



HAL
open science

Représentations linéaires des tresses infinitésimales

Ivan Marin

► **To cite this version:**

Ivan Marin. Représentations linéaires des tresses infinitésimales. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2001. Français. NNT: . tel-00005386

HAL Id: tel-00005386

<https://theses.hal.science/tel-00005386v1>

Submitted on 18 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
N° d'ordre : 6488

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES
TRESSES INFINITÉSIMALES

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI-ORSAY
spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Ivan MARIN

Soutenance publique le 30 mars 2001 devant le jury composé de

Pierre CARTIER	Directeur de thèse.
François DIGNE	
Michel DUFLO	
Alain LASCoux	
Valentin POÉNARU	Président du jury.
Vladimir TURAEV	Invité.

Rapporteurs :

Gunter MALLE
Raphaël ROUQUIER

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES
DES TRESSES INFINITÉSIMALES

Ivan MARIN

Résumé. L'objet de ce travail est l'étude générale des représentations linéaires du groupe de tresses B_n qui proviennent de l'intégration de systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ), vus comme représentations de l'algèbre des tresses infinitésimales. Nous utilisons la technique des bases de Gelfand-Tsetlin pour étudier certaines représentations de cette algèbre, et montrons comment construire explicitement les représentations du groupe d'Artin correspondantes. Nous classifions complètement les systèmes KZ qui sont irréductibles pour l'action du groupe symétrique et construisons les nouvelles représentations de B_n qui apparaissent à cette occasion. Nous obtenons d'autre part des critères d'irréductibilité sur les représentations de B_n obtenues par construction tensorielle. Nous obtenons enfin d'autres résultats utiles dans ce cadre, notamment une décomposition partielle de l'algèbre de Lie engendrée par les transpositions dans l'algèbre de groupe du groupe symétrique. Cette décomposition partielle est en rapport avec les composantes irréductibles de la représentation de Jones.

Mots clés : représentations, groupes de tresses, Knizhnik-Zamolodchikov, tresses infinitésimales, bases de Gelfand-Tsetlin, groupes symétriques, tours d'algèbres.

Abstract. This work contributes to the general study of linear representations of Artin's Braid group B_n that arise as monodromy of KZ-systems. We consider these systems as representations of the Hopf algebra of infinitesimal braids, and apply the technique of Gelfand-Tsetlin basis. The purpose is twofold: this technique gives a good insight into the representation theory of this algebra, and we show that it helps in the explicit construction of the corresponding braid group representations. We give a complete classification of KZ-systems that are irreducible for the action of the symmetric group, and build the new representations of B_n that arise at this stage. Among other results that are useful in this setting, we obtain irreducibility criteria on tensor products and related constructions, and get a partial decomposition of the Lie algebra generated by transpositions in the group algebra of the symmetric group. This partial decomposition involves summands of the Jones representation.

Keywords : representations, braid groups, Knizhnik-Zamolodchikov, infinitesimal braids, Gelfand-Tsetlin basis, symmetric groups, towers of algebras.

Mathematics Subject Classification 2000 : 20F36, 20C08 (81R05, 20C30, 05E10)

Remerciements

Je ne saurais trop remercier mes parents pour tout l'amour qu'ils m'ont donné, et qui m'a permis de surmonter les doutes inhérents à tout travail de thèse. Dans le même ordre d'idées, ma dette à l'égard de mes amis de toujours, Eric Jaligot, Nathalie Montard et Vincent Domeyne n'a pas de prix.

Je remercie les personnes qui ont eu un rôle prédominant dans ma formation mathématique. Mon professeur de mathématiques supérieures Daniel Goffinet qui m'a appris que l'intérêt des mathématiques ne résidait pas uniquement dans les livres déjà écrits ; mon ami et professeur de mathématiques spéciales Pierre-Jean Hormière qui m'a au contraire appris l'intérêt des théories bien faites, en particulier à évoluer dans l'enchevêtrement des théorèmes déjà existants et à les utiliser de façon adéquate ; mon directeur de DEA Adrien Douady qui est à l'origine de mon intérêt pour les tresses et m'a appris à étudier pour eux-mêmes les objets géométriques fondamentaux ; enfin Pierre Cartier qui a accompagné ce travail de thèse en me faisant profiter de sa compréhension à nulle autre pareille de l'algèbre moderne, de son goût pour les formules explicites et de ses lumières souvent décisives – en m'aiguillant d'autre part sur ce que l'algèbre quantique apporte à l'étude des représentations de structures plus classiques.

Outre mon directeur de thèse, je dois de vifs remerciements aux mathématiciens qui m'ont apporté une aide prolongée dans ce travail. En premier lieu Jorge González-Lorca qui m'a mis le pied à l'étrier lors de la première année de thèse, et m'a fait profiter de sa connaissance des tresses infinitésimales. Ce travail préliminaire en commun a été décisif dans l'approche finalement développée ici. Au terme de ce périple, je remercie très chaleureusement Gwendal Le Bouffant et Christophe Cornut d'avoir consacré un temps important à la relecture de certains chapitres, ainsi que Bruno Klingler pour les conversations que nous avons eu lors de la dernière ligne droite.

Je remercie de nombreuses personnes rattachées à l'équipe "Groupes finis" de l'université Paris VII, notamment Gunter Malle et Raphaël Rouquier qui ont accepté d'écrire un rapport sur ce volumineux mémoire, après m'avoir l'un comme l'autre apporté leurs lumières sur les groupes de réflexion complexes. Je remercie Jean Michel qui m'a communiqué la toute dernière version d'un logiciel de calcul sur ces groupes, David Bessis et Michel Broué pour les réponses à mes questions. Je remercie enfin François Digne pour son intérêt envers mon travail et sa présence dans le jury, et je remercie Marc Cabanes de m'avoir invité à exposer une première fois certains résultats de ce mémoire.

Je suis très heureux de la présence dans le jury de mathématiciens reconnus dans des domaines attenants et divers. Les remarques et suggestions de chacun, notamment au moment de la soutenance, m'ont beaucoup apporté. Je remercie donc, outre Pierre Cartier et François Digne, Michel Duflo, Alain Lascoux, Valentin Poénaru et Vladimir Turaev.

Parmi les spécialistes qui ont très gentiment répondu à mes questions, de vive voix ou par courrier électronique, je remercie particulièrement Arun Ram, Toshitake Kohno, Benjamin Enriquez, Eric Vasserot, Yvette Kosman-Schwarzbach, Inna Sysoeva, Patrick Brion et Pierre Deligne.

La liste des camarades qui m'ont, à un moment ou à un autre, éclairé sur un point particulier, mathématique ou informatique, est relativement longue. Comme il faut bien s'amuser un peu, la voici dans l'ordre lexicographique inverse sur le prénom. Mes remerciements cordiaux, donc, à : Vitia Tourtchine, Vincent Lafforgue, Sylvain Bruillet, Stéphane Aicardi, Paul Zinn-Justin, Patrick Popescu-Pampu, Olivier Schiffmann, Olivier Glass, Louis Granboulan, Loïc Grenié, Julo Chroboczek, Julien Jalon, Joël Bellaïche, Jean-François Dat, Jean-Christophe Novelli, Hugues Randriambololona, Hervé Henry, Georges Racinet, Gaëtan Chenevier, Frédéric Chapoton, François Pierrot, Florent Hivert, Farouk Boucekkine, Denis Pétrequin, Denis Auroux, David Mauger, David Madore, Alban Moreau.

Je remercie le Service des Prestations Informatiques de l'ENS, en particulier Jacques Beigbeder pour sa gentillesse, sa diligence et sa compétence hors du commun, ainsi que le personnel de la Bibliothèque de Mathématiques de l'ENS, Liliane Zweig, Chantal de Gaalon et Alain Duys en particulier. De l'autre côté de la frontière, je remercie Roberto Ferretti et Gisbert Wüstholtz, à l'ETH de Zürich, pour m'avoir permis de conclure cette thèse dans de bonnes conditions.

Je remercie enfin les amis qui m'ont aidé à préparer la soutenance, notamment Stéphane Aicardi, Hervé Henry, Céline Eymard et Joël Bellaïche, ainsi que ceux qui sont venus ou ont tenté de venir à cette soutenance, en dépit de la grève des chemins de fer.

De façon plus particulière, je remercie les auteurs des œuvres magistrales, mathématiques ou non, qui, au cours de ces dernières années, m'ont données envie de travailler¹.

Un remerciement spécial à Vincent Maillot, qui sait pourquoi, et à Olivier Lambin, qui l'ignore, devraient me permettre de n'avoir, je l'espère, oublié personne.

1. Je remercie donc I.M. Gelfand et J.-P. Serre, M. Gromov et V.G. Drinfeld, A. Grothendieck et W.P. Thurston, mais aussi Luc Moullet et J.-L. Godard, J.M. Straub et D. Huillet, Jacques Tourneur et Jean Grémillon, J.-L. Costes et Bob Dylan, Franck Stella et Jean Fautrier, Gilles Deleuze et Felix Guattari, Serge Daney et Louis Skorecki, Nanni Moretti et Sacha Guitry.

A Christine, pour tout.

Introduction

Le groupe de tresses sur n brins B_n a été décrit formellement pour la première fois en 1925. Dès la période 1923-1936 sont défrichés différents aspects essentiels de ce groupe :

- les tresses comme mots en $n - 1$ générateurs
- les interprétations géométriques des tresses
- le lien entre tresses et nœuds
- les représentations du groupe B_n

Le lien entre tresses et nœuds est élucidé par Alexander (1923) et Markov (1935), une description de B_n par générateurs et relations est découverte par Artin, et enfin Burau (1936) construit une représentation non triviale et irréductible de degré $n - 1$ de B_n , qui depuis porte son nom. Le polynôme d'Alexander, premier d'une série d'invariants polynomiaux des nœuds, est quant à lui directement lié à cette représentation de Burau.

Les travaux des décennies suivantes peuvent être considérés comme une étude poussée de ces constructions fondamentales. Il est montré que la représentation de Burau de B_3 est fidèle. Le polynôme d'Alexander est décortiqué, et on montre qu'il ne dépend, par un procédé explicite, que du groupe fondamental du complémentaire du nœud (Fox). Rencontrant le groupe de tresses pures ou colorées - un sous-groupe fondamental de B_n - dans son étude des singularités, Arnold en détermine l'algèbre de cohomologie rationnelle. Les développements de la topologie algébrique et de la géométrie abstraite dans l'après-guerre permettent en outre de mieux comprendre le groupe de tresses B_n comme groupe fondamental d'un espace de configurations de Mac Lane (Fadell et Neuwirth) : l'étude approfondie des complémentaires d'hyperplans notamment par Deligne et Brieskorn-Saito, l'étude des groupes de réflexions par Coxeter et Tits dégagent la nature géométrique profonde des groupes de tresses. Dans le même mouvement, on tâche de généraliser la notion de tresse, en considérant des groupes de tresses associés aux surfaces - le groupe de tresses rebaptisé "groupe d'Artin" n'étant plus alors que le cas particulier associé au plan. L'apparition dans les années 70 d'un objet, l'espace $\mathcal{M}_{g,n}$ des modules des surfaces de genre g à n points marqués, qui joue un rôle central en géométrie et en arithmétique, et dont Grothendieck conjecture qu'il admet une structure remarquablement simple, est l'aboutissement de cette tendance : le groupe de tresses d'Artin concerne le cas particulier $g = 0$, et il semble que l'on gagnerait à essayer de comprendre globalement la structure de $\mathcal{M}_{g,n}$, plutôt que de "s'acharner sur ce pauvre groupe de tresses" [43].

La période moderne dans l'étude du groupe de tresses débute par l'apparition révolutionnaire du polynôme de Jones, en 1985 [46]. Dans son étude des algèbres de Von Neumann, Jones met en place un procédé qui associe à tout nœud un polynôme, fondamentalement

plus riche que le polynôme d'Alexander. Ce polynôme apparaît donc à la surprise générale de façon purement algébrique, et ses interprétations topologiques ne sont toujours pas aussi satisfaisantes que celles du polynôme d'Alexander. Jones montre également que son polynôme est lié à certaines représentations des groupes de tresses, qui se factorisent par une partie de l'algèbre de Hecke générique de type A. Ces algèbres alors déjà bien connues sont en effet des quotients des algèbres de groupe des groupes de tresses. Cette remarque très simple amène à considérer de plus près les représentations de ces algèbres de Hecke, décrites matriciellement par Hoefsmit en 1974. Du point de vue de la théorie des nœuds, les relations "skein", introduites par Conway comme généralisation des méthodes d'Alexander, sont reconnues comme un des outils essentiels dans la construction des invariants des nœuds.

Suivant ces différentes idées, il est construit un nouveau polynôme, dit HOMFLY à partir des initiales de ses six auteurs officiels, qui prend désormais en compte l'algèbre de Hecke de type A dans son intégralité. Une nouvelle étape importante est alors due à Kauffman, qui introduit un troisième polynôme, issu cette fois de la mécanique statistique, et qui englobe d'une certaine façon les précédents. Birman, Wenzl et Murakami montrent alors que ce polynôme est encore issu d'un quotient de l'algèbre de groupe du groupe de tresses : c'est une nouvelle algèbre semi-simple de dimension finie, dont les algèbres de Hecke de type A ne sont qu'un quotient.

Deux études fondamentales vont alors installer ces nouvelles méthodes dans une perspective plus large, sous l'influence notable de la physique. On s'est aperçu que les méthodes de théorie conforme des champs en physique théorique permettent de construire des représentations du groupe de tresses par monodromie des équations différentielles introduites par Knizhnik et Zamolodchikov. T. Kohno montrera que ce procédé est systématique, et qu'il permet de construire au voisinage de la représentation triviale toutes les représentations du groupe des tresses pures. Une certaine algèbre, dite des tresses infinitésimales et liée à l'algèbre de cohomologie décrite par Arnold, semble en effet jouer dans la théorie des représentations du groupe de tresses un rôle comparable aux algèbres de Lie dans la théorie des représentations des groupes de Lie. Enfin, ces tresses infinitésimales agissent naturellement sur les puissances tensorielles de représentations des algèbres de Lie simples. Les deux travaux qui font rentrer ces nouveaux résultats dans une perspective générale sont alors :

- Drinfeld poursuivant le programme de Grothendieck inscrit ces nouveaux points de vue dans une étude géométrique de $\mathcal{M}_{0,n}$, qui prend en compte les travaux d'Ihara reliant le groupe de tresses avec $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Il montre comment ces actions issues de la physique sont reliées à des défauts de commutativité dans les catégories monoïdales introduites par Mac Lane. Il introduit enfin sous le nom de groupes quantiques des déformations des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, qui permettent de décrire directement l'action du groupe de tresses - et non plus des tresses infinitésimales - sur des puissances tensorielles de représentations d'algèbres de Lie.
- Vassiliev a généralisé la notion de relations "skein" dans le but de déterminer explicitement un invariant des nœuds, universel par son principe même. Par une étude du discriminant de l'espace des courbes lisses fermées de \mathbb{R}^3 , il a montré que l'on pouvait en un certain sens approcher d'un invariant universel des nœuds par une série d'invariants des nœuds, appelés invariants de Vassiliev ou invariants de type fini. Ces invariants sont liés à une algèbre de Hopf, dite algèbre des diagrammes de cordes, qui est extrêmement proche de l'algèbre des tresses infinitésimales. Kontsevitch a montré comment construire un invariant de type fini "universel" par des méthodes de géométrie différentielle. Le lien

avec les idées de Drinfeld concernant l'action des tresses sur les catégories monoïdales a alors été fait par Cartier [30].

Lors de ces dix dernières années, deux éléments nouveaux ont retenu notre attention comme utiles à l'étude des représentations du groupe de tresses.

En premier lieu les travaux de Vershik et de l'université de Leningrad-Saint Petersburg, poursuivant certaines idées de Jones, ont montré comment réécrire la théorie des représentations de certaines algèbres munies d'une filtration naturelle à partir de leur diagramme de Bratteli. Il est en fait remarquable qu'un grand nombre d'algèbres liées au groupe de tresses sont particulièrement adaptées à un tel traitement inductif. Par exemple, si l'on considère la filtration naturelle du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , le diagramme de Bratteli associé à ses représentations irréductibles est sans ramifications (deux sommets sont reliés par au plus une arête), ce qui permet d'avoir une notion de base naturelle pour cette représentation, appelée base de Gelfand-Tsetlin.

La méthode générale employée ici pour construire des représentations du groupe de tresses consistera ainsi à faire apparaître des représentations irréductibles du groupe de tresses par leur diagramme de Bratteli: une fois ce diagramme obtenu, nous tâcherons de construire explicitement une représentation du groupe de tresses correspondant à ce diagramme.

En deuxième lieu, l'équipe "groupes finis" de l'université Paris VII a montré que l'on pouvait associer aux groupes de réflexions complexes, des algèbres dites cyclotomiques analogues aux algèbres de Hecke des groupes de réflexions. Il se trouve que cinq de ces algèbres sont des quotients de l'algèbre de groupe d'un groupe de tresses à 3, 4 ou 5 brins. L'étude de ces algèbres permet de faciliter la description des représentations du groupe de tresses associées. Rappelons que si les représentations que l'on cherche à construire associent aux générateurs d'Artin des endomorphismes semi-simples admettant génériquement deux valeurs propres, ce sont des représentations des algèbres de Hecke de type A. Dans le cadre de trois valeurs propres, les représentations de B_3 , B_4 et B_5 sont par définition des représentations de ces algèbres de Hecke cyclotomiques. Un diagramme de Bratteli étant donné, cela nous permettra de décrire rapidement l'action des générateurs de B_n pour $n \leq 5$, comme étape initiale d'une description inductive.

Ce mémoire se compose de trois parties. Pour distinguer les lemmes, propositions et théorèmes connus de résultats qui nous semblent nouveaux, nous utilisons la convention de ne pas numéroter les premiers.

Cette thèse prend comme point de départ l'opinion générale selon laquelle la plupart des représentations de B_n proviennent de la monodromie d'un système de type KZ (cf. par exemple Kohno [50]). Nous considérons les systèmes KZ comme des représentations V d'une certaine algèbre de Hopf \mathfrak{B}_n , qui contient l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ du groupe symétrique, et notons $\int_h V$ la représentation de B_n associée, qui dépend d'un paramètre h .

La première partie de cette thèse est consacrée aux généralités. Le premier chapitre expose les objets principaux ou élémentaires utiles ici, et pose les bases d'une étude des représentations de B_n à partir de celles de \mathfrak{B}_n . En particulier, nous montrons comment les propriétés

d'irréductibilité, d'indécomposabilité, et de compatibilité par rapport aux filtrations naturelles des représentations de \mathfrak{B}_n se transposent aux représentations de B_n . Nous étudions ces questions dans un cadre "analytique" qui nous sera utile ici, ainsi que dans un cadre "formel". Nous exposons ces résultats sous la forme d'un théorème (Théorème 1) dans le deuxième cadre, et sous la forme de plusieurs propositions qui seront invoquées ensuite dans le premier.

Le deuxième chapitre est la formulation dans un cadre général des notions algébriques de cette thèse. Si V est un k -espace vectoriel, nous commençons par étudier un certain type de sous-algèbres de $\text{End}(V)$, dont l'irréductibilité de l'action sur V se lit aisément sur un graphe (I.2.1). Nous définissons ensuite les espaces vectoriels et algèbres associés à des *graphes nivelés*, graphes particuliers dont les diagrammes de Bratteli, introduits ensuite, sont les types, et qui sont particulièrement adaptés au traitement des représentations des algèbres filtrées. Nous isolons alors la notion d'*algèbres locales*, qui s'applique aux différentes algèbres utiles ici. Enfin, nous obtenons des résultats d'irréductibilité pour l'action d'algèbres locales sur des modules associés à des graphes nivelés, et nous présentons en section 7 les applications principales de ce formalisme à notre étude. La théorie présentée ici s'inspire des travaux de Vershik et Kerov [74] d'une part, des idées d'algèbres de graphes exposées par Goodman, de la Harpe et Jones [11] d'autre part. L'apport original est constitué d'abord par l'unification de ces deux points de vue, mais surtout par l'accent mis sur les critères d'irréductibilité.

Les chapitres 3 et 4 montrent comment des théories classiques, celle des représentations du groupe symétrique et celle de l'action de \mathfrak{B}_n sur les puissances tensorielles de représentations d'algèbres de Lie, s'insèrent dans le cadre du chapitre 2. On y met en place certaines conventions utiles.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de représentations particulières de B_n qui proviennent de représentations de \mathfrak{B}_n . Les représentations de B_n qui se factorisent par les algèbres de Hecke génériques de type A , c'est-à-dire les déformations élémentaires de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, proviennent très simplement d'une représentation de \mathfrak{B}_n dont la restriction au groupe symétrique est irréductible. Dans cette optique, il semblerait naturel de conjecturer la réciproque, à savoir que, si la restriction à \mathfrak{S}_n d'une représentation V de \mathfrak{B}_n est irréductible, alors la représentation $\int_h V$ de B_n associée se factorise par l'algèbre de Hecke de type A . Aucune des représentations jusqu'à présent connues de B_n n'infirmerait cette hypothèse. Le théorème 2 de II.1 répond à cette question, en montrant que la réciproque n'admet qu'une unique exception, une représentation que nous appelons sporadique.

Pour construire explicitement la représentation de B_n qui est associée à cette représentation sporadique, nous utilisons un algorithme que nous avons détaillé en I.2.7, et qui permet de déterminer les matrices d'une représentation de B_n , une fois donnés son diagramme de Bratteli et quelques données complémentaires. Nous employons une première fois cet algorithme au chapitre II.3, montrant comment il permet de systématiser l'étude, auparavant menée par Broué et Malle [28], des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques associées à certains groupes de réflexions complexes, qui sont des quotients de B_n . Nous l'utilisons ensuite en II.4 pour obtenir des matrices explicites de la représentation de B_n associée à la représentation sporadique de \mathfrak{B}_n .

Les deux algorithmes exposés en I.2.7, à savoir, d'une part la détermination explicite de matrices à partir d'un diagramme de Bratteli, et d'autre part la classification des représentations de \mathfrak{B}_n dont la restriction au groupe symétrique est une représentation sans multiplicités fixée, permettent de ramener l'étude de certaines représentations de B_n à celle d'un certain

nombre d'équations polynomiales explicites.

On applique une deuxième fois ces algorithmes, cette fois à l'étude des représentations de B_n qui se factorisent par le groupe symétrique étendu $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$. Ces représentations, qui apparaissent au chapitre **II.2**, sont caractérisées par le fait que l'image du groupe de tresses pures P_n est commutative. Nous classifions dans ce chapitre les représentations de dimension n de \mathfrak{B}_n , et construisons une représentation irréductible que l'on peut à bon droit appeler la "représentation naturelle" de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$.

Dans la troisième partie, nous montrons (théorème 3, **III.1**) que les puissances alternées de cette représentation sont irréductibles, à l'instar des puissances alternées des représentations "de réflexions" des groupes de Coxeter (cf. Kilmoyer [35]). Enfin nous obtenons une généralisation de ces nouvelles représentations irréductibles de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, par l'introduction d'un nouveau paramètre, et nous en exposons un certain nombre de modèles combinatoires particulièrement simples (théorème 4, **III.1**).

De façon plus générale, la troisième partie développe un point de vue opposé à celui qui inspirait la deuxième: au lieu de chercher à construire des représentations de B_n dont on sait par avance qu'elles sont irréductibles, nous considérons des représentations connues de B_n qui proviennent de \mathfrak{B}_n , notamment celles qui se factorisent par les algèbres de Hecke génériques de type A , et leur appliquons les constructions tensorielles standard. Le but est alors d'obtenir des critères d'irréductibilité pour les représentations ainsi construites.

Dans le chapitre **III.2**, nous montrons comment ces constructions tensorielles apparaissent naturellement dans l'étude du bimodule $\mathfrak{sl}_n^{\otimes p}$ pour le "cas stable", c'est-à-dire lorsque n est grand devant p . Dans ce cadre particulier, l'action essentielle est fournie par la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions, qui est une algèbre de Lie réductive notée \mathcal{H}_n . L'étude de cet objet, essentiel pour comprendre l'action de B_n sur les produits tensoriels de deux représentations d'une même algèbre de Hecke, est entamée dans le chapitre **III.3**. On y détermine notamment le type de \mathcal{H}_n pour $n \leq 6$.

Le dernier chapitre de cette thèse montre que l'on peut isoler un certain type de représentations irréductibles de B_n , que nous appelons ses représentations *nodales* et dont nous présentons une axiomatique. Le premier théorème (théorème 5, **III.4**) dit que, dans des situations génériques, la représentation produit tensoriel d'une famille de représentations nodales est irréductible, et elle-même nodale. Comme la notion de représentation nodale couvre la plus grande partie des représentations irréductibles connues de B_n , à l'exception notable de représentations qui se factorisent par $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, ce théorème illustre un phénomène très général, qui n'est sans doute pas sans relations avec un phénomène analogue observé sur les Yangiens (cf. [65]).

D'autre part, dans ce même chapitre nous étudions le produit tensoriel de deux représentations de \mathcal{H}_n d'un certain type. A partir de la méthode que nous avons publiée ailleurs [61], nous en déduisons des facteurs simples de \mathcal{H}_n , pour tout $n \geq 2$ (théorème 7, **III.4**). En conséquence, nous associons à toute famille de cardinal au plus $n/2$ de foncteurs de Schur une représentation irréductible de B_n .

Notations et conventions générales

Un corps k sera toujours supposé commutatif et de caractéristique 0. Un anneau et une algèbre seront toujours supposés intègres et unitaires. Si k est un anneau et G un groupe, on adoptera les notations suivantes: on note kG l'algèbre de groupe de G , $k[[h]]$ l'anneau des séries entières formelles, $\mathbb{C}\{h\}$ l'anneau des fonctions entières. Enfin, suivant la tradition des groupes quantiques, nous noterons $k[h^{-1}, h]$ l'anneau des séries de Laurent en h .

Les modules ou les représentations sur k d'une k -algèbre ou d'un groupe seront sauf mention explicite du contraire supposés de dimension finie sur k . Les groupes de Lie seront toujours supposés de dimension finie. Si A et B sont deux algèbres (resp. deux groupes) tels que $A \subset B$, on notera, pour un B -module M , $Res_A M$ la restriction de M à A . Suivant les situations étudiées, on notera une représentation d'une algèbre (ou d'un groupe) A comme un A -module M , ou comme un couple (V, ρ) , où V est un espace vectoriel et ρ un morphisme de A vers l'algèbre des endomorphismes de V .

Si (e_1, e_2, \dots, e_n) constitue une base d'un espace vectoriel, on notera $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. On note δ_{ij} le symbole de Kronecker. Si σ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on notera $Sp(\sigma)$ le spectre de σ , $det(\sigma)$ son déterminant, et $\chi_\sigma(x)$ son polynôme caractéristique $det(\sigma - x)$. Si i et j sont deux entiers, on notera $[i, j] = \{k \in \mathbb{Z} \mid i \leq k \leq j\}$. Si V est un espace vectoriel, on notera Id_V l'identité de V , $GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires, $End(V)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires de V . Si de plus V est muni d'une action d'une algèbre A , on notera $End_A(V)$ l'espace des endomorphismes linéaires de V qui commutent à l'action de A . Pour des espaces vectoriels V, W , on notera $V \otimes W$ le produit tensoriel de V et W , $V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$, $\Lambda^n(V)$, $S^n(V)$ les puissances tensorielles (resp. alternées, symétriques) n^{es} de V . Si V et W sont munis de l'action d'une bigèbre, on munira de même ces nouveaux espaces de l'action associée.

Pour N un entier naturel, on écrira $\lambda \vdash N$ quand λ est une partition de l'entier N , et on notera λ' la partition duale. On note \mathfrak{S}_N le groupe symétrique sur N lettres, et on utilise la notation traditionnelle $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m)$ pour les m -cycles. Quand il ne s'agira pas d'indices, on notera i et j les nombres complexes habituels, définis par $i, j \neq 1$, $i^2 = -1$, $j^3 = 1$, et $\text{Im } j > 0$.

Enfin, pour \mathfrak{g} une algèbre de Lie, on notera $U\mathfrak{g}$ son algèbre enveloppante universelle, et, lorsque l'on considèrera un groupe ou une algèbre de Hopf particulier, on notera $\mathbb{1}$ sa représentation triviale.

Notations

Nous présentons ici sous forme de tableaux les notations introduites dans cette thèse, qui débordent le cadre de leur chapitre de définition.

Notations du chapitre I.1

B_n	I.1.1.1	σ_i	I.1.1.1	\mathbb{C}_*^n	I.1.1.1	B_n^+	I.1.1.1
γ_n	I.1.1.1	δ_n	I.1.1.1	s_i	I.1.1.2	P_n	I.1.1.2
G_4, G_8, \dots	I.1.1.2	BWM_n	I.1.1.2	$\widetilde{\mathfrak{S}}_n$	I.1.1.2	\mathcal{T}_n	I.1.2.1
t_{ij}	I.1.2.1	\mathfrak{B}_n	I.1.2.1	\mathbf{T}_n	I.1.2.1	\mathbf{t}_n	I.1.2.1
$V_{\underline{z}}$	I.1.2.2	$\int_h V_{\underline{z}}$	I.1.2.2	$\int_h V$	I.1.2.2	$\int_{\Phi} M$	I.1.2.6
$H_{\lambda}M$	I.1.3.1	$K_n(q, t)$	I.1.3.1	$L(t)$	I.1.3.2	$R(t)$	I.1.3.2
$S(t)$	I.1.3.2	$\mathcal{V}(M)$	I.1.3.2	$\mathcal{V}_s(M)$	I.1.3.2	τ_a	I.1.3.2
S	I.1.3.2	$H_{\lambda}M$	I.1.3.2	$I_{\pm}^r(\alpha)$	I.1.3.2	$\lambda_{u,v}$	I.1.3.2
$B_{s,p}^{\alpha}$	I.1.3.2						

Notations du chapitre I.2

kS	I.2.1	$e_{a,b}$	I.2.1	$\mathcal{D}(S)$	I.2.1	$\Gamma = (S, A, b, s)$	I.2.1
$\Gamma = (S, A)$	I.2.1	$\overline{\Gamma}$	I.2.1	$x \rightarrow y$	I.2.1	$\mathcal{A}(\Gamma)$	I.2.1
$\Gamma_{D,B}(M)$	I.2.2	$\Gamma_{D,\Phi}(M)$	I.2.2	$\Gamma_{D,\sigma}(M)$	I.2.2	$\mathbf{G} = (S, A, b, s, niv)$	I.2.3.1
$\mathbf{G} = (S, A, niv)$	I.2.3.1	n_{∞}	I.2.3.1	$x \nearrow y$	I.2.3.1	$\mathbf{G}_x, \mathbf{G}^x, \mathbf{G}_{(n)}, \dots$	I.2.3.1
$T_{\mathbf{G}}$	I.2.3.2	$k\mathbf{G}$	I.2.3.2	Γ_{loc}	I.2.3.2	$\xi_s, \xi_r, \xi_{[r,s]}$	I.2.3.2
$M(\mathbf{G})$	I.2.3.2	$M_{loc}(\mathbf{G})$	I.2.3.2	Γ'_{loc}	I.2.3.2	$Top_r(\mathbf{G})$	I.2.3.3
$A = A_n$	I.2.4	Γ^{\bullet}	I.2.4	z_r	I.2.5	Γ_A	I.2.6.1
Γ'_A	I.2.6.4						

Notations des autres chapitres

T_n	I.3.1	J_n	I.3.1	$ \lambda $	I.3.2	$t(\lambda)$	I.3.2
$h(\lambda)$	I.3.2	$\delta(\lambda)$	I.3.2	$\delta(\lambda, \mu)$	I.3.2	λ'	I.3.2
λ_i	I.3.2	$\tilde{\lambda}_i$	I.3.2	$\mathbf{Surf}_n(V)$	I.4.2.1	$\mathbf{Tot}_n(V)$	I.4.2.1
S^{λ}	II.1.2	$Spor^{(n)}(\alpha, \beta)$	II.1.6.2	\mathcal{L}_n	II.2.2	$\mathcal{L}_n(h)$	II.2.2
$L_n(q)$	II.2.2	$\mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$	II.4.1.1	$\mathcal{R}_2^{(n)}(x, y)$	II.4.1.1	$R_2^{(n)}(X, Y)$	II.4.2
$R_1^{(n)}(X, Y)$	III.1.2	$\Lambda_n^p(X, Y, Z)$	III.1.4.1	$(D_1, D_2)_n$	III.2.1	\mathcal{H}_n	III.3
S_n	III.3						

Première partie

Généralités

Chapitre 1

Tresses et tresses infinitésimales

Dans ce chapitre, nous exposons les principes fondamentaux qui nous seront utiles concernant les tresses et les tresses infinitésimales. La section 1 présente les aspects du groupe de tresses qui nous intéressent, la section 2 introduit l'algèbre \mathfrak{B}_n dite des tresses infinitésimales dont les représentations correspondent aux systèmes KZ, et met en place les correspondances entre les propriétés des représentations de \mathfrak{B}_n et des représentations de B_n associées par "intégration". Enfin la troisième section de ce chapitre définit les représentations les plus élémentaires de ces structures.

1.1 Le groupe d'Artin

1.1.1 Définition

Le groupe de tresses à n brins pour $n \geq 1$ sera pour nous le groupe d'Artin B_n engendré par $n - 1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ soumis aux relations

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{si } |j - i| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n - 2. \end{aligned}$$

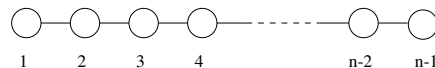
La première relation est appelée *relation de localité*, la deuxième *relation de tresse*.

Il est classique d'identifier B_n au groupe fondamental du quotient de

$$\mathbb{C}_*^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i = z_j \text{ ssi } i = j\},$$

c'est-à-dire de \mathbb{C}^n privé de ses diagonales, par le groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

On peut d'autre part symboliser la définition par générateurs et relations de B_n par le diagramme de Coxeter



dans lequel chaque cercle symbolise un des générateurs σ_i : deux cercles i et j non reliés induisent la relation de localité $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, deux cercles reliés i et $i + 1$ induisent la relation de tresse entre σ_i et σ_{i+1} .

La symétrie que présente ce diagramme reflète le fait que l'application $\sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}$ détermine un automorphisme de B_n . On remarque aussi, directement sur le système de générateurs

et relations ou par l'intermédiaire du diagramme, qu'il existe un morphisme naturel, classiquement injectif, de B_{n-1} vers B_n , le générateur σ_i de B_{n-1} étant envoyé sur le générateur σ_i de B_n . Cette inclusion sera essentielle dans notre travail. Enfin, on peut associer à un tel diagramme ou au système de générateurs et relations associé un monoïde unitaire: nous associons ainsi au diagramme précédent le monoïde unitaire des tresses positives, noté B_n^+ . Il n'est pas immédiat mais néanmoins classique que B_n^+ s'injecte canoniquement, en tant que monoïde, dans B_n . Un élément de B_n qui appartient à l'image de B_n^+ sera ainsi appelé une *tresse positive*.

D'après ces définitions, $B_1 = B_1^+ = \{1\}$, $B_2 = \mathbb{Z}$, $B_2^+ = \mathbb{N}$. On a de plus une filtration

$$\{1\} = B_1 \subset \mathbb{Z} = B_2 \subset B_3 \subset \dots \subset B_{n-1} \subset B_n.$$

En général, les inclusions $B_{n-1} \hookrightarrow B_n$ n'admettent pas d'inverse à gauche. Une exception mérite d'être signalée, l'*homomorphisme spécial* $B_4 \rightarrow B_3$ défini par

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\mapsto \sigma_1 \\ \sigma_2 &\mapsto \sigma_2 \\ \sigma_3 &\mapsto \sigma_1 \end{aligned}$$

étant un inverse à gauche de l'injection naturelle $B_3 \subset B_4$.

Une présentation utile de B_3 s'obtient en posant $u = \sigma_1\sigma_2$, $v = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$: la seule relation entre ces deux générateurs est alors $u^3 = v^2$. En fait u^3 engendre le centre de B_3 , donc le quotient de B_3 par son centre est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Nous allons maintenant introduire certains éléments particuliers de B_n qui nous seront utiles. On pose, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \gamma_n &= (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n \\ \delta_n &= (\sigma_{n-1} \dots \sigma_1)(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \gamma_1 = 1 \\ \delta_2 &= \gamma_2 = \sigma_1^2. \end{aligned}$$

On a alors, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \gamma_{n-1}\delta_n = \delta_n\gamma_{n-1} \\ \delta_n &= \sigma_{n-1}\delta_{n-1}\sigma_{n-1}. \end{aligned}$$

Proposition. (Chow [34]) *Pour $n \geq 3$, le centre de B_n est cyclique infini. γ_n est son unique générateur positif.*

On pose $\delta'_2 = \sigma_1$.

Corollaire. $\langle \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n \rangle = \langle \gamma_2, \dots, \gamma_n \rangle$ et $\langle \delta'_2, \delta_3, \dots, \delta_n \rangle = \langle \sigma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_n \rangle$ sont deux sous-groupes commutatifs de B_n pour $n \geq 2$.

Preuve — Pour $n > k \geq 2$, $\delta_k = \gamma_k\gamma_{k-1}^{-1}$ appartient au centralisateur de B_{k-1} dans B_k , donc, si $r < k$, $\delta_k\delta_r = \delta_r\delta_k$, et de même $\delta'_2\delta_k = \delta_k\delta'_2$ pour $k > 2$. cqfd.

Les éléments $\delta_2, \dots, \delta_n$ et leur lien avec γ_n sont connus depuis longtemps. C'est en revanche à Arun Ram (cf. [66]) que l'on doit, à notre connaissance, d'avoir le premier souligné leur rôle primordial dans la théorie des représentations de B_n . Nous appellerons ces éléments les *éléments toriques* de B_n .

1.1.2 Quotients remarquables

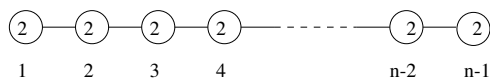
Le groupe symétrique

On note $s_i = (i \ i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ les transpositions consécutives du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , c'est-à-dire ses générateurs de Coxeter. Les relations que vérifient ces générateurs sont alors la relation de localité $s_i s_j = s_j s_i$ si $|i-j| \geq 2$, la relation de tresse $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, ainsi que $s_i^2 = 1$ pour tout indice i .

Un épimorphisme de B_n sur \mathfrak{S}_n , que nous désignerons par π , est uniquement défini par $\sigma_i \mapsto s_i$, et son noyau noté P_n est appelé *groupe des tresses pures sur n brins*. On rappelle que

$$P_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n).$$

De façon diagrammatique, les relations définissant le groupe symétrique sont symbolisées par



où le chiffre r présent à l'intérieur d'un cercle impose au générateur associé d'avoir pour ordre r .

On fixe un corps k , cyclotomique de caractéristique 0.

A un diagramme de ce type, dans lequel r n'est pas forcément égal à 2, on peut associer une algèbre de Hecke cyclotomique [29] sur $\tilde{k} = k(a_1, \dots, a_r)$, quotient de $\tilde{k}B_n$ et définie de façon similaire: on impose aux générateurs s_1, \dots, s_{n-1} les relations de tresse et de localité, et la relation $s_i^r = 1$, c'est-à-dire dans l'algèbre de groupe

$$\prod_{m=1}^r (s_i - e^{\frac{2im\pi}{r}}) = 0,$$

est remplacée par

$$\prod_{m=1}^r (s_i - a_m) = 0.$$

Dans le cas du groupe symétrique, c'est-à-dire pour $r = 2$, on obtient l'algèbre de Hecke générique de type A, déformation de $k\mathfrak{S}_n$ au sens suivant:

Définition 1. *Pour k un corps, on note R une k -algèbre commutative, unitaire et intègre, ϕ un morphisme de k -algèbres de R vers k , et \tilde{k} le corps des fractions de R . Si A est une k -algèbre, on dira qu'une R -algèbre \tilde{A} , libre en tant que R -module, est une déformation de A si*

$$\tilde{A} \otimes_{\phi} k = A.$$

Ici, $R = k[a_1, \dots, a_r]$, \tilde{k} est son corps des fractions, et le morphisme ϕ est donné par $\phi(a_m) = e^{\frac{2im\pi}{r}}$.

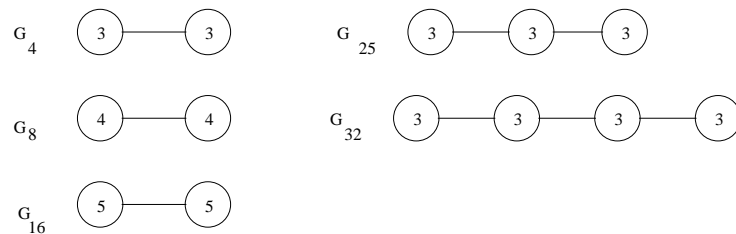
Le principal résultat général dans ce cadre est le

Théorème. *(Tits, [6] ch. 4 ex. 26) Avec les notations de la définition précédente, si A est semi-simple et $\dim_{\tilde{k}}(\tilde{A} \otimes_R k) < \infty$, alors $(\tilde{A} \otimes_R k)$ est semi-simple et admet même invariant numérique que $A \otimes_k \tilde{k}$; en d'autres termes, ces deux algèbres deviennent isomorphes après extension des scalaires à une clôture algébrique de \tilde{k} .*

Tits a lui-même démontré que l'on est dans le cadre de son théorème pour l'algèbre de Hecke de type A (cf. Bourbaki [6] ch. 4 ex. 27). Des isomorphismes explicites ont été plus récemment exhibés par George Lusztig [59], Ivan Cherednik [33] et Jorge González-Lorca [42]. Enfin, une description explicite des représentations de cette algèbre de Hecke a été obtenue par P.N. Hoefsmit dès le début des années 70, dans une thèse malheureusement toujours inédite [45].

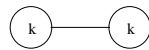
Groupes de réflexions complexes

Parmi les groupes de réflexions simples, seuls les groupes symétriques apparaissent comme quotients des groupes de tresses. Parmi les groupes de réflexions complexes simples, il apparaît en revanche cinq groupes supplémentaires, exceptionnels dans la classification de Shephard et Todd [67]



Ces groupes sont des groupes finis, quotients d'un groupe de tresses.

Cette situation est exceptionnelle, dans la mesure où si l'on considère par exemple le groupe associé au diagramme



pour $k \geq 6$, il admet une représentation de degré 2 définie pour $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$ par

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Il est alors élémentaire de vérifier que l'image de $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ admet des valeurs propres non racines de l'unité dès que $k \geq 6$: cet élément est donc d'ordre infini, ainsi que le groupe auquel il appartient (cet exemple nous a été communiqué par Gunter Malle [60]).

Les algèbres de Hecke cyclotomiques associées à ces groupes de réflexions complexes, étudiées dans [29] [28], sont des déformations des algèbres de groupes. Il a été conjecturé par Michel Broué et Gunter Malle [28] que les algèbres de Hecke cyclotomiques associées aux groupes de réflexions complexes sont de dimension finie, donc que le théorème de Tits s'applique.

Pour les groupes qui nous intéressent ici, cette conjecture n'a été à notre connaissance démontrée que pour G_4 , G_{25} (Broué-Malle, [28]), G_8 et G_{16} (Müller [63]). Le cas de G_{32} reste malheureusement conjectural à l'heure actuelle.

En tout état de cause, à partir du point de vue développé dans [29], on peut montrer que chacune des représentations irréductibles de ces groupes se déforme, en un sens compatible avec la définition 1, en une représentation irréductible de l'algèbre de Hecke correspondante.

On remarque enfin que G_4 s'injecte dans G_{25} , G_{25} dans G_{32} . Il en est évidemment de même pour les algèbres de Hecke correspondantes.

L'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami

Pour la définition de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami, abrégée ici en BWM ou BWM_n , nous renvoyons à [26] [64]. Cette algèbre a été introduite comme quotient de l'algèbre de groupe du groupe de tresses afin de faire apparaître le polynôme de Kauffman des nœuds [48] comme trace sur cette algèbre. Ces algèbres BWM_n dépendent de deux paramètres l et m , et on a

Théorème. (Wenzl, [26]) *Pour des valeurs génériques de l et m ,*

- 1) $BWM_n(l, m)$ est une algèbre semi-simple de dimension finie.
- 2) Les représentations irréductibles de $BWM_n(l, m)$ sont en bijection avec les partitions $\lambda \vdash N$ pour $0 \leq N \leq n$.
- 3) La restriction à $BWM_{n-1}(l, m)$ d'une telle représentation associée à un diagramme de Young $\lambda \vdash N$ est sans multiplicités. Ses facteurs simples correspondent aux diagrammes de Young de taille au plus $n - 1$ déduits de λ par ajout ou suppression d'une boîte.

L'algèbre de Hecke de type A est enfin un quotient d'une spécialisation en (l, m) de cette algèbre de Birman-Wenzl-Murakami.

Le groupe symétrique étendu

Dans [70], Tits a montré comment associer à tout groupe de Coxeter G défini par une matrice de Cartan une extension \tilde{G} , appelée groupe de Coxeter étendu

$$1 \rightarrow A \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

extension de G par un groupe abélien A . Si l'on note B le groupe de tresses généralisé de G au sens de [29], et π la projection naturelle

$$\pi : B \rightarrow G,$$

alors A est isomorphe au groupe dérivé $P/[P, P]$, avec $P = \text{Ker } \pi$, et on a le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & [P, P] & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & P & \longrightarrow & B & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & 1 \longrightarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 1 \longrightarrow & A & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Le groupe \tilde{G} est alors extension de G par A , et A est un \mathbb{Z} -module libre de rang le nombre de réflexions de G . La propriété essentielle de \tilde{G} est pour nous que toute représentation de B pour laquelle l'image de P est commutative se factorise par \tilde{G} .

Dans le cas particulier où $G = \mathfrak{S}_n$, on a ainsi défini un quotient $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ remarquable de B_n , que nous appellerons *groupe symétrique étendu*, extension de \mathfrak{S}_n par le \mathbb{Z} -module libre de rang $n(n-1)/2$. Nous noterons τ_{ij} les générateurs du noyau de l'extension, images des générateurs traditionnels de P_n (cf. Birman [2]) dans $P_n/[P_n, P_n]$.

1.2 Tresses infinitésimales

1.2.1 Définition

On fixe un corps k de caractéristique 0.

Définition 2. On note \mathcal{T}_n l'algèbre de Lie définie sur k par générateurs $t_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et relations

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ji} & t_{ii} &= 0 \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 & si \ \#\{i, j, k, l\} &= 4 \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] &= 0. \end{aligned}$$

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur \mathcal{T}_n par

$$s.t_{ij} = t_{s(i)s(j)}.$$

Cela permet de construire

Définition 3. On note \mathfrak{B}_n et l'on appelle algèbre des tresses infinitésimales sur n brins le produit semi-direct $\mathfrak{S}_n \ltimes U\mathcal{T}_n$ où $U\mathcal{T}_n$ désigne l'algèbre enveloppante universelle de \mathcal{T}_n .

Par construction, chacune des algèbres $U\mathcal{T}_n$ et \mathfrak{B}_n est canoniquement munie d'une structure d'algèbre de Hopf graduée. En particulier, le coproduit Δ vérifie, si l'on note s une permutation quelconque de \mathfrak{S}_n ,

$$\begin{aligned} \Delta(t_{ij}) &= 1 \otimes t_{ij} + t_{ij} \otimes 1 \\ \Delta(s) &= s \otimes s \end{aligned}$$

et la graduation est définie par $\deg(t_{ij}) = 1$, $\deg(s) = 0$.

Notons enfin l'existence d'un morphisme d'algèbres de Lie $\mathcal{T}_n \rightarrow k\mathfrak{S}_n$ défini par

$$t_{ij} \mapsto (i \ j)$$

qui se prolonge en un morphisme d'algèbres $\mathfrak{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \ltimes k\mathfrak{S}_n$ où \mathfrak{S}_n opère sur son algèbre de groupe par conjugaison.

Remarque. L'algèbre \mathfrak{B}_n peut être définie autrement que par générateurs et relations. C'est par exemple l'algèbre naturellement associée aux invariants de Vassiliev des tresses. Quant à l'algèbre $U\mathcal{T}_n$, c'est la duale de Koszul de l'algèbre de cohomologie du groupe des tresses pures sur n brins, décrite par Arnold [22]. On peut, de cette façon, interpréter motiviquement \mathcal{T}_n comme l'algèbre de Lie du π_1 "de Rham" de \mathbb{C}_*^n (cf. Deligne [36]). \mathcal{T}_n peut enfin être définie sur \mathbb{Z} comme la \mathbb{Z} -algèbre de Lie associée à la suite centrale descendante de P_n , suivant le procédé décrit dans Bourbaki [5], ch. 2 §4: cf. Kohno [49].

Nous allons maintenant décrire des éléments particuliers de \mathfrak{B}_n , analogues aux éléments δ_k de B_n .

On note

$$\mathbf{T}_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} \text{ avec } \mathbf{T}_2 = t_{12}, \mathbf{T}_1 = 0.$$

Comme, pour tous i et j , $t_{ij} = t_{ji}$ et $t_{ii} = 0$, on a

$$\mathbf{T}_n = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} t_{ij}.$$

Sous cette forme, il est évident que \mathbf{T}_n commute à toute permutation de \mathfrak{S}_n , et, d'autre part, si $1 \leq r, s \leq n$,

$$\begin{aligned} 2[t_{rs}, \mathbf{T}_n] &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} [t_{rs}, t_{ij}] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [t_{rs}, t_{ri}] + [t_{rs}, t_{si}] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [t_{rs}, t_{ri} + t_{is}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

On définit alors pour $n \geq 2$,

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}_n - \mathbf{T}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} t_{i,n}.$$

On déduit de cette expression que \mathbf{t}_n appartient au commutant de \mathfrak{B}_{n-1} dans \mathfrak{B}_n , et que la sous-algèbre de \mathfrak{B}_n engendrée par $\mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n$ est commutative. Ces éléments vérifient la relation

$$s_n \mathbf{t}_n s_n + t_{n,n+1} = \mathbf{t}_{n+1}.$$

Nous appellerons ces éléments \mathbf{t}_k les *éléments toriques* de \mathfrak{B}_n , et on posera par convention $\mathbf{t}_1 = 0$.

Dans les sections I.1.2.2 à I.1.2.5, nous supposons $k = \mathbb{C}$. En particulier, UT_n et \mathfrak{B}_n seront des \mathbb{C} -algèbres.

1.2.2 Equations KZ et “intégration” des représentations

On note V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et on considère le fibré trivial $V \times \mathbb{C}_*^n$ au-dessus de \mathbb{C}_*^n . On considère la 1-forme, dite de Knizhnik-Zamolodchikov

$$\omega = \frac{h}{\pi i} \sum_{i < j} \Omega_{i,j} d \log(z_i - z_j) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{i,j} \Omega_{i,j} d \log(z_i - z_j)$$

où h est un paramètre scalaire, $\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}$ un élément de $End(V)$, et $\Omega_{ii} = 0$. A cette 1-forme sont naturellement associées une équation différentielle et une connection sur le fibré trivial, également dites de Knizhnik-Zamolodchikov, ou KZ. On a alors (cf. [15])

Lemme. *La connection associée à ω est plate si et seulement si $\rho : t_{ij} \mapsto \Omega_{ij}$ définit une représentation de \mathcal{T}_n . Si de plus ρ se prolonge en une représentation de \mathfrak{B}_n , alors ω définit une connection plate sur le fibré vectoriel $(V \times \mathbb{C}_*^n)/\mathfrak{S}_n$ au-dessus de $\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n$.*

Or, si la connection associée à ω est plate, elle définit par holonomie après choix d'un point base \underline{z} de \mathbb{C}_*^n (resp. $\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n$) une représentation de $\pi_1(\mathbb{C}_*^n) = P_n$ (resp. $\pi_1(\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n) = B_n$)

sur V . On note $V_{\underline{z}}$ la fibre au-dessus de \underline{z} (resp. au-dessus de la classe de \underline{z} dans $\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n$), et $\int_h V_{\underline{z}}$ la représentation ainsi obtenue. Si \underline{z}' est un autre point base, on a

$$\int_h V_{\underline{z}} \simeq \int_h V_{\underline{z}'}$$

Suivant un autre point de vue, on considère la partie simplement connexe de \mathbb{C}_*^n

$$D = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_1 < z_2 < \dots < z_n\}$$

et ses translatés par $s \in \mathfrak{S}_n$

$$D_s = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_{s^{-1}(1)} < z_{s^{-1}(2)} < \dots < z_{s^{-1}(n)}\}.$$

On note \overline{D} l'image de D dans $\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n$. Pour tout domaine U de \mathbb{C}_*^n , on désignera par $\Gamma(U)$ l'ensemble des solutions sur U de l'équation KZ

$$dF = \omega F$$

où F est une fonction de U vers V . On identifie les $\Gamma(U)$, pour U un voisinage ouvert simplement connexe de D (resp. \overline{D}) dans \mathbb{C}_*^n (resp. $\mathbb{C}_*^n/\mathfrak{S}_n$), sous la notation $\Gamma(D)$ (resp. $\Gamma(\overline{D})$). Pour tout $\underline{z} \in D$, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D) & \rightarrow & V \\ F & \mapsto & F(\underline{z}) \end{array}$$

donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, si l'on note $\int_h V$ l'action de P_n (resp. B_n) ainsi obtenue sur $\Gamma(D)$ (resp. $\Gamma(\overline{D})$), on a

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{C}_*^n \quad \int_h V \simeq \int_h V_{\underline{z}}.$$

Remarquons maintenant

Proposition 1. *Soit (V, ρ) une représentation de \mathfrak{B}_n , $n \geq 2$. On note $\Omega_{i,j} = \rho(t_{ij})$. Si $\rho(\mathcal{T}_n)$ est une algèbre de Lie commutative, alors l'action de $\sigma_i \in B_n$ sur $\int_h(V, \rho)$ est donnée par*

$$\sigma_i(h) = \rho(s_i) e^{h\Omega_{i,i+1}}.$$

Preuve — On note $z = (z_1, \dots, z_n)$, et l'on considère

$$H(z) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\frac{h}{i\pi} \Omega_{ij}},$$

fonction localement définie de \mathbb{C}_*^n vers $End(V)$. Comme la famille des Ω_{ij} commute par hypothèse, les solutions locales de l'équation différentielle KZ sur \mathbb{C}_*^n sont les $z \mapsto H(z)v$, pour $v \in V$. La conclusion découle alors du calcul, élémentaire, de la monodromie de $(z_i - z_{i+1})^A$, pour $A = \frac{h}{i\pi} \Omega_{i,i+1}$. cqfd.

En conséquence, si (V, ρ) est une représentation de \mathfrak{B}_n pour $n \geq 1$, on peut définir pour tout $h \in \mathbb{C}$ la représentation $\int_h V$ de $\mathbb{C}B_n$ en définissant l'action de σ_i pour $1 \leq i \leq n-1$ comme $\rho(s_i) \exp(h\rho(t_{i,i+1}))$.

Enfin, on a d'évidence

$$\begin{array}{ccc} \int_h (V \oplus W) & \simeq & (\int_h V) \oplus (\int_h W) \\ \int_h (V \otimes W) & \simeq & (\int_h V) \otimes (\int_h W). \end{array}$$

1.2.3 Propriétés locales

On note $\omega = h\omega_1$, et $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in D$ un point base de \mathbb{C}_*^n . On rappelle que $\mathbb{C}\{h\}$ désigne l'anneau des fonctions entières de h , c'est-à-dire des séries entières en h de rayon de convergence infini. Si γ est un lacet de $(\mathbb{C}_*^n, \underline{z})$, l'action, encore notée $[\gamma]$, de $[\gamma] \in P_n$ sur $V_{\underline{z}}$ est donnée par les intégrales itérées de Chen (cf. Chen [32])

$$\begin{aligned} [\gamma] &= 1 + \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} \omega \omega + \int_{\gamma} \omega \omega \omega + \dots \\ &= 1 + h \int_{\gamma} \omega_1 + h^2 \int_{\gamma} \omega_1 \omega_1 + h^3 \int_{\gamma} \omega_1 \omega_1 \omega_1 + \dots \end{aligned}$$

Il est classique que cette expression est convergente en h , de rayon de convergence infinie : si l'on note $M = \|\gamma^* \omega_1\|_{\infty}$, on a

$$\left| \int_{\gamma} \underbrace{\omega_1 \omega_1 \dots \omega_1}_{r \text{ facteurs}} \right| \leq \frac{M^r}{r!}.$$

On associe ainsi à tout élément de P_n une *fonction entière* de h . De même, si γ est un lacet de $\mathbb{C}_*^n / \mathfrak{S}_n$ dans la classe d'homotopie $\sigma \in B_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n / \mathfrak{S}_n)$, il se relève en un chemin de \mathbb{C}_*^n d'origine \underline{z} et but $\pi(\sigma)(\underline{z})$. L'action de l'holonomie de γ , donc de σ , est ainsi donnée par

$$\sigma(h) = \pi(\sigma)^{-1} \left(1 + h \int_{\gamma} \omega_1 + h^2 \int_{\gamma} \omega_1 \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_1 \omega_1 \omega_1 + \dots \right),$$

qui est encore une fonction entière de h .

Considérons par exemple, pour $1 \leq i \leq n-1$, le chemin

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}_*^n$$

défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(t) = z_1 \\ \dots \\ \gamma_{i-1}(t) = z_{i-1} \\ \gamma_i(t) = \frac{z_i + z_{i+1}}{2} - \frac{z_{i+1} - z_i}{2} e^{i\pi t} \\ \gamma_{i+1}(t) = \frac{z_i + z_{i+1}}{2} + \frac{z_{i+1} - z_i}{2} e^{i\pi t} \\ \gamma_{i+2}(t) = z_{i+2} \\ \dots \\ \gamma_n(t) = z_n \end{array} \right.$$

soit, graphiquement,

$$z_1 \quad \dots \quad z_i \begin{array}{c} \xleftarrow{\gamma_{i+1}} \\ \xrightarrow{\gamma_i} \end{array} z_{i+1} \quad \dots \quad z_n$$

Un calcul élémentaire montre

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \Omega_{i, i+1} + \frac{1}{i\pi} \sum_{j \neq i, i+1} (\Omega_{i+1, j} - \Omega_{i, j}) \log \left| \frac{z_i + z_{i+1} - 2z_j - 1}{z_i + z_{i+1} - 2z_j + 1} \right|.$$

On a $\gamma(0) = \underline{z}$, $\gamma(1) = s_i(\underline{z})$. Dans le quotient $\mathbb{C}_*^n / \mathfrak{S}_n$, γ devient un lacet de classe σ_i , et comme $s_i^{-1} = s_i$, on obtient pour l'action de σ_i

$$s_i \left(1 + h \int_{\gamma} \omega_1 \right) + o(h).$$

On en déduit

Proposition 2. *Soit $\underline{z} \in D$, et (V, ρ) une représentation de \mathfrak{B}_n . Si l'on note $\Omega_{ij} = \rho(t_{ij})$, et $\sigma(h)$ l'action de $\sigma \in B_n = \pi_1(\mathbb{C}_*^n / \mathfrak{S}_n, \underline{z})$ sur $\int_h V_{\underline{z}}$, on a*

1) $\sigma_i(h)$ est une fonction entière de h .

2) $\sigma_i(h) = s_i(1 + h\Omega_{i,i+1} + h \sum_{j \neq i, i+1} (\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j})\alpha_{i,j}) + o(h)$ avec

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{i\pi} \log \left| \frac{z_i + z_{i+1} - 2z_j - 1}{z_i + z_{i+1} - 2z_j + 1} \right|.$$

3) $\sigma_i^2(h) = 1 + 2h\Omega_{i,i+1} + o(h)$.

4) $\delta_i(h) = 1 + 2h\rho(\mathbf{t}_i) + o(h)$.

5) $\gamma_i(h) = 1 + 2h\rho(\mathbf{T}_i) + o(h)$.

Preuve — Les propriétés 1) et 2) viennent d'être démontrées. De

$$s_i(\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i,j}) = (\Omega_{i,j} - \Omega_{i+1,j})s_i$$

on déduit 3). On démontre enfin 4) puis 5) par une récurrence immédiate à partir de $\delta_1 = \sigma_1^2$ et $\delta_{m+1} = \sigma_m \delta_m \sigma_m$, le cas $m = 2$ découlant de 3), et l'expression au premier ordre de $\sigma_i(h)$ étant connue d'après 2). cqfd.

A toute représentation (V, ρ) de \mathcal{T}_n (resp. de \mathfrak{B}_n) et à tout point base \underline{z} on peut ainsi associer une représentation, notée $\int V_{\underline{z}}$, de P_n (resp. B_n) sur $\mathbb{C}\{h\}$. Le $\mathbb{C}\{h\}$ -module sous-jacent de $\int V_{\underline{z}}$ est $\mathbb{C}\{h\} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\underline{z}}$, si \underline{z}' est un autre point base $\int V_{\underline{z}} \simeq \int V_{\underline{z}'}$ et, pour tout $\kappa \in \mathbb{C}$, le morphisme de spécialisation

$$\begin{array}{ccc} \phi_\kappa : & \mathbb{C}\{h\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ & h & \mapsto \kappa \end{array}$$

induit un morphisme P_n -équivariant (resp. B_n -équivariant) surjectif

$$\tilde{\phi}_\kappa \simeq \phi_\kappa \otimes Id_V : \int V_{\underline{z}} \rightarrow \int_\kappa V_{\underline{z}}.$$

L'ensemble des zéros d'une fonction entière étant un ensemble localement fini, il est utile d'adopter la convention suivante:

Définition 4. *Si (V, ρ) est une représentation de \mathcal{T}_n (resp. de \mathfrak{B}_n), on dira qu'une propriété de $\int_h V$ est vérifiée pour presque tout h s'il existe une partie N de \mathbb{C} localement finie telle que $\int_h V$ vérifie cette propriété pour tout $h \in \mathbb{C} \setminus N$.*

Revenant à la proposition précédente, on remarque que le terme linéaire dans l'expression de $\sigma_i^2(h)$ ne dépend pas du point base. Il n'en est pas de même pour $\sigma_i(h)$ mais, si l'on considère par exemple la fonction, polynomiale en h ,

$$\Psi_i(h) = 1 - h \sum_{j \neq i, i+1} \alpha_{i,j} \Omega_{i+1,j},$$

elle est inversible au voisinage de 0 et, si l'on pose $X_i = \sum_{j \neq i, i+1} \alpha_{i,j} \Omega_{i+1,j}$,

$$\begin{aligned} \Psi_i^{-1}(h) \sigma_i(h) \Psi_i(h) &\equiv (1 + hX_i) s_i (1 + h\Omega_{i,i+1} + hX_i - h s_i X_i s_i) (1 - hX_i) \\ &\equiv s_i + h(X_i s_i + s_i \Omega_{i,i+1} + s_i X_i - X_i s_i - s_i X_i) \pmod{h} \end{aligned}$$

soit $\Psi_i^{-1}(h) \sigma_i(h) \Psi_i(h) = s_i(1 + h\Omega_{i,i+1}) + o(h)$ au voisinage de 0. Ainsi, on peut espérer obtenir après conjugaison une expression de σ_i qui ne dépende pas du point base. Il est plus astucieux et plus classique de considérer la monodromie par rapport à un point à l'infini, c'est-à-dire que l'on prend comme point base $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et que l'on considère la limite à l'infini obtenue pour $z_1 \ll z_2 \ll \dots \ll z_n$ (cf. I.1.2.5).

1.2.4 Irréductibilité et restrictions

Soit M un \mathcal{T}_n -module (resp. un \mathfrak{B}_n -module) simple correspondant à une représentation (V, ρ) irréductible. Nous allons montrer que, pour presque tout h , $\int_h M := \int_h V$ est irréductible. Pour ce faire, nous fixons un point base \underline{z} et, pour $\sigma \in \mathbb{C}B_n$, nous notons

$$\sigma(h) \in \mathbb{C}\{h\} \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}(V)$$

l'action de $\sigma \in \mathbb{C}B_n$ sur $\int V_{\underline{z}}$.

On rappelle que \mathfrak{B}_n est muni d'une graduation définie par $\deg t_{ij} = 1$ et $\deg s = 0$ pour $s \in \mathfrak{S}_n$. On a alors

Lemme 1. *Pour tout élément homogène a de \mathfrak{B}_n , il existe un élément σ de $\mathbb{C}B_n$ tel que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-\deg a} \sigma(h) = a.$$

Preuve — Comme \mathfrak{B}_n est engendrée par des éléments de degré 0 et 1, il suffit de montrer cette proposition pour $a \in \mathfrak{S}_n$ et $a = t_{12}$. Or, si a est une permutation, on déduit de la surjectivité de la projection $\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ un élément $\sigma \in B_n$ tel que $\pi(\sigma) = a$, soit $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = a$. Si $a = t_{12}$, $\deg a = 1$ et

$$t_{12} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \frac{\sigma_1^2(h) - 1}{2}.$$

cqfd.

On en déduit

Proposition 3. *Si M est un \mathcal{T}_n -module (resp. un \mathfrak{B}_n -module) simple, pour presque tout h la représentation de P_n (resp. de B_n) associée est irréductible.*

Preuve — On suppose donc que M est un \mathfrak{B}_n -module simple. D'après le théorème de Burnside, cela signifie que le morphisme $\mathfrak{B}_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ est surjectif. Comme \mathfrak{B}_n est graduée, les éléments homogènes en forment une base, et, si $m = \dim M$, il existe une famille a_1, a_2, \dots, a_{m^2} d'éléments homogènes de \mathfrak{B}_n dont l'image engendre $\text{End}_{\mathbb{C}}(M)$. Comme $\dim \text{End}_{\mathbb{C}}(M) = m^2$, on en déduit que $\det(a_1, \dots, a_{m^2}) \neq 0$. A ces éléments correspondent par le lemme précédent des éléments $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(m^2)}$ de l'image de $\mathbb{C}B_n$ dans $\mathbb{C}\{h\} \otimes_{\mathbb{C}} \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$, et des naturels $\alpha_1, \dots, \alpha_{m^2}$ tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma^{(i)} h^{-\alpha_i} = a_i.$$

On note alors

$$Q_1(h) = \det(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(m^2)}) \in \mathbb{C}\{h\}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{m^2} \alpha_i \\ Q_2 &= h^{-\alpha} Q_1(h) = \det(h^{-\alpha_1} \sigma^{(1)}, \dots, h^{-\alpha_{m^2}} \sigma^{(m^2)}). \end{aligned}$$

On a $Q_2(h) \in \mathbb{C}\{h\}$ et $Q_2(0) = \det(a_1, \dots, a_{m^2}) \neq 0$. Ainsi, $Q_2 \neq 0$, donc $Q_1 \neq 0$. En dehors d'un ensemble localement fini on a donc $Q_1(h) \neq 0$, et $\int_h M$ est simple. Le cas où M est un \mathcal{T}_n -module se démontre de la même façon. cqfd.

Comme conséquence immédiate, on obtient le

Corollaire. *Si M est un \mathcal{T}_n -module (resp. un \mathfrak{B}_n -module) semi-simple, pour presque tout h la représentation de P_n (resp. B_n) associée est semi-simple.*

D'autre part, on a

Proposition 4. *Soient (V, ρ_A) et (V, ρ_B) deux représentations de \mathfrak{B}_n sur un espace vectoriel de dimension p , avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que, pour presque tout h suffisamment proche de 0, on a $\int_h (V, \rho_A) \simeq \int_h (V, \rho_B)$. Alors,*

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}(V, \rho_A) \simeq \text{Res}_{\mathfrak{S}_n}(V, \rho_B).$$

Preuve — On note $\sigma_i^A(h)$ (resp. $\sigma_i^B(h)$) l'action de $\sigma_i \in B_n$ sur $\int_h (V, \rho_A)$ (resp. $\int_h (V, \rho_B)$). On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_i^A(h) = \rho_A(s_i) \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_i^B(h) = \rho_B(s_i).$$

D'autre part, pour presque tout h suffisamment proche de 0, il existe $P(h) \in GL(V)$ tel que $P(h)^{-1} \sigma_i^A(h) P(h) = \sigma_i^B(h)$. Comme l'ensemble des $\|P(h)^{-1}\| \|P(h)\|$ est majoré de façon indépendante de h , si $\|\cdot\|$ désigne la norme d'opérateurs, on en déduit

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(h)^{-1} \rho_A(s_i) P(h) = \lim_{h \rightarrow 0} P(h)^{-1} \sigma_i^A(h) P(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_i^B(h) = \rho_B(s_i).$$

Puisque la restriction de ρ_A à \mathfrak{S}_n , comme toute représentation de \mathfrak{S}_n , est semi-simple, sa classe de conjugaison est fermée (cf. Lubotzky et Magid [58]), et on a bien la conclusion voulue. cqfd.

Une autre propriété remarquable est que ce procédé d'intégration est compatible avec les filtrations

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{n-1} &\subset \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1} \\ B_{n-1} &\subset B_n \subset B_{n+1}. \end{aligned}$$

Proposition 5. *Si (V, ρ) est une représentation de \mathfrak{B}_n avec $n \geq 3$, alors pour h suffisamment petit*

$$\text{Res}_{B_{n-1}} \int_h V \simeq \int_h \text{Res}_{\mathfrak{B}_{n-1}} V.$$

Preuve — On appelle KZ_n l'équation différentielle KZ sur \mathbb{C}_*^n . Nous renvoyons ici à la thèse de Jorge González-Lorca [42], qui détaille des arguments de Drinfeld [38].

Si l'on considère l'équation KZ_n , non plus à valeurs dans V ou $End(V)$, mais dans \widehat{UT}_n , on a localement un isomorphisme entre les solutions $F(z_1, \dots, z_n)$ de KZ_n et les solutions $G(z_1, \dots, z_{n-1})$ de KZ_{n-1} , donné par

$$F(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n)G(z_1, \dots, z_{n-1})$$

où $f(z_1, \dots, z_n)$ est, pour z_1, \dots, z_{n-1} fixés, l'unique solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dz_n} = \sum_{1 \leq i < n} \frac{t_{in}}{z_n - z_i} f$$

à valeurs dans \widehat{UT}_n telle que

$$f(z_1, \dots, z_n) \sim (z_n - z_1)^{t_n}.$$

Les arguments de Jorge González-Lorca (premier corollaire du théorème 2.1) restent valables si l'on spécialise les séries formelles en les t_{ij} en $\Omega_{ij} = \rho(t_{ij})$. La seule difficulté est la convergence des solutions formelles pour h suffisamment petit, pour laquelle nous renvoyons au 2^e mémoire de Lappo-Danilevskii [17], en particulier au théorème VI.

La monodromie d'une telle fonction f par rapport aux σ_i , pour $1 \leq i < n - 1$, est alors triviale, et l'on en déduit immédiatement l'isomorphisme de l'énoncé. cqfd.

Corollaire. *Si (V, ρ) est une représentation de \mathfrak{B}_n et $\Omega_{ij} = \rho(t_{ij})$, pour tout $h \in \mathbb{C}$ le spectre compté avec multiplicités de l'action de σ_i sur $\int_h V$ est égal à celui de*

$$\rho(s_i) \exp(h\Omega_{i,i+1}).$$

Preuve — Chaque σ_i pour $1 \leq i \leq n - 1$ étant conjugué dans B_n à σ_1 , et chaque $\rho(s_i) \exp(h\Omega_{i,i+1})$ étant conjugué à $\rho(s_1) \exp(h\Omega_{12})$, il suffit de montrer cette assertion pour $i = 1$. D'après ce qui précède, pour h suffisamment petit,

$$Res_{B_2} \int_h V \simeq \int_h Res_{\mathfrak{B}_2} V.$$

Comme \mathcal{T}_2 est une algèbre de Lie commutative, il découle de la proposition 1 que l'action de σ_1 sur $\int_h Res_{\mathfrak{B}_2} V$ est égale à $\rho(s_1) \exp(h\Omega_{12})$. L'isomorphisme précédent donne alors le résultat voulu pour h suffisamment petit.

Si \underline{z} est un point base de \mathbb{C}_*^n , l'action de σ_1 sur $\int_h V_{\underline{z}}$ est une fonction entière de h , que nous notons provisoirement $\sigma_1^{\underline{z}}(h)$. Les coefficients des polynômes caractéristiques respectifs de $\sigma_1^{\underline{z}}(h)$ et $\rho(s_1) \exp(h\Omega_{12})$ sont des fonctions entières de h , égales pour h suffisamment petit. On en déduit que les polynômes caractéristiques sont égaux pour tout h , d'où la conclusion. cqfd.

L'intérêt du corollaire précédent réside bien évidemment en ce que s_i et $t_{i,i+1}$ commutent, et qu'ainsi le spectre des générateurs d'Artin se déduit immédiatement d'une diagonalisation simultanée de $\rho(s_i)$ et $\Omega_{i,i+1}$.

1.2.5 Monodromie à l'infini

Dans cette section, on considère des représentations (V, ρ) de \mathfrak{B}_n , et on introduit une hypothèse de diagonalisabilité des éléments toriques

$$(TDIAG) \quad \forall i \quad \rho(\mathbf{t}_i) \text{ est semi-simple.}$$

Sous cette hypothèse, on peut considérer l'action par monodromie de B_n par rapport au "point à l'infini" noté symboliquement $\underline{z}_\infty = (z_1 \ll z_2 \ll \dots \ll z_n)$. Cela consiste à effectuer le changement de variables

$$\begin{aligned} u_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n \\ u_{n-1} &= \frac{z_{n-1} - z_n}{z_{n-2} - z_{n-1}} \\ &\vdots \\ u_2 &= \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2} \\ u_1 &= z_1 - z_2 \end{aligned}$$

dans l'équation KZ, et à étudier le comportement des solutions de KZ quand $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tend vers 0. Pour $n = 3$, l'équation KZ s'écrit en ces variables

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_2} &= h \left(\frac{\Omega_{12}}{u_2} + \frac{\Omega_{23}}{1+u_2} \right) F \\ \frac{\partial F}{\partial u_3} &= h \frac{\Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{23}}{u_3} F. \end{aligned}$$

De façon plus générale, on obtient (cf. [8] lemme 8.2.3)

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial u_k} = h \frac{\rho(\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 + \dots + \mathbf{t}_k)}{u_k} F + R_k(\underline{u})F \text{ pour } k \geq 1,$$

où R_k est une fonction rationnelle de \underline{u} à valeurs dans $End(V)$, qui est régulière en $\underline{u} = 0$. On en déduit, d'après le théorème 8.2.6 de [8], que si (V, ρ) vérifie (TDIAG), il existe $r > 0$ tel que, pour tout $0 < |h| < r$ et $\varphi : D \rightarrow V$ solution de l'équation KZ,

$$\lim_{\underline{u} \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-h\rho(\mathbf{t}_2 + \dots + \mathbf{t}_i)} \varphi(\underline{u}) = \hat{\varphi}$$

existe, et l'application

$$\begin{aligned} \Gamma(D) &\rightarrow V \\ \varphi &\mapsto \hat{\varphi} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Cette construction présente l'avantage, d'une part de se libérer de la dépendance au point base, et d'autre part de rendre uniformes les isomorphismes

$$\int Res_{\mathfrak{B}_{n-1}} V \simeq Res_{B_{n-1}} \int V.$$

L'étude de la monodromie par rapport au point base à l'infini a été effectuée par Drinfeld [38], dans le cas où h est considérée comme une *variable formelle*. Les problèmes de convergence que posent cette approche sortent du cadre de ce travail. Il est en particulier vraisemblable que, lorsque les représentations sur $\mathbb{C}[[h]]$ obtenues par Drinfeld sont entières, elles sont isomorphes aux représentations sur $\mathbb{C}\{h\}$ que l'on a jusqu'à présent considérées. Les résultats de [8] obtenus sous l'hypothèse (TDIAG) sont un premier pas dans cette direction.

