Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides

Thomas Corpetti

▶ **To cite this version:**

Thomas Corpetti. Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Rennes 1, 2002. Français. NNT : . tel-00005351

HAL Id: tel-00005351
https://theses.hal.science/tel-00005351

Submitted on 15 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N^o d'ordre : 2691

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de : ***DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I***

Mention : Traitement du Signal et Télécommunications

par

Thomas Corpetti

Équipe d'accueil : Vista (Irisa, Rennes)

École doctorale : Mathématiques, Informatique, Signal, Électronique et Télécommunications

Composante Universitaire : SPM

Titre de la thèse :

Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides.

Soutenue le 9 juillet 2002, devant la commission d'examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	Henri	MAÎTRE	Président du jury
Mme	Françoise	PRÊTEUX	Rapporteurs
M.	Luis	ALVAREZ LEÓN	
MM.	Patrick	BOUTHEMY	Examinateurs
	Étienne	MÉMIN	
	Patrick	PÉREZ	
M.	Georges	ARROYO	Membre invité

Ai il mio nonno Côme e la mia nonna Carmen

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée à l'Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires, au sein du projet Vista.

Je tiens à remercier Henri Maître, Professeur à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à Françoise Prêteux, Professeur à l'Institut National des Télécommunications, et à Luis Alvarez León, Professeur à l'Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, d'une part pour avoir accepté de rapporter ce travail avec rigueur et intérêt et d'autre part pour la convivialité et la sympathie qu'ils ont su dégager le jour de la soutenance. *Muchas gracias al señor Luis Alvarez por haber venido desde tan lejos.*

Je souhaite remercier Patrick Bouthemy, Directeur de Recherche INRIA et responsable du Projet Vista, pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour son rôle d'examinateur dans ce jury de thèse.

Merci également à Georges Arroyo, du Cemagref de Rennes, pour avoir participé à ce jury de thèse en sa qualité de mécanicien des fluides. Je profite de l'occasion pour remercier l'ensemble des membres du Cemagref de Rennes et en particulier Dominique Heitz et Alina Santa-Cruz, avec qui la collaboration fut fructueuse et très agréable à entreprendre.

Que Patrick Pérez, chercheur au centre de Microsoft à Cambridge, reçoive mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a su porter à ce travail tout au long de cette thèse et lors de la phase de rédaction du document, et ce malgré la distance.

Enfin, je ne sais comment exprimer de manière simple, sincère et originale, tout le plaisir que j'ai eu à travailler sous la tutelle d'Étienne Mémin. Ces trois années de collaboration scientifique furent très riches et agréables, et son intérêt pour ce travail a été sans faille. Je dois également souligner que j'ai beaucoup apprécié son côté humain, ce qui me laisse un excellent souvenir de cette expérience.

Un merci particulier à Edith Blin et Stéphanie Lemaile pour le soutien administratif et logistique. Que les membres du projet Vista et les amis de l'Irisa soient également remerciés pour leur convivialité. Je souhaiterais particulièrement saluer Pierre Hellier et Nicolas Courty pour les "pizz' du vendredi". Plus précisément, je remercie le premier pour avoir su me conseiller et me guider dans mon travail (mais aussi un peu dans ma vie) au travers son regard, son expérience et son esprit d'analyse pertinent. Pour le second, que dire de mon fidèle compagnon de route avec qui je travaillais déjà les TP informatiques voilà 8 ans, que dire de mon fournisseur officiel d'affiches, que dire d'autre sinon que cette expérience commune est unique et qu'il m'a apporté beaucoup[1].

Merci également à Anthony, Isabelle, Nathalie, François, Angélique, Hélène et ma mère pour avoir accepté de jouer aux "correcteurs non-automatiques d'orthographe". Une mention toute particulière aux trois dernières pour lesquelles l'aspect traitement d'images n'est pas familier et pour lesquelles la tâche effectuée n'a pas du être passionnante.

Merci aussi à mes parents, mes frères et mes grands-parents.

Ce travail a occupé plus de trois années de ma vie. Je ne peux m'empêcher de citer tous ceux qui m'ont entouré et qui, d'une manière indirecte (mais certaine) ont participé à son aboutissement. Ainsi, la page suivante leur est dédiée. Néanmoins, je me dois de saluer chaleureusement ici l'ensemble de la famille Grimault (Dédé, Claudine, André, Paulette, Cécile, Olivier, Lucile, Laurent, Hélène, Émilie, François, Maurice, Hélène, Anne-Claire, Armelle, Marie-Paul, Joël et toute la smala de la Grande-Batrie) pour m'avoir toujours ouvert leur porte, pour m'avoir toujours gardé une place aux fêtes de famille et pour m'avoir même fait une chambre (parfois empruntée) à La Pommeraye. Leur présence, dans les bons mais aussi dans les difficiles moments que j'ai traversés, a été précieuse et je ne sais comment les remercier. Un merci particulier à Laurent Grimault et Hélène Tillaut à qui je dois tout cela.

1. "..."

Quelques remerciements en vrac que je me dois de faire car tellement de monde m'a marqué, entouré, conseillé, amusé, consolé, ... pendant ces trois années. Merci

- à Laurent Grimault, Hélène Tillaut, Didier Clémot, Angélique Davenel, Étienne Laurent, Gwenn Hivert, David Paulet, Armelle Eloy, Nicolas Courty et Margo Rozet pour tout et en particulier pour avoir accepté (ou pour certains qui acceptent encore), pendant qu'ils habitaient Rennes, d'entendre parler au quotidien des mouvements fluides ;
- à Ronan Moalic, Loïc Picot, Laurent Le Moullec, Mathilde Gay, Jérôme Larrière, Rodolphe Marie, Cédric Conversin, Julien Abgrall, Antoine Chabert, Nadège Leroy, Hélène Berrier, Gaël Le Rouzo, Erwann Guillautin, Sandrine Coquet (j'ai peur d'en oublier) pour tout et en particulier pour avoir accepté, pendant les Week-Ends, d'entendre parler des mouvements fluides ;
- à mes amis du Sénégal, que je vois moins mais que je revois systématiquement avec plaisir, et qui ont également entendu parler de mouvements fluides ;
- à Armelle, Didier, Angélique, Ronan, Laurent, Rodolphe, Jérôme, Mouloud (les noms de famille sont les mêmes que les items précédents) pour avoir organisé un super pot de thèse ;
- à Armelle Eloy pour avoir repassé la chemise de ma soutenance le 8 juillet 2002 ;
- à Marie-Paul Grimault et Maurice Guitteny pour s'être déplacés jusqu'à Rennes afin de venir à la soutenance ;
- à Ronan Fablet pour les agréables moments partagés dans le bureau ;
- à Carine Hue, Tanguy Urvoy (et leur poupousse), aux "cailles-ra" du RU de l'Irisa (Fab, Romain, Tangi, Thomas et les autres), au bureau du bonheur, à Pierrette, Laurence et Dany pour la bonne humeur de la cafet ;
- au collectif FLOCHE pour l'organisation des irrésistibles "Tracto-Boums" ;
- à Loïc Picot, Florence Busnot, Stéphane Richard et Christophe Quinchez pour avoir organisé la "fête des amis des amis" ;
- à Didier, Angélique et moi-même pour avoir organisé la "fête des revendications" ;
- à David Paulet, Ronan Moalic et Loïc Picot pour les sorties en bateau et pour les fêtes des fruits de mer ;
- aux barbecues du 12 rue Provost ;
- aux parents Paulet pour les WE à Larmor Plage ;
- aux parents Laurent pour les WE à La Trinité ;
- aux parents Tillaut pour le magnifique voyage à Grenade, pour les vacances dans les Pyrénées et pour les WE à Groix ;
- à Catherine pour avoir su me changer les idées ;
- aux poupousses trop mimi : Ewena, Matéo, Noémie, Adèle, François, Lucile et aux futurs à venir ;
- bref, à tout ceux qui égayent ma vie et qui ont forcément influencé à leur manière ce travail ;
- à tous ceux que j'ai oubliés.

Merci enfin à ceux qui m'ont soutenu pendant la difficile période de rédaction et à ceux qui m'ont bien aidé à en sortir.

Table des matières

Introduction générale **15**

1 Généralités sur les mouvements fluides **19**
1.1 Représentation d'un fluide en mouvement 19
1.1.1 Représentation Lagrangienne 19
1.1.2 Représentation Eulérienne 19
1.1.3 Passage de la représentation Eulérienne à la représentation Lagrangienne 20
1.1.4 Passage de la représentation Lagrangienne à la représentation Eulérienne 20
1.2 Les équations fondamentales 20
1.2.1 L'équation de continuité 21
1.2.2 Les équations de Navier-Stokes 21
1.3 Éléments de description 22
1.3.1 Quelques propriétés mathématiques 23
1.3.2 La divergence, la vorticité et le cisaillement 24
1.3.3 La décomposition de Helmholtz 26
1.3.4 Quelques courbes caractéristiques 26
1.3.5 Les fonctions de potentiel 30
1.3.6 Lien entre ces différentes descriptions 32
1.4 Conclusion 33

I Estimation dense du mouvement pour des situations d'imagerie fluide **35**

Introduction **37**

2 État de l'art sur les méthodes de mesure du mouvement **39**
2.1 Introduction 39
2.1.1 Importance du mouvement apparent 39
2.1.2 Un problème classique dans la mesure du mouvement : le problème de l'ouverture 40
2.2 Mesure du mouvement par corrélation 41
2.2.1 Idée fondatrice 41
2.2.2 Applications 43
2.2.3 Intérêts/limitations 44

2.3 Méthodes paramétriques . . . 44
2.3.1 Paramétrisation 2D . . . 45
2.3.2 Paramétrisation 3D . . . 45
2.3.3 Autres paramétrisations . . . 45
2.3.4 Intérêts/limitations . . . 46
2.4 Méthodes de flot optique : approche fondatrice de Horn & Schunck . . . 46
2.4.1 La conservation de la luminance . . . 46
2.4.2 Le terme de régularisation . . . 47
2.4.3 Discussion . . . 47
2.5 Régularisation avec préservation de discontinuités . . . 48
2.5.1 Un formalisme d'interprétation : la notion de "diffusion" . . . 49
2.5.2 Choix d'une fonction de régularisation . . . 53
2.5.3 Les fonctions semi-quadratiques . . . 56
2.5.4 Remarques . . . 58
2.5.5 Synthèse . . . 59
2.6 Régularisations spatio-temporelles . . . 59
2.7 Étude de mouvements particuliers . . . 60
2.7.1 Cas des mouvements articulés . . . 60
2.7.2 Cas des mouvements élastiques . . . 61
2.7.3 Cas des textures temporelles . . . 62
2.7.4 Cas des écoulements fluides . . . 62
2.8 L'étude du mouvement dans le domaine de la physique . . . 66
2.9 Discussion . . . 67

3 Méthode d'estimation dense du mouvement fluide 69
3.1 Introduction . . . 69
3.2 Position du problème . . . 70
3.3 Intégration d'une loi physique : l'équation de continuité . . . 71
3.3.1 Motivations . . . 71
3.3.2 De l'équation de continuité à la contrainte du flot optique . . . 72
3.3.3 Conditions d'application . . . 73
3.4 Régularisation div-curl . . . 75
3.4.1 Interprétation de la régularisation du premier ordre et problématique 75
3.4.2 Régularisation div-curl du second ordre . . . 77
3.4.3 Schéma de régularisation proposé . . . 77
3.5 Gestion des grands déplacements . . . 80
3.5.1 Version intégrée de l'équation de continuité . . . 81
3.5.2 Principe du schéma multirésolution incrémental . . . 82
3.5.3 Définition de la régularisation div-curl dans un cadre multirésolution 84
3.5.4 Conclusion partielle . . . 84
3.6 Choix des fonctions de pénalisation . . . 85
3.7 Minimisation . . . 86
3.7.1 Schéma de discrétisation . . . 86
3.7.2 Minimisation par rapport aux scalaires ξ et ζ . . . 88
3.7.3 Minimisation par rapport aux variables auxiliaires $z^{\boldsymbol{d}}$, z^{ξ} et z^{ζ} . . . 88

3.7.4 Minimisation par rapport au champ incrémental $\boldsymbol{h}$: approche multi-grille . . . 89
3.7.5 Synthèse . . . 92
3.8 Conclusion . . . 93

4 Résultats expérimentaux 95
4.1 Introduction . . . 95
4.2 Résultats sur des exemples synthétiques . . . 96
4.2.1 Comparaison de la méthode de régularisation à une régularisation classique du premier ordre . . . 96
4.2.2 Comparaison du terme d'observation à l'ECMA . . . 98
4.3 Résultats sur des exemples météorologiques . . . 101
4.3.1 Images issues du canal infrarouge . . . 101
4.3.2 Images issues du canal vapeur d'eau . . . 105
4.3.3 Remarques . . . 107
4.4 Validation qualitative . . . 108
4.4.1 Reconstruction de trajectoires . . . 108
4.4.2 Extraction de zones significatives de divergence et de vorticité . . . 108
4.5 Résultats en imagerie non-fluide . . . 110
4.6 Conclusion . . . 113

5 Validation en mécanique des fluides expérimentale : cas des "couches de mélange" 115
5.1 Introduction . . . 115
5.2 Les couches de mélange . . . 115
5.2.1 Définition . . . 115
5.2.2 Caractérisations . . . 117
5.3 Génération d'une couche de mélange . . . 119
5.4 Comparaisons expérimentales . . . 120
5.4.1 Conditions d'expérimentations . . . 120
5.4.2 Étude d'un déplacement instantané . . . 122
5.4.3 Étude sur un ensemble de déplacements . . . 126
5.5 Conclusion . . . 128

Conclusion 129

II Extraction de structures caractéristiques d'un écoulement fluide 131

Introduction 133

6 Détection et caractérisation de structures singulières : état de l'art 135
6.1 Singularités en imagerie fluide . . . 135
6.1.1 Importance des singularités dans l'interprétation d'un écoulement fluide . . . 135
6.1.2 Modèle mathématique du mouvement autour d'une singularité . . . 136
6.2 Techniques de détection de points singuliers . . . 137

6.2.1 Techniques s'appuyant sur un champ de vitesses . . . 139
6.2.2 Techniques s'appuyant sur une seule image . . . 141
6.3 Techniques d'extraction des domaines d'influence linéaires d'une singularité 144
6.3.1 Extraction précise de la zone d'influence . . . 144
6.3.2 Extractions basées sur des modèles linéaires . . . 146
6.4 Discussion . . . 148

7 Méthode d'analyse d'un champ de vitesses 151
7.1 Introduction . . . 151
7.2 Représentation complexe . . . 152
7.3 Séparation d'un champ de vitesses . . . 154
7.3.1 Étude de la composante laminaire . . . 154
7.3.2 Extraction des parties irrotationnelles et solénoïdales . . . 155
7.4 Estimation des fonctions de potentiels . . . 158
7.5 Extraction de points singuliers . . . 159
7.6 Choix d'un modèle . . . 160
7.6.1 Modèles s'appuyant sur des fonctions holomorphes . . . 161
7.6.2 Le modèle de Rankine pour les vortex et ses extensions . . . 163
7.7 Identification de modèles de Rankine à partir d'un champ de vitesses . . . 165
7.7.1 Cas d'un champ solénoïdal . . . 166
7.7.2 Cas d'un champ irrotationnel . . . 173
7.8 Robustesse au bruit . . . 174
7.9 Conclusion . . . 175

8 Résultats expérimentaux 177
8.1 Introduction . . . 177
8.2 Résultats sur un exemple synthétique . . . 177
8.3 Résultats sur des exemples réels . . . 180
8.3.1 Application à des déplacements obtenus avec l'estimateur de mouvement dédié . . . 180
8.3.2 Champ de déplacements fourni par l'Ifremer . . . 186
8.4 Influence du seuil de la distance de Bhattacharyya . . . 186
8.5 Comparaison à la méthode des indices de Poincaré . . . 190
8.6 Conclusion . . . 191

Conclusion 193

Conclusion générale 195

Annexes 199

A M-Estimateurs robustes 201

B Estimation du modèle paramétrique 203

C Intégration numérique pour la reconstruction de trajectoires 209

D Segmentation de zones significatives de divergence et de vorticité 211

E Dérivation par rapport au rayon de la fonction d'énergie du chapitre 7 213

F Analyse du mouvement par vélocimétrie 2D 215

Table des figures 219

Liste des tableaux 227

Bibliographie 228

Publications 247

Introduction générale

Motivations : intérêts de l'étude d'écoulements fluides

Le domaine des sciences physiques est particulièrement demandeur d'informations sur le mouvement de certains phénomènes en évolution. Les données de nature cinématique fournissent en effet de précieux outils d'analyse aux spécialistes. Citons quelques exemples :

- en météorologie, les données relatives aux *champs de vents* présents dans l'atmosphère sont fondamentales afin d'initialiser correctement les modèles numériques de prédiction du temps. Par ailleurs, nombre d'événements clés responsables de situations météorologiques particulières et potentiellement problématiques (tels que les centres de dépressions ou de tornades, les phénomènes convectifs traduisant d'abondantes pluies, ...) possèdent un mouvement bien caractéristique. La connaissance de ce mouvement autorise alors la détection, la prédiction et la localisation de telles situations critiques ;
- en océanographie, les thèmes de recherche sont très variés. Nous pouvons néanmoins noter que la connaissance des courants marins est souvent un indicateur pertinent. Par exemple, certaines espèces aquatiques possèdent une évolution géographique étroitement corrélée à l'évolution du courant de la mer. L'étude des courants océanographiques permet également de mieux appréhender les phénomènes d'érosion sur des zones côtières sensibles ;
- d'une manière générale, la recherche en matière de connaissance des phénomènes physiques à l'origine d'événements naturels extrêmes est essentielle. Notons par exemple que certaines études s'intéressent aux mouvements gravitaires rapides (conditions de formation et de propagation) tels les laves torrentielles, le charriage hyperconcentré ou les avalanches, ainsi qu'aux aléas hydroclimatiques (crues, étiages, ondes de submersion, ...). Ces thèmes définissent en particulier les missions du Cemagref[2]. Dans ce contexte, l'étude d'écoulements expérimentaux permet une meilleure modélisation ou compréhension de ces phénomènes. Par ailleurs, cela ouvre de multiples perspectives d'applications comme par exemple la décontamination d'environnements spécifiques dans un cadre agro-alimentaire ou médical. Le mouvement de ces écoulements fluides expérimentaux est bien évidemment le principal descripteur de la physique du phénomène étudié ;
- notons enfin que l'étude d'anomalies circulatoires en imagerie médicale (angiographie ou cardiologie) ou des déformations en imagerie cérébrale fournit aux cliniciens une

2. Institut public de recherche pour l'ingénierie de l'agriculture et de l'environnement. `http://www.cemagref.fr/`

source d'informations objectives aidant au diagnostic de certaines pathologies.

D'après ce panel non exhaustif, extraire et analyser l'information cinématique d'une scène est donc une étape clé dans sa compréhension. Dans la plupart des domaines concernés, les mouvements sous-jacents sont de nature fluide, tel que le vent, le courant marin, le flux sanguin, ... Ces mouvements seront le cadre de notre étude.

Contexte

L'accès à la composante cinématique du mouvement est un problème qui a été étudié sous plusieurs angles et un certain nombre de capteurs physiques dédiés permettent d'y accéder. Citons à titre d'exemple les méthodes de mesure par "fil chaud" en mécanique des fluides expérimentale qui permettent d'accéder à la composante cinématique d'un écoulement. Mentionnons également qu'en météorologie, des sondes spécifiques placées à certains endroits stratégiques de l'atmosphère mesurent la vitesse des vents. D'une manière générale, les techniques consistent à placer dans la scène à analyser un capteur particulier qui fournira l'information désirée.

Parmi les différentes familles existantes, les capteurs "images" ont l'immense avantage d'être peu onéreux, versatiles et non intrusifs. Avec les avancées techniques et théoriques que le domaine de l'imagerie numérique a connues ces deux dernières décennies, des études de plus en plus précises en Vision par Ordinateur sont envisageables. Dans ce contexte, l'analyse du mouvement dans des séquences d'images est un domaine qui, depuis longtemps, fait l'objet d'études diverses et variées. L'application de méthodes élaborées par le monde de la Vision par Ordinateur pour l'analyse de scènes physiques apparaît donc très attractive.

À l'heure actuelle, la plupart des techniques développées en Vision par Ordinateur s'avèrent limitées dans le cadre de notre étude. En effet, les méthodes usuelles d'analyse du mouvement ont été établies dans un cadre plus "classique" (analyse de scènes mettant en jeu des objets rigides et non déformables) et reposent sur des hypothèses qui sont parfois simplistes au regard de la physique des phénomènes que l'on est en mesure de rencontrer. Ainsi, dans le cadre des mouvements fluides, le besoin de développer des méthodes d'analyse du mouvement adéquates est particulièrement important en raison des nombreuses applications concernées. Depuis quelques années, la communauté de Vision par Ordinateur commence à se pencher sur la définition de méthodes dédiées à des images d'une telle nature. Ce document propose une étude dans ce sens.

D'après ce qui a été mentionné, deux étapes nous ont semblé primordiales pour analyser la cinématique d'une scène relatant un phénomène fluide :

1. la première concerne l'*estimation du mouvement*. Il s'agit d'extraire un champ dense des vitesses, c'est à dire de fournir à chaque pixel de l'image le vecteur représentatif du déplacement du fluide visualisé ;
2. la seconde étape consiste alors à *analyser un tel champ*, d'une part en localisant l'ensemble des structures clés qui y sont présentes et d'autre part, en fournissant à l'utilisateur le maximum d'informations relatives au déplacement.

Le figure FIG.0.1 résume les traitements proposés dans cette étude.

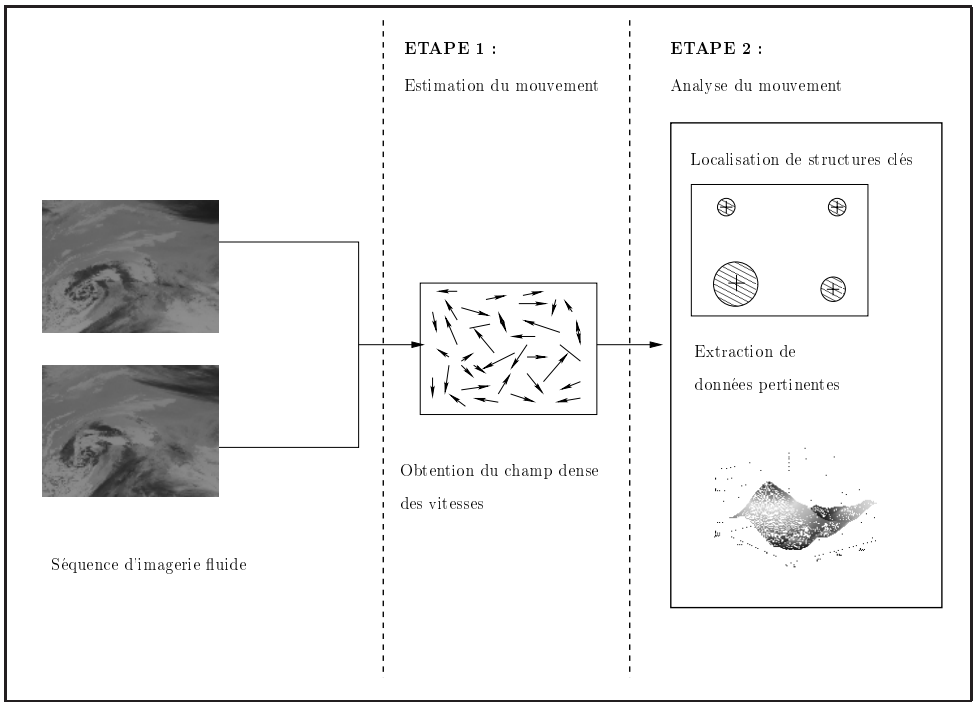


FIG. 0.1 – **Structuration de ce document.** *Deux étapes sont à réaliser.*

Plan du document

Étant donné le contexte de cette étude, un certain nombre de notions issues de la mécanique des fluides seront employées tout au long de ce document. Nous proposons donc, dans un chapitre préliminaire, de décrire de façon non exhaustive quelques aspects des écoulements fluides qui seront par la suite utiles.

Ce document sera alors articulé autour des deux principaux axes mentionnés précédemment : l'estimation du mouvement et l'analyse d'un champ dense de déplacements. Bien que la seconde partie soit la suite de la première, elles peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre.

Estimation du mouvement

Le but de cette partie sera de développer une méthode permettant d'obtenir une carte dense des vitesses instantanées à partir de deux images représentant l'évolution d'un écoulement fluide.

Pour cela, nous consacrerons dans un premier temps un chapitre présentant le problème de la mesure du mouvement tel qu'il est traité en Vision par Ordinateur. Un certain nombre de remarques issues de ce chapitre nous conduiront à proposer une méthode d'estimation dense dédiée au mouvement fluide. Plus précisément, il sera question d'intégrer des notions issues de la mécanique des fluides dans des méthodes de "flot optique" définies dans un contexte générique. Ensuite, la méthode sera comparée à une approche standard sur un certain nombre d'exemples synthétiques et réels issus d'images météorologiques[3]. Enfin, un

3. Provenant du satellite de Météosat, fournies par Météo-France et le Centre de Météorologie Spatiale

chapitre plus spécifique proposera une validation du point de vue de la mécanique des fluides expérimentale sur un écoulement représentant une "couche de mélange". Les résultats fournis seront analysés selon un point de vue spécifique à la mécanique des fluides expérimentale et seront comparés à une technique de mesure du mouvement communément employée dans ce domaine.

Analyse d'un champ de déplacements

Dans la seconde partie, l'intérêt sera porté sur l'analyse d'un champ de déplacements représentatif d'un écoulement fluide. Le problème traité sera l'extraction et la caractérisation de l'ensemble des singularités de l'écoulement, ainsi que la représentation paramétrique du champ de déplacements.

Nous présenterons tout d'abord un état de l'art sur les techniques d'extraction et de caractérisation de singularités. Puis, selon les conclusions de ce chapitre, nous suggérerons alors une méthode originale d'analyse d'un champ de vitesses. L'approche proposée, qui s'appuiera sur l'estimation de fonctions de potentiels et sur un modèle particulier, permettra par ailleurs d'extraire d'autres informations pertinentes du point de vue de la mécanique des fluides. Enfin, une série d'expérimentations sur des champs de déplacements issus de différents domaines applicatifs sera présentée pour étudier les performances de l'approche proposée.

Dans la conclusion générale, une synthèse de cette étude sera présentée. Nous proposerons par ailleurs quelques perspectives liées à ces travaux.

de Lannion

Chapitre 1

Généralités sur les mouvements fluides

Le but de ce premier chapitre est d'introduire certaines notions sur les écoulements fluides. Issues des lois de la mécanique, les descriptions abordées ici ne sont pas exhaustives et ont étés choisies afin de présenter clairement certains aspects qui seront utilisés dans la suite de ce document. Le lecteur trouvera des approches complètes et détaillées dans divers ouvrages d'introduction à la mécanique des fluides. On peut par exemple se référer à [Bonnet 89,Boudet 96,Chorin 79].

1.1 Représentation d'un fluide en mouvement

Il existe deux principaux modes de représentation d'un fluide en mouvement qui sont la représentation de Lagrange et la représentation d'Euler.

1.1.1 Représentation Lagrangienne

La représentation de Lagrange s'intéresse à l'évolution d'une particule d'un fluide en déplacement. Divers efforts agissent sur celle-ci, et son passage d'un état initial en (x_0,y_0,z_0) à l'instant t_0, à une position (x,y,z) à l'instant t est donné par :

$$\begin{cases} x = f(x_0,y_0,z_0,t) \\ y = g(x_0,y_0,z_0,t) \\ z = h(x_0,y_0,z_0,t), \end{cases} \tag{1.1}$$

où f, g et h sont trois fonctions qui décrivent l'évolution des positions x, y et z. On notera $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$.

1.1.2 Représentation Eulérienne

Une deuxième façon de décrire l'évolution d'un fluide est d'utiliser la représentation d'Euler. À l'inverse de la représentation de Lagrange, on ne s'intéresse plus à l'évolution d'une particule à un instant t mais à l'évolution de certains paramètres en fonction du

temps, en chaque position $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$. Par exemple, il est courant de s'intéresser aux paramètres (u,v,w) représentatifs de la vitesse $\boldsymbol{V}$. Dans ce cas, on note :

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix} u(x,y,z,t) \\ \\ v(x,y,z,t) \\ \\ w(x,y,z,t) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Cette interprétation décrit alors la variation de la vitesse $\boldsymbol{V}$ dans l'espace représenté par les variables x, y et z à l'instant t fixé.

1.1.3 Passage de la représentation Eulérienne à la représentation Lagrangienne

Pour déterminer la trajectoire de chaque particule du fluide connaissant sa vitesse $\boldsymbol{V}$, il faut résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{V}(t) \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = u(x,y,z,t) \\ \\ \frac{\partial g(t)}{\partial t} = v(x,y,z,t) \\ \\ \frac{\partial h(t)}{\partial t} = w(x,y,z,t), \end{cases} \tag{1.3}$$

connaissant la valeur $\boldsymbol{V}(x_0,y_0,z_0,t_0)$ que prend $d\boldsymbol{x}/dt$ à l'instant t_0. Ceci suppose que la vitesse $\boldsymbol{V}$ soit continue.

1.1.4 Passage de la représentation Lagrangienne à la représentation Eulérienne

Connaissant l'évolution d'une particule de fluide située initialement en $\boldsymbol{x}_0$ et décrite par la représentation de Lagrange (relation (1.1)), le champ des vitesses tridimensionnelles $\boldsymbol{V} = (u,v,w)$ est alors :

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} u = \frac{\partial f}{\partial t}(x_0,y_0,z_0,t) \\ \\ v = \frac{\partial g}{\partial t}(x_0,y_0,z_0,t) \\ \\ w = \frac{\partial h}{\partial t}(x_0,y_0,z_0,t) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

1.2 Les équations fondamentales

Plusieurs équations fondamentales permettent de décrire l'évolution d'un fluide au cours du temps. Nous présentons ici l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes.

1.2.1 L'équation de continuité

L'équation de continuité de la mécanique des fluides s'appuie sur l'hypothèse de conservation de la masse : la quantité de matière d'un fluide en déplacement ne change pas entre les instants t et $t+dt$. La masse m d'un fluide à l'instant t de densité ρ s'exprimant :

$$m(t) = \iiint_{\tau(t)} \rho(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}, \tag{1.5}$$

nous pouvons écrire l'hypothèse de conservation de la masse $\frac{dm}{dt} = 0$ par :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\tau(t)} \rho(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.6}$$

D'après les théorèmes mathématiques de dérivation du volume (voir par exemple [Bonnet 89] pour une description), nous avons (en utilisant l'opérateur de divergence 3D défini pour un vecteur $\boldsymbol{U} = (u_1,u_2,u_3)^T$ par div $\boldsymbol{U} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$) :

$$\iiint_{\tau(t)} \Big[\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{V})\Big]d\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.7}$$

L'expression précédente étant valable quel que soit le domaine $\tau(t)$ d'évolution du fluide, la relation différentielle suivante doit être vérifiée en chaque point :

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{V}) = 0. \tag{1.8}$$

Ceci est l'*équation de continuité*. Dans le cas d'un fluide est incompressible, l'équation de continuité devient :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 0 \tag{1.9}$$

à tout instant t.

1.2.2 Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues en effectuant un bilan des forces appliquées sur le fluide (forces de gravité, de pression et de viscosité) et en appliquant la loi de Newton (force = masse × accélération). Pour une description détaillée, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [Boudet 96,Chorin 79,Lesieur 94].

Ces équations permettent de formuler l'évolution temporelle de la vitesse d'un fluide. Dans le cas d'un fluide incompressible, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\ \boldsymbol{V} = 0 \\ \rho\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho K - \boldsymbol{\nabla} p + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V}, \end{cases} \tag{1.10}$$

avec,

- $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)^T$: opérateur de gradient tridimensionnel ;

- $\boldsymbol{\nabla}^2 = (\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)^T$;
- ρ : masse volumique du fluide ;
- K : force extérieure appliquée à une masse unitaire de fluide ;
- p : pression ;
- μ : coefficient de viscosité cinématique propre au fluide ;
- $\boldsymbol{V}$: la vitesse tridimensionnelle du fluide.

Ce système d'équations non-linéaire comporte quatre équations aux dérivées partielles dont trois au second ordre pour la détermination de trois ou quatre inconnues : les vitesses (u,v,w) et parfois la pression p. De ce fait, même dans un cas incompressible qui est un cas simplifié des équations générales d'évolution, résoudre ces équations pour simuler le mouvement d'un fluide est un vaste problème. Ceci fait actuellement l'objet de larges études et l'émergence de nouvelles techniques comme la Simulation des Grandes Échelles (SGE) permet d'obtenir de convenables simulations d'écoulements incompressibles, sous réserve de disposer de machines de calcul intensif. Dans le cas où le fluide est compressible, le système de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho K - \boldsymbol{\nabla} p + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V} + \frac{1}{3} \mu \boldsymbol{\nabla} \mathrm{div}\ \boldsymbol{V}. \tag{1.11}$$

En raison de la complexité supplémentaire introduite par les termes différentiels d'ordre deux résultant de $\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\ \boldsymbol{V}$, les études menées sur le système (1.11) s'avèrent plus délicates.

Les équations de Navier-Stokes présentées en (1.10) et (1.11) permettent de formuler de manière exacte l'évolution d'un fluide en fonction de ses conditions initiales (forces extérieures, pression, masse volumique) et de son coefficient de viscosité cinématique. Elles sont donc incontournables et sont la base de nombre de travaux. Cependant, leur résolution étant numériquement très complexe, seuls des écoulements particuliers peuvent à l'heure actuelle être simulés.

1.3 Éléments de description

L'objet de cette étude étant l'analyse d'écoulements visualisés dans une image, nous ne disposerons que d'une résultante 2D de leurs évolutions réelles. Si ces écoulements sont bidimensionnels (*i.e.* leurs évolutions restent dans un plan), ils pourront être complètement décrits par la voie de l'image, sous condition que le système de visualisation soit correctement positionné. En revanche, s'ils sont tridimensionnels, alors nous ne visualiserons soit que leurs projections 2D dans le plan de l'image, soit uniquement un plan de coupe de cet écoulement, selon la technique de visualisation employée.

Du point de vue de l'analyse du mouvement, chacune de ces situations conduira à un champ de vitesses plan $\boldsymbol{v}$ défini sur un support Ω de forme rectangulaire. Nous notons une telle vitesse $\boldsymbol{v}(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t))^T$ (x et y étant les coordonnées spatiales et t la variable temporelle). Tout au long de ce document, nous supposerons que les composantes $u(x,y,t)$ et $v(x,y,t)$ seront de classe $\mathcal{C}^2$.

Cette section présente en préambule certaines propriétés mathématiques du support Ω et des champs de déplacements bidimensionnels. Il sera ensuite successivement décrit les mesures de divergence, de vorticité et de cisaillement (scalaires issus de dérivées d'un champ de vecteurs), la décomposition de Helmholtz, quelques courbes caractéristiques et les fonctions de potentiels (scalaires issus de l'intégration du champ).

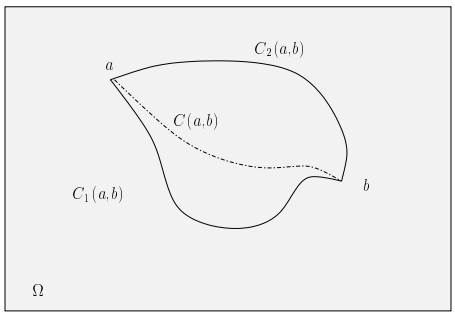


FIG. 1.1 – **Le support Ω est simplement connexe** *: toute courbe $C_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ joignant $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ se déforme uniformément en $C_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tout en restant dans Ω.*

1.3.1 Quelques propriétés mathématiques

Lorsque l'intérêt est porté sur un champ de vitesses à un instant t figé, ce champ sera dit *instantané*. Si un écoulement fluide n'est pas stationnaire, alors ses vitesses instantanées à un endroit donné varient au cours du temps. En revanche, s'il est stationnaire, alors ses vitesses instantanées sont constantes quel que soit le temps t. Dans ce paragraphe, les propriétés mathématiques sont définies pour des champ instantanés. Nous choisissons donc d'omettre l'indice de temps t pour une meilleure clarté.

Domaine de définition d'un champ de vitesses

Un support $\mathcal{D}$ est dit simplement connexe si pour tout couple de points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de $\mathcal{D}$, il est possible de déformer uniformément une courbe $C_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ joignant $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ en une courbe $C_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ de telle façon que la courbe déformée $C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ reste dans $\mathcal{D}$. Ainsi, pour un champ de déplacements défini sur l'ensemble d'une image Ω, son domaine de définition est simplement connexe, comme l'illustre la figure FIG.1.1.

La formule de Green-Riemann

Pour un espace Ω_1 simplement connexe, la *formule de Green-Riemann* stipule que pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (u(x,y),v(x,y))^T$ (u et v étant de classe $\mathcal{C}^2$), nous avons :

$$\iint_{\Omega_1} (\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}) dxdy = \oint_{\partial\Omega_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{m} = \oint_{\partial\Omega_1} u(x,y)dx + v(x,y)dy, \qquad (1.12)$$

où $\partial\Omega_1$ est la courbe formant la frontière de l'espace Ω_1 et $d\boldsymbol{m}$ est un vecteur tangent en un point $\boldsymbol{m}$ de la courbe $\partial\Omega_1$.

Le théorème de la divergence

De manière duale, pour un espace Ω_1 simplement connexe, le *théorème de la divergence* stipule que pour tout champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (u(x,y),v(x,y))^T$ (u et v étant de classe $\mathcal{C}^2$),

nous avons :

$$\iint_{\Omega_1} (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}) dxdy = \oint_{\partial\Omega_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{n} = \oint_{\partial\Omega_1} v(x,y)dx - u(x,y)dy, \tag{1.13}$$

où $d\boldsymbol{n}$ est un vecteur normal en un point $\boldsymbol{n}$ de la courbe $\partial\Omega_1$.

La circulation

Pour un champ de vitesses $\boldsymbol{v}$, il est possible de définir sa circulation le long d'une courbe $C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ joignant deux points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de Ω. Elle est notée $I_C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ et est définie par :

$$I_C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \oint_{C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{m}. \tag{1.14}$$

Il en découle immédiatement la propriété $I_C(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -I_C(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$.

1.3.2 La divergence, la vorticité et le cisaillement

Il existe certaines mesures quantitatives descriptives, définies à partir de dérivées partielles des composantes $u(x,y)$ et $v(x,y)$ d'un champ instantané 2D. Parmi ces mesures, on trouve :

- la *divergence* (notée div $\boldsymbol{v}(x,y)$) et la *vorticité* (ou encore le *rotationnel* ou bien le *curl*, notée curl $\boldsymbol{v}(x,y)$) :

$$\begin{cases} \text{div } \boldsymbol{v}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \text{curl } \boldsymbol{v}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y); \end{cases} \tag{1.15}$$

- deux termes de *cisaillement* dit *hyperboliques* (notés $\text{hyp}_1\ \boldsymbol{v}(x,y)$ et $\text{hyp}_2\ \boldsymbol{v}(x,y)$) :

$$\begin{cases} \text{hyp}_1\ \boldsymbol{v}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \text{hyp}_2\ \boldsymbol{v}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y). \end{cases} \tag{1.16}$$

Un champ à vitesse purement divergente caractérise un "puits" (si la divergence est négative) ou une "source" (si la divergence est positive). Un champ à vorticité non nulle représente un mouvement de rotation. Les termes hyperboliques caractérisent quant à eux des mouvements plus complexes. Les quatre champs générés par chacun des descripteurs de (1.15) et de (1.16) sont représentés sur la figure FIG.1.2.

Il est intéressant de signaler que la divergence et la vorticité sont définis dans un cadre tridimensionnel, par :

$$\begin{cases} \text{div } \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}, \\ \text{curl } \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V}, \end{cases} \tag{1.17}$$

où $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$ est l'opérateur de gradient 3D.

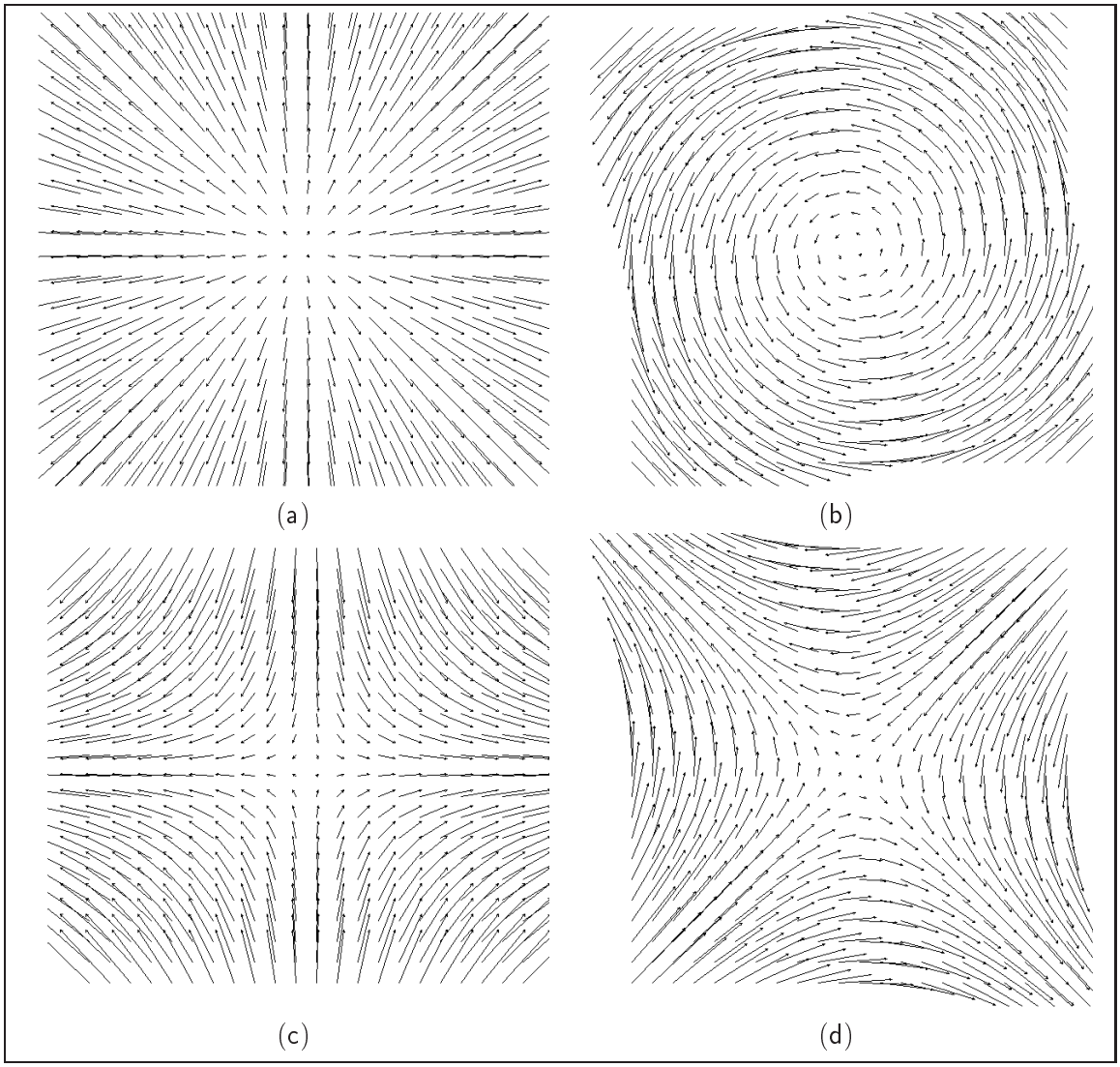


FIG. 1.2 – **Représentation de quatre mouvements typiques** *: (a) : champ divergent ; (b) champ rotationnel ; (c) et (d) : champs hyperboliques*

Lorsqu'un champ est à divergence nulle, on dira que celui-ci est *solénoïdal*. Lorsque sa composante de vorticité est nulle, on le qualifiera d'*irrotationnel*. Lorsqu'un champ est simultanément irrotationnel et solénoïdal, on parlera alors d'un champ à composante *laminaire*.

1.3.3 La décomposition de Helmholtz

La décomposition de Helmholtz est définie pour tout champ de vitesses $\boldsymbol{v}$. Elle consiste à le séparer en une composante irrotationnelle et une composante solénoïdale :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{irr} + \boldsymbol{v}_{sol}, \tag{1.18}$$

avec div $\boldsymbol{v}_{sol}$ = curl $\boldsymbol{v}_{irr} = 0$. Mathématiquement, une telle décomposition est non unique et nécessite d'imposer des conditions aux bords. Afin de définir celles-ci, il est possible de supposer que le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$ soit nul à l'infini.

Pour être physiquement plausible, une telle condition aux bords suppose que la composante laminaire du champ des vitesses soit très faible. Cette composante représente en effet le "transport global" qui conduit l'écoulement et est relativement uniforme. Si le champ laminaire est important, alors sa valeur à l'infini risque d'être non nulle. Ainsi, il est utile de retrancher au champ global $\boldsymbol{v}$ sa composante laminaire $\boldsymbol{v}_{lam}$. Dans ce document, le champ résultant, noté $\boldsymbol{v}_{rec}$, portera le nom de champ "recalé" [1]. On définit alors la décomposition de Helmholtz étendue par :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{irr} + \boldsymbol{v}_{sol} + \boldsymbol{v}_{lam}, \tag{1.19}$$

où div $\boldsymbol{v}_{lam}$ = curl $\boldsymbol{v}_{lam} = 0$. La décomposition peut alors être effectuée de manière unique et physiquement cohérente sur le champ $\boldsymbol{v}_{rec} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{lam}$ avec des conditions aux bords nulles à l'infini.

Du point de vue de la mécanique des fluides, cette manipulation est également significative. En effet, certains écoulements possèdent une composante laminaire nettement plus importante que les composantes irrotationnelles et/ou solénoïdales. Dans ce contexte, certaines structures pertinentes de l'écoulement sont invisibles car "noyées" dans son transport global. La figure Fig.1.3 illustre ce principe : sur le champ initial, aucun mouvement caractéristique n'est perceptible tandis que sur le champ recalé, nous observons des phénomènes solénoïdaux pertinents. Ceci prouve que retrancher la composante laminaire au champ des déplacements permet d'une part de supposer des conditions aux bords nulles à l'infini pour la décomposition de Helmholtz et d'autre part, d'obtenir un champ de déplacements $\boldsymbol{v}_{rec}$ significatif.

1.3.4 Quelques courbes caractéristiques

Les lignes de courant

Les lignes de courant sont définies pour un champ de vitesses instantané $\boldsymbol{v} = (u,v,t_a)^T$ à un instant t_a fixé. Une ligne qui en tous ses points admet pour tangente la vitesse en ce point est appelée *ligne de courant*. En notant ds un élément de l'abscisse curviligne le long

1. Notons que cette terminologie est propre à l'analyse du mouvement en Vision par Ordinateur.

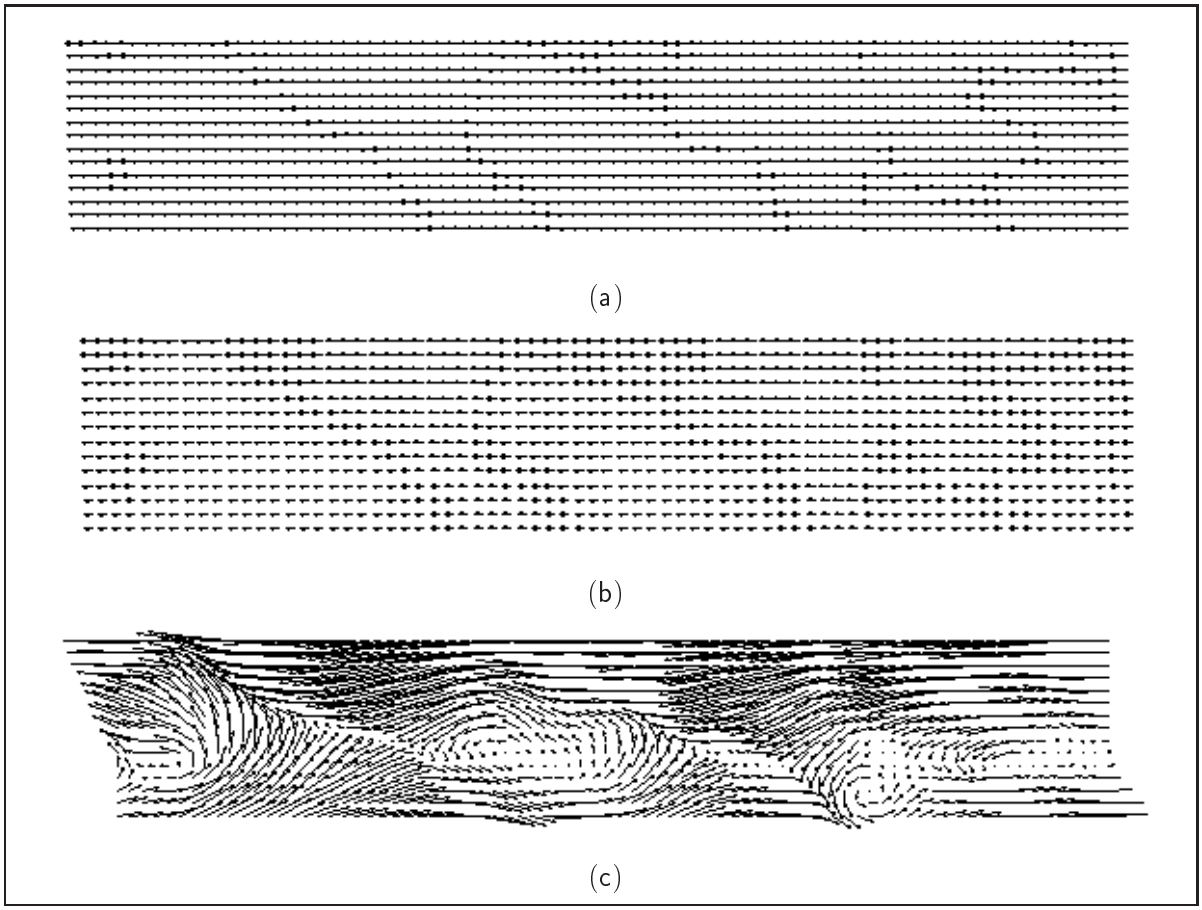


FIG. 1.3 – **Importance de la composante laminaire**. *(a) : champ initial issu d'une couche de mélange en mécanique des fluides expérimentale ; (b) : sa composante laminaire et (c) : le champ recalé résultant*

de la ligne de courant, le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est porté par le vecteur tangent à la ligne de courant, d'où l'équation suivante :

$$\frac{dx}{u(x,y,t_a)} = \frac{dy}{v(x,y,t_a)} = \frac{ds}{\sqrt{u^2(x,y,t_a) + v^2(x,y,t_a)}}. \tag{1.20}$$

Ces lignes permettent matérialiser un champ de vitesses à l'instant t_a. La figure FIG.1.4 en est une illustration.

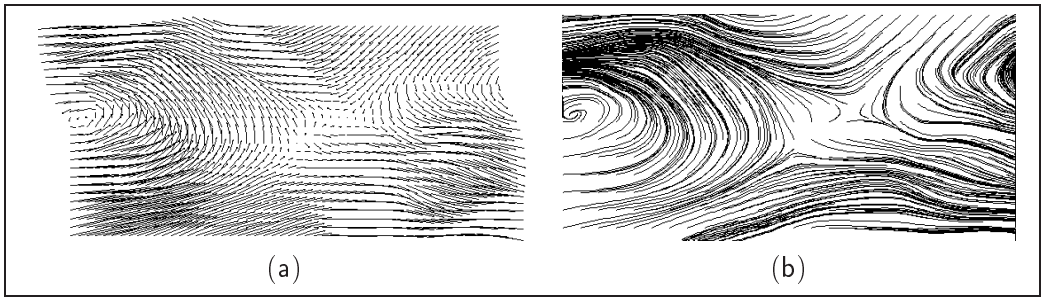


FIG. 1.4 – **Illustration des lignes de courant** *: (a) : Un champ réel et (b) : les lignes de courant correspondantes*

Les trajectoires

La courbe parcourue dans l'espace par une particule de fluide est appelée *trajectoire*. Si l'on s'intéresse à une représentation Lagrangienne du système, les équations dans (1.1) permettent de décrire de telles trajectoires. Dans un cadre bidimensionnel, cela devient :

$$\begin{cases} x(t) = f(x_0,y_0,t) \\ y(t) = g(x_0,y_0,t), \end{cases} \tag{1.21}$$

avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Dans le cas d'une représentation Eulérienne, l'équation des trajectoires est obtenue en écrivant que la vitesse définie en (1.2) coïncide avec le vecteur $\boldsymbol{dx}/dt$ soit, dans le plan 2D :

$$\frac{dx}{u(x,y,t)} = \frac{dy}{v(x,y,t)} = dt. \tag{1.22}$$

À partir des composantes u et v de la vitesse et des conditions initiales (x_0,y_0,t_0), l'intégration du système précédent permet de retrouver les fonctions f et g et de qualifier les trajectoires. On trouvera, sur la figure FIG.1.5, quatre images d'une séquence météorologique avec leurs déplacements associés, ainsi que les trajectoires de certaines particules le long de cette séquence.

Lorsque le déplacement étudié est stationnaire, alors quel que soit le temps t, $u(x,y,t) = u(x,y,t_0)$ et $v(x,y,t) = v(x,y,t_0)$. Dans ce cas, d'après les relations (1.20) et (1.22), les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

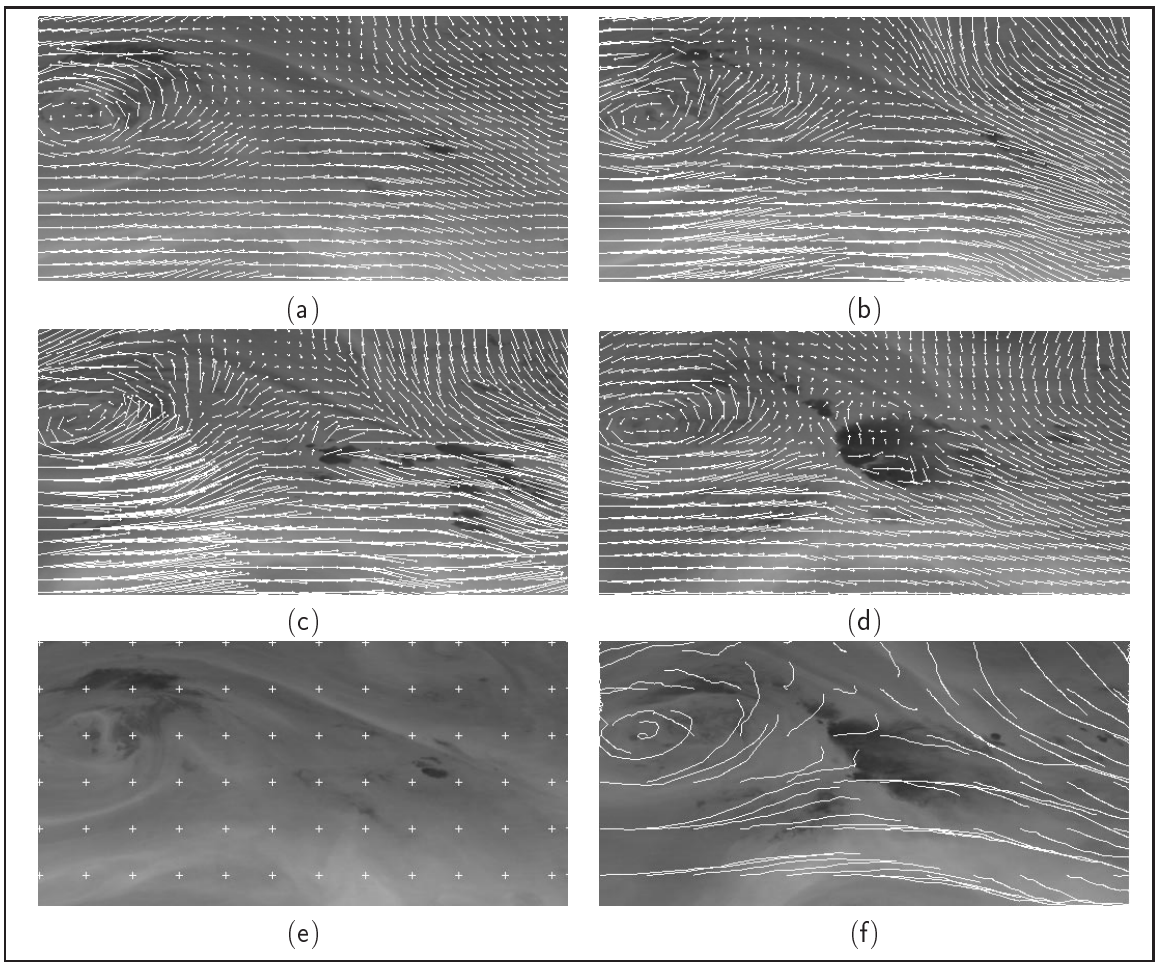


FIG. 1.5 – **Illustration des trajectoires de particules** *: (a,b,c,d) : quatre images d'une séquence météorologique sur lesquelles on a superposé leur champ de déplacements associé ; (e) : grille de points initiaux dont on souhaite obtenir les trajectoires au cours du temps ; (f) : trajectoires de ces particules superposées à la dernière image de la séquence*

Les lignes d'émission

Parmi toutes les trajectoires, il peut arriver que certaines passent par un point fixe $\boldsymbol{x_E} = (x_E,y_E)$. Formellement, il existe alors un temps θ relatif à chaque trajectoire, pour lequel on peut écrire :

$$\begin{cases} x_E = f(x_0,y_0,\theta) \\ y_E = g(x_0,y_0,\theta). \end{cases} \tag{1.23}$$

Chaque particule qui est passée par le point E va poursuivre sa propre trajectoire et à chaque instant t postérieur à θ, il est possible de définir une courbe appelée *ligne d'émission* constituée de toutes les particules qui sont passées par E. On peut alors formaliser les lignes d'émission de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = \tilde{f}(x_0,x_E,y_E,t) \\ y = \tilde{g}(x_0,x_E,y_E,t), \end{cases} \tag{1.24}$$

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des fonctions d'évolution, différentes de f et g. Une ligne d'émission est donc définie pour un instant t donné. La figure FIG.1.6 illustre ce principe. En pratique, certains écoulements expérimentaux sont visualisés par émission d'un colorant à partir d'un point fixe. Ce type de technique permet de visualiser les lignes d'émission.

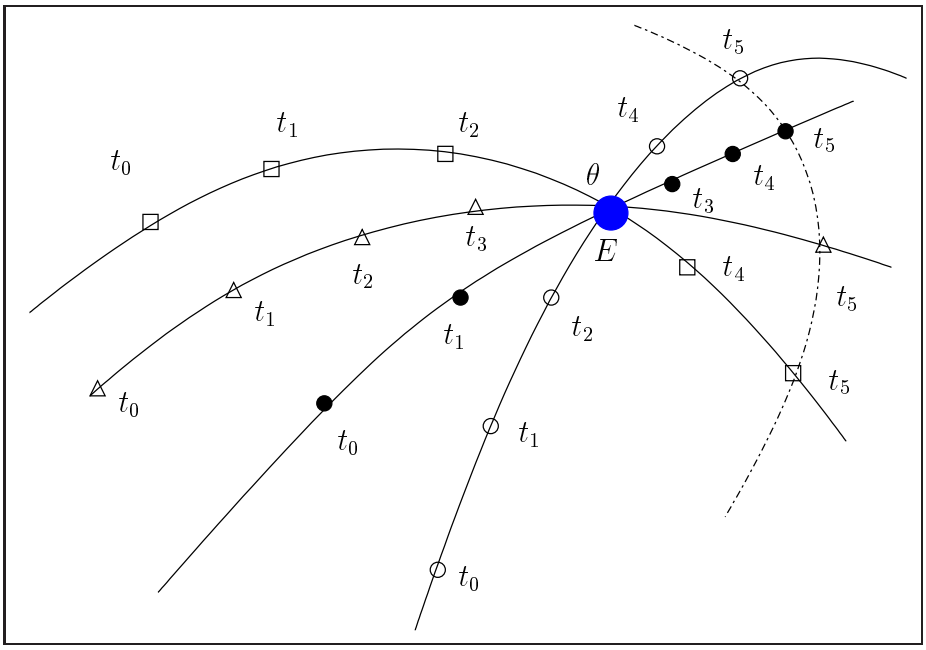


FIG. 1.6 – **Illustration du principe des lignes d'émission** *: Toutes les particules passent par E en un instant θ qui leur est propre. La ligne d'émission résultante à l'instant t_5 est représentée en pointillés.*

1.3.5 Les fonctions de potentiel

Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques fonctions qu'il est possible d'extraire à partir de champs instantanés irrotationnels et solénoïdaux.

Cas d'un champ irrotationnel

Si un champ de vitesses $\boldsymbol{v}$ est irrotationnel, alors $\partial v(x,y)/\partial x - \partial u(x,y)/\partial y = 0$. D'après le théorème de Green-Riemann décrit en (1.13), nous avons :

$$\oint_{\partial\Omega_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{m} = \oint_{\partial\Omega_1} u(x,y)dx + v(x,y)dy = 0. \tag{1.25}$$

Ceci signifie que pour ce type de champ, la circulation le long de toute courbe fermée est nulle. Par ailleurs, notons $\Gamma_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ une courbe joignant $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ et $\Gamma_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ une courbe joignant $\boldsymbol{b}$ à $\boldsymbol{a}$. L'ensemble constitué de Γ_1 et Γ_2 forme une courbe fermée et en écrivant la circulation le long de cette courbe, nous avons :

$$I_{\Gamma_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} + I_{\Gamma_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})} = 0. \tag{1.26}$$

où $I_{\Gamma_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$ (resp. $I_{\Gamma_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}$) est la circulation du champ le long de la courbe $\Gamma_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (resp. $\Gamma_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$). Étant donné que $I_{\Gamma_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})} = -I_{\Gamma_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$, nous avons d'après la relation précédente :

$$I_{\Gamma_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} = I_{\Gamma_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}. \tag{1.27}$$

La circulation d'un champ de vitesses irrotationnel le long de toute courbe C joignant deux points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ est donc indépendante de cette courbe, et ne dépend que des points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Par conséquent, si $\boldsymbol{x}_0 = (x_0,y_0)$ est un point fixe et $\boldsymbol{x} = (x,y)$ un point quelconque de Ω, alors la circulation entre les points $\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{x}$ est un nombre qui ne dépend que de $\boldsymbol{x}$. Nous le notons $\phi(x,y) - \phi(x_0,y_0)$ où $\phi(x_0,y_0)$ est une constante que l'on décide d'associer au point $\boldsymbol{x}_0$. En considérant la circulation de $\boldsymbol{v}$ le long d'un segment de droite $[x,x+\delta x]$ parallèle à l'axe des x, nous avons :

$$\phi(x+\delta x,y) = \oint_{C(x,x+\delta x)} \boldsymbol{v}(x,y) \cdot d\boldsymbol{m} + \phi(x,y) = \int_x^{x+\delta x} u(t,y)dt + \phi(x,y). \tag{1.28}$$

En utilisant la relation :

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{1}{\delta x}[\phi(x+\delta x,y) - \phi(x,y)], \tag{1.29}$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{1}{\delta x} \int_x^{x+\delta x} u(t,y)dt = u(x,y). \tag{1.30}$$

Un raisonnement analogue le long de l'axe des y donne :

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} = v(x,y). \tag{1.31}$$

Ainsi, d'après ces deux dernières relations, il existe une fonction scalaire ϕ associée à tout champ irrotationnel telle que :

$$\boldsymbol{v}(x,y) = \boldsymbol{\nabla}\phi(x,y). \tag{1.32}$$

Cette fonction est usuellement appelée *potentiel de vitesse* (*velocity potential* en anglais).

Cas d'un champ solénoïdal

Si un champ $\boldsymbol{v}$ est solénoïdal, alors :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Le champ $\boldsymbol{v}^{\perp} = (v, -u)^T$ est alors tel que :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0.$$

Ce champ est donc irrotationnel. Ainsi, en suivant la même approche que précédemment, on définit une fonction de potentiel ψ pour tout champ $\boldsymbol{v}$ solénoïdal par :

$$\boldsymbol{v}^{\perp}(x,y) = \boldsymbol{\nabla}\psi(x,y). \tag{1.33}$$

La fonction ψ est appelée la *fonction de courant* (*stream function* en anglais).

1.3.6 Lien entre ces différentes descriptions

Les fonctions de potentiel ϕ et ψ ont un intérêt du point de vue de la mécanique des fluides expérimentale car leur connaissance permet d'accéder à nombre d'informations.

Lien entre les fonctions de potentiels, la divergence et la vorticité

Selon la décomposition de Helmholtz, un champ $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire comme la somme d'une composante irrotationnelle $\boldsymbol{v}_{irr}$ et solénoïdale $\boldsymbol{v}_{sol}$. Partant de ces deux champs, nous avons vu qu'il est possible de définir deux fonctions, nommées le *potentiel de vitesse* (notée ϕ) et la *fonction de courant* (notée ψ) par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{irr} = \boldsymbol{\nabla}\phi \\ \boldsymbol{v}_{sol} = \boldsymbol{\nabla}^{\perp}\psi, \end{cases} \tag{1.34}$$

où $\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$ et $\boldsymbol{\nabla}^{\perp} = (-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x})^T$. Ainsi, nous pouvons écrire, pour tout champ $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}^{\perp}\psi. \tag{1.35}$$

Si l'on calcule la divergence d'un champ de vitesses $\boldsymbol{v}$, nous avons div $\boldsymbol{v}$ = div $\boldsymbol{v}_{sol}$ + div $\boldsymbol{v}_{irr} = 0 +$ div $\boldsymbol{v}_{irr} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$. Le résultat suivant en découle :

$$\text{div } \boldsymbol{v} = \Delta\phi, \tag{1.36}$$

où Δ est défini par $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Par analogie, nous pouvons écrire que

$$\text{curl } \boldsymbol{v} = \Delta\psi. \tag{1.37}$$

Lien entre les fonctions de potentiels et les trajectoires

Si l'on s'intéresse aux endroits où la fonction de courant est constante, nous avons $d\psi = 0$ soit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v_{sol}(x,y)dx + u_{sol}(x,y)dy = 0. \tag{1.38}$$

Ainsi, nous obtenons, pour $\psi = cst$, la relation :

$$\frac{dx}{u_{sol}(x,y)} = \frac{dy}{v_{sol}(x,y)}. \tag{1.39}$$

Ceci est l'équation des lignes de courant de $\boldsymbol{v}_{sol}$ (relation (1.20)). Ces dernières sont donc aisément accessibles pour un champ solénoïdal à partir de la fonction de courant (ce sont ses lignes de niveau).

De manière analogue, si l'on s'intéresse aux endroits où le potentiel de vitesse est constant, nous avons $d\phi = 0$ soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = u_{irr}(x,y)dx + v_{irr}(x,y)dy = 0. \tag{1.40}$$

Ainsi, nous obtenons, pour $\phi = cst$, la relation :

$$\frac{dx}{v_{irr}(x,y)} = -\frac{dy}{u_{irr}(x,y)}. \tag{1.41}$$

D'après la relation précédente, les lignes à potentiel de vitesse constant sont orthogonales aux lignes de courant de $\boldsymbol{v}_{irr}$. On parle alors de lignes *équipotentielles*.

1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques notions très générales et fréquemment utilisées pour manipuler des mouvements fluides. Tout au long de ce document, nous y ferons référence.

Rappelons que le domaine de la mécanique des fluides est très vaste et fait l'objet de larges études. Nombre d'écoulements de nature très variée existent et leur recensement dans le cadre de ce travail n'est pas traité. Nous pouvons néanmoins renvoyer le lecteur à certains ouvrages relatant de problèmes généraux en mécanique des fluides [Bonnet 89,Boudet 96] ou étudiant des phénomènes plus particuliers comme par exemple le livre de M. Lesieur sur les phénomènes turbulents [Lesieur 94] ou le livre "An introduction to dynamic meteorology" [Holton 92] pour une explication plus approfondie de phénomènes météorologiques (dont certains seront abordés dans ce document).

Première partie

Estimation dense du mouvement pour des situations d'imagerie fluide

Introduction

Depuis quelques années, l'intérêt de la communauté de Vision par Ordinateur est grandissant quant à la définition d'estimateurs de mouvement et en particulier dans un contexte d'imagerie fluide. En effet, comme cela a été présenté dans l'introduction, de nombreuses applications sont concernées (météorologie, océanographie, mécanique des fluides expérimentale, ...). Cette première partie présente la contribution que nous proposons pour estimer le mouvement de phénomènes fluides à partir d'une séquence d'images. Sa structuration est la suivante :

- le **chapitre 2** présente un panel des méthodes de mesure du mouvement développées dans le domaine de la Vision par Ordinateur. Une présentation des techniques utilisées par les physiciens pour mesurer une information de mouvement à partir des images est également effectuée. Ceci met en évidence le besoin de développer des méthodes dédiées à l'estimation de vitesses eulériennes dans certaines situations spécifiques (notamment pour les écoulements fluides) ;
- dans le **chapitre 3** figure la méthode d'estimation des vitesses instantanées dédiée aux écoulements fluides que nous proposons. Cette méthode introduit des notions physiques dans les schémas usuels d'estimation du mouvement ;
- le **chapitre 4** est quant à lui consacré à une série de résultats expérimentaux permettant d'évaluer les performances de la méthode développée. Ces résultats sont illustrés sur des séquences d'images synthétiques et réelles issues de la météorologie. La vérité terrain étant inaccessible dans nombre de situations physiques, nous développons deux outils pour obtenir une validation qualitative des résultats : la reconstruction de la composante lagrangienne de la vitesse estimée et l'extraction de structures pertinentes du point de vue de la physique ;
- enfin, le **chapitre 5** est une validation de la méthode dans un contexte de mécanique des fluides expérimentale. Plus précisément, le technique est appliquée sur des images issues de visualisation par PIV (décrites dans l'Annexe F) et représentant des couches de mélange.

Chapitre 2

État de l'art sur les méthodes de mesure du mouvement

L'analyse et en particulier la mesure du mouvement à partir d'une séquence vidéo constitue un vaste domaine d'étude. Nombre de méthodes ont été proposées pour extraire une information relative au mouvement perçu dans les images, qu'elle soit globale (sous la forme de descripteurs globaux) ou au contraire locale et la plus précise possible. Les applications de ces techniques concernent des domaines aussi variés que la robotique, la vidéo, la météorologie, la visualisation expérimentale, ...

Ce chapitre propose une présentation de quelques méthodes usuelles d'estimation du mouvement à partir d'une séquence d'images. Après une introduction sur le problème général de la mesure du mouvement, nous présenterons les principales techniques d'estimation qui se sont imposées dans le domaine de la Vision par Ordinateur. L'accent sera porté sur les méthodes dites de "flot optique" visant à obtenir une mesure dense du mouvement. Nous étudierons les contributions significatives apportées dans ce domaine.

Ensuite, une partie sera consacrée à l'étude de mouvements particuliers qui nécessitent parfois le développement de méthodes dédiées. Dans notre contexte d'imagerie fluide, les principales applications concernent des domaines relatifs à la physique, tels que la météorologie, l'océanographie ou la mécanique des fluides par exemple. Nous dresserons un panel des méthodes utilisées dans ces domaines pour estimer une information de mouvement à partir d'images. Enfin, une dernière section sera consacrée à une discussion sur certains problèmes soulevés dans ce chapitre.

2.1 Introduction

2.1.1 Importance du mouvement apparent

Le mouvement apparent visualisé dans une séquence d'images fournit une information extrêmement pertinente. À l'aide d'expériences appropriées, il a par exemple été montré que l'être humain pouvait reconnaître des scènes ou des activités à partir de données purement dynamiques [Johansonn 73]. Dans le cadre de l'analyse de systèmes physiques, la mesure d'une évolution temporelle est souvent capitale pour caractériser, comprendre et analyser les phénomènes observés. Par exemple, la connaissance du mouvement dans les scènes de

sciences environnementales (météorologie, océanographie, ...) permet de prédire l'évolution de courants marins, d'agents polluants ou de dépressions.

La Vision par Ordinateur est un domaine permettant d'élaborer des outils d'analyse de scènes dynamiques. Cependant, une différence majeure entre image numérique et image perçue par le système de vision stéréoscopique humain réside dans la perte de la troisième dimension. Un système d'acquisition d'images ne fournit en effet que la projection des scènes observées sur un plan bidimensionnel. L'image ne permet donc d'exploiter que le mouvement résultant de la projection sur le plan 2D du mouvement réel, couplé avec le mouvement de la caméra. On parle ainsi du mouvement "apparent" dans les images. Lorsque le système d'acquisition d'image est fixe dans la scène, le mouvement apparent représentera la projection du mouvement réel dans le plan de visualisation.

De nombreuses études ont été menées pour extraire l'information cinématique à partir d'une ou plusieurs images. Dans [Mitiche 96], on trouvera une présentation complète des problématiques relatives à l'analyse du mouvement en Vision par Ordinateur. Il existe de nombreuses approches pour interpréter la dynamique d'une scène. L'acquisition d'informations sur le mouvement est une étape clé dans un but de :

- détection du mouvement dans les scènes [Irani 92,Mitiche 96,Odobez 97] ;
- segmentation des images [Ayer 96,Bouthemy 93,Mémin 02] ;
- suivi de primitives ou de régions [Blake 98,Kervrann 95,Meyer 94] ;
- reconnaissance ou classification de scènes [Allmen 93,Cédras 95,Fablet 02,François 90, Nelson 92] ;
- modélisation d'activités ou de gestes [Bobick 97,Cédras 95,Yacoob 99] ;
- reconstruction de structures tridimensionnelles à partir des images [Adiv 85,Fermuller 00, Heeger 90] ;
- mesure du mouvement, sous forme paramétrique [Ayer 96,Black 96a,Odobez 95, Stiller 99] ou dense [Horn 81,Mémin 98a,Mémin 02,Mitiche 96,Nagel 87].

Nous nous intéresserons dans cette partie au dernier point relatif à la mesure du mouvement.

2.1.2 Un problème classique dans la mesure du mouvement : le problème de l'ouverture

Afin d'estimer le mouvement, une première étape consiste à s'appuyer sur une hypothèse de *conservation de la luminance* : on suppose que les points d'une image se déplacent en conservant leur intensité lumineuse [Horn 81]. Il en découle la relation suivante :

$$\frac{dE}{dt}(\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{x} = (x,y)$ représente la position spatiale d'un point et E est la fonction d'intensité lumineuse des images, vue comme une fonction différentiable par rapport à ses variables spatiales $\boldsymbol{x} = (x,y)$ et sa variable temporelle t [1]. Une décomposition de la dérivée totale par rapport aux trois composantes x, y et t donne, en notant $E_x = \frac{\partial E}{\partial x}$, $E_y = \frac{\partial E}{\partial y}$ et $E_t = \frac{\partial E}{\partial t}$:

1. Remarquons que dans certains cas relatifs aux zones d'occultations, aux phénomènes de transparence, aux changements globaux d'illumination par exemple, cette hypothèse constitue une mauvaise base de travail.

$$E_x(\boldsymbol{x},t)\frac{dx}{dt}(\boldsymbol{x},t) + E_y(\boldsymbol{x},t)\frac{dy}{dt}(\boldsymbol{x},t) + E_t(\boldsymbol{x},t) = 0. \tag{2.2}$$

Les termes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont en fait les composantes (u,v) du champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ représentatif du mouvement apparent. Ainsi, nous obtenons la relation suivante :

$$\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + E_t(\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{2.3}$$

où $\boldsymbol{\nabla}$ est le gradient spatial. Cette relation, connue sous le nom d'*équation de contrainte du mouvement apparent* (et notée par la suite ECMA), est la base de nombre de travaux menés en estimation du mouvement. Par cette équation, seule la composante $\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},t)$ des déplacements suivant la normale aux contours (ou la direction du gradient de l'intensité) peut être directement identifiée :

$$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},t) = -\frac{E_t(\boldsymbol{x},t)}{\|\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x},t)\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x},t)}{\|\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x},t)\|}. \tag{2.4}$$

Ceci est connu sous le nom du *problème de l'ouverture*, illustré par la figure FIG.2.1. Les problèmes d'estimation du mouvement s'avèrent ainsi être mal posés. Le lecteur trouvera dans [Bertero 88] une étude globale des problèmes mal posés en traitement d'image.

Plusieurs alternatives ont été proposées pour contourner ce problème. Mentionnons parmi celles-ci les méthodes de corrélation [Anandan 89,Mak 93], les méthodes paramétriques [Ayer 96,Black 96a,Fleet 00,Odobez 94] ou les méthodes de flot optique [Alvarez 00,Barron 94,Black 94,Cohen 99,Ju 96,Horn 81,Kornprobst 99,Lai 98,Mémin 98a, Weickert 01a,Weickert 01b]. Nous allons développer les principes de ces approches dans les sections suivantes.

Il est à noter que pour quelques applications spécifiques, il est possible de déterminer des représentations pertinentes du contenu dynamique d'une scène, sans nécessairement disposer de l'information complète sur le mouvement mais en exploitant certaines propriétés de l'intensité des images [Fermuller 95]. Cela permet de s'affranchir du problème de l'estimation du mouvement.

2.2 Mesure du mouvement par corrélation

2.2.1 Idée fondatrice

Le principe de ces méthodes est de corréler une zone dans une première image avec une zone translatée dans une seconde image [Anandan 89]. Le vecteur de translation conduisant au maximum de corrélation est affecté au centre de la zone initiale. La notion de ressemblance est en général mesurée sur la base de critères statistiques tels que la moyenne, la variance ou la covariance de l'intensité lumineuse. Usuellement, la corrélation C entre deux supports W_1 relatif à l'image E_1 et W_2 relatif à l'image E_2 est exprimée par :

$$C = \frac{\mathrm{cov}(W_1,W_2,\boldsymbol{v})}{\sigma_{W_1}\sigma_{W_2}(\boldsymbol{v})}, \tag{2.5}$$

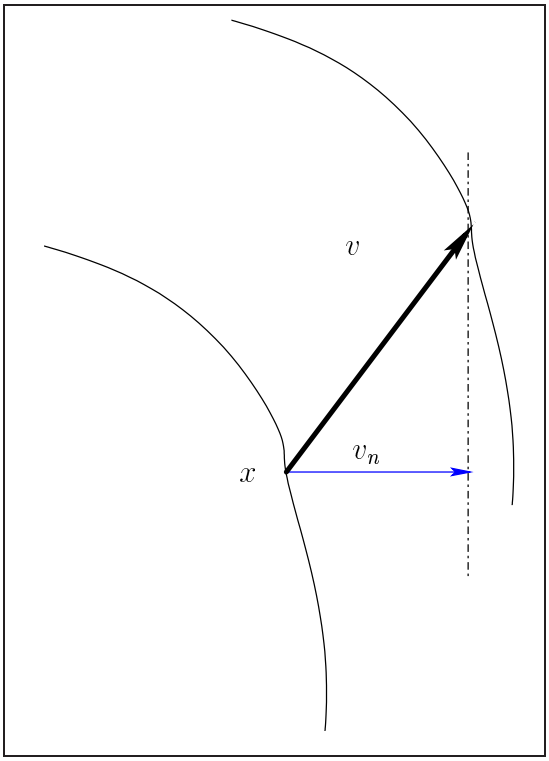


FIG. 2.1 – **Illustration du problème de l'ouverture** *: le vecteur du mouvement réel* $\boldsymbol{v}$ *au point* $\boldsymbol{x}$ *est en gras. Seule sa composante normale au contour* $\boldsymbol{v}_n$ *sera estimée par la relation (2.4).*

où $\sigma_{W_i}(i = 1,2)$ est l'écart type des niveaux de gris calculés sur la fenêtre W_i. La covariance $\mathrm{cov}(W_1,W_2,\boldsymbol{v})$ pour un déplacement $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$ est donnée par

$$\mathrm{cov}(W_1,W_2,\boldsymbol{v}) = \sum_{(i,j)\in W_1} [E_1(i,j) - \mathrm{moy}(E_1,W_1)][E_2(i+u,j+v) - \mathrm{moy}(E_2,W_2)], \quad (2.6)$$

où $\mathrm{moy}(E_i,W_i)(i = 1,2)$ est la moyenne empirique des niveaux de gris de E_i calculée sur les fenêtres W_i. Ces méthodes sont parfois coûteuses en temps de calcul, notamment si l'on souhaite extraire une information de mouvement sur un nombre important de points.

2.2.2 Applications

Nous présentons ici quelques utilisations des méthodes de corrélation dans des domaines physiques.

Météorologie

Actuellement, les centres de météorologie utilisent principalement des techniques de corrélation pour mesurer le mouvement du vent à travers celui des nuages [Buhler 93, Dew 98,Fujita 68,Leese 71,Phillips 72,Smith 72,Szantai 96,Wu 95]. Fujita *et al.* furent les pionniers dans l'exploitation des images issues de satellites pour mesurer le mouvement, à la suite du lancement du premier satellite géostationnaire ATS-1 en 1966 [Fujita 68]. Leese *et al.* [Leese 71], Smith et Phillips [Smith 72] et Phillips *et al.* [Phillips 72] se sont ensuite consacrés à l'implémentation de techniques de corrélation pour le suivi automatique des nuages à partir des données satellites ATS-1. La mise en œuvre par FFT (Fast Fourier Transform) de l'algorithmie associée permet d'obtenir des temps de calculs convenables [Dew 98].

Les méthodes usuelles de corrélation supposent cependant l'existence d'un maximum de corrélation facilement localisable. Dans un contexte d'imagerie fluide, ceci n'est pas obligatoirement vérifié et la localisation du maximum de corrélation peut s'avérer problématique. Pour entre autres s'affranchir de ce problème, Simpson et Gobat [Simpson 94] proposent d'effectuer un filtrage médian sur le champ de déplacements estimé par corrélation, dans le voisinage des points pour lesquels les pics de corrélation sont proches. Wu [Wu 95,Wu 96] propose quant à lui l'ajout d'une contrainte de régularité spatiale via une méthode de relaxation d'étiquettes, tandis que Schmetz et Nuret [Schmetz 87] et Buhler et Holmlund [Buhler 93] ajoutent une contrainte de régularité temporelle. Le lecteur trouvera dans [Schmetz 93,Woick 91] un historique de l'évolution des méthodes de corrélation appliquées à la météorologie (calcul de champs de vent à partir des nuages).

Mécanique des fluides expérimentale

La *Vélocimétrie par Images de Particules* (PIV pour Particle Image Velocimetry en anglais) permet d'analyser des écoulements dans un contexte de mécanique des fluides expérimentale (*cf* Annexe F pour une description de ces méthodes). Le principe de base est d'ensemencer un fluide par des traceurs, idéalement répartis selon une distribution uniforme. Au moyen d'un procédé d'éclairement au laser, il est possible d'acquérir des images qui fournissent une information sur les positions successives des traceurs de la

couche du fluide illuminée. L'analyse de ces images permet d'extraire le mouvement du fluide étudié.

