



HAL
open science

Quelques applications de la théorie des champs à la physique de la matière condensée : l'effet Hall quantique dans tous ses états

Frédéric Chandelier

► **To cite this version:**

Frédéric Chandelier. Quelques applications de la théorie des champs à la physique de la matière condensée : l'effet Hall quantique dans tous ses états. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2003. Français. NNT: . tel-00005442

HAL Id: tel-00005442

<https://theses.hal.science/tel-00005442>

Submitted on 23 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques applications de la
Théorie des Champs
à la physique de la Matière
Condensée :
l'effet Hall dans tous ses états

Frédéric CHANDELIER

décembre 2003

Table des matières

1	Introduction	7
2	Effet Hall Quantique : aspects généraux	11
2.1	Faits expérimentaux	11
2.2	L'effet Hall classique : mouvement d'électrons	15
2.2.1	La physique de l'Effet Hall : une image semi-classique	15
2.2.2	La mécanique (semi-)classique de l'effet Hall	17
2.3	L'Effect Hall Quantique	21
2.3.1	Caractéristiques générales	21
2.3.2	Problème de Landau	22
3	Conductivité de Hall : un invariant topologique ?	27
3.1	L'argument de Laughlin	27
3.2	Electrons libres dans un potentiel périodique	31
3.3	Les échantillons réels	35
3.4	Fonctions d'onde de Laughlin, EHQ fractionnaire	38
3.4.1	La fonction d'onde de Laughlin pour les états fonda- mentaux à $\nu = \frac{1}{m}$	39
3.4.2	Fonction d'onde de Laughlin pour les quasi- particules	41
3.5	Statistique fractionnaire et l'EHQ fractionnaire	42
3.5.1	Statistique fractionnaire des quasi-particules	42
3.5.2	Statistique fractionnaire et schéma de hiérarchie	44
3.6	Dégénérescence du fondamental	46
3.6.1	L'argument de Laughlin étendu	46
3.6.2	La dégénérescence du fondamental sur le tore	48

4	Problème de Landau sur un échantillon de taille finie	51
4.1	Introduction	51
4.2	Le problème considéré	55
4.2.1	Le système physique	55
4.2.2	Hamiltonien du système	56
4.3	Opérateurs sur l'espace \mathcal{H}_0	59
4.4	Discussion du cadre mathématique	62
4.5	Calcul de la conductivité	65
4.6	Conclusions	70
4.7	Annexe	72
4.7.1	Expression de la formule de Kubo	72
4.7.2	Calcul de la première classe de Chern	74
5	Symétries modulaires, théories effectives et approches phé-	
	noménologiques de l'effet Hall quantique	77
5.1	Introduction	77
5.2	Groupes modulaires. Propriétés utiles	78
5.3	Synthèse des travaux antérieurs	79
5.4	Loi des états correspondants	83
5.5	Diagramme de visibilité	87
5.5.1	Hierarchie basée sur $\Gamma(2)$	87
5.5.2	Diagramme de visibilité	88
5.5.3	Prédictions physiques	93
6	Un diagramme de phase pour l'effet Hall quantique	99
6.1	Introduction	99
6.2	La correspondance physique	100
6.3	Construction du diagramme des phases global	102
6.4	Discussion des prédictions	104
6.4.1	Structure du diagramme de phases	104
6.4.2	Règles de sélection	108
6.4.3	Comparaison aux autres prédictions théoriques	108
6.4.4	Discussion de la loi des états correspondants	109
6.4.5	Comparaison avec l'expérience	111
6.4.6	Conclusion	113

7	Dualité et théories effectives de type Maxwell-Chern-Simons	115
7.1	Dualités	115
7.2	Théories effectives de type Maxwell-Chern-Simons	117
7.3	Incorporation de caractéristiques tri-dimensionnelles	119
7.4	Dualité pour une classe d'actions de MCS	121
7.5	Discussion	126
7.6	Une première illustration	126
8	Conclusion	131

Table des figures

2.1	Géométrie de l'échantillon	12
2.2	Un exemple d'EHQ entier	13
2.3	Un exemple d'EHQ fractionnaire	14
2.4	EHQ entier et EHQ fractionnaire réunis	15
2.5	Région a) de la Figure précédente	16
2.6	Montage classique pour mesurer la tension de Hall [3]	20
3.1	La structure des niveaux de Landau élargis	28
3.2	Géométrie de Laughlin	29
4.1	Géométrie globale de l'expérience pour l'effet Hall quantique	55
5.1	Réseau bi-dimensionnel	88
5.2	Le diagramme de visibilité pair-impair	90
5.3	Le diagramme de visibilité impair-impair	91
5.4	Le diagramme de visibilité impair-pair	92
5.5	Comparaison des structures en bande : diagramme impair- graphe expérimental de la conductance G	95
5.6	Prédiction théorique de ρ_{xy} (en unité de $\frac{h}{e^2}$) en fonction de ν	96
5.7	Comparaison des données expérimentales de [90] avec la pré- diction théorique de ρ_{xy}	97
6.1	Diagramme des phases global à température nulle dans le plan (B, N_c)	105
6.2	Diagramme des phases global à température nulle dans le plan ($\frac{1}{\nu}, \frac{1}{N_c}$)	107
6.3	Diagramme des phases global à température nulle dans le plan ($\frac{1}{\nu}, p$)	109

6.4 Diagrammes des phases numériques pour l'effet Hall quantique
entier tirés de [50]. 110

Chapitre 1

Introduction

La physique des systèmes à $(2 + 1)$ dimensions, ou systèmes plans est très riche de phénomènes. En particulier, en physique du solide et en matière condensée, on rencontre beaucoup de situations expérimentales correspondants à de tels systèmes : systèmes de charges et/ou vortex, superfluidité, supraconductivité, films fins, et effet Hall lorsque le système est soumis à un champ magnétique perpendiculaire.

Depuis la découverte de l'effet Hall quantique (EHQ) par von Klitzing, Dorda et Pepper [1], beaucoup de travaux ont été publiés concernant diverses approches pour comprendre l'E HQ. On peut séparer les approches de l'E HQ en deux grandes classes. D'abord les approches dites topologiques qui combinent la mécanique quantique, l'invariance de jauge, la formule de Kubo (théorie de la réponse linéaire), classes caractéristiques, fibrés. Elles fournissent une explication possible de la quantification entière ou fractionnaire de la conductivité de Hall. Et finalement, les approches plus phénoménologiques, parmi lesquelles celles basées sur les symétries modulaires, éventuellement associées à un Lagrangien effectif. Cette thèse présente trois contributions personnelles s'insérant dans ces deux classes d'approches.

Le chapitre deux est une introduction générale sur l'effet Hall classique et quantique. On expose les conditions expérimentales, la nature et la géométrie des échantillons dans lequel il est observé. On introduit les diverses grandeurs utiles telles le facteur de remplissage, la conductivité de Hall. Les courbes expérimentales de résistivité en fonction du champ magnétique B montrent les plateaux de Hall entiers et fractionnaires. L'effet classique s'explique par un

modèle bi-dimensionnel simple d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire. On rappelle la mécanique semi-classique de cet effet qui aboutit à la formule de Drude pour la conductivité de Hall. Ensuite, les caractéristiques générales de l'effet quantique sont présentées sous l'angle du problème de Landau. On rappelle en particulier la notion de longueur magnétique, la forme générale des solutions, l'expression des énergies propres et de la dégénérescence des niveaux, et l'expression de la conductivité de Hall qui est alors entière.

Le chapitre trois met l'accent sur l'approche topologique. On y expose l'argument de Laughlin, qui dans le cas d'une géométrie cylindrique a permis de montrer la quantification de la conductivité de Hall en multiples entiers de $\frac{e^2}{h}$. Ensuite, on présente des raffinements de cet argument. En particulier, on passe en revue le travail de Thouless, Kohmoto, Nightingale et den Nijs qui ont considéré le cas d'électrons sans interaction en présence d'un potentiel périodique. On présente aussi l'analyse d'Avron et Seiler généralisant cette approche au cas général du problème à N -corps avec des interactions entre électrons, faibles impuretés aléatoires et imperfections du crystal. Ces approches topologiques ont "amélioré" l'argument de Laughlin explicitant l'origine topologique de la quantification et en clarifiant le rôle de la non-dégénérescence de l'état fondamental. On rappelle également les propriétés des fonctions d'onde de Laughlin et leur pertinence pour la description des quasi-particules de charge fractionnaire.

Le chapitre quatre présente une contribution personnelle centrée sur l'étude d'un problème de type Landau dans une géométrie proche des expériences sur l'effet Hall : un échantillon rectangulaire dont les bords sont reliés par deux fils. On construit un formalisme mathématique permettant de calculer la conductivité de Hall du système. Le calcul de la formule de Kubo peut être réalisé in extenso moyennant l'existence d'une condition de quantification sur NB , produit du nombre d'électrons N par le champ magnétique externe B . On trouve que la conductivité de Hall est entière ou fractionnaire. L'originalité de ce travail, par rapport aux travaux précédents, est que l'on prend en compte des conditions aux limites générales et compatibles avec l'invariance de jauge.

Le chapitre cinq passe en revue des approches phénoménologiques basées principalement sur les symétries modulaires. Schématiquement, dans ces ap-

proches, on utilise des transformations de dualité, qui semblent compatibles avec les observations expérimentales, pour établir des relations entre les divers états de Hall. Les transformations de dualité forment un groupe de symétrie modulaire. Ces approches ont donné lieu à la construction de modèles hiérarchiques. Combinées à des arguments liés à des transformations d'échelle, elles ont également permis de reproduire une partie des observations : loi du demi-cercle reliant les composantes du tenseur de conductivité, hiérarchie d'états, règles de sélection pour les transitions, etc... On présente de façon synthétique comment apparaît une symétrie modulaire particulière dans une classe de modèles effectifs de type Landau-Ginzburg initialement considéré par [4]. Cette symétrie modulaire reproduit en fait la loi des états correspondants trouvée par Kivelson, Lee et Zhang. Enfin, on introduit un outil graphique relié aux symétries modulaires : les diagrammes de visibilité. Ces diagrammes permettent de visualiser l'action de symétries modulaires sur les états de Hall. Ces diagrammes avaient déjà permis de bien reproduire des observations : courbe de résistivité, structure de bandes expérimentalement observées dans les fluctuations de conductance en régime de Hall.

Le chapitre six présente une contribution personnelle relative à l'exploitation des diagrammes de visibilité. Grâce à l'introduction d'une correspondance physique entre diagrammes et quantités physiques, on construit un diagramme de phase globale pour l'EHQ à température nulle. Celui-ci semble être en bon accord avec les expériences. On prédit l'existence de deux phases isolantes qui pourraient être identifiées à un cristal de Wigner et un isolant d'Anderson. On prédit aussi l'existence de transitions isolant-plateau entier ou fractionnaire dont certaines sont observées expérimentalement.

Finalement, le chapitre sept présente une contribution personnelle qui s'insère plus dans les approches phénoménologiques liées aux symétries de dualité, et à l'utilisation de Lagrangiens effectifs pour décrire des systèmes plans de façon plus générale. Pour une grande classe de systèmes planaires de matière condensée, le comportement à longue distance des degrés de liberté pertinents (charges et/ou vortex) peut être décrit à l'aide d'une théorie de jauge à $(2 + 1)$ -dimensions. Mais ces modèles effectifs ne décrivent pas tout à fait une situation réaliste. En effet, le plan dans lequel les charges et les vortex sont confinés est plongé dans un espace à trois dimensions et est soumis à un champ électromagnétique réel. Pour prendre en compte l'origine tri-dimensionnelle du champ, on modifie ces modèles en introduisant une

non-localité. On a alors montré l'existence d'une symétrie de dualité cachée de type \mathbb{Z}_2 intervenant dans cette classe de modèles. Une première illustration a été de considérer un système de charges et de vortex. La symétrie de dualité a permis alors de reproduire la loi de Fischer pour les composantes du tenseur de résistivité.

Chapitre 2

Effet Hall Quantique : aspects généraux

2.1 Faits expérimentaux

Cet effet est observé ([1],[2],[3]) dans des systèmes bi-dimensionnels d'électrons à basse température et plongés dans des champs magnétiques intenses. Les électrons ne vivent pas réellement dans un plan mais sont plutôt piégés dans une fine couche ($\sim 100 \text{ \AA}$) à l'interface entre un semiconducteur et un isolant ou entre des semiconducteurs. Les échantillons les plus souvent utilisés sont les TMOSEC (Si MOSFET ou Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistor) et les hétéro-structures $GaAs/Ga_xAl_{1-x}As$ ($0 < x < 1$). Typiquement pour l'effet entier, la plage de température est $T \sim 1 - 4 K$ et le champ magnétique $B \sim 3 - 30$ Tesla. Pour l'effet fractionnaire, la température est même plus faible, $T \sim 20 - 100 mK$ et le champ magnétique doit être plus intense, $B \sim 15 - 30 T$. Une température basse est nécessaire pour geler les mouvements dans la direction perpendiculaire. Ainsi, le système peut être considéré comme bi-dimensionnel. Un champ B intense permet au système d'être dans la limite quantique pour que les électrons remplissent, à partir du bas, les niveaux d'énergie de Landau du mouvement cyclotron.

Un paramètre physique important pour la suite est le facteur de remplissage ν , défini par :

$$\nu = \frac{\text{nombre } e^-}{\text{nombre sites de Landau}} = \frac{N_e}{N_\phi} = \frac{N_e}{\frac{\phi}{\phi_0}}, \quad (2.1)$$

où N_e est le nombre d'électrons et N_ϕ la dégénérescence de chaque niveau de Landau égale au flux magnétique total qui traverse le système planaire en unité de quantum de flux $\phi_0 = \frac{hc}{e}$ ($-e$ étant la charge de l'électron).

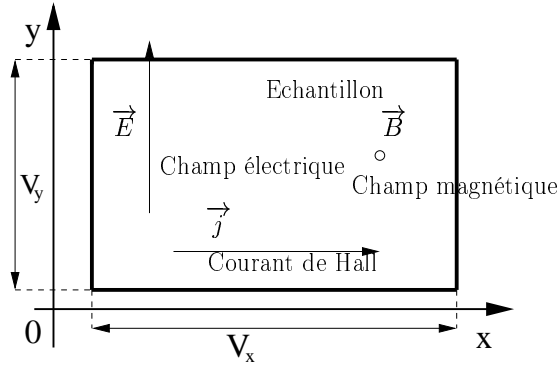


FIG. 2.1: Géométrie de l'échantillon

Expérimentalement, ν peut être ajusté soit par la source, soit en changeant le champ magnétique, ou soit en variant la tension de porte (définie dans la suite). ν représente physiquement le nombre de niveaux de Landau remplis à $T = 0$. On suppose ici qu'un champ électrique est appliqué dans la direction y ($\vec{E} = E\vec{y}$) dans le plan de l'échantillon, ou qu'on applique une tension, appelée tension de porte que l'on peut faire varier dans l'expérience. Le courant de Hall est dans la direction x . Il est $\vec{j} = I_x\vec{x}$ (voir la figure 2.1). Les données sont souvent présentées sous la forme de deux courbes : ρ_{xy} et ρ_{xx} en fonction de B (voir les figures 2.2,2.3,2.4,2.5 ci-après dans le texte). Ici, $\rho_{xx} = \frac{V_x}{I_x}$ et $\rho_{xy} = \frac{V_y}{I_x}$, et sont respectivement la résistance longitudinale et transverse. Avec un nombre d'électrons fixé, un changement du champ B entraîne en réalité un changement de la valeur de ν .

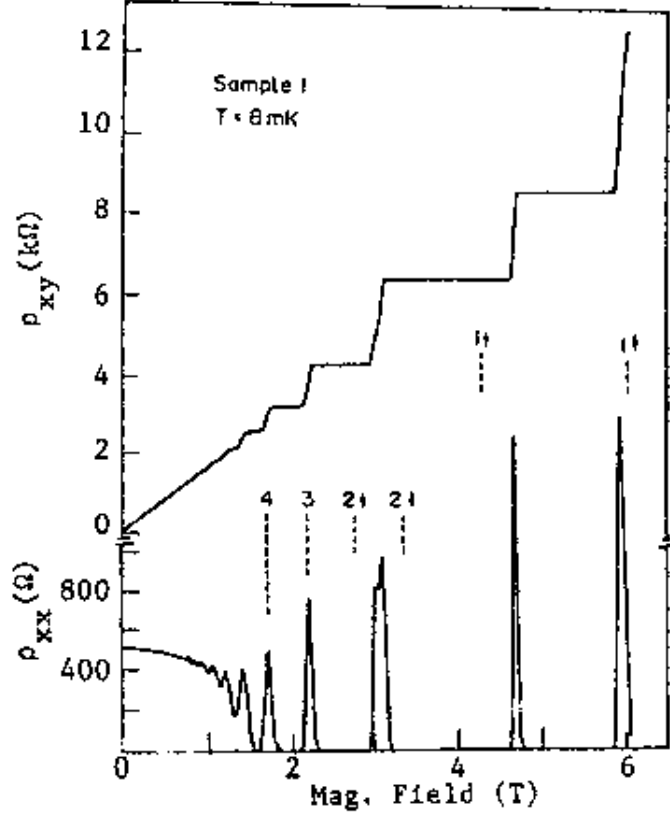


FIG. 2.2: Un exemple d'EHQ entier

La caractéristique des courbes expérimentales, explicitée sur les figures, est le développement de plateaux pour la résistance de Hall pour des facteurs de remplissage près des entiers les plus petits, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ et près de fractions spéciales telles que $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$ et $\nu = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$. En correspondance des plateaux pour ρ_{xy} , il y a des vallées en ρ_{xx} avec $\rho_{xx} = 0$ ou au moins des creux très prononcés. Quand ρ_{xx} est nul, ρ_{xy}^{-1} donne la conductance de Hall σ_{xy} .

Pour chaque plateau, la conductivité de Hall est quantifiée et est exactement la valeur de l'entier ou du rationnel ν en unité de $\frac{e^2}{h}$:

$$\sigma_H = \rho_{xy}^{-1} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (2.2)$$

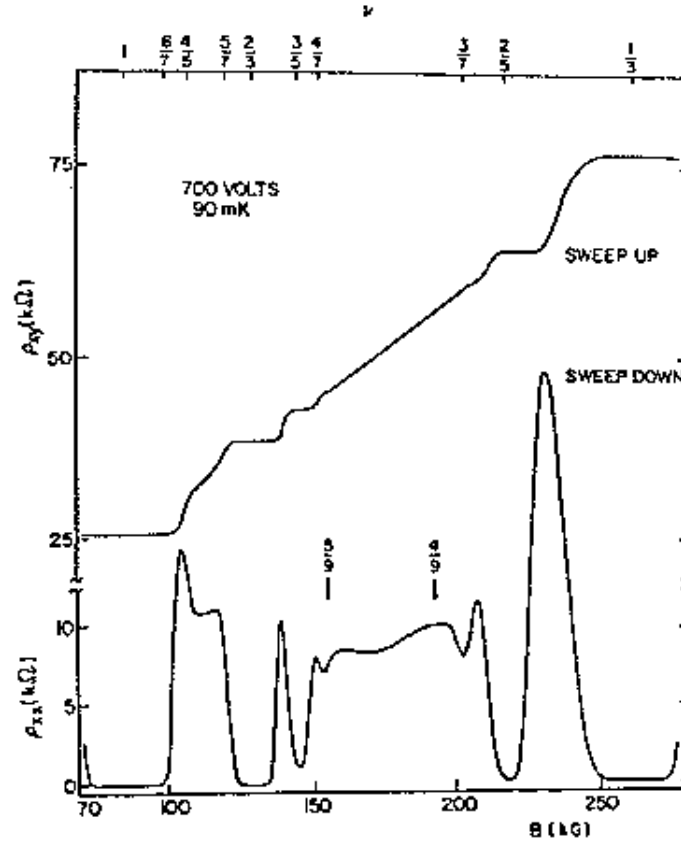


FIG. 2.3: Un exemple d'EHQ fractionnaire

Quand ν est entier, on a l'effet Hall quantique entier, et si ν est rationnel, il s'agit de l'effet fractionnaire. A première vue, dans les deux cas, les courbes sont similaires. Mais l'EHQ fractionnaire correspond à des niveaux de Landau partiellement remplis, ce qui rend son interprétation théorique plus compliquée. La quantification de σ_H est observée à une très haute précision. Pour l'effet Hall quantique entier $\Delta\rho \leq 10^{-8}$ et pour l'effet fractionnaire, $\Delta\rho \leq 10^{-5}$. En particulier, l'EHQ entier peut servir d'étalon pour des mesures de résistances, et à améliorer les mesures des constantes physiques fondamentales.

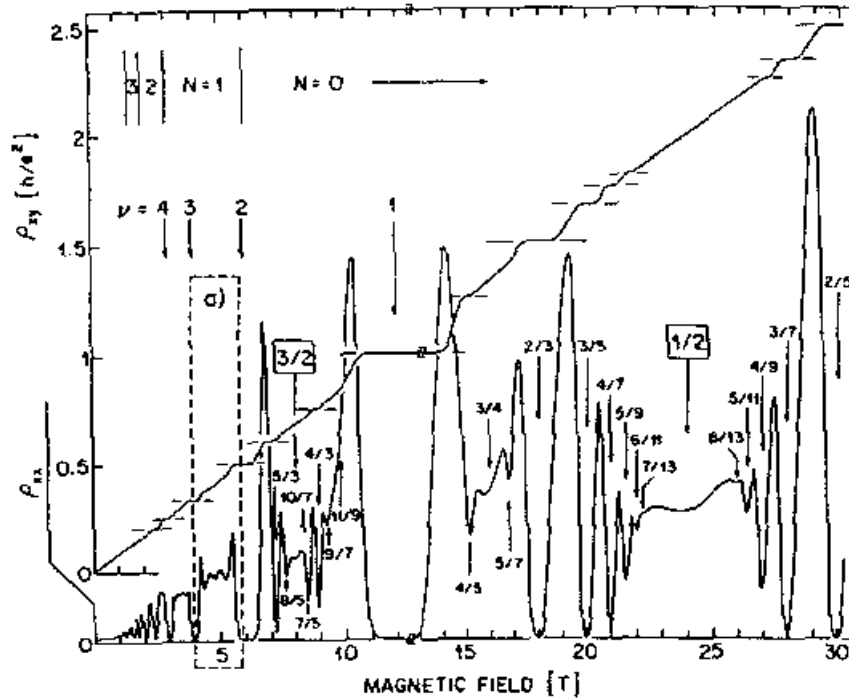


FIG. 2.4: EHQ entier et EHQ fractionnaire réunis

2.2 L'effet Hall classique : mouvement d'électrons

2.2.1 La physique de l'Effet Hall : une image semi-classique

Le modèle décrivant l'effet Hall classique, n'est pas rigoureusement classique. Il s'agit plutôt d'une image semi-classique, comme on le verra dans ce qui suit. Par contre, l'effet lui-même ne montre aucun caractère quantique. Il survient dans des systèmes dont une des dimensions est nettement plus petite que les deux autres, et peuvent ainsi être considéré comme planaires. Ces systèmes possèdent des électrons libres. Dans le conducteur en équilibre, les électrons ont des mouvements équiprobables (c'est à ce stade que la mécanique quantique se manifeste) et leur vitesse moyenne est donc nulle. Mais plongés dans un champ électromagnétique, les électrons vont se mouvoir for-

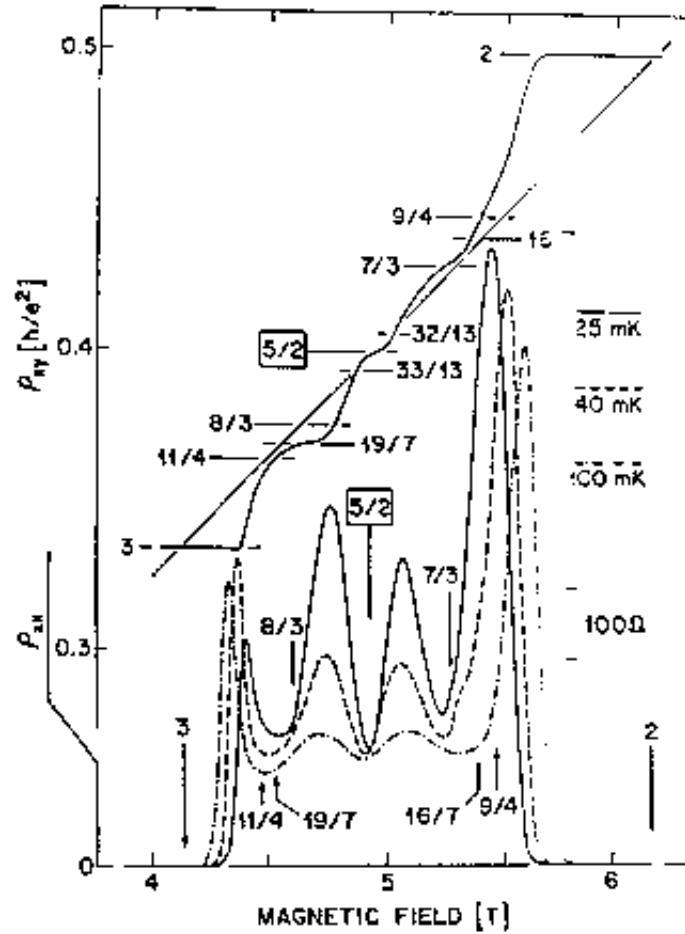


FIG. 2.5: Région a) de la Figure précédente

mant un courant. La particularité de tels systèmes est qu'ils possèdent un courant perpendiculaire au champ électrique (contrairement au cas usuel de la loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$) dû essentiellement à la présence d'une composante du champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à l'échantillon ¹, courant qui est le courant de Hall. Les électrons en mouvement, peuvent entrer en collisions. Il s'agit là de la théorie la plus simple de la conductivité, qui est semi-classique, avec juste une image quantique se manifestant très indirectement. Elle fait

¹Il suffit d'écrire la force de Lorentz

intervenir le temps de collision τ_0 , temps moyen entre deux collisions, et le libre parcours moyen l_0 , distance moyenne parcourue entre deux collisions.

Dans cette image, un électron de vitesse (au niveau de Fermi) v_F parcourt une distance moyenne de $l_0 = v_F \tau_0$ avant d'entrer en collision et de diffuser ensuite avec une vitesse moyenne nulle (équiprobabilité de toutes les directions) en champ extérieur nul. Mais par contre si un électron est dans un champ électrique faible \vec{E} , il va subir une légère augmentation de sa vitesse moyenne $\Delta \vec{v} = -\frac{e}{m} \tau_0 \vec{E}$ entre chaque collision, m étant la masse nue de l'électron. Ceci permet de comprendre l'apparition d'un courant \vec{j} . Si on ajoute les contributions de tous les électrons, on trouve un courant $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$, avec la conductivité σ_0 donnée par la formule de Drude :

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau_0}{m}, \quad (2.3)$$

où n est la densité. Les effets quantiques interviennent à travers la structure de bande (du spectre électronique), qui en fait change la masse nue de l'électron m en une masse effective m^* et à travers le temps τ_0 . Dans la suite, m sera identifié à m^* pour simplifier sans que ceci altère les conclusions. Le principe de Pauli implique que seuls les électrons près de la surface de Fermi peuvent être actifs, puisque les seuls états disponibles sont ceux au dessus du niveau de Fermi (les autres étant déjà occupés). Donc une diffusion ne peut se faire que vers un état du continuum inoccupé. En fait pour l'effet Hall classique, on se place dans l'approximation d'électrons indépendants. Dans ce cas, les effets du principe de Pauli ne modifient pas la formule (2.3).

2.2.2 La mécanique (semi-)classique de l'effet Hall

Une autre façon de justifier (2.3) est de trouver l'expression du courant dans le cas plus général d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . On modélise les effets des collisions par une force de frottements appliquée à chaque électron et proportionnelle à sa vitesse :

$$\vec{F}_v = -\frac{m}{\tau_0} \vec{v}. \quad (2.4)$$

Si on considère les électrons seulement soumis à un champ \vec{E} , on obtient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \frac{m}{\tau_0} \vec{v}. \quad (2.5)$$

En régime permanent, on a $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, d'où $\vec{v} = \mu \vec{E}$ avec $\mu = -\frac{e\tau_0}{m}$, μ étant définie comme la mobilité des électrons. La solution de (2.5) est $\vec{v} = \mu \vec{E} + c\vec{st}e^{-\frac{t}{\tau_0}}$, τ_0 ayant alors la dimension d'un temps. Très vite, le régime permanent est atteint, car typiquement τ_0 est de l'ordre de 10^{-14} s. On a donc en régime permanent :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = -ne\vec{v} = -ne\mu \vec{E}, \quad (2.6)$$

d'où en utilisant la loi d'Ohm :

$$\sigma_0 = -ne\mu = \frac{ne^2\tau_0}{m}. \quad (2.7)$$

On retrouve ainsi (2.3). Si l'échantillon est placé dans un champ magnétique \vec{B} , l'équation du mouvement devient :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau_0}\vec{v}. \quad (2.8)$$

En régime permanent, on obtient :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} + \frac{\mu}{c} \vec{j} \wedge \vec{B}, \quad (2.9)$$

avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$. On suppose \vec{E} et \vec{B} uniformes et constants et on restreint \vec{B} à être perpendiculaire à l'échantillon qui est dans le plan (xOy) d'un trièdre (O, x, y, z) . \vec{B} est donc selon (Oz) , et on a $\vec{B} = B\vec{k}$, \vec{k} étant le vecteur unitaire de l'axe (Oz) . Alors, à partir de (2.9), on obtient facilement :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau_0^2} & \frac{-\sigma_0\omega_c\tau_0}{1+\omega_c^2\tau_0^2} & 0 \\ \frac{\sigma_0\omega_c\tau_0}{1+\omega_c^2\tau_0^2} & \frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

avec $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ définissant la pulsation cyclotron. Soit $[\sigma]$ le tenseur des conductivités dans le plan de l'échantillon définit par :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

avec $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. Si on ne considère qu'un courant planaire dans l'échantillon, on a $j_z = E_z = 0$ et (2.10) se réduit

$$\vec{j}_{\parallel} = [\sigma]\vec{E}_{\parallel}, \quad (2.12)$$

où \parallel désigne la partie des vecteurs tri-dimensionnels appartenant au plan de l'échantillon et les composantes de $[\sigma]$ s'obtiennent directement à partir de (2.10),(2.11) et (2.12). On peut aussi exprimer le tenseur des résistivités défini par $\vec{E}_{\parallel} = [\rho] \vec{j}_{\parallel}$. On trouve facilement grâce aux relations précédentes sur les composantes du courant que :

$$[\rho] = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 & \frac{B}{nec} \\ -\frac{B}{nec} & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

avec $\rho_0 = \frac{1}{\sigma_0}$. On remarque l'expression très simple pour les éléments non diagonaux de $[\rho]$, appelés parfois résistivités de Hall : ρ_H . Elles dépendent de la charge des porteurs de charge (et de son signe), mais pas des paramètres de diffusion ($\tau_0, l_0 \dots$). Cela est dû au modèle simple de collisions considéré. Plus généralement, ρ_H va dépendre faiblement de ces paramètres.

En fait, ce qui est mesuré n'est pas le tenseur des conductivités, mais les conductances et/ou résistances. Celles-ci sont reliées aux conductivités et résistivités par des facteurs faisant intervenir la géométrie et les dimensions du système. Un montage "classique" peut être réalisé sur un conducteur pour les mesurer. Un courant d'électrons est établi dans l'échantillon, choisi par soucis de simplicité comme rectangulaire, d'intensité totale I . Des connections sont effectuées entre les deux cotés de l'échantillon. On mesure I , la différence de potentiel (ddp) longitudinale V_L entre ces deux cotés (contacts A, B) et la ddp transverse V_H par rapport au courant de Hall (contacts entre A, C). Les longueurs sont notées L, W ($L = AB, W = AC$), et peuvent être mesurées (voir figure 2.6). Mais on mesure difficilement les longueurs à la précision requise pour l'effet Hall. Si la densité de courant est uniforme et selon le long côté de l'échantillon (L), le champ électrique \vec{E}_{\parallel} est aussi uniforme mais a une composante perpendiculaire au courant, appelée champ de Hall. Cette approximation est souvent vérifiée pour un échantillon tel que $L \gg W$. On a alors $j = \frac{I}{W}$ (densité de courant) et $E_L = \frac{V_L}{L}$. Avec I fixé, on peut calculer la résistance longitudinale :

$$R_L = \frac{V_L}{I} = \rho_{xx} \left(\frac{L}{W} \right). \quad (2.14)$$

De même, pour la résistance de Hall, on trouve :

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \rho_H. \quad (2.15)$$

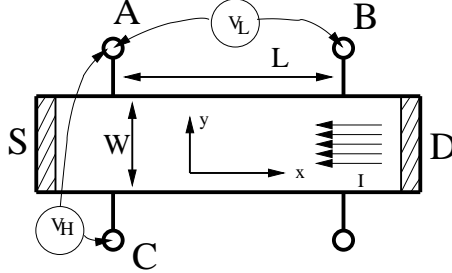


FIG. 2.6: Montage classique pour mesurer la tension de Hall [3]

En dimension deux d'espace, on a la particularité que la dimension des résistances est la même que celle des résistivités. Donc, les facteurs d'échelles disparaissent pour la résistance de Hall (quoique pour un échantillon moins idéal, si $L \sim W$ ou si les électrodes ne sont pas ponctuelles, il puisse y avoir des corrections géométriques). Pour donner un ordre de grandeur, on suppose $\vec{j} = j\vec{e}_x$ et $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Le champ de Hall \vec{E}_H est la composante suivant $\vec{j} \wedge \vec{B}$ de \vec{E} , soit sur \vec{e}_y . On peut définir la résistante de Hall R_H par la relation :

$$\vec{E}_H = R_H \vec{B} \wedge \vec{j}. \quad (2.16)$$

On a d'après (2.6) :

$$R_H = \frac{\mu}{\sigma_0 c} = -\frac{1}{nec}. \quad (2.17)$$

Pour l'argent, on a $R_H = -8,45 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot C^{-1}$. On voit déjà la précision requise pour de telles mesures. Il est aussi évident d'après l'acuité des données expérimentales que R_H est sans facteur géométrique car les largeurs sont mesurées avec une précision nettement plus faible. Une autre raison pour le justifier est l'annulation des éléments diagonaux du tenseur des conductivités

pour lesquels la séparation et la taille finie des électrodes n'ont aucune influence. Mais les résultats expérimentaux sont plus profonds. Par exemple, si le courant n'est pas uniforme, mais qu'une conductivité soit mesurable, alors elle n'est pas uniforme. Une telle précision a en fait contribué à la découverte de l'effet Hall quantique.

2.3 L'Effect Hall Quantique

2.3.1 Caractéristiques générales

L'effet Hall quantique a été découvert 100 ans après les travaux initiaux de Hall, et la découverte a été annoncée en 1980 par von Klitzing, Dorda, et Pepper [1]. Ils ont montré expérimentalement que dans certaines conditions, le tenseur des conductivités pour un système d'électrons bi-dimensionnel soumis à un champ magnétique fort prend la forme suivante :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{e^2}{h} \\ i\frac{e^2}{h} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

où h est la constante de Planck, e la charge de l'électron et i un entier petit. La densité de courant \vec{j} est donc directement perpendiculaire au champ électrique \vec{E} et le rapport des amplitudes est donné par :

$$\frac{j}{E} = \sigma_{xy} = \sigma_H = i\frac{e^2}{h}. \quad (2.19)$$

La conductivité non diagonale (dite de Hall) est donc donnée par une combinaison des constantes fondamentales lui donnant un trait fondamental. Les termes diagonaux sont nuls, impliquant que le système est sans dissipation. L'annulation de la dissipation est un ingrédient important pour comprendre la quantification de la conductivité de Hall σ_H . En fait, dans le passé, on a toujours cru que la conductivité dépendait aussi du matériau, de la température, du champ magnétique... Les quantités directement observées comme la conductance ou la résistance dépendent encore plus fortement de la taille et la géométrie de l'échantillon. Le fait qu'une telle combinaison des constantes fondamentales ² a exactement la dimension d'une conductance ou

²en fait, $\sigma_H = i\frac{e^2}{hc}$, (2.19) est exprimée dans des unités telles que $c = 1$

d'une conductivité bi-dimensionnelle n'avait pas été réellement exploité jusqu'à récemment. L'idée que la conductivité pourrait être quantifiée n'avait pas été anticipée. Cependant, avant les travaux de von Klitzing, il n'y avait pas de raison de penser que le tenseur précédemment exposé soit exact. En fait, il est connu à une précision énorme. Cela a bien sûr une application en *métrologie*. On peut noter au passage que cela procure une mesure très précise de la constante de structure fine $\frac{e^2}{\hbar c}$ qui vaut quasiment $\frac{1}{137}$ puisque c est une quantité bien définie.