1.2.6 Intégration formelle et propriétés locales

On considère à nouveau un corps k de caractéristique 0. On note $\tilde{k} = k[[h]]$ et, pour M un k -espace vectoriel (resp. une k -algèbre), on note $\tilde{M} = M[[h]]$ muni de la structure de \tilde{k} -espace vectoriel (resp. \tilde{k} -algèbre) associée. D'autre part, nous considérons \mathfrak{B}_n et \mathcal{T}_n comme définies par générateurs et relations non plus sur \mathbb{C} , mais sur ce même corps k .

Nous ne définirons pas ici les associateurs de Drinfeld. Pour une définition précise, nous renvoyons par exemple à Kassel [15], ou à tout autre ouvrage traitant des groupes quantiques. Il nous suffira de savoir qu'un associateur de Drinfeld Φ à coefficients dans k est l'exponentielle d'une série de Lie en deux variables A et B , dont le terme de degré zéro vaut 1 et le terme linéaire est nul, qui permet de définir des morphismes d'algèbres de Hopf

$$\begin{aligned} \tilde{k}B_n &\rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}_n \\ \sigma_r &\mapsto \Phi_r^{-1} s_r \exp(ht_{r,r+1}) \Phi_r \end{aligned}$$

où $\Phi_r = \Phi(ht_r, ht_{r,r+1})$. De cette manière, un associateur Φ étant choisi, on peut associer à toute représentation R de degré fini sur k de \mathfrak{B}_n une représentation notée $\int_{\Phi} R$ de B_n sur \tilde{k} .

On a alors le résultat

Théorème. (Drinfeld, [38]) *La monodromie universelle de l'équation KZ par rapport au point base à l'infini est exprimée par un associateur Φ_{KZ} à coefficients dans \mathbb{C} . Il existe un associateur à coefficients rationnels, donc pour tout corps de coefficients de caractéristique 0.*

Le procédé d'intégration formelle des représentations que nous venons de décrire peut donc être défini sur un corps k de caractéristique 0. Fixons un tel associateur Φ à coefficients dans k et remarquons que, dans ce cadre, certaines des propriétés que nous avons démontrées concernant $\int_h M$ sont bien plus évidentes pour $\int_{\Phi} M$. En particulier, si l'image de \mathcal{T}_n dans $End_k(M)$ est commutative, pour tout i l'opérateur de conjugaison Φ_i vaut 1 et l'action de σ_i est $s_i \exp(ht_{i,i+1})$. De même, il est clair que

$$Res_{\tilde{k}B_{n-1}} \int_{\Phi} M \simeq \int_{\Phi} Res_{\mathfrak{B}_{n-1}} M.$$

Enfin, à l'ordre 1 en h , les expressions se simplifient par rapport à $\int_h V$:

Proposition 6. *Si M est une représentation de \mathfrak{B}_n , et Φ un associateur de Drinfeld, on a sur $\int_{\Phi} M$ au premier ordre en h*

- 1) $\sigma_k = s_k(1 + ht_{k,k+1}) + o(h)$.
- 2) $\sigma_k^2 = 1 + 2ht_{k,k+1} + o(h)$.
- 3) Pour $k \geq 2$, $\delta_k = 1 + 2ht_k + o(h)$.
- 4) Pour $k \geq 2$, $\gamma_k = 1 + 2h\mathbf{T}_k + o(h)$.

Preuve — La propriété 1) découle de

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \Phi_k^{-1} s_k \exp(ht_{k,k+1}) \Phi_k \\ &= (1 + o(h)) s_k (1 + ht_{k,k+1} + o(h)) (1 + o(h)) \\ &= s_k (1 + ht_{k,k+1}) + o(h). \end{aligned}$$

L'équation 2) est alors immédiate, d'où 3) pour $k = 2$. Pour $k > 2$, on démontre 3) par récurrence :

$$\begin{aligned}\delta_{k+1} &= \sigma_k \delta_k \sigma_k \\ &= s_k (1 + ht_{k,k+1})(1 + 2ht_k) s_k (1 + ht_{k,k+1}) + o(h) \\ &= 1 + 2h(t_{k,k+1} + s_k \mathbf{t}_k s_k) + o(h) \\ &= 1 + 2h\mathbf{t}_{k+1} + o(h)\end{aligned}$$

et 4) découle immédiatement de 3) à partir des relations reliant respectivement γ_k à δ_k , γ_{k-1} et \mathbf{T}_k à \mathbf{t}_k , \mathbf{T}_{k-1} . cqfd.

1.2.7 $\tilde{k}B_n$ -modules : équivalences et indécomposabilité

Soit M un k -espace vectoriel de dimension finie. On note $\tilde{k} = k[[h]]$, $\tilde{M} = M[[h]]$ le \tilde{k} -module des séries formelles en h . On rappelle (cf. Guichardet [12] p. 55, lemme 1.2.1) que si N est également de dimension finie,

$$\text{Hom}_{\tilde{k}}(\tilde{M}, \tilde{N}) = \text{Hom}_k(M, N)[[h]] = \widetilde{\text{Hom}_k(M, N)}.$$

On a alors, d'une part,

Lemme 2. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Tout projecteur (resp. symétrie) de $\text{End}_k(M)[[h]]$ est conjugué à un projecteur (resp. une symétrie) de $\text{End}_k(M)$.*

Preuve — Les formules de passage entre symétries et projecteurs ($S = 1 - 2P$, $P = \frac{1-S}{2}$) permettent de se restreindre au cas d'une symétrie S . Si l'on écrit $S = S_0 + o(h)$, on a

$$S^2 = 1 \Rightarrow S_0^2 = 1.$$

Posons alors $m = \frac{1+S_0S}{2}$. On a $m = 1 + o(h)$, donc m est inversible, et

$$mS = \frac{S + S_0S^2}{2} = \frac{S + S_0}{2} = \frac{S_0 + S}{2} = \frac{S_0 + S_0^2S}{2} = S_0m$$

d'où $S = m^{-1}S_0m$. cqfd.

Et, d'autre part,

Lemme 3. *Pour tous \mathfrak{B}_n -modules de dimension finie M et N ,*

$$\text{Hom}_{\tilde{k}B_n}(\tilde{M}, \tilde{N}) = (\text{Hom}_{\mathfrak{B}_n}(M, N))[[h]].$$

En particulier, d'une part $\text{End}_{\tilde{k}B_n}(\tilde{M}) = (\text{End}_{\mathfrak{B}_n}(M))[[h]]$, et d'autre part M et N sont isomorphes si et seulement si \tilde{M} et \tilde{N} sont isomorphes.

Preuve — L'inclusion de droite à gauche est immédiate car les coefficients de σ_i appartiennent à \mathfrak{B}_n . Soit donc maintenant $e \in \text{Hom}_{\tilde{k}B_n}(\tilde{M}, \tilde{N})$. On a $e = \sum_{k=0}^{\infty} e_k h^k$. On suppose $e_0, \dots, e_{p-1} \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}_n}(M, N)$, et on peut dès lors, quitte à remplacer e par $e - \sum_{k=1}^{p-1} e_k h^k$, supposer $e = e_p h^p + o(h^p)$. Comme $\sigma_i = s_i + O(h)$,

$$[\sigma_i, e] = 0 \Rightarrow [s_i, e_p] = 0.$$

De plus, $\sigma_1^2 = 1 + 2ht_{12} + o(h)$, donc comme $k \neq 2$,

$$[\sigma_1^2, e] = 0 \Rightarrow [t_{12}, e_p] = 0.$$

Comme t_{12} et les s_i engendrent \mathfrak{B}_n , on en déduit $e_p \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}_n}(M, N)$. La conclusion s'ensuit par récurrence. cqfd.

De ces deux lemmes découle

Proposition 7. *M est indécomposable (pour l'action de \mathfrak{B}_n) si et seulement si $M[[h]]$ est indécomposable (pour l'action de B_n).*

Preuve — Si M est décomposable, comme $\sigma_i = \sum_{p=0}^{\infty} \sigma_i^{(p)} h^p$ avec $\sigma_i^{(p)} \in \mathfrak{B}_n$, il est évident que $M[[h]]$ l'est également.

Supposons désormais $M[[h]]$ décomposable. Cela signifie que le commutant de $k[[h]]B_n$ dans $\text{End}_{k[[h]]}(M[[h]])$ contient un idempotent non trivial. Soit maintenant un idempotent e de $\text{End}(M)[[h]]$. D'après le premier lemme, cet idempotent est conjugué à son terme constant $e_0 \in \text{End}(M)$. D'après le deuxième lemme, e_0 commute à \mathfrak{B}_n , donc si M est indécomposable, il vaut 0 ou 1. On en déduit que e est lui-même trivial, donc que $M[[h]]$ est indécomposable. cqfd.

On peut résumer ces résultats sous la forme suivante :

Théorème 1. *Si Φ est un associateur de Drinfeld, à coefficients dans un corps k de caractéristique 0, il définit un foncteur*

$$\hat{\Phi} : \mathfrak{B}_n\text{-mod} \rightarrow \text{Rep}_{\bar{k}} B_n.$$

Ce foncteur est pleinement fidèle, et préserve l'indécomposabilité des objets.

L'irréductibilité ne s'intègre pas aussi facilement. En effet, outre que les sous-espaces $h^p M[[h]]$ sont toujours stables, si N est un sous-espace \mathfrak{S}_n -stable de M , $h^p N + h^{p+1} M[[h]]$ est également stable. On a néanmoins

Proposition 8. *$\text{Res}_{\mathfrak{S}_n} M$ est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces $k[[h]]B_n$ stables de $M[[h]]$ sont les $h^p M[[h]]$ pour $p \geq 0$.*

Preuve — On a déjà vu que si M' est un sous-espace \mathfrak{S}_n -stable propre de M , $M' + hM[[h]]$ est stable (car $\sigma_i = s_i + o(h)$).

Inversement, si $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n} M$ est irréductible, soit N un sous-espace propre $k[[h]]B_n$ -stable de $M[[h]]$. Soit p minimal tel que $N \not\subset h^p M[[h]]$. On a alors

$$\overline{N} := N + h^p M[[h]] \neq h^p M[[h]]$$

donc

$$h^p M[[h]] \subset \overline{N} = N + h^p M[[h]] \subset h^{p-1} M[[h]],$$

la première inclusion étant stricte. On a $N \subset h^{p-1} M[[h]]$, donc d'après le lemme de Nakayama appliqué à l'anneau local $k[[h]]$ et au $k[[h]]$ -module $h^{p-1} M[[h]]$, si la deuxième inclusion est une égalité, $N = h^{p-1} M[[h]]$, d'où la conclusion. Nous allons démontrer que c'est le cas : on considère la projection

$$\phi : h^{p-1} M[[h]] \rightarrow h^{p-1} M[[h]] / h^p M[[h]] = M.$$

Comme $\sigma_i(\overline{N}) \subset \overline{N}$ et $\sigma_i = s_i + o(h)$, on a $s_i(\phi(\overline{N})) \subset \phi(\overline{N})$, donc $\phi(\overline{N})$ est stable par \mathfrak{S}_n . D'après l'hypothèse, $\phi(\overline{N}) \in \{\{0\}, M\}$, et on a bien $\overline{N} = h^{p-1} M[[h]]$. cqfd.

1.3 Représentations de tresses

1.3.1 Représentations de B_n

Parmi les considérations immédiates, notons d'abord que les représentations de B_n pour $n \geq 2$ ne sont pas, en général, semi-simples, et ensuite que les représentations irréductibles de B_3 sont à peu de choses près celles de $SL_2(\mathbb{Z})$.

D'autre part, les relations définissant (l'algèbre de groupe de) B_n sont homogènes en les générateurs, ce qui signifie que, un corps k étant donné, il existe pour tout $\lambda \in k$ un endofoncteur H_λ de la catégorie $Rep_k B_n$ des kB_n -modules, associé à l'endomorphisme $\sigma_r \mapsto \lambda \sigma_r$ de kB_n .

Rappelons enfin que la célèbre représentation de Burau (réduite) n'est rien d'autre que la représentation irréductible de degré $n - 1$ de l'algèbre de Hecke générique de type A associée à la partition $[n - 1, 1]$, et que la représentation introduite par Jones [47] se factorise par cette même algèbre.

Deux développements récents sur les groupes de tresses sont en particulier en rapport avec le présent travail. Tout d'abord, une étude méthodique des petites représentations irréductibles de B_n a été entreprise. Elle a donné pour l'instant les résultats suivants

Théorème. (*Formanek, [40]*) *Si R est une représentation irréductible non triviale de B_n pour $n \gg 0$, alors le degré de R est supérieur ou égal à $n - 2$. Si le degré de R est égal à $n - 1$, alors R est isomorphe à (une spécialisation de) la représentation de Burau.*

Théorème. (*Sysoeva, [68] [69]. cf. aussi Tong et al. [71]*) *Si R est une représentation irréductible de B_n pour $n \gg 0$, de degré compris au sens large entre n et $2n - 9$, alors R est de degré n . R est alors explicitement décrite comme élément d'une famille à trois paramètres de représentations de B_n , par les formules :*

$$\begin{aligned} \sigma_k e_k &= b e_{k+1} \\ \sigma_k e_{k+1} &= a e_k \\ \sigma_k e_r &= c e_r \quad \text{si } r \notin \{k, k+1\}. \end{aligned}$$

Cette représentation est irréductible dès que $ab \notin \{1, 0\}$, et sa classe d'isomorphisme ne dépend alors que du produit ab . De plus, pour $ab = 1$, on retrouve la représentation naturelle de degré n de \mathfrak{S}_n .

D'autre part, le problème longtemps ouvert de la linéarité de B_n pour $n \geq 4$ a été récemment résolu. Rappelons que la représentation de Burau, fidèle pour $n = 3$, ne l'est plus pour $n \geq 5$ (Moody [62], Long [57], Bigelow [25]). Birman et Wenzl s'étaient déjà demandé dans [26] si certaines des représentations de B_n qui se factorisent par l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami n'apportaient pas une solution à ce problème. Les résultats conjugués de Lawrence [55], Krammer [52] [53], Bigelow [24] et Zinno [77] apportent à cette question une réponse positive: une telle représentation, de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ et à deux paramètres q, t (cf. Turaev [73] pour un historique), est en effet fidèle pour tout $n \geq 1$. Cette représentation K_n admet de plus, à l'instar de la représentation de Burau, une interprétation géométrique simple [73] [24].

1.3.2 Représentations de \mathfrak{B}_n

On fixe un corps k de caractéristique 0.

Description des représentations

Rappelons que $k\mathfrak{S}_n$ s'injecte dans \mathfrak{B}_n . Nous dirons qu'une représentation M de \mathfrak{B}_n s'appuie sur une représentation \check{M} de \mathfrak{S}_n si $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n} M = \check{M}$.

Par définition, $\mathfrak{B}_1 = k\mathfrak{S}_1 = k$,

$$\mathfrak{B}_2 = k[X, Y]/(Y^2 - 1),$$

et \mathfrak{T}_3 est quant à elle produit direct de son centre par une algèbre de Lie libre à deux générateurs.

Comme système "naturel" de générateurs de \mathfrak{B}_n , on peut considérer l'union d'un système de générateurs de \mathfrak{S}_n , par exemple les générateurs de Coxeter $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$, avec l'un quelconque des t_{ij} . Si l'on identifie $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ au stabilisateur dans \mathfrak{S}_n des lettres n et $n-1$, on a

Lemme 4. *Si M est une représentation de \mathfrak{S}_n définie sur k , les représentations de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur M sont en bijection naturelle avec les $t \in \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(M)$ qui vérifient les équations $L(t) = 0$ et $R(t) = 0$ avec*

$$\begin{aligned} R(t) &= [t, s_{n-2}ts_{n-2} + (n-2 \ n)t(n-2 \ n)] \\ L(t) &= [t, (n-3 \ n-1)(n-2 \ n)t(n-2 \ n)(n-3 \ n-1)]. \end{aligned}$$

Preuve — Si une représentation de \mathfrak{B}_n est donnée, dont la restriction à \mathfrak{S}_n est M , on choisit pour $t \in \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(M)$ l'image de $t_{n-1, n}$ dans $\text{End}(M)$. Inversement, supposons t vérifiant les conditions de l'énoncé. $\text{End}(M) = M \otimes M^*$ est naturellement muni d'une action de \mathfrak{S}_n , et

$$t \in \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(M) = \text{End}(M)^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}.$$

L'ensemble des classes à droite $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ est formé des éléments

$$g_{\{i, j\}} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(\{n-1, n\}) = \{i, j\}\}$$

pour $i \neq j$. Pour $i < j$ on note $g_{ij} = g_{\{i, j\}}$, et $E_{ij} = E_{\{i, j\}}$ un élément de g_{ij} . On définit $t_{ij} = E_{ij}.t$ pour $i < j$, et on pose $t_{ji} = t_{ij}$, $t_{ii} = 0$. En particulier, $t = t_{n-1, n}$. Alors, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe $\tau \in \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ tel que

$$\sigma = E_{\{\sigma(n-1), \sigma(n)\}}.\tau$$

d'où

$$\sigma.t = (E_{\{\sigma(n-1), \sigma(n)\}}.\tau).t = E_{\{\sigma(n-1), \sigma(n)\}}.(\tau.t) = E_{\{\sigma(n-1), \sigma(n)\}}.t = t_{\sigma(n-1), \sigma(n)}$$

et, pour $i < j$,

$$\sigma.t_{ij} = \sigma.(E_{ij}.t) = (\sigma E_{ij}).t = t_{\sigma E_{ij}(n-1), \sigma E_{ij}(n)} = t_{\sigma(i), \sigma(j)}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] &= (i \ n-1)(j \ n)(k \ n-2).R(t) \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= (i \ n)(j \ n-1)(k \ n-2)(l \ n-3).L(t) \end{aligned}$$

ce qui conclut: on a bien défini une représentation de \mathfrak{B}_n . La surjectivité de $t_{n-1, n} \mapsto t$ est alors démontrée, et l'injectivité découle du fait que $t_{n-1, n}$ et \mathfrak{S}_n engendrent \mathfrak{B}_n . cqfd.

On notera $\mathcal{V}(M)$ ce k -schéma affine, et $\mathcal{V}_s(M)$ le sous- k -schéma ouvert (cf. Lubotzky et Magid [58]) de $\mathcal{V}(M)$ correspondant aux représentations irréductibles de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur M . On notera enfin symboliquement $S(t) \neq 0$ la condition sur t correspondante.

Remarque.

Dans certains cas, les représentations (V, ρ) de \mathfrak{B}_n se laissent décrire d'une façon totalement différente: il arrive qu'existe une fonction f , polynôme à coefficients dans le corps de base ou fonction analytique si $k = \mathbb{C}$, telle que pour un certain $r < n$ on ait

$$\rho(s_r) = f(\rho(t_{r,r+1})).$$

On en déduit qu'alors pour tout r cette relation est vérifiée, donc que la donnée des éléments de $End_k(V)$ associée aux éléments $t_{r,r+1}$ et de la fonction f suffit à déterminer et décrire cette représentation (V, ρ) . Si (V, ρ) est irréductible et k est algébriquement clos, il découle du théorème de Burnside que $\rho(\mathfrak{B}_n) = End(V)$. Mais alors $\rho(U\mathcal{T}_n) = \rho(\mathfrak{B}_n) = End(V)$, et la restriction de (V, ρ) à \mathcal{T}_n est irréductible. On en déduit, à l'aide de la proposition 3, que, pour presque tout h , la restriction à P_n de $\int_h V$ est irréductible. Ce cas se rencontre fréquemment lorsque l'on étudie l'action de \mathfrak{B}_n , respectivement de B_n , sur les puissances tensorielles des représentations simples d'une algèbre de Lie simple \mathfrak{g} , respectivement d'un groupe quantique $U_q\mathfrak{g}$ (cf. I.4 ainsi que l'exemple en annexe).

Endofoncteurs de $Rep_k \mathfrak{B}_n$

Parmi les automorphismes naturels de \mathfrak{B}_n , nous noterons τ_a (resp. H_λ) pour $a \in k$ (resp. $\lambda \in k^*$) le morphisme défini pour $s \in \mathfrak{S}_n$ par

$$\begin{aligned} \tau_a(s) &= s & H_\lambda(s) &= s \\ \tau_a(t_{ij}) &= t_{ij} + a & H_\lambda(t_{ij}) &= \lambda t_{ij} \end{aligned}$$

et provisoirement \mathfrak{S} le morphisme défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(s) &= \epsilon(s)s \\ \mathfrak{S}(t_{ij}) &= t_{ij} \end{aligned}$$

où $\epsilon(s)$ désigne la signature de s . Nous noterons de la même façon les endofoncteurs de la catégorie des représentations de \mathfrak{B}_n associés à ces endomorphismes. τ_a est alors appelé endofoncteur de *translation scalaire*.

On note encore S la représentation de degré 1 de \mathfrak{B}_n sur laquelle t_{ij} agit par 0 et $s \in \mathfrak{S}_n$ par sa signature.

On a alors immédiatement, pour M une représentation de degré fini de \mathfrak{B}_n ,

- $\mathfrak{S}(M) = M \otimes S$
- $\int_h \tau_a(M) = H_{e^{ah}} \int_h M$ et $\int_\Phi \tau_a(M) = H_{e^{ah}} \int_\Phi M$
- $\int_h \mathfrak{S}(M) = H_{-1} \int_h M$ et $\int_\Phi \mathfrak{S}(M) = H_{-1} \int_\Phi M$
- $\int_h H_\lambda M = \int_{h\lambda} M$.

Nous allons maintenant décrire deux classes élémentaires de représentations de \mathfrak{B}_n . Par convention, nous faisons correspondre la partition $[n]$ de n à la représentation triviale de \mathfrak{S}_n . La partition $[1^n]$ s'identifie alors à la représentation "alternée" de \mathfrak{S}_n , dont l'action est donnée par la signature.

Représentations élémentaires

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k , muni d'une base (e_1, \dots, e_r) . On note par convention $e_0 = 0$. Il existe un morphisme surjectif $\mathfrak{B}_n \rightarrow k[t]$ décrit par

$$\begin{aligned} s &\mapsto 1 \\ t_{ij} &\mapsto t. \end{aligned}$$

Ce morphisme provient en fait d'une part de la représentation triviale de \mathfrak{S}_n , et d'autre part du morphisme naturel de \mathcal{T}_n vers l'algèbre de Lie libre à un générateur. D'après le théorème de Jordan, $k[t]$ admet pour indécomposables les représentations $I_r(\alpha)$ décrites sur V par

$$t(e_i) = \alpha e_i + e_{i-1}.$$

Le morphisme précédent fournit ainsi une famille $I_+^r(\alpha)$ de représentations indécomposables de \mathfrak{B}_n , pour $r \geq 1$. On pose

$$I_-^r(\alpha) = \mathfrak{S}(I_+^r(\alpha)) = I_+^r(\alpha) \otimes S.$$

D'évidence, $\tau_\beta I_\pm^r(\alpha) = I_\pm^r(\alpha + \beta)$, et $S = I_-^1(0)$. Il est immédiat que la famille des $I_+^r(\alpha)$ (resp. $I_-^r(\alpha)$) décrit l'ensemble des représentations indécomposables de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur $r.[n]$ (resp. $r.[1^n]$). D'autre part, si k est algébriquement clos, les représentations de B_n qui correspondent par intégration aux $I_+^r(\alpha)$ sont exactement les indécomposables de B_n qui se factorisent par le morphisme trivial $B_n \rightarrow \mathbb{Z}$, défini par $\sigma_i \mapsto 1$. Ces représentations n'interviendront pas pour $r > 1$ dans cette thèse, aussi noterons-nous pour alléger les notations $I_\pm(\alpha) = I_\pm^1(\alpha)$.

De la même façon, on peut associer à toute partition $\lambda \vdash n$ une représentation de \mathfrak{S}_n , donc de UT_n en utilisant le morphisme défini en I.1.2.1. Il est alors immédiat que ce morphisme se prolonge à \mathfrak{B}_n .

Définition 5. Pour $\lambda \vdash n$ et $(u, v) \in k^2$, on note $\lambda_{u,v}$ la représentation de \mathfrak{B}_n s'appuyant sur λ définie par

$$t_{ij} = \alpha + \beta(i \ j)$$

avec $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha - \beta$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Ker}((i \ j) - 1) &= \text{Ker}(t_{ij} - u) \\ \text{Ker}((i \ j) + 1) &= \text{Ker}(t_{ij} - v). \end{aligned}$$

On sait depuis longtemps (cf. par exemple [42]) que $\int_h \lambda_{u,v}$ est isomorphe à la représentation indexée par λ de l'algèbre de Hecke de type A spécialisée en e^{hu} et $-e^{hv}$.

Remarquons enfin

Proposition 9. Soit G un sous-groupe de \mathfrak{S}_n conjugué à $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$, pour $n \geq 2$. Si M est une représentation de \mathfrak{B}_n qui s'appuie sur $A \oplus B$, où A et B sont deux représentations de \mathfrak{S}_n telles que

$$\text{Hom}_G(A, B) = \{0\},$$

alors M est décomposable.

Preuve — Notons $G = s\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}s^{-1}$, avec $s \in \mathfrak{S}_n$, et t l'image de $t_{s(i),s(2)}$ dans $End(M)$. Il suffit de montrer que A et B sont stables par t . Mais

$$t \in End_G(M) = End_G(A \oplus B) = End_G(A) \oplus Hom_G(A, B) \oplus Hom_G(B, A) \oplus End_G(B)$$

et

$$Hom_G(B, A) = (A \otimes B^*)^G \simeq (B \otimes A^*)^G = Hom_G(A, B) = \{0\}$$

donc $t \in End_G(A) \oplus End_G(B) \subset End_G(M)$: A et B sont stables par \mathfrak{S}_n et t , donc par \mathfrak{B}_n , et ce sont des sous-espaces non nuls car ce sont des représentations de \mathfrak{S}_n : M est décomposable. cqfd.

Corollaire. *Si M est une représentation de \mathfrak{B}_n , pour $n \geq 2$, qui s'appuie sur $a[n] + b[1^n]$ avec $ab \neq 0$, alors M est décomposable.*

Preuve — Si $G = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}$, $A = a[n]$, $B = b[1^n]$,

$$Hom_G(A, B) = Hom_G(Res_G[n], Res_G[1^n])^{ab} = Hom_G([2] \otimes [n-2], [1^2] \otimes [1^{n-2}])^{ab} = \{0\}$$

et l'on se trouve dans le cadre du lemme précédent dès que $ab \neq 0$. cqfd.

Représentations de faibles degrés de \mathfrak{B}_3

Dans cette étude des représentations de faibles degrés de \mathfrak{B}_3 , nous supposons $k = \mathbb{C}$. Nous connaissons déjà les représentations de degré 1 de \mathfrak{B}_3 , que nous avons notées $I_{\pm}^1(\alpha)$. Etudions ensuite celles de degré 2 : d'après le corollaire de la proposition 9, les seules représentations indécomposables de degré 2 de \mathfrak{B}_3 différentes des $I_{\pm}^2(\alpha)$ prennent appui sur $[2, 1]$. Or $\mathcal{V}([2, 1])$ est contenu dans $End_{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2}([2, 1])$, qui est un espace vectoriel de dimension 2. On en déduit qu'une telle représentation s'écrit $t_{ij} = \alpha + \beta(i j)$, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à $[2, 1]_{u,v}$. Nous notons provisoirement

$$R_{u,v} = [2, 1]_{u,v}.$$

Considérons maintenant les représentations M indécomposables de degré 3 de \mathfrak{B}_3 . Si l'on excepte les représentations $I_{\pm}^3(\alpha)$, on peut toujours supposer d'après le corollaire de la proposition 9 que la représentation $[2, 1]$ de \mathfrak{S}_3 intervient dans $Res_{\mathfrak{S}_3}M$, c'est-à-dire que M s'appuie soit sur $[2, 1] + [3]$, soit sur $[2, 1] + [1, 1, 1]$. Quitte à considérer $M \otimes S$, on peut supposer que l'on est dans le premier cas. Comme t_{12} commute à $(1\ 2) = s_1$, la droite propre associée à la valeur propre -1 de s_1 est stable par t_{12} : quitte à translater scalairement la représentation, on peut supposer que t_{12} agit par 0 sur cette droite vectorielle. Si l'on décrit l'action de \mathfrak{S}_3 , selon le modèle semi-normal (cf. James et Kerber [14]), par

$$(1\ 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (2\ 3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

t_{12} s'écrit

$$t_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

et $[t_{12}, t_{13} + t_{23}] = 0 \Rightarrow a = 2d$ ou $b = c = 0$.

La classe d'isomorphisme de la représentation associée à un tel t_{12} est alors entièrement déterminée par son polynôme caractéristique. Plus précisément on obtient la

Proposition 10. *Pour $(\alpha, s, p) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\frac{p}{2} \neq \left(\frac{s}{3}\right)^2$, il existe une représentation irréductible $B_{s,p}^\alpha$ de \mathfrak{B}_3 , caractérisée parmi les représentations indécomposables par*

$$1) \chi_{t_{12}}(x) = (\alpha - x)P(x + \alpha) \text{ avec } P(x) = x^2 - sx + p$$

$$2) \text{Res}_{\mathfrak{S}_3} B_{s,p}^\alpha = [3] + [2, 1]$$

$$3) (1 \ 2)v = -v \Rightarrow t_{12}v = \alpha v.$$

Si $\frac{p}{2} = \left(\frac{s}{3}\right)^2$, il existe à isomorphisme près deux représentations indécomposables qui vérifient 1), 2) et 3). On les note B_+^α et B_-^α . La première est distinguée de la deuxième par la dimension, égale à 1, de son sous-espace stable. Les représentations $B_{s,p}^\alpha$ sont autoduales. Les représentations B_+^α et B_-^α sont duales l'une de l'autre.

Enfin, si on leur ajoute les représentations $I_\pm^3(\alpha)$, l'ensemble de ces représentations et de leur produit tensoriel par S constitue un système complet parmi les représentations indécomposables de dimension 3 de \mathfrak{B}_3 sur \mathbb{C} . On remarque que la restriction de $B_{s,p}^\alpha$ à \mathfrak{B}_2 admet des multiplicités si $s^2 = 4p$.

Rappelons enfin que \mathfrak{B}_n est munie d'une structure d'algèbre de Hopf, ce qui permet de construire de nouvelles représentations par produit tensoriel. Une étude élémentaire explicite permet de montrer

Lemme 5. $R_{\alpha,0} \otimes R_{\alpha',0} = R_{\alpha+\alpha',0} \oplus I_+^1(\alpha + \alpha') \oplus I_-^1(\alpha + \alpha')$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \text{Si } \beta \neq 0, \text{ alors } \quad R_{\alpha,\beta} \otimes R_{\alpha',\beta} &= B_{0,4\beta^2}^{\alpha+\alpha'} \oplus I_-^1(\alpha + \alpha') \\ S^2 R_{\alpha,\beta} &= B_{0,4\beta^2}^{2\alpha} \\ \Lambda^2 R_{\alpha,\beta} &= I_-^1(2\alpha) \\ \text{Si } \beta \neq \beta', \text{ alors } \quad R_{\alpha,\beta} \otimes R_{\alpha',\beta'} &\text{ est irréductible.} \end{aligned}$$

Produits tensoriels

On considère à nouveau comme fixé un corps k de caractéristique 0.

Puisque les morphismes $kB_n \rightarrow \mathfrak{B}_n[[h]]$ sont des morphismes d'algèbres de Hopf, pour toutes représentations M et N de \mathfrak{B}_n et tout associateur Φ , on a

$$\int_{\Phi} M \otimes N = \left(\int_{\Phi} M \right) \otimes \left(\int_{\Phi} N \right)$$

et de même

$$\int_h M \otimes N = \left(\int_h M \right) \otimes \left(\int_h N \right).$$

Il est alors utile de remarquer que, comme kB_n et kP_n , \mathfrak{B}_n et UT_n vérifient la propriété de Chevalley, c'est-à-dire

Proposition 11. *Si M et N sont deux représentations semi-simples de \mathcal{T}_n (resp. de \mathcal{B}_n), $M \otimes N$ et les algèbres tensorielles de M et N sont semi-simples.*

Preuve — Pour \mathcal{T}_n , cela découle immédiatement de Bourbaki [4] §6 n° 5, corollaires 1 et 2 du théorème 4. L'énoncé concernant \mathfrak{B}_n se déduit de ce que, une représentation M de \mathfrak{B}_n étant donnée, M est semi-simple si et seulement si sa restriction à \mathcal{T}_n l'est également. En effet, si M est semi-simple, on procède de façon classique, en calquant par exemple la première partie de la preuve de Chevalley [7] ch. IV §5, proposition 1. Si, inversement, la restriction à \mathcal{T}_n de M est semi-simple, soit

$$i : U \rightarrow M$$

une injection de \mathfrak{B}_n -modules de source un \mathfrak{B}_n -module simple. Le morphisme i admet alors un inverse à gauche l , morphisme de \mathcal{T}_n -modules tel que $l \circ i = Id_M$. Posant alors

$$L = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} s \circ l \circ s^{-1},$$

on a encore $L \circ i = Id_M$, avec cette fois L un morphisme de \mathfrak{B}_n -modules : toute injection i de but M et de source un \mathfrak{B}_n -module simple est scindée, et M est semi-simple. cqfd.

Chapitre 2

Tours d'algèbres

On développe dans ce chapitre les fondements algébriques qui nous serviront tout au long de ce travail.

On fixe un corps k de caractéristique 0. Une k -algèbre B sera toujours supposée unitaire, et les morphismes entre deux k -algèbres enverront toujours l'identité sur l'identité, donc, en particulier, si l'on introduit une sous-algèbre D de B , l'unité de D sera supposée égale à l'unité de B . De plus, un B -module sera toujours supposé de dimension finie sur k , et on dira qu'il est sans multiplicités si sa décomposition de Krull-Schmidt ne comporte que des composantes non isomorphes.

La section 1 est inspirée de la théorie des "algèbres de carquois" développée notamment par Gelfand [10], la section 3 par de la Harpe, Goodman et Jones [11], les sections 4 et 5 par Vershik et Kerov [74]. Enfin, la section 7 présente les deux algorithmes fondamentaux qui seront utilisés dans la partie **II**.

2.1 Graphes et algèbres de graphes

Si S est un ensemble fini, on note kS le k -espace vectoriel de base S , et on introduit dans $End(kS)$ les unités matricielles, $e_{s,s'}$ pour $s, s' \in S$, définies par

$$\forall s'' \in S \quad e_{s,s'} s'' = \delta_{s',s''} s.$$

On peut alors définir une sous-algèbre commutative maximale $\mathcal{D}(S)$ de $End(kS)$ comme l'algèbre engendrée par les éléments $e_{s,s}$ pour $s \in S$. Comme $\mathcal{D}(S)$ -module, kS est semi-simple sans multiplicités, et

$$kS = \bigoplus_{s \in S} k s.$$

De plus, si S_1 et S_2 sont deux ensembles finis disjoints,

$$\begin{aligned} kS_1 \cup S_2 &= kS_1 \oplus kS_2 \\ kS_1 \times S_2 &= kS_1 \otimes kS_2. \end{aligned}$$

Pour définir d'autres sous-algèbres remarquables de $End(kS)$, nous avons besoin d'introduire la notion d'algèbre associée à ce que l'on appelle parfois un carquois, c'est-à-dire un

graphe orienté. Fixons d'abord certaines conventions, afin de limiter le cadre qui nous est utile.

Définition 6. On appelle graphe $\Gamma = (S, A, b, s)$ la donnée de deux ensembles finis, un ensemble S de sommets et un ensemble A d'arêtes, munis de deux applications $b, s : A \rightarrow S$ dites respectivement "but" et "source". On dit que Γ est réduit si $s \times b$ est une injection et si $(s \times b)^{-1}(\Delta) = \emptyset$, Δ étant la diagonale de $S \times S$, c'est-à-dire si Γ est sans boucles.

Si Γ est réduit, A s'identifie à une partie de $S \times S$. Nous pourrions alors noter $\Gamma = (S, A)$ un tel graphe, et A sera considérée comme une partie de $S \times S$. En particulier, si l'on a deux graphes réduits $\Gamma_1 = (S, A_1)$ et $\Gamma_2 = (S, A_2)$ sur le même ensemble S de sommets, on dira $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ si $A_1 \subset A_2$.

Pour signifier qu'il existe une arête de source x et de but y , ou éventuellement pour désigner une telle arête, unique si Γ est réduit, on utilisera la notation $x \rightarrow y$. Si un graphe réduit $\Gamma = (S, A)$ est donné, on appelle *chemin* de Γ une famille (a_1, \dots, a_r) de sommets de Γ , pour $r \geq 1$, tels que $a_i \rightarrow a_{i+1}$ si $i \in [1, r-1]$. On dit qu'un tel chemin joint le sommet a_1 au sommet a_r , et on appelle $r-1$ la longueur du chemin, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui interviennent dans sa définition. Un chemin sera dit vide s'il est de longueur 0.

Définition 7. Soit Γ un graphe (S, A, b, s) . Une partie E de S est dite Γ -stable si toute arête de Γ dont la source est dans E a son but dans E . On dit que Γ est irréductible si pour tous sommets $s, s' \in S$ il existe un chemin joignant s à s' . Autrement dit, si S n'admet pas de partie Γ -stable propre. Γ est dit indécomposable si S n'admet pas de partition en deux parties Γ -stables propres.

On fixe maintenant un graphe réduit $\Gamma = (S, A, b, s)$.

Définition 8. Soit $\Gamma = (S, A, b, s)$ un graphe réduit. On note $\mathcal{A}(\Gamma)$ la sous-algèbre de $End(kS)$ engendrée par les éléments $e_{b(a),s(a)}$ pour $a \in A$, et $e_{s,s}$ pour $s \in S$. En particulier, $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$.

Si un graphe réduit $\Gamma = (S, A)$ est donné, on appelle enveloppe transitive de Γ et on note $\overline{\Gamma}$ le graphe réduit (S, \overline{A}) tel que $x \rightarrow y$ si et seulement si il existe un chemin non vide de Γ joignant x à y . On dit que Γ est *transitif* si $\Gamma = \overline{\Gamma}$, c'est-à-dire si, pour tous sommets distincts x et y de Γ , l'existence d'un chemin de x vers y équivaut à l'existence d'une arête $x \rightarrow y$. En particulier,

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ irréductible} &\Leftrightarrow \overline{\Gamma} \text{ irréductible} \\ \Gamma \text{ indécomposable} &\Leftrightarrow \overline{\Gamma} \text{ indécomposable.} \end{aligned}$$

Il est clair d'autre part que

$$\mathcal{A}(\overline{\Gamma}) = \mathcal{A}(\Gamma).$$

En particulier, à deux graphes réduits sur un même ensemble de sommets qui ont même enveloppe transitive, on a associé la même algèbre. Remarquons d'autre part que, si Γ est irréductible, $\overline{\Gamma} = (S, \overline{A})$ est le graphe complet sur S , défini par

$$\overline{A} = \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid s_1 \neq s_2\}.$$

Cette construction nous permet de décrire toutes les sous-algèbres de $End(kS)$ qui contiennent $\mathcal{D}(S)$:

Lemme 6. *Si S est un ensemble fini et si B est une sous-algèbre de $\text{End}(kS)$ contenant $\mathcal{D}(S)$, il existe un graphe réduit transitif $\Gamma = (S, A)$ tel que $B = \mathcal{A}(\Gamma)$ défini par*

$$A = \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid s_1 \neq s_2 \text{ et } e_{s_2, s_1} \in B\}.$$

Preuve — On a évidemment $\mathcal{A}(\Gamma) \subset B$. De plus, Γ est transitif. Inversement, si b est un élément de B , il s'écrit

$$b = \sum_{s, s'} c_{s, s'} e_{s, s'}$$

avec, pour tous $s, s' \in S$, $c_{s, s'} \in k$. Si $c_{s, s'} \neq 0$, on a

$$e_{s, s'} = \frac{1}{c_{s, s'}} e_{s, s} b e_{s', s'} \in \mathcal{D}(S) B \mathcal{D}(S) \subset B$$

donc $e_{s, s'} \in \mathcal{A}(\Gamma)$, et $b \in \mathcal{A}(\Gamma)$, ceci pour tout $b \in B$.

cqfd.

Si l'on considère maintenant kS comme $\mathcal{A}(\Gamma)$ -module, on a

Proposition 12. *Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe réduit. En tant que $\mathcal{A}(\Gamma)$ -module, kS est irréductible si et seulement si Γ est irréductible, indécomposable si et seulement si Γ est indécomposable. De plus, une partie E de S est Γ -stable si et seulement si kE est $\mathcal{A}(\Gamma)$ -stable.*

Preuve — Soit V un sous-espace de kS , stable pour $\mathcal{D}(S)$. Comme $e_{ss}V \in \{0, k s\}$ selon que s appartient à V ou non, V est entièrement déterminé par $J(V) = \{s \in S \mid s \in V\}$. Si l'on note $K(E)$, pour E une partie de S , le sous-espace de kS engendré par E , J et K sont deux bijections réciproques l'une de l'autre entre les parties de S et les sous-espaces de kS stables pour $\mathcal{D}(S)$.

Si V est stable pour $\mathcal{A}(\Gamma)$, toute arête de Γ ayant sa source s dans $J(V)$ a son but s' dans $J(V)$, car $e_{s', s} \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $s \in V$ et $s' = e_{s', s} s \in V$. Ainsi, V est stable par $\mathcal{A}(\Gamma)$. Inversement, si E est une partie Γ -stable de S , $K(E) = kE$ est stable pour $\mathcal{A}(\Gamma)$. On en déduit immédiatement la conclusion de l'énoncé.

cqfd.

Corollaire 1. *Si S est un ensemble fini et B une sous-algèbre de $\text{End}(kS)$ qui contient $\mathcal{D}(S)$, il existe un unique graphe réduit transitif $\Gamma = (S, A)$ tel que $B = \mathcal{A}(\Gamma)$.*

Preuve — D'après le lemme 6, $B = \mathcal{A}(\Gamma)$ avec $\Gamma = (S, A)$ graphe réduit transitif défini par

$$A = \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid s_1 \neq s_2 \text{ et } e_{s_2, s_1} \in B\}.$$

Si $B = \mathcal{A}(\Gamma')$ avec Γ' transitif, par définition de $\mathcal{A}(\Gamma')$, à toute arête (s_1, s_2) de Γ' correspond un élément e_{s_2, s_1} de B , donc une arête (s_1, s_2) de Γ . On a ainsi $\Gamma' \subset \Gamma$. Inversement, fixons une arête $x \rightarrow y$ de Γ . On considère l'ensemble E des éléments s de S tels que x soit joint à s par un chemin de Γ' . E est par définition Γ' -stable, donc kE est $\mathcal{A}(\Gamma')$ -stable. Mais $\mathcal{A}(\Gamma') = B = \mathcal{A}(\Gamma)$, donc E est Γ -stable, et $x \in E \Rightarrow y \in E$, donc $x \rightarrow y$ est une arête de $\bar{\Gamma}' = \Gamma' : \Gamma = \Gamma'$.

cqfd.

On a ainsi établi une bijection entre graphes réduits transitifs sur S et sous-algèbres de $End(kS)$ qui contiennent $\mathcal{D}(S)$.

Cela nous permet d'énoncer en corollaire un analogue faible du théorème de Burnside, qui ne suppose pas le corps k algébriquement clos.

Corollaire 2. *Soit S un ensemble fini, et B une sous-algèbre de $End(kS)$ qui contient $\mathcal{D}(S)$. En tant que B -module, kS est irréductible si et seulement si $B = End(kS)$.*

Preuve — Si $B = End(kS)$, il est clair que le B -module kS est irréductible. Inversement, supposons kS irréductible. Comme B contient $\mathcal{D}(S)$, on peut supposer d'après le lemme 6 que $B = \mathcal{A}(\Gamma)$, où Γ est un graphe réduit transitif d'ensemble de sommets S . D'après la proposition précédente, Γ est alors irréductible, c'est-à-dire que deux sommets peuvent toujours être joints par un chemin, donc par une arête puisque Γ est transitif. Γ est ainsi le graphe complet sur S , et

$$B = \mathcal{A}(\Gamma) = End(kS).$$

cqfd.

2.2 Généralisation dans un cadre “relatif”

Nous généralisons le résultat d'indécomposabilité (resp. d'irréductibilité) de la section précédente dans une situation “relative” au sens suivant. Dans la section I.2.1, l'algèbre considérée était une sous-algèbre B de $End(kS)$ agissant sur le module kS , munie d'une sous-algèbre commutative $\mathcal{D}(S)$ telle que la restriction de kS à $\mathcal{D}(S)$ était semi-simple sans multiplicités. On étudiait donc l'indécomposabilité (resp. l'irréductibilité) de kS pour l'action de B relativement à $\mathcal{D}(S)$, en ramenant cette étude à l'étude d'un graphe associé au couple $(\mathcal{D}(S), B)$.

Nous allons voir ici que l'on peut généraliser cette étude, en s'affranchissant notamment de l'hypothèse de commutativité sur la sous-algèbre considérée.

Soient maintenant B une k -algèbre quelconque, D une sous-algèbre de B , et M un B -module (de dimension finie sur k) dont la restriction à D est semi-simple sans multiplicités.

On définit un graphe réduit $\Gamma_{D,B}(M)$ en prenant pour ensemble de sommets S l'ensemble des composantes irréductibles de $Res_D M$, qui sont des sous-espaces de M bien déterminés. On a

$$Res_D M = \bigoplus_{s \in S} s.$$

On fixe pour tout $s \in S$ un élément non nul φ_s de $Hom_D(M, s)$, qui est de dimension 1 sur $End_D(s)$. Pour tout sous- D -module N de M , N est la somme directe des $s \in S$ tels que $s \cap N = \{0\}$. On peut alors définir les arêtes $s \rightarrow s'$ de $\Gamma_{D,B}(M)$, pour $s \neq s'$, par

$$\begin{aligned} s \rightarrow s' \quad \text{ssi} \quad & \exists b \in B \quad \varphi_{s'} \circ b(s) \neq \{0\} \\ & \text{ssi} \quad \varphi_{s'}(Bs) \neq \{0\} \\ & \text{ssi} \quad s' \hookrightarrow Bs \\ & \text{ssi} \quad Bs' \subset Bs. \end{aligned}$$

Il est clair, sous cette dernière forme, d'une part que $\Gamma_{D,B}(M)$ est transitif, et d'autre part qu'il ne dépend pas du choix des morphismes φ_s . En particulier, avec ce graphe, pour tout

$s \in S$ on a

$$Bs \subset s + \sum_{s \rightarrow s'} s'.$$

On a alors, de façon analogue à la proposition 12,

Proposition 13. *Si B est une k -algèbre, D une sous-algèbre de B , et M un B -module dont la restriction à D est semi-simple sans multiplicités, alors M est irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si $\Gamma_{D,B}(M)$ est irréductible (resp. indécomposable).*

Preuve — On note $\Gamma = \Gamma_{D,B}(M) = (S, A)$. Les sous-espaces D -stables de M s'identifient naturellement aux parties de S . Plus précisément, si $V \subset M$ est D -stable, on lui associe $E = \{s \in S \mid s \subset V\}$, et à $E \subset S$ on associe la somme directe des s qui sont éléments de E .

Si $V \subset M$ est B -stable, il est en particulier D -stable, et il lui correspond donc une partie $E \subset S$. Si $s \rightarrow s'$ est une arête de Γ de source $s \in E$, on a

$$s' \subset Bs \subset BV \subset V,$$

d'où $s' \in E$ et E est Γ -stable.

Inversement, si $E \subset S$ est Γ -stable, on note $V \subset M$ le sous-espace D -stable associé. On a alors

$$BV = B \bigoplus_{s \in E} s \subset \sum_{s \in E} Bs \subset \sum_{s \in E} s + \sum_{s \rightarrow s'} s' \subset \sum_{s \in E} s = V,$$

donc V est B -stable. Comme de plus une partition de S en deux parties correspond à une somme directe d'espaces D -stables de M , on en déduit la conclusion de l'énoncé. cqfd.

La définition de $\Gamma_{D,B}(M)$ n'est pas toujours très commode. Si l'on connaît un système de générateurs de B , on a la propriété utile,

Proposition 14. *Soit B une k -algèbre, D une sous-algèbre de B , et M un B -module dont la restriction à D est semi-simple sans multiplicités. Soit Φ un ensemble d'éléments de B tels que D et Φ engendrent B , et S l'ensemble des composantes simples de $\text{Res}_D M$. On choisit comme précédemment une famille $\varphi_s \in \text{Hom}_D(M, s)$, pour $s \in S$, avec $\varphi_s \neq 0$. Alors $\Gamma_{D,B}(M)$ est l'enveloppe transitive de $\Gamma_{D,\Phi}(M) = (S, A_\Phi)$, avec*

$$A_\Phi = \{(s, s') \in S^2 \mid s \neq s' \text{ et } \exists \sigma \in \Phi \mid \varphi_{s'}(\sigma s) \neq \{0\}\}.$$

Preuve — $\Gamma_{D,\Phi}(M)$ est évidemment inclus dans $\Gamma_{D,B}(M)$, donc, comme $\Gamma_{D,B}(M)$ est transitif, on a

$$\overline{\Gamma}_{D,\Phi}(M) \subset \Gamma_{D,B}(M).$$

Pour démontrer l'inclusion réciproque, remarquons tout d'abord que, si $b \in B$ s'écrit $b_1 + b_2 + \dots + b_K$, pour un certain $K \geq 1$, et si $s \in S$, on a alors, pour tout $v \in M$,

$$\varphi_s(bv) = \sum_{k=1}^K \varphi_s(b_k v) \neq 0 \Rightarrow \exists k \in [1, K] \quad \varphi_s(b_k v) \neq 0.$$

Ainsi, si s et s' sont deux sommets différents de S joints dans $\Gamma_{D,B}(M)$ par une arête $s \rightarrow s'$, on peut supposer qu'il existe $v \in s$ et $b \in B$ tels que $\varphi_{s'}(bv) \neq 0$, avec b de la forme

$$b = d_1 \sigma_1 d_2 \sigma_2 \dots \sigma_r d_{r+1},$$

avec $r \geq 0$, $d_i \in D$ pour tout $i \in [1, r+1]$, et $\sigma_i \in \Phi$ pour tout $i \in [1, r]$. On désigne par E_r , pour $r \geq 0$, l'ensemble des éléments de B qui peuvent s'écrire de cette façon.

On veut donc montrer que, pour toute arête $s \rightarrow s'$ de $\Gamma_{D,B}(M)$, s'il existe $v \in S$ et $b \in E_r$ tels que $\varphi_{s'}(bv) \neq 0$, il existe dans $\Gamma_{D,\Phi}(M)$ un chemin qui joint s à s' . Nous allons montrer cette propriété par récurrence sur r .

Le cas $r = 0$ est vide, puisque $\varphi_{s'}(Ds) = \{0\}$. Si $r = 1$, on a $b = d_1\sigma_1d_2$ et

$$\varphi_{s'}(bv) = \varphi_{s'}(d_1\sigma_1d_2v) = d_1\varphi_{s'}(\sigma_1d_2v) \neq \{0\},$$

donc $v' = d_2v \in s$ est différent de 0, $\varphi_{s'}(\sigma_1v') \neq 0$, et on a une arête de s vers s' , donc un chemin, dans $\Gamma_{D,\Phi}(M)$.

Soit maintenant $r \geq 1$, et $b \in E_{r+1}$ que l'on écrit donc sous la forme

$$b = d_1\sigma_1d_2 \dots \sigma_r d_{r+1} \sigma_{r+1} d_{r+2},$$

tel que $\varphi_{s'}(bv) \neq 0$. On pose

$$b' = d_1\sigma_1d_2 \dots \sigma_r d_{r+1} \in E_r, \quad b'' = \sigma_{r+1}d_{r+2} \in E_1,$$

et $v' = b''v$. On considère

$$E = \{s'' \in S \mid \varphi_{s''}(v') \neq 0\}.$$

Alors v' s'écrit de façon unique comme somme de $v'_{s''} \in s''$ non nuls, pour $s'' \in E$, et

$$\varphi_{s'}(bv) = \varphi_{s'}(b'v') = \sum_{s'' \in E} \varphi_{s'}(b'v'_{s''}) \neq 0$$

donc il existe $s'' \in E$ tel que $\varphi_{s'}(b'v'_{s''}) \neq 0$. Par hypothèse de récurrence, comme $b' \in E_r$, on a dans $\Gamma_{D,\Phi}(M)$ un chemin de ce $s'' \in E$ ainsi choisi vers s' . D'autre part, par construction de E , on a $\varphi_{s''}(b''v) \neq 0$, donc d'après le cas $r = 1$ on a un chemin dans $\Gamma_{D,\Phi}$ de s vers s'' . En composant ces deux chemins, on obtient bien un chemin de s vers s' , et on conclut par récurrence. cqfd.

En particulier, si B est engendré par D et un élément $\sigma \in B$, on notera $\Gamma_{D,\sigma}(M) = \Gamma_{D,\{\sigma\}}(M)$.

2.3 Graphes nivelés et algèbres associées

Nous nous inspirons ici de [11] et de [74].

2.3.1 Graphes nivelés

Définition 9. On appellera *graphe nivelé* $\mathbf{G} = (S, A, b, s, niv)$ la donnée d'un graphe (S, A, b, s) et d'une application niveau

$$niv : S \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que, si l'on note

$$\begin{aligned} n_\infty &= \max_{x \in S} niv(x) \\ n_0 &= \min_{x \in S} niv(y) \end{aligned}$$

alors

$$1) \quad \forall a \in A \quad niv(b(a)) = niv(s(a)) + 1$$

- 2) Si $d \in S$ avec $n_0 < niv(d)$ (resp. $niv(d) < n_\infty$), alors il existe un élément a de A tel que $b(a) = d$ (resp. $s(a) = d$).

On appelle hauteur de \mathbf{G} l'entier $n_\infty - n_0$.

En particulier, un tel graphe nivelé \mathbf{G} est nécessairement sans boucles. On dit que $\mathbf{G} = (S, A, b, s, niv)$ est réduit si (S, A, b, s) est un graphe réduit. On pourra alors noter $\mathbf{G} = (S, A, niv)$, identifiant A à une partie de $S \times S$. Si l'ensemble des sommets de niveau minimal n_0 (resp. de niveau maximal n_∞) de \mathbf{G} est réduit à un singleton, on dira que \mathbf{G} est *unipode* (resp. *unicéphale*). Dans le cadre des graphes nivelés, on utilisera la notation $x \nearrow y$ au lieu de $x \rightarrow y$ pour rappeler que l'on considère un graphe nivelé, donc que $niv(y) = niv(x) + 1$. Remarquons inversement que, si la fonction niveau est donnée, il n'est pas nécessaire d'indiquer, dans les visualisations graphiques que nous utiliserons, le sens des arêtes entre deux sommets.

On a d'autre part une structure d'ordre sur S . Comme nous n'avons défini la notion de chemin que pour des graphes réduits, supposons \mathbf{G} réduit, et notons $x \leq y$ s'il existe un chemin de x à y (on a alors nécessairement $niv(x) \leq niv(y)$). Pour x sommet de \mathbf{G} et n entier, on définit

$$\begin{aligned} S^x &= \{y \in S \mid y \leq x\} \\ S_x &= \{y \in S \mid y \geq x\} \\ S^{(n)} &= \{x \in S \mid niv(x) \leq n\} \\ S_{(n)} &= \{x \in S \mid niv(x) \geq n\} \end{aligned}$$

et on note alors \mathbf{G}^x , \mathbf{G}_x , \mathbf{G}_x^y , $\mathbf{G}^{(n)}$, $\mathbf{G}_{(n)}$ et $\mathbf{G}_{(m)}^{(n)}$ les graphes nivelés restrictions de \mathbf{G} à S^x , S_x , $S_x \cap S^y$, $S^{(n)}$, $S_{(n)}$ et $S_{(m)} \cap S^{(n)}$ respectivement.

Enfin, si un graphe nivelé $\mathbf{G} = (S, A, b, s, niv)$ est donné, de niveau maximal (resp. minimal) n_∞ (resp. n_0), on construit un nouveau graphe nivelé, que l'on appellera son *complété unicéphale*, en ajoutant à \mathbf{G} un sommet de niveau $n_\infty + 1$, et une arête entre chaque sommet de niveau n_∞ et ce nouveau sommet de niveau $n_\infty + 1$.

2.3.2 Graphe des chemins

On fixe ici un graphe nivelé *réduit* $\mathbf{G} = (S, A, niv)$.

On note dans ce chapitre $T_{\mathbf{G}}$ l'ensemble des chemins de longueur maximale de \mathbf{G} , c'est-à-dire ceux qui vont d'un sommet de niveau minimal à un sommet de niveau maximal de \mathbf{G} . Un chemin $\xi \in T_{\mathbf{G}}$ s'écrira donc $(\xi_{n_0}, \xi_{n_0+1}, \dots, \xi_{n_\infty})$, avec $niv(\xi_i) = i$. On définit alors pour $1 \leq r \leq n_\infty$ les chemins

$$\begin{aligned} \xi_{[s]} &= (\xi_{n_0}, \xi_{n_0+1}, \dots, \xi_s) \in T_{\mathbf{G}^{\xi_s}} \subset T_{\mathbf{G}^{(s)}} \\ \xi_{[r]} &= (\xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_{n_\infty}) \in T_{\mathbf{G}_{\xi_r}} \subset T_{\mathbf{G}_{(r)}} \\ \xi_{[r,s]} &= (\xi_r, \dots, \xi_s) \in T_{\mathbf{G}_{\xi_r}^{\xi_s}}. \end{aligned}$$

On note ainsi $\xi_{[r]} = (\xi_r) \in T_{\mathbf{G}_{\xi_r}^{\xi_r}}$.

Définition 10. Soit $\mathbf{G} = (S, A, niv)$ un graphe nivelé réduit. On note $k\mathbf{G} = kT_{\mathbf{G}}$ l'espace vectoriel de base $T_{\mathbf{G}}$. On appelle *brique* tout graphe nivelé réduit, unicéphale et unipode, de hauteur 2. La taille d'une brique est par définition le cardinal de l'ensemble de ses chemins de longueur maximale. En particulier, on appellera *briques* de \mathbf{G} les graphes \mathbf{G}_x^y pour $niv(y) = niv(x) + 2$ tels qu'il existe un chemin joignant x à y . La taille d'un tel \mathbf{G}_x^y est $\dim k\mathbf{G}_x^y$, son niveau $niv(x) + 1 = niv(y) - 1$.

Par abus, on appellera encore brique de \mathbf{G} l'espace $k\mathbf{G}_x^y$, pour \mathbf{G}_x^y une brique de \mathbf{G} .

On note provisoirement $A_{\mathbf{G}}$ l'ensemble des couples (ξ, η) de $T_{\mathbf{G}}$ tels que $\xi \neq \eta$ et $\xi_{n_\infty} = \eta_{n_\infty}$, c'est-à-dire les couples de chemins différents qui aboutissent au même sommet de niveau maximal. Dans le cas où \mathbf{G} est unicéphale, on obtient alors le graphe complet.

On note encore $B_{\mathbf{G}}$ l'ensemble des couples $(\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}}^2$ tels qu'il existe $r \in [n_0 + 1, n_\infty - 1]$ vérifiant

$$\begin{aligned} \xi_u &= \eta_u & \text{pour } u \neq r \\ \xi_r &\neq \eta_r. \end{aligned}$$

En d'autres termes, il existe une brique \mathbf{G}_x^y de \mathbf{G} telle que $\xi_{r-1} = \eta_{r-1} = x$, $\xi_{r+1} = \eta_{r+1} = y$, que $\xi_{[r-1, r+1]}$ et $\eta_{[r-1, r+1]}$ soient deux chemins différents de la brique, et que $\xi_{[r+1]} = \eta_{[r+1]}$.

On peut alors introduire

Définition 11. Si $\mathbf{G} = (S, A, \text{niv})$ est un graphe nivelé réduit, on appelle graphe des chemins de \mathbf{G} le graphe réduit $\Gamma = (T_{\mathbf{G}}, A_{\mathbf{G}})$. On définit de la même façon le graphe des briques comme le graphe réduit $\Gamma_{loc} = (T_{\mathbf{G}}, B_{\mathbf{G}})$. On note

$$\begin{aligned} M(\mathbf{G}) &:= \mathcal{A}(\Gamma) \\ M_{loc}(\mathbf{G}) &:= \mathcal{A}(\Gamma_{loc}). \end{aligned}$$

Les algèbres $M(\mathbf{G})$ et $M_{loc}(\mathbf{G})$ sont ainsi deux sous-algèbres de $End(k\mathbf{G})$. Plus précisément, pour tout x sommet de niveau maximal de \mathbf{G} , $k\mathbf{G}^x$ est stable par $M(\mathbf{G})$, et on a

$$M(\mathbf{G}) = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n_\infty} M(\mathbf{G}^x) = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n_\infty} End(k\mathbf{G}^x).$$

L'espace vectoriel

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n_\infty} k\mathbf{G}^x$$

est ainsi un $M(\mathbf{G})$ module semi-simple, simple si \mathbf{G} est unicéphale, et l'algèbre $M(\mathbf{G})$ est toujours semi-simple.

On note naturellement Γ^x , Γ_x^y , etc. les graphes de chemins respectifs de \mathbf{G}^x , \mathbf{G}_x^y , etc. Pour rendre compte de la fonction niveau de \mathbf{G} sur Γ_{loc} , on introduit Γ'_{loc} , graphe défini sur l'ensemble des sommets de niveau $n_\infty - 1$ de \mathbf{G} par son ensemble d'arêtes

$$\{(x, y) \mid (x \neq y) \text{ et } \exists z \ z \nearrow x \text{ et } z \nearrow y\}.$$

On a alors

Lemme 7. Soit $\mathbf{G} = (S, A, \text{niv})$ un graphe nivelé réduit, unicéphale et de hauteur au moins 2. Soient Γ et Γ_{loc} les graphes réduits associés. On suppose que, pour tout $x \in S$ de niveau $n_\infty - 1$, Γ_{loc}^x est irréductible. Alors, en tant que $M_{loc}(\mathbf{G})$ -module, $k\mathbf{G}$ est irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si Γ'_{loc} est irréductible (resp. indécomposable).

Preuve — Comme \mathbf{G} est unicéphale, pour tout x de niveau $n_\infty - 1$, $\mathcal{A}(\Gamma_{loc}^x)$ s'identifie à une sous-algèbre semi-simple de $M_{loc}(\mathbf{G})$, qui n'agit que sur le facteur $k\mathbf{G}^x$ de la décomposition

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(y)=n_\infty-1} k\mathbf{G}^y.$$

On pose

$$D = \bigoplus_{\text{niv}(y)=n_\infty-1} \mathcal{A}(\Gamma_{loc}^y) \subset M_{loc}(\mathbf{G}) = B.$$

En tant que D -module, $k\mathbf{G}$ est semi-simple sans multiplicités, et $\Gamma_{D,B}(k\mathbf{G})$ s'identifie à $\overline{\Gamma}_{loc}'$. La conclusion résulte alors de la proposition 13. cqfd.

On en déduit

Proposition 15. *Soit $\mathbf{G} = (S, A, \text{niv})$ un graphe nivelé réduit, unipode de hauteur au moins 2. On suppose que, pour tout sommet x de niveau compris entre $n_0 + 2$ et n_∞ , le graphe Γ_{loc}' associé à \mathbf{G}^x est irréductible. On a alors*

$$M_{loc}(\mathbf{G}) = M(\mathbf{G}).$$

Preuve — On se ramène au cas où \mathbf{G} est unicéphale, on suppose $n_0 = 0$, et on démontre la proposition par récurrence sur n_∞ . Le cas $n_\infty = 2$ étant trivial, on peut supposer $n_\infty \geq 3$.

Pour tout x de niveau $n_\infty - 1$, $M_{loc}(\mathbf{G}^x) = M(\mathbf{G}^x)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Si l'on note Γ_{loc}^x le graphe des briques associé à \mathbf{G}^x , $\mathcal{A}(\Gamma_{loc}^x) = M(\mathbf{G}^x)$ et Γ_{loc}^x est irréductible d'après la proposition 12. Par hypothèse, le graphe Γ_{loc}' associé à \mathbf{G} est également irréductible, donc, d'après le lemme 7, $k\mathbf{G}$ est irréductible en tant que $M_{loc}(\mathbf{G})$ -module et, d'après le deuxième corollaire de la proposition 12, on a

$$M_{loc}(\mathbf{G}) = M(\mathbf{G}).$$

cqfd.

2.3.3 Terminologie

Par la suite, nous aurons besoin d'étudier certains opérateurs de $M(\mathbf{G})$, où \mathbf{G} est un graphe nivelé réduit unipode. Une certaine terminologie nous sera pour cela nécessaire, que nous emploierons dans les parties **II** et **III** de cette thèse. Elle ne nous sera pas utile, en revanche, pour les autres constructions générales de ce chapitre.

On fixe donc un graphe nivelé \mathbf{G} , qui est réduit et unipode.

Définition 12. *On appelle houpier de niveau r de \mathbf{G} le k -espace vectoriel*

$$k\mathbf{G}_{(n_\infty-r)} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n_\infty-r} k\mathbf{G}_x$$

ainsi que, par abus, le graphe sous-jacent $\mathbf{G}_{(n_\infty-r)}$. On notera

$$\text{Top}_r(\mathbf{G}) = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n_\infty-r} \text{End}(k\mathbf{G}_x) \subset \text{End}(k\mathbf{G}_{(n_\infty-r)}).$$

Il est clair que, pour l'action naturelle, le houpier de niveau r est un $\text{Top}_r(\mathbf{G})$ -module semi-simple et sans multiplicités.

On appellera alors *projecteur sur le houppier de niveau r* tout morphisme ψ de la forme

$$\sum_{\text{niv}(x)=n_\infty-r} \psi_x \otimes Id_{\mathbf{G}_x} \in M(\mathbf{G}),$$

où ψ_x est une forme linéaire non nulle sur $k\mathbf{G}_x$ et où la décomposition utilisée est

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n_\infty-r} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x.$$

Le morphisme ψ de $k\mathbf{G}$ vers son houppier de niveau r est alors surjectif et commute à l'action de $M(\mathbf{G}_{(n_\infty-r)})$.

2.4 Algèbres filtrées et diagrammes de Bratteli

On fixe un entier $n \geq 2$.

On appelle algèbre filtrée une k -algèbre $A = A_n$ munie d'une filtration de k -algèbres

$$k = A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = A.$$

D'après nos conventions initiales, nous avons $1 \in k = A_1$. Si $B = B_n$ est une autre k -algèbre filtrée, on dira d'un morphisme de k -algèbres $\rho : A \rightarrow B$ que c'est un morphisme d'algèbres filtrées si $\rho(A_r) \subset B_r$, pour tout $1 \leq r \leq n$. Si M est un A -module, pour $A = A_n$ une algèbre filtrée, on dira que M est *semi-simple par rapport à la filtration de A* si, pour tout $1 \leq r \leq n$, la restriction de M à A_r est semi-simple.

On fixe une algèbre filtrée $A = A_n$, M un A -module semi-simple par rapport à la filtration de A , et on suppose de plus que le A -module M est sans multiplicités.

On note S_r , pour $1 \leq r \leq n$, l'ensemble des classes de A_r -modules simples qui interviennent dans la décomposition de $\text{Res}_{A_r} M$, et

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n.$$

On définit le *diagramme de Bratteli* \mathbf{G} de M comme le graphe nivelé construit de la façon suivante. L'ensemble des sommets de \mathbf{G} est S , et on place p arêtes de $x \in S_r$ vers $y \in S_{r+1}$ si x intervient p fois dans la décomposition de $\text{Res}_{A_r} y$. Les sommets $x \in S_r$ sont naturellement de niveau r , et \mathbf{G} est de hauteur $n - 1$, avec $n_0 = 1$, $n_\infty = n$. Comme $A_1 = k$ n'admet qu'une classe de modules simples, \mathbf{G} est unipode.

On suppose maintenant que le diagramme de Bratteli \mathbf{G} de M est réduit. A chaque chemin ξ de \mathbf{G} qui aboutit à un sommet de niveau maximal de \mathbf{G} , c'est-à-dire un chemin de longueur maximale de $\mathbf{G}_{(r)}$ pour un certain $r \in [1, n]$, on va associer un sous-espace bien déterminé M_ξ de M qui sera A_r -stable. De plus, ce sous-espace sera irréductible pour l'action de A_r , et isomorphe à ξ_r .

Considérons d'abord $\xi = (y)$ avec y de niveau n . Comme M est semi-simple sans multiplicités, y s'identifie à un sous-espace de M bien déterminé, et nous définissons M_ξ comme égal à ce sous-espace. Si l'on a construit M_η pour tous les $\eta \in T_{\mathbf{G}_{(r)}}$, pour un certain $r \in [2, n]$, on va définir M_ξ pour $\xi \in T_{\mathbf{G}_{(r-1)}}$. On note $\eta = \xi_{[r]} \in T_{\mathbf{G}_{(r)}}$, chemin de \mathbf{G} auquel on a déjà

associé un sous-espace M_η de M , qui est stable pour l'action de A_r et isomorphe en tant que A_r -module à η_r , c'est-à-dire ξ_r . On définit alors M_ξ , sous-espace de M_η , comme la composante de $\text{Res}_{A_{r-1}} M_\eta$ qui est isomorphe à ξ_{r-1} , et on conclut la construction par récurrence sur r .

Il est alors clair que, pour tout $r \in [1, n]$,

$$\text{Res}_{A_r} M = \bigoplus_{\xi \in T_{\mathbf{G}(r)}} M_\xi$$

et, en particulier,

$$\text{Res}_k M = \text{Res}_{A_1} M = \bigoplus_{\xi \in T_{\mathbf{G}}} M_\xi.$$

Comme les représentations irréductibles de k sont de dimension 1, la décomposition précédente est une décomposition en droites vectorielles. Si l'on choisit un vecteur non nul dans chacune de ces droites, on obtient donc une base de M . Une base de ce type est appelée *base de Gelfand-Tsetlin* (cf. [74], [75], [10]).

On fixe désormais une base de Gelfand-Tsetlin, donc en particulier un isomorphisme de k -espaces vectoriels Φ de $k\mathbf{G}$ vers M qui possède la propriété que, pour tout $\xi \in T_{\mathbf{G}}$ et tout $r \in [1, n]$, $\Phi(\xi) \in M_{\xi_{[r]}}$. Cet isomorphisme permet alors de définir par transport de structure une action k -linéaire de A sur $k\mathbf{G}$. De la propriété précédente concernant $\Phi(\xi)$ on déduit que, pour tout $r \in [1, n]$ et $a \in A_r$, si $\xi, \eta \in T_{\mathbf{G}}$,

$$\eta^* a \xi \neq 0 \Rightarrow \eta_{[r]} = \xi_{[r]}.$$

En particulier, pour $r = n$, on en déduit que l'action de A sur $k\mathbf{G}$ est en fait un morphisme de A vers $M(G)$. Plus généralement, pour tout $r \in [1, n]$, la décomposition naturelle

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=r} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x$$

est une décomposition de $k\mathbf{G}$ en composantes A_r -stables. De plus, pour tout x de niveau r ,

$$k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x = \bigoplus_{\eta \in T_{\mathbf{G}_x}} k\mathbf{G}^x \otimes k\eta = \bigoplus_{\eta \in T_{\mathbf{G}_x}} \Phi^{-1}(M_\eta)$$

est une composante isotypique de $k\mathbf{G}$ pour l'action de A_r , de composantes simples isomorphes à $\eta_r = x$, donc la décomposition précédente de $k\mathbf{G}$ est une décomposition en composantes isotypiques.

Inversement, soit \mathbf{G} un graphe nivelé unipode tel que $n_0 = 1$ et $n_\infty = n \geq 2$, que l'on suppose réduit pour simplifier les notations. Pour tout $1 \leq r \leq n$, on considère à nouveau la décomposition

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=r} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x.$$

Comme $M(\mathbf{G}^{(r)})$ est la somme directe des $\text{End}(k\mathbf{G}^x)$ pour x de niveau r , on l'identifie à une sous-algèbre de $\text{End}(k\mathbf{G})$ de la façon suivante

Définition 13. *Si \mathbf{G} est un graphe nivelé, réduit et unipode, tel que $n_0 = 1$ et $n_\infty = n$, on définit pour tout $r \in [1, n]$ une sous-algèbre de $M(\mathbf{G})$ isomorphe à $M(\mathbf{G}^{(r)})$, encore notée $M(\mathbf{G}^{(r)})$, par*

$$M(\mathbf{G}^{(r)}) = \bigoplus_{\text{niv}(x)=r} M(\mathbf{G}^x) = \bigoplus_{\text{niv}(x)=r} \text{End}(k\mathbf{G}^x) \simeq \bigoplus_{\text{niv}(x)=r} \text{End}(k\mathbf{G}^x) \otimes \text{Id}_{k\mathbf{G}_x} \subset \text{End}(k\mathbf{G}).$$

On a alors une filtration d'algèbres (unitaires)

$$k = M(\mathbf{G}^{(1)}) \subset M(\mathbf{G}^{(2)}) \subset \dots \subset M(\mathbf{G}^{(n)}) = M(\mathbf{G}).$$

Les $k\mathbf{G}^x$ sont les $M(\mathbf{G}^{(r)})$ -modules simples et la décomposition

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=r} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x$$

est celle du $M(\mathbf{G}^{(r)})$ -module $k\mathbf{G}$ en composants isotypiques. Il en résulte immédiatement que $M(\mathbf{G}^{(1)}), \dots, M(\mathbf{G}^{(n)})$ sont des algèbres semi-simples et que \mathbf{G} est le diagramme de Bratteli associé à l'algèbre $M(\mathbf{G})$ filtrée par $k \subset M(\mathbf{G}^{(1)}) \subset \dots \subset M(\mathbf{G}^{(n)})$ et au $M(\mathbf{G})$ -module $k\mathbf{G}$, qui est sans multiplicités et semi-simple par rapport à cette filtration de $M(\mathbf{G})$.

Dans la situation où \mathbf{G} est le diagramme de Bratteli du A -module M , sans multiplicités et semi-simple par rapport à la filtration de A , on suppose que \mathbf{G} est réduit et que l'on a fixé une base de Gelfand-Tsetlin. Le morphisme $A \rightarrow M(\mathbf{G})$ est alors un morphisme d'algèbres filtrées, c'est-à-dire que l'image de A_r est incluse dans $M(\mathbf{G}^{(r)})$, pour $r \in [1, n]$. Si de plus k est algébriquement clos, il découle même du théorème de Burnside et de l'étude précédente que l'image de A_r est égale à $M(\mathbf{G}^{(r)})$.

Terminologie. Il nous arrivera de considérer la situation suivante. Une algèbre filtrée $A = A_n$ pour $n \geq 3$ est donnée, ainsi qu'un A -module M , sans multiplicités et semi-simple par rapport à la filtration de A . On veut montrer que M est irréductible. On suppose alors que $\text{Res}_{A_{n-1}} M$ est sans multiplicités, et que le diagramme de Bratteli \mathbf{G} de $\text{Res}_{A_{n-1}} M$ est réduit. Comme étape intermédiaire, il nous sera utile d'introduire le complété unicéphale \mathbf{G}^\bullet de \mathbf{G} . Si M s'avère irréductible, ce sera le diagramme de Bratteli de M . En attendant de le montrer, nous appellerons \mathbf{G}^\bullet le *pseudo-diagramme de Bratteli* de M . Le point remarquable est qu'alors $k\mathbf{G}^\bullet$ s'identifie à $k\mathbf{G}$, et que l'on a un morphisme d'algèbres filtrées $A \rightarrow M(\mathbf{G}^\bullet)$.

