'après le Théorème B.1, on déduit de (3.41), (3.42) et (3.43) que :

$$F_1 F_2 = \frac{v_n - z_n}{u_n - w_n} G_{2,n}(\xi - \varepsilon) \xrightarrow{P} l' < 1,$$

ce qui conclut la démonstration. ■

3.4.3 Convergence en probabilité de $\hat{\xi}_{3,n}$

Théorème 3.7 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que :

$$1 - u_n \sim l_{u,v}(1 - v_n),$$

où $l_{u,v} \in]0, 1[$, alors $\hat{\xi}_{3,n} \xrightarrow{P} \xi$.

Démonstration – Remarquons tout d'abord que sous les hypothèses du Théorème 3.7, on peut utiliser le résultat du Théorème 3.4. Ainsi,

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi} - 1} \right) \xrightarrow{P} 1.$$

Remarquons aussi que démontrer le Théorème 3.7 est équivalent à démontrer que pour tout $\varepsilon \in]0, -\xi[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\xi}_{3,n} - \xi| > \varepsilon] = 0. \quad (3.44)$$

En s'inspirant de la démonstration du Théorème 3.6, on montre que pour prouver (3.44), il suffit de démontrer que pour tout $\varepsilon \in]0, -\xi[$ il existe $l' < 1$ et $l'' > 1$ tels que l'on ait :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi-\varepsilon} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi-\varepsilon} - 1} \right) \xrightarrow{P} l'' \quad (3.45)$$

et

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi+\varepsilon} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi+\varepsilon} - 1} \right) \xrightarrow{P} l' \quad (3.46)$$

Démontrons pour commencer la convergence en probabilité (3.45). Posons

$$\lambda(u_n) = x_F^{1+\varepsilon/\xi} n^{-(\xi+\varepsilon)} \{ \ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}] \}^{-(\xi+\varepsilon)}.$$

Ainsi,

$$(1 - u_n)^{1+\varepsilon/\xi} \lambda(u_n) = \{ n[1 - F(u_n x_F)] \}^{-(\xi+\varepsilon)}.$$

On a :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\xi-\varepsilon} - 1}{\tau_{v_n}^{-\xi-\varepsilon} - 1} \right) = \underbrace{\frac{\tau_{u_n}^{-\xi-\varepsilon} - 1}{(1 - u_n) \lambda(u_n)}}_{F_1} \underbrace{\frac{(1 - v_n) \lambda(u_n)}{\tau_{u_n}^{-\xi-\varepsilon} - 1}}_{F_2}.$$

Intéressons nous au facteur F_1 .

$$F_1 = \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-(\xi+\varepsilon)} (1 - u_n)^{\varepsilon/\xi} - \left(\frac{1}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-(\xi+\varepsilon)} (1 - u_n)^{\varepsilon/\xi}.$$

Donc,

$$(1 - u_n)^{-\varepsilon/\xi} F_1 = \left(\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-(\xi+\varepsilon)} - \left(\frac{1}{n[1 - F(u_n x_F)]} \right)^{-(\xi+\varepsilon)}.$$

Comme $-(\xi + \varepsilon) > 0$, la convergence en probabilité (3.5) du Théorème 3.1 et la convergence (3.6) nous assurent que :

$$(1 - u_n)^{-\varepsilon/\xi} F_1 \xrightarrow{P} 1. \quad (3.47)$$

En remarquant que comme $1 - u_n \sim l_{u,v}(1 - v_n)$ on a, d'après le Lemme 2.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(u_n)}{\lambda(v_n)} = 1,$$

on démontre de la même manière que précédemment que :

$$(1 - v_n)^{\varepsilon/\xi} F_2 \xrightarrow{P} 1. \quad (3.48)$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - u_n)^{\varepsilon/\xi} (1 - v_n)^{-\varepsilon/\xi} = l_{u,v}^{\varepsilon/\xi} = l'' > 1,$$

ce qui démontre la convergence en probabilité (3.45) en utilisant les résultats (3.47) et (3.48). De la même manière, on démontre la convergence en probabilité (3.46), ce qui conclut la démonstration. ■

3.5 Convergence en loi et vitesse de convergence de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$

Dans ce paragraphe, nous démontrons que l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ convenablement normalisé converge vers une loi normale. Cette convergence en loi n'est obtenue que dans le cas où $\xi < -1/2$. Nous déduisons de ce résultat que la vitesse de convergence de $\hat{\xi}_{1,n}$ (lorsque $\xi < -1/2$) est une puissance de la taille de l'échantillon n . A notre connaissance, cette vitesse n'est atteinte par aucun autre estimateur de l'indice de valeur extrême. Pour obtenir la loi asymptotique de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$, nous devons faire les hypothèses supplémentaires suivantes :

(A2) la fonction à variations lentes ℓ vérifie la condition du second-ordre :

$$\ln \left(\frac{\ell(\lambda t)}{\ell(t)} \right) \sim b(t) K_\rho(\lambda), \text{ uniformément en } \lambda \geq 1,$$

où $\rho \leq 0$, $b(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, et $K_\rho(\lambda) = \int_1^\lambda u^{\rho-1} du$. On peut montrer (voir par exemple [39]) que $|b|$ est une fonction à variations régulières d'indice ρ .

Dans la suite, on pose $\theta_{2,\xi} = \min \{ \xi^2/2, \xi^2/(1-\xi), 2\xi^2 + \xi \}$.

(C2) Soit (u_n) une suite de $]0, 1[$ qui converge vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Il existe $\delta \in]0, \theta_{2,\xi}[$ tel que $n^{-\delta} = \mathcal{O}(1 - u_n)$.

On remarque facilement que si une suite (u_n) vérifie l'hypothèse **(C2)** alors elle vérifie aussi l'hypothèse **(C1)**. De plus, l'hypothèse **(C2)** n'est réalisable que si $\xi < -1/2$ (car sinon $\theta_{2,\xi} \leq 0$).

3.5.1 Convergence en loi

Le théorème suivant nous donne la loi asymptotique de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$.

Théorème 3.8 Sous les hypothèses **(A1)**, **(A2)**, **(B)**, si $\xi < -1/2$ et si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C2)** et sont telles que :

$$\frac{1 - u_n}{1 - v_n} = l_{u,v} + \eta_n,$$

où $l_{u,v}$ est une constante appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et η_n est une suite vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \max \{ \eta_n, b[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}] \} = 0,$$

alors,

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]}(\hat{\xi}_{1,n} - \xi) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\xi^4(1 - l_{u,v}^{-1/\xi})}{[\ln(l_{u,v})]^2} \right).$$

La démonstration de ce théorème repose sur lemme suivant. Dans la suite, on pose

$$\alpha_n = \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \text{ et } \beta_n = \sqrt{n[1 - F(v_n x_F)]}.$$

Lemme 3.6 Sous les hypothèses **(A1)**, **(B)**, si $\xi < -1/2$ et si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C2)** alors

$$\frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{\alpha_n} \xrightarrow{P} 0 \text{ et } \frac{\tau_{v_n} - \tau'_{v_n}}{\beta_n} \xrightarrow{P} 0,$$

où

$$\tau'_{u_n} = \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq u_n x_F\} \text{ et } \tau'_{v_n} = \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq v_n x_F\}.$$

Démonstration – Nous allons uniquement démontrer que

$$\frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{\alpha_n} \xrightarrow{P} 0, \tag{3.49}$$

la démonstration étant identique si on remplace la suite (u_n) par la suite (v_n) . Remarquons tout d'abord que $\tau_{u_n} \geq \tau'_{u_n}$. Ainsi, démontrer (3.49) et équivalent à démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{\alpha_n} \geq \varepsilon \right] = 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on a :

$$P \left[\frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{\alpha_n} \geq \varepsilon \right] \leq \varepsilon^{-1} \frac{E(\tau_{u_n}) - E(\tau'_{u_n})}{\alpha_n}.$$

D'après le Lemme 2.4 du Chapitre 2 et comme $E(\tau'_{u_n}) = n[1 - F(u_n x_F)]$, on a :

$$E(\tau_{u_n}) - E(\tau'_{u_n}) = n\eta_{u_n},$$

où on rappelle que

$$\eta_{u_n} = \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt.$$

Ainsi, d'après le Lemme 3.2 et l'expression de F donnée en 3.3, on a :

$$\frac{E(\tau_{u_n}) - E(\tau'_{u_n})}{\alpha_n} = \mathcal{O} \left\{ n^{\xi+1/2} (1 - u_n)^{1/(2\xi)} L(n) \{ \ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}] \}^{-1/2} \right\}.$$

Comme (u_n) vérifie l'hypothèse **(C2)**, il existe $0 < \delta < \theta_{2,\xi}$ tel que

$$\frac{E(\tau_{u_n}) - E(\tau'_{u_n})}{\alpha_n} = \mathcal{O} \left\{ n^{\xi+1/2-\delta/(2\xi)} L(n) \{ \ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}] \}^{-1/2} \right\}.$$

Le fait que $\xi + 1/2 - \delta/(2\xi) < 0$ et le Lemme 2.3 concluent la démonstration. ■

Plan de la démonstration du Théorème 3.8 – On donne uniquement ici les grandes lignes de la démonstration. La preuve complète est donnée dans l'Annexe C. Dans ce qui suit, A^t désigne la transposée de la matrice

A. Dans un premier temps, on démontre que sous l'hypothèse **(A1)** et si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} = l_{u,v}$$

où $l_{u,v} \in]0, 1[$, alors,

$$\left(\frac{\tau'_{u_n}}{\alpha_n} - \alpha_n, \frac{\tau'_{v_n}}{\beta_n} - \beta_n \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & l_{u,v}^{-1/(2\xi)} \\ l_{u,v}^{-1/(2\xi)} & 1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant le Lemme 3.6, on en déduit que

$$\left(\frac{\tau_{u_n}}{\alpha_n} - \alpha_n, \frac{\tau_{v_n}}{\beta_n} - \beta_n \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma). \quad (3.50)$$

Enfin, en utilisant l'hypothèse **(A2)** et le fait que

$$\frac{1 - u_n}{1 - v_n} = l_{u,v} + \eta_n,$$

où η_n est une suite vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \max \{ \eta_n, b[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}] \} = 0,$$

on conclut la démonstration en appliquant la δ -méthode au résultat (3.50). ■

Remarque 3.3 Le Lemme 3.6 est très utile pour la démonstration du Théorème 3.8 puisqu'il permet d'obtenir simplement la loi du couple $(\tau_{u_n}/\alpha_n - \alpha_n, \tau_{v_n}/\beta_n - \beta_n)$. Ce lemme n'a été obtenu que dans le cas particulier où $\xi < -1/2$. Dans le cas où $\xi \geq -1/2$, nous n'avons pu mettre en évidence la loi asymptotique de ce couple.

3.5.2 Vitesse de convergence optimale

Avant de définir et de donner la vitesse de convergence optimale de $\hat{\xi}_{1,n}$, on donne, dans le résultat suivant, un exemple de suites (u_n) et (v_n) pour lesquelles le Théorème 3.8 est applicable.

Lemme 3.7 Posons

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 2 \text{ et } y > h(x)\},$$

avec

$$h(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ x^2 - x/2 & \text{si } 1 < x \leq 3/2, \\ (x^2 - x)/(2 - x) & \text{si } 3/2 < x \leq 2. \end{cases}$$

Sous les hypothèses **(A1)**, **(A2)** et **(B)**, si $(-1/\xi, \rho) \in D$, et si $1 - u_n \sim d_1 n^{-\gamma}$ et $1 - v_n \sim d_2 n^{-\gamma}$ où d_1 et d_2 sont des constantes strictement positives telles que $d_1/d_2 < 1$ et

$$-\frac{\xi}{1 + 2\xi\rho} < \gamma < \theta_{2,\xi}, \quad (3.51)$$

alors, le Théorème 3.8 est applicable.

Démonstration – Pour que le Théorème 3.8 soit applicable, il suffit de vérifier que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} b[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}] = 0 \quad (3.52)$$

et qu'il existe $0 < \delta < \theta_{2,\xi}$ tel que :

$$n^{-\delta} = \mathcal{O}(1 - u_n). \quad (3.53)$$

Or, $|b|$ étant une fonction à variations régulières d'indice $\rho \leq 0$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} |b[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]| &= x_F^{-1/(2\xi) - \rho} n^{1/2} (1 - u_n)^{-1/(2\xi) - \rho} L[(1 - u_n)^{-1}] \\ &\sim (dx_F)^{-1/(2\xi) - \rho} n^{1/2 + \gamma/(2\xi) + \gamma\rho} L[(1 - u_n)^{-1}], \end{aligned}$$

où L est une fonction à variations lentes. Comme $\gamma > -\xi/(1 + 2\xi\rho)$ on a $1/2 + \gamma/(2\xi) + \gamma\rho < 0$ ce qui, d'après le Lemme 2.3, démontre la convergence (3.52). De plus, comme $\gamma < \theta_{2,\xi}$, on a (3.53). (Notons que la condition (3.51) ne peut être satisfaite que si $\xi/(1 + 2\xi\rho) < \theta_{2,\xi}$ autrement si $(-1/\xi, \rho) \in D$). ■

On appelle vitesse de convergence optimale de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$, la suite de normalisation permettant d'obtenir la convergence en loi (ici, la vitesse de convergence optimale est donc $\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]}$). Or, d'après le Lemme 3.7, si $(-1/\xi, \rho) \in D$, alors on peut choisir la suite (u_n) de telle sorte que $1 - u_n \sim dn^{-\gamma}$ où $d > 0$ et γ vérifie la condition (3.51). On a ainsi :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \sim (dx_F)^{-1/(2\xi)} n^{1/2 + \gamma/(2\xi)} \{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]\}^{1/2}.$$

La vitesse de convergence optimale est alors obtenue en prenant γ le plus petit possible c'est à dire en prenant

$$\gamma = -\frac{\xi}{1 + 2\xi\rho} + \varepsilon,$$

où $0 < \varepsilon < \theta_{2,\xi} + \xi/(1 + 2\xi\rho)$ est aussi petit que l'on veut. On en déduit la vitesse de convergence optimale :

$$\begin{aligned} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} &\sim (dx_F)^{-1/(2\xi)} n^{1/[2 + 1/(\xi\rho)]} n^{\varepsilon/(2\xi)} \{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]\}^{1/2} \\ &= o\{n^{1/[2 + 1/(\xi\rho)]}\}, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.3. L'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ a donc une vitesse de convergence en puissance de n . A notre connaissance, cette vitesse est atteinte par aucun autre estimateur de l'indice de valeur extrême.

3.6 Convergence presque-sûre de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que, sous certaines conditions (et en particulier si $\xi < -1$), $\hat{\xi}_{1,n}$ converge presque-sûrement vers ξ . Pour ce faire, on démontre dans un premier temps un résultat sur la convergence presque-sûre de la variable aléatoire τ_{u_n} .

Lemme 3.8 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si $\xi < -1$ et si $1 - u_n \sim dn^{-\delta}$ avec $d > 0$ et $0 < \delta < -\xi - 1$ alors

$$\frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \xrightarrow{\text{p.s.}} 1.$$

Remarque 3.4 Comme $\xi < -1$, on a $\theta_{1,\xi} = \xi^2/(1 - \xi)$ et on montre facilement que $-\xi - 1 < \theta_{1,\xi}$. Ainsi, si $1 - u_n \sim dn^{-\delta}$ avec $d > 0$ et $0 < \delta < -\xi - 1$ alors la suite (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)**.

Démonstration – Posons

$$\tau'_{u_n} = \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq u_n x_F\}.$$

Il est facile de voir que τ'_{u_n} suit une loi binomiale de paramètres n et $1 - F(u_n x_F)$. Nous allons démontrer que

$$\frac{\tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \xrightarrow{\text{p.s.}} 1 \text{ et } \frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0,$$

ce qui conclura la démonstration. Pour ce faire il suffit, d'après le Lemme de Borel-Cantelli, de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P \left[\left| \frac{\tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} - 1 \right| \geq \varepsilon \right] < +\infty \quad (3.54)$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} P \left[\frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \geq \varepsilon \right] < +\infty. \quad (3.55)$$

Démontrons pour commencer (3.54). Soit $s \in]0, \min(1, \varepsilon)[$. On a l'inégalité :

$$\exp \left\{ s [\tau'_{u_n} - n[1 - F(u_n x_F)]] \right\} \geq \exp \{ n s \varepsilon [1 - F(u_n x_F)] \} I \{ \tau'_{u_n} - n[1 - F(u_n x_F)] \geq n \varepsilon [1 - F(u_n x_F)] \}.$$

En prenant l'espérance, on obtient :

$$P \left[\frac{\tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} - 1 \geq \varepsilon \right] \leq \exp \{ -s n [1 - F(u_n x_F)] - s n \varepsilon [1 - F(u_n x_F)] \} E[\exp(s \tau'_{u_n})].$$

Or, comme on a pris $s < 1$, on a $e^s - 1 \leq s + s^2$. D'où,

$$E[\exp(s \tau'_{u_n})] = \{1 + (e^s - 1)[1 - F(u_n x_F)]\}^n \leq \{1 + (s + s^2)[1 - F(u_n x_F)]\}^n \leq \exp\{n(s + s^2)[1 - F(u_n x_F)]\}.$$

Ainsi,

$$P \left[\frac{\tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} - 1 \geq \varepsilon \right] \leq \exp \{ -n[1 - F(u_n x_F)](s\varepsilon - s^2) \}.$$

En remarquant que, par hypothèse, on peut écrire $n[1 - F(u_n x_F)]$ sous la forme $\gamma_n \ln(n)$, où $\gamma_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et en utilisant le fait que puisque $0 < s < \varepsilon$ on a $s\varepsilon - s^2 > 0$, on en déduit que le terme

$$P \left[\frac{\tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} - 1 \geq \varepsilon \right]$$

est le terme d'une série convergente. Par des arguments similaires (en utilisant le fait que $e^{-s} - 1 \leq -s + s^2$), on démontre que le terme

$$P \left[\frac{\tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} - 1 \leq -\varepsilon \right]$$

est aussi le terme d'une série convergente ce qui conclut la démonstration de (3.54). Reste à prouver (3.55). D'après l'inégalité de Markov, le Lemme 2.4 et le fait que $E(\tau'_{u_n}) = n[1 - F(u_n x_F)]$, on a :

$$P \left[\frac{\tau_{u_n} - \tau'_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \geq \varepsilon \right] \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{E(\tau_{u_n}) - E(\tau'_{u_n})}{n[1 - F(u_n x_F)]} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\eta(u_n)}{1 - F(u_n x_F)},$$

où on rappelle que

$$\eta(u_n) = \int_0^{x_F} u_n f(u_n t) [F(t)]^{n-1} dt.$$

Or, d'après le Lemme 3.2, on a

$$\eta(u_n) = \mathcal{O}[\max\{n^\xi L(n), f(u_n x_F) n^\xi L(n)\}],$$

où L est une fonction à variations lentes et, d'après le Lemme 3.1,

$$f(u_n x_F) \sim -\frac{x_F^{-1/\xi-1}}{\xi} (1 - u_n)^{-1/\xi-1} \ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}].$$

Ainsi, d'après l'expression de F donnée en (3.3) et en utilisant le fait que les fonctions à variations lentes sont négligeables face à n'importe quelle puissance de n (voir Lemme 2.3 i)), il suffit de démontrer, pour prouver (3.55), que

$$\frac{n^\xi}{(1 - u_n)^{-1/\xi}} \text{ et } n^\xi (1 - u_n)^{-1}$$

sont des termes de série convergente. Or, par hypothèse,

$$\frac{n^\xi}{(1 - u_n)^{-1/\xi}} \sim d^{1/\xi} n^{\xi-\delta/\xi} \text{ et } n^\xi (1 - u_n)^{-1} \sim d n^{\xi+\delta},$$

avec $\xi - \delta/\xi < -1$ et $\xi + \delta < -1$ puisque $0 < \delta < -\xi - 1$, ce qui conclut la démonstration. ■

Nous pouvons à présent démontrer le résultat essentiel de ce paragraphe assurant que $\hat{\xi}_{1,n}$ converge presque-sûrement vers ξ .

Théorème 3.9 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si $\xi < -1$ et si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que $1 - u_n \sim d_1 n^{-\delta}$ et $1 - v_n \sim d_2 n^{-\delta}$ où d_1 et d_2 sont deux constantes strictement positives telles que $d_1/d_2 < 1$ et $0 < \delta < -\xi - 1$, alors $\hat{\xi}_{1,n} \xrightarrow{\text{p.s.}} \xi$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration – D'après le Lemme 3.8, on sait que

$$\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \left[\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)} \right] \xrightarrow{\text{p.s.}} 1,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Or, d'après l'expression de F donnée en (3.3), on a :

$$\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)} = \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right)^{-1/\xi} \frac{\ell[x_F^{-1} (1 - v_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]}.$$

Comme $(1 - u_n)/(1 - v_n)$ converge vers une constante strictement positive, on a d'après le Lemme 2.3 ii) :

$$\frac{\ell[x_F^{-1} (1 - v_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1} (1 - u_n)^{-1}]} \rightarrow 1$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui implique que :

$$\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right)^{-1/\xi} \xrightarrow{\text{p.s.}} 1, \quad (3.56)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. En prenant le logarithme dans (3.56) et en divisant par $\ln[(1 - v_n)/(1 - u_n)] > 0$, on conclut la démonstration. ■

3.7 Simulations

Toutes les simulations ont été effectuées sur le logiciel SCILAB.

3.7.1 Comparaison de nos trois estimateurs de ξ

Nous allons ici comparer les estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$, $\hat{\xi}_{2,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$. Pour ce faire, on simule, selon une fonction de répartition F donnée, $N = 100$ échantillons de taille $n = 1000$. On calcule ensuite, pour chaque estimateurs, la moyenne empirique et l'erreur moyenne quadratique empirique (que l'on note par la suite MSE pour "Mean Squared Error") en fonction de $k(v_n)$ où $k(v_n)$ est la moyenne empirique de la variable aléatoire τ_{v_n} ($k(v_n)$ est en fait le nombre moyen de points utilisés dans la construction des estimateurs). Le résultat de la simulation est présenté sous la forme de deux graphiques. Sur ces graphiques, le nombre $k(v_n)$ est mis sur l'axe des abscisses et, sur l'axe des ordonnées, on met la moyenne empirique pour le premier graphique et l'erreur moyenne quadratique empirique pour le second graphique (ce type de graphique est parfois appelé Hill "horror" plot [30]).

Remarque 3.5 Choix des suites (u_n) , (w_n) et (z_n) .

Le nombre $k(v_n)$ étant fixée (autrement dit, la suite (v_n) étant fixé), il reste à choisir la suite (u_n) pour les estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$ et les suites (u_n) , (w_n) et (z_n) pour l'estimateur $\hat{\xi}_{2,n}$. Notons $k(u_n)$ (resp. $k(w_n)$ et $k(z_n)$) la moyenne empirique de la variable aléatoire τ_{u_n} (resp. τ_{w_n} et τ_{z_n}). On propose, de manière arbitraire, de choisir les suites (u_n) , (w_n) et (z_n) de telle sorte que :

$$\frac{k(v_n)}{k(u_n)} = 4 \text{ et } \frac{k(v_n)}{k(w_n)} = \frac{k(v_n)}{k(z_n)} = 8.$$

N.B. Dans tous les graphiques représentant la moyenne empirique des estimateurs, la droite horizontale représente la vraie valeur de l'indice de valeur extrême.

Les lois considérées sont les suivantes : (on les classe selon le comportement de la fonction à variations lentes)

- **Cas où $\ell(x) = c > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$**
 - Loi uniforme sur $[0, 1]$ (notée $\mathcal{U}[0, 1]$). On rappelle que l'indice de valeur extrême correspondant à la loi uniforme est $\xi = -1$.
 - Loi de Pareto Généralisée de paramètre d'échelle $\sigma = 1/3$ et d'indice de valeur extrême $\xi = -1/3$. (notée $GPD(1/3, -1/3)$) dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^3 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

• **Cas où $\ell(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

- Loi de Weibull d'indice de valeur extrême $\xi = -1/3$ et de paramètres d'échelle et de position $\sigma = 2$ et $\mu = 4$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] & \text{si } x \leq \mu - \sigma/\xi, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Loi inverse de Burr de paramètres $\beta = 1$, $\tau = 1/2$, $\lambda = 2$ et $x_F = 10$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + (x_F - x)^{-\tau}} \right)^\lambda & \text{si } x < x_F, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que l'indice de valeur extrême est égal à $-1/(\lambda\tau) = -1$.

• **Cas où $\ell(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

On considère la loi dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1-x)^{-1/\xi} \ell[(1-x)^{-1}] & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (3.57)$$

avec comme indice de valeur extrême $\xi = -1/3$ et

$$\ell(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)}.$$

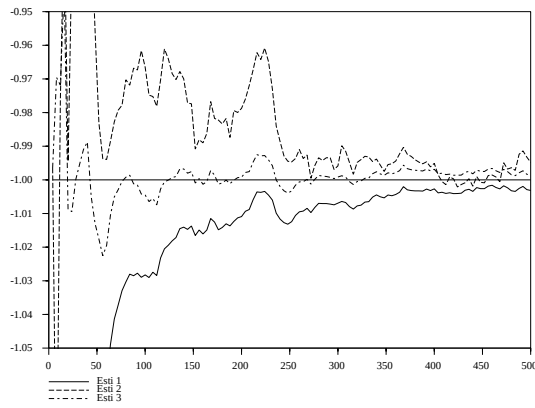
• **Cas où $\ell(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

On considère la loi dont la fonction de répartition est donnée par :

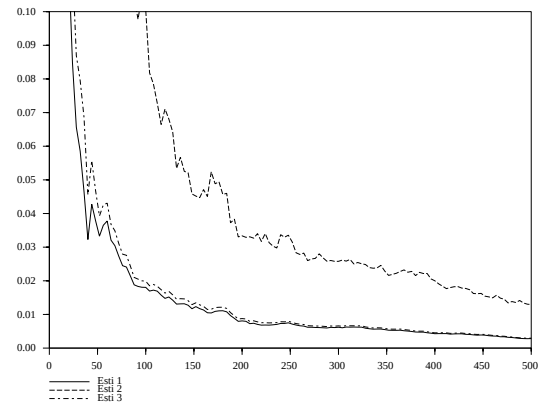
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1-x)^{-1/\xi} \ell[(1-x)^{-1}] & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (3.58)$$

avec comme indice de valeur extrême $\xi = -1/3$ et

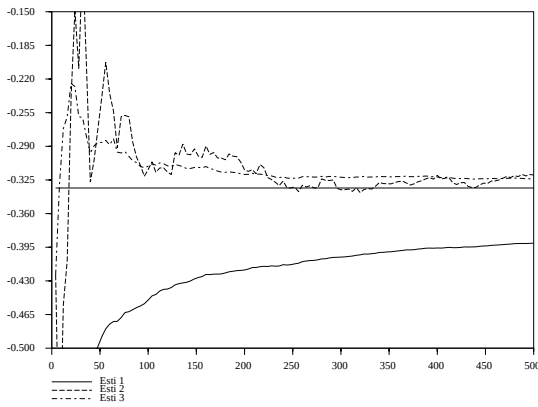
$$\ell(x) = \ln \left[1 + \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{\ln(2)} \right] \right\}^{-1}.$$



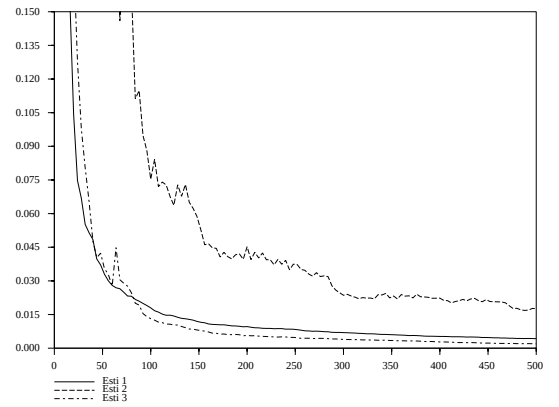
(a) Moyenne empirique



(b) MSE

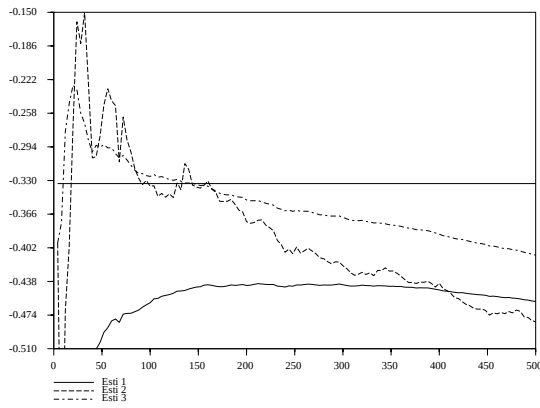


(c) Moyenne empirique

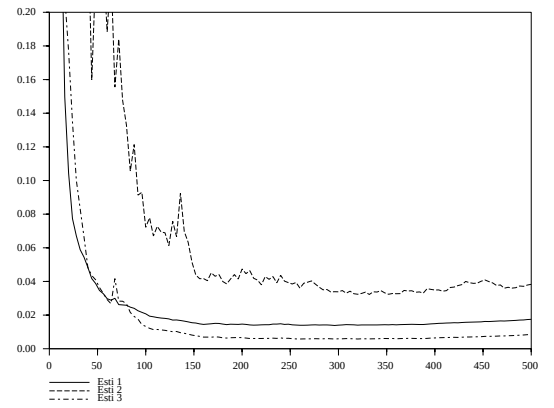


(d) MSE

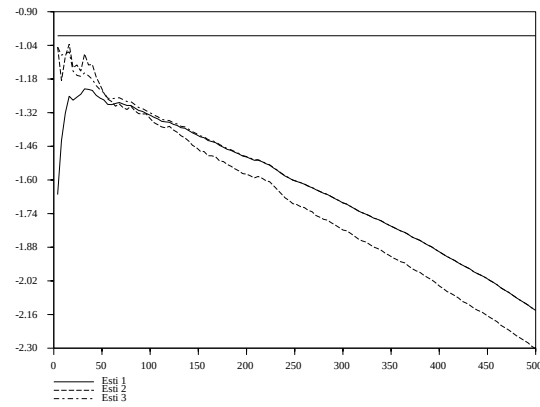
FIG. 3.1 – Comparaison des estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$ (Esti 1), $\hat{\xi}_{2,n}$ (Esti 2) et $\hat{\xi}_{3,n}$ (Esti 3) en prenant la loi $\mathcal{U}[0, 1]$ (figures (a) et (b)) et la loi $GPD(1/3, -1/3)$ (figures (c) et (d)).



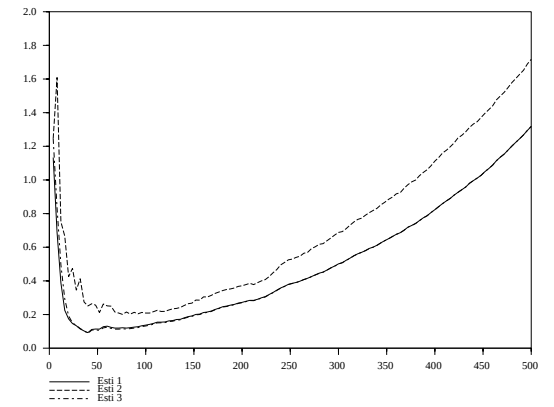
(a) Moyenne empirique



(b) MSE

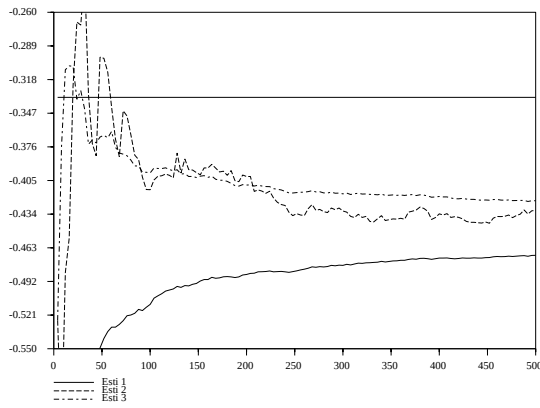


(c) Moyenne empirique

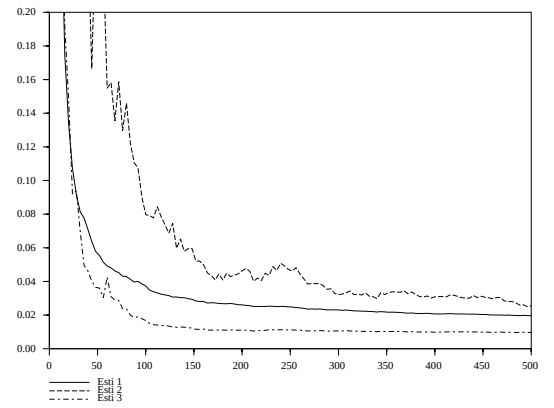


(d) MSE

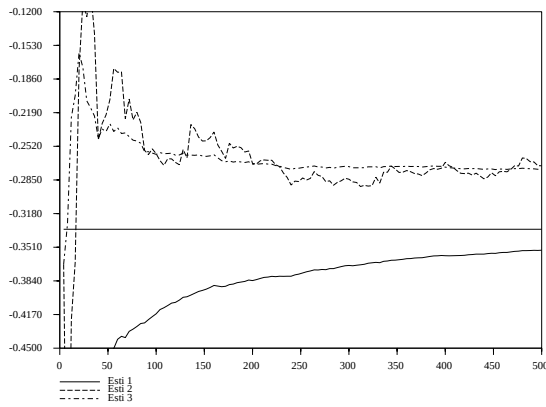
FIG. 3.2 – Comparaison des estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$ (Esti 1), $\hat{\xi}_{2,n}$ (Esti 2) et $\hat{\xi}_{3,n}$ (Esti 3) en prenant la loi de Weibull (figures (a) et (b)) et la loi inverse de Burr (figures (c) et (d)).