2.3.2 Problème de Landau

Le problème quantique d'un modèle bi-dimensionnel d'électrons *indépendants* sans spin le plus simple dans un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire, correspond à la version "minimale" quantique du problème rencontré pour l'effet classique dans la section précédente. Ce problème est bien connu (problème de Landau et niveaux de Landau), mais il permet d'introduire très simplement des notations et notions standards rencontrées dans la littérature de l'effet Hall. Pour une revue, on pourra se reporter à [3], et les références qui y sont citées. En fait, la plupart des articles sont basés sur des modèles d'électrons indépendants en présence d'impuretés. Ils réussissent à expliquer certaines caractéristiques des expériences.

On considère l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m}[(\hat{p}_x + \frac{e}{c}\hat{A}_x)^2 + (\hat{p}_y + \frac{e}{c}\hat{A}_y)^2]\psi = \epsilon\psi. \quad (2.20)$$

Dans la jauge de Landau, le potentiel vecteur \vec{A} , pour un champ magnétique uniforme est donné par :

$$A_x = -yB, A_y = 0. \quad (2.21)$$

Dans cette jauge, on a $[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0$, ce qui traduit dans cette jauge l'invariance par translation dans la direction de l'axe des x . Ceci permet d'essayer une fonction d'onde de la forme :

$$\psi(x, y) = e^{ik_x x} \phi(y). \quad (2.22)$$

Alors l'équation pour ϕ est :

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[\epsilon - \frac{m}{2}\omega_c^2(y - y_0)^2]\phi = 0, \quad (2.23)$$

où ω_c est la pulsation cyclotron habituelle et où y_0 est le centre des trajectoires (semi-classiques) circulaires des électrons et est défini par :

$$y_0 = \frac{cp_x}{eB} = \frac{c\hbar k_x}{eB} = l^2 k_x, \quad (2.24)$$

où on a introduit, l , la longueur magnétique définie par :

$$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}, \quad (2.25)$$

qui est une échelle de longueur fondamentale naturelle du problème. Typiquement, elle est dans l'intervalle [50 Å;100 Å]. On remarque que l est indépendant des paramètres caractérisant le matériau.

L'équation (2.23) est l'équation de Schrödinger avec un puits de potentiel harmonique centré en y_0 . Les différents niveaux de l'oscillateur sont indexés par $n = 0, 1, 2, \dots$ et définissent les niveaux de Landau. Les fonctions d'ondes solutions sont :

$$\phi(y) = \phi_{nk_x}(y - y_0) = e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}(y-y_0)^2} H_n\left[\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}(y - y_0)\right] = H_n\left(\frac{y}{l} - lk\right) e^{-\frac{(y-l^2k)^2}{2l^2}}, \quad (2.26)$$

où H_n est le polynôme d'Hermite d'ordre n .

Les énergies des niveaux sont celles du potentiel harmonique :

$$\epsilon_{nk_x} = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.27)$$

et sont indépendantes de k_x ou de y_0 . Ces niveaux d'énergie de Landau sont également espacés, comme pour ceux de l'oscillateur harmonique avec un espacement de ω_c . L'orbite de Landau (et la fonction d'onde dans la direction y) est piquée sur $y = l^2k$. En d'autres termes, le paramètre y_0 défini par (2.24) représente la position du pic ou du site, de l'orbite de Landau (2.26).

Les énergies (2.27) ne dépendent pas de y_0 , et le site de Landau y_0 dépend seulement de k_x . Donc chaque niveau de Landau est hautement dégénéré. Si le système est de taille finie (d'aire $L_x L_y$) alors les valeurs permises de k_x sont discrètes : $\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}$. De plus la condition $0 < y_0 < L_y$ implique que $0 < |k_x| < \frac{eB}{\hbar c} L_y$. Donc, le nombre de valeurs permises pour k_x est fini et est donné par :

$$\frac{eBL_y}{\hbar c} \cdot \frac{1}{\Delta k_x} = \frac{eBL_x L_y}{\hbar c} = \frac{\phi}{\phi_0}. \quad (2.28)$$

Donc la dégénérescence, ou le nombre de site de Landau, pour chaque niveau de Landau est simplement le nombre total de flux ϕ ($= BL_x L_y$) perçant le système planaire en unité de quantum de flux ϕ_0 ($= \frac{hc}{e}$).

Pour un gaz d'électrons bi-dimensionnel, si le facteur de remplissage est ν , alors il y a en tout $\nu \frac{\phi}{\phi_0}$ électrons, ce qui correspond à une densité surfacique de $n = \frac{\nu \frac{\phi}{\phi_0}}{L_x L_y} = \frac{\nu e B}{hc}$. Si le gaz est libre (électrons sans interaction) et si les résultats classiques s'appliquent, alors on s'attend à trouver :

$$\sigma_{xy}^H = -\frac{n c e}{B} = -\nu \frac{e^2}{h}. \quad (2.29)$$

Ce résultat classique pour le courant de Hall est encore correct en mécanique quantique, bien que le centre de l'orbite de Landau quantifiée ne puisse pas avoir simultanément des valeurs bien définies pour les coordonnées du centre x_0 et y_0 (dans la jauge utilisée, y_0 est défini tandis que x_0 ne l'est pas, voir (2.22) et (2.24)). Pour le voir, on peut supposer :

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= E \end{aligned} \quad (2.30)$$

En présence du champ électrique, (2.20) est maintenant changée en :

$$\hat{H}' \psi' = \frac{1}{2m} [(\hat{p}_x + \frac{e}{c} \hat{A}_x)^2 + (\hat{p}_y + \frac{e}{c} \hat{A}_y)^2] \psi' - e \hat{E}_y \psi' = \epsilon' \psi'. \quad (2.31)$$

Encore une fois, $[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0$, et on peut poser :

$$\psi'(x, y) = e^{ik_x x} \phi'(y). \quad (2.32)$$

L'équation pour la fonction d'onde ϕ' est :

$$\frac{d^2 \phi'}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [\epsilon' - \frac{m}{2} \omega_c^2 (y - y_0)^2 + e E y] \phi' = 0. \quad (2.33)$$

L'effet de l'ajout d'un champ électrique est de translater y_0 et ϵ_n :

$$y_0 \longrightarrow y'_0 = y_0 + \frac{e E}{m \omega_0^2} \quad (2.34)$$

et

$$\epsilon_n \longrightarrow \epsilon'_n = \epsilon_n + eEy'_0 - \frac{m}{2} \left(\frac{cE}{B} \right)^2 \quad (2.35)$$

Les fonctions d'onde sont $\phi'(y) = \phi_n(y - y'_0)$ avec ϕ_n données par (2.26). Il est facile de voir que :

$$\begin{cases} \langle v_x \rangle = \frac{1}{m} \langle (p_x - \frac{eB}{c}y) \rangle = \frac{\hbar k_x - \frac{eB}{mc}y'_0}{m} = \frac{cE}{B} \\ \langle v_y \rangle = \frac{1}{m} \langle p_y \rangle = \frac{1}{m} \int dx dy \psi_n'^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) \psi_n' = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

A partir de $j_x = -ne \langle v_x \rangle$ et $\sigma_{xy} = \frac{j_x}{E_y}$, on obtient l'expression (2.29) de σ_{xy}^H . Si le système est circulaire au lieu d'être rectangulaire, on peut utiliser la jauge symétrique :

$$A_x = -\frac{B_y}{2}, A_y = \frac{B_x}{2}. \quad (2.37)$$

Alors les valeurs propres de l'équation (2.20) sont encore données par l'équation (2.27), mais les fonctions d'onde deviennent :

$$\phi_{m,n}(x, y) = e^{\frac{xy}{4l^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n e^{-\frac{x^2+y^2}{4l^2}}, \quad (2.38)$$

où l a déjà été introduit, m est le moment angulaire dont l'énergie dépend. Pour le niveau de Landau le plus bas $n = 0$, on a :

$$\phi(z)_{m,0} = \frac{1}{\sqrt{m!}} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4l^2}}. \quad (2.39)$$

Si il y a des impuretés disposées aléatoirement, on s'attend à ce que les niveaux de Landau s'élargissent en bandes d'énergie. Théoriquement, on n'en est pas tout à fait certain, mais l'existence expérimentale d'une conductivité de Hall quantifiée non nulle est une indication suffisante pour l'existence d'états étendus en présence d'un champ magnétique (voir le prochain chapitre). Le fait, qu'à tous les plateaux de Hall, $\rho_{xx} = 0$, indique que le niveau de Fermi est dans la région des états localisés.

Chapitre 3

Conductivité de Hall : un invariant topologique ?

3.1 L'argument de Laughlin

La haute précision (jusqu'à 10^{-8}) pour la quantification observée de la conductivité de Hall suggère l'idée que cette quantification exacte pourrait être reliée à des principes fondamentaux de la physique. Peu après la découverte de l'EHQ entier, Laughlin [5] a donné un argument général en faveur de la quantification, utilisant l'invariance de jauge et une géométrie non triviale : un cylindre percé par un tube de flux. Cet argument a joué un rôle important dans la compréhension théorique de l'EHQ entier et fractionnaire grâce à la prise en compte des excitations de bords. Cet argument a été raffiné par la suite en un formalisme mathématique, qui montre que la conductivité quantifiée de Hall peut être reliée à un invariant topologique. L'approche topologique [6, 7] a d'abord été proposée par Thouless, Kohmoto, Nightingale et den Nijs pour le cas d'électrons sans interaction en présence d'un potentiel périodique, ce que l'on va exposer dans le prochain paragraphe. Elle a été par la suite généralisée par Niu, Thouless and Wu [8], et par Avron et Seiler [9], au cas général du problème à N -corps avec des interactions entre électrons, faibles impuretés aléatoires et des imperfections du crystal. Les approches topologiques ont amélioré l'argument original de Laughlin explicitant l'origine topologique de la quantification et en clarifiant le rôle de la (non)-dégénérescence de l'état fondamental.

Suivant Laughlin, on considère un système cylindrique, percé partout par un champ magnétique normal à sa surface. En présence de désordre, les niveaux de Landau sont élargis en bandes d'états étendus séparés par les queues des états localisés. Le niveau de Fermi est supposé être dans le gap où sont situés les états localisés (voir la figure 3.1).

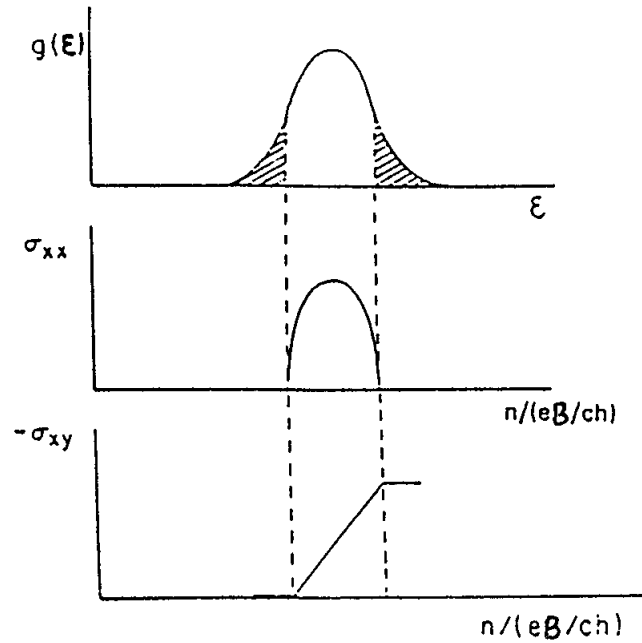


FIG. 3.1: La structure des niveaux de Landau élargis et la densité des états. La région hachurée représente les états localisés, et non-hachurée les états étendus [3].

Si un tube de flux passe à travers le trou formé par la surface cylindrique dont le flux est adiabatiquement mis de 0 à ϕ_0 (l'unité de flux), l'invariance de jauge du champ électromagnétique implique qu'avoir une unité de flux ϕ_0 dans le tube est équivalent à ne pas avoir de flux, puisque l'unité de flux peut être enlevée par une transformation de jauge. On remarque que celle-ci n'est licite que quand le flux est un multiple entier de ϕ_0 . Donc après avoir ajouté une unité de flux, l'Hamiltonien peut être ramené à celui sans flux,

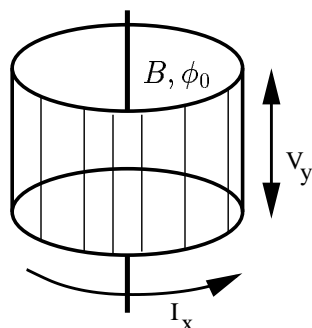


FIG. 3.2: Géométrie cylindrique considérée pour l'argument de Laughlin. Un courant I_x circule dans le ruban dans le sens longitudinale en raison du flux ϕ_0 . Le déplacement de p électrons d'un bord à l'autre engendre une ddp $V_y = L_y E_y$, où L_y est la largeur du ruban et E_y le champ électrique dans cette direction. Le champ B est radial (perpendiculaire au ruban).

et le système peut revenir dans son état initial avec une possible excitation ou desexcitation de celui du départ en vertu du théorème quantique adiabatique. D'un autre côté, il y a un gap dans le spectre du système qui est supposé rester ouvert pendant le processus. Donc un changement adiabatique de l'Hamiltonien à N -corps ne peut pas exciter des quasi-particules à travers ce gap. (Pour que ceci soit vrai, le flux ne peut pas percer le système ; quand le flux perce le système, une excitation de type quasi-particule est possible). Donc un ajout d'une unité de flux peut seulement produire une excitation sous forme d'un transfert net de charge. Si p est le nombre d'électrons transférés, pour que p soit entier, l'état fondamental doit être non dégénéré sinon, à cause de la nature ondulatoire des électrons en mécanique quantique, le transfert d'une fraction d'électron est possible et en fait apparaît dans l'EHQ fractionnaire. La condition de non-dégénérescence n'était

pas explicitée dans l'article originel de Laughlin. Le rôle de cette condition peut être clairement compris dans l'approche topologique. Le changement d'énergie pour un tel transfert de charge est :

$$\Delta U = peE_y L_y = peV_y, \quad (3.1)$$

et le courant autour du cylindre est donné par :

$$I_x = c \frac{\Delta U}{\Delta \phi} = \frac{cpeV_y}{\frac{hc}{e}} = p \frac{e^2}{h} V_y. \quad (3.2)$$

Donc la conductivité de Hall est toujours quantifiée :

$$\sigma_H = \frac{I_x}{V_y} = p \frac{e^2}{h}, \quad p \in \mathbb{N}^{*+}. \quad (3.3)$$

Pour voir plus clairement comment il peut y avoir transfert de charge entre les bords, on examine le cas sans interaction ¹. En utilisant $y_0 = \frac{cp_x}{eB}$ et $y_0 \rightarrow y_0 + \frac{cE}{m\omega_0^2}$, on peut voir qu'un incrément uniforme de $\Delta A = \frac{\Delta \phi}{L}$ en A_x dû à un petit changement $\Delta \phi$ en ϕ , conduit formellement à $\Delta p_x = \frac{e}{c} \Delta A$ et donc à $\Delta y_0 = \frac{\Delta A}{B}$. Donc le centre du site de Landau est décalé par $\frac{\Delta A}{B}$. Après avoir ajouté une unité de flux $\Delta \phi = \frac{hc}{e}$, le site de Landau est juste décalé de 1 :

$$\Delta y_0 = \frac{\Delta A}{B} = \frac{hc}{eBL_x} = \frac{L_y}{\frac{\phi}{\phi_0}}. \quad (3.4)$$

Donc, un électron est transféré d'un bord à l'autre pour chaque niveau de Landau entièrement rempli. L'entier p est directement relié au nombre de niveaux de Landau totalement occupé dans le cas sans interaction :

$$p = \nu \Rightarrow \sigma_H = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (3.5)$$

Si le système est impur, l'argument précédent ne peut pas nous dire ce que devrait être l'entier p . Il peut valoir zéro, comme dans la plupart des systèmes avec un gap. Pour que p soit non nul, il doit y avoir une cohérence de phase à longue portée autour du cylindre qui nécessite l'existence d'états

¹Le cadre utilisé est alors celui du problème de Landau exposé dans le chapitre précédent. Les notions et grandeurs utilisées ici, comme le centre du site de Landau par exemple, sont donc directement reliées au paragraphe correspondant.

électroniques étendus dans l'échantillon. Si tous les états sont localisés, le seul effet du flux dans le trou est de multiplier chaque fonction d'onde par un facteur de jauge $e^{ie\frac{Ax}{\hbar c}}$ (x est la coordonnée du point où l'état est localisé) et le changement d'énergie et de courant sont tous les deux nuls. Pour des états étendus, une telle transformation de jauge n'est licite que si $\phi = n\phi_0$. Donc un courant de Hall non-nul est possible.

Expérimentalement, les échantillons sont toujours impurs et en interaction, et la quantification p observée sur un plateau est toujours directement reliée à un facteur de remplissage approximatif ν en vertu de l'équation (2.1). Pour établir cette relation, on a besoin de l'invariance topologique de la conductivité de Hall σ_H et de son application au processus dans lequel les interactions dans l'échantillon sont progressivement éteintes en supposant que le gap reste ouvert à chaque instant. C'est ce qui est examiné dans les deux paragraphes suivants.

3.2 Electrons libres dans un potentiel périodique

L'Hamiltonien pour un électron simple a pour expression :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{\hat{p}} + \frac{e}{c}\vec{\hat{A}})^2 + V(\hat{x}, \hat{y}), \quad (3.6)$$

où $V(x+a, y) = V(x, y+a) = V(x, y)$, (a, b) étant les pas du réseau dans les deux directions. On choisit la jauge de Landau : $A_x = 0$, $A_y = Bx$.

On peut introduire les générateurs des translations magnétiques :

$$\begin{cases} \hat{\Pi}_x &= \hat{p}_x + \frac{e}{c}\hat{A}_x + \frac{e}{c}B\hat{y} &= -i\hbar\hat{\nabla}_x + \frac{e}{c}B\hat{y} \\ \hat{\Pi}_y &= \hat{p}_y + \frac{e}{c}\hat{A}_y - \frac{e}{c}B\hat{x} &= -i\hbar\hat{\nabla}_y \end{cases} \quad (3.7)$$

Ils commutent avec les moments canoniques :

$$[\hat{\Pi}_i, \hat{p}_j + \frac{e}{c}\hat{A}_j] = 0, \quad i, j = x, y \quad (3.8)$$

Donc la translation magnétique du pas du réseau selon x ou y est une symétrie. Si on définit :

$$\hat{T}_a = e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{\Pi}_x} \quad \hat{T}_b = e^{\frac{i}{\hbar}b\hat{\Pi}_y}, \quad (3.9)$$

alors

$$[\hat{T}_a, \hat{H}] = [\hat{T}_b, \hat{H}] = 0. \quad (3.10)$$

Cependant \hat{T}_a et \hat{T}_b ne commutent pas. Ils satisfont à :

$$[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = e^{-i2\pi\phi}, \quad (3.11)$$

où $\phi = \frac{eB}{hc}ab$ est le flux par unité de cellule en unité du quantum de flux.

Si on suppose que $\phi = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers premiers entre eux, alors :

$$[\hat{T}_{qa}, \hat{T}_b] = 0, \quad (3.12)$$

où $\hat{T}_{qa} = (\hat{T}_a)^q$, puisque qa et b forment une plus grande cellule magnétique, qui est la plus petite aire qui contient un multiple entier de quanta de flux. On peut donc simultanément diagonaliser \hat{H} , \hat{T}_{qa} et \hat{T}_b . En appliquant le théorème de Bloch, on a :

$$\hat{T}_{qa}\psi = e^{ik_1qa}\psi, \quad \hat{T}_b\psi = e^{ik_2b}\psi \quad (3.13)$$

et :

$$0 \leq k_1 \leq \frac{2\pi}{qa}, \quad 0 \leq k_2 \leq \frac{2\pi}{b}. \quad (3.14)$$

Notons que la zone de Brillouin *magnétique* est q fois plus petite que l'originale en l'absence de champ magnétique. La fonction d'onde qui satisfait l'équation (3.13) est de la forme :

$$\psi_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y) = e^{i(k_1 x + k_2 y)} U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y), \quad (3.15)$$

avec $U^{(\alpha)}$ satisfaisant les conditions aux limites périodiques doubles suivantes :

$$\begin{cases} U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x + qa, y) = e^{-i2\pi p \frac{y}{b}} U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y) \\ U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y + b) = U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y) \end{cases} \quad (3.16)$$

où α est l'index de la bande. Substituant (3.16) dans (3.15), on trouve que $U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}$ satisfait l'équation de Schrodinger suivante :

$$\hat{H}(k_1 k_2) U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y) = \epsilon_{k_1 k_2}^{(\alpha)} U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y), \quad (3.17)$$

avec

$$\hat{H}(k_1 k_2) = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + \hbar \vec{k} + \frac{e}{c} \vec{A})^2 + V(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3.18)$$

La théorie des bandes implique qu'un niveau de Landau en présence d'un champ magnétique est séparé en plusieurs bandes par le potentiel dû au réseau, ou qu'une bande dans ce potentiel est séparée en un nombre de sous-bandes par ce champ magnétique. Les détails de cette séparation dépendent du potentiel $V(x, y)$. Les électrons libres remplissent les niveaux d'énergie de bas en haut.

On peut maintenant montrer que si le niveau de Fermi se situe dans un gap entre deux sous-bandes, alors la conductivité de Hall est un entier en unité de $\frac{e^2}{h}$. Le point de départ est la formule de Kubo en théorie de la réponse linéaire pour σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} = ie^2\hbar \sum_{\epsilon_\alpha < E_F < \epsilon_\beta} \frac{(V_x)_{\alpha\beta}(V_y)_{\beta\alpha} - (V_y)_{\alpha\beta}(V_x)_{\beta\alpha}}{(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)^2}, \quad (3.19)$$

où la somme porte sur tous les états α en dessous de E_F et β au dessus de E_F et $(\vec{V})_{\alpha\beta}$ est l'élément de matrice :

$$(\vec{V})_{\alpha\beta} = \frac{1}{m} \delta_{k_1 k'_1} \delta_{k_2 k'_2} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy U_{k_1 k_2}^{(\alpha)*} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) U_{k'_2 k'_1}^{(\beta)}. \quad (3.20)$$

Par définition $\alpha \neq \beta$ ($\epsilon_\alpha < E_F < \epsilon_\beta$). Donc $\langle \alpha | \vec{k} | \beta \rangle = \vec{k} \langle \alpha | \beta \rangle = 0$. Ceci conduit à, (pour $i = 1, 2$) :

$$\hbar(V)_{\alpha\beta} = (\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha) \langle \alpha | \frac{\partial \beta}{\partial k_i} \rangle = (\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) \langle \frac{\partial \alpha}{\partial k_i} | \beta \rangle \quad (3.21)$$

On a :

$$\hbar(V)_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \frac{\partial \hat{H}}{\partial k_i} | \beta \rangle = \langle \alpha | \frac{\partial}{\partial k_i} (\hat{H} | \beta \rangle) - \langle \alpha | \hat{H} | \frac{\partial \beta}{\partial k_i} \rangle \quad (3.22)$$

$$= \langle \alpha | \frac{\partial}{\partial k_i} (\epsilon_\beta | \beta \rangle) - \langle \alpha | \hat{H} | \frac{\partial \beta}{\partial k_i} \rangle = (\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha) \langle \alpha | \frac{\partial \beta}{\partial k_i} \rangle, \quad (3.23)$$

où on a utilisé $(\frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial k_i}) \langle \alpha | \beta \rangle = 0$. En substituant (3.21) dans (3.19), on obtient :

$$\sigma_{xy} = i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\epsilon_\alpha < E_F < \epsilon_\beta} \left[\langle \alpha | \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_1} | \beta \rangle \langle \beta | \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_2} \rangle - \langle \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_2} | \beta \rangle \langle \beta | \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_1} \rangle \right]. \quad (3.24)$$

En utilisant la relation usuelle de fermeture :

$$\sum_{\epsilon_\alpha < E_F < \epsilon_\beta} \{ |\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| \} = 1, \quad (3.25)$$

on peut finalement réécrire la conductivité de Hall sous la forme :

$$\sigma_{xy} = \sum_{\epsilon_\alpha < E_F} \sigma_{xy}^{(\alpha)}, \quad (3.26)$$

avec :

$$\sigma_{xy}^{(\sigma)} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int d^2k \left[\left\langle \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_2} \middle| \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_1} \middle| \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial k_2} \right\rangle \right], \quad (3.27)$$

où l'intégrale $\int d^2k$ est prise sur la première zone de Brillouin magnétique ($0 \leq k_x \leq \frac{2\pi}{qa}, 0 \leq k_y \leq \frac{2\pi}{b}$).

L'équation (3.26) dit que la conductivité de Hall σ_{xy} est la somme des contributions $\sigma_{xy}^{(\alpha)}$ provenant de chaque sous-bande de Landau remplie en dessous du niveau de Fermi. Plus important encore, l'équation (3.27) implique que $\sigma_{xy}^{(\alpha)}$ en unité de $\frac{e^2}{h}$ est un invariant topologique, la première classe de Chern, qui ne peut être qu'un entier. Pour le voir, on note que si on prend les phases des fonctions d'onde $U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}(x, y)$ variant de manière douce et lente à l'intérieur de la zone de Brillouin magnétique, alors en utilisant le théorème de Stokes dans l'équation (3.27), on obtient une intégrale le long de la frontière de la zone :

$$U_{xy}^{(\alpha)} = -\frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dk_i \left\langle U^{(\alpha)} \middle| \frac{\partial}{\partial k_i} \middle| U^{(\alpha)} \right\rangle = \frac{e^2}{h} n_\alpha, \quad (3.28)$$

où n_α est un entier, puisque l'intégrale représente simplement le changement total de phase de la fonction d'onde $U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}$ le long de la frontière, qui doit être un entier multiple de 2π pour qu'elle soit simplement valuée.

D'un point de vue mathématique, l'ensemble des fonctions d'onde $\{U_{k_1 k_2}^{(\alpha)}; 0 \leq k_x \leq \frac{2\pi}{qa}, 0 \leq k_y \leq \frac{2\pi}{b}\}$ forme une section du fibré en droites sur la zone de Brillouin magnétique dont la topologie est celle d'un tore. Un potentiel de jauge est donné par :

$$A_i^{(\alpha)}(k_1, k_2) = -i \left\langle U^{(\alpha)} \middle| \frac{\partial}{\partial k_i} \middle| U^{(\alpha)} \right\rangle, \quad (3.29)$$

et l'intégrant dans (3.27) n'est rien d'autre que le tenseur de force de ce potentiel. Donc σ_{xy}^α est la première classe de Chern du fibré, qui représente le *flux magnétique* associé à cette connection, et est nécessairement un entier. Les équations (3.26) et (3.27), avec l'interprétation en tant qu'invariant topologique ci-dessus, ont été obtenues d'abord par Thouless, Kohmoto, Nightingale et den Nijs [6].

3.3 Les échantillons réels

Les échantillons réels ne sont pas des gaz d'électrons libres idéaux dans un crystal parfait. Il y a des impuretés, des imperfections et des interactions entre les électrons. Peut-on généraliser l'obtention de la quantification de la conductivité de Hall comme invariant topologique au cas plus général avec toutes ces diverses complications ? Une indication pour une réponse affirmative a été apportée par Prange ([10]) : si il y a une impureté isolée sous la forme d'une fonction δ , même liée à un état localisé, les états délocalisés restant transportent exactement assez de courant pour compenser la perte en terme de courant due à l'impureté et à état localisé. Des analyses prenant en compte les modifications liées aux systèmes réels ont été effectuées par Niu, Thouless et Wu ([8]) et par Avron et Seiler ([9]).

Pour un échantillon "réaliste", on peut considérer l'Hamiltonien à N -corps suivant :

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} [-i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i)]^2 + \sum_i U(\vec{r}_i) + \sum_{i < j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (3.30)$$

où les \vec{r}_i sont les coordonnées de l'électron i , le second terme représente les interactions possibles des électrons avec un fond chargé positivement et avec des impuretés, et le troisième terme représente les interactions entre électrons (Coulomb par exemple). On remarque que l'Hamiltonien "de Bloch" (3.17) contient deux paramètres qui forment un tore. Comment introduire des paramètres similaires dans l'Hamiltonien à N -corps (3.30) ? L'observation principale est que les conditions aux limites périodiques mixtes pour la fonction d'onde se traduisent par :

$$\begin{aligned} \psi(\dots, x_i + L_1, \dots) &= e^{i\theta_1} e^{-i\frac{eB}{\hbar} y_i L_1} \psi(\dots, x_i, \dots) \\ \psi(\dots, y_i + L_2, \dots) &= e^{i\theta_2} \psi(\dots, y_i, \dots) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où θ_1, θ_2 sont des paramètres caractérisant les conditions aux limites sur l'échantillon supposé être un rectangle de cotés L_1 et L_2 . Evidemment (θ_1, θ_2) vivent sur un tore : $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$. A cause de l'identité des électrons (statistique), (θ_1, θ_2) sont les mêmes pour tous les électrons. Une forme plus symétrique des conditions aux bords est :

$$\hat{T}_i(L_1)\psi = e^{i\theta_1}\psi, \quad \hat{T}_i(L_2)\psi = e^{i\theta_2}\psi, \quad (3.32)$$

où $\hat{T}_i(L_1)$ et $\hat{T}_i(L_2)$ sont les générateurs des translations magnétiques pour l'électron i , similaire à \hat{T}_a, \hat{T}_b (3.9). Dans la jauge particulière où $\vec{A} = (0, Bx)$, (3.32) se réduit à (3.31). On a supposé que le flux à travers l'échantillon, $L_1 L_2 \frac{eB}{\hbar c} = \frac{\phi}{\phi_0} = N_\phi$, est un entier en unité de ϕ_0 , donc que $\hat{T}_i(L_1)$ commute avec $\hat{T}_i(L_2)$, donc que les conditions dans (3.32) sont compatibles entre elles.

Pour le système à N -corps, la formule de Kubo prends la forme :

$$\sigma_{xy}^H = \frac{i e^2 \hbar}{L_1 L_2} \sum_{n>0} \frac{(V_x)_{0n}(V_y)_{n0} - (V_y)_{0n}(V_x)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}, \quad (3.33)$$

où 0 réfère à l'état fondamental et $n > 0$ aux états excités, et :

$$V_x = \frac{1}{m} \sum_i (-i\hbar \nabla_{x_i}), \quad V_y = \frac{1}{m} \sum_i (-i\hbar \nabla_{y_i} + \frac{e}{c} x_i) \quad (3.34)$$

Pour absorber les paramètres (θ_1, θ_2) caractérisant les conditions aux bords dans l'Hamiltonien, on fait la transformation de jauge suivante :

$$\psi_n = e^{i\frac{\theta_1}{L_1}(x_1 + \dots + x_N) + i\frac{\theta_2}{L_2}(y_1 + \dots + y_N)} \phi_n \quad (3.35)$$

Alors l'Hamiltonien pour la nouvelle fonction d'onde ϕ_n est :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H' = H(-i\hbar \nabla_{x_i} \rightarrow -i\hbar \nabla_{x_i} + \frac{\hbar\theta_1}{L_1}, -i\hbar \nabla_{y_i} \rightarrow -i\hbar \nabla_{y_i} + \frac{\hbar\theta_2}{L_2}) \\ V_x &\longrightarrow V'_x = \frac{L_1}{\hbar} \frac{\partial H'}{\partial \theta_1} \\ V_y &\longrightarrow V'_y = \frac{L_2}{\hbar} \frac{\partial H'}{\partial \theta_2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

En substituant dans (3.33) et en utilisant les mêmes manipulations que pour (3.19) et (3.26), on obtient :

$$\sigma_{xy}^H = \frac{i e^2}{\hbar} \sum_{n>0} \frac{1}{(E_0 - E_n)^2} [\langle \phi_0 | \frac{\partial H'}{\partial \theta_1} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \frac{\partial H'}{\partial \theta_2} | \phi_0 \rangle - (\theta_1 \longleftrightarrow \theta_2)], \quad (3.37)$$

ou encore :

$$\sigma_{xy}^H = \frac{ie^2}{\hbar} [\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} | \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \rangle - \langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} | \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \rangle]. \quad (3.38)$$

Dans cette expression, σ_{xy}^H dépend de (θ_1, θ_2) . Quand on mesure σ_{xy}^H dans une expérience, il doit y avoir un champ électrique externe \vec{E} qui conduit les phases à varier dans le temps. En fait, puisque $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, si \vec{E} est donné, alors il s'ensuit un terme supplémentaire pour \vec{A} de la forme $-ct\vec{E}$. Si \vec{E} est petit, on peut appliquer l'approximation adiabatique, c'est à dire utiliser le résultat précédent avec les paramètres fonction du temps ² :

$$\theta_i(t) = -\frac{e}{\hbar} E_i L_i t \theta_i. \quad (3.39)$$

Donc, la conductivité de Hall mesurée devrait être obtenue en faisant la moyenne de (3.38) sur (θ_1, θ_2) :

$$\bar{\sigma}_{xy}^H = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \sigma_{xy}^H(\theta_1, \theta_2). \quad (3.40)$$

On obtient :

$$\bar{\sigma}_{xy}^H = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \int \int d\theta_1 d\theta_2 [\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} | \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \rangle - \langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} | \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta_1} \rangle]. \quad (3.41)$$

La forme de cette expression est exactement la même que (3.27). Par le même raisonnement que pour l'équation (3.27) ci-dessus, $\bar{\sigma}_{xy}^H$ est quantifiée et est un multiple entier de $\frac{e^2}{h}$. Donc cela donne à cette conductivité une interprétation d'invariant topologique.

Les hypothèses implicites dans la démonstration de la quantification de cette conductivité de Hall sont les suivantes. On a supposé que le fondamental du système est séparé des autres états par un gap d'énergie qui n'est nul ni dans la limite thermodynamique, ni sur le tore (θ_1, θ_2) ($0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$). Dans le cas contraire, la théorie de la réponse linéaire ne pourrait pas s'appliquer parce que l'effet tunnel Zener deviendrait important pour des gaps infinitésimaux. Les arguments d'invariance topologique nécessitent l'ouverture d'un gap mais également l'hypothèse que le niveau de Fermi se situe toujours dans

²dans la limite thermodynamique, les propriétés volumiques de l'échantillon sont isotropes ; donc, on n'a pas besoin de supposer que \vec{E} est dans la direction x ou y

ce gap. Enfin, la quantification entière est vraie seulement quand le fondamental est non dégénéré. Cela garantit que le fondamental reste le même (à une phase près) quand θ_1 , par exemple, varie de 0 à 2π , donc que l'intégrale (3.41) est sur un tore compact. Sous ces hypothèses, cette démonstration est valide, quelles que soient les complications qui peuvent exister dans l'échantillon (impuretés, imperfections, interaction entre électrons).

L'interprétation en tant qu'invariant topologique de σ_{xy}^H donne une raison pour laquelle sa quantification est si précise (jusqu'à 10^{-8} dans certaines expériences). En clair, l'invariance topologique explique l'existence des plateaux pour σ_{xy}^H pourvu que le gap persiste et que le niveau de Fermi reste toujours dans ce gap. Si le fondamental est obtenu en augmentant de façon continue l'effet des impuretés et des diverses interactions à partir d'un gaz d'électrons libres à un facteur de remplissage entier (avec un gap persistant dans lequel le niveau de Fermi est emprisonné), alors l'invariance topologique stipule que la conductivité de Hall doit être fixée à la valeur de l'entier correspondant à ce facteur de remplissage entier.

3.4 Fonctions d'onde de Laughlin, EHQ fractionnaire

Si aucune des conditions pour les arguments topologiques précédents n'est violée, on s'attendrait à avoir une conductivité entière plutôt que fractionnaire. Cela suggère qu'un état fractionnaire pourrait être associé à un nouveau type de condensat de système à N -corps. Intuitivement, l'effet entier peut être vu comme une spectroscopie de la charge de l'électron. Par analogie, on pourrait s'attendre à ce que l'effet fractionnaire puisse être interprété en terme de spectroscopie d'une charge fractionnaire de quasi-particule. Si des quasi-particules avec charges fractionnaires existent et se comportent plus ou moins comme des électrons ou des trous dans l'EHQ entier, alors les plateaux de Hall observés dans l'EHQ fractionnaire pourraient être compris comme étant dûs à la localisation de ces quasi-particules.

3.4.1 La fonction d'onde de Laughlin pour les états fondamentaux à $\nu = \frac{1}{m}$

Dans l'étude du cas à trois électrons [11], Laughlin a observé que des électrons dans un champ magnétique, reposant dans le niveau de Landau le plus bas, ont tendance à s'éviter. A partir de cette observation, il a proposé une fonction d'onde à N -corps pour un fondamental sur une géométrie d'un disque qui correspond à :

$$\Psi_0^{(m)} = \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}, \quad (3.42)$$

où $z_i = x_i + iy_i$ est la coordonnée complexe de l'électron i en unité de longueur magnétique $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$, mise égale à 1. L'entier m doit être impair pour que (3.42) soit antisymétrique.