Parmi les méthodes d'analyse en imagerie PIV, les approches par corrélation sont les plus répandues [Aanen 99,Adrian 91,Fournel 92,Wernert 96]. Le lecteur trouvera dans [Fayolle 96] une documentation précise sur les méthodes de corrélation pour les techniques PIV et dans [Fayolle 00,Fei 99] des propositions apportées pour comparer les différentes approches. La vélocimétrie laser, et particulièrement la vélocimétrie par images de particules, est un domaine en pleine expansion dans lequel de nouvelles méthodes de corrélation sont régulièrement proposées. À titre d'exemple, citons les récents travaux de Hart [Hart 00] qui propose une méthode de corrélation récursive, où la taille de la zone de recherche est affinée au cours du processus afin d'être le plus robuste possible aux données bruitées. Par ailleurs, l'acquisition d'imagerie par PIV permet de plus en plus d'obtenir des images multispectrales (provenant de l'excitation des traceurs par des lasers de longueurs d'ondes différentes), ce qui nécessite des méthodes de corrélation spécifiques (voir par exemple [Cenedese 99]).

Autres applications

D'autres domaines exploitent les méthodes de corrélation. Citons par exemple l'imagerie médicale où l'estimation du flot sanguin peut être menée par corrélation 3D [Morsy 99, PellotBarakat 01]. Dans un cadre océanographique, Doisy calcule le mouvement de sonars par estimation successive de deux translations [Doisy 98]. Notons aussi que dans [Sun-Hyoung 01], les auteurs utilisent de manière simple et judicieuse les méthodes de corrélation pour accéder au mouvement et qu'à des fins de codage vidéo, Kim *et al.* ont proposé une méthode de corrélation efficace dont la taille de la fenêtre d'estimation est adaptative [Kim 98]. Soulignons que les techniques de codage type MPEG reposent également sur des informations de mouvement obtenues par ces méthodes (mise en correspondance par blocs).

2.2.3 Intérêts/limitations

Les méthodes de corrélation se sont imposées dans des domaines variés tels que les sciences environnementales, la mécanique des fluides, l'imagerie médicale ou bien le codage vidéo. Les techniques existantes sont en mesure de procurer un champ dense de déplacements et possèdent des propriétés intéressantes vis-à-vis du bruit.

Toutefois, la qualité des estimations est sensible à la taille du support nécessaire au calcul. Par ailleurs, les traces qui peuvent être laissées par certains objets en déplacement (tels que les marqueurs en PIV par exemple) peuvent être un facteur de dégradation des estimations car les maxima de corrélation sont difficilement identifiables. Enfin, ces approches possèdent un caractère local qui peut être préjudiciable dans certaines situations où les données sont éparses ou erronées.

2.3 Méthodes paramétriques

Contrairement aux méthodes de corrélation, les approches paramétriques fournissent une mesure du mouvement sur l'ensemble du support étudié. Le mouvement est reconstruit à l'aide de paramètres à estimer qui dépendent d'un modèle à définir. Il existe un certain

nombre de méthodes et de modèles paramétriques dédiés à l'estimation du mouvement. On peut classer, parmi les méthodes existantes, celles qui s'appuient sur des modèles de mouvement bidimensionnels et tridimensionnels. Le lecteur trouvera dans [Bergen 92] une bonne description des méthodes paramétriques. Décrivons brièvement les paramétrisations 2D et 3D.

2.3.1 Paramétrisation 2D

Le déplacement d'un point dans un cadre bidimensionnel est souvent exprimé à l'aide de polynômes dont les degrés sont variables (un ou deux en général). Ainsi, la vitesse $\boldsymbol{v}$ en un point $\boldsymbol{x}$ selon un modèle Θ est notée :

$$\boldsymbol{v}_\Theta(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} u_\Theta(\boldsymbol{x}) \\ v_\Theta(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = P(\boldsymbol{x})\Theta, \tag{2.7}$$

où $P(\boldsymbol{x})$ est une matrice dont la forme dépend du degré du polynôme. Si le polynôme est de degré 1, on parlera alors d'une paramétrisation "affine". Le modèle de mouvement sera :

$$\boldsymbol{v}_\Theta(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + b_1 \\ a_3x + a_4y + b_2 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

(a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2) étant les paramètres à estimer. Nous utiliserons des propriétés de ce modèle dans la deuxième partie de ce document. Les modèles paramétriques ont souvent l'avantage de conduire à des schémas d'estimations relativement efficaces, avec des temps de calculs intéressants. On trouvera des techniques d'implantation judicieuses de modèles paramétriques dans [Ayer 96,Black 96a,Odobez 95].

L'utilisation de ces méthodes s'avère très fructueuse dans certaines applications. À titre d'exemple, mentionnons que leur récent usage en restauration d'images [Dekeyser 00] ou en reconstruction du mouvement 3D [Aguiar 01] s'est avéré performant.

2.3.2 Paramétrisation 3D

L'estimation de modèles paramétriques 3D est un problème délicat qui est souvent lié à la reconstruction 3D de la structure de la scène. La plupart des modèles de mouvement se composent d'un vecteur tridimensionnel de translation associé à une matrice de rotation 3×3 [Faugeras 93,LonguetHiggins 81,Heeger 90,Fermuller 00]. Dans un cadre d'imagerie médicale, afin d'estimer un champ de déformations tridimensionnel, Hellier *et al.* [Hellier 01] utilisent une extension 3D du modèle affine 2D présenté en (2.8) conduisant à l'estimation de douze paramètres.

Notons que depuis quelque temps, l'introduction de la géométrie projective dans les paramétrisations 3D fait l'objet de larges recherches, sur lesquelles le lecteur pourra trouver des informations dans [Faugeras 93].

2.3.3 Autres paramétrisations

Il existe également d'autres modèles paramétriques spécifiques à une application souhaitée. Citons, à titre d'exemple, les paramétrisations 4D proposées par Stalidis *et al.* [Stalidis 97]. À des fins d'estimation du mouvement cardiaque, un modèle de déformation

4D est proposé. Sélectionnant des points clés (souvent localisés aux frontières), le modèle paramétrique est proposé en appliquant à ces points une transformée de Fourier. Le modèle résultant permet d'obtenir une représentation lisse et continue des surfaces en mouvement. Notons que dans [Fleet 00], les auteurs proposent des "4-représentations" paramétriques dont le but est de décomposer un champ de vecteurs en une base de fonctions.

2.3.4 Intérêts/limitations

Les modèles paramétriques possèdent l'avantage d'établir une représentation compacte d'un déplacement. Cependant, selon la complexité de la dynamique de la scène observée, les approches paramétriques ne peuvent, dans certains cas, fournir que le mouvement dominant des images. Une telle information est pertinente dans le cadre d'applications visant à la caractérisation, à la compensation ou à la classification de mouvements globaux (mouvement de la caméra par exemple). En revanche, la description du contenu dynamique intrinsèque d'une scène complexe (mettant en jeu plusieurs objets avec leur propres mouvements par exemple) ne peut être complètement extraite par ce type d'approches car ces modèles paramétriques sont utilisés sur l'ensemble du support de l'image. Dans de telles situations, ces approches se révèlent insuffisantes pour fournir une information complète et précise sur les déplacements.

Les techniques de flot optique peuvent constituer une alternative à ce problème. Nous décrivons dans la section suivante les travaux fondateurs de Horn & Schunck dans ce domaine.

2.4 Méthodes de flot optique : approche fondatrice de Horn & Schunck

Disposer d'un champ dense de mouvement (communément désigné par le flot optique) vise à déterminer les vecteurs de vitesse en chaque point de l'image. Les méthodes de détermination du flot optique font partie des principales contributions qui ont été présentées pour extraire une information dense et précise du mouvement, sans nécessairement se fier à une connaissance *a priori* très précise. Certaines limites des modèles paramétriques discutées dans le paragraphe 2.3.4 peuvent ainsi être partiellement évitées en exploitant ces approches.

Les principes fondamentaux de l'estimation du flot optique ont été proposés par Horn & Schunck en 1981 [Horn 81] et s'appuient sur deux hypothèses : la conservation de la luminance et une cohérence spatiale du champ des vecteurs de vitesse.

2.4.1 La conservation de la luminance

Une première étape pour le calcul du flot optique proposée dans [Horn 81] est de se baser sur l'hypothèse de conservation de la luminance, étudiée dans la section 2.1.2. Cette hypothèse conduit à s'appuyer sur l'ECMA décrite par la relation (2.3). Ainsi, une formulation variationnelle pour l'obtention du flot optique s'obtient par la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{H}_{obs}$ suivante :

$$\mathcal{H}_{obs}(E,\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} \Big[\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + E_t(\boldsymbol{x},t)\Big]^2 d\boldsymbol{x}, \tag{2.9}$$

où Ω est le domaine sur lequel sont définies les images. Ce terme porte également le nom de terme d'*observation* car il est relatif aux données de luminances E observées. D'après les remarques de la section 2.1.2, il est connu que la relation (2.9) est soumise au problème de l'ouverture. Seule la composante des déplacements suivant la normale aux contours d'iso-intensité peut être extraite par une telle approche. Il est alors nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires, par exemple sur la forme du champ désiré. Horn & Schunck ont proposé d'intégrer un terme dit de *régularisation* ou de *lissage*, qui va contraindre le profil du champ des vitesses à respecter certaines conditions.

2.4.2 Le terme de régularisation

La contrainte proposée est de pénaliser des déviations spatiales du premier ordre du champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$ à estimer :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} |\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x},t)|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.10}$$

Il s'agit d'une hypothèse de cohérence spatiale du champ des vitesses. Le mouvement en un point donné est supposé relativement proche de celui de ses voisins. Ce terme est un lissage du *premier ordre* car il modélise les propriétés de continuité spatiale d'ordre 1 du champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$.

Un tel terme de régularisation permet de poser correctement le problème d'estimation du mouvement. Ainsi, la minimisation de la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{H}$ définie par

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{v},E) = \mathcal{H}_{obs}(\boldsymbol{v},E) + \alpha \mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}), \tag{2.11}$$

où α est un paramètre pondérant l'importance relative accordée au terme de régularisation vis-à-vis du terme d'observation, autorise une estimation du flot optique dans de bonnes conditions.

2.4.3 Discussion

Le problème posé par les hypothèses sous-jacentes au terme de régularisation $\mathcal{H}_{reg}$ défini en (2.10) a ensuite largement été repris par la communauté de la Vision par Ordinateur. La régularisation du premier ordre favorise en effet les configurations lisses du champ des déplacements. Dans le cas de la rencontre de deux objets en mouvement, à certaines frontières ou dans des zones d'occultations, le profil de la vitesse réelle peut avoir une allure fortement discontinue. Une régularisation du type de Horn & Schunck, telle qu'elle est définie, a pour effet d'atténuer les ruptures de continuité, ce qui est préjudiciable dans certaines applications. Ainsi, de nombreux auteurs se sont intéressés au développement de termes de régularisation spécifiques permettant de préserver les discontinuités spatiales d'un champ de vitesses. Parmi ces approches, nous pouvons distinguer deux classes :

1. les fonctions de régularisation qui vont pondérer l'importance du terme de lissage de Horn & Schunck en fonction des conditions photométriques des images et ;

2. les fonctions de régularisation qui s'appuient directement sur la valeur des gradients $\boldsymbol{\nabla} u$ et $\boldsymbol{\nabla} v$ du champ à estimer afin d'obtenir un lissage différent suivant la présence ou non de discontinuités.

Dans le premier cas, le terme de régularisation sera influencé par la valeur de $\boldsymbol{\nabla} E$. Ceci suppose que les gradients lumineux des images correspondent aux zones où le champ est susceptible d'être discontinu. De tels termes de régularisation s'écrivent :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{\nabla} E) = \iint_{\Omega} g(\boldsymbol{\nabla} E)(|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v|^2) d\boldsymbol{x}, \tag{2.12}$$

où g est une fonction à définir. Le principe de la deuxième famille de régularisation est de proposer une pénalisation différente suivant la présence ou non de discontinuités du mouvement (par opposition à la luminance). Nous pouvons alors formuler le terme $\mathcal{H}_{reg}$ par :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} \Phi(|\boldsymbol{\nabla} u|^2) + \Phi(|\boldsymbol{\nabla} v|^2) d\boldsymbol{x}, \tag{2.13}$$

où la fonction Φ est également à définir.

Ainsi, dans le but de préserver les discontinuités d'un champ de vecteurs, tout le problème repose sur la définition des fonctions de pénalisation adéquates. La section qui suit présente les principales études menées dans cette direction.

2.5 Régularisation avec préservation de discontinuités

Les premières méthodes de mesure de champs de vitesses avec gestion de discontinuités ont été définies dans un cadre Markovien. Nous renvoyons le lecteur à [Heitz 93,Konrad 92] pour de plus amples détails. Dans cette section, l'intérêt est porté sur les méthodes visant à préserver les discontinuités via certaines fonctions de pénalisation spécifiques. De telles fonctions seront dites "robustes". Cette terminologie, empruntée à la statistique, indique que la vocation de telles régularisations est de prendre en compte des données aberrantes vis-à-vis du modèle (c'est-à-dire vis-à-vis de l'hypothèse d'homogénéité du champ des déplacements). Mentionnons qu'en statistique, un estimateur robuste est usuellement jugé sur trois critères :

1. son *efficacité relative* qui compare la variance obtenue sur les paramètres estimés par rapport à la variance minimale que l'on peut atteindre (borne de Cramer-Rao). Lorsque le nombre d'échantillons tend vers infini, on parle d'efficacité relative asymptotique ;
2. son *point de rupture* qui est le pourcentage de données contaminées que l'estimateur va être capable de traiter correctement. Les plus performants ont un point de rupture de 50% [Rousseeuw 84,Stewart 95] ;
3. sa *complexité induite*. À l'inverse de l'estimateur quadratique, l'expression des estimateurs robustes est souvent plus complexe et implique des coûts calculatoires plus importants. Du point de vue de la minimisation, cela implique en général des stratégies plus lourdes car les estimateurs robustes sont souvent non convexes.

Afin de mieux interpréter l'effet de fonctions régularisantes, nous présentons en premier lieu la notion de "diffusion". Le formalisme et la nomenclature employés dans ce document sont issus de ce que propose Weickert dans son livre [Weickert 98].

2.5.1 Un formalisme d'interprétation : la notion de "diffusion"

Il est possible d'effectuer une analogie entre les termes de régularisation proposés et la notion de "diffusion" que nous allons expliquer.

Régularisation du premier ordre et schéma de diffusion

Les équations d'Euler-Lagrange appliquées au terme de régularisation proposé par Horn et Schunck décrit dans (2.10) fournissent le système suivant, sous les conditions d'homogénéité aux frontières $\partial\Omega$ de Ω de Neumann ($\partial_{\boldsymbol{n}} u = 0$ et $\partial_{\boldsymbol{n}} v = 0$ sur $\partial\Omega$, où $\boldsymbol{n}$ est un vecteur normal aux frontières $\partial\Omega$) :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \Delta v = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

où le Laplacien Δ est défini par $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Les équations de (2.14) peuvent être vues comme la convergence au bout d'un temps θ infini d'un système de diffusion défini par :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \Delta u, \\ \partial_\theta v = \Delta v. \end{cases} \tag{2.15}$$

Il est à noter que le temps θ défini ici n'est pas le temps t relatif à notre séquence d'images mais est un paramètre artificiel d'évolution du schéma de diffusion entre deux instants successifs t et $t + \Delta t$ (Δt étant le pas de temps dans la séquence).

Ainsi, le problème de régularisation du premier ordre proposé par Horn et Schunck peut être vu comme résultant d'un schéma de diffusion sous-jacent défini par :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \mathrm{div}(g \boldsymbol{\nabla} u) \quad \text{et} \\ \partial_\theta v = \mathrm{div}(g \boldsymbol{\nabla} v), \end{cases} \tag{2.16}$$

où le coefficient de diffusion g est ici $g = 1$. La relation (2.16) est bien connue pour ses propriétés régularisantes. Le coefficient g étant constant, les composantes u et v du champ de vecteurs seront lissées de manière complètement isotrope. Aucune direction n'est privilégiée par ce formalisme. Ceci a l'avantage de réduire les zones bruitées et a l'effet d'un filtrage gaussien (voir [Koenderink 86,Sporring 97]). Mais cette diffusion possède en contre partie l'inconvénient de lisser toutes les discontinuités du champ de vecteurs.

Nous présentons dans les paragraphes suivants quelques travaux effectués, sur la base d'un principe de diffusion, pour pallier le problème évoqué ci-dessus.

Diffusion isotrope conduite par l'image

Le principe de la diffusion isotrope conduite par l'image est de supposer que les discontinuités du mouvement constituent un sous-ensemble des discontinuités de la luminance des

images. Une manière d'éviter un lissage trop intensif aux frontières est donc d'introduire, dans le terme de Horn et Schunck, une pondération dépendant des gradients spatiaux de la fonction de luminance. Alvarez *et al.* [Alvarez 99] ont proposé le terme de régularisation :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{\nabla}E,\boldsymbol{\nabla}u,\boldsymbol{\nabla}v) = \iint_{\Omega} g(|\boldsymbol{\nabla}E(\boldsymbol{x})|^2)(|\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{x})|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v(\boldsymbol{x})|^2)d\boldsymbol{x}, \tag{2.17}$$

où g est une fonction strictement positive et décroissante. Le schéma de diffusion sous-jacent s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \mathrm{div}(g(|\boldsymbol{\nabla}E|^2)\boldsymbol{\nabla}u), \\ \partial_\theta v = \mathrm{div}(g(|\boldsymbol{\nabla}E|^2)\boldsymbol{\nabla}v). \end{cases} \tag{2.18}$$

Dans ce cas, les coefficients de diffusion $g(|\boldsymbol{\nabla}E|^2)$ dépendent uniquement des gradients spatiaux dans l'image. Si ceux-ci sont faibles, alors la diffusion sera isotrope et proche de celle de Horn & Schunck. En revanche, à la présence de frontières où les gradients spatiaux sont élevés, les coefficients de diffusion seront plus faibles, limitant le lissage.

Une telle diffusion est dite *isotrope*, *non homogène*, et *conduite par l'image*. Le terme *isotrope* indique que les coefficients de diffusion ne privilégient pas de direction particulière. Le terme *non homogène* provient du fait que ceux-ci sont dépendants de la position spatiale et le terme *conduite par l'image* traduit le fait que seules les données issues des images (la luminance dans notre cas) interviennent dans la fonction g. On trouvera une description précise des nomenclatures des schémas de diffusion dans [Weickert 01a].

Diffusion isotrope conduite par le champ

Le principal inconvénient des méthodes de diffusion isotrope conduites par les données image est qu'elles sont particulièrement sensibles aux zones fortement texturées. Les coefficients de diffusion étant guidés par les conditions photométriques, le mouvement d'un objet fortement texturé risque d'être mal estimé. Les images contiennent en fait beaucoup plus de frontières que n'en contient le champ de déplacements de leurs objets. Ainsi, sur la base de ce qui a été proposé par Perona et Malik [Perona 90], certains auteurs [Schnörr 94,Weickert 99b] emploient une régularisation du type :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{\nabla}u,\boldsymbol{\nabla}v) = \iint_{\Omega} \Phi(|\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{x})|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v(\boldsymbol{x})|^2)d\boldsymbol{x}, \tag{2.19}$$

où $\Phi(s^2)$ est une fonction différentiable et croissante selon s. La diffusion sous-jacente est définie par :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \mathrm{div}(\Phi'(|\boldsymbol{\nabla}u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v|^2)\boldsymbol{\nabla}u), \\ \partial_\theta v = \mathrm{div}(\Phi'(|\boldsymbol{\nabla}u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v|^2)\boldsymbol{\nabla}v), \end{cases} \tag{2.20}$$

où Φ' est la dérivée de Φ. Dans ce cas, les coefficients de diffusion $\Phi'(|\boldsymbol{\nabla}u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v|^2)$ indiquent que ce schéma est isotrope[2] et conduit par le champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$.

2. La terminologie classique nomme cette diffusion "anisotrope" [Perona 90]. Néanmoins, la diffusion étant conduite par un coefficient et non un tenseur, nous la nommons "isotrope" pour rester fidèle à la nomenclature proposée par Weickert.

En pratique, la fonction $\Phi^{'}$ est une fonction décroissante, permettant d'inhiber la diffusion lorsque le mouvement présente de fortes discontinuités.

Dans [Schnörr 94] et [Weickert 99b], les auteurs ont choisi pour la fonction Φ :

$$\Phi(s^2) = \epsilon s^2 + (1-\epsilon)\lambda^2\sqrt{1+\frac{s^2}{\lambda^2}}, \qquad (0 < \epsilon \ll 1,\ \ \lambda > 0), \tag{2.21}$$

qui se dérive en $\Phi^{'}$:

$$\Phi^{'}(s^2) = \epsilon + \frac{1-\epsilon}{2\sqrt{1+s^2/\lambda^2}}. \tag{2.22}$$

Diffusion anisotrope conduite par l'image

Les principales contributions obtenues par les méthodes de diffusion anisotrope sont basées sur des travaux réalisés par Nagel [Nagel 83] et sur la régularisation proposée par Nagel et Enkelman [Nagel 86]. L'idée fondamentale consiste à découpler le problème de la régularisation aux discontinuités en deux traitements. Il s'agit d'une part de réduire l'effet de lissage au passage d'une frontière et d'autre part, d'encourager ce lissage le long de ces mêmes frontières. Ceci est mené par le terme suivant :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{\nabla} E, \boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v) = \iint_{\Omega} \Big[\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})^T D(\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x})^T D(\boldsymbol{\nabla} E(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x})\Big] d\boldsymbol{x}, \tag{2.23}$$

où $D(\boldsymbol{\nabla} E)$ est une matrice de projection perpendiculaire à $\boldsymbol{\nabla} E$ définie par :

$$D(\boldsymbol{\nabla} E) = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} E|^2 + 2\lambda^2}(\boldsymbol{\nabla} E^{\perp}\boldsymbol{\nabla} E^{\perp T} + \lambda^2 I), \tag{2.24}$$

I étant la matrice identité. Du point de vue de la diffusion, cet opérateur s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \mathrm{div}(D(\boldsymbol{\nabla} E)\boldsymbol{\nabla} u), \\ \partial_\theta v = \mathrm{div}(D(\boldsymbol{\nabla} E)\boldsymbol{\nabla} v). \end{cases} \tag{2.25}$$

Dans ce cas, ce n'est plus un scalaire qui contrôle la diffusion mais le tenseur $D(\boldsymbol{\nabla} E)$. Seules les données de luminance interviennent dans la définition de $D(\boldsymbol{\nabla} E)$ donc cette diffusion est conduite par l'image. Pour étudier sa direction, il est nécessaire d'extraire les caractéristiques de D. Les vecteurs propres de ce tenseur sont $v_1^* = \boldsymbol{\nabla} E$ et $v_2^* = \boldsymbol{\nabla} E^{\perp}$ et les valeurs propres λ_1 et λ_2 associées sont :

$$\begin{cases} \lambda_1(|\boldsymbol{\nabla} E|) = \dfrac{\lambda^2}{|\boldsymbol{\nabla} E|^2 + 2\lambda^2} \quad \text{et,} \\ \lambda_1(|\boldsymbol{\nabla} E|) = \dfrac{|\boldsymbol{\nabla} E|^2 + \lambda^2}{|\boldsymbol{\nabla} E|^2 + 2\lambda^2}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Lorsque le gradient $|\boldsymbol{\nabla} E|$ tend vers zéro, c'est-à-dire pour des zones homogènes, nous obtenons $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Dans ce cas, le comportement est isotrope car les directions

$\boldsymbol{\nabla} E$ et $\boldsymbol{\nabla} E^{\perp}$ régies par v_1^* et v_2^* sont uniformément traitées. Lorsque le gradient $|\boldsymbol{\nabla} E|$ tend vers l'infini, alors $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$. Dans ce cas relatif aux zones comportant des frontières, la direction privilégiée est alors celle relative au vecteur propre $v_2^* = \boldsymbol{\nabla} E^{\perp}$, c'est-à-dire le long de la normale au gradient. La diffusion proposée ici est donc anisotrope. Le tenseur de diffusion D ne dépend que des données de luminance E. Un des intérêts de cet opérateur est donc d'autoriser un lissage dont les directions de diffusion ne sont pas homogènes, tout en restant linéaire vis-à-vis du champ inconnu à estimer. Notons que la relation entre la formulation définie par Nagel et Enkelman décrite en (2.23) et sa version dans un schéma de diffusion exprimée en (2.25) n'a que récemment été introduite, dans [Alvarez 00]. Dans ces mêmes travaux, les auteurs mettent en évidence certaines difficultés liées à cet opérateur. En particulier, la matrice D définie en (2.24) nécessite de prendre en compte les gradients spatiaux de la fonction de luminance. En pratique, ces gradients sont calculés sur la première image de la séquence, ce qui peut ne pas être optimal selon le terme d'observation utilisé. Les auteurs proposent ainsi une formulation énergétique du problème de flot optique basée sur l'opérateur de Nagel-Enkelman qui assure une cohérence entre le terme d'observation et celui de régularisation. Enfin, l'adaptation du paramètre α de pondération du terme de régularisation (*cf* équation (2.11)) et du paramètre λ dans l'opérateur D de la relation (2.24) se fait automatiquement en fonction de la dynamique d'intensité présente dans la scène, autorisant même une variation des conditions globales de luminance entre deux images successives.

Notons également que nombre de travaux découlent de cet opérateur. Le lecteur trouvera des applications dans [Enkelmann 88,Nagel 87,Schnörr 91,Schnörr 93].

Diffusion anisotrope conduite par le champ

Pour définir un schéma de diffusion anisotrope conduit par le champ, Weickert [Weickert 00] propose de s'appuyer sur les principes des filtres de diffusion destinés aux images couleur, dont on pourra trouver une documentation dans [Kimmel 00,Weickert 99a]. Dans [Weickert 01a], la régularisation suivante est proposée :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{\nabla} u,\boldsymbol{\nabla} v) = \iint_{\Omega} \text{trace}\Phi(\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})^T + \boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x})^T)d\boldsymbol{x}, \tag{2.27}$$

où Φ est une fonction s'appliquant à la matrice symétrique $A = \boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} u^T + \boldsymbol{\nabla} v \boldsymbol{\nabla} v^T$. Cette matrice est de taille (2×2), de valeurs propres (σ_1,σ_2) et de vecteurs propres (w_1^*,w_2^*). La fonction Φ est définie par :

$$\Phi(A) = \sum_{i=1}^{2} \phi(\sigma_i) w_i^* w_i^{*T},$$

cette fonction étant différentiable et croissante. Le schéma sous-jacent de diffusion est :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \text{div}(D(\boldsymbol{\nabla} u,\boldsymbol{\nabla} v)\boldsymbol{\nabla} u), \\ \partial_\theta v = \text{div}(D(\boldsymbol{\nabla} u,\boldsymbol{\nabla} v)\boldsymbol{\nabla} v), \end{cases} \tag{2.28}$$

où le tenseur de diffusion D est défini par :

$$D(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v) = \Phi^{'}(\boldsymbol{\nabla} u \boldsymbol{\nabla} u^T + \boldsymbol{\nabla} v \boldsymbol{\nabla} v^T). \tag{2.29}$$

La correspondance entre la régularisation (2.27) et le schéma de diffusion (2.29) est démontrée dans [Weickert 01a]. Le tenseur D, de dimension 2, possède deux valeurs propres $\phi^{'}(\mu_1)$ et $\phi^{'}(\mu_2)$ qui ne sont pas forcément égales. Cette diffusion est donc anisotrope car les directions dépendent des orientations différentes des deux vecteurs propres. Elle est par ailleurs conduite par le champ des déplacements.

Remarque : Il est intéressant d'observer la similitude entre un terme général de régularisation résultant d'une diffusion isotrope conduite par le champ tel que celui défini dans la relation (2.19) et réécrit par :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v) = \iint_{\Omega} \Phi\Big(\mathrm{trace}(\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})^T + \boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x})^T)\Big) d\boldsymbol{x}$$

et le terme de régularisation anisotrope mené par le champ défini en (2.27), où l'application de la trace et de la fonction Φ est inversée.

Synthèse

Nous avons présenté dans cette section un formalisme de diffusion permettant d'imager de façon unifiée les différents termes de régularisation utilisés en estimation du mouvement. Les lissages autorisant une préservation des discontinuités s'appuient soit sur les données photométriques de l'image (cas des "diffusions conduites par l'image"), soit directement sur les variations spatiales du champ des vitesses à estimer (cas des "diffusions conduites par le champ"). Le lecteur pourra se documenter sur les aspects de diffusion en traitement d'images au travers des ouvrages de Perona et Malik [Perona 90] ou de Weickert [Weickert 98].

Nous avons vu que dans le contexte de l'estimation du mouvement, les régularisations permettant de préserver les discontinuités sur la base des variations spatiales du champ s'expriment :

$$\mathcal{H}_{reg} = \iint_{\Omega} \Phi(|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})|^2) + \Phi(|\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x})|^2) d\boldsymbol{x}, \tag{2.30}$$

où la fonction régularisante Φ est à définir. Plusieurs stratégies de recherche ont été développées pour choisir une telle fonction. La section qui suit présente certaines de ces stratégies, qui s'appuient sur une interprétation par diffusion afin de définir des critères de choix pertinents.

2.5.2 Choix d'une fonction de régularisation

Cette section traite du problème du choix d'une fonction Φ dans le terme de régularisation. Pour simplifier les notations, nous traiterons des régularisations du type

$$\mathcal{H}_{reg} = \iint_{\Omega} \Phi(|\boldsymbol{\nabla} s(\boldsymbol{x})|^2) d\boldsymbol{x} = \iint_{\Omega} \Psi(|\boldsymbol{\nabla} s(\boldsymbol{x})|) d\boldsymbol{x}, \tag{2.31}$$

où $\Psi(t) = \Phi(t^2)$ et la variable s prend respectivement les valeurs des composantes u et v du champ $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$ à régulariser. Nous allons présenter deux études qualitatives sur de telles fonctions, qui permettent de définir certains critères qu'elles doivent respecter afin de préserver au mieux les discontinuités.

Étude menée par l'équation d'Euler

Cette première étude s'appuie sur l'équation d'Euler. Cette équation, satisfaite pour le minimum de (2.31), s'écrit :

$$\mathrm{div}\Big(\frac{\Psi^{'}(|\boldsymbol{\nabla} s|)}{2|\boldsymbol{\nabla} s|}\boldsymbol{\nabla} s\Big) = 0. \tag{2.32}$$

Ceci correspond donc à une diffusion dirigée par la fonction $\Psi^{'}(t)/2t$ avec $t = |\boldsymbol{\nabla} s|$. Si $\Psi^{'}(t)/2t$ est constante (cas si $\Psi(t) = t^2$ par exemple), alors d'après la relation (2.32), nous avons :

$$\Delta s = 0, \tag{2.33}$$

où l'opérateur Δ est le Laplacien. Nous retrouvons dans ce cas le lissage quadratique, où la diffusion est équivalente à celle découlant du schéma de Horn & Schunck en (2.16). Si la fonction $\Psi^{'}(t)/2t$ est nulle, il n'y a pas de lissage et donc pas de régularisation.

Ainsi, des valeurs de $\Psi^{'}(t)/2t$ peuvent être imposées selon la valeur de t pour préserver les discontinuités. Trois conditions, découlant de la relation (2.32), sont finalement retenues :

- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\Psi^{'}(t)}{2t} > 0$ diffusion isotrope aux zones homogènes (faibles gradients) ; (2.34)
- $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{\Psi^{'}(t)}{2t} = 0$ pas de diffusion aux frontières (forts gradients) ; (2.35)
- $\dfrac{\Psi^{'}(t)}{2t}$ strictement décroissante pour assurer la cohérence du modèle. (2.36)

Les fonctions de pénalisation qui vérifient ces trois conditions ont un comportement quadratique autour de zéro et linéaire ou sous-linéaire à l'infini. De nombreuses fonctions ont été proposées et nous renvoyons le lecteur aux abondants articles dans ce domaine pour différentes descriptions [Aubert 97,Blake 87,Bouman 93,Charbonnier 97,Deriche 96, Geman 84,Geman 85,Geman 92,Geman 95,Nordstörm 90,You 96].

Étudions à présent une approche menée par la décomposition du processus de diffusion sous-jacent selon des axes parallèles et perpendiculaires au gradient de la quantité s à régulariser.

Étude menée par la direction de diffusion

Cette étude est décrite dans [Deriche 96] sous le nom des méthodes dites "unificatrices" car elles ont pour but de réunir, dans un même formalisme, plusieurs critères que les fonctions de régularisation doivent respecter. Ceci s'appuie sur des travaux initiés dans [Blanc-Féraud 95,Charbonnier 97,Osher 91,Rudin 92,You 96]. Aubert, Deriche et Kronpbrost ont utilisé ces approches dans le cas du flot optique dans [Aubert 99,Deriche 95,Kornprobst 99].

Dans un cadre général, la régularisation (2.31) peut être vue comme provenant du processus de diffusion :

$$\partial_\theta s = \mathrm{div}\Big(\frac{\Psi^{'}(|\boldsymbol{\nabla} s|)}{|\boldsymbol{\nabla} s|}\boldsymbol{\nabla} s\Big) \tag{2.37}$$

pouvant être développé et réécrit par [Deriche 95] :

$$\partial_\theta s = \frac{\Psi^{'}(|\boldsymbol{\nabla} s|)}{|\boldsymbol{\nabla} s|}s_{\xi\xi} + \Psi^{''}(|\boldsymbol{\nabla} s|)s_{\eta\eta}, \tag{2.38}$$

où $s_{\eta\eta}$ (resp. $s_{\xi\xi}$) représente la dérivée seconde de la quantité s dans le sens du (resp. orthogonale au) gradient $\eta = \frac{\boldsymbol{\nabla} s}{|\boldsymbol{\nabla} s|}$. Si l'on veut lisser le champ de vecteurs dans les zones homogènes, alors il faut que la diffusion soit isotrope lorsque $\boldsymbol{\nabla} s$ est proche de zéro. Ceci se traduit par :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Psi^{'}(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\Psi^{''}(t) = \Psi^{''}(0) > 0, \tag{2.39}$$

avec $t = |\boldsymbol{\nabla} s|$. Par ailleurs, afin de préserver les discontinuités, traduites par une forte valeur de t, il faut *i)* ne pas diffuser d'un côté à l'autre de la discontinuité et *ii)* lisser le long des lignes où le flot est constant (iso-lignes). Ces deux conditions se traduisent, selon la relation (2.38), par :

$$\lim_{t\to\infty}\Psi^{''}(t) \quad = 0, \tag{2.40}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi^{'}(t)}{t} \quad > 0. \tag{2.41}$$

Mathématiquement, une fonction Ψ ne peut satisfaire simultanément les conditions (2.40) et (2.41). En revanche, il est possible de privilégier une décroissance plus rapide du poids de la diffusion dans le sens du gradient que celui associé à la diffusion le long des iso-lignes. Ainsi, pour assurer des conditions idéales permettant de préserver les discontinuités, ces méthodes proposent un schéma de régularisation du type de (2.31) avec une fonction Ψ respectant :

- $\Psi^{''}(0) > 0;$ (2.42)
- $\lim_{t\to\infty}\Psi^{''}(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\Psi^{'}(t)}{t} = 0;$ (2.43)
- $\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi^{''}(t)}{\frac{\Psi^{'}(t)}{t}} = 0.$ (2.44)

La résolution, l'existence et l'unicité des solutions découlant de ces approches sont discutées dans [Aubert 97].

Lien entre ces deux approches

Comparons, dans ce paragraphe, les deux approches précédentes.

Tout d'abord, les relations (2.34) et (2.42), imposant un lissage constant dans les zones homogènes, sont équivalentes.

En revanche, la relation (2.43) impose comme condition supplémentaire $\lim_{t\to\infty} \Psi^{''}(t) = 0$, ce qui traduit le fait de ne pas lisser dans le sens du gradient en présence de discontinuités. Ceci n'est pas explicite dans la relation (2.35).

Par ailleurs, la relation (2.36) qui impose une décroissance de la fonction $\Psi^{'}(t)/2t$, implique que $\left(\Psi^{'}(t)/2t\right)^{'} < 0$, soit $\Psi^{''}(t) < \Psi^{'}(t)/t$. Ceci est cohérent avec l'analyse du paragraphe précédent : lorsque la variable t tend vers l'infini (*i.e.* présence de discontinuités), alors la diffusion dans le sens du gradient sera plus faible que la diffusion le long des iso-lignes. Cependant, aucune condition sur la rapidité de décroissance de la fonction $\Psi^{''}(t)$ par rapport à $\Psi^{'}(t)/t$ n'est imposée, contrairement à la relation (2.44). Cette dernière condition assure en fait une part significativement moins importante du lissage dans le sens du gradient par rapport au lissage dans la direction de sa normale, en présence de discontinuités. La première approche n'est pas autant restrictive.

Ainsi, la seconde étude présentée propose un espace de solutions plus restreint que la première. Ceci s'explique par le fait que les conditions imposées dans cette seconde approche s'appuient sur la direction et sur la valeur des coefficients de diffusion en présence de discontinuités, tandis que la première n'est menée que par la valeur des coefficients de diffusion. Le tableau 2.1 présente quelques régularisations proposées par différents auteurs. Les données à régulariser s sont représentées par la variable $t = |\boldsymbol{\nabla} s|$. Ce tableau indique également si les conditions proposées par les relations (2.34) à (2.36) et (2.42) à (2.44) sont respectées.

D'une manière générale, de telles fonctions seront non-convexes et pourront conduire à des problèmes de minimisation délicats. La section suivante présente une étude de fonctions particulières, appelées les fonctions "semi-quadratiques", qui va rendre plus simple un tel problème de minimisation.

2.5.3 Les fonctions semi-quadratiques

Définition

Sur la base des travaux découlant du théorème de Geman & Reynolds [Geman 92], il est possible de démontrer [Black 96c,Geman 92] que si une fonction Ψ possède les propriétés suivantes :

1. $\lim_{t\to\infty} \Psi^{'}(t) < \infty$ et,
2. $\Psi(\sqrt{t})$ est concave,

alors nous obtenons :

$$\forall t,\ \Psi(t) = \min_z\{zt^2 + \psi(z)\} \quad \text{et} \quad \hat{z} = \arg\min_z\{zt^2 + \psi(z)\} = \frac{\Psi^{'}(t)}{2t}, \tag{2.45}$$

où ψ est une fonction strictement convexe définie explicitement à partir de Ψ. Cette forme est dite "semi-quadratique". Avant d'analyser un tel formalisme, étudions ce que ces deux conditions impliquent.

Auteurs	$\Psi(t)$	(2.34) à (2.36)	(2.42) à (2.44)
Tikhonov [Tikhonov 77]	t^2	NR	NR
Rudin *et al.* [Rudin 92]	t	NR	NR
Perona et Malik [Perona 90]	$-\frac{k^2}{2}e^{-(\frac{t}{k})^2}$	R	NR
Geman et Reynolds [Geman 92]	$\frac{(\frac{t}{k})^2}{1+(\frac{t}{k})^2}$	R	NR
Leclerc [Leclerc 89]	$1-e^{-(\frac{t}{k})^2}$	R	NR
Charbonnier *et al.* [Charbonnier 94]	$\sqrt{1+(\frac{t}{k})^2}-1$	R	R
Charbonnier *et al.* [Charbonnier 94]	$k^2\sqrt{1+(\frac{t}{k})^2}$	R	R

TAB. 2.1 – **Quelques régularisations** Ψ *utilisées par la communauté de la vision par ordinateur et indications du respect des conditions (2.34) à (2.36) et (2.42) à (2.44). "R" = respectées, "NR" = non respectées.*

Étude des conditions

La première condition indique que la valeur de $\lim_{t\to\infty}\Psi'(t)$ est finie, donc que :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi'(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\Psi'(t)}{2t}=0,$$

ce qui est exactement la relation (2.35). Par ailleurs, si une fonction est concave sur $\mathbb{R}^+$, alors sa dérivée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $\Psi(\sqrt{t})$ étant concave, la décroissance de $\Psi'(\sqrt{t})$ se traduit par une décroissance de $\Psi'(t)/2t$, ce qui est équivalent au critère (2.36). Enfin, $\Psi'(t)/2t$ étant strictement décroissante, de limite nulle à l'infini et définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, nous avons $\lim_{t\to 0}\Psi'(t)/2t>0$, ce qui correspond à la relation (2.34).

Ainsi, les conditions qu'une fonction Ψ doit respecter pour s'écrire sous la forme présentée en (2.45) sont celles définies dans la section 2.5.2 pour le choix d'une fonction de régularisation préservant les discontinuités. Ce résultat est pertinent : les fonctions Ψ décrites dans la section 2.5.2 peuvent donc s'écrire sous forme semi-quadratique, ce qui simplifie les procédés de minimisation.

Minimisation semi-quadratique

La minimisation de la régularisation (2.31) employant une fonction Ψ mise sous forme semi-quadratique est donc équivalente à la minimisation de $\mathcal{H}^*_{reg}(s,z)$ en (s,z) sur $\Omega\times\Omega$

définie par :

$$\mathcal{H}^*_{reg}(s,z) = \iint_{\Omega} z|\boldsymbol{\nabla} s|^2 + \iint_{\Omega} \psi(z). \tag{2.46}$$

Le champ z ainsi introduit représente en fait les discontinuités de la quantité $|\boldsymbol{\nabla} s|$ à régulariser. Si z est proche de 1, il n'y a pas de discontinuité et la régularisation est assimilable à une forme quadratique. À l'inverse, si z est proche de zéro, il y a alors une discontinuité présente et le terme en $|\boldsymbol{\nabla} s|^2$ disparaît. Le critère (2.46), dit "augmenté", doit être à présent minimisé par rapport aux deux variables $(\boldsymbol{\nabla} s,z)$. Remarquons que si z est fixé, le critère est quadratique en $\boldsymbol{\nabla} s$. Lorsque $\boldsymbol{\nabla} s$ est fixé, alors le minimum en z est donné par l'expression analytique $\hat{z} = \Psi'(|\boldsymbol{\nabla} s|)/2|\boldsymbol{\nabla} s|$. La décroissance de la fonction $\Psi'(|\boldsymbol{\nabla} s|)/2|\boldsymbol{\nabla} s|$ assure alors que z décroît quand $|\boldsymbol{\nabla} s|$ croît.

On parle ainsi de minimisation *semi-quadratique* car celle-ci est découplée en une minimisation quadratique et une remise à jour analytique des variables de discontinuités z. Cette forme facilite grandement les schémas de minimisation.

De nombreux auteurs se sont basés sur le théorème de Geman & Reynolds [Geman 92], et sur le formalisme semi-quadratique (2.46) pour régulariser des problèmes inverses en traitement d'image [Black 96c,Kornprobst 99,Mémin 98a,Mémin 02,Odobez 95].

On peut citer que les travaux de Mémin et Pérez [Mémin 02] proposent une régularisation semi-quadratique, autorisant conjointement l'estimation du flot optique et la segmentation au sens du mouvement. La méthode proposée pour la segmentation utilise judicieusement les valeurs des poids de discontinuités z qui fournissent ainsi une information précieuse sur l'aspect du mouvement.

2.5.4 Remarques

Remarques sur le flot optique

Si le profil de la fonction de luminance n'est pas linéaire (ce qui est le cas dans la plupart des exemples réels), l'ECMA ne peut prendre en compte de larges déplacements. En effet, cette équation peut être assimilée au développement de Taylor du premier ordre de la contrainte de conservation de la luminance $E(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}_x,t+1) - E(\boldsymbol{x},t) = 0$. Une telle linéarisation n'autorise pas de grands déplacements. Pour s'affranchir de ceci, certains auteurs ont proposé de traiter le problème du flot optique dans un cadre multirésolution [Bergen 92,Enkelmann 88,Mémin 98a,Odobez 94]. Les méthodes multirésolutions se basent sur les travaux présentés dans [Burt 84,Rosenfeld 84] et seront discutées dans le chapitre suivant de ce document.

Certains auteurs se sont également intéressés à des schémas de flot optique ne se basant pas sur l'ECMA mais sur l'équation de continuité de la mécanique des fluides [Amini 94, Béréziat 00b,Bereziat 00a,Fitzpatrick 85,Fitzpatrick 88a,Fitzpatrick 88b,Schunk 85,Wildes 00, Zhou 00]. Ce problème ouvert sera discuté dans le chapitre suivant.

Remarques sur les aspects de régularisation

Il existe également des travaux plus généraux sur les problèmes de régularisation, que ce soit pour des applications d'estimation de mouvement, mais aussi pour d'autres types

d'applications. Citons comme exemple les récents travaux de Samson *et al.* qui proposent un modèle variationnel de régularisation pour des problèmes de restauration d'images ou de classification [Samson 00]. Alvarez *et al.* ont proposé, dans [Alvarez 02], une régularisation basée sur l'opérateur de Nagel-Enkelmann permettant d'estimer des cartes de profondeur tout en préservant les discontinuités présentes dans les images. Dans [Tschumperle 01b], les auteurs proposent une méthode pour régulariser des données composées de champs de vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux. De telles techniques permettent de régulariser des champs de vecteurs préalablement estimés en préservant leurs propriétés fondamentales ou de restaurer des données bruitées telles que des images couleurs ou des champs de tenseurs de diffusion [Chefd'hotel 02,Coulon 01,Tschumperlé 01a]. Le lecteur trouvera un inventaire non exhaustif des équations aux dérivées partielles pour la régularisation en traitement d'image dans [Deriche 96].

Enfin, le lecteur trouvera, dans [Barron 94,DelBimbo 95], des comparaisons sur différentes approches proposées pour l'estimation du flot optique.

2.5.5 Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté la notion de diffusion qui permet d'interpréter les effets d'une fonction de régularisation. Le formalisme présenté est celui employé par Weickert [Weickert 98,Weickert 01a]. L'interprétation par diffusion sert d'outil pour proposer des critères que doivent vérifier des régularisations préservant les discontinuités. Enfin, nous avons présenté la famille des fonctions semi-quadratiques. Ces fonctions ont des propriétés intéressantes car elles respectent les critères précédemment évoqués tout en s'écrivant de manière attrayante, autorisant une minimisation non-convexe plus aisée.

Jusqu'à présent, les régularisations proposées sont uniquement spatiales. Elles ne s'appliquent que dans le cadre de l'estimation du flot optique entre deux images consécutives. Dans le cas où plusieurs images d'une même séquence sont disponibles, il est alors possible de rajouter une régularisation temporelle. Le principe est décrit dans la section suivante.

2.6 Régularisations spatio-temporelles

Si une séquence d'images est disponible aux instants $t \in [0,T]$, il semble judicieux d'introduire une régularisation $\mathcal{H}_{reg}$ qui dépende du gradient spatio-temporel $\boldsymbol{\nabla}_t = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t})^T$. Ainsi, le terme de régularisation s'écrit :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iiint_{\Omega\times[0,T]} \Phi(\boldsymbol{\nabla}_t E,\boldsymbol{\nabla}_t \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{t}, \tag{2.47}$$

où Φ est la fonction régularisante à définir. Weickert et Schnörr [Weickert 01b] ont proposé le terme suivant :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iiint_{\Omega\times[0,T]} \Phi(|\boldsymbol{\nabla}_t u(\boldsymbol{x})|^2 + |\boldsymbol{\nabla}_t v(\boldsymbol{x})|^2) d\boldsymbol{x}, \tag{2.48}$$

où Φ est une fonction différentiable et croissante. La diffusion sous-jacente est définie par :

$$\begin{cases} \partial_\theta u = \mathrm{div}_t(\Phi^{'}(|\boldsymbol{\nabla}_t u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}_t v|^2)\boldsymbol{\nabla}_t u), \\ \partial_\theta v = \mathrm{div}_t(\Phi^{'}(|\boldsymbol{\nabla}_t u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}_t v|^2)\boldsymbol{\nabla}_t v), \end{cases} \tag{2.49}$$

où $\mathrm{div}_t = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial t$ est l'opérateur de divergence spatio-temporelle. La fonction Φ utilisée est la même que celle définie par ces auteurs dans la relation (2.21). Dans [Weickert 01b], il est montré que cette diffusion possède la même structure que les filtres de diffusion non linéaire utilisés pour la régularisation de vecteurs tridimensionnels, appliqués pour la première fois par Greig *et al.* [Greig 92] dans un contexte d'imagerie médicale. De plus, on y trouve une discussion sur l'aspect numérique de son implantation ainsi que sur les temps de calculs. L'implantation de cette approche se fait simplement. Elle est deux fois plus lente que la même régularisation dans le domaine spatial uniquement. Les résultats sont en revanche significatifs : le bruit de fond est éliminé et les frontières préservées.

Citons également que Nagel [Nagel 90] a proposé une extension de son lissage, traduit par la diffusion anisotrope conduite par l'image en (2.25), où le tenseur de diffusion (2.24) devient :

$$D(\boldsymbol{\nabla}_t E) = \frac{1}{2|\boldsymbol{\nabla}_t E|^2 + 3\lambda^2}(\boldsymbol{\nabla}_t E^{\perp}\boldsymbol{\nabla}_t E^{\perp T} + \lambda^2 I). \tag{2.50}$$

Les résultats se sont avérés être identiques au schéma de régularisation uniquement spatial, pour un temps de calcul plus élevé.

Les méthodes de mesure du mouvement présentées ci-dessus ont été développées dans un contexte général : aucun *a priori* sur la nature des scènes observées n'est pris en compte par les différentes approches. Dans certaines applications, telles que les sciences environnementales (météorologie, océanographie), l'imagerie médicale ou la mécanique des fluides expérimentale, les phénomènes observés sont de nature particulière et possèdent souvent un mouvement caractéristique. Il serait alors judicieux d'exploiter les connaissances sur la nature de ces mouvements pour optimiser les performances des différents estimateurs. Certains auteurs se sont ainsi intéressés au développement de méthodes dédiées à certains mouvements spécifiques.

2.7 Étude de mouvements particuliers

Cette section présente quatre types particuliers de mouvements et recense quelques travaux effectués dans ces domaines, en mettant l'accent sur les mouvements fluides qui constituent le cadre de notre étude.

2.7.1 Cas des mouvements articulés

Les mouvements articulés concernent certains mouvements robotisés et essentiellement les mouvements humains (articulations des bras, des mains, des jambes, ...). Les applications concernent entre autres le domaine biomédical (par exemple pour le test de qualité de prothèses d'articulations) [Ringer 00] ou l'analyse de gestes (à laquelle la biomécanique sportive s'intéresse particulièrement) [Aggarwal 99,Morris 98,Ricquebourg 00,Yacoob 00], ... Dans ce contexte, plusieurs auteurs ont étudié les mouvements articulés, notamment à des fins de reconstruction [Liebowitz 01], de suivi [Drummond 01] ou de capture du mouvement [Kervrann 97,Plankers 01,Ringer 00,Ying 01] de telles structures. Citons quelques contributions.

Ying *et al.* [Ying 01] réalisent un apprentissage du modèle d'articulation de la main dans le cadre d'un espace de dimensions contraint (ne contenant que les configurations basiques) afin de ne pas alourdir les calculs. Un algorithme de capture du mouvement, basé sur les techniques séquentielles de Monte-Carlo, utilise le modèle résultant. La méthode s'avère robuste et rapide. L'extension de cette technique à d'autres mouvements articulés peut être réalisable et simple. Dans [Ringer 00], les auteurs cherchent à obtenir une description complète du mouvement tridimensionnel humain. À cette fin, des marqueurs sont placés à certains endroits stratégiques du corps humain, ces points étant ensuite mis en correspondance. Enfin, Plankers et Fua [Plankers 01] ont récemment proposé une méthode pour recouvrer des mouvement 3D articulés sur la base d'un formalisme qui introduit des surfaces implicites.

On trouvera des états de l'art dans les thèses de C. Kervrann [Kervrann 95] et de Y. Ricquebourg [Ricquebourg 97].

2.7.2 Cas des mouvements élastiques

Un objet subit une déformation élastique s'il retrouve sa position initiale lorsqu'on annule les forces de déformation qui lui sont appliquées. Ce type de mouvement est caractéristique pour certains organes tels que le cœur, le foie, les muscles ou certaines expressions faciales comme le mouvement des lèvres ou du nez.

En 1981, Broit [Broit 81] a introduit les modèles élastiques en Vision par Ordinateur, qui ont ensuite été repris par Bajcsy et Kovacic [Bajcsy 82,Bajcsy 89]. Un champ de déformations élastiques $\boldsymbol{v}$ peut être décrit par :

$$\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu) \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div} \boldsymbol{v}) + F = 0, \tag{2.51}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et F l'ensemble des forces qui s'appliquent au système. Cette relation semble pertinente car elle permet de spécifier le comportement d'un champ de déformations élastiques en s'appuyant sur des modèles mécaniques. Cependant, son utilisation nécessite la définition de la fonction F (en utilisant les données de luminance E des images) et des coefficients λ et μ qui ne sont pas nécessairement homogènes. On trouvera plusieurs approches dans [Bajcsy 89,Peckar 99] pour des applications de recalage d'images médicales.

Dans [Meyer 96], les auteurs suivent le ventricule gauche du cœur à l'aide de deux contours, l'un caractérisant sa surface interne, l'autre sa surface externe. Un maillage du cœur est construit à l'aide d'un ensemble de points localisés sur ces contours. Le suivi est ensuite effectué par mise en correspondance. Toujours dans un contexte d'imagerie médicale, Song et Leahy [Song 91] proposent une méthode pour estimer le mouvement 3D des battements cardiaques en ajoutant explicitement une contrainte d'incompressibilité dans le schéma d'estimation du mouvement. Devlaminck [Devlaminck 97] a ensuite intégré dans ce modèle une contrainte issue de la théorie de l'élasticité linéaire permettant de généraliser le schéma de Song et Leahy.

Notons que d'autres méthodes plus spécifiques aux applications souhaitées ont été développées pour estimer un mouvement de nature élastique. À titre d'exemple, citons que seuls les points de grande courbure du contour de l'objet étudié sont utilisés dans [Cohen 92]. Le mouvement est alors estimé à l'aide d'une mise en correspondance de ces points sous une contrainte de continuité du champ de déplacements. Par ailleurs, sur la base d'un modèle

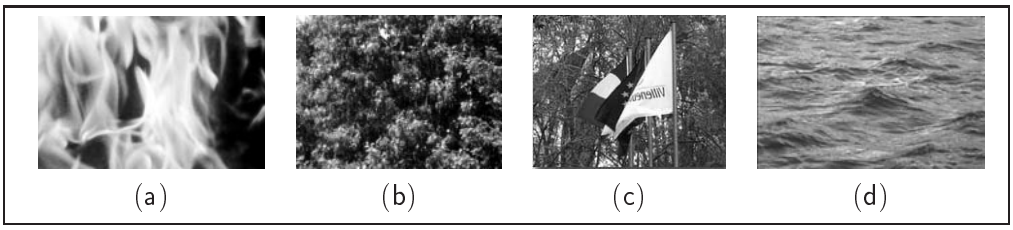


FIG. 2.2 – **Exemples de textures temporelles** *: (a) flammes ; (b) feuilles ; (c) drapeaux et (d) rivières*

de formes 3D défini dans [Metaxas 93], Kakadiaris et Metaxas [Kakadiaris 00] proposent une méthode d'estimation du mouvement 3D de la silhouette humaine, celle-ci pouvant s'interpréter comme un mouvement élastique. Le principe est de chercher la transformation tridimensionnelle (translation et rotation) qui minimise la différence entre la projection du modèle dans l'image et les données observées. Enfin, dans [Mantovani 00], les auteurs s'intéressent aux déformations tectoniques des plaques dans la zone méditerranéenne. Ces déformations 3D peuvent être approchées dans un plan bidimensionnel par des modèles élastiques qui seront alors exploités pour retrouver le mouvement.

2.7.3 Cas des textures temporelles

La notion de texture temporelle a vu le jour suite aux travaux de Nelson et Polona [Nelson 92,Polana 94] dans le domaine de l'analyse non-paramétrique du mouvement. Les textures temporelles regroupent les mouvements dont l'évolution spatiale et temporelle est indéterminée. Ils concernent par exemple les mouvements de flammes, de foule, de rivières, ... La figure FIG.2.2 illustre quelques-unes de ces textures. De tels mouvements, en raison de leur structure singulière, sont difficilement exploitables avec les méthodes usuelles (modèles paramétriques, déformables, flot optique). En revanche, l'interprétation de leur contenu dynamique d'un point de vue statistique s'avère être un axe beaucoup plus attractif.

Ces mouvements sont communément qualifiés de "textures" temporelles car leur analyse peut être vue comme une extension des méthodes d'analyse des textures spatiales. Dans [Szummer 96], les modèles auto-régressifs, développés pour l'analyse de textures spatiales [Mao 92], sont étendus dans le cadre temporel et permettent d'obtenir des résultats probants de synthèse de textures temporelles. On trouvera une description détaillée sur l'analyse non-paramétrique de telles structures dans [Fablet 01].

2.7.4 Cas des écoulements fluides

Par opposition au mouvement élastique, un fluide ne revient pas systématiquement dans son état initial après avoir subi une déformation. Pour une description générale du mouvement fluide, nous renvoyons le lecteur au chapitre 1.

Ces mouvements, qui sont de nature hautement déformable, sont composés de structures parfois éphémères et provoquant ainsi de brutales variations d'intensité dans les images. Du point de vue de l'estimation du mouvement, ces faits peuvent rendre délicat l'emploi de techniques classiques telles que celles présentées dans les sections précédentes.

Ainsi, l'analyse du mouvement fluide constitue un problème spécifique dans le domaine de la Vision par Ordinateur. Nous allons présenter dans cette section quelques études menées pour mesurer le mouvement dans ce contexte.

Tout d'abord, un certain nombre d'auteurs se sont intéressés à l'intégration de l'équation de continuité décrite au chapitre 1 par la relation (1.8) dans les schémas de flot optique [Amini 94,Bereziat 00a,Fitzpatrick 85,Fitzpatrick 88a,Fitzpatrick 88b,Qiu 00,Wildes 00, Zhou 00]. Cette manipulation peut effectivement s'avérer attirante car elle permet de prendre en compte les éventuels changements de luminance dans les images (sous réserve que l'intensité des images soit relative à une quantité transportée par le fluide). De nombreuses études ont été menées en ce sens, que ce soit pour des applications en imagerie médicale, en météorologie ou même dans un contexte de mouvement rigide.
Cependant, un certain nombre de difficultés surviennent en raison de la nature tridimensionnelle et différentielle de cette équation. De plus, son adéquation aux schémas de minimisation utilisés n'est pas nécessairement naturelle. Ces difficultés seront discutées dans la section 3.3 du chapitre 3.

Une autre contribution importante dans le développement de méthodes de flot optique pour les fluides est l'adaptation des termes de régularisation. Les termes de lissages classiques, initialement développés pour pallier un problème mal-posé, ne sont en effet pas conçus pour de tels mouvements. Par exemple, nous avons vu que le terme de régularisation de Horn et Schunck propose un champ de vecteurs le plus "lisse" possible en minimisant $|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v|^2$. Cela peut ne pas être optimal dans notre contexte. Il semblerait judicieux de proposer des termes de régularisations spécifiques. Citons quelques exemples :

• Le terme proposé dans [Mémin 99] a pour but de privilégier les solutions qui se rapprochent d'un ensemble de représentations paramétriques. Le modèle sous-jacent est basé sur la représentation de Rankine pour les vortex, que l'on détaillera dans la deuxième partie de ce document. De manière conjointe à l'estimation de la vitesse $\boldsymbol{v}$, on extrait un certain nombre de points singuliers et de paramètres caractéristiques. Ces données permettent de formuler de manière paramétrique un champ $\boldsymbol{v}_p(\Theta)$, Θ étant le vecteur de paramètres que l'on vient d'extraire. La régularisation est alors formulée par :

$$\mathcal{H}_{reg} = \iint_{\Omega} \Psi_1(|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x},t)|) + \Psi_1(|\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x},t)|) + \Psi_2(|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p(\Theta)|) d\boldsymbol{x}, \tag{2.52}$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont des fonctions de pénalisation qui peuvent être quadratiques mais peuvent également être robustes vis-à-vis des données aberrantes (par exemple des fonctions semi-quadratiques telles que celles définies dans la partie 2.5.3).

• Denis-Brossard *et al.* [DenisBrossard 00,Rougon 00] ont quant à eux développé une méthode d'estimation dense du mouvement pour des écoulements fluides menée par des informations d'orientation localement dominante et de contraste généralisé. Les informations d'orientation sont estimées sur chaque image à partir des valeurs propres du tenseur de structure. Ce tenseur est obtenu en convoluant composante par composante un noyau Gaussien G_{σ_1} de variance $\sigma_1 > 0$ avec le tenseur J_0 défini par :

$$J_0(\boldsymbol{\nabla} E_{\sigma_2}) = \begin{pmatrix} E^2_{\sigma_2,x} & E_{\sigma_2,x} E_{\sigma_2,y} \\ E_{\sigma_2,x} E_{\sigma_2,y} & E^2_{\sigma_2,y} \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

où $E_{\sigma_2,i}$ $(i = x,y)$ est la dérivée partielle de la fonction E_{σ_2} par rapport à la composante x ou y, E_{σ_2} représentant la fonction de luminance filtrée au moyen d'un filtre gradient

paramétré par σ_2. Les vecteurs propres, orthogonaux, de ce tenseur pondérés par les valeurs propres permettent d'accéder à l'orientation localement dominante (voir par exemple dans [Weickert 98] pour plus de détails). Il est à noter que ce tenseur est défini dans un contexte multiéchelle, dans un cas mono et multispectral. La contrainte de flot optique utilisée fait intervenir des conditions de stationnarité sur certaines caractéristiques de ce tenseur de structure. À cette contrainte de flot optique est associée un terme de régularisation visant à approcher le mouvement par un modèle paramétrique, le tout étant employé dans un contexte multirésolution avec des fonctions de pénalisation robustes.

• Rohn [Rohn 96] propose de découpler le terme de régularisation de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2}\Big(\alpha \ \mathrm{div}^2\ (\boldsymbol{v}) + \beta \ \mathrm{curl}^2\ (\boldsymbol{v}) + \gamma \ \mathrm{def}^2(\boldsymbol{v})\Big), \tag{2.54}$$

où def $(\boldsymbol{v}) = \sqrt{(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2}$. Ce terme est en fait la norme du vecteur composé des deux termes de "cisaillement" (voir equation (1.16)). Les coefficients α, β et γ sont des poids non nuls permettant de pondérer l'importance de chacun des termes relatifs à la relation (2.54). L'objectif d'une telle régularisation est de pouvoir privilégier un type de mouvement par rapport à un autre. Ceci ne se fait pas en encourageant explicitement la formation du mouvement souhaité mais en le pénalisant moins fortement que les deux autres. De cette manière, en ajustant les paramètres α, β et γ, la fonctionnelle (2.54) pourra autoriser la formation d'un mouvement caractérisé par une valeur non nulle de div $\boldsymbol{v}$, curl $\boldsymbol{v}$ ou def $\boldsymbol{v}$. Les applications traitées dans [Rohn 96] concernent des mouvements dont on sait qu'ils sont incompressibles (div $\boldsymbol{v} = 0$) et fortement rotationnels. Le terme β est alors dix fois plus petit que les deux autres.

• Haddadi et Jay-Kuo [Haddadi 93] proposent un terme de régularisation permettant de préserver des quantités de divergence et de vorticité $\hat{\xi}$ et $\hat{\zeta}$ préalablement fournies à l'algorithme :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \lambda \iint_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \hat{\xi})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \hat{\zeta})^2, \tag{2.55}$$

où λ est un coefficient de pondération, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}$. Pour évaluer les termes $\hat{\xi}$ et $\hat{\zeta}$, les auteurs font l'hypothèse que le champ des déplacements à estimer est composé d'un champ translationnel $\boldsymbol{v}_{tr}$ (avec div $\boldsymbol{v}_{tr} =$ curl $\boldsymbol{v}_{tr} = 0$) et d'un champ de déformation $\boldsymbol{v}_{def}$ ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{tr} + \boldsymbol{v}_{def}$). La composante $\boldsymbol{v}_{tr}$ est estimée à l'aide d'un schéma classique de type Horn et Schunck. L'ensemble des points pour lesquels l'équation de contrainte du mouvement apparent n'est pas vérifiée est sélectionné à l'aide de la classification suivante :

$$|E_2(x,y) - E_1(x - u_{tr}, y - v_{tr})| > \tau, \tag{2.56}$$

τ étant un seuil fixé. Pour cet ensemble de points, la valeur du champ $\boldsymbol{v}$ est affinée de manière locale par un mouvement translationnel sur une fenêtre W de taille (2x2) :

$$\begin{aligned}&(u_{def}, v_{def}) = \\ &\{(u_i, v_i) : |E_1(x - u_i, y - v_i) - E_2(x,y)| < |E_1(x - u_j, y - v_j) - E_2(x,y)|,\ j \in W(x,y)\}\,.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Le champ global résultant de ce raffinement est considéré comme étant représentatif du champ de déformations. À l'aide de ce champ, les valeurs $\hat{\xi}$ et $\hat{\zeta}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \frac{\partial u_{def}}{\partial x} + \frac{\partial v_{def}}{\partial y} = \text{div } \boldsymbol{v}_{def}, \\ \hat{\zeta} &= \frac{\partial v_{def}}{\partial x} - \frac{\partial u_{def}}{\partial y} = \text{curl } \boldsymbol{v}_{def}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

On pourra remarquer que l'idée d'imposer au mouvement à estimer une divergence et une vorticité dont les valeurs sont préalablement estimées est astucieuse. Dans le cas présent, la technique d'estimation de ces quantités est fortement locale et risque, par conséquent, d'être bruitée. Par ailleurs, le champ $\boldsymbol{v}_{def}$ peut posséder d'importantes discontinuités, en raison de la classification trop brutale (un simple seuillage) effectuée dans la relation (2.56). Ces discontinuités peuvent avoir pour effet de perturber les mesures de divergence et de vorticité.

• Suter [Suter 94] a proposé d'étendre le schéma de régularisation du premier ordre :

$$\mathcal{H}_{reg} = \lambda \iint_{\Omega} |\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x},t)|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x},t)|^2$$

par un schéma appelé "régularisation div-curl du second ordre" :

$$\mathcal{H}_{reg} = \iint_{\Omega} \alpha |\boldsymbol{\nabla} \text{div } \boldsymbol{v}|^2 + \beta |\boldsymbol{\nabla} \text{curl } \boldsymbol{v}|^2 \tag{2.59}$$

et généralisé à l'ordre m dans [Chen 98] :

$$\mathcal{H}_{reg} = \iint_{\Omega} \alpha |\boldsymbol{\nabla}^m \text{div } \boldsymbol{v}|^2 + \beta |\boldsymbol{\nabla}^m \text{curl } \boldsymbol{v}|^2. \tag{2.60}$$

Cette famille de régularisations s'avère intéressante car elle ne s'applique pas directement sur les valeurs $|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v|^2$ représentatives de la continuité du déplacement, mais sur des quantités significatives pour les mouvements fluides (divergence et rotationnel), fortement présentes dans un écoulement (voir chapitre 1). Cette régularisation semble donc attractive dans un contexte d'imagerie fluide. Si $m = 0$ et $\alpha = \beta$, la régularisation tend à atténuer les valeurs de div $\boldsymbol{v}$ et de curl $\boldsymbol{v}$. En revanche, si $m = 1$, le terme (2.60) favorise des zones constantes de divergence et de vorticité. Si $m = 2$, on autorise des évolutions linéaires de div $\boldsymbol{v}$ et de curl $\boldsymbol{v}$ en minimisant $|\boldsymbol{\nabla}^2 \text{div } \boldsymbol{v}|$ et $|\boldsymbol{\nabla}^2 \text{curl } \boldsymbol{v}|$, et ainsi de suite.

Dans [Chen 99], les auteurs s'intéressent à une implémentation numérique de ce schéma à l'ordre 2. Constatant que cette régularisation conduit à un ensemble de systèmes trop lourds et dans la plupart des cas impossibles à résoudre dans un cas bidimensionnel, une interpolation de cette régularisation par une combinaison linéaire de fonctions de base (judicieusement choisies) pondérées par les valeurs du champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ à estimer est proposée. C'est ce qu'on appelle la "quasi-interpolation". Le lecteur pourra se référer à [deBoor 93] à ce sujet. L'étude théorique de cette approximation n'assure cependant

ni la stabilité ni la convergence de la solution. Les auteurs proposent alors l'ajout de fonctions "barrières" dont le but est de pénaliser fortement les écarts trop importants des estimations afin d'obtenir une solution dans un domaine acceptable. La complexité des systèmes résultants fait que cette gamme de régularisations, malgré son intérêt pour la nature des solutions qu'elle peut apporter, est peu utilisée par la communauté de la Vision par Ordinateur.

• Gupta et Prince ont proposé une formulation stochastique, dans [Gupta 96b], de la régularisation div-curl du second ordre proposée dans [Suter 94] dans un cas bidimensionnel. Il est de plus montré qu'une telle approche conduit à des problèmes bien posés qui peuvent ainsi être utilisés à des fins de simulation ou bien d'estimation de mouvement. L'extension au cas tridimensionnel est apporté dans [Gupta 96a]. Il est à noter que ces études sont établies dans un cadre théorique mais aucune expérimentation ni implémentation n'est proposée. Les auteurs soulignent en particulier le système complexe conduisant à des équations aux dérivées partielles d'ordre 4 découlant de cette régularisation.

• Citons que Zhou *et al.* ont étudié le problème de l'extraction et du suivi de structures déformables, en particulier pour l'étude des ouragans [Zhou 01]. Dans ce contexte, ils proposent un modèle d'estimation de mouvement pour les structures nuageuses basé sur une mise en correspondance, associé à un terme énergétique visant à contraindre le mouvement vers un modèle affine 3D. Ce modèle est étudié dans [Palaniappan 95] et validé dans le cas des phénomènes de cyclones ou d'ouragans dans [Hasler 98].

2.8 L'étude du mouvement dans le domaine de la physique

Un grand nombre de disciplines issues de la physique s'intéressent au mouvement déformable et fluide. Cette partie recense quelques applications issues des sciences physiques, où l'information du mouvement fournit aux spécialistes concernés une source de données pouvant s'avérer précieuse.

Le monde du traitement d'image s'est largement intéressé au développement de méthodes dédiées aux images particulières que sont les images médicales. Dans un cadre d'angiographie, des études sont menées en estimation de mouvement car certaines pathologies peuvent influencer le flot sanguin [Mass 92,Nogawa 97]. Une bonne analyse de celui-ci peut ainsi aider au diagnostic. Par ailleurs, les mouvement cardiaques, les mouvements musculaires, les déformations des sillons corticaux, la détection de structures pertinentes du cerveau et certaines techniques de recalage d'images cérébrales font de plus en plus appel à des informations de mouvement extraites des données images disponibles [Baillard 01,Bajcsy 89,Christensen 96,Hellier 01].

Dans un cadre d'imagerie météorologique, l'information du mouvement est une source d'information capitale pour de nombreuses applications. La vitesse des vents peut par exemple servir d'initialisation aux algorithmes de prédiction du temps. Cela permet aussi de détecter des phénomènes climatiques violents et soudains tels que des structures convectives responsables de fortes pluies très localisées ou encore des enroulements dépressionnaires [Maurizot 95,Ottenbacher 97,Papin 00]. Les traceurs Lagrangiens permettent quant à eux le suivi de structures atmosphériques ou d'agents polluants [Simpson 94].

En océanographie, les études des courants marins, d'icebergs, le suivi d'œufs de poissons ou de larves (pour des applications de pêche) ou le suivi de structures polluantes telles

que des marées noires sont également facilités si la connaissance de leurs mouvement est disponible [DasPeddada 96,Moctezuma 95].

Enfin, dans un contexte de mécanique des fluides expérimentale, les informations de mouvement fournissent une source d'information unique pour la compréhension et la modélisation de certains types d'écoulement [Adrian 91,Rao 92,Wallace 95,Wernert 96].

Dans ces trois domaines précédemment cités, les méthodes de corrélation sont abondamment employées (voir la section 2.2 de ce chapitre) et se révèlent efficaces. Néanmoins, le monde du traitement d'image a mis en évidence certains problèmes de ces techniques (sensibilité à la taille du support d'estimation, manque de cohérence spatiale dans certains cas, mauvaise gestion des données éparses par exemple) qui rend leur utilisation incertaine pour l'analyse de structures déformables. Ainsi, de nombreuses recherches, en estimation de mouvement, en suivi et en modélisation de structures déformables sont en cours (voir la section 2.7.4).

Ce panel non exhaustif met en évidence la part importante d'information que le mouvement peut procurer aux physiciens. Malgré une bonne utilisation opérationnelle des approches par corrélation en météorologie, océanographie ou mécanique des fluides expérimentale, il semblerait utile d'appliquer dans ces domaines des méthodes plus sophistiquées du point de vue de la Vision par Ordinateur. Une séquence d'images numériques offre en effet la possibilité d'obtenir une très grande variété d'informations spatio-temporelles continues, sous condition de les retrouver à partir des seules données de luminance. Nombre d'études sont ainsi menées afin de proposer aux spécialistes des outils de travail de plus en plus fiables, permettant d'accéder à une source d'information de plus en plus dense et riche.

2.9 Discussion

Ce chapitre a proposé un panorama non exhaustif des méthodes existantes pour mesurer le mouvement apparent dans une séquence d'images. Nous avons présenté les méthodes par corrélation, paramétriques et les méthodes de flot optique. L'accent a ensuite été porté sur des fonctions particulières appliquées au flot optique, visant à estimer correctement un déplacement qui peut être discontinu. Ensuite, nous avons examiné le cas de quelques mouvements spéciaux qui nécessitent une attention particulière, tels que les mouvements articulés, élastiques, fluides ou les textures temporelles (les méthodes usuelles n'étant pas spécialement conçues pour de tels mouvements). Enfin, la section précédente s'est intéressée aux approches employées par la communauté des sciences physiques pour accéder à l'information de mouvement.

Parmi ce qui a été présenté dans ce chapitre, nous retenons que :

1. tout d'abord, le problème du flot optique, bien que largement étudié, reste ouvert et de nombreuses études sont en cours dans ce domaine. En imagerie fluide, le schéma de régularisation proposé dans [Suter 94] est attractif car il traite explicitement des quantités significatives dans la caractérisation d'un écoulement. Cependant, ce schéma présente certains inconvénients dans son implantation numérique ;
2. ensuite, nous avons constaté que les approches par corrélation sont fréquemment employées en sciences environnementales et que peu de méthodes plus élaborées du point de vue du traitement d'images se sont imposées. Ceci s'explique par le fait que

l'imagerie fluide, en raison de ses spécificités, rend difficile l'utilisation des approches génériques et qu'il est capital de développer des techniques dédiées.

Le but du chapitre qui suit est d'apporter une contribution dans les méthodes d'estimation du mouvement pour des phénomènes fluides. Nous allons proposer une méthode de flot optique qui tentera de préserver les principales caractéristiques d'un écoulement.

Chapitre 3

Méthode d'estimation dense du mouvement fluide

Nous allons dans ce chapitre décrire l'approche que nous proposons pour l'estimation dense du mouvement fluide (*i.e.* l'estimation de sa composante eulérienne). En s'appuyant sur des travaux réalisés dans le projet Vista[1] où s'est déroulée cette thèse [Mémin 98b,Mémin 98a,Odobez 94,Odobez 95,Pérez 92,Pérez 93], nous proposons une formulation robuste du problème de l'estimation du mouvement fluide associée à un schéma d'optimisation multirésolution et multigrille.

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a présenté un certain nombre de méthodes d'estimation de champs denses de déplacements, en détaillant particulièrement les méthodes de flot optique. Dans un contexte d'imagerie fluide, plusieurs techniques d'estimation de champ denses ont été utilisées avec succès [Bannehr 96,Bereziat 00a,Cohen 99,Fitzpatrick 85,Fitzpatrick 88a, Fitzpatrick 88b,Ford 94,Haussecker 01,Larsen 98,Mémin 99,Ottenbacher 97,Simpson 94, Wildes 00,Zhou 00]. Les champs résultant des différentes méthodes se sont révélés pertinents pour la mesure de vents dans les applications météorologiques [Ottenbacher 97], pour leur utilisation dans des modèles numériques de prédiction du temps [Ottenbacher 97], pour la visualisation de l'évolution de courants marins [Cohen 99] ou d'écoulements particuliers en mécanique des fluides expérimentale [Wernert 96]. Ces champs de vecteurs sont également utilisés pour accéder à des quantités dérivées telles que les cartes de divergence ou de vorticité [Wallace 95], tandis que leur intégration permet d'accéder à la fonction de courant, au potentiel de vitesse ou aux trajectoires des particules (définies dans le chapitre 1) [Grazzini 01,Shukla 74,Simpson 94]. En outre, comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce document, ces champs permettent également de détecter et de classer les singularités présentes [Cohen 99,Ford 97,Ford 95,Ford 94,Maurizot 95,Mémin 99,Nogawa 97], entités fondamentales pour la compréhension, la prédiction et la caractérisation de l'écoulement traité.

Dans la plupart des méthodes citées ci-dessus, les techniques d'estimation de champs denses des vitesses sont similaires à celles usuellement employées en Vision par Ordina-

1. `http://www.irisa.fr/vista`

teur (dont les principes sont présentés dans la section 2.4). Ces techniques, originalement conçues pour des mouvements rigides, reposent sur une hypothèse d'invariance de la luminance des objets traités [Horn 81]. Dans un cadre d'imagerie fluide, la notion d'"objet" est malheureusement inexistante. Nous parlerons plutôt de structures pouvant être hautement déformables, parfois éphémères et dont la luminance rendue par l'image peut être variable, comme l'illustre la figure FIG.3.1 dans un cadre météorologique. Sur de telles séquences,

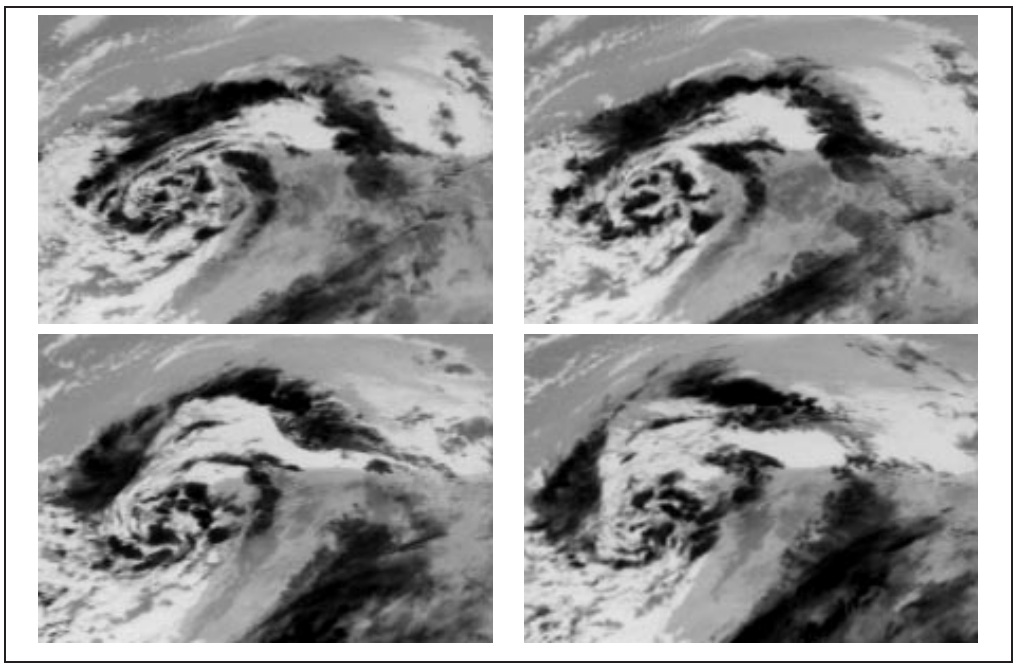


FIG. 3.1 – **Illustration de la complexité en imagerie fluide** *: séquence de quatre images satellites consécutives provenant du canal infrarouge de Météosat, représentatives d'une zone dépressionnaire.*

les techniques issues d'estimateurs standards peuvent s'avérer inappropriées et il devient nécessaire de développer des méthodes alternatives. Ce chapitre est une contribution dans ce sens.

3.2 Position du problème

Rappelons que les estimateurs génériques de mesure dense du mouvement se basent sur un modèle initial proposé par Horn et Schunck et peuvent se formuler à partir de la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\iint_{\Omega} \Psi_1\left[\nabla E(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial E(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right]+\alpha\Psi_2\big[|\nabla u(\boldsymbol{x},t)|+|\nabla v(\boldsymbol{x},t)|\big], \tag{3.1}$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont deux fonctions, pouvant être quadratiques ou non. De telles fonctions ont pour effet de limiter l'impact des données où l'ECMA n'est pas valide et d'éviter un sur-lissage aux endroits où le champ réel est discontinu. Nous renvoyons le lecteur au

chapitre précédent pour une description des différentes possibilités quant au choix de telles fonctions.

Bien que des estimateurs s'appuyant sur (3.1) se sont avérés efficaces dans certains cas d'imagerie fluide [Bannehr 96,Cohen 99,Larsen 98,Mémin 99,Wallace 95], les deux hypothèses sous-jacentes (conservation de la luminance et lissage au premier ordre du champ de vecteurs) semblent inappropriées pour les mouvements complexes et déformables que l'on est en mesure de rencontrer. D'une part, la nature hautement déformable du mouvement, les possibles variations de température ou de pression d'un fluide en mouvement et parfois la complexité des traitements réalisés sur certains types d'images (météorologiques par exemple) participent à une variation de l'intensité lumineuse. Cette variation rend inappropriée l'utilisation de l'ECMA comme hypothèse de base. D'autre part, les estimateurs de flot optique associés à une régularisation du premier ordre ont souvent des difficultés à recouvrer proprement les mouvements fluides. Même si l'utilisation d'une fonction de pénalisation robuste dans un lissage de ce type permet de préserver certaines discontinuités, les quantités de divergence et de vorticité présentes dans le champ ont malgré tout du mal à être correctement estimées. Ceci est d'autant plus préjudiciable que ces quantités, situées au voisinage de points singuliers, sont des descripteurs primordiaux dans l'interprétation d'un écoulement. Il semble donc essentiel, dans le but de recouvrer le plus fidèlement possible ces mouvements, de ne pas lisser ou sous-estimer ces mesures. La régularisation du premier ordre ne semble alors pas être optimale. Dans la section 3.4, nous expliquerons les causes d'un tel constat.

Ces remarques nous conduisent à proposer des alternatives aux deux hypothèses classiquement utilisées pour l'estimation du flot optique. Nous proposons alors d'intégrer des notions issues de la mécanique des fluides dans les termes d'observation et de régularisation. Ceci est présenté dans les sections suivantes.