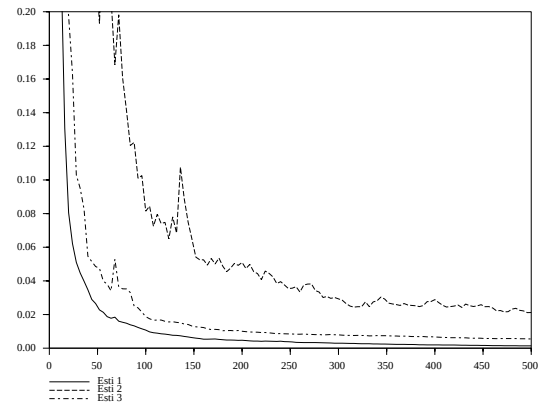
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



(c) Moyenne empirique



(d) MSE

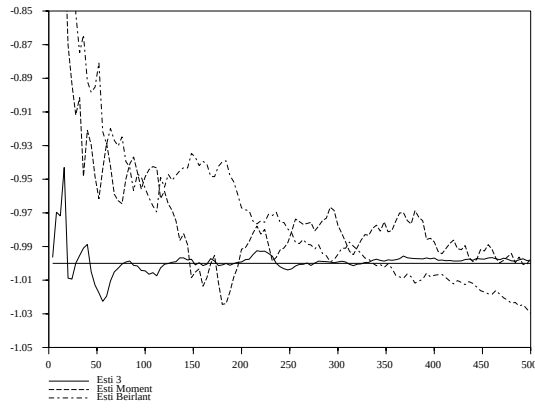
FIG. 3.3 – Comparaison des estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$ (Esti 1), $\hat{\xi}_{2,n}$ (Esti 2) et $\hat{\xi}_{3,n}$ (Esti 3) en prenant la fonction de répartition (3.57) (figures (a) et (b)) et la fonction de répartition (3.58) (figures (c) et (d)).

Ces simulations tendent à montrer que l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ est de meilleure qualité (en terme de biais et de variance). Notons que lorsque $\xi = -1$, les estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$ ont un comportement similaire. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans ce cas, le maximum des observations est un bon estimateur du point terminal. On remarque aussi que l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$ possède toujours un biais négatif (ce qui laisse penser qu'il existe peut-être un biais systématique) et que les estimateurs $\hat{\xi}_{2,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$ ont un biais du même signe.

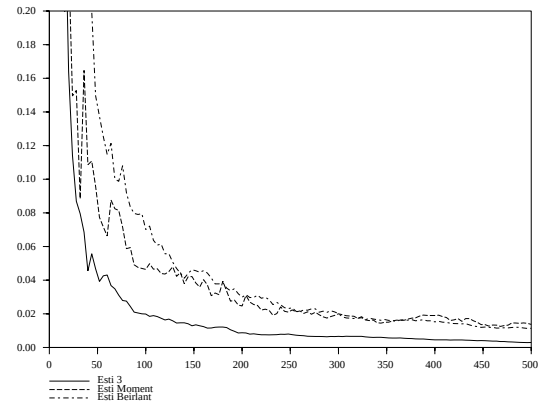
3.7.2 Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ avec l'estimateur des moments et l'estimateur proposé par Beirlant et al.

Nous allons à présent comparer notre estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ à l'estimateur des moments $\hat{\xi}_n^M$ (défini en (3.1)) et à l'estimateur proposé par Beirlant et al. $\hat{\xi}_n^B$ (défini en (3.2)). On choisit la suite (v_n) de telle sorte que $k(v_n) = k$, où k est le nombre de statistiques d'ordre utilisées dans la construction des estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ et $\hat{\xi}_n^B$. La suite (u_n) est choisie de telle sorte que $k(u_n) = k/4$. On calcule ensuite la moyenne empirique et l'erreur moyenne quadratique empirique (MSE) en fonction de k .

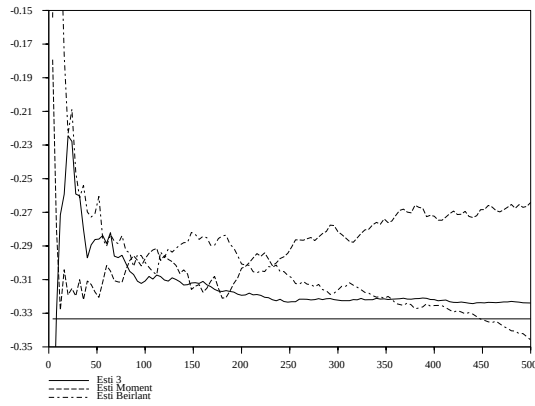
En terme de MSE, l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ est de meilleure qualité que les deux autres estimateurs sauf pour la loi inverse de Burr où l'estimateur proposé par Beirlant et al. est meilleur (ceci s'explique par le fait que la fonction à variations lentes présente dans la loi de Burr perturbe considérablement l'estimation de ξ et que seul l'estimateur proposé par Beirlant et al. prend en compte cette fonction à variations lentes). En terme de biais, notre estimateur est de très bonne qualité lorsque la fonction à variations lentes est constante. Sinon (sauf pour la loi inverse de Burr), les trois estimateurs sont de qualité comparable.



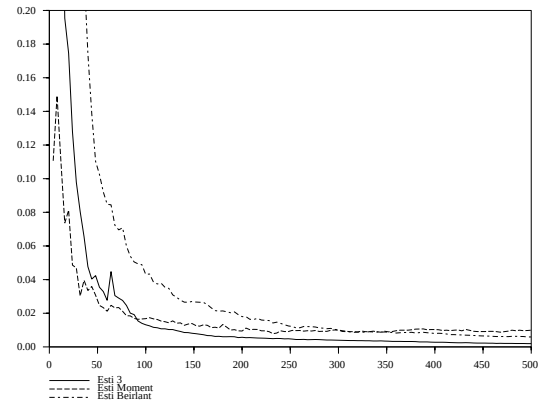
(a) Moyenne empirique



(b) MSE

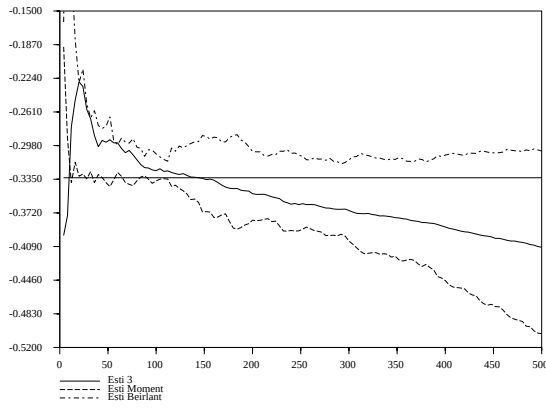


(c) Moyenne empirique

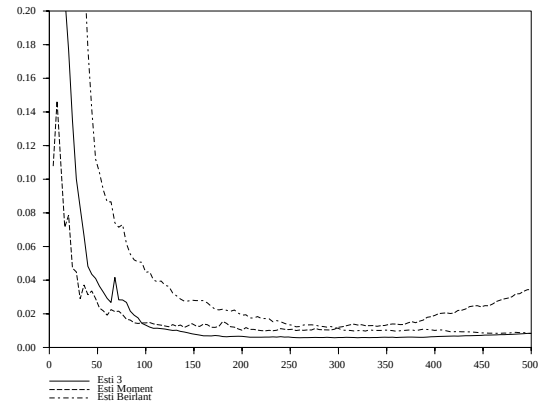


(d) MSE

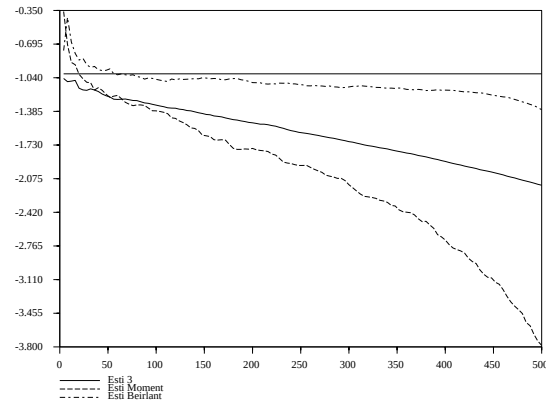
FIG. 3.4 – Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ (Esti 3) avec les estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ (Esti Moment) et $\hat{\xi}_n^B$ (Esti Beirlant) en prenant la loi $\mathcal{U}[0, 1]$ (figures (a) et (b)) et la loi $GPD(1/3 - 1/3)$ (figures (c) et (d)).



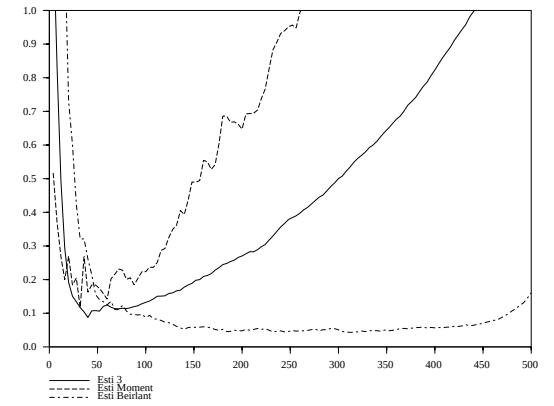
(a) Moyenne empirique



(b) MSE

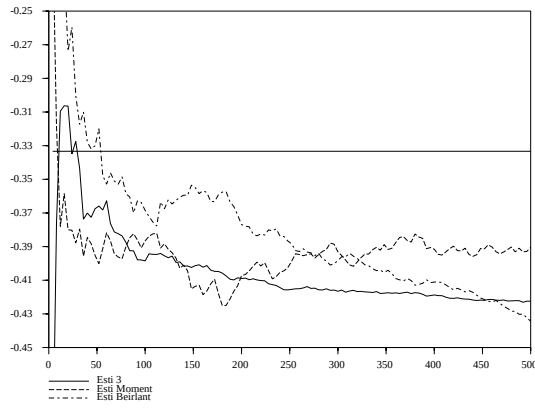


(c) Moyenne empirique

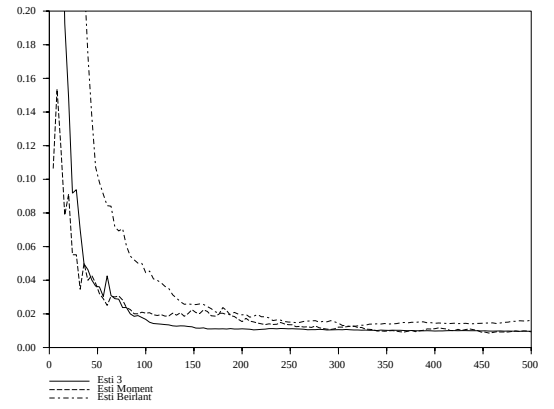


(d) MSE

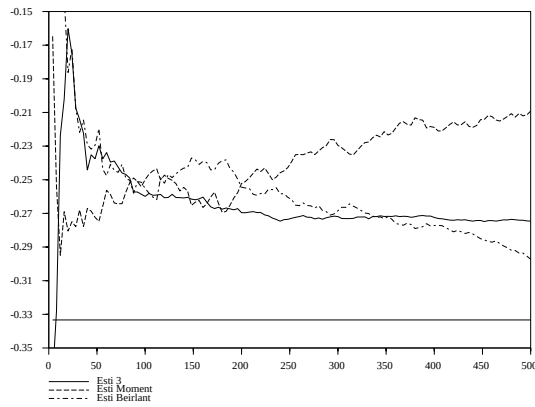
FIG. 3.5 – Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ (Esti 3) avec les estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ (Esti Moment) et $\hat{\xi}_n^B$ (Esti Beirlant) en prenant la loi de Weibull (figures (a) et (b)) et la loi inverse de Burr (figures (c) et (d)).



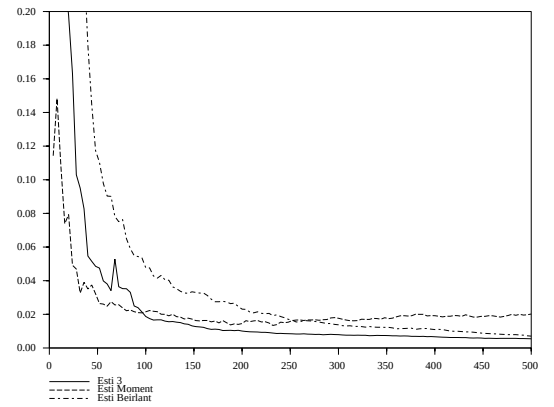
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



(c) Moyenne empirique



(d) MSE

FIG. 3.6 – Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ (Esti 3) avec les estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ (Esti Moment) et $\hat{\xi}_n^B$ (Esti Beirlant) en prenant la fonction de répartition (3.57) (figures (a) et (b)) et la fonction de répartition (3.58) (figures (c) et (d)).

3.8 Estimation de l'indice de valeur extrême dans le domaine d'attraction de Fréchet

Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode permettant de transformer des variables aléatoires dont la fonction de répartition appartient au domaine d'attraction de Fréchet en des variables aléatoires dont la fonction de répartition appartient au domaine d'attraction de Weibull. Ainsi, les estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}$, $\hat{\xi}_{2,n}$ et $\hat{\xi}_{3,n}$ peuvent être utilisés pour estimer l'indice de valeur extrême lorsque la fonction de répartition considérée appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

3.8.1 Transformation des variables aléatoires

Considérons n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ que l'on suppose indépendantes et de même fonction de répartition F . On suppose que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet, c'est à dire que :

$$F(x) = 1 - x^{-1/\xi} \ell(x),$$

où $\xi > 0$ est l'indice de valeur extrême et ℓ est une fonction à variations lentes. Dans la suite, on note $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ les observations ordonnées. Nous allons, pour estimer ξ , transformer les observations $\{X_1, \dots, X_n\}$ pour nous ramener au domaine d'attraction de Weibull. Plus précisément, soit $M > 0$ et m deux réels. On considère les variables aléatoires :

$$Y_i^* = \left(1 - \frac{M}{X_i - m + M}\right) I\{X_i > m\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Remarque 3.6 Pour ne pas alourdir les notations, le caractère $*$ mis en exposant signalera la dépendance en les paramètres M et m .

Les variables aléatoires $Y_1^*, \dots, Y_n^*$ sont indépendantes et de même fonction de répartition G^* définie sur $[0, 1]$. Dans la suite, on note $Y_{1,n}^* \leq \dots \leq Y_{n,n}^*$ les observations ordonnées. Calculons la fonction de répartition G^* . On a

$$\begin{aligned} G^*(x) &= P[Y_1^* \leq x] = P\left[1 - \frac{M}{X_1 - m + M} \leq x; X_1 > m\right] + P[X_1 \leq m] \\ &= P[X_1 \leq M(1 - x)^{-1} + m - M; X_1 > m] + P[X_1 \leq m]. \end{aligned}$$

Comme $M(1 - x)^{-1} + m - M \geq m$ pour $x \in [0, 1]$, on en déduit que :

$$G^*(x) = P[X_1 \leq M(1 - x)^{-1} + m - M] = 1 - (1 - x)^{-1/\xi} \ell^*[(1 - x)^{-1}], \quad (3.59)$$

où ℓ^* est une fonction à variations lentes définie par :

$$\ell^*(x) = [M + x^{-1}(m - M)]^{-1/\xi} \ell[Mx + m - M].$$

Remarque 3.7 Si la fonction à variations lentes ℓ est normalisée (ce qui implique que la fonction de répartition F est dérivable de dérivée f), on montre facilement que la fonction à variations lentes ℓ^* est elle aussi normalisée (ce qui implique que la fonction de répartition G^* est dérivable de dérivée g^*). On a alors :

$$g^*(x) = \frac{M}{(1 - x)^2} f[M(1 - x)^{-1} + m - M].$$

On déduit de (3.59) que pour tout $M > 0$ et m , G^* appartient au domaine d'attraction de Weibull d'indice de valeur extrême $-\xi$.

Nous pouvons à présent, en utilisant les trois estimateurs de l'indice de valeur extrême définis dans le cadre du domaine d'attraction de Weibull, proposer trois estimateurs de l'indice de valeur extrême ξ dans le cadre du domaine d'attraction de Fréchet. Plus précisément, soit (u_n^*) , (v_n^*) , (w_n^*) et (z_n^*) quatre suites distinctes de $]0, 1[$ qui convergent vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Posons

$$\begin{aligned}\tau_{u_n^*} &= I\{Y_{n,n}^* > 0\} \sum_{i=1}^n I\{Y_i^* \geq u_n^* Y_n^*\}, \quad \tau_{v_n^*} = I\{Y_{n,n}^* > 0\} \sum_{i=1}^n I\{Y_i^* \geq v_n^* Y_n^*\}, \\ \tau_{w_n^*} &= I\{Y_{n,n}^* > 0\} \sum_{i=1}^n I\{Y_i^* \geq w_n^* Y_n^*\} \text{ et } \tau_{z_n^*} = I\{Y_{n,n}^* > 0\} \sum_{i=1}^n I\{Y_i^* \geq z_n^* Y_n^*\}.\end{aligned}$$

On propose les trois estimateurs de ξ suivants :

$$\hat{\xi}_{1,n}^* = \frac{\ln[(1 - u_n^*)/(1 - v_n^*)]}{\ln(\tau_{u_n^*}/\tau_{v_n^*})},$$

$\hat{\xi}_{2,n}^*$ défini comme étant la solution de l'équation en θ :

$$\frac{v_n^* - z_n^*}{u_n^* - w_n^*} \left(\frac{\tau_{u_n^*}^\theta - \tau_{w_n^*}^\theta}{\tau_{v_n^*}^\theta - \tau_{z_n^*}^\theta} \right) = 1$$

et $\hat{\xi}_{3,n}^*$ défini comme étant la solution de l'équation en θ :

$$\frac{1 - v_n^*}{1 - u_n^*} \left(\frac{\tau_{u_n^*}^\theta - 1}{\tau_{v_n^*}^\theta - 1} \right) = 1.$$

Le Théorème ci-dessous est une conséquence directe des Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7.

Théorème 3.10 Soit (u_n^*) , (v_n^*) , (w_n^*) et (z_n^*) quatre suites vérifiant l'hypothèse **(C1)** et telles que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite :

Condition 1

$$1 - w_n^* \sim l_{w,z}(1 - z_n^*), \quad 1 - u_n^* \sim l_{u,v}(1 - v_n^*) \text{ et } 1 - z_n^* \sim l_{z,u}(1 - u_n^*),$$

où $l_{w,z}$, $l_{u,v}$ et $l_{z,u}$ sont des constantes appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et vérifiant pour tout $\eta \neq 0$,

$$l_{w,z}^{-\eta} \frac{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{-1}}{1 - (l_{z,u} l_{w,z})^{-1}} \left[\frac{1 - (l_{z,u} l_{w,z})^{\eta-1}}{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{\eta-1}} \right] \neq 1, \quad (3.60)$$

Condition 2

$$w_n^* = z_n^*, \quad 1 - u_n^* \sim l_{u,v}(1 - v_n^*) \text{ et } 1 - z_n^* \sim l_{z,u}(1 - u_n^*),$$

où $l_{u,v}$ et $l_{z,u}$ sont des constantes appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et vérifiant pour tout $\eta \neq 0$,

$$\frac{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{-1}}{1 - l_{z,u}^{-1}} \left[\frac{1 - l_{z,u}^{\eta-1}}{1 - (l_{z,u} l_{u,v})^{\eta-1}} \right] \neq 1. \quad (3.61)$$

Si la fonction à variations lentes ℓ est normalisée et si la fonction g^* vérifie l'une ou l'autre des assertions ci-dessous :

- g^* est bornée sur $]0, 1]$.
- Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\max_{t \in]0, 1]} g^*(u_n^* t) = g^*(u_n^*)$,

alors $\hat{\xi}_{1,n}^* \xrightarrow{P} \xi$, $\hat{\xi}_{2,n}^* \xrightarrow{P} \xi$ et $\hat{\xi}_{3,n}^* \xrightarrow{P} \xi$.

3.8.2 Choix et estimation des paramètres M et m

Le choix des paramètres M et m est important car il influence de manière importante la qualité des estimateurs $\hat{\xi}_{1,n}^*$, $\hat{\xi}_{2,n}^*$ et $\hat{\xi}_{3,n}^*$ (voir Figure 3.7). Nous proposons ci-dessous une méthode permettant de choisir, en fonction des observations dont on dispose, ces paramètres. On choisit pour commencer le paramètre m . Ce paramètre joue ici le rôle d'un seuil. On utilise uniquement les observations parmi $\{X_1, \dots, X_n\}$ qui sont supérieures à m . Comme l'information sur l'indice des valeurs extrêmes est contenue dans la queue de distribution de F , on choisit un seuil m "assez" grand. Plus précisément, on choisit un entier positif k strictement inférieur à n et comme valeur de m , on prend le quantile d'ordre k/n de F . La fonction de répartition F étant inconnue, m l'est aussi. On l'estime par $\hat{m}_n = X_{n-k+1,n}$.

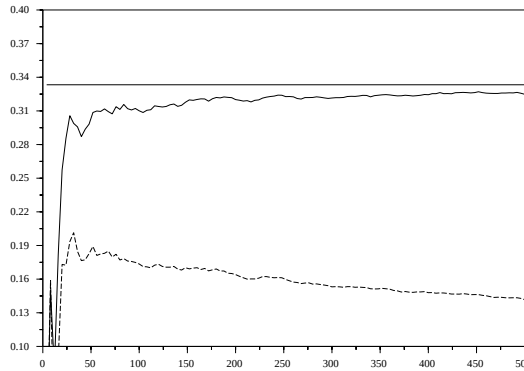


FIG. 3.7 – Illustration de l'importance du choix des paramètres m et M . On simule $N = 100$ échantillons de taille $n = 1000$ et de fonction de répartition $F(x) = 1 - x^{-1/\xi}$ ($\xi = 1/3$) et on calcule la moyenne empirique de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}^*$ avec $m = 1$ et $M = 1$ (trait plein) et $m = 1$ et $M = 2$ (en pointillé), la droite horizontale étant la vraie valeur de ξ .

Le paramètre m étant choisi, on s'intéresse au paramètre M . On le choisit de telle sorte que la fonction à variations lentes ℓ^* soit la plus proche possible d'une constante strictement positive. Pour estimer un tel paramètre, on remarque que si $\ell^*[(1-x)^{-1}] = c > 0$ pour x "suffisamment" proche de 1, alors, d'après (3.59),

$$\ln(1-x) = \xi \ln[\bar{G}^*(x)] + \ln(c^{-\xi}),$$

pour x "suffisamment" proche de 1. En remplaçant la fonction de répartition G^* par son estimateur

empirique, on en déduit que les points $\{\ln(j/n), \ln(1 - Y_{n-j+1,n}^*)\}$, $j = 1, \dots, [k/2]$ et les points $\{\ln(j/n), \ln(1 - Y_{n-j+1,n}^*)\}$, $j = [k/2] + 1, \dots, k$ sont approximativement situés sur une droite de pente ξ et d'ordonnée à l'origine $\ln(c^{-\xi})$ ($[a]$ représente la partie entière de a). Cette linéarisation des observations est utilisée par Beirlant et al. [4, 5, 6, 7] pour estimer l'indice de valeur extrême et peut-être aussi utilisée pour justifier l'estimateur de Hill [56]. En utilisant la méthode des moindres carrés, on dispose alors de deux estimateurs de $c^{-\xi}$ qui dépendent de M et définis par :

$$\hat{C}_{1,n}(M) = \exp \left[((Z_1^t Z_1)^{-1} Z_1^t W_1^*)_{1,1} \right] \text{ et } \hat{C}_{2,n}(M) = \exp \left[((Z_2^t Z_2)^{-1} Z_2^t W_2^*)_{1,1} \right],$$

avec

$$\begin{aligned} W_1^* &= (\ln(1 - Y_{n-j+1,n}^*), j = 1, \dots, [k/2])^t, & W_2^* &= (\ln(1 - Y_{n-j+1,n}^*), j = [k/2] + 1, \dots, k)^t, \\ (Z_1)_{.,1} &= (1, j = 1, \dots, [k/2])^t, & (Z_2)_{.,1} &= (1, j = [k/2] + 1, \dots, k)^t, \\ (Z_1)_{.,2} &= (\ln(j/n), j = 1, \dots, [k/2])^t, & (Z_2)_{.,2} &= (\ln(j/n), j = [k/2] + 1, \dots, k)^t, \end{aligned}$$

où A^t désigne la transposée de la matrice A , $A_{i,j}$ désigne l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne et $A_{.,j}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne. Ces deux estimateurs estimant la même valeur si ℓ^* est constante, on pose

$$M_{opt} = \inf \left\{ M > 0 \text{ tel que } \left| \frac{\hat{C}_{1,n}(M)}{\hat{C}_{2,n}(M)} - 1 \right| = \inf_{x>0} \left| \frac{\hat{C}_{1,n}(x)}{\hat{C}_{2,n}(x)} - 1 \right| \right\},$$

et on estime le paramètre M par

$$\hat{M}_n = \begin{cases} M_{opt} & \text{si } 0 < M_{opt} < +\infty, \\ \hat{m}_n = X_{n-k+1,n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 3.8 La fonction à variations lentes ℓ^* est le produit de deux fonctions à variations lentes : $\ell^*(x) = \ell_1^*(x) \times \ell_2^*(x)$, avec

$$\ell_1^*(x) = [M + x^{-1}(m - M)]^{-1/\xi} \text{ et } \ell_2^*(x) = \ell[Mx + m - M].$$

Si on prend $M = m$, alors la fonction à variations lentes ℓ_1^* est constante. Cette remarque justifie le fait que l'on prenne $\hat{M}_n = \hat{m}_n$ si $M_{opt} = 0$ ou $M_{opt} = +\infty$.

3.8.3 Simulations

Nous comparons l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}^*$ à l'estimateur des moments $\hat{\xi}_n^M$ et à l'estimateur proposé par Beirlant et al. $\hat{\xi}_n^B$. Pour ce faire, on reprend la même démarche que dans le paragraphe 3.7. On calcule les moyennes empiriques et les erreurs moyennes quadratiques empiriques (MSE) des estimateurs en fonction de k où k est le nombre de statistiques d'ordre utilisées dans la construction des estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ et $\hat{\xi}_n^B$. Notons $k(v_n^*)$ (resp. $k(u_n^*)$) la moyenne des variables $\tau_{v_n^*}$ (resp. $\tau_{u_n^*}$). On choisit les suites (u_n^*) et (v_n^*) de telle sorte que $k(v_n^*) = k$ et $k(u_n^*) = k/4$ et on prend $\hat{m}_n = X_{n-k+1,n}$. Ici encore, sur les graphiques représentant la moyenne empirique des estimateurs, la droite horizontale modélise la vraie valeur de l'indice de valeur extrême. Les fonctions de répartition considérées sont les suivantes :

- **Cas où $\ell(x) = c > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$**

Loi de Pareto d'indice de valeur extrême $\xi = 1/3$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-1/\xi} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- **Cas où $\ell(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

Loi de Burr de paramètres ($\beta = 1$, $\tau = 1/2$, $\lambda = 2$ et $x_F = 10$) dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x^\tau}\right)^\lambda & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Rappelons que l'indice de valeur extrême est $\xi = 1/(\lambda\tau) = 1$.

- **Cas où $\ell(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-1/\xi\ell(x)} & \text{si } x \geq 1, \end{cases} \quad (3.62)$$

avec comme indice de valeur extrême $\xi = 1/3$ et

$$\ell(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)}.$$

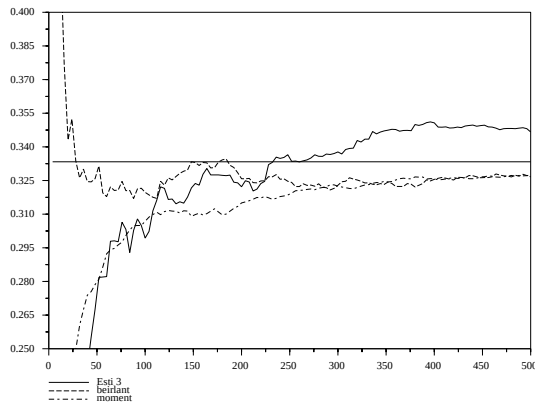
- **Cas où $\ell(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - x^{-1/\xi\ell(x)} & \text{si } x \geq 1, \end{cases} \quad (3.63)$$

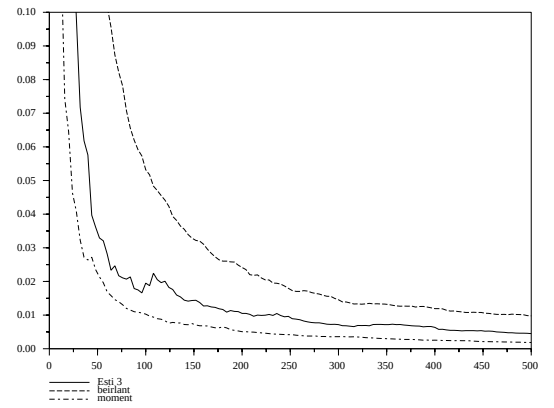
avec comme indice de valeur extrême $\xi = 1/3$ et

$$\ell(x) = \ln \left[1 + \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{\ln(2)} \right] \right\}^{-1}.$$

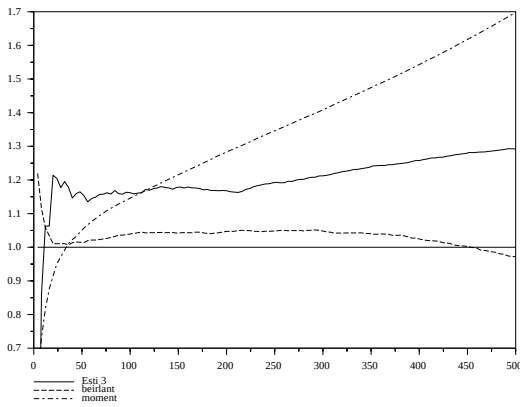
L'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}^*$ est en terme d'erreur moyenne quadratique (MSE) meilleur que l'estimateur proposé par Beirlant et *al.* sauf pour la loi de Burr mais il est généralement plus biaisé. L'estimateur des moments est le meilleur en terme d'erreur moyenne quadratique.



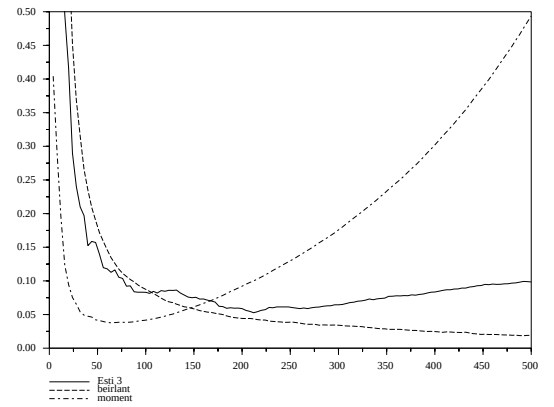
(a) Moyenne empirique



(b) MSE

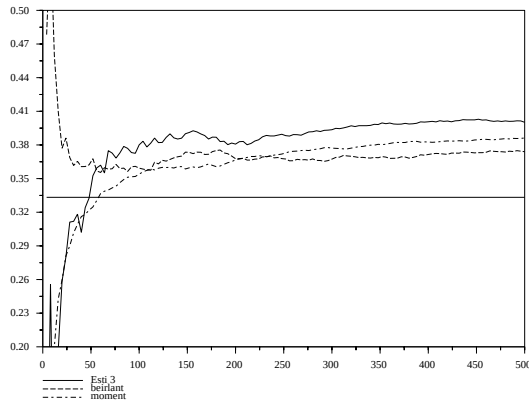


(c) Moyenne empirique

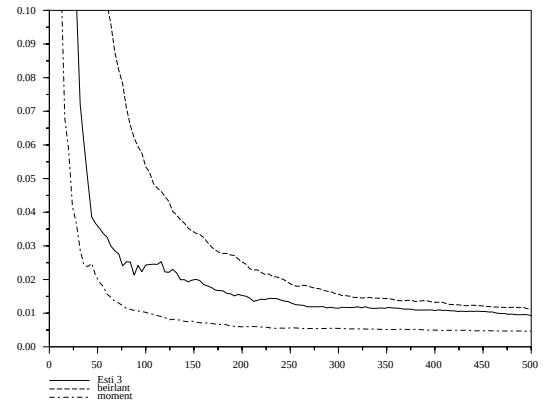


(d) MSE

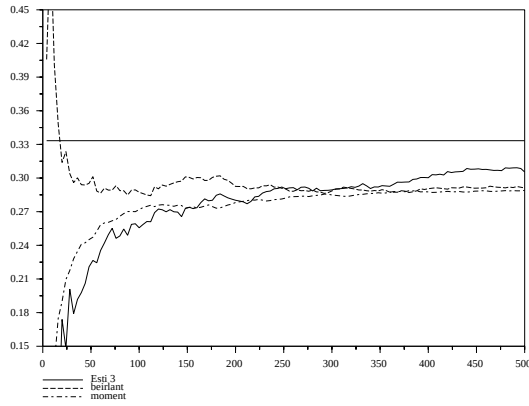
FIG. 3.8 – Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}^*$ (Esti 3) avec les estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ (moment) et $\hat{\xi}_n^B$ (beirlant) en prenant la loi de Pareto (figures (a) et (b)) et la loi de Burr (figures (c) et (d)).