Les propriétés de (3.42) sont :

- le préfacteur $\prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m$ est une fonction analytique de z_i . Donc la fonction d'onde (3.42) est uniquement composée de fonctions d'onde de l'électron libre au niveau de Landau le plus bas (dans la jauge symétrique $(A_x, A_y) = (\frac{B}{2}y, -\frac{B}{2}x)$, (2.37)). Ceci devrait être une bonne approximation, puisque dans un champ magnétique intense, l'énergie de Coulomb est *petite* comparé à l'énergie cyclotron $\hbar\omega_c$.
- Le préfacteur est un polynôme homogène en z_i de degré $M = m\frac{N}{2}(N - 1)$. Donc (3.42) est un état propre du moment angulaire total avec comme valeur propre M .
- Le préfacteur est de la forme de Jastrow dont chaque facteur $(z_i - z_j)^m$ a un zéro d'ordre m à $z_i = z_j$. Donc chaque électron veut très fortement se tenir à l'écart des autres, et chaque électrons voit m zéros liés aux positions des autres électrons.
- Si z_i fait une rotation de ϕ autour de z_j dans le sens des aiguilles d'une horloge, alors le facteur $(z_i - z_j)^m$ fait apparaître un changement de phase $e^{im\phi}$. Donc, la corrélation de phase des électrons est comme si chaque électron transportait m quanta de flux.

- Le carré du module de (3.42) peut être écrit comme une distribution de Boltzmann :

$$|\Psi_o^{(m)}(z_1, \dots, z_N)|^2 = e^{-\beta V_{eff}(z_1, \dots, z_N)}, \quad (3.43)$$

avec une température fictive posée égale à $\frac{1}{\beta} = m$ telle que :

$$V_{eff}(z_1, \dots, z_N) = -2m^2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \frac{m}{2} \sum_i |z_i|^2, \quad (3.44)$$

coincide avec l'énergie potentielle d'un plasma bi-dimensionnel à une composante : le premier terme dans (3.44) représente la répulsion entre les particules de charge m à travers l'interaction de Coulomb qui est logarithmique en deux dimensions et le second terme est l'interaction de ces charges à l'origine due à un fond neutralisant uniforme sur la même géométrie circulaire de densité de charge $\rho_0 = \frac{1}{2\pi l^2}$. Cette analogie réduit le calcul de valeurs moyennes avec la fonction d'onde (3.42) à celle dans le plasma équivalent. En particulier, la neutralité du plasma montre que la densité d'électrons dans l'état (3.42) est uniforme et égale à :

$$\rho_e^{(m)} = \frac{\rho_0}{m} = \frac{1}{2\pi m l^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{eB}{hc}. \quad (3.45)$$

En d'autres termes, l'état (3.42) a un facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$, donc en moyenne, il y a m quanta de flux pour un électron.

- Dans les équations (3.43) et (3.44), le rapport de l'énergie potentielle à la température est $\Gamma = 2m$, ce qui veut dire que la température fictive du plasma bi-dimensionnel équivalent est suffisamment élevée pour $m = 1, 3, 5, \dots$, les cas d'intérêt pour l'EHQ fractionnaire.

Le fait qu'un tel état donne le fondamental pour le système d'EHQ fractionnaire est suggéré par deux arguments. Le premier argument est de type variationnel. Le second argument, donné par Haldane [12], est le suivant : dans une approche avec un pseudo-potentiel [13], il a été montré que la fonction d'onde de Laughlin est l'unique et exact fondamental d'un hamiltonien tronqué représentant les composantes à courte distance des interactions entre les électrons. Alors on peut argumenter que quand la partie à grande distance des interactions est diminuée de façon continue, aucune transition de phase

n'apparaît dans le fondamental. Ceci peut être vérifié par des études numériques sur des systèmes de taille finie [13]. De cette approche, il ressort que la fonction d'onde de Laughlin est très peu sensible aux variations de la forme du potentiel répulsif électron-électron et particulièrement aux variations dans sa partie à courte distance. C'est ce que l'on attend de la propriété que dans l'état (3.42), les électrons se tiennent éloignés les uns des autres, ce qui est une conséquence de la forme de Jastrow.

3.4.2 Fonction d'onde de Laughlin pour les quasi-particules

Pour générer une quasi-particule avec une charge fractionnaire, on peut faire une expérience par la pensée [11] : on attache à l'état (3.42) un tube de flux infiniment mince au point Z_0 et on augmente le flux adiabatiquement de 0 à un quantum de flux $\phi_0 = \frac{hc}{e}$. Durant ce processus, l'état de la gouttelette de liquide quantique reste toujours un état propre de l'Hamiltonien qui change. Puisque le changement de flux induit un champ électrique radial, alors en raison du transport de Hall, les électrons avoisinants vont se déplacer radialement vers le point Z_0 ou vont s'en éloigner selon le sens du flux. Donc quand $\phi \rightarrow \phi_0$, on tend à obtenir une accumulation de charge positive ou négative dans une surface de taille l autour de Z_0 . Par invariance de jauge (un quantum de flux est équivalent à pas de flux du tout), cet état final est un état excité de l'Hamiltonien original. Cette excitation est une quasi-particule : soit un quasi-trou soit un quasi-électron, selon le signe de la charge accumulée. On a ici $\sigma^H = \frac{1}{m} \frac{e^2}{h}$, et il est alors aisé de calculer la charge accumulée, qui est $\pm \frac{1}{m} e$. Donc les quasi-particules sont des charges fractionnaires. On va considérer des quasi-trous avec une charge $\frac{1}{m} e$. Ils sont formés par une réduction de $\frac{1}{m}$ électrons dans une région de taille l . Ceci suggère que la fonction d'onde à N -corps pour un état avec un quasi-trou centré à Z_0 doit avoir la forme suivante :

$$\Psi_{+1}^m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i=1}^N (z_i - Z_0) \prod_{i < j}^N (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2} = \prod_{i=1}^N (z_i - Z_0) \Psi_0^m(z_1, \dots, z_N) \quad (3.46)$$

Des calculs numériques indiquent que cette fonction d'onde pour un quasi-trou est réaliste : elle accumule vraiment un excès de charge $\frac{e}{m}$. Il a aussi été montré numériquement que l'énergie de création d'un quasi-trou est d'environ $0,026\frac{e^2}{l}$ qui représente un gap d'énergie non nul. Ceci montre que le fluide est incompressible. L'incompressibilité a pour origine la *rigidité* de la fonction d'onde de Laughlin (3.42) et les interactions de Coulomb qui donnent naissance à un coût d'énergie fini pour des quasi-particules avec charge fractionnaire. Laughlin a aussi montré [14] que les quasiparticules se comportent comme des électrons ou des trous dans le plus niveau de Landau le plus bas. Non seulement leur taille, charge et énergie ne dépendent pas de Z_0 , mais elles suivent également un mouvement cyclotron comme les électrons, sauf que la rayon de leur orbite est \sqrt{m} fois plus grand (à cause de $e^* = \frac{e}{m}$).

De l'argument donné ci-dessus, on peut voir que si on augmente ou diminue le flux total du système, donc que ν dévie de la fraction exacte $\frac{1}{m}$, alors on va générer des quasi-particules dans le système qui possèdent une charge fractionnaire. Comme pour l'EHQ entier, les impuretés entraînent la localisation de ces quasi-particules qui conduit à un plateau de Hall observé avec σ^H fixée à $\frac{1}{m}\frac{e^2}{h}$. L'existence d'autres plateaux de Hall à d'autres valeurs de ν est expliquée par la condensation de ces quasi-particules pour former de nouveaux fluides quantiques. A quelle fraction ν les nouveaux états stables peuvent être formés dépend de la statistique des quasi-particules, d'une manière similaire au fait que l'état stable originel apparaît à $\nu = \frac{1}{m}$, avec m impair, en terme de la statistique de Fermi des électrons.

3.5 Statistique fractionnaire et l'EHQ fractionnaire

3.5.1 Statistique fractionnaire des quasi-particules

Selon Arovas, Schrieffer et Wilczek [15], la charge et la statistique des quasi-particules peuvent être déterminées par une méthode directe basée sur le concept de la phase de Berry [16]. Pour déterminer la charge, on calcule le changement de phase γ de la fonction d'onde du quasi-trou (3.46) quand la position du quasi-trou Z_0 bouge adiabatiquement autour d'une boucle fermée de rayon R contenant le flux ϕ . On note que Z_0 apparaît comme un paramètre dans la fonction d'onde à N -corps (3.46). Donc le changement de

phase est composé de la phase usuelle *dynamique* $\int^t E(\tau)d\tau$, où $E(\tau)$ est l'énergie de l'état, à laquelle s'ajoute la phase de Berry qui est indépendante de la manière lente avec laquelle la boucle est traversée.

La phase de Berry $\gamma(t)$ satisfait à :

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \langle \Psi_{+1}^m(Z_0) | \frac{d}{dt} | \Psi_{+1}^m(Z_0) \rangle = i \langle \Psi_{+1}^m(Z_0) | \frac{d \sum_i \ln z_i - Z_0(t)}{dt} | \Psi_{+1}^m(Z_0) \rangle \quad (3.47)$$

La densité d'électron $\rho_{+1}(z)$ dans cet état est :

$$\rho_{+1}(z) = \langle \Psi_{+1}^m(Z_0) | \sum_i \delta(z_i - z) | \Psi_{+1}^m(Z_0) \rangle . \quad (3.48)$$

On obtient :

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \int d^2z \rho_{+1}(z) \frac{d \ln z - Z_0(t)}{dt} . \quad (3.49)$$

L'intégration dans le sens des aiguilles d'une montre sur Z_0 le long du chemin C délimitant une surface S fournit :

$$\gamma = 2\pi \int_S d^2z \rho_0 = 2\pi \langle n \rangle_S = 2\pi\nu \frac{\phi}{\phi_0}, \quad (3.50)$$

où $\langle n \rangle_S$ est le nombre d'électrons dans S ³. Cette phase supplémentaire peut être vue comme une phase Aharanov-Bohm qu'une charge e^* acquiert en se mouvant autour de C :

$$\frac{e^*}{\hbar c} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{e^*}{e} \frac{\phi}{\phi_0} \quad (3.51)$$

En comparant (3.50) et (3.51), on détermine la charge e^* du quasi-trou, qui est $e^* = \nu e$. Ceci montre que la charge de la quasi-particule et la densité de charge du fondamental sont la même chose.

Pour déterminer la statistique des quasi-particules, on considère l'état à deux quasi-trous placés à Z_1 et Z_2 . En généralisant (3.46), on a :

$$\Psi_{+2}^{(m)}(Z_1, Z_2) = \prod_i (z_i - Z_1)(z_i - Z_2) \Psi_0^{(m)}(z_1, \dots, z_N). \quad (3.52)$$

³On ignore la correction à la densité de fond ρ_0 due aux quasi-particules de l'ordre $(\frac{1}{R})^2$

On laisse Z_1 se mouvoir lentement le long d'une boucle fermée C . Alors si Z_2 est entouré par C , une analyse similaire à celle qui précède donne :

$$\gamma = 2\pi \langle n \rangle_s = 2\pi\nu\left(\frac{\phi}{\phi_0} - 1\right). \quad (3.53)$$

Le premier terme est le même que celui déjà rencontré et le second terme est dû à une réduction du nombre d'électrons dans la configuration du second quasi-trou à Z_2 . Cette phase supplémentaire est insensible à de petites déformations de C et est interprétée comme étant la phase d'*échange* (ou statistique) $e^{-2i\theta}$. Le paramètre statistique d'un quasi-trou est donc :

$$\theta = -\frac{\Delta\gamma}{2} = \nu\pi. \quad (3.54)$$

Par exemple, dans l'état fractionnaire avec $\nu = \frac{1}{3}$, on a $\theta = \frac{\pi}{3}$. Puisqu'en général, ν est rationnel, la statistique des quasi-particules est fractionnaire dans un état de l'EHQ fractionnaire. A partir de cette démonstration, on peut voir clairement que le paramètre statistique est directement relié au nombre de défauts d'électron (ou nombre de trous) dans la configuration de quasi-particule. Ce dernier est un nombre bien défini puisque l'état de Hall est incompressible. Si ce n'était pas le cas, ce nombre de défaut d'électrons pourrait ne pas être si bien défini et la notion de statistique fractionnaire n'aurait plus de sens.

3.5.2 Statistique fractionnaire et schéma de hiérarchie

Les fonctions d'onde à N -électrons sont aisées à construire seulement pour des fractions simples telles $\nu = \frac{1}{m}$ (m impair). D'autres états fractionnaires peuvent être construits par le schéma de hiérarchie [12],[13]. L'idée de base est que l'interaction dominante entre quasi-particules est la partie répulsive à courte portée de l'interaction de paires et que ces quasi-particules se comportent comme des électrons dans le niveau de Landau le plus bas. Donc la fonction d'onde de Laughlin peut être utilisée pour le gaz de quasi-particules en interaction, qui est présent à des facteurs de remplissage près de la valeur stable de l'état père et va se condenser pour former un nouvel état de quasi-particule. Ces nouvelles fractions de remplissage stables doivent être reliées aux statistiques fractionnaires des quasi-particules de la même manière que les fractions originelles $\nu_0 = \frac{1}{m}$ (m impair) le sont avec la statistique de Fermi

des électrons.

L'obtention de la hiérarchie des états de l'EHQ selon cette ligne de pensée a été donnée par Halperin [17], qui a suggéré le premier la cohérence des statistiques fractionnaires avec l'EHQ fractionnaire. Par analogie avec la fonction d'onde de Laughlin (3.42), la fonction d'onde pour les quasi-trous dans un état apparenté avec $\nu_0 = \frac{1}{m}$ est de la forme :

$$\Psi'_0(Z_1, \dots, Z_{N'}) = \prod_{j < k}^{N'} (Z_j - Z_k)^{m_1} e^{-\frac{1}{a} |\frac{e^*}{e}| \sum_{i=1}^{N'} |Z_k|^2} \quad (3.55)$$

Puisque les quasi-trous obéissent à des statistiques avec $\frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{m}$, l'exposant m_1 dans le préfacteur ne peut être que :

$$m_1 = 2p_1 + \frac{\alpha_1}{m}, \quad (3.56)$$

où $\alpha_1 = 1$ pour les quasi-trous (et -1 pour les quasi-électrons), et p_1 est un entier positif. Une fois encore la distribution de probabilité $|\Psi'_0|^2$ peut être interprétée comme celle d'un plasma classique à une composante de charges m_1 dans un fond neutralisant de charge $\frac{e^*}{e}$. Donc la densité du plasma est fixée par la condition de neutralité de charge, qui donne le nombre de quasi-trous dans une aire de $2\pi l^2$ et qui vaut :

$$n_1 = \frac{|\frac{e^*}{e}|}{m_1} = \frac{1}{mm_1} = \frac{1}{2p_1m + \alpha_1} \quad (3.57)$$

Puisque chaque quasi-trou a une charge $\frac{\alpha_1}{m}$, le facteur de remplissage pour les électrons dans le nouvel état stable est :

$$\nu_1 = \nu_0 - \alpha_1 \frac{n_1}{m} = \frac{2p_1}{2p_1m + \alpha_1} \quad (3.58)$$

Pour $m = 3$, $p_1 = 1$ on obtient $n_1 = \frac{1}{7}$ (ou $\frac{1}{5}$), et $\nu_1 = \frac{2}{7}$ (ou $\frac{2}{5}$) pour le fluide de quasi-trous (ou quasi-électrons). Des états d'ordre supérieur ($p_1 > 1$) peuvent être construits de manière analogue, et reproduisent les fractions observées.

Cette discussion peut être étendue à un schéma hiérarchique en itérant l'analyse. L'équation itérative pour la charge q_{s+1} d'une quasi-particule au niveau $s + 1$ est :

$$q_{s+1} = -\alpha_{s+1} \frac{q_s}{m_{s+1}} \quad (\alpha_{s+1} + \pm 1), \quad (3.59)$$

où

$$m_{s+1} = 2p_{s+1} + \frac{\alpha_{s+1}}{m_s} \quad (p_{s+1} \in \mathbb{N}) \quad (3.60)$$

Le facteur de remplissage au niveau $s + 1$ satisfait à :

$$\nu_{s+1} = \nu_s + \frac{|q_s|q_{s+1}}{m_{s+1}} \quad (3.61)$$

On peut montrer que ν_{s+1} s'exprime comme une fraction continue en termes de la séquence $\{p_i, \alpha_i\}$:

$$\nu_{s+1} = \frac{1}{2p_1 + \frac{\alpha_1}{2p_2 + \frac{\alpha_2}{2p_3 + \dots}}} \quad (3.62)$$

Il s'agit de la hiérarchie que Haldane [12] a obtenu d'une manière différente.

3.6 Dégénérescence du fondamental

3.6.1 L'argument de Laughlin étendu

L'EHQ entier a été expliqué par l'argument de Laughlin, en utilisant une topologie non-triviale : un cylindre percé par un tube de flux, combiné avec un argument d'invariance de jauge. Tao et Wu [18] l'ont étendu pour incorporer l'EHQ fractionnaire sans violer l'invariance de jauge, et ont mis en évidence que la condition qui altère la quantification entière mais favorise la quantification fractionnaire est la dégénérescence du fondamental des systèmes d'EHQ fractionnaire sur certaine géométrie d'espace compactifié.

La condition de non-dégénérescence du fondamental pour l'EHQ entier n'est pas explicitement utilisée dans l'argument originel de Laughlin, mais mise en évidence par Tao et Wu ([18]). Ils ont établi que cette condition, ajoutée à la géométrie du tore et l'argument d'invariance de jauge, est nécessaire pour garantir une conductivité de Hall entière. Donc, pour obtenir une conductivité de Hall fractionnaire $\sigma_H = \frac{\nu e^2}{h}$, le système devrait être dégénéré q -fois sur le tore.

Plus rigoureusement, on peut le voir de la démonstration de la conductivité de Hall comme invariant topologique par Niu, Thouless et Wu [8], présenté précédemment. On y a vu que, tant que l'état fondamental est non-dégénéré

et séparé des états excités par un gap d'énergie fini pour toutes les valeurs des phases (θ_1, θ_2) , le fondamental ϕ_0 va rester inchangé quand soit θ_1 ou θ_2 change de 0 à 2π . Alors la conductivité de Hall, moyennée sur θ_1 et θ_2 sur le tore ($0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$) est une première classe de Chern sur un fibré qui est nécessairement entière (en unité de $\frac{e^2}{h}$). Pour obtenir une quantification fractionnaire de σ_H , l'état fondamental doit être dégénéré. On part d'un des états fondamentaux, maintenant appelé ϕ_1 . Changer θ_1 ou θ_2 de 0 à 2π ne va pas transformer ϕ_1 sur lui-même. On suppose alors que l'on doit changer θ_1 de 0 à $2\pi q$ (q entier) pour retrouver ϕ_1 lui-même. Alors la conductivité de Hall moyenne peut être écrite comme une intégrale sur le tore $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi q$, $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$:

$$\sigma_H = \bar{\sigma} = \frac{e^2}{h q} \int_0^{2\pi q} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} \middle| \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_1} \right\rangle - (\theta_1 \longleftrightarrow \theta_2) \right\}, \quad (3.63)$$

où le facteur q vient du calcul de la valeur moyenne. L'intégrale doit être un nombre entier. Comme l'intégrale est une première classe de Chern, nécessairement entière, alors en général σ_H devient une fraction avec un dénominateur q .

On remarquera que l'intégrale ci-dessus sur $0 < \theta_1 < 2\pi, 0 < \theta_2 < 2\pi$ n'est plus une intégrale sur un tore, puisque l'intégrand n'est plus aux bords $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 2\pi$.

Expérimentalement, σ_H est $\frac{p}{q}$ fois $\frac{e^2}{h}$ quand le facteur de remplissage ν est à peu près égal à $\frac{p}{q}$. Pour rendre l'argument ci-dessus capable d'expliquer ceci, on a besoin de prouver que :

- L'entier q défini ci-dessus pour faire revenir le fondamental sur lui-même est le même pour les différents fondamentaux desquels on aurait pu partir.
- L'intégrale dans (3.63) est aussi indépendante du choix du fondamental et est réellement le numérateur entier p de ν .

On verra la première preuve dans le paragraphe suivant. Pour la deuxième, on peut invoquer l'argument de l'invariance topologique, en supposant que le gap n'est pas détruit en éteignant les diverses interactions dans l'Hamiltonien. Alors l'intégrale n'est pas changée. Pour un gaz sans interaction, σ_H est connue et vaut $\frac{p}{q}$ pour le facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{q}$, donc tout comme le σ_H

calculé avec (3.63). L'existence d'un plateau près de $\nu = \frac{p}{q}$ est expliquée par la localisation des quasi-particules à cause des impuretés de façon similaire à l'EHQ entier.

3.6.2 La dégénérescence du fondamental sur le tore

Une méthode générale pour prouver l'existence d'une dégénérescence en Mécanique Quantique est de trouver deux opérateurs de symétrie qui ne commutent pas entre eux, mais commutant avec l'Hamiltonien. Dans la situation présente, de tels opérateurs sont donnés par les translations magnétiques. Les translations magnétiques infinitésimales d'un seul électron sont données par (3.7). Dans un système à N -corps, on peut définir la translation magnétique par :

$$t_i(\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{\Pi}_i}, \quad (3.64)$$

pour chaque électron i et où $\vec{\Pi}_i$ est le moment de l'électron i . En l'absence d'impuretés, mais en présence d'interactions entre électrons la translation magnétique totale

$$T(\vec{a}) = \prod_{i=1}^N t_i(\vec{a}), \quad (3.65)$$

\vec{a} étant un vecteur bi-dimensionnel, laisse l'Hamiltonien à N -corps invariant. Par soucis de simplicité, pour imposer la géométrie du tore, on peut considérer les conditions aux bords périodiques imposées à la fonction d'onde du problème à N -corps

$$t_j(\vec{L}_1)\psi = t_j(\vec{L}_2)\psi = \psi, \quad (3.66)$$

avec $\vec{L}_1 = L_1 \vec{e}_x$, $\vec{L}_2 = L_2 \vec{e}_y$. Donc la fonction d'onde est inchangée quand un des électrons est translaté *magnétiquement* par \vec{L}_1 ou \vec{L}_2 à travers le plan. Ceci correspond au cas pour lequel $\theta_1 = \theta_2 = 2n\pi$ dans l'équation (3.32). Si on suppose qu'il y a un nombre

$$N_\phi = \frac{L_1 L_2}{2\pi l^2} \in \mathbb{N}^* \quad (3.67)$$

de quanta de flux transperçant la surface, il y a donc

$$N_e = \nu N_\phi = \frac{p}{q} N_\phi \quad (3.68)$$

électrons, avec p et q entiers premiers entre-eux. Les translations qui laissent aussi les conditions aux limites (3.66) invariantes sont

$$T_1 \equiv T\left(\frac{1}{N_\phi} \vec{L}_1\right), \quad T_2 \equiv T\left(\frac{1}{N_\phi} \vec{L}_2\right) \quad (3.69)$$

et leurs puissances. Ce sont les opérateurs de symétrie recherchés, puisque T_1 et T_2 ne commutent pas :

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 e^{-iN_c \frac{|\vec{L}_1 \wedge \vec{L}_2|}{N_\phi^2 l^2}} = T_2 T_1 e^{-i2\pi \frac{p}{q}}. \quad (3.70)$$

On peut choisir un fondamental ϕ_0 qui soit un état propre de T_1 , alors les q états définis par :

$$\phi_n = T_1^n \phi_0 \quad (n = 0, 1, \dots, q-1), \quad (3.71)$$

sont dégénérés, ils ont donc la même énergie que ϕ_0 . De plus, ils sont tous états propres de T_2 mais avec des valeurs différentes :

$$T_2 \phi_n = e^{-i2\pi n \frac{p}{q}} T_2 \phi_0, \quad (3.72)$$

et donc ils sont orthogonaux entre eux. En d'autres termes, les états fondamentaux doivent être formés des représentations de l'algèbre de Heisenberg (3.70), dont la représentation irréductible est de dimension q . Donc le fondamental doit être dégénéré q fois [8]. Si il n'y a pas de dégénérescence accidentelle, il y a exactement q états fondamentaux.

En général, la présence de désordre ou d'impuretés aléatoires brise l'invariance sous les translations à N -corps (3.69). Cela veut dire que la dégénérescence du fondamental est levée par des potentiels décrivant une situation avec faible impureté. Si ce potentiel est plus faible que l'énergie du gap, on peut utiliser la théorie des perturbations dans le cas dégénéré au premier ordre dans le sous espace du fondamental. Cette approche a été utilisé par Tao et Haldane [19], et Wen et Niu [20]. En général, il y a un unique fondamental pour chaque ensemble de phases (θ_1, θ_2) . Est-ce que ceci implique que la conductivité de Hall devrait être entière selon la théorie de l'invariant topologique ? La réponse est non, parce que la température dans des échantillons réalistes est supposée être plus grande que l'énergie levant la dégénérescence due aux impuretés. Les q états les plus bas séparés des fondamentaux sont

également peuplés en dessous du niveau de Fermi, donc la discussion du paragraphe précédent s'applique encore.

Wen et Diu [20] ont prouvé, en utilisant la théorie effective de type Ginsburg-Landau pour les systèmes de l'EHQ fractionnaire, que la dégénérescence du fondamental d'un système de Hall fractionnaire avec $\nu = \frac{p}{q}$ sur une surface de Riemann de genre g est q^g fois dégénérée même si l'invariance par translation est brisée sur une surface de Riemann de genre $g > 1$. On montre que cette dégénérescence existe et est la même aussi bien sous de faibles perturbations que sous n'importe quels types de perturbations. Ce résultat montre que la dégénérescence du fondamental d'un système de Hall fractionnaire dépend de la topologie globale de la surface.

La fonction d'onde de Laughlin pour une géométrie correspondant à un disque [11] et la généralisation de Haldane pour une géométrie sphérique ont été toutes les deux trouvées non dégénérées. Mais d'un autre côté, la dégénérescence proposée par Tao et Wu pour le tore [18] a été observée dans des simulations numériques [21] et dans la construction explicite des fonctions d'onde de Laughlin sur un tore [22]. Plus tard, des spéculations sur la brisure de symétrie en rapport avec cette dégénérescence se sont avérées être incorrectes, puisque la dégénérescence sur un tore peut être interprétée comme la dégénérescence du mouvement du centre de masse [23]. Wen et Niu ont résolu le puzzle. Ils ont montré que la dégénérescence est indépendante de la topologie spatiale et est préservée lorsque l'on a effectué la limite thermodynamique même si les symétries de translation ou de rotation peuvent être perdues sur une surface de Riemann de genre plus élevé. Ceci implique que la dégénérescence des états de Hall fractionnaires est le reflet d'un certain ordre topologique dans le système et qu'elle ne devrait pas être interprétée comme une brisure de symétrie d'un type usuel, ni comme à peu près la dégénérescence du centre de masse. Wen a développé le concept d'ordre topologique et a tenté d'utiliser la connection de Berry non-abelienne dans le sous-espace du fondamental pour caractériser complètement l'ordre topologique des états de Hall fractionnaires.

Chapitre 4

Problème de Landau sur un échantillon de taille finie

Quantum Hall conductivity in a Landau type model with a realistic geometry
F. Chandelier, Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet
Ann. of Phys. 305(2003)60

4.1 Introduction

Laughlin [5] a montré que la quantification de la conductivité de Hall peut être obtenue à partir de l'invariance de jauge et de l'existence d'un gap d'énergie dans le spectre. Il a utilisé une géométrie annulaire, une boucle percée partout par un champ magnétique perpendiculaire à sa surface. Il a également analysé l'influence du désordre (niveaux de Landau élargis et énergie de Fermi située dans un gap entre deux niveaux). Les électrons sont considérés libres. Dans ce cadre, Laughlin a démontré par un argument lié à l'invariance de jauge que la conductivité transverse du système est quantifiée en multiples entiers de $\frac{e^2}{h}$ et que les effets de bord n'ont pas d'influence sur la précision de la quantification. Halperin [24] a ensuite considéré la même géométrie et la même situation expérimentale. Il a discuté les propriétés impliquées par l'argument de Laughlin et l'a étendu. L'une d'elles est que même en présence de désordre modéré, il existe toujours un état étendu transportant un courant d'électrons dans une petite région le long du périmètre de

l'échantillon. Dans cette analyse plus générale, il a montré l'exactitude de la quantification entière en présence de désordre.

Thouless, Kohmoto, Nightingale et den Nijs ont considéré une situation différente [6]. Ils se sont intéressés à un gaz d'électrons soumis à un potentiel périodique U en x, y dans le plan infini plongé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à ce plan. Ils ont imposé pour cette géométrie des conditions aux limites périodiques, et un nombre de quanta de flux ϕ par cellule ¹ fractionnaire. Ils ont résolu les cas de faible et forte amplitude pour le potentiel U . En appliquant le théorème de Bloch, ils ont obtenu un Hamiltonien pour les électrons dépendant de deux paramètres supplémentaires décrivant un tore. Laughlin et Halperin ont étudié le problème du calcul de la conductivité de Hall en considérant les effets produits par un changement dans le potentiel vecteur sur les états aux bords du système fini. Par cette approche, la quantification de la conductivité est rendue explicite, mais on ne peut montrer clairement que le résultat est insensible aux conditions aux limites.

Une approche alternative, par Thouless, Kohmoto, Nightingale et den Nijs, est d'utiliser la formule de Kubo pour ce gaz d'électrons. Ils montrent alors que la conductivité est quantifiée en multiples entiers de $\frac{e^2}{h}$. Cette conductivité est en fait reliée à la première classe de Chern d'un fibré sur le tore évoqué plus haut. Thouless et Wu [25] ont généralisé ce résultat. Quand le niveau de Fermi se situe dans un gap, la conductivité peut être exprimée comme une classe caractéristique, garantissant la quantification entière. Cette dernière approche généralise la précédente au cas où des interactions à N -corps et un certain désordre sont présents. La possibilité d'écrire la conductivité de Hall dans le cas fractionnaire comme un invariant topologique est aussi discuté mais toujours dans la géométrie du plan infini et dans le cadre de conditions aux limites périodiques.

Avron et Seiler [9] ont proposé un cadre théorique pour l'argument de Laughlin pour des Hamiltoniens à N -corps avec des potentiels généraux. La quantification apparaît alors comme une conséquence de la nature géométrique (classe de Chern) de la conductivité. Leurs travaux généralisent les idées de

¹Si a (resp. b) est la période en x (resp. y) du potentiel U , alors la cellule élémentaire du réseau est d'aire ab .

Thouless et al. pour des Hamiltoniens de Bloch au cas plus général d'Hamiltoniens en interaction (électron-électron) et qui n'ont pas de conditions aux limites périodiques. La géométrie considérée dans leur travaux est celle que l'on va également considérer : un échantillon percé par un flux dont les bords opposés reliés par deux fils sont considérés comme faisant partie du système (voir figure 4.1). Ils ont remarqué que cette géométrie et cette topologie sont analogues à celle d'un domaine percé par deux flux ϕ_1 et ϕ_2 avec des conditions aux limites de Dirichlet ². Ils ont alors considéré une telle classe d'Hamiltoniens dépendant de ces deux flux $H(\phi_1, \phi_2)$, qui sont les analogues des Hamiltoniens de Bloch. Alors que pour les travaux de Thouless, une moyenne sur les conditions aux limites est faite, ici, il s'agit d'une moyenne sur le tube de flux de Laughlin qui est utilisée pour calculer la conductivité.

Sous l'hypothèse que l'état fondamental est non-dégénéré, on obtient la quantification entière à volume fini et température nulle. Tao et Wu [18] ont par ailleurs étendu l'analyse à des états fondamentaux dégénérés et ont montré que la dégénérescence est reliée au dénominateur de la conductance pour l'EHQ fractionnaire. Avron et Seiler [9] ont montré que l'argument de Laughlin peut être compris en terme de la première classe de Chern d'un fibré en droites sur le tore associé à cette classe d'Hamiltoniens $H(\phi_1, \phi_2)$.

Le travail exposé ici considère la même géométrie, mais l'Hamiltonien considéré est l'Hamiltonien de N électrons soumis juste à un champ magnétique B perpendiculaire à un domaine rectangulaire fini. On prend ici des conditions aux limites générales et compatibles avec l'invariance de jauge. Niu et Thouless [26] ont aussi considéré cette géométrie qui se rapproche plus de l'expérience de Hall, mais encore une fois des conditions aux limites périodiques ont été considérées. Dans ce cadre, on a montré que la conductivité de Hall est fractionnaire si $NB = 2\pi l$, l entier. Le tableau 4.1 résume les principales études parues dans la littérature. Dans tous les cas, l'état fondamental est supposé non-dégénéré.

²Les deux géométries ont un flux supplémentaire qui est mis à *la main* dans l'argument de Laughlin.

	Laughlin	Thouless et al. ^(a)	Avron Seiler	Notre contribution
Géométrie	Anneau	\mathbb{R}^2	Rectangle	Rectangle
Paramètres pertinents	B, ϕ	$B, \phi = \frac{p}{q}$	ϕ_1, ϕ_2	$\phi, B, NB = 2\pi l$
Conditions aux limites	Dirichlet	Périodiques	Dirichlet	Compatible avec l'invariance de jauge
Hamiltonien	Landau	Bloch + Potentiel périodique	\sim Bloch ^(b) + Potentiel général	Landau + Potentiel général
Conductivité transverse	entière	entière \sim fractionnaire ^(c)	entière \sim fractionnaire ^(c)	entière et/ou fractionnaire

TAB. 4.1: Tableau résumant les caractéristiques des différentes approches. ^(a) Thouless, Kohmoto, Nightingale, et den Nijs. ^(b) $H(\phi_1, \phi_2)$ est l'analogie de l'Hamiltonien obtenu par le théorème de Bloch utilisé par Thouless et al. ^(c) Le symbole \sim pour signifier que le cas fractionnaire est obtenu lorsqu'on impose une condition fractionnaire sur le flux..etc.

4.2 Le problème considéré

4.2.1 Le système physique

On considère le système physique représenté sur la figure 4.1. Les électrons sont supposés confinés dans un domaine rectangulaire plan (rectangle gris) et soumis à champ magnétique perpendiculaires \vec{B} . Les électrons sont injectés et récupérés par des fils sur les quatre bords de l'échantillon. Ces

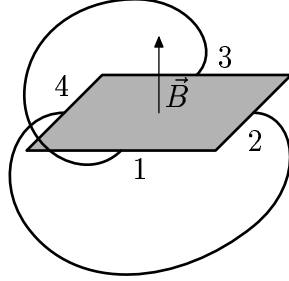


FIG. 4.1: Géométrie globale de l'expérience pour l'effet Hall quantique

fils sont des objets classiques, connectés à des appareils macroscopiques mesurant par exemple l'intensité du courant. Les électrons circulant dans ces fils sont des objets classiques. Ceux confinés dans le rectangle doivent être traités par la mécanique quantique.

On suppose que les propriétés classiques liées aux fils satisfont les deux hypothèses suivantes :

- 1) le courant circulant dans les fils est conservé,
- 2) la charge totale localisée sur un bord du rectangle est égale à celle localisée sur le bord opposé.

La présence des fils va donc se refléter comme des conditions aux limites contraignant la mécanique quantique des électrons dans le rectangle. En notant j_i , $i = 1, 2, 3, 4$ (voir figure 4.1), le courant algébrique sortant pour le bord i , l'hypothèse 1) implique :

$$j_1 + j_3 = 0, \quad j_2 + j_4 = 0. \quad (4.1)$$

Ces contraintes peuvent être réexprimées en terme d'intégrales sur chaque bords des densités de courant qui apparaissent en mécanique quantique. On

note que ces contraintes sont différentes des conditions aux limites de type Neumann ou Dirichlet. Comme dans les expériences de l'effet Hall quantique, les deux paramètres contrôlables sont ici le champ magnétique B et le nombre d'électrons N dans l'échantillon ³.

En gardant à l'esprit que la plupart des données de l'EHQ sont mesurées en terme de mouvements effectifs des électrons, on introduit des variables exprimables en terme de variables collectives. Soit (x_i, y_i) et (p_{x_i}, p_{y_i}) ($i = 1, \dots, N$) les variables individuelles de position et de moment de chaque électron. Le courant j_k (en l'absence de champ magnétique) dépend seulement des composantes du moment total $p_x = \sum_{i=1}^N p_{x_i}$ et $p_y = \sum_{i=1}^N p_{y_i}$ par la relation :

$$j_1 = \int_{\text{bord 1}} j_y, \quad (4.2)$$

où,

$$j_y = \psi^*(p_y \psi) + (p_y \psi)^* \psi, \quad (4.3)$$

avec des relations similaires pour les trois autres courants.

Pour simplifier l'analyse, sans perdre en généralité et sans altérer les conclusions, on suppose dans la suite que l'échantillon rectangulaire est en fait un carré $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ dans le plan (x, y) ⁴.

4.2.2 Hamiltonien du système

L'Hamiltonien sur $[0, 1]^2$ est donné par :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [(p_{x_i} + \frac{1}{2} B y_i)^2 + (p_{y_i} - \frac{1}{2} B x_i)^2] + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(x_i - x_j, y_i - y_j), \quad (4.4)$$

où m est la masse de l'électron supposé sans spin, V est le potentiel d'interaction, et la jauge symétrique a été utilisée. Les variables collectives pertinentes sont définies par :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, & p_x &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{x_i}, \\ y &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, & p_y &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{y_i}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

³ pouvant être modifié en changeant par exemple la tension de porte. Voir chapitre 1.

