



HAL
open science

Théorie M et dualités

Louis Paulot

► **To cite this version:**

┆ Louis Paulot. Théorie M et dualités. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT : . tel-00005254

HAL Id: tel-00005254

<https://theses.hal.science/tel-00005254>

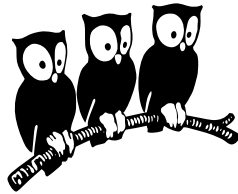
Submitted on 8 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 6 – PIERRE ET MARIE CURIE

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique théorique

présentée par

Louis PAULOT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet :

THÉORIE M ET DUALITÉS

Soutenue le 22 septembre 2003 devant le jury composé de

MM	Michel DUFLO	
	Marc HENNEAUX	rapporteur
	Bernard JULIA	directeur de thèse
	Ruben MINASIAN	rapporteur
	Christopher POPE	
	Paul WINDEY	président du jury.

Table des matières

Introduction	9
1 Vers la théorie M	13
1.1 Champs et actions	13
1.1.1 Version classique	13
1.1.2 Version quantique	15
1.2 Espace-temps	16
1.2.1 Espace-temps et relativité galiléenne	17
1.2.2 Relativité restreinte, groupe de Lorentz	18
1.2.3 Représentations du groupe de Poincaré	19
1.2.4 Relativité générale	21
1.2.5 Formes différentielles	24
1.2.6 Action d'Einstein	26
1.3 Interactions de jauge	27
1.3.1 Électromagnétisme	27
1.3.2 Généralisation aux autres groupes	29
1.3.3 Dualité $SL(2, \mathbb{Z})$ de l'électromagnétisme	30
1.4 Supersymétrie	33
1.4.1 Théorème «no-go»	33
1.4.2 Algèbre de super-Poincaré $D = 4 N = 1$	35
1.4.3 Extensions	36
1.4.4 États BPS	37
1.4.5 Généralisation aux autres dimensions	38
1.5 Supergravité	38
1.5.1 Supergravité $N = 1$ en quatre dimensions	39
1.5.2 Superspace	40
1.5.3 Supergravité à 11 dimensions	41
1.5.4 Réduction dimensionnelle	42
1.5.5 Triangle magique	42
1.5.6 Objets <i>BPS</i>	43
1.6 Supercordes	45

1.6.1	Spectre <i>BPS</i> des supergravités à 10 dimensions	45
1.6.2	Cordes fermées	46
1.6.3	Supersymétrie sur la feuille d'univers	49
1.6.4	Quantification <i>BRST</i>	50
1.6.5	Spectre des cordes fermées	50
1.6.6	Interactions	51
1.6.7	Cordes ouvertes et D-branes	52
1.6.8	Compactification et T-dualité	54
1.6.9	Théorie M	55
1.7	U-dualité	56
1.8	Retour à quatre dimensions	58
2	Des surfaces de del Pezzo aux supergravités	61
2.1	Extraits de géométrie algébrique	61
2.1.1	Variété projective	61
2.1.2	Faisceaux	62
2.1.3	Diviseurs, groupe de Picard	63
2.1.4	Intersection sur les surfaces	64
2.1.5	Classe canonique	65
2.1.6	Éclatements	66
2.1.7	Faisceaux amples	66
2.1.8	Surfaces de del Pezzo	67
2.1.9	Singularités de Du Val et surfaces de del Pezzo normales	69
2.2	Superalgèbres	70
2.2.1	Algèbres de Lie et groupes de Lie	71
2.2.2	Superalgèbres et supergroupes	71
2.2.3	Tore maximal et système de racines	72
2.2.4	Superalgèbre de Borchers	72
2.2.5	Groupe de Weyl	74
2.3	Des surfaces de del Pezzo aux supergravités	74
2.3.1	Exemple de la supergravité $D = 11$	74
2.3.2	Méthode générale	78
2.3.3	Théorie IIB	81
2.3.4	Théorie IIA et compactifications	84
2.4	Triangle magique	89
2.4.1	Triangle côté physique/del Pezzo	89
2.4.2	Symétrie du triangle complexe	94
2.4.3	Construction du triangle réel	96
2.4.4	Carré magique	101
2.5	Théories de type I et hétérotiques	103
2.5.1	U-dualité des théories tronquées	104

2.5.2	Contraintes sur la surface	104
2.5.3	Construction de la surface non-normale	106
2.5.4	Quotient des superalgèbres de type II	109
2.5.5	Un nouveau triangle	109
2.5.6	Secteur de jauge ?	111
3	« Group manifold » et supergravité $D = 5$ $N = 2$	113
3.1	Approche du « group manifold »	113
3.1.1	Superespace et superchamps	113
3.1.2	Méthode générale, principe	114
3.1.3	Détermination d'un Lagrangien	117
3.1.4	Algèbres différentielles libres	118
3.2	Supergravité $D = 5$ $N = 2$	120
3.2.1	Contenu en champs	120
3.2.2	Lagrangien le plus général	123
3.2.3	Contraintes	123
3.2.4	Dérivées totales	125
3.2.5	Solutions des équations du mouvement	126
3.2.6	Sort de la 2-forme B	127
	Conclusion	129
	Bibliographie	131

Remerciements

Arrivé au terme de ce travail de thèse, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont apporté de l'aide d'une façon ou d'une autre.

Ma gratitude va d'abord à Bernard Julia, qui a su me transmettre son enthousiasme pour la recherche en physique théorique et n'a pas ménagé sa peine lorsque j'avais besoin de son aide.

Je remercie également les membres du laboratoire de physique théorique de l'École normale supérieure, et tout particulièrement ses deux derniers directeurs Jean Iliopoulos et Eugène Cremmer, pour m'avoir accueilli au sein de celui-ci. Ma reconnaissance s'adresse également à Nicole Ribet et à tout le secrétariat pour tous les problèmes administratifs.

Je dois beaucoup à tous les professeurs qui ont su développer à la fois mon intérêt et mes talents en mathématiques et en physique, de Vincent Laroche et Jean-François Le Floch en classes préparatoires jusqu'aux enseignants de l'École normale, notamment Claude Delalande, Jean-Michel Raimond et Bernard Roulet en magistère, et en DEA Édouard Brézin et Jean Iliopoulos qui m'ont appris la théorie des champs ainsi que Paul Windey qui m'a introduit à la théorie des cordes et Bernard Julia, encore une fois, pour son cours dense en mathématiques et pointu en physique.

Je ne saurais oublier ici Pierre, Nicolas, Serguei, Dan et Yacine, qui ont partagé le même bureau que moi et grâce auxquels il y régnait une atmosphère à la fois studieuse et sympathique.

Merci aussi à Marc Henneaux et Ruben Minasian qui ont accepté la tâche de rapporteurs pour cette thèse, ainsi qu'à Michel Duffo, Chris Pope et Paul Windey pour leur participation au jury.

Il me faudrait encore remercier tous ceux qui m'ont apporté de l'aide dans mon travail ou au cours des ces trois années. Je suis tout particulièrement reconnaissant envers ma famille et à mes amis, qui m'ont permis de parler d'autre chose que de physique ou de mathématiques — et parfois même de physique ou de mathématiques. S'il ne m'est guère possible de citer ici ceux à qui je dois sans doute le plus, je ne les oublie pas pour autant. Je me contenterai d'une mention spéciale à Agnès, qui a été jusqu'à relire une thèse à laquelle elle ne comprenait rien.

À tous, ceux que j'ai cités comme ceux qui sont restés dans l'ombre,

Merci !

Introduction

La description des constituants élémentaires de la matière et de leurs interactions est l'un des objectifs majeurs de la physique, afin de comprendre le fonctionnement du monde physique au niveau le plus fondamental. Ainsi on décrit aujourd'hui l'univers par des particules dont certaines forment la matière — électrons, quarks, neutrinos... — alors que d'autres — photons, bosons W, Z, gluons... — transmettent des interactions, pour simplifier (en fait les deux sont fortement imbriqués et il n'y a pas de distinction claire). Les interactions connues sont au nombre de quatre : la gravitation, qui régit l'attraction mutuelle des corps, l'électromagnétisme qui décrit la propagation de la lumière et les interactions entre les particules chargées électriquement, ainsi que les interactions faible et forte qui entrent en jeu dans des phénomènes plus énergétiques comme la radioactivité ou la cohésion des nucléons.

Le modèle standard de la physique des particules rend compte des trois dernières de ces interactions dans le cadre de la théorie quantique, où l'intuition géométrique habituelle des trajectoires ne rend plus compte correctement des mouvements des particules. Parallèlement, on dispose d'une théorie géométrique de la gravitation, la relativité générale, où c'est la courbure de l'espace qui rend compte des interactions gravitationnelles. On se heurte toutefois à un problème majeur : alors que ces deux théories sont vérifiées expérimentalement et décrivent correctement la nature dans leurs domaines de validité, qui couvrent tout ce que nous pouvons observer à l'heure actuelle, on ne peut les inclure dans une même théorie, cohérente. Le problème essentiel est qu'on ne sait pas quantifier la gravitation, on ne trouve pas de version compatible avec le caractère quantique de la matière. La quête d'une telle théorie quantique de la gravitation constitue donc l'un des objectifs majeurs de la recherche en physique théorique.

C'est dans ce cadre qu'ont été inventées les théories de supergravité, théories de la gravitation possédant la supersymétrie, qui est une symétrie échangeant bosons et fermions. On a de même introduit de telles théories en dimension supérieure à quatre, celle de l'espace-temps dans lequel nous semblons vivre. D'autre part, on a développé pour rendre compte des inter-

actions hadroniques — les hadrons sont des particules comme les protons ou les neutrons — des théories de cordes, où les objets fondamentaux sont des cordes se déplaçant dans l'espace. Alors que ces théories se révélèrent incapables de rendre compte correctement de l'interaction forte, comme on l'espérait, on eut la grande surprise de se rendre compte qu'elles contenaient le vecteur de la gravitation, le graviton. En fait, on avait là, dans certaines conditions, une théorie quantique de la gravitation... en dimension dix (et nécessairement supersymétrique).

En effet, les théories des cordes ont de très fortes contraintes, et le souci de cohérence interne réduit drastiquement la liberté de choix sur la théorie, et la dimension de l'espace-temps est ainsi un des paramètres fixés. Il faut alors trouver des mécanismes expliquant l'apparence du monde, si l'une de ces théories le décrit effectivement. Ce dernier point n'est toujours pas tranché. En effet les théories de cordes étant très peu flexibles, on ne peut pas ajouter une à une toutes les interactions comme on le fait en théorie des champs. Ici tout est donné d'entrée de jeu, et il faut réussir à trouver un état de la théorie qui corresponde à ce que nous voulons. Cet inconvénient est cependant un des arguments principaux en faveur de ces théories : il y a très peu de paramètres libres, et c'est le souci de cohérence interne qui est le fil conducteur.

Il existe cinq types de théories des cordes supersymétriques. En fait, celles-ci sont reliées par ce qu'on appelle des dualités : ce sont différentes descriptions d'une même théorie, dans différentes limites. On suspecte ainsi l'existence d'une théorie-mère, la *théorie M*, théorie quantique qui donnerait en particulier dans une certaine limite la gravitation en onze dimensions, dans une version supersymétrique. C'est en effet une propriété des théories de supercordes de redonner à basse énergie des théories de supergravité.

Dans le cadre de la recherche d'une formulation de cette théorie M, mes travaux ont ainsi porté sur une reformulation de sa limite de supergravité, la supergravité à onze dimensions, des différentes réductions en dimension inférieure de celle-ci ainsi que d'autres supergravités, afin d'en faire apparaître les symétries cachées. On connaît en effet des groupes de symétries pour ces théories — groupes de Cremmer-Julia en supergravité, groupes de U-dualité en théorie des cordes — mais ceux-ci peuvent être étendus par l'introduction de superalgèbres, qui permettent de plus d'exprimer les équations du mouvement de certains champs des théories de manière très géométrique. Trouver la géométrie sous-tendant la théorie est essentiel pour en mettre au jour toutes les symétries, mais pourrait également permettre de trouver un chemin vers la formulation — quantique — de la théorie M, qu'on ne connaît pour le moment que dans quelques limites.

Après un long chapitre d'introduction, destiné essentiellement aux physiciens d'autres spécialités ou à des mathématiciens, et où sont progressivement

introduits les concepts essentiels du domaine, vient l'exposé de mes travaux. Il sera tout d'abord question de l'extension des groupes de U-dualité par des supergroupes obtenus à partir de superalgèbres de Kac-Moody généralisées, de dimension infinie, et de la formulation du secteur bosonique des supergravités dans ce cadre, à l'exception notable de la gravitation. Le dernier chapitre contient des travaux plus anciens, non publiés, où la condition d'auto-dualité, au lieu d'être imposée à la main, apparaît automatiquement dans la théorie étudiée (la supergravité minimale à cinq dimensions).

Chapitre 1

Vers la théorie M

Dans ce premier chapitre, j'essaie d'introduire les notions utilisées dans les théories physiques actuelles qui tentent de décrire la nature au niveau le plus fondamental, en progressant vers celles sur lesquelles mes travaux ont porté, et en insistant sur ceux de leurs aspects qui seront utiles par la suite. Si le lecteur physicien risque de ne rien apprendre de nouveau dans les premières pages — et pour le spécialiste cette mise en garde vaut pour tout le chapitre — espérons qu'elle pourra intéresser par son originalité et permettre de situer ces travaux.

1.1 Champs et actions

1.1.1 Version classique

Pour modéliser l'univers, en particulier la matière et ses interactions on utilise en physique ce qu'on appelle des *champs* : des grandeurs qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Ainsi pour décrire le mouvement d'une particule dans sa modélisation la plus simple, on choisit trois fonctions réelles x_1 , x_2 et x_3 d'un paramètre réel t , qu'on interprète comme les coordonnées de la particule dans l'espace. Notons que cela revient à se donner une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 , et qu'on a ainsi une théorie des champs unidimensionnelle. De même pour le champ électromagnétique, qui décrit la propagation des ondes radios ou les forces exercées entre charges électriques, on peut utiliser deux vecteurs à trois dimensions \mathbf{E} et \mathbf{B} , les *champs électrique et magnétique*, qui dépendent de quatre paramètres t, x_1, x_2, x_3 qu'on interprète comme le temps et les coordonnées d'espace. C'est cette fois une théorie quadridimensionnelle.

On voit sur ces deux exemples que l'espace n'intervient pas toujours de la même manière : alors que dans le premier cas les coordonnées spatiales sont

les grandeurs variables étudiées, dans le second cas elles sont des paramètres, des variables indépendantes.

Ces champs permettent de décrire le système, mais celui-ci est également soumis dans son mouvement à des lois, qu'on exprime par des équations faisant intervenir les différents champs de la théorie étudiée, appelées *équations du mouvement*. Ainsi pour notre exemple de la particule ponctuelle, si elle n'est soumise à aucune interaction, son mouvement est rectiligne et de vitesse uniforme. Cela se traduit par le jeu d'équations

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0, \quad (1.1)$$

ou encore, en notant \mathbf{r} le vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) ,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (1.2)$$

De même les champs électriques et magnétiques satisfont aux *équations de Maxwell*, dont nous donnerons plus loin une forme plus élégante que celle utilisant les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , en introduisant des concepts de géométrie différentielle.

Dans un certain nombre de cas, les équations du mouvement classiques peuvent découler d'un *principe de moindre action*, ou plutôt d'action stationnaire (la dénomination courante, que l'histoire nous a léguée, est malheureuse car fautive en toute généralité) : on peut introduire une grandeur appelée *action* et dépendant des différents champs, qui est minimale, ou plus généralement extrême, pour les mouvements physiquement possibles, parmi tous les mouvements envisageables. Ainsi pour revenir encore à la particule ponctuelle libre, l'équation 1.2 peut s'obtenir en demandant que les trajectoires minimisent l'action suivante :

$$S = \int dt \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^2, \quad (1.3)$$

parmi toutes les trajectoires joignant deux points.

On observe que cette action s'écrit comme l'intégrale sur le temps d'une fonction des champs : celle-ci est alors appelée *Lagrangien*. Quand on a des champs qui dépendent aussi des coordonnées spatiales et que l'action s'écrit comme une intégrale sur le temps et l'espace (à n dimensions) :

$$S = \int dt d\mathbf{x}^n \mathcal{L}, \quad (1.4)$$

\mathcal{L} est appelée *densité de Lagrangien* ou encore également *Lagrangien*, comme nous le ferons par la suite.

Quand l'action s'écrit ainsi comme une intégrale d'un Lagrangien qui ne dépend que des champs (notés génériquement ϕ) et de leurs dérivées premières par rapport aux paramètres, notés y_i ($1 \leq i \leq n$) :

$$S = \int dy^n \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi), \quad (1.5)$$

le mouvement est donné par les *équations d'Euler-Lagrange*

$$\sum_{i=1}^n \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (1.6)$$

où ∂_i désigne $\frac{\partial}{\partial y_i}$.

Par exemple un champ scalaire libre $\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ défini sur un espace à n dimensions, plus le temps, a une action

$$S = \int dt d\mathbf{x}^n \left[-(\partial_t \phi)^2 + \sum_{i=1}^n (\partial_i \phi)^2 \right] \quad (1.7)$$

qui donne comme équation du mouvement

$$\partial_t^2 \phi - \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \phi = 0, \quad (1.8)$$

qu'on note avec l'opérateur différentiel *Dalembertien* :

$$\square \phi = 0. \quad (1.9)$$

Notons que pour $n = 1$ c'est l'équation d'une corde vibrante, que nous retrouverons plus loin quand il sera question de théorie des cordes, c'est-à-dire quand on se proposera de décrire les particules fondamentales comme des modes de vibration de cordes.

1.1.2 Version quantique

Nous nous sommes placé jusqu'ici dans le cadre de la théorie classique des champs : les champs sont des fonctions qui obéissent à des équations. En théorie quantique des champs, cela n'est plus le cas. Les champs sont maintenant des fonctions (ou plus généralement des distributions) à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires sur un certain espace de Hilbert \mathcal{H} (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet) censé décrire les différents états du système. On s'intéresse alors aux valeurs moyennes des opérateurs pour

différents états, données par $\langle s|O|s\rangle$, où O désigne l'opérateur dont on veut calculer la valeur moyenne dans l'état $|s\rangle$. $\langle s|O|s\rangle$ est le produit scalaire entre $|s\rangle$ et $O|s\rangle$ ($\langle s|$ est le dual de $|s\rangle$). On demande aux opérateurs correspondant aux champs de la théorie de satisfaire aux équations du mouvement ; la différence avec la théorie classique est que les différents opérateurs ne commutent pas forcément. On se donne donc des relations de commutation ou d'anticommutation entre les différents opérateurs.

De manière équivalente, on peut calculer les valeurs moyennes en intégrant sur toutes les évolutions possibles des champs classiques, sans se restreindre aux solutions des équations du mouvement, en pondérant chaque trajectoire dans l'espace d'évolution des champs par $e^{\frac{i}{\hbar}S}$, où S est l'action du chemin considéré. Ainsi la probabilité qu'une excitation du champ se transmette d'un point \mathbf{x}_a à un point \mathbf{x}_b entre les temps t_a et t_b , se calcule à partir de

$$\left| \frac{\int [\mathcal{D}\phi] \phi(t_a, \mathbf{x}_a) \phi(t_b, \mathbf{x}_b) e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}}{\int [\mathcal{D}\phi] e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}} \right|^2. \quad (1.10)$$

Ce genre d'intégrale n'est en général pas calculable. Dans un certain nombre de cas on peut faire un développement perturbatif dans certains domaines de l'espace des paramètres de la théorie : on utilise alors des diagrammes de Feynman pour automatiser ce calcul et sa combinatoire. On s'aperçoit alors souvent que les quantités qu'on calcule sont divergentes ; il faut alors, quand c'est possible, procéder à une *renormalisation* de la théorie, qui consiste à faire varier certaines constantes physique en même temps qu'on change des paramètres de régularisation des intégrales divergentes, de telle sorte que les quantités physiques restent invariantes et soient ainsi bien définies.

La théorie quantique des champs est un sujet vaste et souvent complexe, il n'est donc pas question de prétendre ici le traiter en toute généralité. Cette brève évocation n'a pour but que de familiariser le lecteur non physicien avec ses concepts essentiels, des champs classiques et des Lagrangiens au problème de la quantification.

1.2 Espace-temps

Avant de passer à ses extensions dites *supersymétriques*, il convient maintenant d'analyser l'espace et le temps, ou plutôt l'espace-temps puisque ces deux notions ont été unifiées.

1.2.1 Espace-temps et relativité galiléenne

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous avons implicitement utilisé le *principe d'inertie* : une particule libre suit un mouvement rectiligne et uniforme. On constate tout de suite que ce principe suppose que le mouvement de la particule est repéré dans un *référentiel* (autrement dit un système de coordonnées) particulier. En effet, si je change celui-ci en prenant comme nouvelle origine des axes un point $O'(t)$ repéré dans le référentiel original \mathcal{R} par le vecteur $\mathbf{R}(t)$, en gardant les nouveaux axes parallèles aux anciens, la position d'un point M de vecteur position \mathbf{r} est maintenant donnée dans le nouveau référentiel \mathcal{R}' par $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$. En dérivant par rapport au temps, on obtient comme loi de transformation des vitesses

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \quad (1.11)$$

où \mathbf{v}' , \mathbf{v} et \mathbf{V} sont les dérivées par rapport au temps¹ respectivement de \mathbf{r}' , \mathbf{r} et \mathbf{R} . Ainsi un mouvement rectiligne et uniforme dans \mathcal{R} ne le sera dans \mathcal{R}' que si l'origine O' de celui-ci se déplace à vitesse constante dans \mathcal{R} . On pourrait de même montrer que les axes doivent rester de direction fixe au cours du temps pour préserver le caractère rectiligne et uniforme des mouvements des particules libres. Ainsi il y a toute une classe de référentiels qui préservent cette propriété, tous en translation à vitesse constante les uns par rapports aux autres. Ces référentiels sont dits *galiléens*. Nous avons implicitement postulé qu'il en existait un, dans lequel le principe d'inertie s'appliquait. Nous avons également supposé que l'espace est euclidien, c'est-à-dire que la distance entre deux points A et B est donnée par

$$\|AB\| = \sqrt{\left(x_1^{(B)} - x_1^{(A)}\right)^2 + \left(x_2^{(B)} - x_2^{(A)}\right)^2 + \left(x_3^{(B)} - x_3^{(A)}\right)^2}, \quad (1.12)$$

ce qui donne pour le carré d'une distance infinitésimale

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (1.13)$$

Les transformations de l'espace qui laissent cette distance invariante, c'est-à-dire les *isométries*, sont d'une part le groupe des rotations de l'espace à trois dimensions $SO(3)$ et d'autre part les translations, ainsi que leurs composées. (Il faut aussi ajouter la symétrie par rapport à l'origine, ainsi que ses composées, si on ne veut pas se restreindre aux transformations qui préservent l'orientation de l'espace.)

Nous verrons par la suite que cette vision d'un espace identifié à un espace euclidien \mathbb{R}^3 est abandonnée dans les descriptions plus poussées.

¹Nous supposons ici qu'il existe un temps absolu, ne dépendant pas du référentiel.

1.2.2 Relativité restreinte, groupe de Lorentz

Un autre postulat implicite dans ce qui précède est l'existence d'un temps absolu, indépendant de l'espace et du référentiel dans lequel on mesure les mouvements. C'est cela qui nous a permis de dériver la loi galiléenne de composition des vitesses 1.11.

La *relativité restreinte* introduite par Einstein abandonne cette notion de temps absolu pour faire dépendre le temps du référentiel. Les coordonnées de temps et d'espace sont alors mélangées lors des changements de référentiel : au lieu d'un espace et d'un temps distincts, on utilise le concept d'espace-temps. Dans des unités où la vitesse de la lumière c vaut 1, on définit la distance infinitésimale (ou *métrique*) par

$$ds^2 = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (1.14)$$

Dans la suite, on notera x_0 le temps, puisqu'il est intégré aux autres coordonnées spatiales, mais avec une norme négative. On a ainsi défini une métrique minkowskienne, de signature $(3,1)$, qu'on peut représenter par la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Les transformations linéaires qui laissent cette distance invariante sont les matrices O vérifiant

$${}^t O \eta O = \eta. \quad (1.16)$$

Ces transformations forment le groupe $O(3,1)$. Ce groupe a quatre composantes connexes, caractérisées par le signe du déterminant et le signe de la transformation sur la direction temporelle. Si on impose que le déterminant soit égal à 1, on a le *groupe de Lorentz* (à quatre dimensions), noté $SO(3,1)$. Ce groupe contient le groupe $SO(3)$ des rotations des trois coordonnées spatiales, ainsi que des transformations appelées *boosts* qui correspondent à des changements de référentiels galiléens. Si on ajoute à ces transformations les translations dans toutes les directions spatio-temporelles, on obtient le *groupe de Poincaré*, qui est le groupe de symétrie de l'espace-temps tel que décrit ici.

Cela se généralise aisément à des espaces de dimension supérieure : un espace de Minkowski à n dimensions d'espace et une dimension temporelle (noté $\mathbb{R}^{1,n}$) aura ainsi une métrique de signature $(n,1)$ et un groupe de Lorentz $SO(n,1)$.

1.2.3 Représentations du groupe de Poincaré

Une notion mathématique essentielle en physique est celle de *représentation* d'un groupe, qui fait agir le groupe comme des transformations d'un espace vectoriel. Étant donné un groupe G , une représentation de G est un morphisme de G vers le groupe des transformations linéaires d'un espace vectoriel. Autrement dit on a un espace vectoriel V , l'espace de représentation, et à chaque élément g de G on associe un opérateur linéaire $\rho(g)$ sur V , en demandant que la loi de multiplication soit préservée :

$$\rho(g)\rho(g') = \rho(gg'). \quad (1.17)$$

Notons que certains éléments du groupe peuvent être envoyés sur l'identité : ils n'induisent alors aucune transformation dans V . Une représentation dans un espace de Hilbert sera dite unitaire si elle représente les éléments de G par des opérateurs unitaires (satisfaisant $U^+U = 1$).

Ainsi le groupe $SO(3)$, par définition, a une représentation comme groupe des rotations de \mathbb{R}^3 : on le définit comme l'ensemble des transformations linéaires de cet espace vectoriel qui préservent la métrique et l'orientation.

On rencontre en physique la notion de *représentation projective* ; la relation 1.17 est vérifiée à une phase près :

$$\rho(g)\rho(g') = e^{i\theta(g,g')} \rho(gg'). \quad (1.18)$$

Enfin une représentation est dite *irréductible* si elle ne peut pas se décomposer en somme directe de représentations plus petites.

Avec Wigner, on définit une particule comme une représentation projective unitaire irréductible du groupe de Poincaré, c'est-à-dire du groupe des isométries de l'espace-temps. En fait, cela revient à décrire les représentations unitaires irréductibles du revêtement universel de ce groupe.

En dimension 4, ces représentations sont classifiées, pour les particules de masse non nulle, par le *spin* de la particule, qui caractérise les représentations du groupe $Spin(3) = SU(2)$, recouvrement à deux feuillets de $SO(3)$. Le spin est donné par un nombre de $\mathbb{N}/2$. En dimension supérieure D , c'est le groupe $SO(D-1)$ qui classe les représentations de masse non nulle du groupe de Poincaré, mais on continuera à parler du spin des particules en considérant l'effet d'une rotation dans un sous-espace de dimension 3. Pour des particules de masse nulle, c'est $SO(D-2)$ qui intervient, soit $SO(2) \simeq U(1)$ en dimension 4. Le nombre quantique qui intervient est alors l'*hélicité*.

D'autre part, on appelle *boson* une particule dont plusieurs représentants peuvent être dans le même état (position, ou impulsion...) et *fermion* une particule pour laquelle c'est impossible. Le théorème spin-statistique affirme

que les particules de spin entier sont des bosons et les particules de spin dit demi-entier (*i.e.* appartenant à $\frac{1}{2} + \mathbb{N}$) des fermions (avec trois dimensions d'espace).

Un champ libre de spin 0 est décrit, en termes mathématiques, par une section ϕ d'un fibré de fibre \mathbb{R} (ou \mathbb{C} , ou un espace de représentation d'un groupe de symétrie interne) et de base l'espace-temps. Le mouvement est régi par l'action de Klein-Gordon² (en $D = n + 1$ dimensions)

$$L_{KG} = \int_{\mathcal{M}} d^D x \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2 \quad (1.19)$$

qui donne l'équation du mouvement

$$(\square - m^2)\phi = (\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\phi = 0. \quad (1.20)$$

Pour décrire les particules de spin $\frac{1}{2}$, il nous faut d'abord décrire la représentation correspondante du groupe de Lorentz. Nous allons décrire ici la représentation *de Dirac*³. En dimension D , ce sont des vecteurs de dimension complexe $k = 2^{\lfloor D/2 \rfloor}$, appelés *spineurs*, ($\lfloor D/2 \rfloor$ est la partie entière de $D/2$). Pour décrire l'action du groupe de Lorentz il faut introduire les matrices Γ : ce sont des matrices $k \times k$ vérifiant les relations de Clifford

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = \Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (1.21)$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est la matrice inverse de $\eta_{\mu\nu}$. Le groupe de Lorentz agit alors par les matrices

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = -\frac{i}{4}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu - \Gamma^\nu \Gamma^\mu). \quad (1.22)$$

De plus on dispose d'une opération de conjugaison permettant d'écrire un produit scalaire $\bar{\psi}\chi$ entre deux spineurs ψ et χ .

Le champ libre de spin $\frac{1}{2}$ est régi, en l'absence de champ électromagnétique, par l'action de Dirac

$$L = \int_{\mathcal{M}} \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi \quad (1.23)$$

²Nous utilisons ici et dans la suite la convention d'Einstein de sommation des indices répétés : $A^\mu B_\mu$ devra être lu $\sum_\mu A^\mu B_\mu = \sum_{\mu,\nu} A^\mu \eta_{\mu\nu} B^\nu = A.B$. Par ailleurs, nous choisissons des unités physiques « naturelles » telles que la constante de Planck \hbar et la vitesse de la lumière c soient égales à 1 et ainsi n'apparaissent pas dans nos expressions.

³Il existe d'autres représentations de dimensions inférieures en certaines dimensions d'espace-temps, définies en imposant certaines conditions que nous ne discuterons pas ici (Weyl, Majorana) ; notre but n'est pas de faire un traitement exhaustif de ces sujets.

où \not{A} désigne la quantité $\Gamma^\mu A_\mu$, soit ici $\not{\partial} = \Gamma^\mu \partial_\mu$. On obtient à partir de ce Lagrangien l'équation de Dirac

$$(\not{\partial} + m)\psi = 0. \quad (1.24)$$

Notons que le champ ψ vérifie alors automatiquement l'équation de Klein-Gordon.

Il convient d'ajouter qu'il faut en fait prendre pour les fermions des champs « classiques » qui anticommulent au lieu de commuter comme les nombres réels ou complexes.

Enfin pour les champs de spin supérieur à $\frac{1}{2}$, les représentations peuvent se construire par produit de spins $\frac{1}{2}$. Les termes cinétiques des actions, qui correspondent aux champs libres, pour des particules de spin 1, $\frac{3}{2}$ et 2 seront donnés dans la suite.

1.2.4 Relativité générale

Nous avons jusqu'ici décrit l'espace-temps comme un espace vectoriel, rigide, muni d'une distance minkowskienne donnée par une forme bilinéaire symétrique de signature $(D-1, 1)$, et cet espace a pour symétrie le groupe de Poincaré constitué des translations et des transformations de Lorentz. Mais les lois physiques s'exprimant de manière locale, il est plus naturel de n'imposer ces contraintes sur l'espace-temps que localement : au voisinage de chaque point, l'espace-temps est localement \mathbb{R}^D , c'est-à-dire qu'il peut se décrire localement par un jeu de D coordonnées réelles. On demande simplement que les quantités physiques ne dépendent pas du système de coordonnées. De plus on a une distance infinitésimale ds qui permet, par intégration, de mesurer la longueur de courbes. Cela correspond au concept mathématique de variété pseudo-riemmanienne.

En chaque point, on a des vecteurs *tangents* qui donnent les différentes directions, et forment en chaque point un espace vectoriel de dimension D , et on peut en prendre une base orthogonale pour la métrique ds , de telle sorte que dans cette base la métrique soit la métrique minkowskienne η , au point considéré. On appelle une telle base définie en chaque point un *repère mobile*. On a alors en chaque point une liberté dans le choix de la base, donnée par le groupe de Lorentz $SO(D-1, 1)$. On demande tout de même que les vecteurs de base de deux points infiniment proches soient proches eux aussi ; en d'autres termes on souhaite que la base de vecteurs tangents varie continûment. Cela a des conséquences sur le choix du repère mobile en chaque point : on ne peut le changer que continûment. De plus, le sens de la flèche du temps et l'orientation de l'espace doivent être les mêmes en deux points

infiniment proches, ce qui fait qu'on se restreint au sous-groupe du groupe de Lorentz qui préserve ces propriétés. (Notons qu'il n'est pas toujours possible d'assurer cela globalement sur la variété d'espace-temps : ainsi sur un ruban de Möbius l'orientation de l'espace change si on fait un tour.) Enfin, le choix d'un repère en chaque point est un cas particulier pour le groupe de Lorentz de *choix de jauge*.

La base est définie par des objets notés \mathbf{e}^a , ce qui signifie, si on note x^0, \dots, x^{D-1} les coordonnées au voisinage du point, que le vecteur tangent ∂_μ , qui donne la direction où seul x^μ varie, a pour composantes dans cette base $(e_\mu^0, \dots, e_\mu^{D-1})$. Par linéarité, le vecteur $\mathbf{A} = A^\mu \partial_\mu$ a pour composantes $(A^\mu e_\mu^0, \dots, A^\mu e_\mu^{D-1})$. Un objet qui agit linéairement sur les vecteurs tangents est appelé une *forme linéaire*, ici à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{D-1,1}$. C'est ici une 1-forme car elle est linéaire en un seul vecteur. On parlerait de 2-forme pour une forme bilinéaire, comme la métrique qui donne le produit scalaire entre deux vecteurs : $A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$. Une forme multilinéaire est appelée *forme différentielle* si elle est totalement antisymétrique et continue (et même dérivable). En fait la métrique s'obtient facilement à partir du repère mobile puisque celui-ci est pris orthogonal, en évaluant les deux vecteurs dans le repère mobile pour en calculer le produit scalaire :

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \cdot \partial_\nu = e_\mu^a \eta_{ab} e_\nu^b. \quad (1.25)$$

On a en chaque point la liberté de choisir un repère orthogonal. Il faut maintenant définir la manière de translater un vecteur de manière infinitésimale, notamment pour le comparer à un vecteur défini en un point voisin et définir ainsi des dérivées. Réciproquement, si on a une notion de dérivée, le transport parallèle d'un vecteur s'écrit comme l'annulation de sa dérivée. Comme rien ne permet de définir *a priori* un repère mobile particulier, il faut que le résultat soit indépendant du choix de repère particulier. Ainsi, si on note

$$\nabla_\mu \mathbf{V} \quad (1.26)$$

la dérivée du vecteur \mathbf{V} dans la direction ∂_μ , on souhaite que cette dérivée se transforme simplement comme tous les vecteurs, par rotation du repère local ; c'est pourquoi une telle dérivée est dite *covariante*. Pour un scalaire, c'est-à-dire un nombre réel, invariant sous l'action du groupe, la dérivée ne doit pas dépendre non plus du choix de repère mobile ; en notant ϕ une telle fonction scalaire, c'est donc simplement

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi. \quad (1.27)$$

On peut aussi faire agir la dérivée covariante sur les spineurs par l'intermédiaire des matrices Γ , en demandant toujours la covariance dans les change-

ments de repères. Enfin la règle de Leibniz

$$\nabla(FG) = (\nabla F)G + F(\nabla G) \quad (1.28)$$

permet de calculer la dérivée d'un produit.

Soit \mathbf{V} un champ de vecteurs au point M . Alors le transport parallèle vers un point $M + \delta M$ est donné par une matrice qui transforme ce vecteur linéairement et dépend également linéairement de la direction de δM . Ainsi il est défini par une forme différentielle à valeur dans les matrices $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, de composantes $\omega_\mu^a{}_b$, de telle sorte que \mathbf{V} se transforme en⁴ $\mathbf{V} - \delta x^\mu \omega_\mu \mathbf{V}$. On souhaite que ce transport parallèle conserve les produits scalaires des vecteurs transportés ; autrement dit le passage du repère au point M à celui défini en $M + \delta M$ doit être un élément du groupe de Lorentz, ce qui donne des contraintes sur les matrices $\omega_\mu^a{}_b$; en fait il faut que les matrices $\omega_\mu^{ab} = \eta^{bc} \omega_\mu^a{}_c$ soient antisymétriques.