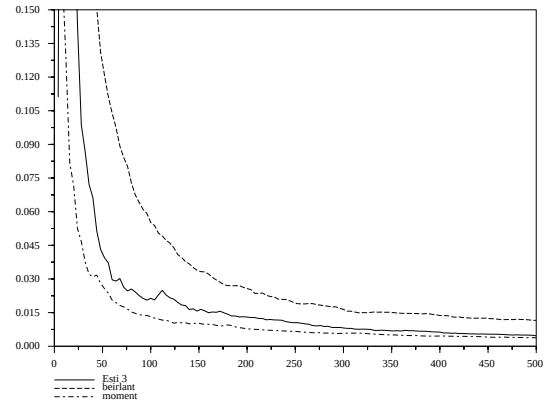
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



(c) Moyenne empirique



(d) MSE

FIG. 3.9 – Comparaison de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}^*$ (Esti 3) avec les estimateurs $\hat{\xi}_n^M$ (moment) et $\hat{\xi}_n^B$ (beirlant) en prenant la fonction de répartition (3.62) (figures (a) et (b)) et la fonction de répartition (3.63) (figures (c) et (d)).

Chapitre 4

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

4.1 Introduction

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans une première partie, on propose un nouvel estimateur de quantile extrême pour des fonctions de répartition appartenant au domaine d'attraction de Weibull. Cet estimateur est ensuite utilisé dans une seconde partie pour estimer une fonction quantile extrême. Concernant la première partie, le problème est le suivant : soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F appartenant au domaine d'attraction de Weibull. On pose $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ l'échantillon ordonné. On veut estimer le quantile d'ordre $p_n < 1/n$ de F c'est à dire le nombre x_{p_n} défini par $1 - F(x_{p_n}) = p_n$. Un tel quantile est dit **extrême**. Comme il est situé au dessus de l'observation maximale avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, on ne peut pas, comme pour l'estimation de quantiles "classiques", inverser tout simplement la fonction de répartition empirique. Il faut donc, à l'aide des plus grandes observations, estimer la fonction de répartition au-delà de l'observation maximale. Pour ce faire, on recense dans la littérature essentiellement trois méthodes. La première méthode utilise un résultat donnant l'expression de la loi asymptotique du maximum d'un échantillon (voir Théorème 2.2). Cette loi limite est appelée *Loi des valeurs extrêmes (EVD)*. Pour construire l'estimateur du quantile extrême, on divise l'échantillon en plusieurs sous-échantillons dont on extrait les maxima. On estime alors le quantile extrême en inversant la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes et en estimant les paramètres de cette loi à l'aide de l'échantillon des maxima. Cette méthode a été utilisée pour la première fois à notre connaissance dans l'article de Guida et Longo [49]. L'estimateur de quantile extrême obtenu par cette méthode s'écrit sous la forme :

$$\hat{x}_{p_n}^{EVD} = \hat{\mu}_n - \frac{\hat{\psi}_n}{\hat{\xi}_n} \{1 - [-\ln(1 - p_n)]^{-\hat{\xi}_n}\},$$

où $\hat{\mu}_n$, $\hat{\psi}_n$ et $\hat{\xi}_n$ sont des estimateurs des paramètres de la loi des valeurs extrêmes. La deuxième méthode, appelée *méthode P.O.T*, est basée sur un résultat de Balkema et de Haan [2] et de Pickands [71] (voir Théorème 2.6) assurant que la loi des observations qui dépassent un seuil u_n peut-être approchée, pour u_n "suffisamment" grand, par une loi de Pareto généralisée (*GPD*). Le quantile extrême est alors estimé en inversant la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée et en estimant les paramètres de cette loi

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

à l'aide des observations supérieures au seuil u_n . Cette démarche est utilisée par Hosking et Wallis [57], Davison et Smith [21] et Hughey [58]. L'estimateur obtenu par cette méthode s'écrit sous la forme :

$$\hat{x}_{p_n}^{GPD} = u_n + \frac{\hat{\theta}_n}{\hat{\xi}_n} \left[\left(\frac{np_n}{k} \right)^{-\hat{\xi}_n} - 1 \right], \quad (4.1)$$

où $k \equiv k_n$ est le nombre de points au-dessus du seuil u_n et $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\xi}_n$ sont des estimateurs des paramètres de la loi de Pareto Généralisée. Breiman, Stone et Kooperberg [11] proposent deux variantes de cette méthode qui sont les méthodes *E.T.* (*Exponential Tail*) et *Q.T.* (*Quadratic Tail*) dans le cas où la loi de Pareto généralisée se réduit à une loi exponentielle. La troisième et dernière méthode est une approche semi-paramétrique, la “partie paramétrique” étant l'estimation du paramètre de forme de la loi des valeurs extrêmes appelée *indice de valeur extrême*. Cette méthode est utilisée par Dekkers et de Haan [24] qui proposent d'estimer x_{p_n} par :

$$\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n) = \frac{[m/(np_n)]^{\hat{\xi}_n} - 1}{1 - 2^{-\hat{\xi}_n}} (X_{n-m+1,n} - X_{n-2m+1,n}) + X_{n-m+1,n}, \quad (4.2)$$

où $\hat{\xi}_n$ est un estimateur de ξ et $m \equiv m_n$ est un entier positif strictement inférieur à $2n$. Dans le cas où la fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de Weibull, Dekkers et de Haan proposent d'estimer le point terminal en remplaçant dans l'expression (4.2) p_n par 0. Ils obtiennent ainsi un estimateur du point terminal défini par :

$$\hat{x}_{F,n}^{DH}(\hat{\xi}_n) = \frac{1}{2^{-\hat{\xi}_n} - 1} (X_{n-m+1,n} - X_{n-2m+1,n}) + X_{n-m+1,n}, \quad (4.3)$$

Dans le même esprit, Dekkers, Einmahl et de Haan [25] introduisent aussi un estimateur de x_{p_n} construit en utilisant des sommes de statistiques d'ordre. Cette méthode est aussi utilisée par Weissman [79] et Davis et Resnick [20] dans le cas particulier où la fonction de répartition appartient au domaine d'attraction de Fréchet ou de Gumbel.

L'estimateur du quantile extrême que l'on propose s'inscrit dans le cadre de la méthode semi-paramétrique (bien que dans le paragraphe 4.2.2, on fasse un rapprochement avec la méthode des excès). Il n'est valide que dans le domaine d'attraction de Weibull. A l'inverse de la majorité des estimateurs de quantiles extrêmes qui utilisent pour leur construction l'information apportée par l'ensemble des k plus grandes observations, où k est un entier inférieur à la taille de l'échantillon, notre estimateur, comme nos estimateurs de l'indice de valeur extrême, utilise uniquement l'information apportée par les nombres de points qui dépassent des seuils aléatoires.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous utilisons cet estimateur du quantile extrême pour estimer une fonction quantile extrême. Plus précisément, soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont le support de la loi est donné par :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\},$$

où g est une fonction positive inconnue appelée *fonction frontière*. On considère n couples de variables aléatoires $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ que l'on suppose indépendants et de même loi que le couple (X, Y) . On désire estimer, pour un réel x_0 quelconque, le nombre $g_{p_n}(x_0)$ défini par :

$$P[Y \leq g_{p_n}(x_0) | X = x_0] = 1 - p_n, \quad p_n < 1/n.$$

La fonction g_{p_n} est appelée fonction quantile extrême d'ordre p_n . Pour estimer cette fonction au point x_0 , on considère les variables aléatoires Y_i pour lesquelles la variable aléatoire X_i correspondante est “suffisamment proche” de x_0 . On estime ensuite $g_{p_n}(x_0)$ en calculant l'estimateur du quantile extrême proposé

dans la première partie avec ces observations Y_i . Cette méthode d'estimation est similaire à celle utilisée par Gijbels et Peng [41] pour estimer la fonction g à la différence que les auteurs utilisent comme estimateur du point terminal l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan ou l'estimateur "naïf" $X_{n,n}$. L'application principale de cet estimateur est l'estimation de la fonction g (ou de manière équivalente du support S) c'est à dire de l'estimation de la fonction quantile extrême d'ordre 0. La question de l'estimation du support a déjà été traitée dans le chapitre 1 dans le cas où les observations sont uniformément distribuées sur le support. Dans ce chapitre, on ne suppose plus cette répartition uniforme ce qui introduit une difficulté supplémentaire puisque on peut n'avoir que très peu de points aux abords de la frontière du support.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans le premier paragraphe, on définit l'estimateur du quantile extrême. Cet estimateur est fonction d'un estimateur faiblement consistant de ξ . On démontre qu'il est faiblement consistant et, dans le cas où ξ est connu, on donne un minorant de sa vitesse de convergence. On montre aussi que si on estime ξ par l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$, alors l'estimateur du quantile extrême est strictement supérieur à $X_{n,n}$ avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Cela est en accord avec le fait que le quantile extrême d'ordre $p_n < 1/n$ est situé au-delà de l'observation maximale. On compare, à l'aide de simulations, notre estimateur à l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan. Dans le second paragraphe, on propose un estimateur de la fonction quantile extrême en un point x_0 . On démontre que cet estimateur est faiblement consistant et on étudie son comportement sur quelques simulations.

4.2 Un estimateur de quantile extrême à double seuil

On reprend dans ce paragraphe les hypothèses et notations du chapitre 3. Le Théorème 3.1 est donc toujours applicable.

4.2.1 Définition de l'estimateur

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition F . Notons $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ l'échantillon ordonné. Comme dans le chapitre 3, on suppose que F appartient au domaine d'attraction de Weibull c'est à dire que

$$F(x) = 1 - (x_F - x)^{-1/\xi} \ell[(x_F - x)^{-1}], \quad x \leq x_F, \quad (4.4)$$

où le point terminal $x_F = \sup\{x | F(x) < 1\}$ est fini, l'indice de valeur extrême ξ est strictement négatif et ℓ est une fonction à variations lentes. On se propose d'estimer le quantile d'ordre $p_n < 1/n$ de F . Pour ce faire, on utilise l'approximation (3.14) énoncée dans le chapitre 3. Rappelons que cette approximation est donnée par :

$$\frac{[1 - F(a)]^{-\xi} - [1 - F(b)]^{-\xi}}{[1 - F(c)]^{-\xi} - [1 - F(b)]^{-\xi}} \approx \frac{a - b}{c - b}, \quad (4.5)$$

où a , b et c sont des nombres "suffisamment" proche de x_F . En remplaçant dans (4.5) b par le quantile extrême x_{p_n} que l'on cherche à estimer, on a :

$$\frac{[1 - F(a)]^{-\xi} - p_n^{-\xi}}{[1 - F(c)]^{-\xi} - p_n^{-\xi}} \approx \frac{a - x_{p_n}}{c - x_{p_n}}.$$

La fonction de répartition F étant inconnue, on la remplace par

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i < x\}.$$

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

De même, on remplace ξ par un estimateur $\hat{\xi}_n$ convergeant en probabilité. En posant $a = u_n X_{n,n}$ et $c = v_n X_{n,n}$, on en déduit que pour n assez grand, on a approximativement :

$$\frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} \approx \frac{x_{p_n} - u_n X_{n,n}}{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}. \quad (4.6)$$

En résolvant l'équation en x_{p_n} ainsi obtenue, on propose d'estimer x_{p_n} par :

$$\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) = X_{n,n} \frac{v_n [\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}] - u_n [\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}]}{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n}}. \quad (4.7)$$

L'approximation (4.6) peut-être justifiée de manière plus formelle par le résultat suivant :

Lemme 4.1 Soit $\hat{\xi}_n$ un estimateur faiblement consistant de ξ et soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant l'hypothèse **(C1)** et telles que $1 - u_n \sim c_2(1 - v_n)$ où $c_2 \in]0, 1[$. Sous les hypothèses **(A1)**, **(B1)** et s'il existe $\delta > 0$ tel que $n^{-\delta} < np_n < 1$ alors

$$\left[\frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} \right] \frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \xrightarrow{P} 1, \quad (4.8)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour plus de lisibilité, la démonstration de ce résultat est reportée en annexe (voir Annexe D).

4.2.2 Remarques et commentaires

Estimation du point terminal

Le point terminal x_F est un cas particulier de quantile extrême puisque c'est le quantile extrême d'ordre $p_n = 0$. Pour estimer x_F , on remplace donc dans l'expression de $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ donnée en (4.7), p_n par zéro. On obtient alors un estimateur du point terminal défini par :

$$\hat{x}_{F,n}(\hat{\xi}_n) = X_{n,n} \frac{v_n \tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - u_n \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n}}.$$

On démontre plus loin que cet estimateur converge en probabilité vers x_F .

Une réécriture de l'estimateur $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$

On peut réécrire notre estimateur du quantile extrême sous la forme

$$\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) = u_n X_{n,n} + \frac{\hat{\theta}'_n}{\hat{\xi}_n} \left[\left(\frac{np_n}{\tau_{u_n}} \right)^{-\hat{\xi}_n} - 1 \right],$$

où $\hat{\theta}'_n = (u_n - v_n) X_{n,n} \hat{\xi}_n \tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} / [\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n}]$. Cette forme est similaire à celle de l'estimateur du quantile extrême d'ordre p_n construit en approchant la loi des observations qui dépassent un seuil déterministe par une loi de Pareto généralisée et dont la définition est rappelée en (4.1).

Relation avec l'estimateur du quantile extrême proposé par Dekkers et de Haan

L'estimateur proposé par Dekkers et de Haan peut-être justifié de la même manière que notre estimateur. En effet, soit m un entier positif inférieur à $n/2$. Si dans l'approximation (4.5), on remplace a par $X_{n-2m+1,n}$, b par $X_{n-m+1,n}$, c par x_{p_n} et ξ par un estimateur faiblement consistant $\hat{\xi}_n$, on a, pour n "suffisamment" grand, l'approximation :

$$\frac{m^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{(2m)^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} \approx \frac{x_{p_n} - X_{n-m+1,n}}{x_{p_n} - X_{n-2m+1,n}}. \quad (4.9)$$

En résolvant l'équation (4.9) en x_{p_n} , on obtient l'estimateur de x_{p_n} proposé par Dekkers et de Haan [24] dont la définition est rappelée en (4.2). Il est à noter que dans leur article, Dekkers et de Haan justifient de manière différente leur estimateur qui est en outre valable quel que soit le domaine d'attraction auquel appartient la fonction de répartition F .

4.2.3 Résultats principaux

Convergence en probabilité

Dans ce paragraphe, on donne un résultat assurant que pour toute suite $p_n < 1/n$ et pour tout estimateur de l'indice de valeur extrême ξ faiblement consistant, $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_{p_n}$ converge en probabilité vers zéro.

Théorème 4.1 Soit $\hat{\xi}_n$ un estimateur faiblement consistant de ξ et soit $p_n < 1/n$. Sous les hypothèses **(A1)** et **(B1)** et si (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que $1 - u_n \sim c_2(1 - v_n)$ alors, $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_{p_n} \xrightarrow{P} 0$.

Démonstration – Remarquons tout d'abord que si $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) \xrightarrow{P} x_F$ alors $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_{p_n} \xrightarrow{P} 0$. En effet, on a $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_{p_n} = [\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F] + (x_F - x_{p_n})$ et $x_{p_n} \rightarrow x_F$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Montrons donc que $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) \xrightarrow{P} x_F$. Soit $0 < \eta < -\xi$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P[|\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F| > \varepsilon] = P[|\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F| > \varepsilon, |\hat{\xi}_n - \xi| > \eta] + P[|\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F| > \varepsilon, |\hat{\xi}_n - \xi| \leq \eta].$$

Comme $\hat{\xi}_n \xrightarrow{P} \xi$, $P[|\hat{\xi}_n - \xi| > \eta] \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, le premier terme de la somme converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Intéressons nous au deuxième terme de la somme. Posons $A_n = \{np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}\}$. On a :

$$\begin{aligned} & P[|\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F| > \varepsilon, |\hat{\xi}_n - \xi| \leq \eta] \\ = & \underbrace{P[|\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F| > \varepsilon, |\hat{\xi}_n - \xi| \leq \eta, A_n]}_{(T1)} + \underbrace{P[|\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) - x_F| > \varepsilon, |\hat{\xi}_n - \xi| \leq \eta, A_n^C]}_{(T2)}, \end{aligned}$$

où E^C désigne le complémentaire de l'ensemble E . Puisque $P[np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (voir le Lemme D.3 i), Annexe D), on a que $(T2) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, comme $u_n > v_n$ pour n assez grand, on sait, d'après le Théorème B.2 (voir Annexe B), que si $np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$ et $|\hat{\xi}_n - \xi| \leq \eta$, alors :

$$\hat{x}_{p_n}(\xi - \eta) \leq \hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n) \leq \hat{x}_{p_n}(\xi + \eta).$$

On en déduit que

$$(T1) \leq P[\hat{x}_{p_n}(\xi + \eta) - x_F \geq \varepsilon] + P[\hat{x}_{p_n}(\xi - \eta) - x_F \leq -\varepsilon].$$

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

Pour conclure la démonstration, il suffit de démontrer que pour tout $\theta < 0$, $\hat{x}_{p_n}(\theta) \xrightarrow{P} x_F$. Or, on a la décomposition

$$\hat{x}_{p_n}(\theta) = \underbrace{X_{n,n} \frac{v_n \tau_{u_n}^{-\theta} - u_n \tau_{v_n}^{-\theta}}{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{v_n}^{-\theta}}}_{(T3)} + \underbrace{X_{n,n} \frac{(u_n - v_n)(np_n)^{-\theta}}{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{v_n}^{-\theta}}}_{(T4)}.$$

Intéressons nous tout d'abord au terme (T3). On a :

$$\frac{v_n \tau_{u_n}^{-\theta} - u_n \tau_{v_n}^{-\theta}}{\tau_{u_n}^{-\theta} - \tau_{v_n}^{-\theta}} = \frac{v_n - u_n (\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\theta}}{1 - (\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\theta}}.$$

Or, d'après le Théorème 3.1 et puisque $1 - u_n \sim c_2(1 - v_n)$, on a pour tout $\theta < 0$,

$$\left(\frac{\tau_{v_n}}{\tau_{u_n}}\right)^{-\theta} = \left[\frac{\tau_{v_n}}{E(\tau_{v_n})} \frac{E(\tau_{u_n})}{\tau_{u_n}} \frac{E(\tau_{v_n})}{E(\tau_{u_n})}\right]^{-\theta} \xrightarrow{P} c_2^{-\theta/\xi} < 1. \quad (4.10)$$

Ainsi, en remarquant que $X_{n,n} \xrightarrow{P} x_F$, on en déduit que le terme (T3) converge en probabilité vers x_F pour tout $\theta < 0$. De plus, d'après le Théorème 3.1 et puisque $np_n < 1$, on a pour tout $\theta < 0$:

$$\frac{np_n}{\tau_{v_n}} < \frac{1}{\tau_{v_n}} = \frac{E(\tau_{v_n})}{\tau_{v_n}} \frac{1}{E(\tau_{v_n})} \xrightarrow{P} 0. \quad (4.11)$$

On déduit de (4.10) et (4.11) que :

$$(T4) = X_{n,n}(u_n - v_n) \left[1 - \left(\frac{\tau_{v_n}}{\tau_{u_n}}\right)^{-\theta}\right]^{-1} \left(\frac{np_n}{\tau_{v_n}}\right)^{-\theta} \xrightarrow{P} 0,$$

ce qui conclut la démonstration du Théorème. ■

Vitesse de convergence de l'estimateur du quantile extrême

Dans la démonstration du Théorème 4.1, on démontre en fait que pour tout $\theta < 0$, $\hat{x}_{p_n}(\theta) \xrightarrow{P} x_F$, ce qui est équivalent à $\hat{x}_{p_n}(\theta) - x_{p_n} \xrightarrow{P} 0$. Est-il utile alors d'estimer l'indice de valeur extrême ξ pour estimer le quantile extrême x_{p_n} ? Le résultat ci-dessous est un argument pour répondre à cette question par l'affirmative.

Théorème 4.2 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B1)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que $1 - u_n \sim c_2(1 - v_n)$ et s'il existe $\delta > 0$ tel que $n^{-\delta} < np_n < 1$ alors, pour tout $\theta < 0$, $\theta \neq \xi$, on a :

$$\frac{\hat{x}_{p_n}(\xi) - x_{p_n}}{\hat{x}_{p_n}(\theta) - x_{p_n}} \xrightarrow{P} 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration – Etudions pour commencer la quantité $\hat{x}_{p_n}(\xi) - x_{p_n}$. Pour ce faire, on utilise la décomposition suivante :

$$\hat{x}_{p_n}(\xi) - x_{p_n} = \underbrace{(X_{n,n} - x_F)}_{(T1)} + \underbrace{(x_F - x_{p_n})}_{(T2)} + \underbrace{(\hat{x}_{p_n}(\xi) - X_{n,n})}_{(T3)}.$$

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

Traitons pour commencer le terme $(T1)$. Posons $a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$, $F^{\leftarrow}$ désignant l'inverse généralisée de F . La fonction de répartition F appartenant au domaine d'attraction de Weibull, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{X_{n,n} - x_F}{a_n} \leq x \right] = \exp[-(-x)^{-1/\xi}].$$

En utilisant le résultat démontré dans le Lemme 3.2 (3.11) assurant que $a_n \sim n^\xi L(n)$, où L est une fonction à variations lentes, on en déduit que :

$$X_{n,n} - x_F = \mathcal{O}_P[n^\xi L(n)].$$

De plus, (u_n) vérifiant l'hypothèse **(C1)**, on a $n^\xi(1 - u_n)^{-1} = o(n^{\xi+\theta_{1,\xi}})$. Comme $\xi + \theta_{1,\xi} < 0$, on en déduit que :

$$X_{n,n} - x_F = o_P(1 - u_n). \quad (4.12)$$

Traitons à présent le terme $(T2)$. D'après le Lemme D.1 ii) (voir Annexe D), on a $x_F - x_{p_n} \sim p_n^{-\xi} L(p_n^{-1})$ où L est une fonction à variations lentes. De plus, (u_n) vérifiant l'hypothèse **(C1)** et puisque $np_n < 1$, on a :

$$p_n^{-\xi}(1 - u_n)^{-1} < p_n^{-\xi} n^{\theta_{1,\xi}} < p_n^{-[\xi+\theta_{1,\xi}]}$$

Le Lemme 2.3 i) et le fait que $\xi + \theta_{1,\xi} < 0$ impliquent alors :

$$x_F - x_{p_n} = o(1 - u_n). \quad (4.13)$$

Traitons enfin le terme $(T3)$. On a :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{p_n}(\xi) - X_{n,n} &= X_{n,n} \left[\frac{v_n \tau_{u_n}^{-\xi} - u_n \tau_{v_n}^{-\xi}}{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{v_n}^{-\xi}} - 1 \right] + X_{n,n} \frac{(u_n - v_n)(np_n)^{-\xi}}{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{v_n}^{-\xi}} \\ &= \underbrace{X_{n,n} \frac{(1 - u_n)(\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\xi} - (1 - v_n)}{1 - (\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\xi}}}_{(T3')} + \underbrace{X_{n,n} \frac{(u_n - v_n)(np_n)^{-\xi}}{\tau_{u_n}^{-\xi} - \tau_{v_n}^{-\xi}}}_{(T3'')}. \end{aligned}$$

Intéressons nous au terme $(T3')$. Comme $X_{n,n} \xrightarrow{P} x_F$ et $\tau_{v_n}/\tau_{u_n} \xrightarrow{P} c_2^{1/\xi}$ on a pour tout $\theta < 0$, $\theta \neq 0$:

$$\frac{(T3')}{1 - u_n} = X_{n,n} \frac{(\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\xi} - (1 - v_n)/(1 - u_n)}{1 - (\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\xi}} \xrightarrow{P} x_F \frac{c_2^{-1} - c_2^{-1}}{1 - c_2^{-1}} = 0. \quad (4.14)$$

Intéressons nous maintenant au terme $(T3'')$. On a :

$$-\frac{(T3'')}{1 - u_n} = \left[\frac{np_n}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-\xi} X_{n,n} \frac{(v_n - u_n)/(1 - u_n)[E(\tau_{u_n})/\tau_{u_n}]^{-\xi}}{1 - (\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\xi}}.$$

Or, par hypothèse, $(v_n - u_n)/(1 - u_n) \rightarrow 1 - c_2^{-1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Le Théorème 3.1 et le fait que $\tau_{v_n}/\tau_{u_n} \xrightarrow{P} c_2^{1/\xi}$ impliquent que :

$$X_{n,n} \frac{(v_n - u_n)/(1 - u_n)[E(\tau_{u_n})/\tau_{u_n}]^{-\xi}}{1 - (\tau_{v_n}/\tau_{u_n})^{-\xi}} \xrightarrow{P} x_F,$$

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

puisque $X_{n,n} \xrightarrow{P} x_F$. Ainsi, comme $np_n/E(\tau_{u_n}) < 1/E(\tau_{u_n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après le Théorème 3.1, on a :

$$\frac{(T3'')}{1 - u_n} \xrightarrow{P} 0. \quad (4.15)$$

Les résultats (4.14) et (4.15) impliquent

$$\hat{x}_{p_n}(\xi) - X_{n,n} = o_P(1 - u_n). \quad (4.16)$$

D'où, d'après (4.12), (4.13) et (4.16) on a :

$$\hat{x}_{p_n}(\xi) - x_{p_n} = o_P(1 - u_n). \quad (4.17)$$

Etudions à présent la quantité $\hat{x}_{p_n}(\theta) - x_{p_n}$, pour $\theta < 0$, $\theta \neq \xi$. En s'inspirant de l'étude précédente, on montre que

$$\hat{x}_{p_n}(\theta) - x_{p_n} = o_P(1 - u_n) + (\hat{x}_{p_n}(\theta) - X_{n,n}),$$

où

$$\frac{\hat{x}_{p_n}(\theta) - X_{n,n}}{1 - u_n} \xrightarrow{P} x_F \frac{c_2^{-\theta/\xi} - c_2^{-1}}{1 - c_2^{-\theta/\xi}} \neq 0$$

si $\theta \neq \xi$. La conclusion de la démonstration est alors évidente d'après (4.17). ■

Remarque 4.1 La démonstration du Théorème 4.2 nous donne un minorant de la vitesse de convergence de notre estimateur du quantile extrême lorsque l'indice de valeur extrême est connu. On a, d'après (4.17),

$$\hat{x}_{p_n}(\xi) - x_{p_n} = o_P(1 - u_n).$$

De plus, on a, d'après (4.16) et (4.17),

$$X_{n,n} - x_{p_n} = o_P(1 - u_n).$$

On ne peut donc pas affirmer, avec les résultats dont on dispose, que l'un ou l'autre des estimateurs $X_{n,n}$ et $\hat{x}_{p_n}(\xi)$ est meilleur en terme de vitesse de convergence.

Comparaison de notre estimateur avec l'estimateur $X_{n,n}$

Il est bien connu que $X_{n,n}$ est un estimateur consistant du quantile x_{p_n} (si $p_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$) mais qu'il possède un biais négatif si $p_n < 1/n$ (autrement dit si le quantile est extrême). $X_{n,n}$ est en fait un bon estimateur du quantile (non extrême) d'ordre $1/n$. Pour que notre estimateur du quantile extrême soit préférable à l'estimateur "naïf" $X_{n,n}$, il faut donc commencer par s'assurer qu'il est strictement supérieur à $X_{n,n}$. On dispose du résultat suivant :

Théorème 4.3 Si $p_n < 1/n$ alors $P[\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_{3,n}) > X_{n,n}] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration – D'après la définition de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$, on a :

$$\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_{3,n}} - 1 = \frac{1 - v_n}{1 - u_n} [\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_{3,n}} - 1],$$

ce qui implique que :

$$\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_{3,n}) = X_{n,n} \left[1 + (1 - u_n) \frac{1 - (np_n)^{-\hat{\xi}_{3,n}}}{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_{3,n}}} \right].$$

On en déduit facilement que si $\hat{\xi}_{3,n} < 0$ et $\tau_{u_n} > 1$ alors, $\hat{\xi}_{3,n} > X_{n,n}$. Ainsi,

$$P[\hat{\xi}_{3,n} > X_{n,n}] \geq P[\hat{\xi}_{3,n} < 0 ; \tau_{u_n} > 1] \rightarrow 1$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ puisque $\hat{\xi}_{3,n} \xrightarrow{P} \xi < 0$ et $P[\tau_{u_n} > 1] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après la deuxième étape de la démonstration du Lemme 3.5. ■

4.2.4 Simulations

Nous allons comparer notre estimateur du quantile extrême $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ à l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$. Pour ce faire, on simule selon une fonction de répartition F , $N = 100$ échantillons de taille $n = 1000$ et on prend $p_n = 10^{-4}$. On choisit la suite (v_n) de telle sorte que $k(v_n) = k$ où $k = 2m$ est le nombre de points utilisés dans la construction de l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan et on choisit la suite (u_n) de telle sorte que $k(u_n) = k/4$. On calcule ensuite la moyenne empirique et l'erreur moyenne quadratique empirique (MSE) des deux estimateurs en fonction du nombre k . Les estimateurs sont calculés avec différents estimateurs de l'indice de valeur extrême : l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$, l'estimateur des moments $\hat{\xi}_n^M$, l'estimateur proposé par Beirlant et al. $\hat{\xi}_n^B$ et l'estimateur de Pickands $\hat{\xi}_n^P$.

N.B. Dans tous les graphiques, notre estimateur est représenté en trait continu et l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan est représenté en pointillé. De plus, sur les graphiques représentant la moyenne empirique des estimateurs, la ligne horizontale matérialise la vraie valeur du quantile extrême que l'on cherche à estimer.

Les fonctions de répartition considérées sont les mêmes que celles du paragraphe 3.7 du chapitre 3. Pour plus de clarté, on les rappelle ci-dessous :

- **Cas où $\ell(x) = c > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$**

Loi de Pareto Généralisée de paramètre d'échelle $\sigma = 1/3$ et d'indice de valeur extrême $\xi = -1/3$. (notée $GPD(1/3, -1/3)$) dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^3 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- **Cas où $\ell(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

- Loi de Weibull d'indice de valeur extrême $\xi = -1/3$, de paramètre d'échelle $\sigma = 2$ et de paramètre de position $\mu = 4$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] & \text{si } x \leq \mu - \sigma/\xi, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

- Loi inverse de Burr de paramètres $\beta = 1$, $\tau = 1/2$, $\lambda = 2$ et $x_F = 10$ dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + (x_F - x)^{-\tau}} \right)^\lambda & \text{si } x < x_F, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notez que l'indice de valeur extrême est égal à $-1/(\lambda\tau) = -1$.

- Cas où $\ell(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

On considère la loi dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^{-1/\xi} \ell[(1 - x)^{-1}] & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (4.18)$$

avec comme indice de valeur extrême $\xi = -1/3$ et

$$\ell(x) = \frac{\ln(1 + x)}{\ln(2)}.$$

- Cas où $\ell(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$**

On considère la loi dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^{-1/\xi} \ell[(1 - x)^{-1}] & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (4.19)$$

avec comme indice de valeur extrême $\xi = -1/3$ et

$$\ell(x) = \ln \left[1 + \frac{1}{\ln(1 + x)} \right] \left\{ \ln \left[1 + \frac{1}{\ln(2)} \right] \right\}^{-1}.$$

Les Figures 4.1 à 4.10 montrent que l'utilisation de $\hat{\xi}_{3,n}$ pour estimer l'indice de valeur extrême donne de meilleurs résultats (en terme de biais et de variance) pour estimer le quantile extrême aussi bien pour notre estimateur que pour l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan (les erreurs induites par l'estimation de ξ et du quantile extrême semblent se compenser si on utilise l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$, ce qui est particulièrement visible pour la loi de Burr). De plus, dans ce cas, notre estimateur du quantile extrême a un meilleur comportement que l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan. On remarque aussi que l'estimateur $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_{3,n})$ possède toujours un biais positif. Ceci suggère la présence d'un biais systématique dont la connaissance nous permettrait de proposer un estimateur débiaisé.

Pour pouvoir apprécier l'effet du choix de l'estimateur de ξ sur le comportement des deux estimateurs du quantile extrême pour une fonction de répartition donnée, nous avons tracé les graphiques représentant la moyenne empirique en fonction de k à la même échelle, ce qui explique que les courbes "sortent" parfois du cadre du graphique.