⁴ On suppose dans la suite que $\hbar = c = e = 1$ où e est la charge de l'électron.

Les N variables "internes" sont données par :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_i - x, & \tilde{p}_{x_i} &= p_{x_i} - \frac{1}{N}p_x, \\ \tilde{y}_i &= y_i - y, & \tilde{p}_{y_i} &= p_{y_i} - \frac{1}{N}p_y,\end{aligned}\quad (4.6)$$

et satisfont :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{p}_{x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{p}_{y_i} = 0. \quad (4.7)$$

Dans ces variables, H se découple en deux parties

$$H = H_0 + H_I, \quad (4.8)$$

où :

$$H_0 = \frac{1}{2Nm} \left[(p_x + \frac{1}{2}NB y)^2 + (p_y + \frac{1}{2}NB x)^2 \right], \quad (4.9)$$

et H_I , l'Hamiltonien interne, dépend seulement des $4(N-1)$ variables \tilde{x}_i, \tilde{y}_i et $\tilde{p}_{x_i}, \tilde{p}_{y_i}, i = 1, \dots, N-1$.

L'Hamiltonien H doit être un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert"

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I, \quad (4.10)$$

où les opérateurs collectifs (resp. internes) agissent seulement sur \mathcal{H}_0 (resp. \mathcal{H}_I). L'analyse qui va suivre va se focaliser sur la partie H_0 de l'Hamiltonien avec l'espace de Hilbert correspondant \mathcal{H}_0 , puisque les observables intéressantes agissent seulement sur \mathcal{H}_0 . Cet espace de Hilbert ressemble à première vue à $L^2([0, 1]^2)$ pour les variables x, y . Toutefois, cette identification est incorrecte. Dans la suite de ce paragraphe, on va définir l'espace de Hilbert pertinent pour le problème considéré. De façon générale, on sait que des opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert ne sont pas complètement définis par leur expression "formelle". Il faut aussi spécifier le domaine sur lequel ils sont définis. En mécanique quantique, différents domaines de définition pour un opérateur non borné peuvent correspondre à différentes situations physiques. Par exemple, dans la mécanique quantique sur l'intervalle $[0, 1]$, l'opérateur $p = -i\frac{\partial}{\partial x}$ est auto-adjoint grâce au choix de conditions aux limites sur les fonctions d'onde.

Ces considérations définissent un domaine (dense) pour p . Plus précisément,

on montre qu'il existe une famille à un paramètre d'opérateurs auto-adjoints p_θ , $\theta \in [0, 2\pi[$ dont le domaine (dense) de définition est :

$$\mathcal{D}_\theta = \{\phi \in L^2([0, 1]) / \phi \text{ absolument continue, } \phi' \in L^2([0, 1]), \phi(1) = e^{i\theta} \phi(0)\}. \quad (4.11)$$

Ces opérateurs ne sont pas unitairement (et donc pas physiquement) équivalents pour différentes valeurs de θ .

Revenant au système décrit par H , on introduit les opérateurs :

$$D_x = -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} N B y, \quad D_y = -i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} N B x, \quad (4.12)$$

correspondants respectivement à $p_x - A_x$ et $p_y - A_y$. On va utiliser les contraintes (conditions aux limites) données au paragraphe 4.1.1 pour définir un domaine \mathcal{D} sur lequel D_x, D_y, D_x^2, D_y^2 sont auto-adjoints. Il est commode de définir le produit scalaire $(-, -)$ sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommables

$$(\psi, \phi) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy (\psi^* \phi)(x, y), \quad (4.13)$$

et d'introduire la notation :

$$[f(x, y)]_{x=0}^{x=1} = f(1, y) - f(0, y). \quad (4.14)$$

Alors, pour toutes fonctions d'onde ψ et ϕ suffisamment régulière, on a :

$$(D_x \psi, \phi) - (\psi, D_x \phi) = i \int_0^1 dy [(\psi^* \phi)(x, y)]_{x=0}^{x=1}, \quad (4.15)$$

$$(D_x^2 \psi, \phi) - (\psi, D_x^2 \phi) = \int_0^1 dy [(\psi^* (D_x \phi) + (D_x \psi)^* \phi)(x, y)]_{x=0}^{x=1}. \quad (4.16)$$

Pour $\psi = \phi$, l'hypothèse 2) implique que le membre de droite de (4.15) s'annule. Par ailleurs, l'hypothèse 1) implique que le membre de droite de (4.16) s'exprime comme $\int_0^1 dy [j_x(x, y)]_{x=0}^{x=1}$ où :

$$j_x(x, y) = [\phi^* (D_x \phi) + (D_x \phi)^* \phi](x, y), \quad (4.17)$$

est le courant dans la direction x , de sorte que le membre de droite est nul également. Alors toute fonction d'onde suffisamment régulière ϕ compatible

avec les hypothèses 1) et 2) satisfait à :

$$\begin{aligned} (D_x\phi, \phi) - (\phi, D_x\phi) &= 0, & (D_y\phi, \phi) - (\phi, D_y\phi) &= 0 \\ (D_x^2\phi, \phi) - (\phi, D_x^2\phi) &= 0, & (D_y^2\phi, \phi) - (\phi, D_y^2\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Alors, pour toutes fonctions d'onde ψ et ϕ appartenant à \mathcal{D} , l'espace linéaire des états compatibles avec les hypothèses 1) et 2), il est facile de voir que les relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} (D_x\psi, \phi) - (\psi, D_x\phi) &= 0, & (D_y\psi, \phi) - (\psi, D_y\phi) &= 0 \\ (D_x^2\psi, \phi) - (\psi, D_x^2\phi) &= 0, & (D_y^2\psi, \phi) - (\psi, D_y^2\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ainsi, \mathcal{D} est l'espace linéaire des fonctions sur $[0, 1]^2$ stable par les opérateurs D_x et D_y , et sur lequel (4.19) sont satisfaites. Ces relations impliquent clairement que D_x, D_y, D_x^2 et D_y^2 sont des opérateurs auto-adjoints sur le domaine \mathcal{D} .

4.3 Opérateurs sur l'espace \mathcal{H}_0

Soient X, Y les opérateurs de position et P_x, P_y les opérateurs associés à D_x, D_y introduits au paragraphe précédent. Le spectre de X et Y est l'intervalle $[0, 1]$. P_x, P_x^2, P_y, P_y^2 sont auto-adjoints. Ces opérateurs obéissent aux relations de commutation :

$$\begin{aligned} [X, Y] &= 0 & [P_x, P_y] &= iNB \\ [P_x, X] &= -i & [P_x, Y] &= 0 \\ [P_y, X] &= 0 & [P_y, Y] &= -i \end{aligned} \quad (4.20)$$

et l'Hamiltonien H_0 s'écrit :

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}(P_x^2 + P_y^2). \quad (4.21)$$

On se propose de représenter l'action des opérateurs X, Y et P_x, P_y . Contrairement au cas uni-dimensionnel, il n'y a pas de méthode générale pour représenter P_x et P_y comme des opérateurs auto-adjoints. On utilise donc un ansatz, inspiré par la situation uni-dimensionnelle rappelée au paragraphe précédent juste avant l'introduction des opérateurs D_x et D_y , sachant aussi

que P_x et P_y doivent se comporter comme les opérateurs différentiels du premier ordre D_x et D_y .

L'ansatz pour la représentation de l'algèbre (4.20) est le suivant :

1. le domaine sur lequel P_x et P_y sont définis est l'espace linéaire des fonctions $\phi \in L^2([0, 1]^2)$, absolument continues de deux variables, dont les dérivées premières appartiennent à $L^2([0, 1]^2)$. Les conditions aux limites sont de la forme, pour toutes fonctions f et g :

$$\phi(1, y) = e^{-if(y)}\phi(0, y), \quad \phi(x, 1) = e^{-ig(x)}\phi(x, 0). \quad (4.22)$$

Ces relations peuvent être vues comme une généralisation du cas unidimensionnel (voir la définition de \mathcal{D}_θ).

2. Les opérateurs P_x et P_y sont des opérateurs différentiels du premier ordre agissant sur ces fonctions, dont les expressions sont :

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + a(y), \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} + b(x), \quad (4.23)$$

pour deux fonctions a et b à déterminer.

La relation de commutation entre P_x et P_y implique alors :

$$\frac{\partial a(y)}{\partial y} = NB + \frac{\partial b(x)}{\partial x} \quad (4.24)$$

Le membre de droite (resp. gauche) de cette dernière expression ne dépend seulement que de x (resp. y), si bien que ce doit être une constante C . Les fonctions a et b doivent donc être de la forme, pour deux constantes d'intégration réelles γ et η :

$$a(y) = Cy - \gamma, \quad b(x) = (C - NB)x - \eta. \quad (4.25)$$

De cela, on trouve que :

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + Cy - \gamma, \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} + (C - NB)x - \eta. \quad (4.26)$$

Par une transformation de jauge

$$\phi(x, y) \longrightarrow e^{-i(\gamma x + \eta y)}\phi(x, y), \quad (4.27)$$

on peut s'affranchir des constantes réelles γ et η apparaissant dans l'expression explicite de P_x et P_y . Ces constantes vont cependant réapparaître comme des constantes arbitraires dans la définition de f et g (4.22). On peut définir deux nouvelles constantes α et β telles que :

$$\begin{cases} C & = -\beta NB \\ C - NB & = \alpha NB \end{cases} \quad (4.28)$$

Elles satisfont à $\alpha + \beta = -1$. Les opérateurs P_x et P_y prennent alors la forme :

$$\begin{cases} P_x & = -i\frac{\partial}{\partial x} - \beta NB y \\ P_y & = -i\frac{\partial}{\partial y} + \alpha NB x \end{cases} \quad (4.29)$$

On observe maintenant que les opérateurs P_x et P_y ont une forme similaire à celle des dérivées covariantes d'un fibré sur un tore bi-dimensionnel $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. On note cependant que ceci n'est pas vrai pour toute valeur NB . De (4.29), on déduit les conditions aux limites possibles de la forme (4.22) :

$$\phi(1, y) = e^{i\gamma - i\alpha NB y} \phi(0, y), \quad \phi(x, 1) = e^{i\eta + i\beta NB x} \phi(x, 0). \quad (4.30)$$

Les paramètres γ, η sont arbitraires et indexent des représentations inéquivalentes de P_x et P_y pour différentes valeurs (modulo 2π). On note par $\mathcal{D}_{\gamma, \eta}$ le domaine sur lequel sont définis les opérateurs P_x et P_y qu'on a construit juste avant pour des valeurs spécifiques de (γ, η) ⁵. On peut donc choisir le carré $[0, 2\pi]^2$ comme domaine fondamental du plan (γ, η) . L'espace de Hilbert du problème est la somme directe des espaces de Hilbert associés à chaque valeur individuelle du couple (γ, η) . Cette somme directe est une intégrale hilbertienne sur $[0, 2\pi]^2$ d'espaces de Hilbert isomorphes (chaque représentation étant définie sur le même espace de Hilbert $L^2([0, 1]^2)$). Une fonction d'onde générale est alors un élément de $L^2([0, 1]^2 \times [0, 2\pi]^2)$. Soit $\tilde{\mathcal{D}}$, le sous espace vectoriel des fonctions $\psi(x, y, \gamma, \eta)$ continues en (γ, η) , et telles que pour toutes paires (γ, η) , $\psi(x, y, \gamma, \eta)$ est un élément de $\mathcal{D}_{\gamma, \eta}$. Ces fonctions satisfont aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \psi(1, y, \gamma, \eta) &= e^{i\gamma - i\alpha NB y} \psi(0, y, \gamma, \eta) \\ \psi(x, 1, \gamma, \eta) &= e^{i\eta + i\beta NB x} \psi(x, 0, \gamma, \eta) \end{aligned} \quad (4.31)$$

⁵Il est pratique de garder la même notation P_x, P_y pour les différentes représentations, si bien que la dépendance en (γ, η) ne sera pas explicitement indiquée.

Quand NB est différent de $2\pi l$ pour tout entier l , on impose de plus que ces fonctions s'annulent aux quatres points $(x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ et $(1, 1)$, ce qui est dicté par (4.31). L'espace $\tilde{\mathcal{D}}$ est choisi pour être le domaine sur lequel P_x et P_y sont définis.

On choisit une normalisation partielle pour les fonctions ψ de la forme :

$$\int_{[0,1]^2} dx dy (\psi^* \psi)(x, y, \gamma, \eta) = 1, \quad (4.32)$$

pour tout γ, η , si bien que pour normaliser ψ à l'unité, on a en fait :

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dx dy (\psi^* \psi)(x, y, \gamma, \eta) = 1. \quad (4.33)$$

Cette intégrale définit complètement le produit scalaire sur cet espace de Hilbert.

On peut considérer maintenant un domaine dense $\mathcal{D} \subset L^2([0, 1]^2 \times [0, 2\pi]^2)$ pour les opérateurs P_x^2 et P_y^2 . Il s'agit de la restriction du domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ définie par la condition que ψ appartient à \mathcal{D} si $\psi, P_x \psi$ et $P_y \psi$ sont dans $\tilde{\mathcal{D}}$. En particulier, les fonctions dans ce domaine satisfont les relations (4.31) et l'Hamiltonien (4.21) est bien défini sur \mathcal{D} .

Un calcul direct montre que P_x et P_y (respectivement P_x^2 et P_y^2) sont des opérateurs auto-adjoints, sur le domaine dense $\tilde{\mathcal{D}}$ (respectivement \mathcal{D}), si bien que toutes les fonctions d'onde dans \mathcal{D} satisfont à nos conditions aux limites physiques 4.19. Dans la suite de ce chapitre, le domaine dense utilisé pour cette étude sera identifié avec \mathcal{D} .

4.4 Discussion du cadre mathématique

Les conditions aux limites (4.31) sont similaires aux relations que doivent satisfaire les sections d'un fibré. On peut alors être tenté de considérer l'espace $(x, y) \in [0, 1]^2$ comme un tore à deux dimensions, et les fonctions $\psi \in \mathcal{D}$ comme des sections d'un fibré sur ce tore. Mais cela n'est vrai que pour

$NB = 2\pi l$, l entier ⁶. A noter que le tore sous-jacent n'a pas d'existence physique. A partir de maintenant, on suppose que $NB = 2\pi l$.

Sous la transformation de jauge :

$$\tilde{\psi}(x, y, \gamma, \eta) = e^{-i(\gamma x + \eta y)} \psi(x, y, \gamma, \eta), \quad (4.34)$$

les opérateurs P_x et P_y deviennent :

$$\tilde{P}_x = P_x + \gamma, \quad \tilde{P}_y = P_y + \eta, \quad (4.35)$$

et les conditions aux limites pour $\tilde{\psi}$ se modifient comme :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(1, y, \gamma, \eta) = e^{-i\alpha NB y} \tilde{\psi}(0, y, \gamma, \eta) \\ \tilde{\psi}(x, 1, \gamma, \eta) = e^{i\beta NB y} \tilde{\psi}(x, 0, \gamma, \eta) \end{cases} \quad (4.36)$$

de sorte que la dépendance en (γ, η) est transférée dans les opérateurs \tilde{P}_x et \tilde{P}_y . Ces deux représentations décrivent la même physique. Il sera commode d'utiliser la seconde représentation dans le calcul de la formule de Kubo.

Si on applique un petit champ électrique dans la direction x par exemple, celui-ci intervient seulement dans H_0 , car chaque électron subit la même influence. En fait, dans l'Hamiltonien total, on doit ajouter le terme $\sum_{i=1}^N E x_i$, qui dépend seulement de x , et donc doit être une partie de H_0 . Une façon d'implémenter un tel champ électrique est de créer un flux magnétique croissant adiabatiquement dans une des boucles que forment les fils dans la figure 4.1. Ce flux $\phi(t)$ augmentant va alors venir créer une contribution additionnelle dans un des opérateurs P_x et P_y . Le courant induit par ce champ électrique, peut alors être calculé par la formule de réponse linéaire de Kubo [27, 28] pour l'Hamiltonien total H . En particulier, la conductivité de Hall peut être obtenue de cette manière. On note que, du fait que le champ électrique apparaît seulement dans H_0 , la formule de Kubo ne fera pas intervenir H_I .

On sait que cette formule de Kubo peut être reliée à la première classe de Chern d'un fibré en droites [29, 8, 7, 9, 26, 30]. Pour le voir, on exprime les opérateurs de vitesse en fonction de dérivées de l'Hamiltonien par rapport

⁶On peut aisément le vérifier en considérant les variations des fonctions le long d'un chemin sur le bord du carré $[0, 1]^2$.

à certaines variables. Ces variables définissent l'espace de base du fibré en droites mentionné ci-dessus. On se reportera à la littérature pour les expressions exactes, et à l'annexe pour la formule explicite à calculer ici. Dans le cas présent, les variables naturelles sont la paire (γ, η) quand on utilise la représentation (4.34). Comme on l'a vu auparavant, la contrepartie de (γ, η) apparaît comme des termes additionnels dans les opérateurs P_x, P_y . La dérivée de l'Hamiltonien correspondant \tilde{H}_0 par rapport à γ et η donne donc la vitesse dans les directions x et y . On suppose dans ce qui suit que la formule de Kubo peut être appliquée dans le cas présent. Ceci suppose donc que certaines propriétés (gap de Fermi dans le spectre) et certaines conditions supplémentaires sur la dégénérescence du fondamental sont satisfaites pour l'Hamiltonien (4.4).

Le présent travail se distingue des approches précédemment publiées par plusieurs spécificités. Dans les travaux de Thouless et al. [6] et Kohmoto [31], les deux paramètres supplémentaires reliés à la structure cristallographique sous-jacente de l'échantillon, sont des moments généralisés du crystal paramétrisant les fonctions d'onde de Bloch. Ils sont restreints dans une zone de Brillouin magnétique formant un rectangle de taille finie. La formule de Kubo est alors reliée à la première classe de Chern du fibré en droites sur cette zone de Brillouin. Dans ces travaux, le tore sous-jacent est relié à une certaine périodicité microscopique. Ce type d'approche a l'inconvénient que l'on doit faire l'hypothèse que l'échantillon est de taille infinie.

Dans les travaux de Niu et Thouless [26], et Avron et Seiler [9], la géométrie de la figure 4.1 est utilisée pour introduire les deux paramètres supplémentaires. Ils sont reliés aux deux flux à travers les boucles des fils. L'un d'entre eux est utilisé pour imposer un champ électrique dans l'échantillon, et le second est utilisé pour mesurer la réponse du système. Par une transformation de jauge, on voit que ces flux ont des effets périodiques sur le système, et sont donc restreints au tore bi-dimensionnel $[0, 2\pi]^2$. Cette approche ne suppose aucune propriété spécifique microscopique telle une périodicité cristallographique. On note que l'usage d'un certain flux périodique d'un champ magnétique (qui n'est pas relié au champ magnétique appliqué à l'échantillon) se ramène à l'argument de Laughlin [5], dans lequel une géométrie cylindrique a été considérée.

Le présent travail possède certaines similitudes avec celui proposé par Niu

et al. [8]. Dans [8], les paramètres supplémentaires sont certaines phases apparaissant dans les conditions aux limites des fonctions d'onde sur un échantillon rectangulaire. Bien que [8] mentionne l'hermiticité de l'Hamiltonien comme nécessaire pour le choix des conditions aux limites, la relation entre ces dernières et la physique n'est pas analysée. Le cadre utilisé ici fait intervenir la représentation d'une algèbre abstraite par des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert. Certaines autres approches ont été faites dans cette direction par le passé. Une d'elles a été proposée par Grümm et al. [32] et Grümm [33]. Ces auteurs considèrent une algèbre abstraite générée par des opérateurs de position et de moment similaires à ceux que l'on a introduit et les représentent sur un espace de Hilbert pour différentes géométries sous-jacentes. Cependant, ces géométries ne sont pas assez réalistes pour produire un modèle pertinent pour l'EHQ entier et/ou fractionnaire.

4.5 Calcul de la conductivité

Quand $NB = 2\pi l$, on peut tirer profit des propriétés d'un fibré en droites sur un tore bi-dimensionnel de périodicité un dans les variables (x, y) . Cela permet d'écrire $\psi(x, y, \gamma, \eta)$ pour des valeurs de x et y plus grandes que 1, c'est à dire en dehors de l'échantillon physique ⁷. En particulier, on a :

$$\begin{aligned}\psi(x + 1, y, \gamma, \eta) &= e^{i\gamma - i\alpha NB y} \psi(x, y, \gamma, \eta), \\ \psi(x, y + 1, \gamma, \eta) &= e^{i\eta + i\beta NB x} \psi(x, y, \gamma, \eta).\end{aligned}\tag{4.37}$$

On considère les variables γ et η comme appartenant à \mathbb{R} ⁸. Pour calculer la formule de Kubo, il faut calculer la première classe de Chern du fibré en droites sur $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$. Pour caractériser ce fibré, on recherche les symétries possibles du système. Une telle symétrie doit commuter avec H_0 , pour agir sur les variables collectives et laisser le domaine dense \mathcal{D} invariant. On trouve qu'il existe deux opérateurs unitaires qui commutent et qui ont

⁷On procède d'une façon analogue dans l'espace des vecteurs d'onde lorsqu'on considère des réseaux cristallins et le formalisme des fonctions d'onde de Bloch. On se ramène à une cellule, ou zone de Brillouin.

⁸On a vu que deux paires (γ, η) égales à 2π près correspondent à 2 représentations équivalentes et les deux espaces de fonctions correspondants sont unitairement équivalents. Ceci permet de considérer les fonctions $\psi(x, y, \gamma, \eta)$ comme si elles étaient définies pour $(\gamma, \eta) \in \mathbb{R}^2$.

ces propriétés. En fait, si on cherche un opérateur unitaire de la forme

$$\psi(x, y, \gamma, \eta) \mapsto e^{i(ax+by)}\psi(x+c, y+d, \gamma+e, \eta+f) \quad (4.38)$$

qui commute avec H_0 et laisse \mathcal{D} invariant, alors on obtient une famille d'opérateurs unitaires à deux paramètres $\mathcal{U}_{\theta, \sigma}$ définis par :

$$(\mathcal{U}_{\theta, \sigma}\psi)(x, y, \gamma, \eta) = e^{i(\beta NB\sigma x + \alpha NB\theta y)}\psi(x+\theta, y-\sigma, \gamma+NB\sigma, \eta+NB\theta). \quad (4.39)$$

Un calcul direct montre que ces opérateurs ne commutent pas seulement avec H_0 , mais aussi avec P_x et P_y . Alors, on a :

$$\mathcal{U}_{\theta, \sigma}\mathcal{D} = \mathcal{D}, \quad (4.40)$$

et :

$$[P_x, \mathcal{U}_{\theta, \sigma}] = [P_y, \mathcal{U}_{\theta, \sigma}] = 0. \quad (4.41)$$

La conductivité de Hall peut être calculée en utilisant les fonctions d'onde transformées (sous une transformation de jauge) $\tilde{\psi}$ définies par (4.34) dans la formule de Kubo (voir annexe). Alors la famille à deux paramètres d'opérateurs unitaires (4.39) prend la forme suivante :

$$(\tilde{\mathcal{U}}_{\theta, \sigma}\tilde{\psi})(x, y, \gamma, \eta) = e^{-i(\alpha NB\sigma x + \beta NB\theta y - \gamma\theta + \eta\sigma)}\tilde{\psi}(x+\theta, y-\sigma, \gamma+NB\sigma, \eta+NB\theta). \quad (4.42)$$

On prend les deux valeurs spéciales correspondant à une translation de 2π dans les variables γ et η :

$$\tilde{U}^{\frac{1}{l}} \equiv \tilde{U}_{\frac{1}{l}, 0}, \quad \tilde{V}^{\frac{1}{l}} \equiv \tilde{U}_{0, \frac{1}{l}}. \quad (4.43)$$

Ces opérateurs satisfont alors les relations de commutations suivantes :

$$\tilde{V}^{\frac{1}{l}}\tilde{U}^{\frac{1}{l}} = e^{i(\frac{2\pi}{l})}\tilde{U}^{\frac{1}{l}}\tilde{V}^{\frac{1}{l}}, \quad (4.44)$$

si bien que $\tilde{U} = (\tilde{U}^{\frac{1}{l}})^l$ et $\tilde{V} = (\tilde{V}^{\frac{1}{l}})^l$ commutent avec $\tilde{U}^{\frac{1}{l}}$ et $\tilde{V}^{\frac{1}{l}}$.

De tels opérateurs unitaires satisfaisant (4.44) peuvent être représentés comme

des matrices $l \times l$ de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{\frac{1}{l}} &= e^{i(\frac{u}{l})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q^{l-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{V}^{\frac{1}{l}} &= e^{i(\frac{v}{l})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

où $q = e^{i(\frac{2\pi}{l})}$, et u et v sont deux paramètres réels. Les opérateurs \tilde{U} et \tilde{V} représentent donc la multiplication par e^{iu} et e^{iv} respectivement. Donc, l'espace de Hilbert pertinent peut être décomposé en sommes directes de telles représentations (secteurs), indexées par (u, v) à des paramètres supplémentaires près. On peut donc introduire des l -uplets de fonctions orthogonales $(\tilde{\psi}_i)_{i=1, \dots, l}$ satisfaisant aux relations suivantes :

$$\tilde{\psi}_i(x, y, \gamma, \eta) = q^{l-1} e^{-i(\frac{u}{l} + 2\pi\beta y - \frac{\gamma}{l})} \tilde{\psi}_i(x + \frac{1}{l}, y, \gamma, \eta + 2\pi), \quad (4.46)$$

$$\tilde{\psi}_{i+1}(x, y, \gamma, \eta) = e^{-i(\frac{v}{l} + 2\pi\alpha x - \frac{\eta}{l})} \tilde{\psi}_i(x, y - \frac{1}{l}, \gamma + 2\pi, \eta). \quad (4.47)$$

La relation (4.46) dit que la fonction $\tilde{\psi}_i$ restreinte à $\eta \in [2n\pi, 2(n+1)\pi]$, pour $1 \leq n \leq l-1$, est complètement déterminée par sa restriction sur $\eta \in [0, 2\pi]$. De façon analogue, la relation (4.47) dit que la fonction $\tilde{\psi}_{i+1}$ restreinte à $\gamma \in [2m\pi, 2(m+1)\pi]$ peut être obtenue par la restriction de $\tilde{\psi}_i$ pour $\gamma \in [2(m-1)\pi, 2m\pi]$ pour $1 \leq m \leq l-1$. Globalement, les fonctions $\tilde{\psi}_i$ sont complètement caractérisées soit par leurs l restrictions sur la cellule élémentaire $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$ ou par seulement une d'entre elles restreinte à $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi l] \times [0, 2\pi]$. En appliquant les opérateurs \tilde{U} et \tilde{V} , et en utilisant les conditions aux limites 4.37, on peut montrer que chaque fonction $\tilde{\psi}_i$ satisfait aux relations périodiques suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_i(x, y, \gamma + 2\pi l, \eta) &= e^{i(v-2\pi l x)} e^{i\eta} \tilde{\psi}_i(x, y, \gamma, \eta) \\ \tilde{\psi}_i(x, y, \gamma, \eta + 2\pi l) &= e^{i(u-2\pi l y)} e^{-i\gamma} \tilde{\psi}_i(x, y, \gamma, \eta) \end{cases} \quad (4.48)$$

Si on considère x, y, γ, η comme des paramètres, alors

$$(\gamma, \eta) \longrightarrow \tilde{\psi}_i(x, y, \gamma, \eta) \quad (4.49)$$

est un fibré en droites sur (γ, η) avec une périodicité $2\pi l$, qu'on va dénoter $L(x, y, u, v)$. On voit alors que tous ces fibrés sont isomorphes à un seul d'entre eux, par exemple $L_0 = L(0, 0, 0, 0)$. En particulier, ils ont la même classe de Chern.

Pour tout $i = 1, \dots, l$, on introduit la quantité :

$$\Omega_i(\gamma, \eta) = \int_{[0,1]^2} dx dy \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_i^*}{\partial \gamma} \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\psi}_i^*}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \gamma} \right). \quad (4.50)$$

En utilisant (4.47) et la normalisation partielle (4.32), on trouve que :

$$\Omega_{i+1}(\gamma, \eta) = \Omega_i(\gamma + 2\pi, \eta). \quad (4.51)$$

Alors, on obtient :

$$\int_{[2m\pi, 2(m+1)\pi] \times [0, 2\pi]} d\gamma d\eta \Omega_{i+1}(\gamma, \eta) = \int_{[2(m+1)\pi, 2(m+2)\pi] \times [0, 2\pi]} d\gamma d\eta \Omega_i(\gamma, \eta). \quad (4.52)$$

De manière analogue, en utilisant (4.46) et (4.32), on montre que

$$\Omega_i(\gamma, \eta) = \Omega_i(\gamma, \eta + 2\pi), \quad (4.53)$$

et donc :

$$\int_{[0, 2\pi] \times [2m\pi, 2(m+1)\pi]} d\gamma d\eta \Omega_i(\gamma, \eta) = \int_{[0, 2\pi] \times [2(m+1)\pi, 2(m+2)\pi]} d\gamma d\eta \Omega_i(\gamma, \eta). \quad (4.54)$$

En supposant la validité de la formule (4.70), pour calculer la conductivité de Hall, on doit évaluer des expressions de la forme :

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \int_{[0, 2\pi]^2} d\gamma d\eta \Omega_i(\gamma, \eta). \quad (4.55)$$

En utilisant (4.52) et (4.54), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \int_{[0, 2\pi]^2} d\gamma d\eta \Omega_i(\gamma, \eta) &= \frac{1}{l} \int_{[0, 2\pi l] \times [0, 2\pi]} d\gamma d\eta \Omega_1(\gamma, \eta) \\ &= \frac{1}{l^2} \sum_{n=0}^{l-1} \int_{[0, 2\pi l] \times [2n\pi, 2(n+1)\pi]} d\gamma d\eta \Omega_1(\gamma, \eta) = \frac{1}{l^2} \int_{[0, 2\pi l]^2} d\gamma d\eta \Omega_1(\gamma, \eta). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Cette dernière intégrale peut être calculée géométriquement en utilisant la première classe de Chern du fibré en droites L_0 et les résultats de l'annexe, donnant $\frac{4\pi i}{l}$. Si il y a seulement un secteur pour les représentations de $\tilde{U}^{\frac{1}{l}}$ et $\tilde{V}^{\frac{1}{l}}$, la conductivité de Hall serait donc :

$$\sigma_{xy} = \frac{N^2}{i(2\pi)^2} \frac{4\pi i}{l} = 2 \frac{N}{B}, \quad (4.57)$$

où on a utilisé $2\pi l = NB$. Quand il y a plusieurs secteurs dans la représentation de $\tilde{U}^{\frac{1}{l}}$ et $\tilde{V}^{\frac{1}{l}}$, en supposant encore sa validité, la conductivité de Hall se décompose en une moyenne sur toute contribution de chaque secteur, avec un poids égal (parce que les paramètres u et v peuvent être continus, cette moyenne prend bien évidemment la forme d'une intégrale). Parce que ces contributions sont les mêmes, on obtient encore (4.57).

Dans les unités utilisées ici, le flux élémentaire ϕ_0 est 2π et $\frac{e^2}{h}$ est $\frac{1}{2\pi}$, si bien que le nombre de flux magnétiques à travers l'échantillon est :

$$N_\phi = \frac{B}{2\pi}. \quad (4.58)$$

Donc, la conductivité σ_{xy} a finalement l'expression :

$$\sigma_{xy} = 2 \frac{e^2}{h} \frac{N}{N_\phi}, \quad (4.59)$$

qui peut être entière ou fractionnaire. Dans ce calcul, on a utilisé seulement la dépendance des fonctions d'onde dans les variables globales x et y . Comme on l'a fait remarquer précédemment dans le chapitre (et aussi dans l'annexe), la structure de la formule de Kubo permet d'éviter toutes références explicites à la partie \mathcal{H}_I de l'espace de Hilbert, et seulement des propriétés générales sur la partie des fonctions d'onde dans cet espace de Hilbert sont utilisées, par exemple leurs orthonormalisations.

Certains points méritent d'être soulignés ici. Le premier fibré en droites qui est évoqué a $(x, y) \in [0, 1]^2$ pour espace de base. Sa première classe de Chern est :

$$\frac{BN}{2\pi} = l. \quad (4.60)$$

On note que le champ magnétique, pris seul, n'a pas besoin d'être de la forme $2\pi l$, ce qui est différent d'autres travaux considéré dans la littérature. Cela

reflète le fait qu'on a utilisé les variables globales. Ce fibré en droites n'a aucune signification physique, mais est seulement un outil de calcul pour évaluer la conductivité. Le second fibré en droites a $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi l]^2$ pour espace de base. Sa première classe de Chern est $2l$. Son apparition et sa structure sont très fortement reliées au premier fibré en droites à travers la symétrie unitaire présente dans le modèle. En fait, cette symétrie relie certaines translations dans le premier espace de base avec d'autres dans le second espace de base. Comme on l'a vu dans le calcul, la dégénérescence associée à chaque secteur de la représentation des symétries unitaires $\tilde{U}^{\frac{1}{l}}$ et $\tilde{V}^{\frac{1}{l}}$ est reliée au fibré en droites sur $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi l]^2$ quand on assemble ces fonctions en une section globale de ce fibré. Des structures géométriques similaires ont été considérées précédemment dans la littérature [20].

L'analyse qui vient d'être faite n'est pas valide pour $NB \neq 2\pi l$. Dans ce cas, le fibré en droites n'existe pas, et la famille de symétries unitaires ne peut pas être implémentée. Mais un travail en cours généralise ce résultat (voir conclusion).

4.6 Conclusions

On a présenté un formalisme mathématique permettant de calculer la conductivité de Hall d'un système physique très proche de celui où apparaît l'EHQ. Une de ses caractéristiques essentielles est qu'il permet de prendre en compte toutes les conditions aux limites possibles compatibles avec la physique du système (taille finie de l'échantillon conservation du courant, invariance de jauge). L'applicabilité de la formule de Kubo est garantie moyennant les hypothèses habituelles sur la non-dégénérescence du fondamental et l'existence d'un gap dans le spectre. Le calcul de la formule de Kubo peut être effectué "in extenso" si $NB = 2\pi l$. Dans le formalisme présent, la réductibilité de la représentation de l'algèbre d'opérateurs associés au système physique traduit la prise en compte de toutes les conditions aux limites admissibles physiquement et constitue un ingrédient clé dans le calcul de la conductivité.

On trouve que la conductivité peut être entière ou fractionnaire (dans les unités $e^2 = \hbar = 1$) et présente la dépendance attendue dans le facteur de remplissage $\nu = \frac{N}{N_\phi}$, à un facteur multiplicatif 2 près. L'origine de ce facteur

2 n'est pas élucidée clairement pour le moment.

On note que dans le présent travail et en fait dans tous modèles basés sur des considérations topologiques, aucune différence entre les dénominateurs pairs et impairs du facteur de remplissage n'apparaît. Ce travail n'explique pas la stabilité des plateaux. Pour obtenir des informations dans cette direction, on pourrait calculer la conductivité de Hall pour B telle que $NB \neq 2\pi l$, mais pour NB près de $2\pi l$. Dans ce cas, comme on l'a déjà noté, le calcul présenté n'est plus valide, parce qu'on a plus un fibré en droites dans l'espace (x, y) .

4.7 Annexe

4.7.1 Expression de la formule de Kubo

Les notations utilisées sont celles des parties précédentes. La formule de Kubo donne la conductivité de Hall en terme de :

$$\sigma_{xy} = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}, \quad (4.61)$$

où l'indice 0 représente l'état fondamental et n les états excités du Hamiltonien pour les N électrons en l'absence de champ électrique, $(v_x)_{0n}$ est définie avec l'opérateur vitesse totale

$$v_x = \frac{1}{m} P_x \quad (4.62)$$

comme étant la valeur moyenne

$$(v_x)_{0n} = \langle 0 | v_x | n \rangle, \quad (4.63)$$

et on a pris $e = 1$ et $\hbar = 1$. La procédure habituelle pour calculer la valeur moyenne de la vitesse est de dériver l'Hamiltonien par rapport aux paramètres qui apparaissent comme des termes additionnels dans les opérateurs de moment, et de prendre la valeur moyenne de ces dérivées [8, 31, 9, 26].

