



HAL
open science

Mise au point et qualification d'une technique de mesure du taux de présence local par tomographie à rayons X

Emmanuel Jouet

► To cite this version:

Emmanuel Jouet. Mise au point et qualification d'une technique de mesure du taux de présence local par tomographie à rayons X. Physique [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT: . tel-00005372

HAL Id: tel-00005372

<https://theses.hal.science/tel-00005372>

Submitted on 18 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut National Polytechnique de Grenoble

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'INPGrenoble

Spécialité : Energétique Physique

préparée au Laboratoire de Thermohydraulique
de l'Assemblage Combustible (CEA Grenoble)

dans le cadre de l'Ecole Doctorale Mécanique et Energétique

présentée et soutenue publiquement
par

Emmanuel JOUET

Ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Grenoble

le 22 octobre 2001

Mise au point et qualification d'une technique de mesure du taux de présence local par tomographie à rayons X

Directeur de thèse :
Laurent DESBAT

Jury :

Georges BERTHOUD	Président
Françoise PEYRIN	Rapporteur
Jacques LEBLOND	Rapporteur
Laurent DESBAT	Directeur de thèse
Eric HERVIEU	Responsable CEA Grenoble

Institut National Polytechnique de Grenoble

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'INPGrenoble

Spécialité : Energétique Physique

préparée au Laboratoire de Thermohydraulique
de l'Assemblage Combustible (CEA Grenoble)

dans le cadre de l'Ecole Doctorale Mécanique et Energétique

présentée et soutenue publiquement
par

Emmanuel JOUET

Ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Grenoble

le 22 octobre 2001

Mise au point et qualification d'une technique de mesure du taux de présence local par tomographie à rayons X

Directeur de thèse :
Laurent DESBAT

Jury :

Georges BERTHOUD	Président
Françoise PEYRIN	Rapporteur
Jacques LEBLOND	Rapporteur
Laurent DESBAT	Directeur de thèse
Eric HERVIEU	Responsable CEA Grenoble

La science ? Après tout, qu'est-elle, sinon une longue et systématique curiosité ?
André Maurois, *La Terre Promise*

A tous, merci.

Remerciements

Et voilà, trois années sont passées et la thèse est (enfin ?) finie.

Une thèse est d'abord un travail scientifique. C'est ce que vous présente ce mémoire. Mais une thèse est aussi une période pleine de moments émouvants, de souvenirs inoubliables, de rencontres très enrichissantes avec des personnes formidables.

Il est difficile d'exprimer par des mots les émotions échangées et des sentiments si forts, mais je vais essayer de le faire. Mais dans quel ordre ? Il y a aussi le risque d'oublier une personne. Si c'est le cas, mille excuses : il y a peut-être des oublis sur le papier, mais pas dans l'esprit !

Je remercie d'abord Michel BLANC, chef du SETEX, Philippe GULLY, Alain MEMPONTEIL et Jacques GARNIER, chefs du LTDF et du LTAC, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse et pour tous les échanges que nous avons eus. Il était bon de sentir que cette thèse ne se limitait pas à un numéro de crédit sur une feuille.

Merci à Françoise PEYRIN et Jacques LEBLOND d'avoir accepté la tâche de rapporter ce travail.

Mille mercis à Georges BERTHOUD, dit Georges, de m'avoir fait l'honneur et le plaisir d'assurer la présidence du jury de thèse. Je me souviendrai toujours, en plus de votre cours de thermohydraulique diphasique, des propos échangés entre autres sur l'ENSPG et vos pointes d'humour, surtout vos "votez pour moi" du matin.

Merci à tous ceux qui sont venus m'écouter ce 22 octobre 2001, particulièrement à ceux qui sont venus de loin, les Lyonnaises, les Marseillais d'adoption et les Angevins.

Je remercie les personnes qui ont participé à la logistique de cette soutenance :

- pour l'envoi des 144 avis de soutenance, Sébastien BONNET, Jean-pierre CALVET et Fabrice FRANÇOIS ;
- pour la gestion du cocktail, Aktham ASFOUR, Fabrice FRANÇOIS (bis), Aline LEDOUX (et ses cakes au jambon), Gilles METELLUS et mes parents.

Merci à ceux qui ont répondu aux invitations avec des mots sympathiques qui m'ont beaucoup touché.

Merci à Patrice CLEMENT, Philippe CLEMENT, Nicole COUTRIS, Géraud CUBIZOLLES, Jean-Marc DELHAYE, Fabrice FRANÇOIS (ter) et Hervé LEMONNIER pour l'intérêt qu'ils ont montré vis à vis de ma thèse, pour leurs participations à des réunions d'avancement et pour leurs suggestions au cours de ces réunions.

Ma gratitude à tous les "intervenants" sur Mini-TOMIX pour leur professionnalisme et les

améliorations qu'ils ont apportées :

- Jean-Pierre CALVET (bis) pour l'alignement de la colonne et la relecture d'un chapitre ;
- Alexandre CHATELAIN pour le programme performant d'acquisition de la sonde optique ;
- Sébastien BONNET (bis) pour l'aide bénévole pour aligner cette section d'essais ;
- Alexandre GIACOMELLI, aux doigts de fée, entre autres pour la sonde optique, les faisceaux de tubes ;
- Lionel GOASGLAS, Monsieur Radioprotection, les mesures sans collimateur "ensemble" ;
- Vincent IEVA, l'homme aux baskets et Monsieur tapis, pour l'électricité ;
- David MEYER pour le dessin de la section d'essais ;
- Michel NICOLAS parmi d'autres pour le bâti, l'alignement de la colonne (et ce n'est pas une partie de plaisir !), une pompe qui m'a permis d'arrêter de faire des acrobaties sur un escabeau une cuvette pleine d'eau entre les mains ;
- Murielle RISSE pour l'électronique et le SOS soudures pour thésard en détresse ;
- André SAUDIN, Monsieur Sécurité et ses dosimètres ;
- Bruno ZORZETTIG entre autres pour les fins de course et différents capteurs.

Merci à Mini-TOMIX et TOMIX pour les mesures fournies, le plaisir apporté lors de leurs mises en place et les crises d'angoisse lors de leurs plantages.

Mille mercis à Eric Hervieu et Laurent DESBAT pour leur disponibilité, les différentes discussions, leurs idées pendant cette thèse. Je venais vous voir avec des problèmes, je repartais avec des solutions et un moral au plafond ! Et cela marchait même au téléphone !

Laurent, merci d'avoir laissé un peu votre famille certains soirs pour la relecture de ce document.

Eric, merci de plus pour avoir sacrifié une partie de tes vacances pour moi et pour tout ce que nous avons fait en dehors du CEA. Remercie aussi Aurélia, Cédric et Nina.

Je remercie Christiane HAMELIN et Josette MABED pour leurs compétences, les discussions partagées, leur bonne humeur et l'accueil avec le sourire même quand je venais avec des problèmes administratifs.

Merci aux personnes du SETEX et surtout du LTAC pour m'avoir si gentiment accueilli parmi eux, pour toutes les discussions, pour les activités organisées conjointement (barbecues et repas de Noël).

Merci à Anne-Sophie COHEN, Evelyne CONFORT, Pierrette LEONE, Joëlle MAILLAND, Josette PAIO et Françoise TERNAY pour nos échanges toujours intéressants et les repas partagés.

Un remerciement particulier à Françoise GIGNOUX (avec qui nous devons écrire le guide des restaurants "C. C. C." de Grenoble, mais le temps nous a manqué), Corinne PANTIGNY, Marcelle ROULLIER et Marinette WURSTEN, dit Dona Marinetta, pour les mêmes raisons, pour l'aide pour tous problèmes et surtout lors de mes doutes sur la vie d'un thésard. Françoise, je me souviendrai toujours de nos sorties restaurants !

Merci à tous les stagiaires et aux autres thésards pour la bonne ambiance qu'ils ont créés autour de cette thèse et les différentes discussions que nous avons partagées.

Mohammed AICHI, dit Momo, je me rappellerai toujours nos échanges techniques et "Lab-viewsques" très enrichissants.

Un grand merci particulier pour les échanges, les activités que nous avons faites en dehors du centre et pour ce lien qui reste même après nos départs, à :

- Cécile ADAM ;
- Alexandre CHATELAIN (bis) et les soirées passées à faire vivre Mini-TOMIX ;
- Sébastien CHRISTOPHE, l'affiche "attention thésard méchant" sur la casemate, le pari, l'irradié virtuel ou comment faire réagir Sèb en moins de 5 minutes ;
- Anne-Laure MULLER que j'ai de plus martyrisé en Travaux Pratiques ;
- David NOYELLES, camarade sauteur et qui a trouvé le moyen de m'associer à Jacques Chirac ;
- B'uno ROSSIN et sa climatisation ;
- Alexandre SIMON, tes "tu l'as vu?", tes idées de promenades en montagne qui m'ont fait découvrir d'autres massifs, et les réveils qui m'ont permis d'être à 6h au CEA, mais tu sais que je ne t'en veux pas et que tu peux revenir quand tu veux ;
- Thomas VERROUST, dit Tom, la décoration de mon bureau et la danse celtique.

De nouveau mille mercis pour l'ambiance, les activités extérieures, les différentes aides, le lien qui reste et pour avoir su répondre à mes doutes qui après discussion, semblaient faire partie de la vie d'un thésard, aux thésards suivants :

- Christophe DUQUENNOY ;
- Guy-Laurent LAGIER (et ses mails) et Sandrine "DE DU" LAGIER (nommée ainsi depuis le 27 juin 2001) ;
- Etienne MANON, camarade sauteur et architecte d'intérieur de la pièce 504 ;
- Julien NAMIECH ;
- et surtout, avec une mention pour l'aide des "derniers jours", Fabrice FRANÇOIS (4), dit R. Fabio, et Aline LEDOUX, le Tri Yann band.

Je pense que pour qu'une thèse se déroule bien, il faut que l'environnement à l'intérieur du centre soit bon, mais aussi en dehors.

Je remercie aussi les bénévoles de l'Association Ingénieurs INPGrenoble pour les activités réalisées en commun, la bonne ambiance dans laquelle elles ont été réalisées, le plaisir pris en commun et les casquettes que vous m'avez confiées. Je n'ai malheureusement pas la place de tous vous citer. Un remerciement particulier à Michèle ELOLA pour avoir su faire sauter un dernier doute, à François De LONGUEAU pour sa patience et à Jean-Pierre GERALD pour m'avoir envoyé des "clients" et ainsi m'avoir montré que j'avais un réseau et que je pouvais en faire profiter les autres.

Merci aux personnes de l'INPGrenoble avec lesquelles nous avons mis en place ces activités.

Sans oublier pour tous les échanges, les activités, les soirées Ciné, les sorties ski, les balades en montagne, les glaces au Sporting, les rendez-vous Bagatelle-restaurant, ... un grand

merci aux copains : Aktham ASFOUR (bis), Philippe KERNEL, Fabrice LANGLAIS et Gillou METELLUS (bis).

Mille mercis à mes supporters depuis bientôt 27 ans qui ont su me donner l'envie de travailler, me laisser choisir ma voie même si ce choix m'emmenait loin d'Angers, soulever mes doutes et m'aider pour la logistique de la soutenance, mes parents Lucienne et Marcel JOUET (bis).

Enfin une pensée pour ma grand-mère, Mémé, qui nous a quitté au tout début de cette thèse et qui, je pense, aurait apprécié le travail réalisé par son "petit" petit-fils.

Un chapitre se finit et un nouveau commence...

A tous, merci.

Table des matières

Nomenclature	17
1 Introduction	21
1.1 Contexte de l'étude	21
1.2 Objectif de la thèse	22
1.3 Autres mesures du taux de présence local par tomographie à rayons X	24
1.4 Méthodologie	25
2 Analyse bibliographique	27
2.1 Introduction	27
2.2 Algorithmes de reconstruction analytiques	29
2.2.1 Méthode de convolution de Ramachandran et Lakshminarayanan	29
2.2.2 Rétroprojection filtrée	31
2.2.3 Rho-filtered Layergram Reconstruction	35
2.2.4 Algorithme de Fourier	35
2.3 Algorithmes de reconstruction algébriques	39
2.3.1 Quelques définitions mathématiques	41
2.3.2 Algorithmes pour A symétrique définie positive	42
2.3.3 Problèmes symétrisés	47
2.3.4 Algorithmes non symétrisants	53
2.3.5 Techniques d'accélération de convergence	59
2.3.6 Régularisation	60
2.4 Schémas d'échantillonnage	70
2.4.1 Echantillonnage efficace	70
2.4.2 Passage aux mesures en éventail (fan-beam)	72
2.5 Durcissement du faisceau de rayons X	77
2.5.1 Description du phénomène	77
2.5.2 Ecrans en sortie de tube à rayons X	77
2.5.3 Facteur correctif	78
2.5.4 Autre méthode	79
2.6 Conclusion	81
3 Comparaison et optimisation des algorithmes	83
3.1 Introduction	83
3.2 Programmation des algorithmes	84
3.2.1 Algorithmes de reconstruction	84
3.2.2 Routine de Validation Croisée Généralisée	86
3.2.3 Routines de résolution	86

3.2.4	Algorithmes de simulations	87
3.3	Comparaison des performances des algorithmes classiques	88
3.3.1	Fantôme utilisé	88
3.3.2	Evolution du résidu	89
3.3.3	Temps de calcul	89
3.3.4	Fidélité avec l'original	91
3.3.5	Lien bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction	97
3.3.6	Conclusion de la comparaison des algorithmes	105
3.4	Reconstructions de taux de vide	106
3.4.1	profils simulés	106
3.4.2	Reconstructions de ces profils	107
3.5	Utilisation des algorithmes spatialement adaptatifs	111
3.5.1	Méthode de V. La	111
3.5.2	Méthode de Charbonnier	118
3.5.3	Introduction d'informations a priori concernant la régularisation	141
3.5.4	Introduction d'informations a priori concernant la géométrie	144
3.6	Conclusion	159
4	Dispositif Mini-TOMIX	161
4.1	Introduction	161
4.2	Description de Mini-TOMIX	162
4.2.1	Description du dispositif expérimental	162
4.2.2	Description de la section d'essais	164
4.2.3	Description du système de contrôle-commande de Mini-TOMIX	166
4.3	Réglages du générateur de rayon X	173
4.3.1	Choix de la haute tension du tube et du filtre du porte-tube	173
4.3.2	Choix de l'intensité du tube	173
4.3.3	Stabilité du signal des photomultiplicateurs	178
4.3.4	Réglage des photomultiplicateurs	180
4.4	Acquisition des mesures pour les cibles en Plexiglas	181
4.4.1	Choix du filtre passe-bas	181
4.4.2	Choix du nombre de mesures	183
4.5	Acquisition des mesures pour les écoulements dans la section d'essais	186
4.6	Durcissement du faisceau	190
4.6.1	Mise en évidence de ce phénomène	190
4.6.2	Rappel du durcissement du faisceau	192
4.6.3	Prise en compte de ce phénomène	193
4.7	Conclusion	196
5	Mise en œuvre du dispositif Mini-TOMIX	197
5.1	Introduction	197
5.2	Nombre de points nécessaires pour une résolution de 1 mm ²	198
5.2.1	Reconstructions de mesures simulées du fantôme 1	198
5.2.2	Reconstructions de mesures réelles du fantôme 1	199
5.2.3	Reconstructions de mesures réelles du fantôme 2	199
5.3	Protocole expérimental	202
5.3.1	Procédure de mesure	202
5.3.2	Corrections des mesures	203

5.4	Mesures d'écoulements non déviés	206
5.4.1	Mesure de la section d'essais vide	206
5.4.2	Mesure de la section d'essais sans débit d'air	206
5.4.3	Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$	206
5.4.4	Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$	210
5.4.5	Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$	210
5.5	Mesures d'écoulements déviés	214
5.5.1	Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $5,3 \text{ Nl.min}^{-1}$	214
5.5.2	Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$	214
5.6	Mesures d'écoulements autour de faisceaux de tubes	219
5.6.1	Faisceaux de tubes carrés	219
5.6.2	Faisceaux de tubes cylindriques	221
5.6.3	Faisceaux de tubes cylindriques avec arrivée d'air par les tubes	223
5.7	Conclusion	225
6	Extension à l'échantillonnage en éventail (fan-beam)	227
6.1	Introduction	227
6.2	Description du dispositif TOMIX	228
6.3	Simulations de mesures en éventail	231
6.3.1	Simulations des mesures du fantôme 1	231
6.3.2	Simulations de mesures de la section d'essais Eucalyptus	233
6.4	Mesures sur TOMIX	236
6.4.1	Mesures de fantômes axisymétriques	236
6.4.2	Mesures du fantôme 1	237
6.4.3	Mesures sur la section d'essais Eucalyptus	237
6.5	Conclusion	242
	Conclusions et perspectives	243
	Références bibliographiques	245

Nomenclature

Lettres latines minuscules

- a : distance entre deux projections successives
- b : fréquence de coupure, processus de ligne (p. 66)
- b_j : base de discrétisation
- c : paramètre
- d : épaisseur
- $e_1 = (1\ 0\ 0 \cdots 0)^t$: première colonne de la matrice Identité
- f : fonction à deux variables de la grandeur à reconstruire
- $f_{KN}(E)$: fonction définie p. 79
- g : fonction
- h : fonction
- i : numéro d'itération, numéro de cellule, i imaginaire pur
- j : numéro de projection, de mesure
- k : numéro d'itération, numéro de phase
- l : numéro d'itération, variable
- m : nombre total de mesures
- n : nombre de pixels de l'image
- p_i : vecteur défini p. 51
- q : "demi-nombre" de projections
- r : distance à l'origine en géométrie polaire
- s : distance
- t : variable, variable de temps, abscisse d'un point M
- u : variable du domaine de Fourier en coordonnées cartésiennes, vecteur colonne
- v : variable du domaine de Fourier en coordonnées cartésiennes, vecteur colonne
- w : vecteur colonne
- x : abscisse d'un point M, variable
- y : ordonnée d'un point M, variable

Lettres latines majuscules

- A : une matrice, atténuation
- $A_k^n(j)$: coefficients de Lagrange (p. 34)
- B : un vecteur
- B_i : matrice de LSQR (p. 48)
- C : paramètre, opérateur de régularisation (p. 62)
- D : distance entre la source et l'axe de rotation du tomographe, direction de descente
- E : énergie
- $E(Y)$: fonction d'erreur (définie p. 42)

F : vecteur colonne de la grandeur à reconstruire
 F_d^g : opérateur discrétisé d'interpolation selon la fonction g
 H : matrice sous forme Hessenberg
 I : intensité du faisceau de rayons X (en photons.cm⁻².s⁻¹), matrice Identité
 $J(F)$: fonction de matrice et vecteur définie p. 42
 K : support d'une fonction
 $K_k(A, X)$: espace de Krylov de la matrice A et du vecteur X (p. 41)
 L : longueur ou rapport de longueurs
 M : nombre de projections
 N : nombre de rotations
 P : vecteur colonne des mesures
 P_c : matrice de préconditionnement
 P_i : matrice définie p. 51
 Q_i : matrice de la factorisation QR
 R : matrice décrivant l'interaction entre les mesures et les pixels de l'image (p. 40)
 R_i : résidu, matrice de la factorisation QR
 $S(E)$: spectre d'un faisceau de rayons X
 $S_W(f)$: estimation par interpolation de la fonction f suivant l'échantillonnage défini par la matrice W (p. 70)
 T : temps de mesure
 T_g : temps de présence de la phase gazeuse
 U_i : matrice de LSQR (p. 48)
 $V(\lambda)$: fonction de Validation Croisée Généralisée (définie p. 62)
 V_i : matrice de LSQR et RRLS (p. 48 et 51), tension de la voie i (en V)
 W : fenêtre de filtrage, matrice d'échantillonnage
 W_i : matrice définie p. 52
 X : vecteur colonne
 $X_k(M, t)$: fonction indicatrice de phase (définie p. 22)
 Y : vecteur colonne

Lettres rondes

\mathcal{B} : opérateur de rétroprojection
 \mathcal{D} : opérateur de dérivation
 \mathcal{F} : transformée de Fourier
 \mathcal{H} : opérateur de Hilbert
 $\mathcal{K}(A)$: conditionnement de la matrice A (p. 41)
 \mathcal{R} : opérateur de projection (p. 29)

Lettres grecques

α : pas de descente
 $\alpha(M, t)$: taux de présence local de la phase gazeuse (défini p. 22)
 β : coefficient, angle
 χ_K : indicatrice de K
 δ : facteur d'échelle
 ε : paramètre de décroissance d'erreur
 γ : paramètre du filtre de Hamming généralisée (p. 35), fonction définie p. 37, angle

λ : paramètre de régularisation
 λ_k : valeur propre de R
 μ : atténuation linéaire (en cm^{-1})
 $\omega_{Nij}, \omega_{Sij}, \omega_{Eij}, \omega_{Oij}$: coefficients définis p. 66
 φ : angle du domaine de Fourier en géométrie polaire
 ϕ : fonction de potentiel (p. 65)
 ψ : fonction
 ρ : rayon spectral d'une matrice A (p. 42)
 σ : abscisse du domaine de Fourier en géométrie polaire
 τ : variable de temps, paramètre d'arrêt
 θ : angle
 ν : fréquence
 ξ : variable
 Δ : matrice
 $\Delta\theta$: intervalle de discrétisation angulaire (en rad)
 $\Delta(X)$: erreur de mesure sur la grandeur X
 Λ : matrice
 Σ : coefficient défini p. 66

Autres symboles

\mathbb{N} : ensemble des entiers naturels
 \mathbb{Z} : ensemble des entiers relatifs
 \mathbb{R} : ensemble des réels
 $\langle X, Y \rangle$: produit scalaire de deux vecteurs X et Y (p. 41)
 $\langle X, Y \rangle_A$: produit scalaire de deux vecteurs X et Y par rapport à une matrice A (p. 41)
 $\|X\|$: norme du vecteur X (p. 41)
 $\|X\|_A$: norme du vecteur X selon la matrice A (p. 42)

Indices

d : discrétisé
 g : de la phase gazeuse
 masque : relatif au masque
 moyen : valeur moyenne
 trame : relatif à la trame
 $_2$: en deux dimensions

Exposant

t : transposée

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte de l'étude

Les écoulements diphasiques sont présents dans beaucoup d'applications industrielles. Nous pouvons citer :

- l'industrie chimique ;
- le secteur pétrolier, pour le transport du pétrole dans les oléoducs ;
- le secteur nucléaire pour le circuit primaire des réacteurs bouillants, le circuit secondaire des Réacteurs à Eau sous Pression, le circuit primaire de ces mêmes réacteurs en cas d'accident.

Les installations mettant en jeu des écoulements diphasiques sont souvent complexes (géométrie, dimensionnement, pilotage, ...) et leurs concepteurs peuvent avoir besoin de codes de calcul thermohydraulique pour les dimensionner et prédire leurs comportements.

Pour ce faire, ils disposent de codes de calcul de thermohydraulique monophasique et diphasique. Beaucoup de codes monophasiques sont tridimensionnels, c'est à dire qu'ils résolvent les équations bilans projetées dans les trois dimensions. Mais les codes diphasiques sont généralement monodimensionnels : ils traitent des grandeurs moyennées dans une section. Or pour mieux décrire les comportements de ces écoulements, il est intéressant de résoudre les équations bilans dans les trois dimensions, c'est à dire de développer des codes de thermohydraulique diphasique tridimensionnels [Bestion *et al.*, 1998].

Pour la mise au point de ces codes, il faut développer des modèles locaux décrivant les phénomènes qui gèrent la thermohydraulique diphasique et avoir une banque de données pour valider ces codes. Cela entraîne un besoin en instrumentation locale permettant d'accéder, pour différents écoulements, à des grandeurs importantes telles que vitesses liquide et gazeuse, concentration d'aire interfaciale et taux de présence local.

Nous chercherons dans cette thèse à **mesurer le taux de présence local de la phase gazeuse**, souvent appelé **taux de vide**, que nous allons définir [Berthoud, 1997; Delhaye, 1997].

Définissons d'abord la fonction indicatrice de phase k ($k \in \mathbb{N}$), à chaque instant t ($t \in \mathbb{R}$) et en tout point M ($M \in \mathbb{R}^3$) par :

$$X_k(M, t) \hat{=} \begin{cases} 1 & \text{si le point } M \text{ est dans la phase } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

Si nous prenons l'écoulement de la figure 1.1, nous obtiendrons la fonction indicatrice de la phase gazeuse de la figure 1.2.

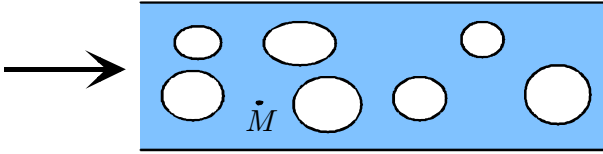


FIG. 1.1: Exemple d'écoulement diphasique

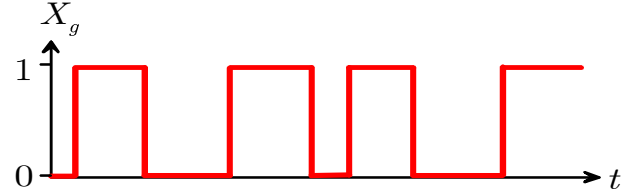


FIG. 1.2: Fonction indicatrice de la phase gazeuse pour l'écoulement de la figure 1.1

Le taux de présence local de la phase gazeuse est par définition l'intégrale temporelle sur une période T de la fonction indicatrice de la phase gazeuse :

$$\alpha(M, t, T) \hat{=} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X_g(M, \tau) d\tau \quad (1.2)$$

Le taux de présence local de la phase gazeuse est alors la proportion du temps pendant laquelle le point M est dans la phase gazeuse durant la période d'observation T . C'est le rapport, sur la période de mesure T , du temps T_g durant lequel le point M est dans la phase gazeuse pendant T .

$$\alpha(M, t) = \frac{T_g}{T} \quad (1.3)$$

1.2 Objectif de la thèse

Ce travail est dédié à la mise au point d'une **technique de mesure** pour obtenir **une carte en deux dimensions du taux de présence local** dans une section droite d'un écoulement en conduite. Cette technique devra fonctionner pour **des régimes d'écoulements eau-air quelconques, libres ou chargés** (avec des structures internes). Nous chercherons à avoir **la meilleure précision** sur les mesures de taux de présence local et **une résolution millimétrique**. Ces objectifs feront l'objet d'une évaluation quantitative rigoureuse.

Ce travail se place dans le cadre d'une collaboration CEA-DEN, CEA-IPSN, EDF, Framatome-ANP et TIMC-IMAG.

Pour mesurer le taux de présence local, plusieurs méthodes peuvent être mises en œuvre :

- les méthodes intrusives reposant sur l'utilisation de sondes optiques, électriques ou thermiques ;
- les méthodes non intrusives, comme les méthodes d'atténuation photonique ou les méthodes ultrasonores.

Pour le cas des méthodes intrusives, une sonde doit être placée dans l'écoulement. Si une cartographie est désirée, la sonde doit être multipliée ou déplacée dans la section. Ces sondes perturbent l'écoulement. Suivant les conditions de fonctionnement de l'installation expérimentale (débit, température et surtout pression), l'insertion d'une telle sonde au coeur de l'écoulement peut s'avérer technologiquement difficile, voire impossible. Par ailleurs, des sondes intrusives sont peu adaptées à l'exploration de milieux chargés, comme les faisceaux de tubes rencontrés couramment dans le domaine nucléaire.

Parmi les méthodes non intrusives, nous pouvons citer :

- les méthodes de visualisation optique : elles sont basées sur l'analyse d'images de l'écoulement. La faible pénétration au coeur de l'écoulement en présence de nombreuses bulles limite cette technique à des écoulements dispersés très dilués.
- les méthodes ultrasonores : l'atténuation et la vitesse de propagation des ultrasons dépendent de la composition du milieu traversé. Ces méthodes ont été validées en écoulements à phases dispersées, et sont difficilement extrapolables à d'autres régimes d'écoulements.
- les méthodes électriques : l'impédance électrique mesurée aux bornes de deux électrodes entre lesquelles s'écoule un écoulement diphasique dépend notamment de la composition volumique du milieu et de la distribution des phases. L'utilisation de ce principe dans le cadre de la tomographie électrique conduit à la résolution d'un problème inverse numériquement mal posé dont la résolution est très délicate et fortement instable.
- la résonance magnétique nucléaire : cette méthode pourrait fournir une carte du taux de présence local, mais elle nécessite un champ magnétique uniforme de l'ordre de quelques Teslas sur une longueur d'environ 1 m. Elle est aujourd'hui limitée à des écoulements de quelques m.s^{-1} dans des conduites de quelques cm de diamètre. La mise en œuvre est aujourd'hui d'une complexité et d'un coût dissuasifs. De plus, cette méthode ne permet pas de réaliser de mesures d'écoulements autour de faisceaux de tubes métalliques.
- l'atténuation photonique : un faisceau de rayons X ou γ subit une atténuation qui dépend des matériaux traversés (parois, liquide et gaz) et de leurs épaisseurs respectives. Si le faisceau est collimaté, la mesure de cette atténuation donne accès au taux de présence linéique. La multiplication de ce type de mesure en traversant l'écoulement suivant différentes positions et différentes orientations permet d'obtenir une carte du taux de présence local grâce à un algorithme de reconstruction tomographique. Cette méthode, largement utilisée dans le domaine médical, connue sous le nom de scanner, peut être extrapolée aux écoulements diphasiques, quelle que soit la géométrie de la conduite ou la présence éventuelle de structures internes.

Nous avons retenu cette dernière méthode en raison de son vaste champ d'applications. A la différence des méthodes électriques, les méthodes photoniques conduisent à des problèmes inverses linéaires seulement légèrement mal posés : l'inversion numérique est relativement stable. Pour leur plus grande facilité et souplesse d'utilisation, les rayons X ont été privilégiés au détriment des rayons γ .

Dans ce travail, nous **développerons et qualifierons une mesure du taux de présence local en utilisant la méthode de tomographie à rayons X**. Ce tomographe sera installé sur une boucle d'essais dont la réalisation ne fait pas partie de ce travail.

1.3 Autres mesures du taux de présence local par tomographie à rayons X

Nous avons cherché à connaître les autres dispositifs de mesure du taux de présence local par tomographie à rayons X.

C. Jeandey [Jeandey, 1982] a construit un tomographe pour mesurer des écoulements eau-vapeur dans un tube de 20 mm (jusqu'à une pression de 150 bar et un débit de 60 000 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$). Il utilise un tube à rayons X avec une anticathode en Tungstène à 160 kV et 4 mA et mesure le flux transmis grâce à 31 chambres d'ionisation. Il ne fait pas de rotations autour de la section d'essais. Il considère l'écoulement axisymétrique, ce qui lui permet d'obtenir une carte du taux de présence local en utilisant un algorithme de reconstruction simple. Ce dispositif n'est donc pas applicable pour tous régimes d'écoulements et sa résolution spatiale est faible.

A. Inoue [Inoue *et al.*, 1993] mesure l'écoulement eau-vapeur autour de grappes dans les conditions de fonctionnement d'un réacteur bouillant (pression allant jusqu'à 86 bar, débit jusqu'à 1988 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$). Pour ce faire, il utilise un tomographe en éventail avec 1 tube (avec une tension maximale de 120 kV et un courant maximal de 400 mA) et 512 détecteurs. Ce dispositif fait l'acquisition d'une section de 300 mm de diamètre en 15 s. La dimension des éléments de reconstruction (pixels) est d'environ 0,3 mm. Compte-tenu des erreurs de mesure des différents appareils, la précision de la mesure du taux de présence local est estimée à 8 %. La validation de ce tomographe n'est pas décrite.

D. Schmitz [Schmitz *et al.*, 1997] a mis au point un tomographe en éventail qui permet d'obtenir l'image d'une section d'essais de 250 mm de diamètre en 15 min à l'aide de 15 photomultiplicateurs et de 12 rotations. Compte-tenu du nombre de mesures, la résolution annoncée de 0,4 mm nous semble sur-estimée. Il utilise un tube de rayons X à 360 kV et 4 mA. S'intéressant aux réacteurs chimiques, il mesure des écoulements permanents air-eau sur une structure de billes en céramique, ce qui est loin de nos objectifs.

K. Hori [Hori *et al.*, 1997] a développé un tomographe en éventail avec 60 tubes à rayons X à 150 kV et 584 détecteurs à semi-conducteurs CdTe. Les tubes à rayons X n'ont pas des switchs mécaniques, mais électriques. Cela permet d'enchaîner les prises de vue angulaires plus rapidement et ainsi de faire une acquisition complète en 0,5 ms. Ce rythme de 2 000 images par seconde lui permet d'étudier des écoulements jusqu'à une vitesse de 5 m/s. Le diamètre de la section d'essais peut aller jusqu'à 300 mm. Cette machine est capable de visualiser des écoulements avec des temps caractéristiques très courts. Elle est validée sur la mesure d'un fantôme en Plexiglas. Ce fantôme est translaté verticalement au coeur de ce tomographe et des coupes de ce fantôme sont reconstruites. L'erreur relative de positionnement est de 3 % et l'erreur relative de mesure de l'aire de vide de 10 %. Mais Hori ne compare pas ses mesures de taux de vide avec celles fournies par un autre système. Ce dispositif a aussi l'inconvénient d'être très cher. Ce dispositif est très intéressant, mais en dehors du budget que nous nous sommes alloué.

Enfin, Grassler [Grassler et Wirth, 1999] utilise des acquisitions tomographiques en éventail pour faire des mesures de concentration solide locale moyennée dans le temps dans des écoulements de lits fluidisés dans des tubes de 15 cm. Son tomographe est équipé d'un tube de 60 keV et d'un détecteur linéaire de 1 024 éléments. Une acquisition complète prend 30 mi-

minutes. Compte-tenu de cette durée, cet appareil est limité à des régimes permanents. Il fait 128 rotations et obtient une image de 256 pixels de côté, ce qui donne une résolution spatiale de 0,8 mm. Le test du tomographe sur des fantômes donne des résultats avec une erreur relative de 5 % par rapport aux valeurs théoriques. Grassler estime que l'erreur sur la mesure de la concentration de solide est inférieure à 10 %. Mais aucune validation n'est présentée en écoulement de lits fluidisés. Ce dispositif permet de faire des mesures jusqu'à une concentration volumique moyenne en solide de 20 % (limitation due à la puissance du tube à rayons X). L'appareil développé par Grassler est très proche du tomographe que nous cherchons à réaliser.

Ces tomographes ont des caractéristiques différentes de celui que nous cherchons à construire et surtout dans la majorité, leurs mesures de taux de présence local n'ont pas été validées.

1.4 Méthodologie

Dans ce travail, nous **mettrons au point et validerons un dispositif de mesure du taux de présence local** d'un écoulement eau-air **permanent** par **tomographie à rayons X**.

L'atténuation d'un faisceau de rayons X traversant un écoulement diphasique dépend des épaisseurs cumulées de la paroi, l'eau et l'air, et de leur atténuation respective. Si cette mesure est multipliée suivant différentes positions et différents angles, un algorithme permet de reconstruire une carte de l'atténuation. De cette carte, connaissant l'atténuation de référence de l'eau et de l'air, il est facile d'obtenir une carte du taux de présence local.

Il existe plusieurs géométrie d'acquisition :

- la géométrie parallèle ;
- la géométrie en éventail (fan-beam) ;
- des géométries hélicoïdales ou plus compliquées utilisées exclusivement en trois dimensions.

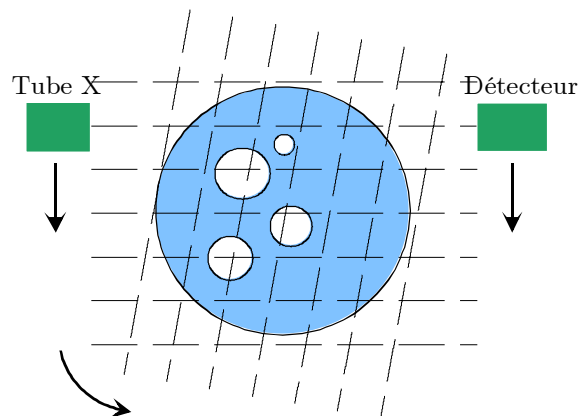


FIG. 1.3: Principe de l'échantillonnage parallèle

Pour la géométrie parallèle, les faisceaux de rayons X sont parallèles. L'ensemble source de rayons X et détecteur est déplacé suivant différentes positions linéiques, puis cet ensemble tourne d'un angle donné autour de la section d'essais avant de commencer à nouveau les positions linéiques (figure 1.3).

Pour une géométrie en éventail (fan-beam), le tube à rayons X a un angle d'émission large qui permet d'illuminer la totalité de la section à cartographier. Un détecteur linéaire permet d'acquérir en une seule illumination toutes les mesures correspondant à une position angulaire de la source. Ce dispositif présente l'avantage de diminuer la durée totale de mesure, car il n'y a plus qu'à réaliser les rotations autour de la section d'essais (figure 1.4).

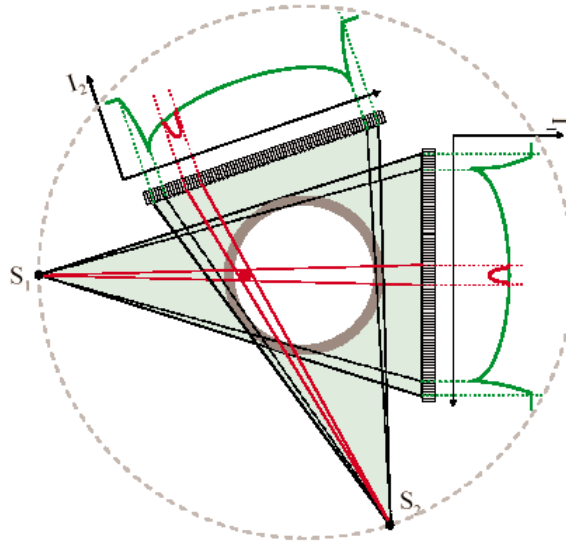


FIG. 1.4: Principe de l'échantillonnage en éventail

Les autres géométries sont spécifiques aux reconstructions en trois dimensions, donc ne rentrent pas dans le cadre de ce travail.

La géométrie parallèle a l'avantage d'être plus simple à mettre en œuvre. Aussi, au début de ce travail, nous disposions déjà d'un dispositif de déplacement et de détecteurs. C'est pourquoi dans un premier temps, nous ne ferons que des **échantillonnages parallèles**.

Pour réaliser ce travail, nous suivrons le plan suivant.

Dans le chapitre 2, nous présenterons une analyse bibliographique sur les algorithmes de reconstruction, les schémas d'échantillonnage et le problème de durcissement du faisceau.

Dans le chapitre 3, nous testerons et optimiserons les algorithmes de reconstruction retenus.

Nous décrirons le dispositif expérimental Mini-TOMIX et expliquerons les choix de ses paramètres de fonctionnement dans le chapitre 4.

Nous validerons, dans le chapitre 5, notre chaîne de mesure complète, dispositif de mesure et algorithme de reconstruction, en réalisant des mesures sur des fantômes et différents écoulements, et comparerons les résultats obtenus avec une autre méthode de mesure du taux de présence local, la sonde optique.

Enfin, dans le chapitre 6, nous testerons notre algorithme de reconstruction sur des mesures avec un échantillonnage en éventail.

Chapitre 2

Analyse bibliographique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons différents algorithmes de reconstruction en deux dimensions. Ils ont été développés pour des applications médicales et peuvent être appliqués à d'autres mesures que l'atténuation des rayons X.

Nous comparerons a priori leurs performances, c'est à dire leur facilité de programmation, leur stabilité, leur rapidité d'exécution, leur adaptabilité aux géométries d'acquisition et leur faible sensibilité au bruit. Cela nous permettra de choisir les algorithmes que nous développerons par la suite.

Il faut remarquer que le problème inverse en reconstruction est un problème mal posé. En effet, en raison du bruit, il n'existe **pas forcément de solution** et surtout **pas de solution unique**. Enfin si une solution unique peut être définie, son calcul est instable numériquement et nécessite des techniques de régularisation.

Ces algorithmes peuvent être classés en deux groupes :

- les algorithmes analytiques : une formule analytique reliant la solution à reconstruire avec les mesures est discrétisée ;
- les algorithmes algébriques : la relation entre grandeur recherchée et mesures est écrite sous la forme d'un système linéaire et la solution recherchée en est calculée en utilisant des méthodes "classiques" de résolution de système linéaire.

Par souci d'homogénéité, nous prendrons pour la suite du document les notations suivantes :

- solution ou grandeur à reconstruire (pour nous l'atténuation linéaire) : fonction f ou vecteur F ;
- ensemble des mesures (pour nous l'atténuation linéaire) : fonction $\mathcal{R}f$ ou vecteur P .

Nous appellerons :

- **translations** ou **projections**, les mesures réalisées à un angle donné ;
- **rotations**, les différentes positions angulaires de mesure.

Nous noterons :

- M , le nombre de projections ;
- N , le nombre de rotations sur $[0; \pi[$.

Enfin, il faut noter que beaucoup d'articles (comme [Lewitt, 1983], [Natterer, 1986, p 127] et [Kak et Slaney, 1987, p 186]) donnent **une règle d'acquisition permettant d'avoir de bonnes reconstructions** :

$$N \approx \frac{\pi}{2} M \quad (2.1)$$

Cette règle est basée sur des considérations sur les échantillonnages et les discrétisations. En pratique, N est choisi légèrement supérieur à $\pi/2 M$.

2.2 Algorithmes de reconstruction analytiques

La grandeur que nous cherchons à reconstruire, $f(x, y)$, est une fonction à deux variables x et y qui sont l'abscisse et l'ordonnée du point considéré.

Dans un repère (Oxy) , soit la droite de projection, c'est à dire la droite que parcourt le faisceau de rayons X entre la source et le détecteur, (D) qui passe à une distance s du point O et fait un angle θ avec l'axe (Ox) (voir la figure 2.1). Soit t , l'abscisse curviligne d'un point de la droite (D), dont l'origine est le point O' .

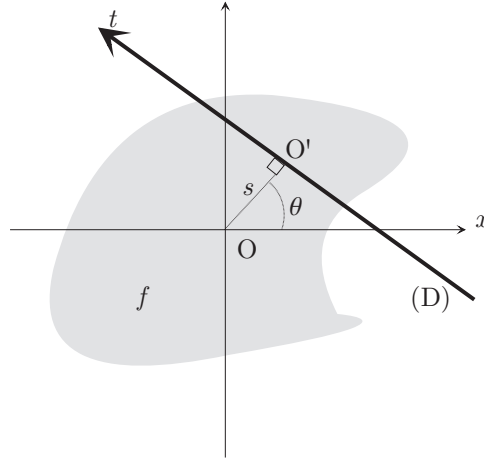


FIG. 2.1: Projection d'une grandeur

L'intégrale de la grandeur f selon la droite (D) est donnée par :

$$\mathcal{R}f(s, \theta) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt \quad (2.2)$$

Cette intégrale correspond aux mesures d'atténuation linéique. Nous allons voir comment, à partir de la connaissance de $\mathcal{R}f$, nous pouvons reconstruire f .

2.2.1 Méthode de convolution de Ramachandran et Lakshminarayanan

Cette méthode est exposée avec l'ensemble de sa démonstration dans [Ramachandran et Lakshminarayanan, 1971] et reprise dans [McDavid *et al.*, 1977].

Soit a , l'espacement entre deux projections successives.

\mathcal{F} et \mathcal{F}_2 sont les transformations de Fourier sur une et deux dimensions définies par les relations suivantes :

– pour une fonction h définie sur \mathbb{R} :

$$[\mathcal{F}h](u) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx \quad (2.3)$$

– pour une fonction h définie sur \mathbb{R}^2 en coordonnées cartésiennes :

$$[\mathcal{F}_2 h](u, v) \hat{=} \iint f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy \quad (2.4)$$

– pour une fonction h définie sur $\mathbb{R} \times [0; 2\pi[$ en coordonnées polaires :

$$[\mathcal{F} h](\sigma, \theta) \hat{=} \mathcal{F}[h_\theta(s)](\sigma) \quad (2.5)$$

où $h_\theta(s) = h(s, \theta)$.

L'image peut être calculée en passant par l'espace de Fourier :

$$f(s, \theta) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\mathcal{R}f)](s, \theta) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(\sigma, \varphi) e^{-2\pi i \sigma s \cos(\theta-\varphi)} |\sigma| d\sigma d\varphi \quad (2.6)$$

Il est posé :

$$h(r, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(x, \gamma) e^{-2\pi i x r} dx \quad (2.7)$$

Cela donne avec l'équation (2.6) pour l'image :

$$f(s, \theta) = \int_0^\pi h[s \cos(\theta - \varphi), \varphi] d\varphi \quad (2.8)$$

La fonction q est définie comme la transformée de Fourier inverse de $|x|$:

$$|x| = \mathcal{F}(q)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) e^{2\pi i x y} dy \quad (2.9)$$

Cela donne :

$$\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(q)\mathcal{F}(\mathcal{R}f) \quad (2.10)$$

Alors en utilisant le théorème de la convolution pour le produit des transformées de Fourier, h est le produit de convolution de $\mathcal{R}f$ et q :

$$h(s, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{R}f)(x, \theta) q(s - x) dx \quad (2.11)$$

Maintenant, cherchons à exprimer q :

$$q(x) = \mathcal{F}^{-1}(|y|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| e^{-2\pi i x y} dy \quad (2.12)$$

Or cette intégrale ne peut pas être calculée car $|y|$ diverge. Pour résoudre ce problème, les bornes sont remplacées par un nombre positif C :

$$q(x) = \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} |y| e^{-2\pi ixy} dy \quad (2.13)$$

Ramachandran et Lakshminarayanan font tendre C vers $+\infty$ et l'hypothèse que les intégrales donnent le même résultat est faite. Cela donne comme résultat pour les points des mesures :

$$q(ja) = \begin{cases} \frac{1}{4a^2} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \text{ est pair} \\ -\frac{1}{\pi^2 j^2 a^2} & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases} \quad (2.14)$$

Cela donne une méthode en deux étapes :

1. Calcul de la convolution : pour toutes les projections i et tous les angles θ_j :

$$h(i, \theta_j) = \frac{1}{a} \left(\frac{(\mathcal{R}f_d)_{i, \theta_j}}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{t \text{ impaire}} \frac{(\mathcal{R}f_d)_{i+t, \theta_j}}{t^2} \right) \quad (2.15)$$

2. Sommation sur toutes les raies passant par le point considéré :

$$f(s, \theta) = \sum_j h(s \cos(\theta - \theta_j), \theta_j) \Delta\theta_j \quad (2.16)$$

Selon la comparaison exposée dans [Ramachandran et Lakshminarayanan, 1971] sur quelques exemples, cette méthode est **30 fois plus rapide et 5 à 10 fois plus fidèle** à l'original que la méthode de Fourier (exposée dans la suite de ce chapitre). En effet, elle ne fait qu'une somme sur une dimension contre une somme sur deux dimensions pour l'algorithme de Fourier.

2.2.2 Rétroprojection filtrée

La relation de Radon utilisée par la rétroprojection filtrée est basée sur le théorème de projection liant $\mathcal{R}f$ et f [Herman, 1979] :

$$[\mathcal{F} \mathcal{R}f](\sigma, \varphi) = [\mathcal{F}_2 f](\sigma \cos \varphi, \sigma \sin \varphi) \quad (2.17)$$

Définissons les fonctions suivantes :

- opérateurs de convolution :
- pour deux fonctions g et h définies sur \mathbb{R} :

$$[g * h](x_0) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x_0 - x) dx \quad (2.18)$$

– pour deux fonctions g et h définies sur \mathbb{R}^2 (coordonnées cartésiennes) :

$$[g * h](x_0, y_0) \hat{=} \iint g(x, y) f(x_0 - x, y_0 - y) dx dy \quad (2.19)$$

– pour deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R} \times [0; 2\pi[$ (coordonnées polaires) :

$$[g \star h](s, \theta) \hat{=} (g_\theta * h_\theta)(s) \quad (2.20)$$

où $g_\theta(s) = g(s, \theta)$ et $h_\theta(s) = h(s, \theta)$.

– opérateur de dérivation d'une fonction h définie sur $\mathbb{R} \times [0; 2\pi[$ par rapport à s , θ étant fixé :

$$[\mathcal{D}h](s, \theta) \hat{=} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{h(s + \Delta s, \theta) - h(s, \theta)}{\Delta s} \quad (2.21)$$

– transformée de Hilbert d'une fonction h définie sur \mathbb{R} :

$$\mathcal{H}h(s) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\pi} \frac{h(u)}{s - u} du \quad (2.22)$$

– opérateur de rétroprojection d'une fonction h définie sur $\mathbb{R} \times [0; 2\pi[$ (coordonnées polaires) :

$$\mathcal{B}h(x, y) \hat{=} \int_0^\pi h(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (2.23)$$

L'opérateur de rétroprojection somme les contributions de h passant par le point considéré quels que soient leurs angles, c'est à dire qu'il somme les mesures de tous les faisceaux de rayons X passant par ce point quel que soit leur angle de tir.

Ces opérateurs permettent, à partir de la formule (2.17), de démontrer la formule d'inversion de Radon utilisée dans la rétroprojection filtrée (une démonstration de cette formule est présentée dans [Herman, 1979, p 16 à 19]) :

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{BHD}(\mathcal{R}f)(x, y) \quad (2.24)$$

$$f(x, y) = \mathcal{BF}^{-1}[|\sigma| \cdot \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(\sigma, \varphi)](x, y) \quad (2.25)$$

ou encore

$$f(x, y) = \mathcal{B}[\mathcal{F}^{-1}(|\sigma|) \star (\mathcal{R}f)(s, \theta)](x, y) \quad (2.26)$$

Les formules (2.25) et (2.26) sont préférées à la formule (2.24), car elles ne contiennent plus l'opérateur de dérivation très sensible aux bruits.

Notons N , le nombre de rotations.

Soit $\Delta\theta = \pi/N$, le pas de discrétisation angulaire.

Les formules (2.25) et (2.26) sont ensuite discrétisées :

$$f_d = \mathcal{B}_d^N F_d^g \mathcal{F}_d^{-1} [|\sigma| \cdot \mathcal{F}_d(p_d)] \quad (2.27)$$

ou

$$f_d = \mathcal{B}_d^N F_d^g [\mathcal{F}_d^{-1} (|\sigma|) \star_d (p_d)] \quad (2.28)$$

avec :

- opérateur discret de convolution de deux fonctions g et h discrètes sur \mathbb{R} :

$$[h \star_d g](k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h(j)g(k-j) \quad (2.29)$$

L'opérateur discret de convolution en coordonnées polaires $h \star_d g$ est définie de la même façon que précédemment (équation (2.20)).

- opérateur discret de rétroprojection d'une fonction h discrète définie sur \mathbb{R} :

$$\mathcal{B}_d^N h_j(x, y) = \Delta\theta \sum_{j=0}^{N-1} h_j(x \cos(j\Delta\theta) + y \sin(j\Delta\theta), j\Delta\theta) \quad (2.30)$$

- opérateur d'interpolation selon la fonction g :

$$[F_d^g h](x) \hat{=} \sum_i h(i) g\left(\frac{x}{a} - i\right) \quad (2.31)$$

où a est la distance entre deux projections.

Cet opérateur permet d'adapter la grille de sortie de l'opérateur discrétisé de transformée de Fourier avec les besoins à l'entrée de l'opérateur discrétisé de rétroprojection, c'est à dire une fonction continue.

Les formules (2.27) et (2.28) sont enfin programmées et utilisées pour reconstruire des données. Pour ce faire, il reste à choisir la fonction d'interpolation g et la fonction utilisée à la place de $|\sigma|$, qui permettra de filtrer les mesures.

Pour faire l'interpolation, g doit satisfaire les conditions suivantes :

- Si h est à valeur réelle, il faut que l'interpolation soit réelle, donc que g soit réelle ;
- g doit être bornée ;
- Si h est paire, g doit être paire ;
- La somme des valeurs discrètes doit être égale à l'intégrale de la fonction interpolée, c'est à dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F_d^g h](x) dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h(j) \quad (2.32)$$

Cela implique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1 \quad (2.33)$$

- L'interpolation doit donner à chaque point la valeur exacte, c'est à dire $\forall j \in \mathbb{Z}, [F_d^g h](jd) = h(j)$, ce qui impose que $g(0) = 1$ et $\forall j \in \mathbb{Z}, j \neq 0, g(j) = 0$.

Herman [Herman, 1979] rappelle que ces conditions peuvent se ramener à des interpolations classiques :

- à une interpolation par les proches voisins si g est une fonction porte ;
- à une interpolation linéaire si g est une fonction créneau ;
- à une interpolation de Whittaker-Shannon si $g(x) = \sin x/x$;
- à une interpolation de Lagrange :

$$h_{\text{interpolé}}(x_0 + ja) = \sum_{k \in \mathbb{N}} A_k^n(j) h(x_0 + ka) \quad (2.34)$$

avec :

$$A_k^n(j) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+k} \prod_{t=0}^{n-1} (j + \frac{n-1}{2} - t)}{(\frac{n-1}{2} + k)! (\frac{n-1}{2} - k)! (j - k)} & \text{si } n \text{ est impaire} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k} \prod_{t=1}^n (j + \frac{n}{2} - t)}{(\frac{n-2}{2} + k)! (\frac{n}{2} - k)! (j - k)} & \text{si } n \text{ est paire} \end{cases} \quad (2.35)$$

$|\sigma|$ est remplacée par une fonction discrétisée A qui filtrera "mieux" les données afin d'augmenter la qualité de la reconstruction. Ce filtre comprendra une fonction porte qui éliminera toutes les fréquences supérieures à $1/2d$. [Herman, 1979] présente les filtres suivants :

- $A(j) = \text{abs} \left(\frac{j}{Ma} \right) \Pi \left(\frac{j}{M} \right)$;
- $A(j) = \left| \frac{1}{\pi a} \sin \left(\pi \frac{j}{M} \right) \right| \Pi \left(\frac{j}{M} \right)$;

où M est le nombre de projections.

Dans ces filtres, la fonction "porte" a l'inconvénient de créer des oscillations dans l'image reconstruite. Elle est remplacée par d'autres fonctions qui ont des coupures moins brusques et donc tendent à diminuer les oscillations, mais ont l'inconvénient de lisser l'image. Les fonctions suivantes sont couramment utilisées :

- Filtre avec bande limitée :

$$\Pi \left(\frac{j}{CM} \right), 0 < C \leq 1 \quad (2.36)$$

où C est la proportion du spectre de fréquence incluse avant la fréquence de coupure (fixée par l'utilisateur) ;

- Filtre passe-bas avec bande limitée :

$$\frac{\sin \left(\pi \frac{j}{CM} \right)}{\left(\pi \frac{j}{CM} \right)} \Pi \left(\frac{j}{CM} \right) \quad (2.37)$$

et

$$\cos \left(\pi \frac{j}{CM} \right) \Pi \left(\frac{j}{CM} \right) \quad (2.38)$$

- Filtre de Hamming généralisé :

$$\left[\gamma + (1 - \gamma) \cos \left(2\pi \frac{j}{M} \right) \right] \Pi \left(\frac{j}{M} \right), 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2.39)$$

Herman compare les reconstructions obtenues par les différentes interpolations et les différents filtres sur une réponse impulsionnelle, sur des données bruitées et sur un fantôme de tête d'homme. Ses critères de choix sont la diminution du bruit, la réponse la plus conforme à l'original et la diminution des oscillations proches des parois. En conclusion, il recommande les filtres suivants [Herman, 1979, p 41 à 64] :

- interpolation linéaire et filtre passe-bas en sinc avec $C = 1$;
- interpolation linéaire et Filtre généralisé de Hamming avec $\gamma = 0,54$.

2.2.3 Rho-filtered Layergram Reconstruction

La rétroprojection filtrée commence par filtrer les mesures, puis les rétroprojette. Dans cette méthode, l'algorithme fait l'inverse : d'abord rétroprojection, puis filtrage des mesures par des transformées de Fourier en deux dimensions. Par une démonstration semblable à celle utilisée dans la partie 2.2.2, des formules semblables aux formules (2.25) et (2.27) sont démontrées [Herman, 1979, p 64 à 78] :

- Formule analytique :

$$f = \mathcal{F}_2^{-1} [\text{abs}_2 \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{B}(\mathcal{R}f)] \quad (2.40)$$

- Formule discrétisée :

$$f = \mathcal{F}_{2d}^{-1} [\text{abs}_2 \cdot \mathcal{F}_{2d} \mathcal{B}_d^N (F_d^g p_d)] \quad (2.41)$$

Herman [Herman, 1979] conclut que cet algorithme donne des reconstructions semblables à celles obtenues par la rétroprojection filtrée. Mais le "Rho-filtered Layergram Reconstruction" est plus sensible aux discontinuités des filtres et pose la question de trouver un bon filtre en deux dimensions. Son gros désavantage est qu'il nécessite **quatre fois plus de temps de calcul et d'espace de stockage** que la rétroprojection filtrée.

2.2.4 Algorithme de Fourier

Cet algorithme reconstruit l'image en passant par l'espace de Fourier (figure 2.2) [Lewitt, 1983; Natterer, 1985; Natterer, 1986] :

$$f = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\mathcal{R}f) \right] \quad (2.42)$$

Soit $M = 2q$, le nombre de projections et N , le nombre de rotations. Cet algorithme se programme généralement en trois étapes :

1. Calcul de la transformée de Fourier des mesures, angle par angle, dans le repère polaire (s, θ) des projections : pour un numéro de projections k allant de $-q$ à q et un numéro de rotations j allant de 1 à N :

$$\mathcal{F}_d(h_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{q} \sum_{l=-q}^{q-1} e^{-\frac{i\pi kl}{q}} \mathcal{R}f\left(\frac{l}{q}, \theta_j\right) \quad (2.43)$$

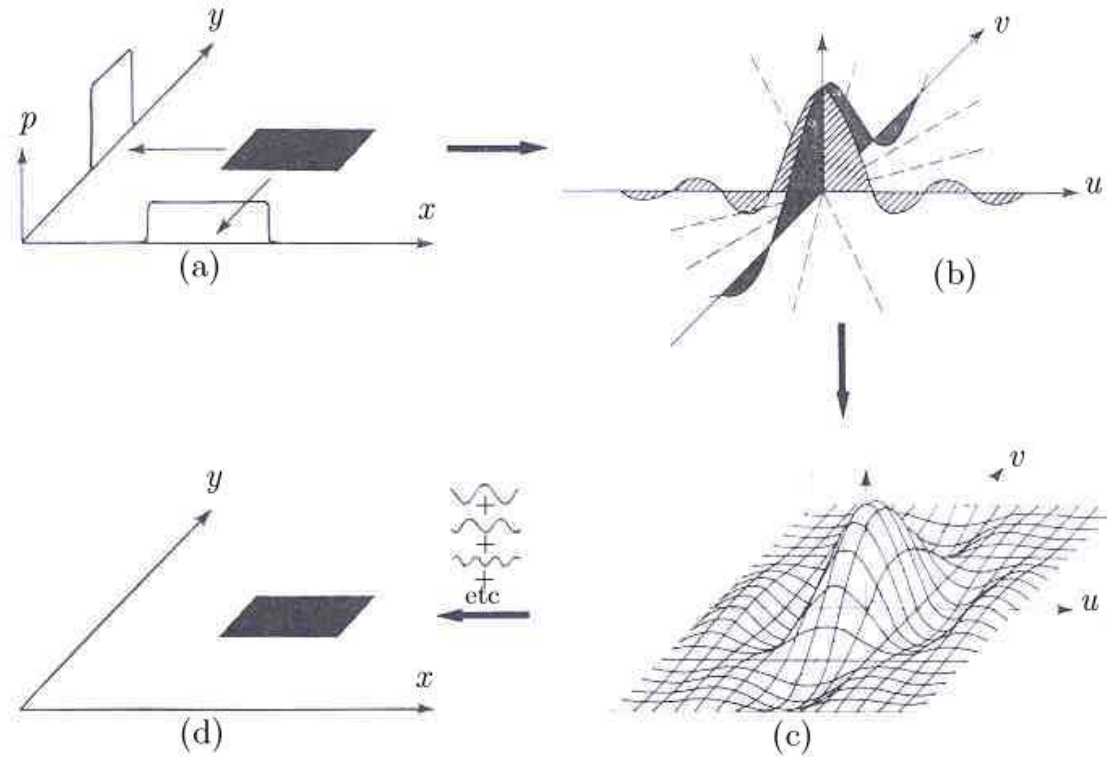


FIG. 2.2: Principe de l'algorithme de Fourier [Lewitt, 1983]

2. Position dans le repère cartésien de l'image f : pour tout point $k \in \mathbb{Z}^2$, $|k| < q$, de la grille cartésienne, le point polaire ξ_k de coordonnées $(\frac{l}{q}, \theta_j)$ proche de ce point cartésien est recherché (figure 2.3), et il est posé :

$$\mathcal{F}_d(f_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_d(h_{jl}) \quad (2.44)$$

$\mathcal{F}_d(f_k)$ est une approximation de $\mathcal{F}(f(k))$ par une interpolation du voisin le plus proche dans le repère polaire.

3. Calcul de la transformée inverse de Fourier des termes obtenus dans le repère cartésien : pour tout point $j \in \mathbb{Z}^2$, $|j| < q$, de la grille cartésienne :

$$f_j = \frac{\pi}{2} \sum_{|k| < q} e^{i\pi j \frac{k}{q}} \mathcal{F}_d(f_k) \quad (2.45)$$

Lewitt [Lewitt, 1983] propose, pour le passage de la grille polaire à la grille cartésienne, une autre solution que la recherche du proche voisin exposée ci-dessus (recherche du point qui minimise sa distance au point polaire). Il suggère de faire une double interpolation sur les quatre points polaires les plus proches du point cartésien où une approximation est voulue. En effet, c'est l'étape d'interpolation de la grille polaire vers la grille cartésienne qui cause des artefacts de reconstruction lorsqu'elle est mal faite.

F. Natterer a analysé ce phénomène et propose une variante de l'algorithme de Fourier dans [Natterer, 1985] et [Natterer, 1986] :

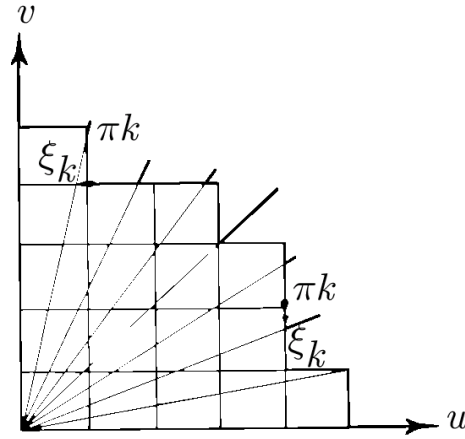


FIG. 2.3: Changement de repères dans l'algorithme de Fourier [Natterer, 1986]

1. Calcul de la transformée de Fourier des mesures, angle par angle, dans le repère polaire (s, θ) des projections : pour un numéro de projections k allant de $-q$ à q et un numéro de rotations j allant de 1 à N , il est posé :

$$\mathcal{F}_d(h_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{q} \sum_{l=-q}^{q-1} e^{-\frac{i\pi kl}{q}} \mathcal{R}f\left(\frac{l}{q}, \theta_j\right) \quad (2.46)$$

2. Position dans le repère cartésien de l'image f : pour tout point $k \in \mathbb{Z}^2$, $|k| < q$, de la grille cartésienne, la direction polaire θ_j proche de la direction $\frac{k}{|k|}$ (droite passant par l'origine et le point k) est recherchée, et il est posé :

$$\mathcal{F}_d(f_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\left| |k| - \frac{l}{2} \right| \leq \frac{l}{2}} \mathcal{F}_d(h_{jk}) \widehat{\gamma} \left(\pi \left(|k| - \frac{l}{2} \right) \right) \text{sinc} \left(2\pi \left(|k| - \frac{l}{2} \right) \right) \quad (2.47)$$

avec les fonctions suivantes :

- $\text{sinc}(x) = \sin x/x$.
- L , longueur fixant le nombre de points pris en compte pour le calcul de la série. La convergence très rapide de cette série permet de prendre une valeur de L petite sans entraîner une grande erreur dans l'estimation de $\mathcal{F}_d(f_k)$.
- $\widehat{\gamma}$ est la transformée de Fourier inverse de γ sur $[-1; 1]$ avec :

$$\gamma(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.48)$$

C choisi tel que $\widehat{\gamma}(0) = 1$

$\mathcal{F}_d(f_k)$ est une approximation de $\mathcal{F}(f(k))$ par une interpolation du voisin le plus proche en ce qui concerne les directions angulaires et en généralisant l'interpolation par sinc pour la coordonnée radiale.

3. Calcul de la transformée inverse de Fourier des termes obtenus dans le repère cartésien : pour tout point $j \in \mathbb{Z}^2$, $|j| < q$, de la grille cartésienne :

$$f_j = \frac{\pi}{2} \sum_{|k| < q} e^{i\pi j \frac{k}{q}} \mathcal{F}_d(f_k) \quad (2.49)$$

La reconstruction peut être fortement améliorée en filtrant l'approximation obtenue à l'étape 2. $\mathcal{F}_d(f_i)$ est multiplié par $W(|i|)$, où le filtre W est défini de la façon suivante :

$$W(x) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2q}\right) & \text{si } |x| \leq q \\ 0 & \text{si } |x| > q \end{cases} \quad (2.50)$$

Lewitt [Lewitt, 1983] indique que l'algorithme de Fourier est **peu utilisé** dans la tomographie médicale ou industrielle et que **sa programmation est plus difficile** que celle de la rétroprojection filtrée en raison de l'étape d'interpolation. D'après Natterer [Natterer, 1985], l'algorithme de Fourier donne **une image très distordue**, mais la variante de cet algorithme présentée ci-dessus permet d'obtenir **des images "semblables à celles obtenues par la rétroprojection filtrée"**, **trois fois plus vite**.

2.3 Algorithmes de reconstruction algébriques

Pour ces algorithmes, le problème de reconstruction est projeté dans une base.

La fonction à reconstruire f est discrétisée dans une base b_j :

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n^2} f_j b_j(x, y) \quad (2.51)$$

La base b_j peut être de différentes formes, par exemples :

- indicatrice du pixel j de l'image ;
- fonction linéaire par morceau qui a la valeur 1 au noeud j du maillage, 0 sinon ;
- fonction spine au noeud j du maillage.

Soit (D_i) , la droite que parcourt le faisceau de rayons X entre la source et le détecteur lors de la mesure i .

Comme pour l'équation (2.2), la mesure p_i correspondant à la droite D_i s'écrit :

$$p_i = \int_{(D_i)} f(s_i \cos \theta_i - t \sin \theta_i, s_i \sin \theta_i + t \cos \theta_i) dt \quad (2.52)$$

En introduisant la discrétisation de f (formule (2.51)) dans cette équation, p_j s'écrit :

$$p_i = \int_{(D_i)} \sum_{j=1}^{n^2} f_j b_j(s_i \cos \theta_i - t \sin \theta_i, s_i \sin \theta_i + t \cos \theta_i) dt \quad (2.53)$$

En permutant l'intégrale et l'opérateur de somme, cette équation devient :

$$p_i = \sum_{j=1}^{n^2} \left(f_j \int_{(D_i)} b_j(s_i \cos \theta_i - t \sin \theta_i, s_i \sin \theta_i + t \cos \theta_i) dt \right) \quad (2.54)$$

Soit R , la matrice définie par :

$$R_{ij} = \int_{(D_i)} b_j(s_i \cos \theta_i - t \sin \theta_i, s_i \sin \theta_i + t \cos \theta_i) dt \quad (2.55)$$

Soient les vecteurs colonnes P et F définis par :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{MN} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

et

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n^2} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

L'équation (2.54) s'écrit alors sous la forme d'un système linéaire :

$$RF = P \quad (2.58)$$

En général, la base b_i est choisie à support compact, comme pour les éléments finis, afin que beaucoup d'éléments R_{ij} soient nuls et que la matrice R soit creuse.

Chaque élément de cette matrice, R_{ij} , représente donc l'influence du pixel j dans le calcul de la projection i . Selon la base b_j choisie, ces éléments peuvent avoir différentes expressions, comme par exemples (voir la figure 2.4) :

- la valeur 1 si la projection i passe dans le pixel j , 0 sinon ;
- l'inverse de la distance d entre le centre du pixel j et la droite de projection i considérée comme un axe d'épaisseur nulle ;
- le rapport de l'aire d'intersection de la droite de projection i avec le pixel j sur la surface du pixel j ;
- si la droite de projection est supposée d'épaisseur nulle, c'est à dire un faisceau de rayon X très fin, le rapport de la longueur de la portion de la droite de projection i interceptant le pixel j sur l'indicatrice du pixel j .

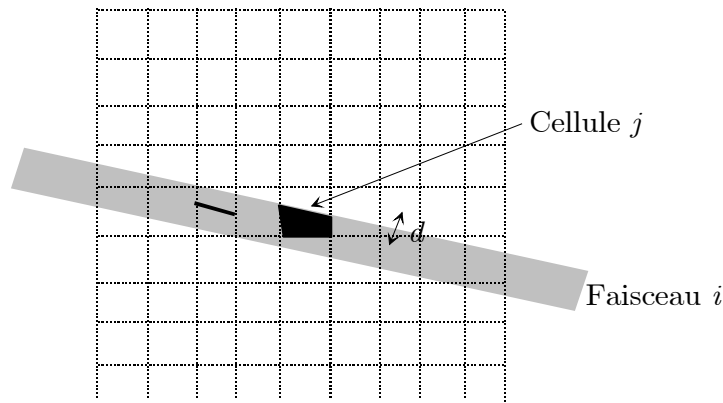


FIG. 2.4: Calcul des éléments R_{ij}

Le système linéaire $RF = P$ ne peut pas être résolu par une méthode exacte (comme la SVD) pour trois raisons :

- compte tenu de la dimension de la grille de l'image (plus de 100 pixels par côté) et du nombre de mesures (plus de 10 000), la matrice R est de très grande dimension (plus de 10 000 par 10 000), ce qui rend la résolution du système linéaire très difficile, voire impossible ;

- la solution de ce système n'existe pas forcément et si elle existe, elle n'est pas nécessairement unique ;
- en pratique les mesures étant bruitées, la probabilité d'avoir une solution unique est nulle.

C'est pourquoi ce système est résolu au sens des moindres carrés. L'algorithme de résolution ne donne pas nécessairement une solution exacte, mais la solution approchée de F qui minimise l'erreur quadratique :

$$\|P - RF\|^2 \quad (2.59)$$

Ce problème a toujours au moins une solution.

Dans la suite de cette section, nous exposerons différents algorithmes qui résolvent un système linéaire quelconque $AX = B$ au sens des moindres carrés après avoir défini certaines grandeurs mathématiques. Ces algorithmes sont utilisés pour résoudre le système linéaire tomographique en posant $A = R$, $X = F$ et $B = P$.

2.3.1 Quelques définitions mathématiques

Une matrice symétrique A est semi-définie positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, $X^t A X \geq 0$. Elle est définie positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, $X^t A X > 0$.

Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y est défini par :

$$\langle X, Y \rangle \hat{=} \sum_i X_i Y_i \quad (2.60)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs X et Y par rapport à une matrice A , symétrique, définie positive, est défini par :

$$\langle X, Y \rangle_A \hat{=} X^t A Y = Y^t A X \quad (2.61)$$

La norme d'un vecteur X est alors calculée de la façon suivante :

$$\|X\| \hat{=} \sqrt{\sum_i X_i^2} \quad (2.62)$$

La norme d'un vecteur X par rapport à une matrice A est donnée par la formule suivante :

$$\|X\|_A \hat{=} X^t A X \quad (2.63)$$

Soient A une matrice et X un vecteur. Le $k^{\text{ième}}$ espace de Krylov de A et X , $K_k(A, X)$, $k \in \mathbb{N}^*$, est l'espace engendré par la suite de vecteurs : $X, AX, A^2X, A^3X, \dots, A^{k-1}X$.

Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive A est :

$$\mathcal{K}(A) \hat{=} \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \quad (2.64)$$

où λ_1 est la plus grande valeur propre de A et λ_n la plus petite.

Une matrice est dite mal conditionnée quand son conditionnement est grand devant 1 (cela a pour effet de ralentir fortement la convergence des algorithmes).

Le rayon spectral de A , symétrique, définie positive est défini par :

$$\rho(A) \hat{=} \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \lambda_1 \quad (2.65)$$

Soit $AX = B$, un système à résoudre, avec A matrice symétrique définie positive. X est la solution exacte de ce problème. Pour tout vecteur Y , la fonction d'erreur est donnée par :

$$E(Y) \hat{=} \|Y - X\|_A^2 = (Y - X)^t A (Y - X) \quad (2.66)$$

2.3.2 Algorithmes pour A symétrique définie positive

Généralités

Ces algorithmes ne s'appliquent que dans le cas où A est symétrique, définie positive [Lascoux et Théodor, 1994; La, 1997]. Dans ce cas, il est montré que A est inversible et la solution X de $AX = B$ est le minimum de la fonction :

$$J(X) = \frac{1}{2} X^t A X - B^t X \quad (2.67)$$

A partir d'une image X_0 , est construite une suite d'images X_i qui converge vers la solution de notre système. A chaque itération i , l'image X_i est corrigée par un vecteur de descente D_i et par un pas α selon la relation suivante :

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i D_i \quad (2.68)$$

D_i est choisi de telle sorte à faire décroître le résidu :

$$\|B - A(X_i + \alpha_i D_i)\| < \|B - AX_i\| \quad (2.69)$$

Les itérations sont arrêtées par un critère d'arrêt, par exemple :

$$\frac{\|B - AX_i\|}{\|B - AX_0\|} < \tau \quad (2.70)$$

où τ est fixé par l'utilisateur.

Cela donne la relation suivante :

$$(X_{i+1} - X) = (I - \alpha_i A)(X_i - X) \quad (2.71)$$

L'équation (2.69) est vérifiée seulement si $\rho(I - \alpha_i A) < 1$, ce qui équivaut à $0 < \alpha_i < \frac{2}{\lambda_1}$, où λ_1 est la plus grande valeur propre de A . Dans ce cas, (2.69) entraîne la convergence de la méthode.

Notons λ_n , la plus petite valeur propre de A . Plus le terme $\rho(I - \alpha_i A)$ sera petit, plus la convergence sera rapide. Le choix du pas qui optimise la vitesse de convergence est donc celui qui minimise $\rho(I - \alpha_i A)$, soit :

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \quad (2.72)$$

Cela donne dans ce cas :

$$\rho(I - \alpha_{opt} A) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\mathcal{K}(A) - 1}{\mathcal{K}(A) + 1} \quad (2.73)$$

Plus le conditionnement $\mathcal{K}(A)$ de A est proche de 1, plus la convergence est rapide.

Méthode du Gradient Simple

Dans le cas du Gradient Simple [Golub et Meurant, 1983; La, 1997; Thierry, 1999], la direction de descente prise est la plus rapide localement, c'est à dire l'opposé du gradient de la fonction J , soit : $-\nabla J(X_i) = B - AX_i$.

Cet algorithme revient à suivre la procédure suivante [Brooks et Chiro, 1976; Nugroho et Wu, 1999].

A l'itération $i + 1$, l'image obtenue à l'itération i est projetée selon les mêmes directions que les mesures : $B_i = AX_i$. Ces valeurs sont comparées aux projections mesurées B et la différence entre les deux, soit $B - B_i = B - AX_i = D_i$, est rétroprojetée pour corriger l'image obtenue à i . Cela donne ainsi l'image de l'itération $i + 1$ (figure 2.5).

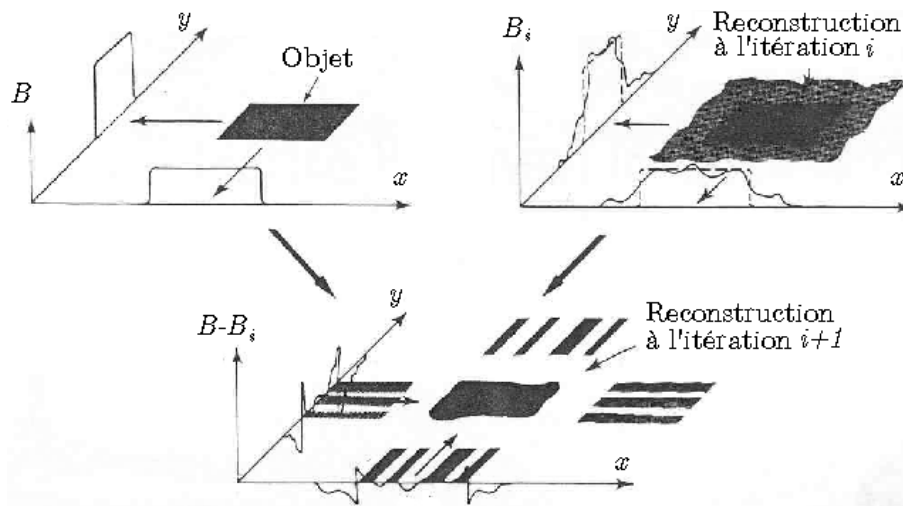


FIG. 2.5: Principe des méthodes itératives [Brooks et Chiro, 1976]

Gradient à pas constant

α est fixé par l'utilisateur.

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{array}{l}
 X_0 \text{ donnée} \\
 \text{Répéter} \\
 \left| \begin{array}{l}
 D_i = B - AX_i \\
 X_{i+1} = X_i + \alpha D_i
 \end{array} \right. \quad (2.74) \\
 \text{Jusqu'à convergence}
 \end{array}$$

Gradient à pas optimal

Afin d'améliorer la convergence, le pas optimal est choisi à chaque itération. α_i est dit optimal s'il est choisi de façon à minimiser le terme $J(X_i + \alpha_i D_i)$. Dans ce cas, le résidu est orthogonal à la direction de descente :

$$\langle B - AX_{i+1}, D_i \rangle = 0 \quad (2.75)$$

L'expression du pas optimal est alors :

$$\alpha_i = \frac{\|D_i\|^2}{\langle AD_i, D_i \rangle} \quad (2.76)$$

D'après (2.75) et étant donné que $D_{i+1} = B - AX_{i+1}$, deux directions de descente successives sont orthogonales :

$$\langle D_{i+1}, D_i \rangle = 0 \quad (2.77)$$

En dimension 2, les estimés successifs X_i convergent vers la solution exacte X en faisant des zigzags entre deux droites concourantes en X (voir la figure 2.6).

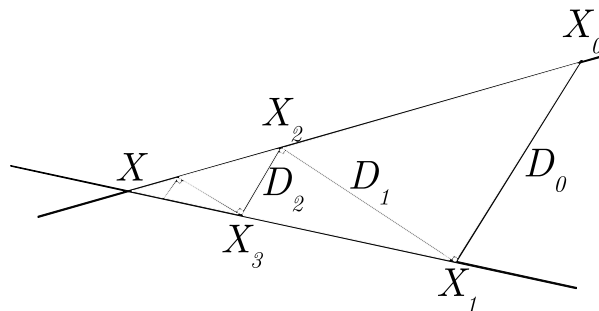


FIG. 2.6: Interprétation géométrique de l'algorithme de gradient à pas optimal [La, 1997]

La décroissance de la fonction d'erreur est donnée par la relation suivante :

$$E(X_i) \leq \left(\frac{\mathcal{K}(A) - 1}{\mathcal{K}(A) + 1} \right)^{2i} E(X_0) \quad (2.78)$$

Si nous voulons $\frac{E(X_i)}{E(X_0)} \leq \varepsilon$, il faut :

$$i \geq \frac{\mathcal{K}(A)}{4} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (2.79)$$

Le nombre d'itérations requis est proportionnel à $\mathcal{K}(A)$. Plus le conditionnement $\mathcal{K}(A)$ est petit, plus la convergence est rapide.

L'algorithme du gradient à pas optimal est le suivant :

$$\begin{array}{l} X_0 \text{ donnée} \\ \text{Répéter} \\ \left\{ \begin{array}{l} D_i = B - AX_i \\ \alpha_i = \frac{\|D_i\|^2}{\langle AD_i, D_i \rangle} \\ X_{i+1} = X_i + \alpha_i D_i \end{array} \right. \\ \text{jusqu'à convergence} \end{array} \quad (2.80)$$

Méthode du Gradient Conjugué

Par rapport aux méthodes de gradient simple, cette méthode permet d'accélérer la convergence [Golub et Meurant, 1983; Barrett *et al.*, 1993; Lascaux et Théodor, 1994; Riddell *et al.*, 1995; La, 1997; Thierry, 1999].

Cette méthode cherche ici à optimiser la direction de descente. D_i est maintenant une combinaison linéaire du résidu $B - AX_i$ et de la dernière direction de descente D_{i-1} :

$$D_i = (B - AX_i) + \beta_{i-1} D_{i-1} \quad (2.81)$$

Le coefficient β_{i-1} est choisi de sorte à minimiser l'erreur entre l'estimé X_{i+1} et la solution exacte. Cela entraîne que D_i et D_{i-1} doivent être conjuguées, c'est à dire que $D_i A D_{i-1} = 0$.

β_{i-1} est donnée par la formule de Fletcher-Reeves :

$$\beta_{i-1} = \frac{\|B - AX_i\|^2}{\|B - AX_{i-1}\|^2} \quad (2.82)$$

Le pas optimal est choisi (formule (2.76)).

L'espace engendré par les directions de descente D_0, D_1, \dots, D_i est l'espace de Krylov $K_i(A, X_0)$. De plus, il est montré que :

$$\begin{array}{l} J(X_i) \leq J(X), \forall X \in X_0 + \mathcal{K}_i(A, X_0) \\ E(X_i) \leq E(X), \forall X \in X_0 + \mathcal{K}_i(A, X_0) \end{array} \quad (2.83)$$

La minimisation est faite globalement sur l'espace engendré par la direction courante et les directions précédentes. C'est pourquoi le Gradient Conjugué est autant efficace.

Pour tout $i \geq 1$, la relation de conjugaison suivante est vérifiée :

$$\langle D_i, AD_k \rangle = 0, \forall 0 \leq k \leq i - 1 \quad (2.84)$$

A l'itération n , les directions de descente D_0, D_1, \dots, D_{n-1} sont n vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^n , donc forment une base de \mathbb{R}^n .

Pour tout $i \geq 1$, il est démontré que :

$$\langle B - AX_i, D_k \rangle = 0, \forall 0 \leq k \leq i - 1 \quad (2.85)$$

A l'itération n , $B - AX_n$ est orthogonal à une base de \mathbb{R}^n , donc est nul : X_n est la solution recherchée. Le Gradient Conjugué **converge en au plus n itérations**.

La vitesse de convergence de cet algorithme dépend de la racine carrée du conditionnement de A :

$$E(X_i) \leq 4 \left(\frac{\sqrt{\mathcal{K}(A)} - 1}{\sqrt{\mathcal{K}(A)} + 1} \right)^{2i} E(X_0) \quad (2.86)$$

Pour avoir $\frac{E(X_i)}{E(X_0)} \leq \varepsilon$, il faut :

$$i \geq \frac{\sqrt{\mathcal{K}(A)}}{2} \ln \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) + 1 \quad (2.87)$$

Le nombre d'itérations requis ne dépend plus de $\mathcal{K}(A)$, mais de sa racine carrée (voir les formules (2.79) et (2.87)) : le Gradient Conjugué a **une vitesse de convergence plus grande** que les méthodes de Gradient Simple.

Enfin, l'algorithme du Gradient Conjugué peut être décrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} X_0 \text{ donnée} \\ R_0 = B - AX_0 \\ D_0 = R_0 \\ \text{répéter} \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{\|D_i\|^2}{\langle AD_i, D_i \rangle} \\ X_{i+1} = X_i + \alpha_i D_i \\ R_{i+1} = R_i - \alpha_i AD_i \\ \beta_i = \frac{\|R_{i+1}\|^2}{\|R_i\|^2} \\ D_{i+1} = R_{i+1} + \beta_i D_i \end{array} \right. \\ \text{jusqu'à convergence} \end{array} \quad (2.88)$$

2.3.3 Problèmes symétrisés

Les algorithmes suivants résolvent le système : $AX = B$, avec une matrice quelconque A de $\mathbb{R}^{m \times n}$, où m est le nombre de mesures et n le nombre de pixels de l'image. Ils rendent le système symétrique avant de le résoudre.

Algorithme CGLS (Conjugate Gradient Least Squares)

Cet algorithme applique le Gradient Conjugué au système suivant [Lascaux et Théodor, 1994; La, 1997] :

$$A^t A X = A^t B \quad (2.89)$$

$A^t A$ est symétrique, semi-définie positive (définie positive si son rang est n) : le Gradient Conjugué peut être appliqué.

$A^t B$ appartient à l'image de $A^t A$: ce système admet toujours une solution.

L'algorithme devient :

$$\begin{array}{l} X_0 \text{ donnée} \\ D_0 = A^t B - A^t A X_0 \\ \text{Répéter} \\ \left| \begin{array}{l} \alpha_i = \frac{\|D_i\|^2}{\langle (A^t A) D_i, D_i \rangle} \\ X_{i+1} = X_i + \alpha_i D_i \\ D_{i+1} = (A^t B - A^t A X_{i+1}) + \beta_i D_i \\ \langle A^t B - A^t A X_{i+1}, D_i \rangle = 0 \\ \langle D_{i+1}, D_i \rangle_{A^t A} = 0 \end{array} \right. \\ \text{jusqu'à convergence} \end{array} \quad (2.90)$$

Résoudre le système (2.89) revient à minimiser le critère de moindres carrés :

$$J(X) = \|B - AX\|^2 \quad (2.91)$$

Si X_0 appartient à l'image de A^t (par exemple, $X_0 = 0$), l'algorithme converge vers la solution des moindres carrés de norme minimale.

Algorithme CGNE (Conjugate Gradient on the Normal equations to minimize the Error)

Cet algorithme applique le Gradient Conjugué au système suivant [La, 1997] :

$$A A^t Y = B \quad (2.92)$$

avec

$$X = A^t Y \quad (2.93)$$

Ce système n'a de solution que si B appartient à l'image de A . Dans le cas d'une solution, celle-ci minimise : $E(Y_i) = \|Y_i - Y\|_{AA^t}^2 = \|X_i - X\|^2$, où X symbolise la solution exacte et bien sûr : $X = A^t Y$. Cet algorithme converge vers la solution de norme minimale.

Dans le cas de CGLS et de CGNE, le conditionnement de $A^t A$ et de AA^t est le carré de celui de A : la vitesse de convergence n'est plus proportionnelle à $\sqrt{\mathcal{K}(A)}$ comme pour le Gradient Conjugué, mais à $\sqrt{\mathcal{K}(A^t A)} = \sqrt{\mathcal{K}(AA^t)} = \mathcal{K}(A)$. La **vitesse de convergence** est donc **dégradée** par rapport au Gradient Conjugué.

Ces algorithmes nécessitent à chaque itération deux produits matrice-vecteur en plus par rapport au Gradient Conjugué. **La durée du calcul** en sera donc **augmentée**.

Algorithme LSQR (Least Squares QR)

Comme CGLS, cet algorithme minimise le critère des moindres carrés $\|B - AX\|^2$. Il n'est applicable que si $m \leq n$ et si le rang de A est n . Il est basé sur une bidiagonalisation de A [Paige et Saunders, 1982; La, 1997].

Pour cela, la procédure itérative de bidiagonalisation de Golub et Kahan est appliquée :

$$\begin{cases} \beta_1 u_1 = B, \alpha_1 v_1 = A^t u_1 \\ \beta_{i+1} u_{i+1} = Av_i - \alpha_i u_i \\ \alpha_{i+1} v_{i+1} = A^t u_{i+1} - \beta_{i+1} u_i \end{cases} \quad (2.94)$$

Les scalaires positifs α_i et β_i sont choisis tels que $\|u_i\| = \|v_i\| = 1$.

Après i étapes, A est décomposée :

– en deux matrices orthogonales :

$$- U_{i+1} = (u_1, u_2, \dots, u_{i+1}),$$

$$- \text{et } V_i = (v_1, v_2, \dots, v_i);$$

– et une matrice bidiagonale de taille $(i+1) \times i$: $B_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_i & \alpha_i \\ & & & & \beta_{i+1} \end{pmatrix}$

telles que :

$$AV_i = U_{i+1} B_i \quad (2.95)$$

$\|B - AX\|^2$ est ensuite minimisé dans l'espace de Krylov $K_i(A^t A, A^t X_0)$. Il est démontré que $K_i(A^t A, A^t X_0)$ est l'espace engendré par les vecteurs v_i et que l'estimé X_i peut s'écrire :

$$X_i = V_i Y_i \quad (2.96)$$

Un vecteur T est défini par la relation suivante :

$$T_{i+1} = \beta_1 e_1 - B_i Y_i \quad (2.97)$$

avec le vecteur colonne e_1 :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Dans ce cas, le résidu est alors :

$$B - AX_i = U_{i+1}T_{i+1} \quad (2.99)$$

La norme du résidu est donc inférieure au produit des normes de U_{i+1} et T_{i+1} :

$$\|B - AX_i\| \leq \|U_{i+1}\| \cdot \|T_{i+1}\| \quad (2.100)$$

L'objectif est de minimiser la norme du résidu. U_{i+1} est une matrice bornée et orthogonale. Donc cela revient à minimiser la norme de T_{i+1} , c'est à dire à résoudre le problème de moindres carrés suivant :

$$\min_Y \|B_i Y - \beta_1 e_1\| \quad (2.101)$$

Ce sous-problème est résolu par une décomposition QR de la matrice B_i :

$$Q_i B_i = \begin{pmatrix} R_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

R_i est une matrice bidiagonale supérieure de taille $i \times i$. Il faut remarquer que Q_i est le produits de rotations planes successives $Q_{i,i+1}$ construites pour éliminer les termes $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_i$ de B_i :

$$Q_i = Q_{i,i+1} Q_{i-1,i} Q_{i-2,i-1} \dots Q_{2,3} Q_{1,2} \quad (2.103)$$

Les matrices Q_i sont déterminées par une relation de récurrence sur la dernière rotation, ce qui évite de faire la factorisation QR à chaque itération et permet de calculer l'estimé X_i à partir de X_{i-1} .