Pour un champ de vecteurs $\mathbf{V}(x)$, on définit comme on l'a dit la dérivée covariante en transportant le vecteur $\mathbf{V}(M)$ définissant le champ au point M jusqu'en un point infinitésimalement proche $M + \delta M$ dans la direction considérée puis en comparant avec la valeur du champ en ce point en effectuant la soustraction

$$\mathbf{V}(M + \delta M) - (\mathbf{V}(M) - \delta x^\mu \omega_\mu \mathbf{V}(M)) . \quad (1.29)$$

La dérivée covariante est ainsi donnée pour un champ vectoriel par

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu . \quad (1.30)$$

Pour les champs spinoriels, comme on l'a dit cette dérivée covariante agit par l'intermédiaire des matrices Γ , et l'action sur les représentations de spin supérieur se fait en considérant des produits de représentation, en utilisant la règle de Leibniz. L'opérateur ∇ est appelé *connexion*, terme qu'on emploie aussi parfois pour la forme ω . Dans le cas qui nous occupe où le groupe de jauge est le groupe de Lorentz, on parle de *connexion de spin*. Notons que la condition que le produit scalaire soit préservé par transport parallèle s'écrit

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0 . \quad (1.31)$$

On impose ici que pour une fonction scalaire f les dérivées dans les différentes directions commutent :

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \nabla_\nu \nabla_\mu f \quad (1.32)$$

⁴Le signe $-$ est mis pour retrouver par la suite les conventions habituelles.

(condition de *torsion nulle*).

Pour un vecteur, le commutateur de deux dérivées est un opérateur linéaire défini par

$$R_{\mu\nu} \mathbf{V} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \mathbf{V} = \nabla_\mu \nabla_\nu \mathbf{V} - \nabla_\nu \nabla_\mu \mathbf{V} \quad (1.33)$$

et appelé *courbure*, ou plus précisément ici *courbure de Riemann*. En composantes, c'est un objet à quatre indices

$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b \quad (1.34)$$

où les deux premiers indices en font une 2-forme différentielle et les deux suivants décrivent l'action sur les vecteurs du repère mobile. On peut aussi écrire cette dernière dans la base des vecteurs tangents liés aux coordonnées x^μ , pour avoir un objet

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = e_\rho^c e_\sigma^b \eta_{ca} R_{\mu\nu}{}^a{}_b, \quad (1.35)$$

qui a des propriétés de symétrie entre les différents indices dues aux différentes conditions imposées. Rappelons que celles-ci sont d'une part l'invariance de la métrique par translation et d'autre part la nullité de la torsion. Ces deux conditions donnent une unique connexion, appelée *connexion de Levi-Civita* et que nous avons décrite ici. Celle-ci peut se calculer à partir de la métrique, de même que le tenseur de Riemann.

1.2.5 Formes différentielles

Avant d'aller plus loin, il nous faut décrire quelques opérations sur les formes différentielles. Rappelons qu'un tel objet est une forme multilinéaire totalement antisymétrique (ou *alternée*) définie sur tout l'espace et suffisamment lisse.

Le *produit extérieur* \wedge associe à deux formes leur produit antisymétrisé. Une base des 1-formes est donnée par les dx^μ , qui est duale de la base de vecteurs tangents ∂_μ :

$$dx^\mu \partial_\nu = \delta_\nu^\mu. \quad (1.36)$$

Toutes les autres formes s'obtiennent alors par produit extérieur de ces 1-formes et combinaison linéaire avec des fonctions comme coefficients, par exemple

$$\alpha = f(x) dx^1 \wedge dx^2 + g(x) dx^2 \wedge dx^3. \quad (1.37)$$

Notons que les 0-formes sont simplement les fonctions, et que le produit extérieur par une telle forme revient à multiplier par la fonction.

Une autre opération importante est la différentielle extérieure, définie sur les fonctions par

$$df = \partial_\mu f dx^\mu, \quad (1.38)$$

laissant invariantes les formes de la base dx^μ :

$$d dx^\mu = 0, \quad (1.39)$$

et s'étendant aux autres formes par linéarité et grâce à la formule de Leibniz graduée

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad (1.40)$$

si α est une forme de degré p .

On a la propriété essentielle

$$dd = 0. \quad (1.41)$$

Si on dispose d'une dérivée covariante ∇_μ on peut de même s'en servir pour construire une différentielle covariante ∇ , mais cette fois on n'a pas forcément $\nabla^2 = 0$.

L'opération de dualité de Hodge associe à une p -forme différentielle

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (1.42)$$

une $(D - p)$ -forme

$$*\alpha = \frac{1}{(D - p)!} \sqrt{|\det(g)|} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_D} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D}, \quad (1.43)$$

où $\epsilon_{\nu_1 \dots \nu_D}$ est le tenseur totalement antisymétrique à D indices (dont les composantes valent 0, 1 ou -1 suivant que deux indices au moins sont égaux, qu'on a une permutation paire ou impaire des indices). Notons que pour la base du repère mobile, l'expression est plus simple :

$$*(e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_p}) = \epsilon_{a_1 \dots a_D} \eta^{a_1 a_1} \dots \eta^{a_p a_p} e^{a_{p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_D}. \quad (1.44)$$

Une propriété importante est que $*$ est une pseudo-involution :

$$*^2 = \pm 1, \quad (1.45)$$

où le signe est donné par le degré des formes et la signature de l'espace-temps.

Enfin, on peut intégrer une p -forme sur une variété de dimension p . La forme volume est simplement, en métrique minkowskienne,

$$\sqrt{-\det(g)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D = *1. \quad (1.46)$$

1.2.6 Action d'Einstein

Ayant décrit ainsi l'espace-temps, Einstein a eu l'idée de rendre dynamique la géométrie en considérant la métrique ou la connexion de Levi-Civita associée comme des champs physiques soumis à des équations du mouvement et entrant en jeu dans le Lagrangien. Ainsi les propriétés géométriques de l'espace-temps sont reliées dynamiquement aux champs de matière ou d'interaction qui s'y trouvent.

Pour cela, on ajoute au Lagrangien des autres champs le Lagrangien d'Einstein

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi k} *R, \quad (1.47)$$

où k est la constante gravitationnelle de Newton et R la courbure scalaire qui s'obtient à partir du tenseur de Riemann de la manière suivante. On forme d'abord le *tenseur de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}, \quad (1.48)$$

qui est symétrique et qu'on contracte à nouveau pour former la *courbure scalaire*

$$R = R^\mu{}_\mu = R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}. \quad (1.49)$$

Une fois intégrée, l'action d'Einstein est donc

$$S_E = -\frac{1}{16\pi k} \int_{\mathcal{M}} *R = -\frac{1}{16k} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-\det(g)} R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}. \quad (1.50)$$

Cette action, associée à l'action décrivant les autres champs, permet d'écrire l'équation du mouvement pour le champ gravitationnel, appelée *équation d'Einstein*.

En définissant le *tenseur d'énergie-impulsion* comme la dérivée fonctionnelle de l'action de la matière

$$T_{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-\det(g)}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}(x)}, \quad (1.51)$$

l'équation d'Einstein s'écrit

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi k T_{\mu\nu}. \quad (1.52)$$

Un point fondamental est que cette construction rend compte des phénomènes de gravitation. En effet l'équation d'Einstein relie la courbure de l'espace-temps à la matière présente ; la géométrie ainsi imposée modifie alors

les trajectoires des particules. Ainsi une particule libre suit toujours une géodésique, mais celle-ci n'est plus nécessairement une ligne droite. Notons que si les phénomènes gravitationnels sont faibles, c'est-à-dire si la courbure est petite devant $\frac{1}{\Delta x^2}$, où Δx est la longueur typique du phénomène étudié, on retrouve comme approximation la théorie de Newton.

1.3 Interactions de jauge

1.3.1 Électromagnétisme

Nous avons vu dans la section précédente un exemple de théorie de jauge, en considérant le groupe de Lorentz comme un groupe de symétrie local de l'espace-temps. Plus généralement, une théorie de jauge est une théorie où l'on rend locale une symétrie globale, en introduisant la connexion associée. Ainsi l'électromagnétisme est-il décrit par une théorie de jauge pour le groupe $U(1)$.

Considérons en effet un champ complexe ϕ . Sa phase n'intervient pas dans l'action, et on peut la changer globalement en multipliant ϕ par $e^{i\theta}$. Si on suppose que la phase est locale, cela veut dire que le champ est décrit par une section d'un fibré, qui n'est plus forcément trivial. Comme dans la section précédente il faut alors introduire un transport parallèle et une dérivée covariante ∇_μ donnée par une connexion A : ainsi pour un champ de charge électrique q on a

$$\nabla_\mu \phi = (\partial_\mu + i q A_\mu) \phi \quad (1.53)$$

et on remplace $\partial_\mu \phi$ par cette expression dans l'action, puisque c'est cette dérivée qui est invariante sous la symétrie de jauge et non la dérivée simple ∂_μ .

Si on fait un changement de jauge donné par la phase locale $e^{i\theta(x)}$, A , le *champ de jauge*, est transformé en

$$A \longrightarrow A - d\theta. \quad (1.54)$$

et ϕ en

$$\phi \longrightarrow e^{i q \theta} \phi \quad (1.55)$$

Ainsi la dérivée covariante $\nabla_\mu \phi$ est bien covariante sous l'action de ce changement de jauge.

Notons que q caractérise en fait la représentation de $U(1)$ dans laquelle se trouve le champ ϕ . Comme ce groupe est compact et abélien, q prend sa valeur dans l'espace discret \mathbb{Z} .

On peut définir également la courbure

$$F = \nabla^2 = dA, \quad (1.56)$$

qui décrit comment le champ est modifié après un transport parallèle qui revient au point de départ. En composantes, cela s'écrit

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]. \quad (1.57)$$

La courbure décrit alors comment un champ est modifié après transport autour d'un parallélogramme infinitésimal de côtés selon les directions ∂_μ et ∂_ν .

Notons que la propriété $d^2 = 0$ donne

$$dF = 0. \quad (1.58)$$

C'est la première moitié des équations de Maxwell.

Là encore, on va remplacer dans le Lagrangien ∂_μ par ∇_μ , soit d par ∇ . Ainsi par exemple un champ de spin $\frac{1}{2}$ aura pour action

$$\begin{aligned} S_D &= \int_{\mathcal{M}} \bar{\psi} (\nabla + m) \psi = \int_{\mathcal{M}} \bar{\psi} (\not{\partial} + iqA + m) \psi \\ &= \int_{\mathcal{M}} \bar{\psi} (\partial_\mu \Gamma^\mu + iqA_\mu \Gamma^\mu + m) \psi, \end{aligned} \quad (1.59)$$

qui donne l'équation de Dirac d'une particule chargée

$$(\not{\nabla} + m) \psi = 0. \quad (1.60)$$

On va de plus rendre dynamique la connexion $U(1)$ en introduisant un terme cinétique

$$S_M = \int_{\mathcal{M}} F \wedge *F. \quad (1.61)$$

On retrouve alors comme équations du mouvement

$$d * F = *j, \quad (1.62)$$

où le second terme est donné par les autres termes de l'action, avec

$$j_\mu(x) = g_{\mu\nu} \frac{\delta S_m}{\delta A_\nu(x)}. \quad (1.63)$$

On a ici la seconde moitié des équations de Maxwell, qui s'écrivent finalement

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ d * F &= *j. \end{aligned} \quad (1.64)$$

et sont les équations du champ électromagnétique.

1.3.2 Généralisation aux autres groupes

Ce qui vient d'être fait pour le groupe $U(1)$ peut se généraliser à d'autres groupes de symétrie continus (dits *groupes de Lie*). Cette fois la connexion est à valeurs dans l'*algèbre tangente* au groupe, c'est-à-dire aux combinaisons linéaires de générateurs infinitésimaux au voisinage de l'identité. En effet la connexion, comme la dérivée habituelle, donne les variations associées à un déplacement infinitésimal. Pour $U(1)$ l'algèbre tangente en 1 est simplement \mathbb{R} , c'est pourquoi nous considérons une 1-forme à valeurs réelles. Si nous prenons comme groupe $U(n)$, qui est constitué des matrices U $n \times n$ telles que

$$U^+ U = 1, \quad (1.65)$$

l'algèbre tangente⁵ en 1 est constituée des matrices $1 + i\delta U$ (le i est le choix de paramétrisation des physiciens) telles que, au premier ordre,

$$(1 + i\delta U)^+ (1 + i\delta U) = 1, \quad (1.66)$$

soit

$$\delta U^+ = \delta U. \quad (1.67)$$

L'algèbre tangente au groupe $U(n)$ est donc constituée des matrices hermitiennes $n \times n$.

Précisons que le commutateur $[,]$ défini par

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.68)$$

lui donne une structure d'algèbre de Lie. (Les définitions précises sont données dans la partie 2.2.) Ainsi un groupe abélien donnera une algèbre commutative.

On a donc une connexion

$$\nabla = d + A \quad (1.69)$$

à valeurs dans l'algèbre tangente et les particules constituent des représentations du groupe considéré, éventuellement triviales, sur lesquelles agit la connexion.

On peut aussi former la courbure

$$F = \nabla^2 = dA + A \wedge A, \quad (1.70)$$

⁵Ou plus précisément sa représentation linéaire fondamentale (ou de définition) en dimension n .

où le produit qui intervient dans le produit extérieur est celui de l'algèbre de Lie :

$$A \wedge A = A_\mu dx^\mu \wedge A_\nu dx^\nu = \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu] dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (1.71)$$

En dérivant l'équation 1.70, on obtient l'*identité de Bianchi*

$$dF = F \wedge A - A \wedge F = [F, A] \quad (1.72)$$

soit encore

$$\nabla F = 0. \quad (1.73)$$

Pour le terme cinétique du nouveau champ introduit, il faut sommer sur toutes les directions de l'algèbre de Lie :

$$S_{YM} = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(F \wedge *F). \quad (1.74)$$

1.3.3 Dualité $SL(2, \mathbb{Z})$ de l'électromagnétisme

Les équations de l'électromagnétisme dans le vide, en quatre dimensions,

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ d * F &= 0, \end{aligned} \quad (1.75)$$

possèdent une symétrie \mathbb{Z}_2 : on peut échanger les rôles de F et $*F$ par

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow *F \\ *F &\longrightarrow -F. \end{aligned} \quad (1.76)$$

(En effet dans un espace minkowskien de dimension 4 on a $*^2 = -1$ pour une 2-forme, si bien que $*(*F) = -F$.)

En composantes, $F_{\mu\nu}$ s'écrit

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.77)$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs électrique et magnétique. Dans ces notations, la symétrie considérée échange \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &\longrightarrow -\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Il s'agit de la *dualité électrique-magnétique*.

Si, au lieu de se placer dans le vide, on considère des charges électriques, on voit que cette symétrie impose d'avoir aussi des charges magnétiques. En effet le courant électrique

$$j = *d * F \quad (1.79)$$

se voit transformé en un courant magnétique

$$k = -dF. \quad (1.80)$$

Cette dernière équation indique de plus que si k est non nul il n'est pas possible d'écrire un potentiel A tel que $F = dA$, car alors $dF = ddA = 0$.

Considérons notamment une charge magnétique ponctuelle (un *monopôle magnétique*). Alors d'après le lemme de Poincaré, on peut définir un potentiel A localement partout sauf en ce point. Toutefois ce potentiel n'est pas global : on peut le définir sur des portions d'espaces autour du monopôle (il en faut au moins deux) mais pas sur tout l'espace privé du point considéré. En fait on peut trouver un potentiel défini sur tout l'espace privé d'une demi-droite partant du monopôle et allant jusqu'à l'infini. Alors la charge magnétique, donnée par l'intégrale sur une surface \mathcal{S} entourant le monopôle du champ F ,

$$g = \int_{\mathcal{S}} F, \quad (1.81)$$

peut se calculer par

$$g = \int_{\mathcal{S}'} dA = \int_{\mathcal{C}} A, \quad (1.82)$$

où \mathcal{S}' est la surface considérée privée d'un voisinage infinitésimal de la demi-droite sur laquelle A n'est pas défini, et où \mathcal{C} est le bord de ce voisinage.

D'autre part, considérons le champ associé à une particule chargée électriquement. En faisant un tour autour de la demi-droite en question, il prend une phase⁶

$$\exp\left(i \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} A\right) = e^{i \frac{q}{\hbar} m}. \quad (1.83)$$

Mais la demi-droite choisie n'a pas de sens physique : on aurait pu la prendre ailleurs. Elle ne doit donc pas se faire « sentir » sur les champs physiques, et on doit ainsi avoir

$$e^{i \frac{q}{\hbar} m} = 1, \quad (1.84)$$

soit

$$q m = 2\pi n \hbar \quad (1.85)$$

⁶Nous remettons ici le facteur \hbar en raison du caractère quantique du phénomène.

avec n dans \mathbb{Z} . C'est la *condition de quantification de Dirac*. Notons que cette condition est un effet quantique. En effet, on s'y sert de la description par un champ d'une particule chargée mais on interprète le paramètre q comme une charge ponctuelle, on utilise donc simultanément la notion de particule.

On peut aussi retrouver ce résultat à partir de la quantification du moment cinétique, qui doit être un multiple entier de \hbar . Cela permet de généraliser la condition de Dirac au cas où l'on a des *dyons* : des particules portant à la fois une charge électrique q et une charge magnétique m . Alors on a obtenu la *condition de quantification de Zwanziger-Schwinger* : entre deux tels dyons de charges (q, m) et (q', m') on a la relation⁷

$$q m' - q' m = 2\pi n \quad (1.86)$$

avec n dans \mathbb{Z} .

Cette formule est laissée invariante si on échange charges électrique et magnétique suivant

$$\begin{array}{l} q \longrightarrow m \\ m \longrightarrow -q \end{array}, \quad (1.87)$$

ce qui correspond à la dualité électrique-magnétique que nous avons déjà vue. Mais on peut aller plus loin en remarquant qu'il y a aussi invariance par rapport à la transformation

$$\begin{array}{l} q \longrightarrow q + m \\ m \longrightarrow m \end{array}. \quad (1.88)$$

Les deux transformations 1.87 et 1.88, dites respectivement S et T , engendrent en fait le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ des matrices entières à déterminant entier, qui agissent ici sur les doublets $\begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix}$.

Il est tentant de conjecturer que la physique est invariante sous cette transformation. Cela nécessite d'associer à toute particule chargée (un électron par exemple) toute une famille de dyons, l'orbite sous $SL(2, \mathbb{Z})$ de la particule considérée.

Il faut ajouter une remarque importante. La transformation S , qui échange charges électrique et magnétique, échange un régime de couplage faible (avec e petit) avec un régime de couplage fort : la charge magnétique minimale est

$$m = \frac{2\pi}{e}. \quad (1.89)$$

En particulier si la version « électrique » peut faire l'objet d'un traitement en perturbations en théorie quantique des champs, il n'en est pas de même de la version duale, « magnétique ».

⁷Nous reprenons notre convention $\hbar = 1$ pour alléger les formules.

Une autre remarque concerne la transformation T : au niveau du Lagrangien, cette transformation est liée à un terme

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{1}{2} \frac{e^2 \theta}{32\pi^2} F \wedge F \quad (1.90)$$

qui ne change pas les équations du mouvement (c'est la différentielle d'un terme $F \wedge A$) mais décale la charge électrique des dyons (effet Witten) :

$$q = n e + \frac{\theta e^2 m}{8\pi^2}. \quad (1.91)$$

Avec $m = k \frac{4\pi}{e}$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a ainsi

$$q = n e + \frac{\theta}{2\pi} k e \quad (1.92)$$

Pour un nombre θ égal à 2π , ce qui correspond à la transformation T , cela change simplement l'entier n , et la condition de quantification est inchangée. Les charges sont données par un réseau bidimensionnel (d'angle θ) qui est invariant sous les transformations de $SL(2, \mathbb{Z})$.

1.4 Supersymétrie

1.4.1 Théorème «no-go»

L'intérêt d'introduire de nouvelles symétries dans la description d'un système physique apparaît à la quantification de la théorie. En effet cela contraint fortement le système, en particulier les corrections radiatives pour certaines quantités. Ainsi on peut montrer qu'à quatre dimensions, les théories de jauge, décrites par la théorie de Yang-Mills, avec des modifications diverses, sont plus ou moins les seules théories (avec interaction) renormalisables, c'est-à-dire les seules qu'on sait traiter en théorie quantique des champs⁸.

En cherchant à introduire de nouvelles symétries, en dimension strictement supérieure à deux, on se heurte au théorème de Coleman et Mandula⁹ :

⁸Le mot *renormalisation* indique un processus visant à obtenir des résultats finis pour les différentes quantités physiques. En effet par une approche naïve la plupart des quantités divergent, mais on sait traiter le problème de manière systématique pour certaines théories, dite *renormalisables*. La gravitation est un exemple de théorie non renormalisable, comme nous le verrons plus loin.

⁹Un tel théorème est dit «no-go» car il indique une impossibilité à aller dans un voie donnée. En fait il indique plutôt les hypothèses à affaiblir pour avancer.

Si la matrice S — *i.e.* la matrice de diffusion, qui donne la probabilité que le système passe d'un état à un autre — est non triviale — *i.e.* il y a des interactions — et analytique dans les variables de temps et d'énergie (une hypothèse technique raisonnable),

Si les masses des particules sont toutes positives et forment un spectre discret — *i.e.* les masses possibles pour les particules ne forment pas un intervalle continu — et qu'il y a un nombre fini de types de particules pour une masse donnée,

Si G , le groupe de symétrie de la matrice S qui contient le groupe de Poincaré, est un groupe de Lie (*i.e.* continu) connexe, engendré par des générateurs infinitésimaux représentables par des opérateurs dans l'espace des moments dont les noyaux sont des distributions (une autre hypothèse technique raisonnable),

Alors G est le produit direct du groupe de Poincaré et d'un groupe de symétrie interne, c'est-à-dire commutant avec le groupe de Poincaré.

Ce théorème affirme ainsi qu'il n'est pas possible de mélanger le groupe de Poincaré de manière non triviale avec un autre groupe de symétrie continu. En particulier, il semble impossible de relier par des symétries des particules de masses ou spins différents.

En fait la solution est dans l'introduction d'un nouveau type de symétrie : la *supersymétrie*, qui n'est pas donnée par un groupe mais par un *supergroupe*.

Pour un groupe de Lie, les transformations peuvent s'obtenir à partir de transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} \text{bosons} &\longrightarrow \text{bosons} + \epsilon \text{ (autres) bosons} \\ \text{fermions} &\longrightarrow \text{fermions} + \epsilon \text{ (autres) fermions,} \end{aligned} \quad (1.93)$$

où ϵ est un nombre réel infinitésimal.

L'idée est de généraliser cela à un paramètre ϵ *fermionique* ou *impair* :

$$\begin{aligned} \text{bosons} &\longrightarrow \text{bosons} + \epsilon \text{ fermions} \\ \text{fermions} &\longrightarrow \text{fermions} + \epsilon \text{ bosons.} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Dans le premier cas, on peut reconstruire le groupe de Lie à partir de l'algèbre des générateurs infinitésimaux, donnée par des commutateurs $[A, B] = AB - BA$. Dans le second cas, il faut remplacer cela par des anticommutateurs $\{A, B\} = AB + BA$, et de même au lieu de commuter comme les nombres réels les paramètres impairs comme ϵ anticommutent : $\epsilon \epsilon' = -\epsilon' \epsilon$.

1.4.2 Algèbre de super-Poincaré $D = 4$ $N = 1$

Rappelons d'abord que le groupe de Poincaré est engendré par les générateurs infinitésimaux suivants :

- Translations : P_μ ($= i\partial_\mu$);
- Rotations et boosts de Lorentz : $M_{\mu\nu}$.

Ils satisfont aux règles de commutation

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -ig_{\rho\mu}P_\nu + ig_{\rho\nu}P_\mu. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Comme nous l'avons vu au dernier paragraphe, cette algèbre ne peut être étendue de manière non triviale qu'en introduisant des générateurs fermioniques. Nous allons donc introduire des générateurs qui sont des spineurs de Dirac (de même que P est un vecteur, par exemple) Q et \bar{Q} , tels que $\bar{Q} = Q^+\Gamma^0$ (condition de Majorana¹⁰). Pour fixer les idées, nous nous sommes placés en quatre dimensions d'espace-temps.

Il suffit alors d'ajouter aux relations 1.96 les commutateurs et anticommutateurs suivants :

$$\begin{aligned} [P_\mu, Q_\alpha] &= 0 \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= -2P_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \end{aligned} \quad (1.96)$$

qui s'écrit plus succinctement

$$\begin{aligned} [P, Q] &= 0 \\ \{Q, \bar{Q}\} &= -2\mathcal{P}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

On obtient ainsi la (*super-*)algèbre de supersymétrie $D = 4$ $N = 1$; ce dernier nombre se rapporte au nombre de générateurs de supersymétrie. On voit que le générateur de supersymétrie Q est en quelque sorte une racine carrée de l'impulsion P .

D'autre part, les générateurs de supersymétrie permettent de classer les particules en multiplets, la supersymétrie échangeant entre eux les différentes composantes d'un même multiplet.

Pour des états de masse nulle, on peut réécrire l'algèbre, par changement de base et reparamétrisation, comme une algèbre d'oscillateur fermionique

$$\begin{aligned} \{b, b^+\} &= 1 \\ b^2 &= 0 \\ (b^+)^2 &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.98)$$

¹⁰C'est une des conditions qu'on peut imposer, notamment à quatre dimensions, pour réduire la dimension de la représentation spinorielle d'un facteur 2.

On obtient alors des multiplets $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$, où ces nombres donnent les hélicités des particules. Ajoutons que l'invariance CPT ¹¹ d'une théorie requiert qu'un multiplet soit accompagné du multiplet d'hélicité et autres nombres quantiques opposés. En se limitant à des hélicités inférieures à 2, on obtient :

- le *multiplet chiral* $(0, \frac{1}{2})$, avec son conjugué $(-\frac{1}{2}, 0)$, constitué d'un fermion de Weyl¹² et d'un scalaire complexe ;
- le *multiplet vectoriel* $(\frac{1}{2}, 1)$, avec son conjugué $(-1, -\frac{1}{2})$, contient un boson de jauge et un spineur de Weyl, tous les deux dans la représentation adjointe du groupe de jauge ;
- le *multiplet du gravitino* $(1, \frac{3}{2})$, avec son conjugué $(-\frac{3}{2}, -1)$, contient un gravitino en plus de celui du multiplet gravitationnel ; il n'intervient que pour les supersymétries étendues¹³, que nous verrons au prochain paragraphe, décomposées en représentations $N = 1$;
- le *multiplet gravitationnel* $(\frac{3}{2}, 2)$, avec son conjugué $(-2, -\frac{3}{2})$, qui comprend le graviton (particule associée aux modifications de la métrique) et le gravitino, son partenaire supersymétrique.

Pour les états massifs, on a une algèbre de deux oscillateurs, et on obtient ainsi des multiplets à quatre états $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1)$. Ainsi le multiplet chiral massif $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ a le même contenu que le multiplet chiral de masse nulle avec son conjugué CPT . Pour les autres états, comme $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, sans parler d'invariance CPT , l'invariance sous rotation $SU(2)$ impose d'ajouter le multiplet symétrique $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$. On obtient alors une particule de spin 1, deux de spin $\frac{1}{2}$ et une de spin 0.

Remarquons que la supersymétrie impose que les nombres de degrés de liberté bosoniques et fermioniques soient égaux, comme on le vérifie aisément dans la classification que nous venons de donner.

1.4.3 Extensions

L'algèbre que nous avons vue au paragraphe précédent ne contient qu'un seul spineur de supersymétrie. En fait, on peut considérer des algèbres de supersymétrie *étendues* où on a plusieurs générateurs Q^A , indicés par un entier A allant de 1 à N :

$$\{Q^A, \overline{Q}^B\} = -2\delta^{AB} \not{P}, \quad (1.99)$$

¹¹Produit de la symétrie par conjugaison de charge C , de l'inversion d'espace P et du renversement du temps T .

¹²La condition de Weyl est une autre condition qu'on peut imposer à un spineur de Dirac (de masse nulle) pour en réduire la dimension. On obtient alors un spineur de dimension complexe 2 et d'hélicité fixée, $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.

¹³En effet, la présence d'un gravitino implique qu'il y ait une supersymétrie associée.

avec toujours

$$[Q^A, P] = 0. \quad (1.100)$$

Pour les états de masse nulle, on a alors une algèbre de N oscillateurs fermioniques, ce qui fait 2^N états par multiplet, d'hélicité λ à $\lambda + \frac{1}{2}N$. Ainsi pour la supersymétrie $N = 2$ on a en particulier

- l'*hypermultiplet*¹⁴ : $(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2})$;
- le *multiplet vectoriel* : $(-1, -\frac{1}{2}^2, 0) + (0, \frac{1}{2}^2, 1)$;
- le *multiplet de supergravité* : $(-2, -\frac{3}{2}^2, -1) + (1, \frac{3}{2}^2, 2)$.

Notons que ces états peuvent se décomposer selon les représentations de l'une ou l'autre des deux algèbres $N = 1$ qui composent l'algèbre de supersymétrie $N = 2$, selon les multiplets que nous avons vus précédemment.

De même on peut considérer des multiplets pour un nombre supérieur de supersymétries, jusqu'à $N = 8$ si on se limite à des hélicités inférieures à 2. Dans ce dernier cas, on a seulement le multiplet de supergravité

$$\left(-2, -\frac{3}{2}^8, -1^{28}, -\frac{1}{2}^{56}, 0^{70}, \frac{1}{2}^{56}, 1^{28}, \frac{3}{2}^8, 2\right). \quad (1.101)$$

On s'arrête à des hélicités ou spins 2 car on pense qu'il n'est pas possible de coupler à la gravitation des particules d'hélicité ou spin supérieur en nombre fini.

Pour les états massifs, comme dans le cas $N = 1$ le nombre d'oscillateurs est multiplié par 2, et il y a donc 2^{2N} états par multiplet.

Ajoutons encore qu'on peut modifier l'algèbre de supersymétrie par des charges conservées Z qui commutent avec tous les générateurs de l'algèbre, de manière schématique

$$\begin{aligned} \{Q, \bar{Q}\} &= -2\not{P} + Z \\ [Z, \dots] &= 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

1.4.4 États BPS

Si on considère une particule chargée ponctuelle dans le référentiel de son centre de masse, l'algèbre s'écrit

$$\left\{Q_\alpha^A, Q_\beta^{B+}\right\} = 2m\delta^{AB}\delta_{\alpha\beta} + 2iZ^{AB}\Gamma_{\alpha\beta}^0. \quad (1.103)$$

¹⁴La notation 0^2 indique qu'il y a deux états d'hélicité 0, qu'on obtient en agissant sur l'état $-\frac{1}{2}$ avec un oscillateur ou l'autre. (La notation est évidemment utilisée pour toutes les hélicités.)

Alors pour un état propre de Z^{AB} , on peut trouver une base dans laquelle

$$Z^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 0 & 0 & & \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & & \\ 0 & 0 & -q_2 & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad (1.104)$$

avec $q_i \geq 0$.

Alors les valeurs propres de l'équation 1.103 sont $m \pm q_i$ dans le second membre, alors que le premier est une somme de carrés et est donc positif. On a alors la *borne de Bogomolny-Prasad-Sommerfield (BPS)*

$$m \geq |q_i|. \quad (1.105)$$

On voit en particulier qu'un état de masse nulle est nécessairement neutre, ce qui rend valide l'analyse des multiplets de masse nulle faite à partir de l'algèbre 1.99. On dit qu'un état *sature* cette borne s'il y a égalité $q_i = m$ pour un certain nombre k des N valeurs de i . Il faut alors que $2k$ paires d'oscillateurs annihilent cet état, et on a alors une représentation *courte* ou *BPS* de l'algèbre de supersymétrie, de dimension $2^{2(N-k)}$. Si toutes les charges q_i sont égales à m , on a une représentation *ultra-courte* de dimension 2^N (si N est pair) ; les représentations ultra-courtes sont en fait les mêmes que celles des états de masse nulle¹⁵.

1.4.5 Généralisation aux autres dimensions

Ce que nous avons vu pour la supersymétrie en dimension quatre se généralise à d'autres dimensions. On prend comme générateurs des spineurs de dimension minimale comme générateurs, en étendant l'algèbre de Poincaré par des relation de la forme 1.102. Si on n'admet que les spin (ou hélicités) inférieures ou égales à 2, alors on ne peut se placer en dimension supérieure à 11 : en effet tout multiplet contiendrait alors des états de spin plus grand. Nous y reviendrons dans ce qui suit.

1.5 Supergravité

Si on essaie de jauger la supersymétrie — rendre cette symétrie locale et non plus seulement globale — on est amené à introduire la gravitation. En

¹⁵Sur ces sujets, voir par exemple l'annexe B de [P].

effet le carré d'une transformation de supersymétrie donne une translation, dont la distance dépend des paramètres fermioniques ϵ . En faisant varier ce dernier paramètre avec le point d'espace-temps considéré, on obtient des translations différentes pour les différents points d'espace-temps : on tombe donc sur des changements de coordonnées locales, c'est-à-dire sur la relativité générale. Inversement si on introduit un repère mobile, et une structure de spin, dans lesquels est exprimé le spineur ϵ , le changement de repère local induit un changement local de ce paramètre spinoriel. Ainsi supersymétrie locale et relativité générale — et donc gravitation — sont inséparables, pour une théorie supersymétrique ; on parle donc de théories de *supergravité*.

À l'origine, on espérait que la supersymétrie permettrait de quantifier ces théories, et ainsi d'avoir une version quantique de la gravitation, pièce manquante de la théorie physique des interactions fondamentales, mais il apparut que cette nouvelle symétrie ne résolvait pas les problèmes de quantification.

1.5.1 Supergravité $N = 1$ en quatre dimensions

À titre d'exemple, considérons la supergravité à quatre dimensions d'espace-temps et une supersymétrie, soit quatre supercharges¹⁶ [vN].

Pour le repère mobile e_μ^m , on écrit la transformation de supersymétrie

$$\delta_\epsilon e_\mu^m = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \Gamma^m \psi_\mu, \quad (1.106)$$

en introduisant un *gravitino* ψ_μ , champ d'hélicité $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire une 1-forme à valeur spinorielle. Ce champ se transforme quant à lui en

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{2} \omega_\mu^{mn} \Sigma_{mn} \epsilon, \quad (1.107)$$

soit

$$\delta_\epsilon \psi = \nabla \psi, \quad (1.108)$$

où ∇ est la dérivée covariante d'espace-temps.

En fait ω n'est pas un champ physique, dans le sens où il peut être déterminé en résolvant une équation du mouvement algébrique ; c'est ce qu'on appelle un *champ auxiliaire*, qui ne contient pas de degré de liberté. Le repère mobile et le gravitino forment déjà un doublet de supersymétrie, et ont en particulier le même nombre de degrés de libertés, bosoniques d'un côté et fermioniques de l'autre.

¹⁶Le nombre de *supercharges* est le nombre de composantes réelles des générateurs de supersymétrie. C'est donc le produit du nombre de supersymétries par la dimension réelle de la plus petite représentation spinorielle.

En plus du terme d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{2\kappa^2} * R \quad (1.109)$$

nous mettons dans le Lagrangien un terme cinétique ; en fait le seul terme quadratique d'énergie positive pour une hélicité $\frac{3}{2}$ est le terme de *Rarita-Schwinger*

$$\mathcal{L}_{RS} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \Gamma_5 \Gamma_\nu \nabla_\rho \psi_\sigma, \quad (1.110)$$

où $\Gamma_5 = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3$.

On a alors une théorie de supergravité *pure* : il n'y a pas de matière à laquelle coupler ces champs ; il est cependant possible d'en ajouter en nombre fini, pour avoir une théorie avec de la matière.

Comme nous l'avons dit l'équation du mouvement pour la connexion de spin ω est une équation algébrique qui permet d'écrire ce champ comme une fonction du repère mobile e_μ^m et du gravitino ψ_μ . On peut alors substituer le résultat dans le Lagrangien pour obtenir une formulation dite *du second ordre* qui ne contient que les champs physiques du doublet gravitationnel.

Ajoutons une remarque importante : la supersymétrie est une symétrie des équations du mouvement, mais n'est pas valable pour les champs ne vérifiant pas ces équations, dans la formulation que nous avons présentée. En fait des champs auxiliaires permettent pour N petit d'avoir une supersymétrie hors de la couche de masse, et même superlocale dans un superespace.

1.5.2 Superespace

En fait on peut interpréter la construction de cette supergravité en introduisant un *superespace*. Aux dimensions d'espace-temps habituelles, on va ajouter des dimensions fermioniques, ou impaires : les coordonnées selon ces dimensions anticommulent au lieu de commuter. En particulier le carré d'un tel nombre est 0 ; en quelque sorte la « longueur » de ces directions est nulle, ou plus précisément infinitésimale¹⁷. De plus tout développement en série dans les variables impaires est en fait un polynôme, fini, puisqu'on ne peut avoir au plus qu'une fois chaque variable fermionique. Comme on veut avoir une action du groupe de Lorentz — les rotations de l'espace-temps — sur l'ensemble du superespace on prend les directions fermioniques dans une représentation spinorielle de ce groupe, précisément la représentation dans laquelle sont pris les générateurs de supersymétrie, soit ici la représentation de Majorana.

¹⁷En mathématiques, il s'agit de la notion de *supervariété*.

Les deux champs physiques de la supergravité $N = 1$ sont alors réunis en un super-repère mobile : en tout point de l'espace on a des formes $e_\mu^m dx^\mu$ qui donnent les directions « réelles », ou paires, de la base locale et des formes $\psi_\mu^m dx^\mu$ qui donnent les directions impaires. L'indice μ court alors sur toutes les directions du superspace ; en fait il faut imposer à la main des relations sur les supertorsions pour retrouver précisément les champs de l'approche précédente. Nous traiterons de manière détaillée dans le chapitre 3 une généralisation de cette méthode.