Dans le cas présent, on peut remarquer que ce calcul ne concerne seulement que les variables globales du Hamiltonien. Ceci peut être aisément fait si on effectue une transformation de jauge (4.34) et si on utilise les paramètres γ, η pour dériver le nouvel Hamiltonien H_0 obtenu par cette transformation de jauge. On suppose que la partie restante de la fonction d'onde qui dépend seulement des variables internes est normalisée à un 1. On veut ici aussi insister sur le fait qu'il y a un facteur supplémentaire N^2 qui vient de la définition des variables globales. En fait, on a :

$$v_x = N \frac{\partial H_0}{\partial \gamma}. \quad (4.64)$$

Tous calculs faits, en suivant [8, 31, 26], on trouve :

$$\sigma_{xy} = \frac{N^2}{i(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dx dy \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \gamma} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma} \right). \quad (4.65)$$

L'intégrale sur $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$ apparaissant dans cette formule est une partie du produit scalaire dans H_0 . Le facteur supplémentaire $\frac{1}{(2\pi)^2}$ vient de la normalisation de ce produit scalaire. En fait, si on utilise la normalisation partielle (4.32) (voir la suite de cet annexe pour la justification), qui peut être exprimée sur $\tilde{\psi}$ comme :

$$\int_{[0,1]^2} dx dy (\tilde{\psi}^* \tilde{\psi})(x, y, \gamma, \eta) = 1, \quad (4.66)$$

pour tout (γ, η) , alors le facteur $\frac{1}{(2\pi)^2}$ vient du produit scalaire :

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dx dy (\tilde{\psi}^* \tilde{\psi})(x, y, \gamma, \eta) = 1. \quad (4.67)$$

Une autre façon d'interpréter cette intégration est de la considérer, comme [8], comme une moyenne sur toutes les valeurs possibles pour $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$. Physiquement, ceci veut dire qu'on est en train de tenir compte de toutes les représentations non-équivalentes. L'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dx dy \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \gamma} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma} \right) \quad (4.68)$$

est vraiment très semblable à la première classe de Chern d'un fibré en droites sur un tore bi-dimensionnel $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, exprimé ici comme l'intégrale d'un rotationnel d'un "champ de jauge"

$$A = \int_{[0,1]^2} dx dy \left(\tilde{\psi}^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma} d\gamma + \tilde{\psi}^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} d\eta \right). \quad (4.69)$$

En réalité, on n'est pas sûr du tout d'avoir ici un tel fibré en droites avec le tore $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$ comme variété de base. Cependant, comme il est expliqué dans le chapitre quatre, dans certains cas, le calcul de cette intégrale peut être effectué en utilisant une identification géométrique de ce genre. Une telle interprétation de la formule de Kubo a été explorée premièrement dans [6] dans le contexte de la théorie TKNdN [29].

Dans le cas où il existe une dégénérescence pour les fonctions propres du Hamiltonien, l'équation (4.64) doit être modifiée. Si il n'y a pas de couplage

entre les différents états dans le même sous-espace, alors la conductivité de Hall est donnée par (voir [8]) :

$$\sigma_{xy} = \frac{N^2}{i(2\pi)^2} \frac{1}{D} \sum_{k=1}^D \int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dx dy \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_k^*}{\partial \gamma} \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\psi}_k^*}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial \gamma} \right), \quad (4.70)$$

où D est le degré de dégénérescence et les fonctions $\{\tilde{\psi}_k\}$ constituent une base orthogonale du sous-espace propre.

4.7.2 Calcul de la première classe de Chern

Dans ce paragraphe, on donne certains détails sur le calcul de la première classe de Chern d'un fibré en droites sur un tore bi-dimensionnel $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi l]^2$ pour tout entier l .

Comme point de départ, on prend une section $f(\gamma, \eta)$ du fibré en droites, vérifiant les conditions suivantes sur le carré $[0, 2\pi]^2$:

$$\begin{cases} f(\gamma + 2\pi l, \eta) &= e^{i\eta} f(\gamma, \eta) \\ f(\gamma, \eta + 2\pi l) &= e^{-i\gamma} f(\gamma, \eta) \end{cases} \quad (4.71)$$

On suppose que pour tout (γ, η) , on a :

$$f(\gamma, \eta)^* f(\gamma, \eta) = 1, \quad (4.72)$$

ce qui correspond à (4.66) dans le cadre mathématique utilisé. La connection (potentiel de jauge) que l'on utilise est de la forme (voir (4.69)) :

$$\begin{aligned} A(\gamma, \eta) &= f^*(\gamma, \eta) \frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma, \eta) d\gamma + f^*(\gamma, \eta) \frac{\partial f}{\partial \eta}(\gamma, \eta) d\eta \\ &= A_\gamma(\gamma, \eta) d\gamma + A_\eta(\gamma, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (4.73)$$

dont la courbure est :

$$dA = \left(\frac{\partial f^*}{\partial \gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) d\gamma \wedge d\eta. \quad (4.74)$$

Les conditions aux limites sur f signifient que A admet différentes expressions si $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, $\gamma \geq 2\pi l$ ou $\eta \geq 2\pi l$. En particulier, on a :

$$\begin{aligned} A(\gamma, \eta + 2\pi l) &= A(\gamma, \eta) - id\gamma \\ A(\gamma + 2\pi l, \eta) &= A(\gamma, \eta) + id\eta. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ce sont les transformations de jauge ordinaire d'une connection quand on la regarde sur deux ensembles ouverts différents d'une variété rendant trivial le fibré en droites.

La première classe de Chern est donnée par :

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0, 2\pi l]^2} dA. \quad (4.76)$$

Il est bien connu que c'est un entier. En utilisant le théorème de Stokes, on a :

$$n = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi l} (A_\gamma(\gamma, 0) - A_\gamma(\gamma, 2\pi l)) d\gamma + \int_0^{2\pi l} (A_\eta(2\pi l, \eta) - A_\eta(0, \eta)) d\eta \right). \quad (4.77)$$

A partir de la transformation de jauge sous-tendue par A aux bords, on obtient le résultat final :

$$n = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi l} id\gamma + \int_0^{2\pi l} id\eta \right) = 2l. \quad (4.78)$$

Chapitre 5

Symétries modulaires, théories effectives et approches phénoménologiques de l'effet Hall quantique

5.1 Introduction

Les symétries modulaires, déjà utilisées dans les approches non perturbatives de théories de jauge et des théories des cordes, ont été introduites comme outil descriptif et prédictif dans l'étude de l'effet Hall quantique. Les symétries modulaires constituent des symétries de dualité : symétries discrètes, agissant sur des paramètres physiques et généralisant la dualité \mathbb{Z}_2 de type Kramers-Wannier, initialement découverte dans le modèle d'Ising en deux dimensions. De façon générale, une dualité est une symétrie discrète globale du modèle. En fait, une symétrie de dualité apparaît dans un modèle quand il existe un ensemble de transformations dans l'espace des paramètres (constantes de couplage) transformant l'action originale en une action ayant la même forme, avec des constantes de couplage transformées sous ces transformations de dualité. La fonction de partition pour le modèle de départ et sa contrepartie duale diffèrent formellement seulement par un préfacteur qui n'influence pas les propriétés critiques du modèle et disparaît dans le calcul des fonctions de corrélation. Ces symétries sont employées pour obtenir des informations non-perturbatives et globales sur le contenu

du modèle, sur le diagramme des phases, et sur d'éventuelles transitions. Les transformations de dualité permettent de relier selon les cas deux (Ising, Electrique-Magnétique) ou plusieurs secteurs (phases) ou régimes du modèle. On peut également obtenir des informations sur les variétés critiques et sur les transitions permises. En fait, on peut souvent déterminer la topologie du diagramme des phases et la disposition relative des différentes phases.

5.2 Groupes modulaires. Propriétés utiles

Dans la suite, on fera référence au groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ et à deux de ses sous-groupes, appelés $\Gamma_0(2)$ et $\Gamma(2)$ [34]. Leurs caractéristiques essentielles sont rappelées ci-après. Soit $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \mathbb{Q}$, où \mathcal{P} est le demi-plan complexe supérieur ouvert et \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels. z est une coordonnée sur $\overline{\mathcal{P}}$ (qui sera identifiée par la suite à la conductivité complexe $z \rightarrow \sigma = \sigma_{xy} + i\sigma_{xx}$). Le groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ est l'ensemble des transformations G agissant sur $\overline{\mathcal{P}}$ et définies par :

$$G(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1, \quad (5.1)$$

où la seconde relation est la condition d'unimodularité. Ce groupe admet les générateurs

$$S(z) = -\frac{1}{z}, \quad T(z) = z + 1. \quad (5.2)$$

Les sous-groupes $\Gamma_0(2)$ et $\Gamma(2)$ de $PSL(2, \mathbb{Z})$ sont définis en imposant dans (5.1) des parités particulières sur a, b, c, d . Celles-ci sont résumées dans le tableau ci-dessous pour chacun des sous-groupes ainsi que l'expression des générateurs correspondants. A noter que l'on a $\Gamma(2) \subset \Gamma_0(2) \subset PSL(2, \mathbb{Z})$.

	Restrictions sur $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$	Générateurs
$\Gamma_0(2)$	c pair	$T(z) = z + 1$ $\Sigma(z) = ST^{-2}S(z) = \frac{z}{2z+1}$
$\Gamma(2)$	(a, d) impairs (b, c) pairs	$T^2(z) = z + 2$ $\Sigma(z) = ST^{-2}S(z) = \frac{z}{2z+1}$

Les motivations principales qui ont conduit à examiner la pertinence des symétries modulaire dans la description de l'EHQ sont :

- l'obtention d'une symétrie sous-tendant la classification des états de Hall observés, d'un point de vue de "spectroscopie des plateaux de Hall",
- une explication possible de la superuniversalité apparemment observée dans les transitions entre états de Hall.
- la mise en évidence d'une symétrie permettant de comprendre la structure globale du diagramme des phases de l'EHQ.

Dans ce qui suit, la coordonnée complexe z sera identifiée à la conductivité complexe $\sigma = \sigma_{xy} + i\sigma_{xx}$. Un plateau correspondant à un facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{q}$ correspond alors à $\sigma = \sigma_{xy} = \frac{p}{q}$. Les actions successives de toutes les transformations de $\Gamma_0(2)$ ou $\Gamma(2)$ sur un point $\sigma = \frac{p}{q}$ donné engendrent alors une succession de points sur l'axe réel du plan des conductivités. L'ensemble de ces points doit reproduire les hiérarchies observées. C'est l'idée de base sous-tendant les constructions de hiérarchies basées sur une symétrie modulaire. La stratégie qui a été constamment suivie dans les approches basées sur les symétries modulaires peut être résumée par les étapes suivantes :

- choix de symétries candidates dont l'action sur le facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{q}$ reproduit tout ou partie des hiérarchies d'états de Hall observés,
- extension de l'action à la conductivité complexe $\sigma = \sigma_{xy} + i\sigma_{xx}$ et comparaison de prédictions obtenues à partir d'autres hypothèses plausibles phénoménologiquement aux observations pour opérer une sélection parmi les différents candidats.

5.3 Synthèse des travaux antérieurs

Il faut souligner que dans ces approches, le choix de la symétrie est guidé par des considérations phénoménologiques, sans faire référence à un modèle particulier susceptible de décrire la physique de l'EHQ. Initialement, Lütken

et Ross [35] ont remarqué que le groupe modulaire complet avait une action naturelle sur les conductivités σ_{xy} et σ_{xx} . Cependant, ce groupe est trop grand, schématiquement parce que son action sur des états de Hall observés engendre des états inobservés expérimentalement. On a donc été amené à rechercher des sous-groupes du groupe modulaire. Les candidats potentiels ayant été identifiés sont $\Gamma_V(2)$ [36], $\Gamma_0(2)$ [37, 38] et $\Gamma(2)$ [39, 40, 41, 42], parmi lesquels seuls les deux derniers sont apparus comme susceptibles d'intervenir dans la description de l'effet Hall.

Ces deux sous-groupes ont conduit à des résultats intéressants phénoménologiquement. Sur le plan de la "spectroscopie des états de Hall", ces 2 sous-groupes permettent de reproduire les hiérarchies d'états observés [43]. Dans ces constructions, l'action des symétries modulaires est restreinte à la partie réelle de la conductivité complexe, identifiée au facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{q}$. Comparé à $\Gamma_0(2)$, $\Gamma(2)$ permet en plus de reproduire l'architecture des états observés et en particulier la façon dont les états à dénominateur impair se répartissent de part et d'autre des états à dénominateur pair [40, 41, 42]. La raison pour cela est que l'action de $\Gamma(2)$ distingue la nature paire ou impaire des numérateurs dans le facteur de remplissage, ce que ne fait pas $\Gamma_0(2)$.

Le fait qu'une symétrie discrète connecte des états de Hall stables a été utilisé par différents auteurs pour prédire la forme des régimes de passage entre les états, moyennant l'introduction d'hypothèses supplémentaires. En fait, on peut étendre les analyses antérieures basées sur des transformations d'échelle pour prendre en compte les symétries modulaires. Ces analyses antérieures sont dues à Khmel'niskii [44] et Pruisken [45]. Les étapes essentielles conduisant à une prédiction sur la forme des régimes de passage sont les suivantes :

- On suppose l'existence d'un paramètre d'échelle t ¹ avec une dépendance pour les conductivités données par :

$$\frac{d\sigma_{xy}}{dt} = \beta_{xy}(\sigma_{xy}, \sigma_{xx}), \quad \frac{d\sigma_{xx}}{dt} = \beta_{xx}(\sigma_{xy}, \sigma_{xx}), \quad (5.3)$$

où β_{xy} β_{xx} sont des fonctions d'échelles. Celle-ci sont appelées "fonctions β " dans [42] par analogie avec la fonction de Callan-Symanzik des

¹Les expressions possibles de ce paramètre en fonction du champ magnétique externe, du facteur de remplissage, de la température...ont été discutées dans [42].

théories de jauge. En coordonnées complexes, (5.3) devient

$$\frac{d\sigma}{dt} = \beta(\sigma, \bar{\sigma}), \quad \beta = \beta_{xy} + i\beta_{xx}, \quad (5.4)$$

et $\sigma = \sigma_{xy} + i\sigma_{xx}$ est la conductivité complexe.

- On suppose que le flot du groupe de renormalisation dans le plan de σ commute avec l'action d'une symétrie modulaire, soit $\Gamma_0(2)$, soit $\Gamma(2)$, Alors, ceci impose que :

$$\beta(G(\sigma), G(\bar{\sigma})) = (c\sigma + d)^{-2}\beta(\sigma, \bar{\sigma}). \quad (5.5)$$

- Alors (5.5) combinée à l'hypothèse supplémentaire que β est une fonction holomorphe en σ implique que β est une fonction modulaire de poids -2 sous $\Gamma_0(2)$ ou $\Gamma(2)$. Son expression exacte est donc connue [34] en terme de combinaisons de fonctions θ de Jacobi.

Connaissant β exactement, on intègre alors les équations du flot, ce qui donne la forme des régimes de passage. On obtient également le flot dans le plan $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ et des renseignements sur les points fixes puisque tout point fixe des transformations modulaires est point fixe de la fonction β . Les prédictions principales obtenues pour $\Gamma_0(2)$ et $\Gamma(2)$ sont comparées dans le tableau ci-dessous.

Dans ces approches de type transformations d'échelle, les deux symétries fournissent une prédiction sur la forme des régimes de passage en bon accord avec les observations expérimentales. Dans les deux cas, la loi du demi-cercle est reproduite. Quelques incertitudes demeurent sur les points critiques prédits. La symétrie $\Gamma_0(2)$ impose que la position du point critique entre deux régimes soit situé au "sommet" de chaque demi-cercle formé par les trajectoires dans le plan $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ ce qui semble être remis en question dans certaines expériences. Dans le cas de $\Gamma(2)$, ce point peut être "ajusté" n'importe où sur les demi-cercles [42].

L'approche par les symétries modulaires de l'EHQ est une approche phénoménologique et permet, certes, d'obtenir des résultats intéressants suggérant qu'une symétrie modulaire pourrait sous-tendre tout ou une partie de

	$\Gamma_0(2)$	$\Gamma(2)$
Loi du $\frac{1}{2}$ cercle	Reproduite ; en accord avec les observations	Reproduite ; en accord avec les observations
Régime de passage	Bon accord qualitatif avec les observations	Bon accord qualitatif avec les observations
Règles de sélections	Incertitudes sur certains types de transitions	Incertitudes sur certains types de transitions. Nature différente des états à dénominateur pair
Points critiques	Rigidement prédits en raison des propriétés de $\Gamma_0(2)$	Le point critique sur régime de passage peut être ajusté.

TAB. 5.1: Comparaison avec l'expérience des résultats prévus par $\Gamma_0(2)$ et $\Gamma(2)$.

la physique de l'EHQ. Toutefois, cette approche présente des aspects critiquables, notamment au niveau des hypothèses introduites dans les divers travaux. Par exemple, il n'est pas possible de prédire la nature des états de Hall. Stricto sensu, la symétrie employée connecte simplement les uns aux autres des points dans le plan des conductivités. L'interprétation physique nécessite alors l'introduction d'hypothèses sur la nature des états. Par ailleurs, certaines hypothèses, bien que plausibles phénoménologiquement, sont difficilement contrôlables. Ainsi, l'holomorphie imposée sur la fonction β n'émerge clairement, à ce jour, d'aucun modèle relatif à l'EHQ.

Presque simultanément à la parution des premières analyses de $\Gamma_0(2)$ par Lütken et Ross, la loi des états correspondants a été proposée par Kivelson, Lee et Zhang comme une symétrie émergeant d'un modèle effectif de type Ginzburg-Landau [4, 46]. A partir de cette loi, un diagramme de phase global pour l'EHQ a été proposé. En fait, la loi des états correspondants n'est autre qu'une symétrie modulaire $\Gamma_0(2)$ agissant sur les conductivités obtenues dans le modèle effectif à l'approximation de la réponse linéaire quand la limite des grandes longueurs d'onde est atteinte. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

5.4 Loi des états correspondants

Dans ce paragraphe, on présente une façon synthétique d'obtenir la loi des états correspondants initialement proposée dans [4]. Pour simplifier les expressions, on se place dans un formalisme relativiste. Les conclusions obtenues dans un formalisme non relativiste seraient similaires à celles indiquées ici.

On considère le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{\pi}{2\theta} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\lambda a_\nu + \mathcal{L}_p(\xi, a + A) - \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi - (a_\mu + A_\mu)] [\partial^\mu \phi - (a^\mu + A^\mu)] + \dots, \quad (5.6)$$

décrivant les interactions à grande longueur d'onde de N_p (quasi-)particules et N_v vortex, plongés dans un champ externe. Ce Lagrangien a la forme générique du Lagrangien considéré dans [47]. Dans (5.6), A_μ est le champ externe effectif vu par les particules et les vortex. $\xi_i^\mu(t)$ est la position de la particule i à l'instant t . Le champ a_μ est le champ statistique usuel de Chern-Simons garantissant que l'interchange de deux particules produit l'apparition d'une phase $e^{i\theta}$ dans la fonction d'onde à N particules. Dans ce qui suit, on supposera que $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, correspondant à des particules fermioniques. Le terme \mathcal{L}_p dans (5.6) décrit la cinétique des quasi-particules et leur couplage au champs électromagnétique effectif et au champ statistique. Le couplage est supposé tel qu'il apparaît toujours la combinaison $(a + A)$ dans \mathcal{L}_p . Pour le calcul qui va suivre, la forme explicite de \mathcal{L}_p n'est pas nécessaire. Le champ scalaire ϕ , paramétrisant les champs de Goldstone, est associé à la phase du paramètre d'ordre du système ². Enfin, les pointillés dans (5.6) représentent tous les termes de plus haut degré dans les dérivées qui ne contribueront pas dans l'approximation de la réponse linéaire.

Pour arriver à une formulation plus adaptée au traitement de ϕ , on couple ϕ

²Si la différence entre le nombre de vortex et d'antivortex est non nulle, alors il apparaît un paramètre d'ordre complexe dans le système qui s'annule aux positions des vortex et reste non nul ailleurs.

à un nouveau champ \mathcal{A}_μ supposé être une pure jauge. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & -\frac{\pi}{2\theta}\epsilon^{\mu\lambda\nu}a_\mu\partial_\lambda a_\nu + \mathcal{L}_p(\xi, a + A) - \\ & \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi - (a_\mu + A_\mu + \mathcal{A}_\mu)][\partial^\mu\phi - (a^\mu + A^\mu + \mathcal{A}^\mu)] + \epsilon^{\mu\lambda\nu}b_\mu\partial_\lambda\mathcal{A}_\nu + \dots, \end{aligned} \quad (5.7)$$

où b^μ est un multiplicateur de Lagrange assurant que \mathcal{A}^μ est une pure jauge. Ce Lagrangien est complètement équivalent à (5.6) grâce à la présence du terme contenant b^μ . Alors, on intègre fonctionnellement sur ϕ , puis sur \mathcal{A}^μ laissant subsister b^μ qui va être la variable duale. Pour intégrer sur ϕ , on pose $\phi = \omega + \varphi$, telle que $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ où θ est la coordonnée polaire pour les vortex et ω est donnée par :

$$\omega(x) = 2\pi \sum_a N_a \arctan \frac{x^1 - y_a^1}{x^2 - y_a^2}, \quad (5.8)$$

où N_a est la vorticité de vortex a , ayant pour coordonnées (y_a^1, y_a^2) . Cette paramétrisation permet de prendre en compte les conditions aux limites pour les vortex : $\phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta) + 2\pi \sum_a N_a$. L'intégration est standard et produit le Lagrangien ³ :

$$\mathcal{L}'_{\text{eff}} = -\frac{\pi}{2\theta}\epsilon^{\mu\lambda\nu}a_\mu\partial_\lambda a_\nu + \mathcal{L}_p(\xi, a + A) - \epsilon^{\mu\lambda\nu}b_\mu\partial_\lambda(a_\nu + A_\nu) + \mathcal{L}_v(y, b) + \dots \quad (5.9)$$

$\mathcal{L}'_{\text{eff}}$ est obtenu de \mathcal{L}_{eff} via un simple changement de variable, de sorte que $\mathcal{L}'_{\text{eff}}$ décrit la même physique que \mathcal{L}_{eff} . Le champ b_μ est le champ dual de ϕ qui renferme les informations sur le comportement à grande longueur d'onde des vortex. Le terme \mathcal{L}_v décrit la dynamique des vortex et leur couplage au champ b^μ .

On étudie maintenant la façon dont les réponses électromagnétiques de chaque système sont reliées. Pour ce faire, on doit évaluer les intégrales fonctionnelles suivantes :

$$e^{i\Gamma_p(a+A)} = \int \prod_k [\mathcal{D}\xi^k] e^{i \int d^3x \mathcal{L}_p(\xi, a+A)}, \quad (5.10)$$

$$e^{i\Gamma_v(b)} = \int \prod_a [\mathcal{D}y_a] e^{i \int d^3x \mathcal{L}_v(y, b)} \quad (5.11)$$

³Un terme $\sim b_{\mu\nu}b^{\mu\nu}$ avec $b_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$ est produit lors de l'intégration. Ce terme d'ordre supérieur dans les dérivées est sous-entendu dans les pointillées de (5.7).

qui rentrent dans le calcul de l'action effective $\Gamma_{\text{eff}}(A)$:

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}(A)} = \int [\mathcal{D}a] \prod_k [\mathcal{D}\xi^k] e^{i \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}} = \int [\mathcal{D}a][\mathcal{D}b] \prod_a [\mathcal{D}y_a] e^{i \int d^3x \mathcal{L}'_{\text{eff}}}. \quad (5.12)$$

Dans l'approximation de la réponse linéaire, il n'est pas nécessaire d'évaluer (5.10) et (5.11) explicitement. On introduit les fonctions de réponse $P^{\mu\nu}$ et $V^{\mu\nu}$ définies par :

$$\Gamma_p(a) = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y a_\mu(x) P^{\mu\nu}(x-y) a_\nu(y), \quad (5.13)$$

$$\Gamma_v(a) = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y b_\mu(x) V^{\mu\nu}(x-y) b_\nu(y). \quad (5.14)$$

Dans l'espace des moments p , la forme générale de $P^{\mu\nu}$ dictée par l'invariance de Lorentz est :

$$P_{\mu\nu} = P_1(p) \Lambda_{\mu\nu} + iP_3(p) I_{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

avec :

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (5.16)$$

$$I_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{p^\lambda}{\sqrt{p^2}}, \quad (5.17)$$

et $P_{1,3}$ sont des fonctions de p (p^0, \vec{p}). $V^{\mu\nu}$ a une expression similaire. En utilisant (5.13) et (5.14) dans le calcul de l'action effective, les intégrations sur a^μ et b^μ dans la seconde expression de droite de (5.12) deviennent gaussiennes et peuvent être faites explicitement. On définit les variables complexes suivantes $P = P_1 + iP_3, V = V_1 + iV_3$. L'action effective a la forme suivante :

$$\Gamma_{\text{eff}}(A) = -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y), \quad (5.18)$$

où $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_1 \Lambda_{\mu\nu} + i\Pi_3 I_{\mu\nu}$. On pose également $\Pi = \Pi_1 + i\Pi_3$. Alors, l'intégration de a^μ et b^μ dans (5.12) conduit à :

$$\Pi = i\sqrt{p^2} \frac{\pi}{\theta} \frac{p^2 + PV}{p^2 + V(P + i\sqrt{p^2} \frac{\pi}{\theta})}, \quad (5.19)$$

qui caractérise la réponse électromagnétique du système. Si on suppose que seules les quasi-particules contribuent à la réponse électromagnétique, alors (5.19) se réduit à :

$$\Pi = i\sqrt{p^2}\frac{\pi}{\theta}\frac{P}{P + i\sqrt{p^2}\frac{\pi}{\theta}}. \quad (5.20)$$

Le système dual du précédent est celui pour lequel seuls les vortex participent à la réponse électromagnétique. Dans ce cas, la fonction de réponse Π^D est donnée par :

$$\Pi^D = \frac{\sqrt{p^2}}{V^D - i\sqrt{p^2}\frac{(\frac{\theta}{\pi})}{\pi}}, \quad (5.21)$$

où $V^D = P$. Comparant (5.20) et (5.21), on déduit que :

$$\Pi^D = p^2\left[\frac{i\sqrt{p^2}\frac{\pi}{\theta} - \Pi}{p^2 + i\sqrt{p^2}\left(\frac{\pi}{\theta} + \frac{\theta}{\pi}\right)\Pi}\right]. \quad (5.22)$$

Compte tenu de la définition de Π et du fait qu'à grande longueur d'onde :

$$\Pi_1(p^2) \longrightarrow \sigma_{xx}\sqrt{p^2}, \quad (5.23)$$

$$\Pi_3(p^2) \longrightarrow \sigma_{xy}\sqrt{p^2}, \quad (5.24)$$

la fonction de réponse complexe peut être reliée à la conductivité complexe $\sigma = \sigma_{xy} + i\sigma_{xx}$, via :

$$\Pi = i\sqrt{p^2}\bar{\sigma}, \quad (5.25)$$

avec une relation analogue pour Π^D et σ^D , conductivité complexe du système dual. Compte tenu de la relation entre Π^D et Π , on a :

$$\sigma^D = \frac{\frac{\pi}{\theta} - \sigma}{1 - \left(\frac{\pi}{\theta} + \frac{\theta}{\pi}\right)\sigma}. \quad (5.26)$$

Pour des porteurs de charge fermionique, $\theta = \pi$ de sorte que :

$$\sigma^D = \frac{1 - \sigma}{1 - 2\sigma}. \quad (5.27)$$

Par ailleurs, la physique du système ne doit pas être changée quand $\theta \longrightarrow \theta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ puisque θ est relié à la statistique des (quasi-)particules. Alors, $\Pi(\theta + 2\pi k) \simeq \Pi(\theta)$. De (5.19), on tire alors que :

$$\frac{1}{\Pi(\theta)} \simeq \frac{1}{\Pi(\theta + 2\pi k)} = \frac{1}{\Pi(\theta)} - \frac{i2k}{\sqrt{p^2}}, \quad (5.28)$$

qui implique :

$$\sigma^D = \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}. \quad (5.29)$$

Les transformations (5.27) et (5.29) sont dans le groupe $\Gamma_0(2)$, de générateurs $T(\sigma)$ et $\Sigma(\sigma)$. Compte tenu de leur définition, il est facile de voir que (5.27) et (5.29) reproduisent en fait la loi des états correspondants obtenue initialement dans [4].

5.5 Diagramme de visibilité

5.5.1 Hiérarchie basée sur $\Gamma(2)$

Dans ce qui suit, on va se concentrer sur le groupe $\Gamma(2)$. La construction d'un modèle pour la classification des états de Hall basés sur $\Gamma(2)$ peut être obtenue, comme expliqué dans [41], en restreignant $\Gamma(2)$ à agir seulement sur la partie réelle de la conductivité complexe σ introduite précédemment. Toute transformation G de $\Gamma(2)$ est paramétrisée par :

$$G(\sigma) = \frac{(2s + 1)\sigma + 2n}{2r\sigma + (2k + 1)} \quad k, n, r, s \in \mathbb{Z}, \quad (5.30)$$

avec la condition d'unimodularité qui devient :

$$(2s + 1)(2k + 1) - 4rn = 1. \quad (5.31)$$

A partir de ce sous-groupe $\Gamma(2)$, on peut construire une hiérarchie pour la classification des états de Hall entiers et fractionnaires [40] en restreignant $\Gamma(2)$ à agir seulement sur la partie réelle de la conductivité complexe qui est identifiée avec le facteur de remplissage ν , $\nu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Ce modèle de hiérarchie raffine la classification de Jain (évoquée dans le chapitre 2) et comporte une modification de la loi des états correspondants proposée dans [4]. Cette dernière loi est basée sur le sous-groupe modulaire $\Gamma_0(2)$ qui contient lui-même $\Gamma(2)$. Il reproduit avec succès les structures hiérarchiques observées des états de Hall.

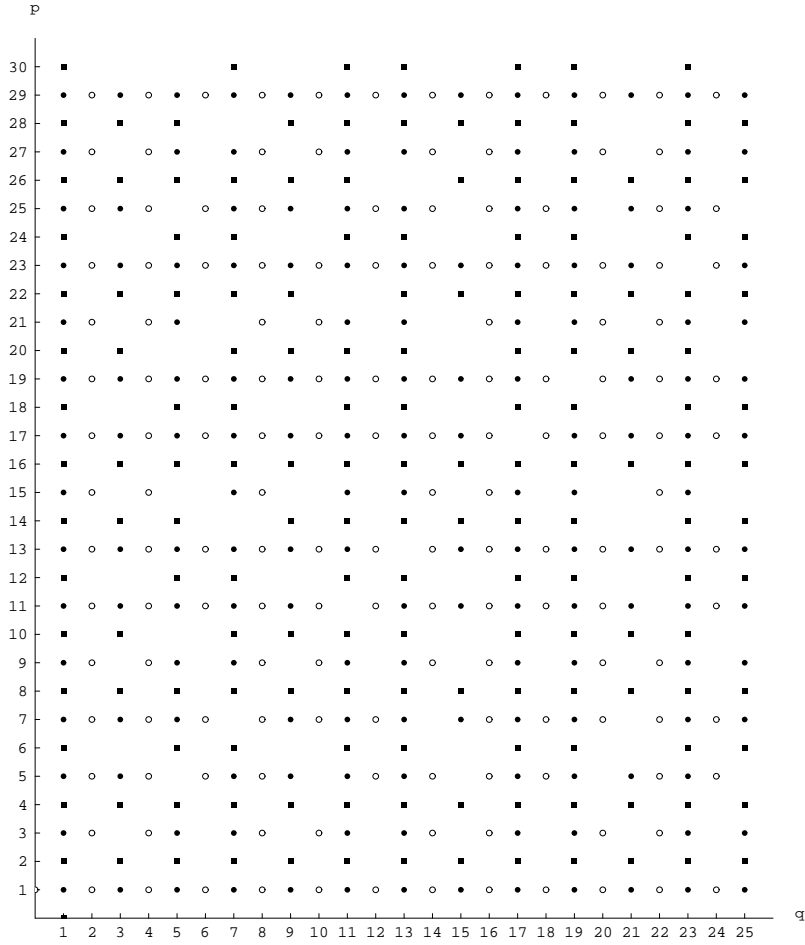


FIG. 5.1: Les vertex (q, p) sur le réseau bi-dimensionnel. Les carrés noirs correspondent aux vertex ayant q impair et p pair. Les ronds noirs (resp. blancs) correspondent aux vertex ayant q impair (resp. pair) et p impair.

5.5.2 Diagramme de visibilité

L'action de $\Gamma(2)$ sur le facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{q}$ peut être visualisée grâce à des représentations graphiques appelées diagrammes de visibilité. On va résumer leur construction.

Les diagrammes de visibilité peuvent être vus comme des outils visuels dans la construction des séquences de Farey de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ [34], où p

et q sont des entiers positifs premiers entre eux. Ces entiers peuvent être répartis sur un réseau carré bi-dimensionnel dans lequel chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est représenté par un vertex de coordonnées (q, p) (voir la figure 5.1). Dans ce qui suit, il sera utile de considérer successivement les trois types de paires possibles (q, p) , c'est à dire : q impair et p impair, q impair (resp. pair) et p pair (resp. impair). Ces trois types de paires correspondent à trois diagrammes de visibilité différents qui vont être utilisés dans l'analyse du chapitre six. Le théorème de Bezout stipule que pour tout entiers relatifs p et q premiers, il existe deux ensembles de paires d'entiers (a, b) et (a', b') où a, b et a', b' sont nécessairement des entiers relatifs premiers satisfaisant :

$$qb - pa = +1 \quad (5.32)$$

$$qb' - pa' = -1 \quad (5.33)$$

En appliquant ce théorème aux paires $(q$ impair, p impair) (les ronds noirs sur la figure 5.1), on est conduit à introduire toutes les paires possibles (a, b) (resp. (a', b')) satisfaisant 5.32 (resp. 5.33) qui peuvent être reportées sur un réseau bi-dimensionnel comme sur la figure 5.3. On peut aussi très facilement se convaincre que les paires (a, b) et (a', b') ne peuvent jamais être du type (pair, pair). Ces paires sont donc alignées sur deux demi-droites de ce réseau qui définissent une bande qui ne contient que cette paire (q, p) . Le diagramme de visibilité résultant, appelé le diagramme impair-impair, est obtenu alors en dessinant sur le réseau les bandes associées à toutes paires (impair, impair) possibles, comme sur la figure 5.3. Chaque bande y est représentée par une surface sombre, indexée par son facteur de remplissage respectif qui est aussi égal à la pente de chaque bande. Les points circulaires (resp. les carrés) sur ce diagramme correspondent à p impair (resp. pair) et les points noirs (resp. blancs) à q impair (resp. pair). Une procédure similaire appliquée aux paires $(q$ impair, p pair) (resp. $(q$ pair, p impair)), conduit au diagramme pair-impair (resp. impair-pair) de la figure 5.2 (resp. 5.4). On peut noter dans ces diagrammes que chaque bande est complètement caractérisée par une pair (q, p) ou de manière équivalente par sa pente $\frac{p}{q}$ si bien que chaque bande sera indexée par $\frac{p}{q}$. Alors selon [40], toute bande pour q impair (resp. pair) est identifiée à un plateau de Hall, c'est (resp. un état *métallique* de Hall), qui correspond à un facteur de remplissage $\nu = \frac{p}{q}$.