3.3 Intégration d'une loi physique : l'équation de continuité

3.3.1 Motivations

Dans les séquences d'images mettant en jeu des scènes fluides, de forts changements temporels de l'intensité lumineuse sont observables. De nombreux facteurs, qui dépendent de la technologie utilisée pour visualiser l'image ou de la nature de l'écoulement, sont responsables de tels effets. La cause majeure provient du fait que certains fluides sont *compressibles*. Dans ce cas, ils subissent un changement de volume au cours du déplacement se traduisant par une variation de l'intensité lumineuse (si cette dernière est relative à la densité du fluide). Dans ce contexte, l'hypothèse d'invariance de la fonction de luminance n'est alors pas valide.

Bien souvent, l'image visualise uniquement l'écoulement dans un plan de coupe (comme en visualisation par PIV qui emploie un plan laser [Adrian 91,Wernert 96]) ou résulte d'un processus d'intégration le long d'une couche de cet écoulement (comme pour les images de tomographie [Fitzpatrick 85,Mass 92], d'angiographie [Nogawa 97] ou les images de transmittance [Fitzpatrick 88a,Wildes 00]). Dans le premier cas, les mouvements tridimensionnels qui ne sont pas parallèles au plan de visualisation vont être responsables de l'apparition ou de la disparition de matière dans le plan image. Dans le second cas, le processus d'intégration le long d'une couche de l'écoulement peut générer un mouvement

apparent qui n'est pas en accord avec l'hypothèse d'invariance de la fonction de luminance, même s'il doit exister un invariant Lagrangien (correspondant à la conservation d'une certaine quantité physique le long des trajectoires).

Enfin, l'intensité lumineuse est souvent fonction de conditions thermodynamiques, telles que la température ou la pression. Ainsi, lorsque ces conditions sont modifiées, la luminance d'un élément de fluide varie le long de sa trajectoire. Ceci est entre autres vérifié dans le cas d'images satellites infrarouges, où l'intensité observée est directement fonction de la température [Zhou 00]. Dans un cadre météorologique, cela permet par exemple d'accéder aux conditions thermiques de l'océan ou de mesurer directement l'altitude d'un nuage à partir de tables de conversion.

Ainsi, les approches classiques modélisées par une fonction de coût du type de (3.1) sont issues d'hypothèses dont les faiblesses se révèlent dans un contexte d'imagerie fluide. Comme plusieurs auteurs l'ont déjà suggéré, nous proposons d'intégrer dans le terme d'observation l'*équation de continuité* de la mécanique des fluides (voir chapitre 1). L'idée a originalement été proposée par Schunck [Schunk 84] dans le cadre général de l'estimation du mouvement. Depuis, il est reconnu que cette équation présente une alternative très attractive à l'ECMA, dans un cadre de météorologie ou d'imagerie médicale [Amini 94,Bereziat 00a,Fitzpatrick 85,Fitzpatrick 88a,Fitzpatrick 88b,Wildes 00,Zhou 00]. La luminance observée dans les images est en effet liée, dans un degré plus ou moins important qui dépend de la nature de l'image traitée, soit à la densité du fluide dont on suit l'évolution, soit à la concentration d'une quantité passive transportée par celui-ci. L'équation de continuité lie ces quantités physiques à la vitesse tridimensionnelle d'un fluide. L'idée d'appliquer cette équation à la luminance des images s'est donc naturellement imposée pour l'estimation de la vitesse apparente bidimensionnelle.

3.3.2 De l'équation de continuité à la contrainte du flot optique

Nous proposons d'intégrer l'équation de continuité comme contrainte "physique" dans un schéma de flot optique. Il est démontré, par les résultats présentés dans [Amini 94, Bereziat 00a,Fitzpatrick 85,Fitzpatrick 88a,Fitzpatrick 88b,Wildes 00,Zhou 00], que cette contrainte apparaît attrayante lorsque la luminance est reliée à la densité du fluide observé (c'est en particulier le cas pour les images de transmittance [Fitzpatrick 88a,Wildes 00], de fumée ou de particules dans le cas des images PIV [Wallace 95]). En effet, la densité ρ suit l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{V}$ est la vitesse tridimensionnelle du fluide. Cette équation provient d'une hypothèse de conservation globale de la matière au cours du temps (voir section 1.2.1).

Par analogie, l'utilisation de l'équation de continuité comme invariant consiste à faire l'hypothèse que la variation de la luminance E suit la loi :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}(E\boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.3}$$

Pour les fluides incompressibles tels que l'eau, la divergence tridimensionnelle est nulle. Sous l'hypothèse forte que la vitesse bidimensionnelle apparente est également à divergence

nulle, alors la contrainte représentée par l'équation de continuité en (3.3) conduit à l'ECMA. En effet, comme nous avons :

$$\mathrm{div}(E\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla E + E\mathrm{div}\boldsymbol{v}, \tag{3.4}$$

la relation (3.3) devient, avec div $\boldsymbol{v} = 0$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla E = 0, \tag{3.5}$$

ce qui est l'équation de contrainte du mouvement apparent. Si à l'inverse les fluides sont compressibles comme en imagerie météorologique, alors div $\boldsymbol{v} \neq 0$ et l'hypothèse présentée en (3.3) se distingue de l'ECMA en (3.5) par le terme de divergence non nulle. Ainsi, la relation (3.3) définit une contrainte alternative qui relie directement la variation d'intensité à la divergence du mouvement.

Il est cependant nécessaire d'avoir une discussion plus approfondie sur le passage que nous avons effectué entre les relations (3.2) et (3.3). On peut effectivement se demander s'il est convenable de faire l'hypothèse que la luminance des images soit relative à une densité et sous quelles conditions une version bidimensionnelle de l'équation de continuité a un sens. Rappelons en effet que cette équation n'est définie que dans un espace tridimensionnel.

3.3.3 Conditions d'application

Cas des images de transmittance

Dans le contexte particulier d'images de transmittance avec des conditions aux bords connues, la validité de la contrainte présentée en (3.3) a formellement été démontrée par Fitzpatrick dans [Fitzpatrick 88a]. Wildes *et al.* [Wildes 00] ont récemment repris ce résultat dans le même cadre d'imagerie, pour des conditions aux bords nulles.

Cas des images satellitales atmosphériques

Dans le cas d'images atmosphériques satellitales (qui seront la source de nombre de nos expérimentations), très peu d'informations sur le modèle de formation des images (en raison de la complexité des phénomènes nuageux mis en œuvre) ou sur les conditions aux bords sont accessibles. Par ailleurs, en météorologie, les frontières de l'image n'ont aucun rapport avec les frontières du fluide et les conditions aux bords du domaine image, même si elles étaient disponibles, ne fourniraient aucune information pertinente. Il est donc quasi impossible d'obtenir dans ce contexte une garantie formelle quant à la validité d'un invariant photométrique relatif à l'équation de continuité. Même si son application s'est révélée intéressante et encourageante dans certaines études [Bereziat 00a,Zhou 00], nous ne pouvons apporter que des justifications qualitatives, ce que nous présentons dans ce paragraphe.

Dans le cas des images issues des canaux infrarouges et vapeur d'eau du satellite Météosat, la luminance peut linéairement être convertie en température. Cette conversion s'effectue selon un certain modèle dépendant de paramètres remis à jour tous les trois mois par le consortium Européen Eumetsat chargé de la gestion des images de Météosat. En

faisant l'hypothèse d'un profil homogène de température de la troposphère[2] et en utilisant une linéarisation de la formule de Laplace [Triplet 71], la température peut linéairement être convertie en pression P. Ainsi, la luminance peut directement être reliée à la pression du fluide.

Les lois météorologiques indiquent que sous l'hypothèse de l'équilibre statique atmosphérique, la composante verticale des forces de pression et le poids s'annulent. Ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho, \tag{3.6}$$

où z est la composante verticale de l'altitude, g la gravité (supposée constante) et ρ la masse volumique. Dans ce cas, la luminance E de l'image est approchée par l'intégration verticale de la densité :

$$E(x,y,t) \propto \int_{z_0}^{z_1} \rho(x,y,z,t)dz. \tag{3.7}$$

Ce modèle de la luminance des images est similaire à celui utilisé dans le cadre d'images de transmittance. Suivant les travaux de Fitzpatrick [Fitzpatrick 88a], l'intégration de l'équation de continuité en (3.2) selon la variable z et l'utilisation de la relation (3.7) conduit à :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}(E\boldsymbol{v}) + [E\boldsymbol{n}_z \cdot \boldsymbol{V}]_{z_0}^{z_1} = 0, \tag{3.8}$$

où la vitesse bidimensionnelle apparente $\boldsymbol{v}$ est définie par

$$\boldsymbol{v} = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \rho \boldsymbol{V}_h}{\int_{z_0}^{z_1} \rho}, \tag{3.9}$$

$\boldsymbol{V}_h$ étant le vecteur représentatif de la vitesse "horizontale" de $\boldsymbol{V}$ (ses composantes x et y) et $\boldsymbol{n}_z^T = [0\ 0\ 1]$.

Sous l'hypothèse, classique en météorologie, que la composante verticale $\boldsymbol{n}_z \cdot \boldsymbol{V}$ de la vitesse atmosphérique instantanée est négligeable, la représentation de l'intensité des images respecte une forme 2D de l'équation de continuité en fonction de la vitesse atmosphérique bidimensionnelle $\boldsymbol{v}$ apparente.

On peut également noter que Béréziat *et al* [Bereziat 00a] ont justifié l'usage de l'équation de continuité dans le cadre d'images Météosat infrarouges sous une hypothèse de conservation du volume. Les images infrarouges étant représentatives de l'altitude d'un nuage, les auteurs émettent l'hypothèse qu'un "élément de volume d'une structure nuageuse reste constant entre deux instants successifs". Autrement dit, le volume compris entre le sol et la surface d'un nuage est supposé constant au cours du temps. Cela revient à affirmer par exemple que si un nuage subit une dilatation, sa surface s'élargit et son altitude diminue. Cette hypothèse est équivalente à l'emploi de l'équation de continuité ou à une hypothèse de conservation de l'intensité lumineuse globale.

2. La troposphère est la première couche de l'atmosphère. Celle-ci est composée de la troposphère et de la stratosphère, séparées par la tropopause

Cas de fluides incompressibles

Certains auteurs [Amini 94,Qiu 00] ont proposé d'employer l'équation de continuité dans le cadre de l'étude de fluides incompressibles (comme par exemple des images de rayons X dans des applications médicales). Dans ce cas, la divergence est nulle et la contrainte est alors équivalente à l'ECMA. Néanmoins, utiliser un formalisme basé sur l'équation de continuité dans ce cas présente l'intérêt d'être en cohérence avec la loi physique qui régit l'évolution du phénomène observé.

Ainsi, nous pensons que l'équation de continuité peut constituer une bonne alternative à l'hypothèse de conservation de la luminance. Une première définition du terme d'observation peut alors être donnée par :

$$\mathcal{H}_{obs}(E,\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} \Psi_1 \left(\frac{\partial E(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}(E(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)) \right) d\boldsymbol{x}, \tag{3.10}$$

où Ψ_1 est une fonction de coût. Notons qu'un invariant photométrique défini sur la base de l'équation de continuité (relation (3.10)) présente, de façon similaire à l'ECMA, une importante faiblesse : en raison de sa nature différentielle, la validité de cette contrainte peut s'avérer limitée pour les déplacements de grande amplitude. Ceci est particulièrement problématique lorsque l'écoulement est très rapide (ce qui est parfois le cas en mécanique des fluides expérimentale) ou lorsque la fréquence d'acquisition des images est lente (comme la cadence des images satellites qui n'est que d'une image par demi-heure). Ces difficultés seront traitées dans la section 3.5.

Avant cela, il est important de signaler que la plupart des auteurs qui ont employé une contrainte similaire à la relation (3.10) dans un schéma de flot optique lui associent une régularisation du premier ordre. Dans la section qui suit, nous allons démontrer que cette régularisation n'est pas optimale pour estimer convenablement les quantités de divergence et de vorticité susceptibles d'être présentes dans l'écoulement. Nous proposerons alors un nouveau terme de lissage.

3.4 Régularisation div-curl

Les solutions proposées pour régulariser un champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$ présentées dans la section 2.4 s'appliquent toutes au module de son gradient $|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v|^2$. Les termes de divergence et de vorticité étant significatifs dans la caractérisation d'un écoulement, étudions en ces termes ce que signifie une minimisation de $|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v|^2$.

3.4.1 Interprétation de la régularisation du premier ordre et problématique

Dans cette section, nous allons mettre en évidence qu'une régularisation au premier ordre ne constitue pas un lissage optimal pour les mouvements fluides.

Étude des conditions d'Euler-Lagrange

Rappelons que le terme de lissage au premier ordre de Horn & Schunck est défini par la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} \Big(|\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x},t)|^2 + |\boldsymbol{\nabla} v(\boldsymbol{x},t)|^2 \Big) d\boldsymbol{x}. \tag{3.11}$$

En appliquant les conditions d'Euler-Lagrange à cette relation, nous obtenons un système composé de deux équations de Laplace :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

avec $u_{xx} = \partial^2 u(\boldsymbol{x},t)/\partial x^2$, $u_{yy} = \partial^2 u(\boldsymbol{x},t)/\partial y^2$, $v_{xx} = \partial^2 v(\boldsymbol{x},t)/\partial x^2$ et $v_{yy} = \partial^2 v(\boldsymbol{x},t)/\partial y^2$. Considérons maintenant une régularisation pénalisant la divergence et la vorticité d'un champ de vecteurs :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} \Big(\alpha \ \mathrm{div}^2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) + \beta \ \mathrm{curl}^2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \Big) d\boldsymbol{x} = \iint_{\Omega} \Big(\alpha (u_x + v_y)^2 + \beta (v_y - u_x)^2 \ \Big) d\boldsymbol{x}, \tag{3.13}$$

avec $u_x = \partial u(\boldsymbol{x},t)/\partial x$, $u_y = \partial u(\boldsymbol{x},t)/\partial y$, $v_x = \partial v(\boldsymbol{x},t)/\partial x$ et $v_y = \partial v(\boldsymbol{x},t)/\partial y$. Les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange sont :

$$\begin{cases} \alpha u_{xx} + \beta u_{yy} + (\alpha - \beta) v_{xy} = 0 \\ \beta v_{xx} + \alpha v_{yy} + (\alpha - \beta) u_{xy} = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

On remarque alors que si $\alpha = \beta$, les relations (3.12) et (3.14) sont identiques.

Problématique

Le constat réalisé ci-dessus démontre qu'un lissage au premier ordre va fournir des champs de vecteurs avec une divergence et une vorticité la plus petite possible [Suter 94]. Il favorise ainsi l'apparition de champs laminaires. Bien que l'utilisation d'une fonction préservant les discontinuités permet, dans une certaine mesure, de contrecarrer cette déficience, une telle régularisation n'est pas souhaitable dans un contexte d'imagerie fluide. Les écoulements sont en effet souvent décrits par leur concentration en divergence et en vorticité. Citons l'exemple des écoulements turbulents qui développent une multitude de vortex interagissant entre eux et qui sont caractérisés par de fortes zones de rotationnel [Lesieur 94]. En imagerie météorologique, les mouvements spiralés que génèrent des dépressions (comme ceux de la figure FIG.3.1) possèdent des valeurs significatives de divergence et de vorticité. D'importants mouvements divergents, relatifs aux zones d'advection ou de subsidence, sont également présents dans ce type d'images. De tels phénomènes sont illustrés sur la figure FIG.3.2.

L'information capitale que contient ces mouvements est ainsi en partie ignorée par des méthodes d'estimation de mouvement mettant en jeu un schéma de régularisation du

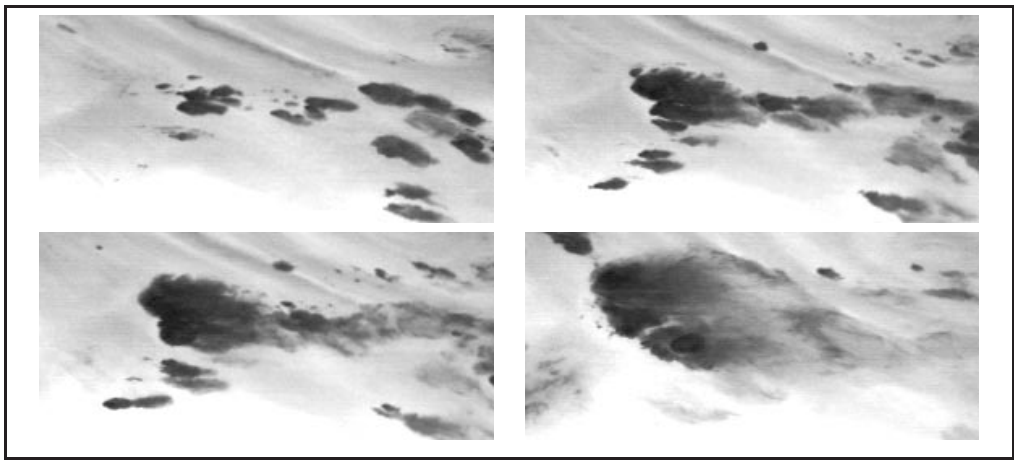


FIG. 3.2 – **Exemple de concentration de divergence** *: dans ces quatre images issues des canaux vapeur d'eau du satellite Meteosat, les parties sombres correspondent à l'explosion de cellules convectives, responsables de forts mouvements divergents.*

premier ordre. En outre, dans la perspective d'utiliser un terme d'attache aux données relatif à l'équation de continuité, cela s'avère d'autant plus préjudiciable dans la mesure où une sous-estimation importante de la divergence revient à considérer une hypothèse d'invariance de la fonction de luminance.

Ainsi, nous proposons une nouvelle régularisation qui sera explicitement définie sur des mesures de la divergence et de la vorticité du mouvement à estimer.

3.4.2 Régularisation div-curl du second ordre

D'après les remarques du paragraphe précédent, une idée intuitive consiste à employer une régularisation du second ordre. Les notions de divergence et de vorticité étant plus significatives dans un contexte de mouvement fluide que le gradient spatial, nous souhaitons une régularisation du second ordre qui en fasse usage. A cet effet, la régularisation étudiée dans le chapitre précédent (section 2.7.4) proposée par Suter [Suter 94] :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v}) = \iint_{\Omega} |\nabla \mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2 + |\nabla \mathrm{curl}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2, \tag{3.15}$$

est particulièrement attractive. Rappelons cependant que dans [Chen 99], il a été soulevé que cette régularisation conduit à un ensemble de systèmes difficiles à résoudre dans un cas bidimensionnel. Par ailleurs, dans [Gupta 96b], les auteurs soulignent en particulier la complexité des équations aux dérivées partielles d'ordre 4 résultantes des équations d'Euler-Lagrange. Afin de pallier cette difficulté, nous proposons un schéma de régularisation visant à approcher le critère proposé en (3.15), mais s'avérant plus simple d'emploi.

3.4.3 Schéma de régularisation proposé

Les remarques ci-dessus nous conduisent à utiliser une régularisation du premier ordre imitant la régularisation (3.15) par l'introduction de fonctions scalaires intermédiaires ξ et

ζ :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v},\xi,\zeta) = \iint_{\Omega} |\text{div } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \xi(\boldsymbol{x},t)|^2 + \lambda|\boldsymbol{\nabla}\xi(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x} + \iint_{\Omega} |\text{curl } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \zeta(\boldsymbol{x},t)|^2 + \lambda|\boldsymbol{\nabla}\zeta(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{3.16}$$

Les fonctions scalaires ξ et ζ sont respectivement des estimations des fonctions de divergence (div) et de rotationnel (curl) de la vitesse $\boldsymbol{v}$ à estimer, λ étant un paramètre positif. Cette régularisation est composée de deux parties, l'une concerne la divergence et l'autre la vorticité. Chacune de ces parties est composée de deux termes. Le premier encourage la divergence et la vorticité du mouvement $\boldsymbol{v}$ à se conformer aux valeurs de ξ et ζ. Lorsque ces quantités de divergence et de rotationnel se rapprochent mutuellement de zéro, le terme (3.16) se ramène alors à une régularisation du premier ordre. Le second terme impose quant à lui un lissage sur les estimées de la divergence et du rotationnel, lorsque celles-ci sont significativement non nulles. Ce terme favorise l'émergence de zones de divergence ou de rotationnel homogènes.

Étudions à présent les intérêts d'une telle régularisation par rapport à celle proposée par Suter.

Intérêts

Tout d'abord, la régularisation (3.16) proposée peut se minimiser de manière alternée par rapport aux variables ξ, ζ et $\boldsymbol{v}$. Le schéma est similaire à celui qui découle des estimateurs semi-quadratiques présentés dans la section 2.5.2, où des variables auxiliaires sont également introduites. Dans un premier temps, nous fixons ξ et ζ et estimons le champ $\boldsymbol{v}$. Une fois ce champ estimé, nous le fixons et estimons successivement ξ et ζ. Cette opération est itérée jusqu'à convergence.

D'un point de vue calculatoire, cette régularisation possède l'avantage de s'affranchir du problème de la résolution des équations aux dérivées partielles d'ordre quatre qui découlaient de (3.15). De manière alternée, le problème se ramène à la résolution successive de deux EDP du second ordre. La régularisation du second ordre (3.15) est en fait avantageusement remplacée par deux régularisations du premier ordre interagissant entre elles.

Par ailleurs, les champs scalaires intermédiaires ξ et ζ autorisent l'introduction de connaissances *a priori* sur la divergence et la vorticité du champ de vecteurs attendu. Dans certaines applications, des mesures provenant de sondes dédiées peuvent en effet parfois être disponibles. Par exemple, il existe certaines méthodes permettant d'extraire, de façon éparse, la vorticité présente dans un écoulement turbulent à l'aide de sondes thermiques [Wallace 95]. Les mesures provenant de ces capteurs peuvent alors être directement intégrées dans un schéma du type (3.16), ce qui n'est pas possible avec le schéma initial de régularisation div-curl du second ordre présenté en (3.15).

La régularisation proposée permet donc d'approcher le lissage div-curl du second ordre proposé par Suter, avec l'avantage d'une implantation beaucoup plus simple. Le but du paragraphe suivant est de montrer explicitement les analogies entre ces deux schémas.

Étude qualitative

Nous allons étudier les similarités entre les deux régularisations présentées en (3.15) et (3.16). Pour cela, nous effectuons notre étude sur la partie correspondant au terme de divergence. Les résultats s'obtiennent de façon analogue pour la partie correspondant au rotationnel. L'analogie entre ces deux approches est étudiée dans le domaine de Fourier.

D'après le théorème de Parseval, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ du premier terme de (3.15) donne :

$$\mathcal{F}\Big(\iint_{\Omega} |\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\boldsymbol{v}|^2 ds\Big) = \iint |\mathcal{F}(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\boldsymbol{v})|^2 d\boldsymbol{k} = \iint \|\boldsymbol{k}\|^2 |\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k})|^2 d\boldsymbol{k}, \tag{3.17}$$

où $\boldsymbol{k} = (\alpha,\beta)$, (α,β) étant les coordonnées fréquentielles de (x,y) dans le domaine de Fourier et $\hat{\boldsymbol{v}}$ la transformée de Fourier du champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$. De manière similaire, la transformée de Fourier du terme de régularisation sur la divergence dans la relation (3.16) est (avec $\mu = \frac{1}{\lambda}$) :

$$\mathcal{F}\Big(\iint_{\Omega} \mu(\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \xi)^2 + \|\boldsymbol{\nabla}\xi\|^2 d\boldsymbol{x}\Big) = \iint \Big(\mu|\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}) - \hat{\xi}|^2 + \|\boldsymbol{k}\|^2|\hat{\xi}|^2\Big) d\boldsymbol{k}. \tag{3.18}$$

Pour un champ $\boldsymbol{v}$ fixé, le minimum de (3.18) est donné par la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à (3.16):

$$\mu(\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \xi) + \Delta\xi = 0. \tag{3.19}$$

Dans le domaine de Fourier, ce minimum est :

$$\hat{\xi}_{opt} = \frac{\mu|\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k})|}{\|\boldsymbol{k}\|^2 + \mu}. \tag{3.20}$$

En introduisant la valeur de $\hat{\xi}_{opt}$ dans la relation (3.18), nous obtenons :

$$\mathcal{F}\Big(\iint_{\Omega} \mu(\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \xi_{opt})^2 + \|\boldsymbol{\nabla}\xi_{opt}\|^2 d\boldsymbol{x}\Big) = \iint \frac{\mu\|\boldsymbol{k}\|^2}{\|\boldsymbol{k}\|^2 + \mu} |\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k})|^2 d\boldsymbol{k},$$

soit

$$\mathcal{F}\Big(\iint_{\Omega} \mu(\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \xi_{opt})^2 + \|\boldsymbol{\nabla}\xi_{opt}\|^2 d\boldsymbol{x}\Big) = \iint \hat{g}(\boldsymbol{k}) |\mathcal{F}(|\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\boldsymbol{v}|)|^2 d\boldsymbol{k}, \tag{3.21}$$

avec $\hat{g}(\boldsymbol{k}) = \frac{\mu}{\mu+\|\boldsymbol{k}\|^2}$. En prenant $\mu = \frac{1}{\lambda}$, il en découle :

$$\hat{g}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{1 + \lambda\|\boldsymbol{k}\|^2}. \tag{3.22}$$

Ainsi, pour les basses fréquences, $\hat{g}(\boldsymbol{k}) \to 1$ et les fonctions de régularisation sont de même nature. Pour les zones comportant des hautes fréquences, $\hat{g}$ est une fonction qui atténue la régularisation div-curl initiale du second ordre (3.15). En émettant l'hypothèse,

physiquement plausible, que le champ $\boldsymbol{v}$ soit de classe $\mathcal{C}^2$, un résultat classique de la transformée de Fourier établit que :

$$\lim_{\|\boldsymbol{k}\|\to+\infty} \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \|\boldsymbol{k}\|^2 = 0. \tag{3.23}$$

Ceci signifie que $\hat{\boldsymbol{v}}$ tend plus rapidement vers zéro que $\frac{1}{\|\boldsymbol{k}\|^2}$ lorsque $\boldsymbol{k}$ tend vers l'infini.

Ainsi, d'après les relations (3.21), (3.22) et (3.23), on peut dire que la régularisation div-curl proposée en (3.16) correspond à une forme lissée de la régularisation initiale du second ordre en (3.15). Afin de préserver au mieux les variations de divergence et de vorticité qui sont susceptibles d'être présentes dans l'écoulement, il sera dans certains cas préférable d'employer des fonctions de pénalisation robustes permettant d'éviter un sur-lissage de ces quantités. Nous reformulons donc la régularisation présentée en (3.16) par :

$$\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v},\xi,\zeta) = \iint_\Omega |\text{div } \boldsymbol{v} - \xi|^2 + \lambda\Psi_2(|\boldsymbol{\nabla}\xi|) + \iint_\Omega |\text{curl } \boldsymbol{v} - \zeta|^2 + \lambda\Psi_2(|\boldsymbol{\nabla}\zeta|), \tag{3.24}$$

où Ψ_2 est une fonction pouvant être quadratique ou non et sera définie dans la section 3.6.

D'après les relations (3.10) et (3.24), la fonctionnelle $\mathcal{H}$ à minimiser proposée pour la mesure de mouvements fluides peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(E,\boldsymbol{v},\xi,\zeta) = &\iint_\Omega \Psi_1\left(\frac{\partial E(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \text{div}(E(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t))\right)d\boldsymbol{x} + \\ &\iint_\Omega |\text{div } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \xi(\boldsymbol{x},t)|^2 + \lambda\Psi_2(|\boldsymbol{\nabla}\xi(\boldsymbol{x},t)|)d\boldsymbol{x} + \\ &\iint_\Omega |\text{curl } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \zeta(\boldsymbol{x},t)|^2 + \lambda\Psi_2(|\boldsymbol{\nabla}\zeta(\boldsymbol{x},t)|)d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, la nature différentielle du terme relatif à l'équation de continuité peut engendrer des difficultés à recouvrer les déplacements de grande amplitude. Ceux-ci sont par exemple susceptibles de se produire si l'écoulement est rapide ou si l'intervalle de temps entre deux images consécutives d'une séquence est important. Les applications en mécanique des fluides expérimentale ou en météorologie étant concernées par ces phénomènes, il est capital de porter une attention particulière aux mouvements de grande amplitude.

3.5 Gestion des grands déplacements

Pour remédier aux difficultés concernant le terme d'observation présentées ci-dessus, il est possible d'utiliser une version intégrée de l'équation de continuité. En effet, dans le cadre usuel de la conservation de la luminance, l'ECMA est parfois utilisée sous sa forme intégrée :

$$E(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}),t+1) - E(\boldsymbol{x},t) = 0.$$

Sous l'hypothèse d'une conservation de la luminance, cet invariant est valide quelle que soit l'amplitude du déplacement $\boldsymbol{d}$ entre les instants t et $t+1$. Nous allons appliquer ce même principe à l'équation de continuité.

3.5.1 Version intégrée de l'équation de continuité

En écrivant $dE/dt = \partial E/\partial t + \nabla E \cdot \boldsymbol{v}$, la contrainte présentée en (3.3) peut être réécrite :

$$\frac{dE}{dt} + E\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{3.26}$$

Considérons un élément infinitésimal de l'image avec une trajectoire $\{\boldsymbol{x}(u),\, u \in (t,t+\Delta t)\}$ reliant le point $\boldsymbol{x}$ à l'instant t à la position $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ à l'instant $t+\Delta t$. En émettant l'hypothèse que cette vitesse est constante le long des éléments de trajectoire, ceci implique que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \Delta t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t), \quad \text{et} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(u),u) = \Delta t^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}),\ \forall u \in (t,t+\Delta t). \end{cases}$$

L'intégration de l'équation différentielle ordinaire (3.26) conduit ainsi à :

$$\frac{dE(\boldsymbol{x}(t),t)}{dt}\Big|_{t=u} = -E(\boldsymbol{x}(u),u)\mathrm{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(u),u),\ \forall u \in (t,t+\Delta t). \tag{3.27}$$

De la relation précédente, nous pouvons déduire que :

$$E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}),t+\Delta t)\exp\big(\mathrm{div}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\big) = E(\boldsymbol{x},t). \tag{3.28}$$

Selon cette contrainte, la luminance de l'image déplacée est pondérée par le facteur $\exp\big(\mathrm{div}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\big)$. Ce facteur augmente (resp. diminue) lorsque la divergence est positive (resp. négative). Ce terme compense ainsi la variation d'intensité présentée par le fluide aux endroits où le mouvement est divergent. Ainsi, un mouvement avec une divergence positive est accompagné d'une perte d'intensité d'autant plus importante que $\mathrm{div}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ est grand. La figure FIG.3.3 illustre ce phénomène.

Nous pouvons remarquer que si $\mathrm{div}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = 0$ (comme dans le cas des fluides incompressibles), nous retrouvons le terme de conservation de la luminance $E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}),t+\Delta t) - E(\boldsymbol{x},t)$ des techniques de flot optique standard.

Cette version intégrée de l'équation de continuité possède l'avantage de mettre en jeu explicitement des déplacements et non des vitesses. Cependant, la dépendance de cette fonction vis-à-vis du champ de vitesses inconnu $\boldsymbol{d}$ est à présent fortement non linéaire. Une approche pour traiter ce problème de minimisation consiste à le réécrire dans le cadre d'une stratégie multirésolution descendante comme une succession de problèmes linéaires : étant donné une estimation grossière $\tilde{\boldsymbol{d}}$ obtenue à une résolution supérieure, le principe est de ramener le problème à une estimation linéaire d'un incrément $\boldsymbol{h}$ visant à affiner l'estimation de $\tilde{\boldsymbol{d}}$. Par un développement de Taylor au premier ordre de $E\left(\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}),t+\Delta t\right)\exp\left(\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))\right)$ autour de $\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x})$ et en omettant les indices de temps de la fonction de luminance pour une meilleure lisibilité, la contrainte linéarisée s'écrit :

$$\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}))\left(\left[\tilde{E}(\boldsymbol{x})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}) + \nabla\tilde{E}(\boldsymbol{x})\right]^T \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) + \tilde{E}(\boldsymbol{x})\right) - E(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.29}$$

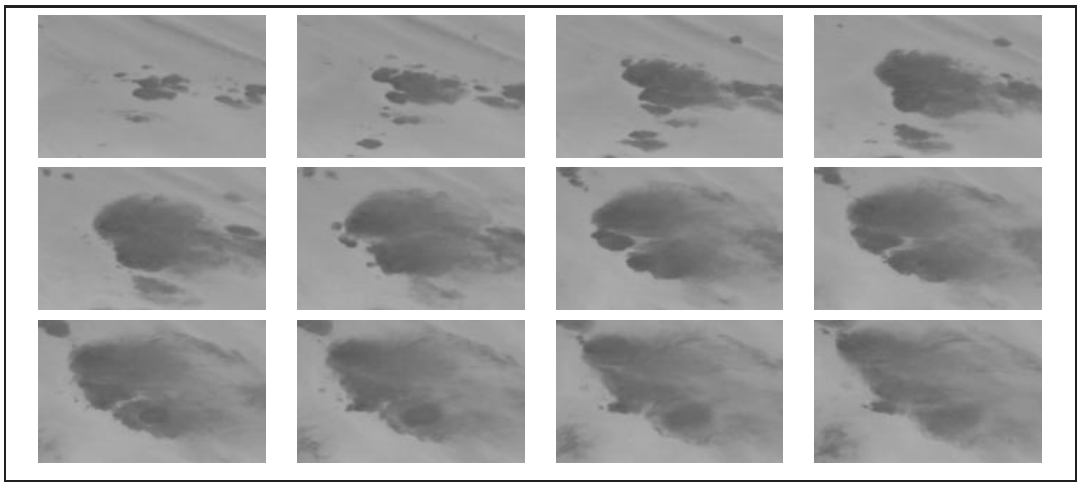


FIG. 3.3 – **Exemple de perte d'intensité** *: dans cette séquence, les images sont issues des canaux vapeur d'eau du satellite de Meteosat. Nous visualisons l'explosion de cellules convectives, responsables de forts mouvements divergents. La perte de quantité de matière le long du déplacement est observable.*

où nous avons introduit la notation compacte $\tilde{E}(\boldsymbol{x}) \triangleq E(\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}),t+\Delta t)$ de la fonction de luminance "recalée" par le champ $\tilde{\boldsymbol{d}}$. Détaillons à présent la stratégie multirésolution mise en œuvre.

3.5.2 Principe du schéma multirésolution incrémental

Les stratégies multirésolution en analyse du mouvement [Bergen 92,Enkelmann 88, Mémin 98a,Odobez 94] consistent en premier lieu à construire une représentation pyramidale des images de la séquence. Chaque niveau de la pyramide représente un sous-ensemble de l'image (le niveau 0 est constitué par l'image entière, les niveaux supérieurs étant des sous échantillonnages de l'image originale). Pour obtenir une telle pyramide sans perturber la continuité de la luminance, nous appliquons à l'image d'un niveau k, définie sur l'espace Ω^k, un filtrage gaussien passe bas séparable [Burt 84] avant d'effectuer un sous échantillonnage d'un facteur 2 pour obtenir l'image du niveau $k+1$, définie sur Ω^{k+1}. Au niveau de résolution k, l'amplitude du déplacement est ainsi réduite d'un facteur 2^k.

On fait l'hypothèse qu'au niveau le plus grossier, le déplacement est suffisamment petit pour respecter la contrainte linéaire (3.29). Le choix optimal du nombre de niveaux reste bien entendu un problème ouvert difficile. À un niveau de résolution k donné, le champ de déplacements $\boldsymbol{d}^k$ correspondant est obtenu par affinement d'un estimé connu de ce champ. Cet estimé $\tilde{\boldsymbol{d}}^k$ résulte de la projection sur Ω^k du champ $\boldsymbol{d}^{k+1}$ issu de l'espace Ω^{k+1}. Le problème devient alors celui de l'estimation de l'incrément $\boldsymbol{h}^k$ visant à raffiner $\tilde{\boldsymbol{d}}^k$. La faible amplitude de $\boldsymbol{h}^k$ autorise l'emploi de la contrainte linéarisée (3.29). La figure FIG.3.4 illustre ce principe.

Nous pouvons donc formuler l'approche de minimisation multirésolution de la contrainte photométrique relative à l'équation de continuité par $N+1$ minimisations successives de :

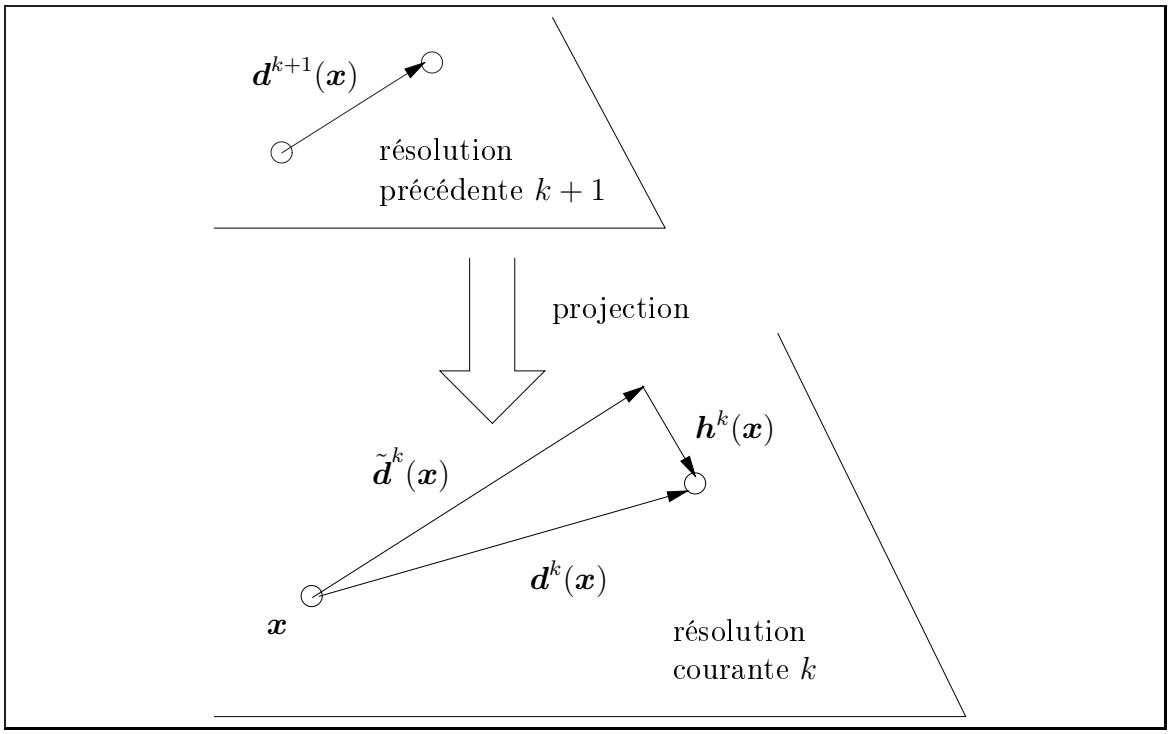


FIG. 3.4 – **Illustration du schéma multirésolution incrémental**. *Le champ de vecteurs $\boldsymbol{d}^k$ à la résolution k est obtenu par estimation d'un champ incrémental $\boldsymbol{h}^k$ affinant le champ grossier $\tilde{\boldsymbol{d}}^k$, projection du champ $\boldsymbol{d}^{k+1}$ sur le niveau k.*

$$\mathcal{H}^k_{obs}(\boldsymbol{h}^k) = \iint_{\Omega^k} \Psi_1\Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}))\left((\tilde{E}^k(\boldsymbol{x})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}) + \nabla\tilde{E}^k(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{h}^k(\boldsymbol{x}) + \tilde{E}^k(\boldsymbol{x})\right) - E^k(\boldsymbol{x})\Big]d\boldsymbol{x}, \tag{3.30}$$

où E^k est la fonction de luminance à l'instant t décimée au niveau k et définie sur Ω^k et $\tilde{E}^k(\boldsymbol{x}) = E^k(\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}),t+\Delta t)$ est la fonction de luminance recalée au niveau k. Nous calculons ainsi, à la fin de chaque résolution, une image compensée $E^k(\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}),t+\Delta t)$ à partir de l'image $E^k(\boldsymbol{x},t+\Delta t)$ et du champ de déformations $\tilde{\boldsymbol{d}}^k$ par interpolation bilinéaire. La fonction Ψ_1 est quant à elle une fonction de coût qui peut être quadratique ou non. Son choix sera discuté ultérieurement dans la section 3.6. Il est à présent nécessaire d'adapter le terme de régularisation proposé au cadre multirésolution.

3.5.3 Définition de la régularisation div-curl dans un cadre multirésolution

Afin de rendre la régularisation div-curl présentée dans la section 3.4.3 compatible avec le schéma multirésolution présenté ci-dessus, il est nécessaire de l'écrire sous la forme d'une minimisation par rapport à un déplacement incrémental $\boldsymbol{h} = \tilde{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{d}$, où $\tilde{\boldsymbol{d}}$ est l'estimation grossière du champ à affiner. Sous une forme générale, la régularisation proposée s'écrit, pour chaque résolution k :

$$\mathcal{H}^k_{reg}(\boldsymbol{h}^k,\xi^k,\zeta^k) = \iint_{\Omega^k} |\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{d}}^k + \boldsymbol{h}^k) - \xi^k|^2 + \lambda\Psi_2(|\nabla\xi^k|) + \iint_{\Omega^k} |\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}^k + \boldsymbol{h}^k) - \zeta^k|^2 + \lambda\Psi_2(|\nabla\zeta^k|), \tag{3.31}$$

où Ψ_2 est une fonction de coût.

3.5.4 Conclusion partielle

Les relations (3.30) et (3.31) permettent à présent de définir la fonctionnelle à minimiser pour l'estimation dense du mouvement fluide. Cette fonctionnelle s'appuie d'une part sur l'équation de continuité issue de la mécanique des fluides et d'autre part sur un schéma de régularisation div-curl. L'ensemble est défini pour être intégré dans un cadre multirésolution incrémental. Notons que nous proposons une version intégrée originale de l'équation de continuité qui permet de prendre en compte les grands déplacements, alors que cette contrainte n'a jusqu'à présent été employée que sous sa forme différentielle originelle (équation (3.3)) [Fitzpatrick 85,Wildes 00]. En raison de la diversité des applications traitées, nous ne pouvons cependant pas formellement garantir que la luminance des images est relative à une densité, hypothèse utilisée pour s'appuyer sur l'équation de continuité. Néanmoins, nous pouvons remarquer que la forme obtenue dans la relation (3.28) est similaire aux modèles de mouvement des images météorologiques infrarouges présentés dans

[Qiu 00,Zhou 00] et plus généralement aux modèles d'intensité lumineuses de ces images proposés dans [Haussecker 01].

3.6 Choix des fonctions de pénalisation

L'estimateur de mouvement que nous proposons est donc défini par la minimisation de la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{H}$ suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{obs} + \alpha \mathcal{H}_{reg}.$$

En utilisant les relations (3.30) et (3.31), la fonctionnelle à minimiser s'écrit, à chaque résolution k d'une stratégie multirésolution :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(\boldsymbol{h}^k,\xi^k,\zeta^k) = \iint_{\Omega^k} \Psi_1\Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}))\Big((\tilde{E}^k(\boldsymbol{x})\nabla \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}) + \nabla \tilde{E}^k(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{h}^k(\boldsymbol{x}) + \tilde{E}^k(\boldsymbol{x})\Big) \\ - E^k(\boldsymbol{x})\Big] d\boldsymbol{x} \\ + \alpha \iint_{\Omega^k} |\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}^k(\boldsymbol{x})) - \xi^k(\boldsymbol{x})|^2 + \lambda \Psi_2(|\nabla \xi^k(\boldsymbol{x})|) d\boldsymbol{x} \\ + \alpha \iint_{\Omega^k} |\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}^k(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}^k(\boldsymbol{x})) - \zeta^k(\boldsymbol{x})|^2 + \lambda \Psi_2(|\nabla \zeta^k(\boldsymbol{x})|) d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Il reste à présent à déterminer les fonctions de pénalisations Ψ_1 et Ψ_2. Pour cela, il est nécessaire d'étudier la validité des contributions proposées.

Bien que l'équation de continuité semble plus adéquate vis-à-vis des mouvements fluides que l'hypothèse de conservation de la luminance, il n'existe pas de preuve rigoureuse justifiant sa validité, excepté dans le cas particulier des images de transmittance [Fitzpatrick 88a], comme nous l'avons discuté dans la section 3.3.3. De plus, l'hypothèse sous-jacente de conservation globale d'une quantité physique peut ne pas être vérifiée localement (présence de sources ou de puits dans l'écoulement par exemple). Les mouvements tridimensionnels non parallèles au plan image, comme les cellules nuageuses convectives, peuvent générer une apparition ou une disparition de matière dans le plan de visualisation. De manière similaire, le mouvement aux frontières des images n'est en général pas parallèle à ces frontières et provoque également la sortie ou l'entrée de matière dans l'image.

Par ailleurs, la plupart des mouvements fluides possèdent des zones à rotationnel ou à divergence homogène sur un support bien délimité et nul ailleurs. De plus, dans certains types d'écoulements expérimentaux, des variations brutales de ces quantités sont susceptibles d'apparaître. Rappelons qu'il est primordial de recouvrer le plus précisément possible les diverses concentrations de ces quantités, qui sont des descripteurs fondamentaux des écoulements fluides.

Toutes ces raisons plaident en faveur d'un choix de fonctions de pénalisation robustes pour Ψ_1 et Ψ_2. La section 2.5.2 est consacrée au choix de telles fonctions. Nous avons opté pour un formalisme semi-quadratique, pour les propriétés de minimisation dont ces fonctions disposent. Nous nous appuyons précisément sur les M-estimateurs robustes qui se réfèrent à ces fonctions et dont le principe est détaillé dans l'Annexe A.

L'introduction de telles fonctions dans le problème de minimisation (3.32) va mettre en jeu trois variables auxiliaires supplémentaires. Il en résulte alors six variables à estimer de manière conjointe. Ces variables sont $\boldsymbol{h}$, ξ, ζ, $z^{\boldsymbol{d}}$, z^{ξ} et z^{ζ}, où $z^{\boldsymbol{d}}$, z^{ξ} et z^{ζ} sont les variables auxiliaires de pondération associées à la formulation semi-quadratique des M-estimateurs. Le problème s'écrit donc, en omettant les indices k propres au niveau de résolution pour une meilleure lisibilité :

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{h},\xi,\zeta,z^{\boldsymbol{d}},z^{\xi},z^{\zeta}) = \mathcal{H}_{obs}(\boldsymbol{h},z^{\boldsymbol{d}}) + \alpha\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{h},\xi,\zeta,z^{\xi},z^{\zeta}), \tag{3.33}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{obs}(\boldsymbol{h},z^{\boldsymbol{d}}) = \iint_{\Omega} z^{\boldsymbol{d}}\Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}))\left((\tilde{E}\,(\boldsymbol{x})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}) + \nabla\tilde{E}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) + \tilde{E}(\boldsymbol{x})\right)\\ - E(\boldsymbol{x})\Big]^2 + \psi(z^{\boldsymbol{d}})d\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{3.34}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{h},\xi,\zeta,z^{\xi},z^{\zeta}) = \iint_{\Omega} |\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) - \xi(\boldsymbol{x})|^2 + \lambda\big[z^{\xi}|\nabla\xi(\boldsymbol{x})|^2 + \psi(z^{\xi})\big]d\boldsymbol{x}\\ + \iint_{\Omega} |\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) - \zeta(\boldsymbol{x})|^2 + \lambda\big[z^{\zeta}|\nabla\zeta(\boldsymbol{x})|^2 + \psi(z^{\zeta})\big]d\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{3.35}$$

où la fonction ψ dépend du M-estimateur choisi. Étudions à présent la minimisation de la fonctionnelle (3.33).

3.7 Minimisation

Cette partie décrit la procédure que nous avons mis en œuvre pour l'estimation incrémentale du champ dense de déplacements.

Notons qu'à la résolution la plus grossière, l'initialisation est fixée par un champ nul ($\tilde{\boldsymbol{d}} \equiv 0$). Si la séquence possède N images (avec $N > 2$), alors nous introduisons une initialisation différente pour l'estimation du mouvement entre les images p et $p+1$ (avec $2 \leq p \leq N-1$). Dans ce cas, le déplacement $\tilde{\boldsymbol{d}}$ à la résolution la plus grossière résultera de la décimation à ce niveau du déplacement $\boldsymbol{d}$ obtenu entre les images $p-1$ et p.

3.7.1 Schéma de discrétisation

La discrétisation de la fonctionnelle (3.33) peut être envisagée de plusieurs manières. Elle peut être implantée à partir des équations aux dérivées partielles d'Euler-Lagrange que l'optimum doit satisfaire ou directement à partir de la fonction de coût définie. Nous avons choisi la seconde solution, similaire aux approches relatives à une modélisation par champs de Markov, pour sa simplicité.

Les images étant définies sur une grille S de pixels, une discrétisation naturelle consiste à prendre les valeurs de E_t, $\boldsymbol{\nabla}E$, ξ, ζ et $z^{\boldsymbol{d}}$ aux pixels $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} \in S$. Le même schéma de discrétisation peut être adopté pour les variables z^{ξ} et z^{ζ}. Cependant, les gradients étant approximés par des différences finies sur la grille, il est plus simple d'avoir une discrétisation

de z^{ξ} et z^{ζ} selon le même support. Dans [Mémin 02], il est montré dans le cadre du calcul du flot optique que la minimisation d'un formalisme continu et celui d'un formalisme discret mené selon ce principe conduit à un problème identique. Nous choisissons ici un schéma de discrétisation analogue.

Les variables E_t, $\boldsymbol{\nabla} E$, ξ, ζ, $z^{\boldsymbol{d}}$, z^{ξ} et z^{ζ} étant discrétisées, les termes $\mathcal{H}_{obs}$ et $\mathcal{H}_{reg}$ définis en (3.34) et (3.35) s'écrivent à présent :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{obs}(\boldsymbol{h},z^{\boldsymbol{d}}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in S} z_s^{\boldsymbol{d}}\Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}))\Big((\tilde{E}\,(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}(\boldsymbol{s}))\cdot\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s}) + \tilde{E}(\boldsymbol{s})\Big) \\ - E(\boldsymbol{s})\Big]^2 + \psi(z_s^{\boldsymbol{d}})\end{aligned} \tag{3.36}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{h},\xi,\zeta,z^{\xi},z^{\zeta}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in S}|\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s})) - \xi(\boldsymbol{s})|^2 + \lambda \sum_{<s,r>\in C}\big[z_{sr}^{\xi}|\nabla\xi(\boldsymbol{s})|^2 + \psi(z_{sr}^{\xi})\big] \\ + \sum_{\boldsymbol{s}\in S}|\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s})) - \zeta(\boldsymbol{s})|^2 + \lambda \sum_{<s,r>\in C}\big[z_{sr}^{\zeta}|\nabla\zeta(\boldsymbol{s})|^2 + \psi(z_{sr}^{\zeta})\big],\end{aligned} \tag{3.37}$$

où C est l'ensemble des paires de pixels mutuellement voisins (cliques), au sens d'un certain voisinage (4-voisinage par exemple). Les opérateurs div et curl de divergence et de vorticité sont maintenant des opérateurs discrets.

Il est possible d'utiliser, pour ces opérateurs, une discrétisation classique par différence finie centrée au pixel $\boldsymbol{s} = (i,j)$:

$$\begin{cases}\mathrm{div}\boldsymbol{d}(i,j) = \dfrac{1}{2}[(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + (v_{i+1,j} - v_{i-1,j})] \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{d}(i,j) = \dfrac{1}{2}[(v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})],\end{cases} \tag{3.38}$$

où $\boldsymbol{d}(i,j) = (u_{i,j},v_{i,j})$. Cependant, on peut noter que le point central (i,j) n'apparaît pas dans cette discrétisation. L'ensemble des pixels nécessaires au calcul de div$\boldsymbol{d}(i,j)$ et curl$\boldsymbol{d}(i,j)$ forme ainsi un ensemble de points qui interagissent faiblement (uniquement au travers du terme d'attache aux données) avec le point traité (i,j). Il a été constaté expérimentalement qu'une telle discrétisation peut conduire à des systèmes mal conditionnés dont la résolution s'avère problématique. Nous opterons donc, dans certains cas expliqués dans l'annexe B, pour un schéma de discrétisation des dérivées partielles qui inclut le point central (i,j). Un tel schéma peut s'écrire :

$$\begin{cases}\mathrm{div}\boldsymbol{d}(i,j) = \dfrac{1}{6}[(3u_{i,j} + u_{i,j-2} - 6u_{i,j-1} + 2u_{i,j+1}) + (3v_{i,j} + v_{i-2,j} - 6v_{i-1,j} + 2v_{i+1,j})] \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{d}(i,j) = \dfrac{1}{6}[(3v_{i,j} + v_{i,j-2} - 6v_{i,j-1} + 2v_{i,j+1}) - (3u_{i,j} + u_{i-2,j} - 6u_{i-1,j} + 2u_{i+1,j})].\end{cases} \tag{3.39}$$

La discrétisation utilisée selon l'axe x provient de la résolution du système linéaire suivant :

$$z_{i+h,j} = z_{i,j} + h\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{i,j} + \frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \frac{h^3}{6}\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{i,j} + 0(h^4),\ h = -1,1,2,$$

où z représente u ou v. La discrétisation selon l'axe y est obtenue de façon similaire.

Nous avons donc un problème où les six ensembles suivants de variables sont à optimiser : $\boldsymbol{h} = \{\boldsymbol{h}_s\}_{s\in S}$, $\xi = \{\xi_s\}_{s\in S}$, $\zeta = \{\zeta_s\}_{s\in S}$, $\{z_s^{\boldsymbol{d}}\}_{s\in S}$, $\{z_{sr}^{\xi}\}_{\langle s,r\rangle\in C}$ et $\{z_{sr}^{\zeta}\}_{\langle s,r\rangle\in C}$. Chaque minimisation est effectuée de manière alternée. Pour un ensemble de variables à optimiser, les autres sont fixées.

La minimisation par rapport à $\boldsymbol{h}$, ξ et ζ est effectuée en utilisant une technique de moindres carrés pondérés itérés. Cependant, comme cela est suggéré dans [Mémin 00], nous n'employons pas une version classique. Tandis que la résolution aux moindres carrés est classiquement utilisée jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit vérifié, nous n'appliquons ici qu'une itération de Gauss-Seidel (un seul passage sur l'image) entre deux remises à jour des variables auxiliaires. Dans [Mémin 00], il est montré, pour un solveur itératif de type Jacobi, que les propriétés de convergence vers un minimum local de la fonction d'une telle méthode sont inchangées. Les expériences présentées montrent également que ce schéma converge plus rapidement.

Détaillons à présent la minimisation par rapport à chacun des ensembles de variables.

3.7.2 Minimisation par rapport aux scalaires ξ et ζ

Nous allons dans cette partie détailler la manière dont on effectue notre minimisation relativement à ζ. Le schéma est analogue pour les scalaires ξ. En fixant les autres variables, l'énergie $\mathcal{H}_\zeta$ qui entre en compte pour la minimisation est :

$$\mathcal{H}_\zeta(\zeta) = \sum_{\boldsymbol{s}\in S} |\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{s})) - \zeta(\boldsymbol{s})|^2 + \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{<s,r>\in C} z_{sr}^{\zeta} |\zeta(\boldsymbol{s}) - \zeta(\boldsymbol{r})|^2. \tag{3.40}$$

Ce problème, qui est similaire à un problème de restauration d'images où $\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s}))$ constitue la donnée observée, est minimisé au moyen d'un solveur du type Gauss-Seidel.

3.7.3 Minimisation par rapport aux variables auxiliaires $z^{\boldsymbol{d}}$, z^{ξ} et z^{ζ}

Pour ces trois variables, la remise à jour est effectuée de manière similaire. En effet, nous utilisons le même M-estimateur robuste $\Psi = \Psi_1 = \Psi_2$. Pour un tel estimateur, les variables z_{sr}^{ξ} et z_{sr}^{ζ} sont minimisées par (voir Annexe A) :

$$z_{sr}^{\xi} = \frac{\Psi'(|\xi_s - \xi_r|)}{2|\xi_s - \xi_r|}, \tag{3.41}$$

et

$$z_{sr}^{\zeta} = \frac{\Psi'(|\zeta_s - \zeta_r|)}{2|\zeta_s - \zeta_r|}. \tag{3.42}$$

Pour la variable auxiliaire $z^{\boldsymbol{d}}$, nous avons :

$$z_{sr}^{\boldsymbol{h}} = \frac{\Psi'(g(\boldsymbol{h})_s)}{2g(\boldsymbol{h})_s}, \tag{3.43}$$

avec

$$g(\boldsymbol{h}_s) = \exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(s))\big((\tilde{E}(s)\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}(s) + \nabla\tilde{E}(s)) \cdot \boldsymbol{h}(s) + \tilde{E}(s)\big) - E(s). \tag{3.44}$$

Détaillons à présent le schéma de minimisation par rapport à l'incrément $\boldsymbol{h}$.

3.7.4 Minimisation par rapport au champ incrémental h : approche multigrille

Rappelons que la variable à rechercher est le champ de vecteurs $\boldsymbol{d}$. Il nous semble important de porter une attention particulière à l'optimisation de $\boldsymbol{h}$, la minimisation directe à partir des relations (3.36) et (3.37) paraissant délicate. En effet, l'énergie est non-convexe et le nombre de minima locaux peut *a priori* être important. Une méthode de minimisation maladroite pourrait ainsi conduire à de mauvais résultats.

Ces problèmes, fréquemment rencontrés en vision par ordinateur lorsque la fonctionnelle implique un grand nombre de variables avec des interactions spatiales, sont souvent résolus par des techniques multigrille [Enkelmann 88,Hackbusch 85,Mémin 98a,Pérez 92, Terzopoulos 86]. Ces méthodes consistent à réaliser l'estimation au travers d'une suite de sous-espaces emboîtés. Au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme, la dimension de ces sous-espaces augmente, ainsi que la précision des estimations.

Principes de l'approche multigrille

Pour chaque niveau de résolution k, nous allons successivement estimer des déplacements incrémentaux $\boldsymbol{h}^{k,\ell}$ ($\ell = M,...,0$, M étant le nombre de niveaux de grilles) contraints sur des sous-espaces de solutions $\mathcal{D}^{k,\ell}$ dont la dimension croît lorsque ℓ diminue. Nous parlons alors d'un schéma "hiérarchique". Le déplacement final à un niveau de résolution k est la somme de tous les déplacements incrémentaux $\boldsymbol{h}^{k,\ell}$ ($\ell = M,...,0$).

Aux niveaux de grille les plus élevés, la dimension du problème est réduite, ce qui permet d'accélérer l'estimation. Aux niveaux inférieurs, la recherche est initialisée à partir de l'estimation précédente. Cette stratégie améliore considérablement la vitesse de convergence par rapport aux algorithmes itératifs standard. Par ailleurs, la qualité des résultats est souvent améliorée car cette stratégie permet d'éviter de converger vers des minima locaux trop éloignés du minimum global.

Minimisation hiérarchique

Pour un nombre de niveaux de grille noté M, l'espace des configurations $\mathcal{D}^k$ défini à la résolution k est exploré au travers de $M+1$ sous-espaces emboîtés dont la dimension est croissante :

$$\dim(\mathcal{D}^{k,M+1}) < \dim(\mathcal{D}^{k,M}) < \dim(\mathcal{D}^{k,M-1}) < ... < \dim(\mathcal{D}^{k,\ell}) < ... < \dim(\mathcal{D}^{k,0}), \quad (3.45)$$

avec $\mathcal{D}^{k,0} = \mathcal{D}^k$. L'espace $\mathcal{D}^{k,\ell}$ représente un ensemble de déplacements incrémentaux définis selon un modèle paramétrique. En pratique, la grille de pixels S^k à la résolution k est partitionnée en $N^{k,l} = |S|/4^{\ell+k}$ blocs, où $|S|$ est le nombre de pixels de l'image originale. Notons $B^{k,\ell} = \{B_n^{k,\ell}, n = 1,...,N^{k,\ell}\}$ une telle partition. Sur chacun des blocs $B_n^{k,\ell}$, l'espace des configurations $\mathcal{D}^{k,\ell}$ correspond à des solutions de la forme (en omettant l'indice de résolution k) :

$$\boldsymbol{h}^\ell(\boldsymbol{s}) = P^\ell(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}_n^\ell, \forall n, \forall s \in B_n^\ell, \quad (3.46)$$

où $P^\ell(\boldsymbol{s})$ est une matrice qui dépend de la paramétrisation choisie au niveau ℓ et $\boldsymbol{\theta}_n^\ell$ représente le vecteur des paramètres pour le bloc B_n^ℓ. Pour les niveaux de grille $\ell \geq 2$, nous

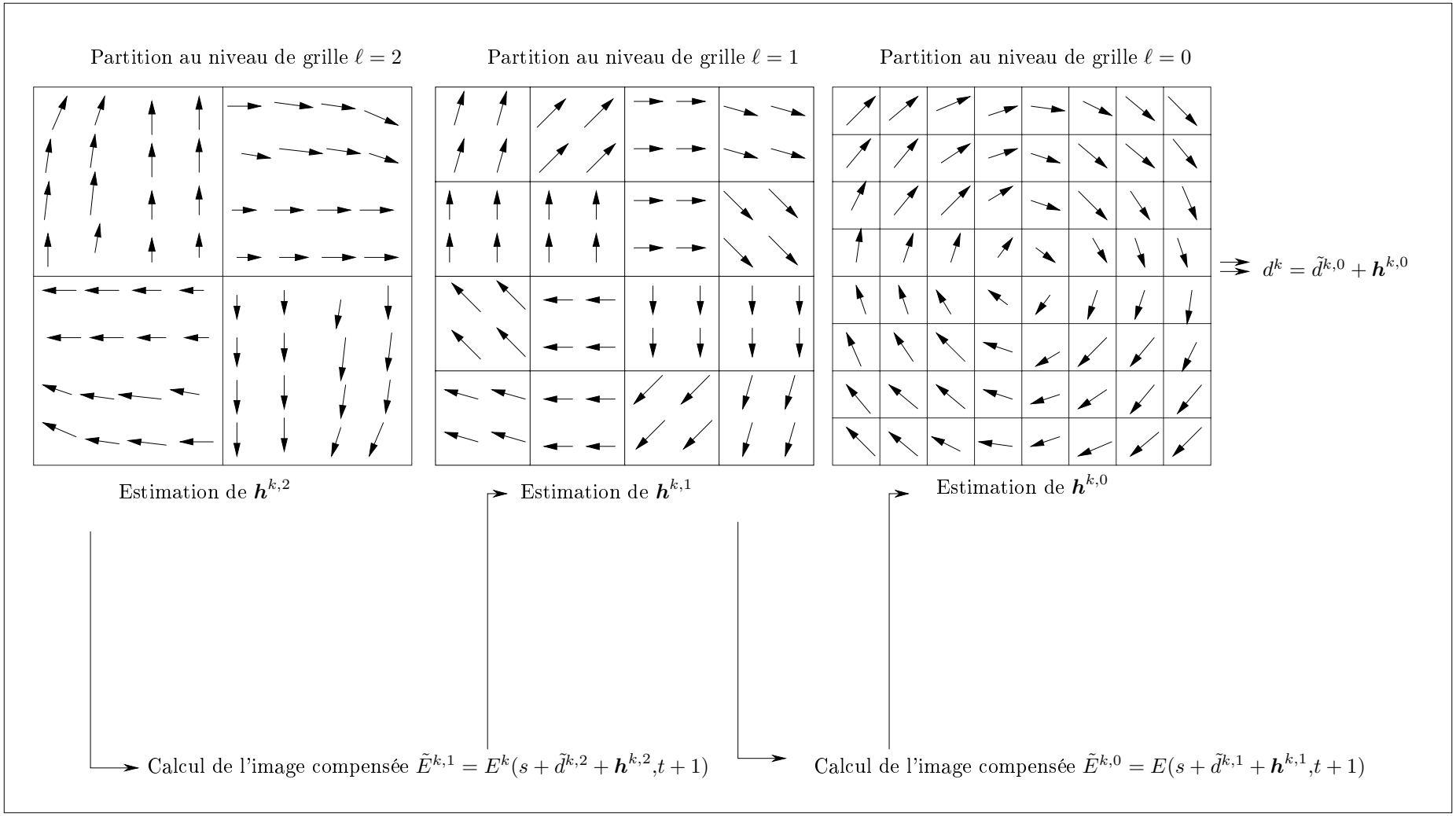


FIG. 3.5 – **Découpage multigrille**. *Exemple pour trois niveaux.*

avons choisi une paramétrisation affine :

$$\forall \ell > 0,\ P^\ell(\boldsymbol{s}=(x,y)) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\theta}_n^\ell \in \mathbb{R}^6. \tag{3.47}$$

Pour les niveaux $\ell = 1$ et $\ell = 0$, nous imposons un modèle paramétrique constant :

$$P^\ell(\boldsymbol{s}=(x,y)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\theta}_n^\ell = (du_n^\ell, dv_n^\ell)^T \in \mathbb{R}^2. \tag{3.48}$$

Au niveau de grille ℓ, la fonction de coût à minimiser par rapport à $\boldsymbol{h}^\ell$ doit alors être réécrite en fonction du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}_n^\ell$ qui décrit $\boldsymbol{h}^\ell$ par l'intermédiaire de la relation (3.46). Le terme d'observation $\mathcal{H}_{obs}$ est alors défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{obs}^\ell(\boldsymbol{\theta}_n^\ell, z^{\boldsymbol{d}}) = \sum_{n=1}^{N^\ell} \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d}} \Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})) \Big((\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \nabla \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla \tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})) P^\ell(s) \boldsymbol{\theta}_n^\ell + \tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big) \\ - E(\boldsymbol{s}) \Big]^2 + \psi(z_s^{\boldsymbol{d}}) \end{aligned} \tag{3.49}$$

où $\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) = E(\boldsymbol{s} + \tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}), t + \Delta t)$. À la fin de chaque estimation correspondant à un niveau de grille ℓ, une image compensée $E(\boldsymbol{s} + \tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{h}^\ell(\boldsymbol{s}), t+1)$ est ainsi calculée et sert pour une nouvelle estimation sur le niveau de grille $\ell - 1$ suivant. La figure FIG.3.5 illustre ce principe pour trois niveaux de grille.

Par ailleurs, le terme de régularisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{reg}^\ell(\boldsymbol{\theta}^\ell, \xi, \zeta, z^\xi, z^\zeta) = & \sum_{n=1}^{N^\ell} \Big[\sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} |\mathrm{div}[\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + P^\ell \boldsymbol{\theta}_n^\ell](\boldsymbol{s}) - \xi(\boldsymbol{s})|^2 \\ & + \lambda \sum_{<s,r>\in C} \big[z_{sr}^\xi |\nabla \xi(\boldsymbol{s})|^2 + \psi(z_{sr}^\xi) \big] \Big] \\ & + \sum_{n=1}^{N^\ell} \Big[\sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} |\mathrm{curl}[\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + P^\ell \boldsymbol{\theta}_n^\ell](\boldsymbol{s}) - \zeta(\boldsymbol{s})|^2 \\ & + \lambda \sum_{<s,r>\in C} \big[z_{sr}^\zeta |\nabla \zeta(\boldsymbol{s})|^2 + \psi(z_{sr}^\zeta) \big] \Big]. \end{aligned} \tag{3.50}$$

L'ensemble $\mathcal{H}_{obs} + \alpha \mathcal{H}_{reg}$ conduit à une fonction quadratique de coût du type :

$$\min_{\boldsymbol{\theta}^\ell} \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^{\ell T} A^\ell \boldsymbol{\theta}^\ell - b^{\ell T} \boldsymbol{\theta}^\ell, \tag{3.51}$$

où la matrice A^ℓ et le vecteur b^ℓ sont fonctions des variables ξ, ζ, z^d, z^ξ et z^ζ. Le lecteur trouvera dans l'annexe B les détails nécessaires à l'implantation d'un tel modèle.

3.7.5 Synthèse

Le synopsis suivant permet de synthétiser la minimisation mise en œuvre. Le nombre de niveaux du schéma multirésolution est noté N et celui de la hiérarchie multigrille est noté M.

- $\tilde{\boldsymbol{d}}^{N,M} \equiv 0$
- Pour $k = N$ jusqu'à $k = 0$ faire (on descend les niveaux de résolution)
  - Pour $\ell = M$ jusqu'à $\ell = 0$ faire (on descend les niveaux de grille)
    - $\boldsymbol{h}^{k,\ell} \equiv 0$, $\xi^k \equiv 0$, $\zeta^k \equiv 0$, $z^{\boldsymbol{d},k} \equiv \frac{1}{\sigma_1^2}$, $z^{\xi,k} \equiv \frac{1}{\sigma_2^2}$, $z^{\zeta,k} \equiv \frac{1}{\sigma_2^2}$
    - Jusqu'à convergence du système faire [a], [b], [c] :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}^{k,\ell} &\leftarrow GS\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{k,\ell T} A^{k,\ell}\boldsymbol{\theta}^{k,\ell} - b^{k,\ell T}\boldsymbol{\theta}^{k,\ell}\right) \\
\boldsymbol{h}^{k,\ell} &= P^{k,\ell}\boldsymbol{\theta}^{k,\ell} \\
z_s^{\boldsymbol{d},k} &\leftarrow \frac{\Psi'(g(\boldsymbol{h}^{k,\ell})_s)}{2g(\boldsymbol{h}^{k,\ell})_s},\ \forall s \in S \\
\xi^k &\leftarrow GS\left(\sum_s [\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell}(\boldsymbol{s}) + \mathrm{div}\boldsymbol{h}^{k,\ell}(\boldsymbol{s}) - \xi_s^k]^2 \right. \\
&\qquad \left. +\lambda \sum_{\langle s,r\rangle} z_{sr}^{\xi,k}|\xi_s^k - \xi_r^k|^2\right) \qquad (3.52) \\
z_{sr}^{\xi,k} &\leftarrow \frac{\Psi'(|\xi_s^k - \xi_r^k|)}{2|\xi_s^k - \xi_r^k|},\ \forall \langle s,r\rangle \in C \\
\zeta^k &\leftarrow GS\left(\sum_s [\mathrm{curl}\tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell}(\boldsymbol{s}) + \mathrm{curl}\boldsymbol{h}^{k,\ell}(\boldsymbol{s}) - \zeta_s^k]^2 \right. \\
&\qquad \left. +\lambda \sum_{\langle s,r\rangle} z_{sr}^{\zeta,k}|\zeta_s^k - \zeta_r^k|^2\right) \qquad (3.53) \\
z_{sr}^{\zeta,k} &\leftarrow \frac{\Psi'(|\zeta_s^k - \zeta_r^k|)}{2|\zeta_s^k - \zeta_r^k|},\ \forall \langle s,r\rangle \in C
\end{aligned}
$$

    - Si $\ell \neq 0$, faire $\tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell-1} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell} + \boldsymbol{h}^{k,\ell}$ et calcul de l'image compensée $\tilde{E}^{k,\ell-1} = E^k(s + \tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell-1}, t+1)$.
    - Si $\ell = 0$, faire $\tilde{\boldsymbol{d}}^k \leftarrow \tilde{\boldsymbol{d}}^{k,0} + \boldsymbol{h}^{k,0}$.
  - Si $k \neq 0$, alors $\tilde{\boldsymbol{d}}^{k-1} \leftarrow \mathrm{projection}(\tilde{\boldsymbol{d}}^k)$ et calcul de l'image compensée $\tilde{E}^{k-1,M} = E^{k-1}(s + \tilde{\boldsymbol{d}}^{k-1}, t+1)$.
- $\boldsymbol{d} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{d}}^0$.

[a] La convergence est obtenue quand l'écart relatif selon la norme L_2 de $\boldsymbol{h}$ est inférieur à 3%.
[b] $g(\boldsymbol{h}^{k,\ell})_s$ représente $\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell}(s))\big((\tilde{E}^{k,\ell}(s)\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^{k,\ell}(s) + \nabla\tilde{E}^{k,\ell}(s)) \cdot \boldsymbol{h}^{k,\ell}(s) + \tilde{E}^{k,\ell}(s)\big) - E^k(s)$.
[c] "$GS()$" signifie une itération de Gauss-Seidel associée à la forme quadratique considérée.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode pour estimer le mouvement d'un écoulement fluide à partir d'une séquence d'images. Cette méthode est une extension des approches standard s'appuyant sur la minimisation d'une fonction d'énergie composée de deux termes (un terme d'observation et un terme de régularisation). Ces deux termes ont été spécialement conçus pour appréhender le mieux possible les mouvements fluides.

Le terme d'attache aux données proposé est défini sur la base de l'équation de continuité comme alternative à l'hypothèse usuelle de conservation de la luminance. Contrairement à d'autres études portant sur ce sujet, nous utilisons cette contrainte sous une forme intégrée qui autorise son utilisation dans des schémas hiérarchiques permettant de gérer les grands déplacements. De telles situations sont monnaie courante lorsque les écoulements sont rapides (ce qui est le cas dans nombre d'applications expérimentales) ou si la fréquence d'acquisition des images est faible (comme pour les images satellites).

Concernant le terme de régularisation, nous avons montré qu'un schéma classique du premier ordre ne permet pas de recouvrer précisément les structures divergentes et rotationnelles présentes dans l'écoulement. En s'appuyant sur un formalisme div-curl, nous avons proposé une fonctionnelle régularisante robuste préservant la divergence et la vorticité de l'écoulement inconnu.

La minimisation est conduite de manière alternée selon les différentes variables du système, en prenant soin de mener l'estimation du champ de vitesses de façon efficace.

Dans le chapitre suivant, nous validons la méthode sur différents exemples de séquences d'images.

Chapitre 4

Résultats expérimentaux

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de valider la méthode d'estimation du mouvement proposée sur différents types d'images, synthétiques ou réelles[1]. Plusieurs versions de l'estimateur proposé seront étudiées et comparées (terme d'observation basé sur l'ECMA ou sur l'équation de continuité, associé au lissage du premier ordre ou div-curl proposé, en utilisant un formalisme robuste ou non). Concernant les M-estimateurs robustes Ψ_1 et Ψ_2 utilisés dans ces expérimentations, nous avons choisi l'estimateur de Leclerc :

$$\Psi_i(x) = 1 - e^{-x^2/\sigma_i^2},\ i = 1{,}2. \tag{4.1}$$

Les variables auxiliaires z ainsi introduites sont telles que

$$\min_{z_i \in (m,M]} \left(z_i x^2 + \psi_i(z_i)\right) = \frac{\Psi_i'(x)}{2x} = \frac{1}{\sigma_i^2} e^{-x^2/\sigma_i^2},\ i = 1{,}2. \tag{4.2}$$

Les deux paramètres σ_1 et σ_2 sont à définir. L'influence de ces paramètres sera discutée dans ce chapitre. Pour simplifier les notations, nous emploierons le formalisme suivant :

- tout ce qui fera référence aux termes d'observation portera l'indice *obs* et ce qui fera référence aux termes de régularisation portera l'indice *reg* ;
- les termes spécifiquement dédiés à l'estimation des mouvements fluides seront nommés F et les termes génériques seront nommés G ;
- les termes employés avec une fonction de pénalisation quadratique porteront l'exposant q, tandis que ceux employés avec l'estimateur robuste de Leclerc porteront l'exposant L.

Ainsi, l'estimateur standard de Horn & Schunck sera noté $G^q_{obs} + \alpha G^q_{reg}$, tandis que l'estimateur développé en version robuste sera noté $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$.

Le chapitre sera structuré de la manière suivante :

- la section 4.2 a pour but de valider la méthode d'un point de vue quantitatif. Pour cela, nous exploiterons des données synthétiques et évaluerons la pertinence des champs calculés par une série de mesures quantitatives ;

1. Certains des résultats de ce chapitre sont présentés et animés dans les pages de démonstration du projet Vista: `http://www.irisa.fr/vista`

- la section 4.3 analysera le comportement de l'estimateur sur des séquences satellitales météorologiques ;
- la section 4.4 proposera deux critères de validation qualitative pour évaluer les résultats. Le premier s'intéressera à la reconstruction de trajectoires de points donnés (reconstruction de la composante lagrangienne du mouvement) et le second à l'extraction automatique de zones significatives de divergence et de vorticité ;
- enfin, la section 4.5 vise à étudier les performances de la régularisation div-curl proposée dans un contexte autre que l'imagerie fluide.

4.2 Résultats sur des exemples synthétiques

Dans cette section, nous étudions quantitativement les bénéfices apportés par l'estimateur développé. Nous allons successivement mettre en avant l'importance du terme de régularisation et du terme d'observation. Nous utilisons différents exemples synthétiques, qui s'appuient tous sur la même image. Cette image est issue du canal visible du satellite de Météosat. Des mouvements de divergence et de rotation, associés à une contrainte de conservation ou non de l'intensité lumineuse, lui ont été appliqués afin de générer synthétiquement une seconde image.

4.2.1 Comparaison de la méthode de régularisation à une régularisation classique du premier ordre

Pour étudier la régularisation div-curl proposée (notée F_{reg}), nous comparons les résultats fournis sur une paire d'images obtenue en appliquant un mouvement synthétique spiralé à une image météorologique réelle (Fig.4.1(a)), sous l'hypothèse de conservation de la luminance. Le mouvement synthétique, résultant d'un zoom avant (divergence constante sur toute l'image div $\boldsymbol{v} = 0.2$) et d'une rotation (de vorticité constante curl $\boldsymbol{v} = -0.2$), fournit l'image représentée sur la figure Fig.4.1(b). Le couple d'images en Fig.4.1(c-d) correspond au couple en Fig.4.1(a-b) où un bruit blanc Gaussien d'une valeur de 10dB est appliqué.

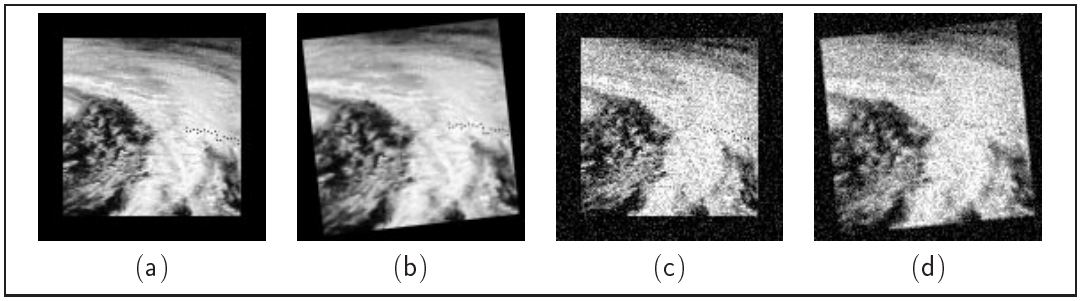


Fig. 4.1 – **Mouvement spiralé synthétique sous l'hypothèse de conservation de la luminance.** *Le champ de vitesses $\boldsymbol{v}$ tel que div $\boldsymbol{v} = 0.2$ et curl $\boldsymbol{v} = -0.2$ est appliqué à l'image réelle issue du satellite de Météosat en (a) pour fournir l'image (b). Le couple des images en (c-d) correspond au couple (a-b) perturbé par un bruit blanc Gaussien de* $10dB$.

Conditions expérimentales

Sur ces images, nous avons comparé les estimateurs $G^q_{obs} + \alpha G^q_{reg}$, $G^q_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ et $G^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$. Seul le terme quadratique d'attache aux données G^q_{obs} a été utilisé car, par construction, les paires d'images de la figure FIG.4.1 respectent la contrainte de conservation de la luminance (à un bruit Gaussien près pour la seconde paire). La première fonction de coût a été testée pour dix valeurs différentes du coefficient de régularisation $\alpha \in [50{,}500]$. Pour la seconde fonction de coût, cent combinaisons de paramètres ont été testées. Ces paramètres sont relatifs au coefficient de régularisation α et au paramètre de l'estimateur robuste de Leclerc σ_2. La gamme de paramètres est $(\alpha,\sigma_2) = [50{,}500] \times [0.5{,}2.5]$. Enfin, pour la troisième fonction de coût, cent combinaisons d'agencements des paramètres ont également été employées. Les paramètres concernés sont les deux coefficients de régularisations α et λ, qui sont employés dans la gamme $(\alpha,\lambda) = [50{,}500] \times [50{,}500]$.

Critères quantitatifs de comparaison

Le champ de déplacements réel étant dans ce cas disponible, nous nous sommes appuyés sur le critère proposé par Barron *et al.* [Barron 94] fournissant la moyenne μ et l'écart type σ de l'erreur angulaire ψ_A pour évaluer la qualité des estimations.

Ce critère définit le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ dans un contexte tridimensionnel. Deux dimensions représentent les coordonnées spatiales et la dernière est relative au temps. Ainsi, la vitesse $\boldsymbol{v}$ est écrite $\boldsymbol{v} = (u,v,1)^T$, l'unité étant (pixel,pixel,image). L'erreur angulaire ψ_A entre la vitesse réelle $\boldsymbol{v}_r$ et la vitesse estimée $\boldsymbol{v}_e$ est alors définie par :

$$\psi_A = \arccos\left(\tilde{\boldsymbol{v}_r} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}_e}\right) \tag{4.3}$$

où $\tilde{\boldsymbol{v}} \equiv \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}(u,v,1)^T$.

Pour chaque estimateur, nous donnons dans le tableau 4.1 les moyennes des déviations angulaires $< \mu >$ et de l'écart type $< \sigma >$, ainsi que le minimum et le maximum obtenus $(\mu_{min},\mu_{max},\sigma_{min},\sigma_{max})$ sur tout l'intervalle du jeu de paramètres. Nous avons également reporté dans la dernière colonne de ce tableau le nombre de balayages de l'image nécessaires pour atteindre la convergence avec la combinaison de paramètres optimale.

Estimateur	$\langle\mu\rangle$	μ_{min}	μ_{max}	$\langle\sigma\rangle$	σ_{min}	σ_{max}	balayages	
$G^q_{obs} + \alpha G^q_{reg}$	3.26°	2.63°	8.34°	3.27°	2.90°	6.32°	936	non bruité
$G^q_{obs} + \alpha G^L_{reg}$	3.40°	2.42°	18.93°	2.80°	1.11°	26.71°	1136	non bruité
$G^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$	**2.64°**	**2.35°**	**4.96°**	**1.44°**	**1.04°**	**3.67°**	1377	non bruité
$G^q_{obs} + \alpha G^q_{reg}$	10.59°	8.55°	15.38°	11.48°	8.28°	18.14°	1103	bruité
$G^q_{obs} + \alpha G^L_{reg}$	10.36°	5.99°	25.13°	10.81°	6.05°	28.41°	1204	bruité
$G^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$	**7.90°**	**5.89°**	**11.97°**	**8.51°**	**5.72°**	**14.26°**	1384	bruité

TAB. 4.1 – **Résultats sur la régularisation div-curl proposée**. *Valeurs sur l'erreur moyenne et l'écart type pour les paires d'images des figures* FIG.*4.1*(a-b) *(partie haute du tableau) et* FIG.*4.1*(c-d) *(partie basse du tableau).*

Cette première série d'expériences montre que la régularisation proposée, même dans une version quadratique, est meilleure qu'un lissage classique du premier ordre, que ce soit

dans une version robuste ou non. Les valeurs de l'erreur moyenne associées à leur écart angulaire sont, dans cette série d'essais, les plus faibles avec la régularisation F^q_{reg}. Pour l'ensemble des paramètres explorés, la variation de μ et σ est également la plus faible avec cette régularisation.