2.5 Algèbres locales

Les algèbres qui nous sont utiles dans cette thèse font partie d'une famille d'algèbres filtrées particulières, que nous appelons algèbres locales et définissons dans cette section.

Définition 14. On appelle algèbre locale une k -algèbre (unitaire) filtrée

$$k = A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = A$$

munie d'une famille génitrice $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ et d'une famille centralisante z_1, \dots, z_n . Il s'agit d'éléments de A qui vérifient

$$\begin{array}{ll} (\text{centr}) & z_r \text{ appartient au centre de } A_r & \text{pour } 2 \leq r \leq n \\ (\text{loc}) & \sigma_r \text{ appartient au commutant de } A_{r-1} \text{ dans } A_{r+1} & \text{pour } 2 \leq r \leq n-1 \\ (\text{gen}) & A_r, \sigma_r \text{ et } z_{r+1} \text{ engendrent } A_{r+1} & \text{pour } 1 \leq r \leq n-1. \end{array}$$

Une telle algèbre est dite localement monogène si on a de plus

$$(\text{gen}') \quad A_r \text{ et } \sigma_r \text{ engendrent } A_{r+1} \quad \text{pour } 1 \leq r \leq n-1.$$

En particulier, et d'après cette définition, l'ensemble des éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}, z_2, \dots, z_r$ doit engendrer l'algèbre A_r , pour tout $1 \leq r \leq n$. Remarquons d'autre part que les conditions (centr) et (loc) sur σ_r et z_r se reformulent de façon plus commode en disant que

$$\begin{aligned} z_i & \text{ commute à } z_j & \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n \\ \sigma_i & \text{ commute à } \sigma_j & \text{ pour } |i - j| \geq 2 \\ z_i & \text{ commute à } \sigma_j & \text{ pour } i \neq j. \end{aligned}$$

Sous cette forme, il apparaît que la notion d'algèbre locale est particulièrement adaptée aux trois algèbres associatives essentielles de cette thèse. Nous allons montrer, dans la liste d'exemples qui suit, comment ces trois algèbres rentrent dans le cadre que nous venons de définir.

Exemple 1. Soit $n \geq 2$. On pose, pour $1 \leq r \leq n$, $A_r = kB_r$, algèbre de groupe du groupe de tresses à r brins, σ_r le générateur d'Artin déjà noté σ_r , $z_r = \gamma_r = (\sigma_1 \dots \sigma_{r-1})^r$. Pour cette filtration, $A = A_n = kB_n$ est une algèbre locale qui est localement monogène.

Exemple 2. Pour $n \geq 2$ et $1 \leq r \leq n$ on pose $A_r = k\mathfrak{S}_r$, l'algèbre de groupe du groupe symétrique à r brins, $\sigma_r = s_r$ et on choisit pour z_r l'élément

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} (i \ j).$$

L'algèbre de groupe $k\mathfrak{S}_n$ ainsi filtrée est une algèbre locale, localement monogène. Nous verrons cet exemple en détail au chapitre I.3.

Exemple 3. Soit $n \geq 2$, et (V, ρ) une représentation de \mathfrak{B}_n telle que, pour tout $1 \leq r \leq n$, $\rho(\mathfrak{B}_r) = \rho(UT_r)$. On pose $A_r = \rho(\mathfrak{B}_r)$, $\sigma_r = \rho(t_{r,r+1})$, $z_r = \rho(\mathbf{T}_r)$. L'image de \mathfrak{B}_n dans $\text{End}(V)$, A_n , est une algèbre locale. Si de plus $\rho((1 \ 2))$ est un polynôme de t_{12} , il est clair que cette algèbre locale est localement monogène. Nous utiliserons cette structure notamment dans le chapitre III.4 et dans l'annexe.

Exemple 4. Pour $n \geq 2$ et $1 \leq r \leq n$ on pose $A_r = \mathfrak{B}_r$, $\sigma_r = (r \ r+1)$ et $z_r = \mathbf{T}_r$. Cette structure d'algèbre locale sera utilisée en III.1. Remarquons que cette algèbre locale n'est pas localement monogène.

On dira qu'un graphe nivelé \mathbf{G} est *colorié* si l'on a associé un scalaire à chaque sommet. En d'autres termes, un graphe nivelé et colorié \mathbf{G} est la donnée d'un couple (\mathbf{G}, φ) où \mathbf{G} est un graphe nivelé et φ est une fonction dite de coloriage de l'ensemble des sommets de \mathbf{G} vers k . Une telle fonction permet alors de faire correspondre à tout chemin de longueur maximale de \mathbf{G} un $(n_\infty - n_0)$ -uplet de scalaires. Si cette application est injective (ce qui impose à \mathbf{G} d'être réduit), on dira que φ sépare les chemins de \mathbf{G} , ou encore que c'est un bon coloriage. \mathbf{G} sera dans ce cas dit *bien colorié*.

Remarquons alors, qu'à un graphe nivelé réduit $\mathbf{G} = (S, A)$ muni d'un coloriage φ de ses sommets, et à une fonction $f : \varphi(S)^2 \rightarrow \varphi(S)$, on peut associer un coloriage ψ des arêtes de \mathbf{G} , en posant $\psi(x \nearrow y) = f(\varphi(x), \varphi(y))$.

Soit maintenant une algèbre locale $A = A_n$, et M un A -module sans multiplicités qui est semi-simple par rapport à la filtration de A . On lui associe un diagramme de Bratteli \mathbf{G} , que nous supposons réduit. On suppose que les éléments z_r , pour $r \in [1, n]$, agissent scalairement sur les composantes simples de $\text{Res}_{A_r} M$. Puisque les éléments z_r sont dans le centre de A_r , c'est en général équivalent à dire que l'action des éléments centralisants est diagonalisable. On en déduit un coloriage des sommets, en associant à un sommet x de niveau r le scalaire $\varphi(x)$ correspondant à l'action de z_r sur x .

Si l'on fixe une base de Gelfand-Tsetlin et donc une action de A sur $k\mathbf{G}$, z_r agit alors scalairement sur les composantes isotypiques $k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x$, pour x de niveau r , et laisse stables les espaces $k\mathbf{G}^x \otimes k\eta$, pour $\eta \in T_{\mathbf{G}_x}$. On en déduit que l'action de z_r sur $k\mathbf{G}$ est définie par $z_r \xi = \varphi(\xi_r)$, pour $\xi \in T_{\mathbf{G}}$ et $r \in [1, n]$.

D'autre part, pour les algèbres locales qui nous seront utiles ici, nous disposons d'éléments toriques t_r qui sont des fonctions de z_r et z_{r-1} . On en déduit alors que, sous cette hypothèse d'action scalaire des éléments centralisants, on peut définir un coloriage des arêtes de \mathbf{G} qui déterminera l'action de ces éléments toriques sur $k\mathbf{G}$. Plus précisément, si l'on note ψ ce coloriage des arêtes, on aura $t_r\xi = \psi(\xi_{r-1} \nearrow \xi_r)\xi$.

Remarquons enfin que, si k est algébriquement clos, comme z_r commute à l'image de A_r dans $M(\mathbf{G}^{(r)})$, qui est dans ce cas égale à $M(\mathbf{G}^{(r)})$, et que d'autre part $z_r \in A_r$ laisse stables les espaces $k\mathbf{G}^x \otimes k\eta$ pour $\eta \in T_{\mathbf{G}^{(r)}}$, on déduit du lemme de Schur que l'hypothèse de diagonalisabilité de l'action des éléments centralisants est automatiquement vérifiée.

2.6 Modules locaux

Dans cette section nous allons considérer une situation hybride, où l'on a une algèbre locale $A = A_n$, et une action naturelle de A sur un espace de la forme $k\mathbf{G}$, mais où \mathbf{G} , pourtant réduit, unipode et unicéphale, n'est pas nécessairement le diagramme de Bratteli de $k\mathbf{G}$ pour l'action de A . Pour plus de commodité dans l'exposition, nous ferons l'hypothèse inoffensive que A est une sous-algèbre de $End(k\mathbf{G})$.

Nous supposons de plus, et cette hypothèse-ci est fondamentale, que, soit k est un corps algébriquement clos, soit les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, z_1, \dots, z_n$ sont diagonalisables.

2.6.1 Sous-algèbres locales de $M(\mathbf{G})$

On fixe un graphe nivelé \mathbf{G} , unipode, unicéphale et réduit, pour lequel on suppose $n_0 = 1$, et on note $n_\infty = n$, supposé supérieur ou égal à 3. On fixe également une sous-algèbre *filtrée* $A = A_n$ de $M(\mathbf{G})$, qui est de plus une algèbre locale associée à des éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, z_1, \dots, z_n$. On suppose enfin que

$$\begin{aligned} \forall r \in [1, n-1] \quad \rho(\sigma_r) & \text{ commute à } M(\mathbf{G}^{(r-1)}) \\ \forall r \in [1, n] \quad \rho(z_r) & \text{ commute à } M(\mathbf{G}^{(r)}), \end{aligned}$$

et que, soit k est algébriquement clos, soit les éléments remarquables de A sont diagonalisables. On appellera désormais cette hypothèse l'"hypothèse fondamentale".

Comme z_r appartient au centre de $M(\mathbf{G}^{(r)})$, et d'après l'hypothèse fondamentale, il agit scalairement sur les sous-espaces $k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x$, pour $niv(x) = r$, qui sont les composantes isotypiques de $k\mathbf{G}$ pour l'action de $M(\mathbf{G}^{(r)})$. On peut alors définir comme en I.2.5 un coloriage φ des sommets de \mathbf{G} , et pour $\xi \in T_{\mathbf{G}}$ on a $z_r\xi = \varphi(\xi_r)\xi$. On dit alors que \mathbf{G} est colorié par l'action de A . Si φ est un bon coloriage de \mathbf{G} , \mathbf{G} sera dit bien colorié par l'action de A . On suppose désormais que c'est le cas.

Sous ces hypothèses, la restriction de $k\mathbf{G}$ à la sous-algèbre de A engendrée par les éléments centralisants est semi-simple sans multiplicités, et s'identifie précisément à $\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}})$. On déduit alors du premier corollaire de la proposition 12 qu'à A on peut associer de façon biunivoque un graphe réduit transitif $\mathbf{\Gamma}$, d'ensemble de sommets $T_{\mathbf{G}}$. On a alors $A = \mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$, et le A -module $k\mathbf{G}$ est indécomposable (resp. irréductible) si et seulement si $\mathbf{\Gamma}$ est indécomposable (resp. irréductible).

D'autre part, comme A est une algèbre locale, elle est engendrée par $z_1, \dots, z_n, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, donc, d'après ce qui précède, par $\mathcal{D}(t_{\mathbf{G}})$ et l'ensemble $\Phi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$. On appelle alors

graphe palier associé à l'action de A sur $k\mathbf{G}$ le graphe $\Gamma_A = \Gamma_{\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}}), \Phi}(k\mathbf{G})$, d'ensemble d'arêtes

$$\{(\xi, \eta) ; \xi \neq \eta \text{ et } \exists r \in [1, n-1] \mid \eta^* \sigma_r \xi \neq 0\}.$$

D'après la proposition 14, le A -module $k\mathbf{G}$ est alors indécomposable (resp. irréductible) si et seulement si Γ_A est indécomposable (resp. irréductible).

2.6.2 Algèbre palier

On fixe $r \in [1, n-1]$, et on considère la décomposition

$$k\mathbf{G} = \bigoplus_{niv(y)=r+1} \bigoplus_{niv(x)=r-1} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x^y \otimes k\mathbf{G}_y.$$

Comme

$$\sigma_r \in A_{r+1} \subset M(\mathbf{G}^{(r+1)}) = \bigoplus_{niv(y)=r+1} \text{End}(k\mathbf{G}^y) \otimes \text{Id}_{k\mathbf{G}_y},$$

on a

$$\sigma_r \in \bigoplus_{niv(y)=r+1} \text{End} \left(\bigoplus_{niv(x)=r-1} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x^y \right) \otimes k\mathbf{G}_y.$$

Comme σ_r commute à $M(\mathbf{G}^{(r-1)})$, σ_r appartient donc à

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{niv(y)=r+1} \text{End}_{M(\mathbf{G}^{(r-1)})} \left(\bigoplus_{niv(x)=r-1} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x^y \right) \otimes \text{Id}_{k\mathbf{G}_y} \\ &= \bigoplus_{niv(y)=r+1} \text{End}_{M(\mathbf{G}^{(r-1)})} \left(\bigoplus_{niv(x)=r-1} k\mathbf{G}^x \right) \otimes \text{End}(k\mathbf{G}_x^y) \otimes \text{Id}_{k\mathbf{G}_y} \\ &= \bigoplus_{niv(y)=r+1} \bigoplus_{niv(x)=r-1} \text{End}_{M(\mathbf{G}^{(r-1)})}(k\mathbf{G}^x) \otimes \text{End}(k\mathbf{G}_x^y) \otimes \text{Id}_{k\mathbf{G}_y} \end{aligned}$$

ces égalités découlant du fait que les $k\mathbf{G}^x$ pour $niv(x) = r-1$ sont des $M(\mathbf{G}^{(r-1)})$ -modules simples non isomorphes. D'après l'hypothèse fondamentale, on a alors

$$\sigma_r \in \bigoplus_{niv(y)=r+1} \bigoplus_{niv(x)=r-1} \text{Id}_{k\mathbf{G}^x} \otimes \text{End}(k\mathbf{G}_x^y) \otimes \text{Id}_{k\mathbf{G}_y}.$$

Il est d'autre part clair que z_{r-1}, z_r, z_{r+1} appartiennent à ce même sous-espace de $\text{End}(k\mathbf{G})$.

On définit l'*algèbre palier de niveau r de A* comme l'algèbre engendrée par z_{r-1}, z_r, z_{r+1} . Toute brique $k\mathbf{G}_x^y$ de niveau r est alors munie d'une action de cette algèbre. Comme φ est un bon coloriage, les images de a_{r-1}, z_r, z_{r+1} dans $\text{End}(k\mathbf{G}_x^y)$ engendrent $\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}_x^y})$, donc l'image de l'algèbre palier de niveau r est associée, pour chaque brique $k\mathbf{G}_x^y$ de \mathbf{G} , à un graphe d'ensemble de sommets $T_{\mathbf{G}_x^y}$.

Pour déterminer l'indécomposabilité ou l'irréductibilité de la brique considérée, il nous suffit d'après la proposition 14 de prendre pour *graphe associé à la brique \mathbf{G}_x^y* le graphe réduit sur $T_{\mathbf{G}_x^y}$ ayant pour arêtes

$$\{(\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}_x^y}^2 \mid \xi \neq \eta \text{ et } \eta^* \sigma_r \xi \neq 0\}.$$

2.6.3 Décomposition en briques

A partir de l'action définie plus haut de σ_r , pour $r \in [1, n-1]$, sur les briques de niveau r , on remarque que l'ensemble des arêtes de A se décompose comme suit

$$\begin{aligned}
& \{(\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}}^2; \xi \neq \eta, \exists r \in [1, n-1] \mid \eta^* \sigma_r \xi \neq 0\} \\
= & \bigcup_{r=1}^{n-1} \{(\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}}^2; \xi \neq \eta, \eta^* \sigma_r \xi \neq 0\} \\
= & \bigcup_{r=1}^{n-1} \{(\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}}^2; \xi \neq \eta, \xi_{[r-1]} = \eta_{[r-1]}, \xi_{[r+1]} = \eta_{[r+1]}, \eta_{[r-1, r+1]}^* \sigma_r \xi_{[r-1, r+1]} \neq 0\} \\
= & \bigcup_{r=1}^{n-1} \bigcup_{\text{niv}(\mathbf{G}_x^y)=r} \{(\xi, \xi) \in T_{\mathbf{G}_x^y}^2\} \times \{(\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}_x^y}^2; \xi \neq \eta, \eta^* \sigma_r \xi \neq 0\} \times \{(\xi, \xi) \in T_{\mathbf{G}_y}^2\}.
\end{aligned}$$

On en déduit tout d'abord que Γ_A est inclus dans Γ_{loc} , donc que l'action de A se factorise par $M_{loc}(\mathbf{G})$,

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\quad} & M(\mathbf{G}) \\
& \searrow & \nearrow \\
& & M_{loc}(\mathbf{G})
\end{array}$$

et ensuite que l'enveloppe transitive de Γ_A est égale à celle de Γ_{loc} dès que chacune des briques est irréductible. On a donc montré

Proposition 16. *Si toute brique \mathbf{G}_x^y est irréductible pour l'action de A , alors $A = M_{loc}(\mathbf{G})$.*

On déduit alors de la proposition 15

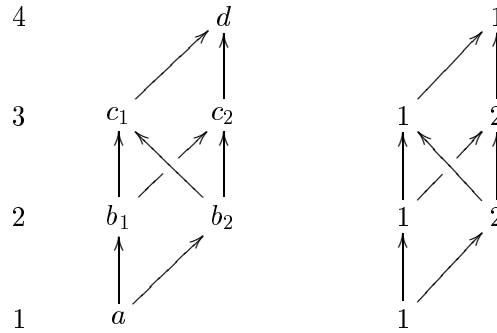
Corollaire. *Si toute brique \mathbf{G}_x^y est irréductible pour l'action de A , et si, pour tout sommet x de niveau compris entre $n_0 + 2$ et n_∞ , le graphe Γ_{loc}' associé à \mathbf{G} est irréductible, alors $A = M(\mathbf{G})$. En particulier, $k\mathbf{G}$ est irréductible en tant que A -module.*

Toute brique \mathbf{G}_x^y d'un certain niveau r est naturellement munie d'une base constituée des chemins de la brique. Dans le cas où l'action de σ_r est diagonalisable sans multiplicités, il apparaît un autre type de base de $\mathbb{C}\mathbf{G}_x^y$, les bases composées de vecteurs propres pour l'action de σ_r . On appellera ces bases des *bases locales* de la brique. Cette terminologie, qui nous sera utile à plusieurs reprises à partir du chapitre I.4, n'interviendra pas dans ce chapitre.

2.6.4 Critère inductif

Il peut arriver que les briques ne soient pas toutes irréductibles, alors même que Γ_A et Γ_{loc} ont même enveloppe transitive, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. On considère le graphe nivelé \mathbf{G} et le coloriage suivant.



Une base de $k\mathbf{G}$ est donnée par les chemins

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (a, b_1, c_1, d) \\ \xi_2 &= (a, b_2, c_1, d) \\ \xi_3 &= (a, b_1, c_2, d) \\ \xi_4 &= (a, b_2, c_2, d)\end{aligned}$$

et on considère les éléments de $M(\mathbf{G})$ décrits dans la base $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad z_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad z_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on pose $A_1 = k$, $A_2 = \langle \sigma_1, z_2 \rangle$, $A_3 = \langle A_2, \sigma_2, z_3 \rangle$, $A_4 = \langle A_3, \sigma_3, z_4 \rangle$, l'algèbre $A = A_4$ est une algèbre locale, et le coloriage de \mathbf{G} , diagramme de Bratteli de k^4 pour cette action de A , correspond à l'action des éléments centralisants. Considérant l'action de σ_3 , on remarque que les briques de niveau 3, $\mathbf{G}_{b_1}^d$ et $\mathbf{G}_{b_2}^d$, bien qu'indécomposables, ne sont pas irréductibles. Pourtant,

$$\Gamma_A = \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \xi_2 \\ \xi_1 & & \xleftarrow{\quad} \\ \uparrow & & \downarrow \\ & \xrightarrow{\quad} & \xi_4 \\ \xi_3 & & \xleftarrow{\quad} \end{array}$$

est irréductible, et l'image de A est $M_{loc}(\mathbf{G})$, ici égal à $M(\mathbf{G}) = \text{End}(k^4)$.

Dans un tel cas, pour montrer l'irréductibilité de $k\mathbf{G}$ et donc l'identité entre A et $M(\mathbf{G})$, on procède de façon inductive.

A partir de maintenant, on ne *suppose plus* que le coloriage de \mathbf{G} déduit de l'action des éléments centralisants est un bon coloriage.

Il est utile de définir le *graphe palier* Γ'_A comme le graphe réduit sur l'ensemble des sommets de \mathbf{G} de niveau $n-1$ défini par $x \rightarrow y$ si et seulement si il existe une brique $\mathbf{G}_{\check{z}}^{\hat{z}}$ bien coloriée par l'action de A , avec $\text{niv}(\check{z}) = n-2$, telle que $\check{z} \nearrow x$ et $\hat{z} \nearrow y$ dans \mathbf{G} , sur laquelle

$$(\check{z}, y, \hat{z})^* \sigma_{n-1}(\check{z}, x, \hat{z}) \neq 0.$$

On a alors, sous les hypothèses déjà faites sur $A = A_n$ et \mathbf{G} ,

Proposition 17. *Si, pour tout x de niveau $n-1$, $k\mathbf{G}^x$ est un A_{n-1} -module simple, et si $\mathbf{G}_{(n-1)}$ est bien colorié par l'action de A , $k\mathbf{G}$ est un A -module irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si le graphe palier Γ'_A est irréductible (resp. indécomposable).*

Preuve — Notons S l'ensemble des sommets de niveau $n-1$ de Γ . En tant que A_{n-1} -module, $k\mathbf{G}$ est la somme directe des $k\mathbf{G}^x$, pour $x \in S$. Comme z_{n-1} agit par $\varphi(x)$ sur $k\mathbf{G}^x$,

et que $\mathbf{G}_{(n-1)}$ est ainsi bien colorié, $k\mathbf{G}$ est semi-simple sans multiplicités pour l'action de A_{n-1} . D'après la proposition 13, $k\mathbf{G}$ est un A -module irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si $\Gamma_{A_{n-1},A}(k\mathbf{G})$ est irréductible (resp. indécomposable). L'algèbre A est engendrée par A_{n-1} , σ_{n-1} et z_n . Mais z_n étant scalaire, si l'on considère A comme incluse dans $\text{End}(k\mathbf{G})$, A est engendrée par A_{n-1} et σ_{n-1} , donc, d'après la proposition 14, $\Gamma_{A_{n-1},A}(k\mathbf{G})$ et $\Gamma_{A_{n-1},\text{sigma}_{n-1}}$ ont même enveloppe transitive. Comme $\mathbf{G}_{(n-1)}$ est bien colorié, toutes les briques de niveau $n-1$ de \mathbf{G} le sont également. De plus, les sommets de Γ'_A , c'est-à-dire l'ensemble S des sommets de niveau $n-1$ de \mathbf{G} , s'identifient aux composantes simples $k\mathbf{G}^x$ du A_{n-1} -module $k\mathbf{G}$, c'est-à-dire les sommets de $\Gamma_{A_{n-1},A}(k\mathbf{G})$. Il est alors clair, au vu de l'action locale de σ_{n-1} sur les chemins de \mathbf{G} , que Γ'_A s'identifie à $\Gamma_{A_{n-1},A}(k\mathbf{G})$, ce qui conclut la démonstration. cqfd.

2.7 Applications

2.7.1 Analyse des variétés $\mathcal{V}(M)$: introduction

Dans les chapitres II.1, II.2 et II.4, nous étudierons des représentations de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur des représentations *sans multiplicités* du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Si une telle représentation de \mathfrak{S}_n est donnée, son diagramme de Bratteli \mathbf{G} est un graphe, et une base de Gelfand-Tsetlin correspond à la base de Young, normalisée par exemple suivant le modèle semi-normal. L'action de \mathfrak{S}_n est alors bien déterminée, et à chaque élément de \mathfrak{S}_n correspond un élément de $M(\mathbf{G})$. D'après le lemme 4, étendre cette représentation de \mathfrak{S}_n en une représentation de \mathfrak{B}_n revient à construire un élément $t \in M(\mathbf{G})$ qui commute à l'action de $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ et satisfait aux équations $R(t) = 0$, $L(t) = 0$.

Comme t doit commuter à l'action de $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$, il est déterminé par un certain nombre d'endomorphismes dans des espaces de faible dimension. Ces espaces sont les espaces naturellement associés aux houppiers de niveau 2 de \mathbf{G} , et leur dimension dépend de la forme des diagrammes considérés, mais pas nécessairement de leur taille.

L'annulation des endomorphismes $R(t)$ et $L(t)$ correspond à l'annulation d'endomorphismes, encore notés $R(t)$ et $L(t)$, dans les houppiers de niveau 3 et 4 de \mathbf{G} .

La méthode suivie pour déterminer les t possibles est alors la suivante. La condition de commutation à $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ permet d'écrire les matrices correspondant à t en fonction d'un certain nombre de paramètres principaux, qui dépendent de la situation étudiée, et de paramètres secondaires entiers, notamment n et éventuellement certaines distances axiales. Les équations $R(t) = 0$ et $L(t) = 0$ rapportées aux différents houppiers correspondent matriciellement à une liste d'équations, polynomiales en les paramètres principaux.

Dans les différentes situations étudiées ici, nous avons résolu ces équations. Les calculs ont été effectués parfois manuellement, le plus souvent à l'aide du logiciel MAPLE. Plus précisément, nous avons utilisé MAPLE pour, outre des calculs d'algèbre linéaire, factoriser les polynômes en les paramètres principaux, ainsi que les dénominateurs en les paramètres secondaires. La plupart du temps, cette opération a fait directement apparaître les facteurs de degré 1. Quand certains polynômes s'annulaient pour de petites valeurs de n , nous avons parfois supposé n suffisamment grand pour ne pas avoir à considérer ces cas particuliers (notamment au chapitre II.2).

Lorsque cet algorithme de factorisation ne suffisait pas, nous avons fait appel au module de décomposition en base de Gröbner du même logiciel, pour obtenir une base de Gröbner

de la liste d'équations considérées, qui sont des polynômes en les paramètres principaux, à coefficients dans le corps des fractions rationnelles en les paramètres secondaires. Nous nous sommes systématiquement ramené à des situations où le nombre de paramètres secondaires était faible, voire nul, et où la base de Gröbner obtenue se factorisait à chaque fois aisément à l'aide de l'algorithme de factorisation de MAPLE.

Soulignons que cette méthode, utilisée dans ces trois chapitres pour des situations remarquables, peut être appliquée à n'importe quelle représentation sans multiplicités du groupe symétrique. En particulier, si l'on fixe n et une famille de partitions de n deux à deux distinctes, on peut de façon automatique ramener la détermination des représentations de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur la représentation de \mathfrak{S}_n correspondante à un système d'équations polynomiales (cette fois, sans paramètre secondaire) de taille réduite.

2.7.2 Analyse des variétés $\mathcal{V}(M)$: étapes

Ici, nous revenons sur la procédure utilisée, de façon plus précise :

Première étape

Nous étudierons la situation suivante. On considère M , représentation sans multiplicités de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ est une algèbre locale, et le diagramme de Bratteli \mathbf{G} de M est réduit. De plus, nous verrons en I.3 que l'action de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ munit \mathbf{G} d'un bon coloriage.

Nous cherchons alors à construire $t_{n-1,n} = t \in \text{End}(k\mathbf{G})$ qui soit propre à prolonger l'action de \mathfrak{S}_n en une action de \mathfrak{B}_n . Un tel t doit commuter à \mathfrak{S}_{n-2} , or, pour tout $r \leq n-1$,

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-r}} k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n-r} k\mathbf{G}^x \otimes k\mathbf{G}_x$$

d'où

$$\text{End}_{\mathfrak{S}_{n-r}} k\mathbf{G} = \bigoplus_{\text{niv}(x)=n-r} \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-r}}(k\mathbf{G}^x) \otimes \text{End}_k(k\mathbf{G}^x)$$

et l'application à chaque $\text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2}}(k\mathbf{G}^x)$ d'une forme linéaire, par exemple la trace divisée par la dimension de $k\mathbf{G}^x$, fournit un isomorphisme

$$\text{End}_{\mathfrak{S}_{n-r}}(k\mathbf{G}) \simeq \bigoplus_{\text{niv}(x)=n-r} \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-r}}(k\mathbf{G}^x) = \text{Top}_r(\mathbf{G}).$$

Nous considérerons donc $s_{n-1}, t \in \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2}}(k\mathbf{G})$ comme des endomorphismes de ce sous-espace de $k\mathbf{G}_{(n-2)}$, et on pourra résoudre l'équation de commutation entre s_{n-1} et t sur cet espace. De même, les équations $R(t) = 0$ et $L(t) = 0$ s'écriront sur les espaces $\text{Top}_3(\mathbf{G})$ et $\text{Top}_4(\mathbf{G})$, respectivement.

Deuxième étape

On note encore M une représentation de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ sans multiplicités, et \mathbf{G} le diagramme de Bratteli de M par rapport à cette algèbre locale.

On suppose que M est la restriction à \mathfrak{S}_n d'une représentation de \mathfrak{B}_n , entièrement déterminée par l'image de $t_{n-1,n}$, notée t , dans $\text{End}(k\mathbf{G})$.

Pour déterminer l'indécomposabilité ou l'irréductibilité du \mathfrak{B}_n -module M , il suffit d'après la proposition 13 de déterminer l'indécomposabilité ou l'irréductibilité du graphe $\Gamma_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \mathfrak{B}_n}(M)$, donc d'après la proposition 14 de $\Gamma_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n, t}$, ce que l'on déduit aisément de l'action explicite de t sur le houppier de niveau 2,

$$\bigoplus_{niv(x)=n-2} k\mathbf{G}_x = \bigoplus_{niv(x)=n-2} \bigoplus_{niv(y)=n} k\mathbf{G}_x^y = \bigoplus_{niv(y)=n} k\mathbf{G}_{(n-2)}^y.$$

Troisième étape

Ici M est toujours une représentation sans multiplicités de l'algèbre locale $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, et \mathbf{G} son diagramme de Bratteli. M a été prolongée en une représentation irréductible de \mathfrak{B}_n , et l'on veut déterminer la restriction de M à \mathfrak{B}_{n-1} . \mathfrak{B}_{n-1} est engendrée par \mathfrak{S}_{n-1} et $t = t_{n-2, n-1}$, et on connaît l'écriture de t et s_{n-2} dans

$$Top_3(\mathbf{G}) = \bigoplus_{niv(x)=n-3} End(k\mathbf{G}_x) \subset End(k\mathbf{G}_{(n-3)}).$$

On a

$$k\mathbf{G}_{(n-3)} = \bigoplus_{niv(y)=n-1} k\mathbf{G}_{(n-3)}^y \otimes k\mathbf{G}_y.$$

On peut alors déterminer, à partir de l'écriture de t dans $Top_3(\mathbf{G})$, les composantes isotypiques de la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} de M qui sont stables par t , donc par \mathfrak{B}_{n-1} . En effet, si $k\mathbf{G}^y \otimes k\mathbf{G}_y$ est stable par t , pour $niv(y) = n - 1$, $k\mathbf{G}_{(n-3)}^y \otimes k\mathbf{G}_y$ l'est aussi.

2.7.3 Intégration explicite: un algorithme

On fixe un corps k , algébriquement clos et de caractéristique 0.

Dans les chapitres II.3, II.4 et III.1 nous tâcherons de décrire des représentations irréductibles de B_n sur k le plus explicitement possible, c'est-à-dire que nous chercherons à associer à chacun des générateurs σ_i de B_n une matrice à coefficients dans k .

Il est en fait remarquable que, si les restrictions de cette représentation à chacun des B_r , pour $r < n$, sont semi-simples, le seul diagramme de Bratteli de la représentation considérée par rapport à la filtration habituelle de B_n permet de restreindre considérablement la classe des matrices possibles. Supposons que ce diagramme soit un graphe \mathbf{G} unicéphale, et notons z son sommet de niveau n . Pour $n = 2$ la représentation est déterminée par un scalaire quelconque. Procédons pour $n > 2$ par récurrence.

On suppose que l'on a construit, pour tout $y \nearrow z$, une représentation irréductible de B_{n-1} correspondant à \mathbf{G}^y . On a donc une famille $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ de matrices de $M(\mathbf{G})$ qui vérifient les relations de B_{n-1} , et on cherche à construire $\sigma_{n-1} \in M(\mathbf{G})$. Pour cela, on note u_1, \dots, u_r les valeurs propres de σ_1 , supposées connues puisque $n > 2$, v_1, \dots, v_r les sommets de niveau 2 de \mathbf{G} qui leur correspondent, et on applique l'algorithme suivant :

1 Action de γ_n

On a $\gamma_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$. Comme chacun des σ_i est conjugué à σ_1 ,

$$\det(\gamma_n) = \det(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n = \det(\sigma_1)^{n(n-1)}.$$

Puisque $k\mathbf{G}$ est irréductible pour l'action de B_n , et que γ_n est central, l'action de γ_n est un scalaire encore noté γ_n , d'où

$$\gamma_n^{\dim k\mathbf{G}} = \det(\sigma_1)^{n(n-1)}.$$

Le scalaire $\det(\sigma_1)$ est d'autre part égal au produit des valeurs propres de σ_1 comptées avec multiplicités, soit

$$\det(\sigma_1) = \prod_{i=1}^r u_i^{\dim k\mathbf{G}_{v_i}},$$

et l'action de γ_n est déterminée, à une racine de l'unité notée ω_n près, en fonction de u_1, \dots, u_r .

Supposons que l'on connaisse ω_n . On a alors déterminé un coloriage des sommets de \mathbf{G} .

2 Action de δ_n

A ce coloriage des sommets correspond un coloriage des arêtes, qui donne l'action de δ_n : à une arête $x \nearrow y$, où $\text{niv}(y) = r + 1$, on associe, suivant la relation

$$\gamma_{r+1} = \gamma_r \delta_{r+1},$$

le quotient de la valeur de γ_{r+1} sur y par la valeur de γ_r sur x .

3 Action de σ_{n-1} sur les briques

Il s'agit d'associer une matrice encore notée σ_{n-1} à chaque brique $k\mathbf{G}_x^z$ pour $\text{niv}(x) = n - 2$. Sur une telle brique, γ_n et γ_{n-2} sont des scalaires connus, et

$$\sigma_{n-1} \delta_{n-1} \sigma_{n-1} = \delta_n,$$

donc

$$(\sigma_{n-1} \delta_{n-1})^2 = \delta_n \delta_{n-1} = \gamma_n \gamma_{n-2}^{-1}$$

est un scalaire, fonction de ω_n , de la racine de l'unité ω_{n-2} associée à x , et des valeurs propres u_1, \dots, u_r de σ_1 . D'autre part, sur $k\mathbf{G}_x^z$,

$$\det(\sigma_{n-1})^2 = \det\left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right) = \det\left(\frac{\gamma_n \gamma_{n-2}}{\gamma_{n-1}}\right).$$

On note $d = \dim k\mathbf{G}_x^z$. On a alors à prendre en considération la variété des matrices de carré l'identité

$$\mathcal{V} = \{M \in M_d(k) \mid M^2 = 1\}.$$

A partir d'un choix de racine carrée pour $\gamma_n \gamma_{n-2}^{-1}$, à tout $M \in \mathcal{V}$ on peut associer de façon unique une matrice σ_{n-1} telle que $(\sigma_{n-1} \delta_{n-1})^2 = \gamma_n \gamma_{n-2}^{-1}$. On se restreint ensuite à la sous-variété de \mathcal{V} qui correspond à l'équation donnant le carré du déterminant de σ_{n-1} . Il arrive enfin que l'on connaisse la trace de $\sigma_{n-1} \delta_{n-1}$, ce qui restreint encore la variété à considérer. On obtient ainsi un paramétrage des matrices σ_{n-1} possibles, notamment pour des briques de faible taille ($d \in \{1, 2, 3\}$).

4 Relation de tresse

Sur chacun des houppiers de niveau 3, on résout l'équation de tresse en fonction du paramétrage de σ_{n-1} obtenu précédemment.

Pour mettre en œuvre cet algorithme, on a donc besoin des données suivantes :

- 1) un diagramme de Bratteli correspondant à une représentation irréductible de B_n
Remarquons en particulier que, comme l'on peut s'y attendre, tous les graphes nivelés unicéphales ne sont pas des diagrammes de Bratteli d'une représentation irréductible de B_n . De fait, l'équation sur $\det(\sigma_{n-1})^2$ impose une assez forte restriction aux graphes possibles. En effet, sur chaque brique, $\det(\sigma_{n-1})^2$ doit être une puissance *fractionnaire* bien déterminée par le graphe des paramètres u_1, \dots, u_r et de racines de l'unité $\omega_n, \omega_{n-1}, \omega_{n-2}$, et, en même temps, comme produit de valeurs propres, un *monôme* en u_1, \dots, u_r . Une illustration non triviale de graphe nivelé ne correspondant à aucune représentation de B_n est l'exemple de I.4.2.2 : le commutant de \mathfrak{S}_3 dans $[2, 1]^{\otimes n}$ pour n grand n'est pas un quotient de $\mathbb{C}B_n$ d'une façon compatible à leurs filtrations naturelles respectives.
- 2) les valeurs propres u_1, \dots, u_r
- 3) un coloriage du graphe par des racines de l'unité.

Dans cette thèse nous étudions deux situations où l'on détermine facilement les données manquantes :

- La situation très exceptionnelle des algèbres de Hecke cyclotomiques.

Dans ce cas, les informations sont données par une étude du groupe de réflexions complexes correspondant. En particulier, le diagramme de Bratteli est celui de la représentation du groupe associée et les valeurs propres de σ_1 sont les paramètres de la déformation. La détermination des racines de l'unité ω_n découle ensuite de la table des caractères : on sait exprimer γ_n en fonction de ω_n et u_1, \dots, u_r , et sa trace doit être égale pour $u_k = \exp(\frac{2i\pi}{k})$ à la valeur du caractère du groupe sur $(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$. Un renseignement complémentaire sur $\sigma_{n-1}\delta_{n-1}$ est encore fourni par la table des caractères du groupe : la spécialisation de sa trace aux racines de l'unité.

- La situation générale des représentations intégrées.

On considère une représentation irréductible M de \mathfrak{B}_n , dont le diagramme de Bratteli est un graphe nivelé. D'après les propositions 3 et 5 de I.1.2.4, pour h suffisamment petit et non nul, la représentation de B_n associée $\int_h M$ aura le même diagramme de Bratteli, qui est ainsi donné.

De la proposition 2 de I.1.2.3 on déduit alors, d'une part les valeurs propres de σ_1 , c'est-à-dire les paramètres u_1, \dots, u_r , et d'autre part la valeur au premier ordre en h de γ_n . Comme on sait exprimer les u_i au premier ordre en h , on en déduit la valeur de la racine de l'unité ω_n . On déduit encore la trace au premier ordre en h de $\sigma_{n-1}\delta_{n-1}$ de la proposition 2,

$$\text{tr}(\sigma_{n-1}\delta_{n-1}) = \text{tr}(s_{n-1}) + h \text{tr}(s_{n-1}(t_{n-1,n} + 2\mathbf{t}_{n-1})) + o(h),$$

en remarquant que, pour $i < n - 1$,

$$\text{tr}(s_{n-1}t_{i,n-1}) = \text{tr}(s_{n-1}t_{i,n-1}s_{n-1}^2) = \text{tr}(t_{i,n}s_{i,n-1}) = \text{tr}(s_{n-1}t_{i,n}),$$

ou bien en utilisant la conjugaison par Ψ_{n-1} définie à la fin de I.1.2.3 pour h proche de 0.

Il reste enfin à faire deux remarques, à charge et à décharge, sur cet algorithme. Son défaut tient à ce qu'il n'est vraiment utile que sous réserve d'une bonne connaissance, et en particulier de bons paramétrages, de la variété des matrices de carré 1. Cela restreint souvent son application à des diagrammes dont les briques sont de faible taille.

Son avantage essentiel, en revanche, est qu'il permet de généraliser facilement les représentations que l'on considère. En effet, si l'on se garde de fixer les scalaires u_i , que l'on considère comme des variables dans les différentes relations de tresse, on obtient un paramétrage de toute la famille continue de représentations, qui correspond au diagramme fixé et aux racines de l'unité prescrites par la représentation initiale.

Cadre formel

On note M une représentation irréductible de B_n , semi-simple par rapport à la filtration naturelle de B_n , et \mathbf{G} son diagramme de Bratteli, que l'on suppose réduit.

On cherche à déterminer explicitement l'action des générateurs σ_r sur $k\mathbf{G}$, donc sur les briques de \mathbf{G} , et l'on procède par récurrence sur n . On suppose ainsi que l'on connaît les images de $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$, et on veut déterminer σ_{n-1} . La matrice associée à σ_{n-1} est déterminée par l'action de σ_{n-1} sur le houppier de niveau 2, et il suffit qu'elle vérifie l'équation de tresse, cette fois sur le houppier de niveau 3, pour que l'on ait prolongé l'action déjà connue de B_{n-1} sur $k\mathbf{G} = \bigoplus_{niv(x)=n-1} k\mathbf{G}^x$ en une représentation de B_n .

L'irréductibilité d'une telle représentation se vérifie alors par l'examen de $\Gamma_{B_{n-1}, B_n}(M)$, ou de $\Gamma_{B_{n-1}, \sigma_{n-1}}(M)$.

Etude préliminaire des briques de taille 2

Sur une brique de taille 2, la situation est la suivante: une matrice diagonale δ de spectre α, β et un scalaire u sont donnés, et l'on cherche une matrice de taille 2, s , telle que $(\delta s)^2 = u^2$. Si la brique est irréductible, s s'écrit alors

$$s = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix} P.$$

Après calculs, on obtient ainsi une description de s en fonction de ses invariants de similitude et d'un paramètre v :

- Si $tr(s) = 0$,

$$s = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1}v \\ \frac{-\alpha \det(s)}{v} & 0 \end{pmatrix}$$

C'est en particulier forcément le cas si $\alpha = \beta$.

- Si $tr(s) \neq 0$, on note x et y les valeurs propres de s . Alors,

$$s = \frac{1}{\alpha^{-1} - \beta^{-1}} \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(x+y) & \alpha^{-1}v \\ \frac{-1}{\beta v} (x^2 + xy \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + y^2) & -\beta^{-1}(x+y) \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Représentations du groupe symétrique

On fixe un corps k de caractéristique 0.

En premier lieu, ce chapitre met en place un certain nombre de définitions qui nous serviront pour décrire les représentations du groupe symétrique. Nous définissons tout d'abord les éléments dits de Jucys-Murphy (I.3.1), qui sont les éléments toriques de $k\mathfrak{S}_n$, par analogie avec les éléments toriques de B_n et \mathfrak{B}_n (cf. I.1.1.1 et I.1.2.1). La présentation graphique adoptée pour les diagrammes de Young, qui indexent les représentations irréductibles de $k\mathfrak{S}_n$, et la terminologie employée pour les décrire, sont l'objet de la section suivante I.3.2.

En deuxième lieu, nous montrons (I.3.3) comment reformuler l'approche selon Vershik et Okounkov [75] de la théorie des représentations du groupe symétrique dans le formalisme du chapitre I.2.

Enfin, et il s'agit là des résultats originaux du chapitre, nous établissons deux propriétés qui nous seront utiles pour identifier les représentations du groupe symétrique. Elles reposent sur l'idée que, pour que deux représentations de \mathfrak{S}_n soient isomorphes, il suffit souvent que leur restriction à \mathfrak{S}_{n-1} le soit.

Dans ce chapitre, nous utiliserons de façon systématique la filtration naturelle déjà mentionnée

$$\{e\} = \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n.$$

3.1 Éléments de Jucys-Murphy

On introduit tout d'abord l'élément de $k\mathfrak{S}_n$

$$T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i \ j) \text{ avec } T_2 = (1 \ 2), T_1 = 0.$$

Il est immédiat que T_n appartient au centre de $k\mathfrak{S}_n$. On introduit ensuite l'élément dit de Jucys-Murphy défini pour $n \geq 2$ par

$$\begin{aligned} J_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (i \ n). \end{aligned}$$

Comme T_n appartient au centre de $k\mathfrak{S}_n$, J_n appartient au commutant de $k\mathfrak{S}_{n-1}$ dans $k\mathfrak{S}_n$. On en déduit que la famille J_2, \dots, J_n engendre une sous-algèbre commutative de $k\mathfrak{S}_n$. On a alors

Proposition. (*Diaconis et Green [37]*) *L'algèbre unitaire engendrée par J_2, \dots, J_n est une sous-algèbre commutative maximale de $k\mathfrak{S}_n$.*

3.2 Diagrammes de Young

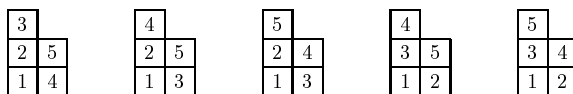
Rappelons que les représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n sont indexées par les partitions de n , et que l'on identifie les partitions $\lambda \vdash n$ à des diagrammes de Young. Par convention nous faisons correspondre à la partition $[n]$ de n la représentation triviale de \mathfrak{S}_n . Dans ce travail nous représenterons par exemple $\lambda = [3, 2]$ par le diagramme de Young



Dans cette notation, si $\lambda = [3, 2]$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_r = 0$ pour $r \notin \{1, 2\}$. On convient que $[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0] = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]$. Nous repérons d'autre part les boîtes de ce diagramme d'une façon classique par rapport à la disposition choisie : la boîte la plus haute du diagramme précédent a pour coordonnées $(1, 3)$, et plus généralement le pourtour extérieur d'un diagramme est constitué des boîtes de coordonnées (i, λ_i) . Enfin, cette présentation en diagramme identifie de fait l'ensemble des partitions à un ensemble de parties du plan, stable par intersection et réunion. Nous noterons en conséquence $\lambda \cup \mu$ et $\lambda \cap \mu$ les diagrammes associés aux réunion et intersection des parties du plan correspondantes, et $\lambda \subset \mu$ la relation d'ordre évidente.

Le \mathfrak{S}_n -module S^λ associé à une telle partition λ et appelé module de Specht, qui sera parfois simplement noté λ , admet une famille naturelle de bases, dites bases de polytabloïdes ou bases de Young. Ces bases sont en fait déterminées à normalisation des vecteurs de base près. Cela sera sous-entendu quand nous parlerons par abus de *la* base de Young.

Les vecteurs de cette base sont indexés par ce que l'on appelle les *tableaux standard* : un diagramme de Young λ de taille n donné, on appelle tableau de Young de forme λ une numérotation des boîtes de λ par les nombres entiers de 1 à n . Un tableau est dit standard si les nombres sont placés dans un ordre croissant selon les lignes (de gauche à droite) et selon les colonnes (de bas en haut). Ainsi à $\lambda = [3, 2]$ sont associés les tableaux standard



Pour $\lambda \vdash n$ on note

$$|\lambda| = t(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$$

$$h(\lambda) = \#\{i \mid \lambda_i \neq 0\}$$

$$\delta(\lambda) = \#\{i \mid \lambda_i \neq \lambda_{i+1}\}.$$

$|\lambda|$ est appelé la *taille* de λ , $\delta(\lambda)$ son *nombre de décrochements*. Pour λ et μ deux partitions, on appelle *nombre de décrochements relatifs* des diagrammes de Young associés le nombre

$$\delta(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \delta_{\lambda_i, \mu_i}).$$

En pratique, nous utiliserons souvent cette notion pour λ et μ partitions d'un même entier n . Remarquons néanmoins que $\delta(\lambda, \mu)$ définit une *distance* sur l'ensemble de tous les diagrammes de Young.

On dira de plus que λ est

- un *rectangle* si $\delta(\lambda) = 1$ (alors λ s'écrit $[a^b]$)
- une *béquille* si $h(\lambda) = 2$
- une *équerre* si $\lambda_i \leq 1$ pour $i > 1$

et on notera λ' la partition correspondant au diagramme de Young *dual* ou *transposé*

$$\lambda'_i := \#\{j \mid \lambda_j \geq i\}.$$

Enfin, si λ est toujours un diagramme de Young, nous définissons les paramètres, fondamentaux dans l'approche choisie ici,

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - i.$$

On remarque que $\tilde{\lambda}'_i = -\tilde{\lambda}_i$.

3.3 L'algèbre locale $k\mathfrak{S}_n$

Les travaux de Vershik et Okounkov [75] ont montré que les idées développées dans le chapitre I.2 permettaient de reconstruire en grande partie la théorie des représentations du groupe symétrique.

Considérer localement les représentations du groupe symétrique consiste à utiliser l'inclusion naturelle $\mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n$, \mathfrak{S}_{n-1} désignant comme d'habitude le sous-groupe de \mathfrak{S}_n qui n'agit que sur les lettres $\{1, \dots, n-1\}$. La règle fondamentale dans cette optique est la règle de Young. Suivant celle-ci, la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} d'un module de Specht S^λ pour $\lambda \vdash n$ est *sans multiplicités*, chacun des composants simples correspondant aux diagrammes de Young μ déduits de λ par *retrait d'une boîte*.

Cette règle se généralise aux restrictions à $\mathfrak{S}_{n-k} \times \mathfrak{S}_k$ des modules de Specht de \mathfrak{S}_n , par l'introduction de modules $S^{\lambda/\mu}$ associés à des *diagrammes de Young gauches* λ/μ . Nous renvoyons au livre de James et Kerber [14] pour cette notion fondamentale, que nous utiliserons au chapitre II.1.

Reformulant ces idées, nous considérerons $k\mathfrak{S}_n$ comme une algèbre locale, à partir de la filtration

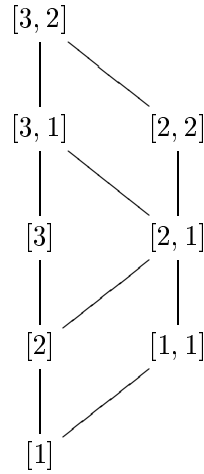
$$k = k\mathfrak{S}_1 \subset k\mathfrak{S}_2 \subset \dots \subset k\mathfrak{S}_{n-1} \subset k\mathfrak{S}_n.$$

Les éléments générateurs sont les transpositions consécutives $s_i = (i \ i+1)$, les éléments centralisants sont les

$$T_r = \sum_{1 \leq i < j \leq r} (i \ j).$$

Pour cette filtration, $k\mathfrak{S}_n$ est localement monogène. D'après la règle de Young, le diagramme de Bratteli de S^λ est un graphe nivelé, et les bases de Gelfand-Tsetlin des chemins correspondent exactement aux bases de Young. Par exemple pour $\lambda = [3, 2]$, on a le diagramme de

Bratteli



et le chemin

$$[1] \rightarrow [2] \rightarrow [2, 1] \rightarrow [3, 1] \rightarrow [3, 2]$$

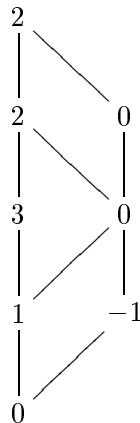
correspond au tableau standard

4	
2	5
1	3

L'action de T_n sur S^λ pour $\lambda \vdash n$ est scalaire, et se calcule par exemple, si \mathbf{G} désigne le diagramme de Bratteli de S^λ , par

$$\begin{aligned} (\dim \mathbf{G}^\lambda) T_n &= (\dim S^\lambda) T_n = \text{tr}(T_n) = \frac{n(n-1)}{2} \text{tr}(1 \ 2) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} (\dim k\mathbf{G}_{[2]}^\lambda - \dim k\mathbf{G}_{[1,1]}^\lambda). \end{aligned}$$

Le graphe colorié correspondant à $\lambda = [3, 2]$ est alors



L'intérêt de cette formule compacte est qu'elle ne fait intervenir, pour calculer la valeur de T_n , qu'un dénombrement de chemins du graphe. Nous verrons que cette idée se généralise au groupe de tresses, dans la partie **III**. Dans le cas particulier du groupe symétrique, nous allons exposer une façon plus simple de calculer la valeur de ces éléments, après un détour par les éléments de Jucys-Murphy et le coloriage des arêtes du diagramme.

Nous appellerons graphe de Young d'ordre n le diagramme de Bratteli de $k\mathfrak{S}_n$ colorié de cette manière. A ce coloriage φ des sommets nous associerons un coloriage des arêtes, par

$$\varphi(\mu \nearrow \lambda) := \varphi(\lambda) - \varphi(\mu).$$

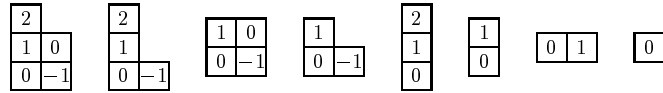
Remarquons que cette valeur est celle des éléments de Jucys-Murphy sur les chemins du graphe qui contiennent $\mu \nearrow \lambda$. Il est alors aisé de vérifier que si λ est déduit de μ par ajout d'une boîte en colonne i , alors

$$\varphi(\mu \nearrow \lambda) = \lambda_i - i = \tilde{\lambda}_i.$$

A partir de cette propriété, on vérifie facilement que φ est un *bon coloriage*. La proposition énoncée en I.3.1 découle alors immédiatement de l'isomorphisme

$$k\mathfrak{S}_n \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{End}_{\mathbb{C}}(S^\lambda) \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} M(\mathbf{G}).$$

D'autre part, on en déduit un moyen simple de calculer les valeurs de J_r (resp. T_r) pour $1 \leq r \leq n$ (resp. $2 \leq r \leq n$) sur les arêtes (resp. les sommets) du graphe. Si un diagramme de Young est donné, on remplit chaque case (i, j) du diagramme par l'entier $j - i$. Si on a une arête $\lambda \nearrow \mu$ dans le graphe de Young, pour $\mu \vdash n$, la valeur de J_n sur cette arête figure alors dans l'unique case de μ qui n'appartient pas à λ . Comme T_n est égal à la somme de tous les J_r pour $2 \leq r \leq n$, on en déduit que la valeur de T_n sur μ est simplement la *somme des valeurs figurant dans les cases de μ* . Ainsi, si $\mu = [3, 2]$, les diagrammes de Young qui interviennent dans le diagramme de Bratteli de μ sont



d'où l'on déduit immédiatement $T_5 = 2$, $Sp(T_4) = \{2, 0\}$, $Sp(T_3) = \{0, 3\}$, $Sp(T_2) = \{1, -1\}$ et $T_1 = 0$, et le coloriage des sommets obtenu précédemment par une méthode plus compliquée.

Chacun des générateurs s_i est alors déterminé par son action sur les briques du graphe de Young. Une propriété remarquable de ce graphe est qu'il n'admet que des briques de taille 1 ou 2. Sur une brique joignant le niveau $n - 2$ au niveau n agissent les éléments

$$T_{n-2}, T_{n-1}, T_n, J_{n-1}, J_n, s_{n-1}.$$

De la formule

$$s_{n-1}J_{n-1}s_{n-1} + s_{n-1} = J_n$$

on déduit la valeur de s_{n-1} sur les briques de taille 1 : comme s_{n-1} est sur ces briques un scalaire égal à plus ou moins 1,

$$s_{n-1} = J_n - J_{n-1} = T_n - T_{n-2}.$$

De la même relation on peut déduire que, sur les briques de taille 2, l'action de s_{n-1} n'est *pas* scalaire, donc admet pour valeurs propres 1 et -1 : l'action de s_{n-1} est ainsi déterminée à conjugaison près.

L'expression matricielle exacte de s_{n-1} dépend alors de la normalisation choisie pour la base de Young. Nous utiliserons dans ce travail la normalisation ou le modèle dit semi-normal :

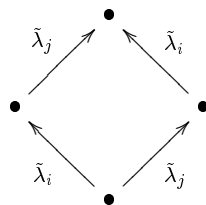
les coefficients présentent l'avantage d'y être rationnels. L'action de s_{n-1} est alors décrite sur une brique de taille 2 par la matrice

$$s = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -1 & d+1 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix}$$

où d est un nombre entier appelé *distance axiale* (cf. [14]) et défini en fonction des deux types de tableaux de Young standard correspondant à cette brique. Plus précisément, si cette brique joint $\mu \vdash n-2$ à $\lambda \vdash n$, on ordonne la base de façon que le premier vecteur corresponde à celui des deux partitions de $n-1$ considérées, intermédiaires entre λ et μ , qui est la plus grande pour l'ordre lexicographique. T_{n-2} et T_n sont sur cette même base évidemment scalaires, et

$$J_{n-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_i & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_j \end{pmatrix} \quad J_n = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_j & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_i \end{pmatrix}$$

si (j, λ_j) (resp. (i, λ_i)) correspond à la boîte ajoutée, pour le diagramme de taille $n-1$ correspondant au premier (resp. au deuxième) vecteur de la base. On a alors $d = \tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j$. Graphiquement, le coloriage des arêtes est



Ici, la relation très simple qui relie les éléments générateurs aux éléments centralisants permet d'obtenir facilement une telle matrice pour s et l'expression de son paramètre d en fonction du coloriage, comme nous venons de le remarquer. Afin de généraliser ultérieurement cette méthode, remarquons qu'à partir de l'expression générique d'une matrice de spectre $\{-1, 1\}$, on peut écrire en fonction de ces paramètres l'action de s_{n-1} sur le houpplier de niveau 2. Les matrices convenables sont alors exactement les solutions de l'équation de tresse

$$s_{n-1}s_{n-2}s_{n-1} = s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}$$

sur ce houpplier.

3.4 Propriétés héréditaires des \mathfrak{S}_n -modules

Nous allons dans cette section établir un certain nombre de résultats, utiles pour la suite, mais qui nous semblent avoir un intérêt en eux-mêmes. Ils mettent en évidence le fait que la classe d'isomorphisme d'une représentation donnée de \mathfrak{S}_n dépend très fortement de sa restriction à \mathfrak{S}_{n-1} . Dans certains cas significatifs, on obtient même une détermination complète de cette classe d'isomorphisme à partir de la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} .

Avant d'énoncer les résultats, nous exposons en I.3.4.1 et I.3.4.2 les constructions préliminaires utiles à leur démonstration.

3.4.1 Structure métrique

Rappelons que l'on a défini une distance $\delta(\lambda, \mu)$ sur l'ensemble provisoirement noté \mathcal{Y} des diagrammes de Young (compris ici en excluant le diagramme de Young vide). Si $\lambda \vdash n$, et $\epsilon > 0$, on note dans ce chapitre

$$\mathcal{S}_\epsilon(\lambda) = \{\mu \in \mathcal{Y} \mid \delta(\lambda, \mu) = \epsilon\}$$

la sphère de centre λ et de rayon ϵ , et $\mathcal{S}_\epsilon^\pm(\lambda)$ les deux demi-sphères

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\epsilon^+(\lambda) &= \{\mu \in \mathcal{Y} \mid |\mu| \geq |\lambda|, \delta(\lambda, \mu) = \epsilon\} \\ \mathcal{S}_\epsilon^-(\lambda) &= \{\mu \in \mathcal{Y} \mid |\mu| \leq |\lambda|, \delta(\lambda, \mu) = \epsilon\}. \end{aligned}$$

L'intérêt algébrique de cette métrique provient de la règle de Young, c'est-à-dire que, si λ est une partition de n et $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \{\mu \vdash n-1 \mid \mu \hookrightarrow \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda\} &= \mathcal{S}_1^-(\lambda) \\ \{\mu \vdash n+1 \mid \mu \hookrightarrow \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n+1}} \lambda\} &= \mathcal{S}_1^+(\lambda). \end{aligned}$$

En particulier, si λ et μ sont deux partitions de n , les $\sigma \vdash n-1$ qui s'injectent à la fois dans $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda$ et $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu$ sont les éléments de $\mathcal{S}_1^-(\lambda) \cap \mathcal{S}_1^-(\mu)$. On remarque ainsi que, si λ et μ sont deux partitions quelconques de n ,

$$\#\{\sigma \vdash n-1 \mid \sigma \subset \lambda \text{ et } \sigma \subset \mu\} = \begin{cases} \delta(\lambda) & \text{si } \delta(\lambda, \mu) = 0, \text{ soit } \lambda = \mu \\ 1 & \text{si } \delta(\lambda, \mu) = 2, \text{ et } \sigma = \lambda \cap \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si l'on s'intéresse spécifiquement aux sphères de rayon 1, il est immédiat que, pour $n \geq 2$,

$$\#\mathcal{S}_1^-(\lambda) = \#\{\sigma \vdash n-1 \mid \delta(\sigma, \lambda) = 1\} = \delta(\lambda).$$

En particulier, les sphères de rayon 1 les plus petites correspondent aux rectangles, seuls diagrammes de Young de taille n dont la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} est irréductible.

3.4.2 Rectangles

Nous étudions ici la situation de diagrammes d'une forme particulière, les rectangles, au regard de l'opération de restriction à \mathfrak{S}_{n-1} .

Pour $R = [a^b]$ un rectangle, on suppose $a, b \geq 1$ et $|R| > 1$, et on définit

$$\begin{aligned} R_h &= [a+1, a^{b-1}] \\ R_b &= [a^b, 1] \\ \check{R} &= [a^{b-1}, a-1] \\ \check{R}_h &= [a+1, a^{b-2}, a-1] && \text{pour } b \geq 2 \\ \check{R}_b &= [a^{b-1}, a-1, 1] && \text{pour } a \geq 2. \end{aligned}$$

Exemple. Pour

$$R = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

on a

$$R_h = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad R_b = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \check{R} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \check{R}_h = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \check{R}_b = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

En termes métriques, si $R = [a^b]$ est un rectangle de taille n , on a alors

$$\mathcal{S}_1(R) = \{\lambda \mid \delta(\lambda, R) = 1\} = \{\check{R}, R_h, R_b\}$$

et, si $a, b \geq 2$,

$$\mathcal{S}_2^0(R) := \mathcal{S}_2^+(R) \cap \mathcal{S}_2^-(R) = \{\lambda \vdash n \mid \delta(\lambda, R) = 2\} = \{\check{R}_h, \check{R}_b\}.$$

Si $R = [a^b]$ est un rectangle de taille $n = ab$, on a $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} R = \check{R}$ et, si $a \geq 2, b \geq 2$,

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \check{R} = R + R_h + R_b.$$

D'autre part, il est clair que si l'on a deux rectangles $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$,

$$\begin{aligned} \check{R}^{(1)} \simeq \check{R}^{(2)} &\Rightarrow R^{(1)} \simeq R^{(2)} \\ R_h^{(1)} \simeq R_h^{(2)} &\Rightarrow R^{(1)} \simeq R^{(2)} \\ R_b^{(1)} \simeq R_b^{(2)} &\Rightarrow R^{(1)} \simeq R^{(2)}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda \in \mathcal{S}_2^0(R^{(1)}) \cap \mathcal{S}_2^0(R^{(2)})$, on a $\lambda = \check{R}_h^{(1)} = \check{R}_b^{(2)}$, à échange des exposants (1) et (2) près. On montre facilement que cela n'est possible que dans la liste de cas exceptionnels suivants.

$n = 6$	$\check{R}^{(1)} = [2, 2, 2]$	$\check{R}_h^{(1)} = [3, 2, 1] = \check{R}_b^{(2)}$	$\check{R}^{(2)} = [3, 3]$
$n = 4$	$\check{R}^{(1)} = [2, 2]$	$\check{R}_h^{(1)} = [3, 1] = \check{R}_b^{(2)}$	$\check{R}^{(2)} = [4]$
$n = 4$	$\check{R}^{(1)} = [1, 1, 1, 1]$	$\check{R}_h^{(1)} = [2, 1, 1] = \check{R}_b^{(2)}$	$\check{R}^{(2)} = [2, 2]$
$n = 3$	$\check{R}^{(1)} = [1, 1, 1]$	$\check{R}_h^{(1)} = [2, 1] = \check{R}_b^{(2)}$	$\check{R}^{(2)} = [3]$

Remarquons enfin que, pour $R = [1, 1]$, $R_h = [2]$, et que, pour $R = [2]$, $R_b = [1, 1]$. Ce sont les seuls cas où $\mathcal{S}_2^0(R)$ peut contenir un rectangle.

3.4.3 Représentations irréductibles et isotypiques

Si les restrictions à \mathfrak{S}_{n-1} de deux représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n sont isomorphes, alors ces deux représentations de \mathfrak{S}_n sont toujours isomorphes. Plus généralement, on prouve

Proposition 18. *Si λ et μ sont deux représentations de \mathfrak{S}_n pour $n \geq 4$ telles que λ est irréductible et*

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda \simeq \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu,$$

alors $\lambda \simeq \mu$, sauf si $\lambda \in \{\boxplus, \boxminus\}$, auquel cas μ peut appartenir à $\{\boxplus + \boxminus, \boxplus + \boxplus\}$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \lambda = [3, 1] &\Rightarrow \mu = \lambda \quad \text{ou} \quad \mu = [2, 2] + [4] \\ \lambda = [2, 1, 1] &\Rightarrow \mu = \lambda \quad \text{ou} \quad \mu = [2, 2] + [1^4]. \end{aligned}$$

Preuve —

On écrit $\mu = \sum_{i=1}^k \mu^{(i)}$, chaque $\mu^{(i)}$ étant irréductible. On pose

$$\nu = \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda = \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu = \sum_{i=1}^k \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu^{(i)}.$$

Comme ν , restriction de la représentation irréductible λ , est sans multiplicités, $\mu^{(i)}$ est non isomorphe à $\mu^{(j)}$ pour $i \neq j$, et μ est sans multiplicités.

S'il existe i tel que $\mu^{(i)}$ soit isomorphe à λ , par égalité des dimensions on en déduit $\mu \simeq \lambda$. Supposons donc un $i \in [1, k]$ tel que $\mu^{(i)}$ ne soit pas isomorphe à λ , et soit $\sigma \vdash n-1$ une composante irréductible de $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu^{(i)}$, donc de ν . On a $\sigma \subset \lambda$ et $\sigma \subset \mu^{(i)}$ donc, d'après I.3.4.1, $\sigma = \lambda \cap \mu^{(i)}$. En particulier, la restriction de $\mu^{(i)}$ à \mathfrak{S}_{n-1} est irréductible, donc $\mu^{(i)}$ est un rectangle $[a_i^{b_i}]$. On a alors

$$\lambda \in \mathcal{S}_2^0([a_i^{b_i}]).$$

D'après I.3.4.2, on en déduit tout d'abord que, si $k = 1$, la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} de λ serait irréductible, donc que λ serait un rectangle, ce qui n'est possible que pour $n = 2$. Pour $k \geq 2$, on a $i \neq j$ tel que

$$\lambda \in \mathcal{S}_2^0([a_i^{b_i}]) \cap \mathcal{S}_2^0([a_j^{b_j}])$$

ce qui n'est possible que si $[a_i^{b_i}]$ et $[a_j^{b_j}]$ font partie du tableau de cas exceptionnels. Il n'y a alors plus qu'un nombre fini de cas à étudier, puisque μ est sans multiplicités, pour obtenir les exceptions indiquées par l'énoncé. cqfd.

Corollaire 1. *Soient λ et μ deux représentations de \mathfrak{S}_n pour $n \geq 3$ avec λ irréductible différente de $[3, 2, 1]$, $[2, 1]$, $[3, 1]$ et $[2, 1, 1]$. Si*

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu \hookrightarrow \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda,$$

alors soit λ est isomorphe à μ , soit μ est une représentation irréductible correspondant à un rectangle, et $\delta(\lambda, \mu) = 2$.

Preuve — Si $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu$ s'injecte dans $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda$, on peut supposer que cette injection n'est pas surjective, le cas d'un isomorphisme ayant déjà été traité. On décompose encore $\mu = \sum_{i=1}^k \mu^{(i)}$, et on a, pour tout i , $\mu^{(i)} \neq \lambda$. On déduit de la démonstration précédente que chaque $\mu^{(i)}$ est un rectangle $[a_i^{b_i}]$ tel que $\delta(\lambda, [a_i^{b_i}]) = 2$, et qu'ainsi $k \geq 2$ ne peut se produire que si λ se trouve dans la liste des cas exceptionnels de I.3.4.2, c'est-à-dire ceux exclus par l'énoncé. cqfd.

Corollaire 2. *Si λ et μ sont deux représentations de \mathfrak{S}_n pour $n \geq 7$ telles que λ est isotypique et*

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda \simeq \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu,$$

alors $\lambda \simeq \mu$.

Preuve — On démontre ce corollaire par récurrence sur

$$m = \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\lambda_0, \lambda)$$

où λ_0 est le \mathfrak{S}_n -module simple associé à λ . Le cas $m = 1$ découle directement de la proposition.

Soit μ_0 une composante irréductible de μ . Notons

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda_0 = \sum_{i=1}^r \lambda_0^{(i)},$$

où chaque $\lambda_0^{(i)}$ est une représentation irréductible de \mathfrak{S}_{n-1} . Alors,

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu_0 \hookrightarrow \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu = \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda = \sum_{i=1}^r m \lambda_0^{(i)}.$$

Comme μ_0 est irréductible, sa restriction à \mathfrak{S}_{n-1} est sans multiplicités, donc $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu_0$ s'injecte dans $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda_0$, et l'on peut appliquer le premier corollaire, sans considérer les cas exceptionnels puisque $n \geq 7$. Si $\lambda_0 \simeq \mu_0$, on pose $\check{\lambda} = \lambda/\lambda_0$, $\check{\mu} = \mu/\mu_0$, et on applique l'hypothèse de récurrence à $\check{\lambda}$ et $\check{\mu}$: $\check{\lambda} \simeq \check{\mu}$, et comme $\lambda_0 \simeq \mu_0$ on obtient $\lambda \simeq \mu$. On peut donc supposer que, pour toute composante irréductible μ_i de μ , μ_i s'écrit $[a_i^{b_i}]$ et $\delta(\lambda_0, \mu_i) = 2$.

Comme un rectangle est entièrement déterminé par l'unique diagramme correspondant à sa restriction, le fait que $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu$ soit isotypique implique, pour tous i et j ,

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu_j \\ a_i &= a_j = a \\ b_i &= b_j = b. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda = m\lambda_0$, et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = p\mu_0 = p[a^b]$ avec $\lambda_0 \neq \mu_0$, et $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mu_0$ s'injecte dans $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda_0$. Soit $\check{\mu}_0$ la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} , irréductible, de μ_0 . Comme la restriction à \mathfrak{S}_{n-1} d'une représentation irréductible de \mathfrak{S}_n est sans multiplicités, $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda_0$ est, d'une part sans multiplicités, et d'autre part isotypique de composant simple $\check{\mu}_0$. On en déduit que les restrictions à \mathfrak{S}_{n-1} de λ_0 et μ_0 sont isomorphes, cas que nous avons déjà traité. \square

3.4.4 Sommes d'équerres

Une propriété analogue à celle de la section précédente se produit pour les représentations qui sont sommes d'équerres, c'est-à-dire de représentations irréductibles indexées par des partitions de la forme $[k]_n := [n-k, 1^k]$, pour $0 \leq k \leq n-1$. Remarquons, du point de vue métrique, que

$$\delta([k]_n, [l]_m) = (1 - \delta_{n-k, m-l}) + |k - l|.$$

Si l'on note $[-1]_n = 0$ dans l'anneau des représentations de \mathfrak{S}_n , on a, pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} [k]_n = [k]_{n-1} + [k-1]_{n-1}.$$

La proposition suivante nous sera utile dans les chapitres ultérieurs

Proposition 19. *Soient M et M' deux représentations de \mathfrak{S}_n pour $n \geq 5$. On suppose que $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M$ est somme d'équerres. Alors,*

$$\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M \simeq \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M' \Rightarrow M \simeq M'.$$

Preuve — Si M est une représentation de \mathfrak{S}_n , avec $n \geq 5$, telle que $Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} M$ est une somme d'équerres, alors M elle-même est somme d'équerres.

Il existerait en effet sinon une représentation irréductible $\lambda = (\lambda_i)$ de \mathfrak{S}_n s'injectant dans M avec $\lambda_2 \geq 2$. Si $h(\lambda) \geq 3$ ou $\lambda_1 \geq 3$, alors $Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} \lambda$ ne serait pas somme d'équerres, et $Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} M$ non plus. Inversement, si $h(\lambda) \leq 2$ et $\lambda_1 \leq 2$, $n = t(\lambda) \leq 4$, ce qui est exclu par hypothèse.

On considère maintenant M et M' vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On va démontrer ce dernier par récurrence sur $\mathcal{N}(M)$, nombre de composantes irréductibles de M , comptées avec multiplicités.

Si $\mathcal{N}(M) = 1$, c'est un cas particulier de la proposition 18.

Si $\mathcal{N}(M) > 1$, on considère

$$\begin{aligned} c &= \sup\{k \mid Hom_{\mathfrak{S}_{n-1}}([k]_{n-1}, Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} M) \neq \{0\}\} \\ &= \sup\{k \mid Hom_{\mathfrak{S}_{n-1}}([k]_{n-1}, Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} M') \neq \{0\}\}. \end{aligned}$$

D'après la formule de restriction des équerres, et comme M et M' sont sommes d'équerres d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} c &= \sup\{k \mid Hom_{\mathfrak{S}_n}([k]_n, M) \neq \{0\}\} \\ &= \sup\{k \mid Hom_{\mathfrak{S}_n}([k]_n, M') \neq \{0\}\}. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $M/[c]_n$ et $M'/[c]_n$. On en déduit

$$M/[c]_n \simeq M'/[c]_n \Rightarrow M \simeq M'.$$

cqfd.

Chapitre 4

Tresses et algèbres de Lie semi-simples

Les représentations les plus connues de \mathfrak{B}_n agissent sur les puissances tensorielles de représentations d'algèbres de Lie. Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler la définition de ces actions (I.4.1), qui commutent à l'action diagonale de l'algèbre de Lie correspondante. Ensuite (I.4.2), nous complétons la théorie du chapitre 2 dans ce cadre : si A est une algèbre de Hopf, V un A -module, et $C_n(A)$ le commutant de A dans $V^{\otimes n}$, on a une tour d'algèbre particulière

$$C_{n-1}(A) \subset C_n(A) \subset C_{n+1}(A).$$

Nous en déduisons enfin (I.4.2.3) le formalisme qui nous servira, en III.2 et dans l'annexe, à traiter ce genre de représentations.

Dans ce chapitre, la dimension des représentations considérées n'est pas supposée finie, mais seulement *au plus dénombrable*.

4.1 Bimodules associés aux algèbres de Lie

On fixe un corps k , égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On note \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur k , et V une représentation de \mathfrak{g} . On note $K(\cdot, \cdot)$ la forme de Killing de \mathfrak{g} . Nous utiliserons dans cette section la convention d'Einstein concernant les indices supérieurs et inférieurs.

4.1.1 Les bimodules $V^{\otimes n}$

Nous allons construire une structure de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{B}_n$ -bimodule sur $V^{\otimes n}$. On note $\{e_\lambda\}$ une base de \mathfrak{g} , et $\{e^\lambda\}$ sa base duale pour $K : K(e_\lambda, e^\mu) = \delta_{\lambda, \mu}$. On peut alors définir, à un scalaire près, l'élément de Casimir $e_\lambda e^\lambda$. On rappelle que cet élément, central, est indépendant de la base choisie.