Pour finir cette partie, on rappelle que les diagrammes pair-impair et impair-

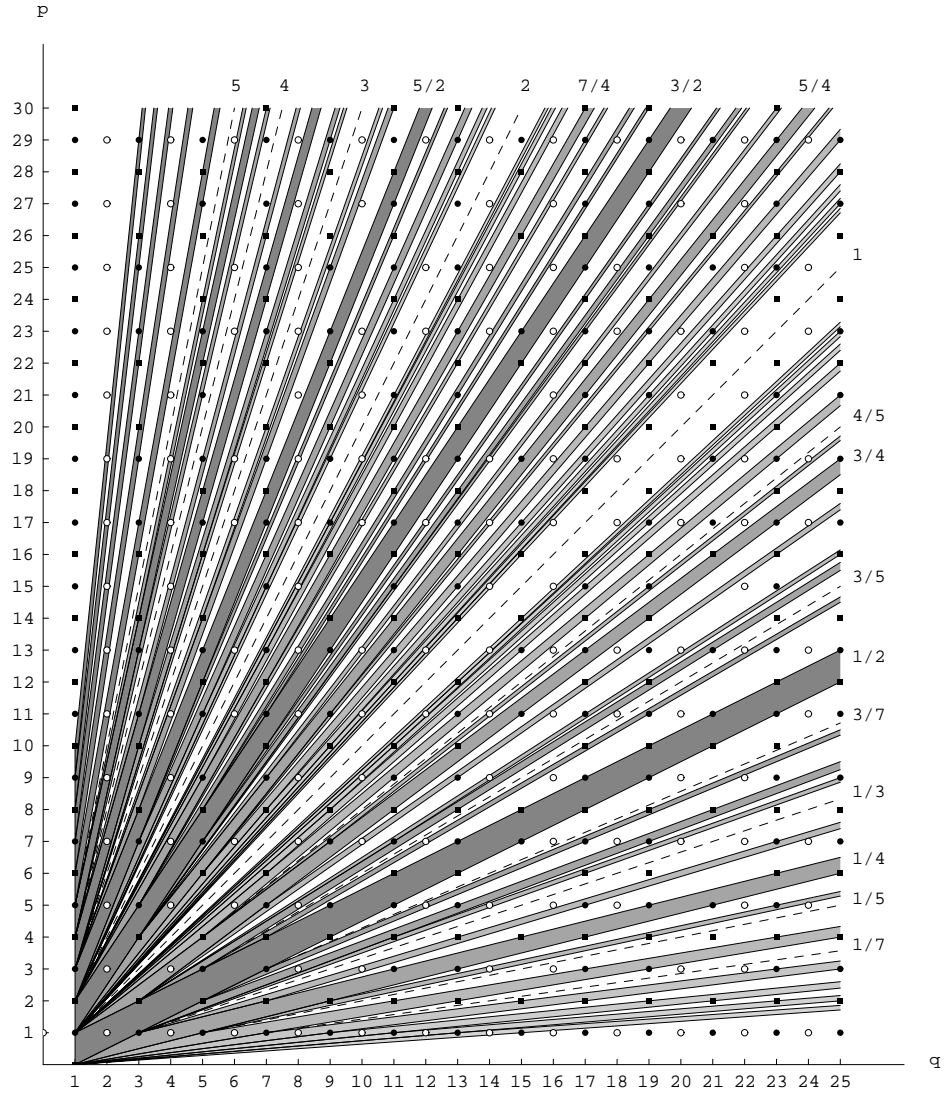


FIG. 5.2: Le diagramme de visibilité pair-impair

impair correspondent à plateaux de Hall indexés par un facteur de remplissage ayant respectivement le numérateur pair et impair. Ceci reflète le fait que l'action de $\Gamma(2)$ sur les nombres rationnels préserve le caractère pair ou impair des numérateurs comme on peut le voir par exemple grâce à la définition donnée en (5.30). A coté de cela, on peut voir que le diagramme

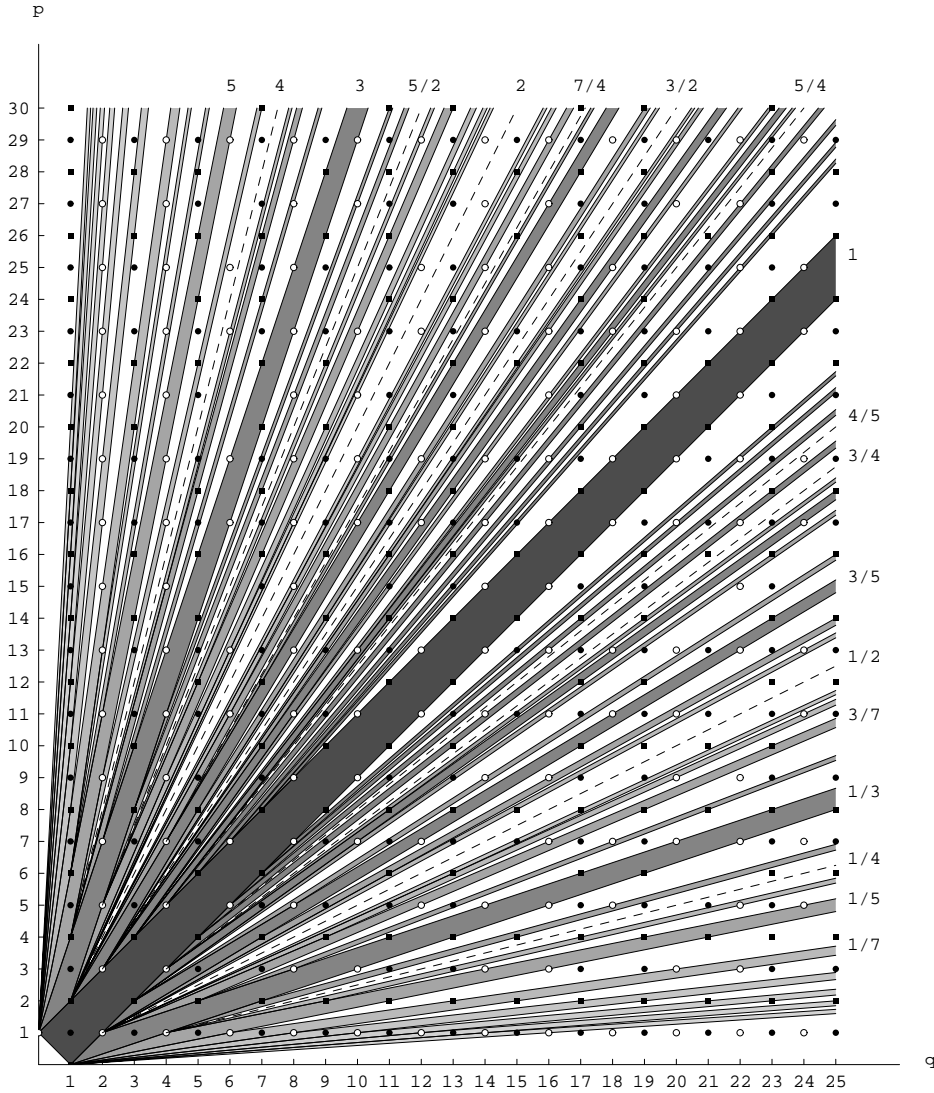


FIG. 5.3: Le diagramme de visibilité impair-impair

pair-impair accompagné du diagramme obtenu par superposition des diagrammes impair-pair et pair-impair est naturellement relié au sous-groupe modulaire $\Gamma_0(2)$ (qui ne différencie pas les états avec numérateur pair de ceux avec numérateur impair). Ce dernier sous-groupe du groupe modulaire, engendré par $T(z)$ et $\Sigma(z)$, contient $\Gamma(2)$ comme sous-groupe et est la sy-

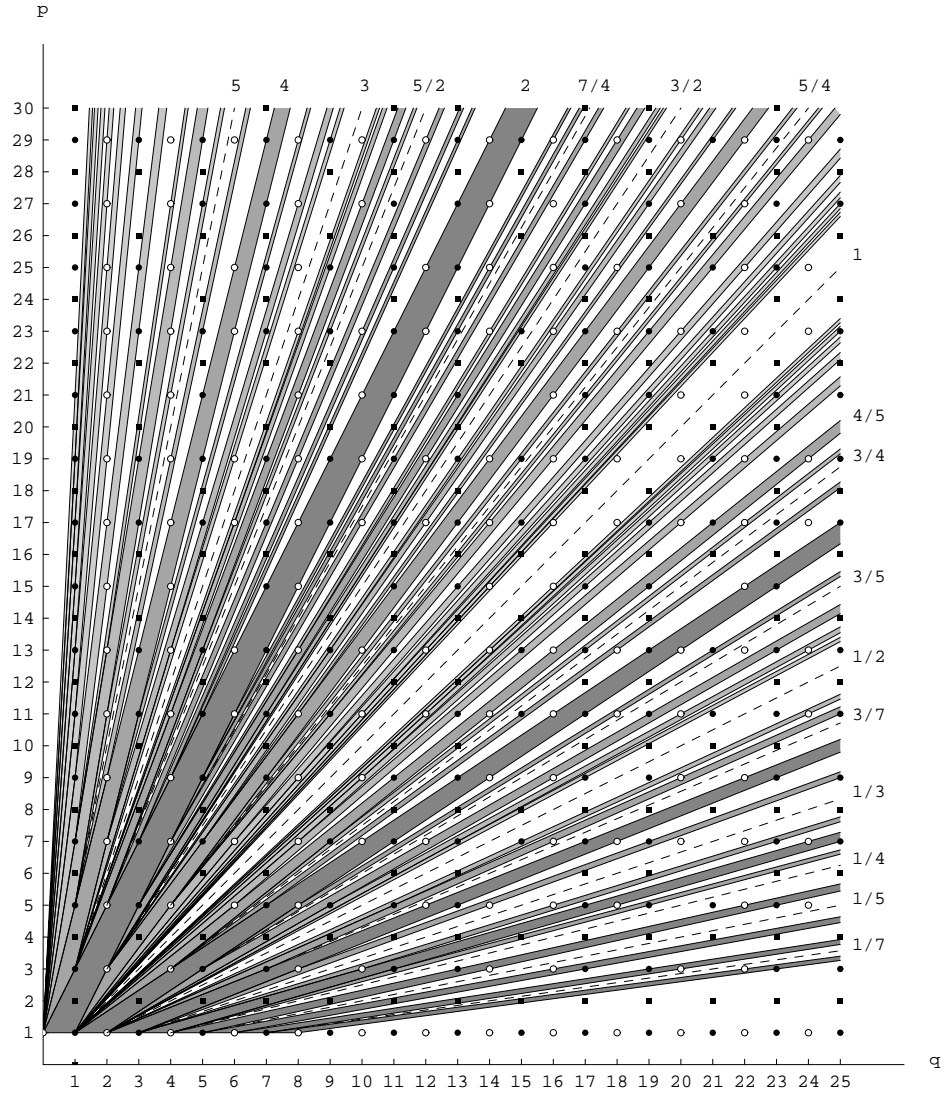


FIG. 5.4: Le diagramme de visibilité impair-pair

métrie correspondant à la loi des états correspondants proposée dans [4].

5.5.3 Prédictiones physiques

A partir de l'analyse de ces diagrammes de visibilité, Georgelin, Masson et Wallet [40] ont obtenu une courbe de résistivité (voir figures en fin de chapitre) reproduisant très correctement une courbe expérimentale de résistivité (ρ_{xy} en fonction de B). L'analyse nécessitait de faire une hypothèse sur l'interprétation physique des axes des diagrammes de visibilité (et d'introduire à la main une échelle pour comparer les prédictions des courbes de résistivité aux données expérimentales).

Dans la référence [41], ces auteurs ont également montré que les diagrammes de visibilité reproduisaient avec un succès les structures de bandes apparaissant dans une série d'expériences étudiant les fluctuations de conductance ⁴ dans les MOSFET, ceci dans le régime de Hall entier. Les structures de bandes, théoriques (provenant des diagrammes de visibilité) et expérimentales sont comparées sur la figure 5.5. Expérimentalement, les extremas pour les fluctuations de conductance s'étalent sur des trajectoires linéaires dans le plan (V_g, B) parallèles à facteur de remplissage constant (et entier). Les fluctuations quantiques considérées ici sont observées dans les régions de transitions en régime de Hall et sont différentes des deux autres types de fluctuations apparaissant à B faible et V_g assez faible [48]. De plus, une structure en bande dans le plan (V_g, B) est observée (voir première figure de 5.5 tirée de la figure 2 de [48]).

Il est alors possible de comparer les deux structures en bandes apparaissant dans les graphes de la figure 5.5. Dans la première figure de 5.5, la structure en bandes est indiquée par des régions grisées (indexées par des facteurs de remplissage $p = 1, 2, 3, 4$) dans le plan (V_g, B) qui correspondent clairement aux plateaux de Hall ⁵. On a délimité sur (b) les bandes correspondant à $p = 2, 3$. On ne s'intéresse qu'aux plateaux pour le moment, et donc on ne considère pas les fluctuations de conductance. Pour rendre cette comparaison évidente, on a tracé sur la deuxième figure de 5.5 les bandes correspondants aux facteurs de remplissage $\nu = 1, 2, 3, 4$. On observe un bon accord qualita-

⁴On note que l'analyse théorique faite ici se réfère strictement à la conductivité alors que l'expérience donne accès à la conductance, reliée à la conductivité par un facteur géométrique constant. On peut alors comparer avec notre analyse théorique.

⁵On peut le voir sur le graphe en haut de la figure (a) où la conductance G est tracée en fonction de V_g .

tif entre les deux structures. Chaque région grise correspondant à un plateau donné apparaît délimitée par deux droites (au moins dans la plage de valeurs de B, V_g considérée). Si on prend en compte la méthode pour construire le diagramme impair, il est naturel d'identifier chaque région grise avec un facteur de remplissage entier donné qui correspond à une bande de la deuxième figure de 5.5. Le résultat de [48] montre que la pente des deux lignes parallèles délimitant chaque bande du graphe expérimental de 5.5 dépend seulement du facteur de remplissage $\nu = n, n \in \mathbb{N}$ à un facteur sans dimension près. Par contre, la pente des bandes correspondantes dans le diagramme impair est exactement égal au facteur de remplissage. Ce facteur sans dimension peut bien sûr être relié aux facteurs sans dimension apparaissant dans l'identification des coordonnées des axes.

En tenant compte de l'analyse précédente, on peut proposer une interprétation physique des bandes du diagramme : le plan (q, p) est identifié avec le plan (B, V_g) de l'expérience et tout point à l'intérieur d'une bande donnée du diagramme impair est relié à un état de Hall dont la conductivité est égale à la pente de cette bande. On peut par ailleurs obtenir à partir du diagramme une information sur la conductance de Hall en fonction de V_g en considérant la situation où B est gardé fixe alors que V_g (nombre de porteurs de charge) varie. C'est la situation utilisée dans [40] pour obtenir une courbe de résistivité (ρ_{xy} en fonction de B) qui est en accord avec l'expérience. Les résultats ci-dessus suggèrent qu'il est possible d'étendre l'analyse des diagrammes de visibilité de façon à obtenir un diagramme de phase global (à température nulle) pour l'EHQ en exploitant l'identification de l'axe horizontal (resp. vertical) des diagrammes avec B (resp. V_g), C'est également cette identification qui a permis de construire une courbe de résistivité en bon accord avec l'expérience. Si l'identification physique des axes des diagrammes est correcte, alors ceux-ci contiennent des "trajectoires" privilégiées dans le plan (B, V_g) correspondant à des plateaux de Hall. Ces trajectoires peuvent être appariées en bandes associées à des plateaux, une structure faisant penser intuitivement à un diagramme de phase. C'est cet aspect qui est analysé dans le chapitre suivant.

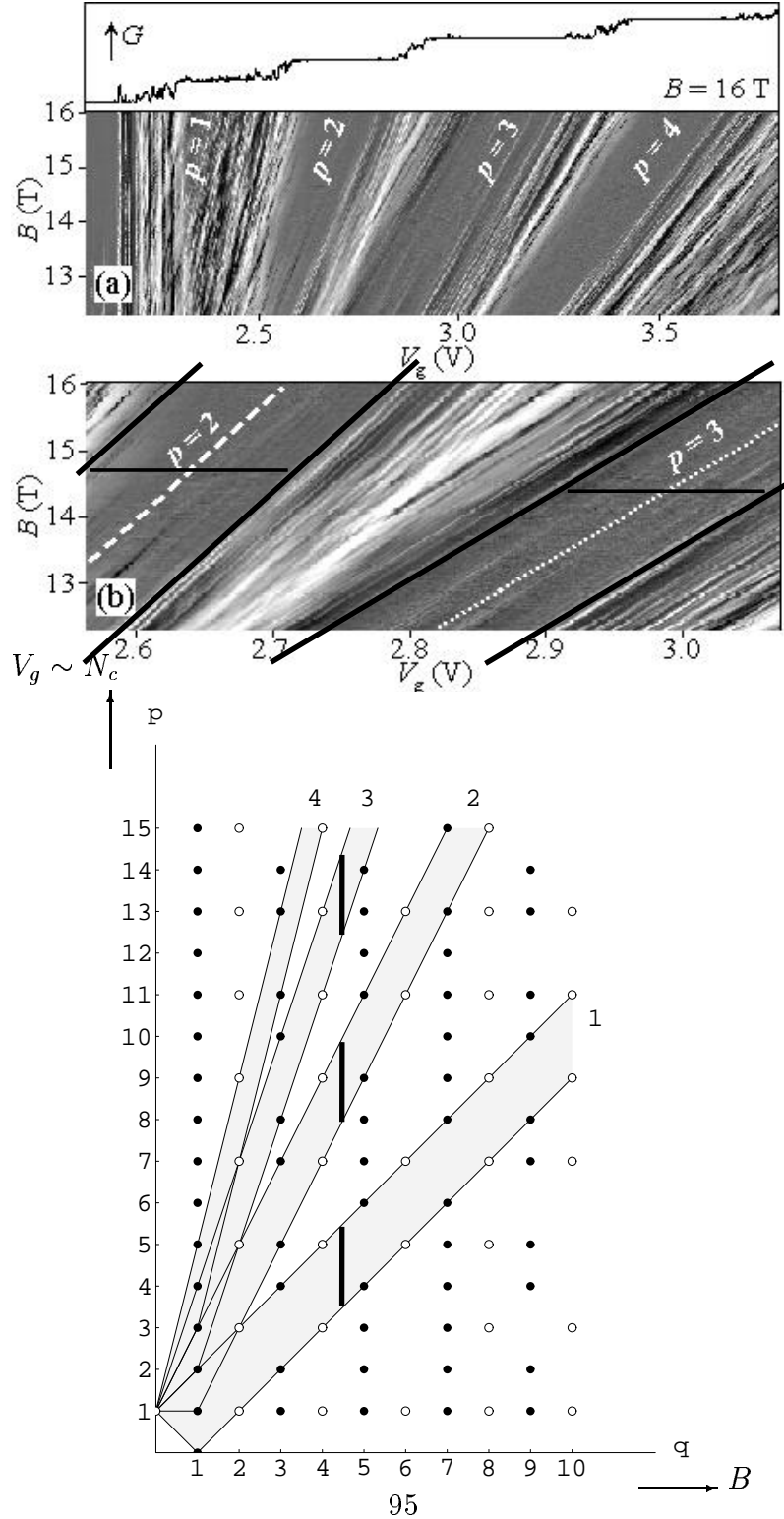


FIG. 5.5: Comparaison des structures en bande. Première figure : graphe de la conductance G tirée de [48]. Les zones les plus claires correspondent aux plus faibles valeurs de G . Sur (b), on a ajouté des lignes noires pour délimiter les bandes. Leurs largeurs horizontales sont indiquée par un segment noir horizontal et sont toutes égales. Deuxième figure : sélection de bandes correspondantes venant du diagramme impair. Après identification des axes, on voit que les largeurs des bandes sont égales.

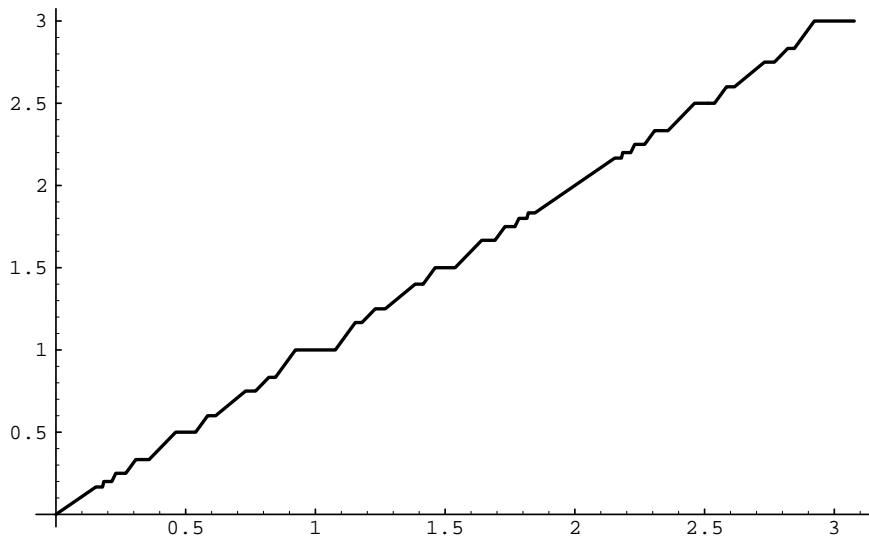


FIG. 5.6: Prédiction théorique de ρ_{xy} (en unité de $\frac{h}{e^2}$) en fonction de ν

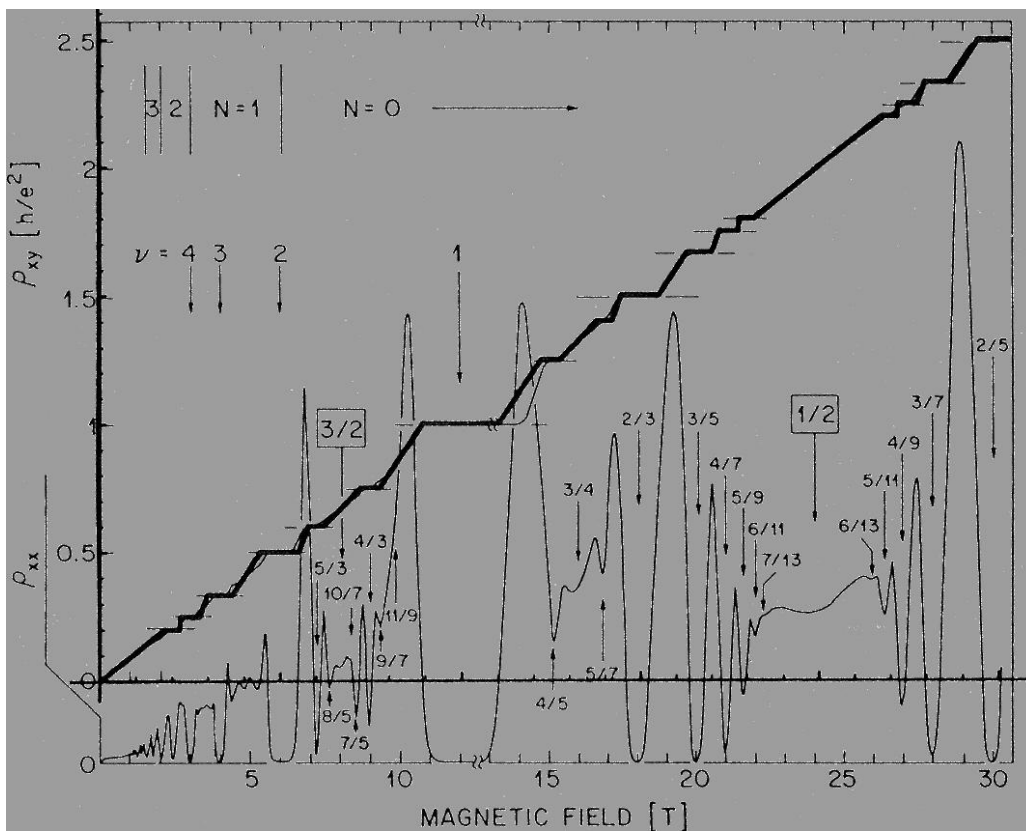


FIG. 5.7: Comparaison des données expérimentales de [90] avec la prédiction théorique de ρ_{xy}

Chapitre 6

Un diagramme de phase pour l'effet Hall quantique

Global quantum Hall phase diagram from visibility diagrams.

F. Chandelier, Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet.

Phys. Lett. A301(2002)451

6.1 Introduction

Les diagrammes de visibilité ont permis de reproduire une courbe de résistivité en bon accord avec l'expérience [40] et également la structure en bandes apparaissant dans l'étude expérimentale des fluctuations de conductance reporté dans [48]. Ces analyses phénoménologiques reposent sur une correspondance physique entre les paramètres définissant les diagrammes de visibilité et des quantités physiques relatives à l'EHQ. Si cette approche phénoménologique est pertinente pour l'EHQ, alors elle doit permettre aussi de prédire un diagramme de phase global à température nulle pour l'EHQ. Ceci est l'objet de ce chapitre.

Les limitations et faiblesses inhérentes à la présente construction, comme

dans la plupart des analyses basées essentiellement sur des principes de symétrie sont les suivantes :

- Seule la topologie du diagramme de phase est accessible ; la caractérisation analytique des frontières entre phases n'est clairement pas accessible.
- L'analyse ne permet pas de préciser la nature des transitions et de calculer la valeur des exposants critiques.
- Les prédictions sont obtenues moyennant l'introduction d'hypothèses physiques. Leur plausibilité est vérifiée a posteriori en s'assurant qu'elles n'introduisent pas d'incohérences dans la construction et/ou qu'elles permettent de reproduire des observations expérimentales.

6.2 La correspondance physique

Les diagrammes de visibilité contiennent une grande quantité d'informations sur l'EHQ qui peut être extraite quand une correspondance naturelle entre les diagrammes et les grandeurs physiques intéressantes est introduite. Cette correspondance est basée essentiellement sur la définition du facteur de remplissage ν combinée avec une interprétation physique des générateurs de $\Gamma(2)$. On rappelle que le facteur de remplissage ν est défini par :

$$\nu = \frac{N_c}{N_\phi}, \quad (6.1)$$

où N_c (resp. N_ϕ) dénote le nombre de porteurs de charge (resp. le nombre d'unités de flux). On remarque de plus que ν s'identifie à la fraction $\frac{p}{q}$ dans les diagrammes de visibilité, et que N_ϕ est relié au champ magnétique appliqué B par la relation $N_\phi = \frac{BS\hbar}{e}$ (S est l'aire de l'échantillon) alors que N_c , le nombre de porteurs de charge est essentiellement contrôlé par la tension appliquée aux bords de l'échantillon V_g .

Considérer tous ces éléments ensemble suggère en fait d'identifier le plan (q, p) des diagrammes de visibilité avec le plan (N_ϕ, N_c) ou alternativement avec le plan (B, V_g) , à travers la correspondance :

$$\begin{aligned} q &\longrightarrow N_\phi \quad \text{ou} \quad q \longrightarrow B \\ p &\longrightarrow N_c \quad \text{ou} \quad p \longrightarrow V_g \end{aligned} \quad (6.2)$$

On voit facilement que (6.2) est cohérent avec l'action de $\Gamma(2)$ sur les vertex des diagrammes comme montré dans [42]. En fait, l'action de l'opérateur T^2 sur tout vertex (q, p) produit une translation verticale donnée par :

$$(q, p) \longrightarrow (q, p + 2q). \quad (6.3)$$

Physiquement, T^2 est un opérateur de translation de type Landau agissant sur le facteur de remplissage comme :

$$\nu \longrightarrow \nu + 2, \quad (6.4)$$

et correspond à une augmentation du nombre de porteurs de charge qui est cohérent avec (6.2). D'un autre côté, l'action de l'opérateur Σ , interprété comme étant l'opérateur attachement de flux, correspondant à une augmentation du champ magnétique appliqué B (ou N_ϕ). Son action sur tout vertex (q, p) produit une translation horizontale donné par :

$$(q, p) \longrightarrow (q + 2p, p), \quad (6.5)$$

qui est donc aussi cohérent avec (6.2). On peut aussi remarquer que toute cette discussion peut être reproduite pour $\Gamma_0(2)$ si on remplace T^2 par T , l'opérateur habituel d'addition du niveau de Landau qui change le facteur de remplissage d'une unité :

$$\nu \longrightarrow \nu + 1, \quad (6.6)$$

montrant que (6.2) est aussi cohérent avec l'action de $\Gamma_0(2)$ tout aussi bien.

Dans [40], (6.2) a été combiné avec les diagrammes de visibilité pour obtenir une description de l'architecture observée des états de Hall, et pour dériver un graphe de résistivité (à température nulle) qui s'accorde très bien avec les données expérimentales. D'une manière analogue, dans [42], on a montré que la structure en bandes apparaissant dans les diagrammes de visibilité reproduit la structure en bandes observée expérimentalement [48] qui apparaît dans le plan (B, V_g) . Gardant ces résultants en tête, il semble raisonnable d'étendre les lignes de l'analyse présenté dans [40],[42] pour construire à partir des diagrammes de visibilité un diagramme des phases global à température nulle pour l'EHQ. La construction correspondante est maintenant décrite.

Une remarque important doit être soulignée. L'approche décrite ici ne peut à

elle seule permet de déterminer analytiquement la forme des frontières entre les diverses phases du diagramme de phase. Ceci nécessiterait par exemple de disposer d'un Lagrangien décrivant complètement la physique de l'EHQ et d'employer les techniques du groupe de renormalisation. En l'absence de ces deux ingrédients, les approches basées sur les seules considérations de symétries modulaires ne donnent que des informations pour l'architecture globale du diagramme de phase, la disposition relative des phases et la topologie générale du diagramme. Cette topologie générale est toutefois suffisante pour obtenir des prédictions sur les transitions entre phases et les éventuelles règles de sélection.

6.3 Construction du diagramme des phases global

Selon la correspondance (6.2), on identifie l'axe p (resp. q) du diagramme de visibilité avec N_c (resp. $N_\phi \sim B$). On considère d'abord le cas des plateaux de Hall identifiés dans le cadre présent aux bandes correspondant à un dénominateur impair contenues dans les diagrammes pair-impair et impair-impair. Le cas des bandes correspondant à un dénominateur pair (qui s'identifient à des états *métalliques*) sera examiné plus loin.

On décide de représenter le diagramme des phases dans le plan (B, N_c) et dans le plan $(\frac{1}{\nu}, N_c)$. Comme on l'a vu dans la discussion précédente, le plan (B, N_c) est directement relié au plan des diagrammes de visibilité grâce à la correspondance (6.2) alors que le plan $(\frac{1}{\nu}, N_c)$ est relié au plan (q, p) via (6.1),(6.2). Alors, l'obtention de la topologie du diagramme des phases (dans le plan (B, N_c)) pour les plateaux provient de la surperposition des deux diagrammes de visibilité mentionnés au début de ce paragraphe, avec l'apparition possible de recouvrements entre certaines bandes dans ces diagrammes.

On examine ce dernier point en le confrontant à certaines caractéristiques expérimentales à partir desquelles on va définir une prescription simple pour traiter les recouvrements possibles de bandes. On rappelle que :

$$\begin{array}{l} q \longrightarrow B \\ p \longrightarrow N_c \end{array} \quad (6.7)$$

On considère ce qui se passe à N_c fixé à une certaine valeur N_0 , $N_c = N_0$. Alors, quand B croit, on se déplace sur les diagrammes sur une ligne horizontale définie par $N_c = N_0$. Pour cette valeur de N_c , les plateaux ne sont pas tous expérimentalement accessibles. Cela correspond dans le schéma présent au fait que ces plateaux non-observés (et donc les bandes correspondantes aux dénominateurs impairs) sont associés à des valeurs (rationnelles) du facteur de remplissage $\nu = \frac{p_1}{q_1}$ tel que $p_1 > N_0$. Ces plateaux deviendraient observables expérimentalement pour une valeur plus grande de N_c . Donc, le domaine correspondant à une phase stable accessible expérimentalement avec $\nu = \frac{p_1}{q_1}$ de l'EHQ doit être dans le demi-plan supérieur $N_c > N_0$. Une analyse similaire à champ magnétique fixé $B = B_0$ peut être rigoureusement effectuée pour restreindre le domaine où on peut trouver une phase stable accessible expérimentalement avec $\nu = \frac{p_1}{q_1}$ au demi-plan droit $q_1 > B_0$.

L'analyse effectuée ci-dessus (notant de plus que deux bandes avec dénominateur impair peuvent se recouvrir uniquement près des vertex qui les indexent) suggère une manière simple de modifier légèrement les frontières des bandes qui se chevauchent, conduisant à des domaines qui ne se recouvrent pas. En fait, on suppose que le vertex (q, p) indexant une bande avec dénominateur impair est le coin le plus bas à gauche du domaine de la phase correspondante, voir la figure 5.3, 5.4, 5.2. De cette manière, la nouvelle frontière d'une bande avec dénominateur impair, qui va donner naissance à un domaine pour une phase dans le diagramme, joint le vertex (q, p) au point le plus proche (a, b) sur la frontière de la bande avec $a \geq q, b \geq p$.

En appliquant cette prescription aux diagrammes de visibilité impair-impair et pair-impair, on peut faire une prédiction pour un diagramme des phases pour l'EHQ, représenté dans le plan (B, N_c) pour la figure 6.1, et dans le plan $(\frac{1}{\nu}, N_c)$ pour la figure 6.2. Dans la figure 6.1, les domaines correspondant à des plateaux de Hall sont dessinés en surfaces sombres, chacun étant indexé par son facteur de remplissage tout comme dans la figure 6.2.

On doit faire une remarque importante à ce stade. On pourrait choisir d'autres prescriptions plus compliquées pour traiter les recouvrements des bandes. Ceci pourrait donc modifier la forme de certaines parties des frontières correspondantes mais sans pour autant altérer l'architecture globale des phases dans le diagramme, leurs positions relatives et la topologie du diagramme des phases. Les prédictions principales découlant de ce diagramme ne se-

raient donc pas modifiées. La prescription qu'on a choisie est cohérente avec l'hypothèse dans laquelle la largeur des régions des régimes de passage entre diverses transitions à température non-nulle, $\Delta B(T)$ tend vers zéro quand la température tend vers zéro. Ceci se reflète en fait dans le diagramme des phases par l'existence de lignes communes pour les frontières séparant deux phases, permettant donc une transition abrupte entre deux plateaux adjacents. La possibilité d'avoir :

$$\Delta B(T) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad T \longrightarrow 0, \quad (6.8)$$

a été avancée dans des travaux antérieurs basés sur une analyse reposant sur l'invariance d'échelle et semble être favorisée par certaines extrapolations obtenues à partir de données expérimentales [49]. Toutefois, la possibilité d'avoir une largeur non-nulle pour la région de régime de passage à température nulle ne peut pas être exclue pour l'instant. Une façon phénoménologique prenant en compte cette dernière possibilité serait d'ajouter à la prescription décrite ci-dessus l'hypothèse supplémentaire que les lignes communes pour les frontières séparant deux plateaux adjacents sont interdites.

Jusqu'à maintenant, on a considéré les plateaux de Hall associés aux bandes avec dénominateur impair. Pour les états métalliques associés aux bandes avec dénominateur pair, une construction similaire à celle présentée dans le paragraphe précédent donne naissance aux bandes du type $\nu = \frac{\text{impair}}{\text{pair}}$ qui peuvent être superposées à celles des plateaux de Hall sans recouvrement. Ces bandes n'ont pas été représentées sur le diagramme des phases des figures 6.1 et 6.2, où seulement les directions de certaines d'entre elles sont représentées par des lignes en pointillés.

6.4 Discussion des prédictions

6.4.1 Structure du diagramme de phases

Le diagramme des phases dans le plan (B, N_c) présenté sur la figure 6.1 est formé d'une succession de bandes. Chacune correspond à un plateau indexé par un facteur de remplissage entier ou fractionnaire. L'ensemble des bandes est entouré par deux régions construites à partir de la région blanche horizontale la plus basse et de la région blanche verticale la plus à gauche.

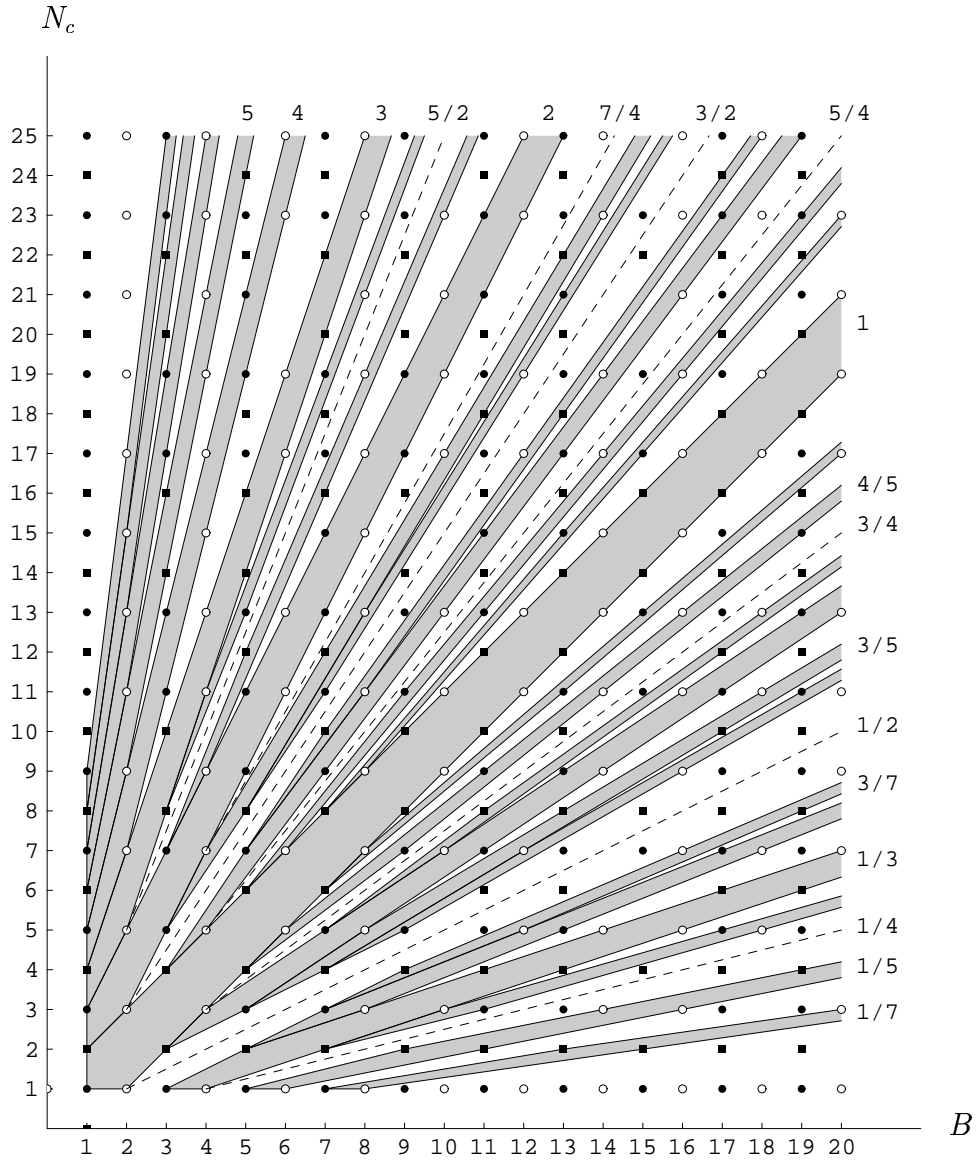


FIG. 6.1: Diagramme des phases global à température nulle dans le plan (B, N_c)

La première région correspond à un facteur de remplissage $\nu = \frac{0}{1}$. Puisque $\nu = \frac{N_c}{N_\phi}$, cette région correspond à un régime pour lequel N_c reste très petit

devant B . Or, l'interaction typique entre électrons et $V \sim \frac{e^2}{\epsilon r_s}$, avec $r_s \sim \frac{1}{\sqrt{N_c}}$. Pour des champs magnétiques tels que $l_B \sim \frac{1}{\sqrt{B}} \ll r_s \sim \frac{1}{\sqrt{N_c}}$, soit pour $N_c \ll B$, on s'attend à ce que le champ magnétique "gèle" les mouvements des électrons et favorise la formation d'un cristal de Wigner. Cet état est isolant de sorte que la phase $\nu = \frac{0}{1}$ correspond à une phase isolante.