1.5.3 Supergravité à 11 dimensions

Nous venons de parler de la supergravité $N = 1$ à quatre dimensions ; on peut également construire des théories de supergravités *étendues*, où le nombre de supercharges est au plus 32 (ce qui correspond à $N = 8$ en quatre dimensions), ce qui permet d'exclure des multiplets toute particule de spin ou d'hélicité strictement supérieure à 2. (Ajoutons que les supergravités à 32 supercharges sont dites *maximales*.) On peut construire ainsi des supergravités en diverses dimensions d'espace-temps, mais dont le nombre est limité à 11 : en effet, au-delà les spineurs ont nécessairement plus de 32 supercharges. À 11 dimensions, il existe une unique supergravité, $\mathcal{N} = 1$ ¹⁸, où le générateur de supersymétrie est un spineur de Majorana de dimension 32.

Le multiplet gravitationnel contient alors 256 degrés de liberté, dont une moitié est fermionique et l'autre bosonique. La partie bosonique est donnée par un tenseur symétrique de trace nulle ($\frac{1}{2} \times 9 \times 10 - 1 = 44$ degrés de liberté), le graviton et une 3-forme de masse nulle ($9 \times 8 \times 7 / 3! = 84$ degrés de liberté) ; on vérifie bien que cela fait 128 composantes bosoniques au total. La partie fermionique est donnée par un gravitino, de dimension $16 \times 9 - 16 = 128$.

En notant A la 3-forme et $F = dA$ sa courbure, la dynamique de cette théorie est donnée par le Lagrangien suivant [CJS] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} = & *R - \frac{1}{2}F \wedge *F - \frac{1}{6}A \wedge F \wedge F \\ & - \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho} \nabla_\nu \left(\frac{\omega + \hat{\omega}}{2} \right) \psi_\rho \\ & + \frac{1}{192} \left(\bar{\psi}_\mu \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\nu + 12\bar{\psi}^\alpha \Gamma^{\gamma\delta} \psi^\beta \right) \left(F_{\alpha\beta\gamma\delta} + \hat{F}_{\alpha\beta\gamma\delta} \right), \end{aligned} \quad (1.111)$$

¹⁸On note \mathcal{N} le nombre de générateurs de supersymétrie en dimension différente de 4 ; la notation N désigne le nombre de supersymétries de la théorie réduite à quatre dimensions, soit le nombre de supercharges divisé par 4. Ici on a ainsi $N = 8$.

où¹⁹

$$\hat{F}_{\alpha\beta\gamma\delta} = F_{\alpha\beta\gamma\delta} - 3\bar{\psi}_{[\mu}\Gamma_{\nu\rho}\psi_{\sigma]} \quad (1.112)$$

et

$$\hat{\omega}_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + \frac{i}{4}\bar{\psi}_{\alpha}(\Gamma_{\mu ab})^{\alpha\beta}\psi_{\beta}. \quad (1.113)$$

1.5.4 Réduction dimensionnelle

À partir d'une théorie à D dimensions, on peut effectuer une *réduction dimensionnelle*. Dans la réduction de *Kaluza-Klein*, on considère qu'une des dimensions spatiales est un cercle et on ne garde que les modes les moins énergétiques du mouvement selon cette direction, c'est-à-dire des champs constants le long de ce cercle. On obtient ainsi une théorie en dimension $D - 1$. La réduction de Kaluza-Klein préservant la supersymétrie, une théorie de supergravité est réduite à une supergravité de dimension inférieure mais possédant le même nombre de supercharges. Ainsi, en partant de la supergravité à 11 dimensions, on peut retrouver la plupart des supergravités maximales, à 32 supercharges. Une telle troncation est dite *cohérente* car les solutions de la théorie tronquée restent des solutions de la théorie complète.

On peut ainsi briser l'invariance par le groupe de Lorentz $SO(1, D - 1)$ en $SO(1, D - 2)$. Les degrés de liberté de la métrique $g_{\mu\nu}$ se décomposent alors dans les représentations irréductibles suivantes de ce dernier groupe (en notant $d = D - 1$) :

- un scalaire $\phi = \ln(g_{dd})$, appelé *dilaton* ;
- une 1-forme $A_{\mu} = e^{-\phi}g_{\mu d}$, interprétée comme une connexion $U(1)$, où la fibre $U(1)$ est en fait le cercle de compactification.

De plus ces champs ne dépendent plus que de $D - 1$ variables d'espace-temps.

En poursuivant le processus on peut ainsi former à partir de la métrique des formes différentielles de degré un, plusieurs dilatons, et une métrique sur les orbites.

Ajoutons qu'on peut aussi garder tous les modes massifs, sans faire de troncation ; on parle alors de *compactification*. On peut compactifier une théorie non seulement sur un cercle mais sur divers types de variétés compactes, selon les symétries qu'on veut préserver.

1.5.5 Triangle magique

En partant de la supergravité maximale $N = 8$ à quatre dimensions, on peut effectuer des troncations du nombre de supersymétries, en ne gar-

¹⁹Le crochet indique qu'il faut antisymétriser sur tous les indices situés à l'intérieur. On utilise également la notation $\Gamma^{\alpha\beta\dots\omega}$ pour le produit antisymétrisé $\Gamma^{[\alpha}\Gamma^{\beta}\dots\Gamma^{\omega]}$.

dant que le secteur de supergravité pure, et obtenir ainsi des théories $N = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$. Ces théories peuvent être réduites à trois dimensions par réduction dimensionnelle, et on peut également les *oxyder* pour la plupart d'entre elles ($N \neq 0$). On appelle *oxydation* l'inverse d'une réduction : une théorie en D dimension est oxydée en une théorie à $D + 1$ dimensions si cette dernière se réduit à la théorie originale par réduction de Kaluza-Klein. En partant de la supergravité $N = 8$, on peut ainsi remonter jusqu'à la supergravité à 11 dimensions. Notons que l'oxydation n'est pas toujours unique : ainsi toujours en partant de la supergravité $N = 8$ à 4 dimensions on peut obtenir deux supergravités différentes à $D = 10$: la supergravité *IIA*, qui est la réduction de la supergravité à 11 dimensions, et également une supergravité appelée *IIB*. (Précisons que pour cette dernière il n'existe pas de formulation lagrangienne covariante, où les équations du mouvement dérivent du principe de moindre action.)

Pour les théories qu'on obtient ainsi, les champs scalaires donnent une réalisation non linéaire d'un groupe G . Plus précisément, ils paramétrisent l'espace symétrique quotient G/H , où H est le sous-groupe compact maximal de G . En fait le groupe G agit également sur tous les champs et le quotient G/H paramétrise l'*espace des modules* de la théorie, c'est-à-dire l'espace des paramètres (*e.g.* constantes de couplage, masses...). Nous y reviendrons dans la section 1.7.

On peut classer ces théories dans un tableau, suivant le nombre de supercharges et la dimension de l'espace-temps (table 1.1). Si on regarde de plus près ce tableau, on peut voir que si deux groupes apparaissent symétriquement de part et d'autre de la diagonale, ils sont des formes réelles différentes de mêmes groupes complexes. Nous reviendrons là-dessus en détail au prochain chapitre.

1.5.6 Objets *BPS*

En cherchant des solutions (classiques) des équations de supergravité, on peut se limiter à des solutions qui sont invariantes sous un certain nombre de supersymétries : on obtient alors des *états BPS*. En particulier, on peut obtenir des solutions étendues dans un certain nombre ($D - d$) de dimensions d'espace-temps et d'extension finie dans les d dimensions restantes, respectant une symétrie $SO(D - d) \times \text{Poincaré}_d$: ce sont en fait des membranes à $D - d$ dimensions [St]. De plus ces membranes sont chargées de façon électrique ou magnétique pour certains champs de la supergravité considérée.

Prenons par exemple la supergravité à 11 dimensions. Il existe alors des solutions de membranes bidimensionnelles, chargées électriquement par rap-

	$N = 8$	$N = 6$	$N = 5$	$N = 4$	$N = 3$	$N = 2$	$N = 1$	$N = 0$
$d = 11$	$+$							
$d = 10$	$\mathbb{R} \mid_0^1$							
$d = 9$	$\frac{SL(2)}{SO(2)} \times \mathbb{R} \mid_1^4$							
$d = 8$	$\frac{SL(3) \times SL(2)}{SO(3) \times SO(2)} \mid_{11}^{14}$							
$d = 7$	$\frac{SL(5)}{SO(5)} \mid_{10}^{24}$							
$d = 6$	$\frac{SO(5,5)}{SO(5) \times SO(5)} \mid_{120}^{145}$	$\frac{SO(5,1) \times SO(3)}{SO(5) \times SO(3)} \mid_{113}^{118}$						
$d = 5$	$\frac{E_6}{Usp(8)} \mid_{136}^{178}$	$\frac{SU^*(6)}{Usp(6)} \mid_{21}^{35}$						
$d = 4$	$\frac{E_7}{SU(8)} \mid_{63}^{133}$	$\frac{SO^*(12)}{U(6)} \mid_{36}^{66}$	$\frac{SU(5,1)}{U(5)} \mid_{25}^{35}$	$\frac{SU(4) \times SU(1,1)}{SU(4) \times SO(2)} \mid_{16}^{18}$	$\frac{U(3)}{U(3)}$	$\frac{U(2)}{U(2)}$	$\frac{U(1)}{U(1)}$	$+$
$d = 3$	$\frac{E_8}{SO(16)} \mid_{120}^{248}$	$\frac{E_7}{SO(12) \times SO(3)} \mid_{69}^{133}$	$\frac{E_6}{SO(10) \times SO(2)} \mid_{46}^{78}$	$\frac{SO(8,2)}{SO(8) \times SO(2)} \mid_{29}^{45}$	$\frac{SU(4,1)}{SO(6) \times SO(2)} \mid_{24}^{16}$	$\frac{SU(2,1) \times SU(2)}{SO(4) \times SO(2)} \mid_7^{11}$	$\frac{SL(2) \times SO(2)}{SO(2) \times SO(2)} \mid_2^4$	$\frac{SL(2)}{SO(2)} \mid_1^3$

TAB. 1.1 – Quotients G/H classifiant les scalaires des théories de supergravité obtenues par oxydation/réduction à partir des supergravités pures à $D = 4$; les nombres indiquent respectivement la dimension du groupe G et du sous-groupe compact maximal H [J, HJP2].

port à la 3-forme A , données en coordonnées adaptées (isotropes) par

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k}{r^6}\right)^{-\frac{2}{3}} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \left(1 + \frac{k}{r^6}\right)^{\frac{1}{3}} dy^m dy^m \quad (1.114)$$

$$A_{\mu\nu\lambda} = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left(1 + \frac{k}{r^6}\right)^{-1}, \quad (1.115)$$

où $r = \sqrt{y^m y^m}$ est la coordonnée radiale dans les directions transverses y_m à la membrane, et où x^μ sont les trois coordonnées tangentes. k est une constante d'intégration. Ajoutons que contrairement aux apparences, cette solution n'est pas singulière en $r = 0$, comme on pourrait le voir par un changement de coordonnées.

En plus de ces membranes bidimensionnelles $M2$, il existe aussi des solutions duales sous la forme de membranes à 5 dimensions $M5$ chargées magnétiquement pour la 3-forme A :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k'}{r^3}\right)^{-\frac{1}{3}} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} + \left(1 + \frac{k'}{r^3}\right)^{\frac{2}{3}} dy^m dy^m \quad (1.116)$$

$$F_{m_1 \dots m_4} = 3k' \epsilon_{m_1 \dots m_4 p} \frac{y^p}{r^5}, \quad (1.117)$$

($\mu = 0, 1, \dots, 5$; $m = 1, \dots, 5$)

toujours en coordonnées isotropes. k' est proportionnel à la charge magnétique. Ajoutons que ces deux solutions de la supergravité préservent la moitié des 32 supersymétries et saturent la borne *BPS* : ce sont bien des états *BPS*.

On pourrait poursuivre une telle analyse pour les autres supergravités ; nous allons voir dans la prochaine section que le spectre *BPS* des théories à 10 dimensions, et leur réductions dimensionnelles, peut s'interpréter dans le cadre de la théorie des *supercordes*.

1.6 Supercordes

1.6.1 Spectre *BPS* des supergravités à 10 dimensions

La supergravité *IIA* à 10 dimensions, qui a 32 supercharges, s'obtient par réduction Kaluza-Klein de la supergravité à 11 dimensions. On peut ainsi en trouver le spectre *BPS*. La membrane $M2$, si elle est étendue dans les directions transverses au cercle de compactification, donne une membrane à

deux dimensions, notée $D2^{20}$. Si l'une des directions de la membrane est enroulée sur le cercle de réduction dimensionnelle, on obtient en 10 dimensions une membrane à une dimension spatiale, c'est-à-dire une corde, notée $F1$. De même la $M5$ donne une membrane à 5 dimensions, la $NS5$, et une membrane à 4 dimensions, la $D4$. Ces solutions de la supergravité sont couplées aux champs réduits. En effet, la 3-forme de la supergravité à 11 dimensions donne en 10 dimensions une 3-forme et une 2-forme :

$$A_{(3)} = B_{(2)} \wedge dx^{10} + C_{(3)}, \quad (1.118)$$

où x^{10} est la dimension compactifiée. Alors $F1$ et $NS5$ sont couplées respectivement de manière électrique et magnétique à la 2-forme $B_{(2)}$, tandis que les deux D-branes $D2$ et $D4$ sont couplées à la 3-forme $C_{(3)}$.

En plus de ces membranes qui proviennent directement des deux membranes de la supergravité à 11 dimensions, on trouve dans le spectre BPS de la théorie réduite à 10 dimensions une particule (membrane de dimension 0) $D0$ et son dual magnétique $D6$ qui sont les charges électrique et magnétique associées à la 1-forme apparaissant à partir de la métrique par réduction dimensionnelle.

Comme nous l'avons déjà vu, il existe une autre supergravité à 32 supercharges à 10 dimensions, la supergravité IIB , qui possède également comme solutions une corde $F1$ et son dual magnétique la $NS5$, avec en plus des D-branes de dimensions impaires $D1$, $D3$, $D5$, $D7$ ainsi qu'un instanton $D-1$, c'est-à-dire une solution limitée non seulement dans toutes les directions spatiales mais aussi dans le temps. Tous ces objets sont couplés, selon leurs dimensions, à une 2-forme $B_{(2)}$ ($F1$ et $NS5$), et à des formes $C_{(0)}$, $C_{(2)}$ et $C_{(4)}$ pour les D-branes.

La corde $F1$, pour ces deux théories, a cette propriété essentielle qu'on peut la quantifier²¹. Autrement dit, on peut décrire son mouvement et ses modes de vibration de manière quantique : c'est ce qu'on appelle la théorie des (super-)cordes²².

1.6.2 Cordes fermées

Rappelons que la trajectoire d'une particule est décrite par une théorie à une dimension, où l'espace de base peut être paramétré par le temps propre

²⁰La lettre D indique que c'est une D -brane; nous verrons ce que cela signifie dans le paragraphe suivant.

²¹Au moins en série de perturbations.

²²Pour toute cette partie, on pourra consulter [Sc] pour une introduction développée ainsi que [P] et [GSW] pour un traitement plus approfondi.

s de la particule, et où l'espace-cible est l'espace-temps, avec ses symétries. On a ainsi des champs $X^\mu(s)$. Pour une corde, on considère de même une théorie des champs à deux dimensions, repérées par deux paramètres σ et τ respectivement de genre espace et temps, avec des champs $X^\mu(\sigma, \tau)$ qui décrivent la trajectoire de la corde dans l'espace-temps. L'action des cordes, dans le vide (espace plat...) et en *jauge conforme*²³ est

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \partial_a X^\mu \partial^a X^\mu \eta_{\mu\nu}, \quad (1.119)$$

où α' est la constante de couplage des cordes et où l'indice a renvoie aux dimensions de la feuille d'univers σ et τ . L'équation du mouvement est l'équation des cordes vibrantes

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) X^\mu = 0, \quad (1.120)$$

dont les solutions s'écrivent comme la somme de vibrations vers la gauche et vers la droite :

$$X^\mu = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma). \quad (1.121)$$

Nous allons considérer des cordes *fermées* ; le paramètre σ est maintenant périodique, de période 2π . On impose donc la condition

$$X^\mu(0, \tau) = X^\mu(2\pi, \tau). \quad (1.122)$$

Cela restreint les solutions, qui se décomposent alors en modes

$$X^\mu(\sigma, \tau) = q^\mu + \alpha' p^\mu + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}]. \quad (1.123)$$

La condition que X^μ soit réel impose alors

$$(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu. \quad (1.124)$$

En fait, à ces champs qui décrivent le mouvement dans l'espace-temps, on peut ajouter des champs qui décrivent le mouvement dans un espace *interne*, ou compactifié. On peut alors prendre non seulement des champs bosoniques mais aussi des champs fermioniques ψ^μ . On décrit alors le mouvement par l'action de Polyakov, toujours en jauge conforme,

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \left(\partial_a X^\mu \partial^a X^\nu \eta_{\mu\nu} - i\bar{\psi}^\mu \not{\partial} \psi^\nu \eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.125)$$

²³On peut aussi écrire cette action de manière invariante par reparamétrisation, en introduisant une métrique sur la feuille d'univers.

En plus de l'équation 1.120 pour les champs X^μ , on a pour les directions fermioniques l'équation de Dirac

$$\not{\partial}\psi^\mu = 0. \quad (1.126)$$

En prenant les fermions dans une représentation de Majorana, ce qui donne en dimension 2 des spineurs réels à deux composantes, cette équation peut se réécrire, en explicitant $\not{\partial}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_\tau - \partial_\sigma \\ \partial_\tau + \partial_\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix} = 0; \quad (1.127)$$

on a ainsi deux équations découplées

$$\begin{aligned} (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_+^A &= 0 \\ (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_-^A &= 0. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Comme dans le cas bosonique, on a ainsi deux modes de vibration, l'un allant vers la gauche et l'autre vers la droite.

Implicitement, nous avons pris les fermions dans la représentation fondamentale du groupe de Lorentz de l'espace-temps²⁴ ψ^μ , avec la métrique minkowskienne $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$.

Considérons de nouveau des cordes fermées. Pour les fermions, les quantités physiques font toujours intervenir un produit d'un nombre pair de fermions. Le choix d'un signe ± 1 reste libre, et la condition de périodicité des grandeurs physiques donne maintenant

$$\psi(0, \tau) = \pm \psi(2\pi, \tau), \quad (1.129)$$

c'est-à-dire que les fermions sont soit périodiques soit antipériodiques.

Les solutions périodiques forment le secteur dit de *Ramond* (R),

$$\psi_-^\mu = \sqrt{\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{d}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (1.130)$$

et

$$\psi_+^\mu = \sqrt{\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (1.131)$$

alors que les solutions antipériodiques forment le secteur de *Neveu-Schwarz* (NS),

$$\psi_-^\mu = \sqrt{\alpha'} \sum_{r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \bar{b}_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \quad (1.132)$$

²⁴Il ne faut pas confondre ici les symétries de la feuille d'univers et celles de l'espace-temps, qui sont parfois reliées mais sont distinctes.

et

$$\psi_+^\mu = \sqrt{\alpha'} \sum_{r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} b_n^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \quad (1.133)$$

Comme on peut choisir indépendamment les conditions pour les modes gauche et droit, on a finalement quatre secteurs : $R-R$, $NS-NS$ (tous deux bosoniques), $R-NS$ et $NS-R$ (fermioniques).

1.6.3 Supersymétrie sur la feuille d'univers

La théorie que nous venons de décrire possède en fait une supersymétrie (1,1) sur la feuille d'univers²⁵. Le Lagrangien est en effet invariant sous

$$\begin{aligned} X^\mu &\longrightarrow \bar{\epsilon} \psi^\mu \\ \psi^\mu &\longrightarrow \psi^\mu - i\bar{\not{\theta}} X^\mu \epsilon, \end{aligned} \quad (1.134)$$

Il existe une formulation de cette théorie avec un superespace en guise de feuille d'univers. Pour cela, commençons par reformuler la théorie avec un temps propre τ euclidien, qu'on obtient en faisant une rotation de i dans le plan complexe pour cette grandeur. On peut alors repérer les coordonnées de la feuille d'univers par une variable complexe z . Les modes droits et gauches deviennent des fonctions holomorphes et antiholomorphes. En introduisant alors également deux dimensions fermioniques θ et $\bar{\theta}$ telles que

$$\theta^2 = \bar{\theta}^2 = \{\theta, \bar{\theta}\} = 0, \quad (1.135)$$

on peut réécrire la théorie en fonction d'un superchamp²⁶

$$\mathbf{X}^\mu = X^\mu(z, \bar{z}) + i\theta\psi^\mu + i\bar{\theta}\tilde{\psi}^\mu + \theta\bar{\theta}F^\mu, \quad (1.136)$$

où le dernier champ F^μ est en fait un champ auxiliaire, qui est fixé par les équations du mouvement et en l'occurrence est nul. L'action des cordes se réécrit alors²⁷

$$S = \int dz d\bar{z} d\theta d\bar{\theta} D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\mu D_\theta \mathbf{X}_\mu, \quad (1.137)$$

avec les *superdérivées*

$$\begin{aligned} D_\theta &= \partial_\theta + \theta \partial_z \\ D_{\bar{\theta}} &= \partial_{\bar{\theta}} + \bar{\theta} \partial_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Les équations du mouvement s'écrivent simplement

$$D_\theta D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\mu = 0. \quad (1.139)$$

²⁵La notation (1,1) indique qu'il y a une supercharge dans chaque chiralité.

²⁶ ψ^μ et $\tilde{\psi}^\mu$ désignent les deux composantes du spineur, holomorphe et antiholomorphe, et remplacent ainsi les modes droits et gauches ψ_+^μ et ψ_-^μ de la théorie minkowskienne.

²⁷On prend ici $\alpha' = 2$ pour simplifier.

1.6.4 Quantification *BRST*

La quantification de cette théorie peut se faire de plusieurs façons. La plus élégante est la quantification *BRST*, qui serait trop longue à décrire ici. Dans cette méthode, on introduit des champs non physiques, appelés *fantômes*, pour tenir compte du choix de jauge, et qui sont des modes de norme négative. On peut éliminer tous ces fantômes du spectre de la théorie en considérant un nouvel opérateur fermionique Q_B , dit *opérateur BRST* (pour Becchi, Rouet, Stora, Tyutin), qui est le générateur d'une symétrie du Lagrangien complet, contenant les champs physiques et les fantômes. Cet opérateur a la propriété importante

$$Q_B^2 = 0. \quad (1.140)$$

Les états physiques sont les états invariants sous cette symétrie :

$$Q_B|\psi\rangle = 0 \quad (1.141)$$

et sont définis modulo des termes $Q_B|\phi\rangle$:

$$|\psi\rangle \sim |\psi\rangle + Q_B|\phi\rangle, \quad (1.142)$$

qui ne modifient pas la condition 1.141 grâce à la propriété $Q_B^2 = 0$. Autrement dit, les états physiques sont donnés par la *cohomologie BRST*.

En théorie des cordes, la relation $Q_B^2 = 0$ n'est en fait vérifiée que sous certaines conditions. Si on ne considère que des champs bosoniques X^μ , ceux-ci doivent alors être au nombre de 26. Si on considère également des fermions ψ^μ avec des modes droits et gauches, on doit avoir $D = 10$ dimensions d'espace-temps. (Un certain nombre des directions d'espace-temps peuvent être compactifiées.) On doit avoir une théorie conforme de charge centrale 26 dans le cas bosonique, et 15 dans le cas d'une théorie superconforme (1,1) (la charge centrale d'un boson libre est 1, celle d'un fermion vaut $\frac{1}{2}$).

1.6.5 Spectre des cordes fermées

Pour que la théorie soit cohérente, il faut imposer une contrainte supplémentaire : la *projection GSO* (*Gliozzi-Scherk-Olive*), qui vise à assurer entre autres l'invariance modulaire de la théorie, c'est-à-dire la cohérence des calculs d'interaction à une boucle, en restreignant la théorie à certains secteurs. Si on exclut les théories instables, dites *tachyoniques*, incohérentes en l'état, on a deux projections différentes de la théorie fermionique que nous

avons décrite²⁸, qui donnent les théories de supercordes *IIA* et *IIB*. Ces théories, en plus de la supersymétrie de la feuille d'univers, on également une supersymétrie d'espace-temps $\mathcal{N} = 2$, à 32 supercharges.

La théorie *IIA* possède les modes de masse nulle suivants :

- dans le secteur de *NS-NS* : un 2-tenseur symétrique de trace nulle (graviton), un scalaire (dilaton) et une 2-forme B ;
- dans le secteur de *R-R* : une 1-forme et une 3-forme ;
- dans le secteur de *R-NS* (et *NS-R*) : deux gravitinos de chiralités opposées, et deux spineurs des deux chiralités également.

Pour la théorie *IIB*, le spectre de masse nulle est le suivant :

- dans le secteur de *NS-NS* : un 2-tenseur symétrique de trace nulle (graviton), un scalaire (dilaton) et une 2-forme B ;
- dans le secteur de *R-R* : une 0-forme, une 2-forme et une 4-forme auto-duale ;
- dans le secteur de *R-NS* (et *NS-R*) : deux gravitinos de même chiralité, et deux spineurs de la chiralité opposée.

1.6.6 Interactions

La présence dans le spectre de masse nulle de ces théories d'un champ de type graviton laisse penser que la gravitation y est présente. De même les gravitinos signalent la présence de supersymétries d'espace-temps, et même de supergravité. En fait, on peut voir le spectre de masse nulle des théories vues ci-dessus correspond au spectre des supergravités *IIA* et *IIB* ! On interprète alors les cordes comme les vecteurs des diverses interactions. De même qu'en théorie quantique des champs on considère que les interactions sont transmises par des particules, comme les bosons de jauge, ici on considère que ce sont les cordes qui jouent ce rôle.

Une différence importante avec la théorie des champs est qu'en théorie des cordes, les contraintes sont extrêmement fortes et en particulier empêchent d'ajouter des champs à une théorie existante. Mais alors qu'on trouve un nombre fini de théories (nous parlons ici des deux théories de type *II*, il faut ajouter les deux théories hétérotiques ainsi que la théorie des cordes ouvertes dont nous parlerons au prochain paragraphe), on suppose qu'il en existe en fait un continuum, dont seules celles qui font apparaître un espace-temps classique et peuvent être traitées en perturbations nous sont connues.

Jusqu'ici, nous avons parlé des cordes en espace plat, tous les champs valant zéro en moyenne, les cordes étant les perturbations autour de ce vide.

²⁸Il existe aussi des théories *hétérotiques* où, au lieu de 10 fermions dans chaque mode droit et gauche, on prend les 10 fermions normaux dans le mode droit et 32 dans le mode gauche.

On peut étendre cela à un espace courbe, avec des valeurs moyennes non nulles pour les champs. Par exemple avec des champs de fond de *NS-NS* non nuls, l'action des cordes pour les superchamps s'écrit (en prenant encore $\alpha' = 2$ pour simplifier)

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z d^2\theta [G_{\mu\nu}(\mathbf{X}) + B_{\mu\nu}(\mathbf{X})] D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\mu D_\theta \mathbf{X}^\nu . \quad (1.143)$$

La condition que la symétrie conforme soit préservée (ou plus précisément l'invariance de Weyl, ou sous le groupe des dilatations) sous l'action du groupe de renormalisation donne alors précisément les équations classiques du mouvement de ces champs en supergravité : équation d'Einstein pour $G_{\mu\nu}$, équation de Maxwell généralisée pour $B_{\mu\nu}$...

Pour les champs de Ramond-Ramond, la situation est plus subtile et nous ne l'aborderons pas ici. Contentons-nous de dire que les cordes sont neutres sous les charges de Ramond-Ramond : il n'y a pas de couplage à impulsion nulle.

En fait la supergravité est la théorie de basse énergie de la théorie des supercordes ; en particulier, elle n'en contient que les modes de masse nulle.

Pour calculer les interactions entre les différents modes, on somme sur toutes les feuilles d'univers dont les bords (des cercles situés à l'infini) correspondent aux modes voulus, en pondérant chaque surface dans l'intégrale de chemin en fonction de sa caractéristique d'Euler χ par $e^{\chi\Phi}$, où Φ est le dilaton. Rappelons que la constante d'Euler est un invariant topologique de la surface qui pour une surface orientée vaut $2 - b - 2g$, où g est le genre de la surface et b le nombre de composantes de son bord.

Ajoutons que les surfaces pouvant se décomposer en diagrammes de type « pantalon », avec trois bords circulaires, ce morceau de surface est l'unique vertex d'interaction en théorie des cordes²⁹.

1.6.7 Cordes ouvertes et D-branes

Nous avons jusqu'ici traité des cordes fermées. On peut de même introduire des cordes *ouvertes*. On prend pour les bords de la feuille d'univers, qui donnent la trajectoires des extrémités de la corde, des conditions de Neumann :

$$\partial_n X^\mu = 0 , \quad (1.144)$$

où ∂_n est la dérivée selon la direction normale au bord. On obtient alors une condition de réflexion pour les modes de vibrations, qui font que les

²⁹On peut ainsi introduire une théorie des champs de cordes fermées avec une interaction cubique, mais on se heurte à un certain nombre de problèmes.

modes droits et gauches sont les mêmes. On obtient ainsi une théorie à une supersymétrie, avec un seul gravitino dans le spectre et non plus deux. En fait la présence de cordes ouvertes implique la présence dans le spectre de cordes fermées : en effet deux cordes ouvertes peuvent interagir en donnant une corde fermée. Il faut préciser que cette théorie n'est cohérente que si on considère des cordes non-orientées : on ne garde que les états invariants par parité de la feuille d'univers. La théorie des cordes fermées qui est alors présente est la projection de la théorie *IIB* sur le sous-espace propre $+1$ de l'opérateur de parité de la feuille d'univers. Cette théorie de cordes non-orientées ouvertes et fermées est la *théorie des supercordes de type I*. (Ajoutons que la cohérence de la théorie nécessite que le groupe de jauge de cette théorie soit $SO(32)$.)

À la place des conditions de Neumann pour les extrémités des cordes, on peut imposer des conditions de Dirichlet sur un certain nombre de directions :

$$\partial_t X^\mu = 0, \quad (1.145)$$

où ∂_t est la dérivée selon la direction tangente au bord de la feuille d'univers. Cette condition revient à demander que ces coordonnées X^μ du bord de la corde restent constantes. Si on a ainsi p directions spatiales avec des conditions de Neumann et $9-p$ avec des conditions de Dirichlet, le bord de la corde est contraint de se déplacer sur un sous-espace de dimension p . On a ainsi un objet à p dimensions d'espace, plus une de temps, sur lequel les cordes ouvertes peuvent s'attacher : on parle d'une *D_p -brane*³⁰. Ces objets sont des objets non-perturbatifs de la théorie, dont les cordes ouvertes donnent les excitations de masse nulle³¹.

À chaque D-brane est attaché une valeur de l'*indice de Chan-Patton*. Si on a n membranes superposées, ces indices forment la représentation fondamentale d'un groupe $U(n)$, ou $SO(n)$ dans des cas plus compliqués. La 1-forme $A_a d\xi^a$ du spectre des cordes ouvertes donne alors la connexion d'un fibré principal de même groupe sur la brane.

Le couplage d'une D-brane aux champs de *NS-NS* est donné, à l'ordre le plus bas dans les dérivées des champs, par l'action de *Born-Infeld*

$$S_{p+1} = -\mu_p \int_{D_p} d^{p+1}\xi \operatorname{Tr} \left\{ e^{-\Phi} [-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})] \right\}, \quad (1.146)$$

où G et B sont évalués sur la brane³².

³⁰La lettre D renvoie à Dirichlet.

³¹Une D_{D-1} -brane permet d'avoir des cordes ouvertes non contraintes.

³²En fait, il s'agit des tirés en arrière de ces champs par l'application $i : D_p \rightarrow M$, inclusion de la D_p -brane dans l'espace-temps.

Ces objets sont chargés sous les champs de Ramond-Ramond, de manière assez subtile. Il faut introduire la K-théorie pour rendre compte correctement de ces charges. Contentons-nous de dire qu'en espace plat et avec un champ de fond B constant, le couplage aux champs de Ramond-Ramond est donné par

$$i\mu_p \int_{D_p} d^{p+1}\xi \operatorname{Tr} \left(e^{2\pi\alpha' F_{(2)} + B_{(2)}} \wedge \sum_q C_{(q)} \right), \quad (1.147)$$

où l'intégrale est prise sur les formes de degré $p + 1$ qui apparaissent dans le développement³³.

Ajoutons enfin que les D-branes sont des objets qui brisent exactement (pris individuellement) la moitié des supersymétries : il s'agit d'objets *BPS* : leur tension (c'est-à-dire la masse par unité de volume) est donnée par leur densité de charge. Les supersymétries préservées dépendent des orientations relatives des D-branes ; si on place plusieurs D-branes non parallèles, on brise plus de la moitié des supersymétries.

Au final, nous avons retrouvé tout le spectre *BPS* des théories de supergravités, à l'exception de la membrane *NS5* qui est en fait le dual magnétique de la corde fondamentale. La différence majeure est que nous sommes maintenant dans le cadre d'une théorie quantique. On pourrait penser que nous avons une théorie quantique de la gravitation, à 10 dimensions. En fait on ne sait construire cette théorie de manière exacte que pour des configurations très spéciales des champs de fonds, comme l'espace plat par exemple. On peut cependant supposer que les difficultés ne sont que techniques pour les autres configurations, et que la théorie est bien définie bien que ne se prêtant pas à des calculs exacts.

1.6.8 Compactification et T-dualité

On peut compactifier les théories des cordes, notamment sur un cercle, en prenant un cercle pour l'une des directions de l'espace. En faisant cela pour les théories *IIA* et *IIB*, on obtient la même théorie à 9 dimensions (pour des rayons bien choisis), exprimée de deux manières différentes qui sont reliées par *T-dualité*. La *T-dualité* est une transformation perturbative qui agit sur le rayon du cercle de compactification par

$$R \longrightarrow \frac{\alpha'}{R} \quad (1.148)$$

³³Si on oublie le champ B , en le mettant à zéro par exemple, le premier terme est simplement le caractère de Chern du fibré porté par la D-brane.

et qui échange les modes d'impulsion et d'enroulement le long du cercle, mais respecte la somme sur les topologies de la corde. Du point de vue de la théorie des champs bidimensionnelle, cela consiste à changer le signe des modes droits de la corde selon la direction considérée μ_1 , sans toucher aux modes gauches :

$$X_L^{\mu_1}(\tau + \sigma) + X_R^{\mu_1}(\tau - \sigma) \longrightarrow X_L^{\mu_1}(\tau + \sigma) - X_R^{\mu_1}(\tau - \sigma) \quad (1.149)$$

Ainsi en partant de la théorie *IIA*, par exemple, la limite $R \longrightarrow 0$ n'est pas singulière mais revient à faire tendre le rayon $R' = \frac{\alpha'}{R}$ de la théorie duale vers l'infini, c'est-à-dire à décompactifier la théorie. Dans notre exemple, on tombe ainsi sur la théorie *IIB*, en partant de la théorie *IIA* ! Les deux théories n'ayant pas les mêmes champs de R - R , la T-dualité échange ces derniers.

Cette dualité échange de la même façon les D-branes. La théorie *IIA* ne contient en effet que des D-branes de dimension paire et la théorie *IIB* des D-branes de dimension impaire. En fait la T-dualité échange les conditions de Neumann et de Dirichlet. Ainsi en partant d'une D_p -brane, on obtient un D_{p+1} en faisant une T-dualité selon une direction transverse à la brane et une D_{p-1} en prenant une direction tangente. (Si on prend une direction formant un angle non trivial avec une D-brane, on obtient des conditions de bord mélangées.) En faisant plusieurs T-dualités successives selon des directions différentes, on peut ainsi relier toutes les D-branes. (Une deuxième T-dualité selon une même direction annule l'effet de la première, comme on le voit facilement.)

1.6.9 Théorie M

Considérons, en théorie *IIA*, la D_0 -brane³⁴. Sa tension est

$$T_0 = \frac{1}{g_A \alpha'^{1/2}}, \quad (1.150)$$

où $g_A = e^{\Phi_A}$ est la constante de couplage des cordes *IIA*³⁵. On voit que cette tension, forte à couplage faible, décroît quand le couplage devient fort. De

³⁴Nous prenons la D_0 car les autres sont à des échelles d'énergie supérieures.

³⁵En fait le dilaton est défini à un constante additive près ; on fixe celle-ci en prenant

$$g_A = \frac{\sqrt{T_{F_1}}}{T_{D_0}} \quad (1.151)$$

pour la théorie *IIA*. Pour la théorie *IIB*, on prend

$$g_B = \frac{T_{F_1}}{T_{D_1}}. \quad (1.152)$$

plus on peut former des états liés de n D0-branes, de masse

$$m_n = nT_0 = \frac{n}{g_A \alpha'^{1/2}} \quad (1.153)$$

régulièrement espacées. Quand le couplage tend vers l'infini, ce spectre tend vers un continuum, ce qui est le signe d'une décompactification de la théorie sur un cercle. On obtient ainsi une *onzième* dimension. Le spectre donné par la formule 1.153 correspond en effet aux états d'impulsion de Kaluza-Klein pour un cercle de rayon

$$R = g_A \alpha'^{\frac{1}{2}}. \quad (1.154)$$

Cela a conduit Witten à conjecturer l'existence d'une théorie quantique à 11 dimensions, la *théorie M*, dont la théorie des supercordes de type *IIA* serait la compactification sur un cercle. Cette onzième dimension est invisible en théorie perturbative des cordes car celle-ci correspond à un développement autour de la limite de rayon nul.