Pour une représentation Λ de \mathfrak{g} , on notera $C_\Lambda \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda)$ l'élément de Casimir associé. Si Λ est irréductible, on notera encore C_Λ le scalaire correspondant à l'action de C_Λ . On a

alors, sur $\Lambda \otimes \Lambda$,

$$\begin{aligned}
C_{\Lambda \otimes \Lambda} &= e_\lambda e^\lambda.(u \otimes v) \\
&= e_\lambda.((e^\lambda.u) \otimes v) + e_\lambda.(u \otimes (e^\lambda.v)) \\
&= (e_\lambda e^\lambda.u) \otimes v + (e^\lambda.u) \otimes (e_\lambda.v) + (e_\lambda.u) \otimes (e^\lambda.v) + u \otimes (e_\lambda e^\lambda.v) \\
&= 2C_\Lambda u \otimes v + (e^\lambda.u) \otimes (e_\lambda.v) + (e_\lambda.u) \otimes (e^\lambda.v).
\end{aligned}$$

Si le corps de base k est le corps des nombres complexes, on peut supposer pour simplifier les calculs que $e^\lambda = e_\lambda$. Mais de façon générale on a

$$C_{\Lambda \otimes \Lambda}(u \otimes v) = 2C_\Lambda u \otimes v + 2t(u \otimes v)$$

avec $t = e^\lambda \otimes e_\lambda \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 2}$. Remarquons en effet que, la forme de Killing étant symétrique,

$$t = e^\lambda \otimes e_\lambda = e_\lambda \otimes e^\lambda.$$

Par un procédé classique, on définit pour $1 \leq i, j \leq n$ des opérateurs t_{ij} sur $V^{\otimes n}$, en faisant agir t sur les facteurs tensoriels i et j . Par convention, $t_{ii} = 0$. D'autre part, \mathfrak{S}_n agit naturellement par permutation sur $V^{\otimes n}$. Il est alors immédiat que

$$\begin{aligned}
st_{ij}s^{-1} &= t_{s(i)s(j)} \quad \text{pour } s \in \mathfrak{S}_n \\
[t_{ij}, t_{kl}] &= 0 \quad \text{pour } \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
[t_{12}, t_{13} + t_{23}] &= [e^\lambda \otimes e_\lambda \otimes 1, e^\mu \otimes 1 \otimes e_\mu + 1 \otimes e^\mu \otimes e_\mu] \\
&= [e^\lambda \otimes e_\lambda \otimes 1, (e^\mu \otimes 1 + 1 \otimes e^\mu) \otimes e_\mu] \\
&= [e^\lambda \otimes e_\lambda, e^\mu \otimes 1 + 1 \otimes e^\mu] \otimes e_\mu \\
&= [t_{12}, \Delta(e^\mu)] \otimes e_\mu.
\end{aligned}$$

Comme $2t_{12} = C_{V \otimes V} - 2C_V$, t_{12} commute à l'action de $U\mathfrak{g}$ sur $V \otimes V$, donc à tout $\Delta(g)$ pour $g \in \mathfrak{g}$. On en déduit premièrement que $[t_{12}, t_{13} + t_{23}] = 0$, c'est-à-dire que l'on a défini une action de \mathfrak{B}_n sur $V^{\otimes n}$, et deuxièmement que cette action commute à l'action diagonale (par coproduits itérés) de \mathfrak{g} : nous avons ainsi construit une structure de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{B}_n$ -bimodule sur $V^{\otimes n}$.

Si V est maintenant une représentation irréductible d'un *groupe de Lie* d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , on en déduit que l'on a de la même façon une structure de $G \times \mathfrak{B}_n$ -bimodule sur $V^{\otimes n}$.

Si l'on note maintenant C_r l'action de l'élément de Casimir sur $V^{\otimes r}$, $\mathbb{1}_r$ l'action de l'identité, et $u = u_1 \otimes \dots \otimes u_r$ un tenseur pur de $V^{\otimes r}$,

$$\begin{aligned}
C_r(u) &= (e_\lambda e^\lambda).(u_1 \otimes \dots \otimes u_r) \\
&= e_\lambda.((e^\lambda.(u_1 \otimes \dots \otimes u_{r-1})) \otimes u_r) + e_\lambda.((u_1 \otimes \dots \otimes u_{r-1}) \otimes e^\lambda.u_r) \\
&= C_{r-1} \otimes \mathbb{1}(u) + 2(e^\lambda.(u_1 \otimes \dots \otimes u_{r-1})) \otimes e_\lambda.u_r + \mathbb{1}_{r-1} \otimes C_1(u) \\
&= (C_{r-1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}_{r-1} \otimes C_1)(u) + 2 \sum_{i=1}^{r-1} t_{ir}(u)
\end{aligned}$$

d'où

$$C_r = C_{r-1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}_{r-1} \otimes C_1 + 2\mathbf{t}_r.$$

Remarque. Pour ce type d'actions, l'image de \mathcal{T}_n n'est commutative, c'est-à-dire que le B_n -module obtenu ne se factorise par $\tilde{\mathfrak{S}}_n$, que si l'image de \mathfrak{g} dans $End(V)$ est elle-même commutative. En effet, on constate facilement que

$$[t_{12}, t_{23}] = e^\lambda \otimes [e_\lambda, e^\mu] \otimes e_\mu.$$

4.1.2 Les bimodules $\mathfrak{g}^{\otimes n}$

On suppose dorénavant $k = \mathbb{C}$.

En prenant comme cas particulier de V la représentation adjointe de \mathfrak{g} que l'on note encore \mathfrak{g} , on obtient une structure de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{B}_n$ -bimodule sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$, et même de $G \times \mathfrak{B}_n$ -bimodule, avec G le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} .

Considérons maintenant une super-algèbre de Lie L sur \mathbb{C} , munie d'une forme quadratique invariante non dégénérée K (pas nécessairement la forme de Killing). On peut définir de la même façon, à partir d'un élément de Casimir associé, une structure de $L \times \mathfrak{B}_n$ -bimodule sur $L^{\otimes n}$. Si la valeur du Casimir ainsi généralisé sur la représentation adjointe est non nulle, on peut le normaliser à 1, et on peut de la même façon, dans tous les cas, définir un élément t vérifiant les mêmes propriétés que dans le cas des algèbres de Lie. On en déduit donc une structure de \mathfrak{B}_n -module sur $L^{\otimes n}$, et la pérennité des formules précédentes.

Les algèbres et super-algèbres de Lie munies d'une forme quadratique non dégénérée rentrent en fait dans une notion plus générale, dégagée par Vogel [76], de structures qu'il appelle pseudo-algèbres de Lie, sur lesquelles la puissance tensorielle n^e est naturellement munie d'une structure de \mathfrak{B}_n -module, et qui admettent un objet universel (catégorie des diagrammes trivalents). Nous ne rappellerons pas la définition de ces objets ici, il nous suffira de savoir qu'ils forment un cadre plus général que les précédents.

Les opérateurs (1 2) et t_{12}

t_{12} commute à (1 2), donc $\Lambda^2 \mathfrak{g}$ et $S^2 \mathfrak{g}$ sont stables par t_{12} . On peut donc parler de la restriction de t_{12} à ces deux espaces, et étudier leurs valeurs propres.

On a le théorème suivant, dû essentiellement à Angelopoulos, et étendu aux pseudo-algèbres de Lie par Vogel, suivant des idées qui se trouvent également chez El Houari.

Théorème. (Angelopoulos, El Houari [39], Vogel [76]) *Soit L une pseudo-algèbre de Lie simple. On a $\Lambda^2 L = X_1 \oplus X_2$ en tant que L -modules, avec X_1 et X_2 irréductibles, X_2 pouvant être nul. Le crochet de Lie fournit un isomorphisme $X_1 \simeq L$. La restriction de t_{12} à $\Lambda^2 L$ suivant cette décomposition vaut $-\frac{1}{2} \oplus 0$. La forme quadratique associée fournit une inclusion $\mathbb{1} = L^{\otimes 0} \hookrightarrow S^2 L$. On note τ le spectre de $-t_{12}$ sur $S^2 L/\mathbb{1}$. Alors $\#\tau \leq 3$.*

Dans le cas des algèbres de Lie, on a le théorème de classification

Théorème. (Angelopoulos) *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple de dimension finie N sur \mathbb{C} , on a une des quatre éventualités suivantes qui déterminent à isomorphisme près l'algèbre de Lie considérée*

$$\begin{array}{lll}
 \mathcal{T}_1 & \tau = \left\{ -\frac{1}{2} \right\} & N = 3 \\
 \mathcal{X}_m & \tau = \left\{ -\frac{1}{m}, \frac{m+6}{m} \right\} & m = 3, 4, 6, 9, 12, 18, 30 \quad N = \frac{2(m+1)(5m-6)}{m+6} \\
 \mathcal{Y}_m & \tau = \left\{ \frac{m+2}{2m}, -\frac{2}{m}, \frac{1}{m} \right\} & -m \in (\mathbb{N} + 7) \cup \{5\} \quad N = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \\
 & & \text{ou } m \in 2\mathbb{N} + 6 \\
 \mathcal{Z}_m & \tau = \left\{ -\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right\} & m \in 4 + \mathbb{N} \quad N = m^2 - 1.
 \end{array}$$

On remarque que pour \mathfrak{g} de type $\mathcal{X}_m, \mathcal{Y}_m, \mathcal{T}_1$, (1 2) est un polynôme en t_{12} , donc $(i \ i + 1)$ est un polynôme en $t_{i, i+1}$. On en déduit que la donnée des $t_{i, i+1}$ suffit à déterminer l'action de \mathfrak{B}_n sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ dans ces cas-là, et l'on se trouve alors dans le cadre de la remarque de I.1.3.2 sur la description des représentations de \mathfrak{B}_n .

Nous rappelons ici la table des correspondances entre cette classification et la classification classique en termes de diagrammes de Dynkin :

Dynkin		Dynkin		Dynkin	
$A_n \ n \geq 3$	\mathcal{Z}_{n+1}	G_2	\mathcal{X}_4	E_8	\mathcal{X}_{30}
$B_n \ n \geq 2$	\mathcal{Y}_{-2n+1}	F_4	\mathcal{X}_9	A_1	\mathcal{T}_1
$C_n \ n \geq 3$	\mathcal{Y}_{2n+2}	E_6	\mathcal{X}_{12}	A_2	\mathcal{X}_3
$D_n \ \begin{matrix} n \neq 4 \\ n \geq 3 \end{matrix}$	\mathcal{Y}_{-2n+2}	E_7	\mathcal{X}_{18}	D_4	\mathcal{X}_6

Normalité

Notons $B(.,.)$ un multiple non nul de la forme de Killing de \mathfrak{g} , i.e. une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur \mathfrak{g} invariante par $Aut(\mathfrak{g})$. On définit sur $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ une forme bilinéaire $(.,.)$ par

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p, y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_p) = \prod_{i=1}^p B(x_i, y_i).$$

On a alors

Proposition 20. $(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$, invariante par l'action diagonale de $Aut(\mathfrak{g})$, et pour laquelle, quels que soient $t_{ij} \in \mathcal{T}_n$, $s \in \mathfrak{S}_n$, t_{ij} est autoadjoint et s unitaire.

Preuve — La première partie de la proposition est évidente. Si $s \in \mathfrak{S}_n$,

$$(s.(x_1 \otimes \dots \otimes x_n), s.(y_1 \otimes \dots \otimes y_n)) = (x_{s(1)} \otimes \dots \otimes x_{s(n)}, y_{s(1)} \otimes \dots \otimes y_{s(n)})$$

$$= \prod_{i=1}^n B(x_{s(i)}, y_{s(i)}) = \prod_{i=1}^n B(x_i, y_i) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, y_1 \otimes \dots \otimes y_n)$$

et $t(x \otimes y) = (\sum_{\lambda} [e_{\lambda}, x]) \otimes (\sum_{\lambda} [e_{\lambda}, y])$ d'où, sur $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$,

$$\begin{aligned} (t(x \otimes y), u \otimes v) &= B\left(\sum_{\lambda} [e_{\lambda}, x], u\right) B\left(\sum_{\lambda} [e_{\lambda}, y], v\right) \\ &= \left(\sum_{\lambda} B([e_{\lambda}, x], u)\right) \left(\sum_{\lambda} B([e_{\lambda}, y], v)\right) = \left(-\sum_{\lambda} B(x, [e_{\lambda}, u])\right) \left(-\sum_{\lambda} B(y, [e_{\lambda}, v])\right) \\ &= B\left(x, \sum_{\lambda} [e_{\lambda}, u]\right) B\left(y, \sum_{\lambda} [e_{\lambda}, v]\right) = (x \otimes y, t(u \otimes v)). \end{aligned}$$

On en déduit que t est autoadjoint sur $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$, donc que t_{ij} est autoadjoint sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$. cqfd.

Corollaire. Pour tout $r \leq n$, l'action sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ de l'élément torique \mathbf{t}_r est autoadjointe pour $(.,.)$.

Semi-simplicité

La théorie de la forme compacte d'une algèbre de Lie simple de dimension finie complexe nous dit (cf. Fulton et Harris [9] p. 435-436) qu'il existe une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g}_0 associée à un groupe de Lie compact G_0 telle que $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et telle que la restriction à \mathfrak{g}_0 de la forme de Killing de \mathfrak{g} soit définie négative. Elle dit encore qu'il existe une application semi-linéaire involutive r de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} qui envoie $v_0 \otimes z$ sur $v_0 \otimes \bar{z}$, préserve le crochet et vérifie

$$\{x \in \mathfrak{g} \mid r(x) = x\} = \mathfrak{g}_0.$$

Cela permet de montrer

Proposition 21. *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple complexe, l'action de \mathfrak{B}_n sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ est semi-simple.*

Preuve — On prolonge tout d'abord l'application r à $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. On note $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}}$ l'algèbre définie sur le corps des nombres réels par les mêmes générateurs et relations que \mathfrak{B}_n . On a $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Comme r préserve le crochet, on en déduit que r commute à t , donc que l'action de $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{B}_n$ sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ laisse stable $\mathfrak{g}_0^{\otimes n}$ et coïncide sur cet espace avec l'action naturelle de $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}}$.

On en déduit alors que le morphisme $\mathfrak{g}_0^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}^{\otimes n}$ est un *isomorphisme de \mathfrak{B}_n -modules*. Il suffit donc de montrer que l'action de $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}}$ sur $\mathfrak{g}_0^{\otimes n}$ est semi-simple.

Considérons F une sous- $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}}$ -représentation de $\mathfrak{g}_0^{\otimes n}$. La forme bilinéaire $(\ , \)$ est définie (négative) sur $\mathfrak{g}_0^{\otimes n}$, donc

$$\mathfrak{g}_0^{\otimes n} = F \oplus F^{\perp}.$$

Or F^{\perp} est $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}}$ -stable, car les t_{ij} sont autoadjoints et si $s \in \mathfrak{S}_n \setminus \{1\}$, il existe $p \geq 2$ tel que $s^p = 1$: pour $e \in \mathfrak{g}_0^{\otimes n}$ et $f \in F$,

$$(s.e, f) = (s.e, s^p.f) = (e, s^{p-1}f)$$

soit $e \in F^{\perp} \Rightarrow s.e \in F^{\perp}$ pour toute permutation s . Ainsi F^{\perp} est stable par $\mathfrak{B}_n^{\mathbb{R}}$, donc $\mathfrak{g}_0^{\otimes n}$ est semi-simple et $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ aussi. cqfd.

4.1.3 $U_q\mathfrak{g} \times B_n$ -bimodules

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple sur \mathbb{C} . Drinfeld [38] et Jimbo ont montré qu'on pouvait lui associer deux algèbres de Hopf, dites quantifiées :

- une algèbre de Hopf $U_h\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}[h^{-1}, h]$, algèbre des séries de Laurent en h ,
- une algèbre de Hopf $U_q\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}(q)$.

Les spécialisations des relations définissant ces algèbres pour $h \rightarrow 0$ et $q \rightarrow 1$, dites de “limite classique” en référence à la mécanique quantique, redéfinissent par relations de Chevalley-Serre l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . D'autre part le morphisme ϕ de $\mathbb{C}(q)$ vers $\mathbb{C}[h^{-1}, h]$ défini par $q \mapsto e^h$ permet d'écrire

$$U_h\mathfrak{g} = U_q\mathfrak{g} \otimes_{\phi} \mathbb{C}(q).$$

En tant qu'algèbre, $U_h \mathfrak{g}$ est isomorphe à la complétion h -adique de $U \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[h^{-1}, h]$. En particulier, à toute représentation V de \mathfrak{g} correspond une représentation V_h (resp. V_q) de $U_h \mathfrak{g}$ (resp. $U_q \mathfrak{g}$). On a alors

Théorème. (*Drinfeld-Kohno. cf. [15]*) *Pour tout $n \geq 1$, si V est une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} , $V_q^{\otimes n}$ est muni d'une structure de $B_n \times U_q \mathfrak{g}$ -bimodule. En particulier $V_h^{\otimes n}$ en hérite une structure de $B_n \times U_h \mathfrak{g}$ -bimodule.*

Alors, en tant que $\tilde{C}B_n$ -modules,

$$V_h^{\otimes n} \simeq \int_{\Phi_{KZ}} V^{\otimes n}.$$

4.2 Commutants

4.2.1 Cadre général

Soit donc V une représentation irréductible de dimension au plus dénombrable d'une algèbre de Hopf A sur \mathbb{C} . La n^e puissance tensorielle $V^{\otimes n}$ de V est munie par le coproduit d'une action naturelle de A , dite action diagonale. On suppose que pour cette action $V^{\otimes n}$ est semi-simple pour tout $n \geq 0$. On note $C_n(A)$ le commutant de A dans $V^{\otimes n}$. On a une injection $C_n(A) \hookrightarrow C_{n+1}(A)$, donnée par $\phi \mapsto \phi \otimes Id$. En effet, si Δ est le coproduit de A , l'action diagonale sur $V^{\otimes n+1}$ est donnée par Δ_{n+1} défini par récurrence: $\Delta_2 = \Delta$ et $\Delta_{n+1} = (\Delta_n \otimes Id) \circ \Delta$. Si, pour $a \in A$, on note suivant Sweedler $\Delta(a) = \sum_{(a)} a' \otimes a''$, on montre par récurrence

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}(a) \circ (\phi \otimes Id) &= ((\Delta_n \otimes Id) \circ \Delta)(a) \circ (\phi \otimes Id) = \sum (\Delta_n(a') \otimes a'') \circ (\phi \otimes Id) \\ &= (\phi \otimes Id) \circ (\sum \Delta_n(a') \otimes a'') = (\phi \otimes 1) \circ \Delta_{n+1}(a). \end{aligned}$$

De plus, comme V est irréductible, le lemme de Schur implique $C_1(A) = \mathbb{C}$. Pour tout n , $C_n(A)$ est donc une algèbre unitaire filtrée.

Soit maintenant W une représentation irréductible de A . On appelle niveau de W (par rapport à V)

$$niv(W) = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid Hom_A(W, V^{\otimes n}) \neq \{0\}\}.$$

En particulier, $niv(W) = \infty$ si et seulement si pour tout n l'espace $Hom_A(W, V^{\otimes n})$ est nul, et on a de plus $niv(\mathbb{1}) = 0$ et $niv(V) = 1$. On fixe $n \geq 1$. On supposera désormais que, pour toutes représentations de niveau fini W et W' de A ,

$$\dim Hom_A(W', W \otimes V) < \infty.$$

Si $V \simeq V^*$, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \dim Hom_A(W', W \otimes V) = \dim(W \otimes V \otimes W')^A = \dim(W^* \otimes V \otimes W')^A \\ &= \dim Hom_A(W, W' \otimes V). \end{aligned}$$

On note \hat{A}_n un ensemble qui indexe les représentations irréductibles de niveau au plus n de A de la façon suivante: à tout $\lambda \in \hat{A}_n$ est associé W_λ , représentation irréductible de niveau au plus n de A . D'après le théorème du double commutant, $C_n(A)$ est semi-simple, et on a

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{A}_n} W_\lambda \otimes U_\lambda^n$$

avec $U_\lambda^n = \text{Hom}_A(W_\lambda, V^{\otimes n})$ représentation irréductible de dimension finie de $C_n(A)$. En tant que $A \times C_n(A)$ -module, on a alors

$$V^{\otimes(n+1)} = \bigoplus_{\lambda} V \otimes W_\lambda \otimes U_\lambda^n = \bigoplus_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu} W_\mu \otimes U_\lambda^n = \bigoplus_{\mu} W_\mu \otimes \left(\bigoplus_{\lambda} c_{\lambda\mu} U_\lambda^n \right)$$

si les $c_{\lambda\mu}$ sont les coefficients de la multiplication tensorielle par V dans l'anneau des représentations de A :

$$W_\lambda \otimes V = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu} W_\mu.$$

Là encore, la finitude des coefficients $c_{\lambda\mu}$ découle de l'hypothèse de finitude faite sur

$$\dim \text{Hom}_A(W_\mu, W_\lambda \otimes V).$$

On en déduit

$$\text{Res}_{C_n(A)} U_\mu^{n+1} = \bigoplus_{\lambda} c_{\lambda\mu} U_\lambda^n.$$

On va maintenant construire deux types de graphes nivelés associés à V , appelés respectivement *graphe (tensoriel) total* et *graphe (tensoriel) superficiel* associés à V . On suppose toujours V autoduale.

Le graphe total $\mathbf{Tot}_n(V)$ de niveau n , pour $n \geq 1$, admet pour sommets les couples (W, m) où W est une représentation irréductible de A qui s'injecte dans $V^{\otimes m}$ et m un entier naturel inférieur ou égal à n . Le sommet (W, m) est joint au sommet (W', m') par α arêtes si $m' = m + 1$ avec α égal à la dimension de $\text{Hom}_A(W', W \otimes V)$. Le niveau de (W, m) est alors défini comme égal à m , ce qui achève la construction de ce multigraphe nivelé.

Le graphe superficiel $\mathbf{Surf}_n(V)$ de niveau $n \geq 1$ admet pour sommets l'ensemble des représentations irréductibles de A de niveau au plus n par rapport à V , le niveau d'un sommet W est le niveau de W par rapport à V , et le nombre d'arêtes $W \rightarrow W'$ pour $\text{niv}(W') = \text{niv}(W) + 1$ est encore égal à la dimension de $\text{Hom}_A(W', W \otimes V)$.

On constate que, si $\mathbf{Surf}^{(n)}(V)$ (resp. $\mathbf{Tot}^{(n)}(V)$) est réduit, il s'identifie immédiatement au diagramme de Bratteli de la somme directe sur tous les W_λ de niveau n (resp. sur tous les $\lambda \in \hat{A}_n$) des représentations U_λ^n par rapport à l'algèbre filtrée $C_n(A)$. On peut alors identifier naturellement

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathbf{Surf}_n(V) &= \bigoplus_{\text{niv}(W_\lambda)=n} U_\lambda^n \\ \mathbb{C}\mathbf{Tot}_n(V) &= \bigoplus_{\lambda \in \hat{A}^n} U_\lambda^n \\ C_n(A) &= M(\mathbf{Tot}^{(n)}(V)). \end{aligned}$$

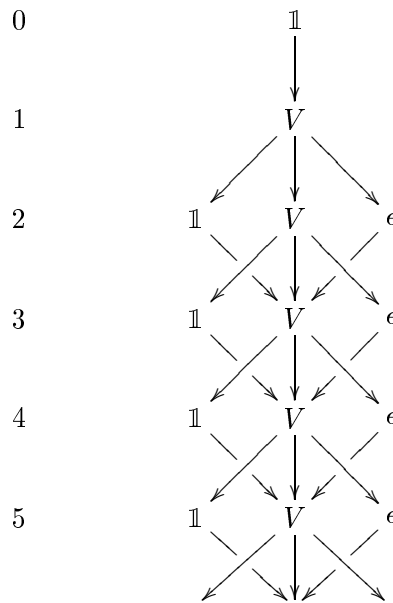
4.2.2 Exemple

On choisit $A = \mathbb{C}\mathfrak{S}_3$, et V la représentation irréductible de dimension 2 associée à la partition $[2, 1]$. On note ϵ la représentation alternée (correspondant à la partition $[1, 1, 1]$) et

$\mathbb{1}$ la partition triviale (correspondant à la partition [3]). La règle de multiplication par V dans l'anneau des représentations de \mathfrak{S}_3 est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{1} \otimes V &= V \\ \epsilon \otimes V &= V \\ V \otimes V &= \mathbb{1} + V + \epsilon.\end{aligned}$$

On en déduit la forme générale du graphe total de niveau n



Si l'on note

$$\begin{aligned}A_n &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_3}(\mathbb{1}, V^{\otimes n}) = U_{\mathbb{1}}^n \\ B_n &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_3}(V, V^{\otimes n}) = U_V^n \\ C_n &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}_3}(\epsilon, V^{\otimes n}) = U_{\epsilon}^n\end{aligned}$$

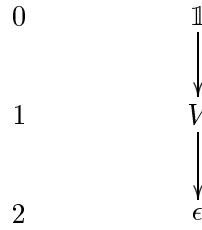
on peut déduire par exemple du graphe les relations de récurrence entre les dimensions de ces représentations. On obtient

$$\begin{aligned}\dim A_n &= \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \\ \dim B_n &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \dim C_n &= \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}.\end{aligned}$$

Comme \mathfrak{S}_3 n'admet qu'un nombre fini de représentations irréductibles, le graphe superficiel de niveau n n'est pas très intéressant. Par rapport à V ,

$$\begin{aligned}\text{niv}(\mathbb{1}) &= 0 \\ \text{niv}(V) &= 1 \\ \text{niv}(\epsilon) &= 2\end{aligned}$$

donc le graphe superficiel de niveau n s'écrit simplement, pour tout $n \geq 2$,



4.2.3 Coloriage et algèbres de Lie

Soit maintenant C un élément du centre de A . Il agit sur toute représentation irréductible W_λ de A par un scalaire C_λ d'après le lemme de Schur appliqué aux représentations de dimension dénombrable. Si l'action de C sur V est non nulle, on supposera, quitte à normaliser C , que le scalaire correspondant vaut 1. Cet élément central permet alors de définir un coloriage de $\mathbf{Surf}_n(V)$ et $\mathbf{Tot}_n(V)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans l'exemple précédent on peut choisir

$$C = (1\ 2) + (1\ 3) + (2\ 3),$$

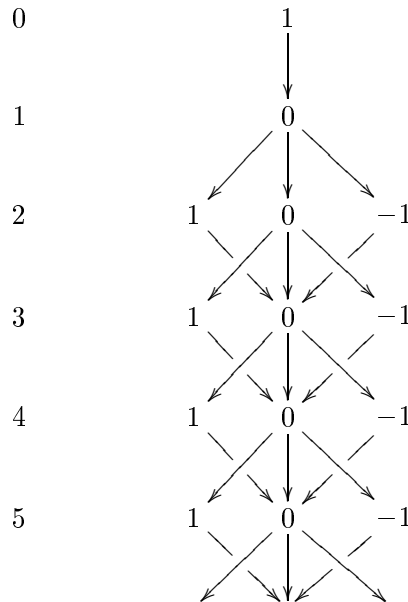
soit l'élément T_3 déjà considéré en I.3.1. Les valeurs scalaires sont alors

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbb{1}} &= 3 \\
 C_\epsilon &= -3
 \end{aligned}$$

et

$$2C_V = (\dim V)C_V = \text{tr}(C|_V) = 3\text{tr}(1\ 2)|_V = 0$$

d'où $C_v = 0$. Divisant C par 3, on obtient pour coloriage sur la forme générale de $\mathbf{Tot}_n(V)$:



Nous appliquerons en particulier cette construction dans la situation suivante: on choisit $A = U\mathfrak{g}$ où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple, V une représentation irréductible de dimension dénombrable de \mathfrak{g} donc de A , et on note C le Casimir de \mathfrak{g} , élément du centre de $U\mathfrak{g}$.

D'après les résultats de I.4.1.1, on a pour tout $n \geq 1$ un morphisme $\mathfrak{B}_n \rightarrow C_n(A)$, donc des morphismes d'algèbre filtrées

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_n &\rightarrow M(\mathbf{Tot}^x(V)) \\ \mathfrak{B}_n &\rightarrow M(\mathbf{Surf}^x(V))\end{aligned}$$

pour x sommet de niveau n de $\mathbf{Tot}(V)$ (resp. $\mathbf{Surf}(V)$). Supposons alors que pour cette action de \mathfrak{B}_n sur $\mathbb{C}\mathbf{Tot}^x(V)$ (resp. $\mathbb{C}\mathbf{Surf}^x(V)$), (1 2) soit une fonction analytique ou polynomiale f de t_{12} . Si l'on pose

$$\begin{aligned}z_r &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} t_{ij} \\ \sigma_r &= t_{r,r+1}\end{aligned}$$

l'image de \mathfrak{B}_n par chacun de ces morphismes est alors une algèbre locale au sens de I.2.5, qui est de plus localement monogène, et $\mathbb{C}\mathbf{Tot}_n^x(V)$ (resp. $\mathbb{C}\mathbf{Surf}_n^x(V)$) est un module local pour cette algèbre.

Comme les t_{ij} sont conjugués, on déduit leur spectre de l'action de t_{12} sur $V^{\otimes 2}$: en tant que A -module,

$$V \otimes V = \bigoplus_i X_i,$$

chaque X_i étant une représentation irréductible de A . Puisque t_{12} commute à l'action de A sur $V \otimes V$, t_{12} agit sur chacun des X_i par un scalaire que nous notons λ_i .

Nous nous intéressons maintenant aux briques. Si par exemple $\mathbf{G} = \mathbf{Surf}_n^x(V)$ et $n = \text{niv}(x) = \text{niv}(y) + 2$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathbf{G}_y^x &\simeq \text{Hom}_A(x, y \otimes V \otimes V) \\ &\simeq \bigoplus_i \text{Hom}_A(x, y \otimes X_i).\end{aligned}$$

Dès que $\dim \text{Hom}_A(x, y \otimes X_i) \leq 1$ pour tout i , cet isomorphisme définit une famille de bases de \mathbf{G}_y^x . Le spectre de $t_{n-1,n}$ sur $\mathbb{C}\mathbf{G}_y^x$ est alors composé des λ_i , de multiplicités

$$\dim \text{Hom}_A(x, y \otimes X_i).$$

Si sur $\mathbb{C}\mathbf{G}_y^x$ l'opérateur $t_{n-1,n}$, semi-simple, est de plus sans multiplicités, la famille de bases de $\mathbb{C}\mathbf{G}_y^x$ que l'on vient de décrire correspond à la notion de *bases locales* au sens de la section I.2.6.

Remarquons enfin que $\mathbb{C}\mathbf{G}^x$ s'identifie ici à un *sous-espace vectoriel bien déterminé* de $V^{\otimes n}$, constitué des vecteurs de plus haut poids de $V^{\otimes n}$ associés aux représentations de \mathfrak{g} correspondant à x .

Deuxième partie

Représentations explicites

Chapitre 1

Modules de Specht

On s'intéresse dans ce chapitre aux représentations de \mathfrak{B}_n dont la restriction au groupe symétrique est irréductible. \mathfrak{B}_n est ici définie sur un corps k , comme toujours commutatif de caractéristique 0. On rappelle (cf. I.1.3.2) qu'à deux paramètres α et β , et à une représentation (irréductible) de \mathfrak{S}_n , on peut associer une représentation de \mathfrak{B}_n en posant

$$t_{ij} = \alpha I + \beta(i \ j),$$

et que l'intégration de telles représentations à B_n correspond exactement aux représentations (irréductibles) de B_n qui se factorisent par les algèbres de Hecke génériques de type A .

L'objet de ce chapitre est l'étude de la question réciproque, à savoir, si les représentations de \mathfrak{B}_n dont la restriction au groupe symétrique sont irréductibles sont nécessairement de ce type.

Pour répondre à cette question, après avoir posé quelques définitions utiles (section 1), nous déterminons les degrés de liberté a priori dont dispose l'image de l'un quelconque des t_{ij} , ici $t_{n-1,n}$, dans une telle représentation (section 2). Nous définissons encore dans cette même section les deux équations auxquelles un tel endomorphisme est soumis. La section 3 constitue une étude de la première équation, et l'on fournit, à la fin de cette même section, un exemple de solution non triviale (de cette première équation) pour n arbitrairement grand. La section 4 donne les solutions de la deuxième équation dans des cas simples, pour lesquels une décomposition en base de Gröbner n'est pas nécessaire.

La section 5 détaille enfin le raisonnement utilisé pour répondre à la question initiale, par élimination successive des diagrammes de Young n'admettant que des solutions triviales.

La classification obtenue (théorème 2) fait ainsi apparaître que d'autres représentations de \mathfrak{B}_n existent, dont la restriction au groupe symétrique est irréductible. Nous les appelons *représentations sporadiques* et entamons leur étude dans la section 6. L'intégration de ces représentations au groupe de tresses est résolue pour les représentations de \mathfrak{B}_4 , et l'on montre que la restriction à \mathfrak{B}_{n-1} de toute représentation sporadique de \mathfrak{B}_n est irréductible. Cette étude sera prolongée par la détermination de leur diagramme de Bratteli et par l'intégration à B_n dans le chapitre II.4.

1.1 Préliminaires sur les diagrammes de Young

Nous décrivons tout d'abord la terminologie employée dans ce chapitre concernant les diagrammes de Young. Outre les notations générales introduites en I.3.2, on utilisera ici,

En effet, on a deux bases de Gelfand-Tsetlin de $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-2}}(S^\mu, S^\lambda)$ pour $\mu \subset \lambda$, $\mu \vdash n-2$. L'une (notée YG) est donnée par la chaîne $\mathfrak{S}_{n-2} \subset \mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n$ et correspond à la base de Young via l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-2}}(S^\mu, S^\lambda) \simeq S^{\lambda/\mu}$. L'autre est donnée par la chaîne $\mathfrak{S}_{n-2} \subset \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_n$. Sur cette dernière base (notée LOC) on connaît les matrices (diagonales) de s_{n-1} et t , en fonction des paramètres que l'on vient d'introduire. On veut l'expression de t dans la base YG pour pouvoir écrire les équations matriciellement.

Dans le cas où $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-2}}(S^\mu, S^\lambda)$ est de dimension 1, les deux bases coïncident. Si ce même espace est de dimension 2, on a sur LOC

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Sur la base de Young, on sait que

$$s = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -1 & d+1 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec d la distance axiale entre les deux coins. Diagonalisant s_{n-1} , on trouve une matrice de passage entre LOC et YG, ce qui permet d'obtenir la matrice de t dans YG (cette matrice est déterminée sans ambiguïté parce que le stabilisateur de s pour l'action du groupe linéaire est inclus dans le stabilisateur de t):

$$t = \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} a(d-1) + b(d+1) & (a-b)(d+1) \\ (d-1)(a-b) & a(d+1) + (d-1)b \end{pmatrix}$$

On a ainsi une expression explicite des t_{ij} sur la base de Young en fonction des paramètres précédents.

Il s'agit maintenant de traduire les relations $R(t) = 0$ et $L(t) = 0$ sur les espaces $S^{\lambda/\mu}$ pour $|\lambda| - |\mu|$ valant respectivement 3 et 4, c'est-à-dire sur les houppiers de niveau 3 et 4 du graphe de Young.

On rappelle tout d'abord que l'on obtiendra toujours une solution en prenant $t = \alpha I + \beta s_{n-1}$, soit la représentation $\lambda_{\alpha+\beta, \alpha-\beta}$. Cette solution correspond aux valeurs

$$d_i^\pm = e_{k,l}^\pm = \alpha \pm \beta.$$

On notera enfin, par commodité,

$$\epsilon_{i,j} = e_{i,j}^+ - e_{i,j}^-.$$

Par la suite, et notamment dans l'énoncé du théorème 1, il nous arrivera de numéroter visuellement certains coins. Ainsi, si l'on considère deux coins i et j , numérotés visuellement $\boxed{1}_i$ et $\boxed{2}_j$, nous parlerons parfois de e_{12}^\pm (resp. d_1^\pm , d_2^\pm , $d(1,2)$) au lieu de e_{ij}^\pm (resp. d_i^\pm , d_j^\pm , $d(i,j)$).

1.3 L'équation $R(t) = 0$

On considère donc $\mu \subset \lambda$ tel que $|\mu| = n-3$. Si λ/μ est connexe, on constate rapidement que l'on a toujours $R(t) = 0$.

Si λ/μ admet deux composantes connexes, $S^{\lambda/\mu}$ est de dimension 4. Une des composantes connexes correspond à un saut ou à une marche, et est associée à un paramètre d_i^\pm de t .

L'autre composante connexe se trouve sur un autre coin, j , de λ . Après calculs dans ces espaces de dimension 4, on obtient que l'équation $R(t) = 0$ est équivalente, sur chacun de ces espaces, à la condition

$$d_i^\pm \in \left\{ e_{i,j}^\pm, e_{i,j}^\pm \pm \frac{1 \pm d(i,j)}{2} \epsilon_{i,j} \right\}.$$

Si maintenant λ/μ admet trois composantes connexes, on obtient de la même façon, après calculs dans un espace de dimension 6, une condition équivalente à l'équation $R(t) = 0$. Soit donc $P = \{i, j, k\}$ un triplet de points de I . On ordonne I dans l'ordre inverse de \mathbb{N} , c'est-à-dire dans l'ordre qui correspond à une lecture de gauche à droite du diagramme, et on note σ la transposition de ce triplet qui inverse le plus petit et le plus grand élément. On note $\{D, D', D''\}$ l'ensemble $\mathcal{P}_2(P)$ des paires d'éléments de P . L'équation $R(t) = 0$, que l'on appellera dans ce cadre "équation du triangle", consiste en une famille d'équations polynomiales en les six paramètres de t , homogènes de degré 2, à coefficients dans $k(\delta_1, \delta_2)$, où δ_1 et δ_2 sont deux des distances axiales entre les trois coins. Cette équation se factorise immédiatement dans certains cas particuliers, qui réduisent le nombre de paramètres principaux à considérer :

- solutions à "ε constant" : on impose $e_D^+ - e_D^-$ constant pour tout D . On a alors exactement deux solutions, notées "S" et "T"

"S" On a $e_D^+ = e_{D'}^+ = e_{D''}^+$ et $e_D^- = e_{D'}^- = e_{D''}^-$

"T" On a $\epsilon_D = \epsilon_{D'} = \epsilon_{D''} = \epsilon$, et $e_{D_1}^\pm - e_{D_2}^\pm = \frac{d(P \setminus D_1, P \setminus D_2)}{2} \epsilon$ pour tous $D_1, D_2 \in \mathcal{P}_2(P)$

- solutions "à e^- constant" : on a trois solutions, indexées par $D \in \mathcal{P}_2(P)$. " A_D " est la solution définie par $e_D^- = e_{D'}^- = e_{D''}^-$ et $\epsilon_{D'} = \epsilon_{D''} = f(x, y)\epsilon_D$ avec

$$\begin{aligned} x &= d(\sigma(P \setminus D), \sigma(P \setminus D')) \\ y &= d(\sigma(P \setminus D), \sigma(P \setminus D'')) \end{aligned}$$

- Les solutions "à e^+ constant" se présentent de la même façon : pour $D \in \mathcal{P}_2(P)$ la solution " B_D " s'écrit $e_D^+ = e_{D'}^+ = e_{D''}^+$ et $\epsilon_{D'} = \epsilon_{D''} = f(x, y)\epsilon_D$ avec

$$\begin{aligned} x &= d(\sigma(P \setminus D'), \sigma(P \setminus D)) \\ y &= d(\sigma(P \setminus D''), \sigma(P \setminus D)) \end{aligned}$$

On a noté dans ce qui précède $f = \frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_2 + \sigma_1 - 1}$, où σ_1 et σ_2 désignent provisoirement les fonctions symétriques élémentaires en deux variables.

On peut remarquer dès à présent qu'il existe des solutions non triviales pour des diagrammes de Young arbitrairement grands à cette équation : si λ est un diagramme de Young à m coins, sans sauts ni marches, on a une solution non triviale en posant, pour $(\alpha^+, \alpha^-) \in k^2$, et pour tous coins i et j ,

$$e_{i,j}^\pm = \alpha^\pm + \frac{d(1, j) + d(m, i)}{2} \epsilon$$

avec $\epsilon = \alpha^+ - \alpha^-$. On remarque que cette solution est "à ϵ constant". On peut facilement obtenir la liste de telles solutions : en fait, si $\delta(\lambda) \geq 3$, les diagrammes précédemment considérés ($\delta_2(\lambda) = \delta_2(\lambda') = 0$ et $\delta(\lambda) \geq 3$) sont les seuls pour lesquels on a des solutions non triviales à ϵ constant. Pour de tels diagrammes, il n'y a par ailleurs pas d'autres solutions non triviales à ϵ constant.

1.4 L'équation $L(t) = 0$

On procède comme précédemment, par examen successif des diagrammes de Young gauches de taille 4. On peut résoudre facilement les équations concernant les diagrammes gauches à au plus deux coins :

$$\begin{aligned}
& - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} i \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} j : e_{ij}^+ = d_i^+ \\
& - \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} i \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} j : e_{ij}^- = d_i^- \\
& - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} i \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} j : e_{ij}^+ = d_i^+ = d_j^+ \\
& - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} i \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} j : e_{ij}^+ = d_i^+ \text{ ou } e_{ij}^- = d_j^- \\
& - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} i \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} j : e_{ij}^- = d_i^- = d_j^- \\
& - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} i \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} j : e_{ij}^+ = d_i^+ \text{ et } e_{ij}^- = d_i^- \\
& - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} i : e_{i-1,i}^+ = d_i^+ \\
& - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} i : e_{i-1,i}^- = d_{i-1}^-
\end{aligned}$$

où D_i signifie que la dernière colonne non vide de D est placée sur la colonne i du diagramme de Young complet.

Pour les autres diagrammes de Young gauches connexes, $L(t) = 0$ n'impose aucune condition sur les paramètres.

On déduit d'ores et déjà des conditions obtenues, d'une part, que la valeur d_i^+ (resp. d_i^-) de t sur un saut (resp. une marche) *ne dépend pas du coin i considéré*, et, d'autre part, que si un triangle comporte deux grands sauts (resp. deux grandes marches), il est à e^+ (resp. e^-) *constant*.

1.5 Résolution des équations

On s'intéresse d'abord à ce qu'imposent les équations précédentes sur de "petits triangles", c'est-à-dire quand trois coins consécutifs sont en jeu. L'équation $R(t) = 0$ est à coefficients dans $k(\delta_1, \delta_2)$, où δ_1 et δ_2 sont deux des trois distances axiales utiles ici. Plutôt que de résoudre cette équation sous sa forme générale, nous allons isoler un certain nombre de situations particulières. Dans ces situations, l'équation se trouvera simplifiée, soit parce qu'une ou deux des distances axiales sera fixée, soit parce que $L(t) = 0$ imposera des conditions supplémentaires sur les paramètres principaux.

En premier lieu (II.1.5.1), nous résolvons les équations dans un nombre fini de cas, quand les trois coins définissant le triangle considéré sont très proches les uns des autres. En second

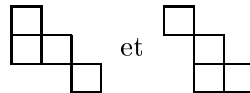
lieu (II.1.5.2), on s'intéresse aux petits triangles "génériques", c'est-à-dire les petits triangles qui comportent soit un grand saut et une grande marche, soit deux grands sauts, soit deux grandes marches. Dans ce cas, la relation de localité impose des conditions simples qui permettent encore de résoudre les équations. Enfin, on étudie le cas des triangles "plats", qui comportent exactement un grand saut ou une grande marche (II.1.5.3). En combinant ces trois cas, on obtient que *tous* les petits triangles sont triviaux.

1.5.1 Triangles de faible diamètre

On considère d'abord le cas où le triangle ne comporte a priori ni saut ni marche, c'est-à-dire que les trois coins sont disposés entre eux de la façon suivante :



Dans ce cas, il n'y a plus de paramètre secondaire, c'est-à-dire que l'on a une famille de polynômes à coefficients dans k , et la technique des bases de Gröbner permet de conclure : on obtient que l'ensemble solution de $R(t) = 0$ est une union de dix plans qui s'intersectent deux à deux suivant une même droite : la droite "triviale", notée I , qui correspond à l'égalité de tous les paramètres. Reportant alors ces solutions dans l'équation $L(t) = 0$ pour les diagrammes de Young gauches de taille quatre adéquats ici



on obtient qu'un tel triangle est forcément "S".

De la même façon, si le petit triangle ne comporte ni grand saut ni grande marche, il n'y a qu'un nombre fini de cas à étudier, pour lesquels la décomposition en base de Gröbner des diverses relations se factorise aisément. Dans tous ces cas, la seule solution possible est "S".

1.5.2 Triangles génériques

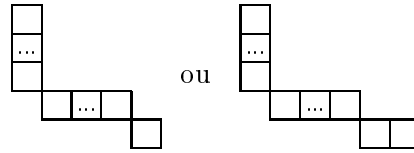
Considérons pour l'instant un triangle $\{i, i', i''\}$ quelconque, pour lequel on suppose que les paramètres e^+ (resp. e^-) sont égaux. On a vu plus haut qu'alors les conditions données par $R(t) = 0$ sont de type " B_D " (resp. " A_D ") pour D une paire d'éléments de $\{i, i', i''\}$, ou bien de type "S". Si un tel triangle comporte un saut (resp. une marche) en i , on peut reporter ces conditions dans l'équation de localité sur un diagramme gauche de type

$$[0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 1] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \square \square$$

(resp. son dual), et on obtient que ce triangle ne peut être que de type " $B_{i'i''}$ " (resp. " $A_{i'i''}$ ") ou "S". On en déduit que, si l'on sait qu'un triangle donné comportant deux sauts (resp. deux marches) est à e^+ (resp. e^-) constant, alors ce triangle est trivial. En particulier, si un triangle comporte deux grands sauts (resp. deux grandes marches), l'équation de localité impose e^+ (resp. e^-) constant, et l'on se trouve dans la situation précédemment décrite : le triangle est trivial.

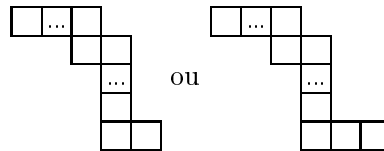
Inversement, si un petit triangle n'est pas de type "S", il comporte au plus un grand saut, au plus une grande marche, et d'après II.1.5.1 au moins un saut ou une marche. Dans cette section, on considère les petits triangles qui contiennent un grand saut *et* une grande marche.

D'après ce qui précède, on sait que ce triangle sera de type "S" dès que les paramètres e^+ seront égaux, ou bien dès que les paramètres e^- seront égaux. On a plusieurs cas à considérer (dans les diagrammes de Young qui vont être décrits, les grands sauts (resp. grandes marches) seront marqués par la présence de seulement trois cases consécutives). Si le triangle est de la forme



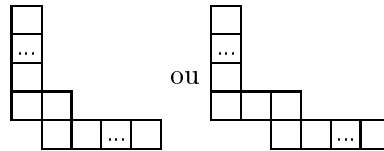
l'équation $R(t) = 0$ peut être résolue (une des distances axiales est fixée ainsi que certaines variables). On obtient à chaque fois trois plans solutions. L'équation de localité sur les diagrammes $\square \square$ impose alors la solution "S". De la même façon :

- Si le diagramme est de la forme



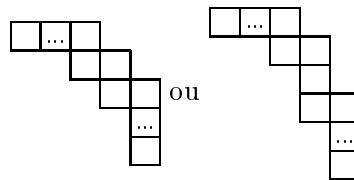
L'équation de localité sur $\square \square$ est alors résoluble: elle impose que les paramètres e^- sont constants. Ce cas a déjà été étudié: comme le diagramme comporte un grand saut et une grande marche, il est alors nécessairement de type "S".

- Si le diagramme est de la forme



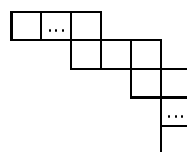
On emploie la technique des bases de Gröbner sur la relation $R(t) = 0$, après avoir utilisé les relations de localité liées au grand saut et à la grande marche. On en déduit que l'on a toujours e^- constant, et on conclut comme précédemment.

- Si le diagramme est de la forme



la relation de localité sur $\square \square$ entraîne que les paramètres e^- sont constants, donc que le diagramme est de type "S".

- Si le diagramme est de la forme



Cette fois encore, la relation de localité sur $\square \blacksquare$ entraîne que les paramètres e^- sont constants, d'où "S".

Les autres cas se déduisent de ceux-ci par passage au transposé.

En conclusion, un petit triangle non trivial ne peut comporter à la fois un grand saut et une grande marche.

1.5.3 Triangles plats

On considère enfin un petit triangle admettant un unique grand saut, et aucune grande marche. Pour la commodité de l'exposé, on suppose que le grand saut se trouve sur le coin le plus à gauche, noté i . On note i' et i'' les deux autres coins, $\delta = d(i', i)$, et $\delta = d(i', i'')$ la distance axiale (positive) entre les deux autres coins. Par hypothèse, d ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Pour chaque valeur de d , les équations $R(t) = 0$ sur le triangle et $L(t) = 0$ sur $\square \square \square$ forment un système d'équations polynomiales à coefficients dans $k(\delta)$. Sa décomposition en base de Gröbner permet d'obtenir que, pour chacune des valeurs de d possibles, les solutions sont soit " $B_{i', i''}$ " soit "S". On est alors ramené à une situation déjà connue : on est à e^+ constant, donc si i' ou i'' comportent un saut, le triangle est trivial. De même, en reportant l'équation de localité dans $\square \square \square$ et dans $\square \square \square$, on obtient que le triangle est trivial dès que i' ou i'' comporte une marche. Enfin, s'il n'y a ni saut ni marche en i' et i'' , il existe une relation de localité sur $\square \blacksquare$, qui permet encore d'obtenir la trivialité du triangle.

On obtient évidemment le même résultat pour les situations transposées. On raisonne de façon similaire lorsqu'un des coins est à la fois un saut et une marche. Cela permet de conclure que *tous* les petits triangles sont triviaux.

On en déduit :

Théorème 2. *Les seules représentations non triviales de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur une représentation irréductible S^λ de \mathfrak{S}_n sont définies*

$$- \text{ pour } \lambda = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \dots \\ \hline \square \\ \hline \square \square \square \\ \hline \end{array} = [n-2, 1, 1], \text{ si } n \geq 5, \text{ par}$$

$$e_{12}^+ = \alpha \quad e_{12}^- = \beta \quad d_2^+ = \alpha \quad d_1^- = \beta + (n-2) \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$- \text{ pour } \lambda = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \square \\ \hline \square \square \dots \square \\ \hline \end{array} = [3, 1^{n-3}], \text{ si } n \geq 5, \text{ par}$$

$$e_{12}^+ = \alpha \quad e_{12}^- = \beta \quad d_1^- = \beta \quad d_2^+ = \alpha + (n-2) \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$- \text{ pour } \lambda = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \square \\ \hline \square \square \\ \hline \end{array} \text{ par}$$

$$e_{12}^+ = \alpha \quad e_{12}^- = \beta \quad d_2^+ = \beta$$

- pour $\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$ par

$$e_{12}^+ = \alpha \quad e_{12}^- = \beta \quad d_1^- = \alpha.$$

Preuve — Si $\delta(\lambda) \geq 3$, on vient de démontrer que toutes les solutions étaient à e^+ et e^- constants, donc si λ comporte un saut (resp. une marche), la relation de localité $L(t) = 0$ permet immédiatement de conclure que cette valeur commune de e^+ (resp. e^-) est égale à la valeur commune de t sur les sauts (resp. les marches) : il n’y alors que des solutions triviales à ces équations. C’est également le cas si $\delta(\lambda) = 1$, car alors t admet au plus deux paramètres.

Il reste à examiner le cas où $\delta(\lambda) = 2$. Un tel diagramme ne dépend que de quatre paramètres a, b, c et d :

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & a & 2 & \\ \hline & & b & \\ \hline & & & c & 1 \\ \hline & & & & d \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} = [(b+d)^a, d^c]$$

de façon à ce que la longueur du pourtour extérieur du diagramme soit $a + b + c + d$. Si λ comporte un grand saut ainsi que, soit une grande marche, soit un coin qui est à la fois un saut et une marche, l’équation de localité implique $t = \alpha + \beta s$. Il en est de même si λ comporte, outre un grand saut, un coin qui n’est ni un saut ni une marche. En d’autres termes, si b est supérieur ou égal à 3, λ ne peut admettre de solution non triviale au problème posé que si $a = 1, c \leq 2, d \leq 2$, et, de façon exclusive, $c = 1$ ou $d = 1$. t est alors déterminé par quatre paramètres, $e_{12}^+, e_{12}^-, d_2^+$, et, soit d_1^+ , soit d_1^- . Si $d = 2$, l’équation $L(t) = 0$ implique alors, sur \mathbb{B} , $d_1^+ = d_2^+ = e_{12}^+$.

Il ne peut donc y avoir de solution non triviale pour $b \geq 3$ que si $a = 1, c = 2, d = 1$, ce qui correspond effectivement à la série “infinie” de l’énoncé du théorème, après résolution de l’équation $R(t) = 0$. Si $d \geq 3$, on obtient de la même façon $c = 1, a = 2, b = 1$. Les paramètres sont cette fois $e_{12}^+, e_{12}^-, d_1^+, d_2^-$. L’équation $L(t) = 0$ sur \mathbb{H} et \mathbb{M} impose alors $e_{12}^+ = d_2^+$ et $e_{12}^- = d_1^-$, soit la solution triviale.

On a ainsi déterminé toutes les solutions dans les cas où λ comporte un grand saut. Le cas où λ comporte une grande marche s’y ramène immédiatement en considérant le diagramme transposé.

Il ne reste alors plus qu’un nombre fini ($2^4 = 16$) de diagrammes à considérer. Les équations de localité imposent de n’en garder que trois, les diagrammes $[2, 1, 1], [3, 1]$ et $[3, 1, 1]$, pour lesquels on résout facilement l’équation $R(t) = 0$, ce qui complète la liste des solutions non triviales. cqfd.

On appellera ces solutions non triviales les *représentations sporadiques* de \mathfrak{B}_n .

Corollaire.

$$\Lambda^r[n-1, 1]_{a,b} \simeq [n-r, 1^r]_{r a, (r-1)a+b} = \tau_{(r-1)a} [n-r, 1^r]_{a,b}.$$

Preuve — En tant que représentation de \mathfrak{S}_n , $[n-r, 1^r]$ est classiquement isomorphe à $\Lambda^r[n-1, 1]$, donc

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_n} \Lambda^r [n-1, 1]_{a,b} \simeq [n-r, 1^r].$$

Pour l’action de t_{12} sur $[n-1, 1]_{a,b}$, il existe $n-2$ vecteurs propres x_1, \dots, x_{n-2} et un vecteur propre correspondant à la valeur propre b qui constituent une base de l’espace vectoriel associé.

Les vecteurs propres de t_{12} dans $\Lambda^r[n-1, 1]_{a,b}$ sont alors de la forme

$$\begin{array}{ll} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} & \text{correspondant à la valeur propre } ra \\ x_{i_1} \wedge \dots \wedge y \wedge \dots \wedge x_{i_r} & \text{correspondant à la valeur propre } (r-1)a + b. \end{array}$$

t_{12} n'admet donc que deux valeurs propres sur $\Lambda^r[n-1, 1]$. La conclusion découle alors du théorème précédent. cqfd.

1.6 Etude des représentations sporadiques

1.6.1 Représentation de \mathfrak{B}_4

Quitte à transposer, on peut supposer $\lambda = [3, 1]$. Si l'on note $V = S^\lambda$, t_{34} appartient à $\text{End}_{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2} V$, de dimension 3, dont une base est constituée par l'identité et les images des transpositions (1 2) et (3 4). On en déduit immédiatement l'existence de scalaires a et b tels que

$$t_{34} = a + b(1\ 2) + b(3\ 4).$$

Par rapport aux notations précédentes, on a $a = \beta$, $b = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Pour plus de commodité, notons pour $D = \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, $t_D = t_{i,j}$ et $\overline{D} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus D$. Enfin, si s est une transposition correspondant à une paire D , on notera \overline{s} la transposition correspondant à \overline{D} . On a alors, identifiant un tel D avec la transposition correspondante,

$$t_D = a + bD + b\overline{D}.$$

On constate qu'en particulier, si $D_1 \neq D_2$, $[t_{D_1}, t_{D_2}] = 0$: l'image de \mathcal{T}_4 est une algèbre de Lie commutative de dimension 3. Ainsi, la représentation de B_4 associée se factorise par $\tilde{\mathfrak{S}}_4$, et est définie par $\sigma_i = (i\ i+1)e^{t_{i,i+1}}$. Après calcul, on obtient la formule suivante, où l'on a noté s_i la transposition $(i\ i+1)$:

$$\sigma_i = e^a (ch(b)^2 s_i + ch(b)sh(b)(s_i \overline{s}_i + 1) + sh(b)^2 \overline{s}_i).$$

Matriciellement, si l'action du groupe symétrique est donnée par le modèle semi-normal, l'action du groupe de tresses à quatre brins est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 2 + B^2 & 2(B^2 - 1) & 0 \\ B^2 - 1 & 1 + 2B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 2 + B^2 & 1 - B^2 & 3(1 - B^2) \\ \frac{1}{2}(1 - B^2) & \frac{1}{2}(B^2 - 4) & 3 + \frac{3}{2}B^2 \\ \frac{1}{2}(1 - B^2) & \frac{B^2}{2} + 1 & \frac{3B^2}{2} \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} B^2 - 2 & 2 + 2B^2 & 0 \\ B^2 + 1 & 2B^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $A = e^a$, $B = e^b$.

Le polynôme caractéristique de σ_i est alors

$$(x - A)(x + A)(x + AB^2).$$

Si $B^2 = \pm 1$, le polynôme minimal devient $x^2 - A^2$. L'élément générateur positif du centre de B_4 , $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$, agit par $A^{12}B^8$.

Par homogénéité, on peut supposer $A = 1$. Cette représentation est alors équivalente à

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & B^2 & B^2 \\ 1 & B^2 & B^2 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat au vu de ces matrices que la restriction à B_3 de ce B_4 -module M est irréductible. On pourra vérifier à partir de II.3 que $Res_{B_3}M$ est isomorphe à la représentation irréductible de degré 3 de l'algèbre de Hecke générique de G_4 , spécialisée en $B^2, 1, -1$.

En revanche, M ne provient pas d'une spécialisation de l'algèbre de Hecke générique de G_{25} . En effet, celle-ci n'admet qu'une unique représentation irréductible de degré 3, \overline{V} , dont la restriction à B_3 soit irréductible. Or \overline{V} est déduite de V par le morphisme de groupe de B_4 dans B_3 décrit par

$$\sigma_1 \mapsto \sigma_1 \quad \sigma_2 \mapsto \sigma_2 \quad \sigma_3 \mapsto \sigma_1$$

alors que sur M , $\sigma_1 \neq \sigma_3$.

1.6.2 Représentations de \mathfrak{B}_n , $n \geq 5$

De la même façon que précédemment, on suppose $\lambda = [n - 2, 1, 1]$, et on note $V = S^\lambda$. Cette fois, $\dim End_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2} V = 4$. De plus, il n'y a pas de base évidente de cet espace dans laquelle écrire $t_{n-1,n}$. Parmi les générateurs possibles, on peut considérer, outre l'identité, $(n-1 \ n)$, la somme des transpositions de \mathfrak{S}_{n-2} , notée T , la somme des cycles de longueur $n-2$ de \mathfrak{S}_{n-2} , notée T_c , ou encore

$$H = \sum_{i=1}^{n-2} (i \ n-1) + \sum_{i=1}^{n-2} (i \ n).$$

Les valeurs propres de ces éléments sur le module palier sont facilement calculables grâce aux formules de caractères de Frobenius (cf. Fulton et Harris [9] p. 51 ex. 4.16, etc.).

	e_{12}^+	e_{12}^-	d_1^-	d_2^+
I	1	1	1	1
$(n-1 \ n)$	1	-1	-1	1
$n - \frac{2T}{n-2}$	5	5	3	7
$\frac{T_c}{(n-4)!}$	-1	-1	0	$\frac{2}{n-4}$
H	$n-2$	$n-4$	4	$2(n-2)$

On note $Spor^{(n)}(\alpha, \beta)$ cette représentation irréductible de \mathfrak{B}_n .

$$Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} Spor^{(n)}(\alpha, \beta) = Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} [n-2, 1, 1] = [n-3, 1, 1] + [n-2, 1].$$

Le spectre de $t_{n-1,n}$ est composé de α avec multiplicité $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, β avec multiplicité $n-3$, et $\beta + (n-2)\frac{\alpha-\beta}{2}$ avec multiplicité 1. On a alors

Proposition 22. *La restriction à \mathfrak{B}_{n-1} de $Spor^{(n)}(\alpha, \beta)$ est irréductible. De plus, sa restriction à \mathfrak{S}_{n-2} est la somme d'une représentation de dimension 1, d'une représentation irréductible trivialement issue de \mathfrak{S}_n , et d'une représentation irréductible de B_{n-2} de dimension $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.*

Preuve — En écrivant explicitement la matrice de $t_{n-2,n-1}$ sur le houpier de niveau 3 de la base de Young, on constate que ni $[n-2, 1]$ ni $[n-3, 1, 1]$ ne sont stables par l'action de cet endomorphisme, ce qui démontre la première partie de l'énoncé. D'autre part, comme $t = t_{n-1,n}$ commute à l'action de \mathfrak{B}_{n-2} , on a

$$\text{Res}_{\mathfrak{B}_{n-2}} \text{Spor}^{(n)}(\alpha, \beta) = \text{Ker}(t - \alpha) \oplus \text{Ker}(t - \beta) \oplus \text{Ker}(t - (\beta + (n-2)\frac{\alpha - \beta}{2})).$$

- $\text{Ker}(t - (\beta + (n-2)\frac{\alpha - \beta}{2}))$ est de dimension 1, et sa restriction à \mathfrak{S}_{n-2} est triviale.
- La restriction de $\text{Ker}(t - \beta)$ à \mathfrak{S}_{n-2} est isomorphe à $[n-3, 1]$, et $t_{n-3,n-2}$ admet pour spectre $\{\alpha, \beta\}$.
- La restriction de $\text{Ker}(t - \alpha)$ à \mathfrak{S}_{n-2} est isomorphe à $[n-4, 1, 1] + [n-3, 1]$. On constate dans la base de Young du module palier qu'aucun des composants isotypiques $[n-4, 1, 1]$ et $2[n-3, 1]$ n'est stable pour l'action de $t_{n-3,n-2}$. Ainsi, aucun des composants $[n-4, 1, 1]$ et $[n-3, 1]$ de $\text{Ker}(t - \alpha)$ ne peut être stable pour l'action de \mathfrak{B}_{n-2} : $\text{Ker}(t - \alpha)$ est irréductible.

cqfd.

Nous obtiendrons les matrices explicites de la représentation de B_n associée dans le dernier chapitre de cette même partie.

Chapitre 2

Représentations de degré au plus n

On fixe un corps k , égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nous étudions dans ce chapitre les représentations indécomposables de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur la représentation naturelle de \mathfrak{S}_n , isomorphe à $[n] + [n - 1, 1]$. Nous montrons que l'action de \mathcal{T}_n est commutative, et qu'ainsi on peut facilement associer à ces représentations des représentations de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$. Nous construisons d'autre part des modèles "naturels" de ces représentations.

Les représentations irréductibles obtenues sont en particulier celles qui ont déjà été rencontrées par Sysoeva [68] [69] dans son étude des représentations irréductibles de faible dimension de B_n .

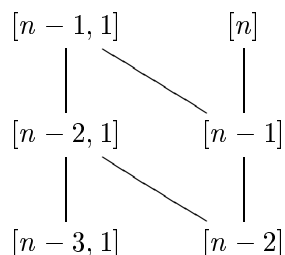
Nous en déduisons une classification des représentations de \mathfrak{B}_n dont la dimension est au plus n . De plus, par l'étude du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de dimension n de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, nous entamons une étude des représentations de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ que l'on peut facilement obtenir par construction tensorielle, laquelle sera poursuivie au chapitre III.1.

2.1 La représentation naturelle de \mathfrak{S}_n

Nous nous intéressons ici à la représentation naturelle de \mathfrak{S}_n , c'est-à-dire à l'action à gauche de \mathfrak{S}_n sur le k -espace vectoriel V de dimension n donnée sur une base $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$ par $\sigma(\bar{i}) = \sigma(i)$. Cette représentation est sans multiplicités, et admet deux composantes irréductibles respectivement isomorphes à $[n - 1, 1]$ et $[n]$.

Pour l'action de \mathfrak{S}_n , cette représentation admet donc une base de Gelfand-Tsetlin, sur laquelle on sait écrire l'action des générateurs de Coxeter. On note \mathbf{G} son diagramme de Bratteli.

Le houpplier de niveau 2 correspond au graphe



Il est donc de dimension 4. Nous choisissons pour base des chemins la base

$$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= [n-2] \rightarrow [n-1] \rightarrow [n] \\ \epsilon_2 &= [n-2] \rightarrow [n-1] \rightarrow [n-1, 1] \\ \epsilon_3 &= [n-2] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\ \epsilon_4 &= [n-3, 1] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1]. \end{aligned}$$

Dans cette base, on peut écrire s_{n-1} et la forme générale d'un t élément de $\text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(V)$, défini à translation scalaire près :

$$s_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{n}{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} x & \frac{u(n-2)}{n} & u & 0 \\ v & y & \frac{n(z-y)}{2} & 0 \\ v & \frac{(z-y)(n-2)}{2} & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $V = [n] \oplus [n-1, 1]$ et, si l'on note ψ une projection sur le houpier considéré, on a

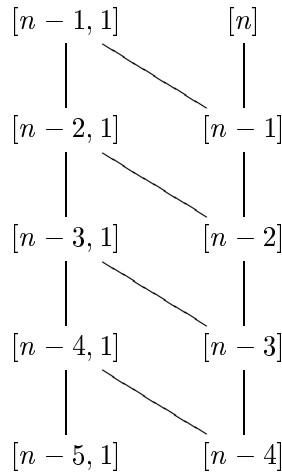
$$\begin{aligned} \psi([n]) &= \langle \epsilon_1 \rangle \\ \psi([n-1, 1]) &= \langle \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \rangle. \end{aligned}$$

La représentation de \mathfrak{B}_n sur V est donc

- indécomposable ssi $u \neq 0$ ou $v \neq 0$
- irréductible ssi $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

2.2 Représentations de \mathfrak{B}_n et B_n

On peut alors écrire les équations $L(t) = 0$ et $R(t) = 0$ sur le houpier de niveau 4, de dimension 6, qui est représenté par le graphe



Par la méthode des bases de Gröbner, on résout ces équations pour n assez grand. On obtient ainsi, outre les représentations décomposables déjà connues d'après le chapitre précédent,

deux solutions correspondant à des représentations indécomposables

$$t = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } t = h \begin{pmatrix} 0 & \frac{n-2}{n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et une solution correspondant à une représentation irréductible

$$t = h \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \frac{n-2}{un^2} & \frac{1}{un} & 0 \\ \frac{u(n-2)}{n-1} & \frac{n^2-2n+2}{n(n-1)} & \frac{-1}{n-1} & 0 \\ \frac{u(n-2)}{n-1} & \frac{-(n-2)}{n(n-1)} & \frac{n-2}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour cette dernière solution, le spectre de t est $(0, 0, h, h)$. On constate alors que, sur le houpier de niveau 4,

$$[t_{n-2, n-1}, t_{n-1, n}] = 0,$$

c'est-à-dire que l'image de \mathcal{T}_n est commutative. Ainsi

$$\sigma_k = s_k \exp(ht_{k, k+1})$$

fournit une représentation du groupe de tresses. Explicitement, sur le module palier, on obtient pour les indécomposables

$$\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h & \frac{-1}{n-1} & \frac{n}{n-1} & 0 \\ h & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & h \frac{n-2}{n} & h & 0 \\ 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{n}{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour la représentation irréductible, en notant $q = e^h$,

$$\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2(q-1)}{n} & \frac{(n-2)(q-1)}{n^2 u} & \frac{q-1}{nu} & 0 \\ \frac{(n-2)(q-1)u}{n-1} & \frac{-1}{n-1} - \frac{2(q-1)}{n} & \frac{n}{n-1} + (q-1) & 0 \\ \frac{(n-2)(q-1)u}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} + \frac{(n-2)(q-1)}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, l'action des autres générateurs de Coxeter se déduit matriciellement de celle de s_{n-1} : comme $\sigma_k = s_k \exp(ht_{k, k+1})$, on a

$$\sigma_k = (n-1)k(nk+1)\sigma_{n-1}(nk+1)(n-1)k.$$

Enfin, le polynôme minimal de σ_k dans le cas irréductible est $(x^2 - q^2)(x - 1)$: ces représentations se factorisent donc par une algèbre de Hecke cyclotomique (cf. chapitre II.3).

D'autre part, si l'on note provisoirement $R_n(h, u)$ la représentation irréductible de \mathfrak{B}_n que l'on considère ici, on peut constater que le paramètre u est non significatif : $R_n(h, u) \simeq R_n(h, v)$. Il en est donc de même pour la représentation de B_n associée qui ne dépend, à un paramètre d'homogénéité près, que de $q = e^h$. On note

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(h) &= R_n(h, u) \\ \mathcal{L}_n &= R_n(1, u) \\ L_n(q) &= \int_h \mathcal{L}_n. \end{aligned}$$

Pour ce qui est des indécomposables, le paramètre h , pour $h \neq 0$, n'est, de même, pas significatif.

2.3 Modèles naturels

Dans cette section, nous allons déterminer directement des modèles “naturels”, extrêmement simples, des représentations de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur $[n-1, 1] + [n]$, en utilisant les indications des sections précédentes.

Nous rappelons que le modèle naturel de l'action de \mathfrak{S}_n sur une base (e_1, e_2, \dots, e_n) est

$$(i\ j).e_k = e_{(i\ j)k}.$$

2.3.1 La représentation \mathcal{L}_n

Nous avons montré qu'il existe une unique représentation irréductible \mathcal{L}_n , de degré n , telle que

$$Sp(t_{12}) = (0^{n-2}, 1^2).$$

Nous savons de plus qu'alors les t_{ij} sont semi-simples et commutent entre eux. D'autre part, à partir de la matrice de $t_{n-1, n}$ sur le houpier de niveau 2, on vérifie que, pour $\int_h \mathcal{L}_n$, on a

$$\sigma_k = s_k(1 + (q-1)t_{k, k+1}).$$

Guidé par ses résultats, nous posons alors

$$\begin{aligned} t_{k, k+1} &= 0_{k-1} \oplus I_2 \oplus 0_{n-k-1} \\ s_k &= I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k-1} \end{aligned}$$

où I_2 est la matrice unité de taille 2, ce qui définit bien une représentation, provisoirement notée $nat^{(n)}$, de \mathfrak{B}_n . Montrons

Lemme 8. *$nat^{(n)}$ est irréductible pour $n \geq 3$.*

Preuve — On note $E = k^n$ l'espace ambiant, et on suppose un sous-espace stable propre V .

Supposons $t_{12}(V) = \{0\}$. Comme tout

$$t_{ij} = e_i \otimes e_i^* + e_j \otimes e_j^*$$

est conjugué à t_{12} par des éléments de \mathfrak{B}_n , on a, pour tout $j \neq i$, $t_{ij}(V) = \{0\}$, soit, pour tout i , $e_i^*(V) = 0$ et $V = 0$.

Si ce n'est pas le cas, comme t_{12} est semi-simple, on a $x \in V$ tel que $t_{12}(x) = x$, c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que

$$x = \lambda e_1 + \mu e_2 \in V.$$

Mais comme $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} t_{13}x &= \lambda e_1 \in V \\ t_{23}x &= \mu e_2 \in V \end{aligned}$$

donc $e_1 \in V$ ou $e_3 \in V$. On déduit alors de la stabilité de V par \mathfrak{S}_n que, pour tout i , $e_i \in V$, soit $V = E$. cqfd.

Comme la restriction à \mathfrak{S}_n de $\text{nat}^{(n)}$ est la représentation naturelle de \mathfrak{S}_n , et par comparaison du spectre de t_{12} , on en déduit que $\text{nat}^{(n)}$ est isomorphe à \mathcal{L}_n . Les représentations intégrées sont alors isomorphes, et $\int_h \mathcal{L}_n$ peut être définie de façon élémentaire par

$$\begin{aligned}\sigma_k &= s_k(1 + (q-1)t_{k,k+1}) \\ &= I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k+1}.\end{aligned}$$

2.3.2 Représentations indécomposables

De la même façon, nous avons montré qu'il existait exactement deux (classes de) représentations indécomposables de \mathfrak{B}_n , à un paramètre scalaire près, qui s'appuient sur la représentation naturelle de \mathfrak{S}_n . D'après les écritures de $t_{n-1,n}$ sur le houpplier de niveau 2, nous savons que les t_{ij} sont alors nilpotents. L'une des deux actions laisse stable $[n-1, 1]$, qui s'identifie dans la base choisie à l'espace engendré par les vecteurs $e_r - e_s$, donc, si l'on note $t_{ij}^{(1)}$ l'endomorphisme associé à $t_{ij} \in \mathfrak{B}_n$ pour cette action, on a

$$\forall r, s \quad t_{ij}^{(1)}(e_r) = t_{ij}^{(1)}(e_s).$$

Comme $t_{ij}^{(1)}$ commute à $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$, et comme les t_{ij} se déduisent les uns des autres par action de \mathfrak{S}_n , il en découle qu'il existe α et β tels que

$$t_{ij}^{(1)}(e_r) = \alpha(e_i + e_j) + \beta \sum_{k \notin \{i,j\}} e_k.$$

Comme $t_{ij}^{(1)}$ est nilpotent,

$$\text{tr}(t_{ij}^{(1)}) = 2\alpha + (n-2)\beta = 0.$$

On peut ainsi, à multiplication par un scalaire près, poser

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-(n-2)}{2} \\ \beta &= 1.\end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'autre famille d'indécomposables est alors décrite par les matrices transposées $t_{ij}^{(2)}$ des matrices $t_{ij}^{(1)}$. Comme d'autre part on remarque que, sur le houpplier de niveau 2,

$$\sigma_k = s_k(1 + ht_{k,k+1}),$$

on en déduit que, si l'on note $\sigma_i^{(1)}$ (resp. $\sigma_i^{(2)}$) l'action de σ_i pour $i \in [1, n-1]$ sur la représentation de B_n associée à $t_{ij}^{(1)}$ (resp. $t_{ij}^{(2)}$), on a

$$\begin{aligned}t_{ij}^{(1)}(e_r) &= \frac{-(n-2)}{2}(e_i + e_j) + \sum_{k \notin \{i,j\}} e_k \\ \sigma_i^{(1)}(e_r) &= s_i e_r - h \frac{n-2}{2}(e_i + e_{i+1}) + h \sum_{j \notin \{i,i+1\}} e_j\end{aligned}$$

et $\sigma_i^{(2)}$ est la matrice transposée de $\sigma_i^{(1)}$.

2.3.3 Décomposition de $\mathcal{L}_n(a) \otimes \mathcal{L}_n(b)$

\mathfrak{B}_n étant munie d'une structure d'algèbre de Hopf, on peut former le produit tensoriel $\mathcal{L}_n(a) \otimes \mathcal{L}_n(b)$, dont l'intégration sera isomorphe à la représentation

$$\left(\int_h \mathcal{L}_n(a) \right) \otimes \left(\int_h \mathcal{L}_n(b) \right)$$

de B_n .

Lemme 9. *Pour $a \neq b$, $ab \neq 0$ et $n \geq 3$,*

$$\mathcal{L}_n(a) \otimes \mathcal{L}_n(b) \simeq \mathcal{L}_n(a+b) + \mathcal{M}(a,b)$$

avec $\mathcal{M}(a,b)$ une représentation irréductible de \mathfrak{B}_n .