La seconde région, la bande verticale, correspond à $\nu = \frac{1}{0}$. Elle correspond à un régime où B est très faible pour lesquels tous les états sont supposés être localisés par le mécanisme d'Anderson, conduisant encore à une autre phase isolante. On note que les études numériques [50] concernant l'EHQ entier ont suggéré l'existence possible de deux phases isolantes. Ces dernières sont notées à partir de maintenant Ins_H (Cristal de Wigner) et Ins_V (Isolant d'Anderson) correspondant respectueusement à la bande horizontale et verticale sur la figures 6.1 le long des axes N_c et B .

La contrepartie de la figure 6.1 dans le plan $(\frac{1}{\nu}, N_c)$ est présentée sur la figure 6.2 où maintenant la phase Ins_H (resp. Ins_V) correspond à la région la plus haute dans le plan $\frac{1}{\nu} > 1$ (resp. la plus à gauche). Les lignes en pointillés sur ces deux figures représentent certains états métalliques correspondant aux directions des bandes de la figure 5.2. On remarque que certaines trajectoires dans le diagramme des phases ne rencontrent que les plateaux de Hall entiers. Il s'agit en fait des droites partant de l'origine avec une pente comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1 comme on peut le voir sur la figure 6.1. Ces trajectoires sont engendrées quand on augmente N_c en agissant sur le potentiel V_g à champ magnétique fixé.

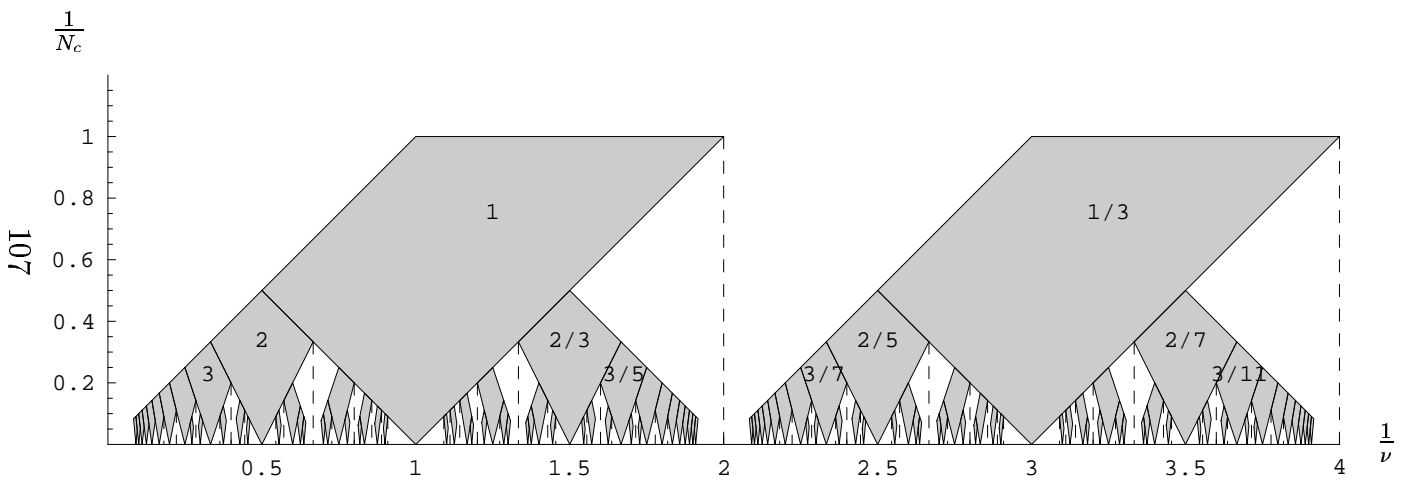


FIG. 6.2: Diagramme des phases global à température nulle dans le plan $(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{N_c})$

6.4.2 Règles de sélection

Si le diagramme des phases obtenu est correct, alors on doit observer des transitions directes d'une phase isolante vers les plateaux de Hall entiers ou fractionnaire avec $\nu = \frac{1}{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$), comme on le voit sur les figures 6.1 et 6.2. En effet, on remarque que le plateau $\nu = 1$ est bordé par l'isolant Ins_H . La transition

$$\text{Ins}_H \longrightarrow 1. \quad (6.9)$$

est donc permise. De plus, les actions successives de Σ sur cette transition vont engendrer les autres transitions permises :

$$\text{Ins}_H \longrightarrow \frac{1}{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.10)$$

Les actions successives de produits de diverses puissances de T et de Σ sur la transition $\text{Ins}_H \longrightarrow 1$ vont engendrer toutes les autres transitions Ins_H -plateau et plateau-plateau. Ensuite, on remarque que tout plateau $\nu = k$ ($k \in \mathbb{N}$) est bordé par la phase isolante Ins_V . Donc, les transitions :

$$\text{Ins}_V \longrightarrow k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.11)$$

sont permises. Les actions successives de T sur la transition $\text{Ins}_V \longrightarrow 1$ produisent les autres transitions permises.

6.4.3 Comparaison aux autres prédictions théoriques

La possibilité d'avoir des transitions directes isolant-plateau contredit les résultats de [4] obtenus par application de la loi des états correspondants. Dans le cas de l'EHQ entier, la loi des états correspondants, combinée avec des arguments phénoménologiques plausibles, conduit à une règle de sélection pour les transitions : la variation $\Delta\nu$ du facteur de remplissage quand on traverse la frontière séparant deux phases adjacentes doit satisfaire à :

$$\Delta\nu = \pm 1, \quad (6.12)$$

incluant l'isolant associé à $\nu = 0$. On en conclut que toutes les transitions directes isolant-plateau(entier) sont interdites sauf la transition $0 \longrightarrow 1$. Dans le cadre présent, cette règle ne peut être appliquée à la phase isolante $\nu = \frac{1}{0}$ (Ins_V). Cependant, elle reste valide pour toute valeur finie de ν , incluant le cas $\nu = 0$, c'est à dire, l'isolant Ins_H . Alors que la phase isolante Ins_H peut

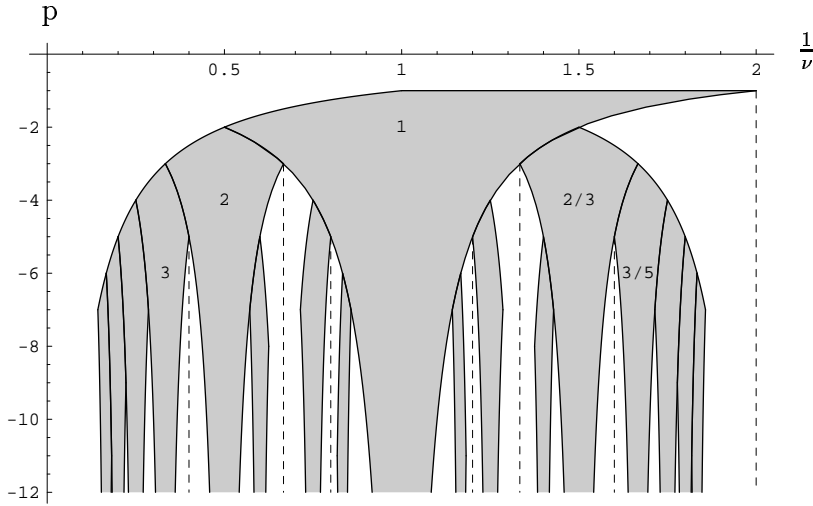


FIG. 6.3: Diagramme des phases global à température nulle dans le plan $(\frac{1}{\nu}, p)$

être considérée comme une phase du type liquide quantique de Hall (avec une conductivité de Hall nulle), la phase isolante Ins_V a une origine différente. Elle est associée aux bandes du diagramme pair-impair comprenant tous les états métalliques supposés posséder un comportement différent de celui des plateaux de Hall. Un diagramme des phases théorique plus ancien a été proposé dans [51]. Ce diagramme a certaines similarités avec celui obtenu dans [4] mais prédit l'apparition de transitions directes d'une phase isolante vers les plateaux entiers. Dans des études numériques récentes [50], un diagramme des phases avec des transitions directes isolant-plateau entier a été obtenu. Sa topologie est en bon accord avec le diagramme des phases construit ici. Pour rendre la comparaison plus facile, on a représenté dans le plan $(\frac{1}{\nu}, N_c)$ le diagramme des phases et celui obtenu dans [50] sur les figures 6.4, 6.3

6.4.4 Discussion de la loi des états correspondants

Le fait que la règle de sélection proposée dans [4] semble être expérimentalement violée n'exclue pas à ce stade $\Gamma_0(2)$ comme candidat possible pour un groupe de symétrie pertinent pour la description de certaines propriétés globales de l'EHQ. On rappelle que ce groupe $\Gamma_0(2)$ est le sous-groupe apparaissant dans la loi des états correspondants de [4]. On peut voir facilement

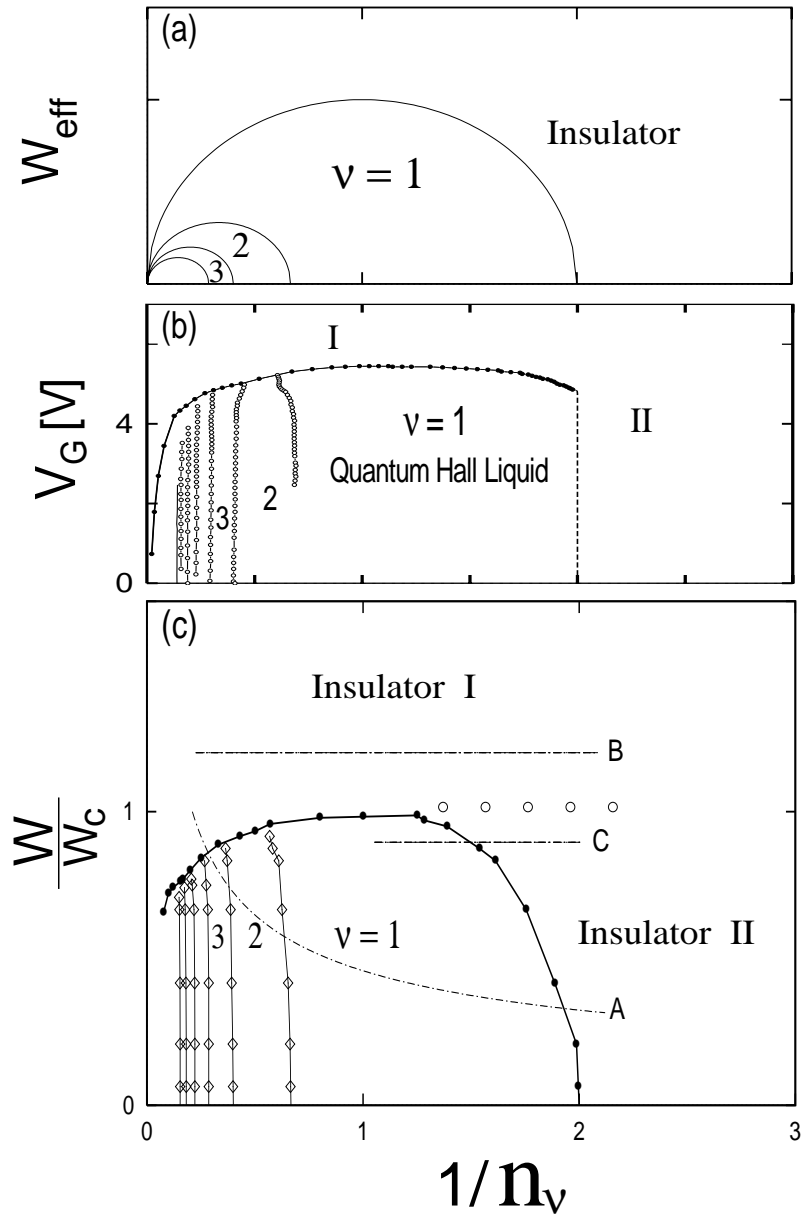


FIG. 6.4: Diagrammes des phases numériques pour l'effet Hall quantique entier tirés de [50].

que ce nouveau diagramme des phases est cohérent avec la symétrie $\Gamma_0(2)$ si la règle de sélection (6.12) (cas entier) est modifiée pour prendre en compte l'isolant Ins_V ($\nu = \infty$). La règle de sélection élargie est :

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \pm 1 && \text{pour } \nu \text{ fini, } \nu \in \mathbb{N} \\ \text{Ins}_V &\longrightarrow 1 && \text{transition permise} \end{aligned} \quad (6.13)$$

A partir de ceci, l'action de $\Gamma_0(2)$ génère toutes les transitions permises du diagramme des phases.

On examine maintenant quel pourrait être le rôle de $\Gamma(2)$. L'action de $\Gamma(2)$ sur les facteurs de remplissage préserve le caractère pair ou impair des numérateurs. Alors, l'analyse théorique qui a donné naissance à la règle de sélection pour $\Gamma_0(2)$ peut être aisément adaptée à $\Gamma(2)$. Par cohérence, on doit modifier la règle de sélection (6.4) :

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \pm 1 && \text{pour } \nu \text{ fini, } \nu \in \mathbb{N} \\ \text{Ins}_V &\longrightarrow 1 && \text{transition permise} \\ \text{Ins}_V &\longrightarrow 2 && \text{transition permise} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Bien que les prédictions obtenues ici semblent être en bon accord avec l'expérience, il n'y a pas d'argument dans le cadre présent permettant de favoriser $\Gamma_0(2)$ ou $\Gamma(2)$ comme le candidat le plus convenable à un groupe de symétrie pertinent pour l'EHQ.

6.4.5 Comparaison avec l'expérience

Expérimentalement, des études plus approfondies sont nécessaires. En particulier, la forme précise des frontières séparant les diverses phases correspondant à des états de Hall semblent être dépendantes de la nature de l'échantillon (et/ou des effets possibles de spin). Les auteurs de [52]a) ont proposé un diagramme des phases obtenu par une analyse des transitions directes observées dans les SI MOSFETs. Les transitions prédites par notre diagramme sont en bon accord avec les résultats reportés dans [52]a). En particulier, des transitions directes de l'isolant vers des plateaux entiers sont observées. Une conclusion similaire concernant ces transitions directes a été obtenues dans d'autres expériences sur des systèmes au GE/SiGe ou des échantillons de type p GaAs/AlGaAs, voir [52]b). Plus récemment, un autre diagramme des phases expérimental pour l'EHQ entier obtenu à partir d'un système bi-dimensionnel de trou confiné dans un puits quantique au Ge/SiGe a été obtenu

dans [52]c). Encore une fois, de telles transitions directes ont été observées.

Une façon possible d'orienter le choix entre les deux sous-groupes $\Gamma_0(2)$ et $\Gamma(2)$ est suggérée par l'analyse qualitative suivante. On suppose d'abord que le désordre est très faible ou nul. On sait que l'importance des degrés de liberté de spin dépend du facteur de Landé g (effectif) des porteurs de charge qui détermine la magnitude de l'énergie Zeeman E_z par rapport à l'énergie cyclotron E_c , pour un facteur de remplissage donné. Pour des échantillons au GaAs tels que ceux étudiés dans [52]b), le rapport E_z/E_c est petit. Typiquement, on a $E_c \sim 20\text{B}$ et $E_z \sim 0.3\text{B}$ (B est en Tesla ; les énergies sont en Kelvin). Pour un tel rapport, les niveaux de Landau s'organisent en doublets bien séparés, chaque doublet contenant deux niveaux proches l'un de l'autre.

Dans cette configuration, l'hypothèse selon laquelle la physique de tout niveau de Landau partiellement rempli est indépendante du nombre de niveaux inférieurs complètement remplis devient douteuse. Ceci suggère que la symétrie correspondant à l'addition d'une unité au niveau de Landau, décrite par l'opérateur $T(z)$ n'est pas valable pour décrire des systèmes avec E_z/E_c petit. Une façon de prendre cette remarque en compte est de remplacer $T(z)$ par $T^2(z)$ qui incrémente de deux unités les niveaux de Landau, ce qui favorise ainsi la symétrie $\Gamma(2)$.

Ceci serait également le cas d'échantillons pour lesquels E_z/E_c est voisin de 0.5, produisant une architecture de doublets espacés dont les deux composantes sont très proches l'une de l'autre. Dans les expériences [52]c), les échantillons étudiés sont tels que $E_z/E_c \sim 0.7$, assez voisin de 0,5 de sorte que la symétrie $T^2(z)$ semble encore appropriée. Pour des échantillons tels que E_z/E_c est proche de 1/4, les niveaux apparaissent avec un espacement égal, proche de $E_c/2$. Dans cette dernière configuration, il est raisonnable de supposer que la symétrie $T(z)$ est favorisée, orientant alors vers $\Gamma_0(2)$.

En présence de désordre, l'analyse qualitative précédente doit être révisée. De façon générale, le désordre produit un élargissement des niveaux de Landau qui forment alors des bandes de Landau. Pour un potentiel de désordre V_D tel que $V_D < E_c$, correspondant à un désordre faible ou à un régime de champ fort, les bandes de Landau, en l'absence d'effet Zeeman, restent bien séparées. Dans ce cas, la prise en compte des effets de spin ne modifie pas la discussion précédente qui reste valable. En régime de fort désordre, l'élar-

gissement des bandes provoque leur chevauchement de sorte que l'analyse précédente n'est plus valable.

6.4.6 Conclusion

On a construit à partir des diagrammes de visibilité un diagramme global des phases à température nulle pour l'EHQ reproduit sur les figures 6.1 et 6.2. De ce diagramme, on a prédit l'existence de deux phases isolantes. Une autre prédiction remarquable est la possibilité d'avoir des transitions directes d'une phase isolante vers toutes phases de Hall avec ν entier aussi bien que rationnel avec $\nu = \frac{1}{(2k+1)}$, ($k \in \mathbb{N}$), qui semble être en accord avec certaines observations expérimentales récentes. On a aussi proposé des règles de sélection pour les transitions plateau-plateau (et plateau-isolant) possibles qui peuvent constituer des prédictions testables expérimentalement.

La présente analyse fournit des informations globales sur la topologie du diagramme des phases et sur les transitions possibles qui peuvent être observées. Toutefois, elle ne permet pas de caractériser finement les divers états de Hall ni d'estimer les différentes échelles d'énergies, énergies d'activation, ce qui nécessiterait d'utiliser un modèle microscopique. Par exemple, les diagrammes de visibilité ne disent rien sur l'effet Hall réentrant dans les deux premiers niveaux de Landau qui a été récemment observé [53] et analysé dans [54]. Par ailleurs, des états fractionnaires correspondant à $\nu = \frac{4}{11}, \frac{5}{13}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}$ ont été récemment observés [55, 56]. Ces états ne peuvent être décrits par l'approche habituelle des fermions composites [57]. Leur interprétation possible en terme de fermions composites de nouvelle génération a été analysé dans [54]. Notre approche basée sur les diagrammes de visibilité ne permet pas de distinguer ces états par rapports aux autres. Ceux-ci apparaissent dans les hiérarchies sans signe distinctif par rapport aux autres. Par exemple, l'état $\nu = \frac{4}{11}$ est un état à dénominateur impair appartenant à la famille associée à l'état $\frac{3}{8}$. On peut le voir facilement (cf. chapitre cinq) en considérant les transformations de $\Gamma(2)$ $G(\sigma) = \frac{3\sigma+2n}{8\sigma+(2k+1)}$, avec $3k+1 = 8n$ sur \mathbb{Z} . Dans le modèle hiérarchique [58], l'état $\frac{4}{11}$ est atteint pour $n = 2$ et $k = 5$.

Chapitre 7

Dualité et théories effectives de type Maxwell-Chern-Simons

Self-duality in Maxwell-Chern-Simons type effective theories.
F. Chandelier, Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet.
Mod. Phys. Lett. B, Vol. 16, No. 14(2002)497

7.1 Dualités

Historiquement, la notion de dualité remonte à Dirac. Il a observé que les équations de Maxwell dans le vide sont symétriques sous l'échange du champ électrique et magnétique. Plus précisément, la symétrie est $E \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow -E$. En présence de sources, et pour maintenir cette symétrie, il a introduit des monopôles magnétiques avec des charges q_m en addition des charges électriques q_e . Il a montré que pour préserver la validité de la théorie quantique, il fallait une condition de quantification de la charge : $q_m q_e = 2\pi n$, n entier. La charge "minimale" satisfait donc à $q_m = \frac{2\pi}{q_e}$. La dualité échange alors q_m et q_e , soit q_e et $\frac{2\pi}{q_e}$. Ainsi, cette dualité échange la constante de couplage et son inverse (à 2π près), donc couplage fort et couplage faible. C'est une des principales raisons pour laquelle on s'intéresse aux symétries de dualité : obtenir à partir de la physique en régime de couplage faible des informations sur la physique en régime de couplage fort.

Une dualité similaire, de type \mathbb{Z}_2 , apparaît dans le modèle bi-dimensionnel d'Ising. Elle échange la température avec une température duale, donc échangeant haute et basse température de façon analogue aux régimes de couplages faible et fort. Cette dualité est un cas particulier de la dualité \mathbb{Z}_p de Kramers-Wannier [59]. Dans le cadre de ce modèle, l'existence seule de cette symétrie de dualité conduit à la détermination de la température critique comme point auto-dual sans avoir à résoudre explicitement le modèle, et sous l'hypothèse de l'existence de deux uniques phases.

Plus généralement, une dualité est une symétrie discrète globale du modèle. En fait, une symétrie d'auto-dualité apparaît dans un modèle quand il existe un ensemble de transformations dans l'espace des paramètres (constantes de couplage) transformant l'action originale en une action ayant la même forme, avec des constantes de couplage transformées sous ces transformations de dualité. La fonction de partition pour le modèle de départ et sa contrepartie (auto-)duale diffèrent formellement seulement par un préfacteur qui n'influence pas les propriétés critiques du modèle et disparaît dans le calcul des fonctions de corrélation. Ces symétries sont utiles et employées pour obtenir des informations non-perturbatives et globales sur le contenu du modèle, sur le diagramme des phases, et sur d'éventuelles transitions. Les transformations de dualité permettent de relier selon les cas deux (Ising, Electrique-Magnétique) ou plusieurs secteurs (phases) ou régime du modèle. On peut également obtenir des informations sur les variétés critiques et sur les transitions permises. En fait, on peut souvent déterminer la topologie du diagramme des phases, la disposition relative des différentes phases.

On trouve des exemples de telles applications dans différents modèles décrivant la physique dans des espaces de dimension variée. Par exemple, Cardy et Rabinovici [60] ont étudié la structure en phases de théories de jauge sur réseaux de type \mathbb{Z}_p en dimension quatre en présence d'un terme θ brisant la symétrie CP . Une structure très riche pour le diagramme des phases a été mise en évidence en fonction de p , θ et des constantes de couplage en utilisant des arguments de dualité. La symétrie de dualité a été identifiée comme étant une symétrie modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$ agissant sur les constantes de couplage. En dimension $(2+1)$, l'"analogue" du terme θ en dimension quatre est le terme de Chern-Simons. Rey et Zee [61] ont montré qu'il existait une relation d'auto-dualité entre les secteurs des charges électriques et des flux magnétiques dans des modèles de Higgs avec terme de Chern-Simons sur un

réseau de type \mathbb{Z}_N en $(2 + 1)$ dimensions. L'auto-dualité de ces modèles a été identifiée à la transformation de dualité correspondant au générateur S du groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$. Ils ont déduit de cette dualité la structure globale du diagramme des phases du modèle.

Par des arguments de dualité, Diamantini, Sodano, et Trugenberger (les deux premières références de [62]) ont exploré la structure non-perturbative de théories de jauge abéliennes sur réseau de type $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ en $(2 + 1)$ dimensions et discuté leur capacité à décrire des systèmes planaires comme les réseaux de jonctions Josephson. Ces modèles effectifs contiennent deux champs de jauge compact $U(1)$ couplés par des interactions de type Chern-Simons brisant la symétrie en $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Ils ont déterminé la structure du diagramme des phases. Leurs résultats semblent en accord avec les transitions de phases quantiques observées dans les réseaux de jonctions Josephson.

7.2 Théories effectives de type Maxwell-Chern-Simons

Pour une grande classe de systèmes planaires de matière condensée, le comportement à longue distance des fluctuations des degrés de liberté pertinents (c'est à dire charges et/ou vortex) autour d'un certain état fondamental peut être décrit à l'aide d'une théorie de jauge effective à $(2 + 1)$ dimensions dans laquelle chaque type de degré de liberté est associé à un champ de jauge [63]. Un des ingrédients élémentaires derrière cette description est qu'un courant conservé en dimension $(2 + 1)$ peut être représenté (localement) comme le rotationnel d'un champ (pseudo-)vectoriel. Les actions qui en résultent comportent des termes de Maxwell et/ou de Chern-Simons pour chaque champ de jauge alors que les termes d'interaction, qui peuvent être respectivement un couplage minimal et un couplage de type Pauli (magnétique) d'un champ de jauge à un courant, peuvent être exprimés respectivement comme des termes mélangés.

Par exemple, dans la description hydrodynamique de Landau des fluctuations de densité dans un superfluide, le Lagrangien effectif s'écrit :

$$\mathcal{L} = \vec{j}^2 - \rho^2 + \dots, \quad (7.1)$$

où les termes en pointillés peuvent être ignorés dans la limite de basse énergie, \vec{j} est le courant et ρ la déviation de densité par rapport à la valeur moyenne. Le premier terme représente la densité d'énergie cinétique et le deuxième la densité d'énergie potentielle. \vec{j} satisfait à $\frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, ou en posant $j^\mu = (\rho, \vec{j})$, $\partial_\mu j^\mu = 0$. Localement, cette équation de conservation est résolue en posant :

$$j^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda. \quad (7.2)$$

Si on substitue (7.2) dans (7.1), on obtient le Lagrangien effectif en terme du champ de jauge a_μ :

$$\mathcal{L}_{\text{superfluide}} = -\frac{1}{2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \dots, \quad (7.3)$$

où $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$.

Dans le cas d'un fluide de Hall de facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{m}$ (m entier impair), la fonction d'onde de Laughlin $\Psi \sim \prod_{i,j} (z_i - z_j)^m$ acquiert une phase $e^{i2\pi m}$ lors de la rotation d'un électron i autour d'un électron j . Ceci est physiquement équivalent à avoir un courant \vec{j} tournant autour d'une densité de charge ρ . Alors Wilczek et Zee [64] ont montré que la prise en compte de cette phase peut être obtenue en ajoutant au Lagrangien d'un superfluide (7.1) un terme de Hopf :

$$S_{\text{Hopf}} = m \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} j_\mu \frac{1}{\partial^2} \partial_\nu j_\lambda. \quad (7.4)$$

En utilisant (7.2), S_{Hopf} prend la forme d'une action de Chern-Simons :

$$S_{\text{Hopf}} = S_{\text{Chern-Simons}} = \frac{m}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda, \quad (7.5)$$

et l'action effective pour l'état de Laughlin avec $\nu = \frac{1}{m}$ s'écrit :

$$\mathcal{S}_{\text{Hall}} = \int d^3x \left[\frac{m}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda - \frac{1}{4g^2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \dots \right], \quad (7.6)$$

où on a restoré le coefficient de couplage pour le terme de Maxwell.

Dans le cas où 2 espèces distinctes coexistent dans le système et sont couplées,

par exemple des charges et des vortex, les arguments développés précédemment conduisent à étudier des actions effectives du type :

$$S = \int dx \left\{ -\frac{1}{4e^2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu a^\rho + \frac{\kappa}{2\pi} a_\mu J^\mu - \frac{\delta}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} f^{\mu\nu} J^\rho - \frac{1}{2g^2} J_\mu J^\mu \right\}. \quad (7.7)$$

Le courant conservé, par exemple associé aux vortex, peut être écrit localement comme :

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu v^\rho = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} w^{\nu\rho}, \quad (7.8)$$

avec $w_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$. Alors (7.7) s'écrit :

$$S = \int dx \left\{ -\frac{1}{4e^2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu a^\rho + \frac{\kappa}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu v^\rho - \frac{\delta}{2} f^{\mu\nu} w_{\mu\nu} - \frac{1}{4g^2} w_{\mu\nu} w^{\mu\nu} \right\}. \quad (7.9)$$

La dimension en terme de masse des paramètres est :

$$[e^2] = [g^2] = 1, \quad [\theta] = [\kappa] = 0, \quad [\delta] = -1. \quad (7.10)$$

Dans (7.9), on reconnaît le terme de couplage minimal usuel (terme en κ) auquel a été ajouté un terme supplémentaire de type couplage magnétique de type Pauli d'intensité δ . Un tel couplage non-minimal a été étudié dans la littérature selon différents points de vue (voir [65, 66] et les deux premières références de [62]). Physiquement, dans un système où a_μ (resp. J_μ (ou v_μ)) est relié à des vortex (resp. charges) se déplaçant dans un plan, le terme en κ décrit la force de Lorentz induite par les vortex sur les charges ou alternativement la force de Magnus induite par les charges sur les vortex. Le terme en δ est un moment magnétique intrinsèque pour la matière. Le dernier terme est une interaction courant-courant.

7.3 Incorporation de caractéristiques tri-dimensionnelles

Les modèles effectifs considérés ci-dessus ne décrivent pas tout à fait une situation réaliste. En fait, le plan dans lequel par exemple les charges et les

vortex sont confinés est plongé dans un espace à trois dimensions. Il est éventuellement soumis à un champ électromagnétique réel à $(3 + 1)$ -dimensions qui donne en particulier naissance à une interaction en $\frac{1}{r}$ entre les charges statiques par exemple et pour lesquelles la constante de couplage du terme de Maxwell correspondant est sans dimension. La classe d'actions (7.7) correspond à un potentiel logarithmique entre les charges (statiques) et dans ce cas, les couplages sont dimensionnés.

Ces actions peuvent être modifiées pour prendre en compte l'origine dimensionnelle $(3 + 1)$ du champ et/ou le caractère en $\frac{1}{r}$ de potentiels plus réalistes. Une façon de faire est d'introduire une non-localité modifiant au moins un des termes de Maxwell dans l'action. On procède à la substitution suivante :

$$-\frac{1}{4e^2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4e^2 \sqrt{\partial^2}} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad (7.11)$$

où la constante de couplage apparaissant dans le membre de droite de (7.11) est sans dimension. Cette procédure a été déjà décrite dans la littérature [67, 68].

Dans le cas statique, la démonstration conduisant à (7.11) est résumé ci-après. On doit trouver la solution des équations de Maxwell tri-dimensionnelles indépendantes du temps pour les deux composantes dans le plan du champ électrique \vec{E}_{in} et la composante perpendiculaire au plan du champ magnétique B_T , en faisant l'hypothèse que les densités de charge et de courant ρ et \vec{J} sont non-nuls seulement dans le plan (composantes indexées par les coordonnées x et y). A partir de cela, on trouve que les deux champs $\vec{E}_{in} = (E_{in}^x, E_{in}^y)$ et B_T (les composantes d'un champ de force $f_{\mu\nu}$ à $(2 + 1)$ dimensions) vérifient les équations du mouvement suivantes venant du membre de droite de (7.11) dans le cas statique :

$$\frac{1}{\sqrt{\partial^2}} \frac{\partial B_T}{\partial x} = J_y, \quad \frac{1}{\sqrt{\partial^2}} \frac{\partial B_T}{\partial y} = -J_x, \quad \frac{1}{\sqrt{\partial^2}} \left(\frac{\partial E_{in}^x}{\partial x} + \frac{\partial E_{in}^y}{\partial y} \right) = \rho, \quad (7.12)$$

où les densités $J_{x,y}$ et ρ représentent les densités restreintes au plan. Cette procédure peut être vue comme une sorte de réduction dimensionnelle. Elle peut être généralisée facilement au cas non statique (7.11).

7.4 Dualité pour une classe d'actions de MCS

On considère la classe de modèles effectifs décrite par l'action suivante :

$$S(e^2, \theta; \pi_4, \pi_6) = \int dx dy \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} \mathcal{L}, \quad (7.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4e^2\sqrt{p^2}} f_{\mu\nu}(x) f^{\mu\nu}(y) + \frac{\theta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu(x) \partial^\nu a^\rho(y) + \\ & \pi_4(p) \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu(x) \partial^\nu v^\rho(y) + \pi_6 w_{\mu\nu}(x) w^{\mu\nu}(y). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Les fonctions de structure $\pi_i(p), i = 4, 6$ paramétrisent les modifications possibles (incluant donc une dépendance possible en moment) apparaissant dans le couplage de a_μ et v_μ qui sont engendrées par l'introduction du terme de Maxwell modifié. Dans la suite, l'action de Maxwell-Chern-Simons (MCS) dans (7.14) (les deux premiers termes) sera notée $S_{MCS}(e^2, \theta)$. On définit la constante de couplage complexe :

$$z = -\frac{1}{e^2} + i\frac{\theta}{2\pi}. \quad (7.15)$$

où \bar{z} (resp. $|z|$) définira la conjugaison complexe usuelle (resp. le module) de z .

On va montrer que la classe de modèles définie par (7.14) possède une symétrie de dualité définie par les transformations de dualité suivantes :

$$\begin{aligned} z & \longrightarrow \frac{1}{\bar{z}} \\ \pi_4(p) & \longrightarrow \frac{\pi_4(p)}{|z|} \\ \pi_6(p) & \longrightarrow \pi_6(p) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Cette symétrie de dualité prend son origine essentiellement dans la partie de l'action de Maxwell-Chern-Simons non-locale et semble être une caractéristique générale de cette classe de modèles. En particulier, la dépendance en moment $\frac{1}{\sqrt{p^2}}$ de la fonction de structure dans le terme de Maxwell est essentielle dans l'apparition de la dualité (7.16).

Les étapes essentielles du calcul sont rappelées ci-après. Il est plus commode de poser pour le moment dans $S_{MCS}(e^2, \theta)$:

$$\pi_1(p) = -\frac{1}{e^2\sqrt{p^2}}, \quad \pi_3(p) = \frac{\theta}{\pi}. \quad (7.17)$$

La fonction de partition construite à partir de (7.13) est donnée par :

$$\mathcal{Z}(\pi_1, \pi_3; \pi_4, \pi_6) = \int [\mathcal{D}v][\mathcal{D}a] e^{i(S(\pi_i) + S_{gf}(a) + S_{gf}(v))}, \quad (7.18)$$

où :

$$S_{gf}(a) + S_{gf}(v) = \int dx \quad \{\lambda(\partial_\mu a^\mu)^2 + \sigma(\partial_\mu v^\mu)^2\}, \quad (7.19)$$

représente un terme de fixage de jauge usuel qui permet de traiter proprement les deux invariances de jauge de S (une pour a_μ et une autre pour v_μ). On n'écrira pas explicitement les termes de fantômes qui peuvent être réintroduits directement sans modifier la discussion qui va suivre ni les conclusions obtenues.

On effectue l'intégration gaussienne sur le champ de jauge a_μ dans (7.19). Pour ce faire, on inverse l'opérateur apparaissant dans la partie quadratique en a_μ donné par :

$$S_{MCS}(\pi_1, \pi_3) + S_{gf}(a) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} a_\mu(-p) K^{\mu\nu}(\pi_1, \pi_3) a_\nu(p), \quad (7.20)$$

avec le noyau $K_{\mu\nu}(\pi_1, \pi_3)$ défini par :

$$K_{\mu\nu}(\pi_1, \pi_3) = \pi_1(p) p^2 \Lambda_{\mu\nu}(p) + i\pi_3(p) \sqrt{p^2} I_{\mu\nu} - \lambda p^2 Q_{\mu\nu}(p), \quad (7.21)$$

où les opérateurs $\Lambda_{\mu\nu}(p)$, $Q_{\mu\nu}(p)$ et $I_{\mu\nu}(p)$ sont définis par :

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}(p) &= \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \\ \Lambda_{\mu\nu}(p) &= g_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}(p) \\ I_{\mu\nu}(p) &= \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p^\rho}{\sqrt{p^2}} \end{aligned} \quad (7.22)$$

L'inverse de $K_{\mu\nu}(\pi_1, \pi_3)$ est :

$$K_{\mu\nu}^{-1}(\pi_1, \pi_3) = \frac{\pi_1}{p^2 \pi_1^2 - \pi_3^2} \Lambda_{\mu\nu}(p) - i \frac{\pi_3}{\sqrt{p^2} (p^2 \pi_1^2 - \pi_3^2)} I_{\mu\nu}(p) - \frac{1}{\lambda p^2} Q_{\mu\nu}(p). \quad (7.23)$$

Le calcul a été fait avec π_1, π_3 quelconques. Mais, au vu de (7.17), l'opérateur (7.23) n'est pas défini quand $p^2 \pi_1^2 - \pi_3^2 = \frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2} = 0$. La contrepartie de ceci pour $\pi_1 = \frac{1}{\epsilon^2}$ et $\pi_3 = \frac{\theta}{\pi}$ constants seraient l'apparition d'un pôle dans

le propagateur de a_μ à $p^2 = \frac{\pi_3^2}{\pi_1^2}$ correspondant à la masse pour le champ a_μ comme on peut s'y attendre dans le cas d'une théorie de MCS locale. La singularité apparaissant à $\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2} = 0$ sera discutée à la fin de ce paragraphe. Pour le moment, on suppose que $\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2} \neq 0$ ($p^2 \pi_1^2 - \pi_3^2 \neq 0$).