Les variables suivantes sont définies par :

$$Q_i [B_i \ \beta_1 e_1] = \begin{bmatrix} R_i & G_i \\ 0 & \bar{\phi}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \theta_2 & & & \phi_1 \\ & \rho_2 & \theta_3 & 0 & \phi_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \rho_{i-1} & \theta_i & \phi_{i-1} \\ 0 & & & & \rho_i & \phi_i \\ & \dots & & & 0 & \bar{\phi}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} R_i Y_i = G_i \\ T_{i+1} = Q_i^t \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\phi}_{i+1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.105)$$

Cela donne l'expression de l'estimé, en posant $\Delta_i = V_i R_i^{-1}$:

$$X_i = (V_i R_i^{-1}) G_i = \Delta_i G_i \quad (2.106)$$

La matrice $\Delta_i = [D_1 \ D_2 \ \cdots \ D_i]$ peut être trouvée en résolvant le système suivant :

$$R_i^t \Delta_i^t = V_i^t \quad (2.107)$$

Cela donne la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} D_0 = 0 \\ X_0 = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} D_i = \frac{1}{\rho_i} (v_i - \theta_i D_{i-1}) \\ X_i = X_{i-1} + \phi_i D_i \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.108)$$

La factorisation QR est déterminée par la dernière rotation de Q_i , c'est à dire celle qui agit sur les colonnes i et $i + 1$ pour éliminer β_{i+1} . Cela donne la relation de récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix} c_i & s_i \\ s_i & -c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho}_i & 0 & \bar{\phi}_i \\ \beta_{i+1} & \alpha_{i+1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i & \phi_{i+1} & \phi_i \\ 0 & \bar{\rho}_{i+1} & \bar{\phi}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

LSQR nécessite à chaque itération, deux produits matriciels : Av_i et $A^t u_i$. LSQR est **numériquement plus robuste** que CGLS, surtout si le nombre d'itérations est grand ou si A est mal conditionnée. Il **nécessite de stocker un vecteur en plus** et de faire **plus d'opérations par itération**. Mais si A est mal conditionnée, cet algorithme reste **plus rapide et plus précis** que CGLS (deux fois moins d'itérations). Si A est bien conditionnée, il n'y a pas de différence significative entre ces deux algorithmes. LSQR ne préserve pas le caractère creux de la matrice A .

L'algorithme est le suivant :

Initialisation

$$\beta_1 u_1 = B$$

$$\alpha_1 v_1 = A^t u_1$$

$$w_1 = v_1$$

$$X_0 = 0$$

$$\bar{\phi}_1 = \beta_1$$

$$\bar{\rho}_1 = \alpha_1$$

Répéter

Bidiagonalisation

$$\beta_{i+1} u_{i+1} = A v_i - \alpha_i u_i$$

$$\alpha_{i+1} v_{i+1} = A^t u_{i+1} - \beta_{i+1} v_i$$

Application de la dernière rotation

$$\rho_i = \sqrt{\bar{\rho}_i^2 + \beta_{i+1}^2}$$

$$c_i = \frac{\bar{\rho}_i}{\rho_i}$$

$$s_i = \frac{\beta_{i+1}}{\rho_i}$$

$$\theta_{i+1} = s_i \alpha_{i+1}$$

$$\bar{\rho}_{i+1} = -c_i \alpha_{i+1}$$

$$\phi_i = c_i \bar{\phi}_i$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = s_i \bar{\phi}_i$$

Mise à jour

$$X_i = X_{i-1} + \frac{\phi_i}{\rho_i} w_i$$

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \frac{\theta_{i+1}}{\rho_i} w_i$$

jusqu'à convergence

(2.110)

Algorithme de Chen : RRLS

Cet algorithme se base sur une bidiagonalisation de Golub et Kahan de A et sur la méthode de diminution du résidu d'Householder [Chen, 1975; Paige et Saunders, 1982].

Comme pour LSQR, la bidiagonalisation décompose A :

– en deux matrices orthogonales :

$$- P_i = (p_1, p_2, \dots, p_i),$$

$$- \text{et } V_i = (v_1, v_2, \dots, v_i);$$

– et une matrice bidiagonale de taille $i \times i$: $B_i = \begin{pmatrix} \rho_1 & \theta_2 & & & \\ 0 & \rho_2 & \theta_3 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \rho_{i-1} & \theta_i \\ & & & 0 & \rho_i \end{pmatrix}$

telles que :

$$AV_i = P_i B_i \quad (2.111)$$

en utilisant les deux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1 v_1 = A^t B, \rho_1 p_1 = Av_1 \\ \theta_{i+1} v_{i+1} = A^t p_i - \rho_i v_i \\ \rho_{i+1} p_{i+1} = Av_{i+1} - \theta_{i+1} p_i \end{cases} \quad (2.112)$$

La méthode de Householder est ensuite utilisée :

$$X_i = X_{i-1} + \lambda_i w_i \quad (2.113)$$

w_i est choisi comme une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_i . Si $W_i = (w_1, w_2, \dots, w_i)$, nous obtenons la relation suivante :

$$W_i B_i = V_i \quad (2.114)$$

Cela donne la relation de récurrence suivante pour obtenir w_i :

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \frac{\theta_{i+1}}{\rho_i} w_i \quad (2.115)$$

Dans ce cas, λ_i est obtenu par :

$$\lambda_i = p_i^t R_i \quad (2.116)$$

L'algorithme du RRLS est alors le suivant :

Initialisation

$$\theta_1 v_1 = A^t B \text{ et } \|v_1\| = 1$$

$$w_1 = v_1$$

$$X_0 = 0$$

$$R_0 = B$$

Répéter

$$\left| \begin{array}{l} \rho_i p_i = Aw_i \text{ et } \|p_i\| = 1 \\ \lambda_i = p_i^t R_i \\ R_{i+1} = R_i - \lambda_i p_i \\ \theta_{i+1} v_{i+1} = A^t p_i - \rho_i v_i \text{ et } \|v_i\| = 1 \\ X_i = X_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\rho_i} w_i \\ w_{i+1} = v_{i+1} - \frac{\theta_{i+1}}{\rho_i} w_i \end{array} \right. \quad (2.117)$$

jusqu'à convergence

Pour des problèmes mal conditionnés, comme LSQR, RRLS obtient de **meilleurs résultats en moins d'itérations** que CGLS. Mais il nécessite de **stocker plus de vecteurs** et de faire **plus d'opérations par itération** que ces algorithmes. Pour des matrices très grandes ou pour certaines matrices (sans pouvoir définir de règles précises), il semble donner des résultats moins précis. Chen [Chen, 1975] met en garde contre une stagnation de la norme du résidu pour certains systèmes mal conditionnés.

2.3.4 Algorithmes non symétrisants

Dans cette section, nous traitons des algorithmes qui résolvent directement le système $AX = B$ sans passer par une symétrisation de la matrice A . Ils ont une convergence plus rapide que les algorithmes de la section précédente.

Algorithme de Riddell

Riddell [Riddell *et al.*, 1995; La, 1997] a développé un algorithme qui résout le système $AX = B$, avec A **inversible**, mais pas nécessairement symétrique.

L'idée de cet algorithme est de construire une suite de résidus $B - AX_i$ orthogonaux à l'espace engendré par les directions de descente D_k , $k = 0, 1, 2, \dots, i - 1$. A la $n^{\text{ième}}$ itération, les n directions de descente sont par construction linéairement indépendantes et forment une base. Le résidu $B - AX_n$ est orthogonal à une base, donc est nul : X_n est la solution recherchée. La convergence a lieu en **au plus n itérations**.

La mise à jour de l'estimé X_{i+1} est toujours donnée par :

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i D_i \quad (2.118)$$

où α_i est choisi de telle façon que $B - AX_{i+1}$ soit perpendiculaire à D_i .

La nouvelle direction de descente D_{i+1} est construite à partir du résidu en $i + 1$ et des directions de descente précédentes :

$$D_{i+1} = -(B - AX_{i+1}) - \sum_{k=0}^i \beta_{k,i+1} D_k \quad (2.119)$$

Les $(i + 1)$ coefficients $\beta_{k,i+1}$ sont choisis tels que :

$$\langle AD_{i+1}, D_k \rangle = 0, 0 \leq k \leq i \quad (2.120)$$

Cela donne un système linéaire à résoudre. Son expression est la suivante :

$$\begin{cases} \beta_{0,i+1} = -\frac{\langle AR_{i+1}, D_0 \rangle}{\langle AD_0, D_0 \rangle} \\ \beta_{k,i+1} = \frac{-\langle AR_{i+1}, D_k \rangle - \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{l,i+1} \langle AD_l, D_k \rangle}{\langle AD_k, D_k \rangle}, k = 1, 2, \dots, i \end{cases} \quad (2.121)$$

Il est montré que la suite de résidus $B - AX_i$ est construite de façon à ce que les directions de descente D_i soient linéairement indépendantes, et que $\langle D_{i+1}, D_k \rangle = 0, 0 \leq k \leq i$.

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{array}{l}
X_0 \text{ donnée} \\
R_0 = B - AX_0 \\
D_0 = -R_0 \\
\text{Répéter} \\
\left| \begin{array}{l}
\alpha_i = \frac{\langle R_i, D_i \rangle}{\langle AD_i, D_i \rangle} \\
X_{i+1} = X_i + \alpha_i D_i \\
R_{i+1} = R_i - \alpha_i AD_i \\
\beta_{0,i+1} = -\frac{\langle AR_{i+1}, D_0 \rangle}{\langle AD_0, D_0 \rangle} \\
\beta_{k,i+1} = \frac{-\langle AR_{i+1}, D_k \rangle - \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{l,i+1} \langle AD_l, D_k \rangle}{\langle AD_k, D_k \rangle}, k = 1, 2, \dots, i \\
D_{i+1} = -R_{i+1} - \sum_{k=0}^i \beta_{k,i+1} D_k
\end{array} \right. \quad (2.122) \\
\text{jusqu'à convergence}
\end{array}$$

Comme pour le Gradient Conjugué, un seul produit matrice-vecteur AR_{i+1} est à réaliser à chaque itération. Les produits AD_k pour $l = 0, 1, \dots, i$ sont gardés en mémoire.

Cet algorithme a le **même temps de calcul et une convergence aussi rapide** que le Gradient Conjugué, mais a **un plus grand besoin d'espace mémoire** (il faut stocker toutes les directions de descente et les vecteurs AD_i).

Algorithme GMRES (Generalized Minimum RESidual)

Cet algorithme résout le système $AX = B$, où A est **inversible**, mais non nécessairement symétrique [Saad et Schultz, 1986; Barrett *et al.*, 1993; La, 1997].

La **convergence** est toujours **en au plus n itérations**. A chaque itération, l'estimé X_i est solution du problème suivant :

$$\min_{X \in X_0 + K_i(A, X_0)} \|B - AX\|^2 \quad (2.123)$$

L'estimé est recherché dans l'espace de Krylov et donne un résidu de norme minimale.

La base des résidus est construite par une procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt modifiée, qui est appelée procédé d'Arnoldi quand elle est appliquée à la création d'une base pour $K_i(A, X_0)$.

Soit V_i , la matrice formée par les i vecteurs v_i de la base de $K_i(A, X_0)$. Cela donne la relation suivante :

$$X_i = X_0 + V_i Y_i \quad (2.124)$$

où le vecteur Y_i est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{Y \in \mathbb{R}^i} \|R_0 - AV_i Y\|^2 \quad (2.125)$$

où $R_0 = B - AX_0$.

Ce sous-problème de minimisation est résolu en utilisant la procédure d'orthogonalisation. Le procédé d'Arnoldi génère des matrices orthogonales telles que $AV_i = V_{i+1}H_i$, où H_i est une matrice de Hessenberg supérieure de taille $(i+1) \times i$ dont les éléments valent : $(H_i)_{kj} = (Av_k)^t v_j$ si $k < j + 2$, 0 sinon.

La formule (2.125) devient alors :

$$\min_{Y \in \mathbb{R}^i} \|V_{i+1}[(\|B - AX_0\| e_1) - H_i Y]\|^2 \quad (2.126)$$

où e_1 est la première colonne de la matrice Identité de dimension $(i+1) \times (i+1)$.

Une mise en œuvre performante de cette nouvelle minimisation repose sur une factorisation QR incrémentable de H_i . Dès lors, Y_i est obtenu par la résolution d'un système linéaire triangulaire supérieur. X_i n'est calculée que quand la norme du résidu est suffisamment petite pour considérer que l'algorithme a convergé. Cette norme est calculée sans connaître X_i par la relation suivante :

$$\|B - AX_i\| = (H_i)_{i+1,1} |e_i^t Y_i| \quad (2.127)$$

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Initialisation} \\ X_0 \text{ donnée} \\ R_0 = B - AX_0 \\ v_1 = \frac{R_0}{\|R_0\|} \\ \text{Répéter (itération } i) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } j = 1, 2, \dots, i, h_{j,i} = \langle Av_i, v_j \rangle \\ \hat{v}_{i+1} = Av_i - \sum_{j=1}^i h_{j,i} v_j \\ h_{i+1,i} = \|\hat{v}_{i+1}\| \\ v_{i+1} = \frac{\hat{v}_{i+1}}{h_{i+1,i}} \\ Y_i = \min_{Y \in \mathbb{R}^i} \|V_{i+1}[(\|B - AX_0\| e_1) - H_i Y]\|^2 \end{array} \right. \\ \text{Jusqu'à convergence} \\ \text{Calcul de l'estimé} \\ X_i = X_0 + V_i Y_i \end{array} \quad (2.128)$$

La vitesse de convergence de GMRES est déterminée par l'espace de Krylov $K_i(A, X_0)$ qui est le même espace que dans le cas du Gradient Conjugué. GMRES converge donc **plus**

rapidement que les algorithmes symétrisants, comme le CGLS. Mais GMRES requiert le **stockage de la base** de cet espace de Krylov, c'est à dire des vecteurs v_i . La **mémoire nécessaire** est donc **très importante**.

Un remède est de réinitialiser l'algorithme après un nombre fixé d'itérations en repartant avec le dernier estimé calculé. Mais si le nombre choisi est trop petit, la convergence est ralentie, voire n'est plus assurée. Si ce nombre est trop grand, les besoins en calcul et en stockage sont grands! Il n'y a pas de règle pour le choix du nombre d'itérations : il faut faire des **essais successifs** [Barrett *et al.*, 1993]!

Algorithme Bi-CG (Bi-Conjugate Gradient)

Dans le Gradient Conjugué, une suite de résidus orthogonaux est construite grâce à des relations de récurrence courtes. GMRES utilise des relations de récurrence longues, mais a un grand besoin de stockage. Ici, Bi-CG remplace cette suite de résidus par deux suites mutuellement orthogonales [Barrett *et al.*, 1993; La, 1997].

Deux suites de résidus R_i et \tilde{R}_i , et deux suites de directions de descente D_i et \tilde{D}_i sont construites telles que $\langle \tilde{R}_i, R_j \rangle = \langle \tilde{D}_i, A D_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

Cela donne alors les quatre relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} R_{i+1} = R_i - \alpha_i A D_i \\ \tilde{R}_{i+1} = \tilde{R}_i - \alpha_i A^t \tilde{D}_i \end{cases} \quad (2.129)$$

$$\begin{cases} D_i = R_{i-1} + \beta_{i-1} D_{i-1} \\ \tilde{D}_i = \tilde{R}_{i-1} + \beta_{i-1} \tilde{D}_{i-1} \end{cases} \quad (2.130)$$

Les coefficients α_i et β_i sont calculés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\langle \tilde{R}_{i-1}, R_{i-1} \rangle}{\langle \tilde{D}_i, A D_i \rangle} \\ \beta_i &= \frac{\langle \tilde{R}_i, R_i \rangle}{\langle \tilde{R}_{i-1}, R_{i-1} \rangle} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Le nouvel estimé est toujours calculé de la même manière que pour le Gradient Conjugué, c'est à dire par la relation suivante :

$$X_i = X_{i-1} + \alpha_i D_i \quad (2.132)$$

Si A est symétrique, Bi-CG génère les mêmes itérés que le Gradient Conjugué, mais le temps par itération est double car deux vecteurs de descente sont calculés!

Si A n'est pas symétrique, la convergence peut être **instable** et l'algorithme peut produire des **résultats inexacts**. Il est **moins rapide** que GMRES car il exige le calcul de deux produits matrice-vecteur (avec A et avec A^t). Mais il ne nécessite pas autant de stockage que GMRES.

Algorithme du Résidu Minimal

Le Résidu Minimal résout ici le système $AX = B$, où A est une matrice carrée, n'est pas forcément inversible, ni symétrique, mais où la partie symétrique de A , c'est à dire $\frac{1}{2}(A + A^t)$,

est définie positive [Axelsson, 1980; Lascaux et Théodor, 1994; La, 1997]. V. La [La, 1997] considère qu'étant donné les résultats expérimentaux, cette condition est vérifiée. Cet algorithme peut être appliqué à un système $A^tAX = A^tB$ où A n'est pas forcément carrée.

Si A est inversible, la solution est unique. Sinon l'algorithme converge vers la solution minimisant $\|B - AX\|$. Le Résidu Minimal a la **même vitesse de convergence** que le Gradient Conjugué.

A l'itération i , le vecteur X_i et les s_i dernières directions de descentes D_{i-j} , $0 \leq j \leq s_i - 1$, avec bien sûr $s_i \leq s_{i-1} + 1$, sont utilisés. Ces s_i dernières directions de descente sont construites de façon que les vecteurs AD_{i-j} pour $0 \leq j \leq s_i - 1$ soient linéairement indépendants.

Pour le Gradient Conjugué, le nouvel estimé est déterminé à partir de la dernière direction de descente. Dans le Résidu Minimal, il est calculé à partir des s_i dernières directions de descente. Le nouvel estimé est donné par :

$$X_{i+1} = X_i + \sum_{j=0}^{s_i-1} \alpha_{i-j}^i D_{i-j} \quad (2.133)$$

Les pas de descente α_{i-j}^i sont choisis de façon à minimiser $\|B - AX_{i+1}\|^2$. Cela conduit à la condition suivante :

$$\langle B - AX_{i+1}, AD_{i-j} \rangle = 0, 0 \leq j \leq s_i - 1 \quad (2.134)$$

Les coefficients α_{i-j}^i sont alors solution du système suivant à s_i inconnues et à s_i équations :

$$\Lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i^i \\ \vdots \\ \alpha_{i-j}^i \\ \vdots \\ \alpha_{i-s_i+1}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle B - AX_i, AD_i \rangle \\ \vdots \\ -\langle B - AX_i, AD_{i-j} \rangle \\ \vdots \\ -\langle B - AX_i, AD_{i-s_i+1} \rangle \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

où la matrice Λ_i est la suivante :

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \langle AD_i, AD_i \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle AD_{i-s_i+1}, AD_i \rangle \\ \cdots & \cdots & \langle AD_{i-j}, AD_{i-j-1} \rangle & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \langle AD_{i-j}, AD_{i-j} \rangle & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \langle AD_{i-j}, AD_{i-j+1} \rangle & \cdots & \cdots \\ \langle AD_i, AD_{i-s_i+1} \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle AD_{i-s_i+1}, AD_{i-s_i+1} \rangle \end{pmatrix} \quad (2.136)$$

Les vecteurs AD_{i-j} étant linéairement indépendants, la matrice Λ_i est définie positive : le système (2.135) a une solution unique.

De la relation (2.133) découle la relation suivante sur les résidus :

$$R_{i+1} = R_i - \sum_{j=0}^{s_i-1} \alpha_{i-j}^i AD_{i-j} \quad (2.137)$$

La nouvelle direction de descente est déterminée dans le plan défini par le nouveau résidu R_{i+1} et la dernière direction de descente D_i :

$$D_{i+1} = R_{i+1} + \beta_i D_i \quad (2.138)$$

Le coefficient β_i est choisi de telle sorte que :

$$\langle AD_{i+1}, AD_i \rangle = 0 \quad (2.139)$$

L'expression de β_i est alors :

$$\beta_i = -\frac{\langle AR_{i+1}, AD_i \rangle}{\|AD_i\|^2} \quad (2.140)$$

Les vecteurs AD_{i+1} et AD_i ne sont pas linéairement indépendants si $D_{i+1} \in \text{Ker}(A)$ (vecteurs X tels que $AX = 0$). Si A est symétrique, ce problème n'intervient que quand X_{i+1} est solution du système. Si A n'est pas symétrique mais a sa partie symétrique définie positive, ce problème n'intervient que si R_{i+1} et D_i sont colinéaires. Dans ce cas, l'algorithme est réinitialisé avec le dernier estimé trouvé.

Il est montré que l'algorithme fait décroître la norme du résidu d'une itération à l'autre :

$$\|B - AX_{i+1}\|^2 < \|B - AX_i\|^2 \quad (2.141)$$

R_n est par construction orthogonal, selon la matrice A , aux n directions de descente D_i . Ces n directions de descente sont linéairement indépendantes selon la matrice A , donc forment une base de \mathbb{R}^n . R_n est donc nul : X_n est la solution du système. Cet algorithme converge comme le Gradient Conjugué, en **au plus n itérations**.

Cet algorithme nécessite de garder en mémoire les directions de descente. Pour éviter d'avoir besoin d'une grande capacité de stockage, seules quelques-unes des dernières directions de descente, de l'ordre d'une à trois, sont conservées.

Les cas particuliers suivants de l'algorithme du Résidu Minimal seront étudiés :

– $\forall i, s_i = 1$: α_i^i a l'expression suivante :

$$\alpha_i^i = \frac{\langle R_i, AR_i \rangle}{\|AD_i\|^2} \quad (2.142)$$

– $\forall i, s_i = 2$: il est montré que $\alpha_{i-1}^i = 0$ et que α_i^i a la même expression qu'en (2.142). Le cas $s_i = 2$ se ramène au cas $s_i = 1$.

– $\forall i, s_i = 3$: de nouveau $\alpha_{i-1}^i = 0$. Ce cas se ramène au système suivant de taille 2×2 :

$$\begin{pmatrix} \|AD_i\|^2 & \langle AD_i, AD_{i-2} \rangle \\ \langle AD_{i-2}, AD_i \rangle & \|AD_{i-2}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i^i \\ \alpha_{i-2}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle R_i, AR_i \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

L'algorithme complet pour $\forall i, s_i = 1$ est le suivant :

$$\begin{aligned}
 &X_0 \text{ donnée} \\
 &R_0 = B - AX_0 \\
 &D_0 = R_0 \\
 &Q_0 = AD_0 \\
 &\text{Répéter} \\
 &\left| \begin{aligned}
 \alpha_i &= \frac{R_i^t Q_i}{Q_i^t Q_i} \\
 X_{i+1} &= X_i + \alpha_i D_i \\
 R_{i+1} &= R_i - \alpha_i Q_i \\
 \beta_i &= -\frac{(AR_{i+1})^t Q_i}{Q_i^t Q_i} \\
 D_{i+1} &= R_{i+1} + \beta_i D_i \\
 Q_{i+1} &= AR_{i+1} + \beta_i Q_i
 \end{aligned} \right. \quad (2.144) \\
 &\text{jusqu'à convergence}
 \end{aligned}$$

Le vecteur $Q_i = AD_i$ a été introduit pour ne calculer qu'un produit matrice-vecteur par itération, AR_i .

Si pour $s = 3$, AD_i et AD_{i-2} sont colinéaires, les coefficients λ_i^i et λ_{i-2}^i ne peuvent être déterminés. Dans ce cas, il faut passer à $s = 1$. Pour $s = 1$, l'algorithme bloque si R_{i+1} et D_i sont colinéaires. Pour éviter cela, l'algorithme est redémarré en partant du dernier estimé si l'angle entre R_{i+1} et D_i est trop petit.

Plus A est asymétrique, plus un nombre élevé de directions de descente est nécessaire pour converger rapidement.

Cet algorithme est généralement moins rapide que le Gradient Conjugué, mais pour certaine matrice A , il peut avoir la même vitesse de convergence. Il est tout de même **plus rapide** que CGLS : le Résidu Minimal nécessite **moins d'itérations** (de l'ordre d'une dizaine contre 50 itérations pour le CGLS) pour converger et son **temps de calcul par itération** est **plus faible** (une multiplication de A^t par un vecteur est évitée, le conditionnement est meilleur et un seul vecteur Q_i est stocké en plus).

2.3.5 Techniques d'accélération de convergence

Le système à résoudre est : $AX = B$. Des algorithmes le résolvent sous sa forme directe ou d'autres sous la forme : $A^t AX = A^t B$.

Un opérateur P_c est appliqué à ce système de la façon suivante :

$$P_c AX = P_c B \quad (2.145)$$

ou encore :

$$P_c A^t AX = P_c A^t B \quad (2.146)$$

La vitesse de convergence sera accrue si le terme $P_c A$ ou le terme $P_c A^t A$ est proche de la matrice Identité, c'est à dire si P_c est proche de A^{-1} ou $(A^t A)^{-1}$ en supposant que A et $A^t A$ sont inversibles.

Plusieurs choix de l'opérateur P sont possibles [Golub et Meurant, 1983; Lascaux et Théodor, 1994; La, 1997].

Opérateur diagonal

Dans le cas d'un système résolu sous la forme $A^t A X = A^t B$, un opérateur diagonal dont les éléments non nuls sont égaux à $\frac{1}{(A^t A)_{ii}}$, est choisi :

$$P_c = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(A^t A)_{ii}} \right\} \quad (2.147)$$

Opérateurs de filtrage

Pour la résolution du même système, P_c est ici un filtre passe-haut qui permet de déconvoluer l'opérateur de flou $A^t A$.

La fonction de transfert de ce filtre g est donnée par [Clinthorne *et al.*, 1993; La, 1997] :

$$\mathcal{F}g = \frac{1}{\mathcal{F}h + c} \quad (2.148)$$

où $\mathcal{F}h$ est la transformée de Fourier de la fonction de transfert correspondant à $A^t A$. Le paramètre c permet de limiter l'effet du filtre quand $\mathcal{F}h$ est petit.

Cet opérateur P_c peut être calculé en faisant l'hypothèse d'une réponse impulsionnelle h spatialement invariante : le pixel situé au centre de l'image est projeté et les projections obtenues sont rétroprojetées.

Autre opérateur

L'opérateur de rétroprojection filtrée peut être appliqué au système $A X = B$: d'abord une rétroprojection filtrée est utilisée, puis les algorithmes de reconstructions algébriques.

D'autres méthodes de préconditionnement sont présentées dans [Golub et Meurant, 1983, p 199 à 239].

2.3.6 Régularisation

Les techniques de régularisation permettent d'assurer l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution obtenue par les algorithmes précédents.

Application d'un filtre passe-bas

Le bruit est contenu dans les composantes hautes fréquences des mesures. L'application d'une fenêtre d'apodisation W aux mesures B joue le rôle d'un filtre passe-bas [La, 1997].

Les fenêtres d'apodisation W les plus utilisées sont les suivantes :

- fenêtre rectangulaire, de fonction de transfert :

$$\mathcal{F}W(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } |v| \leq v_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.149)$$

- fenêtre de Hamming, de fonction de transfert :

$$\mathcal{F}W(v) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos\left(\pi \frac{v}{v_c}\right) & \text{si } |v| \leq v_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.150)$$

- fenêtre de Hanning exponentiée, de fonction de transfert :

$$\mathcal{F}W(v) = \begin{cases} \left(\frac{1 + \cos\left(\pi \frac{v}{v_c}\right)}{2}\right)^b & \text{si } |v| \leq v_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.151)$$

- fenêtre de Butterworth, de fonction de transfert :

$$\mathcal{F}W(v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_c}\right)^{2b}} \quad (2.152)$$

où v_c est la fréquence de coupure.

L'image obtenue par cette méthode est **lissée** par rapport à l'image reconstruite sans ce filtre. Si la fréquence de coupure est élevée, l'image obtenue a une meilleure résolution, mais est plus bruitée. Avec une fréquence plus basse, l'image est plus lissée. Si la transition à la fréquence de coupure est franche, l'image présente des oscillations, mais si la transition est douce, la résolution est plus faible.

Comparons ces différentes fenêtres. La fenêtre rectangulaire donne la meilleure résolution spatiale, mais produit une réponse impulsionnelle très oscillante à cause de la transition brutale à la fréquence de coupure. La fenêtre de Butterworth favorise une forte résolution spatiale. Les fenêtres de Hamming et de Hanning sont plutôt utilisées pour obtenir des résultats lissés en présence d'un fort niveau de bruit.

V. La [La, 1997] utilise comme filtre passe-bas une fenêtre de Hanning exponentiée.

Régularisation par arrêt des itérations

Les algorithmes de résolution commencent par reconstruire d'abord les basses fréquences de l'image, puis les hautes fréquences. Or le bruit contenu dans ces hautes fréquences est amplifié par l'inversion (les petites valeurs singulières correspondent plutôt aux hautes fréquences). L'algorithme est régularisé en l'arrêtant prématurément, avant que l'image reconstruite ne soit trop bruitée et diverge.

Régularisation par introduction d'un a priori

L'application d'un filtre passe-bas n'est pas suffisante pour stabiliser la solution en raison du bruit numérique. Même avec un filtre passe-bas, le bruit est amplifié à chaque itération. Les techniques suivantes sont alors utilisées.

Régularisation de Tikhonov-Phillips

Cette méthode ajoute un terme de pénalisation sur l'image reconstruite X . $\|B - AX\|^2$ n'est plus minimisé, mais l'expression suivante [La, 1997] :

$$\|B - AX\|^2 + \lambda \|CX\|^2 \quad (2.153)$$

où :

- C est un opérateur de différentiation ;
- λ est un paramètre de régularisation qui contrôle le compromis entre une solution proche des mesures et une solution "lissée".

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$(A^t A + \lambda C^t C) X = A^t B \quad (2.154)$$

Généralement, l'opposé d'un opérateur laplacien est utilisé pour C . C pénalise alors les variations "brusques" de l'image : **l'image obtenue est lissée et les discontinuités sont adoucies** .

C est alors :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & -1 & 4 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ -1 & \dots & -1 & 4 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 4 & -1 & \dots \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

Mais il reste à déterminer le choix du paramètre de régularisation λ .

Golub [Golub *et al.*, 1977], Girard [Girard, 1989] et Barakat [Barakat, 1998, p 31 - 32] proposent d'utiliser la **Validation Croisée Généralisée** pour déterminer ce paramètre. Barakat présente d'autres méthodes qui sont plus difficiles à utiliser.

Le paramètre λ optimal est celui qui minimise la fonction suivante :

$$V(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} \|(I - A(\lambda)) B\|^2}{\left[\frac{1}{n} \text{trace}(I - A(\lambda))\right]^2} \quad (2.156)$$

où la matrice $A(\lambda)$ est définie par :

$$A(\lambda) = A (A^t A + \lambda C^t C)^{-1} A^t \quad (2.157)$$

Mais il est compliqué et coûteux en espace mémoire et en temps de calculer $\text{trace}(I - A(\lambda))$. Girard [Girard, 1989] fournit une procédure pour calculer facilement ce terme :

1. d'abord un vecteur w de n valeurs pseudo-aléatoires avec une distribution normale est généré ;
2. le résidu $w - A(\lambda)w$ est ensuite calculé ;
3. λ est obtenu par :

$$\frac{1}{n} \text{trace} (I - A(\lambda)) = \frac{w^t (w - A(\lambda) w)}{w^t w} \quad (2.158)$$

Le coût du calcul de $A(\lambda)w$ est celui de la résolution d'un système linéaire.

Des démonstrations théoriques et des tests ont prouvé que cette méthode donne une très bonne estimation de $\text{trace}(I - A(\lambda))$.

Régularisation non stationnaire proposée par V. La

V. La [La, 1997, p 87-88] a recherché à mieux reconstruire l'image du coeur d'un patient. Cette image n'est pas nette en raison du lissage engendré par la régularisation.

Elle propose donc une régularisation spatialement adaptative où le terme λ est remplacé par une matrice diagonale Λ avec :

$$\begin{cases} \Lambda_{ii} = \lambda_{ROI} \text{ si le pixel } i \text{ est dans la zone intéressante (le coeur) ;} \\ \Lambda_{ii} = \lambda_{ext} \text{ si le pixel } i \text{ n'est pas dans la zone intéressante ;} \end{cases} \quad (2.159)$$

Donc les termes de la matrice Λ prennent différentes valeurs suivant que le pixel considéré est ou n'est pas dans la zone intéressante. Une valeur élevée est choisie pour l'extérieur de cette zone et une valeur faible pour les pixels dans cette zone. Cela permet de lisser l'extérieur de la zone sans trop lisser la zone considérée et perdre des informations dans cette zone.

V. La obtient les zones intéressantes en segmentant la première image. Elle recherche les zones par un seuil sur l'atténuation reconstruite (un pixel est dans la zone intéressante si son atténuation est supérieure à 35 % de l'atténuation maximale) et en comparant cette image à des masques. En effet, la position du coeur est connue a priori.

Elle résout l'un des systèmes suivants :

$$(A^t P_c^t P_c A + \Lambda C^t C) X = A^t P_c^t P_c W B \quad (2.160)$$

ou

$$(P_c A + \Lambda C^t C) X = P_c W B \quad (2.161)$$

V. La valide sa méthode sur des mesures d'un fantôme anatomique (figures 2.7 et 2.8 d'après [La, 1997]).

Les contours du coeur sont plus nets avec la méthode de V. La (figure 2.8) qu'avec une régularisation uniforme (figure 2.7).

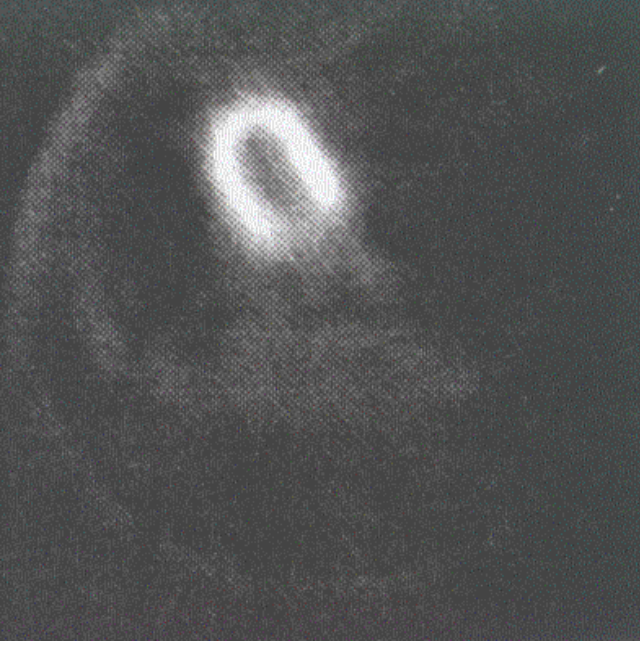


FIG. 2.7: Reconstruction de mesures de fantôme anatomique avec une régularisation uniforme [La, 1997]

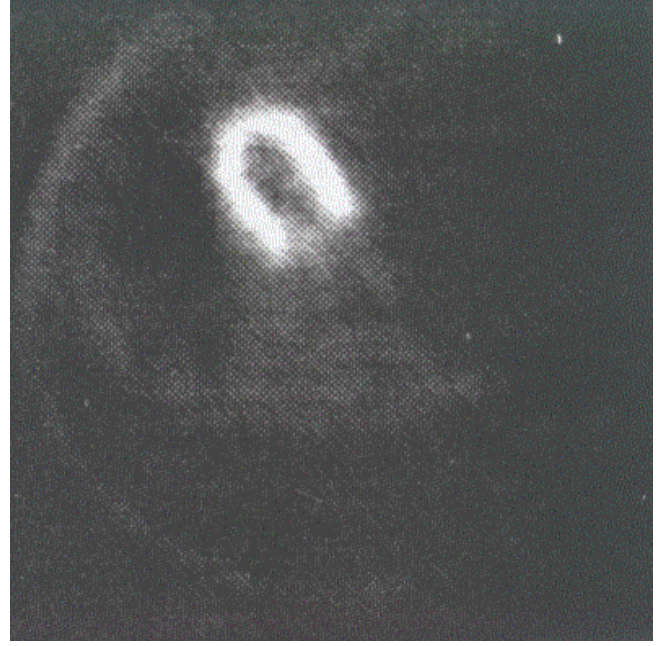


FIG. 2.8: Reconstruction de mesures de fantôme anatomique avec la régularisation spatialement adaptative de V. La [La, 1997]

Régularisation non stationnaire proposée par P. Charbonnier

P. Charbonnier [Charbonnier, 1994] a développé une méthode pour prendre en compte les discontinuités dans les reconstructions d'images.

La régularisation de Tikhonov-Phillips lisse de la même manière toute l'image. Une solution pour éviter ce phénomène est d'appliquer une régularisation spatialement adaptative.

La minimisation de la fonction suivante est recherchée :

$$J(X) = J_1(X) + \lambda J_2(X) \quad (2.162)$$

où :

- J_1 est un terme donnant l'erreur sur les mesures ;
- J_2 est un terme de pénalisation.

Le terme de pénalisation qui varie en fonction de l'image reconstruite, est [Charbonnier, 1994; Laurette, 1997; La, 1997; Thierry, 1999] :

$$J_2(X) = \sum_{i,j} \left(\phi \left[(D_x X)_{i,j} \right] \right) + \sum_{i,j} \left(\phi \left[(D_y X)_{i,j} \right] \right) \quad (2.163)$$

où :

- D_x et D_y sont des opérateurs de différenciation (dérivée d'ordre un) :

$$\begin{aligned} (D_x X)_{i,j} &= \frac{X_{i,j+1} - X_{i,j}}{\delta} \\ (D_y X)_{i,j} &= \frac{X_{i+1,j} - X_{i,j}}{\delta} \end{aligned} \quad (2.164)$$

avec δ facteur d'échelle réglant la valeur au-delà de laquelle une discontinuité est détectée.

- ϕ est une fonction de potentiel qui amplifie ou atténue la valeur des dérivées premières ;
- i et j sont des indices représentant la position du pixel considéré dans l'image.

La fonction de potentiel ϕ doit avoir les propriétés suivantes :

- $\phi(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$;
- $\phi(0) = 0$;
- $\phi(t) = \phi(-t), \forall t \in \mathbb{R}$: ϕ doit être paire ;
- ϕ doit être continûment différentiable ;
- $\phi'(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

ϕ permet de régulariser en préservant les discontinuités si elle vérifie en plus les conditions suivantes :

- $\frac{\phi'(t)}{2t}$ est continue et strictement décroissant sur \mathbb{R}^+ ;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi'(t)}{2t} = 0$;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(t)}{2t} = 1$.

$\frac{\phi'(t)}{2t}$ est appelée fonction de pondération. Plus cette fonction décroît rapidement, plus la transition entre valeurs lissées et valeurs préservées est franche. Si t , c'est à dire la dérivée première de l'image, est grand, cette fonction a une valeur qui tend vers 0 : l'algorithme régularise peu. Par contre si t est très faible, proche de 0, cette fonction est proche de 1 : l'algorithme régularise "classiquement".

Suite à l'étude des fonctions réalisée par P. Charbonnier [Charbonnier, 1994], nous avons retenu deux fonctions de potentiel :

- la fonction d'Hebert et Leahy : $\phi_{HL}(t) = \ln(1 + t^2)$;
- la fonction de German et McClure : $\phi_{GM}(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

En effet, ces fonctions ont une décroissance plus rapide que les autres fonctions. La transition entre les deux états, lissage ou pas de lissage, est plus franche. P. Charbonnier remarque sur des essais que cela permet d'avoir des fronts plus nets.

Cela donne les fonctions de pondérations suivantes :

- pour la fonction d'Hebert et Leahy : $\frac{\phi'_{HL}(t)}{2t} = \frac{1}{1+(7t)^2}$;
- pour la fonction de German et McClure : $\frac{\phi'_{GM}(t)}{2t} = \frac{1}{[1+(3t)^2]^2}$.

Un coefficient a été ajouté pour que les fonctions soient proches de 0 en $t = 1$.

Si l'erreur est donnée par : $J_1(X) = \|B - AX\|^2$, (2.162) revient au système suivant :

$$(A^t A + \lambda \Delta_{pond}(X)) X = A^t B \quad (2.165)$$

où $\Delta_{pond}(X)$ est semblable à un opérateur laplacien.

Le calcul de $\Delta_{pond}(X)$ est obtenu en convoluant l'image par l'opposé d'un masque laplacien

pondéré, c'est à dire par la matrice :

$$\Delta_{pond}(X) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & -\omega_{O11} & \dots & -\omega_{S11} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ \dots & -\omega_{Ei-1j} & \Sigma_{i-1j} & -\omega_{Oi-1j} & \dots & -\omega_{Si-1j} & 0 \\ -\omega_{Nij} & \dots & -\omega_{Eij} & \Sigma_{ij} & -\omega_{Oij} & \dots & -\omega_{Sij} \\ 0 & -\omega_{Ni+1j} & \dots & -\omega_{Ei+1j} & \Sigma_{i+1j} & -\omega_{Oi+1j} & \dots \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\omega_{Nnn} & \dots & -\omega_{Enn} & \Sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

où les termes sont les suivants :

$$\begin{aligned} \omega_{Nij} &= \frac{\phi' \left[(D_y X)_{i-1,j} \right]}{2 (D_y X)_{i-1,j}} \\ \omega_{Sij} &= \frac{\phi' \left[(D_y X)_{i,j} \right]}{2 (D_y X)_{i,j}} \\ \omega_{Eij} &= \frac{\phi' \left[(D_x X)_{i,j-1} \right]}{2 (D_x X)_{i,j-1}} \\ \omega_{Oij} &= \frac{\phi' \left[(D_x X)_{i,j} \right]}{2 (D_x X)_{i,j}} \\ \Sigma_{ij} &= \omega_{Nij} + \omega_{Sij} + \omega_{Eij} + \omega_{Oij} \end{aligned} \quad (2.167)$$

...

Au voisinage d'un contour, le lissage est inhibé dans la direction perpendiculaire au contour.

La fonction ϕ est généralement choisie non quadratique pour ne pas surlisser l'image : (2.165) en général n'est pas linéaire et donc ne peut pas être résolu par les techniques classiques de minimisation. Pour résoudre ce problème, il est fait appel au principe de minimisation semi-quadratique. Cela permet d'appliquer de nouveau les algorithmes précédents. Ce principe repose sur une minimisation en deux étapes.

Pour appliquer ce principe, une variable $b = (b_x, b_y)$ appelée processus de ligne est utilisée. Alors ϕ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi(t) = \min_b \phi^*(t, b) \quad (2.168)$$

où ϕ^* est définie par :

$$\phi^*(t, b) = bt^2 + \psi(b) \quad (2.169)$$

avec ψ fonction strictement convexe et décroissante.

La valeur b^* qui minimise ϕ^* à t donné, est donnée par :

$$b^* = \frac{\phi'(t)}{2t} \quad (2.170)$$

Ce principe conduit à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(X) = \min_b J^*(X, b) \quad (2.171)$$

avec

$$J^*(X, b) = J_1(X) + \lambda \sum_{i,j} \left[\left((b_x)_{i,j} (D_x X)_{i,j}^2 + \psi \left((b_x)_{i,j} \right) \right) + \left((b_y)_{i,j} (D_y X)_{i,j}^2 + \psi \left((b_y)_{i,j} \right) \right) \right] \quad (2.172)$$

Si b est fixé, $J^*(X, b)$ est quadratique en X : les techniques classiques de minimisation, comme les algorithmes précédents, sont utilisables .

Cette méthode procède par étapes de minimisation alternées :

- minimisation par rapport à b , X étant supposée fixée ;
- minimisation par rapport à X , b étant supposé fixé.

L'algorithme devient :

$$\begin{aligned} & X_0 = 0 \\ & \text{Répéter} \\ & \left| \begin{aligned} b^{l+1} &= \min_b [J^*(X^l, b)] \\ X^{l+1} &= \min_X [J^*(X, b^{l+1})] \end{aligned} \right. \quad (2.173) \\ & \text{Jusqu'à convergence} \end{aligned}$$

la valeur de b minimisant $J^*(X^l, b)$, soit b^{l+1} , est donnée par :

$$\begin{aligned} (b_x)_{i,j}^{l+1} &= \frac{\phi' \left[(D_x X)_{i,j} \right]}{2 (D_x X)_{i,j}} \\ (b_y)_{i,j}^{l+1} &= \frac{\phi' \left[(D_y X)_{i,j} \right]}{2 (D_y X)_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.174)$$

La deuxième étape de minimisation, celle de X en supposant b fixé, est obtenue par la résolution du système suivant :

$$(A^t A + \lambda \Delta'_{pond}) X = A^t B \quad (2.175)$$

où la matrice Δ'_{pond} est donnée par :

$$\Delta'_{pond} = \begin{bmatrix} \Sigma'_{11} & - (b_x)_{11}^{l+1} & \dots & - (b_y)_{11}^{l+1} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & - (b_x)_{i-1j-1}^{l+1} & \Sigma'_{i-1j} & - (b_x)_{i-1j}^{l+1} & \dots & - (b_y)_{i-1j}^{l+1} & 0 \\ - (b_y)_{i-1j}^{l+1} & \dots & - (b_x)_{ij-1}^{l+1} & \Sigma'_{ij} & - (b_x)_{ij}^{l+1} & \dots & - (b_y)_{ij}^{l+1} \\ 0 & - (b_y)_{ij}^{l+1} & \dots & - (b_x)_{i+1j-1}^{l+1} & \Sigma'_{i+1j} & - (b_x)_{i+1j}^{l+1} & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & - (b_y)_{nn}^{l+1} & \dots & - (b_x)_{nn}^{l+1} & \Sigma'_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

avec

$$\Sigma'_{ij} = (b_x)_{ij-1}^{l+1} + (b_x)_{ij}^{l+1} + (b_y)_{i-1j}^{l+1} + (b_y)_{ij}^{l+1} \quad (2.177)$$

Cela permet la résolution de cette deuxième étape par des algorithmes classiques comme ceux exposés dans les parties précédentes.

Charbonnier [Charbonnier, 1994] utilise comme critère d'arrêt :

$$\frac{\|X^{n+1} - X^n\|^2}{\|X^n\|^2} < e^2 \quad (2.178)$$

où e est choisi par l'utilisateur.

Il reste à bien choisir les deux paramètres λ et δ . Si δ est choisi trop petit, l'algorithme va détecter des discontinuités sur toute l'image et la solution obtenue sera très bruitée. Si δ est trop grand, aucune discontinuité ne sera détectée et l'image reconstruite sera identique à celle obtenue avec un algorithme classique non spatialement adaptatif. Si le rapport $\frac{\lambda}{\delta}$ est trop faible, la régularisation sera peu importante et l'image reconstruite sera bruitée.

P. Charbonnier valide sa méthode sur des mesures réelles d'un cerveau (figures 2.9 et 2.10 d'après [Charbonnier, 1994]).

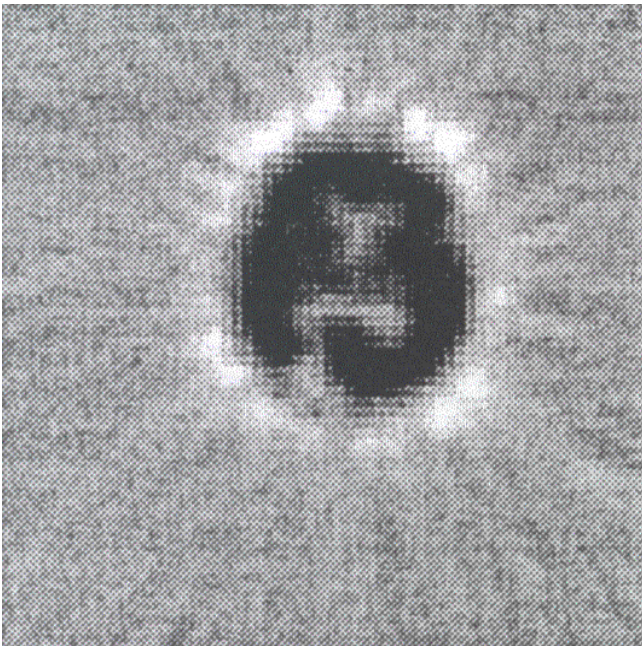


FIG. 2.9: Reconstruction de mesures de cerveau avec la rétroprojection filtrée [Charbonnier, 1994]

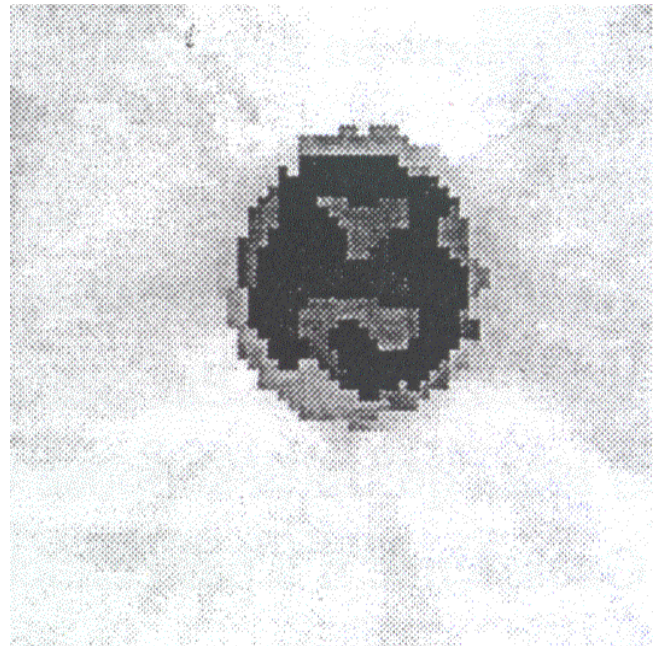


FIG. 2.10: Reconstruction de mesures de cerveau avec la régularisation spatialement adaptative de P. Charbonnier [Charbonnier, 1994]

Les contours des différentes zones du cerveau sont plus nets avec la méthode de P. Charbonnier (figure 2.10) qu'avec une régularisation uniforme (figure 2.9).

Conclusion de la régularisation

Selon [La, 1997], s'il n'est pas fait d'apodisation (filtrage des données par un filtre passe-bas), ni de régularisation, l'image obtenue présente des oscillations et des traînées noires. La régularisation permet de réduire les traînées noires, mais pas les oscillations. Celles-ci sont atténuées par l'apodisation. De plus, l'erreur entre l'image reconstruite et l'objet théorique diverge sans régularisation, mais, avec régularisation converge vers un palier.

2.4 Schémas d'échantillonnage

2.4.1 Echantillonnage efficace

Dans cette partie, nous essayons de voir si nous pouvons trouver des échantillonnages parallèles, c'est à dire des géométries d'acquisition, meilleurs que l'échantillonnage parallèle régulier (figure 1.3). La démarche que nous reprenons ici est exposée dans [Rathey et Lindgren, 1981], dans [Natterer, 1986], dans [Desbat, 1997], dans [Desbat et Thierry, 1999] et dans [Thierry, 1999].

Nous considérons la transformée de Radon $\mathcal{R}f$ d'une fonction f de bande limitée de fréquence de coupure b , que nous cherchons à échantillonner.

Les positions de mesures sont définies par des couples (s, θ) (figure 2.1). Dans le cas d'un échantillonnage sur un réseau, l'ensemble de ces positions peut ensuite être décrit par une base de deux vecteurs w_1 et w_2 . Les positions de mesures sont alors : $k_1 w_1 + k_2 w_2$, où $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

$W = (w_1, w_2)$ est appelée matrice de la base d'échantillonnage. $2\pi W^{-t} = 2\pi(w_1^{-t} + w_2^{-t})$ est appelée matrice de la base du schéma réciproque.

K est le support essentiel de $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)$, c'est à dire l'ensemble des points (u, v) de l'espace de Fourier pour lesquels $|\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(\sigma, \varphi)|$, avec $\varphi \in \mathbb{Z}$, est non négligeable (figure 2.11).

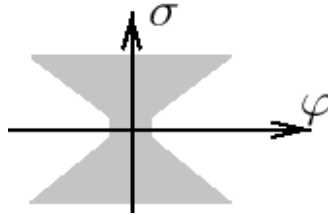


FIG. 2.11: Ensemble K , support essentiel de $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)$ [Desbat, 1997]

Il est montré que $\int_{(\sigma, \varphi) \notin K} |\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(\sigma, \varphi)| d\sigma d\varphi$ est négligeable.

Pour bien échantillonner la transformée de Radon, il ne doit pas y avoir de recouvrement de spectre (condition de Shannon), ce que nous pouvons lire dans la formule de Poisson :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{F}(\mathcal{R}f) [\xi - 2\pi W^{-t} l] = (2\pi)^{-1} |\det W| \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{R}f(Wk) e^{-i\xi \cdot Wk} \quad (2.179)$$

où $\xi \in \mathbb{R}^2$.

$\sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{F}(\mathcal{R}f) [\xi - 2\pi W^{-t} l]$ n'aura pas de recouvrement de spectre si les ensembles $K + 2\pi(W^{-1})^t l$, $l \in \mathbb{Z}^n$, sont deux à deux disjoints (condition de Shannon).

Supposons que la fonction $\mathcal{R}f$ est échantillonnée en suivant l'échantillonnage décrit par la matrice W et que W satisfait la condition de Shannon pour K . La fonction $S_W(\mathcal{R}f)(x) = (2\pi)^{-1} |\det W| \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{R}f(Wk) \mathcal{F}(\chi_K)[Wk - x]$, avec χ_K l'indicatrice de K , est l'interpolation de $\mathcal{R}f$ à partir de $\mathcal{R}f(Wk)$, $k \in \mathbb{Z}^2$ (généralisation de la série de sinus cardinal).

L'estimation de l'erreur est donnée par :

$$|S_W(\mathcal{R}f) - \mathcal{R}f| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\xi \notin K} |\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(\xi)| d\xi \quad (2.180)$$

Connaissant l'ensemble K , parmi les matrices qui satisfont la condition de Shannon $K + 2\pi(W^{-1})^t l$ sans recouvrement, nous choisirons la matrice W qui maximise la "distance" entre deux points de mesure voisins, en pratique qui maximise l'aire de la maille élémentaire du schéma. Cela revient à maximiser le déterminant de W . L'optimalité n'est simple que lorsque $K + 2\pi(W^{-1})^t l$, $l \in \mathbb{Z}^2$, est un pavage du plan de Fourier.

La comparaison des efficacités de deux échantillonnages pourra alors se faire par la comparaison des déterminants des matrices (W).

A partir des conditions précédentes, un nouvel échantillonnage est déterminé : l'échantillonnage entrelacé (figure 2.12).

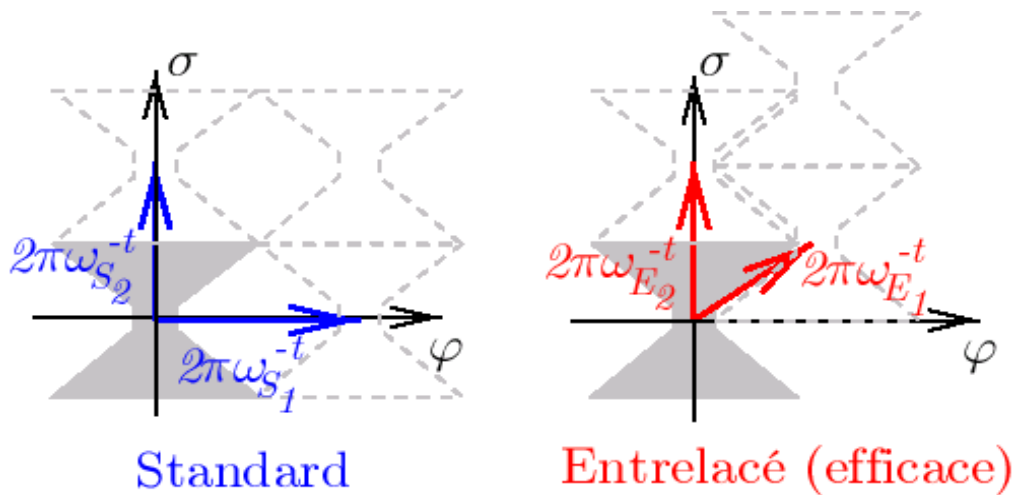


FIG. 2.12: Supports de l'échantillonnage standard et de l'échantillonnage entrelacé : représentation dans l'espace de Fourier de la périodisation du support essentiel de la Transformée de Fourier de la Transformée de Radon d'une fonction suivant le schéma réciproque de l'échantillonnage standard ($2\pi W_S^{-t} \mathbb{Z}^2$) et le schéma réciproque de l'échantillonnage entrelacé ($2\pi W_E^{-t} \mathbb{Z}^2$) [Desbat, 1997]

Pour l'échantillonnage entrelacé, les projections des rotations paires ne sont pas faites aux mêmes positions transversales que celles des rotations impaires. Les mesures des rotations paires et impaires sont décalées de $a/2$, c'est à dire d'un demi-pas de mesure. Par rapport à l'échantillonnage régulier, cet échantillonnage n'utilise qu'une position sur deux, et permet donc de faire deux fois moins de mesures. Cela donne le schéma d'échantillonnage de la figure 2.13.

Comparons nos deux échantillonnages.

Dans le cas d'échantillonnage parallèle régulier, la matrice W_S a l'expression suivante :

$$W_S = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2}{M} \end{pmatrix} \quad (2.181)$$

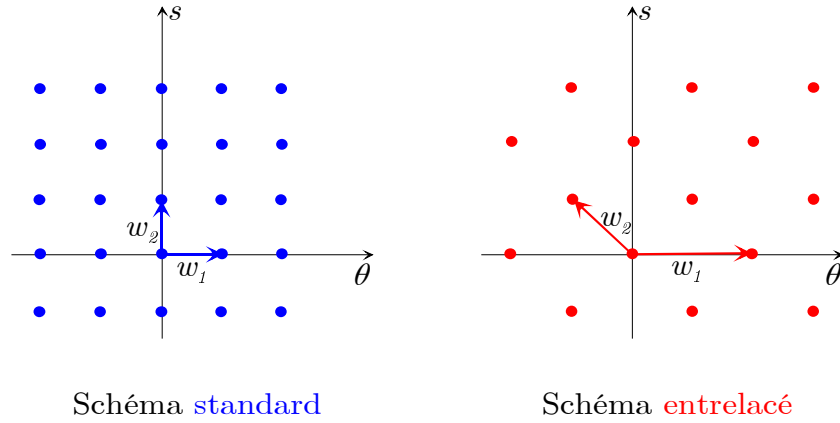


FIG. 2.13: Schémas de l'échantillonnage standard et de l'échantillonnage entrelacé [Desbat, 1997]

Cela donne : $\det(W_S) = 2\pi/MN$.

La matrice W_E de l'échantillonnage entrelacé correspondant est :

$$W_E = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{N} & -\frac{\pi}{N} \\ 0 & \frac{2}{M} \end{pmatrix} \quad (2.182)$$

Cela donne : $\det(W_E) = 4\pi/MN$.

Le déterminant de W_E est le double de celui de W_S : l'échantillonnage entrelacé est deux fois plus efficace que l'échantillonnage parallèle régulier.

Nous retrouvons cette conclusion sur la figure 2.12.

Avec ses mesures, l'échantillonnage entrelacé couvre mieux l'espace de Fourier que l'échantillonnage parallèle régulier. La transformée de Fourier de la transformée de Radon de f est alors mieux mesurée.

L'échantillonnage entrelacé donne donc une **meilleure estimation** de la transformée de Radon de f que l'échantillonnage parallèle régulier avec **deux fois moins de mesures**.

2.4.2 Passage aux mesures en éventail (fan-beam)

Le dispositif de mesures en éventail (fan-beam) est constitué d'un faisceau collimaté en nappe qui irradie la section entière de l'objet à mesurer, et d'un détecteur linéaire. Tout cet ensemble tourne autour de l'objet à mesurer afin d'obtenir des mesures suivant différents angles (figure 2.14).

Les mesures en éventail (fan-beam) apportent un grand gain de temps, car dans cette configuration, l'ensemble de projections à un angle donné est mesuré en même temps et il ne reste plus qu'à faire les rotations autour de l'objet.

Les paragraphes suivants décrivent comment transposer les algorithmes de la géométrie parallèle aux géométries en éventail.

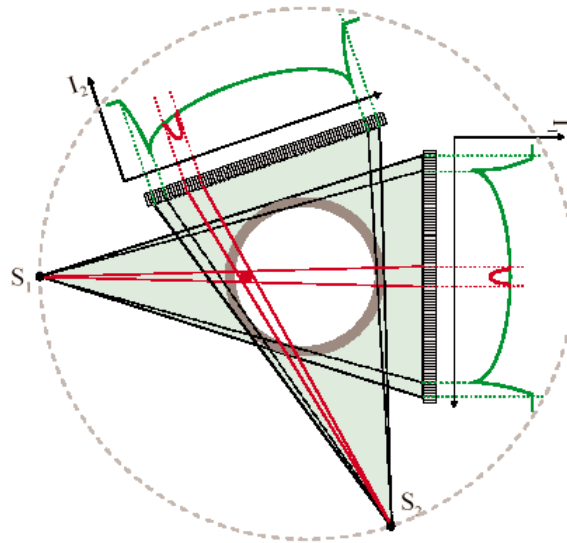


FIG. 2.14: Principe de l'échantillonnage en éventail

Mesures en éventail pour les algorithmes analytiques

Kak et Slaney [Kak et Slaney, 1987, p 75 à 93] présentent différentes solutions pour passer en échantillonnage en éventail avec les algorithmes analytiques.

Réorganisation des mesures

La solution la plus simple est de réorganiser les mesures pour ramener à une géométrie parallèle équivalente. Après, les algorithmes analytiques classiques pour les géométries parallèles peuvent être utilisés.

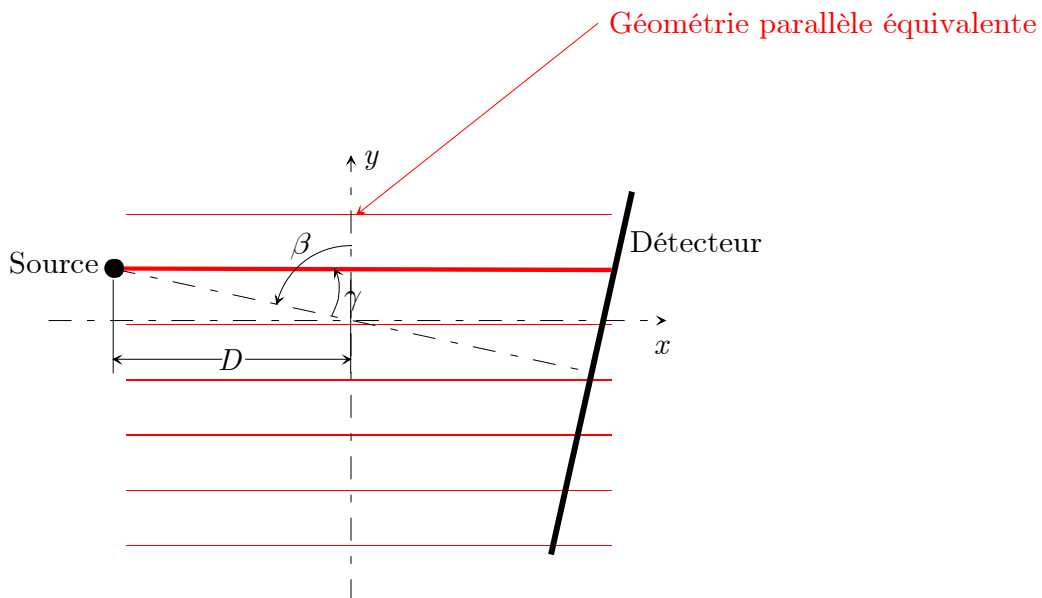


FIG. 2.15: principe de la réorganisation des mesures

Chaque mesure en éventail avec un angle de tir γ à un angle de rotation β correspond à une mesure parallèle d'angle de rotation $\beta + \gamma$ et de translation $D\sin(\gamma)$ (figure 2.15).

Du fait du terme $\sin(\gamma)$, la géométrie parallèle équivalente n'est pas uniformément échantillonnée. Cela peut être corrigé par des interpolations. Mais cela entraîne des artefacts sur les reconstructions obtenues.

Introduction de l'information dans les algorithmes

Pour la géométrie parallèle, la formule de la rétroprojection filtrée était la suivante (équation (2.26) p 32) :

$$f = \mathcal{B} [\mathcal{F}^{-1}(|\sigma|) \star (\mathcal{R}f)]$$

Cas où les mesures sont espacées du même angle

Nous considérons le cas où les mesures sont espacées du même angle de mesure (figure 2.16).

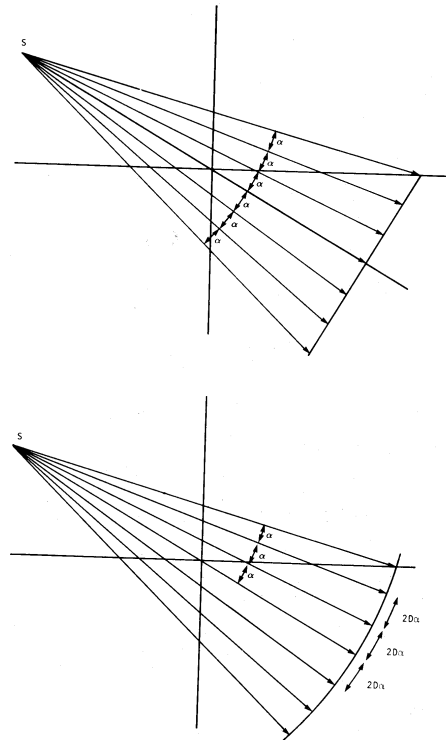


FIG. 2.16: Echantillonnage en éventail avec des angles identiques [Kak et Slaney, 1987]

La démonstration de la formule de la rétroprojection filtrée donne l'équation suivante :

$$f = \mathcal{B} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 \mathcal{F}^{-1}(|\sigma|) \right) \star ((\mathcal{R}f) D \cos \gamma) \right] \quad (2.183)$$

où :

- D est la distance entre la source de rayons X et l'axe de rotation du tomographe ;

- γ est l'angle entre l'axe source - centre de rotation et le faisceau de rayons X ;
- \mathcal{B} est toujours l'opérateur de rétroprojection, mais il intègre sur $[0; 2\pi]$ et la longueur L entre la source et le point M pris en compte intervient dans son expression. Pour un point M et une fonction h donnés :

$$\mathcal{B}h(M) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} h(M, \beta) d\beta \quad (2.184)$$

Une sommation sur toutes les directions autour du point M est faite.

Cas où les détecteurs sont espacés de la même distance

Nous considérons un autre cas où ce sont les détecteurs qui sont espacés de la même distance (figure 2.17). Dans ce cas, les angles entre deux mesures successives ne sont plus constants.

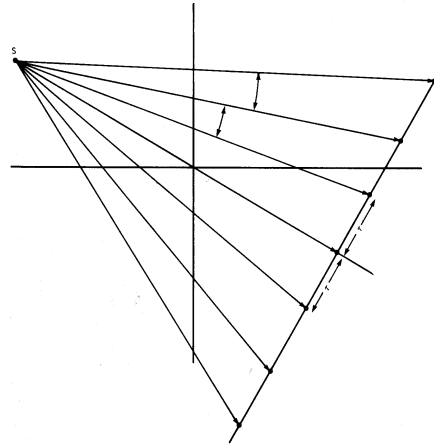


FIG. 2.17: Echantillonnage en éventail avec des détecteurs également espacés [Kak et Slaney, 1987]

Pour ce cas, la formule obtenue est la suivante :

$$f = \mathcal{B} \left[\left(\frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}(|\sigma|) \right) \star \left((\mathcal{R}f) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \right] \quad (2.185)$$

où :

- D est la distance entre la source de rayons X et l'axe de rotation du tomographe ;
- s est la distance entre l'axe de rotation du tomographe et le faisceau de rayons X, mesurée sur une droite parallèle à l'axe des détecteurs ;
- \mathcal{B} est toujours l'opérateur de rétroprojection, mais il intègre sur $[0; 2\pi]$ et nous faisons intervenir le rapport L de la longueur entre la source et le projeté du point M pris en compte sur le faisceau central, sur la distance D . L'équation (2.184) est toujours valable.

Mesures en éventail pour les algorithmes algébriques

Les algorithmes algébriques résolvent un système linéaire $RF = P$, où :

- F est le vecteur colonne de l'image recherchée ;
- P est le vecteur colonne des mesures ;
- R est une matrice creuse qui seule contient la géométrie de mesures : ces éléments sont la contribution d'une mesure, c'est à dire d'un faisceau de rayons X, sur les pixels de l'image.

Après la construction de R , le système est résolu par les méthodes décrites précédemment.

Pour passer de l'échantillonnage parallèle à l'échantillonnage en éventail, il **suffit de modifier la matrice R** pour prendre en compte ce changement de géométrie de mesures. La résolution du système linéaire reste le même.

Ces algorithmes peuvent même prendre en compte des géométries de mesure non régulières, par exemple une géométrie sur laquelle quelques points de mesure jugés litigieux sont éliminés.

2.5 Durcissement du faisceau de rayons X

2.5.1 Description du phénomène

Les atténuations sont données dans les tables pour des faisceaux de rayons X monoénergétiques. Quand l'atténuation d'un faisceau polyénergétique de rayons X est mesurée, une moyenne des atténuations à chaque énergie pondérées par le flux de photons à cette énergie est obtenue.

Or les rayons de faibles énergies sont plus atténués que les rayons de fortes énergies. La courbe 2.18 donne l'évolution de l'atténuation massique de l'eau en fonction de l'énergie [Hubbell, 1969]. Cela entraîne une déformation du spectre des rayons X. L'énergie moyenne du faisceau (moyenne des énergies pondérées par le flux de photons à cette énergie) augmente. Ce phénomène est appelé "durcissement du faisceau".

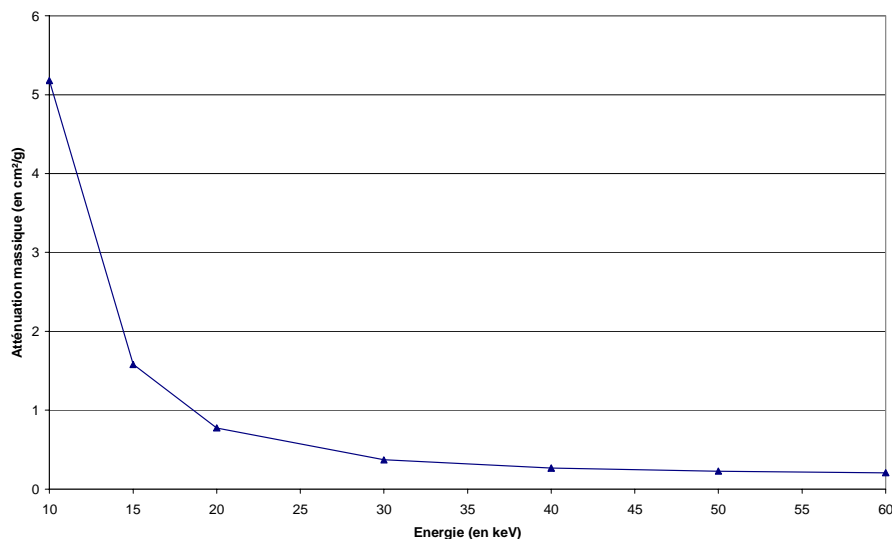


FIG. 2.18: Atténuation massique de l'eau en fonction de l'énergie

Par exemple, à partir du spectre d'émission de notre tube avec anticathode en Cuivre alimenté avec une haute tension de 40 kV, nous avons calculé le spectre de rayons X après atténuation par 1 cm d'eau (voir figure 2.19). Les coefficients d'atténuation sont obtenus par interpolation linéaire entre les coefficients fournis par les tables dans [Hubbell, 1969]. L'énergie moyenne du spectre passe de 12 keV à 25 keV sur cet exemple.

Le durcissement du faisceau et la modification du spectre qu'il entraîne, **change l'atténuation mesurée** suivant l'épaisseur de matière traversée, ce qui peut provoquer **des artefacts**.

2.5.2 Ecrans en sortie de tube à rayons X

Schmitz [Schmitz *et al.*, 1997] et Grassler [Grassler et Wirth, 1999] utilisent des écrans en sortie du tube à rayons X pour durcir artificiellement le faisceau et ainsi limiter le phénomène de durcissement dans la pièce à mesurer.

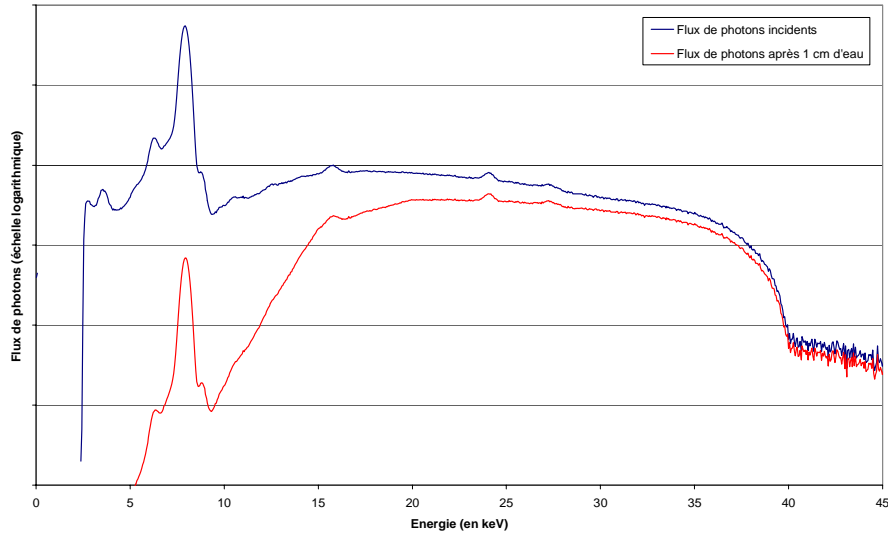


FIG. 2.19: Densité spectrale d'un faisceau de rayons X avant et après atténuation par 1 cm d'eau

Schmitz utilise un écran de 2 mm d'Aluminium et de 3 mm de Cuivre pour un tube à rayons X à 360 kV, Grassler un écran de 4,5 mm d'Aluminium pour un tube à 60 kV.

2.5.3 Facteur correctif

Un facteur correctif peut être introduit dans les calculs pour corriger le phénomène de durcissement du faisceau [McDavid *et al.*, 1977; Segal *et al.*, 1987]. Les mesures seront multipliées par ce facteur avant d'utiliser les algorithmes de reconstructions afin de revenir au cas d'un faisceau de rayons X monoénergétique équivalent.

La détermination de ce facteur correctif se fait en 4 étapes :

1. Calculons d'abord l'énergie moyenne du faisceau de rayons X considéré : Si le spectre du faisceau émis en fonction de l'énergie E est noté $S(E)$, l'intensité transmise est donnée par :

$$I(d) = \int S(E) e^{-\mu(E)d} dE = \left(\int S(E) dE \right) e^{-\mu_{\text{eff}} d} \quad (2.186)$$

L'énergie moyenne est l'énergie qui donne pour un faisceau monoénergétique l'atténuation μ_{eff} .

2. Prenons plusieurs cales de différentes épaisseurs d du même matériau que l'objet mesuré ;
3. Mesurons l'atténuation de ce matériau par le faisceau de rayons X pour les différentes épaisseurs d du matériau considéré : $\ln\left(\frac{I_{\text{incident}}}{I_{\text{transmis}}}\right)$;
4. Nous obtenons le facteur correctif suivant pour chaque atténuation mesurée $\ln\left(\frac{I_{\text{incident}}}{I_{\text{transmis}}}\right)$:

$$\frac{\mu_{\text{eff}} d}{\ln\left(\frac{I_{\text{incident}}}{I_{\text{transmis}}}\right)} \quad (2.187)$$

Enfin, nous réalisons ensuite les mesures tomographiques de l'objet à cartographier. Une interpolation linéaire de ce facteur correctif est multipliée à chaque mesure $\ln\left(\frac{I_{incident}}{I_{transmis}}\right)$.

2.5.4 Autre méthode

Une autre méthode pour prendre en compte le durcissement du faisceau est présentée dans [Kak et Slaney, 1987, p 123 à 125].

Il s'agit de considérer que l'atténuation linéaire qui dépend de l'énergie et de la position M , est composée de deux paramètres dépendant de l'énergie E , pondérés par des coefficients spatiaux. Cela donne alors :

$$\mu(M, E) = a_1(M)g(E) + a_2(M)f_{KN}(E) \quad (2.188)$$

$g(E)$ décrit la contribution due à l'absorption photoélectrique, $f_{KN}(E)$ (fonction de Klein-Nishina) la diffusion Compton. La création de paire électron-positron n'est bien sûr pas présente, car elle n'intervient qu'avec des photons d'énergie supérieure à $1,022MeV$ (deux fois l'énergie de masse de l'électron).

Kak et Slaney prennent pour l'absorption photoélectrique la fonction g suivante :

$$g(E) = \frac{1}{E^3} \quad (2.189)$$

où E est exprimée en keV.

La fonction de Klein-Nishina f_{KN} est [Kak et Slaney, 1987] :

$$f_{KN}(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1+2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \ln(1+2\alpha) - \frac{(1+3\alpha)}{(1+2\alpha)^2} \quad (2.190)$$

avec

$$\alpha = \frac{E}{510,975} \quad (2.191)$$

où E est exprimée en keV.

Si la densité spectrale de photons est notée $S_i(E)$, l'intensité mesurée est donnée par :

$$I_i = \int S_i(E) e^{-\int_{rayon} \mu(M,E) dM} dE \quad (2.192)$$

Cela donne donc :

$$I_i = \int S_i(E) e^{-(A_1g(E)+A_2f_{KN}(E))} dE \quad (2.193)$$

avec

$$A_i = \int_{rayon} a_i(M) dM \quad (2.194)$$

En faisant les mêmes mesures à deux énergies différentes, c'est à dire avec deux spectres d'énergie S_i différents, deux équations à deux inconnues sont obtenues. Alors A_1 et A_2 peuvent être déterminés pour toutes les projections. Les coefficients A_i sont les mesures intégrales des a_i . Ensuite deux cartes de coefficients sont reconstruites par un algorithme de reconstruction, une pour a_1 et une autre pour a_2 . Enfin, il en est déduit une carte du coefficient d'atténuation à n'importe quelle énergie choisie grâce à la formule (2.188) (une atténuation monoénergétique est alors calculée).

Pour appliquer cette méthode, il faut calculer l'intégrales des fonctions g et $f_K N$. Or ces intégrales font intervenir les densités spectrales $S_i(E)$ aux deux énergies, qu'il faut donc préalablement mesurer. L'utilisation de cette méthode est complexe.

2.6 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre différents algorithmes de reconstruction qui ont des performances différentes. Nous les avons regroupés suivant deux catégories.

Parmi ces deux catégories, les algorithmes algébriques ont plusieurs avantages par rapport aux algorithmes analytiques :

- ils sont relativement simples à programmer ;
- des améliorations peuvent facilement être rajoutées dans ces algorithmes pour insérer de l'information a priori (emplacement de la pièce à reconstruire) et préserver les fronts (qui seront pour nous la transition paroi - écoulement diphasique) ;
- le passage à la géométrie en éventail est aisé : il "suffit" seulement de modifier la matrice R qui représente la géométrie de mesure.

C'est pourquoi nous ne retenons que les algorithmes algébriques.

Dans l'ensemble des méthodes algébriques, nous recherchons des algorithmes :

- qui soient utilisables avec n'importe quelle matrice : nous ne connaissons pas a priori la forme de la matrice R , nous savons seulement qu'elle est creuse (beaucoup de valeurs nulles) ;
- qui soient stables ;
- qui ne demandent pas un temps de calcul et un stockage mémoire énormes (la matrice R est de dimension nombre de mesures fois le nombre de pixels, ce qui donne un nombre important de valeurs à stocker).

Nous ne retenons donc que les algorithmes suivants :

- **CGLS** ;
- **RRLS** ;
- **LSQR** ;
- **Résidu Minimal**.

Pour éviter les artefacts de reconstruction, nous utiliserons la **régularisation** et déterminons le paramètre de régularisation par la méthode de la **Validation Croisée Généralisée**.

Nous gardons aussi en mémoire **les méthodes de V. La et de Charbonnier** que nous pourrions utiliser afin de mieux reconstruire la transition paroi - écoulement diphasique.

Nous allons par la suite **mettre en œuvre ces algorithmes et comparer leurs performances** au cours de simulations.

Pour les mesures, nous testerons l'**échantillonnage entrelacé** et nous nous souviendrons des méthodes pour prendre en compte le **durcissement du faisceau de rayons X**.

Chapitre 3

Comparaison et optimisation des algorithmes

3.1 Introduction

A la suite de la synthèse bibliographique, nous avons retenu les algorithmes suivants :

- **CGLS** ;
- **RRLS** ;
- **LSQR** ;
- **Résidu Minimal avec trois vecteurs de descente**.

Après avoir exposé la programmation de ces algorithmes, nous allons comparer leurs performances (évolution du résidu, rapidité, fidélité à l'image originale et sensibilité au bruit), en versions normale ou régularisée.

En fonction de ces résultats, nous choisirons un algorithme. Nous l'utiliserons pour reconstruire des écoulements simulés.

Nous montrerons comment améliorer ces reconstructions en utilisant les **méthodes de Charbonnier** [Charbonnier, 1994] et **de V. La** [La, 1997] ou en rajoutant de l'**information a priori**.

3.2 Programmation des algorithmes

3.2.1 Algorithmes de reconstruction

Nous utilisons un algorithme développé au TIMC-IMAG par L. DESBAT et programmé en Fortran.

Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes (synoptique 3.1) :

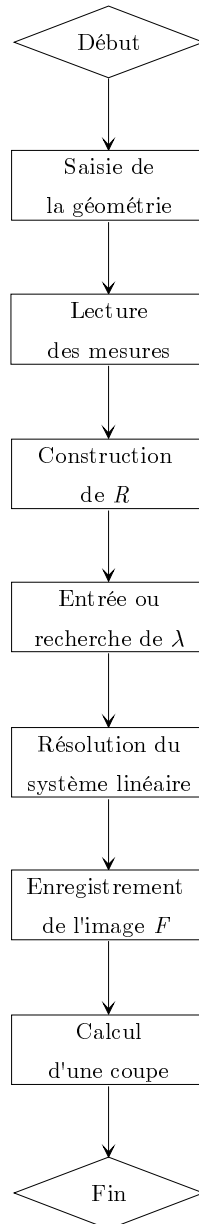


FIG. 3.1: Synoptique de l'algorithme de reconstruction

1. Lecture du fichier de mesures : le schéma d'échantillonnage peut être :
 - parallèle régulier : le fichier d'entrée est le tableau des mesures, chaque ligne comportant les mesures à un angle donné ;

- parallèle entrelacé : le fichier des mesures est un vecteur colonne des mesures ;
- ou quelconque (nous utiliserons cette option pour les mesures en éventail) : le fichier de mesures est une matrice avec trois colonnes :
 - première colonne : l'angle de mesure θ ;
 - deuxième colonne : la distance à l'axe de rotation s , avec $s \in [-1; 1]$ (les positions sont adimensionnalisées et donc dans le disque centré sur l'origine de rayon 1, figure 3.2) ;
 - troisième colonne : la mesure ;

Chaque ligne caractérise une acquisition.

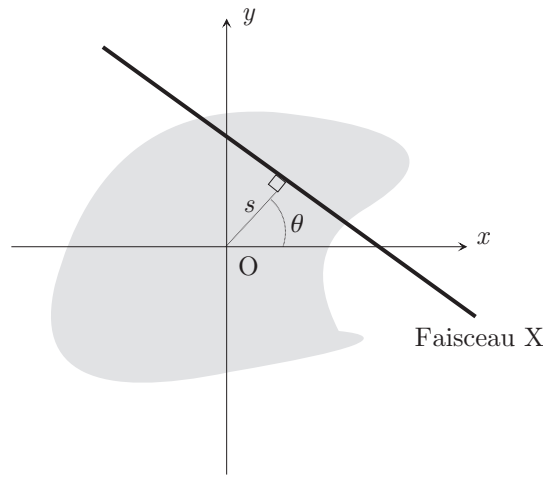


FIG. 3.2: Définitions de s et de θ

2. Construction de la matrice R à partir du schéma d'échantillonnage : le faisceau de rayons X est supposé d'épaisseur nulle, le terme R_{ij} est la longueur du faisceau i traversant la cellule j . Dans ce calcul, aucune longueur de référence n'intervient car ce calcul est fait dans le disque de rayon 1.
3. À la demande de l'utilisateur, entrée manuelle du paramètre de régularisation ou recherche du paramètre de régularisation par la Validation Croisée Généralisée.
4. Résolution du système linéaire par la routine implémentée (partie sur laquelle nous sommes principalement intervenus).
5. Enregistrement dans un fichier des valeurs des pixels de l'image, sous forme d'un tableau de réels ou d'entiers compris entre 0 et 255. Le format du fichier de sortie est compatible avec le logiciel de visualisation Spyglass que nous utiliserons tout au long de ce travail.
6. À la demande de l'utilisateur, calcul d'une coupe.

La matrice R est creuse. Pour gagner de la mémoire, les éléments nuls ne sont pas stockés et la matrice R est décrite par deux matrices :

- une matrice R_{stockage} pour les valeurs des termes R_{ij} non nuls ;
- une matrice $\text{ind}R_{\text{stockage}}$ pour la colonne j des termes R_{ij} ;

telles que, pour chaque terme R_{ij} non nul :

$$\begin{aligned} (R_{\text{stockage}})_{ik} &= R_{ij} \\ (\text{ind}R_{\text{stockage}})_{ik} &= j \end{aligned} \tag{3.1}$$

M est le nombre de projections, N le nombre de rotations et n le nombre de pixels sur une face de l'image. Au lieu de stocker une matrice R de dimension $(M \times N) \times n^2$, nous gardons en mémoire deux matrices R_{stockage} et $\text{ind}R_{\text{stockage}}$ plus petites, de dimension $(M \times N) \times 2n$.

Ce programme est compilé et exécuté sur les stations Alpha (Compaq) du TIMC-IMAG.

3.2.2 Routine de Validation Croisée Généralisée

Si l'utilisateur le désire, l'algorithme détermine automatiquement le paramètre de régularisation en utilisant la méthode de la Validation Croisée Généralisée (section 2.3.6).

Soit $V(\lambda)$, la fonction de Validation Croisée Généralisée.

La procédure programmée est la suivante :

1. Un paramètre λ est recherché de sorte que $V(\lambda) > V(0)$;
2. Résolution avec la routine implémentée du système linéaire : $(R^t R + \lambda C^t C)F = P$;
3. Calcul du produit matriciel : $B = RF$;
4. Génération de bruits blancs dans le vecteur w ;
5. Résolution avec la routine implémentée du système linéaire : $(R^t R + \lambda C^t C)X = w$;
6. Calcul du produit matriciel : $Y = RX$;
7. Calcul de la fonction $V(\lambda)$ par :

$$V(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} \|P - B\|^2}{\left(1 - \frac{\langle Y, w \rangle}{\|w\|^2}\right)^2} \quad (3.2)$$

8. Choix d'un nouveau paramètre λ par une dichotomie optimisée afin de minimiser $V(\lambda)$ et retour à l'étape 2. Ce nouveau paramètre est déterminé par la méthode de la section dorée : l'intervalle de recherche de λ décroît dans un rapport relatif au nombre d'or.

3.2.3 Routines de résolution

Nous avons programmé les routines de résolution sélectionnées à la suite de l'analyse bibliographique, sans et avec régularisation.

Le critère d'arrêt des itérations de ces routines est basé sur la norme du résidu, c'est-à-dire sur l'exactitude de la résolution du système linéaire. Le critère d'arrêt est le suivant :

$$\frac{\|P - RF_i\|}{\|P\|} < \tau \quad (3.3)$$

τ est fixé par l'utilisateur. Nous avons pris : $\tau = 0,01$. Ce choix est un compromis entre l'exactitude de la solution, le temps de convergence et la décroissance de la norme du résidu en fonction du nombre d'itérations.

Un nombre maximal d'itérations permet d'arrêter les routines de résolution si le critère d'arrêt n'est pas atteint. Ce nombre est de 50 dans la routine de Validation Croisée Généralisée

et de 300 pour la résolution du système linéaire. En pratique, la convergence est atteinte vers 10 itérations.

Ces routines, avant d'être insérées dans l'algorithme de reconstruction, ont d'abord été testées avec le système $RF = P$ suivant dont la solution est connue :

- Matrice R : la matrice Identité ou la matrice tridiagonale suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 3 & -1 & & & & 0 \\ & -1 & 3 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & -1 & 3 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

- Vecteur de mesure P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Les routines de résolution programmées ont donné la solution exacte qui est :

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.2.4 Algorithmes de simulations

Pour faire des simulations d'acquisitions, nous utiliserons l'un des programmes suivants en Fortran :

- le programme FBI qui calcule analytiquement les atténuations : ce programme ne peut simuler que des objets construits à partir d'indicatrices de disques ou d'ellipses.
- un programme basé sur le calcul matriciel : RF . La matrice R est calculée à partir de la géométrie de mesures demandée et l'image F est fournie par l'utilisateur. Ce programme peut simuler toute forme d'objet : il suffit de le décrire dans l'image F .

Une routine Labview permettra de rajouter du bruit à ces mesures simulées.

3.3 Comparaison des performances des algorithmes classiques

Dans cette partie, nous allons comparer les performances des quatre algorithmes suivants : CGLS, RRLS, LSQR et Résidu Minimal à trois vecteurs de descente.

3.3.1 Fantôme utilisé

Nous utiliserons des mesures simulées (créées grâce à l'algorithme FBI) du fantôme 1 (figure 3.3) avec 81 projections, 127 rotations et une image de 160 pixels de côté.