Preuve — L'espace engendré par les vecteurs $e_i \otimes e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ est stable par \mathfrak{B}_n , et isomorphe à $\mathcal{L}_n(a+b)$. On note V son supplémentaire stable engendré par les vecteurs $e_i \otimes e_j$ pour $i \neq j$, et on note $\mathcal{M}(a,b)$ la représentation de \mathfrak{B}_n correspondante. On déduit du théorème de Chevalley déjà cité que $\int_h \mathcal{M}(a,b)$ est semi-simple, et comme ici l'image de B_n est égale à l'image de \mathfrak{B}_n , $\mathcal{M}(a,b)$ est semi-simple. Ainsi, si V est un sous-espace stable de $\mathcal{M}(a,b)$, on peut supposer que

$$\text{Ker}(t_{12} - (a+b)) \cap V \neq \{0\},$$

c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que

$$x = \alpha e_1 \otimes e_2 + \beta e_2 \otimes e_1 \in V.$$

D'où, comme $n \geq 3$,

$$t_{13}x = \alpha a e_1 \otimes e_2 + \beta b e_2 \otimes e_1 \in V$$

et, si $a \neq b$, $\langle e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1 \rangle \subset V$. On déduit alors de la stabilité de V par \mathfrak{S}_n et de la 2-transitivité de l'action de \mathfrak{S}_n sur $\{1, \dots, n\}$ que, pour $i \neq j$, $e_i \otimes e_j \in V$. cqfd.

2.4 Restriction à \mathfrak{B}_{n-1}

Pour étudier la restriction de $\mathcal{L}_n(h)$ à \mathfrak{B}_{n-1} , il suffit de considérer la matrice de $t_{n-2, n-1}$ sur le houpier de niveau 3. La base des chemins choisie sera

$$\begin{aligned} e_1 &= [n-4] \rightarrow [n-3] \rightarrow [n-2] \rightarrow [n-1] \rightarrow [n] \\ e_2 &= [n-4] \rightarrow [n-3] \rightarrow [n-2] \rightarrow [n-1] \rightarrow [n-1, 1] \\ e_3 &= [n-4] \rightarrow [n-3] \rightarrow [n-2] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\ e_4 &= [n-4] \rightarrow [n-3] \rightarrow [n-3, 1] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\ e_5 &= [n-4] \rightarrow [n-4, 1] \rightarrow [n-3, 1] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\ e_6 &= [n-5, 1] \rightarrow [n-4, 1] \rightarrow [n-3, 1] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1]. \end{aligned}$$

On a alors

$$t_{n-2, n-1} = h \begin{pmatrix} + & + & + & + & 0 & 0 \\ + & + & + & + & 0 & 0 \\ + & + & + & + & 0 & 0 \\ + & + & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où le signe "+" désigne un scalaire non nul pour $n > 3$.

Si l'on note ψ une projection sur ce houpplier,

$$Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} \mathcal{L}_n(h) = 2[n-1] + [n-2, 1],$$

et

$$\begin{aligned} \psi(2[n-1]) &= \langle e_1, e_2 \rangle \\ \psi([n-1, 1]) &= \langle e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit qu'aucun des composants isotypiques pour l'action de \mathfrak{S}_{n-1} n'est stable par $t_{n-2, n-1}$.

D'autre part, dans la base $(e'_1, e'_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ avec

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + une_2 \\ e'_2 &= \frac{(n-1)^2}{un^2} e_1 + \frac{1-n}{n} e_2 \end{aligned}$$

on a

$$t_{n-2, n-1} = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n-1} & \frac{n(n-3)}{(n-1)^2(n-2)} & \frac{n}{(n-1)(n-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-3}{n} & \frac{n^2-4n+5}{(n-1)(n-2)} & \frac{-1}{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-3}{n} & \frac{-(n-3)}{(n-1)(n-2)} & \frac{n-3}{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A conjugaison par un élément de $End_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V)$ près, on reconnaît la matrice déjà obtenue pour $t_{n-1, n}$, dans laquelle on a remplacé n par $n-1$. Ainsi la restriction de cette représentation $\mathcal{L}_n(h)$ à \mathfrak{B}_{n-1} , pour $n > 3$, est-elle la somme d'une représentation triviale (de dimension 1) et de $\mathcal{L}_{n-1}(h)$:

$$Res_{\mathfrak{B}_{n-1}} \mathcal{L}_n(h) = I_+(h) + \mathcal{L}_{n-1}(h).$$

Pour $n \leq 5$, les houppliers considérés sont de dimension inférieure, mais les vecteurs de base absents ne sont pas significatifs: on obtient encore le même résultat si $n \geq 4$. En revanche, pour $n = 3$, $\mathcal{L}_n(h) \simeq \tau_h B_{-h, 0}$, et

$$Res_{\mathfrak{B}_2} \mathcal{L}_3(h) = I_+(h) + I_+(0) + I_-(h).$$

On en déduit donc le diagramme de Bratteli de cette représentation (cf. page suivante).

2.5 Classification des représentations de degré au plus n de \mathfrak{B}_n

On déduit de ce qui précède une classification des représentations de degré au plus n de \mathfrak{B}_n , ceci pour n suffisamment grand. En effet, si M est un \mathfrak{B}_n -module de dimension $m \leq n$ sur k , on se trouve dans l'un des trois cas suivants:

- 1) $Res_{\mathfrak{S}_n} M = r[n] + s[1^n]$, avec $r + s = m$

2) $Res_{\mathfrak{S}_n} M = [n - 1, 1]$ ou $Res_{\mathfrak{S}_n} M = [2, 1^{n-1}]$

3) $Res_{\mathfrak{S}_n} M \in \{[n - 1, 1] + [n], [n - 1, n] + [1^n], [2, 1^{n-1}] + [n], [2, 1^{n-1}] + [1^{n-1}]\}$.

Dans le premier cas, on a déjà vu que si $r, s \geq 1$, M est forcément décomposable. On peut donc supposer que l'action de \mathfrak{S}_n est triviale. Alors les classes d'isomorphismes de représentations indécomposables de \mathfrak{B}_n sur M sont en bijection naturelle avec celles de t_{12} , soit $k[t]$, qui sont bien connues (théorème de Jordan dans le cas où k est algébriquement clos).

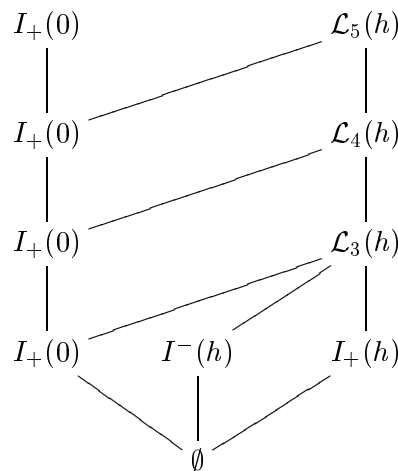
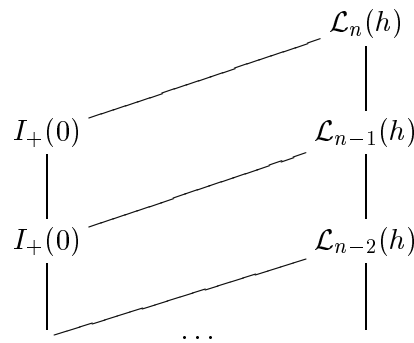
De plus, la représentation de B_n associée est alors donnée par $\sigma_k = e^{ht}$.

Le deuxième cas a été traité précédemment : t_{ij} s'écrit $\alpha Id + \beta(i j)$, et il est bien connu que la représentation de B_n associée se factorise par l'algèbre de Hecke de type A : c'est la représentation de Bureau.

Dans le troisième cas, nous venons de traiter $Res_{\mathfrak{S}_n} M = [n - 1, 1] + [n]$ (ou $Res_{\mathfrak{S}_n} M = [2, 1^{n-1}] + [1^n]$, qui lui est équivalent). Dans les deux autres cas, pour n grand, M est décomposable, d'après la proposition 9 de I.1.3.2.

Ce qui précède constitue ainsi une version "infinitésimale" de la classification des représentations de dimension au plus n de B_n , pour n suffisamment grand, obtenue récemment par Formanek [40] et Sysoeva [68] [69]. La méthode utilisée ici suggère que l'éparpillement qu'ils ont constaté des degrés possibles des représentations irréductibles de B_n lorsque n augmente, pourrait provenir du phénomène analogue pour les représentations de \mathfrak{S}_n .

Diagramme de Bratteli de $\mathcal{L}_n(h)$



Chapitre 3

Algèbres de Hecke cyclotomiques de type A

On fixe un corps k , cyclotomique de caractéristique 0, trois variables formelles a , b et c , et j une racine primitive troisième de 1 dans k . On note \tilde{k} le corps des fractions de $k[a, b, c]$ et on fixe une clôture algébrique K de k .

Nous étudions dans ce chapitre les représentations de certains quotients de $\mathbb{C}B_n$. Ces quotients présentent la propriété remarquable d'être semi-simples et de dimension finie. Leur définition par générateurs et relations se fait d'une façon uniforme à partir de diagrammes de Coxeter généralisés (cf. [29]). Ce sont, d'une façon générale, des déformations de l'algèbre d'un groupe fini, quotient de B_n .

Ces quotients se présentent sous la forme d'une série infinie, l'algèbre de Hecke de type A, dont les représentations sont bien connues depuis la thèse d'Hoefsmit (cf. [45]), et de cinq algèbres exceptionnelles, pour lesquelles les propriétés de finitude de la dimension et de semi-simplicité sont connues ou conjecturées. Ces algèbres sont les déformations des algèbres de groupe des groupes de réflexion complexe dont il a été fait mention en I.1.1.2. Nous notons en particulier H_4 , H_8 , H_{16} , H_{25} et H_{32} les algèbres de Hecke "cyclotomiques" associées aux groupes de réflexions complexes G_4 , G_8 , G_{16} , G_{25} et G_{32} sur \tilde{k} , et $\hat{H}_n = H_n \otimes_{\tilde{k}} K$ l'extension des scalaires de H_n à la clôture algébrique K de \tilde{k} choisie.

La section 1 est consacrée aux définitions et préliminaires. Nous montrons ensuite comment utiliser la chaîne d'algèbres

$$K \subset A \subset \hat{H}_4 \subset \hat{H}_{25} \subset \hat{H}_{32}$$

où $A = K[x]/(x-a)(x-b)(x-c)$, pour étudier les représentations de ces algèbres. La section 2 constitue une étude élémentaire des représentations de G_4 . Les représentations irréductibles de H_4 , et notamment leur description matricielle, sont connues depuis les travaux de Broué et Malle [28]. Nous donnons en section 3 une façon de les construire, et exprimons la seule représentation essentiellement nouvelle de H_4 (par rapport aux algèbres de Hecke classiques) d'une manière naturelle au regard de la chaîne $K \subset A \subset \hat{H}_4$. La section 4 est ensuite consacrée à l'étude de H_{25} , et l'on y montre comment utiliser cette chaîne pour construire les représentations irréductibles de H_{25} . Des descriptions matricielles de ces représentations avaient déjà été obtenues par Gunter Malle et Michel Broué, et utilisées dans [28]. Nous montrons ici comment déduire la plupart d'entre elles des diagrammes de Bratteli des représentations de G_{25} relativement à la chaîne

$$\{e\} \subset \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset G_4 \subset G_{25}$$

et exprimons les dernières, dont les matrices nous ont été communiquées par Gunter Malle [60], d'une façon naturelle par rapport à cette chaîne. Enfin, la section 5 montre comment l'on peut aborder l'étude des représentations de H_{32} à partir des méthodes développées ici.

Lors de l'étude de H_4 , les calculs concernant l'action des générateurs pour la représentation régulière ont été effectués manuellement. Les résultats concernant les multiplicités des diverses restrictions ainsi que les valeurs des caractères ont été obtenues à l'aide du module CHEVIE [GHL⁺96] de GAP 3 [S⁺95]. Enfin, les calculs d'algèbre linéaire et la résolution des équations polynomiales ont été effectuées à l'aide du logiciel MAPLE.

3.1 Algèbres de Hecke généralisées

Un corps k , cyclotomique de caractéristique 0, est toujours fixé. Pour (a_i) une famille de n variables formelles, on note \tilde{k} le corps des fractions de $k[a_1, \dots, a_n]$, et K une clôture algébrique de \tilde{k} .

On considère alors l'algèbre $\mathbb{H}_p(a_1, \dots, a_n)$ définie sur $k[a_1, \dots, a_n]$ par générateurs s_1, \dots, s_{p-1} et relations, pour tout $r = 1 \dots p-1$, et tous i, j tels que $|i - j| \geq 2$,

$$\begin{aligned} \prod_{d=1}^n (s_r - a_d) &= 0 \\ s_r s_{r+1} s_r &= s_{r+1} s_r s_{r+1} \\ s_i s_j &= s_j s_i. \end{aligned}$$

L'algèbre $\mathbb{H}_p(a, b)$ est l'algèbre de Hecke générique de type A_{p-1} . $H_4 = \mathbb{H}_3(a, b, c)$, $H_{25} = \mathbb{H}_3(a, b, c, d)$, $H_{32} = \mathbb{H}_3(a, b, c, d, e)$, $H_8 = \mathbb{H}_4(a, b, c)$ et $H_{16} = \mathbb{H}_5(a, b, c)$ sont les algèbres de Hecke cyclotomiques au sens de [29] des groupes de réflexions complexes numérotés G_4 , G_{25} , G_{32} , G_8 et G_{16} dans la classification de Shephard et Todd [67]. Dans le cas général, si l'on spécialise a_1, \dots, a_n en la suite $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ où ω est une racine primitive n^e de l'unité, on obtient l'algèbre d'un groupe. Si $\mathbb{H}_p(a_1, \dots, a_n)$ est libre de rang fini sur $k[a_1, \dots, a_n]$, le théorème de déformation de Tits dit que

$$K \otimes_{k[a_1, \dots, a_n]} \mathbb{H}_p(a_1, \dots, a_n) \simeq KG.$$

On sait que c'est le cas pour les algèbres de Hecke de type A, ainsi que pour les algèbres cyclotomiques associées à G_4 , G_{25} , G_8 , G_{16} , et l'on conjecture que c'est également vrai pour G_{32} (cf. section I.1.1.2). On va décrire en particulier les représentations de $\mathbb{H}_3(a, b)$. Comme $k\mathfrak{S}_3$, cette algèbre admet deux représentations de degré 1 ($s, t \mapsto a$ et $s, t \mapsto b$), et une de degré 2. Un modèle matriciel peut être donné par

$$s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} -b^2 & b^2 - ab + a^2 \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$$

Enfin, si b_1, \dots, b_m est une sous-famille de a_1, \dots, a_n , il existe un morphisme surjectif de $k[a_1, \dots, a_n]$ -algèbres

$$\mathbb{H}_p(a_1, \dots, a_n) \rightarrow k[a_1, \dots, a_n] \otimes_{k[b_1, \dots, b_m]} \mathbb{H}_p(b_1, \dots, b_m).$$

En particulier, si l'on connaît les représentations de $\mathbb{H}_p(b_1, \dots, b_m)$ pour des familles b_1, \dots, b_m de longueur m strictement inférieure à n , et si ω est une racine primitive n^e de l'unité, cela permet de construire des représentations de l'algèbre de groupe $\mathbb{H}_p(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$.

3.2 Représentations de G_4

On note G le groupe de cardinal 24 numéroté G_4 dans la classification de Shephard et Todd [67]. On a une présentation par générateurs s, t et relations :

$$\begin{aligned} s^3 &= 1 \\ t^3 &= 1 \\ sts &= tst. \end{aligned}$$

Il est clair que G est un quotient de B_3 .

Le centre de G est cyclique d'ordre 2, engendré par $(st)^3$. Le quotient de G par son centre est isomorphe au groupe alterné A_4 . Un tel isomorphisme est défini par le choix de deux 3-cycles distincts portant sur deux lettres communes et appartenant à la même classe de conjugaison, sur lesquels on envoie s et t . Par exemple, on pose $\phi(s) = s_1s_2$ et $\phi(t) = s_3s_2$, où l'on a noté s_i les générateurs de Coxeter de \mathfrak{S}_4 .

La théorie des représentations de A_4 est bien connue, et peut s'obtenir soit directement [9], soit à partir de la théorie de Clifford et des représentations de \mathfrak{S}_4 [1] [14] : on a trois représentations irréductibles de degré 1, et une de degré 3. On en déduit quatre représentations de G :

- S_ω pour $\omega \in \{1, j, j^2\}$, représentations de degré 1 définies par $s = t = \omega$
- V , représentation de degré 3 dont un modèle matriciel peut être donné sur \mathbb{Z} :

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, $kG = \mathbb{H}(1, j, j^2)$ se surjecte dans $\mathbb{H}(1, j)$, $\mathbb{H}(j, j^2)$ et $\mathbb{H}(1, j^2)$. Comme ces algèbres admettent chacune une représentation de degré 2, on en déduit trois représentations irréductibles de degré 2 de G_4 : on note U_ω pour $\omega \in \{1, j, j^2\}$ la représentation issue de $\mathbb{H}(\{1, j, j^2\} \setminus \{\omega\})$. Si $\{1, j, j^2\} = \{\omega, \omega', \omega''\}$, on obtient ainsi un modèle matriciel de U_ω :

$$s = \begin{pmatrix} \omega' & 0 \\ 0 & \omega'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\omega'' - \omega) & \frac{-2}{3}\omega'' \\ \omega' & \frac{1}{3}(\omega' - \omega) \end{pmatrix}$$

On a ainsi obtenu la liste complète des représentations de G :

$$24 = 3 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 3^2.$$

A partir des classes de conjugaisons de A_4 , on obtient facilement la liste des 7 classes de conjugaisons de G :

- $\{1\}, \{(st)^3\}$
- $\{s, t, tsts, stst\}, \{ts^2t, t^2s^2, s^2t^2, st^2s\}$
- $\{s^2, t^2, s^2t^2s^2t^2, t^2s^2t^2s^2\}, \{t^2st^2, st, ts, s^2ts^2\}$
- $\{s^2t, ts^2, sts, t^2s, st^2, ts^2t^2s\}$.

On peut ainsi écrire la table des caractères

	1	s	s^2t^2	s^2	st	sts	$(st)^3$
U_ω	2	$-\omega$	ω	$-\omega^{-1}$	ω^{-1}	0	-2
V	3	0	0	0	0	-1	3
S_ω	1	ω	ω	ω^{-1}	ω^{-1}	1	1

Cette table permet notamment de décomposer les produits tensoriels. Pour $\omega, \omega' \in \mu_3$, on a :

$$\begin{aligned}
U_\omega \otimes S_{\omega'} &= U_{\omega\omega'} \\
U_\omega \otimes U_{\omega'} &= V + S_{\omega\omega'} \\
V \otimes S_\omega &= V \\
U_\omega \otimes V &= U_1 + U_j + U_{j^2} \\
V \otimes V &= 2V + S_1 + S_j + S_{j^2} \\
S_\omega \otimes S_{\omega'} &= S_{\omega\omega'}.
\end{aligned}$$

3.3 L'algèbre de Hecke cyclotomique de G_4

On s'intéresse donc ici aux représentations de l'algèbre $H_4 = \mathbb{H}_3(a, b, c)$, définie par générateurs s, t et relations

$$\begin{aligned}
(s-a)(s-b)(s-c) &= 0 \\
(t-a)(t-b)(t-c) &= 0 \\
sts &= tst.
\end{aligned}$$

On note $M = \{a, b, c\}$.

La liste de mots en s et t donnée précédemment,

$$(1, (st)^3, s, ts^2t, t, st^2s, s^2, t^2st^2, t^2, s^2ts^2, st, s^2t^2s, ts, t^2s^2t, s^2t, t^2s, ts^2, st^2, sts, (st)^3sts, s^2t^2, tsts, t^2s^2, stst),$$

représente une liste d'éléments de G_4 , si l'on identifie s et t aux générateurs de G_4 . D'après le théorème de Tits et [28], elle représente également une base de $\tilde{k} \otimes H_4$, si l'on identifie cette fois les s et t aux générateurs de H_4 . On peut donc écrire l'action régulière à gauche dans cette base (inversement, la donnée de cette action permettra de redémontrer ce fait, y compris pour les spécialisations en a, b, c).

Si l'on considère l'automorphisme $\tau \in \text{Aut}(H_4)$ déterminé par $\tau(s) = t$ et $\tau(t) = s$, on remarque tout d'abord que la famille considérée est invariante par τ . Ainsi, la matrice de τ dans cette base est une matrice de permutation aisée à déterminer, et il suffit d'obtenir la matrice de la multiplication à gauche par s .

Il s'agit donc d'utiliser les relations pour simplifier les mots obtenus après multiplication à gauche par s . Dans la plupart des cas, cette opération est immédiate. Pour les cas plus difficiles on obtient, en notant provisoirement σ_i la i^{e} fonction symétrique élémentaire en

a, b, c , et $\beta = (st)^3$:

$$\begin{aligned}
 s.\beta &= \sigma_1\beta - \sigma_2t^2st^2 + \sigma_3ts^2t \\
 \sigma_3s.t^2s^2t &= (st)^3sts + \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1^2)(st)^3 + \sigma_1^2\sigma_2t^2st^2 - \sigma_1^2\sigma_3ts^2t + \sigma_1^2\sigma_2s^2ts^2 \\
 &\quad - \sigma_1\sigma_2^2tsts + \sigma_1\sigma_2\sigma_3ts^2 - \sigma_1\sigma_3s^2t^2s - \sigma_1\sigma_2^2stst + \sigma_2^2sts \\
 &\quad - \sigma_2^2\sigma_3ts \\
 s.\beta sts &= -\sigma_1(\sigma_2\sigma_1 - \sigma_3)st^3 - \sigma_3\sigma_2\sigma_1st^2s + \sigma_2^2\sigma_1t^2st^2 + \sigma_2^2\sigma_1s^2ts^2 \\
 &\quad - \sigma_3^2\sigma_2st - \sigma_3\sigma_2t^2s^2t + \sigma_3\sigma_2^2st^2 + \sigma_1\beta sts - \sigma_2^3stst + \sigma_3^2t^2s^2 \\
 &\quad - \sigma_1\sigma_2\sigma_3tsts + \sigma_3\sigma_2^2sts \\
 s.t^2s^2 &= -\sigma_1ts^2t + \sigma_1st^2s + t^2s^2t + \sigma_2s^2t - \sigma_2st^2.
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de déformation de Tits et l'étude précédente, on sait que, après extension des scalaires à K , cette algèbre admet trois représentations irréductibles de degré 1, trois de degré 2, et une de degré 3, que l'on note V .

On obtient immédiatement les représentations de degré 1 : pour $\omega \in M$, on peut définir S_ω par $s, t \mapsto \omega$. On peut obtenir de la même façon que précédemment les représentations de degré 2 : il suffit par exemple de projeter $\mathbb{H}_3(a, b, c)$ sur $\mathbb{H}_3(a, b)$ pour remonter la représentation irréductible de degré 2 en une représentation $U_{a,b}$ de H_4 .

Le modèle matriciel est ainsi celui obtenu pour la représentation de degré 2 de $\mathbb{H}_3(a, b)$, qui a été décrit en section 1.

On peut alors explicitement décrire la surjection

$$p : \hat{H}_4 \rightarrow \text{End}(S_a) \times \text{End}(S_b) \times \text{End}(S_c) \times \text{End}(U_{a,b}) \times \text{End}(U_{b,c}) \times \text{End}(U_{a,c}),$$

dont le noyau est $\text{End}(V)$, où V est l'unique représentation irréductible de degré 3 de \hat{H}_4 . On remarque que si v est un vecteur propre pour S , l'espace engendré par v, Tv, T^2v constitue une copie de V . Si l'on sait écrire une expression matricielle pour l'action régulière de \hat{H}_4 , on saura en faire autant pour cette représentation de degré 3.

Mais, d'après ce qui précède, on sait obtenir l'action de s et t pour la représentation régulière, sous forme matricielle dans la base précédemment décrite. A l'aide du logiciel MAPLE, on en déduit une base de $\text{End}(V)$, et un vecteur propre v de la restriction de s à $\text{End}(V)$. Sur (v, tv, t^2v) , on obtient pour l'action des générateurs

$$s = \begin{pmatrix} a & \frac{c^2 b^2}{a(b+c)} & \frac{a^2 b^2 + cb a^2 + a^2 c^2 + ba c^2 + cab^2 + c^2 b^2}{a} \\ 0 & -\frac{bc}{a} & -\frac{a^2 b + b^2 a + 2abc + cb^2 + a^2 c + ac^2 + bc^2}{a} \\ 0 & \frac{bc}{a(b+c)} & \frac{ab + bc + ca}{a} \end{pmatrix}$$

et t est naturellement représenté par une matrice compagnon

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & abc \\ 1 & 0 & -ab - bc - ca \\ 0 & 1 & a + b + c \end{pmatrix}$$

Si l'on diagonalise la matrice de s , on peut mettre V sous la forme suivante

$$s = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

et

$$t = \begin{pmatrix} \frac{(b+c)bc}{(a-b)(a-c)} & \frac{c(ac+b^2)}{(a-b)(a-c)} & \frac{b(ab+c^2)}{(a-b)(a-c)} \\ \frac{c(bc+a^2)}{(b-a)(b-c)} & \frac{(a+c)ac}{(b-a)(b-c)} & \frac{a(ab+c^2)}{(b-a)(b-c)} \\ \frac{b(bc+a^2)}{(c-a)(c-b)} & \frac{a(ac+b^2)}{(c-a)(c-b)} & \frac{(a+b)ab}{(c-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

Dégénérescences

On s'intéresse enfin aux spécialisations en a, b, c . On rappelle qu'une algèbre unitaire A de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 est absolument semi-simple si et seulement si la forme bilinéaire $tr(xy)$ sur A considéré comme A -module à gauche est non dégénérée (cf. Bourbaki [3] §2 ex. 1).

Ainsi, si A est l'algèbre obtenue par extension des scalaires de $\mathbb{H}_3(a, b)$ au corps des fractions de $k[a, b]$, en écrivant explicitement l'action régulière dans la base

$$(1, s, t, st, ts, sts),$$

on obtient comme discriminant de la forme trace

$$-16a^2b^2(a-b)^2(a^2-ab+b^2)^6.$$

De la même façon, nous avons déjà exprimé l'action à gauche de $\mathbb{H}_3(a, b, c)$ sur elle-même, dans sa base habituelle. On obtient alors pour discriminant

$$2^{12}3^9a^6b^6c^6(c-b)^{10}(a-c)^{10}(b-a)^{10} \\ (c^2-cb+b^2)^6(a^2-ac+c^2)^6(b^2-ba+a^2)^6(a^2+bc)^{14}(b^2+ac)^{14}(c^2+ab)^{14}.$$

3.4 Représentations de H_{25}

On rappelle que l'on note H_n l'algèbre de Hecke cyclotomique associée au groupe de réflexions complexes G_n . Pour $n \in \{4, 25, 32\}$, les variables génériques seront toujours notées a, b, c .

Le traitement de G_{25} et de son algèbre de Hecke générique est basé sur le fait suivant, déduit des tables calculées à l'aide du module CHEVIE de GAP 3 :

Proposition 23. *La chaîne $1 \subset \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \subset G_4 \subset G_{25}$ est sans multiplicités*

Preuve — Calcul élémentaire à partir du module CHEVIE de GAP 3.

cqfd.

Le théorème de déformation de Tits implique alors qu'il en est de même pour la chaîne correspondante d'algèbres de Hecke. L'ordre de G_{25} est 648. Il sera sous-entendu que les restrictions que l'on considère ici concernent les inclusions élémentaires de cette chaîne.

On rappelle que l'on note $\gamma_n = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$ l'élément générateur positif du groupe de tresses B_n , et $\delta_n \in B_n$ l'élément tel que

$$\gamma_n = \delta_n \gamma_{n-1},$$

soit encore $\delta_n = \sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_n$; en particulier, $\delta_1 = \sigma_1^2$, $\delta_2 = \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2$, et ces éléments se déduisent donc les uns des autres par l'égalité $\delta_n = \sigma_n \delta_{n-1} \sigma_n$.

Le morphisme surjectif $B_4 \rightarrow B_3$ défini en I.1.1.1, dont l'inclusion $B_3 \hookrightarrow B_4$ utilisée ici est une section, permet de relever chacune des représentations irréductibles de $\tilde{k} \otimes H_4$ en des représentations irréductibles de $\tilde{k} \otimes H_{25}$. On les note $\overline{S}_a, \overline{T}_{\{a,b\}}$ et \overline{V} . On a donc

$$\begin{aligned} \text{Res} \overline{S}_a &= S_a \\ \text{Res} \overline{V} &= V \\ \text{Res} \overline{T}_{\{a,b\}} &= U_{a,b}. \end{aligned}$$

Les restrictions des autres représentations irréductibles de \hat{H}_{25} , notées $\overline{U}_{\alpha,\beta}, \overline{V}_{\alpha,\beta,\gamma}, \overline{W}_\alpha, X$ et X' , pour $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{a, b, c\}$, sont

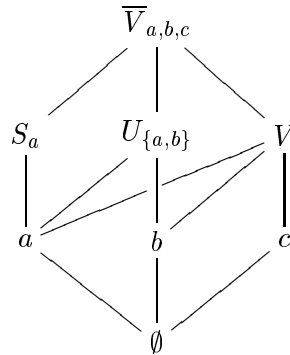
$$\begin{aligned} \text{Res} \overline{U}_{a,b} &= S_a + U_{a,b} \\ \text{Res} \overline{V}_{a,b,c} &= S_a + U_{a,b} + V \\ \text{Res} \overline{W}_a &= S_a + U_{a,b} + U_{a,c} + V \\ \text{Res} X &= U_{a,b} + U_{b,c} + U_{c,a} + V \\ \text{Res} X' &= U_{a,b} + U_{b,c} + U_{c,a} + V. \end{aligned}$$

La distinction entre X et X' peut se faire de la manière suivante: les deux représentations de G_{25} associées sont conjuguées l'une de l'autre, et d'après la table de caractères, $\gamma_4 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^4$ agit sur l'une par j , sur l'autre par j^2 . On note X la première, et X' la seconde.

Les représentations de type $\overline{U}_{a,b}$ peuvent s'obtenir directement, car elles proviennent de $\mathbb{H}_4(a, b)$, algèbre de Hecke classique de type A .

3.4.1 La représentation $\overline{V}_{a,b,c}$

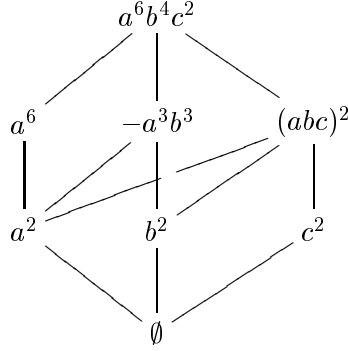
Pour ce qui est de $\overline{V}_{a,b,c}$, on a le diagramme de Bratteli suivant :



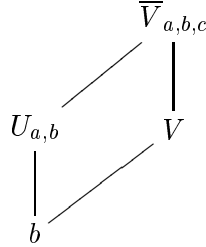
Pour un sommet donné, on note d_a le nombre de chemins qui joignent ce sommet à a . Alors, $\det(\sigma_1) = a^{d_a} b^{d_b} c^{d_c}$. Ainsi, $\det(\gamma_n) = (a^{d_a} b^{d_b} c^{d_c})^{n(n-1)}$. De plus, le degré du module associé est $d_a + d_b + d_c$, et γ_n est central, donc agit scalairement: $\det(\gamma_n) = \gamma_n^{d_a + d_b + d_c}$. Finalement,

$$\gamma_n = \omega (a^{d_a} b^{d_b} c^{d_c})^{\frac{n(n-1)}{d_a + d_b + d_c}}$$

avec ω une racine de l'unité. Pour obtenir cette valeur ω , il suffit de spécialiser aux racines troisièmes de l'unité, et de comparer avec la table des caractères de G_{25} . Si l'on indique les valeurs de γ sur le diagramme de Bratteli, on obtient



On cherche alors la valeur de $s = \sigma_3$ sur les briques supérieures. Le spectre de s est contenu dans $\{a, b, c\}$, et de plus $\det(\delta_n) = \det(\sigma_n)^2 \det(\delta_{n-1})$: les valeurs des δ_n déterminent donc le spectre de σ_3 sur chacune des briques. En combinant ces différentes conditions, on obtient que sur la brique

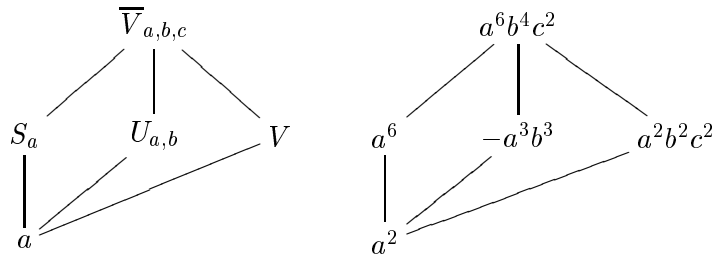


la matrice de s vaut

$$\frac{1}{c^2 + ab} \begin{pmatrix} (a+b)c^2 & \frac{-ab}{w}(c^2 + ab - (a+b)c) \\ w(c^2 + ab + (a+b)c) & (a+b)ab \end{pmatrix}$$

avec w un scalaire indéterminé.

On s'intéresse maintenant à la brique



En utilisant le fait que le spectre de s sur cette brique est $\{a, b, c\}$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{b^3 c (c+b)}{(a^2 - a b + b^2) (a^2 + b c)} & \frac{(a^3 - b^2 c) (a-b) u}{(a^2 - a b + b^2) (a^2 + b c)} & \frac{(a^3 - b^2 c) (a-c) v}{(a^2 + b c) (a^2 - a b + b^2)} \\ -\frac{b c^2 (c+b) (b^2 + a c)}{(a^2 - a b + b^2) u (a b + c^2)} & -\frac{a c (a^3 - a^2 b - a c^2 + c^2 b - c a^2 - b c a)}{(a^2 - a b + b^2) (a b + c^2)} & \frac{(c+b) (b^2 + a c) (a-c) v c a^2}{(a^2 - a b + b^2) (a b + c^2) b (a-b) u} \\ \frac{b^3 (a+c) (a-c) (a-b)}{(a b + c^2) (a^2 + b c) v} & -\frac{a^2 (a-b) u b (a+c) (a-c)}{(a^2 + b c) (a b + c^2) c v} & \frac{a^3 (c+b) (b+a)}{(a b + c^2) (a^2 + b c)} \end{pmatrix}$$

avec u et v des scalaires à déterminer.

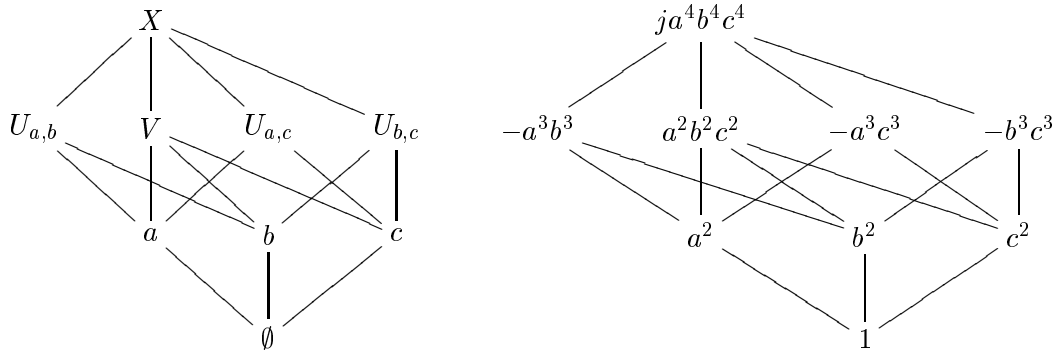
Il n'y a alors plus que trois scalaires à déterminer. L'équation de tresses $\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$ se réécrit comme une liste de 36 équations en u, v, w . Il suffit en fait de résoudre une de ces équations pour les résoudre toutes : on obtient la relation

$$c(ac^2 + abc + b^3 + b^2c)v = buw(a^4 - 2a^3b - a^3c + 2ba^2c + 2a^2b^2 - b^3a - 2b^2ac + b^3c).$$

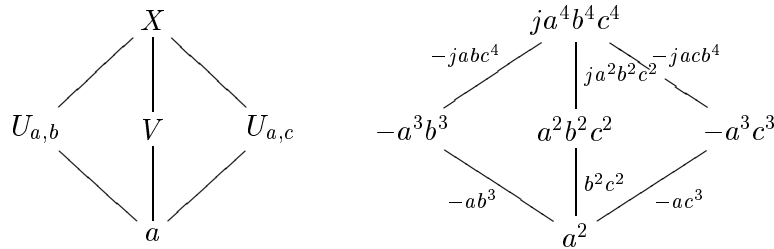
Le choix de deux des paramètres fixe ainsi le troisième, ce qui détermine ensuite un modèle pour $\bar{V}_{a,b,c}$.

3.4.2 Les représentations X et X'

On s'intéresse maintenant à X et X' . Leurs diagrammes de Bratteli sont identiques, les valeurs de γ_n conjuguées



A permutation des paramètres près, il n'y a qu'une brique à étudier :



Comme précédemment, le spectre de s est sur cette brique $\{a, b, c\}$, et on obtient comme matrice

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{j(a-j^2c)c^3}{(b-c)(ab+c^2)} & \frac{(ab-j^2c^2)(a+cj)c}{(b-c)(ab+c^2)} \frac{1}{u} & \frac{j^2(ab-j^2c^2)(b+j^2c^2)b}{(b-c)(ab+c^2)} \frac{1}{v} \\ \frac{c^2a(a+bj)(cj+b)}{(b^2+ac)(ab+c^2)} u & \frac{ja(b^2c^2 - ja(bc^2+cb^2+b^3+c^3))}{(b^2+ac)(ab+c^2)} & \frac{-(b+cj^2)a(a+bj)b^2}{(b^2+ac)(ab+c^2)} \frac{u}{v} \\ \frac{-c(ac-j^2b^2)(cj+b)}{(b^2+ac)(b-c)} v & \frac{jb(cj+a)(ac-j^2b^2)}{(b^2+ac)(b-c)} \frac{v}{u} & \frac{(a-j^2b)b^3}{(b^2+ac)(b-c)} \end{array} \right)$$

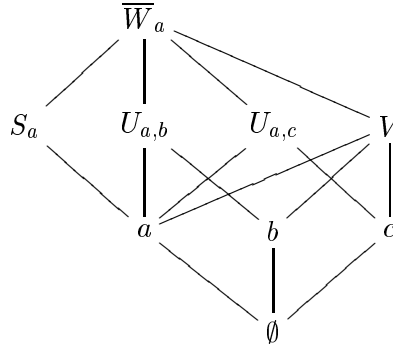
avec u et v des scalaires à déterminer.

Le modèle matriciel ainsi obtenu dépend de six paramètres u_ω, v_ω pour $\omega \in \{a, b, c\}$. L'équation $\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$ fournit alors 81 relations. Elles se résolvent cette fois encore aisément, sous la forme des trois relations

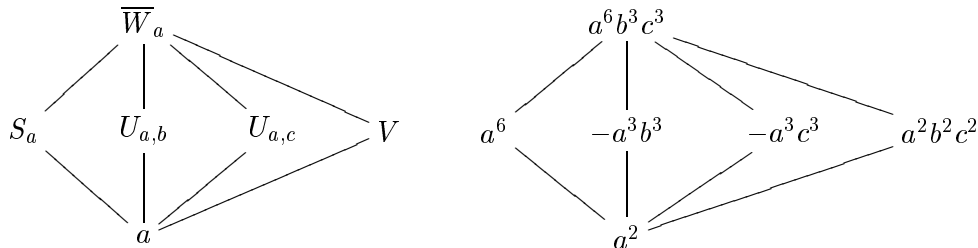
$$\begin{aligned} (b^2 + ac)(cj + a)bu_b &= j(a^2 + bc)(a + bj)(cj + b)u_a \\ (ab + c^2)cv_1u_c &= -j(a^2 + bc)(b + j^2c)u_a \\ (a + bj)(cj + b)v_av_c &= -j(cj + a)bv_b. \end{aligned}$$

3.4.3 Les représentations \overline{W}_x

Pour terminer le cas de G_{25} , il s'agit de traiter \overline{W}_a :

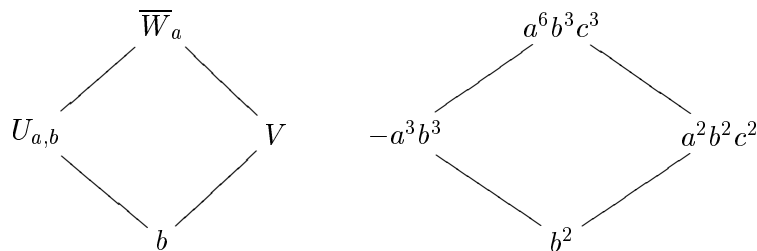


Il apparaît une brique de taille 4



Le spectre de s sur cette brique est $\{a, a, b, c\}$.

Les deux autres briques sont de taille 2, de type



On trouve comme précédemment que sur cette brique s vaut

$$\frac{1}{c^2 + ab} \begin{pmatrix} c^2(a + c) & (c - b)a\frac{1}{u} \\ c(a^2b - c^3)u & (a + c)ab \end{pmatrix}$$

avec u à déterminer.

Il reste donc à résoudre l'équation $\delta_4 = s\delta_3s$ sur la brique de taille 4. Elle se réécrit $\delta_3\delta_4 = (\delta_3s)^2 = \gamma_4/\gamma_2 = a^4b^3c^3Id$. Pour déterminer la classe de conjugaison de δ_3s , il suffit dès lors de déterminer sa trace, qui est de la forme $(u - v)a^2\sqrt{b^3c^3}$ avec $u + v = 4$. On vérifie d'après ce qui précède que la trace est nulle sur les briques de taille 2. La table des caractères de G_{25} dit que la spécialisation en $1, j, j^2$ de cet élément a une trace nulle, donc $u = v$. Pour résoudre cette équation, il suffit alors d'introduire une racine carrée w de $a^4b^3c^3$, et de

considérer la forme générale d'un $P \in GL_4(K)/GL_2(K) \times GL_2(K)$. Avec un léger abus de notations, on a

$$s = \delta_3^{-1} P \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \end{pmatrix} P^{-1}$$

Les s solutions sont alors paramétrées par $\dim_K GL_4(K)/GL_2(K) \times GL_2(K) = 8$ paramètres, et il faut ensuite résoudre l'équation de tresse en fonction de ces paramètres. Dans ce cas, le gain de cette méthode est relativement faible car les équations à résoudre restent compliquées.

Gunter Malle nous a communiqué [60] le résultat des calculs qu'il avait effectués d'une autre façon, à l'occasion de son travail avec Michel Broué [28]. Réécrit dans notre formalisme, l'action de s_3 sur la brique de taille 4 est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{b^2 c^2 A}{Q(a,b)Q(a,c)D(a)} & \frac{ac^2(a-b)}{Q(a,b)} & \frac{ab^2(a-c)D(c)}{Q(a,c)D(b)} & \frac{a(a-b)(a-c)}{D(b)} \\ \frac{c^2 N(b)(a^4+b^2c^2+a^2bc)}{aQ(a,b)D(c)D(a)Q(a,c)} & \frac{a^2 c^2 (a+c)}{D(c)Q(a,b)} & \frac{aN(b)(a-c)}{D(b)Q(a,c)} & \frac{a^2(a-c)(a+c)}{D(c)D(b)} \\ \frac{b^2 N(c)(a^4+b^2c^2+a^2bc)}{aD(c)D(a)Q(a,c)Q(a,b)} & \frac{aN(c)(a-b)}{D(c)Q(a,b)} & \frac{a^2 b^2 (a+b)}{D(b)Q(a,c)} & \frac{a^2(a-b)(a+b)}{D(c)D(b)} \\ \frac{bcN(b)N(c)(a^4+b^2c^2+a^2bc)}{aD(c)D(a)^2Q(a,b)Q(a,c)} & \frac{a^2 bcN(c)(a+c)}{D(a)D(c)Q(a,b)} & \frac{a^2 bcN(b)(a+b)}{D(a)D(b)Q(a,c)} & \frac{a^3 B}{D(a)D(c)D(b)} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= c(a^2 + b^2) - (c^2 - ab)(b - a) \\ B &= a(b^3 + c^3) + abc(b + c) + 2bc(a^2 + bc) \\ Q(a, b) &= a^2 + b^2 - ab \\ Q(a, c) &= a^2 + c^2 - ac \\ D(a) &= a^2 + bc \\ D(b) &= b^2 + ac \\ D(c) &= c^2 + ab \\ N(b) &= b^3 - a^2c \\ N(c) &= c^3 - a^2b \end{aligned}$$

et il suffit de prendre alors comme paramètre $u = 1$ dans chacune des briques de taille 2 pour compléter la description matricielle de cette représentation.

3.5 Sur les représentations de H_{32}

On peut entreprendre la même étude pour l'algèbre de Hecke de G_{32} . La difficulté vient essentiellement ici de la taille de ce groupe (155520 éléments), et plus encore de celle de ses représentations. Enfin, la méthode utilisée précédemment ne s'applique pas à l'une des (classes de) représentations de ce groupe : un calcul élémentaire à l'aide du module CHEVIE de GAP 3 montre que la restriction à G_{25} des représentations irréductibles de degré 80 de G_{32} présente des multiplicités. D'autre part, la finitude de la dimension de cette algèbre de Hecke cyclotomique, dont dépend l'isomorphisme de Tits, reste à notre connaissance conjecturale.

Déduite d'une table, calculée par le module CHEVIE de GAP 3, des restrictions des caractères de G_{32} à G_{25} , nous indiquons ici les restrictions à \hat{H}_{25} des représentations de \hat{H}_{32} , sous la forme d'un tableau. La colonne "nombre" indique le cardinal de l'orbite de ces représentations pour l'action de \mathfrak{S}_3 par permutation de a , b et c . Les représentations de degré 4, 5 et 6 se

déduisent directement des représentations de l'algèbre de Hecke de type A sur cinq lettres. Ce tableau permet de déterminer les diagrammes de Bratteli correspondant aux représentations.

Degré	Nombre	Restriction
1	3	S_a
4	6	
5	6	
6	3	
10	6	$S_a + \overline{U}_{a,b} + \overline{V}_{a,b,c}$
15	3	$\overline{V} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{c,b,a}$
	3	$S_a + \overline{U}_{a,b} + \overline{U}_{a,c} + \overline{W}_a$
20	3	$\overline{T}_{a,b} + \overline{U}_{a,b} + \overline{U}_{b,a} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c}$
	3	$\overline{W}_a + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{b,a,c}$
	6	$S_a + \overline{T}_{a,b} + \overline{U}_{a,b} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{W}_a$
	6	$\overline{W}_a + \overline{U}_{a,b} + \overline{U}_{b,a} + \overline{V}_{b,a,c}$
24	3	$S_a + \overline{V} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{a,c,b} + \overline{W}_a$
30	3	$\overline{T}_{a,b} + \overline{T}_{a,c} + \overline{W}_a + X + X'$
	6	$S_a + \overline{U}_{a,b} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c} + \overline{V}_{a,c,b} + \overline{W}_a$
36	3	$S_a + \overline{U}_{a,b} + \overline{U}_{a,c} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{a,c,b} + X$
	3	$S_a + \overline{U}_{a,b} + \overline{U}_{a,c} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{a,c,b} + X'$
40	6	$\overline{T}_{a,b} + \overline{U}_{a,b} + \overline{U}_{a,c} + \overline{V}_{a,b,c}$ $+ \overline{W}_a + X + X'$
45	3	$\overline{T}_{b,c} + \overline{U}_{b,c} + \overline{U}_{c,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{c,b,a}$ $+ \overline{W}_b + \overline{W}_c + X$
	3	$\overline{T}_{b,c} + \overline{U}_{b,c} + \overline{U}_{c,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{c,b,a}$ $+ \overline{W}_b + \overline{W}_c + X'$
60	3	$\overline{T}_{b,c} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{c,b,a} + \overline{V}_{a,c,b}$ $+ \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$
	6	$\overline{T}_{a,b} + \overline{V} + \overline{U}_{a,b} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c} + \overline{V}_{a,c,b}$ $+ \overline{W}_a + \overline{W}_b + X + X'$
64	3	$\overline{U}_{c,b} + \overline{U}_{b,c} + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{b,a,c}$ $+ \overline{V}_{c,b,a} + \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$
	3	$\overline{U}_{c,b} + \overline{U}_{b,c} + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{b,a,c}$ $+ \overline{V}_{c,b,a} + \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$
80	3	$\overline{U}_{a,c} + \overline{U}_{a,b} + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c}$ $+ \overline{V}_{a,c,b} + 2\overline{W}_a + \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$
81	1	$\overline{V} + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c}$ $+ \overline{V}_{c,b,a} + \overline{V}_{a,c,b} + \overline{W}_a + \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$
	1	$\overline{V} + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c}$ $+ \overline{V}_{c,b,a} + \overline{V}_{a,c,b} + \overline{W}_a + \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$
	1	$\overline{V} + \overline{V}_{c,a,b} + \overline{V}_{b,c,a} + \overline{V}_{a,b,c} + \overline{V}_{b,a,c}$ $+ \overline{V}_{c,b,a} + \overline{V}_{a,c,b} + \overline{W}_a + \overline{W}_b + \overline{W}_c + X + X'$

L'algorithme utilisé précédemment s'applique alors, plus ou moins facilement suivant la taille des briques et la complexité du diagramme. Parmi les cas simples, signalons les représentations de degré 10 et 15, ainsi que le 3^e type de représentations de degré 20, dont les

briques de niveau maximal sont de taille au plus 3. Nous le ferons explicitement au chapitre suivant pour les représentations de degré 10, qui sont des cas particuliers de la représentation de Krammer.

Remarquons d'autre part que cet algorithme ne peut s'appliquer à un cas, celui des représentations de degré 80, dont la restriction à H_{25} comporte une représentation de type \overline{W}_α avec multiplicité 2. Cela suggère que la chaîne utilisée ici n'est peut-être pas la bonne pour étudier une telle représentation, et qu'il faut introduire une algèbre intermédiaire entre H_{25} et H_{32} , probablement associée à un sous-groupe de G_{32} contenant G_{25} . Remarquons en particulier qu'il existe d'après GAP 3 un unique sous-groupe G de G_{32} , engendré par G_{25} et

$$\sigma_4 \sigma_3^2 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_4,$$

qui contient G_{25} et tel que $[G : G_{25}] = 2$.

Chapitre 4

Représentations sporadiques

Le but de ce chapitre est de déterminer explicitement les représentations sporadiques que nous avons fait apparaître dans le premier chapitre de cette partie. Nous rappelons que ces représentations de \mathfrak{B}_n ont comme propriété remarquable de rester irréductibles après restriction à \mathfrak{B}_{n-1} . Comme, de plus, elles s'appuient sur le module de Specht associé à la partition $[n-2, 1, 1]$, d'après la règle de Young, leur restriction à \mathfrak{B}_{n-1} s'appuiera sur $[n-2, 1] + [n-3, 1, 1]$.

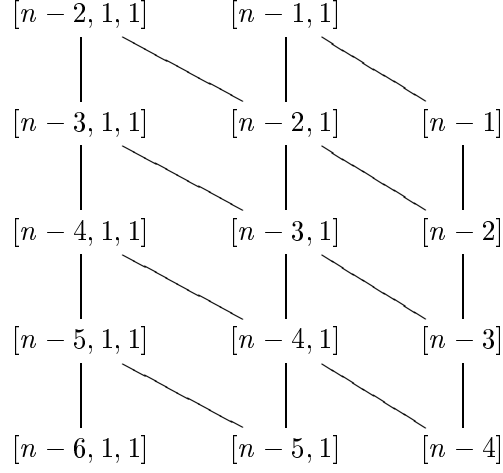
La première section étudie cette situation, et classe plus précisément les représentations irréductibles de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur $[n-1, 1] + [n-2, 1, 1]$. On détermine de plus le diagramme de Bratteli de ces représentations, lesquelles sont en fait de deux types : l'un, $\mathcal{R}_1^{(n)}$, sera étudié plus tard, et correspond à une représentation du groupe symétrique étendu. L'autre, noté $\mathcal{R}_2^{(n)}$, est alors celui qui nous intéresse ici, et l'on a donc, à la fin de cette section, déterminé le diagramme de Bratteli de cette représentation sporadique de \mathfrak{B}_n .

Nous appliquons l'algorithme exposé en I.2.7.2 dans les sections suivantes, d'abord à la représentation $\mathcal{R}_2^{(n)}$ en section 2, puis aux représentations sporadiques en section 3 : on a ainsi déterminé la matrice de la représentation de B_n qui correspond à la représentation sporadique apparue au début de cette partie. Identifiant la représentation de B_n associée à $\mathcal{R}_2^{(n)}$ à la représentation étudiée par Krammer [52] [53] et Bigelow [24], nous concluons ce chapitre par des commentaires sur les spécialisations de cette représentation.

4.1 La variété $\mathcal{V}_s([n-1, 1] \oplus [n-2, 1, 1])$

Nous allons étudier dans cette section les représentations de \mathfrak{B}_n qui s'appuient sur $M = [n-2, 1, 1] + [n-1, 1]$. On se trouve alors exactement dans le même cadre que lors de l'étude de la représentation naturelle : on considère un élément $t \in \text{End}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2} M$ générique, et on résout les équations $L(t) = 0$ et $R(t) = 0$. Ici, les équations sont plus difficiles à classer, en raison d'un nombre important d'indécomposables. Nous nous contenterons donc de décrire les solutions irréductibles, ce qui se traduit sur t par une condition ouverte, notée symboliquement $S(t) \neq 0$.

Le houpplier de niveau 3 correspond au graphe



Ainsi, le houpplier de niveau 4 est pour $n \geq 7$ de dimension 16, celui de niveau 3 de dimension 11, celui de niveau 2 de dimension 7.

4.1.1 Classification

La forme générale d'un t commutant à $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$, écrite sur le houpplier de niveau 2, est alors

$$t = \begin{pmatrix}
 a_1 & \frac{n}{2}(b_1 - a_1) & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{n-2}{2}(b_1 - a_1) & b_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1 & -d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_2 & \frac{n-2}{2}e_2 & e_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & d_2 & b_2 & \frac{n}{2}(c_2 - b_2) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & d_2 & \frac{n-2}{2}(c_2 - b_2) & c_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f
 \end{pmatrix}$$

sur la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_7)$ avec

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= [n-2] \rightarrow [n-1] \rightarrow [n-1, 1] \\
 \epsilon_2 &= [n-2] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\
 \epsilon_3 &= [n-2] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-2, 1, 1] \\
 \epsilon_4 &= [n-3, 1] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\
 \epsilon_5 &= [n-3, 1] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-2, 1, 1] \\
 \epsilon_6 &= [n-3, 1] \rightarrow [n-3, 1, 1] \rightarrow [n-2, 1, 1] \\
 \epsilon_7 &= [n-4, 1, 1] \rightarrow [n-3, 1, 1] \rightarrow [n-2, 1, 1].
 \end{aligned}$$

Si ψ désigne une projection sur ce houpplier, on a

$$\begin{aligned}
 \psi([n-1, 1]) &= \langle \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4 \rangle \\
 \psi([n-2, 1, 1]) &= \langle \epsilon_3, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7 \rangle.
 \end{aligned}$$

$S(t) \neq 0$ signifie donc

$$(d_1 \neq 0 \text{ ou } d_2 \neq 0) \text{ et } (e_1 \neq 0 \text{ ou } e_2 \neq 0).$$

D'autre part, toutes ces équations $L(t)$, $R(t)$ et $S(t)$ sont stables par les éléments inversibles de

$$\text{End}_{\mathfrak{S}_n} M \simeq \mathbb{C}^2.$$

On en déduit une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ sur l'espace des t envisagés. Les homothéties agissant trivialement, il suffit de considérer une action de \mathbb{C}^* , où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est identifié à

$$(1, \lambda) \in (\mathbb{C}^*)^2 \subset \text{End}_{\mathfrak{S}_n} M = \text{End}_{\mathfrak{S}_n}([n-1, 1]) \oplus \text{End}_{\mathfrak{S}_n}([n-2, 1, 1]).$$

Sur le houpplier de niveau 2, cette action de λ sur l'espace des t envisagés s'écrit

$$\lambda \bullet t = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot \lambda^{-1} & \cdot \lambda^{-1} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \lambda & \cdot \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \lambda^{-1} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \lambda^{-1} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

Enfin, ces équations sont comme toujours stables par translation (on supposera $f = 0$) et par homothétie.

En utilisant les remarques précédentes, on résout les équations L et R , sur le houpplier de niveau 4, par la technique des bases de Gröbner. La vérification de la condition $S(t) \neq 0$ permet d'isoler les représentations irréductibles, qui sont alors de deux types.

La représentation \mathcal{R}_1

$$\begin{pmatrix} \frac{x+y(n-2)}{2} & \frac{y-x}{n-1} & \frac{y-x}{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(n-2)(y-x)}{n(n-1)} & \frac{x(n-2)+y(n^2-2n+2)}{n(n-1)} & \frac{(x-y)(n-2)}{n(n-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(y-x)(n-2)}{n} & \frac{(x-y)(n-2)}{n} & \frac{x(n-2)+2y}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2y}{n} & \frac{y(n-2)}{n(n-1)} & \frac{y}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y(n-2)}{n} & \frac{(n^2-2n+2)y}{n(n-1)} & \frac{-y}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y(n-2)}{n} & \frac{-(n-2)y}{n(n-1)} & \frac{(n-2)y}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette représentation est irréductible dès que $(x, y) \neq (0, 0)$. Le spectre de t est alors

$$(x, y, y, y, y, 0).$$

La représentation \mathcal{R}_2

$$\begin{pmatrix} \frac{x+y(n-2)}{n-1} & \frac{-x-y(n-2)}{n-1} & \frac{2x+y(n-4)}{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(n-2)(x+(n-2)y)}{n(n-1)} & \frac{(n-2)(x+(n-2)y)}{n(n-1)} & \frac{(2x+y(n-4))(n-2)}{n(n-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(x-2y)(n-2)}{2n} & \frac{(2y-x)(n-2)}{2n} & \frac{x(n-2)-y(n-4)}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{yn}{n-1} & \frac{-yn}{2(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(n-2)y}{2(n-1)} & \frac{(n-2)y}{2(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On ne considèrera cette représentation que si $x \neq y$ et $2x + y(n - 4) \neq 0$, c'est-à-dire aux valeurs de x et de y pour lesquelles elle est irréductible. Le spectre de t est $(x, y, y, 0, 0, 0, 0)$ et s_{n-1} est un polynôme P en t qui vérifie

$$\begin{aligned} P(x) &= -1 \\ P(y) &= -1 \\ P(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ces deux représentations (et leurs translatés) ne coïncident alors que pour $y = 0$; plus précisément,

$$\tau_{f_1} \mathcal{R}_1(x_1, y_1) \simeq \tau_{f_2} \mathcal{R}_2(x_2, y_2) \iff f_1 = f_2 \text{ et } y_1 = y_2 = 0.$$

Dans ce cas, on peut mettre t sous la forme

$$x \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(n-2)}{n(n-1)} & \frac{n-2}{n(n-1)} & \frac{n-2}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(n-2)}{n(n-1)} & \frac{n-2}{n(n-1)} & \frac{n-2}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le spectre de t est alors $(x, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

4.1.2 Restrictions

On choisit comme précédemment une base du houpplier de niveau 3, en lisant le graphe de bas en haut et de la droite vers la gauche :

$$\begin{aligned} e_1 &= [n-3] \rightarrow [n-2] \rightarrow [n-1] \rightarrow [n-1, 1] \\ e_2 &= [n-3] \rightarrow [n-2] \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow [n-1, 1] \\ e_3 &= [n-3] \rightarrow n-2 \rightarrow [n-2, 1] \rightarrow n-2, 1, 1 \\ &\dots \\ e_{10} &= [n-4, 1] \rightarrow [n-4, 1, 1] \rightarrow [n-3, 1, 1] \rightarrow [n-2, 1, 1] \\ e_{11} &= [n-5, 1, 1] \rightarrow [n-4, 1, 1] \rightarrow [n-3, 1, 1] \rightarrow [n-2, 1, 1]. \end{aligned}$$

Si l'on note ψ une projection sur ce houpplier, l'image des composantes isotypiques pour l'action de \mathfrak{S}_{n-1} est donnée par

$$\begin{aligned} \psi([n-1]) &= \langle e_1 \rangle \\ \psi([n-3, 1, 1]) &= \langle e_6, e_9, e_{10}, e_{11} \rangle \\ \psi(2[n-2, 1]) &= \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_7, e_8 \rangle. \end{aligned}$$

Restriction de \mathcal{R}_1

On ne considère ici que le cas où $y \neq 0$, le cas $y = 0$ étant commun à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Dans la base des chemins, dont on vient de préciser l'ordre, du houpplier de niveau 3, on sait exprimer

la matrice de $t_{n-2, n-1}$. De cette expression explicite, on déduit que pour $n > 3$ aucune des composantes isotypiques de \mathfrak{S}_{n-1} n'est stable par $t_{n-2, n-1}$.

On cherche alors à décrire le commutant de \mathfrak{B}_{n-1} sur ce houpplier. Comme il est inclus dans le commutant de \mathfrak{S}_{n-1} , chaque élément s'écrit par bloc

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

où a, b sont des scalaires et M une matrice de taille 2.

La relation de commutation avec $t_{n-2, n-1}$ se résout aisément, ce qui permet d'obtenir une base dans laquelle ces éléments se diagonalisent simultanément. Il y a ainsi deux espaces propres, de dimension 4 et 7, qui correspondent à deux sous-représentations de \mathfrak{B}_{n-1} dont les restrictions à \mathfrak{S}_{n-1} sont $[n-1] + [n-2, 1]$ et $[n-2, 1] + [n-3, 1, 1]$. Comme l'on a déjà étudié les représentations de \mathfrak{B}_{n-1} qui s'appuient sur ces représentations de \mathfrak{S}_{n-1} , en écrivant explicitement la matrice de $t_{n-1, n-2}$ dans cette base, on reconnaît les matrices obtenues précédemment, et on obtient

Lemme 10. *Si $y \neq 0$, et $n \geq 6$,*

$$\text{Res}_{\mathfrak{B}_{n-1}} \mathcal{R}_1^{(n)}(x, y) = \mathcal{R}_1^{(n-1)}(x, y) + \mathcal{L}_{n-1}(y).$$

D'autre part, sur ce même houpplier de niveau 3, on remarque que $[t_{n-2, n-1}, t_{n-1, n}] = 0$: la représentation de B_n que l'on obtient par intégration se factorise par le groupe symétrique étendu. Nous reportons son étude au chapitre III.1.

Restriction de \mathcal{R}_2

On procède exactement de la même façon que précédemment. Cette fois, l'élément e_1 est stable par $t_{n-2, n-1}$, et le commutant se diagonalise suivant trois espaces propres, de dimensions 1, 3 et 7. En identifiant les blocs de la matrice de $t_{n-2, n-1}$ sur cette base à l'aide des classifications précédentes, on obtient facilement

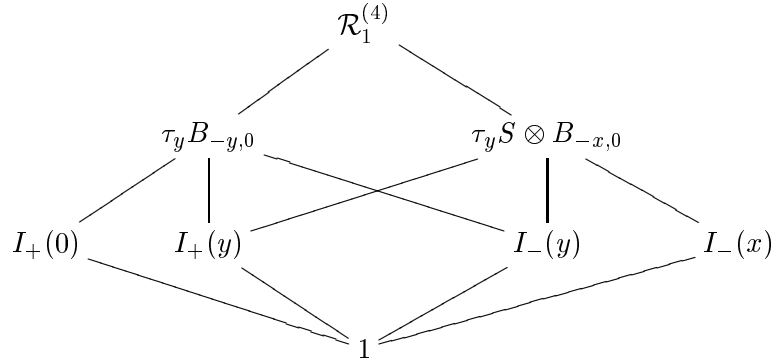
Lemme 11. *Pour $n \geq 6$,*

$$\text{Res}_{\mathfrak{B}_{n-1}} \mathcal{R}_2^{(n)}(x, y) = I_+(0) + [n-2, 1]_{0, y} + \mathcal{R}_2^{(n-1)}(x, y).$$

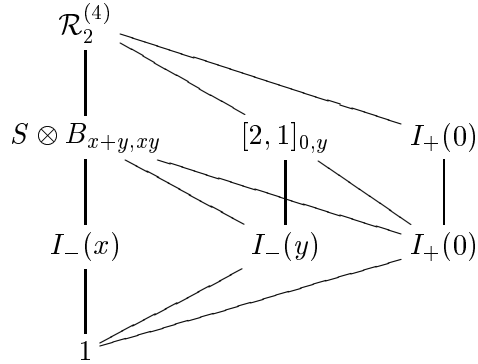
Restrictions pour n petit

La méthode générale s'applique telle quelle pour tout n dès que le module palier de niveau 3 est de dimension 11, c'est-à-dire pour $n \geq 6$. Si $n < 6$, on obtient que la conclusion du lemme 10 est vraie pour $n > 4$, et que celle du lemme 11 est vraie pour $n > 3$. L'étude de ces petits cas permet d'obtenir les diagrammes de Bratteli suivants :

pour \mathcal{R}_1 , $y \neq 0$:



pour \mathcal{R}_2 :



La symétrie du diagramme de $\mathcal{R}_1^{(4)}$ reflète l'isomorphisme

$$\mathcal{R}_1^{(4)}(x, y) \otimes S \simeq \tau_x \mathcal{R}_1^{(4)}(-x, y - x).$$

Dans le cas où $n = 4$,

$$[n - 2, 1, 1] + [n - 1, 1] = [2, 1, 1] + [3, 1]$$

reste en effet inchangé après torsion par la signature.

Représentations sporadiques

Cette étude nous permet maintenant de compléter celle des représentations “sporadiques” du chapitre 1. On note $Spor^{(n)}(\alpha, \beta)$ la représentation sporadique étudiée en **II.1.6.2**.

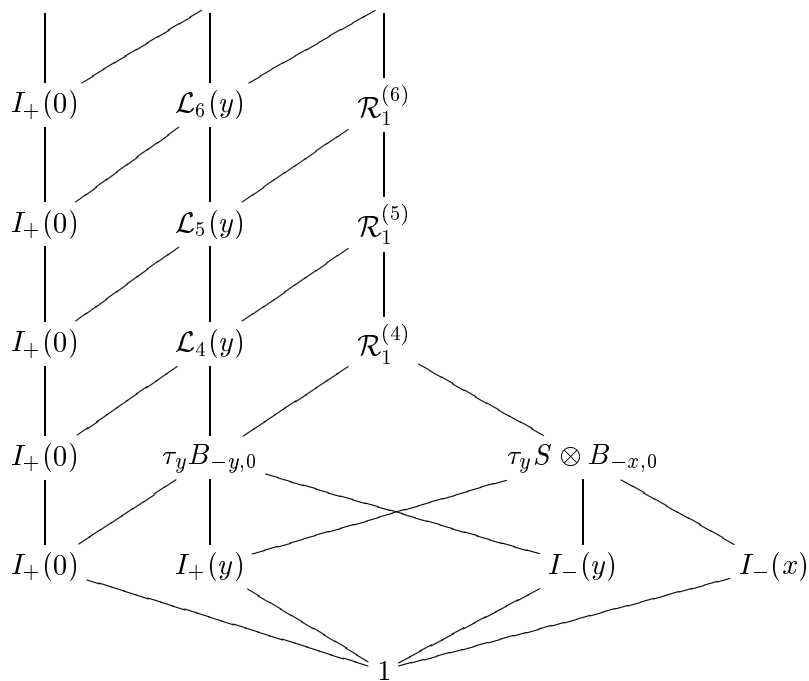
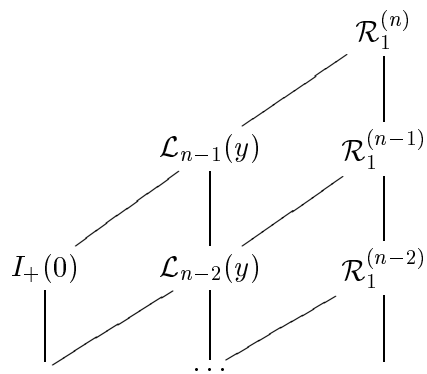
On trouve comme précédemment

$$Res_{\mathfrak{B}_{n-1}} Spor^{(n)}(\alpha, \beta) = \tau_\alpha \mathcal{R}_2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2}(n - 3), \beta - \alpha \right),$$

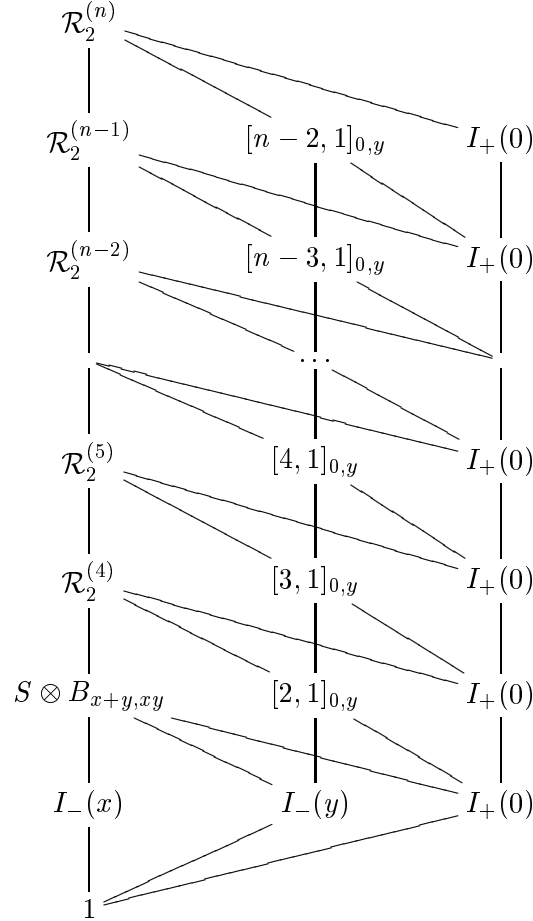
ce qui confirme et permet de compléter les résultats obtenus au chapitre 1.

4.1.3 Diagrammes de Bratteli

Les diagrammes de Bratteli s'écrivent alors :
 pour $\mathcal{R}_1^{(n)}$:



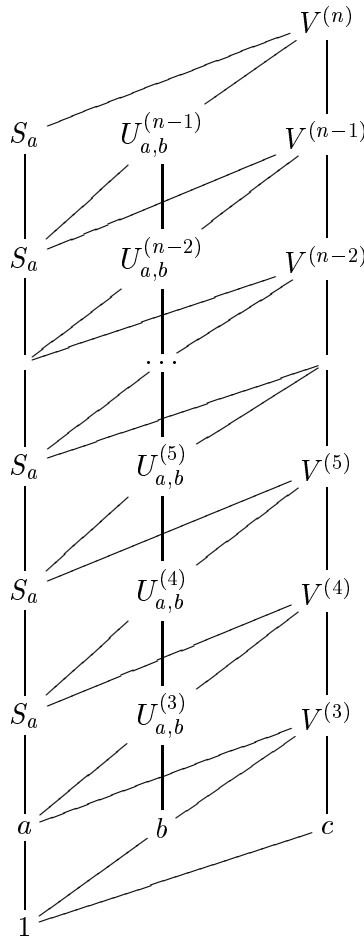
pour $\mathcal{R}_2^{(n)}$:



4.2 Intégration de $\mathcal{R}_2^{(n)}(x, y)$

Le diagramme d'une brique étant donné, on numérotera les chemins de la gauche vers la droite. Un scalaire a et un entier n étant donnés, on notera S_a la représentation de dimension 1 de B_n sur laquelle les générateurs d'Artin agissent par a .

Pour construire la représentation $\int_h \mathcal{R}_2^{(n)}(x, y)$, qui dépend de deux paramètres X et Y avec $X = e^{hx}$, $Y = e^{hy}$, il faut d'abord décrire la représentation de Burau. D'autre part, on va utiliser le paramètre d'homogénéité : on cherchera donc une représentation $V^{(n)} = V_{\{a,b,c\}}^{(n)}$ correspondant au diagramme de Bratteli, noté \mathbf{G}_n ,



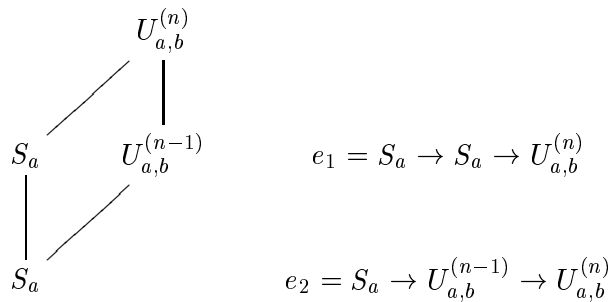
où

$$\int_h \tau_f \mathcal{R}_2^{(n)}(x, y) = V_{a,b,c}^{(n)}$$

$$\int_h [n-1, 1]_{a,b} = U_{a,b}^{(n)}$$

avec $a = e^{hf}$, $b = -e^{h(f+y)}$, $c = -e^{h(f+x)}$.

La représentation de Burau $U_{a,b}^{(n)}$ est isomorphe à une représentation irréductible de l'algèbre de Hecke de type A , donc on sait écrire l'action des générateurs d'Artin sur ses briques (cf. Hoefsmit [45]) : sur



on a

$$\sigma_{n-1} = \frac{1}{b^{n-1} - (-1)^{n-1} a^{n-1}} \begin{pmatrix} b^{n-1}(a+b) & (-1)^n a^n - b^n \\ ab(b^{n-2} - (-1)^n a^{n-2}) & (-1)^n a^{n-1}(a+b) \end{pmatrix}$$

De plus, comme cette représentation est une déformation d'une représentation du groupe symétrique, on peut déduire des déterminants une formule exacte pour γ_n . Sur $U^{(n)}$,

$$\gamma_n = (-1)^n a^{n(n-2)} b^n.$$

A partir de la méthode exposée en I.2.7, on obtient que la valeur de γ_n sur $V^{(n)}$ vérifie

$$\gamma_n^{\frac{n(n-1)}{2}} = \det(\sigma_1)^{n(n-1)}$$

donc il existe une racine ω_n de 1 telle que

$$\gamma_n = \omega_n \det(\sigma_1)^2 = \omega_n \det(\sigma_1)^2.$$

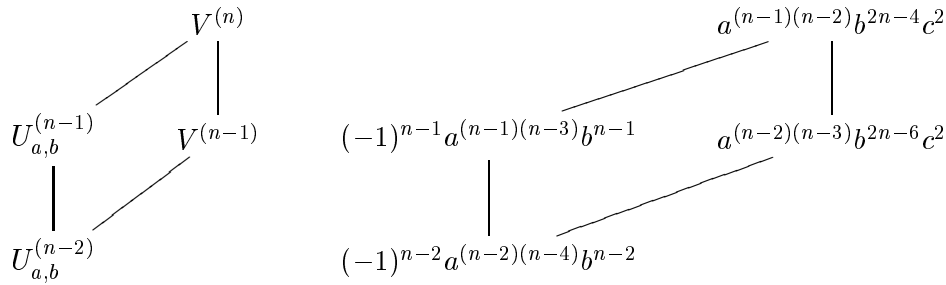
Comme $V^{(n)}$ provient de l'intégration d'une représentation de \mathfrak{B}_n , on a

$$\begin{aligned} \gamma_n &\equiv 1 \pmod{h} \\ \sigma_1^2 &\equiv 1 \pmod{h} \end{aligned}$$

donc ω_n vaut 1, et

$$\gamma_n = a^{(n-1)(n-2)} b^{2n-4} c^2.$$

On peut alors déterminer l'action de σ_{n-1} sur la brique

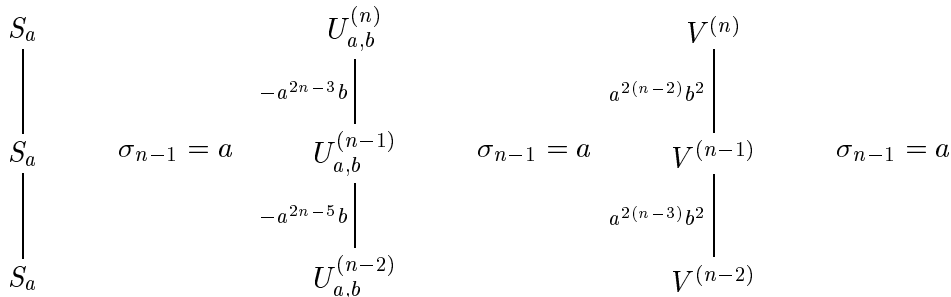


Sur cette brique de taille 2, $(a^{n-3} + (-1)^n b^{n-5} c^2) \sigma_{n-1}$ vaut donc

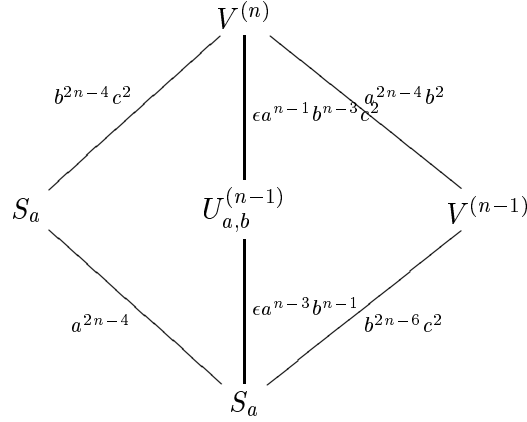
$$\begin{pmatrix} (a+b)(-1)^n b^{n-5} c^2 & -a^{2n-5} b + (-1)^n c^2 (b^{n-5} a^{n-1} + b^{n-3} a^{n-3}) - ab^{2n-9} c^4 \\ 1 & a^{n-3} (a+b) \end{pmatrix}$$

à conjugaison par l'algèbre diagonale de la brique près : pour prendre en compte cette ambiguïté, on multiplie le coefficient "1" de cette matrice par un paramètre w_n^{-1} , et par w_n son coefficient symétrique.