En utilisant (7.23), l'intégration sur le champ a_μ conduit à :

$$\mathcal{Z}(\pi_1, \pi_3; \pi_4, \pi_6) = \frac{1}{N(\pi_1, \pi_3)} \int [\mathcal{D}v] e^{i(S_{eff}(\eta_1, \eta_3; v) + S_{gf}(v))}, \quad (7.24)$$

où le préfacteur est donné par :

$$N(\pi_1, \pi_3) = \det^{\frac{1}{2}}(K_{\mu\nu}(\pi_1, -\lambda, \pi_3)). \quad (7.25)$$

L'action effective prend la forme :

$$S_{eff}(\eta_1, \eta_3; v) = \int dx dy \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{4} \eta_1(p) w_{\mu\nu}(x) w^{\mu\nu}(y) + \frac{1}{4} \eta_3(p) \epsilon_{\mu\nu\rho} v^\mu(x) w^{\nu\rho}(y) \right\}, \quad (7.26)$$

avec η_1 et η_3 définies par :

$$\eta_1(p) = \frac{-4\pi_1 \pi_4^2}{\pi_1^2 p^2 - \pi_3^2} + 4\pi_6, \quad \eta_3(p) = \frac{4\pi_3 \pi_4^2}{\pi_1^2 p^2 - \pi_3^2}. \quad (7.27)$$

Le déterminant devant l'intégrale dans (7.24) qui dépend seulement de π_1 et π_3 vient de l'intégration gaussienne et peut être comme d'habitude ignoré lors du calcul des fonctions de corrélation. On définit maintenant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1^D(p) &= \frac{\pi_1}{\pi_1^2 p^2 + \pi_3^2} \\ \pi_3^D(p) &= \frac{\pi_3}{\pi_1^2 p^2 + \pi_3^2} \\ \pi_4^D(p) &= \frac{\pi_4}{\sqrt{\pi_1^2 p^2 + \pi_3^2}} \\ \pi_6^D(p) &= \pi_6(p) \end{aligned} \quad (7.28)$$

L'action de ces transformations sur l'action de départ la transforme en une nouvelle action ayant la même forme. La fonction de partition correspondante est obtenue en effectuant dans (7.24) la substitution :

$$\pi_i(p) \longrightarrow \pi_i^D(p), \quad i = 1, 2, 3, 4, 6. \quad (7.29)$$

Alors toutes les étapes conduisant à (7.24) peuvent être directement reproduites en remplaçant simplement les π_i par leur transformée sous (7.28). On

obtient alors :

$$\mathcal{Z}(\pi_1^D, \pi_3^D; \pi_4^D, \pi_6^D) = \frac{1}{N(\pi_1^D, \pi_3^D)} \int [\mathcal{D}v] e^{i(S_{eff}(\eta_1^D, \eta_3^D; v) + S_{gf}(v))}, \quad (7.30)$$

où le préfacteur $N(\pi_1^D, \pi_3^D) = \det^{\frac{1}{2}}(K_{\mu\nu}(\pi_1^D, -\lambda, \pi_3^D))$ et S_{eff} a une expression similaire à (7.26,7.27) avec :

$$\eta_i^D(p) = \eta_i(\pi_i^D), \quad \eta_3^D(p) = \eta_3(\pi_3^D) \quad i = 1, 3, 4. \quad (7.31)$$

Les η_i sont encore donnés par (7.27). La contribution du terme de fixage de jauge de $K_{\mu\nu}(\pi_1^D, \pi_3^D)$ disparaît aussi de $S_{eff}(\eta_1^D, \eta_3^D; v)$ comme attendu, et le déterminant venant de l'intégration gaussienne peut être encore une fois ignoré dans le calcul des fonctions de corrélation.

Alors, en combinant (7.31) avec (7.28) et (7.27), on observe que :

$$\eta_i^D(p) = \eta_i(\pi_1, \pi_3, \pi_4) \quad i = 1, 3. \quad (7.32)$$

Ainsi, les fonctions de structure apparaissant dans l'action effective pour le champ v_μ sont invariantes sous (7.28). Donc les deux actions apparaissant dans l'exponentielle de (7.24) et de (7.30) coïncident. En utilisant maintenant $\pi_1 = -\frac{1}{e^2\sqrt{p^2}}$ et $\pi_3 = \frac{\theta}{\pi}$, la comparaison de (7.24) et (7.30) conduit à :

$$\mathcal{Z}(z, \bar{z}; \pi_4, \pi_6) = \frac{N(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z})}{N(z, \bar{z})} \mathcal{Z}(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}; \frac{\pi_4}{|z|}, \pi_6), \quad (7.33)$$

avec z définie par (7.15). Cette relation montre que les fonctions de corrélations calculées à partir de $\mathcal{Z}(z, \bar{z}, \pi_4, \pi_6)$ et les fonctions de corrélations correspondantes pour les objets duaux calculées à partir de $\mathcal{Z}(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}, \frac{\pi_4}{|z|}, \pi_6)$ sont les mêmes. Ceci indique que la classe de modèles effectifs donnés par (7.14) a une symétrie de dualité définie par les transformations (7.16).

L'analyse précédente peut être étendue au cas où on ajoute à l'action (7.14) un terme de couplage magnétique de type Pauli ($=\pi_5(p)f_{\mu\nu}(x)w^{\mu\nu}(y)$). Alors, la symétrie de dualité (7.16) est toujours valable avec en plus :

$$\pi_5^D(p) = \frac{\pi_5(p)}{|z|}, \quad (7.34)$$

alors que les fonctions de structure contenues dans l'action effective pour v_μ deviennent :

$$\begin{aligned}\eta'_1 &= \eta_1 + \frac{4\pi_5}{p^2\pi_1^2 - \pi_3^2}(2\pi_3\pi_4 - p^2\pi_1\pi_5) \\ \eta'_3 &= \eta_3 + \frac{4p^2\pi_5}{p^2\pi_1^2 - \pi_3^2}(\pi_3\pi_5 - 2\pi_1\pi_4)\end{aligned}\quad (7.35)$$

On considère maintenant toute action effective donnée par S' . Si, dans une certaine limite, (c'est à dire la limite à grande longueur d'onde), les fonctions de structure pour un terme de Maxwell et un de type Chern-Simons se comportent finalement respectivement comme $\sim \frac{1}{\sqrt{p^2}}$ et \sim constante, alors on peut s'attendre au fait qu'une symétrie de dualité du type discuté ici devient valide dans cette limite.

Pour terminer, on revient sur la singularité qui apparaît dans l'opérateur $K_{\mu\nu}^{-1}$ (7.23). On a vu que le dénominateur de (7.23) s'annule pour :

$$\frac{1}{e^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2} = 0, \quad (7.36)$$

conduisant alors à une effective (7.26) singulière. Pour une action locale de type MCS (π_1 et π_3 constants), on aurait obtenu à la place un pôle dans le propagateur pour a_μ dans (7.23) à $p^2 = \frac{\pi_3^2}{\pi_1^2} = \frac{\theta^2 e^4}{\pi^2}$ correspondant à la masse pour a_μ . Dans le cas présent, l'apparition de la singularité définie par (7.36) reflète la dépendance en moment de π_1 . Cela ne correspond pas à une singularité dans les transformations de dualité qui restent bien définies même quand (7.36) est vérifiée. Une interprétation physique de (7.36) est obtenue en calculant la réponse électromagnétique pour le champ a_μ lorsque l'on couple $S_{MCS}(e^2, \theta)$ à un champ extérieur A_μ :

$$S_{MCS}(e^2, \theta) \longrightarrow S_{MCS}(e^2, \theta) + \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu \partial^\nu A^\rho, \quad (7.37)$$

puis en intégrant sur a_μ et en utilisant (7.23). A partir de la fonction de réponse dans la limite de grande longueur d'onde, on calcule les conductivités σ_{xy} et σ_{xx} qui se comportent comme :

$$\sigma_{xy} \sim \frac{1}{e^2(\frac{1}{e^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2})}, \quad \sigma_{xx} \sim \frac{1}{\pi(\frac{1}{e^4} - \frac{\theta^2}{\pi^2})}, \quad (7.38)$$

et correspondent à un état résistif. Quand (7.36) est satisfaite, alors les deux conductivités deviennent infinies, de sortes que (7.36) devrait être interprétée dans ce cadre comme correspondant à un état supraconducteur.

7.5 Discussion

On a montré l'existence d'une symétrie de dualité de type \mathbb{Z}_2 définie par (7.16) qui apparait dans une classe de modèles effectifs à $(2 + 1)$ -dimensions donnée par (7.13) visant donc à incorporer certains effets $(3 + 1)$ -dimension des systèmes planaires réels. L'apparition de cette dualité provient de l'action non locale de type MCS dans (7.13) qui est obtenue grâce à (7.11). Une dualité de type \mathbb{Z}_2 quelque peu similaire a été découverte dans le modèle de Higgs abélien \mathbb{Z}_N avec un terme de Chern-Simons et un terme de masse nue sur le réseau [61]. Dans ce modèle, la constante de couplage complexe est définie par :

$$\zeta = \frac{\theta}{2\pi} + i \frac{2\pi m}{ng}, \quad (7.39)$$

($\zeta \rightarrow -i\zeta$ et $\theta \rightarrow 2\theta$ dans les conventions utilisées ici), où θ représente encore le couplage de Chern-Simons, g est la constante de couplage dimensionnée pour le terme de Maxwell et m est la masse nue. La transformation de dualité correspondante s'avère être aussi $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ et laisse la fonction de partition pour le modèle invariant, à un préfacteur près comme dans (7.33). Dans ce modèle de Higgs abélien, une symétrie additionnelle approximative donnée par $\zeta \rightarrow \zeta + 1$ apparait dans la limite de faible couplage et de grande masse nue. Dans cette limite, cette transformation supplémentaire combinée avec $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ n'engendre pas comme groupe de symétrie discrète le groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$. Celui-ci serait généré en ajoutant à ces deux transformations, la symétrie par renversement du temps : $\zeta \rightarrow -\bar{\zeta}$.

On note que la dualité mise en évidence ne requiert pas que l'action soit symétrique sous échange de variables et de champs, mais, qu'elle comporte une partie MSC non-locale pour l'un des secteurs avec une dépendance en moment de la fonction de structure similaire à celle pour $S_{MCS}(e^2, \theta)$. La dualité étudiée dans ce travail n'a donc rien à voir avec une "dualité d'échange", de type particule-vortex par exemple.

7.6 Une première illustration

Dans ce paragraphe, on présente à titre d'illustration un modèle spécifique appartenant à la classe générale (7.14) et qui peut être obtenue par une application convenable de (7.9) et (7.11). Il décrit un système de charge

et de vortex massifs dans lequel l'interaction charge-charge se comporte de façon réaliste (en $\sim \frac{1}{r}$). Ce modèle possède la symétrie de dualité évoquée. De plus, il donne naissance sur la ligne "auto-duale" $z = 1$ à une relation entre les résistivités qui calque celle dérivée dans [69] dans le contexte de paires de Cooper et de dynamique de vortex dans les réseaux Josephson ou de transition supraconducteur-isolant dans les films minces.

On part de (7.9), en supposant que a_μ (resp. v_μ) est relié aux vortex (resp. charges) et que $\delta = \frac{\theta}{\kappa g^2}$. L'action résultante décrit un système planaire de charges et vortex en interaction avec des potentiels charge-charge et vortex-vortex de type logarithmiques. L'action effective pour les vortex, obtenue après intégration sur v_μ , décrit des excitations massives de masse M , avec :

$$M^2 = \frac{\kappa^2 g^2 e'^2}{4\pi^2}, \quad (7.40)$$

avec :

$$\frac{1}{e'^2} = \frac{1}{e^2} - \frac{\theta^2}{\kappa^2 g^2} \geq 0. \quad (7.41)$$

Dans le secteur des charges, la réponse électromagnétique dit que la conductivité transverse σ_{xy} est :

$$\sigma_{xy} = \theta \frac{4\pi}{\kappa^2}, \quad (7.42)$$

alors que la conductivité longitudinale s'annule, comme on peut le voir en adaptant les expressions générales (7.38) à la situation présente et en prenant leur limite à grande longueur d'onde. Dans [70], la version euclidienne sur réseau cubique de ce modèle (avec $\lim_{\infty}(f_{\mu\nu}, w_{\mu\nu}) = 0$) auquel on a ajouté de nouvelles variables de liens à valeurs entières assurant la périodicité du terme "mixte" de Chern-Simons coïncide avec un modèle décrivant la physique à température nulle d'un réseau Josephson dans la limite de capacitance nulle (par rapport à la référence), pourvu qu'on effectue les identifications suivantes :

$$e'^2 = 2\kappa E_c, \quad g^2 = 4\pi^2 E_J. \quad (7.43)$$

Dans ces expressions, $\kappa = 2$ pour des paires de Cooper, et E_c (resp. E_J) est l'énergie de capacitance (resp. l'énergie de la jonction Josephson).

On va maintenant modifier (7.9) en utilisant comme ligne directrice les arguments utilisés pour (7.11), pour obtenir une action pour laquelle les charges statiques (paires de Cooper) interagissent grâce à un potentiel en $\sim \frac{1}{r}$ et qui

décrit encore des excitations massives pour les vortex. Ceci peut être obtenu en introduisant une constante de couplage dimensionnée supplémentaire g' ($[g'] = 1$). La motivation est que des charges réelles (paires de Cooper) interagissent véritablement en $\sim \frac{1}{r}$. Une action possible est donné par :

$$S = \int dx dy \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{e^2 \sqrt{p^2}} + \frac{1}{g'^2} \right) f_{\mu\nu}(x) f^{\mu\nu}(y) + \frac{\theta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu(x) \partial^\nu a^\rho(y) + \frac{\kappa}{2\theta} \epsilon_{\mu\nu\rho} a^\mu(x) \partial^\nu v^\rho(y) - \frac{\theta}{2\sqrt{p^2} g^2 \kappa} f_{\mu\nu}(x) w^{\mu\nu}(y) - \frac{1}{4g^2 \sqrt{p^2}} w_{\mu\nu}(x) w^{\mu\nu}(y) \right\}, \quad (7.44)$$

où maintenant tous les paramètres (sauf g') sont sans dimension. A partir de la discussion générale présentée précédemment, il est facile de voir que (7.44) a une symétrie de dualité venant de la partie non-locale de type MCS dans (7.44). Elle est définie par :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{e^2} + i\frac{\theta}{\kappa} \\ z &\longrightarrow \frac{1}{z} \\ k &\longrightarrow \frac{\kappa}{|z|} \\ g'^2 &\longrightarrow |z|^2 g'^2 \end{aligned} \quad (7.45)$$

Quand $g'^2 \rightarrow \infty$, l'action (7.44) possède une symétrie de dualité supplémentaire qui peut être exhibée par une redéfinition des champs dans (7.44) :

$$c_\mu = a_\mu + \frac{\theta}{\kappa} a_\mu. \quad (7.46)$$

Cette dualité est définie, compte tenu de la définition de e'^2 par :

$$c_\mu \longrightarrow a_\mu, \quad e'^2 \longrightarrow g^2. \quad (7.47)$$

Cette deuxième dualité donne un exemple de dualité d'échange dont on a déjà parlé. Elle n'a absolument rien à voir avec la dualité considérée (7.45).

L'action effective pour les vortex obtenue à partir de (7.44) après intégration sur v_μ est donnée par :

$$S_{eff}^V = \int dx dy \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} \left\{ \left[\frac{\gamma(z)}{4\sqrt{p^2}} - \frac{1}{4g'^2} \right] f_{\mu\nu}(x) f^{\mu\nu}(y) \right\}, \quad (7.48)$$

où :

$$\gamma(z) = -\frac{1}{e^2} + \frac{\kappa^2 g^2}{4\pi^2}, \quad (7.49)$$

et peut être identifié comme une conductivité longitudinale pour le secteur des vortex. Le calcul de la réponse électromagnétique pour les charges montre que les conductivités σ_{xx} et σ_{xy} sont toutes les deux non nulles et que (7.44) décrit un état résistif. En utilisant la définition de z , on trouve que les résistivités correspondantes ρ_{xx} et ρ_{xy} satisfont la relation suivante :

$$\rho_{xx}^2(z) + \rho_{xy}^2(z) = \frac{16}{|z|^2 g^4} \gamma^2(z), \quad (7.50)$$

qui se réduit sur la ligne *auto-duale* $|z| = 1$ à :

$$\rho_{xx}^2(1) + \rho_{xy}^2(1) = \frac{16}{g^4} \gamma^2(1) \quad (7.51)$$

Cette relation possède une certaine similarité avec celle dérivée dans [69] dans le contexte des paires de Cooper et de la dynamique des vortex dans les réseaux Josephson ou dans les transitions supraconducteur-isolant dans les films minces. Bien que cette observation suggère que l'ensemble des points auto-duaux $|z| = 1$ peut réellement séparer deux régimes différents pour ce système de charges et de vortex, l'obtention d'une conclusion nette nécessiterait une étude de l'apparition ou non de transition de phase dans ce modèle. Pour ce faire, une description sur le réseau peut donner une représentation plus utile que celle dans le continu. Le point de départ pourrait être une version euclidienne sur le réseau de l'action (7.44), possédant toujours cette symétrie de dualité :

$$S_L = \sum_{\{x\}} \left[\frac{L^3}{2e^2 \sqrt{-\nabla^2}} f_\mu^2 - \frac{L^3 \kappa}{2\pi} a_\mu K_{\mu\nu} c_\nu + \frac{L^3}{2g^2 \sqrt{-\nabla^2}} \left(w_\mu + \frac{\theta}{\kappa} f_\mu \right)^2 + iL\sqrt{\theta} a_\mu W_\mu + iL \frac{\kappa}{\sqrt{\theta}} c_\mu M_\mu \right], \quad (7.52)$$

définie sur un réseau cubique de pas L . Dans (7.51), $\{x\}$ signifie la sommation sur les sites du réseau. Les champs de jauge sont associés aux liens (x, μ) entre les sites x et $x + L\hat{\mu}$ ($\hat{\mu}$ est un vecteur unitaire dans la direction μ). c_μ est défini comme ci-dessus, soit $c_\mu = v_\mu + \frac{\theta}{\kappa} a_\mu$. $K_{\mu\nu}$ est l'opérateur de Chern-Simons sur réseau [71]. f_μ et w_μ sont les champs duaux sur le réseau des

champs de force pour a_μ et v_μ . W_μ et M_μ sont des variables de lien à valeurs entières (les excitations) assurant la périodicité de terme de Chern-Simons mixte [62]. La fonction de partition correspondante \mathcal{Z} , donnée par :

$$\mathcal{Z} = \sum_{M,W \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{D}a][\mathcal{D}c] e^{-S_L}, \quad (7.53)$$

peut être mise sous la forme factorisée :

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \mathcal{Z}_{ex}, \quad (7.54)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{D}a][\mathcal{D}c] e^{-S_L (W=M=0)} \\ \mathcal{Z}_{ex} &= \sum_{M,W \in \mathbb{Z}} e^{-S_{ex}} \end{aligned} \quad (7.55)$$

L'action S_{ex} est donnée par :

$$\begin{aligned} S_{ex} = \sum_{\{x\}} \left[-\frac{g^2 \kappa^2}{2\theta e'^2 \gamma L} M_\mu \frac{\delta^{\mu\nu}}{\sqrt{-\nabla^2}} M_\nu - \frac{\theta}{2\gamma L} W_\mu \frac{\delta^{\mu\nu}}{\sqrt{-\nabla^2}} W_\nu + \right. \\ \left. i \frac{g^2 \kappa^2}{2\pi \gamma L} M_\mu \frac{K^{\mu\nu}}{\nabla^2} W_\nu \right], \end{aligned} \quad (7.56)$$

dont on peut aisément montrer l'invariance sous la symétrie de dualité évoquée tout au long de ce chapitre.

Chapitre 8

Conclusion

Cette thèse présente trois contributions personnelles concernant la physique des systèmes plans qui s'insèrent dans les deux classes d'approches utilisées pour étudier les systèmes plans, et particulièrement, les systèmes quantiques de Hall.

La première contribution est une approche topologique. Elle est centrée sur l'étude d'un problème de Landau dans une géométrie proche des expériences sur l'effet Hall. L'originalité de ce travail est que l'on considère des conditions aux limites générales (conservation de la charge et du courant aux bords) qui sont compatibles avec l'invariance de jauge. Un formalisme mathématique est construit. Par application de la théorie de la réponse linéaire (formule de Kubo), on trouve la quantification entière ou fractionnaire de la conductivité de Hall. Ce calcul rigoureux n'a pu être effectué qu'au prix d'une condition de quantification $NB = 2\pi l, l \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on peut relier exactement la conductivité de Hall à la Classe de Chern d'un fibré. Si cette condition n'est plus valide, on n'a plus exactement ce fibré. On peut alors se demander ce qui se passe pour le calcul exposé. Un travail est en cours et montre qu'on peut étendre ce résultat au cas :

$$\frac{NB}{2\pi} = \frac{l}{k}, \quad (8.1)$$

où k est aussi un entier. Dans ce cas, on montre que la conductivité est encore une fois entière ou fractionnaire. Il serait intéressant mais hors de portée pour le moment d'analyser le calcul lorsque l'on n'est plus à une telle valeur pour NB , mais proche. On pourrait aussi se poser la question d'un modèle

prenant en compte le spin, et de voir si un tel formalisme peut être employé. Des idées dans cette voix sont à l'étude.

La deuxième contribution concerne une approche phénoménologique basée sur les symétries de dualité, et en particulier les symétries modulaires. Elle est relative à l'exploitation des diagrammes de visibilité qui ont déjà donné des résultats en accord avec l'expérience (courbe de résistivité, structure de bandes). L'introduction d'une correspondance physique a permis de construire un diagramme de phase globale de l'EHQ à température nulle. Bien que cette approche puisse paraître limitée ¹, ce diagramme semble être en accord avec les expériences. En particulier, il prédit :

- l'existence de deux phases isolantes pouvant être identifiées à un cristal de Wigner et à un isolant d'Anderson,
- des transitions directes isolant-plateau de Hall entier et fractionnaire.
- des règles de sélection.

Mais, également, il reproduit :

- la classification des états de Hall,
- leur disposition en hiérarchie autour d'un état métallique.

Il serait intéressant de relier ce diagramme à un modèle microscopique. Une première idée serait d'essayer de l'obtenir à partir du modèle présenté dans le chapitre quatre, ce qui est pour le moment hors de portée.

La troisième contribution concerne encore une approche phénoménologique basée sur les symétries de dualité. On a considéré une classe de modèles effectifs à $(2 + 1)$ -dimensions de type Maxwell-Chern-Simons, pour lesquels on a introduit une non-localité. Cette non-localité modélise les effets du champ magnétique réel qui est tri-dimensionnel sur le plan où vivent les particules et/ou vortex que l'on considère. Cette non-localité permet d'obtenir une symétrie de dualité supplémentaire de type \mathbb{Z}_2 :

$$z \longrightarrow \frac{1}{z}, \quad (8.2)$$

¹On ne peut déterminer que la topologie du diagramme, pas la nature des phases ni les frontières de façon absolue. De plus, on s'attend à ce que cette symétrie soit brisée assez rapidement.

où z est la constante de couplage complexe du système formée à partir des constantes du modèle. Une première illustration a été de l'appliquer justement au cas d'un modèle décrivant des charges et des vortex en interaction. Elle a permis de retrouver la loi de Fischer (demi-cercle) pour les composantes du tenseur des résistivités. Un travail qui pourrait être envisagé serait de poursuivre l'étude du modèle sur réseau donné en fin de chapitre sept, et d'en déterminer le diagramme des phases au moyen des symétries de dualité, au regard de cette nouvelle dualité. On peut aussi s'intéresser à d'autres exemples d'application de cette symétrie de dualité : réseau de jonctions Josephson, modèles effectifs de type Ginzburg-Landau.

Bibliographie

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 45(1980) 494
- [2] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. 48(1982) 1559
- [3] R. E. Prange, S. M. Girvin, 'The Quantum Hall Effect', second edition, Springer-Verlag, et les références citées dedans.
- [4] S. Kivelson, D.H. Lee, S.-C. Zang, Phys. Rev. B46(1992)2223
- [5] R.B. Laughlin, Quantized Hall Conductivity in two dimensions, Phys. Rev. B, Vol. 23 n. 10(1981)5632
- [6] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. 49(1982)405
- [7] M. Kohmoto, Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance, Ann. Phys. (N.Y.) 160(1985)355. voir aussi J.E. Avron, R. Seiler, B. Simon, Phys. Rev. Lett. 51(1983)51
- [8] Q. Niu, D.J. Thouless, Y.S. Wu, Quantized Hall Conductance as a topological invariant, Phys Rev. B31(1985)3372, voir aussi Q. Niu, D.J. Thouless, J. Phys. A17(1984)2453
- [9] J.E. Avron, R. Seiler, Quantization of the Hall Conductance for General, Multiparticle Schrödinger Hamiltonians, Phys. Rev. Lett. 54(1985)259
- [10] R.E. Prange, Phys. Rev. B23(1981)5632
- [11] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50(1983)1395
- [12] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. 51(1983)605
- [13] voir F.D.M. Haldane dans la référence [3]
- [14] voir R.B. Laughlin dans la référence [3]
- [15] D. Arovas, J.R. Schrieffer, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 53(1984) 722
- [16] M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A 392(1984)45

- [17] B.I. Halperin, Phys. Rev. Lett. 52(1984)1583
- [18] R. Tao, Y.S. Wu, Phys. Rev. B30(1984)1097
- [19] R. Tao, F.D.M. Haldane, Phys. Rev. B33(1986)1583
- [20] X.G. Wen, Q. Niu, Santa Barbara preprint NSF-ITP-89-151
- [21] W.P. Su, Phys. Rev. B30(1984)1069
- [22] F.D.M. Haldane, D. Rezaya, Phys. Rev. B31(1985)2529
- [23] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. 55(1985)2095
- [24] B.I. Halperin, Quantized Hall conductance, current-carrying states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential, Phys. Rev. B25, Vol.25, No.4(1982)2185
- [25] D.J. Thouless, Y.S. Wu, Phys. Rev. B31(1985)1191
- [26] Q. Niu, D.J. Thouless, Quantum Hall effect with realistic boundary conditions, Phys. Rev. B, Vol. 35, No. 5(1987)2188
- [27] R. Kubo, Statistical Mechanical Theory of Irreversible Process I, J. Phys. Soc. Japan, vol. 12 (1957)570; R. Kubo, The Fluctuation-Dissipation Theorem, Rep. Progr. Phys. Vol.29 (1966)255
- [28] Y. Imry, Introduction to Mesoscopic Physics, Oxford University Press, 1997, et les références à l'intérieur
- [29] J.E. Avron, R. Seiler, B. Simon, Phys. Rev. Lett. 51(1983)51; B. Simon, Phys. Rev. Lett. 51 (1983)2167
- [30] J. Bellisard, A. van Elst and H. Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, Jour. Math. Phys., No. 35 (1994)(5373-5451)
- [31] M. Kohmoto, Ann. Phys. 160(1985)343
- [32] H.-R. Grümmer, H. Narnhofer, W. Thirring, Acta Phys. Austriaca 57(1985)175
- [33] H.-R. Grümmer, Acta Phys. Austriaca 53(1981)113
- [34] On peut trouver du matériel mathématique sur le groupe modulaire dans R.A. Rankin, Modular forms and functions (Cambridge University Press)(1997)
- [35] C.A. Lütken, G.G. Ross, Phys. Rev. B45(1992)11837; C.A. Lütken, G.G. Ross, Phys. Rev. B48(1993)2500; A. Shapere, F. Wilczek, Nucl. Phys. B320(1989)669; C.A. Lütken, Nucl. Phys. B396(1993)670

- [36] A. Shapere, F. Wilczek, Nucl. Phys. B320(1989)669
- [37] B.P. Dolan, J. Phys. A. Math. Gen. 32(1999)L243 ; B.P. Dolan, Nucl. Phys. B554(1999)487 ; B.P. Dolan, Phys. Rev. B62(2000)10278
- [38] Pour une analyse détaillée, on peut regarder C.P. Burgess, B.P. Dolan, Phys. Rev. B63(2001)155309
- [39] Y. Georgelin, J.C. Wallet, Phys. Rev. D50,10(1994)6610
- [40] Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet, J. Phys. A : Math. Gen. 30(1997)5065
- [41] Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet, J. Phys. A : Math. Gen. 33(2000)1
- [42] Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet, J. Phys. A : Math. Gen. 33(2000)39
- [43] Y. Georgelin, T. Masson, J.C. Wallet [41], [42] ; B.P. Dolan [37]
- [44] D.E. Khmel'niskii, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 38(1983)454
- [45] A.M.M. Pruisken, Phys. Rev. B32(1985)2636, A. M. M. Pruisken, Nucl. Phys. B285(1987)61
- [46] S.C Zhang, T.H. Hansson, S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. V62,N1 (1989)82
- [47] C.P. Burgess, B. Dolan, Phys. Rev. B63(2001)155309
- [48] D.H. Cobden, C.H. Barnes, C.J.B. Ford, Quantum Hall fluctuations and evidence for charging in the quantum Hall effect, preprint cond-mat/9902154 (1999)
- [49] A. Karlhede, S.A. Kivelson, S.L. Sondhi, Correlated Electron Systems, V.J. Emery ed. (Singapore, World Scientific)1993
- [50] D.N. Sheng, Z.Y. Weng, Phase Diagram of Integer Quantum Hall Effect, preprint cond-mat/9906261 ; D.N. Sheng, Z.Y. Weng, X.G. Wen, Quantum Hall Effect
- [51] B.J. Halperin, P.A. Lee, N. Read, Phys. Rev. B47(1993)7312
- [52] a) S.V. Kravchenko, W. Mason, J.E. Furneaux, V.M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 75(1995)910 ; S.V. Kravchenko, G.V. Kravchenko, J.E. Furneaux, V.M. Pudalov, M. D'Iorio, Phys. Rev. B50(1994)8039
b) S.H. Song, D. Shakar, D.C. Tsui, Y.H. Xie, D. Monroe, Phys. Rev. Lett. 78 (1997)2200 ; S.C. Dultz, H.W. Jiang, W.J. Schaff, Phys. Rev. B58(1998)R7532

- c) M. Hilke, D. Shahar, S.H. Song, D.C. Tsui, Y.H. Xie, Phys. Rev. B62 (2000)6940
- [53] J.P. Eisenstein, K.B. Cooper, L.N. Pfeiffer, K.W. West, Phys. Rev. Lett. 88(2002)076801
- [54] M.O. Goerbig, P. Lederer, C. Morais Smith, Microscopic Theory of the Reentrant IQHE in the First and Second Excited LLs, preprint cond-mat 0306286
- [55] M.O. Goerbig, P. Lederer, C. Morais Smith, Second Generation of Composite Fermions, preprint cond-mat 0308021
- [56] W. Pan, H.L. Stormer, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, K.W. Baldwin, K.W. West, Phys. Rev. Lett. 90(2003)016801
- [57] J.K. Jain, Phys. Rev. Lett. 63(1989)199, Phys. Rev. B41(1990)7653
- [58] Y. Georgelin, J.C. Wallet, Mod. Phys. Lett. A7(1992)1149
- [59] H.A Kramers, G.H. Wannier, Phys. Rev. V60, 252, (1941)
- [60] J.L. Cardy, Nucl. Phys. B205(1982)17 ; J.L. Cardy, E. Rabinovici, Nucl. Phys. B205(1982)1 ; voir aussi A.Shapere, F. Wilczek, Nucl. Phys. B320 (1989)669
- [61] S.-J. Rey, A. Zee Nuclear Physics B352, 897-921, (1991)
- [62] M.C. Diamantini, P. Sodano, C.A. Trugenberger, Nucl. Phys. B474 (1996)641, Nucl. Phys. B448(1995)505 ; R. Fazio, G. Schön, Phys. Rev. B43 (1991)5307 ; U. Eckern, A. Schmid, Phys. Rev. B39(1989)6441
- [63] J. Frölich, U. Studer, Rev. Mod. Phys. 65(1993)733 et les références dedans ; X.-G. Wen, Int. Journ. Mod. Phys. B6(1992)1711 ; X.-G. Wen, A. Zee, Phys. Rev. B46(1992)2290
- [64] F. Wilczek, A. Zee, Phys. Rev. Lett. 51(1983)2250
- [65] J. Stern, Phys. Lett. B265(1991)119
- [66] M. Torres, Phys. Rev. D46(1992)R2295 ; Y. Georgelin, J.C. Wallet voir [58] [39] ; S.K. Paul, A. Khare, Phys. Rev. Lett. B193(1987)253 ; T. Lee, H. Min, Phys. Rev. D50(1994)7738
- [67] N. Dorey, N.E. Mavromatos, Nuclear Physics B386(1992)614-680 ; N.E. Mavromatos, Nucl. Phys. B. (Proc.Suppl.) 33C(1993)145
- [68] A. Kovner, B. Rosenstein, Phys. Rev. B42(1990)4748 et les références à l'intérieur.

- [69] M.P.A. Fisher, Phys. Rev. Lett. 65(1990)923 ; M.P.A. Fisher, G. Grinstein, S.M. Girvin, Phys. Rev. Lett. 64(1990)587
- [70] voir la première référence de [62]
- [71] J. Frölich, P.A. Marchetti, Comm. Math. Phys. 121(1989)177
- [72] Yong-Shi Wu, Proceedings
- [73] D.J. Thouless, Topological interpretations of quantum Hall conductance, J. Math. Phys., No. 35(1994)5362
- [74] F.D.M. Haldane, Y.S. Wu, Phys. rev. Lett. 55(1985)2887
- [75] R. Tao, Y.S. Wu, Phys. Rev. B31(1985)6859
- [76] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 49(1982)957, Y.S. Wu, Phys. Rev. Lett. 53(1984)111
- [77] F.D.M. Haldane, (non publié)
- [78] N. Read, Phys. Rev. Lett. 62(1989)86
- [79] X.G. Wen, Santa Barbara preprints NSF-ITP-89-107 ; voir aussi X.G. Wen, Phys. Rev. B40(1989)7387
- [80] R.J. Haug, A.H. MacDonald, P. Streda, K. von Klitzing, Phys. Rev. Lett. 61(1988)2797 ; S. Washburn, A.B. Fowler, H. Schmid, D. Kern, Phys. Rev. Lett. 61(1988)2801
- [81] X.G. Wen, Santa Barbara preprint NSF-ITP-89-157 ; C.W.J Beenakker, Phys. Rev. Lett. 64(1990)216 ; A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. 64(1990)220 ; F.D.M. Haldane (communication privée)
- [82] X.G. Wen and Q. Niu, Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces, Phys. Rev. B, Vol.41, No.13(1990)9377
- [83] S.D. Sarma, A. Pinczuk, Perspectives in Quantum Hall Effect (New-York, Wiley)(1997)
- [84] M. Stone, The Quantum Hall Effect (Singapore, World Scientific) (1992)
- [85] S.M. Girvin, A.H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. 58(1987) ; voir aussi S.M. Girvin dans [3] (chap. 10)
- [86] S.-C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B6(1992)25
- [87] Voir A.M. Chang dans [3] ; H.E. Cage également ; L.P. Levy et al., Magnetisation oscillations at fractionnal filling factors, ITP Conference

on Disorder and Interactions in Quantum Hall and Mesoscopic Systems
(1998)

- [88] On peut lire J.E. Mooij, G. Schön, dans Single Charge Tunneling, Vol.294, NATO Advanced Study Institute, Serie B : Physics, H. Grabert, M.H. Devoret eds., Plenum Press, New York 1992
- [89] [4]; C.A. Lütken, G.G. Ross, les deux premiers articles de [35]; C.P. Burguess, C.A. Lütken, Nucl. Phys. B500(1997) 367
- [90] R.L. Willet, J.P. Eisenstein, H.L. Störmer, D.C. Tsui, A.C. Gossard et J.H. English, Phys. Rev. Lett. 61(1988)997