Ces expérimentations indiquent que la régularisation div-curl du second ordre proposée est, même dans sa version quadratique, plus apte que la régularisation standard du premier ordre (en version robuste ou non) à recouvrer des mouvements rotationnels ou divergents. En revanche, ce nouveau lissage augmente le coût calculatoire d'environ 15%.

Les résultats sur la paire d'image bruitée prouvent également que la régularisation proposée est plus robuste au bruit pour le type de mouvement étudié. Une des raisons provient du fait qu'une valeur élevée d'un coefficient de régularisation limite en général l'influence du bruit. Dans le cas d'un lissage div-curl, cela va préserver les quantités de divergence et de vorticité tandis qu'une régularisation du premier ordre va les sous-estimer.

Nous pouvons remarquer que les paires d'images sont reliées aux fluides seulement par leur contenu photométrique. Le mouvement apparent que nous avons généré peut également être celui d'un objet rigide subissant une rotation, en se rapprochant de la caméra. L'utilisation de cette nouvelle régularisation dans un autre contexte que l'imagerie fluide peut donc aussi être une alternative intéressante à la régularisation standard du premier ordre [Mitiche 88]. Nous illustrerons ceci dans la section 4.5.

Étudions à présent l'apport du terme d'attache aux données bâti à partir de l'équation de continuité.

4.2.2 Comparaison du terme d'observation à l'ECMA

En nous appuyant sur la même image réelle, nous avons cette fois testé l'intérêt du terme d'observation F_{obs} en considérant la paire d'images de la figure FIG.4.2. La deuxième image a été obtenue en appliquant le mouvement spiralé accompagné cette fois d'une modélisation de la perte d'intensité due au mouvement divergent. Plus précisément, la divergence étant constante sur toute l'image et de valeur 0.2, nous avons multiplié chaque pixel de la seconde image par le coefficient théorique de perte d'intensité $\exp(-\text{div}\ \boldsymbol{v}) = 0.818$.

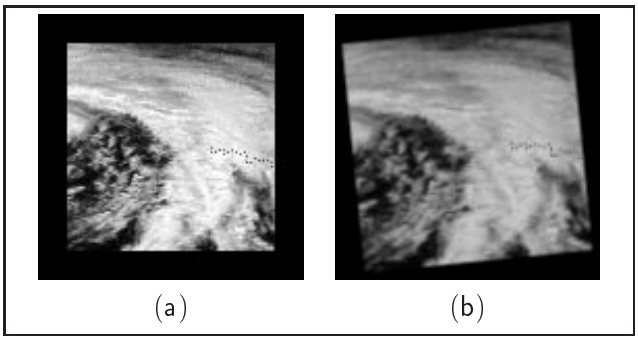


FIG. 4.2 – **Mouvement spiralé synthétique sous l'hypothèse de l'équation de continuité**: *le mouvement de rotationnel curl* $= -0.2$ *et de divergence div* $= 0.2$ *est appliqué à l'image réelle Météosat en* (a)*, en respectant la contrainte photométrique relative à l'équation de continuité : les intensités des images* (a) *et* (b) *ont un rapport de* $\exp -0.2$.

Estimateur	$\langle\mu\rangle$	μ_{min}	μ_{max}	$\langle\sigma\rangle$	σ_{min}	σ_{max}	balayages de l'image
$G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$	59.49°	43.75°	75.65°	22.14°	12.66°	27.67°	28365
$G^L_{obs} + \alpha F^q_{reg}$	57.60°	45.36°	73.46°	10.84°	4.69°	22.44°	1625
$F^q_{obs} + \alpha G^L_{reg}$	8.91°	-	-	15.46°	-	-	1225
$F^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$	**2.12°**	-	-	**1.54°**	-	-	3733

TAB. 4.2 – **Résultats sur le terme d'observation proposé** *Valeurs moyennes et extrémales de l'erreur moyenne et de l'écart angulaire obtenues sur la paire d'image de la figure* FIG.*4.2 pour quatre estimateurs différents.*

Conditions expérimentales

Sur cette paire d'images, nous avons comparé quatre combinaisons des termes d'attache aux données (G_{obs} et F_{obs}) et de régularisation (G_{reg} et F_{reg}). Étant donné que l'hypothèse de conservation de la luminance n'est pas satisfaite, nous avons considéré le terme d'observation G_{obs} dans sa version robuste. Le terme σ_1 associé varie dans la gamme [0.03,1]. Inversement, le modèle de variation de la luminance respectant notre modèle d'attache aux données relatif à l'équation de continuité, nous avons employé celui-ci sous une forme quadratique. Les cœfficients de régularisation appliqués sont ceux qui ont conduit aux meilleurs résultats dans la série d'expériences précédente. Ceux-ci correspondent, pour la régularisation standard du premier ordre en version robuste G^L_{reg} à $(\alpha,\sigma_2) = (400,0.5)$ et pour la régularisation div-curl du second ordre en version quadratique F^q_{reg} à $(\alpha,\lambda) = (450,200)$.

Résultats

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 4.2. Notons que, comme F^q_{obs} correspond à une version quadratique, seule une combinaison de paramètres ($(\alpha,\lambda) = (450,200)$) a finalement été retenue pour les expériences s'appuyant sur le terme relatif à l'équation de continuité. Ceci explique les cases vides de ce tableau.

L'importante différence entre le modèle standard ($G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$) dont la convergence est lente sur cet exemple et le nouveau modèle ($F^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$) est visuellement appréciable sur la figure FIG.4.3.

Cependant, en raison de l'adéquation du terme d'attache aux données relatif à l'équation de continuité avec le modèle de formation des images utilisé, aucune conclusion définitive ne peut-être établie sur la supériorité du terme F_{obs}. Quelques remarques peuvent néanmoins être faites. Tout d'abord, il est surprenant d'observer qu'une perturbation multiplicative homogène de l'intensité fausse considérablement l'estimation conduite par l'ECMA, même en employant des fonctions de pénalisation robustes. Ensuite, la supériorité de la régularisation div-curl, déjà démontrée dans la série d'expérimentations précédente, est également confirmée ici (cette régularisation diminue significativement l'erreur, quel que soit le terme d'observation utilisé). L'utilisation d'un lissage au premier ordre, associé à l'équation de continuité, conduit à une contradiction : le terme d'attache aux données favorise l'apparition de mouvements divergents tandis qu'un lissage au premier ordre tend à les atténuer. Dans ce cas, la divergence moyenne obtenue avec l'estimateur $F^q_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ possède une erreur de 21% par rapport à la divergence réelle, tandis que celle obtenue avec l'estimateur $F^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$ atteint 1%.

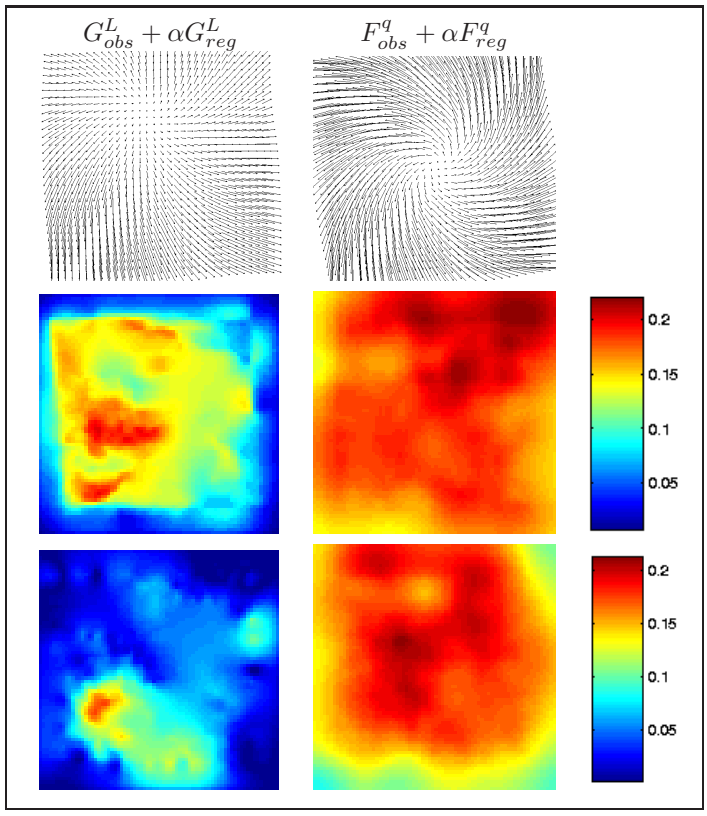


FIG. 4.3 – **Le modèle générique robuste ($G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$) comparé au modèle quadratique dédié ($F^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$) sur le mouvement spiralé avec perte d'intensité de la figure** FIG. 4.2**.** *Ligne du haut : champ de déplacements ; Ligne du milieu : cartes de divergence correspondantes ; Ligne du bas : cartes de vorticité correspondantes.*

Étudions à présent les résultats obtenus sur des séquences réelles.

4.3 Résultats sur des exemples météorologiques

Nous allons dans cette section présenter des résultats obtenus sur des séquences réelles météorologiques. D'autres résultats sur des images de mécanique des fluides expérimentale feront l'objet d'un chapitre spécifique (le chapitre 5).

Les images météorologiques auxquelles nous avons accès nous ont été fournies par le Centre de Météorologie Spatiale de Lannion (Météo France) et proviennent du satellite Météosat. Ce satellite possède trois capteurs travaillant dans des bandes passantes de longueurs d'ondes différentes. Il en résulte alors trois types d'images : les images dites "visibles" (notées VIS et dont la longueur d'onde du canal se situe dans $0.4 - 1.0\mu m$), les images "infrarouges" (notées IR, de longueur d'onde $10.5 - 12.5\mu m$) et "vapeur d'eau" (notées WV, de longueur d'onde $5.7 - 7.1\mu m$).

La luminance des images issues du canal visible est reliée à la réflectance du corps visé, à l'éclairement solaire incident et à la géométrie de visée. Les nuages épais, de réflectivité supérieure à celle des nuages fins, y sont plus brillants que les autres. De telles images ne sont disponibles qu'une dizaine d'heures par jour (selon la saison) car la dynamique de luminance est essentiellement guidée par l'éclairement solaire. Pour ces raisons, les images VIS sont très peu étudiées en traitement d'image.

Les images infrarouges rendent compte de la température radiative de la surface terrestre ou du sommet des nuages observés, et les images vapeur d'eau mesurent en quelque sorte (à la suite d'un processus de transfert radiatif complexe) la quantité de vapeur d'eau située entre le sol et le satellite. Dans ces deux types d'imagerie, les zones les plus sombres correspondent à des régions froides (images IR) ou sèches (images WV), tandis que les pixels aux teintes claires seront jugés chauds (dans le cas IR) ou humides (WV). Comme cela est mentionné dans les thèses de Béréziat [Béréziat 99], Denis-Brossard [DenisBrossard 00] et Papin [Papin 99], les caractéristiques de luminance des images IR et WV ne sont pas en accord avec celles provenant du canal VIS. Ainsi, pour ce type d'imagerie, les niveaux de gris sont systématiquement inversés.

Nous présentons dans cette section des exemples provenant des canaux infrarouges et vapeur d'eau.

4.3.1 Images issues du canal infrarouge

Séquence 1 : situation du 21 janvier 1998

La première séquence d'images utilisée a été acquise le 21 janvier 1998 et est représentée dans la figure FIG.4.4. On peut voir une large zone de dépression dans la partie inférieure gauche de l'image, associée à un fort déplacement de masses nuageuses dans le coin supérieur droit.

Les champs de déplacements obtenus avec les cinq estimateurs $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$, $G^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$, $F^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$, $F^L_{obs} + \alpha F^q_{reg}$ et $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$, ainsi que les cartes de divergence et de vorticité associées sont présentés sur la figure FIG.4.5.

On observe que les déplacements mesurés sont physiquement plausibles, la zone spiralée dépressionnaire ainsi que le mouvement des masses nuageuses étant en effet bien présents.

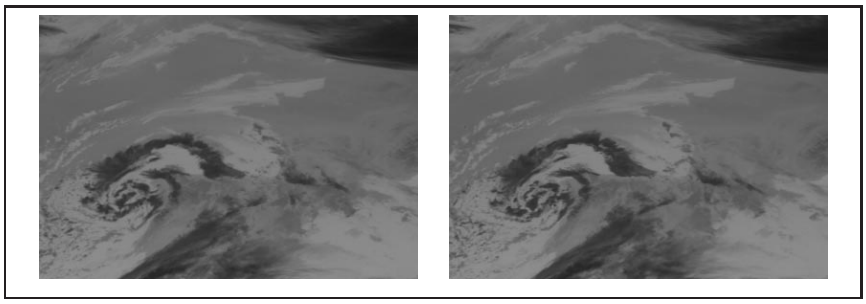


FIG. 4.4 – **Images météorologiques infrarouges** *: deux portions d'images consécutives acquises le 28 janvier 1998, où une large zone dépressionnaire est visible en bas à gauche et un mouvement de masses nuageuses apparaît dans le coin supérieur droit.*

Néanmoins, l'estimateur complètement générique semble sous-estimer les différentes composantes de ce mouvement complexe. Le champ de déplacements qui en résulte est lisse et les quantités de divergence et de vorticité sont faibles (*cf* FIG.4.5(a)). Cette tendance est atténuée lorsque le terme de régularisation est remplacé par le schéma div-curl en version quadratique (*cf* FIG.4.5(b)).

Tandis que l'influence du terme d'attache aux données n'est pas observable lorsque nous employons une régularisation du premier ordre (*cf* FIG.4.5(a) et FIG.4.5(c) ; rappelons que pour une faible divergence, la contrainte relative à l'équation de continuité est assimilable à l'EMCA), elle apparaît de manière plus significative lorsqu'on l'associe à la régularisation div-curl (*cf* FIG.4.5(d)).

Notons que les deux versions de l'estimateur dédié complet $F^L_{obs}+\alpha F^q_{reg}$ et $F^L_{obs}+\alpha F^L_{reg}$ fournissent des champs de vitesses qui recouvrent la zone spiralée relative à la dépression et semblent mieux appréhender les mouvements divergents des structures nuageuses froides. En terme de divergence et de vorticité, ces mouvements sont associés à une concentration de rotationnel au centre de la dépression et à des zones localisées de divergence non nulle. La visualisation de ces scalaires démontre l'impact de la fonction de pénalisation robuste employée dans la régularisation div-curl : par rapport à la version quadratique F^q_{reg}, la version robuste F^L_{reg} fournit des concentrations plus importantes et mieux localisées de divergence et de vorticité (FIG.4.5(d) et FIG.4.5(e)).

Séquence 2 : situation au 5 juin 1983

Ce deuxième exemple est issu d'une séquence acquise le 5 juin 1983, dont deux images sont représentées sur la figure FIG.4.6(a-b). Cette séquence montre une importante structure dépressionnaire au centre de l'image, ainsi que d'autres petites structures tourbillonnaires moins importantes. Sur cet exemple, nous avons testé deux estimateurs : le premier est totalement générique en version robuste $G^L_{obs}+\alpha G^L_{reg}$ et le second est l'estimateur développé dans ce document ($F^L_{obs}+\alpha F^L_{reg}$), en version robuste également. Les résultats sont de même nature que ceux de la séquence précédente. En effet, même si le champ de déplacements estimé dans chacun des cas semble plausible (FIG.4.6(a-b)), ceux fournis par la méthode dédiée ($F^L_{obs}+\alpha F^L_{reg}$) recouvrent des zones plus larges de divergence et de vorticité et semblent plus en accord avec le déplacement réel. Les cartes correspondantes de ces quantités en (FIG.4.6(e-f)) et (FIG.4.6(g-h)) confirment cette tendance. Nombre de petits

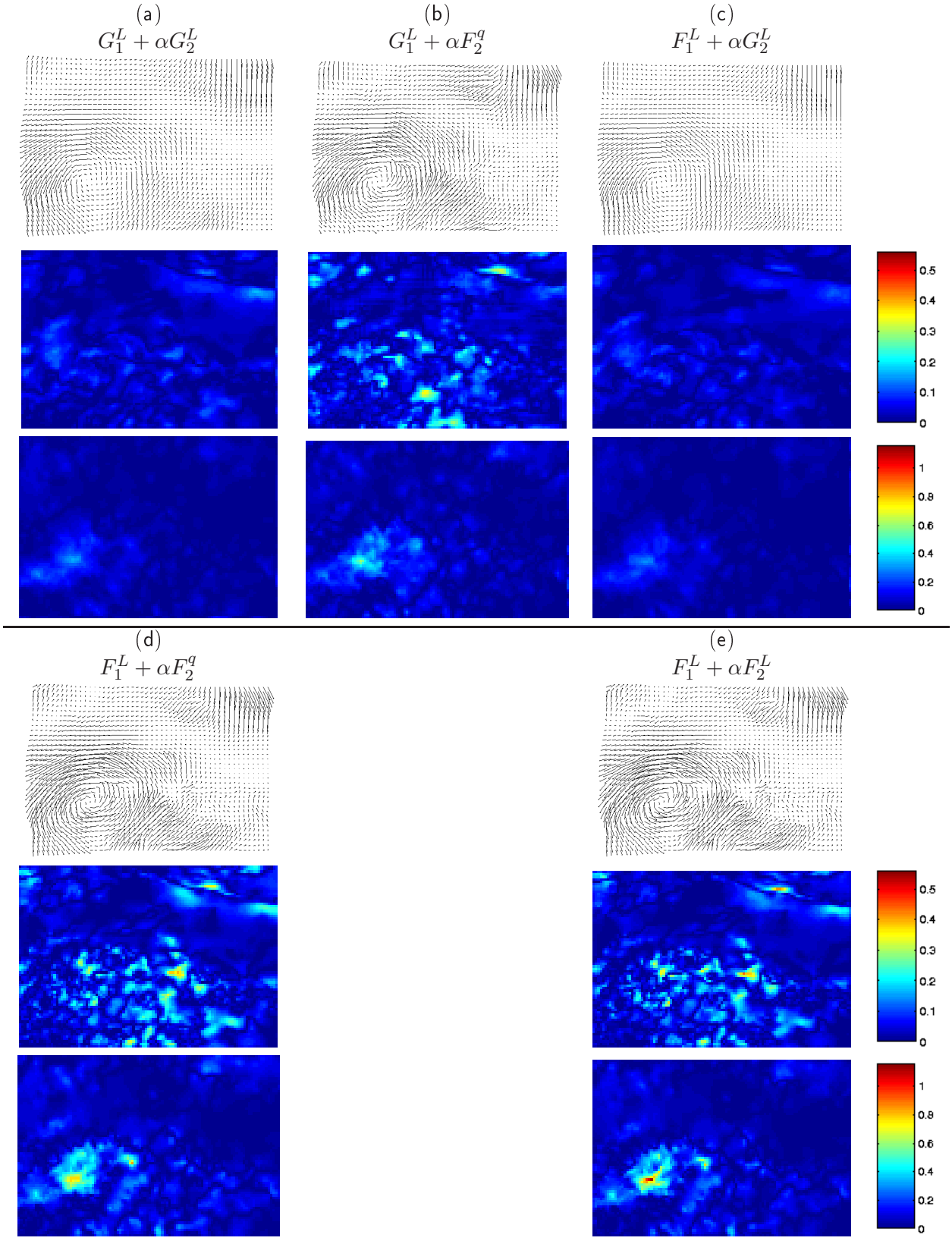


FIG. 4.5 – **Comparaison des différents algorithmes sur la séquence météorologique infrarouge** *: pour ces cinq présentations, le champ de déplacements est visualisé sur la partie haute, les cartes de divergences sont visibles sur la ligne du milieu et celles de vorticité sur la partie basse.*

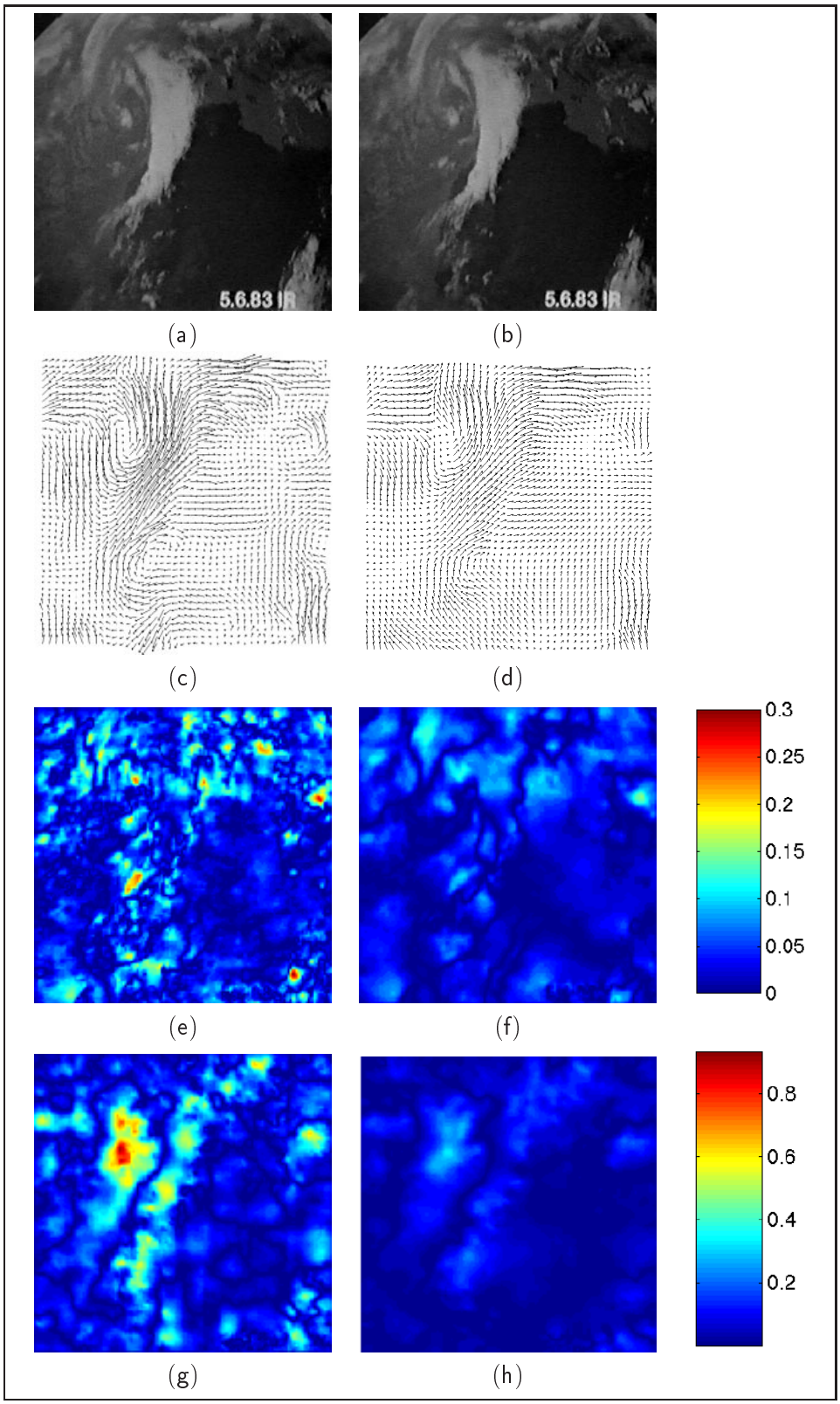


FIG. 4.6 – **Résultats sur une séquence issue du canal infrarouge du satellite Météosat**. *(a-b) : deux images de la séquence ; (c-e-g) champs de déplacements, cartes de divergence et de vorticité obtenues avec la méthode dédiée* $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$ *; (d-f-h) champs de déplacements, cartes de divergence et de vorticité obtenues avec la méthode générique robuste* $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$.

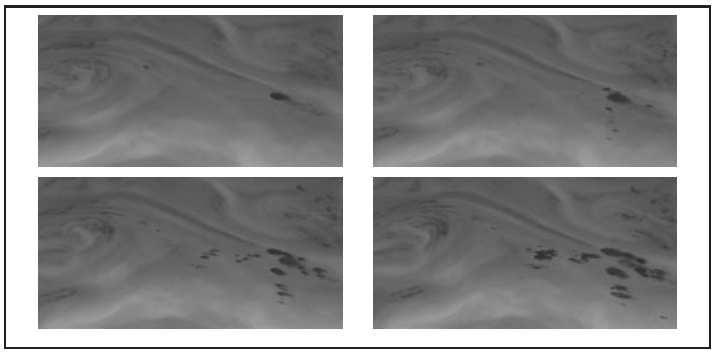


FIG. 4.7 – **Images météorologiques du canal "vapeur d'eau"** *: quatre images consécutives d'une séquence de test, représentant une large zone dépressionnaire dans la partie gauche des images, associée à l'expansion de cellules convectives (en noir) dans la partie droite.*

vortex qui gravitent autour de la zone spiralée principale apparaissent avec la méthode dédiée.

Étudions à présent le cas d'images vapeur d'eau.

4.3.2 Images issues du canal vapeur d'eau

La séquence d'images issue du canal vapeur d'eau utilisée est représentée sur la figure FIG.4.7 et a été acquise le 4 août 1995. Cette séquence présente sur la partie gauche une zone dépressionnaire et dans la partie droite l'explosion de cellules convectives. Les images vapeur d'eau fournissent de nombreuses informations aux météorologistes. Leur faible contraste photométrique rend cependant leur manipulation difficile du point de vue du traitement d'image.

La figure FIG.4.8 représente les champs de déplacements obtenus avec les approches génériques et dédiées. Il est important de noter que, afin d'assurer une certaine cohérence temporelle, le processus d'estimation est initialisé à chaque niveau de résolution grossier par un sous échantillonnage du champ de déplacements obtenu à l'instant précédent, et ceci quel que soit l'estimateur employé. Au tout début de la séquence, l'initialisation est quant à elle donnée par un champ nul.

La différence entre les deux méthodes est nettement mise en évidence sur cette séquence. L'approche générique lisse le mouvement de manière tellement importante que le mouvement spiralé de la dépression est de ce fait totalement ignoré. Sur cette image trop faiblement contrastée, l'estimation est en fait principalement conduite par la régularisation du premier ordre qui encourage un champ laminaire. À l'opposé, l'approche dédiée démontre sa capacité à recouvrer cette composante cruciale du mouvement, même dans cette situation photométrique difficile. On peut souligner que l'observation des champs de vitesses instantanés consécutifs indiquent une bonne stabilité de la méthode. Cette stabilité spatio-temporelle sera confirmée lors de la visualisation complète des trajectoires (section 4.4.1).

Les cartes de vorticité et de divergence obtenues par l'approche dédiée sont présentées sur la figure FIG.4.9. Une concentration stable de vorticité relative à la zone dépressionnaire

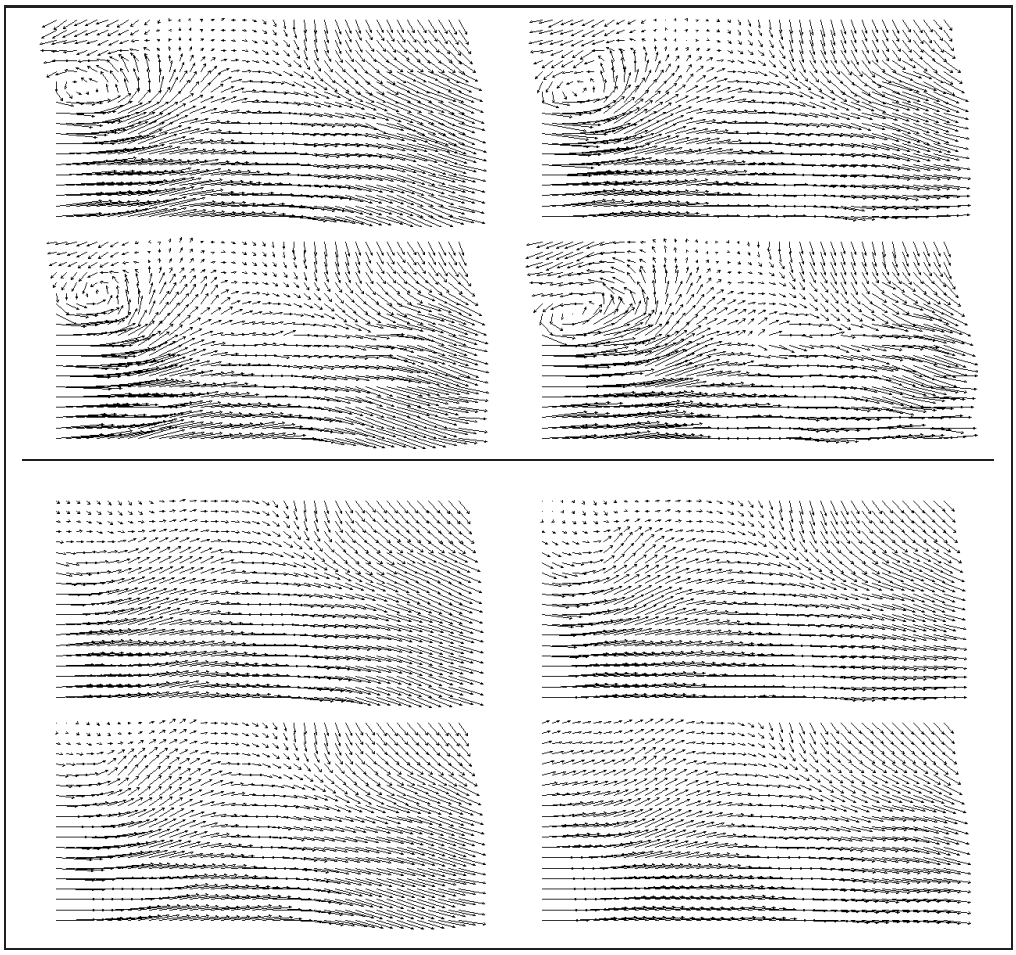


FIG. 4.8 – **Comparaison du modèle dédié au modèle générique robuste, sur une séquence météorologique d'images vapeur d'eau** *: 4 champs de déplacements estimés avec le modèle* $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$ *sur la partie haute et avec le modèle* $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ *sur la partie basse.*

accompagnée de petites structures convergentes peut être observée. De petites zones transitoires de divergence signalent la présence des cellules convectives, dans la partie droite des images.

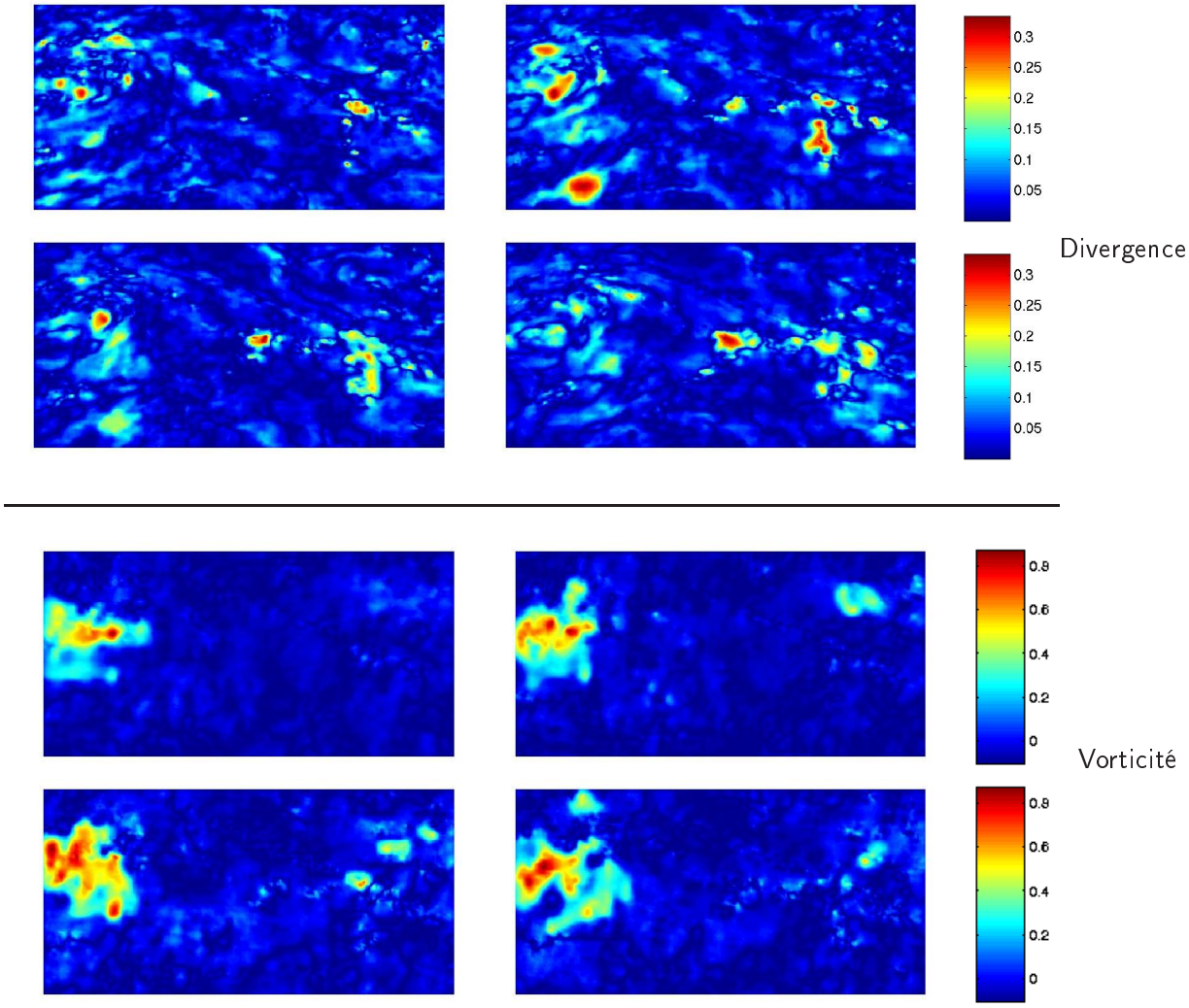


FIG. 4.9 – **Séquences d'images consécutives de divergence et de vorticité estimées par l'approche dédiée**. *Ces zones ont été calculées sur la séquence vapeur d'eau de la figure* FIG.*4.7 à partir du mouvement estimé par la méthode dédiée (déplacements représentés sur la partie haute de la figure* FIG.*4.8). Les zones de divergence, représentées sur la partie haute, font clairement apparaître le mouvement des cellules convectives.*

4.3.3 Remarques

Malheureusement, dans le cadre d'images météorologiques, la vérité terrain (les champs de déplacements réels, ainsi que les valeurs de divergence et de vorticité) est inconnue. La pertinence des mesures fournies par l'approche dédiée, en comparaison à une approche

standard, ne peut être relevée que qualitativement. Toutefois, les champs de déplacements fournis ont été approuvés par le consortium européen Eumetsat [Szantai 00]. Pour obtenir une validation qualitative supplémentaire des écoulements expérimentaux, nous avons d'une part effectué une reconstruction complète des trajectoires (*i.e.* de la composante lagrangienne) de certains points et d'autre part, extrait les zones significatives de divergence et de vorticité.

4.4 Validation qualitative

4.4.1 Reconstruction de trajectoires

La reconstruction des trajectoires de points donnés d'un fluide au cours du temps est un problème intéressant. Cela permet en effet d'acquérir une représentation Lagrangienne de l'écoulement, pouvant compléter ou parfois remplacer l'emploi de traceurs physiques souvent complexes, épars et difficiles à mettre en œuvre [DenisBrossard 99,Rougon 00]. Les applications sont variées et permettent par exemple de suivre des œufs de poissons dans l'océan, des icebergs ou des agents polluants. Outre ces applications, la reconstruction de trajectoires fournit également un *outil de visualisation unique* pour accéder à la qualité des champs estimés. Comme proposé dans [Grazzini 01,Ramsden 91], cette reconstruction est conduite à l'aide d'une méthode d'intégration du type Runge-Kutta à l'ordre 4 (voir Annexe C).

Nous présentons les résultats obtenus sur les trois séquences météorologiques complètes (c'est à dire 13 images pour la première séquence, 10 pour la seconde et 15 pour la troisième) partiellement représentées sur les figures Fig.4.4–4.6–4.7. Nous comparons pour ces trois séquences les trajectoires reconstruites en utilisant les champs de déplacements obtenus avec la méthode générique robuste $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ et dédiée $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$. Ces trajectoires sont superposées à la dernière image de la séquence correspondante et sont représentées sur la figure Fig.4.10. Les points initiaux ont été sélectionnés sur une grille régulière de points, et sont visibles sur la première colonne de cette figure.

Comme nous l'avons mentionné, aucune vérité terrain n'est disponible. Cependant, l'évolution globale du flot visualisé par l'intermédiaire de ces trajectoires semble plus plausible lorsque celles-ci sont calculées à partir des champs provenant de l'approche dédiée. Sur ces trois séquences, les trajectoires sont visuellement plus cohérentes avec les mouvements dépressionnaires dans le cas dédié. L'estimateur générique conduit par ailleurs à des résultats erronés dans le cadre de la séquence vapeur d'eau[2].

La qualité de ces trajectoires démontre la pertinence des champs de déplacements instantanés estimés par la méthode dédiée. Cela montre également une certaine stabilité temporelle de l'approche au travers d'une longue séquence, malgré l'absence de lien temporel explicite (excepté l'utilisation d'une estimation précédente comme initialisation).

4.4.2 Extraction de zones significatives de divergence et de vorticité

Nous proposons ici une méthode simple pour extraire des structures caractérisées par une présence significative de divergence ou de vorticité, en s'appuyant sur les cartes nu-

2. Ces séquences animées sont visibles sous `http://www.irisa.fr/vista/Themes/Demos/MouvementFluide/fluide.html`

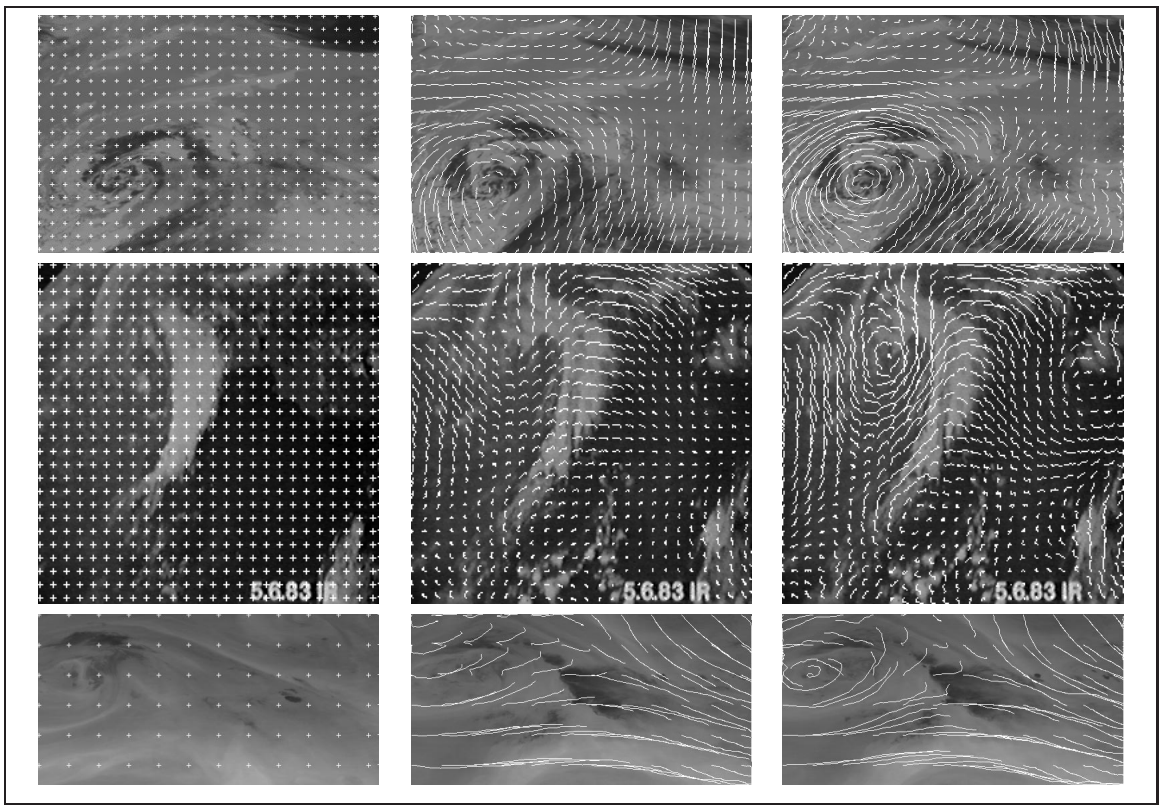


FIG. 4.10 – **Trajectoires reconstruites pour les trois séquences météorologiques traitées**. *Les deux premières lignes correspondent aux séquences issues du canal infrarouge et la dernière au canal vapeur d'eau. Sur la première colonne se trouvent les points initiaux sélectionnés pour reconstruire les trajectoires, superposés à la première image de la séquence. Les trajectoires reconstruites sont quant à elles superposées à la dernière image de la séquence. Sur la seconde colonne, les trajectoires sont calculées à partir des déplacements fournis par l'estimateur générique* $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ *et la dernière colonne correspond aux trajectoires basées sur les déplacements estimés par l'approche dédiée* $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$.

mériques représentatives de ces scalaires calculées à partir du champ de déplacements. Le problème est traité par deux méthodes identiques de classification binaire, dans lesquelles on associe un terme de régularisation favorisant des zones compactes des régions à extraire. Les détails de cette approche sont présentés dans l'Annexe D.

Sur la figure FIG.4.11 se trouvent les structures de divergence (pour les images vapeur d'eau) et de vorticité (pour les images infrarouges) extraites. Dans ces trois séquences, les résultats obtenus avec les champs de déplacements estimés par la technique développée ($F_1^L + \alpha F_2^L$) semblent représenter fidèlement les principales structures de chaque écoulement. Celles-ci sont par exemple les cellules convectives de la séquence vapeur d'eau en FIG.4.11 (c) et les zones dépressionnaires des deux séquences infrarouges en FIG.4.11 (a-b). En revanche, l'application de la même méthode à partir de déplacements obtenus avec l'estimateur de mouvement générique ne fournit pas de bons résultats. Ceci provient du fait que ces champs de vitesses sont sous-estimés en terme de divergence et de vorticité. Avec de faibles valeurs du paramètre μ (provenant du procédé de minimisation et représentatif du seuil à partir duquel on considère que la zone est significative), les régions segmentées sont trop larges et la différence entre le bruit et les données pertinentes est difficilement observable. Augmenter la valeur de ce paramètre permet de réduire le nombre de régions extraites mais perturbe la taille des zones de pertinence. Ainsi, sur les images des deux dernières colonnes de la figure FIG.4.11, les zones capturées sont soit trop petites, soit de forme aberrante vis-à-vis de la localisation des événements visualisés.

Les mesures de divergence et de vorticité, calculées à partir des champs de déplacements issus de la méthode d'estimation proposée, peuvent donc être simplement utilisées pour extraire les structures clés d'un écoulement.

4.5 Résultats en imagerie non-fluide

La méthode que nous avons développée est dédiée à l'estimation des mouvements fluides. Bien que le terme d'attache aux données basé sur l'équation de continuité soit spécifiquement conçu pour être en accord avec les lois de la mécanique des fluides, le terme de régularisation div-curl proposé n'est pas attaché à ce type de mouvements. Il peut tout à fait être employé pour l'estimation de mouvements rigides.

Pour appuyer ceci, nous avons utilisé un estimateur de mouvement composé de l'équation de contrainte du mouvement apparent associé à une régularisation div-curl ($G_{obs}^L + \alpha F_{reg}^L$) sur la séquence synthétique Yosémite. Suivant le critère de Barron *et al.* [Barron 94], les résultats optimaux sur la séquence tronquée de Yosémite (*i.e.* sans la zone du ciel) sont donnés dans le tableau 4.3 et comparés aux valeurs fournies par d'autres méthodes.

Les résultats obtenus avec la méthode générique ($G_{obs}^L + \alpha G_{reg}^L$) et avec la régularisation proposée ($G_{obs}^L + \alpha F_{reg}^L$) sont proches les uns des autres. Ceci démontre la généralité de la régularisation div-curl, apte à recouvrir des mouvements fluides mais aussi rigides. La figure FIG.4.12 représente une image de la séquence utilisée ainsi que le champ de vitesses optimal estimé.

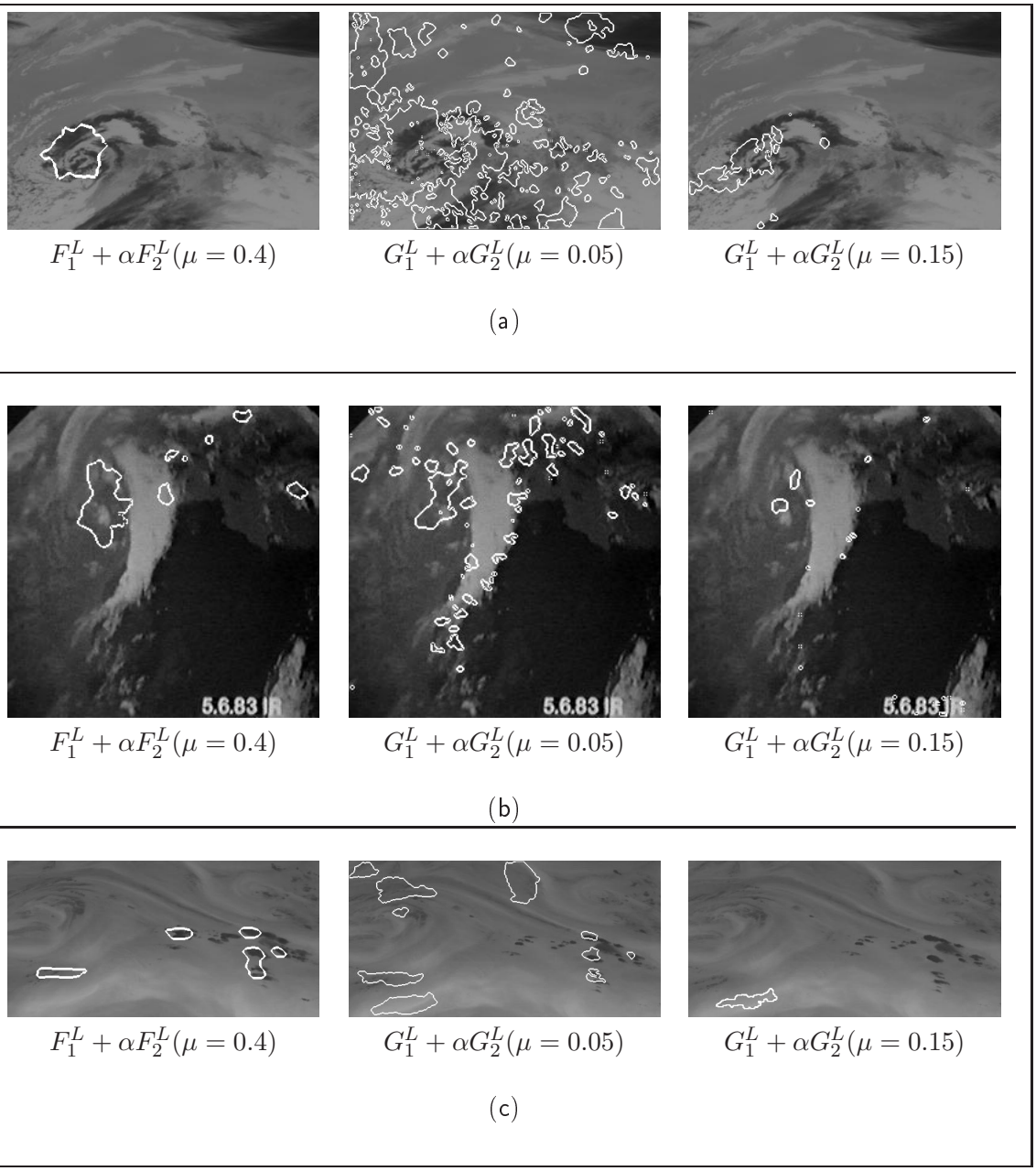


FIG. 4.11 – **Extraction de structures significatives de vorticité (a-b) et de divergence (c)**, *sur les trois séquences d'images Météosat traitées.*

Technique	μ	σ
Estimateur $G^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$	1.80°	1.39°
Mémin et Pérez ($G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$) [Mémin 02]	1.76°	1.33°
Bab-Hadiashar et Suter [BabHadashiar 98]	1.97°	1.96°
Lai et Vermuri [Lai 98]	1.99°	1.41°
Ju *et al.* [Ju 96]	2.16°	2.0°
Black et Jepson [Black 96b]	2.29°	2.25°
Mémin et Pérez [Mémin 98a]	2.34°	1.45°
Szeliski et Coughlan [Szeliski 94]	2.45°	3.05°
Black [Black 94]	3.52°	3.25°

TAB. 4.3 – **Résultats comparatifs sur Yosémite.** *Erreur moyenne et écart angulaire suivant le critère de Barron et al. [Barron 94], pour notre méthode ainsi que certaines autres, la zone du ciel étant retirée*

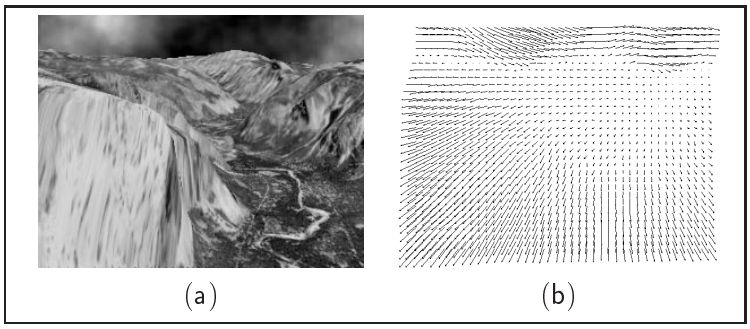


FIG. 4.12 – **Résultats sur la séquence Yosémite.** (a) *: Une image de la séquence ;* (b) *: champ de déplacements estimé avec la régularisation div-curl.*

4.6 Conclusion

Nous avons étudié, sur des séquences d'images synthétiques et réelles, les contributions des deux termes proposés (le terme d'observation s'appuyant sur l'équation de continuité et la régularisation div-curl). Pour un certain nombre de critères quantitatifs, la méthode s'est avérée performante sur des exemples variés et la régularisation proposée est également apte à estimer des déplacements de nature non-fluide. Sur les images présentées, l'approche proposée permet d'estimer correctement des écoulements complexes, composés de multiples structures divergentes et rotationnelles. Ces structures, qui sont d'une importance capitale dans la description et l'analyse de phénomènes fluides, semblent en effet extraites de manière plus pertinente avec la méthode dédiée qu'avec une méthode générique.

Ces champs de déplacements ont été ensuite exploités à des fins de reconstruction de trajectoires et d'extraction de zones significatives en terme de divergence et de vorticité. Outre son intérêt d'un point de vue de la physique, la reconstruction de trajectoires permet d'obtenir un outil de validation qualitatif supplémentaire. Les trajectoires reconstruites, ainsi que les structures caractéristiques de divergence et de vorticité extraites à partir de ces déplacements, confirment la qualité de l'approche dédiée.

Une validation s'appuyant sur des critères spécifiques à la mécanique des fluides expérimentale est présentée dans le chapitre qui suit.

Chapitre 5

Validation en mécanique des fluides expérimentale : cas des “couches de mélange”

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons l'estimateur de mouvement sur des images issues de la mécanique des fluides expérimentale et représentant une “couche de mélange”. L'écoulement étudié a été généré au LEA (Laboratoire d'Études Aérodynamiques) de Poitiers et les images nous ont été fournies par le Cemagref (organisme de recherche pour l'ingénierie de l'agriculture et de l'environnement) de Rennes.

Ce chapitre est composé de deux sections. Dans un premier temps, nous allons définir les couches de mélanges et donner quelques éléments de caractérisation. Ensuite, nous étudierons comparativement les résultats fournis pour le même écoulement par les méthodes de PIV (dont le lecteur pourra obtenir des informations dans l'annexe F) et la méthode d'estimation du mouvement proposée dans le chapitre 3.

5.2 Les couches de mélange

Nous nous inspirons dans cette section de ce qui est présenté dans la thèse de Dominique Heitz [Heitz 99] dans laquelle le lecteur pourra trouver une étude plus complète, ainsi que dans [Browand 83,Fiedler 81].

5.2.1 Définition

Une couche de mélange prend naissance lorsque deux courants se déplacent dans la même direction (supposée horizontale pour une meilleure clarté) mais avec des vitesses différentes (notées u_a et u_b avec $u_a > u_b$). Cette discontinuité de la vitesse est instable et provoque une région turbulente à l'aval du point de rencontre des deux écoulements. Ce principe est illustré sur le haut de la figure FIG.5.1 et un cliché expérimental est présenté en FIG.5.2. Cette turbulence formée porte le nom de *couche de mélange*. Si la pression présente dans l'écoulement est constante, l'expansion de la zone turbulente

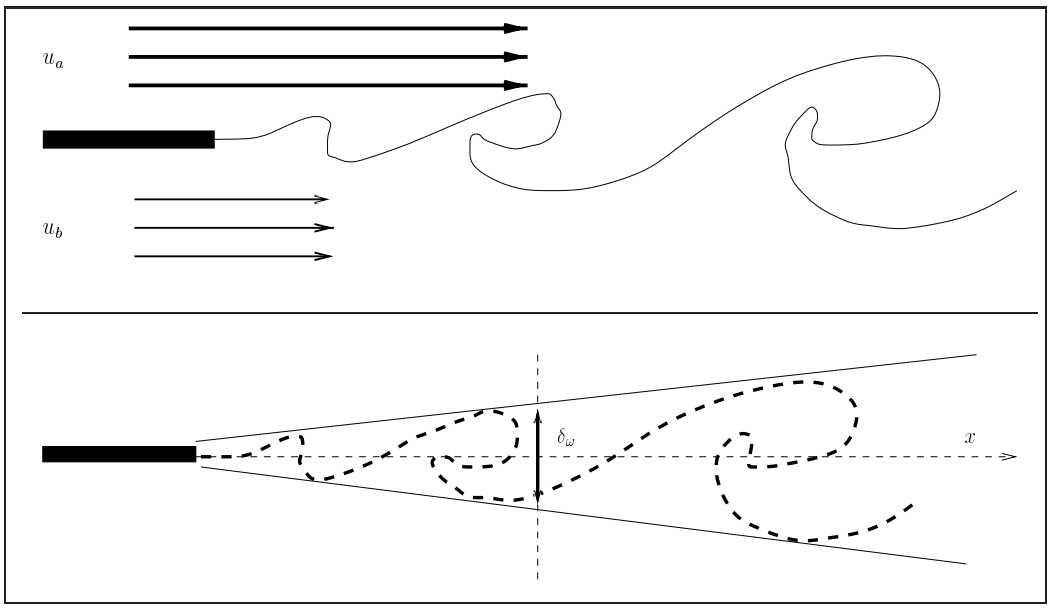


FIG. 5.1 – **Principe de formation d'une couche de mélange.** *En haut : les deux vitesses u_a et u_b ont le même sens mais pas la même amplitude. Ceci crée à l'aval du point de rencontre une région turbulente. En bas : l'épaisseur de cette région, notée δ_ω, est linéaire en fonction de l'abscisse x.*

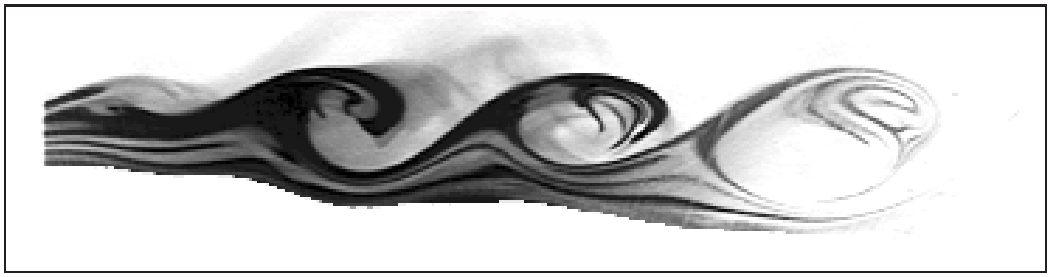


FIG. 5.2 – **Visualisation d'une couche de mélange.**

créée est linéaire. L'épaisseur de cette zone, notée δ_ω, est alors proportionnelle à $x\Delta u$ où $\Delta u = (u_a - u_b)/2$ et x est l'abscisse. Ceci est schématisé sur le bas de la figure FIG.5.1.

5.2.2 Caractérisations

Pour décrire l'évolution d'une couche de mélange, deux hypothèses sont communément employées. Tout d'abord, la vitesse transversale de l'écoulement (perpendiculaire à l'axe des x) doit être négligeable devant la vitesse longitudinale (le long de l'axe des x). Ensuite, les gradients de la vitesse dans la direction transversale doivent être importants. Sous ces deux hypothèses, les équations de "couche mince" (*cf* [Heitz 99] pour une présentation) s'appliquent pour un écoulement bidimensionnel, stationnaire et incompressible, et conduisent au système suivant (en négligeant les effets visqueux moléculaires dûs aux parois) :

$$\begin{cases} \overline{u}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\overline{u}$ (respectivement $\overline{v}$) est la composante de la vitesse moyenne selon l'axe des x (respectivement y) et $u^{'}$ (respectivement $v^{'}$) est la composante de la vitesse fluctuante (écart quadratique moyen de la vitesse) suivant x (respectivement y). Plusieurs solutions analytiques ont été proposées pour résoudre le système défini en (5.1). En utilisant le concept de viscosité turbulente de Boussinesq [Boussinesq 77] et le schéma proposé par Prandtl [Prandtl 35], Görtler [Görtler 42] aboutit à l'équation d'évolution suivante :

$$u^* = \frac{\overline{u} - u_b}{u_a - u_b} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{erf}(\eta - \eta_0)), \tag{5.2}$$

où u^* représente l'expression adimensionnée de la composante de vitesse moyenne longitudinale. Le terme η est appelé la variable de similitude spatiale et est défini par :

$$\eta = \sigma \frac{y - y_0}{x - x_0}, \tag{5.3}$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées de l'origine virtuelle de la couche de mélange et σ un paramètre relatif à son expansion. Le terme η_0 est la valeur de η sur l'axe de la couche de mélange, et la fonction erf est définie par :

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz. \tag{5.4}$$

Un tel profil de la vitesse moyenne longitudinale est représenté à la figure FIG.5.3. La zone à partir de laquelle les profils de vitesse observés peuvent se ramener sur le profil unique défini en (5.2) est dite *zone de similitude* de l'écoulement. Dans cette zone, d'autres mesures peuvent être définies :

– le rapport de vitesse : $r = u_b/u_a$;

– l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\Theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{u} - u_b}{u_a - u_b} \left(1 - \frac{\overline{u} - u_b}{u_a - u_b}\right) dy; \tag{5.5}$$

– sa dérivée spatiale : $d\Theta/dx$;
– l'épaisseur de vorticité de la couche de mélange :

$$\delta_\omega = -\frac{u_a - u_b}{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)_{\eta=\eta_0}}. \tag{5.6}$$

Plusieurs méthodes existent pour mesurer ce dernier paramètre. Citons par exemple que Rodi [Rodi 75] a proposé de définir l'épaisseur de vorticité par la soustraction des cotes qui correspondent à 10% et 90% de la différence de vitesse génératrice, comme l'illustre la figure Fig.5.3.

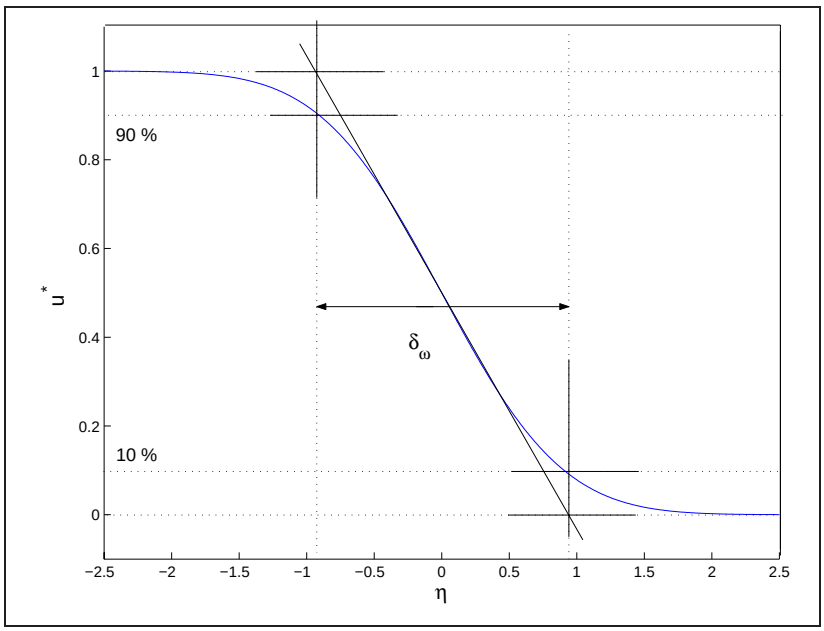


Fig. 5.3 – **Profil de vitesse moyenne de la couche de mélange et épaisseur de vorticité.**

Ce paramètre δ_ω est important. En effet, dans la zone de similitude, son évolution est linéaire et s'écrit (par résolution analytique de la relation (5.2)) :

$$\delta_\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}(x - x_0). \tag{5.7}$$

L'épaisseur de vorticité, facilement calculable à partir des profils de vitesse moyenne, donne ainsi accès au paramètre d'expansion σ de la couche de mélange, défini par :

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{d\delta_\omega}{dx}}, \tag{5.8}$$

la quantité $d\delta_\omega/dx$ étant le paramètre d'épanouissement de la couche de mélange. L'abscisse de l'origine virtuelle est alors obtenue par :

$$x_0 = (\delta_\omega)_{x=0} \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}. \tag{5.9}$$

Il est à noter que certaines relations empiriques bien connues en mécanique des fluides permettent un lien entre la quantité $\lambda = (1-r)/(1+r)$ (où r est le rapport des vitesses u_b/u_a) et les termes $d\delta_\omega/dx$ et $d\Theta/dx$ par :

$$\frac{d\delta_\omega}{dx} \simeq 0.16\lambda \quad \text{et} \quad \frac{d\Theta}{dx} \simeq 0.0032\lambda. \tag{5.10}$$

Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté brièvement les couches de mélanges et donné quelques éléments permettant de les caractériser. Les critères présentés sont issus de la résolution des équations de Navier-Stokes sous certaines hypothèses, respectées dans le contexte des couches de mélange.

Ainsi, il semble pertinent d'élaborer des images expérimentales mettant en jeu un tel écoulement, dont les caractéristiques sont connues. Cela permettrait en effet d'estimer le mouvement grâce à la méthode développée dans ce document et à partir de la vitesse obtenue, de retrouver les caractéristiques présentées ci-dessus afin de comparer les résultats. C'est ce que nous proposons de réaliser dans ce chapitre. Mais décrivons à présent le moyen d'obtenir expérimentalement une couche de mélange.

5.3 Génération d'une couche de mélange

La couche de mélange que l'on se propose d'étudier a été générée en février/mars 2000 au LEA au moyen d'une soufflerie subsonique à recirculation, appartenant conjointement au LEA et au CEAT (Centre d'Études Aérodynamiques et Thermiques). Cette soufflerie est illustrée sur la figure FIG.5.4. Ses caractéristiques générales sont :

- un moteur continu à vitesse variable d'une puissance de 7,4 kW ;
- un asservissement de la vitesse de rotation du moteur ;
- une vitesse réglable continûment de 2 à 35 m/s ;
- un convergent de rapport de contraction 10 ;
- une dérive thermique de l'écoulement typiquement inférieure à 1° C/heure.

La chambre de tranquilisation, qui précède la veine d'essai, possède une section de 1 m^2 et contient des filtres anémométriques et des grillages. Ces grillages ont été agencés de façon à obtenir un écoulement le plus homogène possible. Les filtres anémométriques permettent quant à eux de régler les différentes vitesses d'écoulements.

Une fois générée, le but est de d'analyser la couche de mélange en se procurant les champs de vitesses instantanés par des méthodes de type PIV. Ainsi, comme nous le décrivons dans l'annexe F, des particules sont ensemencées dans le fluide. Celles-ci sont ensuite excitées selon une certaine fréquence par un faisceau lumineux permettant l'acquisition des images. L'étape d'ensemencement des particules s'effectue dans ce cas en aval de la zone d'essai. On trouvera une description complète de cette soufflerie dans [Spencer 89].

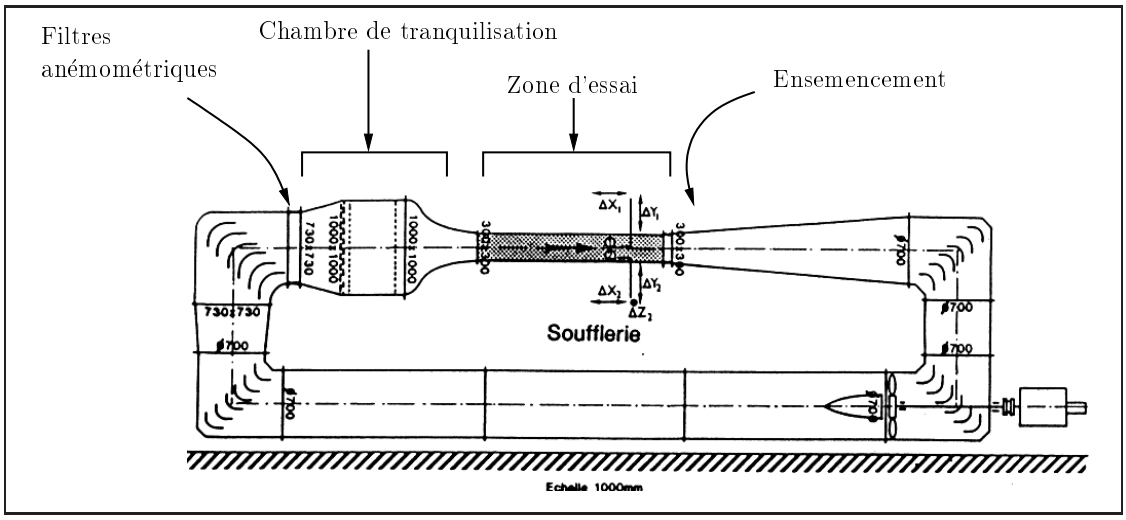


FIG. 5.4 – **Soufflerie subsonique à recirculation du** CEAT/LEA

Longueur de l'axe x visualisé	$84mm$
Longueur de l'axe y visualisé	$81mm$
Nombre de pixels en colonnes	1008
Nombre de pixels en lignes	984
Caméra 8 bits	CCD double frame
Nombre total de couples d'images	105
Temps entre deux images d'un couple	$50\mu s$

TAB. 5.1 – **Caractéristiques des images** *fournies par le système d'acquisition développé par la société "La Vision"*

5.4 Comparaisons expérimentales

L'écoulement étant ensemencé par des particules, les déplacements obtenus par les méthodes de PIV sont également disponibles. Notons que ces méthodes représentent pour les expérimentateurs en mécanique des fluides le premier outil qui fournit le champ des vecteurs de vitesse instantanés. La PIV est aujourd'hui largement utilisée par la communauté de la mécanique des fluides. Nous allons donc pouvoir comparer ces méthodes avec l'estimateur proposé dans ce document.

5.4.1 Conditions d'expérimentations

Caractéristiques des images et de l'écoulement

L'acquisition des images s'est faite à l'aide d'un système de PIV développé par la société "La Vision" [1]. Le système fournit une série de couples d'images dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 5.1 et un exemple représenté sur la figure FIG.5.5. L'écoulement généré possède un rapport de vitesse $r = 0.67$. Pour accéder à ses valeurs caractéristiques

1. `http://www.lavision.de/`

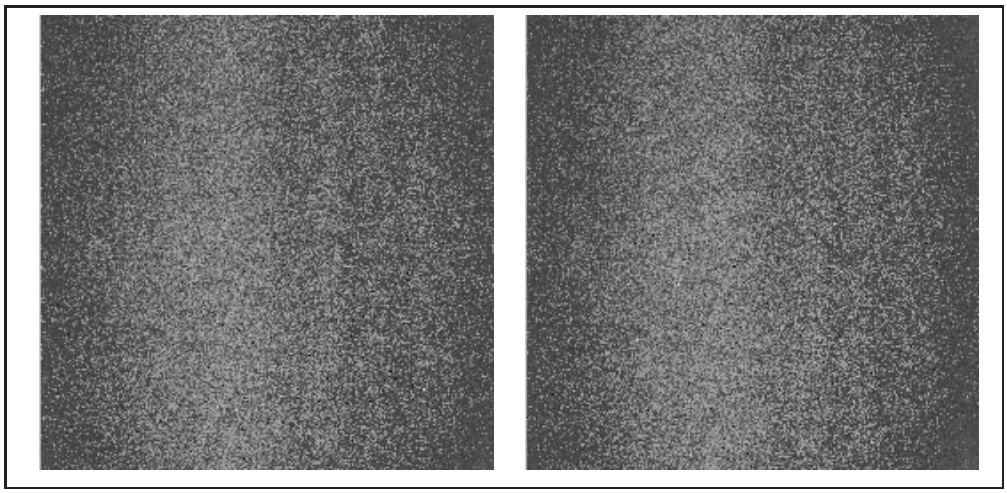


FIG. 5.5 – **Exemple d'un couple d'images de couche de mélange** *sur lequel nous allons réaliser nos expériences.*

que nous considérerons comme référence, les profils de vitesse sont mesurés par anémométrie fil chaud. Le principe de ces méthodes de mesure est de placer à l'endroit désiré un fil porté par effet Joule à une température supérieure à la température de l'écoulement. Il se produit alors un échange de chaleur par convection. La température d'équilibre du fil est déterminée par mesure de sa résistance et est fonction de la puissance dissipée et de la vitesse du fluide. Celle-ci est alors aisément accessible. Selon son amplitude (faible vitesse, très basse vitesse, ...), différentes stratégies d'étalonnage sont mises en oeuvre. Le lecteur trouvera des explications sur ces méthodes de mesure de vitesse dans [Heitz 99]. Les valeurs de références ainsi obtenues sont :

- $\sigma = 52.7$;
- $d\delta_\omega/dx = 0.0336$;
- $d\Theta/dx = 0.00729$.

Conditions de mesure du mouvement par PIV

L'algorithme PIV utilisé pour extraire les champs de vitesses instantanés à partir des couples d'images est celui de base proposé par le logiciel de PIV "La Vision". Cet algorithme travaille sur des fenêtres de corrélation de taille 32×32 pixels sans recouvrement. On obtient ainsi 63×62 vecteurs. Notons qu'aucun post-traitement sur les champs obtenus (filtrage, interpolation, ...) n'a été appliqué.

De nombreux paramètres sont susceptibles d'affecter la précision des mesures par un tel algorithme [Lourenço 00]. Ceci est dû à une violation des hypothèses élémentaires de l'algorithme de corrélation croisée standard. Citons à titre d'exemple les raisons suivantes :

- il peut y avoir une perte de paires de particules en raison de la taille fixe de la fenêtre d'interrogation ;
- il existe un gradient de vitesse et d'ensemencement dans la fenêtre d'interrogation qui produit un biais ;

– en raison de sa nature statistique, la méthode de corrélation mesure le déplacement le plus probable dans la fenêtre d'interrogation.

Plusieurs auteurs ont suggéré des techniques appelées "super-résolution" visant à améliorer les algorithmes de base. Les progrès sont significatifs. Toutefois, l'ensemble des difficultés existantes n'ont pas été résolues. Les dernières versions des logiciels de "La Vision" prennent en compte de telles améliorations.

Conditions de mesure du mouvement par flot-optique

La méthode de flot optique développée dans le chapitre 3 a été appliquée sur l'ensemble des 105 paires d'images.

L'écoulement étant visualisé au moyen de particules, nous avons choisi de nous appuyer sur l'ECMA plutôt que sur le terme d'attache aux données issu de l'équation de continuité car l'intensité lumineuse des particules est conservée le long de leurs trajectoires. Par ailleurs, l'écoulement est "en moyenne" bidimensionnel et incompressible. Le terme "en moyenne" signifie que sur un plan de visualisation donné, il existe tout de même une vitesse instantanée selon la perpendiculaire à ce plan. Le mouvement bidimensionnel résultant est ainsi composé d'une faible divergence. L'emploi de la contrainte issue de l'équation de continuité n'autoriserait pas l'estimation de tels mouvements car la divergence serait systématiquement associée à une perte d'intensité lumineuse.

Cependant, en raison de la trace que certaines particules peuvent engendrer dans les images, l'hypothèse d'invariance de la luminance risque d'être perturbée. Nous préférons donc employer une version robuste de cette contrainte.

Le terme de régularisation choisi est quant à lui le terme div-curl proposé, également dans une version robuste pour prendre le mieux possible en considération les variations de vorticité et de divergence susceptibles d'être présentes dans l'écoulement. Les champs de déplacements fournis auront ainsi une taille égale à celle de l'image traitée (1008×984 pixels).

Méthode de comparaison

La première étape à effectuer est de comparer notre méthode à la méthode de PIV sur un champ de déplacements instantané, afin d'étudier les éventuelles similitudes entre les deux approches. Si les résultats sont similaires, alors cela sera encourageant car les méthodes de PIV ont prouvé leur capacité à fournir des résultats en accord avec la physique des écoulements. Il sera dans ce cas nécessaire de développer des comparaisons plus fines. En revanche, si les résultats divergent, cela ne sera pas utile d'effectuer une analyse plus détaillée.

5.4.2 Étude d'un déplacement instantané

Nous avons pour cela estimé le déplacement sur une paire d'images de l'écoulement. Nous obtenons ainsi un champ de vecteurs représentatifs de la vitesse de taille 1008×984 pixels. Nous le notons $\boldsymbol{v}_f = (u_f,v_f)^T$, l'indice f étant relatif à la méthode d'estimation du mouvement fluide du chapitre 3. Le système de PIV fournit quant à lui un champ de

déplacements de taille 63×62 pixels, que nous notons $\boldsymbol{v}_p = (u_p, v_p)^T$ (indicé par p pour PIV). Pour comparer $\boldsymbol{v}_f$ et $\boldsymbol{v}_p$, nous observons :

- l'aspect général du mouvement pour lequel on retranche sa composante moyenne (dans le but d'observer les structures en rotation) : FIG.5.6(a-b) ;
- les distributions des vitesses longitudinales u_f et u_p : FIG.5.6(c-d) ;
- l'allure des composantes u_f, u_p, v_f et v_p de la vitesse : FIG.5.7 ;
- les cartes de vorticité curl $\boldsymbol{v}_f$ et curl $\boldsymbol{v}_p$: FIG.5.8.

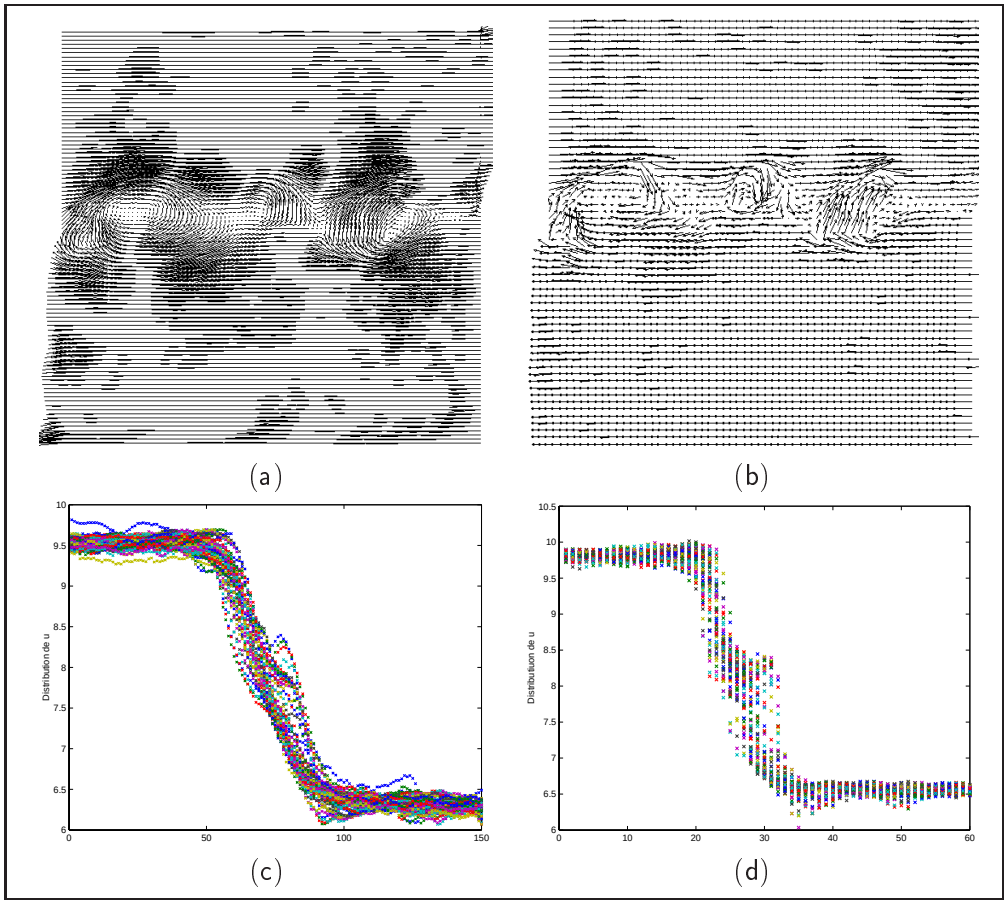


FIG. 5.6 – **Comparaison du profil des vitesses et de la distribution de la vitesse longitudinale.** *(a) : champ de déplacements $\boldsymbol{v}_f$ (un vecteur sur dix est représenté) ; (b) : champ de déplacements $\boldsymbol{v}_p$ (un vecteur sur deux est représenté) ; (c) : superposition de quelques distributions de u_f selon l'axe y (un profil sur dix est représenté) et (d) : superposition des distributions de u_p selon l'axe y.*

Plusieurs constats découlent de ces observations. Tout d'abord, la distribution de la vitesse longitudinale u_f est en accord avec les attentes théoriques : la courbe moyennant les données de la figure FIG.5.6 (c) suit bien une fonction du type $1 - \mathrm{erf}(x)$ (voir la relation (5.2) et la figure FIG.5.3).

De plus, comme nous pouvons le constater sur les figures FIG.5.6 (a) et FIG.5.6 (b), les allures des vitesses $\boldsymbol{v}_f$ et $\boldsymbol{v}_p$ sont de même nature. Ceci est confirmé en observant plus finement les composantes u_f, u_p, v_f et v_p en FIG.5.7, où les profils sont similaires.