Du point de la limite de basse énergie qu'est la supergravité, l'introduction d'une onzième dimension est naturelle : en effet la supergravité *IIA* est la réduction dimensionnelle de la supergravité à 11 dimensions, on conjecture donc que celle-ci est une limite de basse énergie de la *théorie M*.

1.7 U-dualité

La théorie des supercordes *IIB* possède une symétrie (conjecturale) qui intervertit la corde perturbative F_1 et la D-corde (D_1), et échange couplages fort et faible : la *S-dualité*. En effet les excitations de masse nulle de la $D1$, données par les cordes qui s'y attachent, sont les mêmes que celles de la corde $F1$. De plus la propriété *BPS* assure que la masse de ces objets est reliée à leur charge, et le rapport des tensions est

$$\frac{T_{F_1}}{T_{D_1}} = g_B. \quad (1.155)$$

Ainsi, à faible couplage la D-corde est beaucoup plus lourde que la $F1$; mais en augmentant le couplage de manière adiabatique ces états doivent continuer à exister et à saturer la borne *BPS* (ils forment des représentations plus petites que les autres de l'algèbre de supersymétrie). Alors à fort couplage la $D1$ est beaucoup plus légère que la $F1$, et on conjecture que la théorie est la même avec le rôle de ces deux objets échangés, et le couplage inversé.

La $F1$ est chargée sous le champ *NS-NS* $B_{(2)}$ mais pas sous le champ *R-R* $C_{(2)}$, alors que pour la $D1$ c'est l'inverse. On peut ainsi noter ces deux

états comme des cordes $(1, 0)$ et $(0, 1)$, où les nombres donnent les couplages à ces deux champs. En fait, il existe aussi des cordes supersymétriques de charges (p, q) , pour toutes valeurs entières de p et q , qui peuvent être vues comme des états liés de $F1$ et $D1$. On peut alors étendre la S-dualité à une dualité $SL(2, \mathbb{Z})$ qui relie toutes ces cordes. Au niveau des champs de fond, ce groupe agit sur le paramètre modulaire

$$\tau = C_{(0)} + ie^{-\Phi_B} \quad (1.156)$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \quad (1.157)$$

Les théories de supergravité obtenues par réduction dimensionnelle à partir de la supergravité à 11 dimensions possèdent également des symétries, continues : les *groupes de Cremmer-Julia*. Pour la théorie *IIA* à dix dimensions, c'est simplement la symétrie par addition d'une constante réelle au dilaton, soit le groupe \mathbb{R} . En dimension inférieure, on a d'abord la symétrie du tore de compactification qui donne un groupe $GL(n, \mathbb{R})$, où n est la dimension du tore considéré. Mais les symétries sont en fait plus grandes ; il faut en effet ajouter des générateurs qui agissent de manière non-triviale sur les champs, et on obtient alors la série exceptionnelle E_n (table 1.2).

Dimension	groupe G
11	
10 (<i>IIA</i>)	\mathbb{R}
10 (<i>IIB</i>)	$SL(2, \mathbb{R})$
9	$SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$
8	$SL(3, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$
7	$SL(5, \mathbb{R})$
6	$SO(5, 5, \mathbb{R})$
5	$E_{6(6)}(\mathbb{R})$
4	$E_{7(7)}(\mathbb{R})$
3	$E_{8(8)}(\mathbb{R})$

TAB. 1.2 – Groupes de symétrie des réductions de la supergravité à 11 dimensions et de la supergravité *IIB*.

Dans la version quantique de ces théories, donnée par les théories de supercordes, on a comme groupe de *U-dualité* des versions discrètes de ces

groupes³⁶. On a alors des symétries des théories compactifiées, non réduites. Ainsi en dimension 9 on a $SL(2, \mathbb{Z})$. Du point de vue de la théorie *IIB*, ce groupe est contenu dans le groupe de symétries de dualité de cette théorie, qui apparaît après réduction dimensionnelle. Si on regarde cette théorie à 9 dimensions comme la réduction de la théorie *IIA*, alors c'est la réduction sur un 2-tore de la théorie M, et ce groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ est simplement le groupe des transformations modulaires du tore³⁷.

De même pour la théorie à 8 dimensions, le facteur $SL(2, \mathbb{Z})$ peut se voir comme le groupe de symétrie du 2-tore de compactification de la théorie *IIB*, et le facteur $SL(3, \mathbb{Z})$ peut de même s'interpréter comme provenant de la compactification sur un 3-tore de la théorie M. Pour les dimensions inférieures, il est plus difficile de trouver une explication géométrique au groupe de U-dualité³⁸.

1.8 Retour à quatre dimensions

Nous avons vu que la théorie des supercordes fournit, au moins dans certaines configurations, une théorie quantique de la gravitation, à dix dimensions. Comment retrouver alors une théorie à quatre dimensions visibles d'espace-temps qui puisse décrire le monde que nous voyons ? Il y a plusieurs idées susceptibles de résoudre ce problème toujours ouvert. L'une d'elle consiste à compactifier sur une variété de dimension 6 la théorie des cordes, de manière à ne garder que 4 des 10 dimensions, ce qui revient à considérer une compactification de la théorie M sur une variété de dimension 7. Dans ce genre de mécanisme, on peut faire apparaître des groupes de jauge non-abéliens en considérant une variété singulière³⁹.

Les univers membranaires offrent une autre piste : dans cette hypothèse, le monde que nous observons serait une membrane plongée dans un espace-temps de dimension supérieure. Le groupe de jauge apparaîtrait alors à partir des objets attachés à la membrane. Dans cette théorie, la gravitation ne serait pas confinée à la membrane ; il devrait donc être possible de déceler expérimentalement des écarts à la loi de Newton à courte distance⁴⁰.

³⁶Pour les groupes exceptionnels E_6 , E_7 et E_8 , il y a plusieurs sous-groupes discrets possibles entre lesquels il n'est pas facile de trancher. Pour E_7 on privilégie $E_{7(\tau)} \cap Sp(56, \mathbb{Z})$.

³⁷On peut caractériser un tore par un nombre complexe τ , le tore étant alors le plan complexe quotienté par $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$. $SL(2, \mathbb{Z})$ (agissant comme en 1.157) est alors le groupe engendré par les transformations $\tau \rightarrow -1/\tau$ et $\tau \rightarrow \tau + 1$, qui laissent le tore invariant.

³⁸Pour des détails sur la U-dualité, on pourra se reporter à la revue [OP]

³⁹Le groupe de jauge est alors donné par le diagramme de Dynkin de la singularité (ces singularités sont décrites dans le chapitre suivant, dans un autre contexte).

⁴⁰Il est un peu surprenant de découvrir qu'on n'a pas de test de cette loi à des distances

inférieures au millimètre.

Chapitre 2

Surfaces de del Pezzo et formulation auto-duale des supergravités

2.1 Extraits de géométrie algébrique

Avant de revenir à la physique, nous rappelons ici les notions de base de géométrie algébrique utilisées dans nos travaux. Pour plus de détails, on se reportera aux références [GH, H].

2.1.1 Variété projective

Si k est un corps, on définit l'espace projectif de dimension n

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}) / k^* \quad (2.1)$$

comme l'espace $k^{n+1} - \{0\}$ quotienté par l'ensemble k^* des éléments inversibles de k agissant par dilatation :

$$(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (\lambda z_0, \lambda z_1, \dots, \lambda z_n), \quad (2.2)$$

ce qui revient à considérer l'ensemble des droites passant par l'origine. Ainsi pour $k = \mathbb{C}$ on obtient les espaces projectifs $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

On définit une variété algébrique projective comme une sous-variété de \mathbb{P}^n qui est localement le lieu des zéros de polynômes homogènes en les $n + 1$ coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n . La condition d'homogénéité garantit que ce lieu reste bien défini après quotient par k^* comme un sous-ensemble de \mathbb{P}^n .

Dans la suite, nous nous restreindrons au corps \mathbb{C} sauf mention explicite du contraire. Les variétés algébriques (nous omettrons souvent « projectives ») complexes sont des sous-variétés holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, compactes mais pas nécessairement lisses.

2.1.2 Faisceaux

Un outil central en géométrie algébrique est la notion de *faisceau*. Un faisceau topologique Γ est défini de la manière suivante. On considère l'ensemble des ouverts d'un espace topologique. À tout ouvert U on associe un ensemble de *sections* $\Gamma(U)$ « au dessus » de U . De plus à toute paire d'ouverts U et V tels que $U \subset V$ on associe une application *restriction* de V à U notée $|_U$ de $\Gamma(V)$ vers $\Gamma(U)$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall U, V, W \quad U \subset V \subset W, \quad \forall f \in \Gamma(W), \quad (f|_V)|_U = f|_U . \quad (2.3)$$

Cette transitivité de la restriction justifie qu'on ne note pas l'ensemble de départ.

La donnée des sections au-dessus de chaque ouvert et des restrictions définit une structure de *préfaisceau*. Pour que ce soit un *faisceau*, il faut que la condition de recollement suivante soit vérifiée : pour toute paire d'ouverts U et V d'intersection non vide, pour tout $f \in \Gamma(U)$ et $g \in \Gamma(V)$ tels que $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$ il existe $h \in \Gamma(U \cup V)$ tel que $f = h|_U$ et $g = h|_V$.

Sur une variété différentiable, les fonctions C^∞ au-dessus de chaque ouvert forment un faisceau. De même sur une variété complexe on peut considérer le faisceau des fonctions holomorphes. Un tel faisceau définit même la structure C^∞ ou holomorphe de la variété considérée, et est appelé *faisceau structural*.

Les sections d'un fibré sont un autre exemple de faisceau : au dessus de chaque ouvert de la base, les sections du fibré vérifient les deux propriétés ci-dessus, de restriction et de recollement.

Quand les objets qui forment les sections possèdent une loi de groupe, on a un faisceau de groupes si cette loi est compatible avec la restriction à un ouvert plus petit. On pourrait de même demander que d'autres lois ou structures soient préservées : faisceaux d'anneaux, d'algèbres... Ainsi le faisceau des fonctions holomorphes sur une variété complexe est muni d'une addition et d'une multiplication : si on a deux sections, c'est-à-dire deux fonctions holomorphes sur un ouvert on peut les additionner et les multiplier, et cela est compatible avec la restriction à un ouvert plus petit.

Par exemple les sections d'un fibré vectoriel sur une variété forment un faisceau de \mathcal{O} -modules, où \mathcal{O} est le faisceau structural. En fait, il y a équivalence entre les fibrés vectoriels et les faisceaux projectifs sur la base. Un

faisceau \mathcal{F} est dit *libre* s'il est somme directe de n copies du faisceau structural¹ : $\mathcal{F} = \mathcal{O}^{\oplus n}$, et il est dit *projectif* s'il existe un faisceau \mathcal{G} tel que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ soit libre. \mathcal{F} sera dit *inversible* s'il existe un faisceau \mathcal{F}^{-1} tel que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{O}$. Parmi les faisceaux projectifs, les faisceaux inversibles correspondent exactement aux fibrés en droite, c'est-à-dire aux fibrés vectoriels de dimension 1.

La somme directe ou le produit tensoriel de deux faisceaux sont définis de manière naturelle. Pour les quotients ou les suites exactes c'est plus délicat. Ainsi si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux faisceaux tels que les sections de \mathcal{G} aient une loi de groupe qui agisse sur les sections de \mathcal{F} , on définit le faisceau quotient \mathcal{F}/\mathcal{G} de la manière suivante. Deux sections f et h de \mathcal{F} au-dessus d'un ouvert U sont équivalentes si elles le sont localement, c'est-à-dire s'il y a un recouvrement $\{U_i\}$ de U et des sections $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ telles que $f|_{U_i} = g_i \cdot h|_{U_i}$. De même on a une suite exacte de faisceaux si on peut écrire des suites exactes pour les sections locales.

2.1.3 Diviseurs, groupe de Picard

Soit X une variété algébrique compacte (sur \mathbb{C}). On définit un *diviseur de Weil* comme une combinaison linéaire formelle $\sum a_i V_i$ à coefficients a_i dans \mathbb{Z} de sous-variétés irréductibles V_i de codimension 1. Si tous les a_i sont positifs, le diviseur est dit *effectif*. Les diviseurs sont munis d'une loi d'addition naturelle et forment donc un groupe, et même un \mathbb{Z} -module, noté $Div(X)$.

Si on a une section méromorphe f sur X , on peut lui associer un diviseur : les zéros de f définissent des sous-variétés de codimension 1, Z_i (avec des zéros d'ordre a_i) et ses pôles définissent de même des sous-variétés de codimension 1, P_j (pôles d'ordre b_j). On associe alors à f le diviseur $(f) = \sum a_i Z_i - \sum b_j P_j$. Les diviseurs qui peuvent s'obtenir de cette manière sont appelés *diviseurs principaux*. Ils permettent de définir une relation d'équivalence sur $Div(X)$, l'*équivalence linéaire* : deux diviseurs sont équivalents lorsque leur différence est un diviseur principal. Le quotient de $Div(X)$ par les diviseurs principaux forme le groupe $Cl(X)$ des classes de diviseurs.

On définit aussi les *diviseurs de Cartier* comme les sections globales du quotient (multiplicatif) $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ du faisceau des fonctions méromorphes non identiquement nulles par le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas. Les fonctions méromorphes donnent ainsi des diviseurs de Cartier, également appelés principaux, qui permettent de définir l'équivalence linéaire des diviseurs de Cartier. En fait, les diviseurs de Cartier sont les diviseurs de Weil

¹La somme directe des faisceaux est défini par la somme directe des sections, et il en est de même pour le produit tensoriel.

qui sont localement principaux, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire localement $\sum a_i Z_i - \sum b_j P_j$ à partir de fonctions méromorphes locales dont les zéros, d'ordre a_i , définissent les Z_i et les pôles, d'ordre b_j , les P_j . Pour une variété lisse tous les diviseurs de Weil sont localement principaux et sont donc des diviseurs de Cartier ; la différence entre les deux n'intervient que pour les surfaces singulières, dont nous aurons besoin plus loin.

On peut aussi voir les classes de diviseurs de Cartier (pour l'équivalence linéaire) comme les classes d'isomorphisme de fibrés en droite sur X , ou de manière équivalente des faisceaux inversibles sur X . En effet soit D un diviseur de Cartier. Étant localement principal, il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et des fonctions méromorphes non nulles f_i définies sur les U_i qui représentent ce diviseur sur ces ouverts. Sur une intersection $U_i \cap U_j$ f_i et f_j doivent avoir les mêmes zéros et les mêmes pôles, avec les mêmes multiplicités, pour que le diviseur soit bien défini globalement. Les f_i/f_j sont donc des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur les $U_i \cap U_j$, et définissent par conséquent un fibré en droite sur X . Les diviseurs linéairement équivalents correspondent alors aux fibrés isomorphes : la loi d'addition des diviseurs devient multiplicative pour les fonctions de transition, et les diviseurs principaux définissent des fibrés triviaux. Notons que la multiplication des fonctions de transition revient à prendre le produit tensoriel des deux fibrés en droite, et que l'addition des classes de diviseurs correspond au produit tensoriel des fibrés correspondants. On a donc un morphisme du groupe (additif) des classes de diviseurs de Cartier sur X vers le groupe (multiplicatif) des classes d'isomorphisme des fibrés en droite sur X , appelé *groupe de Picard* de X et noté $Pic(X)$. On a même un isomorphisme pour une surface projective, comme ce sera toujours le cas ici.

Ajoutons enfin que le groupe de Picard est un sous-groupe du groupe d'homologie $H_2(X, \mathbb{Z})$, et que pour les surfaces de del Pezzo lisses ces deux groupes sont égaux.

2.1.4 Intersection sur les surfaces

Sur une surface *normale*, c'est-à-dire dont les singularités sont réduites à des points, les diviseurs sont engendrés sur \mathbb{Z} par des courbes et l'on peut définir un produit d'intersection entre les diviseurs. Pour deux courbes lisses, c'est simplement le nombre de points d'intersection, avec d'éventuelles multiplicités, et cela s'étend linéairement à tout le groupe des diviseurs. En fait les diviseurs principaux sont *numériquement équivalents* à zéro, c'est-à-dire d'intersection nulle avec tout diviseur, et l'intersection ne dépend que des classes de diviseurs. En termes mathématiques précis, il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur $Div(X)$ qui se réduit au nombre de points

d'intersection pour les courbes lisses se croisant de manière transverse.

Si A et B sont deux courbes sur X et si l'on note $\mathcal{L}(C)$ le fibré en droite associé à un diviseur C , l'intersection de A et B peut s'exprimer en termes des premières classes de Chern des fibrés $\mathcal{L}(A)$ et $\mathcal{L}(B)$:

$$A.B = \int_A c_1(\mathcal{L}(B)) = \int_B c_1(\mathcal{L}(A)) = \int_X c_1(\mathcal{L}(A)) \cup c_1(\mathcal{L}(B)). \quad (2.4)$$

Sur une surface compacte lisse et rationnelle (c'est-à-dire birationnelle² à \mathbb{P}^2) la matrice d'intersection est unimodulaire, ce qui reflète la dualité de Poincaré.

Pour des surfaces non normales, on peut définir une forme d'intersection pour les diviseurs de Cartier, et elle est toujours à valeurs entières [Deb](Prop. 1.8). Cela s'étend aux diviseurs dont un multiple est Cartier, mais dans ce cas on peut avoir des intersections fractionnaires.

2.1.5 Classe canonique

Si X est une variété algébrique de dimension n , le fibré cotangent élevé à la n^{e} puissance tensorielle est un fibré en droites, auquel on peut associer une classe de diviseurs, appelée *classe canonique* et notée K_X ou simplement K s'il n'y a pas d'ambiguïté. Le dual de ce fibré, qui s'obtient de la même façon à partir du fibré tangent, donne la classe *anticanonique* $-K_X$.

Un résultat important est connu sous le nom de *formule d'adjonction* : si C est une courbe de genre $g(C)$ sur une surface algébrique projective lisse X , on a

$$(K_X + C).C = -2 + 2g(C). \quad (2.5)$$

En fait cette relation s'étend aussi aux surfaces n'ayant que des singularités de *Du Val*³.

Pour les diviseurs qui ne sont pas des courbes, cette formule permet de définir le *genre virtuel*, que nous appellerons plus simplement « genre » dans la suite :

$$g_v(C) = 1 + \frac{(K_X + C).C}{2}, \quad (2.6)$$

qui se réduit bien au genre géométrique pour les courbes irréductibles sur une surface lisse.

²Une fonction rationnelle $f : X \rightarrow Y$ est dite birationnelle s'il existe une fonction rationnelle $g : Y \rightarrow X$ telle que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ soient bien définies et égales à l'identité, respectivement sur X et Y . Deux surfaces X et Y sont dites birationnelles s'il existe une fonction birationnelle de X sur Y .

³Ce terme est expliqué dans la section 2.1.9.

Notons que si C est de genre zéro, alors $-K - C$ l'est également. (Cette propriété sera importante par la suite.)

2.1.6 Éclatements

Sur \mathbb{C}^2 , on définit l'éclatement de l'origine comme la surface $\{(z, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid \forall i, j, z_i l_j = z_j l_i\}$, (z_1, z_2) sont les coordonnées sur \mathbb{C}^2 et (l_1, l_2) les coordonnées homogènes de la droite projective \mathbb{P}^1 . Autrement dit, on remplace l'origine par le \mathbb{P}^1 de toutes les directions de l'espace tangent. (Cette construction se généralise aisément à l'éclatement d'un point de \mathbb{C}^n , en remplaçant \mathbb{P}^1 par \mathbb{P}^{n-1} .)

Comme cette opération est locale, on peut de même éclater un point lisse P d'une surface algébrique X , puisque son voisinage est isomorphe à un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 . Si on note Y la surface obtenue, on obtient ainsi un morphisme de projection $\pi : Y \rightarrow X$ tel que $\pi^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$ et $Y \setminus \pi^{-1}(P) \simeq X \setminus P$.

Si on note E le diviseur correspondant à la *courbe exceptionnelle* $\pi^{-1}(P)$, on montre que E est d'auto-intersection -1 : $E^2 = -1$ et qu'il est perpendiculaire à l'image (la préimage par π) de tout diviseur de X ne passant pas par P . De plus, la classe canonique de la surface éclatée Y est $K_Y = \pi^* K_X + E$, dont on déduit $K_Y^2 = K_X^2 - 1$.

Réciproquement, si E est une courbe isomorphe à \mathbb{P}^1 d'auto-intersection -1 sur une surface Y , le *critère de Castelnuovo-Enriques* affirme que Y peut être contractée en une surface X de telle sorte que E est réduite à un point P dont l'éclatement redonne la surface Y . Plus généralement, si E est une courbe isomorphe à \mathbb{P}^1 et d'auto-intersection $-n$, on peut la contracter en un point si et seulement si n est strictement positif; si n est différent de 1, le point obtenu est singulier. La relation entre les classes canoniques se généralise ainsi :

$$K_Y = \pi^* K_X + (2 - n)E. \quad (2.7)$$

Ajoutons que lorsqu'on éclate en une courbe exceptionnelle E un point lisse placé sur une courbe dont la classe est C , elle se transforme en une courbe de classe $C - E$, ou C est mis pour $\pi^* C$. On vérifie que le genre de la courbe est laissé invariant.

2.1.7 Faisceaux amples

Sur un espace projectif \mathbb{P}^n , on définit $\mathcal{O}(1)$ comme le faisceau correspondant à la classe des hyperplans. Alternativement on peut le décrire de la ma-

⁴Dans la suite π^* sera souvent omis s'il n'y a pas d'ambiguïté.

nière suivante. Notons (z_0, z_1, \dots, z_n) les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n . Entre les ouverts $U_i = \{z_i \neq 0\}$, les fonctions de transitions $f_{ij} = z_i/z_j$ définissent un fibré en droite, ou encore un faisceau inversible, dit fibré tautologique et noté $\mathcal{O}(1)$. On a alors toute une série de faisceaux $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(1)^{\otimes m}$, et à tout faisceau \mathcal{L} on associe également les faisceaux tordus $\mathcal{L}(m) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(m)$. Notons que le faisceau structural \mathcal{O} engendre bien ainsi la série des $\mathcal{O}(m)$.

Un faisceau inversible \mathcal{L} sur une variété X est dit *très ample* si $n+1$ de ses sections globales permettent de définir un plongement de X dans \mathbb{P}^n , pour un certain n . \mathcal{L} est alors le tiré en arrière du faisceau tautologique $\mathcal{O}(1)$ de \mathbb{P}^n . Réciproquement, si on a un plongement π d'une variété algébrique X dans un \mathbb{P}^n , les sections globales de $\pi^*\mathcal{O}(1)$ permettent de décrire le plongement et ce faisceau est donc très ample.

Un faisceau inversible \mathcal{L} sera dit *ample* si une puissance tensorielle finie $\mathcal{L}^{\otimes m}$ de celui-ci est très ample. Quant aux diviseurs, ils seront dit très amples et amples respectivement si les faisceaux associés le sont. Un diviseur ample a ainsi un multiple très ample.

Sur une surface lisse X , étant donné un diviseur ample A on définit le degré d'un diviseur quelconque C (par rapport à A) par l'intersection $A.C$. Si A est très ample et que C est une courbe, cela se réduit au degré algébrique du plongement de la courbe dans l'espace projectif \mathbb{P}^n , qui est un entier positif. Le *critère de Nakai-Moishezon* permet de déterminer si un diviseur est ample : A est ample si et seulement si $A^2 > 0$ et $A.C > 0$ pour toute courbe irréductible C .

2.1.8 Surfaces de del Pezzo

Par définition, une *surface de del Pezzo* est une surface algébrique (projective) dont la classe anticanonique est ample. Une telle surface peut être assez singulière, mais nous nous restreindrons au cas où elle est *Gorenstein*, c'est-à-dire que nous exigerons que $-K$ soit un diviseur de Cartier. Dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas de surfaces lisses.

Les surfaces de del Pezzo [dP1, dP2] lisses sont bien connues [H, M, Dem] : ce sont \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et les surfaces obtenues en éclatant \mathbb{P}^2 en huit points au plus, placés en position générale. Ces dernières surfaces peuvent aussi s'obtenir en éclatant des points de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: \mathbb{P}^2 éclaté en deux points distincts est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ éclaté en un point. On reliera plus loin cette propriété à la *T-dualité* des théories de supercordes.

Les points éclatés sont dits *en position générale* s'ils sont distincts deux à deux, si on en trouve au plus deux sur une droite, au plus cinq sur une conique et au plus huit sur une cubique, sans point double.

Passons à la description du groupe de Picard de ces surfaces, c'est-à-dire

des classes d'équivalence de diviseurs. Pour \mathbb{P}^2 , il est engendré (sur \mathbb{Z}) par la classe de l'hyperplan H , d'auto-intersection 1. La classe anticanonique est

$$-K = 3H, \quad (2.8)$$

qui est très ample et d'auto-intersection $(-K)^2 = 9$.

À chaque fois qu'on éclate un point il faut ajouter à l'ensemble des générateurs le diviseur exceptionnel obtenu par cet éclatement. Ainsi pour \mathbb{P}^2 éclaté en k points, le groupe de Picard est engendré par H, E_1, \dots, E_k , la matrice d'intersection est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

et la classe anticanonique est

$$-K = 3H - E_1 - \dots - E_k. \quad (2.10)$$

Cette dernière est donc d'auto-intersection $(-K)^2 = 9 - k$. Le critère de Nakai-Moishezon interdit donc d'éclater plus de huit points si on veut que $-K$ soit ample.

Le groupe de Picard de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est quant à lui engendré par deux générateurs l_1 et l_2 correspondant aux deux droites \mathbb{P}^1 , la matrice d'intersection est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et la classe anticanonique est

$$-K = 2l_1 + 2l_2, \quad (2.12)$$

d'auto-intersection $(-K)^2 = 8$.

Si on éclate un point p sur cette surface, le groupe de Picard est maintenant engendré par l_1, l_2 et le diviseur exceptionnel E . Si on éclate deux points distincts p_1 et p_2 sur \mathbb{P}^2 , le groupe de Picard de la surface obtenue est engendré par H, E_1 et E_2 . En fait comme on l'a dit, c'est la même surface, et les deux bases du groupe de Picard sont reliées ainsi :

$$\begin{aligned} l_1 &= H - E_1 \\ l_2 &= H - E_2 \\ E &= H - E_1 - E_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Comme $-K$ est ample pour une surface de del Pezzo, ce diviseur (ou un de ses multiples) permet de définir un plongement dans un espace projectif et le degré des diviseurs. On appelle généralement *degré* d'une surface de del Pezzo le degré de $-K$, c'est-à-dire K^2 .

2.1.9 Singularités de Du Val et surfaces de del Pezzo normales

Il existe aussi des surfaces de del Pezzo (généralisées) singulières. Si on impose que ces singularités soient ponctuelles (surface normale) et que le diviseur anticanonique soit Cartier, ces surfaces de del Pezzo ont été classifiées [DV, Dem, HW, MZ1, MZ2] et ont au plus des singularités de *Du Val*.

Une singularité de Du Val peut s'obtenir en contractant un certain nombre de (-2) -courbes (c'est-à-dire des courbes de carré -2) dont les intersections sont décrites par un diagramme ADE. Ainsi, la contraction d'une (-2) -courbe donne une singularité de type A_1 . Si on a deux telles courbes se coupant en un point, leur contraction donne une singularité A_2 . L'opération inverse d'éclatement de ces points singuliers s'appelle une *résolution* de la singularité.

Plus précisément, une résolution est une application π d'une surface régulière Y sur la surface singulière X telle que, si P est l'ensemble des points singuliers, $Y \setminus \pi^{-1}(P) = X \setminus P$. Une résolution π est dite minimale si toute résolution se factorise à travers elle : pour toute autre résolution σ de X en une surface Z , il existe $\tau : Z \rightarrow Y$ tel que $\sigma = \tau \circ \pi$. Une résolution est dite *crépante* si $K_Y = K_X$. La relation 2.7 nous dit que la résolution minimale d'une singularité de Du Val est crépante : en effet, c'est simplement l'éclatement de la singularité qui donne des (-2) -courbes.

Ajoutons que les singularités de Du Val peuvent localement s'obtenir en quotientant \mathbb{C}^2 par le groupe de Coxeter associé au diagramme ADE correspondant, qui est un sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$: par exemple en quotientant \mathbb{C}^2 par $\mathbb{Z}^{k+1} = \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ on obtient une singularité A_k .

Les surfaces de del Pezzo normales et Gorenstein sont données par la classification suivante [DV, Dem, HW].

Si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est la résolution minimale d'une surface de del Pezzo (complexe) normale X telle que $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ (hypothèse naturelle de connexité), alors

- (i) $1 \leq K_X^2 \leq 9$;
- (ii) X est lisse ou ses singularités sont des points doubles rationnels (singularités de Du Val) ;
- (iii) si $K_X^2 = 9$ alors $X \simeq \mathbb{P}^2$;
- (iv) si $K_X^2 = 8$ alors $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ou X est isomorphe à \mathbb{P}^2 éclaté en un point, ou X est le cône sur une quadrique de \mathbb{P}^2 (voir ci-dessous) ;
- (v) si $1 \leq K_X^2 \leq 7$ alors \tilde{X} est l'éclaté de \mathbb{P}^2 en $9 - K_X^2$ points placés en position presque générale, et X s'obtient à partir de \tilde{X} en contractant toutes les (-2) -courbes.

Le cône construit sur une quadrique de \mathbb{P}^2 peut s'obtenir de la façon suivante. Considérons la deuxième surface de Hirzebruch \mathbb{F}_2 : c'est un \mathbb{P}^1 fibré sur \mathbb{P}^1 tel qu'il existe une section d'auto-intersection -2 . En prenant cette section A et la classe de la fibre B comme base du groupe de Picard, la structure en fibré nous donne $B^2 = 0$ et $A.B = 1$. En contractant la (-2) -courbe A , on obtient la surface de del Pezzo singulière en question, qui a une singularité A_1 .

Pour le dernier cas de la classification, les $9 - K_X^2 \leq 8$ points de \mathbb{P}^2 sont dits en *position presque générale* s'il n'y a pas de courbes d'auto-intersection inférieure ou égale à -3 qui apparaissent lors de l'éclatement des points. Pour cela, il faut au plus trois points sur une droite, six sur une conique (ou trois dont un placé en un point double de la conique), et au plus un sur un point double d'une cubique ; on demande aussi que si un point p' est placé sur la courbe exceptionnelle E associée à l'éclatement d'un autre point — ce qui correspond à des points infiniment proches sur \mathbb{P}^2 — alors il n'y ait pas d'autre point à éclater sur la transformée $E - E'$ de E par l'éclatement de p' en E' . En contractant les (-2) -courbes obtenues, nous obtenons une surface de del Pezzo singulière. De plus la résolution est crépante, si bien que $K_{\tilde{X}} = K_X$.

Nous construirons explicitement un certain nombre de ces surfaces de del Pezzo singulières dans la section 2.4, mais donnons ici un exemple simple. Sur \mathbb{P}^2 , éclatons un point p . On obtient alors une surface de del Pezzo lisse de degré 8, qui est la surface de Hirzebruch \mathbb{F}_1 (c'est-à-dire un \mathbb{P}^1 fibré sur \mathbb{P}^1 avec une section d'auto-intersection -1). En éclatant un point p' sur la courbe exceptionnelle E , on obtient une seconde courbe exceptionnelle E' , et la première devient une (-2) -courbe $E - E'$, qu'on contracte pour obtenir une singularité A_1 . On a ainsi construit une surface de del Pezzo de degré 7 et de singularité A_1 . Son groupe de Picard est donné par l'orthogonal à $E - E'$ dans le Picard de la surface résolue (*i.e.* avant contraction) : il est engendré par $H - E - E'$ et H , où H est la classe des transformées des hyperplans (ou droites) de \mathbb{P}^2 ne passant pas par les points éclatés et $H - E - E'$ est la transformée de la droite passant par les deux points éclatés, infiniment proches. En fait si on contracte la (-1) -courbe $H - E - E'$ on retombe sur le cône sur la quadrique de \mathbb{P}^2 décrit plus haut.

2.2 Superalgèbres

Dans ce travail, nous allons associer à une surface de del Pezzo une superalgèbre et un supergroupe. Passons donc maintenant à la description générale de ces objets.

2.2.1 Algèbres de Lie et groupes de Lie

Une *algèbre de Lie* \mathfrak{g} sur un corps k est un espace vectoriel sur k muni d'un produit bilinéaire, le *crochet de Lie* $[\cdot, \cdot]$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x]$ (antisymétrie) ;
- (ii) $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi).

Une sous-algèbre de Lie est évidemment un sous-ensemble de \mathfrak{g} ayant lui aussi une structure d'algèbre de Lie. Autrement dit c'en est un sous-espace vectoriel clos sous l'action du crochet de Lie.

Si on a une algèbre associative, non nécessairement commutative, par exemple une algèbre d'opérateurs, en prenant comme crochet de Lie le commutateur $[x, y] = xy - yx$ on a une structure d'algèbre de Lie.

Un *groupe de Lie* (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) est quant à lui défini comme un groupe doté d'une structure de variété différentielle. Ainsi les groupes $SO(n), U(n), etc...$ sont des groupes de Lie.

Étant donné un groupe de Lie G , son espace tangent en l'unité forme une algèbre de Lie \mathfrak{g} . Celle-ci peut aussi se voir comme formée des champs de vecteurs sur G invariants à gauche par l'action du groupe. Réciproquement, on peut reconstituer un groupe de Lie en exponentiant une représentation bien choisie de son algèbre de Lie. (En fait, on obtient ainsi la composante connexe de l'identité.) Si on a une base a_1, \dots, a_n de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et qu'on note A_1, \dots, A_n une représentation de celle-ci dans une algèbre de matrices, les matrices de la forme $e^{x_1 A_1 + \dots + x_n A_n}$, pour tous x_1, \dots, x_n dans $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , forment un groupe de Lie dont l'algèbre associée est \mathfrak{g} .

On définit l'action adjointe d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur elle-même par $ad_g(x) = [g, x]$, et on vérifie que c'est une représentation, dite représentation adjointe.

2.2.2 Superalgèbres et supergroupes

Cela se généralise à la notion de superalgèbres et supergroupes de Lie. Une superalgèbre de Lie \mathfrak{g} est un espace vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué (notons $|g|$ le degré d'un élément homogène g et $\hat{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments homogènes de \mathfrak{g} , *i.e.* les éléments de degré bien défini) muni d'un produit bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x, y \in \hat{\mathfrak{g}}, [x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$ (antisymétrie graduée) ;
- (ii) $\forall x, y, z \in \hat{\mathfrak{g}}, (-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi généralisée).

Pour définir un supergroupe, on a besoin de la notion d'*algèbre de Grassmann*, une algèbre associative graduée \mathbb{Z}_2 -commutative : les éléments de

degré impair anticommute entre eux et les éléments de degré pair commutent avec tous les éléments. Par exemple les formes différentielles sur une variété forment une algèbre de Grassmann. On peut aussi introduire l'algèbre de Grassmann formelle $\mathbb{R}^{p|q}$, engendrée par p générateurs « bosoniques » (*i.e.* pairs) X_i et q générateurs « fermioniques » (impairs) θ_m qui satisfont $X_i X_j = X_j X_i$, $X_i \theta_m = \theta_m X_i$ et $\theta_m \theta_n = -\theta_n \theta_m$. En fait c'est simplement $\mathbb{R}^p \times \Lambda(\mathbb{R}^q)$.

On définit un supergroupe comme l'exponentiation d'une superalgèbre de Lie avec des coefficients à valeurs dans une algèbre de Grassmann. Plus loin nous utiliserons l'algèbre des formes différentielles sur une variété comme algèbre de Grassmann.

2.2.3 Tore maximal et système de racines

On appelle *tore maximal* d'une (super-)algèbre de Lie \mathfrak{g} une sous-algèbre \mathfrak{h} abélienne diagonalisable (*i.e.* tous ses éléments commutent entre eux) qui est maximale pour cette propriété, c'est-à-dire qui ne commute avec aucun autre élément de \mathfrak{g} .

Les éléments de \mathfrak{h} commutant tous entre eux sont supposés simultanément diagonalisables⁵ quant à leur action adjointe sur \mathfrak{g} . Autrement dit, on peut décomposer \mathfrak{g} en sous-espaces propres $\mathfrak{g}_\alpha = \{g \in \mathfrak{g} | \forall h \in \mathfrak{h}, [h, g] = \alpha(h)g\}$, où les α sont des formes linéaires sur \mathfrak{h} , appelées *racines* si \mathfrak{g}_α est non vide. En particulier on voit que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

2.2.4 Superalgèbre de Borchers

Nous allons voir ici comment construire une (super-)algèbre de Borchers, ou encore de Kac-Moody généralisée à partir d'une *matrice de Cartan*.