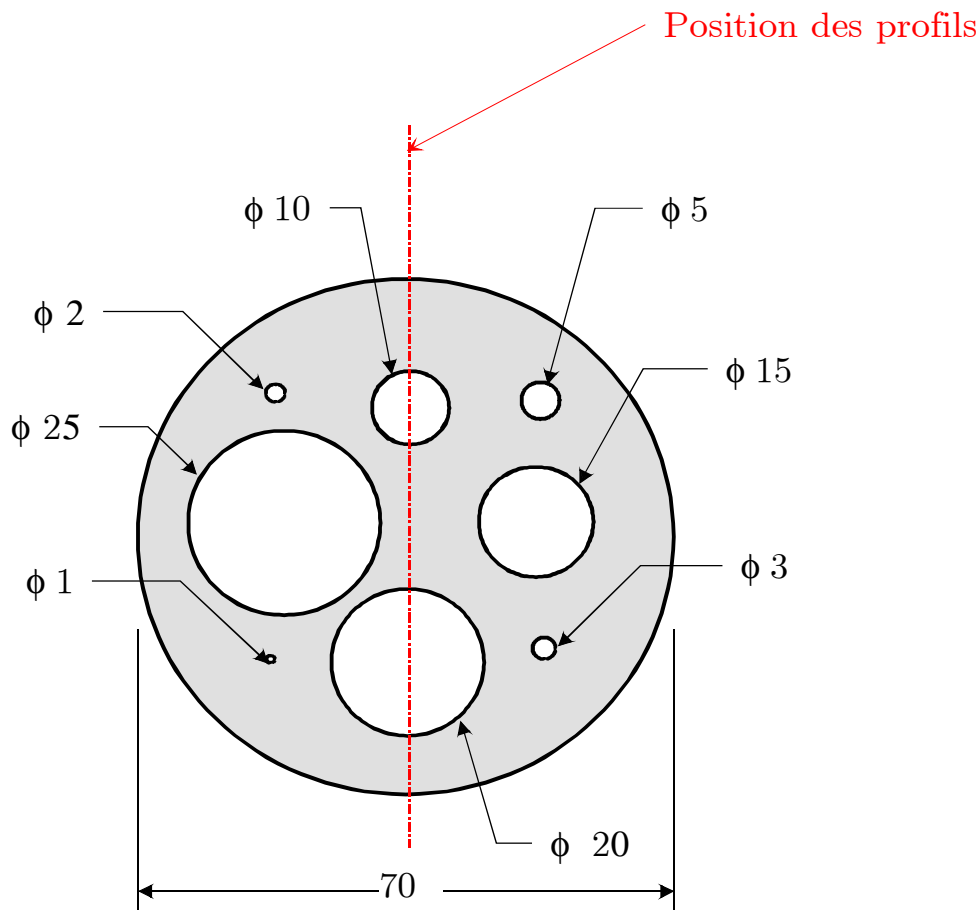


FIG. 3.3: Schéma du fantôme 1

Ce fantôme est un cylindre de Plexiglas de 70 mm de diamètre et de 60 mm d'épaisseur. Il est percé de 8 trous de diamètres différents, de 1 mm à 25 mm. Il présente deux avantages : son atténuation est uniforme par zones et sa géométrie est connue précisément. Pour les simulations, l'atténuation est arbitrairement de 2.

Ce fantôme sera ensuite utilisé au cours de mesures sur le dispositif Mini-TOMIX.

3.3.2 Evolution du résidu

Regardons d’abord pour chaque algorithme, dans sa version normale ou régularisée, l’évolution de la norme du résidu $\|P - RF\|$.

Le paramètre de régularisation λ est déterminé par la Validation Croisée Généralisée. Nous laissons les algorithmes faire 500 itérations et à chacune d’elles, nous enregistrons le résidu (figures 3.4 et 3.5).

Ce résidu est utilisé dans le critère d’arrêt de ces algorithmes (équation (3.3)) et représente ”l’exactitude” de la résolution du système.

Les courbes de la norme du résidu pour LSQR et RRLS normaux sont confondues.

La norme du résidu pour l’algorithme **CGLS régularisé décroît bien plus vite** que pour les autres algorithmes dès les premières itérations. Il lui faudra beaucoup moins d’itérations pour arriver à un seuil de critère d’arrêt donné. Aussi, l’évaluation de la norme garde toujours la même pente alors que pour les autres algorithmes, la norme semble converger vers une asymptote. Pour CGLS régularisé, nous pouvons faire décroître le critère d’arrêt et être plus exigeant sur l’”exactitude” de la solution trouvée. Il faut néanmoins ne pas faire trop d’itérations. Les algorithmes incorporent d’abord les basses fréquences dans l’image reconstruite pour passer petit à petit au cours des itérations aux hautes fréquences et si nous laissons itérer trop longtemps, la solution devient instable. La limitation du nombre d’itérations est un moyen de régulariser. Le fait d’exhiber d’abord les basses fréquences dans l’image explique l’égalité des normes du résidu pour les algorithmes CGLS sans régularisation et CGLS régularisé jusqu’à la sixième itération.

Pour l’algorithme LSQR régularisé, le Résidu Minimal sans régularisation et régularisé, la norme du résidu converge vers un palier autour de la 22^{ème} itération. Il faudra être moins exigeant avec ces algorithmes et il sera inutile de faire plus de 22 itérations.

Il faut noter que la régularisation dans le cas du LSQR dégrade la décroissance de la norme du résidu : pour LSQR sans régularisation, elle décroît, pour LSQR régularisé, elle converge vers un palier. Par contre pour RRLS, la régularisation augmente la vitesse de décroissance de la norme du résidu. LSQR et RRLS normaux montrent la même décroissance de la norme du résidu.

3.3.3 Temps de calcul

La figure 3.6 présente les durées de calcul par itération. Pour chaque algorithme, nous reconstruisons les mesures simulées du fantôme 1 (figure 3.3) avec 127 rotations et 81 projections sur une grille de 160 pixels de côté en laissant l’algorithme faire 500 itérations. Ces calculs ont lieu sur TIC, une station Alpha de TIMC-IMAG, et permettent de comparer la vitesse des algorithmes les uns par rapport aux autres.

Nous remarquons d’abord que le temps de résolution par itération est proportionnel au nombre de produit matrice-vecteur dans chaque algorithme : un produit matrice-vecteur, qui est l’opération la plus longue, prend environ 10 ms.

Pour les versions régularisées, il y a environ deux fois plus de produits matrice-vecteur, car un produit vecteur par R est remplacé par deux produits matrice-vecteur, un par R et un autre

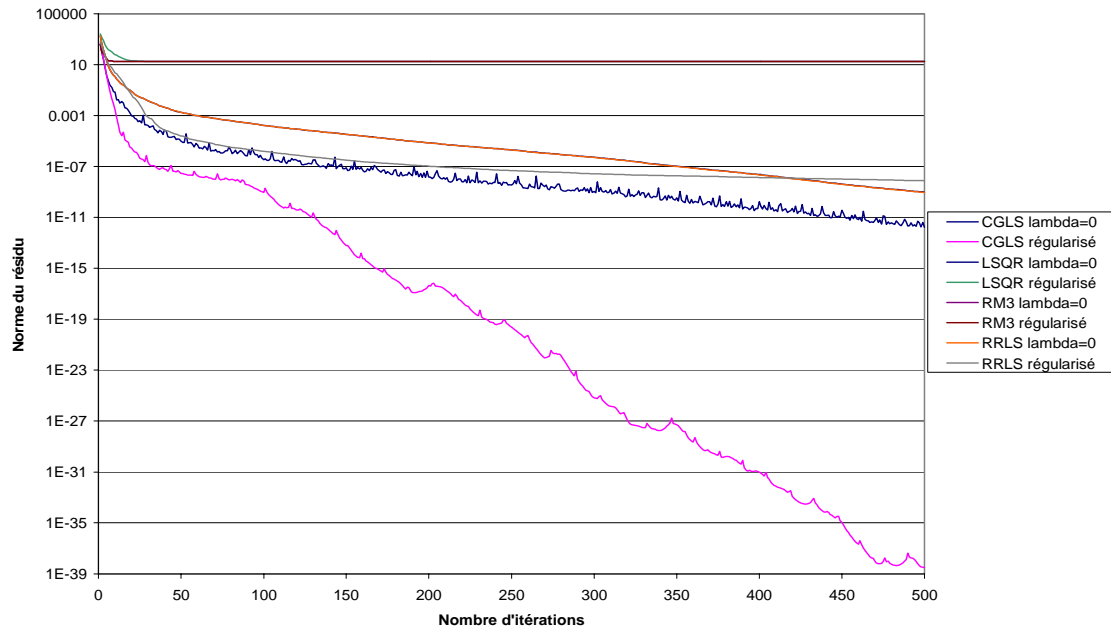


FIG. 3.4: Evolution de la norme du résidu en fonction du nombre d'itérations

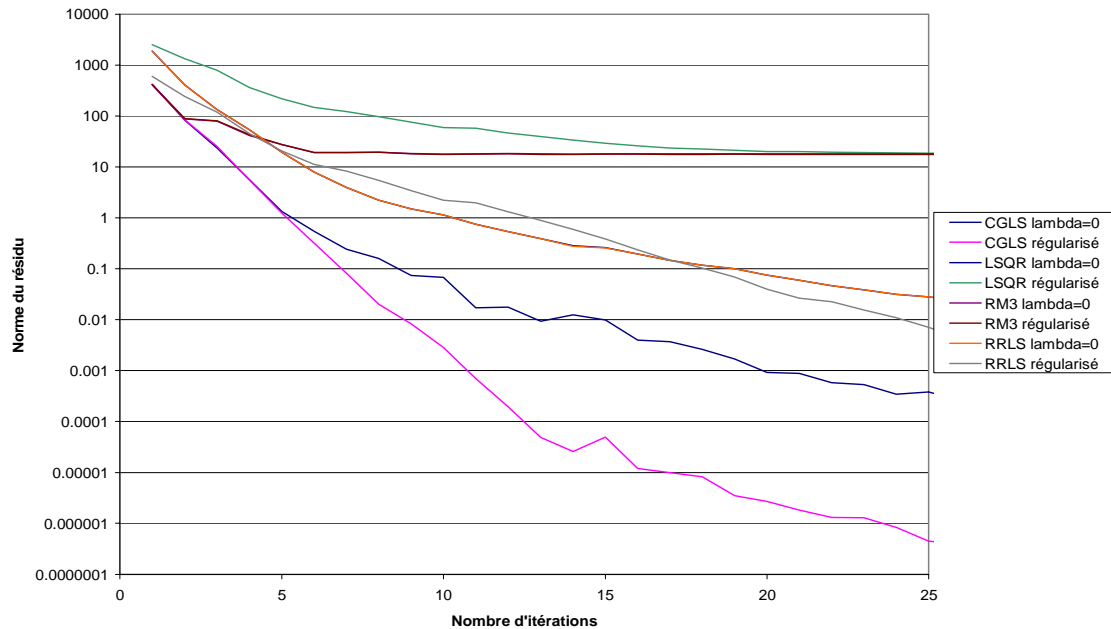


FIG. 3.5: Evolution de la norme du résidu en fonction du nombre d'itérations

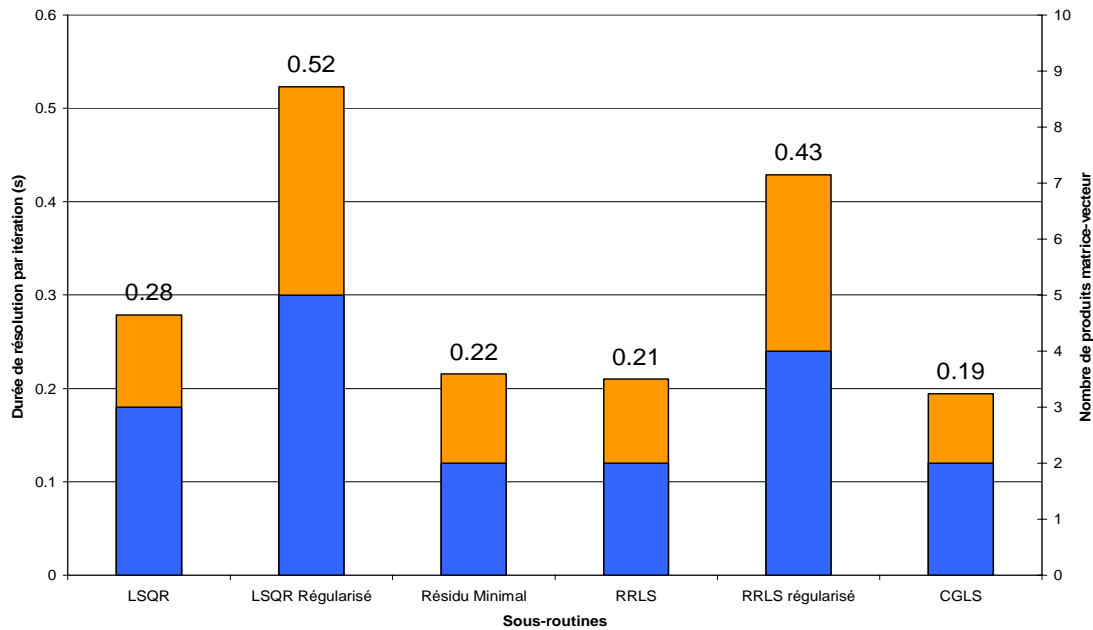


FIG. 3.6: Durée de calcul (en s) par itération

par R^t .

CGLS est le **plus rapide**, suivi de près par le Résidu Minimal à trois vecteurs de descente. RRLS, puis LSQR arrivent ensuite d'abord en versions classiques, puis en versions régularisées.

3.3.4 Fidélité avec l'original

Nous cherchons dans cette partie à comparer les différents algorithmes sur leur fidélité avec l'image originale. Ici aussi, nous utilisons des mesures simulées avec 127 rotations et 81 projections du fantôme 1 (figure 3.3) que nous reconstruisons sur une grille de 160 pixels de côté. Pour chaque algorithme, nous analysons l'erreur relative entre l'image reconstruite et l'original. Les deux cas suivants sont étudiés :

- nous laissons l'algorithme converger (figures 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 et 3.19) ;
- nous comparons les images obtenues au bout de 20 itérations (figures 3.17, 3.18 et 3.20).

Nous avons tracé sur ces figures le profil vertical des images obtenues. La position du profil est définie sur le schéma 3.3.

Les profils obtenus avec les algorithmes non régularisés présentent des oscillations que n'ont pas les profils obtenus avec la régularisation. En effet, avec cette dernière, les fortes variations d'atténuation de l'image sont pénalisées et une solution lissée est favorisée. Pour tous les algorithmes, la régularisation permet aussi de diminuer l'erreur par rapport à l'original, sauf pour Résidu Minimal convergé et LSQR convergé où les grandes oscillations diminuent l'écart par rapport à l'original et où la norme du résidu converge vers un palier.

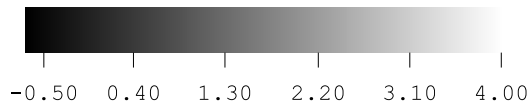
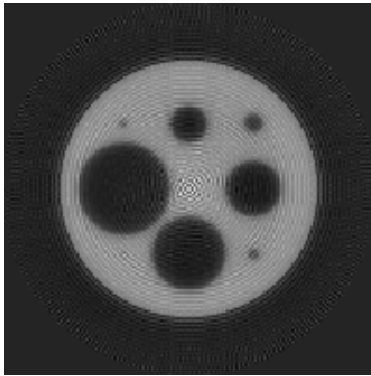


FIG. 3.7: Image obtenue par CGLS sans régularisation pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 5 itérations

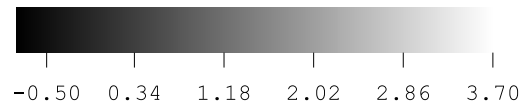
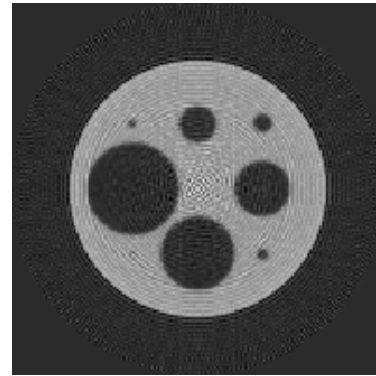


FIG. 3.8: Image obtenue par RRLS sans régularisation pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 9 itérations

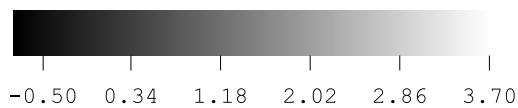
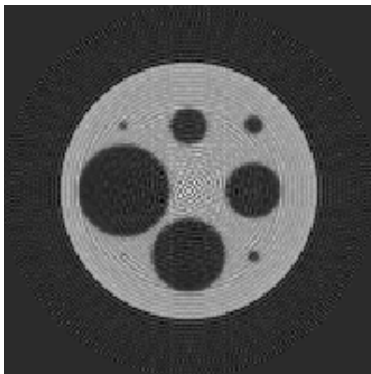


FIG. 3.9: Image obtenue par LSQR sans régularisation pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 9 itérations

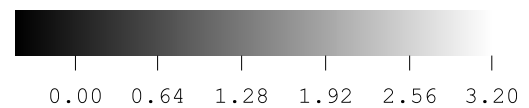
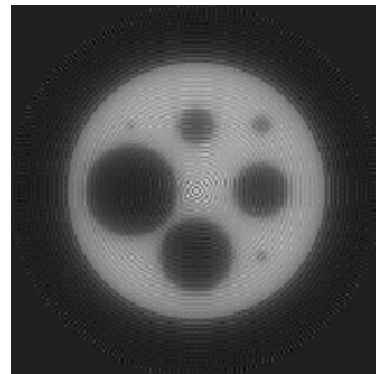


FIG. 3.10: Image obtenue par Résidu Minimal sans régularisation pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 6 itérations

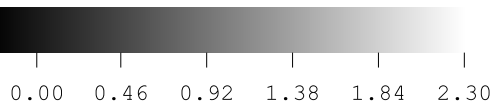
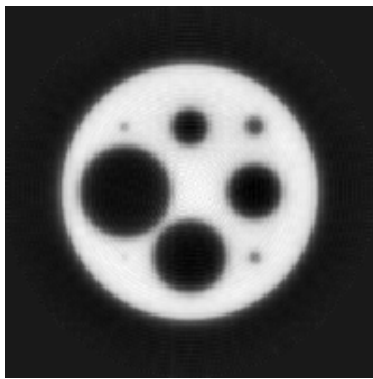


FIG. 3.11: Image obtenue par CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 5 itérations

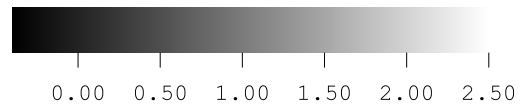
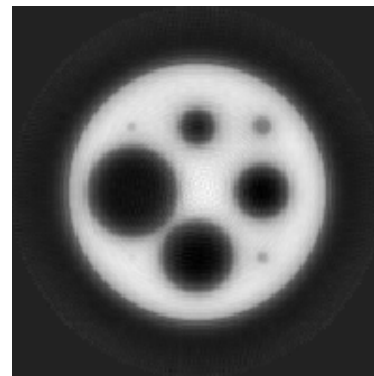


FIG. 3.12: Image obtenue par RRLS régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 15 itérations

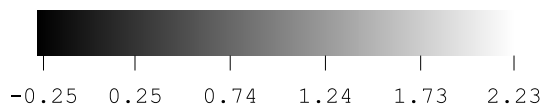
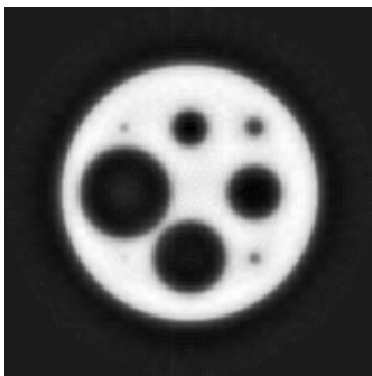


FIG. 3.13: Image obtenue par LSQR régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 15 itérations

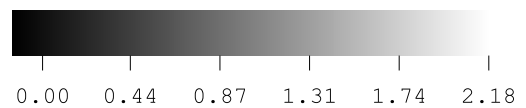
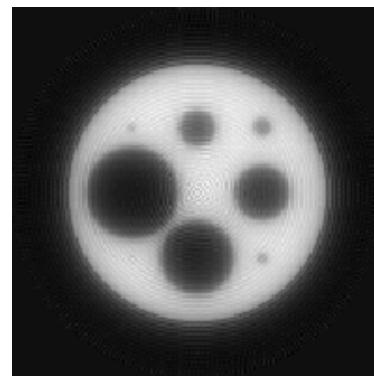


FIG. 3.14: Image obtenue par Résidu Minimal régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté au bout de 6 itérations

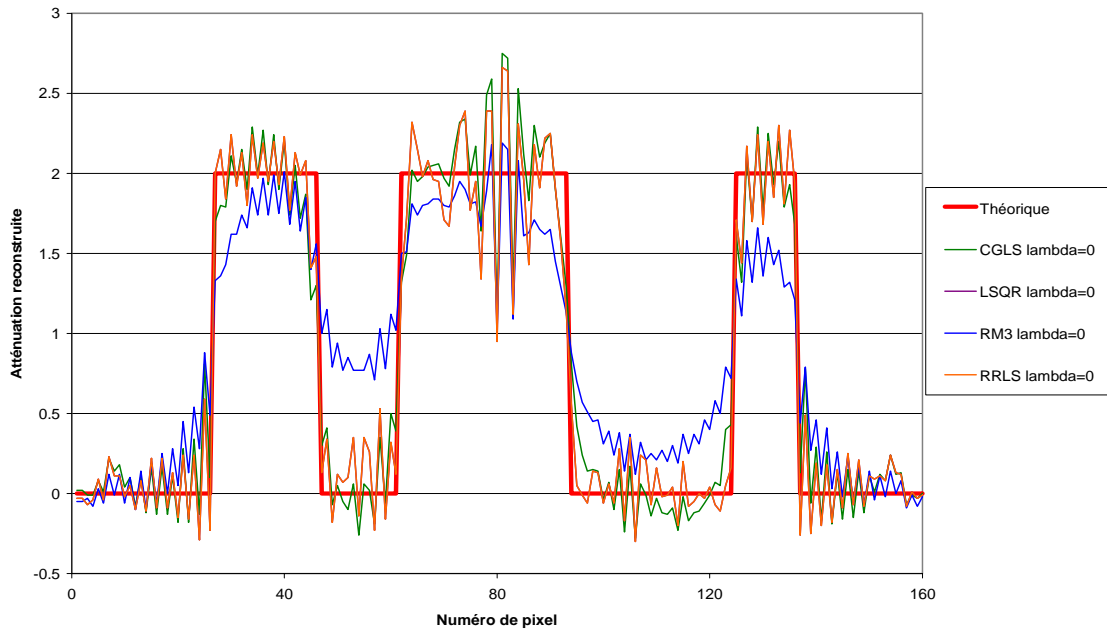


FIG. 3.15: Profils obtenus avec les différents algorithmes non régularisés après avoir atteint le critère de convergence

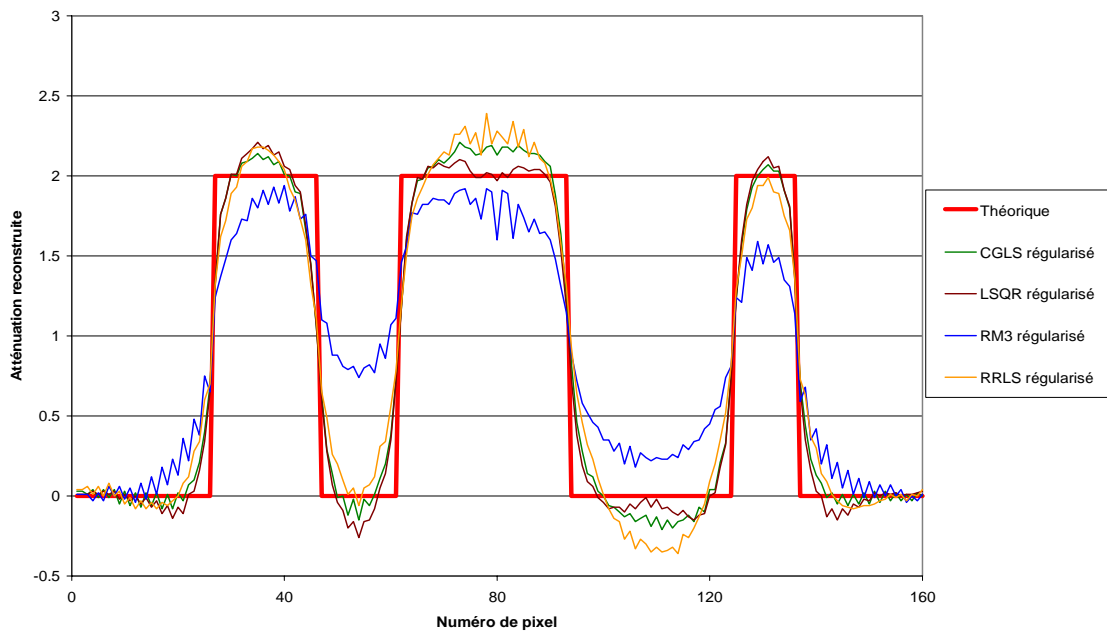


FIG. 3.16: Profils obtenus avec les différents algorithmes régularisés après avoir atteint le critère de convergence

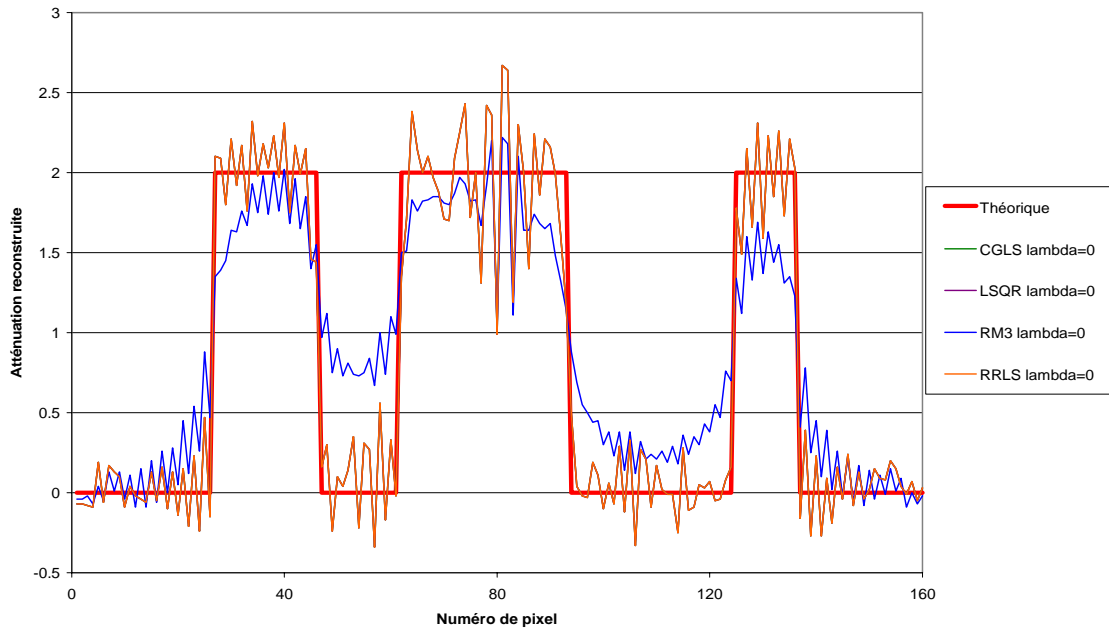


FIG. 3.17: Profils obtenus avec les différents algorithmes non régularisés après 20 itérations

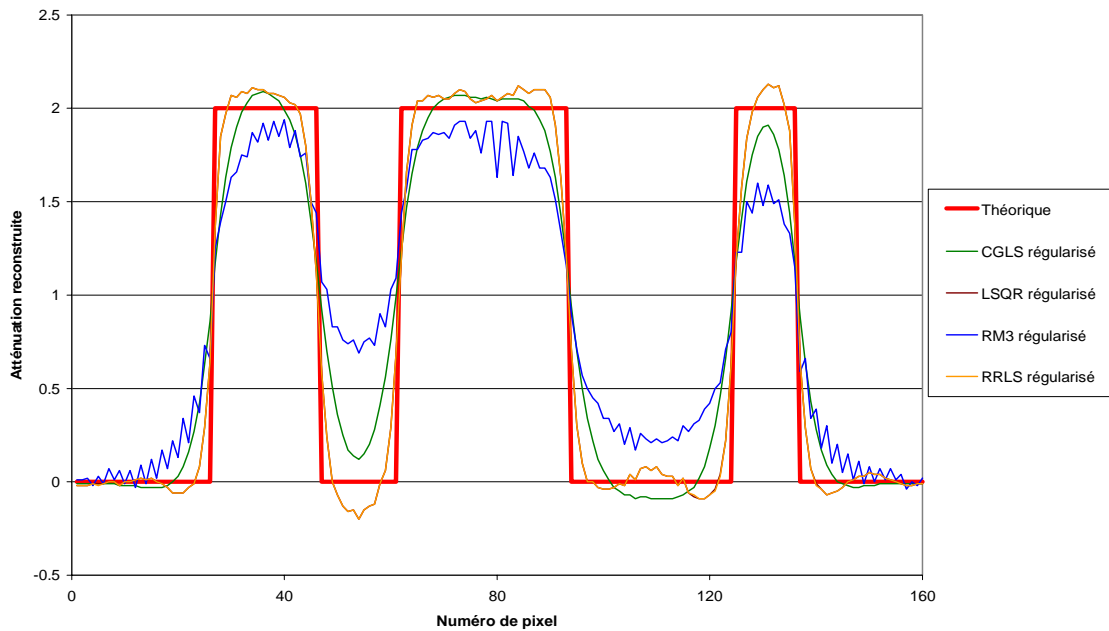


FIG. 3.18: Profils obtenus avec les différents algorithmes régularisés après 20 itérations

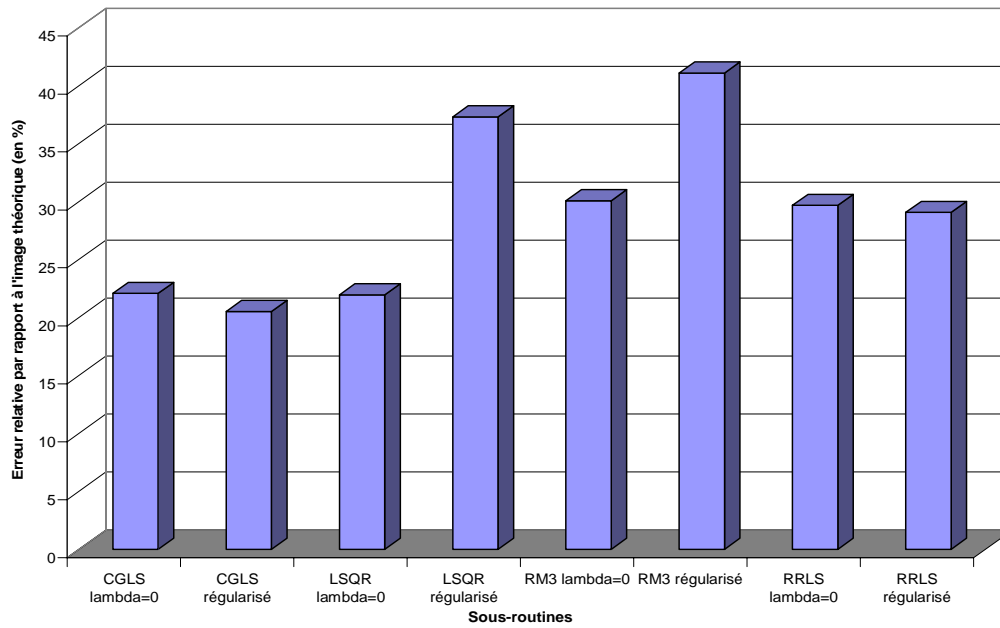


FIG. 3.19: Erreur par rapport à l'original pour chaque algorithme après avoir atteint le critère de convergence

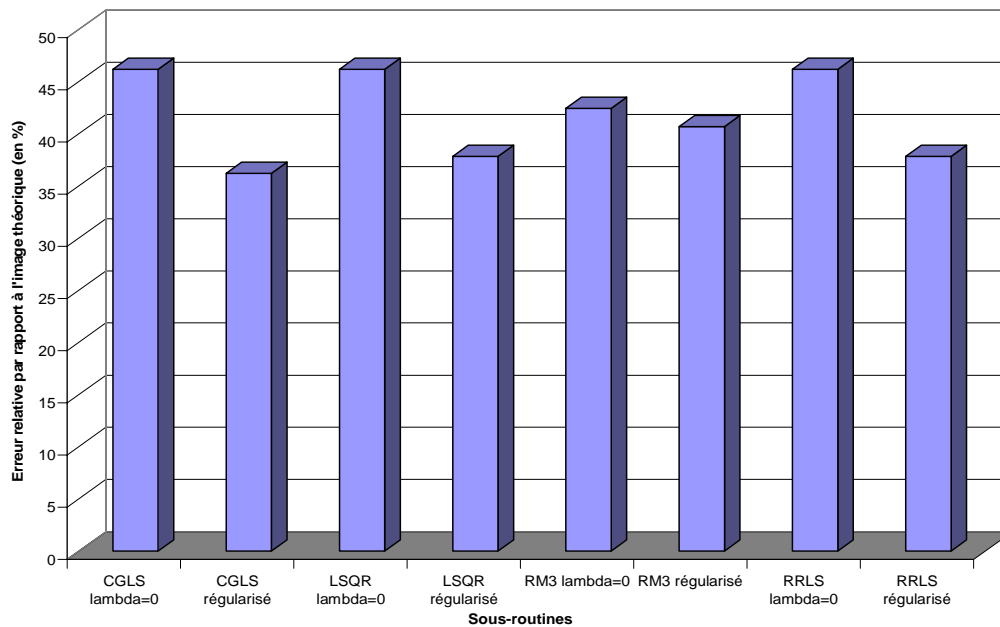


FIG. 3.20: Erreur par rapport à l'original pour chaque algorithme après 20 itérations

La **régularisation paraît nécessaire** pour obtenir une image sans oscillations, mais la régularisation entraîne une plus mauvaise reconstruction des fronts !

Comparons maintenant l'”exactitude” de chaque algorithme par rapport à l'original (figures 3.19 et 3.20). Nous mesurons l'erreur relative entre l'image reconstruite et l'image théorique par la formule suivante :

$$\frac{\sum_{n^2} |F_i - F_{i\text{théorique}}|}{\sum_{n^2} |F_{i\text{théorique}}|} \quad (3.7)$$

Le **plus fidèle** est **CGLS**, suivi par RRLS. Vient ensuite LSQR, puis enfin le Résidu Minimal.

3.3.5 Lien bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction

L'algorithme sélectionné servira à reconstruire des mesures réelles. Or toute mesure réelle comporte du bruit de différentes origines.

Regardons quelle est l'influence du bruit sur les mesures sur l'erreur de reconstruction pour les algorithmes retenus, en version régularisée.

Pour étudier cela, nous prenons nos mesures simulées (atténuations linéiques) du fantôme 1 (figure 3.3) auxquelles nous ajoutons du bruit avec une amplitude variable (en pourcentage de l'amplitude des mesures). Nous reconstruisons les images sur une grille de 160 pixels de côté et nous comparons ces images avec l'image théorique du fantôme 1.

Ajout de bruit blanc

Le bruit est fourni par un générateur de nombres aléatoires. Nous traçons l'évolution de l'erreur sur les reconstructions obtenues en fonction du niveau de bruit, pour différents nombres de mesures (courbes 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 et 3.26). L'amplitude du bruit est imposée en pourcentage de l'amplitude des mesures.

Nous obtenons un comportement identique pour CGLS régularisé, LSQR régularisé et RRLS régularisé. Le Résidu Minimal à trois vecteurs de descente régularisé nous donne toujours des images plus éloignées de l'image théorique que celles obtenues par les autres algorithmes, sauf pour la figure 3.26 où nous avons un croisement des courbes.

Les courbes ont globalement une évolution monotone en fonction de la proportion de bruit. L'ajout d'un bruit blanc jusqu'à 20 % de la gamme des mesures change peu les images obtenues. En effet, le lissage engendré par la régularisation atténue l'effet de ce bruit.

Avec un bruit inférieur à 30 %, le bruit n'est pas prépondérant dans les mesures et la Validation Croisée Généralisée arrive à déterminer un paramètre de régularisation λ qui atténue ce bruit. Les courbes des figures 3.21 et 3.26 présentent une forte croissance de l'erreur à partir de 30 % de bruit blanc. Au-delà de cette valeur, le bruit est tellement important que la Validation Croisée Généralisée n'arrive plus à déterminer un bon paramètre de régularisation et le lissage ne peut plus contrebalancer l'effet du bruit.

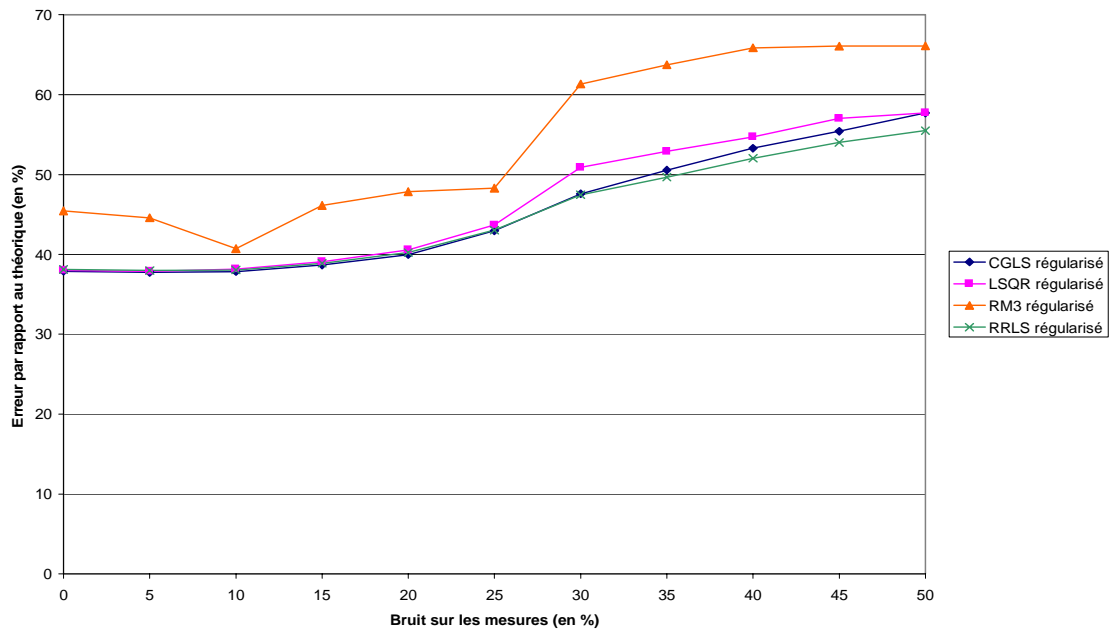


FIG. 3.21: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit blanc avec 50 rotations, 31 projections et 160 pixels de côté

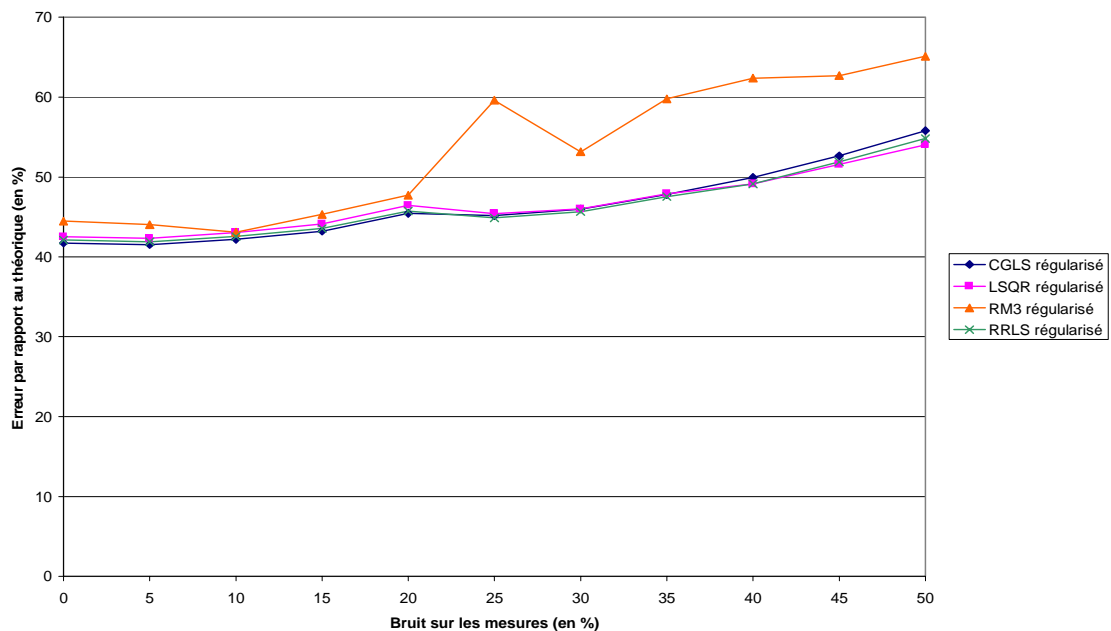


FIG. 3.22: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit blanc avec 64 rotations, 41 projections et 160 pixels de côté

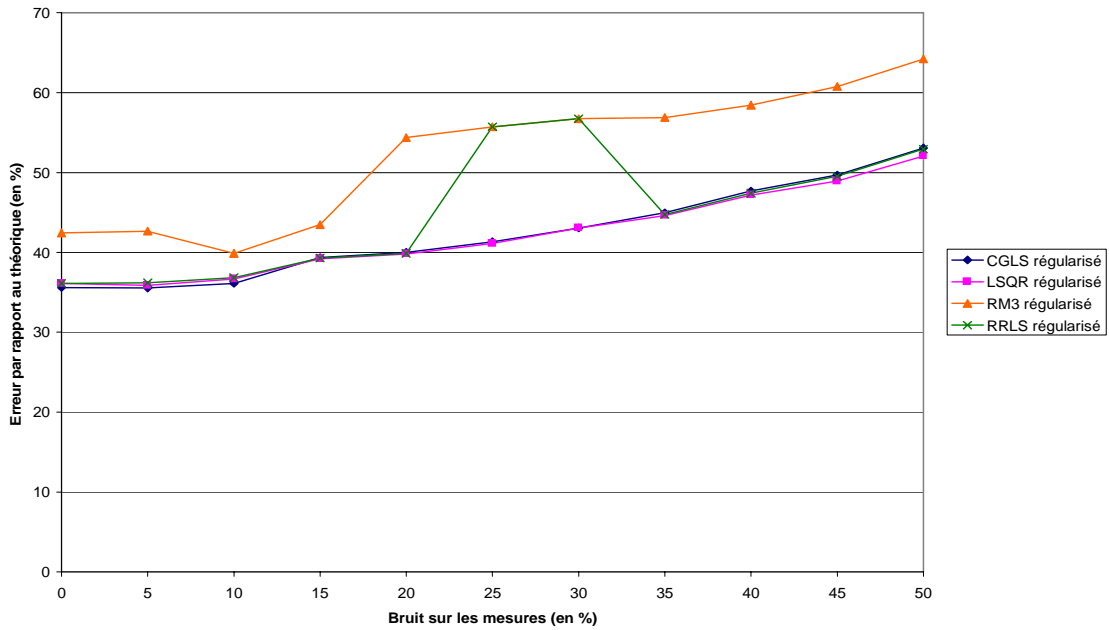


FIG. 3.23: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit blanc avec 80 rotations, 51 projections et 160 pixels de côté

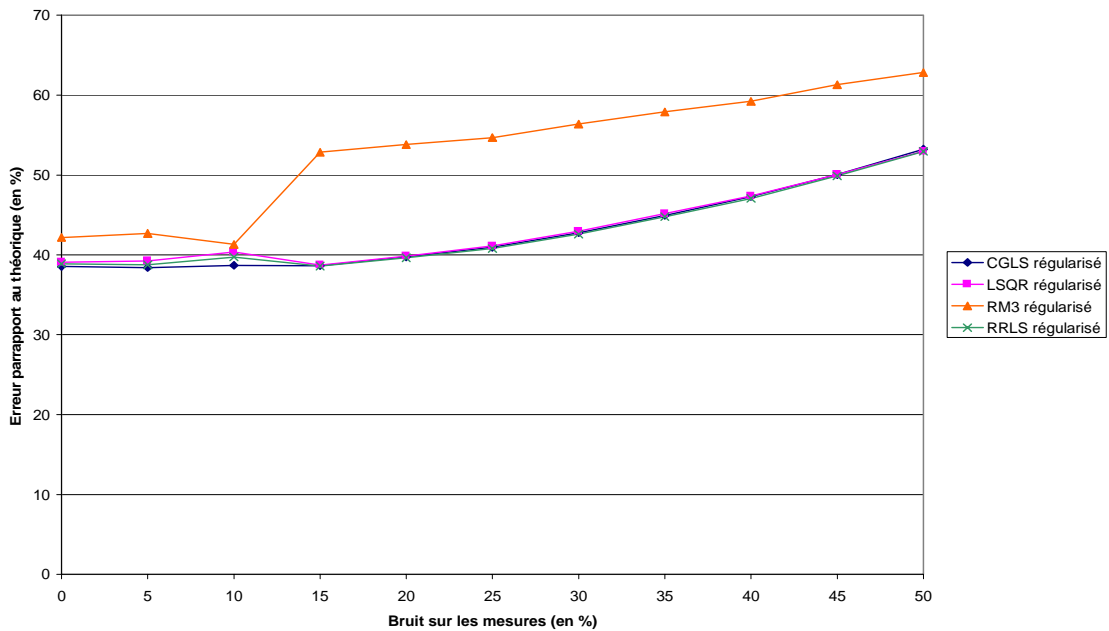


FIG. 3.24: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit blanc avec 96 rotations, 61 projections et 160 pixels de côté

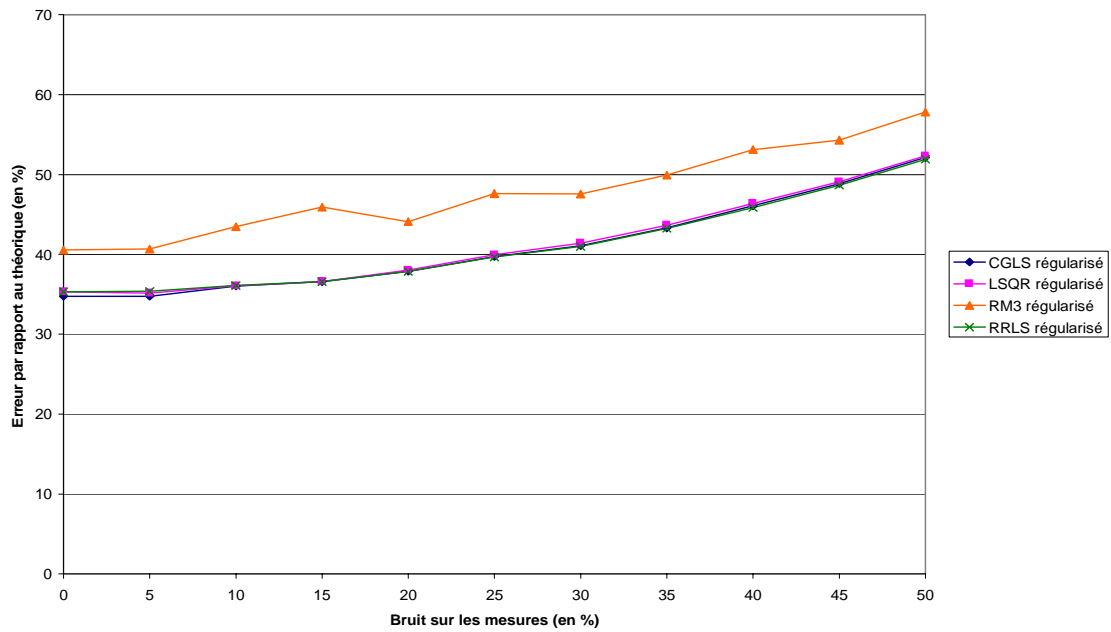


FIG. 3.25: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit blanc avec 112 rotations, 71 projections et 160 pixels de côté

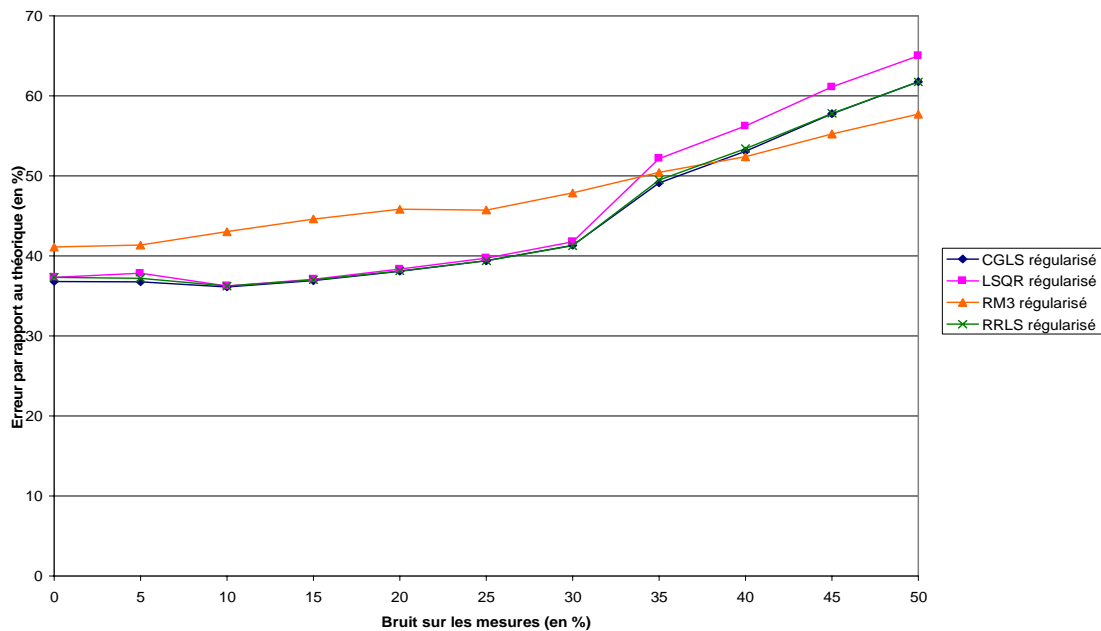


FIG. 3.26: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit blanc avec 127 rotations, 81 projections et 160 pixels de côté

Ajout de bruit de faibles fréquences

Dans ce paragraphe, nous rajoutons aux mesures simulées du fantôme 1 du bruit de faible fréquence. Pour générer ce bruit, nous utilisons un générateur de nombres aléatoires pour avoir un bruit blanc, nous calculons sa transformée de Fourier, nous mettons à zéro les contributions des fréquences au-dessus d'une valeur choisie et enfin nous calculons la transformée de Fourier inverse de ce signal. La fréquence de coupure choisie est la moitié de la fréquence maximale. La courbe 3.27 montre l'allure du bruit de faibles fréquences obtenu pour 127 rotations et 81 rotations.

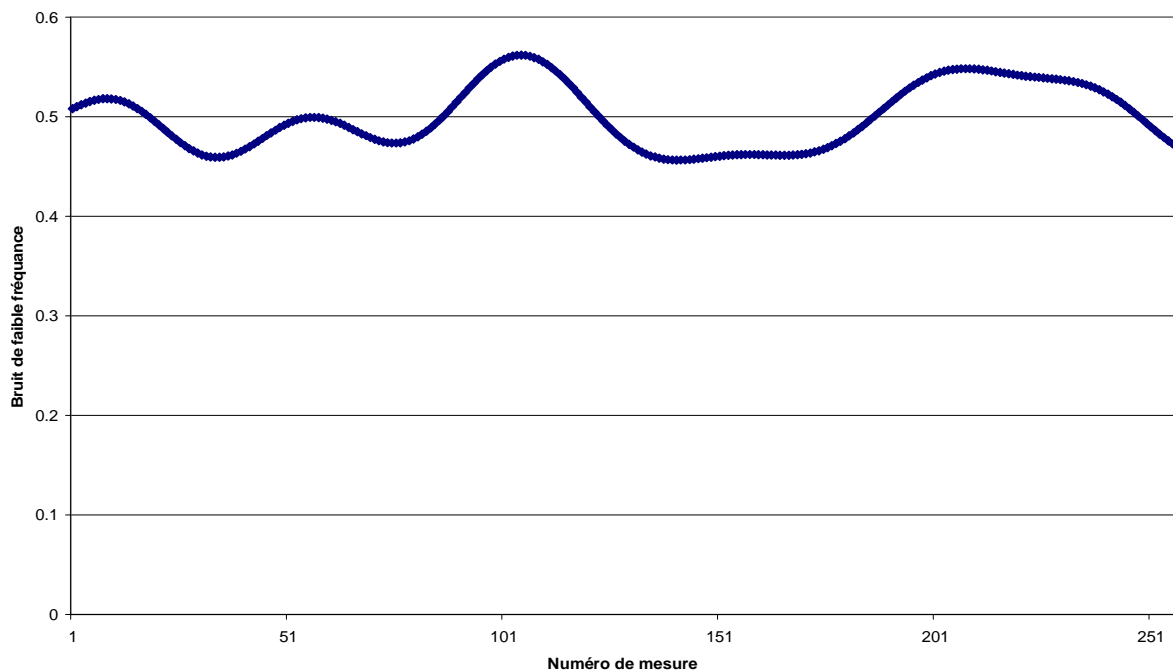


FIG. 3.27: Bruit de faibles fréquences pour 127 rotations et 81 projections

Nous traçons l'évolution de l'erreur sur les reconstructions obtenues en fonction du niveau de bruit, pour différents nombres de mesures (courbes 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32 et 3.33). L'amplitude du bruit est donnée en pourcentage de l'amplitude des mesures.

Toutes les courbes ont une évolution semblable. L'erreur entre les reconstructions et l'image théorique augmente en fonction du niveau de bruit. Avec moins de 20 % de bruit, le Résidu Minimal régularisé donne toujours une erreur d'environ 10 % plus faible que les autres algorithmes.

L'erreur croît plus fortement que précédemment. Ici, le bruit est de faible fréquence. Il n'ajoute plus une valeur aléatoire à chaque mesure, mais il ajoute les valeurs de sinusoides sur plusieurs mesures successives. Le bruit est du même ordre fréquentiel que les mesures. La régularisation ne peut pas faire la différence entre le bruit et les mesures. L'algorithme les reconstruit donc de la même façon et ne les atténue pas par le lissage.

Quand le nombre de mesures augmente, l'erreur entre les reconstructions et l'image théorique diminue globalement. En effet, le système est de moins en moins sous-déterminé.

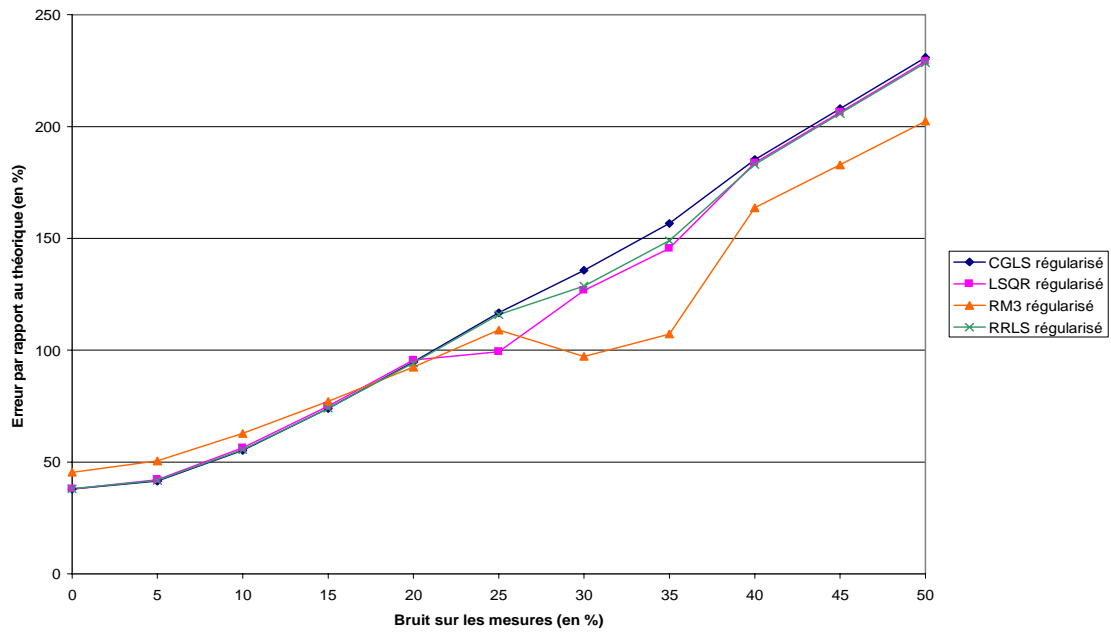


FIG. 3.28: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit de faibles fréquences avec 50 rotations et 31 projections

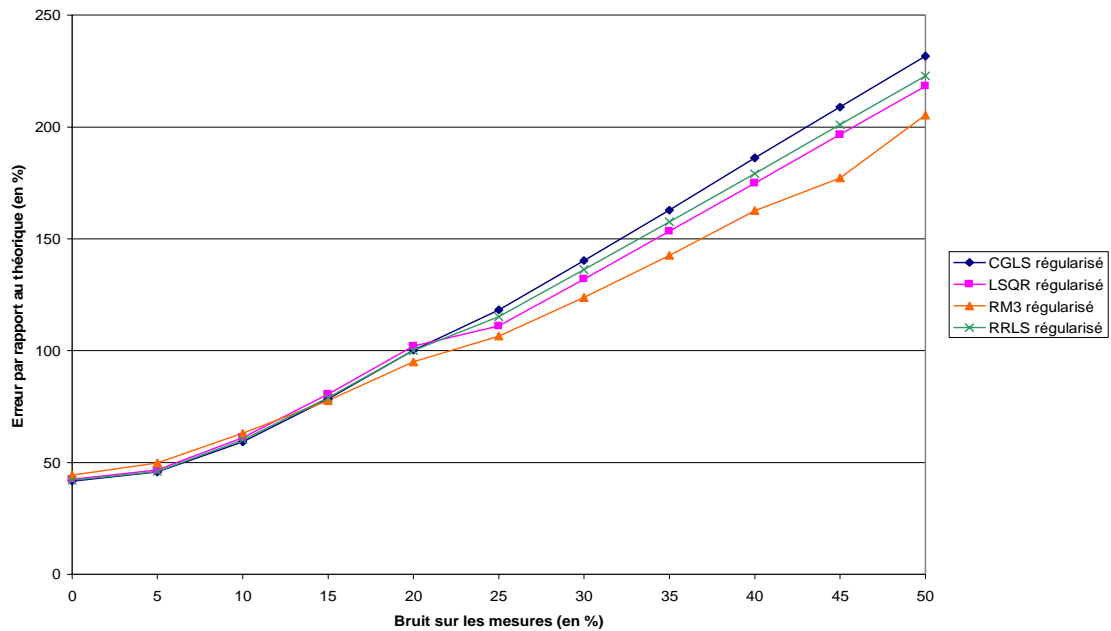


FIG. 3.29: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit de faibles fréquences avec 64 rotations et 41 projections

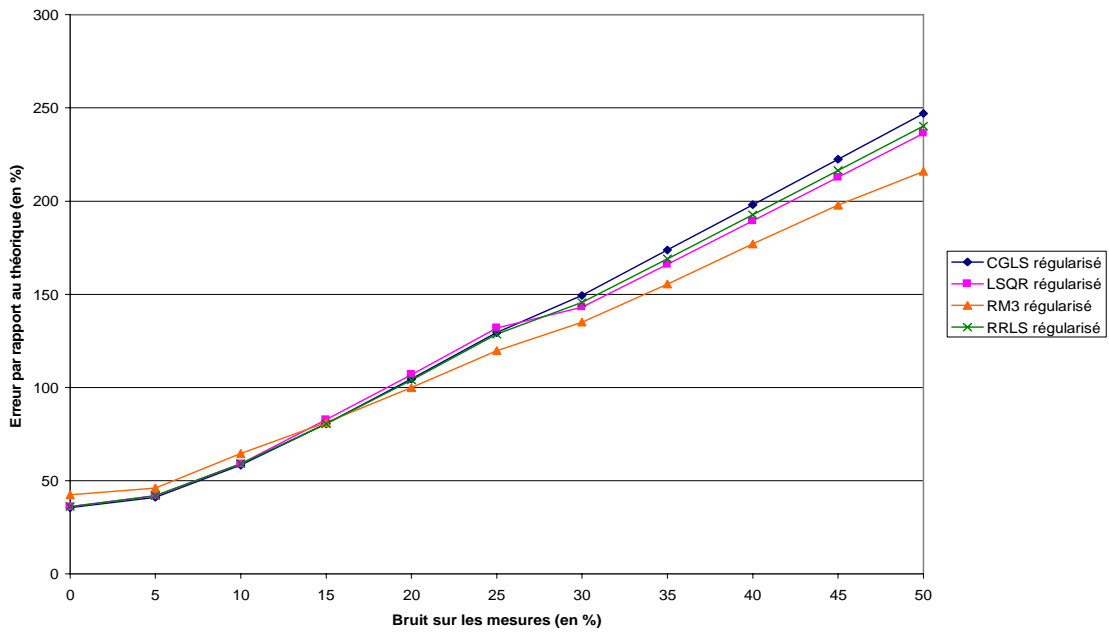


FIG. 3.30: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit de faibles fréquences avec 80 rotations et 51 projections

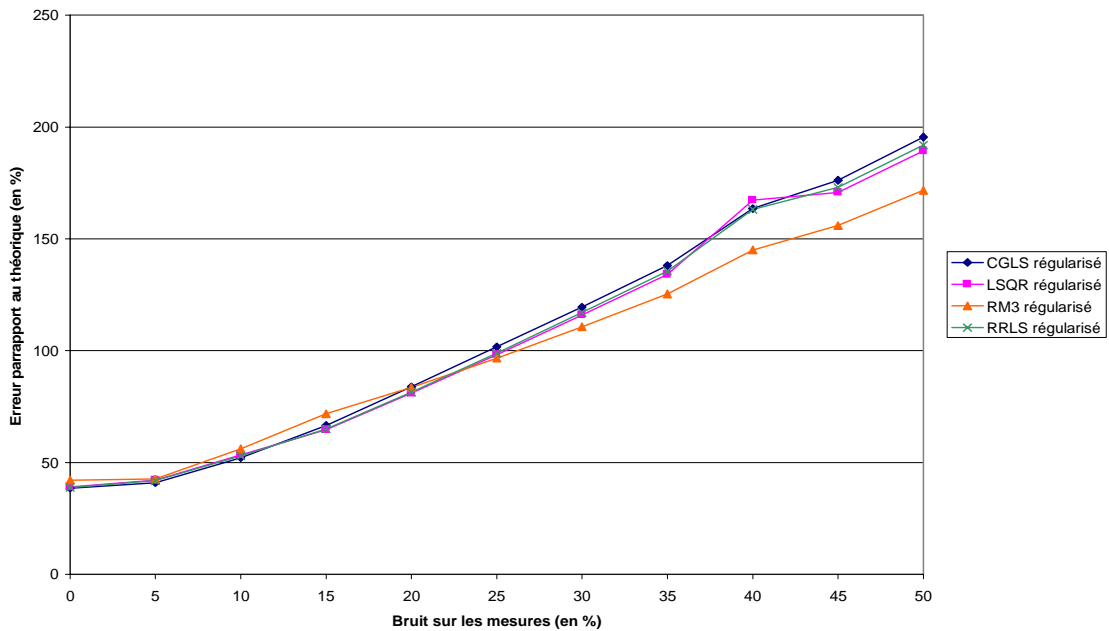


FIG. 3.31: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit de faibles fréquences avec 96 rotations et 61 projections

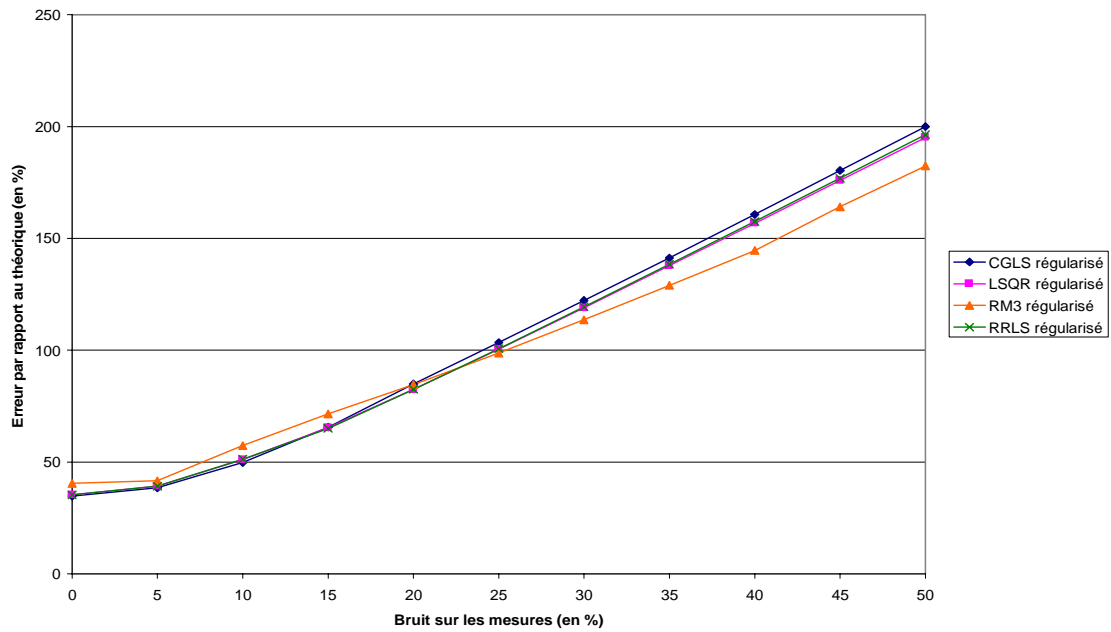


FIG. 3.32: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit de faibles fréquences avec 112 rotations et 71 projections

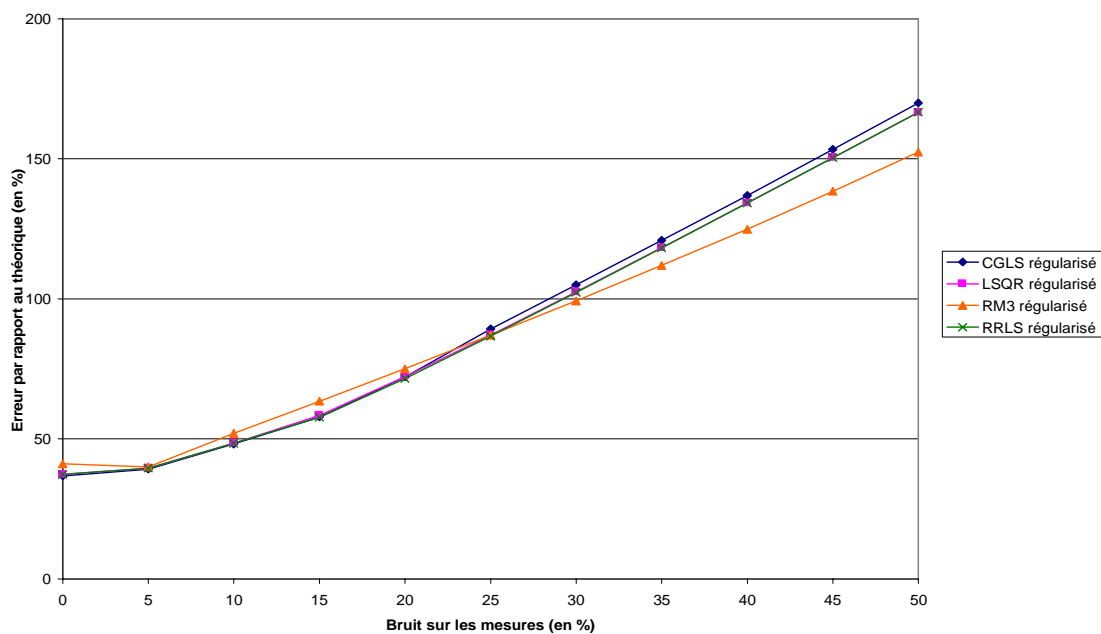


FIG. 3.33: Relation bruit sur les mesures - erreur sur la reconstruction pour un bruit de faibles fréquences avec 127 rotations et 81 projections

3.3.6 Conclusion de la comparaison des algorithmes

Nous avons vu que la régularisation éliminait les oscillations de reconstruction.

Les algorithmes comparés ont des comportements très proches. Mais l'algorithme CGLS converge vers une solution dont le résidu est de plus faible norme, est plus rapide, plus proche de l'image théorique et faiblement influencée par le bruit.

Pour ces deux raisons, nous décidons d'utiliser par la suite l'**algorithme CGLS** dans sa version **régularisée**.

3.4 Reconstructions de taux de vide

Après avoir testé les algorithmes sélectionnés sur des mesures simulées du fantôme 1, nous allons maintenant étudier le comportement de l'algorithme CGLS régularisé dans une situation plus proche de notre objectif final, qui concerne la cartographie d'écoulements diphasiques.

3.4.1 profils simulés

Nous avons simulé deux profils de taux de vide typiques : un profil parabolique [François, 2001] et un profil avec des pics de taux de vide en paroi [Hervieu, 1988] (figures 3.34 et 3.36). Afin de faciliter la simulation, nous avons considéré des écoulements axisymétriques dans une conduite cylindrique de 200 mm de diamètre intérieur avec une paroi de Plexiglas de 10 mm d'épaisseur. L'atténuation des différents matériaux est déduite des tables de Hubbell [Hubbell, 1969]. Les mesures sont présentées dans les figures 3.35 et 3.37.

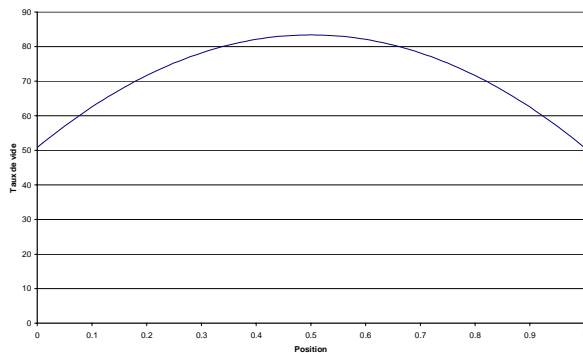


FIG. 3.34: Profil du taux de vide 1

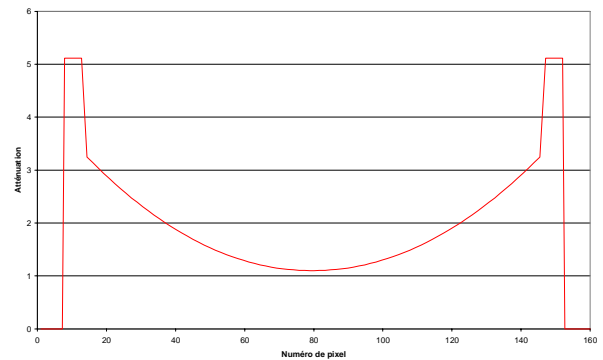


FIG. 3.35: Profil d'atténuation correspondant aux mesures simulées du taux de vide 1

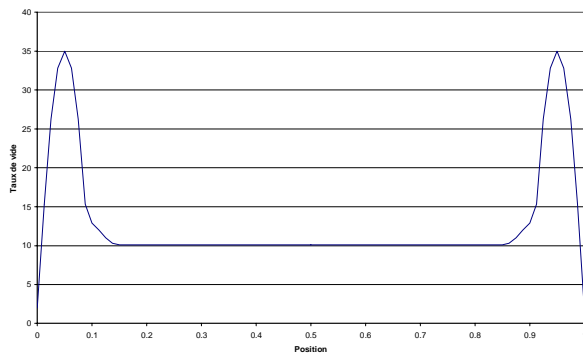


FIG. 3.36: Profil du taux de vide 2

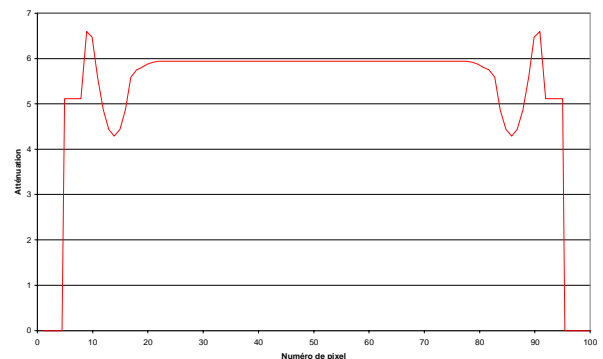


FIG. 3.37: Profil d'atténuation correspondant aux mesures simulées du taux de vide 2

3.4.2 Reconstructions de ces profils

Visualisons les reconstructions obtenues par l'algorithme CGLS régularisé pour ces mesures simulées de taux de vide avec 127 rotations et 81 translations (figures 3.38 et 3.39).

Dans la moitié centrale de la colonne, les atténuations sont bien reconstruites avec un écart relatif inférieur à 6,5 %.

Par la régularisation, l'image est lissée pour éliminer les oscillations. Ce lissage a lieu aussi près des fronts, c'est à dire à la transition paroi - écoulement diphasique et à la transition paroi - vide. Cela explique le comportement des courbes au niveau des parois et entraîne un écart entre l'atténuation théorique et les atténuations reconstruites de 29 % pour le taux de vide 1 et de 19 % pour le taux de vide 2. Pour ce dernier, les "pics" de taux de vide sont atténués et décalés!

Pour éviter ces problèmes liés à la présence de parois, nous cherchons à les éliminer artificiellement. Nous soustrayons l'image de la paroi seule de l'image obtenue pour l'ensemble paroi - écoulement diphasique (figures 3.40 et 3.41) ou nous soustrayons les mesures de la paroi seule des mesures paroi - écoulement diphasique avant reconstruction (figures 3.42 et 3.43).

Dans la moitié centrale de la colonne, l'écart entre les reconstructions des taux de vide et l'atténuation théorique reste inférieur à 8 %.

Pour les différences d'images (figures 3.40 et 3.41), le résultat obtenu présente un étalement des parois du fait du lissage avec l'écoulement. Cela entraîne un écart entre l'atténuation théorique et l'atténuation reconstruite de l'écoulement diphasique jusqu'à 72 % sur une zone allant des parois à environ 30 % à 40 % de la colonne.

Pour les différences de mesures (figures 3.42 et 3.43), les parois ont bien été éliminées et il n'y a plus de lissage avec les parois, mais un lissage entre l'écoulement diphasique et le fond nul qui intervient sur environ 40 % de la colonne. Cela donne une erreur de 59 % sur l'atténuation reconstruite, donc une erreur importante sur le taux de vide reconstruit. Pour le taux de vide 2, les "pics" de taux de vide disparaissent!

Du fait de la présence des fronts au niveau des transitions paroi - écoulement diphasique et paroi - fond, l'image présente une mauvaise reconstruction de l'atténuation de l'écoulement diphasique dans ces zones, donc une erreur importante sur le taux de vide estimé.

Nous devons donc **inclure des méthodes dans l'algorithme sélectionné pour prendre en compte ces fronts**. C'est ce que nous ferons dans la partie suivante.

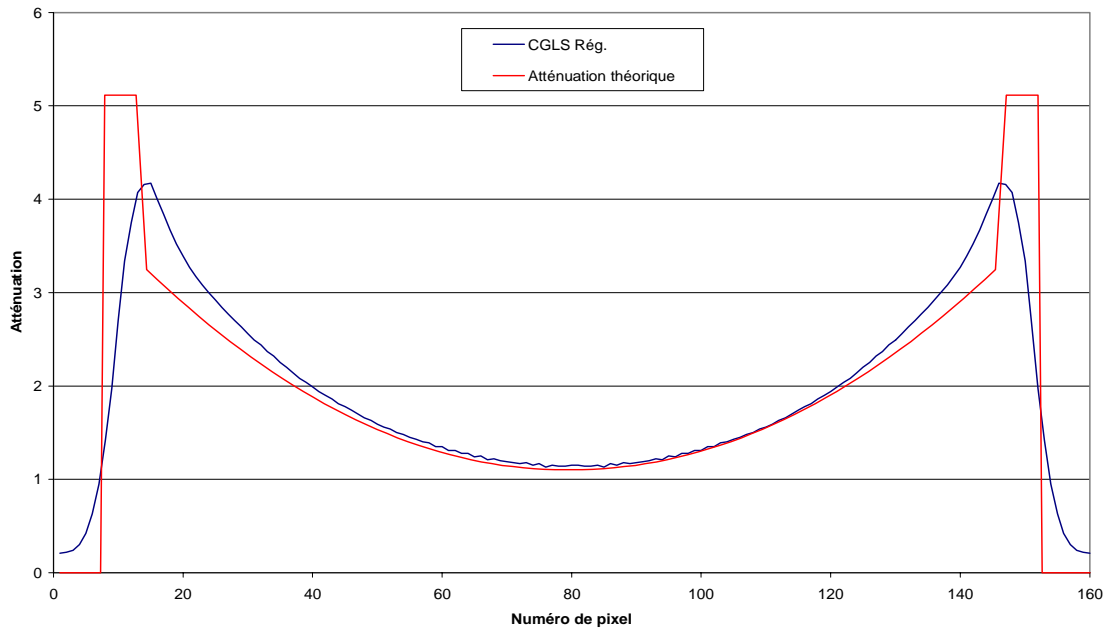


FIG. 3.38: Reconstruction par CGLS régularisé des mesures simulées du taux de vide 1

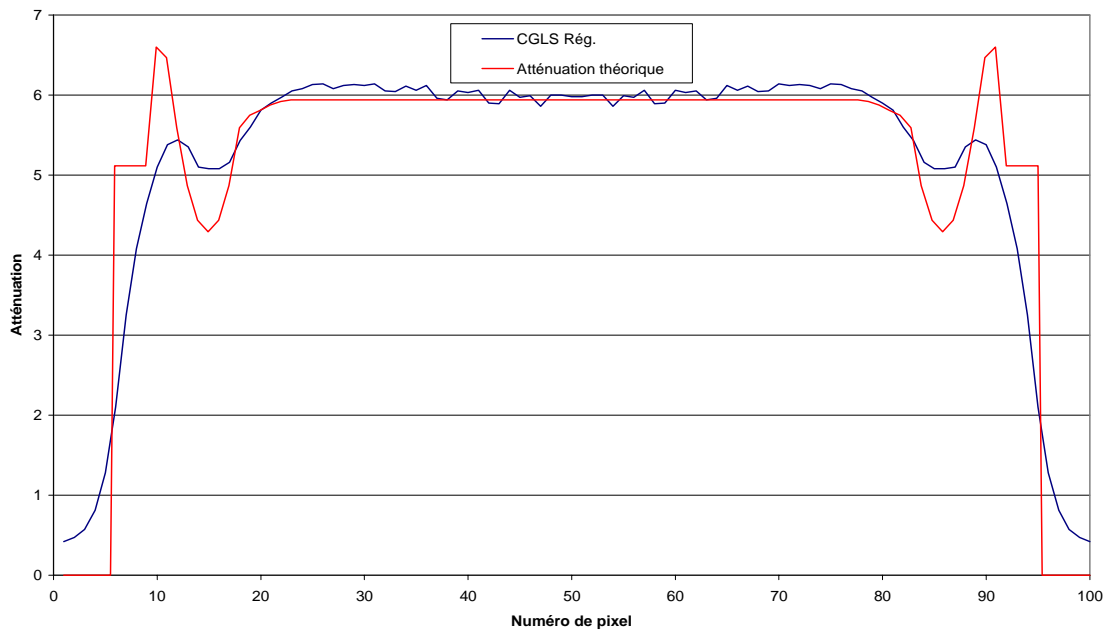


FIG. 3.39: Reconstruction par CGLS régularisé des mesures simulées du taux de vide 2

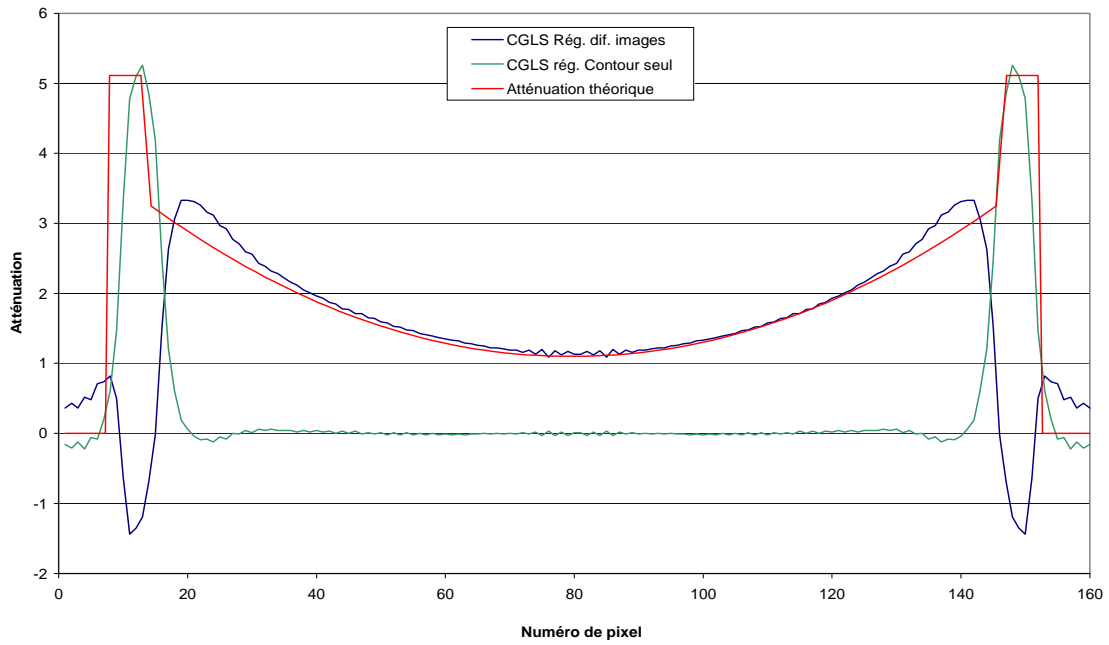


FIG. 3.40: Différence entre les reconstructions par CGLS régularisé des mesures simulées d'un ensemble taux de vide 1 - parois et des mesures simulées des parois seules

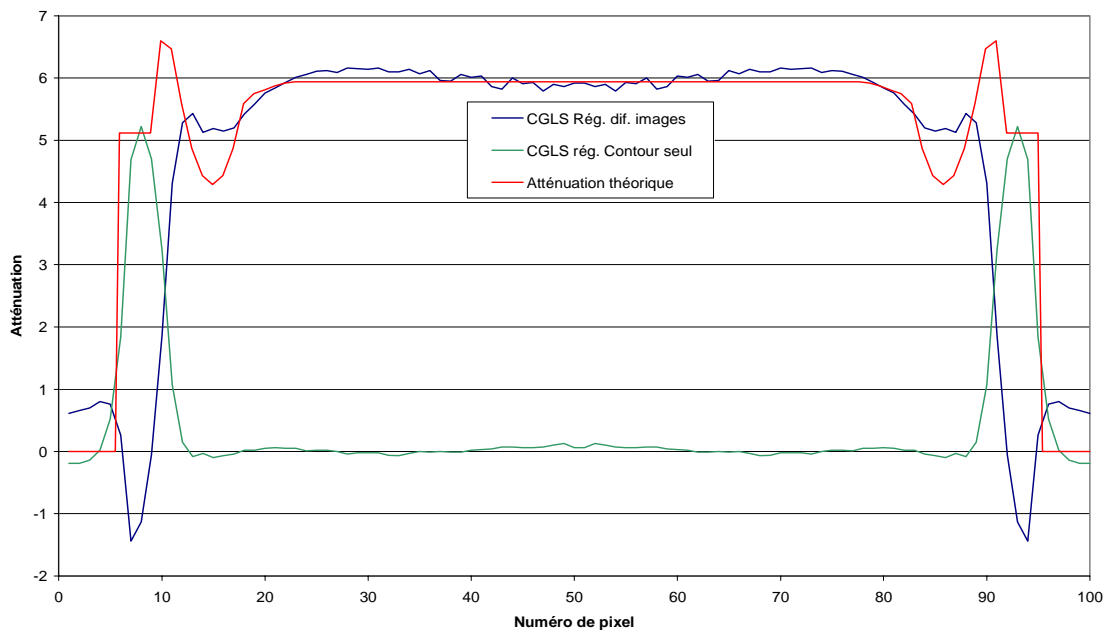


FIG. 3.41: Différence entre les reconstructions par CGLS régularisé des mesures simulées d'un ensemble taux de vide 2 - parois et des mesures simulées des parois seules

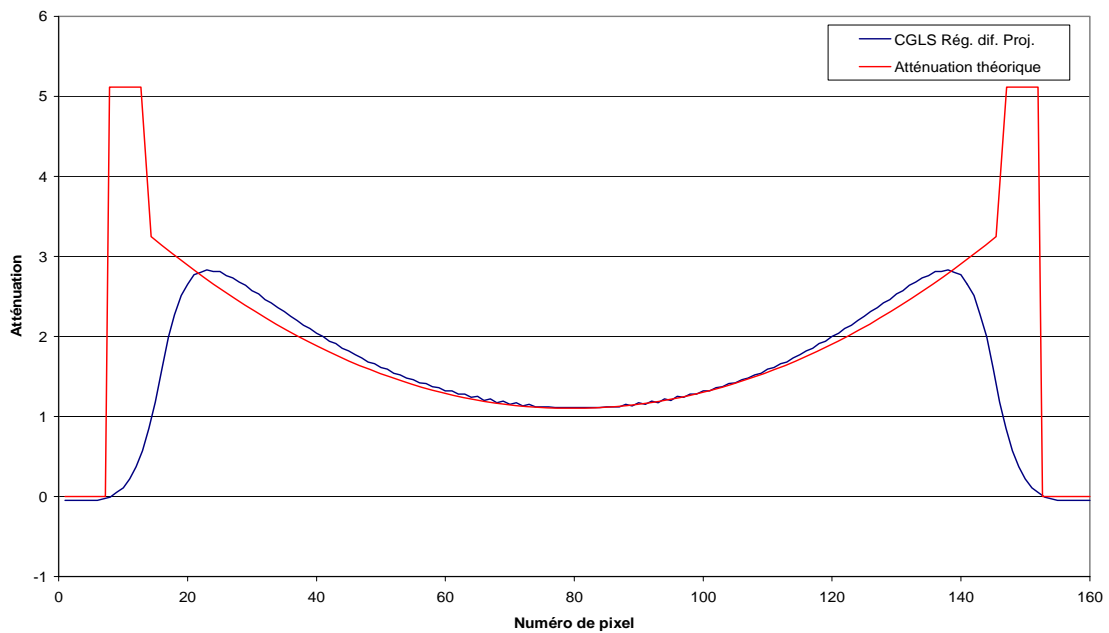


FIG. 3.42: Reconstruction par CGLS régularisé de la différence entre les mesures simulées d'un ensemble taux de vide 1 - parois et les mesures simulées des parois seules

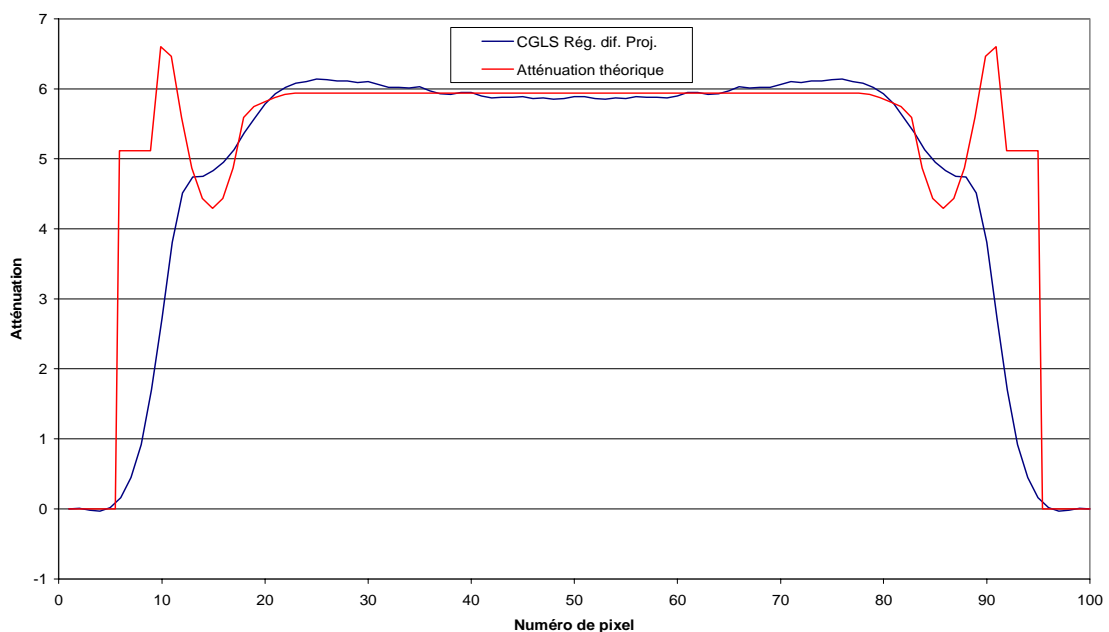


FIG. 3.43: Reconstruction par CGLS régularisé de la différence entre les mesures simulées d'un ensemble taux de vide 2 - parois et les mesures simulées des parois seules

3.5 Utilisation des algorithmes spatialement adaptatifs

Dans cette partie, nous allons étudier les algorithmes spatialement adaptatifs.

Ces derniers utilisent plusieurs paramètres, comme un paramètre d'échelle qui conditionne la détection des discontinuités. Nous allons tester différents choix de ces paramètres et différentes conditions de fonctionnement afin d'assurer une meilleure reconstruction des fronts.

3.5.1 Méthode de V. La

Pour cette méthode, il faut déterminer deux paramètres (section 2.3.6) :

- le paramètre d'échelle δ : si le gradient est supérieur à ce paramètre, un front est détecté et la régularisation est diminuée ;
- le diviseur : nous divisons le paramètre de régularisation par ce coefficient pour les pixels où un front est détecté.