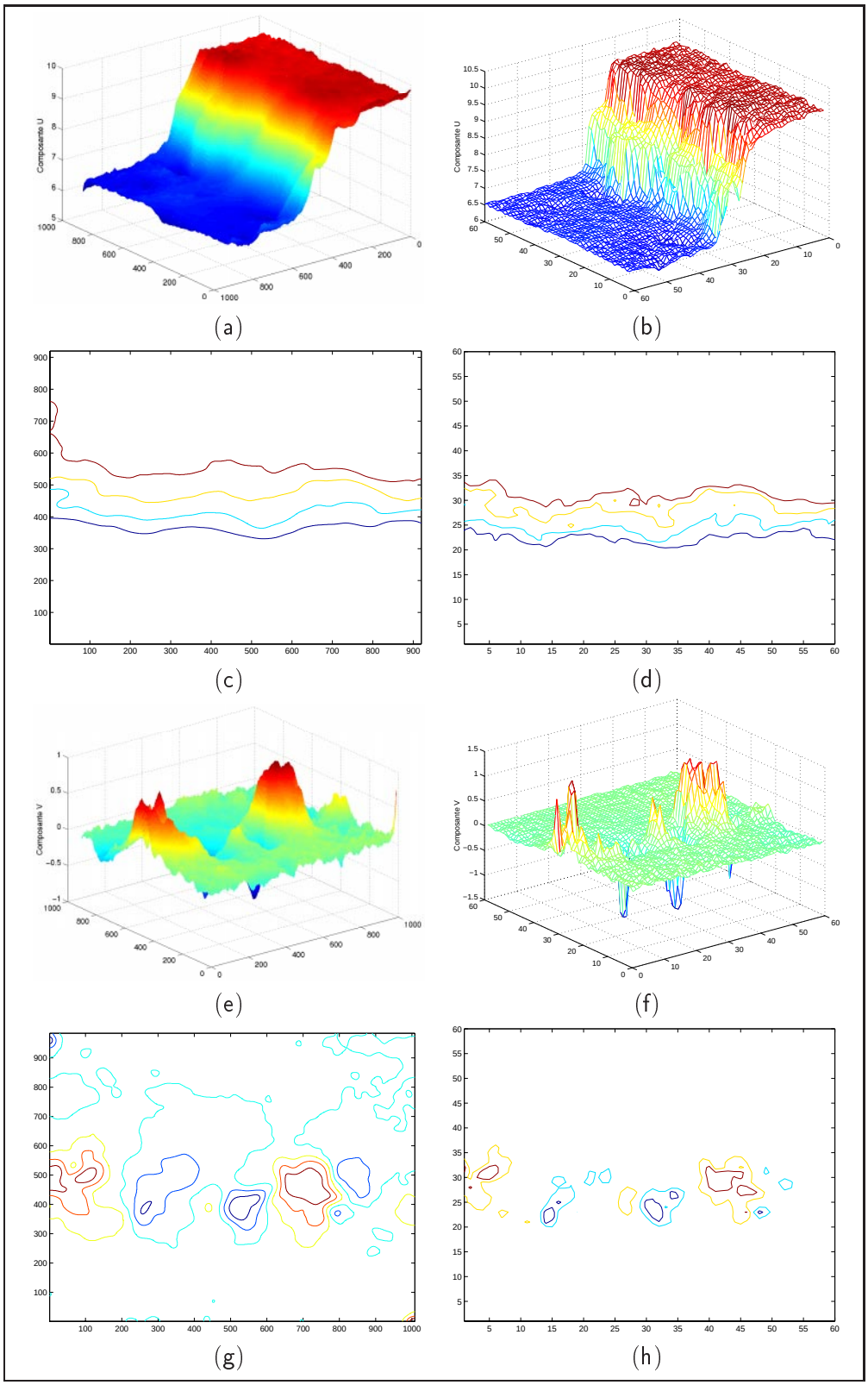


FIG. 5.7 – **Profil des vitesses longitudinales et transversales** *(a) : profil de u_f ; (b) : profil de u_p ; (c) : iso-contours de u_f ; (d) : iso-contours de u_d ; (e) : profil de v_f ; (f) : profil de v_p ; (g) : iso-contours de v_f ; (h) : iso-contours de v_p ;*

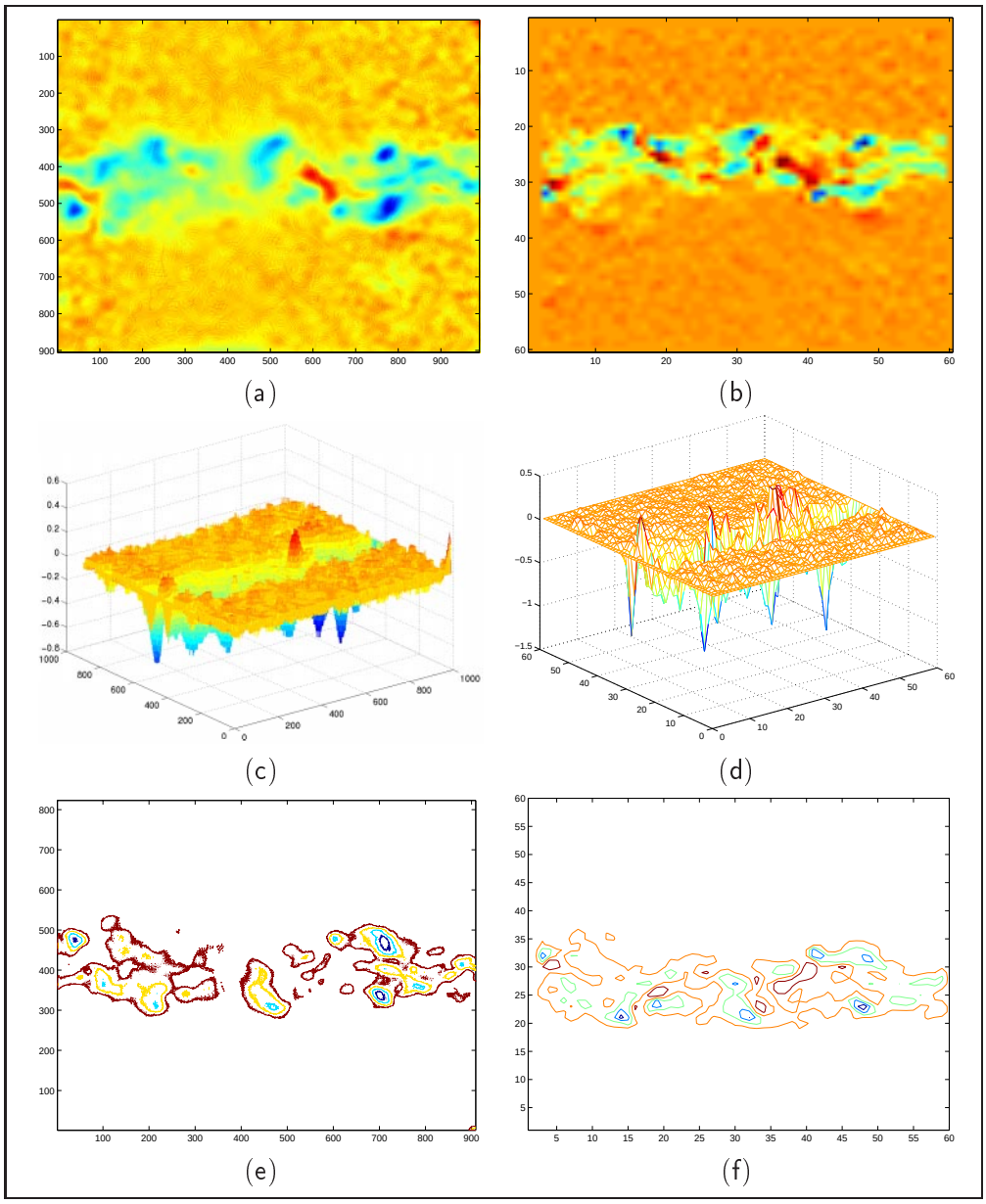


FIG. 5.8 – **Cartes de vorticité** *(a) : représentation bidimensionnelle de curl* $\boldsymbol{v}_f$ *; (b) : représentation bidimensionnelle de curl* $\boldsymbol{v}_p$ *; (c) représentation tridimensionnelle de curl* $\boldsymbol{v}_f$ *; (d) : représentation tridimensionnelle de curl* $\boldsymbol{v}_p$ *; (e) : iso-contours de curl* $\boldsymbol{v}_f$ *; (f) : iso-contours de curl* $\boldsymbol{v}_p$*.*

Notons que la méthode de flot-optique possède l'avantage de générer un champ dense, c'est à dire que l'on fournit à l'utilisateur 1008×984 vecteurs de vitesses, ce qui est nettement supérieure à ce que la méthode de PIV fournit (63×62 vecteurs) pour le même couple d'images[2]. Sur les cartes de vorticité représentées en FIG.5.8, cette dernière remarque est mise en évidence : en raison du nombre important de données, la précision fournie par la méthode présentée dans ce document est nettement plus importante (FIG.5.8 (a)) que celle fournie par la technique de PIV (FIG.5.8 (b)). Ainsi, la méthode proposée permet d'accéder à une source d'information beaucoup plus riche, notamment dans toutes les structures en rotation, fondamentales dans l'étude d'un tel écoulement (voir aussi la figure FIG.5.6 (a)).

Néanmoins, les propriétés régularisantes de l'estimateur développé sont responsables de l'aspect lisse des iso-contours des composantes u_f et v_f (FIG.5.7) de la vitesse $\boldsymbol{v}_f$, ce qui n'est pas nécessairement en accord avec la physique des phénomènes qui peut être de nature plus bruitée. Notons également que du point de vue de la complexité calculatoire, le temps de calcul nécessaire pour obtenir le champ de déplacements $\boldsymbol{v}_f$ est de l'ordre de 15 minutes (sur une station Sun Ultra 10 de 440MHz), ce qui est loin d'être négligeable.

En conclusion, cette première expérience montre une similitude entre les champs provenant des deux méthodes, ce qui est encourageant. Il n'est cependant pas possible de déterminer les valeurs de vitesses les plus proches de la réalité. Rappelons que l'on analyse un champ instantané d'un écoulement turbulent. Pour de tels écoulements, les seules grandeurs caractéristiques qui servent de référence sont issues d'une analyse statistique, obtenue par traitement sur une série de réalisations. Afin d'analyser de manière quantitative les deux approches, nous proposons donc d'effectuer un traitement sur un ensemble de déplacements pour en extraire des informations statistiques.

5.4.3 Étude sur un ensemble de déplacements

Sélection des données

Comme le tableau 5.1 l'indique, la taille des images disponibles est importante (1008×984 pixels). Cela peut conduire à de lourds temps de calcul pour l'ensemble des 105 couples à traiter. La zone pertinente de l'écoulement n'étant située que sur une bande de l'image, nous avons choisi d'estimer le mouvement sur des supports de taille 800×512 pixels, centrés sur la couche de mélange.

Il est important de noter que les systèmes d'acquisition de type PIV fournissent, pour chaque paire, une seconde image dont l'intensité lumineuse est plus importante que la première. Le phénomène est dû au temps d'ouverture de la caméra, qui, pour des raisons techniques, est plus long pour la deuxième image que pour la première. Le second cliché subit ainsi, après le flash, la lumière ambiante jusqu'à l'obturation du CCD de la caméra. Cet ajout de lumière peut perturber l'hypothèse d'invariance de la fonction de luminance employée dans la méthode de flot-optique. Dans certains cas, ces changements de luminance sont si importants que les estimateurs robustes ne sont alors plus aptes à prendre cela en considération. Dans ces cas, les résultats fournis s'avèrent ainsi être aberrants ou biaisés. Pour ne pas contaminer les comparaisons par ces mesures erronées, nous avons choisi de

2. Il est important de signaler que certains algorithmes de PIV fournissent un nombre plus important de vecteurs. Cependant, les contraintes physiques liées à la taille en pixels des particules ne permettent pas de générer un champ dense

	références	PIV	flot-optique
σ	52.7	47.7	51
$d\delta_\omega/dx$	0.0336	0.037	0.0347
$d\Theta/dx$	0.00729	0.00682	0.00789

TAB. 5.2 – **Résultats comparatifs sur des grandeurs caractéristiques des couches de mélange.** *Comparaison entre les résultats provenant de mouvements issus de* PIV *et de flot-optique, par rapport aux mesures par fil chaud.*

les éliminer de l'étude. Pour 105 couples d'images traités, cela en concerne 15, soit un taux de données biaisées de 14.2%.

Notons tout de même que la source de cette perturbation est connue et qu'il serait possible de la prendre en compte dans le schéma d'estimation du mouvement. Cela pourrait par exemple s'effectuer en comparant la luminance des images d'un couple acquis "à vide" (*i.e.* sans écoulement). Concernant les mesures effectuées par PIV, tous les déplacements ont été retenus. Dans ce type de situation, les méthodes de corrélation sont en effet plus performantes quelle que soit la variation globale de luminance.

Étude comparative

Les études menées ici visent à extraire les paramètres globaux caractéristiques de l'évolution de la couche de mélange. Rappelons que ces principaux paramètres, décrits dans la section 5.2.2, sont :

1. le paramètre d'expansion σ de la couche de mélange défini en (5.8) ;
2. le paramètre lié à l'épanouissement de la couche de mélange défini par $d\delta_\omega/dx$, δ_ω étant l'épaisseur de vorticité définie en (5.6) ;
3. la dérivée spatiale de l'épaisseur de quantité de mouvement définie par $d\Theta/dx$, Θ étant défini en (5.5).

Ainsi, pour chaque champ de déplacements, il est nécessaire de déterminer l'épaisseur de vorticité δ_ω, pour chaque abscisse x. Ceci est mené à partir du graphe du profil des vitesses. Ensuite, par régression linéaire sur l'évolution de δ_ω selon x, il est possible de déterminer la valeur du paramètre d'expansion σ. Enfin, le paramètre Θ relatif à chaque variable x est obtenu par l'intégration linéaire en (5.5).

Dans le tableau 5.2, nous rappelons dans la première colonne les mesures de références mesurées par fil chaud. Dans la seconde colonne figurent les résultats obtenus par les techniques de PIV et enfin, la dernière colonne est consacrée aux résultats obtenus par l'estimateur de flot-optique. On constate dans ce tableau que les résultats obtenus avec les deux approches sont du même ordre de grandeur et en accord avec les références. Ceci est donc encourageant : sur un écoulement représentatif d'une couche de mélange, les critères que nous fournissons (calculés à partir de données de mouvement provenant de notre méthode d'estimation) sont en cohérence avec ceux que le monde de la mécanique des fluides expérimentale peut attendre. Ils sont de plus très similaires aux résultats que les méthodes de PIV obtiennent. Rappelons que ces méthodes sont réputées pour leurs performances et leur justesse, ce qui nous rend optimiste quant à la validité de nos mesures. Il n'est cependant pas possible de déterminer quelle est la meilleure approche, étant donnée

la similarité de leurs résultats. La quantité de données nettement supérieure que peut fournir notre méthode peut faire de cette technique une bonne alternative aux approches par PIV.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de flot optique développée à des images de mécanique des fluides expérimentale représentant l'évolution d'une couche de mélange. Après une présentation de ce type d'écoulement, nous avons comparé les mesures que fournissent notre estimateur vis-à-vis des mesures fournies par une méthode de PIV, les références étant mesurées par anémométrie fil chaud.

Les conclusions qui peuvent être tirées de ces comparaisons sont que les deux méthodes fournissent des résultats similaires, du même ordre de grandeur que les références. Ceci est fortement encourageant quant à la validité de la méthode d'estimation du mouvement que nous avons proposée car les techniques de mesure par PIV se sont imposées dans le monde de la mécanique des fluides expérimentale et fournissent de bons résultats. La quantité d'informations supérieure que la technique de flot-optique fournit peut faire de notre approche une bonne alternative.

Cependant, il est important de signaler que 14,2% de nos estimations furent biaisées et non traitées dans cette étude. Nous pensons que ces erreurs proviennent des conditions d'illumination particulières (mentionnées dans la section 5.4.3) nécessaires à l'acquisition d'images PIV. Comme nous l'avons également remarqué, une telle source de perturbation pourrait être prise en compte dans le schéma de flot optique. Parmi les inconvénients de notre méthode, on peut également citer les importants temps de calcul mis en jeu, dûs à la taille conséquente des images. Ce problème peut néanmoins être partiellement affranchi si l'on envisage des implémentations sur des architectures parallèles (particulièrement adaptées à ces méthodes) dédiées. Enfin, citons que les images PIV ont des conditions photométriques particulières bien différentes d'autres images de fluide (météorologiques par exemple) ce qui a nécessité d'adapter les paramètres d'estimateurs robustes et de lissages (lissage div-curl en version quadratique avec le paramètre de lissage λ sur la divergence et le rotationnel étant $\lambda = 1500$; terme d'observation basé sur l'ECMA en version robuste avec comme paramètre $\sigma_1 = 0.5$). Cela constitue une difficulté supplémentaire du point de vue de l'utilisation de l'estimateur de mouvement. Néanmoins, une fois ces paramètres fixés, ils devraient être optimaux pour toutes les images du type PIV.

Conclusion

Après un état de l'art présentant les méthodes de mesures du mouvement issues de la vision par ordinateur, où nous avons défini le besoin de développer des techniques dédiées aux phénomènes fluides, nous avons présenté dans le chapitre 3 un estimateur dense de mouvement spécifique aux situations d'imagerie fluide.

Cet estimateur est défini au moyen d'une formulation originale du flot optique s'appuyant sur l'équation de continuité de la mécanique des fluides et sur une régularisation conduite par les valeurs de divergence et de vorticité du champ de déplacements à estimer. La minimisation de la fonctionnelle vis-à-vis du champ de déplacements est menée dans un contexte multigrille pour obtenir la meilleure précision possible. Par ailleurs, l'ensemble du schéma est défini dans un cadre multirésolution permettant de gérer les grands déplacements susceptibles d'être présents.

La méthode a été validée sur des exemples synthétiques et des images météorologiques. La supériorité de l'approche proposée pour recouvrer convenablement les mouvements à caractères divergent et/ou rotationnel par rapport aux techniques usuelles a été démontrée.

La vérité terrain étant une donnée non disponible en imagerie météorologique, nous avons proposé une méthode de reconstruction de trajectoires et une technique d'extraction de structures pertinentes d'un écoulement, permettant d'obtenir des outils de validation qualitative supplémentaires. Selon ces critères, la technique proposée a de nouveau fourni de meilleurs résultats que les approches standard.

Enfin, dans le chapitre précédent, nous avons appliqué l'estimateur de mouvement développé dans un contexte de mécanique des fluides expérimentale. Des comparaisons avec les méthodes de PIV, dont les performances se sont imposées dans le monde de la mécanique des fluides expérimentale, ont été effectuées. De cette étude, nous pouvons conclure que les résultats fournis sont très proches pour les deux approches. Chacune présente ses avantages et ses limites. Les méthodes de type PIV nécessitent par exemple un dispositif expérimental important mais sont très rapides en terme calculatoire. Notre méthode possède l'avantage de fournir des résultats denses mais en contre partie, le coût calculatoire est élevé.

Deuxième partie

Extraction de structures caractéristiques d'un écoulement fluide

Introduction

Le but de cette seconde partie est d'analyser et de caractériser un champ de déplacement représentatif d'un écoulement fluide. Cette étape est nécessaire dans nombres d'applications. Citons à titre d'exemple que la détection de pathologies en imagerie médicale, la localisation d'événements clés (centres de tornades, de dépressions, ...) en météorologie ou l'analyse d'écoulements expérimentaux nécessite la connaissance des particularités de leur mouvement.

En dépit de l'importante complexité qui découle de la résolution des équations de Navier-Stokes, des études ont montré que l'interprétation d'un écoulement fluide peut être décrite à l'aide de certains points particuliers (*i.e.* les points "singuliers") et d'une combinaison de modèles linéaires. Ceci est pertinent car la complexité de la description d'un écoulement fluide peut être considérablement réduite.

Certains auteurs se sont donc consacrés au développement de méthodes de localisation de ces points singuliers ainsi qu'à l'extraction de zones où le mouvement peut être approché de manière linéaire.

Nous proposons dans cette partie une méthode d'analyse et de description analytique d'un champ de vitesses, en vue d'une part d'extraire les structures pertinentes pouvant fournir de l'information aux spécialistes et d'autre part, d'acquérir une description paramétrique d'un champ de déplacements. Cette section se compose comme suit :

- le **chapitre 6** présente en premier lieu les structures singulières en imagerie fluide. Ces structures sont fondamentales dans l'interprétation d'un écoulement. Puis, un panorama des méthodes développées pour extraire de l'information sur ces structures singulières est dressé ;
- le **chapitre 7** présente ensuite la méthode que nous avons mis en œuvre pour analyser un champ de déplacements. L'approche s'appuie sur l'estimation de fonctions de potentiels et sur un modèle particulier ;
- enfin, le **chapitre 8** présente une série d'expérimentations effectuées sur différents champs de déplacements, provenant de la méthode d'estimation de la première partie de ce document mais aussi de données de vents fournies par l'Institut français pour la recherche et l'exploitation de la mer (Ifremer).

Chapitre 6

Détection et caractérisation de structures singulières : état de l'art

Ce chapitre a pour but de présenter quelques travaux visant à analyser et à décrire des mouvements fluides. De tels mouvements peuvent fidèlement être décrits par leurs structures singulières. Ces structures, dénommées "puits/source" ou "vortex", sont caractérisées par un mouvement possédant de fortes composantes de divergence et/ou de rotation dans le voisinage d'un point fixe appelé le "point singulier" ou "point critique". Ces entités sont souvent approchées par un modèle de mouvement linéaire, valable dans un certain voisinage du point critique. Une telle zone de linéarité est également appelée zone d'"influence". L'analyse de ces structures est importante car elles sont responsables de phénomènes particuliers, tels que les dépressions, les zones de turbulence ou les zones convectives en météorologie par exemple. Une bonne analyse d'un écoulement fluide consiste donc en une bonne appréhension de ces structures critiques. Il est dès lors primordial de posséder des techniques fiables de détection et de caractérisation de ces situations.

Nous décrivons en premier lieu les "singularités" d'un champ de vitesses dans un cadre général. Ensuite, une modélisation simple du mouvement au voisinage de tels points est présentée. La deuxième partie de ce chapitre vise à décrire les diverses méthodes proposées pour détecter les points critiques d'un champ de vecteurs. La troisième partie recense quant à elle les principales méthodes d'extraction des domaines d'influence associés aux points singuliers.

6.1 Singularités en imagerie fluide

6.1.1 Importance des singularités dans l'interprétation d'un écoulement fluide

Les points singuliers ou points critiques sont des points où la vitesse s'annule localement lorsqu'ils sont associés à une importante présence de divergence et/ou de vorticité. Ces points influencent grandement l'évolution d'un écoulement et sont fondamentaux dans l'analyse et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Ainsi, en météorologie, les points singuliers localisent le centre des dépressions ou le centre de forts mouvements convectifs responsables de phénomènes climatiques violents (pluie abondante, tornade, ...). En mécanique des fluides expérimentale, les vortex sont la seule source d'information fiable

pour expliquer les phénomènes turbulents et l'ensemble des écoulements incompressibles [Sallam 83].

Perry et Chong [Perry 87] ont montré que l'analyse bidimensionnelle d'un champ de vitesses représentant un écoulement fluide peut se réduire à une analyse de celui-ci dans un certain voisinage approprié de ses points singuliers. Limiter l'étude à un tel voisinage est d'autant plus intéressant que, d'après le théorème de Gorbman-Hartman [Palis 92], cette analyse peut se faire par des approximations au premier ordre, conduisant à des modèles linéaires beaucoup plus simples à manipuler que les équations de Navier-Stokes. Ces modèles correspondent en fait à des solutions asymptotiquement exactes de ces équations, validées dans un certain voisinage du point singulier. Dans ce voisinage, le mouvement réel est homéomorphe (*i.e.* possède les mêmes propriétés structurelles ou est topologiquement équivalent) à sa forme linéaire.

En s'appuyant sur les résultats issus de la topologie algébrique de ces mouvements linéaires [Anosov 98,Arrowsmith 82] (en particulier sur la théorie des équations différentielles ordinaires et leur interprétation géométrique), il est possible de caractériser le mouvement au voisinage de ses points critiques. Un nombre fini de prototypes permettant de le décrire peuvent être définis et sont communément nommés "portraits de phase".

Ceci est présenté dans la section qui suit dans le cadre bidimensionnel.

6.1.2 Modèle mathématique du mouvement autour d'une singularité

Pour approcher le mouvement d'une structure singulière, il est courant d'employer le modèle affine 2D du mouvement apparent. Celui-ci est décrit par une équation différentielle au premier ordre :

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \tag{6.1}$$

où $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est une matrice (2×2) décrivant le mouvement linéaire, $\boldsymbol{b} = (b_0,b_1)^T$ est un vecteur décrivant le mouvement translationnel, $\boldsymbol{x} = (x,y)^T$ est un point de l'image et $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = (u,v)^T = (\dot{x},\dot{y})^T$ est le vecteur de vitesse. Le mouvement est donc parfaitement déterminé par la connaissance des matrices A et $\boldsymbol{b}$.

Si la matrice A est régulière, il existe alors un unique point singulier $\tilde{\boldsymbol{x}}$ pour lequel la vitesse est nulle, qui est défini par :

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = -A^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{6.2}$$

La connaissance de la structure de la matrice A est donc suffisante pour établir une caractérisation du mouvement. Il existe deux approches classiques pour analyser et classifier les mouvements qui en découlent : *i)* approche par décomposition tensorielle canonique de A et *ii)* approche par Jordanisation de cette matrice. La première technique consiste à décomposer la matrice A en la somme de trois matrices, décrivant respectivement les composantes de divergence, de cisaillement et de rotation. La seconde consiste à exploiter la forme de Jordan de la matrice A, en analysant ses valeurs propres [Ford 94,Rao 92].

Six configurations principales ont été identifiées [Arnold 90,Ford 94,Shu 93,Shu 94], permettant de décrire qualitativement tous les types de mouvements : le nœud, le point de selle, le nœud étoilé, le nœud impropre, le centre de rotation et la spirale.

La figure FIG.6.1 représente les différentes configurations possibles en fonction de la matrice du modèle et indique également la présence ou non de divergence, de vorticité et de composantes de cisaillement. On peut noter que Helman et Hellelink [Helman 89] affinent cette classification dans les cas d'un nœud ou d'une spirale, en associant la notion de structure contractante ou dilatante. La notion contractante (resp. dilatante) est associée à une divergence négative (resp. positive). Elle est également caractérisée par une matrice dont la partie réelle des valeurs propres est négative (resp. positive).

Une telle modélisation d'un champ de vecteurs au voisinage de ses singularités permet une description considérablement simplifiée d'écoulements complexes. Le modèle affine (du premier ordre) possède l'avantage de décrire les principales caractéristiques du mouvement aux endroits où celui-ci présente des singularités. Ainsi, ces modèles sont largement utilisés pour diverses applications :

- dans un cadre météorologique pour une meilleure localisation des évènements clés [DenisBrossard 99,Maurizot 95,Maurizot 98,Mémin 99,Rougon 00,Yang 01] ;
- en mécanique des fluides expérimentale pour analyser et comprendre des écoulements précis [Rao 92,Shu 93,Ford 94,Ford 95,Maurizot 98,Zhong 98] ;
- en imagerie médicale pour une meilleure interprétation du flot sanguin et la visualisation de l'anévrisme aortique [Nogawa 97] ;
- enfin, diverses disciplines ont trouvé des applications de ces modèles : la reconnaissance des empreintes digitales (les lignes de telles empreintes pouvant être vues comme des lignes de courant) [Srinivasan 92], l'inspection du bois, la recherche de défaut sur les pièces de semi-conducteurs [Rao 92] ou la compression de données vectorielles [Ford 95,Yang 01].

Ces modèles linéaires sont souvent choisis pour leur simplicité. Notons qu'il existe d'autres modèles fondés sur des approximations à un ordre supérieur [Spivak 79]. On pourra citer, à titre d'exemple, les travaux de Perry et Tan [Perry 84] où les auteurs utilisent des portraits de phases d'ordre 5 pour analyser la structure d'images de filets d'émission. Ford et Strickland [Ford 93] proposent également des portraits de phases non linéaires qui permettent de modéliser le comportement du champ de déplacements au voisinage de plusieurs points singuliers.

6.2 Techniques de détection de points singuliers

Comme nous l'avons mentionné, la connaissance des singularités est essentielle en vue d'une description simplifiée d'un écoulement. Une étape préliminaire consiste alors à détecter les différents points critiques du flot. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème [Cohen 96,Ford 94,Ford 95,Nogawa 97,Maurizot 95,Maurizot 98,Mémin 99, Rao 92,Shu 93,Srinivasan 92,Yang 01,Zhong 98]. On peut classer ces approches en deux principales familles :

1. la première regroupe les techniques s'appuyant sur un champ des vitesses estimé préalablement [Cohen 96,Mémin 99,Nogawa 97,Rao 92,Yang 01,Zhong 98] ;
2. la seconde est composée des méthodes visant à estimer les points singuliers directement à partir de la fonction de luminance des images [Maurizot 95,Maurizot 98, Rao 92,Shu 93,Srinivasan 92].

Décrivons les principales contributions dans chacune de ces familles.

Valeurs propres	Forme de Jordan	type	Portrait de phase	(div,curl,hyp_1,hyp_2)
réelles et distinctes ($\Delta(A) > 0$)	$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ $\lambda_1\lambda_2 > 0$	nœud $\det(A) > 0$		$(a+d,0,a-d,0)$
	$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ $\lambda_1\lambda_2 < 0$	selle $\det(A) < 0$		$(a+d,0,a-d,0)$
égales ($\Delta(A) = 0$)	$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$	nœud étoilé $\text{rot}(A) = 0$		$(a+d,0,0,0)$
	$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$	nœud impropre $\text{rot}(A) \neq 0$		$(a+d,c-b,0,c+b)$
complexes $\alpha \pm i\beta$ ($\Delta(A) < 0$)	$\begin{bmatrix}0 & -\beta\\ \beta & 0\end{bmatrix}$	rotation $\text{tr}(A) = 0$		$(0,c-b,0,0)$
	$\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$	spirale $\text{tr}(A) \neq 0$		$(a+d,c-b,0,0)$

FIG. 6.1 – **Classification des différentes situations de singularité** *en fonction de la forme de Jordan de la matrice A définie en (6.1) (ou, de façon équivalente, de $\Delta(A) \triangleq \text{tr}^2(A) - 4\det(A)$, $\det(A) = ad - bc$, $\text{rot}(A) = c - b$ et $\text{tr}(A) = a + d$). La dernière colonne donne les valeurs associées de* div $\boldsymbol{v}$, curl $\boldsymbol{v}$, hyp_1 $\boldsymbol{v}$ *et* hyp_2 $\boldsymbol{v}$.

6.2.1 Techniques s'appuyant sur un champ de vitesses

Parmi les méthodes de détection de points critiques nécessitant la connaissance d'un champ des vitesses, un certain nombre d'entre elles s'appuient sur la notion de "portrait de phase".

• Dans [Rao 92], les auteurs proposent une méthode pour détecter des points singuliers à partir d'un champ de vitesses $\boldsymbol{v}_r$ disponible. Cette méthode consiste à estimer un modèle affine de mouvement $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ (relation (6.1)) par une technique de moindres carrés dans une fenêtre de taille fixée. Le critère à minimiser repose sur le sinus de l'angle $(\theta_r(x,y) - \theta(x,y))$ que forme le vecteur réel $\boldsymbol{v}_r(x,y)$ et celui du mouvement affine $\boldsymbol{v}(x,y)$ estimé par le modèle :

$$Dist(x,y) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_r(x,y)\boldsymbol{v}(x,y)|\sin(\theta_r(x,y) - \theta(x,y))|. \tag{6.3}$$

Cette distance est nulle lorsque les vecteurs ont la même orientation mais pas nécessairement le même sens. Ce choix de distance est judicieux : la technique peut ainsi être appliquée sur des vecteurs représentés par des segments non orientés, pouvant être issus de techniques de mesures expérimentales.
La connaissance de la matrice A et du vecteur $\boldsymbol{b}$ permet alors de localiser le point singulier $\tilde{\boldsymbol{x}}$ par la relation (6.2). L'application de cette méthode en chaque point de l'image autorise, dans les zones où la fonction de luminance n'est pas uniforme (pour que le système soit bien conditionné), l'estimation des différents points singuliers du flot. Ces points critiques sont définitivement acceptés si une cohérence entre le modèle de mouvement affine et le champ d'orientations réel est respectée.

• Nogawa *et al.* [Nogawa 97] proposent une localisation des centres de vortex basée sur une modélisation analytique de l'écoulement. La fonction complexe f_m, permettant de décrire le comportement d'un vortex autour de son point singulier de coordonnées z_i dans le plan complexe $\mathbb{C}$, est donnée par :

$$f_m(z) = \frac{|z - z_i|^2}{r_0^2}.\frac{ik_i}{z - z_i}, \tag{6.4}$$

où $z = x + iy$ est un point de $\mathbb{C}$, k_i exprime la "force" du vortex et r_0 le rayon d'un disque centré en z_i à l'intérieur duquel ce modèle est applicable. À l'extérieur de cette zone, un modèle non-linéaire décrit le mouvement :

$$f_m(z) = \frac{ik_i}{z - z_i}. \tag{6.5}$$

Les auteurs proposent alors de s'appuyer sur le théorème des résidus de Cauchy. Ce théorème indique que l'index de toute fonction analytique le long d'une courbe fermée est nul, excepté aux endroits où elle n'est pas holomorphe. Une fonction est dite holomorphe si sa dérivée complexe existe en tout point de son espace de définition. Ainsi, si le champ de déplacement réel $\boldsymbol{v}$, représenté par une fonction complexe f_r, ne comporte pas de singularités à l'intérieur d'une courbe fermée C et qu'il suit le modèle défini par les relations (6.4) et (6.5), alors l'intégrale I_C le long d'une courbe fermée C définie par :

$$I_C = \oint_C f_r(z)dz \tag{6.6}$$

est nulle. À l'inverse, si le terme I_C est non nul, alors la courbe enferme au moins une singularité. Ainsi, les auteurs proposent de calculer le terme (6.6) sur les bords de l'image. S'il est nul, le champ ne comporte aucune singularité. S'il est non nul, cette méthode est réappliquée sur un sous-découpage de l'image par un schéma dichotomique. Une répétition jusqu'à convergence de ce principe permet, en théorie, d'extraire l'ensemble des points singuliers. Notons qu'à chaque point singulier est associée une quantité $Int(z_i)$ représentant la valeur du dernier indice estimé par la relation (6.6). Cette mesure, issue de l'intégration sur la plus petite courbe englobant le point singulier, servira dans la détermination de la zone où le modèle linéaire est applicable (voir section 6.3). Il est à noter que cette méthode repose sur l'hypothèse que le champ soit incompressible et que les vortex, seules structures singulières modélisées, soient les uniques causes de singularité.

• S'appuyant sur la méthode proposée dans [Ford 94] appliquée à un champ d'orientations épars (voir section 6.2.2), Cohen et Herlin [Cohen 96] ont proposé une technique de détection de points singuliers basée sur les indices de Poincaré associés au champ des vitesses $\boldsymbol{v}$. Cet indice est défini le long d'une courbe de Jordan fermée J par l'intégrale suivante :

$$\text{Indice}(J) = \frac{1}{2\pi} \oint_J d(\tan^{-1} u/v) = \frac{1}{2\pi} \oint_J \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}. \tag{6.7}$$

Pour toute courbe J, Indice(J) est entier relatif. Il représente le nombre de "tours" qu'effectue le champ $\boldsymbol{v}$ le long de la courbe fermée J. La valeur de cet indice est $+1$ si la courbe de Jordan J entoure un vortex, un puits ou une source. Elle est de -1 pour un point de selle. On pourra remarquer que cette méthode ne permet pas de différencier une singularité provenant d'une source ou d'un puits (mouvement divergent) de celle provenant d'un vortex (mouvement rotationnel). Pour de plus amples renseignements sur les fondements mathématiques de la méthode des indices, nous renvoyons le lecteur à [DoCarmo 76].

• La même technique est utilisée dans [Mémin 99], à la différence près que ces indices sont estimés de manière conjointe à la mesure du champ de vitesses. Les singularités fournissent une information de mouvement locale précieuse (mouvement linéaire) qui est réinjectée dans le schéma d'estimation du mouvement. Ce principe est itéré jusqu'à stabilisation de l'algorithme. Les auteurs soulignent les difficultés d'intégration d'une telle technique dans un schéma numérique, dans la mesure où le critère fournit en fait un "amas" de points candidats pour chaque singularité. Le centre définitif doit alors être défini sur l'ensemble des points candidats (barycentre par exemple).
Notons que la technique des indices de Poincaré a également été utilisée pour l'exploitation de données météorologiques à destination des physiciens [Yang 01].

• Enfin, la méthode développée par Maurizot *et al.* [Maurizot 95,Maurizot 97] ne nécessite pas le calcul préalable d'un champ dense de mouvement. Cette méthode procède de la façon suivante : P points, associés à une fenêtre d'estimation de taille arbitraire, sont choisis. Le schéma de détection est ensuite effectué en N étapes. A chaque étape n, une estimation paramétrique du mouvement selon le modèle $\boldsymbol{v}_n^{(i)} = A_n^{(i)} \boldsymbol{x}_n^{(i)} + \boldsymbol{b}_n$ ($i = 1,...,P$) est effectuée. L'estimation du mouvement paramétrique est menée dans un cadre multirésolution robuste [Odobez 95]. Pour chaque estimation des paramètres de mouvement, une position $\tilde{\boldsymbol{x}}_{n+1}^{(i)} = -A_n^{-1(i)} \boldsymbol{b}_n^{(i)}$ d'un point singulier associé est définie. Deux cas sont alors à considérer :

1. le point se situe dans la fenêtre du calcul du mouvement. Dans ce cas, l'étape d'es-

timation est réitérée sur une nouvelle fenêtre centrée en $\tilde{\boldsymbol{x}}_{n+1}^{(i)}$ et la localisation d'un point singulier $\tilde{\boldsymbol{x}}_{n+2}^{(i)}$ est à nouveau effectuée.

2. le point ne se situe pas dans la fenêtre d'estimation du mouvement. Dans ce cas, le point central de la fenêtre de calcul est modifié. Il est placé arbitrairement à l'intersection de la droite passant par les points $(\tilde{\boldsymbol{x}}_n^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{x}}_{n+1}^{(i)})$ et un des côtés de la fenêtre. Le support n'est pas centré en $\tilde{\boldsymbol{x}}_{n+1}^{(i)}$ car dans cette situation, la zone initiale n'est pas nécessairement située au voisinage d'un point singulier, et une approximation linéaire du flot n'est donc pas justifiable.

L'algorithme est terminé lorsque la localisation d'un point singulier ne change plus (dans ce cas, la méthode a convergé) ou lorsqu'il ne se stabilise pas au bout d'un certain nombre d'itérations (le point sort de l'image ou ne converge jamais). À chaque étape d'estimation, la taille du support est ajustée à l'aide d'une approche statistique (critère de type biais-variance) pour s'adapter le mieux possible au domaine où l'approximation linéaire est valide. Cette démarche est présentée dans la section 6.3

6.2.2 Techniques s'appuyant sur une seule image

La nature des images que l'on traite varie selon l'application visée. Dans certains cas, une texture particulière autorise l'extraction d'une certaine information sur le mouvement [Rao 92], qu'il est alors possible d'exploiter directement pour localiser des points critiques. Par ailleurs, il est envisageable de concevoir certaines formes comme résultant de l'intégration d'un champ de déplacements. Citons pour exemple que dans [Srinivasan 92], les lignes formées par les empreintes digitales sont interprétées comme des lignes de courant (résultant de l'intégration d'un champ de vecteurs), comme cela est illustré en FIG.6.2. Dans ce cas, des singularités peuvent également être extraites et la caractérisation des lignes de courant assimilées permet de caractériser l'empreinte. Rao et Jain s'appuient sur un principe analogue pour inspecter le bois [Rao 92].

Dans ces situations, il est alors préférable d'exploiter directement la luminance plutôt que de développer des techniques intermédiaires. En effet, c'est un moyen d'éviter un ensemble de calculs susceptibles de fournir des mesures erronées et dans certains cas de s'affranchir du difficile problème du calcul du flot optique. Ainsi, quelques méthodes existent pour localiser des singularités à partir d'une seule image.

• Dans [Rao 92], les auteurs utilisent la même méthode que celle proposée dans le paragraphe précédent pour détecter les points singuliers. Cependant, l'information de mouvement n'est ici représentée que par des segments d'une certaine taille et orientation, sans information sur le sens. Ces segments sont extraits en prenant la normale aux gradients spatiaux de l'intensité. L'absence de sens n'est ici pas préjudiciable étant donné que la mesure de similarité proposée en (6.3) ne prend en compte que des critères d'orientation.

• Selon un principe analogue, Shu et Jain [Shu 93] proposent de détecter un point singulier dans une image en estimant les paramètres de la matrice A par une technique de moindres carrés. Les observations sont également basées sur la normale des gradients spatiaux de l'intensité. La minimisation par moindres carrés est effectuée sous une contrainte de "normalité" de la matrice A ($\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1$, a , b, c et d étant les quatre termes de la matrice). La technique des multiplicateurs de Lagrange est employée pour mener à bien l'optimisation. Le point singulier est donné au moyen de la relation (6.2). Cette étude

émet l'hypothèse forte qu'un et un seul point singulier est présent dans l'image. Par ailleurs, aucun modèle de bruit n'est pris en compte. Ainsi, ces travaux sont étendus dans [Shu 94] où une stratégie robuste au bruit est employée.

• Ford *et al.* [Ford 94] utilisent la méthode des indices présentée dans la section précédente. Le calcul des indices est appliqué sur un champ épars obtenu à la suite d'un traitement sur des images de mécanique des fluides expérimentale représentant des filets d'émission. Dans ces images, les lignes d'iso-intensité sont considérées comme étant représentatives des lignes de courant (un exemple de lignes de courant est visible sur les figures FIG.6.2(c) et FIG.6.2(d)). Le champ sur lequel est appliqué la méthode est obtenu en plusieurs étapes. Les lignes de courant sont en premier lieu extraites au moyen d'un détecteur de contours, basé sur le Laplacien d'un filtre Gaussien. Après seuillage et affichage de l'image résultante, le champ d'orientations est estimé par application de filtres gradients. Au final, un champ épars dont chaque vecteur est tangent à une ligne de courant est obtenu. Cette méthode soumet l'hypothèse que le champ est stationnaire, ce qui implique que les lignes de courant et les trajectoires soient confondues. Une estimation sur une fenêtre de taille fixe du modèle affine de mouvement autour des points détectés permet de confirmer ou d'infirmer leur présence.

• Denis-Brossard *et al.* [DenisBrossard 99,Rougon 00] localisent également les points singuliers selon la méthode des indices, calculés sur un champ d'orientations préalablement estimé (la courbe de Jordan étant un cercle unité centré au pixel courant). L'estimation de ce champ d'orientations s'appuie sur les valeurs propres et les vecteurs propres du tenseur de structure, celui-ci étant défini dans un contexte multiéchelle, aussi bien pour le cas monospectral que multispectral.
Pour éliminer les fausses alarmes, une méthode de Newton-Raphson globalement convergente [Press 92] permet d'obtenir une précision sub-pixellique et de fusionner les points trop proches en leur barycentre. Le portrait de phase affine du champ tangent est ensuite calculé afin de caractériser la topologie de chaque singularité.

• En s'appuyant sur l'hypothèse que l'allure instantanée d'une structure en déformation procure une information sur son propre mouvement, Maurizot *et al.* ont proposé d'étendre leur technique de détection de singularités [Maurizot 95] décrite dans la section précédente au cas d'une seule image [Maurizot 98]. À cette fin, les auteurs conjecturent que les vecteurs de vitesse sont localement tangents à la forme des structures visualisées. Dans le cas de lignes d'iso-intensité, le champ des vitesses associé au modèle de mouvement affine est alors orthogonal au champ des gradients spatiaux de l'intensité et on obtient la relation suivante :

$$\boldsymbol{\nabla}^T E(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}^T E(\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) = \Gamma_X^T \Theta = 0 \tag{6.8}$$

où $\Gamma_X^T = (E_x(\boldsymbol{x}),E_x(\boldsymbol{x})x,E_x(\boldsymbol{x})y,E_y(\boldsymbol{x}),E_y(\boldsymbol{x})x,E_y(\boldsymbol{x})y)$, avec $E_x(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial E(\boldsymbol{x})}{\partial x}$ et $E_y(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial E(\boldsymbol{x})}{\partial y}$. Selon les applications traitées dans [Maurizot 97], une technique d'estimation au sens des moindres carrés, une technique d'estimation pondérée et une technique d'estimation multi-échelle ont été proposées pour estimer le vecteur de paramètres $\Theta = (b_o,a,b,b_1,c,d)$. Une fois les paramètres A et $\boldsymbol{b}$ du modèle de mouvement identifiés, la même technique que celle introduite dans [Maurizot 95] est proposée pour localiser les singularités.

• Enfin, citons les travaux de Srinivasan et Murthy [Srinivasan 92] concernant la détection de singularités dans des images d'empreintes digitales. La détection de points singuliers

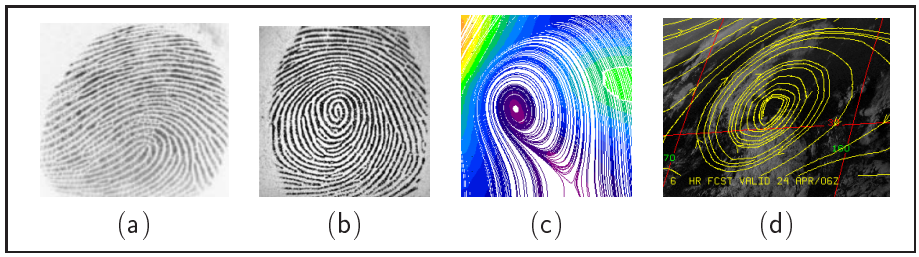


FIG. 6.2 – **Analogie entre plusieurs types d'images** : *(a) et (b) : deux images d'empreintes digitales ; (c) et (d) deux images de lignes de courant issues respectivement de la mécanique des fluides expérimentale et de la météorologie.*

dans ce type d'images est une étape importante dans la tâche de classification et de reconnaissance automatique. On parle ainsi de la "signature" de l'empreinte. Un point singulier dans ce cas correspond au centre de toutes les lignes qui la composent. Deux exemples d'images d'empreintes digitales peuvent être visualisés aux figures FIG.6.2(a-d). On note l'analogie des courbes avec les lignes de courant issues de la mécanique des fluides. Les lignes d'empreintes digitales sont alors assimilées à une quantité intégrée d'un champ de vitesses. De ces images, les auteurs extraient une carte dense, représentative des directions des différentes courbes. Cette carte est obtenue à l'aide d'une technique de corrélation : pour chaque pixel $\boldsymbol{x}$, on recherche la direction $\boldsymbol{d}$ pour laquelle la somme :

$$S_d(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m} \in D(\boldsymbol{x})} |E(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{d}) - E(\boldsymbol{x})|, \tag{6.9}$$

définie sur un voisinage $D(\boldsymbol{x})$ est minimale. Une telle méthode fournit un certain nombre de points candidats. Une approche heuristique, basée sur la courbure des lignes, permet de sélectionner les faux positifs.

Les techniques de détection de singularités à partir d'une seule image s'appuient donc, pour la plupart d'entre elles, sur un champ des directions plutôt que sur un champ des vitesses instantanées. Il est, dans ce cas, nécessaire d'établir des hypothèses reliant une structure photométrique à son mouvement. Suivant les applications, ces relations, si elles existent, ne sont pas toujours évidentes à établir. Néanmoins, lorsque cela est envisageable, ces méthodes s'avèrent nettement moins coûteuses que celles nécessitant l'estimation d'un champ dense de mouvement. L'avantage d'une famille vis-à-vis d'une autre est donc fonction du type d'application envisagé.

Parmi les méthodes listées, il est à noter que celles proposées dans [Rao 92,Maurizot 95, Maurizot 98] ne sont développées que pour détecter une seule structure singulière. Afin d'extraire l'ensemble des singularités, les auteurs reconduisent alors leur méthode en chaque point ou en plusieurs endroits de l'image. Les techniques proposées dans [Shu 93,Shu 94] ne détectent quant à elles qu'un seul point singulier, et les techniques [Cohen 96,Ford 94, Nogawa 97,Mémin 99,Srinivasan 92,Yang 01] permettent d'obtenir l'ensemble des singularités présentes.

6.3 Techniques d'extraction des domaines d'influence linéaires d'une singularité

Les points singuliers sont des points clés dont la localisation est une étape importante dans un schéma d'analyse. Une fois cette étape établie, il est souvent utile d'associer à chaque singularité une zone d'influence. Cette zone correspond au domaine où le mouvement est linéaire et est usuellement caractérisée par de forts mouvements divergents ou rotationnels, dans le cas des puits/sources ou vortex. Parmi les méthodes proposées, on peut distinguer deux grandes familles :

1. la première vise à extraire une zone très précise représentative de l'influence d'une structure singulière. Les applications sont souvent très locales (observation d'un phénomène climatique précis, analyse de déformations en imagerie médicale, ...) et une extraction minutieuse des contours de la déformation est nécessaire. Ces approches reposent, pour la plupart d'entre elles, sur des schémas de segmentation de type "contours actifs", "templates déformables", "level sets", ... ;
2. la seconde regroupe des méthodes visant à décrire globalement le champ des vitesses via un ensemble de singularités, dont le domaine linéaire est décrit par une structure géométrique simple (carré, rectangle, cercle, ...). Ces méthodes reposent souvent sur l'estimation conjointe d'un modèle linéaire et de son domaine de validité au voisinage d'un point singulier.

6.3.1 Extraction précise de la zone d'influence

Nous allons présenter dans cette section quelques contributions apportées dans l'extraction précise de zones associées à des points singuliers. Dans ce contexte, les méthodes consistent généralement à déformer un contour pour l'adapter à une forme désirée. Ceci est mené à l'aide de modèles qui font intervenir des notions physiques ou des connaissances *a priori* sur le type de déformation étudiée. On parle alors de "modèles déformables", qui sont particulièrement adaptés aux tâches de reconnaissance et de suivi de singularités. Le lecteur trouvera une information détaillée de ce type de techniques dans [Blake 98]. Présentons les principales approches.

Les contours actifs

À partir de données photométriques des images, les contours actifs ou "snakes", introduites dans [Kass 88], permettent d'extraire les frontières d'un objet. Ceci se fait en contrôlant les déformations d'une courbe par des forces élastiques, des mesures géométriques locales (élongation et courbure du contours), des forces d'expansion (dépendant de l'évolution souhaitée de l'objet) et des données issues des images. Le problème peut se formuler par la minimisation de la fonctionnelle H d'énergie suivante :

$$H(\boldsymbol{r}(s)) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha(s)\|r_s(s)\|^2 + \beta(s)\|r_{ss}(s)\|^2)ds + \int_0^1 P(\boldsymbol{r}(s))ds, \qquad (6.10)$$

où $\boldsymbol{r}(s) = (x(s),y(s))$ est le contour paramétré par $s \in [0,1]$, $r_s(s) = \frac{\partial r}{\partial s}$ est l'élongation de la courbe et $r_{ss}(s) = \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}$ sa flexion ou sa courbure. Le terme $P(\boldsymbol{r}(s))$ représente les forces externes appliquées à la courbe et dépend des données de luminance $E(x,y)$. Le poids $\alpha(s)$

influence quant à lui l'élongation de la courbe. Si ce terme est nul, alors des lignes droites (dans le cas de courbes ouvertes) ou des cercles (dans le cas de courbes fermées) seront formées. Le poids $\beta(s)$ joue sur les discontinuités du second ordre de la courbe. Une valeur élevée de ce paramètre augmentera le lissage des courbes.

Notons que les changements de topologie sont difficilement gérés par les contours actifs. Cependant, nombre de techniques s'appuyant sur la relation (6.10) ont été développées avec succès dans un contexte de segmentation, de reconstruction, de restauration, de suivi et d'analyse du mouvement ou des déformations [Blake 98].

Remarquons que dans un contexte de météorologie, Béréziat [Béréziat 99] propose un modèle de segmentation de vortex s'appuyant sur les champs de Markov. Pour cela, une hypothèse de régularité et d'homogénéité de la luminance à l'intérieur de telles structures est émise. Il est démontré, dans [Béréziat 99], que le schéma proposé est similaire à une approche par contours actifs.

Les templates déformables

Selon les applications, les contours actifs forment parfois une gamme de solutions pas assez restrictives. Ainsi, certains auteurs ont développé les "templates" déformables. Les templates expriment la représentation d'une classe de modèles paramétriques déformables, permettant de segmenter une gamme plus spécifique de structures. Ces modèles paramétriques nécessitent cependant la définition d'une forme spécifique à encourager qui dépend fortement de l'application traitée.

Dans un cadre météorologique, nous citerons les travaux précurseurs de Bouthemy et Benveniste [Bouthemy 84] proposant un modèle pour le suivi de perturbations atmosphériques. Ce modèle s'appuie sur les aspects géométriques et photométriques des structures.
Le critère géométrique représente une zone dépressionnaire sous la forme de N régions S_1,...,S_N dont les frontières sont des spirales logarithmiques centrées sur le point singulier. La figure FIG.6.3 illustre ce principe.
Le critère photométrique émet quant à lui une hypothèse d'invariance de l'intensité (à un bruit Gaussien près) dans chaque zone S_i définie par l'approche géométrique. Cette gamme de modèles s'est avérée pertinente pour le suivi de perturbations atmosphériques.

On peut noter que dans [Pentland 91,Leymarie 93], les auteurs ont introduit des contraintes dynamiques supplémentaires en stipulant que le contour suit des lois issues de la mécanique Lagrangienne.

La famille des templates déformables s'avère très performante pour segmenter une structure précise. Son principal inconvénient est qu'elle nécessite de fortes connaissances *a priori* sur la nature des formes cibles.

Les ensembles de niveaux

Les "level sets" ou ensembles de niveaux ont été introduits par Osher et Sethian [Osher 88]. L'idée fondamentale consiste à représenter un modèle déformable $\eta(t)$ appartenant à un espace à n dimensions $\mathbb{R}^n$ de façon implicite, comme le niveau zéro d'une fonction $\psi(\boldsymbol{X},t)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ d'ordre $n+1$:

$$\eta(t) = \{\boldsymbol{X} | \psi(\boldsymbol{X},t) = 0\},\ \forall t. \tag{6.11}$$

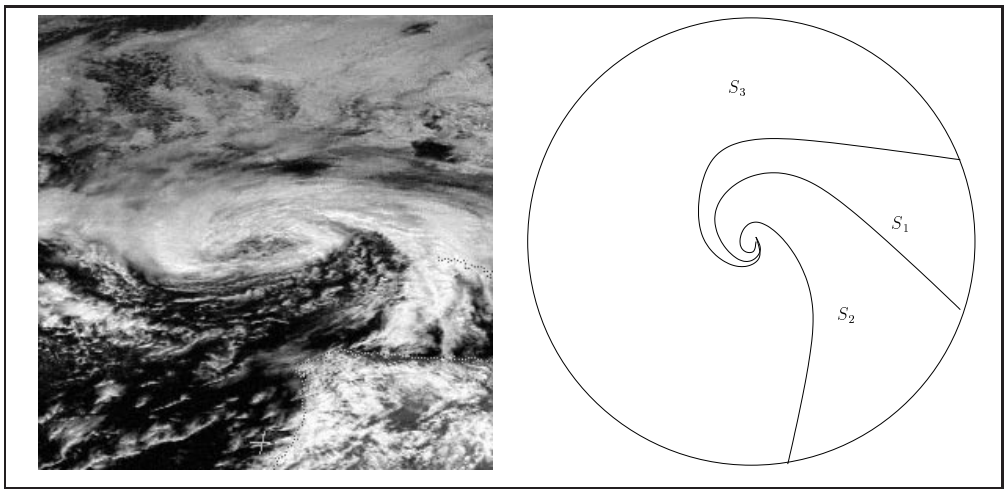


FIG. 6.3 – **Modèle géométrique de structure atmosphérique** *: sur la gauche, une image météorologique représentative d'une zone dépressionnaire et sur la droite, le modèle géométrique proposé dans [Bouthemy 84] constitué ici de 3 zones S_1, S_2 et S_3 dont les frontières sont des spirales logarithmiques.*

À l'aide de plusieurs manipulations dont on trouvera les détails dans [Osher 88], le problème d'extraction du contour se ramène à la définition d'une fonction F de propagation qui dépend de l'application visée :

$$\psi_t + F\|\boldsymbol{\nabla}\psi\| = 0. \tag{6.12}$$

La condition initiale $\psi_0 = \psi(\cdot, t = 0)$ est telle que $\psi_0(\eta_0) = 0$. L'intersection de l'hypersurface Γ définie par la fonction ψ avec le plan de hauteur nulle ($z = 0$) fournit la courbe η qui définit les contours de la structure à segmenter.

Citons comme applications de ce formalisme dans un cadre météorologique la méthode proposée dans [Dell'Acqua 00] pour l'extraction de structures météorologiques diverses, où la fonction de propagation F inclut uniquement des critères photométriques et géométriques. Papin *et al.* [Papin 00] utilisent également ce formalisme en incluant à la fois des données photométriques, cinématiques et géométriques dans la fonction de propagation F dans le but de détecter et de suivre des structures nuageuses convectives.

6.3.2 Extractions basées sur des modèles linéaires

Nous proposons ici de recenser les principales contributions pour l'extraction de zones de linéarité associées à une singularité préalablement détectée. Ces méthodes, basées pour la plupart d'entre elles sur le portrait de phase, proposent de rechercher le plus large support où l'approximation linéaire de mouvement est vérifiée.

• Après avoir détecté les points singuliers, Rao et Jain [Rao 92] leur associent une zone critique de forme carrée centrée en chaque singularité. N'ayant pas de solution optimale pour ce genre de problème, ils proposent de choisir la plus grande fenêtre qui maintiendra une faible erreur entre le champ reconstruit (par le modèle de mouvement affine) et le champ directionnel des vitesses selon le critère proposé dans la relation (6.3). Le champ

directionnel des vitesses est soit estimé à partir des gradients de la fonction de luminance, soit directement extrait du champ réel, si celui-ci est connu.

• Nogawa *et al.* ont proposé une technique de détection de points singuliers dans [Nogawa 97], détaillée dans la partie 6.2. Dans ce même travail, ils proposent une méthode qui extrait, pour chaque singularité, une zone circulaire centrée autour de celle-ci dans laquelle le modèle d'approximation linéaire du mouvement est valide. Partant d'une valeur de rayon initiale $r_i = 1$, la méthode procède par croissance du rayon jusqu'à ce que la circulation du champ des vitesses le long du carré de taille $2r_i$ centré au point critique z_i diffère de la circulation initiale estimée autour du point singulier (valeur du dernier indice $Int(z_i)$ estimé par la relation (6.6)). En effet, l'intégration le long de tout chemin γ englobant le point singulier ne doit pas dépendre de γ. Cette valeur doit être constante et identique à $Int(z_i)$, tant que le chemin γ est inclus dans la zone linéaire.

• Dans [Mémin 99], selon le même modèle que celui proposé dans [Nogawa 97], les auteurs cherchent à estimer un rayon associé à chaque singularité. La technique de localisation de points singuliers repose sur la méthode des indices définie par la relation (6.7) et propose un amas de points candidats. La singularité retenue est donnée par le barycentre de ces points. La détermination des rayons associés utilise un compromis entre une régression linéaire robuste avec le support le plus large possible et la régression linéaire la moins biaisée (en utilisant un voisinage n'excédant pas le domaine de linéarité du champ). En partant de petites valeurs initiales, chaque disque est successivement élargi. À chaque étape, les paramètres des modèles de mouvements associés sont estimés. Si le point singulier associé à chaque modèle reste à l'intérieur de l'amas de points candidats détectés, l'estimation est considérée comme fiable et le procédé est réitéré avec un nouveau rayon. A l'inverse de la méthode précédente, celle-ci prend en compte de manière conjointe toutes les singularités présentes et leurs influences mutuelles potentielles. La détermination de ces zones s'effectue de manière globale.

• Yang et Parvin [Yang 01] détectent les points critiques par la méthode des indices. Ici aussi, une zone de linéarité circulaire est associée à chaque point. Le rayon r_i caractéristique de cette zone est exprimé par :

$$r_i = \max\{R|\text{Indice}(J^R_{(x,y)}) = 1\} \tag{6.13}$$

où Indice est défini par la relation (6.7). La courbe d'intégration fermée de Jordan $J^R_{(x,y)}$ est circulaire, centrée en (x,y) et de rayon R. Ainsi, le rayon est considéré optimal lorsque l'indice se maintient à $+1$. Cette valeur correspond en effet à sa valeur théorique tant que le modèle linéaire est valide.

• Cohen et Herlin [Cohen 96] ont proposé une technique de localisation de singularités s'appuyant également sur le calcul des indices de Poincaré. Les auteurs ne proposent pas de zone optimale dans laquelle un modèle linéaire de mouvement peut-être appliqué. Néanmoins, les paramètres du portrait de phase sont estimés sur un support dont la taille est fixée arbitrairement. Le schéma d'optimisation repose sur une minimisation au sens des moindres carrés, à l'instar de ce qui est proposé dans [Ford 94,Rao 92,Shu 93]. Cependant, la distance utilisée dans ce cas n'est pas celle proposée dans [Rao 92] (équation (6.3)) mais est définie par :

$$Dist(x,y) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_r(x,y) \wedge \boldsymbol{v}_e(x,y)|, \tag{6.14}$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel. Cette distance est plus simple à manipuler car elle conduit à un schéma quadratique et les auteurs montrent que le problème se ramène alors à une recherche de valeurs propres.

• Enfin, dans [Maurizot 98], les auteurs proposent une méthode statistique afin d'estimer un domaine de linéarité de forme carrée. La méthode procède de la façon suivante : plusieurs estimations du modèle linéaire (6.1) $\boldsymbol{v}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{b}_i$ sont effectuées sur des supports à taille variable centrés en des points différents. On note $W_i^{(l)}$ la fenêtre centrée en $\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(l)} = -A_i^{-1(l)}\boldsymbol{b}_i^{(l)}$ de taille $(2l+1)$. La taille optimale $\hat{l}$ du support $W_{i+1}^{(\hat{l})}$ est définie par :

$$\hat{l} = \max\{l : \forall r, r < l : \|\tilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(l)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(r)}\|^2 \leq \mu, \tag{6.15}$$

où la valeur de μ dépend de la position $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(r)}$ et s'appuie sur un critère statistique (biais-variance) développé par Juditski [Judistski 94]. Autrement dit, la relation (6.15) indique que tant que les estimations des positions successives de singularités $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(l)} = -A_{i+1}^{-1(l)}\boldsymbol{b}_{i+1}^{(l)}$ sur une fenêtre de taille $(2l+1)$ restent assez "proches" les unes des autres, la taille l de la fenêtre peut-être augmentée à $(l+1)$. Dès que l'estimation de $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(l+1)}$ s'éloigne de la localisation précédente $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i+1}^{(l)}$, la taille optimale est fixée à la valeur précédente de l.

Exceptée la méthode proposée dans [Mémin 99], ces techniques d'extraction de la zone d'influence ou de linéarité d'une singularité se basent sur un critère local : seul le modèle au voisinage du point détecté est étudié. Dans [Mémin 99], les auteurs prennent en compte les interactions mutuelles des singularités au travers d'un modèle global du champ des vitesses. Cette méthode permet dans un cadre météorologique de reconstruire des champs de vents cohérents dans des zones dépourvues de nuages, qui constituent les principaux traceurs en météorologie.

Remarquons que la méthode proposée dans [Yang 01] extrait une zone de singularité de forme circulaire centrée sur chaque point critique mais ne repose pas sur modèle de mouvement associé. Seules les techniques proposées dans [Mémin 99] et [Nogawa 97] permettent une reconstruction complète du champ des vitesses car elles s'appuient sur un modèle global de celui-ci. Ce modèle est composé de paramétrisations linéaires du mouvement au voisinage des singularités et de paramétrisations non linéaires en dehors de ces zones. Les méthodes [Cohen 96,Maurizot 98,Rao 92] fournissent une description locale de chaque singularité par portrait de phase mais une reconstruction complète du champ des déformations est impossible. Néanmoins, les principales caractéristiques de l'écoulement sont extraites.

6.4 Discussion

Nous avons vu, dans ce chapitre, un panorama de différentes méthodes existantes pour extraire des structures singulières.

Les techniques de détection et de classification de points critiques sont définies à partir de l'analyse des propriétés d'un champ de vecteurs (ou d'un champ d'orientations) autour de ses singularités. Nous avons vu qu'il existe deux catégories d'approches :

1. les méthodes reposant sur les indices, exploitant les propriétés d'intégration d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée ;
2. les méthodes s'appuyant sur la notion de portrait de phase.

La première catégorie comporte, malgré sa simplicité apparente, quelques difficultés d'implantation (qui seront discutées dans la section 8.5) et conduit souvent à une sur-estimation de points candidats, ce qui nécessite un post-traitement de validation des vrai/faux positifs. Les méthodes relatives à une identification par portrait de phase ont souvent l'inconvénient de n'être adaptées qu'à la détection d'une singularité isolée.

En ce qui concerne l'extraction de la zone d'influence d'une singularité, il est possible

1. soit d'extraire précisément les bords de cette zone en s'appuyant sur des critères photométriques [Béréziat 99,Bouthemy 84,Dell'Acqua 00] ou sur des critères cinématiques tels que la divergence ou la vorticité [Papin 00] ;
2. soit d'extraire une zone définie par une primitive géométrique simple (fenêtre, disque).

Ce choix dépend de la nature de l'application visée. Lorsque le but est de détecter une anomalie cérébrale, coronarienne, artérielle ou un phénomène climatique particulier et localisé, il est préférable d'utiliser la première famille de méthodes. En revanche, si le but est de caractériser la nature d'un écoulement en extrayant ses principales caractéristiques ou de suivre un phénomène afin d'appréhender son évolution globale, il est alors préférable de manipuler des modèles aussi simples que possible.

Dans le contexte qui est le notre, consistant au développement de méthodes dédiées à l'analyse de phénomènes fluides, nous proposons dans le chapitre suivant une technique globale permettant de détecter et de caractériser l'ensemble des singularités d'un écoulement. Cette méthode s'appuie sur un champ dense de mouvement préalablement estimé. Contrairement à la plupart des approches que nous avons présentées, la méthode que nous proposons ne s'appuie pas sur les indices de Poincaré.

Chapitre 7

Méthode d'analyse d'un champ de vitesses

Nous présentons dans ce chapitre la méthode que nous avons mise en œuvre pour extraire les vortex, les sources et les puits à partir d'un champ dense préalablement estimé. Ce problème, comme nous avons pu le constater dans le chapitre précédent, est essentiel dans nombre d'applications, comme par exemple les sciences environnementales (localisation et suivi de structures dépressionnaires ou convectives, étude de courants marins, ...) ou la mécanique des fluides expérimentale (caractérisation du mouvement). La méthode que nous proposons permet également d'extraire d'autres informations pertinentes telles que les fonctions de potentiels ou les lignes de courant. Cette méthode s'appuie sur une représentation complexe de l'écoulement ainsi que sur le modèle de Rankine.

7.1 Introduction

De nombreuses techniques existent pour estimer un champ dense de vitesses à partir des données de luminance des images. Le lecteur trouvera une description des différentes méthodes existantes dans la première partie de ce document. Nous supposerons dans ce chapitre qu'un tel champ bidimensionnel représentatif du mouvement tridimensionnel est disponible.

Dans [Verri 89], Verri *et al.* montrent que l'interprétation du mouvement 3D par la vision artificielle ou naturelle peut aussi être exprimée comme l'interprétation au premier ordre du champ de vitesses 2D apparent. Ce résultat est important car il autorise la caractérisation d'un écoulement tridimensionnel à partir de modèles linéaires du premier ordre, souvent simples à manipuler.

Ainsi, de nombreux auteurs ont utilisé le modèle linéaire présenté dans le chapitre précédent (relation (6.1)) et son interprétation par portrait de phase dans le but de localiser et de caractériser des déplacements mais aussi des structures pouvant s'interpréter comme une quantité intégrée d'un déplacement (telles que des empreintes digitales, des lignes d'émission en mécanique des fluides, des lignes représentant la structure du bois, ...). Le principe de ces approches, initialement proposées par Rao et Jain [Rao 92], est d'estimer les paramètres du modèle du premier ordre (6.1) et de confirmer ou d'infirmer la localisation et la classification des points singuliers obtenus par différentes procédures de vote. D'autres

méthodes utilisent les indices de Poincaré. Ces derniers permettent de détecter des points singuliers en exploitant les propriétés d'orientation du champ des vitesses dans leur voisinage. Cependant, les méthodes résultantes sont très sensibles au bruit et à l'instar des approches par portrait de phase, des post-traitements sont alors nécessaires. Maurizot *et al.* [Maurizot 95] ont quant à eux proposé une méthode statistique s'appuyant sur le bruit et la variance d'une fonction de risque. Cette technique permet de réaliser conjointement la localisation d'un point singulier avec l'estimation de sa zone (carrée) de validité du modèle linéaire associé. En raison de sa nature statistique, cette méthode est robuste au bruit. Enfin, rappelons que Nogawa *et al.* [Nogawa 97] ont proposé une méthode basée sur une modélisation analytique d'un écoulement et sur le théorème des résidus de Cauchy, pour extraire les vortex dans un contexte d'imagerie médicale. D'après nos expériences, cette méthode est très sensible au bruit et ne permet pas de recouvrer toutes les singularités. Cependant, la modélisation des vortex utilisée est attractive.

Nous proposons ici une méthode pour extraire et caractériser, de manière robuste, toutes les singularités présentes dans un champ de vitesses. Cette méthode sera en mesure de reconstruire les principales structures de l'écoulement et de décrire le déplacement de manière paramétrique. Pour cela, nous nous appuierons sur une modélisation complexe analogue à celle proposée dans [Nogawa 97], définie selon le modèle des vortex de *Rankine*, que nous étendrons dans le cadre des puits/sources.

Ce chapitre sera organisé de la manière suivante :

- la section 7.2 vise à étudier une représentation analytique d'un champ de vitesses ;
- la section 7.3 propose une méthode pour séparer un champ de vecteurs selon la décomposition de Helhmoltz décrite au chapitre 1 ;
- la section 7.4 présente quant à elle une technique d'extraction des fonctions de potentiels (potentiel de vitesse et fonction de courant) ;
- la section 7.5 propose une méthode d'extraction de points singuliers à partir des fonctions de potentiels ;
- dans la section 7.6, il est présenté un certain nombre de modèles permettant une description paramétrique globale d'un champ de vitesses ;
- enfin, la section 7.7 propose une méthode permettant d'extraire, de manière robuste, les principales structures de l'écoulement à partir de ses différents points singuliers.

7.2 Représentation complexe

Un champ de vecteurs bidimensionnel est usuellement décrit comme une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ et délivrant des vecteurs, appartenant à $\mathbb{R}^2$. Il est donc possible de le représenter par une fonction f, définie de l'espace des complexes $\mathbb{C}$ dans lui-même :

$$f(z) = u(z) + iv(z), \tag{7.1}$$

avec $z = x + iy$ et u et v sont les composantes de la vitesse. Ainsi, à chaque point (x,y) est associé le vecteur $(u(x,y),v(x,y))$.

Si le champ $\boldsymbol{v}$, représenté par la fonction complexe f, est à la fois irrotationnel et

solénoïdal, alors nous avons :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}^{\perp}\psi \end{cases} \tag{7.2}$$

où $\boldsymbol{\nabla}^{\perp} = (-\partial/\partial y, \partial/\partial x)$ et les fonctions ϕ et ψ sont respectivement le potentiel de vitesse et la fonction de courant définis dans le chapitre 1. De la relation (7.2), on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{7.3}$$

Cette relation constitue les conditions de Cauchy que ϕ et ψ doivent satisfaire pour que la fonction F définie par :

$$F(z) = \phi(z) + i\psi(z) \tag{7.4}$$

soit dérivable au sens de sa variable complexe z. Une telle fonction est également dite *holomorphe* ou *analytique*. Dans ce cas, nous obtenons, en dérivant la fonction f le long de l'axe des x par exemple et en utilisant les relations (7.2) et (7.3) :

$$F'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u(z) - iv(z) = \overline{f(z)}. \tag{7.5}$$

La fonction $\overline{f}$ est appelée la *vitesse complexe*. C'est le symétrique par rapport à l'axe des x de la vitesse $\boldsymbol{v} = (u,v)^T$. La fonction F est quant à elle dénommée le *potentiel complexe* du mouvement.

La connaissance de ce potentiel complexe F procure un triple avantage. Tout d'abord, sa dérivation donne la vitesse complexe (et par symétrie la vitesse réelle) de l'écoulement. Ensuite, il permet de définir sans calculs les lignes de courant $\psi = cste$. Enfin, les lignes équipotentielles $\phi = cste$ sont également accessibles. Il semble donc pertinent de décrire le mouvement d'un écoulement fluide par son potentiel complexe.

Notons que cette définition n'est établie que dans le cadre d'un champ irrotationnel et solénoïdal. S'il est quelconque, il peut toutefois s'écrire, d'après la décomposition de Helmholtz étudiée dans le chapitre 1, comme la somme d'une composante irrotationnelle $\boldsymbol{v}_{irr}$ et solénoïdale $\boldsymbol{v}_{sol}$. À partir de $\boldsymbol{v}_{irr}$ et $\boldsymbol{v}_{sol}$, il est alors possible de définir le potentiel de vitesse ϕ et la fonction de courant ψ correspondant à chacune de ces composantes. On peut à nouveau définir le potentiel complexe :

$$F(z) = \phi(z) + i\psi(z). \tag{7.6}$$

Néanmoins, ce potentiel n'est plus holomorphe car les fonctions ϕ et ψ ne respectent pas nécessairement les conditions de Cauchy définies en (7.3). Cependant, nous verrons dans la section 7.6 que le formalisme complexe est intéressant car certains champs de déplacements représentant des phénomènes fluides peuvent fidèlement être approchés par l'interprétation géométrique de fonctions simples définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Pour calculer le potentiel F d'un champ quelconque, il est donc nécessaire d'en extraire ses composantes solénoïdales et irrotationnelles.

7.3 Séparation d'un champ de vitesses

7.3.1 Étude de la composante laminaire

La décomposition de Helmholtz stipule que tout champ de vitesses $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire en une somme de deux composantes, l'une étant irrotationnelle $\boldsymbol{v}_{irr}$ et l'autre solénoïdale $\boldsymbol{v}_{sol}$. Cependant, comme cela est illustré dans la section 1.3.3, une telle décomposition n'est pas unique et nécessite de définir des conditions aux bords. Dans cette même section, il est mentionné qu'il est possible de les supposer nulles à l'infini, sous condition de retrancher au mouvement sa composante laminaire. Du point de vue de la physique, cela revient à inhiber l'effet du "transport global" de l'écoulement : dans certains contextes, cette composante laminaire peut être bien supérieure, en terme d'amplitude, à la composante irrotationnelle et/ou solénoïdale. Ainsi, les structures caractéristiques (vortex ou puits/sources) de l'écoulement sont "noyées" dans ce transport global qu'il est nécessaire de retrancher.

Pour estimer le champ laminaire, plusieurs techniques peuvent être employées. Les méthodes issues de la mécanique des fluides expérimentale utilisent souvent la relation suivante :

$$\boldsymbol{v}_{lam} = \overline{\boldsymbol{v}}, \tag{7.7}$$

où $\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ est le champ moyen de $\boldsymbol{v}$, calculé sur l'ensemble du support Ω d'aire $|\Omega|$. L'avantage de cette méthode réside bien évidemment dans sa simplicité. Cependant, cela suppose un transport global constant sur l'ensemble de l'image. Dans nombre de contextes, cette hypothèse n'est pas vérifiée et un transport non constant doit être estimé.

Un moyen d'estimer une telle composante laminaire peut alors s'appuyer sur un estimateur de mouvement du type Horn & Schunck (*cf* chapitre 2) :

$$\boldsymbol{v}_{lam} = \min_{\boldsymbol{v}} \Big(\mathcal{H}_{obs}(\boldsymbol{v}) + \alpha \iint_\Omega \big[|\text{div } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|^2 + |\text{curl } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|^2 \big] d\boldsymbol{x} \Big). \tag{7.8}$$

Le terme $\mathcal{H}_{obs}$ correspond à la contrainte du mouvement apparent car dans la mesure où l'on recherche une solution à divergence nulle, le terme relatif à l'équation de continuité est équivalent à l'EMCA. La valeur de α est dans ce cas très élevée (10^5 en pratique) pour assurer le caractère irrotationnel et solénoïdal de $\boldsymbol{v}_{lam}$. On peut remarquer qu'il serait plus judicieux d'effectuer directement la minimisation de $\mathcal{H}_{obs}$ sous les contraintes div $\boldsymbol{v} \equiv 0$ et curl $\boldsymbol{v} \equiv 0$. Dans ce cas, le paramètre α serait à estimer et correspondrait à un multiplicateur de Lagrange. Néanmoins, rappelons d'une part que la résolution d'un tel problème n'est pas aisée et d'autre part, que le terme de régularisation de l'estimateur de mouvement développé dans le chapitre 3 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{reg}(\boldsymbol{v},\xi,\zeta) = & \iint_\Omega \big[|\text{div } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \xi(\boldsymbol{x})|^2 + \lambda \Psi_2(|\boldsymbol{\nabla} \xi(\boldsymbol{x})|) \big] d\boldsymbol{x} \\ & + \iint_\Omega \big[|\text{curl } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \zeta(\boldsymbol{x})|^2 + \lambda \Psi_2(|\boldsymbol{\nabla} \zeta(\boldsymbol{x})|) \big] d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse à estimer et ξ et ζ sont des estimations de la divergence et de la vorticité du champ de vitesse $\boldsymbol{v}$. Ce formalisme permet l'introduction, par l'intermédiaire des fonctions ξ et ζ, de connaissances *a priori* sur les valeurs de div $\boldsymbol{v}$ et curl $\boldsymbol{v}$ attendues. Ainsi, nous avons choisi de spécifier explicitement que dans un cadre laminaire, la divergence et

la vorticité attendues sont nulles ($\xi(\boldsymbol{x}) = \zeta(\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$), ce qui nous permet d'estimer le transport global de l'écoulement.

Dans la suite de ce chapitre, nous travaillerons sur des champs dont la composante laminaire sera retranchée. Le champ $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{lam}$ résultant sera dit "recalé". Pour alléger le formalisme, nous continuerons à le noter $\boldsymbol{v}$. La figure FIG.7.1 illustre l'importance de la composante laminaire dans l'analyse d'un champ de vitesses.

7.3.2 Extraction des parties irrotationnelles et solénoïdales

Schémas usuels

Afin d'obtenir les composantes irrotationnelles et solénoïdales du champ recalé $\boldsymbol{v}$, il est possible de s'appuyer sur ses valeurs de divergence et de vorticité. En effet, d'après le chapitre 1, ces quantités permettent de définir les potentiels de vitesses de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi = \mathrm{div}(\boldsymbol{v}) \\ \Delta\psi = \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}). \end{cases} \tag{7.10}$$

Une fois estimés, ces potentiels permettent de déterminer les composantes $\boldsymbol{v}_{irr}$ et $\boldsymbol{v}_{sol}$ par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{irr} = \boldsymbol{\nabla}\phi \\ \boldsymbol{v}_{sol} = \boldsymbol{\nabla}^{\perp}\psi, \end{cases} \tag{7.11}$$

avec $\boldsymbol{\nabla}^{\perp} = (-\partial/\partial y, \partial/\partial x)$. Pour résoudre les équations de Poisson (7.10), il est possible d'utiliser des solveurs itératifs numériques mais cela nécessite cependant la définition de conditions aux bords du domaine de calcul.

Une autre méthode pour résoudre un tel problème est fournie par la loi de de Biot-Savart décrite dans [Chorin 79]. Les solutions sont alors données par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{irr}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\nabla} h(x-p, y-q)\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}(p,q)dpdq \\ \boldsymbol{v}_{sol}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\nabla}^{\perp} h(x-p, y-q)\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}(p,q)dpdq, \end{cases} \tag{7.12}$$

où h est le noyau 2D de Green défini par :

$$h(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2). \tag{7.13}$$

Une telle méthode nécessite cependant le calcul des convolutions définies en (7.12) qui peut être délicat car celles-ci reposent sur un support infini.

Par les relations (7.10), (7.11) et (7.12), on voit que la connaissance de la divergence et de la vorticité d'un champ de vitesses permet de remonter à ses composantes irrotationnelles et solénoïdales. Cependant, comme nous l'avons mentionné, les méthodes mises en œuvre nécessitent soit de définir des conditions aux bords du domaine de calcul, soit d'effectuer des convolutions sur un domaine infini, ce qui dans chaque cas peut s'avérer problématique. Nous proposons donc de ne pas nous appuyer explicitement sur les valeurs de div $\boldsymbol{v}$ et de curl $\boldsymbol{v}$ mais plutôt d'exploiter certaines propriétés de la transformée de Fourier via une représentation spectrale du champ des vitesses.

FIG. 7.1 – **Importance de la composante laminaire** *: sur la première colonne figurent une série d'images du canal vapeur d'eau représentant l'évolution d'une structure dépressionnaire. La deuxième colonne représente les champs de vitesses associés calculés au moyen de l'estimateur du chapitre 3. La troisième colonne représente les composantes laminaires, estimées par la relation (7.8) en multirésolution et multigrille. Les champs recalés résultants sont présentés en dernière colonne. Deux principaux vortex, initialement cachés, y sont maintenant visibles.*

Utilisation de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ d'une fonction g de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par :

$$\hat{g}(\boldsymbol{k}) = \mathcal{F}[g] = \frac{1}{2\pi} \iint g(\boldsymbol{x}) e^{i<\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}>} d\boldsymbol{x}, \tag{7.14}$$

où $\boldsymbol{k} = (\alpha,\beta)$, α et β étant les fréquences le long des axes x et y respectivement. La transformée inverse est quant à elle définie par :

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \iint \hat{g}(\boldsymbol{k}) e^{-i<\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}>} d\boldsymbol{k}. \tag{7.15}$$

Cette transformation possède l'avantage de changer une dérivée partielle dans l'espace temporel en une multiplication dans l'espace fréquentiel. Ainsi, pour une fonction g de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{F}[\dfrac{\partial g}{\partial x}] = \alpha \hat{g}, \\ \mathcal{F}[\dfrac{\partial g}{\partial y}] = \beta \hat{g}. \end{cases} \tag{7.16}$$

Notons que les composantes $\boldsymbol{v}_{irr}$ et $\boldsymbol{v}_{sol}$ sont telles que :

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} \mathrm{div}(\boldsymbol{v}_{irr}) & = & \mathrm{div}(\boldsymbol{v}); & & \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_{irr}) & = & 0, \\ \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}_{sol}) & = & \mathrm{curl}(\boldsymbol{v}); & & \mathrm{div}(\boldsymbol{v}_{sol}) & = & 0, \end{array} \right. \tag{7.17}$$

soit,

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_{irr} & = & \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}; & & \boldsymbol{\nabla}^{\perp} \cdot \boldsymbol{v}_{irr} & = & 0, \\ \boldsymbol{\nabla}^{\perp} \cdot \boldsymbol{v}_{sol} & = & \boldsymbol{\nabla}^{\perp} \cdot \boldsymbol{v}; & & \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_{sol} & = & 0. \end{array} \right. \tag{7.18}$$

Par application de la transformée de Fourier au système (7.18), on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{v}}_{irr}(\boldsymbol{k}) = < \boldsymbol{k}, \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}) > \dfrac{\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{k}\|^2} \\ \hat{\boldsymbol{v}}_{sol}(\boldsymbol{k}) = < \boldsymbol{k}^{\perp}, \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}) > \dfrac{\boldsymbol{k}^{\perp}}{\|\boldsymbol{k}^{\perp}\|^2}, \end{cases} \tag{7.19}$$

avec $\boldsymbol{k}^{\perp} = (\beta, -\alpha)$. Les composantes irrotationnelles et solénoïdales sont alors obtenues par application de la transformée de Fourier inverse au système (7.19). Nous proposons donc d'exploiter cette approche pour extraire les composantes $\boldsymbol{v}_{irr}$ et $\boldsymbol{v}_{sol}$.

Il est cependant important de rappeler que la transformée de Fourier n'est définie que pour des signaux périodiques. Lorsque le champ des déplacements ne l'est pas (ce qui est bien sur le cas en pratique), une technique classique consiste à le répliquer afin d'obtenir un signal périodique. Pour atténuer les effets de bords qui risquent d'apparaître suite à cette manipulation, il est usuel d'effectuer la transformée de Fourier sur un signal de taille plus importante. Celui-ci est composé du signal original qui est entouré de valeurs nulles (techniques de "zero-padding" en anglais). Les connections entre deux duplications sont ainsi moins brutales, ce qui atténue les effets de bords. En pratique, pour une image de taille (N,M), nous avons appliqué la transformée de Fourier sur un champ de taille $(9N,9M)$.

7.4 Estimation des fonctions de potentiels

Comme nous l'avons vu précédemment (*cf* chapitre 1), la connaissance des fonctions de potentiels ϕ et ψ est importante dans la mesure où ces deux champs scalaires permettent de décrire directement le champ de vitesses. Les lignes de niveaux de ces fonctions permettent en sus d'obtenir directement les lignes de courant de $\boldsymbol{v}_{sol}$ et les lignes équipotentielles de $\boldsymbol{v}_{irr}$. Comme nous le verrons dans la section 7.5, leur connaissance autorise par ailleurs l'identification aisée des points critiques de l'écoulement.

Dans la section précédente, nous avons vu que si la divergence et la vorticité du champ sont connues, alors les potentiels ψ et ϕ sont solutions de deux équations de Poisson (relation (7.10)). Ainsi, certains auteurs [Shukla 74,Simpson 94] préconisent de résoudre numériquement ces équations afin d'accéder aux potentiels. Dans [Shukla 74], différentes conditions aux bords sont étudiées (Neuman ou Dirichlet) et dans [Simpson 94], les conditions aux bords sont déterminées de manière récursive jusqu'à l'obtention d'une certaine convergence de l'algorithme.

Comme décrit dans la section 7.3.2, les composantes irrotationnelles et solénoïdales du champ sont disponibles. Nous préférons ainsi nous appuyer sur ces composantes, en exploitant la propriété mathématique suivante :

Propriété : *Si g est une fonction de classe C^2, alors nous avons :*

$$g(x,y) = g(0,0) + \int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\nabla} g(x,y) \cdot d\boldsymbol{\gamma}, \tag{7.20}$$

quel que soit le chemin $\boldsymbol{\gamma}$ choisi joignant les points $(0,0)$ à (x,y).