On se donne une répartition des indices 1 à n entre éléments pairs $I_{\bar{0}}$ et impairs $I_{\bar{1}}$, et une matrice $n \times n$, a , vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $a_{ij} = a_{ji}$;
- (ii) $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$;
- (iii) $\frac{2a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}$ si $a_{ii} > 0$ et $i \in I_{\bar{0}}$;
- (iv) $\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}$ si $a_{ii} > 0$ et $i \in I_{\bar{1}}$.

Considérons la superalgèbre libre engendrée par des éléments h_1, \dots, h_n , e_1, \dots, e_n et f_1, \dots, f_n , où tous les h_i sont bosoniques (pairs) et les e_i et f_i sont bosoniques si $i \in I_{\bar{0}}$ et fermioniques (impairs) si $i \in I_{\bar{1}}$.

Alors on a une *superalgèbre de Borchers* en quotientant par les relations suivantes :

⁵Pour des groupes compacts, cette condition est automatiquement vérifiée.





- (i) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$;
- (ii) $[h_i, e_j] = a_{ij} e_j$;
- (iii) $[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$;
- (iv) $[h_i, h_j] = 0$;
- (v) $(ad_{e_i})^{1-2\frac{a_{ij}}{a_{ii}}} e_j = 0$ si $a_{ii} > 0$;
- (vi) $(ad_{f_i})^{1-2\frac{a_{ij}}{a_{ii}}} f_j = 0$ si $a_{ii} > 0$;
- (vii) $[e_i, e_j] = 0$ si $a_{ij} = 0$;
- (viii) $[f_i, f_j] = 0$ si $a_{ij} = 0$.

Cela généralise les super-algèbres de Kac-Moody symétrisables, pour lesquelles on impose que les éléments diagonaux de la matrice de Cartan soient strictement positifs : $a_{ii} > 0$ pour tout i .

Bien que nulle démonstration convaincante n'existe à notre connaissance dans la littérature, il semble qu'on puisse de manière alternative imposer les relations de Chevalley (i) à (iv) et quotienter ensuite par l'idéal maximal d'intersection vide avec la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . Cet idéal est, normalement, engendré par les relations (v) à (viii), dites relations de Serre.

On peut représenter une superalgèbre de Borchers ainsi construite par un *diagramme de Dynkin* généralisé. On représente chaque racine simple (*i.e.* les racines de la base) par un noeud dont la couleur indique la parité, et éventuellement la norme, et deux noeuds sont reliés par n liens si les racines correspondantes ont un produit scalaire $-n$. (On a vu que n est forcément positif, à défaut d'être toujours entier ; dans ce dernier cas on indique n au dessus du lien.)

Donnons ici nos conventions pour les diagrammes de Dynkin (elles diffèrent des conventions usuelles) :

	Racine bosonique réelle (de norme 2)
	Racine bosonique imaginaire (de norme ≤ 0)
	Racine fermionique (réelle) de norme 0
	Racine fermionique (imaginaire) de norme ≤ -1

Rappelons qu'une racine est dite *imaginaire* si elle engendre des chaînes infinies, et *réelle* dans le cas contraire[Ra].

2.2.5 Groupe de Weyl

Étant donnée une superalgèbre de Kac-Moody ou de Borcherds, on peut définir son groupe de Weyl⁶ comme le groupe engendré par les réflexions s_α par rapport aux racines bosoniques α de carré strictement positif :

$$\beta \mapsto \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha. \quad (2.14)$$

2.3 Des surfaces de del Pezzo aux supergravités

Nous allons voir dans cette partie comment on peut construire à partir d'une surface de del Pezzo des superalgèbres de Borcherds qui permettent d'étendre les groupes de U-dualité des supergravités pures et d'écrire les champs bosoniques — à l'exception de la métrique — avec leurs équations du mouvement sous forme géométrique. Il est connu depuis longtemps que les diviseurs de degré 0 d'une surface de del Pezzo lisse de degré d forment un réseau dont la matrice d'intersection est donné par le diagramme de Dynkin E_{9-d} .

2.3.1 Exemple de la supergravité $D = 11$

Commençons par l'exemple de la supergravité pure à 11 dimensions [CJS] que nous avons décrite dans la section 1.5.3. Nous savons qu'en plus de la métrique, il n'y a qu'un seul champ bosonique, une 3-forme $A_{(3)}$ de courbure $F_{(4)} = dA_{(3)}$ qui satisfait à l'équation du mouvement

$$d * F_{(4)} + \frac{1}{2} F_{(4)} \wedge F_{(4)} = 0. \quad (2.15)$$

Cette théorie est associée à la surface \mathbb{P}^2 . Considérons en effet les diviseurs de genre 0 : ce sont H (la classe de l'hyperplan) et $2H$, de degrés 3 et 6 par rapport au diviseur très ample $-K = 3H$. H engendre linéairement le groupe de Picard, et la matrice d'intersection est

$$(1). \quad (2.16)$$

Après changement de signe, nous avons une matrice qui vérifie les conditions vues plus haut pour une matrice de Cartan, et nous construisons donc l'algèbre de Borcherds associée. H étant de degré impair comme diviseur,

⁶Ce n'est pas la seule définition possible : on peut aussi inclure les réflexions par rapport à des racines fermioniques.

le générateur que nous lui associons e_H est pris impair⁷. On construit ainsi une super-algèbre dont une base est donnée par $e_H, f_H, h_H = [e_H, f_H], e_{2H} = [e_H, e_H]$ et $f_{2H} = [f_H, f_H]$. On a bien sûr les relations de Chevalley $[h_H, e_H] = -e_H$ et $[h_H, f_H] = f_H$, mais on n'a ici aucune relation de Serre. La relation $[e_H, [e_H, e_H]] = 0$ s'obtient à partir de l'identité de Jacobi, de même que la relation symétrique pour f_H . En fait, la superalgèbre que nous avons obtenue est bien connue, c'est $\mathfrak{osp}(1|2)$. Les autres commutateurs se calculent facilement : $[e_H, f_{2H}] = 2f_H, [f_H, e_{2H}] = -2e_H, [h_H, e_{2H}] = -2e_{2H}, [h_H, f_{2H}] = 2f_{2H}$ et $[e_{2H}, f_{2H}] = -4h_H$. (On voit que la partie bosonique de cette superalgèbre forme une algèbre $\mathfrak{sl}(2)$.)

Nous tronquons cette superalgèbre aux éléments de degré positif, c'est-à-dire que nous gardons h_H, e_H et e_{2H} . Nous retirons également h_H . Nous allons alors construire un supergroupe sur les deux éléments e_H et e_{2H} , en prenant comme algèbre de Grassmann les formes différentielles sur un espace à 11 dimensions ($11 = K^2 + 2$). H étant de degré 3, nous associons à e_H une 3-forme $A_{(3)}$ et $2H$ étant de degré 6 nous lui associons une 6-forme $\tilde{A}_{(6)}$, pour former un élément

$$\mathcal{V} = e^{A_{(3)}e_H + \tilde{A}_{(6)}e_{2H}} \quad (2.17)$$

du supergroupe construit sur cette superalgèbre. (En prenant un signe $-$ pour le degré de E_H et e_{2H} , cela revient à prendre des éléments de degré 0 dans l'exponentielle, pour la \mathbb{Z} -graduation naturelle.)

Si \mathcal{V} est un élément d'un groupe de Lie, sa différentielle ramenée à l'origine $\mathcal{G} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}$ se différentie en

$$d\mathcal{G} = -d\mathcal{V}d\mathcal{V}^{-1} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}; \quad (2.18)$$

c'est l'équation de *Maurer-Cartan*

$$d\mathcal{G} - \mathcal{G} \wedge \mathcal{G} = 0. \quad (2.19)$$

Pour notre supergroupe, en utilisant la formule

$$d(e^A)e^{-A} = dA + \frac{1}{2}[A, dA] + \frac{1}{3!}[A, [A, dA]] + \dots \quad (2.20)$$

on obtient

$$\mathcal{G} = dA_{(3)}e_H + \left(d\tilde{A}_{(6)} + \frac{1}{2}A_{(3)} \wedge dA_{(3)} \right) e_{2H}. \quad (2.21)$$

Notons que e_H étant un générateur impair, il convient de le faire anticommuer avec les autres éléments impairs qui interviennent (notamment les formes différentielles de degré impair).

⁷C'est un choix naturel[CJLP1].

En notant

$$\begin{aligned} F_{(4)} &= dA_{(3)} \\ \tilde{F}_{(7)} &= d\tilde{A}_{(6)} + \frac{1}{2}A_{(3)} \wedge dA_{(3)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

soit $\mathcal{G} = F_{(4)}e_H + \tilde{F}_{(7)}e_{2H}$, l'équation de Maurer-Cartan s'écrit

$$dF_{(4)}e_H + d\tilde{F}_{(7)}e_{2H} = +\frac{1}{2}F_{(4)} \wedge F_{(4)}e_{2H}, \quad (2.23)$$

ce qui donne en composantes

$$\begin{aligned} dF_{(4)} &= 0 \\ d\tilde{F}_{(7)} &= \frac{1}{2}F_{(4)} \wedge F_{(4)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

On voit qu'une condition de dualité

$$\tilde{F}_{(7)} = - * F_{(4)} \quad (2.25)$$

impose l'équation du mouvement 2.15. Cette équation peut s'écrire comme une équation d'auto-dualité sur \mathcal{G} : en définissant une pseudo-involution \mathcal{S} ($\mathcal{S}^2 = \pm 1$) qui envoie e_H sur e_{2H} et e_{2H} sur $-e_H$, cela est en effet équivalent à

$$\mathcal{S} * \mathcal{G} = \mathcal{G}. \quad (2.26)$$

Notons que $*$ n'agit que sur la partie « Grassmann » du supergroupe et \mathcal{S} sur les générateurs de $\mathfrak{osp}(1|2)$. Ces deux opérateurs commutent entre eux, et le signe de l'équation $\mathcal{S}^2 = \pm 1$ est choisi de telle sorte que $(\mathcal{S}*)^2 = 1$, ce qui revient ici à prendre un signe moins.

Comme les générateurs impliqués dans cette relation d'auto-dualité sont associés aux classes de diviseurs H et $2H$ sur \mathbb{P}^2 , la pseudo-involution \mathcal{S} est reliée à l'échange de ces deux diviseurs. On a vu plus haut que sous l'effet de l'involution

$$C \mapsto -K - C \quad (2.27)$$

du groupe de Picard, le genre est conservé.

Les équations du mouvement que nous étudions sont invariantes sous les transformations de jauge

$$\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}e^{\Lambda_{(3)}e_H + \tilde{\Lambda}_{(6)}e_{2H}}, \quad (2.28)$$

où $\Lambda_{(3)}$ et $\tilde{\Lambda}_{(6)}$ sont des formes fermées. En effet le calcul de \mathcal{G} fait intervenir des différentielles dans tous les termes, qui s'annulent pour les formes fermées : $d(\mathcal{V}e^\Lambda)(\mathcal{V}e^\Lambda)^{-1} = d\mathcal{V}e^\Lambda e^{-\Lambda}\mathcal{V}^{-1} + \mathcal{V}(de^\Lambda e^{-\Lambda})\mathcal{V}^{-1} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}$.

Pour les champs $A_{(3)}$ et $\tilde{A}_{(6)}$, ces transformations de jauge s'écrivent

$$\begin{aligned} A_{(3)} &\mapsto A_{(3)} + \Lambda_{(3)} \\ \tilde{A}_{(6)} &\mapsto \tilde{A}_{(6)} + \tilde{\Lambda}_{(6)} - \frac{1}{2}A_{(3)} \wedge \Lambda_{(3)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

et on vérifie bien que $F_{(4)}$ et $\tilde{F}_{(7)}$ donnés en 2.22 sont invariants.

Notons que si les transformations de jauge habituelles font intervenir des formes exactes $\Lambda_{(p)} = d\lambda_{(p-1)}$, la formulation ci-dessus est plus générale et permet de traiter tous les cas de manière uniforme (y compris les scalaires)[CJLP1].

Enfin, la relation algébrique $e_{2H} = [e_H, e_H]$ permet de relier les tensions des membranes de la théorie M, la M2 et la M5 qui sont des sources pour les champs $A_{(3)}$ et $\tilde{A}_{(6)}$ [LLPS]. En effet, le couplage intervient par des termes

$$I_{M2} = T_3 \int_{M_3} A_{(3)} \quad (2.30)$$

et

$$I_{M5} = T_6 \int_{M_6} \tilde{A}_{(6)} \quad (2.31)$$

où M_3 et M_6 sont les volumes d'univers des M2 et M5 et où T_3 et T_6 sont les tensions de ces membranes. Rappelons que c'est la propriété BPS qui assure que les constantes de couplage sont égales aux tensions des objets.

La quantification impose que sous l'action d'une transformation de jauge, l'action varie d'un multiple de 2π . Si on ne considère que des transformations de la forme $e^{\Lambda_{(3)}e_H}$, cela impose la contrainte que pour tout 3-cycle M_3

$$\delta I = T_3 \int_{M_3} \Lambda_{(3)} \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (2.32)$$

D'autre part si on compose deux telles transformations de jauge, de paramètres $\Lambda_{(3)}$ et $\Lambda'_{(3)}$, $\tilde{A}_{(6)}$ subit la transformation

$$\tilde{A}_{(6)} \mapsto \tilde{A}_{(6)} - \frac{1}{2}\Lambda_{(3)} \wedge \Lambda'_{(3)} - \frac{1}{2}A_{(3)} \wedge (\Lambda_{(3)} + \Lambda'_{(3)}), \quad (2.33)$$

ce qui donne pour le commutateur de ces deux transformations

$$\begin{aligned} A_{(3)} &\mapsto A_{(3)} \\ \tilde{A}_{(6)} &\mapsto \tilde{A}_{(6)} - \Lambda_{(3)} \wedge \Lambda'_{(3)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ainsi pour tout 6-cycle M_6 on doit aussi avoir

$$\delta I = T_6 \int_{M_6} \Lambda_{(3)} \wedge \Lambda'_{(3)} \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (2.35)$$

Dans les cas où M_6 se décompose en produit de deux 3-cycles M_3 et M'_3 , et en choisissant $\Lambda_{(3)}$ de telle sorte que cette forme soit d'intégrale nulle pour tout cycle non équivalent à M_3 et telle que $T_3 \int_{M_3} \Lambda_{(3)} = 2\pi$, et de même respectivement pour $\Lambda'_{(3)}$ et M'_3 , alors cette intégrale se réduit à

$$\delta I = T_6 \int_{M_3} \Lambda_{(3)} \int_{M'_3} \Lambda'_{(3)} = T_6 \left(\frac{T_3}{2\pi} \frac{T_3}{2\pi} \right)^{-1}, \quad (2.36)$$

et comme δI doit être dans $2\pi\mathbb{Z}$, le choix minimal est de prendre

$$\frac{T_6}{2\pi} = \frac{T_3}{2\pi} \frac{T_3}{2\pi}. \quad (2.37)$$

En fait cette relation reflète la relation algébrique

$$e_{2H} = [e_H, e_H] \quad (2.38)$$

où $2H$ est le diviseur associé à la M5 et H le diviseur associé à la M2. On associe la tension T_3 à la surface de la sphère S^2 H dans \mathbb{P}^2 . L'espace des modules de la théorie M, c'est-à-dire la constante de couplage T_3 est ainsi donné par le groupe de cohomologie $H^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{R})$.

2.3.2 Méthode générale

Ce que nous venons de voir se généralise aux compactifications de la théorie M sur des tores orthogonaux, ainsi qu'à d'autres modèles physiques comme ceux du triangle magique, comme nous le verrons par la suite.

La correspondance dans le cas général est résumée dans le tableau 2.1.

Voyons maintenant le détail de cette correspondance. Soit X une surface de del Pezzo. Alors son groupe de Picard muni de la forme d'intersection forme un réseau de signature $(1, p-1)$ (en notant p la dimension de ce réseau). Considérons les diviseurs de degré et de genre positifs (ou nuls), et choisissons une base du réseau telle que tous ces diviseurs puissent s'écrire comme combinaisons linéaires à coefficients positifs, à l'exception de la moitié de l'hyperplan de degré zéro. (En fait cela n'est pas possible dans tous les cas, mais au moins dans la majorité de ceux qui nous intéressent. Pour les autres la construction est plus subtile ; nous en parlerons dans la section 2.4.) Pour les diviseurs C de degré 0, on a par définition $K.C = 0$, donc le genre ne dépend que de C^2 ; si C est de genre positif, il en est de même de $-C$ et il faut donc choisir un demi-espace. Cela revient à choisir une jauge de la théorie comme nous le verrons plus loin.

Cette base étant trouvée (elle est unique à un groupe de symétrie près) on peut écrire la matrice d'intersection M dans cette base. On peut alors

Surface de del Pezzo X de degré K^2 .	Modèle physique en dimension $D = K^2 + 2$.
Classes de diviseurs de genre virtuel positif et de degré positif.	Racines positives d'une superalgèbre qui permet de construire les champs bosoniques de la théorie (métrique exclue) avec leurs équations du mouvement.
Classes de diviseurs de genre zéro et de degré compris entre 0 et $K^2 + 2$ inclus.	Objets BPS.
Relations linéaires entre diviseurs.	Relations multiplicatives entre les tensions.
$H^2(X, \mathbb{R})/W$	Espace des modules de la théorie.
Éclatement d'un point lisse.	Compactification sur un cercle.
Transformation élémentaire.	T-dualité.
Isométries de la surface	Groupe de U-dualité.

TAB. 2.1 – Correspondance entre surfaces de del Pezzo et théories physiques.

vérifier que la matrice $A = -M$ vérifie les règles énoncées au 2.2.4 et on peut donc construire une superalgèbre de Borchers. Pour définir la parité des éléments, on prend la parité du degré des diviseurs correspondants, qui est du reste la même que celle de leur auto-intersection, c'est-à-dire les éléments diagonaux de la matrice, comme on le voit par la formule d'adjonction. En fait pour les diviseurs exceptionnels d'auto-intersection -1 , auxquels on associe des générateurs fermioniques, il faut remplacer dans la matrice A l'élément diagonal 1 par 0 pour que la construction redonne les résultats de la physique. On pourrait s'attendre à ce que la relation de Serre $[e_i, [e_i, e_j]] = 0$ (i est l'indice du générateur fermionique considéré, et j celui d'un élément tel que $A_{ij} = -1$) disparaisse, puisqu'elle disparaît des relations imposées, mais il n'en est rien : elle devient une conséquence de $[e_i, e_i] = 0$.

On observe que dans tous les cas qui nous intéressent, et en particulier pour les surfaces de del Pezzo lisses, toutes les racines de degré (mesuré par l'intersection avec $-K$) compris entre 0 et K^2 ont une multiplicité 1, sauf $-K$ qui a une multiplicité $rg(Pic(X)) - 1$ et 0 qui a une multiplicité $rg(Pic(X))$.⁸

⁸On identifie ici le réseau des racines de notre algèbre au réseau de Picard de la surface

Nous tronquons alors notre superalgèbre à ces racines de degré entre 0 et K^2 (bornes comprises), et nous supprimons également pour la racine 0, c'est-à-dire pour le tore \mathfrak{h} , le générateur associé à la direction $-K$: on ne garde que les h_α tels que $\alpha.K = 0$. Alors la multiplicité de cette racine est la même que celle de $-K$, et on peut observer que notre algèbre tronquée est symétrique sous l'involution du réseau des racines

$$C \mapsto -K - C, \quad (2.39)$$

dont on a vu qu'elle préserve le genre des diviseurs de la surface associée. Il y a une dernière troncation à faire, qui correspond à un choix de jauge : une fois la base de racines simples choisie, on ne garde que les racines positives, ce qui revient à exclure la moitié des racines de degré zéro. Pour préserver la symétrie par rapport à $-K/2$ qui est cruciale dans notre construction, on est amené également à faire cette troncation symétriquement en degré K^2 . Les différents choix pour cette troncation sont reliés par le groupe de Weyl de la U-dualité, puisque c'est le choix d'une base de racines simples.

Pour calculer la multiplicité des racines, on se sert de la *formule du dénominateur*, qui est un cas particulier de la *formule du caractère* [Ra] :

$$\frac{\prod_{\alpha \text{ pair}} (1 - e^\alpha)^{\text{mult}(\alpha)}}{\prod_{\alpha \text{ impair}} (1 + e^\alpha)^{\text{mult}(\alpha)}} = e^\rho \sum_{w \in W} \det(w) w \left(e^{-\rho} \sum_{\mu \in L} (-1)^{\text{lg}(\mu)} e^\mu \right), \quad (2.40)$$

où les produits du membre de gauche se font sur toutes les racines α positives, respectivement paires et impaires, de multiplicité $\text{mult}(\alpha)$, où ρ est le vecteur de Weyl défini par $(\rho, \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_i)$ (les α_i sont les racines simples), où W est le groupe de Weyl, où μ court sur l'ensemble L des combinaisons linéaires $\sum_j l_{ij} \alpha_{ij}$ de racines simples imaginaires α_{ij} mutuellement orthogonales, avec $l_{ij} \leq 0$, et $l_{ij} < 1$ si α_{ij} n'est pas une racine simple fermionique de norme 0 ; $\text{lg}(\mu)$ est la longueur de μ , c'est-à-dire $\sum_j l_{ij}$.

À chaque générateur T_i de degré p_i de notre algèbre tronquée, nous associons alors une p -forme A_i , élément de l'algèbre de Grassmann ΛM des formes différentielles sur un espace-temps M de dimension $D = K^2 + 2$, et nous formons ainsi un élément

$$\mathcal{V} = e^{\sum_i A_i T_i} \quad (2.41)$$

de del Pezzo puisqu'ils sont isomorphes, mais la métrique est légèrement différente comme on l'a vu au paragraphe précédent.

du supergroupe correspondant, et nous pouvons calculer sa « courbure »

$$\mathcal{G} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1} = \sum_i F_i T_i, \quad (2.42)$$

où les F_i peuvent s'exprimer en fonction des A_i et des dA_i .

En utilisant la symétrie du réseau des racines par rapport à $-K/2$, nous définissons alors une pseudo involution \mathcal{S} de carré $\mathcal{S}^2 = \pm 1$ qui agit sur l'algèbre tronquée de telle sorte qu'en combinant avec l'action de l'étoile de Hodge $*$ sur les formes différentielles $\mathcal{S}*$ soit une involution de l'algèbre tangente au supergroupe : $(\mathcal{S}*)^2 = 1$.

On interprète alors les F_g comme les champs bosoniques d'une théorie physique, et on impose comme équations du mouvement la condition d'auto-dualité

$$\mathcal{S} * \mathcal{G} = \mathcal{G}. \quad (2.43)$$

En prenant les surfaces de del Pezzo lisses, on retrouve ainsi exactement le contenu en champs bosoniques (sauf la métrique) et les équations du mouvement de la supergravité $D = 11$ et de ses réductions dimensionnelles sur des tores orthogonaux, ainsi que de la supergravité IIB en dix dimensions. Le groupe de Weyl qui échange les racines agit alors sur les champs comme sous-groupe de U-dualité.

2.3.3 Théorie IIB

Commençons par cette dernière, qui est associée à la surface $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. En notant l_1 et l_2 les deux diviseurs associés aux deux \mathbb{P}^1 , on a $-K = 2l_1 + 2l_2$, qui est d'auto-intersection 8. Cette surface est donc associée à une théorie physique de dimension d'espace-temps 10 : la théorie des cordes IIB, ou plutôt sa limite de supergravité. On calcule facilement le genre : si $C = al_1 + bl_2$, on a

$$g(C) = 1 - a - b + ab, \quad (2.44)$$

qui est nul pour les diviseurs tels que $a = 1$ ou $b = 1$ et positif à l'intérieur du cône formé par ces deux droites, pour $|a + b - 2| \geq |a - b|$. (On vérifie bien que l'égalité donne les deux droites $a = 1$ et $b = 1$.)

Le degré est donné par $-K.C = 2a + 2b$. En tronquant aux degrés compris entre 0 et 8 on obtient les deux séries de diviseurs de genre zéro (ou *rationnels*) $l_1 + bl_2$ ($-1 \leq b \leq 3$) et $al_1 + l_2$ ($-1 \leq a \leq 3$) et les diviseurs 0 et $-K$ qui sont de genre 1. On vérifie bien qu'il y a symétrie par rapport à $-K/2 = l_1 + l_2$. Notons aussi que le degré de tous les diviseurs étant pair, on va associer à cette surface une algèbre purement bosonique, une algèbre de Lie de dimension infinie.

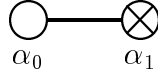
En degré 0 on a comme racines $l_1 - l_2$ et son opposée $l_2 - l_1$, qui sont échangées par le groupe de Weyl \mathbb{Z}_2 de l'algèbre A_1 . Si on choisit de prendre $\alpha_0 = l_1 - l_2$ comme racine simple, alors on est forcé de prendre comme seconde racine simple $\alpha_1 = l_2$, de degré 2. On construit alors sur ces deux racines une algèbre de Borchers de rang 2, qui a déjà été étudiée en [SI]. La matrice d'intersection est

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

dont on obtient la matrice de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

de notre algèbre, qui est purement bosonique comme nous l'avons dit. Elle se représente par le diagramme de Dynkin



et est engendrée par les générateurs h_{α_0} , h_{α_1} , e_{α_0} , e_{α_1} , f_{α_0} et f_{α_1} avec les relations que nous rappelons :

- (i) $[e_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}] = h_{\alpha_0}$; $[e_{\alpha_1}, f_{\alpha_1}] = h_{\alpha_1}$;
- (ii) $[h_{\alpha_0}, e_{\alpha_0}] = 2e_{\alpha_0}$; $[h_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}] = 0$;
- (iii) $[h_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}] = -2f_{\alpha_0}$; $[h_{\alpha_1}, f_{\alpha_1}] = 0$;
- (iv) $[h_{\alpha_0}, h_{\alpha_1}] = 0$;
- (v) $[e_{\alpha_0}, [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}]] = 0$;
- (vi) $[f_{\alpha_0}, [f_{\alpha_0}, f_{\alpha_1}]] = 0$.

Les différents diviseurs et les objets BPS correspondants sont représentés sur la figure 2.1, sur laquelle la troncation est également marquée.

On associe aux éléments correspondants de l'algèbre des formes différentielles données dans le tableau 2.2.

Pour compléter ce tableau, il convient de rappeler que la racine zéro correspond au générateur h_{α_0} , puisque α_0 engendre l'orthogonal de $-K$. On peut vérifier grâce à la formule du dénominateur que toutes les autres racines du tableau sont bien de multiplicité 1, y compris $-K$.

On forme alors l'élément du supergroupe

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & e^{\frac{1}{2}\phi h_{\alpha_0}} e^{C(0)e_{\alpha_0}} e^{B(2)e_{\alpha_1} + C(2)e_{\alpha_0 + \alpha_1}} e^{C(4)e_{\alpha_0 + 2\alpha_1}} \times \\ & \times e^{C(6)e_{\alpha_0 + 3\alpha_1} + \tilde{B}(6)e_{2\alpha_0 + 3\alpha_1}} e^{C(8)e_{\alpha_0 + 4\alpha_1}} e^{\psi(8)e_{2\alpha_0 + 4\alpha_1}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

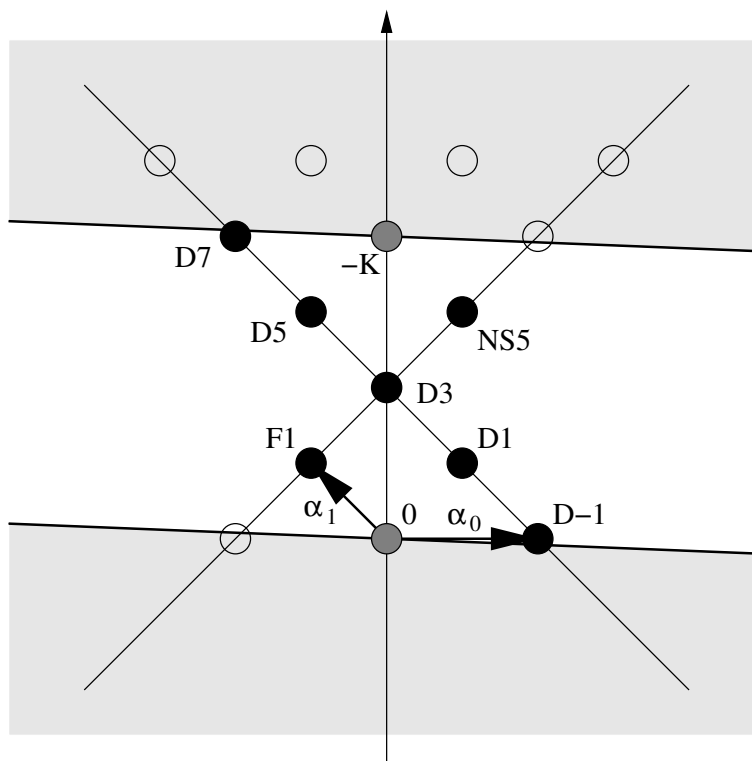


FIG. 2.1 – Diviseurs de degré et genre positifs de la surface $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et objets BPS correspondants dans la théorie IIB.

Degré	Racine « positive »	État BPS	forme
0	0	?	ϕ
0	α_0	D-1	$C_{(0)}$
2	α_1	F1	$B_{(2)}$
2	$\alpha_0 + \alpha_1$	D1	$C_{(2)}$
4	$\alpha_0 + 2\alpha_1$	D3	$C_{(4)}$
6	$\alpha_0 + 3\alpha_1$	D5	$C_{(6)}$
6	$2\alpha_0 + 3\alpha_1$	NS5	$\tilde{B}_{(6)}$
8	$\alpha_0 + 4\alpha_1$	D7	$C_{(8)}$
8	$-K = 2\alpha_0 + 4\alpha_1$?	$\psi_{(8)}$

TAB. 2.2 – Formes différentielles et états BPS associés aux diviseurs de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pour la supergravité IIB.

qui permet de calculer $\mathcal{G} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}$. On définit l'involution \mathcal{S} par

$$\begin{aligned}
 h_{\alpha_0} &\longleftrightarrow e_{2\alpha_0+4\alpha_1} \\
 e_{\alpha_0} &\longleftrightarrow e_{\alpha_0+4\alpha_1} \\
 e_{\alpha_1} &\longleftrightarrow e_{2\alpha_0+3\alpha_1} \\
 e_{\alpha_0+\alpha_1} &\longleftrightarrow e_{\alpha_0+3\alpha_1} \\
 e_{\alpha_0+2\alpha_1} &\longleftrightarrow e_{\alpha_0+2\alpha_1}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

et la condition d'auto-dualité

$$\mathcal{S} * \mathcal{G} = \mathcal{G} \quad (2.49)$$

donne alors les équations du mouvement des champs bosoniques de la supergravité IIB.

De la même façon que pour la théorie M, les relations entre les diviseurs donnent des relations de commutation entre générateurs de l'algèbre dont on peut déduire les relations entre les tensions des différents objets BPS. Ainsi comme par exemple $l_1 = (l_1 - l_2) + l_2$, on obtient au niveau des tensions

$$\frac{T_{D1}}{2\pi} = \frac{T_{D-1}}{2\pi} \frac{T_{F1}}{2\pi}, \quad (2.50)$$

et le réseau de Picard étant de dimension 2 on peut relier toutes les tensions à deux grandeurs fondamentales, qui paramètrent l'espace des modules de cette théorie ; on peut prendre la longueur fondamentale des cordes l_B et la constante de couplage g_B . Cet espace des modules est alors donné par une forme linéaire sur ce réseau bidimensionnel, c'est-à-dire par un élément ω de $H^2(X, \mathbb{R})$, en faisant l'identification

$$\begin{aligned} \omega(l_2) &= -2 \log(2\pi l_B) \\ \omega(l_1 - l_2) &= -\log(g_B). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Le groupe de Weyl \mathbb{Z}_2 agit sur le réseau comme la symétrie qui échange l_1 et l_2 , ce qui est l'échange des deux \mathbb{P}^1 de la surface $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Physiquement, cela se traduit par la *S-dualité* qui échange la corde perturbative F1 avec la D-corde D1, et qui échange les champs $B_{(2)}$ et $C_{(2)}$. Cette dualité échange un régime perturbatif avec un régime non perturbatif : en effet on voit par l'identification 2.51 que la constante de couplage g_B est changée en $1/g_B$. En fait l'objet perturbatif n'est plus le même, puisque F1 et D1 sont interverties.

2.3.4 Théorie IIA et compactifications

Cette analyse peut être reproduite pour la supergravité IIA à dix dimensions, qui correspond cette fois à la surface de del Pezzo obtenue en éclatant un point de \mathbb{P}^2 .

Les diviseurs sont de la forme $C = aH + bE$ et comme $K = -3H + E$, le degré est $3a + b$ et le genre est

$$g(C) = 1 + \frac{(a-3)a - (b+1)b}{2} = \frac{(a+b-1)(a-b-2)}{2} \quad (2.52)$$

dont on obtient les diviseurs de genre 0 (spectre BPS) et les diviseurs de genre positif (racines de la superalgèbre). Les racines simples sont nécessairement

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= E \\ \alpha_1 &= H - E\end{aligned}\quad (2.53)$$

qui sont respectivement impaire et paire, étant de degrés 1 et 2.

La figure 2.2 présente le spectre des objets BPS, dont la dimension est donnée par le degré du diviseur rationnel correspondant, et les racines qu'on garde après troncation de la superalgèbre aux degrés compris entre 0 et 8.

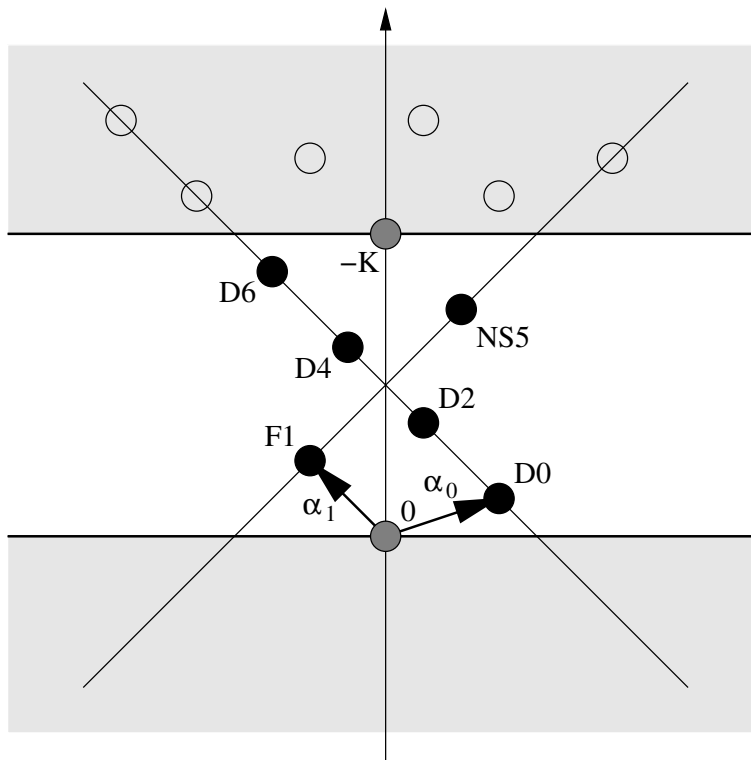


FIG. 2.2 – Diviseurs de degré et genre positifs de la surface \mathbb{P}_1^2 et objets BPS correspondants dans la théorie IIA.

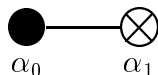
La matrice d'intersection étant

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

on prend comme matrice de Cartan

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

où comme on l'a vu on doit remplacer l'élément diagonal 1 (après changement de signe) par 0 pour la racine fermionique α_0 . Le diagramme de Dynkin de cette superalgèbre est le suivant.



Là encore en associant des formes différentielles aux générateurs de l'algèbre tronquée on obtient les champs (bosoniques) de la supergravité IIA à 10 dimensions, et l'équation d'auto-dualité $\mathcal{S} * \mathcal{G} = \mathcal{G}$ permet d'en obtenir les équations du mouvement.

En fait, on peut interpréter cette théorie comme la compactification sur un cercle de la théorie M, ou plus précisément comme la réduction de Kaluza-Klein de la supergravité à 11 dimensions. En effet la corde fondamentale F1 peut se voir comme la membrane M2 dont une des dimensions est enroulée sur le cercle de compactification. La D2 est la M2 non enroulée, la NS5 provient de même de la M5 qui enroulée sur le cercle donne la D4. Quant à la D0, elle peut se voir comme les modes d'impulsion de Kaluza-Klein, avec comme dual magnétique la D6.

Si on regarde ce que cela signifie pour les diviseurs associés, on voit que l'éclatement d'un point correspond à la compactification sur un cercle, et le diviseur exceptionnel E aux modes d'impulsion de Kaluza-Klein. De plus si C est un diviseur de genre 0, auquel on associe un état BPS, après éclatement on obtient deux diviseurs de genre 0 : C , de même degré et qui correspond à l'objet non enroulé, et $C - E$ dans le degré inférieur qui correspond à l'objet enroulé. Si le potentiel associé à C (et pour lequel C est une source électrique) est une p -forme $A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ et que le compactification se fait sur la direction i on obtient respectivement une p -forme $A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ (où les indices sont différents de i) et une $(p - 1)$ -forme $A_{i \mu_1 \dots \mu_{p-1}}$.