Pour la recherche des discontinuités, cette méthode requiert une première image. Elle est fournie par l'algorithme CGLS régularisé.

Nous avons vérifié qu'un diviseur de 1 ou un paramètre δ très grand nous donnait bien la même image que CGLS régularisé.

Détermination de δ et du diviseur sur les mesures brutes

Nous essayons de trouver un point de fonctionnement en deux étapes :

- nous fixons le diviseur et nous cherchons le paramètre δ optimal en faisant plusieurs essais ;
- avec ce paramètre δ , nous faisons varier le diviseur. En comparant les différents profils obtenus, nous choisissons le diviseur pour lequel l'algorithme reconstruit mieux les discontinuités.

Nous prenons toujours les mesures simulées du fantôme 1 (figure 3.3) avec 127 rotations et 81 projections que nous reconstruisons sur une image de 160 pixels de côté.

Nous faisons varier le diviseur en fixant $\delta = 0,9$ (figure 3.44). Cette valeur, légèrement inférieure à 1 (demi-amplitude de l'atténuation du Plexiglas du fantôme 1), devrait permettre de détecter des fronts.

Nous éliminons tous les cas où les profils présentent des oscillations. Les valeurs du diviseur 300, 400 et 500 donnent des profils identiques. Nous prenons la valeur 400 pour diviseur. Après avoir fait ce choix, nous faisons varier le paramètre δ (figure 3.45).

Il faut noter que pendant que nous faisons varier δ , certains cas nous donnaient des images avec une amplitude d'atténuation reconstruite très grande (par exemple, de -7,5 à 10, voire de -600 à 400). Il semblerait qu'une modification faible de ce paramètre puisse entraîner une divergence du résultat !

Pour $\delta = 2$ et $\delta = 10$, la même image qu'avec CGLS régularisé est obtenue. De tels δ sont au-dessus des fronts théoriques (dont l'amplitude est de 2). Les fronts ne sont plus détectés. Pour $\delta = 1,5$ aussi, une image identique à celle de CGLS régularisé est obtenue. Ce δ est inférieur

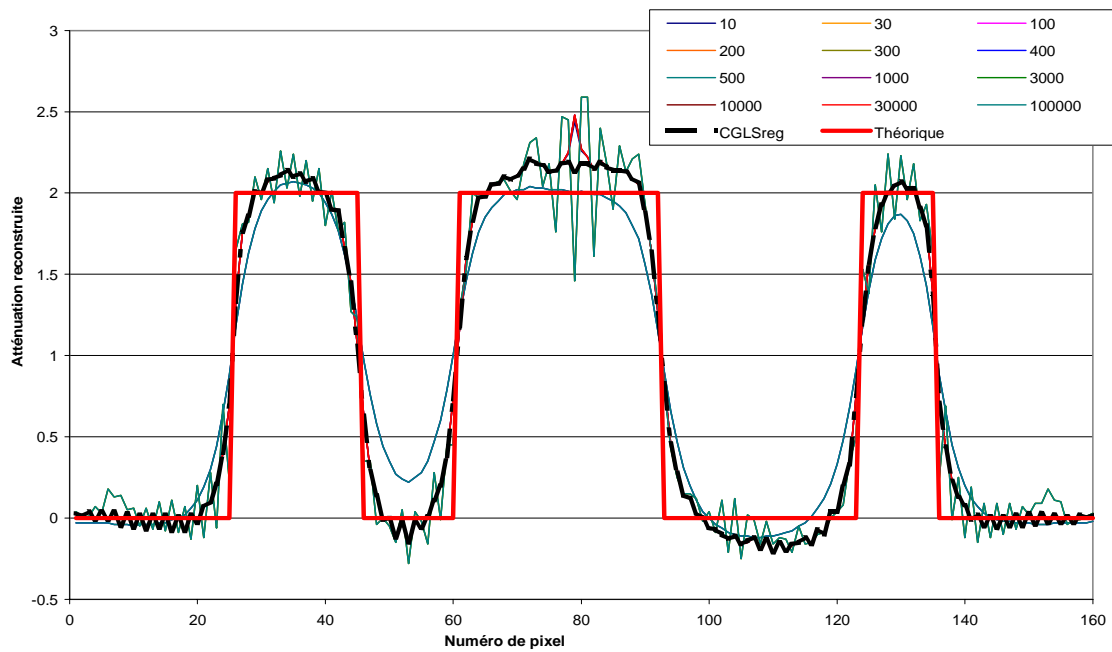


FIG. 3.44: Profils obtenus pour différents diviseurs et $\delta = 0,9$ par la méthode de V. La

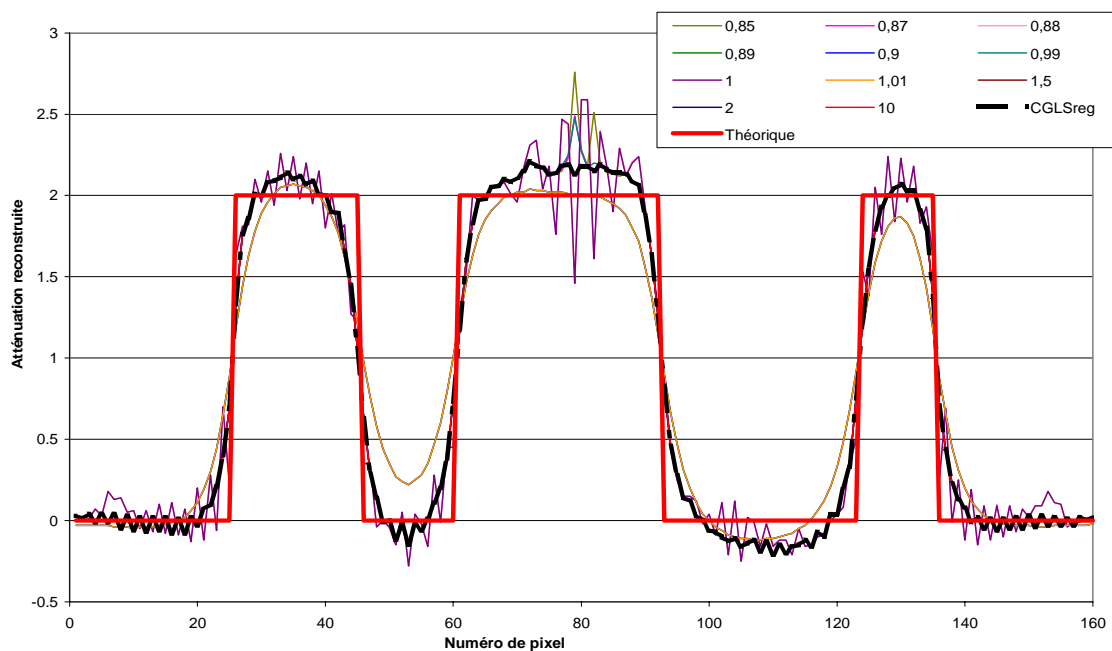


FIG. 3.45: Profils obtenus pour différents δ et un diviseur de 400 par la méthode de V. La

au front, mais le lissage dû au CGLS régularisé sur la première image diminue l'amplitude des fronts.

Sur les autres profils, nous n'observons **pas d'améliorations de la reconstruction des fronts** par rapport à CGLS régularisé.

Détermination de δ et du diviseur sur les mesures bruitées

Essayons de trouver ces paramètres en rajoutant du bruit blanc aux mesures à hauteur de 35 % de la gamme des mesures. Nous fixons $\delta = 0,9$ et faisons varier le diviseur (figure 3.46).

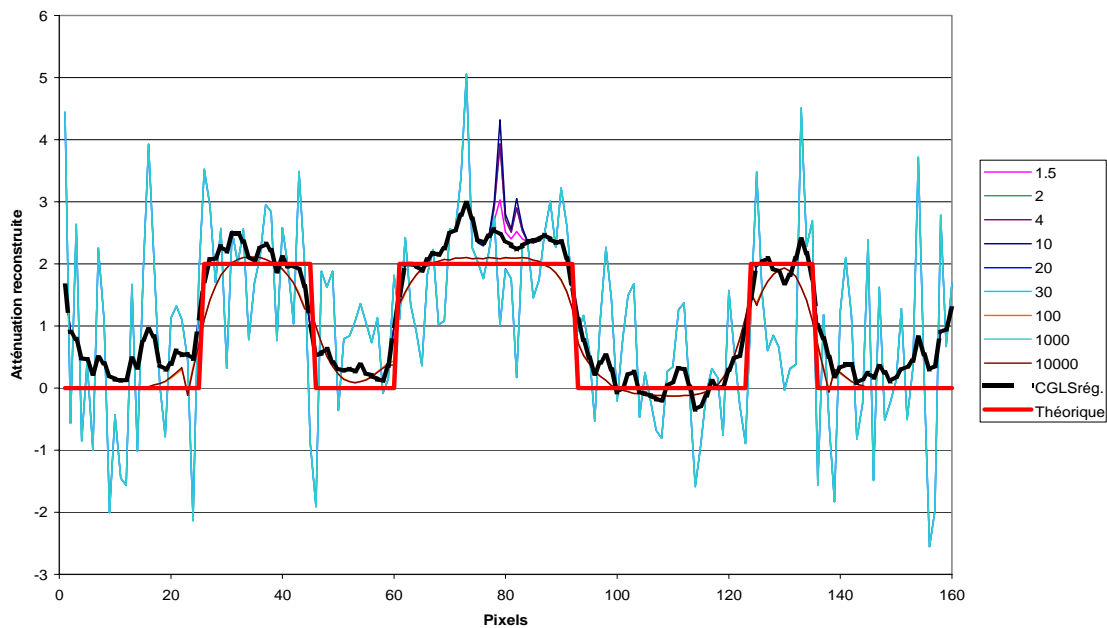


FIG. 3.46: Profils obtenus par la méthode de V. La pour différents diviseurs et $\delta = 0,9$ avec des mesures bruitées

Les courbes pour les valeurs de diviseurs 20, 30 et 1000 sont confondues et comportent beaucoup d'oscillations. Par contre, les courbes confondues pour des valeurs de diviseurs de 100 et 10000 sont plus lissées. Ces différences viennent du paramètre de régularisation déterminée par la Validation Croisée Généralisée qui varie en fonction du diviseur choisi.

Comme précédemment, nous n'observons **pas d'amélioration de la reconstruction des fronts** par rapport à CGLS régularisé.

Détermination de δ et du diviseur en résolvant un système sur-déterminé

Essayons de trouver ces paramètres en reconstruisant sur une image de 80 pixels à partir des données du fantôme 1 non bruitées. Nous imposons le diviseur à 10 et faisons varier δ . Nous éliminons les paramètres δ qui donnent une divergence et traçons, après un contrôle visuel de l'image, l'évolution en fonction de δ des dérivées premières moyenne et maximale (figure 3.47).

La dérivée moyenne est calculée de la façon suivante :

$$\frac{\sum_{n^2} (|F_i - F_{i-1}| + |F_i - F_{i-n}|)}{2n^2} \quad (3.8)$$

La dérivée maximale est donnée par :

$$\max_{n^2} (|F_i - F_{i-1}|, |F_i - F_{i-n}|) \quad (3.9)$$

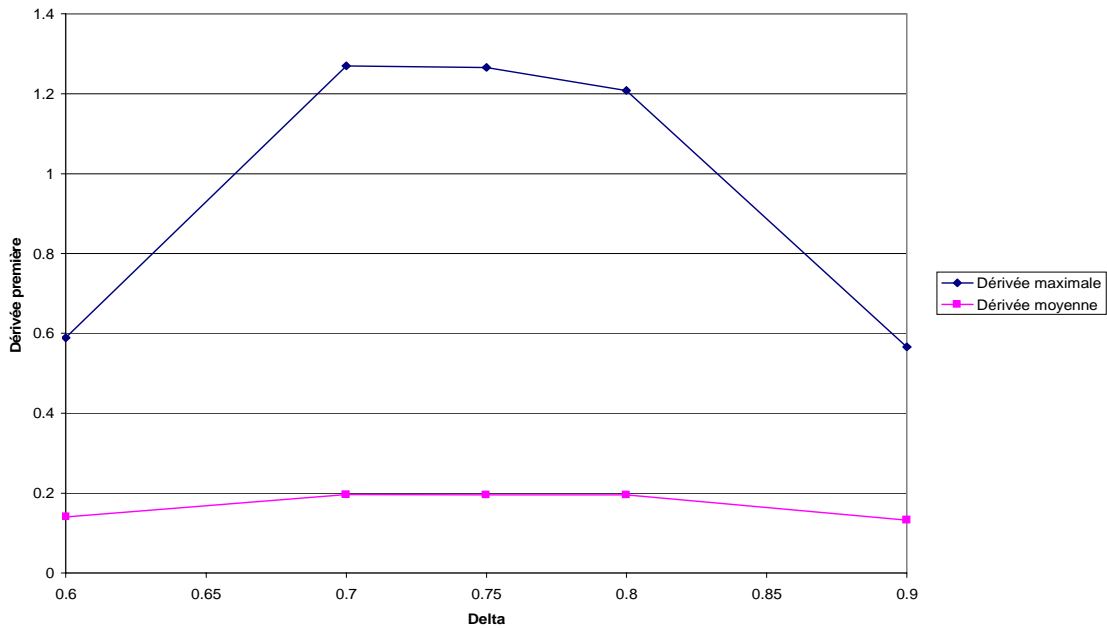


FIG. 3.47: Valeurs des dérivées premières des images de 80 pixels de côté obtenues par la méthode de V. La pour différents δ et un diviseur de 10

Les maxima des dérivées maximale et moyenne sont obtenus pour δ allant de 0,7 à 0,8. Nous prenons $\delta = 0,75$ et faisons varier le diviseur (figures 3.48 et 3.49).

Pour des diviseurs de 10 et 10 000, nous remarquons une amélioration de la reconstruction des fronts par rapport à CGLS régularisé, mais les profils sont les mêmes que celui obtenu par CGLS régularisé en imposant $\lambda = 5,05 \cdot 10^{-2}$. L'amélioration des fronts ne vient pas de la méthode de V. La, mais cette méthode influence la Validation Croisée Généralisée dans la détermination du paramètre de régularisation qui passe de $5,05 \cdot 10^{-1}$ à $5,05 \cdot 10^{-2}$. La régularisation est moins importante, donc le lissage est plus faible, ce qui améliore la reconstruction des fronts.

Si nous imposons $\lambda = 5,05 \cdot 10^{-2}$ (figure 3.49), les profils obtenus sont semblables à celui obtenu par CGLS régularisé avec $\lambda = 5,05 \cdot 10^{-2}$.

La méthode n'apporte donc **aucune amélioration de la reconstruction des fronts** par rapport à CGLS régularisé.

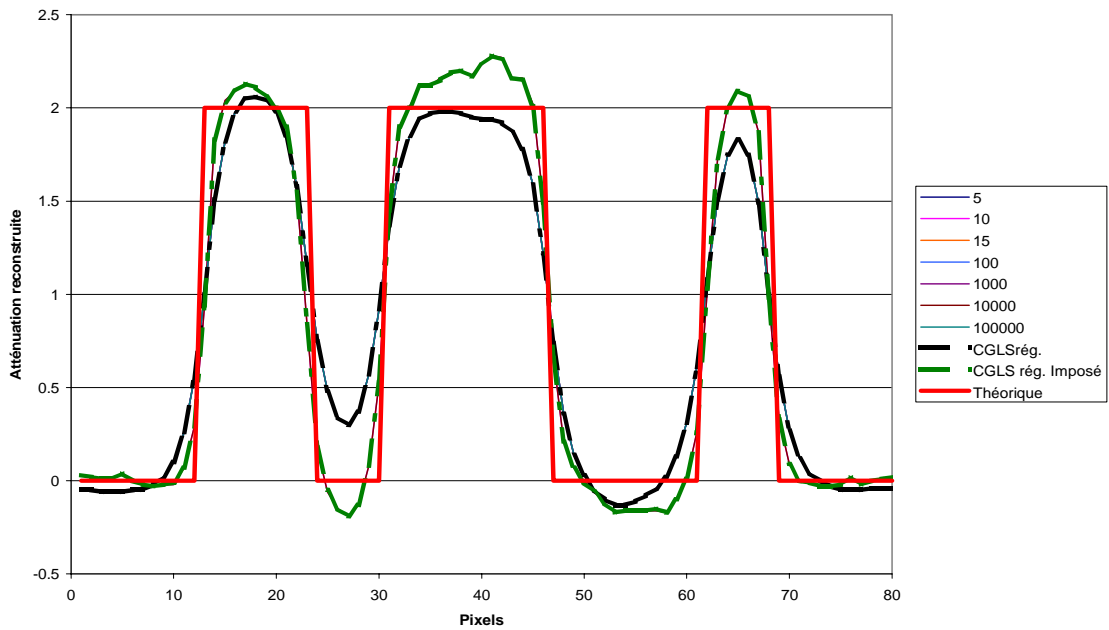


FIG. 3.48: Profils obtenus par la méthode de V. La pour différents diviseurs, $\delta = 0,75$ et une image de 80 pixels de côté

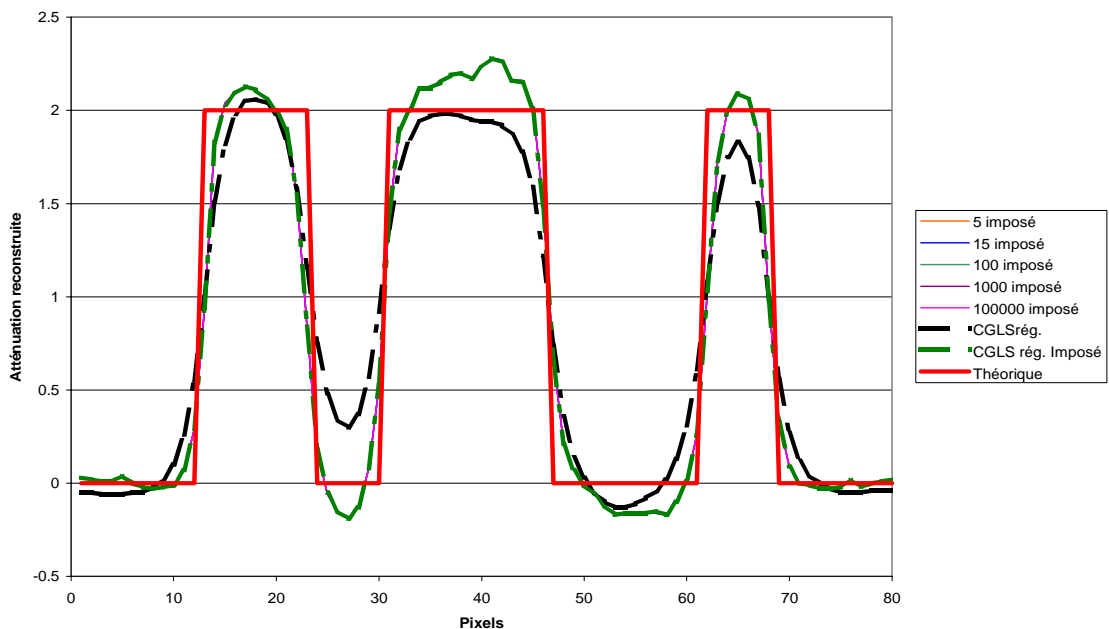


FIG. 3.49: Profils obtenus par la méthode de V. La pour différents diviseurs, $\delta = 0,75$ et une image de 80 pixels de côté avec un paramètre de régularisation λ imposé à $5,05 \cdot 10^{-2}$

Application de la méthode de V. La sur une bande

La régularisation pénalise les fortes évolutions entre proches voisins.

Nous essayons de trouver nos paramètres en modifiant la méthode de V. La : quand un front est détecté, la régularisation est plus faible aux points du front, mais aussi à leurs 3 ou 10 proches voisins dans les deux sens, dans la direction du front (horizontalement ou verticalement). Nous faisons toujours nos essais sur les mesures simulées du fantôme 1 avec 127 rotations et 81 rotations et une image de 80 pixels de côté (figures 3.51, 3.52 et 3.50).

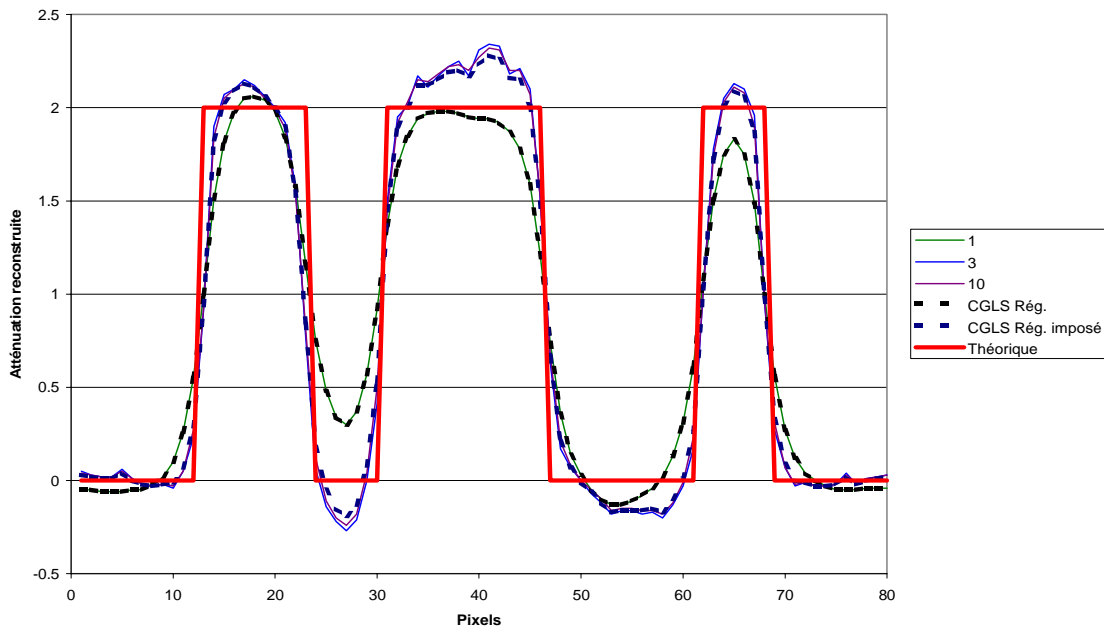


FIG. 3.50: Profils obtenus par la méthode de V. La pour différentes largeurs de pixels de part et d'autre des fronts, un diviseur de 100, $\delta = 0,75$ et une image de 80 pixels de côté

Pour la figure 3.51, des valeurs de δ inférieures à 0,5 nous donnent des images avec une amplitude d'atténuations de -100 à 75.

Nous remarquons une amélioration de la reconstruction des fronts. Mais cela s'explique encore par le changement du paramètre de régularisation qui passe de $5,05 \cdot 10^{-1}$ à $5,05 \cdot 10^{-2}$. Les courbes obtenues par la méthode de V. La sont confondues avec celle de CGLS régularisé avec le paramètre de régularisation λ imposé à $5,05 \cdot 10^{-2}$. La régularisation, donc le lissage, est plus faible.

Conclusion pour la méthode de V. La

Nous n'avons **pas obtenu d'amélioration de la reconstruction des fronts** dans nos cas tests grâce à la méthode de V. La. **Cette méthode** ne sera donc **pas retenue** pour la suite de ce travail.

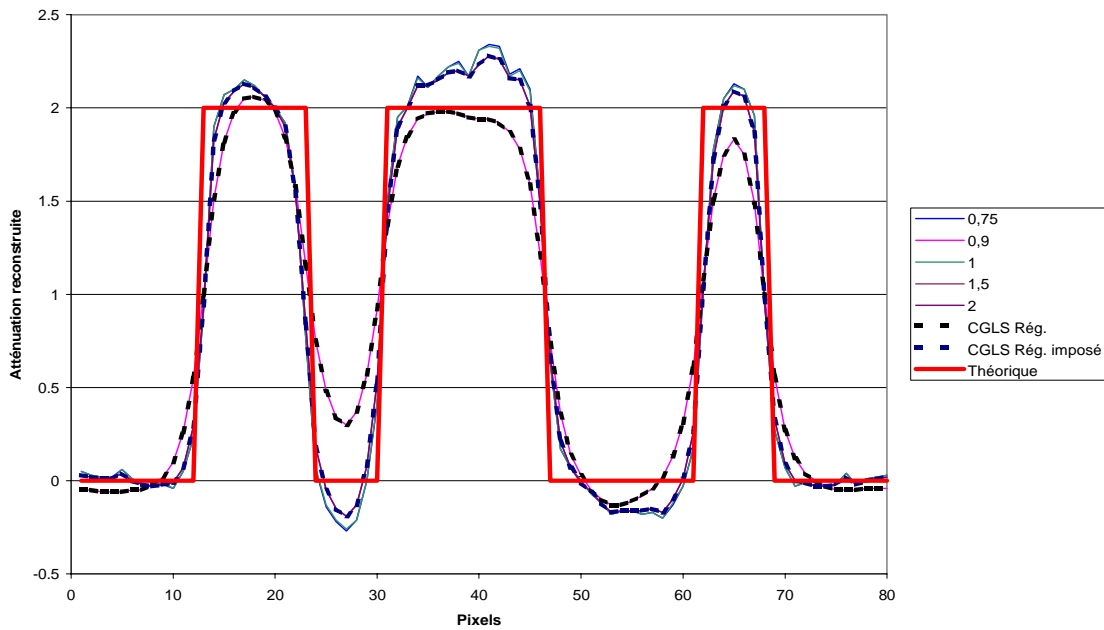


FIG. 3.51: Profils obtenus par la méthode de V. La pour différents δ , un diviseur de 100, une largeur de 3 pixels de part et d'autre des fronts, et une image de 80 pixels de côté

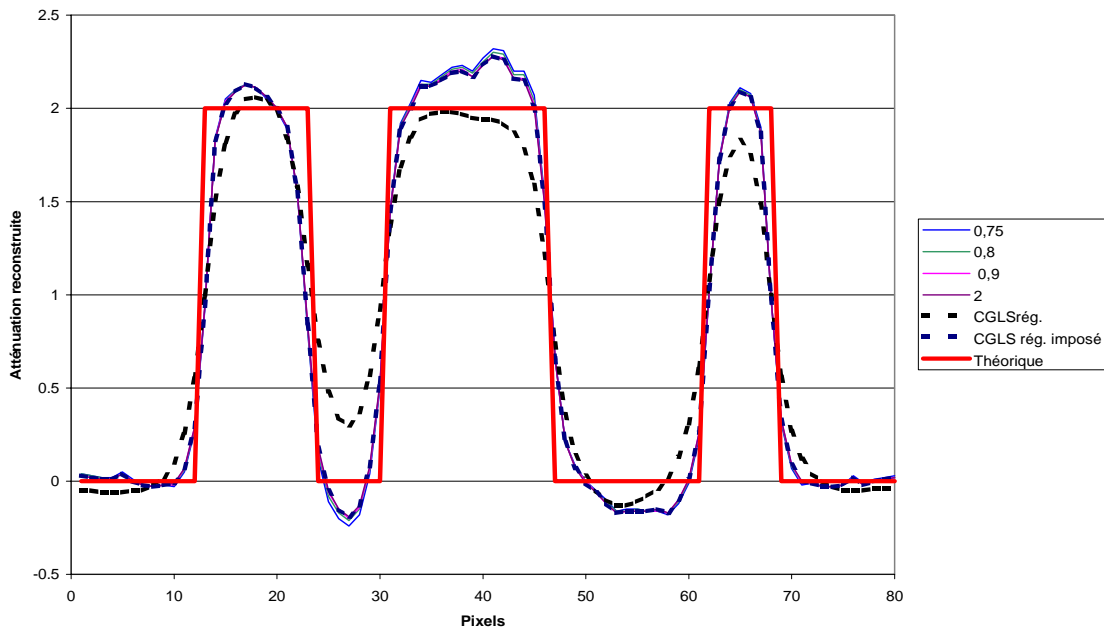


FIG. 3.52: Profils obtenus par la méthode de V. La pour différents δ , un diviseur de 100, une largeur de 10 pixels de part et d'autre des fronts, et une image de 80 pixels de côté

3.5.2 Méthode de Charbonnier

Méthodes utilisées

Suite à l'analyse bibliographique (section 2.3.6), nous avons retenu deux fonctions de pondération :

- la fonction d'Hebert et Leahy : $\phi_{HL}(t) = \ln(1 + t^2)$;
- la fonction de German et McClure : $\phi_{GM}(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Ces algorithmes nécessitent la détermination de deux paramètres :

- le paramètre de régularisation λ ;
- le paramètre d'échelle δ : si une dérivée première est supérieure à δ , un front est détecté.

λ est déterminé automatiquement par la Validation Croisée Généralisée. Pour le choix de δ , nous avons procédé en deux étapes :

- d'abord nous l'avons déterminé par différents essais : nous choisissons un paramètre δ , nous regardons si l'image obtenue est très bruitée, nous mesurons sa dérivée première maximale et nous essayons un nouveau δ , ceci afin de maximiser la dérivée première maximale.
- nous avons ensuite cherché à programmer une recherche automatique de δ .

Dans un premier temps, nous déterminerons ces paramètres en utilisant la fonction de German et McClure. Puis dans un second temps, nous les appliquerons à l'algorithme avec la fonction d'Hebert et Leahy.

Afin de s'assurer du bon comportement de l'algorithme, nous avons vérifié que pour une valeur du paramètre d'échelle δ grand devant l'atténuation théorique du fantôme 1, soit de 10, l'image obtenue est bien la même que pour CGLS régularisé.

Recherche manuelle de δ

Avant d'écrire la détermination automatique de δ , nous avons fait des essais, en choisissant plusieurs valeurs de δ , avec les mesures simulées du fantôme 1 (schéma 3.3) pour 127 rotations et 81 translations et une image de 160 pixels de côté (figures 3.53 et 3.54).

Pour des valeurs du paramètre δ de 1 et de 10, l'image obtenue ne change pas. Pour un paramètre δ de 0,01, l'image obtenue présente des oscillations dont l'amplitude atteint 83 % de la valeur théorique. Cela entraîne une augmentation de l'erreur. En effet, pour un paramètre δ trop petit, chaque petite variation entre deux pixels voisins est considérée comme un front, donc l'image est très peu régularisée. Une image avec de meilleures reconstructions des fronts est obtenue avec un paramètre δ de 0,05 à 0,07, ce qui correspond au minimum de l'erreur relative.

Regardons ce que nous donne ce choix de δ pour des simulations de taux de vide (figures 3.55, 3.56, 3.57 et 3.58).

Les courbes sont proches du taux de vide théorique au centre de la colonne. Nous remarquons une augmentation de la pixelisation. Proche des parois, nous avons **toujours un lissage** entre la fin de la partie écoulement diphasique et le haut du front de la paroi. Ce lissage est moins important que pour CGLS régularisé, mais entraîne une erreur jusqu'à 20 % sur l'atténuation

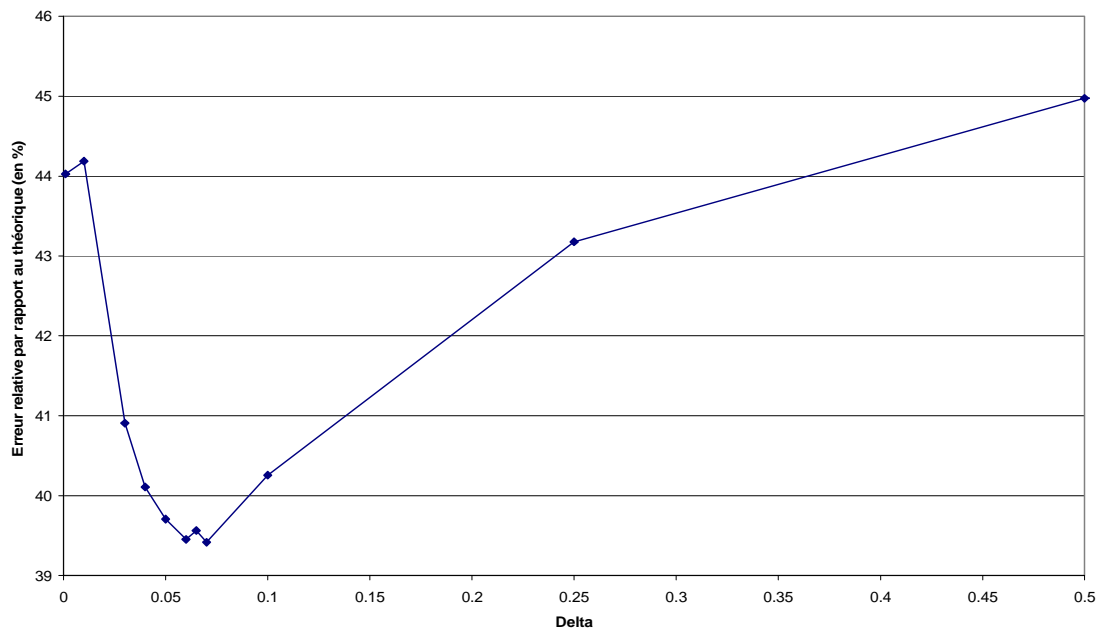


FIG. 3.53: Erreur relative par rapport à l'image théorique des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour différents δ

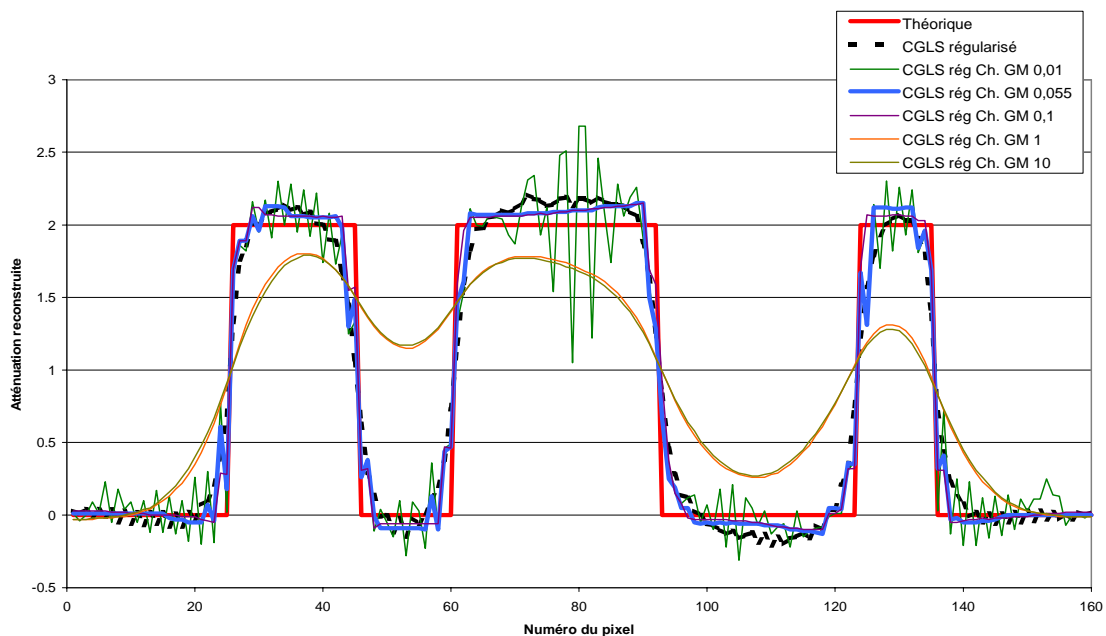


FIG. 3.54: Différents profils obtenus par la méthode de Charbonnier (fonction GM) pour différentes valeurs de δ

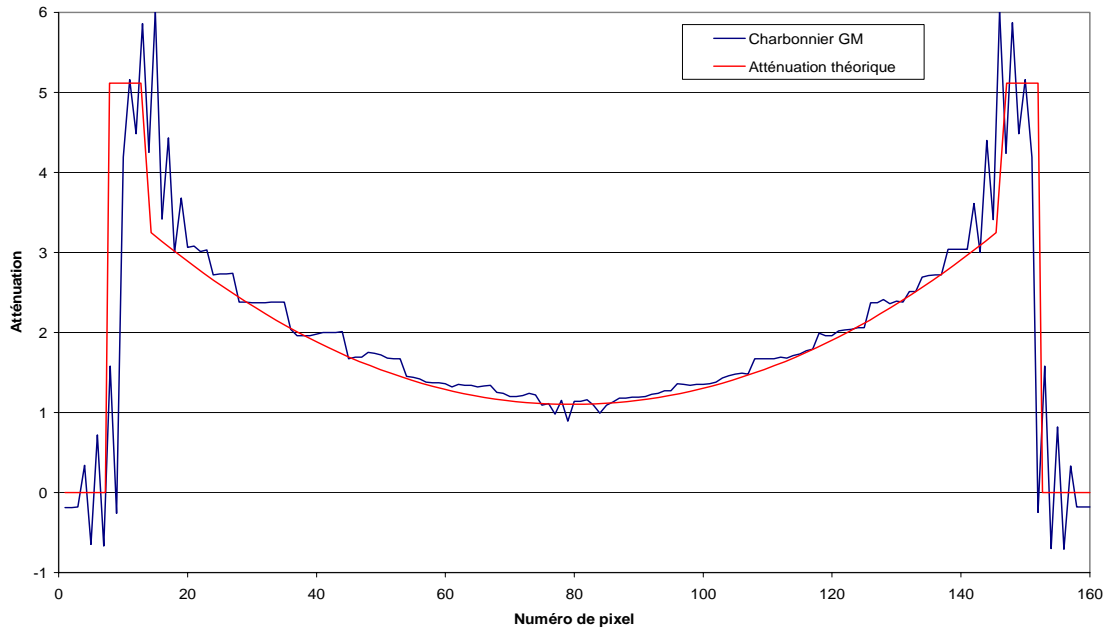


FIG. 3.55: Reconstruction des mesures simulées du taux de vide 1 obtenue par la méthode de Charbonnier (fonction GM) avec $\delta = 0,055$

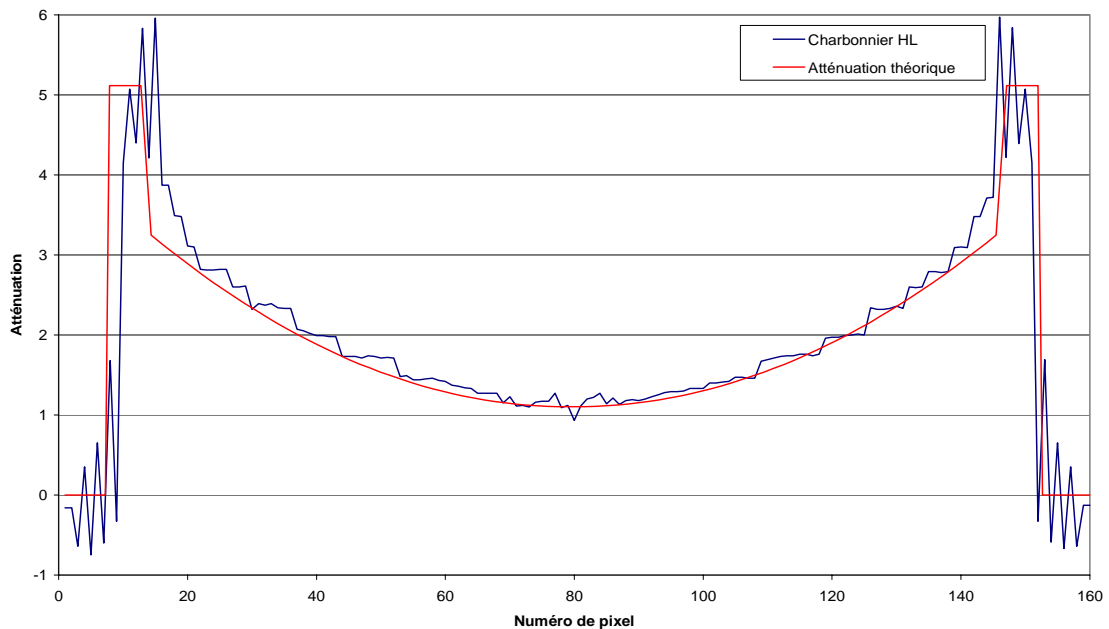


FIG. 3.56: Reconstruction des mesures simulées du taux de vide 1 obtenue par la méthode de Charbonnier (fonction HL) avec $\delta = 0,055$

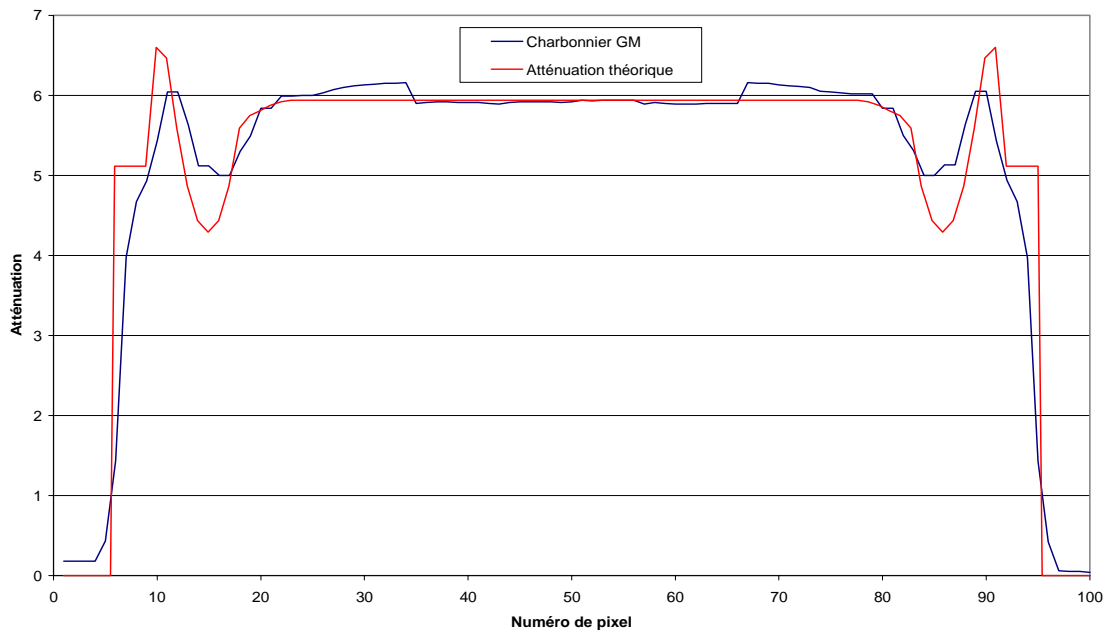


FIG. 3.57: Reconstruction des mesures simulées du taux de vide 2 obtenue par la méthode de Charbonnier (fonction GM) avec $\delta = 0,055$

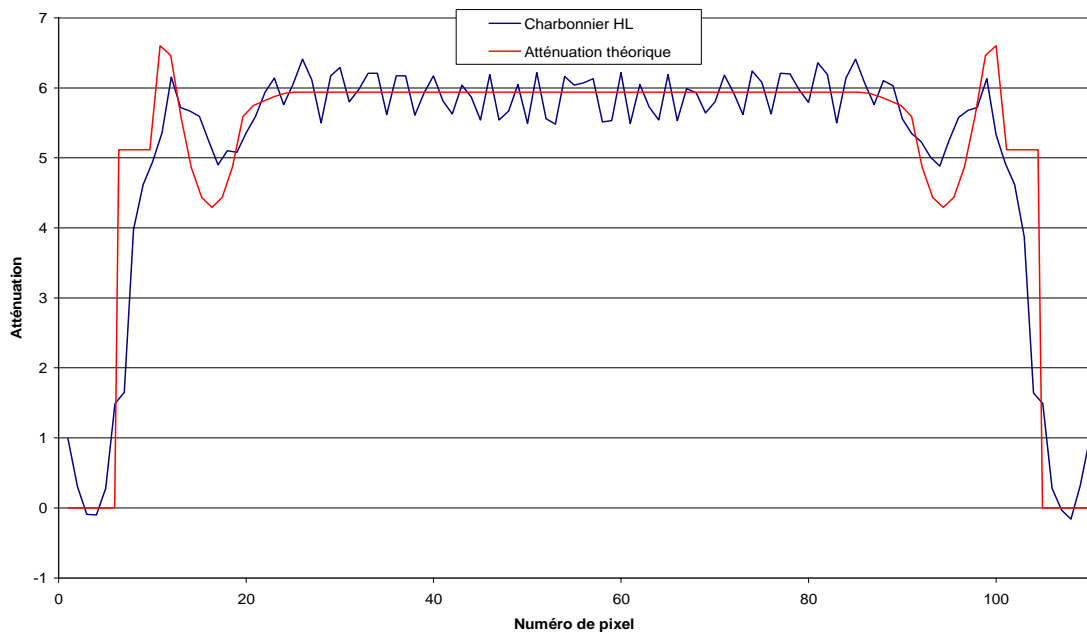


FIG. 3.58: Reconstruction des mesures simulées du taux de vide 2 obtenue par la méthode de Charbonnier (fonction HL) avec $\delta = 0,055$

reconstruite proche des parois! De plus, des oscillations se forment au niveau des parois, ce qui provoque un écart entre l'atténuation reconstruite et l'atténuation théorique jusqu'à 85 % proche des parois.

De tels problèmes proviennent de la présence des parois. Nous allons donc les éliminer artificiellement. Nous soustrayons l'image de la paroi seule de l'image obtenue pour l'ensemble paroi - écoulement diphasique (figures 3.59, 3.60, 3.61 et 3.62) ou nous soustrayons les mesures de la paroi seule des mesures paroi - écoulement diphasique avant reconstruction (figures 3.63, 3.64, 3.65 et 3.66).

Pour toutes ces courbes, le taux de vide reste bien reconstruit au milieu de la colonne. Regardons ce qui se passe près des parois.

Pour les différences d'images, nous avons toujours un faible lissage proche des parois et des oscillations dues à la faible régularisation proche des fronts.

Pour les différences de mesures, les oscillations ont disparu. En soustrayant les mesures de la paroi seule, nous obtenons les mesures de l'écoulement diphasique seul, ce qui supprime le fort contraste d'atténuation paroi - écoulement. Cependant il y a toujours un faible lissage entre l'écoulement et le fond nul, qui entraîne une erreur sur le taux de vide au voisinage des parois.

Nous retrouvons ce comportement sur les figures 3.67, 3.68, 3.69, 3.70, 3.71, et 3.72.

L'erreur moyenne est faible : le taux de vide est reconstruit à 4 % près en absolu sur les trois-quarts centraux de la colonne. Mais l'écart maximal absolu est très important (de 8 % à 18 % pour un taux de vide autour de 50 %). Cela est dû au lissage des images au voisinage des parois, comme nous l'avons vu sur les profils. Compte-tenu des objectifs en précision que nous nous sommes fixés, ces reconstructions ne sont **pas acceptables**.

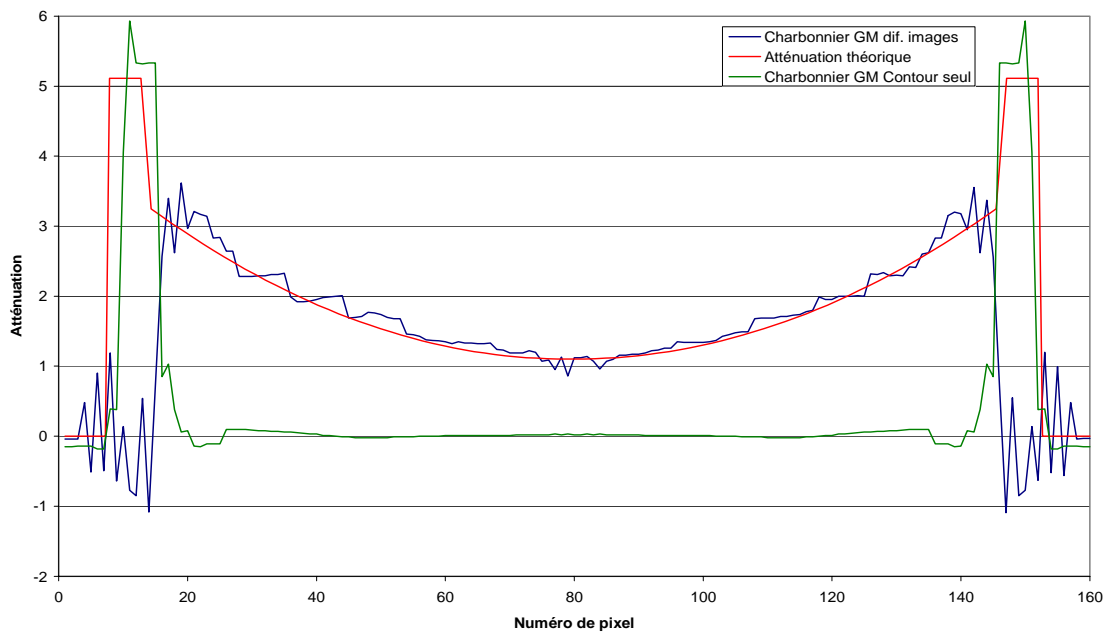


FIG. 3.59: Différence entre les reconstructions des mesures simulées d'un ensemble taux de vide 1 - parois et des mesures simulées des parois seules. Ces reconstructions sont obtenues par la méthode de Charbonnier (fonction GM) avec $\delta = 0,055$.

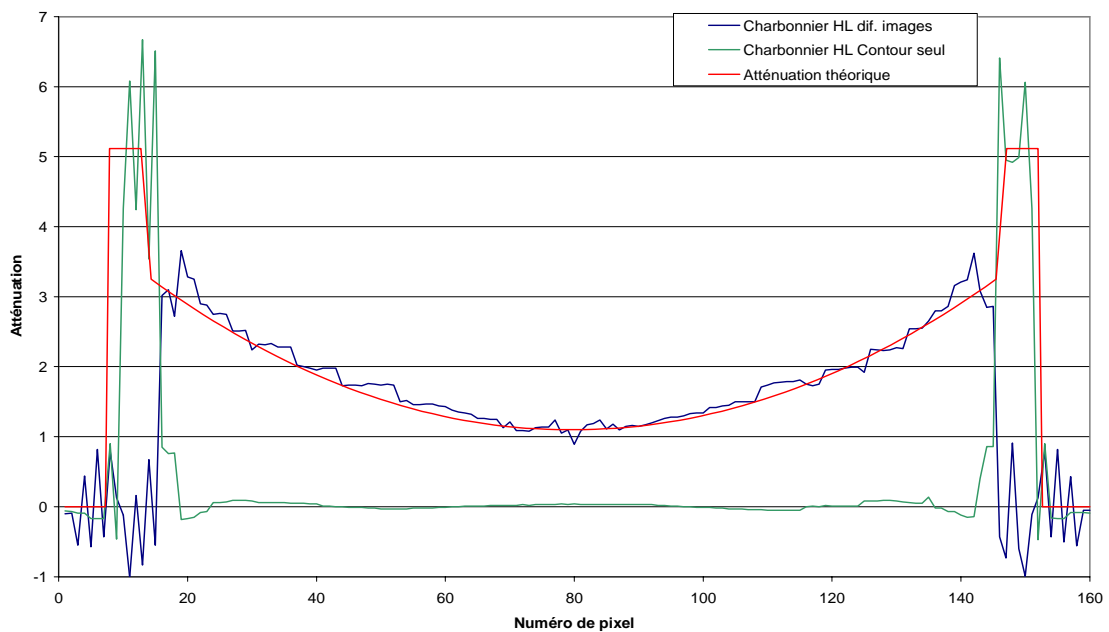


FIG. 3.60: Différence entre les reconstructions des mesures simulées d'un ensemble taux de vide 1 - parois et des mesures simulées des parois seules. Ces reconstructions sont obtenues par la méthode de Charbonnier (fonction HL) avec $\delta = 0,055$.

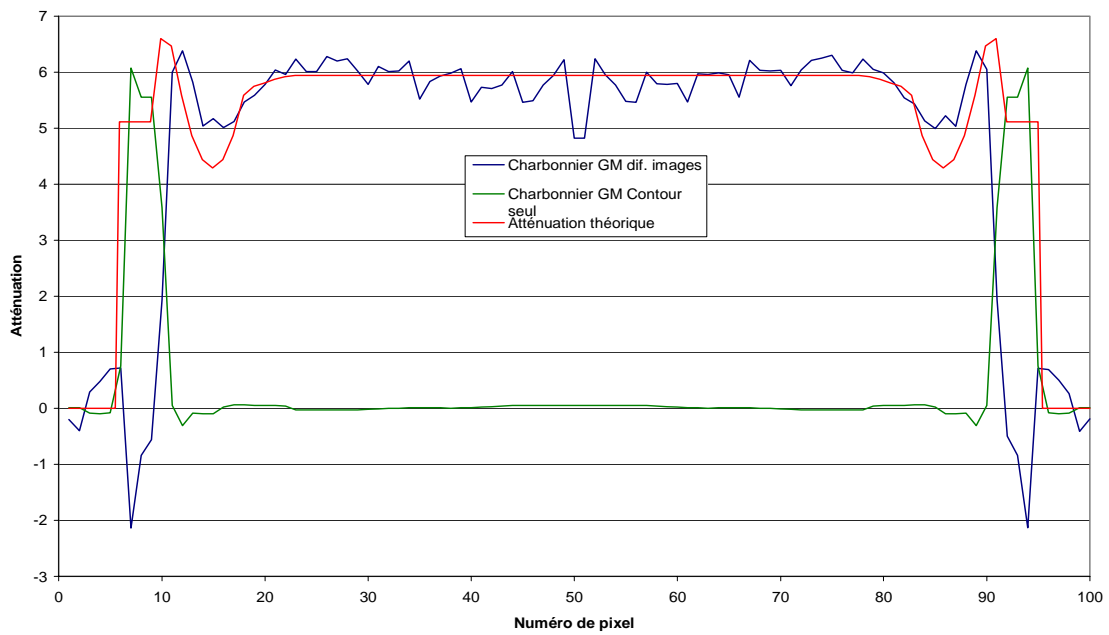


FIG. 3.61: Différence entre les reconstructions des mesures simulées d'un ensemble taux de vide 2 - parois et des mesures simulées des parois seules. Ces reconstructions sont obtenues par la méthode de Charbonnier (fonction GM) avec $\delta = 0,055$.

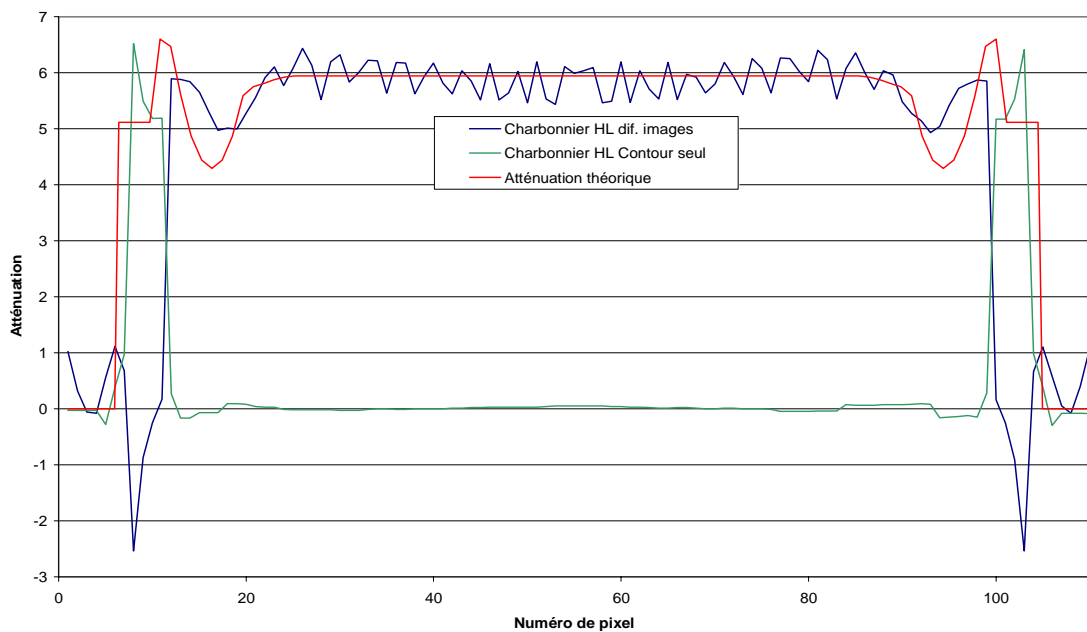


FIG. 3.62: Différence entre les reconstructions des mesures simulées d'un ensemble taux de vide 2 - parois et des mesures simulées des parois seules. Ces reconstructions sont obtenues par la méthode de Charbonnier (fonction HL) avec $\delta = 0,055$.

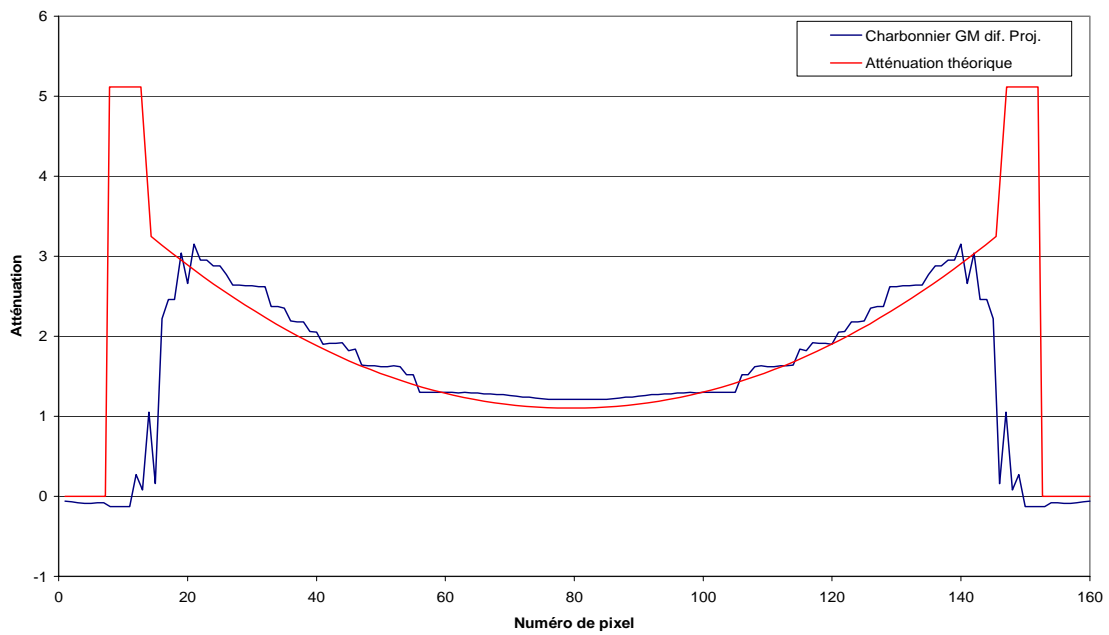


FIG. 3.63: Reconstruction de la différence entre les mesures simulées d'un ensemble taux de vide 1 - parois et les mesures simulées des parois seules. Ce profil est obtenu par la méthode de Charbonnier (fonction GM) avec $\delta = 0,055$.

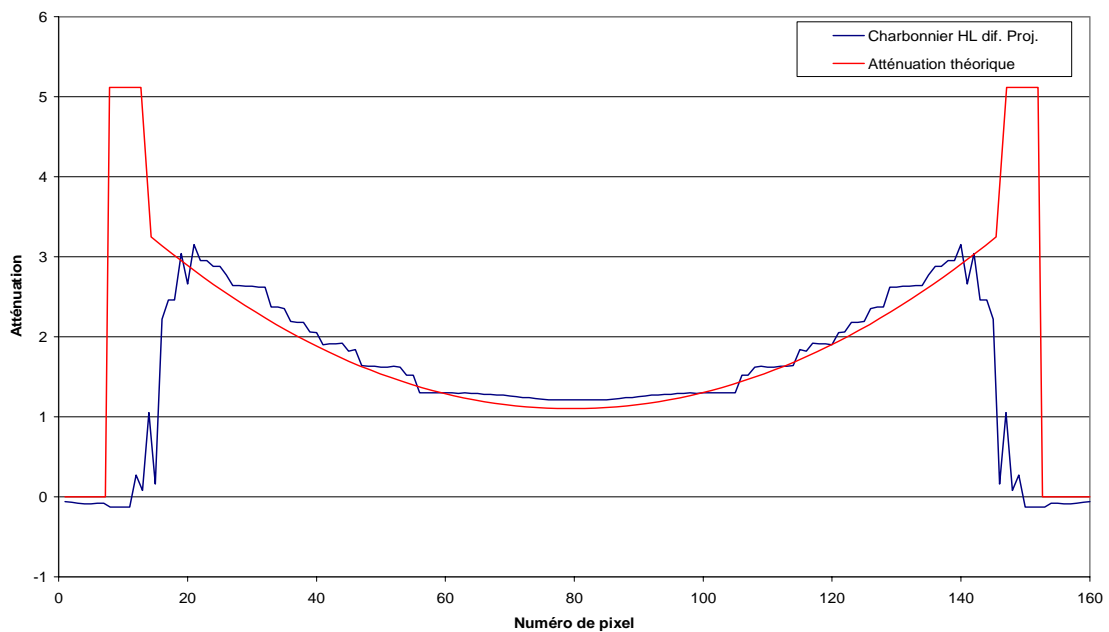


FIG. 3.64: Reconstruction de la différence entre les mesures simulées d'un ensemble taux de vide 1 - parois et les mesures simulées des parois seules. Ce profil est obtenu par la méthode de Charbonnier (fonction HL) avec $\delta = 0,055$.

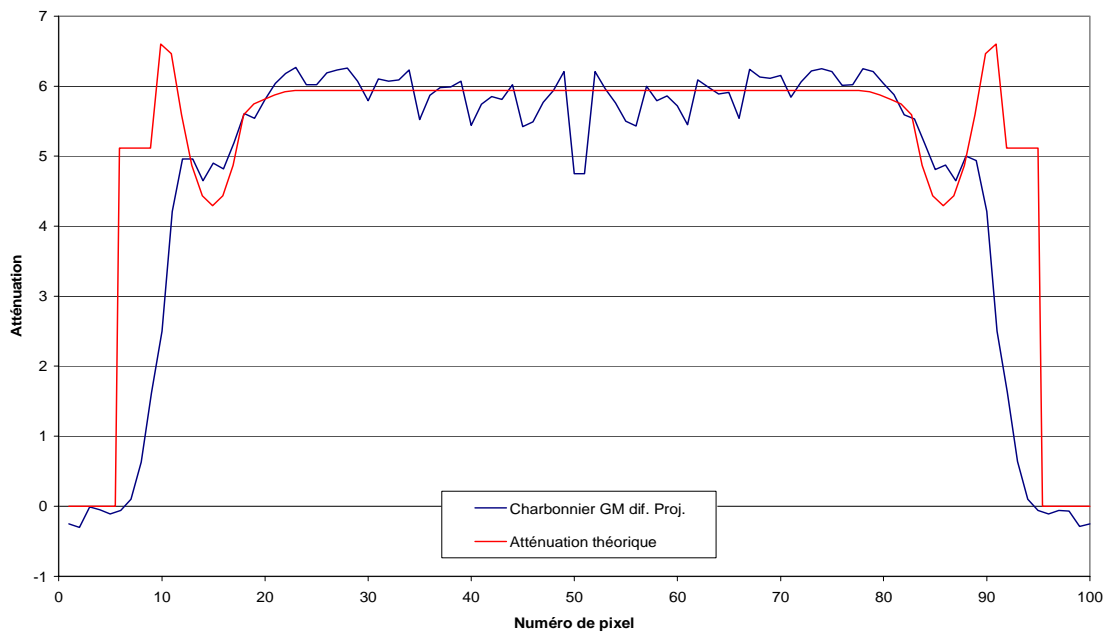


FIG. 3.65: Reconstruction de la différence entre les mesures simulées d'un ensemble taux de vide 2 - parois et les mesures simulées des parois seules. Ce profil est obtenu par la méthode de Charbonnier (fonction GM) avec $\delta = 0,055$.

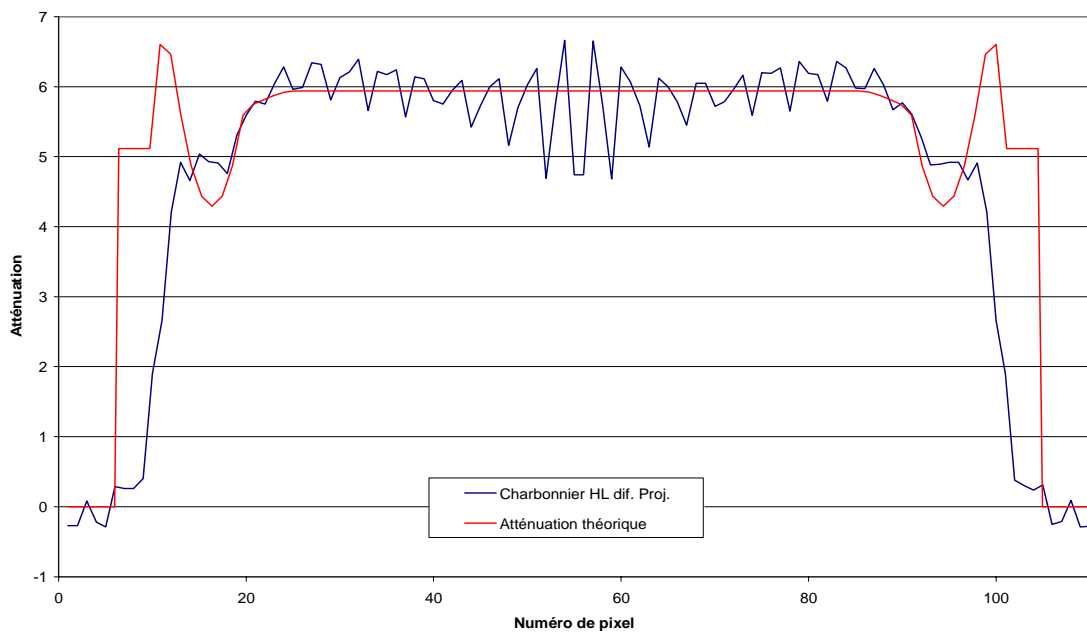


FIG. 3.66: Reconstruction de la différence entre les mesures simulées d'un ensemble taux de vide 2 - parois et les mesures simulées des parois seules. Ce profil est obtenu par la méthode de Charbonnier (fonction HL) avec $\delta = 0,055$.

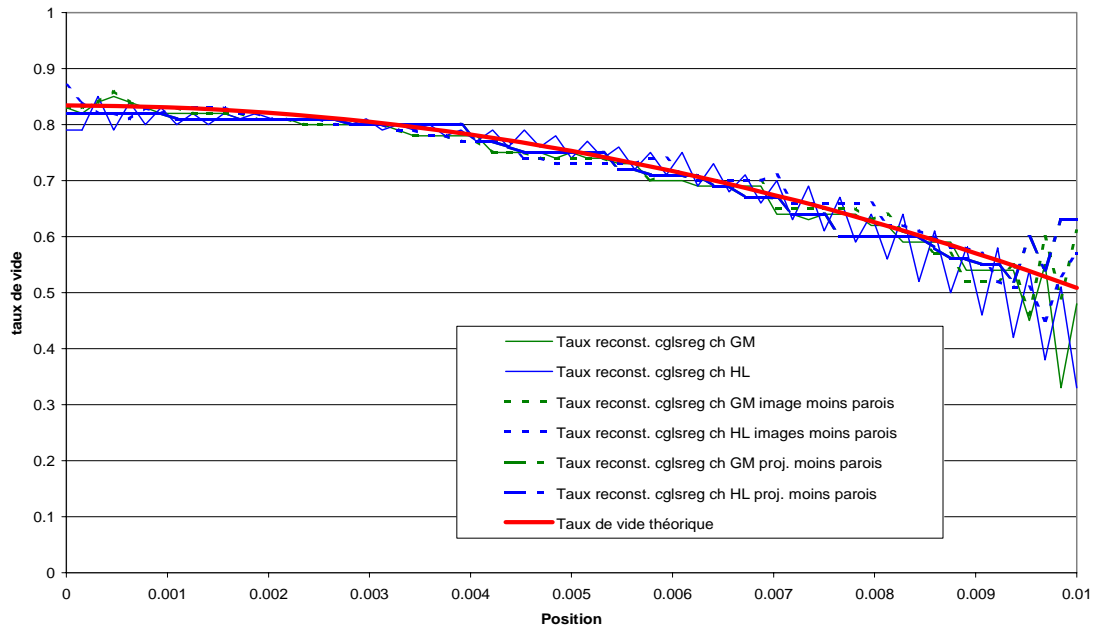


FIG. 3.67: Différents profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec $\delta = 0,055$ à partir des mesures simulées du taux de vide 1

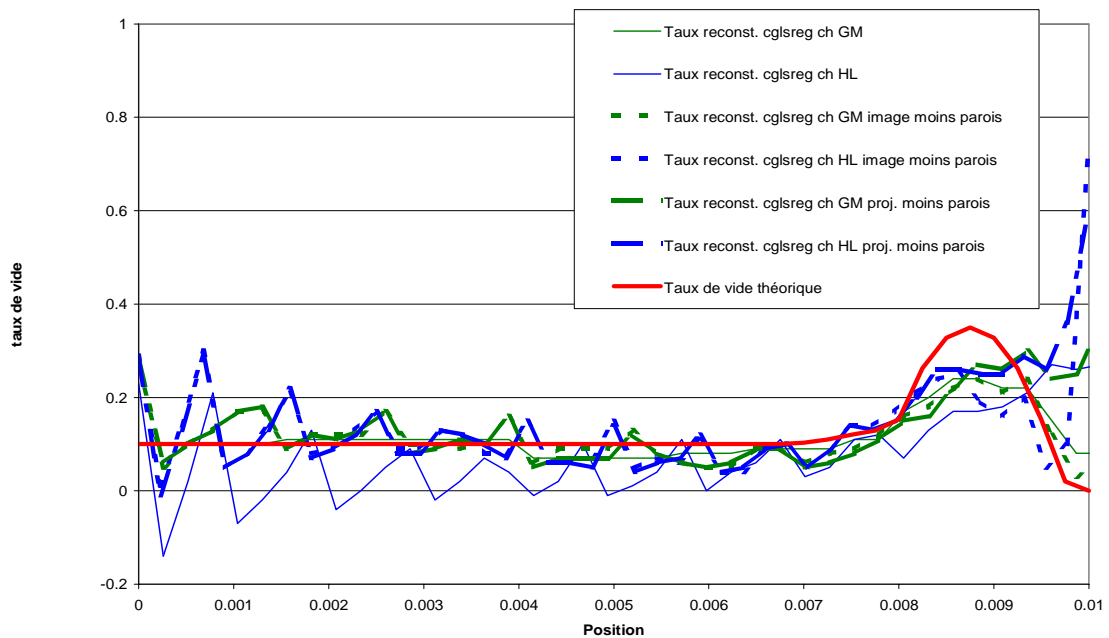


FIG. 3.68: Différents profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec $\delta = 0,055$ à partir des mesures simulées du taux de vide 2

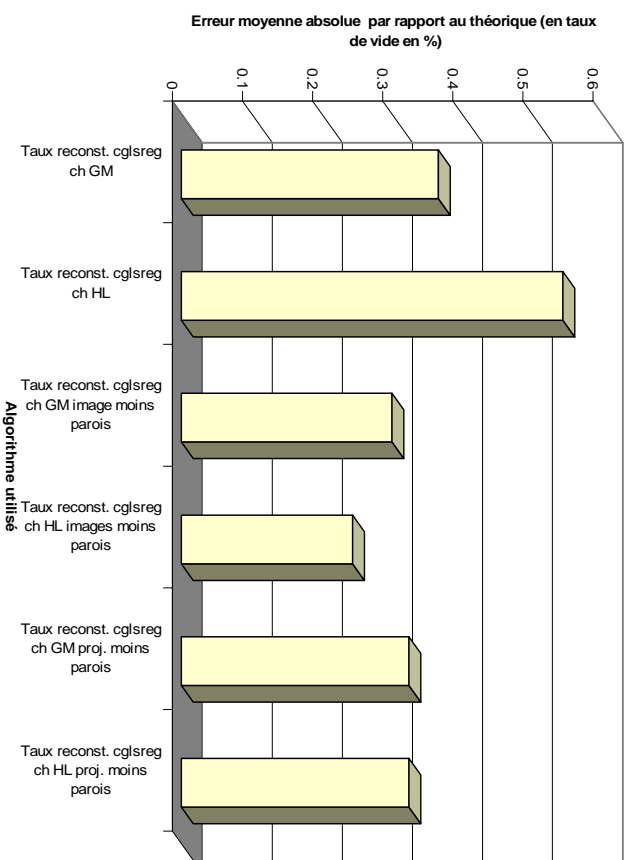


FIG. 3.69: Erreur moyenne par rapport au profil théorique des profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec $\delta = 0,055$ à partir des mesures simulées du taux de vide 1

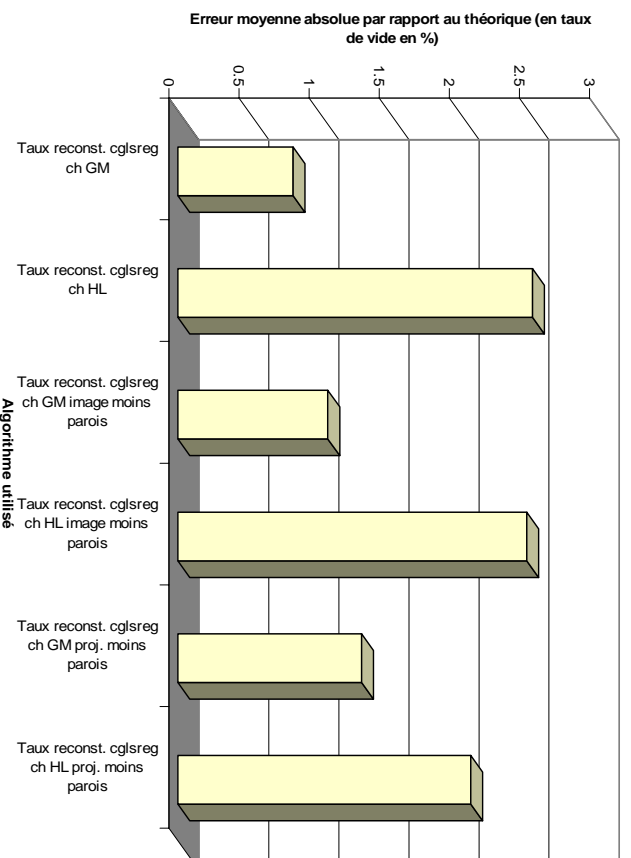


FIG. 3.70: Erreur moyenne par rapport au profil théorique des profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec $\delta = 0,055$ à partir des mesures simulées du taux de vide 2

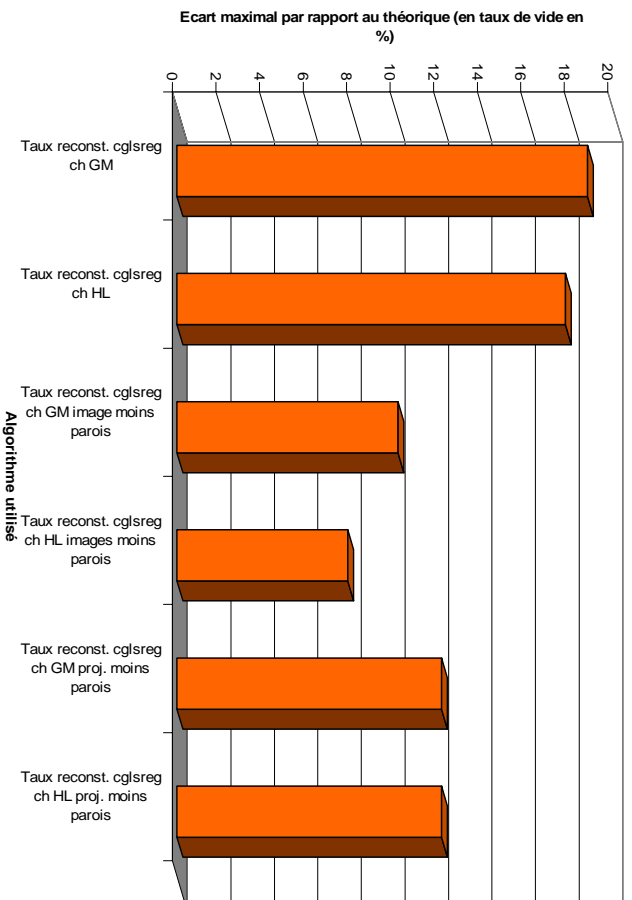


FIG. 3.71: Ecart maximal par rapport au profil théorique des profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec $\delta = 0,055$ à partir des mesures simulées du taux de vide 1

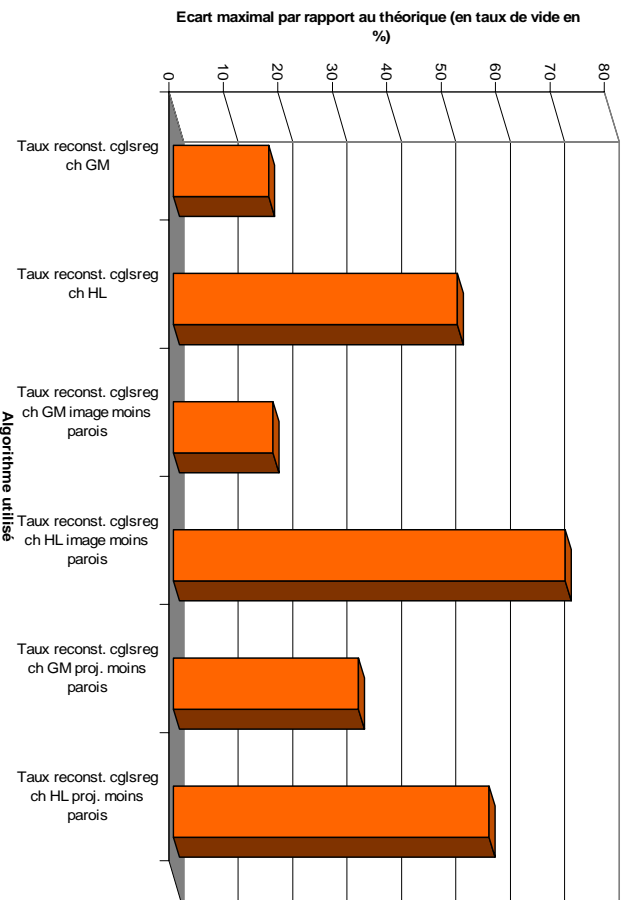


FIG. 3.72: Ecart maximal par rapport au profil théorique des profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec $\delta = 0,055$ à partir des mesures simulées du taux de vide 2

Recherche du maximum de la dérivée maximale

Après cette détermination manuelle, nous cherchons à automatiser la détermination de δ .

Regardons la courbes des dérivées moyenne et maximale des images en fonction de δ (figure 3.73). Plus δ diminue, meilleure est la reconstruction des fronts. Mais si δ est trop petit, l'image reconstruite présente des oscillations et la dérivée maximale est supérieure à 2, la gamme des valeurs théoriques des pixels. Nous recherchons par dichotomie la dérivée maximale la plus grande tout en ne dépassant pas la gamme des valeurs des pixels obtenue sur une reconstruction par CGLS régularisé.

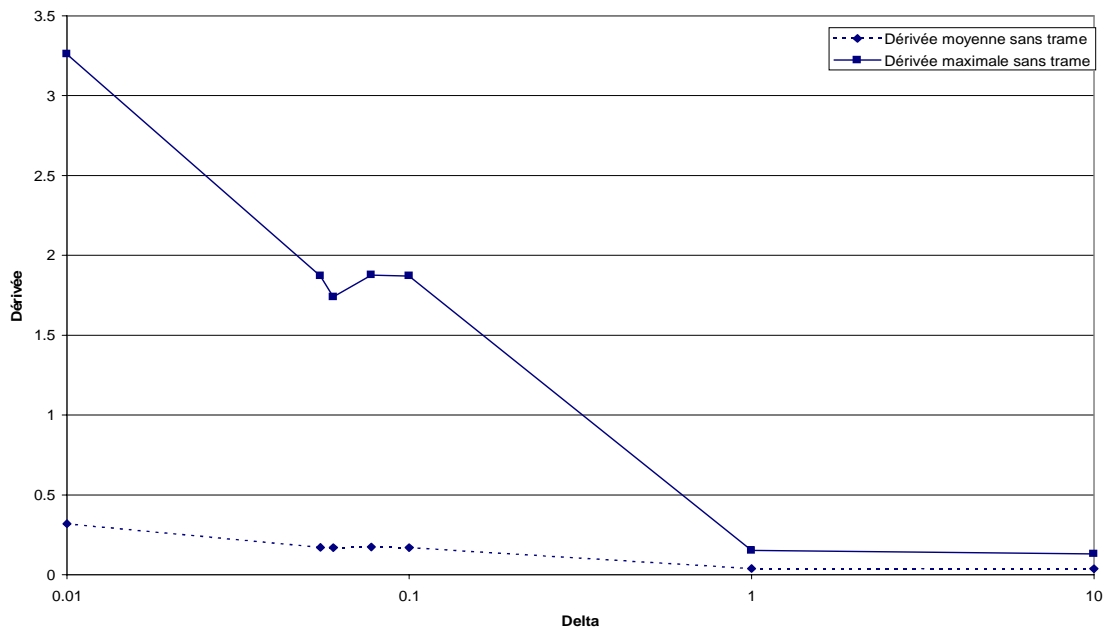


FIG. 3.73: Dérivées premières moyenne et maximale des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour différents δ

Nous avons programmé dans l'algorithme une recherche automatique de δ basée sur la méthode suivante :

1. le système linéaire est résolu par l'algorithme CGLS régularisé (λ est déterminé automatiquement par la Validation Croisée Généralisée) pour avoir la gamme de valeurs des pixels reconstruits ;
2. δ est pris égal à la moitié de la gamme ci-dessus ;
3. la Validation Croisée Généralisée détermine le paramètre de régularisation λ associé à ce δ pour l'algorithme de Charbonnier ;
4. le système linéaire est résolu par l'algorithme de Charbonnier en utilisant ces deux paramètres δ et λ ;
5. dans l'image reconstruite, la valeur maximale des dérivées premières verticales et horizontales est déterminée ;
6. par dichotomie, un autre paramètre δ est choisi de façon à maximiser la dérivée première maximale sans dépasser la gamme de valeurs des pixels de l'image (cela voudrait dire que

l'image obtenue présente des artefacts et des oscillations très importantes, donc n'est pas acceptable), et nous reprenons à l'étape 3 jusqu'à la convergence en δ .

Nous avons aussi pensé qu'il était intéressant, pour la recherche de la dérivée maximale, de ne pas prendre en compte les pixels où sont les fronts afin de chercher à reconstruire un fond sans oscillations. Pour cela, nous fournissons à l'algorithme une trame de même dimension que l'image reconstruite où les pixels à ignorer sont à une valeur différente de 1.

Voyons l'influence sur les dérivées premières moyenne et maximale d'une trame de largeur 3 et 7 pixels de chaque côté des fronts (figure 3.74). Nous utilisons de nouveau les mesures simulées du fantôme 1.

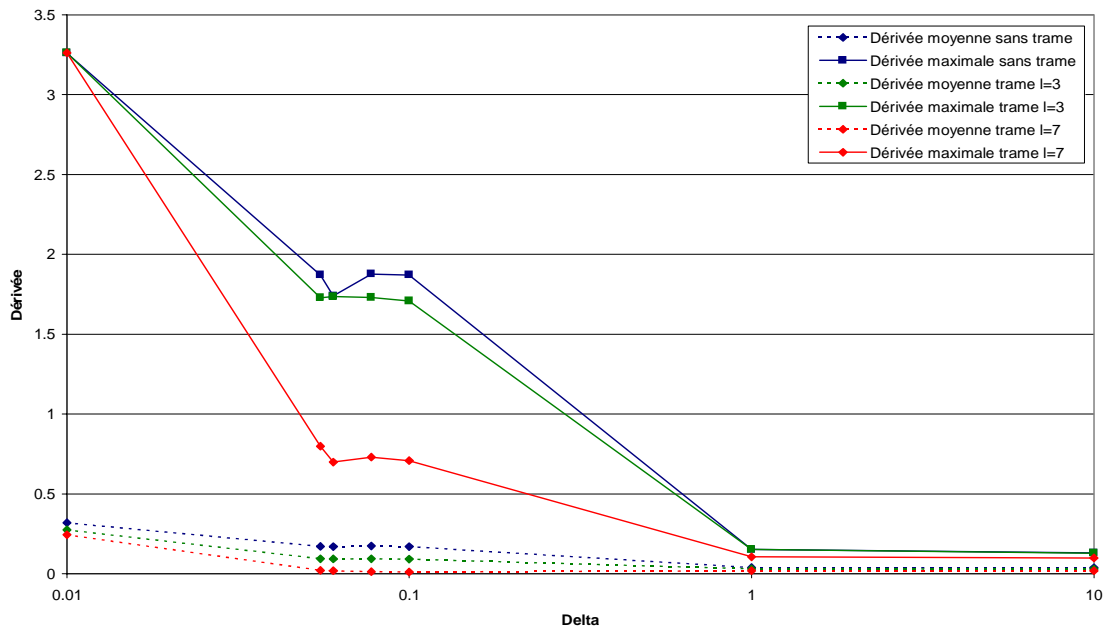


FIG. 3.74: Dérivées premières moyenne et maximale des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour différents δ et sans trame ou avec une trame de largeur 3 ou 7 pixels

En ne prenant pas en compte les zones de fronts, les valeurs des dérivées premières moyennes et maximales diminuent. Mais les courbes conservent la même allure : quand δ diminue, les dérivées augmentent, et pour $\delta = 0,01$, l'image obtenue est toujours "très oscillante", cela entraîne une valeur toujours grande de la dérivée première maximale.

Voyons quelle est l'influence de l'introduction de la trame dans l'algorithme sur le choix de δ et de λ (tableaux 3.1 et 3.2).

Nous remarquons que pour les deux variantes de l'algorithme de Charbonnier, l'introduction de la trame ne change pas les déterminations de δ et de λ .

Avec ces paramètres δ et λ , nous obtenons les figures 3.75, 3.76 et 3.77.

Pour la simulation du fantôme 1 (figure 3.75), la fonction GM permet une bonne reconstruction des fronts et des paliers, mais avec la fonction HL, des oscillations apparaissent. Pour les simulations des taux de vide (figures 3.76 et 3.77), les fronts sont mieux reconstruits que par

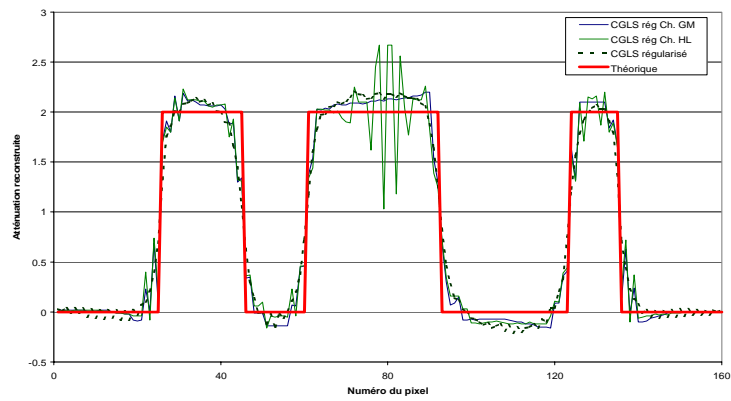


FIG. 3.75: Profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec δ déterminé par une recherche du maximum de la dérivée maximale, pour des mesures simulées du fantôme 1

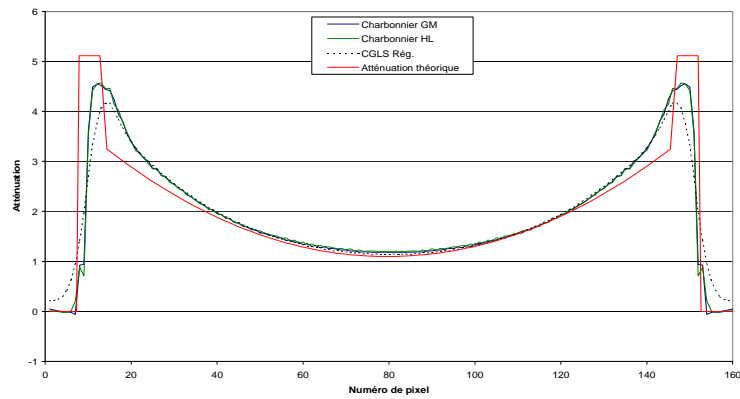


FIG. 3.76: Profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec δ déterminé par une recherche du maximum de la dérivée maximale, pour des mesures simulées du taux de vide 1

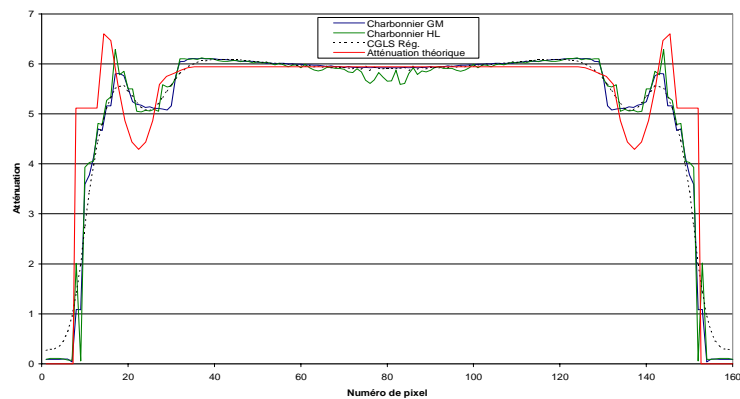


FIG. 3.77: Profils obtenus par la méthode de Charbonnier avec δ déterminé par une recherche du maximum de la dérivée maximale, pour des mesures simulées du taux de vide 2

	Sans trame			Avec trame		
	δ	λ	Nombre d'étapes	δ	λ	Nombre d'étapes
Fantôme 1 simulé	0,308	6,339	7	0,308	6,339	7
Taux de vide 1 simulé	1,450	2,968	5	1,450	2,968	5
Taux de vide 2 simulé	0,826	6,339	7	0,826	6,339	7

TAB. 3.1: Différents δ et λ obtenus par l'algorithme de détermination automatique en utilisant ou non une trame de largeur 3 pixels autour des fronts, pour différents cas, avec 127 rotations et 81 projections, une image de 80 pixels de côté et la fonction GM

	Sans trame			Avec trame		
	δ	λ	Nombre d'étapes	δ	λ	Nombre d'étapes
Fantôme 1 simulé	0,308	6,339	7	0,308	6,339	7
Taux de vide 1 simulé	1,121	4,922	6	1,121	4,922	6
Taux de vide 2 simulé	0,826	6,339	7	0,826	6,339	7

TAB. 3.2: Différents δ et λ obtenus par l'algorithme de détermination automatique en utilisant ou non une trame de largeur 3 pixels autour des fronts, pour différents cas, avec 127 rotations et 81 projections, une image de 80 pixels de côté et la fonction HL

CGLS régularisé, mais il y a toujours un lissage important près des parois qui entraîne un écart de 37 % entre les atténuations reconstruites et théoriques. Nous remarquons aussi que pour le taux de vide 2, le "pic" de taux de vide proche des parois est de nouveau atténué. Nous devons trouver une autre détermination de δ afin de mieux reconstruire ces courbes.