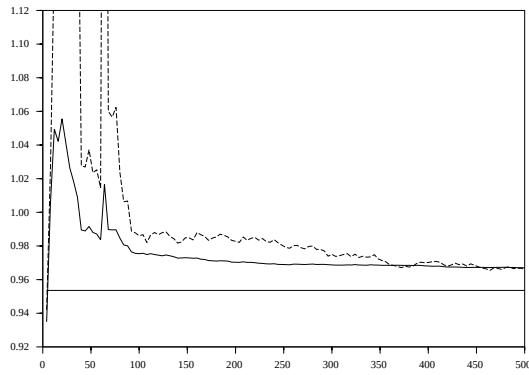
Dans les Figures 4.11 à 4.13, on refait les mêmes simulations mais en prenant $p_n = 0$ (c'est à dire que l'on estime le point terminal de F). On compare donc notre estimateur du point terminal $\hat{x}_{F,n}(\hat{\xi}_n)$ à l'estimateur du point terminal proposé par Dekkers et de Haan $\hat{x}_{F,n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ ainsi qu'à l'estimateur "naïf" $X_{n,n}$.

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

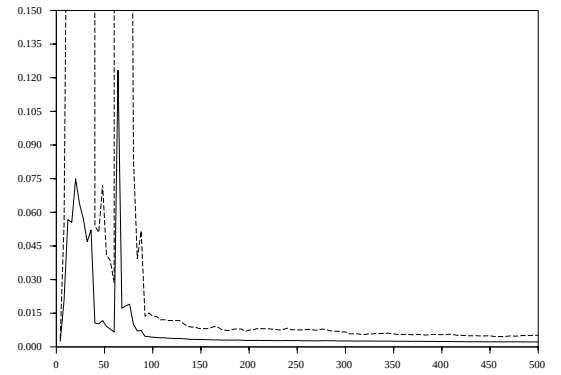
(représenté par un trait horizontal en pointillé). On utilise cette fois-ci uniquement l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ pour estimer l'indice de valeur extrême.

On remarque que pour de petites valeurs de $k(v_n)$ ($k(v_n) < 100$), les deux estimateurs ont une variance importante. Pour des valeurs de $k(v_n)$ supérieure à 100, notre estimateur a un meilleur comportement en terme d'erreur moyenne quadratique que l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan. De plus, notre estimateur apporte une amélioration en terme de biais par rapport à l'estimateur "naïf" $X_{n,n}$.

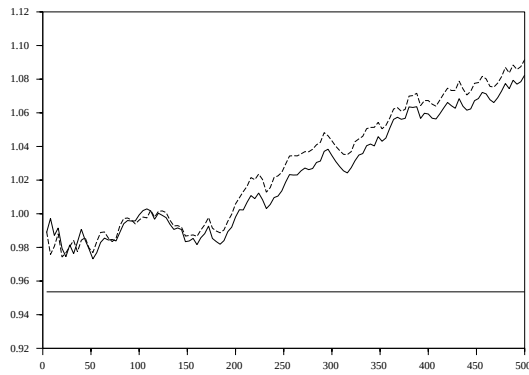
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil ---



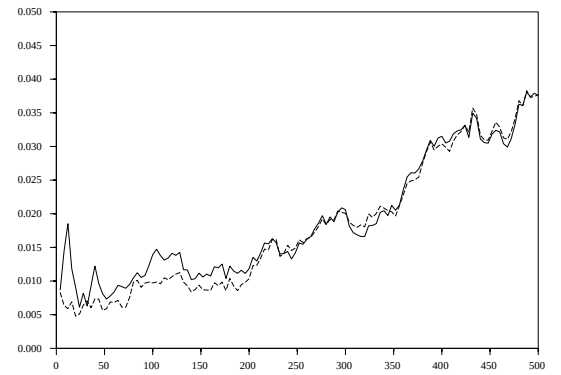
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



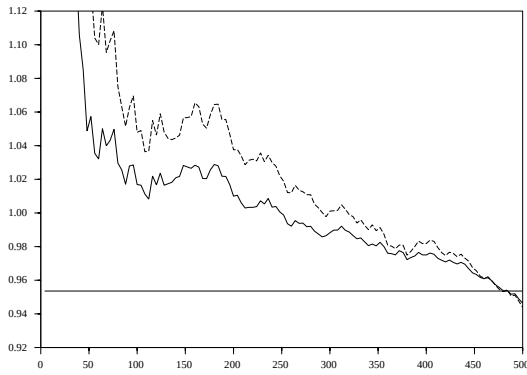
(c) Moyenne empirique



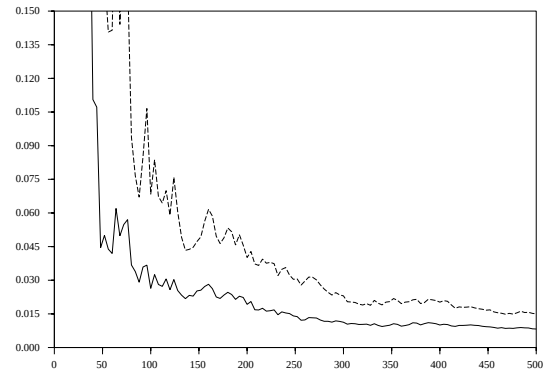
(d) MSE

FIG. 4.1 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi $GPD(1/3, -1/3)$ et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_{3,n}$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^M$ (figures (c) et (d)).

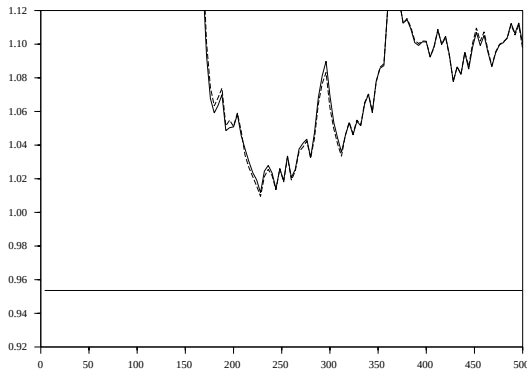
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



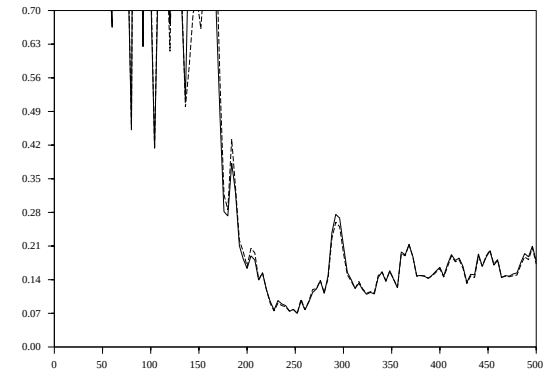
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



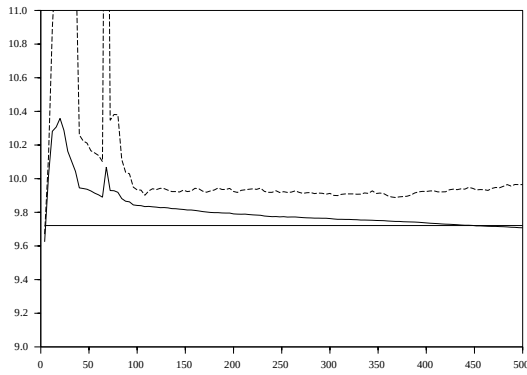
(c) Moyenne empirique



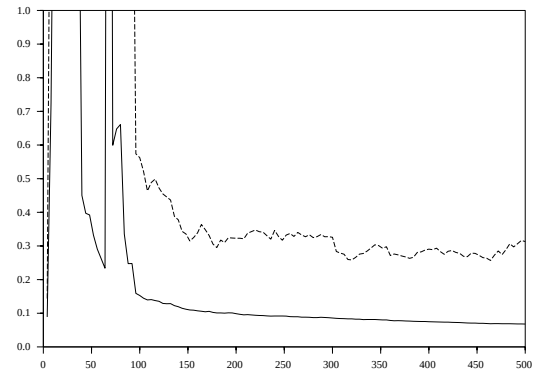
(d) MSE

FIG. 4.2 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi $GPD(1/3, -1/3)$ et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_n^B$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^P$ (figures (c) et (d)).

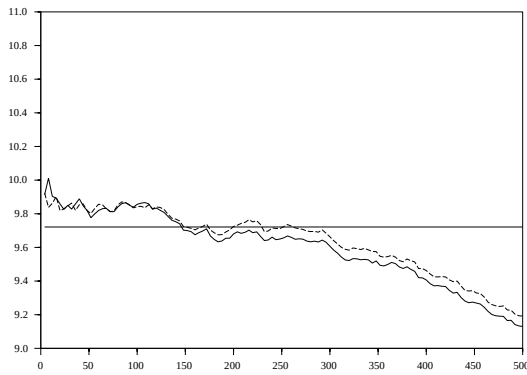
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



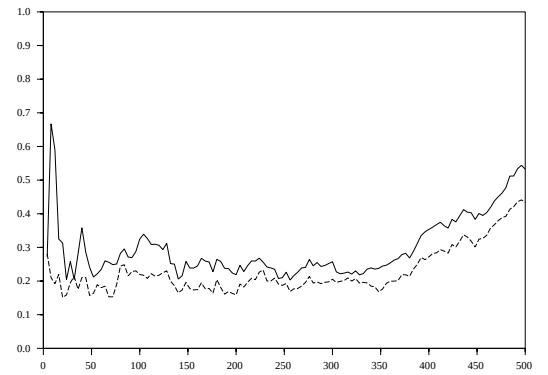
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



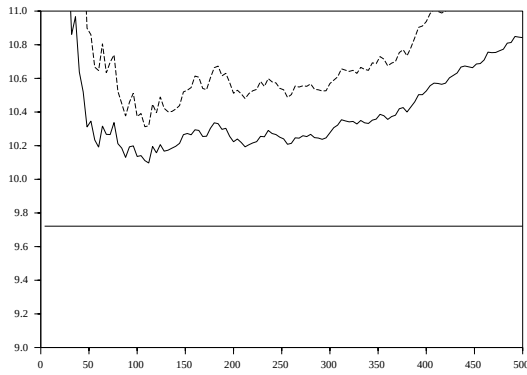
(c) Moyenne empirique



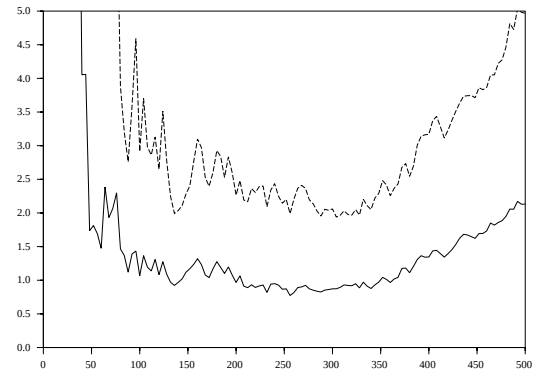
(d) MSE

FIG. 4.3 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi de Weibull et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_{3,n}$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^M$ (figures (c) et (d)).

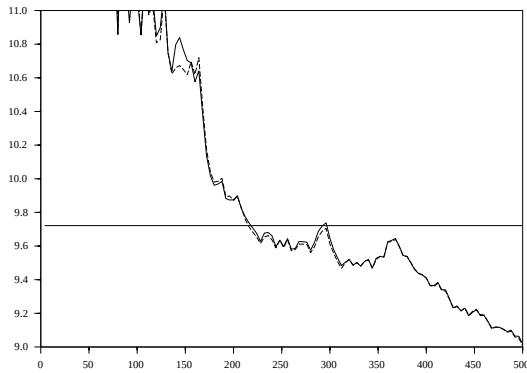
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



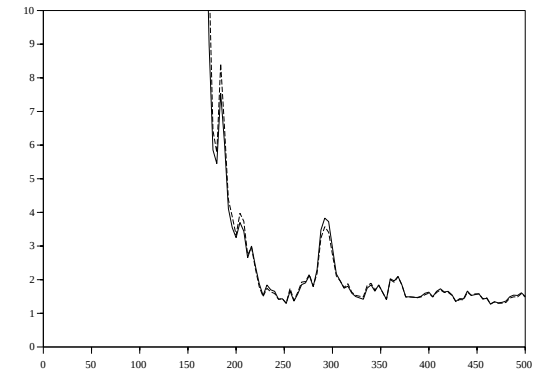
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



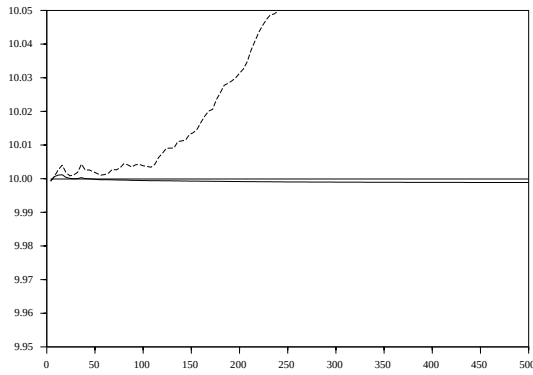
(c) Moyenne empirique



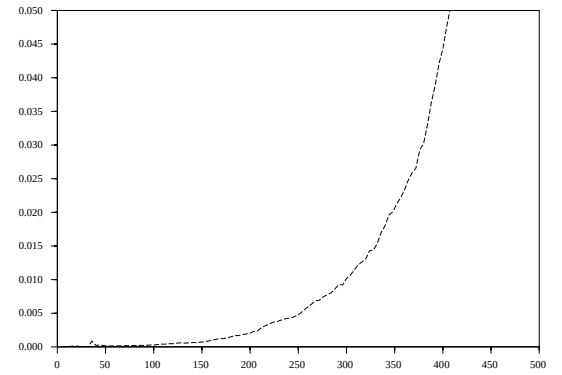
(d) MSE

FIG. 4.4 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi de Weibull et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_n^B$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^P$ (figures (c) et (d)).

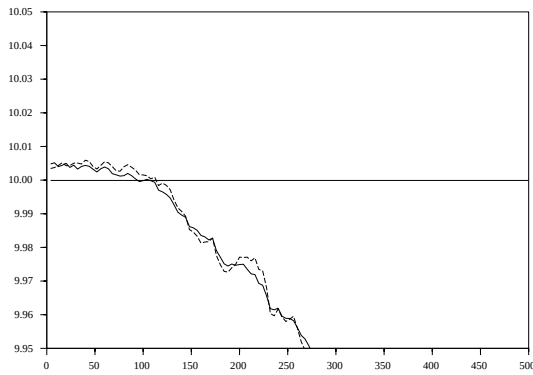
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



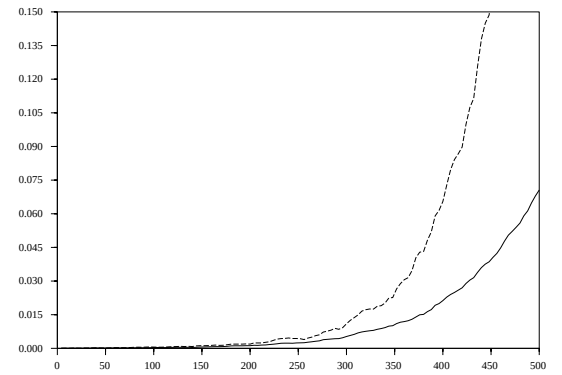
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



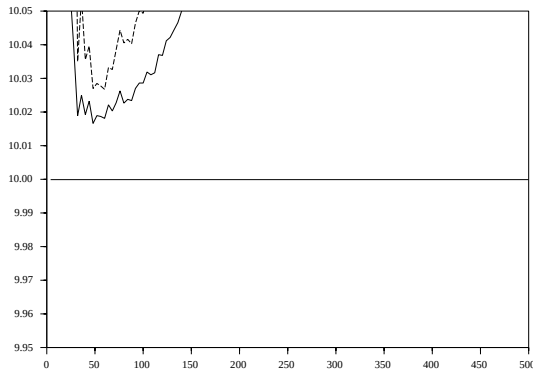
(c) Moyenne empirique



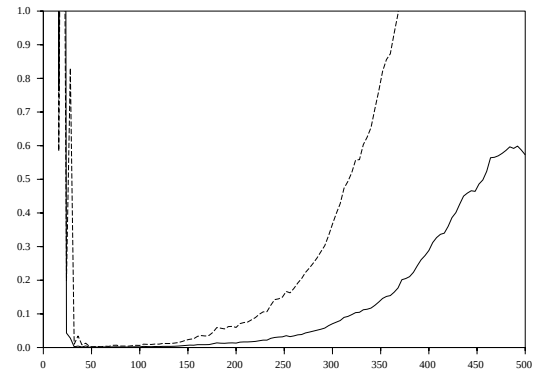
(d) MSE

FIG. 4.5 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi de Burr et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_{3,n}$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^M$ (figures (c) et (d)).

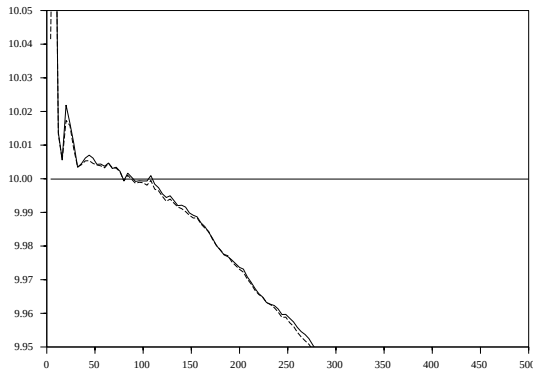
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



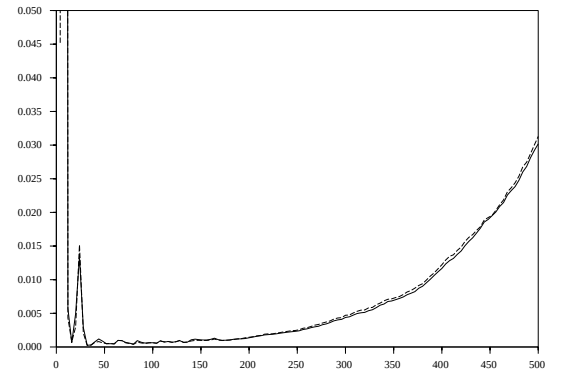
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



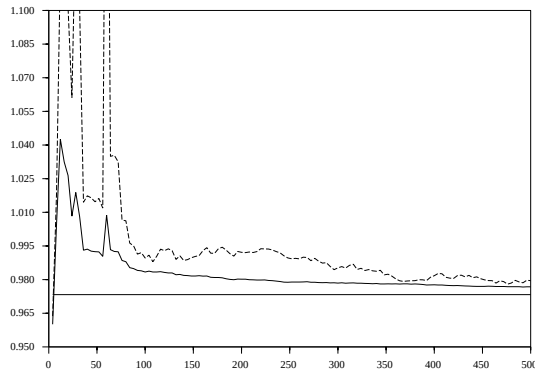
(c) Moyenne empirique



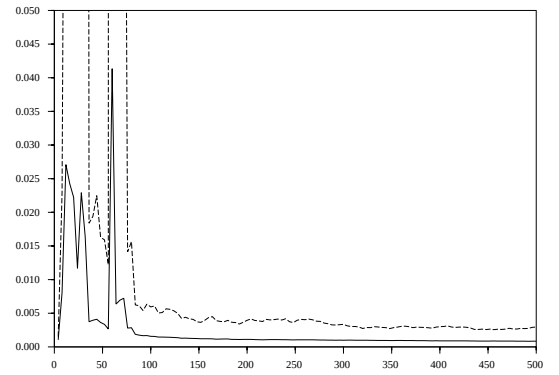
(d) MSE

FIG. 4.6 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi de Burr et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_n^B$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^P$ (figures (c) et (d)).

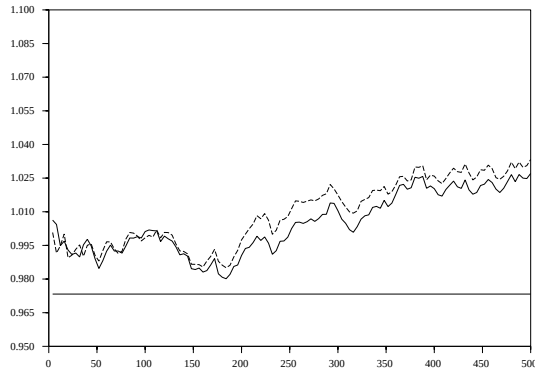
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



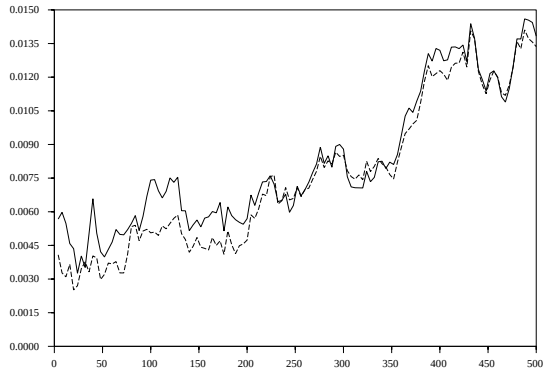
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



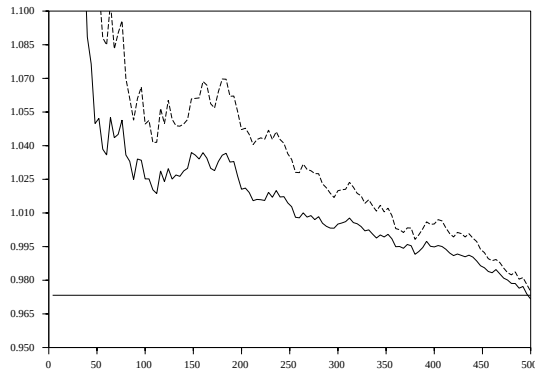
(c) Moyenne empirique



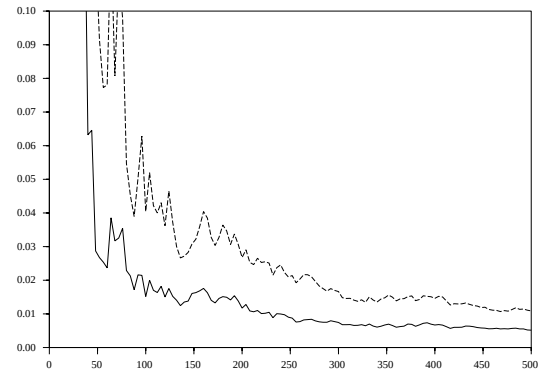
(d) MSE

FIG. 4.7 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la fonction de répartition (4.18) et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_{3,n}$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^M$ (figures (c) et (d)).

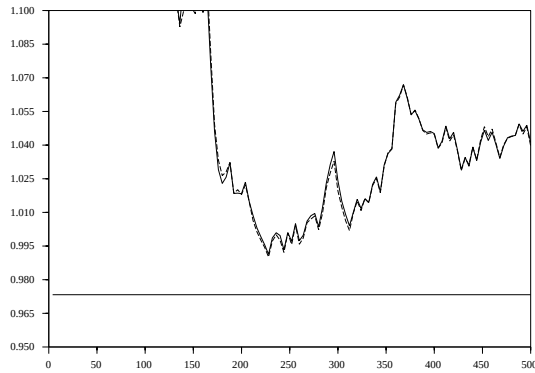
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil ---



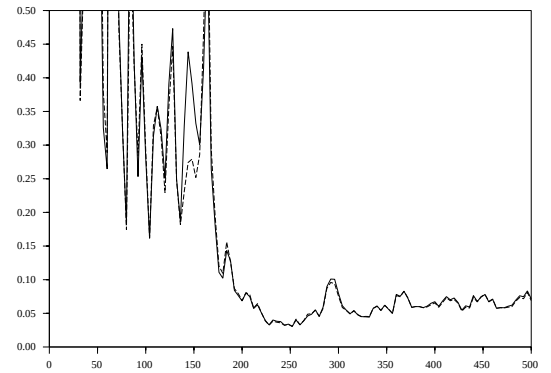
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



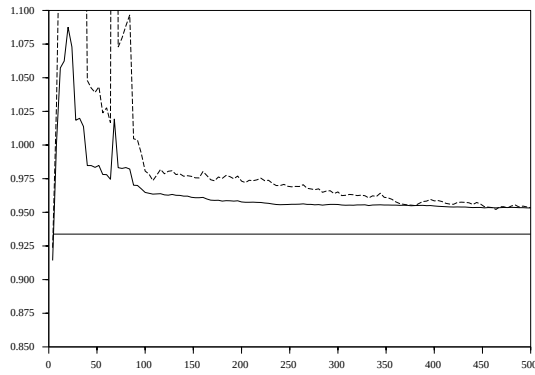
(c) Moyenne empirique



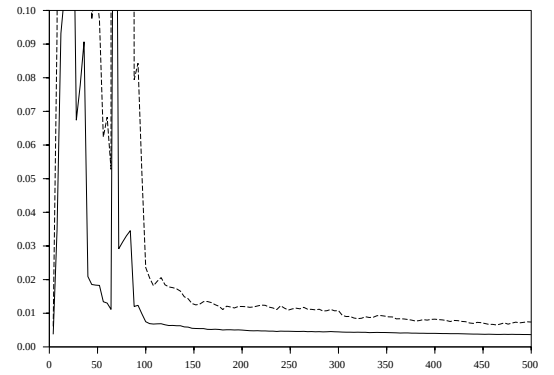
(d) MSE

FIG. 4.8 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la fonction de répartition (4.18) et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_n^B$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^P$ (figures (c) et (d)).

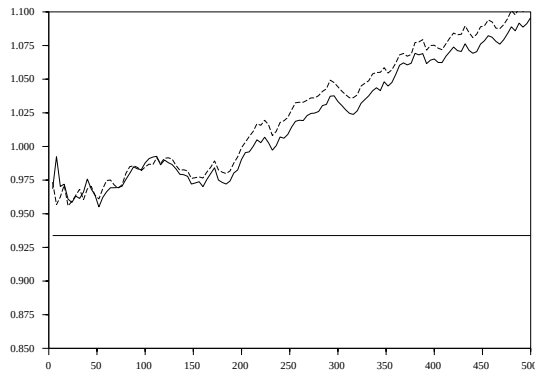
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



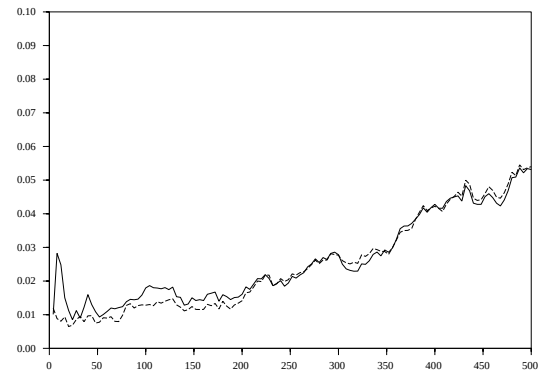
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



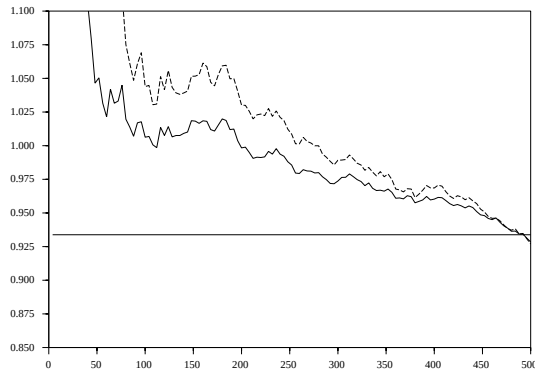
(c) Moyenne empirique



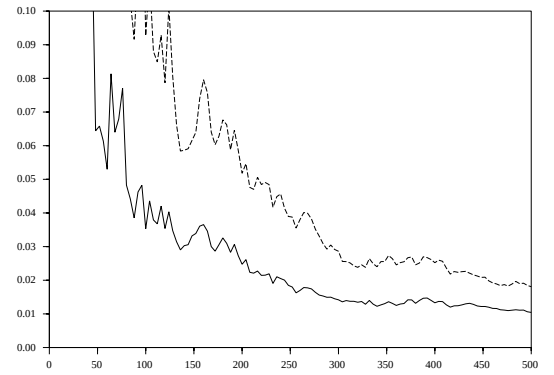
(d) MSE

FIG. 4.9 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la fonction de répartition (4.19) et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_{3,n}$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^M$ (figures (c) et (d)).

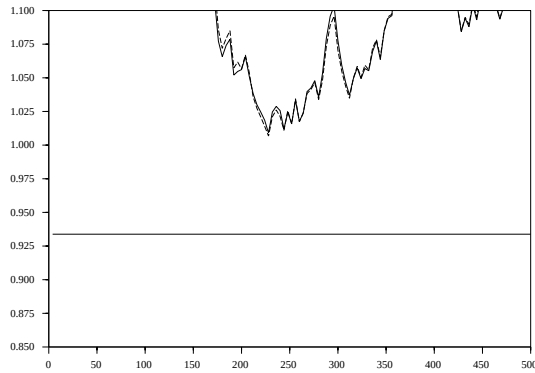
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



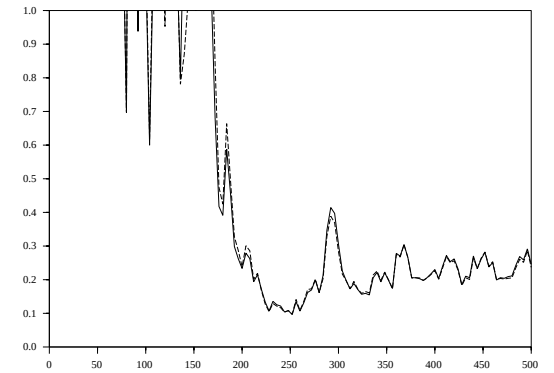
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



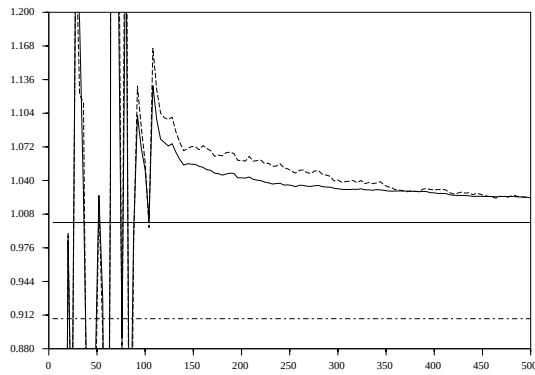
(c) Moyenne empirique



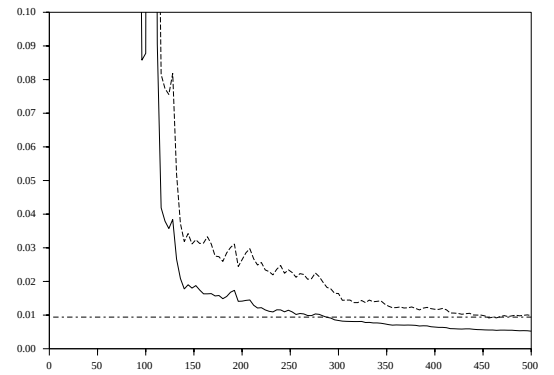
(d) MSE

FIG. 4.10 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{p_n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la fonction de répartition (4.19) et les estimateurs de ξ : $\hat{\xi}_n^B$ (figures (a) et (b)) et $\hat{\xi}_n^P$ (figures (c) et (d)).

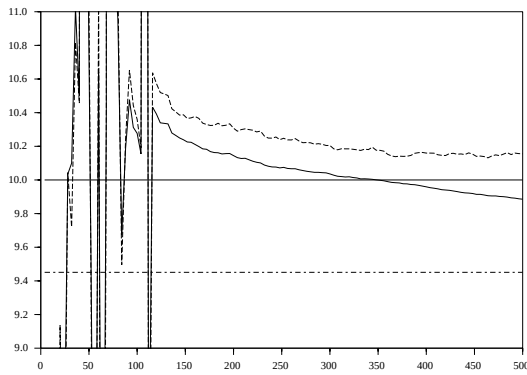
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



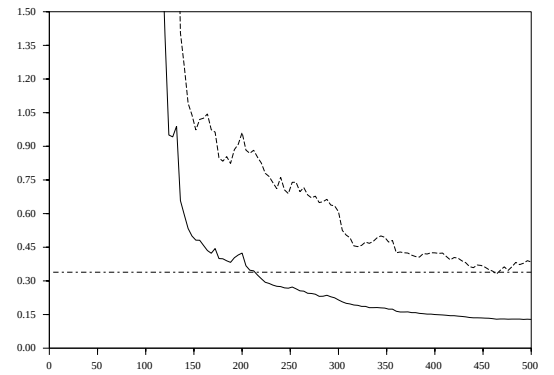
(a) Moyenne empirique



(b) MSE



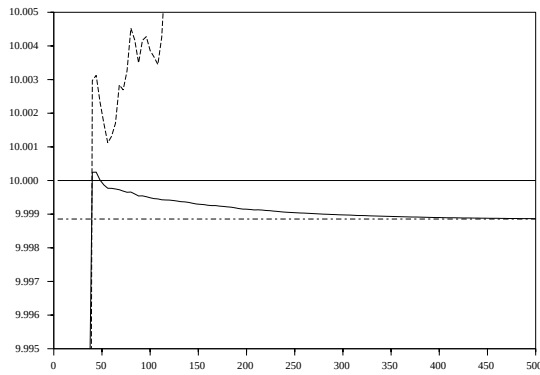
(c) Moyenne empirique



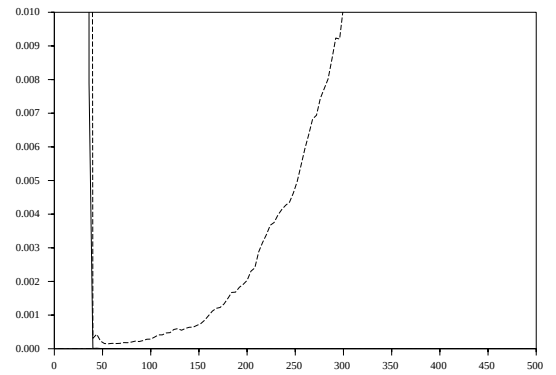
(d) MSE

FIG. 4.11 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{F,n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{F,n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi $GPD(1/3, -1/3)$ (figures (a) et (b)) et la loi de Weibull (figures (c) et (d)).