Pour ce qui concerne les briques de taille 1, l'action de σ_{n-1} se déduit immédiatement des valeurs de γ_n :



Il reste enfin à déterminer l'action de σ_{n-1} sur les briques de taille 3, qui sont de la forme



avec $\epsilon = (-1)^{(n-1)}$. Tous les éléments de B_n sont maintenant identifiés à des endomorphismes de cette brique. De

$$\left(\frac{\sigma_{n-1}\delta_{n-1}}{a^{n-2}b^{n-2}c} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\det(\sigma_{n-1}\delta_{n-1}) = \det(\sigma_{n-1})\det(\delta_{n-1}) = (a^{n-2}b^{n-2}c)^3$$

on déduit que $\sigma_{n-1}\delta_{n-1}/(a^{n-2}b^{n-2}c)$ est conjugué à la matrice diagonale de coefficients $(1, -1, 1)$. Cette matrice, donc σ_{n-1} , se trouve alors génériquement dans une variété de dimension quatre. On peut se restreindre à l'ouvert défini par la condition d'irréductibilité, et paramétrer les σ_{n-1} possibles par au plus quatre paramètres. On peut en effet écrire

$$\frac{\sigma_{n-1}\delta_{n-1}}{a^{n-2}b^{n-2}c} = P \bullet \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $P \bullet D$ désigne $PD^{-1}P$, pour P appartenant à une collection de matrices qui forme un système complet de représentants de $GL_3(k)/GL_2(k) \times GL_1(k)$, où $k = \mathbb{C}(a, b, c)$, c'est-à-dire des matrices P de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & v' \\ u & u' & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 \\ u & u' & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ u & u' & 0 \end{pmatrix}$$

ou de la forme

$$\begin{pmatrix} E_{ij} & v \\ u & u' & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_{ij} & v \\ u & u' & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_{ij} & 1 \\ u & u' & 0 \end{pmatrix}$$

avec E_{ij} une des quatre matrices élémentaires de taille 2, et il suffit de reporter ces paramètres dans les équations concernées.

Comme le spectre de σ_{n-1} sur la brique est (a, b, c) , sa matrice ne dépend alors plus que de deux paramètres u_n et v_n . Les trois paramètres u_n, v_n et w_n déterminent l'action de σ_{n-1}

sur le houpplier de niveau 2, et il reste à les reporter dans l'équation de tresses sur le houpplier de niveau 3. On impose de plus que la forme obtenue pour $n = 3$ soit conforme au modèle matriciel obtenu au chapitre II.3, concernant la représentation de degré 3 de l'algèbre de Hecke de G_4 . On peut alors prendre pour coefficients $w_4 = \frac{ac+b^2}{bc+a^2}$ et $w_n = 1$ pour $n \geq 5$. La forme de σ_{n-1} obtenue pour $n > 4$ par cette méthode est réellement compliquée, au sens où les factorisations éventuelles des coefficients n'apparaissent pas évidentes.

Comme, d'après Zinno [77], cette représentation a même diagramme de Bratteli que celle étudiée par Kramer [52], on est invité à poser $a = 1$, $b = -q$ et $c = tq^2$ (nous renvoyons à Kramer [52] [53] et Bigelow [24] pour la signification géométrique de tels paramètres). Il est alors facile sous cette forme de factoriser, pour $n \geq 4$, l'action de σ_{n-1} sur la brique de taille 3, qui s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{t(qt-1)q^{2n-2}(q-1)}{(q^{n-1}t-1)(q^{n-1}-1)} & \frac{(q^n t-1)q^{n-1}t(q^{n-2}-1)}{(q^{n-1}t-1)(q^{n-1}-1)} & \frac{(q^{n-2}-1)(q^n t-1)(q^{n-2}t-1)(q^n t^2-1)q}{(q^{n-1}t^2-1)(q^{n-1}t-1)^2(q^{n-3}-1)} \\ \frac{t(tq-1)(t+1)q^n(q-1)}{(q^{n-1}t^2-1)(q^{n-1}-1)} & \frac{tq(q^n(q^{n-2}-1)t^2-q^{n-2}(q-1)^2t+1-q^{n-2})}{(q^{n-1}t^2-1)(q^{n-1}-1)} & \frac{(q^{n-2}t-1)(q^n t^2-1)(1-tq)(t+1)q(q-1)}{(q^{n-1}t-1)(q^{n-1}t^2-1)^2(q^{n-3}-1)} \\ \frac{q(q^{n-3}-1)}{q^{n-1}-1} & \frac{-(q^{n-3}-1)}{q^{n-1}-1} & \frac{(tq-1)(q-1)}{(q^{n-1}t^2-1)(q^{n-1}t-1)} \end{array} \right)$$

et, pour $n = 3$, la matrice obtenue en II.3 s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{q^4 t(tq-1)}{(q+1)(tq^2-1)} & \frac{-tq^4(t+1)}{(q+1)(tq^2-1)} & \frac{q^2(t^2q^3-1)}{(q+1)(tq^2-1)} \\ \frac{-tq(q^3t-1)}{(q+1)(tq+1)} & \frac{(1+tq^2)tq}{(q+1)(1+tq)} & \frac{t^2q^3-1}{(q+1)(1+tq)} \\ \frac{(q^3t-1)}{(tq^2-1)(1+tq)} & \frac{q(t+1)}{(tq^2-1)(1+tq)} & \frac{q-1}{(tq^2-1)(1+tq)} \end{array} \right)$$

dans la base

$$\begin{aligned} e_1 &= S_a \rightarrow S_a \rightarrow V^{(n)} \\ e_2 &= S_a \rightarrow U_{a,b}^{(n-1)} \rightarrow V^{(n)} \\ e_3 &= S_a \rightarrow V^{(n-1)} \rightarrow V^{(n)}. \end{aligned}$$

Deux diagrammes de Bratteli sont dits isomorphes s'ils sont isomorphes en tant que graphes nivelés, c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme de graphes qui préserve la fonction niveau. Pour $n \geq 3$, comme les automorphismes de \mathbf{G}_n sont triviaux, tout diagramme de Bratteli qui est isomorphe à \mathbf{G}_n l'est de façon unique, et on peut considérer tout coloriage de ce diagramme comme un coloriage de \mathbf{G}_n .

Si l'on considère $V^{(n)}$ comme une représentation de $\mathbb{C}(a, b, c)B_n$, on peut alors énoncer la proposition suivante, que l'on déduit immédiatement des calculs précédents

Proposition 24. *Pour $n \geq 3$, soit $R^{(n)}$ une représentation de $\mathbb{C}(a, b, c)B_n$, semi-simple par rapport à la filtration naturelle de B_n , dont le diagramme de Bratteli, isomorphe à \mathbf{G}_n , est colorié par l'action de B_n . Si le coloriage de \mathbf{G}_n associé aux représentations $R^{(n)}$ et $V^{(n)}$ de B_n et les spectres de σ_1 associés à ces deux actions coïncident, alors $R^{(n)}$ est isomorphe à $V^{(n)}$.*

On remarque que, pour $n \in \{3, 4\}$, cette proposition découle de la classification des représentations des algèbres de Hecke cyclotomiques associées aux groupes de réflexions complexes G_4 et G_{25} . Inversement, à l'appui de la conjecture de Broué-Malle [28] (cf. II.3.5), on déduit de la proposition précédente, avec les notations de II.3,

Corollaire 1. *Pour toute représentation irréductible R de degré 10 de G_{32} , il existe une unique représentation irréductible de H_{32} , sur laquelle le centre de H_{32} agit de façon scalaire, et qui se spécialise en R pour la spécialisation $a = 1$, $b = j$, $c = j^2$.*

Preuve — Les représentations de G_{32} de degré 10 ont pour diagramme de Bratteli \mathbf{G}_5 . Si l'on fixe une telle représentation, on peut supposer que le spectre de σ_1 est

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, j, j, j^2).$$

On considère donc une représentation M de H_{32} qui se spécialise pour $a = 1$, $b = j$ et $c = j^2$ en la représentation précédente, et on veut montrer que $M = V^{(n)}(a, b, c)$. Comme M est irréductible et que H_4 , H_{25} sont des algèbres semi-simples dont on a étudié les représentations, M est semi-simple par rapport à la filtration naturelle de H_{32} , et H_{32} colorie ainsi le diagramme de Bratteli de M , qui est égal à \mathbf{G}_5 d'après la classification des représentations irréductibles de G_{32} . D'après l'hypothèse faite sur le spectre, les coloriages de \mathbf{G}_5 associés aux représentations M et $V^{(5)}(a, b, c)$ de B_5 coïncident sur $\mathbf{G}_5^{(2)}$, donc sur $\mathbf{G}_5^{(4)}$ d'après l'étude de II.3. Les deux actions scalaires de γ_5 ne peuvent alors différer que, multiplicativement, par une racine de l'unité. On vérifie sur la table des caractères de G_{32} que cette racine de l'unité est 1, et on peut appliquer la proposition précédente pour conclure. cqfd.

Corollaire 2. *Si, pour $n \geq 3$, on note $K^{(n)}(q, t)$ la représentation de B_n étudiée par Krammer [52], on a*

$$K^{(n)}(q, t) \simeq V^{(n)}(1, -q, tq^2).$$

Preuve — On fixe $n \geq 3$. D'après Zinno [77], la représentation $K^{(n)}(q, t)$ de $\mathbb{Q}(q, t)B_n$ est semi-simple par rapport à la filtration naturelle et admet pour diagramme de Bratteli \mathbf{G}_n . Il reste alors à vérifier que le coloriage des sommets est le même que pour $V^{(n)}(1, -q, tq^2)$, d'après la proposition précédente et la possibilité, par homogénéité des relations qui définissent B_n , de ramener l'un des paramètres génériques à 1 (les valeurs 1, $-q$, tq^2 choisies correspondent en effet au spectre de σ_1 sur $K^{(n)}(q, t)$ d'après Krammer [52], et ceci avec les mêmes multiplicités que pour $V^{(n)}(1, -q, tq^2)$).

D'après la classification des représentations des algèbres de Hecke génériques de type A , il suffit de vérifier que les coloriages coïncident sur les sommets associés à $V^{(r)}$, pour $r \in [3, n]$. On sait alors que, sur le B_r -module associé,

$$\gamma_r = \omega_r \det(\sigma_1)^2,$$

avec ω_r une racine de l'unité. Comme, d'après la construction de Lawrence [55], $K^{(n)}(q, t)$ provient par intégration d'une représentation de \mathfrak{B}_n , on déduit du raisonnement analogue pour $V^{(n)}(a, b, c)$ que $\omega_r = 1$.

Si l'on fixe $r \in [3, n]$, on peut également déduire $\omega_r = 1$ de formules démontrées par Krammer. Il définit en effet une base v_{ij} de $K^{(r)}(q, t)$ pour $\{i, j\}$ une paire d'éléments de $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. En identifiant $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ et $\{1, \dots, r\} \subset \mathbb{Z}$, on a un ordre naturel sur $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ pour lequel, d'après le lemme 5.4 de [52], si $i < j$,

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \dots \sigma_{r-1})v_{ij} &= q^2 v_{i+1, j+1} & \text{si } j < r \\ (\sigma_1 \dots \sigma_{r-1})v_{ij} &= q^2 t v_{i+1, j+1} & \text{si } j = r. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que, pour tous i et j ,

$$(\sigma_1 \dots \sigma_{r-1})^r v_{ij} = t^2 q^{2r} v_{i, j}.$$

On a donc $\gamma_r = t^2 q^{2r}$ et

$$a^{(r-1)(r-2)} b^{2r-4} c^2 = 1 \times (-q)^{2r-4} \times (tq^2)^2 = q^{2r} t^2$$

soit $\omega_r = 1$.

D'une façon ou d'une autre, on peut maintenant appliquer la proposition précédente. cqfd.

4.3 Intégration des représentations sporadiques

On a vu dans la première partie que la restriction à B_n de la représentation sporadique $\int_h Spor^{(n+1)}(\alpha, \beta)$ était une spécialisation de $\int_h \mathcal{R}_2^{(n)}(x, y)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} Res_{B_n} \int_h Spor^{(n+1)}(\alpha, \beta) &= \int_h \tau_\alpha \mathcal{R}_2^{(n)}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}(n-3), \beta-\alpha\right) \\ &= V^{(n)}(e^{h\alpha}, -e^{h\beta}, -e^{h(\alpha+\frac{\alpha-\beta}{2}(n-3))}). \end{aligned}$$

A homothétie près, on peut supposer $\alpha = 0$. Alors, si l'on note $W^{(n+1)}(u) = \int_h Spor^{(n+1)}(0, \beta)$ avec $u = e^{\frac{h\beta}{2}}$, on déduit de ce qui précède

$$Res_{B_n} W^{(n+1)}(u) = V^{(n)}(1, -u^2, -u^{3-n}).$$

D'autre part, le houpier de niveau 2 de $W^{(n+1)}(u)$ s'écrit

$$\begin{array}{c} W^{(n+1)} \\ | \\ V^{(n)} \\ / \quad | \quad \backslash \\ S_1^{(n-1)} \quad U^{(n-1)} \quad V^{(n-1)} \end{array}$$

où $S_1^{(n)}$ est la représentation triviale $[n]_0 = I_+(0)$. Il n'y a donc que des briques de taille 1. Sur ce houpier, on obtient ainsi immédiatement que l'action de σ_n s'écrit

$$\begin{pmatrix} -u^{3-n} & 0 & 0 \\ 0 & -u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur la base

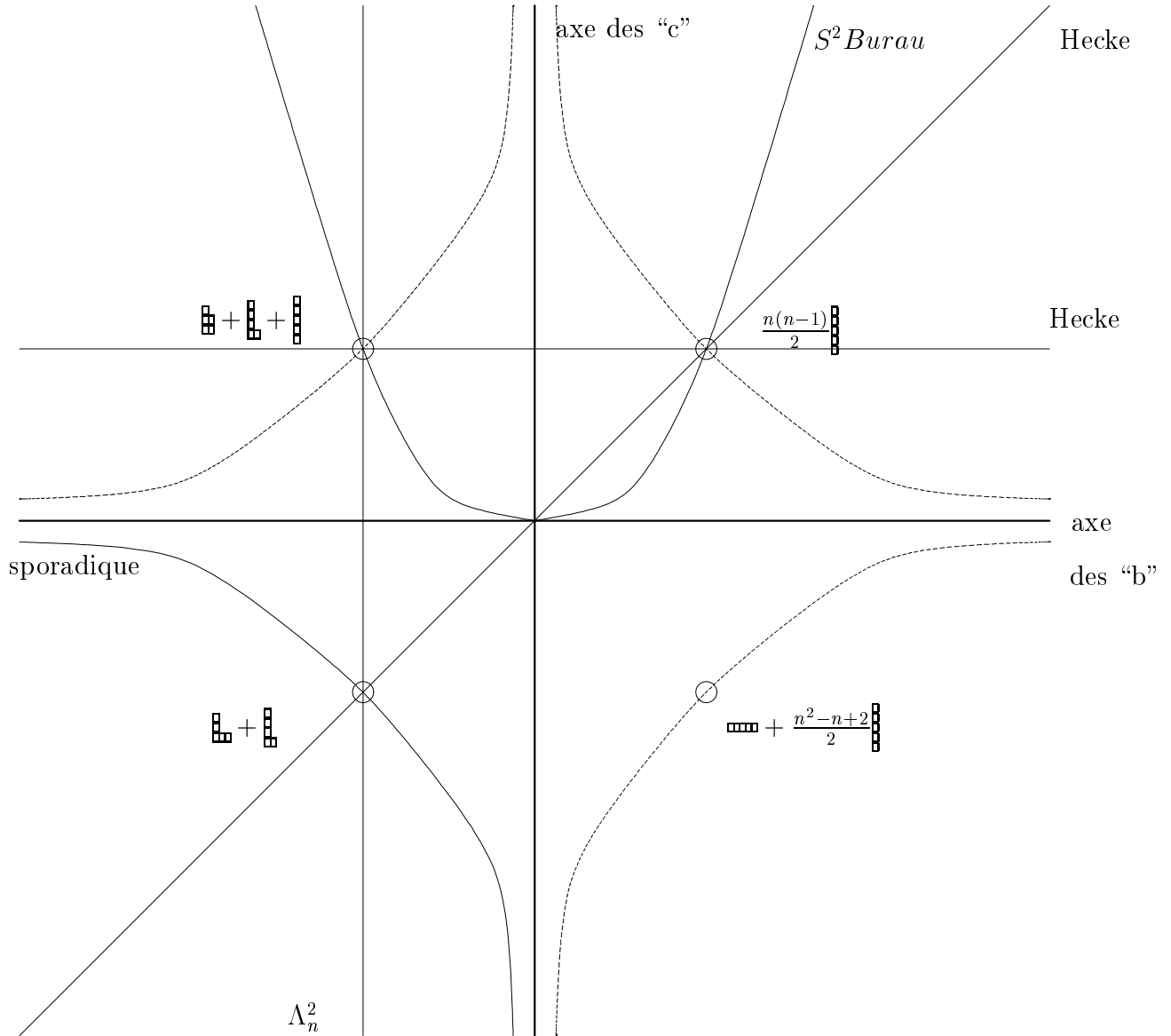
$$\begin{aligned} e_1 &= S_1^{(n-1)} \rightarrow V^{(n)} \rightarrow W^{(n+1)} \\ e_2 &= U^{(n-1)} \rightarrow V^{(n)} \rightarrow W^{(n+1)} \\ e_3 &= R_2^{(n-1)} \rightarrow V^{(n)} \rightarrow W^{(n+1)}. \end{aligned}$$

On a donc bien obtenu un *modèle explicite* pour la représentation sporadique de B_n , seule représentation du groupe de tresses d'une représentation de \mathfrak{B}_n (c'est-à-dire d'un système local pour l'équation KZ) dont la restriction à \mathfrak{S}_n est irréductible et qui ne se factorise pas par l'algèbre de Hecke de type A correspondante.

Pour préciser la place de cette représentation de B_{n+1} dans la variété des représentations, nous représentons

$$V^{(n)}(1, b, c) = V^{(n)}(1, -q, tq^2) = K^{(n)}(q, t)$$

avec $b = -q, c = tq^2$, par un point du plan de coordonnées (b, c) , pour b et c réels, dans la figure suivante.



Les points remarquables, pour $|b| = |c| = 1$, correspondent à des représentations de \mathfrak{S}_n . Si $(b, c) = (-1, -1)$, on obtient

$$Res_{\mathfrak{S}_n} \mathcal{R}_2^{(n)}(x, y) = [n - 2, 1, 1] + [n - 1, 1].$$

Pour $(b, c) = (1, 1)$, l'action de σ_1 est l'identité, donc on obtient une représentation triviale de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Si $(b, c) = (1, -1)$, il suffit de vérifier que l'on obtient $[1^n] + \frac{n^2-n-2}{2}[n]$

pour $n \leq 5$, d'après la formule de restriction de $V^{(n)}$ à B_{n-1} et la proposition 19 de I.3. Si $(b, c) = (-1, 1)$, il suffit également de vérifier que l'on obtient $[n-2, 2] + [n-1, 1] + [n]$ pour $n \leq 7$ d'après le lemme

Lemme 12. *Soit $n \geq 7$ et M une représentation de \mathfrak{S}_n . Si*

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M = \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} ([n-2, 2] + [n-1, 1] + [n])$$

alors $M \simeq [n-2, 2] + [n-1, 1] + [n]$.

Preuve — On a donc $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M = [n-3, 2] + 2[n-2, 1] + 2[n-1]$, et il existe une représentation irréductible λ de \mathfrak{S}_n qui s'injecte dans M , et telle que $[n-3, 2] \subset \lambda$. On en déduit

$$\lambda \in \{[n-2, 2], [n-3, 3], [n-3, 2, 1]\}.$$

Mais si $\lambda = [n-3, 3]$, comme $n \geq 7$, la représentation $[n-4, 3]$ de \mathfrak{S}_{n-1} s'injecterait dans $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M$, et, de la même façon, si $\lambda = [n-3, 2, 1]$, comme $n \geq 5$, on aurait $[n-3, 1, 1] \hookrightarrow \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M$. On en déduit que

$$\lambda = [n-2, 2] \hookrightarrow \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} M$$

et

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} (M - \lambda) = \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} ([n-1, 1] + [n]).$$

La conclusion découle alors de la proposition 19 de I.3.

cqfd.

Une autre façon d'identifier cette représentation de \mathfrak{S}_n consiste à utiliser, comme remarqué par Krammer (cf. [52] prop. 3.2) le fait que, si $(b, c) = (-q, q^2)$, $V^{(n)}$ est isomorphe au carré symétrique de la représentation de Burau, c'est-à-dire de $\int_h [n-1, 1]_{0,1}$, pour $q = e^h$. Ce carré symétrique correspond à la parabole de la figure. Pour $q = 1$, on obtient donc $S^2[n-1, 1]$. Mais il est classique (cf. James et Kerber [14]) que

$$\begin{aligned} [n-1, 1]^{\otimes 2} &= \left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} [n-1, 1] \right) - [n-1, 1] \\ &= \left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} [n-2, 1] \right) + \left(\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} [n-1] \right) - [n-1, 1] \\ &= [n-2, 1, 1] + [n-2, 2] + [n-1, 1] + [n] \end{aligned}$$

et que $\Lambda^2[n-1, 1] = [n-2, 1, 1]$, et l'on obtient donc bien que $V^{(n)}(1, -1, 1)$ est isomorphe à $S^2[n-1, 1] = [n-2, 2] + [n-1, 1] + [n]$.

Les restrictions à B_n des représentations sporadiques $W^{(n+1)}(u)$ sont de la forme

$$V^{(n)}(1, -u^2, -u^{3-n}),$$

et sont indiquées sur la figure par une hyperbole. Une seule branche de cette hyperbole apparaît pour tout $n \geq 4$. Les autres, indiquées en pointillés, n'apparaissent qu'en fonction de la congruence de n modulo 4.

Il est ainsi remarquable que la sous-variété des représentations de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de B_n qui correspond à $V^{(n)}$ permet de relier des représentations de \mathfrak{S}_n de façon non triviale. Les représentations des algèbres de Hecke permettent de relier un diagramme de Young à son transposé, ou encore toute représentation de \mathfrak{S}_n à la représentation triviale (les traces

réelles de ces chemins sont ici les droites $b = c$ et $c = 1$). La droite $b = -1$ permet, elle, de relier $[n - 2, 1, 1] + [n - 1, 1]$ à $[n - 2, 2] + [n - 1, 1] + [n]$. Il est encore remarquable que cette droite correspond en fait à des représentations du groupe symétrique étendu $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, plus précisément aux représentations $\Lambda_n^2(c, 1, 1)$ que nous définirons au chapitre prochain (III.1), ce que nous pourrons vérifier en comparant les formules du théorème 4 et celles données par Krammer [53]. Enfin, rappelons que Krammer prouve la fidélité de cette représentation pour $-1 < b < 0$, et un ensemble dense de $c \in \mathbb{R}$ qui dépend du choix de b . Cette représentation du groupe symétrique étendu peut donc être considérée, pour b et c réels, comme la frontière de la zone où ce résultat de fidélité a été démontré.

Troisième partie

Tresses, transpositions, et constructions tensorielles

Chapitre 1

Groupes symétriques étendus

Nous avons rencontré jusqu'à présent essentiellement deux types de représentations irréductibles de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$: la représentation naturelle, de dimension n (cf. **II.2**), et la représentation $\int_h \mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$, définie au chapitre **II.4**. Nous allons montrer dans ce chapitre comment l'on obtient des modèles matriciels explicites de ces représentations (sections 1 et 2) à partir de leur diagramme de Bratteli, et nous en déduirons que $\int_h \mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$ est une généralisation du carré alterné de la représentation naturelle $L_n(q)$. En particulier, $\Lambda^2 L_n(q)$ est une représentation irréductible de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$.

En section 3, nous montrons de façon plus générale que, pour tout entier p compris entre 0 et n , $\Lambda^p L_n(q)$ est une représentation irréductible de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$. Si l'on interprète, par analogie avec les groupes de Coxeter, $L_n(q)$ comme la représentation "de réflexion" de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, ce résultat (théorème 3) est une extension des résultats classiques de Curtis, Benson et Kilmoyer [35].

En section 4 nous montrons que les représentations $\Lambda^p L_n(q)$, pour $p \in [2, n-2]$, font partie, à l'instar de $\Lambda^2 L_n(q)$, d'une famille plus large de représentations de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, que nous notons $\Lambda_n^p(X, Y, Z)$, et dont nous obtenons des modèles combinatoires.

Nous résumons ces résultats sous la forme du théorème 4.

1.1 Intégration de la représentation naturelle

On fixe un entier $n \geq 3$ et on considère l'algèbre locale $\mathbb{C}B_n$.

Nous avons déjà obtenu une description de cette représentation, en utilisant la commutativité de (l'image de) l'algèbre de Lie des tresses pures infinitésimales. Nous allons ici en établir une autre description à partir du diagramme de Bratteli.

D'après l'étude du chapitre **II.2**, le spectre sur $\int_h \mathcal{L}_n(y)$ de l'un quelconque des générateurs d'Artin est $\{1, Y, -Y\}$ avec $Y = e^{hy}$. On notera

$$\begin{aligned} L_n(Y) &= \int_h \mathcal{L}_n(y) \\ Y &= \int_h I_+(y) \\ -Y &= \int_h I_-(y) \\ 1 &= \int_h I_+(0). \end{aligned}$$

On choisira la classe de bases associée au diagramme de Bratteli représenté visuellement en **II.2** de façon croissante par rapport à l'ordre lexicographique inverse, où l'on a ordonné

les représentations de même niveau de la gauche vers la droite. Ainsi, une base associée au diagramme de $L_4(Y)$ sera

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow L_4(Y) \\ e_2 &= 1 \rightarrow 1 \rightarrow L_3(Y) \rightarrow L_4(Y) \\ e_3 &= 1 \rightarrow Y \rightarrow L_3(Y) \rightarrow L_4(Y) \\ e_4 &= 1 \rightarrow -Y \rightarrow L_3(Y) \rightarrow L_4(Y). \end{aligned}$$

Dans ce diagramme, toutes les briques sont de taille 2, sauf pour $n = 3$. Mais $L_3(Y)$ est une spécialisation de la représentation de degré 3 de l'algèbre de Hecke de G_4 , obtenue dans le chapitre précédent. Sur cette brique, on a donc

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -Y & Y \\ -2Y & 1 & 1 \\ 2Y & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les briques de taille 2 sont, quant à elles, de la forme

$$\begin{array}{ccc} & & L_n(Y) \\ & \nearrow^{Y^{2(n-1)}} & \downarrow^{Y^2} \\ 1 & & L_{n-1}(Y) \\ \downarrow^1 & & \nearrow^{Y^{2(n-2)}} \\ 1 & & \end{array}$$

où les valeurs de δ_n obtenues sont déterminées à une racine de l'unité près. Ainsi, sur ces briques, $\det(\sigma_{n-1})^2 = Y^4$. Comme on sait cette représentation irréductible, d'après la proposition 17 de I.2.6, cette brique de taille 2 l'est également, donc le spectre de σ_{n-1} vaut $\{Y, -Y\}$. En particulier, sa trace est nulle donc, d'après l'étude préliminaire des briques de taille 2 (cf. I.2.7), on a

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 0 & v_n \\ \frac{Y^2}{v_n} & 0 \end{pmatrix}$$

En fait, ce paramètre v_n n'est pas significatif: on peut renormaliser la base de manière à le faire disparaître. On pourra également écrire l'équation de tresse sur le houpplier de niveau 3, qui est de dimension 3, pour vérifier que cela n'impose aucune condition sur ce paramètre non nul. On peut ainsi poser $v_n = Y$, et

$$\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'action de σ_{n-1} sur les briques de taille 1, ce qui est immédiat pour les briques $1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$: l'action du centre est de degré 0 en Y , donc $\sigma_{n-1} = 1$. Il en est de même pour les briques $L_{n-2}(Y) \rightarrow L_{n-1}(Y) \rightarrow L_n(Y)$ pour $n \geq 4$, où l'on note par commodité $L_2(Y)$ indifféremment Y ou $-Y$: cette fois, c'est $\det(\delta_n \delta_{n-1}^{-1})$ qui est de degré 0 en Y , donc $\det(\sigma_{n-1})$ aussi, et $\sigma_{n-1} = 1$.

On reformule les résultats sous une forme plus agréable, en posant $q = Y = e^{hy}$ et après changement de base, on retrouve que la représentation $L_n(q) = \int_h \mathcal{L}_n(y)$, pour $q = e^{hy}$, est décrite sur une base $(v_k)_{k=1\dots n}$ par les formules

$$\sigma_k v_i = \begin{cases} v_i & \text{si } i \notin \{k, k+1\} \\ qv_{k+1} & \text{si } i = k \\ qv_k & \text{si } i = k+1. \end{cases}$$

Observons enfin qu'il n'est pas possible d'“intégrer” ce diagramme en imposant trois valeurs propres génériques aux générateurs d'Artin : le diagramme de Bratteli de $L_4(q)$ ne correspond à aucune des représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke cyclotomique de G_{25} .

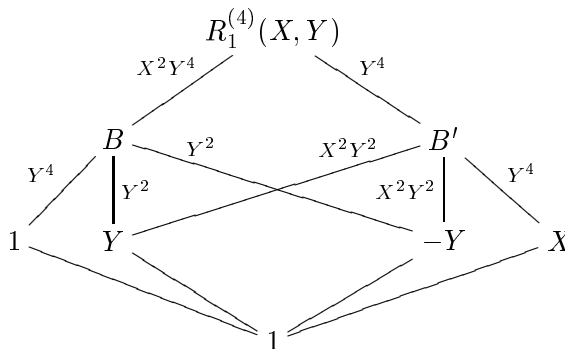
1.2 Intégration de $\mathcal{R}_1(x, y)$

Un entier $n \geq 3$ est toujours fixé, et l'algèbre locale considérée est toujours $\mathbb{C}B_n$.

Sur $\int_h \mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$, le spectre des générateurs de Coxeter vaut $\{1, Y, -Y, X\}$ avec $Y = e^{hy}$, $X = -e^{hx}$. Nous noterons $R_1^{(n)}(X, Y) = \int_h \mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$.

1.2.1 Intégration de $\mathcal{R}_1^{(4)}(x, y)$

Nous écrivons le diagramme de Bratteli de $R_1^{(4)}(x, y)$ comme suit



Les deux briques de taille 3 correspondent encore à des spécialisations de la représentation de degré 3 de l'algèbre de Hecke de G_4 . Dans la base

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 \rightarrow X \rightarrow B' \rightarrow R_1^{(4)}(X, Y) \\ \epsilon_2 &= 1 \rightarrow -Y \rightarrow B' \rightarrow R_1^{(4)}(X, Y) \\ \epsilon_3 &= 1 \rightarrow Y \rightarrow B' \rightarrow R_1^{(4)}(X, Y) \\ \epsilon_4 &= 1 \rightarrow -Y \rightarrow B \rightarrow R_1^{(4)}(X, Y) \\ \epsilon_5 &= 1 \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R_1^{(4)}(X, Y) \\ \epsilon_6 &= 1 \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow R_1^{(4)}(X, Y) \end{aligned}$$

on trouve ainsi

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -Y & Y & 0 & 0 & 0 \\ -2Y & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2Y & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & -2Y \\ 0 & 0 & 0 & X & X & 2Y \\ 0 & 0 & 0 & -Y & Y & 0 \end{pmatrix}$$

L'action de σ_3 sur les briques de taille 1 se détermine cette fois encore immédiatement, et il ne reste plus qu'à considérer les briques de taille 2. De la même façon que lors de l'étude de la représentation naturelle, le spectre de σ_3 sur ces briques vaut $\{Y, -Y\}$. Il apparaît ainsi deux paramètres u et v , qui permettent d'écrire σ_3 sous la forme

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Yu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Yv & 0 \\ 0 & \frac{Y}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Y}{v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation de tresse devient alors très simple à résoudre : on obtient $u + v = 0$, ce qui permet de choisir

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Intégration de $\mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$

On fixe $n \geq 5$.

Une fois la représentation $R_1^{(4)}(X, Y)$ construite, on ne trouve plus dans le diagramme de Bratteli de $R_1^{(n)}(X, Y)$ que des briques de taille 1 et 2 à décrire. De plus, $L_k(Y)$ a déjà été décrite, donc la seule brique de taille 2 qu'il reste à étudier est, pour $n \geq 5$, en notant $L_3(Y) = B$,

$$\begin{array}{ccc} & & R_1^{(n)}(X, Y) \\ & \nearrow^{X^2 Y^{2(n-2)}} & \downarrow_{Y^4} \\ L_{n-1}(Y) & & R_1^{(n-1)}(X, Y) \\ & \downarrow_{Y^2} & \nearrow_{X^2 Y^{2(n-3)}} \\ & & L_{n-2}(Y) \end{array}$$

Encore une fois, la trace de σ_{n-1} sur cette brique est nulle, et son spectre vaut $\{Y, -Y\}$.

Les briques de taille 1, quant à elles, sont de deux sortes

$$\begin{array}{ccc} R_1^{(n)}(X, Y) & & R_1^{(n)}(X, Y) \\ Y^4 \Big| & & \Big| X^2 Y^{2(n-2)} \\ R_1^{(n-1)}(X, Y) & & L_{n-1}(Y) \\ Y^4 \Big| & & \Big| Y^{2(n-2)} \\ R_1^{(n-2)}(X, Y) & & 1 \end{array}$$

où l'on a noté $R_1^{(3)} = B'$.

Dans le premier cas, $\sigma_{n-1}^2 = 1$ à un scalaire non nul près, donc $\sigma_{n-1} = 1$. Dans le deuxième, $\sigma_{n-1}^2 = X^2$ à un scalaire non nul près, donc $\sigma_{n-1} = X$. Il ne reste plus qu'à vérifier sur les houppiers de niveau 2 que les paramètres à choisir pour les briques de taille 2 ne sont, encore une fois, soumis à aucune condition. On peut donc poser sur les briques de taille 2, pour $n \geq 5$,

$$\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

On a ainsi obtenu une description complète de cette représentation de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ de B_n . En changeant légèrement de base, et en posant $X = t, Y = q$, on obtient

Proposition 25. *Il existe une représentation de $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ sur $\mathbb{Z}[q, t]$, irréductible sur son corps des fractions, qui est donnée sur une base $(v_{i,j})$, pour $1 \leq i < j \leq n$, par*

$$\sigma_k v_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} & \text{si } \{i, j\} \cap \{k, k+1\} = \emptyset \\ qv_{i,k+1} & \text{si } j = k \\ qv_{i,k} & \text{si } i < k \text{ et } j = k+1 \\ tv_{k,k+1} & \text{si } i = k \text{ et } j = k+1 \\ qv_{k+1,j} & \text{si } i = k \text{ et } j > k+1 \\ qv_{k,j} & \text{si } i = k+1. \end{cases}$$

D'autre part, en utilisant le modèle naturel décrit en II.2 de \mathcal{L}_n , on voit immédiatement par comparaison des matrices, sur la base $v_{i,j} = e_i \wedge e_j$, que

$$L_n(q) = \Lambda^2 \int_h \mathcal{L}_n = R_1(t, q)$$

avec le même paramètre q , et $t = -q^2$. Comme

$$\begin{aligned} \Lambda^2([n-1, 1] \oplus [n]) &= (\Lambda^2[n-1, 1] \otimes \Lambda^0[n]) \oplus (\Lambda^1[n-1, 1] \otimes \Lambda^1[n]) \oplus (\Lambda^0[n-1, 1] \otimes \Lambda^2[n]) \\ &= [n-2, 1, 1] \oplus [n-1, 1] \oplus 0, \end{aligned}$$

et que $\Lambda^2 \mathcal{L}_n$, irréductible, a même diagramme de Bratteli que \mathcal{R}_1 , on peut utiliser l'étude de $\mathcal{V}_s([n-2, 1, 1] \oplus [n-1, 1])$ effectuée en II.4: puisque les générateurs ont même spectre, en tant que représentations de \mathfrak{B}_n ,

$$\Lambda^2 \mathcal{L}_n \simeq \mathcal{R}_1(2, 1).$$

1.3 Puissances alternées de \mathcal{L}_n

On fixe $n \geq 3$, et on munit \mathfrak{B}_n d'une structure d'algèbre locale en choisissant $(r \ r + 1)$, $r \in [1, n - 1]$, pour éléments générateurs, et \mathbf{T}_r , $r \in [1, n]$, pour éléments centralisants.

On note \mathcal{L}_n la représentation naturelle de \mathfrak{B}_n , pour $n \geq 3$. Rappelons que $\dim \mathcal{L}_n = n$, d'où

$$\dim \Lambda^p \mathcal{L}_n = \binom{n}{p}.$$

\mathfrak{B}_n agit sur

$$\Lambda \mathcal{L}_n = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p \mathcal{L}_n$$

qui est de dimension 2^n . On rappelle que l'on note

$$\mathbf{T}_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij}.$$

On a alors

Lemme 13. *Soit $n \geq 3$ et $0 \leq p \leq n$. Sur $\Lambda^p \mathcal{L}_n$, l'action de \mathbf{T}_n vaut $p(n - 1)$. De plus, on a un isomorphisme de \mathfrak{B}_n -modules*

$$\Lambda^{n-p} \mathcal{L}_n \simeq S \otimes \tau_2 H_{-1} \Lambda^p \mathcal{L}_n.$$

Preuve — On considère les k -isomorphismes canoniques de $\Lambda^{n-p} \mathcal{L}_n$ vers $\Lambda^p \mathcal{L}_n$. Comme

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathfrak{S}_n} \Lambda^p \mathcal{L}_n &\simeq [n - p, 1^p] + [n - p + 1, 1^{p-1}] \\ \text{Res}_{\mathfrak{S}_n} \Lambda^{n-p} \mathcal{L}_n &\simeq [p, 1^{n-p}] + [p + 1, 1^{n-p+1}] \end{aligned}$$

on en déduit que ce sont des isomorphismes de \mathfrak{S}_n -modules

$$\Lambda^{n-p} \mathcal{L}_n \rightarrow S \otimes \Lambda^p \mathcal{L}_n.$$

On note $N = \{1, \dots, n\}$ et, pour I une partie de N de cardinal p , on note e_I le produit alterné, croissant suivant l'indice, des e_k pour $k \in I$, où l'on a noté $(e_i)_{i \in N}$ la base canonique de la représentation naturelle. On fixe alors l'isomorphisme Φ en posant

$$\Phi(e_I) = e_{N \setminus I}.$$

On a alors

$$t_{ij}(e_I) = (\#I \cap \{i, j\})e_I,$$

donc puisque $\#N \cap \{i, j\} = 2$, on a

$$t_{ij}(e_{N \setminus I}) = (2 - \#I \cap \{i, j\})e_I.$$

On en déduit bien que

$$\Phi : \Lambda^{n-p} \mathcal{L}_n \rightarrow S \otimes \tau_2 H_{-1} \Lambda^p \mathcal{L}_n$$

est un isomorphisme de \mathfrak{B}_n -modules.

D'autre part, si l'on note $\mathcal{P}_2(E)$ l'ensemble des parties à deux éléments d'un ensemble E , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n e_I &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} e_I \\ &= \left(\sum_{J \in \mathcal{P}_2(N)} \#(J \cap I) \right) e_I \\ &= (2\#\mathcal{P}_2(I) + (\#I)(\#(N \setminus I)))e_I \\ &= \left(2\frac{p(p-1)}{2} + p(n-p) \right) e_I \\ &= p(n-1)e_I. \end{aligned}$$

cqfd.

On connaît ainsi les $\Lambda^p \mathcal{L}_n$, pour $3 \leq n \leq 4$: ce sont des représentations irréductibles, dont le diagramme de Bratteli a déjà été étudié.

Théorème 3. *Pour tout p et tout $n \geq 3$, $\Lambda^p \mathcal{L}_n$ est une représentation irréductible de \mathfrak{B}_n , dont le diagramme de Bratteli est un graphe nivelé réduit. De plus, pour tout $n \geq 3$,*

$$\text{Res}_{\mathfrak{B}_n} \Lambda^p \mathcal{L}_{n+1} = \Lambda^p \mathcal{L}_n + \Lambda^{p-1} \mathcal{L}_n.$$

Preuve — La première assertion est connue pour $n = 3, 4$, ainsi que pour $p \leq 2$ et $p \geq n - 2$. La seconde est immédiate :

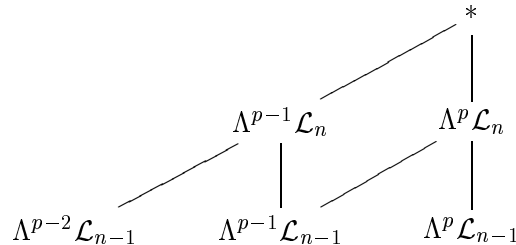
$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathfrak{B}_n} \Lambda^p \mathcal{L}_{n+1} &= \Lambda^p(\mathbb{1} \oplus \mathcal{L}_n) \\ &= \Lambda^p \mathcal{L}_n \oplus \Lambda^{p-1} \mathcal{L}_n. \end{aligned}$$

Nous allons montrer le théorème par récurrence sur n pour $n \geq 5$, en supposant $p > 2$ et $p < n - 2$. On note \mathbf{G} le pseudo-diagramme de Bratteli de $\Lambda^p \mathcal{L}_n$, connu d'après l'hypothèse de récurrence. On a un morphisme

$$\mathfrak{B}_{n+1} \rightarrow M_{loc}(\mathbf{G}).$$

Pour montrer que ce morphisme est surjectif, il suffit de montrer d'une part que \mathfrak{B}_{n+1} sépare les sommets de niveau n , d'autre part que l'action de $\langle \mathbf{t}_n, (n \ n+1) \rangle$ sur les briques joignant le niveau $n - 1$ au niveau $n + 1$ est irréductible.

Concernant le premier point, il découle de l'hypothèse de récurrence qu'il n'existe que deux sommets de niveau n , $\Lambda^p \mathcal{L}_n$ et $\Lambda^{p-1} \mathcal{L}_n$, sur lesquels \mathbf{T}_n agit respectivement par $p(n - 1)$ et $(p - 1)(n - 1)$. Le houpplier de niveau 2, bien colorié, s'écrit alors



On note $k\mathbf{B}_{p,n}$ la seule brique non triviale de ce houpplier. On a

$$k\mathbf{B}_{p,n} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}_{n-1}}(\Lambda^{p-1} \mathcal{L}_{n-1}, \Lambda^p \mathcal{L}_{n+1}) \simeq \langle \varphi_n, \varphi_{n+1} \rangle$$

où, pour $i \in \{n, n+1\}$,

$$\varphi_i(e_I) = e_I \wedge e_i.$$

De l'action explicite de \mathbf{T}_n on déduit que cet isomorphisme est donné par

$$\begin{aligned} (\Lambda^{p-1}\mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \Lambda^{p-1}\mathcal{L}_n \rightarrow \Lambda^p\mathcal{L}_{n+1}) &\mapsto \varphi_{n+1} \\ (\Lambda^{p-1}\mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \Lambda^p\mathcal{L}_n \rightarrow \Lambda^p\mathcal{L}_{n+1}) &\mapsto \varphi_n \end{aligned}$$

et l'action de $\langle \mathbf{T}_n, (n \ n+1) \rangle$ sur cette brique correspond au graphe



Il découle alors de la proposition 17 de I.2.6 que $\Lambda^p\mathcal{L}_{n+1}$ est irréductible. On conclut par récurrence sur n .

cqfd.

On en déduit que l'image de \mathfrak{B}_n dans $End_k(\Lambda\mathcal{L}_n)$ est une algèbre semi-simple, de dimension

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}.$$

De plus $\Lambda\mathcal{L}_n$ en est un modèle de Gelfand (c'est-à-dire que ce module est isomorphe à une somme directe des représentations irréductibles de cette algèbre), et il découle de l'interpolation de Lagrange que les idempotents sont des polynômes en \mathbf{T}_n . Les composantes irréductibles sont déterminées par

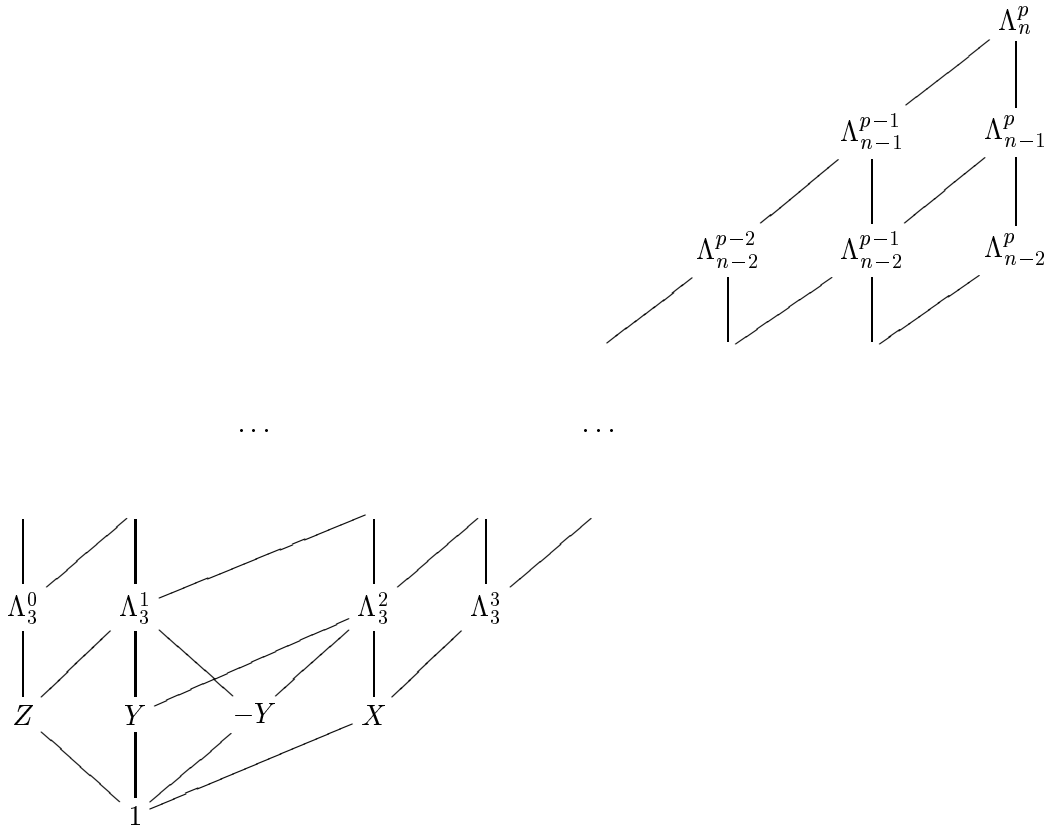
$$Ker(\mathbf{T}_n - n(p-1)) = \Lambda^p\mathcal{L}_n.$$

On obtient par intégration un quotient semi-simple de kB_n . Nous allons voir, par l'intégration des diagrammes de Bratteli obtenus, que ce quotient admet deux paramètres génériques significatifs.

1.4 Représentations Λ_n^p

1.4.1 Construction

Nous avons déjà intégré le diagramme de Bratteli de $\Lambda^2\mathcal{L}_n$ au chapitre 2 de cette même partie, et il est apparu un deuxième paramètre, définissant la représentation $R_1^{(n)}(X, Y)$ de B_n . Nous allons tâcher d'intégrer de façon générale le diagramme de Bratteli de $\Lambda^p\mathcal{L}_n$ en imposant dans le spectre de σ_1 ce deuxième paramètre X . Pour simplifier les calculs, nous homogénéisons les valeurs propres des générateurs en introduisant un troisième paramètre, Z . Si l'on note $\Lambda_n^p = \Lambda_n^p(X, Y, Z)$ la représentation correspondant à $\Lambda^p\mathcal{L}_n$ que l'on cherche à obtenir, son diagramme de Bratteli \mathbf{G} s'écrit



En particulier,

$$\begin{aligned}
 \dim \Lambda_n^p &= \binom{n}{p} \\
 \dim \mathbb{C}\mathbf{G}_Z^{\Lambda_n^p} &= \binom{n-2}{p} \\
 \dim \mathbb{C}\mathbf{G}_Y^{\Lambda_n^p} &= \binom{n-2}{p-1} \\
 \dim \mathbb{C}\mathbf{G}_{-Y}^{\Lambda_n^p} &= \binom{n-2}{p-1} \\
 \dim \mathbb{C}\mathbf{G}_X^{\Lambda_n^p} &= \binom{n-2}{n-p}.
 \end{aligned}$$

On en déduit alors la valeur au signe près de γ_n , que l'on note $|\gamma_n|$, sur Λ_n^p ,

$$|\gamma_n| = X^{p(p-1)} Y^{2p(n-p)} Z^{(n-p)(n-p-1)}$$

ainsi que les valeurs de $|\delta_n|$

arête	$ \delta $
$\Lambda_{n-2}^{p-2} \rightarrow \Lambda_{n-1}^{p-1}$	$X^{2(p-2)} Y^{2(n-p)}$
$\Lambda_{n-1}^{p-1} \rightarrow \Lambda_n^p$	$X^{2(p-1)} Y^{2(n-p)}$
$\Lambda_{n-2}^p \rightarrow \Lambda_{n-1}^p$	$Y^{2p} Z^{2(n-p-2)}$
$\Lambda_{n-1}^p \rightarrow \Lambda_n^p$	$Y^{2p} Z^{2(n-p-1)}$
$\Lambda_{n-2}^{p-1} \rightarrow \Lambda_{n-1}^{p-1}$	$Y^{2(p-1)} Z^{2(n-p-1)}$
$\Lambda_{n-2}^{p-1} \rightarrow \Lambda_{n-1}^p$	$X^{2(p-1)} Y^{2(n-p-1)}$

On en déduit la valeur de σ_n sur les briques de taille 1 :

$\Lambda_{n-2}^{p-2} \rightarrow \Lambda_{n-1}^{p-1} \rightarrow \Lambda_n^p$	$\sigma^2 = X^2$	$\sigma = X$
$\Lambda_{n-2}^p \rightarrow \Lambda_{n-1}^p \rightarrow \Lambda_n^p$	$\sigma^2 = Z^2$	$\sigma = Z$

Sur l'unique brique non triviale du houppier de niveau 2, on obtient

$$\begin{aligned} \delta_n &= \begin{pmatrix} \pm X^{2(p-1)} Y^{2(n-p)} & 0 \\ 0 & \pm Y^{2p} Z^{2(n-p-1)} \end{pmatrix} \\ \delta_{n-1} &= \begin{pmatrix} \pm Y^{2(p-1)} Z^{2(n-p-1)} & 0 \\ 0 & \pm X^{2(p-1)} Y^{2(n-p-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que sur cette brique $\det(\sigma_{n-1}) = \pm Y^2$, et, comme on cherche une représentation irréductible, cela impose que σ_{n-1} n'est pas une homothétie, donc $Sp(\sigma_{n-1}) = \{Y, -Y\}$. A conjugaison par une matrice diagonale près, on en déduit que σ_{n-1} s'écrit sur cette brique

$$\begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit dès lors de vérifier la relation de tresse sur le houppier de niveau 4 pour conclure que l'on a bien obtenu de nouvelles représentations, irréductibles, du groupe de tresse B_n .

Nous allons maintenant en proposer des modèles matriciels plus simples.

1.4.2 Modèles combinatoires

Remarquons d'abord que le diagramme de Bratteli obtenu n'admet que des briques de taille 1 ou 2, à l'exception de deux briques de taille 3. Cela provient du fait que la chaîne de sous-groupes utilisée

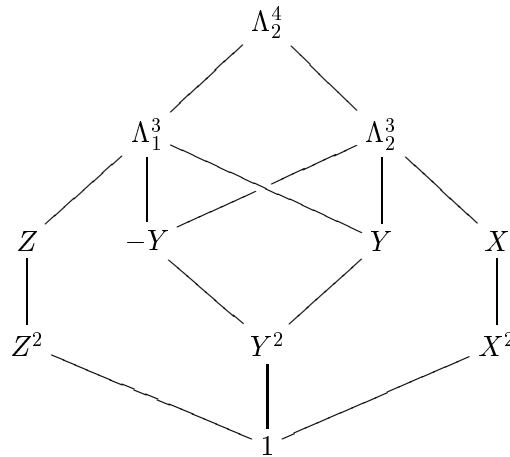
$$B_1 = \{e\} \subset B_2 = \langle \sigma_1 \rangle \subset B_3 \subset \dots \subset B_{n-1} \subset B_n$$

n'est pas adaptée ici. Si l'on note $B_2^2 = \langle \sigma_1^2 \rangle$, considérons la chaîne

$$B_1 = \{e\} \subset B_2^2 = \langle \sigma_1^2 \rangle \subset B_2 = \langle \sigma_1 \rangle \subset B_3 \subset \dots \subset B_{n-1} \subset B_n$$

qui munit $\mathbb{C}B_n = A_{n+1}$ d'une nouvelle structure d'algèbre locale, dont les éléments générateurs sont maintenant $\sigma_1^2, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, et les éléments centralisants $\gamma_1 = \sigma_1^2, \sigma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$

(cf corollaire de I.1.1.1). Le diagramme de Bratteli de Λ_4^2 par rapport à cette chaîne est alors



Modèle 1

Le nouveau graphe, ainsi associé à la famille des représentations Λ_n^p , ne comporte plus que des briques de taille 1 ou 2, sur lesquelles la valeur de σ_k vaut X, Z , ou

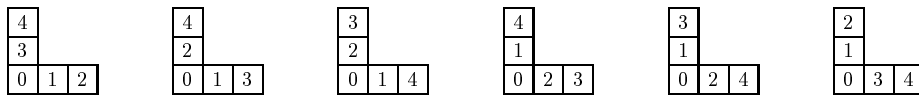
$$J := \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

Modèle 2

Une autre façon d'expliciter les matrices des générateurs d'Artin sur cette représentation consiste à associer à Λ_n^p le diagramme en équerre de taille $n + 1$ associé à la partition

$$[n + 1 - p, 1^p]$$

et d'indexer la base des chemins par ce que nous appellerons des 0-tableaux standards, c'est-à-dire des tableaux standards sur ce diagramme de Young, où les boîtes ne sont plus numérotées de 1 à $n + 1$, mais de 0 à n . Par exemple, Λ_4^2 correspond à la partition $[3, 1, 1]$ et une base est formée par les tableaux



Si D est un tel tableau, on construit la matrice de σ_k de la façon suivante :

- Si $k + 1$ est sur la même colonne que k dans D , alors

$$\sigma_k(D) = XD.$$

- Si $k + 1$ est sur la même ligne que k dans D , alors

$$\sigma_k(D) = ZD.$$

- Si $k + 1$ et k ne sont ni sur la même ligne si sur la même colonne de D , alors si l'on note $D' = s_k(D)$, c'est-à-dire le tableau issu de D en intervertissant k et $k + 1$, $\langle D, D' \rangle$ est stable par σ_k et l'on a

$$\sigma_{k|\langle D, D' \rangle} = J = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

Modèle 3 De façon à faire apparaître $\Lambda_n^p(X, Y, Z)$ comme une déformation de $\int_h \Lambda^p \mathcal{L}_n$, on indexe les éléments de base de Λ_n^p par les parties I à p éléments de $\{1, \dots, N\}$. Dans cette base,

$$\begin{aligned} \sigma_k e_I &= X e_I && \text{si } \{k, k+1\} \subset I \\ \sigma_k e_I &= Z e_I && \text{si } \{k, k+1\} \cap I = \emptyset \\ \sigma_k e_I &= Y e_{I \Delta \{k, k+1\}} && \text{sinon,} \end{aligned}$$

où Δ désigne la différence symétrique entre deux ensembles. Le lien avec la base naturelle de $\Lambda^p L_n(q)$ est ainsi fait si l'on associe à I , donc à e_I , le produit alterné croissant en i des e_i pour i élément de I (cf. la preuve du lemme 13).

Pour résumer, en remarquant que l'image de P_n est commutative,

Théorème 4. *Pour tout $n \geq 2$ et tout p compris entre 0 et n , pour X, Y, Z des scalaires génériques, il existe une représentation $\Lambda_n^p(X, Y, Z)$ de $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ définie sur $\mathbb{Z}(X, Y, Z)$ par les modèles 1, 2 ou 3 ci-dessus, qui est irréductible pour $n \geq 3$, et qui vérifie*

- Pour $n \geq 2$, $\dim \Lambda_n^p(X, Y, Z) = \binom{n}{p}$.
- Pour $n \geq 3$, $\text{Res}_{B_{n-1}} \Lambda_n^p(X, Y, Z) = \Lambda_{n-1}^{p-1}(X, Y, Z) + \Lambda_{n-1}^p(X, Y, Z)$.
- Sur Λ_n^p pour $n \geq 3$, les valeurs propres des générateurs de Coxeter sont X avec multiplicité $\binom{n-2}{n-p}$, Y et $-Y$ avec multiplicité $\binom{n-2}{p-1}$ et Z avec multiplicité $\binom{n-2}{p}$.
- L'action de γ_n sur $\Lambda_n^p(X, Y, Z)$ vaut

$$X^{p(p-1)} Y^{2p(n-p)} Z^{(n-p)(n-p-1)}.$$

- L'image du groupe de tresses pures P_n est un tore de $GL(\Lambda_n^p)$.
- Pour r et $n-r$ supérieurs à 2,

$$\text{Res}_{B_{n-r} \times B_r} \Lambda_n^p \simeq \bigoplus_{i=0}^r \Lambda_{n-r}^{p-r+i} \otimes \Lambda_r^{r-i}.$$

De plus, $\Lambda_n^p(-q^2, q, q) = \lambda^p L_n(q)$ est une représentation irréductible de $\tilde{\mathfrak{S}}_n$, pour $q \notin \{0, 1, -1\}$.

Notons enfin

Proposition 26.

$$\begin{aligned} \Lambda^2 L_n(Y) &= \Lambda_n^2(-Y^2, Y, 1) \\ S^2 L_n(Y) &= L_n(Y) + \Lambda_n^2(Y^2, Y, 1) \end{aligned}$$

Preuve — La première assertion a déjà été démontrée dans sa version “infinitésimale”, à la suite de la proposition 25. $S^2 L_n(Y)$ contient quant à lui deux sous-espaces stables, $\langle e_i^2 \rangle_{i=1..n}$ et $\langle e_i e_j \rangle_{i \neq j}$. En comparant avec les formules pour les actions de $L_n(Y)$ et $\Lambda_n^2(Y^2, Y, 1)$ (cf. proposition 25 et II.2), la deuxième équation s'ensuit immédiatement. cqfd.

Chapitre 2

Le bimodule $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\otimes p}$, $n \gg p$

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple, une des clés pour comprendre l'action de \mathfrak{B}_p sur $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ est la décomposition de $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ en tant que $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ -module. Ici, nous ne nous intéressons qu'au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. La décomposition du \mathfrak{g} -module $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ a été étudiée par Philip Hanlon dans les années 80 [44]. Dans un premier temps, nous tâcherons de compléter cette étude en établissant avec précision les règles de branchement. Comme dans tous les problèmes de pléthysme, il se produit pour les séries classiques un phénomène d'uniformisation : quand $\dim \mathfrak{g}$ augmente, la décomposition de $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ est stationnaire. L'étude de cette décomposition limite est ce qu'on appelle le "cas stable", et il est utile de paramétrer les composantes irréductibles d'une façon qui ne dépende pas de $\dim \mathfrak{g}$.

Dans ce chapitre, nous nous conformerons à la convention, utilisée par les auteurs cités, concernant les diagrammes de Young, c'est-à-dire que

$$[3, 2] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array}$$

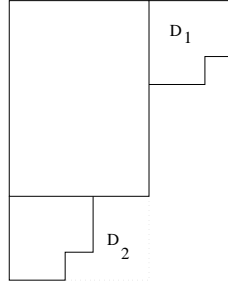
Ce choix de changer de convention pour les diagrammes de Young qui concernent les représentations de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ou de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ tient à deux raisons.

La première est que le lien entre les représentations du groupe symétrique et les représentations du groupe linéaire est une dualité, la dualité de Schur-Weyl, qui, si elle met en rapport deux partitions de n identiques, ne respecte pas les combinatoires naturelles à chacun de ces deux types d'objets. En particulier, les règles de branchement par rapport aux filtrations naturelles des groupes concernés n'ont pas de rapport direct, et la règle de Littlewood-Richardson ne donne pas le produit tensoriel de deux représentations du groupe symétrique. Comme, d'autre part, nous tâchons ici de mettre en place une dualité partielle, nous pensons utile de distinguer au moins visuellement les différents objets impliqués.

La deuxième raison est que, si les traditions pour représenter les partitions d'un entier donné, donc les représentations du groupe symétrique (diagrammes de Ferrers ou de Young), varient énormément, la tradition concernant les diagrammes de Young de largeur donnée, c'est-à-dire les représentations du groupe linéaire, tend à se standardiser. En particulier, les références les plus courantes sur les groupes de Lie utilisent la convention que l'on vient de décrire, et il nous a paru inutile d'imposer au lecteur habitué à la décomposition des produits tensoriels de représentations d'algèbres de Lie simples la gymnastique d'un changement d'orientation des diagrammes.

2.1 Doubles diagrammes de Young

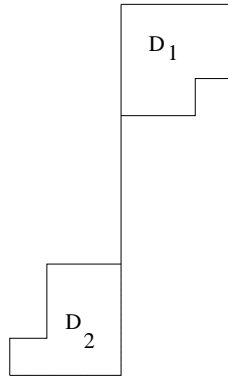
On considère $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ et $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ avec n grand devant p . Dans ce cas, on peut paramétrer les représentations irréductibles de \mathfrak{g} , suivant une méthode apparemment due à R.K. Gupta (cf. [44]), par des couples (D_1, D_2) où les D_i sont des diagrammes de Young. On note en effet $(D_1, D_2)_n$ le diagramme à n lignes, bien défini pour n strictement plus grand que $h(D_1) + h(D_2) + 1$,



Avec cette convention, la représentation adjointe de \mathfrak{g} est notée $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$. Cette représentation $(D_1, D_2)_n$ n'est autre que la multiplication de Cartan

$$Hom_{\mathfrak{S}_p}(S^{D_1}, V^{\otimes p}) \boxtimes Hom_{\mathfrak{S}_p}(S^{D_2}, V^{*\otimes p}).$$

Elle correspond donc à une représentation rationnelle de \mathfrak{gl}_n , également notée (D_1, D_2) , de diagramme de Young



En fait, comme on ne s'intéresse dans $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ qu'aux représentations de niveau maximal, on n'a pas à distinguer $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$: en effet, l'action de t_{12} est nulle sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2} / \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2}$ (cf. [39] p. 158). On utilisera donc indifféremment $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Sur une représentation $(D_1, D_2)_n$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, la valeur C du Casimir normalisé à 1 sur la représentation adjointe est

$$C_{|(D_1, D_2)_n} = \psi(D_1) + \psi(D_2) + nt(D_1) + nt(D_2)$$

où $\psi(\lambda) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1)$. On peut démontrer par récurrence

$$\psi(D') = -\psi(D).$$

Enfin, pour n fixé, on notera e_{ij} la matrice de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ associée à $e_i \otimes e_j^*$ par l'identification standard $\mathfrak{gl}(V) \simeq V \otimes V^*$, $X_i = e_{i,i+1}$, $Y_i = e_{i+1,i}$, $H_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$.

2.2 Multiplication par \mathfrak{g} - énoncés

On s'intéresse à la table de multiplication par la représentation adjointe \mathfrak{g} dans l'anneau des représentations de \mathfrak{g} muni de son produit scalaire standard noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Pour plus de clarté, nous reportons la preuve des résultats combinatoires de cette section, qui est une application immédiate de la règle de Littlewood-Richardson, à la section suivante. Nous limiterons d'autre part l'étude aux représentations $(D_1, D_2)_n$ pour $n \geq h(D_1) + h(D_2) + 1$ telles que $t(D_1) = t(D_2)$. Cette restriction est justifiée par

Lemme 14.

$$p = t(D_1) = t(D_2) \Leftrightarrow \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad (D_1, D_2)_n \hookrightarrow (\mathfrak{sl}_n)^{\otimes p}$$

On a d'autre part

Lemme 15. $\langle (D_1, D_2)_n \otimes \mathfrak{g} | (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2)_n \rangle$ ne dépend pas de n pour n suffisamment grand.

On notera

$$\langle (D_1, D_2) \otimes \mathfrak{g} | (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (D_1, D_2)_n \otimes \mathfrak{g} | (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2)_n \rangle$$

cette valeur commune. Pour

$$\begin{aligned} D &= (D_1, D_2) \\ \tilde{D} &= (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} d &= t(D_1) = t(D_2) = t(D) \\ \tilde{d} &= t(\tilde{D}_1) = t(\tilde{D}_2) = t(\tilde{D}). \end{aligned}$$

On notera $D \subset \tilde{D}$ la propriété $D_1 \subset \tilde{D}_1$ et $D_2 \subset \tilde{D}_2$. Enfin,

$$\begin{aligned} \delta(D) &:= \delta(D_1) + \delta(D_2) \\ \delta(D, \tilde{D}) &:= \delta(D_1, \tilde{D}_1) + \delta(D_2, \tilde{D}_2). \end{aligned}$$

On a alors

Proposition 27.

- $\langle D \otimes \mathfrak{g} | \tilde{D} \rangle = \langle \tilde{D} \otimes \mathfrak{g} | D \rangle$
- $|\tilde{d} - d| \geq 2 \Rightarrow \langle D \otimes \mathfrak{g} | \tilde{D} \rangle = 0$
- Si $\tilde{d} = d + 1$, $\langle D \otimes \mathfrak{g} | \tilde{D} \rangle = 1$ si $D \subset \tilde{D}$, $\langle D \otimes \mathfrak{g} | \tilde{D} \rangle = 0$ sinon.
- Si $\tilde{d} = d$, $\langle D \otimes \mathfrak{g} | \tilde{D} \rangle = 1$ si $\delta(D, \tilde{D}) = 2$, 0 sinon.
- $\langle D \otimes \mathfrak{g} | D \rangle = \delta(D)$

On en déduit facilement

Lemme 16.

$$\text{Niveau}(D) = t(D).$$

2.3 Multiplication par \mathfrak{g} - preuve

La représentation adjointe correspond au poids noté

$$2l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1},$$

suivant les notations standard (cf. Fulton-Harris [9]), et elle est associée au double diagramme $([1], [1])_n$. On considère un diagramme $(D_1, D_2)_n$ avec

$$\begin{aligned} h(D_1) = r > 0 & \quad D_1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \\ h(D_2) = s > 0 & \quad D_2 = (\mu_1, \dots, \mu_s). \end{aligned}$$

Par convention, on notera $\lambda_{r+1} = \mu_{s+1} = 0$.

Disposé graphiquement, $(D_1, D_2)_n$ est constitué de r lignes correspondant au premier diagramme, puis de $n - r - s$ lignes égales, et enfin de s lignes correspondant à D_2 . La règle de Littlewood-Richardson dit alors que $(D_1, D_2)_n \otimes \mathfrak{g}$ est somme directe d'une famille de \mathfrak{g} -modules simples, qui sont en bijection avec les familles, ici abusivement appelées n -uplets,

$$(\{x_1^+, x_1^-\}, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$$

où $x_1^+, x_1^-, x_2, \dots, x_{n-1}$ sont des numéros de lignes, donc compris entre 1 et n , que l'on interprète de la façon suivante: on augmente d'abord le diagramme $(D_1, D_2)_n$ en ajoutant une case numérotée "1" sur les lignes x_1^+ et x_1^- (si $x_1^+ = x_1^-$, on augmente cette ligne commune de deux cases numérotées "1"); on effectue ensuite, sur le diagramme ainsi augmenté, la même opération avec x_2 , en ajoutant une case numérotée "2" en ligne x_2 , et on poursuit avec x_3, \dots, x_{n-1} . Les n -uplets admissibles satisfont aux conditions bien connues de la règle de Littlewood-Richardson :

- 1) à chaque étape, on doit obtenir un diagramme de Young
- 2) sur chaque colonne du diagramme final, les numéros des cases ajoutées doivent être disposés de façon strictement croissante, du haut vers le bas
- 3) si l'on note $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ les numéros des cases ajoutées en parcourant le diagramme final de haut en bas et de la droite vers la gauche, pour tout m compris entre 1 et n et tout ϵ compris entre 1 et $n - 2$,

$$\#\{i \leq m; \epsilon_i = \epsilon\} \geq \#\{i \leq m; \epsilon_i = \epsilon + 1\}.$$

Considérons un tel n -uplet admissible. Pour que 3) soit respecté, on doit avoir $x_i < x_j$ pour $2 \leq i < j$. Supposons $x_1^+ \leq x_1^-$. Toujours d'après 3) on a, pour tout $i \geq 2$, $x_i > x_1^+ \geq 1$. On en déduit $x_1^+ \leq 2$.

Si $x_1^+ = 2$, ce qui suppose $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a nécessairement $x_i = i + 1$ pour $i \geq 2$. Quant à x_1^- , pour respecter 1), il doit vérifier $x_1^- \leq r + 2$ ou $x_1^- \geq n - s + 1$. De plus, $x_1^- = r + 2$ implique $x_1^+ = r + 1$ d'après 1), ce qui contredit 2) si les lignes $r + 1$ et $r + 2$ sont initialement égales. Mais si les lignes $r + 1$ et $r + 2$ ne sont pas égales, cela signifie que la $r + 2^{\text{e}}$ ligne correspond déjà au diagramme D_2 , c'est-à-dire que $x_1^- \geq n - s + 1$. On a donc $x_1^- \leq r + 1$ ou $x_1^- \geq n - s + 1$. Les n -uplets admissibles tels que $x_1^+ = 2$ ne dépendent plus que du choix de x_1^- . L'ensemble des x_1^- autorisés est alors, d'après les règles 1) et 2),

$$\mathcal{E}_{-1} = \{i \geq n - s + 1 \mid \mu_j \neq \mu_{j+1} \text{ pour } j = n - i + 1\}$$

auquel on ajoute l'élément 2 si $\lambda_1 \geq \lambda_2 + 2$.

Si $x_1^+ = 1$, on définit α par

$$\{\alpha\} = \{2, \dots, n\} \setminus \{x_2, \dots, x_{n-1}\}.$$

On a nécessairement $x_i = i$ pour $i < \alpha$, et $x_i = i + 1$ pour $i > \alpha$. Si $\alpha > r + 1$ et $\alpha < n - s + 2$, la règle 1) impose $x_1^- = \alpha$, et la règle 2) exclut $x_1^- = \alpha$. On en déduit $\alpha \leq r + 1$ ou $\alpha \geq n - s + 2$. On considère alors deux cas. Si $x_1^- = \alpha$, α définit entièrement le n -uplet. Les n -uplets admissibles correspondent alors aux α éléments de

$$\mathcal{E}_0 = \{i \geq n - s + 2 \mid \mu_j \neq \mu_{j+1}, j = n - i + 1\} \cup \{3 \leq i \leq r + 1 \mid \lambda_i \neq \lambda_{i-1}\}$$

auxquels on ajoute l'élément 2 si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Il reste à considérer $x_1^- \neq \alpha$. Si $x_1^- = 1$, l'ensemble des α possibles est

$$\mathcal{E}_1 = \{i \geq n - s + 2 \mid \mu_j \neq \mu_{j-1}, j = n - i + 1\}.$$

Sinon, il existe $i \geq 2$ tel que $x_i = x_1^-$. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a $x_1^- \leq r + 1$ ou $x_1^- \geq n - s + 1$. Plaçons-nous dans cette hypothèse, où $x_1^- \notin \{1, \alpha\}$. Si $x_1^- \leq r + 1$ et $\alpha \leq r + 1$, un n -uplet admissible correspond à un diagramme $(\overline{D}_1, D_2)_n$ tel que $t(\overline{D}_1) = t(D_1)$ et $\delta(D_1, \overline{D}_1) = 2$; si $x_1^- \leq r + 1$ et $\alpha \geq n - s + 2$, à un diagramme $(\overline{D}_1, \overline{D}_2)_n$ tel que $D_1 \subset \overline{D}_1$, $D_2 \subset \overline{D}_2$, $t(\overline{D}_2) = t(D_2) + 1$, $t(\overline{D}_1) = t(D_1) + 1$; si x_1^- et α sont supérieurs à $n - s + 2$, à un diagramme $(D_1, \overline{D}_2)_n$ tel que $t(D_2) = t(\overline{D}_2)$ et $\delta(D_2, \overline{D}_2) = 2$; si $x_1^- \geq n - s + 2$ et $\alpha \leq r + 1$, à un diagramme $(\overline{D}_1, \overline{D}_2)_n$ tel que $\overline{D}_1 \subset D_1$, $\overline{D}_2 \subset D_2$, $t(\overline{D}_2) = t(D_2) - 1$, $t(\overline{D}_1) = t(D_1) - 1$.

Inversement, tous les diagrammes $(\overline{D}_1, \overline{D}_2)_n$ remplissant les conditions précédentes correspondent à de tels couples (x_1^-, α) , si toutefois $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1$. On constate immédiatement que les autres diagrammes, qui vérifient $\overline{\lambda}_1 = \lambda - 1$ ou $\overline{\lambda}_1 = \lambda + 1$ correspondent aux n -uplets décrits respectivement par les ensembles \mathcal{E}_{-1} et \mathcal{E}_1 .