Cas d'un système linéaire sur-déterminé

Regardons le cas d'un système linéaire sur-déterminé. Nous calculons de nouveau les dérivées moyenne et maximale pour le fantôme 1 avec 127 rotations et 81 translations et une image de 80 pixels de côté.

Nous utilisons une nouvelle formule pour les dérivées. La dérivée moyenne est donnée par :

$$\frac{1}{n_{\text{trame}}^2} \sqrt{\sum_{n_{\text{trame}}^2} ((F_i - F_{i-1})^2 + (F_i - F_{i-n})^2)} \quad (3.10)$$

La dérivée maximale est donnée par :

$$\max_{n_{\text{trame}}^2} \sqrt{(F_i - F_{i-1})^2 + (F_i - F_{i-n})^2} \quad (3.11)$$

Dans un premier temps, nous laissons la Validation Croisée Généralisée choisir le paramètre de régularisation λ . Nous obtenons pour différentes trames, les courbes des dérivées moyenne et maximale en fonction de δ de la figure 3.78.

Les courbes de dérivées maximales sans trame et pour une trame de largeur 1 sont confondues : la trame n'est pas assez large et n'inclut pas le pixel de dérivée maximale. Cela est fait avec une trame de largeur 3.

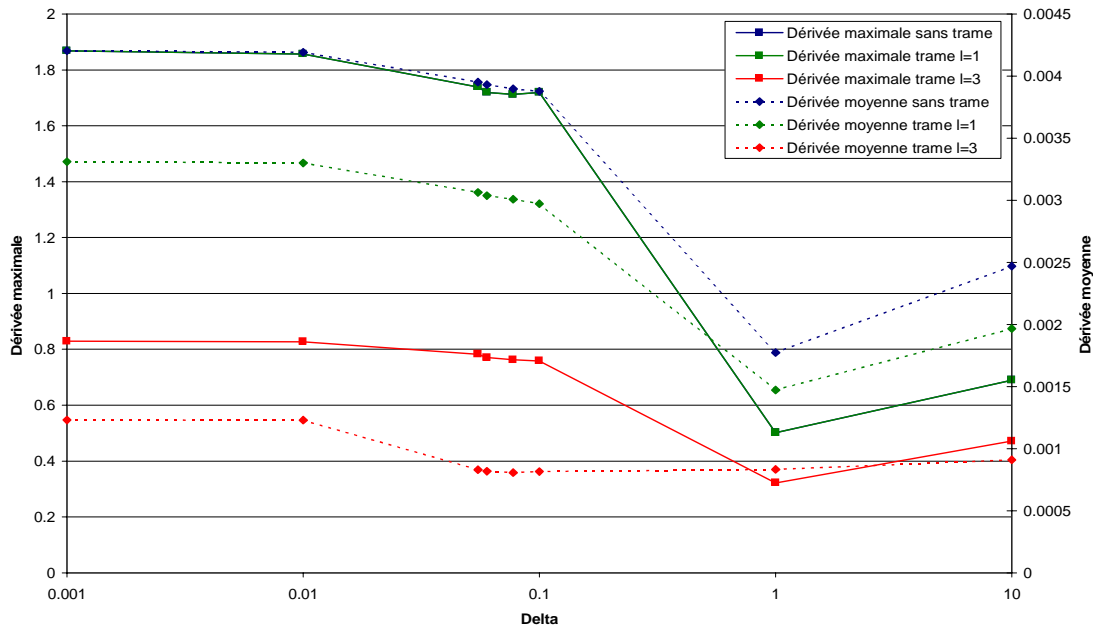


FIG. 3.78: Dérivées premières moyenne et maximale des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour différents δ , différentes largeurs de trame et 80 pixels

Ces courbes présentent des minima pour $\delta = 1$. Or un autre effet vient perturber notre appréciation : pour $\delta = 1$, le paramètre de régularisation est de 5,05 au lieu de 0,505. L'image est plus lissée, même au niveau des fronts (figure 3.79).

C'est pourquoi nous décidons de refaire nos mesures de dérivées moyenne et maximale sur la simulation du fantôme 1 en fixant le paramètre de régularisation à la valeur trouvée par CGLS régularisé, soit $\lambda = 0,505$. Nous obtenons la figure 3.80.

Les courbes des dérivées maximales sans trame et avec une trame de largeur 1 pixel de chaque côté des fronts théoriques sont confondues. La trame n'est pas assez large pour inclure le pixel de dérivée maximale. Cela explique les pics sur les dérivées moyennes sans trame et avec une trame de largeur 1. Même avec une trame de largeur 3, un pixel de dérivée maximale secondaire est détecté, ce qui explique l'allure de cette courbe. Par contre, la courbe de la dérivée moyenne avec une trame de largeur 3 présente un minimum. Dans ce cas, la trame est assez large pour inclure les pixels de front. Ces pixels ne sont pas pris en compte dans le calcul de la dérivée moyenne qui représente alors le lissage du fond de l'image et tient compte des éventuelles "oscillations" présentes dans ce fond. Si nous observons les profils obtenus (figure 3.81), nous remarquons bien la coïncidence entre la présence d'"oscillations" dans le fond et le minimum de la dérivée moyenne avec une trame de largeur 3.

C'est pourquoi nous décidons de déterminer δ en recherchant par dichotomie le minimum de la dérivée moyenne de l'image obtenue en ignorant les pixels sous une trame assez large pour inclure les zones de front et en utilisant le paramètre de régularisation λ déterminée par CGLS régularisé.

L'algorithme est alors le suivant :

1. le système est résolu par l'algorithme du CGLS régularisé (λ est déterminé automatique-

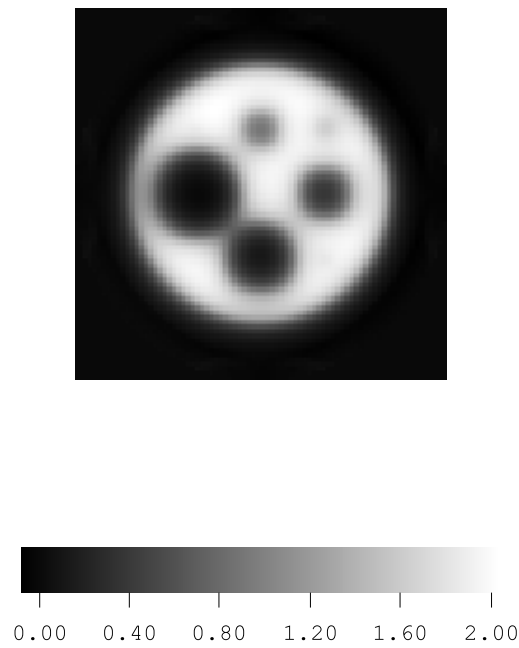


FIG. 3.79: Image obtenue pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 80 pixels de côté et $\delta = 1$

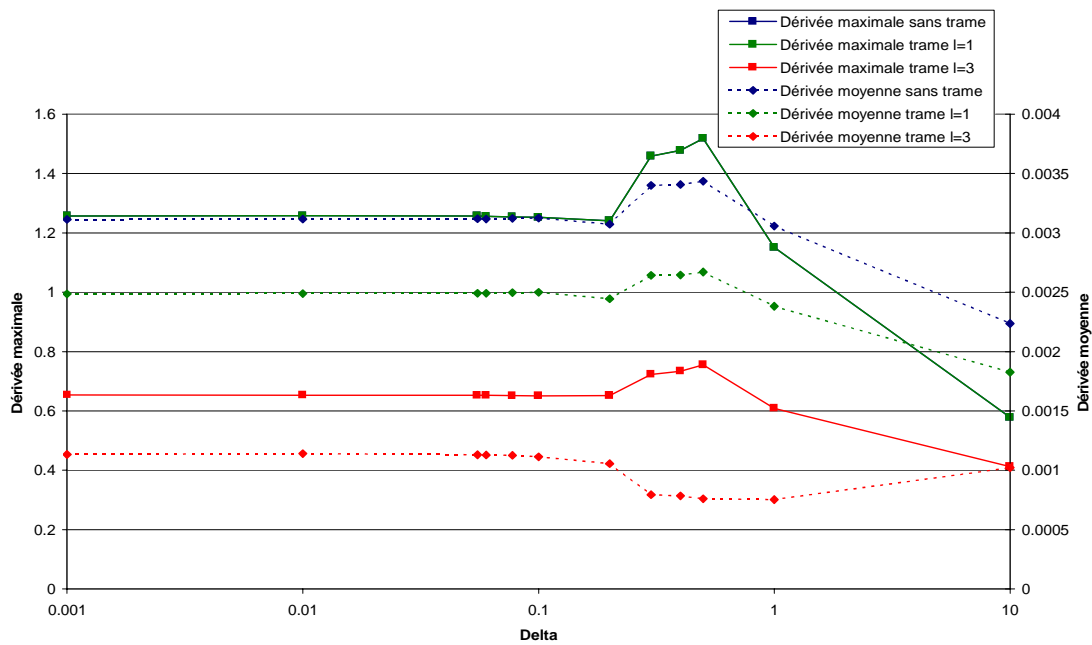


FIG. 3.80: Dérivées premières moyenne et maximale des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour des mesures simulées (127 rotations et 81 translations) du fantôme 1, pour différents δ , différentes largeurs de trame, 80 pixels et $\lambda = 0,505$

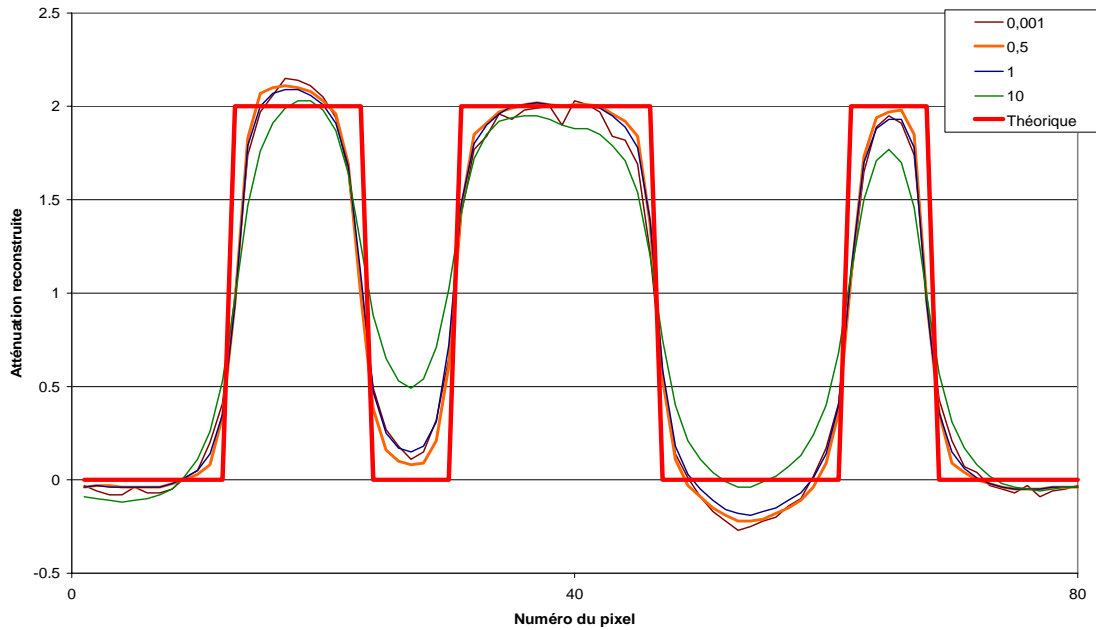


FIG. 3.81: Profils obtenus par Charbonnier GM pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 80 pixels de côté, différents δ et $\lambda = 0,505$

ment par la Validation Croisée Généralisée) pour avoir la dérivée première moyenne qui correspond à la limite haute (pour δ grand) de l'écart de dichotomie ;

2. δ est pris égal à la moitié de la gamme des valeurs des pixels de l'image obtenue par CGLS régularisé ;
3. le système linéaire est résolu par l'algorithme de Charbonnier en utilisant ce paramètre δ et le paramètre λ déterminé avec CGLS régularisé ;
4. dans l'image reconstruite, la dérivée première moyenne est calculée ;
5. par dichotomie, un autre paramètre δ est choisi de façon à maximiser la dérivée première moyenne, et nous reprenons à l'étape 3 jusqu'à la convergence en δ .

Nous obtenons les résultats du tableau 3.3.

	δ	λ	Nombre d'étapes
Fantôme 1 simulé 80 pixels	1,23	0,505	6
Fantôme 1 simulé 160 pixels	2,38	0,0505	5
Taux de vide 1 simulé 80 pixels	1,77	0,505	5
Taux de vide 2 simulé 80 pixels	5,82	0,505	5

TAB. 3.3: Différents δ et λ obtenus par l'algorithme de détermination automatique par la recherche du minimum de la dérivée moyenne en utilisant une trame de largeur 3 pixels autour des fronts, pour différents cas, avec 127 rotations et 81 projections

Nous remarquons que pour le fantôme 1, une image de 160 pixels et pour le taux de vide 2, les paramètres δ déterminés sont proches de l'amplitude des valeurs des pixels. En effet, les différentes dérivées moyennes calculées au cours des itérations pour déterminer δ sont

supérieures à la dérivée moyenne de l'image obtenue par CGLS régularisé. Le programme converge bien vers la dérivée moyenne minimale, ce qui entraîne un paramètre δ grand. Mais dans ce cas, la préservation des discontinuités ne fonctionne plus. Nous avons une méthode qui n'est pas valable dans tous les cas. Ce phénomène s'explique par l'allure des courbes de dérivées moyenne et maximale pour les taux de vide 1 et 2 (figures 3.82 et 3.83). Le minimum de la dérivée moyenne est obtenu pour δ grand, c'est à dire une image semblable à celle obtenue par CGLS régularisé.

Nous essayons un autre critère. Les courbes de dérivées maximales sur la figure 3.78 présentent un pic dans la même zone, pour δ proche de 0,5. Cela correspond à la zone où nous trouvons "visuellement" la meilleure image. Nous recherchons δ par le maximum de la dérivée maximale. Nous obtenons les valeurs du tableau 3.4. Nous n'utilisons pas de trame, car nous avons intérêt à rechercher le pixel de dérivée maximale partout dans l'image et les courbes présentent des pics pour un même δ .

	δ	λ	Nombre d'étapes
Fantôme 1 simulé 80 pixels	0,94	0,505	6
Fantôme 1 simulé 160 pixels	$2,86 \cdot 10^{-3}$	0,0505	14
Taux de vide 1 simulé 80 pixels	1,97	0,505	6
Taux de vide 2 simulé 80 pixels	2,52	0,505	6

TAB. 3.4: Différents δ et λ obtenus par l'algorithme de détermination automatique par la recherche du maximum de la dérivée maximale sans trame, pour différents cas, avec 127 rotations et 81 projections

Les paramètres δ obtenus paraissent plus corrects si nous les comparons à la gamme des valeurs des pixels des images : ils sont tous inférieurs à la moitié de cette gamme. Celui déterminé pour le fantôme 1 et une image de 160 pixels de côté est petit devant cette valeur.

Comparons les profils obtenus avec les paramètres δ déterminés par la recherche du minimum de la dérivée moyenne et de la recherche du maximum de la dérivée maximale (figures 3.84, 3.85, 3.86 et 3.87).

Nous avons une très légère amélioration des fronts qui n'est pas significative, avec dans certains cas, des phénomènes oscillatoires.

Conclusion pour la méthode de P. Charbonnier

Dans cette partie, nous avons testé différentes méthodes pour déterminer le paramètre d'échelle δ : un choix manuel, "visuel", qui engendre des solutions avec une bonne reconstruction des fronts mais très oscillantes, et un choix automatique où le front est légèrement mieux reconstruit qu'avec CGLS régularisé. Mais il y a toujours un lissage de la zone proche du front, ce qui entraînera **une erreur importante sur le taux de vide** dans cette zone.

C'est pourquoi **cette méthode** ne sera **pas utilisée**.

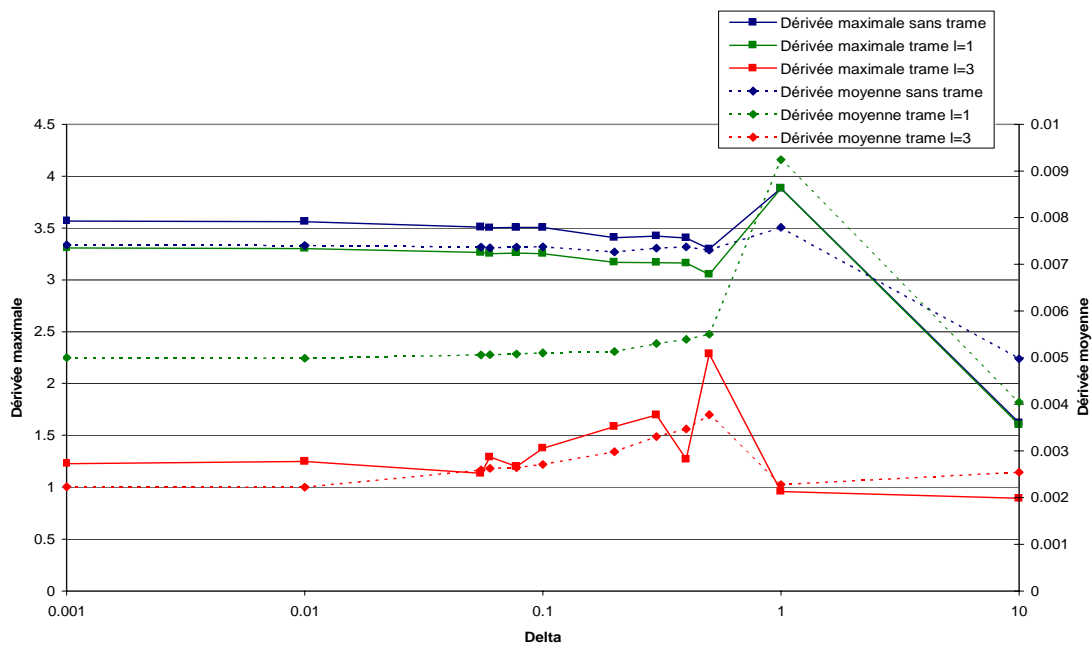


FIG. 3.82: Dérivées premières moyenne et maximale des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour des mesures simulées (127 rotations et 81 translations) du taux de vide 1, pour différents δ , différentes largeurs de trame, 80 pixels et $\lambda = 0,505$

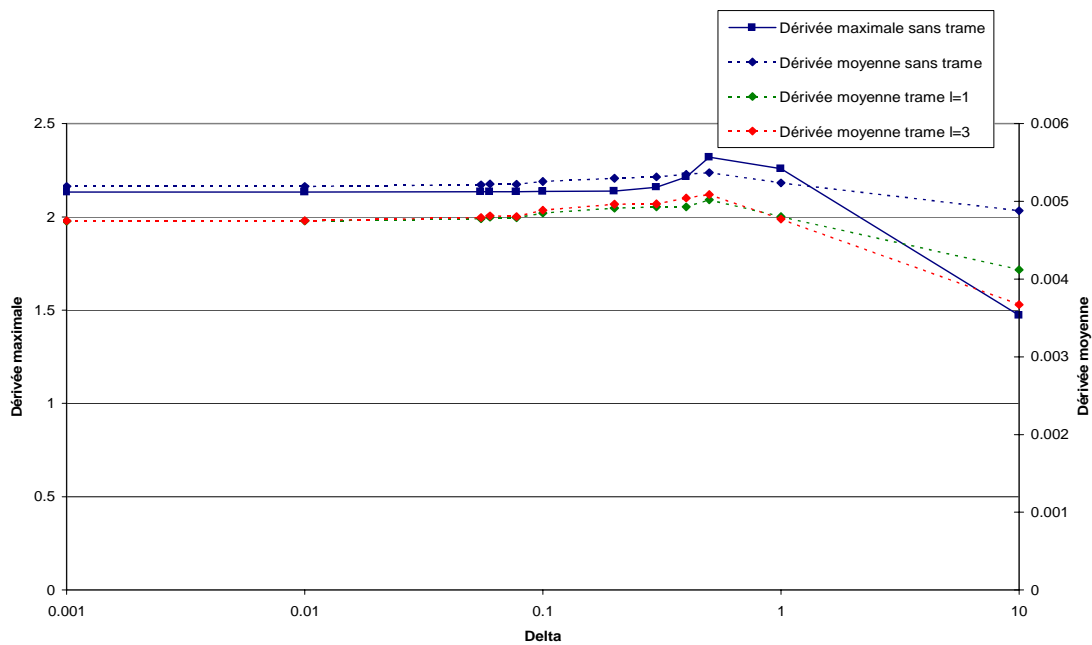


FIG. 3.83: Dérivées premières moyenne et maximale des images obtenues par la méthode de Charbonnier fonction GM pour des mesures simulées (127 rotations et 81 translations) du taux de vide 2, pour différents δ , différentes largeurs de trame, 80 pixels et $\lambda = 0,505$

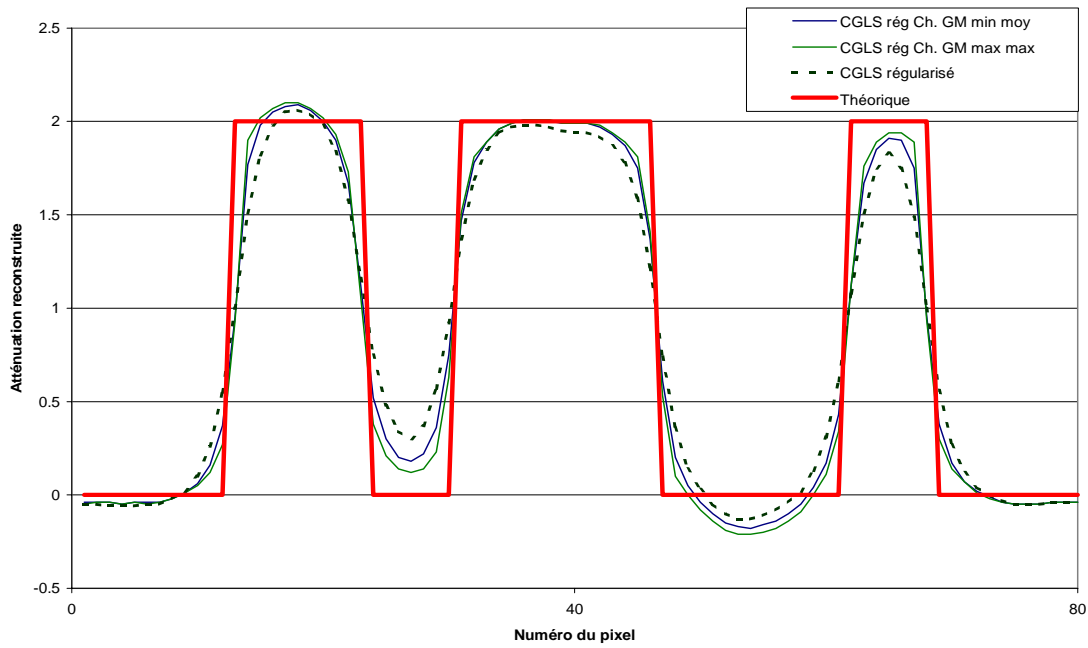


FIG. 3.84: Profils obtenus pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 80 pixels de côté par CGLS régularisé, Charbonnier fonction GM détermination de δ par la recherche du minimum de la dérivée moyenne et du maximum de la dérivée maximale

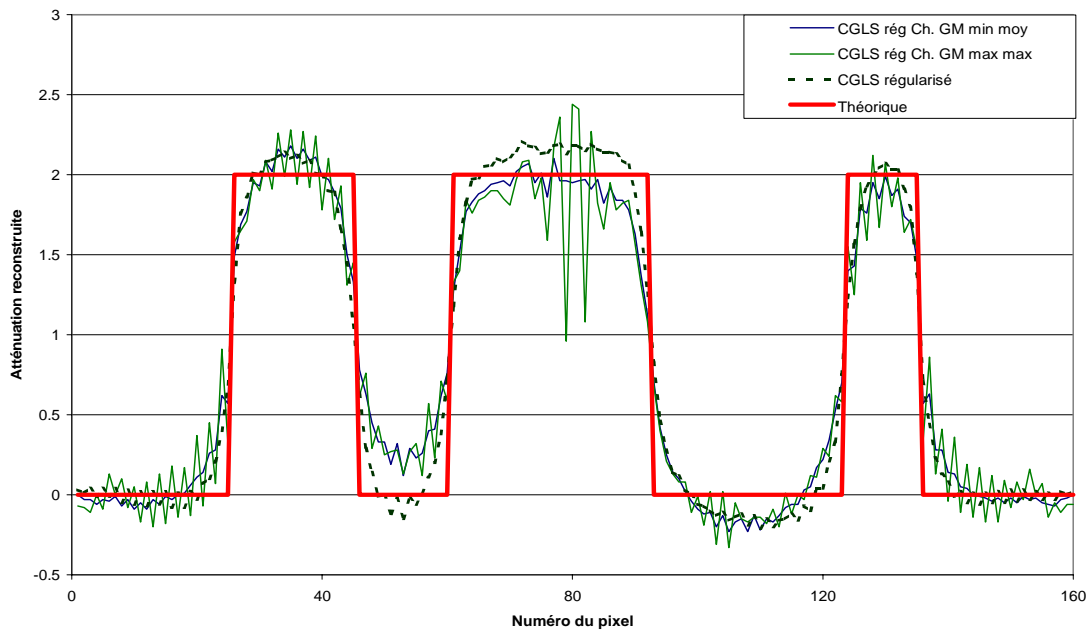


FIG. 3.85: Profils obtenus pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 160 pixels de côté par CGLS régularisé, Charbonnier fonction GM détermination de δ par la recherche du minimum de la dérivée moyenne et du maximum de la dérivée maximale

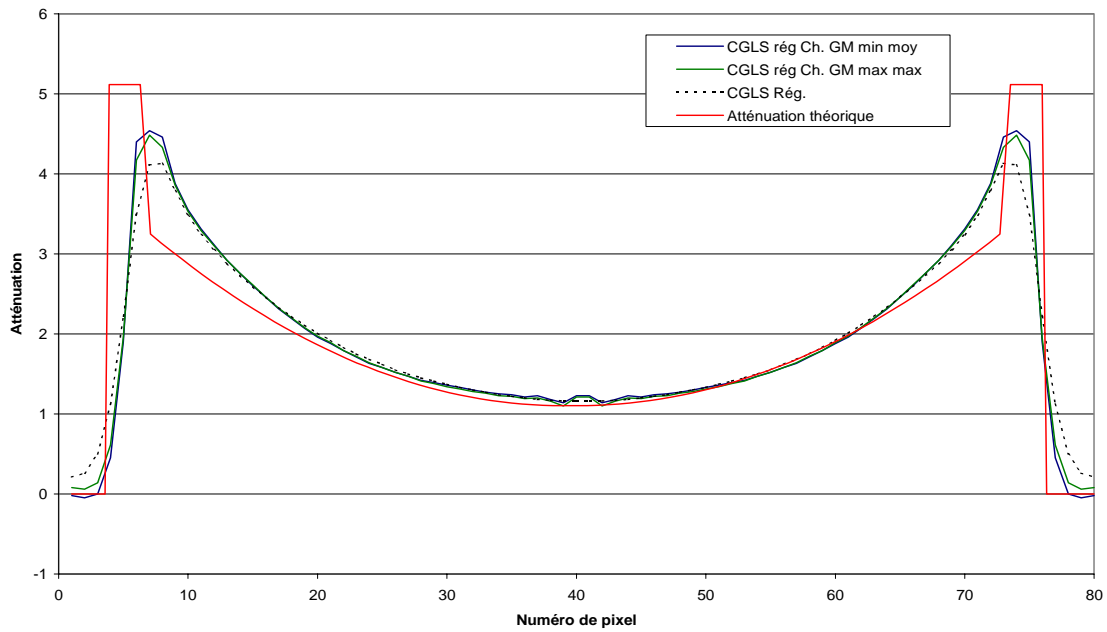


FIG. 3.86: Profils obtenus pour une simulation du taux de vide 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 80 pixels de côté par CGLS régularisé, Charbonnier fonction GM détermination de δ par la recherche du minimum de la dérivée moyenne et du maximum de la dérivée maximale

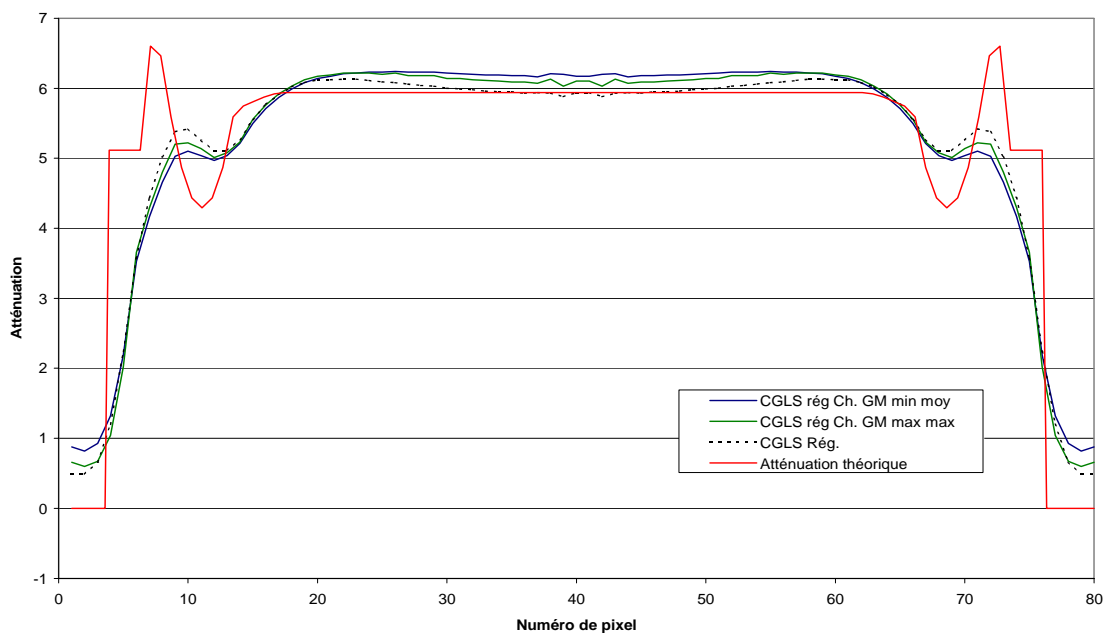


FIG. 3.87: Profils obtenus pour une simulation du taux de vide 2 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 80 pixels de côté par CGLS régularisé, Charbonnier fonction GM détermination de δ par la recherche du minimum de la dérivée moyenne et du maximum de la dérivée maximale

3.5.3 Introduction d'informations a priori concernant la régularisation

De l'information a priori est apportée à cet algorithme. Il est informé des points où il doit régulariser peu.

Lors de l'application future du tomographe, nous connaissons la géométrie de la section d'essais explorée, c'est à dire la position des parois. Nous saurons donc a priori où seront les fronts.

En pratique, avant la résolution du système, nous fournissons à l'algorithme un fichier trame, de même dimension que l'image à reconstruire. Ce fichier comporte, pixel par pixel, un diviseur du paramètre de régularisation. Lors de la reconstruction, ce diviseur sera appliqué à chaque pixel et diminuera localement l'influence du paramètre de régularisation si sa valeur est supérieure à 1. Une valeur de 1 entraînera au contraire une régularisation "normale" en ce point. Cette matrice de diviseurs est prise en compte lors de la détermination automatique du paramètre de régularisation par la Validation Croisée Généralisée.

Nous avons tout d'abord testé cet algorithme avec le diviseur imposé à 1 sur tout le domaine à reconstruire : nous retrouvons bien l'image obtenue par CGLS régularisé.

Nous devons choisir le diviseur pour obtenir une image avec un fond uniforme et des fronts bien reconstruits.

Recherche du diviseur avec λ déterminé par la Validation Croisée Généralisée

Nous allons essayer de trouver ce diviseur en utilisant les mesures simulées du fantôme 1 (figure 3.3) avec 127 rotations, 81 translations et une image de 160 pixels de côté. La trame est réalisée à partir de l'image théorique du fantôme 1. Nous parcourons toute l'image théorique. Si la différence entre deux pixels voisins est supérieure à un seuil, verticalement ou horizontalement, nous détectons un front et nous appliquons le diviseur à ces deux pixels.

Nous testons plusieurs diviseurs (figures 3.88 et 3.89). L'erreur relative augmente par rapport aux images obtenues par CGLS régularisé. L'erreur la plus basse est obtenue avec le diviseur 1 qui correspond à une résolution avec CGLS régularisé. Cette méthode entraîne donc une dégradation de l'image par rapport à CGLS régularisé. Regardons les différents profils (figure 3.89). Nous n'observons **pas une amélioration de la pente** au niveau des fronts, mais plutôt une dégradation de ces pentes par rapport à CGLS régularisé. Pour un diviseur de 4 à 10 000, le paramètre de régularisation est de 0,505 au lieu de $5,05 \cdot 10^{-2}$. Cela explique les profils plus lissés, avec une amplitude plus faible que CGLS régularisé.

Recherche du diviseur avec λ fixé, déterminé avec CGLS régularisé

Afin de voir l'influence du diviseur seul, nous reconstruisons les mesures en fixant le paramètre de régularisation à $5,05 \cdot 10^{-2}$, qui est le paramètre trouvé par CGLS régularisé (figures 3.90 et 3.91).

Nous obtenons les mêmes tendances que précédemment. Les profils obtenus sont très semblables à celui obtenu par CGLS régularisé. Il n'y a **pas d'amélioration de la reconstruction des fronts**.

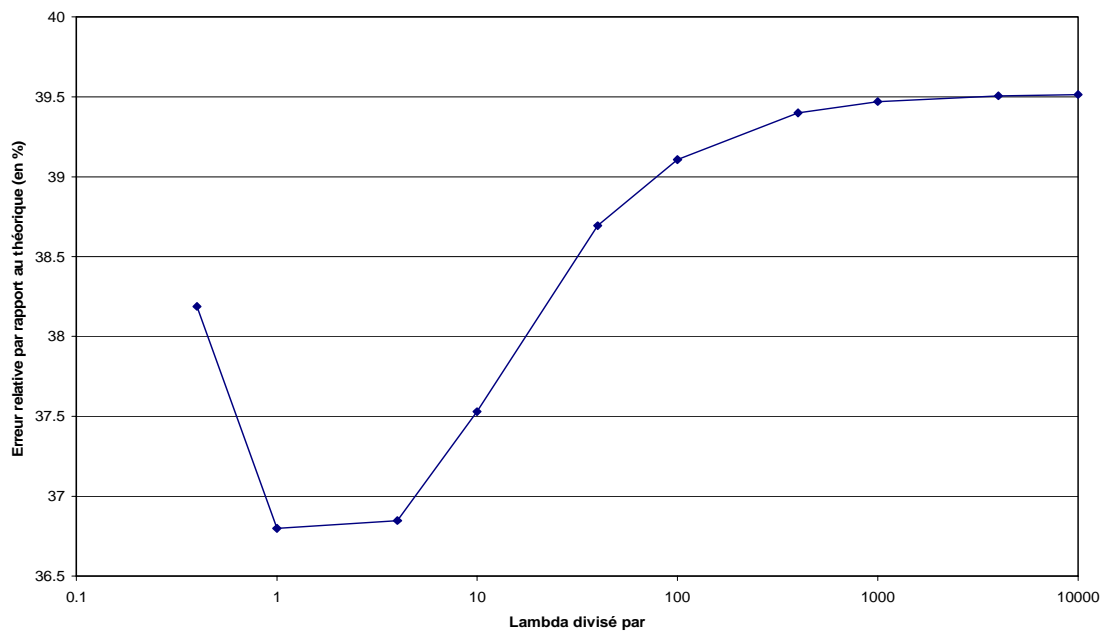


FIG. 3.88: Erreur relative par rapport à l'image théorique pour différents diviseurs

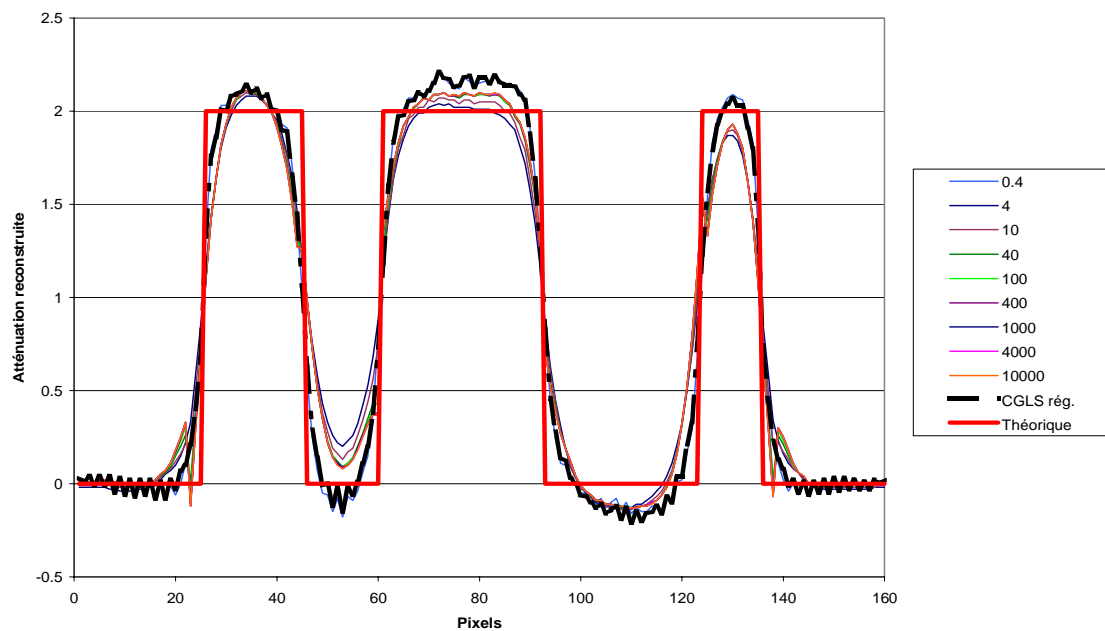


FIG. 3.89: Profils obtenus pour différents diviseurs

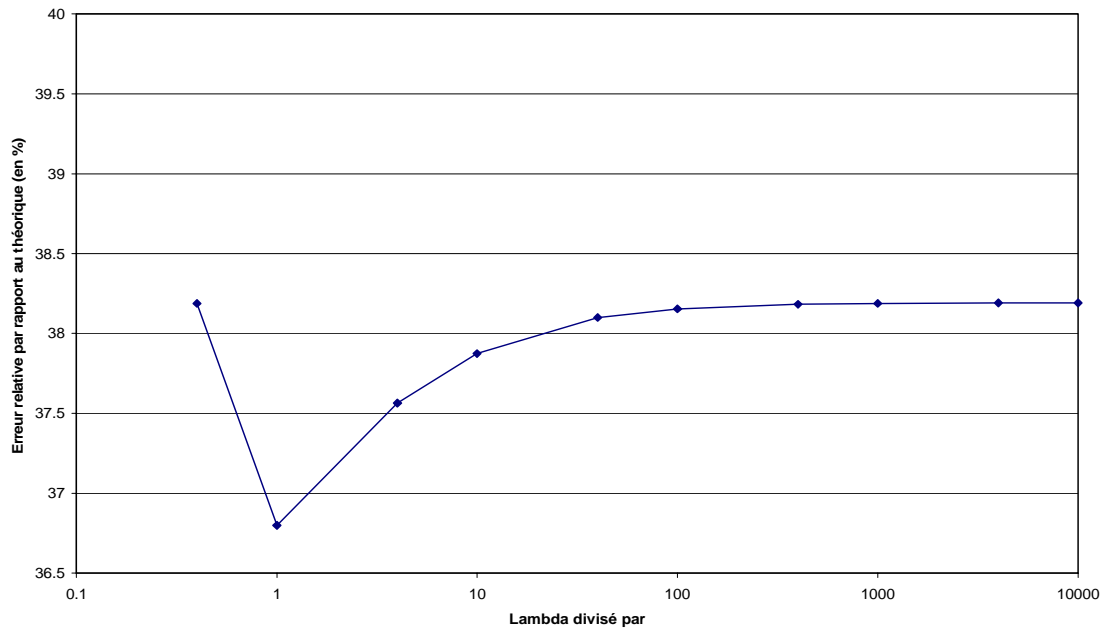


FIG. 3.90: Erreur relative par rapport à l'image théorique pour différents diviseurs

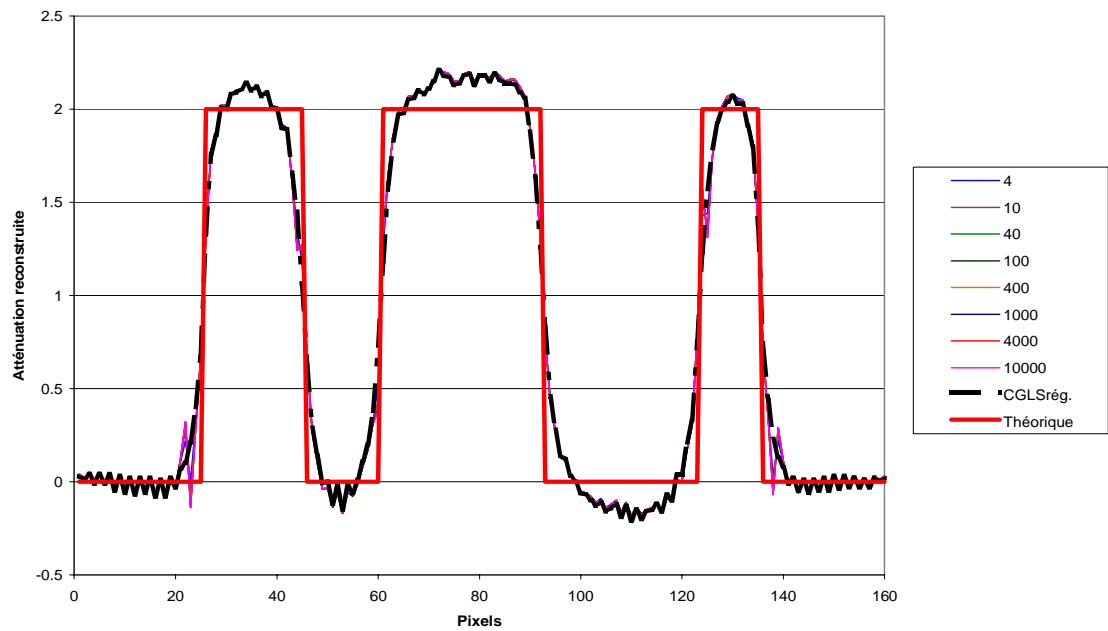


FIG. 3.91: Profils obtenus pour différents diviseurs

Application de la méthode sur une bande

Nous n'avons imposé le diviseur que sur les deux pixels rentrant en jeu pour le front. Nous élargissons cette zone de faible régularisation aux proches voisins des pixels du front.

Nous recommençons nos essais avec différents diviseurs en fournissant à l'algorithme une trame où le diviseur est imposé aux pixels du front, mais aussi à un certain nombre de pixels voisins de part et d'autre du front dans le sens du front (verticalement ou horizontalement). Nous comparons les profils obtenus (figures 3.92, 3.93, 3.96, 3.94, 3.95 et 3.97).

Pour ces figures, les courbes avec un diviseur "imposé" ont été obtenues en fixant le paramètre de régularisation à $5,05 \cdot 10^{-2}$. Dans le cas de CGLS régularisé, la Validation Croisée Généralisée donne un paramètre de régularisation de $5,05 \cdot 10^{-2}$ pour 160 pixels de côté et de $0,0505$ pour 80 pixels de côté.

L'élargissement de la zone de faible régularisation entraîne une modification des profils mais **pas une amélioration de la pente des fronts!** Pour le cas d'une image de 80 pixels de côté et une largeur de 7 pixels (figure 3.93), la zone de faible régularisation couvre pratiquement toute la pièce. Cela revient à appliquer l'algorithme CGLS mais avec un paramètre de régularisation plus faible.

Pour les profils avec 160 pixels, nous remarquons des oscillations proches des fronts, voire sur les paliers. Cela est peut être dû à l'interaction entre deux effets. D'un côté, la faible régularisation aux fronts encourage les fronts francs et de l'autre, le lissage sur les autres parties favorise des profils plats.

Conclusion pour la méthode

Donc pour cette méthode, nous n'avons **pas trouvé de configuration de fonctionnement satisfaisante**.

3.5.4 Introduction d'informations a priori concernant la géométrie

Nous avons vu que la présence de la paroi entraînait une erreur sur la reconstruction. Même en soustrayant les mesures de la paroi seule, l'écart entre la reconstruction et l'image théorique était important du fait du lissage entre écoulement diphasique et fond. Nous cherchons à éliminer ces effets en fournissant à l'algorithme de l'information concernant la géométrie de la zone à reconstruire. En effet, dans le cas de notre application future, nous connaissons précisément la géométrie de la section d'essais à explorer.

Nous fournissons à l'algorithme un masque qui a pour valeur 0 où nous savons qu'il n'y a pas de matière, 1 autrement. L'algorithme met à 0 les pixels correspondant à une valeur nulle dans le masque et ne régularise qu'au niveau des pixels qui ont la valeur 1 dans le masque. Ce masque a la même dimension que l'image F .

Nous appelons cette procédure "**méthode du masque**".

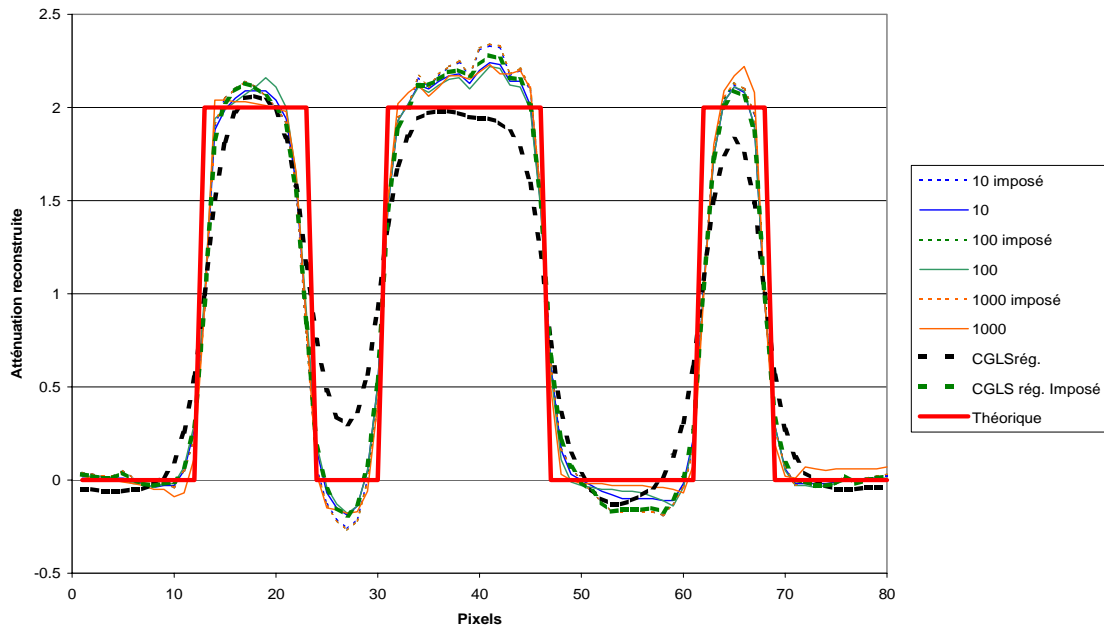


FIG. 3.92: Profils obtenus pour différents diviseurs et une largeur de 3 pixels pour une image de 80 pixels de côté

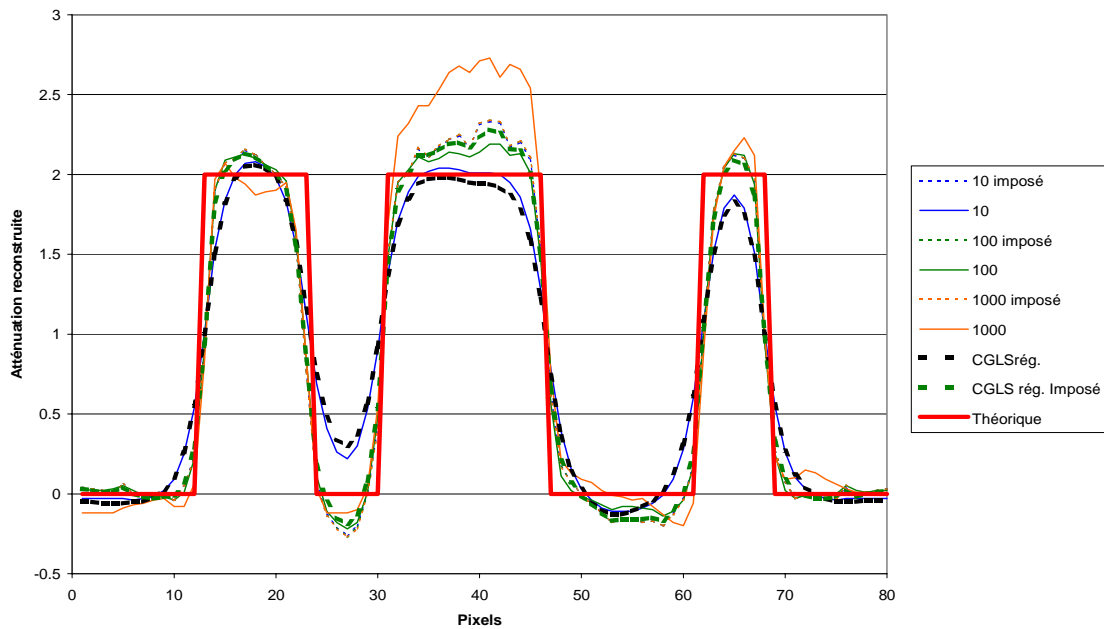


FIG. 3.93: Profils obtenus pour différents diviseurs et une largeur de 7 pixels pour une image de 80 pixels de côté

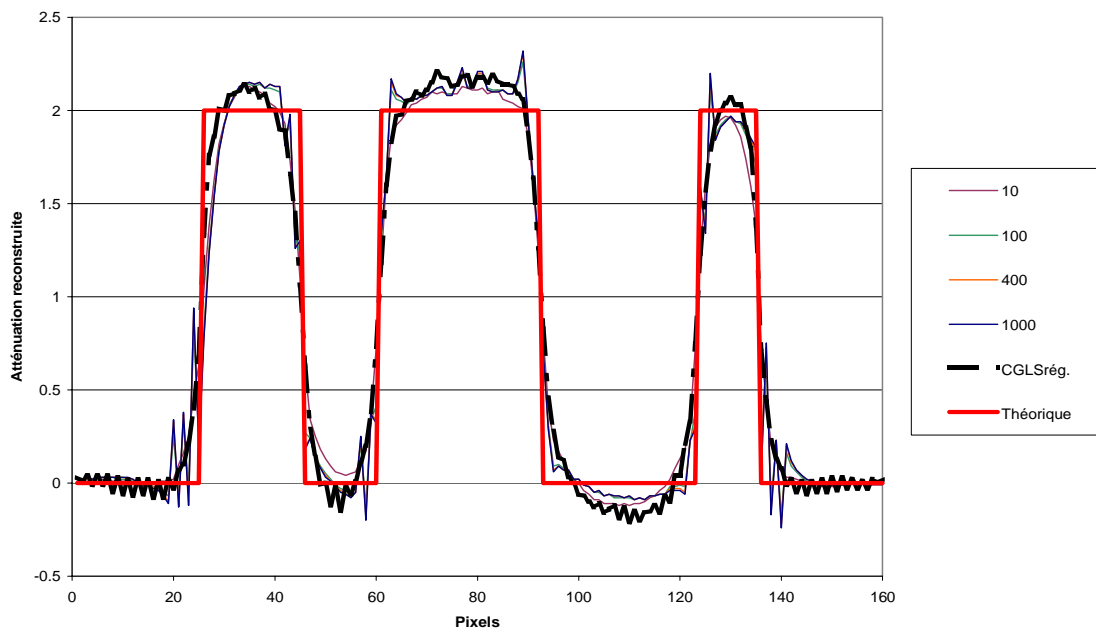


FIG. 3.94: Profils obtenus pour différents diviseurs et une largeur de 3 pixels pour une image de 160 pixels de côté

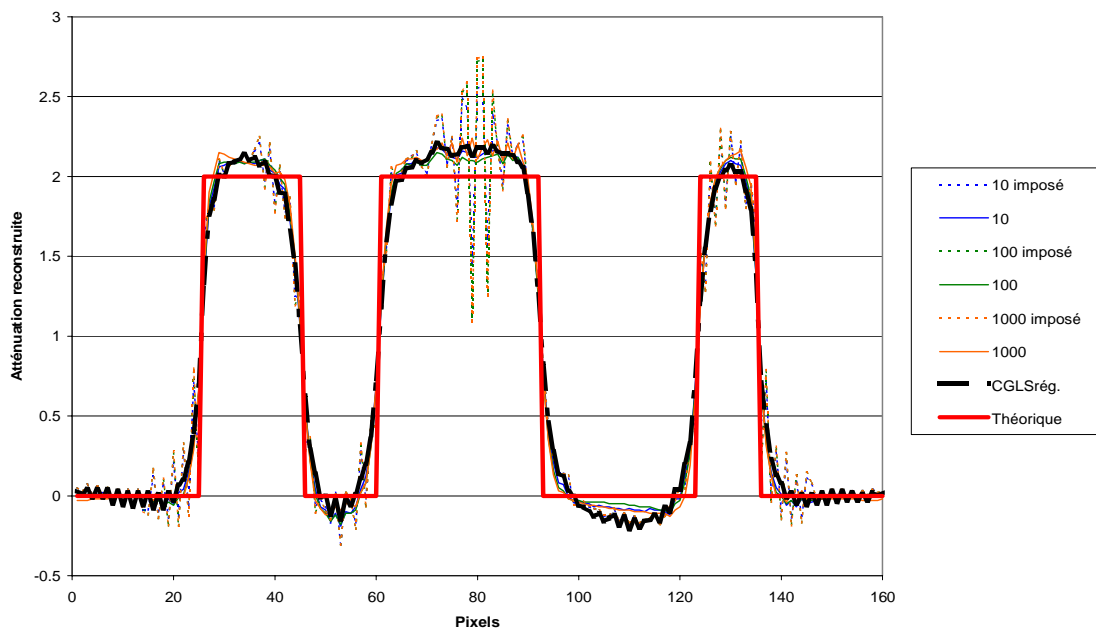


FIG. 3.95: Profils obtenus pour différents diviseurs et une largeur de 7 pixels pour une image de 160 pixels de côté

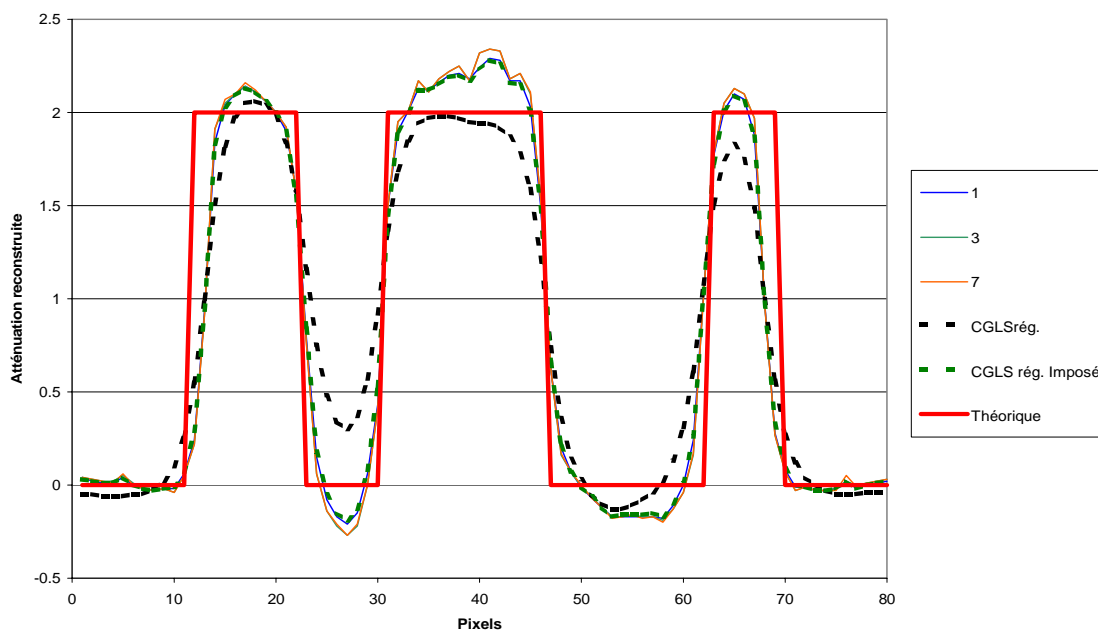


FIG. 3.96: Profils obtenus pour différentes largeurs avec un diviseur de 100 pour une image de 80 pixels de côté

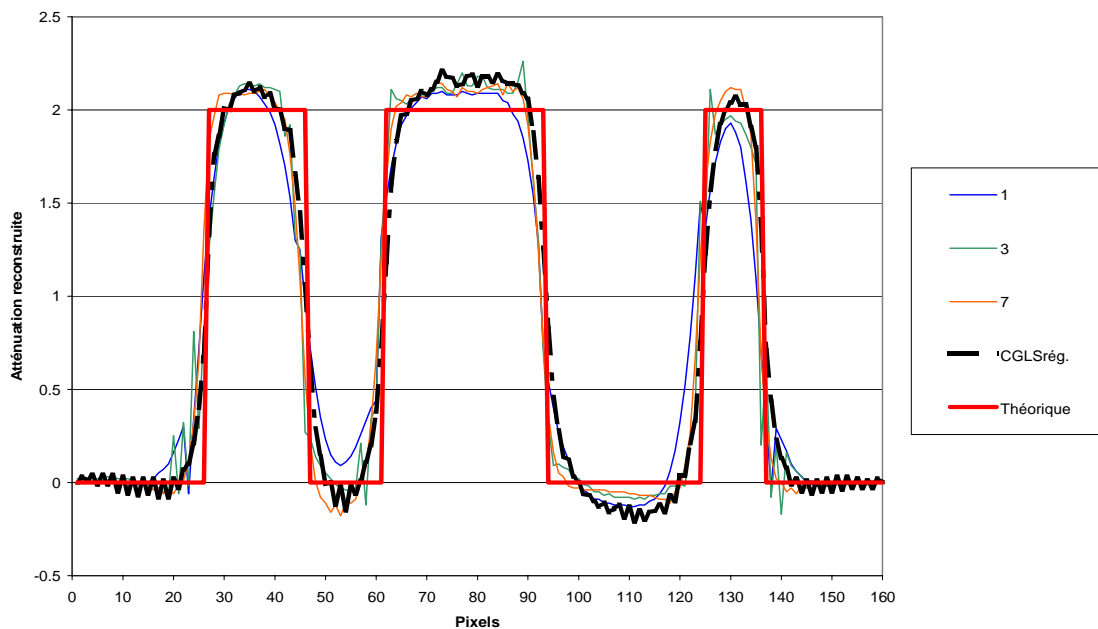


FIG. 3.97: Profils obtenus pour différentes largeurs avec un diviseur de 100 pour une image de 160 pixels de côté

Programmation de cet algorithme

Pour inclure cette amélioration dans l'algorithme du CGLS régularisé, nous réalisons trois modifications :

- lecture du fichier comportant le masque ; celui-ci est chargé dans un vecteur colonne Y ;
- avant la résolution du système linéaire, les termes de la matrice R correspondant aux pixels sans matière sont mis à la valeur 0 ; pour ce faire, chaque ligne de R est multipliée élément par élément par le vecteur Y : pour tout i et tout j , $R_{\text{masque}}(i, j) = R(i, j) Y(j)$;
- l'opérateur laplacien C de la régularisation est calculé de sorte à ne pas prendre en compte les pixels sans matière ; les coefficients de C sont les suivants :
 - pour les proches voisins d'un point dans le masque :

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \quad (3.12)$$

- pour les proches voisins d'un point sans matière :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (3.13)$$

Tests avec des simulations du fantôme 1

Nous utilisons les mesures simulées du fantôme 1 (schéma 3.3) avec 127 rotations et 81 projections que nous reconstruisons sur une image de 160 pixels de côté. Pour définir notre masque, nous avons remarqué que la reconstruction par CGLS régularisé passait au niveau des fronts par la moitié de la gamme de valeurs des pixels. Nous construisons le masque en seuillant à ce niveau. Nous obtenons le masque de la figure 3.98 et l'image de la figure 3.99.

Les trous sont bien reconstruits et le fond est uniforme avec des valeurs allant de 1,87 à 2,14, soit une variation de plus ou moins 7% autour de la valeur théorique 2. Le masque n'inclut pas les trois plus petits trous. En effet, la reconstruction par CGLS régularisé donne pour ces trous des atténuations au-dessus du seuil à 1 en raison du lissage.

Un seuil plus bas entraînerait une reconstruction de ces petits trous, mais une moins bonne reconstruction des grands orifices (masque trop large).

Comparons le profil obtenu avec celui de CGLS régularisé (figure 3.100) et les valeurs de dérivées (figure 3.101).

Par la méthode du masque, les zones sans matière (pixels à valeur nulle) et les fronts sont mieux reconstruits. Les dérivées moyennes et maximales augmentent.

Essais avec un objet carré

Maintenant regardons ce que nous obtiendrons avec un masque carré (figure 3.102). Ce masque peut être décrit exactement avec la géométrie d'image, c'est à dire avec des pixels

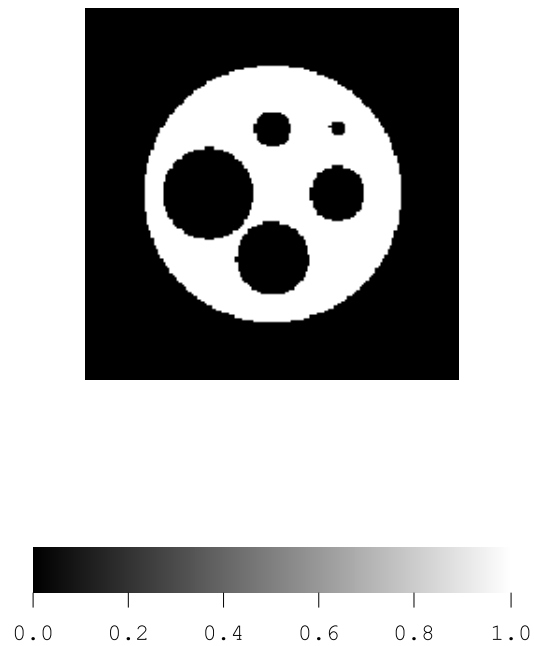


FIG. 3.98: Masque obtenu à partir d'une reconstruction par CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 160 pixels de côté

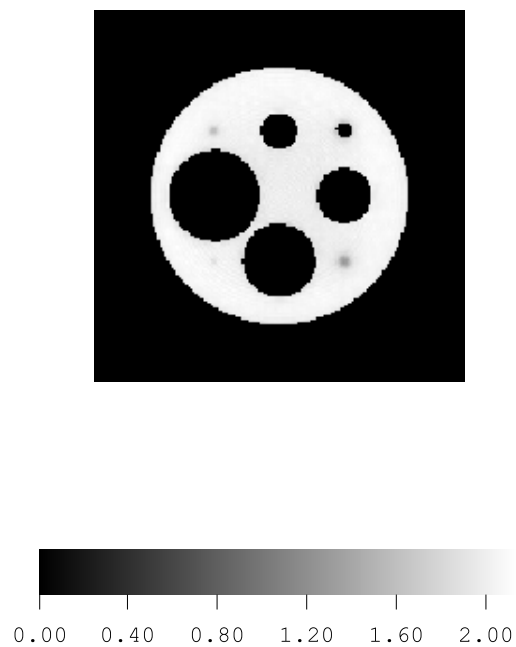


FIG. 3.99: Image obtenue pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 160 pixels de côté et le masque de la figure 3.98

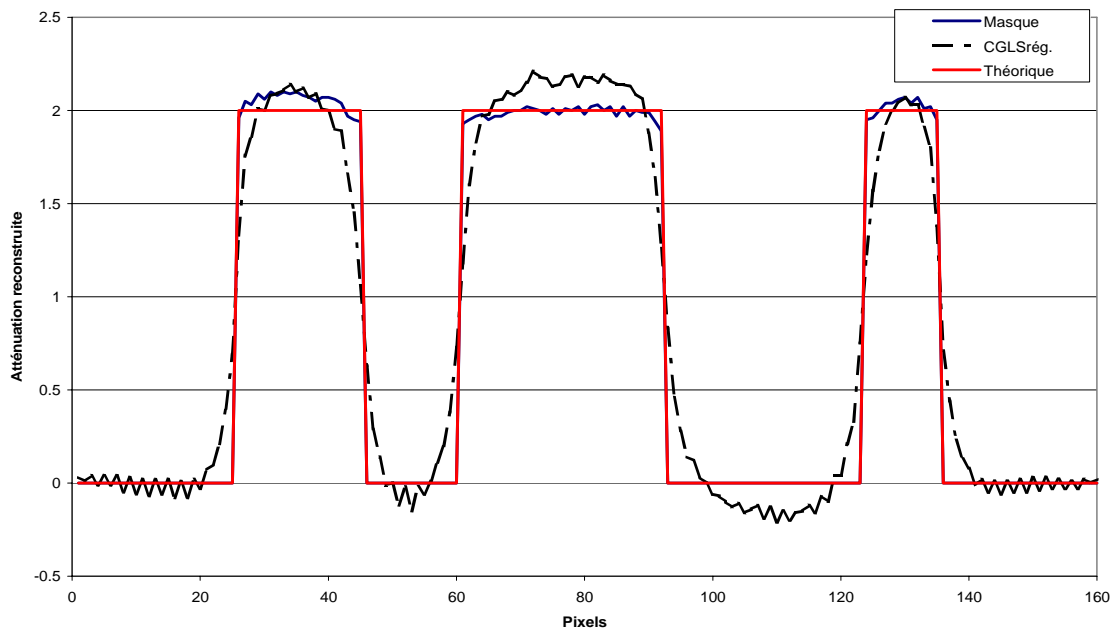


FIG. 3.100: Profils obtenus en utilisant un masque pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations et 81 projections et une image de 160 pixels de côté

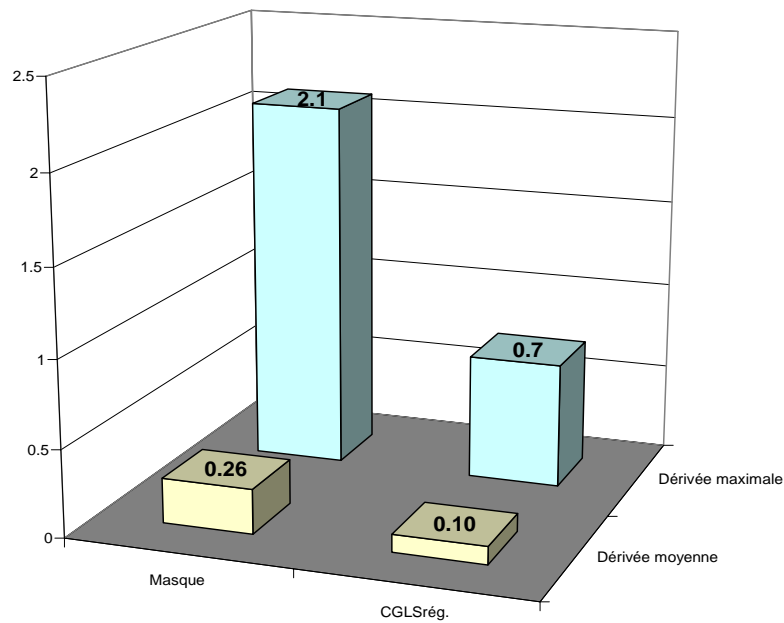


FIG. 3.101: Dérivées des images de 160 pixels de côté obtenues par la méthode du masque et CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec 127 rotations et 81 projections

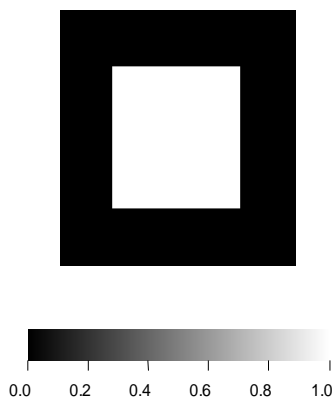


FIG. 3.102: Masque carré de 74 pixels de côté

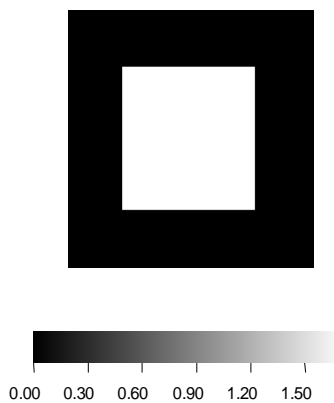


FIG. 3.103: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et la trame de la figure 3.102

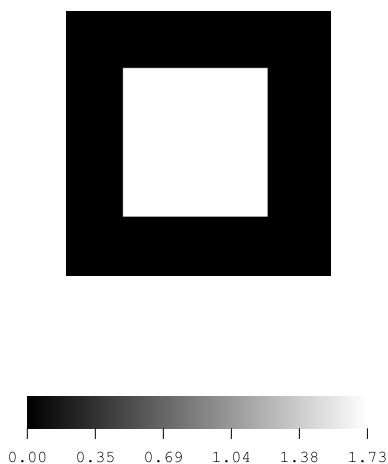


FIG. 3.104: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté, le masque de la figure 3.102 et 5% de bruit blanc

carrés. A partir de la géométrie de ce masque, nous générons des mesures simulées que nous reconstruisons en utilisant notre algorithme (figure 3.103). La valeur théorique du fond est de 1,73. Cette valeur correspondra à la mesure d'un écoulement diphasique à 18 % de taux de vide.

Nous obtenons pour la figure 3.103, un fond uniforme à 1,73. En effet, les mesures sont construites à partir de la trame. Elles ne contiennent pas de bruit. La reconstruction obtenue est la solution exacte du système linéaire. La Validation Croisée Généralisée détermine alors un paramètre de régularisation λ très grand de 5.10^9 . Cela donne un lissage très important. En effet, nous n'avons plus ici les fronts qui entraînaient pour CGLS régularisé un paramètre de régularisation bas : il ne faut plus trouver un compromis entre l'élimination du bruit et la préservation les fronts !

Nous rajoutons aux mesures du bruit blanc avec une amplitude de 5 % de l'amplitude des mesures. Nous obtenons l'image 3.104.

La Validation Croisée Généralisée trouve un paramètre de régularisation λ de 505. Nous obtenons ici aussi une image parfaitement uniforme à 1,73. Un faible niveau de bruit n'a pas d'influence sur la méthode du masque.

Reconstruction d'une gaussienne tronquée

Nous avons simulé les mesures d'une gaussienne tronquée et avons reconstruit son image. Comparisons un profil de cette image avec le profil théorique (figure 3.105).

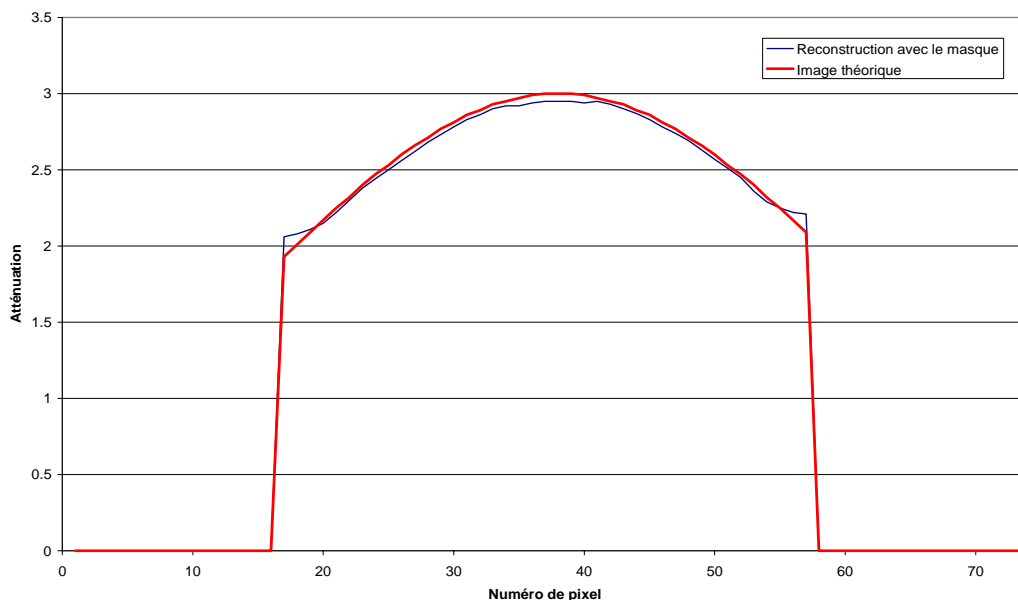


FIG. 3.105: Profil obtenu pour une simulation d'une gaussienne tronquée avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté

Le profil est très bien reconstruit. Proche des bords, l'atténuation présente une déformation qui reste faible en valeur et qui est peu étalée. L'erreur relative globale entre l'image reconstruite et l'image théorique est de 2,3 %.

Effets du masque

Regardons l'effet de l'étendue du masque sur la reconstruction. Pour reconstruire notre image, nous allons utiliser un masque moins large (figure 3.106) et un masque plus large (figure 3.107), débordant de deux pixels respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du domaine à reconstruire.

Sur l'image obtenue avec un masque moins large (figure 3.106), nous remarquons près des bords des pics d'atténuation allant jusqu'à un écart de 95 % par rapport à la valeur théorique. En effet, dans les mesures, nous avons une atténuation totale que nous répartissons sur trop peu de pixels. Cela donne cette image en bosse convexe.

Sur l'image obtenue avec un masque plus large (figure 3.107), il y a des pixels à une valeur plus basse que la valeur théorique et un fond à peu près uniforme. Dans ce cas, l'algorithme prend en compte des pixels où l'atténuation est théoriquement nulle. L'algorithme régularise l'image, donc la lisse. Cela donne une image en bosse concave. Le fond n'est pas aussi uniforme qu'avec le bon masque, car le paramètre de régularisation λ trouvé par la Validation Croisée Généralisée est plus petit, de 0,505. L'image est beaucoup moins lissée que pour l'image 3.103.

Ces deux images nous permettent de conclure qu'il faut **prendre un masque ajusté parfaitement à l'objet mesuré**.

Reconstructions d'objets avec des trous

Nous avons maintenant utilisé des masques carrés avec des parties évidées. Nous revenons à un cas semblable aux simulations du fantôme 1 et au cas que nous pourrions rencontrer si nous mesurons l'écoulement autour de faisceaux de tubes. Nous obtenons les images 3.108 et 3.109.

Dans le cas d'une détermination automatique du paramètre de régularisation λ , la Validation Croisée Généralisée détermine, comme précédemment, un paramètre très grand de $5 \cdot 10^9$, cela donne un lissage très important. Les images 3.108 et 3.109 présentent des sections parfaitement uniformes à la valeur théorique de 1,7.

Reconstructions d'un losange et d'un cylindre

Nous simulons maintenant un carré tourné de 45° et un cylindre plein avec une atténuation uniforme de valeur 1 (figures 3.110 et 3.111).

Le paramètre de régularisation λ déterminé par la Validation Croisée Généralisée est de $5,05 \cdot 10^9$. C'est pourquoi nous obtenons des images parfaitement "lisses" à la valeur théorique 1.

Nous rajoutons du bruit dont l'amplitude est de 5 %, et regardons les images obtenues (figures 3.112 et 3.113).

Le paramètre de régularisation λ déterminé par la Validation Croisée Généralisée est de 50500 pour le carré tourné de 45° et de 505 pour le cylindre plein. Nous avons un lissage important et nous obtenons des images homogènes à la valeur théorique 1.

Nous créons de nouveau les mesures du cylindre plein en prenant bien en compte l'aspect circulaire de cet objet (mesures créées par l'algorithme analytique). Nous reconstruisons l'image avec le masque utilisé précédemment (figure 3.114).

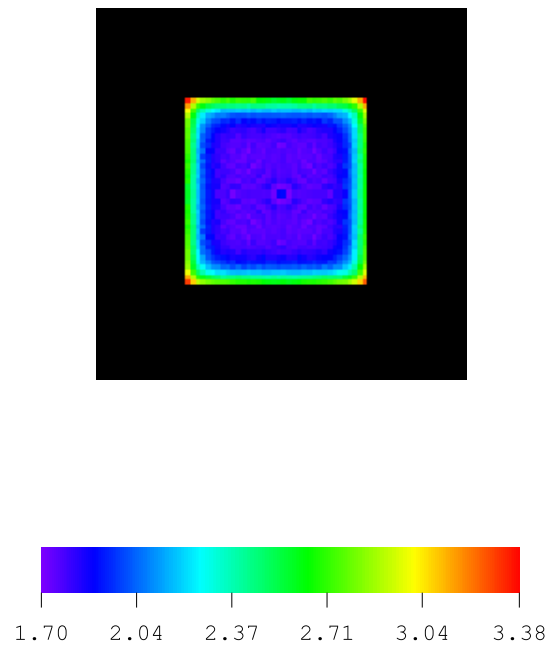


FIG. 3.106: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et un masque moins large de deux pixels

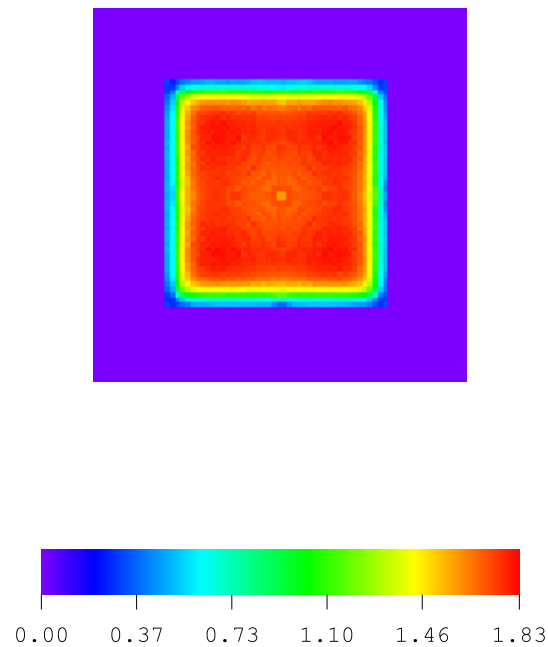


FIG. 3.107: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et un masque plus large de deux pixels

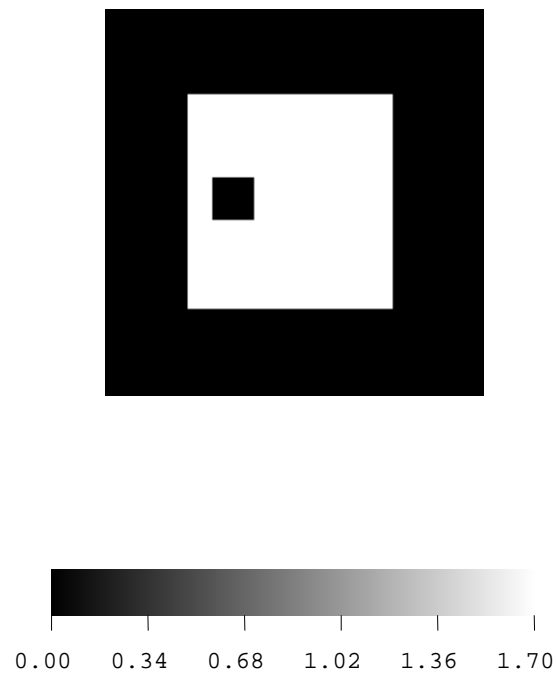


FIG. 3.108: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme avec l'orifice 1 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et le masque adéquat

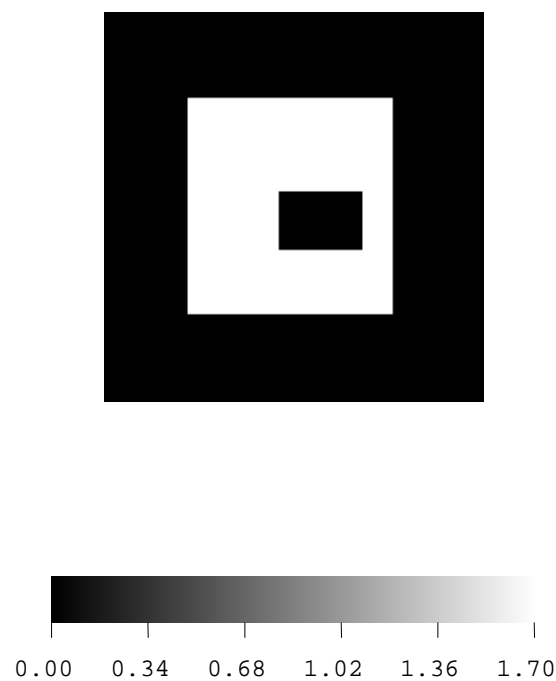


FIG. 3.109: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme avec l'orifice 2 avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et le masque adéquat

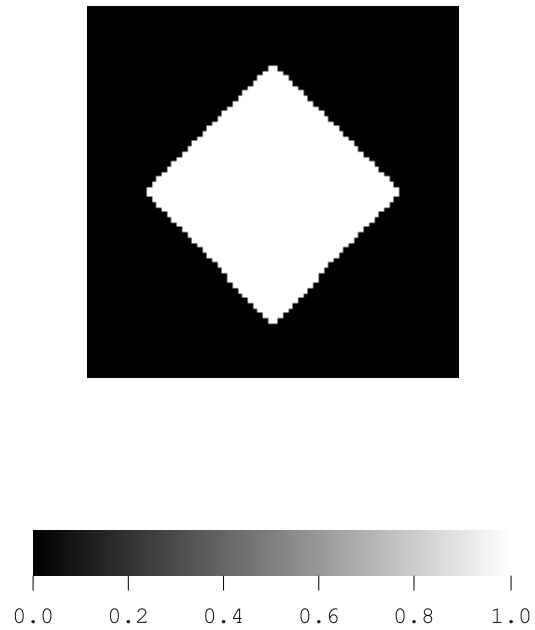


FIG. 3.110: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme tournée de 45° avec 127 rotations, 81 translations et une image de 74 pixels de côté

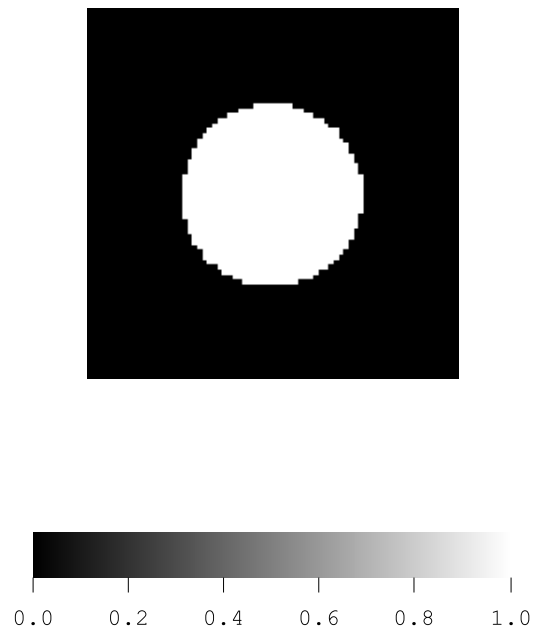


FIG. 3.111: Image obtenue pour une simulation d'un cylindre plein avec 127 rotations, 81 translations et une image de 74 pixels de côté

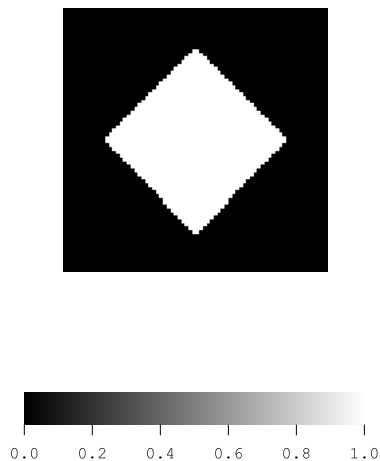


FIG. 3.112: Image obtenue pour une simulation d'une section uniforme tournée de 45° avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et 5 % de bruit blanc

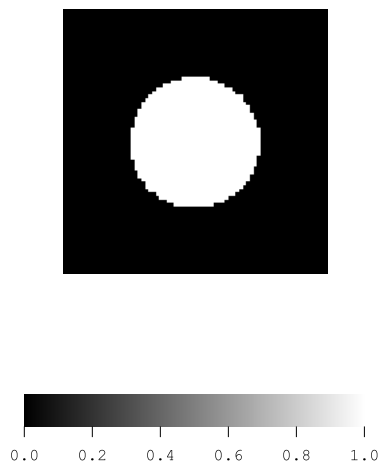


FIG. 3.113: Image obtenue pour une simulation d'un cylindre plein avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté et 5 % de bruit blanc

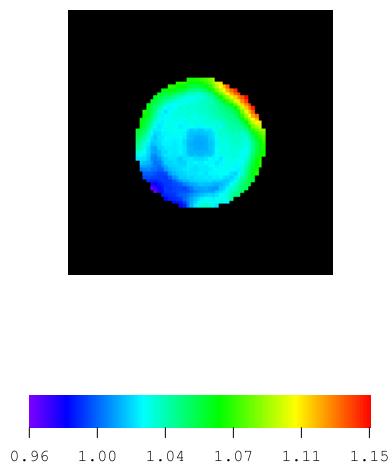


FIG. 3.114: Image obtenue pour une simulation d'un vrai cylindre plein avec 127 rotations, 81 translations, une image de 74 pixels de côté

Cette image présente un écart de 19 % par rapport à la valeur théorique 1. Ces défauts sont présents au niveau des bords du masque. Nous modélisons un cercle par un masque avec des pixels carrés. Le bord du cercle est **mal modélisé**, ce qui donne les défauts visibles.

Pour prendre en compte des objets non simulables par des pixels carrés, comme un cercle, il faudrait mailler le domaine avec des pixels non carrés. La matrice R serait modifiée, mais la résolution du système linéaire resterait la même.

Conclusion pour cette méthode

Pour les mesures sur Mini-TOMIX, nous **utiliserons cet algorithme** avec la méthode du seuil pour créer le masque.

3.6 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre comparé les quatre algorithmes retenus à la suite de la synthèse bibliographique :

- CGLS ;
- LSQR ;
- RRLS ;
- Résidu Minimal à trois vecteurs de descente.

Nous les avons étudiés dans leurs versions normale et régularisée.

Nous avons comparé l'évolution du résidu, le nombre d'itérations pour obtenir la convergence, le temps par itération, la fidélité à l'image originale et la sensibilité au bruit. Nous en avons déduit **la nécessité d'utiliser la régularisation** et que l'algorithme de **CGLS régularisé**, qui est le plus simple, est le meilleur parmi les quatre.

Nous avons ensuite reconstruit des simulations d'écoulement avec différents profils de taux de vide. Un lissage près des fronts entraîne une erreur importante sur le taux de vide reconstruit. C'est pourquoi nous avons essayé de trouver des bonnes configurations de fonctionnement (meilleure reconstruction des fronts) pour quatre variantes du CGLS régularisé :

- la méthode de V. La ;
- les méthodes de Charbonnier ;
- Introduction d'information a priori, indiquant où régulariser peu ;
- Introduction d'information a priori, indiquant où sont les pixels nuls.

Pour les trois premières méthodes, nous n'avons pas trouvé de condition de fonctionnement acceptable.

La dernière méthode est la seule qui ait donné une bonne reconstruction du taux de vide sans problème au niveau des fronts. En effet avec cette méthode, ces derniers sont éliminés. Nous soustrayons des mesures les mesures à vide, ce qui élimine la part de l'atténuation due aux parois. Puis nous indiquons à l'algorithme le domaine où nous voulons reconstruire et où il faut régulariser. Il n'y a plus de régularisation, donc de lissage, entre la zone intéressante et son entourage à une valeur nulle.

Pour les reconstructions de mesures réelles, nous utiliserons dorénavant cet algorithme que nous appelons **algorithme du masque**.

Pour cet algorithme, nous avons remarqué que la **détermination du masque** était **très importante** : il faut qu'il ne soit ni trop étroit, ni trop large.

Chapitre 4

Dispositif Mini-TOMIX

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de décrire le dispositif Mini-TOMIX et de définir les meilleurs réglages de ses paramètres de fonctionnement afin d'avoir la meilleure reconstruction possible.