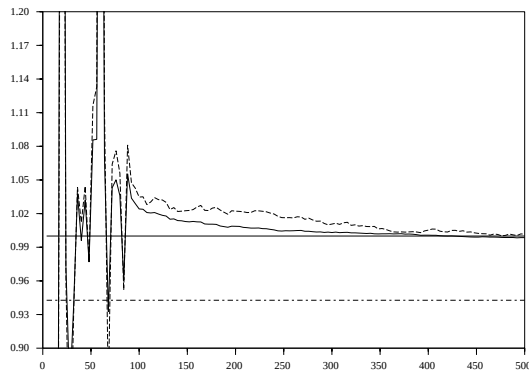
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



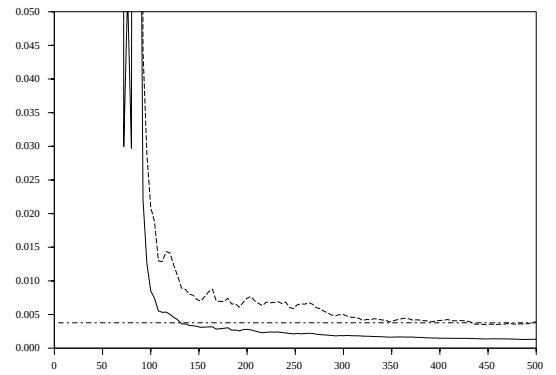
(a) Moyenne empirique



(b) MSE

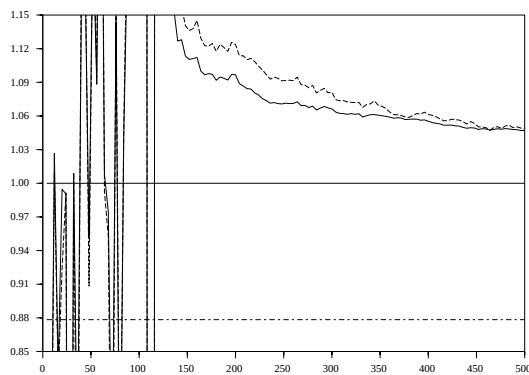


(c) Moyenne empirique

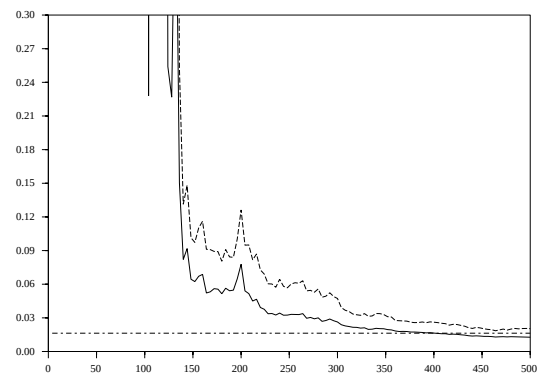


(d) MSE

FIG. 4.12 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{F,n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{F,n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la loi de Burr (figures (a) et (b)) et la fonction de répartition (4.18) (figures (c) et (d)).



(a) Moyenne empirique



(b) MSE

FIG. 4.13 – Comparaison des estimateurs $\hat{x}_{F,n}(\hat{\xi}_n)$ et $\hat{x}_{F,n}^{DH}(\hat{\xi}_n)$ en prenant la fonction de répartition (4.19).

4.3 Estimation d'une fonction quantile extrême

4.3.1 Hypothèses et résultat préliminaire

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont le support de la loi est :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\},$$

où g est une fonction positive inconnue. A l'aide de n couples de variables aléatoires $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ indépendants et de même loi que le couple (X, Y) , on désire estimer, pour $x_0 \in [0, 1]$ quelconque, le nombre $g_{p_n}(x_0)$ défini par :

$$P[Y \leq g_{p_n}(x_0) | X = x_0] = 1 - p_n, \quad p_n < 1/n.$$

Dans la suite, on note F_Y^x la fonction de répartition conditionnelle de Y étant donné que $X = x$. Le point terminal de F_Y^x étant fini pour tout $x \in [0, 1]$, on suppose que F_Y^x appartient au domaine d'attraction de Weibull, autrement dit que

$$F_Y^x(y) = P[Y \leq y | X = x] = 1 - [g(x) - y]^{-1/\xi(x)} \ell_x[(g(x) - y)^{-1}], \quad (4.20)$$

où, pour tout $x \in [0, 1]$, ℓ_x est une fonction à variations lentes et $\xi(x) < 0$. Pour estimer $g_{p_n}(x_0)$, considérons les variables aléatoires :

$$\{Z_i = Y_i I\{|X_i - x_0| \leq h_n\}, \quad i = 1, \dots, n\},$$

où (h_n) est une suite strictement positive qui converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Comme d'habitude, on note $Z_{1,n} \leq \dots \leq Z_{n,n}$ l'échantillon ordonné. Dans la suite, on pose

$$m_n(x_0) = \min_{|x-x_0| \leq h_n} g(x) \text{ et } M_n(x_0) = \max_{|x-x_0| \leq h_n} g(x).$$

Soit (u_n) une suite de $]0, 1[$ qui converge vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, on pose

$$\tau_{u_n} = \sum_{i=1}^n I\{Z_i \geq u_n Z_{n,n}\}.$$

Dans la suite, on considère les hypothèses suivantes :

(A') La loi du couple (X, Y) est à densité. On note $f_{X,Y}$ cette densité.

Cette hypothèse implique entre autre que la fonction de répartition conditionnelle F_Y^x est dérivable. On note f_Y^x cette dérivée. Elle implique aussi que la variable aléatoire X est à densité. Dans la suite, on note F_X (resp. f_X) la fonction de répartition (resp. la densité) de X .

(B'1) Pour tout $x \in [0, 1]$, ℓ_x est une fonction à variations lentes normalisée. Autrement dit,

$$\ell_x(y) = c(x) \exp \left\{ \int_1^y t^{-1} \varepsilon_x(t) dt \right\},$$

où $c(x) > 0$ et $\varepsilon_x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil

(B'2) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\ell_x(y) \rightarrow c_1(x)$ lorsque $y \rightarrow \infty$, où c_1 est une fonction strictement positive.

(B'3) Pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $A(x) > 0$ tel que pour tout $y \geq 0$, $\ell_x(y) \geq A(x)$.

(C') Les fonctions $f_X(x)$, $g(x)$, $f_Y^x(y)$ et $\ell_x(y^{-1})$ sont höldérienne d'exposant 1 en chacun de leurs arguments. Autrement dit, soit L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 et L_6 des constantes strictement positives, on suppose que :

- i) $|f_X(x_1) - f_X(x_2)| \leq L_1|x_1 - x_2|$,
- ii) $|g(x_1) - g(x_2)| \leq L_2|x_1 - x_2|$,
- iii) $|f_Y^{x_1}(y_1) - f_Y^{x_2}(y_2)| \leq L_3|x_1 - x_2| + L_4|y_1 - y_2|$,
- iv) $|\ell_{x_1}(y_1^{-1}) - \ell_{x_2}(y_2^{-1})| \leq L_5|x_1 - x_2| + L_6|y_1 - y_2|$.

(D') Pour tout $x \in [0, 1]$, f_Y^x vérifie l'une ou l'autre des conditions ci-dessous :

- i) il existe $B(x)$ tel que pour tout $0 \leq t \leq g(x)$, $f_Y^x(u_n t) \leq B(x)$,
- ii) il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_x$, $\max_{t \in [0, g(x)]} f_Y^x(u_n t) = f_Y^x[u_n g(x)]$.

Posons $\theta_{1,\xi}(x) = \min\{\xi^2(x)/2, \xi^2(x)/[1 - \xi(x)]\}$.

(E'1) Soit (u_n) une suite de $]0, 1[$ qui converge vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour tout x , $(nh_n)^{-\theta_{1,\xi}(x)} = o(1 - u_n)$.

(E'2) Pour tout $x \in [0, 1]$, $h_n = o[(1 - u_n)^{\gamma(x)}]$ où $\gamma(x) = \max\{1, -1 - 1/\xi(x)\}$.

(E'3) Pour tout $x \in [0, 1]$, $n^{-\xi(x)} = o[h_n^{\xi(x)-1}]$.

Remarque 4.2

- Posons $h_n = n^{-a}$ et $1 - u_n = n^{-b}$ avec $a, b > 0$. Les suites (h_n) et (u_n) vérifient les hypothèses **(E'1)**, **(E'2)** et **(E'3)** si

$$(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \xi(x)/[\xi(x) - 1] < x < 1 \text{ et } 0 < y < \min\{\theta_{1,\xi}(x)(1 - x), x/\gamma(x)\}\}.$$

- Dans la suite, on suppose que $x_0 \in]0, 1[$. Les résultats et démonstrations ci-dessous s'étendent facilement au cas $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.4 Sous les hypothèses **(A')**, **(B'1)**, **(B'2)**, **(B'3)**, **(C')**, **(D')**, **(E'1)**, **(E'2)** et **(E'3)**,

$$\frac{\tau_{u_n}}{D(x_0)nh_n(1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)}} \xrightarrow{P} 1 \quad (4.21)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ où $D(x_0) = 2f_X(x_0)c_1(x_0)g(x_0)^{-1/\xi(x_0)}$ et

$$E(\tau_{u_n}) \sim D(x_0)nh_n(1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)} \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons dans un premier temps prouver que

$$n\{1 - F_Z[u_n M_n(x_0)]\} \sim D(x_0) n h_n (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)},$$

où F_Z est la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = Y I\{|X - x_0| \leq h_n\}$. Il suffira alors, pour démontrer le Théorème 4.4, de vérifier que les conditions $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$ et $\mathcal{H}4$ du Théorème 2.7 sont satisfaites.

Remarque 4.3 La fonction de répartition F_Z dépend évidemment de la taille n de l'échantillon. Pour ne pas alourdir les notations, on ne fait pas apparaître cette dépendance en n .

Lemme 4.2 Sous les hypothèses **(A')**, **(B'2)**, **(C')** et **(E'2)**,

$$n\{1 - F_Z[u_n M_n(x_0)]\} \sim D(x_0) n h_n (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)}.$$

Démonstration – Remarquons tout d'abord que si $t \in [0, M_n(x_0)]$ alors,

$$F_Z(t) = P[|X - x_0| > h_n] + P[Y \leq t, |X - x_0| \leq h_n] = 1 - q_n(x_0)[1 - G_{x_0}(t)],$$

où $q_n(x_0) = P[|X - x_0| \leq h_n]$ et G_{x_0} est la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant que $|X - x_0| \leq h_n$. Ainsi, puisque on a $q_n(x_0) \sim 2f_X(x_0)h_n$ d'après l'hypothèse **(C')** i),

$$1 - F_Z[u_n M_n(x_0)] \sim 2f_X(x_0)h_n\{1 - G_{x_0}[u_n M_n(x_0)]\}. \quad (4.23)$$

Nous allons à présent montrer que

$$1 - G_{x_0}[u_n M_n(x_0)] \sim 1 - F_Y^{x_0}[u_n M_n(x_0)],$$

ce qui conclura la démonstration puisque d'après l'expression de F_Y^x donnée en (4.20), les hypothèses **(B'2)**, **(C')** ii) et **(E'2)**,

$$1 - F_Y^{x_0}[u_n M_n(x_0)] \sim c_1(x_0)g(x_0)^{-1/\xi(x_0)}(1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)}. \quad (4.24)$$

D'après l'hypothèse **(A')**, on sait que la loi conditionnelle de Y sachant que $|X - x_0| \leq h_n$ admet une densité que l'on note g_{x_0} . On remarque facilement que

$$g_{x_0}(t) = \frac{1}{q_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_{X,Y}(s, t) ds = \frac{1}{q_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_X(s) f_Y^s(t) ds,$$

où $A_n(t) = \{s \in [x_0 - h_n, x_0 + h_n] | g(s) \geq t\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 - G_{x_0}[u_n M_n(x_0)] &= \frac{1}{q_n(x_0)} \int_{u_n M_n(x_0)}^{M_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_X(s) f_Y^s(t) ds dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{q_n(x_0)} \int_{u_n M_n(x_0)}^{m_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_X(s) f_Y^s(t) ds dt}_{(T1)} + \underbrace{\frac{1}{q_n(x_0)} \int_{m_n(x_0)}^{M_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_X(s) f_Y^s(t) ds dt}_{(T2)}. \end{aligned}$$

Intéressons nous au terme $(T1)$. D'après les hypothèses **(C')** ii) et **(E'2)**, on sait qu'à partir d'un certain rang, $u_n M_n(x_0) \leq m_n(x_0)$ et ainsi que pour tout $t \in [u_n M_n(x_0), m_n(x_0)]$, $A_n(t) = [x_0 - h_n, x_0 + h_n]$.

D'où, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned}
 (T1) &= \frac{1}{q_n(x_0)} \int_{u_n M_n(x_0)}^{m_n(x_0)} \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f_X(s) f_Y^s(t) ds dt \\
 &= \underbrace{\frac{1}{q_n(x_0)} \int_{u_n M_n(x_0)}^{m_n(x_0)} \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f_X(s) [f_Y^s(t) - f_Y^{x_0}(t)] ds dt}_{(T3)} + \underbrace{\frac{1}{q_n(x_0)} \int_{u_n M_n(x_0)}^{m_n(x_0)} \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f_X(s) f_Y^{x_0}(t) ds dt}_{(T4)}.
 \end{aligned}$$

Or, d'après les hypothèses **(C')** iii) et **(E'2)**,

$$(T3) \leq L_3 h_n [m_n(x_0) - u_n M_n(x_0)] = \mathcal{O}[h_n(1 - u_n)]$$

et de plus,

$$\begin{aligned}
 (T4) &= \int_{u_n M_n(x_0)}^{g(x_0)} f_Y^{x_0}(u) du - \int_{m_n(x_0)}^{g(x_0)} f_Y^{x_0}(u) du = \{1 - F_Y^{x_0}[u_n M_n(x_0)]\} - \{1 - F_Y^{x_0}[m_n(x_0)]\} \\
 &= 1 - F_Y^{x_0}[u_n M_n(x_0)] + \mathcal{O}[h_n^{-1/\xi(x_0)}],
 \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse **(C')** ii) et l'expression de $F_Y^{x_0}$ donnée en (4.20). Ainsi,

$$(T1) = 1 - F_Y^{x_0}[u_n M_n(x_0)] + \mathcal{O}[h_n^{-1/\xi(x_0)}] + \mathcal{O}[h_n(1 - u_n)]. \quad (4.25)$$

Intéressons nous maintenant au terme $(T2)$. On montre facilement, en s'inspirant de l'étude du terme $(T1)$, que

$$(T2) = \mathcal{O}(h_n^2) + \mathcal{O}[h_n^{-1/\xi(x_0)}]. \quad (4.26)$$

Ainsi, d'après l'équivalence (4.24) et l'hypothèse **(E'2)**, les égalités (4.25) et (4.26) impliquent que :

$$1 - G_{x_0}[u_n M_n(x_0)] \sim 1 - F_Y^{x_0}[u_n M_n(x_0)],$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Avant de vérifier que les hypothèses $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$ et $\mathcal{H}4$ du Théorème 2.7 sont satisfaites, intéressons nous à l'ordre de grandeur de la quantité $\eta(u_n)$. On rappelle que

$$\eta(u_n) = \int_0^{M_n(x_0)} u_n f_Z(u_n t) [F_Z(t)]^{n-1} dt,$$

où f_Z désigne la dérivée de la fonction de répartition F_Z qui existe, en tout point différent de zéro, d'après l'hypothèse **(A')**.

Lemme 4.3 Sous les hypothèses **(A')**, **(B'1)**, **(B'2)**, **(B'3)**, **(C')**, **(D')**, **(E'2)** et **(E'3)**,

$$\eta(u_n) = \mathcal{O}\{n^{\xi(x_0)} h_n^{1+\xi(x_0)} \max\{1, (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)-1}\}\}.$$

Démonstration – Remarquons pour commencer que pour tout $t \in]0, M_n(x_0)]$,

$$f_Z(t) = q_n(x_0) g_{x_0}(t).$$

Ainsi,

$$\eta(u_n) = \int_0^{M_n(x_0)} q_n(x_0) u_n g_{x_0}(u_n t) [F_Z(t)]^{n-1} dt.$$

D'après l'hypothèse **(E'2)**, on sait que pour tout $t \in [0, M_n(x_0)]$ et pour n "assez" grand, $u_n t \leq m_n(x_0)$ et ainsi que

$$g_{x_0}(u_n t) = \frac{1}{q_n(x_0)} \int_{x_0 - h_n}^{x_0 + h_n} f_X(s) f_Y^s(u_n t) ds.$$

En utilisant l'hypothèse **(C')** iii), on en déduit que

$$g_{x_0}(u_n t) = f_Y^{x_0}(u_n t) + \mathcal{O}(h_n),$$

où le " $\mathcal{O}$ " ne dépend pas de t , ce qui implique que

$$\eta(u_n) = u_n q_n(x_0) \int_0^{M_n(x_0)} f_Y^{x_0}(u_n t) [F_Z(t)]^{n-1} dt + \mathcal{O} \left\{ h_n^2 \int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt \right\}.$$

Etudions séparément les cas où $f_Y^{x_0}$ vérifie l'hypothèse **(D')** i) et $f_Y^{x_0}$ vérifie l'hypothèse **(D')** ii).

- Si $f_Y^{x_0}$ vérifie l'hypothèse **(D')** i), alors

$$\eta(u_n) = \mathcal{O} \left\{ h_n \int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt \right\}. \quad (4.27)$$

- Si $f_Y^{x_0}$ vérifie l'hypothèse **(D')** ii), en utilisant le fait que sous les hypothèses **(B'1)** et **(B'2)**,

$$f_Y^{x_0}[u_n g(x_0)] \sim -\frac{c_1(x_0)}{\xi(x_0)} g(x_0)^{-1/\xi(x_0)-1} (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)-1},$$

(voir Lemme 3.1), l'hypothèse **(E'2)** implique que

$$\eta(u_n) = \mathcal{O} \left\{ h_n (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)-1} \int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt \right\}. \quad (4.28)$$

Pour conclure la démonstration, il reste donc à étudier l'ordre de grandeur de la quantité

$$\int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt.$$

Il faut faire attention ici au fait que la fonction de répartition F_Z dépend de la taille n de l'échantillon. On ne peut donc pas, comme dans la démonstration du Lemme 3.2, utiliser le résultat démontré dans Resnick [74, Prop. 2.1 (ii)]. On dispose cependant du résultat suivant :

$$\int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt = \mathcal{O}[(nh_n)^{\xi(x_0)}]. \quad (4.29)$$

Par souci de lisibilité, la démonstration de (4.29) est reportée en annexe (voir Annexe E). Les égalités (4.27), (4.28) et (4.29) concluent la démonstration. ■

Remarque 4.4 Intéressons nous à la quantité $\mu(u_n)$ où on rappelle que :

$$\mu(u_n) = \int_0^{M_n(x_0)} u_n f_Z(u_n t) [F_Z(t) - F_Z(u_n t)] [F_Z(t)]^{n-2} dt.$$

On remarque que puisque

$$1 - F_Z(t) = q_n(x_0)[1 - G_{x_0}(t)],$$

on a :

$$\begin{aligned} \mu(u_n) &= q_n(x_0) \int_0^{M_n(x_0)} u_n f_Z(u_n t) [G_{x_0}(t) - G_{x_0}(u_n t)] [F_Z(t)]^{n-2} dt \\ &\leq q_n(x_0) \int_0^{M_n(x_0)} u_n f_Z(u_n t) [F_Z(t)]^{n-2} dt, \end{aligned}$$

puisque $0 \leq G_{x_0}(t) - G_{x_0}(u_n t) \leq 1$ pour tout t . Ainsi, de la même manière que dans la démonstration du Lemme 4.3, on montre que :

$$\mu(u_n) = \mathcal{O}\left\{\max\{n^{\xi(x_0)} h_n^{2+\xi(x_0)}, n^{\xi(x_0)} h_n^{2+\xi(x_0)} (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)-1}\}\right\}. \quad (4.30)$$

Nous pouvons à présent démontrer le Théorème 4.4.

Démonstration du Théorème 4.4 – Il suffit de s'assurer que les hypothèses $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$ et $\mathcal{H}4$ du Théorème 2.7 sont vérifiées, ce qui conclura la démonstration d'après le Lemme 4.2.

• Hypothèse $\mathcal{H}1$ Elle est vérifiée d'après l'hypothèse **(A')**.

• Hypothèse $\mathcal{H}2$ Rappelons que le point terminal de la fonction de répartition F_Z est $M_n(x_0)$. D'après le Lemme 4.2, on a

$$1 - F_Z[u_n M_n(x_0)] \sim D(x_0) h_n (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ et

$$n\{1 - F_Z[u_n M_n(x_0)]\} \sim D(x_0) n h_n (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)} \rightarrow +\infty$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après l'hypothèse **(E'1)**.

• Hypothèse $\mathcal{H}3$ D'après (4.30) et le Lemme 4.2, il suffit de démontrer que :

$$\frac{(n h_n)^{\xi(x_0)}}{(1 - u_n)^{-2/\xi(x_0)}} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{(n h_n)^{\xi(x_0)} (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)-1}}{(1 - u_n)^{-2/\xi(x_0)}} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Or, l'hypothèse **(E'1)** implique que

$$\frac{(n h_n)^{\xi(x_0)}}{(1 - u_n)^{-2/\xi(x_0)}} = o\left\{(n h_n)^{\xi(x_0) - 2\theta_{1,\xi}(x_0)/\xi(x_0)}\right\} = o(1),$$

puisque $\xi(x_0) - 2\theta_{1,\xi}(x_0)/\xi(x_0) < 0$, et que

$$\frac{(n h_n)^{\xi(x_0)} (1 - u_n)^{-1/\xi(x_0)-1}}{(1 - u_n)^{-2/\xi(x_0)}} = o\left\{(n h_n)^{\xi(x_0) + \theta_{1,\xi}(x_0) - \theta_{1,\xi}(x_0)/\xi(x_0)}\right\} = o(1),$$

puisque $\xi(x_0) + \theta_{1,\xi}(x_0) - \theta_{1,\xi}(x_0)/\xi(x_0) < 0$.

• Hypothèse $\mathcal{H}4$ Il suffit de démontrer d'après les Lemmes 4.2 et 4.3 que :

$$\frac{(nh_n)^{-\xi(x_0)}}{(1-u_n)^{-1/\xi(x_0)}} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{(nh_n)^{-\xi(x_0)}(1-u_n)^{-1/\xi(x_0)-1}}{(1-u_n)^{-1/\xi(x_0)}} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui est direct en utilisant l'hypothèse $\mathcal{H}3$ que l'on vient de démontrer. ■

4.3.2 Estimation de $g_{p_n}(x_0)$ et convergence en probabilité

Définition de l'estimateur

Pour estimer $g_{p_n}(x_0)$, on utilise les variables aléatoires

$$\{Z_i = Y_i I\{|X_i - x_0| \leq h_n\}, i = 1, \dots, n\},$$

où (h_n) est une suite strictement positive qui converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Autrement dit, on considère uniquement les observations dont la première coordonnée est “suffisamment” proche de x_0 . En s'inspirant de l'estimateur du quantile extrême proposé, dans un cadre uni-dimensionnel, dans le chapitre 4, on propose comme estimateur de $g_{p_n}(x_0)$:

$$\hat{g}_{p_n}(x_0) = Z_{n,n} \frac{v_n \{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n(x_0)} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n(x_0)}\} - u_n \{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n(x_0)} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n(x_0)}\}}{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n(x_0)} - \tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n(x_0)}}, \quad (4.31)$$

où (u_n) et (v_n) sont deux suites de $]0, 1[$ qui convergent vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\hat{\xi}_n(x_0)$ est un estimateur de $\xi(x_0)$ convergeant en probabilité.

Convergence en probabilité

Théorème 4.5 Soit $\hat{\xi}_n(x_0)$ un estimateur faiblement consistant de $\xi(x_0)$ et soit $p_n < 1/n$. Sous les hypothèses **(A')**, **(B'1)**, **(B'2)**, **(B'3)**, **(C')**, **(D')**, **(E'2)**, **(E'3)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(E'1)** et sont telles que $1 - u_n \sim c_2(1 - v_n)$ où $c_2 \in]0, 1[$, alors, $\hat{g}_{p_n}(x_0) - g_{p_n}(x_0) \xrightarrow{P} 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

La démonstration de ce résultat est en tout point similaire à la démonstration du Théorème 4.1.

Remarque 4.5 Un estimateur faiblement consistant de $\xi(x_0)$

Comme estimateur faiblement consistant de $\xi(x_0)$ on peut prendre par exemple l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}(x_0)$ défini comme étant la solution de l'équation en θ :

$$\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \left(\frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - 1}{\tau_{v_n}^{-\theta} - 1} \right) = 1.$$

En reprenant points par points la démonstration du Théorème 3.7, on montre que $\hat{\xi}_{3,n}(x_0) \xrightarrow{P} \xi(x_0)$.

4.3.3 Simulations

Estimation ponctuelle

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2 - 4x + 4x^2 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On simule $N = 100$ échantillons de taille $n = 5000$ selon la loi du couple (X, Y) avec

$$X \sim \mathcal{U}[0, 1] \text{ et } F_Y^x(y) = \exp \left[- \left(1 - \frac{y}{g(x)} \right)^{-1/\xi(x)} \right], \quad y \leq g(x),$$

où $\xi(x) = -(2 + 3x)^{-1}$. Nous estimons la fonction quantile extrême g_{p_n} avec $p_n = 1/20000$ (figures 4.14 à 4.16) ainsi que la fonction g (figures 4.17 à 4.19) aux points $x_0 = 0.25$, $x_0 = 0.5$ et $x_0 = 0.75$ en prenant des “fenêtres” de longueur $h_n = 0.1$, $h_n = 0.05$ et $h_n = 0.025$. On trace la moyenne empirique ainsi que l'erreur moyenne quadratique (MSE) de notre estimateur en fonction de $k(v_n)$, le trait horizontal continu représentant la valeur que l'on cherche à estimer.

Remarque 4.6 Pour l'estimation de $g_{p_n}(x_0)$, on fait varier $k(v_n)$ de 4 à 125. Pour l'estimation de $g(x_0)$, on fait varier $k(v_n)$ de 100 à 200 (la variance de l'estimateur étant très grande si on prend $k(v_n)$ trop petit). De plus, on estime $g(x_0)$ par $\max\{Z_{n,n}, \hat{g}_0(x_0)\}$ (représenté par une ligne continue) et on compare cet estimateur à l'estimateur “naïf” $Z_{n,n}$ (représenté par une ligne en pointillé).

Pour l'estimation de $g_{p_n}(x_0)$, le choix de la longueur de fenêtre h_n a une influence importante sur le biais de notre estimateur. Concernant l'estimation de $g(x_0)$, on remarque que la fenêtre de taille $h_n = 0.025$ donne de meilleurs résultats en terme de biais et de variance pour des valeurs de $k(v_n)$ comprises entre 100 et 180 environ. Dans ce cas, notre estimateur est meilleur que l'estimateur “naïf” $X_{n,n}$.

Estimation globale

A présent, on simule un seul échantillon de taille $n = 5000$ selon la loi du couple (X, Y) avec

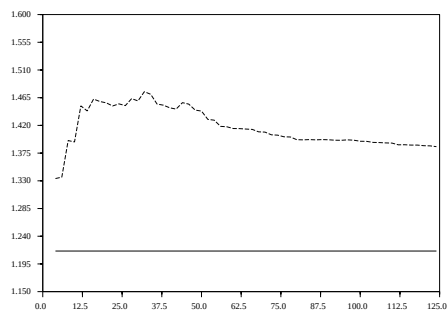
$$X \sim \mathcal{U}[0, 1] \text{ et } F_Y^x(y) = 1 - [1 - y/g(x)]^4,$$

et on estime la fonction quantile extrême g_{p_n} avec $p_n = 1/20000$ en tout point de $[0, 1]$ (ici, $\xi(x) = -1/4$). On prend $h_n = 0.025$ et on choisit les suites (u_n) et (v_n) de telle sorte que $\tau_{u_n} = 25$ et $\tau_{v_n} = 100$. On compare notre estimateur à l'estimateur “naïf” :

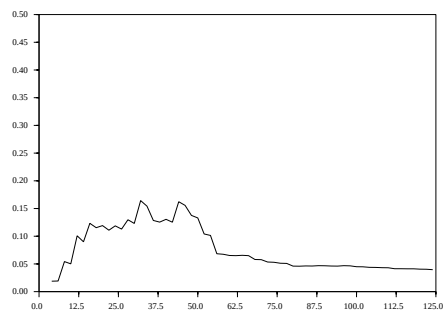
$$\hat{g}_{p_n}^{max}(x) = Z_{n,n}, \quad x \in [0, 1],$$

où $Z_{n,n} = \max Y_i I\{|X_i - x| \leq h_n\}$. Le résultat de la simulation est donnée à la Figure 4.20.

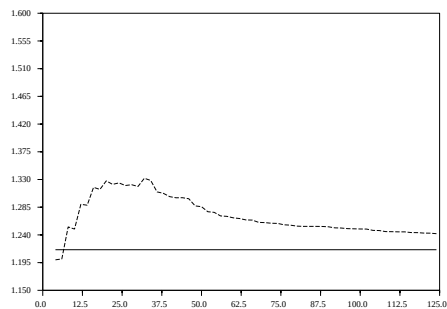
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



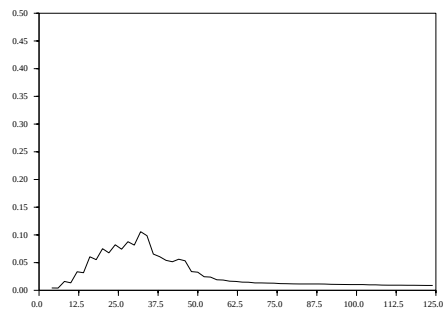
(a) Moyenne empirique



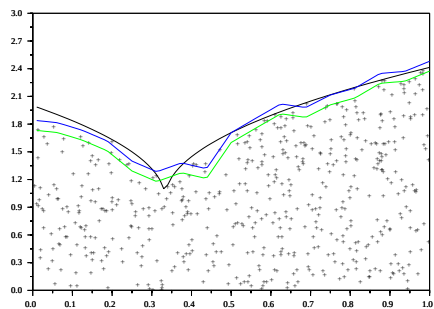
(b) MSE



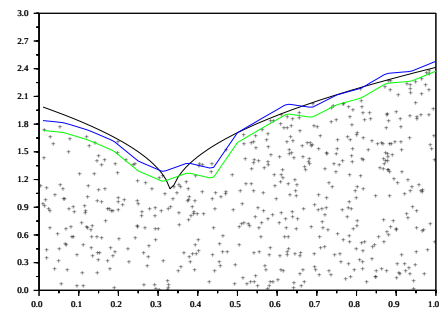
(c) Moyenne empirique



(d) MSE



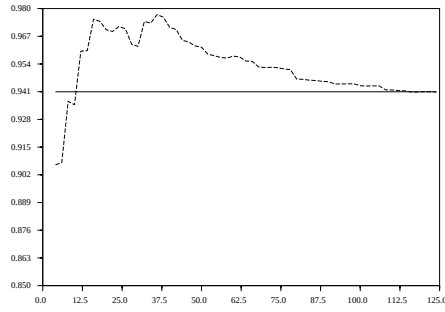
(e) Moyenne empirique



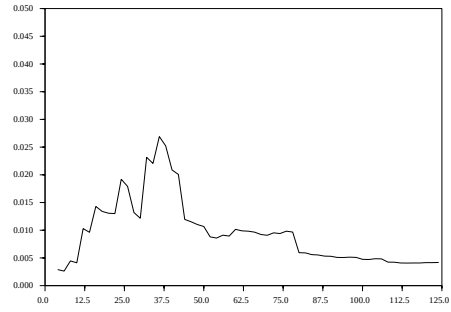
(f) MSE

FIG. 4.14 – Estimation de $g_{p_n}(x_0)$ avec $x_0 = 0.25$ et $h_n = 0.1$ (figures (a) et (b)), $h_n = 0.05$ (figures (c) et (d)) et $h_n = 0.025$ (figures (e) et (f)).