Tous ces diagrammes interviennent donc avec multiplicité 1 dans $(D_1, D_2)_n \otimes \mathfrak{g}$. Il reste enfin à identifier les diagrammes correspondant à l'ensemble \mathcal{E}_0 : toutes les lignes sont augmentées d'exactly une case, c'est-à-dire que la représentation obtenue correspond encore à $(D_1, D_2)_n$. La multiplicité de $(D_1, D_2)_n$ dans $(D_1, D_2)_n \otimes \mathfrak{g}$ est alors

$$\#\mathcal{E}_0 = \delta(D_1) + \delta(D_2).$$

Les énoncés de la section précédente en découlent immédiatement.

2.4 Vecteurs de plus haut poids

On note W l'unique automorphisme non trivial du graphe de Dynkin A_{n-1} . Il lui est canoniquement associé un automorphisme extérieur, encore noté W , de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ou de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Rappelons que le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} est alors produit semi-direct des automorphismes intérieurs par le groupe d'ordre 2 engendré par W .

Lemme 17. *W agit par $(-1)^n$ sur le vecteur de plus haut poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$. De plus, $W e_{ij} = (-1)^{j-i-1} e_{n-j, n-i}$.*

Preuve — On a $WX_i = X_{n-i}$. Le vecteur de plus haut poids de la représentation adjointe est

$$e_{1n} = [[\dots [[X_1, X_2], X_3], X_4] \dots], X_{n-1}].$$

En utilisant l'identité de Jacobi et le fait que $[X_i, X_j] = 0$ pour $|i - j| \geq 2$, on en déduit

$$e_{1n} = [X_1, [X_2, [X_3, \dots [X_{n-2}, [X_{n-1}, X_n]] \dots]].$$

Soit, par antisymétrie du crochet,

$$e_{1n} = (-1)^{n-2} [[\dots [[X_{n-1}, X_{n-2}], X_{n-3}], X_{n-4}] \dots, X_2], X_1] = (-1)^n W e_{1n}.$$

La dernière affirmation découle du même calcul, en remarquant

$$e_{ij} = [\dots [[X_i, X_{i+1}], X_{i+2}] \dots, X_{j-1}].$$

cqfd.

Nous allons, pour (D_1, D_2) une représentation irréductible générique, i.e. un $(D_1, D_2)_n$ pour n assez grand devant les diagrammes, expliciter les vecteurs de plus haut poids de niveau supérieur de $(D_1, D_2) \otimes \mathfrak{g}$. Soit v le vecteur de plus haut poids de $(D_1, D_2)_n$, et λ son poids. Pour $\alpha \leq h(D_1) + 1$, $\beta \geq n - h(D_2) - 1$, on sait qu'il existe un vecteur de plus haut poids de $(D_1, D_2) \otimes \mathfrak{g}$ de poids $\lambda + L_\alpha - L_\beta$ si et seulement si $\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1} \neq 0$ et $\lambda_\beta - \lambda_{\beta+1} \neq 0$. C'est ce vecteur que nous allons construire.

Notons $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ et $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ deux diagrammes de Young stricts ($\epsilon_{i+1} < \epsilon_i$), tels que $\epsilon_1 < \alpha$, $\eta_1 < n - \beta$. On note \mathcal{E} l'ensemble de ces couples de diagrammes, et

$$x_{\epsilon\eta} = [e_{\alpha\epsilon_1} [e_{\epsilon_1\epsilon_2} [e_{\epsilon_2\epsilon_3} [\dots [e_{\epsilon_{r-1}\epsilon_r} [e_{n-\eta_s, n-\eta_{s-1}} [e_{n-\eta_{s-1}, n-\eta_{s-2}} [\dots [e_{n-\eta_1, \beta}, v] \dots]] \otimes e_{\epsilon_r, n-\eta_1}$$

en autorisant le diagramme de Young vide:

$$\begin{aligned} x_{\epsilon\emptyset} &= [e_{\alpha\epsilon_1} [e_{\epsilon_1\epsilon_2} [\dots [e_{\epsilon_{r-1}\epsilon_r}, v] \dots]] \otimes e_{\epsilon_r, \beta} \\ x_{\emptyset\emptyset} &= v \otimes e_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

On note enfin

$$\begin{aligned} b(\epsilon) &= \prod_i (-\lambda_{\epsilon_i})^{-1} \\ c(\eta) &= \prod_i (-\lambda_{n-\eta_i})^{-1} \\ b'(\epsilon) &= b(\epsilon) \frac{\lambda_{\alpha-1}}{\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1}} \quad \text{si} \quad \epsilon_1 = \alpha - 1 \\ b'(\epsilon) &= b(\epsilon) \quad \text{sinon} \\ c'(\eta) &= c(\eta) \frac{\lambda_{\beta+1}}{\lambda_{\beta+1} - \lambda_\beta} \quad \text{si} \quad n - \eta_1 = \beta + 1 \\ c'(\eta) &= c(\eta) \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors

Proposition 28. *Le vecteur de plus haut poids w , de poids $\lambda + L_\alpha - L_\beta$ de $(D_1, D_2) \otimes \mathfrak{g}$, sous les conditions précédentes, est donné par la formule*

$$w = \sum_{(\epsilon, \eta) \in \mathcal{E}} b'(\epsilon) c'(\eta) x_{\epsilon, \eta}.$$

Preuve — Comme $b'(\emptyset)c'(\emptyset) \neq 0$, w est non nul. Il suffit dès lors de montrer que w est annulé par tous les X_k . Pour $k \in [\alpha, \beta - 1]$, on a $X_k x_{\epsilon, \eta} = 0$ quels que soient ϵ et η . Les cas $k < \alpha$ et $k > \beta - 1$ se déduisent l'un de l'autre par symétrie de la somme considérée par rapport à l'automorphisme W . Il suffit donc de montrer $X_k w = 0$ pour $k < \alpha$. On a alors, si un tel k est fixé, pour tout η ,

$$X_k \sum_{\epsilon \in \mathcal{D}} b'(\epsilon) x_{\epsilon, \emptyset} = 0,$$

où \mathcal{D} est l'ensemble des diagrammes de Young stricts $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ tels que $\epsilon_1 < \alpha$. Pour montrer ceci, on distingue entre

- $k < \alpha - 1$

Comme X_k commute à $\text{ad } e_{\alpha, \alpha-1}$, il suffit de montrer

$$X_k \sum_{\epsilon \in \mathcal{D}_*} b'(\epsilon) x_{\epsilon, \emptyset} = X_k \sum_{\epsilon \in \mathcal{D}_*} b(\epsilon) x_{\epsilon, \emptyset} = 0$$

avec

$$\mathcal{D}_* = \{\epsilon \in \mathcal{D} ; \epsilon_1 \neq \alpha - 1\}.$$

On pose alors

$$\mathcal{D}'_* = \{\epsilon \in \mathcal{D} \mid \forall i \epsilon_i \notin \{k, k+1\}\}$$

et, pour $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_*^1(i) &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \mid \epsilon_i = k, \epsilon_{i-1} \neq k+1, r > i\} \\ \mathcal{D}_*^2(i) &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \mid \epsilon_i = k+1, \epsilon_{i+1} \neq k, r > i\} \\ \mathcal{D}_*^3(i) &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \mid \epsilon_i = k+1, \epsilon_{i+1} = k, r > i+1\} \end{aligned}$$

où le nombre r présent dans ces définitions désigne la longueur de $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$. On note

$$\mathcal{D}_*(i) = \mathcal{D}_*^1(i) \cup \mathcal{D}_*^2(i) \cup \mathcal{D}_*^3(i).$$

A tout $\epsilon \in \mathcal{D}_*^1(i)$ on associe de façon évidente $\epsilon' \in \mathcal{D}_*^2(i)$, $\epsilon'' \in \mathcal{D}_*^3(i)$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-2}, \epsilon_{i-1}, k, \epsilon_{i+1}, \dots) \\ \epsilon' &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-2}, \epsilon_{i-1}, k+1, \epsilon_{i+1}, \dots) \\ \epsilon'' &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-2}, \epsilon_{i-1}, k+1, k, \epsilon_{i+1}, \dots). \end{aligned}$$

Ces correspondances sont bijectives :

$$\mathcal{D}_*^1(i) \simeq \mathcal{D}_*^2(i) \simeq \mathcal{D}_*^3(i).$$

De même, on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_*^{1f} &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \setminus \{\emptyset\} \mid \epsilon_r = k \text{ et } \epsilon_{r-1} \neq k+1\} \\ \mathcal{D}_*^{2f} &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \setminus \{\emptyset\} \mid \epsilon_r = k+1\} \\ \mathcal{D}_*^{3f} &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \setminus \{\emptyset\} \mid \epsilon_{r-1} = k+1 \text{ et } \epsilon_r = k\} \\ \mathcal{D}_*^f &= \mathcal{D}_*^{1f} \cup \mathcal{D}_*^{2f} \cup \mathcal{D}_*^{3f} \end{aligned}$$

et à $\epsilon \in \mathcal{D}_*^{1f}$ on associe $\epsilon' \in \mathcal{D}_*^{2f}$, $\epsilon'' \in \mathcal{D}_*^{3f}$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{r-1}, k) \\ \epsilon' &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{r-1}, k+1) \\ \epsilon'' &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{r-1}, k+1, k). \end{aligned}$$

On a encore

$$\mathcal{D}_*^{1f} \simeq \mathcal{D}_*^{2f} \simeq \mathcal{D}_*^{3f},$$

et

$$\mathcal{D}'_* \cup \mathcal{D}_*^{1f} \cup \mathcal{D}_*^{2f} \cup \mathcal{D}_*^{3f} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{D}_*^j(i)$$

forme une partition de \mathcal{D}_* . On vérifie aisément que

$$X_k(b(\epsilon)x_{\epsilon, \emptyset} + b(\epsilon')x_{\epsilon', \emptyset} + b(\epsilon'')x_{\epsilon'', \emptyset}) = 0$$

pour $\epsilon \in \mathcal{D}_*^1(i)$ ou $\epsilon \in \mathcal{D}_*^{1f}(i)$ et, comme pour $\epsilon \in \mathcal{D}'_*$, on a $X_k x_{\epsilon, \emptyset} = 0$, on en déduit $X_k w = 0$.

- $k = \alpha - 1$

On introduit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^1 &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \mid r \geq 1 \text{ et } \epsilon_1 \neq \alpha - 1\} \\ \mathcal{D}^2 &= \{\epsilon \in \mathcal{D} \mid r \geq 2 \text{ et } \epsilon_1 = \alpha - 1\}. \end{aligned}$$

A tout $\epsilon \in \mathcal{D}^1$ on associe bijectivement $\epsilon' \in \mathcal{D}^2$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots) \\ \epsilon' &= (\alpha - 1, \epsilon_1, \dots). \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathcal{D}^1 \cup \mathcal{D}^2 \cup \{(\alpha - 1)\} \cup \{\emptyset\}$$

forme une partition de \mathcal{D} . Mais, pour tout $\epsilon \in \mathcal{D}^1$,

$$X_{\alpha-1}(b'(\epsilon)x_{\epsilon, \emptyset} + b'(\epsilon')x_{\epsilon', \emptyset})$$

et

$$X_{\alpha-1}(b'((\alpha - 1))x_{\alpha-1, \emptyset} + b'(\emptyset)x_{\emptyset, \emptyset}) = 0$$

d'où $w \in \text{Ker} X_{\alpha-1}$.

cqfd.

En dualisant, on peut obtenir une formule similaire pour les vecteurs de plus haut poids de niveau strictement inférieur. Les vecteurs de plus haut poids correspondant aux copies de $(D_1, D_2)_n$ dans $(D_1, D_2)_n \otimes \mathfrak{g}$ peuvent également s'exprimer par une formule similaire, mais cela ne nous intéresse pas ici.

2.5 Module superficiel

On rappelle que pour n assez grand, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est de type \mathcal{Z}_n (cf. I.1.4), c'est-à-dire que

$$Sp(-t_{12}) = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\}.$$

On note $P_\lambda(-t_{12})$ les projecteurs sur les espaces propres correspondants. On a alors, suivant [39] p. 156,

$$\begin{aligned} P_1(X) &= (n^2 - 1)^{-1}(2n^2 X^4 - n^2 X^3 - 2X^2 + X) \\ P_{\frac{1}{2}}(X) &= -16(n^2 - 4)^{-1}(n^2 X^4 - n^2 X^3 - X^2 + X) \\ P_0(X) &= -2n^2 X^4 + 3n^2 X^3 - (n^2 - 2)X^2 - 3X + 1 \\ P_{\frac{\epsilon}{n}}(X) &= 2^{-1}n^3((n - \epsilon)(n - 2\epsilon))^{-1}(2nX^4 - (3n - 2\epsilon)X^3 + (n - 3\epsilon)X^2 + \epsilon X). \end{aligned}$$

On considère ici $\mathbb{C}\text{Surf}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{g})$, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Avec les notations de I.2.6.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\text{Surf}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{g}) &= \bigoplus U_{D_1, D_2}^p \\ t(D_1) &= p \\ t(D_2) &= p \end{aligned}$$

Comme remarqué en I.2.6.3, U_{D_1, D_2}^p s'identifie à l'espace des vecteurs de plus haut poids de $V^{\otimes p}$ de poids (D_1, D_2) . D'après P. Hanlon [44], on a un isomorphisme

$$\Phi : S^{D_1} \otimes S^{D_2} \rightarrow U_{D_1, D_2}^p.$$

Plus précisément, si l'on note provisoirement M^D pour D un diagramme de Young le \mathfrak{S}_n -module de permutation associé, on a un isomorphisme encore noté Φ

$$\Phi : M^{D_1} \otimes M^{D_2} \rightarrow W_{D_1, D_2}^p$$

où W_{D_1, D_2}^p désigne l'espace des vecteurs de $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ de poids (D_1, D_2) . Si l'on note A et B deux tabloïdes (cf. [14]) de formes respectives D_1 et D_2 , on note $r_A(m)$ (resp. $r_B(m)$) pour m dans $\{1, \dots, p\}$ la ligne de A (resp. B) qui contient m . Dans le cas qui nous intéresse, le deuxième isomorphisme est explicitement donné par

$$\Phi(A \otimes B) = \bigotimes_{k=1}^p e_{r_A(k), r_B(k)}.$$

La propriété remarquable est alors

Proposition. (Hanlon, [44]) *L'image par Φ de $S^{D_1} \otimes S^{D_2}$ est égale à $U_{(D_1, D_2)}^p$.*

Si l'on utilise l'identification $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \simeq V \otimes V^*$, avec $V = \mathbb{C}^n$, $e_{a,b} \in \mathfrak{g}$ correspond à $e_a \otimes e_b^*$. Ainsi,

$$\mathfrak{g}^{\otimes p} \simeq V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes p}$$

et

$$\Phi(A \otimes B) = \left(\bigotimes_{k=1}^p e_{r_k(A)} \right) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^p e_{n-r_k(B)}^* \right).$$

Si l'on fait agir \mathfrak{S}_p par permutation sur $V^{\otimes p}$ et $(V^*)^{\otimes p}$, l'action de $s \in \mathfrak{S}_p$ sur $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ s'écrit alors $s \otimes s$. D'autre part, l'action de $2nt_{12}$ sur

$$\mathfrak{g}^{\otimes 2} \simeq V^{\otimes 2} \otimes (V^*)^{\otimes 2}$$

s'écrit suivant El Houari [39] p. 108 formule (11)

$$(1 \ 2) \otimes Id + Id \otimes (1 \ 2) + \psi$$

avec ψ s'annulant sur les vecteurs

$$e_i \otimes e_j \otimes e_k^* \otimes e_l^*$$

tels que $j \neq k$ et $i \neq l$. On en déduit que pour n assez grand, sur

$$W_{(D_1, D_2)}^p \simeq M^{D_1} \otimes M^{D_2},$$

l'action de $2nt_{ij}$ s'écrit

$$(i \ j) \otimes Id + Id \otimes (i \ j)$$

soit

Proposition 29. *Le \mathfrak{B}_p -module $U_{(D_1, D_2)}^p$ pour $t(D_1) = t(D_2) = p$ est isomorphe pour n assez grand au produit tensoriel de $(D_1)_{\frac{1}{2n}, \frac{-1}{2n}}$ par $(D_2)_{\frac{1}{2n}, \frac{-1}{2n}}$.*

Chapitre 3

L'algèbre de Lie des transpositions

Soit k un corps de caractéristique 0. Pour $n \geq 1$, on considère le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , et son algèbre de groupe $k\mathfrak{S}_n$. C'est une algèbre associative, on peut donc la munir d'un crochet

$$[a, b] := ab - ba.$$

On note \mathcal{H}_n la sous-algèbre de Lie de $k\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions.

A partir de maintenant, et à l'exception de la section III.3.1.2, on suppose que $k = \mathbb{C}$. Pour une partition α de n , on rappelle que l'on note α' la partition duale et S^α le module de Specht associé à α . L'action naturelle de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ sur S^α définit une représentation de \mathcal{H}_n encore notée S^α . Cette représentation est *irréductible*, car tout sous-espace \mathcal{H}_n -stable de S^α est un sous-espace de S^α stable par les transpositions, qui engendrent \mathfrak{S}_n , donc par tout le groupe \mathfrak{S}_n .

Le \mathcal{H}_n -module S^α est simple, donc $\bigoplus_{\alpha \vdash n} S^\alpha$ est semi-simple. De plus, comme cette représentation est la restriction à \mathcal{H}_n de la représentation régulière de \mathfrak{S}_n , qui est fidèle, elle est fidèle et de dimension finie sur \mathbb{C} , donc on déduit de la théorie générale des algèbres de Lie (cf. Bourbaki [4] §6 no. 4, proposition 5) que l'algèbre de Lie \mathcal{H}_n est *réductive*. Enfin, \mathcal{H}_n est stable par conjugaison pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: l'action par conjugaison de \mathfrak{S}_n sur son algèbre de groupe se restreint donc à \mathcal{H}_n .

Cette dernière remarque permet de construire une algèbre de Hopf \mathcal{S}_n , quotient de \mathfrak{B}_n et définie comme le produit semi-direct de \mathfrak{S}_n par l'algèbre enveloppante de \mathcal{H}_n pour l'action par conjugaison. Ce chapitre peut être ainsi considéré comme une étude préliminaire de ce quotient élémentaire de l'algèbre des tresses infinitésimales, que nous poursuivront en III.4.7.

D'autre part, la proposition 29 de III.2.5 se reformule en disant que l'action de \mathfrak{B}_n sur le module superficiel de $\mathfrak{g}^{\otimes p}$, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ et $n \gg p$, se factorise par \mathcal{S}_p . L'étude de cette algèbre de Lie est alors également motivée de ce point de vue.

3.1 Etude combinatoire

3.1.1 Lemmes préliminaires

Lemme 18. *Si $n \geq 2$, \mathcal{H}_n est incluse dans la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ engendrée par*

$$\{\sigma - \epsilon(\sigma)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Preuve — Si $s = (i j)$, $s - \epsilon(s^{-1}) = 2s = (i j)$. Les transpositions appartiennent donc à l'espace vectoriel engendré par $\{s - \epsilon(s^{-1}) \mid s \in \mathfrak{S}_n\}$. D'autre part, cet espace est bien stable par crochet : si l'on pose $h(s) = s - \epsilon(s)s^{-1}$, on a, pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$[h(s), h(\tau)] = h(s\tau) - h(\tau s) - \epsilon(\tau)h(s\tau^{-1}) + \epsilon(\tau)h(\tau^{-1}s).$$

cqfd.

Lemme 19. *Si $n \geq 2$, \mathcal{H}_n est engendrée comme algèbre de Lie par les éléments $s_i = (i i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.*

Preuve — Pour $s \in \mathfrak{S}_n$, on définit $ad(s)$ et $Ad(s)$ dans $End(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ par $ad(s)(x) = [s, x]$ et $Ad(s)(x) = sxs^{-1}$. Si $s^2 = 1$, $ad(s) \circ ad(s) = 2 - 2Ad(s)$. Or

$$\begin{aligned} (i j) &= s_i s_{i+1} s_{i+2} \dots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \dots s_{i+1} s_i \\ &= Ad(s_i) \circ Ad(s_{i+1}) \circ \dots \circ Ad(s_{j-2})(s_{j-1}) \\ &= 2^{i+1-j} (2 - ad(s_i)^2) \circ \dots \circ (2 - ad(s_{j-2})^2)(s_{j-1}) \end{aligned}$$

est bien engendré par les s_i .

cqfd.

3.1.2 Exemple de \mathcal{H}_3

On considère dans cette section \mathcal{H}_3 comme étant définie sur $k = \mathbb{Q}$.

On constate facilement que \mathcal{H}_3 est de dimension 4 sur \mathbb{Q} , engendrée en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel par

$$\begin{aligned} A &= (1 2) & B &= (1 3) \\ C &= (2 3) & D &= (1 2 3) - (3 2 1). \end{aligned}$$

On obtient pour relations

$$\begin{aligned} [A, B] &= -D & [A, D] &= 2(C - B) \\ [A, C] &= D & [B, D] &= 2(A - C) \\ [B, C] &= -D & [C, D] &= 2(B - A). \end{aligned}$$

Le centre est alors engendré par $A + B + C = (1 2) + (1 3) + (2 3)$. On peut décomposer $\mathcal{H}_3 = \mathbb{Q} \times \mathcal{H}'_3$, avec \mathcal{H}'_3 partie semi-simple engendrée par $R = A - B$, $S = A + B - 2C$, $D = D$. Les relations sont

$$\begin{aligned} [D, R] &= 2S \\ [D, S] &= -6R \\ [R, S] &= -6D \end{aligned}$$

Si l'on pose, dans $\mathcal{H}'_3 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$,

$$\bar{S} = \frac{S}{6}, \quad \bar{R} = \frac{R}{2\sqrt{3}}, \quad \bar{D} = \frac{D}{2\sqrt{3}},$$

on a

$$\begin{aligned} [\bar{D}, \bar{R}] &= \bar{S} \\ [\bar{D}, \bar{S}] &= -\bar{R} \\ [\bar{R}, \bar{S}] &= -\bar{D} \end{aligned}$$

Par comparaison de ces relations avec un système classique de constantes de structures de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (cf. [9] p. 143) on en déduit

$$\mathcal{H}'_3 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}).$$

En fait, cette algèbre est déployée sur \mathbb{Q} , et $\mathcal{H}'_3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q})$. On obtient directement cet isomorphisme à partir de la représentation irréductible de dimension 2 de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_3$: les images de $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ et $[(1\ 2), (2\ 3)]$ sont en effet de trace nulle, et linéairement indépendantes.

3.1.3 Détermination du centre de \mathcal{H}_n

On fixe $n \geq 2$.

Soit λ une partition de n . On rappelle que de telles partitions paramétrisent naturellement les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n . En particulier, les transpositions appartiennent à la classe de conjugaison correspondant à $[2, 1^{n-2}]$. On note alors Ψ_λ la forme linéaire définie sur $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ pour $s \in \mathfrak{S}_n$ par $\Psi_\lambda(s) = 1$ si s admet λ pour classe de conjugaison, $\Psi_\lambda(s) = 0$ sinon. (Les Ψ_λ forment évidemment une base des fonctions centrales \mathfrak{S}_n .)

On considère l'ensemble des suites finies non vides d'éléments de $\{1, \dots, n-1\}$, que l'on note \mathcal{P} . Pour $E = (i_1, \dots, i_r) \in \mathcal{P}$, on note $l(E) = r$ sa longueur. Si $E = (i)$ est une suite de longueur 1, on pose $s_E = s_i \in \mathcal{H}_n$ et, si $E = (i_1, \dots, i_r)$ avec $r \geq 2$, on définit par récurrence $s_E = [s_{i_1}, s_{E'}] \in \mathcal{H}_n$ pour $E' = (i_2, \dots, i_r) \in \mathcal{P}$. Il est clair d'après le lemme 19 que l'ensemble des s_E pour $E \in \mathcal{P}$ forme une famille génératrice du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{H}_n . On a alors

Lemme 20. *Si $E \in \mathcal{P}$ est de longueur supérieure ou égale à 2, pour toute partition λ de n on a $\Psi_\lambda([s_E]) = 0$.*

Preuve — Si $l(E) > 1$, on peut écrire $s_E = [b, s_F]$, où b est une transposition, d'où $s_E = bs_F - s_Fb$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $sb - bs$, pour $s \in \mathfrak{S}_n$. Mais $sb = bbsb = b(bs)b^{-1}$, donc sb et bs sont conjugués, c'est-à-dire de même type, d'où $\Psi_\lambda(sb) = \Psi_\lambda(bs)$, et $\Psi_\lambda(s_E) = 0$. cqfd.

Lemme 21. *Le centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ admet pour base les éléments T_λ , où, si $\lambda \vdash n$, T_λ est la somme des éléments de \mathfrak{S}_n de classe de conjugaison λ .*

Preuve — Pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$, $sT_\lambda s^{-1} = T_\lambda$, d'où $[s, T_\lambda] = 0$ et T_λ appartient au centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Inversement, si T est un élément central de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, on doit avoir, pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$, $[s, T] = 0$, soit $sTs^{-1} = T$. En particulier, si s est conjugué à τ , $s^*(T) = \tau^*(T)$, donc T est bien combinaison linéaire des T_λ . cqfd.

Proposition 30. *Le centre de \mathcal{H}_n est de dimension 1, engendré par la somme T_n de toutes les transpositions.*

Preuve — Si T est un élément central de \mathcal{H}_n , T commute en particulier aux transpositions, donc pour toute transposition s , $sT = Ts$. On en déduit que pour toute permutation $sT = Ts$, comme les transpositions engendrent \mathfrak{S}_n , T appartient au centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.

D'après le lemme 21, on écrit donc $T = \sum_{\lambda \vdash p} u_\lambda T_\lambda$, d'où $\Psi_\lambda(T) = u_\lambda n_\lambda$ avec n_λ le cardinal de la classe de conjugaison associée à λ . Mais on peut également écrire

$$T = \sum \alpha_E s_E = \sum_{l(E) > 1} \alpha_E s_E + \sum_i \beta_i s_i,$$

les coefficients α_E étant presque tous nuls. D'après le lemme 20, on a, pour tout $\lambda \vdash n$, $\psi_\lambda(s_E) = 0$ dès que $l(E) > 1$, d'où, si $\lambda \neq [2, 1^{n-2}]$, $0 = \Psi_\lambda(T) = n_\lambda u_\lambda$, soit $u_\lambda = 0$ et $T = u_{[2, 1^{n-2}]} T_n$. cqfd.

Remarque. Le raisonnement utilisé ici pour \mathcal{H}_n se généralise immédiatement de la façon suivante. On fixe un groupe fini G , et un corps k de caractéristique 0. Soit s_1, \dots, s_m une famille de générateurs de G , et L la sous-algèbre de Lie de kG engendrée par s_1, \dots, s_m . Le cas étudié ici est $G = \mathfrak{S}_n$ et $k = \mathbb{C}$. L'action de L sur tout G -module simple est alors irréductible, et $\text{End}(kG)$ est une représentation semi-simple fidèle de L . D'après Bourbaki [4] §6 no. 4 on en déduit que L est réductive. Si l'on suppose de plus que les générateurs s_1, \dots, s_m choisis appartiennent à une même classe de conjugaison, on peut introduire l'élément T de kG qui est somme de tous les éléments de cette classe de conjugaison. Si $T \in L$, le centre de L est kT , sinon L n'a pas de centre et est une algèbre de Lie semi-simple.

3.1.4 Exemple de \mathcal{H}_4

On définit, dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}_4$, les éléments suivants :

$$\begin{aligned} A &= (1\ 2) & B &= (1\ 3) & C &= (2\ 3) \\ D &= (1\ 4) & E &= (2\ 4) & F &= (3\ 4) \\ X &= (1\ 2\ 3) - (3\ 2\ 1) & Y &= (2\ 3\ 4) - (4\ 3\ 2) \\ Z &= (1\ 2\ 4) - (4\ 2\ 1) & T &= (1\ 3\ 4) - (4\ 3\ 1) \\ U &= (1\ 2\ 3\ 4) + (4\ 3\ 2\ 1) - (1\ 2\ 4\ 3) - (3\ 4\ 2\ 1) \\ V &= (1\ 3\ 2\ 4) + (4\ 2\ 3\ 1) - (1\ 3\ 4\ 2) - (2\ 4\ 3\ 1). \end{aligned}$$

Les éléments A, B, \dots, F sont dans \mathcal{H}_4 par définition. $X = [(1\ 2) - (2\ 3)]$ est déjà dans \mathcal{H}_3 . Les éléments Y, Z et T sont ses conjugués. U est égal à $[(1\ 2), (2\ 3)], (3\ 4)]$. V est le conjugué de U par $(2\ 3)$. Tous ces éléments sont donc dans \mathcal{H}_4 . Nous allons montrer qu'ils en forment une base.

Comme \mathcal{H}_4 est inclus dans le sous-espace vectoriel engendré par

$$\{s - \epsilon(s^{-1})s^{-1} \mid s \in \mathfrak{S}_4\},$$

\mathcal{H}_4 est engendré par des combinaisons linéaires de cycles (si s est produit de deux transposition disjointes, $s^{-1} = s$ et $\epsilon(s) = 1$ d'où $s - \epsilon(s)s^{-1} = 0$).

D'autre part, tous les $s - \epsilon(s)s^{-1}$, pour $s \in \mathfrak{S}_4$ un 3-cycle ou un 2-cycle, sont dans \mathcal{H}_4 d'après ce qui précède. Un élément quelconque $h \in \mathcal{H}_4$ est donc combinaison linéaire de 2-cycles, d'éléments de la forme $s - \epsilon(s)s^{-1} = 0$ pour un 3-cycle σ , et d'un terme H combinaison linéaire de 4-cycles.

L'espace des 4-cycles de \mathfrak{S}_4 est de dimension $\#\mathfrak{S}_3 = 6$. Comme, pour tout 4-cycle σ , on a $s \neq s^{-1}$, l'espace engendré par les éléments $s - \epsilon(s)s^{-1}$, avec σ un 4-cycle, est de dimension 3. Enfin, pour $\lambda = [4]$, $\Psi_\lambda(s - \epsilon(s)s^{-1}) = \Psi_\lambda(s + s^{-1}) = 2$, donc Ψ_λ est une forme linéaire non

nulle sur cet espace à trois dimensions. Comme elle annule tous les éléments de \mathcal{H}_4 , l'espace des combinaisons linéaires de 4-cycles dans \mathcal{H}_4 est au plus de dimension 2, donc est engendré par U et V . On en déduit

$$\dim \mathcal{H}_4 = 12.$$

Si l'on note $\mathcal{H}'_4 = [\mathcal{H}_4, \mathcal{H}_4]$, $\dim \mathcal{H}'_4 = 11$. \mathcal{H}'_4 est donc une algèbre de Lie semi-simple de dimension 11. Or les seules algèbres de Lie simples de dimension inférieure à 11 sont

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) &= \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 3 \\ &\quad \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 8 \\ \mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) &= \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 10. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathcal{H}_4 \simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}).$$

3.2 Représentations

Nous fixons $n \geq 2$, et entamons ici une étude, qui sera poursuivie en III.4.7, des représentations de \mathcal{H}_n .

3.2.1 La représentation régulière de \mathcal{H}_n

On a un morphisme d'algèbres associatives $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \rightarrow \bigoplus_{\alpha \vdash n} \text{End}(S^\alpha)$ qui induit un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \rightarrow \bigoplus_{\alpha \vdash n} \mathfrak{gl}(S^\alpha)$ donc une injection d'algèbres de Lie $\Phi : \mathcal{H}_n \rightarrow \bigoplus_{\alpha \vdash n} \mathfrak{gl}(S^\alpha)$.

Pour $\beta \vdash p$, on note π_β la projection de $\bigoplus_{\alpha \vdash p} \mathfrak{gl}(S^\alpha)$ sur $\mathfrak{gl}(S^\alpha)$. On note alors $\Phi_\beta = \pi_\beta \circ \Phi$, et pour $\beta_1, \beta_2 \vdash p$, $\beta_1 \neq \beta_2$, on note $\Phi_{\beta_1, \beta_2} = (\pi_{\beta_1} \times \pi_{\beta_2}) \circ \Phi$.

Lemme 22. *Si $\alpha \neq \alpha'$, il existe un morphisme d'algèbres de Lie D_α tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n & \xrightarrow{\Phi_{\alpha, \alpha'}} & \mathfrak{gl}(S^\alpha) \times \mathfrak{gl}(S^{\alpha'}) \\ & \searrow \Phi_\alpha & \nearrow D_\alpha \\ & & \mathfrak{gl}(S^\alpha) \end{array}$$

Preuve — On a sur S^α un produit scalaire \mathfrak{S}_n -invariant, pour lequel tout $(i j)$ est donc unitaire et involutif, en particulier autoadjoint. Sur une base orthonormée pour ce produit scalaire, la matrice de $\Phi_{\alpha, \alpha'}((i j))$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{pmatrix}$$

avec $B_{ij} = -A_{ij}$, et $B_{ij} = {}^t B_{ij}$, $A_{ij} = {}^t A_{ij}$, d'où $B_{ij} = -{}^t A_{ij}$. Sur ces bases, on pose

$$D_\alpha(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A \end{pmatrix}$$

qui est un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(S^\alpha) \rightarrow \mathfrak{gl}(S^\alpha) \times \mathfrak{gl}(S^{\alpha'})$. On a alors $\Phi_{\alpha, \alpha'} = D_\alpha \Phi_\alpha$ sur les transpositions, donc sur \mathcal{H}_n . cqfd.

On note \mathcal{D}_n l'ensemble des partitions de n . On a sur \mathcal{D}_n une relation d'équivalence définie par l'involution $\alpha \mapsto \alpha'$, qui est notée \sim . On déduit du lemme précédent que l'on a une injection

$$\Phi' : \mathcal{H}_n \rightarrow \bigoplus_{a \in \mathcal{D}_n / \sim} \mathfrak{gl}(S^a)$$

et même

$$\Phi'' : \mathcal{H}_n \hookrightarrow \mathbb{C} \times \bigoplus_{a \in \mathcal{D}_n / \sim} \mathfrak{sl}(S^a).$$

Ce morphisme définit une représentation semi-simple fidèle de \mathcal{H}_n . Nous l'appellerons la *représentation régulière* de \mathcal{H}_n .

3.2.2 Représentations en équerres

Il est classique que, pour l'action du groupe symétrique, les représentations en équerres sont des puissance alternées de la représentation standard, qui est la représentation de \mathfrak{S}_n associée à la partition $[n-1, 1]$ de n . Nous commençons par étudier cette dernière.

Si l'on note $E = \mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique e_1, \dots, e_n , on peut faire agir \mathfrak{S}_n sur V par permutation des vecteurs de base, selon la formule $s.e_i = e_{s(i)}$, pour tout $s \in \mathfrak{S}_n$. On note $\varphi \in E^*$ la forme linéaire définie par $\varphi(e_i) = 1$ pour tout $i \in [1, n]$. Il est connu que $V = \text{Ker } \varphi$, sous-espace \mathfrak{S}_n -stable de E , s'identifie à la représentation standard de \mathfrak{S}_n , et correspond donc à la partition $[n-1, 1]$. Une base de V est donnée par w_2, \dots, w_n , avec

$$w_r = (1-r)e_r + \sum_{i < r} e_i,$$

et l'action des éléments de Jucys-Murphy $J_k = \sum_{i < k} (i \ k)$ est donnée par

$$\begin{cases} J_k w_r &= (k-2)w_r & \text{si } r < k \\ J_k w_k &= -w_k \\ J_k w_r &= (k-1)w_r & \text{si } r > k. \end{cases}$$

On a alors diagonalisé simultanément les éléments de Jucys-Murphy. Pour $n \geq 4$, il est clair d'après ces formules que les images de J_2, \dots, J_n engendrent un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, qui est exactement l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{gl}(V)$ dans la base choisie. On note $E_{i,j}$ pour $i, j \in [2, n]$ l'endomorphisme de V défini par $E_{i,j} w_r = \delta_{jr} w_i$. Chaque $E_{k,k}$ est ainsi dans l'image de \mathcal{H}_n . D'autre part, l'action des générateurs de Coxeter $s_k = (k \ k+1)$ est donnée par

$$\begin{cases} s_k w_r &= w_r \text{ si } r \notin \{k, k+1\} \\ s_k w_k &= \frac{1}{k} w_k + \frac{k-1}{k} w_{k+1} \\ s_k w_{k+1} &= \frac{k+1}{k} w_k - \frac{1}{k} w_{k+1}. \end{cases}$$

On peut alors écrire $E_{k,k+1}$ et $E_{k+1,k}$, pour $k \in [2, n-1]$, comme combinaison linéaire de s_k , $[s_k, E_{k,k}]$, et d'un élément de la diagonale. Comme ces éléments engendrent $\mathfrak{gl}(V)$, l'image de \mathcal{H}_n est $\mathfrak{gl}(V)$. On a donc montré

Lemme 23. *Pour $n \geq 4$, l'image de \mathcal{H}_n dans $\text{End}(S^{[n-1,1]})$ est égale à $\mathfrak{gl}(S^{[n-1,1]})$, c'est-à-dire à $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.*

On peut alors en déduire

Proposition 31. *Soit $n \geq 4$. Pour $r \leq n$, on a des isomorphismes de \mathcal{H}_n -modules*

$$\Lambda^r S^{[n-1,1]} \simeq X_r \otimes S^{[n-r,1^r]}$$

où X_r est une représentation de dimension 1 de \mathcal{H}_n , et l'image de \mathcal{H}_n dans $\text{End}(S^{[n-r,1^r]})$ est isomorphe à $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Preuve — La représentation $S^{[n-1,1]}$ de \mathcal{H}_n se prolonge en la représentation $[n-1, 1]_{1,-1}$ de \mathfrak{B}_n . La première assertion découle donc du corollaire du théorème 2 (II.1.5). La dernière affirmation est alors une conséquence du lemme précédent. cqfd.

3.2.3 Représentations autoduales

Nous ferons apparaître plus loin un certain nombre de facteurs linéaires de \mathcal{H}_n , pour tout $n \geq 1$. Nous venons d'ailleurs d'exhiber un morphisme surjectif de \mathcal{H}_n vers $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Pour faire apparaître des facteurs orthogonaux ou symplectiques, il suffit de considérer des partitions autoduales, comme le montre la proposition suivante et le confirmera l'exemple de \mathcal{H}_6 et de la représentation associée à la partition $[3, 2, 1]$, en III.3.3.

Proposition 32. *Soit α une partition autoduale de n . On note*

$$r = \frac{t(\alpha) - b(\alpha)^2}{2}$$

où $b(\alpha)$ désigne la longueur de la diagonale du diagramme de Young associé à α . Alors, si l'on note $\mathcal{H}_n(\alpha)$ l'image de \mathcal{H}_n dans $\text{End}(S^\alpha)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(\alpha) &\subset \mathfrak{so}(S^\alpha) & \text{si } r \equiv 0 \pmod{2} \\ \mathcal{H}_n(\alpha) &\subset \mathfrak{sp}(S^\alpha) & \text{si } r \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Preuve — On note \langle , \rangle un produit-scalaire \mathfrak{S}_n -invariant sur S^α . Il est classique que $\alpha = \alpha'$ si et seulement si S^α est unitairement équivalente à $S^\alpha \otimes S^\epsilon$, c'est-à-dire qu'il existe $M \in GL(S^\alpha)$ unitaire tel que

$$M\sigma M^{-1} = \epsilon(\sigma)\sigma.$$

Ainsi M et tM constituent deux morphismes de \mathfrak{S}_n -modules de S^α vers $S^\alpha \otimes S^\epsilon$, donc

$$M^{-1}{}^tM \in \text{End}_{\mathfrak{S}_n}(S^\alpha) = \mathbb{C}Id.$$

On a donc $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que ${}^tM = \lambda M$, et

$$M = {}^t({}^tM) = {}^t(\lambda M) = \lambda {}^tM = \lambda^2 M$$

d'où $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$ et, comme M est unitaire,

$$M^2 = \lambda M {}^tM = \lambda = \pm 1.$$

On note $(u, v) = \langle u, Mv \rangle$ la forme bilinéaire non dégénérée associée à M sur S^α . Elle vérifie alors, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\begin{aligned} (\sigma u|v) &= \langle \sigma u, Mv \rangle = \langle u, \sigma^{-1} Mv \rangle \\ &= \epsilon(\sigma) \langle u, M\sigma^{-1}v \rangle = \epsilon(\sigma)(u|\sigma^{-1}v) \end{aligned}$$

et en particulier, si s est une transposition,

$$(su|v) + (u|sv) = 0.$$

Toute transposition donc tout élément de \mathcal{H}_n a ainsi pour image un élément de $\mathfrak{sp}(S^\alpha)$ (resp. $\mathfrak{so}(S^\alpha)$) si $M^2 = -1$ (resp. $M^2 = 1$). $M^2 = 1$ signifie que la forme bilinéaire $(|)$ est symétrique, $M^2 = -1$ qu'elle est antisymétrique.

Soient maintenant u et u' deux vecteurs de la base de Young correspondant à des tableaux de Young standard transposés l'un de l'autre, D et D' ; soit de plus σ un produit de transpositions disjointes tel que $\sigma D = D'$ pour l'action par permutation de \mathfrak{S}_n sur les tableaux. On peut voir de plusieurs façons (par la théorie des polytabloïdes, ou en utilisant les modèles explicites de Young) qu'alors

$$u'^* \sigma u \neq 0.$$

Pour v un autre des vecteurs de la base de Young, on a pour $2 \leq r \leq n$

$$(su|v) = -(u|sv) \Rightarrow (J_r u|v) = -(u|J_r v).$$

Si l'on note $J_r u = u_r u$ et $J_r v = v_r v$, on a en conséquence

$$(u|v) = 0 \text{ ou } \forall r \ u_r = -v_r$$

c'est-à-dire $Mu \in \mathbb{C}u'$ et $Mv \in \mathbb{C}v'$. En regroupant ces deux aspects on obtient

$$\begin{aligned} (u'|u) &= \frac{1}{\langle \sigma u, u' \rangle} (\sigma u|u) \\ &= \frac{\epsilon(\sigma)}{\langle \sigma u, u' \rangle} (u|\sigma u) \\ &= \epsilon(\sigma)(u|u'). \end{aligned}$$

Enfin $\epsilon(\sigma) = (-1)^r$ avec

$$r = \frac{t(\alpha) - b(\alpha)^2}{2}$$

ce qui permet de conclure.

cqfd.

3.3 Décomposition de \mathcal{H}_5 , \mathcal{H}_6

On cherche ici à déterminer les facteurs simples de \mathcal{H}_5 et \mathcal{H}_6 . On a

$$\begin{aligned} \dim[5] &= 1 \\ \dim[4, 1] &= 4 \\ \dim[3, 2] &= 5 \\ \dim[3, 1, 1] &= 6, \end{aligned}$$

et on peut déterminer à l'aide du logiciel MAPLE la dimension de l'image de \mathcal{H}_5 dans $S^{[5]} \oplus S^{[4,1]} \oplus S^{[3,2]} \oplus S^{[3,1,1]}$, c'est-à-dire la dimension de \mathcal{H}_5 , qui est de 40.

D'autre part on détermine de la même façon que l'image de \mathcal{H}_5 dans $S^{[5]} \oplus S^{[4,1]} \oplus S^{[3,2]}$ est également de dimension 40, donc \mathcal{H}_5 s'injecte dans $\mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$. Par égalité des dimensions, on en déduit

$$\mathcal{H}_5 \simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}).$$

D'autre part, l'image de \mathcal{H}_5 dans $\mathfrak{gl}(S^{[3,1,1]}) = \mathfrak{gl}_6(\mathbb{C})$ est de dimension

$$15 = \dim \mathfrak{so}_6(\mathbb{C}) = \dim \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}).$$

$S^{[3,1,1]}$ est alors une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$, donc isomorphe à $A \otimes B$ où A (resp. B) est une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$). Comme chacune de ces algèbres de Lie n'a pas de représentation irréductible de dimension 2 ou 3, et qu'il n'y a pas de représentation irréductible de dimension 6 de $\mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$, on en déduit que c'est la représentation standard de $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C})$ déduite de l'un des isomorphismes $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$.

De la même façon que pour \mathcal{H}_5 , on détermine la dimension de \mathcal{H}_6 , qui est de 249. Comme l'image de \mathcal{H}_6 dans

$$\mathbb{C} \times \mathfrak{sl}(S^{[5,1]}) \times \mathfrak{sl}(S^{[4,2]}) \times \mathfrak{sl}(S^{[3,3]}) \times \mathfrak{sl}(S^{[3,2,1]})$$

est également de dimension 249, on en déduit

$$\mathcal{H}_6 \simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_9(\mathbb{C}) \times \mathfrak{so}_{16}(\mathbb{C}).$$

Dans le cas de \mathcal{H}_5 , de dimension 40, on peut facilement obtenir une base. On a d'abord

$$\begin{aligned} \binom{5}{2} &= 10 \quad \text{transpositions,} \\ \binom{5}{3} &= 10 \quad \text{conjugués de } (1\ 2\ 3) - (3\ 2\ 1) \in \mathcal{H}_3 \\ \binom{5}{4} &= 5 \quad \text{conjugués de } U \in \mathcal{H}_4 \\ \binom{5}{4} &= 5 \quad \text{conjugués de } V \in \mathcal{H}_4. \end{aligned}$$

Il reste donc dix éléments à déterminer pour former une base, chacun portant sur cinq lettres. On note

$$\begin{aligned} Y &= [([(12), (23)], (34)], (45)] \\ &= (12543) - (12453) - (12354) + (12345) - (14532) + (15432) + (13542) - (13452). \end{aligned}$$

Par conjugaison, on obtient

$$\begin{aligned}
Y' &= (13)Y(13) \\
&= (13254) - (13245) - (15432) + (14532) - (12345) + (12354) + (15423) - (14523) \\
Y'' &= (35)Y(35) \\
&= (12345) - (12435) - (12534) + (12543) - (14352) + (13452) + (15342) - (15432) \\
Y''' &= (24)Y(24) \\
&= (14523) - (14253) - (14352) + (14325) - (12534) + (15234) + (13524) - (13254) \\
Y^{(4)} &= (14)Y(14) \\
&= (13425) - (15342) - (14235) + (15423) - (15324) + (13245) + (12435) - (15243) \\
Y^{(5)} &= (25)Y(25) \\
&= (15243) - (15423) - (15324) + (15342) - (14235) + (12435) + (13245) - (13425) \\
Y^{(6)} &= (15)Y(15) \\
&= (14352) - (13524) - (14523) + (15234) - (13254) + (14325) + (14253) - (12534),
\end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que ces éléments sont linéairement indépendants. On introduit maintenant

$$Z = [(24), Y],$$

soit

$$\begin{aligned}
Z &= (143)(25) - (123)(45) - (1453) + (1253) - (14)(235) + (12)(354) \\
&\quad + (145)(23) - (125)(34) - (12)(345) + (14)(253) + (152)(34) \\
&\quad - (154)(23) + (1352) - (1354) - (132)(45) - (134)(25).
\end{aligned}$$

On note alors

$$\begin{aligned}
Z' &= (12)Z(12) \\
Z'' &= (13)Z'(13) \\
Z''' &= (14)Z(14).
\end{aligned}$$

Si l'on note Φ la projection canonique sur les 4-cycles, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(Z) &= -(1453) + (1253) + (1352) - (1354) \\
\Phi(Z') &= -(2453) + (1532) + (1235) - (2354) \\
\Phi(Z'') &= -(1345) + (1325) + (1523) - (1543) \\
\Phi(Z''') &= -(1534) + (2534) + (2435) - (1435).
\end{aligned}$$

ce qui permet de vérifier facilement l'indépendance linéaire de ces éléments. La dimension de l'algèbre étant de 40, on en déduit que l'on a bien une base.

Nous résumons sous la forme d'une proposition l'étude de \mathcal{H}_n pour de petites valeurs de n que nous avons menée ici.

Proposition 33. *Pour tout $n \geq 2$, l'algèbre de Lie \mathcal{H}_n est une \mathbb{C} -algèbre de Lie réductive, dont le centre est de dimension 1. Pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, on a les isomorphismes de \mathbb{C} -algèbres de Lie suivants*

\mathcal{H}_2	$\simeq \mathbb{C}$
\mathcal{H}_3	$\simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$
\mathcal{H}_4	$\simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$
\mathcal{H}_5	$\simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$
\mathcal{H}_6	$\simeq \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_5(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_9(\mathbb{C}) \times \mathfrak{so}_{16}(\mathbb{C})$

Chapitre 4

Produits tensoriels

On fixe un corps k de caractéristique 0, et l'on rappelle que \mathcal{H}_n , pour $n \geq 2$, est définie sur \mathbb{C} . On choisit pour normalisation de l'algèbre de Hecke de type A la $\mathbb{C}(q)$ -algèbre $H_n(q) = \mathbb{H}(-1, q)$ avec les notations de **II.3.1**.

Ce chapitre démontre (théorème 5) une propriété d'irréductibilité des produits tensoriels, pour une large famille de représentations irréductibles de \mathfrak{B}_n , que nous appelons *nodales* et définissons en section 1. Parmi les représentations nodales figurent, dans des situations génériques, la plupart des représentations irréductibles de \mathfrak{B}_n considérées dans cette thèse, et notamment les représentations issues de modules de Specht. Nous en déduisons en corollaire, à la fin de la section 2, une propriété des représentations de B_n issues des algèbres de Hecke.

Les sections suivantes poursuivent l'étude de \mathcal{H}_n entamée au chapitre **III.3**. Après avoir déterminé les matrices qui interviennent dans l'action des générateurs de \mathcal{H}_n sur les produits tensoriels $S^\lambda \otimes S^\mu$ (section 3), nous en déduisons (section 4) l'irréductibilité de certains \mathcal{H}_n -modules. Ces \mathcal{H}_n -modules sont obtenus par construction tensorielle à partir de modules de Specht correspondant à des diagrammes de Young à deux colonnes. Nous en déduisons en **III.4.5** une nouvelle classe de représentations nodales et, en **III.4.6**, une dualité sur un sous- $\mathfrak{B}_n \times G$ -module de $\mathfrak{g}^{\otimes p}$, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ avec $n \gg p$, et G le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

En utilisant la méthode que nous avons publiée dans [61], nous en déduisons, pour tout $n \geq 3$, un certain nombre de facteurs simples, linéaires, de \mathcal{H}_n (théorème 7). On déduit alors de la dualité de Schur-Weyl, si l'on note $n \geq 3$, $q \in \mathbb{C}$ générique au sens de la définition 4 de **I.1.2.3** et, provisoirement, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les représentations de $H_n(q)$ associées aux diagrammes de Young $[n-1, 1], [n-2, 2], \dots, [n-p, p]$ pour p la partie entière de $n/2$, que, pour toute famille $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_p$ de *foncteurs de Schur*,

$$\mathbf{F}_1(\lambda_1) \otimes \mathbf{F}_2(\lambda_2) \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_p(\lambda_p)$$

est une représentation irréductible du groupe de tresses B_n .

Par convention, dans les graphes paliers que nous considérerons ici, nous noterons par des arêtes non orientées



les arêtes doubles



4.1 Représentations nodales

Soit (V, ρ) une représentation de \mathfrak{B}_n . On considère la condition suivante

(DIAG) $\rho(t_{12})$ est semi-simple, et $\rho(s_1)$ est un polynôme de t_{12} .

Si (V, ρ) vérifie (DIAG), on a vu que l'on peut considérer \mathfrak{B}_n comme une algèbre locale. On introduit alors, pour (V, ρ) vérifiant (DIAG), les conditions suivantes sur le diagramme de Bratteli \mathbf{G} de (V, ρ) .

(RED) \mathbf{G} est réduit.

(COL) \mathbf{G} est bien colorié par l'action de \mathfrak{B}_n .

On peut alors définir

Définition 15. On dit qu'une représentation irréductible (V, ρ) de \mathfrak{B}_n pour $n \geq 2$ est nodale si elle vérifie les trois conditions (DIAG), (RED) et (COL).

On remarque que, si M est un \mathfrak{B}_n -module nodal, et $\lambda \in k^*$, $H_\lambda M$ est également nodal. De plus,

Proposition 34. Soit $n \geq 2$ et M_1, \dots, M_p pour $p \geq 1$ une famille de représentations de \mathfrak{B}_n qui vérifient (DIAG). Il existe un ouvert de Zariski U , complémentaire d'un nombre fini d'hyperplans de k^p , tel que

$$\forall \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in U \quad (H_{\alpha_1} M_1) \otimes (H_{\alpha_2} M_2) \otimes \dots \otimes (H_{\alpha_p} M_p) \text{ vérifie (DIAG)}.$$

Preuve — Le cas $p = 1$ étant évident, on suppose $p \geq 2$. Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in k^p$. Comme, sur chaque M_i , t_{12} est semi-simple, alors t_{12} est semi-simple sur

$$M_{\underline{\alpha}} = (H_{\alpha_1} M_1) \otimes (H_{\alpha_2} M_2) \otimes \dots \otimes (H_{\alpha_p} M_p).$$

Pour chaque $1 \leq i \leq p$ on note d_i la dimension sur k de M_i et $v_1^{(i)}, \dots, v_{d_i}^{(i)}$ une base de vecteurs de M_i qui sont vecteurs propres de t_{12} et de s_1 . On note

$$t_{12} v_j^{(i)} = c(i, j) v_j^{(i)}.$$

Comme t_{12} commute à $s_1 = (1 \ 2)$, il existe une fonction ε à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que

$$\forall i, j \quad (1 \ 2) v_j^{(i)} = \varepsilon(i, j) v_j^{(i)}.$$

La condition (DIAG) signifie que, pour tout $i \in [1, m]$,

$$\forall j \neq j' \quad c(i, j) = c(i, j') \Rightarrow \varepsilon(i, j) = \varepsilon(i, j').$$

Une base de $M_{\underline{\alpha}}$ est alors formée des vecteurs de la forme

$$v_{\underline{j}} = v_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes v_{j_p}^{(p)}, \quad \text{où } \underline{j} = (j_1, \dots, j_p),$$

qui sont propres pour les actions de t_{12} et $(1 \ 2)$. Plus précisément, comme $(1 \ 2)$ est grouplike et t_{12} primitif, on a

$$\begin{aligned} (1 \ 2) v_{\underline{j}} &= \left(\prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j_r) \right) v_{\underline{j}} \\ t_{12} v_{\underline{j}} &= \left(\sum_{r=1}^p \alpha_r c(r, j_2) \right) v_{\underline{j}}. \end{aligned}$$

Comme k est de caractéristique 0, le théorème d'interpolation de Lagrange dit que, pour que (1 2) soit un polynôme de t_{12} , il suffit que

$$\begin{aligned} \forall \underline{j}, \underline{j}' \quad \sum_{r=1}^p \alpha_r c(r, j_r) = \sum_{r=1}^p \alpha_r c(r, j'_r) &\Rightarrow \prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j_r) = \prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j'_r) \\ \sum_{r=1}^p \alpha_r (c(r, j_r) - c(r, j'_r)) = 0 &\Rightarrow \prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j_r) = \prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j'_r). \end{aligned}$$

Introduisons alors, pour tout couple $\underline{j}, \underline{j}'$, le vecteur $w_{\underline{j}, \underline{j}'}$ de k^p dont la r^e coordonnée est $c(r, j_r) - c(r, j'_r)$, et notons $(\cdot | \cdot)$ la forme bilinéaire symétrique standard de k^p , $(\underline{x} | \underline{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i$ pour $\underline{x} = (x_i)$ et $\underline{y} = (y_i)$. La forme linéaire $(\cdot | w_{\underline{j}, \underline{j}'})$ est nulle si et seulement si $w_{\underline{j}, \underline{j}'}$ est nul. On note alors

$$E = \{\underline{\beta} \in k^p \mid \forall \underline{j}, \underline{j}' \quad w_{\underline{j}, \underline{j}'} \neq 0 \text{ et } (w_{\underline{j}, \underline{j}'} | \underline{\beta}) = 0\}.$$

L'espace E est réunion d'un nombre fini d'hyperplans, donc son complémentaire U est un ouvert de Zariski de k^p . Si $\underline{\alpha} \in U$ on a alors, pour tous $\underline{j}, \underline{j}'$,

$$(w_{\underline{j}, \underline{j}'} | \underline{\alpha}) = 0 \Rightarrow w_{\underline{j}, \underline{j}'} = 0 \Rightarrow \forall r \quad c(r, j_r) = c(r, j'_r) \Rightarrow \varepsilon(r, j) = \varepsilon(r, j')$$

d'après (DIAG), ce qui implique

$$\prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j_r) = \prod_{r=1}^p \varepsilon(r, j'_r),$$

donc que M_α vérifie (DIAG).

cqfd.

Remarque. Dans le cas particulier où, pour $\lambda \vdash n$, on a défini une action de \mathfrak{B}_n sur le module de Specht S^λ en faisant agir t_{ij} par $\alpha(i, j)$, pour $\alpha \in k \setminus \{0\}$, représentations que l'on appelle provisoirement "de type Hecke", on peut traduire la propriété précédente en termes d'algèbre commutative, donc de géométrie algébrique. On note $k[x_1, \dots, x_p]$ l'anneau des polynômes en p variables, I son idéal engendré par les $x_i^2 - 1$, pour $1 \leq i \leq p$, $R = k[x_1, \dots, x_p]/I$, et $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$ les classes de x_1, \dots, x_p dans R . On considère, pour $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in k^p$, le morphisme $\varphi_{\underline{\alpha}} : k[t] \rightarrow R$ défini par

$$\varphi_{\underline{\alpha}}(t) = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots, \alpha_p \bar{x}_p.$$

Dans le cas où les représentations irréductibles de \mathfrak{B}_n considérées sont "de type Hecke", il s'agit de vérifier que $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p \in \varphi_{\underline{\alpha}}(k[t])$ pour $\underline{\alpha}$ générique. Il suffit pour cela de vérifier que, pour $\underline{\alpha}$ générique, $\varphi_{\underline{\alpha}}$ est surjectif, c'est-à-dire que, géométriquement,

$$\text{Spec } \varphi_{\underline{\alpha}} : \text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } k[t]$$

est injectif. En d'autres termes que la projection, par rapport à une certaine forme linéaire, de $\text{Spec } R$, c'est-à-dire de l'ensemble fini des sommets d'un hypercube, vers une droite en position générale, est injective.

D'autre part, quittant la situation générale, on rappelle que l'on a associé à tout module de Specht S^λ , pour $\lambda \vdash n$, une action de \mathcal{H}_n . Pour l'action de UT_n correspondante, t_{ij} agit comme $(i, j) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Cette action se prolonge en une action de \mathfrak{B}_n , où $(i, j) \in \mathfrak{B}_n$ agit encore comme $(i, j) \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Sur S^λ , les actions de t_{ij} et (i, j) sont donc les mêmes. En revanche, ce n'est pas en général le cas sur

$$S^{\lambda_1} \otimes S^{\lambda_2} \otimes \dots \otimes S^{\lambda_p},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des partitions de n , parce que si $(i\ j) \in \mathfrak{B}_n$ est grouplike, t_{ij} est primitif. On montre alors, avec ici $k = \mathbb{C}$,

Proposition 35. *Pour $p \geq 1$ et $n \geq 2$, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ est une famille de partitions de n , et $S^{\lambda_1}, \dots, S^{\lambda_p}$ les $\mathfrak{S}_n \times \mathcal{H}_n$ modules correspondants, le \mathfrak{B}_n -module*

$$S^{\lambda_1} \otimes S^{\lambda_2} \otimes \dots \otimes S^{\lambda_p}$$

vérifie (DIAG).

Preuve — On note $M = S^{\lambda_1} \otimes S^{\lambda_2} \otimes \dots \otimes S^{\lambda_p}$, et v_1, \dots, v_m une base de vecteurs propres de M pour l'action de (1 2), et enfin $(1\ 2)v_i = \varepsilon(i)v_i$, $\varepsilon(i) \in \{-1, 1\}$. On a

$$\begin{aligned} t_{12}(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p}) &= \left(\sum_{k=1}^p \varepsilon(i_k) \right) v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p} \\ (1\ 2)(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p}) &= \left(\prod_{k=1}^p \varepsilon(i_k) \right) v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_p}. \end{aligned}$$

Par interpolation de Lagrange, il suffit de montrer que $\prod_{k=1}^p \varepsilon(i_k)$ est une fonction de $\sum_{k=1}^p \varepsilon(i_k)$. On vérifie alors, à partir des formules obtenues pour les actions de t_{12} et (1 2), que

$$(1\ 2) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}(1 - t_{12})\right).$$

cqfd.

4.2 Irréductibilité des produits tensoriels

Soit maintenant une famille $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_p$ de graphes nivelés, réduits et unipodes, qui sont compatibles de niveau n au sens où leur niveau minimal est $n_0 = 1$ et leur niveau maximal est $n_\infty = n$. On définit leur produit tensoriel

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{G}_p$$

comme le graphe nivelé réduit dont les sommets de niveau r sont les r -uplets (x_1, \dots, x_r) , ici notés

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_r$$

avec x_i sommet de niveau r de \mathbf{G}_i , et où

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p \nearrow y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_p \text{ ssi } \forall i \ x_i \nearrow y_i.$$

On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{G}} &\simeq T_{\mathbf{G}_1} \times T_{\mathbf{G}_2} \times \dots \times T_{\mathbf{G}_p} \\ k\mathbf{G} &\simeq k\mathbf{G}_1 \otimes k\mathbf{G}_2 \otimes \dots \otimes k\mathbf{G}_p. \end{aligned}$$

On peut alors montrer

Théorème 5. *Soit $n \geq 2$ et, pour $p \geq 1$, une famille M_1, \dots, M_p de représentations nodales de \mathfrak{B}_n . Il existe un ouvert de Zariski U de $(k^*)^p$, complémentaire dans k^p d'un nombre fini d'hyperplans, tel que*

$$\forall \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in U \ (H_{\alpha_1} M_1) \otimes (H_{\alpha_2} M_2) \otimes \dots \otimes (H_{\alpha_p} M_p) \text{ est nodale,}$$

donc en particulier irréductible.

Preuve — On note \mathbf{G}_i , pour $1 \leq i \leq p$, le diagramme de Bratteli de M_i . C'est un graphe nivelé réduit d'après (RED), unipode et unicéphale, qui est bien colorié par l'action de \mathfrak{B}_n . L'image de \mathfrak{B}_n dans $\text{End}(k\mathbf{G}_i)$ contient donc $\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}_i})$, donc est égale d'après le deuxième corollaire de la proposition 12 de I.2.1 à $\text{End}(k\mathbf{G}_i)$. De plus, $\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}_i})$ est engendré par les éléments \mathbf{T}_r , donc $\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}_i})$ et $t_{r,r+1}$ engendrent cette image. Si l'on définit Γ_i comme le graphe sur $T_{\mathbf{G}_i}$ associé aux éléments $t_{r,r+1}$ de \mathfrak{B}_n , cette image est $\mathcal{A}(\Gamma_i)$.

On choisit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in k^p$, et on considère l'action de \mathfrak{B}_n sur $(H_{\alpha_1}M_1) \otimes \dots \otimes (H_{\alpha_p}M_p)$, naturellement identifié en tant que k -espace vectoriel à

$$k\mathbf{G}_1 \otimes k\mathbf{G}_2 \otimes \dots \otimes k\mathbf{G}_2 = k\mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{G}_2.$$

On note $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ les coloriage de $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_p$ associés aux actions de \mathfrak{B}_n sur M_1, \dots, M_p . Ce sont de bons coloriage d'après la condition (COL).

Un chemin de longueur maximale de \mathbf{G} est de la forme

$$\xi^{(1)} \otimes \xi^{(2)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p)}$$

avec $\xi^{(i)} \in T_{\mathbf{G}_i}$. On a alors, pour $2 \leq r \leq n$,

$$\mathbf{T}_r \left(\xi^{(1)} \otimes \xi^{(2)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p)} \right) = \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(\xi_r^{(i)}) \right) \xi^{(1)} \otimes \xi^{(2)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p)}.$$

En d'autres termes, si l'on note $\phi^{(r)}$ la fonction de $T_{\mathbf{G}}$ vers k^p définie pour $\xi = \xi^{(1)} \otimes \xi^{(2)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p)}$ par

$$\phi^{(r)}(\xi) = (\varphi_1(\xi_r^{(1)}), \varphi_2(\xi_r^{(2)}), \dots, \varphi_p(\xi_r^{(p)})),$$

on a $\mathbf{T}_r \xi = (\phi^{(r)}(\xi) | \underline{\alpha}) \xi$, où $(|)$ est la forme bilinéaire de k^p déjà considérée dans la preuve de la proposition précédente. Comme, pour chaque i , φ_i est un bon coloriage de \mathbf{G}_i , on a

$$(\forall r \ \phi^{(r)}(\xi) = \phi^{(r)}(\xi')) \Rightarrow \xi = \xi' \text{ pour tous } \xi, \xi' \in T_{\mathbf{G}}.$$

On peut alors introduire, pour $\xi, \xi' \in T_{\mathbf{G}}$ et $1 \leq r \leq n$,

$$w_{\xi, \xi'}^r = \phi^{(r)}(\xi) - \phi^{(r)}(\xi') \in k^p$$

et

$$U_1 = \{ \underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in k^p \mid \forall \xi, \xi' \in T_{\mathbf{G}} \ \forall r \in [1, n] \ w_{\xi, \xi'}^r \neq 0 \Rightarrow (w_{\xi, \xi'}^r | \underline{\beta}) \neq 0 \}.$$

Le complémentaire de U_1 est donc une union finie d'hyperplans.

Comme chaque M_i vérifie (DIAG), la proposition précédente affirme l'existence d'un ouvert de Zariski U_2 de k^p , complémentaire d'une union finie d'hyperplans, tel que si $\underline{\alpha} \in U_2$, l'action de \mathfrak{B}_n sur $k\mathbf{G}$ vérifie (DIAG). On note enfin $U = U_1 \cap U_2 \cap (k^*)^m$, ouvert de Zariski de $(k^*)^p$, donc de k^p , qui est encore complémentaire d'une union finie d'hyperplans, et on suppose $\underline{\alpha} \in U$.

Comme $\underline{\alpha} \in U_2$, $k\mathbf{G}$ est un module local pour l'image de \mathfrak{B}_n dans $\text{End}(k\mathbf{G}) = M(\mathbf{G})$, et, comme $\underline{\alpha} \in U_1$, l'image de \mathfrak{B}_n contient $\mathcal{D}(T_{\mathbf{G}})$. Le graphe transitif sur $T_{\mathbf{G}}$ associé à cette image contient le graphe réduit Γ dont les arêtes sont définies par

$$\{ (\xi, \eta) \in T_{\mathbf{G}} \mid \xi \neq \eta \text{ et } \exists r \ \eta^* t_{r,r+1} \xi \neq 0 \}.$$

Nous allons montrer que Γ est irréductible. D'après la proposition 12 de I.2.1, cela signifiera que $M_{\underline{\alpha}}$ est irréductible, et qu'ainsi \mathbf{G} est le diagramme de Bratteli de $M_{\underline{\alpha}}$. Comme l'on a déjà montré que \mathbf{G} était bien colorié, $M_{\underline{\alpha}}$ sera alors nodale.

Soient donc $\xi = \xi^{(1)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p)}$ et $\eta = \eta^{(1)} \otimes \dots \otimes \eta^{(p)}$ deux éléments de $T_{\mathbf{G}}$. On a une arête $\xi \rightarrow \eta$ si et seulement si il existe un $r \in [1, n-1]$ tel que $\eta^* t_{r,r+1} \xi \neq 0$, c'est-à-dire s'il existe i tel que $\xi^{(j)}$ soit différent de $\eta^{(j)}$ pour $i \neq j$ et $\alpha_i(\eta^{(i)})^* t_{r,r+1} \xi^{(i)} \neq 0$, soit, comme $\alpha_i \neq 0$, $\xi^{(i)} \rightarrow \eta^{(i)}$ dans Γ_i . Comme chaque Γ_i , pour $1 \leq i \leq p$, est irréductible, on a des chemins

$$\xi^{(i)} = \xi^{(i),1} \rightarrow \xi^{(i),2} \rightarrow \dots \rightarrow \xi^{(i),r_i} = \eta^{(i)}$$

dans chacun des Γ_i , c'est-à-dire que, sur $k\Gamma_i$,

$$\exists r \in [1, n-1] \quad (\eta^{(i),j+1})^* t_{r,r+1} \eta^{(i),j} \neq 0.$$

On va montrer que ξ est joint au sens large (on accepte le chemin vide) à η par récurrence sur

$$d = \#\{i \mid \xi^{(i)} \neq \eta^{(i)}\},$$

pour $d \in [0, p]$. Si $d = 0$ on prend le chemin vide. Supposons donc l'hypothèse vérifiée pour $d \in [0, p-1]$, et démontrons le cas $d+1$. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que

$$\eta = \eta^{(1)} \otimes \dots \otimes \eta^{(p)} = \xi^{(1)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p-d-1)} \otimes \eta^{(p-d)} \otimes \dots \otimes \eta^{(p)}.$$

On introduit alors

$$\tilde{\eta} = \xi^{(1)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p-d-1)} \otimes \xi^{(p-d)} \otimes \eta^{(p-d+1)} \otimes \dots \otimes \eta^{(p)}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a un chemin dans Γ de ξ vers $\tilde{\eta}$. De plus, on a dans Γ_{p-d+1} un chemin

$$\tilde{\eta}^{(p-d+1)} = \tilde{\eta}^{(p-d+1),1} \rightarrow \tilde{\eta}^{(p-d+1),2} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\eta}^{(p-d+1),r} = \eta^{(p-d+1)}$$

qui correspond à un chemin

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^1 \rightarrow \tilde{\eta}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\eta}^r = \eta,$$

avec

$$\tilde{\eta}^i = \xi^{(1)} \otimes \dots \otimes \xi^{(p-d)} \otimes \tilde{\eta}^{(p-d+1),i} \otimes \tilde{\eta}^{(p-d+2)} \otimes \dots \otimes \tilde{\eta}^{(p)},$$

qui joint $\tilde{\eta}$ à η . On a donc bien construit un chemin de ξ à η , et on conclut par récurrence. cqfd.

Dans le cours de cette thèse, nous avons rencontré, comme représentations nodales de \mathfrak{B}_n ,

- les représentations $\lambda_{u,v}$ pour $\lambda \vdash n$
- la représentation $\mathcal{R}^{(2)}(x, y)$
- la représentation sporadique.

Si l'on considère une collection M_1, \dots, M_p de représentations de ce type, leur produit tensoriel est donc irréductible, pour un choix générique de leurs paramètres.

Si l'on suppose désormais $k = \mathbb{C}$, la représentation du groupe de tresses B_n associée par intégration est alors également irréductible, pour presque toute valeur du paramètre d'intégration h . Comme l'on sait exprimer explicitement l'action de B_n sur chaque $\int_h M_i$, l'action explicite de B_n est connue sur

$$\int_h M_1 \otimes \dots \otimes M_p = \left(\int_h M_1 \right) \otimes \dots \otimes \left(\int_h M_p \right),$$

et on a ainsi déterminé *une large famille de représentations irréductibles du groupe de tresses B_n* .

Le théorème précédent et le lemme 9 de II.2.3.3 montrent que les représentations de $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ que nous avons considérées ne proviennent pas de représentations nodales de \mathfrak{B}_n . En revanche, il semble qu'une majeure partie des représentations irréductibles "intéressantes" de B_n qui sont connues, notamment celles qui proviennent de l'action de \mathfrak{B}_n sur les puissances tensorielles de \mathfrak{g} -modules, où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple, sont nodales.

Comme cas particulier, on déduit immédiatement du théorème le

Corollaire. *Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ est une famille de partitions de n , pour $p \geq 1$ et $n \geq 2$, et $\lambda_1^q, \dots, \lambda_p^q$ pour $q \in \mathbb{C}$, q non racine de 1, les représentations de $H_n(q)$ donc de B_n correspondantes, il existe un ouvert dense U de \mathbb{C}^p tel que, en tant que représentation de B_n ,*

$$\forall (q_1, \dots, q_p) \in U \quad \lambda_1^{q_1} \otimes \dots \otimes \lambda_p^{q_p}$$

est irréductible.

4.3 Produits tensoriels $S^\lambda \otimes S^\mu$

On fixe un entier $n \geq 3$.

Pour λ et μ deux partitions de n , on considère les \mathcal{H}_n -modules S^λ et S^μ , et l'on étudie leur produit tensoriel $S^\lambda \otimes S^\mu$.

On note \mathcal{Y} et on appelle graphe de Young le graphe nivelé réduit ayant pour sommets les diagrammes de Young, éventuellement vides, de taille au plus n , la fonction niveau est donnée par la taille des diagrammes, et l'on a une arête $\lambda \nearrow \mu$ si et seulement si $\lambda \subset \mu$. Il est clair que \mathcal{Y}^λ (resp. \mathcal{Y}^μ) est le diagramme de Bratteli de S^λ (resp. S^μ), considéré comme $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module. Si l'on note

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y},$$

on a

$$\mathbb{C}\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu} \simeq \mathbb{C}\mathcal{Y}^\lambda \otimes \mathbb{C}\mathcal{Y}^\mu \simeq S^\lambda \otimes S^\mu,$$

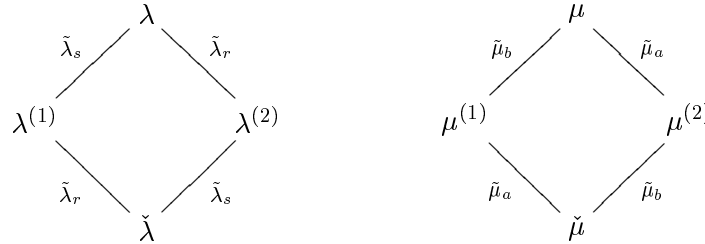
et les briques de $\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu}$ sont de taille 1, 2 ou 4.

D'après la proposition 35, l'image de $U\mathcal{H}_n$ dans $End_{\mathbb{C}}(S^\lambda \otimes S^\mu)$ est une algèbre locale qui est localement monogène, pour la filtration associée à

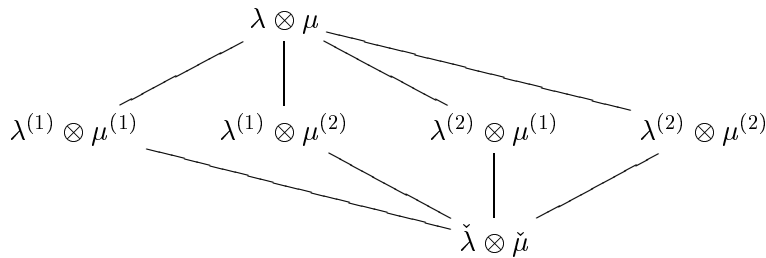
$$\mathbb{C} = U\mathcal{H}_1 \subset U\mathcal{H}_2 \subset \dots \subset U\mathcal{H}_{n-1} \subset U\mathcal{H}_n$$

et pour les mêmes éléments générateurs et centralisants que $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Pour l'action de \mathcal{H}_n sur $S^\lambda \otimes S^\mu$, $S^\lambda \otimes S^\mu$ est alors un $U\mathcal{H}_n$ -module local, associé au graphe nivelé réduit $\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu}$. Le but de cette section est d'étudier l'action de $U\mathcal{H}_n$ sur les briques de $\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu}$. On appelle *algèbre palier* de \mathcal{H}_n la sous-algèbre de $U\mathcal{H}_n$ engendrée par s_{n-1} et J_{n-1} (ou par s_{n-1}, T_{n-1} , ou encore s_{n-1}, J_n).