Nous traiterons des paramètres suivants :

- Réglage des paramètres du générateur de rayons X et des photomultiplicateurs :
 - Choix du filtre du porte-tube ;
 - Choix de la haute-tension du tube ;
 - Choix de l'intensité du tube ;
 - Choix des hautes tensions des photomultiplicateurs ;
- Réglage des paramètres d'acquisitions :
 - Choix du filtre passe-bas sur les mesures ;
 - Choix de la fréquence d'acquisition ;
 - Choix du nombre de mesures.

Nous optimiserons ces paramètres pour effectuer des mesures sur des cibles en Plexiglas et sur des écoulements.

Après avoir optimisé ces paramètres, nous trouverons un moyen d'éliminer certains effets parasites.

4.2 Description de Mini-TOMIX

Ce dispositif expérimental a été mis en place dans le cadre de ce travail.

4.2.1 Description du dispositif expérimental

Mini-TOMIX se compose d'une chaîne de mesure pour rayons X, d'une chaîne de mesure pour sonde optique, d'une section d'essais et de deux bancs de déplacement (schéma 4.1, photographies 4.2 et 4.3).

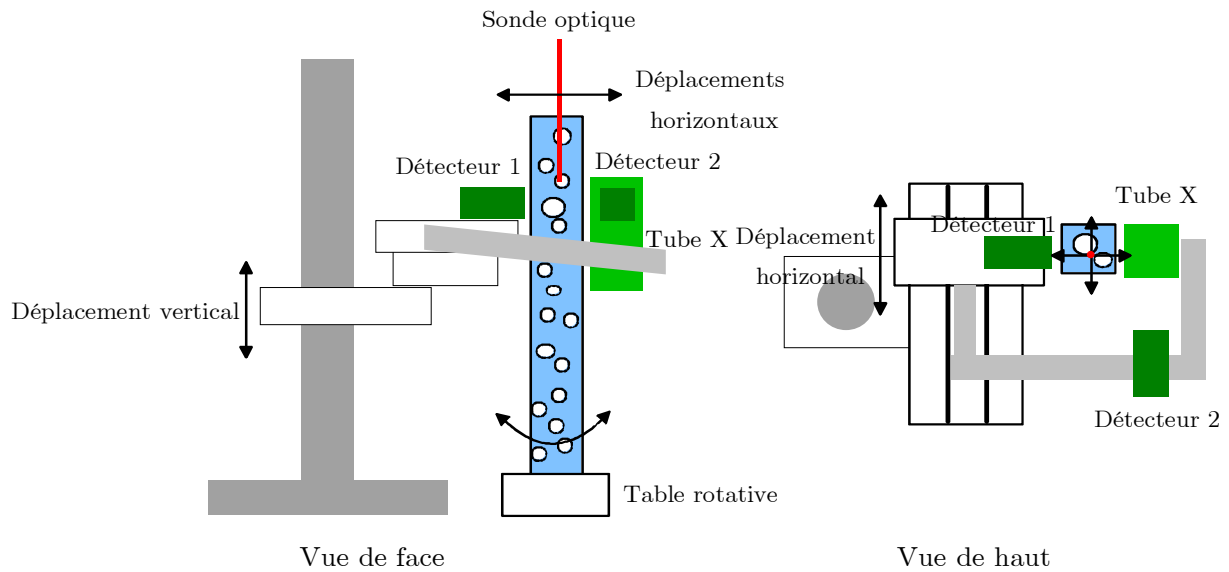


FIG. 4.1: Schéma de Mini-TOMIX

Sur le premier banc, sont montés un tube à rayons X à deux fenêtres et anticathode de Cuivre, et deux photomultiplicateurs à scintillateurs NaI(Ta). L'un des photomultiplicateurs est utilisé pour une mesure de référence de l'intensité du faisceau X (détecteur 2 sur le schéma 4.1) et l'autre pour la mesure de l'intensité du faisceau X atténué par l'écoulement (détecteur 1 sur le schéma 4.1). Les deux photomultiplicateurs ont été modifiés pour mesurer le flux de photons reçus.

Les deux fenêtres du tube sont collimatées à 0,5 mm de diamètre. Le tube à rayons X est alimenté par un générateur stabilisé pouvant délivrer une tension de 20 à 60 kV et un courant de 5 à 80 mA. La puissance maximale admissible par le tube à rayons X est de 1 500 W. Deux générateurs stabilisés alimentent les deux photomultiplicateurs avec une tension maximale de 3,5 kV. Ces trois générateurs sont contrôlés indépendamment par le PC.

Le tube et les photomultiplicateurs sont fixés sur le même support. Tout cet ensemble peut se déplacer verticalement et horizontalement grâce à deux systèmes de vis sans fin entraînés par des moteurs pas à pas. Le pas de déplacement est d'un micromètre. La section d'essais est montée sur une table tournante, ce qui permet d'obtenir les vues suivant différents angles. Le pas de rotation est de 0,01 °. Tous ces déplacements sont munis de contacts de fin de course et d'une détection d'origine via un capteur optique. La recherche d'origine permet de toujours



FIG. 4.2: Photographie d'ensemble de Mini-TOMIX

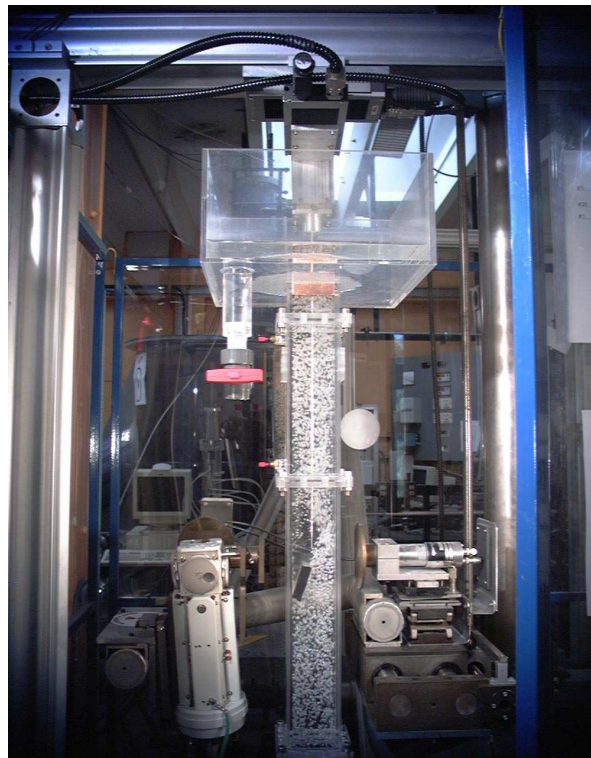


FIG. 4.3: Photographie de la sonde optique de Mini-TOMIX

commencer les acquisitions avec un dispositif dans la même position. Le PC contrôle tous ces déplacements.

Une sonde optique pénètre dans la section d'essais par son orifice supérieur (photographie 4.3).

La pointe très fine (de l'ordre d'une dizaine de μm) de cette sonde, obtenue par l'étirement d'une fibre optique, est positionnée dans l'écoulement diphasique. Un faisceau lumineux est envoyé dans cette fibre. Si la pointe est dans la phase liquide, en raison de la faible différence d'indice entre la fibre et l'eau, le rayon lumineux est diffracté dans la phase liquide et aucun signal n'est récupéré en sortie de fibre. Si la fibre est dans la phase gazeuse, la différence d'indice entre le gaz et la fibre provoque la réflexion de la lumière, qui est alors récupérée en extrémité de fibre. Deux seuils sur le signal de sortie permettent de détecter les fronts montants et descendants : le signal binaire ainsi obtenu représente la fonction indicatrice de phase (schéma 4.4). La moyenne temporelle de ce signal donne le taux de présence local avec une incertitude absolue de $\pm 1\%$.

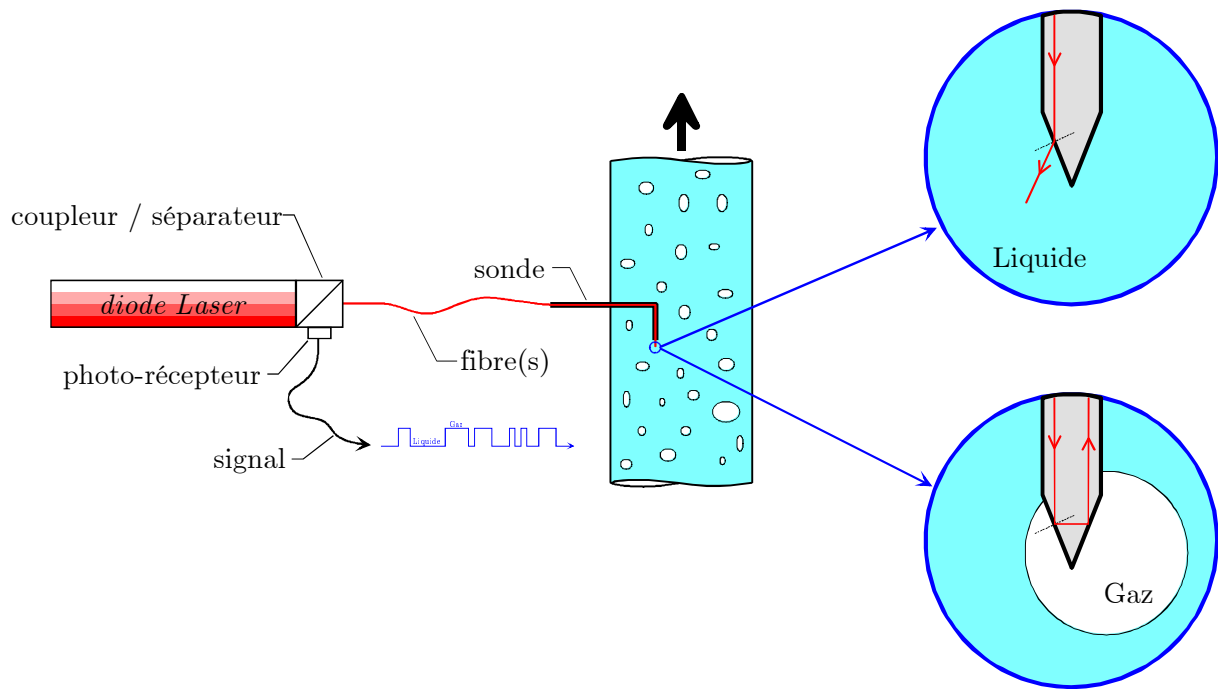


FIG. 4.4: Principe de fonctionnement de la sonde optique

Cette sonde est déplacée dans un plan horizontal grâce à deux moteurs pas à pas, avec une précision d' $1\ \mu\text{m}$. Cela permet d'obtenir une carte du taux de présence local au même niveau que la mesure tomographique. Un deuxième PC contrôle les déplacements et l'acquisition de la sonde optique.

4.2.2 Description de la section d'essais

La section d'essais est une colonne en Plexiglas de section intérieure carrée de 80 mm de côté (plan 4.5). Les parois ont une épaisseur de 10 mm.

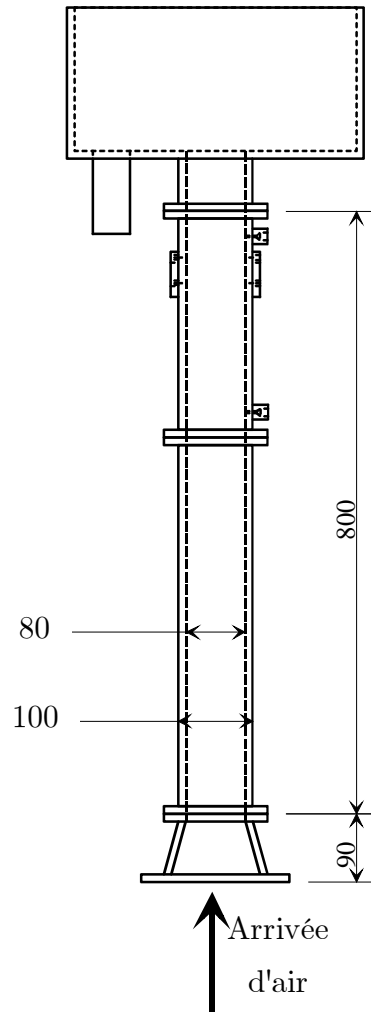


FIG. 4.5: Plan de la section d'essais Eucalyptus

Cette section est remplie d'eau déminéralisée. Une arrivée d'air à la base de la colonne permet de générer un écoulement diphasique. L'air traverse une plaque perforée en bas de la colonne, créant ainsi un écoulement à bulles uniforme. Un déflecteur en Plexiglas peut être positionné dans la section afin de dévier l'écoulement et obtenir un taux de vide non uniforme.

Le débit d'air est réglable et mesuré grâce à un débitmètre massique thermique. Dans une gamme de 0 à 50 Nl.min^{-1} , la précision est de $\pm 2,5 \%$.

Cette section d'essais est positionnée sur la table rotative de sorte que son axe et l'axe de rotation de la table soient confondus et verticaux. A l'orientation 0° , les faces de la colonne sont parallèles au déplacement en translation de l'ensemble tube et photomultiplicateurs. Cette position permet d'aligner la section d'essais avec la grille de reconstruction.

Cette section d'essais pourra être remplacée par des fantômes en Plexiglas qui seront aussi positionnés sur la table de rotation. Ces fantômes sont des cylindres de Plexiglas percés de plusieurs trous (voir section 3.3.1).

4.2.3 Description du système de contrôle-commande de Mini-TOMIX

Nous allons dans cette partie décrire les procédures et les programmes d'acquisition sous Labview des deux PC.

Mesures tomographiques

Ce programme contrôle l'acquisition de la partie tomographie de Mini-TOMIX (figure 4.6).

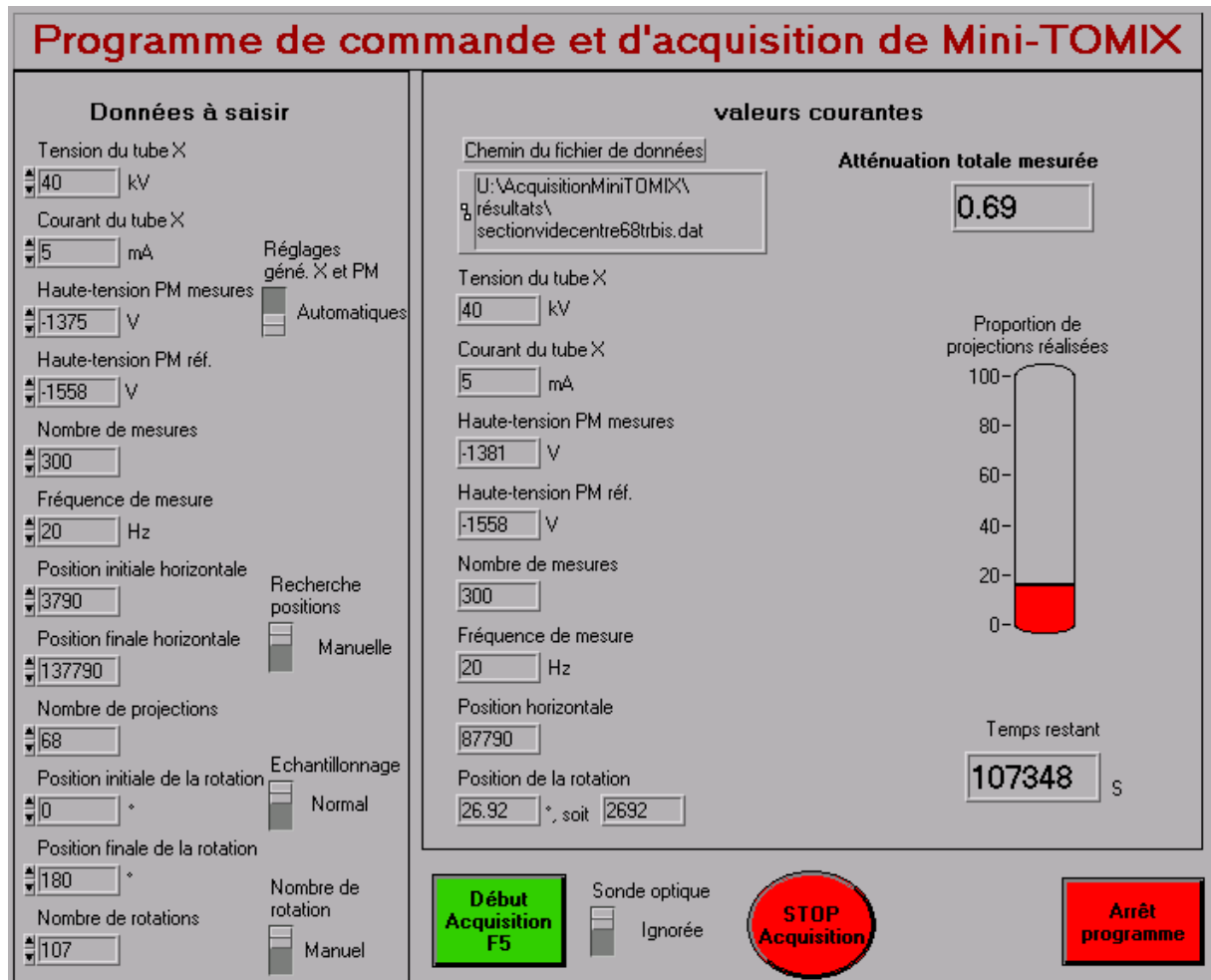


FIG. 4.6: Interface du programme d'acquisition tomographique de Mini-TOMIX

Pour chaque position de mesures, n valeurs des signaux V_{mesure} et $V_{\text{référence}}$ des deux photomultiplicateurs sont acquises. Les valeurs moyennes $V_{\text{mesure, moyen}}$ et $V_{\text{référence, moyen}}$ de ces signaux sont enregistrées dans un fichier. A la fin de l'ensemble des acquisitions, l'atténuation est calculée pour chaque position de mesures.

Soient i , le numéro de projection et j le numéro de rotation. Le flux de référence, c'est à dire sans traverser d'objet, est obtenu par interpolation linéaire entre la première et dernière mesures à la position angulaire considérée :

$$V_{\text{à vide}}(i, j) = V_{\text{mesure, moyen}}(1, j) + (V_{\text{mesure, moyen}}(M, j) - V_{\text{mesure, moyen}}(1, j)) \frac{i - 1}{M - 1} \quad (4.1)$$

A ces positions, les rayons X ne traversent ni les fantômes, ni la section d'essais.

L'atténuation linéique est alors obtenue par :

$$A(i, j) = \ln \frac{V_{\text{à vide}}(i, j)}{V_{\text{mesure, moyen}}(i, j)} \quad (4.2)$$

Pour les besoins du programme d'acquisition, après chaque acquisition, un calcul "instantané" de l'atténuation linéique est réalisé via la moyenne des n atténuations obtenues grâce aux n valeurs de tension des deux voies :

$$A_{\text{instantané}}(i, j) = \frac{1}{n} \sum_n \left[\ln \frac{V_{\text{référence}}(i, j)}{V_{\text{mesure}}(i, j)} \right] \quad (4.3)$$

Une étude a permis de démontrer que l'écart entre ces deux méthodes de calcul de l'atténuation linéique est inférieur à 0,1 % pour les écoulements à bulles générés dans la section d'essais utilisée et obtenus avec différents débits d'air.

L'utilisateur saisit les paramètres suivants :

- réglage manuel ou automatique des paramètres du tube à rayons X et des photomultiplicateurs ;
- dans le cas d'un réglage manuel, tension et intensité du tube et tensions des photomultiplicateurs ;
- nombre de mesures et la fréquence d'acquisition ;
- entrée manuelle ou recherche automatique des positions extrêmes de mesures pour la translation ;
- nombre de projections ;
- positions extrêmes pour la rotation ;
- nombre de rotations manuel ou optimal ;
- échantillonnage normal ou entrelacé ;
- utilisation ou non de la mesure par sonde optique ;
- nom de fichier.

Le programme d'acquisition tomographique suit la procédure suivante (synoptique 4.7) :

1. Recherche des origines pour la translation et la rotation ;
2. Mesure et enregistrement du débit d'air ;
3. Si l'utilisateur le désire, lancement de l'acquisition de la sonde optique :
 - (a) rotation de la section d'essais pour qu'elle soit parallèle aux déplacements de la sonde optique ;
 - (b) envoi de la commande de démarrage d'acquisition à l'autre PC ;
 - (c) attente de la réponse de fin d'acquisition de la sonde optique ;
4. Initialisation de la mesure tomographique : suivant le choix de l'utilisateur :
 - réglages manuels :
 - (a) réglage de la tension et de l'intensité du tube à rayons X ;

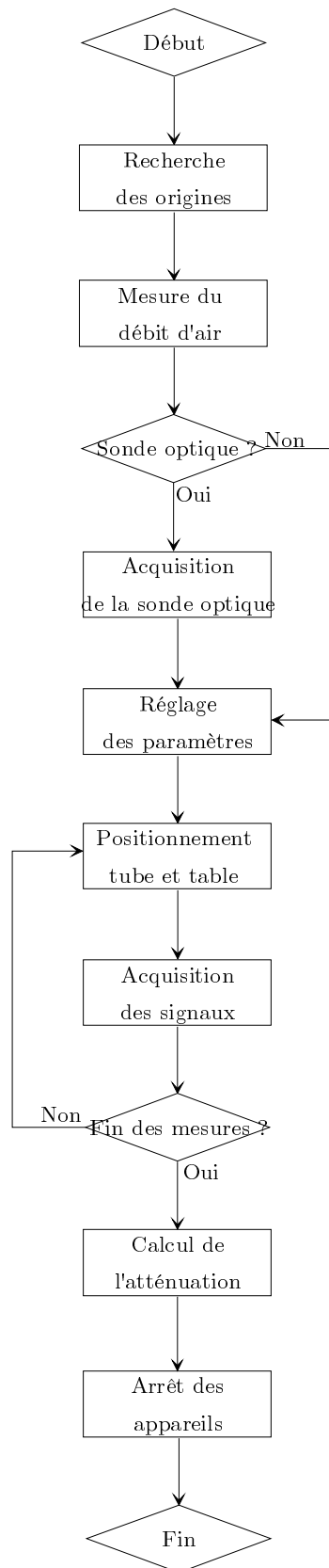


FIG. 4.7: Synoptique de l'acquisition tomographique de Mini-TOMIX

- (b) création d'une matrice comportant ligne par ligne les positions pour chaque acquisition ;
 - réglages automatiques :
 - (a) Recherche automatique des bords de la pièce et de la position de l'axe de rotation de la section d'essais :
 - i. Réglage de l'alimentation du tube à 40 kV et 5 mA et des alimentations des photomultiplicateurs pour que les signaux soient proches de 9,5 V pour des faisceaux non atténués ;
 - ii. Positionnement de la table à 0° ;
 - iii. En partant de la butée gauche de la translation, par pas de 1 mm, recherche de la position du bord gauche de la section d'essais, c'est à dire la position à partir de laquelle l'atténuation est au-dessus de 0,1 ;
 - iv. A partir de cette position, recherche par dichotomie de la position gauche pour laquelle l'atténuation est de 0,5 ;
 - v. En allant de 0° à 180° par pas de 1°, vérification de la position du bord gauche ; si l'atténuation mesurée est supérieure à 0,1, cette position est reculée de 1 mm ;
 - vi. A 180°, en partant de la butée droite de la translation, recherche de la même façon du bord droit de la section d'essais ;
 - vii. A 180°, recherche par dichotomie de la position droite donnant une atténuation de 0,5 ;
 - viii. En allant de 180° à 0° par pas de 1°, vérification de la position du bord droit ; si l'atténuation mesurée est supérieure à 0,1, cette position est reculée de 1 mm ;
 - ix. Calcul de la position de l'axe de rotation de la section d'essais par la moyenne des deux positions d'atténuation à 0,5 ;
 - x. Création d'une matrice comportant ligne par ligne les positions pour chaque acquisition de façon à ce que les mesures soient réparties symétriquement autour de la position de l'axe de rotation de la section d'essais ;
 - (b) Réglage des tensions des photomultiplicateurs et de l'intensité du tube à rayons X (cette procédure sera justifiée ultérieurement) :
 - i. Réglage des alimentations des photomultiplicateurs pour que les signaux soient proches de 9,5 V pour des faisceaux non atténués ;
 - ii. Recherche de la position d'atténuation maximale à 0° et à 45° ;
 - iii. A la position d'atténuation maximale, si le signal est inférieur à 0,07 V, augmentation de l'intensité du tube jusqu'à ce que le signal soit supérieur à 0,1 V et retour à l'étape i.
5. Création du fichier historique ;
 6. Positionnement en translation de l'ensemble tube et photomultiplicateurs et en rotation de la table ;
 7. Acquisition des signaux des deux photomultiplicateurs ;
 8. Si la saturation de la carte ou l'absence de rayons X est détectée via deux seuils sur les signaux acquis, le programme revient à l'étape 7 ;

9. Calcul "instantané" de l'atténuation ;
10. Si l'écart entre l'atténuation calculée et l'atténuation de la position précédente est supérieur à 1, attente de 6 minutes (cette procédure sera justifiée ultérieurement) et retour à l'étape 7 ;
11. Enregistrement des positions et des valeurs moyennes des signaux des deux photomultiplicateurs dans les fichiers mesure et historique ;
12. Jusqu'à la fin des mesures, retour à l'étape 6 ;
13. Arrêt du dispositif expérimental :
 - calcul de l'atténuation à chaque position pour l'algorithme de reconstruction (équation (4.2)) ;
 - construction du fichier pour l'algorithme de reconstruction,
 - retour à l'origine en translation et en rotation ;
 - arrêt du générateur à rayons X ;
 - mesure du débit d'air ;
 - enregistrement du débit d'air et de l'heure dans le fichier historique.

Si une erreur est détectée, l'acquisition est arrêtée.

A la fin de l'acquisition, le programme génère trois fichiers :

- un fichier historique comprenant tous les paramètres de réglages, les débits d'air, la date et l'heure des mesures et éventuellement un message d'erreur ;
- un fichier de données comportant sous forme de colonnes les positions verticales, en rotation et horizontales et les atténuations mesurées. Chaque ligne correspond à une mesure à une position donnée ;
- un fichier des atténuations mesurées formatées pour l'algorithme de reconstruction.

Mesures de la sonde optique

Ce programme contrôle le déplacement de la sonde optique et sa carte d'acquisition (figure 4.8).

Pour chaque position de mesure, les événements (fronts montants ou descendants) de la fonction indicatrice de phase obtenue après seuillage du signal de la sonde optique sont enregistrés. Cette acquisition s'arrête par un nombre maximal d'événements ou par une durée maximale d'acquisition. Cette durée maximale est fixée par l'utilisateur et est choisie comme la durée donnant un taux de présence local convergé à $\pm 1\%$ près en relatif au centre de la colonne.

L'utilisateur saisit les paramètres suivants :

- les limites pour chaque déplacement ;
- le nombre de positions pour chaque déplacement ;
- si le programme fonctionne en local ou commandé par le programme d'acquisition tomographique ci-dessus ;
- un nom de fichier.

Le programme d'acquisition tomographique suit la procédure suivante (synoptique 4.9) :

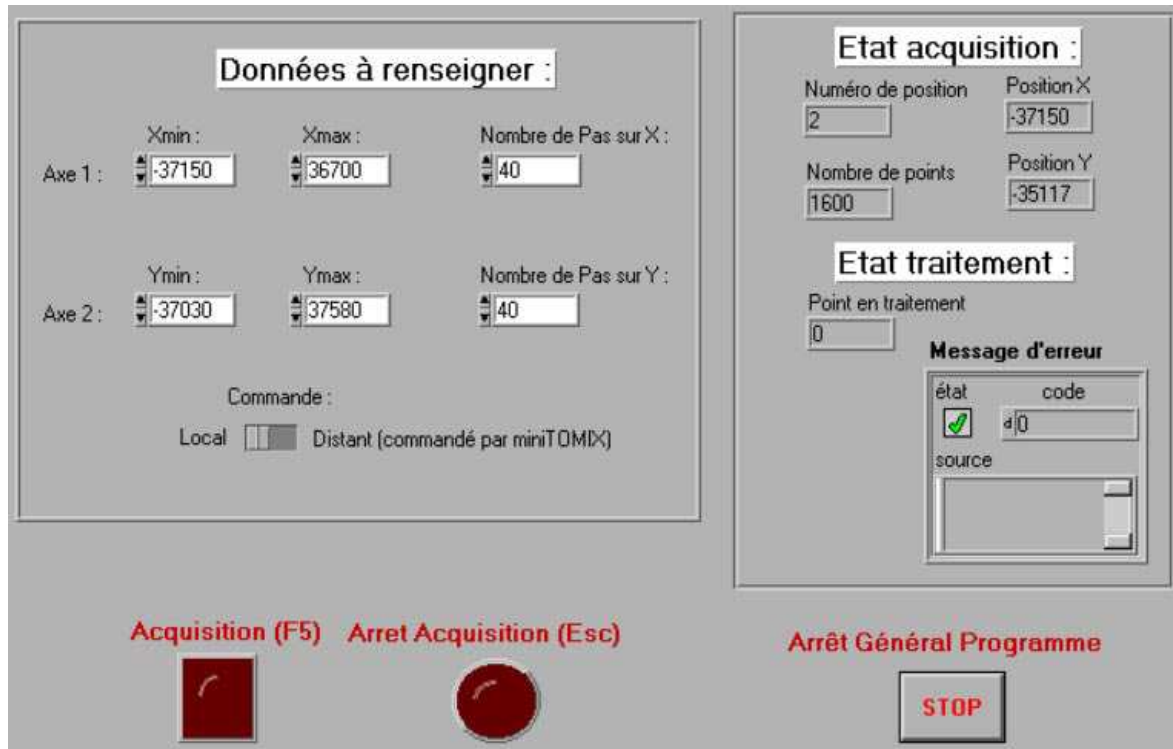


FIG. 4.8: Interface du programme d'acquisition de la sonde optique de Mini-TOMIX

1. Si le programme est commandé par l'acquisition tomographique, attente du message de démarrage d'acquisition ;
2. Création d'une matrice comportant les positions de mesures ;
3. Positionnement de la sonde optique ;
4. Acquisition de la fonction indicatrice de phase (enregistrement des événements) ;
5. Retour à l'étape 3 jusqu'à la fin des acquisitions ;
6. Positionnement de la sonde optique au centre de la section d'essais ;
7. Envoi du message de fin d'acquisition au programme d'acquisition tomographique ;
8. pour chaque position, calcul du taux de présence local ;
9. enregistrement du fichier de résultats contenant la carte du taux de présence local.

Ce dernier est formaté au format du logiciel de visualisation Spyglass. Le fichier d'acquisition du signal de la sonde optique pour chaque position est conservé.

Si une erreur est détectée, l'acquisition est arrêtée.

Télémesure

Un troisième programme permet de visualiser à distance l'état des programmes précédents via le réseau informatique.

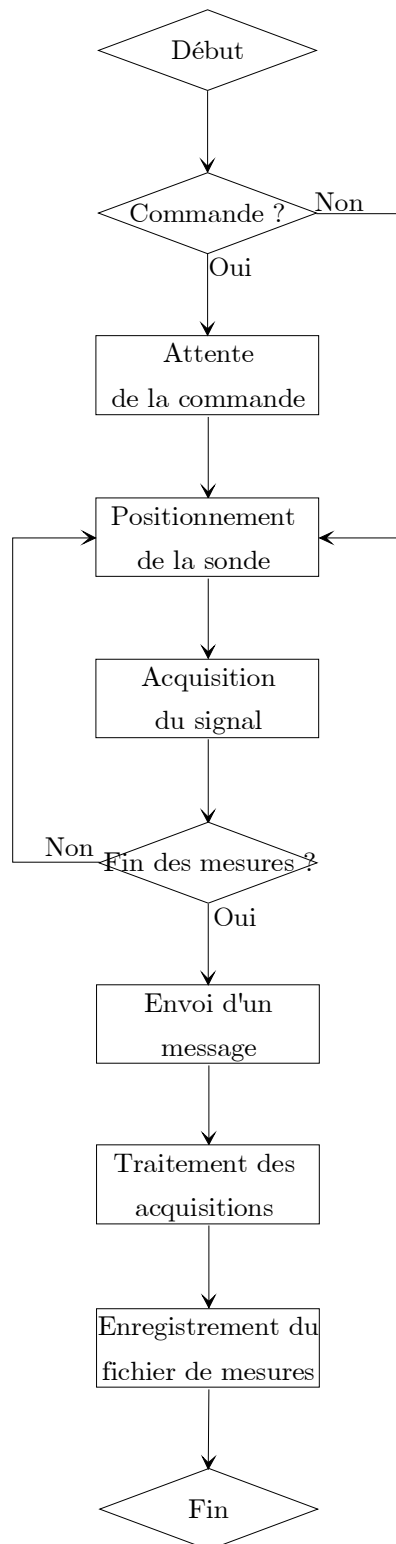


FIG. 4.9: Synoptique de l'acquisition de la sonde optique de Mini-TOMIX

4.3 Réglages du générateur de rayon X

4.3.1 Choix de la haute tension du tube et du filtre du porte-tube

Le tube utilisé possède une anticathode en Cuivre. Le spectre émis est composé du spectre de freinage continu et des deux raies K_α à 8,03 keV et K_β à 8,90 keV. Or l'atténuation mesurée est la moyenne des atténuations pour chaque énergie pondérées par le flux de photons à cette énergie. Ces raies très intenses ont des énergies très voisines, ce qui risque de provoquer une erreur importante sur la mesure de l'atténuation.

Il est donc intéressant de chercher à supprimer une des raies.

Le tube à rayons X est livré avec plusieurs écrans qui peuvent être disposés devant les fenêtres. Le filtre Nickel atténue presque complètement la raie K_β du Cuivre. Il ne reste plus que la raie K_α . C'est le filtre qui permet d'être le plus monochromatique possible pour une anticathode en Cuivre. Nous utiliserons ce filtre.

Il faut une énergie suffisante pour traverser les épaisseurs de Plexiglas et d'eau caractéristiques de nos fantômes et de notre section d'essais. L'énergie des photons émis dépend de la haute tension du tube. Une tension du tube inférieure à 30 kV donne un flux de photons en sortie de sections d'essais trop faible pour effectuer une mesure précise.

De plus, nous avons intérêt à utiliser un faisceau le plus monochromatique possible, donc à utiliser la raie K_α du tube. Le choix de la tension du tube et du filtre doit permettre d'éliminer le plus possible le fond continu et toutes les raies après l'énergie de la raie K_α .

Selon les informations données par le fabricant du tube et dans [Guinier, 1964, p 14], il faut fournir aux électrons du tube à rayons X une énergie 3 à 4 fois supérieure à celle de la raie que nous voulons exciter. Notre tube a une anticathode en Cuivre avec une raie K_α à 8,03 keV. Donc, par la suite, pour les reconstructions, nous utiliserons **le filtre Nickel et une tension de 40 kV**. Cela donne le spectre de la figure 4.10 mesuré sur Mini-TOMIX par le Service de Protection contre les Rayonnements.

4.3.2 Choix de l'intensité du tube

Mesurons l'intensité photonique du faisceau non filtré pour différentes tensions et différentes intensités du tube à rayons X (figure 4.11). Nous remarquons qu'elle augmente quand nous augmentons la tension d'alimentation du tube et son intensité. Pour une haute tension du tube donnée, l'intensité maximale correspond à une puissance de 1,5 kW. Cette puissance maximale est imposée par le tube à rayons X.

Regardons l'évolution de l'atténuation mesurée avec la tension et l'intensité du tube. Nous la mesurons pour différentes épaisseurs d'eau. Pour ce faire, nous utilisons un triangle de Plexiglas rempli d'eau déminéralisée (figure 4.12 et photographie 4.13) que nous plaçons dans le faisceau de rayon X. Nous mesurons l'atténuation en nous déplaçant parallèlement à ce triangle d'eau.

L'atténuation est obtenue par la moyenne de 1 000 mesures acquises à 1 kHz sans filtrage.

Nous avons fait ces essais pour une tension du tube de 20 kV (figure 4.14), de 37 kV (figure 4.15) et de 55 kV (figure 4.16).

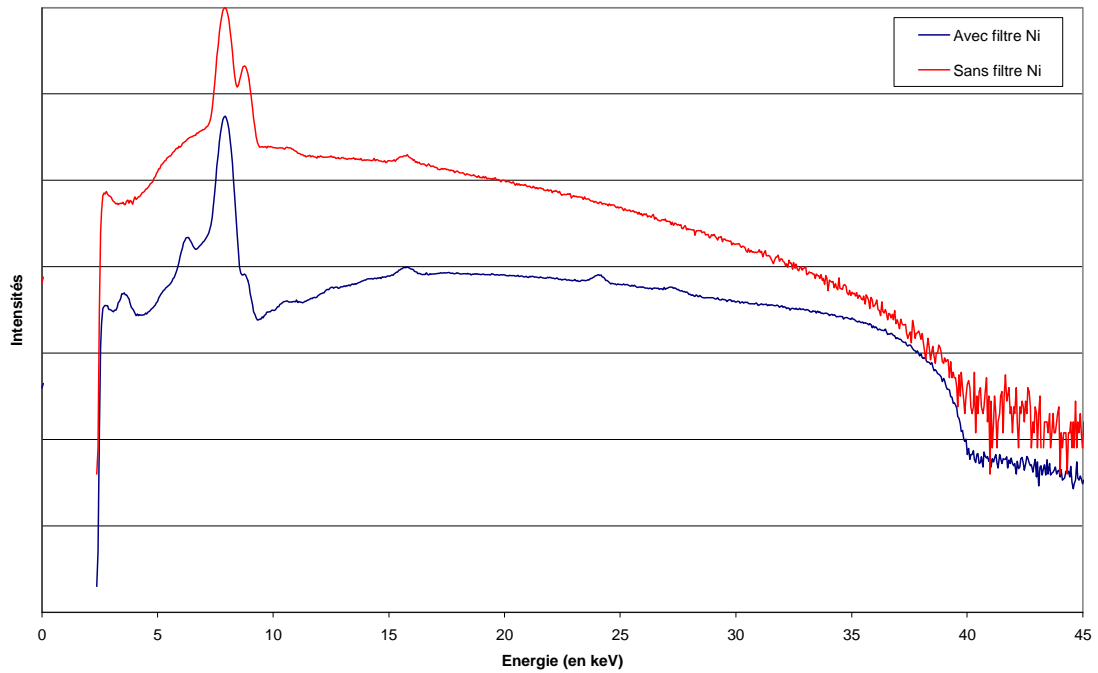


FIG. 4.10: Spectres émis par le tube à rayons X de Mini-TOMIX, sans et avec le filtre Nickel

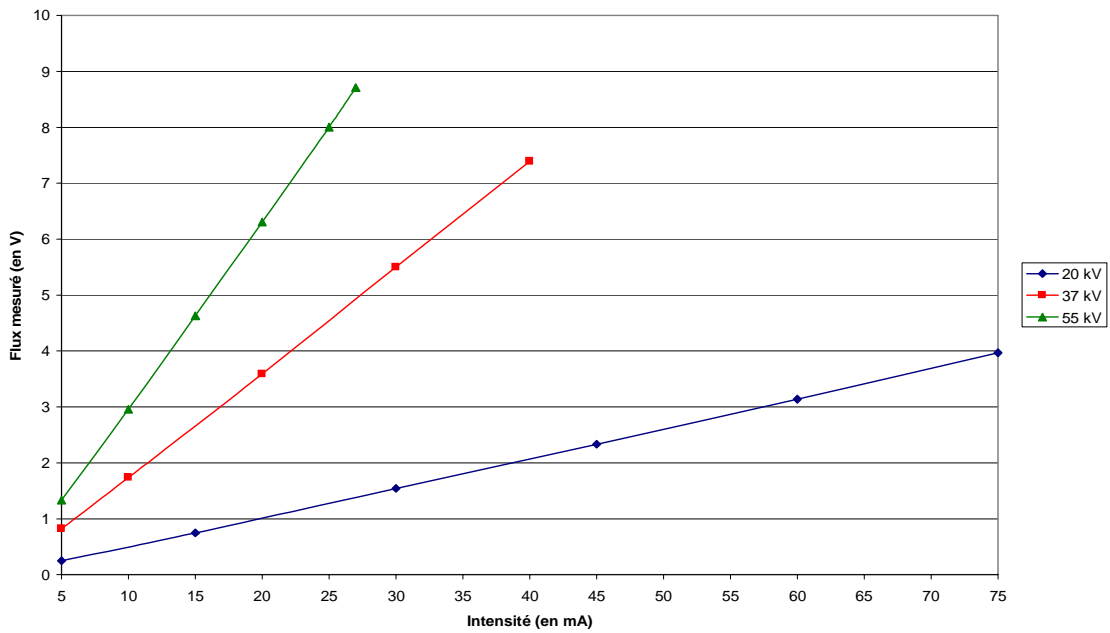


FIG. 4.11: Intensité mesurée en fonction de l'intensité du tube selon sa tension

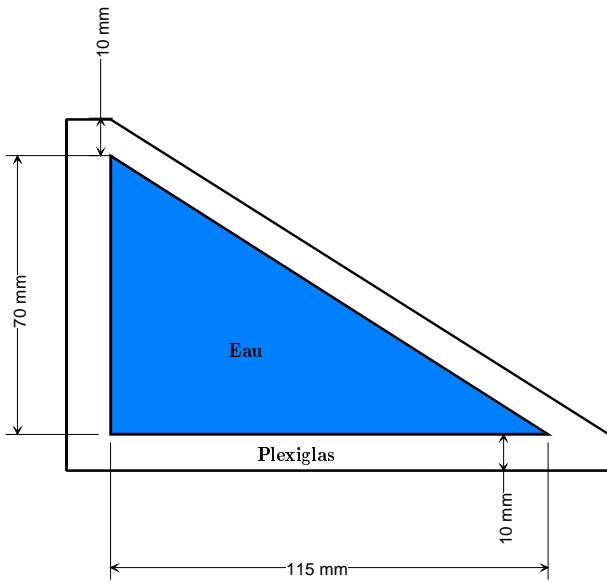


FIG. 4.12: Schéma du triangle d'eau

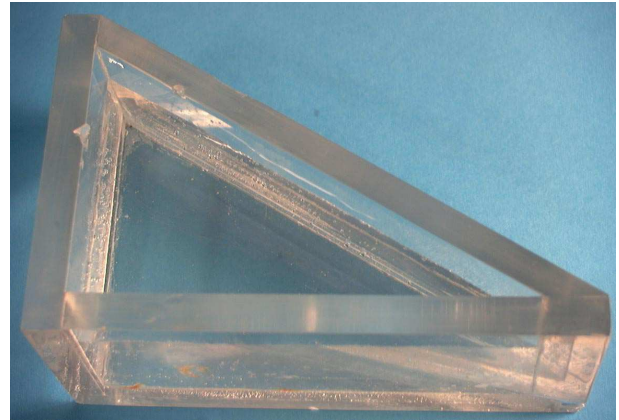


FIG. 4.13: Photographie du triangle d'eau

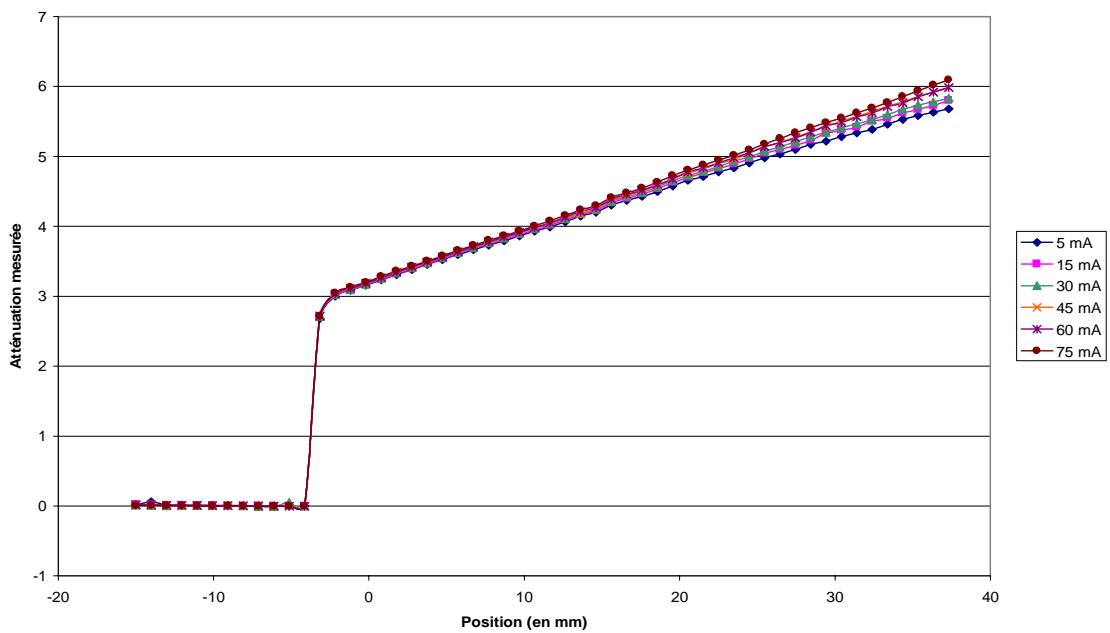


FIG. 4.14: Atténuation mesurée en fonction de l'épaisseur d'eau selon l'intensité du tube à 20 kV

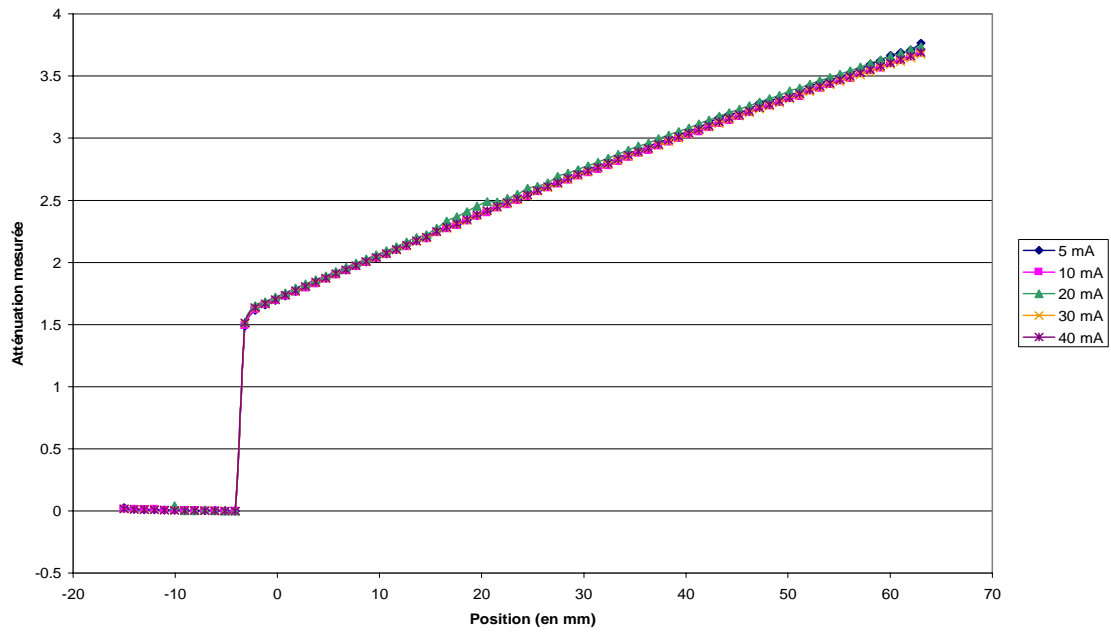


FIG. 4.15: Atténuation mesurée en fonction de l'épaisseur d'eau selon l'intensité du tube à 37 kV

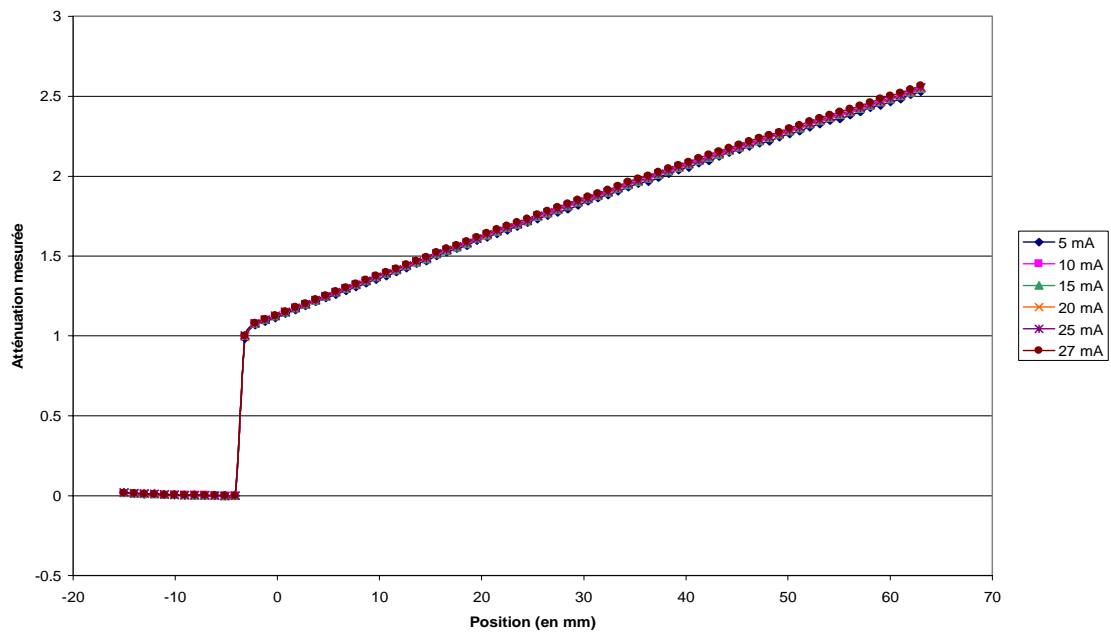


FIG. 4.16: Atténuation mesurée en fonction de l'épaisseur d'eau selon l'intensité du tube à 55 kV

L'atténuation du faisceau ne dépend pas de l'intensité du tube pour une tension du tube et une épaisseur d'eau données. Nous mesurons une atténuation globale, c'est à dire une moyenne des atténuations sur le spectre émis. Donc en augmentant l'intensité, nous augmentons le flux émis, mais nous **ne déformons pas le spectre du faisceau émis**.

Mesurons le rapport signal sur bruit pour ces différentes tensions et intensités dans deux cas (figure 4.17) :

- faisceau non atténué ;
- faisceau atténué par 3 cm d'eau et 2 cm de Plexiglas.

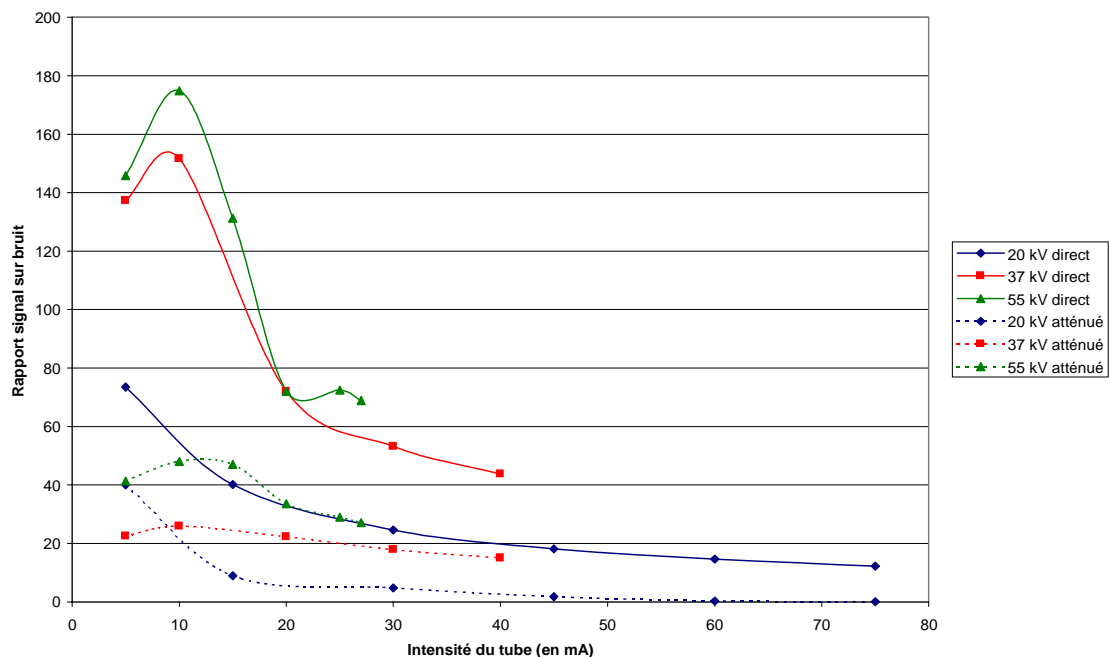


FIG. 4.17: Rapport signal sur bruit en fonction de l'intensité du tube selon la tension du tube en positions faisceau direct et faisceau atténué

Pour ces mesures, à une tension et une intensité données, l'alimentation haute-tension des photomultiplicateurs a été réglée pour donner, en faisceau non atténué, un signal de l'ordre de 9 V. Ce réglage n'a pas été changé pour la mesure du bruit du faisceau atténué. Cette configuration est la même que celle qui sera utilisée pour l'acquisition de l'ensemble des projections.

Le rapport signal sur bruit a été calculé de la façon suivante : rapport de la valeur moyenne des mesures sur l'écart type des mesures. Ce calcul est fait sur 1 000 mesures acquises à 1kHz sans filtrage.

Nous remarquons que globalement, le rapport signal sur bruit diminue quand l'intensité du tube augmente. Donc il faudra **régler l'intensité de sorte à avoir en position d'atténuation maximale un flux de photons assez grand** pour être "mesurable", de l'ordre de 0,1 V, mais il ne faudra **pas trop augmenter cette intensité** pour éviter de faire chuter le rapport signal sur bruit.

4.3.3 Stabilité du signal des photomultiplicateurs

Afin de vérifier la stabilité des photomultiplicateurs dans le temps, nous enregistrons leurs signaux en fonction du temps (figure 4.18). La tension du tube est de 40 kV et son intensité de 5 mA. La tension des photomultiplicateurs est réglée de sorte que leurs signaux soient de l'ordre de 9,5 V.

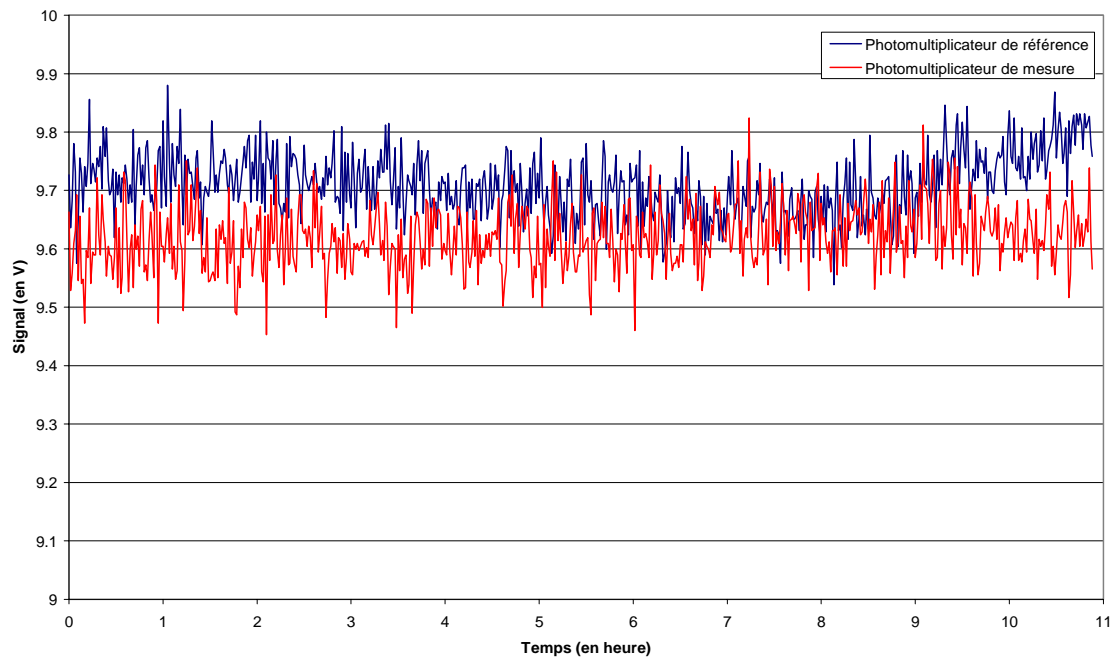


FIG. 4.18: Signaux des photomultiplicateurs en fonction du temps

Les signaux des photomultiplicateurs présentent une variation lente par rapport à leurs valeurs moyennes. C'est pourquoi l'atténuation est calculée en prenant comme flux de référence une interpolation linéaire des signaux mesurés à la première et dernière mesures à une position angulaire donnée (voir section 4.2.3).

Nous cherchons à connaître la stabilité des photomultiplicateurs suite à un échelon de flux photonique. Pour ce faire, nous enregistrons leurs signaux lors de la fermeture brutale ou de l'ouverture brutale des fenêtres du tube à rayons X (figures 4.19 et 4.20). Nous avons utilisé les mêmes réglages que précédemment.

Suite à un front montant ou descendant d'atténuation, les signaux des photomultiplicateurs présentent des évolutions monotones lentes et ont un temps de stabilisation de l'ordre de 30 minutes. Afin de minimiser l'influence de ce phénomène, le programme d'acquisition calcule à chaque position l'atténuation en utilisant les deux photomultiplicateurs et si l'écart entre les atténuations à deux positions successives est supérieur à 1, il attend 6 min avant de faire l'acquisition qui servira à la détermination de l'atténuation. Ce délai est un compromis entre la stabilisation du signal et l'augmentation de la durée totale d'acquisition.

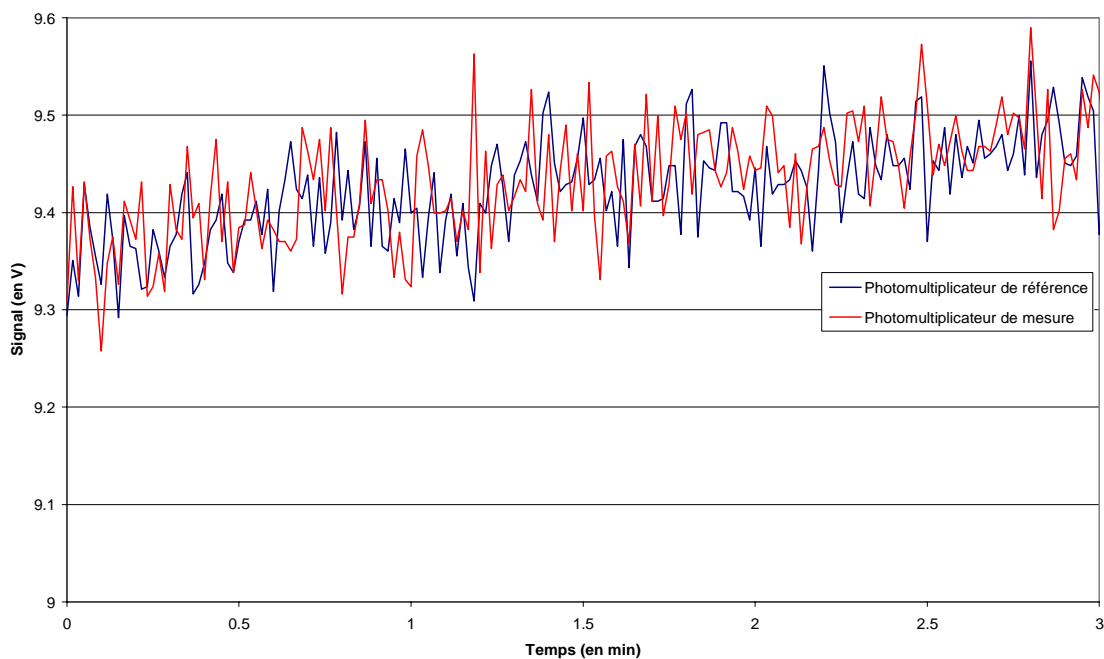


FIG. 4.19: Signaux des photomultiplicateurs en fonction du temps suite à l'ouverture des fenêtres du tube

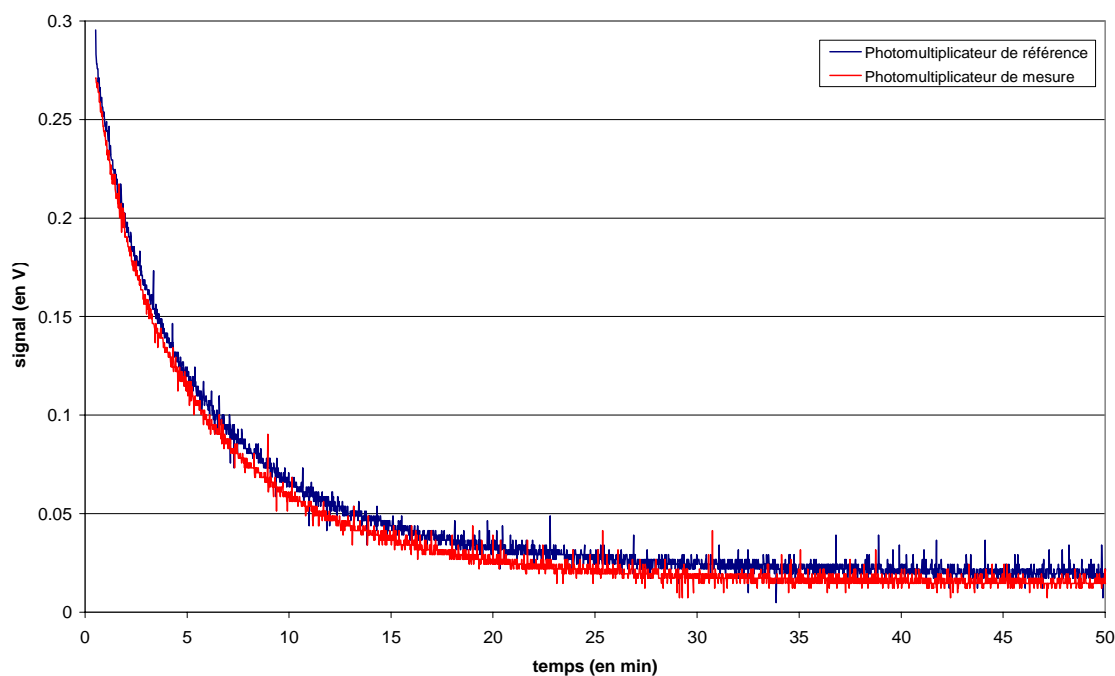


FIG. 4.20: Signaux des photomultiplicateurs en fonction du temps suite à la fermeture des fenêtres du tube

4.3.4 Réglage des photomultiplicateurs

Etudions l'influence de la haute tension des photomultiplicateurs sur le rapport signal sur bruit (figure 4.21).

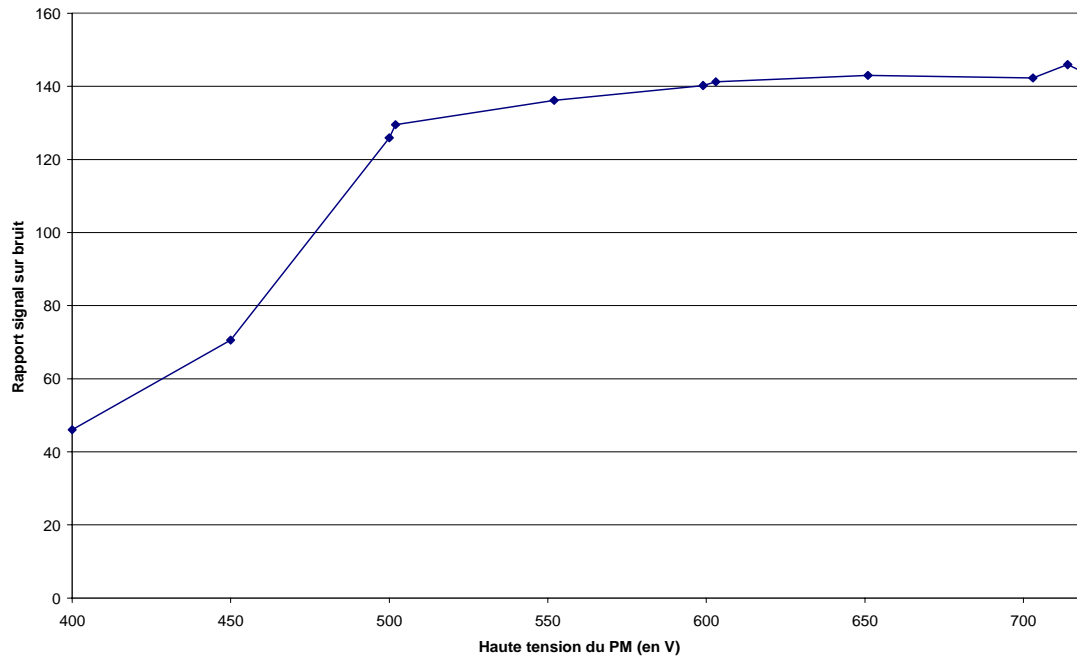


FIG. 4.21: Rapport signal sur bruit des photomultiplicateurs en fonction de leurs hautes-tensions

Plus la haute-tension d'alimentation des photomultiplicateurs est grande, plus le rapport signal sur bruit est important. Par ailleurs, dans la partie précédente, nous avons remarqué que ce dernier diminue quand l'intensité du tube augmente.

Donc il faut **choisir une intensité du tube la plus basse possible avec un flux de photons assez grand pour traverser l'objet mesuré**, et une **haute-tension des photomultiplicateurs la plus grande possible** sans saturer leurs sorties, ni la carte d'acquisition.

Cela justifie la procédure utilisée pour le réglage automatique de l'intensité du tube et des tensions des photomultiplicateurs. En position sans atténuation, les tensions d'alimentation des deux photomultiplicateurs sont réglées afin d'avoir une mesure de l'ordre de 9,5 V. Puis le programme d'acquisition vérifie que la mesure en position d'atténuation maximale n'est pas trop faible (c'est à dire inférieure à 0,1 V). Dans ce cas, il faut augmenter l'intensité du tube à rayons X et recommencer le cycle.

4.4 Acquisition des mesures pour les cibles en Plexiglas

Nous recherchons les meilleurs réglages pour l'acquisition des mesures, leurs filtrages et le calcul de l'atténuation dans le cas de mesure de cibles en Plexiglas.

4.4.1 Choix du filtre passe-bas

Afin d'éliminer le bruit du signal, nous cherchons à filtrer les mesures par un filtre passe-bas de gain 0 dB. Nous devons déterminer la fréquence de coupure de ce filtre passe-bas.

Nous mesurons le rapport signal sur bruit (de la même façon que dans la partie 4.3.2) sur une acquisition de 1 000 mesures filtrées par ce filtre passe-bas acquises à 1 kHz. Nous étudions ses variations en fonction de la fréquence de coupure. Ces mesures sont réalisées avec un faisceau non atténué obtenu avec une tension du tube de 20 kV et une intensité de 5 mA (figure 4.22).

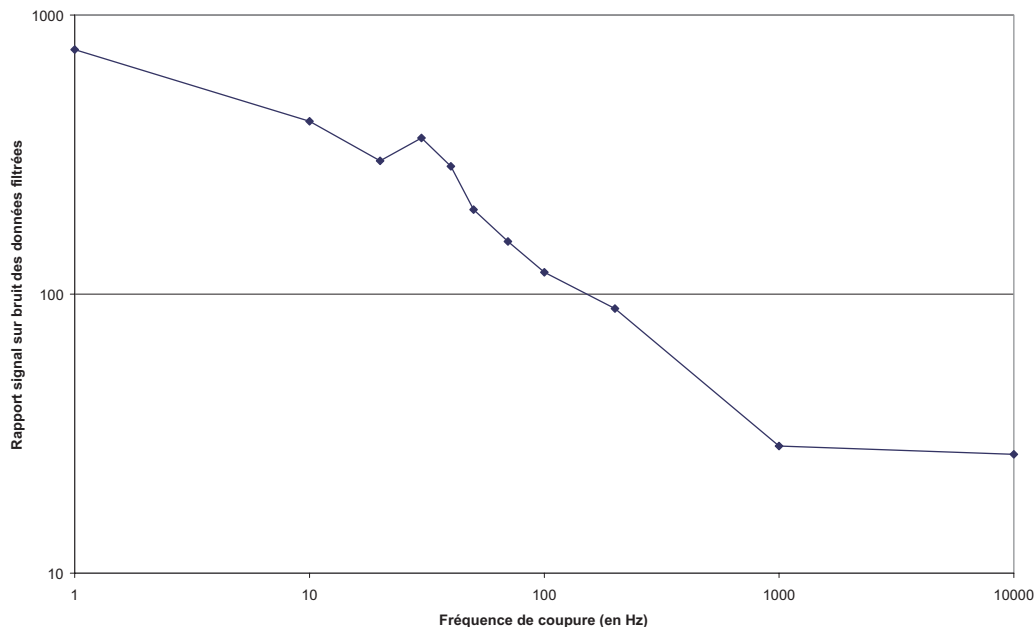


FIG. 4.22: Rapport signal sur bruit en fonction de la fréquence de coupure du filtre passe-bas

Plus la fréquence de coupure est petite, plus le rapport signal sur bruit est grand.

Mais la diminution de la fréquence de coupure entraîne l'augmentation du temps de montée du signal. Pour évaluer cet effet, nous appliquons en entrée du filtre un échelon de 0 à 10 V et mesurons en sortie le temps que met le signal pour arriver à 10 V (figure 4.23).

Nous trouvons bien que le temps de montée augmente quand la fréquence de coupure diminue. Mais un temps de montée important implique une durée d'attente grande avant chaque acquisition, ce qui allongerait la durée totale d'essai.

Afin de déterminer la fréquence de coupure optimale, regardons le spectre du signal reçu par le photomultiplicateur. La haute-tension du tube à rayons X est de 40 kV, son intensité de 5 mA, la haute-tension du photomultiplicateur de mesure est de - 715 V. Nous plaçons

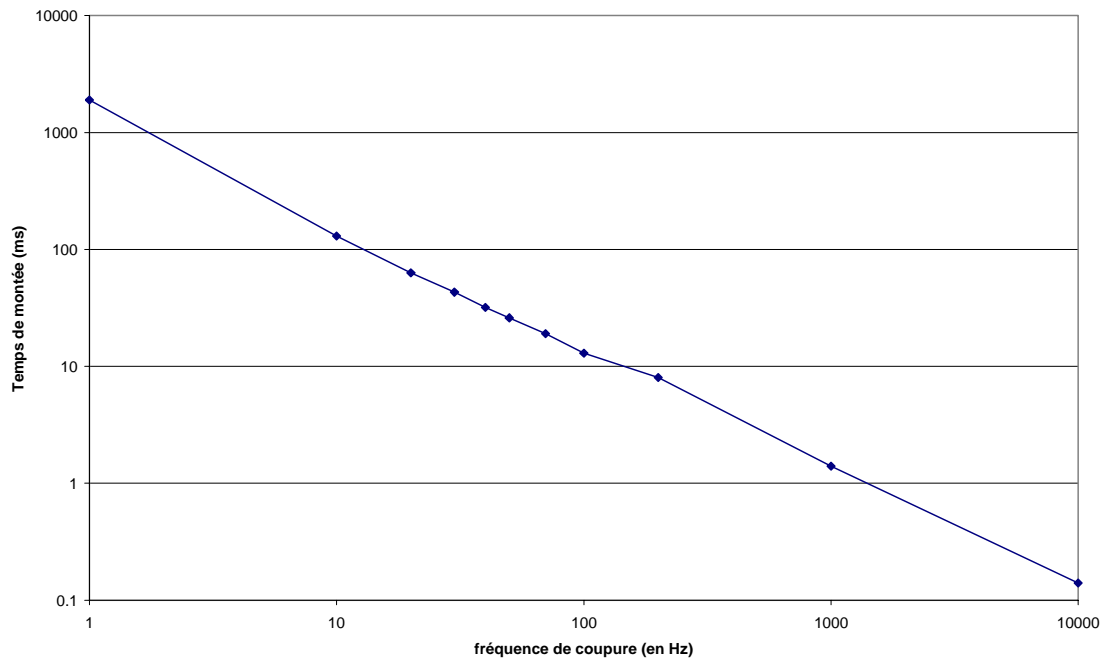


FIG. 4.23: Temps de montée en fonction de la fréquence de coupure du filtre passe-bas

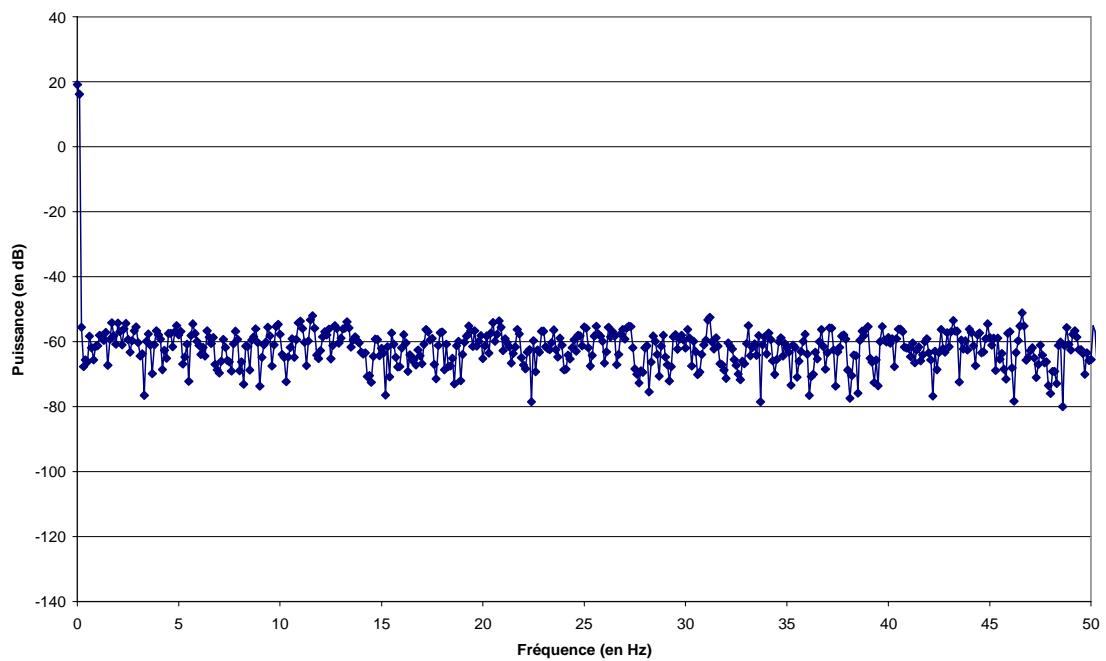


FIG. 4.24: Spectre fréquentiel du signal reçu par les photomultiplicateurs pour une cible en Plexiglas

dans le faisceau le filtre Nickel et un fantôme en Plexiglas. Nous lançons une acquisition à 10 kHz de 100 000 points. La figure 4.24 montre le spectre fréquentiel du signal délivré par le photomultiplicateur.

Nous remarquons qu'à part la composante continue, les autres composantes fréquentielles ont une contribution très faible. Nous choisissons **une fréquence de coupure de 10 Hz** qui est un compromis entre le gain en rapport signal sur bruit et le temps de montée.

Une fréquence de coupure de 10 Hz donne un temps de montée de 130 ms, ce qui est faible devant la durée d'une translation par les moteurs pas à pas (une translation de 1 mm prend environ 1,1 secondes). Nous rajoutons donc entre la fin du déplacement et le début de l'acquisition une attente de 150 ms afin d'être certains d'avoir un signal stabilisé.

Compte-tenu de cette fréquence de coupure, nous prenons **une fréquence d'acquisition de 20 Hz**.

4.4.2 Choix du nombre de mesures

Pour faire les essais suivants, nous filtrons le faisceau avec le filtre de Nickel. La haute-tension du tube est de 40 kV, l'intensité de 5 mA, les mesures sont filtrées par un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz et acquises à la fréquence de 20 Hz.

Regardons d'abord si le nombre de points à acquérir pour le calcul de l'atténuation influence la valeur de cette grandeur. Pour cela, nous calculons l'atténuation en augmentant le nombre de mesures acquises (figure 4.25). Le faisceau de rayons X traverse 3 cm d'eau et 2 cm de Plexiglas.

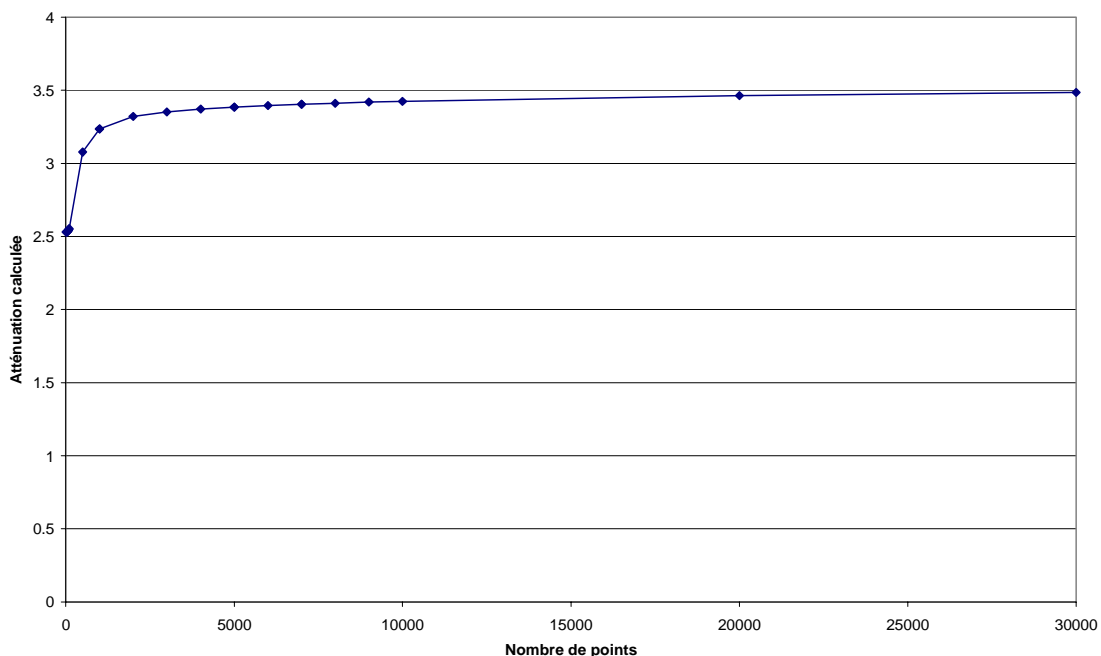


FIG. 4.25: Atténuation calculée en fonction du nombre de mesures pour une cible en Plexiglas

Nous voyons que la courbe tend vers une atténuation limite. L'écart des valeurs avec la valeur

obtenue avec 30 000 mesures (nous supposons que cette valeur est la valeur de l'atténuation convergée) est inférieur à 28 % (voir la figure 4.26).

Mais l'augmentation du nombre de mesures accroît la durée d'acquisition, ainsi que le rapport signal sur bruit de l'atténuation.

Le rapport signal sur bruit de nos mesures est de 116 sur la voie de référence, 1238 sur la voie de mesure (le rapport signal sur bruit est calculé à partir d'une acquisition de 10 000 mesures sans changer les conditions de mesures et de la même façon que dans la partie 4.3.2). Ce bruit provient des détecteurs et de l'instabilité de la source de rayons X et est transmis à l'atténuation linéique via la relation logarithmique décrite ultérieurement.

Calculons l'incertitude que nous obtenons pour l'atténuation avec ces rapports signal sur bruit.

Pour chaque position de mesures, n valeurs des signaux V_{mesure} et $V_{\text{référence}}$ des deux photomultiplicateurs sont acquises. Les valeurs moyennes $V_{\text{mesure, moyen}}$ et $V_{\text{référence, moyen}}$ de ces signaux sont enregistrées dans un fichier. A la fin de l'ensemble des acquisitions, l'atténuation est calculée pour chaque position de mesures.

L'atténuation est obtenue par :

$$A(i, j) = \ln \frac{V_{\text{à vide}}(i, j)}{V_{\text{mesure, moyen}}(i, j)} \quad (4.4)$$

avec :

$$V_{\text{à vide}}(i, j) = V_{\text{mesure, moyen}}(1, j) + (V_{\text{mesure, moyen}}(M, j) - V_{\text{mesure, moyen}}(1, j)) \frac{i-1}{M-1} \quad (4.5)$$

où i est le numéro de projection, j le numéro de rotation et M le nombre de projections.

Notons l'incertitude de la grandeur X , $\Delta(X)$.

L'incertitude sur le signal à vide est :

$$\frac{\Delta V_{\text{à vide}}}{V_{\text{à vide}}} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} \frac{\Delta V_{\text{mesure}}}{V_{\text{mesure}}} \quad (4.6)$$

avec n , le nombre de valeurs prises en compte pour la moyenne des signaux.

Donc l'incertitude absolue sur l'atténuation A est donnée par :

$$\Delta A = \frac{\Delta V_{\text{à vide}}}{V_{\text{à vide}}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Delta V_{\text{mesure}}}{V_{\text{mesure}}} \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \frac{\Delta V_{\text{mesure}}}{V_{\text{mesure}}} \quad (4.7)$$

Cela fait, pour 30 000 points et les mesures précédentes, une incertitude relative sur l'atténuation inférieure à $5,3 \cdot 10^{-6}$ et, pour 10 points, une incertitude inférieure à 0,04% (voir la figure 4.27). Cette incertitude est vraiment très faible par rapport à l'erreur due à la convergence de l'atténuation.

C'est le compromis entre cette convergence de l'atténuation, avec l'erreur qu'elle implique, et la durée de mesure qui déterminera le nombre de points à prendre en compte dans le calcul de l'atténuation.

Afin de limiter le temps de mesure, pour les cibles en Plexiglas, nous prendrons **300 points pour le calcul de l'atténuation**. Cela donne une erreur sur les mesures de l'ordre de $\pm 20\%$ et une durée totale d'acquisition de 2 jours pour 10 000 positions de mesure et une acquisition à 20 Hz.

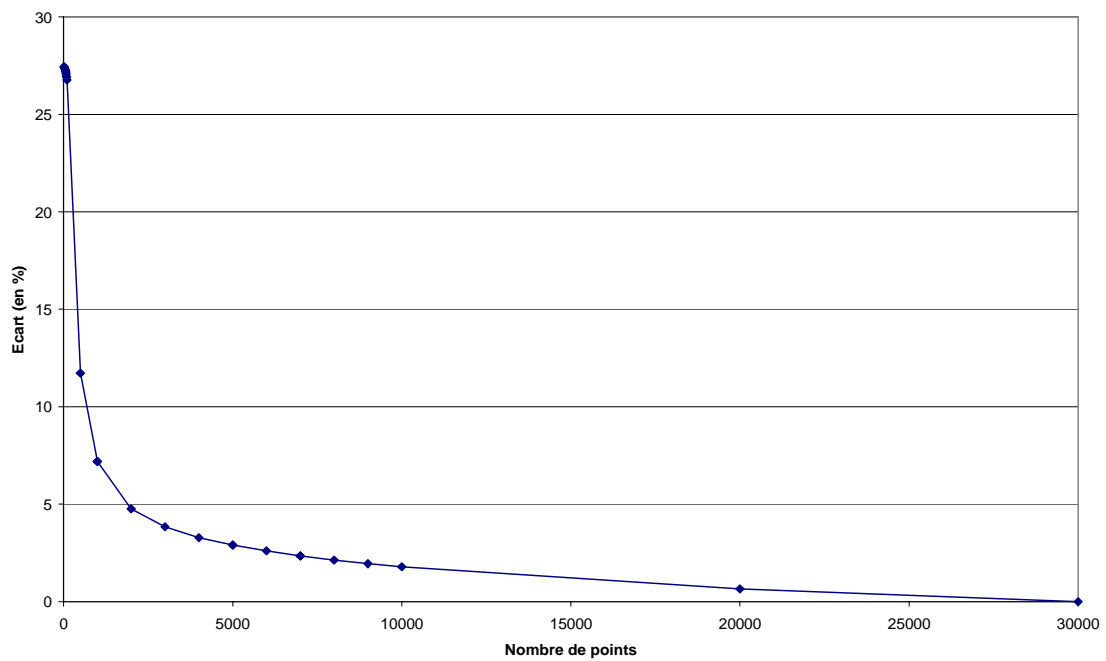


FIG. 4.26: Ecart sur le calcul de l'atténuation en fonction du nombre de mesures pour une cible en Plexiglas

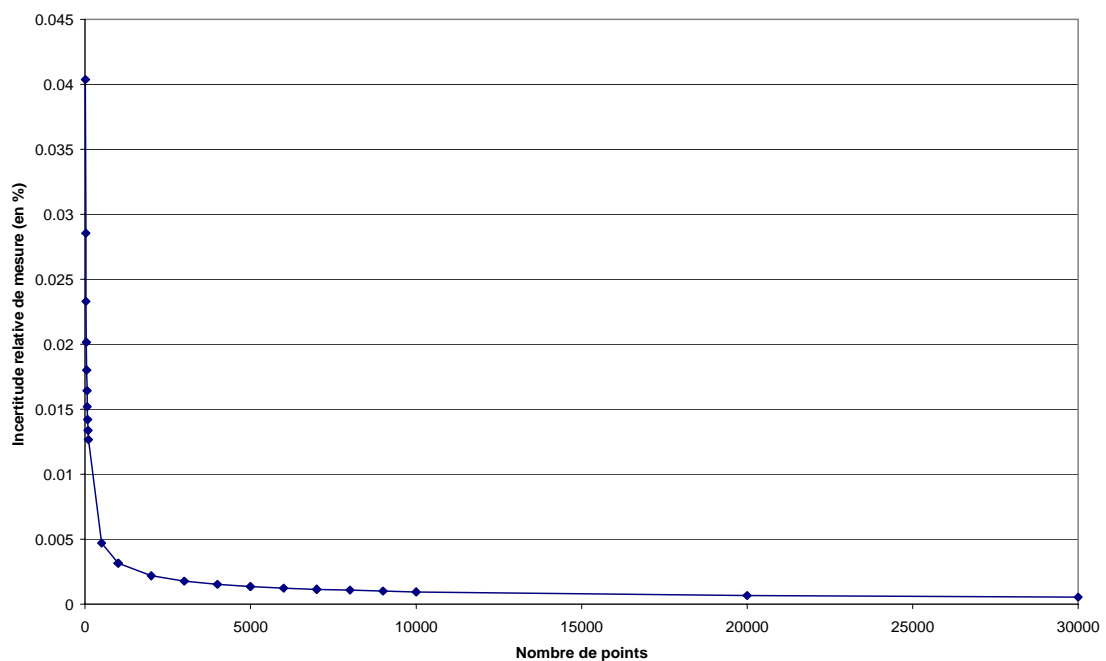


FIG. 4.27: Incertitude relative due au bruit sur l'atténuation en fonction du nombre de mesures pour une cible en Plexiglas

4.5 Acquisition des mesures pour les écoulements dans la section d'essais

Les réglages de la haute-tension du tube, l'intensité du tube et la haute-tension des photomultiplicateurs ne changent pas dans leurs principes.

Regardons si nous pouvons garder la même fréquence de coupure du filtre passe-bas, la même fréquence d'acquisition et le même nombre de points.

Etudions, pour différents débits d'air, le spectre fréquentiel de la mesure du faisceau de rayons X traversant la section d'essais avec un écoulement diphasique. Nous faisons une acquisition de 100 000 points à une fréquence de 10 kHz sans filtre passe-bas (figure 4.28).

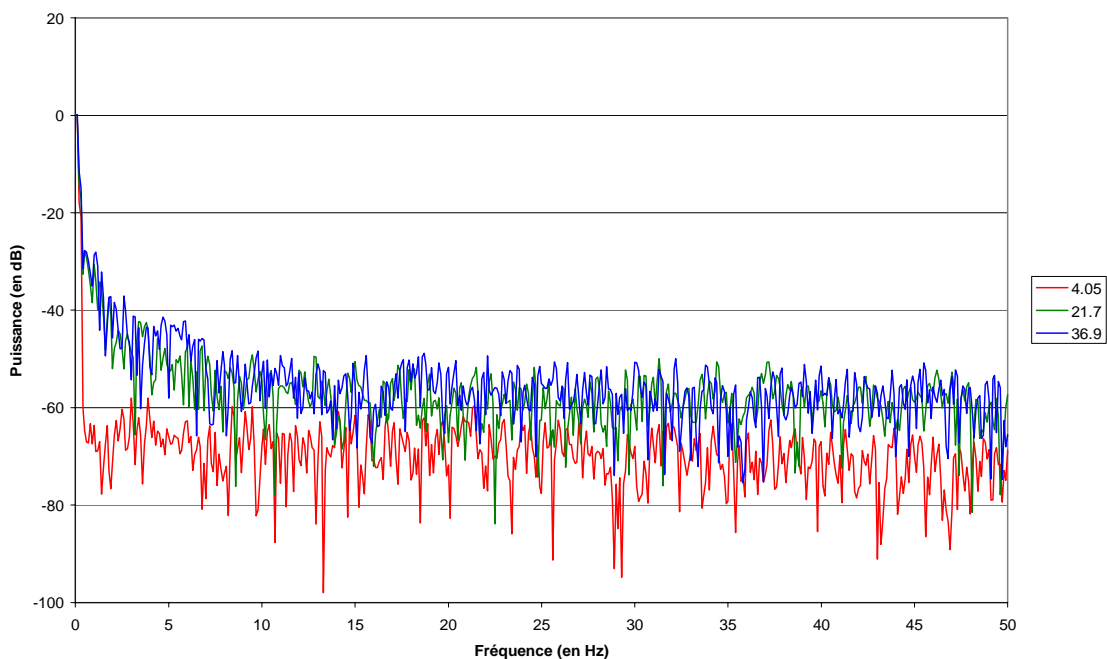


FIG. 4.28: Spectre fréquentiel du signal reçu par les photomultiplicateurs pour un écoulement en fonction du débit d'air (en Nl.min^{-1})

Ce spectre ne révèle pas de composante significative au-delà de 5 Hz.