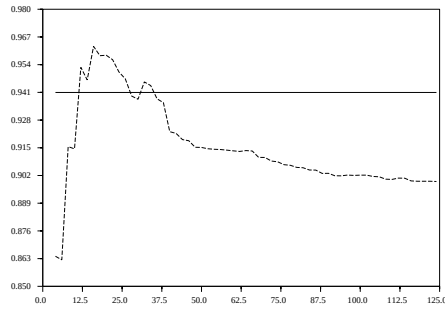
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



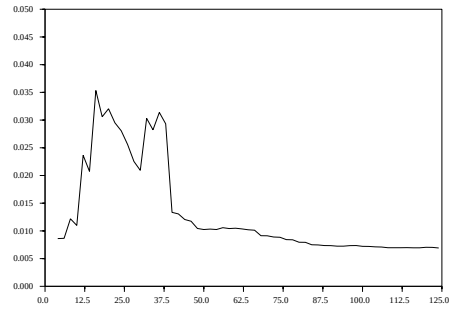
(a) Moyenne empirique



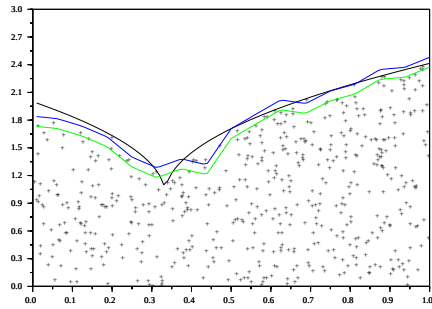
(b) MSE



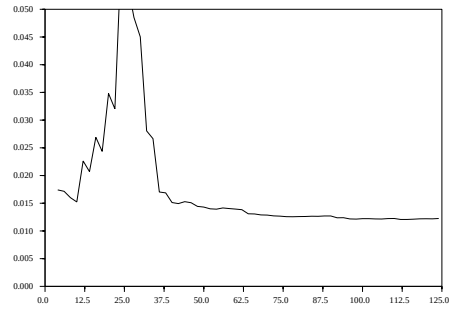
(c) Moyenne empirique



(d) MSE



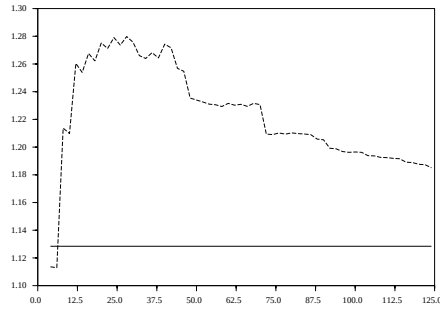
(e) Moyenne empirique



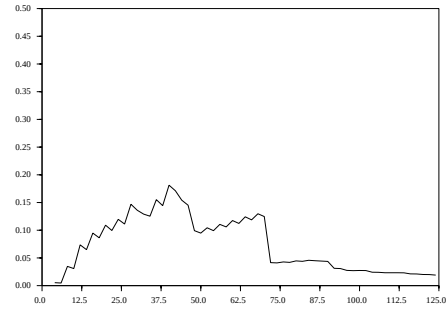
(f) MSE

FIG. 4.15 – Estimation de $g_{p_n}(x_0)$ avec $x_0 = 0.5$ et $h_n = 0.1$ (figures (a) et (b)), $h_n = 0.05$ (figures (c) et (d)) et $h_n = 0.025$ (figures (e) et (f)).

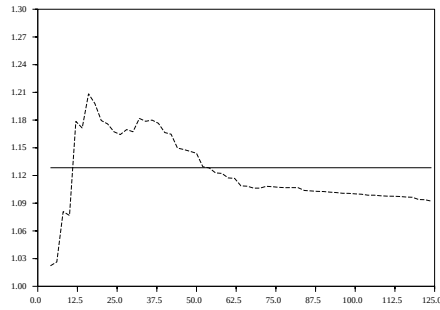
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



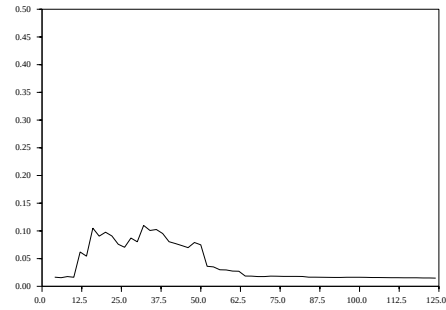
(a) Moyenne empirique



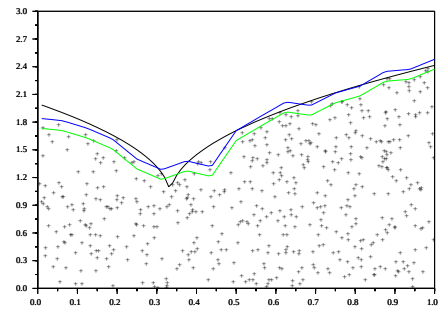
(b) MSE



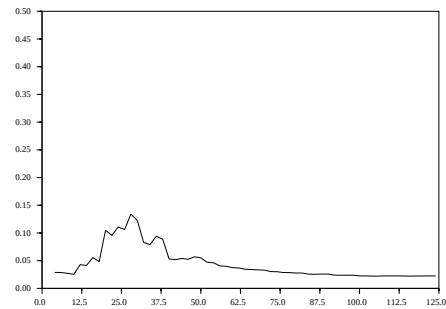
(c) Moyenne empirique



(d) MSE



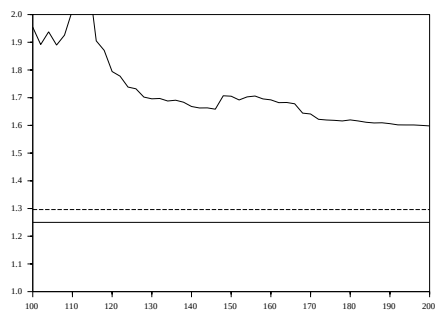
(e) Moyenne empirique



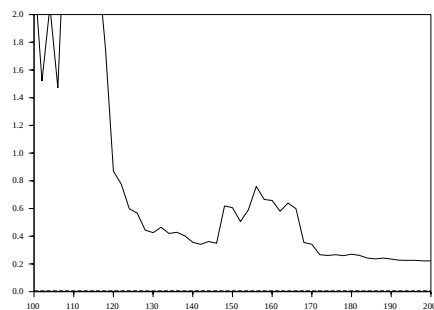
(f) MSE

FIG. 4.16 – Estimation de $g_{p_n}(x_0)$ avec $x_0 = 0.75$ et $h_n = 0.1$ (figures (a) et (b)), $h_n = 0.05$ (figures (c) et (d)) et $h_n = 0.025$ (figures (e) et (f)).

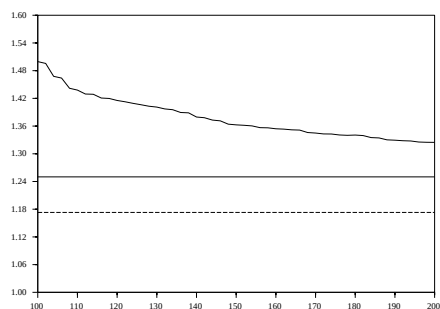
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



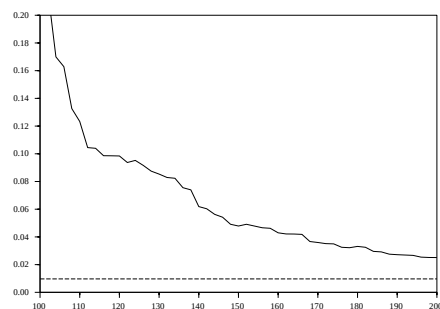
(a) Moyenne empirique



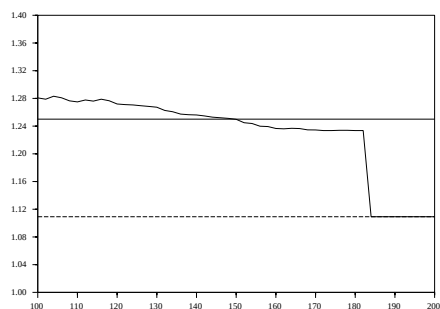
(b) MSE



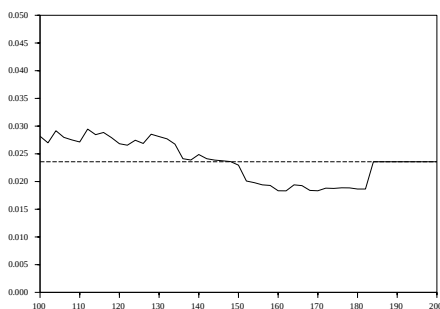
(c) Moyenne empirique



(d) MSE



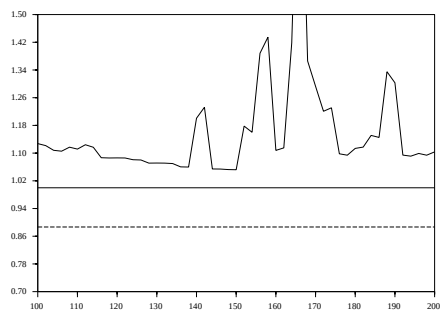
(e) Moyenne empirique



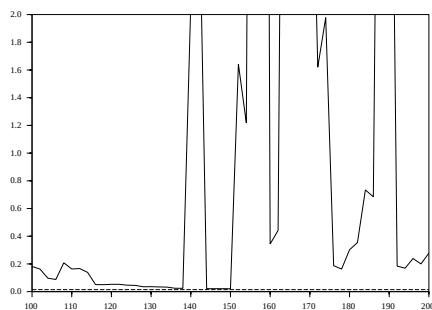
(f) MSE

FIG. 4.17 – Estimation de $g(x_0)$ avec $x_0 = 0.25$ et $h_n = 0.1$ (figures (a) et (b)), $h_n = 0.05$ (figures (c) et (d)) et $h_n = 0.025$ (figures (e) et (f)).

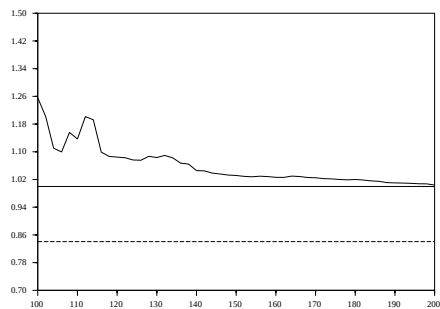
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



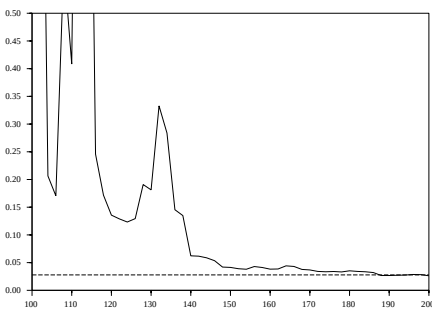
(a) Moyenne empirique



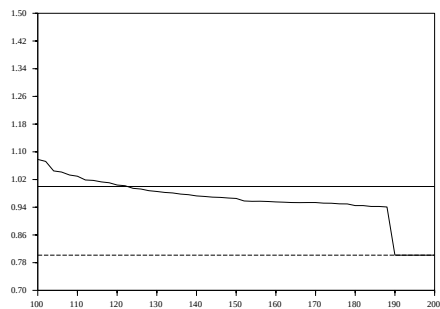
(b) MSE



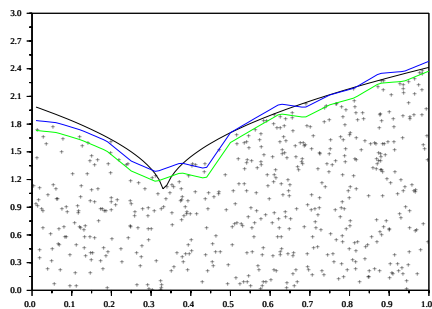
(c) Moyenne empirique



(d) MSE



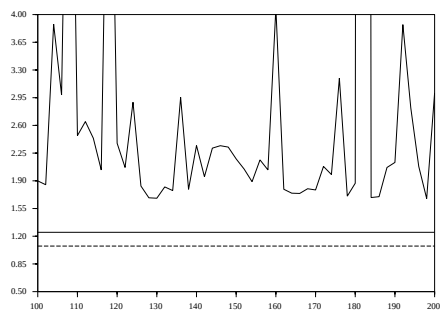
(e) Moyenne empirique



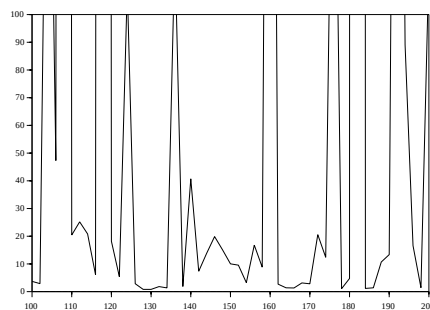
(f) MSE

FIG. 4.18 – Estimation de $g(x_0)$ avec $x_0 = 0.5$ et $h_n = 0.1$ (figures (a) et (b)), $h_n = 0.05$ (figures (c) et (d)) et $h_n = 0.025$ (figures (e) et (f)).

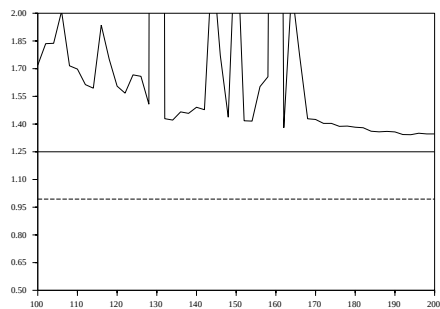
Estimation d'une fonction quantile extrême en utilisant un estimateur de quantile extrême à double seuil



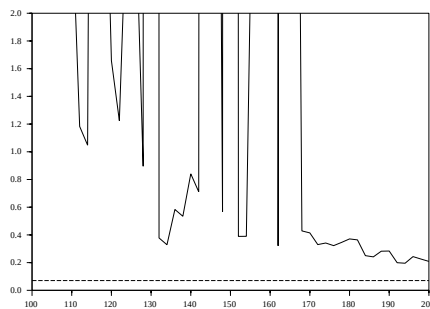
(a) Moyenne empirique



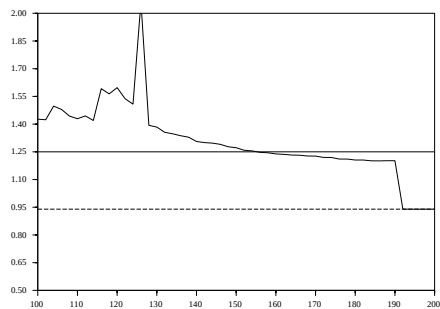
(b) MSE



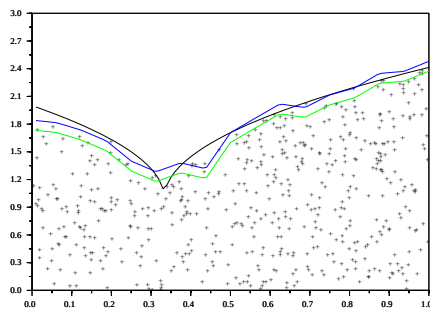
(c) Moyenne empirique



(d) MSE



(e) Moyenne empirique



(f) MSE

FIG. 4.19 – Estimation de $g(x_0)$ avec $x_0 = 0.75$ et $h_n = 0.1$ (figures (a) et (b)), $h_n = 0.05$ (figures (c) et (d)) et $h_n = 0.025$ (figures (e) et (f)).

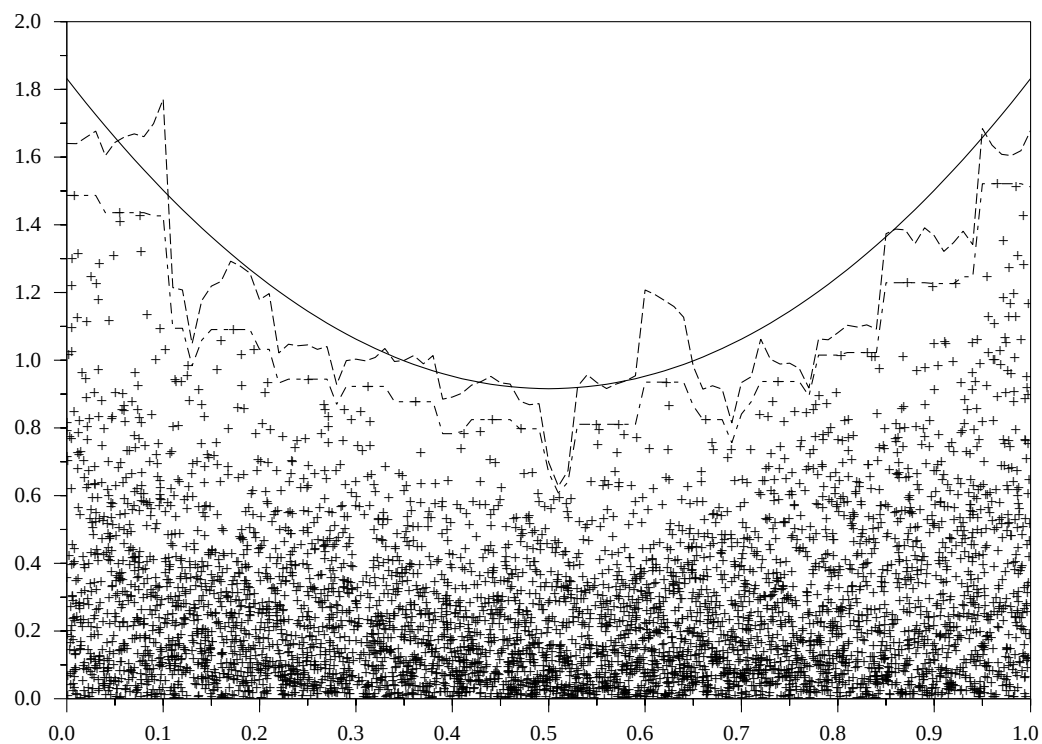


FIG. 4.20 – Comparaison des estimateurs $\hat{g}_{p_n}$ (en pointillé) et $\hat{g}_{p_n}^{max}$ (en pointillé, au dessous de la courbe de $\hat{g}_{p_n}$) avec la vraie fonction g_{p_n} (trait continu).

Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse était l'estimation d'une fonction quantile extrême d'une loi de probabilité à support borné. Pour ce faire, nous avons consacré une grande partie de notre travail à l'étude des valeurs extrêmes d'un échantillon de variables aléatoires réelles et dont la loi admet un point terminal fini.

Nous avons proposé des estimateurs originaux de l'indice de valeur extrême ainsi que du quantile extrême pour une fonction de répartition appartenant au domaine d'attraction de Weibull. Nous les avons ensuite utilisés pour estimer, en un point, une fonction quantile extrême.

Notre étude de ces différents estimateurs ne fait que débiter. Nous dressons ici une liste (non exhaustive) des directions possibles que peuvent prendre nos recherches futures.

Concernant l'estimation de l'indice de valeur extrême, les simulations que nous avons effectuées se sont avérées être très encourageantes pour l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$. C'est donc sur ce dernier que nous voulons concentrer nos recherches.

Il faudra, dans un premier temps, en faire une étude théorique plus approfondie en déterminant notamment sa loi asymptotique. Cela nous permettra de connaître la vitesse de convergence de l'estimateur et ainsi de pouvoir le comparer aux estimateurs classiques de l'indice de valeurs extrêmes (estimateur des moments [25], estimateur proposé par Beirlant et *al.* [4], etc ...). Une piste possible, pour démontrer la convergence en loi de l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$, est de s'appuyer sur la démonstration du résultat de normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\xi}_{1,n}$.

Enfin, à l'inverse de l'estimateur proposé par Beirlant et *al.*, l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ ne tient pas compte de la fonction à variations lentes qui est considéré comme étant une constante. Cela induit un biais important lorsque la fonction à variations lentes tend très lentement vers une constante (comme par exemple pour une loi de Burr). Il sera donc intéressant d'introduire dans l'estimateur un terme de correction de l'erreur apportée par la fonction à variations lentes.

Concernant l'estimation du quantile extrême, les simulations sont très encourageantes lorsque nous utilisons l'estimateur $\hat{\xi}_{3,n}$ pour estimer l'indice de valeur extrême.

Les résultats théoriques que nous avons obtenus sont pour l'instant peu nombreux. Il faudra dans un premier temps déterminer la loi asymptotique de l'estimateur $\hat{x}_{p_n}(\hat{\xi}_{3,n})$. Cela nous permettra notamment de pouvoir comparer sa vitesse de convergence à celle de l'estimateur "naïf" $X_{n,n}$ et de l'estimateur proposé par Dekkers et de Haan [24].

L'estimateur de l'indice de valeur extrême ainsi que celui du quantile extrême ont l'originalité d'être

construits en utilisant les nombres de points τ_{u_n} et τ_{v_n} qui dépassent les seuils aléatoires $u_n X_{n,n}$ et $v_n X_{n,n}$, où (u_n) et (v_n) sont deux suites de $]0, 1[$. Le choix de ces suites influe sur le bon comportement des estimateurs. Le choix de la suite (v_n) s'apparente à celui du nombre k de statistiques d'ordre utilisées pour construire par exemple l'estimateur des moments [25] ou l'estimateur proposé par Beirlant et *al.* [4]. Il existe de nombreux travaux concernant la détermination optimale de ce nombre k (voir Beirlant et *al.* [7], Guillou et *al.* [50]). Nous pourrions les adapter pour choisir la suite (v_n) , ce choix devant être ensuite validée sur des simulations. Concernant la suite (u_n) , nous avons proposé, de manière arbitraire, de la choisir en fonction de la suite (v_n) de telle sorte que $\tau_{v_n}/\tau_{u_n} \approx 4$. Au vu des simulations, ce choix permet d'obtenir un bon comportement des estimateurs. Le choix de la suite (u_n) nous semble donc, dans un premier temps, moins primordial que celui de la suite (v_n) . Nous pourrions aussi effectuer des simulations plus complètes en comparant les estimateurs de l'indice de valeur extrême ou du quantile extrême à d'autres estimateurs plus récents. Nous pourrions également tracer des Hill "horror" plot en dimension 2 afin d'étudier à la fois l'influence de la suite (u_n) et celle de la suite (v_n) sur le comportement des estimateurs.

Les estimateurs de l'indice de valeur extrême et du quantile extrême ne sont valides que dans le domaine d'attraction de Weibull. Leur utilisation n'est donc possible que si nous nous assurons au préalable que l'indice de valeur extrême de la loi étudiée est strictement négatif. Pour ce faire, il existe dans la littérature de nombreux tests (voir Chaouche et Bacro [14], Falk [31]). Il nous semble cependant intéressant d'utiliser les travaux effectués dans cette thèse sur la variable aléatoire τ_{u_n} pour construire de nouveaux tests sur le signe de ξ .

Nous avons, dans cette thèse, proposé une méthode permettant de transformer un échantillon de variables aléatoires réelles dont la loi appartient au domaine d'attraction de Fréchet en un échantillon de variables aléatoires dont la loi appartient au domaine d'attraction de Weibull. Cela nous a permis d'estimer un indice de valeur extrême dans le domaine d'attraction de Fréchet en utilisant $\hat{\xi}_{3,n}$.

En théorie, cette méthode pourrait aussi être utilisée pour estimer un quantile extrême d'une loi appartenant au domaine d'attraction de Fréchet. Cependant l'estimateur ainsi obtenu est de mauvaise qualité, comme nous avons pu en juger sur quelques simulations. Nous souhaiterions donc proposer une nouvelle méthode permettant d'estimer un quantile extrême d'une loi appartenant au domaine d'attraction de Fréchet.

Concernant l'estimation de la fonction quantile extrême, nous avons obtenu uniquement une convergence en probabilité ponctuelle. Il nous paraît important à présent d'obtenir des résultats sur le comportement global de l'estimateur $\hat{g}_{p_n}$, comme par exemple la convergence uniforme de $\hat{g}_{p_n} - g_{p_n}$ vers zéro, la convergence presque-complète, etc ...

De plus, nous souhaiterions établir la convergence en loi pour pouvoir construire des intervalles de confiance.

Pour estimer la fonction quantile extrême en un point x , nous avons considéré uniquement les secondes coordonnées des couples d'observations dont la première coordonnée était suffisamment proche de x . Cette proximité est quantifiée par une suite (h_n) . Comme nous l'avons illustré sur les différentes simulations, le choix de cette suite (h_n) a une influence importante sur le comportement de l'estimateur. Il nous semble donc primordial de proposer une méthode permettant de choisir cette suite de manière optimale.

Il serait enfin très intéressant d'étudier le comportement des estimateurs introduits dans cette thèse sur des données réelles provenant par exemple de la finance ou de la fiabilité.

Annexe A

Démonstration de la Proposition 1.1

D'après le Lemme 1.1, on a, pour $x \in \left[\frac{p}{h_n+1}, \frac{p+1}{h_n+1} \right]$, $p \in \{0, \dots, h_n\}$,

$$H_n(y, x) = 2(h_n + 1) \left(b_{-1}(y)e_{-1}(x) + b_0(y)e_0(x) + \sum_{j=0}^{k'_n-1} b_{i_j}(y)e_{i_j}(x) \right),$$

où $i_j = 2^{k'_n-j-1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{j+1}} \right\rfloor$. Pour ne pas alourdir cette démonstration, on calcule la fonction noyau H_n uniquement dans le cas où $y \in [0, \gamma_n[$, la démonstration étant similaire si $y \in [(2i-1)\gamma_n, (2i+1)\gamma_n[$, $i = 1, \dots, h_n$ et si $y \in [1 - \gamma_n, 1]$.

• Si $y \in [0, \gamma_n[$ et si $x \in J_{h_n+1}$, on a :

$$H_n(y, x) = 2(h_n + 1) \left[1 - x + b_{2^{k'_n-1}}(y)e_{2^{k'_n-1}}(x) + \dots + b_1(y)e_1(x) \right].$$

Comme $y \in [0, \gamma_n[$, on a pour tout $j \in \{1, \dots, k'_n\}$

$$b_{2^{k'_n-j}}(y) = -\frac{1}{2}. \quad (\text{A.1})$$

De plus, puisque $x \in J_{h_n+1}$, on sait que $x \in J_{2^{k'_n-j+1}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k'_n\}$. On en déduit que pour $j \in \{1, \dots, k'_n\}$

$$e_{2^{k'_n-j}}(x) = 2^{k'_n-j+1}x, \quad (\text{A.2})$$

puisque l'indice de l'intervalle $J_{2^{k'_n-j+1}}$ est un nombre pair. Les égalités (A.1) and (A.2) impliquent que pour $y \in [0, \gamma_n[$ et $x \in J_{h_n+1}$

$$H_n(y, x) = 2(h_n + 1) \left[1 - x - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k'_n-1} 2^{k'_n-i} x \right] = 2(h_n + 1)[1 - (h_n + 1)x]. \quad (\text{A.3})$$

• Si $y \in [0, \gamma_n[$ et si $x \notin J_{h_n+1}$, il existe un entier i appartenant à l'ensemble $\{0, \dots, k'_n - 1\}$ tel que

Démonstration de la Proposition 1.1

$x \in \left[\frac{p}{h_n+1}, \frac{p+1}{h_n+1} \right[$ où $p \in \{2^i, \dots, 2^{i+1} - 1\}$. Ainsi, il existe un entier i tel que $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{p}{2^i} \right\rfloor$ sont des entiers strictement positifs et $\left\lfloor \frac{p}{2^{i+1}} \right\rfloor = \dots = \left\lfloor \frac{p}{2^{k_n}} \right\rfloor = 0$. On en déduit que :

$$b_{2^{k'_n-1} + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}(y) = \dots = b_{2^{k'_n-i} + \left\lfloor \frac{p}{2^i} \right\rfloor}(y) = 0, \quad (\text{A.4})$$

et

$$b_{2^{k'_n-i-1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{i+1}} \right\rfloor}(y) = \dots = b_{1 + \left\lfloor \frac{p}{2^{k_n}} \right\rfloor}(y) = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.5})$$

De plus, puisque $x \in \left[\frac{p}{h_n+1}, \frac{p+1}{h_n+1} \right[$, $p \in \{2^i, \dots, 2^{i+1} - 1\}$, on a :

$$x \in J_{2^{k'_n-i} + \left\lfloor \frac{p}{2^i} \right\rfloor} = J_{2^{k'_n-i+1}} \text{ et pour } j > i+1, x \in J_{2^{k'_n-j+1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{j-1}} \right\rfloor} = J_{2^{k'_n-j+1}}.$$

On en déduit que :

$$e_{2^{k'_n-i+1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{i+1}} \right\rfloor}(x) = 2^{k'_n-i} \left(\frac{1}{2^{k'_n-i+1}} - x \right) \text{ et pour } j > i+1, e_{2^{k'_n-j+1} + \left\lfloor \frac{p}{2^{j-1}} \right\rfloor}(x) = 2^{k'_n-j+1}. \quad (\text{A.6})$$

Les égalités (A.4) à (A.6) impliquent que pour $y \in [0, \gamma_n[$ et $x \notin J_{h_n+i}$,

$$H_n(y, x) = 2(h_n + 1) \left[1 - x - \frac{1}{2} 2^{k'_n-i} \left(\frac{1}{2^{k'_n-i+1}} - x \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=i+2}^{k'_n} 2^{k'_n-j-1} x \right] = 0 \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, d'après (A.3) et (A.7), si $y \in [0, \gamma_n[$, on a :

$$H_n(y, x) = \begin{cases} 2(h_n + 1)(1 - (h_n + 1)x) & \text{si } x \in J_{h_n+1}. \\ 0 & \text{si } x \notin J_{h_n+1}, \end{cases}$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Annexe B

Etude des fonctions $H(\theta)$ et $G(\theta)$

Nous allons démontrer les deux résultats suivants :

Théorème B.1 Posons

$$G(\theta) = \frac{A^{-\theta} - B^{-\theta}}{C^{-\theta} - D^{-\theta}}.$$

G est prolongeable par continuité en $\theta = 0$. De plus, si $B < D < A < C$, alors :

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} G(\theta) = 0 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow +\infty} G(\theta) = +\infty,$$

et si $B = D < A < C$, alors :

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} G(\theta) = 0 \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow +\infty} G(\theta) = 1.$$

Enfin, si $B \leq D < A < C$, G est strictement croissante.

Théorème B.2 Soit $0 < A < B < C$ et $v < u$. La fonction H définie sur $(-\infty, 0[$ par

$$H(\theta) = \frac{v[B^{-\theta} - A^{-\theta}] - u[C^{-\theta} - A^{-\theta}]}{B^{-\theta} - C^{-\theta}}$$

est strictement croissante.

Pour démontrer ces théorèmes, nous allons utiliser l'inégalité classique suivante :

Lemme B.1 Soit p_1, p_2 et p_3 des réels strictement positifs tels que $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1$. Alors, pour tout réels a, b et c strictement positifs,

$$\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3} \geq abc.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si $a^{p_1} = b^{p_2} = c^{p_3}$.

Ce lemme est une conséquence d'un résultat connu sur les fonctions concaves :

Lemme B.2 Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $1/p + 1/q = 1$. Si φ est une fonction strictement concave, alors pour tout réels u et v , on a :

$$\frac{1}{p}\varphi(u) + \frac{1}{q}\varphi(v) \leq \varphi\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right). \quad (\text{B.1})$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si $u = v$.