De même en éclatant d'autres points, pris en position générale, on obtient les surfaces de del Pezzo lisses qui correspondent aux compactifications successives sur des cercles de ces théories, c'est-à-dire à des compactifications sur des tores orthogonaux ($B = 0$). On ajoute à chaque fois à l'espace des modules les rayons des cercles de compactification, et on obtient les objets BPS donnés dans le tableau 2.3.

Les diagrammes de Dynkin de ces compactifications successives sont les suivants.

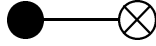
$D = 11$:



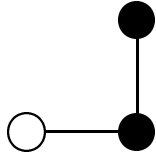
Deg.	Racine (positive)	État BPS	forme
0	0	Dilatons	$\vec{\phi}$
0	$H - E_i - E_j - E_l$	M2 triplement enroulée	$A_{(0)ijl}$
0	$E_i - E_j (i > j)$	Modes Kaluza-Klein	$\mathcal{A}_{(0)j}^i$
1	E_i	Impulsion	$\hat{A}_{(1)}^i$
1	$H - E_i - E_j$	M2 doublement enroulée	$A_{(1)ij}$
2	$H - E_i$	M2 simplement enroulée	$A_{(2)i}$
3	H	M2	$A_{(3)}$
$6-k$	$2H - \sum_p E_p$	M5 enroulée sur un k -tore	$\tilde{A}_{(6-k)}$
$7-k$	$2H - \sum_{p \neq i} E_p$	M5 enroulée sur un $(k-1)$ -tore	$\tilde{A}_{(7-k)}^i$
$8-k$	$2H - \sum_{p \neq ij} E_p$	M5 enroulée sur un $(k-2)$ -tore	$\tilde{A}_{(8-k)}^{ij}$
$8-k$	$3H - \sum_{p \neq i} E_p - 2E_i$	Dual magnétique des impulsions	$\tilde{A}_{(8-k)i}$
$9-k$	$3H - \sum_{p \neq ij} E_p - 2E_i$	Dual magnétique des modes KK	$\tilde{A}_{(9-k)i}^j$
$9-k$	$2H - \sum_{p \neq ij} E_p$	M5 enroulée sur un $(k-3)$ -tore	$\tilde{A}_{(9-k)}^{ijl}$
$9-k$	$-K = 3H - \sum_p E_p$	Dual magnétique des dilatons	$\vec{\psi}$

TAB. 2.3 – Formes différentielles et états BPS associés aux diviseurs de \mathbb{P}_k^2 pour la théorie M compactifiée sur \mathbb{T}^k .

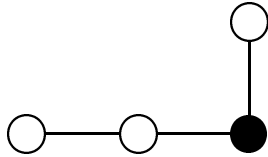
$D = 10$ (IIA) :

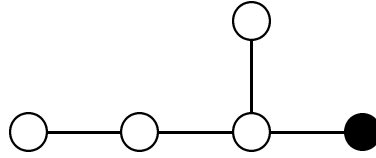
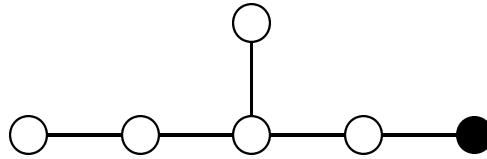
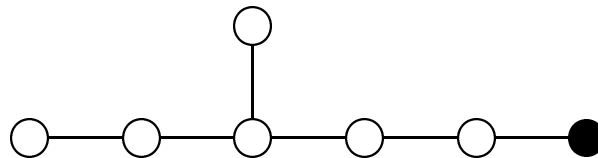
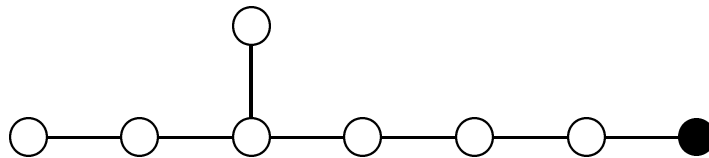
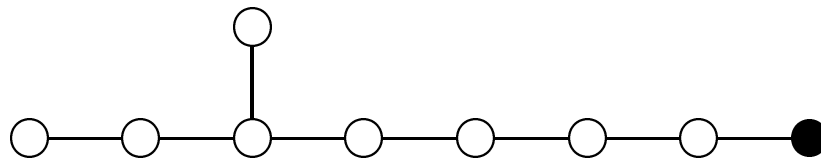


$D = 9$:



$D = 8$:



$D = 7 :$  $D = 6 :$  $D = 5 :$  $D = 4 :$  $D = 3 :$ 

Nous avons déjà vu qu'éclater un point sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou deux points sur \mathbb{P}^2 donne la même surface de del Pezzo, de degré 7. Du côté des théories physiques, cela se traduit par la *T-dualité* : la théorie des cordes IIA compactifiée sur un cercle (c'est-à-dire la théorie M compactifiée sur un 2-tore) et la théorie des cordes IIB compactifiée sur un cercle sont duales, *i.e.* ce sont deux descriptions de la même théorie. En fait les rayons de compactifications des

cercles correspondant aux théorie IIA / IIB varient inversement. Plus précisément, la relation 2.13 indique que le rayon du cercle de compactification de la théorie IIB est inversement proportionnel au volume du 2-tore de compactification de la théorie M. En effet le volume d'un diviseur exceptionnel est relié au rayon de compactification du cercle correspondant :

$$\omega(E_i) \longleftrightarrow \log(2\pi R_i). \quad (2.56)$$

Plus généralement, l'espace des modules d'une de ces compactifications est donnée par la longueur de Planck l_p de la théorie M ainsi que les rayons de compactification (nous rappelons que les compactifications considérées étant orthogonales, il n'y a pas d'autre paramètre). Pour l_p on a la correspondance

$$\omega(H) \longleftrightarrow -3 \log(l_p), \quad (2.57)$$

qui complète l'isomorphisme entre l'espace des modules de la théorie physique et $H^2(X, \mathbb{R})$. En fait, il faut encore quotienter par le groupe de Weyl de la surface de del Pezzo, ou encore de la superalgèbre correspondante. En effet ce groupe agit par difféomorphismes sur la surface de del Pezzo et préserve la classe anticanonique $-K$, et d'autre part c'est le groupe de U-dualité du côté physique, qui échange des théories équivalentes. Au final, l'espace des modules est donc

$$\mathcal{M} = H^2(X, \mathbb{R})/W(E_k), \quad (2.58)$$

puisque pour ces surfaces de del Pezzo lisses les groupes de Weyl sont ceux des algèbres de la série E_k .

2.4 Triangle magique

Une question se pose : est-il possible de trouver des surfaces de del Pezzo qui correspondent aux autres supergravités, et en particulier de reconstruire le triangle de supergravités de [J] du côté des surfaces de del Pezzo ? Nous allons voir ici qu'il est effectivement possible d'associer une telle surface à toutes les théories du triangle, et que la symétrie de celui-ci par rapport à la diagonale peut s'expliquer en termes algébriques.

2.4.1 Triangle côté physique/del Pezzo

Pour commencer, nous allons traiter le triangle « déployé » ou « complexe » de [CJLP2], qui s'obtient en considérant des modèles σ sur des espaces symétriques en dimension 3, qu'on oxyde pour obtenir des théories en dimensions supérieures.

Le triangle magique de supergravités donne pour le secteur bosonique des théories $D = 3$ des modèles σ sur des espaces symétriques G/K . Les groupes G qui interviennent dans ces espaces symétriques n'apparaissent pas tous dans leur forme déployée (encore appelée « maximale non compacte »), sauf pour la supergravité maximale, qui descend de la supergravité à 11 dimensions, ou encore la gravité pure par exemple. Si on remplace des groupes par cette forme déployée, on obtient le triangle donné dans [CJLP1] et complété dans [HJP1].

Pour construire ce triangle de modèles physiques, le plus simple est d'utiliser la correspondance avec les surfaces de del Pezzo. En effet, pour les surfaces de del Pezzo c'est le triangle constitué de celles de ces surfaces qui possèdent précisément une singularité de Du Val de type A_k , pour k allant de 0 (surface lisse) à 8. On place dans chaque case du triangle les surfaces correspondant à un degré et à un k donnés. On obtient alors le triangle de la table 2.4.

Pour calculer toutes les surfaces qu'on peut obtenir, on procède de la manière suivante. Sur une surface de del Pezzo lisse, on regarde les (-2) -diviseurs de genre 0, et en particulier les différentes chaînes A_k inéquivalentes (sous le groupe de Weyl) dans le réseau de Picard. À part pour $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on peut déformer la surface de del Pezzo pour que les (-2) -diviseurs d'une chaîne A_k se transforment en (-2) -courbes qu'on peut alors contracter pour obtenir une surface de del Pezzo singulière. Cela revient à déplacer certains des points éclatés pour passer d'une configuration de points en position générale à des positions presque générales. Dans le cas de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, il faut passer à la surface de Hirzebruch Σ_2 pour avoir une -2 -courbe⁹. Le groupe de Picard de la surface ainsi obtenue est simplement l'orthogonal des (-2) -diviseurs choisis. Notons aussi que dans les nouvelles colonnes ainsi obtenues, on descend toujours en éclatant des points réguliers. De plus ces deux opérations (passage de gauche à droite par déformation de la surface et contraction de (-2) -courbes d'un côté, éclatement de points lisses pour aller de haut en bas de l'autre) commutent. De plus il arrive que deux surfaces de del Pezzo différentes, de même degré et de même singularité mais provenant de la contraction de deux chaînes A_k inéquivalentes, donnent la même surface après éclatement d'un point lisse ; c'est ce qu'on a déjà vu pour \mathbb{P}_1^2 et $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Voyons maintenant précisément comment obtenir toutes les surfaces du triangle. Pour la deuxième colonne, comme nous l'avons déjà vu dans la

⁹On peut passer de l'une à l'autre en effectuant deux transformations élémentaires. Une telle transformation se fait comme suit. Sur une surface où l'on trouve une courbe C de genre zéro et d'auto-intersection 0, on éclate un point sur cette courbe, faisant apparaître une courbe exceptionnelle. La courbe C se transforme alors en une courbe d'auto-intersection -1 , toujours de genre 0. La transformation élémentaire est achevée en contractant cette dernière.

	$n = 8$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 0$
$d = 11$	+								
$d = 10$	\mathbb{R} ou A_1	+							
$d = 9$	$\mathbb{R} \times A_1$	\mathbb{R}							
$d = 8$	$A_1 \times A_2$	$\mathbb{R} \times A_1$ ou A_2	A_1						
$d = 7$	A_4	$\mathbb{R} \times A_2$	$\mathbb{R} \times A_1$	\mathbb{R}	+				
$d = 6$	D_5	$A_1 \times A_3$	$\mathbb{R} \times A_1^2$	\mathbb{R}^2 ou A_1^2	\mathbb{R}				
$d = 5$	E_6	A_5	A_2^2	$\mathbb{R} \times A_1^2$	$\mathbb{R} \times A_1$	A_1			
$d = 4$	E_7	D_6	A_5	$A_1 \times A_3$	$\mathbb{R} \times A_2$	$\mathbb{R} \times A_1$ ou A_2	\mathbb{R}	+	
$d = 3$	E_8	E_7	E_6	D_5	A_4	$A_1 \times A_2$	$\mathbb{R} \times A_1$	\mathbb{R} ou A_1	+

TAB. 2.4 – Le triangle magique « déployé » [HJP1].

section 2.1.9 en contractant la (-2) -section de la surface de Hirzebruch Σ_2 on obtient une surface de del Pezzo de degré 8 et de singularité A_1 . Les autres surfaces de la deuxième colonne (singularité A_1) s'obtiennent en éclatant des points pris en position générale sur cette surface, à l'exception du degré 6, où il existe une deuxième surface de del Pezzo dont le réseau de Picard est A_2 en degré 0 au lieu de $\mathbb{R} \times A_1$ qu'on obtient par éclatement. Cette nouvelle surface se construit en éclatant trois points de \mathbb{P}^2 alignés sur une droite. La transformée de cette droite par l'éclatement des trois points est une (-2) -courbe $H - E_1 - E_2 - E_3$ qu'on contracte pour obtenir la surface voulue.

La colonne suivante est constituée des surfaces de del Pezzo avec singularité A_2 . Pour l'obtenir, on part de \mathbb{P}^2 et on éclate un point p_1 qui donne un diviseur exceptionnel E_1 , sur lequel on prend un point p_2 qu'on éclate en un diviseur exceptionnel E_2 . Dans cette opération, la courbe E_1 se transforme en $E_1 - E_2$ qui est alors une (-2) -courbe. On prend alors un point sur E_2 qui n'est pas le point d'intersection avec $E_1 - E_2$ et on l'éclate en un diviseur exceptionnel E_3 . E_2 se transforme alors en une (-2) -courbe $E_2 - E_3$ d'intersection 1 avec $E_1 - E_2$. On a donc une chaîne A_2 qu'on peut contracter, et qui donne une surface de del Pezzo, comme le critère de Nakai-Moishezon permet de le vérifier facilement. Les autres cases de cette troisième colonne s'obtiennent toutes en éclatant des points lisses en position générale sur cette surface de del Pezzo singulière de degré 6. (Rappelons que la contraction des (-2) -courbes ne change pas le degré, puisque $-K$ est invariant.) Cela traduit le fait que le groupe de Weyl des surfaces lisses échange toutes les chaînes A_2 de (-2) -diviseurs.

En itérant le processus que nous venons de décrire pour A_2 , on peut rendre tous les diviseurs de la forme $E_i - E_{i+1}$ effectifs. La condition de ne pas prendre un point d'éclatement sur une (-2) -courbe assure qu'il n'apparaît pas de courbes d'auto-intersection -3 ou moins, ce qui contredirait la condition de del Pezzo d'après le critère de Nakai-Moishezon. On peut ainsi former des chaînes A_k pour k allant jusqu'à $8 - K^2$ pour une surface de degré K^2 . Voyons au cas par cas les surfaces qui ne peuvent pas s'obtenir ainsi.

Pour la colonne de singularités A_3 , en plus de la singularité qu'on obtient de cette manière et qui donne en degré 0 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour la superalgèbre correspondante (c'est-à-dire qu'il n'y a que 0 comme diviseur de degré 0 et genre positif), on peut aussi obtenir $A_1 \times A_1$. Pour cela, on place sur \mathbb{P}^2 cinq points d'éclatement p_i dans la configuration presque générale suivante. p_1, p_2 et p_3 sont alignés sur une droite et éclatés. $H - E_1 - E_2 - E_3$ est alors une (-2) -courbe. On prend alors p_4 sur E_3 mais pas sur $E_2 - E_3$ ni sur $H - E_1 - E_2 - E_3$. L'éclatement de ce point donne alors une (-2) courbe $E_3 - E_4$, et on recommence avec un point p_5 sur E_4 qui n'est pas à l'intersection avec $E_3 - E_4$. On a alors une chaîne A_3 formée par $H - E_1 - E_2 - E_3$,

$E_3 - E_4$ et $E_4 - E_5$ qu'on contracte pour avoir une surface de del Pezzo de singularité A_3 et de degré 4. En éclatant un point lisse en position générale sur cette surface, on obtient une surface de del Pezzo de degré 3 qu'on avait déjà par la procédure générique du paragraphe précédent. Autrement dit, on peut aussi obtenir la surface que nous venons de décrire en contractant une (-1) -courbe (rationnelle) bien choisie sur cette surface de degré 3. Selon la (-1) -courbe qu'on contracte, on tombe soit sur la surface de type « $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ » soit sur celle de type « $A_1 \times A_1$ ».

De même si on prend la surface de del Pezzo de degré 4 et de singularité A_4 (qui se résout en $E_1 - E_2, \dots, E_4 - E_5$), on trouve dessus un \mathbb{P}^1 d'auto-intersection -1 qu'on peut contracter pour obtenir une surface de del Pezzo de degré 5 et de singularité A_4 . Sa résolution fait apparaître la chaîne de (-2) -courbes $E_1 - E_2, E_2 - E_3, E_3 - E_4$ et $H - E_1 - E_2 - E_3$. Sur la surface de degré 1 et de singularité A_5 on a également deux diviseurs exceptionnels inéquivalents qui donnent deux del Pezzo de degré 2 et de singularité A_5 différentes.

On peut former une surface de del Pezzo de degré 2 et de singularité A_7 à partir de \mathbb{P}^2 éclaté en sept points en positions presque générales. Pour cela il faut placer les 6 premiers points d'éclatement $p_1 \dots p_6$ sur une conique $2H$, de telle sorte que la transformée de la conique, $2H - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6$, soit une (-2) -courbe (de genre 0), et par ailleurs chaque point d'éclatement est pris infiniment près du précédent, c'est-à-dire que p_{i+1} est pris sur le diviseur exceptionnel E_i , pour que les $E_i - E_{i+1}$ soient des (-2) -courbes. On obtient ainsi un A_7 de telles courbes qu'on contracte pour obtenir la surface de del Pezzo voulue, qui donne en degré 1 par éclatement d'un point lisse une surface différente de celle qu'on avait déjà obtenue par la construction « générique ».

Enfin on peut obtenir une surface de degré 1 et de singularité A_8 , en contractant les (-2) -courbes obtenues par l'éclatement de \mathbb{P}^2 en huit points dans la configuration presque générale suivante. Les huit points sont infiniment proches pour que les $E_i - E_{i+1}$ soient des courbes effectives, et de plus il doit exister une cubique $3H$ qui passe par tous les points dont deux fois par le premier (mais pas plus), de telle sorte que $3H - 2E_1 - E_2 - \dots - E_8$ viennent compléter le A_7 pour former un A_8 de -2 -courbes, comme on peut le vérifier en calculant les intersections. On a ainsi complété le triangle (table 2.4); on peut en effet vérifier par une étude systématique que toutes les surfaces de del Pezzo Gorenstein avec une unique singularité A_k peuvent s'obtenir d'une des manières exposées dans cette section.

Il faut ajouter que pour les surfaces des colonnes $n = 3$ et $n = 2$, on ne peut pas trouver de base de racines simples pour le réseau des racines. Plus précisément, on doit prendre une racine « simple » de plus que la dimension

du réseau, ce qui signifie que ces racines « simples » ne sont pas linéairement indépendantes. Dans la construction de l'algèbre à partir de la matrice de Cartan, il convient donc de quotienter notamment par l'élément redondant du tore maximal. Il faudrait aussi quotienter par d'autres relations entre les générateurs associées aux racines, mais cela ne concerne que des racines de degré supérieur à celui de $-K$, qui disparaissent lors de la troncation.

2.4.2 Symétrie du triangle complexe

En présentant le triangle comme nous l'avons fait, on peut faire une observation essentielle : il est symétrique par rapport à la diagonale, dans le sens où pour toute surface de degré p et de singularité A_k il existe une surface de degré $k + 1$ et de singularité A_{p-1} qui a la même partie de degré 0 du groupe de Picard. En fait, cela se généralise comme nous allons le voir. Étant donné une surface de del Pezzo de degré 1, on peut construire dessus un tel triangle possédant cette symétrie, que nous allons démontrer dans un cadre plus général.

Du point de vue des superalgèbres, cela signifie que si on a une superalgèbre correspondant à une del Pezzo de degré 1, ou encore à une théorie physique en dimension 3 (qui est un modèle σ), le centralisateur de $k \mathfrak{sl}(1|1)$ qui commutent entre eux et celui d'un $\mathfrak{sl}(k)$ bien choisi ont la même partie de degré 0. Notons que ces superalgèbres sont caractérisées par le fait que leur diagramme de Dynkin est celui d'une algèbre affine où la racine « affine » (de coefficient 1 dans la relation de dépendance linéaire de la matrice de Cartan) est remplacée par une racine fermionique de norme 0. Nous allons faire la démonstration du côté des surfaces de del Pezzo, mais la démonstration se transpose dans le langage des superalgèbres de Lie.

Soit donc X une surface de del Pezzo de degré 1. Nous allons voir que dans la partie du groupe de Picard de X orthogonale à K (degré 0), l'orthogonal de k diviseurs exceptionnels est aussi l'orthogonal d'une chaîne A_k de (-2) -diviseurs (de genre 0). Soient en effet $E_1 \dots E_k$ des courbes exceptionnelles, de carré -1 et de genre 0 (et donc de degré 1) sur une telle surface de del Pezzo, tous orthogonaux deux à deux. Alors en considérant les diviseurs $E_1 - E_2, \dots, E_{k-1} - E_k$ on a une chaîne A_{k-1} de (-2) -diviseurs de genre zéro, comme on le vérifie facilement. En se rappelant que la surface est de degré 1, c'est-à-dire que $K^2 = 1$, et que $-K.E_i = 1$, on voit que $-K - E_1$ est aussi de norme -2 et de genre zéro, d'intersection 1 avec $E_1 - E_2$ et 0 avec les autres diviseurs de la chaîne. Cela la complète donc en une chaîne A_k . Réciproquement, si on a une telle chaîne A_k on peut retrouver les k (-1) -diviseurs de genre zéro E_i . Si on se restreint à l'orthogonal de $-K$, c'est-à-dire aux diviseurs de degré zéro, on constate que l'orthogonal des E_i est le même

que celui des $E_i - E_{i+1}$ et $-K - E_1$.

Pour construire les surfaces de del Pezzo singulières, il faut encore montrer que la surface dont nous sommes partis peut toujours être déformée de façon à ce que les (-2) -diviseurs de la chaîne A_k deviennent des courbes, ou plus précisément qu'il y ait une courbe dans la classe de diviseurs considérée. Nous n'en avons pas de démonstration générale pour des surfaces de del Pezzo très singulières, mais nous pouvons le démontrer pour le cas de surfaces ayant au plus des singularités de Du Val. En effet pour toute telle surface, de degré 1, en résolvant toutes les singularités, on se retrouve avec \mathbb{P}^2 éclaté en huit points en positions presque générales, surface sur laquelle on peut rendre tout (-2) -diviseur de genre 0 effectif et irréductible, comme nous l'avons vu sur quelques exemples ci-dessus. Si on considère plusieurs de ces diviseurs simultanément, on a la limitation qu'ils doivent appartenir à un même demi-espace de l'hyperplan orthogonal à $-K$. Autrement dit, ces diviseurs doivent être des racines positives pour un choix de racines simples [Dem]. Cela ne pose pas de problème car pour toutes les singularités donnant des chaînes ADE orthogonales entre elles, elles-mêmes orthogonales aux diviseurs que nous voulons rendre effectifs, on peut toujours trouver un demi-espace qui contient le tout. Étant donné un (-2) -diviseur de genre zéro dans ce demi-espace, il est soit de la forme $E_i - E_j$ soit $nH - k_1E_1 - \dots - k_8E_8$. Dans le premier cas, il suffit de prendre p_j infiniment proche de p_i , c'est-à-dire sur E_i , pour que le diviseur soit effectif. Dans le deuxième, il faut construire une courbe définie par un polynôme de degré n en trois variables homogènes, sur \mathbb{P}^2 , et qui passe k_i fois par le point p_i . Pour cela, il suffit d'avoir une courbe de ce degré ayant les points multiples requis, ce qui est toujours possible avec la contrainte d'intersection 0 avec $-K : 3n = k_1 + k_2 + \dots + k_8$.

Nous avons montré jusqu'ici que partant d'une surface de del Pezzo de degré 1 l'on peut construire une ligne vers la droite par déformation de la surface et contraction de (-2) -courbes et une colonne vers le haut par contraction de (-1) -courbes telles que les parties de degré zéro du groupe de Picard soient les mêmes par symétrie par rapport à la diagonale. (La démonstration n'est complète que pour des singularités rationnelles, mais nous verrons plus loin un cas de surface non normale (singularité le long d'une courbe) où cela marche aussi.) Pour compléter le triangle, il suffit d'utiliser plusieurs fois ce raisonnement. Partant d'une surface de del Pezzo de degré p et possédant une singularité A_k , on peut, comme nous venons de le voir, construire une surface de del Pezzo de degré 1 avec une singularité $A_k \oplus A_{p-1}$ qui possède le même système de racines en degré 0. En inversant le rôle de A_k et A_{p-1} , on peut alors également construire une surface de del Pezzo de degré $k + 1$ avec une singularité A_{p-a} qui possède également les mêmes racines de degré 0. Partant d'une surface de del Pezzo de degré p ayant une singularité A_k , nous avons

ainsi obtenu une surface de del Pezzo de degré $k + 1$ avec une singularité A_{p-1} qui possède les mêmes racines en degré 0, ce qui correspond à la symétrie du « triangle » par rapport à la diagonale. Notons que les autres singularités qui peuvent être présentes sur la surfaces sont laissées invariantes.

2.4.3 Construction du triangle réel

Physiquement, le triangle le plus intéressant est le triangle de supergravités de [J] (table 1.1). Il correspond à des formes réelles différentes des superalgèbres considérées, et des surfaces de del Pezzo.

Une algèbre de Lie réelle est une \mathbb{R} -algèbre de Lie. On peut la complexifier : cela revient à prendre des coefficients complexes devant les générateurs à la place de coefficients réels. On note alors que plusieurs algèbres de Lie réelles peuvent donner la même complexification. Ainsi $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}(2)$ se complexifient toutes les deux en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Réciproquement, on parle des différentes *formes réelles* associées à une algèbre de Lie complexe. Ainsi $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}(2)$ sont les deux formes réelles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. (Il n'y en a pas d'autre.) $\mathfrak{su}(2)$ est la *forme compacte* et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ la *forme déployée* ou *maximalement non-compacte*. Étant donnée une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de dimension n , on peut aussi la voir comme une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$, munie d'une structure complexe $J : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ telle que $J^2 = -1$. Une forme réelle \mathfrak{g} de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de dimension n . On peut la caractériser dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par une involution antiholomorphe σ qui laisse \mathfrak{g} invariant et donne un signe moins à $J\mathfrak{g}$. Si on prend comme forme réelle la forme compacte, on lui associe ainsi une anti-involution τ qui caractérise les directions compactes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ comme les directions invariantes par τ . Un générateur e de l'algèbre est compact si sa norme pour la forme de Killing $B(e, e) = \text{Tr}(\text{ad}_e \circ \text{ad}_e)$ est négative. On peut donc définir la forme réelle compacte comme celle engendrée par ces générateurs. Étant donnée une algèbre complexe semi-simple, on peut toujours trouver une base telle que τ induise l'involution -1 sur l'espace des racines — ce qui signifie que tous les générateurs du tore \mathfrak{h} choisi sont non-compacts, mais que $i\mathfrak{h}$ est compact — et telle que la donnée de σ (ou plus précisément σ^*) sur l'espace des racines détermine la forme réelle de manière unique. Pour la représenter, on utilise un *diagramme de Satake*. C'est un diagramme de Dynkin où l'on colorie en noir les racines anti-invariantes ($\sigma^*(\alpha) = -\alpha$) et on relie par une flèche deux racines α et β telles que $\alpha + \sigma^*(\alpha) = \beta + \sigma^*(\beta)$. Une racine noire est alors compacte : en effet σ étant une anti-involution, $\sigma^*(\alpha) = -\alpha$ implique $\sigma^*(i\alpha) = i\alpha$. C'est donc $i\alpha$ la racine de l'algèbre réelle. Et comme on a pris une base telle que $\tau^*(\alpha) = -\alpha$, on a de même $\tau^*(i\alpha) = i\alpha$, c'est-à-dire que la racine réelle $i\alpha$ est compacte. En particulier elle correspond à une sous-algèbre $\mathfrak{su}(2)$ et non

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Pour les superalgèbres la question est plus délicate, car si la notion de superalgèbre réelle est bien définie, et l'anti-involution σ qui caractérise une forme réelle d'une superalgèbre complexe également, la notion de racine compacte n'est pas évidente. Mais dans le cas de nos super-algèbres, les conditions que les constantes de structures soient réelles et que la partie de degré zéro soit dans la situation décrite au paragraphe précédent permettent qu'on caractérise leurs formes réelles par des diagrammes de Satake généralisés. On a comme ci-dessus des racines anti-invariantes coloriées en noir, des racines blanches pour les autres et des flèches entre des racines de même racine réduite. Pour pouvoir définir une anti-involution σ sur toute la super-algèbre à partir de l'involution du réseau des racines donnée par le diagramme, on a simplement la limitation qu'une racine fermionique ne pourra pas être prise anti-invariante. En revanche deux racines fermioniques peuvent être échangées par une flèche.

Pour définir σ à partir du diagramme, on procède ainsi. Pour une racine simple anti-invariante α_i (forcément bosonique), on prend

$$\begin{aligned}\sigma(e_{\alpha_i}) &= f_{\alpha_i} \\ \sigma(f_{\alpha_i}) &= e_{\alpha_i},\end{aligned}\tag{2.59}$$

ce qui donne bien

$$\sigma(h_{\alpha_i}) = -h_{\alpha_i}.\tag{2.60}$$

Toute autre racine simple α_i est envoyée sur une racine positive α_j . On détermine α_j en utilisant la condition que la matrice de Cartan doit être préservée par l'involution. (En particulier que les directions du réseau des racines invariantes par σ sont orthogonales aux directions anti-invariantes.) On définit alors σ pour ces racines par

$$\begin{aligned}\sigma(e_{\alpha_i}) &= e_{\alpha_j} \\ \sigma(f_{\alpha_i}) &= f_{\alpha_j},\end{aligned}\tag{2.61}$$

où on retrouve comme demandé

$$\sigma(h_{\alpha_i}) = h_{\alpha_j}.\tag{2.62}$$

La structure réelle étant donnée, on peut définir le réseau des racines *restreintes* comme la projection sur la partie σ -invariante. Ces racines ont pour multiplicité le nombre de racines complexes dont elles sont la projection.

Pour une surface algébrique complexe, une forme réelle est donnée par une involution antiholomorphe σ_X . Cette anti-involution induit une involution du groupe de Picard $Pic(X)$, que nous noterons aussi σ_X au lieu de σ^*

par abus de notation. Pour une surface de del Pezzo lisse, la forme réelle est entièrement déterminée par une involution du groupe de Picard qui laisse invariante la classe anticanonique $-K$. Cette involution est déterminée par le sous-espace anti-invariant, et Wall [Wa] montre qu'il est entièrement caractérisé par un sous-diagramme du diagramme de Dynkin (de K^\perp) de la surface de del Pezzo, dont les vertex correspondent aux diviseurs anti-invariants, et qui est constitué d'une union disjointe de A_1 , D_4 , D_6 , E_7 et E_8 .

Pour une surface avec une singularité de Du Val, cela vaut pour la résolution minimale, mais on a la contrainte supplémentaire que l'involution ne peut pas valoir n'importe quoi sur les (-2) -courbes contractées. Pour une singularité A_k , les formes réelles possibles sont ainsi données dans la table 2.5.

$SL(n+1)$	
$SU(k+1, k-1) \quad k \geq 1$	
$SU(k, k) \quad k \geq 1$	
$SU(k, k-1) \quad k \geq 1$	

TAB. 2.5 – Formes réelles d'une singularité A_n

On voit donc que dans les deux cas, superalgèbre et surface de del Pezzo, une forme réelle est donnée par une involution du réseau des racines/de Picard. Cependant il y a des conditions supplémentaires : toute involution de ce réseau ne donne pas une forme réelle de l'algèbre, il y a des conditions supplémentaires ($\alpha - \sigma(\alpha)$ ne doit pas être une racine) qui restreignent les possibilités [A]. Pour les surfaces de del Pezzo singulières, il n'est pas garanti *a priori* qu'une involution donnée de son groupe de Picard (qui préserve $-K$) puisse s'obtenir en formant une singularité réelle de type A_n sur une des formes réelles d'une surface lisse.

En fait pour tous les cas du triangle de supergravités c'est possible, et il y a même plusieurs solutions possibles pour la plupart des cas. Pour faire le calcul, la méthode est la suivante. Quand on résout (de manière minimale) une surface singulière X en une surface lisse Y , le réseau A engendré par la chaîne de (-2) -courbes provenant du point singulier et $Pic(X)$ sont deux

sous-espaces orthogonaux et complémentaires de $Pic(Y)$. En tant qu'espaces vectoriel, on a donc

$$Pic(Y) \otimes \mathbb{R} = (Pic(X) \otimes \mathbb{R}) \oplus (A \otimes \mathbb{R}). \quad (2.63)$$

On teste alors chaque forme réelle pour la singularité. Connaissant l'involution sur $Pic(X)$ et sur la singularité, donc sur A , on en déduit l'involution sur $Pic(Y) \otimes \mathbb{R}$. Si celle-ci préserve bien le réseau $Pic(Y)$, alors on peut obtenir une surface X ayant l'involution voulue et la singularité choisie. Le tableau 2.6 présente les couples de structures réelles (sur la surface résolue et sur la singularité) qui donnent des surfaces de del Pezzo correspondant aux supergravités du triangle.

La donnée d'une telle surface de del Pezzo réelle permet de retrouver le contenu en champs bosoniques de la théorie physique associée. La superalgèbre peut toujours se décomposer selon la décomposition d'Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \quad (2.64)$$

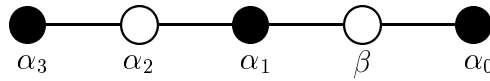
où \mathfrak{k} est la partie compacte de l'algèbre, \mathfrak{a} la partie non-compacte du tore maximal \mathfrak{h} et \mathfrak{n} la sous-algèbre nilpotente constituée des générateurs des racines restreintes positives Σ^+ . On écrit alors le potentiel \mathcal{V} comme exponentielle d'éléments de la partie orthogonale à $-K$ de \mathfrak{a}^* (notons la $(\mathfrak{a}^*)^\perp$) et des éléments de \mathfrak{n} de degrés compris entre 0 et K^2 :

$$\mathcal{V} = \exp \left(\sum_{\bar{\lambda} \in (\mathfrak{a}^*)^\perp} \phi_{\bar{\lambda}} h_{\bar{\lambda}} + \sum_{\substack{\bar{\lambda} \in \Sigma^+ \\ d(\bar{\lambda}) \leq K^2}} A_{\bar{\lambda}} e_{\bar{\lambda}} \right), \quad (2.65)$$

et $\mathcal{G} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}$ se décompose sur les mêmes éléments.

Notons que les générateurs de l'algèbre qu'on a perdus par rapport au cas de l'algèbre déployée correspondent à des directions maintenant compactes, puisque la partie compacte de la superalgèbre est jaugée.

La multiplicité de chaque racine restreinte est obtenue en additionnant la multiplicité des racines dont elle est la projection, et on obtient ainsi le contenu en champs de la théorie. Ainsi pour la supergravité $N = 6$ $D = 6$, le diagramme de Satake de la superalgèbre est



	$N = 7$	$N = 6$	$N = 5$	$N = 4$	$N = 3$	$N = 2$	$N = 1$	$N = 0$
$d = 11$	+							
$d = 10$	$(1, 0)$							
$d = 9$	$(1, 0)$							
$d = 8$	$(1, 0)$							
$d = 7$	$(1, 0)$							
$d = 6$	$(1, 0)$	$(A_1^3, SU(1, 1))$ $(D_4, SU(1, 1))$						
$d = 5$	$(1, 0)$	$(A_1^3, SU(1, 1))$ $(D_4, SU(2))$						
$d = 4$	$(1, 0)$	$(A_1^3, SU(1, 1))$ $(D_4, SU(2))$	$(A_1 \times D_4, SU(2, 1))$	$(A_1 \times D_4, SU(3, 1))$ $(D_4, SU(2, 2))$	$(A_1 \times D_4, SU(3, 2))$	$(A_1 \times D_4, SU(4, 2))$ $(A_1^4, SU(3, 3))$	$(A_1^4, SU(4, 3))$	$(1, SL(8))$ $(A_1^3, SU(4, 4))$ $(D_4, SU(5, 3))$
$d = 3$	$(1, 0)$	$(A_1^3, SU(1, 1))$ $(D_4, SU(2))$	$(A_1 \times D_4, SU(2, 1))$	$(A_1 \times D_4, SU(3, 1))$ $(D_4, SU(2, 2))$	$(A_1 \times D_4, SU(3, 2))$	$(A_1 \times D_4, SU(4, 2))$ $(A_1^4, SU(3, 3))$	$(A_1^4, SU(4, 3))$	$(1, SL(8))$ $(A_1^3, SU(4, 4))$ $(D_4, SU(5, 3))$

TAB. 2.6 – Triangles de surfaces de del Pezzo réelles : Structure réelle de la résolution (donnée par le sous-diagramme anti-invariant) et forme réelle de la singularité.

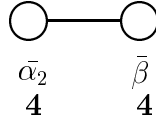
où les racines α_i sont bosoniques et β est fermionique.

Les racines noires sont anti-invariantes. L'involution σ est définie par

$$\begin{aligned}
 \sigma(\alpha_0) &= -\alpha_0 \\
 \sigma(\alpha_1) &= -\alpha_1 \\
 \sigma(\alpha_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
 \sigma(\alpha_3) &= -\alpha_3 \\
 \sigma(\beta) &= \beta + \alpha_0 + \alpha_1,
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

dont on vérifie bien que c'est une involution qui préserve la matrice de Cartan.

La superalgèbre restreinte est donnée par le diagramme



et la multiplicité des racines après troncation est donnée par le tableau suivant.