En appliquant cette propriété aux fonctions ϕ et ψ, il en résulte :

$$\begin{cases} \phi(x,y) = \phi(0,0) + \displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{v}_{irr} \cdot d\boldsymbol{\gamma}, \\ \psi(x,y) = \psi(0,0) + \displaystyle\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{v}_{sol}^{\perp} \cdot d\boldsymbol{\gamma}, \end{cases} \tag{7.21}$$

avec $\boldsymbol{v}^{\perp} = (v, -u)^T$. Les potentiels ϕ et ψ sont ainsi aisément calculables. Nous avons retenu un chemin simple pour $\boldsymbol{\gamma}$, joignant $(0,0)$ à (x,y) le long des lignes et des colonnes. Bien que la relation (7.21) soit en théorie indépendante du chemin $\boldsymbol{\gamma}$, cela peut ne pas être le cas en pratique en raison des erreurs introduites par la discrétisation. Ainsi, pour améliorer la robustesse, une moyenne des intégrations obtenues le long des chemins $\boldsymbol{\gamma_1}$ (intégration le long des lignes puis des colonnes) et $\boldsymbol{\gamma_2}$ (intégration le long des colonnes puis des lignes) a été choisie, comme l'illustre la figure FIG.7.2. On obtient ainsi, en fixant arbitrairement $\phi(0,0) = \psi(0,0) = 0$:

$$\begin{cases} \phi(x,y) = \dfrac{1}{2}\Big(\displaystyle\int_0^x u_{irr}(t,y)dt + \int_0^y v_{irr}(x,t)dt + \int_0^x u_{irr}(t,0)dt + \int_0^y v_{irr}(0,t)dt \Big), \\ \psi(x,y) = \dfrac{1}{2}\Big(\displaystyle\int_0^x v_{sol}(t,y)dt - \int_0^y u_{sol}(x,t)dt + \int_0^x v_{sol}(t,0)dt - \int_0^y u_{sol}(0,t)dt \Big). \end{cases} \tag{7.22}$$

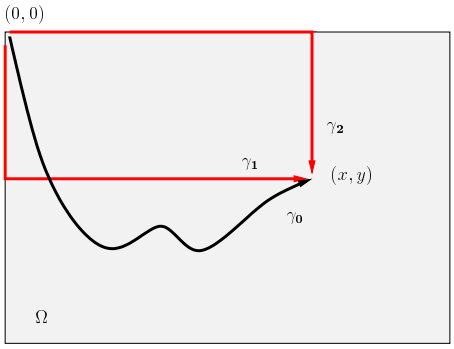


FIG. 7.2 – **Chemins d'intégration possibles pour le calcul de ϕ et ψ.** *Le chemin $\boldsymbol{\gamma_0}$ est quelconque, les chemins $\boldsymbol{\gamma_1}$ et $\boldsymbol{\gamma_2}$ parcourent les lignes et les colonnes.*

Les deux termes de la relation (7.22) sont simples à calculer numériquement car ils consistent en une série d'intégrations unidimensionnelles le long des lignes et des colonnes.

Étudions à présent le comportement de ces fonctions de potentiel au voisinage de points singuliers.

7.5 Extraction de points singuliers

La méthode que nous proposons pour extraire les points singuliers s'appuie sur la constatation que les puits/sources et les vortex correspondent respectivement aux extrema locaux des fonctions de potentiels ϕ et ψ.

En effet, les extrema locaux de ϕ vérifient $\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$ soit, d'après la relation (7.11), $\boldsymbol{v}_{irr} = 0$. Il en est de même pour le champ solénoïdal. Les minima locaux de ϕ et ψ correspondent donc aux points où la vitesse $\boldsymbol{v}_{irr}$ ou $\boldsymbol{v}_{sol}$ est nulle. Par définition, ces points sont donc susceptibles d'être des points critiques.

Un développement du second ordre au voisinage de ces extrema locaux conduit dès lors à :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\epsilon}) = H_\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\epsilon} + o(\boldsymbol{\epsilon}) \\ \boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\epsilon}) = H_\psi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\epsilon} + o(\boldsymbol{\epsilon}), \end{cases} \tag{7.23}$$

où le Hessien H_p de la fonction p ($p = \phi$ ou ψ) est défini par :

$$H_p(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial xy} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \tag{7.24}$$

D'après les relations présentées en (7.11), nous avons $\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{v}_{irr}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\epsilon})$ et $\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{v}_{sol}^{\perp}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\epsilon})$. Au voisinage de points correspondant à des extrema locaux de ϕ ou ψ, la vitesse est par conséquent caractérisée par un modèle de mouvement linéaire du type $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}$ où A est une matrice (2×2). Dans le cas d'un champ irrotationnel, la matrice A_{irr} est définie par :

$$A_{irr}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial xy} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \tag{7.25}$$

Dans le cas solénoïdal, cette matrice devient :

$$A_{sol}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2\psi}{\partial xy} & -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial xy} \end{bmatrix}. \tag{7.26}$$

Dans la section 6.1 du chapitre 6, nous avons décrit le profil d'un champ de vitesses caractérisé par un tel modèle. L'interprétation géométrique (ou le "portrait de phase") de la vitesse résultante dépend de la forme de Jordan de la matrice A. Six configurations particulières sont regroupées dans la figure FIG.6.1.

Étude de la matrice A_{irr}

La matrice A_{irr} est symétrique. Elle est par ailleurs définie positive (ou négative) car elle est relative à un extremum. Ses valeurs propres sont réelles, non nulles et de même signe. D'après ces remarques et les caractéristiques présentées dans la figure FIG.6.1, nous pouvons conclure que les extrema locaux de la fonction ϕ correspondent aux centres des nœuds ou nœuds étoilés.

Ils sont donc le centre de structures de type puits/sources.

Étude de la matrice A_{sol}

La trace de la matrice A_{sol} est nulle. Les extrema locaux de la fonction de courant ψ correspondent donc, d'après la figure FIG.6.1, aux centres des vortex.

Synthèse

En conclusion, les extrema locaux du potentiel de vitesse ϕ correspondent aux centres de puits/sources et ceux de la fonction de courant ψ correspondent aux centres des vortex. Cette propriété permet l'extraction simple des points singuliers relatifs aux vortex et aux puits/sources. Remarquons que cela ne permet pas d'extraire les structures relatives aux points de selle et aux nœud impropres, entités cependant moins informatives du point de vue de la physique.

Il est important de souligner que par cette approche, nous identifions les points singuliers du champ solénoïdal $\boldsymbol{v}_{sol}$ et ceux du champ irrotationnel $\boldsymbol{v}_{irr}$ de manière indépendante. Ceci n'est pas le cas des autres méthodes discutées dans le chapitre précédent. Par exemple, une technique comme celle des indices de Poincaré n'identifie que les points singuliers du champ total $\boldsymbol{v}_{irr} + \boldsymbol{v}_{sol}$. Une telle approche risque d'ignorer la présence de certains points critiques qui ne sont observables que sur la composante irrotationnelle et/ou solénoïdale du champ de vecteurs.

L'accès aux points critiques autorise l'établissement de modèles paramétriques globaux du champ des vitesses de l'écoulement, en modélisant son comportement au voisinage des singularités. Dans la section suivante, nous passons en revue plusieurs modèles possibles.

7.6 Choix d'un modèle

Une première modélisation d'écoulements fluides consiste à employer des fonctions holomorphes.

7.6.1 Modèles s'appuyant sur des fonctions holomorphes

Potentiel $F(z) = cz$

Soit F le potentiel complexe défini par $F(z) = cz$, $c = \alpha + i\beta$ étant une constante complexe. Ce potentiel est holomorphe car dérivable en tout point z. Il peut également s'écrire :

$$F(x,y) = \underbrace{\alpha x - \beta y}_{\psi(x,y)} + i\,\underbrace{(\alpha y + \beta x)}_{\phi(x,y)}. \tag{7.27}$$

Dans ce cas, les lignes de courant et les lignes équipotentielles représentent des droites. Le champ de vecteurs f qui en découle est défini par :

$$f(z) = \overline{F'(z)} = \overline{c}. \tag{7.28}$$

Il s'agit donc d'un écoulement à vitesse constante, apte à modéliser un transport global.

Potentiel $F(z) = \alpha \ln(z)$***,*** α ***réel***

Pour étudier ce potentiel, défini en tout point $z \neq 0$, écrivons le en coordonnées polaires ($z = re^{i\theta}$) :

$$F(r,\theta) = \underbrace{\alpha \ln(r)}_{\psi(r,\theta)} + i\,\underbrace{\alpha\theta}_{\phi(r,\theta)}. \tag{7.29}$$

Le champ de vitesses qui en découle est :

$$f(z) = \overline{F'(z)} = \frac{\alpha}{r} e^{i\theta}. \tag{7.30}$$

Les lignes de courant sont cette fois l'ensemble des droites qui passent par l'origine. Les lignes équipotentielles représentent quant à elles des cercles centrés sur l'origine. Cette représentation permet de modéliser les sources (cas où $\alpha > 0$) ou les puits (cas où $\alpha < 0$), comme l'indiquent les figures Fig.7.3(a) et Fig.7.3(b).

Potentiel $F(z) = i\beta \ln(z)$***,*** β ***réel***

En coordonnées polaires ($z = re^{i\theta}$), nous obtenons, pour tout $z \neq 0$:

$$F(r,\theta) = \underbrace{-\beta\theta}_{\psi(r,\theta)} + i\,\underbrace{\beta \ln(r)}_{\phi(r,\theta)}. \tag{7.31}$$

Le champ de vitesses qui en découle est :

$$f(z) = \overline{F'(z)} = -\frac{i\beta}{r} e^{i\theta}. \tag{7.32}$$

Les lignes de courant représentent l'ensemble des cercles centrés sur l'origine. Les lignes équipotentielles représentent les droites passant par l'origine. Ceci permet donc de représenter les vortex, comme l'indique la figure Fig.7.3 (c).

Couplage des différentes modélisations

Jusqu'à présent, nous avons présenté trois types de modèles, permettant de représenter des puits/sources, vortex ou des mouvements translationnels. La figure FIG.7.3 (d) représente un champ obtenu en couplant ces trois modèles. Nous pouvons noter que cette modélisation permet d'approcher les mouvements spiralés observés dans les écoulements fluides. Ces modèles possèdent cependant certaines limitations.

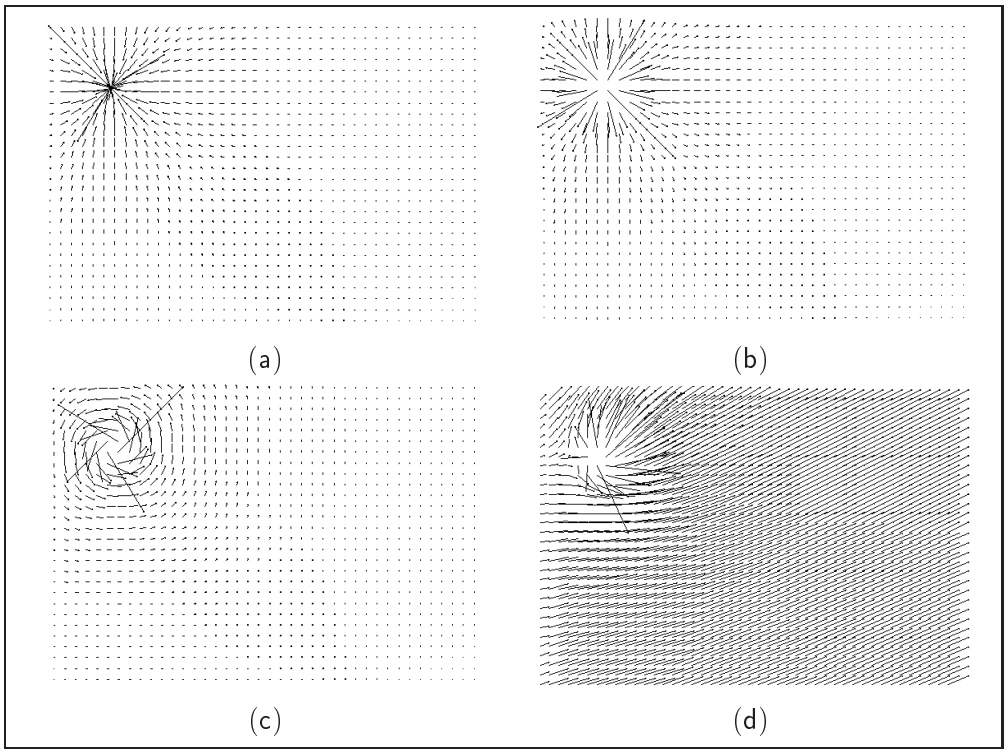


FIG. 7.3 – **Champs issus de potentiels holomorphes**. *(a) : puits, (b) : source, (c) : vortex, (d) : couplage d'une source, d'un vortex et d'un champ constant.*

Limitations

Les potentiels complexes holomorphes $\alpha \ln(z)$ et $i\beta \ln(z)$ sont définis sur l'ensemble du domaine à l'exception de l'origine. En dehors de ces singularités, il est aisé de voir que les deux champs associés sont à divergence et à rotationnel nuls. Ceci est problématique car nous savons que ces quantités sont primordiales pour caractériser et comprendre un écoulement fluide.

Par ailleurs, un point singulier est défini par une vitesse nulle. En prenant les relations (7.30) et (7.32), nous constatons non seulement que la vitesse n'est pas définie en de tels points mais que de plus, elle tend vers l'infini dans leur voisinage.

Ainsi, malgré une interprétation visuelle satisfaisante de chaque modèle, sa généralité reste limitée aux champs à divergence ou à rotationnel nul.

Le modèle de Rankine constitue une extension des potentiels complexes holomorphes ne possédant pas de tels défauts.

7.6.2 Le modèle de Rankine pour les vortex et ses extensions

Le modèle initial

Le modèle de Rankine, originalement défini pour les vortex [Nogawa 97], possède l'avantage d'être simple et de modéliser un champ de vitesses résultant d'un vortex comme un mouvement linéaire à vorticité constante à l'intérieur d'une zone circulaire centrée en ce point singulier. En dehors de cette zone, la vitesse décroît en fonction de l'inverse du carré de la distance au point singulier. La formulation complexe de ce modèle s'écrit :

$$f_v(z) \triangleq \begin{cases} g_v(z) = -\dfrac{i\beta z}{|z|^2} & \text{si} \quad |z| \geq r \\ h_v(z) = -\dfrac{i\beta z}{r^2} & \text{si} \quad |z| < r, \end{cases} \tag{7.33}$$

où β représente la "force" associée au vortex et r correspond au rayon délimitant les deux zones à considérer. A l'extérieur de la zone délimitée par ce rayon, ce modèle est analogue à celui défini par la relation (7.32). La vorticité est donc nulle. En revanche, à l'intérieur de cette zone, le modèle de mouvement linéaire associé est à vorticité constante et égale à $2\beta/r^2$. La figure Fig.7.4 (c) représente un champ solénoïdal construit à partir du modèle de Rankine.

Extension aux puits/sources

Le modèle de Rankine a initialement été proposé pour modéliser des écoulements incompressibles. Dans ce cas, le mouvement ne comporte pas de structures divergentes telles que les puits/sources. Il est néanmoins possible d'étendre la modélisation précédente dans le cas de ces structures de la manière suivante :

$$f_p(z) \triangleq \begin{cases} g_p(z) = \dfrac{\alpha z}{|z|^2} & \text{si} \quad |z| \geq r \\ h_p(z) = \dfrac{\alpha z}{r^2} & \text{si} \quad |z| < r, \end{cases} \tag{7.34}$$

où α est la force de cette structure, positive (resp. négative) dans le cas d'une source (resp. un puits). Ce modèle correspond également à celui défini par la relation (7.30) dans la zone où le mouvement est non linéaire. A l'intérieur de la zone circulaire centrée sur le point critique de rayon r, le mouvement linéaire possède une divergence constante de $2\alpha/r^2$. On trouvera une illustration d'un puits, d'une source et du couplage de ces deux mouvements avec un champ translationnel sur la Fig.7.4.

La figure Fig.7.5 représente l'allure de la vitesse au voisinage d'une singularité, selon les deux familles de modèles proposés (vitesse issue de potentiels holomorphes et vitesse représentée par le modèle de Rankine). Dans le cas des potentiels holomorphes, la vitesse croît en s'approchant du point critique et tend vers l'infini en celui-ci. Selon le modèle de Rankine, cette vitesse est nulle au point critique, croît ensuite linéairement dans la zone délimitée par le rayon r et décroît de manière non-linéaire au delà de ce rayon.

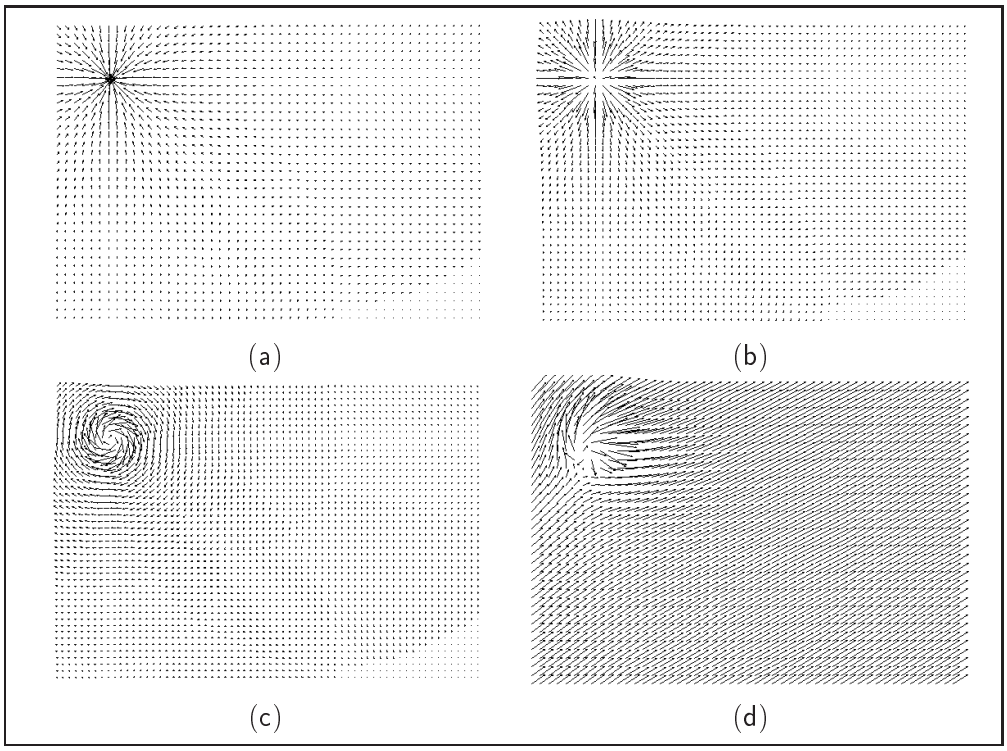


FIG. 7.4 – **Modèle de Rankine**. *(a) : puits, (b) : source, (c) : vortex, (d) : couplage d'une source, d'un vortex et d'un champ constant.*

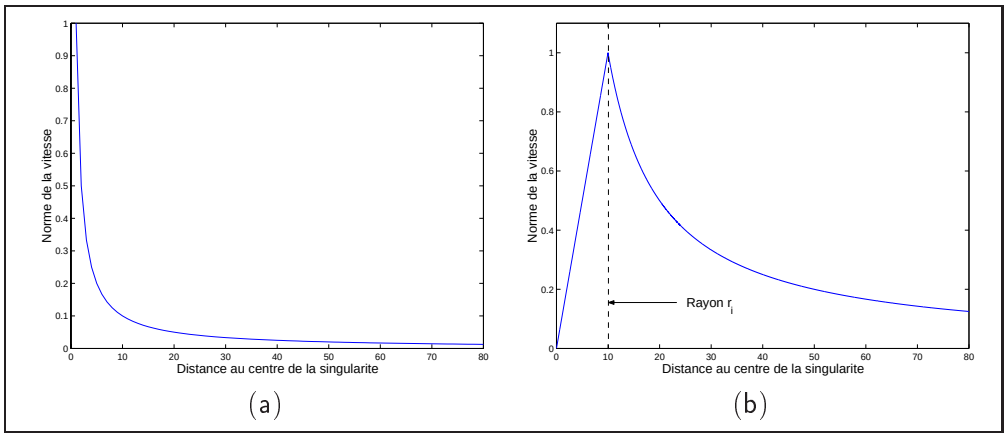


FIG. 7.5 – **Profil de la norme des vitesses au voisinage d'un point critique**. *(a) : cas d'une vitesse issue des potentiels holomorphes présentés en 7.6.1 et (b) : vitesse issue du modèle de Rankine.*

Propriétés intéressantes

Au voisinage d'un point singulier, le potentiel de vitesse équivalent au modèle de Rankine pour les puits/sources s'écrit :

$$\phi(x,y) = \frac{\alpha}{2r^2}(x^2 + y^2) + \phi(0,0). \tag{7.35}$$

Dans le cadre d'un vortex, la fonction de courant est :

$$\psi(x,y) = \frac{\beta}{2r^2}(x^2 + y^2) + \psi(0,0). \tag{7.36}$$

Ainsi, ces potentiels contiennent bien un extremum local en leur point critique. Par ailleurs, en dehors des domaines de linéarité, ces potentiels deviennent :

$$\begin{cases} \phi(x,y) = \dfrac{\alpha}{2}\ln(x^2 + y^2) + \phi(0,0) \text{ dans le cas d'un puits/source et} \\ \psi(x,y) = \dfrac{\beta}{2}\ln(x^2 + y^2) + \psi(0,0) \text{ dans le cas d'un vortex.} \end{cases} \tag{7.37}$$

D'après les relations (7.35), (7.36) et (7.37), les potentiels ψ et ϕ ne contiennent des extrema locaux qu'en leurs points critiques.
Ainsi, le modèle de Rankine respecte les conditions suivantes :

1. la vitesse aux points critiques est nulle ;
2. la divergence ou la vorticité au voisinage des singularités est constante et non nulle ;
3. les extrema locaux des potentiels résultant de ce modèle correspondent aux points critiques.

D'après ces trois remarques, nous choisissons de nous appuyer sur de tels modèles pour extraire une représentation paramétrique d'un champ de vitesses. La section suivante détaille la méthode mise en œuvre pour identifier les paramètres correspondant au modèle de Rankine.

7.7 Identification de modèles de Rankine à partir d'un champ de vitesses

Pour effectuer une analyse complète d'un champ de vitesses, l'ultime étape consiste à associer à chaque point singulier détecté le paramètre représentant sa force (α pour un puits/source et β pour un vortex) et son rayon dans lequel le domaine de linéarité est valide. Pour mener cela à bien, nous nous appuyons sur le modèle de Rankine. Nous rappelons que le champ $\boldsymbol{v}$ a préalablement été séparé selon la décomposition de Helmholtz et que pour chacune des deux composantes irrotationnelles et solénoïdales, les points singuliers ont été extraits par identification des extrema locaux (voir la section 7.5). On note P le nombre de points critiques correspondant aux centres de vortex et N celui correspondant aux centres des puits/sources. Ces points sont localisés en $\boldsymbol{x}_{v\imath}$ pour les vortex (resp. $\boldsymbol{x}_{p\jmath}$ pour les puits/sources), sont représentés en notation complexe par $z_{v\imath} = x_{v\imath} + iy_{v\imath}$ (resp. $z_{p\jmath} = x_{p\jmath} + iy_{p\jmath}$), ont pour rayon $r_{v\imath}$ (resp. $r_{p\jmath}$) et pour force $\beta_\imath$ (resp. $\alpha_\jmath$), $\imath = 1,...,P$ (resp. $\jmath = 1,...,N$).

Supposons à présent que les champs irrotationnel $\boldsymbol{v}_{irr}$ et solénoïdal $\boldsymbol{v}_{sol}$ diffèrent de leur description paramétrique (suivant le modèle de Rankine) par un bruit blanc Gaussien de variance σ^2. En notant $f_{sol} \triangleq u_{sol} + iv_{sol}$ (resp. $f_{irr} \triangleq u_{irr} + iv_{irr}$) le champ solénoïdal $\boldsymbol{v}_{sol}$ (resp. irrotationnel $\boldsymbol{v}_{irr}$) réel suivant une notation complexe, nous obtenons :

$$\begin{cases} f_{sol}(z) = \sum_{\imath=1}^{P} \Big(f_v(z - z_{v\imath}) + a(z) + ib(z) \Big), \\ f_{irr}(z) = \sum_{\jmath=1}^{N} \Big(f_p(z - z_{p\jmath}) + a(z) + ib(z) \Big), \end{cases}$$

où $a(z)$ et $b(z)$ suivent une loi Gaussienne $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et f_v et f_p sont les modèles de Rankine définis en (7.33) et (7.34).

Une estimation au sens du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle de Rankine vise à minimiser la log-vraisemblance suivante :

$$\mathcal{L}(\Theta) = \underbrace{\iint_{\Omega} |f_{sol}(z) - \sum_{\imath} f_v(z - z_{v\imath})|^2 dz}_{\mathcal{L}_{sol}} + \underbrace{\iint_{\Omega} |f_{irr}(z) - \sum_{\jmath} f_p(z - z_{p\jmath})|^2 dz}_{\mathcal{L}_{irr}}, \tag{7.38}$$

en fonction du vecteur inconnu de paramètres $\Theta \triangleq (r_{v\imath},\beta_\imath)_{\imath=1}^{P} \times (r_{p\jmath},\alpha_\jmath)_{\jmath=1}^{N}$ sur l'ensemble du domaine de l'image Ω. Détaillons cette estimation dans le cas d'un champ solénoïdal puis irrotationnel.

7.7.1 Cas d'un champ solénoïdal

Sous l'hypothèse que deux domaines circulaires de linéarité, correspondant à deux singularités de même nature (puits/source ou vortex), ne s'intersectent pas, la partie solénoïdale de la relation (7.38) s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sol}(\Theta) = \sum_{\imath=1}^{P} \iint_{\mathcal{V}_\imath} |f_{sol}(z) - h_v(r_{v\imath}, z - z_{v\imath}) - \sum_{k \neq \imath} g_v(z - z_{vk})|^2 dz \\ + \iint_{\overline{\mathcal{V}}_{sol}} |f_{sol}(z) - \sum_{\imath=1}^{P} g_v(z - z_{v\imath})|^2 dz, \end{aligned} \tag{7.39}$$

où $\mathcal{V}_\imath$ représente le disque associé à la $\imath$ème singularité (centrée en $z_{v\imath}$) et $\overline{\mathcal{V}}_{sol} \triangleq \Omega - \mathcal{V}_{sol}$ est le complémentaire dans l'image Ω de $\mathcal{V}_{sol} = \bigcup_{\imath=1}^{P} \mathcal{V}_\imath$.

Il est important de remarquer que l'hypothèse de non-superposition de deux domaines circulaires ne s'applique qu'à des singularités de même nature. Ceci n'exclut pas la possibilité de coupler un vortex et un puits/source pour décrire une spirale. La figure Fig.7.6 représente différentes possibilités d'agencement de domaines circulaires.

Bien que cette hypothèse de non-superposition de domaines linéaires de même nature soit évidemment une contrainte importante, celle-ci ne nous a pas semblé gênante dans

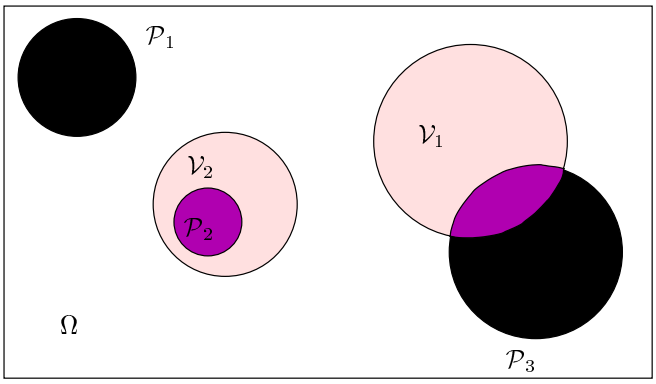


FIG. 7.6 – **Exemple de supports relatifs au modèle de Rankine** *; les disques associés aux vortex, notés $\mathcal{V}$, sont représentés en clair et ceux associés aux puits/sources, notés $\mathcal{P}$, sont en noir ; les couleurs intermédiaires correspondent aux régions ou la divergence et la vorticité sont simultanément non nulles.*

nos expérimentations. En revanche, cela conduit à des simplifications importantes de calculs : dans la relation (7.39), une intersection des domaines de linéarité ferait intervenir les fonctions $h_{v\imath}$ dans le terme $\sum_{k\neq\imath} g_v(z - z_{vk})$ qu'il faudrait alors traiter au cas par cas.

Pour s'assurer du respect de cette hypothèse, nous avons choisi d'inclure dans la minimisation de (7.39) une fonction visant à pénaliser fortement cette fonctionnelle lorsque deux disques tendent à s'intersecter. Notons $\mathcal{C}(r_{v\imath},r_{v\jmath})$ une telle fonction appliquée à toute paire de singularités $(\imath,\jmath)$ de rayon $(r_{v\imath},r_{v\jmath})$. Son choix sera discuté dans la section 7.7.1.2. Le but est alors d'estimer le vecteur de paramètres $\Theta_{sol} = (r_{v\imath},\beta_\imath)_{\imath=1}^P$ qui minimise :

$$\mathcal{L}c_{sol}(\Theta_{sol}) = \mathcal{L}_{sol}(\Theta_{sol}) + \sum_{(\imath,\jmath),\imath\neq\jmath} \mathcal{C}(r_{v\imath},r_{v\jmath}), \tag{7.40}$$

pour toute paire de singularités $(\imath,\jmath)$. En exploitant la relation précédente et les expressions du modèle de Rankine, la fonction $\mathcal{L}c_{sol}$ s'exprime :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}c_{sol}(r_v,\beta) = &\sum_{\imath=1}^{P} \iint_{\mathcal{V}_\imath} \left\| \boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp}{r_{v\imath}^2}\beta_\imath + \sum_{k=1\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk}\|^2}\beta_k \right\|^2 d\boldsymbol{x} \\ &+ \iint_{\overline{\mathcal{V}}_{sol}} \left\| \boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{P} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk}\|^2}\beta_k \right\|^2 d\boldsymbol{x} + \sum_{(\imath,\jmath),\imath\neq\jmath} \mathcal{C}(r_{v\imath},r_{v\jmath}),\end{aligned} \tag{7.41}$$

avec $r_v = \{r_{v\imath}\}_{\imath=1}^P$ et $\beta = \{\beta_\imath\}_{\imath=1}^P$. Minimiser la relation (7.41) revient à déterminer Θ_{sol} tel que $\boldsymbol{\nabla}\mathcal{L}c_{sol}(\Theta_{sol}) = 0$. Étudions successivement ce que cela implique pour la recherche de r_v et β.

7.7.1.1 *Estimation du rayon*

En s'appuyant sur le résultat développé dans l'annexe E qui stipule que pour une fonction F définie par :

$$F = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y,R)dxdy + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} g(x,y,R)dxdy, \tag{7.42}$$

sa dérivation par rapport au rayon R s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\iint_{\mathcal{D}} f + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} g\right) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f(R)}{\partial R} + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial g(R)}{\partial R}, \tag{7.43}$$

nous avons, pour un rayon $r_{v\imath}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}c_{sol}(\Theta_{sol})}{\partial r_{v\imath}} = -4 \iint_{\mathcal{V}_\imath} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp}{r_{v\imath}^2}\beta_\imath + \sum_{k=1\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk}\|^2}\beta_k\right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp}{r_{v\imath}^3}\beta_\imath d\boldsymbol{x} \\ + \sum_{k=1,\ k\neq\imath}^{P} \frac{\partial \mathcal{C}(r_{v\imath},r_{vk})}{\partial r_{v\imath}}.\end{aligned} \tag{7.44}$$

Annuler cette relation implique :

$$\begin{aligned}4 \iint_{\mathcal{V}_\imath} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(x,y) \wedge (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath}) \cdot \sum_{k=1\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk})\beta_k}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk}\|^2}\right] d\boldsymbol{x} - \iint_{\mathcal{V}_\imath} \frac{4\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2\beta_\imath}{r_{v\imath}^2} d\boldsymbol{x} \\ + \frac{r_{v\imath}^3}{\beta_\imath} \sum_{k=1,\ k\neq\imath}^{P} \frac{\partial \mathcal{C}(r_{v\imath},r_{vk})}{\partial r_{v\imath}} = 0.\end{aligned} \tag{7.45}$$

Le terme $\iint_{\mathcal{V}_\imath} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{v\imath}) \cdot \sum_{k=1\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk})\beta_k}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk}\|^2}$ est en fait nul. En effet, il peut s'écrire de la manière suivante, en coordonnées polaires (r,θ) :

$$\int_0^{r_{v\imath}} \left[\int_0^{2\pi} \boldsymbol{n}(\theta) \cdot \boldsymbol{W}(r,\theta) r d\theta\right] r dr, \tag{7.46}$$

où $\boldsymbol{W}(r,\theta) = \sum_{k\neq\imath} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk})\beta_k}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{vk}\|^2}$ est un champ de vitesses à divergence nulle (correspondant à l'influence des domaines non-linéaires des singularités sur le $\imath$ème vortex) et $\boldsymbol{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ est le vecteur normal d'un cercle unitaire. On identifie entre les crochets de (7.46) le flux de $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ le long d'un cercle $\mathcal{D}(r)$ de rayon r. En exploitant le théorème de la divergence rappelé au chapitre 1, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{n}(\theta) \cdot \boldsymbol{W}(r,\theta) r d\theta = \iint_{\mathcal{D}(r)} \operatorname{div}\Big(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\Big) d\boldsymbol{x}. \tag{7.47}$$

Le champ $\boldsymbol{W}$ étant à divergence nulle, ce terme s'annule et le problème de minimisation est ramené à la résolution de :

$$\begin{aligned} &4 \iint_{\mathcal{V}_i} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(x,y) \wedge (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})\right] d\boldsymbol{x} - \iint_{\mathcal{V}_i} \frac{4\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi}\|^2 \beta_i}{r_{vi}^2} d\boldsymbol{x} \\ &+ \frac{r_{vi}^3}{\beta_i} \sum_{k=1,\ k\neq i}^{P} \frac{\partial \mathcal{C}(r_{vi}, r_{vk})}{\partial r_{vi}} = 0. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Plusieurs méthodes sont envisageables pour résoudre l'équation non-linéaire présentée ci-dessus, où le domaine d'intégration $\mathcal{V}_i$ dépend de la variable inconnue r_{vi} à estimer. Nous avons choisi d'employer, pour sa simplicité, une méthode itérative dite du "point fixe". Ces techniques consistent à résoudre un problème de la forme $x = g(x)$ par une succession d'itérations p telles que $x^{(p+1)} = g(x^{(p)})$. Pour appliquer un tel procédé à notre problème d'estimation du rayon r_{vi}, récrivons la relation (7.48) par :

$$\begin{aligned} &4 \iint_{\mathcal{V}_i^{(p)}} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(x,y) \wedge (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})^2\right] d\boldsymbol{x} \\ &- \frac{4}{r v_i^{2(p+1)}} \iint_{\mathcal{V}_i^{(p)}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi}\|^2 \beta_i d\boldsymbol{x} + \frac{r_{vi}^{3\ (p)}}{\beta_i} \sum_{k=1,\ k\neq i}^{P} \frac{\partial \mathcal{C}(r_{vi}, r_{vk})}{\partial r_{vi}}\Big|_{r v_i^{(p)}} = 0. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Nous obtenons ainsi :

$$r_{vi}^{(p+1)} = \sqrt{\frac{\mathcal{B}_i^{(p)}}{\mathcal{A}_i^{(p)} + \frac{r_{vi}^{3\ (p)}}{\beta_i} \sum_{k=1,\ k\neq i}^{P} \frac{\partial \mathcal{C}(r_{vi}, r_{vk})}{\partial r_{vi}}\Big|_{r v_i^{(p)}}}}, \tag{7.50}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i^{(p)} = 4 \iint_{\mathcal{V}_i^{(p)}} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(x,y) \wedge (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})\right] d\boldsymbol{x}, \\ \mathcal{B}_i^{(p)} = 4 \iint_{\mathcal{V}_i^{(p)}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi}\|^2 \beta_i d\boldsymbol{x} = 2\pi r_{vi}^{4\ (p)} \beta_i. \end{cases} \tag{7.51}$$

Les expressions $\mathcal{A}_i^{(p)}$ et $\mathcal{B}_i^{(p)}$ sont directement calculées à partir des données $\boldsymbol{v}_{sol}$ et $\boldsymbol{x}_{vi}$ et des valeurs courantes $r_{vi}^{(p)}$ et β_i. Il reste à présent à choisir la fonction de pénalisation $\mathcal{C}$.

7.7.1.2 Choix de la fonction de pénalisation

Comme nous l'avons mentionné, une telle fonction doit idéalement avoir de très faibles valeurs si la contrainte de non-intersection des disques est respectée. Ce cas se traduit par une valeur négative de $\mathrm{q}_{ij} = r_{vi} + r_{vj} - d_{ij}$, définie pour deux rayons r_{vi} et r_{vj}, de centres $\boldsymbol{x}_{vi}$ et $\boldsymbol{x}_{vj}$ et distants de d_{ij}. À l'inverse, si $\mathrm{q}_{ij} > 0$, cette fonction doit être fortement élevée, de manière à ne jamais autoriser une telle situation.

Il est fréquent de s'appuyer, pour ce type de problèmes, sur une approximation de la fonction de Heaviside associée à un coefficient de pénalisation λ fortement élevé (en pratique $\lambda = 10^{30}$). Par exemple, nous pouvons utiliser l'approximation proposée par Chan et Vese dans [Chan 01] pour définir $\mathcal{C}$ par :

$$\mathcal{C}(\mathrm{q}_{ij}) = \lambda H_\epsilon(\mathrm{q}_{ij}) = \frac{\lambda}{2}\Big(1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{atan}(\frac{\mathrm{q}_{ij}}{\epsilon})\Big). \tag{7.52}$$

La dérivation de cette fonction est une approximation de la fonction de Dirac :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_i}(\mathrm{q}_{ij}) = \lambda \delta_\epsilon(\mathrm{q}_{ij}) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \mathrm{q}_{ij}^2}. \tag{7.53}$$

Les représentations graphiques de ces deux fonctions sont visibles sur la figure FIG.7.7 pour différentes valeurs de ϵ. De telles fonctions semblent être adaptées à notre problème. En

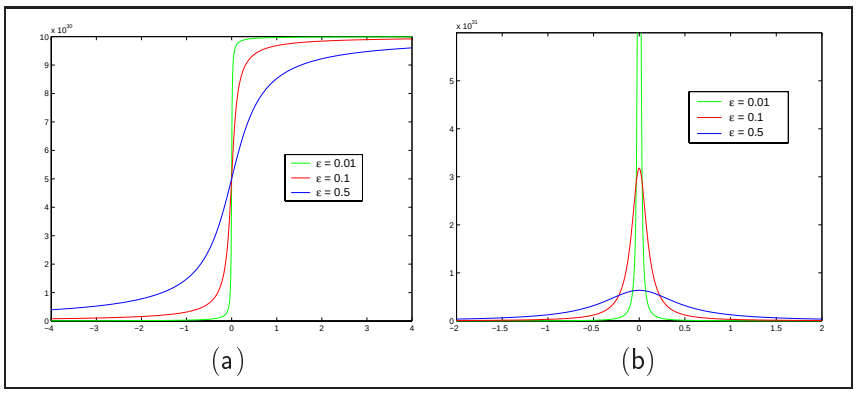


FIG. 7.7 – **Approximations des fonctions de Heaviside et de Dirac.** *(a) : représentation d'une fonction de pénalisation définie par une approximation de Heaviside associée à un fort coefficient de pénalisation et (b) sa dérivée pour trois valeurs différentes de ϵ*

effet, en initialisant le procédé dans un espace admissible des solutions (aucun disque ne s'intersecte), les différents rayons évoluent de manière continue et la contrainte est respectée par l'intermédiaire de $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_i}$ qui maintient les solutions dans un domaine admissible.

Néanmoins, notre stratégie de minimisation employée (la méthode du point fixe) ne garantit pas nécessairement une évolution continue des différents rayons r_{vi}s. En effet, la différence $r_{vi}^{(p+1)} - r_{vi}^{(p)}$ peut être significative. Par conséquent, si $r_{vi}^{(p)}$ est une solution admissible respectant la contrainte, $r_{vi}^{(p+1)}$ peut ne plus appartenir à cet espace de solutions, si l'évolution est trop violente. Dans ce cas, suivant les relations (7.50) et (7.53), la contribution de $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_{vi}}$ dans l'estimation du rayon sera négligée.

La contrainte découlant de $\mathcal{C}$ n'est en fait opérationnelle qu'à la frontière entre le domaine admissible et non admissible. La méthode du point fixe autorisant des évolutions non continues des différentes valeurs de $r_{vi}^{(p)}$, la "barrière" en zéro de $\partial\mathcal{C}/\partial r_{vi}$ peut être franchie et la contribution de la pénalisation par l'intermédiaire de $\partial\mathcal{C}/\partial r_{vi}$ devient alors négligeable.

Pour s'affranchir de ce problème particulier, il est nécessaire de définir une fonction dont la dérivée n'est pas seulement "active" (c'est à dire apportant une pénalisation significative) à la frontière des deux domaines mais sur l'ensemble de l'espace non admissible

des solutions. Ainsi, nous remplaçons la contrainte définie en (7.52) par :

$$\mathcal{C}(\mathrm{q}_{ij}) = \lambda \mathrm{q}_{ij} H_\epsilon(\mathrm{q}_{ij}), \tag{7.54}$$

dont la dérivée devient :

$$\mathcal{C}'(\mathrm{q}_{ij}) = \frac{\partial \mathcal{C}(\mathrm{q}_{ij})}{\partial r_{vi}} = \lambda \Big(H_\epsilon(\mathrm{q}_{ij}) + \mathrm{q}_{ij} \delta_\epsilon(\mathrm{q}_{ij}) \Big).$$

Des représentations graphiques de cette contrainte $\mathcal{C}$ et de sa dérivée $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_{vi}}$ sont données à la figure FIG.7.8. Nous remarquons dans ce cas que la valeur de $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_{vi}}$, intervenant dans le calcul de r_{vi} par la relation (7.50), n'est pas seulement "active" à la frontière des deux domaines mais sur l'ensemble de l'espace où la valeur de $r_{vi}^{(p+1)}$ n'est pas admissible.

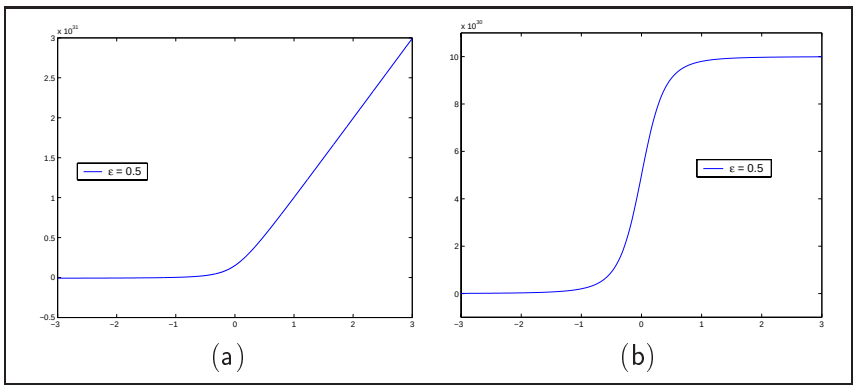


FIG. 7.8 – **Nouvelles fonctions de pénalisation.** *(a) représentation graphique de la contrainte retenue et (b) sa dérivée pour* $\epsilon = 0.5$

Étudions à présent l'estimation des paramètres β représentant la "force" de ces vortex.

7.7.1.3 Estimation de la force

Dans ce cas, dérivons la relation (7.41) par rapport à la force β_i. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}c_{sol}(\Theta_{sol})}{\partial \beta_i} = 2 \iint_{\mathcal{V}_i} & \left[\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})^\perp}{r_{vi}^2} \beta_i + \sum_{k=1,\ k\neq i}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk}\|^2} \beta_k \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})^\perp}{r_{vi}^2} d\boldsymbol{x} \\
+ 2 \iint_{\overline{\mathcal{V}}_{sol}} & \left[\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk}\|^2} \beta_k \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi}\|^2} d\boldsymbol{x} \\
+ 2 \sum_{k=1\ k\neq i}^{P} \iint_{\mathcal{V}_k} & \left[\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{r_{vk}^2} \beta_k + \sum_{p=1,\ p\notin\{k,i\}}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vp})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vp}\|^2} \beta_p \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vi}\|^2} d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Annuler cette relation conduit au système suivant :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}_{sol}(\Theta_{sol})}{\partial \beta_\imath} = 0 \\
\Leftrightarrow &- \frac{\beta_\imath}{r_{v\imath}^4} \iint_{\mathcal{V}_\imath} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2 d\boldsymbol{x} + \frac{1}{r_{v\imath}^2} \iint_{\mathcal{V}_\imath} \left[(\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk}\|^2} \beta_k) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp \right] d\boldsymbol{x} \\
&\underbrace{- \beta_\imath \Big(\iint_{\overline{\mathcal{V}}_{sol}} \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2} d\boldsymbol{x} + \sum_{k=1,\ k\neq\imath}^{P} \iint_{\mathcal{V}_k} \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk}\|^2} d\boldsymbol{x} \Big)}_{A} \\
&\underbrace{+ \iint_{\overline{\mathcal{V}}_{sol}} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1,\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk}\|^2} \beta_k \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2} d\boldsymbol{x}}_{B} \\
&\underbrace{+ \sum_{k=1,\ k\neq\imath}^{P} \iint_{\mathcal{V}_k} \left[\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{r_{vk}^2} \beta_k + \sum_{p=1,\ p\notin\{k,\imath\}}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vp})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vp}\|^2} \beta_p \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2}}_{C} = 0
\end{aligned}
\tag{7.56}
$$

Pour résoudre cette équation, remarquons que :

$$
\iint_{\mathcal{V}_\imath} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2 d\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} r_{v\imath}^4. \tag{7.57}
$$

Par ailleurs, lorsque nous estimons les forces $\beta_\imath$'s, tous les rayons $r_{v\imath}$'s respectent la contrainte de non-superposition des disques. Ainsi, $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_{v\imath}}(r_{v\imath}, r_{v\jmath}) = 0$ pour tout couple $(\imath,\jmath)$ et d'après (7.50-7.51), nous avons :

$$
\iint_{\mathcal{V}_\imath} \left[(\boldsymbol{v}_{sol}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1\ k\neq\imath}^{P} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk})^\perp}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{vk}\|^2} \beta_k) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath})^\perp \right] d\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} \beta_\imath r_{v\imath}^2. \tag{7.58}
$$

Les termes A, B et C ne font pas intervenir le paramètre $\beta_\imath$ recherché. Ils sont donc calculés directement à partir des observations $\boldsymbol{v}_{sol}$ et $\boldsymbol{x}_{v\imath}$ et des valeurs courantes de r_v et β. Le système est donc linéaire en $\beta_\imath$ et, d'après (7.56), (7.57) et (7.58), nous avons :

$$
\beta_\imath = \frac{B + C}{A}, \text{ avec } \quad A = \iint_{\Omega - \mathcal{V}_\imath} \frac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{v\imath}\|^2} d\boldsymbol{x}. \tag{7.59}
$$

7.7.1.4 Synthèse

L'ensemble du procédé d'estimation constitue une sorte de minimisation type Gauss-Seidel, où le principe est d'annuler successivement les dérivées partielles de la fonctionnelle définie en (7.41) par rapport à chacune des inconnues.

La dérivée partielle par rapport à chaque β_i conduit à un système linéaire, tandis que celle par rapport à chaque rayon r_{vi} est non-linéaire. Dans ce cas, une méthode itérative dite du "point fixe" est employée pour résoudre l'équation résultante.

L'ensemble des estimations successives est conduit de manière alternée par rapport à chacune des inconnues jusqu'à stabilisation de la solution.

7.7.2 Cas d'un champ irrotationnel

La partie irrotationnelle s'écrit de manière similaire en considérant les domaines $\mathcal{P}_{irr} = \bigcup_{\jmath=1}^{N} \mathcal{P}_\jmath$, où $\mathcal{P}_\jmath$ représente le disque associé à la $\jmath$ème singularité centrée en $z_{p\jmath}$ et $\overline{\mathcal{P}}_{irr}$ son complémentaire. On associe alors à ces domaines les équations adéquates.

7.7.2.1 Estimation du rayon

Par un développement analogue, nous obtenons un système non-linéaire pour l'estimation du rayon $r_{p\jmath}$ correspondant à la $\jmath$ème singularité de type puits/source. Nous employons une nouvelle fois une méthode du point fixe et obtenons :

$$r_{p\jmath}^{(p+1)} = \sqrt{\frac{\mathcal{B}_\jmath^{(p)}}{\mathcal{A}_\jmath^{(p)} + \frac{r_{p\jmath}^{3\ (p)}}{\alpha_\jmath} \sum_{k=1,\ k\neq\jmath}^{N} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r_{p\jmath}}(r_{p\jmath}^{(p)}, r_{pk})}}, \tag{7.60}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\jmath^{(p)} = 4 \iint\limits_{\mathcal{P}_\jmath^{(p)}} \left[\boldsymbol{v}_{irr}(x,y) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath}) \right] d\boldsymbol{x}, \\ \mathcal{B}_\jmath^{(p)} = 4 \iint\limits_{\mathcal{P}_\jmath^{(p)}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath}\|^2 \alpha_\jmath d\boldsymbol{x} = 2\pi r_{p\jmath}^{4\ (p)} \alpha_\jmath. \end{cases} \tag{7.61}$$

7.7.2.2 Estimation de la force

La relation optimale pour exprimer la force $\alpha_\jmath$ associée est obtenue de manière similaire à la relation qui détermine β_i. Nous obtenons

$$\alpha_\jmath = \frac{B + C}{A}, \tag{7.62}$$

avec :

$$\begin{cases} A = \iint\limits_{\Omega - \mathcal{P}_\jmath} \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath}\|^2} d\boldsymbol{x} \\ B = \iint\limits_{\overline{\mathcal{P}}_{irr}} \left[\boldsymbol{v}_{irr}(\boldsymbol{x}) - \displaystyle\sum_{k=1,\ k\neq\jmath}^{N} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{pk})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{pk}\|^2} \alpha_k \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath}\|^2} d\boldsymbol{x}, \\ C = \displaystyle\sum_{k=1,\ k\neq\jmath}^{N} \iint\limits_{\mathcal{P}_k} \left[\boldsymbol{v}_{irr}(\boldsymbol{x}) - \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{pk})}{r_{pk}^2} \alpha_k - \sum_{l=1,\ l\notin\{k,\jmath\}}^{N} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{pl})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{pl}\|^2} \alpha_l \right] \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{p\jmath}\|^2} d\boldsymbol{x}. \end{cases} \tag{7.63}$$

Dans ce cas, A, B et C ne dépendent pas du paramètre α_j recherché. Ces termes sont donc calculés à partir des observations $\boldsymbol{v}_{irr}$ et $\boldsymbol{x}_{pj}$ et des estimations courantes de r_p et α.

7.8 Robustesse au bruit

Un certain nombre d'étapes a été nécessaire afin d'obtenir cette description paramétrique du champ des vitesses.

Partant d'un champ $\boldsymbol{v}$ recalé de sa composante laminaire, il est séparé à l'aide d'une transformée de Fourier par l'intermédiaire des relations décrites dans (7.19) en une composante irrotationnelle et solénoïdale. À partir de ces deux composantes, la fonction de courant ψ et le potentiel de vitesse ϕ sont obtenus par deux intégrations numériques (relation (7.22)). Les points critiques sont alors localisés par la recherche des extrema locaux de ψ et ϕ. Enfin, en s'appuyant sur la méthode proposée dans la section précédente, les paramètres de force et de rayon selon le modèle de Rankine sont associés à chaque singularité.

Pour estimer le nombre de singularités nécessaire à la description du champ des vitesses et afin d'être robuste au bruit, nous avons considéré la distance d_B de Bhattacharyya entre deux lois Gaussiennes multidimensionnelles $\mathcal{N}_1(\boldsymbol{\mu_1},\Sigma_1)$ et $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu_2},\Sigma_2)$ [Basseville 89], définie par :

$$d_B[\mathcal{N}_1(\boldsymbol{\mu_1},\Sigma_1),\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu_2},\Sigma_2)] = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\mu_2}-\boldsymbol{\mu_1})^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\boldsymbol{\mu_2}-\boldsymbol{\mu_1}) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\det(\Sigma_2+\Sigma_1)}{2\sqrt{\det(\Sigma_1\Sigma_2)}}\right). \tag{7.64}$$

Pour chaque composante (irrotationnelle ou solénoïdale), cette distance est calculée entre deux distributions gaussiennes. La première correspond à l'erreur entre le champ réel et le champ paramétrique reconstruit avec n singularités. La deuxième correspond à cette même erreur avec cette fois $n+1$ singularités. Cette erreur s'exprime :

$$d_B[\mathcal{N}_1(\boldsymbol{v}_\bullet - \boldsymbol{v}^n_{\Theta_\bullet}),\mathcal{N}_2(\boldsymbol{v}_\bullet - \boldsymbol{v}^{n+1}_{\Theta_\bullet})], \tag{7.65}$$

où $\bullet = irr$ ou $\bullet = sol$ et le champ $\boldsymbol{v}^n_{\Theta_\bullet}$ correspond au champ paramétrique obtenu suivant le modèle de Rankine appliqué au vecteur de paramètres $\Theta^n_\bullet$ comprenant les n premières singularités. Ainsi, partant d'un nombre nul de singularités, leur nombre est progressivement incrémenté. Le procédé est stoppé soit lorsque l'erreur décrite par la relation (7.65) cesse de décroître, soit lorsque cette erreur est inférieure à un certain seuil. Dans ce dernier cas, ceci signifie que l'ajout d'une nouvelle singularité n'apporte plus d'information à la reconstruction paramétrique.

Rappelons qu'au voisinage d'une singularité, le déplacement peut être approché par un modèle linéaire. Dans ce cas, le potentiel f correspondant ($f = \phi$ ou $f = \psi$) peut s'écrire (en supposant que cette singularité soit centrée en l'origine pour une meilleure lisibilité) par $f = a(x^2+y^2)$, comme cela est le cas par exemple pour le modèle de Rankine au travers de (7.35) ou (7.36). D'après les relations (7.25) et (7.26) définissant le modèle de mouvement linéaire dans le voisinage d'une singularité, la vorticité ou la divergence correspondante est donnée par $2a$. Nous avons ainsi choisi de classer les singularités en fonction de la valeur absolue du potentiel ϕ ou ψ associée à chaque extremum local. Cela permet en effet

de traiter en priorité les singularités les plus significatives, en termes de divergence et de vorticité.

La figure FIG.7.9 synthétise la méthode d'analyse complète proposée dans ce chapitre.

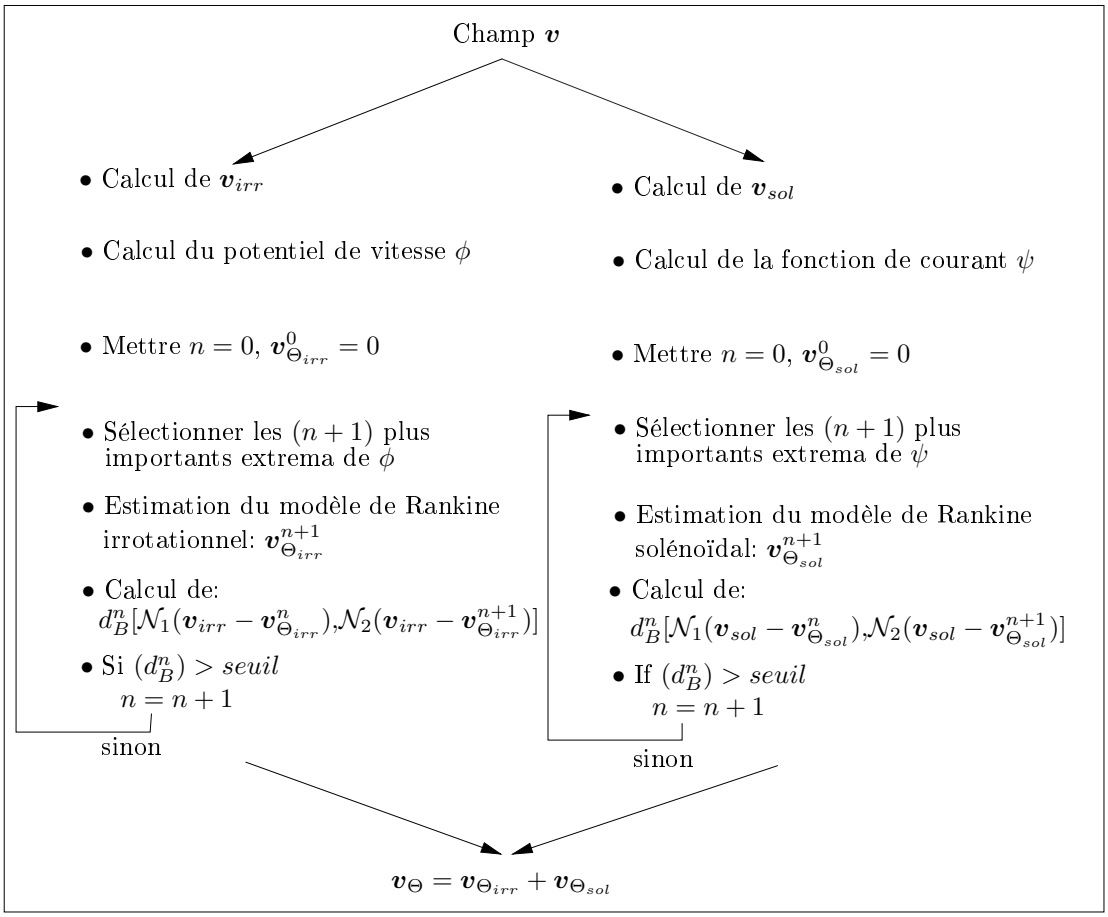


FIG. 7.9 – **Schéma récapitulatif**. *Détail des étapes nécessaires pour l'obtention d'une description paramétrique d'un champ des vitesses.*

7.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche originale pour détecter les points singuliers ainsi que leur domaine de linéarité associé, à partir d'un champ de vitesses dense. Cette méthode s'appuie sur la décomposition de ce champ en termes de composantes irrotationnelles et solénoïdales. Ces composantes autorisent une extraction aisée du potentiel de vitesse et de la fonction de courant, dont les extrema locaux indiquent la position des points singuliers les plus informatifs de l'écoulement (puits/sources et vortex). Les différents paramètres associés à chaque singularité sont estimés à l'aide d'une technique de maximum de vraisemblance.

Rappelons que dans le chapitre 6, il a été mentionné que la plupart des méthodes visant à extraire les singularités d'un champ de vecteurs ainsi qu'un domaine de linéarité associé sont locales : on ne s'intéresse qu'au voisinage d'une structure singulière pour la caractériser. Par ailleurs, excepté les méthodes utilisant les indices de Poincaré (où un traitement postérieur est souvent nécessaire), les méthodes décrites ne permettent formellement de détecter qu'un seul point critique à la fois.

L'intérêt de la technique proposée est de ne pas avoir de tels défauts. La méthode présentée est en effet globale et permet d'extraire en même temps l'ensemble des points singuliers des composantes irrotationnelles et solénoïdales d'un champ de vecteurs. Par ailleurs, ce dernier point se différencie des approches usuelles par le fait que nous n'identifions pas les points critiques directement à partir du champ global (ou recalé de sa composante laminaire) mais sur ses composantes irrotationnelles et solénoïdales. Cela autorise la prise en compte de singularités qui peuvent ne pas être observables sur le champ complet. Cette approche fournit de plus comme information intermédiaire les fonctions de potentiels.

Le but du chapitre suivant est de valider expérimentalement cette méthode.

Chapitre 8

Résultats expérimentaux

8.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une série de résultats expérimentaux mis en œuvre pour valider la méthode proposée dans le chapitre précédent. Dans une première partie, nous montrons des expériences réalisées sur un exemple synthétique. Nous illustrerons ensuite les résultats de la méthode sur différents champs de vitesses issus de données réelles. Les champs analysés proviennent soit d'un estimateur de champ dense tel que celui proposé dans la première partie de ce document, soit de champs issus de domaines applicatifs tels que la météorologie. Nous étudierons également l'influence du seul paramètre à régler et comparerons la méthode de détection de points singuliers à la méthode des indices, fréquemment employée dans la communauté de la vision par ordinateur.

8.2 Résultats sur un exemple synthétique

L'exemple synthétique que nous avons utilisé pour valider quantitativement notre méthode a été construit à partir du modèle de Rankine. Nous avons synthétisé un champ de vitesses composé de quatre vortex, une source et un puits. Les paramètres utilisés pour obtenir un tel champ sont regroupés sur la partie gauche du tableau 8.1. Le champ des vitesses résultant est quant à lui représenté à la figure Fig.8.1. Pour simuler des conditions réalistes, chaque composante u et v de la vitesse a été contaminée par un bruit Gaussien centré de variance $\sigma = 0.9$.

Les résultats obtenus sont portés sur la partie droite du tableau 8.1. Quelle que soit la singularité traitée, les paramètres associés sont en accord avec les positions, forces et rayons réels correspondants. Nous avons également reconstruit le champ paramétrique estimé à partir de ces données. L'erreur obtenue suivant le critère de Barron *et al.* est de $0.40° \pm 0.38°$ entre les champs réels et reconstruits.

Pour cet exemple synthétique, nous avons représenté sur la figure Fig.8.2 les champs solénoïdaux et irrotationnels extraits à partir du champ des vitesses original. La fonction de courant ψ et le potentiel de vitesse ϕ (dont les minima locaux positionnent les points singuliers) sont représentés sur la deuxième ligne de cette figure. Enfin, sur la dernière ligne, nous avons superposé aux champs de déplacements irrotationnels et solénoïdaux les points critiques ainsi que les zones de linéarité estimées.

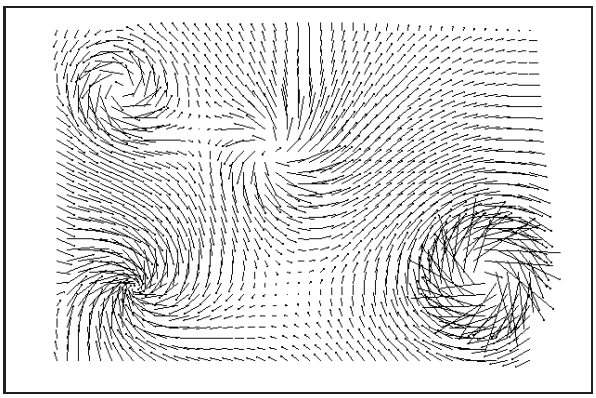


FIG. 8.1 – **Champ synthétique s'appuyant sur le modèle de Rankine** *associé aux paramètres du tableau 8.1.*

	Paramètres synthétiques			Paramètres estimés			Écart sur la force
	(x,y)	rayon	force	(x,y)	rayon	force	
S	(210,60)	20	250.0	(211,60)	21	249.6	0.16%
P	(100,180)	30	−150.0	(100,180)	30	−151.5	1.0%
V	(200,350)	15	−400.0	(201,350)	15	−399.1	0.22%
V	(210,60)	50	−250.0	(211,60)	49	−247.9	0.84%
V	(50,50)	20	200.0	(50,49)	20	205.3	2.65%
V	(100,180)	25	150.0	(101,180)	26	149.8	0.13%

TAB. 8.1 – **Paramètres réels et estimés correspondant au champ synthétique de la figure** FIG.**8.1.** *Sur la partie gauche se trouvent les paramètres synthétiques et sur la partie droite les estimations correspondantes. Les sources sont notées S, les vortex V et les puits P. La dernière colonne indique l'erreur sur l'estimation du paramètre de "force" associé aux singularités*

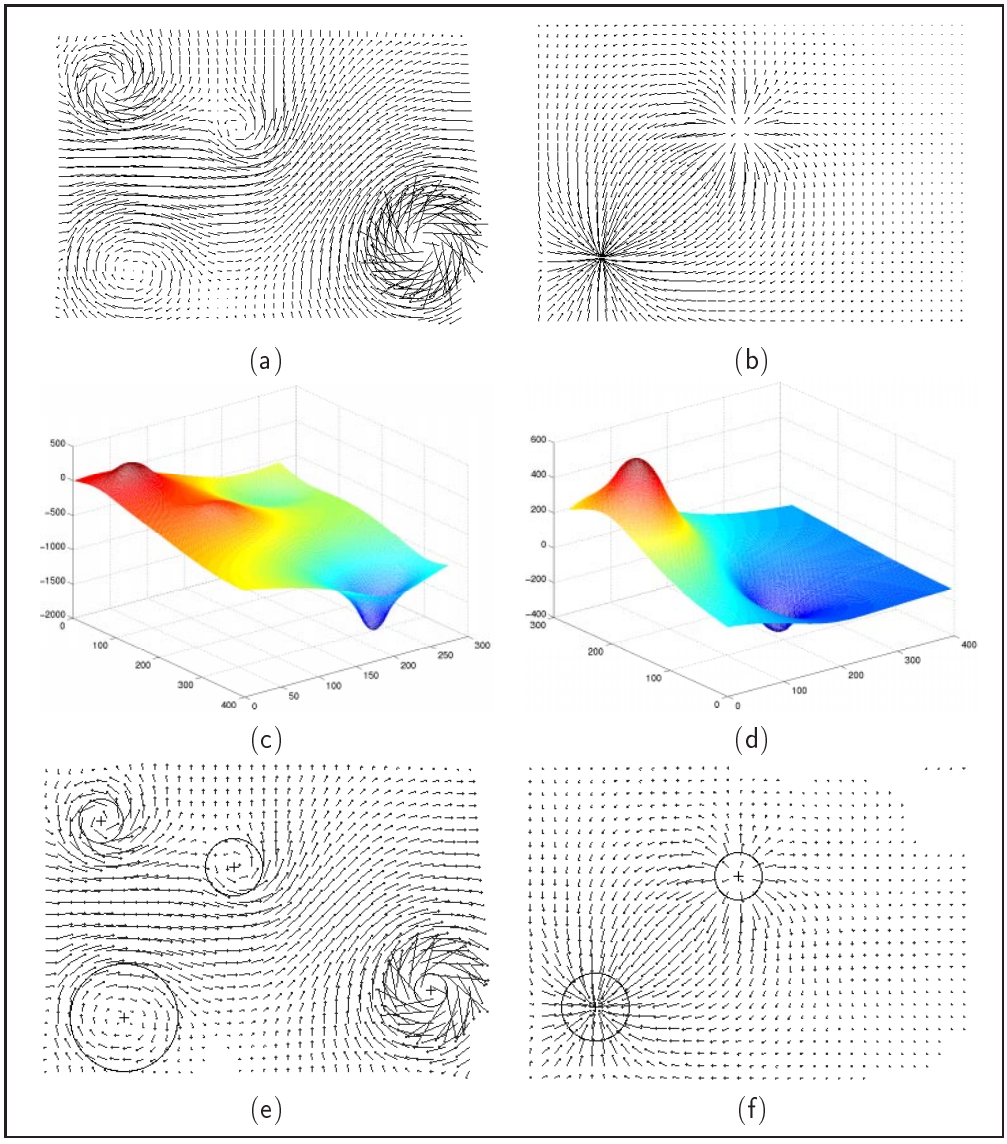


FIG. 8.2 – **Résultats sur le champ synthétique de la figure FIG.8.1.** – (a) *: composante solénoïdale et* (b) *: composante irrotationnelle correspondant au déplacement synthétique de la figure 8.1 ;* (c) *fonction de courant* ψ *et* (d) *potentiel de vitesse* ϕ *;* (e,f) *les singularités et leur domaine de linéarité associé superposés au champ de déplacement correspondant.*

D'un point de vue calculatoire, le temps de calcul nécessaire pour l'ensemble du traitement (séparation du champ, localisation des points singuliers et identification des paramètres associés) est $t = 119s$, sur une station Sun Ultra 10 de 440MHz, la taille de l'image étant de 396×276 pixels. Nous pouvons noter que la décomposition dans le domaine de Fourier du champ des vitesses occupe 60.5% du temps global de traitement. En effet, ce traitement prend un temps de $72s$ (sous un environnement Matlab).

La méthode a donc été appliquée avec succès sur un exemple synthétique bruité et composé d'une combinaison de puits/sources/vortex. Dans la situation la plus critique, les points singuliers et les rayons estimés présentent un écart d'un pixel par rapport à leur valeur réelle. Le paramètre de force estimé présente quant à lui une erreur inférieure à 2.65% par rapport au paramètre réel.

Étudions à présent le comportement de la méthode vis-à-vis de champs de vitesses réels.

8.3 Résultats sur des exemples réels

8.3.1 Application à des déplacements obtenus avec l'estimateur de mouvement dédié

Nous présentons les résultats obtenus sur quatre champs de déplacements différents. Trois d'entre eux sont relatifs à la météorologie et le dernier concerne un écoulement issu de la mécanique des fluides expérimentale. Rappelons que le transport global de l'écoulement (que l'on nomme également la "composante laminaire") a systématiquement été retranché du champ des vitesses original.

8.3.1.1 Champ des vitesses correspondant à une séquence météorologique infrarouge

Ce premier exemple correspond au mouvement entre deux images consécutives d'une séquence issue du canal infrarouge du satellite Météosat. Cette séquence a été présentée dans la première partie de ce document et deux images sont représentées à la figure Fig.8.3(a–b). Le champ des déplacements retranché de sa composante laminaire est donné en Fig.8.3(c).

Les composantes irrotationnelle et solénoïdale de ce déplacement sont regroupées sur la première ligne de la Figure Fig.8.4. Les lignes de courant du champ solénoïdal ($\psi = cst$) ainsi que les lignes équipotentielles du champ irrotationnel ($\phi = cst$) sont représentées sur la seconde ligne de cette même image. La troisième ligne contient quant à elle les fonctions ψ et ϕ utiles pour la localisation des points critiques. Les structures singulières estimées et superposées au champ de déplacement associé sont illustrées sur la dernière ligne de cette figure. Enfin, le champ paramétrique complet reconstruit est donné à la figure Fig.8.3(d).

Nous pouvons constater, sur cet exemple, que les points critiques, leurs rayons associés, ainsi que la description paramétrique du champ des vitesses sont en accord avec une interprétation visuelle de l'écoulement réel. L'erreur obtenue entre le champ paramétrique estimé et le champ réel est de $8.18° \pm 4.35°$, suivant le critère défini dans [Barron 94]. Rappelons que le modèle de Rankine sous-jacent est un modèle simple décrivant grossièrement les mouvements associés à une structure singulière. Ceci explique les variations

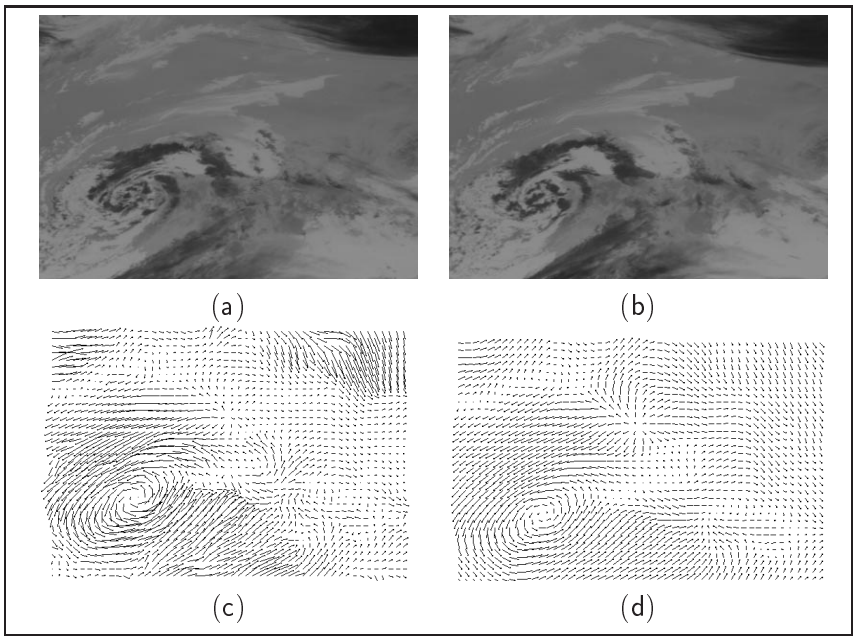


FIG. 8.3 – **Séquence infrarouge** (a-b) *: deux images de la séquence ;* (c) *: champ dense des déplacements estimé selon la méthode de la première partie de ce document ;* (d) *: champ paramétrique reconstruit selon le modèle de Rankine.*

que l'on peut observer entre le champ paramétrique reconstruit de la figure FIG.8.3(d) par rapport au champ réel. L'ensemble des principales structures singulières sont néanmoins correctement détectées. Le temps de calcul nécessaire pour obtenir cette interprétation est $t = 270s$, sur une station Sun Ultra 10 de 440MHz, la taille de l'image étant de 396×276 pixels.

Dans la section 8.4, cet exemple sera repris pour analyser l'influence du seuil μ relatif à la distance de Bhattacharyya.

8.3.1.2 Champ de déplacement représentant l'explosion d'une cellule convective

Cet exemple traite un champ de déplacement correspondant à une séquence météorologique infrarouge montrant l'explosion d'une cellule convective. De tels phénomènes sont responsables de forts mouvements verticaux, qui ont pour conséquence d'introduire d'importants mouvements divergents dans le champ des vitesses apparentes. Deux images de la séquence et le champ de déplacement associé sont fournis aux figures FIG.8.5(a–b–c).

La figure FIG.8.6 contient les résultats obtenus pour cet exemple. Les deux cellules convectives sont correctement détectées, ainsi que quelques vortex, d'amplitude plus faible, présents dans l'image.

L'erreur entre le champ paramétrique de la figure FIG.8.5(d) et le champ réel en FIG.8.5(c) est de $5.62^{\circ} \pm 2.15$. Dans cet exemple également, malgré la simplicité du modèle utilisé, la paramétrisation permet de retrouver les principales caractéristiques de l'écoulement et autorise une représentation compacte du champ original. Pour cette image de taille 256×128 pixels, le coût calculatoire est $t = 48s$. On voit que ce coût calculatoire est

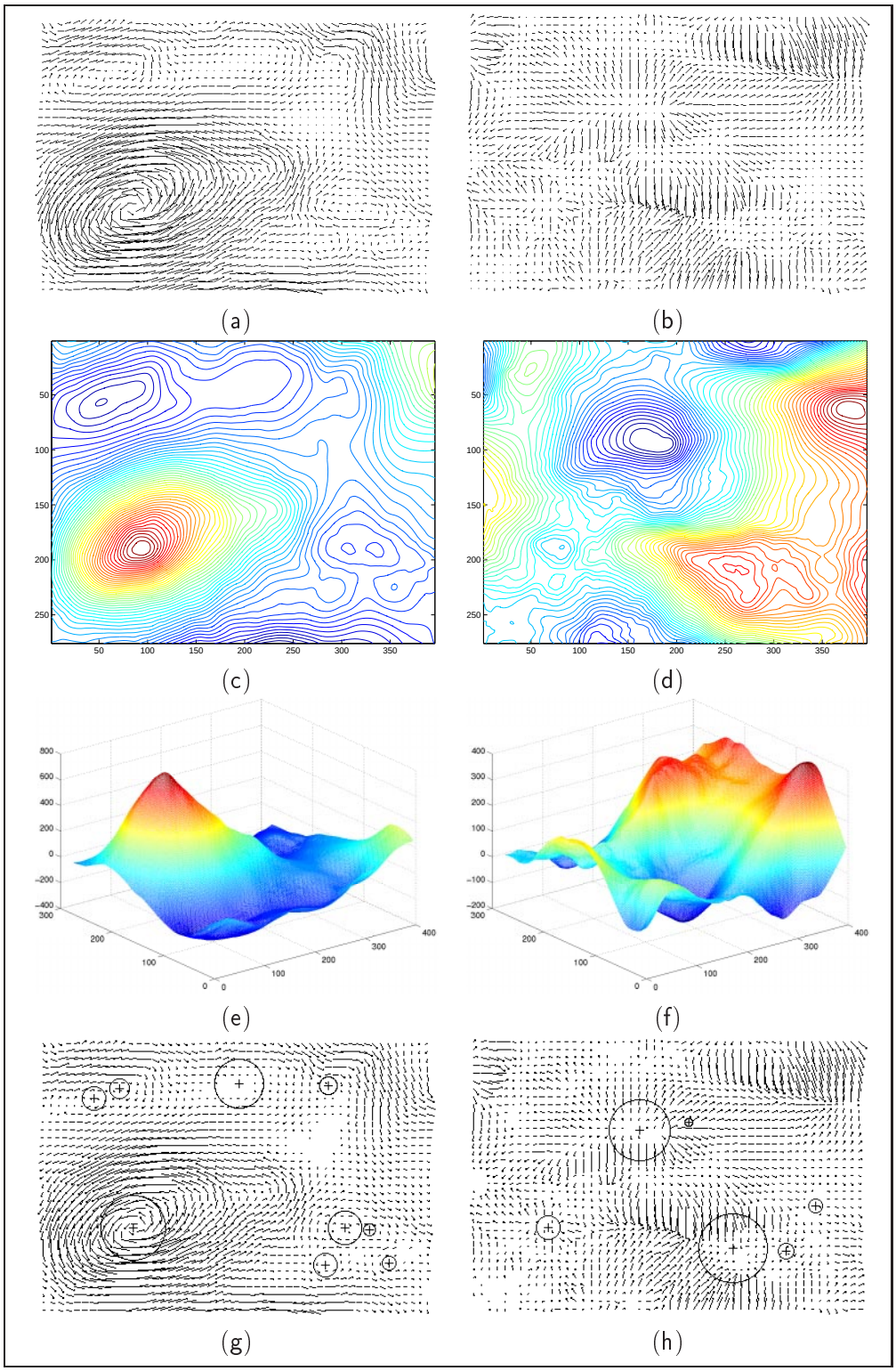


FIG. 8.4 – **Résultats sur le champ de déplacements de la figure FIG.8.3(c).** (a) *: composante solénoïdale et* (b) *: composante irrotationnelle du champ des vitesses ;* (c) *lignes de courant du champ solénoïdal et* (d) *lignes équipotentielles du champ irrotationnel ;* (e) *fonction de courant et* (f) *potentiel de vitesse ; structures singulières estimées et superposées au champ de déplacement correspondant : vortex* (g) *et puits/sources* (h)

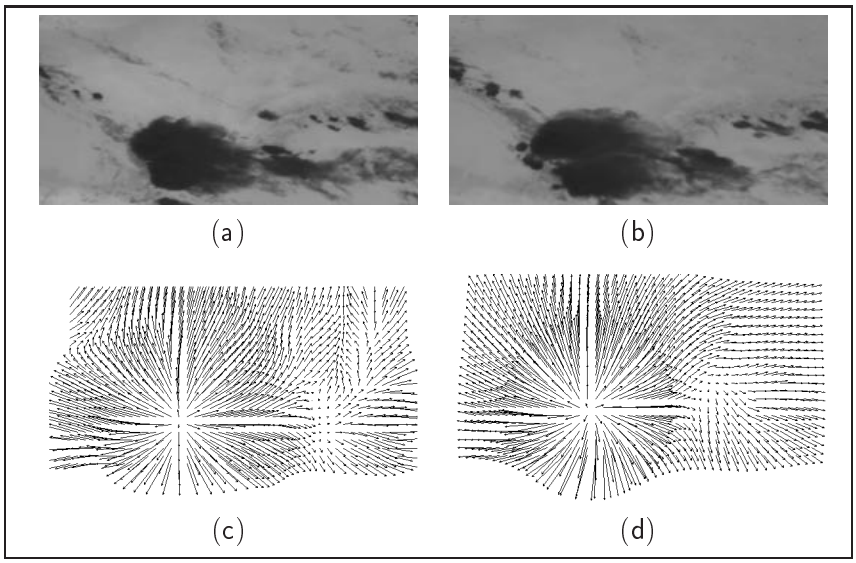


FIG. 8.5 – **Deuxième séquence infrarouge** (a-b) *: deux images de la séquence ;* (c) *: champ dense des déplacements estimé selon la méthode de la première partie de ce document ;* (d) *: champ paramétrique reconstruit selon le modèle de Rankine.*

beaucoup plus sensible au nombre de singularités à traiter qu'à la taille de l'image.

8.3.1.3 Champ des vitesses provenant de la mécanique des fluides expérimentale

Cet exemple correspond à la visualisation d'un traceur fluorescent évoluant dans un écoulement turbulent bidimensionnel. Une image de la séquence correspondante peut être visualisée à la figure FIG.8.7 (a). Le champ des vitesses estimé associé est représenté en FIG.8.7 (b). Ce déplacement, estimé avec la méthode du chapitre 3, est à divergence nulle [1]. Ainsi, le champ est solénoïdal et la décomposition de Helhmoltz est immédiate.

Du point de vue de la mécanique des fluides, les écoulements turbulents sont complexes et de nombreuses études dans le but de mieux les appréhender existent (voir par exemple le livre de Marcel Lesieur [Lesieur 94]). La carte de vorticité du déplacement est souvent un bon outil de caractérisation de tels écoulements. Nous l'avons représentée, à titre indicatif, sur la figure FIG.8.7 (c). La figure FIG.8.7 (d) montre les lignes de courant de cet écoulement, tandis que les structures singulières (ici seulement des vortex) sont superposées au champ réel en FIG.8.7 (e). Enfin, le champ paramétrique reconstruit est donné en FIG.8.7 (f).

Le champ reconstruit, sur la figure FIG.8.7(f), diffère significativement du champ réel. L'erreur entre le déplacement paramétrique reconstruit et le déplacement réel est de $30.31° \pm 22.93°$. Cela illustre les limites de ce modèle simple dans une telle situation. Nous pouvons constater cependant que l'ensemble des points singuliers sont correctement extraits. La méthode a également attribué une zone de linéarité à chaque structure associée. Dans ce

1. Ceci est une connaissance *a priori* que nous avions sur l'écoulement. La méthode d'estimation du mouvement utilisée a donc explicitement pris en compte cette donnée, en imposant une valeur nulle au scalaire ξ représentatif de la divergence (voir le chapitre 3).