Démonstration – φ étant une fonction concave, la droite passant par les points $(u, \varphi(u))$ et $(v, \varphi(v))$ est au-dessous de la courbe de φ sur l'intervalle $[u, v]$. On montre facilement que cette droite a pour équation :

$$y = \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{v - u}x + \frac{v\varphi(u) - u\varphi(v)}{v - u}.$$

Ainsi, en remarquant que $u/p + v/q \in [u, v]$ puisque $1/p + 1/q = 1$, on a :

$$\frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{v - u} \left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q} \right) + \frac{v\varphi(u) - u\varphi(v)}{v - u} \leq \varphi \left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q} \right).$$

En développant le membre de gauche de l'inégalité et en utilisant le fait que $1/p + 1/q = 1$, on en déduit l'inégalité (B.1). De plus, si $u = v$, on a évidemment que $\varphi(u)/p + \varphi(v)/q = \varphi(u/p + v/q)$. Réciproquement, φ étant une fonction strictement concave, si $\varphi(u)/p + \varphi(v)/q = \varphi(u/p + v/q)$ alors $u/p + v/q = u$ ou $u/p + v/q = v$, ce qui n'est possible que si $u = v$. ■

Démonstration du Lemme B.1 – Appliquons le résultat du Lemme B.2 à la fonction $\varphi(x) = \ln(x)$ avec $u = a^{p_1}$, $v = (p_4 b^{p_2})/p_2 + (p_4 c^{p_3})/p_3$, $p = p_1$ et $q = p_4$, où p_4 est tel que $1/p_4 = 1/p_2 + 1/p_3$. On a :

$$\frac{\ln(a^{p_1})}{p_1} + \frac{\ln[(p_4 b^{p_2})/p_2 + (p_4 c^{p_3})/p_3]}{p_4} \leq \ln \left(\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3} \right). \quad (\text{B.2})$$

En appliquant à nouveau le Lemme B.2 à la fonction $\varphi(x) = \ln(x)$ avec $u = b^{p_2}$, $v = c^{p_3}$, $p = p_2/p_4$ et $q = p_3/p_4$, on obtient :

$$\frac{p_4}{p_2} \ln(b^{p_2}) + \frac{p_4}{p_3} \ln(c^{p_3}) \leq \ln \left(\frac{p_4}{p_2} b^{p_2} + \frac{p_4}{p_3} c^{p_3} \right). \quad (\text{B.3})$$

Les inégalités (B.2) et (B.3) impliquent que

$$\ln(abc) = \frac{\ln(a^{p_1})}{p_1} + \frac{\ln(b^{p_2})}{p_2} + \frac{\ln(c^{p_3})}{p_3} \leq \ln \left(\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3} \right).$$

La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit que :

$$abc \leq \frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3}.$$

De plus, si $a^{p_1} = b^{p_2} = c^{p_3}$ alors, $abc = a^{p_1}/p_1 + b^{p_2}/p_2 + c^{p_3}/p_3$. Réciproquement, si $abc = a^{p_1}/p_1 + b^{p_2}/p_2 + c^{p_3}/p_3$ alors,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\ln(a^{p_1})}{p_1} + \frac{\ln[(p_4 b^{p_2})/p_2 + (p_4 c^{p_3})/p_3]}{p_4} - \ln \left(\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3} \right) \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{p_2} \ln(b^{p_2}) + \frac{1}{p_3} \ln(c^{p_3}) - \frac{1}{p_4} \ln \left(\frac{p_4 b^{p_2}}{p_2} + \frac{p_4 c^{p_3}}{p_3} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique d'après le Lemme B.2 que $a^{p_1} = b^{p_2} = c^{p_3}$. ■

Démonstration du Théorème B.1 – Démontrons dans un premier temps que :

$$\lim_{\theta \uparrow 0^-} G(\theta) = \lim_{\theta \downarrow 0^+} G(\theta) = \frac{\ln(B/A)}{\ln(D/C)}, \quad (\text{B.4})$$

ce qui démontre que G est prolongeable par continuité en $\theta = 0$. On remarque que :

$$\frac{A^{-\theta} - B^{-\theta}}{C^{-\theta} - D^{-\theta}} = \frac{\exp[-\theta \ln(A)] - \exp[-\theta \ln(B)]}{\exp[-\theta \ln(C)] - \exp[-\theta \ln(D)]}.$$

Un développement limité de l'exponentielle implique que :

$$\frac{A^{-\theta} - B^{-\theta}}{C^{-\theta} - D^{-\theta}} = \frac{\ln(B) - \ln(A) + O(\theta)}{\ln(D) - \ln(C) + O(\theta)},$$

ce qui montre (B.4). A présent, comme $A/C < 1$, $B/A < 1$ et $D/C < 1$, on a :

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} G(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \left(\frac{A}{C} \right)^{-\theta} \frac{1 - (B/A)^{-\theta}}{1 - (D/C)^{-\theta}} = 0.$$

Si de plus, $B < D$, alors,

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} G(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \left(\frac{B}{D} \right)^{-\theta} \frac{(A/B)^{-\theta} - 1}{(C/D)^{-\theta} - 1} = +\infty,$$

et si $B = D$,

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} G(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{(A/B)^{-\theta} - 1}{(C/D)^{-\theta} - 1} = 1.$$

Pour terminer la démonstration, montrons que pour tout $\theta \neq 0$, $G'(\theta) > 0$. Pour $\theta \neq 0$, on a :

$$G'(\theta) = \frac{[-\ln(A)A^{-\theta} + \ln(B)B^{-\theta}](C^{-\theta} - D^{-\theta}) - (A^{-\theta} - B^{-\theta})[-\ln(C)C^{-\theta} + \ln(D)D^{-\theta}]}{(C^{-\theta} - D^{-\theta})^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (C^{-\theta} - D^{-\theta})^2 G'(\theta) &= -(AC)^{-\theta} \ln(A) + (AD)^{-\theta} \ln(A) + (BC)^{-\theta} \ln(B) - (BD)^{-\theta} \ln(B) \\ &+ (AC)^{-\theta} \ln(C) - (AD)^{-\theta} \ln(D) - (BC)^{-\theta} \ln(C) + (BD)^{-\theta} \ln(D). \end{aligned}$$

Comme $B \leq D < A < C$. On a $\ln(B) \leq \ln(D) < \ln(A) < \ln(C)$. Posons :

$$\begin{aligned} \ln(B) &= u, \\ \ln(D) &= u + v, \quad v \geq 0, \\ \ln(A) &= u + v + w, \quad w > 0, \\ \ln(C) &= u + v + w + z, \quad z > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (C^{-\theta} - D^{-\theta})^2 G'(\theta) &= v \exp[-\theta(2u + v)] \\ &+ w \exp[-\theta(2u + 2v + w)] + z \exp[-\theta(2u + 2v + 2w + z)] \\ &- (v + w + z) \exp[-\theta(2u + v + w + z)]. \end{aligned}$$

Pour démontrer que $G'(\theta) > 0$, il suffit donc de démontrer que :

$$\begin{aligned} &\frac{v}{v + w + z} \exp[-\theta(2u + v)] + \frac{w}{v + w + z} \exp[-\theta(2u + 2v + w)] \\ &+ \frac{z}{v + w + z} \exp[-\theta(2u + 2v + 2w + z)] > \exp[-\theta(2u + v + w + z)]. \end{aligned}$$

Posons :

$$\frac{1}{p_1} = \frac{v}{v+w+z}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{w}{v+w+z}, \quad \frac{1}{p_3} = \frac{z}{v+w+z},$$

$$a = \exp \left[-\theta \frac{(2u+v)v}{v+w+z} \right], \quad b = \exp \left[-\theta \frac{(2u+2v+w)w}{v+w+z} \right] \quad \text{et} \quad c = \exp \left[-\theta \frac{(2u+2v+2w+z)z}{v+w+z} \right].$$

Ainsi, l'inégalité (B.5) s'écrit :

$$\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3} > \exp[-\theta(2u+v+w+z)].$$

Or, comme $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1$ et que

$$a^{p_1} = \exp[-\theta(2u+v)] \neq \exp[-\theta(2u+2v+w)] = b^{p_2},$$

on a, d'après le Lemme B.1 que :

$$\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} + \frac{c^{p_3}}{p_3} > abc,$$

avec

$$abc = \exp \left[-\theta \frac{(2u+v)v + (2u+2v+w)w + (2u+2v+2w+z)z}{v+w+z} \right].$$

En remarquant que $(2u+v)v + (2u+2v+w)w + (2u+2v+2w+z)z = (2u+v+w+z)(v+w+z)$, on démontre l'inégalité (B.5), ce qui conclut la démonstration. ■

Démonstration du Théorème B.2 – Calculons la dérivée de H . On a pour tout $\theta < 0$,

$$\begin{aligned} (B^{-\theta} - C^{-\theta})^2 H'(\theta) &= \{v[-\ln(B)B^{-\theta} + \ln(A)A^{-\theta}] - u[-\ln(C)C^{-\theta} + \ln(A)A^{-\theta}]\}(B^{-\theta} - C^{-\theta}) \\ &\quad - \{v[B^{-\theta} - A^{-\theta}] - u[C^{-\theta} - A^{-\theta}]\}[\ln(C)C^{-\theta} - \ln(B)B^{-\theta}] \\ &= (u-v)\{(AB)^{-\theta}[\ln(B) - \ln(A)] + (BC)^{-\theta}[\ln(C) - \ln(B)] \\ &\quad + (AC)^{-\theta}[\ln(A) - \ln(C)]\}. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, posons $\ln(A) = r$, $\ln(B) = r+s$, $s > 0$ et $\ln(C) = r+s+t$, $t > 0$. On a donc,

$$(B^{-\theta} - C^{-\theta})^2 H'(\theta) = s \exp[-\theta(2r+s)] + t \exp[-\theta(2r+2s+t)] + (s+t) \exp[-\theta(2r+s+t)].$$

Nous allons démontrer que l'on a l'inégalité :

$$\frac{s}{s+t} \exp[-\theta(2r+s)] + \frac{t}{s+t} \exp[-\theta(2r+2s+t)] > \exp[-\theta(2r+s+t)]. \quad (\text{B.5})$$

Posons

$$\frac{1}{p_1} = \frac{s}{s+t}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{t}{s+t}, \quad a = \exp \left[-\theta \frac{(2r+s)s}{s+t} \right] \quad \text{et} \quad b = \exp \left[-\theta \frac{(2r+2s+t)t}{s+t} \right].$$

L'inégalité (B.5) se réécrit donc :

$$\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} > \exp[-\theta(2r+s+t)].$$

Comme $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ et $a^{p_1} \neq b^{p_2}$, on a, d'après le Lemme B.1

$$\frac{a^{p_1}}{p_1} + \frac{b^{p_2}}{p_2} > ab,$$

avec

$$ab = \exp \left[-\theta \frac{(2r+s)s + (2r+2s+t)t}{s+t} \right].$$

En remarquant que $(s+t)(2r+s+t) = (2r+s)s + (2r+2s+t)t$, on en déduit l'inégalité (B.5), ce qui conclut la démonstration. ■

Annexe C

Démonstration du Théorème 3.8

Nous allons ici démontrer le Théorème 3.8. Pour ce faire, on établit dans un premier temps la loi asymptotique du couple

$$\left(\frac{\tau_{u_n}}{\alpha_n} - \alpha_n, \frac{\tau_{v_n}}{\beta_n} - \beta_n \right)^t,$$

où A^t désigne la transposée de la matrice A , ce qui, d'après le Lemme 3.6, est équivalent à établir la convergence en loi du couple

$$\left(\frac{\tau'_{u_n}}{\alpha_n} - \alpha_n, \frac{\tau'_{v_n}}{\beta_n} - \beta_n \right)^t,$$

où

$$\tau'_{u_n} = \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq u_n x_F\} \text{ et } \tau'_{v_n} = \sum_{i=1}^n I\{X_i \geq v_n x_F\}.$$

On utilise ensuite la δ -méthode pour conclure.

Lemme C.1 Sous l'hypothèse **(A1)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} = l_{u,v}$$

où $l_{u,v} \in]0, 1[$, alors,

$$\left(\frac{\tau_{u_n}}{\alpha_n} - \alpha_n, \frac{\tau_{v_n}}{\beta_n} - \beta_n \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & l_{u,v}^{-1/(2\xi)} \\ l_{u,v}^{-1/(2\xi)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration – Pour démontrer ce résultat, il suffit, d'après le Lemme 3.6, de démontrer que

$$\left(\frac{\tau'_{u_n}}{\alpha_n} - \alpha_n, \frac{\tau'_{v_n}}{\beta_n} - \beta_n \right)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Démonstration du Théorème 3.8

Calculons pour commencer la loi du couple $(\tau'_{u_n}, \tau'_{v_n})^t$. De part le choix effectué pour les suites (u_n) et (v_n) , on a $\tau'_{u_n} \leq \tau'_{v_n}$. Pour $l = 0, \dots, n$ et $k = 0, \dots, l$, on a :

$$\begin{aligned} P[\tau'_{u_n} = k, \tau'_{v_n} = l] &= C_n^l P[X_1 \geq v_n x_F, \dots, X_l \geq v_n x_F, X_{l+1} < v_n x_F, \dots, X_n < v_n x_F] \\ &= C_n^l C_l^k P[X_1 \geq u_n x_F, \dots, X_k \geq u_n x_F, v_n x_F \leq X_{k+1} \leq u_n x_F, \dots, \\ &\quad v_n x_F \leq X_l \leq u_n x_F, X_{l+1} < v_n x_F, \dots, X_n < v_n x_F] \\ &= C_n^l C_l^k [1 - F(u_n x_F)]^k [F(u_n x_F) - F(v_n x_F)]^{l-k} [F(v_n x_F)]^{n-l} \\ &= C_n^l C_l^k \left(\frac{\alpha_n^2}{n}\right)^k \left(\frac{\beta_n^2}{n} - \frac{\alpha_n^2}{n}\right)^{l-k} \left(1 - \frac{\beta_n^2}{n}\right)^{n-l}. \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer la fonction caractéristique du couple $(\tau'_{u_n}, \tau'_{v_n})^t$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(s, t) &= E[\exp(is\tau'_{u_n} + it\tau'_{v_n})] \\ &= \sum_{l=0}^n C_n^l e^{itl} \left(1 - \frac{\beta_n^2}{n}\right)^{n-l} \left[\sum_{k=0}^l C_l^k \left(e^{is\frac{\alpha_n^2}{n}}\right)^k \left(\frac{\beta_n^2}{n} - \frac{\alpha_n^2}{n}\right)^{l-k} \right] \\ &= \sum_{l=0}^n C_n^l e^{itl} \left(e^{is\frac{\alpha_n^2}{n}} + \frac{\beta_n^2}{n} - \frac{\alpha_n^2}{n}\right)^l \left(1 - \frac{\beta_n^2}{n}\right)^{n-l} \\ &= \left[1 + \frac{\beta_n^2}{n}(e^{it} - 1) + e^{it}\frac{\alpha_n^2}{n}(e^{is} - 1)\right]^n. \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la fonction caractéristique du couple $(\tau'_{u_n}/\alpha_n - \alpha_n, \tau'_{v_n}/\beta_n - \beta_n)^t$:

$$\begin{aligned} \phi_n(s, t) &= E \left[\exp \left(is \frac{\tau'_{u_n}}{\alpha_n} - is\alpha_n + it \frac{\tau'_{v_n}}{\beta_n} - it\beta_n \right) \right] = \exp(-is\alpha_n) \exp(-it\beta_n) \varphi_n \left(\frac{s}{\alpha_n}, \frac{t}{\beta_n} \right) \\ &= \left[\exp \left(-is \frac{\alpha_n}{n} \right) \exp \left(-it \frac{\beta_n}{n} \right) \right]^n \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\beta_n^2}{n} \left[\exp \left(\frac{it}{\beta_n} \right) - 1 \right] + \exp \left(\frac{it}{\beta_n} \right) \frac{\alpha_n^2}{n} \left[\exp \left(\frac{is}{\alpha_n} \right) - 1 \right] \right\}^n. \end{aligned}$$

Posons

$$A_n = \exp \left(-is \frac{\alpha_n}{n} \right) \exp \left(-it \frac{\beta_n}{n} \right)$$

et

$$B_n = 1 + \frac{\beta_n^2}{n} \left[\exp \left(\frac{it}{\beta_n} \right) - 1 \right] + \exp \left(\frac{it}{\beta_n} \right) \frac{\alpha_n^2}{n} \left[\exp \left(\frac{is}{\alpha_n} \right) - 1 \right].$$

Le fait que les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** implique que $\alpha_n \rightarrow \infty$ et $\alpha_n/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (et de même en remplaçant α_n par β_n). Ainsi, on a les égalités :

$$\exp \left(-\frac{is\alpha_n}{n} \right) = 1 - is\frac{\alpha_n}{n} + \frac{s^2}{2} \frac{\alpha_n^2}{n^2} + o \left(\frac{\alpha_n^2}{n^2} \right), \quad \exp \left(-\frac{it\beta_n}{n} \right) = 1 - it\frac{\beta_n}{n} + \frac{t^2}{2} \frac{\beta_n^2}{n^2} + o \left(\frac{\beta_n^2}{n^2} \right),$$

$$\exp \left(\frac{is}{\alpha_n} \right) = 1 + \frac{is}{\alpha_n} - \frac{s^2}{2\alpha_n^2} + o(\alpha_n^{-2}) \quad \text{et} \quad \exp \left(\frac{it}{\beta_n} \right) = 1 + \frac{it}{\beta_n} - \frac{t^2}{2\beta_n^2} + o(\beta_n^{-2}).$$

Démonstration du Théorème 3.8

En remplaçant dans les expressions de A_n et B_n , on en déduit que :

$$A_n = 1 - it \frac{\beta_n}{n} - is \frac{\alpha_n}{n} - st \frac{\alpha_n \beta_n}{n^2} + \frac{t^2}{2} \frac{\beta_n^2}{n^2} + \frac{s^2}{2} \frac{\alpha_n^2}{n^2} + o\left(\frac{\alpha_n^2}{n^2}\right) + o\left(\frac{\beta_n^2}{n^2}\right)$$

et

$$B_n = 1 + is \frac{\alpha_n}{n} + it \frac{\beta_n}{n} - st \frac{\alpha_n}{n \beta_n} - \frac{s^2}{2n} - \frac{t^2}{2n} + o(n^{-1}).$$

Ainsi, en développant et en regroupant les termes, on obtient :

$$\phi_n(s, t) = [A_n \times B_n]^n = \left[1 - st \frac{\alpha_n}{n \beta_n} - \frac{s^2}{2n} - \frac{t^2}{2n} + R_n + i S_n \right]^n,$$

où $R_n = o(n^{-1})$ et $S_n = o(n^{-1})$. En remarquant que $\alpha_n/\beta_n \rightarrow l_{u,v}^{-1/(2\xi)}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on montre que

$$\phi_n(s, t) \sim \exp \left(-st l_{u,v}^{-1/(2\xi)} - s^2/2 - t^2/2 \right),$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Pour conclure la démonstration du Théorème 3.8, nous allons utiliser la δ -méthode dont l'énoncé est donné ci-dessous (pour une démonstration de ce résultat, voir par exemple [8, Exemple 29.1, p. 402]).

Proposition C.1 Soit $(X_n, Y_n)^t$ une suite de couples de variables aléatoires de $\mathbb{R}^2$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe une suite (v_n) telle que

$$v_n(X_n - \alpha, Y_n - \beta)^t \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y).$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point (α, β) de dérivées partielles f_1 et f_2 . Alors, si $f_1(\alpha, \beta) \neq 0$ et $f_2(\alpha, \beta) \neq 0$,

$$v_n[f(X_n, Y_n) - f(\alpha, \beta)] \xrightarrow{\mathcal{L}} f_1(\alpha, \beta)X + f_2(\alpha, \beta)Y.$$

Avant d'appliquer la δ -méthode au Lemme C.1, nous devons démontrer le lemme suivant :

Lemme C.2 Sous l'hypothèse **(A2)**, si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que

$$\frac{1 - u_n}{1 - v_n} = l_{u,v} + \eta_n,$$

où $l_{u,v}$ est une constante appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et η_n est une suite vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \max\{\eta_n, b[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]\} = 0,$$

alors, on a les convergences suivantes :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} - l_{u,v}^{1/(2\xi)} \right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (\text{C.1})$$

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left\{ \ln \left(\sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} \right) - \ln[l_{u,v}^{1/(2\xi)}] \right\} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (\text{C.2})$$

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[-\frac{\ln(l_{u,v})}{\ln[(1 - v_n)(1 - u_n)]} - 1 \right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (\text{C.3})$$

Démonstration du Théorème 3.8

Démonstration – On remarque dans un premier temps que les convergences (C.1) et (C.2) sont équivalentes. En effet, comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} = l_{u,v}^{1/(2\xi)},$$

on en déduit que

$$\ln \left(\sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} \right) - \ln[l_{u,v}^{1/(2\xi)}] \sim l_{u,v}^{-1/(2\xi)} \sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} - 1,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} - l_{u,v}^{1/(2\xi)} \right] &\sim l_{u,v}^{1/(2\xi)} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \\ &\times \left\{ \ln \left(\sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} \right) - \ln[l_{u,v}^{1/(2\xi)}] \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer (par exemple) que les convergences (C.2) et (C.3) sont vraies. Démontrons pour commencer la convergence (C.2). On a :

$$\begin{aligned} &\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\ln \left(\sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} \right) - \ln[l_{u,v}^{1/(2\xi)}] \right] \\ &= \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[-\frac{1}{2\xi} \ln \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right) + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\ell[x_F^{-1}(1 - v_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]} \right] - \ln[l_{u,v}^{1/(2\xi)}] \right] \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2\xi} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\ln \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right) + \ln(l_{u,v}) \right]}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \ln \left[\frac{\ell[x_F^{-1}(1 - v_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]} \right]}_{(b)}. \end{aligned}$$

Intéressons nous au terme (a). On a

$$\ln \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right) = -\ln \left[l_{u,v} \left(1 + \frac{\eta_n}{l_{u,v}} \right) \right] = -\ln(l_{u,v}) - \ln \left(1 + \frac{\eta_n}{l_{u,v}} \right)$$

Donc, par hypothèse,

$$(a) = \frac{1}{2\xi} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \ln \left(1 + \frac{\eta_n}{l_{u,v}} \right) \sim \frac{1}{2\xi l_{u,v}} \eta_n \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Intéressons nous maintenant au terme (b). D'après l'hypothèse (A2),

$$\ln \left[\frac{\ell[x_F^{-1}(1 - v_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]} \right] = \ln \left[\frac{\lambda_n \ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]}{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]} \right] \sim b[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}] K_\rho(\lambda_n),$$

avec $\lambda_n = (1 - u_n)/(1 - v_n)$. Or, comme $\lambda_n \rightarrow l_{u,v} \in]0, 1[$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on sait que $K_\rho(\lambda_n)$ converge vers une constante strictement positive. Par hypothèse, (b) converge donc vers zéro.

Enfin, démontrons la convergence (C.3). On a :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[-\frac{\ln(l_{u,v})}{\ln[(1 - v_n)(1 - u_n)]} - 1 \right] = \frac{\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]}}{\ln[(1 - v_n)/(1 - u_n)]} \left[-\ln(l_{u,v}) - \ln \left(\frac{1 - v_n}{1 - u_n} \right) \right].$$

Démonstration du Théorème 3.8

Comme $-\{\ln[(1 - v_n)/(1 - u_n)] + \ln(l_{u,v})\} \sim l_{u,v}^{-1} \eta_n$, la convergence (C.3) est évidente. ■

Nous pouvons à présent conclure la démonstration du Théorème 3.8 en appliquant la δ -méthode au Lemme C.1.

Démonstration du Théorème 3.8 – Pour simplifier les notations posons

$$X_n = \frac{\tau_{u_n}}{n[1 - F(u_n x_F)]} \text{ et } Y_n = \frac{\tau_{v_n}}{n\sqrt{[1 - F(u_n x_F)][1 - F(v_n x_F)]}}.$$

On a donc démontré dans le Lemme C.1 que :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left(X_n - 1, Y_n - \sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

avec

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & l_{u,v}^{-1/(2\xi)} \\ l_{u,v}^{-1/(2\xi)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Or,

$$\begin{aligned} & \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left(X_n - 1, Y_n - \sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} \right) \\ &= \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left(X_n - 1, Y_n - l_{u,v}^{1/(2\xi)} \right) - \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left(0, \sqrt{\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)}} - l_{u,v}^{1/(2\xi)} \right). \end{aligned}$$

D'après la convergence (C.1) du Lemme C.2, on en déduit que :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left(X_n - 1, Y_n - l_{u,v}^{1/(2\xi)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

On applique à cette convergence en loi, la δ -méthode avec $f(x, y) = \ln(x/y)$. On obtient :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\ln \left(\frac{X_n}{Y_n} \right) + \frac{1}{2\xi} \ln(l_{u,v}) \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

avec $\sigma^2 = 1 - l_{u,v}^{-1/\xi}$. Or,

$$\begin{aligned} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\ln \left(\frac{X_n}{Y_n} \right) + \frac{1}{2\xi} \ln(l_{u,v}) \right] &= \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \\ &\times \left[\ln \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - F(v_n x_F)}{1 - F(u_n x_F)} \right) + \frac{1}{2\xi} \ln(l_{u,v}) \right]. \end{aligned}$$

D'après la convergence (C.2) du Lemme C.2, on en déduit que :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\ln \left(\frac{\tau_{u_n}}{\tau_{v_n}} \right) + \frac{1}{\xi} \ln(l_{u,v}) \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

En multipliant par $-1/\ln(l_{u,v})$, on obtient :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[-\frac{\ln(\tau_{u_n}/\tau_{v_n})}{\ln(l_{u,v})} - \frac{1}{\xi} \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{\ln^2(l_{u,v})} \right).$$

Démonstration du Théorème 3.8

Or,

$$\begin{aligned} & \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[-\frac{\ln(\tau_{u_n}/\tau_{v_n})}{\ln(l_{u,v})} - \frac{1}{\xi} \right] \\ = & \frac{\ln[(1 - u_n)/(1 - v_n)]}{\ln(l_{u,v})} \sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left[\frac{1}{\hat{\xi}_n} + \frac{\ln(l_{u,v})}{\ln[(1 - v_n)/(1 - u_n)]} \frac{1}{\xi} \right]. \end{aligned}$$

On déduit du fait que $\ln[(1 - u_n)/(1 - v_n)]/\ln(l_{u,v}) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et de la convergence (C.3) du Lemme C.2 que :

$$\sqrt{n[1 - F(u_n x_F)]} \left(\frac{1}{\hat{\xi}_n} - \frac{1}{\xi} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{\ln^2(l_{u,v})} \right).$$

En utilisant à nouveau la δ -méthode sur ce dernier résultat avec $f(x) = 1/x$, on conclut la démonstration du Théorème. ■

Annexe D

Démonstration du Lemme 4.1

Avant de démontrer le Lemme 4.1, nous allons prouver les résultats suivants :

Lemme D.1

- i) Si $p_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors, $x_F - x_{p_n} \sim p_n^{-\xi} L(p_n^{-1})$, où L est une fonction à variations lentes.
- ii) Sous les hypothèses **(A1)**, **(B)** et si (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)**, alors $x_F - \gamma_{u_n} \sim x_F(1 - u_n)$, où γ_{u_n} est défini par $1 - F(\gamma_{u_n}) = E(\tau_{u_n})/n$.

Démonstration –

i) D'après l'expression de F , on a :

$$p_n^{-1} = [1 - F(x_{p_n})]^{-1} = G[(x_F - x_{p_n})^{-1}],$$

où G est une fonction à variations régulières d'indice $-1/\xi$. Ainsi, d'après le Lemme 2.2, il existe une fonction à variations régulières d'indice $-\xi$ notée H telle que $(x_F - x_{p_n})^{-1} \sim H(p_n^{-1})$. On en déduit que :

$$(x_F - x_{p_n})^{-1} \sim p_n^\xi L^*(p_n^{-1}),$$

où L^* est une fonction à variations lentes. En posant $L = 1/L^*$, on conclut la démonstration de i).

ii) Par définition,

$$n/E(\tau_{u_n}) = [1 - F(\gamma_{u_n})]^{-1} = (x_F - \gamma_{u_n})^{1/\xi} \{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]\}^{-1} = G[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}],$$

où G est une fonction à variations régulières d'indice $-1/\xi$. De même,

$$[1 - F(u_n x_F)]^{-1} = G[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}].$$

D'après le Théorème 3.1, on a

$$G[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}] \sim G[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}].$$

Or, d'après le Lemme 2.2, on sait qu'il existe une fonction H à variations régulières d'indice $-\xi$ telle que :

$$H(G[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]) \sim (x_F - \gamma_{u_n})^{-1} \text{ et } H(G[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]) \sim x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}.$$

Le Lemme 2.3 ii) conclut la démonstration. ■

Démonstration du Lemme 4.1

Lemme D.2 Sous les hypothèses **(A1)**, **(B)**, si (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)** et s'il existe $\delta > 0$ tel que $n^{-\delta} < np_n < 1$, alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{np_n}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-\xi} \left\{ \frac{\ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}]}{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]} \right\}^{\xi} = 0.$$

Démonstration – D'après le Lemme 2.3 ii) et le Lemme D.1 i), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]}{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]} = 1.$$

Ainsi, d'après le Théorème 3.1 et l'expression de F donnée en (4.4),

$$\left[\frac{np_n}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-\xi} \left\{ \frac{\ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}]}{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]} \right\}^{\xi} \sim x_F^{-1} (np_n)^{-\xi} n^{\xi} (1 - u_n)^{-1} \{ \ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}] \}^{\xi},$$

et comme par hypothèse $np_n < 1$, on en déduit qu'à partir d'un certain rang :

$$\left[\frac{np_n}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-\xi} \left\{ \frac{\ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}]}{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]} \right\}^{\xi} < x_F^{-1} n^{\xi} (1 - u_n)^{-1} \{ \ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}] \}^{\xi}.$$

Or, puisque (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)** et comme il existe $\delta > 0$ tel que $n^{-\delta} < np_n$, on sait qu'à partir d'un certain rang,

$$n^{\xi} (1 - u_n)^{-1} \leq n^{\xi + \theta_{1,\xi}} \leq p_n^{-[\xi + \theta_{1,\xi}]/(1+\delta)},$$

puisque $\xi + \theta_{1,\xi} < 0$. Ainsi, d'après le Lemme 2.3 ii) et le Lemme D.1 ii), on a à partir d'un certain rang,

$$\left[\frac{np_n}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-\xi} \left\{ \frac{\ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}]}{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]} \right\}^{\xi} \leq x_F^{-1} p_n^{-[\xi + \theta_{1,\xi}]/(1+\delta)} \{ \ell[p_n^{\xi} L^{-1}(p_n^{-1})] \}^{\xi} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après le Lemme 2.3 i), ce qui conclut la démonstration. ■

Lemme D.3 Sous les hypothèses **(A1)** et **(B)**, si $np_n < 1$ et si les suites (u_n) et (v_n) vérifient l'hypothèse **(C1)** et sont telles que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} > 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - u_n}{1 - v_n} < 1,$$

alors,

- i) $P[np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$,
- ii) $P[x_{p_n} \geq u_n X_{n,n}] \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration –

i) D'après la démonstration du Lemme 3.5 (Deuxième étape), on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] = 1.$$

Or, comme par hypothèse $np_n < 1$, on a

$$P[np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}] \geq P[1 < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}],$$

Démonstration du Lemme 4.1

ce qui conclut la première partie de la démonstration.

ii) Puisque (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)** et comme $np_n < 1$, on a :

$$p_n^{-\xi}(1 - u_n)^{-1} < p_n^{-\xi} n^{\theta_{1,\xi}} < p_n^{-[\xi + \theta_{1,\xi}]}$$

Le Lemme 2.3 i), le Lemme D.1 ii) et le fait que $\xi + \theta_{1,\xi} < 0$ impliquent alors que

$$x_F - x_{p_n} = o(1 - u_n).$$

Ainsi,

$$x_F - \frac{x_{p_n}}{u_n} = x_F - x_{p_n} - \frac{x_{p_n}}{u_n}(1 - u_n) \sim -x_F(1 - u_n).$$

D'où, à partir d'un certain rang, $x_{p_n}/u_n > x_F$, ce qui conclut la démonstration. ■

Nous pouvons à présent démontrer le Lemme 4.1.

Démonstration du Lemme 4.1 – Soit $\varepsilon > 0$, on désire démontrer que

$$P \left[\left| \left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right) \frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} - 1 \right| \geq \varepsilon \right] \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Or, soit $0 < \eta < -\xi$,

$$\begin{aligned} & P \left[\left| \left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right) \frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} - 1 \right| \geq \varepsilon \right] \\ &= P \left[\left| \left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right) \frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} - 1 \right| \geq \varepsilon ; \xi - \eta < \hat{\xi}_n < \xi + \eta \right] \end{aligned} \quad (D.1)$$

$$+ P \left[\left| \left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right) \frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} - 1 \right| \geq \varepsilon ; |\hat{\xi}_n - \xi| \geq \eta \right]. \quad (D.2)$$

Comme $\hat{\xi}_n \xrightarrow{P} \xi$, on sait que (D.2) converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Intéressons nous donc au terme (D.1). Posons

$$A_n = \{ np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n} ; x_{p_n} > u_n X_{n,n} \}.$$

$$(D.1) = P \left[\left| \left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right) \frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} - 1 \right| \geq \varepsilon ; \xi - \eta < \hat{\xi}_n < \xi + \eta ; A_n \right] \quad (D.3)$$

$$+ P \left[\left| \left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right) \frac{\tau_{u_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}}{\tau_{v_n}^{-\hat{\xi}_n} - (np_n)^{-\hat{\xi}_n}} - 1 \right| \geq \varepsilon ; \xi - \eta < \hat{\xi}_n < \xi + \eta ; A_n^C \right], \quad (D.4)$$

où A_n^C désigne le complémentaire de l'ensemble A_n . Or, d'après le Lemme D.3, on sait que le terme (D.4) converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Il reste donc à étudier le terme (D.3). D'après le Théorème B.1 (voir Annexe B), puisque $np_n < \tau_{u_n} < \tau_{v_n}$, on sait que pour tout $\theta \neq 0$, la fonction

$$G(\theta) = \frac{\tau_{u_n}^{-\theta} - (np_n)^{-\theta}}{\tau_{v_n}^{-\theta} - (np_n)^{-\theta}}$$

Démonstration du Lemme 4.1

est strictement croissante et de plus, comme par hypothèse $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang et puisque $x_{p_n} > u_n X_{n,n}$, on sait qu'à partir d'un certain rang,

$$\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} > 0.$$

Ainsi,

$$(D.4) \leq P \left[\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} G(\xi + \eta) - 1 \geq \varepsilon \right] + P \left[\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} G(\xi - \eta) - 1 \leq -\varepsilon \right].$$

Pour démontrer que (D.4) converge vers zéro et ainsi conclure la démonstration, il suffit de démontrer que pour tout $\eta \in]0, -\xi[$,

$$\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} G(\xi + \eta) \xrightarrow{P} c_2^{-\eta/\xi} \text{ et } \frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} G(\xi - \eta) \xrightarrow{P} c_2^{\eta/\xi},$$

puisque, η pouvant être choisi aussi proche de zéro que l'on souhaite, les constantes $c_2^{-\eta/\xi}$ et $c_2^{\eta/\xi}$ peuvent être aussi proche de 1 que l'on veut. Nous allons uniquement démontrer que

$$\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} G(\xi + \eta) \xrightarrow{P} c_2^{-\eta/\xi}, \quad (D.5)$$

la démonstration étant identique pour l'autre convergence. Pour prouver (D.5), on utilise la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\tau_{u_n}^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}}{\tau_{v_n}^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}} \right] \frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \\ = & \underbrace{\left(\frac{\tau_{u_n}^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}}{[E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}} \right)}_{(T_1)} \underbrace{\left(\frac{[E(\tau_{v_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}}{\tau_{v_n}^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}} \right)}_{(T'_1)} \underbrace{\left(\frac{x_{p_n} - v_n X_{n,n}}{x_{p_n} - \gamma_{v_n}} \right)}_{(T_2)} \underbrace{\left(\frac{x_{p_n} - \gamma_{u_n}}{x_{p_n} - u_n X_{n,n}} \right)}_{(T'_2)} \\ \times & \underbrace{\left(\frac{[E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}}{[E(\tau_{v_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}} \right)}_{(T_3)} \left(\frac{x_{p_n} - \gamma_{v_n}}{x_{p_n} - \gamma_{u_n}} \right). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que (T_1) et (T_2) convergent en probabilité vers 1 (on démontre de la même manière que (T'_1) et (T'_2) convergent en probabilité vers 1) et que (T_3) converge vers $c_2^{-\eta/\xi}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui conclura la démonstration.