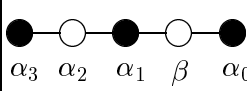
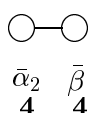
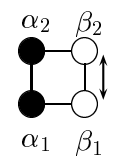
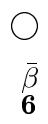
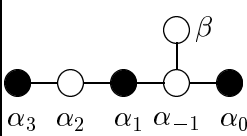
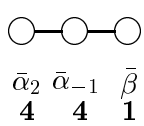
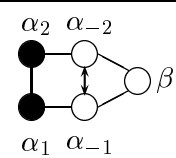
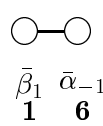
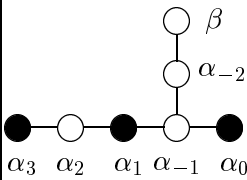
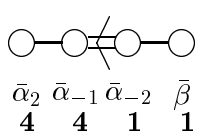
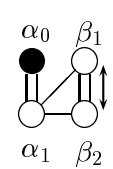
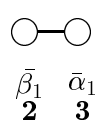
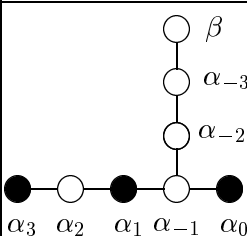
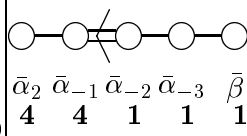
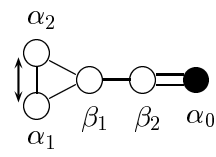
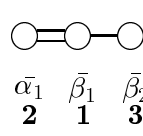
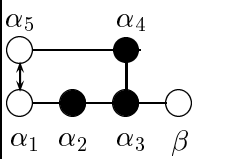
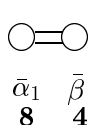
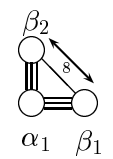
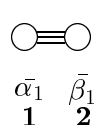
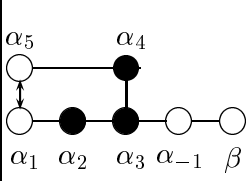
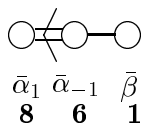
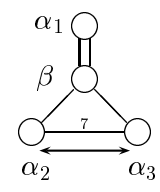
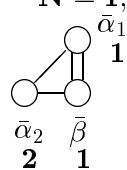
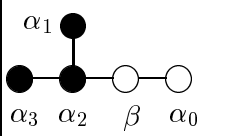
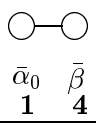
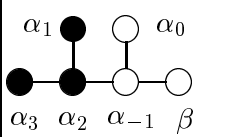
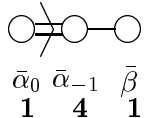

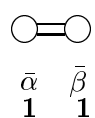
Degré	Racine	Multiplicité	Potentiel
0	0		ϕ
0	$\bar{\alpha}_2$	4	$A_{(0)}$
1	$\bar{\beta}$	4	$A_{(1)}$
1	$\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}$	4	$\mathcal{A}_{(1)}$
2	$2\bar{\beta}$	1	$A_{(2)}$
2	$\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\beta}$	4	$\mathcal{A}_{(2)}$
2	$2(\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta})$	1	$\tilde{A}_{(2)}$
3	$\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\beta}$	4	$\tilde{\mathcal{A}}_{(3)}$
3	$2\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\beta}$	4	$\tilde{A}_{(3)}$
4	$\bar{\alpha}_2 + 4\bar{\beta}$	4	$A_{(4)}$
4	$2\bar{\alpha}_2 + 4\bar{\beta}$	1	$-K$

On retrouve bien le spectre de la supergravité $D = 6, \mathcal{N} = 6 : 4$ axions, huit 1-formes, trois 2-formes et les champs duaux correspondants.

La table 2.7 donne les diagrammes de Satake et les superalgèbres réduites pour les autres cases du triangle.

2.4.4 Carré magique

On trouve dans la littérature un autre ensemble de supergravités, le carré magique de Gunaydin-Sierra-Townsend [GST], dont les quotients G/K de

Δ	Σ	Δ	Σ
	$N = 6, d = 6$ 		$N = 3, d = 4$ 
	$N = 6, d = 5$ 		$N = 3, d = 3$ 
	$N = 6, d = 4$ 		$N = 2, d = 4$ 
	$N = 6, d = 3$ 		$N = 2, d = 3$ 
	$N = 5, d = 4$ 		$N = 1, d = 4$ 
	$N = 5, d = 3$ 		$N = 1, d = 3$ 
	$N = 4, d = 4$ 		
	$N = 4, d = 3$ 		$N = 0, d = 3$ 

TAB. 2.7 – Diagrammes de Satake des superalgèbres du triangle de supergravités et superalgèbres réduites, avec les multiplicités des racines simples. (Les racines bosoniques sont notées α et les racines fermioniques β .)

$d = 6$	$\frac{SO(9,1)}{SO(9)}$ ₃₇ ⁴⁵	$\frac{SO(5,1) \times SO(3)}{SO(5) \times SO(3)}$ ₁₃ ¹⁸	$\frac{SL(2, \mathbb{C}) \times U(1)}{SU(2) \times U(1)}$ ₄ ⁸
$d = 5$	$\frac{E_6}{F_4}$ ₅₂ ⁷⁸	$\frac{SU^*(6)}{Usp(6)}$ ₂₁ ³⁵	$\frac{SL(3, \mathbb{C})}{SU(3)}$ ₈ ¹⁷
$d = 4$	$\frac{E_7}{E_6 \times U(1)}$ ₆₉ ¹³³	$\frac{SO^*(12)}{U(6)}$ ₃₆ ⁶⁶	$\frac{SU(3,3)}{S(U(3) \times U(3))}$ ₁₇ ³⁵
$d = 3$	$\frac{E_8}{E_7 \times SU(2)}$ ₁₃₆ ²⁴⁸	$\frac{E_7}{SO(12) \times SU(2)}$ ₇₉ ¹³³	$\frac{E_6}{SU(6) \times SU(2)}$ ₃₈ ⁷⁸

TAB. 2.8 – Carré magique (à l'exception de la quatrième colonne, absente).

U-dualité sont présentés dans la table 2.8 (sans la quatrième colonne qui fait intervenir des groupes non simplement lacés, que le formalisme présenté ici ne permet pas de traiter).

En fait ces théories correspondent à des formes réelles différentes des trois premières colonnes du triangle magique. On les obtient en prenant les surfaces de del Pezzo réelles données par les involutions de la table 2.9, où la première entrée est le sous-diagramme anti-invariant du diagramme de Dynkin de la surface résolue et la seconde est le type de singularité réelle à contracter dessus.

$d = 5$	$(D_4, 0)$	$(A_1^3, SL(2))$ $(D_4, SU(2))$	$(A_1^3, SU(2, 1))$
$d = 4$	$(D_4, 0)$	$(A_1^3, SL(2))$ $(D_4, SU(2))$	$(A_1^3, SU(2, 1))$
$d = 3$	$(D_4, 0)$	$(A_1^3, SL(2))$ $(D_4, SU(2))$	$(A_1^3, SU(2, 1))$

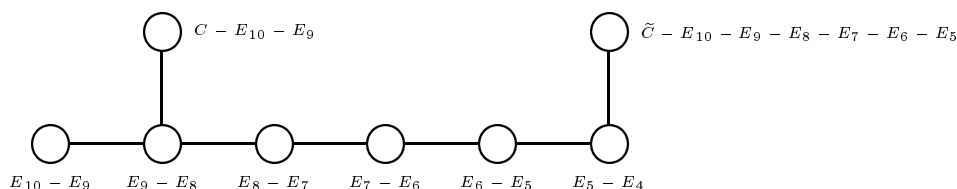
TAB. 2.9 – « Carré » magique de surfaces de del Pezzo.

2.5 Théories de type I et hétérotiques

Nous nous proposons dans cette partie d'étendre ce qui a été fait dans la section précédente aux théories des cordes de type I ou hétérotique. Il s'avère, comme nous allons le voir, que c'est possible si on oublie le secteur de jauge de ces théories.

2.5.1 U-dualité des théories tronquées

En tronquant le secteur de jauge, les groupes de U-dualité de la théorie de type I¹⁰ sont, successivement, 1,1, $A_1 \times A_1$, A_3 , D_4 , D_5 , $D_6 \times A_1$ et D_8 , en allant de la dimension 10 à la dimension 3. Du point de vue du Diagramme de Dynkin, cela se traduit par l'apparition successive des racines du diagramme suivant, où les racines impliquant E_i n'apparaissent qu'en dimension strictement inférieure à i , c'est-à-dire lors de la compactification de la i^{e} dimension. La notation des racines est choisie pour faire apparaître cela, et faire le lien avec d'éventuelles surfaces de del Pezzo.



Les états BPS impliqués sont en dimension 10 la D1 et la D5 pour la théorie de type I, qui donnent pour les théories hétérotiques les F1 et NS5. C et \tilde{C} sont les diviseurs associés à ces états, s'il existe une surface correspondant à cette théorie, ou tout au moins les racines d'une éventuelle superalgèbre. Les E_i sont alors les diviseurs exceptionnels correspondant aux compactifications, ou les racines fermioniques de degré 1 des superalgèbres correspondantes.

Les états BPS qu'on trouve en dimension inférieure à 10 sont présentés dans le tableau 2.10, avec les racines correspondantes et les potentiels associés.

2.5.2 Contraintes sur la surface

Peut-on trouver une surface qui présente les caractéristiques requises ? Rappelons les contraintes. Nous cherchons une surface qui corresponde à la théorie de type I en dimension 10, privée de son secteur de jauge, et telle que l'éclatement de points lisses donne les surfaces correspondant à sa compactification sur des tores orthogonaux. Pour chacune d'entre elles, on souhaite que les diviseurs de genre positif et de degré compris entre 0 et D soient en correspondance avec les états BPS de la théorie physique, de degré correspondant. Plus précisément il faut que la superalgèbre construite sur ces

¹⁰Les théories hétérotiques y étant reliées par S-dualité (Hétérotique $SO(32)$) (puis T-dualité pour la théorie hétérotique $E_8 \times E_8$).

Degré	Racine	État BPS	Potentiel
0	0	Dilatons	$\vec{\phi}$
0	$C - E_i - E_j$	D1 doublement enroulée	$A_{(0)ij}$
0	$E_i - E_j$	Modes Kaluza-Klein	$A_{(0)j}^i$
1	E_i	États d'impulsion	$A_{(1)}^i$
1	$C - E_i$	D1 simplement enroulée	$A_{(1)i}$
2	C	D1	$A_{(2)}$
$6 - k$	$\tilde{C} - \sum_p E_p$	D5 enroulée sur T^k	$\tilde{A}_{(6-k)}$
$7 - k$	$\tilde{C} - \sum_{p \neq i} E_p$	D5 enroulée sur T^{k-1}	$\tilde{A}_{(7-k)}^i$
$7 - k$	$-K - E_i$	Dual des états d'impulsion	$\tilde{A}_{(7-k)i}$
$8 - k$	$-K - E_i + E_j$	Dual magnétique des modes Kaluza-Klein	$\tilde{A}_{(8-k)i}^j$
$8 - k$	$\tilde{C} - \sum_{p \neq ij} E_p$	D5 enroulée sur T^{k-2}	$\tilde{A}_{(8-k)}^{ij}$
$8 - k$	$-K$	Dual des dilatons	$\vec{\psi}$

TAB. 2.10 – États BPS de la théorie de type I compactifiée sur T^k , avec les racines et les potentiels associés.

diviseurs, pris comme racines, redonne le contenu en champs et les équations du mouvement du secteur bosonique de la supergravité (gravitation exclue). Alors le groupe de U-dualité et sa superextension seront automatiquement réalisés.

Supposons que nous avons une surface algébrique qui satisfasse ces conditions. Elle possède un diviseur ample H qui permet de définir le plongement et le degré des diviseurs. En dimension 10 la théorie de type I a comme objets BPS les D1 et D5-branes, duales l'une de l'autre par dualité électrique/magnétique. Il doit leur correspondre deux diviseurs C et \tilde{C} . Pour que la dualité soit préservée, on doit avoir

$$C + \tilde{C} = -K. \quad (2.67)$$

D'autre part, comme ce sont des objets de dimension 3 et 6 leurs degrés respectifs sont

$$H.C = 2H.\tilde{C} = 6. \quad (2.68)$$

La D1 enroulée sur un 2-tore doit donner un instanton. Autrement dit, $C - E_{10} - E_9$ doit apparaître comme racine de degré zéro en dimension 8, et doit donc être de norme -2 (comme diviseur). Les diviseurs exceptionnels E_i étant orthogonaux entre eux et avec C , on en déduit que C est de norme 0. De même comme la D5 peut s'enrouler sur un 6-tore pour donner un instanton en dimension 4, où apparaît ainsi une nouvelle racine dans le groupe de U-dualité, on doit avoir $\tilde{C}^2 = 4$. La formule d'adjonction nous permet également

de déduire

$$\begin{aligned} -K.C &= 2 \\ -K.\tilde{C} &= 6. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Du degré des D1 et D5 on sait par ailleurs que le degré des diviseurs correspondants doit être

$$\begin{aligned} H.C &= 2 \\ H.\tilde{C} &= 6. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Le réseau de Picard devant être de dimension 2 pour correspondre à la dimension de l'espace des modules de la théorie, on a nécessairement

$$H = -K, \tag{2.71}$$

c'est-à-dire que notre surface doit être une surface de del Pezzo, avec les contraintes que nous avons imposées.

Quand on éclate un point, cette propriété reste vraie : en effet une surface de del Pezzo de degré d donne des surfaces de del Pezzo tant qu'on éclate au plus $d - 1$ points, en positions générales, comme on le voit par le critère de Nakai-Moishezon en considérant les courbes effectives.

2.5.3 Construction de la surface non-normale

Une surface de del Pezzo ayant les propriétés requises existe-t-elle ? La classification des surfaces de del Pezzo normales et Gorenstein de rang de Picard égal à deux existe [DV, Dem, HW], et pour $K^2 = D - 2 = 8$ il y en a précisément trois, dont aucune ne correspond à ce que nous voulons. Comme nous tenons aux propriétés de Gorenstein et de rang 2 pour le groupe de Picard, il reste à regarder les surfaces de del Pezzo non normales. Elles ont heureusement été classifiées par Reid [R2], et on trouve ainsi deux surfaces répondant aux critères. Nous allons décrire l'une des deux, l'autre en étant un cas dégénéré.

On définit [R1] la surface rationnelle $Y = \mathbb{F}_{a,b}$ (pour a et b entiers positifs) comme $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ quotienté par les deux relations d'équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} (t_1, t_2, x_1, x_2) &\sim (t_1, t_2, \mu x_1, \mu x_2) \\ (t_1, t_2, x_1, x_2) &\sim (\lambda t_1, \lambda t_2, \lambda^{-a-b} x_1, \lambda^{-b} x_2). \end{aligned} \tag{2.72}$$

La première relation en fait un \mathbb{P}^1 -fibré, et la base est également isomorphe à \mathbb{P}^1 . Il se plonge dans \mathbb{P}^{a+2b+1} par

$$(t_1, t_2, x_1, x_2) \mapsto (t_1^{a+b} x_1, t_1^{a+b-1} t_2 x_1, \dots, t_2^{a+b} x_1, t_1^b x_2, t_1^{b-1} x_2, \dots, t_2^b x_2). \tag{2.73}$$

Notons que pour $a = 0$ et $b = 1$, on retrouve simplement le plongement de Segré de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans \mathbb{P}^3 .

Le groupe de Picard d'une telle surface est engendré par deux classes de diviseurs : la fibre A qui est d'auto-intersection 0 et une $(-a)$ -courbe B , définie par $x_1 = 0$. B étant une section du fibré, son intersection avec la fibre A est 1.

Nous prenons maintenant $a = 4$ et $b = 2$, c'est-à-dire la surface $\mathbb{F}_{4;2}$ plongée dans \mathbb{P}^9 . La section B est une conique qui définit un plan dans \mathbb{P}^9 , caractérisé par l'annulation de toutes les coordonnées sauf les trois dernières (pour les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^9). On prend alors un point m de ce plan qui n'est pas sur B , disons $(0,0,0,0,0,0,0,1,0)$. En projetant \mathbb{P}^9 sur \mathbb{P}^8 à partir de ce point, $Y = \mathbb{F}_{4;2}$ donne une surface X , qui est isomorphe à Y si ce n'est que la courbe B , située dans un plan contenant m , est envoyée sur une droite double. Si on appelle toujours A et B les images de ces courbes de Y dans X , le groupe de Picard est maintenant engendré par B et $2A$. En effet A n'est plus un diviseur de Cartier. Un diviseur est Cartier s'il peut partout s'écrire localement comme l'intersection de la surface avec un hyperplan de \mathbb{P}^n . Comme la section B est maintenant une ligne double, il y a deux fibres A qui la coupent en chaque point, ce qui fait qu'il est impossible d'écrire A comme l'intersection de X avec un hyperplan au voisinage de ce lieu double : on a forcément deux fibres A dans l'intersection, et c'est $2A$ qui est un diviseur de Cartier.

Pour définir l'intersection de deux diviseurs de Cartier sur une surface non-normale, on passe par sa normalisation, qui est ici la surface Y . Ainsi B et $2A$ ont pour intersection 2. Enfin on trouve dans [R2] que X est une surface de del Pezzo de classe anticanonique

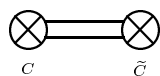
$$-K_X = 6A + B, \quad (2.74)$$

de norme 8.

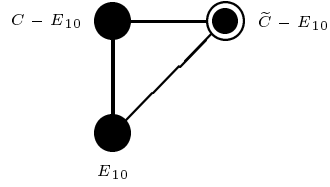
On trouve que les diviseurs de genre zéro de degrés entre 0 et 8 sont $C = 2A$ et $\tilde{C} = B + 4A$, de degrés 2 et 6. On vérifie de plus que cette surface possède toutes les caractéristiques requises dans la section précédente.

Cela permet d'obtenir les diagrammes de Dynkin des superalgèbres de Borcherds des théories physiques correspondantes, que nous donnons maintenant.

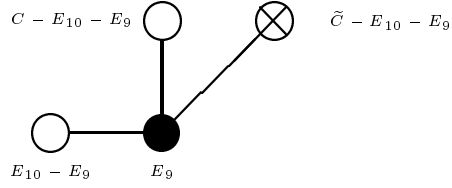
$D = 10$:



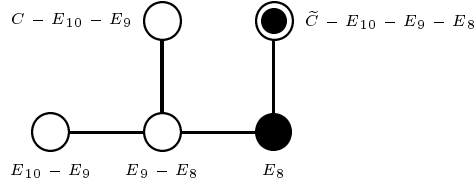
$D = 9 :$



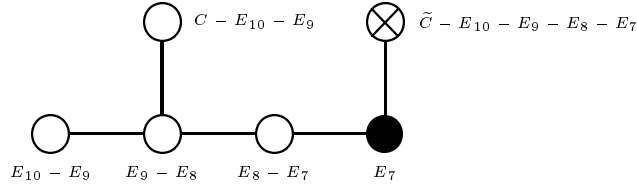
$D = 8 :$



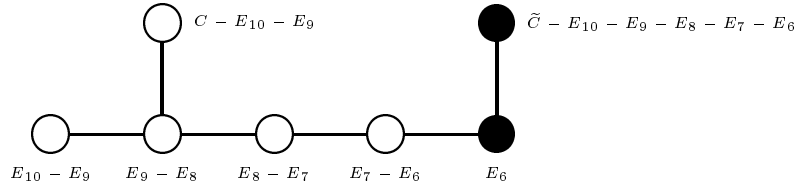
$D = 7 :$



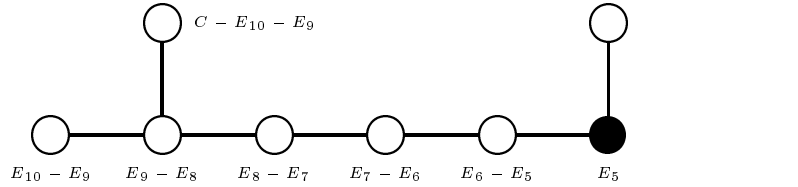
$D = 6 :$



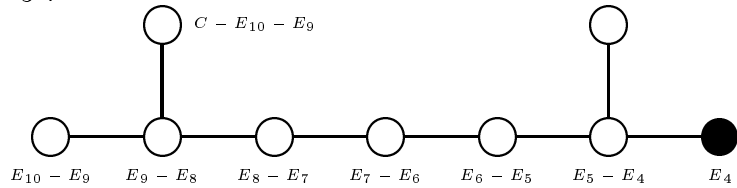
$D = 5 :$



$D = 4 :$



$D = 3 :$



2.5.4 Quotient des superalgèbres de type II

En dimension 10, on peut obtenir l'algèbre de Borchers de la théorie de type I (privée du secteur de jauge) comme le point fixe d'un automorphisme de l'algèbre de la théorie de type IIB donné par

$$\begin{aligned} e_{\alpha_0} &\mapsto -e_{\alpha_0} \\ e_{\alpha_1} &\mapsto -e_{\alpha_1} . \end{aligned} \tag{2.75}$$

Il faut souligner que le point fixe d'une algèbre de Borchers par une involution est toujours une algèbre de Borchers [B], ce qui n'est pas vrai pour les algèbres de Kac-Moody.

Physiquement, cela revient à ne conserver que les potentiels invariants sous le groupe \mathbb{Z}_2 de la projection orientifold.

De même, on peut obtenir l'algèbre de la théorie hétérotique sans secteur de jauge (qui est la même que celle de la théorie de type I) en prenant le secteur invariant de l'algèbre de la théorie IIB par l'automorphisme

$$\begin{aligned} e_{\alpha_0} &\mapsto -e_{\alpha_0} \\ e_{\alpha_1} &\mapsto +e_{\alpha_1} , \end{aligned} \tag{2.76}$$

qui est la version S-duale de ce qui précède.

On peut obtenir la même algèbre à partir de la superalgèbre de la théorie IIA en considérant l'automorphisme

$$\begin{aligned} e_{\alpha_0} &\mapsto +e_{\alpha_0} \\ e_{\alpha_1} &\mapsto -e_{\alpha_1} . \end{aligned} \tag{2.77}$$

Il faut noter que si on ne considère pas le secteur de jauge, le secteur tordu de ces théories vues ainsi comme orbifold n'apparaît pas.

2.5.5 Un nouveau triangle

En partant de ces théories, on peut construire un nouveau triangle en considérant des singularité A_n en plus de la singularité non normale décrite. On trouvera dans [HJP2] les détails de la construction, qui est possible pour toutes les cases du triangle. Pour le moment nous n'avons pas trouvé d'interprétation physique de ce triangle, pour laquelle il faudrait sans doute considérer des formes réelles judicieuses. On trouvera le triangle complexe, ou « déployé » dans le tableau 2.11.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
$d = 10$	\mathbb{R}							
$d = 9$	\mathbb{R}^2							
$d = 8$	$\mathbb{R} \times A_1^2$	$\mathbb{R} \times A_1$						
$d = 7$	$\mathbb{R} \times A_3$	$\mathbb{R}^2 \times A_1$	\mathbb{R}^2	\mathbb{R}				
$d = 6$	$\mathbb{R} \times D_4$ or D_5	$\mathbb{R} \times A_1^3$ or $A_1 \times A_3$	$\mathbb{R} \times A_1^2$	\mathbb{R}^2 or A_1^2	\mathbb{R}			
$d = 5$	$\mathbb{R} \times D_5$	$\mathbb{R} \times A_1 \times A_3$	$\mathbb{R}^2 \times A_1^2$	$\mathbb{R} \times A_1^2$	\mathbb{R}^2			
$d = 4$	$A_1 \times D_6$	D_6 or $A_1^2 \times D_4$	$\mathbb{R} \times A_1 \times A_3$	$A_1 \times A_3$ or $\mathbb{R} \times A_1^3$	$\mathbb{R}^2 \times A_1$	$\mathbb{R} \times A_1$		
$d = 3$	D_8	$A_1 \times D_6$	$\mathbb{R} \times D_5$	$\mathbb{R} \times D_4$ or D_5	$\mathbb{R} \times A_3$	$\mathbb{R} \times A_1^2$	\mathbb{R}^2	\mathbb{R}

TAB. 2.11 – Triangle magique complexe partant des théories de type I ou hétérotiques (sans secteur de jauge).

2.5.6 Secteur de jauge ?

On voudrait introduire le secteur de jauge des théories hétérotiques et de type I, et compléter ainsi le groupe de U-dualité. Le problème est que le formalisme que nous utilisons ne permet pas d'introduire de champs de jauge non abéliens de manière évidente. En effet pour de tels champs on a une courbure

$$F = dA + A \wedge A, \quad (2.78)$$

où le second terme ne fait pas intervenir de différentielle. Or nous avons ici écrit tous les champs comme des formes de Maurer-Cartan

$$\mathcal{G} = d\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}, \quad (2.79)$$

dont tous les termes comportent une différentielle.

Peut-être faut-il mettre sur un pied d'égalité potentiels et courbures, comme nous allons le faire dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Approche du « group manifold » et introduction d'une 2-forme en supergravité $D = 5$ $N = 2$

3.1 Approche du « group manifold »

3.1.1 Superspace et superchamps

La formulation habituelle d'une théorie des champs faisant intervenir des fermions en plus des bosons est d'avoir comme variables des champs à valeurs dans des fibrés spinoriels, la base étant toujours l'espace-temps à D dimensions. Une version alternative, qui n'existe pas toujours, consiste à étendre l'espace-temps par des dimensions fermioniques, pour avoir un *superspace*. On définit sur ce superspace des *superchamps* : des champs définis sur tout le superspace.

De manière générique, si x désigne les directions spatiales bosoniques, θ les directions fermioniques et $\Psi(x, \theta)$ un superchamp, on peut faire un développement dans les variables θ :

$$\Psi(x, \theta) = \psi_0(x) + \psi_1(x)\theta + \psi_2(x)\theta\theta + \dots, \quad (3.1)$$

où les termes à partir de ψ_2 font nécessairement intervenir des directions fermioniques θ_α différentes, puisque ce sont des variables anticommutantes, de carré nul. Une conséquence de ce fait est que ce développement est fini : le dernier terme contient une unique fois chaque θ_α , α indexant les directions fermioniques. Les coefficients de ce développement, les ψ_i , sont les champs sur l'espace habituel, puisqu'ils ne dépendent que des variables x , et sont bosoniques ou fermioniques selon la parité de i et de Ψ .

En raison du théorème spin-statistique, on demande que les directions fermioniques forment une représentation fermionique du groupe de Lorentz. L'algèbre de supersymétrie locale apparaît alors comme l'algèbre des difféomorphismes du superspace ; les générateurs de la supersymétrie sont alors des « rotations » entre directions bosoniques et fermioniques. En particulier, on voit que dans le développement 3.1 il y a automatiquement le même nombre de coefficients fermioniques et bosoniques ; c'est la propriété habituelle des théories supersymétriques d'égalité du nombre de champs bosoniques et fermioniques. De plus, suivant la représentation de l'algèbre de super-Poincaré choisie pour Ψ , on obtient pour les (ψ_i) les différents multiplets de cette algèbre.

Dans les cas où cette méthode marche, on peut écrire l'action de la théorie physique comme une intégrale d'un Lagrangien sur tout le superspace

$$S = \int dx d\theta \mathcal{L}(\Psi(x, \theta)). \quad (3.2)$$

En intégrant sur la partie fermionique d'abord, on obtient le Lagrangien habituel

$$L(\{\psi_i(x)\}) = \int d\theta \mathcal{L}(\Psi(x, \theta)) \quad (3.3)$$

qui redonne l'action

$$S = \int dx L(\{\psi(x)\}). \quad (3.4)$$

Une conséquence de cette intégration partielle est que le lagrangien $L(\{\psi\})$ n'est pas invariant sous les supersymétries, qui sont les difféomorphismes de l'espace total, sauf si les champs ψ obéissent aux équations du mouvement.

Cette approche pose le problème qu'il faut introduire des contraintes sur les degrés de libertés venant des directions fermioniques, et que cela ne marche pas toujours, notamment quand le nombre de supersymétries est trop grand. On ne connaît en général que la formulation en superspace des équations du mouvement.

3.1.2 Méthode générale, principe

Dans l'approche dite du « group-manifold », introduite par Ne'emann et Regge et développée par D'Auria, Fré et Regge [CDF, DFR], on étend le superspace à tous les générateurs de l'algèbre de symétrie. L'idée est de mettre toutes les symétries sur un pied d'égalité en les interprétant comme des changements de coordonnées dans un superspace généralisé.

Cette superalgèbre \mathfrak{g} fait intervenir les générateurs de translation P_μ , de rotation (groupe de Lorentz) $J_{\mu\nu}$, de supersymétrie Q_α auxquels il faut ajouter éventuellement d'autres charges avec leurs générateurs Z_a . On considère alors un supergroupe G construit sur ces générateurs. On prend alors comme variété de base une déformation \tilde{G} de la supervariété G . L'idée de base est que toutes les symétries de la théorie seront des difféomorphismes de cette supervariété.

Les champs seront alors les différentes composantes d'une 1-forme μ à valeur dans \mathfrak{g} , définissant une \mathfrak{g} -connexion sur \tilde{G} , de courbure

$$R = d\mu + \mu \wedge \mu. \quad (3.5)$$

Notons que cette 1-forme s'interprète comme un repère mobile sur \tilde{G} .

Quand cette courbure s'annule, on a en fait affaire à la forme de Maurer-Cartan

$$\sigma = g^{-1}dg \quad (3.6)$$

sur le groupe G , qui est duale aux champs de vecteurs invariants à gauche, isomorphes à l'algèbre de Lie tangente à un groupe de Lie. En effet l'annulation de la courbure traduit l'invariance à gauche de la 1-forme.

Plus généralement, en dérivant R et en utilisant la relation de Jacobi on obtient l'identité de Bianchi

$$\nabla R = dR + [\mu, R] = 0, \quad (3.7)$$

où le produit des formes qui intervient dans le commutateur est bien sûr le produit extérieur des formes différentielles.

Plutôt que de définir l'action sur tout le superespace \tilde{G} , on va prendre pour Lagrangien une D -forme $\mathcal{L}_D(\mu)$ (D est la dimension de l'espace-temps) qu'on va intégrer sur une sous-variété de dimension D \mathcal{M}_D dans \tilde{G} . On a ainsi une action

$$S[\mu, \mathcal{M}_D] = \int_{\mathcal{M}_D} \mathcal{L}_D(\mu). \quad (3.8)$$

On souhaite alors que le principe de moindre action soit valable non seulement pour les variations du champ μ mais aussi par rapport aux variations de \mathcal{M}_D . En fait cela est automatiquement satisfait si $\mathcal{L}_D(\mu)$ est une fonctionnelle en μ ne faisant intervenir que les opérations de l'algèbre des formes différentielles : produit extérieur et différentielle. En effet, dans ce cas, toute déformation de la surface peut être compensée par un difféomorphisme du superespace complet ; si l'action est extrémale par rapport aux champs, elle le sera donc aussi par rapport aux variations de \mathcal{M}_D .

On impose enfin au Lagrangien une condition parfois appelée *rhéonomie* : les champs doivent être entièrement déterminés par leur valeur sur \mathcal{M}_D . Les

équations du mouvement doivent relier les différentes composantes des courbures de telle sorte qu'on puisse relever les champs de \mathcal{M}_D à tout l'espace. Cela est analogue aux conditions de Cauchy-Riemann qui permettent de retrouver la valeur d'une fonction holomorphe sur tout le plan complexe à partir de la restriction à \mathbb{R} . Voyons cela en détail.

La superalgèbre \mathfrak{g} se décompose de la manière suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{o} . \quad (3.9)$$

\mathfrak{v} est une sous-algèbre bosonique :

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v} . \quad (3.10)$$

\mathfrak{i} en est une représentation bosonique :

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i} . \quad (3.11)$$

De plus la partie bosonique de \mathfrak{g}

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{i} \quad (3.12)$$

forme une sous-algèbre de \mathfrak{g} , et B/V est un espace « symétrique » :

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{v} . \quad (3.13)$$

\mathfrak{o} est une représentation fermionique de \mathfrak{b} :

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{o}] \subset \mathfrak{o} , \quad (3.14)$$

et l'équation

$$[\mathfrak{o}, \mathfrak{o}] \subset \mathfrak{b} \quad (3.15)$$

exprime que G/B est aussi un espace « symétrique ».

Dans cette décomposition du groupe de jauge total, on appelle \mathfrak{v} la sous-algèbre de jauge, \mathfrak{i} l'espace interne, de dimension D et \mathfrak{o} l'espace externe.

Précisons nos notations pour les composantes du champ μ et de sa courbure R . On va noter g, g', \dots les indices correspondant à n'importe quelle direction de l'algèbre \mathfrak{g} . Si on note T_g les générateurs de l'algèbre, μ va se décomposer en

$$\mu = \sum_{g, g'} \mu_{g'}^g T_g dx^{g'} \quad (3.16)$$

et de même R en

$$R = \sum_{g, g', g''} R_{g' g''}^g T_g dx^{g'} \wedge dx^{g''} . \quad (3.17)$$

On désignera par v, v', \dots les composantes qui sont dans \mathfrak{v} et de même par i et o les composantes dans \mathfrak{i} et \mathfrak{o} et par s une composante qui appartient à $\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{o}$. ∇ est simplement la dérivée covariante associée à la connexion donnée par la 1-forme μ .

Pour que les champs soient déterminés uniquement par leur valeur sur une sous-variété \mathcal{M}_D , on va demander que les équations du mouvement soient de la forme suivante.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & R_{vg'}^g = 0 \\ \text{(ii)} \quad & R_{os}^g = \sum k_{os;g'}^{g;ii'} R_{ii'}^{g'} \\ \text{(iii)} \quad & E(R_{ii'}) = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

La première de ces conditions est l'horizontalité des courbures sur le quotient G/V : V est un groupe de jauge et on peut tout relever sur ces directions. Au niveau du Lagrangien de la théorie, cela se traduit par son invariance de jauge par rapport à V .

La condition (ii) est l'analogie de la condition de Cauchy-Riemann pour les fonctions holomorphes. Pour ce dernier cas, la dérivée des composantes réelle et imaginaire de la fonction suivant la direction imaginaire est une combinaison linéaire des dérivées par rapport à la direction réelle. Ici les directions externes de la courbure doivent de manière similaire être données par des combinaisons linéaires des directions internes, ce qui permet de retrouver les champs sur tout l'espace à partir de leur valeur sur \mathcal{M}_D .

Enfin la condition (iii) indique que les directions intérieures de la courbure, qui correspondent simplement aux champs de la théorie définie sur l'espace-temps \mathcal{M}_D , obéissent à des équations du mouvement du premier ordre qui ne font pas intervenir d'autres composantes. En résolvant et substituant on peut obtenir des équations de propagation du second ordre.

Avec ces conditions, la supersymétrie s'exprime maintenant comme difféomorphisme dans le superspace. En effet étant donnée une solution des équations du mouvement sur \mathcal{M}_D , on peut l'étendre à tout \tilde{G} . L'effet d'un difféomorphisme infinitésimal est donné par l'action de la dérivée de Lie, et conduit à une nouvelle solution des équations du mouvement sur \tilde{G} , qui se restreint à \mathcal{M}_D pour donner une nouvelle solution des équations du mouvement sur cet espace-temps. Tout ceci revient à faire une transformation de supersymétrie sur les champs de \mathcal{M}_D . Notons que le difféomorphisme de \tilde{G} peut aussi se voir comme un changement de sous-variété \mathcal{M}_D dans \tilde{G} .

3.1.3 Détermination d'un Lagrangien

1. Pour écrire le Lagrangien d'une théorie physique dans ce formalisme, on commence par prendre une superalgèbre \mathfrak{g} de la forme décrite au

paragraphe précédent, et on prend une 1-forme μ à valeur dans \mathfrak{g} comme champ de jauge. On écrit alors le Lagrangien covariant (ce doit être une D -forme sur \tilde{G}) le plus général faisant intervenir μ , et la courbure $R = \nabla\mu$. Notons qu'on ne fait pas intervenir de dérivées supérieures en raison de l'équation de Bianchi $\nabla R = 0$. Les formes μ et R doivent n'être reliées que par des produits extérieurs, et les coefficients des différents termes du Lagrangien sont des formes multilinéaires sur \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Lambda_{g_1 \dots g_D} \mu^{g_1} \wedge \dots \wedge \mu^{g_D} + \nu_{g; g_1 \dots g_{D-2}} R^g \wedge \mu^{g_1} \wedge \dots \wedge \mu^{g_{D-2}} + \\ & + \nu_{gg'; g_1 \dots g_{D-4}} R^g \wedge R^{g'} \wedge \mu^{g_1} \wedge \dots \wedge \mu^{g_{D-4}} + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

2. On impose ensuite l'invariance de l'action par rapport aux transformations de jauge du sous-groupe V .
3. On requiert que le vide ($R = 0$) soit solution des équations du mouvement, ce qui donne encore des contraintes sur les coefficients intervenant dans le Lagrangien. Notons que cette condition ne restreint pas la généralité : en effet si le vide n'est pas solution mais qu'il existe une autre solution, on peut changer les constantes de structure de l'algèbre de manière à ce que cette solution soit de courbure nulle.