Dans la section Eucalyptus, des bulles de 2 à 3 mm de diamètre sont générées. La vitesse ascendante des bulles est d'environ 23 cm.s^{-1} . Or cet écoulement à bulles est une répartition homogène permanente de bulles. Nous ne mesurons pas des fronts de taux de présence local dus au passage des bulles, mais une répartition continue de taux de présence local. Cela explique le comportement fréquentiel du signal. De plus, à un débit de $36,9 \text{ Nl.min}^{-1}$, nous observons des retombées périodiques de l'écoulement en paroi dont la période d'intermittence est de l'ordre de 3 à 5 s, ce qui donne une fréquence de 0,2 Hz qui est bien inférieure à 5 Hz.

Nous pouvons **conserver un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz** (nous obtenons alors les spectres de la figure 4.29) et **une fréquence d'acquisition de 20 Hz**.

Regardons la convergence du calcul de l'atténuation. Pour un débit d'air donné, nous plaçons

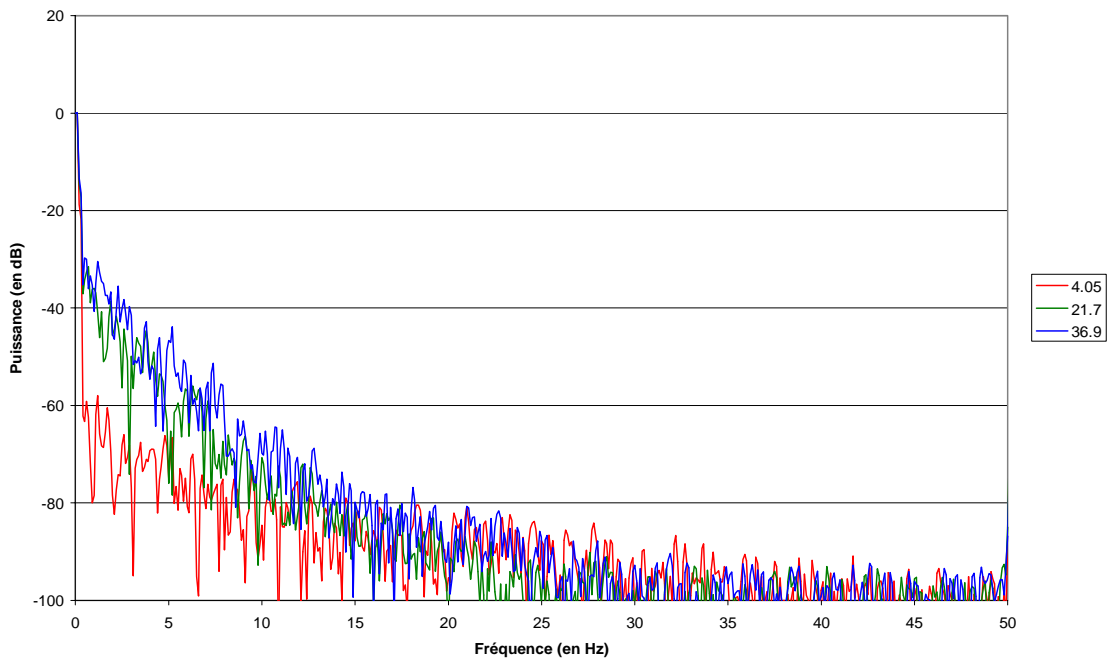


FIG. 4.29: Spectre fréquentiel du signal filtré par le filtre passe-bas de 10 Hz reçu par les photomultiplicateurs pour un écoulement en fonction du débit d'air (en Nl.min^{-1})

le faisceau de rayon X de façon à traverser la section d'essais et l'écoulement diphasique, nous lançons une acquisition des deux photomultiplicateurs et calculons l'atténuation en augmentant le nombre de mesures prises en compte (figures 4.30 et 4.31).

Nous remarquons d'abord que nous avons une convergence moins monotone que pour la cible en Plexiglas. A partir de 60 points, l'écart de l'atténuation par rapport à sa valeur convergée est inférieur à 4%. A partir de 1000 points, cet écart est inférieur à 1%.

Mais nous ne pouvons pas diminuer cet écart par l'augmentation du nombre de mesures, sauf pour le faible débit d'air à $4,05 \text{ Nl.min}^{-1}$. Pour ce dernier, nous observons un écoulement à bulles dispersées ascendantes. Pour les autres débits, nous obtenons un écoulement à bulles avec des intermittences comme celles décrites ci-dessus. Ces phénomènes entraînent les variations de l'écart et le comportement "non-monotone" observé.

Pour les mesures d'écoulements, nous ne pourrions **pas améliorer la convergence de l'atténuation en augmentant du nombre de mesures** pris en compte dans le calcul de la moyenne.

Mesurons le rapport signal sur bruit. Nous lançons une acquisition de 10 000 points à 1 kHz pour un faisceau de rayons X traversant la section d'essais filtrés par le filtre passe-bas de 10 Hz avec un tube alimenté par une haute-tension de 40 kV et une intensité de 15 mA. Le rapport signal sur bruit reste du même ordre de grandeur :

- pour la mesure de référence, 988,14 ;
- pour le faisceau atténué :
 - pour un débit d'air de $4,05 \text{ Nl.min}^{-1}$: 17,86 ;

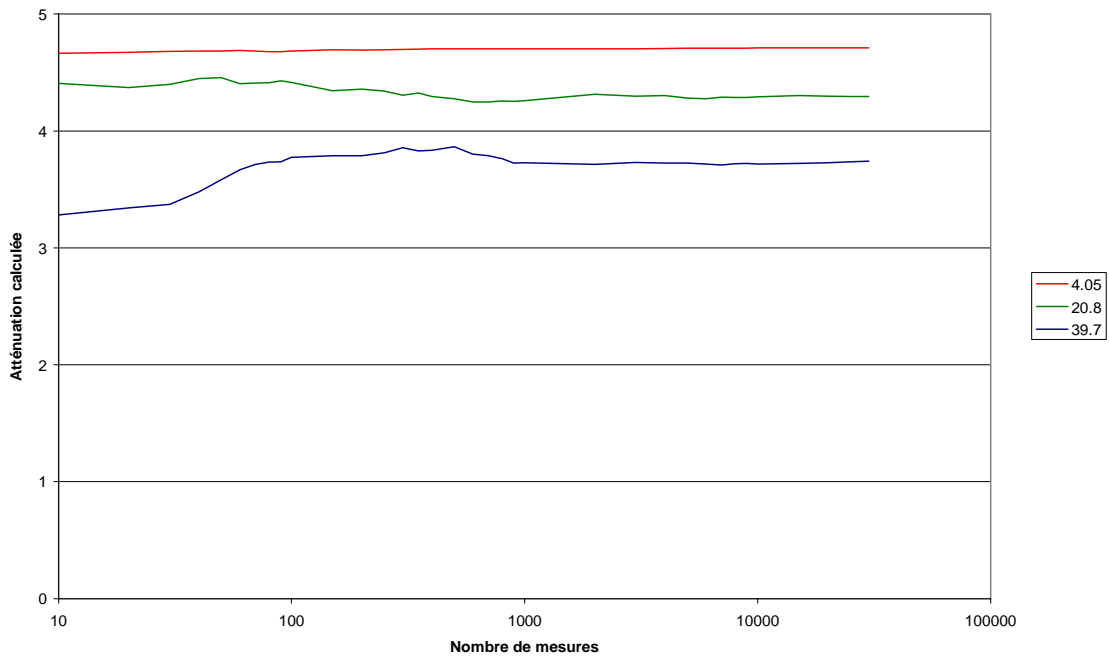


FIG. 4.30: Atténuation calculée en fonction du nombre de mesures pour un écoulement en fonction du débit d'air (en Nl.min^{-1})

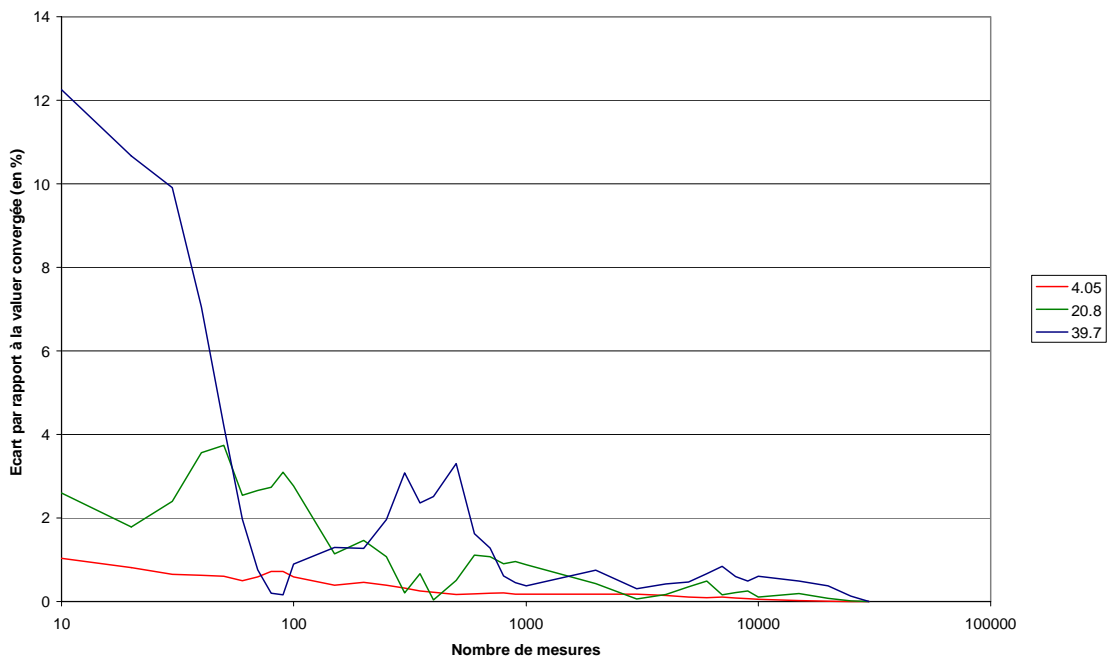


FIG. 4.31: Ecart de l'atténuation calculée en fonction du nombre de mesures pour un écoulement en fonction du débit d'air (en Nl.min^{-1})

- pour un débit d'air de $20,8 \text{ Nl.min}^{-1}$: 2,62 ;
- pour un débit d'air de $39,7 \text{ Nl.min}^{-1}$: 2,81.

Le rapport signal sur bruit reflète la présence de fluctuations du signal mesuré provenant de deux origines différentes :

- la chaîne de mesure (instabilité de la source de rayon X, bruit intrinsèque des photomultiplicateurs, ...),
- l'écoulement lui-même, du fait du passage des bulles dans le faisceau X.

Ces fluctuations du signal mesuré sont répercutées sur l'atténuation linéique via la relation logarithmique (4.2).

Pour les trois débits explorés, les trois valeurs différentes du rapport signal sur bruit s'explique par les caractéristiques hydrodynamiques des trois écoulements à bulles générés.

L'incertitude sur le calcul de l'atténuation due aux rapports signaux sur bruits est calculée de la même façon que pour les cibles en Plexiglas (équation (4.7)).

Cela donne, pour 300 points, les incertitudes sur l'atténuation mesurée suivantes pour nos trois débits d'air :

- pour un débit d'air de $4,05 \text{ Nl.min}^{-1}$: 0,28 % ;
- pour un débit d'air de $20,8 \text{ Nl.min}^{-1}$: 2,0 % ;
- pour un débit d'air de $39,7 \text{ Nl.min}^{-1}$: 2,1 %.

Cette incertitude est dans ce cas du même ordre de grandeur, voire supérieure à l'erreur due à la convergence de l'atténuation.

Nous diminuons toujours ces erreurs en augmentant le nombre de points pris en compte dans le calcul de l'atténuation. Nous gardons, pour ce calcul, **300 mesures**, ce qui est un bon compromis entre l'erreur sur l'atténuation et la durée de mesure.

Cela donne les erreurs de convergence suivantes pour nos trois débits d'air :

- pour un débit d'air de $4,05 \text{ Nl.min}^{-1}$: 0,60 % ;
- pour un débit d'air de $20,8 \text{ Nl.min}^{-1}$: 2,2 % ;
- pour un débit d'air de $39,7 \text{ Nl.min}^{-1}$: 5,2 % (l'atténuation est plus faible).

Nous avons alors, pour 300 mesures, une erreur totale inférieure à $\pm 5,2$ %.

4.6 Durcissement du faisceau

4.6.1 Mise en évidence de ce phénomène

Pour différentes épaisseurs d'eau traversées, nous mesurons l'atténuation du triangle d'eau (schéma 4.12 et photographie 4.13). A partir de ces atténuations, nous calculons l'atténuation linéaire de l'eau pour ces différentes largeurs (courbe 4.32).

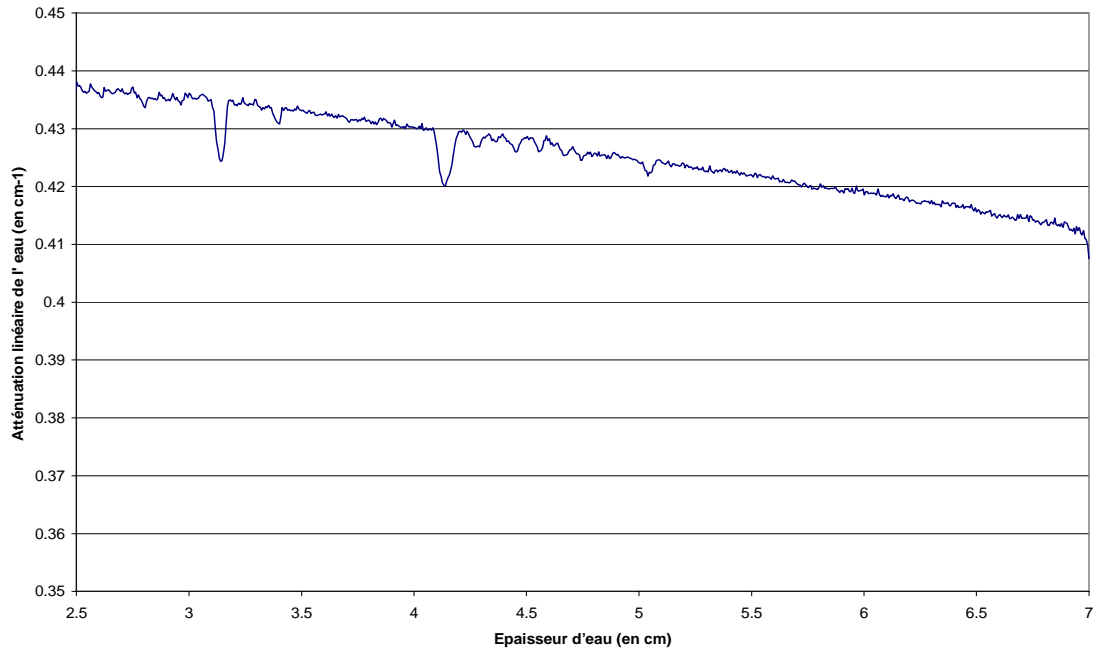


FIG. 4.32: Atténuation linéaire de l'eau en fonction de l'épaisseur traversée mesurée avec le triangle d'eau

L'atténuation calculée n'est pas constante en fonction de l'épaisseur traversée. Ce problème provient du durcissement du faisceau de rayons X.

Pour mieux mettre en évidence ce phénomène, nous mesurons l'atténuation d'un escalier en Plexiglas (schéma 4.33 et photographie 4.34).

Cet escalier présente des marches de différentes épaisseurs. A partir de ces mesures d'atténuation et connaissant l'épaisseur des marches, nous calculons l'atténuation linéaire pour chaque marche (figure 4.35).

L'atténuation linéaire varie en fonction de la largeur des marches. Une atténuation moyenne sur tout le spectre du faisceau de rayons X est mesurée. Dans les premiers millimètres, les photons de faible énergie sont fortement atténués, ce qui provoque une atténuation du faisceau importante. Après ces premiers millimètres, le faisceau est durci, c'est à dire avec peu de photons de faible énergie, l'atténuation est plus faible. L'atténuation mesurée est la moyenne qui incorpore les valeurs fortes en début de marche et celles plus faibles après.

Nous allons rappeler ce qu'est le phénomène du durcissement de faisceau, le simuler et chercher une solution pour le prendre en compte ou le minimiser.

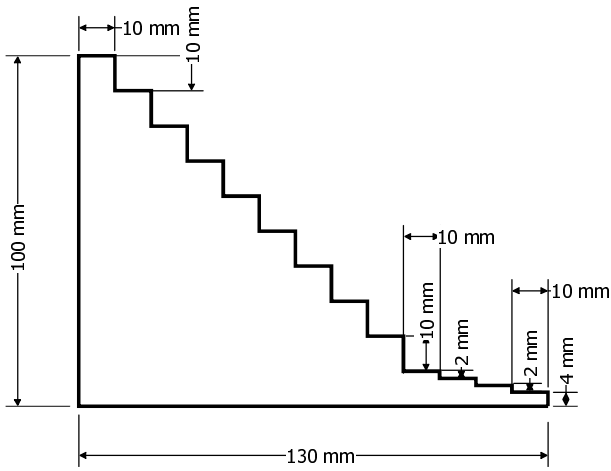


FIG. 4.33: Schéma de l'escalier de Plexiglas

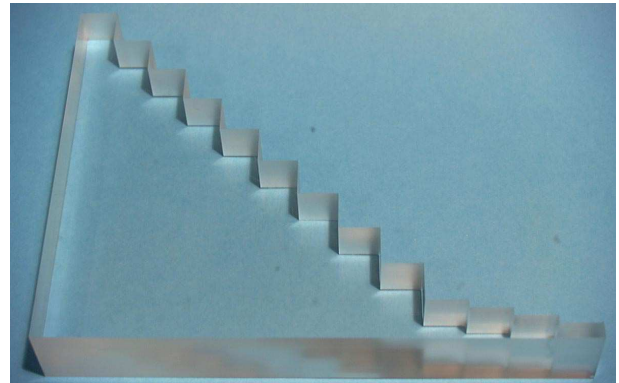


FIG. 4.34: Photographie de l'escalier de Plexiglas

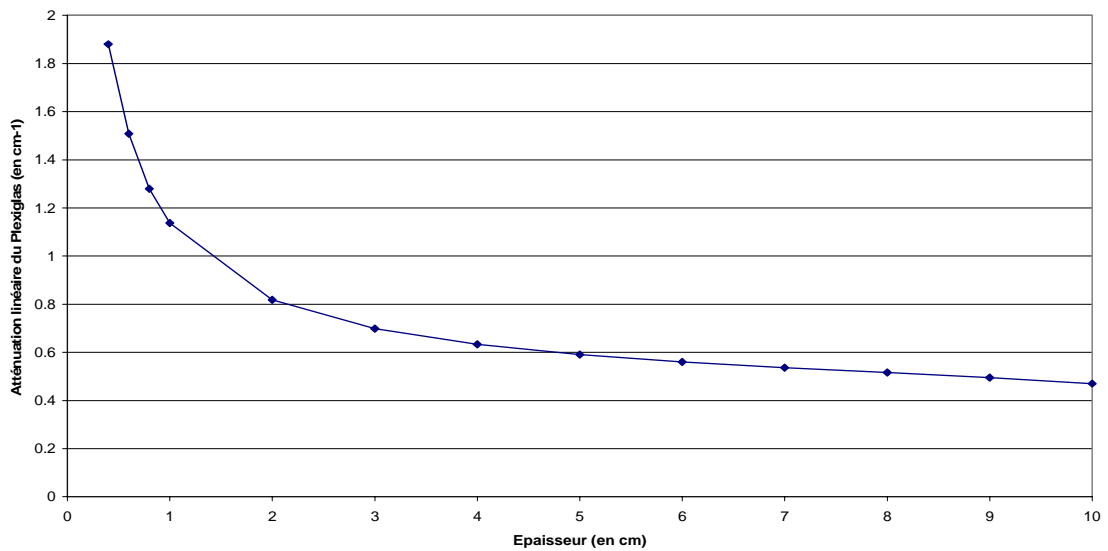


FIG. 4.35: Atténuation linéaire en fonction de l'épaisseur traversée mesurée avec l'escalier de Plexiglas

4.6.2 Rappel du durcissement du faisceau

La valeur du coefficient d'atténuation linéaire d'un matériau est donnée dans les tables pour des faisceaux de rayons X monoénergétiques. Quand nous mesurons l'atténuation d'un faisceau polyénergétique, nous mesurons une moyenne des atténuations à chaque énergie pondérées par le flux de photons à cette énergie.

Or les rayons de faibles énergies sont plus atténués que les rayons de fortes énergies. Cela entraîne une déformation du spectre des rayons X lors de sa traversée du matériau. L'énergie moyenne du faisceau (moyenne des énergies pondérées par le flux de photons à cette énergie) augmente. C'est ce phénomène que nous appelons "durcissement du faisceau".

Par exemple, à partir du spectre d'émission d'un tube avec anticathode en Cuivre alimenté avec une haute tension de 40 kV, nous avons calculé le spectre de rayons X après la traversée de 0,5 cm d'eau (voir figure 4.36). Les coefficients d'atténuation sont obtenus par interpolation linéaire entre les coefficients fournis par les tables dans [Hubbell, 1969]. L'énergie moyenne du spectre passe de 15 keV à 21 keV sur cet exemple.

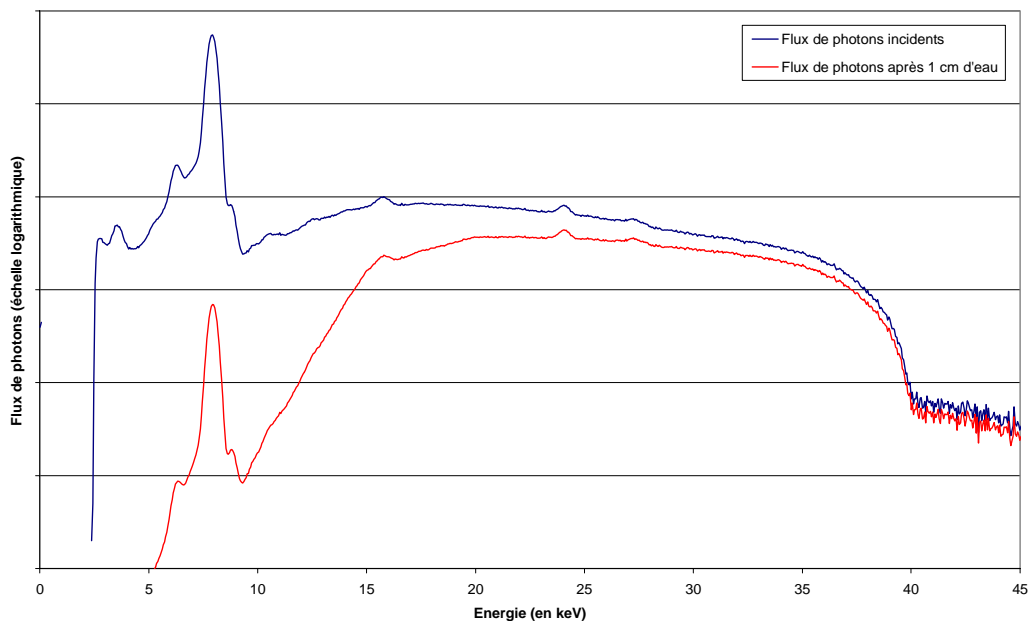


FIG. 4.36: Densité spectrale d'un faisceau de rayons X avant et après 0,5 cm d'eau

Nous cherchons un moyen pour prendre en compte ce phénomène ou le réduire (voir la section 2.5).

La première solution est de corriger cet effet.

Nous pouvons appliquer un facteur correctif, mais ce phénomène de durcissement du faisceau varie en fonction du matériau traversé. Nous traversons trois matériaux : l'eau, l'air et le Plexiglas. Il nous faudrait trois facteurs correctifs et savoir surtout comment les appliquer.

Nous pouvons utiliser la méthode de correction bi-énergie. Mais elle nécessite de faire des mesures à deux énergies et de connaître les spectres des faisceaux de rayons X pour ces deux

énergies. Faire une deuxième série de mesures est très long et cette méthode n'est pas facilement transposable sur un autre dispositif de mesure.

Nous décidons d'éliminer ce phénomène en durcissant artificiellement le faisceau. Nous placerons en sortie de faisceau sur le tube à rayons X un écran pour le durcir avant qu'il ne pénètre dans la section d'essais. Quand le faisceau impactera cette dernière, les photons de faibles énergies auront été préalablement atténués par cet écran, donc le phénomène de durcissement du faisceau dans la section d'essais sera minimisé.

4.6.3 Prise en compte de ce phénomène

Nous allons choisir le matériau et l'épaisseur de l'écran.

Nous regardons d'abord l'évolution de l'atténuation linéaire en fonction de l'énergie pour différents matériaux, grâce aux tables de Hubbell [Hubbell, 1969] (courbe 4.37).

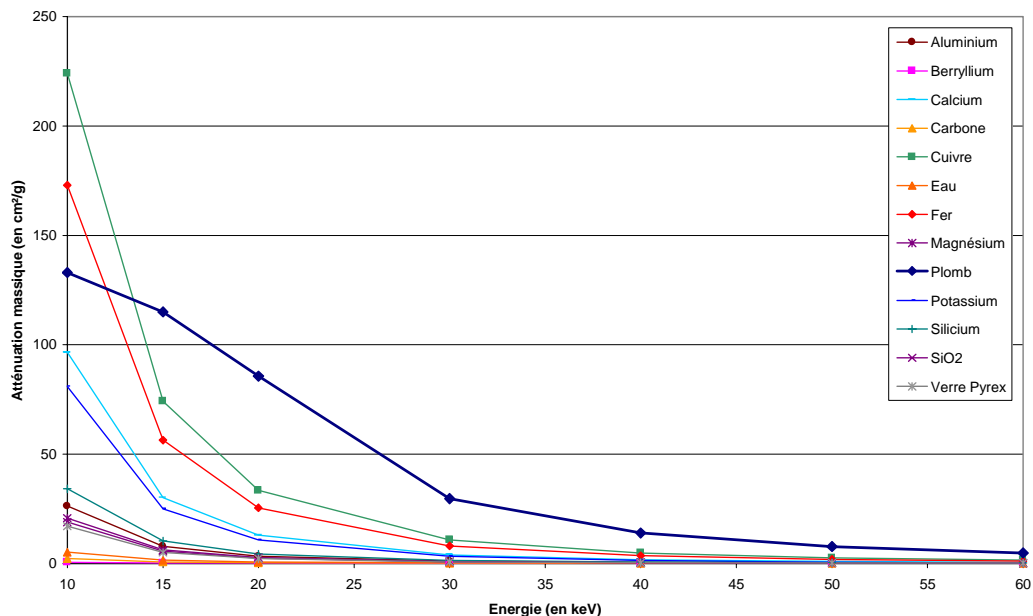


FIG. 4.37: Atténuation linéaire des rayons X en fonction de l'énergie pour différents matériaux

Nous cherchons un matériau qui atténue fortement les photons de faibles énergies, c'est à dire en dessous de 25 keV, mais qui atténue très peu les photons d'énergies supérieures. Cela permettra d'éliminer les photons qui rentrent en jeu dans le durcissement du faisceau et d'éviter une trop grosse perte d'intensité pour les hautes énergies.

Le Plomb est le matériau qui correspond le mieux à ce critère de choix.

Pour différents matériaux et différentes épaisseurs, nous mesurons de nouveau l'atténuation de l'escalier en Plexiglas. Nous regardons pour ces écrans l'évolution de l'écart relatif de l'atténuation linéaire calculée (tableau 4.1). Cet écart est le rapport de la gamme des atténuations calculées sur l'atténuation moyenne sur tout l'escalier.

Nous voulons un écran qui durcisse le plus possible le faisceau, donc avec un écart de

Matériau	Epais- -seur (en mm)	Tension tube (en kV)	Intensité tube (en mA)	Tension PM réf. (en V)	Tension PM mes. (en V)	Attén. linéaire (en cm^{-1})	Ecart max. (en %)
Rien	0	40	5	-906	-805	0,872	162,9
Plexiglas	15	40	5	-1090	-953	0,484	57,7
Cuivre	0,1	40	5	-1007	-947	0,468	57,4
Plexiglas	10	40	5	-1048	-920	0,478	48,0
Acier	1	40	15	-1985	-1699	0,334	32,7
Plomb	0,3	40	30	-2024	-2551	0,312	23,6
Aluminium	7,5	40	5	-1411	-1297	0,355	23,4
Acier	1	40	15	-1985	-1683	0,306	19,0
Cuivre	0,5	40	5	-1279	-1191	0,330	16,6
Aluminium	7,5	40	5	-1418	-1290	0,326	15,8
Aluminium	15	40	5	-1956	-1714	0,326	14,6
Cuivre	0,9	40	5	-1608	-1472	0,319	14,4
Acier	0,5	40	5	-1660	-1403	0,339	12,6
Plomb	0,2	40	15	-1869	-1685	0,321	11,2
Plomb	0,1	40	5	-1538	-1374	0,319	9,9
Cuivre	1,4	40	5	-2033	-1883	0,286	7,8
Aluminium	20	40	15	-1987	-1735	0,290	7,1
Plomb	0,1	50	5	-1210	-1097	0,305	13,0
Plomb	0,1	55	5	-1115	-1016	0,283	10,5

TAB. 4.1: Tableau des mesures de l'atténuation linéaire à partir de l'escalier de Plexiglas pour différents écrans

l'atténuation linéaire le plus faible possible, mais qui n'impose pas une augmentation de la puissance du tube, c'est à dire de l'intensité, et des hautes tensions des photomultiplicateurs. Cette dernière condition permettra de mesurer un objet plus atténuant.

Les écrans de 1,4 mm de Cuivre et de 20 mm d'Aluminium donnent de bons résultats, mais pour les utiliser, il faut trop augmenter la haute tension du tube à rayons X et / ou les hautes tensions des photomultiplicateurs.

Parmi nos mesures, **la feuille de Plomb de 0,1 mm** apparaît comme étant le meilleur parmi les écrans testés. Nous utiliserons dorénavant cet écran.

Nous l'avons essayé en augmentant la haute tension du tube à 50 kV et à 55 kV. Cette modification n'apporte pas d'amélioration. Nous resterons donc à 40 kV.

A partir des tables dans [Hubbell, 1969], nous simulons l'effet des principaux écrans sur la mesure de l'atténuation linéaire déduite de l'escalier de Plexiglas (figure 4.38).

Cela donne les écarts d'atténuation linéaire du tableau 4.2.

Les écrans entraînent, par le durcissement artificiel du faisceau de rayons X, une diminution du durcissement du faisceau dans l'escalier en Plexiglas et donc une baisse de l'écart d'atténuation linéaire déduite. Les écrans de 0,2 mm et 0,3 mm sont plus performants, mais, comme nous l'avons vu précédemment, imposent des paramètres de fonctionnement (intensité du tube et hautes tensions des photomultiplicateurs) plus importants. Cela limiterait la marge

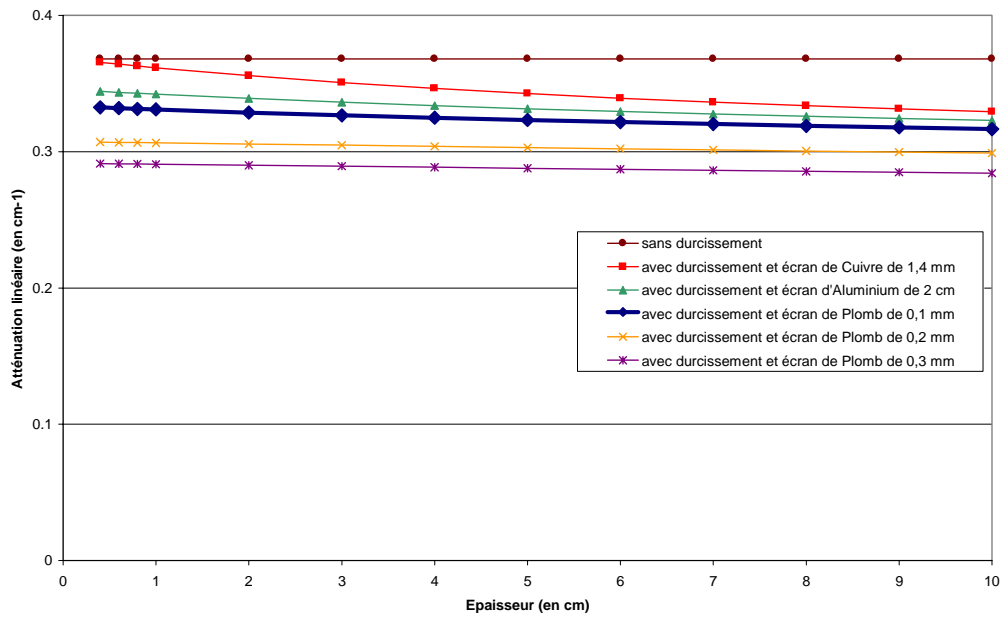


FIG. 4.38: Simulation de l'évolution de l'atténuation linéaire déduite de l'escalier de Plexiglas pour différents écrans

Ecran	Ecart (en %)
Sans durcissement	0,0
Avec durcissement	238,7
Avec durcissement et écran de Cuivre de 1,4 mm	10,4
Avec durcissement et écran d'Aluminium de 2 cm	6,4
Avec durcissement et écran de Plomb de 0,1 mm	4,9
Avec durcissement et écran de Plomb de 0,2 mm	2,7
Avec durcissement et écran de Plomb de 0,3 mm	2,5

TAB. 4.2: Tableau des écarts de l'atténuation linéaire simulée pour différents écrans

de manœuvre en cas de mesure d'un objet plus atténuant.

Nous restons avec **l'écran de 0,1 mm de Plomb**.

4.7 Conclusion

Pour faire les mesures, nous prendrons les réglages suivants :

- filtrage du faisceau de rayons X avec **le filtre au Nickel** ;
- la **tension du tube** est de **40 kV** ;
- l'intensité du tube et les hautes tensions des photomultiplicateurs sont réglées de façon à avoir une mesure proche de 9,5 V sans atténuation et une mesure au-dessus de 0,1 V en atténuation maximale ;
- les mesures sont filtrées par **un filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 Hz** ;
- les mesures sont acquises à **une fréquence de 20 Hz** pour les deux voies ;
- l'atténuation est calculée par la **moyenne de 300 mesures**.

Si nous voulons une atténuation plus précise, nous pourrions augmenter le nombre de points pris en compte dans son calcul, mais cela augmente aussi le temps de mesure. Pour les cibles en Plexiglas, nous pourrions toujours augmenter cette précision. Mais pour les mesures en écoulement, pour un débit d'air moyen ou fort, nous atteignons une phase où l'atténuation oscille entre deux valeurs : à ce moment, nous ne pouvons plus améliorer la précision.

Ces réglages donne une erreur sur l'atténuation :

- pour les mesures de cibles en **Plexiglas**, de l'ordre de **$\pm 20 \%$** ;
- pour les mesures d'**écoulements**, **inférieure à $\pm 5,2 \%$** .

Nous avons mis en évidence le phénomène de durcissement du faisceau dans le dispositif expérimental Mini-TOMIX. La solution retenue est **de durcir artificiellement le faisceau de rayons X** en mettant, en sortie du tube du côté faisceau de mesure et du côté faisceau de référence, un **écran de 0,1 mm de Plomb**.

Chapitre 5

Mise en œuvre du dispositif Mini-TOMIX

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous mettrons en œuvre le dispositif Mini-TOMIX et l'algorithme du masque.

Dans un premier temps, nous chercherons à obtenir une résolution de 1mm^2 en simulant et en mesurant des fantômes.

Dans un deuxième temps, nous mesurerons des écoulements eau-air dans la section Eucalyptus et comparerons les cartes de taux de vide reconstruites avec des cartes de taux de vide mesurées par la sonde optique.

Enfin, nous testerons la chaîne de mesure et l'algorithme de reconstruction sur des écoulements en faisceaux de tubes.

5.2 Nombre de points nécessaires pour une résolution de 1 mm^2

L'objectif de cette section est de démontrer qu'une résolution de 1 mm^2 peut être atteinte.

Nous avons procédé en trois étapes :

1. nous reconstruisons des données simulées du fantôme 1 (plan 3.3) en augmentant le nombre de translations M jusqu'à distinguer le trou d'1 mm de diamètre ;
2. nous reconstruisons des données réelles du fantôme 1 en augmentant le nombre de translations M jusqu'à avoir la résolution voulue ;
3. nous reconstruisons des données réelles du fantôme 2 en augmentant le nombre de translations M .

Le nombre de rotation sera toujours optimal : $N = \pi/2 M$.

Les images auront 160 pixels de côté, ce qui donne, compte tenu des positions extrêmes des translations, 1 pixel pour un carré de 0,5 mm de côté.

5.2.1 Reconstructions de mesures simulées du fantôme 1

Nous augmentons progressivement le nombre de translations M pour voir apparaître le trou de 1 mm de diamètre. La transition a lieu à 96 rotations et 61 translations (images 5.1 et 5.2).

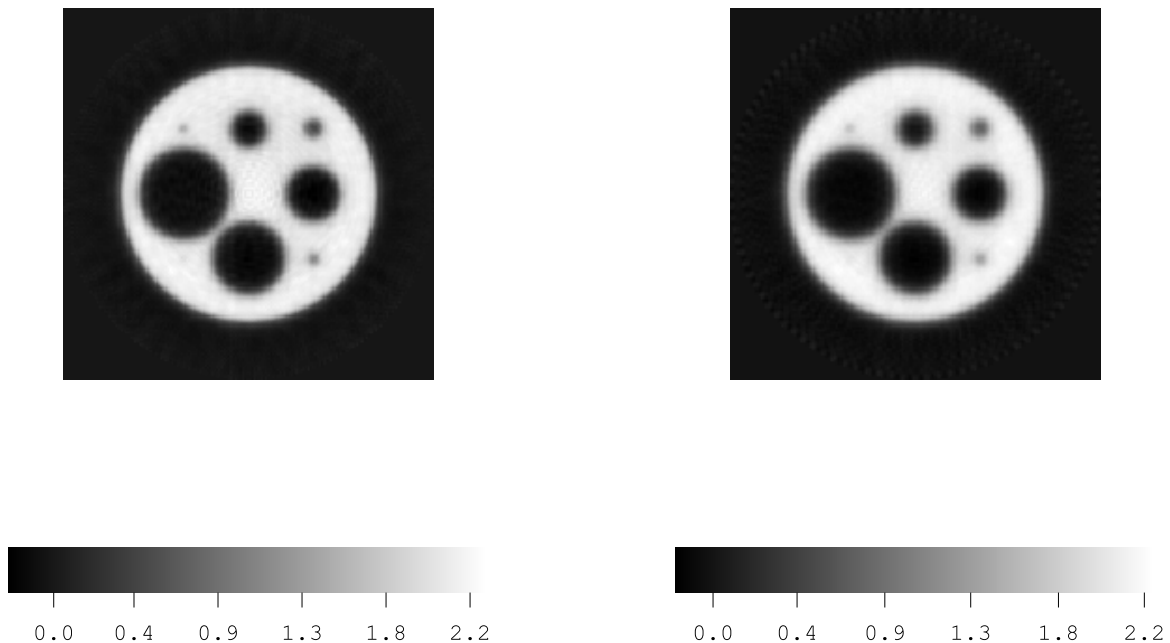


FIG. 5.1: Image obtenue par CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec un échantillonnage régulier, 96 rotations, 61 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

FIG. 5.2: Image obtenue par CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 1 avec un échantillonnage entrelacé, 96 rotations, 61/2 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

Pour les deux échantillonnages, nous obtenons la résolution voulue de 1 mm^2 pour 61 translations, soit sur un déplacement de 8 cm, **une mesure tous les 1,5 mm**.

5.2.2 Reconstructions de mesures réelles du fantôme 1

Regardons si nous avons la même résolution sur des mesures réelles avec le même nombre de mesures (figures 5.4 et 5.5).

Nous avons de nouveau **la même résolution** pour les deux échantillonnages.

L'image est légèrement améliorée si nous augmentons le nombre de mesures (figure 5.6).

5.2.3 Reconstructions de mesures réelles du fantôme 2

Regardons ce que nous obtenons avec des mesures réelles du fantôme 2. Ce fantôme a des trous de plusieurs diamètres, entre autres de 1 et 2 mm, mais il a la particularité d'avoir des orifices plus au moins éloignés (de 1, 2, 3 et 5 mm) et d'avoir des petits trous proches de grands trous (plan 5.3).

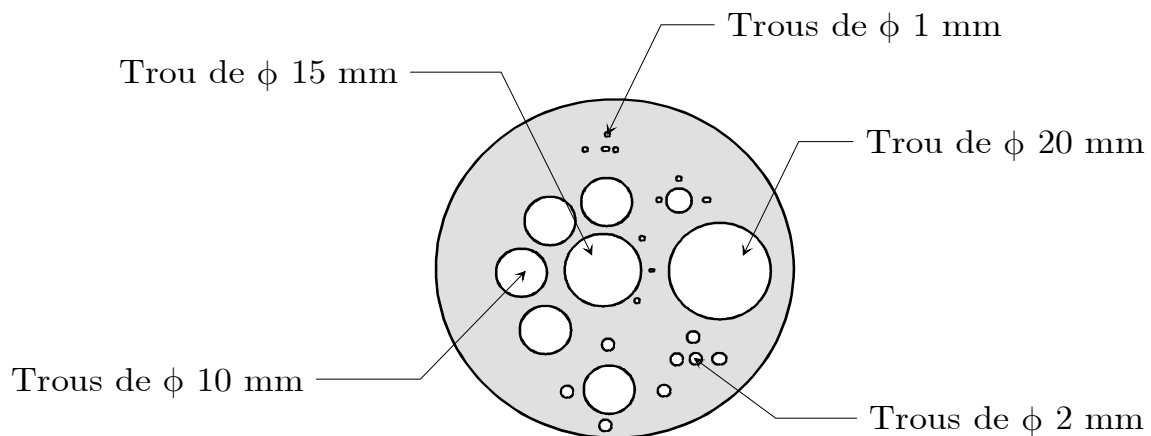


FIG. 5.3: Schéma du fantôme 2

Voyons quelques reconstructions (figures 5.7, 5.8 et 5.9).

Dès 61 translations et 96 rotations, pour les deux échantillonnages, nous voyons bien tous les trous, y compris les petits trous proches des grands trous et les orifices espacés de 1 mm. L'augmentation du nombre de mesures à 159 rotations et 101 translations améliore légèrement l'image, mais n'apporte pas une netteté supplémentaire.

Donc en conclusion, quel que soit l'échantillonnage, régulier ou entrelacé, une translation tous les 1,5 mm et un nombre de rotations optimal **permettent d'obtenir une résolution millimétrique**.

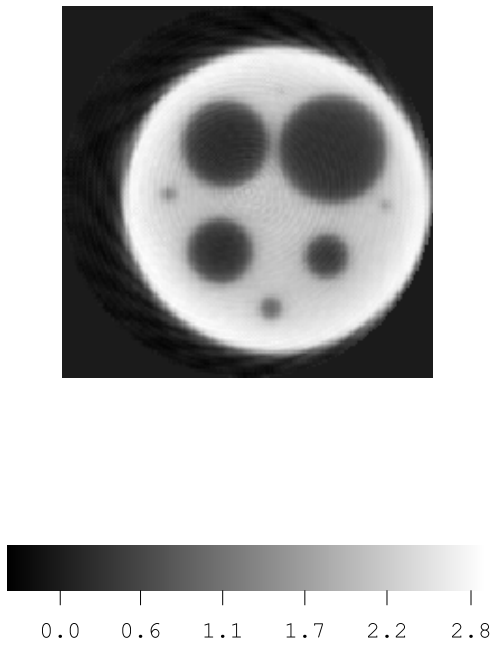


FIG. 5.4: Image obtenue par CGLS régularisé pour une mesure du fantôme 1 avec un échantillonnage régulier, 96 rotations, 61 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

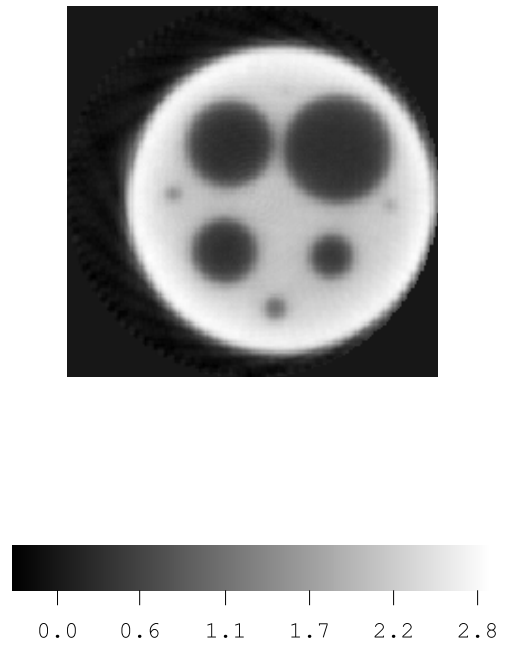


FIG. 5.5: Image obtenue par CGLS régularisé pour une mesure du fantôme 1 avec un échantillonnage entrelacé, 96 rotations, 61/2 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

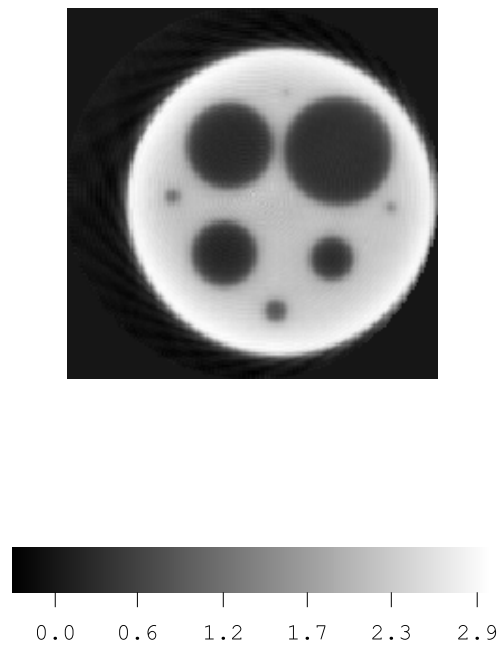


FIG. 5.6: Image obtenue par CGLS régularisé pour une mesure du fantôme 1 avec 127 rotations, 81 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

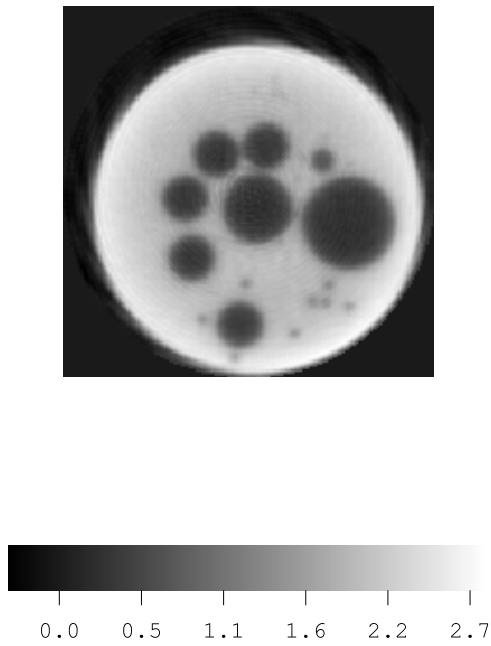


FIG. 5.7: Image obtenue par CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 2 avec un échantillonnage régulier, 96 rotations, 61 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

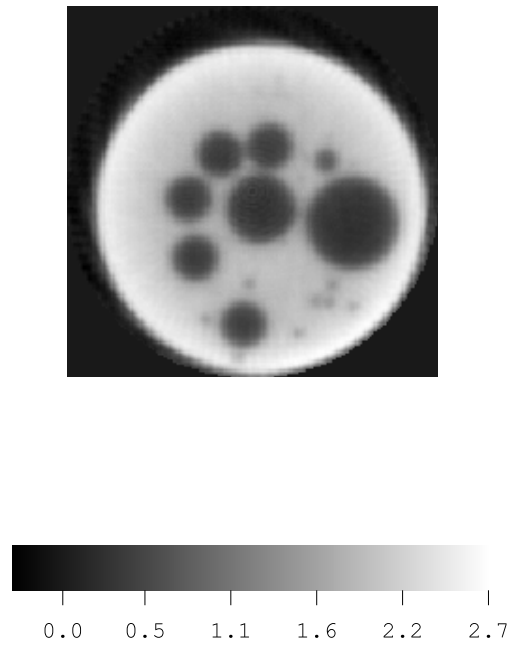


FIG. 5.8: Image obtenue par CGLS régularisé pour une simulation du fantôme 2 avec un échantillonnage entrelacé, 96 rotations, 61/2 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

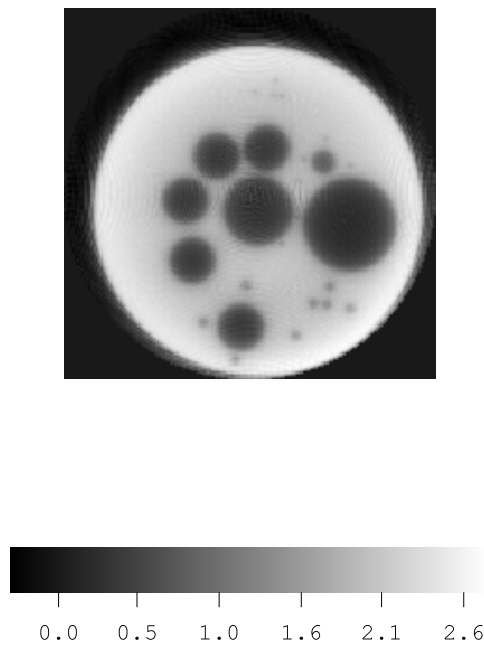


FIG. 5.9: Image obtenue par CGLS régularisé pour une mesure du fantôme 2 avec 159 rotations, 101 translations et une reconstruction de 160 pixels de côté

5.3 Protocole expérimental

5.3.1 Procédure de mesure

Pour réaliser les essais des parties suivantes, nous suivons la procédure suivante :

1. La géométrie d'échantillonnage (nombre de mesures et positions des faisceaux) est déterminée de façon à avoir une mesure tous les 2 mm et à ne pas avoir de mesure à cheval sur les bords des parois aux orientations 0° et 90° . Ce choix permet de limiter les effets de volume partiel (le faisceau de rayons X est collimaté à 0,5 mm de diamètre). Nous prenons 70 translations.
2. Le nombre de rotations doit être optimal, donc nous choisissons 109 rotations.
3. L'acquisition de la section d'essais vide est réalisée. Nous reconstruisons son image par l'algorithme CGLS régularisé et en déduisons le masque par un seuil sur l'atténuation (section 3.5.4).
4. L'acquisition de la section d'essais pleine d'eau, sans débit d'air, est réalisée. Nous soustrayons les mesures de la section vide et reconstruisons son image par l'algorithme du masque en utilisant le masque construit à l'étape 3. Nous obtenons la carte d'atténuation : $\mu_{\text{sans débit d'air}}(i, j)$.
5. L'acquisition de la section d'essais avec le débit d'air choisi est réalisée. De même, nous soustrayons les mesures de la section vide et son image est reconstruite par l'algorithme du masque en utilisant le masque construit à l'étape 3. Nous obtenons la carte d'atténuation : $\mu_{\text{débit considéré}}(i, j)$.
6. Pour chaque pixel de position (i, j) , le taux de présence local est obtenu par :

$$\alpha(i, j) = 1 - \frac{\mu_{\text{débit considéré}}(i, j)}{\mu_{\text{sans débit d'air}}(i, j)} \quad (5.1)$$

En effet, en considérant que le faisceau de rayons X ne se durcit pas dans la section, l'atténuation dans la section s'exprime sous la forme suivante :

$$\mu_{\text{débit considéré}}(i, j) = \alpha(i, j)\mu_{\text{air}}(i, j) + (1 - \alpha(i, j))\mu_{\text{eau}}(i, j) \quad (5.2)$$

Le taux de présence local n'est pas proche de 1 dans nos essais. μ_{air} est très petit devant μ_{eau} , donc est négligeable. μ_{eau} est obtenue par la mesure de la section d'essais sans débit d'air. Cela permet de prendre en compte le durcissement du faisceau dans l'écran de Plomb, la réponse de la chaîne de mesure et l'algorithme de reconstruction (qui réalise une adimensionnalisation de l'atténuation). L'application de l'équation (5.1) permet de corriger des artefacts qui sont présents sur les cartes d'atténuation de la section d'essais sans débit d'air et avec débit d'air.

Cette procédure sera appliquée à des échantillonnages réguliers et des échantillonnages entrelacés. Pour ces derniers, 70/2 translations et de 109 rotations sont réalisées.

L'équation (5.1) permet de calculer l'incertitude sur la détermination du taux de présence local par mesure tomographique :

$$\Delta\alpha = \frac{\mu_{\text{sans débit d'air}} + \mu_{\text{débit considéré}}}{\mu_{\text{sans débit d'air}}^2} \Delta\mu \quad (5.3)$$

L'incertitude sur la détermination de $\mu_{\text{débit considéré}}$ et de $\mu_{\text{sans débit d'air}}$ est la même. Dans la section 4.5, nous avons déterminé que cette incertitude relative était de $\pm 5,2\%$.

5.3.2 Corrections des mesures

Nous allons visualiser le profil de mesures à 0° de la section pleine après soustraction des mesures de la section d'essais vide (figure 5.10).

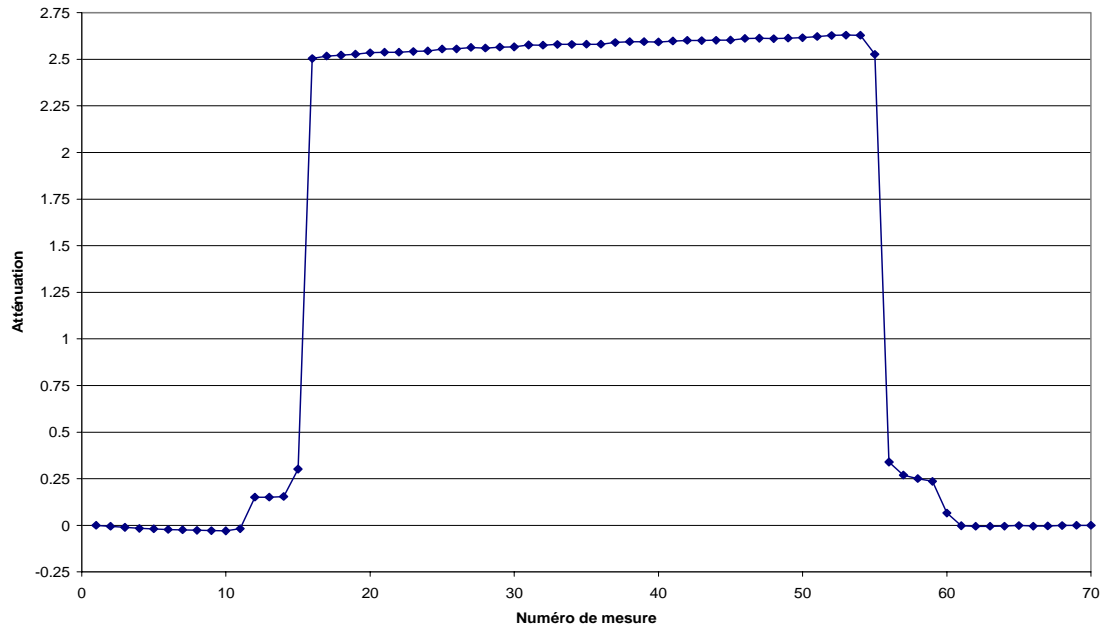


FIG. 5.10: Différence entre les mesures à 0° de la section d'essais pleine d'eau, sans débit d'air et de la section d'essais vide

Le profil devrait être plat. Or ce profil est croissant en fonction du numéro de mesure. Précédemment, nous avons mis en évidence le comportement des photomultiplicateurs suite à un front d'atténuation (section 4.3.3). Nous observons de nouveau ce phénomène malgré l'attente de 6 min ajoutée dans le programme d'acquisition. De plus, en raison de ce phénomène, l'atténuation des parois n'est plus égale entre les mesures de la section vide et pleine d'eau. Cela explique les deux niveaux du profil.

Pour comprendre l'importance de chacun de ces défauts, nous les avons reproduits grâce à des simulations de mesure de la section d'essais pleine d'eau.

Dans un premier temps, nous simulons la croissance des mesures en appliquant un coefficient linéaire aux profils de mesures, pour chaque position angulaire (figures 5.11 et 5.12).

Ce défaut entraîne des artefacts avec un écart maximal de $\pm 2,3\%$.

Nous allons regarder l'influence de la différence de mesures des parois en Plexiglas (figures 5.13 et 5.14).

Ce défaut entraîne une sur-estimation de l'atténuation proche des bords du masque. Dans ce cas, les mesures contiennent l'atténuation de la section d'essais avec un "supplément" d'atténuation. L'algorithme de reconstruction répartit ce supplément aux bords de la trame. Le lissage dû à la régularisation entraîne cette allure concave. L'artefact induit provoque une erreur de $5,5\%$.

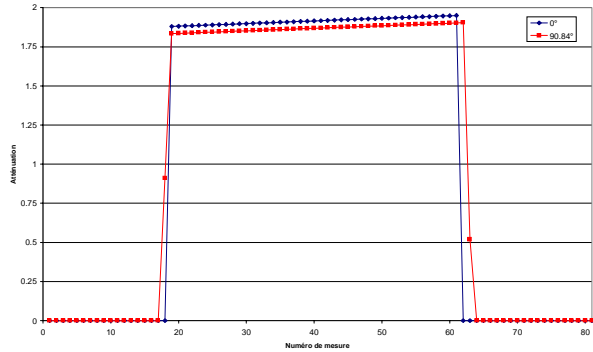


FIG. 5.11: Mesures à 0° et à 90° de la simulation de la pente appliquée à la section d'essais pleine d'eau

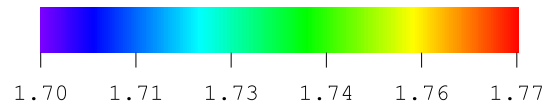
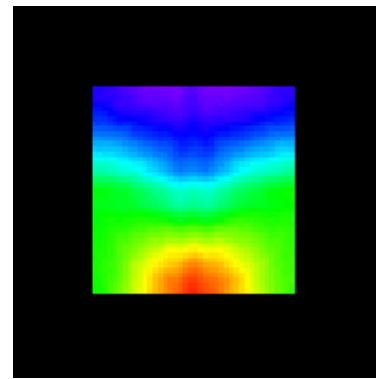


FIG. 5.12: Image obtenue par l'algorithme du masque avec les mesures de la figure 5.11

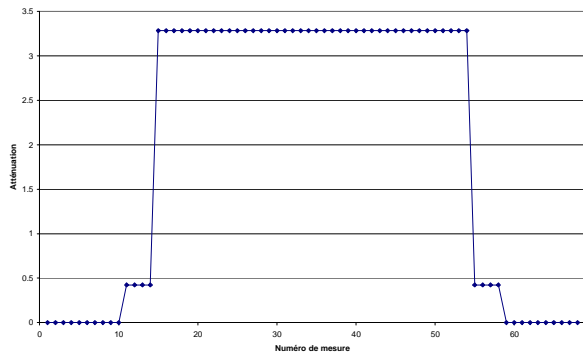


FIG. 5.13: Mesures à 0° de la simulation de la différence d'atténuations des parois à la section d'essais pleine d'eau

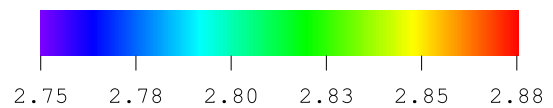
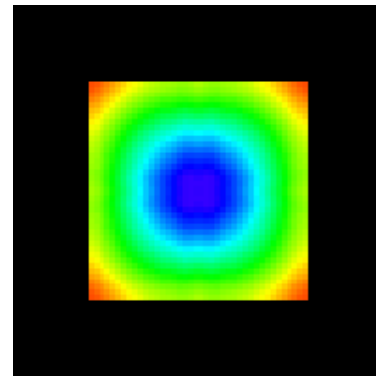


FIG. 5.14: Image obtenue par l'algorithme du masque avec les mesures de la figure 5.13

L'erreur cumulée de ces défauts est de $\pm 7,8 \%$ sur l'atténuation et entraînera une mauvaise estimation du taux de présence local.

C'est pourquoi nous allons corriger cet effet par deux actions successives que nous réaliserons à chaque essai :

1. Correction de la pente : Pour chaque position angulaire, nous appliquons un facteur correctif linéaire de pente opposé à celle des mesures. Soient i , le numéro de projection et j le numéro de rotation. Si la valeur moyenne du premier profil est $A_{\text{moyen},1}$, la pente de ce profil a_1 et son ordonnée à l'origine b_1 , l'atténuation corrigée est donnée par :

$$A_{\text{corrigée}}(i, j) = \left(-\frac{a_1}{A_{\text{moyen},1}}i + \frac{b_1}{A_{\text{moyen},1}} \right) A_{\text{mesurée}}(i, j) \quad (5.4)$$

2. En comparant les profils de mesures de la section vide et au débit d'air considéré à l'angle 0° , un facteur homothétique est appliqué aux mesures de la section vide afin que les atténuations correspondant aux parois soient égales (c'est à dire en utilisant l'équation (5.4) avec $a_1 = 0$).

Le profil à 0° obtenu pour les mesures corrigées de la section pleine d'eau, après soustraction des mesures à vide corrigées, est donné sur la figure 5.15.

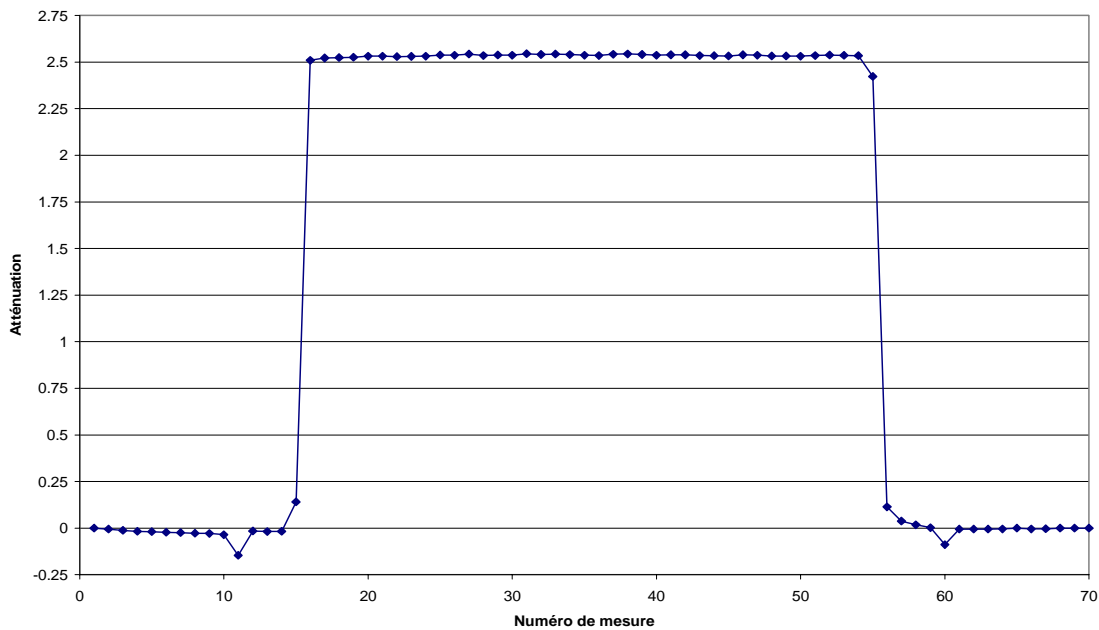


FIG. 5.15: Différence entre les mesures corrigées à 0° de la section d'essais pleine d'eau, sans débit d'air et de la section d'essais vide

5.4 Mesures d'écoulements non déviés

5.4.1 Mesure de la section d'essais vide

Nous mesurons d'abord la section d'essais vide. Nous reconstruisons les mesures avec l'algorithme CGLS régularisé (figure 5.16). Le paramètre de régularisation λ est de $5,05 \cdot 10^{-2}$.

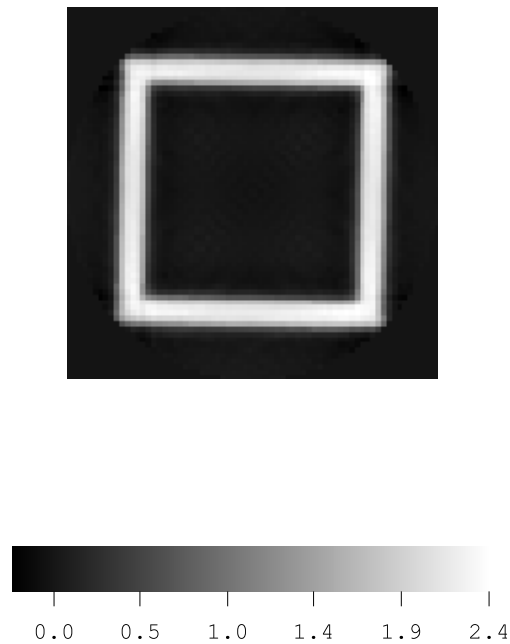


FIG. 5.16: Reconstruction de la section d'essais vide obtenue par l'algorithme CGLS régularisé avec 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

Nous en déduisons par un seuil à mi-amplitude le masque qui sera utilisé par la suite (figure 5.17).

5.4.2 Mesure de la section d'essais sans débit d'air

Nous mesurons la section d'essais pleine d'eau sans débit d'air (figures 5.18 et 5.19). Le paramètre de régularisation λ est de 50,5.

Ces figures serviront par la suite comme cartes d'atténuation de l'eau de référence pour le calcul du taux de présence local. L'atténuation moyenne des deux cartes est de 2,12. L'écart relatif maximal des valeurs des pixels obtenues est de $\pm 2,8 \%$.

5.4.3 Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$

Nous réglons le débit d'air à $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$ et mesurons l'écoulement obtenu (figure 5.20). L'image est reconstruite en utilisant la méthode du masque et le taux de vide est déterminé en utilisant les cartes d'atténuation de la section pleine d'eau, sans débit d'air (figures 5.22

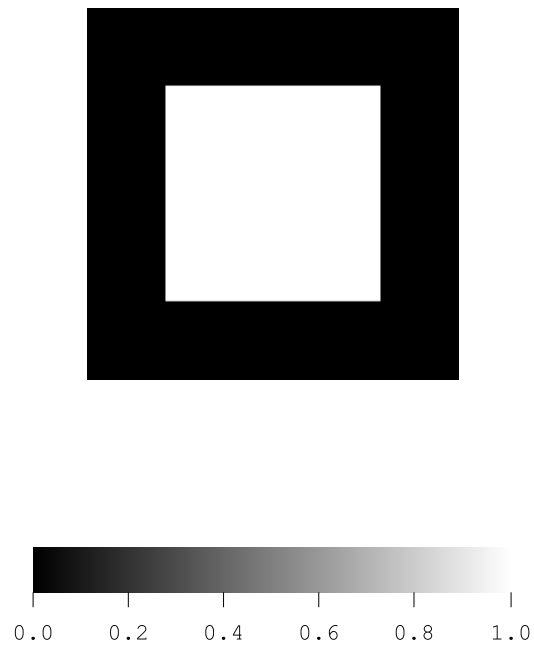


FIG. 5.17: Masque de la section d'essais

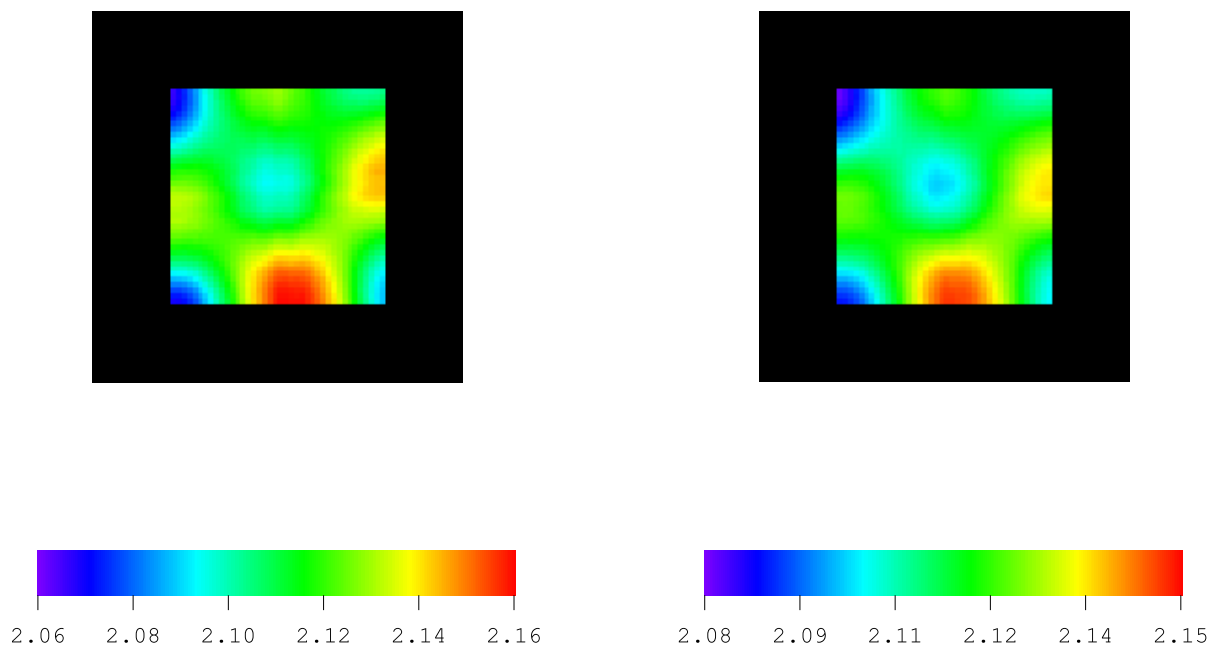


FIG. 5.18: Reconstruction de la section d'essais pleine d'eau sans débit d'air obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

FIG. 5.19: Reconstruction de la section d'essais pleine d'eau sans débit d'air obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, 109 rotations, 70/2 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

et 5.23). Le paramètre de régularisation λ est de 50,5. Nous obtenons pour le même débit une carte du taux de présence local par la sonde optique (figure 5.21).

Nous calculons les moyennes des différentes cartes de taux de présence local, les écarts absolus maximaux des valeurs des pixels (tableau 5.1).

Méthode de mesure	moyenne (en %)	Ecart absolu maximal (en %)
Sonde optique	4,21	1,79
Tomographie, régulier	5,73	0,58
Tomographie, entrelacé	5,72	0,34

TAB. 5.1: Tableau des moyennes et des écarts maximaux des cartes de taux de présence local pour un débit de 4,2 Nl.min⁻¹

D'après la mesure réalisée par la sonde optique, le taux de vide est uniforme dans la section d'essais. Les cartes de taux de présence local obtenues par tomographie sont relativement uniformes avec un écart maximal inférieur à 0,6 %. Ces écarts proviennent des faibles fluctuations des profils de mesures qui restent après les corrections. Mais les valeurs moyennes des cartes tomographiques sont supérieures de 1,52 % de taux de présence local à la valeur moyenne de la carte de la sonde optique.

Le tableau 5.2 montre les écarts absolus quadratique et maximal entre les cartes de taux de présence tomographiques et obtenu par la sonde optique. Ces écarts sont calculés par les formules suivantes :

– écart quadratique absolu :

$$\frac{1}{n_{\text{section}}^2} \sqrt{\sum_{\text{Toute la section}} (\alpha_{\text{tomographie}}(i, j) - \alpha_{\text{sonde optique}}(i, j))^2} \quad (5.5)$$

– écart maximal absolu :

$$\max_{\text{Toute la section}} |\alpha_{\text{tomographie}}(i, j) - \alpha_{\text{sonde optique}}(i, j)| \quad (5.6)$$

où i et j sont les positions d'un pixel.

Méthodes de mesure	Ecart quadratique absolu (en %)	Ecart maximal absolu (en %)
Tomographie, régulier	0,04	2,55
Tomographie, entrelacé	0,04	2,45

TAB. 5.2: Tableau des écarts absolus moyens et maximaux des cartes de taux de présence local tomographiques et obtenue par la sonde optique pour un débit de 4,2 Nl.min⁻¹

pour un débit de 4,2 Nl.min⁻¹, les incertitudes sur les mesures sont les suivantes :

- pour la sonde optique : $\pm 1\%$ de taux de présence local ;
- pour les mesures tomographique : $\pm 9,52\%$ de taux de présence local (calculé avec l'équation (5.3)).

L'écart quadratique reste faible à 0,04 %. Nous devons comparer l'écart maximal absolu (2,55 %) à l'incertitude sur nos mesures qui est de 9,52 %. Ces écarts sont inférieurs à l'incertitude, donc **les mesures sont en accord**.

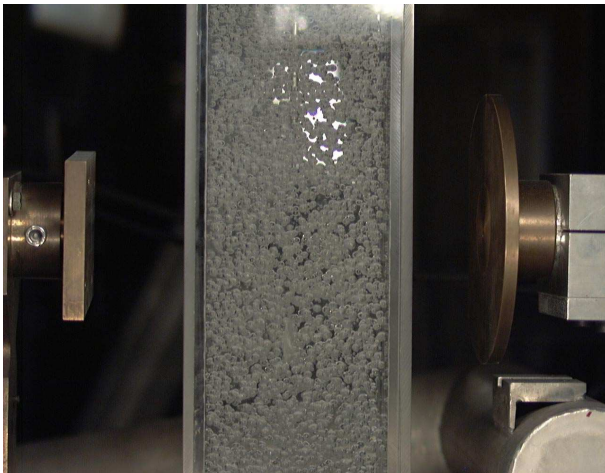


FIG. 5.20: Photographie de l'écoulement obtenu avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$

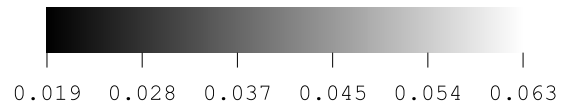
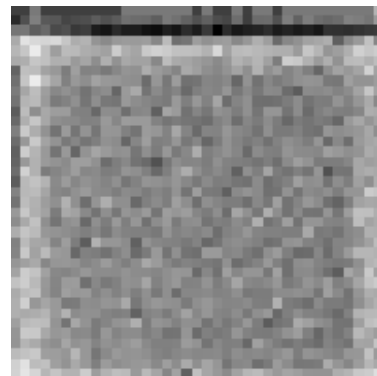


FIG. 5.21: Carte du taux de présence local obtenue par la sonde optique avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$

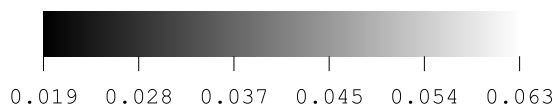
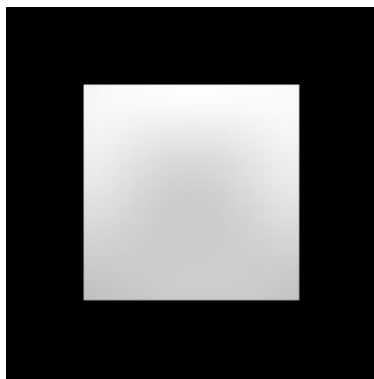


FIG. 5.22: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

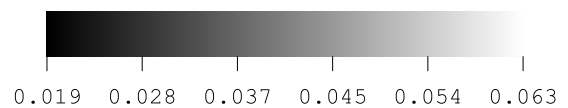
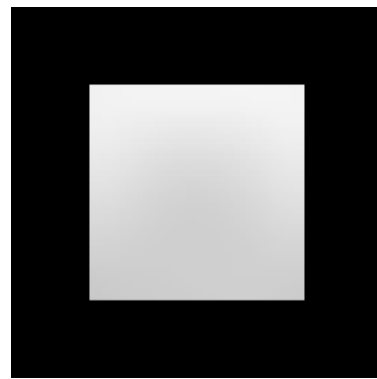


FIG. 5.23: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, $70/2$ translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

5.4.4 Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$

Nous réglons le débit d'air à $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$ et mesurons l'écoulement obtenu (figure 5.24). L'image est reconstruite de la même façon que précédemment (figures 5.26 et 5.27). Le paramètre de régularisation λ est de 50,5. Nous obtenons pour le même débit une carte du taux de présence local par la sonde optique (figure 5.25).

Nous calculons les moyennes des différentes cartes de taux de présence local, les écarts absolus maximaux des valeurs des pixels (tableau 5.3).

Méthode de mesure	moyenne (en %)	Ecart absolu maximal (en %)
Sonde optique	17,26	2,26
Tomographie, régulier	24,83	0,73
Tomographie, entrelacé	24,83	0,42

TAB. 5.3: Tableau des moyennes et des écarts maximaux des cartes de taux de présence local pour un débit de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$

Nous retrouvons l'uniformité des cartes de taux de présence local. Leurs valeurs moyennes sont différentes de 5 % de taux de présence local. Une faible variation de l'atténuation entraîne une forte variation du taux de présence local. Ces écarts de valeurs moyennes s'expliquent par une mauvaise estimation de la mesure de la section d'essais vide due à la divergence des photomultiplicateurs.

Le tableau 5.4 montre les écarts absolus quadratique et maximal entre les cartes de taux de présence tomographiques et obtenu par la sonde optique.

Méthodes de mesure	Ecart quadratique absolu (en %)	Ecart maximal absolu (en %)
Tomographie, régulier	0,26	9,55
Tomographie, entrelacé	0,27	9,47

TAB. 5.4: Tableau des écarts absolus moyens et maximaux des cartes de taux de présence local tomographiques et obtenue par la sonde optique pour un débit de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$

pour un débit de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$, l'incertitude sur les mesures sont les suivantes :

- pour la sonde optique : $\pm 1\%$ de taux de présence local ;
- pour les mesures tomographique : $\pm 5,92\%$ de taux de présence local (calculé avec l'équation (5.3)).

L'écart maximal absolu est grand devant la moyenne du taux de présence local et est le double de l'incertitude. Malgré les corrections, les profils de mesures présentent des fluctuations. Celles-ci ont une influence plus forte pour ce débit, car l'atténuation est plus faible que précédemment. Nous **retrouvons** quand même **l'ordre de grandeur du taux de présence local** et **l'uniformité de la carte**.

5.4.5 Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$

Nous réglons le débit d'air à $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$ et mesurons l'écoulement obtenu (figure 5.28). L'image est reconstruite de la même façon que précédemment (figures 5.30 et 5.31). Le paramètre

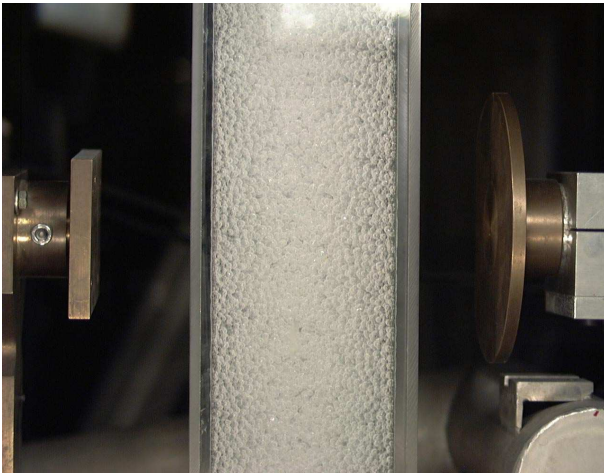


FIG. 5.24: Photographie de l'écoulement obtenu avec un débit d'air de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$

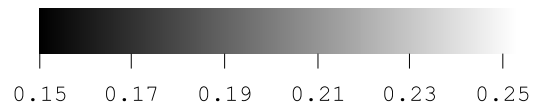
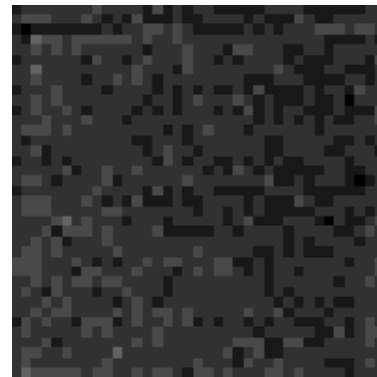


FIG. 5.25: Carte du taux de présence local obtenue par la sonde optique avec un débit d'air de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$

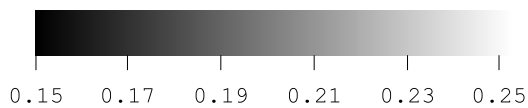
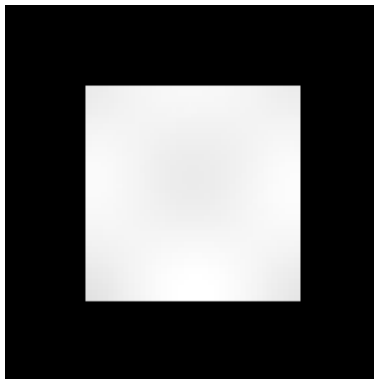


FIG. 5.26: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un débit d'air de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

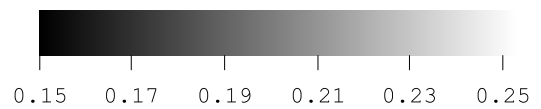
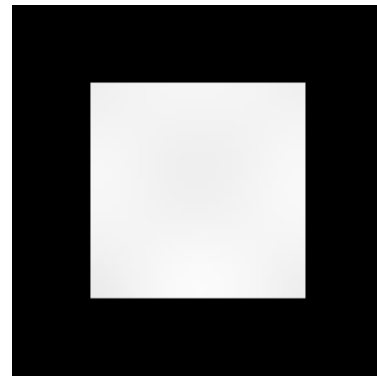


FIG. 5.27: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un débit d'air de $14,1 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, $70/2$ translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

de régularisation λ est de 50,5. Nous obtenons pour le même débit une carte du taux de présence local par la sonde optique (figure 5.29).

Les cartes de taux de présence local ont des allures différentes. Les cartes tomographiques sont uniformes avec un taux moyen autour de 44 %. La carte obtenue avec la sonde optique présente un taux de présence local faible en paroi (de 8 à 20 %) et un taux important autour de 37 % au centre de la section d'essais.

L'écoulement présente des recirculations cycliques avec des retombées périodiques au voisinage des parois avec une périodicité de l'ordre de 3 à 5 s. Quand ces phénomènes ont lieu, certaines bulles n'ont plus un mouvement ascendant, mais descendant dans la section d'essais. Dans ce cas, elles ne sont plus percées par la pointe de la sonde optique, donc elles ne sont pas comptabilisées dans le calcul du taux de présence local. La **mesure tomographique** n'a **pas cet inconvénient** et prend en compte toutes les bulles, quels que soient leurs mouvements.

L'écart entre les deux valeurs de taux de présence local s'explique comme précédemment par la différence d'atténuation de la section d'essais vide.

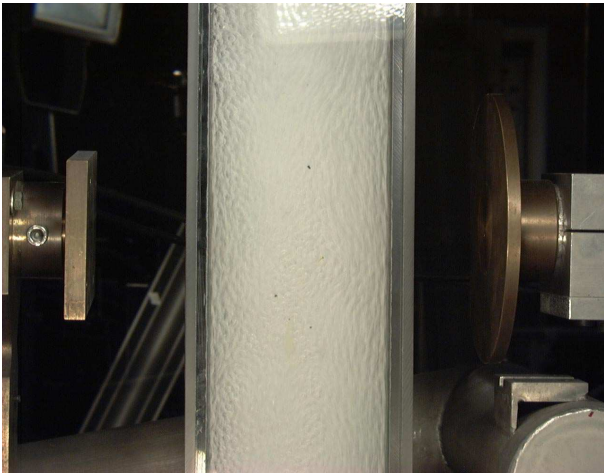


FIG. 5.28: Photographie de l'écoulement obtenu avec un débit d'air de $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$

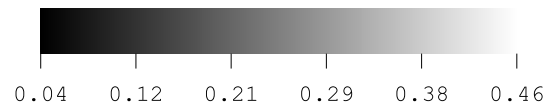
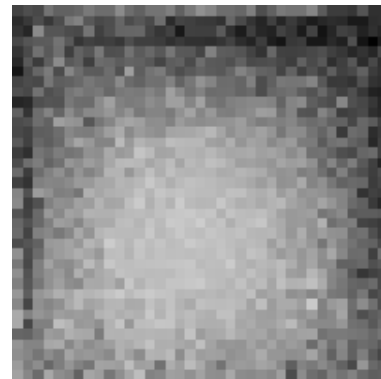


FIG. 5.29: Carte du taux de présence local obtenue par la sonde optique avec un débit d'air de $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$

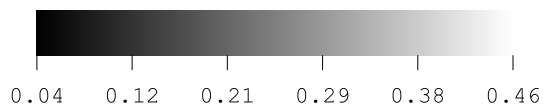
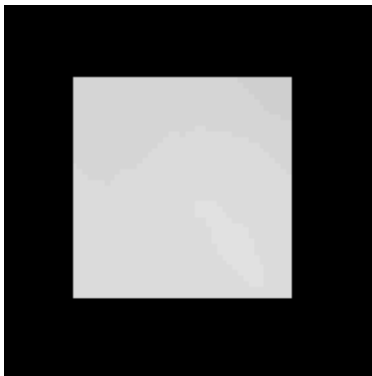


FIG. 5.30: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un débit d'air de $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

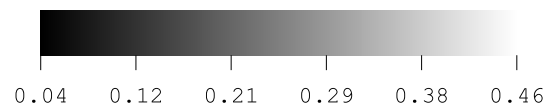
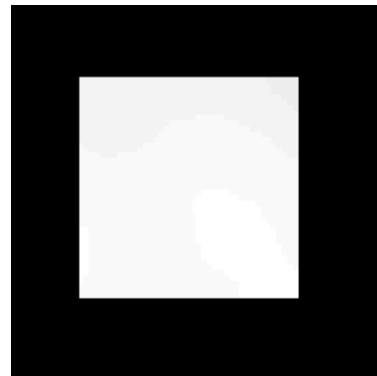


FIG. 5.31: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un débit d'air de $25,3 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70/2 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

5.5 Mesures d'écoulements déviés

Nous plaçons un déflecteur en Plexiglas dans la section d'essais à environ 2 cm du niveau des mesures tomographique et de la sonde optique. Il permet d'obtenir un écoulement non uniforme.

5.5.1 Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de 5,3 Nl.min^{-1}

Nous réglons le débit d'air à 5,3 Nl.min^{-1} et mesurons l'écoulement obtenu (figure 5.32). L'image est reconstruite de la même façon que précédemment (figures 5.34 et 5.35). Le paramètre de régularisation λ est de 5,05. Nous obtenons pour le même débit une carte du taux de présence local par la sonde optique (figure 5.33).

Nous retrouvons sur les cartes tomographiques la forme du pic de taux de présence local mesuré avec la sonde optique. Les taux reconstruits sont du même ordre de grandeur. Les cartes tomographiques présentent dans leurs coins inférieurs gauches et droits des artefacts qui faussent l'estimation du taux dans ces zones.

Regardons un profil médian extrait des cartes de taux de présence local (figure 5.36).

Les trois profils ont un comportement semblable. Leurs croissances débutent dans la même zone. Leurs pentes sont légèrement différentes. Leur comportement est différent entre le pixel 32 et le pixel 37 : ils décroissent à partir d'un pixel différent.

Le tableau 5.5 montre les écarts absolus quadratique et maximal entre les cartes de taux de présence tomographiques et obtenue par la sonde optique.

Méthodes de mesure	Ecart quadratique absolu (en %)	Ecart maximal absolu (en %)
Tomographie, régulier	0,06	8,47
Tomographie, entrelacé	0,06	7,44

TAB. 5.5: Tableau des écarts absolus moyens et maximaux des cartes de taux de présence local tomographiques et obtenue par la sonde optique avec un déflecteur et un débit d'air de 5,3 Nl.min^{-1}

pour un débit de 5,3 Nl.min^{-1} , les incertitudes sur les mesures sont les suivantes :

- pour la sonde optique : $\pm 1\%$ de taux de présence local ;
- pour les mesures tomographique : $\pm 8,6\%$ de taux de présence local (calculé avec l'équation (5.3)).

L'écart maximal absolu est de l'ordre de grandeur de l'incertitude. Nous avons **accord entre les deux mesures**.