Sur les briques de taille 1 et 2, l'action de l'algèbre palier de \mathcal{H}_n est d'évidence irréductible. D'autre part, le produit de deux briques de taille 2 du graphe de Young



donne une brique de taille 4



On note x (resp. y) l'inverse de la distance axiale (positive) attachée à la première brique (resp. à la seconde). Les matrices de $s_{n-1} = (n-1 \ n)$ sur chacune des briques du graphe de Young sont alors

$$\begin{pmatrix} -x & 1+x \\ 1-x & x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -y & 1+y \\ 1-y & y \end{pmatrix}$$

et l'action de s_{n-1} sur la brique produit de taille 4 est $s_{n-1} \otimes 1 + 1 \otimes s_{n-1}$, soit

$$\begin{pmatrix} -x-y & 1+y & 1+x & 0 \\ 1-y & -x+y & 0 & 1+x \\ 1-x & 0 & x-y & 1+y \\ 0 & 1-x & 1-y & x+y \end{pmatrix}.$$

Si les éléments de Jucys-Murphy séparent les chemins d'une telle brique, le graphe associé est, pour $x \neq y$,



Ce graphe est donc irréductible, c'est-à-dire, d'après le lemme 12 de I.2.1, que la représentation associée de l'algèbre palier est irréductible.

D'autre part, les éléments de Jucys-Murphy ne séparent les chemins de la brique que si J_{n-1} est à valeurs propres distinctes. Or J_n agit sur cette brique par

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_r + \tilde{\mu}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_r + \tilde{\mu}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_s + \tilde{\mu}_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_s + \tilde{\mu}_b \end{pmatrix}$$

donc les chemins ne sont pas séparés dès que

$$\begin{array}{l} \tilde{\lambda}_r + \tilde{\mu}_a = \tilde{\lambda}_s + \tilde{\mu}_b \quad \text{ou} \quad \tilde{\lambda}_r + \tilde{\mu}_b = \tilde{\lambda}_s + \tilde{\mu}_a \\ \text{ssi} \quad \tilde{\lambda}_r - \tilde{\lambda}_s = \tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a \quad \text{ou} \quad \tilde{\lambda}_r - \tilde{\lambda}_s = \tilde{\mu}_a - \tilde{\mu}_b \\ \text{ssi} \quad x = -y \quad \text{ou} \quad x = y. \end{array}$$

Comme x et y sont strictement positifs, on en déduit que cela ne peut se produire que si $x = y$. On note dans ce cas, pour alléger les notations, $l = \tilde{\lambda}_s$, $m = \tilde{\mu}_b$, et

$$\frac{1}{z} = \tilde{\lambda}_r - \tilde{\lambda}_s = \tilde{\mu}_s - \tilde{\mu}_b = \frac{1}{x} = \frac{1}{y}.$$

Alors

$$J_{n-1} = l + m + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$s_{n-1} = \begin{pmatrix} -2z & 1+z & 1+z & 0 \\ 1-z & 0 & 0 & 1+z \\ 1-z & 0 & 0 & 1+z \\ 0 & 1-z & 1-z & 2z \end{pmatrix}.$$

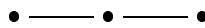
Si l'on appelle $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ les éléments de la base choisie, la brique est somme pour l'algèbre palier d'une droite stable $\mathbb{C}(\epsilon_2 - \epsilon_3)$ sur laquelle

$$\begin{array}{l} J_{n-1} = l + m + \frac{1}{z} \\ s_{n-1} = 0 \end{array}$$

et d'une représentation de dimension 3, dont l'action sur la base $(\epsilon_1, \epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_4)$ est donnée par

$$s_{n-1} = \begin{pmatrix} -2z & 2(1+z) & 0 \\ 1-z & 0 & 1+z \\ 0 & 2(1-z) & 2z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_{n-1} = l + m + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette représentation est cette fois irréductible, puisque J_{n-1} sépare les chemins et que le graphe associé à l'action de $t_{n-1,n}$ est



On résume ces considérations sous la forme du

Lemme 24. *Le graphe nivelé $\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu}$ n'admet que des briques de taille 1, 2 ou 4. Pour l'action de \mathcal{H}_n , les briques de taille 1 et 2 de $\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu}$ sont irréductibles. Les briques de taille 4 sont de la forme $\mathcal{Y}_\lambda^\lambda \otimes \mathcal{Y}_\mu^\mu$, et sont irréductibles si les distances axiales positives associées à $\mathcal{Y}_\lambda^\lambda$ et \mathcal{Y}_μ^μ sont distinctes. Sinon, elles sont somme d'un espace de dimension 1 et d'un espace de dimension 3, stables et irréductibles pour l'action de l'algèbre palier.*

Remarque. Pour faire le lien avec la situation “générique” étudiée en section 2 de ce même chapitre, considérons $\lambda_{u'+u, u'-u}$ (resp. $\mu_{v'+v, v'-v}$) pour λ (resp. μ) une partition de n , où t_{ij} agit par $u' + u(i\ j)$ (resp. $v' + v(i\ j)$). On a encore

$$\lambda_{u'+u, u'-u} \otimes \mu_{v'+v, v'-v} \simeq \mathbb{C}\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu},$$

l'action de $t_{n-1, n}$ sur les briques de taille 4 étant maintenant donnée par

$$u' + v' + \begin{pmatrix} -ux - vy & v(1 + y) & u(1 + x) & 0 \\ v(1 - y) & -ux + vy & 0 & 0u(1 + x) \\ u(1 - x) & 0 & ux - vy & v(1 + y) \\ 0 & u(1 - x) & v(1 - y) & ux + vy \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres de $J_{n-1} - (n - 2)(u' + v')$ sont

$$(u\tilde{\lambda}_r + v\tilde{\mu}_a, u\tilde{\lambda}_r + v\tilde{\mu}_b, u\tilde{\lambda}_s + v\tilde{\mu}_a, u\tilde{\lambda}_s + v\tilde{\mu}_b).$$

On en déduit que, pour des valeurs génériques de u et v , chaque brique est irréductible, donc que l'image de \mathfrak{B}_{n-1} dans $M(\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu})$ est égale à $M_{loc}(\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu})$. Comme il est d'autre part immédiat que le graphe palier de $\mathcal{Z}^{\lambda \otimes \mu}$ est connexe pour chaque couple (λ, μ) , on retrouve dans ce cas particulier le résultat général du théorème 5.

4.4 Diagrammes de Young à deux colonnes

On note $\alpha_k^{(n)}$ le diagramme de Young

$$[n - k, k] \vdash n$$

ou éventuellement les représentations de \mathfrak{S}_n et \mathcal{H}_n associées. Dans les situations dépourvues d'ambiguïté, nous omettons l'exposant symbolique. Un tel diagramme est bien défini si

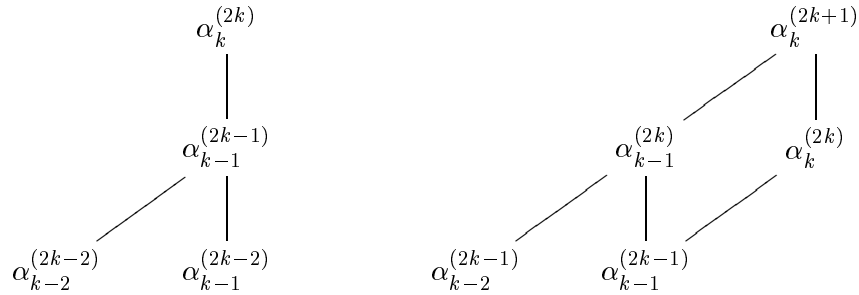
$$n - k \geq k > 0$$

c'est-à-dire si $0 \leq k \leq n/2$. Dans l'anneau des représentations de \mathfrak{S}_n ou de \mathcal{H}_n , on sous-entendra $\alpha_k^{(n)} = 0$ si $[n - k, k]$ n'est pas un diagramme de Young. Enfin, remarquons que $\alpha_0^{(n)} = [n]$ correspond à la représentation triviale de \mathfrak{S}_n (resp. \mathcal{H}_n).

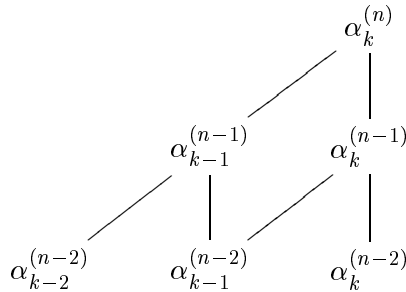
On a alors, du point de vue des restrictions à \mathfrak{S}_{n-1} ,

$$\begin{aligned} Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} \alpha_k^{(n)} &= \alpha_k^{(n-1)} + \alpha_{k-1}^{(n-1)} \quad \text{si } 0 < k < n - k \\ Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} \alpha_0^{(n)} &= \alpha_0^{(n-1)} \\ Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} \alpha_k^{(2k)} &= \alpha_{k-1}^{(2k-1)}. \end{aligned}$$

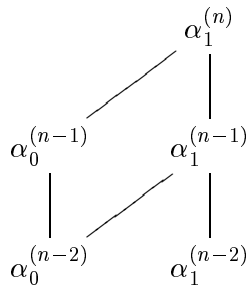
En ce qui concerne le diagramme de Bratteli d'un tel $\alpha_k^{(n)}$, le huppier de niveau 2 peut prendre pour $k \geq 2$ les formes suivantes :



et, si $n - k > k + 1$,



Enfin, pour $n \geq 4$,



Les arêtes de ces graphes sont coloriées par



4.5 Décomposition de $\alpha_r \otimes \alpha_s$

On note pour alléger l'écriture SV (resp. ΛV) le carré symétrique (resp. alterné) de l'espace vectoriel V .

Fixant $n \geq 3$, on a dans le cas général

$$Res_{\mathfrak{S}_{n-1}} \alpha_r \otimes \alpha_s = \alpha_{r-1} \otimes \alpha_{s-1} + \alpha_{r-1} \otimes \alpha_s + \alpha_r \otimes \alpha_{s-1} + \alpha_r \otimes \alpha_s$$

et

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} S\alpha_k &= S\alpha_{k-1} + \alpha_{k-1} \otimes \alpha_k + S\alpha_k \\ \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \Lambda\alpha_k &= \Lambda\alpha_{k-1} + \alpha_{k-1} \otimes \alpha_k + \Lambda\alpha_k. \end{aligned}$$

On va montrer par récurrence

Proposition 36. *Pour $0 \leq r < s$, $k \geq 0$ et un naturel non nul $n \geq 3$, $S\alpha_k^{(n)}$, $\Lambda\alpha_k^{(n)}$ et $\alpha_r^{(n)} \otimes \alpha_s^{(n)}$ sont irréductibles en tant que représentations de \mathcal{H}_n . De plus, les seules redondances dans cette famille sont données par les isomorphismes*

$$\alpha_r^{(n)} \otimes \alpha_s^{(n)} \simeq \alpha_s^{(n)} \otimes \alpha_r^{(n)}$$

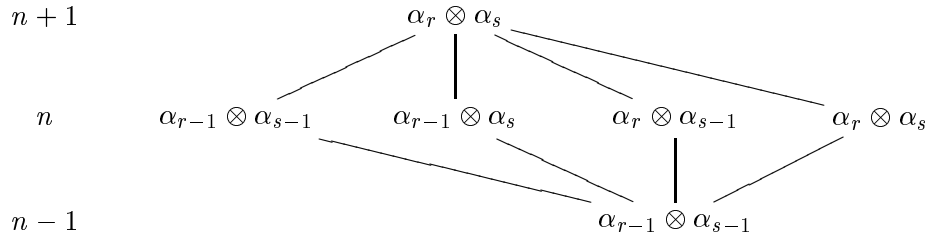
pour $r \neq s$.

Preuve — Pour $k = 0$ et $r = 0$, cette proposition est immédiate. Pour $n \leq 6$, elle découle de l'étude de \mathcal{H}_n pour n petit effectuée au chapitre précédent. On suppose donc maintenant $n \geq 6$, $k, r \geq 1$, et que le résultat est démontré pour tous les rangs $m \leq n$, et on étudie des représentations de \mathfrak{S}_{n+1} .

Si l'on note M une des représentations de \mathcal{H}_{n+1} considérées par l'énoncé, on désigne par \mathbf{G} et on appelle pseudo-diagramme de Bratteli de B associé à M le *complété unicéphale* du diagramme de Bratteli de $\text{Res}_{\mathcal{H}_n} M$, c'est-à-dire que l'on ajoute à ce graphe nivelé un sommet noté M de niveau $n+1$ et, pour chaque sommet de niveau n , une arête unique de ce sommet vers M .

D'après les formules de restrictions et l'hypothèse de récurrence, ce graphe \mathbf{G} est réduit, et on a sur $\mathbb{C}\mathbf{G}$ une structure de $U\mathcal{H}_{n+1}$ -module local. Si l'on montre que ce module est irréductible, \mathbf{G} sera alors le diagramme de Bratteli de M . Nous commençons donc par étudier l'action de (l'algèbre palier de) $U\mathcal{H}_{n+1}$ sur les briques de niveau n .

Si $|r-s| \geq 2$, $n-s > s$, le pseudo-diagramme de Bratteli \mathbf{G} de $\alpha_r \otimes \alpha_s$ contient la brique



Cette brique de taille 4 provient du graphe produit $\mathcal{Z}^{\alpha_r \otimes \alpha_s}$. Les éléments toriques séparent les chemins de la brique, qui est donc irréductible. On déduit alors de la proposition 17 de I.2.6 que

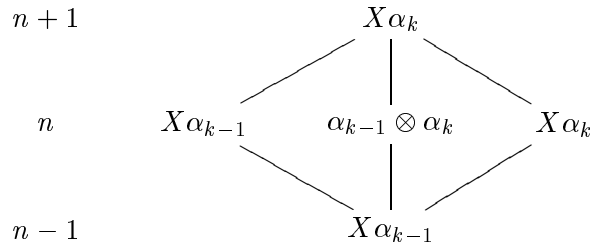
$$\alpha_r \otimes \alpha_s \text{ est irréductible si } |r-s| \geq 2, \quad n-s > s.$$

Si $n = 2s$ avec toujours $|r-s| \geq 2$, la brique

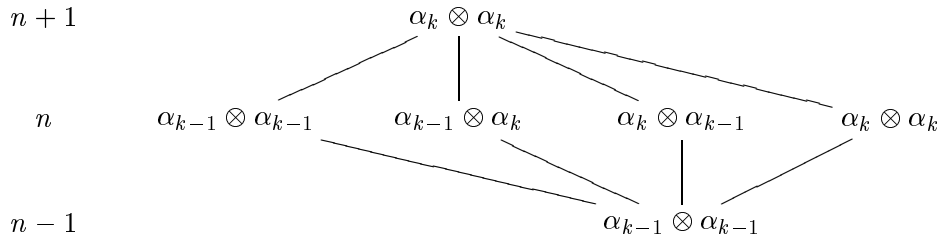
$$\mathbb{C}\mathbf{G}^{\alpha_r^{(n+1)} \otimes \alpha_s^{(n+1)} \atop \alpha_{r-1}^{(n-1)} \otimes \alpha_{s-1}^{(n-1)}}$$

est cette fois de taille 2, mais provient toujours du graphe produit, et relie encore tous les sommets de niveau n : on en déduit que, dans ce cas aussi, $\alpha_r \otimes \alpha_s$ est irréductible.

Pour $k > 1$ et $X \in \{S, \Lambda\}$, la brique



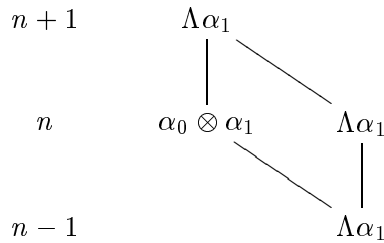
provient de la brique



dans le graphe produit, qui est somme de deux représentations irréductibles de dimensions 1 et 3. Elle est donc irréductible, et $X\alpha_k$ l'est aussi. Si $k = 1$ et $X = S$, ce raisonnement s'applique encore. Si $k = 1$ et $X = \Lambda$, on a

$$\Lambda\alpha_{k-1} = 0$$

et l'on considère cette fois la brique



qui est encore irréductible, provenant d'une brique de taille 2 du graphe produit.

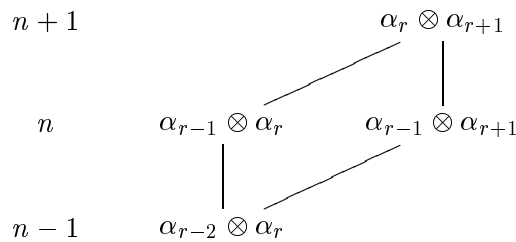
Il reste principalement à étudier le cas où $s = r + 1$.

Si $0 < r \leq n - r - 2$, la famille des sommets de niveau n est

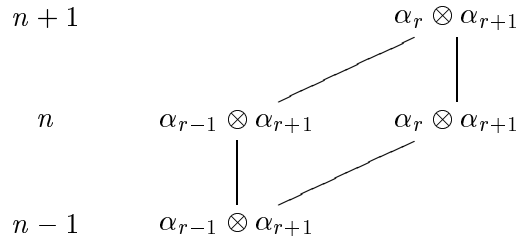
$$(\alpha_{r-1} \otimes \alpha_r, \alpha_{r-1} \otimes \alpha_{r+1}, S\alpha_r, \Lambda\alpha_r, \alpha_r \otimes \alpha_{r+1}),$$

et on cherche à déterminer le graphe palier, qui est un graphe de sommets cette famille.

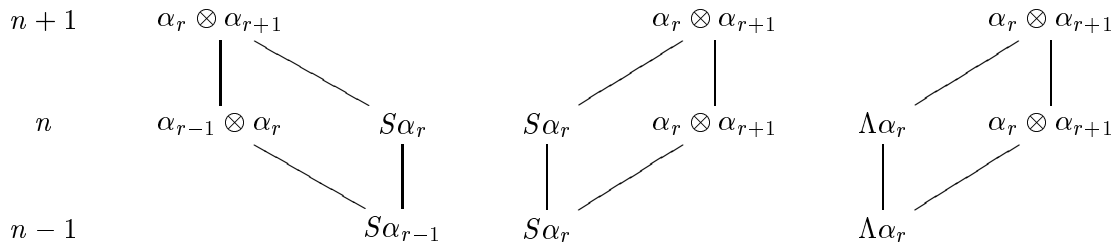
Si $r > 1$, il existe une brique



qui est irréductible. De même, si $r \leq n - r - 3$, on a une brique irréductible de taille 2



D'autre part, on a dans tous les cas trois briques de taille 2 irréductibles



Nous résumons en un tableau les arêtes déduites de ces briques entre les sommets de niveau $n - 1$

sommet	graphe
$\alpha_{r-2} \otimes \alpha_r$	si $r > 1$
$\alpha_{r-1} \otimes \alpha_{r+1}$	si $2r \leq n - 3$
$S\alpha_{r-1}$	
$S\alpha_r$	
$\Lambda\alpha_r$	

On en déduit que le graphe palier contient, si $r > 1$,



et, si $2r \leq n - 3$,



Ces graphes sont irréductibles, donc on a bien le résultat d'irréductibilité demandé. Il reste alors à envisager

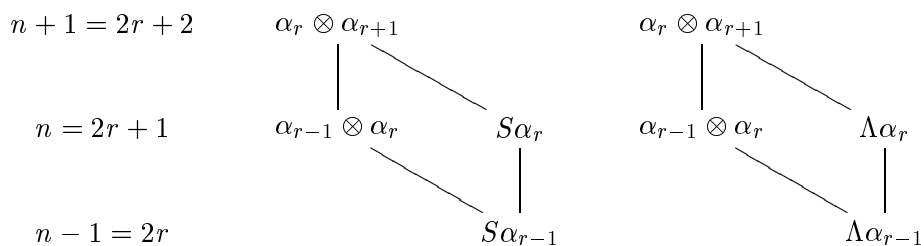
$$r = 1, 2r = n - 2 \Rightarrow n = 4$$

qui fait partie des petits cas déjà traités.

Enfin, si $n = 2r + 1$, $r > 1$, la famille des sommets de niveau n est

$$(\alpha_{r-1} \otimes \alpha_r, S\alpha_r, \Lambda\alpha_r)$$

et on a deux briques de taille 2 irréductibles



ce qui donne encore un graphe palier



irréductible, donc une représentation irréductible. Si $r = 1$, alors $n + 1 = 2$ et $n = 1$: ce cas, trivial, a déjà été traité.

Il reste enfin à montrer que ces représentations de \mathcal{H}_{n+1} sont deux à deux non isomorphes sauf pour $\alpha_r \otimes \alpha_s \simeq \alpha_s \otimes \alpha_r$, $r \neq s$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, les formules de restriction à \mathcal{H}_n exposées en début de section sont des décompositions de ces restrictions en composantes irréductibles. Il est alors immédiat qu'un isomorphisme entre deux telles représentations ne peut avoir lieu que pour $\alpha_r \otimes \alpha_s \simeq \alpha_{r'} \otimes \alpha_{s'}$, avec $r \neq s$, $r' \neq s'$, et

$$\{\{r - 1, s - 1\}, \{r - 1, s\}, \{r, s - 1\}, \{r, s\}\} = \{\{r' - 1, s' - 1\}, \{r' - 1, s'\}, \{r', s' - 1\}, \{r', s'\}\},$$

soit $\{r, s\} = \{r', s'\}$ et $r \neq s$. cqfd.

Remarquons que les nouvelles représentations irréductibles de \mathcal{H}_n que l'on vient de construire se restreignent à \mathcal{H}_{n-1} sans faire apparaître de multiplicités, pour tout $n \geq 3$. On a vu dans le cours de la démonstration que les éléments de Jucys-Murphy, donc les éléments toriques de \mathfrak{B}_n , séparent les chemins, donc que le diagramme de Bratteli est bien colorié. De plus, comme les \mathfrak{B}_n -modules $S^\lambda \otimes S^\mu$ vérifient (DIAG) d'après la proposition 35, il en est de même des représentations que l'on vient de construire. En d'autres termes,

Proposition 37. *Pour tous r, s tels que $0 \leq r < s \leq \frac{n}{2}$, et tout $n \geq 3$, les représentations $\alpha_r \otimes \alpha_s$, $S^2\alpha_r$ et $\Lambda^2\alpha_r$ sont des représentations nodales de \mathfrak{B}_n .*

On déduit alors de la proposition 36

Théorème 6. *Pour presque tout q , on a une représentation $A_k(q)$ pour $0 \leq k \leq n/2$ de $H_n(q)$ correspondant au diagramme de Young $[n - k, k]$, que l'on considère comme une représentation de B_n . Alors, pour $r \neq s$, et presque tout q ,*

$$A_r(q) \otimes A_s(q)$$

est irréductible en tant que représentation de $\mathbb{C}B_n$, de même que

$$S^2 A_k(q) \text{ et } \Lambda^2 A_k(q).$$

Remarque.

Les représentations $A_r(q)$ considérées, qui correspondent à des diagrammes de Young à deux colonnes ou à deux lignes, sont précisément les composants irréductibles de la représentation de Jones, et disposent d'interprétations géométriques naturelles. Nous renvoyons à la thèse de Lawrence [54] pour une étude détaillée de ces représentations, ainsi qu'à la construction de Long [56].

4.6 Une dualité entre $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ et \mathfrak{B}_n , pour $m \gg n$

Si l'on se place à nouveau dans le cadre du chapitre III.2, en notant $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ et $G = \text{Aut}(\mathfrak{g})$, on peut définir

Définition 16. Si $n \geq 2$, on note $\text{Surf}_n^0(\mathfrak{g})$ le sous- $\mathfrak{B}_n \times G$ -module de $\mathbb{C}\text{Surf}_n(\mathfrak{g})$ engendré par les vecteurs de plus haut poids de poids $(D_1, D_2)_m$, où (D_1, D_2) parcourt l'ensemble $(E_n)^2$, avec

$$E_n = \{D \vdash n \mid h(D) \leq 2\}.$$

En tant que $\mathfrak{g} \times \mathfrak{B}_n$ -module, on a montré (proposition 29 de III.2.4.1) que

$$\text{Surf}_n^0(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{(D_1, D_2) \in E_n^2} (D_1, D_2)_m \otimes (S^{D_1} \otimes S^{D_2}).$$

D'après la théorie de Clifford (cf. par exemple [1]), le groupe adjoint de \mathfrak{g} étant d'indice 2 dans G , et étant donnée l'action de l'automorphisme extérieur W , on a des représentations irréductibles de G désignées pour $D, D_1, D_2 \in E_n$ par $\{D_1, D_2\}$ pour $D_1 \neq D_2$, $\{D\}^+$ et $\{D\}^-$, qui vérifient

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathfrak{g}}\{D_1, D_2\} &= (D_1, D_2) \oplus (D_2, D_1) \\ \text{Res}_{\mathfrak{g}}\{D\}^+ &= \text{Res}_{\mathfrak{g}}\{D\}^- = (D, D) \end{aligned}$$

avec $\{D\}^+$ non isomorphe à $\{D\}^-$. Ces représentations sont bien définies par les conditions précédentes, à inversion éventuelle des signes + et - près. D'après l'action de W explicitée en III.2.4, on peut écrire, en tant que $\mathfrak{B}_n \times G$ -module,

$$\text{Surf}_n^0(\mathfrak{g}) = \left(\bigoplus_{D_1 \neq D_2} \{D_1, D_2\} \otimes (S^{D_1} \otimes S^{D_2}) \right) \oplus \left(\bigoplus_D \{D\}^+ \otimes S^2(S^D) \right) \oplus \left(\bigoplus_D \{D\}^- \otimes \Lambda^2(S^D) \right).$$

où les diagrammes en indices sont dans E_n , et où les signes sont maintenant bien déterminés, d'après la proposition 36. On déduit ainsi de l'équation précédente, à l'aide de cette même proposition,

Proposition 38. Soit $n \geq 3$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ avec m suffisamment grand, l'image de \mathfrak{B}_n dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(\text{Surf}_n^0(\mathfrak{g}))$ est égale au commutant de $G = \text{Aut}(\mathfrak{g})$.

4.7 Facteurs simples de \mathcal{H}_n et application

On va déduire des résultats précédents certains facteurs simples de \mathcal{H}_n . Nous en déduirons une façon de construire de nouvelles représentations irréductibles de \mathfrak{B}_n , donc de B_n , à partir de foncteurs de Schur.

Nous appliquons ici la méthode que nous avons publiée ailleurs [61], basée sur les résultats suivants :

Proposition 39. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, V et W deux représentations de \mathfrak{g} . Si le \mathfrak{g} -module $V \otimes W$ est simple, V ou W est la représentation triviale de \mathfrak{g} .*

Preuve — On se ramène à \mathfrak{g} simple et V, W irréductibles. La proposition découle immédiatement du lemme 1 de [61]. cqfd.

Proposition 40. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple sur \mathbb{C} , et V une représentation non triviale de \mathfrak{g} telle que S^2V et Λ^2V soit irréductible. Alors le morphisme $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ a pour image $\mathfrak{sl}(V)$, et $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(V)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Preuve — C'est un cas particulier de la proposition 1 de [61]. cqfd.

Si l'on note $d_k^n = \dim \alpha_k^{(n)}$, on déduit par récurrence des formules de restriction à \mathcal{H}_{n-1} que

$$d_k^n = \dim \alpha_k^{(n)} = \binom{n}{k-1} \frac{n-2k+1}{k}$$

et les propositions précédentes entraînent

Théorème 7. *La sous-algèbre de Lie \mathcal{H}_n de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ engendrée par les transpositions est une algèbre de Lie réductive isomorphe à*

$$\mathbb{C} \times \left(\prod_{1 \leq k \leq n/2} \mathfrak{sl}_{d_k^n}(\mathbb{C}) \right) \times \mathfrak{g}$$

où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. Cette algèbre de Lie est triviale pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Preuve — On a vu en III.3 que \mathcal{H}_n est une algèbre de Lie réductive dont le centre, de dimension 1, est engendré par T_n . Il existe donc une famille $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_p$ d'algèbres de Lie simples telles que

$$\mathcal{H}_n = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_p$$

avec $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}$, algèbre de Lie commutative de dimension 1. Chaque α_k est alors isomorphe à une représentation de la forme

$$\alpha_k^{[0]} \otimes \alpha_k^{[1]} \otimes \dots \otimes \alpha_k^{[p]}$$

avec $\alpha_k^{[i]}$ représentation irréductible de \mathfrak{g}_i , pour $0 \leq i \leq p$. Pour $r \neq s$ on a

$$\alpha_r \otimes \alpha_s \simeq (\alpha_r^{[0]} \otimes \alpha_s^{[0]}) \otimes (\alpha_r^{[1]} \otimes \alpha_s^{[1]}) \otimes \dots \otimes (\alpha_r^{[p]} \otimes \alpha_s^{[p]})$$

donc d'après la proposition 36, chacune des $\alpha_r^{[i]} \otimes \alpha_s^{[i]}$ est irréductible comme représentation de \mathfrak{g}_i . On déduit de la proposition 39 que, pour tout $i \in [1, p]$, et tout $r \neq s$, $\alpha_r^{[i]}$ ou $\alpha_s^{[i]}$ est trivial. De plus, comme, pour tout r , $S^2\alpha_r$ et $\Lambda^2\alpha_r$ sont irréductibles, il existe un seul $i_r \geq 1$ tel que $\alpha_r^{[i_r]}$ ne soit pas trivial, et d'après la proposition 40, on a un isomorphisme $\mathfrak{g}_i \rightarrow \mathfrak{sl}(\alpha_r^{[i_r]}) = \mathfrak{sl}(\alpha_r)$. Quitte à renuméroter les indices, on peut supposer que, pour tout r , $i_r = r$. On a alors bien

$$\mathcal{H}_n \simeq \mathbb{C} \times \left(\prod_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \mathfrak{sl}_{d_k^n}(\mathbb{C}) \right) \times \mathfrak{g}$$

où \mathfrak{g} est le produit des \mathfrak{g}_i pour $i > \frac{n}{2}$.

cqfd.

On en déduit le

Corollaire 1. *Soit $n \geq 3$, et $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_p$, pour $p \leq n/2$, une famille de foncteurs de Schur. La représentation de \mathcal{H}_n définie par*

$$\mathbf{F}_1(\alpha_1) \otimes \mathbf{F}_2(\alpha_2) \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_p(\alpha_p)$$

est irréductible.

Preuve — C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et de la dualité de Schur-Weyl. cqfd.

Corollaire 2. *Soit $n \geq 3$, et $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_p$, pour $p \leq n/2$, une famille de foncteurs de Schur. Pour presque tout $q \in \mathbb{C}$, la représentation*

$$\mathbf{F}_1(A_1(q)) \otimes \mathbf{F}_2(A_2(q)) \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_p(A_p(q))$$

est une représentation irréductible de B_n , dont la restriction à P_n est irréductible.

Preuve — C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent et de la proposition 3 de I.1.2.4. cqfd.

Annexe. Dualité entre \mathfrak{sl}_2 et \mathfrak{B}_p

Dans ce chapitre, nous fixons un entier $p \geq 2$ et nous étudions à l'aide des méthodes du chapitre I.2 le bimodule $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour les actions de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et \mathfrak{B}_p . Plus précisément, nous allons montrer que l'on a une dualité entre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et \mathfrak{B}_p sur ce module, et nous allons déterminer des matrices explicites pour l'action de \mathfrak{B}_p . Les études des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{B}_n$ -modules de ce type ont leur origine dans les travaux de Tsuchiya et Kanie [72]. Nous montrons ici comment le formalisme développé dans la première partie de cette thèse est adapté à ce type de situations.

1 Introduction

On considère dans ce chapitre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Les représentations irréductibles de \mathfrak{g} sont caractérisées par leur plus haut poids, de la forme $m\varpi_1$, où $m \in \mathbb{N}$, et ϖ_1 est le poids fondamental de \mathfrak{sl}_2 . On note $[m]$ la représentation irréductible associée à ce plus haut poids, qui est de dimension $m+1$. En particulier, la représentation adjointe est notée $[2]$, la représentation triviale $[0]$. On a alors, pour $n \leq m$, la formule fondamentale ([9] Ex. 11.11 p.151)

$$[m] \otimes [n] = \bigoplus_{k=0}^n [m - n + 2k].$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\otimes 0} &= [0] \\ \mathfrak{g}^{\otimes 1} &= [2] \\ \mathfrak{g}^{\otimes 2} &= [0] + [2] + [4]. \end{aligned}$$

2 La représentation adjointe

Dans ce cas, on a

$$\mathfrak{g}^{\otimes 2} = S^2(\mathfrak{g}) \oplus \Lambda^2(\mathfrak{g})$$

avec

$$\begin{aligned} S^2(\mathfrak{g}) &= [0] + [4] \\ \Lambda^2(\mathfrak{g}) &= [2]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $m \geq 2$,

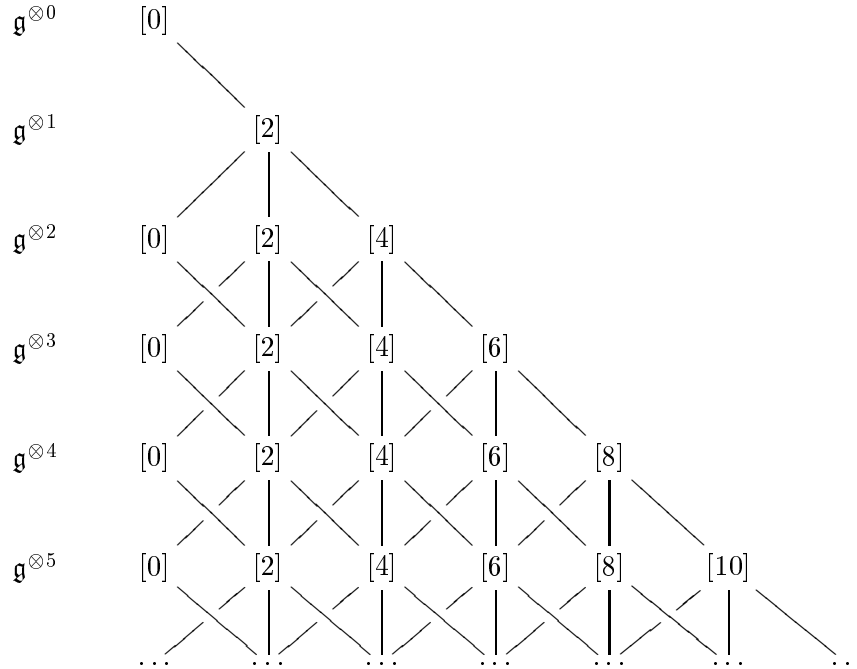
$$[m] \otimes \mathfrak{g} = [m] \otimes [2] = [m - 2] + [m] + [m + 2].$$

On retrouve ainsi que toutes les représentations irréductibles de \mathfrak{sl}_2 qui interviennent dans $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ sont de la forme $[2m]$ pour $0 \leq m \leq p$. On note alors

$$\mathbf{G} := \mathbf{Tot}_p(\mathfrak{g}).$$

3 Approche combinatoire

Le début du graphe peut s'écrire comme suit :



Du point de vue de la structure de $\mathfrak{B}_p \times SL_2$ -bimodule $\mathfrak{g}^{\otimes p}$, on a

$$\mathfrak{g}^{\otimes p} \simeq \bigoplus_{k=0}^p [2k] \otimes R_p([2k])$$

où $R_p([2k]) \simeq Hom_{SL_2}([2k], \mathfrak{g}^{\otimes p})$, représentation de \mathfrak{B}_p partenaire de $[2k]$ dans $\mathfrak{g}^{\otimes p}$, admet comme base les chemins de \mathbf{G} joignant $([0], 0)$ (ou $([2], 1)$) à $([2k], p)$. Ces chemins correspondent à des vecteurs de $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ propres pour l'action des éléments toriques de \mathfrak{B}_n . De plus, ils forment une base orthonormée de $R_p([2k])$ pour une certaine forme quadratique non dégénérée par rapport à laquelle l'action des \mathfrak{B}_p est symétrique (cf. I.1.4.1).

Sur une représentation irréductible de \mathfrak{sl}_2 (ou de SL_2) de la forme $[2m]$, la valeur du Casimir non normalisé est, pour $(| \)$ la forme de Killing et α_1 l'unique racine positive de \mathfrak{sl}_2 ,

$$c = (2m\varpi_1 | 2\varpi_1 + 2m\varpi_1) = 4m(m+1)(\varpi_1 | \varpi_1) = 4m(m+1) \frac{1}{2}(\varpi_1 | \alpha_1) = 2m(m+1).$$

Comme la valeur de c sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ est 4, on en déduit que la valeur du Casimir C , normalisé à 1 sur la représentation adjointe, sur $[2m]$, est

$$C = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Comme de plus $\mathbf{t}_p = \frac{C_p - C_{p-1} - 1}{2}$, on peut en déduire la valeur de \mathbf{t}_p sur les chemins, c'est-à-dire le coloriage des arêtes associé aux éléments toriques, directement en fonction du graphe :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{g}^{\otimes(p-1)} & [2m] & & [2m] & & [2m] \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{g}^{\otimes p} & [2m] & & [2(m-1)] & & [2(m+1)] \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 \\
 \mathbf{t}_p = & \frac{-1}{2} & & -\frac{m+1}{2} & & \frac{m}{2}
 \end{array}$$

Comme avec ces notations $m \geq 1$, on en déduit que $\{\mathbf{t}_p\}$ sépare les chemins. De plus, si $k \leq p, l \leq p + 2$,

$$\mathbb{C}\mathbf{G}_{\binom{[2l]_{p+2}}{[2k]_p}} \simeq Hom_{SL_2}([2l], [2k] \otimes \mathfrak{g}^{\otimes 2})$$

s'identifie à $Hom([2l], [2k] \otimes ([0] + [2] + [4]))$ donc est de dimension 0, 1, 2 ou 3. Afin de décrire ces représentations, nous allons d'abord proposer un autre modèle de description des chemins.

On peut voir, à la manière des chemins de Motzkin, un chemin de $([0], 0)$ vers $([2m], p)$ comme un chemin (s_0, s_1, \dots, s_p) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ où seuls les pas Est, Nord-Est et Sud-Est sont autorisés. La longueur d'un tel chemin est p , et sa hauteur est m . De tels chemins (pour p et m non précisés) s'identifient à des mots, dits *ternaires*, sur un alphabet à trois lettres x_-, x_0, x_+ — un sous-ensemble des mots de Motzkin. On peut définir pour un tel mot M sa i^e lettre, notée $M(i)$, sa longueur $long(M)$ (nombre de lettres), et pour chaque lettre son signe

$$\begin{aligned}
 \epsilon(x_+) &= 1 \\
 \epsilon(x_-) &= -1 \\
 \epsilon(x_0) &= 0,
 \end{aligned}$$

sur chaque mot son module

$$|M| = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon(M(i)).$$

On définit encore la troncature $tronc(M, j)$ qui enlève toutes les lettres de m au-delà de la j^e .

Par cette identification, les chemins correspondent au sous-ensemble \mathcal{M} des mots ternaires décrits par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
 M(1) &= x_+ \\
 \forall i \quad 0 \leq |tronc(M, i)| &\leq i
 \end{aligned}$$

et une base du SL_2 -module $\mathfrak{g}^{\otimes p}$ est formée des mots de \mathcal{M} de longueur p .

Alors, pour tout p ,

$$\begin{aligned}
 s &= (p \ p + 1) \\
 u &= t_{p,p+1} \\
 Y &= \mathbf{t}_{p+1} - \mathbf{t}_p
 \end{aligned}$$

agissent sur toutes les briques $\mathbb{C}\mathbf{G}_{[2k]_{p-1}}^{[2l]_{p+1}}$, dont on peut donc écrire une base par des mots à deux lettres.

De la même façon, la valeur des \mathbf{t}_{p+1} sur les mots n'est fonction que de la $(p+1)^e$ lettre et de $|\text{tronc}(\text{mot}, p)|$. Si $m = |\text{tronc}(\text{mot}, p)|$, on a

$$\mathbf{t}_{p+1}(x_+) = \frac{m}{2} \quad \mathbf{t}_p(x_0) = -\frac{1}{2} \quad \mathbf{t}_{p+1}(x_-) = -\frac{m+1}{2}.$$

Pour les espaces $\mathbf{G}_{[2k]_{p-1}}^{[2l]_{p+1}}$, plusieurs cas sont à considérer.

Il y a d'abord celui, exceptionnel, de la représentation triviale, c'est-à-dire

$$|\text{tronc}(\text{mot}, p-1)| = 0,$$

où l'action de $u = t_{p,p+1}$ est diagonale, identique à celle de t_{12} sur $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$.

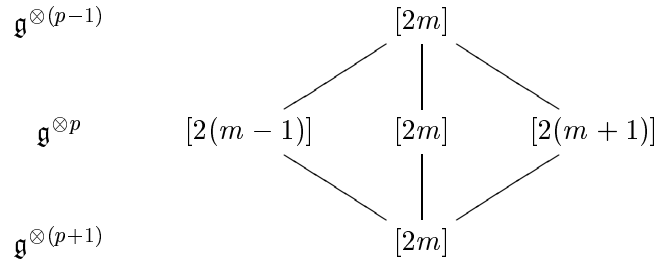
Si l'on exclut désormais ce cas (c'est-à-dire celui des mots de \mathcal{M} de module nul), il faut distinguer suivant la dimension. Plus précisément, un mot $\text{mot}1$ de $p-1$ lettres étant fixé dans \mathcal{M} , la situation dépend du nombre de mots ternaires de deux lettres que l'on peut y ajouter pour obtenir un autre mot $\text{mot}2$ de \mathcal{M} de module donné. On note $m = |\text{mot}1|$.

cas 1 $|\text{mot}2| = |\text{mot}1| = m$

Les mots de trois lettres possibles sont alors x_+x_- , x_0x_0 et x_-x_+ . Sur chacun de ces mots, la valeur de $Y = \mathbf{t}_{p+1} - \mathbf{t}_p$ est alors

$$\begin{array}{ccc} x_+x_- & x_0x_0 & x_-x_+ \\ -(m+1) & 0 & m \end{array}$$

Cela correspond à un morceau de graphe du type



D'autre part, on dispose d'une autre base sur cet espace, fournie par $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. Cette base, que l'on notera $[0], [2], [4]$, est fournie par les vecteurs de plus haut poids de $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. La valeur de u et s sur cette base est donnée par

$$\begin{array}{ccc} & [0] & [2] & [4] \\ u = & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ s = & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$s = 4u^2 + 2u - 1.$$

On dispose alors de deux bases orthonormées, appelées base locale et base des chemins, la première étant propre pour u et s , la deuxième étant propre pour Y . Si l'on écrit les

matrices dans la base locale, l'équation $sYs + Y = 2u$ dit que Y s'écrit, dans la base $[4], [0], [2]$,

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ a & b & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\chi_Y(x) = x^3 + x^2 - \left(\frac{1}{4} + a^2 + b^2\right)x - \frac{1}{4} + \frac{b^2}{2} - a^2.$$

Or

$$\chi_Y(x) = x(x - m)(x + (m + 1)) = x^3 + x^2 - m(m + 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{m(m + 1)}{3} - \frac{1}{4} \\ b^2 &= \frac{2m(m + 1)}{3}. \end{aligned}$$

Comme a^2 et b^2 sont toujours différents de 0 pour $m \geq 1$, on en déduit que cet espace est irréductible en tant que représentation de $\langle u, Y, s \rangle$.

Il ne reste plus alors qu'à trouver la matrice de changement de base associée à la base propre de Y pour calculer les coefficients de u dans la base des chemins. On trouve que $-2u$ vaut

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{m} & 0 & (1 + \frac{1}{m})\sqrt{1 - \frac{2}{2m+1}} \\ 0 & 1 + \frac{1}{m+1} & (-1)(1 - \frac{1}{m+1})\sqrt{1 + \frac{2}{2m+1}} \\ (1 + \frac{1}{m})\sqrt{1 - \frac{2}{2m+1}} & (-1)(1 - \frac{1}{m+1})\sqrt{1 + \frac{2}{2m+1}} & \frac{1}{m(m+1)} \end{pmatrix}$$

dans la base x_-x_+, x_+x_-, x_0x_0 .

Cette matrice se réécrit

$$u = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 - E & 0 & (1 + E)\sqrt{1 - H(E, F)} \\ 0 & 1 + F & (F - 1)\sqrt{1 + H(E, F)} \\ (1 + E)\sqrt{1 - H(E, F)} & (F - 1)\sqrt{1 + H(E, F)} & E - F \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{m} \\ F &= \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

et $H(x, y)$ est la moyenne harmonique

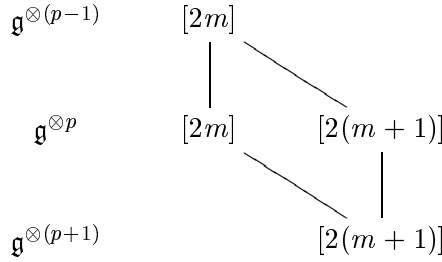
$$H(x, y) = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

cas 2 $||mot2| - |mot1|| = 1$

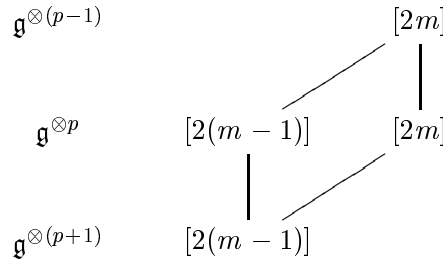
La base des chemins est alors formée des mots x_0x_+ et x_+x_0 , ou x_-x_0 et x_0x_- . La valeur de Y est alors

$$\begin{array}{cc} x_0x_+ & x_+x_0 \\ x_-x_0 & x_0x_- \\ \frac{m}{2} & -\frac{m}{2} \end{array}$$

Le morceau de graphe correspondant est, dans le cas (x_0x_+, x_+x_0) ,



et, dans le cas (x_-x_0, x_0x_-) ,



La base locale est formée des vecteurs propres $[2]$ et $[4]$ de $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. Dans cette base $[2], [4]$, Y s'écrit

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & a \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\chi_Y(x) = x^2 - \frac{1}{4} - a^2$$

mais

$$\chi(Y) = \left(x - \frac{m}{2}\right)\left(x + \frac{m}{2}\right) = x^2 - \frac{m^2}{4}$$

d'où

$$a^2 = \frac{m^2 - 1}{4} = \frac{(m+1)(m-1)}{4}.$$

On a donc $a \neq 0$: l'espace est irréductible pour l'action de $\langle u, Y, s \rangle$.

Dans la base des chemins x_0x_+, x_+x_0 (resp. x_-x_0, x_0x_-), u s'écrit alors

$$u = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ m-1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & 1+E \\ 1-E & -E \end{pmatrix}$$

si $E = \frac{1}{m}$.

cas 3 $||mot2| - |mot1|| = 2$

L'espace est alors de dimension 1, engendré par x_+x_+ ou x_-x_- . Dans les deux cas, la base locale est [4]. On a donc :

$$u = +\frac{1}{2}.$$

Ce qui précède fournit un algorithme pour construire les représentations $\mathbf{G}^{[2k]_p}$ de \mathfrak{B}_p , puisque la formule $s = 4u^2 + 2u - 1$ reste valable dans tous les cas. On a alors la

Proposition 41. (dualité SL_2 - \mathfrak{B}_p) Pour $0 \leq k \leq p$, la représentation $\mathbf{G}^{[2k]_p}$ est une représentation irréductible de \mathfrak{B}_p . De plus, pour $0 \leq k, l \leq p$,

$$\mathbf{G}^{[2k]_p} \simeq \mathbf{G}^{[2l]_p} \Rightarrow k = l.$$

Preuve —

Remarquons d'abord que, les éléments toriques de \mathfrak{B}_n séparant les chemins, le graphe $\mathbf{G}^{[2k]_p}$ est bien colorié. D'autre part, les graphes associés aux briques de dimension strictement supérieure à un sont d'après les calculs précédents



et



On en déduit que l'action des algèbres paliers sur chacune des briques est irréductible, donc l'image de \mathfrak{B}_p dans $M(\mathbf{G}^{[2k]_p})$ est égale à $M_{loc}(\mathbf{G}^{[2k]_p})$. La connexité du graphe palier pour l'action de $M_{loc}(\mathbf{G}^{[2k]_p})$ étant évidente, on déduit de la proposition 16 de I.2.6.3 que

$$\mathfrak{B}_p \rightarrow M_{loc}(\mathbf{G}^{[2k]_p}) = M(\mathbf{G}^{[2k]_p})$$

ce qui démontre l'irréductibilité.

D'autre part, si $\mathbb{C}\mathbf{G}^{[2k]_p} \simeq \mathbb{C}\mathbf{G}^{[2l]_p}$ en tant que \mathfrak{B}_p -modules, les éléments toriques de \mathfrak{B}_n ont les mêmes valeurs propres. Comme ces valeurs séparent (donc déterminent) les chemins, les chemins de ces deux représentations aboutissent toutes au même sommet de \mathbf{G} , d'où $k = l$. cqfd.

Remarque.

Ce résultat peut s'interpréter d'une façon totalement différente si l'on remarque que la représentation adjointe de \mathfrak{sl}_2 n'est rien d'autre que la représentation standard de \mathfrak{so}_3 . Le commutant de l'action diagonale d'une algèbre de Lie classique \mathfrak{g} sur les puissances tensorielles d'une de ses représentations standard étant bien connu depuis les travaux d'Hermann Weyl [21], il suffit de montrer que l'image de \mathfrak{B}_p engendre ce commutant, ce qui est établi dans Goodman et Wallach [13].

4 Approche algébrique

On a vu que l'approche combinatoire ne permettait pas de déterminer explicitement les matrices des t_{ij} . Pour ce faire, on va déterminer explicitement les vecteurs de plus haut poids concernés.

Pour v un vecteur de plus haut poids d'une représentation irréductible Λ , tel que $Hv = mv$, les vecteurs de plus haut poids de $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} T_+(v) &= v \otimes X \\ T_0(v) &= \frac{1}{2}v \otimes H + \frac{1}{m}Yv \otimes X \\ T_-(v) &= v \otimes Y - \frac{1}{m}Yv \otimes H - \frac{1}{m(m-1)}YYv \otimes X \end{aligned}$$

où $HT_0(v) = mv$, $HT_{\pm}(v) = (m \pm 1)v$. Si un tel vecteur est non nul, c'est un vecteur de plus haut poids. Inversement, les vecteurs de plus haut poids éventuels de $\Lambda \otimes \mathfrak{g}$ sont nécessairement de cette forme.

On a alors après calcul

$$\begin{aligned} T_-T_+(v) &= v \otimes Y \otimes X - \frac{1}{m}Yv \otimes H \otimes X - \frac{1}{m(m-1)}YYv \otimes X \otimes X \\ T_0T_0(v) &= \frac{1}{4}v \otimes H \otimes H + \frac{1}{m}v \otimes Y \otimes X + \frac{1}{2m}Yv \otimes X \otimes H \\ &\quad + \frac{m-2}{2m^2}Yv \otimes H \otimes X + \frac{1}{m^2}YYv \otimes X \otimes X \\ T_+T_-(v) &= v \otimes X \otimes Y + \frac{2}{(m+1)(m+2)}v \otimes Y \otimes X + \frac{1}{m+2}v \otimes H \otimes H \\ &\quad + \frac{2}{(m+1)(m+2)}Yv \otimes H \otimes X - \frac{1}{m+2}Yv \otimes X \otimes H \\ &\quad - \frac{1}{(m+1)(m+2)}YYv \otimes X \otimes X. \end{aligned}$$

Sur la base $X \otimes Y, Y \otimes X, X \otimes H, H \otimes X, Y \otimes H, H \otimes Y, X \otimes X, Y \otimes Y, H \otimes H$, on peut obtenir facilement la matrice de t_{12} à partir des relations de Serre de \mathfrak{sl}_2 et de

$$t_{12} = \frac{1}{4}adX \otimes adY + \frac{1}{4}adY \otimes adX + \frac{1}{8}adH \otimes adH$$

	X	Y	X	H	Y	H	X	Y	H
	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes
	Y	X	H	X	H	Y	X	Y	H
$X \otimes Y$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	-1
$Y \otimes X$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	-1
$X \otimes H$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$H \otimes X$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
$Y \otimes H$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$H \otimes Y$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$X \otimes X$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$Y \otimes Y$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$H \otimes H$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	0

On en déduit que dans les bases de type $(T_-T_+(v), T_+T_-(v), T_0T_0(v))$, t_{pp+1} s'écrit

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{m-2}{m} & 0 & -\frac{1}{4}\frac{(m-1)(m+2)^2}{(m+1)m^2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{m+4}{m+2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{m^2(m+3)}{(m+2)^2(m+1)} & -\frac{2}{m(m+2)} \end{pmatrix}$$

De la même façon, de

$$\begin{aligned}
T_+T_0(v) &= \frac{1}{2}v \otimes X \otimes H + \frac{1}{m+2}Yv \otimes X \otimes X - \frac{1}{m+2}v \otimes H \otimes X \\
T_0T_+(v) &= \frac{1}{2}v \otimes H \otimes X + \frac{1}{m}Yv \otimes X \otimes X \\
T_-T_0(v) &= \frac{1}{2}v \otimes Y \otimes H + \frac{1}{m}Yv \otimes Y \otimes X - \frac{1}{2m}Yv \otimes H \otimes H \\
&\quad - \frac{1}{2m(m-1)}YYv \otimes X \otimes H - \frac{m(m-1)}{2}YYv \otimes H \otimes X \\
&\quad - \frac{1}{m(m-1)(m-2)}YYYv \otimes X \otimes X \\
T_0T_-(v) &= \frac{1}{m}Yv \otimes X \otimes Y - \frac{2}{m^2}Yv \otimes Y \otimes X - \frac{1}{m^2}YYv \otimes X \otimes H \\
&\quad - \frac{m-4}{2m^2(m-1)}YYv \otimes H \otimes X - \frac{1}{m}v \otimes Y \otimes H + \frac{1}{2}v \otimes H \otimes Y \\
&\quad - \frac{1}{m^2(m-1)}YYYv \otimes X \otimes X - \frac{m-2}{2m^2}Yv \otimes H \otimes H
\end{aligned}$$

on déduit que la matrice de t_{12} dans les bases de forme $(T_0T_+(v), T_+T_0(v))$ est $Q(m+2)$, et que la matrice de t_{12} dans les bases de forme $(T_-T_0(v), T_0T_-(v))$ est $Q(m)$, où

$$Q(m) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{2} \frac{(m+2)(m-2)}{m^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{m} \end{pmatrix}$$

Index des définitions

Γ -stable	I.2.1	36	graphe des chemins	I.2.3.2	42
algèbre filtrée	I.2.4	44	graphe indécomposable	I.2.1	36
algèbre locale	I.2.5	46	graphe irréductible	I.2.1	36
algèbre palier	I.2.6.2	49	graphe nivelé	I.2.3.1	40
béquille	I.3.2	61	graphe palier	I.2.6.4	51
base de Gelfand-Tsetlin	I.2.4	45	graphe réduit	I.2.1	36
bases locales	I.2.6.3	50	graphe transitif	I.2.1	36
Birman-Wenzl-Murakami	I.1.1.2	15	hauteur	I.2.3.1	41
bon coloriage	I.2.5	47	morphisme spécial	I.1.1.1	12
brique	I.2.3.2	41	houppier	I.2.3.3	43
chemin	I.2.1	36	Jucys-Murphy	I.3.1	59
coloriage	I.2.5	47	localement monogène	I.2.5	46
complété unicéphale	I.2.3.1	41	modules de Specht	I.3.2	60
décrochements	I.3.2	60	niveau	I.2.3.1	40
décrochements relatifs	I.3.2	60	pseudo-diagramme	I.2.4	46
diagramme de Bratteli	I.2.4	44	règle de Young	I.3.3	61
diagramme de Young	I.3.2	60	rectangle	I.3.2	61
diagramme dual	I.3.2	61	réflexions complexes	I.1.1.2	15
diagramme gauche	I.3.3	61	(groupe de)		
distance axiale	I.3.3	64	relation de localité	I.1.1.1	11
éléments toriques de B_n	I.1.1.1	12	relation de tresses	I.1.1.1	11
éléments toriques de \mathfrak{B}_n	I.1.2.1	17	semi-simple (filtration)	I.2.4	44
équerre	I.3.2	61	sporadiques	II.1.5.3	91
famille centralisante	I.2.5	46	symétrique étendu	I.1.2	15
famille génitrice	I.2.5	46	tableaux standard	I.3.2	60
graphe	I.2.1	36	taille (d'un diagramme)	I.3.2	60
graphe superficiel	I.4.2.1	77	taille (d'une brique)	I.2.3.2	41
graphe total	I.4.2.1	77	tresses infinitésimales	I.1.2.1	16
graphe associé	I.2.6.2	49	unicéphale	I.2.3.1	41
(à une brique)			unipode	I.2.3.1	41

Bibliographie

Livres

- [1] D.J. BENSON, *Representations and cohomology*, Cambridge University Press, 1991.
- [2] Joan S. BIRMAN, *Braids, links and mapping class groups*, Princeton University Press, 1974.
- [3] Nicolas BOURBAKI, *Algèbre*, chapitre 9, Hermann, 1959.
- [4] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, chapitre 1, Hermann, 1960.
- [5] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, chapitres 2, 3, Hermann, 1972.
- [6] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, chapitres 4, 5, 6, Hermann, 1968.
- [7] Claude CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, vol. III, Hermann, 1951.
- [8] Pavel I. ETINGOF, Igor B. FRENKEL, Alexander A. KIRILLOV Jr., *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Mathematical surveys and monographs vol. **58**, A.M.S., 1998.
- [9] William FULTON et Joe HARRIS, *Representation theory, a first course*, GTM **129**, Springer-Verlag, 1991.
- [10] Izrail M. GELFAND, *Collected papers*, vol. 2, Springer-Verlag, 1989.
- [11] F.M. GOODMAN, P. DE LA HARPE, V.F.R. JONES, *Coxeter graphs and towers of algebras*, M.S.R.I. Publications **14**, Springer-Verlag, 1989.
- [12] Alain GUICHARDET, *Groupes Quantiques*, Interéditions, 1995.
- [13] Roe GOODMAN et Nolan R. WALLACH, *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of mathematics and its applications **68**, Cambridge University Press, 1998.
- [14] Gordon JAMES et Adalbert KERBER, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **16**, Cambridge, 1981.
- [15] Christian KASSEL, *Quantum groups*, GTM 155, Springer-Verlag, 1995.
- [16] Toshitake KOHNO, *New developments in the theory of knots*, Advanced series of Math. Phys. **11**, World Scientific, 1989.

- [17] Jean A. LAPPO-DANILEVSKII, *Mémoires sur la théorie des systèmes des (sic) équations différentielles linéaires*, Académie des sciences de l'URSS, Institut Steckloff, 1934, 1935, 1936.
- [18] Ian G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, deuxième édition, Clarendon Press, 1995.
- [19] David MUMFORD, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965.
- [20] Christophe REUTENAUER, *Free Lie algebras*, Clarendon Press, 1993.
- [21] Hermann WEYL, *The classical groups: their invariants and representations, 2nd edition*, Princeton University Press, 1946.

Articles et Prépublications

- [22] V.I. Arnold, The cohomology ring of the group of dyed braids, *Mat Zametki* **5** (1969) 227-231, traduction anglaise dans The cohomology ring of the colored braid group, *Math. Notes* **5** (1969) 138-140.
- [23] E. Artin, Theorie der Zöpfe, *Hamburg Abh.* **4** (1925) 47-72.
- [24] S. J. Bigelow, Braid groups are linear, à paraître dans *Journal of the A.M.S.* prépublication math.GR/0005038 (2000).
- [25] S.J. Bigelow, The Burau representation is not faithful for $n \geq 5$, *Geom. Topolog.* **3** (1999) 397-404.
- [26] J.S. Birman, H. Wenzl, Braids, link polynomials and a new algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989) 249-273.
- [27] O. Bratteli, Inductive limits of finite dimensional C^* algebras, *Trans. A.M.S.* **171** (1972) 195-234.
- [28] M. Broué, G. Malle, Zyklotomische Heckealgebren, *Astérisque* **212** (1993) 7-92.
- [29] M. Broué, G. Malle, R. Rouquier, Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras, *J. Reine Angew. Math.* **500** (1998) 127-190.
- [30] P. Cartier, Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevitch des nœuds, *Comptes Rendus Acad. Sci.* **316**, série **I**, (1993) 1205-1210.
- [31] P. Cartier, Développements récents sur les groupes de tresses : applications à la topologie et à l'algèbre, *Séminaire Bourbaki*, exposé 716 (nov. 1989) / *Astérisque* **189-190** (1990) 17-67.
- [32] K.T. Chen, Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977) no. 5, 831-879.
- [33] I. Cherednik, Monodromy representations for generalized Knizhnik-Zamolodchikov equations and Hecke algebras, *Publ. RIMS* **27** (1991) 711-726.
- [34] W.L. Chow, On the algebraic braid group, *Ann. of Math.* **49** (1948) 654-658.

- [35] C.W. Curtis, N. Iwahori, R. Kilmoyer, Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B, N) -pairs, *Publ. Math. IHES* **40** (1971) 81-116.
- [36] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in *Galois groups over \mathbb{Q}* , *MSRI Publ. 16*, 1989, 79-287.
- [37] P. Diaconis et C. Greene, Applications of Murphy's elements, inédit (1989).
- [38] V.G. Drinfeld, On quasitriangular Hopf algebras and a group closely related with $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. Journal* Vol. 2 (1991) No. 4 829-860.
- [39] M. El Houari, *Nouvelle classification des (super-)algèbres de Lie simples par le biais de leurs invariants tensoriels*, Thèse de l'université Paris XI, 1994.
- [40] E. Formanek, Braid group representations of low degree, *Proc. London Math. Soc.*, **34** n° 3 (1997) 673-693.
- [41] J. González-Lorca, Structure des algèbres de Hecke de type A : un isomorphisme explicite, *Comptes Rendus Acad. Sci.* **326**, série **I**, (1998) 147-152.
- [42] J. González-Lorca, *Série de Drinfeld, monodromie et algèbres de Hecke*, Thèse de l'Université Paris XI-Orsay, 1998.
- [43] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, notes miméographiées, Montpellier 1984. Réédition dans *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **242** 5-48.
- [44] P. Hanlon, On the decomposition of the tensor algebra of the classical Lie algebras, *Advances in Math.* **56** (1985) 238-282.
- [45] P.N. Hoefsmit, *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN pairs of classical type*, Thesis, University of British Columbia, 1974.
- [46] V.F.R. Jones, Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras, *Bull. A.M.S.* **12** (1985) 103-111.
- [47] V.F.R. Jones, Hecke algebras of braid groups and link polynomials, *Annals of Math.* **126** (1987) 335-388.
- [48] L. H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* **26** 3 (1987) 395-407.
- [49] T. Kohno, Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures, *Invent. Math.* **82** (1985) 57-75.
- [50] T. Kohno, Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations, *Ann. Inst. Fourier* **37** (1987) 139-160.
- [51] T. Kohno, Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations, *Contemporary mathematics* **78** (1988) 339-363.
- [52] D. Krammer, The braid group B_4 is linear, *Inven. math.* **142** (2000) 3, 451-486.
- [53] D. Krammer, Braid groups are linear, prépublication de l'université de Bâle (2000).
- [54] R.J. Lawrence, *Homology Representations of Braid Groups*, Thèse, Oxford 1989.

- [55] R. J. Lawrence, Homological representations of the Hecke algebra, *Comm. Math. Phys.* **135** (1990) 141-191.
- [56] D.D. Long, Constructing representations of braid groups, *Comm. Anal. Geom.* **2** (1994) 217-238.
- [57] D.D. Long et M. Paton, The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$, *Topology* **32** (1993) 439-447.
- [58] A. Lubotzky et A.R. Magid, Varieties of representations of finitely generated groups, *Memoirs of the A.M.S.*, vol. **58** 336 (1985).
- [59] G. Lusztig, On a theorem of Benson and Curtis, *Journal of Algebra* **71** (1981) 2 490-498.
- [60] G. Malle, communication personnelle, 10 avril 2000.
- [61] I. Marin, Une caractérisation tensorielle des représentations standard, *Expositiones Mathematicæ*, **18** (2000) 243-254.
- [62] J.A. Moody, The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n , *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **25** (1991) 379-384.
- [63] J. Müller, communication personnelle, juillet 2000.
- [64] J. Murakami, The Kauffman polynomial of links and representation theory, *Osaka J. Math.* **24** (1987) 745-758.
- [65] M. Nazarov, V. Tarasov, On irreducibility of tensor products of Yangian modules associated with skew Young diagrams, prépublication math.QA/0012039.
- [66] A. Ram, Seminormal representations of Weyl groups and Iwahori-Hecke algebras, *Proc. London Math. Soc.* 75 (1997) 99-133.
- [67] G.C. Shephard et J.A. Todd, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.* **6** (1954) 274-304.
- [68] I. Sysoeva, Dimension n representations of the braid group on n strings, prépublication math.GR/0003129 (2000).
- [69] I. Sysoeva, *On irreducible representations of braid groups*, Thèse de l'université de Pennsylvanie, 1999.
- [70] J. Tits, Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus, *J. of Algebra* **4** (1966) 96-116.
- [71] D.-M. Tong, S.-D. Yang, Z.-Q. Ma, A new class of representations of braid groups, *Comm. Theoret. Phys.* **26** (1996) No 4, 483-486.
- [72] A. Tsuchiya et Y. Kanie, Vertex operators in conformal field theory on $P\mathfrak{sp}1$ and monodromy representations of braid group, *Adv. Stud. Pure Math.*, **16**, 297-372.
- [73] V. Turaev, Faithful representations of the braid groups, *Séminaire Bourbaki*, exposé 878 (juin 2000).

- [74] A. M. Vershik et S. Kerov, Locally semisimple algebras, combinatorial theory and the K_0 -functor, *Journ. Soviet Maths* **38** (1987) 1707-1733.
- [75] A.M. Vershik et A. Okounkov, A new approach to representation theory of symmetric groups, *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996) n°4, 581-605.
- [76] P. Vogel, L'algèbre de Lie universelle, prépublication.
- [77] M. Zinno, On Krammer's representation of the braid groups, prépublication math.RT/0002136 (2000).

Logiciels

- [MAPLE] versions 5.3, 5.4 et 5.5. Waterloo Maple Inc.
- [S⁺95] Martin Schönert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.
- [GHL⁺96] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer. *CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras*. *AAECC*, 7:175–210, 1996.

Table des matières

Introduction	1
Notations et conventions générales	7
I Généralités	9
1 Tresses et tresses infinitésimales	11
1.1 Le groupe d'Artin	11
1.1.1 Définition	11
1.1.2 Quotients remarquables	13
1.2 Tresses infinitésimales	16
1.2.1 Définition	16
1.2.2 Equations KZ et "intégration" des représentations	17
1.2.3 Propriétés locales	19
1.2.4 Irréductibilité et restrictions	21
1.2.5 Monodromie à l'infini	24
1.2.6 Intégration formelle et propriétés locales	25
1.2.7 kB_n -modules: équivalences et indécomposabilité	26
1.3 Représentations de tresses	28
1.3.1 Représentations de B_n	28
1.3.2 Représentations de \mathfrak{B}_n	28
2 Tours d'algèbres	35
2.1 Graphes et algèbres de graphes	35
2.2 Généralisation dans un cadre "relatif"	38
2.3 Graphes nivelés et algèbres associées	40
2.3.1 Graphes nivelés	40
2.3.2 Graphe des chemins	41
2.3.3 Terminologie	43
2.4 Algèbres filtrées et diagrammes de Bratteli	44
2.5 Algèbres locales	46
2.6 Modules locaux	48
2.6.1 Sous-algèbres locales de $M(\mathbf{G})$	48
2.6.2 Algèbre palier	49
2.6.3 Décomposition en briques	50
2.6.4 Critère inductif	50

2.7	Applications	52
2.7.1	Analyse des variétés $\mathcal{V}(M)$: introduction	52
2.7.2	Analyse des variétés $\mathcal{V}(M)$: étapes	53
2.7.3	Intégration explicite: un algorithme	54
3	Représentations du groupe symétrique	59
3.1	Éléments de Jucys-Murphy	59
3.2	Diagrammes de Young	60
3.3	L'algèbre locale $k\mathfrak{S}_n$	61
3.4	Propriétés héréditaires des \mathfrak{S}_n -modules	64
3.4.1	Structure métrique	65
3.4.2	Rectangles	65
3.4.3	Représentations irréductibles et isotypiques	66
3.4.4	Sommes d'équerres	68
4	Tresses et algèbres de Lie semi-simples	71
4.1	Bimodules associés aux algèbres de Lie	71
4.1.1	Les bimodules $V^{\otimes n}$	71
4.1.2	Les bimodules $\mathfrak{g}^{\otimes n}$	73
4.1.3	$U_q\mathfrak{g} \times B_n$ -bimodules	75
4.2	Commutants	76
4.2.1	Cadre général	76
4.2.2	Exemple	77
4.2.3	Coloriage et algèbres de Lie	79
II	Représentations explicites	81
1	Modules de Specht	83
1.1	Préliminaires sur les diagrammes de Young	83
1.2	Paramètres définissant $t_{n-1,n}$	84
1.3	L'équation $R(t) = 0$	85
1.4	L'équation $L(t) = 0$	87
1.5	Résolution des équations	87
1.5.1	Triangles de faible diamètre	88
1.5.2	Triangles génériques	88
1.5.3	Triangles plats	90
1.6	Etude des représentations sporadiques	92
1.6.1	Représentation de \mathfrak{B}_4	92
1.6.2	Représentations de \mathfrak{B}_n , $n \geq 5$	93
2	Représentations de degré au plus n	95
2.1	La représentation naturelle de \mathfrak{S}_n	95
2.2	Représentations de \mathfrak{B}_n et B_n	96
2.3	Modèles naturels	98
2.3.1	La représentation \mathcal{L}_n	98
2.3.2	Représentations indécomposables	99

2.3.3	Décomposition de $\mathcal{L}_n(a) \otimes \mathcal{L}_n(b)$	100
2.4	Restriction à \mathfrak{B}_{n-1}	100
2.5	Classification des représentations de degré au plus n de \mathfrak{B}_n	101
3	Algèbres de Hecke cyclotomiques de type A	103
3.1	Algèbres de Hecke généralisées	104
3.2	Représentations de G_4	105
3.3	L'algèbre de Hecke cyclotomique de G_4	106
3.4	Représentations de H_{25}	108
3.4.1	La représentation $\overline{V}_{a,b,c}$	109
3.4.2	Les représentations X et X'	111
3.4.3	Les représentations \overline{W}_x	112
3.5	Sur les représentations de H_{32}	113
4	Représentations sporadiques	117
4.1	La variété $\mathcal{V}_s([n-1, 1] \oplus [n-2, 1, 1])$	117
4.1.1	Classification	118
4.1.2	Restrictions	120
4.1.3	Diagrammes de Bratteli	123
4.2	Intégration de $\mathcal{R}_2^{(n)}(x, y)$	124
4.3	Intégration des représentations sporadiques	130
III	Tresses, transpositions, et constructions tensorielles	135
1	Groupes symétriques étendus	137
1.1	Intégration de la représentation naturelle	137
1.2	Intégration de $\mathcal{R}_1(x, y)$	139
1.2.1	Intégration de $\mathcal{R}_1^{(4)}(x, y)$	139
1.2.2	Intégration de $\mathcal{R}_1^{(n)}(x, y)$	140
1.3	Puissances alternées de \mathcal{L}_n	142
1.4	Représentations Λ_n^p	144
1.4.1	Construction	144
1.4.2	Modèles combinatoires	146
2	Le bimodule $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\otimes p}$, $n \gg p$	149
2.1	Doubles diagrammes de Young	150
2.2	Multiplication par \mathfrak{g} - énoncés	151
2.3	Multiplication par \mathfrak{g} - preuve	152
2.4	Vecteurs de plus haut poids	153
2.5	Module superficiel	156
3	L'algèbre de Lie des transpositions	159
3.1	Etude combinatoire	159
3.1.1	Lemmes préliminaires	159
3.1.2	Exemple de \mathcal{H}_3	160
3.1.3	Détermination du centre de \mathcal{H}_n	161

3.1.4	Exemple de \mathcal{H}_4	162
3.2	Représentations	163
3.2.1	La représentation régulière de \mathcal{H}_n	163
3.2.2	Représentations en équerres	164
3.2.3	Représentations autoduales	165
3.3	Décomposition de $\mathcal{H}_5, \mathcal{H}_6$	166
4	Produits tensoriels	169
4.1	Représentations nodales	170
4.2	Irréductibilité des produits tensoriels	172
4.3	Produits tensoriels $S^\lambda \otimes S^\mu$	175
4.4	Diagrammes de Young à deux colonnes	178
4.5	Décomposition de $\alpha_r \otimes \alpha_s$	179
4.6	Une dualité entre $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$ et \mathfrak{B}_n , pour $m \gg n$	184
4.7	Facteurs simples de \mathcal{H}_n et application	185
	Annexe. Dualité entre \mathfrak{sl}_2 et \mathfrak{B}_p	187
	Index des définitions	197
	Bibliographie	199

Numéro d'impression 2328
1^{er} trimestre 2001

Résumé. L'objet de ce travail est l'étude générale des représentations linéaires du groupe de tresses B_n qui proviennent de l'intégration de systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov (KZ), vus comme représentations de l'algèbre des tresses infinitésimales. Nous utilisons la technique des bases de Gelfand-Tsetlin pour étudier certaines représentations de cette algèbre, et montrons comment construire explicitement les représentations du groupe d'Artin correspondantes. Nous classifions complètement les systèmes KZ qui sont irréductibles pour l'action du groupe symétrique et construisons les nouvelles représentations de B_n qui apparaissent à cette occasion. Nous obtenons d'autre part des critères d'irréductibilité sur les représentations de B_n obtenues par construction tensorielle. Nous obtenons enfin d'autres résultats utiles dans ce cadre, notamment une décomposition partielle de l'algèbre de Lie engendrée par les transpositions dans l'algèbre de groupe du groupe symétrique. Cette décomposition partielle est en rapport avec les composantes irréductibles de la représentation de Jones.

Mots clés : représentations, groupes de tresses, Knizhnik-Zamolodchikov, tresses infinitésimales, bases de Gelfand-Tsetlin, groupes symétriques, tours d'algèbres.

Abstract. This work contributes to the general study of linear representations of Artin's Braid group B_n that arise as monodromy of KZ-systems. We consider these systems as representations of the Hopf algebra of infinitesimal braids, and apply the technique of Gelfand-Tsetlin basis. The purpose is twofold: this technique gives a good insight into the representation theory of this algebra, and we show that it helps in the explicit construction of the corresponding braid group representations. We give a complete classification of KZ-systems that are irreducible for the action of the symmetric group, and build the new representations of B_n that arise at this stage. Among other results that are useful in this setting, we obtain irreducibility criteria on tensor products and related constructions, and get a partial decomposition of the Lie algebra generated by transpositions in the group algebra of the symmetric group. This partial decomposition involves summands of the Jones representation.

Keywords : representations, braid groups, Knizhnik-Zamolodchikov, infinitesimal braids, Gelfand-Tsetlin basis, symmetric groups, towers of algebras.

Mathematics Subject Classification 2000 : 20F36, 20C08 (81R05, 20C30, 05E10)