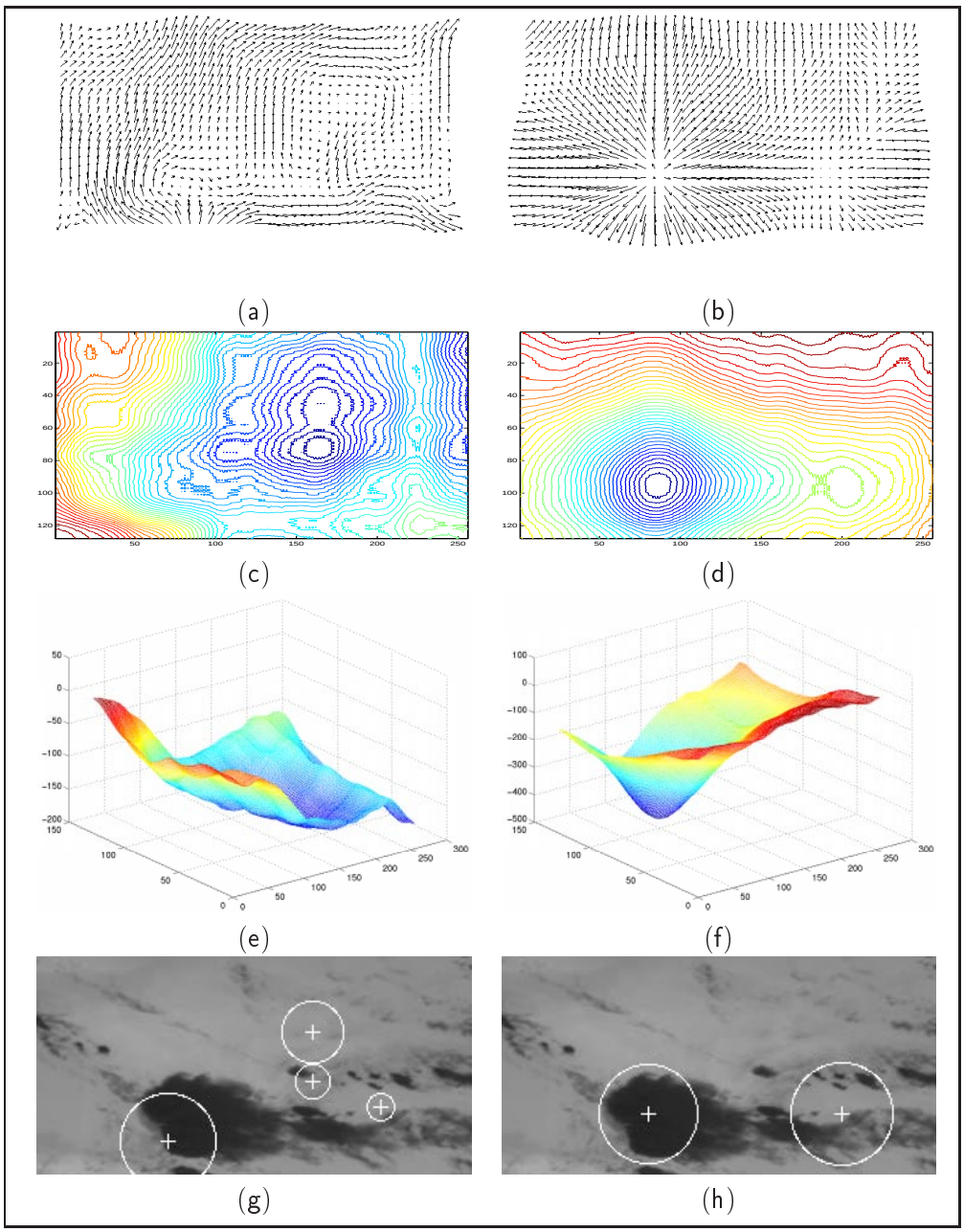


FIG. 8.6 – **Résultats sur le champ de déplacements de la figure** FIG.**8.5**(c). (a) *: composante solénoïdale* (b) *: composante irrotationnelle du champ des vitesses ;* (c) *lignes de courant du champ solénoïdal et* (d) *lignes équipotentielles du champ irrotationnel ;* (e) *fonction de courant et* (f) *potentiel de vitesse ; structures singulières estimées et superposées à l'image correspondante : vortex* (g) *et puits/sources* (h)

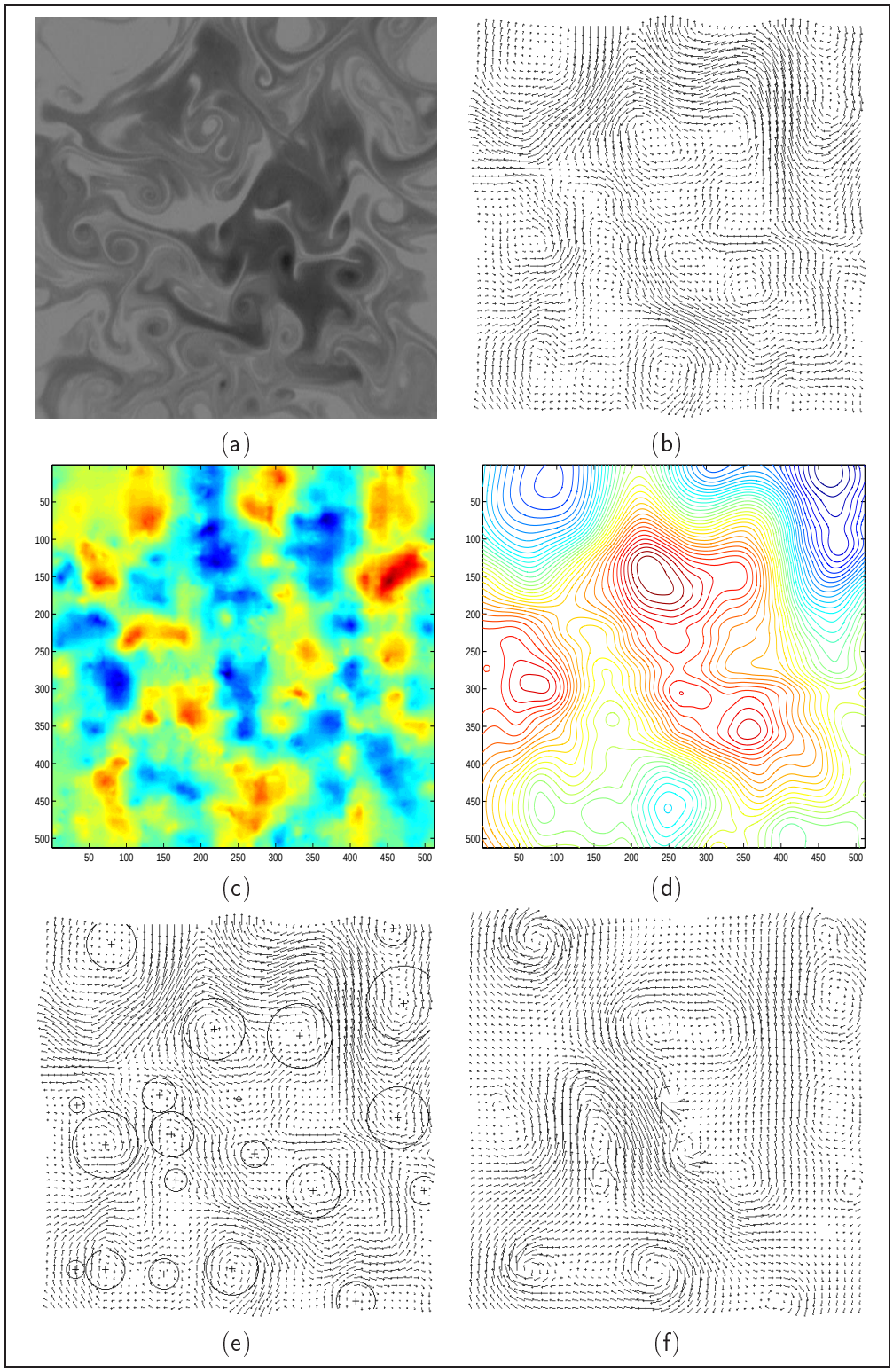


FIG. 8.7 – **Résultats sur le champ de déplacements représentatif d'un écoulement turbulent**. (a) *: une image de la séquence ;* (b) *: champ des vitesses associées ;* (c) *: vorticité de ce champ ;* (d) *: lignes de courant ;* (e) *: vortex détectés associés superposés sur le champ réel et* (f) *: le champ paramétrique reconstruit*

contexte, il est clair que le modèle de Rankine n'est pas optimal pour ce type d'écoulement. Compte tenu de la complexité des phénomènes turbulents, il est en effet trop simplificateur de réduire la zone de linéarité à un simple domaine circulaire[2] et de ne pas autoriser de chevauchement de zones de linéarité.

Néanmoins, dans l'étude d'écoulements turbulents, l'extraction de points critiques fournit déjà une information pertinente. La méthode proposée est en mesure de les identifier et fournit une information grossière sur la force des vortex ainsi que sur la valeur du rayon associé. Cela peut, dans une certaine mesure, fournir un outil de caractérisation aux spécialistes.

Le temps de calcul global nécessaire est $t = 861s$ pour une image de taille 512×512 pixels. Le nombre important de singularités ainsi que la taille des images sont responsables de ce coût calculatoire élevé.

8.3.2 Champ de déplacements fourni par l'Ifremer

L'institut français de recherche pour l'exploitation de la mer (l'Ifremer) s'intéresse à des problématiques variées telles que la modélisation des écosystèmes côtiers, le comportement de polluants océaniques, l'observation et la surveillance de la mer côtière, ...

Actuellement, la principale source de données exploitables provient des champs de vents, fournis par interpolation des données issues de sondes météorologiques. Dans ce contexte, cet organisme s'intéresse à l'analyse de structures dépressionnaires dans le but d'extraire des modèles d'évolution visant à prédire, à long terme, des zones côtières sensibles aux phénomènes d'érosions. En effet, des liens peuvent être établis entre les vitesses des vents et les courants océaniques.

Les spécialistes s'intéressent alors, dans un premiers temps, à la localisation des points critiques contenus dans le champ de vent (et en particulier au point critique principal au centre de l'image). Nous avons appliqué notre méthode sur un champ obtenu par interpolation de données météorologiques, représentant la situation de l'Atlantique nord le 2 janvier 1993. Ce champ, représenté à la figure Fig.8.8, est de taille 64×37 pixels.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure Fig.8.9. La fonction de courant ψ en Fig.8.9(e) met en évidence la structure dépressionnaire principale, observable également sur les lignes de courant en Fig.8.9(c). Le point critique associé est correctement détecté, ce qui est en mesure de fournir une première source d'information aux spécialistes. Les autres singularités de cet écoulement sont également détectées. Ceci fournit une multitude de renseignements pouvant s'avérer pertinents dans la prédiction des phénomènes étudiés et afin de constituer un modèle d'évolution global. Notons cependant que si l'on souhaite effectuer une étude à long terme des zones pouvant être touchées par l'érosion (comme c'est le cas dans l'application étudiée), il sera probablement nécessaire de s'appuyer sur un modèle plus précis que le modèle de Rankine.

8.4 Influence du seuil de la distance de Bhattacharyya

Dans la méthode que nous avons proposée, un seul paramètre est à définir. Il s'agit du seuil μ relatif à la distance de Bhattacharyya. Rappelons que cette distance est calculée

2. Les études actuelles dans ce domaine s'appuient plutôt sur des modèles dont la zone linéaire est de forme elliptique.

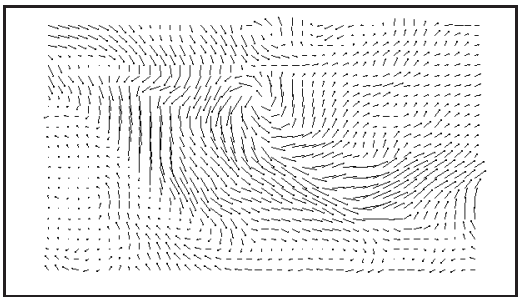


FIG. 8.8 – **Données Ifremer** *Champ de déplacements représentatif de la vitesse des vents au-dessus de l'Atlantique nord, le 2 janvier 1993.*

entre deux distributions Gaussiennes. La première représente l'erreur entre le champ réel et le champ paramétrique correspondant au modèle de Rankine avec n singularités ; la seconde correspond à cette même erreur avec $n+1$ singularités. On note cette distance :

$$d_B[\mathcal{N}_1(\boldsymbol{v}_\bullet - \boldsymbol{v}^n_{\Theta_\bullet}),\mathcal{N}_2(\boldsymbol{v}_\bullet - \boldsymbol{v}^{n+1}_{\Theta_\bullet})], \tag{8.1}$$

où $\bullet = irr$ ou $\bullet = sol$. Le nombre final de singularités est défini lorsque l'ajout d'une nouvelle singularité n'apporte plus d'information, c'est à dire lorsque

$$d_B[\mathcal{N}_1(\boldsymbol{v}_\bullet - \boldsymbol{v}^n_{\Theta_\bullet}),\mathcal{N}_2(\boldsymbol{v}_\bullet - \boldsymbol{v}^{n+1}_{\Theta_\bullet})] < \mu. \tag{8.2}$$

Il est donc nécessaire d'étudier l'influence du seuil μ. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur le premier exemple météorologique présenté (section 8.3.1.1) car il contient de nombreuses singularités. Si le seuil μ est élevé, alors seules les singularités les plus significatives seront extraites. En revanche, si celui-ci est proche de zéro, alors toutes les singularités, y compris celles provenant de données bruitées, peuvent intervenir.

Sur la figure FIG.8.10, nous avons représenté, pour six différentes valeurs de ce seuil, le champ paramétrique correspondant reconstruit. Nous indiquons également dans un tableau son erreur avec le champ réel, suivant le critère de Barron *et al.*, ainsi que le nombre de singularités détectées.

Comme nous le présagions, plus le seuil est faible et plus la précision est importante. Il est à noter qu'un seuil proche de zéro ne traduit pas nécessairement de singularités provenant du bruit. En effet, les singularités détectées sont toutes physiquement observées. Deux raisons principales expliquent ce phénomène :

1. d'une part, les points critiques sont obtenus par identification des extrema locaux provenant de la fonction de courant ψ ou du potentiel de vitesse ϕ. Rappelons que ces fonctions de potentiels sont issues de données *intégrées* du champ des vitesses. Le processus d'intégration a alors pour effet de diminuer les hautes fréquences et par conséquent le bruit.
2. d'autre part, si un point singulier candidat est généré par le bruit, alors le caractère global de la méthode d'identification des paramètres lui affectera de très faibles valeurs de force et de rayon. Il sera donc automatiquement rejeté.

Ce paramètre dépend essentiellement du nombre de singularités que l'on souhaite extraire. Si l'application vise à étudier en détail l'évolution de toutes les structures singulières d'un écoulement, sa valeur devra être faible, voire nulle. En revanche, si l'on souhaite étudier le

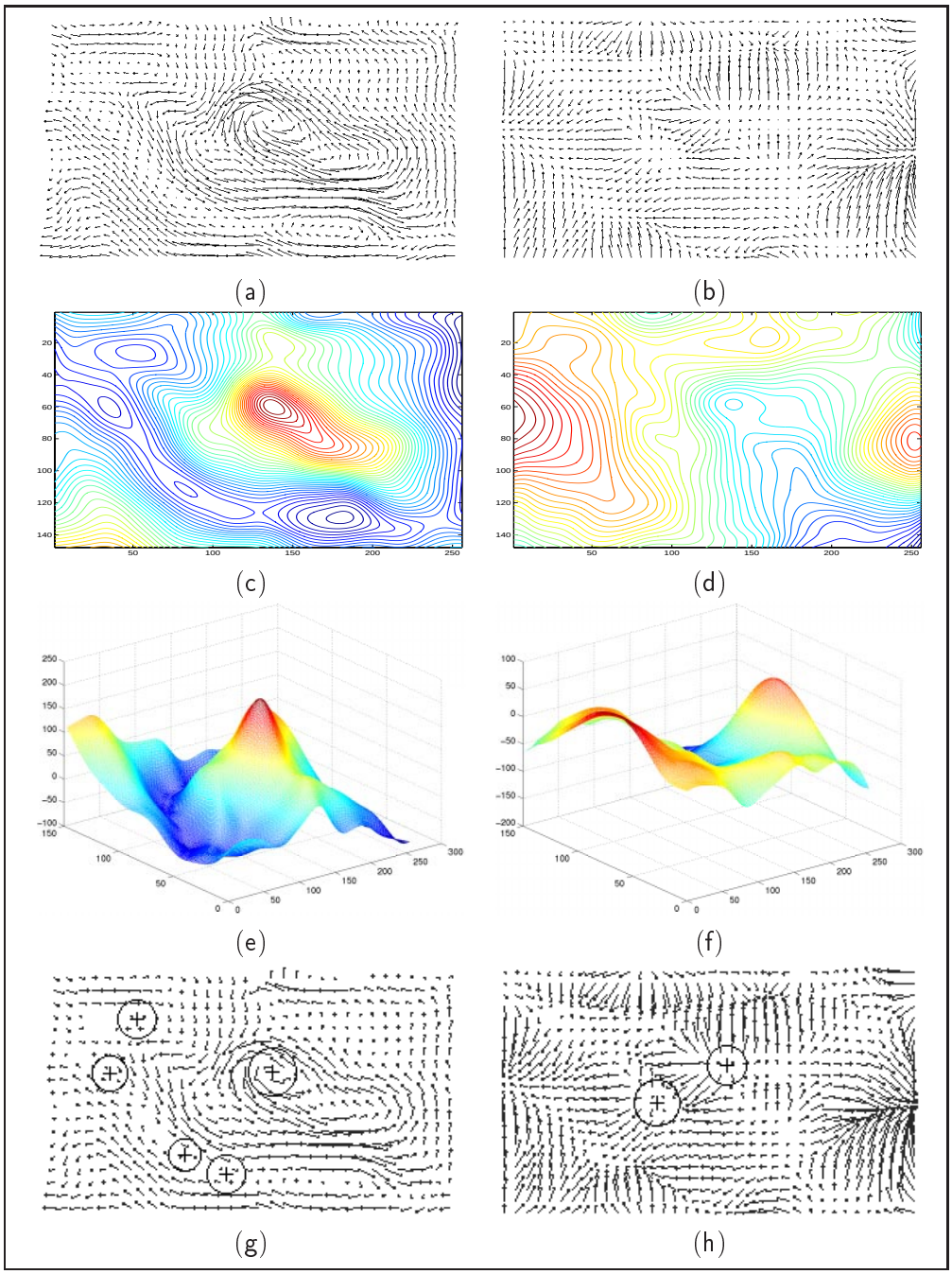
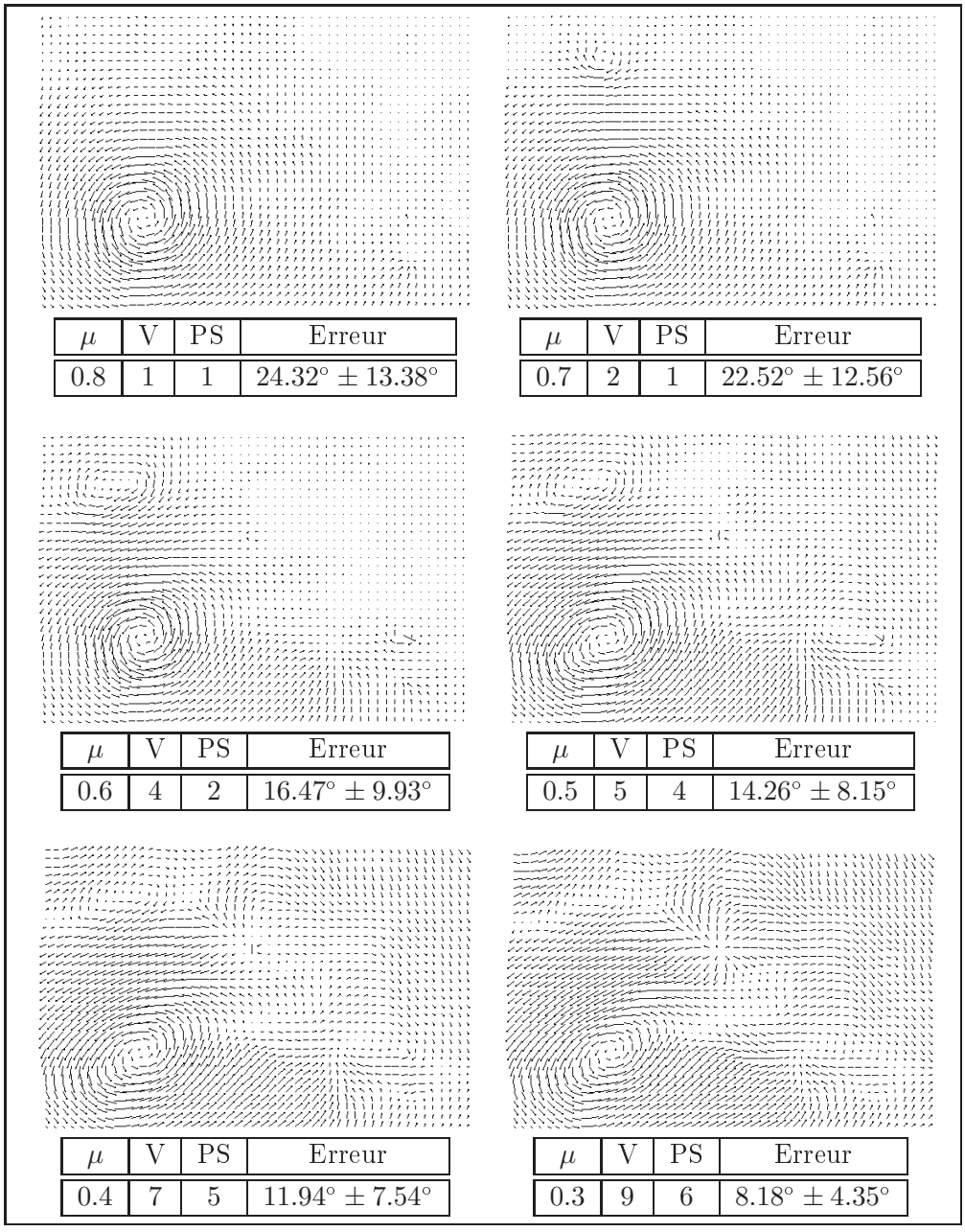


FIG. 8.9 – **Résultats sur un champ des vitesses de vents fourni par l'Ifremer** FIG.**8.8**. (a) *: composante solénoïdale* (b) *: composante irrotationnelle du champ des vitesses ;* (c) *lignes de courant du champ solénoïdal et* (d) *lignes équipotentielles du champ irrotationnel ;* (e) *fonction de courant et* (f) *potentiel de vitesse ; structures singulières estimées et superposées au déplacement correspondant : vortex* (g) *et puits/sources* (h)



μ	V	PS	Erreur
0.8	1	1	$24.32° \pm 13.38°$

μ	V	PS	Erreur
0.7	2	1	$22.52° \pm 12.56°$

μ	V	PS	Erreur
0.6	4	2	$16.47° \pm 9.93°$

μ	V	PS	Erreur
0.5	5	4	$14.26° \pm 8.15°$

μ	V	PS	Erreur
0.4	7	5	$11.94° \pm 7.54°$

μ	V	PS	Erreur
0.3	9	6	$8.18° \pm 4.35°$

FIG. 8.10 – **Influence du seuil μ de la distance de Bhattacharyya.** *Pour six différentes valeurs de ce seuil, nous représentons le champ paramétrique reconstruit, le nombre V de vortex et le nombre PS de puits/sources détectés, ainsi que l'erreur vis à vis du champ de déplacement réel.*

comportement des structures principales d'un champ de vitesses, une valeur assez élevée de ce seuil sera suffisante.

8.5 Comparaison à la méthode des indices de Poincaré

La méthode que nous avons développée pour extraire les points singuliers d'un champ de vecteurs consiste à extraire les extrema locaux des fonctions de potentiels associées aux composantes irrotationnelles et solénoïdales du champ (voir la section 7.5). Au chapitre 6, nous avons vu qu'un certain nombre d'auteurs préconisent l'emploi de méthodes s'appuyant sur les indices de Poincaré. Cette section propose de comparer les deux approches.

Définition et calcul de l'indice de Poincaré

Rappelons que cet indice est défini le long d'une courbe fermée de Jordan J par :

$$\text{Indice}(J) = \frac{1}{2\pi} \oint_J d(\tan^{-1} u/v) = \frac{1}{2\pi} \oint_J \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}. \tag{8.3}$$

Sa valeur représente le nombre de "tours" que le champ effectue le long de la courbe. Elle est égale à $+1$ si la courbe de Jordan entoure un vortex, un puits ou une source.

En pratique, l'image étant discrétisée, cet indice se calcule sur une fenêtre V centrée en (i,j) de la manière suivante :

$$\text{Indice}(J)_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{V} \left[\Phi_{k+1} - \Phi_k + \phi(\Phi_{k+1},\Phi_k)\right], \tag{8.4}$$

où Φ_k correspond à l'orientation du vecteur dont l'origine sur le bord du domaine correspond à un angle de $2\pi k/N$, et

$$\phi(\Phi_{k+1},\Phi_k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\Phi_{k+1} - \Phi_k| < \pi/2 \\ \pi & \text{si} \quad \Phi_{k+1} - \Phi_k < -\pi/2 \\ -\pi & \text{si} \quad \Phi_{k+1} - \Phi_k > -\pi/2. \end{cases} \tag{8.5}$$

Plus simplement, cela peut donc s'estimer par :

$$\text{Indice}(J)_{i,j} = \frac{a_2 - a_1}{2}, \quad \text{avec} \quad a_l = \text{card}\left\{k \in V \text{ tels que } (-1)^{l+1}(\Phi_{k+1} - \Phi_k) > \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{8.6}$$

La valeur de a_2 correspond au nombre de transitions de $\pi/2$ à $-\pi/2$ et a_1 indique le nombre de passages de $-\pi/2$ à $\pi/2$ du champ de vecteurs.

Comparaisons et commentaires

La figure Fig.8.11 présente les résultats obtenus avec cette méthode, pour l'ensemble des champs de déplacements étudiés dans ce chapitre. Les ensembles de groupe de points candidats, correspondant aux centres de puits/sources ou vortex, sont représentés en noir. Dans chacun de ces exemples, tous les points singuliers sont correctement détectés. En revanche, les résultats sont entachés d'un nombre important de fausses alarmes, en particulier

aux endroits où le champ de vecteurs est mal défini et possède de très faibles amplitudes. Dans ces zones où le champ des vitesses ne possède que peu de gradient, beaucoup de points singuliers sont extraits. Il est alors nécessaire d'avoir une étape de "rejet" de ces points critiques. Par ailleurs, pour un même point singulier, la méthode de Poincaré fournit dans un voisinage un amas d'indices dont la valeur est +1. Un traitement a posteriori sur ces zones de points candidats doit également être appliqué (sélection du barycentre de cet amas par exemple).

Notre méthode ne nécessite pas de post-traitements. En effet, rappelons que les fonctions de potentiels sont issues d'intégrations du champ des vitesses. Cette manipulation a pour effet de réduire l'influence des données où le champ de déplacement possède de faibles amplitudes, endroits responsables d'un nombre important de fausses alarmes avec la technique des indices en raison de son caractère local. En revanche, d'un point de vue calculatoire, la méthode que nous proposons est bien entendu plus onéreuse.

8.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué notre méthode sur une variété de déplacements provenant de domaines applicatifs différents, représentant des phénomènes de nature variée.

Les résultats fournis semblent en accord avec la physique observée. Les principales structures singulières sont systématiquement extraites et ceci autorise une représentation paramétrique du champ des vitesses. Par ailleurs, la visualisation des fonctions de potentiels, des lignes de courant ou des lignes équipotentielles met nettement en évidence les caractéristiques du mouvement visualisé et fournit une source d'information précieuse.

On peut souligner qu'un seul paramètre est à définir dans cette méthode. Il est fonction de la précision des estimations que l'on souhaite obtenir et dépend de l'application.

Enfin, nous avons comparé notre méthode de détection de points singuliers à la méthode des indices de Poincaré. Contrairement à cette dernière, l'approche développée ne nécessite pas de post-traitements et se révèle plus robuste vis-à-vis des données bruitées.

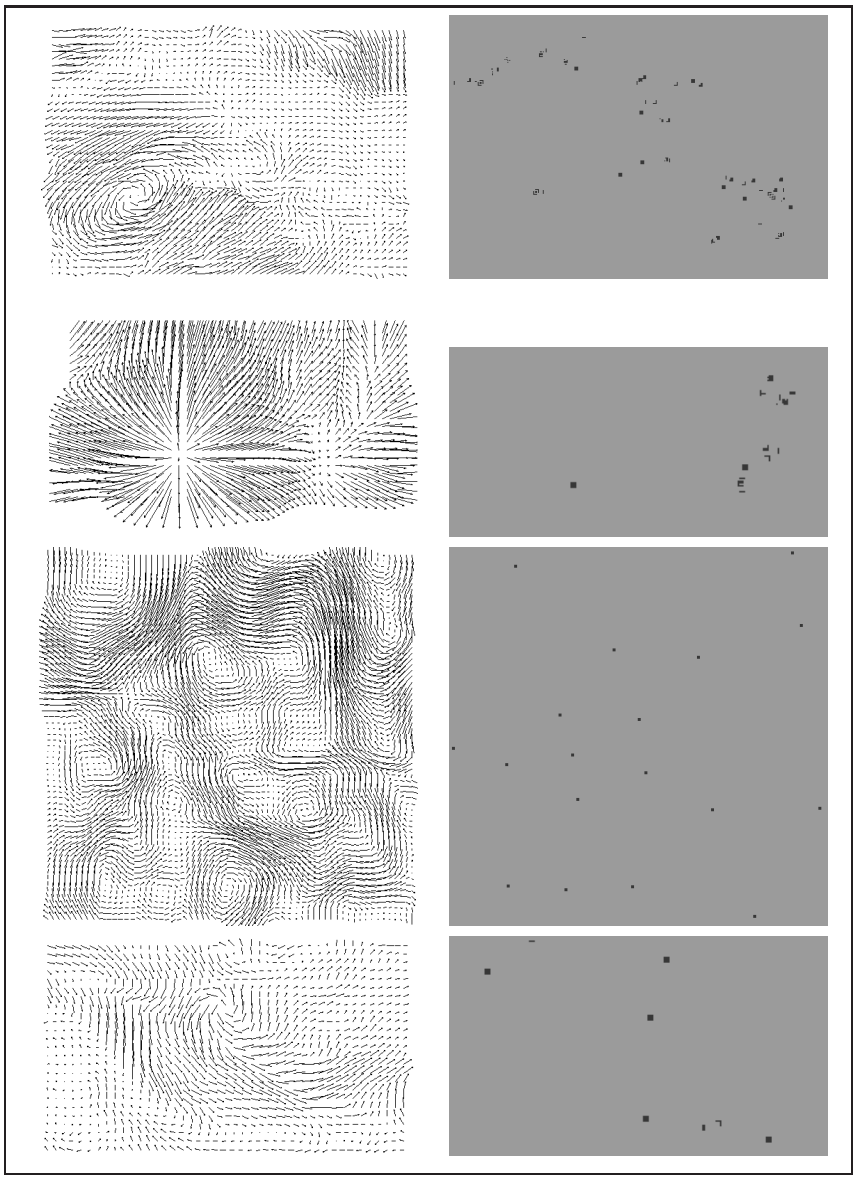


FIG. 8.11 – **Détection de points singuliers par la méthode des indices de Poincaré.** *Résultats obtenus sur les cinq champs de vitesses étudiés dans ce chapitre. Sur la gauche se trouve les champs de déplacements et sur la droite les amas de points détectés. Ils sont représentés en noir et correspondent aux centres de vortex, puits ou sources.*

Conclusion

Cette seconde partie s'est intéressée aux méthodes de détection et d'analyse de singularités en imagerie fluide. Cette étape est fondamentale dans l'interprétation d'un écoulement, et les applications sont multiples.

Après une présentation, dans le chapitre 6, des principales contributions apportées dans ce sens par la communauté de la vision par ordinateur, nous avons proposé une méthode pour analyser un champ de vitesses.

Cette étude est présentée dans le chapitre 7. L'approche développée permet d'extraire les points singuliers de l'écoulement ainsi que leur zone de linéarité associée en s'appuyant sur le modèle de Rankine. De ce fait, la reconstruction paramétrique du champ de déplacements est rendue possible. Par ailleurs, le potentiel de vitesse, la fonction de courant, ainsi que les trois composantes issues de la séparation selon Helhmoltz de l'écoulement sont également accessibles.

Le chapitre 8 a présenté une série d'expérimentations de notre méthode, sur des champs de déplacements issus de l'estimateur de mouvement développé dans la première partie de ce document (sur différents types d'images) mais également sur un champ de vents fourni par l'organisme de recherche Ifremer. Les résultats se sont révélés encourageants car les principaux points singuliers observables sont systématiquement extraits et des zones de linéarité leur sont associées. Cependant, la pertinence et l'exactitude de ces zones dépend fortement de l'application traitée. Leur caractère circulaire est en effet parfois trop restrictif, comme par exemple en mécanique des fluides expérimentale. Néanmoins, ces zones fournissent un certain renseignement sur la nature de la singularité étudiée.

Contrairement aux approches classiques visant à extraire des points singuliers, nous n'employons pas la méthode des indices (qui nécessite un traitement postérieur). Pour appuyer ce choix, nous avons comparé les deux techniques. Il s'avère que la méthode des indices fournit de fausses alarmes dans les zones où le déplacement est de faible amplitude, ce qui n'est pas le cas avec l'approche développée. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà mentionné, la méthode des indices n'extrait que les points critiques du champ global tandis que notre méthode détecte les points singuliers des composantes irrotationnelle et solénoïdale du champ de vecteurs.

Conclusion générale

Synthèse des travaux effectués

Les travaux décrits dans ce document se sont articulés autour de deux axes principaux.

Estimation du mouvement

Le premier axe s'inscrit dans un contexte de mesure du mouvement dans des séquences d'images. Nous avons proposé une méthode d'estimation de champs denses de déplacements à partir d'une séquence d'images, spécialement conçue pour recouvrer des mouvements fluides. L'approche proposée s'appuie sur un terme d'adéquation aux données découlant de l'équation de continuité de la mécanique des fluides où une formulation originale adaptée aux schémas avec multirésolution a été proposée. Mettant en évidence que les régularisations au premier ordre usuellement employées en vision par ordinateur s'avèrent limitées dans un contexte d'imagerie fluide, nous avons proposé un schéma de régularisation "div-curl" du second ordre visant à préserver les quantités significatives de divergence et de vorticité d'un écoulement. La minimisation de la fonctionnelle d'énergie résultante vis-à-vis du champ des déplacements est effectuée au travers d'un schéma multigrille.

Des fonctions de pénalisation robustes sont par ailleurs employées pour deux raisons : d'une part afin de préserver les éventuelles discontinuités (en terme de divergence ou de vorticité) susceptibles d'être présentes dans l'écoulement et d'autre part, afin de prendre en considération les cas où le terme d'attache aux données n'est pas en adéquation avec le modèle s'appuyant sur l'équation de continuité.

Du point de vue de la validation, nous avons comparé la méthode à une approche générique issue du modèle de Horn & Schunck et également définie dans un cadre robuste/multigrille/multirésolution. L'approche proposée s'avère plus performante dans un contexte d'imagerie fluide et par ailleurs, la régularisation "div-curl" est apte à recouvrer fidèlement des mouvements de nature non fluide. Nous avons également développé deux outils permettant de mesurer qualitativement la pertinence des estimations : la reconstruction des trajectoires et l'extraction de zones significatives en termes de divergence et de vorticité.

Enfin, la méthode a été appliquée sur un écoulement expérimental. Des critères propres à la mécanique des fluides ont été mesurés et comparés à ceux provenant d'une méthode d'estimation du mouvement par PIV, fréquemment employée en mesure expérimentale. Les conclusions de cette étude indiquent que les résultats fournis par les deux approches possèdent des caractéristiques identiques. Ceci est encourageant car les méthodes de PIV étant réputées pour leurs performances dans la communauté de la mécanique des fluides,

cela signifie que les mesures fournies par notre estimateur semblent être en accord avec les phénomènes physiques. Une importante différence réside dans la quantité d'informations supérieure que notre méthode procure par rapport aux techniques de PIV.

Analyse d'un champ de vitesses

L'étude s'est ensuite consacrée à l'analyse d'un champ dense des vitesses. Nous avons proposé un cadre méthodologique permettant :

1. de séparer le champ de déplacements selon la décomposition de Helmholtz via certaines propriétés de la transformée de Fourier ;
2. d'extraire la fonction de courant et le potentiel de vitesse de ce champ, ce qui permet d'accéder aux lignes de courant du champ solénoïdal et aux lignes équipotentielles du champ irrotationnel ;
3. de localiser l'ensemble des points singuliers en exploitant les propriétés de ces fonctions de potentiel, en différenciant les vortex des puits/sources ;
4. d'associer à chaque point singulier un domaine de linéarité correspondant au modèle de Rankine, ce qui autorise une reconstruction paramétrique du champ des vitesses.

Selon les applications, seules certaines étapes sont éventuellement nécessaires. Par exemple, la connaissance de l'ensemble des points singuliers de l'écoulement est souvent primordiale en mécanique des fluides expérimentale mais en revanche, le modèle de Rankine s'avère parfois limité en raison de sa simplicité. Néanmoins, ce modèle fournit une première analyse du champ de déplacements qui peut être suffisante dans les applications visant à étudier globalement une situation physique (détection de zones sensibles en climatologie, météorologie, océanographie, détection de pathologies en imagerie médicale, ...). Notons également que la technique proposée permet d'une part de ne conserver que les singularités les plus significatives de l'écoulement et d'autre part, d'extraire à la fois les singularités issues du champ solénoïdal et irrotationnel, contrairement aux approches usuelles qui estiment les points critiques du champ global.

Nous avons validé la méthode sur une série de champs de déplacements dans un contexte de météorologie, d'océanographie et de mécanique des fluides expérimentale. L'ensemble des points singuliers sont systématiquement extraits. Selon les applications et la complexité de l'écoulement, la reconstruction paramétrique du champ des vitesses est effectuée avec plus ou moins de succès.

La robustesse de la technique de détection des points singuliers a été démontrée en comparant les résultats fournis à une méthode s'appuyant sur les indices de Poincaré. En raison de sa nature locale, cette dernière fournit un certain nombre de fausses alarmes qui nécessitent une étape de post-traitement, ce qui n'est pas le cas avec l'approche proposée.

Perspectives

Les travaux réalisés dans ce document donnent naissance à plusieurs perspectives, aussi bien dans l'approfondissement des méthodes développées que dans les ouvertures que certains résultats suggèrent.

Estimation du mouvement

Dans le contexte très vaste de l'estimation du mouvement, encore beaucoup de recherches sont à réaliser. Mentionnons certains aspects :

- estimation du mouvement dans des situations de transparence : dans certaines situations météorologiques, la vitesse du vent varie selon son altitude. Il serait intéressant d'effectuer l'estimation de ces vitesses sur les différentes couches de l'atmosphère, en exploitant par exemple certaines propriétés de transparence des images ;
- à des fins d'imagerie médicale et notamment d'angiographie ou de cardiologie, l'extension tridimensionnelle du modèle d'estimation de mouvement présenté s'avèrerait judicieuse ;
- dans un contexte de mécanique des fluides expérimentale, certains écoulements sont visualisés en exploitant un traceur fluorescent. L'évolution de la luminance de ce traceur peut varier au cours du temps bien que l'écoulement qui le transporte soit incompressible. Cela n'est ainsi en accord ni avec le modèle issu de l'ECMA, ni avec la formulation proposée s'appuyant sur l'équation de continuité. Ce phénomène s'explique par le fait qu'une certaine diffusion conduit ce traceur. Il serait ainsi utile d'intégrer dans le modèle d'adéquation aux données des lois de diffusion qui approcheraient au mieux le modèle de formation des images ;
- enfin, mentionnons que le coût calculatoire et le nombre de paramètres à régler est encore important. Il serait ainsi envisageable d'étudier les possibilités d'implantation rapide de cet estimateur, notamment en exploitant certaines propriétés de parallélisation des calculs. Par ailleurs, il serait intéressant de trouver des correspondances entre la valeur d'un paramètre issu de la physique d'un phénomène visualisé et sa signification dans le schéma d'estimation du mouvement.

Mentionnons également que dans certaines applications spécifiques, des structures comme les vortex évoluent selon une loi donnée. L'intégration de telles lois dans le terme de résularisation serait ainsi judicieuse.

Analyse d'un champ de déplacements

Certains apports peuvent être effectués sur la méthode d'analyse d'un champ de déplacements proposée :

- tout d'abord, il serait envisageable de détecter certains points singuliers situés en dehors du plan de visualisation. Cela pourrait par exemple être mené en estimant un modèle de mouvement affine sur des zones pré-sélectionnées dont le mouvement serait jugé influencé par une singularité externe à l'image. L'identification des paramètres de ce mouvement autoriserait la localisation d'un point singulier hors de la zone étudiée ;
- ensuite, pour obtenir une meilleure précision de la reconstruction paramétrique du champ des vitesses, il serait envisageable d'employer des modèles de vortex ou de puits/sources plus élaborés. Cela augmenterait cependant la complexité de la méthode utilisée d'identification des paramètres au sens du maximum de vraisemblance ;
- enfin, mentionnons que les propriétés géométriques du graphe des fonctions de potentiels extraites pourraient être exploitées pour associer des zones d'influence plus précises à chaque singularité.

Autres perspectives

La deuxième partie de ce document a mis en évidence l'intérêt de la connaissance des fonctions de potentiels. Ces fonctions permettent en effet de retrouver simplement le mouvement du fluide (via leur gradient), d'accéder directement à la décomposition de Helmholtz (car chaque potentiel est lié à l'une des composantes) et de plus, leurs extrema locaux localisent les points singuliers. Ces potentiels sont pour l'heure estimés à partir du champ de déplacements. Il serait extrêmement judicieux de les estimer directement à partir des fonctions de luminance des images.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer une certaine similitude entre ces fonctions de potentiels et certaines fonctions d'évolution qui découlent des schémas de suivi de type "level-sets" (décrites dans la section 6.3.1 du chapitre 6). L'utilisation de ces fonctions de potentiel dans des schémas de "level-sets" est ainsi un axe très attractif.

Notons enfin qu'une suite naturelle aux deux méthodes proposées dans ce document est le suivi temporel de toutes ces structures singulières. Cela peut par exemple s'effectuer par filtrage de Kalman ou par filtrage particulaire.

Annexes

Annexe A

M-Estimateurs robustes

Dans cette annexe, nous détaillons le formalisme des M-estimateurs robustes utilisés dans nos expérimentations.

Un M-estimateur est une fonction Ψ possédant les propriétés suivantes :

- (a) Ψ est croissante sur $\mathbb{R}^+$,
- (b) $\Psi(\sqrt{x})$ est strictement concave sur $\mathbb{R}^+$,
- (c) $\lim_{x\to\infty} \Psi'(x) < \infty$.

La propriété (a) assure que la fonction Ψ est une fonction de coût. Le point (b) implique que le graphe de Ψ est l'enveloppe inférieure d'une famille de paraboles. On peut alors montrer [Black 96c,Geman 92] que :

$$\exists\ \psi \in \mathcal{C}^1 \quad \big((m,M],\mathbb{R}\big) \text{ t.q. } \forall x,\ \Psi(x) = \min_{z\in(m,M]} \big(zx^2 + \psi(z)\big), \tag{A.1}$$

où $M = \lim_{x\to 0^+} \frac{\Psi'(x)}{2x}$ et $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi'(x)}{2x}$. De plus, le minimum est obtenu par :

$$z^*(u) = \arg \min_{z\in(m,M]} \big(zx^2 + \psi(z)\big) = \frac{\Psi'(x)}{2x}, \tag{A.2}$$

où $\frac{\Psi'(x)}{2x}$ est une fonction décroissante de M à m, d'après (b) et (c). Cette fonction assure la robustesse d'un tel estimateur. Les variables auxiliaires z qui sont introduites ici sont représentatives des écarts de la quantité x à minimiser.

L'utilisation de tels estimateurs permet de proposer une fonction de coût robuste, en conservant des propriétés intéressantes du point de vue de la minimisation. Celle-ci est en fait conduite en deux optimisations alternées. D'après (A.1), chaque problème de la forme $\min_x \Psi(g(x))$ est remplacé par le problème auxiliaire $\min_{x,z} zg^2(x) + \psi(z)$, qui est résolu par une technique de moindres carrés pondérés-itérés (MCPI) [Holland 77] :

- lorsque les variables auxiliaires $z \in (m,M]$ sont fixées, nous avons alors un problème de moindres carrés (linéaire si g est linéaire) à résoudre pour obtenir x.
- une fois obtenue, la valeur de x est gelée et l'optimum z^* du poids z correspondant est $z^* = \frac{\Psi'(x)}{2x}$.

Le lecteur trouvera sur la figure FIG.A.1 trois représentations graphiques correspondant aux estimateurs de Cauchy, Leclerc et Geman-Mc Clure. Le graphe des variables auxiliaires optimales z^* associées est également représenté.

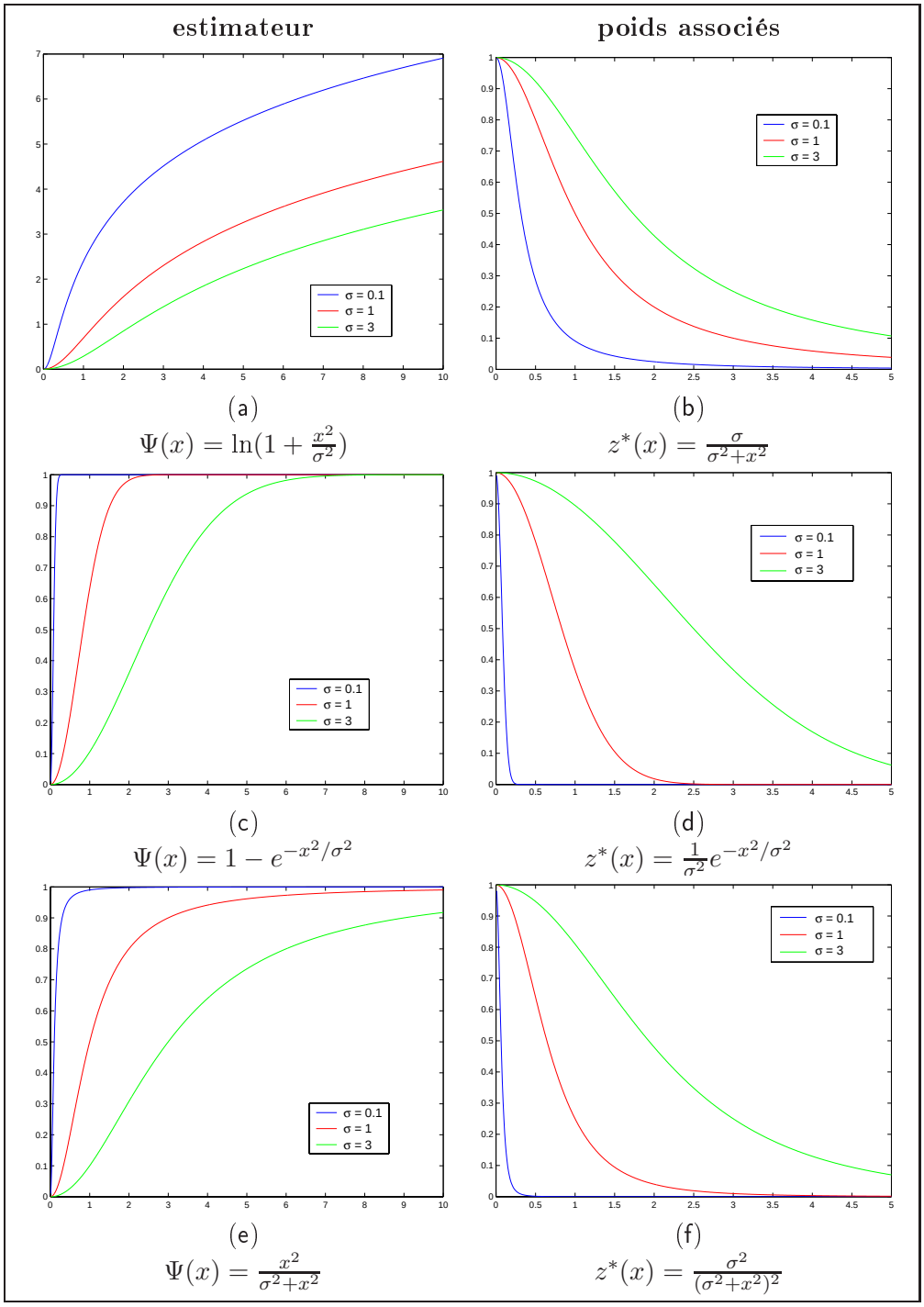


FIG. A.1 – **Exemples d'estimateurs semi-quadratiques**. *(a,c,e) estimateur de Cauchy, Leclerc et Geman-Mc Clure; (b,d,f) : leur variables auxiliaires optimales associées.*

Annexe B

Estimation du modèle paramétrique

Dans cette annexe, nous donnons les formules nécessaires à la minimisation de la fonction d'énergie qui définit l'estimateur de mouvement.

Au niveau de grille ℓ, la fonction de coût à minimiser par rapport à $\boldsymbol{h}$ s'écrit en fonction du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}_n^\ell$, celui-ci décrivant $\boldsymbol{h}$ par l'intermédiaire de la relation (3.46). Rappelons que la fonction d'énergie est définie par $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{obs} + \alpha\mathcal{H}_{reg}$, avec (voir (3.49) et (3.50)) :

$$\mathcal{H}_{obs}^\ell(\boldsymbol{\theta}_n^\ell, z^{\boldsymbol{d}}) = \sum_{n=1}^{N_\ell} \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d}} \Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})) \Big((\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}))P^\ell(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}_n^\ell + \tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big) - E(\boldsymbol{s}) \Big]^2 + \psi(z_s^{\boldsymbol{d}}) \tag{B.1}$$

où $\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) = E(\boldsymbol{s} + \tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}), t + \Delta t)$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{reg}^\ell(\boldsymbol{\theta}^\ell, \xi, \zeta, z^\xi, z^\zeta) = & \sum_{n=1}^{N_\ell} \Big[\sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \Big| \mathrm{div}[\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + P^\ell\boldsymbol{\theta}_n^\ell](\boldsymbol{s}) - \xi(\boldsymbol{s}) \Big|^2 \\ & + \lambda \sum_{<s,r>\in C} \big[z_{sr}^\xi |\nabla\xi(\boldsymbol{s})|^2 + \psi(z_{sr}^\xi) \big] \Big] \\ & + \sum_{n=1}^{N_\ell} \Big[\sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \Big| \mathrm{curl}[\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + P^\ell\boldsymbol{\theta}_n^\ell](\boldsymbol{s}) - \zeta(\boldsymbol{s}) \Big|^2 \\ & + \lambda \sum_{<s,r>\in C} \big[z_{sr}^\zeta |\nabla\zeta(\boldsymbol{s})|^2 + \psi(z_{sr}^\zeta) \big] \Big]. \end{aligned} \tag{B.2}$$

La dérivation de cette d'énergie en fonction du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}_n^\ell(\boldsymbol{s})$ fournit, pour le terme d'observation :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\mathcal{H}_{obs}^\ell(\boldsymbol{\theta}^\ell, z^{\boldsymbol{d}})}{\partial\boldsymbol{\theta}_n^\ell} = 2 \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d}} \exp\Big(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})\Big) P^\ell(\boldsymbol{s})^T \Big(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big)^T \\ & \Big[\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})) \Big((\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}))P^\ell(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}_n^\ell + \tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big) - E(\boldsymbol{s}) \Big]. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Pour le terme de régularisation, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}^{\ell}_{reg}(\boldsymbol{\theta}^{\ell},\xi,\zeta,z^{\xi},z^{\zeta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}} &= 2\sum_{\boldsymbol{s}\in B^{\ell}_{n}} D(\boldsymbol{s})^{T}\left|\mathrm{div}[\tilde{\boldsymbol{d}}^{\ell}(\boldsymbol{s})+P^{\ell}\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}](\boldsymbol{s})-\xi(\boldsymbol{s})\right| \\ &\quad +2\sum_{\boldsymbol{s}\in B^{\ell}_{n}} C(\boldsymbol{s})^{T}\left|\mathrm{curl}[\tilde{\boldsymbol{d}}^{\ell}(\boldsymbol{s})+P^{\ell}\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}](\boldsymbol{s})-\zeta(\boldsymbol{s})\right|,\end{aligned} \tag{B.4}$$

où $D(\boldsymbol{s})$ (respectivement $C(\boldsymbol{s})$) représente la dérivation du terme discret de la divergence (respectivement du rotationnel) en fonction du vecteur $\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}$.

Le vecteur d'inconnues $\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}$ dépend du bloc B^{ℓ}_{n} dans lequel l'estimation est conduite. Si le terme $\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}$ intervient dans le calcul de la divergence (resp. de la vorticité), alors $D(\boldsymbol{s})\neq 0$ (resp. $C(\boldsymbol{s})\neq 0$). En revanche, si le terme $\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}$ n'intervient pas dans ces calculs, alors $D(\boldsymbol{s})=C(\boldsymbol{s})=0$ et dans ce cas, le système n'est pas défini. Pour s'assurer de la participation de $\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}$ dans les calculs de $\mathrm{div}(\tilde{\boldsymbol{d}}^{\ell}(\boldsymbol{s})+P^{\ell}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n})$ et de $\mathrm{curl}(\tilde{\boldsymbol{d}}^{\ell}(\boldsymbol{s})+P^{\ell}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n})$, il est nécessaire que le bloc B^{ℓ}_{n} considéré contienne au moins un point du schéma de discrétisation choisi. Un utilisant une discrétisation standard par différences finies centrées au pixel $\boldsymbol{s}=(i,j)$ (relation (3.38)), cette condition est vérifiée tant que la taille de B^{ℓ}_{n} est supérieure à l'unité (*i.e.* si la grille n'est pas au niveau du pixel). En revanche, si le bloc ne représente qu'un seul pixel, un tel schéma de discrétisation ne fait pas apparaître le terme $\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}$ et aucun système ne peut être défini. La figure FIG.B.1 illustre ce principe.

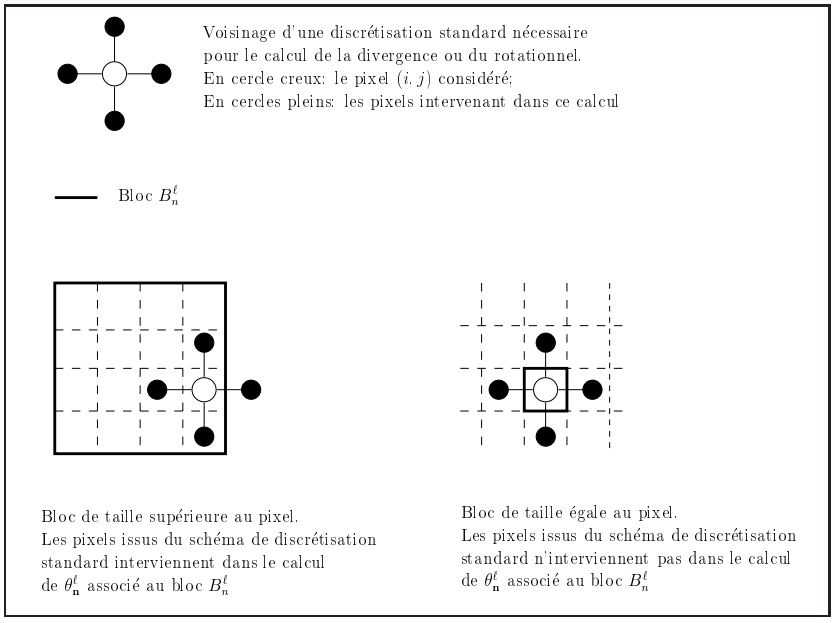


FIG. B.1 – **Problème d'un bloc réduit au pixel.** *Dans le cas où le bloc B^{ℓ}_{n} est réduit au pixel (cas de droite), aucun pixel de ce bloc n'entre en compte dans le calcul de $div[\tilde{\boldsymbol{d}}^{\ell}+P^{\ell}\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}](\boldsymbol{s})$ et de $curl[\tilde{\boldsymbol{d}}^{\ell}+P^{\ell}\boldsymbol{\theta}^{\ell}_{n}](\boldsymbol{s})$.*

Ainsi, dans le cas particulier où la grille considérée sera réduite au pixel, nous utiliserons un schéma de discretisation différent. Ce schéma a été présenté dans la relation (3.39) et

s'écrit :

$$\begin{cases} \text{div}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}) = \text{div}\boldsymbol{d}(i,j) = \dfrac{1}{6}[(3u_{i,j} + u_{i,j-2} - 6u_{i,j-1} + 2u_{i,j+1}) + (3v_{i,j} + v_{i-2,j} - 6v_{i-1,j} + 2v_{i+1,j})] \\ \text{curl}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}) = \text{curl}\boldsymbol{d}(i,j) = \dfrac{1}{6}[(3v_{i,j} + v_{i,j-2} - 6v_{i,j-1} + 2v_{i,j+1}) - (3u_{i,j} + u_{i-2,j} - 6u_{i-1,j} + 2u_{i+1,j})]. \end{cases} \tag{B.5}$$

Étudions en premier lieu le cas où $\text{card}(B_n^\ell) > 1$. La relation (B.4) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{reg}^\ell(\boldsymbol{\theta}^\ell,\xi,\zeta,z^\xi,z^\zeta)}{\partial \boldsymbol{\theta}_n^\ell} = & 2\sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} D(\boldsymbol{s})^T \left|\text{div } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) + D(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}_n^\ell - \xi(\boldsymbol{s})\right| \\ & +2\sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} C(\boldsymbol{s})^T \left|\text{curl } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) + C(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\theta}_n^\ell - \zeta(\boldsymbol{s})\right|, \end{aligned} \tag{B.6}$$

avec :

$$\begin{cases} \text{div } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) = \text{div } \tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j} = T_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j+1} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-1}) + T_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i+1,j} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{i-1,j}), \\ \text{curl } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) = \text{curl } \tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j} = T_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j+1} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-1}) - T_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i+1,j} - \tilde{\boldsymbol{d}}_{i-1,j}) \\ D(\boldsymbol{s}) = D(i,j) = T_1(q_{i,j+1}P_{i,j+1}^\ell - q_{i,j-1}P_{i,j-1}^\ell) + T_2(q_{i+1,j}P_{i+1,j}^\ell - q_{i-1,j}P_{i-1,j}^\ell), \\ C(\boldsymbol{s}) = C(i,j) = T_2(q_{i,j+1}P_{i,j+1}^\ell - q_{i,j-1}P_{i,j-1}^\ell) - T_1(q_{i+1,j}P_{i+1,j}^\ell - q_{i-1,j}P_{i-1,j}^\ell), \\ q_{i,j} = 1 \ \text{ si } \ (i,j) \in B_n^\ell, \quad 0 \ \text{ sinon}, \\ T_1 = (1,0), \\ T_2 = (0,1), \\ \boldsymbol{s} = (i,j). \end{cases} \tag{B.7}$$

Le système à résoudre s'écrivant :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{obs}^\ell(\boldsymbol{\theta}^\ell,z^{\boldsymbol{d}})}{\partial \boldsymbol{\theta}_n^\ell} + \alpha \frac{\partial \mathcal{H}_{reg}^\ell(\boldsymbol{\theta}^\ell,\xi,\zeta,z^\xi,z^\zeta)}{\partial \boldsymbol{\theta}_n^\ell} = 0, \tag{B.8}$$

nous pouvons l'écrire sous forme matricielle, d'après les relations (B.3) et (B.6) de la manière suivante :

$$\left[{A_n^\ell}^T \Delta_n A_n^\ell + \alpha {D_n^\ell}^T D_n^\ell + \alpha {C_n^\ell}^T C_n^\ell\right] \boldsymbol{\theta}_n^\ell = -{A_n^\ell}^T \Delta_n F_n^\ell - \alpha {D_n^\ell}^T \Gamma_n^\ell - \alpha {C_n^\ell}^T Q_n^\ell, \tag{B.9}$$

en notant

$$A_n^\ell = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \exp\left(\text{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})\right) P^\ell(\boldsymbol{s})^T \left(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\text{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\right)^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_n^\ell},$$

$$D_n^\ell = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D(\boldsymbol{s}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_n^\ell}, \quad C_n^\ell = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C(\boldsymbol{s}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_n^\ell},$$

$$F_n^\ell = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}))\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) - E(\boldsymbol{s}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{s\in\mathcal{B}_n^\ell},$$

$$\Gamma_n^\ell = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) - \xi(\boldsymbol{s}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{s\in\mathcal{B}_n^\ell}, \quad Q_n^\ell = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{curl}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) - \zeta(\boldsymbol{s}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{s\in\mathcal{B}_n^\ell},$$

$$\text{et} \quad \Delta_n^\ell = \mathrm{diag}(\dots\ ,\ z_{\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{d},\ell}\ ,\ \dots)_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{B}_n^\ell}.$$

Nous obtenons ainsi un système matriciel de taille 6×6 ou 2×2 selon le modèle choisi (affine ou constant). Étudions successivement chacun de ces cas.

Cas du modèle affine

Dans ce cas, $P_n^\ell(\boldsymbol{s}) = \mathbb{I}_2 \otimes (\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s})^T)$, où $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s})^T = [1\ ,\ x_s\ ,\ y_s]$. Nous avons alors les résultats suivants :

$$A_n^{\ell\,T}\Delta_n^\ell A_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d},\ell}\left(\exp(2\ \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}))\left(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\right)\ \left(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\right)^T\right) \otimes \left(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s})^T\right),$$

$$A_n^{\ell\,T}\Delta_n^\ell F_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d},\ell}\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}))\left(\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}))\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) - E(\boldsymbol{s})\right)\left(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\right)\otimes\boldsymbol{e}(\boldsymbol{s}),$$

$$D_n^{\ell\,T}D_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell}$$

$$\begin{bmatrix} (q_1-q_2)^2 & (q_1-q_2)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (q_1-q_2)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) & (q_1-q_2)(q_3-q_4) & (q_1-q_2)(\overline{x}_3-\overline{x}_4) & (q_1-q_2)(\overline{y}_3-\overline{y}_4) \\ (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(q_1-q_2) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)^2 & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(q_3-q_4) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(\overline{x}_3-\overline{x}_4) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(\overline{y}_3-\overline{y}_4) \\ (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(q_1-q_2) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)^2 & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(q_3-q_4) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(\overline{x}_3-\overline{x}_4) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(\overline{y}_3-\overline{y}_4) \\ (q_3-q_4)(q_1-q_2) & (q_3-q_4)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (q_3-q_4)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) & (q_3-q_4)^2 & (q_3-q_4)(\overline{x}_3-\overline{x}_4) & (q_3-q_4)(\overline{y}_3-\overline{y}_4) \\ (\overline{x}_3-\overline{x}_4)(q_1-q_2) & (\overline{x}_3-\overline{x}_4)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (\overline{x}_3-\overline{x}_4)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) & (\overline{x}_3-\overline{x}_4)(q_3-q_4) & (\overline{x}_3-\overline{x}_4)^2 & (\overline{x}_3-\overline{x}_4)(\overline{y}_3-\overline{y}_4) \\ (\overline{y}_3-\overline{y}_4)(q_1-q_2) & (\overline{y}_3-\overline{y}_4)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (\overline{y}_3-\overline{y}_4)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) & (\overline{y}_3-\overline{y}_4)(q_3-q_4) & (\overline{y}_3-\overline{y}_4)(\overline{x}_3-\overline{x}_4) & (\overline{y}_3-\overline{y}_4)^2 \end{bmatrix},$$

avec $q_1 = q_{i,j+1}$, $q_2 = q_{i,j-1}$, $q_3 = q_{i+1,j}$, $q_4 = q_{i-1,j}$, $\overline{x}_i = q_i x_i$ et $\overline{y}_i = q_i y_i$,

$$D_n^{\ell\,T}\Gamma_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_1-q_2) \\ (\overline{x}_1-\overline{x}_2) \\ (\overline{y}_1-\overline{y}_2) \\ (q_3-q_4) \\ (\overline{x}_3-\overline{x}_4) \\ (\overline{y}_3-\overline{y}_4) \end{bmatrix} \Big(T_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_1-\tilde{\boldsymbol{d}}_2) + T_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_3-\tilde{\boldsymbol{d}}_4) - \xi(\boldsymbol{s}) \Big),$$

$$C_n^{\ell\,T}C_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_4-q_3)^2 & (q_4-q_3)(\overline{x}_4-\overline{x}_3) & (q_4-q_3)(\overline{y}_4-\overline{y}_3) & (q_4-q_3)(q_1-q_2) & (q_4-q_3)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (q_4-q_3)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) \\ (\overline{x}_4-\overline{x}_3)(q_4-q_3) & (\overline{x}_4-\overline{x}_3)^2 & (\overline{x}_4-\overline{x}_3)(\overline{y}_4-\overline{y}_3) & (\overline{x}_4-\overline{x}_3)(q_1-q_2) & (\overline{x}_4-\overline{x}_3)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (\overline{x}_4-\overline{x}_3)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) \\ (\overline{y}_4-\overline{y}_3)(q_4-q_3) & (\overline{y}_4-\overline{y}_3)(\overline{x}_4-\overline{x}_3) & (\overline{y}_4-\overline{y}_3)^2 & (\overline{y}_4-\overline{y}_3)(q_1-q_2) & (\overline{y}_4-\overline{y}_3)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (\overline{y}_4-\overline{y}_3)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) \\ (q_1-q_2)(q_4-q_3) & (q_1-q_2)(\overline{x}_4-\overline{x}_3) & (q_1-q_2)(\overline{y}_4-\overline{y}_3) & (q_1-q_2)^2 & (q_1-q_2)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (q_1-q_2)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) \\ (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(q_4-q_3) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(\overline{x}_4-\overline{x}_3) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(\overline{y}_4-\overline{y}_3) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(q_1-q_2) & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)^2 & (\overline{x}_1-\overline{x}_2)(\overline{y}_1-\overline{y}_2) \\ (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(q_4-q_3) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(\overline{x}_4-\overline{x}_3) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(\overline{y}_4-\overline{y}_3) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(q_1-q_2) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)(\overline{x}_1-\overline{x}_2) & (\overline{y}_1-\overline{y}_2)^2 \end{bmatrix},$$

$$C_n^{\ell\,T}Q_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_4-q_3) \\ (\overline{x}_4-\overline{x}_3) \\ (\overline{y}_4-\overline{y}_3) \\ (q_1-q_2) \\ (\overline{x}_1-\overline{x}_2) \\ (\overline{y}_1-\overline{y}_2) \end{bmatrix} \Big(T_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_1-\tilde{\boldsymbol{d}}_2) - T_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_3-\tilde{\boldsymbol{d}}_4) - \zeta(\boldsymbol{s}) \Big).$$

Partant de ces quatre dernières relations, chaque positionnement dans le bloc des pixels appartenant au schéma de discrétisation considéré (pixel à l'intérieur ou non du bloc) est à traiter. Un système est défini pour chaque situation. Étudions à présent le cas du modèle constant.

Cas du modèle constant

Le modèle constant correspond à $P_n^\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Il est appliqué lorsque les blocs B_n^ℓ sont de taille inférieure ou égale à 2×2 (dans ce cas, il est en effet impossible d'effectuer une estimation selon le modèle affine). Étudions chacun de ces cas.

Blocs de taille 2×2 Dans ce cas, les relations deviennent :

$$A_n^{\ell\,T}\Delta_n^\ell A_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d},\ell} \exp(2\ \mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})) \Big(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big) \Big(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big)^T,$$

$$A_n^{\ell\,T}\Delta_n^\ell F_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} z_s^{\boldsymbol{d},\ell} \exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s})) \Big(\exp(\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}))\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) - E(\boldsymbol{s}) \Big) \Big(\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s})\nabla\mathrm{div}\tilde{\boldsymbol{d}}^\ell(\boldsymbol{s}) + \nabla\tilde{E}^\ell(\boldsymbol{s}) \Big),$$

$$D_n^{\ell\,T}D_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_{i,j+1}-q_{i,j-1})^2 & (q_{i,j+1}-q_{i,j-1})(q_{i+1,j}-q_{i-1,j}) \\ (q_{i,j+1}-q_{i,j-1})(q_{i+1,j}-q_{i-1,j}) & (q_{i+1,j}-q_{i-1,j})^2 \end{bmatrix},$$

$$D_n^{\ell\,T}\Gamma_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_{i,j+1}-q_{i,j-1}) \\ (q_{i+1,j}-q_{i-1,j}) \end{bmatrix} \Big(T_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j+1}-\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-1}) + T_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i+1,j}-\tilde{\boldsymbol{d}}_{i-1,j}) - \xi(\boldsymbol{s})\Big),$$

$$C_n^{\ell\,T}C_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_{i-1,j}-q_{i+1,j})^2 & (q_{i-1,j}-q_{i+1,j})(q_{i,j+1}-q_{i,j-1}) \\ (q_{i-1,j}-q_{i+1,j})(q_{i,j+1}-q_{i,j-1}) & (q_{i,j+1}-q_{i,j-1})^2 \end{bmatrix},$$

$$C_n^{\ell\,T}\Gamma_n^\ell = \sum_{\boldsymbol{s}\in B_n^\ell} \begin{bmatrix} (q_{i-1,j}-q_{i+1,j}) \\ (q_{i,j+1}-q_{i,j-1}) \end{bmatrix} \Big(T_2(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j+1}-\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-1}) - T_1(\tilde{\boldsymbol{d}}_{i+1,j}-\tilde{\boldsymbol{d}}_{i-1,j}) - \zeta(\boldsymbol{s})\Big).$$

Dans ce cas, les quatre positions du point considéré dans le bloc fournissent un système différent à prendre en compte. Étudions à présent le cas où la grille est de taille du pixel.

Blocs réduits au pixel Dans ce cas, le schéma de discrétisation employé est celui défini dans (3.39). La dérivation du terme de régularisation fournit, en notant que P_n^ℓ est la matrice identité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_{reg}^\ell(\boldsymbol{\theta}_n^\ell,\xi,\zeta,z^\xi,z^\zeta)}{\partial \boldsymbol{\theta}_n^\ell} &= 2[T_1/2+T_2/2]^T \Big|\text{div } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) + [T_1/2+T_2/2]\boldsymbol{\theta}_n^\ell(\boldsymbol{s}) - \xi(\boldsymbol{s})\Big| \\ &\quad +2[-T_1/2+T_2/2]^T \Big|\text{curl } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) + [-T_1/2+T_2/2]\boldsymbol{\theta}_n^\ell(\boldsymbol{s}) - \zeta(\boldsymbol{s})\Big|,\end{aligned} \tag{B.10}$$

avec :

$$\begin{cases} \text{div } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) = \dfrac{1}{6}[T_1(3\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j}+\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-2}-6\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-1}+2\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j+1}) + T_2(3\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j}+\tilde{\boldsymbol{d}}_{i-2,j}-6\tilde{\boldsymbol{d}}_{i-1,j}+2\tilde{\boldsymbol{d}}_{i+1,j})] \\ \text{curl } \tilde{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{s}) = \dfrac{1}{6}[T_2(3\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j}+\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-2}-6\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j-1}+2\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j+1}) - T_1(3\tilde{\boldsymbol{d}}_{i,j}+\tilde{\boldsymbol{d}}_{i-2,j}-6\tilde{\boldsymbol{d}}_{i-1,j}+2\tilde{\boldsymbol{d}}_{i+1,j})]. \end{cases} \tag{B.11}$$

Nous pouvons ainsi adopter la même notation que la relation (B.9). Les termes $A_n^{\ell\,T}\Delta_n^\ell A_n^\ell$ et $A_n^{\ell\,T}\Delta_n^\ell F_n^\ell$ restent inchangés, et nous avons :

$$D_n^{\ell\,T}D_n^\ell = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix},$$

$$D_n^{\ell\,T}\Gamma_n^\ell = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\Big(\text{div } \tilde{\boldsymbol{d}} - \xi(\boldsymbol{s})\Big),$$

$$C_n^{\ell\,T}C_n^\ell = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix},$$

$$C_n^{\ell\,T}Q_n^\ell = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\Big(\text{curl } \tilde{\boldsymbol{d}} - \zeta(\boldsymbol{s})\Big).$$

Annexe C

Intégration numérique pour la reconstruction de trajectoires

Nous expliquons dans cette annexe la méthode mise en œuvre pour calculer numériquement les trajectoires d'éléments de fluide. Disposant des champs de déplacements denses intra-images $\boldsymbol{d}(t_0 + n\Delta t) = \{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},t_0 + n\Delta t),\boldsymbol{x} \in \Omega\}$, $n = 0,\cdots,N-1$ pour une séquence de $N+1$ images, le but est de reconstruire les trajectoires $\boldsymbol{x}(t)$ de points situés en $\boldsymbol{x}_0$ dans la première image. En approchant la vitesse $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$ par $\frac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}(t),t)}{\Delta t}$, il en résulte l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \frac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}(t),t)}{\Delta t} \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \end{array} \right. \tag{C.1}$$

Les méthodes de Runge-Kutta sont des techniques numériques standard pour résoudre numériquement ces problèmes de manière robuste. Elles s'appuient sur l'approximation de l'intégrale

$$\begin{array}{c} \underbrace{\boldsymbol{x}(t_0 + (n+1)\Delta t)}_{\boldsymbol{x}_{n+1}} - \underbrace{\boldsymbol{x}(t_0 + n\Delta t)}_{\boldsymbol{x}_n} = \\ \int_{t_0+n\Delta t}^{t_0+(n+1)\Delta t} \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} dt = \int_{t_0+n\Delta t}^{t_0+(n+1)\Delta t} \frac{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}(t),t)}{\Delta t} dt. \end{array} \tag{C.2}$$

Une approximation d'ordre quatre fournit le résultat suivant :

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \frac{1}{6}(\boldsymbol{d}_n^{(1)} + 2\boldsymbol{d}_n^{(2)} + 2\boldsymbol{d}_n^{(3)} + \boldsymbol{d}_n^{(4)}), \tag{C.3}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{d}_n^{(1)} & = & \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}_n,t_0 + n\Delta t) \\ \boldsymbol{d}_n^{(2)} & = & \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}_n + \frac{\boldsymbol{d}_n^{(1)}}{2},t_0 + n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}) \\ \boldsymbol{d}_n^{(3)} & = & \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}_n + \frac{\boldsymbol{d}_n^{(2)}}{2},t_0 + n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}) \\ \boldsymbol{d}_n^{(4)} & = & \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{d}_n^{(3)},t_0 + n\Delta t + \Delta t). \end{array} \right.$$

Les champs de déplacement $\boldsymbol{d}$ n'étant disponibles qu'aux pixels et aux instants $t_0 + n\Delta t$, nous effectuons une interpolation spatio-temporelle, que nous avons choisie bilinéaire.

Annexe D

Segmentation de zones significatives de divergence et de vorticité

Étant donné un champ de déplacement $\boldsymbol{d}$, il est possible de calculer numériquement les valeurs de la divergence et de la vorticité en tout pixel $\boldsymbol{s}$, en utilisant les relations (3.38) ou (3.39). Par ailleurs, le schéma de régularisation proposé dans la section 3.4 fournit des versions régularisées de ces scalaires conjointement avec l'estimation du champ des vitesses.

Notons ξ et ζ ces champs scalaires (issus du schéma d'estimation de mouvement ou des relations (3.38) ou (3.39)) à partir desquels les concentrations significatives de divergence et de vorticité seront extraites. Nous présentons la méthode d'extraction de zones caractéristiques dans le cas de la divergence, l'approche étant analogue pour extraire les zones de vorticité (en remplaçant ξ par ζ dans ce qui suit).

Pour chaque pixel $\boldsymbol{s} \in S$, nous souhaitons lui affecter un label binaire σ_s représentatif de la présence ($\sigma_s = +1$) ou non ($\sigma_s = -1$) d'une concentration significative de divergence. Le processus de décision s'appuie sur deux critères : *i)* la valeur absolue de ξ est importante au sein d'une structure divergente et *ii)* ces structures sont relativement compactes. Ce genre de problème est fréquemment résolu par des méthodes de classification Markovienne, en minimisant une fonction de coût. Nous minimisons:

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \frac{\sigma_s(\mu - |\xi_s|)}{\mu + |\xi_s|} - \beta \sum_{<s,c> \in C} \sigma_s \sigma_c, \tag{D.1}$$

où μ est un seuil sur la valeur de la divergence, β un paramètre positif qui règle l'importance du terme de régularisation et C un système de voisinage (4-voisinage dans ce cas).

La minimisation de cette fonction de coût globale est conduite à l'aide de l'algorithme déterministe ICM (Iterated Conditional Mode en anglais) décrit dans [Besag 86] : tous les pixels sont parcourus et l'étiquette au site $\boldsymbol{s}$ est remise à jour (comme étant celle qui maximise la descente d'énergie locale de la fonction de coût (D.1)). Cette remise à jour est fonction du voisinage $N(s)$ du pixel considéré. Le pixels $\boldsymbol{s}$ prend alors la valeur:

$$\sigma_s = \begin{cases} +1 & \text{si } \frac{|\xi_s| - \mu}{|\xi_s| + \mu} + \beta \sum_{r \in N(s)} \sigma_r > 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{D.2}$$

L'initialisation de ce procédé est effectuée par simple seuillage de la divergence :

$$\sigma_s = \begin{cases} +1 & \text{si } |\xi_s| > \mu \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{D.3}$$

Annexe E

Dérivation par rapport au rayon de la fonction d'énergie du chapitre 7

Dans cette annexe, nous nous intéressons à la dérivation d'une fonction F particulière. Cette fonction est en fait composée de l'intégration de deux fonctions f et g. Les domaines d'intégrations sont :

- à l'intérieur d'un cercle $\mathcal{D}$ de rayon R pour la fonction f et,
- son complémentaire $\overline{\mathcal{D}}$ pour la fonction g

Les fonctions f et g sont dépendantes du rayon R. Elles sont identiques sur le cercle $\partial\mathcal{D}$ de rayon R. Nous avons ainsi :

$$F = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y,R)dxdy + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} g(x,y,R)dxdy, \tag{E.1}$$

La dérivation de F par rapport au rayon R s'exprime :

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\iint_{\mathcal{D}} f(x,y,R)dxdy + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} g(x,y,R)dxdy\right) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial R}dxdy + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial g(x,y)}{\partial R}dxdy. \tag{E.2}$$

Considérons en premier lieu la fonction suivante :

$$H(R) = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y,R)dxdy. \tag{E.3}$$

En coordonnées polaires, la dérivée partielle $\frac{\partial H}{\partial R}$ s'exprime (avec $f(r,\theta,R) \triangleq f(r\cos\theta, r\sin\theta, R)$) :

$$\begin{aligned}
H'(R) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{R+h} f(r,\theta,R+h) r dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(r,\theta,R) r dr d\theta\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{R+h} f(r,\theta,R+h) r dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(r,\theta,R+h) r dr d\theta\right. \\
&\left. + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(r,\theta,R+h) r dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(r,\theta,R) r dr d\theta\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^{2\pi}\int_R^{R+h} f(r,\theta,R+h) r dr d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} f(r,\theta,R+h) - f(r,\theta,R) r dr d\theta\right] \\
&= \int_0^{2\pi} f(R,\theta,R) R d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\partial f(r,\theta,R)}{\partial R} r dr d\theta = \int_{\partial\mathcal{D}} f + \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial R}.
\end{aligned} \tag{E.4}$$

La dérivation de la fonction

$$J(R) = \iint_{\overline{\mathcal{D}}} g(x,y,R) dx dy, \tag{E.5}$$

est obtenue en notant que

$$J(R) = \underbrace{\iint_{\Omega} g}_{A} - \underbrace{\iint_{\mathcal{D}} g}_{B}. \tag{E.6}$$

La dérivée de A s'exprime $\iint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial R}$ et celle de B est similaire à celle de $H(R)$, développée ci-dessus. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
J'(R) &= \iint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial R} - \left[\int_{\partial\mathcal{D}} g + \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial g}{\partial R}\right] \\
&= \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial g}{R} - \int_{\partial\mathcal{D}} g.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

La continuité à la frontière circulaire $\partial\mathcal{D}$ étant respectée, nous avons $\int_{\partial\mathcal{D}} f = \int_{\partial\mathcal{D}} g$ et ainsi :

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\iint_{\mathcal{D}} f + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} g\right) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f(R)}{\partial R} + \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial g(R)}{\partial R}. \tag{E.8}$$

Annexe F

Analyse du mouvement par vélocimétrie 2D

Les méthodes de vélocimétrie par imagerie ont une part fortement importante dans les techniques de visualisation de fluides [Schon 92]. Cette annexe présente le principe de ces méthodes dans le cas bidimensionnel. Nous nous inspirons de ce qui est présenté dans [DenisBrossard 00]. Pour une description plus complète, nous renvoyons le lecteur à [Fayolle 96,Reinecke 99].

Acquisition des images

Le fluide à étudier est tout d'abord ensemencé par des traceurs répartis selon une distribution uniforme (dans le cas idéal). Une fine couche de l'écoulement à analyser est alors éclairée par des impulsions lumineuses (lumière diffuse ou faisceau laser) qui excitent les traceurs. Ceux-ci émettent des radiations qui sont détectées par un capteur optique. Ce capteur est souvent une caméra numérique ou un système holographique et est placé perpendiculairement au plan d'illumination. La figure FIG.F.1 illustre ce principe.

Plusieurs types d'images en découlent, en fonction des traceurs utilisés, de leur concentration et du temps d'exposition choisi pour l'acquisition des images. Parmi les traceurs, nous pouvons distinguer :

- les *traceurs discrets* tels que des particules ou des molécules. Ceux-ci sont souvent utilisés pour la visualisation d'écoulements liquides. Suivant la concentration de ces traceurs, il en résulte des *images de traits* ou de *suivi de particules* (faible concentration), des *images de particules* (forte concentration) ou des *images de speckle* (très forte concentration);
- les *traceurs continus* tels que la fumée, les colorants ou les filets électrolytiques. Ces traceurs sont employés pour l'analyse d'écoulements aussi bien gazeux que liquides. Il en résulte des *images de jets* ou de *filets d'émission*, qui permettent de visualiser la propagation des traceurs entraînés par l'écoulement. L'information sur les *lignes d'émission* peut ainsi être extraite.

Présentons brièvement chacun des type d'imagerie résultant des différentes techniques d'acquisition.