5.5.2 Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de 12,9 Nl.min^{-1}

Nous réglons le débit d'air à 12,9 Nl.min^{-1} et mesurons l'écoulement obtenu (figure 5.37). L'image est reconstruite de la même façon que précédemment (figures 5.39 et 5.40). Le paramètre

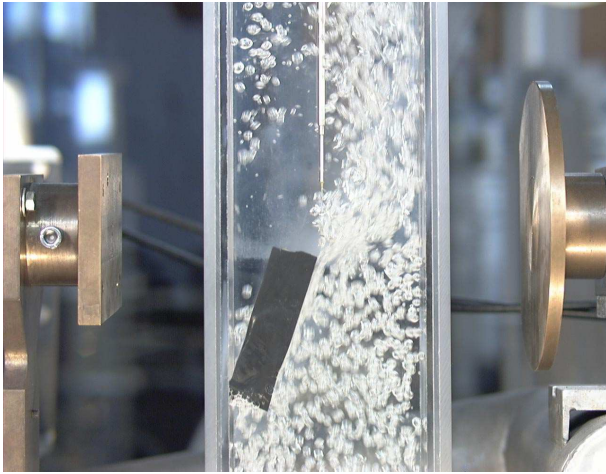


FIG. 5.32: Photographie de l'écoulement obtenu avec un déflecteur et un débit d'air de $5,3 \text{ Nl.min}^{-1}$

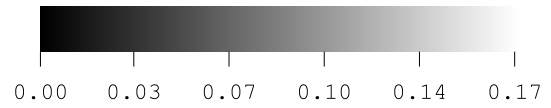
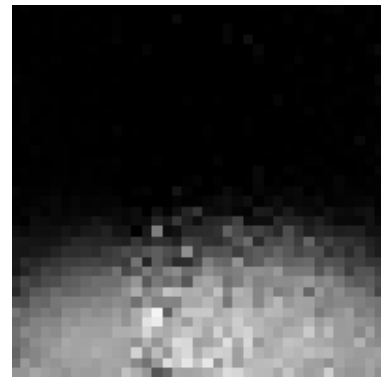


FIG. 5.33: Carte du taux de présence local obtenue par la sonde optique avec un déflecteur et un débit d'air de $5,3 \text{ Nl.min}^{-1}$

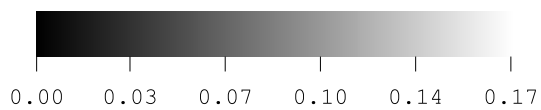
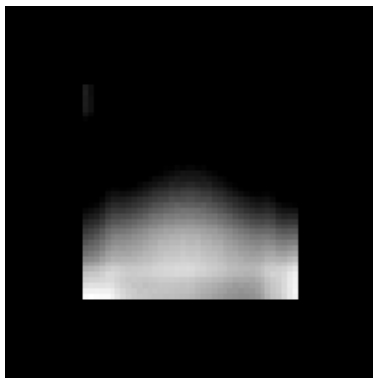


FIG. 5.34: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un déflecteur, un débit d'air de $5,3 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

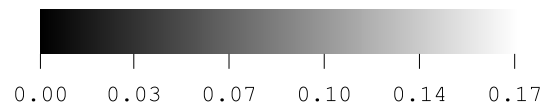
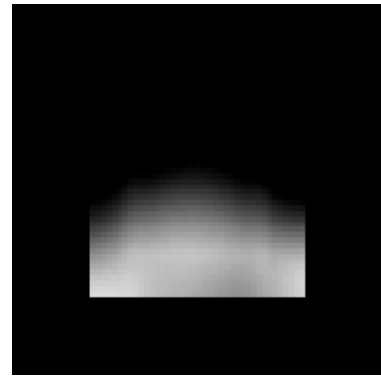


FIG. 5.35: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un déflecteur, un débit d'air de $5,3 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, $70/2$ translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

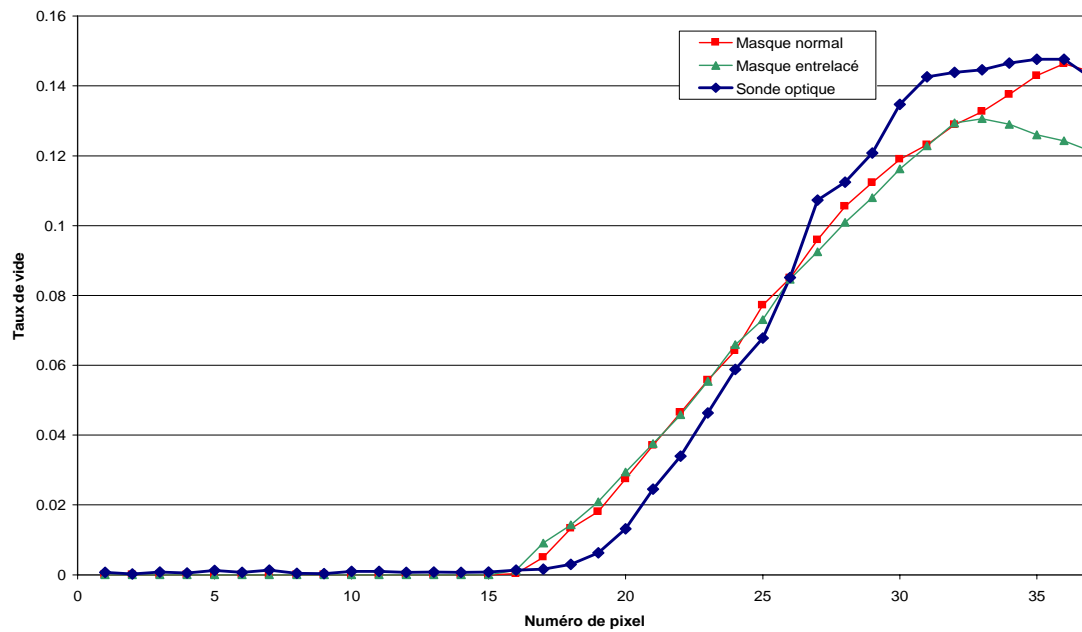


FIG. 5.36: Profils des cartes de taux de présence local avec un déflecteur et un débit d'air de $5,3 \text{ Nl.min}^{-1}$

de régularisation λ est de 5,05. Nous obtenons pour le même débit une carte du taux de présence local par la sonde optique (figure 5.38).

Comme précédemment, nous retrouvons sur les cartes tomographiques la forme du pic de taux de présence local mesuré avec la sonde optique avec les mêmes ordres de grandeur.

Regardons le profil médian extrait des cartes de taux de présence local (figure 5.41).

Les trois profils ont un comportement semblable et une pente identique. Mais avec la tomographie, le taux autour de 2 % avant le pixel 18 n'est pas reconstruit.

Le tableau 5.6 montre les écarts absolus quadratique et maximal entre les cartes de taux de présence tomographiques et obtenu par la sonde optique.

Méthodes de mesure	Ecart quadratique absolu (en %)	Ecart maximal absolu (en %)
Tomographie, régulier	0,10	9,89
Tomographie, entrelacé	0,09	9,62

TAB. 5.6: Tableau des écarts absolus moyens et maximaux des cartes de taux de présence local tomographiques et obtenue par la sonde optique avec un déflecteur et un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$

pour un débit de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$, les incertitudes sur les mesures sont les suivantes :

- pour la sonde optique : $\pm 1\%$ de taux de présence local ;
- pour les mesures tomographique : $\pm 8,0\%$ de taux de présence local (calculé avec l'équation (5.3)).

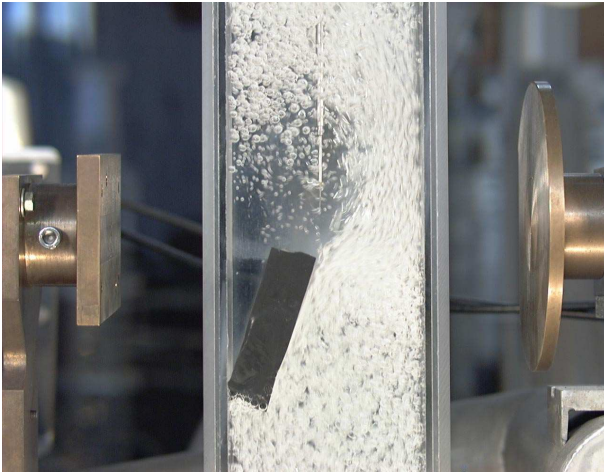


FIG. 5.37: Photographie de l'écoulement obtenu avec un déflecteur et un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$

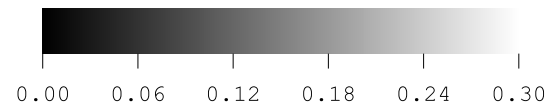
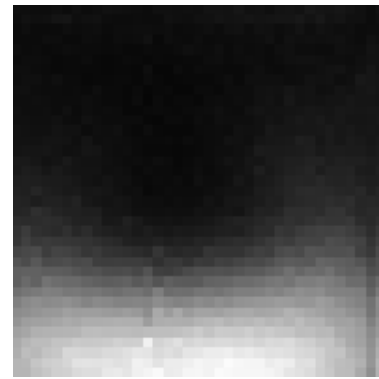


FIG. 5.38: Carte du taux de présence local obtenue par la sonde optique avec un déflecteur et un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$

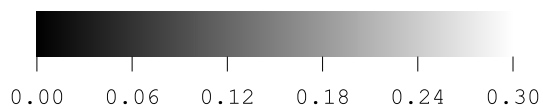
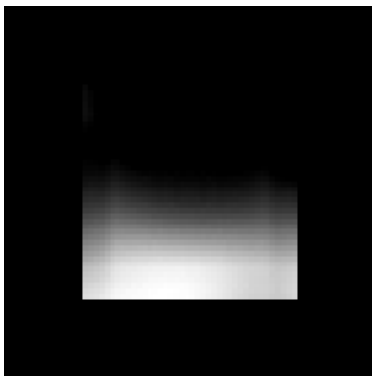


FIG. 5.39: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un déflecteur, un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

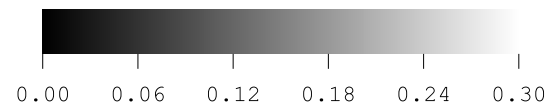
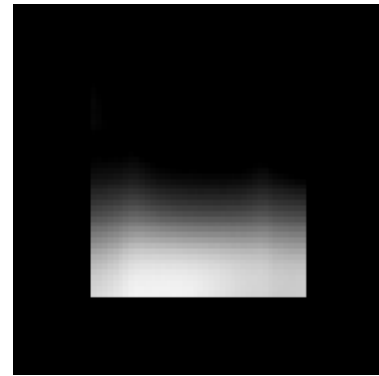


FIG. 5.40: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un déflecteur, un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70/2 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

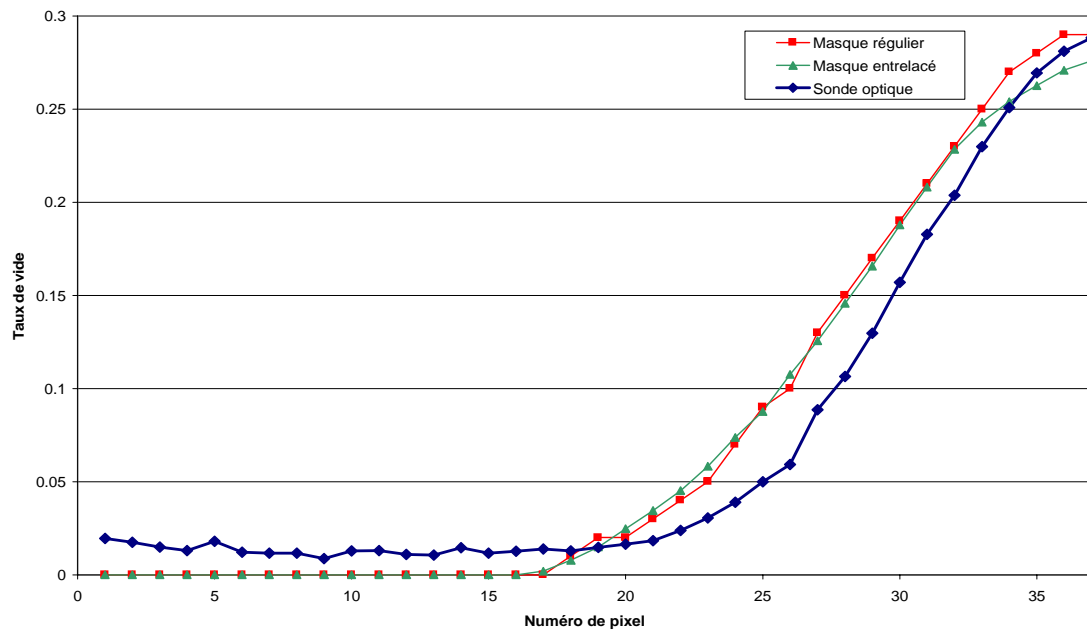


FIG. 5.41: Profils des cartes de taux de présence local avec un déflecteur et un débit d'air de $12,9 \text{ Nl.min}^{-1}$

L'écart maximal absolu est de l'ordre de grandeur de l'incertitude. Nous avons **accord** entre les deux mesures.

5.6 Mesures d'écoulements autour de faisceaux de tubes

Dans cette section, nous réaliserons des mesures d'écoulements autour de faisceaux de tubes. ces faisceaux seront insérés dans la section d'essais Eucalyptus.

La tension du tube à rayons X est de 40 kV, son intensité de 5 mA. les mesures avec 70 projections et 109 rotations sont reconstruites sur des images de 70 pixels de côté.

Les cartes de taux de présence local seront générées de la même façon que précédemment. Pour ce faire, il faut une mesure à vide, une sans débit d'air et une en écoulement.

Aucune mesure par sonde optique ne sera mise en œuvre. Le balayage d'un sous-canal par une telle sonde est difficile.

5.6.1 Faisceaux de tubes carrés

Nous insérons dans la section d'essais un faisceau de 9 tubes carrés en Plexiglas (schéma 5.42 et photographie 5.43).

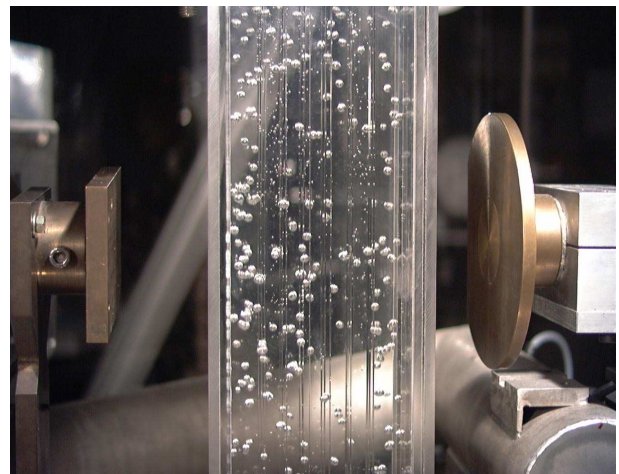
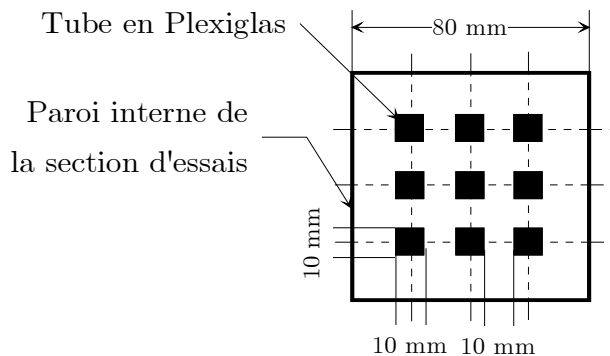


FIG. 5.42: Schéma du faisceau de tubes carrés

FIG. 5.43: Photographie de l'ensemble section d'essais et faisceau de tubes carrés

Nous reconstruisons la mesure à vide par l'algorithme CGLS régularisé (figure 5.44). Le paramètre de régularisation est de 5,05.

Un seuil à mi-amplitude donne le masque de la figure 5.45.

Nous reconstruisons les mesures de la section pleine d'eau et celles en écoulement. Le paramètre de régularisation est de 50,5. A partir de ces images, nous calculons de la même manière que précédemment, les cartes de taux de présence local (figures 5.46 et 5.47).

Nous retrouvons la géométrie du faisceau de tubes. Mais les cartes présentent un pic de taux de présence local dans leur partie basse. Ce pic n'est pas présent sur les images en atténuation de la section vide et pleine d'eau. Il ne semble pas être physique. Le système d'injection d'air n'a pas été changé et précédemment, la carte de taux de présence local obtenue avec la sonde

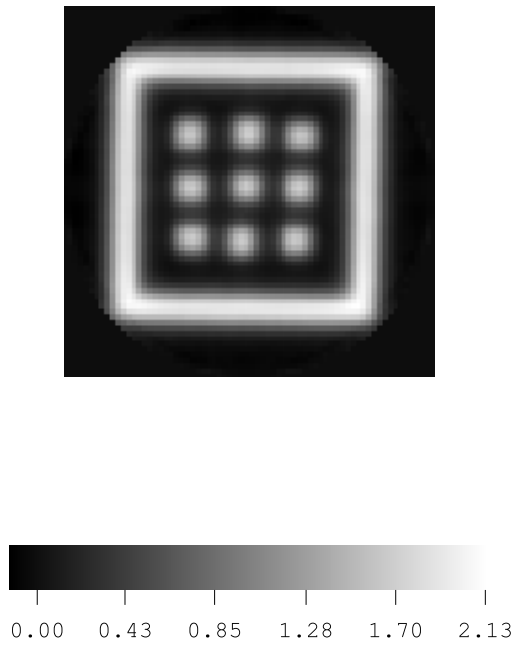


FIG. 5.44: Mesure de la section d'essais vide reconstruite par l'algorithme CGLS régularisé avec 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

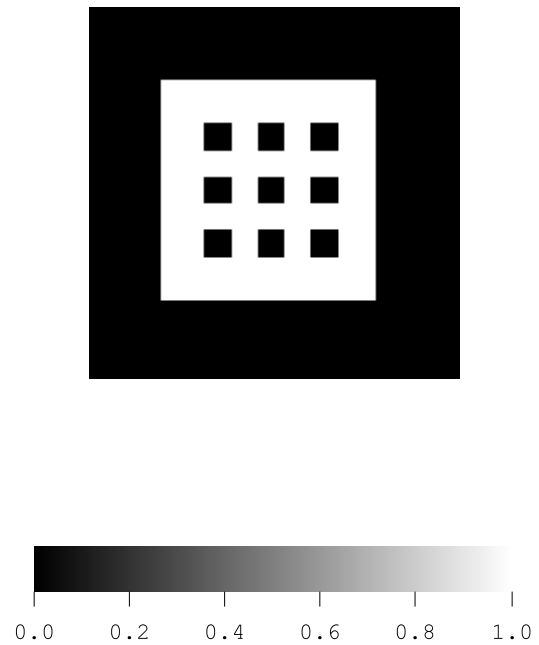


FIG. 5.45: Masque de l'ensemble section d'essais et faisceau de tubes carrés

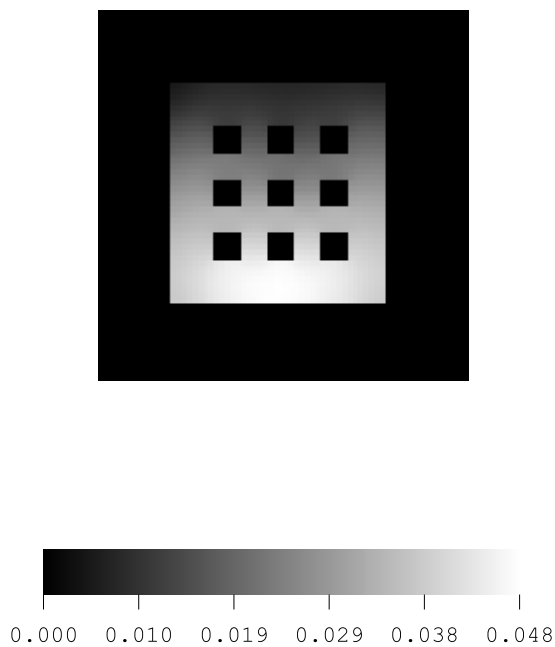


FIG. 5.46: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un faisceau de tubes carrés, un débit d'air de $4,4 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

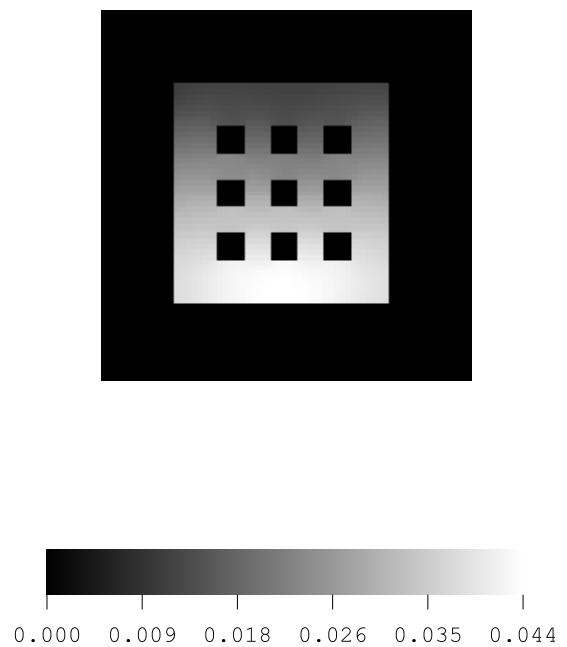


FIG. 5.47: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un faisceau de tubes carrés, un débit d'air de $4,4 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, $70/2$ translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

optique était uniforme (figure 5.21). Cet effet peut provenir d'une mauvaise estimation de l'atténuation des parois et des tubes en Plexiglas (dérive des photomultiplicateurs).

5.6.2 Faisceaux de tubes cylindriques

Nous insérons dans la section d'essais un faisceau de 9 tubes cylindriques en Plexiglas (schéma 5.48 et photographie 5.49).

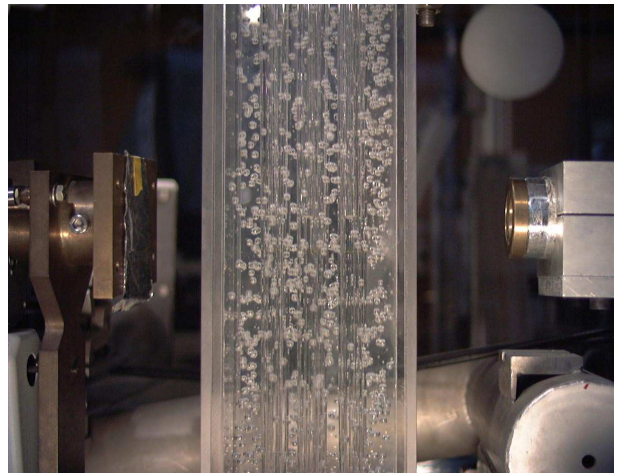
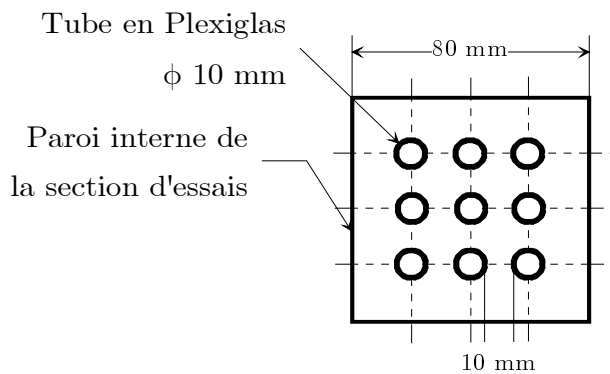


FIG. 5.48: Schéma du faisceau de tubes cylindriques

FIG. 5.49: Photographie de l'ensemble section d'essais et faisceau de tubes cylindriques

Nous reconstruisons la mesure à vide par l'algorithme CGLS régularisé (figure 5.50). Le paramètre de régularisation est de $5,05 \cdot 10^{-2}$.

Un seuil à mi-amplitude des valeurs des pixels correspondant aux tubes donne le masque de la figure 5.51.

Nous remarquons sur ces deux figures que les tubes ne sont pas alignés. L'ensemble des tubes est maintenu par des structures à leurs deux extrémités qui sont distantes de 860 mm. La souplesse des tubes en Plexiglas permet d'expliquer ce défaut d'alignement.

Sur le masque, les tubes sont mal modélisés. En effet, comme nous l'avons démontré dans la section 3.5.4, il est difficile de reconstruire des objets circulaires avec des pixels carrés.

Nous reconstruisons les mesures de la section pleine d'eau et celles en écoulement. Le paramètre de régularisation est de 5,05. A partir de ces images, nous calculons de la même manière que précédemment, les cartes de taux de présence local (figures 5.52 et 5.53).

Ces images montrent un écoulement en deux zones :

- une couronne entre les tubes et la paroi de la section d'essais où le taux de présence local est compris entre 12 et 15 % ;
- la zone entre tubes où le taux de présence local est voisin de 8 %.

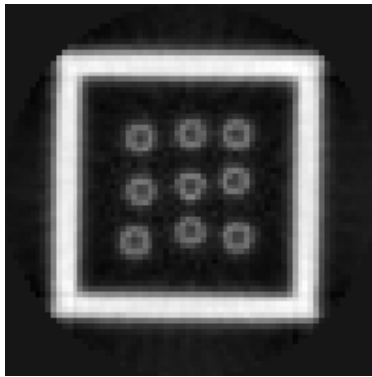


FIG. 5.50: Mesure de la section d'essais vide reconstruite par l'algorithme CGLS régularisé avec 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

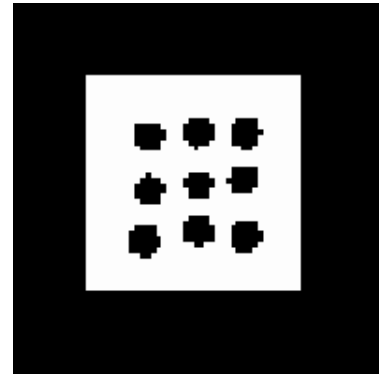


FIG. 5.51: Masque de l'ensemble section d'essais et faisceau de tubes cylindriques

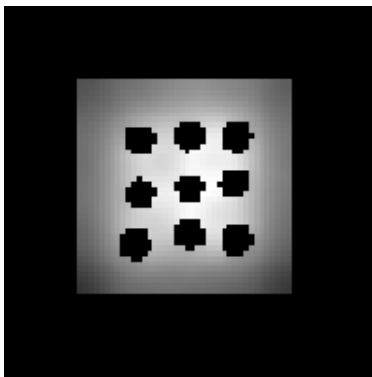


FIG. 5.52: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un faisceau de tubes cylindriques, un débit d'air de $3,9 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

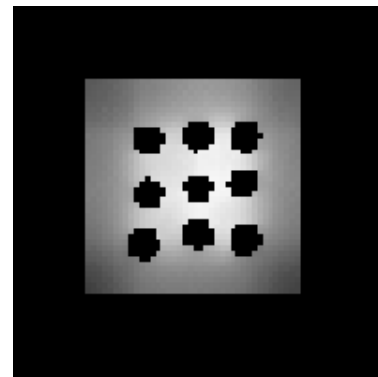


FIG. 5.53: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un faisceau de tubes cylindriques, un débit d'air de $3,9 \text{ Nl.min}^{-1}$, 109 rotations, 70/2 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

5.6.3 Faisceaux de tubes cylindriques avec arrivée d'air par les tubes

L'air n'est plus injecté dans la base de la section d'essais, mais à l'intérieur des tubes cylindriques. L'air s'échappe par huit trous de 0,5 mm de diamètre à la base de chaque tube (schéma 5.54 et photographie 5.55). Cette configuration permet de simuler l'ébullition en paroi.

Nous reconstruisons les mesures de la section pleine d'eau et celles en écoulement. Le paramètre de régularisation est de 5,05. Nous utilisons le même masque que précédemment (figure 5.51). A partir de ces images, nous calculons de la même manière que précédemment, les cartes de taux de présence local (figures 5.56 et 5.57).

Nous remarquons de nouveau une répartition du taux de présence local en deux zones :

- la zone entre les tubes avec un taux de présence local entre 14 et 19 % ;
- la zone externe aux tubes avec un taux de présence local à 8 % proche des tubes et qui décroît très rapidement quand nous nous en éloignons.

En effet, les bulles sont créées au niveau de la paroi des tubes, et entre ces tubes, les panaches de bulles générées se rejoignent.

Nous retrouvons dans les mesures le comportement de l'écoulement que nous avons observé (photographie 5.55).

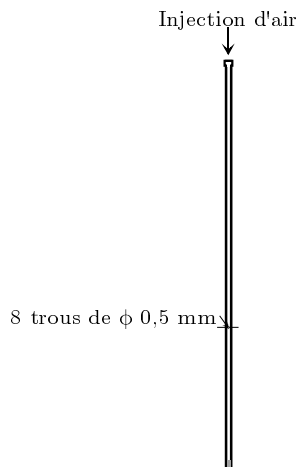


FIG. 5.54: Schéma du tube cylindrique avec arrivée d'air par le tube

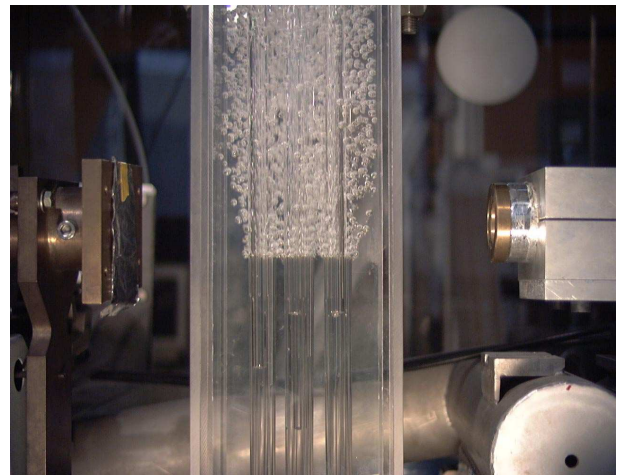


FIG. 5.55: Photographie de l'ensemble section d'essais et faisceau de tubes cylindriques avec arrivée d'air par les tubes

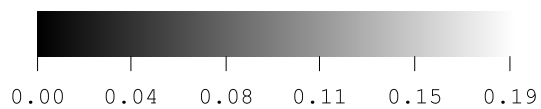
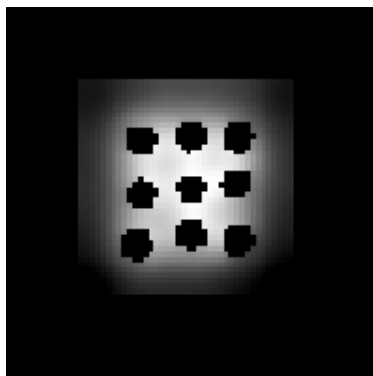


FIG. 5.56: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage régulier, un faisceau de tubes cylindriques avec arrivée d'air par les tubes, un débit d'air de $4,7 \text{ Nl}\cdot\text{min}^{-1}$, 109 rotations, 70 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

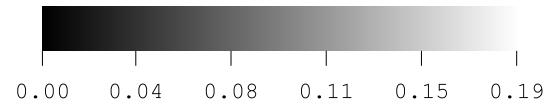
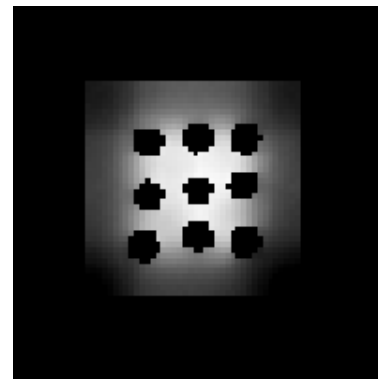


FIG. 5.57: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un échantillonnage entrelacé, un faisceau de tubes cylindriques avec arrivée d'air par les tubes, un débit d'air de $4,7 \text{ Nl}\cdot\text{min}^{-1}$, 109 rotations, 70/2 translations et une reconstruction de 70 pixels de côté

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre le dispositif expérimental Mini-TOMIX et l'algorithme de reconstruction choisi.

Dans un premier temps, nous avons simulé et mesuré des fantômes de Plexiglas en échantillonnages régulier et entrelacé. Cela a permis de mettre en évidence que ce dispositif **permet d'obtenir la résolution de 1 mm²**, ce qui était l'un de nos objectifs.

Dans un deuxième temps, nous avons mesuré des écoulements dans la section d'essais Eucalyptus avec différents débits d'air et deux configurations, sans et avec déflecteur. Nous avons mis en évidence la nécessité de corriger les mesures. Nous avons comparé les cartes de taux de présence local reconstruites avec les mesures dans les mêmes conditions de la sonde optique.

Une **bonne concordance entre les cartographies mesurées par les deux techniques** de mesure est observée. Nous avons démontré que les **écarts** relevés sont **de l'ordre de grandeur des incertitudes** de mesure. Ces écarts sont imputables au temps de réponse long des photomultiplicateurs. L'utilisation de détecteurs plus performants améliorera sans aucun doute la précision des mesures tomographiques.

De plus, nous avons remarqué que **la mesure tomographique permet de mesurer le taux de présence local dans des configurations où la sonde optique ne permet pas de faire ces mesures** (recirculations).

Bien que nécessitant deux fois moins de mesures, **l'échantillonnage entrelacé** permet également d'**atteindre la résolution millimétrique** et **donne les mêmes résultats** que l'échantillonnage normal. Il a de plus tendance à diminuer l'amplitude de certains artefacts dans l'image.

Enfin, nous avons démontré que cette méthode de mesure peut aussi être appliquée aux faisceaux de tubes.

Chapitre 6

Extension à l'échantillonnage en éventail (fan-beam)

6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étendre l'application de l'algorithme développé à des mesures réalisées en géométrie éventail. Pour ce faire, un nouveau dispositif expérimental, TOMIX, a été développé, hors du cadre de cette thèse. Après une description de ce dispositif, nous simulerons des mesures de fantômes et de section d'essais. Enfin, nous exploiterons des mesures réalisées par ce dispositif.

Dans ce chapitre, nous allons seulement illustrer l'utilisation des algorithmes développés avec des reconstructions en géométrie éventail dans le but de montrer qu'ils sont applicables dans cette géométrie.

6.2 Description du dispositif TOMIX

Ce dispositif permet de réaliser des mesures en géométrie éventail. Il se compose d'un tube à rayons X à anticathode de Tungstène et d'un détecteur linéaire de 1536 éléments, totalisant une longueur sensible de 690 mm (schéma 6.1 et photographie 6.2).

Le tube peut accepter une tension d'alimentation jusqu'à 160 kV et une intensité jusqu'à 60 mA. Sa puissance maximale admissible est de 3 kW. En sortie du tube, le faisceau a une ouverture de 40°. Il est collimaté par une fente de 2 mm d'épaisseur. Comme pour Mini-TOMIX, nous avons placé un écran de Plomb de 0,1 mm en sortie du collimateur.

Le détecteur linéaire est collimaté par une fente de 1 mm. Après avoir réalisé une procédure de calibrage, il fournit un profil d'intensité photonique. L'intensité reçue par chaque pixel est codée sur 12 bits.

Dans la configuration actuelle, le tube et le capteur sont fixés sur un bâti (schéma 6.1). Comme sur Mini-TOMIX, l'objet à cartographier (fantôme ou section d'essais Eucalyptus) sera placé sur une table rotative afin d'effectuer les mesures suivant différentes orientations.

Un PC contrôle les acquisitions du détecteur linéaire et la commande du moteur pas à pas de la table rotative.

L'utilisateur saisit les paramètres suivants :

- le nombre de rotations ;
- le nombre de profils de mesures pour chaque position ;
- un nom de fichier.

Le programme d'acquisition tomographique suit la procédure suivante :

1. Recherche de l'origine pour la rotation ;
2. Positionnement en rotation de la table ;
3. Lancement de l'acquisition du détecteur linéaire : plusieurs profils comportant les valeurs des 1536 éléments sont mesurés ;
4. Calcul de la moyenne de ces profils d'atténuation ;
5. Enregistrement de la position angulaire et du profil moyen dans le fichier de mesure ;
6. Jusqu'à la fin des mesures, retour à l'étape 2 ;
7. Recherche d'origine pour la rotation.

Ce programme a été réalisé sous Labview.

Si une erreur est détectée, l'acquisition est arrêtée.

A la fin de l'acquisition, le programme génère un fichier comportant pour chaque position angulaire les valeurs moyennes des atténuations des 1536 éléments.

Un programme Labview permet de relire ce fichier, d'en extraire la portion des profils correspondant à l'objet mesuré, de sélectionner dans ces profils que certains éléments, de calculer l'atténuation et de construire un fichier compatible avec l'algorithme de reconstruction.

Ce programme calcule l'atténuation de la façon suivante :

$$A = \ln \frac{I_{\text{référence}}}{I_{\text{mesure}}} \quad (6.1)$$

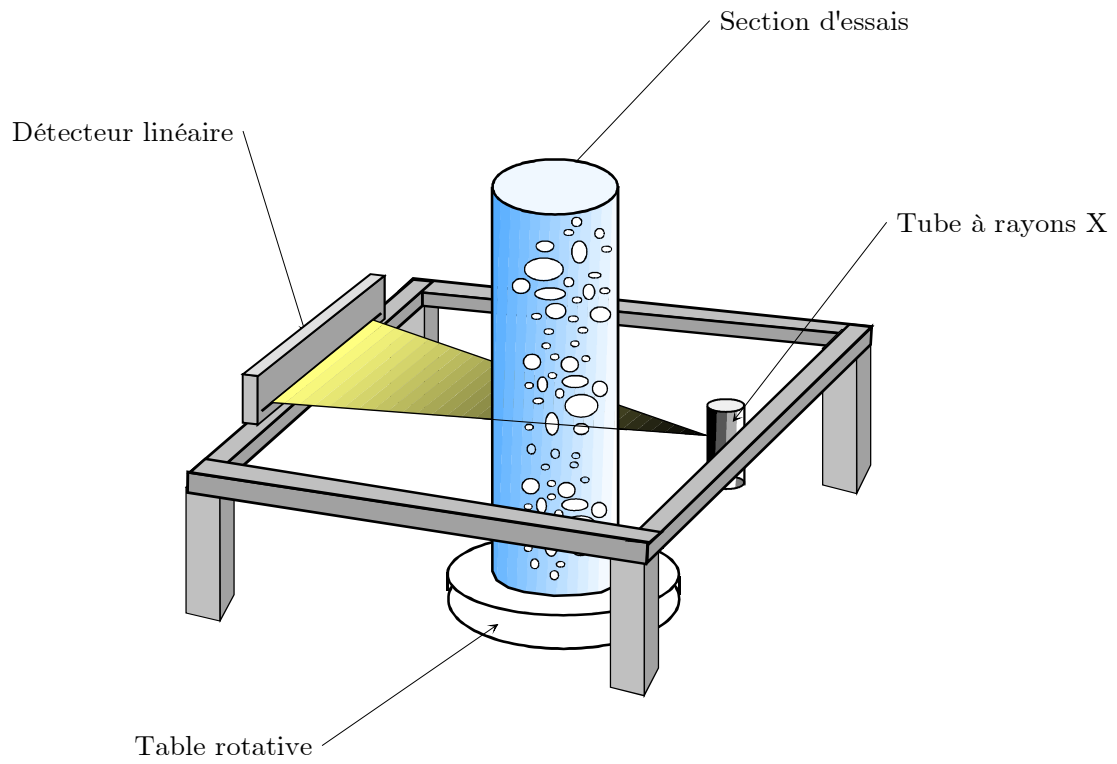


FIG. 6.1: Schéma de TOMIX

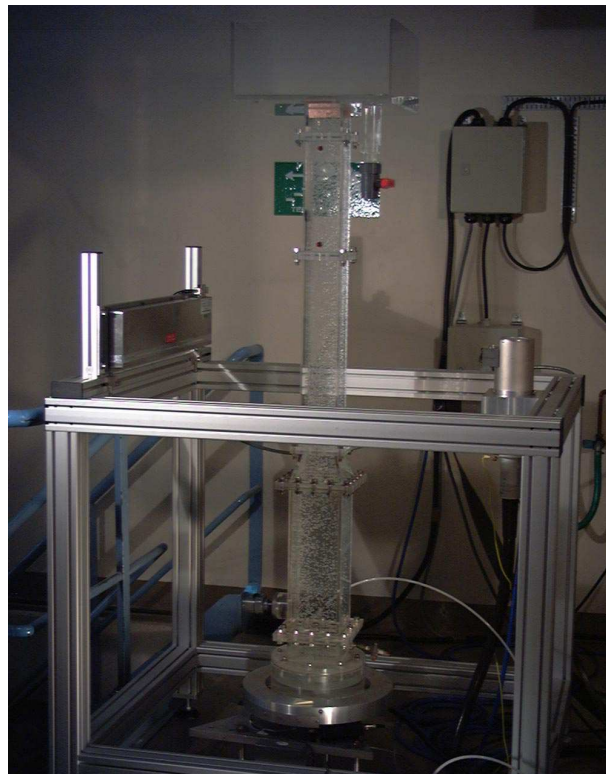


FIG. 6.2: Photographie de TOMIX

I_{mesure} est donné par les profils mesurés sur le détecteur linéaire.

Nous prenons :

$$I_{\text{référence}} = 4096 \tag{6.2}$$

Cela correspond à la valeur envoyée par le détecteur pour un faisceau non atténué après calibrage.

6.3 Simulations de mesures en éventail

Avant d'utiliser le dispositif TOMIX, nous allons simuler des mesures en éventail du fantôme 1 et de section d'essais. Ces simulations sont réalisées grâce à l'algorithme basé sur le calcul matriciel (section 3.2.4).

6.3.1 Simulations des mesures du fantôme 1

La géométrie utilisée est celle du dispositif TOMIX. Nous avons placé le fantôme 1 à 416 mm de la source (schéma 6.3).

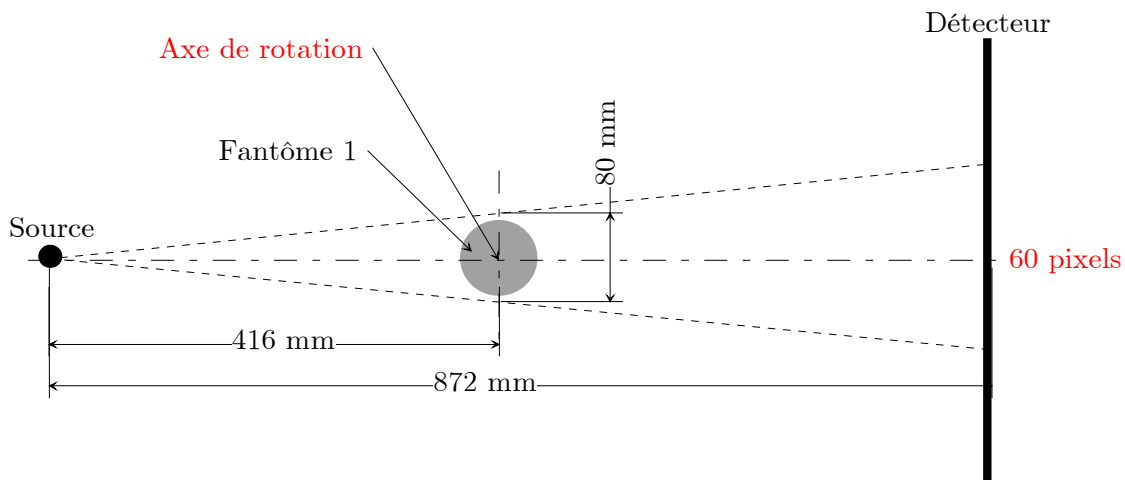


FIG. 6.3: Schéma de la simulation des mesures du fantôme 1 sur TOMIX

Nous ne prenons en compte que 60 pixels du détecteur, espacés de 2,8 mm. Le nombre de rotations optimal est donné par :

$$N \approx \pi M \quad (6.3)$$

Donc nous prenons 189 rotations sur $[0; 2\pi[$. Les mesures sont reconstruites sur des images de 80 pixels de côté.

Reconstruction avec l'algorithme CGLS régularisé

Nous reconstruisons d'abord les mesures simulées du fantôme 1 (section 3.3.1) par l'algorithme CGLS régularisé (figure 6.4). Le paramètre de régularisation est de 0,505.

L'image obtenue est semblable à celle obtenue avec la simulation des mesures du fantôme 1 en géométrie parallèle.

Reconstruction avec la méthode du masque

Nous reconstruisons les mesures simulées du fantôme 1 (section 3.3.1) par l'algorithme du masque en utilisant comme masque le fichier qui a servi pour simuler ces mesures (figure 6.5).

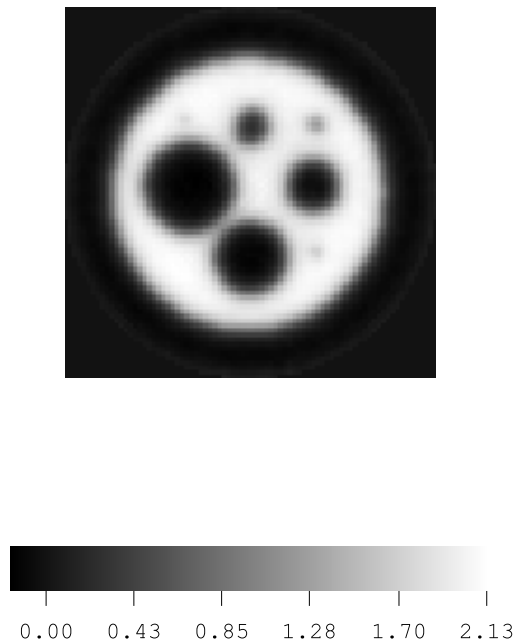


FIG. 6.4: Image obtenue pour une simulation des mesures en éventail du fantôme 1 avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 80 pixels de côté en utilisant CGLS régularisé

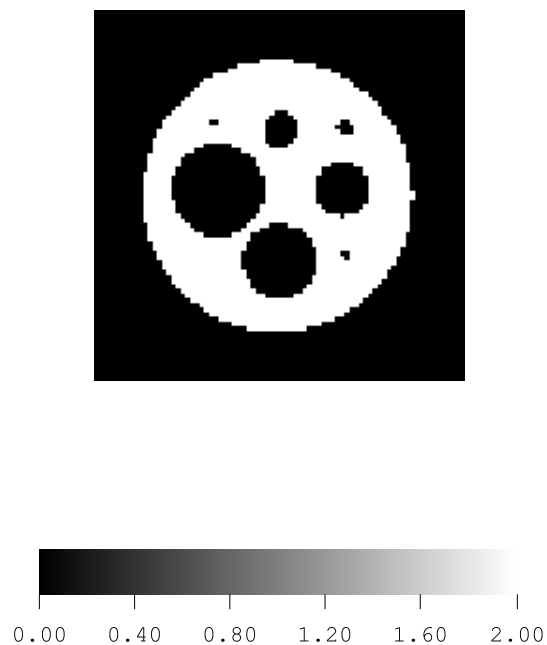


FIG. 6.5: Image obtenue pour une simulation des mesures en éventail du fantôme 1 avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 80 pixels de côté en utilisant la méthode du masque

L'image obtenue est uniforme à la valeur théorique arbitraire, 2. En effet, le paramètre de régularisation est de $5,05 \cdot 10^9$. Les mesures sont le résultat exact du système linéaire. La Validation Croisée Généralisée détermine donc un paramètre de régularisation très grand et autorise un lissage très important.

6.3.2 Simulations de mesures de la section d'essais Eucalyptus

Nous simulons de la même manière les mesures en éventail de la section d'essais. Nous conservons la même géométrie (schéma 6.6). Nous prenons 60 pixels du détecteur espacés de 5,3 mm et 189 rotations sur $[0; 2\pi[$. L'image reconstruite a 70 pixels de côté.

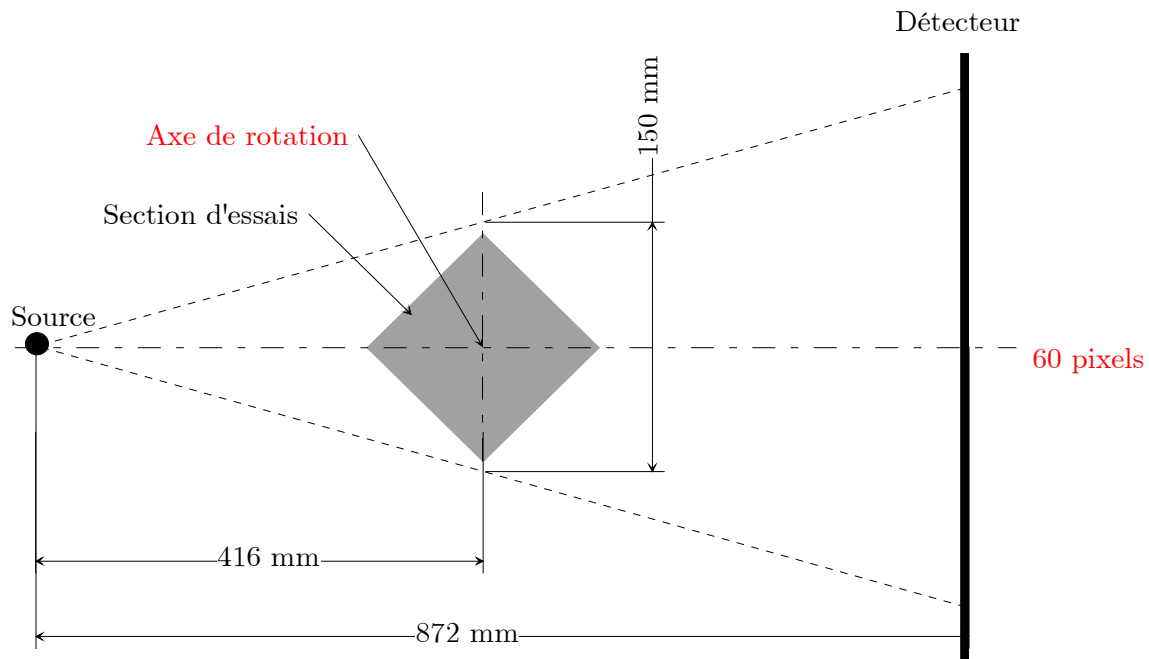


FIG. 6.6: Schéma de la simulation des mesures du fantôme 1 sur TOMIX

Profil uniforme

Nous simulons dans un premier temps un profil uniforme d'atténuation. Avec la méthode du masque, nous obtenons l'image 6.7.

Pour la même raison que précédemment, le paramètre de régularisation déterminé par la Validation Croisée Généralisée est de $5,05 \cdot 10^9$. C'est pourquoi l'image est uniforme à 1,73, la valeur théorique d'atténuation.

Profil gaussien

Nous simulons un profil gaussien d'atténuation que nous reconstruisons par la méthode du masque (figures 6.8 et 6.9). Le paramètre de régularisation est de 5,05.

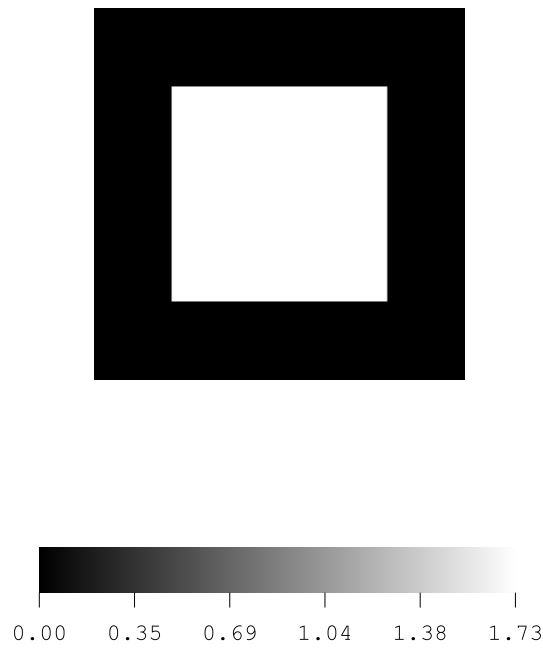


FIG. 6.7: Image obtenue pour une simulation des mesures en éventail d'un profil uniforme avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté en utilisant la méthode du masque

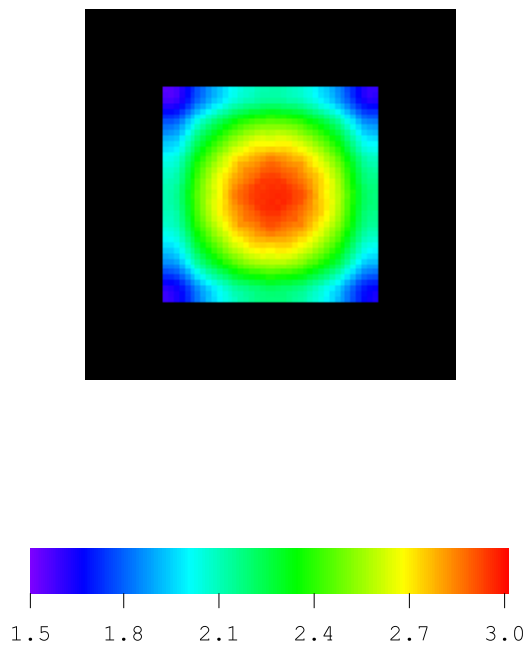


FIG. 6.8: Image obtenue pour une simulation des mesures en éventail d'un profil gaussien avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté en utilisant la méthode du masque

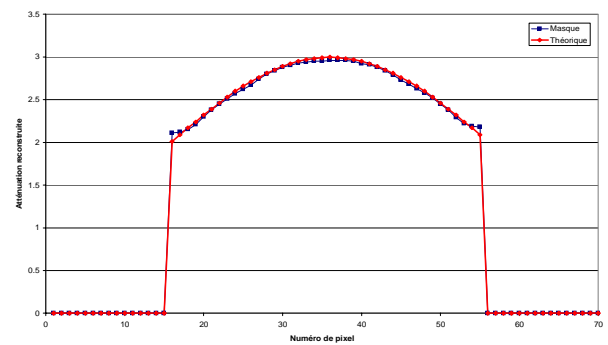


FIG. 6.9: Profil obtenu pour une simulation des mesures en éventail d'un profil gaussien avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté en utilisant la méthode du masque

Nous retrouvons la gaussienne sur l'image reconstruite. Sur la figure 6.9, le profil est bien reconstruit et est fidèle au profil théorique.

Un écart inférieur à 5 % est présent sur les 4 derniers pixels proches des limites du masque. Il provient de la régularisation qui cherche à conserver la pente entre ensembles successifs de deux pixels voisins. Le pixel à la limite du masque n'a pas de voisin d'un côté, donc l'image tend vers un gradient nul dans cette zone.

6.4 Mesures sur TOMIX

6.4.1 Mesures de fantômes axisymétriques

Dans un premier temps, nous mesurons des fantômes en Plexiglas axisymétriques sans les faire tourner. Le profil mesuré à 0° est dupliqué afin d'obtenir le jeu de profils pour toutes les positions angulaires. Ces fantômes sont placés sur l'axe tube - détecteur, à 420 mm du détecteur. Nous prenons en compte 60 pixels du détecteur linéaire. Le nombre de rotations est optimal : nous prenons 189 rotations sur $[0; 2\pi[$. Les images reconstruites ont 70 pixels de côté.

Mesures d'un cylindre de Plexiglas

Nous mesurons un cylindre en Plexiglas (photographie 6.10). La tension du tube est de 121 kV, l'intensité de 5 mA. Nous reconstruisons les mesures avec l'algorithme CGLS régularisé (figure 6.11).



FIG. 6.10: Photographie du cylindre de Plexiglas

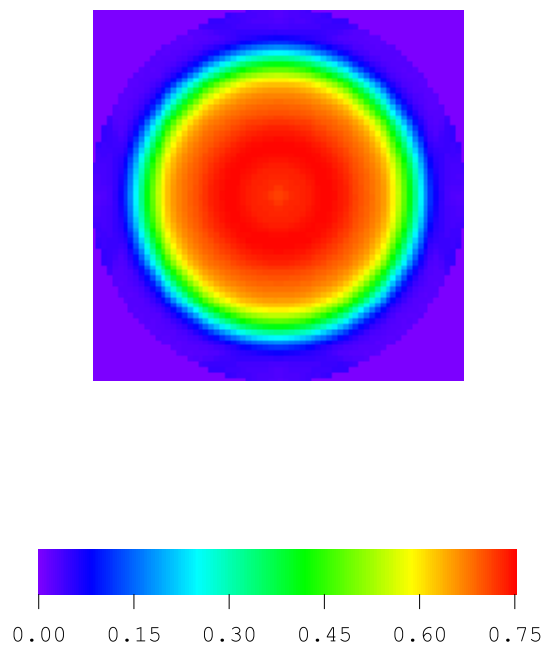


FIG. 6.11: Image obtenue par l'algorithme CGLS régularisé avec les mesures du cylindre de Plexiglas, 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

La géométrie du cylindre est bien reconstruite. La figure 6.12 montre un profil de l'image 6.11.

Ce profil n'est pas plat, mais présente une allure concave avec une amplitude relative de 7,5 %. Ce phénomène était présent dans une simulation que nous avons réalisée du durcissement du faisceau sur un cylindre uniforme. Donc l'écran utilisé ne durcit pas suffisamment le faisceau et le durcissement n'est plus négligeable pendant la mesure.

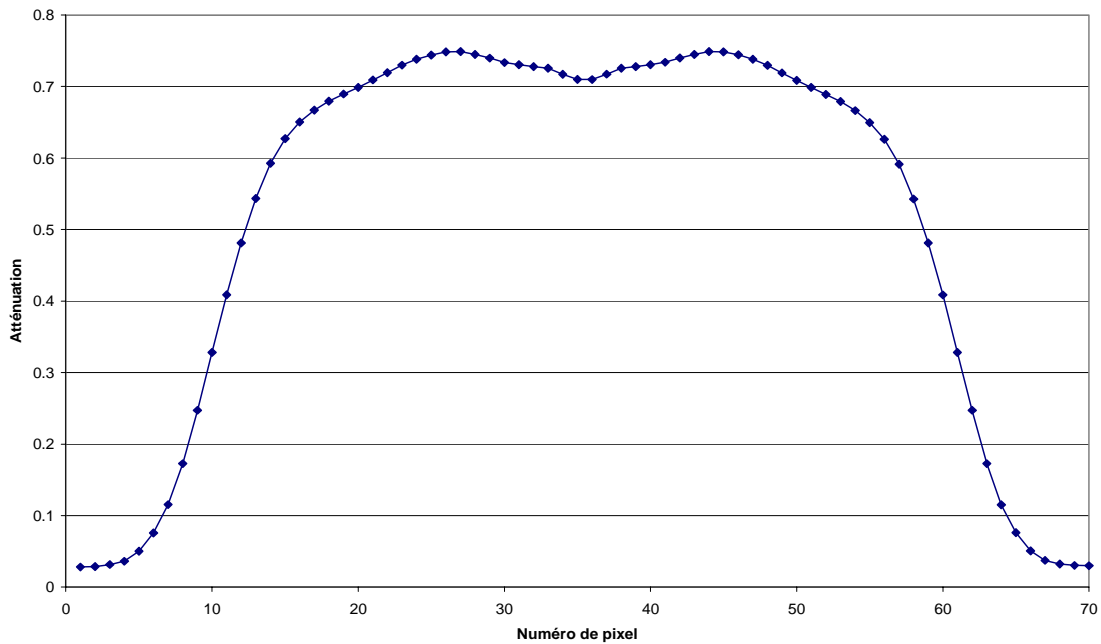


FIG. 6.12: Profil obtenu par l'algorithme CGLS régularisé avec les mesures du cylindre de Plexiglas, 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

Mesures d'un tube en Plexiglas

Nous reconstruisons les mesures d'un tube en Plexiglas par CGLS régularisé (figure 6.13). La tension du tube à rayons X est de 40 kV, l'intensité de 5 mA.

Nous retrouvons bien la géométrie du tube, y compris la proportion épaisseur des parois - diamètre.

Nous avons aussi réalisé des mesures de ce tube à 100 mm et 650 mm du détecteur. Les images obtenues sont semblables à la figure 6.13.

6.4.2 Mesures du fantôme 1

Nous mesurons le fantôme 1 (section 3.3.1). La tension du tube est de 60 kV, l'intensité de 10 mA. Nous reconstruisons les mesures avec l'algorithme CGLS régularisé sur une image de 80 pixels de côté (figure 6.14). Le paramètre de régularisation est de 0,505.

Nous retrouvons la géométrie du fantôme 1. Compte-tenu des mesures réalisées, les trous de 1, 2 et 3 mm ne sont pas visibles.

6.4.3 Mesures sur la section d'essais Eucalyptus

La section d'essais Eucalyptus est placée sur la table rotative, positionnée sur l'axe tube - détecteur linéaire de TOMIX à 416 mm de la source. Pour obtenir la carte de taux de présence

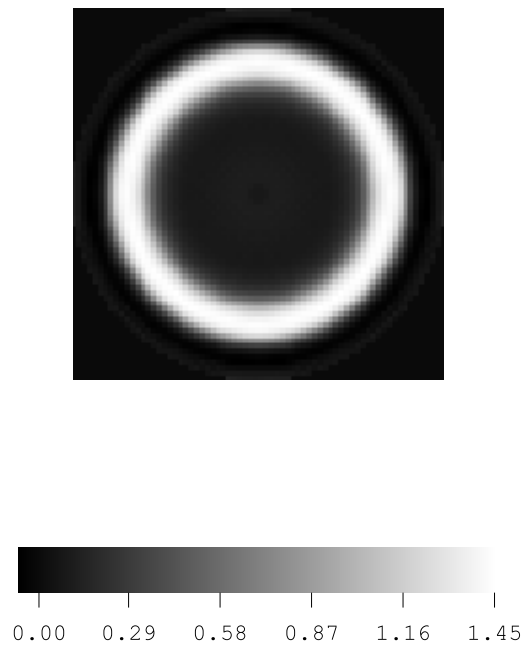


FIG. 6.13: Image obtenue par l'algorithme CGLS régularisé avec les mesures du tube en Plexiglas, 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

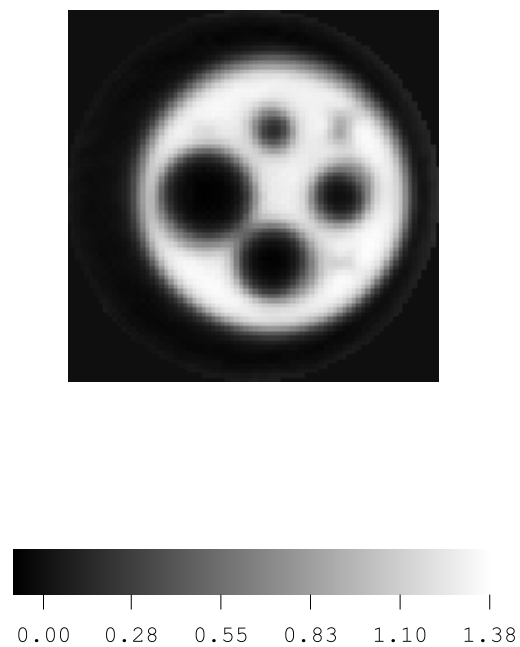


FIG. 6.14: Image obtenue par l'algorithme CGLS régularisé avec les mesures du fantôme 1, 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 80 pixels de côté

local, nous utilisons la même procédure que pour Mini-TOMIX (section 5.3.1). Nous avons donc besoin d'effectuer une mesure à vide, un pleine d'eau sans débit d'air et une en écoulement.

La haute-tension du tube est de 60 kV, l'intensité de 10 mA. Nous ne considérons que 60 pixels sur le détecteur linéaire. Le nombre de rotations est optimal à 189 sur $[0; 2\pi[$. Les mesures sont reconstruites sur des images de 70 pixels de côté.

Mesure de la section d'essais vide

Nous mesurons d'abord la section d'essais vide. Nous reconstruisons les mesures avec l'algorithme CGLS régularisé (figure 6.15). Le paramètre de régularisation λ est de 5,05.

Comme précédemment, nous en déduisons par un seuil à mi-amplitude le masque qui sera utilisé par la suite (figure 6.16).

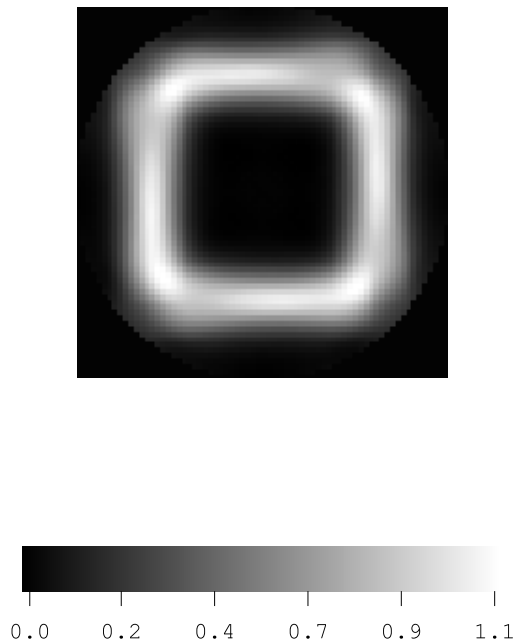


FIG. 6.15: Reconstruction de la section d'essais vide obtenue par l'algorithme CGLS régularisé avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

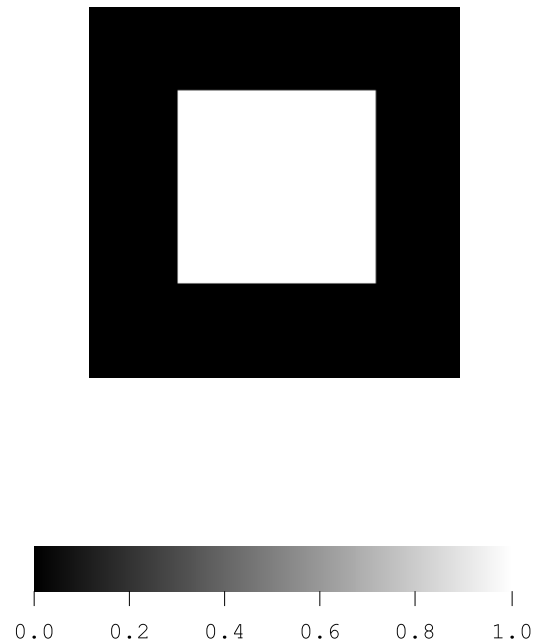


FIG. 6.16: Masque de la section d'essais

Mesure de la section d'essais sans débit d'air

Nous mesurons la section d'essais pleine d'eau sans débit d'air (figures 6.17 et 6.18). Le paramètre de régularisation λ est de 5,05 pour CGLS régularisé et de 5,05 pour la méthode du masque.

Sur la figure 6.17, nous retrouvons la section carrée d'Eucalyptus. La courbe d'atténuation de la figure 6.18 est concave avec une amplitude relative de 19,5 %. Ce phénomène peut venir de deux effets : un masque trop étroit ou un phénomène de durcissement du faisceau. Or les limites du masque sont en accord avec la figure 6.17 obtenue avec CGLS régularisé. Cette allure est

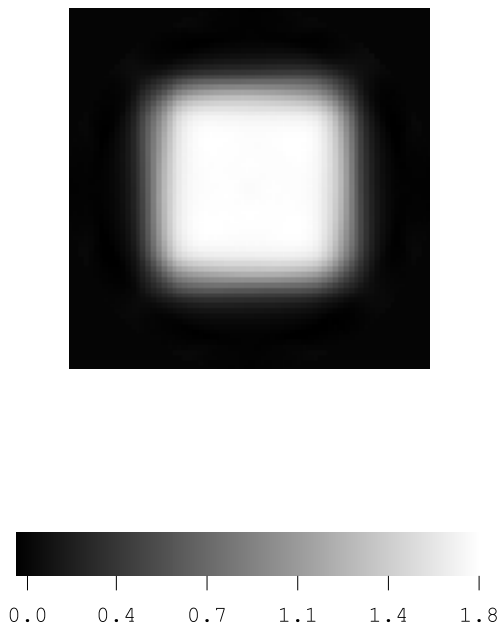


FIG. 6.17: Reconstruction de la section d'essais pleine d'eau sans débit d'air obtenue par CGLS régularisé avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

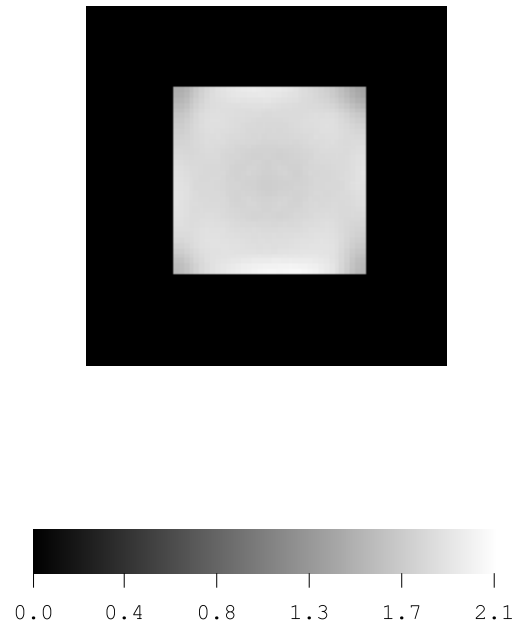


FIG. 6.18: Reconstruction de la section d'essais pleine d'eau sans débit d'air obtenue par la méthode du masque avec 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

en accord avec des simulations de durcissement du faisceau que nous avons réalisé. L'écran de Plomb utilisé n'est donc pas suffisant et le phénomène de durcissement du faisceau est présent pendant les mesures.

Mesure de la section d'essais avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$

Nous réglons le débit d'air à $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$ et mesurons l'écoulement obtenu. L'image est reconstruite en utilisant la méthode du masque (figure 6.19). Le taux de vide est déterminé en utilisant la carte d'atténuation ci-dessus (figure 6.20). Le paramètre de régularisation λ est de 5,05. Compte-tenu du débit d'air, nous pouvons de nouveau comparer cette carte avec la carte de taux de présence local obtenue par la sonde optique dans la partie 5.4.3 (figure 6.21).

Nous remarquons de nouveau sur la figure 6.19 la forme concave de la courbe. Pour la carte du taux de présence local, cette concavité est adoucie par le calcul du taux de présence local fait pixel par pixel (équation (5.1)).

L'estimation du taux de présence varie entre 3,5 et 5,9 % avec une moyenne à 4,6 %. La moyenne de la carte de taux de présence mesuré par la sonde optique est de 4,2 %. Dans ce cas, les valeurs sont comprises entre 3,3 et 6 %. L'écart moyen entre les deux cartes est de 0,02% de taux de présence local et l'écart maximal de 1,88 % de taux de présence local.

L'incertitude sur le taux de présence local déterminé par la sonde optique est de $\pm 1\%$ absolu, mais nous ne connaissons pas l'incertitude sur la mesures tomographique. C'est pourquoi il n'est pas possible de valider la méthode dans ce cas, mais **les deux mesures donnent des taux de présence locaux avec le même ordre de grandeur.**

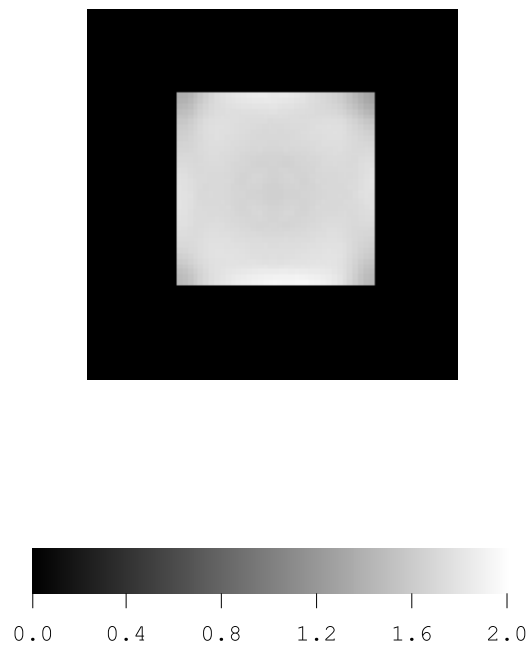


FIG. 6.19: Reconstruction de la section d'essais obtenue par la méthode du masque avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$, 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

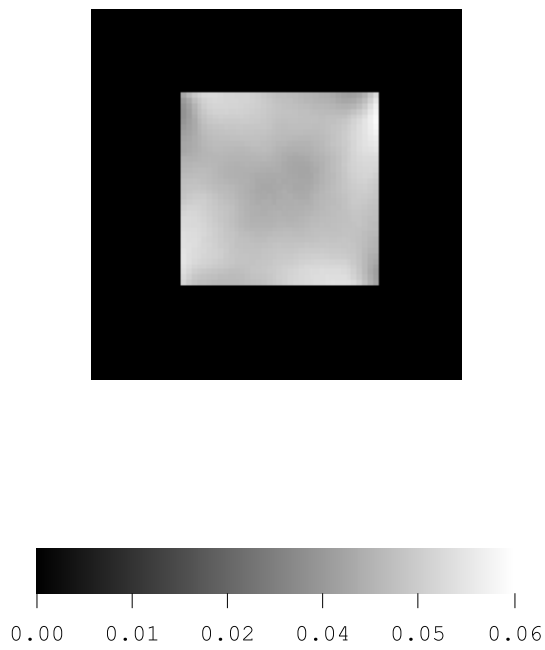


FIG. 6.20: Carte du taux de présence local obtenue par la méthode du masque avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$, 60 pixels de détection, 189 rotations et une image de 70 pixels de côté

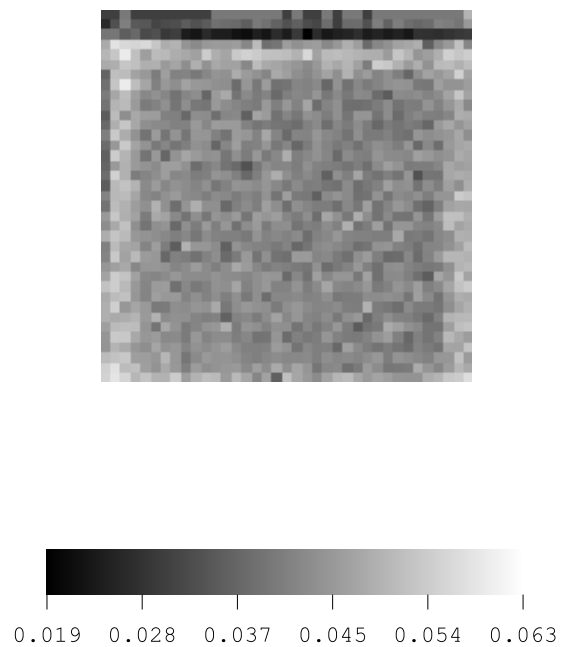


FIG. 6.21: Carte du taux de présence local obtenue par la sonde optique avec un débit d'air de $4,2 \text{ Nl.min}^{-1}$

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé l'algorithme que nous avons développé dans le cadre de la géométrie en éventail. Avec des simulations, nous avons vérifié que cet algorithme donne les mêmes résultats qu'en géométrie parallèle.

Nous avons reconstruit des mesures réalisées en éventail sur le dispositif TOMIX et calculé une carte de taux de présence local.

Les images obtenues sont fidèles à la géométrie des fantômes et de la section d'essais.

Mais la reconstruction donne une atténuation différente de celle attendue. Nous avons de nouveau mis en évidence le phénomène de durcissement du faisceau. Comme pour le dispositif Mini-TOMIX, l'optimisation des paramètres d'acquisition du dispositif TOMIX doit être réalisée. Ce travail ne rentre pas dans le cadre de cette thèse.

Nous avons par contre démontré que **l'algorithme du masque est applicable pour des mesures en géométrie éventail**, ce qui était l'objectif de ce chapitre.

De plus, la **carte de taux de présence local reconstruite** est **du même ordre de grandeur que la mesure réalisée par la sonde optique**.

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail était de mettre au point et de qualifier une technique de mesure du taux de présence local d'un écoulement eau-air permanent par tomographie à rayon X. Compte-tenu des phénomènes que nous souhaitions observer, nous désirions atteindre une résolution de 1 mm^2 .

Une analyse bibliographique a permis de sélectionner a priori les algorithmes de reconstruction les plus pertinents. Nous avons choisi des algorithmes algébriques pour leur facilité d'utilisation et la possibilité de leur ajouter des améliorations. Ces algorithmes modélisent les mesures sur la forme d'un système linéaire $RF = P$, où P contient les mesures, F les pixels de l'image et R l'échantillonnage réalisé.

La comparaison des algorithmes sélectionnés sur des simulations de fantômes nous a permis de choisir l'algorithme le plus performant, CGLS régularisé. Par des simulations de profils de taux de présence local, nous avons remarqué que la régularisation lisse l'image au niveau de la transition entre paroi et écoulement, ce qui entraîne un écart important sur le taux de présence reconstruit. L'algorithme CGLS régularisé a été optimisé afin de prendre en compte ce problème. Une étude comparative a conduit à sélectionner l'**algorithme du masque**. Ce dernier nécessite d'effectuer des mesures à vide et des mesures en écoulement. Cet algorithme reconstruit la différence de ces mesures en ne régularisant que sur la portion intéressante de l'écoulement.

En complément de ce travail numérique, un dispositif expérimental a été mis au point et exploité. Le banc Mini-TOMIX permet de réaliser des mesures d'atténuation de rayons X en échantillonnage parallèle régulier ou entrelacé. Après avoir optimisé ses paramètres d'acquisition, des mesures ont été réalisées sur des fantômes et des écoulements eau-air. Pour ces derniers, une chaîne de mesure par sonde optique a également été utilisée, fournissant des cartographies de référence de taux de présence local.

Nous avons mis en évidence que la chaîne de mesure tomographique permet d'**obtenir la résolution millimétrique** souhaitée et qu'elle fournit **une carte du taux de présence local** dont l'**écart** avec les mesures par sonde optique est **de l'ordre des incertitudes de mesures**. De plus, elle permet de réaliser des mesures de taux de présence local dans certaines configurations où la sonde optique est mise en défaut (recirculations avec des écoulements de bulles à contre-courant). Cette **conclusion reste valable en échantillonnage entrelacé** où seulement une mesure sur deux est réalisée.

Des écoulements autour de faisceaux de tubes ont aussi été cartographiés par cette chaîne de mesure tomographique.

L'incertitude de la chaîne de mesure tomographique est actuellement importante. Elle provient de deux origines :

- le faible rapport signal sur bruit constaté sur les mesures ;
- l'important temps de réponse des photomultiplicateurs lorsqu'ils sont soumis à une variation brutale d'intensité photonique.

Le remplacement des photomultiplicateurs actuels supprimerait ces deux effets et améliorerait la précision de la mesure de taux de présence local.

Nous avons remarqué que le choix du masque était très important. Celui-ci doit être en accord parfait avec la géométrie mesurée. Dans sa configuration actuelle, l'algorithme du masque ne peut prendre en compte que des géométries descriptibles avec des pixels carrés, décrivant imparfaitement une géométrie circulaire. Une simulation de reconstruction d'un cylindre a mis en évidence ce problème. Un maillage à éléments triangulaires ou quelconques permettrait de généraliser facilement cet algorithme à tous types de géométries (conduites cylindriques, objets triangulaires, ...). Les descriptions du lien mesures - images (la matrice R) et de l'image F changeraient, mais pas la routine de résolution du système linéaire obtenu.

Cette méthode est très sensible à la modélisation des mesures. En effet, dans la construction de la matrice R , l'algorithme considère que les faisceaux de rayons X sont d'épaisseur nulle. Or sur le dispositif Mini-TOMIX, le faisceau est collimaté à un diamètre de 0,5 mm. Le faisceau passe à travers certains pixels auxquels la modélisation des mesures (la matrice R) donne un poids nul. Cette erreur de modélisation entraîne des artefacts, qui sont principalement visibles au niveau des coins de l'image reconstruite. Il serait intéressant de modifier cet algorithme pour prendre en compte la largeur du faisceau de rayons X et ainsi de minimiser ces effets de volumes partiels.

Le dispositif expérimental utilisé ne permettait de générer que des écoulements à bulles. Il serait intéressant de tester la méthode développée sur d'autres configurations d'écoulements (poches-bouchons, annulaire, ...).

Enfin, le dispositif TOMIX permet de mettre en œuvre des mesures en éventail (fan-beam) d'atténuation de rayons X. Par des simulations et des mesures de fantômes et d'écoulements sur ce dispositif, nous avons démontré que l'algorithme du masque peut également être **utilisé dans le cadre des échantillonnages en éventail (fan-beam)**. Mais deux développements restent à faire :

- prendre en compte le phénomène de durcissement du faisceau ;
- optimiser les paramètres d'acquisition du dispositif TOMIX.

Ces dispositifs permettent de faire des mesures en 2 dimensions, mais aussi en 2 dimensions $\frac{1}{2}$. Par cette méthode, des mesures par tranches successives d'une conduite peuvent être réalisées et reconstruites. Ces reconstructions peuvent être repositionnées les unes sur les autres afin d'obtenir une image en 3 dimensions. Une évolution de la méthode du masque vers des mesures en 3 dimensions pourrait être envisagée. Cette évolution nécessiterait plusieurs étapes :

- de faire une analyse bibliographique sur les échantillonnages efficaces en 3 dimensions ;
- de modifier la description du lien mesures - image, la matrice R ;
- d'avoir un algorithme performant pour traiter toutes les mesures (parallélisme) ;
- de mettre en place un nouveau dispositif de mesure avec un tube à rayons X à sortie conique et un détecteur matriciel.

Références bibliographiques

- [Axelsson, 1980] O. Axelsson. Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations. *Linear algebra and its applications*, 29 :1–16, 1980.
- [Barakat, 1998] V. Barakat. *Contribution à la restauration d'images dégradées par un système spatialement variant. Apport d'un modèle de l'image*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1998.
- [Barrett *et al.*, 1993] R. Barrett, M. Berry, T. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, et V. Eijkhout R. Pozo C. Romine H. Van der Horst. *Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods*. SIAM J. Appl. Math., 1993.
- [Berthoud, 1997] G. Berthoud. *Cours de Thermohydraulique Diphasique*. Ecole Nationale Supérieure de Physique de Grenoble (INPGrenoble), 1997.
- [Bestion *et al.*, 1998] D. Bestion, P. Clément, J.-P. Caminade, J.-M. Delhayé, P. Dumaz, J. Garnier, D. Grand, E. Hervieu, O. Lebaigue, H. Lemonnier, C. Lhuillier, P. Mercier, J.-R. Pages, I. Toumi, et M. Villand. Force d'analyse scientifique et technique pour de nouvelles Études en thermohydraulique, rapport du 13 mars 1998. Rapport technique, Commissariat à l'Énergie Atomique, Direction des Réacteurs Nucléaires, 1998.
- [Brooks et Chiro, 1976] R. A. Brooks et G. Di Chiro. Principles of computer assisted tomography (CAT) in radiographic and radioisotopic imaging. *Phys. Med. Biol.*, 21(5) :689–732, 1976.
- [Charbonnier, 1994] P. Charbonnier. *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*. Thèse, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1994.
- [Chen, 1975] Y.-T. Chen. *Iterative methods for linear least squares problems*. Thèse, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1975.
- [Clinthorne *et al.*, 1993] N. H. Clinthorne, T.-S. Pan, P.-C. Chiao, L. Rogers, et J. A. Stamos. Preconditioning methods for improved convergence in iterative reconstructions. *IEEE transactions on medical imaging*, 12(1) :78–83, 1993.
- [Delhayé, 1997] J. M. Delhayé. *Cours d'Écoulements Diphasiques*. Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique et de Mécanique de Grenoble (INPGrenoble), 1997.
- [Desbat et Thierry, 1999] L. Desbat et R. Thierry. Efficient sampling of the exponential Radon transform. *1st World congress on industrial process tomography, Buxton, du 14 au 17 avril 1999*, pages 423–426, 1999.
- [Desbat, 1997] L. Desbat. *Echantillonnage efficace en tomographie*. Thèse d'habilitation, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1997.
- [François, 2001] F. François. *Étude et caractérisation des écoulements diphasiques dans un réacteur à eau sous pression embarqué en similitude Fréon*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.

- [Girard, 1989] D. A. Girard. A fast monte-carlo cross-validation procedure for large least squares problems with noisy data. *Numerische Mathematik*, 56 :1–23, 1989.
- [Golub *et al.*, 1977] G. H. Golub, M. Heath, et G. Wahba. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. Rapport Technique 491, Department of Statistics, University of Wisconsin, Wisconsin, 1977.
- [Golub et Meurant, 1983] G. H. Golub et G. A. Meurant. *Résolution numérique des grands systèmes linéaires*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Editions Eyrolles, 1983.
- [Grassler et Wirth, 1999] T. Grassler et K.-E. Wirth. X-ray computer tomography - potential and limitation for the measurement of local solids distribution in circulating fluidized beds. *1st World congress on industrial process tomography, Buxton, du 14 au 17 avril 1999*, pages 402 – 409, 1999.
- [Guinier, 1964] A. Guinier. *Théorie et technique de la radiochristallographie*. Dunod, Paris, 1964.
- [Herman, 1979] G. T. Herman. *Image Reconstruction from Projections : implementation and Applications*, volume 32. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1979.
- [Hervieu, 1988] E. Hervieu. *Ecoulement monophasique et diphasique à bulles dans un branchement en té : étude théorique et expérimentale*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- [Hori *et al.*, 1997] K. Hori, T. Fujimoto, K. Kawanishi, et H. Nishikawa. Advanced high speed x-ray CT scanner for measurement and visualization of multiphase flow. *OECD / CSNI specialist meeting on advanced instrumentation and measurement techniques, Santa Barbara, USA, 1997*.
- [Hubbell, 1969] J. H. Hubbell. Photon cross sections, attenuation coefficients and energy absorption coefficients from 10 keV to 100 GeV. Rapport Technique NSRDS-NBS 29, United States Department of Commerce, Washington, DC, 1969.
- [Inoue *et al.*, 1993] A. Inoue, T. Kurosu, M. Yagi, S.-C. Morooka, A. Hoshide, T. Ishizuka, et K. Yoshimura. In-bundle void measurement of a BWR fuel assembly by an X-ray CT scanner : assessment of BWR design void correlation and development of new void correlation. *ASME/JSME Nuclear Engineering Conference*, volume 1, pages 39–45, 1993.
- [Jeandey, 1982] C. Jeandey. Multibeam X-ray densitometer for flow pattern and void fraction determination in steam water mixtures. *ASME Spring Meeting Symposium on Measurements in Polyphase Flows, Saint Louis, Missouri, du 7 au 11 juin 1982*, pages 19–28, 1982.
- [Kak et Slaney, 1987] A. C. Kak et M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., New York, 1987.
- [La, 1997] V. La. *Correction d'atténuation en géométrie conique avec mesures de transmission en tomographie d'émission mono-photonique*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [Lascaux et Théodor, 1994] P. Lascaux et R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tome 2*. Masson, 1994.
- [Laurette, 1997] I. Laurette. *Reconstruction en géométrie conique : application à l'imagerie d'émission tridimensionnelle*. Thèse, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1997.
- [Lewitt, 1983] R. M. Lewitt. Reconstruction algorithms : Transform methods. *Proceedings of the IEEE*, 71(3) :390–408, 1983.

- [McDavid *et al.*, 1977] W. D. McDavid, R. G. Waggener, W. H. Payne, et M. J. Dennis. Correction for spectral artifacts in cross-sectional reconstruction from x-rays. *Medical Physics*, 4(1) :54–57, 1977.
- [Natterer, 1985] F. Natterer. Fourier reconstruction in tomography. *Numerische Mathematik*, 47 :343–353, 1985.
- [Natterer, 1986] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. John Wiley and sons, 1986.
- [Nugroho et Wu, 1999] A. T. Nugroho et Z. Wu. Microwave imaging of 3d lossy dielectric objects using algebraic reconstruction techniques. *1st World congress on industrial process tomography, Buxton, du 14 au 17 avril 1999*, pages 201–205, 1999.
- [Paige et Saunders, 1982] C. C. Paige et M. A. Saunders. LSQR : an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 8(1) :43–71, 1982.
- [Ramachandran et Lakshminarayanan, 1971] G. N. Ramachandran et A. V. Lakshminarayanan. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs : Application of convolutions instead of fourier transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 68(9) :2236–2240, 1971.
- [Rathey et Lindgren, 1981] P. A. Rathey et A. G. Lindgren. Sampling the 2-d Radon transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 29 :994–1002, 1981.
- [Riddell *et al.*, 1995] C. Riddell, B. Bendriem, M. Bourguignon, et J.-P. Kernevez. The approximate inverse and conjugate gradient : non-symmetrical algorithms for fast attenuation correction in SPECT. *Phys. Med. Biol.*, 40 :269–281, 1995.
- [Saad et Schultz, 1986] Y. Saad et M. Schultz. GMRES a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7 :856–869, 1986.
- [Schmitz *et al.*, 1997] D. Schmitz, N. Reinecke, G. Petritsch, et D. Mewes. High resolution x-ray tomography for stationary multiphase flows. *OECD / CSNI specialist meeting on advanced instrumentation and measurement techniques, Santa Barbara, USA*, 1997.
- [Segal *et al.*, 1987] E. Segal, W. A. Ellingson, Y. Segal, et I. Zmora. A linearization beam-hardening correction method for x-ray computed tomographic imaging of structural ceramics. *Review of Progress in Quantitative NDE, proceedings of conferences, San Diego, du 3 au 8 août 1986*, éditeur Plenum Press New York, volume 6A, pages 411–417. University of California, 1987.
- [Thierry, 1999] R. Thierry. *Correction de l'atténuation et de la réponse géométrique d'un détecteur en tomographie d'émission sur colis de déchets nucléaires*. Thèse, Université Joseph Fourier, 1999.

Mise au point et qualification d'une technique de mesure du taux de présence local par tomographie à rayons X

Résumé

Cette étude a pour objectif le développement d'un instrument de mesure du taux de présence local d'un écoulement eau - air par tomographie à rayons X.

Après une analyse bibliographique exhaustive, les algorithmes de reconstruction retenus sont comparés afin de sélectionner le plus efficace. Afin d'améliorer la précision de reconstruction au voisinage des parois, plusieurs améliorations de cet algorithme sont rajoutées et testées.

En parallèle, un dispositif expérimental a été mis au point et ses paramètres d'acquisition ont été optimisés.

L'ensemble chaîne de mesure et algorithme de reconstruction est ensuite mis en œuvre sur des mesures en géométrie parallèle de fantômes et d'écoulements eau-air homogènes, non homogènes et autour de faisceaux de tubes carrés et cylindriques. Ces mesures sont réalisées avec deux schémas d'échantillonnage : régulier et entrelacé. La comparaison des cartes de taux de présence local tomographiques avec les cartes obtenues par une sonde optique permet de valider la méthode développée.

Enfin, l'extension de la méthode à la géométrie en éventail (fan-beam) est étudiée.

Development and validation of a technique of measurement of the void fraction by X-ray tomography

Abstract

The aim of this study is to develop an instrumentation to measure the local void fraction map in an air - water flow by X-ray tomography.

After an exhaustive literature survey, the selected reconstruction algorithms are compared to choose the most effective. Several improvements are added and tested to enhance the reconstruction accuracy in the vicinity of the pipe walls.

An experimental parallel beam tomographic bench has been developed and its operating parameters have been optimized.

The acquisition system and the reconstruction algorithm are used to map phantoms, homogeneous or non - homogeneous air - water bubbly flows and bundle flows with regular or interlaced sampling scheme. The method is validated by comparing with the void fraction maps measured with an optical probe.

At the end, the method is extended to the fan-beam geometry.

Spécialité : Energétique Physique

Mots-clés : Ecoulements diphasiques, instrumentation, taux de présence local, tomographie à rayons X, algorithme de reconstruction

Thèse préparée au
Commissariat à l'Energie Atomique de Grenoble
DEN / DTP / SETEX / LTAC
17 rue des Martyrs
38 054 GRENOBLE Cedex 9