En effet, s'il y a une solution, elle est de la forme

$$R^g = \frac{1}{2} F^g_{g_1 g_2} \mu^{g_1} \wedge \mu^{g_2}, \quad (3.20)$$

où les coefficients $F^g_{g_1 g_2}$ sont des constantes (les équations du mouvement sont algébriques pour les courbures). On peut définir une nouvelle courbure

$$\tilde{R}^g = d\mu^g + \frac{1}{2} (C^g_{g_1 g_2} - F^g_{g_1 g_2}) \mu^{g_1} \wedge \mu^{g_2} \quad (3.21)$$

pour l'algèbre définie par les constantes de structures $C^g_{g_1 g_2} - F^g_{g_1 g_2}$ et dont le vide $\tilde{R} = 0$ est solution.

4. On demande qu'il existe des solutions non triviales, et toutes les solutions doivent satisfaire les équations 3.18 (et les identités de Bianchi).

3.1.4 Algèbres différentielles libres

La formulation d'une algèbre de Lie par les équations de Maurer-Cartan

$$d\sigma^i + \frac{1}{2} C^i_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k = 0 \quad (3.22)$$

s'étend naturellement à des formes différentielles de degré supérieur :

$$d\sigma^i_{(p)} + \sum \frac{1}{n} C^i_{i_1 \dots i_n} \sigma^{i_1}_{(p_1)} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_n}_{(p_n)} = 0, \quad (3.23)$$

avec $p_1 + \dots + p_n = p + 1$. Les constantes de structures généralisées $C^i_{i_1 \dots i_n}$ doivent vérifier des identités de Jacobi généralisées qu'on obtient en écrivant $d^2\sigma = 0$. Dans ce cas on parle d'une *algèbre différentielle libre* [Su].

Notons que cela ressemble beaucoup à ce que nous faisons dans le chapitre précédent (de manière duale), mais n'est pas identique : ici les formes sont définies sur le supergroupe, et pas seulement sur l'espace-temps. De plus les champs physiques étaient les formes de Maurer-Cartan alors qu'ici ce sont les courbures de connexions sur le supergroupe.

Nous allons maintenant considérer des connexions non plates, avec une courbure non nulle : on prend sur le même supergroupe un jeu de formes différentielles $\mu_{(p)}$ de courbure

$$R^i = d\mu^i + \sum \frac{1}{n} C^i_{i_1 \dots i_n} \mu^{i_1} \wedge \dots \wedge \mu^{i_n}. \quad (3.24)$$

La possibilité d'étendre une superalgèbre en une (super-)algèbre différentielle libre est régie par la cohomologie de Chevalley de l'algèbre. En effet, s'il existe une p -forme à valeur dans une représentation irréductible de \mathfrak{g}

$$\Omega = \Omega_{g_1 \dots g_p} \sigma^{g_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{g_p} \quad (3.25)$$

qui est fermée : $\nabla\Omega = 0$, mais pas exacte, alors on peut introduire une $(p-1)$ -forme Σ en ajoutant aux relations de définition de l'algèbre différentielle libre la relation

$$\nabla\Sigma = \Omega. \quad (3.26)$$

Rappelons que sur le supergroupe, avec la connexion plate donnée par la forme de Maurer-Cartan, on a $\nabla^2 = 0$.

On peut ensuite itérer ce processus autant de fois que l'on veut, tant que la cohomologie reste non triviale.

Signalons qu'un théorème de Chevalley et Eilenberg [CE] affirme que la cohomologie d'une algèbre semi-simple à valeur dans une représentation irréductible non triviale est nulle.

Enfin, il faut noter qu'on peut aussi mettre sur le même plan champs (repère mobile sur \tilde{G}) et courbures. Il suffit en effet de considérer l'algèbre différentielle libre donnée par les potentiels $\mu^i_{(p)}$ et leurs courbures $R^i_{(p+1)}$:

$$\begin{aligned} d\mu^i + \sum \frac{1}{n} C^i_{i_1 \dots i_n} \mu^{i_1} \wedge \dots \wedge \mu^{i_n} - R^i &= 0 \\ dR^i + \sum C^i_{i_1 \dots i_n} R^{i_1} \wedge \dots \wedge \mu^{i_n} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La deuxième partie de cette algèbre est dite *minimale* : les formes intervenant dans la différentielles de $R^i_{(p)}$ sont de dimension au plus $p-1$. On appelle algèbre *contractile* une algèbre dont les relations de Maurer-Cartan sont de la

forme $d\alpha_{(p)}^i = \beta_{(p+1)}^i$. On peut démontrer que toute algèbre différentielle libre peut se décomposer en somme directe d'une algèbre minimale et d'une algèbre contractile [Su]. C'est évidemment le cas pour les relations de définition 3.27.

Dans la référence [Su], Sullivan démontre également que toute algèbre différentielle libre peut s'obtenir à partir d'une (super-)algèbre de Lie ordinaire en considérant les extensions données par sa cohomologie.

Ainsi en partant de la superalgèbre de Poincaré à 11 dimensions, on peut introduire une extension par une 3-forme qui conduit au Lagrangien de la supergravité pure, et il y a aussi une extension possible de l'algèbre par une 6-forme, même si elle ne conduit à aucun Lagrangien covariant [DF]. Nous allons étudier dans ce qui suit une théorie où un problème analogue se pose. En supergravité minimale à 5 dimensions, on peut faire apparaître en plus d'une 1-forme une 2-forme, et nous allons voir qu'elles doivent être reliées par dualité.

3.2 Supergravité $D = 5 \quad N = 2$

3.2.1 Contenu en champs

Considérons la superalgèbre de Poincaré à cinq dimensions donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega^{cb} &= 0 \\ dV^a - \omega^{ab} \wedge V^b - \frac{i}{2} \bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi &= 0 \\ d\psi - \frac{1}{4} \omega^{ab} \wedge \Gamma_{ab} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Rappelons qu'en dimension 5 la représentation spinorielle, à laquelle appartient le champs ψ , est de dimension réelle 8, soit de dimension complexe 4.

Cette algèbre, si on lui applique la procédure décrite précédemment, conduit à une théorie triviale : seul le vide est solution. On peut cependant chercher à étendre cette algèbre. Comme on l'a vu, il faut pour cela en chercher les classes de cohomologies non triviales. On peut vérifier que $i\bar{\psi} \wedge \psi$ est une telle classe :

$$\nabla (i\bar{\psi} \wedge \psi) = d (i\bar{\psi} \wedge \psi) = 0 \quad (3.29)$$

(le facteur i est mis par commodité, pour retrouver les champs habituels). On introduit alors une 1-forme A telle que

$$dA = i\bar{\psi} \wedge \psi. \quad (3.30)$$

La superalgèbre ainsi étendue conduirait à la supergravité minimale ($N = 2$) à cinq dimensions [DFMR]. Nous allons ici essayer d'étendre au maximum l'algèbre pour voir s'il est possible d'introduire une 2-forme.

Pour cela, on a besoin des identités de Fierz. Un calcul détaillé donne¹

$$\begin{aligned}\bar{\psi} \wedge \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \psi &= \bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_a \psi \\ &= -\frac{1}{4} \bar{\psi} \wedge \Gamma^{ab} \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_{ab} \psi.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Compte-tenu du fait que

$$\begin{aligned}d(i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A) &= -\bar{\psi} \wedge \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \psi \\ d(i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a) &= -\frac{1}{2} \bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_a \psi,\end{aligned}\quad (3.32)$$

on obtient

$$d(i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A - 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a) = 0, \quad (3.33)$$

c'est-à-dire que $i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A - 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a$ est une forme fermée. Elle n'est évidemment pas exacte, puisqu'aucune différentielle n'apparaît dans son expression. C'est une classe de cohomologie non triviale de l'algèbre précédente, qu'on peut donc étendre en introduisant une 2-forme B telle que

$$dB = i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A - 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a. \quad (3.34)$$

Si on prend les courbures naïves, on obtient

$$\begin{aligned}R^{ab} &= d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega_c^b \\ R^a &= dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b - \frac{i}{2} \bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \\ \rho &= d\psi - \frac{1}{4} \omega^{ab} \wedge \Gamma_{ab} \psi \\ F &= dA - i\bar{\psi} \wedge \psi \\ G_n &= dB - i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A + 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Mais cette courbure naïve G_n ne respecte pas les invariances de jauge. En effet, à courbure nulle on a les invariances

$$\begin{aligned}V^a &\longrightarrow V^a + dh^a - \omega^{ab} \wedge h_b \text{ si } R^{ab} = 0 \\ A &\longrightarrow A + d\phi \\ B &\longrightarrow B + d\alpha + i\bar{\psi} \wedge \psi \phi - 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi h_a.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Pour une courbure F non nulle, il faut remplacer $i\bar{\psi} \wedge \psi \phi$ par $(i\bar{\psi} \wedge \psi + F)\phi$ dans la troisième ligne; c'est en effet dA qui doit apparaître dans cette

¹La contraction des indices d'espace-temps a, b, \dots se fait en utilisant la métrique de Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots)$. On utilise la convention d'Einstein $M^a V_a = \sum_a M^a V^b \eta_{ab}$.

formule. De même si R^a est non nul il faut prendre $(-2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi - 4R^a) h_a$ pour le terme $-2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi h_a$. (Mais cette symétrie nécessite la condition de torsion nulle $R^{ab} = 0$.) De plus la courbure invariante de jauge associée à la 2-forme B n'est alors pas G_n mais

$$\begin{aligned} G &= dB - i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A - F \wedge A + 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a + 4R^a \wedge V_a \\ &= dB - dA \wedge A + 4DV^a \wedge V_a, \end{aligned} \quad (3.37)$$

où D désigne la dérivée covariante de Lorentz

$$DV^a = dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b. \quad (3.38)$$

À courbure non nulle, les invariances de jauge considérées sont donc

$$\begin{aligned} V^a &\longrightarrow V^a + dh^a - \omega^{ab} \wedge h_b \text{ si } R^{ab} = 0 \\ A &\longrightarrow A + d\phi \\ B &\longrightarrow B + d\alpha + i\bar{\psi} \wedge \psi \phi + F \phi - 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi h_a - 4R^a h_a, \end{aligned} \quad (3.39)$$

auxquelles il faut bien sûr ajouter les autres invariances de jauge comme l'invariance de Lorentz locale.

Finalement, on va donc considérer l'algèbre différentielle libre suivante :

$$\begin{aligned} R^{ab} &= d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega_c^b \\ R^a &= dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b - \frac{i}{2}\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \\ \rho &= d\psi - \frac{1}{4}\omega^{ab} \wedge \Gamma_{ab}\psi \\ F &= dA - i\bar{\psi} \wedge \psi \\ G &= dB - i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge A - F \wedge A + 2i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a + 4R^a \wedge V_a \\ 0 &= dR^{ab} - \omega^{bc} \wedge R_c^a - \omega^{ac} \wedge R_c^b = \nabla R^{ab} \\ 0 &= dR^a - \omega^{ab} \wedge R_b + R^{ab} \wedge V_b + \frac{i}{2}\bar{\rho} \wedge \Gamma^a \psi - \frac{i}{2}\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \rho = \nabla R^a \\ 0 &= d\rho - \frac{1}{4}\omega^{ab} \wedge \Gamma_{ab}\rho + \frac{1}{4}R^{ab} \wedge \Gamma_{ab}\psi = \nabla \rho \\ 0 &= dF + i\bar{\rho} \wedge \psi - i\bar{\psi} \wedge \rho = \nabla F \\ 0 &= dG + 2i\bar{\psi} \wedge \psi \wedge F + F \wedge F - \\ &\quad - 4i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \psi \wedge R_a - 4R^a \wedge R_a + 4R^{ab} \wedge V_b \wedge V_a = \nabla G. \end{aligned} \quad (3.40)$$

La notation des dérivées covariantes est un abus de langage. En effet ∇F , par exemple, ne dépend pas que de F mais aussi de la courbure ρ et de sa conjuguée $\bar{\rho}$. En fait, ∇F désigne la composante selon A de la dérivée covariante de la courbure totale et dépend linéairement de toutes les courbures.

Notons aussi que la deuxième moitié des relations définissant l'algèbre est constituée des identités de Bianchi des champs considérés.

3.2.2 Lagrangien le plus général

Nous allons maintenant écrire le Lagrangien le plus général faisant intervenir tous ces champs, reliés uniquement par des produits extérieurs.

Les relations de définition de l'algèbre (3.40) sont invariantes sous l'action du changement d'échelle global suivant :

$$\begin{aligned}
\omega^{ab} &\longrightarrow \omega^{ab} & R^{ab} &\longrightarrow R^{ab} \\
V^a &\longrightarrow \lambda V^a & R^a &\longrightarrow \lambda R^a \\
\psi &\longrightarrow \sqrt{\lambda} \psi & \rho &\longrightarrow \sqrt{\lambda} \rho \\
A &\longrightarrow \lambda A & F &\longrightarrow \lambda F \\
B &\longrightarrow \lambda^2 B & G &\longrightarrow \lambda^2 G.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Nous allons donc écrire le Lagrangien le plus général respectant cette symétrie, c'est-à-dire qu'il doit être homogène pour la gradation donnée par cette action de e . Le terme d'Einstein étant de degré 3, nous prendrons tous les termes de degré 3.

On obtient ainsi, par une recherche systématique,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & a_1 G \wedge F \\
& + a_2 iG \wedge \bar{\psi} \wedge \psi \\
& + a_3 iB \wedge \bar{\rho} \wedge \psi - \bar{a}_3 iB \wedge \bar{\psi} \wedge \rho \\
& + a_4 F \wedge F \wedge A \\
& + a_5 F \wedge R^a \wedge V_a \\
& + a_6 R^a \wedge R_a \wedge A \\
& + a_7 R^{ab} \wedge V_a \wedge V_b \wedge A \\
& + a_8 \epsilon_{abcde} R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \wedge V^e \\
& + a_9 iF \wedge A \wedge \bar{\psi} \wedge \psi \\
& + a_{10} iF \wedge V^a \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_a \psi \\
& + a_{11} iR^a \wedge A \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_a \psi \\
& + a_{12} iR^a \wedge V_a \wedge \bar{\psi} \wedge \psi \\
& + a_{13} iR^a \wedge V^b \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_{ab} \psi \\
& + a_{14} i\bar{\rho} \wedge \Gamma^a \psi \wedge V_a \wedge A - \bar{a}_{14} i\bar{\psi} \wedge \Gamma^a \rho \wedge V_a \wedge A \\
& + a_{15} i\bar{\rho} \wedge \Gamma^{ab} \psi \wedge V_a \wedge V_b + \bar{a}_{15} i\bar{\psi} \wedge \Gamma^{ab} \rho \wedge V_a \wedge V_b \\
& + a_{16} A \wedge \bar{\psi} \wedge \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \psi \\
& + a_{17} V^a \wedge \bar{\psi} \wedge \Gamma_a \psi \wedge \bar{\psi} \wedge \psi.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.2.3 Contraintes

Il faut maintenant imposer les différentes contraintes pour réduire le nombre de paramètres de ce Lagrangien. Tout d'abord, on requiert que le vide $R = 0$ soit une solution. On obtient ainsi les équations suivantes, en

projetant sur les différentes directions de l'algèbre les différentes équations du mouvement.

Équation du mouvement pour R^{ab} :

$$\begin{aligned}
a_3 - \bar{a}_3 &= 0 \\
a_7 - a_{11} + \frac{1}{2}a_{14} + \frac{1}{2}\bar{a}_{14} &= 0 \\
4a_2 + a_7 + a_{12} - \frac{1}{2}a_{15} - \frac{1}{2}\bar{a}_{15} &= 0 \\
3a_8 - \frac{1}{2}a_{15} - \frac{1}{2}\bar{a}_{15} &= 0 \\
ia_{13} + a_{15} - \bar{a}_{15} &= 0 \\
a_{14} - \bar{a}_{14} &= 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Équation du mouvement pour R^a :

$$4a_2 + a_{11} + \frac{1}{2}a_{12} - a_{17} = 0 \tag{3.44}$$

Équation du mouvement pour $\bar{\rho}$:

$$\begin{aligned}
a_3 + a_9 + \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{14} + 2a_{16} &= 0 \\
-2a_3 + a_{10} + \frac{1}{2}a_{12} - a_{14} + 2a_{17} &= 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Équation du mouvement pour F :

$$2a_2 - a_9 - \frac{1}{2}a_{10} + a_{16} = 0 \tag{3.46}$$

Pour G on obtient une équation triviale qui ne donne aucune contrainte.

Il reste encore à imposer l'invariance de jauge de la théorie. L'invariance par rapport au groupe de Lorentz a déjà été prise en compte dans l'écriture du Lagrangien ; restent à considérer les symétries liées à A et B .

Commençons par cette dernière, donnée par

$$B \longrightarrow B + d\mu, \tag{3.47}$$

où μ est une 1-forme.

La variation du Lagrangien est

$$\delta\mathcal{L} = d\mu \wedge (a_3 i \bar{\rho} \wedge \psi - \bar{a}_3 i \bar{\psi} \wedge \rho), \tag{3.48}$$

qui s'intègre par partie en

$$\delta\mathcal{L} = d(\dots) + \mu \wedge d(a_3 i \bar{\rho} \wedge \psi - \bar{a}_3 i \bar{\psi} \wedge \rho). \tag{3.49}$$

Cette variation laisse les équations du mouvement invariantes si le terme proportionnel à μ s'annule, ce qui donne

$$\Im(a_3) = 0. \tag{3.50}$$

On retrouve donc en fait une contrainte que nous avons déjà.

Pour A , on obtient de même, après projection sur les différentes composantes,

$$\begin{aligned}
a_3 + 2a_4 - a_9 &= 0 \\
a_3 + a_9 + \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{14} + 2a_{16} &= 0 \\
a_6 - a_7 &= 0 \\
a_6 - a_{11} + a_{14} &= 0 \\
a_7 - a_{11} + a_{14} &= 0 \\
a_{14} - \overline{a_{14}} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Un certain nombre de ces contraintes ont été obtenues ci-dessus en imposant que le vide soit solution des équations du mouvement ; les contraintes additionnelles sont donc

$$\begin{aligned}
a_3 + 2a_4 - a_9 &= 0 \\
a_6 - a_7 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Partant de vingt coefficients réels, les douze contraintes que nous avons obtenues réduisent à huit le nombre des paramètres. De plus il y a un choix de normalisation, ce qui réduit ce nombre à sept.

3.2.4 Dérivées totales

Il reste à voir quelles sont les combinaisons de termes de notre Lagrangien qui peuvent s'écrire comme des différentielles. En effet ces termes ne modifient pas les équations de mouvement, ce qui réduit encore le nombre de paramètres physiques libres.

Le Lagrangien étant une 5-forme de degré 3 pour la gradation de changement d'échelle, il nous faut chercher toutes les 4-formes de degré 3 et calculer leurs différentielles. En cherchant de manière systématique, on trouve ainsi six 4-formes du degré voulu :

$$\begin{aligned}
\lambda_a &= G \wedge A \\
\lambda_b &= B \wedge F \\
\lambda_c &= i B \wedge \overline{\psi} \wedge \psi \\
\lambda_d &= R^a \wedge V_a \wedge A \\
\lambda_e &= i V^a \wedge A \wedge \overline{\psi} \wedge \Gamma_a \psi \\
\lambda_f &= i V^a \wedge V^b \wedge \overline{\psi} \wedge \Gamma_{ab} \psi.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

En notant L_i le terme du Lagrangien associé au coefficient a_i , on obtient

pour les différentielles

$$\begin{aligned}
d\lambda_a &= -L_1 - L_2 - L_4 + 4L_6 + 4L_7 - 2L_9 + 4L_{11} \\
d\lambda_b &= L_1 - L_3 - \overline{L}_3 + L_4 - 4L_5 + L_9 - 2L_{10} \\
d\lambda_c &= L_2 + L_3 + \overline{L}_3 + L_9 - 4L_{12} - L_{16} + 2L_{17} \\
d\lambda_d &= -L_5 + L_6 + L_7 + \frac{1}{2}L_{11} - L_{12} - \frac{1}{2}L_{14} - \frac{1}{2}\overline{L}_{14} \\
d\lambda_e &= -L_{10} + L_{11} + L_{14} + \overline{L}_{14} - \frac{1}{2}L_{16} + L_{17} \\
d\lambda_f &= -2L_{13} - i(L_{15} - \overline{L}_{15}) .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Le Lagrangien est donc défini modulo ces termes. De plus on vérifie aisément que les contraintes ne sont pas affectées par l'addition de ces termes.

Finalement, après un choix de normalisation, il ne reste plus qu'un seul paramètre libre ! Nous fixons la normalisation en prenant $a_8 = \frac{1}{3}$ comme coefficient du terme d'Einstein

$$L_8 = \epsilon_{abcde} R^{ab} \wedge V^a \wedge V^b \wedge V^c . \tag{3.55}$$

3.2.5 Solutions des équations du mouvement

On constate que le champ B que nous avons introduit, avec sa courbure G , n'apparaît pas dans les équations du mouvement : en effet les trois premiers termes du Lagrangien, où il apparaît, peuvent être mis à zéro par l'ajout de différentielles totales.

Comme les autres termes sont les mêmes qu'en l'absence de champ B , on retrouve pour les équations du mouvement les résultats de [DFMR] (voir aussi [CDF]). Si on prend $a = a_6$ comme paramètre, les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\delta\omega_{ab} : \quad \epsilon_{abcde} R^c \wedge V^d \wedge V^e + a F \wedge V_a \wedge V_b = 0 \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\delta\overline{\psi} : \quad & 2i \Gamma_{ab\rho} \wedge V^a \wedge V^b - 2i \Gamma_{ab} \psi \wedge R^a \wedge V^b + \\
& + i(1-a) \psi \wedge R^a \wedge V_a - \frac{i}{2}(3+a) \Gamma_a \psi \wedge F \wedge V^a = 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\delta A : \quad & a R^{ab} \wedge V^a \wedge V^b - \frac{i}{2}(3-a) R^a \wedge \overline{\psi} \wedge \Gamma_a \psi + \frac{3i}{2} F \wedge \overline{\psi} \wedge \psi - \\
& - \frac{i}{2}(3+a) (\overline{\rho} \wedge \Gamma_a \psi - \overline{\psi} \wedge \Gamma_a \rho) \wedge V^a + a R^a \wedge R_a + \frac{3}{4} F \wedge F = 0
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
\delta V^a : \quad & \epsilon_{abcde} R^{bc} \wedge V^d \wedge V^e + 2i R_a \wedge \overline{\psi} \wedge \psi - \\
& - \frac{i}{2}(3-a) F \wedge \overline{\psi} \wedge \Gamma_a \psi - 2i (\overline{\rho} \wedge \Gamma_{ab} \psi + \overline{\psi} \wedge \Gamma_{ab} \rho) \wedge V^b + \\
& + i(1-a) (\overline{\rho} \wedge \psi - \overline{\psi} \wedge \rho) \wedge V_a + 2a R_a \wedge F = 0 .
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Pour $a \neq \pm 1$ les équations du mouvement n'admettent que le vide comme solution (si on exclut G qui peut être non nul — notons tout de même qu'en raison des identités de Bianchi on a forcément dans ce cas $dG = 0$).

Pour $a = \pm 1$ on a les solutions non triviales données par

$$\begin{aligned}
 R^a &= -\frac{a}{4}\epsilon^{abcde}F_{bc}V_d \wedge V_e \\
 F &= F_{ab}V^a \wedge V^b \\
 \rho &= \rho_{ab}V^a \wedge V^b + \left[\frac{1}{2}\Gamma_a\psi F^{ab} + \frac{1}{16}(1-a)\epsilon^{abcde}F_{ac}\Gamma_{de}\psi\right] \wedge V_b \\
 R^{ab} &= R^{ab}_{mn}V^m \wedge V^n + \frac{i}{2}\epsilon^{abijk}\left\{\bar{\rho}_{jk}[\Gamma_{mi} - 2(1-a)\delta_{mi}] + h.c.\right\} \wedge V^m + \\
 &\quad + \frac{i}{2}F^{ab}\bar{\psi} \wedge \psi - \frac{i}{8}(1+a)\epsilon^{abijk}F_{ij}\bar{\psi} \wedge \Gamma_k\psi.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

où les composantes internes F_{ab} , R^{ab}_{mn} et ρ_{ab} obéissent aux équations (internes) suivantes :

$$\begin{aligned}
 R^{am}_{bm} - \frac{1}{2}\delta_b^a R^{mn}_{mn} &= F^{am}F_{bm} + \frac{1}{2}\delta_b^a F^{mn}F_{mn} \\
 \epsilon^{abij}\left(a R_{ab;ij} + \frac{3-a}{4}F_{ab}F_{ij}\right) &= 0 \\
 \epsilon^{abcd}\Gamma_{ij}\rho_{cd} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Notons que les équations 3.60 vérifient les conditions géométriques requises, à savoir que les courbures sont nulles dans les directions du groupe de jauge $\{\omega^{ab}, A\}$ et dépendent linéairement des seules courbures internes.

En outre la première des équations 3.61 peut se résoudre en séparant la connexion de spin en

$$\omega^{ab} = \tilde{\omega}^{ab}(V, \psi) + \hat{\omega}^{ab}(F) \tag{3.62}$$

et on retrouve alors les équations d'Einstein et de Maxwell. Notons que le terme cinétique $F \wedge *F$ du champ de jauge A n'apparaît pas directement dans le Lagrangien, mais seulement après résolution des équations du mouvement, via le terme $F \wedge R^a \wedge V_a$.

3.2.6 Sort de la 2-forme B

En se restreignant au secteur bosonique², rappelons que les équations de structure pour la 2-forme B sont

$$G = dB - F \wedge A + 4R^a \wedge V_a \tag{3.63}$$

et

$$dG + F \wedge F - 4R^a \wedge R_a + 4R^{ab} \wedge V_b \wedge V_a = 0. \tag{3.64}$$

En substituant la forme des solutions des équations du mouvement donnée par les équations 3.60 (pour $a = \pm 1$) dans ces formules, on obtient

$$G = dB - F_{ab} \wedge V^a \wedge V^b \wedge A - a\epsilon^{abcde}F_{de}V_a \wedge V_b \wedge V_c \tag{3.65}$$

²Nous notons de la même manière les différentes projections des formes.

dont la différentielle est

$$dG = -F \wedge F - a d * F. \quad (3.66)$$

Par ailleurs la deuxième équation, l'identité de Bianchi, donne

$$\begin{aligned} dG + F_{ab} F_{cd} V^a \wedge V^b \wedge V^c \wedge V^d - \frac{1}{4} \epsilon^{abcde} \epsilon_a^{ijkl} F_{bc} F_{ij} V_d \wedge V_e \wedge V_k \wedge V_l + \\ + 4 R_{ab;mn} V^m \wedge V^n \wedge V^b \wedge V^a = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Le deuxième terme est proportionnel au premier, par contraction des tenseurs antisymétriques, et le troisième également en vertu des équations du mouvement 3.61. Finalement cette équation peut donc s'écrire, pour les composantes d'espace-temps,

$$dG + (c + 1) F \wedge F = 0. \quad (3.68)$$

On retrouve alors l'équation de Maxwell sous une formulation auto-duale, en mettant ensemble les équations 3.66 et 3.68 :

$$-a d * F = -c F \wedge F. \quad (3.69)$$

Le rôle du potentiel B est alors assez étrange : il n'intervient pas explicitement dans ce mécanisme et peut apparemment être pris quelconque ; il disparaît dans le champ dual $*F$, et n'est pas fixé par les équations du mouvement. Cela est à relier au fait qu'on ne peut apparemment pas trouver de formulation lagrangienne covariante utilisant les champs duaux, et correspond précisément à ce que nous avons dans le chapitre précédent, pour les champs duaux, comme $\tilde{A}_{(6)}$ en supergravité à 11 dimensions.

Conclusion

Nous avons montré que toute une classe de supergravités peuvent s'exprimer, pour le secteur bosonique, à l'exception du graviton, comme une forme de Maurer-Cartan auto-duale sur un supergroupe, construit sur une superalgèbre de Kac-Moody généralisée associée à une surface de del Pezzo. En outre, le sous-groupe de Borel de ce supergroupe étend le groupe de symétrie de la théorie, c'est-à-dire le groupe de U-dualité en théorie des supercordes.

Il n'est toujours pas clair de savoir s'il y a un lien direct entre les surfaces de del Pezzo et les théories physiques correspondantes. Certains ont suggéré que les surfaces de del Pezzo pourraient être l'espace des modules d'un objet invariant par U-dualité de la théorie M et de ses compactifications[INV]; on peut aussi penser que la surface de del Pezzo pourrait être la variété de compactification de théories duales à celles que nous avons considérées. Quoi qu'il en soit, cette mystérieuse correspondance a permis de mettre au jour des structures apparaissant dans les supergravités.

Manquent à ce tableau plusieurs choses. Tout d'abord, on voudrait inclure dans ce formalisme les fermions, avec la supersymétrie, ainsi que la gravitation. Peut-être la méthode du « group manifold » étudiée dans le dernier chapitre peut-elle aider à attaquer ce problème. La 2-forme duale à la 1-forme de la supergravité à cinq dimensions apparaît en effet en considérant la cohomologie de Chevalley de l'algèbre sur laquelle est construite la théorie, et où sont présents les fermions comme la gravitation.

L'étude de la réduction à deux dimensions des théories considérées pourrait s'avérer fructueuse. En effet, les groupes qui interviennent sont alors simplement des groupes de Kac-Moody affines, bien connus, et d'autre part les champs qui interviennent sont simples puisque ce sont seulement des scalaires. Ajoutons que la gravitation n'y est pas dynamique — le graviton n'a aucun degré de liberté — ce qui pourrait simplifier la question.

En outre, nous avons tronqué les superalgèbres de dimension infinie que nous avons, d'une part à leur sous-groupe de Borel, et d'autre part aux générateurs de degrés inférieurs à un certain entier, qui sont en nombre fini. Y a-t-il moyen de donner un sens aux autres générateurs ? La troncature que

nous avons opérée est liée au fait que les formes différentielles n'existent qu'en degré positif et inférieur ou égal à la dimension de l'espace-temps ; mais, si on passe à un superspace, cette contrainte est relâchée : on peut y introduire des formes de degré supérieur à la dimension de l'espace-temps, ou même de degré négatif. Là encore, cela permettrait peut-être d'inclure les fermions dans la discussion. On pourrait même éventuellement donner un sens à une partie plus grande du supergroupe et découvrir ainsi de nouvelles symétries cachées de la théorie.

Ajoutons que certains [We] ont postulé une symétrie E_{11} pour la théorie M non compactifiée, E_{11} étant l'algèbre de U-dualité apparaissant si l'on compactifie en dimension zéro. Il est alors tentant d'émettre l'hypothèse que les superalgèbres de dimension infinie que nous avons introduites puissent de même être des symétries de la théorie M non compactifiée.

Bibliographie

- [A] S. ARAKI, On Root Systems and an Infinitesimal Classification of Irreducible Symmetric Spaces, *Journal of Mathematics, Osaka City University*, **13** (1962) 1.
- [B] R. BORCHERDS, Generalized Kac-Moody Algebras, *J. of Algebra* **115** (1988) 501 [<http://www.dpmms.cam.ac.uk/~reb/papers/>].
- [C] E. CREMMER, Supergravities in 5 Dimensions, *Invited paper presented at the Nuffield Gravity Workshop, Cambridge, Eng., Jun 22 – Jul 12, 1980*, Cambridge University Press.
- [CDF] L. CASTELLANI, R. D'AURIA, P. FRÉ, Seven Lectures on the Group-manifold Approach to Supergravity and the Spontaneous Compactification of Extra Dimensions, *XIX Winter School on Theoretical Physics*, Karpacz, Pologne, février 1983.
- [CE] C. CHEVALLEY, S. EILENBERG, Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948) 85.
- [CJLP1] E. CREMMER, B. JULIA, H. LÜ, C. N. POPE, Dualisation of Dualities II: Twisted Self-duality of Doubled Fields and Superdualities, *Nucl. Phys.* **B535** (1998) 242 [arXiv: hep-th/9806106].
- [CJLP2] E. CREMMER, B. JULIA, H. LÜ, C. N. POPE, Higher-dimensional Origin of $D = 3$ Coset Symmetries [arXiv: hep-th/9909099].
- [CJS] E. CREMMER, B. JULIA, J. SCHERK, Supergravity Theory in Eleven Dimensions, *Phys. Lett.* **B76** (1978) 409.
- [Deb] O. DEBARRE, Higher-dimensional Algebraic Geometry, *Universitext*, Springer (2001).
- [Dem] M. DEMAZURE, Surfaces de Del Pezzo, *in Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Lecture Notes in Mathematics* **777**, Springer (1980).
- [DF] R. D'AURIA, P. FRÉ, Geometric Supergravity in $D = 11$ and its Hidden Supergroup, *Nucl. Phys.* **B201** (1982) 101. Erratum *ibid.* **206** (1982) 496.

- [DFMR] R. D'AURIA, P. FRÉ, E. MAINA, T. REGGE, Geometrical First Order Supergravity in Five Space-time Dimensions, *Annals Phys.* **135** (1981) 237.
- [DFR] R. D'AURIA, P. FRÉ, T. REGGE, Graded Lie Algebra Cohomology and Supergravity, *Riv. Nuovo Cim.* **3N12** (1980) 1.
- [dP1] P. DEL PEZZO, Sulle superficie dell'ordine n immerse negli spazi di $n + 1$ dimensioni, *Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli*, Sept. 1985.
- [dP2] P. DEL PEZZO, Sulle superficie dell' n^{no} ordine immerse nello spazio di n dimensioni, *Rend. del circolo matematico di Palermo* **1** (1887) 247.
- [DV] P. DU VAL, On Isolated Singularities of Surfaces which do not Affect the Conditions of Adjunction I,II,III, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **30** (1934) 453 and 483.
- [GH] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons Inc., New York (1994, réimpression de l'original de 1978).
- [GST] M. GUNAYDIN, G. SIERRA, P.K. TOWNSEND, Exceptional Supergravity Theories and the Magic Square, *Phys. Lett.* **B133** (1983) 72.
- [GSW] M. GREEN, J. SCHWARZ, E. WITTEN, Superstring Theory, Vol. 1 & 2, *Cambridge monographs on mathematical physics*, Cambridge University Press (1987).
- [H] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, *Graduate Texts in Mathematics* **52**, Springer-Verlag, New York (1977).
- [HJP1] P. HENRY-LABORDÈRE, B. JULIA, L. PAULOT, Borchers Symmetries in M-Theory, *JHEP* **04** (2002) 049 [arXiv: hep-th/0203070].
- [HJP2] P. HENRY-LABORDÈRE, B. JULIA, L. PAULOT, Real Borchers Superalgebras and M-Theory, *JHEP* **04** (2003) 060 [arXiv: hep-th/0212346].
- [HW] F. HIDAKA, K. WATANABE, Normal Gorenstein Surfaces with Ample Anti-canonical Divisor, *Tokyo J. Math.* **4 n° 2** (1981) 319.
- [INV] A. IQBAL, A. NEITZKE, C. VAFA, A Mysterious Duality (2001) [arXiv: hep-th/0111068].
- [J] B. JULIA, Group Disintegrations, *Invited paper presented at the Nuffield Gravity Workshop, Cambridge, Eng., Jun 22 - Jul 12, 1980*, Cambridge University Press.

- [LLPS] I.V. LAVRINENKO, H. LÜ, C.N. POPE, K.S. STELLE, Superdualities, Brane Tensions and Massive IIA/IIB Duality, *Nucl. Phys.* **B555** (1999) 201 [arXiv: hep-th/9903057].
- [M] YU. I. MANIN, Cubic Forms: Algebra, Geometry, Arithmetic, North-Holland, Amsterdam (1974).
- [MZ1] M. MIYANISHI, D.-Q. ZHANG, Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one, *J. of Algebra* **118** (1988) 63-84.
- [MZ2] M. MIYANISHI, D.-Q. ZHANG, Gorenstein log del Pezzo surfaces, II, *J. of Algebra* **156** (1993) 183-193.
- [OP] N. A. OBERS, B. PIOLINE, U-duality and M-theory, *Phys. Rep.* **318** (1999) 113 [arXiv: hep-th/9809039].
- [P] J. POLCHINSKI, String Theory, Vol. I & II, *Cambridge monographs on mathematical physics*, Cambridge University Press (1998).
- [Ra] U. RAY, A Character Formula for Generalized Kac-Moody Algebras, *J. of Algebra* **177** (1995) 154.
- [R1] M. REID, Nonnormal del Pezzo Surfaces (1994) [arXiv: alg-geom/9404002].
- [R2] M. REID, Chapters on Algebraic Surfaces (1996) [arXiv: alg-geom/9602006].
- [Sc] B. SCHELLEKENS, Introduction to String Theory (2001) [<http://www.nikhef.nl/~t58/lectures.html>].
- [Sl] R. SLANSKY, An Algebraic Role for Energy and Number Operators for Multiparticle States, *Nucl. Phys.* **B389** (1993) 349.
- [St] K. STELLE, BPS Branes in Supergravity (1998) [arXiv: hep-th/9803116].
- [Su] D. SULLIVAN, Infinitesimal Computations in Topology, *Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **47** (1977).
- [vN] P. VAN NIEUWENHUIZEN, Supergravity, *Phys. Rep.* **68** (1981).
- [Wa] C. T. C. WALL, Real Forms of Smooth del Pezzo Surfaces, *J. reine angew. Math.* **375-76** (1987) 47.
- [We] P. C. WEST, E_{11} and M-Theory, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 4443 [arXiv: hep-th/0104081].