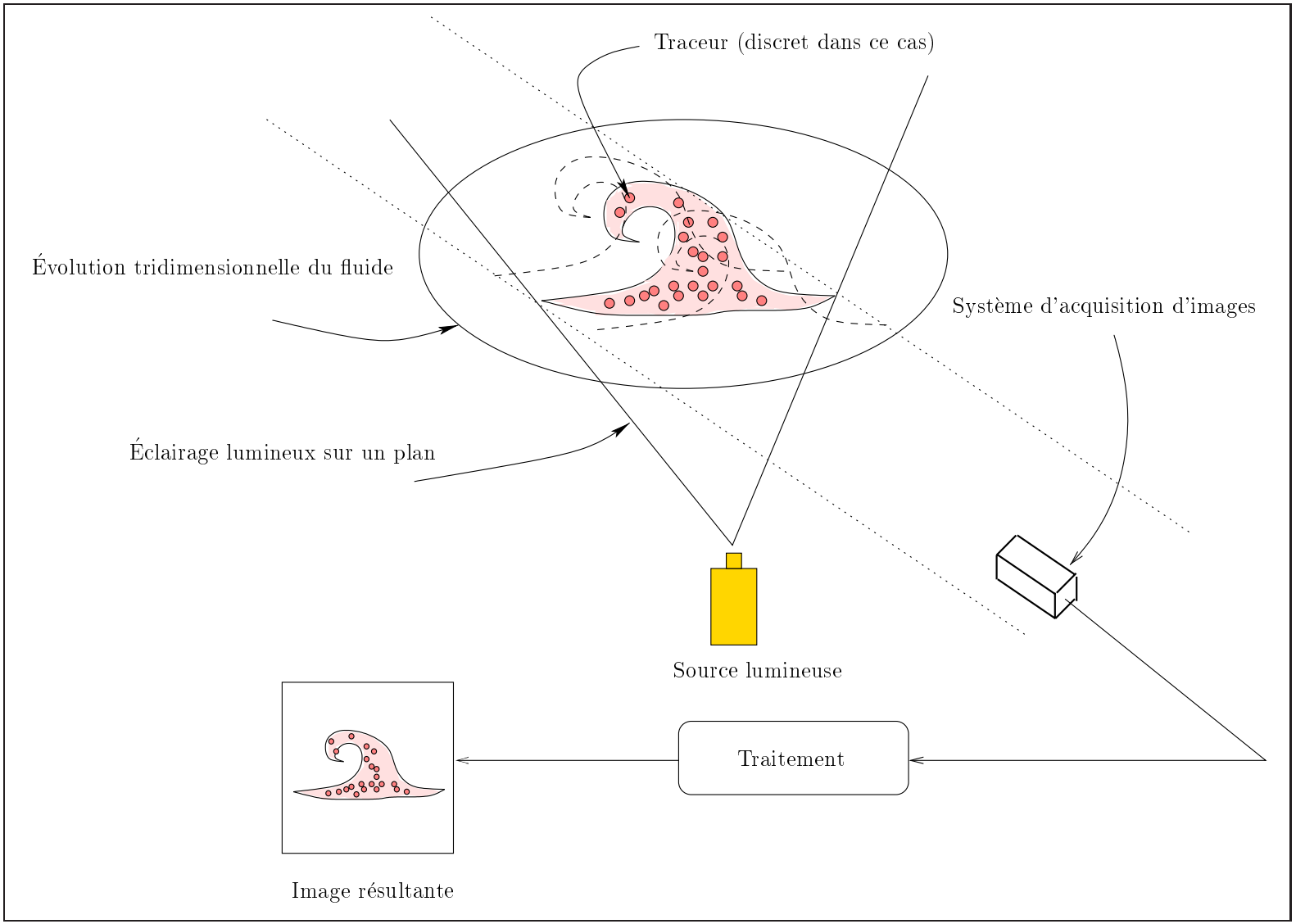


FIG. F.1 – **Principe d'acquisition d'images** *pour les techniques de vélocimétrie. Une source lumineuse éclaire le fluide sur un plan. Les traceurs ensemencés dans ce fluide éclairés sont alors excités. À la suite d'un traitement informatique, il en résulte une image à partir de laquelle des traitements peuvent être effectués.*

Traceurs discrets : vélocimétrie par images de traits (ou PSV pour Particle Streak Velocimetry)

Lorsque la concentration du traceur discret est faible, il n'y a pas de superposition de leurs traces dans l'image. Avec un temps d'exposition (pour la capture de l'image) adéquat, nous obtenons des images de traits. La longueur et l'orientation renseignent ainsi sur l'amplitude et la direction du champ de déplacement du fluide étudié. Une image de traits est visible sous la figure FIG.F.2 (a). Il est alors possible d'accéder à la vitesse eulérienne par binarisation de l'image puis extraction des traces.

L'avantage de ce type d'imagerie est de pouvoir accéder directement à la vitesse eulérienne à partir d'une seule image [David 96,Fayolle 96]. Cependant, de telles méthodes fournissent des mesures éparses en raison de la faible concentration des traceurs. De plus, le sens du déplacement est dans certains cas difficile à déterminer. Ces constats nécessitent le développement traitements postérieurs, qui peuvent parfois être peu robustes [David 96]. Par ailleurs, si l'écoulement est tridimensionnel, alors le trait généré par un marqueur ne correspond pas nécessairement à son déplacement réel pendant la durée de l'exposition. En effet, il peut avoir fait son apparition au cours du procédé d'exposition dans la tranche du fluide étudié. Il se crée ainsi une incertitude sur les mesures effectuées, qui porte le nom d'incertitude "temporelle".

Traceurs discrets : vélocimétrie par suivi de particules (ou PTV pour Particle Tracking Velocimetry)

Cette technique utilise soit deux images monoexposées, soit une image multiexposée. Dans le premier cas, nous disposons de deux images acquises dans un certain laps de temps (fonction de l'écoulement étudié). Dans le second, les radiations émises par les traceurs lors des deux procédés d'acquisition sont représentées sur une seule image dite multiexposée. Pour un faible temps d'exposition, les traces laissées par les marqueurs sont ponctuelles. Ces traces, en faible concentration dans l'écoulement, sont mises en correspondance pour accéder au champ de déplacement, par des méthodes d'appariement spatial ou de prédiction (si la séquence acquise comporte un nombre suffisant d'images).

Cette technique permet de s'affranchir du problème de l'incertitude temporelle des méthodes de PSV. En revanche, les mouvements tridimensionnels vont être responsables de l'apparition ou de la disparition de traces dues aux particules entrant ou sortant du plan de visualisation. Ceci va rendre délicat les méthodes de mise en correspondance.

Traceurs discrets : vélocimétrie par images de particules (ou PIV pour Particle Image Velocimetry)

Pour obtenir un champ de vitesse le plus dense possible, il est possible d'accroître la densité des traceurs dans le fluide. L'image résultante est alors beaucoup plus concentrée en particules, ce qui en augmente la probabilité de superposition des traces (voir par exemple la figure FIG.F.2 (b)). Ainsi, les méthodes locales de la PTV ne sont plus valides. Les approches par corrélation permettent alors d'obtenir de bonnes estimations du déplacement

des particules, et ainsi du fluide étudié (voir section 2.2). Pour les acquisitions multi-exposées, des méthodes menées dans le domaine fréquentiel (de type interférométrique ou cepstral) permettent également d'accéder à l'information du mouvement. Nous renvoyons le lecteur à [Adrian 91,Bogert 63,David 96,Fournel 92,Fayolle 96] pour plus de détails à ce sujet.

Traceurs discrets : vélocimétrie par analyse de speckle (ou LSV pour Laser Speckle Velocimetry)

Dans ce cas, la concentration des traceurs est très importante. Les traces de chaque marqueur se recouvrent et interfèrent entre elles, ce qui génère des motifs granulaires appelés *speckle*. Des méthodes analogues à la PIV existent pour analyser cette type d'images, à la différence que l'on ne suit plus des particules mais des motifs de speckle. Du déplacement d'un speckle peut ensuite être déduit le déplacement des traceurs qui le composent.

Une telle imagerie permet donc d'obtenir de l'information encore plus dense que la PIV sur le mouvement du fluide étudié. Cependant, la nature aléatoire du phénomène générant les motifs implique une incertitude sur la précision des estimations. De plus, la forte concentration des particules peut rendre les images faiblement contrastées si la source lumineuse n'est pas suffisamment puissante, ce qui introduit une difficulté supplémentaire.

Traceurs continus : vélocimétrie par images de filets d'émission

Dans ce cas, un traceur continu est injecté dans le fluide à étudier. L'interaction de ces deux entités va provoquer l'apparition de structures caractéristiques tels que des tourbillons en rotation inverse ou des anneaux. Une image de filets d'émission est représentée en FIG.F.2 (c). Deux paramètres permettent de caractériser ces structures formées : le rapport des vitesses des fluides et le nombre de Reynolds mesurant la turbulence de l'écoulement ainsi crée.

Dans ce type d'imagerie, les frontières du fluide marqueur sont nettement visibles et permettent de caractériser l'écoulement étudié. Trois approches générales existent :

1. l'extraction et la mise en correspondance de points caractéristiques;
2. l'extraction et le suivi de frontières;
3. la corrélation sur des subdivisions adaptées.

Dans [Fayolle 96], on trouvera une discussion sur les performances de ces trois méthodes. Les applications de ce type d'imagerie sont variées, et touchent des domaines comme l'ingénierie (étude de l'injection de carburants dans les moteurs, contrôle de jonctions de canalisations, ...) ou la science environnementale (étude du mélange d'agents polluants dans l'eau ou l'atmosphère par exemple).

Comparaison de ces méthodes

Succinctement, il peut être établi les remarques suivantes :

- la mise en œuvre des méthodes de PSV est numériquement et expérimentalement plus simple que la PIV ou la PTV;

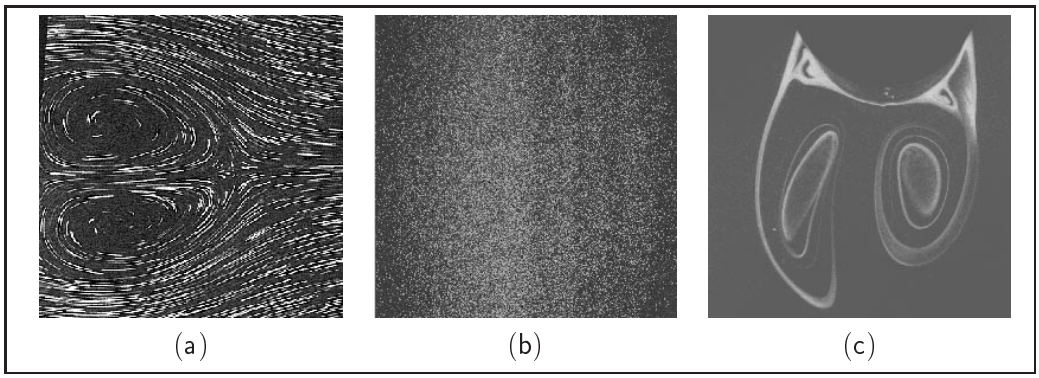


FIG. F.2 – **Exemples d'images de vélocimétrie** *: (a)* psv*; (b)* piv *et (c) : filets d'émission*

- la PSV permet d'accéder directement à la composante eulérienne de l'écoulement, ce qui n'est pas le cas avec la PIV ou la PTV qui nécessitent d'estimer ces quantités à partir des images;
- les mesures fournies en PSV ou PTV sont toutefois éparses et incertaines, par opposition aux mesures de PIV;
- enfin, la LSV n'est quant à elle applicable que pour des écoulements dont l'évolution est très lente, ce qui n'autorise pas le traitement de structures turbulentes par exemple.

Le lecteur trouvera dans [Adrian 91,David 96,Fayolle 96] des études comparatives complètes sur ces différentes modalités.

Table des figures

0.1 **Structuration de ce document.** Deux étapes sont à réaliser. 17

1.1 **Le support Ω est simplement connexe** : toute courbe $C_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ joignant $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ se déforme uniformément en $C_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tout en restant dans Ω. 23
1.2 **Représentation de quatre mouvements typiques** : (a) : champ divergent ; (b) champ rotationnel ; (c) et (d) : champs hyperboliques 25
1.3 **Importance de la composante laminaire**. (a) : champ initial issu d'une couche de mélange en mécanique des fluides expérimentale ; (b) : sa composante laminaire et (c) : le champ recalé résultant 27
1.4 **Illustration des lignes de courant** : (a) : Un champ réel et (b) : les lignes de courant correspondantes 28
1.5 **Illustration des trajectoires de particules** : (a,b,c,d) : quatre images d'une séquence météorologique sur lesquelles on a superposé leur champ de déplacements associé ; (e) : grille de points initiaux dont on souhaite obtenir les trajectoires au cours du temps ; (f) : trajectoires de ces particules superposées à la dernière image de la séquence 29
1.6 **Illustration du principe des lignes d'émission** : Toutes les particules passent par E en un instant θ qui leur est propre. La ligne d'émission résultante à l'instant t_5 est représentée en pointillés. 30

2.1 **Illustration du problème de l'ouverture** : le vecteur du mouvement réel $\boldsymbol{v}$ au point $\boldsymbol{x}$ est en gras. Seule sa composante normale au contour $\boldsymbol{v}_n$ sera estimée par la relation (2.4). 42
2.2 **Exemples de textures temporelles** : (a) flammes ; (b) feuilles ; (c) drapeaux et (d) rivières 62

3.1 **Illustration de la complexité en imagerie fluide** : séquence de quatre images satellites consécutives provenant du canal infrarouge de Météosat, représentatives d'une zone dépressionnaire. 70
3.2 **Exemple de concentration de divergence** : dans ces quatre images issues des canaux vapeur d'eau du satellite Meteosat, les parties sombres correspondent à l'explosion de cellules convectives, responsables de forts mouvements divergents. 77
3.3 **Exemple de perte d'intensité** : dans cette séquence, les images sont issues des canaux vapeur d'eau du satellite de Meteosat. Nous visualisons l'explosion de cellules convectives, responsables de forts mouvements divergents. La perte de quantité de matière le long du déplacement est observable. . . . 82

3.4 **Illustration du schéma multirésolution incrémental**. Le champ de vecteurs $\boldsymbol{d}^k$ à la résolution k est obtenu par estimation d'un champ incrémental $\boldsymbol{h}^k$ affinant le champ grossier $\boldsymbol{d}^k$, projection du champ $\boldsymbol{d}^{k+1}$ sur le niveau k. 83
3.5 **Découpage multigrille**. Exemple pour trois niveaux. 90

4.1 **Mouvement spiralé synthétique sous l'hypothèse de conservation de la luminance.** Le champ de vitesses $\boldsymbol{v}$ tel que div $\boldsymbol{v} = 0.2$ et curl $\boldsymbol{v} = -0.2$ est appliqué à l'image réelle issue du satellite de Météosat en (a) pour fournir l'image (b). Le couple des images en (c-d) correspond au couple (a-b) perturbé par un bruit blanc Gaussien de 10dB. 96
4.2 **Mouvement spiralé synthétique sous l'hypothèse de l'équation de continuité**: le mouvement de rotationnel curl $= -0.2$ et de divergence div $= 0.2$ est appliqué à l'image réelle Météosat en (a), en respectant la contrainte photométrique relative à l'équation de continuité : les intensités des images (a) et (b) ont un rapport de $\exp -0.2$. 98
4.3 **Le modèle générique robuste ($G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$) comparé au modèle quadratique dédié ($F^q_{obs} + \alpha F^q_{reg}$) sur le mouvement spiralé avec perte d'intensité de la figure** FIG. 4.2**.** Ligne du haut : champ de déplacements ; Ligne du milieu : cartes de divergence correspondantes ; Ligne du bas : cartes de vorticité correspondantes. 100
4.4 **Images météorologiques infrarouges** : deux portions d'images consécutives acquises le 28 janvier 1998, où une large zone dépressionnaire est visible en bas à gauche et un mouvement de masses nuageuses apparaît dans le coin supérieur droit. 102
4.5 **Comparaison des différents algorithmes sur la séquence météorologique infrarouge** : pour ces cinq présentations, le champ de déplacements est visualisé sur la partie haute, les cartes de divergences sont visibles sur la ligne du milieu et celles de vorticité sur la partie basse. 103
4.6 **Résultats sur une séquence issue du canal infrarouge du satellite Météosat**. (a-b) : deux images de la séquence ; (c-e-g) champs de déplacements, cartes de divergence et de vorticité obtenues avec la méthode dédiée $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$; (d-f-h) champs de déplacements, cartes de divergence et de vorticité obtenues avec la méthode générique robuste $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$. 104
4.7 **Images météorologiques du canal "vapeur d'eau"** : quatre images consécutives d'une séquence de test, représentant une large zone dépressionnaire dans la partie gauche des images, associée à l'expansion de cellules convectives (en noir) dans la partie droite. 105
4.8 **Comparaison du modèle dédié au modèle générique robuste, sur une séquence météorologique d'images vapeur d'eau** : 4 champs de déplacements estimés avec le modèle $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$ sur la partie haute et avec le modèle $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ sur la partie basse. 106

4.9 **Séquences d'images consécutives de divergence et de vorticité estimées par l'approche dédiée**. Ces zones ont été calculées sur la séquence vapeur d'eau de la figure FIG.4.7 à partir du mouvement estimé par la méthode dédiée (déplacements représentés sur la partie haute de la figure FIG.4.8). Les zones de divergence, représentées sur la partie haute, font clairement apparaître le mouvement des cellules convectives. 107
4.10 **Trajectoires reconstruites pour les trois séquences météorologiques traitées**. Les deux premières lignes correspondent aux séquences issues du canal infrarouge et la dernière au canal vapeur d'eau. Sur la première colonne se trouvent les points initiaux sélectionnés pour reconstruire les trajectoires, superposés à la première image de la séquence. Les trajectoires reconstruites sont quant à elles superposées à la dernière image de la séquence. Sur la seconde colonne, les trajectoires sont calculées à partir des déplacements fournis par l'estimateur générique $G^L_{obs} + \alpha G^L_{reg}$ et la dernière colonne correspond aux trajectoires basées sur les déplacements estimés par l'approche dédiée $F^L_{obs} + \alpha F^L_{reg}$. 109
4.11 **Extraction de structures significatives de vorticité** (a-b) **et de divergence** (c), sur les trois séquences d'images Météosat traitées. 111
4.12 **Résultats sur la séquence Yosémite.** (a) : Une image de la séquence ; (b) : champ de déplacements estimé avec la régularisation div-curl. 112

5.1 **Principe de formation d'une couche de mélange.** En haut : les deux vitesses u_a et u_b ont le même sens mais pas la même amplitude. Ceci crée à l'aval du point de rencontre une région turbulente. En bas : l'épaisseur de cette région, notée δ_ω, est linéaire en fonction de l'abscisse x. 116
5.2 **Visualisation d'une couche de mélange.** 116
5.3 **Profil de vitesse moyenne de la couche de mélange et épaisseur de vorticité.** 118
5.4 **Soufflerie subsonique à recirculation du** CEAT/LEA 120
5.5 **Exemple d'un couple d'images de couche de mélange** sur lequel nous allons réaliser nos expériences. 121
5.6 **Comparaison du profil des vitesses et de la distribution de la vitesse longitudinale.** (a) : champ de déplacements $\boldsymbol{v}_f$ (un vecteur sur dix est représenté) ; (b) : champ de déplacements $\boldsymbol{v}_p$ (un vecteur sur deux est représenté) ; (c) : superposition de quelques distributions de u_f selon l'axe y (un profil sur dix est représenté) et (d) : superposition des distributions de u_p selon l'axe y. 123
5.7 **Profil des vitesses longitudinales et transversales** (a) : profil de u_f ; (b) : profil de u_p ; (c) : iso-contours de u_f ; (d) : iso-contours de u_d ; (e) : profil de v_f ; (f) : profil de v_p ; (g) : iso-contours de v_f ; (h) : iso-contours de v_p ; . . 124
5.8 **Cartes de vorticité** (a) : représentation bidimensionnelle de curl $\boldsymbol{v}_f$; (b) : représentation bidimensionnelle de curl $\boldsymbol{v}_p$; (c) représentation tridimensionnelle de curl $\boldsymbol{v}_f$; (d) : représentation tridimensionnelle de curl $\boldsymbol{v}_p$; (e) : iso-contours de curl $\boldsymbol{v}_f$; (f) : iso-contours de curl $\boldsymbol{v}_p$. 125

6.1 **Classification des différentes situations de singularité** en fonction de la forme de Jordan de la matrice A définie en (6.1) (ou, de façon équivalente, de $\Delta(A) \triangleq \mathrm{tr}^2(A) - 4\det(A)$, $\det(A) = ad - bc$, $\mathrm{rot}(A) = c - b$ et $\mathrm{tr}(A) = a + d$). La dernière colonne donne les valeurs associées de div $\boldsymbol{v}$, curl $\boldsymbol{v}$, hyp_1 $\boldsymbol{v}$ et hyp_2 $\boldsymbol{v}$. 138
6.2 **Analogie entre plusieurs types d'images** : (a) et (b) : deux images d'empreintes digitales ; (c) et (d) deux images de lignes de courant issues respectivement de la mécanique des fluides expérimentale et de la météorologie. . 143
6.3 **Modèle géométrique de structure atmosphérique** : sur la gauche, une image météorologique représentative d'une zone dépressionnaire et sur la droite, le modèle géométrique proposé dans [Bouthemy 84] constitué ici de 3 zones S_1, S_2 et S_3 dont les frontières sont des spirales logarithmiques. . . 146

7.1 **Importance de la composante laminaire** : sur la première colonne figurent une série d'images du canal vapeur d'eau représentant l'évolution d'une structure dépressionnaire. La deuxième colonne représente les champs de vitesses associés calculés au moyen de l'estimateur du chapitre 3. La troisième colonne représente les composantes laminaires, estimées par la relation (7.8) en multirésolution et multigrille. Les champs recalés résultants sont présentés en dernière colonne. Deux principaux vortex, initialement cachés, y sont maintenant visibles. 156
7.2 **Chemins d'intégration possibles pour le calcul de ϕ et ψ.** Le chemin $\boldsymbol{\gamma_0}$ est quelconque, les chemins $\boldsymbol{\gamma_1}$ et $\boldsymbol{\gamma_2}$ parcourent les lignes et les colonnes. 159
7.3 **Champs issus de potentiels holomorphes**. (a) : puits, (b) : source, (c) : vortex, (d) : couplage d'une source, d'un vortex et d'un champ constant. . . 162
7.4 **Modèle de Rankine**. (a) : puits, (b) : source, (c) : vortex, (d) : couplage d'une source, d'un vortex et d'un champ constant. 164
7.5 **Profil de la norme des vitesses au voisinage d'un point critique**. (a) : cas d'une vitesse issue des potentiels holomorphes présentés en 7.6.1 et (b) : vitesse issue du modèle de Rankine. 164
7.6 **Exemple de supports relatifs au modèle de Rankine** ; les disques associés aux vortex, notés $\mathcal{V}$, sont représentés en clair et ceux associés aux puits/sources, notés $\mathcal{P}$, sont en noir ; les couleurs intermédiaires correspondent aux régions ou la divergence et la vorticité sont simultanément non nulles. 167
7.7 **Approximations des fonctions de Heaviside et de Dirac.** (a) : représentation d'une fonction de pénalisation définie par une approximation de Heaviside associée à un fort coefficient de pénalisation et (b) sa dérivée pour trois valeurs différentes de ϵ 170
7.8 **Nouvelles fonctions de pénalisation.** (a) représentation graphique de la contrainte retenue et (b) sa dérivée pour $\epsilon = 0.5$ 171
7.9 **Schéma récapitulatif**. Détail des étapes nécessaires pour l'obtention d'une description paramétrique d'un champ des vitesses. 175

8.1 **Champ synthétique s'appuyant sur le modèle de Rankine** associé aux paramètres du tableau 8.1. 178

8.2 **Résultats sur le champ synthétique de la figure** FIG.**8.1.** – (a) : composante solénoïdale et (b) : composante irrotationnelle correspondant au déplacement synthétique de la figure 8.1 ; (c) fonction de courant ψ et (d) potentiel de vitesse ϕ ; (e,f) les singularités et leur domaine de linéarité associé superposés au champ de déplacement correspondant. 179
8.3 **Séquence infrarouge** (a-b) : deux images de la séquence ; (c) : champ dense des déplacements estimé selon la méthode de la première partie de ce document ; (d) : champ paramétrique reconstruit selon le modèle de Rankine. . . 181
8.4 **Résultats sur le champ de déplacements de la figure** FIG.**8.3**(c)**.** (a) : composante solénoïdale et (b) : composante irrotationnelle du champ des vitesses ; (c) lignes de courant du champ solénoïdal et (d) lignes équipotentielles du champ irrotationnel ; (e) fonction de courant et (f) potentiel de vitesse ; structures singulières estimées et superposées au champ de déplacement correspondant : vortex (g) et puits/sources (h) 182
8.5 **Deuxième séquence infrarouge** (a-b) : deux images de la séquence ; (c) : champ dense des déplacements estimé selon la méthode de la première partie de ce document ; (d) : champ paramétrique reconstruit selon le modèle de Rankine. 183
8.6 **Résultats sur le champ de déplacements de la figure** FIG.**8.5**(c). (a) : composante solénoïdale (b) : composante irrotationnelle du champ des vitesses ; (c) lignes de courant du champ solénoïdal et (d) lignes équipotentielles du champ irrotationnel ; (e) fonction de courant et (f) potentiel de vitesse ; structures singulières estimées et superposées à l'image correspondante : vortex (g) et puits/sources (h) 184
8.7 **Résultats sur le champ de déplacements représentatif d'un écoulement turbulent**. (a) : une image de la séquence ; (b) : champ des vitesses associées ; (c) : vorticité de ce champ ; (d) : lignes de courant ; (e) : vortex détectés associés superposés sur le champ réel et (f) : le champ paramétrique reconstruit 185
8.8 **Données Ifremer** Champ de déplacements représentatif de la vitesse des vents au-dessus de l'Atlantique nord, le 2 janvier 1993. 187
8.9 **Résultats sur un champ des vitesses de vents fourni par l'Ifremer** FIG.**8.8**. (a) : composante solénoïdale (b) : composante irrotationnelle du champ des vitesses ; (c) lignes de courant du champ solénoïdal et (d) lignes équipotentielles du champ irrotationnel ; (e) fonction de courant et (f) potentiel de vitesse ; structures singulières estimées et superposées au déplacement correspondant : vortex (g) et puits/sources (h) 188
8.10 **Influence du seuil μ de la distance de Bhattacharyya.** Pour six différentes valeurs de ce seuil, nous représentons le champ paramétrique reconstruit, le nombre V de vortex et le nombre PS de puits/sources détectés, ainsi que l'erreur vis à vis du champ de déplacement réel. 189
8.11 **Détection de points singuliers par la méthode des indices de Poincaré.** Résultats obtenus sur les cinq champs de vitesses étudiés dans ce chapitre. Sur la gauche se trouve les champs de déplacements et sur la droite les amas de points détectés. Ils sont représentés en noir et correspondent aux centres de vortex, puits ou sources. 192

A.1 **Exemples d'estimateurs semi-quadratiques**. (a,c,e) estimateur de Cauchy, Leclerc et Geman-Mc Clure; (b,d,f) : leur variables auxiliaires optimales associées. 202

B.1 **Problème d'un bloc réduit au pixel.** Dans le cas où le bloc B_n^ℓ est réduit au pixel (cas de droite), aucun pixel de ce bloc n'entre en compte dans le calcul de $div[\ \boldsymbol{d}^\ell + P^\ell \boldsymbol{\theta}_n^\ell](\boldsymbol{s})$ et de $curl[\ \boldsymbol{d}^\ell + P^\ell \boldsymbol{\theta}_n^\ell](\boldsymbol{s})$. 204

F.1 **Principe d'acquisition d'images** pour les techniques de vélocimétrie. Une source lumineuse éclaire le fluide sur un plan. Les traceurs ensemencés dans ce fluide éclairés sont alors excités. À la suite d'un traitement informatique, il en résulte une image à partir de laquelle des traitements peuvent être effectués. 216

F.2 **Exemples d'images de vélocimétrie** : (a) psv; (b) piv et (c) : filets d'émission 219

Liste des tableaux

2.1 **Quelques régularisations** Ψ utilisées par la communauté de la vision par ordinateur et indications du respect des conditions (2.34) à (2.36) et (2.42) à (2.44). "R" = respectées, "NR" = non respectées. 57

4.1 **Résultats sur la régularisation div-curl proposée**. Valeurs sur l'erreur moyenne et l'écart type pour les paires d'images des figures FIG.4.1(a-b) (partie haute du tableau) et FIG.4.1(c-d) (partie basse du tableau). 97
4.2 **Résultats sur le terme d'observation proposé** Valeurs moyennes et extrémales de l'erreur moyenne et de l'écart angulaire obtenues sur la paire d'image de la figure FIG.4.2 pour quatre estimateurs différents. 99
4.3 **Résultats comparatifs sur Yosémite.** Erreur moyenne et écart angulaire suivant le critère de Barron *et al.* [Barron 94], pour notre méthode ainsi que certaines autres, la zone du ciel étant retirée 112

5.1 **Caractéristiques des images** fournies par le système d'acquisition développé par la société "La Vision" 120
5.2 **Résultats comparatifs sur des grandeurs caractéristiques des couches de mélange.** Comparaison entre les résultats provenant de mouvements issus de PIV et de flot-optique, par rapport aux mesures par fil chaud. 127

8.1 **Paramètres réels et estimés correspondant au champ synthétique de la figure** FIG.**8.1.** Sur la partie gauche se trouvent les paramètres synthétiques et sur la partie droite les estimations correspondantes. Les sources sont notées S, les vortex V et les puits P. La dernière colonne indique l'erreur sur l'estimation du paramètre de "force" associé aux singularités 178

Bibliographie

[Aanen 99] L. Aanen, A. Telesca, J. Westerweel. – Measurement of turbulent mixing using PIV and LIF. *Machine, Graphics and Vision*, 8(4):529–543, 1999.

[Adiv 85] G. Adiv. – Determining three-dimensional motion and structure from optical flow generated by several moving objects. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 7:384–401, juillet 1985.

[Adrian 91] R. Adrian. – Particle imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annal Rev. Fluid Mech.*, 23:261–304, 1991.

[Aggarwal 99] J.K. Aggarwal, Q. Cai. – Human motion analysis: a review. *Computer Vision and Image Understanding*, 73(3):428–440, 1999.

[Aguiar 01] P.M.Q. Aguiar, J.M.F. Moura. – Three-dimensional modeling from two-dimensional video. *IEEE Trans. Image Processing*, 10(10):1541–1551, octobre 2001.

[Allmen 93] M. Allmen, C. Dyer. – Computing spatiotemporal relations for dynamic perceptual organization. *CVGIP: Image Understanding*, 58(3):338–351, 1993.

[Alvarez 99] L. Alvarez, J. Escalrín, M. Lefébure, J. Sánchez. – A PDE model for computing the optical flow. – *Prov XVI Congresco de Ecuaciones Diferenciales y Applicaciones (C.E.D.Y.A. XVI)*, pp. 1349–1356, Las Palmas de Gran Canaria, Sep 1999.

[Alvarez 00] L. Alvarez, J. Weickert, Javier Sànchez. – Reliable estimation of dense optical flow fields with large displacements. *Int. J. Computer Vision*, 39(1):41–56, 2000.

[Alvarez 02] L. Alvarez, R. Deriche, J. Weickert, X. Sanchez. – Dense disparity map estimation respecting image discontinuities: A pde and scale-space based approach. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13(1-2):3–21, March-June 2002.

[Amini 94] A. Amini. – A scalar function formulation for optical flow. – *Proc. 3rd Europ. Conf. Computer Vision*, pp. 125–131, 1994.

[Anandan 89] P. Anandan. – A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion. *Int. J. Computer Vision*, 2:283–310, 1989.

[Anosov 98] D.V. Anosov, V.I. Arnold. – *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems.* – Encyclopedia of Mathematical Sciences,

Volume 1 : Dynamical Systems 1, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.

[Arnold 90] V.I. Arnold. – Ordinary differential equations. – 1990. MIT Press.

[Arrowsmith 82] D.K. Arrowsmith, N. Nandhakumar. – *Ordinarry differential equations*. – Chapman and Hall, 1982.

[Aubert 97] G. Aubert, L. Vese. – A variational method in image recovery. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(5):1948–1979, octobre 1997.

[Aubert 99] G. Aubert, R. Deriche, P. Kornprobst. – Computing optical flow via variational techniques. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(1):156–182, 1999.

[Ayer 96] S. Ayer, H.S. Sawhney. – Compact representations of videos through dominant and multiple motion estimation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 18(8):514–830, 1996.

[BabHadashiar 98] A. Bab-Hadashiar, D. Suter. – Robust optic flow computation. *Int. J. Computer Vision*, 29(1):59–77, 1998.

[Baillard 01] C. Baillard, P. Hellier, C. Barillot. – Segmentation of brain 3D MR images using level sets and dense registration. *Medical Image Analysis*, 5(3):185–194, septembre 2001.

[Bajcsy 82] R. Bajcsy, C. Broit. – Matching of deformed images. – *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, vol. 1, pp. 351–353, Munich, West Germany, octobre 1982.

[Bajcsy 89] R. Bajcsy, S. Kovacic. – Multiresolution elastic matching. *Comput. Vision, Graphics, Image Proc.*, 46:1–21, 1989.

[Bannehr 96] L. Bannehr, M. Rohn, G. Warnecke. – A functionnal analytic method to derive displacement vector fields from satellite image sequences. *Int. Journ. of Remote Sensing*, 17(2):383–392, 1996.

[Barron 94] J. Barron, D. Fleet, S. Beauchemin. – Performance of optical flow techniques. *Int. J. Computer Vision*, 12(1):43–77, 1994.

[Basseville 89] M. Basseville. – Distance measure for signal processing and pattern recognition. *Signal Processing*, (18):349–369, 1989.

[Béréziat 99] D. Béréziat. – *Détection et suivi de structures déformables en mouvement, application à la météorologie*. – PhD. Thesis, Université de Paris Sud, octobre 1999.

[Bereziat 00a] D. Bereziat, J.-P. Berroir. – Motion estimation on meteorological infrared data using a total brightness invariance hypothesis. *Environmental Modelling and Software*, 15:513–519, 2000.

[Béréziat 00b] D. Béréziat, I. Herlin, L. Younes. – A generalized optical flow constraint and its physical interpretation. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, vol. 2, pp. 487–492, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.

[Bergen 92] J. Bergen, P. Anandan, K. Hanna, R. Hingorani. – Hierarchical model-based motion estimation. – G. Sandini (édité par), *Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, vol. 558 of *LNCS*, pp. 237–252. Springer-Verlag, mai 1992.

[Bertero 88] M. Bertero, T.A. Poggio. – Ill-posed problems in early vision. *Proc. Ieee*, Vol. 76, No. 8: Pp. 869–889, août 1988.

[Besag 86] J. Besag. – On the statistical analysis of dirty pictures. *J. Royal Statist. Soc.*, 48 B(3):259–302, 1986.

[Black 94] M. Black. – Recursive non-linear estimation of discontinuous flow fields. – *Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, pp. 138–145, Stockholm, Sweden, 1994.

[Black 96a] M. Black, P. Anandan. – The robust estimation of multiple motions: Parametric and piecewise-smooth flow fields. *Computer Vision and Image Understanding*, 63(1):75–104, 1996.

[Black 96b] M. Black, P. Jepson. – Estimating optical flow in segmented images using variable-order parametric models with local deformations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 18(10):972–986, 1996.

[Black 96c] M. Black, A. Rangarajan. – On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision. *Int. J. Computer Vision*, 19(1):75–104, 1996.

[Blake 87] A. Blake, A. Zisserman. – *Visual Reconstruction.* – The MIT Press, Cambridge, USA, 1987.

[Blake 98] A. Blake, M. Isard. – *Active contours.* – Springer-Verlag, London, England, 1998.

[BlancFéraud 95] L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, G. Aubert, M. Barlaud. – Nonlinear image processing: Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. – *Proc. Int. Conf. Image Processing*, pp. 474–477, Washington, USA, octobre 1995.

[Bobick 97] A. Bobick. – Movement, activity, and action: the role of knowledge in the perception of motion. *Phil. Trans. Royal Society London B*, pp. 1257–1265, 1997.

[Bogert 63] B.P. Bogert, Tukey J.W. Healy, M.J.R. – The frequency analysis of time series for echoes: cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and shape cracking. – *In Proc. of Symp. Time Series Analysis*, pp. 209–243, 1963.

[Bonnet 89] A. Bonnet, J. Luneau. – *Théorie de la dynamique des fluides.* – Supaero, cépaduès édition, 1989.

[Boudet 96] R. Boudet, A. Chauvin. – *Mécanique des milieux continus.* – Collection Matériaux, cépaduès édition, 1996.

[Bouman 93] C. Bouman, K. Sauer. – A generalized gaussian image model for edge-preserving map estimation. *IEEE Trans. Image Processing*, 2(3):296–310, 1993.

[Boussinesq 77] J. Boussinesq. – Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mém. prés. Acad. Sci. XXIII, Paris*, 46, 1877.

[Bouthemy 84] P. Bouthemy, A. Benveniste. – Modeling of athmospheric disturbances in meteorological pictures. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 6(5):587–600, septembre 1984.

[Bouthemy 93] P. Bouthemy, E. François. – Motion segmentation and qualitative dynamic scene analysis from an image sequence. *Int. J. Computer Vision*, 10(2):157–182, 1993.

[Broit 81] C. Broit. – *Optimal registration of deformed images.* – Philadelphia, PhD. Thesis, Department of computer and information science, University of Pennsylvania, 1981.

[Browand 83] F.K. Browand, C.M. Ho. – The mixing layer: an example of quasi two dimensional turbulence. *Journal de la Mécanique Théorique et Appliquée*, pp. 99–120, 1983.

[Buhler 93] Y. Buhler, K. Holmlund. – The CMW extraction algorithm for MPT/MPEF. – *Second International Wind Workshop*, vol. EUM P14, pp. 205–217, Tokyo, Japan, décembre 1993. EUMETSAT, Darmstadt, Allemagne.

[Burt 84] P.J. Burt. – The pyramid as a structure for efficient computation. *Multiresolution Image Processing and Analysis*, éd. par A. Rozenfeld, pp. 6–35. – Springer-Verlag, 1984.

[Cédras 95] C. Cédras, M. Shah. – Motion-based recognition: a survey. *Image and Vision Computing*, 13(2):129–155, 1995.

[Cenedese 99] A. Cenedese, A. Pocecco, G Querzoli. – Principal components analysis for PIV applications. *Machine, Graphics and Vision*, 8(4):545–552, 1999.

[Chan 01] F. Chan, L.-A. Vese. – Active contours without edges. *IEEE Trans on Image Processing*, 10(2):266–277, février 2001.

[Charbonnier 94] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud. – Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. – *Proc. Int. Conf. Image Processing*, vol. 2, pp. 168–172, Austin, USA, novembre 1994.

[Charbonnier 97] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud. – Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Trans. Image Processing*, 6(2):298–311, 1997.

[Chefd'hotel 02] C. Chefd'hotel, D. Tschumperlé, R. Deriche, O. Faugeras. – Constrained flows of matrix valued functions : Application to diffusion tensor regularization. – *Proc. 7th Europ. Conf. Computer Vision*, Copenhagen, Denmark, mai 2002.

[Chen 98] F. Chen, D. Suter. – Image coordinate transformation based on DIV-CURL vector splines. – *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, pp. 518–520, Brisbane, Australia, août 1998.

[Chen 99] F. Chen, D. Suter. – DIV-CURL vector quasi-interpolation on a finite domain. *Mathematical and Computer Modelling*, 30(1):179–204, juillet 1999.

[Chorin 79] A. J. Chorin, J.E. Marsden. – A mathematical introduction to fluid mechanics. – 1979. Springer Verlag.

[Christensen 96] G. Christensen, R. Rabbit, M.I. Miller. – Deformable templates using large deformation kinematics. *IEEE Trans. Image Processing*, 5(10):1435–1447, 1996.

[Cohen 92] I. Cohen, N. Ayache, P. Sulger. – Tracking points on deformable objects using curvature information. – *Proc. 2nd Europ. Conf. Computer Vision*, pp. 458–466, Santa Margherita Ligure, May 1992.

[Cohen 96] I. Cohen, I. Herlin. – Optical flow and phase portrait methods for environmental satellite image sequences. – B. Buxton, R. Cipolla (édité par), *Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, number 1064 in LNCS, pp. 141–150. Springer-Verlag, avril 1996.

[Cohen 99] I. Cohen, I. Herlin. – Non uniform multiresolution method for optical flow and phase portrait models: Environmental applications. *Int. J. Computer Vision*, 33(1):29–49, 1999.

[Coulon 01] O. Coulon, D.C. Alexander, S.R. Arridge. – A regularization scheme for diffusion tensor magnetic resonance images. – Springer-Verlag (édité par), *IPMI'2001, XVIth International Conference on Information Processing in Medical Imaging, in Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2082, pp. 92–105, Davis, California, USA, 2001.

[DasPeddada 96] S. Das Peddada, R. McDevitt. – Least average residual algorithm (LARA) for tracking the motion of artic sea ice. *IEEE trans. on Geosciences and Remote sensing*, 34(4):915–926, 1996.

[David 96] L. David. – *Développement d'une technique d'analyse quantitative automatisée en écoulements tridimensionnels. Application à l'écoulement naissant autour d'un cylindre en incidence.* – PhD. Thesis, Université de Poitiers, 1996.

[deBoor 93] C. de Boor. – *Approximation order without quasi-interpolants.* – Approximation Theory VII, E.W. Cheney, C.K. Chui and L.L. Schumaker, pages 1-18, Academic Press, New-York, 1993.

[Dekeyser 00] F. Dekeyser, P. Bouthemy, P. Pérez. – Restoration of noisy, blurred, undersampled image sequences using a parametric motion model. *Réseaux et systèmes Répartis - calculateurs parallèles*, 12(3-4):387–405, décembre 2000.

[DelBimbo 95] A. Del Bimbo, P. Nesi, J.-L.C. Sanz. – Analysis of optical flow constraints. *IEEE Trans. Image Processing*, 4(4):460–469, avril 1995.

[Dell'Acqua 00] F. Dell'Acqua, P. Gamba, P. Prevedini. – Level-set based extraction and tracking of meteorological objects in satellite images. – *IEEE Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGRASS'2000*, vol. 2, Honolulu, Hawai, USA, juillet 2000.

[DenisBrossard 99] M.-A. Denis-Brossard, N. Rougon, F. Prêteux. – Estimation paramétrique robuste à support optimal de la structure d'écoulements fluides en imagerie Météosat. – *Proc. 17Ème Colloque Gretsi*, pp. 339–342, Vannes, France, septembre 1999.

[DenisBrossard 00] M.-A. Denis-Brossard. – *Modélisation multi-échelle de structures bidimensionnelles fluides. Application à l'analyse du mouvement de masses nuageuses atmosphériques.* – PhD. Thesis, Université René-Descartes Paris V, 2000.

[Deriche 95] R. Deriche, P. Kornprobst, G. Aubert. – Optical flow estimation while preserving its discontinuities: A variational approach. – *Proc. 2nd*

Asian. Computer Vision, vol. 1, pp. 290–295, Singapore, décembre 1995.

[Deriche 96] R. Deriche, O. Faugeras. – Les EDP en Traitement des Images et Vision par Ordinateur. *Traitement du Signal*, 13(6), 1996.

[Devlaminck 97] V. Devlaminck. – A functional for motion estimation of a deforming body. *Traitement du Signal*, 14(4):423–432, 1997.

[Dew 98] G. Dew, K. Holmlund. – Improved computing efficiency of cross correlation in the Fourier domain. – *Fourth Int. Winds Workshop*, vol. EUM P24, pp. 289–298, Saanenmöser, Suisse, octobre 1998. EUMETSAT, Darmstadt, Allemagne.

[DoCarmo 76] M. Do Carmo. – *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* – Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[Doisy 98] Y. Doisy. – General motion estimation from correlation sonar. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 23(2):127–140, avril 1998.

[Drummond 01] T. Drummond, R. Cipolla. – Real-time tracking of highly articulated structures in the presence of noisy measurements. – *Proc. 8th Int. Conf. Computer Vision*, vol. 2, pp. 315–320, Vancouver, BC, Canada, juillet 2001.

[Enkelmann 88] W. Enkelmann. – Investigation of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences. *Comp. Vision Graph. and Image Proces.*, 43:150–177, 1988.

[Fablet 01] R. Fablet. – *Modélisation statistique non paramétrique et reconnaissance du mouvement dans des séquences d'images ; application à l'indexation vidéo.* – PhD. Thesis, Université de Rennes I, juillet 2001.

[Fablet 02] R. Fablet, P. Bouthemy. – Non-parametric scene activity analysis for statistical retrieval with partial query. *Journal of. Mathematical Imaging and Vision*, 3(14):257–270, mai 2002.

[Faugeras 93] O. Faugeras. – *Three dimensional computer vision: a geometric viewpoint.* – MIT press, Cambridge, Massachussetts, 1993.

[Fayolle 96] J. Fayolle. – *Études d'algorithmes de traitement d'images pour l'analyse du mouvement d'objets déformables. Application à la mesure de vitesses d'écoulements.* – PhD. Thesis, Université de Saint-Étienne, 1996.

[Fayolle 00] J. Fayolle, T. Fournel, P. Gervais. – Comparative study of correlation-based piv evaluation methods. *Journal of Visualization*, 3(3):253–265, décembre 2000.

[Fei 99] R. Fei, L. Gui, W. Merzkirch. – Comparative study of correlation-based PIV evaluation methods. *Machine, Graphics and Vision*, 8(4):571–578, 1999.

[Fermuller 95] C. Fermuller, Y. Aloimonos. – Vision abd action. *Image and Vision Computing*, 13(10):725–744, 1995.

[Fermuller 00] C. Fermuller, Y. Aloimonos. – Observability of 3D motion. *Int. J. Computer Vision*, 37(1):43–63, 2000.

[Fiedler 81] H.E. Fiedler, B. Dziomba, P. Mensing, T. Rögsen. – *The role oh coherent structures in modelling turbulence and mixing*, chap. Initiation,

evolution and global consequences of coherent structures in turbulent shear flows. – J. Jimenz, Lecture Notes in Physics, Springer, 1981.

[Fitzpatrick 85] J.M. Fitzpatrick. – A method for calculating velocity in time dependent images based on the continuity equation. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pp. 78–81, San Francisco, USA, 1985.

[Fitzpatrick 88a] J.M. Fitzpatrick. – The existence of geometrical density-image transformations corresponding to object motion. *Comput. Vision, Graphics, Image Proc.*, 44(2):155–174, novembre 1988.

[Fitzpatrick 88b] J.M. Fitzpatrick, C.A. Pederson. – A method for calculating fluid flow in time dependant density images. – *Electronic Imaging*, vol. 1, pp. 347–352, 1988. – Institute for Graphic Communication.

[Fleet 00] D. Fleet, M. Black, Y. Yacoob, A. Jepson. – Design and use of linear models for image motion analysis. *Int. J. Computer Vision*, 36(3):171–193, 2000.

[Ford 93] R.M. Ford, R.N. Strickland. – Nonlinear phase portrait models for oriented textures. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, New York, USA, juin 1993.

[Ford 94] R.M. Ford, R. Strickland, B. Thomas. – Image models for 2-d flow visualization and compression. *Graph. Mod. Image Proc.*, 56(1):75–93, 1994.

[Ford 95] R.M. Ford, R. Strickland. – Representing and visualizing fluid flow images and velocimetry data by nonlinear dynamical systems. *Graph. Mod. Image Proc.*, 57(6):462–482, 1995.

[Ford 97] R.M. Ford. – Critical point detection in fluid flow images using dynamical system properties. *Pattern Recognition*, 30(12):1991–2000, 1997.

[Fournel 92] T. Fournel, J. Daniere, M. Moine, J. Pigeon, M. Courbon, J.-P. Schon. – Utilisation du cepstre d'énergie pour la vélocimétrie par images de particules. *Traitement du Signal*, 9(3):257–271, 1992.

[François 90] E. François, P. Bouthemy. – The derivation of qualitative information in motion analysis. *Image and Vision Computing Jal.*, 8(4):279–287, novembre 1990.

[Fujita 68] T. Fujita, D.L. Bradbury, C. Murino, L. Mull. – *A study of mesoscale cloud motions computed from ATS-1 and terrestrial photographs from satellite.* – Rapport de Recherche n 71, University of Chicago, Mesometeorological research project, 1968.

[Geman 84] S. Geman, D. Geman. – Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 6(6):721–741, 1984.

[Geman 85] S. Geman, Mc. Clure. – Bayesian image analysis: an application to single photon emission tomography. – American Statistics Association (édité par), *Proc. Statis. Comput. Sect.*, pp. 12–18, Washington DC, 1985.

[Geman 92] D. Geman, G. Reynolds. – Constrained restoration and the reco-

very of discontinuities. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 14(3):367–383, 1992.

[Geman 95] D. Geman, C. Yang. – Nonlinear image recovery with half quadratic regularisation. *IEEE Trans. Image Processing*, 4(7):932–946, juillet 1995.

[Görtler 42] H. Görtler. – Berechnung von aufgaben der freien turbulenz auf grung eines neuen naherungsansatzes. *ZAMM*, 22:244–254, 1942.

[Grazzini 01] J. Grazzini, D. Béréziat, I. Herlin. – Analysis of cloudy structures evolution on meteorological satellite acquisitions. – *Proc. Int. Conf. Image Processing*, pp. 760–763, Thessalonique, Grèce, octobre 2001.

[Greig 92] G. Greig, O. Kübler, R. Kikinis, F.A. Jolez. – Nonlinear anisotropic filtering of MRI data. *IEEE Trans. Medical Imaging*, 111:221–232, 1992.

[Gupta 96a] S. Gupta, J. Prince. – On div-curl regularization for motion estimation in 3-d volumetric imaging. – *Proc. Int. Conf. Image Processing*, vol. 1, pp. 929–932, Lausanne, Switzerland, septembre 1996.

[Gupta 96b] S. Gupta, J. Prince. – Stochastic models for div-curl optical flow methods. *Signal Proc. Letters*, 3(2):32–34, 1996.

[Hackbusch 85] W. Hackbusch. – *Multi-Grid Methods and Applications.* – Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Haddadi 93] N. Haddadi, C.-C. Jay-Kuo. – Computation of dense optical flow with a parametric smoothness model. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 4(4):309–323, décembre 1993.

[Hart 00] D.P Hart. – Super-resolution PIV by recursive local-correlation. *Journal of Visualization*, 3(2):187–194, septembre 2000.

[Hasler 98] A.F. Hasler, K. Palaniappan, C. Kambhamettu, P. Black, E. Uhlhorn, D. Chesters. – High-resolution wind fields within the inner core and eye of a mature tropical cyclone from GOES 1-Min images. *Bull. Am. Meteorological Soc.*, 79(11):2483–2496, novembre 1998.

[Haussecker 01] H.W. Haussecker, D. Fleet. – Computing optical flow with physicals models of brightness variation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 23(6):661–673, 2001.

[Heeger 90] D.J. Heeger, A. Jepson. – Simple method for computing 3D motion and depth. – *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, Osaka, décembre 1990.

[Heitz 93] F. Heitz, P. Bouthemy. – Multimodal estimation of discontinuous optical flow using Markov random fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 15(12):1217–1232, 1993.

[Heitz 99] D. Heitz. – *Étude expérimentale du sillage d'un barreau cylindrique se développant dans une couche de mélange plane turbulente.* – PhD. Thesis, Université de Poitiers, 1999.

[Hellier 01] P. Hellier, C. Barillot, E. Mémin, P. Pérez. – Hierarchical estimation of a dense deformation field for 3D robust registration. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 20(5):388–402, mai 2001.

[Helman 89] J. Helman, L. Hesselink. – Representation and display of vector field topology in fluid flow data sets. *Computer*, 22(8):27–36, août 1989.

[Holland 77] P. Holland, R. Welsch. – Robust regression using iteratively reweighted least-squares. *Commun. Statis.-Theor. Meth.*, A6(9):813–827, 1977.

[Holton 92] J. Holton. – *An introduction to dynamic meteorology.* – Academis Press, International Geophysics Series, vol. 48, 1992.

[Horn 81] B. Horn, B. Schunck. – Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–203, 1981.

[Irani 92] M. Irani, B. Rousso, S. Peleg. – Detecting and tracking multiple moving objects using temporal integration. – *Proc. 2nd Europ. Conf. Computer Vision*, LNCS Vol 588, pp. 282–287, Santa Margherita, May 1992. Springer.

[Johansonn 73] G. Johansonn. – Visual perception of biological motion and a model for its analysis. *Perception and Physics*, 14:201–211, 1973.

[Ju 96] X. Ju, M.J. Black, A.D. Jepson. – Skin and bones: Multi-layer, locally affine, optical flow and regularization with transparency. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pp. 307–314, 1996.

[Judistski 94] A. Judistski. – *Wavelets estimators: adapting to unknown smoothness.* – Rapport de Recherche n815, Publication Interne IRISA, avril 1994.

[Kakadiaris 00] D. Kakadiaris, L.; Metaxas. – Model-based estimation of 3D human motion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 22(12):1453–1459, décembre 2000.

[Kass 88] M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos. – Snakes : Active contour models. *Int. J. Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.

[Kervrann 95] C. Kervrann. – Modèles statistiques pour la segmentation et le suivi de structures déformables bidimensionnelles dans une séquence d'images. *Thèse, Université de Rennes 1, Irisa, No 1531*, novembre 1995.

[Kervrann 97] C. Kervrann, F. Heitz. – Modèles déformables statistiques pour l'analyse de structures 2D dans des séquences d'images. *Techniques et sciences informatiques*, 16(3):325–354, 1997.

[Kim 98] D.-W. Kim, J.-S. Choi, J.-T. Kim. – Adaptive motion estimation based on spatio-temporal correlation. *Signal Processing: Image Communication*, 13(2):161–170, août 1998.

[Kimmel 00] R. Kimmel, R. Malladi, N. Sochen. – Images as embedded maps and minimal surfaces: movies, color, texture, and volumetric medical images. *International Journal of Computer Vision*, 39(2):111–129, 2000.

[Koenderink 86] J.J. Koenderink. – The structure of images. *Biol. Cybern*, 50:363–370, 1986.

[Konrad 92] J. Konrad, E. Dubois. – Bayesian estimation of motion vector fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 14(9):910–927, 1992.

[Kornprobst 99] P. Kornprobst, R. Deriche, G. Aubert. – Image sequence analysis via partial differential equations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11(1):5–26, septembre 1999.

[Lai 98] S. Lai, B. Vemuri. – Reliable and efficient computation of optical flow. *Int. Journ of Comp. Vision*, 29(2):87–105, 1998.

[Larsen 98] R. Larsen, K. Conradsen, B.K. Ersboll. – Estimation of dense image flow fields in fluids. *IEEE trans. on Geoscience and Remote sensing*, 36(1):256–264, 1998.

[Leclerc 89] Y. Leclerc. – Constructing simple stable descriptions for image partitioning. *Int. J. Computer Vision*, 3:73–102, 1989.

[Leese 71] J.-A. Leese, C.-S. Novak, B.-B. Clark. – An automated technique for obtaining cloud motion from geosynchronous satellite data using cross correlation. *Journal of applied Meteorology*, Vol 76, No 8:890–898, 1971.

[Lesieur 94] M. Lesieur. – La turbulence. – 1994. PUG, Grenoble, 1994.

[Leymarie 93] F. Leymarie, M. Levine. – Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 15(6):617–634, 1993.

[Liebowitz 01] D. Liebowitz, S. Carlsson. – Uncalibrated motion capture exploiting articulated structure constraints. – *Proc. 8th Int. Conf. Computer Vision*, vol. 2, pp. 230–237, Vancouver, BC, Canada, juillet 2001.

[LonguetHiggins 81] H. C. Longuet-Higgins. – A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 293:133–135, 1981.

[Lourenço 00] L.M. Lourenço, A. Krothapalli. – True resolution PIV: a mesh-free second order accurate algorithm. – *Int. Symposium and Applications of Laser Techniques in Fluid Mechanics*, pp. 1–19, Lisbonne, Portugal, juillet 200.

[Mak 93] M.W. Mak, W.G. Allen. – A lip-tracking system based on morphological processing and block matching techniques. *Signal Process. Image Communication*, 6:335–348, 1993.

[Mantovani 00] E. Mantovani, M. Viti, D. Albarello, C. Tamburelli, D. Babbucci, N. Cenni. – Role of kinematically induced horizontal forces in Mediterranean tectonics: insights from numerical modeling. *Journal of Geodynamics*, 30(3):187–320, octobre 2000.

[Mao 92] J. Mao, A.K. Jain. – Texture classification and segmentation using multiresolution simultaneous autoregressive models. *Pattern Recognition*, 25(2):173–188, 1992.

[Mass 92] H. Mass, A. Stefanidis, A. Gruen. – Feature tracking in 3-d fluid tomography sequences. – *Proc. Int. Conf. Image Processing*, pp. 530–534, Singapore, Sept. 1992.

[Maurizot 95] M. Maurizot, P. Bouthemy, B. Delyon, A. Iouditski, J.-M. Odobez. – Determination of singular points in 2D deformable flow fields. – *IEEE Int. Conf. on Image Processing*, vol. 3, pp. 488–491, Washington, USA, octobre 1995.

[Maurizot 97] M. Maurizot. – Analyse du mouvement fluide 2D dans des séquences d'images numériques:. – Thèse de l'université de Rennes I, novembre 1997.

[Maurizot 98] M. Maurizot, P. Bouthemy, B. Delyon. – 2D fluid motion analysis from a single image. – *IEEE Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 184–189, Santa Barbara, 1998.

[Mémin 98a] E. Mémin, P. Pérez. – Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(5):703–719, 1998.

[Mémin 98b] E. Mémin, P. Pérez. – A multigrid approach for hierarchical motion estimation. – *Proc. 6th Int. Conf. Computer Vision*, pp. 933–938, Bombay, India, 1998.

[Mémin 99] E. Mémin, P. Pérez. – Fluid motion recovery by coupling dense and parametric motion fields. – *Proc. 7th Int. Conf. Computer Vision*, vol. 3, pp. 732–736, Corfou, Greece, 1999.

[Mémin 00] E. Mémin, T. Risset. – On the study of VLSI derivation for optical flow estimation. To appear in. *Int. J. Pattern Rec. Artif. Intell.*, 14(4), 2000.

[Mémin 02] E. Mémin, P. Pérez. – Hierarchical estimation and segmentation of dense motion fields. *Int. J. Computer Vision*, 46(2):129–155, février 2002.

[Metaxas 93] D. Metaxas, D. Terzopoulos. – Shape and nonrigid motion estimation through physics-based synthesis. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 15(6):580–591, juin 1993.

[Meyer 94] F. Meyer, P. Bouthemy. – Region-based tracking using affine motion models in long image sequences. *CVGIP: Image Understanding*, 60(2), 1994.

[Meyer 96] F. Meyer, F. Constable, A. Sinuas, J. Duncan. – Tracking myocardial deformation using phase contrast MR velocity fields: a stochastic approach. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(4):453–465, août 1996.

[Mitiche 88] A. Mitiche, R. Grisell, J.K. Aggarwal. – On smoothness of vector field–application to optical flow. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 10(6):943–949, 1988.

[Mitiche 96] A. Mitiche, P. Bouthemy. – Computation and analysis of image motion: a synopsis of current problems and methods. *Int. J. Computer Vision*, 19(1):29–55, 1996.

[Moctezuma 95] M. Moctezuma, H. Maître, F. Parmiggiani. – An automated approach to the sea-ice motion estimation. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 33(5):1286–1289, septembre 1995.

[Morris 98] D. Morris, J. Rehg. – Singularity analysis for articulated object tracking. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pp. 289–296, Santa Barbara, USA, juin 1998.

[Morsy 99] A.A. Morsy, O.T. Von Ramm. – FLASH correlation: a new method for 3-d ultrasound tissue motion tracking and blood velocity estima-

tion. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 46(3):728–736, mai 1999.

[Nagel 83] H. Nagel. – Constraints for the estimation of displacements vector fields from image sequences. – *Proc. 8th Int. Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'83)*, pp. 945–951, Karlshrue, août 1983.

[Nagel 86] H. Nagel, W. Enkelmann. – An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 8:565–593, 1986.

[Nagel 87] H.H. Nagel. – On the estimation of optical flow: Relations between different approaches and some new results. *Artificial Intelligence*, 33:299–324, 1987.

[Nagel 90] H.H. Nagel. – Extending the oriented smoothness constraint into the temporal domain and the estimation of derivatives of optical flow. – *Proc. First European Conference On Computer Vision*, pp. 139–148, Antibes, France, avril 1990. Springer.

[Nelson 92] R. Nelson, R. Polana. – Qualitative recognition of motion using temporal texture. *Comput. Vision, Graphics, Image Proc.*, 56(1):78–99, 1992.

[Nogawa 97] H. Nogawa, Y. Nakajima, Y. Sato. – Acquisition of symbolic description from flow fields: a new approach based on a fluid model. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 19(1):58–63, 1997.

[Nordstörm 90] N. Nordstörm. – Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image and Vision Computing*, 8(4):318–327, 1990.

[Odobez 94] Jean-Marc Odobez. – Estimation, détection et segmentation du mouvement: une approche robuste et markovienne. *Thèse, Université de Rennes 1, Irisa, No 1304*, décembre 1994.

[Odobez 95] J.M. Odobez, P. Bouthemy. – Robust multiresolution estimation of parametric motion models. *Joun. Of Vis. Com. and Im. Repr.*, 6(4):348–365, 1995.

[Odobez 97] J.M. Odobez, P. Bouthemy. – Separation of moving regions from background in an image sequence acquired with a mobile camera. *Video Data Compression for Multimedia Computing*, chap. 8, pp. 295–311. – H. H. Li, S. Sun, and H. Derin, eds, Kluwer, 1997.

[Osher 88] S. Osher, J.A. Sethian. – Front propaging with curvature dependant speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.

[Osher 91] S. Osher, L. Rudin. – Shocks and other nonlinear filtering applied to image processing. *SPIE: Application of Digital Image Processing XIV*, 1567:414–431, 1991.

[Ottenbacher 97] A. Ottenbacher, M. Tomasini, K. Holmund, J. Schmetz. – Low-level cloud motion winds from Meteosat high-resolution visible imagery. *Weather and Forecasting*, 12(1):175–184, 1997.

[Palaniappan 95] K. Palaniappan, C. Kambhamettu, A.F. Hasler. – Implementation of an automatic semi-fluid motion analysis of stereoscopic satellite images for cloud tracking. – *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, pp. 659–665, 1995.

[Palis 92] J. Palis, W. de Melo. – *Geometric theory of dynamical systems.* – Springer-Verlag, New-York, 1992.

[Papin 99] C. Papin. – *Analyse spatio-temporelle d'images satellitaires météorologiques: détection et suivi de structures nuageuses critiques.* – PhD. Thesis, Université de Rennes I, décembre 1999.

[Papin 00] C. Papin, P. Bouthemy, E. Mémin, G. Rochard. – Tracking and characterization of highly deformable cloud structures. – *Proc. 6th Europ. Conf. Computer Vision*, Dublin, 2000.

[Peckar 99] W. Peckar, C. Schnorr, K. Rohr, S. Stiehl. – Parameter-free elastic deformation approach for 2D and 3D registration using prescribed displacement. *Journal of. Mathematical Imaging and Vision*, 10(2):143–162, 1999.

[PellotBarakat 01] C. Pellot-Barakat, M. Ivanovic, A. Herment, K. Erlandsson, D.K. Shelton. – Detection of motion in hybrid pet/spect imaging based on the correlation of partial sinograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(10):1072–1083, octobre 2001.

[Pentland 91] A.P. Pentland, S. Sclaroff. – Closed-form solutions for physically based shape modeling and recognition. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 13(7):715–729, 1991.

[Pérez 92] P. Pérez, F. Heitz. – Une approche multiéchelle à l'analyse d'images par champs markoviens. *Traitement du Signal*, 9(6):459–472, 1992.

[Pérez 93] P. Pérez. – *Champs Markoviens et Analyse Multirésolution De L'image: Application À L'analyse Du Mouvement.* – PhD. Thesis, Université De Rennes I, juillet 1993.

[Perona 90] P. Perona, J. Malik. – Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12(7):629–639, 1990.

[Perry 84] A.E. Perry, D.K.M. Tan. – Simple three-dimensional vortex motions in coflowing jets and wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 141:197–231, 1984.

[Perry 87] A.E. Perry, M.S. Chong. – A description of eddying motions and flow patterns using critical point concepts. *Ann. Rev. on Fluid Mechanics*, 19:125–155, 1987.

[Phillips 72] D.R. Phillips, E.A. Smith, V.E. Suomi. – Comment on 'an automated technique for obtaining cloud motion from geosynchronous satellite data using cross correlation'. *Journal of Applied Meteorology*, 11:752–754, 1972.

[Plankers 01] R. Plankers, P. Fua. – Articulated soft objects for video-based body modeling. – *Proc. 8th Int. Conf. Computer Vision*, vol. 1, pp. 394–401, Vancouver, BC, Canada, juillet 2001.

[Polana 94] R. Polana. – Temporal texture and activity recognition. *Thèse, Département d'Informatique, University of Rochester*, octobre 1994.

[Prandtl 35] L. Prandtl. – *The mechanics of viscous fluids.* – Aerodynamic Theory III, W.F. Durand édition, 1935.

[Press 92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. – *Numerical Recipes in C.* – Cambridge University Press, Cambridge, UK, second edition, 1992.

[Qiu 00] M. Qiu. – Computing optical flow based on the mass-conserving assumption. – *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, pp. 1041–1044, Barcelona, Spain, septembre 2000.

[Ramsden 91] D. Ramsden, G. Holloway. – Time-stepping Lagrangian particles in two dimensional Eulerian flow fields. *J. Comput. Phys.*, 95:101–116, 1991.

[Rao 92] A.R. Rao, R.C. Jain. – Computerized flow analysis: oriented texture fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 14(7):693–709, 1992.

[Reinecke 99] H. Reinecke, M. Mo, I. Grant. – Image processing problems in fluid dynamics: selected digital procedures. *Machine, Graphics and Vision*, 8(4):493–507, 1999.

[Ricquebourg 97] Y. Ricquebourg. – *Analyse de mouvements articulés : mesure et suivi 2D ; application à la télésurveillance.* – PhD. Thesis, Université de Rennes I, janvier 1997.

[Ricquebourg 00] Y. Ricquebourg, P. Bouthemy. – Real-time tracking of moving persons by exploring spatio-temporal slices. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 22(8):797–808, 2000.

[Ringer 00] M. Ringer, J. Lasenby. – Modelling and tracking articulated motion from multiple camera views. – *Proceedings of the 11th British Machine Vision Conference*, vol. 1, pp. 172–181, Bristol, UK, septembre 2000.

[Rodi 75] W. Rodi. – *Studies in convection*, chap. A review of experimental data of uniform density free turbulent boundary layers, pp. 79–165. – Academic Press, New-York, 1975, B.E. launder édition.

[Rohn 96] M. Rohn. – Winds from meteosat ans GMS WV-imagery using variational techniques. – *Third International Winds Workshop*, vol. EUM P18, Ascona, Suisse, juin 1996. EUMETSAT, Darmstadt, Allemagne.

[Rosenfeld 84] A. Rosenfeld (édité par). – *Multiresolution Image Processing and Analysis.* – Springer, New-York, 1984.

[Rougon 00] N. Rougon, M.-A. Brossard, F. Prêteux. – Robust parametric estimation over optimal support of fluid flow structure in multispectral image sequences. – *Proceedings SPIE Conference on Mathematical Modeling, Estimation and Imaging, San Diego, CA*, vol. 4121, August 2000.

[Rousseeuw 84] P. Rousseeuw. – Left median square of regression. *Journal of the american statistical association*, 79:871–880, 1984.

[Rudin 92] L.I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi. – Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.

[Sallam 83] T. Sallam, A. Mitsunaga. – Visualization and computational studies on the formation and stability of karman vortex streets. – *Proc of 3rd International Symposium on Flow Visualization*, pp. 125–129, 1983.

[Samson 00] C. Samson, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, J Zerubia. – A variational model for image classification and restoration. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 22(5):460–472, mai 2000.

[Schmetz 87] J. Schmetz, M. Nuret. – Automatic tracking of high level clouds in Meteosat infrared images with a radiance windowing technique. *ESA Journal*, 11:275–286, 1987.

[Schmetz 93] J. Schmetz, K. Holmlund, J. Hoffman, B. Mason, V. Gaertner, A. Koch, L.V. De Berg. – Operational cloud-motion winds from Meteosat infrared images. *Journal of Applied Meteorology*, 32:1206–1225, 1993.

[Schnörr 91] C. Schnörr. – Determining optical flow for irregular domains by minimizing quadratic functionals of a certain class. *Int. J. Computer Vision*, 6:25–38, 1991.

[Schnörr 93] C. Schnörr. – On functionals for greyvalue-controlled smoothness terms for determining optical flow. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 15:1074–1079, 1993.

[Schnörr 94] C. Schnörr. – Segmentation of visual motion by minimizing convex non-quadratic functionals. – *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, pp. 661–663, Jerusalem, octobre 1994.

[Schon 92] J.-P. Schon, R. Porcar, M. Stanilsla, H. Royer, T. Fournel. – Les nouvelles techniques de visualisation quantitative en mécanique des fluides. *Spectra 2000*, 164:21–26, 1992.

[Schunk 84] B.G. Schunk. – The motion constraint equation for optical flow. – *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, pp. 20–22, Montreal, 1984.

[Schunk 85] B.G. Schunk. – Image flow: fundamentals and future research. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pp. 560–571, San Francisco, CA, USA, juin 1985.

[Shu 93] C.-F Shu, R.C. Jain. – Direct estimation and error analysis for oriented patterns. *Comput. Vision, Graphics, Image Proc.*, 58(3):383–398, 1993.

[Shu 94] C.-F Shu, R.C. Jain. – Vector field analysis for oriented patterns. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 16(9):946–950, 1994.

[Shukla 74] J. Shukla, R. Saha. – Computation of non-divergent streamfunction and irrotational velocity potential from the observed winds. *Monthly weather review*, 102:419–425, 1974.

[Simpson 94] J.J. Simpson, J.I. Gobat. – Robust velocity estimates, stream functions, and simulated Lagrangian drifters from sequential spacecraft data. *IEEE trans. on Geosciences and Remote sensing*, 32(3):479–492, 1994.

[Smith 72] E.A. Smith, D.R. Phillips. – Automated cloud tracking using precisely aligned digital ATS pictures. *IEEE Trans. Computers*, 21:715–729, 1972.

[Song 91] S.M. Song, R.M. Leahy. – Computation of 3D velocity fields from 3D cine and CT images of human heart. *IEEE trans. on medical imaging*, 10(3):295–306, 1991.

[Spencer 89] B. W. Spencer. – *Étude expérimentale du comportement de la turbulence dans une couche limite incompressible en présence d'un manipulateur externe.* – Quebec, PhD. Thesis, Laval University, 1989.

[Spivak 79] M. Spivak. – *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* – Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, second edition, 1979.

[Sporring 97] J. Sporring, M. Nielsen, L. Florak, P. Johansen. – *Gaussian scale-space theory.* – Kluwer, Dordrecht, 1997.

[Srinivasan 92] V.S. Srinivasan, N.N. Murthy. – Detection of singular points in fingerprint images. *Pattern Recognition*, 25(2):139–153, 1992.

[Stalidis 97] G. Stalidis, N. Maglaveras, A. Dimitriadis, C. Pappas, M. Strintzis. – Parametric 4d modeling of myocardial surface motion applied to mri data. – *Computers in Cardiology 1997*, pp. 319–322, Lund, Sweden, septembre 1997.

[Stewart 95] C. Stewart. – Expexted performance of robust estimators near discontinuities. – *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, pp. 969–974, Cambridge, USA, juin 1995.

[Stiller 99] C. Stiller, J. Konrad. – Estimating motion in image sequences. *IEEE Signal Processing Magazine*, 16(4):70–91, 1999.

[SunHyoung 01] H. Sun-Hyoung, K. Sung-Woo, L. Tae-Young, L. Moon-Key. – Low power motion estimation algorithm based on temporal correlation and its architecture. – *Proceedings of the Sixth International Symposium on Signal Processing and its Applications*, vol. 2, pp. 647–650, Kuala Lumpur, Malaysia, août 2001. IEEE; Piscataway, NJ, USA.

[Suter 94] D. Suter. – Motion estimation and vector splines. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pp. 939–942, Seattle, USA, juin 1994.

[Szantai 96] A. Szantai. – *Construction de trajectoires à partir d'images de satellites: Etude de systèmes nuageux.* – PhD. Thesis, Université de Paris 6, 1996.

[Szantai 00] A. Szantai, F. Desalmand, M. Desbois, P. Lecomte, E. Mémin, S. Zimeras. – Tracking low-level clouds over central africa on meteosat image. – *EUMETSAT, Meteorological Satellite Data Users' Conference*, pp. 813–820, Bologne, Italy, mai 2000.

[Szeliski 94] R. Szeliski, J. Coughlan. – Hierarchical spline-based image registration. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pp. 194–201, Seattle, Washington, 1994.

[Szummer 96] M. Szummer, R.W. Picard. – Temporal texture modeling. – *Proc. Int. Conf. Image Processing*, pp. 823–826, Lausanne, septembre 1996.

[Terzopoulos 86] D. Terzopoulos. – Image analysis using multigrid relaxation methods. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 8(2):129–139, 1986.

[Tikhonov 77] A.N. Tikhonov, A.Y. Arsenin. – Solution of ill-posed problems. – 1977. John Wiley & Sons, Washington D.C.

[Triplet 71] J.P. Triplet, G. Roche. – *Météorologie Générale.* – École Nationale de la Météorologie, 1971.

[Tschumperlé 01a] D. Tschumperlé, R. Deriche. – Diffusion tensor regularization with constraints preservation. – *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Kauai Marriott, Hawaii, décembre 2001.

[Tschumperle 01b] D. Tschumperle, R. Deriche. – Regularization of orthonormal vector sets using coupled PDE's. *Proceedings of IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pp. 3–10, juillet 2001.

[Verri 89] A. Verri, F. Girosi, V. Torre. – Mathematical properties of the two-dimensional motion field: froma singular points to motion parameters. *Journal of Applied Society of America*, 6(5):689–712, 1989.

[Wallace 95] J. Wallace, J. Foss. – The measurement of vorticity in turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 27:469–514, 1995.

[Weickert 98] J. Weickert. – *Anisotropic Diffusion in Image Processing.* – Teubner, Stuttgart, 1998.

[Weickert 99a] J. Weickert. – Coherence-enhancing diffusion of colour images. *Image and Vision Computing*, 17:199–210, 1999.

[Weickert 99b] J. Weickert. – On discontinuity preserving optic flow. – *Proc. Computer Vision and Mobile Rpbotics Workshop, CVMR'98*, pp. 115–122, Santorini, septembre 1999.

[Weickert 00] J. Weickert, C. Schnörr. – *A theoretical framework for convex regularizers in PDE-based computation of image motion.* – Rapport de Recherche n 13/2000 computer sciences series, University of Mannheim, 2000.

[Weickert 01a] J. Weickert, C. Schnörr. – A theoretical framework for convex regularizers in PDE-based computation of image motion. *International Journal of Computer Vision*, 45(3):245–264, décembre 2001.

[Weickert 01b] J. Weickert, C. Schnörr. – Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *Journ. of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3):245–255, 2001.

[Wernert 96] P. Wernert, W. Geissler, M Raffel, J. Kompenhans. – Experimental and numerical investigations of dynamic stall on a pitching airfoil. *AIAA Journal*, 34(5):982–989, 1996.

[Wildes 00] R. Wildes, M. Amabile, A.-M. Lanzillotto, T.-S. Leu. – Recovering estimates of fluid flows from image sequence data. *Computer Vision and Image Understanding*, 80:246–266, 2000.

[Woick 91] H. Woick. – Verification of cloud motion winds. – *First International Wind Workshop*, vol. EUM P10, pp. 127–131, Washington D.C., USA, septembre 1991. EUMETSAT, Darmstadt, Allemagne.

[Wu 95] Q.X. Wu. – A correlation-relaxation-labeling framework for computing optical flow - template from a new perspective. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 17(8):843–853, septembre 1995.

[Wu 96] Q.X. Wu, S.J. McNeill, D. Pairman. – Correlation and relaxation labeling - an experimeltal investigation on fast algorithms. – *Third International Winds Workshop*, vol. EUM P18, pp. 265–272, Ascona, Suisse, juin 1996. EUMETSAT, Darmstadt, Allemagne.

[Yacoob 99] Y. Yacoob, M.J. Black. – Parametrized modeling and recognition of activities. *Computer Vision and Image Understanding*, 73(2):232–247, 1999.

[Yacoob 00] Y. Yacoob, L. Davis. – Learned models for estimation of rigid and articulated human motion from stationary or moving camera. *Int. J. Computer Vision*, 12(1):5–30, 2000.

[Yang 01] Q. Yang, B. Parvin, A. Mariano. – Feature based visualization of geophysical data. *Geophysical Research Letters*, 2:331–334, janvier 2001.

[Ying 01] W. Ying, J.Y. Lin, T. Huang. – Capturing natural hand articulation. – *Proc. 8th Int. Conf. Computer Vision*, vol. 2, pp. 426–432, Vancouver, BC, Canada, juillet 2001.

[You 96] Y.L. You, W. Xu, A. Tannenbaum, M. Kaveh. – Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing. *IEEE Trans. Image Processing*, 5(11):1539–1553, novembre 1996.

[Zhong 98] J. Zhong, T. Huang, R. Adrian. – Extracting 3D vortices in turbulent flow. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 20(2):193–199, 1998.

[Zhou 00] L. Zhou, C. Kambhamettu, D. Goldgof. – Fluid structure and motion analysis from multi-spectrum 2D cloud images sequences. – *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, vol. 2, pp. 744–751, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.

[Zhou 01] L. Zhou, C. Kambhamettu, D.B. Goldgof, K. Palaniappan, A.F. Hasler. – Tracking nonrigid motion and structure from 2D satellite cloud images without correspondences. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 23(11):1330–1336, novembre 2001.

Publications

Revues

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Dense Estimation of Fluid Flows.** – *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol 24, num 3, pp 365-380, mars 2002.

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Extraction of Singular Points from Dense Motion Fields: an Analytic Approach.** – *Journal of Mathematical Image and Vision*, à paraître.

Congrès internationaux

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Dense Motion Analysis in Fluid Imagery.** – Dans *Proc. 7th European Conference on Computer Vision*, Copenhague, Danemark, Mai 2002.

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Estimating Fluid Optical Flow.** – Dans *Proc. of 15th IAPR International Conference on Pattern Recognition, ICPR'2000*, Volume 3, pages 1045-1049, Barcelone, Espagne, Septembre 2000.

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Adaptation of standard optic methods to fluid motion.** – Dans *9th International Symposium on Flow Visualization*, paper 62, pages 1-10, Edimbourg, Écosse, Août 2000.

Workshops et Symposiums internationaux

S. Zimeras, T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Motion estimation using satellite data.** – *The statistics of directions, shapes and images workshop, 19th Leeds Annual Statistical Research (LASR)*, Leeds, Royaume Uni, 2000.

Congrès et workshops nationaux

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Régularisation Div-Curl et Équation de Continuité pour l'Estimation de Mouvement Fluide.** – Dans *13ème Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, RFIA'2002*, Volume 3, pages 887-898, Angers, France, Janvier 2002.

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Estimation dense du mouvement en imagerie fluide.** – Dans *9ème colloque francophone de visualisation et de traitement d'images en mécanique des fluides, FLUVISU'2001*, Rouen, Juin 2001.

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Estimation de mouvement fluide basée sur l'équation de continuité associée à une régularisation Div-Curl.** – Dans *Actes des journées francophones des jeunes chercheurs en analyse d'images et perception visuelle, ORASIS'2001*, pages 481-490, Cahors, Juin 2001.

Rapport de Recherche

T. Corpetti, É. Mémin et P. Pérez. – **Dense fluid flow estimation** – *Rapport de Recherche IRISA*, No1352, Septembre 2000.

Résumé

Cette étude a pour cadre l'analyse de mouvements fluides dans des séquences d'images et s'articule autour de deux axes.

Nous traitons en premier lieu le problème de l'estimation du mouvement. Dans un contexte d'imagerie fluide, la luminance des images fait parfois apparaître de fortes distorsions spatiales et temporelles, rendant délicate l'utilisation de techniques standard issues de la Vision par Ordinateur, originalement conçues pour des mouvements rigides et reposant sur une hypothèse d'invariance de la fonction de luminance. Nous proposons un estimateur de mouvement modélisé au moyen d'une formulation énergétique et spécialement dédié à l'estimation du mouvement fluide. La fonctionnelle considérée est composée d'un terme d'attache aux données original issu de l'équation de continuité de la mécanique des fluides. Ce nouveau modèle de données, spécifié pour être aisément intégré dans un schéma multirésolution, est associé à une régularisation de type "div-curl". Les performances de cet estimateur sont expérimentalement démontrées sur des images synthétiques et réelles météorologiques. Une validation de la méthode sur un écoulement expérimental représentant une "couche de mélange" est par ailleurs présentée.

L'intérêt de l'étude est en second lieu porté sur l'analyse d'un champ de déplacement préalablement estimé, relatif à un mouvement fluide. Nous proposons une méthode visant à extraire les vortex et puits/sources de l'écoulement en s'appuyant sur le modèle de Rankine. Ce problème est essentiel dans de nombreuses applications comme par exemple la détection d'importants événements météorologiques (dépressions, cellules convectives, ...) ou la caractérisation d'écoulements expérimentaux. La connaissance de telles structures autorise par ailleurs une représentation paramétrique de l'écoulement. La méthode que nous proposons s'appuie sur une représentation analytique du champ des vitesses et permet d'extraire d'autres informations pertinentes relatives à l'écoulement (fonctions de potentiels, décomposition selon Helmholtz de l'écoulement, points singuliers, ...). L'approche présentée sera expérimentalement étudiée sur des écoulement représentant divers phénomènes physiques.

Mots clefs : Analyse du mouvement fluide, flot optique, équation de continuité, régularisation div-curl, estimation robuste, extraction de singularités, modèle de Rankine, fonctions de potentiels.

Abstract

This thesis is concerned with fluid motion analysis in image sequences and involves two main issues.

In a first part, we address the problem of estimating a dense motion field. Due to the great deal of spatial and temporal distortions that luminance patterns exhibit in fluid imagery, standard techniques from Computer Vision, originally designed for quasi-rigid motions with stable salient features, are not well adapted. In that prospect, we investigate a dedicated energy-based motion estimator. The considered functional includes an original data model relying on the continuity equation of fluid mechanics. This new data model, which is specifically designed to be embedded in a multiresolution framework, is associated to an original "div-curl" type regularization. The performances of the resulting fluid flow estimator are demonstrated both on synthetic and real meteorological image sequences. The method is furthermore validated on an experimental flow representing a free turbulent shear layer.

The second step of this study is concerned with the analysis of a dense motion field preliminary estimated between two images of a fluid video. We propose a method to extract the vortices and sources/sinks following the Rankine model. This problem is for instance essential in meteorology (to identify and track depressions or convective clouds in satellite images) or to characterize experimental fluid flows. The knowledge of such structures allows in addition a compact representation of the flow which is very useful in both experimental and theoretical fluid mechanics. The method we propose here is based on an analytic representation of the flow and has the advantage to extract others pertinent informations of the motion (such as potential functions, the Helmholtz decomposition, singular points, ...). This approach is experiment on various displacements fields showing different physicals events.

Keywords: Fluid motion analysis, optical flow, continuity equation, div-curl regularization, robust estimation, singularity extraction, Rankine model, potential functions.