• Intéressons nous pour commencer au facteur (T_1) .

$$(T_1) = \frac{\tau_{u_n}^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}}{[E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}} = \left(\frac{\tau_{u_n}}{E(\tau_{u_n})} \right)^{-(\xi+\eta)} \frac{1 - [np_n/E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)} [E(\tau_{u_n})/\tau_{u_n}]^{-(\xi+\eta)}}{1 - [np_n/E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)}}.$$

Or, d'après le Théorème 3.1 et comme $np_n < 1$, on a $\tau_{u_n}/E(\tau_{u_n}) \xrightarrow{P} 1$ et $np_n/E(\tau_{u_n}) < 1/E(\tau_{u_n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui implique que $(T_1) \xrightarrow{P} 1$.

Démonstration du Lemme 4.1

• Intéressons nous à présent au facteur (T_2) .

$$(T_2) = \frac{x_{p_n} - u_n X_{n,n}}{x_{p_n} - \gamma_{u_n}} = \frac{1 - u_n X_{n,n}/x_{p_n}}{1 - u_n} \left[\frac{x_{p_n}(1 - u_n)}{x_{p_n} - \gamma_{u_n}} \right]. \quad (D.6)$$

En utilisant l'expression de F donnée en (4.4) et le fait que $1 - F(x_{p_n}) = p_n$, on montre que pour tout $x \leq x_F$,

$$\left(\frac{1 - F(x)}{\ell[(x_F - x)^{-1}]} \right)^{-\xi} - \left(\frac{p_n}{\ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}]} \right)^{-\xi} = x_{p_n} - x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x_{p_n} - \gamma_{u_n} &= \left[\frac{E(\tau_{u_n})}{n} \right]^{-\xi} \{ \ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}] \}^\xi - p_n^{-\xi} \{ \ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}] \}^\xi \\ &= \underbrace{\left[\frac{E(\tau_{u_n})}{n} \right]^{-\xi} \{ \ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}] \}^\xi}_{(a)} \underbrace{\left\{ 1 - \left[\frac{np_n}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-\xi} \frac{\{ \ell[(x_F - x_{p_n})^{-1}] \}^\xi}{\{ \ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}] \}^\xi} \right\}}_{(b)}. \end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 2.3 ii) et le Lemme D.1 i), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell[x_F^{-1}(1 - u_n)^{-1}]}{\ell[(x_F - \gamma_{u_n})^{-1}]} = 1, \quad (D.7)$$

ce qui implique, d'après le Théorème 3.1 et l'expression de F donnée en (4.4), que $(a) \sim x_F(1 - u_n)$. De plus, d'après le Lemme D.2, $(b) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, comme $x_{p_n} \rightarrow x_F$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{p_n}(1 - u_n)}{x_{p_n} - \gamma_{u_n}} = 1. \quad (D.8)$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} P \left[\left| \frac{1 - u_n X_{n,n}/x_{p_n}}{1 - u_n} - 1 \right| > \varepsilon \right] &= P \left[\frac{1 - u_n X_{n,n}/x_{p_n}}{1 - u_n} - 1 > \varepsilon \right] + P \left[\frac{1 - u_n X_{n,n}/x_{p_n}}{1 - u_n} - 1 < -\varepsilon \right] \\ &= F^n \left[x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right] + 1 - F^n \left[x_{p_n} \left(1 + \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right] \end{aligned}$$

Nous allons démontrer les convergences :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n \left[x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right] = 0, \quad (D.9)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n \left[x_{p_n} \left(1 + \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right] = 1, \quad (D.10)$$

et ainsi, on aura prouvé que

$$\frac{1 - u_n X_{n,n}/x_{p_n}}{1 - u_n} \xrightarrow{P} 1. \quad (D.11)$$

Démonstration du Lemme 4.1

Démontrons pour commencer la convergence (D.9). On a

$$\begin{aligned} & \ln \left\{ F^n \left[x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right] \right\} \\ = & n \ln \left\{ 1 - \left[x_F - x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right]^{-1/\xi} \ell \left[\left(x_F - x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right)^{-1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Or,

$$\left\{ x_F - x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right\} \left\{ \frac{x_{p_n}}{u_n} \varepsilon (1 - u_n) \right\}^{-1} = 1 + \frac{u_n}{x_{p_n} \varepsilon} \frac{x_F - x_{p_n}}{1 - u_n}.$$

D'après le Lemme D.1 ii),

$$\frac{x_F - x_{p_n}}{1 - u_n} \sim p_n^{-\xi} (1 - u_n)^{-1} L(p_n^{-1}), \quad (\text{D.12})$$

où L est une fonction à variations lentes. La suite (u_n) vérifiant l'hypothèse **(C1)** et puisqu'il existe $\delta > 0$ tel que $n^{-\delta} < n p_n < 1$, on sait qu'à partir d'un certain rang,

$$p_n^\xi (1 - u_n) > n^{-\xi - \theta_{1,\xi}} > p_n^{[\xi + \theta_{1,\xi}]/(1+\delta)},$$

puisque $-\xi - \theta_{1,\xi} > 0$. Le Lemme 2.3 i) et (D.12) impliquent que $(x_F - x_{p_n})/(1 - u_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et ainsi que :

$$x_F - x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \sim \frac{x_{p_n}}{u_n} \varepsilon (1 - u_n) \sim x_F \varepsilon (1 - u_n).$$

Le Lemme 2.3 ii) implique alors que

$$\begin{aligned} & \left[x_F - x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right]^{-1/\xi} \ell \left[\left(x_F - x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right)^{-1} \right] \\ \sim & [x_F \varepsilon (1 - u_n)]^{-1/\xi} \ell[(x_F \varepsilon)^{-1} (1 - u_n)^{-1}] = o(1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln \left\{ F^n \left[x_{p_n} \left(1 - \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) \right] \right\} \sim -n [x_F \varepsilon (1 - u_n)]^{-1/\xi} \ell\{[(x_F \varepsilon)^{-1} (1 - u_n)^{-1}]\}.$$

Le fait que (u_n) vérifie l'hypothèse **(C1)** et le Lemme 2.3 i) concluent la démonstration de (D.9). Démontrons à présent (D.10). Pour ce faire, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} x_F - x_{p_n} \left(1 + \frac{1 - u_n}{u_n} \varepsilon \right) &= (x_F - x_{p_n}) \left(1 - \frac{x_{p_n}}{u_n} \varepsilon \frac{1 - u_n}{x_F - x_{p_n}} \right) \\ &\sim -\frac{x_{p_n}}{u_n} \varepsilon (1 - u_n) < 0, \end{aligned}$$

et ainsi qu'à partir d'un certain rang, $x_{p_n}[1 + \varepsilon(1 - u_n)/u_n] > x_F$. Les résultats (D.6), (D.8) et (D.11) impliquent que (T_2) converge en probabilité vers 1.

Démonstration du Lemme 4.1

- Intéressons nous enfin au facteur (T_3) .

En remarquant que puisque $np_n/E(\tau_{u_n}) \rightarrow 0$, $np_n/E(\tau_{v_n}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\xi + \eta < 0$ on a

$$\frac{[E(\tau_{v_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}}{[E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)} - (np_n)^{-(\xi+\eta)}} = \left[\frac{E(\tau_{v_n})}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-(\xi+\eta)} \frac{1 - [np_n/E(\tau_{u_n})]^{-(\xi+\eta)}}{1 - [np_n/E(\tau_{v_n})]^{-(\xi+\eta)}} \sim \left[\frac{E(\tau_{v_n})}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-(\xi+\eta)},$$

on constate que démontrer que (T_3) converge vers $c_2^{-\eta/\xi}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ est équivalent à démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{p_n} - \gamma_{u_n}}{x_{p_n} - \gamma_{v_n}} \left[\frac{E(\tau_{v_n})}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-(\xi+\eta)} = c_2^{-\eta/\xi}. \quad (\text{D.13})$$

Or, d'après le Théorème 3.1, (D.8) et comme par hypothèse $1 - u_n \sim c_2(1 - v_n)$, on a

$$\frac{x_{p_n} - \gamma_{u_n}}{x_{p_n} - \gamma_{v_n}} \left[\frac{E(\tau_{v_n})}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-(\xi+\eta)} \sim c_2 \left[\frac{E(\tau_{v_n})}{E(\tau_{u_n})} \right]^{-(\xi+\eta)} \rightarrow c_2^{-\eta/\xi},$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Annexe E

Démonstration de la propriété (4.29)

Dans cette annexe, nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Théorème E.1 Sous les hypothèses **(A')**, **(B'2)**, **(B'3)**, **(C')** et **(E'3)**,

$$\int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt = \mathcal{O}[(nh_n)^{\xi(x_0)}].$$

Dans la suite, on pose

$$a_n = [2f_X(x_0)c_1(x_0)nh_n]^{\xi(x_0)}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur les résultats suivants :

Lemme E.1 Sous les hypothèses **(A')**, **(B'2)** et **(C')**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq(x_0) \{1 - F_Y^{x_0}[-a_n + g(x_0)]\} = 1.$$

Démonstration – On rappelle que sous l'hypothèse **(C') i)**,

$$q(x_0) = P[|X - x_0| \leq h_n] \sim 2f_X(x_0)h_n.$$

Ainsi, d'après l'expression de $F_Y^{x_0}$ donnée en (4.20) et l'hypothèse **(B'2)**, on a :

$$nq(x_0) \{1 - F_Y^{x_0}[-a_n + g(x_0)]\} \sim 2f_X(x_0)c_1(x_0)nh_n a_n^{-1/\xi(x_0)} = 1.$$

■

Lemme E.2 Sous les hypothèses **(B'3)** et **(C')**, il existe $\gamma > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geq N$, on a pour tout $s \in [1, a_n^{-1}g(x_0)]$,

$$\frac{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]}{1 - F_Y^{x_0}[-a_n + g(x_0)]} \geq (1 + \gamma)^{-1} s^{-1/\xi(x_0)}.$$

Démonstration – Posons

$$F_{x_0}^*(t) = F_Y^{x_0}[g(x_0) - t^{-1}] = 1 - t^{1/\xi(x_0)}\ell_{x_0}(t).$$

Ainsi,

$$\frac{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]}{1 - F_Y^{x_0}[-a_n + g(x_0)]} = \frac{1 - F_{x_0}^*(a_n^{-1}s^{-1})}{1 - F_{x_0}^*(a_n^{-1})} = s^{-1/\xi(x_0)} \frac{\ell_{x_0}(a_n^{-1}s^{-1})}{\ell_{x_0}(a_n^{-1})}. \quad (\text{E.1})$$

Démonstration de la propriété (4.29)

Or, d'après les hypothèses **(B'3)** et **(C')** iv), il existe $\gamma > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geq N$,

$$\left| \frac{\ell_{x_0}(a_n^{-1})}{\ell_{x_0}(a_n^{-1}s^{-1})} - 1 \right| \leq \frac{L_5}{\ell_{x_0}(a_n^{-1}s^{-1})} a_n(s-1) \leq \frac{L_5}{A(x_0)} [g(x_0 - a_n)] \leq \gamma,$$

puisque $1 \leq s \leq a_n^{-1}g(x_0)$ et $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, si $n \geq N$,

$$\frac{\ell_{x_0}(a_n^{-1})}{\ell_{x_0}(a_n^{-1}s^{-1})} \geq (1 + \gamma)^{-1},$$

ce qui conclut la démonstration en utilisant (E.1). ■

Lemme E.3 Sous les hypothèses **(A')** et **(C')**, on a pour tout $t \in [0, m_n(x_0)]$,

$$1 - G_{x_0}(t) = 1 - F_Y^{x_0}(t) + \mathcal{O}[h_n^{\delta(x_0)}],$$

où $\delta(x_0) = \min\{1, -1/\xi(x_0)\}$ et où le “ $\mathcal{O}$ ” ne dépend pas de t .

Démonstration – Comme $t \leq m_n(x_0)$, on a

$$\begin{aligned} 1 - G_{x_0}(t) &= \frac{1}{q(x_0)} \int_t^{M_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_X(s) f_Y^s(u) ds du \\ &= \underbrace{\frac{1}{q(x_0)} \int_t^{m_n(x_0)} \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f_X(s) f_Y^s(u) ds du}_{(T1)} + \underbrace{\frac{1}{q(x_0)} \int_{m_n(x_0)}^{M_n(x_0)} \int_{A_n(t)} f_X(s) f_Y^s(u) ds du}_{(T2)}. \end{aligned}$$

Intéressons nous au terme $(T1)$.

$$(T1) = \underbrace{\frac{1}{q(x_0)} \int_t^{m_n(x_0)} \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f_X(s) [f_Y^s(u) - f_Y^{x_0}(u)] ds du}_{(T3)} + \underbrace{\frac{1}{q(x_0)} \int_t^{m_n(x_0)} \int_{x_0-h_n}^{x_0+h_n} f_X(s) f_Y^{x_0}(u) ds du}_{(T4)}.$$

D'après l'hypothèse **(C')** iii),

$$(T3) \leq 2L_3 h_n [m_n(x_0) - t] = \mathcal{O}(h_n),$$

puisque $t \geq 0$ et de plus

$$\begin{aligned} (T4) &= \int_t^{g(x_0)} f_Y^{x_0}(u) du - \int_{m_n(x_0)}^{g(x_0)} f_Y^{x_0}(u) du = \{1 - F_Y^{x_0}(t)\} - \{1 - F_Y^{x_0}[m_n(x_0)]\} \\ &= 1 - F_Y^{x_0}(t) + \mathcal{O}[h_n^{-1/\xi(x_0)}]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(T1) = 1 - F_Y^{x_0}(t) + \mathcal{O}[h_n^{\delta(x_0)}]. \quad (\text{E.2})$$

De même, en s'inspirant de l'étude faite sur le terme $(T1)$, on montre facilement que sous l'hypothèse **(C')**,

$$(T2) = \mathcal{O}[h_n^{\delta(x_0)}]. \quad (\text{E.3})$$

Démonstration de la propriété (4.29)

Les égalités (E.2) et (E.3) concluent la démonstration. ■

Nous pouvons à présent démontrer le Théorème E.1.

Démonstration du Théorème E.1 – On a :

$$\int_0^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt = \int_0^{g(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt + \int_{g(x_0)}^{M_n(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt.$$

On remarque facilement que sous l'hypothèse (C') ii), le second terme est un $\mathcal{O}(h_n)$. De plus,

$$\int_0^{g(x_0)} [F_Z(t)]^{n-1} dt = a_n \int_0^{a_n^{-1}g(x_0)} \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} ds.$$

En remarquant que d'après l'hypothèse (E'3), $a_n^{-1}h_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, il suffit, pour prouver le Théorème E.1, de montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$\int_0^{a_n^{-1}g(x_0)} \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} ds < c_3,$$

où c_3 est une constante strictement positive. Or,

$$\int_0^{a_n^{-1}g(x_0)} \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} ds = \underbrace{\int_0^1 \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} ds}_{(T1)} + \underbrace{\int_1^{a_n^{-1}g(x_0)} \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} ds}_{(T2)}.$$

Le terme (T1) est inférieur ou égal à 1. Intéressons nous au terme (T2). Remarquons tout d'abord que

$$\{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} \leq \exp\{-(n-1)\{1 - F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}\}.$$

Comme d'après l'hypothèse (E'3), $a_n^{-1}h_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on sait qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq -a_n s + g(x_0) \leq m_n(x_0)$. Ainsi, d'après le Lemme E.3,

$$\begin{aligned} -(n-1)\{1 - F_Z[-a_n s + g(x_0)]\} &= -(n-1)q(x_0)\{1 - G_{x_0}[-a_n s + g(x_0)]\} \\ &= -(n-1)q(x_0)\{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]\} + \mathcal{O}[nh_n^{1+\delta(x_0)}]. \end{aligned}$$

De plus, d'après l'hypothèse (E'3), $nh_n^{1+\delta(x_0)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $\eta_1 > 1$, on sait qu'à partir d'un certain rang,

$$1 - \eta_1 \leq \exp\{\mathcal{O}[nh_n^{1+\delta(x_0)}]\} \leq 1 + \eta_1,$$

Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^{n-1} &\leq (1 + \eta_1) \exp\{-(n-1)q(x_0)\{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]\}\} \\ &= (1 + \eta_1) \exp\left\{-(n-1)q(x_0)\{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]\} \frac{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]}{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]}\right\} \end{aligned}$$

Or, d'après les Lemmes E.1 et E.2, on sait qu'il existe $0 < \eta_2 < 1$, $\gamma > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que si $n \geq N$, on a pour tout $s \in [1, a_n^{-1}g(x_0)]$,

$$-(n-1)q(x_0)\{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]\} \frac{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]}{1 - F_Y^{x_0}[-a_n s + g(x_0)]} \leq -(1 - \eta_2)(1 + \gamma)^{-1}s^{-1/\xi(x_0)}.$$

Démonstration de la propriété (4.29)

Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \int_0^{a_n^{-1}g(x_0)} \{F_Z[-a_n s + g(x_0)]\}^n ds &\leq 1 + (1 + \eta_1) \int_1^{a_n^{-1}g(x_0)} \exp \left\{ -(1 - \eta_2)(1 + \gamma)^{-1} s^{-1/\xi(x_0)} \right\} ds \\ &\leq 1 + (1 + \eta_1) \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -(1 - \eta_2)(1 + \gamma)^{-1} s^{-1/\xi(x_0)} \right\} ds \\ &= 1 + (1 + \eta_1) [(1 - \eta_2)(1 + \gamma)^{-1}]^{\xi(x_0)} \Gamma[-\xi(x_0)], \end{aligned}$$

où γ est la fonction Gamma. ■

Bibliographie

- [1] H. Abbar and Ch. Suquet. Estimation l^2 du contour d'un processus de poisson homogène sur le plan. *Publication IRMA Lille*, 31(II), 1993.
- [2] A. Balkema and L. de Haan. Residual life at great age. *Annals of Probability*, 2 :792–804, 1974.
- [3] R.D. Banker. Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis : a statistical foundation. *Management Science*, 10 :1265–1273, 1993.
- [4] J. Beirlant, G. Dierckx, G. Matthys, and A. Guillou. Estimation of the extreme value index and regression on generalized quantile plots. Soumis, 2002.
- [5] J. Beirlant, G. Dierckx, Y. Goegebeur, and G. Matthys. Tail index estimation and an exponential regression model. *Extremes*, 2 :177–200, 1999.
- [6] J. Beirlant and A. Guillou. Pareto index estimation under moderate right censoring. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2 :93–109, 2001.
- [7] J. Beirlant, P. Vynckier, and J.M. Teugels. Excess functions and estimation of the extreme value index. *Bernoulli*, 2 :293–318, 1996.
- [8] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley, third edition, 1995.
- [9] N.H. Bingham, C.M. Goldie, and J.L. Teugels. *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1987.
- [10] D. Bosq. Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, XIX(2) :1–96, 1977.
- [11] L. Breiman, C.J. Stone, and C. Kooperberg. Robust confidence bounds for extreme upper quantiles. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 37 :127–149, 1990.
- [12] E. Castillo. *Extreme value theory in engineering*. Statistical Modeling and Decision Science. Academic Press, Inc., 1988.
- [13] E. Castillo and A.S. Hadi. Fitting the generalized pareto distribution to data. *Journal of the American Statistical Association*, 92 :1609–1620, 1997.
- [14] A. Chaouche and J.N. Bacro. A statistical test procedure for the shape parameter of a generalized pareto distribution. En révision à Computational Statistics and Data Analysis.
- [15] A. Charnes, W.W. Cooper, and E. Rhodes. Measuring the inefficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2 :429–444, 1978.
- [16] J. Chevalier. Estimation du support et du contenu du support d'une loi de probabilité. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Section B*, 12(4) :339–364, 1976.
- [17] L. Christensen and R. Greene. Economics of scale in u.s. electric power generation. *Journal of Political Economy*, 84 :653–667, 1976.

- [18] S. Csörgö and D.M. Mason. Central limit theorems for sums of extreme values. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 98 :547–558, 1985.
- [19] S Csörgö and L. Viharos. *Estimating the tail index*. Asymptotic methods in Probability and Statistics. B. Szyszkowicz, ed., North-Holland, Amsterdam, 1998. pp. 833-881.
- [20] R. Davis and S.I. Resnick. Tail estimates motivated by extreme value theory. *Annals of Statistics*, 12(4) :1467–1487, 1984.
- [21] A.C. Davison and R.L. Smith. Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 52(3) :393–442, 1990.
- [22] L. de Haan and S.I. Resnick. A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 42 :83–87, 1980.
- [23] P. Deheuvels, E. Haeusler, and D.M. Mason. Almost sure convergence of the hill estimator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 104 :371–381, 1988.
- [24] A.L.M. Dekkers and L. de Haan. On the estimation of the extreme value index and large quantile estimation. *Annals of Statistics*, 17 :1795–1832, 1989.
- [25] A.L.M. Dekkers, J.H.J. Einmahl, and L. de Haan. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Annals of Statistics*, 17 :1833–1855, 1989.
- [26] D. Deprins, L. Simar, and H. Tulkens. Measuring labor efficiency in post offices. In M. Marchant, P. Pestiau, and H. Tulkens, editors, *The Performance of Public Enterprises : Concepts and Measurements*, pages 243–267, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [27] L. Devroye and G.L. Wise. Detection of abnormal behaviour via nonparametric estimation of the support. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38 :480–488, 1980.
- [28] H. Drees. Refined pickands estimator of the extreme value index. *Annals of Statistics*, 23 :2059–2080, 1995.
- [29] B. Efron. The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, 52 :331–343, 1965.
- [30] P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, 1997.
- [31] M. Falk. On testing the extreme value index via the pot-method. *Annals of Statistics*, 23 :2013–2035, 1995.
- [32] M. Falk. Local asymptotic normality of truncated empirical processes. *Annals of Statistics*, 26 :692–718, 1998.
- [33] M.J. Farrell. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 120 :253–281, 1957.
- [34] A. Feuerverger and P. Hall. Estimating a tail exponent by modelling departure from a pareto distribution. *Annals of Statistics*, 27 :760–781, 1999.
- [35] J. Galambos. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. Krieger, Malabar, Florida, 1987.
- [36] L. Gardes. Estimating the support of a poisson process via the faber-schauder basis and extreme values. *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, XXXXVI(2) :43–72, 2002.
- [37] G. Gayraud. Estimation of functionals of density support. *Mathematical Methods of Statistics*, 6(1) :26–46, 1997.
- [38] J. Geffroy. Sur un problème d’estimation géométrique. *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, XIII :191–200, 1964.

- [39] J.L. Geluk and L. de Haan. *Regular Variation, Extensions and Tauberian Theorems*, volume 40. Math. Centre Tracts, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1987.
- [40] I. Gijbels, E. Mammen, B.U. Park, and L. Simar. On estimation of monotone and concave frontier functions. *Journal of the American Statistical Association*, 94 :220–228, 1999.
- [41] I. Gijbels and L. Peng. Estimation of a support curve via order statistics. *Extremes*, 3 :251–277, 2000.
- [42] S. Girard and P. Jacob. Extreme value and haar series estimates of point processes boundaries. *Scandinavian Journal of Statistics*, 2002. to appear.
- [43] S. Girard and P. Jacob. Projection estimates of point processes boundaries. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 116(1) :1–15, 2003.
- [44] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44 :423–453, 1943.
- [45] C.M. Goldie and R.L. Smith. Slow variation with remainder : Theory and applications. *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series.*, 38 :45–71, 1987.
- [46] I. Gomes. Asymptotically unbiased estimators of the tail index based on external estimation of the second order parameter. *Extremes*, 5 :1 :5–31, 2002.
- [47] I. Gomes and M.J. Martins. Generalizations of the hill estimator asymptotic versus finite sample behaviour. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 93 :161–180, 2001.
- [48] S. Grosskopf. Statistical inference and nonparametric efficiency : A selective survey. *Journal of Productivity Analysis*, 7 :161–176, 1996.
- [49] M. Guida and M. Longo. Estimation of probability tails based on generalized extreme value distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, 20 :219–242, 1988.
- [50] A. Guillou and P. Hall. A diagnostic for selecting the threshold in extreme-value analysis. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 63 :293–306, 2001.
- [51] E.J. Gumbel. *Statistics of extremes*. Columbia University Press, 1958.
- [52] E. Haeusler and J.L. Teugels. On asymptotic normality of hill’s estimator for the exponent of regular variation. *Annals of Statistics*, 13 :743–756, 1985.
- [53] W. Härdle, B.U. Park, and A.B. Tsybakov. Estimation of non-sharp boundaries. *Journal of Multivariate Analysis*, 55 :205–218, 1995.
- [54] J.A. Hartigan. *Clustering Algorithms*. Wiley, Chichester, 1975.
- [55] J.A. Hartigan. Estimation of a convex density contour in two dimensions. *Journal of the American Statistical Association*, 82 :267–270, 1987.
- [56] B.M. Hill. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, 3 :1163–1174, 1975.
- [57] J.R.M. Hosking and J.R. Wallis. Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution. *Technometrics*, 29(3) :339–349, August 1987.
- [58] R.L. Hughey. A survey and comparison of methods for estimating extreme right tail-area quantiles. *Statistical Theory & Method*, 20(4) :1463–1496, 1991.
- [59] P. Jacob. Estimation du contour discontinu d’un processus ponctuel sur le plan. *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, XXIX :1–25, 1984.
- [60] P. Jacob and H. Abbar. Estimating the edge of a cox process area. *Cahiers du centre d’Etudes de Recherche Opérationnelle*, 31 :215–226, 1989.

- [61] P. Jacob and Ch. Suquet. Estimating the edge of a poisson process by orthogonal series. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 46 :215–234, 1995.
- [62] A. Kneip, B.U. Park, and L. Simar. A note on the convergence of nonparametric dea estimators for production efficiency scores. *Economic Theory*, 14 :783–793, 1998.
- [63] A.P. Korostelev, L. Simar, and A.B. Tsybakov. Efficient estimation of monotone boundaries. *Annals of Statistics*, 23 :476–489, 1995.
- [64] A.P. Korostelev, L. Simar, and A.B. Tsybakov. On estimation of monotone and concave boundaries. *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*, XXXIX(1) :3–18, 1995.
- [65] A.P. Korostelev and A.B. Tsybakov. *Minimax Theory of Image Reconstruction*. Springer-Verlag, New-York / Berlin, lecture notes in statistics edition, 1993.
- [66] E. Mammen and A.B. Tsybakov. Asymptotical minimax recovery of sets with smooth boundaries. *Annals of Statistics*, 23 :502–524, 1995.
- [67] F. Marohn. Testing the gumbel hypothesis via the p.o.t. method. *Extremes*, 1 :2 :191–213, 1998.
- [68] F. Marohn. Local asymptotic normality of truncated models. *Statistics and Decisions*, 17 :237–253, 1999.
- [69] D.M. Mason. Laws of large numbers for sums of extreme values. *Annals of Probability*, 10 :754–764, 1982.
- [70] L. Peng. Asymptotically unbiased estimators for extreme value index. *Statistics & Probability Letters*, 38 :107–115, 1998.
- [71] J. Pickands III. Statistical inference using extreme-order statistics. *Annals of Statistics*, 3 :119–131, 1975.
- [72] A. Rényi and R. Sulanke. Über die konvexe hülle von n zufällig gewählten punkten. *Z. Wahrsch. Verw. gebiete*, 2 :75–84, 1963.
- [73] A. Rényi and R. Sulanke. Über die konvexe hülle von n zufällig gewählten punkten, ii. *Z. Wahrsch. Verw. gebiete*, 3 :138–147, 1964.
- [74] S.I. Resnick. *Extreme Values, regular Variation, and Point Process*. Springer-Verlag, New-York, 1987.
- [75] B.D. Ripley and J.P. Rasson. Finding the edge of a poisson forest. *Journal of Applied Probability*, 14 :483–491, 1977.
- [76] R. Schneider. Random approximations of convex sets. *Journal of Microscopy*, 151 (Pt 3) :211–227, 1988.
- [77] J. Segers. Residual estimators. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 98 :15–27, 2001.
- [78] R.L. Smith. Estimating tails of probability distributions. *Annals of Statistics*, 15 :1174–1207, 1987.
- [79] I. Weissman. Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. *Journal of the American Statistical Association*, 73 :812–815, 1978.

RESUME

L'objectif de ce travail est l'estimation d'une fonction quantile extrême. Nous considérons n couples de variables aléatoires $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ indépendants et de même loi qu'un couple (X, Y) distribué sur le support $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq g(x)\}$ où g est une fonction inconnue. Notre but est d'estimer le nombre $g_{p_n}(x)$ pour $x \in [0, 1]$ qui est le quantile extrême d'ordre $p_n < 1/n$ de la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant que $X = x$, notée F_Y^x . La fonction g_{p_n} ainsi définie est appelée fonction quantile extrême. Pour cela, disposant d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même fonction de répartition appartenant au domaine d'attraction de Weibull, nous proposons un nouvel estimateur de quantile extrême. Pour ce faire, nous sommes amenés à introduire au préalable des estimateurs de l'indice de valeur extrême dans le cas où ce dernier est strictement négatif. Nous montrons que les estimateurs de quantile extrême et d'indice de valeur extrême sont faiblement consistants et nous les comparons à des estimateurs classiques sur quelques simulations. Ces estimateurs sont construits en utilisant uniquement des nombres de points qui dépassent des seuils aléatoires basés sur le maximum de l'échantillon. Finalement, pour estimer la fonction quantile extrême en un point x de $[0, 1]$, nous considérons les variables aléatoires $Z_i = \{Y_i I\{|X_i - x| \leq h_n\}, i = 1, \dots, n$, où $h_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous montrons que, sous certaines conditions, la fonction de répartition de ces variables aléatoires converge vers F_Y^x lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous estimons alors $g_{p_n}(x)$ en appliquant l'estimateur du quantile extrême que nous avons introduit aux variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$. Nous montrons que l'estimateur ainsi défini est faiblement consistant et nous étudions son comportement sur quelques simulations.

TITLE : High quantile function estimation

ABSTRACT

The aim of this thesis is the estimation of a high quantile function. We consider a sample $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ of n random variables independent and identically distributed on the support $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \text{ and } 0 \leq y \leq g(x)\}$, where g is an unknown function. Our goal is to estimate the number $g_{p_n}(x)$, $x \in [0, 1]$ defined by $1 - F_Y^x[g_{p_n}(x)] = p_n < 1/n$, where F_Y^x denotes the conditional cumulative distribution function of Y_1 given $X_1 = x$. The function g_{p_n} is called *high quantile function*. With this aim in view, we first consider a sample $X_1, \dots, X_n$ of independent random variables with a common cumulative distribution function belonging to the Weibull domain of attraction and we introduce a new high quantile estimator. To construct this estimator, we first propose estimators of negative extreme values index. We show that the high quantile and extreme value index estimators are weakly consistent and we present some simulations to compare them to classical estimators. To construct our estimators, we only use the number of points exceeding random thresholds. Finally, to estimate the high quantile function at a point $x \in [0, 1]$, we consider the random values $Z_i = \{Y_i I\{|X_i - x| \leq h_n\}, i = 1, \dots, n$, where $h_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. We prove that the cumulative distribution function of these random values converges to F_Y^x as $n \rightarrow \infty$. So, to estimate $g_{p_n}(x)$, we apply the previously defined high quantile estimator to the random values $Z_1, \dots, Z_n$. We show that the obtained estimator is weakly consistent and we make some simulations.

DISCIPLINE : Mathématiques Appliquées.

MOTS-CLES : Estimation de support, estimation fonctionnelle, quantile extrême, indice de valeur extrême.

Thèse réalisée au laboratoire de Probabilités et Statistique de l'Université Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc.