HAL open science

# Autosimilarite dans les Systemes Isometriques par Morceaux

Guillaume Poggiaspalla

## To cite this version:

Guillaume Poggiaspalla. Autosimilarite dans les Systemes Isometriques par Morceaux. Mathématiques [math]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2003. Français. NNT : . tel-00005473

**HAL Id: tel-00005473**

**https://theses.hal.science/tel-00005473**

Submitted on 26 Mar 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université de la Méditerranée**
**Aix-Marseille II**
**Faculté des Sciences de Luminy**

**Thèse de Doctorat**

en vue d'obtenir le grade de docteur de l'Université d'Aix-Marseille II en :

**Physique Mathématique**

# Auto-Similarités dans les Systèmes Isométriques par Morceaux

Présentée et soutenue publiquement par

Guillaume Poggiaspalla

le 23 Septembre 2003 devant le jury composé de :

M. J.-P. Allouche (Rapporteur)
M. P. Ashwin
M. F. Blanchard (Président du jury)
M. F. Durand
M. A. Goetz
M. S. Vaienti (Directeur de thèse)
M. F. Vivaldi (Rapporteur)

*Je dédie cette thèse à mon grand père,*
*qui ne pourra jamais la lire.*

# Remerciements

Les personnes que j'ai à remercier sont nombreuses, si j'en oublie j'espère qu'elles me pardonneront. Parmi les " mentors" il y a :
M. Jean-Paul Allouche que je remercie d'avoir bien voulu être mon rapporteur.
M. Arek Goetz, ami et collaborateur inventif sans qui cette thèse serait bien moins que ce qu'elle est.
M. Pascal Hubert, dont les encouragements et les discussions me furent hautement profitables.
M. Sandro Vaienti, maître de thèse compétent, efficace, présent, scientifique émérite mais aussi, et surtout, "quelqu'un de bien".
M. Franco Vivaldi, que je remercie chaleureusement pour sa collaboration et pour avoir accepté d'être mon rapporteur.
J'ai eu la chance de recevoir également l'aide de bien d'autres, pêle-mêle :
M. Peter Ashwin, M. François Blanchard, M. Michael Boshernitzan, M. Henk Bruin, M. Fabien Durand, M. Sébastien Ferenczi, M. André Lambert, Mme Brigitte Mossé.
J'adresse un remerciement tout particulier à M. le professeur James T. Smith et à sa femme, Helen, pour leur hospitalité et leur gentillesse.
Parmi les " collègues", mais surtout amis sans lesquels une thèse, c'est quand même assez triste il faut bien le dire, il y a (par ordre alphabétique) :
Vesna Cuplov, Christophe Dobrovolny, Nicolas Garron, David Greynat, Pierre Guiraud, Sébastien Gurrieri, Sébastien Jeager, Olivier Lenoble, Jessica Levêque, Jérome Nicolas, Stéphane Olivier.
Enfin, je remercie celle qui se reconnaîtra et sans laquelle ma vie serait plus triste que cent thèses sans amis.

# Table des matières


**1 Introduction** **7**

**2 Généralités** **11**
2.1 Systèmes Dynamiques . . . 11
2.1.1 Introduction . . . 11
2.1.2 Définitions . . . 11
2.1.3 Mesures Invariantes et Ergodicité . . . 14
2.2 Systèmes Dynamiques Symboliques . . . 16
2.2.1 Espaces Symboliques, Codage et Dynamique Symbolique . . . 16
2.2.2 Systèmes Définis par des Substitutions . . . 19
2.2.3 Odomètres . . . 21
2.2.4 Diagrammes de Bratteli . . . 21
2.3 Géométrie Fractale . . . 23
2.3.1 Introduction . . . 23
2.3.2 Mesure et Dimension de Hausdorff . . . 24
2.3.3 Ensembles Auto-Similaires : Les attracteurs d'I.F.S . . . 26
2.3.4 Constructions Graphe-Dirigées . . . 28

**3 Les Isométries par Morceaux** **33**
3.1 Définition et Généralités . . . 33
3.1.1 Résultats Généraux . . . 33
3.1.2 Convexité . . . 37
3.2 Les Translations de l'Intervalle . . . 38
3.2.1 Définitions . . . 38
3.2.2 Une Rotation du Cercle . . . 39
3.3 Rotations sur le Tore . . . 40
3.3.1 Définitions . . . 40
3.3.2 Cas $\theta = \pi/4$ . . . 44
3.4 Rotations Discrétisées . . . 48
3.4.1 Conjugaison . . . 48
3.4.2 Cas Quadratique . . . 49
3.4.3 Remarques . . . 50
3.4.4 Cas de Degrés Supérieurs . . . 51
3.4.5 Exemple . . . 52

**4 Étude de Cas : Tours de Triangles Isocèles** **55**
4.1 Exemple Introductif . . . 55
4.1.1 Cas à Deux Triangles . . . 55
4.1.2 Généralisation . . . 56

4.2 Cas à Trois Triangles . . . 57
4.2.1 Définition . . . 57
4.2.2 Renormalisation et Points Périodiques . . . 58
4.2.3 Temps de Retour Non-Uniformément Bornés . . . 62
4.3 Remarques . . . 65
4.3.1 Autre Exemple d'Application avec Temps de Retour Non-Bornés . . . 65
4.3.2 Remarques sur l'Ensemble Exceptionnel . . . 66
4.3.3 Généralisation à une Famille Continue . . . 69

**5 Généralisation 73**
5.1 Hypothèses Générales de Renormalisation . . . 73
5.1.1 Introduction . . . 73
5.1.2 Préambule . . . 73
5.1.3 Résultats Préliminaires et Dynamique Périodique . . . 75
5.2 Étude de la Dynamique sur l'Ensemble Exceptionnel . . . 78
5.2.1 Codage "géométrique" . . . 89
5.2.2 Mesure et Dimension de Hausdorff . . . 94
5.2.3 Lien avec les I.F.S Graphe-Dirigés . . . 103
5.2.4 Codage "dynamique" . . . 104
5.3 Théorème . . . 107

**6 Applications 111**
6.1 Exemples Classiques . . . 111
6.1.1 Introduction . . . 111
6.1.2 L'Exemple du Chapitre 4 . . . 111
6.1.3 L'Exemple de la Section 3.3.1 . . . 113
6.2 Décomposition de la Dynamique de la Tour à Trois Triangles . . . 114
6.2.1 Outils Informatiques . . . 114
6.2.2 Premier Retour dans $P_0 \cup P_1$ . . . 114
6.2.3 Premier Retour dans $A_1^U$ . . . 116
6.2.4 Premier Retour dans $A_0^H$ . . . 118
6.2.5 Une Infinité de Composantes Ergodiques . . . 120

**7 Conclusion 127**

# Chapitre 1

# Introduction

L'étude des systèmes dynamiques, c'est à dire des systèmes qui évoluent en fonction d'un paramètre temporel, fut d'abord une préoccupation physique très reliée à l'étude des équations différentielles. On pensa pendant longtemps que les solutions ne pouvaient être qu'assez régulières. Le mouvement des astres, par exemple, semblait être stable et docile. C'était l'époque où tout paraissait prévisible du moment qu'on disposait de moyens calculatoires adéquats.

Pourtant certains problèmes simples à formuler s'avéraient déjà remarquablement coriaces ; l'exemple historique le plus connu est celui du problème des trois corps en intéraction gravitationnelle. On connaissait déjà depuis longtemps la solution du problème où seulement deux corps sont en scène mais celle incluant le troisième acteur restait hors de porté depuis suffisamment longtemps pour que l'on mette sa tête à prix. Ce fut une grande surprise quand H. Poincaré présenta le résultat qui lui valut la récompense du roi de Suède, car non content de ne pas apporter la solution tant convoitée, il apporta la preuve que personne ne l'aurait jamais. Poincaré, devint alors le père fondateur de la théorie moderne des systèmes dynamiques, lui qui était de toutes façons déjà le plus grand mathématicien de son époque. Il montra en effet, en utilisant une section des trajectoires qui porte désormais son nom, que celles-ci devaient se répartir de manière infiniment enchevêtrée et irrégulière, interdisant toute prévision précise de la position des corps à long terme.

Ce fut le premier coup porté au monde prévisible selon Laplace et ce ne fut pas le dernier. Plus tard, H. Lorenz mit en évidence un système différentiel simple mais non linéaire, sensé modéliser l'évolution d'une masse d'air, qui exhibe une caractéristique clef de ce qui a été popularisé sous le nom de système "chaotique" : la dépendance sensible aux conditions initiales, poétiquement baptisée "effet papillon".

Depuis, le domaine des systèmes dynamiques est devenu une branche des mathématiques à part entière. Elle est extrêmement vaste et ne contient bien entendu pas que les systèmes évoqués plus haut, ceux qui suscitent notre intérêt dans cette thèse ne sont pas "chaotiques". L'adjectif "chaotique" n'étant d'ailleurs pas une notion bien définie en théorie des systèmes dynamiques.

On s'intéresse ici à ce que l'on appellera les systèmes isométriques par morceaux ou encore "isométries par morceaux". Ce ne sont pas des systèmes très nouveaux, leurs versions unidimensionnelles sont les translations de l'intervalle qui furent étudiées par A. Katok dans [27], puis par bien d'autres (cf. notamment [7], [8], [9], [10], [28], [29], [41], [48], [19], [21], [52], [53], [54], [55], [56]).

La littérature concernant les cas d'isométries par morceaux en dimensions supérieures est plus rare et plus récente. Il y a beaucoup de propriétés que ces systèmes n'ont pas en général :

- Ils ne sont ni dilatants ni contractants et ne présentent pas de dépendance sensible aux conditions initiales au sens strict. En particulier, on n'a pas de divergence exponentielle des orbites.
- Ils sont d'entropie nulle. En particulier, on n'a pas de croissance exponentielle du nombre de points périodiques.
- Ils laissent la mesure de Lebesgue invariante mais ne sont pas ergodiques par rapport à elle.
- Ils sont discontinus, en général sur un ensemble non-dénombrable de points.

Néanmoins, ces systèmes apparaissent naturellement dans de nombreux domaines comme les billards duaux, (cf. [51]), les systèmes hamiltoniens, (cf. [49]), les rotations discrétisées (cf. [37], [38], [32]), et même en ingénierie où ils modélisent certains types de filtres digitaux (cf. [13], [14]).
De plus, l'étude précise de certains exemples particuliers (cf. [1], [23], [24], [25], [33], [42]) ainsi que de leurs propriétés mathématiques plus générales (cf. [2], [3], [12], [43]) montre bien à quel point leurs dynamiques peuvent êtres riches.
Parce que ces applications n'ont pas les propriétés mentionnées plus haut, leur étude se révèle ardue. L'ergodicité par exemple est paradoxalement une propriété simplificatrice car même si les orbites sont inextricables, elles suivent des règles d'ordre statistique qui permettent au moins leur description globale. Ici, même si les orbites sont plus structurées, l'absence d'ergodicité nous force à leur étude directe, "individuelle" en quelque sorte, ce qui peut être très difficile.

L'espace des phases d'un système isométrique par morceaux se scinde habituellement en trois ensembles invariants principaux : l'ensemble des points de discontinuité de l'application ou d'une de ses itérées, l'ensemble dérivé de ce dernier qui contient des points apériodiques et l'ensemble des points périodiques ou pseudo-périodiques regroupés en "cellules" périodiques.
Ce dernier ensemble est la plupart du temps très structuré. Dans certain cas, on peut même mettre en évidence une auto-similarité dans cette structure qui permet de la décrire complètement ou partiellement. Cependant ce n'est pas toujours possible et découvrir ce qui conditionne cet ordre en général reste une question ouverte.
Même dans les exemples où cet ensemble est de mesure pleine, les points apériodiques et les lignes de discontinuité ont une géométrie hautement non-triviale ; on a mis en évidence des ensembles fractals, (des attracteurs d'I.F.S, précisément).

De plus, les isométries par morceaux possèdent un codage canonique et on peut les étudier du point de vue de la dynamique symbolique. Ce sont alors des systèmes dit "de faible complexité", c'est à dire que la croissance du nombre de mots finis admissibles est sous-exponentielle par rapport à la longueurs des mots. On a montré dans certain cas que le langage pouvait être mis en relation avec des systèmes substitutifs uni-ergodiques. L'ensemble des points apériodiques supporte ainsi une dynamique uni-ergodique par rapport à une mesure invariante concentrée sur un fractal invariant.

Tous ces phénomènes ont été observés dans des cas particuliers suffisament simples pour être compris en détail et il est difficile de dire ce qu'il en est dans le cas général, les questions ouvertes restant nombreuses.

Dans cette thèse, on essaiera d'apporter une parcelle de généralité aux résultats sus-cités. Elle sera organisée comme suit :
Les chapitres 2 et 3 introduiront les concepts fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques en général et des isométries par morceaux en particulier. Le chapitre 4 présente une étude d'un cas qui généralise le système étudié dans [24].

Ce nouvel exemple de rotation par morceaux exhibe des propriétés intéressantes car il admet une infinité de points périodiques hiérarchisés par une structure auto-similaire. L'application de premier retour dans un de ses atomes est une isométrie par morceaux définie sur une partition auto-similaire comportant une infinité d'atomes dont le temps de retour croît exponentiellement. L'auto-similarité observée n'est que partielle, elle ne décrit pas toute la dynamique, mais elle est préservée quand on varie le paramètre principal (l'angle de rotation) de manière continue dans un intervalle. Cela permet d'identifier les conditions sous lesquelles une auto-similarité, même partielle, est possible.
On ira donc du particulier au général dans le chapitre 5. On y décrira les hypothèses fondamentales sous lesquelles on a auto-similarité partielle et on en dégagera plusieurs conséquences intéréssantes. En particulier, outre l'existence éventuelle de familles de cellules périodiques descriptibles par un schéma substitutif, on montrera qu'il doit exister un ensemble non vide de points apériodiques. Cet ensemble est fractal et peut être construit comme un attracteur d'I.F.S graphe-dirigé, ce qui signifie grossièrement qu'il est auto-similaire "par morceaux" plutôt que strictement auto-similaire.

On montrera que la structure géométrique amène tout naturellement à coder la dynamique par une application de Vershik sur un diagramme de Bratteli stationnaire. Laquelle, sous des conditions de primitivité, est uni-ergodique. Cette unique mesure invariante est étroitement reliée à la mesure de Hausdorff ; elle nous permet d'ailleurs de calculer sa dimension.
Ce codage particulier peut être "traduit" dans le langage standard de l'application. Cette dynamique symbolique-ci est alors un système substitutif.
On montrera également que tous les cas particuliers étudiés jusqu'alors peuvent être considérés dans ce cadre et que les principaux résultats les concernant en découlent.
Dans le chapitre 6, on considérera à nouveau l'exemple du chapitre 4. On l'attaquera avec d'autres armes, puisqu'on fera cette fois appel à des programmes informatiques qui, entre autres, automatisent la recherche des applications induites. Grâce à ces programmes, on mettra en évidence plusieurs schémas auto-similaires distincts et on montrera de plus qu'ils se répètent à une infinité d'échelles. En particulier, cela démontrera que l'application possède une infinité de composantes ergodiques.

# Chapitre 2

# Généralités

## 2.1 Systèmes Dynamiques

### 2.1.1 Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est devenue au fil des années une branche extrêmement vaste des mathématiques. Si à l'origine elle a été motivée par des considérations physiques, puisqu'elle concerne l'étude des "systèmes" évoluant avec le temps, elle est devenue aujourd'hui une théorie, et même un ensemble de théories formalisées et intéressant autant les mathématiques dites "pures" que les mathématiques appliquées. Ce premier chapitre a pour but d'introduire les concepts fondamentaux qui nous seront utiles dans cette thèse et seulement ceux-là. On ne prétendra pas faire une véritable introduction aux systèmes dynamiques et on ne donnera presque jamais de preuve des résultats énoncés ; les lecteurs intéressés pourront se référer à l'abondante littérature sur le sujet.

### 2.1.2 Définitions

Dans toute cette thèse on ne sera intéressé que par les systèmes dynamiques à temps *discret*.

**Définition 1** *Un système dynamique à temps discret est un couple $(X, T)$, où $X$ est un espace que l'on supposera métrique et $T$ une application de $X$ dans lui-même.*

L'ensemble $X$ sera appelé *l'espace des phases* et $T$ la *dynamique* sur $X$. L'évolution du système sera alors matérialisée par les itérations de $T$.

**Définition 2** *Soit $x \in X$ un point de l'espace des phases, on définit l'orbite de $x$ comme l'ensemble :*

$$O(x) = \{T^n x, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

**Définition 3** *Un point $x \in X$ tel que $Tx = x$ est appelé un point fixe de $T$. Si $x$ est tel que $T^N x = x$ alors $x$ est appelé un point périodique de $T$ de période $N$, $N \in \mathbb{N}$.*

**Définition 4** *Un ensemble $A \subset X$ est dit $T$-invariant si $TA \subset A$.*

Une orbite est donc toujours un ensemble invariant. On aura besoin en théorie ergodique de s'assurer que $TA = A$. Dans ce contexte, (que l'on présentera en détail plus loin), ce sera la signification que prendra l'expression "ensemble invariant". Les ensembles invariants sont importants puisqu'ils permettent de décomposer la dynamique en ne la considérant que sur chaque ensemble invariant indépendamment.

**Définition 5** *S'il existe $x \in X$ tel que $O(x)$ soit dense, le système $(X, T)$ est dit transitif. Si tout point $x \in X$ a une orbite dense, le système est dit minimal.*

**Exemple :** On choisit $Tx = x + \alpha \bmod 1$ et $X = [0, 1[$. Le système peut être vu une rotation si on le considère comme l'application $Tx = x + \alpha$ définie sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ce dernier ensemble peut être considéré comme un tore uni-dimensionel, c'est-à-dire un cercle. Cela vaut à cette application l'appelation fréquente de "rotation du cercle". Ses propriétés vont dépendre du paramètre $\alpha$. Il est facile de voir que si $\alpha$ est rationnel, tout les points sont périodiques (si $\alpha = p/q$, $T^q x = x$). Par contre si $\alpha$ est irrationnel, alors l'orbite de tout point sera dense dans $X$ et le système sera minimal. La preuve est facile et peut être trouvée dans [26].

Deux systèmes dynamiques différents peuvent être "en substance" les mêmes. On a plusieurs notions d'isomorphisme selon les critères de comparaison que l'on choisit. En voici une :

**Définition 6** *Deux systèmes dynamiques $(X, f)$ et $(Y, g)$ sont dit topologiquement conjugués si et seulement si il existe un homéomorphisme $h$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{f} & & X \\ h & \downarrow & & h & \downarrow \\ & Y & \xrightarrow{g} & & Y \end{array}$$

*L'application $h$ est appelée le facteur topologique de $f$ et $g$. Si $h$ n'est pas inversible on dit que l'on a une semi-conjugaison.*

**Exemple :** L'application $h(x) = e^{2i\pi x}$ est un homéomorphisme du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur le cercle unité complexe tel que

$$h(x + \alpha) = e^{2i\pi\alpha} h(x)$$

donc $h$ conjugue le système de l'exemple précédent avec le système $z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z$ sur le cercle unité.

La conjugaison topologique conserve toutes les propriétés du système qui sont d'ordre topologique comme la transitivité ou la minimalité. En particulier il existe un invariant topologique très important, l'entropie topologique. Il y a plusieurs manières de la définir.

**Définition 7** *Une famille finie disjointe d'ensembles $\mathcal{A}$ est appelée une partition de $X$ si*

$$X \subset \bigcup_{P \in \mathcal{A}} P. \tag{2.1}$$

*Chaque élément de $\mathcal{P}$ est appelé un atome. Une partition est dite ouverte si ses atomes sont ouverts.*

Une famille d'ensembles vérifiant la relation (2.1) mais dont les membres ne sont pas nécéssairement disjoints est appelée un *recouvrement*.

**Définition 8** *Étant donnés deux recouvrements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on définit leur raffinement :*

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B, \quad A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}, \quad A \cap B \neq \emptyset\}.$$

*De même, étant donnée une famille de $k$ recouvrements ouverts $\mathcal{P}^r$, $(r = 1, \ldots, k)$ de $X$, chacun de cardinal $N_r$, leur raffinement est :*

$$\bigvee_{r=1}^{k} \mathcal{P}^r = \left\{P_1 \cap \cdots \cap P_k, \quad P_j \in \mathcal{P}^j, \quad j = 1, \ldots, k\right\}.$$

Ces notions nous permettent de définir l'entropie d'un recouvrement et celle d'une dynamique par rapport à un recouvrement particulier :

**Définition 9** *Étant donné $\mathcal{P}$ un recouvrement ouvert de $X$, si $N(\mathcal{P})$ est le nombre minimum d'atomes d'un sous-recouvrement de $\mathcal{P}$ qui soit toujours néanmoins un recouvrement de $X$, alors, l'entropie du recouvrement $\mathcal{P}$ est*

$$H(\mathcal{P}) = \log N(\mathcal{P}).$$

*Si $T$ est une application continue de $X$ dans lui-même alors l'entropie de $T$ par rapport à $\mathcal{P}$ est :*

$$h(T, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=1}^{n} T^{-k}\mathcal{P}\right).$$

L'entropie de $T$ par rapport $\mathcal{P}$ est donc le rythme de croissance exponentiel du cardinal du raffinement dynamique $\bigvee_{k=1}^{n} T^{-k}\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$. On a finalement la définition :

**Définition 10** *L'entropie topologique de $(X, T)$, $T$ étant continue, est :*

$$h(T) = \sup\left\{h(T, \mathcal{P}), \quad \text{où } \mathcal{P} \text{ est un recouvrement fini de } X\right\}.$$

Le calcul effectif de l'entropie par cette méthode n'est pas toujours aisé. On peut néanmoins remplacer la prise du suprémum en considérant des recouvrements particuliers :

**Définition 11** *On appelle un recouvrement $\mathcal{P}$ un générateur pour $T$ continue si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \text{tel que } \forall n > N, \quad \bigvee_{k=1}^{n} T^{-k}\mathcal{P} \text{ consiste en des ensembles de diamètres au plus } \epsilon.$$

On a alors les résultats suivants :

**Théorème 1** *Si un recouvrement $\mathcal{P}$ est un générateur pour une application continue $T$, alors $h(T) = h(T, \mathcal{P})$.*

**Théorème 2** *Si $(X, T)$ et $(Y, S)$ sont semi-conjugués alors $h(T) \geq h(S)$. De plus, si on a conjugaison, $h(T) = h(S)$.*

Il existe des définitions alternatives de l'entropie qui sont parfois d'emploi plus aisé dans les calculs pratiques. Elles permettraient par exemple de montrer plus facilement que l'entropie de notre exemple $Tx = x + \alpha \bmod 1$ est nulle.
On définit d'abord :

**Définition 12** *Étant donnée une application continue $T$ sur un espace métrique compact $X$ :*

- *Pour $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$ un ensemble fini $S \subset X$ est un ensemble $(n, \epsilon)$-séparé si pour deux points distincts $x, y \in S$ on a $d(T^k x, T^k y) \geq \epsilon$ pour un certain rang $0 \leq k \leq n$. On note $s(n, \epsilon)$ le plus grand cardinal d'un ensemble $(n, \epsilon)$-séparé.*
- *Pour $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$ un ensemble fini $R \subset X$ est un ensemble $(n, \epsilon)$-générateur si $\forall x \in X$, $\exists y \in R$ tel que $d(T^k x, T^k y) < \epsilon$ pour tout $0 \leq k \leq n$. On note $r(n, \epsilon)$ le plus petit cardinal d'un ensemble $(n, \epsilon)$-générateur.*

On a alors :

**Proposition 1** *L'entropie topologique de $T$ est donnée par :*

$$h(T) = \lim_{\epsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon)$$

$$h(T) = \lim_{\epsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon).$$

On trouvera les preuves de ces résultats dans [26], [46] et bien d'autres.

### 2.1.3 Mesures Invariantes et Ergodicité

Jusqu'à maintenant, on a considéré $X$ comme un espace topologique. Si on désire avoir d'autres outils pour quantifier les propriétés des systèmes dynamiques, en particulier faire des statistiques sur les orbites, on est amené tout naturellement à considérer des espaces de phases mesurés ou probabilisés. Cependant, pour avoir un intérêt, la mesure ne doit pas changer en fonction des itérations de la dynamique ; la mesure de $X$ et de $TX$ doivent être les mêmes.

**Définition 13** *Soit $(X, \mu)$ un espace mesuré (par rapport à une tribu que l'on n'explicitera que si nécessaire) et $T$ une application mesurable, on dit que $\mu$ est $T$-invariante si et seulement si $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout $A \subset X$.*

**Exemple :** Pour l'application $x + \alpha \bmod 1$ sur $[0, 1[$, il est clair que la mesure de Lebesgue est invariante, puisqu'on a affaire à une isométrie.
Bien sûr, habituellement, trouver des mesures invariantes pour un système donné n'est pas aussi facile. Pourtant on a le théorème suivant :

**Théorème 3** *(Krylov-Bogolubov) Si $X$ est un espace métrique compact et $T$ une application continue, alors il existe au moins une mesure de probabilité $T$-invariante.*

Un des théorèmes les plus célèbres est le fameux théorème de Poincaré :

**Théorème 4** *(Poincaré) Si $X$ est un espace mesurable compact, $T$ une application mesurable de $X$ dans lui-même et $\mu$ une mesure $T$-invariante, alors pour tout $A \subset X$ mesurable, $\mu$-presque tous les points de $A$ reviendront dans $A$ une infinité de fois. Autrement dit :*

$$\mu(\Big\{x \in A, \quad \{T^n x\}_{n \geq 0} \subset X \setminus A\Big\}) = 0.$$

Parmi les mesures invariantes, il en est qui sont d'une importance fondamentale :

**Définition 14** *Une mesure $\mu$ $T$-invariante est dite ergodique si et seulement si :*

$$A \subset X \text{ est un ensemble } T\text{-invariant implique que } \mu(A) = 1 \text{ ou bien } \mu(A) = 0.$$

*Si $\mu$ est la seule mesure invariante ergodique pour le système, celui-ci sera dit uniquement ergodique.*

Du point de vue de cette mesure, il n'y a pas d'ensemble invariant "intéressant" autre que l'espace lui-même. C'est une notion d'indécomposabilité de la dynamique puisqu'il n'y a pas d'ensemble non négligeable auquel on puisse restreindre l'étude. L'ergodicité peut se formuler à l'aide des fonctions $T$-invariantes (i.e. les fonctions $f$ telles que $f \circ T = f$). Alternativement, on a qu'un système mesuré $(X, T, \mu)$ par une mesure invariante est ergodique si et seulement si les seules fonctions invariantes sont constantes $\mu$-presque partout. Un résultat fondamental de théorie ergodique est du à G.D. Birkhoff :

**Théorème 5** *(Birkhoff) Soit $(T, X)$ un espace probabilisé par une mesure $\mu$ $T$-invariante, et $f \in L^1(X, \mu)$, alors la fonction*

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x)$$

*existe presque partout et est $T$-invariante. De plus :*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X f d\mu.$$

Cette fonction $\varphi$ doit être vue comme une moyenne temporelle d'une "observable" $f$ sur l'espace des phases. Si la mesure considérée est ergodique, alors $\varphi$ devra être presque partout constante et égale à son intégrale puisque l'espace est probabilisé. On a ainsi le corollaire suivant dans le cas ergodique :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) = \int_X f d\mu.$$

Alors la moyenne temporelle de l'observable est désormais une moyenne spatiale, ce qui autorise à faire des calculs d'ordre statistique. Dans le cas uni-ergodique on a même la convergence pour tout $x$ si l'observable est continue. Précisément :

**Théorème 6** *Si $(X, T, \mu)$ est uni-ergodique, alors pour toute fonction continue $f$ la moyenne temporelle converge uniformément.*

On peut aussi utiliser le théorème "à l'envers" :

**Théorème 7** *Si la moyenne temporelle $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x)$ converge uniformément vers une constante pour toute fonction $f \in \Phi$ où $\Phi$ est dense dans l'espace des fonctions continues sur $X$, alors $(X, T)$ est uni-ergodique.*

**Exemple :** Notre application familière $Tx = x + \alpha \bmod 1$ est uni-ergodique sur $[0, 1[$ si $\alpha$ est irrationnel, sa seule mesure ergodique est la mesure de Lebesgue, c'est le théorème de Kronecker-Weyl. On le prouve en montrant que le théorème de Birkhoff s'applique pour les polynômes trigonométriques qui forment une base des fonctions continues. Ce résultat implique par exemple que la suite $\{n\alpha \bmod 1, n \in \mathbb{Z}\}$ est uniformément distribuée, c'est-à-dire que les points de la suite visitent tout intervalle avec une fréquence qui ne dépend que de sa longueur et pas de sa position dans $[0, 1[$.

Les mesures ergodiques peuvent être vues comme des "briques de construction" des mesures invariantes comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 8** *(Décomposition ergodique) Toute probabilité borélienne invariante pour une application continue $T$ sur un espace métrique compact $X$ peut être décomposée en une somme de probabilités boréliennes ergodiques. Précisément : il existe une partition $X_\alpha$ de $X$ (sauf éventuellement un ensemble de mesure nulle), l'indice $\alpha$ faisant partie d'un espace de Lebesgue $A$, chaque atome $X_\alpha$ supporte une mesure ergodique $\mu_\alpha$ telle que :*

$$\int_X \varphi d\mu = \int_A \int_{X_\alpha} \varphi d\mu_\alpha d\alpha.$$

Comme on avait une conjugaison topologique on a aussi une notion de conjugaison "métrique", c'est-à-dire relative à la mesure.

**Définition 15** *Les systèmes $(X, T, \mu)$ et $(Y, S, \nu)$ sont semi-conjugués en mesure s'il existe une application mesurable $R$ de $X$ dans $Y$ telle que le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} & X & \xrightarrow{T} & & X \\ R & \downarrow & & R & \downarrow \\ & Y & \xrightarrow{S} & & Y \end{array}$$

*commute presque partout et que $\nu$ soit la mesure image de $\mu$ par $R$. On a conjugaison si $R$ est bijective et bi-mesurable.*

On peut définir une notion d'entropie reliée à la mesure d'une manière très similaire à celle employée pour définir l'entropie topologique :

**Définition 16** *Étant donnée une partition mesurable $\mathcal{P}$ de $X$, l'entropie (métrique) de $\mathcal{P}$ est :*

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P\in\mathcal{P},\ \mu(P)>0} \mu(P)\log\mu(P).$$

À partir de là, on définit $h_\mu(T, \mathcal{P})$ et $h_\mu(T)$ exactement de la même manière que leurs homologues topologiques en prenant à chaque fois l'entropie métrique des partitions :

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{k=1}^{n} T^{-k}\mathcal{P}\right)$$

et

$$h_\mu(T) = \sup\left\{h_\mu(T, \mathcal{P}), \quad \text{où } \mathcal{P} \text{ est un recouvrement fini de } X\right\}.$$

L'entropie métrique est invariante par conjugaison métrique. Les deux quantités sont reliées par le "principe variationnel" :

**Théorème 9** *(principe variationnel) Si $T$ est un homéomorphisme sur un espace métrique compact, alors l'entropie topologique $h_{top}$ :*

$$h_{top}(T) = \sup\left\{h_\mu(T), \quad \mu \textit{ mesure } T\textit{-invariante}\right\}$$

## 2.2 Systèmes Dynamiques Symboliques

### 2.2.1 Espaces Symboliques, Codage et Dynamique Symbolique

Il est fréquent qu'il soit inutile de suivre en "détail" une orbite pour avoir une idée fidèle de son comportement. Savoir comment elle visite des ensembles bien choisis peut suffire. Il arrive aussi que le système lui-même puisse être mieux compris via une représentation abstraite.

**Exemple :** On considère l'application $Tx = 2x \bmod 1$ sur $[0, 1[$. Si on considère le développement en binaire des points de $[0, 1[$, l'application de $T$ revient à décaler les chiffres binaires vers la gauche :

$$\left(2\sum_{i\geq 1}\frac{\alpha_i}{2^i}\right) \bmod 1 = \left(\alpha_1 + \sum_{i\geq 1}\frac{\alpha_{i+1}}{2^i}\right) \bmod 1 = \sum_{i\geq 1}\frac{\alpha_{i+1}}{2^i}.$$

Il est alors facile de voir que les seuls points périodiques pour $T$ sont les points qui ont un développement périodique en binaire, c'est-à-dire les nombres rationnels.
Cette méthode est générale, elle consiste en la mise en correspondance entre un système dynamique et un espace symbolique abstrait muni de l'application de "décalage" des symboles. Formellement :

**Définition 17** *On appellera alphabet tout ensemble fini $\mathcal{A}$ de cardinal $k$, ses éléments seront appelés des lettres. L'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de symboles de $\mathcal{A}$ muni de l'application $s$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même telle que*

$$\forall(\alpha_1\alpha_2\alpha_2\cdots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad s(\alpha_1\alpha_2\cdots) = (\alpha_2\cdots)$$

*est un système dynamique appelé décalage sur $k$-symboles, ou encore "full-shift".*

L'espace $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ peut être rendu topologique de plusieurs manières équivalentes. En considérant la topologie produit des topologies discrètes par exemple. On utilisera très souvent la métrique suivante (pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) :

$$d(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2^K}$$

où $K$ désigne le rang d'occurrence de la première différence entre les mots $\omega_1$ et $\omega_2$. À la place de 2 on aurait pu choisir n'importe quel nombre $\beta > 1$. Une autre possibilité consisterait à adopter une base d'ouverts.

**Définition 18** *On appelle cylindre de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et on note $(\nu) = (\nu_1 \cdots \nu_k)$ l'ensemble des suites de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ commençant par les lettres $\nu_1, \ldots, \nu_k$.*

Adopter ces ensembles comme base d'ouverts aboutit à la même topologie qu'en adoptant la métrique sus-citée. On note qu'alors les cylindres sont à la fois ouverts et fermés, ce qui implique que l'espace symbolique est totalement déconnecté. De plus, comme c'est un produit d'espaces compacts, le théorème de Tychonov nous assure que c'est aussi un espace compact. Enfin, on vérifie facilement que l'application $s$ est continue et que ses points périodiques sont denses.
En général, *coder* une dynamique revient à se donner une partition $\{P_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ de $X$ et à se donner une application comme suit :

**Définition 19** *Une application $\varphi$ telle que :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & X & \longrightarrow & \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ & x & \longmapsto & (\alpha_1\alpha_2\cdots) \end{array}$$

*si $x \in P_{\alpha_1}, Tx \in P_{\alpha_2}, \ldots$ est appelée un codage.*

Bien sûr, un choix judicieux de la partition est crucial puisque cette application n'est en général pas surjective.
**Exemple :** Dans l'exemple ci-dessus si un point $x$ est dans l'intervalle $[0, 1/2[$, son premier chiffre binaire est 0. De même connaître son second chiffre binaire revient a connaître le reste de $2x$, c'est-à-dire de savoir si $Tx$ est dans $[0, 1/2[$ ou non. Savoir dans quels intervalles sont les itérées $T^k x$ revient à connaître son développement binaire. Ainsi si $x$ a un code contenu dans le cylindre $(\nu_1 \cdots \nu_k) \in \{0, 1\}^k$ alors cela signifie (si on note $P_0 = [0, 1/2[$ et $P_1 = [1/2, 1[$) :

$$x \in P_{\nu_1} \cap T^{-1}P_{\nu_2} \cap T^{-2}P_{\nu_3} \cdots T^{-k}P_{\nu_k}$$

qui consiste en un intervalle de longueur $2^{-k}$.

Il arrive fréquemment que tous les mots du full-shift n'apparaissent pas dans le codage des orbites :

**Définition 20** *Un sous-ensemble $L \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ fermé et $s$-invariant est appelé un sous-décalage ou sous-shift de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.*

En fait, la complexité de la dynamique, qui est contenue dans l'application $T$ elle-même plutôt que dans la forme de l'espace des phases, n'apparaît jamais dans sa conjuguée symbolique $s$. Elle se traduit plutôt dans la structure du sous-shift qui décrit les orbites possibles. Il existe plusieurs "modèles" de sous-shifts "classiques". Certains d'entre eux retiendront notre attention parce qu'ils seront utilisés par la suite.
Supposons que dans un mot la lettre qui suit ne dépende que de celle qui précède. Une lettre pouvant ou non être suivie par une autre. En admettant que $\mathcal{A} = \{1, \ldots, m\}$ on peut décrire ces contraintes par une matrice :

$$a_{ij} = 1 \text{ si la lettre } i \text{ peut être suivie par la lettre } j \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

qui est en fait la matrice d'adjacence d'un graphe dont les nœuds sont numérotés de 1 à $m$. Il n'y a une flèche entre le nœud $i$ et le nœud $j$ que si $a_{ij} = 1$. Une telle matrice est appelée matrice d'admissibilité.

**Définition 21** *Un sous-shift défini par une matrice d'admissibilité $A$ est appelé un sous-shift de type fini.*

Les entrées $A^k_{ij}$ des puissances de la matrice d'admissibilité donnent le nombre de chemins possibles (dans le graphe) allant de la lettre $i$ à la lettre $j$ en $k$ itérations. Elles donnent donc aussi le nombre de mots de longueur $k$ commençant par la lettre $i$ et finissant par la lettre $j$. Cela permet d'évaluer le nombre de mots de chaque longueur admissible dans le sous-shift :

**Définition 22** *Étant donné un sous-shift $L$ la fonction $p : \mathbb{N}^\star \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à chaque longueur de préfixe $n$ associe le nombre de préfixes admissibles $p(n)$ dans le sous-shift $L$ est appelée fonction de complexité de $L$. De plus, la quantité*

$$h(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p(n)$$

*est appelée l'entropie de $L$.*

On peut montrer que l'entropie de $L$ ainsi définie est exactement la même que l'entropie topologique du système $(L, s)$. On ne sera pas surpris alors que l'entropie de ce dernier système soit reliée au rythme de croissance des puissances de $A$, qui, grâce au théorème de Perron-Frobénius s'exprime uniquement en fonction de sa plus grande valeur propre.

On en profite pour rappeler le théorème de Perron-Frobénius :

**Théorème 10** *(Perron-Frobénius) Soit $M$ une matrice carrée irréductible ayant tous ses éléments positifs ou nuls, il existe une valeur propre simple positive $\Lambda$ telle que :*
- *Elle a un unique vecteur propre positif (à une constante près).*
- *Elle est en module supérieure ou égale à tout autre valeur propre.*
- *Si $B$ est une autre matrice carrée telle que (composante par composante) $0 \leq B \leq M$ et $\beta$ est une valeur propre de $B$ alors $|\beta| \leq \Lambda$ et on a égalité si et seulement si $B = M$.*

Une matrice $M$ est dite *irréductible* si et seulement si pour chaque élément $ij$ il existe une puissance $l$ telle que $(M^l)_{ij} > 0$. On dira qu'elle est *primitive* s'il existe une puissance $l$ telle que $M^l$ ait toutes ses entrées positives. On trouvera une preuve de ce résultat classique dans [50] par exemple.
Alors, formellement :

**Théorème 11** *L'entropie d'un sous-shift de type fini décrit par une matrice irréductible est $h(L) = \lambda_1$ où $\lambda_1$ est sa plus grande valeur propre.*

### 2.2.2 Systèmes Définis par des Substitutions

**Définition 23** *Soit $\mathcal{A}$ un alphabet, on note $\mathcal{A}^\star$ l'ensemble de ses mots finis :*

$$\mathcal{A}^\star = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{A}^i,$$

*où $\mathcal{A}^0$ ne contient que le mot vide que l'on notera $\epsilon$ par la suite. Muni de l'opération de concaténation et du mot vide, l'ensemble $\mathcal{A}^\star$ a la structure d'un monoïde.*
*Une substitution $\sigma$ est alors une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^\star$, elle s'étend à $\mathcal{A}^\star$ et même $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ par concaténation :*

$$\forall u, v \in \mathcal{A}^\star, \quad \sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$$

*et*

$$\forall u = (u_1 u_2 \cdots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad \sigma(u) = \sigma(u_1)\sigma(u_2)\cdots$$

Si on convient que $\sigma(\epsilon) = \epsilon$, alors une substitution est un morphisme de monoïde. Un objet fondamental associé à une substitution est sa matrice d'incidence :

**Définition 24** *Si on note $|u|_j$ pour un certain $u \in \mathcal{A}^\star$ le nombre d'apparitions de la lettre $j$, alors la matrice d'incidence $M$ de la substitution $\sigma$ est définie par :*

$$M_{ij} = |\sigma(i)|_j.$$

*Une substitution est dite primitive si sa matrice d'incidence est primitive, c'est-à-dire :*

$$\exists k \geq 1 \quad \textit{tel que} \quad \forall i, j, \quad M_{ij}^k > 0.$$

Les puissances $M_{ij}^k$ de la matrice d'incidence donnent le nombre d'apparitions de chaque lettre $j$ dans les mots $\sigma^k(i)$. En effet $M^k$ est la matrice d'incidence de $\sigma^k$. Si la matrice est primitive alors les images $\sigma^k(i)$ contiendront pour chaque lettre $i$ toutes les lettres de $\mathcal{A}$.

**Exemple :** La substitution définie sur $\{0,1\}^\star$ par :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & 0 & \longrightarrow & 01 \\ & 1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

a pour matrice d'incidence :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est primitive car $M^2$ a tous ses éléments positifs. Elle se diagonalise ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$ étant le nombre d'or. Il est alors facile de voir que si on note $F_k$ le $k$-ième nombre de la suite de Fibonacci :

$$M^k = \begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |\sigma^k(0)| &= |\sigma^k(0)|_0 + |\sigma^k(0)|_1 = M_{00}^k + M_{01}^k = F_k + F_{k-1} = F_{k+1} \\ |\sigma^k(1)| &= |\sigma^k(1)|_0 + |\sigma^k(1)|_1 = M_{10}^k + M_{11}^k = F_{k-1} + F_{k-2} = F_k. \end{aligned}$$

Cette propriété vaut à cette substitution le nom de “substitution de Fibonacci”.

**Définition 25** *On appelle un point $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ un point fixe de $\sigma$ si et seulement si $\sigma(u) = u$.*

A partir d'un point fixe on peut engendrer un système dynamique. Dans ce tout ce qui suit, le symbole Cl dénote la fermeture topologique et $s$ l'application de décalage.

**Définition 26** *Soit $u$ un point fixe de $\sigma$ et*

$$\Sigma = \mathrm{Cl}(\{\mathrm{s^n u}, \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}),$$

*alors $(\Sigma, s)$ est appelé système dynamique de la substitution $\sigma$.*

Un point fixe peut toujours être vu comme la puissance d'une lettre portée à l'infini, clairement :

$$\forall k > 0, \quad \sigma^k(u) = \sigma^k(u_1)\sigma^k(u_2)\cdots = u$$

donc

$$d(\sigma^k(u_1), u) < \frac{1}{2^{|\sigma^k(u_1)|}} \longrightarrow 0$$

au moins si $\sigma$ est primitive. Une substitution peut avoir plusieurs points fixes mais, toujours dans l'hypothèse où celle-ci est primitive, ils engendrent tous le même système dynamique :

**Lemme 1** *On note $\sigma^\infty(\alpha)$ le point fixe de $\sigma$ engendré par la lettre $\alpha$ et*

$$\Sigma_\alpha = \mathrm{Cl}(\{\mathrm{s^n}\sigma^\infty(\alpha), \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}).$$

*Alors s'il existe plusieurs lettres $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ donnant plusieurs points fixes différents :*

$$\forall \alpha_i \neq \alpha_j, \quad \Sigma_{\alpha_i} = \Sigma_{\alpha_j}.$$

**Preuve :**
Soit $\alpha, \beta \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, il suffit de montrer que $\sigma^\infty(\beta) \in \Sigma_\alpha$. Comme $\sigma$ est primitive, $\exists k_0$ tel que $\sigma^{k_0}(\alpha)$ contienne la lettre $\beta$ et donc $\forall k$, $\sigma^k(\beta)$ est un sous-mot de $\sigma^\infty(\alpha)$. Donc

$$\forall k \geq 0, \quad \exists \zeta \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad \text{et} \quad \exists (N_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{une suite d'entiers telle que :}$$

$$s^{N_k}\sigma^\infty(\alpha) = \sigma^k(\beta)\zeta.$$

$s^{N_k}\sigma^\infty(\alpha)$ est une suite de points de $\Sigma_\alpha$ telle que

$$d(s^{N_k}\sigma^\infty(\alpha), \sigma^\infty(\beta)) = d(\sigma^k(\beta)\zeta, \sigma^\infty(\beta)) < \frac{1}{2^{|\sigma^k(\beta)|}} \longrightarrow 0.$$

Il existe donc une suite de points de $\Sigma_\alpha$ qui converge vers $\sigma^\infty(\beta)$. Ce dernier point est bien dans $\Sigma_\alpha$ qui est fermé, cela prouve $\Sigma_\beta \subset \Sigma_\alpha$. En échangeant les rôles de $\alpha$ et $\beta$ on a $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$. $\square$
Ce petit résultat nous sera utile dans la section (5.2.4). Ces systèmes dynamiques ont été très étudiés. On en connait de nombreuses propriétés, en particulier :

**Théorème 12** *Un système substitutif $(\Sigma, s)$ défini par une substitution primitive est minimal et uni-ergodique.*

Pour une preuve et une étude détaillée sur les substitutions (du point de vue spectral) on se reportera à [47].

### 2.2.3 Odomètres

Comme son nom l'indique, l'odomètre est le système dynamique de l'addition d'une unité. Précisément, si on note, pour une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$\Omega = \prod_{n=0}^{\infty} \{0, 1, \ldots, d_n - 1\}$$

et $S : \Omega \longrightarrow \Omega$ telle que :

$$\begin{array}{lcl} S(d_0 - 1, d_1 - 1, \ldots, d_n - 1) & = & (0, \ldots, 0) \\ S(x_0, \ldots, x_n) & = & (y_0, \ldots, y_n) \end{array}$$

où $(y_0, \ldots, y_n)$ est tel que :
- $y_i = 0$ si $0 \leq i < i_0 = \min\{n \geq 0, x_n \neq d_n - 1\}$
- $y_{i_0} = x_{i_0} + 1$ et
- $y_i = x_i$ si $i > i_0$

alors :

**Définition 27** *Le système $(\Omega, S)$ est appelé un odomètre de base $(d_n)$. De plus, s'il existe un rang $n_0$ au delà duquel $d_n = d_{n+1}$ alors le système est un odomètre à base stationnaire.*

Ces systèmes peuvent être dans un sens généralisés. Dans la section suivante, on présente les transformations a-diques dont des cas particuliers donnent les odomètres.

### 2.2.4 Diagrammes de Bratteli

On rappelle ici les concepts de base concernant les diagrammes de Bratteli.

**Définition 28** *Un diagramme de Bratteli est un couple $(V, E)$ constitué d'un ensemble de sommets $V$ et d'un ensemble d'arêtes $E$ chacun pouvant être écrit comme une réunion dénombrable d'ensembles finis :*

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad \textit{et} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

*tels que*
- *$V_0$ est un singleton.*
- *Il existe deux applications $s$ et $r$ dites source et cible respectivement telles que $r(E_n) \subset V_n$ et $s(E_n) \subset V_{n-1}$. De plus $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$ et $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V \setminus V_0$.*

On donne traditionnellement une représentation diagrammatique à $(V, E)$ en considérant $V_n$ comme un ensemble de sommets reliés aux sommets $V_{n-1}$ par les arêtes $E_n$ (cf. figure 2.1).

Si on note $t_n$ le cardinal de $V_n$ alors l'ensemble d'arêtes $E_n$ est décrit par une matrice d'incidence $t_n \times t_{n-1}$, $A_n = (a_{ij}^n)$ où $a_{ij}^n$ représente le nombre d'arêtes entre le $i$-ème élément de $V_n$ et le $j$-ème élément de $V_{n-1}$.
On notera $E_{k+1} \circ E_{k+2} \circ \cdots \circ E_l$ tout les chemins allant de $V_k$ à $V_l$, c'est-à-dire :

$$\{(e_{k+1}, \ldots, e_l), \quad e_i \in E_i, \quad r(e_i) = s(e_{i+1}), \quad i = k+1, \cdots, l+1\}$$

et par abus de notation $r((e_{k+1}, \ldots, e_l)) = r(e_l)$ et $s((e_{k+1}, \ldots, e_l)) = s(e_{k+1})$.

**Définition 29** *Étant donné un diagramme de Bratteli $(V, E)$ et une suite positive $(m_n)$, le télescopage $(V', E')$ de $(V, E)$ est tel que $V'_n = V_{m_n}$ et $E'_n = E_{m_{n-1}+1} \circ \cdots \circ E_{m_n}$, les applications source et cible étant définies comme ci-dessus.*

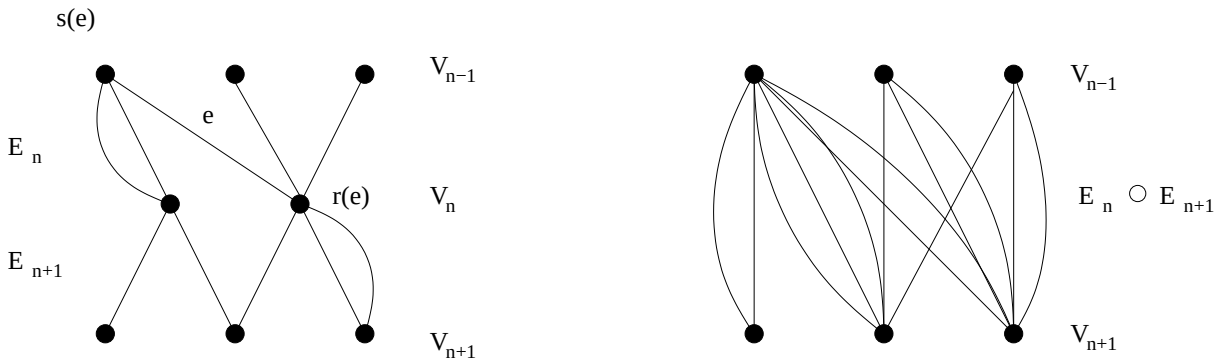


FIG. 2.1 – À gauche : représentation de trois étages d'un diagramme de Bratteli. À droite : un exemple de composition des arêtes.

Si on télescope le niveau $V_{n-1}$ sur le niveau $V_{n+1}$, alors un sommet de $V_{n-1}$ est connecté avec un sommet de $V_{n+1}$ s'il existe un chemin via un sommet de $V_n$ entre ces deux sommets. La matrice d'incidence de ce diagramme sera alors le produit des matrices d'incidence du diagramme original.

**Définition 30** *On dit qu'un diagramme $(V, E)$ est simple s'il en existe un télescopage $(V', E')$ tel que les matrices d'incidence de ce dernier diagrammes soient toujours positives.*

**Définition 31** *On dit qu'un diagramme $(V, E)$ est stationnaire si le diagramme se répète au-delà du premier niveau.*

On peut définir un ordre partiel sur un diagramme de Bratteli :

**Définition 32** *Un diagramme de Bratteli ordonné $(V, E, \geq)$ est un diagramme de Bratteli muni d'une relation d'ordre sur les arêtes telle que deux arêtes $e$ et $e'$ sont comparables si et seulement si $r(e) = r(e')$.*

Cette relation d'ordre induit un ordre lexicographique sur les chemins :

$$(e_{k+1} \cdots e_l) \geq (f_{k+1} \cdots f_l)$$

si et seulement si il existe $i$ tel que $e_i \geq f_i$ et les $i-1$ premières arêtes sont égales. Soit l'espace des chemins infinis dans le graphe :

$$X_B = \{(e_1, e_2, \cdots), \quad e_i \in E_i, \quad r(e_i) = s(e_{i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots\}.$$

On munit cet ensemble d'une topologie en lui donnant ses cylindres comme base d'ouverts. Pour cette topologie, $X_B$ est un compact et de plus, si le diagramme est simple, $X_B$ n'a pas de point isolé et c'est donc un ensemble de Cantor.
On note $X_B^{\max}$ et $X_B^{\min}$ l'ensemble des chemins de $X_B$ ne contenant que des arêtes maximales et des arêtes minimales respectivement.

**Définition 33** *Un diagramme de Bratteli ordonné $(V, E, \geq)$ est dit proprement ordonné si et seulement si $(V, E)$ est simple et que $X_B^{\max}$ et $X_B^{\min}$ sont réduits à des singletons.*

Sur un diagramme proprement ordonné $X_B$ on définit l'application $V_B$ dite application de Vershik ou encore application lexicographique. Elle agit comme suit, si $x = (e_1, e_2, \cdots) \in X_B$ n'est pas un chemin maximal (i.e. n'est pas dans $X_B^{\max}$) et si $k$ est le plus petit entier tel que $e_k$ ne soit pas une arête maximale, alors :

$$V_B(x) = (m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, f_k, e_{k+1}, e_{k+2} \cdots)$$

où $(m_1 \cdots m_{k-1})$ est le mot minimal dans $E_1 \circ E_2 \circ \cdots \circ E_{k-1}$ tel que $r(m_{k-1}) = s(f_k)$ et $f_k$ est le successeur de $e_k$. Si $x = x_{\max} \in X_B^{\max}$ alors on posera $V_B(x_{\max}) = x_{\min}$.
La transformation ainsi définie est aussi appelée transformation "a-dique". On peut dire plus sur la dynamique des diagrammes stationnaires en faisant un lien avec les substitutions. En effet, sur un diagramme stationnaire, on peut "lire" une substitution.

**Définition 34** *Étant donné un diagramme de Bratteli stationnaire ordonné, $(V, E)$, on choisit un étiquetage des sommets par un alphabet $A$, c'est à dire que chaque sommet est associé à une lettre de $A$ et une seule, on écrira ainsi $V_a$ avec $a \in A$ chaque sommet. Pour chaque sommet $V_a$ on considère la liste ordonnée $(e_1, \ldots, e_k)$ des arêtes qui arrivent à $V_a$ et $(a_1, \ldots, a_k)$ la liste ordonnée des lettres associées à leurs sources. L'application de $A$ dans $A^\star$ qui à $a$ associe $a_1 \cdots a_k$ considérée comme une substitution est appelée la substitution lue sur $(V, E)$.*

Si le diagramme est simple et propre alors la substitution est primitive et propre. De plus, on a le résultat suivant :

**Proposition 2** *Soit $(V, E)$ un diagramme de Bratteli stationnaire simple et propre avec uniquement des arêtes simples entre l'origine et le premier niveau. Si $\sigma$ désigne la substitution lue sur $(V, E)$ alors :*
- *Si $\sigma$ est apériodique alors le système $(X_B, V_B)$ est conjugué au système engendré par la substitution $\sigma$.*
- *Si $\sigma$ est périodique alors le système $(X_B, V_B)$ est conjugué à un odomètre à base stationnaire.*

Une preuve peut être trouvée dans [16]. L'intérêt fondamental de ces systèmes est résumé dans le théorème suivant, dû à A. Vershik :

**Théorème 13** *Toute transformation ergodique préservant la mesure de Lebesgue est conjuguée à une transformation a-dique uni-ergodique.*

Pour plus d'informations concernant ces concepts on se reportera à [35], [57].

## 2.3 Géométrie Fractale

### 2.3.1 Introduction

La géométrie fractale a pris son essor dans les années 80 sous l'impulsion de B. Mandelbrot qui popularisa de nombreux concepts anciens en les appliquant à des domaines variés (voir [39] pour une introduction). Les ensembles de Cantor, de Sierpińsky, de Julia et d'autres encore revinrent à la mode grâce aux images que l'ordinateur rendait désormais possible. Pourtant, mathématiquement parlant, le concept de fractal n'est pas si aisé à définir ni à quantifier. La géométrie fractale a pour but d'étudier les ensembles irréguliers, sortant du domaine de la géométrie différentielle. Il y a plusieurs manières de quantifier "l'irrégularité" d'un ensemble, elles sont formalisées par des dimensions variées. La plus simple découle logiquement du très

fameux exemple de “la longueur de la côte de Bretagne”. En effet, selon la précision $\epsilon$ que l'on s'accorde, c'est-à-dire la taille minimale des atomes d'un recouvrement de notre “côte”, on trouve, en comptant le nombre d'atomes nécessaires, une longueur qui tend à croître quand $\epsilon$ décroît. L'important, ce qui donne l'irrégularité de notre côte, c'est le rythme de cette croissance qui doit être une puissance de $\epsilon$. Cet exposant n'est autre que ce que l'on appelle la *dimension fractale* ou encore *la dimension de comptage de boîtes.*
Dans le cas des courbes différentiables, cet exposant est 1. S'il est plus grand, la courbe a une longueur infinie.
La dimension fractale est une des quantités utilisées pour caractériser les ensembles “irréguliers”. On lui préfère souvent une quantité parfois moins aisée à calculer mais plus précise, en particulier pour son comportement vis-à-vis de la topologie car la dimension fractale ne différencie pas un ensemble de sa fermeture : la dimension de Hausdorff. Dans cette section, on présente succinctement les principales notions qui nous seront utiles par la suite, le lecteur intéressé se reportera à [17].

### 2.3.2 Mesure et Dimension de Hausdorff

Dans ce qui suit on notera $|U|$ le diamètre de $U$ et on appellera $\delta$-recouvrement de $U$ un recouvrement de $U$ dont les atomes sont de diamètre *au plus* $\delta$. Alors pour tout $\delta > 0, s \geq 0$ et pour tout ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{M}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \quad \{U_i\}_i \text{ étant un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\}.$$

quand $\delta \to 0$ le nombre de recouvrements possibles décroît et donc cet infimum croit. La limite suivante existe donc :

$$\mathcal{M}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{M}^s_\delta(F),$$

bien qu'elle soit généralement nulle ou infinie.

**Définition 35** *On appelle $\mathcal{M}^s$ la mesure de Hausdorff $s$-dimensionnelle.*

On montre en effet que cette quantité est bien une mesure et que $\mathcal{M}^1$ (resp. $\mathcal{M}^m$) donne à une constante près la longueur, (resp. la surface) de courbes (resp. de surfaces) différentiables de dimension 1 (resp. $m$). Cette quantité a des propriétés d'homogénéi té particulières :

**Proposition 3** *Soient $F \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction Höldérienne telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

*alors :*

$$\mathcal{M}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{M}^s(F)$$

*et*

$$\mathcal{M}^s(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{M}^s(F).$$

La mesure de Hausdorff est généralement nulle ou infinie selon les valeurs de $s$. La valeur précise où intervient cette transition est ce que l'on appelle la dimension de Hausdorff. Le théorème suivant sert aussi de définition :

**Théorème 14** *La dimension de Hausdorff de $F$, $\dim_H(F)$ est telle que :*

$$\mathcal{M}^s(F) = \begin{cases} \infty & si\ s < \dim_H(F) \\ 0 & si\ s > \dim_H(F). \end{cases}$$

*De plus, si $0 < \mathcal{M}^{\dim_H(F)}(F) < \infty$, $F$ est appelé un $s$-ensemble.*

La dimension de Hausdorff est la même que la dimension topologique pour les ensembles "réguliers" (différentiables par morceaux), mais la grande originalité de cette dimension est qu'elle peut être fractionnaire. Il existe des ensembles de dimension de Hausdorff entière qui sont irréguliers, comme la courbe de Peano par exemple. En général, on s'accorde pour dire qu'un ensemble est *fractal* si sa dimension de Hausdorff est strictement plus grande que sa dimension topologique (la dimension topologique de la courbe de Peano est 1 alors que sa dimension de Hausdorff est 2). La dimension de Hausdorff a un certain nombre de propriétés découlant de celles de la mesure de Hausdorff :

**Proposition 4** *Soient $F \subset \mathbb{R}^n$, $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction Höldérienne telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

*alors :*

$$\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F).$$

*Si $f$ est une transformation bilipschitzienne telle que*

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$$

*alors $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$. De plus, si $\dim_H(F) < 1$ alors $F$ est totalement déconnecté.*

Un résultat en particulier nous sera utile dans la suite, il s'agit d'un lemme dont on donnera la preuve, issue de [17].

**Lemme 2** *Soit $\mu$ une mesure sur $F$. On suppose que, pour un certain $s$, il existe $c > 0$ et $\delta > 0$ tels que*

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

*pour tout $U$ de diamètre inférieur ou égal à $\delta$, Alors $\mathcal{M}^s(F) \geq \mu(F)/c$ et donc $s \leq \dim_H(F)$.*

**Preuve**
Si $\{U_i\}_i$ est un $\delta$-recouvrement quelconque de $F$ alors :

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

en prenant l'infimum sur les recouvrements,

$$\mu(F)/c \leq \inf\left\{\sum_i |U_i|^s, \quad \{U_i\}_i\ \delta\text{-recouvrements de } U\right\} = \mathcal{M}^s_\delta(F).$$

comme $\mathcal{M}^s_\delta$ croît si $\delta$ décroît on a bien $\mathcal{M}^s(F) \geq \mu(F)/c$. □
Ce petit lemme nous donne une méthode pour trouver une borne inférieure à la dimension de Hausdorff qui est la plus difficile à trouver. Il sera utilisé dans la section 5.2.2.

### 2.3.3 Ensembles Auto-Similaires : Les attracteurs d'I.F.S

Les ensembles auto-similaires forment une classe intéressante d'ensembles puisqu'ils sont souvent fractals et que leurs structures nous permettent d'avoir des renseignements précis sur leurs propriétés fractales. Beaucoup d'ensembles fractals célèbres sont auto-similaires. Par exemple, l'ensemble de Cantor triadique $\mathcal{C}$ est invariant si on lui applique la contraction $S_1$ de rapport $1/3$ centrée à l'origine, mais également par $S_2$ celle de rapport $1/3$ centrée en 1 :

$$S_1\mathcal{C} \subset \mathcal{C} \quad \text{et} \quad S_2\mathcal{C} \subset \mathcal{C} \quad \text{de plus} \quad \mathcal{C} = S_1\mathcal{C} \cup S_2\mathcal{C}.$$

De même, le triangle de Sierpińsky est invariant par rapport aux trois contractions de rapport $1/3$ et centrées en les sommets du triangle. L'idée des I.F.S (Iterated Function Schemes) est de prendre les choses à l'envers, c'est-à-dire de considérer d'abord un ensemble de contractions puis de déterminer l'ensemble qui est invariant par rapport à elles. Formellement, on a le théorème suivant :

**Théorème 15** *Soient $S_1, \ldots, S_m$ des similitudes de $\mathbb{R}^n$ telles que pour tout $i = 1, \ldots, m$ :*

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \qquad \textit{avec } c_i < 1.$$

*Alors il existe un unique ensemble compact $F$ tel que :*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

De plus, si on définit une application $S$ sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$ par

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E),$$

alors $F$ est le point fixe de $S$. Pour toute condition initiale $E$ telle que $S(E) \subset E$ (il suffit juste de prendre $E$ suffisamment grand), la suite $S^k(E)$ est décroissante. Ces approximations successives convergent donc vers une limite compacte au sens où :

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E).$$

Cette manière de construire le fractal permet de coder ses points.
En effet, si on écrit $S_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} = S_{\alpha_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_k}$ on a

$$x \in F \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots) \in \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}} \text{ tel que :}$$

$$x \in E \cap S_{\alpha_1} E \cap S_{\alpha_1\alpha_2} E \cap S_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} E \cap \cdots$$

Si les ensembles $S_i(E)$ sont tous disjoints, on voit que chaque point correspond à un mot $\alpha$ et un seul. On a donc une bijection entre $F$ et l'espace symbolique $\{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$. Il est facile de voir que si deux points ont des codes proches, ils auront des préfixes communs "grands". Ils seront donc proches également dans $\mathbb{R}^n$ puisqu'ils appartiendront tous deux à des ensembles du type $S_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} E$ dont le diamètre tend exponentiellement vers 0. Ainsi, étant une bijection continue entre deux compacts, l'application qui met en correspondance les points de $F$ avec leurs codes est un homéomorphisme. C'est en munissant l'espace symbolique d'une mesure bien choisie que l'on trouve une borne inférieure à la dimension de Hausdorff des attracteurs d'I.F.S. Ce type

de codage sur des ensembles similaires mais adaptés à notre étude sera au cœur de l'étude du chapitre 5.
En général, pour calculer la dimension de Hausdorff des attracteurs d'I.F.S, on fera l'hypothèse suivante, appelée *condition de l'ensemble ouvert :*

$$\text{Il existe un ouvert borné non vide } V \text{ tel que } \bigcup_{i=1}^{m} S_i V \subset V$$

avec la réunion disjointe. Sous cette condition on a le théorème suivant :

**Théorème 16** *La dimension de Hausdorff* $\dim_H F$ *est égale à* $s$ *où* $s$ *est tel que :*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

*De plus,* $F$ *est un* $s$*-ensemble.*

Ces théorèmes peuvent être généralisés en considérant des contractions qui ne soient pas des similitudes, c'est-à-dire telles que :

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad \text{avec } c_i < 1.$$

Le théorème d'existence reste valable mais les estimations de la dimension sont un peu moins précises ou plus complexes à calculer. On ne considérera pas ces généralisations ici, puisque on aura affaire exclusivement à des similitudes. Il existe des résultats sur les calculs de dimensions en ne considérant pas la "condition de l'ensemble ouvert" et portant sur des constructions où les composantes connexes des approximants se chevauchent (cf [18]). Les estimations sont "génériquement" les mêmes que dans le cas disjoint, c'est-à-dire pour presque tous les paramètres de contraction. Le lecteur intéressé par plus de détails pourra se reporter à [17] et [4]. Le petit lemme géométrique suivant est issu de [17] et sera utilisé dans le chapitre 5. On le reproduit ici ainsi que sa preuve.

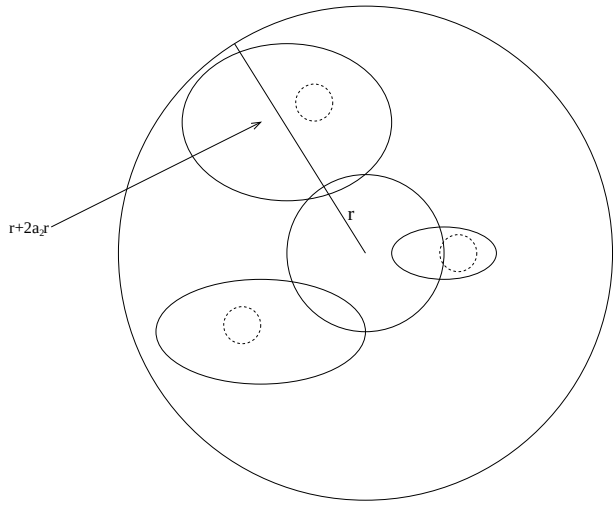


Fig. 2.2 – Illustration de la preuve du lemme 3.

**Lemme 3** *Soit $\{V_i\}_i$ une collection d'ouverts disjoints de $\mathbb{R}^n$ tels que chaque élément $V_i$ contienne un boule de rayon $a_1 r$ et soit contenu dans une boule de rayon $a_2 r$. Alors toute boule de rayon $r$ intersecte au plus $((1+2a_2)/a_1)^n$ ensembles $\bar{V}_i$.*

**Preuve :** Soit $B$ une boule de rayon $r$. Si $B$ intersecte $\bar{V}_i$ alors ce dernier est inclus dans la boule de rayon $r+2a_2 r$ (puisqu'il est inclus dans une boule de rayon $a_2 r$) et de même centre que $B$. Supposons que $q$ ensembles $V_j$ intersectent $B$, chacun est donc inclus dans la grande boule et chacun contient une petite boule de rayon $a_1 r$ (cf. figure 2.2). Donc, en sommant les volumes de ces petites boules :

$$q(a_1 r)^n \leq (1+2a_2)^n r^n.$$

□

### 2.3.4 Constructions Graphe-Dirigées

Dans un attracteur d'I.F.S, c'est l'ensemble complet qui est similaire à la réunion de ses parties. Aussi, on peut imaginer que seules certaines parties de l'ensemble soient similaires à une réunion d'autres parties. Cette généralisation de la notion introduite dans le paragraphe précédent se nomme construction graphe-dirigée, car la description de leurs similarités internes fait appel à un graphe. Les résultats présentés ici ainsi que leurs démonstrations peuvent être trouvés dans [40].

**Définition 36** *Une construction géométrique graphe-dirigée de $\mathbb{R}^m$ consiste en :*
- *Une famille finie de compacts disjoints d'intérieurs non vide $J_1, \ldots, J_n$ de $\mathbb{R}^m$.*
- *Un graphe dirigé $G$ dont les sommets consistent en les entiers $1, \ldots, n$ et des similitudes $T_{i,j}$ de $\mathbb{R}^m$ de rapports $t_{i,j}$ où $(i,j) \in G$ et :*
  - *Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ il existe un $j$ tel que $(i,j) \in G$*
  - *Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $\{T_{i,j}(J_j), \quad (i,j) \in G\}$ est une famille disjointe et*

$$\bigcup_{(i,j)\in G} T_{i,j}(J_j) \subset J_i.$$

  - *Si le chemin dans $G$ partant de $i_1$ est un cycle : $[i_1 \cdots i_q = i_1]$, alors*

$$\prod_{k=1}^{q} t_{i_k, i_{k+1}} < 1.$$

Le théorème suivant assure l'existence du fractal :

**Théorème 17** *Pour chaque construction géométrique graphe-dirigée, il existe une famille de compacts unique $K_1, \ldots, K_n$ telle que :*

$$K_i = \bigcup_{(i,j)\in G} T_{i,j} K_j.$$

*et on a $K_i \subset J_i$. L'attracteur engendré par cette construction géométrique est :*

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

On introduit un objet fondamental pour le calcul de la dimension de Hausdorff de ces ensembles :

**Définition 37** *La matrice d'incidence pondérée du graphe $G$ est définie comme suit :*

$$(W_G)_{ij} = t_{i,j}, \quad \textit{pour } i,j = 1,\dots,n$$

*avec la convention que $(W_G)_{ij} = 0$ si $(i,j) \notin G$.*

On introduit alors la matrice :

$$(W_\beta)_{ij} = t_{ij}^\beta$$

et notera $\Phi(\beta)$ son rayon spectral, c'est-à-dire sa plus grande valeur propre positive. On sait que :

**Théorème 18** *$\Phi$ est une fonction continue strictement décroissante telle que :*

$$\Phi(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{\beta\to\infty} \Phi(\beta) = 0.$$

Le premier théorème de [40] porte sur les constructions dont les graphes sont fortement connexes. On rappelle que :

**Définition 38** *Un graphe $H$ est dit fortement connexe si et seulement si étant donnés deux sommets $x$ et $y$ il existe toujours un chemin dans $H$ reliant $x$ à $y$.*

On a :

**Théorème 19** *Pour une construction géométrique dirigée par un graphe $G$ fortement connexe la dimension de Hausdorff de l'attracteur de l'I.F.S graphe-dirigé $K$ est la quantité $s$ telle que $\Phi(s) = 1$. De plus :*

$$0 < \mathcal{M}^s(K) < \infty.$$

La référence [40] contient un théorème plus général pour les constructions fondées sur des graphes non-strictement connexes que l'on ne reproduira pas ici.
On rencontrera au cours de notre étude des ensembles de construction analogue à quelques détails près. En effet, on va rencontrer dès le chapitre 4 des ensembles tels que :

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i \quad \text{et} \quad U_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} U_j, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}. \tag{2.2}$$

Où $m > 1$, $n_i \leq m$ et $l_j^i \in \mathbb{N}$, les applications $S_{ilj}$ sont des similitudes de rapports d'homothétie $0 < c_{ilj} < 1$. Et on verra qu'il existe une famille de compacts $P_1,\dots,P_m$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} P_j \subset P_i, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\} \tag{2.3}$$

Ce contexte est très proche d'une construction graphe-dirigée. En effet, le seul obstacle à la construction d'un graphe à $m$ sommets est que plusieurs similitudes différentes peuvent être appliquées sur le même ensemble. Il y aurait donc "trop de flèches dans le graphe pour le nombre de sommets". Ce n'est plus le cas si on considère comme sommets du graphe tous les triplets $(ilj)$ entrant dans les relations (2.2). Les seules transitions permises dans le graphe sont alors de la forme :

$$(ilj) \longrightarrow (jkp), \quad \text{où } k = 1,\dots,l_p^j, \quad p = 1,\dots,n_j$$

Une difficulté bien plus sérieuse vient du fait que, dans les cas que l'on va considérer, la famille $P_1, \ldots, P_m$ ne sera jamais disjointe. En général toutefois, les chevauchements ne se feront que sur les bords. Les résultats d'existence et d'unicité ne dépendent pas de cette hypothèses. Ils se généralisent donc lorsque les ensembles ne sont pas disjoints. On aura besoin de ce résultat par la suite et, bien qu'il paraphrase le premier théorème de [40], on l'inclura par souci de complétude et parce qu'il est présenté d'une manière un peu différente, plus adaptée à nos objectifs futurs.

**Proposition 5** *Si on suppose l'existence de la famille de similitudes contractantes $(S_{ilj})$ de la relation (2.2) ci-dessus, alors il existe un unique ensemble compact $U$ vérifiant la relation (2.2). Si de plus on suppose qu'il existe $m$ ensembles compacts non vides $P_i$ de $\mathbb{R}^n$ tels que la relation (2.3) soit vérifiée mais que les réunions soient disjointes, c'est-à-dire que les ensembles $S_{ilj}P_j$ sont tous disjoints, alors $U$ est totalement déconnecté.*

**Preuve**
Soit $d$ la métrique de Hausdorff sur l'ensemble $K(\mathbb{R}^n)$ des compacts de $\mathbb{R}^n$, alors l'application $\rho$ définie sur $K(\mathbb{R}^n)^m$ par

$$\rho(U,V) = \max_{i=1,\ldots,m} d(U_i, V_i)$$

où $U_i$ et $V_i$ sont les composantes des vecteurs $U$ et $V$, est une distance sur $K(\mathbb{R}^n)^m$ qui en fait un espace complet. On définit l'application :

$$\begin{array}{rcl} S : K(\mathbb{R}^n)^m & \longrightarrow & K(\mathbb{R}^n)^m \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{1lj} U_j \\ \vdots \\ \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{mlj} U_j \end{pmatrix} \end{array}$$

Soient maintenant les deux ensembles $U, V \in K(\mathbb{R}^n)^m$ on a

$$d\left( \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} U_j, \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} V_j \right) \leq \max_{j,l} d(S_{ilj} U_j, S_{ilj} V_j).$$

Or

$$d(S_{ilj} U_j, S_{ilj} V_j) \leq (\max_{i,l,j}(c_{ilj})) d(U_j, V_j).$$

En prenant le maximum sur $i$ on a

$$\max_i d\left( \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} U_j, \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} V_j \right) \leq (\max_{i,l,j}(c_{ilj})) \max_{j,l} d(U_j, V_j).$$

C'est-à-dire :

$$\rho(SU, SV) \leq (\max_{i,l,j}(c_{ilj})) \rho(U,V)$$

Comme $\max(c_{ilj}) < 1$ l'application $S$ est contractante sur $K(\mathbb{R}^n)^m$ donc il existe un unique $U \in K(\mathbb{R}^n)^m$ tel que $S(U) = U$. De plus, pour toute condition initiale $P$, les puissances $S^k(P)$ approcheront $U$ de mieux en mieux.
En particulier si on prend les ensembles $P_i$ des hypothèses et si on pose $P = (P_1, \ldots, P_m)$ alors $\rho(U, S^k(P)) \longrightarrow 0$ et :

$$P^k = S^k(P) \quad \Leftrightarrow \quad P_i^k = \bigcup_{j=1}^{n_i} \bigcup_{l=1}^{l_j^i} S_{ilj} P_j^{k-1} \tag{2.4}$$

avec $P_i^0 = P_i$ alors, la relation (2.3) nous donne $\forall i, k$ :

$$P_i^k \subset P_i^{k+1} \tag{2.5}$$

on peut écrire $\forall i = 1, \ldots, m$ :

$$U_i = \bigcap_{k \geq 0} P_i^k. \tag{2.6}$$

Si on considère que la réunion (2.3) disjointe, alors, les réunions (2.4) sont aussi disjointes. Deux points $x \neq y$ de $U$ appartiennent forcément à des composantes différentes de l'intersection (2.6). Donc on a deux suites de triplets $((i_1 l_1 j_1) \cdots (i_k l_k j_k))$ et $((i'_1 l'_1 j'_1) \cdots (i'_k l'_k j'_k))$ telle que les fermés $S_{i_1 l_1 j_1} \cdots S_{i_k l_k j_k} P_{j_k}$ et $S_{i'_1 l'_1 j'_1} \cdots S_{i'_k l'_k j'_k} P_{j'_k}$ séparent les points $x$ et $y$. $\square$

# Chapitre 3

# Les Isométries par Morceaux

## 3.1 Définition et Généralités

### 3.1.1 Résultats Généraux

Les systèmes dynamiques que l'on appellera "Isométries par Morceaux" (et dont le comportement sera notre principale préoccupation tout au long de cette thèse) sont intéressants parce qu'ils dévoilent bien plus de richesses que ne le laisserait supposer la simplicité de leur définition, un peu comme l'étude de l'application quadratique sur le plan complexe laisse peu à peu percevoir des trésors de complexité insoupçonnés. Si l'itération d'une simple isométrie sur $\mathbb{R}^n$ n'apporte rien d'excitant, qu'en est-il sur des variétés différentes ? On pense immédiatement aux rotations du cercle ou à ses généralisations, les translations du tore, dont on connait la nature ergodique (génériquement en tout cas). Que donnerait maintenant une rotation sur un tore ? On sait désormais que la dynamique y est extrêmement intéressante, on le verra dans les pages qui suivent. Tous ces cas particuliers rentrent dans le cadre général des isométries par morceaux.

**Définition 39** *Soit $X$ un espace métrique, $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i\in I}$ une partition de $X$, et une famille d'isométries $\{T_i\}_{i\in I}$ de $X$, le triplet $(X, T, \mathcal{P})$ tel que :*

$$\forall x \in X, \quad Tx = T_i x \quad \text{si } x \in P_i$$

*est appelé une isométrie par morceaux sur $X$.*

Cette définition est extrêmement générale. Dans ce travail, on se limitera à des isométries *euclidiennes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$* et les partitions seront habituellement finies, bien que le chapitre suivant exhibe un cas de partition infinie dénombrable. La forme des atomes et la compacité (ou non) de $X$ seront des paramètres déterminants eux aussi. On note qu'une isométrie par morceaux n'est pas forcément inversible. Au contraire, génériquement, la réunion $\cup_{i\in I} T_i P_i$ n'est pas disjointe. On va introduire un peu de terminologie et montrer quelques résultats qui pour la plupart sont issus de [22].

**Définition 40** *Les éléments de*

$$\Sigma = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}\mathcal{P}$$

*le raffinement dynamique de la partition $\mathcal{P}$ sont appelés des cellules. Ceux du raffinement fini*

$$\Sigma_n = \bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}\mathcal{P}$$

*des $n$-cellules.*

Puisque $(X, T, \mathcal{P})$ a déjà une partition, il est naturel de l'utiliser pour coder la dynamique :

**Définition 41** *La fonction de codage :*

$$\begin{array}{rccc} \iota : & X & \longrightarrow & I^{\mathbb{N}} \\ & x & \longmapsto & (\alpha_1 \alpha_2 \cdots) \end{array}$$

*si $x \in P_{\alpha_1}, Tx \in P_{\alpha_2}, \ldots$ est appelée l'itinéraire de $x$.*

Cette dernière application n'est en général pas injective mais il est aisé de voir que deux points appartenant à des cellules différentes ont des codages différents. Ainsi le codage est bijectif sur les cellules.

**Définition 42** *On dit qu'un code est rationnel si la suite de ses chiffres est périodique (éventuellement après un mot de longueur fini). Cette proposition implique que les cellules ayant un code irrationnel sont de mesure nulle.*

Un argument simple nous permet de démontrer :

**Proposition 6** *Si $X$ est de mesure finie, alors toute cellule de mesure de Lebesgue positive a un code rationnel.*

**Preuve :**
Si $U \in \Sigma$ est une cellule de mesure positive, $U, TU, T^2U, \ldots$ sont de mesures positives puisque sur $U$, $T$ et toutes ses itérées sont des isométries. Comme $X$ est de mesure finie, au moins deux ensembles de la suite $(T^n U)_n$ s'intersectent. Si pour $i, j$, $T^i U \cap T^j U \neq \emptyset$ alors $\exists x \in T^i U \cap T^j U$ donc $x \in T^i U$ donne $T^{j-i} x \in T^j U$. $U$ est une cellule donc $T^j U$ est inclus dans une cellule. On a :

$$s^{j-i}(\iota(x)) = \iota(T^{j-i} x) = \iota(x)$$

la suite $\iota(x)$ est périodique sous le shift : elle est donc périodique. $\square$

On le devine, les bords des atomes et leurs itérés vont jouer un rôle important.

**Définition 43** *On notera*

$$\Delta = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} \partial \mathcal{P} \quad \text{où} \quad \partial \mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{m} \partial P_i$$

*et on appellera ensemble exceptionnel l'ensemble $\Delta' = \bar{\Delta} \setminus \Delta$.*

On note que deux points $x$ et $y$ de $\Delta'$ seront toujours séparés par une frontière dans $\Delta$ et qu'il existe donc un temps $k$ pour lequel $T^k x \in P_i$ et $T^k y \in P_j, i \neq j$. Deux points de $\Delta'$ ont ainsi forcément des codes différents. Les cellules sont réduites à des points. Plus précisément :

**Définition 44** *On dit qu'un point $x$ de la frontière d'un atome $P_i$ n'est pas de densité "pleine" si :*

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(B(x, r) \cap P_i)}{\mu(B(x, r))} < 1.$$

Alors :

**Proposition 7** *Si $X$ est un espace compact et si les atomes de la partition n'ont aucun point de densité pleine sur leurs frontières, alors presque tout $x \in \bar{\Delta}$ a un code irrationnel.*

C'est à dire que $\bar{\Delta}$ contient essentiellement des points apériodiques. La preuve suivante est elle aussi issue de [22].

**Preuve :**

Soit $x \in X \backslash \bar{\Delta}$, ce dernier ensemble est un ouvert, on peut donc trouver une boule $B(x,r) \subset X \backslash \bar{\Delta}$, comme $X = \Sigma \cup \bar{\Delta}$, la boule est incluse dans une cellule et donc tous ses points ont le même code que $x$ et ce code est rationnel puisqu'une boule a une mesure de Lebesgue non nulle.

Supposons qu'il existe un ensemble $E$ de mesure de Lebesgue non nulle dans $\bar{\Delta}$ et dont tous les points ont un code rationnel. Si tous les points avaient un code rationnel différent, il ne pourrait y en avoir plus d'un nombre dénombrable. Or la mesure de $E$ est non nulle : il doit y avoir un ensemble $F \subset E$ dont tous les points ont le même code.

Si la distance d'un point à un ensemble $d(x, \Delta)$ est nulle alors $x \in \bar{\Delta}$ donc :

$$p \in \bar{\Delta} \quad \Leftrightarrow \quad d(\{T^n p, n \geq 0\}, \bigcup_{i=0}^{r-1} \partial P_i) = 0.$$

Il existe donc une suite de points dans $\{T^n p, n \geq 0\}$ qui converge vers une limite dans $\partial P$.

On a :

$$\exists (n_k) \text{ une suite telle que } \quad \lim_{k \to \infty} T^{n_k} p = p' \quad \text{et } p' \in \partial P.$$

Comme on n'a qu'un nombre fini d'atomes, au moins l'un d'entre eux contient une infinité de points de la suite $(T^{n_k})$. Soit $P_j$ cet ensemble. On notera $(T^{n_{k_l}})$ la sous-suite des points dans $P_j$. Par unicité de la limite, $p' \in \partial P_j$.

Par hypothèse $p'$ n'est pas de densité pleine :

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(B(p',r) \cap P_i)}{\mu(B(p',r))} < 1.$$

Donc

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\mu(B(p',r) \cap P_j)}{\mu(B(p',r))} < 1 - \epsilon.$$

On supposera que $p$ est un point de densité pleine, on peut choisir $r$ suffisamment petit pour que :

$$\frac{\mu(B(p,r) \cap F)}{\mu(B(p,r))} > 1 - \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.1}$$

Comme $T|_F$ est une isométrie et que $T^{n_{k_l}} \subset P_j$ on a l'inégalité suivante pour tout $l$ :

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\mu(B(T^{n_{k_l}} p, r) \cap T^{n_{k_l}} F)}{\mu(B(p',r))} < \frac{\mu(B(T^{n_{k_l}} p, r) \cap P_j)}{\mu(B(p',r))}.$$

Comme $\lim_{l \to \infty} \mu(B(T^{n_{k_l}} \cap P_j) = \mu(B(p',r) \cap P_j)$ alors on aurait par l'inégalité précédente et l'inégalité (3.1) :

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\mu(B(p',r) \cap P_j)}{\mu(B(p',r))} < 1 - \epsilon$$

ce qui est une contradiction. □

Une isométrie par morceaux est certainement continue sur l'intérieur des atomes (si ceux-ci en ont) mais a priori pas partout. De plus, $\mathcal{P}$ n'est pas ouverte et, même si on considère son intérieur, il n'est absolument pas assuré que cette dernière partition soit génératrice. Dans ces conditions, il est difficile de parler de l'entropie topologique de $T$. On posera alors la convention suivante :

**Définition 45** *L'entropie d'une isométrie par morceaux est l'entropie de son système symbolique :*

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log p(n)}{n} \quad \text{où } p(n) \text{ est le nombre de } n\text{-cellules.}$$

Cette définition peut être motivée par des arguments précis. Toute isométrie par morceaux peut en effet être prolongée en une application continue. Pour ce prolongement, unique, on peut calculer l'entropie topologique. Considérons le graphe $G$ de l'application de codage :

$$G = \{(x, \iota(x)), \quad x \in X\}$$

Muni de la topologie produit (On notera $W_T = \iota(X)$) :

$$d_G((x_1, \omega_1), (x_2, \omega_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_{W_T}(\omega_1, \omega_2)^2}.$$

Alors, l'application :

$$T_G : G \longrightarrow G$$

$$T_G : (x, \iota(x)) \longmapsto (Tx, \iota(Tx))$$

est uniformément continue. Elle peut être prolongée en une application continue sur l'adhérence du graphe :

$$\hat{T} : \bar{G} \longrightarrow \bar{G}.$$

**Preuve de la continuité uniforme** :
Soit $\epsilon$ fixé, et $\delta = \min(\frac{\epsilon}{r+1}, 1)$, où $r$ est le cardinal de la partition fondamentale $\mathcal{P}$. Alors $\forall x, y \in X$ si $d_G((x, \iota(x)), (y, \iota(y))) < \delta$ alors $d(\iota(x), \iota(y)) < 1$ et $x$ et $y$ sont dans le même atome. Donc :

$$\begin{aligned} d_G((Tx, \iota \circ Tx), (Ty, \iota \circ Ty) &\leq |Tx - Ty| + d(s \circ \iota(x), s \circ \iota(y)) \\ &\leq |x - y| + rd(\iota(x), \iota(y)) \leq (r+1)\delta \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□
On notera $\hat{X} = \bar{G}$. Il faudra supposer $X$ compact dans ce qui suit pour pouvoir utiliser les théorèmes classiques sur l'entropie. Pour la topologie produit, l'adhérence du graphe $\bar{G}$ est compacte puisque $X$ l'est. Désormais, on peut définir l'entropie topologique d'une isométrie par morceaux comme étant celle de l'application étendue $\hat{T}$. Pour cette dernière le shift restreint à la fermeture des mots possibles : $s|_{\bar{W}_T}$ est une semi-conjugaison topologique de $\hat{T}$. Il est semi-conjugué par la projection $\Pi_{\hat{X}} : \hat{X} \to \bar{W}_T$. En fait, on a égalité entre l'entropie de ces deux systèmes. C'est l'objet de la proposition suivante :

**Proposition 8** *L'entropie topologique d'une application $\hat{T}$ est égale à celle de $s|_{\bar{W}_T}$, le shift restreint à $\bar{W}_T$.*

**Preuve :**
Comme $s|_{\bar{W}_T}$ est une conjugaison topologique de $\hat{T}$ alors certainement $h(\hat{T}) \geq h(s|_{\bar{W}_T})$. Il reste

donc à montrer l'inégalité inverse. On va utiliser la définition de l'entropie par les ensembles $(n, \epsilon)-$ séparés, on va montrer que, si $p(n)$ est le nombre de mots de longueur $n$ :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\log p(n)}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\log r(n,\epsilon)}{n}.$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par compacité, il existe un $k$ tel que tout ensemble $(0, \epsilon)-$séparé ait un cardinal plus petit que $k$. Il suffira alors de montrer que $r(n, \epsilon) \leq k|p(n)|$. On va supposer le contraire. Soit $A \subset \hat{X}$ un ensemble $(n, \epsilon)-$séparé. Alors il y a un ensemble $Z \subset A$ de cardinal $k + 1$ et un mot fini de $p(n)$ qui coïncide sur les $n$ premières lettres avec le mot $\omega$ de tout point $(x, \omega) \in Z$. Comme le cardinal de $Z$ est plus grand que $k$, $Z$ ne peut pas être $(0, \epsilon)-$séparé et il doit donc y avoir deux points $(x, \omega), (y, \eta) \in Z$ qui soient à une distance plus petite que $\epsilon$. Les codages de ces deux points sont identiques jusqu'à l'ordre $n$, et donc, si $0 \leq i < n$ :

$$d(\hat{T}^i(x, \omega), \hat{T}^i(y, \eta)) = d((x, \omega), (y, \eta)) < \epsilon.$$

Ces deux points ne sont donc pas $(n, \epsilon)-$séparés, ce qui est une contradiction. □

### 3.1.2 Convexité

Si les atomes de la partition sont convexes, on peut montrer des résultats supplémentaires. On utilisera le résultat suivant, très simple :

**Lemme 4** *Si un ensemble convexe est invariant par une isométrie, alors son centre de gravité est un point fixe.*

**Preuve :** La convexité de l'ensemble garantit que le centre de gravité est à l'intérieur de $E$. Ses coordonnées sont :

$$x_i^G = \int_E x_i dv.$$

Les coordonnées de son image $TG$ sont :

$$x_i^{TG} = \int_{TE} Tx_i dv = \int_E Tx_i dv.$$

Si $T$ est une isométrie, alors c'est une application inversible de jacobien 1. Par changement de variable, on obtient :

$$x_i^{TG} = \int_{T^{-1}E} x_i dv = \int_E x_i dv = x_i^G.$$

□

**Proposition 9** *Soit $T$ une isométrie par morceaux de partition convexe sur un espace borné. Il existe alors des points de code rationnel si et seulement si il y a des points périodiques.*

**Preuve :** Un des sens de l'équivalence est évident, s'il y a des points périodiques, ils sont de code rationnel.
Inversement, supposons $x \in X$ rationnel de période $m$ et soit $K \in \Sigma$ une cellule dont le code est la partie périodique du code de $x$. Alors $T^m K = K$ et $T^m|_K$ est une isométrie. $K$ est un ensemble convexe de mesure positive invariant par une isométrie, son centre de masse est alors fixe sous $T^m$ : c'est un point périodique. □

**Proposition 10** *Soit $T$ une isométrie par morceaux de partition convexe sur un espace compact $X$. Il y a des points périodiques dans $X \setminus \Delta$ si et seulement si il existe une cellule de mesure positive.*

Comme $X = \Sigma \cup \bar{\Delta}$, on peut reformuler la proposition précédente en : il y a des points périodiques dans $X \setminus \Delta$ si et seulement si $\mu(\bar{\Delta}) < \mu(X)$. En particulier, si $\Delta$ est dense, il n'y a pas de point périodique dans $X \setminus \Delta$.

**Preuve :**
Supposons que $p \in X \setminus \Delta$ est un point périodique. Alors $d(\{T^n p, n \geq 0\}, \partial P) = r > 0$ et $T^i B(p,r) \cap \partial P = \emptyset$ pour tout $i$. Cette boule est donc contenue dans une cellule de mesure positive. Pour la seconde implication, supposons que $I$ soit une cellule de mesure positive. Il y a alors dans $X$ un point périodique. Cette cellule va "sauter" dans une cellule périodique $M$ après un certain nombre d'itérations. Si elle est de période $n$, alors $T^n M = M$ et le centre de masse de $M$ (qui est dans $M$ puisque qu'elle est convexe) est un point périodique intérieur à une cellule et donc à un atome. Il est disjoint de $\partial P$ et de $\Delta$. $\square$
Le résultat majeur qui peut être démontré dans le cas des isométries par morceaux à partitions convexes concerne leur entropie et est démontré dans [12] :

**Théorème 20** *L'entropie topologique d'une isométrie par morceaux de $\mathbb{R}^d$ définie sur un nombre fini d'atomes convexes est zéro.*

Les hypothèses de ce théorème sont fondamentales.En effet, on peut construire des exemples d'isométries par morceaux qui engendrent des full-shifts, (on se référera encore à [22]). Les résultats très généraux sur les isométries par morceaux ne sont pas légion. On trouve par contre de nombreuses études de cas particuliers qui montrent combien leurs dynamiques sont riches. On va introduire dans ce qui suit quelques exemples importants.

## 3.2 Les Translations de l'Intervalle

### 3.2.1 Définitions

Historiquement, les isométries par morceaux ont d'abord été étudiées en dimension un sur l'intervalle. Dans ce cas, les isométries se limitent à des translations ou des réflexions. Une littérature conséquente concerne ces systèmes qui deviennent très rapidement complexes à analyser. Traditionnellement, l'intervalle considéré est $[0,1[$. On distingue alors les échanges d'intervalles (qui sont des applications inversibles) des translations de l'intervalle plus générales (qui peuvent ne pas l'être).

**Définition 46** *Un échange d'intervalles $T$ est constitué d'une partition de l'intervalle en $k$ morceaux décrite par un vecteur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de probabilité et d'une permutation $\pi \in \mathcal{S}(k)$ telle que $T(]\alpha_i, \alpha_{i+1}[) = ]\alpha_{\pi(i)}, \alpha_{\pi(i+1)}[$ pour tout $i$, et tel que $T$ préserve l'orientation.*

Originellement introduits par A. Katok dans [27], la littérature sur le sujet est devenue très vaste. Citons les travaux de W.A. Veech (cf. [52, 53, 54, 55, 56]) sur les aspects métriques. Il est montré en particulier dans [55] que sous des conditions naturelles d'irréductibilité, presque tout échange d'intervalles, pour la mesure de Lebesgue, est uni-ergodique. Un résultat de [26] assure qu'il n'existait au plus que $m$ mesures ergodiques non-atomiques pour un échange de $m$ intervalles. M. Boshernitzan (et al.) a aussi (cf. [7, 8, 9, 10]) beaucoup contribué au sujet sur des aspects plus combinatoires et algébriques. En particulier, il est montré dans [10] qu'un

échange d'intervalles dont les paramètres sont dans un corps quadratique n'admet qu'un nombre fini d'applications de premier retour. Citons aussi les travaux de M.S. Keane (cf. [28, 29]), H. Masur [41], G. Rauzy [48], et S. Ferenczi (et al.) (cf. [19, 20, 21]) qui donne une étude précise d'une famille d'échanges de trois intervalles. Bien sur cette liste n'est pas exhaustive et nous n'entrerons pas dans les détails de ces travaux. On va plutôt illustrer le concept en s'intéressant en particulier à un exemple simple mais riche, celui d'une rotation du cercle.

### 3.2.2 Une Rotation du Cercle

On va encore une fois s'intéresser à notre application désormais familière $Tx = x + \alpha \bmod 1$. Cette application peut être vue comme un échange des deux intervalles, $I_0 = [0, 1-\alpha[$ et $I_1 = [1-\alpha, 1[$. Un cas particulièrement intéressant est celui où $\alpha = \varphi^{-1}$, $\varphi$ désignant le nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi^{-1}.$$

Alors l'application de premier retour dans $I_0$ est un échange de deux intervalles répliques de $I_0$ et $I_1$ contractés par l'homothétie de centre 0 et de rapport $\varphi^{-1}$. Précisément si on note cet échange d'intervalles comme une isométrie par morceaux avec :

$$\begin{cases} T_0 x = x + \varphi^{-1} \text{ si } x \in I_0 \\ T_1 x = x + \varphi^{-1} - 1 \text{ si } x \in I_1 \end{cases}$$

et $hx = (2-\varphi)x$ alors :

$$\begin{cases} T_0 = h^{-1} T_{01} h \\ T_1 = h^{-1} T_{011} h \end{cases}$$

sur tout $[0, 1[$. L'application de premier retour dans $I_0$ est l'échange des deux intervalles $hI_0$ et $hI_1$. On peut suivre facilement leurs trajets. Pour $I_0$ :

$$hI_0 \subset I_0, \quad T_0 h I_0 \subset I_1$$

puis l'intervalle $hI_0$ revient dans $I_0$. De même pour $I_1$ :

$$hI_1 \subset I_0, \quad T_0 h I_1 \subset I_1, \quad T_{01} h I_1 \subset I_1$$

puis $hI_1$ revient aussi dans $I_0$. On a ainsi un premier exemple d'auto-similarité. Le raisonnement peut s'itérer, le premier retour dans $hI_0$ par rapport à l'application de premier retour $\tilde{T}$ dans $I_0$ est l'échange des deux intervalles $h^2 I_0$ et $h^2 I_1$, on connaît les trajets de ces deux derniers intervalles et similairement de tout les intervalles $h^k I_0$ et $h^k I_1$. Ils seront tous donnés par l'itération de la substitution :

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & 0 & \longmapsto & 01 \\ & 1 & \longmapsto & 011. \end{array}$$

En effet, le trajet de $h^k I_0$, c'est-à-dire son code, est donné par $\sigma^k(0)$ et celui de $h^k I_1$ est donné par $\sigma^k(1)$. De plus, les ensembles $\{hI_0, hI_1, T_0 h I_0, T_0 h I_1, T_{01} h I_1\}$ forment une partition de $[0, 1[$ et donc les familles :

$$\{h^k I_0, h^k I_1\} \cup \bigcup_{\nu \in \mathrm{Pref}(\sigma^{\mathrm{k}}(0))} T_\nu h^k I_0 \cup \bigcup_{\nu \in \mathrm{Pref}(\sigma^{\mathrm{k}}(1))} T_\nu h^k I_1$$

où $\mathrm{Pref}(\sigma^{\mathrm{k}}(\mathrm{i}))$ désigne l'ensemble des préfixes non vides du mot $\sigma^k(i)$, forment pour tout $k \geq 0$ une partition de $[0, 1[$. Or il est facile de connaître une partie du code de chacun de ces ensembles.

Un atome $T_\nu h^k I_0$ où $\nu \in \mathrm{Pref}(\sigma^{\mathrm{k}}(0))$ par exemple suivra le code $s^{|\nu|}\sigma^k(0)$ pendant $|\sigma^k(0)| - |\nu|$ itérations. Ainsi "presque" chaque point de $[0,1[$ peut être isolé dans un atome aussi petit que l'on veut et on peut ainsi connaître son code aussi loin que l'on veut. Les points pour lesquels on ne peut pas faire ce traitement sont ceux pour lesquels l'expression $s^{|\nu|}\sigma^k(i)$ ne comporte pour tout $k$ qu'un nombre uniformément borné de lettres. Admettons pour commencer que pour tout $k$, cette expression ne comporte qu'une lettre. Alors les points sont dans $T_\nu I_i$ où $\nu$ est tel que $\nu j = \sigma^k(i)$ pour une certaine lettre $j$. Ce qui signifie aussi que :

$$T_j x \in T_j T_\nu h^k I_i = T_{\nu j} h^k I_i = T_{\sigma^k(i)} h^k I_i = h^k T_i I_i$$

et cela pour tout $k > 0$ ce qui signifie que $T_j x = 0$ le point fixe de $h$. Ainsi ces points sont dans $T^{-1}0$. Ce dernier ensemble ne contient qu'un seul point : $1 - \varphi^{-1}$. Le même raisonnement se tient si l'expression $s^{|\nu|}\sigma^k(i)$ ne comporte toujours que $l$ lettres, les points seront alors dans $T^{-l}0$ qui pour tout $l$ ne contient qu'un seul point. Ainsi, on n'a qu'un nombre dénombrable de points problématiques. On peut donc bien dire que l'orbite de presque tous les points peut être connue avec une précision arbitrairement grande.
Cette discussion est en fait une illustration sur un exemple simple des concepts qui seront utilisés dans le chapitre 5.
On va maintenant introduire des exemples désormais classiques d'isométries par morceaux en dimension deux qui exhibent de nombreuses propriétés intéressantes. En particulier, on retrouvera le concept d'auto-similarité.

## 3.3 Rotations sur le Tore

### 3.3.1 Définitions

Une des familles d'isométries les plus étudiée est une rotation sur un tore qui apparaît naturellement quand on considère une matrice elliptique sur le tore $\mathbb{T}^2$ plutôt que sur $\mathbb{R}^2$. L'une des plus anciennes études sur le sujet a été motivée par l'ingénierie (cf. [13], [14], [30]). En effet, des composants électroniques appelés "filtres digitaux du second ordre" implémentent des opérations que l'on peut représenter par des matrices elliptiques d'ordre deux. Or certains filtres ont un comportement très simple sous "overflow". Quand la tension appliquée aux bornes du filtre est plus grande que la tension maximale supportée, il lui applique une fonction modulo pour la rendre admissible.
Dans cette section, on se propose de présenter quelques résultats prouvés indépendamment dans [1] et [25]. On conservera les notations relatives à [1].
Formellement on considérera l'ensemble quotient :

$$\Omega = \mathbb{R}^2/Z$$

où

$$Z = \mathbb{Z}^2 - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Sur $\Omega$ on va étudier l'application induite par la matrice :

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \tau \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire :

$$T(x) = M_\tau . x \bmod Z.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2$ sont les valeurs propres de $M_\tau$ alors :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Ce qui donne :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}.$$

Donc si $|\tau| < 2$, les valeurs propres sont imaginaires et la matrice est elliptique. De plus si $\tau$ n'est pas un entier alors $M_\tau$ ne préserve pas le réseau $Z$. Il en résulte que l'application est discontinue sur le cercle $[-1/2, 1/2] \times 1/2$. En effet :

$$\lim_{\epsilon \to \pm 1/2} T(x, \epsilon) = (\pm 1/2, \pm\tau/2 - x).$$

Or, on n'a pas que $\tau/2 - x = -\tau/2 - x \bmod \mathbb{Z} - 1/2$ et les deux limites sont différentes. Le déterminant de $M_\tau$ est 1 et c'est une application injective, la mesure de Lebesgue est donc invariante. On peut aussi remarquer que $M_\tau$ est conjuguée à une rotation par la matrice inversible suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\tau/2 \\ 0 & \sqrt{1 - \tau^2/4} \end{pmatrix}.$$

En effet

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tau/2 \\ 0 & \sqrt{1 - \tau^2/4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau/2 & \sqrt{1 - \tau^2/4} \\ -\sqrt{1 - \tau^2/4} & \tau/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -\tau/2 \\ 0 & \sqrt{1 - \tau^2/4} \end{pmatrix}.$$

Si $\cos\theta = \tau/2$ on a bien :

$$C.M_\tau = R_{-\theta}.C.$$

Où $R_\theta$ est la matrice de rotation d'angle $\theta$. La conjugaison change la forme des mailles du réseau, désormais on étudiera l'application

$$F_\theta(x) = R_\theta(x) \bmod L_\theta$$

où $L_\theta = C.Z$. Notre application se réduit donc à une rotation sur un parallélogramme dont les côtés sont identifiés. Toujours en suivant la notation de [1] on notera par des primes les points identifiés sur le tore. Le parallélogramme que l'on notera $\Omega_\theta$ a pour coordonnées :

$$\begin{array}{lcl} a & = & ((-1 + \cos\theta)/2, -(\sin\theta)/2) \\ a' & = & ((1 + \cos\theta)/2, -(\sin\theta)/2) \\ a'' & = & ((-(1 + \cos\theta)/2, (\sin\theta)/2) \\ a''' & = & ((1 - \cos\theta)/2, (\sin\theta)/2). \end{array}$$

Et le cercle de discontinuité devient le segment $< aa' >$. L'ensemble des points où au moins une des itérées est discontinue est :

$$\Delta_\theta = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_\theta^n < aa' > .$$

Cet ensemble invariant est en général de structure très complexe, on en trouvera des illustrations dans les figures 3.1 et 3.2 pour les angles $\theta = \pi/4$ et $\theta = \sqrt{2}\pi/4$ respectivement. Ces deux cas constituent en quelque sorte deux extrêmes puisque le premier montre des cellules octogonales et une structure que l'on devine bien hiérarchisée, alors que le second montre des cellules circulaires,

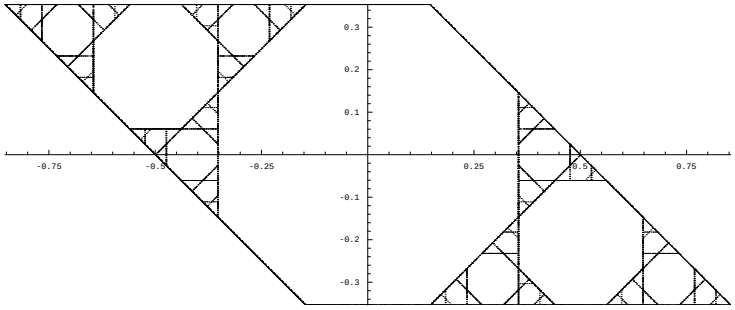


FIG. 3.1 – Orbite des lignes de discontinuité pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

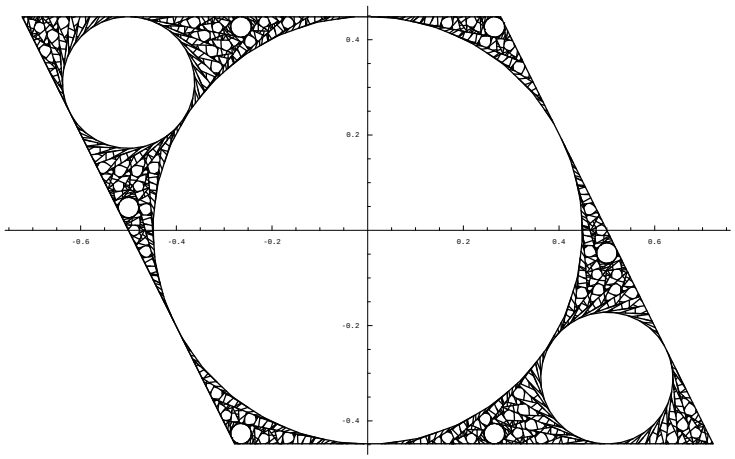


FIG. 3.2 – La dynamique pour $\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

un ensemble exceptionnel qui semble très dense et où aucune structure hiérarchique simple ne semble émerger.

On vérifie que l'application commute avec la symétrie centrée en l'origine (notée $\mathcal{R}$) :

$$\mathcal{R}R_{-\theta} = R_{-\theta}\mathcal{R}$$

La dynamique est en quelque sorte symétrique de part et d'autre de la cellule centrale. Les deux cellules périphériques auront une forme qui devra être invariante sous rotation par $\pi - \theta$. Dans le cas rationnel, ce seront des polygones réguliers qui auront soit autant, soit la moitié du nombre de côtés du polygone central. En outre, on a la relation de symétrie suivante :

$$\mathcal{A}R_{-\theta} = R_\theta\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}F_\theta = F_\theta^{-1}\mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ est la réflexion par rapport à la droite $y = x$. $F_\theta$ permet de conjuguer l'application à son inverse par une involution, ce qui prouve qu'elle est inversible. Sur l'ensemble $\Omega_\theta \setminus \bar{\Delta}_\theta$, elle est bicontinue. C'est donc un homéomorphisme.

La partition naturelle de $\Omega_\theta$ se construit en considérant la translation qu'il faudra appliquer aux points afin qu'ils demeurent dans le parallélogramme. Précisément :

$$\begin{array}{lcll} P_0 & = & \{x \in \Omega_\theta, & R_{-\theta}x \in \Omega_\theta\} \\ P_{-1} & = & \{x \in \Omega_\theta, & (R_{-\theta}x)_2 > (\sin\theta)/2\} \\ P_1 & = & \{x \in \Omega_\theta, & (R_{-\theta}x)_2 < (-\sin\theta)/2\}. \end{array}$$

On peut alors reformuler l'application comme :

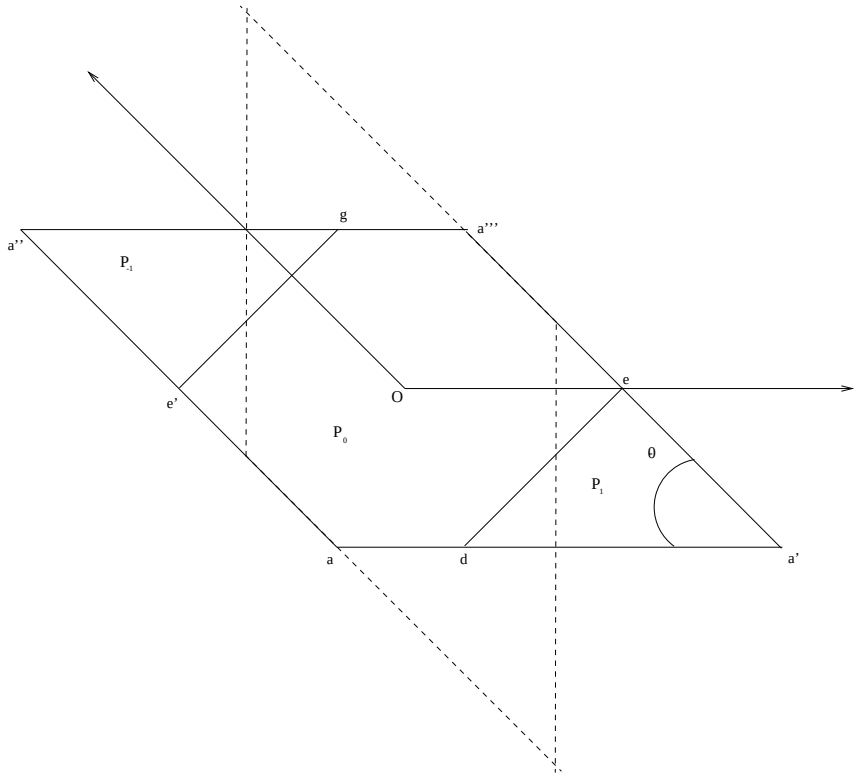


FIG. 3.3 – Les ensembles de la partition $\{P_{-1}, P_0.P_1\}$.

$$F_\theta = \begin{cases} f_{-1} & = & R_{-\theta}.x - v \quad \text{si } x \in P_{-1} \\ f_0 & = & R_{-\theta}.x \quad \text{si } x \in P_0 \\ f_1 & = & R_{-\theta}.x + v \quad \text{si } x \in P_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

si $v = (-\cos\theta, \sin\theta)$ est le côté $< a''a >$.
Pour deux valeurs de $\theta$ particulières la dynamique est triviale. Le cas $\theta = \pi/2$ où toute la figure est invariante sous $F_\theta$ : la dynamique se résume à une rotation. Le cas $\pi/3$ où la cellule centrale est un hexagone qui est conservé par la rotation, les deux triangles périphériques sont simplement échangés. Hors ces deux cas, l'ensemble $P_0$ n'est pas conservé par la rotation. On remarque que l'on a des points périodiques de période deux. L'équation :

$$f_{-1} \circ f_1(X) = X$$

nous donne :

$$\begin{array}{lcl} R_{-\theta}(R_{-\theta}.X + v) - v & = & X \\ (R_{-2\theta} - I).X & = & v - R_{-\theta} \end{array}$$

qui a des solutions tant que $\det(R_{-2\theta} - I) = 2 - 2\cos 2\theta \neq 0$, i.e. tant que $\theta = \pi$. On peut montrer qu'il s'agit en fait des centres de gravité des triangles $P_1$ et $P_{-1}$.
Dans ce qui suit, on s'attache à étudier en détail la dynamique du cas $\theta = \pi/4$. C'est le cas le plus simple qui illustre les techniques de base qui se sont révélées fructueuses dans l'étude des isométries par morceaux en général.

### 3.3.2 Cas $\theta = \pi/4$

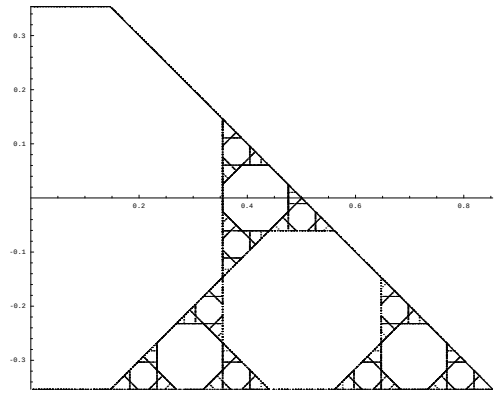


FIG. 3.4 – L'ensemble $D$ dans le cas $\pi/4$.

On commence par utiliser la symétrie centrale en définissant une application auxiliaire qui enverra l'ensemble en forme de pointe de flèche $D = (da'cj)$ dans lui-même. On appellera $Q_0$ et $Q_1$ respectivement les parties de cet ensemble qui sont dans $P_0$ et $P_1$, c'est-à-dire que ce sont les triangles (cf. figure 3.5 ) :

$$Q_0 = (cej)$$
$$Q_1 = (ea'd).$$

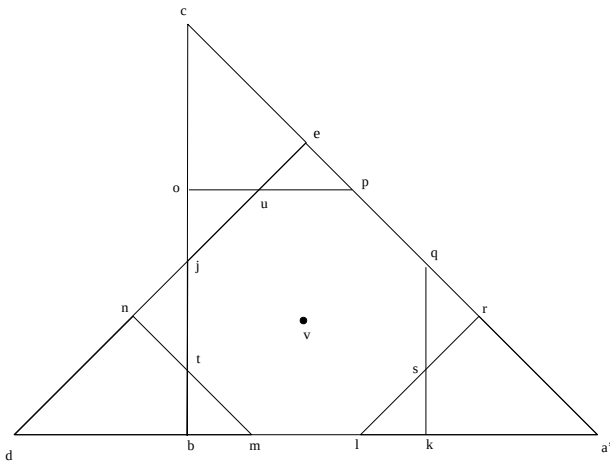


FIG. 3.5 – On observe bien les trois petite copies de $D$.

Sur $D = Q_0 \cup Q_1$ on définit

$$T(x) = \begin{cases} T_0(x) & = & F(x), \quad x \in Q_0 \\ T_1(x) & = & \mathcal{R} \circ F(x), \quad x \in Q_1 \end{cases}$$

On notera par la suite $F = F_\theta$. L'application $T$ n'a pas de point fixe dans $Q_0$. Par contre, dans $Q_1$, elle agit comme une rotation de centre $v$ et d'angle $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Le point $v$ est un point fixe de $T$ et un point de période 2 pour $F$. On remarque que l'on a similarité de $D = (da'cj)$

avec l'ensemble plus petit $D' = (qsla')$, Le but va maintenant être de conjuguer l'application avec son premier retour dans $D'$. On va donc en suivre l'orbite. Dans un premier temps :

$$(qsla') \to (cjup).$$

Ce dernier est coupé en deux triangles : $(cje)$ et $(uep)$, dont les antécédents seront les analogues de $Q_1$ et $Q_0$ respectivement. Chacun des deux morceaux va ensuite suivre une trajectoire distincte :

$$(eup) \to (tbm) \to (qrs)$$

et

$$(cje) \to (jdb) \to (lra')$$

Le premier retour dans $D'$ est ainsi $T^3$. On va l'appeler $T'$. Il est défini comme :

$$\begin{cases} T'_0 &= T_1 \circ T_1 \circ T_1 \quad \text{si } x \in Q'_0 = (slk) \\ T'_1 &= T_1 \circ T_0 \circ T_1 \quad \text{si } x \in Q'_1 = (qka'). \end{cases}$$

Il existe une unique similitude $S$ qui envoie $D$ dans $D'$ et $Q_{0,1}$ dans $Q'_{0,1}$. Les deux triangles $(qka')$ et $(cba')$ sont homothétiques de rapport $\rho = \sqrt{2}-1$. En effet, $\rho$ est le rapport des longueurs $db/de$, qui est :

$$\rho = \frac{db}{de} = \frac{da' - ba'}{de} = \frac{da'}{de} - 1$$

et on a :

$$\frac{(da')^2}{(de)^2} = \frac{2ed^2}{ed^2} = 2.$$

La similitude $S$ est donc la composée de la contraction de centre $a'$ et de rapport $\sqrt{2}-1$ et de la réflexion d'axe $(ja')$. On peut vérifier explicitement (que ce soit à la main ou avec un logiciel comme *Mathematica*) que :

$$ST_0 = T_1 \circ T_1 \circ T_1 S$$

$$ST_1 = T_1 \circ T_0 \circ T_1 S.$$

Comme $T$ n'a qu'un seul point fixe, $v$, qui est en fait le centre de gravité de $(dea')$, $T'$ n'en aura qu'un seul aussi. Ce sera $Sv$, centre de gravité du triangle $(qka')$. Ce point est donc de période 3 pour $T$. L'ensemble $(lsra')$ est lui-même composé de 3 sous-ensembles similaires. On peut itérer le raisonnement. En conjuguant $T'$ à une application remise à l'échelle sur un des sous-ensembles par la même similitude $S$, on aura :

$$T'' = ST'S^{-1} = S^2TS^{-2}$$

définie sur $D'' = SD' = SQ'_0 \cup SQ'_1$. Ainsi,

$$T''_0 = T'_1 \circ T'_1 \circ T'_1 = (T_1 \circ T_0 \circ T_1)^3$$

$$T''_1 = T'1 \circ T'_0 \circ T'_1 = (T_1 \circ T_0 \circ T_1) \circ (T_1 \circ T_1 \circ T_1) \circ (T_1 \circ T_0 \circ T_1).$$

Et on aboutit aux mêmes conclusions : le seul point fixe de $T''$ est $S^2v$, il est de période 3 pour $T'$, de période 9 pour $T$. On étend le processus à un ordre $n$ quelconque. On a la relation de récurrence :

$$S^nTS^{-n}|_{S^nQ_0} = S^{n-1}T_1S^{-(n-1)} \circ S^{n-1}T_1S^{-(n-1)} \circ S^{n-1}T_1S^{-(n-1)}$$

$$S^n T S^{-n}|_{S^n Q_1} = S^{n-1} T_1 S^{-(n-1)} \circ S^{n-1} T_0 S^{-(n-1)} \circ S^{n-1} T_1 S^{-(n-1)}.$$

On remarque donc que, pour trouver les applications remises à l'échelle à l'ordre $n$, on doit substituer :

$$T_0^{(n)} = T_1^{(n-1)} \circ T_1^{(n-1)} \circ T_1^{(n-1)}$$
$$T_1^{(n)} = T_1^{(n-1)} \circ T_0^{(n-1)} \circ T_1^{(n-1)}.$$

On aboutit donc aux règles de substitution suivantes :

$$0 \to 111$$

$$1 \to 101.$$

Cette substitution nous donne l'itinéraire de n'importe quel point périodique pour $T$. En effet, on a $3^n$ "pointes" à l'ordre $n$, et un point fixe pour $S^n T S^{-n}$. Comme on peut exprimer explicitement cette dernière application, on trouve tout de suite l'itinéraire de $S^n v$. On peut assez facilement décrire la dynamique de $F$ à partir de celle de $T$ : dans l'itinéraire pour $T$, il faut alterner les signes $+$ et $-$ à côté des 1 pour obtenir l'itinéraire pour $F$. Par exemple, pour le point $v$, celui-ci est de période 2. Il a donc pour itinéraire $[+1, -1]$ et on a ensuite deux itinéraires périodiques différents de période 3, pour $1 \to 101$ :

$$+1 \to +10 - 1$$

et

$$-1 \to -10 + 1.$$

Ces deux mots sont les "négatifs" l'un de l'autre, et ne sont pas congrus par décalage. On a deux orbites de période 3 selon que l'on part de $P_{-1}$ ou de $P_1$. À l'ordre suivant, on a :

$$1 \to 101 \to 101111101.$$

Mais les deux mots obtenus :$-10 + 1 - 1 + 1 - 1 + 10 - 1$ et $+10 - 1 + 1 - 1 + 1 - 10 + 1$ ne sont pas valables car on ne peut avoir de mots avec des couples $+1 + 1$ ou $-1 - 1$ juxtaposés. Ces deux mots ne représentent que des "demi-orbites". Leur concaténation est la seule orbite périodique que l'on peut engendrer à l'ordre deux et elle est de période 18 : $[-10 + 1 - 1 + 1 - 1 + 10 - 1 + 10 - 1 + 1 - 1 + 1 - 10 + 1]$. À l'ordre suivant :

$$1 \to 101 \to 101111101 \to 101111101101101101101111101.$$

Le nombre de 1 est pair, le mot sera valide, ainsi que son "négatif". On aura deux orbites de période 27. Il est facile de connaître le nombre de 0 et de 1 à chaque itération de la substitution. Pour cela, il suffit de considérer la matrice associée à la substitution. Dans notre cas particulier, c'est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ses puissances nous donnent le nombre respectif de chaque lettre dans les itérés de 1 :

$$M^k . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

où $n$ est le nombre de 0 et $p$ le nombre de 1. Une simple diagonalisation nous donne :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (3^k - (-1)^k) \\ (3^{k+1} + (-1)^k) \end{pmatrix}.$$

Les premiers termes de cette suite : $(1,2),(2,7),(7,20),(20,61),(182,547),\ldots$ permettent de voir tout de suite le mécanisme : $p$ au pas suivant est 3 fois $n$ auquel on enlève ou ajoute alternativement 1. Ainsi, si $k$ est pair alors $p$ sera impair. En général, si l'ordre est pair, on n'aura qu'une seule orbite de période $2.3^n$, sinon on en aura deux, de période $3^n$, "négatives" l'une de l'autre. L'orbite de tous les centres des îles périodiques peut s'exprimer ainsi. La dynamique sur l'ensemble $O_{\pi/4}$ est donc complètement connue.
On peut également explorer la dynamique sur l'ensemble dérivé $\Delta'_{\pi/4}$ où chaque point de cet ensemble est une intersection dénombrable de triangles $Q_{[s_0\cdots]}$ (où $[s_0\cdots]$ est son itinéraire) :

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{[s_0\cdots s_{3^n-1}]}.$$

Alors l'application qui à chacun de ces points $x$ associe son itinéraire dans le passé et le futur conjugue topologiquement $(\Delta', F)$ à un sous-shift du système symbolique engendré par la substitution ; laquelle est un système minimal doté d'une unique mesure de probabilité ergodique (cf [47]). On peut aussi explorer la dynamique sur $\bar{\Delta}$, (on trouvera les détails dans [1]). Un des résultats principaux de cette étude est :

**Théorème 21** *L'orbite du point $a$ est infinie et dense dans $\bar{C}_{\pi/4} \setminus C_{\pi/4}$, où $C_{\pi/4}$ est l'ensemble des centres de rotation des cellules périodiques.*

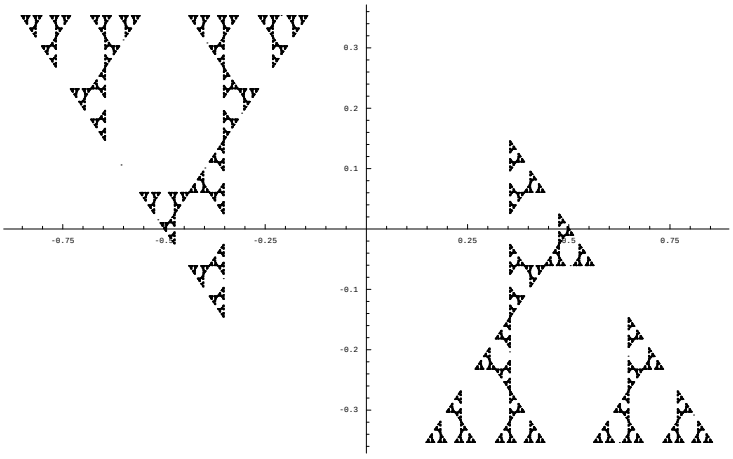


FIG. 3.6 – L'orbite de $a$.

La propriété d'auto-similarité de la figure $\Delta'$ nous permet aussi d'obtenir facilement sa dimension de Hausdorff. Cet ensemble est un attracteur d'I.F.S invariant par les similitudes qui appliquent $D$ dans $(qsla')$, $(cjup)$ et $(jdmt)$. Elles ont toutes le même rapport de contraction : $\sqrt{2}-1$, donc la dimension de Hausdorff $s$ est telle que

$$3(\sqrt{2}-1)^s = 1$$

ce qui donne pour l'ensemble $\bar{\Delta}$ :

$$\dim_H(\bar{\Delta}) = \frac{\ln(3)}{\ln\sqrt{2}+1}.$$

On a $1 < \dim_H < 2$. Ce qui prouve aussi que la mesure de Lebesgue de $\bar{\Delta}$ est nulle et que l'ensemble des îles périodiques est dense dans $\Omega$.
Dans [1], des résultats similaires sont prouvés pour deux autres cas : $\theta = \pi/5$ et $\theta = 2\pi/5$ en utilisant les mêmes méthodes. Le cas $\pi/6$ restera hors de porté d'une investigation "visuelle". En effet, dans ce qui précède, on a repéré les auto-similarités visuellement avant de les vérifier par le calcul, lesquels peuvent se révéler longs et fastidieux. Il faudra attendre les travaux exposés dans [32] pour voir résolus tous les cas où le paramètre $\tau$ est un entier quadratique. Ce travail utilise les mêmes principes et méthodes de base mais fait grand usage de l'outil informatique.
Il nous parait opportun de mentionner que [32] fait suite à une série de travaux (notamment [37], [38]) dont le but est l'étude d'une famille de systèmes dynamiques en apparence totalement différente de celle dont on parle ici : les rotations discrétisées. Pourtant, il n'en est rien. On va faire une digression afin d'exposer cette famille de systèmes et leurs relations avec les isométries par morceaux. De plus, cela met en lumière les conséquences que peuvent avoir les propriétés algébriques des paramètres.

## 3.4 Rotations Discrétisées

### 3.4.1 Conjugaison

Les pathologies induites par la discrétisation sur les systèmes dynamiques constituent un champ de recherche récent et complexe, d'une importance fondamentale à une époque d'omniprésence de l' informatique. Pour une introduction, on se reportera notamment à [5, 6, 15, 58, 37, 38, 32, 59, 60]). Pour illustrer ces problèmes, on se propose d'essayer de suivre la propagation des erreurs dans des systèmes simples. Ici, on s'intéresse à une famille d'applications linéaires que l'on choisit de considérer sur un réseau dont les sites seront équidistants. Cette discrétisation uniforme ne correspond pas vraiment à la réalité des calculs sur nombres à virgule (flottants) effectués par les ordinateurs mais, même dans ce cas, les effets sont loins d'être négligeables. Les premiers résultats sur ce type d'applications ont été donnés dans [37, 38, 32].
Dans ce qui suit, on écrira $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} = x - (x \bmod 1)$ la fonction d'arrondi par défaut, appelée aussi fonction "sol" (floor en anglais). Dans [37], le cas particulier suivant est étudié :

$$\Phi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2, \qquad \Phi(x, y) = (\lfloor \lambda x \rfloor - y, x),$$

pour $\lambda = 2\cos(2\pi/5) = (1-\sqrt{5})/2$. La clef de l'étude réside dans l'isomorphisme entre ce système et une isométrie par morceaux restreinte à un sous-ensemble dense du tore, très similaire à celle décrite dans la section précédente. De plus, une fois l'isomorphisme établi, le système sur le tore est traité d'une manière analogue. La renormalisation effectuée dans le tore permet, via l'isomorphisme, de construire les orbites périodiques par un procédé substitutif qui n'est pas sans rappeler la construction du flocon de von Koch. Une généralisation est possible pour huit autres valeurs de $\lambda$, en particulier $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$ (qui correspond à une rotation de $\pi/5$), $\lambda = \sqrt{2}$ (qui correspond à une rotation de $\pi/4$) et même $\lambda = \sqrt{3}$ dont le portrait de phase n'exhibe aucune auto-similarité claire et qui nécessite l'utilisation d'un ordinateur (cf. [32]). La discussion repose sur le fait que tous les cas suscités correspondent à des nombres algébriques de degré deux. L'algébricité du paramètre de l'application conditionne la dimension de l'espace des phases de son conjugué. Dans [37], [38] l'isomorphisme est construit du réseau vers le tore, et il est montré dans [36] que des paramètres $\lambda$ d'ordres supérieurs donnent des isomorphismes dans des tores de dimensions supérieures. Il est possible de partir à l'envers et de construire un isomorphisme du tore vers le réseau. C'est ce qu'on se propose de faire tout d'abord dans le cas où les paramètres sont quadratiques.

### 3.4.2 Cas Quadratique

On va définir une isométrie par morceaux légèrement différente de celle de la section 3.3.1. Précisément :

$$T(x) = M_\tau x \bmod \mathbb{Z}^2,$$

où $M_\tau$ est la matrice donnée dans la section 3.3.1 :

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \tau \end{pmatrix}.$$

Cette application est conjuguée à une rotation de la même manière que dans la section 3.3.1. On supposera ici que $\tau$ est un entier quadratique c'est à dire :

$$\tau^2 = a\tau + b \quad \text{pour} \quad a, b \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

On définit l'ensemble :

$$E_\tau = \{N\tau \bmod 1;\ N \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\tau] \cap [0, 1[,$$

où $\mathbb{Z}[\tau]$ est le plus petit anneau contenant $\mathbb{Z}$ et $\tau$. À moins que $\tau \in \mathbb{Q}$, $E_\tau$ est dense dans $[0, 1[$. On définira la bijection $\Phi_0^{-1} : \mathbb{Z} \to E_\tau$ par :

$$\Phi_0^{-1} : N \mapsto N\tau \bmod 1.$$

Équipé de l'addition modulo un, $E_\tau$ est un groupe et $\Phi_0$ un isomorphisme de groupe. Le but est alors de trouver une application $F_\tau : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ telle que :

$$F_\tau \circ \Phi = \Phi \circ T,$$

où $\Phi = \Phi_0 \times \Phi_0$. En prenant $x = N\tau - \lfloor N\tau \rfloor$ et $y = M\tau - \lfloor M\tau \rfloor$. On a

$$\begin{aligned} F_\tau \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} &= F_\tau \circ \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} y \\ -x + y\tau \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M \\ -N + aM - \lfloor M\tau \rfloor \tau \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où on a utilisé $\tau(M\tau - \lfloor M\tau \rfloor) = aM\tau - bM - \lfloor M\tau \rfloor \tau$. Dans ce cas, on peut même simplifier encore les expressions :

$$aM - \lfloor M\tau \rfloor - N = \lfloor M(a - \tau) - N \rfloor + 1 = \lceil M(a - \tau) - N \rceil,$$

où $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z},\ n \geq x\}$ est la fonction d'arrondi par excès. On note que $a - \tau = -b/\tau$ est le conjugué algébrique de $\tau$ que l'on appellera $\tau'$. Ainsi, $F_\tau$ peut être considérée comme la version discrète de l'application linéaire suivante :

$$\hat{F}_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \tau' \end{pmatrix}.$$

### 3.4.3 Remarques

On a vu que l'application sur le tore $M_\tau$ restreinte à $E_\tau^2 \subset \mathbb{T}^2$ était isomorphe à une application linéaire discrète $F_\tau$. Quand cette dernière application est-elle elliptique (C'est-à-dire conjuguée à une rotation) ? Le lemme suivant montre que cela n'arrive que dans un nombre très restreint de cas. La plupart du temps, une application est elliptique alors que sa contrepartie est hyperbolique.

**Proposition 11** *Soit $\tau$ et $\tau'$ deux nombres algébriques quadratiques conjugués. Alors les matrices $M_\tau$ et $\hat{F}_\tau$ sont toutes deux elliptiques si et seulement si une d'entre elles est conjuguée à une rotation rationnelle.*

**Preuve :**
Supposons tout d'abord que $M_\tau$ (ou bien $\hat{F}_\tau$) est conjuguée à une rotation rationnelle. Alors $|\tau| < 2$et $\tau = 2\cos\theta$ pour $\theta = \pi p/q$ et $p, q \in \mathbb{Z}$. Donc

$$\cos(q\theta) = 1 \quad \text{ou} \quad \cos(q\theta) = -1.$$

Supposons que $\cos(q\theta) = 1$ (l'autre cas se traite similairement). Alors, les $\pi p/q$ pour $p = 0, 2, \ldots, 2(q-1)$ sont solutions de l'équation $\cos(q\theta) - 1 = 0$. La trigonométrie élémentaire (la formule d'Euler-de Moivre), nous permet d'exprimer cette équation avec un polynôme en $\tau = 2\cos\theta$ :

$$P(\tau) = \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} C_{2j}^q (-1)^j (\frac{\tau}{2})^{q-2j} (1 - (\frac{\tau}{2})^2)^j\right] - 1 = 0.$$

Ce polynôme est de degré $q$, et il a au plus $q$ solutions, en particulier $\tau'$, le conjugué algébrique de $\tau$. Si $\tau' \in [-2, 2]$, alors $M_\tau$ et $\hat{F}_\tau$ sont simultanément elliptiques et on utilise la liste donnée dans la seconde partie de la preuve pour conclure que : $\tau' = 2\cos\pi p'/q$. Si $|\tau'| > 2$, alors tout $\theta' \in \arccos(\tau'/2)$ est de la forme $n\pi + iw$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$ et $w \neq 0$. Mais alors $q\theta'$ a une forme similaire, et $\cos(q\theta') \neq 1$. Inversement, si on a $|\tau| < 2$ et $|\tau'| < 2$, alors comme

$$\tau + \tau' = a \quad \text{et} \quad \tau \cdot \tau' = -b,$$

on a

$$|a| \leq |\tau| + |\tau'| < 4 \quad \text{et} \quad |b| = |\tau||\tau'| < 4.$$

Comme $a, b \in \mathbb{Z}$, il n'y a qu'un nombre fini de cas. En ajoutant la contrainte supplémentaire que $\tau$ soit irrationnel et réel, toutes les possibilités sont dans la liste ci-dessous :

| $\tau = 2\cos(\theta_1)$ | $\tau' = 2\cos(\theta_2)$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ |
|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ | $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ | $6\pi/5$ | $2\pi/5$ |
| $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $3\pi/4$ | $\pi/4$ |
| $-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $7\pi/6$ | $\pi/6$ |
| $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ | $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ | $3\pi/5$ | $\pi/5$ |

Tous ces cas correspondent bien à des rotations rationnelles. □
C'est cet ensemble de cas qui a été étudié systématiquement dans [32]. Les cas où les deux matrices ne sont pas elliptiques peuvent avoir des implications intéressantes. Par exemple, si $\hat{F}_\tau$ est elliptique et $M_\tau$ hyperbolique, alors prouver que $F_\tau$ a toutes ses orbites bornées (ce qui est en général une question très difficile) expliciterait des ensembles denses de points périodiques pour des systèmes hyperboliques discontinus du tore (une preuve de l'existence de tels ensembles est donnée dans [34]).

### 3.4.4 Cas de Degrés Supérieurs

Les résultats des sections précédentes s'étendent aux cas où $\tau$ est un entier algébrique de degré $n$. On va décrire en détail le cas $n = 3$, les autres étant similaires mais impliquant des calculs plus pénibles. On suppose :

$$\tau^3 = a\tau^2 + b\tau + c, \quad \text{pour } a, b, c \in \mathbb{Z},$$

et soit

$$\tilde{E}_\tau = \{M\tau^2 + N\tau \bmod 1, \quad M, N \in \mathbb{Z}\}.$$

Cette fois $\Phi_0^{-1} : \mathbb{Z}^2 \to \tilde{E}_\tau$ définie par

$$\Phi_0^{-1} : (M, N) \longmapsto M\tau^2 + N\tau \bmod 1.$$

est un isomorphisme de groupe. Alors $\Phi = \Phi_0 \times \Phi_0$ conjugue $T$ restreinte à $\tilde{E}_\tau^2$ à l'application $F_\tau$ de $\mathbb{Z}^4$ dans lui-même. Pour trouver l'expression de $F_\tau$, on est amené à considérer l'application suivante $f : \tilde{E}_\tau \to \tilde{E}_\tau$ :

$$f : z \mapsto \tau z \bmod 1.$$

Pour $z \in \tilde{E}^2$, $z = M\tau^2 + N\tau \bmod 1$ on a :

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & \tau(M\tau^2 + N\tau - \lfloor M\tau^2 + N\tau \rfloor) \bmod 1 \\ & = & M(a\tau^2 + b\tau + c) - \tau\lfloor M\tau^2 + N\tau \rfloor + \tau^2 N \bmod 1 \\ & = & \tau^2(Ma + N) + \tau(bM - \lfloor M\tau^2 + N\tau \rfloor) + Mc \bmod 1 \\ & = & \tau^2(Ma + N) + \tau(bM - \lfloor M\tau^2 + N\tau \rfloor) \bmod 1 \\ & = & \tau^2(Ma + N) + \tau(\lceil bM - M\tau^2 - N\tau \rceil) \bmod 1. \end{array}$$

Si $z_1$ et $z_2$ sont dans $E_\tau$ l'application $T$ devient :

$$\begin{array}{rcl} T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} z_2 \\ f(z_2) - z_1 \bmod 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} M_2\tau^2 + N_2\tau \\ \tau^2(M_2 a + N_2 - M_1) + \\ \qquad \tau(bM_2 - \lfloor M_2\tau^2 + N_2\tau \rfloor - N_1) \bmod 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ainsi,

$$F_\tau \begin{pmatrix} M_1 \\ N_1 \\ M_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \Phi \circ T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_2 \\ N_2 \\ M_2 a + N_2 - M_1 \\ bM_2 - \lfloor M_2\tau^2 + N_2\tau \rfloor - N_1 \end{pmatrix},$$

qui peut être considérée comme la discrétisation (par la fonction d'arrondi par excès) de l'application linéaire

$$\hat{F}_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b - \tau^2 & -\tau \end{pmatrix}.$$

En général, si $\tau$ est un entier algébrique de degré $n$, alors $\Phi(E_\tau^{n-1})$ est le réseau d'entiers $2(n-1)$-dimensionnel. Restreinte à $E_\tau^{n-1}$, $T$ est conjuguée à l'application $F_\tau$, qui est la discrétisation (par l'arrondi par excès) de l'application linéaire :

$$\hat{F}_\tau = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & A \end{pmatrix},$$

où Id est la matrice identité $n-1$-dimensionnelle, et la matrice $A$ qui représente l'application $f$ a la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 - \tau^n & -\tau^{n-1} & -\tau^{n-2} & \cdots & -\tau \end{pmatrix}.$$

### 3.4.5 Exemple

**Cas $\theta = \frac{\pi}{4}$**

Ce cas est un des plus simples qui soient non-triviaux. Son étude peut être menée jusqu'au bout, aussi bien du point de vue du tore que du réseau. Ici $\tau = \sqrt{2}$, la matrice à discrétiser prend la forme :

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

qui est conjuguée à une rotation d'angle $3\pi/4$. L'application discrétisée donne des orbites dont la structure est complexe mais semble suivre des règles hiérarchiques intelligibles. La figure 3.7 représente les itérés de $\mathbb{Z} \times \{0\}$, qui correspond à un sous-ensemble dense de l'ensemble des itérées des lignes de discontinuité de l'application du tore (cf. figure 3.8). Les propriétés de ces deux ensembles sont en général étroitement reliées ; en particulier, il est possible de démontrer que la dimension de Hausdorff du second est la même que celle de l'ensemble limite du premier.

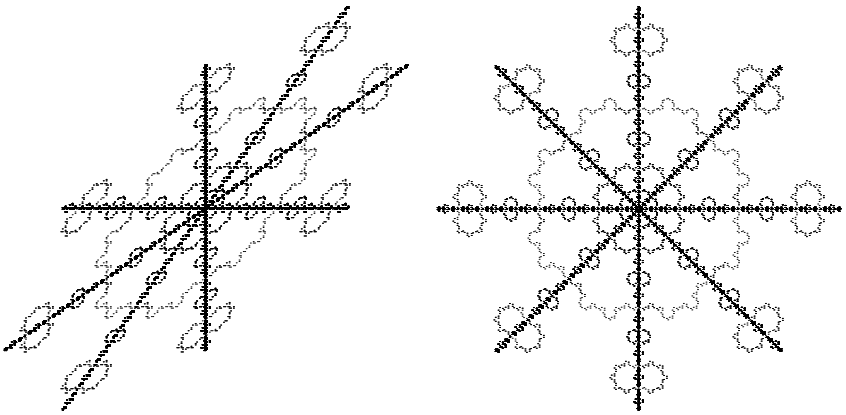

FIG. 3.7 – La figure de gauche montre les itérés de l'ensemble $\mathbb{Z} \times \{0\}$ par $F_{-\sqrt{2}}$. La figure de droite montre le même ensemble sous la transformation qui fait de $F_{-\sqrt{2}}$ une vraie rotation.

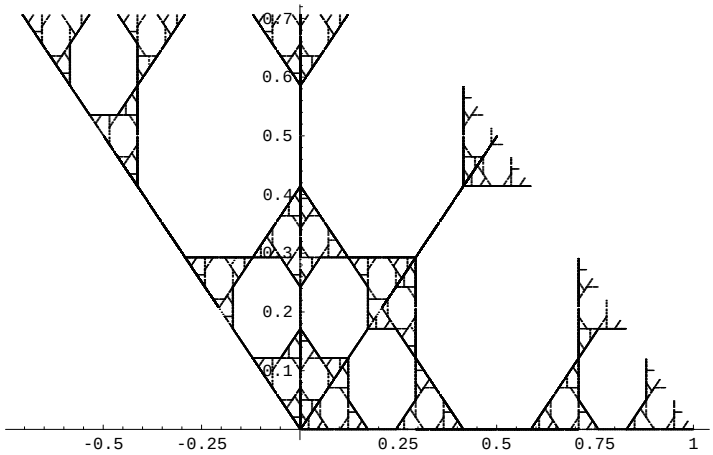


FIG. 3.8 – Les itérées de la ligne de discontinuité pour l'application du tore.

# Chapitre 4

# Étude de Cas : Tours de Triangles Isocèles

## 4.1 Exemple Introductif

### 4.1.1 Cas à Deux Triangles

Dans [23], A. Goetz décrit un système de deux rotations définies sur deux demi-plans dont une caractéristique fondamentale est d'avoir pour attracteur un ensemble auto-similaire qui ressemble à un tapis de Sierpiński construit avec des pentagones. De plus, à un premier retour près, ces applications se retrouvent dans la dynamique sur le tore de la section 3.3.1. On va la décrire précisément en conservant les notations de [23].

L'isométrie $T$ à laquelle on s'intéresse ici est définie sur $P_0 = \{(x, y),\ x < 0\}$ le demi-plan négatif et $P_1 = \{(x, y),\ x \geq 0\}$ le demi-plan positif par deux rotations $T_0$ et $T_1$ d'angles $-4\pi/5$ et $4\pi/5$ respectivement. Si on note $k = 2\cos(2\pi/5)$, alors les centres de rotation seront $S_0 = (-1, 0)$ et $S_1 = (k, -(k+1)\tan\pi/5)$. Ces paramètres posés ad hoc peuvent paraître étranges mais ils sont en fait réglés pour obtenir une conformation géométrique très particulière. En effet, construisons un triangle $ABD$ défini tel que les angles $ABD$ et $DAB$ soient égaux à $\pi/5$, que $B$ et $D$ soient sur l'axe des ordonnées et que $S_0$ soit le centre de son cercle inscrit. Construisons maintenant le triangle $BDC$ tel que les angles $BCD$ et $CDB$ soient égaux à $2\pi/5$. Alors $S_1$ est le centre de son cercle inscrit et la dynamique opère une rotation de $ABD$ et $BCD$ en préservant le triangle $ABC$ comme illustré sur la figure 4.1. Le triangle $P = ABC$ joue un rôle particulier puisqu'il est un attracteur pour la dynamique définie sur $\mathbb{R}^2$, précisément :

**Théorème 22** *Pour tout ensemble borné $X$ contenant le triangle fermé $\bar{P}$, il existe un rang $n$ pour lequel $T^n X$ est inclus dans $\bar{P}$.*

Nous sommes donc ramené à l'étude de $T$ restreinte à $P$. Et on a :

**Théorème 23** *Le triangle $\bar{P}$ est la réunion d'une infinité dénombrable de cellules périodiques et d'un ensemble $R$ de mesure nulle. De plus $1 < \dim_H(R) < 2$*

Ainsi, presque tout point du plan est ultimement périodique. On va donner des schémas de preuves de ces résultats, les lecteurs intéressés trouveront les détails dans l'article original ([23]). La preuve du théorème 22 repose sur un découpage astucieux du plan en sept parties à partir duquel on peut écrire un diagramme de transition permettant de suivre l'orbite de tout point. La partition et les diagrammes sont reproduits dans les figures 4.2 et 4.3. On remarque

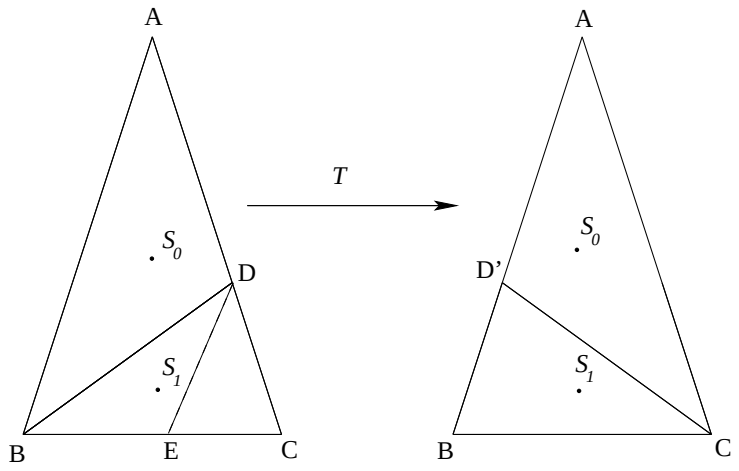


FIG. 4.1 – Illustration de l'action de $T$ sur les triangles $ABD$ et $BCD$.

immédiatement qu'aucune flèche ne part du sommet correspondant au triangle $P$ et qu'il existe pour tout sommet initial un chemin allant vers $P$. Ainsi tout orbite fini par "atterrir" dans $\bar{P}$. La preuve du théorème 23 repose sur le fait que l'application de premier retour dans le triangle $BCD$ est à une similitude près l'application $T|_P$ elle-même. Si on appelle $E$ l'intersection du segment $BC$ et de la bisectrice de l'angle $CDB$(cf. encore la figure 4.1), alors le triangle $BED$ a son image dans le triangle $BCD$. Il faut ensuite suivre le triangle $DEC$ dans ses itérations. Il revient dans $BCD$ après trois itérations. Ainsi l'application définie sur $BCD$ par

$$\tilde{T}x = \begin{cases} \tilde{T}_0 x & = & T_1 x \quad \text{si } x \in BED \\ \tilde{T}_1 x & = & T_0 T_0 T_1 x \quad \text{si } x \in DEC \end{cases}$$

est, à l'unique similitude $h$ qui transforme $ABC$ en $BDC$ près, l'application $T$. On peut vérifier que $\tilde{T}_0 hx = hT_0 x$ et $\tilde{T}_1 hx = hT_1 x$. De plus, les itérés des triangles $BED$ et $DEC$ recouvrent tout le triangle $P$ sauf deux cellules fixes :

$$\begin{cases} O_0 & = & P_0 \cap (BED \cup DEC \cup T_1 DEC \cup T_0 T_1 DEC)^c \\ O_1 & = & P_1 \cap (BED \cup DEC \cup T_1 DEC \cup T_0 T_1 DEC)^c \end{cases}$$

$O_0$ et $O_1$ sont des pentagones de centres $S_0$ et $S_1$ respectivement et ces derniers points sont des points fixes de $T$, ce qui signifie que $h^k S_0$ et $h^k S_1$ seront des points périodiques de $T$ de périodes de plus en plus grandes. Comme la réunion $O_0 \cup O_1 \cup BED \cup DEC \cup T_1 DEC \cup T_0 T_1 DEC$ recouvre tout $P$, la dynamique est décrite complètement. De plus, le pentagone illustrant l'ensemble exceptionnel $\Delta$ (cf. figure 4.4) se scinde clairement en trois ensembles similaires à $\Delta$ lui-même. Cet ensemble est donc un attracteur d'I.F.S et on peut calculer sa dimension facilement en utilisant les théorèmes classiques.

### 4.1.2 Généralisation

La construction de la section 4.1.1 peut se généraliser. Supposons que $I$ soit un triangle isocèle et que l'on veuille le découper en $n$ triangles isocèles $\{I_i\}_{i=1,\ldots,n}$ dont les côtés égaux soient de la même longueur que le côté de base de $I$ (cf. figure 4.5). Alors la géométrie de $I$ nous est imposée à une similitude près. Les points des triangles seront appelés comme indiqué

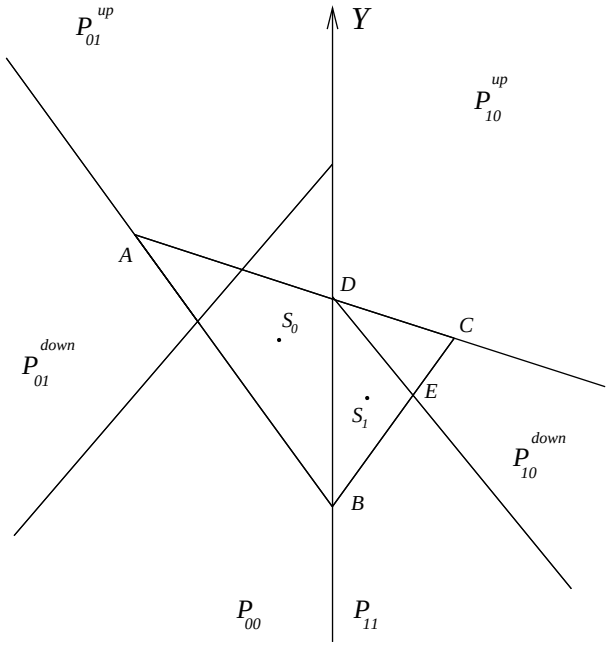


FIG. 4.2 – La partition du plan. Si on note $P_{ij} = P_i \cap T_i^{-1} P_j$ alors $P_{01}^{\text{up}} = P_{01} \cap T_0 P_0$, $P_{01}^{\text{down}} = P_{01} \setminus P_{01}^{\text{up}}$, $P_{10}^{\text{up}} = P_{10} \cap T_0^2 P_0$ et $P_{10}^{\text{down}} = P_{10} \setminus P_{10}^{\text{up}}$.

sur la figure $(a_0, a_1, \ldots)$. Si $I$ est partitionné en $n$ morceaux, alors les triangles de la partition seront appelés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, pour $i = 0, \ldots, n-1$. On appellera $\alpha$ l'angle $(a_{n-1} a_n a_{n-2})$ et $\alpha_i$ les angles "doubles" de chaque triangle isocèle. Précisément : $\alpha_i$ sera l'angle $(a_{n-i-2} a_{n-i} a_{n-i-1})$. La géométrie élémentaire nous donne alors la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \alpha_{-2} & = & 0 \\ \alpha_{-1} & = & \alpha \\ \alpha_{i+1} & = & 2\alpha_i - \alpha_{i-1}. \end{cases}$$

Il y a $n$ angles $\alpha_i$ de haut en bas de $I = a_0 a_1 a_n$, à partir de de $\alpha_{-1}$ et jusqu'à $\alpha_{n-2}$, qui est l'angle du premier triangle en partant du bas $(a_0 a_1 a_2)$. La récurrence nous permet de voir que $\alpha_{n-2} = n\alpha$. Ainsi :

$$2n\alpha + \alpha = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Le cas de la section 4.1.1 correspondait au cas $n = 2$, premier cas non-trivial. On se propose dans ce chapitre de s'intéresser au cas $n = 3$.

Les résultats qui suivent ont fait l'objet d'un article conjoint avec M. A. Goetz (cf. [24]).

## 4.2 Cas à Trois Triangles

### 4.2.1 Définition

On définit l'isométrie par morceaux illustrée dans la figure 4.6. Toutes les quantités relatives aux triangles seront basées sur des polynômes ou des fractions rationnelles de fonctions cosinus ou sinus d'angles multiples de $\pi/7$. Afin d'avoir l'expression la plus concise, on se placera dans le plan complexe. On notera $o$ l'origine, $\alpha = \pi/7$ et $\rho = e^{i\alpha}$, qui est une racine primitive 14ème de l'unité.

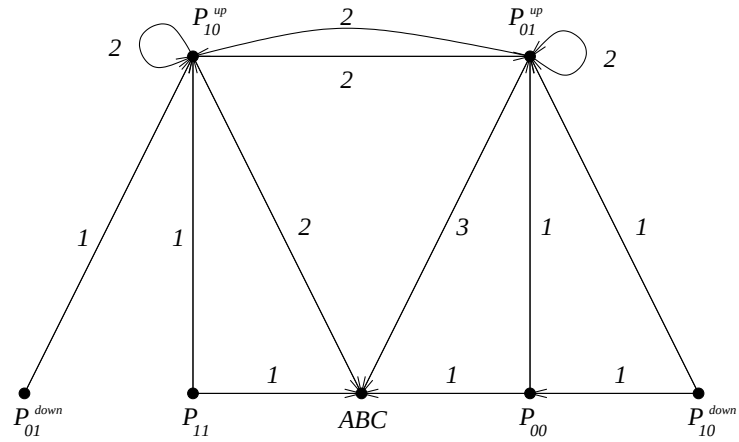


FIG. 4.3 – Le diagramme de transition entre les ensembles de la partition : on indique sur les flèches le nombre d'itérations maximal pour entrer dans une nouvelle région.

Les trois triangles de la construction précédente seront appelés $P_0 = [o, c, d]$, où $[a_1, \ldots, a_n]$ est un polygone ouvert dont les sommets sont $a_1, \ldots, a_n$, $P_1 = [o, d, a]$, et $P_2 = [o, a, b]$. On aura les expressions algébriques les plus simples si on oriente et normalise les triangles comme indiqué sur la figure 4.8, qui correspond aux points : $a = \rho^{-4}$, $b = \rho^{-4} + \rho^2$, $c = -\rho^{-2} - 1$, $d = -1$. Sur ces atomes, on définit les rotations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} R_0(z) & = & -\rho^{-1}z - \rho^{-2} - 1, \\ R_1(z) & = & -\rho\, z + \rho^{-3} - \rho^{-2} + \rho^{-1} - 1, \\ R_2(z) & = & -\rho^{-1}z + \rho^{-4}. \end{array} \tag{4.1}$$

Alors, $R_iP_i \subset P_0 \cup P_1 \cup P_2$ si $i = 1, 2, 3$. De plus, on peut vérifier que $R_0P_0$, $R_1P_1$, et $R_2P_2$ sont mutuellement disjoints. L'application $T$ qui a pour atomes $\{P_0, P_1, P_2\}$ et pour rotations $\{R_0, R_1, R_2\}$ est une isométrie par morceaux inversible.

### 4.2.2 Renormalisation et Points Périodiques

On notera $H_0$ et $H_1$ les cellules heptagonales fixes des atomes $P_0$ et $P_1$, de codes $(0 \cdots 0)$ et $(1 \cdots 1)$ respectivement (cf. figure 4.6).
Soit $\lambda = 4\sin^2(\alpha/2)$. En observant que la dynamique de $T$ restreinte aux points de $P_0 \cup P_1$ qui y restent est conjuguée via une similitude à son application de premier retour sur $\lambda P_0 \cup \lambda P_1$ (cf. figure 4.8), on peut démontrer le résultat suivant qui nous donne deux familles infinies de points périodiques :

**Théorème 24 Heptagones périodiques.** *Il existe pour l'application $T$ deux familles infinies de cellules périodiques heptagonales $\{\lambda^n H_0, \quad n \geq 0\}$ et $\{\lambda^n H_1, \quad n \geq 0\}$. Leurs codes sont donnés par la substitution :*

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & \longmapsto & 001 \\ 1 & \longmapsto & 11001. \end{array} \right.$$

**Preuve du théorème 24**
Par la suite, on abrégera la notation pour les compositions de rotations en posant $R_{w_0 \cdots w_k} = R_0 \cdots R_{w_k}$, par exemple $R_{001} = R_0R_0R_1$.

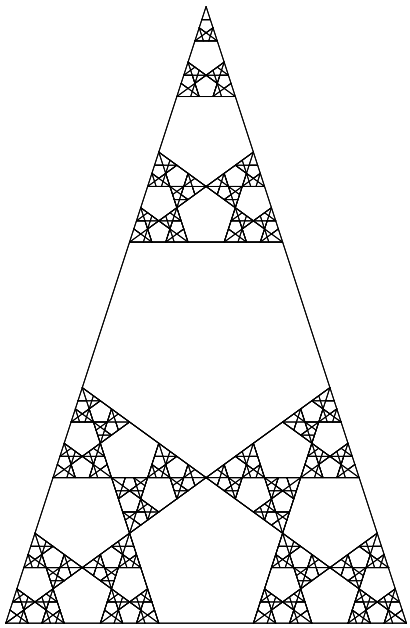

FIG. 4.4 – La mosaïque des cellules pour $T$.

**Lemme 5 Conjugaison.** *Soit* $\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Lambda z = \lambda z$, *la contraction de rapport* $\lambda = 2 - \rho - \rho^{-1} \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$R_{001} = \Lambda R_0 \Lambda^{-1} \quad et \quad R_{11001} = \Lambda R_1 \Lambda^{-1}. \tag{4.2}$$

**Preuve**
La preuve est immédiate par calcul algébrique élémentaire en utilisant les relations (4.1). □
Une récurrence nous donne immédiatement :

**Corollaire 1** *Soit* $\omega \in \{0,1\}^\star$ *alors :*

$$\Lambda R_\omega = R_{\sigma(\omega)} \Lambda. \tag{4.3}$$

**Lemme 6 Itinéraire des triangles** *Soient les triangles* $\triangle_0 = \lambda P_0$ *et* $\triangle_1 = \lambda P_1$ *(voir Figure 4.10). Alors* $\forall z \in \triangle_0$, $\iota(z)$ *commence par* 001 *et* $\forall z \in \triangle_1$ $\iota(z)$ *commence par* 11001.

**Remarque** On va prouver ce résultat en supposant $\rho = e^{i\pi/7}$ mais, en fait, il reste vrai pour tout un intervalle de paramètres $\alpha \in [0, \pi/5]$. On y reviendra plus tard.

**Preuve**
Comme $\lambda = 4\sin^2(\alpha/2) \in (0,1)$, $\triangle_0 \subset P_0$. L'itinéraire de tout point de $\triangle_0$ commence donc par zéro. Pour montrer que le second chiffre de l'itinéraire est zéro, il est suffisant de montrer que les sommets du triangle $R_0\triangle_0$ ont des parties imaginaires positives ou nulles. Enfin pour montrer que le troisième et dernier chiffre de l'itinéraire est un, c'est à dire que $R_0R_0\triangle_0$ est dans $P_1$, il suffit de montrer que les sommets des triangles $R_{00}\triangle_0$ et $a^{-1}R_{00}\triangle_0$ ont des parties imaginaires négatives ou nulles. Pour tous ces calculs, une précision d'une décimale suffit, ce sont donc des calculs élémentaires.
La vérification de la deuxième partie du lemme 6 est similaire mais il faut en plus montrer que :

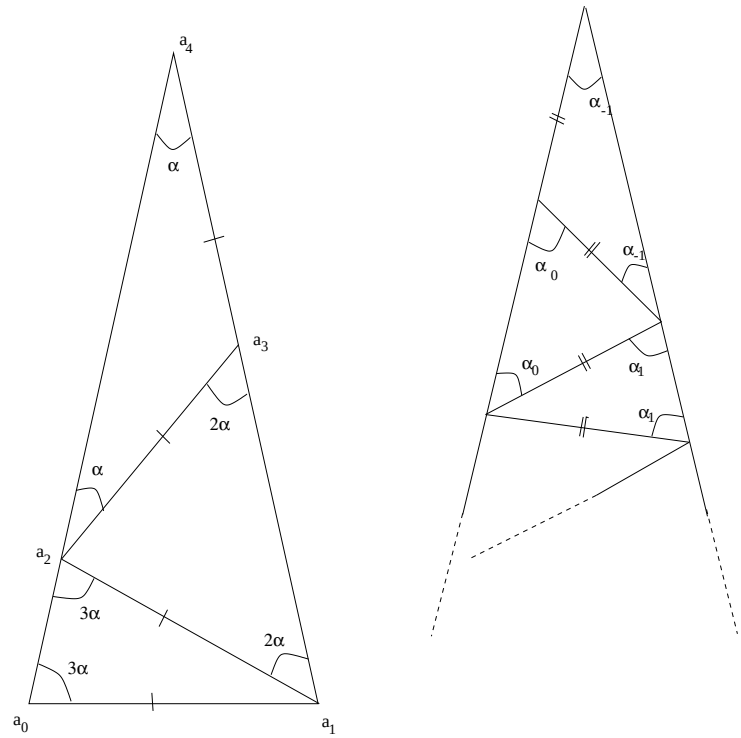


FIG. 4.5 – Illustration de la construction de la "tour" de triangles isocèles. À gauche, l'exemple avec 3 triangles : $2 \times 3\alpha + \alpha = \pi$. À droite, illustration du calcul récurrent des angles "doubles".

$R_{11}\triangle_1 \subset P_1$, (un des côtés de $R_{11}\triangle_1$, $R_{11}[\lambda d, \lambda a]$, est sur la frontière de $P_1$, donc un calcul numérique pourrait ne pas être fiable ici). On utilise la définition (4.1) de $R_1$,

$$\begin{array}{lcl} R_{11}(\lambda a) = R_1 R_1(\lambda a) = \lambda a \rho^2 + \rho^{-3} - 2\rho^{-2} + 2\rho^{-1} - 2 + \rho = -\lambda & \in & [d, o], \\ R_{11}(\lambda d) = -2 + (\rho^{-3} + \rho^3) - 2(\rho^{-2} + \rho^2) + 2(\rho^{-1} + \rho) & \in & [d, o]. \end{array}$$

□

On va utiliser la relation (4.2) et le lemme 6 dans la preuve du résultat suivant, qui relie les itinéraires de $z$ et de $\lambda z$ via la substitution.

**Lemme 7** *Soit $z \in P_0 \cup P_1$ et $\omega$ un préfixe de $\iota(z)$. Alors l'itinéraire $i(\lambda z)$ commence par $\sigma(\omega)$.*

**Preuve**
Soit $\omega = w_0 w_1 \cdots w_{k-1}$, $w_i \in \{0, 1\}$. On va prouver le lemme par récurrence sur la longueur du mot $\omega$. Comme $\lambda z \in \lambda(P_0 \cup P_1) = \triangle_0 \cup \triangle_1$, par le lemme 6 l'itinéraire $\iota(\lambda z)$ commence par $\sigma(w_0)$. On suppose maintenant que le lemme est vrai pour les mots de longueur $k$, $i(z) = \omega w_k \cdots$. Par le corollaire 1, et comme le $k+1$-ième chiffre de $\iota(z)$ est $w_k$, $R_{\sigma(\omega)}\lambda z = \lambda R_\omega z =\in \lambda P_{w_k} = \triangle_{w_k}$. Par le lemme 6, $i(\triangle_{w_k})$ commence par $\sigma(w_k)$, et $\iota(R_{\sigma(\omega)}\lambda z)$ commence par $\sigma(w_k)$. Par l'hypothèse d'induction, $\iota(\lambda z) = \sigma(\omega) \cdots$. Ainsi, $\iota(\lambda z) = \sigma(w)\sigma(w_k) \cdots$, qui est le résultat du lemme pour une longueur $(k + 1)$. □

En appliquant le lemme 7, on obtient :

$$\iota(\lambda^n H_k) = \overline{\sigma^n(k)} \quad \text{pour } k \in \{0, 1\}. \tag{4.4}$$

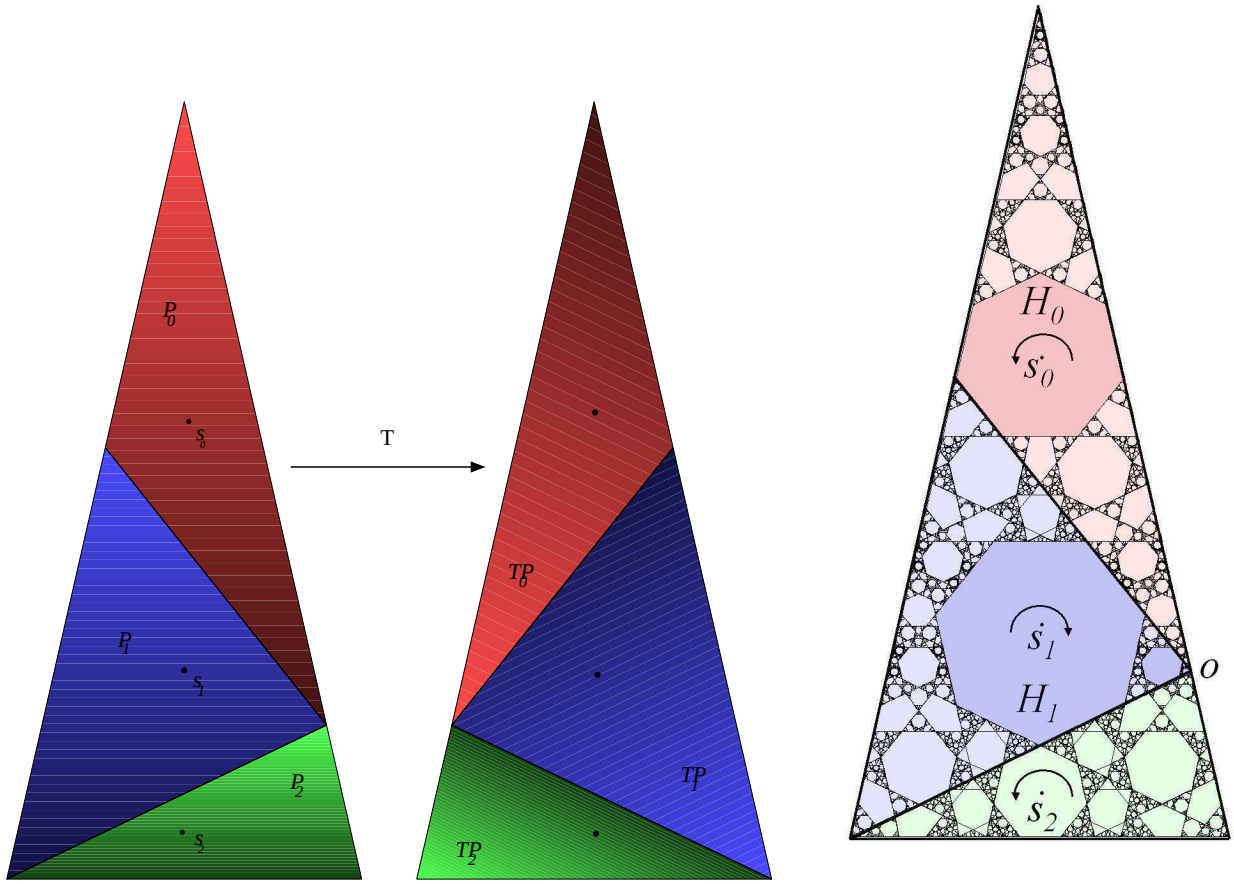


FIG. 4.6 – L'action de la rotation par morceaux $T$. Les atomes sont des triangles isocèles et $\alpha = \pi/7$. La figure de droite illustre la partition dynamiquement raffinée, les régions blanches sont des domaines périodiques qui contiennent des points ayant tous le même code. La structure des heptagones périodiques qui ne visitent jamais $P_2$ est auto-similaire près de $o$.

qui n'est autre que le résultat du théorème. □

Grâce à la matrice d'incidence de $\sigma$, on peut calculer les périodes des heptagones à chaque échelle :

**Corollaire 2 Périodes des heptagones.** *La période de $\lambda^n H_0$ est $(2^{2n+1}+1)/3$. Celle de $\lambda^n H_1$ est $(4^{n+1}-1)/3$.*

**Preuve**
Pour un mot fini $\omega \in \{0,1\}^\star$, soient $|\omega|_0$ et $|\omega|_1$ le nombre de zéros et de uns dans $\omega$, respectivement. Sous la substitution $\sigma$, chaque un est remplacé par un mot contenant deux zéros et un un, alors que chaque un est remplacé par un mot contenant deux zéros et trois uns. On a alors la formule :

$$\begin{array}{rcl} |\sigma^n(\omega)|_0 & = & 2|\sigma^{n-1}(\omega)|_0 + 2|\sigma^{n-1}(\omega)|_1 \\ |\sigma^n(\omega)|_1 & = & 1|\sigma^{n-1}(\omega)|_0 + 3|\sigma^{n-1}(\omega)|_1. \end{array}$$

Cette récurrence s'exprime commodément sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} |\sigma^n(\omega)|_0 \\ |\sigma^n(\omega)|_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\sigma^{n-1}(\omega)|_0 \\ |\sigma^{n-1}(\omega)|_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} |\omega|_0 \\ |\omega|_1 \end{pmatrix}.$$

En diagonalisant :

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} |\omega|_0 \\ |\omega|_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 2\cdot 4^n - 2 \\ 4^n - 1 & 2\cdot 4^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\omega|_0 \\ |\omega|_1 \end{pmatrix}.$$

En prenant les mots 0 et 1 comme mots initiaux :

$$|\sigma^n(0)| = |\sigma^n(0)|_0 + |\sigma^n(0)|_1 = \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3},$$

$$|\sigma^n(1)| = |\sigma^n(1)|_0 + |\sigma^n(1)|_1 = \frac{4}{3}4^n - \frac{1}{3}.$$

□

### 4.2.3 Temps de Retour Non-Uniforméments Bornés

Comme l'application $T : X \to X$ préserve la mesure de Lebesgue, le théorème de récurrence de Poincaré implique que Lebesgue presque tout point d'un atome y retourne une infinité de fois. L'application de premier retour d'une isométrie par morceaux est aussi une isométrie par morceaux. Notons $T_{P_2}$ l'application de premier retour dans $P_2$, cette application est définie sur presque tous les points de $P_2$. Le principal résultat de cette section est que $T_{P_2}$ est une rotation par morceaux avec une infinité d'atomes. En particulier, cela implique que le temps de retour dans $P_2$ est non borné. C'est un comportement très différent de celui des échanges d'intervalles. En effet, étant donné un échange de $n$ intervalles, l'application de premier retour dans un intervalle quelconque est bien définie et c'est un échange d'au plus $n+2$ intervalles (lemme 2, page 128 de [31]). En particulier, le temps de retour est toujours uniformément borné.

**Théorème 25 Temps de retour non borné dans $P_2$.** *Soit $\mathcal{Q}$ la famille d'atomes de l'application de premier retour $T_{P_2}$. Soit $\Lambda_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Lambda_b(z) = \lambda(z-b)+b$ la contraction de rapport $\lambda$ et de centre $b$.*

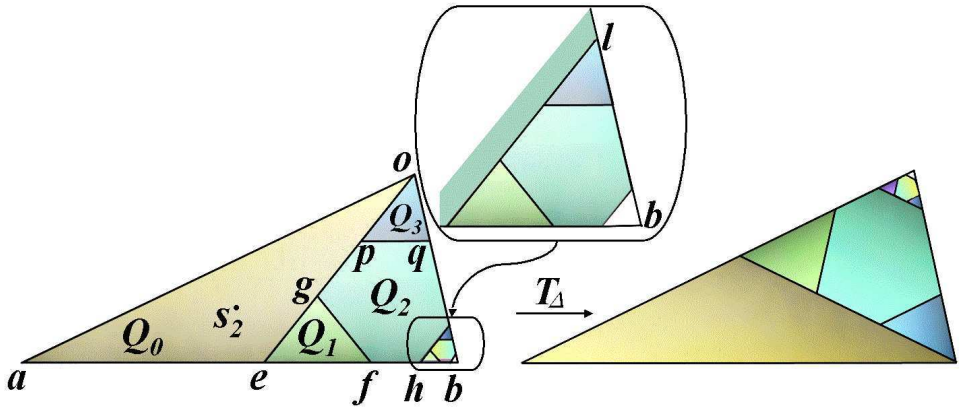


FIG. 4.7 – L'action de l'application de premier retour $F_\triangle$ dans $P_2$. Les petites régions près de $b$, sont "attirées" (après une application de $T$ dans un voisinage de $o'$) vers un petit heptagone satellite. Ces petites régions peuvent éventuellement revenir dans $P_2$ dans un voisinage du point $o$.

**(a) La partition induite sur $P_2$ est auto-similaire. (cf. figure 4.7)** *Il y a quatre polygones $Q_0, Q_1, Q_2$, et $Q_3$ tels que*

$$\mathcal{Q} = Q_0 \cup \bigcup_{n\geq 0} \left(\Lambda_b^n Q_1 \cup \Lambda_b^n Q_2 \cup \Lambda_b^n Q_3\right). \tag{4.5}$$

**(b) Code des atome induits.** *Étant donné un atome $Q \in \mathcal{Q}$, soit $r_Q$ le plus petit mot tel que l'itinéraire $\iota(Q)$ commence par $2r_Q2$. Alors $r_{Q_1} = 11$, $r_{Q_2} = 1001$ et $r_{Q_3} = 100001$. De plus, l'itinéraire des autres atomes de $\mathcal{Q}$ est obtenu par substitution et addition d'un préfixe comme suit :*

$$r_{\Lambda_b^{n+1} Q_j} = 1001\, \sigma(r_{\Lambda_b^n Q_j}) \tag{4.6}$$

*pour $j = 1, 2, 3$.*

**Corollaire 3 Temps de retour non bornés.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a un ensemble ouvert $Q$ dans $P_2$ tel que chacun des $n$ premiers itérés soit dans $P_0$ ou $P_1$.*

**Preuve du théorème 25**

Le lemme suivant résume quelques calculs algébriques auxquels nous ferons référence par la suite.

**Lemme 8** *Soient*

$$\begin{aligned}
e &= -1 + \rho - \rho^4, & f &= \rho - \rho^2,\\
g &= -1 + \rho - \rho^3 + \rho^4 - \rho^5, & h &= -2 + 3\,\rho - 2\,\rho^2 + 2\,\rho^3 - 2\,\rho^4,\\
l &= \rho - 2\,\rho^2 + 2\,\rho^3 - \rho^4, & p &= \rho^3 - 2\,\rho^4 + \rho^5,\\
q &= -1 + 3\,\rho - 4\,\rho^2 + 4\,\rho^3 - 3\,\rho^4 + \rho^5.
\end{aligned}$$

*On définit les polygones (cf. figure 4.7) : $Q_0 = [o, a, e]$, $Q_1 = [e, f, g]$, $Q_2 = [g, f, h, l, q, p]$,*

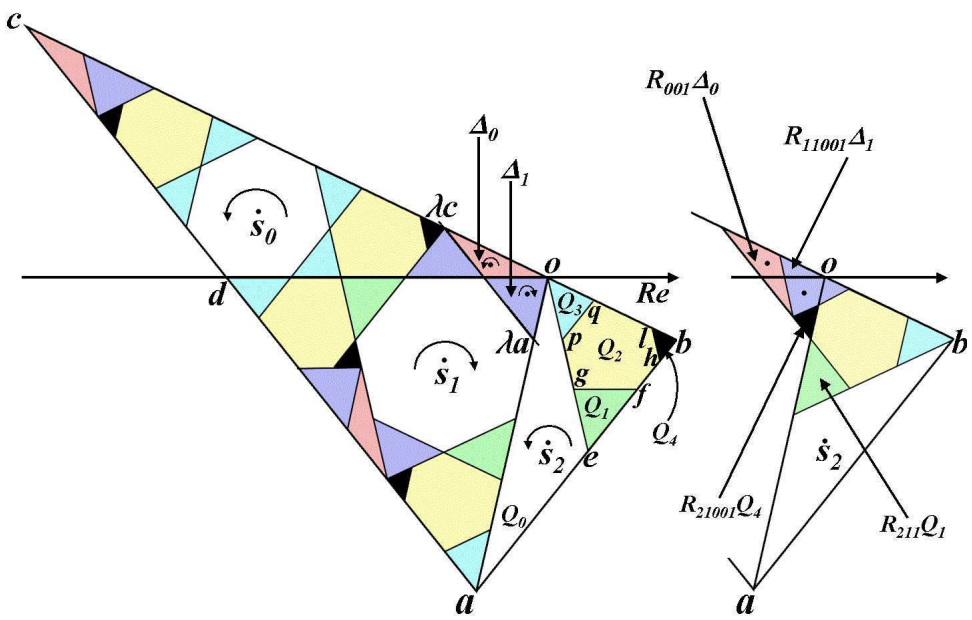


FIG. 4.8 – Illustration du théorème 25.

$Q_3 = [o, p, q]$, *et soit* $Q_4 = [l, h, b]$. *Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \iota(Q_0) & = & 22\ldots \\ \iota(Q_1) & = & 2112\ldots \\ \iota(Q_2) & = & 210012\ldots \\ \iota(Q_3) & = & 21000012\ldots \\ \iota(Q_4) & = & 210011\ldots. \end{array} \tag{4.7}$$

*Aussi :*

$$P_2 = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4, \tag{4.8}$$

$$Q_4 = \Lambda_b\,(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4), \tag{4.9}$$

**Preuve**

La preuve des relations (4.7) est un calcul dont on va décrire la méthode.
Pour montrer que l'itinéraire de $Q_j$ commence par $w_0 \cdots w_k$, on vérifie que $R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j \subset P_{w_i}$. En particulier, pour montrer que $R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j \subset P_0$ il suffit de démontrer que chaque sommet de $R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j$ a une partie imaginaire positive ou nulle. Pour montrer que $R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j \subset P_1$, on vérifie que chaque sommet de $R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j$ et de $a^{-1} R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j$ a une partie imaginaire négatives ou nulles. Finalement, pour vérifier que $R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j \subset P_2$, il suffit de vérifier que chaque sommet de $a^{-1} R_{w_0 \cdots w_{i-1}} Q_j$ a des parties imaginaires positives ou nulles. La vérification ci-dessus est divisée en deux groupes disjoints de sommets :

- Pour le premier groupe, un calcul numérique avec une précision de deux décimales suffit à montrer que les sommets sont au moins à une distance de $0,01$ de l'axe réel.
- Les sommets de l'autre groupe sont en fait des nombres réels.

Afin de montrer qu'un sommet est un nombre réel on utilise l'algorithme suivant : tout sommet est exprimé comme un polynôme $W(\rho)$ en $\rho$ à coéfficients rationels. En les calculant explicitement, on constate qu'en fait, tout les polynômes sont à coéfficients entiers. Alors $W(\rho) \in \mathbb{R}$ si

le polynôme $W(z) - W(z^{13})$ est divisible par $C_{14}(z)$ le polynôme cyclotomique :

$$C_{14}(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6.$$

Il est avantageux pour de tels calculs d'utiliser des logiciels de calcul formel comme *Mathematica*. Les relations (4.7) étant vérifiées, l'équation (4.8), claire par la figure 4.7, peut aussi être vérifiée symboliquement. On observe d'abord que $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ sont mutuellement disjoints puisque d'itinéraires différents. Par les relations (4.7), un point dans $Q_i \cap Q_j$ devrait suivre deux itinéraires différents. Pour finir de prouver (4.8), on note que la mesure de Lebesgue $\mu$ de chaque polygone peut être exprimée par un polynôme rationnel en $\rho$. Il est suffisant de vérifier que :

$$\sum_{0 \le i \le 4} \mu(Q_i) = \mu(P_2) = \frac{1}{4}(-1 + 2\,\rho - \rho^2 + \rho^3 - \rho^4 + \rho^5).$$

La vérification de (4.9) suit une procédure identique à celle de (4.8). □

La partie (a) du théorème se démontre par récurrence à partir de (4.8) et (4.9). Pour prouver la partie (b), on utilisera le lemme 7 et le corollaire 1.

**Corollaire 4** *Soit $z \in P_0 \cup P_1$. Supposons que $\iota(z) = w_0 \cdots w_k 2 \cdots$ où $w_j \in \{0, 1\}$. Alors $\iota(\lambda z) = \sigma(w_0 \cdots w_k)2 \cdots$.*

On prouve la partie (b) par récurrence sur $n$. On fixe $j \in \{1, 2, 3\}$. Si $n = 0$, l'assertion (b) découle directement de (4.7). On suppose (b) vraie pour $n$. Par définition du mot $r_Q$, $\iota(R_2 \Lambda_b^n Q_j)$ commence par $r_{\Lambda_b^n Q_j}2$. Ainsi par le corollaire 4, l'itinéraire $\iota(\lambda\, R_2 \Lambda_b^n Q_j)$ commence par $\sigma(r_{\Lambda_b^n Q_j})2$. Par la partie (a), $\Lambda_b^n Q_j \subset Q_4$ pour $n \ge 1$ par (4.7). Ainsi $\iota(\Lambda_b^n Q_j)$ commence par 21001. Ainsi $\iota(\Lambda_b^n Q_j)$ commence par $21001\sigma(r_{\Lambda_b^n Q_j})2$, c'est à dire l'assertion (b) pour $(n + 1)$. □

## 4.3 Remarques

### 4.3.1 Autre Exemple d'Application avec Temps de Retour Non-Bornés

Dans cette section, on exhibe un exemple de transformation basée sur un échange de polygones qui possède aussi la propriété que le temps de retour dans certains atomes est non-borné. Cet exemple nous fut communiqué par M. Boshernitzan.

Soit l'application $T$ de $[0, 1) \times [0, 1)$ dans lui-même définie par $T(x, y) = (x+\theta, y+\theta) \bmod \mathbb{Z}^2$, où $\theta$ est un nombre irrationnel tel que $1/2 < \theta < 1$. L'application $T$ est une isométrie par morceaux à quatre atomes rectangulaires : $P_{(0,0)} = [0, \theta) \times [0, \theta)$, $P_{(1,0)} = [\theta, 1) \times [0, \theta)$, $P_{(0,1)} = [0, \theta) \times [\theta, 1)$, et $P_{(1,1)} = [\theta, 1) \times [\theta, 1)$ (cf. figure 4.9). L'atome en bas à droite $P_{(0,1)}$ contient une suite infinie de $n$-cellules rectangulaires qui convergent vers le point $(1 - \theta, 0)$. Le temps de retour dans ces $n$-cellules devient arbitrairement grand. Ce phénomène s'explique grâce au lemme suivant qui nous a été communiqué par P. Hubert :

**Lemme 9** *Soit $a(x) = x+\theta \bmod 1$. Soit également $i(x)$ le code naturel de l'échange d'intervalles $a$, $i(\theta) = u_1 u_2 \cdots$. Alors, pour tout, $j$ il y a des intervalles $[0, \epsilon_1)$ et $[1 - \theta - \epsilon_2, 1 - \theta)$ tels que l'itinéraire de $[0, \epsilon_1)$commence par $0u_1 \cdots u_j$ et que l'itinéraire de $[1 - \theta - \epsilon_2, 1 - \theta)$ commence par $01u_1 \cdots u_j$.*

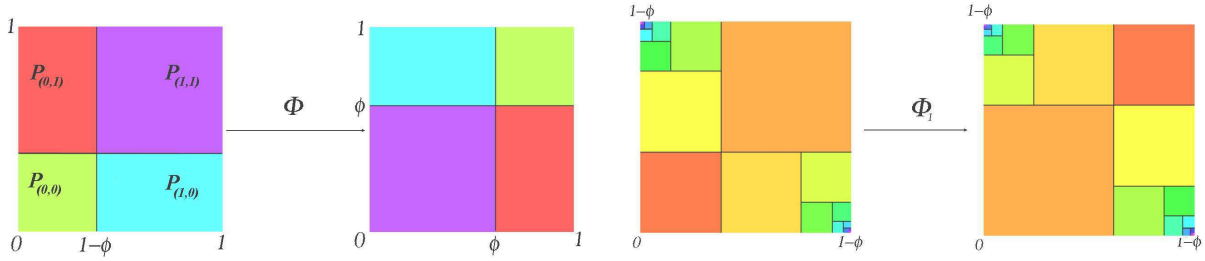


FIG. 4.9 – Un produit cartésien d'échanges d'intervalles pour lequel on constate un temps de retour non-uniformément borné dans un de ses atomes. La figure de droite illustre l'application de premier retour dans $P_{(0,0)}$ qui est un échange de rectangles avec un nombre infini d'atomes. Ici, l'angle $\theta$ est égal au nombre d'or : $\varphi = (\sqrt{5}-1)/2$.

**Preuve**
Comme $\theta$ est irrationnel, tous les itérés par $a$ de $\theta$ sont distincts des extrémités des atomes $[0, 1-\theta)$, et $[1-\theta, 1)$. Ainsi pour tout $j$, il existe un voisinage de $\theta$, $[\theta - \epsilon_2, \theta + \epsilon_1)$ dont l'itinéraire commence par $u_1 u_2 \cdots u_j$, ce qui complète la preuve. □

Comme $T$ est le produit cartésien de l'échange d'intervalles $a$ avec lui-même, l'itinéraire de $C_j = [0, \epsilon_1) \times [1-\theta-\epsilon_2, 1-\theta)$ commence par $(0,0)(u_1,1)(u_2,u_1)\cdots(u_j u_{j-1})$. Comme $i(0) = 0u_1u_2\cdots$ ne contient pas deux zéros consécutifs (puisque $\theta > 1/2$), la suite $(u_1,1)(u_2,u_1)\cdots(u_j u_{j-1})$ ne contient pas $(0,0)$, et ainsi les $j$ premiers itérés de $C_j$ par $T$ sont disjoints de $P_{(0,0)}$. Donc, étant donné $j$, il existe un rectangle $C_j \subset P_{(0,0)}$ tel qu'aucun point de $C_j$ ne retourne dans $P_{(0,0)}$ en un temps inférieur ou égal à $j$.

### 4.3.2 Remarques sur l'Ensemble Exceptionnel

Le premier théorème nous dit qu'il existe une famille d'heptagones périodiques qui reste dans $P_0 \cup P_1$. Le résultat suivant prouve que les orbites de ces cellules sont en fait essentiellement les seules à rester dans les deux atomes du haut. Il existe cependant un ensemble résiduel qui ne contient que des points apériodiques.

**Théorème 26 Orbites restant dans $P_0 \cup P_1$.**
*Soit*

$$U = \{z \in P_0 \cup P_1, \quad T^n z \in P_0 \cup P_1, \quad n \geq 0\}.$$

*Alors*

$$U = \bigcup_{j,n\geq 0} T^j \lambda^n H_0 \cup \bigcup_{j,n\geq 0} T^j \lambda^n H_1 \cup Z. \tag{4.10}$$

*L'ensemble $Z$ a mesure de Lebesgue zéro.*

**Preuve**
On note $U_0 \subset P_0$ l'ensemble de tous les points dont les orbites restent dans $P_0 \cup P_1$ et qui ne sont pas contenus dans les orbites des heptagones périodiques, c'est-à-dire :

$$U_0 = \{z \in P_0, \quad T^n z \in P_0 \cup P_1, \quad n \geq 0\} \setminus \bigcup_{j,n\geq 0} T^j \lambda^n H_0 \setminus \bigcup_{j,n\geq 0} T^j \lambda^n H_1.$$

De même,

$$U_1 = \{z \in P_1, \quad T^n z \in P_0 \cup P_1, \quad n \geq 0\} \setminus \bigcup_{j,n\geq 0} T^j \lambda^n H_0 \setminus \bigcup_{j,n\geq 0} T^j \lambda^n H_1.$$

Pour prouver le théorème 26, on montre que la mesure bi-dimensionelle de $U_0$ et $U_1$ est nulle. On va montrer plus précisément que :

$$U_0 \subset \lambda U_0 \cup R_0 \lambda U_0 \cup R_{11} \lambda U_1 \cup R_{110} \lambda U_1, \tag{4.11}$$

$$U_1 \subset R_{00} \lambda U_0 \cup \lambda U_1 \cup R_1 \lambda U_1 \cup R_{1100} \lambda U_1. \tag{4.12}$$

Alors des équations (4.11) et (4.12), il découle que

$$\mu(U_0) \leq 2\lambda^2 \mu(U_0) + 2\lambda^2 \mu(U_1),$$

$$\mu(U_1) \leq \quad \lambda^2 \mu(U_0) + 3\lambda^2 \mu(U_1),$$

ce qui implique $\mu(U_0) = \mu(U_1) = 0$ puisque :

$$\begin{vmatrix} 2\lambda^2 - 1 & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 & 3\lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = (-1+\lambda)\ (1+\lambda)\ (-1+2\,\lambda)\ (1+2\,\lambda) > 0$$

si $\lambda < 1/2$. Pour prouver l'équation (4.11), on va utiliser les deux lemmes suivants :

**Lemme 10**

$$U_0 \subset \triangle_0 \cup R_0 \triangle_0 \cup R_{11} \triangle_1 \cup R_{110} \triangle_1.$$

**Preuve**

De la figure 4.8, il est évident qu'un point $z \in P_0$ est :

- (a) dans $\triangle_0 \cup R_0 \triangle_0 \cup R_{11} \triangle_1 \cup R_{110} \triangle_1$, ou
- (b) dans l'heptagone $H_0$, ou
- (c) dans un des itérés de $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$. Dans ce cas, $z$ peut éventuellement tomber hors de $P_0 \cup P_1$.

De la définition de $U_0$, il vient que si $z \in U_0$, seul le cas (a) est possible, ce qui conclut la preuve du lemme 10.

Pour prouver formellement l'observation "visuelle" précédente, on utilise les relations (4.7) ainsi que le calcul de l'aire pour garantir qu'il n'y a que trois possibilités, (a), (b), ou (c). Chaque aire étant exprimable comme un polynôme en $\rho$ de degré au plus cinq. Par exemple, une triangulation des heptagones fixes donne

$$\mu(H_0) = 3 - 6\,\rho + \frac{29\,\rho^2}{4} - 5\,\rho^3 + \rho^4 + \frac{5\,\rho^5}{4}.$$

Une triangulation de $Q_2$ donne $\mu(Q_2) = 4 - 8\,\rho + 10\,\rho^2 - 7\,\rho^3 + \rho^4 + 2\,\rho^5$, etc. On peut obtenir l'identité :

$$\mu(P_0) = \mu(H_0) + 2\mu(Q_2) + 4\mu(Q_3) + 2\mu(Q_4) + 2\mu(\triangle_0) + 2\mu(\triangle_1).$$

□

**Lemme 11** *Pour tout $z \in P_0 \cup P_1$ dont les orbites $O(z)$ sont incluses dans $P_0 \cup P_1$ :*

$$\lambda O(z) \subset O(\lambda z).$$

**Preuve**
On note $\omega_k$ le préfixe de longueur $k$ de $i(z)$. Le corollaire 1 et le lemme 7, donnent :

$$\lambda O(z) = \lambda \bigcup_{k\geq 0} R_{\omega_k} z = \bigcup_{k\geq 0} \lambda R_{\omega_k} z = \bigcup_{k\geq 0} R_{\sigma(\omega_k)} \lambda z \subset O(\lambda z).$$

□

**Lemme 12** *On a les inclusions suivantes :*

$$\begin{array}{lcl} \lambda U_0 & \supset & U_0 \cap \triangle_0, \\ R_0(\lambda U_0) & \supset & U_0 \cap R_0 \triangle_0, \\ R_{11}(\lambda U_1) & \supset & U_0 \cap R_{11} \triangle_1, \\ R_{110}(\lambda U_1) & \supset & U_0 \cap R_{110} \triangle_1. \end{array}$$

**Preuve**
On montre d'abord que $\lambda U_0 \supset U_0 \cap \triangle_0$. Supposons que $z \in U_0 \cap \triangle_0$, alors en particulier $z \in \triangle_0$, et donc $\lambda^{-1} z \in P_0$. Si l'orbite de $\lambda^{-1} z$ visitait $P_2$, alors par le corollaire 4 appliqué au point $\lambda^{-1} z$, on aurait que l'orbite de $z$ visite $P_2$, et cela impliquerait que $z \notin U_0$. Ainsi les itérés de $\lambda^{-1} z$ ne visitent jamais $P_2$,

$$\lambda^{-1} z \in \{z \in P_0, \quad T^n z \in P_0 \cup P_1, \quad n \geq 0\}. \tag{4.13}$$

De plus, comme $z \in U_0$,

$$z \notin \bigcup_{n\geq 0} O(\lambda^n H_0). \tag{4.14}$$

Supposons que $\lambda^{-1} z \in O(\lambda^n H_0)$ pour un $n$. Alors par le lemme 11, $z = \lambda(\lambda^{-1} z) \in O(\lambda^{n+1} H_0)$, ce qui est en contradiction avec l'équation (4.14). On a donc :

$$\lambda^{-1} z \notin \bigcup_{n\geq 0} O(\lambda^n H_0). \tag{4.15}$$

De même :

$$\lambda^{-1} z \notin \bigcup_{n\geq 0} O(\lambda^n H_1). \tag{4.16}$$

Les inclusions (4.13), (4.15) et (4.16) impliquent que $\lambda^{-1} z \in U_0$, et finalement $z \in \lambda U_0$. Deuxièmement, on note que $R_0(\lambda U_0) \supset R_0 U_0 \cap R_0 \triangle_0 = U_0 \cap R_0 \triangle_0$ puisque $R_0 \triangle_0 \in P_0$. Les inclusions restantes du lemme 12 sont prouvées de manière analogue. □
En utilisant les inclusions du lemme 12 et le lemme 10, on obtient finalement :

$$\lambda U_0 \cup R_0 \lambda U_0 \cup R_{11} \lambda U_1 \cup R_{110} \lambda U_1 \supset U_0 \cap (\triangle_0 \cup R_0 \triangle_0 \cup R_{11} \triangle_1 \cup R_{110} \triangle_1) = U_0,$$

qui nous donne l'équation (4.11). La preuve de l'équation (4.12) est analogue à celle de l'équation (4.11).
Comme mentionné plus haut, ceci complète la preuve du théorème 26. □

**Remarque.** Les inclusions dans les équations (4.11) et (4.12) sont en fait des égalités et montrent que les ensembles $U_0$ et $U_1$ ont une structure très particulière faisant immédiatement penser aux ensembles évoqués dans la section 2.3.4 du chapitre 2. Cette similitude va être développée et va nous conduire à introduire un cadre dans lequel on pourra étudier la dynamique non seulement

sur $Z$ mais aussi en général sur des ensembles invariants remarquables. Tout ceci peut servir de base au calcul d'un majorant de la dimension de Hausdorff de $Z$. En effet un recouvrement par de tels ensembles donnerait $\dim_H(U_0) = \dim_H(U_1) \leq -\log 4/\log\lambda$. Aller plus loin est cependant difficile a priori car tout les ensembles utilisés dans la construction de $U_0$ et $U_1$ sont ouverts.

### 4.3.3 Généralisation à une Famille Continue

Il s'avère que le lemme 7 est valide non seulement dans ce cas mais aussi pour tout $\alpha \in [0, \pi/5]$. On a ainsi le résultat général suivant concernant les rotations par morceaux sur deux atomes. Soit $T' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une rotation par morceaux définie sur deux demi-plans comme suit :

$$T'z = \begin{cases} R_0 z & \text{si } Im(z) > 0 \\ R_1 z & \text{si } Im(z) < 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Les rotations $R_0$ et $R_1$ sont définies exactement comme dans les formules (4.1), avec cette fois $\rho = e^{i\alpha}$. Les actions de $T : X \to X$ et $T' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ coïncident sur $P_0 \cup P_1$ quand $\alpha = \pi/14$.

**Théorème 27 Cellules périodiques** *Soient $H_0$ et $H_1$ deux cellules fixes de l'application $T'$ donnée par la définition (4.17). L'application $T'$ possède alors les deux familles infinies de cellules périodiques, $\{\lambda^n H_0, \quad n \geq 0\}$ et $\{\lambda^n H_1, \quad n \geq 0\}$. De plus, le code de $\lambda^{n+1} H_i$ $(i = 0, 1)$ est obtenu à partir du code de $\lambda^n H_i$ via la substitution $0 \to 001$, et $1 \to 11001$.*

Il est remarquable de constater que le cas où $\alpha = \pi/5$ est exactement celui étudié dans [23] et décrit dans la section 4.1.1.

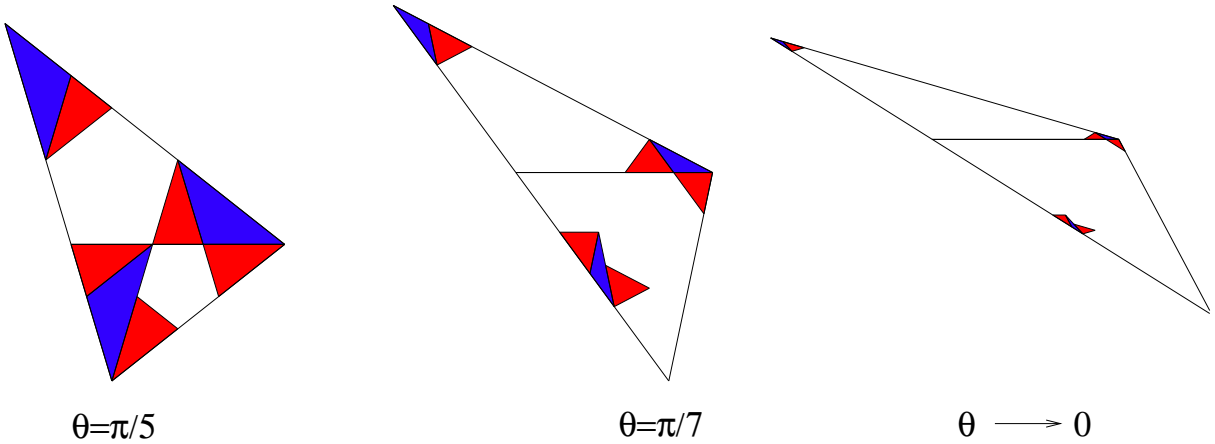


FIG. 4.10 – Les itinéraires des triangles $\lambda P_0$ (en bleu) et $\lambda P_1$ (en rouge). Selon l'angle $\theta$, la forme de la figure change mais les itinéraires restent les mêmes pour tout $\theta \in [0, \pi/5[$.

**Preuve**

La preuve du théorème 24 a été écrite sans utiliser le fait que $\alpha = \pi/7$. La preuve du théorème 27 est identique à l'exception suivante près. Dans la preuve du lemme 7, pour plus de clarté et de concision, on utilise une estimation numérique. Pour compléter la preuve dans notre cas, on va écrire une preuve complètement symbolique du lemme 7 pour $\alpha \in [0, \pi/5]$, (en effet, on ne peut pas toujours utiliser les polynômes cyclotomiques car tout les $\alpha$ considérés ne sont pas des racines de l'unité). Soient $t = \tan[\alpha/2]$ et $\mathcal{W}_s$ une collection de polynômes en $t$ dont les facteurs sont

des puissances positives des polynômes $K_t = 1 - t^2$, $L_t = 1 - 3t^2$, $M_t = 1 - 7t^2$, $N_t = 1 - 2t - t^2$, $O_t = 1 + 2t - t^2$, $P_t = 1 - 10t^2 + 5t^4$, $Q_t = 1 - 5t^2 + 19t^4 - 7t^6$ et $R_t = 1 + 3t^3 - 45t^4 + 17t^6$. Un calcul élémentaire montre que tous ces polynômes sont positifs ou nuls pour $t \in [0, \tan(\pi/10)]$ (le nombre $\tan(\pi/10)$ est une racine de $P_t$.). Tout les polynômes de $\mathcal{W}_s$ sont ainsi positifs ou nuls pour $t \in [0, \tan(\pi/10)]$. Un calcul algébrique qu'il est avantageux de faire par ordinateur indique que la partie imaginaire de chaque sommet des triangles $R_0\Delta_0$, $R_{11}\Delta_1$, et $R_{110}\Delta_1$ est positive ou nulle puisqu'elle peut être écrite comme $itW(t)(1+t^2)^{-j}$ où $W(t) \in cW_s$, et $i, j$ sont des entiers positifs ou nuls. Ainsi, ces triangles sont dans $P_0$.
De plus, la partie imaginaire de chaque sommet des triangles $R_{00}\Delta_0$, $a^{-1}R_{00}\Delta_0$, $R_1\Delta_1$, $a^{-1}R_1\Delta_1$, $R_{1101}\Delta_1$, et $a^{-1}R_{1101}\Delta_1$ peut être exprimée comme $-itW(t)(1+t^2)^{-j}$ où $W(t) \in cW_s$, et $i, j$ sont des entiers positifs ou nuls. Il vient donc que les triangles $R_{00}\Delta_0$, $R_1\Delta_1$, $R_{1101}\Delta_1$ sont dans $P_1$, ce qui termine la preuve. □

**Remarque :** comme mentionné dans la section 4.1.2, la construction géométrique présentée ici peut être faite avec un nombre quelconque de triangles. Le cas d'une "tour" de quatre triangles qui donne une isométrie par morceaux basée sur des rotations d'angles multiples de $\pi/9$ est illustré par la figure 4.11 qui montre sa partition dynamiquement raffinée. La dynamique de cet exemple ne sera pas étudiée en détail. Cependant, le théorème 27 permet d'affirmer que l'on a encore une auto-similarité partielle dans ce cas. On constate en effet que les polygones fixes des deux atomes du haut donnent naissance à une famille de cellules périodiques exactement de la même manière que dans les cas décrits ci-dessus à deux ou trois triangles.

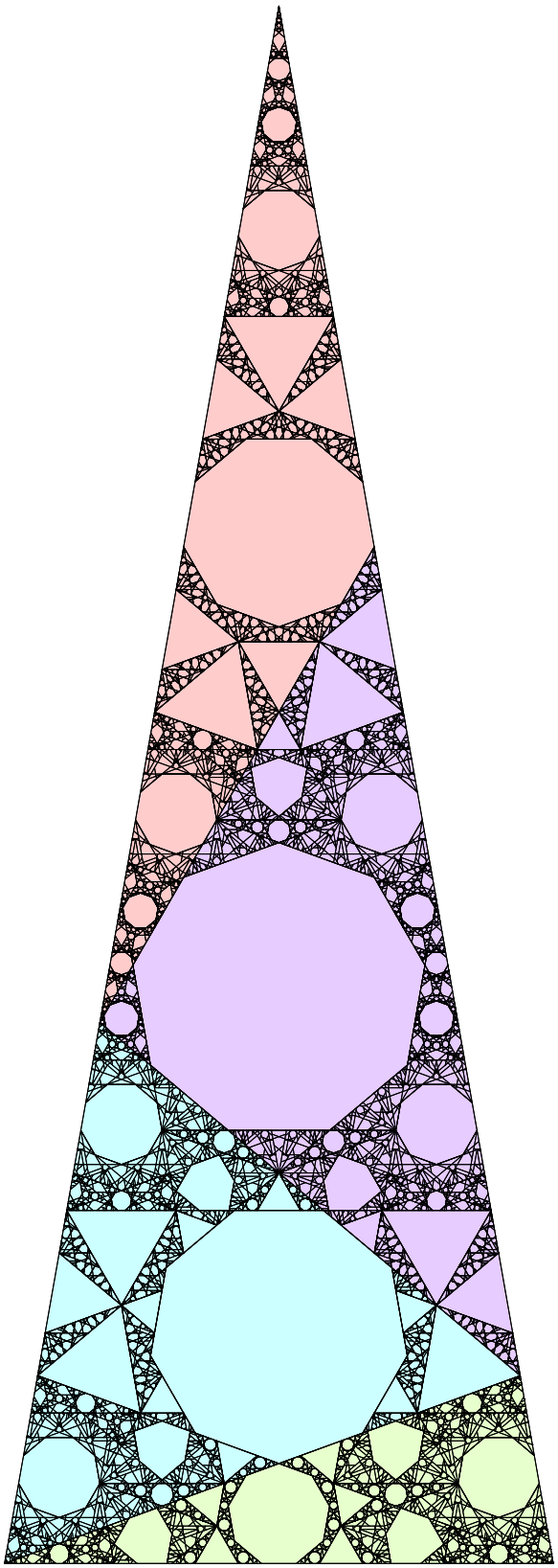

FIG. 4.11 – La mosaïque des cellules pour la “tour” à quatre triangles isocèles. On remarque que les deux polygones fixes des deux atomes du haut se répliquent au coin inférieur gauche de l’atome du haut (en rouge pâle).

# Chapitre 5

# Généralisation

## 5.1 Hypothèses Générales de Renormalisation

### 5.1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la géométrie et la dynamique des "ensembles exceptionnels" des isométries par morceaux dans une classe de cas où une auto-similarité peut être mise en évidence. On verra que, sous des hypothèses suffisamment générales pour englober en particulier les cas déjà étudiés (cf. [1], [23], [24]), on peut avoir de nombreuses informations concernant la dynamique périodique et non périodique de l'application. La première section présente les hypothèses de travail fondamentales d'auto-similarité, leurs conséquences sur les itinéraires des points et des résultats concernant les familles de cellules périodiques. La section suivante montrera comment, à partir des hypothèses on engendre naturellement des ensembles invariants et se propose d'étudier leur géométrie et leur dynamique. Le travail décrit dans ce chapitre fait l'objet de la prépublication [45].

### 5.1.2 Préambule

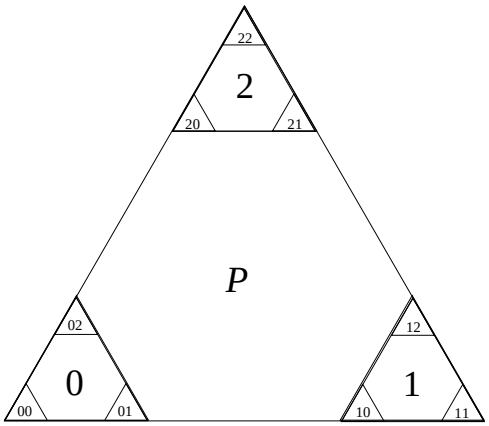


Fig. 5.1 – Premières étapes de la construction du triangle de Sierpińsky.

Toutes les démonstrations de ce chapitre sont assez techniques et il nous paraît opportun de faire une petite discussion pour donner une représentation intuitive des concepts utilisés avec un exemple simple. Trop simple même car il ne rentre absolument pas dans le cadre du présent

exposé. Cependant, sa clarté permettra (on l'espère) de faire mieux saisir les tenants et les aboutissants de notre démarche.
Les hypothèses fondamentales données dans la section 5.1.3 permettent de démontrer un certain nombre de résultats assez familiers sur les codes des orbites. On a auto-similarité et on peut déterminer les codes des orbites à une échelle à partir des codes des orbites a une autre échelle via une substitution comme on l'a vu plusieurs fois maintenant.
Dans la section 5.2, on remarque que les hypothèses sont équivalentes à l'initialisation d'une construction récursive qui est à rapprocher de la construction d'un attracteur d'I.F.S., un peu comme un triangle de Sierpińsky (par exemple). Cet ensemble existe et est compact. On le devine fractal et on le démontrera en section 5.2.2. On voudrait étudier la dynamique sur cet ensemble. Malheureusement, il contient des points dont on ne peut déterminer l'itinéraire car ils sont sur les segments de discontinuité de l'isométrie par morceaux. On va donc essayer d'enlever les points indésirables. En fait, cela reviendrait à considérer un triangle de Sierpiǹsky construit comme une intersection d'ouverts plutôt que comme une intersection de compacts. Si $P$ est le "grand" triangle de base ouvert et $SP = S_1P \cup S_2P \cup S_3P$ où $S_1,\ S_2,\ S_3$ (cf. section 2.3.3) sont les trois contractions centrées aux trois sommets du triangle :

$$S = \bigcap_{k\geq 0} S^k(\bar{P}) \quad \text{alors que} \quad \tilde{S} = \bigcap_{k\geq 0} S^k(P).$$

On ne sait pas a priori si $\tilde{S}$ est vide ou pas mais c'est clairement le seul ensemble sur lequel on puisse travailler. On se penche alors sur la structure de $\Gamma = S \setminus \tilde{S}$. On démontrera dans la proposition 15 que cet ensemble est une réunion dénombrable d'ensembles :

$$\Gamma = \bigcup_{l\geq 0} \Gamma_l$$

dont chacun est inclus dans les frontières de l'ensemble des petits triangles $S^k(\bar{P})$ pour un certain $k$. Ces ensembles sont des intersections dénombrables de compacts mais elles sont non-décroissantes et on ne sait pas très bien en général ce qu'ils contiennent. Ce qui est important c'est que chacun de ces ensembles soit inclus dans une réunion finie de segments.
En effet, la dimension de Hausdorff de $S$ est facile à calculer (directement ou à l'aide de la théorie des I.F.S.) et on sait que la mesure de Hausdorff de $S$ n'est ni nulle, ni infinie. Chaque point de l'ensemble $S$ peut se coder comme une suite infinie sur les trois symboles $\{0, 1, 2\}$ selon les ensembles auxquels il appartient dans l'intersection.
On va alors calculer la mesure de Hausdorff, ou, plus simple, un majorant de la mesure de Hausdorff de chaque $\Gamma_l$. Commençons par un cas simple où $\Gamma_0$ est sur les côtés du grand triangle $P$. Prenons même le côté inférieur de $P$. Alors, si on prend les recouvrements particuliers $S^k(\bar{P})$ de $S$, il suffit de prendre uniquement les ensembles qui intersectent le côté de $P$ en question. Ces ensembles sont clairement repérés par des suites de symboles ne contenant que des 0 et des 1, c'est-à-dire de la forme $S_{\alpha_1}S_{\alpha_2}\cdots S_{\alpha_k}P$ où $\alpha_k \in \{0, 1\}$ (cf. figure 5.1).
Le même raisonnement peut être tenu pour les deux autres côtés pour lesquels on sera privé des deux autres symboles à tour de rôle. Cela signifie surtout que le nombre d'ensembles dans ces recouvrements croît comme $2^k$ alors que les recouvrements de $S$ tout entier ont des cardinaux qui croissent typiquement comme $3^k$. Ainsi, il est clair que la mesure de Hausdorff de dimension $\dim_H(S)$ de $\Gamma_0$ est nulle.
Le même raisonnement peut se tenir pour les autres ensembles $\Gamma_l$ qui intersectent des côtés de triangles plus petits mais qui, de la même manière, peuvent être recouverts avec un nombre d'ensembles "significativement" moins grand que le cardinal de $S^k(P)$. Cela permet de prouver

que :

$$\mathcal{M}^{\dim_H(S)}(\Gamma) = 0.$$

Même si les techniques sont considérablement plus complexes dans notre cadre, les idées sont globalement les mêmes.
Ainsi, "géométriquement", l'ensemble $\tilde{S}$ que l'on considère est "significatif". On prouvera dans la section 5.2.2 qu'il est aussi "significatif" dynamiquement parlant. La dynamique de l'isométrie par morceaux peut être "plongée" dans une dynamique symbolique abstraite dont la mesure invariante est très reliée à la mesure de Hausdorff. On pourra ainsi faire le lien entre les deux aspects et finalement montrer que ce que l'on perd en enlevant les points indésirables est négligeable du point de vue dynamique.

### 5.1.3 Résultats Préliminaires et Dynamique Périodique

Soit $T$ une isométrie par morceaux de $\mathbb{R}^n$ définie sur $m$ atomes $(A_i)_{i=1,\dots,m}$. Par commodité, on notera $\tilde{\mathcal{A}} = \{1, \dots, m\}$ et $T_\mu = T_{\mu_1 \cdots \mu_{|\mu|}} = T_{\mu_{|\mu|}} \circ \cdots \circ T_{\mu_1}$, $\forall \mu \in \tilde{\mathcal{A}}^\star$. On va supposer qu'il existe des mots $(\mu^i)_{i \in \tilde{\mathcal{A}}}$ et des polyèdres ouverts d'adhérences compactes $(P_i)_{i \in \tilde{\mathcal{A}}}$ tels que, pour tout $i$ :

- Il existe $h$ une similitude contractante de rapport $\lambda < 1$ telle que $T_{\mu^i} = hT_ih^{-1}$.
- $P_i \subset A_i$ et $hP_i \subset P_{\mu_1^i}$.
- $T_{\mu_1^i \cdots \mu_{j-1}^i} hP_i \subset P_{\mu_j^i}, \quad \forall j \in \{0, \dots, |\mu^i| - 1\}$.

De plus, il existe un polyèdre $P_{i_0}$ tel que :

- Pour chaque face $C_l$ de $P_{i_0}$, il existe $i_l$ et $j_l$ tels que $T_{\mu_1^{i_l} \cdots \mu_{j_l}^{i_l}} h\bar{P}_{i_l} \cap C_l = \emptyset$ et $\mu_{j_l+1}^{i_l} = i_0$.

On remarque que le troisième point implique que le code de l'ensemble $hP_i$ commence par $\mu^i$. La figure 5.2 illustre les deuxième et troisième points des hypothèses en s'appuyant sur la construction du chapitre précédent.
Le dernier point paraît un peu "parachuté". Il signifie qu'il existe un polyèdre $P_{i_0}$ tel qu'on puisse toujours trouver un des ensembles plus petits qu'il contient disjoint d'une quelconque de ses faces. Cela nous donnera une condition suffisante à l'existence d'un ensemble invariant remarquable. On remarque de plus que cette dernière contrainte semble génériquement remplie. En effet, supposons qu'il existe une face $C$ d'un polyèdre donné $P_i$ telle que tous les ensembles contractés par des applications de la forme $T_{\nu_1}h, T_{\nu_2}h, \dots$ (où $\nu^1, \nu^2, \dots$ sont des préfixes des mots $\{\mu^1, \dots, \mu^m\}$) que contient $P_i$ aient une intersection avec $C$. Alors $C$ est certainement invariant sous ces contractions. Or la condition pour que plusieurs centres de contraction soient sur un même hyperplan est en général de codimension 1. Cependant, cela ne constitue pas une preuve rigoureuse car les autres points des hypothèses modifient la forme de l'espace des paramètres d'une manière non-triviale.

On notera $\sigma$ la substitution définie sur $\tilde{\mathcal{A}}^\star$ telle que $\sigma : i \longmapsto \mu^i$. On la supposera primitive et non périodique.

On peut facilement généraliser par récurrence le premier point :

**Lemme 13** *On a, $\forall k \geq 0$ :*

$$T_{\sigma^k(i)} = h^k T_i h^{-k}.$$

**Preuve**
Le premier point étant l'initialisation de la récurrence, on suppose le lemme vrai à l'ordre $k$.

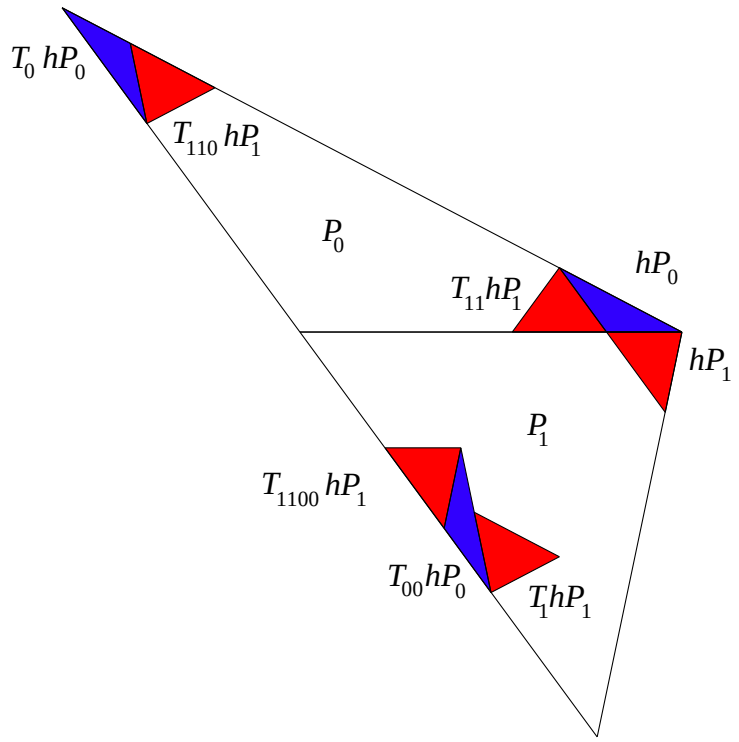


FIG. 5.2 – Illustration des deuxième et troisième points des hypothèses dans le cas de l'application du chapitre précédent. Précisement, on montre les itinéraires des triangles évoqués dans le lemme 6. On note également que $P_1$ vérifie le dernier point des hypothèses : étant donnée une face de $P_1$, on peut toujours trouver un petit triangle qui en soit disjoint.

Alors :

$$T_{\sigma^{k+1}(i)} = T_{\sigma^k(\sigma(i))} = T_{\sigma^k(\mu^i)} = T_{\sigma^k(\mu^i_{|\mu^i|})} \cdots T_{\sigma^k(\mu^i_1)}.$$

Ce qui donne par l'hypothèse de récurrence :

$$T_{\sigma^{k+1}(i)} = h^k T_{\mu^i_{|\mu^i|}} h^{-k} h^k \cdots h^{-k} h^k T_{\mu^i_1} = h^k T_{\mu^i} h^{-k} = h^{k+1} T_i h^{-(k+1)}.$$

Ce qui achève la récurrence. □
En fait, on peut aussi généraliser le troisième point :

**Proposition 12** *Pour tout $k$, le code de l'ensemble $h^k P_i$ commence par $\sigma^k(i)$.*

**Preuve**
On raisonne par récurrence sur $k$, les deuxième et troisième points sont équivalents à la proposition quand $k = 1$ puisqu'ils prouvent que $\mu^i$ est le début du code de chaque $hP_i$. On supposera la proposition vraie à l'ordre $k$. Considérons pour $j = 0 \cdots |\mu^i| - 1$ la composition

$$T_{\sigma^k(\mu^i_j)} \cdots T_{\sigma^k(\mu^i_1)} h^{k+1} P_i = h^k T_{\mu^i_j} h^{-k} \cdots h^k T_{\mu^i_1} h^{-k} h^{k+1} P_i = h^k T_{\mu^i_j} \cdots T_{\mu^i_1} hP_i = h^k T_{\mu^i_1 \cdots \mu^i_j} hP_i,$$

c'est par le second point un sous-ensemble de $h^k P_{\mu^i_{j+1}}$. Cette remarque va nous permettre de calculer le début du code de $h^{k+1} P_i$.
Comme

$$h^{k+1} P_i = h^k hP_i \subset h^k P_{\mu^i_1}$$

par le deuxième point, $\iota(h^{k+1}P_i)$ commence par $\sigma^k(\mu_1^i)$ par hypothèse de récurrence. On calcule la suite du code :

$$\iota(T^{|\sigma^k(\mu_1^i)|}h^{k+1}P_i) = \iota(T_{\sigma^k(\mu_1^i)}h^{k+1}P_i) = \sigma^k(\mu_1^i)\cdots$$

Par hypothèse de récurrence encore et la remarque précédente qui nous indique que :

$$T_{\sigma^k(\mu_1^i)}h^{k+1}P_i \subset h^k P_{\mu_1^i}.$$

Ainsi en appliquant toujours les mêmes arguments :

$$\iota(T^{|\sigma^k(\mu_1^i)|}T^{|\sigma^k(\mu_1^i)|}h^{k+1}P_i) = \sigma^k(\mu_2^i)\cdots$$
$$\vdots$$
$$\iota(T^{|\sigma^k(\mu^i_{|\mu^i|-1})|}\cdots T^{|\sigma^k(\mu_1^i)|}h^{k+1}P_i) = \sigma^k(\mu^i_{|\mu^i|})\cdots$$

on a :

$$\iota(h^{k+1}P_i) = \sigma^k(\mu_1^i)\cdots\sigma^k(\mu^i_{|\mu^i|}) = \sigma^k(\mu^i) = \sigma^{k+1}(i),$$

ce qui termine la récurrence. □

On obtient sans difficulté le corollaire suivant :

**Corollaire 5** *Soit un point $x$ dont le code commence par le mot $\omega$ et dont l'orbite reste dans $\cup_{i\in\mathcal{A}}P_i$, alors le code du point $h^kx$ commence par le mot $\sigma^k(\omega)$.*

**Preuve**
La proposition précédente est l'initialisation d'une récurrence sur la longueur du mot $\omega$. On supposera donc que, si $x \in P_i$ et $\iota(x) = \omega\cdots = \omega_1\cdots\omega_p\cdots$, un mot de longueur $p$ alors $\iota(h^kx) = \sigma^k(\omega)\cdots$. Supposons maintenant que $\omega = \omega_1\cdots\omega_{p+1}$ soit de longueur $p+1$. Alors $T_{\omega_1\cdots\omega_p}x \in P_{\omega_{p+1}}$ donc :

$$\iota(h^kT_{\omega_1\cdots\omega_p}x) = \iota(h^kh^{-k}T_{\sigma^k(\omega_p)}h^k\cdots h^{-k}T_{\sigma^k(\omega_1)}h^kx) = \iota(T_{\sigma^k(\omega_1)\cdots\sigma^k(\omega_p)}h^kx) = \sigma^k(\omega_{p+1}).$$

Par la proposition 12, on a bien :

$$\iota(h^kx) = \sigma^k(\omega_1)\cdots\sigma^k(\omega_{p+1}),$$

ce qui termine la récurrence. □

La proposition 12 peut être utile pour prouver l'existence de familles de points périodiques. C'est l'objet de la proposition suivante :

**Proposition 13** *S'il existe un point $s_i \in P_i$ qui soit un point fixe de $T_i$ alors, pour tout $k \geq 0$, $h^ks_i$ est un point périodique de $T$ de période $|\sigma^k(i)|$ et de code $(\overline{\sigma^k(i)})$.*

**Preuve**
Si $s_i$ est point fixe de $T_i$, alors :

$$T_is_i = h^{-k}T_{\sigma^k(i)}h^ks_i = s_i.$$

Mais $h^ks_i \in h^kP_i$ : son code commence bien par $\sigma^k(i)$. Donc :

$$h^{-k}T_{\sigma^k(i)}h^ks_i = h^{-k}T^{|\sigma^k(i)|}h^ks_i = s_i \quad\Rightarrow\quad T^{|\sigma^k(i)|}h^ks_i = h^ks_i.$$

□

On n'a fait aucune hypothèse sur $x_h$ le point fixe de $h$. Pourtant la proposition 12 nous permet de montrer que :

**Proposition 14** *Le point fixe $x_h$ de $h$ est dans $\bar{\Delta}$, où $\Delta$ est l'orbite des lignes de discontinuité de $T$.*

**Preuve**
On remarque tout d'abord que le second point des hypothèses implique que, pour tout point $x \in \cup_j P_j$, la suite $h^k x$ converge vers $x_h$ et donc que :

$$x_h \in \overline{\bigcup_{i=1}^{m} P_i}.$$

Si on suppose maintenant que $d(x_h, \Delta) = \epsilon > 0$, alors la boule $B(x_h, \epsilon)$ intersecte au moins un ensemble $P_{i_0}$. Si on prend $x' \in B(x_h, \epsilon) \cap P_{i_0}$ différent de $x_h$, alors, comme

$$d(h^k x', x_h) = d(h^k x', h^k x_h) \leq \lambda^k \epsilon < \epsilon$$

on a, $\forall k > 0$ :

$$h^k x' \in B(x_h, \epsilon) \cap h^k P_{i_0}.$$

Tous les points de la boule $B(x_h, \epsilon)$ ont le même code que $x_h$. On appelle $O$ la cellule contenant $B(x_h, \epsilon)$ et suivant ce code. Par la proposition 12 : $\iota(x_h) = \iota(h^k x')$ commence par $\sigma^k(i_0)$ pour tout $k$. Ainsi, l'itinéraire de $x_h$ ne peut être que le point fixe de la substitution $\sigma$. Comme l'orbite de $x_h$ est apériodique, celle de la boule $B(x_h, \epsilon)$ et donc celle de $O$ aussi. Il n'y a pas d'intersection entre les itérés de $O$, car sinon on aurait que $\exists k_0 > 0$ tel que $T^{k_0} O \cap O \neq \emptyset$, ce qui implique que $T^{k_0} O \subset O$. En effet, si $x \in O \cap T^{-k_0} O$ et $y \in O \setminus T^{-k_0} O$ alors il est impossible que $T^{k_0} x \in O$ si $T^{k_0} y \notin O$ puisque ces points ont le même code. La cellule $O$ aurait donc un code périodique ce qui est une contradiction. Ainsi, $x_h$ possède une orbite non-bornée et la distance entre ses itérés est supérieure à $\epsilon$. Or on connaît l'itinéraire de $x_h$ et on a que :

$$d(\sigma^k(i_0), \sigma^\infty(i_0)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Ce qui implique en particulier qu'il existe une suite $(N_k)_k$ d'entiers tels que $\sigma^\infty(i_0)|_{N_k}$, le point fixe de $\sigma$ tronqué au rang $N_k$, soit égal à $\sigma^k(i_0)$. On a donc :

$$T^{N_k} x_h = T_{\sigma^k(i_0)} x_h = h^k T_{i_0} h^{-k} x_h = h^k T_{i_0} x_h$$

qui tend vers $x_h$ quand $k \longrightarrow \infty$. Or la distance entre deux itérés de $x_h$ est minorée par une quantité strictement positive, donc c'est une contradiction. Ainsi $d(x_h, \Delta) = 0$. $\square$

## 5.2 Étude de la Dynamique sur l'Ensemble Exceptionnel

La ré-écriture des second et troisième points des hypothèses sera la clef de la construction d'un ensemble invariant remarquable de $T$ et la base de l'étude de ses propriétés géométriques et dynamiques. Pour ce faire, on va être contraint d'introduire quelques notations.
Étant donné $i \in \tilde{\mathcal{A}}$, le début de l'orbite de $hP_i$ peut être connu jusqu'à la longueur du mot $\mu^i$ donnant son code. Supposons maintenant qu'étant donné un ensemble $P_i$, on veuille connaître les itérés des ensembles $\{hP_j\}_{j \in \tilde{\mathcal{A}}}$ qui y tombent. On est amené à considérer tous les préfixes des mots $\{\mu^i\}_{i \in \tilde{\mathcal{A}}}$ tels que la lettre les complétant soit $i$ (cf. le troisième point des hypothèses). Ces préfixes seront "stricts", c'est-à-dire non égaux à des mots. Un tel préfixe $\nu$ étant donné, pour écrire explicitement l'ensemble concerné on doit aussi connaître de quel mot $\nu$ est préfixe.

En général, cette dernière information ne peut être déterminée uniquement grâce au préfixe lui-même, c'est une information supplémentaire que l'on va appeler *l'indice* (parce que parfois on la représentera formellement comme un indice) ou encore la *caractéristique*. Deux préfixes identiques provenant de mots différents seront donc distingués par ces indices, $\nu^i$ sera un préfixe du mot $\mu^i$ tandis que $\nu^j$ sera un préfixe du mot $\mu^j$ même si ce sont les mêmes mots au sens de $\tilde{\mathcal{A}}^\star$.
De plus, un ensemble $P_i$ contient des ensembles de la forme $hP_j$ pour lesquels la contraction ne fait pas intervenir d'isométries. Cela arrive lorsque le mot $\mu^j$ commence par la lettre $i$. On doit donc considérer aussi des préfixes vides qui devront être eux aussi indicés pour avoir un formalisme cohérent. Il y aura $m$ préfixes vides $\{\epsilon^i\}_{i=1,\dots,m}$. On considère l'ensemble $Q$ de tous les préfixes de tous les mots $\{\mu^i\}_{i\in\tilde{\mathcal{A}}}$ indicés, on définira alors l'ensemble

$$\mathcal{A} = Q \cup \{\epsilon^1, \dots, \epsilon^m\}$$

de tous les préfixes indicés, vides ou pas. Toutes les informations importantes seront extraites d'un préfixe indicé via trois fonctions.
On appellera $\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ l'application qui donne l'indice d'un préfixe. On l'appellera parfois "fonction caractéristique".

$$\forall \nu^\alpha \in \mathcal{A}, \quad \chi(\nu^\alpha) = \alpha.$$

Par commodité, on définira la fonction $\psi : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ qui va donner la lettre qui suit la lettre finale du préfixe dans le mot dont il est préfixe. Formellement, si $\nu \in \mathcal{A}$ et $\nu = \nu_1 \cdots \nu_k$ alors :

$$\psi(\nu) = \mu_{k+1}^{\chi(\nu)}.$$

Bien que la fonction $\psi$ semble ne pas avoir de sens pour les préfixes vides, on peut tout de même l'étendre sur ces derniers d'une manière cohérente. Comme on a pour tout préfixe non vide $\nu$ :

$$T_\nu h P_{\chi(\nu)} \subset P_{\psi(\nu)}$$

par le troisième point des hypothèses, et que le second donne :

$$hP_i \subset P_{\mu_1^i}$$

il est naturel de définir :

$$\psi(\epsilon^i) = \mu_1^i.$$

De plus, on appellera $\pi$ la fonction qui donne le préfixe "brut" sans son indice, c'est-à-dire au sens de $\tilde{\mathcal{A}}^\star$.

$$\pi(\nu^i) = \nu \in \tilde{\mathcal{A}}^\star.$$

On admettra que $\pi(\epsilon^i) = \epsilon$ où $\epsilon$ est le mot vide au sens classique (i.e. l'élément neutre du monoïde $\tilde{\mathcal{A}}^\star$).

Par exemple, si on considère le cas étudié dans le chapitre précédent, où on avait deux mots $\mu^0 = 001$ et $\mu^1 = 11001$, on aurait la famille de préfixes :

$$\{\epsilon^0, 0^0, 00^0, \epsilon^1, 1^1, 11^1, 110^1, 1100^1\}.$$

Avec par exemple, $\chi(0^0) = \chi(\epsilon^0) = 0$, $\psi(0^0) = 0$, $\psi(\epsilon^1) = 1$, $\psi(11) = 0$, etc. Ici, l'indice n'apporte aucune information supplémentaire puisque $\mu^0$ et $\mu^1$ ne commencent pas par la même lettre, il est donc facile de savoir de quel mot est issu chaque préfixe. Cela serait différent avec

par exemple $\mu^0 = 111$ et $\mu^1 = 101$. Ces deux mots seront utilisés dans le traitement du cas de la section 3.3.1, nous y reviendrons plus tard, en section 6.1.3.

Pour alléger les notations, on admettra les conventions suivantes :

$$\forall \nu \in \mathcal{A}, \quad T_\nu = T_{\pi(\nu)}, \quad P_\nu = P_{\chi(\nu)} \quad \text{et} \quad T_\epsilon = \mathrm{Id}.$$

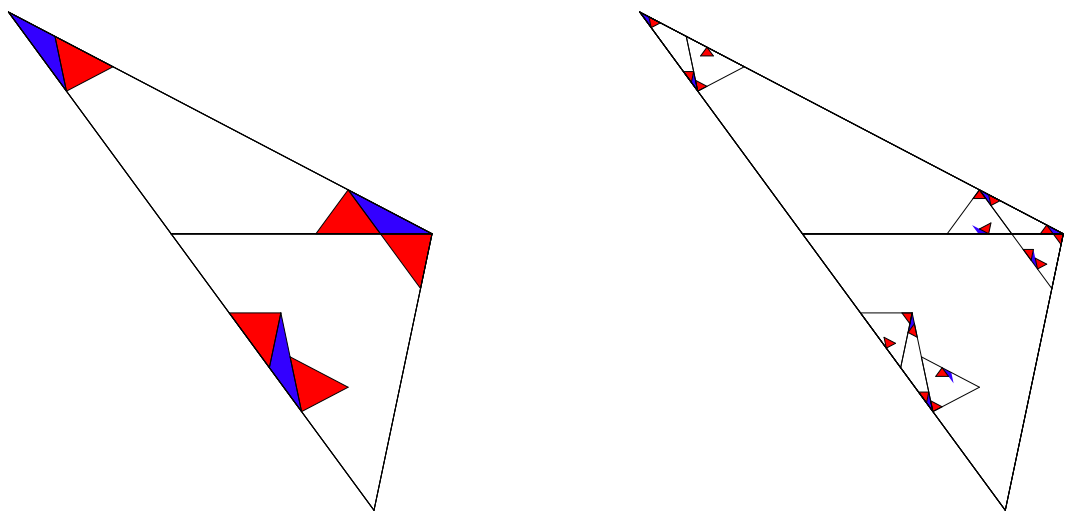

FIG. 5.3 – Une illustration de $P_0^1 \cup P_1^1$ (à gauche) et de $P_0^2 \cup P_1^2$ (à droite), dans le cadre de la rotation par morceaux sur deux atomes décrite dans le chapitre précédent.

On peut maintenant ré-écrire le troisième point des hypothèses de la manière suivante pour tout $i = 1, \ldots, m$ :

$$\bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(i)}^{m} T_\nu h P_\nu \subset P_i. \tag{5.1}$$

Cette réunion est disjointe. Elle est construite en classant les images des contractés des ensembles $hP_i$ par rapport aux ensembles $P_i$ dans lesquels ils tombent comme décrit ci-dessus.

Cette relation est fondamentale pour tout ce qui suit. Si on définit :

$$P_i^0 = \bar{P}_i \quad \text{et} \quad P_i^{k+1} = \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(i)} T_\nu h P_\nu^k \tag{5.2}$$

cette suite de compacts est décroissante (cf. figure 5.3 pour une illustration) et donc les ensembles

$$U_i = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_i^k \quad \text{et} \quad U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

sont non vides et compacts. Cette construction est très similaire à une construction graphe dirigée (cf. [40]) et en particulier à un exemple de J. Marion décrit à la fin de l'article.
Ici, l'ensemble des sommets du graphe sera $\mathcal{A}$. Une flèche ira de $\alpha$ à $\beta$ si et seulement si $\chi(\alpha) = \psi(\beta)$ (cf. (5.1)). La famille de compact initiaux sera

$$\left\{J_\nu = T_\nu h \bar{P}_\nu\right\}_{\nu\in\mathcal{A}}$$

qui vérifient

$$J_\alpha \supset \bigcup_{\nu\in\psi^{-1}(\chi(\alpha))} T_\nu h J_\nu. \tag{5.3}$$

La famille de similitudes attachées aux sommets du graphe sera $(T_\nu h)_{\nu\in\mathcal{A}}$. Ce sont toutes des similitudes de même rapport de contraction $\lambda$. L'ensemble $U$ est donc l'attracteur de la construction. L'ensemble vérifie des relations d'auto-similarité "par morceaux", dans le sens où il peut être décomposé en plusieurs morceaux similaires à d'autres morceaux mais pas nécessairement au tout. Formellement, on a les relations d'invariance suivantes :

$$U_i = \bigcup_{\nu\in\psi^{-1}(i)} T_\nu h U_\nu. \tag{5.4}$$

La preuve de ce résultat donnée dans l'article sus-cité n'utilise pas le fait que la réunion (5.3) est disjointe et on peut donc l'utiliser. Une preuve adaptée à notre contexte à été donnée dans la proposition 5 du chapitre 2. L'étude des constructions graphe-dirigées est substantiellement fondée sur le codage de leurs points comme chemins dans le graphe. Ici, un tel codage des points de $U$ est possible mais il n'est pas bijectif, ce qui pose certains problèmes techniques. De plus, $U_i \subset \bar{P}_i \subset \bar{A}_i$ et donc on pourrait avoir un ensemble $\bar{P}_i$ qui intersecte plusieurs atomes de la partition de l'isométrie par morceaux simultanément. Cela posera problème quand on voudra étudier la dynamique de ces points. On va devoir étudier la structure de $U$ de manière plus fine. Chaque point de $U$ appartient à une intersection du type suivant :

$$x \in T_{\nu_1} h \bar{P}_{\nu_1} \cap T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \bar{P}_{\nu_2} \cap \cdots,\ \nu_i \in \mathcal{A} \tag{5.5}$$

On remarque alors que la connaissance des préfixes "bruts", sans leurs indices $(\nu_1\nu_2\cdots)$ est insuffisante pour décrire complètement un point. Le choix des ensembles $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \ldots$ aurait été un degré de liberté supplémentaire. Cela justifie l'introduction d'informations additionnelles sur l'ensemble des préfixes. Pour être cohérente avec le processus récurrent de construction, la suite de préfixes doit vérifier la règle suivante :

$$\chi(\nu_i) = \psi(\nu_{i+1}).$$

L'ensemble de toutes ces suites dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ sera appelé $L$ et l'ensemble de toutes les suites de longueur $k$ vérifiant cette condition sera noté $L_k$. $L$ peut aussi être considéré comme l'ensemble des chemins infinis dans le graphe décrit ci-dessus.
En définissant :

$$P^k = \bigcup_{\nu\in L_k} T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \cdots h T_{\nu_k} h \bar{P}_{\nu_k},$$

on a :

$$U = \bigcap_{k\geq 1} P^k.$$

À partir de maintenant, pour alléger encore les notations, on notera pour tout $\nu \in L_k$ :

$$K_\nu \bar{P}_{\nu_k} = T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \cdots h T_{\nu_k} h \bar{P}_{\nu_k} \quad \text{et} \quad \partial P_i = \bar{P}_i \setminus P_i.$$

Comme on l'a dit, si la famille $\{P_i\}_{i=1,\dots,m}$ est disjointe, la famille $\{\bar{P}_i\}_{i=1,\dots,m}$ ne l'est en général pas. Certains points des frontières ou des itérés des frontières peuvent avoir des développements en intersection du type (5.5) ambigus. On va donc décomposer l'ensemble $U$ pour considérer un sous-ensemble sur lequel cette ambiguïté disparaît.

**Proposition 15** *L'ensemble $U$ se décompose en une réunion disjointe de deux ensembles notés $\tilde{U}$ et $\Gamma$ tels que :*

$$\tilde{U} = \bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{\nu\in L_k} T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \cdots h T_{\nu_k} h P_{\nu_k} \quad \textit{et} \quad \Gamma = \bigcup_{p\geq 0} \bigcap_{k\geq p} \bigcup_{\nu\in L_k} T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \cdots h T_{\nu_k} h \partial P_{\nu_k}.$$

*De plus, si on note :*

$$\gamma = \bigcup_{k\geq 0} \bigcup_{\nu\in L_k} T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \cdots h T_{\nu_k} h \partial P_{\nu_k}$$

*alors $\Gamma = U \cap \gamma$.*

**Preuve**
On a

$$P^k = \bigcup_{\nu\in L_k} K_\nu P_{\nu_k} \cup \bigcup_{\nu\in L_k} K_\nu \partial P_{\nu_k}.$$

Pour alléger les calculs on notera

$$a_k^0 = \bigcup_{\nu\in L_k} K_\nu P_{\nu_k} \quad \text{et} \quad a_k^1 = \bigcup_{\nu\in L_k} K_\nu \partial P_{\nu_k},$$

alors

$$U = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (a_k^0 \cup a_k^1) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{a_k^0}.$$

On posera :

$$\tilde{U} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} a_k^0.$$

Comme $a_k^0$ est ouvert, il est clair que $\tilde{U} \neq U$. On va donc calculer son complémentaire $\tilde{U}^c \cap U$ :

$$\tilde{U}^c \cap U = \bigcup_{k\geq 1} (a_k^0)^c \cap \bigcap_{l\geq 1} \overline{a_l^0} = \bigcup_{k\geq 1} \left( \bigcap_{l\geq 1} \overline{a_l^0} \right) \setminus a_k^0,$$

la suite $(a_l^0)_l$ est décroissante et donc $(\overline{a_l^0})_l$ aussi :

$$\tilde{U}^c \cap U = \bigcup_{k\geq 1} \left( \bigcap_{l>k} \overline{a_l^0} \right) \setminus a_k^0 = \bigcup_{k\geq 1} \left( \bigcap_{l>k} \overline{a_l^0} \setminus a_k^0 \right).$$

On remarque que :

$$\overline{a_l^0} \setminus a_k^0 = (a_l^1 \cup a_l^0) \cap (a_k^0)^c = a_l^1 \cap (a_k^0)^c \cup a_l^0 \cap (a_k^0)^c$$

mais comme $a_l^0 \subset a_k^0$, on a $a_l^0 \cap (a_k^0)^c \subset a_k^0 \cap (a_k^0)^c = \emptyset$. De plus :

$$\begin{aligned} a_l^1 \cap (a_k^0)^c &= a_l^1 \cap (\overline{a_k^0} \setminus a_k^1)^c \\ &= a_l^1 \cap ((\overline{a_k^0})^c \cup a_k^1) \\ &= a_l^1 \cap (\overline{a_k^0})^c \cup a_l^1 \cap a_k^1 \end{aligned}$$

et comme $\overline{a_l^0} \subset \overline{a_k^0}$ on a $a_l^1 \setminus \overline{a_k^0} = \emptyset$. Ainsi $\overline{a_l^0} \setminus a_k^0 = a_l^1 \cap a_k^1$ d'où :

$$\tilde{U}^c \cap U = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{l>k} a_l^1 \cap a_k^1 = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{l\geq k} a_l^1.$$

On appellera ce dernier ensemble $\Gamma$ :

$$\Gamma = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{l\geq k} a_l^1.$$

Si on appelle

$$\gamma = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} a_k^1,$$

il est clair que $\Gamma \subset \gamma$ et on peut montrer que $U \cap \gamma = \Gamma$, en effet :

$$U \cap \gamma = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \overline{a_l^0} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} a_k^1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \overline{a_l^0} \cap a_k^1 \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} a_k^1 = \Gamma.$$

Ainsi on a bien $\gamma \cap U \subset \Gamma$ et cela complète la preuve de la proposition 15. $\square$

On note que l'ensemble $\tilde{U}$ est défini comme une intersection décroissante d'ouverts qui, en général, peut être vide. On prouvera par la suite que, sous nos hypothèses, ce n'est pas le cas. Cependant, nous aurons besoin pour cela d'outils qui viendront de considérations d'ordre dynamique. Ainsi, nous allons continuer la discussion en supposant que $\tilde{U}$ n'est pas vide pour ne pas briser le fil du raisonnement et nous reviendrons plus tard à cette question.

L'ensemble $\tilde{U}$ peut se décomposer comme $U$ et vérifie des relations d'invariance similaires à (5.4). Comme on a

$$U_i = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\nu\in L_k, \chi(\nu_1)=i} K_\nu \bar{P}_{\nu_k}$$

la définition de

$$\tilde{U}_i = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\nu\in L_k, \chi(\nu_1)=i} K_\nu P_{\nu_k}$$

donne

$$\tilde{U}_i = \bigcup_{\nu\in\psi^{-1}(i)} T_\nu h \tilde{U}_\nu \quad \text{avec} \quad \tilde{U} = \bigcup_{i=1,\ldots,m} \tilde{U}_i.$$

Il est facile de voir que $U$ est invariant par $h$. En effet, pour tout $i$, $\psi^{-1}(i)$ contient toujours au moins une lettre vide et donc $\cup_{i\in\tilde{\mathcal{A}}} U_i$ contient tous les ensembles $\{hU_j\}_{j\in\tilde{\mathcal{A}}}$. Ainsi comme $U$ est fermé et qu'il contient toujours une suite qui converge vers $x_h$, $U$ contient $x_h$. L'itinéraire de ce point est connu (cf. proposition 14). Pourtant, dans notre cadre, la dynamique de $x_h$ a des propriétés très particulières et il est peu pratique de la considérer. On va donc dans ce qui suit supposer que l'orbite de $x_h$ est disjointe de $\tilde{U}$. Si ce n'est pas le cas, on peut sans restreindre la généralité d'aucun résultat, la retirer de $\tilde{U}$. Par souci de concision, cette manipulation restera toutefois sous-entendue.

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

**Proposition 16** *L'ensemble $\tilde{U}$ est invariant par $T$. En particulier :*

$$T\tilde{U} = \tilde{U} \quad \textit{et} \quad T^{-1}\tilde{U} = \tilde{U}$$

**Preuve**
On commence par prouver que $T\tilde{U} \subset \tilde{U}$ :
Soit $x \in \tilde{U}$, alors $\exists i$ tel que $x \in \tilde{U}_i$. Comme $\tilde{U}_i \subset P_i$ alors $Tx = T_i x$. Donc $\exists \nu \in \psi^{-1}(i)$ tel que $Tx \in T_{\pi(\nu)i} h\tilde{U}_\nu$. Il y a une alternative :

- Soit $\pi(\nu)i$ est un préfixe et alors $\exists j$ tel que $j = \psi(\nu i)$ et $Tx \in \tilde{U}_j \subset \tilde{U}$.
- Soit $\exists k$ tel que $\pi(\nu)i = \mu^k$ et alors $Tx \in T_{\mu^k} h\tilde{U}_\nu = hT_k\tilde{U}_\nu$.

Si on est dans ce dernier cas, alors le même raisonnement peut être appliqué pour $T_k\tilde{U}_\nu$. On aura encore que $\exists \nu' \in \psi^{-1}(\chi(\nu))$ tel que $Tx \in hT_{\pi(\nu')k} h\tilde{U}_{\nu'}$ et l'alternative précédente se présente encore pour $\pi(\nu')k$. Si $\pi(\nu')k$ est un préfixe alors $x \in h\tilde{U}_{\psi(\nu' k)} \in \tilde{U}$ (puisque $\tilde{U}$ est invariant par $h$). Sinon $\exists l$ tel que $\pi(\nu')k = \mu^l$ et donc $Tx \in h^2 T_l \tilde{U}_{\nu'}$. Le raisonnement s'applique ensuite à $T_l\tilde{U}_{\nu'}$. Ainsi, soit le raisonnement s'arrête, (si un des préfixes rencontrés ne donne pas un mot de $(\mu^i)_i$), et $x \in \tilde{U}$, soit à chaque étape la nouvelle lettre complète le préfixe pour donner un mot et donc :

$$\forall k > 0, \quad Tx \in h^k T_{\alpha_k} \tilde{U}_{\alpha_k}, \quad \text{où} \quad \alpha_k \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

A fortiori

$$\forall k > 0, \quad Tx \in h^k \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}} T_\alpha \tilde{U}_\alpha$$

ce qui implique

$$Tx \in \bigcap_{k=0}^{\infty} h^k \bigcup_{\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}} T_\alpha \tilde{U}_\alpha.$$

Or ce dernier ensemble a un diamètre nul, et donc ne contient que $x_h$. Ainsi $x \in T^{-1}x_h$ ce qui est impossible par hypothèse. Cela démontre que $\tilde{U} \subset T^{-1}\tilde{U}$ et donc $T\tilde{U} \subset \tilde{U}$.
On va démontrer maintenant que $T^{-1}\tilde{U} \subset \tilde{U}$ :
On remarque que le premier point des hypothèses implique immédiatement que :

$$\forall \nu \in \mathcal{A}, \quad hT_\nu = T_{\sigma(\nu)} h$$

et que

$$\forall k > 0, \quad h^k T_\nu = T_{\sigma^k(\nu)} h^k.$$

Dans ce qui suit, et pour éviter d'alourdir l'écriture, on n'écrira pas la fonction $\pi$ quand elle sera utilisée en indice de l'application $T$ ou quand l'opération effectuée porte de manière évidente sur le préfixe sans égard pour les indices. Il sera aussi pratique de noter les préfixes "tronqués" de la manière suivante :

$$\nu| = \nu_1 \cdots \nu_{|\nu|-1}$$

pour tout préfixe $\nu$ non vide. La dernière lettre de $\nu$ qui disparaît après la troncature sera notée $\bar{\nu} = \nu_{|\nu|}$, donc par définition $\nu = \nu|\bar{\nu}$. On note que cette opération peut être considérée comme agissant sur les éléments non vides $\nu \in \mathcal{A}$. En posant $\chi(\nu|) = \chi(\nu)$, alors $\psi(\nu|) = \bar{\nu}$.
Soit maintenant $x \in T^{-1}\tilde{U}$, alors $\exists i \in \tilde{\mathcal{A}},\ Tx \in \tilde{U}_i$ donc $\exists \nu^0 \in \psi^{-1}(i),\ Tx \in T_{\nu^0} h\tilde{U}_{\nu^0}$. Disons que $Tx = T_{k_0}x$ alors si $\nu^0 \neq \epsilon$ :

$$x \in T_{k_0}^{-1} T_{\nu^0} h\tilde{U}_{\nu^0} = T_{\nu^0|} h\tilde{U}_{\nu^0}.$$

On a $k_0 = \psi(\nu^0|)$. Ainsi, $T_{\nu^0|} h\tilde{U}_{\nu^0} \subset \tilde{U}_{k_0} \subset P_{k_0}$. Alors $x \in \tilde{U}$. Maintenant si $\nu^0 = \epsilon$ alors $Tx \in h\tilde{U}_{\nu^0}$, le raisonnement peut être appliqué encore une fois :

$$Tx \in h \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(\chi(\nu^0))} T_\nu h\tilde{U}_\nu$$

implique

$$\exists \nu^1 \in \psi^{-1}(\chi(\nu^0)), \quad Tx \in hT_{\nu^1} h\tilde{U}_{\nu^1} = T_{\sigma(\nu^1)} h^2 \tilde{U}_{\nu^1}$$

si $\sigma(\nu^1) \neq \epsilon$ (ce qui arrive si et seulement si $\nu^1 \neq \epsilon$). Ainsi, $x \in T_{\sigma(\nu^1)|} h^2 \tilde{U}_{\nu^1}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} T_{\sigma(\nu^1)|} h^2 \tilde{U}_{\nu^1} & = & T_{\sigma(\nu^1|)\sigma(\bar{\nu^1})|} h^2 \tilde{U}_{\nu^1} \\ & = & T_{\sigma(\bar{\nu^1})|} T_{\sigma(\nu^1|)} h^2 \tilde{U}_{\nu^1} \\ & = & T_{\nu'} h T_{\nu^1|} h \tilde{U}_{\nu^1} \end{array}$$

où $\nu' \in \mathcal{A}$, $\nu' = \sigma(\bar{\nu^1})| = \mu^{\bar{\nu^1}}|$ et $\chi(\nu') = \bar{\nu^1}$. Donc si $\nu^1 \neq \epsilon$ :

$$x \in T_{\nu'} h T_{\nu^1} h \tilde{U}_{\nu^1} \subset \tilde{U}_{\psi(\nu')}$$

et donc $x \in \tilde{U}$. Si par contre $\nu^1 = \epsilon$ alors $Tx \in h^2 \tilde{U}_{\nu^1}$ et on applique de nouveau le raisonnement. Ainsi de suite, à chaque étape, soit le préfixe $\nu^k$ est vide soit on peut prouver que $x \in \tilde{U}$. Admettons en effet que $\nu^j = \epsilon$ pour $j = 1, \ldots, k-1$, alors

$$Tx \in h^k T_{\nu^k} h \tilde{U}_{\nu^k} = T_{\sigma^k(\nu^k)} h^{k+1} \tilde{U}_{\nu^k}.$$

Si on suppose que $\nu^k \neq \epsilon$, on peut montrer que $T_{\sigma(\nu^k)|}$ peut se mettre sous une forme familière. On sait qu'en général, pour tout préfixe $\nu$ non vide, on a :

$$T_{\sigma(\nu)|} = T_{\sigma(\bar{\nu})|} T_{\sigma(\nu|)} \tag{5.6}$$

Cela implique en particulier :

$$\begin{array}{rcll} T_{\sigma^k(\nu)|} & = & T_{\sigma^k(\bar{\nu})|} T_{\sigma^k(\nu|)} & \text{en appliquant (5.6)} \\ & = & T_{\sigma^{k-1}(\mu^{\bar{\nu}})|} T_{\sigma^k(\nu|)} & \\ & = & T_{\sigma^{k-1}(\mu^{\bar{\nu}})|} T_{\sigma^{k-1}(\mu^{\bar{\nu}}|)} T_{\sigma^k(\nu|)} & \text{en appliquant (5.6) à } T_{\sigma^{k-1}(\mu^{\bar{\nu}})|} \\ & = & T_{\sigma^{k-2}(\mu^{\mu^{\bar{\nu}}})} T_{\sigma^{k-1}(\mu^{\bar{\nu}}|)} T_{\sigma^k(\nu|)} & \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

En itérant le processus on finira par avoir :

$$\forall j = 1, \ldots, k+1, \quad T_{\sigma^k(\nu)|} = T_{\zeta_1} T_{\sigma(\zeta_2)} T_{\sigma^2(\zeta_3)} \cdots T_{\sigma^k(\zeta_{k+1})}.$$

On peut reformuler l'expression ci-dessus :

$$\begin{array}{rcl} T_{\zeta_1} T_{\sigma(\zeta_2)} T_{\sigma^2(\zeta_3)} \cdots T_{\sigma^k(\zeta_{k+1})} & = & T_{\zeta_1} h T_{\zeta_2} h^{-1} h^2 T_{\zeta_3} h^{-2} h^3 \cdots h^{-k+1} h^k T_{\zeta_{k+1}} h^{-k} \\ & = & T_{\zeta_1} h T_{\zeta_2} h T_{\zeta_3} h \cdots h T_{\zeta_{k+1}} h^{-k}. \end{array}$$

On peut facilement déterminer les indices de la suite $(\zeta_1 \cdots \zeta_{k+1})$. Tout d'abord $\zeta_{k+1} = \nu|$. On posera donc $\chi(\zeta_{k+1}) = \chi(\nu)$. Cela détermine complètement $\psi(\zeta_{k+1}) = \chi(\zeta_k)$, donc $\zeta_k$ est déterminé et détermine $\zeta_{k-1}$ etc. Le mode de construction assure que la suite $(\zeta_1 \cdots \zeta_{k+1})$ considérée dans $\mathcal{A}^{k+1}$ est admissible pour $L$ (on voit en effet ci-dessus que $\bar{\nu} = \psi(\nu|)$) donc :

$$Tx \in T_{\sigma^k(\nu^k)} h^{k+1} \tilde{U}_{\nu^k} = T_{\zeta_1} h T_{\zeta_2} h T_{\zeta_3} h \cdots h T_{\zeta_{k+1}} h \tilde{U}_{\nu^k} \subset \tilde{U}_{\psi(\zeta_1)}$$

et $x \in \tilde{U}$. Si, par contre, à chaque étape, les préfixes $\nu^k$ sont vides, alors $\forall k > 0$, $Tx \in h^k \cup_{i \in \tilde{\mathcal{A}}} \tilde{U}_i$ ce qui donne $Tx = x_h$ et c'est encore impossible par hypothèse. On a ainsi par la première partie $T\tilde{U} \subset \tilde{U}$. La deuxième partie nous donne $T^{-1}\tilde{U} \subset \tilde{U}$, donc $\tilde{U} \subset T\tilde{U}$. Comme de plus

$T^{-1}\tilde{U} = T^{-1}T\tilde{U} \supset \tilde{U}$ on a aussi $T^{-1}\tilde{U} = \tilde{U}$. $\square$

Remarque : a priori, l'ensemble $\Gamma$ n'est pas invariant par $T$.

Si on suppose $x \in \tilde{U}$, alors pour tout $\nu \in L$ :

$$x \in T_{\nu_1} h P_{\nu_1} \cap T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h P_{\nu_2} \cap \cdots \tag{5.7}$$

Chaque point possède un développement unique puisque l'hypothèse selon laquelle la réunion (5.1) est disjointe implique que si $\nu^1 \neq \nu^2$ alors $K^1_\nu P_{\nu^1} \cap K^2_\nu P_{\nu^2} = \emptyset$. Ainsi l'application

$$\begin{array}{rccc} \kappa & : & \tilde{U} & \longrightarrow & L \\ & & x & \longmapsto & \nu \end{array}$$

est bien définie, puisque chaque composante a un diamètre tendant vers 0, et injective. Si on note $\tilde{L} = \kappa(\tilde{U})$ alors $\kappa$ est une bijection de $\tilde{U}$ dans $\tilde{L}$. On verra plus tard que $\tilde{L} \subset L$ strictement, $\kappa$ n'est pas surjective sur $L$.
Dans ce qui suit, on conviendra qu'une lettre $\nu \in \mathcal{A}$ telle que $\pi(\nu)\psi(\nu)$ donne un mot de $\{\mu^1, \ldots, \mu^m\}$ sera appelée un "quasi-mot". Il y a dans $L$ plusieurs types de mots qui retiendront notre attention. D'une part, les mots constitués uniquement de lettres vides et d'autre part les mots constitués exclusivement de quasi-mots. Ils seront respectivement appelés mots "minimaux" et mots "maximaux", cette terminologie sera justifiée par la suite. On notera $L_{\min}$ (resp. $L_{\max}$) l'ensemble des mots minimaux (resp. maximaux). Alors :

**Proposition 17**

$$1 \leq \mathit{card}(L_{\min}) \leq m \quad \mathit{et} \quad 1 \leq \mathit{card}(L_{\max}) \leq m.$$

**Preuve**
Il y a $m$ quasi-mots et $m$ lettres vides. Supposons que l'on considère $L_{\min}$ les mots de $L$ constitués exclusivement de lettres vides. Ces mots doivent eux aussi vérifier la relation $\chi(\omega_k) = \psi(\omega_{k+1})$. Soit $\omega \in L_{\min}$, alors si $\omega_k = \epsilon^i_j$ on sait que $\omega_{k-1} = \epsilon^j_{\mu^j_1}$. C'est-à-dire que la donnée de la lettre de rang $k$ conditionne la lettre de rang $k-1$ et donc toutes les lettres précédentes de manière unique. Donc $\forall k > 1$, le nombre de préfixes de longueur $k$ d'un mot de $L_{\min}$ est au plus $m$, le nombre de lettres vides possibles. Cela implique qu'il ne peut y avoir au plus que $m$ mots dans $L_{\min}$. En effet, supposons qu'il y a $M$ mots différents $\omega^1, \cdots, \omega^M \in L_{\min}$. On note $r_{i,j}$ l'occurrence de la première différence entre les mots $\omega^i$ et $\omega^j$ et $R = \max_{i,j} r_{i,j}$. Alors les $M$ préfixes de longueur $R$ des mots $\omega^k$ sont différents et si $M > m$, cela contredit la proposition précédente. Le même raisonnement se transpose aux mots maximaux, puisque la connaissance de la caractéristique d'un quasi-mot nous permet là aussi de le déterminer complètement. Ainsi, il y a au plus $m$ mots maximaux et $m$ mots minimaux.
Pour montrer qu'il en existe toujours, on va expliciter les matrices de transition des mots des sous-ensembles $L_{\min} \subset L$ et $L_{\max} \subset L$. Comme il n'y a qu'une seule lettre vide et qu'un seul quasi-mot pour une caractéristique donnée, on omettra d'écrire les lettres elles-mêmes et on raisonnera sur des suites de caractéristiques de $\tilde{\mathcal{A}}$. Pour les mots de $L_{\min}$, on ne peut avoir que les transitions de la forme $\mu^i_1 \to i$ alors que pour ceux de $L_{\max}$ les transitions possibles sont $\mu^i_{|\mu^i|} \to i$. Ainsi les matrices de transition $(a_{ij})$ et $(b_{ij})$ de $L_{\min}$ et $L_{\max}$ respectivement sont définies par :

$$\forall i \in \tilde{\mathcal{A}}, \quad a_{\mu^i_1 i} = 1 \quad \text{et} \quad b_{\mu^i_{|\mu^i|} i} = 1$$

et zéro partout ailleurs. Ces matrices contiennent un et un seul 1 par colonne et des zéros sinon, on va appeler de telles matrices des 01-matrices. On a alors le petit lemme suivant :

**Lemme 14** *Toute puissance d'une* 01*-matrice est une* 01*-matrice. En particulier, ce sont des matrices périodiques et non nilpotentes.*

**Preuve :**
Soit $(a_{ij})$ et $(b_{ij})$ deux 01-matrices, alors :

$$(a.b)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

ce qui donne

$$\exists k_0 \quad \text{tel que} \quad (a.b)_{ij} = a_{ik_0}$$

puisqu'on parcourt dans la somme la colonne $j$ de $b$ qui ne contient qu'un seul 1. De plus si on fait la somme d'une colonne du produit :

$$\sum_i (a.b)_{ij} = \sum_i a_{ik_0} = 1$$

puisque c'est aussi la somme de la colonne $k_0$ de $a$. Donc le produit de deux 01-matrices est une 01-matrice, ce qui implique que toute puissance d'une 01-matrice est une 01-matrice. En particulier ses entrées ne sont jamais toutes nulles et donc elle n'est pas nilpotente. De plus, comme il n'y a qu'un nombre fini d'arrangements possibles des 1 dans la matrice, $\exists n, p$ tels que $a^n = a^p$ et donc les puissances de la matrice deviennent périodiques. □
Ici, $a$ et $b$ sont des matrices de transition. Le fait que toutes leurs puissances $a^k$, $b^k$ soient des 01-matrices indique qu'il existe toujours $m$ chemins de chaque longueur $k$ admissibles par chaque graphe. En considérant en particulier le graphe correspondant à $a$, si on choisit pour chaque $k$ un de ses chemins, on obtient une suite de point de $\tilde{\mathcal{A}}^\star$ qui a par compacité au moins un point d'accumulation dans $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$. Or ce mot est dans $L$ puisque tous ses préfixes sont admissibles par le graphe. Comme il n'est constitué que de lettres vides, il est dans $L_{\min}$. Le même raisonnement s'applique pour $L_{\max}$. Ainsi $L_{\min}$ et $L_{\max}$ ne sont pas vides. □
On définira aussi un autre ensemble qui sera important dans ce qui suit :

$$T_{\max} = \{\omega \in L \text{ tels que } \omega = \omega_1\omega_2, \quad \omega_2 \in L_{\max} \text{ et } \omega_1 \text{ est un mot fini ou vide.}\}$$

Ce sont les mots de $L$ qui ont des "queues" de mots maximaux.
On introduira la fonction $\varphi$ de $L$ dans $U$ telle que

$$\{\varphi(\nu_1\nu_2\cdots)\} = T_{\nu_1} h \bar{P}_{\nu_1} \cap T_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \bar{P}_{\nu_2} \cap \cdots$$

Cette application est certainement surjective par construction de $U$ mais elle n'est pas bijective. En effet, par exemple, tous les mots de $L_{\min}$ ont pour image $x_h$.
Sur $\tilde{L}$, la fonction $\varphi$ coïncide avec $\kappa^{-1}$. Donc, si $\varphi$ n'est pas injective, $\varphi(\omega) \notin \tilde{U}$ et donc $\varphi(\omega) \in \Gamma$. Précisément :

**Lemme 15** *Soient $\alpha, \beta \in L$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Alors $\varphi(\alpha) \in \Gamma$.*

**Preuve**
Soient deux tels mots $\alpha, \beta$ et $k_0$ le rang d'occurrence de leur première différence :

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \neq \beta_k\}.$$

Si $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ alors $\{\varphi(\alpha)\} \cap \{\varphi(\beta)\} \neq \emptyset$ et en particulier :

$$K_{\alpha|_{k_0}} \bar{P}_{\alpha_{k_0}} \cap K_{\beta|_{k_0}} \bar{P}_{\beta_{k_0}} \neq \emptyset.$$

Or la réunion $a_k^0$ est disjointe. Donc, si cette dernière intersection est non vide, elle doit se trouver sur les frontières de ces ensembles :

$$\{\varphi(\alpha)\} \cap \{\varphi(\beta)\} \subset K_{\alpha|_{k_0}} \partial P_{\alpha_{k_0}} \cap K_{\beta|_{k_0}} \partial P_{\beta_{k_0}} \subset \gamma.$$

Et par la proposition 16 :

$$\varphi(\alpha) \subset \gamma \cap U \subset \Gamma.$$

□

Cela prouve en particulier qu'un seul point de $L_{\min}$ au plus peut être dans $\tilde{L}$ et qu'en général $\tilde{L} \subset L$ strictement.

Si on suppose $L$ muni de la topologie usuelle, il est facile de voir que $\varphi$ est continue. En effet, $d(\omega_1, \omega_2) \to 0$ nous donne qu'il existe un préfixe commun $\zeta$ aussi grand que l'on veut aux mots $\omega_1$ et $\omega_2$. Donc, par définition, $\varphi(\omega_1)$ et $\varphi(\omega_2)$ sont tous les deux dans $K_\zeta \bar{P}_\zeta$ donc :

$$d(\varphi(\omega_1, \omega_2)) < \delta(K_\zeta \bar{P}_\zeta) \longrightarrow 0.$$

L'ensemble $L$ est donc bien fermé dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et $\tilde{L}$ ne l'est pas.
On peut savoir quels sont les mots associés à l'ensemble $L_{\max}$ :

**Proposition 18** *Les points de $L_{\max}$ ne sont pas dans $\tilde{L}$.*

**Preuve**
On va montrer que si $\omega \in L_{\max}$ et qu'on suppose $\varphi(\omega)$ dans $\tilde{U}$, l'image du point $\varphi(\omega)$ par la dynamique doit être le point fixe de la contraction.
En effet, soit $\mu$ un quasi-mot. Alors, si $x \in \tilde{U}$ :

$$x \in T_\mu h P_\mu \quad \Rightarrow \quad \exists j \in \tilde{\mathcal{A}} \quad \text{tel que } Tx \in T T_\mu h P_\mu = h T_j P_j.$$

De même si, $\mu^1$ et $\mu^2$ sont deux quasi-mots, alors $x \in T_{\mu^1} h T_{\mu^2} h P_{\mu^2}$ implique :

$$\exists j, k \in \tilde{\mathcal{A}} \quad \text{tel que} \quad Tx \in T T_{\mu^1} h T_{\mu^2} h P_\mu = h T_j T_{\mu^2} h P_{\mu^2} = h^2 T_k P_k.$$

Ainsi, de proche en proche, pour tout $k$, si $x$ est dans une intersection où l'on n'a que des quasi-mots, on peut montrer que si

$$\exists i \in \tilde{\mathcal{A}} \quad \text{tel que} \quad Tx \in h^k T_i P_i$$

alors

$$\forall k \geq 0, \quad Tx \in h^k \bigcup_{i=1,\ldots,m} T_i P_i.$$

Et donc $Tx$ est $x_h$, ce qui est impossible puisque l'orbite de $x_h$ n'est pas dans $\tilde{U}$. Ainsi, par hypothèse, on sait que $\tilde{L} \cap L_{\max} = \emptyset$. □

### 5.2.1 Codage "géométrique"

On peut étudier la dynamique en considérant les codes "géométriques" de chaque point de $U$. Soit $x \in \tilde{U}$. Par construction, $x$ sera dans une intersection du type de (5.7) et sera associé à une suite $(\nu_1\nu_2\cdots) \in \tilde{L}$. On va maintenant étudier les effets de $T$ sur ce point et en déduire une manière symbolique de l'exprimer.

– Si $\nu_1$ n'est pas un quasi-mot :
$$x \in T_{\nu_1} h P_{\alpha_1}.$$
De tout ce que l'on sait sur le codage dans $\tilde{L}$, on peut déduire que $Tx = T_{\psi(\nu_1)}x$. Comme $\nu_1$ n'est pas un quasi-mot, on peut le compléter et donc :
$$Tx \in T_{\nu^1\psi(\nu_1)} h T_{\nu_2} h \cdots$$

– Si $\nu_1$ est un quasi-mot et pas $\nu_2$, le même raisonnement que plus haut va s'appliquer mais cette fois-ci, $\nu_1\psi(\nu_1)$ sera un mot entier et comme $\chi(\nu_1\psi(\nu_1)) = \chi(\nu_1)$, $\nu_1\psi(\nu_1) = \mu^{\chi(\nu_1)}$. Donc :
$$\begin{aligned} Tx \in TT_{\nu_1} h T_{\nu_2} h \cdots &= T_{\nu_1\psi(\nu_1)} h T_{\nu_2} h \cdots \\ &= T_{\mu^{\chi(\nu_1)}} h T_{\nu_2} h \cdots \\ &= h T_{\chi(\nu_1)} h^{-1} h T_{\nu_2} \cdots \\ &= h T_{\nu_2\psi(\nu_2)} h \cdots \end{aligned}$$
on sait que $\psi(\nu_2) = \chi(\nu_1)$. Donc on peut dire que $\nu_1$ devient une lettre vide. On sait par construction que $\chi(\nu_1) = \psi(\nu_2\psi(\nu_2))$, ce qui conditionne par hypothèse l'indice $\psi(\nu_1) = \mu_1^{\chi(\nu_1)}$.

Ainsi, au niveau purement symbolique, l'application de $T$ revient à faire l'opération suivante sur un mot $(\nu_1\nu_2\cdots) \in \tilde{L}$ :

$$\begin{array}{lcll} (\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\cdots) & \longrightarrow & (\nu_1^{++}\nu_2\nu_3\nu_4\cdots) & \text{si } \nu_1 \text{ n'est pas un quasi-mot} \\ & \longrightarrow & (\epsilon^{\psi(\nu_2^{++})}\nu_2^{++}\nu_3\nu_4\cdots) & \text{si } \nu_1 \text{ est un quasi-mot et pas } \nu_2 \\ & \longrightarrow & (\epsilon^{\mu_1^{\psi(\nu_3^{++})}}\epsilon^{\psi(\nu_3^{++})}\nu_3^{++}\nu_4\cdots) & \text{si } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ sont des quasi-mots et pas } \nu_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

où l'on notera l'opération "d'incrémentation " :
$$\nu_i^{++} = \begin{cases} \nu_i\psi(\nu_i) & \text{si } \nu_i \text{ n'est pas un quasi-mot} \\ \psi(\nu_i) = \mu_1^{\alpha} & \text{si } \nu_i = \epsilon^{\alpha}. \end{cases}$$

Cette opération symbolique sera notée $T_L$ par la suite. Puisqu'on ne fait que compléter des préfixes, l'indice du préfixe incrémenté sera $\chi(\nu_i^{++}) = \chi(\nu_i)$. Cet indice-ci étant connu, il n'existe qu'une seule lettre possible $\psi(\nu_i^{++})$ pour compléter $\nu_i^{++}$. L'opération $T_L$ se termine si $\omega$ n'est pas dans $L_{\max}$. On sait que, dans ce cas, le point $x$ correspondant à ce code est tel que $Tx = x_h$. Donc, même si l'action de $T_L$ n'est pas définie sur les mots maximaux, la cohérence voudrait que l'image d'un mot maximal soit un mot minimal. Mais a priori les cardinaux de $L_{\max}$ et $L_{\min}$ sont différents : $\sharp L_{\max} \neq \sharp L_{\min}$. On sait qu'aucun de ces deux ensembles n'est vide. On peut donc choisir $\omega_{\min} \in L_{\min}$ et poser :
$$\forall \omega \in L_{\max}, \quad T_L\omega = \omega_{\min}$$

pour définir $T_L$ sur tout $L$. On remarque que l'ensemble $L$ et sa dynamique $T_L$, bien que construits en prenant pour modèle la dynamique de $T$ sur $\tilde{U}$ peuvent in fine se définir indépendamment de ces derniers et existent toujours. On conduira dans ce qui suit une étude abstraite de

ces systèmes symboliques.
On va également faire sur $\sigma$ une hypothèse plus forte :

$$\forall i = 1, \ldots, m, \quad \text{chaque mot } \mu^i \text{ contient toutes les lettres de } \tilde{\mathcal{A}}. \tag{5.8}$$

Cette hypothèse n'est pas aussi contraignante qu'elle en a l'air. En effet, même si $\sigma$ ne la remplit pas, comme elle est supposée primitive, l'hypothèse sera remplie par l'une de ses puissances. On a le lemme suivant :

**Lemme 16** *Il existe une puissance $k$ de $T$ pour laquelle, en posant $\nu^i = \sigma^k(i)$ :*
- $T_{\nu^i} = h^k T_i h^{-k}$.
- $P_i \subset A_i$ *et* $h^k P_i \subset P_{\nu_1^i}$.
- $T_{\nu_1^i \cdots \nu_{j-1}^i} h^k P_i \subset P_{\nu_j^i}$, $\forall j \in \{0, \ldots, |\nu^i| - 1\}$.

**Preuve**
Les hypothèses peuvent être considérées comme l'initialisation d'une récurrence dont le résultat serait le lemme. Le premier point n'est autre que le lemme 13. Le deuxième point est clair puisque $\nu_1^i = (\sigma^k(i))_1$. Pour le troisième point, on va prouver le résultat à l'ordre $k+1$, en supposant le résultat à l'ordre $k$ ci-dessus vrai.
On posera $\omega^i = \sigma(\nu^i)$. Alors, si $j < |\omega^i|$, on peut écrire (Pref($\mu$) désignant l'ensemble des préfixes du mot $\mu$) :

$$\omega_1^i \cdots \omega_{j-1}^i = \sigma(\nu_1^i)\sigma(\nu_1^i) \cdots \sigma(\nu_l^i)\zeta, \quad \zeta \in \mathrm{Pref}(\sigma(\nu_{l+1}^i))$$

alors :

$$T_{\omega_1^i \cdots \omega_{j-1}^i} h^{k+1} P_i = T_\zeta T_{\sigma(\nu_l^i)} \cdots T_{\sigma(\nu_1^i)} h^{k+1} P_i = T_\zeta h T_{\nu_1^i \cdots \nu_l^i} h^k P_i \subset T_\zeta h P_{\nu_{l+1}^i}$$

par hypothèse de récurrence. De plus $\zeta = \mu_1^{\nu_{l+1}^i} \cdots \mu_r^{\nu_{l+1}^i}$ et donc :

$$\zeta = \mu_1^{\nu_{l+1}^i} \cdots \mu_r^{\nu_{l+1}^i} \quad \Rightarrow \quad T_\zeta h P_{\nu_{l+1}^i} \subset P_{\mu_{r+1}^{\nu_{l+1}^i}}.$$

La lettre $\mu_{r+1}^{\nu_{l+1}^i}$ complète le préfixe $\zeta$ de $\sigma(\nu_{l+1}^i)$. C'est donc bien la seule lettre possible pour $\omega_j$. Cela termine la récurrence. □
Ce lemme peut donc sans restreindre la généralité être considéré comme un autre ensemble d'hypothèses de base. Si $\sigma$ est primitive, il n'est pas plus contraignant de considérer que chaque mot $\mu^i$ contient toutes les lettres de $\tilde{\mathcal{A}}$.
Revenons maintenantà l'étude de l'action de la dynamique sur les codes de $L$. On remarque que $T$ agit d'une manière très similaire à un odomètre. Les odomètres les plus communs sont minimaux. De même, ici :

**Proposition 19** *La dynamique de $T_L$ est minimale sur $L$.*

**Preuve**
L'action récursive de $T_L$ se fait comme suit sur un mot $(\nu^1\nu^2\cdots) \in L$ :

$$(\nu_1\nu_2\cdots) \to (\nu_1^{++}\nu_2\cdots) \to \cdots \to (\epsilon^{\psi(\nu_2^{++})}\nu_2^{++}\cdots) \to (\psi(\nu_2^{++})\nu_2^{++}\cdots) \to \cdots$$

$$\to (\epsilon^{\psi((\nu_2^{++})^{++})}(\nu_2^{++})^{++}\cdots) \to \cdots \to (\psi((\nu_2^{++})^{++})(\nu_2^{++})^{++}\cdots) \to \cdots$$

L'incrémentation va s'appliquer sur toutes les lettres du mot qui deviendront donc toutes tôt ou tard des quasi-mots. Donc $\forall i \in \mathbb{N}, \exists N$ tel que la lettre $(T_L^N\omega)_i$ soit un $\epsilon^j$, où $j = \psi((T_L^N\omega)_{i+1})$.

Alors en appliquant récursivement $T_L$ à $T_L^N\omega$, la lettre $(T_L^N\omega)_i$ va devenir toutes les lettres $\nu$ de caractéristique $\chi(\nu) = j$. Or $j$ va prendre successivement toutes les valeurs correspondant aux lettres de $\tilde{\mathcal{A}}$ composant le préfixe $(\omega_{i+1})^{++}$ et successivement tous ses incrémentés. Sous l'hypothèse (5.8), $j$ va forcément devenir toutes les caractéristiques possibles. On note que, quand une lettre au rang $i$ change, la lettre au rang $i-1$ est obligatoirement une lettre vide. On peut résumer ceci dans un lemme :

**Lemme 17** *Pour tout $\omega \in L, \alpha \in \mathcal{A}$, et $i > 1$, on a :*

$$\exists N_\alpha^i \quad \textit{tel que} \quad (T_L^{N_\alpha^i}\omega)_i = \alpha \quad \textit{et} \quad (T_L^{N_\alpha^i}\omega)_{i-1} = \epsilon^{\psi(\alpha)}.$$

On peut étendre ce résultat par récurrence :

**Lemme 18** *Pour tout $p > 0, i > 1$ et pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^p \cap L$, on a :*

$$\exists N_\alpha^i \quad \textit{tel que} \quad T_L^{N_\alpha^i}\omega = (\cdots \epsilon^{\psi(\alpha_1)}\alpha_1 \cdots \alpha_p \cdots),$$

*la lettre $\alpha_1$ étant au rang $i$.*

**Preuve**

Le lemme 17 étant l'initialisation de la récurrence, on considère le lemme 18 vrai à l'ordre $p$. Si on considère alors $\alpha \in \mathcal{A}^{p+1} \cap L$, $\exists N$ tel que :

$$T_L^{N_\alpha^i}\omega = (\cdots \epsilon^{\psi(\alpha_2)}\alpha_2 \cdots \alpha_{p+1} \cdots).$$

La lettre $\alpha_2$ étant au rang $i+1$, il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que :

$$T_L^{N_\alpha^i+K}\omega = (\cdots \epsilon^{\psi(\psi(\alpha_2))}\psi(\alpha_2)\alpha_2 \cdots \alpha_{p+1} \cdots).$$

Puis successivement, au rang $i$, la lettre va devenir toutes les lettres telles que $\chi((T_L^M\omega)_i) = \psi(\alpha_2)$, c'est-à-dire toutes les lettres permises par le langage $L$. Donc, forcément, à un certain ordre $M$, on aura

$$T_L^M\omega = (\cdots \epsilon^{\psi(\alpha_1)}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{p+1} \cdots)$$

ce qui conclut la récurrence. □

En particulier, on a, pour tout $\omega \in L$, et $\alpha \in \mathcal{A}^p \cap L$ :

$$\exists N \quad \text{tel que} \quad T_L^N\omega = (\epsilon^{\psi(\alpha_1)}\alpha_1 \cdots \alpha_p \cdots).$$

Si on choisit une lettre $\beta \in \mathcal{A}$ telle que $\chi(\beta) = \psi(\alpha_1)$, alors

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad T_L^k T_L^N\omega = (\beta\alpha_1 \cdots \alpha_p \cdots).$$

Ainsi, en définitive, pour tout mot $\omega \in L$ et pour tout sous-mot fini $\alpha$ de $L \cap \mathcal{A}^\star$, il existe un $N$ tel que $T_L^N(\omega)$ commence par $\alpha$, donc tel que :

$$d(T_L^N\omega, \alpha) < \frac{1}{2^{|\alpha|}}.$$

Donc, tous les mots de $L$ ont une orbite dense dans $L$. Le système $(T_L, L)$ est minimal. □

On peut en dire plus sur la dynamique de $T_L$ sur $L$ en remarquant que le langage $L$ peut être décrit par un diagramme de Bratteli. Il faut définir les familles d'ensembles suivantes :

$$\forall j > 0, \quad V_0 = \{\epsilon\}, \quad E_1 = \{\epsilon\} \times \mathcal{A} \quad \text{et} \quad V_j = \mathcal{A},$$

$$\forall j > 1, \quad E_j = \{(v_1, v_2) \in \mathcal{A}^2, \text{ tels que } \chi(v_1) = \psi(v_2)\}$$

qui sont respectivement les ensembles de sommets et d'arêtes, et les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccc} r: & E_j & \longrightarrow & V_j \\ & (v_1, v_2) & \longmapsto & v_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} s: & E_j & \longrightarrow & V_{j-1} \\ & (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1. \end{array}$$

Le couple

$$\mathcal{B} = (V, E) = \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)$$

définit un diagramme de Bratteli stationnaire, puisqu'il se répète au-delà du premier niveau. On peut munir $\mathcal{B}$ d'un ordre partiel. Deux arêtes $e, \tilde{e} \in E$ sont comparables si et seulement si $r(e) = r(\tilde{e})$ et on peut remarquer que :

$$e = (v_1, v_2) \quad \text{et} \quad \tilde{e} = (\tilde{v}_1, v_2) \quad \text{donc} \quad \chi(v_1) = \psi(v_2) = \chi(\tilde{v}_1).$$

On dira donc que deux arêtes sont comparables si $\chi(s(e)) = \chi(s(\tilde{e}))$. On va définir un ordre sur les arêtes comparables par :

$$e \geq \tilde{e} \quad \text{si et seulement si} \quad |s(e)| \geq |s(\tilde{e})|.$$

On conviendra que les lettres $\epsilon^i$, supposées de longueur 0 sont plus petites que toute autre lettre de même caractéristique. On notera

$$X_{\mathcal{B}} = \{(e_1, e_2, \ldots), \quad e_j \in E_j, \quad r(e_j) = s(e_{j+1})\}$$

l'ensemble des chemins infinis admissibles par le diagramme. On peut vérifier que

$$L = \{(r(e_1)r(e_2)\cdots), \quad (e_1, e_2, \ldots) \in X_{\mathcal{B}}\}.$$

Par abus de notation, on écrira

$$L = r(X_{\mathcal{B}}).$$

Il est facile de voir que $r$ est bijective et même que c'est un homéomorphisme. L'ordre sur les arêtes induit un ordre lexicographique sur les chemins finis :

$$(e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_l) \geq (f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_l)$$

si et seulement si :

$$\text{pour un } k+1 \leq i \leq l, \quad e_j = f_j \quad \text{pour} \quad i < j \leq l \quad \text{et} \quad e_i \geq f_i.$$

On notera $X^{\min}$ et $X^{\max}$ les chemins minimaux et maximaux respectivement. Précisément, si $x = (e_1, e_2, \cdots) \in X_{\mathcal{B}}$, alors, si $\forall j, e_j$ est minimal $x \in X^{\min}$ et si $\forall j, e_j$ est maximal, $x \in X^{\max}$. Ces notations justifient la terminologie "mots maximaux" et "mots minimaux" employée plus haut, on a $L_{\min} = r(X^{\min})$ et $L_{\max} = r(X^{\max})$. Donc, il y a au plus $m$ chemins minimaux et maximaux puisque être chemin minimal ou maximal signifie que $r(x_i^{\max}) = (r(e_1), r(e_2), \cdots)$ ne

contient que des lettres vides ou des quasi-mots respectivement.
Sur $X_{\mathcal{B}}$ on définit une application $V_{\mathcal{B}}$, dite application de Bratteli-Vershik. Soit $x = (e_1, e_2 \cdots) \notin X^{\max}$ et $k$ le plus petit nombre tel que $e_k$ ne soit pas une arête maximale. Si $f_k$ est le successeur de $e_k$ alors

$$V_{\mathcal{B}}(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots)$$

où $(f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})$ est le chemin partiel minimal parmi tous les chemins admissibles de longueur $k-1$ tels que $r(f_{k-1}) = s(f_k)$. La définition de $V_{\mathcal{B}}$ sur $X^{\max}$ pose le même problème que celle de $T_L$ sur $L_{\max}$. Pour rester cohérent, on choisira $x_{\min} = r(\omega_{\min})$ et on posera :

$$\forall x^{\max} \in X^{\max}, \quad V_{\mathcal{B}}(x^{\max}) = x^{\min}.$$

Les chemins de $X^{\max}$ et $X^{\min}$ sont ordonnés de la même manière selon les caractéristiques croissantes de la source de leur première arête. Ici, une arête non maximale $e$ est telle que sa source $s(e)$ n'est pas un quasi-mot et son successeur est le préfixe de même caractéristique et de longueur $|s(e)|+1$, qui ne peut donc être que $s(e)\psi(s(e)) = s(e)^{++}$. Les chemins finis minimaux sont obligatoirement constitués d'arêtes ayant des sources (et donc des destinations) égales à des lettres minimales. Comme on doit avoir $r(f_{k-1}) = s(f_k)$, alors $\chi(s(f_{k-1})) = \psi(r(f_{k-1})) = \psi(s(f_k))$, donc $s(f_{k-1}) = \epsilon_{\psi(s(f_k))} = \epsilon_{\psi(s(e_k)^{++})}$. Ainsi, si on prend $\omega = (\nu_1, \nu_2, \ldots) \in L$, alors $x = ((\nu_1, \nu_2), (\nu_2, \nu_3), (\nu_3, \nu_4), \ldots) \in X_{\mathcal{B}}$. Si $(\nu_k, \nu_{k+1})$ est la première arête non maximale :

$$V_{\mathcal{B}}(x) = ((\epsilon_{\psi((\nu_k)^{++})}, \epsilon_{\psi((\nu_k)^{++})}), \ldots, (\epsilon_{\psi((\nu_k)^{++})}, (\nu_k)^{++}), ((\nu_k)^{++}, \nu_{k+1}), (\nu_{k+1}, \nu_{k+2}), \ldots)$$

On remarque donc que :

$$r(V_{\mathcal{B}}(x)) = (\epsilon_{\psi((\nu_k)^{++})}, \ldots, (\epsilon_{\psi((\nu_k)^{++})}, (\nu_k)^{++}, \nu_{k+1}, \ldots) = T_L\omega.$$

De même, si on prend $\omega$ ne contenant que des quasi-mots, alors le chemin $x$ construit de la même façon que précédemment sera maximal (puisque ses sources sont toutes des lettres maximales) :

$$r(V_{\mathcal{B}}(x)) = r(x_i^{\min}) = (\epsilon_i, \ldots) = T_L\omega$$

où $i = \chi(\nu^1)$ est la caractéristique de la source de la première arête de $x$. On a donc la conjugaison :

$$\forall x \in X_{\mathcal{B}}, \quad r \circ V_{\mathcal{B}}(x) = T_L \circ r(x).$$

Le diagramme que l'on décrit est stationnaire. Si, en plus, il est simple, alors $V_{\mathcal{B}}$ est uniquement ergodique sur $X_{\mathcal{B}}$ (cf. [16]). Or, on a supposé (5.8) vraie. Si on choisit deux sommets quelconques $v_1 \in V_k$ et $v_3 \in V_{k+2}$, alors, dans $V_{k+1}$, il existe forcement au moins un sommet $v_2$ tel que $\chi(v_1) = \psi(v_2)$ pour chaque valeur possible de $\chi(v_2)$. Il suffit donc de choisir $v_2$ tel que $\chi(v_2) = \psi(v_3)$ pour avoir un chemin entre $v_1$ et $v_3$. Cela prouve qu'en télescopant le diagramme du niveau $k$ sur le niveau $k+2$ on obtient un diagramme où tous les sommets sont connectés à tous les sommets du niveau suivant. Le diagramme est donc simple, et les résultats de [16] s'appliquent.
Les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{V_{\mathcal{B}}} & X_{\mathcal{B}} \\ r \downarrow & & r \downarrow \\ L & \xrightarrow{T_L} & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{L} & \xrightarrow{T_L} & \tilde{L} \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \tilde{U} & \xrightarrow{T} & \tilde{U} \end{array}$$

L'ensemble $L$ est un Cantor sur lequel on a une dynamique minimale et uniquement ergodique. On notera $\mu$ l'unique mesure $T_L$-invariante. Le sous-ensemble $\tilde{L} \subset L$ est invariant et en bijection continue avec $\tilde{U}$.
Jusqu'ici, on n'a pas démontré que $\tilde{L}$ est non-vide, on l'a juste supposé. Cependant, toujours dans cette hypothèse, on peut déjà montrer que $\tilde{L}$ serait significatif du point de vue topologique. On a :

**Lemme 19** *$\tilde{L}$ est dense dans $L$.*

**Preuve :**
Supposons que
$$\exists \alpha \in L_k \setminus \tilde{L}_k,$$
alors certainement :
$$(\alpha) \cap \tilde{L} = \emptyset.$$
On sait que
$$\varphi((\alpha) \cap \tilde{L}) \subset \varphi((\alpha)) \cap \varphi(\tilde{L}).$$
Comme $\varphi$ est bijective sur $\tilde{L}$, l'inclusion est une égalité. En effet, si on prend $x \in \varphi((\alpha)) \cap \varphi(\tilde{L})$, alors $x \in \varphi(\tilde{L}) = \tilde{U}$ et donc $\exists! \nu \in \tilde{L}$ tel que $\varphi(\nu) = x$ (s'il existait deux préimages à $x$, il serait dans $\Gamma$ par le lemme 15). Comme $x$ est aussi dans $\varphi((\alpha))$, alors il existe au moins une préimage de $x$ dans $(\alpha)$. Or, si cette préimage était différente de $\nu$, $x$ serait dans $\Gamma$ encore par application du lemme 15. Donc $\nu \in \tilde{L} \cap (\alpha)$ et $\varphi(\nu) = x$ donc $x \in \varphi(\tilde{L} \cap (\alpha))$ et finalement :
$$\varphi((\alpha) \cap \tilde{L}) = \varphi((\alpha)) \cap \varphi(\tilde{L}) = \emptyset.$$
Comme $\varphi((\alpha)) = K_\alpha \bar{P}_{\alpha_k}$, on aurait $K_\alpha \bar{P}_{\alpha_k} \cap \tilde{U} = \emptyset$. C'est impossible car
$$K_\alpha \bar{P}_{\alpha_k} \cap \tilde{U} = K_\alpha \bar{P}_{\alpha_k} \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{\nu \in L_k} K_\nu P_{\nu_k} \supset K_\alpha P_{\alpha_k}.$$
Ainsi tout ouvert de $L$ intersecte $\tilde{L}$, ce qui complète la preuve. □

On peut prouver que cet ensemble est aussi significatif d'un point de vue métrique. En fait, pour cela, il faut construire une mesure pour laquelle cet ensemble a mesure pleine. Cette mesure doit aussi avoir une signification dynamique et on vient de voir que la seule possible est $\mu$. Cependant, il est difficile de prouver directement que $\mu(\tilde{L}) = 1$. Dans la section qui suit, on va mener une étude géométrique de $U$ en parallèle avec une étude symbolique de $L$. Elles nous permettront de mettre en relation l'aspect géométrique de $U$ incarné par sa mesure de Hausdorff avec l'aspect dynamique incarné par la mesure invariante $\mu$. Comme on maîtrise mieux la structure de $\tilde{U}$ que celle de $\tilde{L}$, on va montrer que $\tilde{U}$ est de mesure pleine, ce qui entraînera que $\tilde{L}$ aussi.

### 5.2.2 Mesure et Dimension de Hausdorff

On peut considérer la mesure $\varphi\mu$, image de $\mu$ par $\varphi$ définie comme :
$$\varphi\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)).$$
Pour avoir une idée de ce qu'elle représente, on va expliciter $\mu$ grâce à la proposition suivante.

**Proposition 20** *L'unique mesure $T_L$-invariante sur $L$ s'exprime comme suit sur les cylindres :*
$$\mu((\nu_1 \cdots \nu_k)) = \frac{\sharp L_{k+1}^{\chi(\nu_k)}}{\sharp L_{k+1} \sharp L_k^{\chi(\nu_k)}}$$
*où*
$$L_k^i = \{\nu \in L_k, \quad \textit{tel que} \quad \chi(\nu_k) = i\}.$$

**Preuve**
Dans ce qui suit, $Q$ dénotera l'ensemble des quasi-mots. Si on prend $\nu_1 \cdots \nu_k \notin Q^k$, alors le cylindre associé $(\nu_1 \cdots \nu_k)$ est appliqué par $T_L$ sur un autre cylindre qui aura donc même mesure. De nombreux cylindres auront ainsi les mêmes mesures. On a vu que $L_{\min} \cap L_k$ contient exactement $m$ mots finis. Chaque mot $(\epsilon_1 \cdots \epsilon_k)$ sera tel que $\chi(\epsilon_k)$ sera différent des autres mots. On étendra la notation de $L_k^i$ à l'ensemble de ses cylindres :

$$(L_k^i) = \{(\nu), \quad \nu \in L_k \quad \text{tel que} \quad \chi(\nu_k) = i\}.$$

$L_k^i$ représente l'ensemble de tous les mots que l'on peut obtenir à partir d'un mot de $L_{\min} \cap L_k^i$ par itération de $T_L$. La famille $\{(L_k^i)\}_{i=1,\ldots,m}$ forme, pour tout $k$, une partition disjointe de $L$. Ainsi, on écrira :

$$\lambda_k^i = \mu((L_k^i)), \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_k^i = 1.$$

De plus, tous les cylindres dans $(L_k^i)$ ont la même mesure. Ainsi :

$$\text{si } \nu_1 \cdots \nu_k \in L_k^i, \quad \text{alors} \quad \mu((\nu_1 \cdots \nu_k)) = \frac{\lambda_k^i}{\sharp L_k^i} \quad \text{où} \quad i = \chi(\nu_k).$$

On va maintenant déterminer précisément $\lambda_k^i$. On remarque tout d'abord que :

$$\sharp L_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} \sharp \psi^{-1}(i) \sharp L_k^i. \tag{5.9}$$

On a $\forall \nu_1 \cdots \nu_k \in L_k$ :

$$(\nu_1 \cdots \nu_k) = \bigcup_{\alpha \in \psi^{-1}(\chi(\nu_k))} (\nu_1 \cdots \nu_k \alpha)$$

et comme $\mu$ est une mesure :

$$\sum_{\alpha \in \psi^{-1}(\chi(\nu_k))} \frac{\lambda_{k+1}^{\chi(\alpha)}}{\sharp L_{k+1}^{\chi(\alpha)}} = \frac{\lambda_k^{\chi(\nu_k)}}{\sharp L_k^{\chi(\nu_k)}}.$$

Cette dernière relation ne dépend plus que de $k$ et de $\chi(\nu_k)$ que l'on notera $i$, en vue d'alléger un peu les formules. Il vient donc :

$$\sharp L_k^i \sum_{\alpha \in \psi^{-1}(\chi(\nu_k))} \frac{\lambda_{k+1}^{\chi(\alpha)}}{\sharp L_{k+1}^{\chi(\alpha)}} = \lambda_k^i$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^{m} \sharp L_k^i \sum_{\alpha \in \psi^{-1}(\chi(\nu_k))} \frac{\lambda_{k+1}^{\chi(\alpha)}}{\sharp L_{k+1}^{\chi(\alpha)}} = 1$$

et la relation (5.9) nous indique que :

$$\sum_{\alpha \in \psi^{-1}(\chi(\nu_k))} \frac{\lambda_{k+1}^{\chi(\alpha)}}{\sharp L_{k+1}^{\chi(\alpha)}} = \frac{\sharp \psi^{-1}(i)}{\sharp L_{k+1}}.$$

Si on pose :

$$\lambda_{k+1}^{\chi(\alpha)} = \frac{\sharp L_{k+1}^{\chi(\alpha)}}{\sharp L_{k+1}}$$

on a bien :

$$\sum_{\alpha\in\psi^{-1}(\chi(\nu_k))} \frac{\lambda_{k+1}^{\chi(\alpha)}}{\sharp L_{k+1}^{\chi(\alpha)}} = \sum_{\alpha\in\psi^{-1}(\chi(\nu_k))} \frac{1}{\sharp L_{k+1}} = \frac{\sharp\psi^{-1}(i)}{\sharp L_{k+1}}.$$

On a donc une expression explicite de la mesure des cylindres :

$$\mu((\nu_1\cdots\nu_k)) = \frac{\sharp L_{k+1}^{\chi(\nu_k)}}{\sharp L_{k+1}\sharp L_k^{\chi(\nu_k)}}.$$

On voit bien que si $\nu_1\cdots\nu_k \notin Q^k \cap L_k$, l'action de $T_L$ ne change ni la longueur du mot ni la caractéristique de sa dernière lettre. Ainsi, sur ces cylindres, la mesure est invariante. Si, en revanche, $\nu_1\cdots\nu_k \in Q^k$, alors le cylindre peut toujours se décomposer :

$$(\nu_1\cdots\nu_k) = \bigcup_{\alpha\in Q,\ \chi(\nu_k)=\psi(\alpha)} (\nu_1\cdots\nu_k\alpha) \cup \bigcup_{\alpha\notin Q,\ \chi(\nu_k)=\psi(\alpha)} (\nu_1\cdots\nu_k\alpha).$$

En itérant le processus, on obtient finalement :

$$(\nu_1\cdots\nu_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=0}^{k}\bigcup_{p\notin Q}\bigcup_{q\in Q}(\nu_1\cdots\nu_k p^l q^{k-l}) \cup \bigcup_{q\in L_{\max}} \{\nu_1\cdots\nu_k q\}.$$

Le cardinal de $L_{\max}$ est fini : la mesure de la dernière réunion est nulle. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mu(T_L(\nu_1\cdots\nu_k)) & = & \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\sum_{p\notin Q}\sum_{q\in Q}\mu(T_L(\nu_1\cdots\nu_k p^l q^{k-l})) \\ & = & \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\sum_{p\notin Q}\sum_{q\in Q}\mu((\nu_1\cdots\nu_k p^l q^{k-l})) \\ & = & \mu(\nu_1\cdots\nu_k). \end{array}$$

Cette mesure est invariante sur les cylindres ; elle est donc $T_L$-invariante et c'est la mesure ergodique du système. □

Le cardinal de $L_k$ peut être estimé facilement. En effet, la condition d'admissibilité des mots dans $L$ est Markovienne. Si on voit les mots de $L$ comme des chemins dans le diagramme $X_{\mathcal{B}}$, alors il faut considérer la matrice d'incidence $M$ du diagramme (il n'y en a qu'une, ve que le diagramme est stationnaire). Comme une flèche va de $\alpha$ à $\beta$ si et seulement si $\beta \in \psi^{-1}(\alpha)$, ses entrées sont définies comme suit (par commodité, on les indexe sur $\mathcal{A}^2$ ) :

$$M_{\alpha\beta} = \mathbf{1}_{\psi^{-1}(\alpha)}(\beta), \quad \text{où} \quad \alpha,\beta \in \mathcal{A}.$$

C'est une matrice carrée. On a alors le lemme suivant :

**Lemme 20** *Il existe deux constantes positives $\tilde{C}, C$ telles que*

$$\tilde{C}\Lambda^k \leq \sharp L_k \leq C\Lambda^k,$$

*où $\Lambda$ est la valeur propre dominante de $M$. En particulier, le cardinal de $L_k$ est de l'ordre de $\Lambda^k$ :*

$$\sharp L_k = O(\Lambda^k).$$

**Preuve**
On sait que $M^k_{\alpha\beta}$ donne le nombre de chemins de longueur $k$ de la lettre $\alpha$ à la lettre $\beta$. Donc

$$\sharp L_k = \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}} M^k_{\alpha\beta}.$$

$M$ est une matrice primitive car le diagramme est simple ; elle possède donc bien une valeur propre dominante que l'on notera $\Lambda$. Ainsi :

$$\sharp L_k = \tilde{C}\Lambda^k + E(k) \quad \text{où} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{E(k)}{\Lambda^k} = 0$$

avec $\tilde{C} = \sum_{i,j} B_{i1}B^{-1}_{1j}$, $B$ étant la matrice de passage dans la base propre de $M$ :

$$M = BDB^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & J_q \end{pmatrix}$$

$J_i$ étant les blocs de Jordan de la matrice. En particulier il est clair que :

$$\sharp L_k = O(\Lambda^k).$$

Comme on a $\lim_{k\to\infty} \frac{E(k)}{\Lambda^k} = 0$, alors il existe forcément un certain rang au delà duquel $E(k) \leq \Lambda^k$. Ainsi

$$\tilde{C}\Lambda^k \leq \sharp L_k = \tilde{C}\Lambda^k + E(k) \leq C\Lambda^k.$$

□

La matrice $M$ peut en général être très grande. Comme on aura besoin de ses valeurs propres, leur calcul pourrait s'avérer fastidieux. Le résultat suivant nous facilitera la tâche :

**Proposition 21** *La valeur propre dominante de $M$ est aussi celle de la matrice d'incidence de la substitution $\sigma$.*

**Preuve**
La matrice $M$ est en fait la matrice du diagramme de Bratteli stationnaire $\mathcal{B}$. On a vu qu'une substitution peut être lue sur un tel diagramme. On appellera $\gamma$ la substitution lue sur $\mathcal{B}$. C'est le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^\star \\ & \nu^i & \longmapsto & \prod_{\omega\in\psi^{-1}(i)} \omega, \end{array}$$

le préfixe $\nu^i$ étant de caractéristique $i$ et les préfixes $\omega \in \psi^{-1}(i)$ étant ordonnés par caractéristiques puis par longueurs croissantes. Comme $\mathcal{B}$ est simple, $\gamma$ est primitive. Le rythme de croissance de la longueur du mot $|\gamma^k(\nu)|$ pour tout $\nu$ est donné par $\Lambda^k$. On remarque cependant que $\gamma$ associe la même image à tous les préfixes de même caractéristique. Ainsi, on n'a pas besoin de différencier deux tels préfixes pour connaître la longueur $|\gamma^k(\nu)|$. Il suffit de considérer la substitution "réduite" suivante, qui est simplement la projection de $\gamma$ par l'application $\chi$ :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\gamma} : & \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}^\star \\ & i & \longmapsto & \prod_{k\in\tilde{\mathcal{A}}} k^{|\psi^{-1}(i)\cap\chi^{-1}(k)|}, \end{array}$$

les termes du produit étant là aussi ordonnés selon leurs caractéristiques et longueurs croissantes. Si $\gamma$ est primitive alors $\tilde{\gamma}$ aussi et on a :

$$|\gamma^k(\nu)| = |\tilde{\gamma}^k(i)|, \quad \text{si } \nu \text{ est de caractéristique } i.$$

Si on considère maintenant la matrice d'incidence $\tilde{M}$ de $\tilde{\gamma}$, alors, pour chaque $i, j \in \tilde{\mathcal{A}}$ :

$$\tilde{M}_{ij} = \sharp(\psi^{-1}(i) \cap \chi^{-1}(j)).$$

C'est-à-dire que c'est le nombre de préfixes de $\mu^j$ complétés par la lettre $i$, ou, encore plus simplement, le nombre de "$i$" dans $\mu^j$, ce qui constitue les entrées de la matrice d'incidence de la substitution $\sigma$. Donc, si on appelle $M_\sigma$ cette dernière, $\tilde{M}$ est simplement sa transposée :

$$\tilde{M} = {}^tM_\sigma$$

les valeurs propres de ces deux matrices sont ainsi les mêmes. □

**Proposition 22**

$$\dim_H(U) = -\frac{\log \Lambda}{\log \lambda}.$$

*De plus, $U$ est un $s$-ensemble.*

**Preuve**

Soit $E \subset U$ de diamètre $\delta$. Soit $\Delta$ la moitié du plus grand diamètre des ensembles $P_i$ et $R$ le rayon d'une boule contenue dans tous les $P_i$ (qui existe car ils sont d'intérieur non vide). Précisément :

$$\Delta = \max_{i=1,\ldots,m} \mathrm{diam(P_i)/2}$$

et $R > 0$ est tel que :

$$\forall i = 1, \ldots, m, \quad \exists x \in P_i \quad \text{tel que} \quad B(x, R) \subset P_i.$$

On choisit maintenant $k_0$ tel que :

$$\Delta\lambda^{k_0+1} < \delta < \Delta\lambda^{k_0}.$$

Alors tous les ensembles de la famille $\{K_\nu \bar{P}_{\nu_{k_0}}\}_{\nu \in L_{k_0}}$ sont inclus dans une boule de rayon $\Delta\lambda^{k_0}$ et contient une boule de rayon $R\lambda^{k_0}$. Ainsi, chacun est inclus dans une boule de rayon $\delta/\lambda$ et contient une boule de rayon $R\delta/\Delta$. Alors le lemme 3 nous indique que si on pose :

$$a_1 = 2\frac{R}{\Delta} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{2}{\lambda}$$

l'ensemble $E$ ne peut contenir qu'au plus $((1+2a_2)/a_1)^n$ ensembles de la famille $\{K_\nu \bar{P}_{\nu_{k_0}}\}_{\nu \in L_{k_0}}$. Les préimages par $\varphi$ de ces derniers ensembles sont les cylindres $(\nu)$ où $\nu \in L_{k_0}$. Alors tout recouvrement de $\varphi^{-1}(E)$ par des cylindres de longueur $k_0$ ne contient qu'au plus ce nombre d'ensembles :

$$\varphi\mu(E) \leq \left(\frac{1+2a_2}{a_1}\right)^n \frac{1}{\sharp L_{k_0}}$$

qui donne par le lemme 20 :

$$\varphi\mu(E) \leq \left(\frac{1+2a_2}{a_1}\right)^n \frac{1}{\tilde{C}\Lambda^{k_0}}.$$

Or comme $\delta < \Delta\lambda^{k_0}$ on a

$$k_0 > \frac{\log \delta/\Delta}{\log \lambda}$$

donc (on pose $K = ((1+2a_2)/a_1)^n/\tilde{C}$) :

$$\varphi\mu(E) \leq K\Lambda^{-\frac{\log \delta/\Delta}{\log \lambda}} \leq Ke^{-\frac{\log \delta/\Delta}{\log \lambda}\log \Lambda}$$

qui donne :

$$\varphi\mu(E) \leq K\left(e^{\log \delta/\Delta}\right)^{-\frac{\log \Lambda}{\log \lambda}}$$

finalement :

$$\varphi\mu(E) \leq \frac{K}{\Delta}\delta^{-\frac{\log \Lambda}{\log \lambda}}.$$

Le lemme 2 nous indique que si on note :

$$\underline{s} = -\frac{\log \Lambda}{\log \lambda}$$

on a

$$\dim_H(U) \geq \underline{s}$$

et qu'en particulier :

$$\mathcal{M}^{\underline{s}}(U) \geq \frac{\Delta}{K}.$$

On va montrer maintenant que cette borne inférieure est en fait la dimension de Hausdorff. Pour tout $k$, la famille $\{K_\nu \bar{P}_{\nu_k}\}_{\nu \in L_k}$ est un $\Delta\lambda^k$-recouvrement de $U$. Donc, $\forall \epsilon > 0$, on peut trouver un $k$ suffisamment grand pour que :

$$\mathcal{M}^s_\epsilon(U) \leq \sum_{\nu \in L_k} \operatorname{diam}(K_\nu \bar{P}_{\nu_k})^s$$

c'est-à-dire par le lemme 20 :

$$\mathcal{M}^s_\epsilon(U) \leq \Delta^s \lambda^{sk} \sharp L_k \leq \Delta^s \lambda^{sk} \Lambda^k.$$

Quand $\epsilon \longrightarrow 0$, c'est-à-dire quand $k \longrightarrow \infty$ cette somme est bornée si :

$$\lambda^s \Lambda \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad s \leq \bar{s}$$

où

$$\bar{s} = -\frac{\log \Lambda}{\log \lambda}.$$

Donc $\bar{s} = \underline{s}$ est une borne supérieure à la dimension de Hausdorff. Ainsi :

$$\dim_H(U) = -\frac{\log \Lambda}{\log \lambda}$$

et $0 < \mathcal{M}^s(U) < \infty$. $\square$

La mesure image $\varphi\mu$ peut être reliée à la mesure de Hausdorff :

**Proposition 23** *Soit $s = \dim_H(U)$, $\mathcal{M}^s$ la mesure de Hausdorff sur $U$ alors $\mathcal{M}^s \ll \varphi\mu$.*

**Preuve**

On commence par un petit lemme qui nous indique qu'il est suffisant de faire la démonstration en ne considérant que des fermés :

**Lemme 21** *Si, pour tout fermé $F$, $\varphi\mu(F) = 0$ entraîne $\mathcal{M}^s(F) = 0$ alors cette propriété est aussi vraie pour tout ensemble mesurable.*

**Preuve :**

On utilisera les propriétés de régularité de la mesure $\mathcal{M}^s$. Si on suppose $\varphi\mu(A) = 0$, alors la mesure $\varphi\mu$ de tout fermé inclus dans $A$ est nulle. Donc, si $F$ est fermé et inclus dans $A$, sa mesure de Hausdorff est aussi nulle. Comme :

$$\mathcal{M}^s(A) = \sup\{\mathcal{M}^s(F), \quad F \text{ fermé inclus dans } A\},$$

on a bien $\mathcal{M}^s(A) = 0$. $\square$

Soit donc un fermé $A_U \subset U$. Son image dans $L$ : $\varphi^{-1}(A_U) = A \subset L$ est aussi fermée et on suppose que $\mu(A) = 0$. On notera $A_k$ l'ensemble des préfixes de longueur $k$ de $A$ et $(A_k)$ l'ensemble des cylindres engendrés par ces préfixes. Les familles $(A_k)$ constituent une suite décroissante de recouvrements fermés de $A$. Il est clair que

$$A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k).$$

Si on prend $x \in (A_k)$ pour tout $k$, alors tout préfixe de $x$ est admissible pour $A$, c'est-à-dire qu'il existe un point de $A$ qui a ce préfixe. On peut donc construire une suite de points de $A$ qui converge vers $x$. Ainsi :

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k) \subset \bar{A}$$

et finalement

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k) = \bar{A} = A.$$

Ainsi :

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu((A_k)) = 0$$

et donc :

$$\sum_{\nu\in A_k} \mu((\nu)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

L'ensemble $\varphi((A_k))$ est un $2\lambda^k\Delta$-recouvrement de $A_U$ ($\Delta$ étant la moitié du plus grand diamètre des ensembles $P_i$), on note $s = \dim_H(U)$, alors :

$$\mathcal{M}^s_k(A_U) \leq \sum_{\nu\in A_k} |\varphi((\nu))|^s \leq \sharp A_k 2\Delta^s\lambda^{ks}.$$

Ici, il faut encadrer la mesure d'un cylindre de longueur $k$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \sharp L^i_{k+1} &= \sharp\{\nu\alpha, \quad \nu \in L_k, \quad \chi(\nu_k) = \psi(\alpha), \quad \text{et} \quad \chi(\alpha) = i\} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha\in\psi^{-1}(i)} \sharp L_k^{\psi(\alpha)}. \end{aligned}$$

Or $\alpha$ parcourt tous les préfixes du mot $\mu^i$ qui contient toutes les lettres. Il y a donc forcément un préfixe $\alpha$ pour lequel $\psi(\alpha) = i$. En particulier : $\sharp L^i_{k+1} \geq \sharp L^i_k$. Par la proposition 20, cela nous donne l'encadrement :

$$\frac{1}{\sharp L_{k+1}} \leq \mu((\nu_1 \cdots \nu_k)) \leq \frac{1}{\sharp L_k^{\chi(\nu_k)}}.$$

Ainsi :

$$\sum_{\nu \in A_k} \mu((\nu)) \geq \frac{\sharp A_k}{\sharp L_{k+1}} \quad \text{et donc} \quad \frac{\sharp A_k}{\sharp L_{k+1}} \longrightarrow 0.$$

Comme $\sharp L_k \leq \sharp L_{k+1} \leq m \sharp L_k$ :

$$\frac{\sharp A_k}{\sharp L_{k+1}} \geq \frac{\sharp A_k}{m \sharp L_k},$$

ce qui donne $\sharp A_k = o(\sharp L_k)$. Comme on a $\lambda^{ks} = \Lambda^{-k}$, et par le lemme 20, $\lambda^{ks} = O(\sharp L_k^{-1})$ alors :

$$\mathcal{M}^s_k(A_U) \longrightarrow 0 \text{ et donc } \mathcal{M}^s(A_U) = 0.$$

Ainsi $\varphi\mu \gg \mathcal{M}^s$. $\square$

On a maintenant tous les outils pour prouver que $\tilde{U}$ est de mesure de Hausdorff pleine. Ainsi, on peut prouver que :

**Lemme 22**

$$\mathcal{M}^s(\Gamma) = 0.$$

**Preuve**
On peut écrire $\Gamma$ comme la réunion dénombrable suivante :

$$\Gamma = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Gamma_l \quad \text{où} \quad \Gamma_l = \bigcap_{k \geq l} a^1_k.$$

Il est donc suffisant de prouver que $\mathcal{M}^s(\Gamma_l) = 0$ pour tout $l$. On a $\Gamma_l \subset a^1_l$. On peut calculer un majorant de la mesure en utilisant les mêmes recouvrements que ci-dessus dans la preuve de la proposition 22, précisément $(\overline{a^0_k})_k$.
On considère donc un ensemble $\Gamma_l$. Ici, dans notre recouvrement, on ne doit garder que les atomes qui intersectent les frontières $a^1_l$, i.e. on doit oublier pour chaque $k$ les atomes de $\overline{a^0_k}$ qui sont disjoints de $a^1_l$, i.e. qui sont dans $a^0_l$. On a le lemme suivant :

**Lemme 23** *Pour tout sous-mot fini $\omega$ de $L$, il existe au moins un sous-mot $\zeta$ de $L$ tel que :*

$$K_\omega \partial P_{\omega_{|\omega|}} \cap K_{\omega\zeta} \bar{P}_{\zeta_{|\zeta|}} = \emptyset.$$

**Preuve :**
Dans la preuve, on va prendre les hypothèses plus fortes données par le lemme 5.8. Cela va impliquer que chaque polyèdre contient des répliques plus petites de tous les polyèdres possibles. Le polyèdre $O = K_\omega \bar{P}_{\omega_{|\omega|}}$ contient des polyèdres plus petits qui intersectent chacun au plus $N$ faces de $O$, $N$ étant strictement plus petit que le nombre de faces de $O$ car les diamètres de ces polyèdres sont strictement plus petits que celui de $O$. Prenons un de ces polyèdres. On peut le choisir tel qu'il remplisse la condition du quatrième point des hypothèses, i.e. que l'on peut

trouver à l'intérieur des polyèdres disjoints d'une face donnée, quelle que soit la face choisie. Il est de la forme $K_{\omega\zeta_1}\bar{P}_{\zeta_1}$ pour une lettre $\zeta_1$ telle que $\psi(\zeta_1) = \chi(\omega_{|\omega|})$. On appellera cet ensemble $O_1$. Il contient lui-aussi des polyèdres plus petits et on peut choisir l'un d'entre eux disjoint d'une des faces communes de $O$ et $O_1$. On va le nommer $O_2$. $O_2$ intersecte donc au plus $N-1$ faces de $O$. Il peut ne pas remplir la "bonne" propriété décrite dans le quatrième point des hypothèses mais il contient un polyèdre qui le fait. Si on nomme $O_3$ ce dernier, lui-aussi n'intersecte qu'au plus $N-1$ faces de $O$ et il contient un polyèdre $O_4$ qui est disjoint d'une des faces communes de $O$ et $O_3$. Donc $O_4$ n'intersecte qu'au plus $N-2$ faces de $O$ et s'il n'a pas la "bonne" propriété, il contient certainement un polyèdre qui l'a, et ainsi de suite.
Ainsi, à chaque étape, en choisissant un ensemble possédant les "bonnes" propriétés et en choisissant à l'intérieur un ensemble disjoint des faces indésirables, on va aboutir en au plus $2N$ étapes à un ensemble $O_{2N} = K_{\omega\zeta_1\cdots\zeta_{2N}}\bar{P}_{\zeta_{2N}}$ disjoint de toutes les faces de $O$. $\square$

Prenons un ensemble $K_\omega \partial P_{\omega_l}$ ($\omega \in L_l$) dans la réunion finie $a_l^1$. Par le lemme, il existe un sous-mot fini $\zeta$ tel que :

$$K_\omega \partial P_{\omega_{|\omega|}} \cap K_{\omega\zeta}\bar{P}_{\zeta_{|\zeta|}} = \emptyset$$

c'est-à-dire :

$$K_{\omega\zeta}\bar{P}_{\zeta_{|\zeta|}} \subset K_\omega P_{\omega_{|\omega|}}.$$

Tout mot dans le cylindre $(\omega\zeta)$ mènera à un point loin de l'ensemble choisi dans la réunion $a_l^1$. De plus, si on prend $\alpha$ un sous-mot fini de $L$ tel que $\chi(\alpha_{|\alpha|}) = \psi(\zeta_1)$ et $\chi(\omega_{|\omega|}) = \psi(\alpha_1)$ alors

$$K_\omega K_\alpha K_\zeta \bar{P}_{\omega_{|\omega|}} \subset K_\omega K_\alpha P_{\omega_{|\omega_1|}},$$

qui est lui aussi loin des points de $a_l^1$. À partir de maintenant, pour plus de clarté, on ne va plus écrire le préfixe $\omega$ et on considérera que l'on doit interdire dans notre recouvrement au moins tous les atomes décrits par un mot contenant $\zeta$ . Cela donnera un majorant car en fait on devrait considérer les mots en fonction du préfixe $\omega$.
On doit donc calculer le nombre de mots de $L_k$ qui contiennent le sous-mot $\zeta$. On va considérer $L_{|\zeta|}$ comme un nouvel alphabet. Sur l'ensemble de tous les mots infinis possibles : $L_{|\zeta|}^{\mathbb{N}}$, on impose la règle d'admissibilité suivante : un mot $(u^1u^2\cdots)$ est admissible si et seulement si

$$\chi(u^i_{|u^i|}) = \psi(u_1^{i+1})$$

i.e. si les mots construits ainsi sont valides du point de vue de l'admissibilité dans $L$. Ce langage sera noté $\hat{L}$ et sa matrice de transition $\hat{M}$. Bien sûr, $L$ et $\hat{L}$ sont équivalents. Considérer tous les mots de $L$ qui ne contiennent pas le sous-mot $\zeta$ est équivalent à enlever la lettre $\zeta$ de l'alphabet $L_{|\zeta|}$. Le nombre de mots admissibles restants est alors donné par la matrice $\hat{M}$. En effet, enlever une lettre est équivalent à mettre à zéro une ligne et une colonne de la matrice de transition. Comme $M$ est primitive, $\hat{M}$ aussi. Sa valeur propre maximale est donc $\Lambda^{|\zeta|}$. Si $B$ est la matrice $\hat{M}$ avec la dernière ligne (par exemple) et la dernière colonne à zéro, alors (composante par composante) $0 \leq B \leq \hat{M}$ et le théorème de Perron-Frobénius s'applique : la valeur propre maximale $\beta$ de $B$ est strictement plus petite que $\Lambda^{|\zeta|}$. En effet $B \neq \hat{M}$ puisque $\hat{M}$ est primitive alors que $B$ ne l'est pas.
Le nombre de mots de $\hat{L}$ de longueur $k$ sans la lettre $\zeta$ croît comme $O(\beta^k)$. Ce qui veut dire que le nombre de mots de $L_k$ qui ont le sous-mot $\zeta$ croît comme $O(\beta^{k/|\zeta|})$. C'est le rythme de croissance maximal du nombre d'ensembles d'un recouvrement de $\Gamma_l \cap K_\omega \bar{P}_{\omega_{|\omega|}}$. Donc :

$$\mathcal{M}_\epsilon^s(\Gamma_l) \leq \sharp L_l \beta^{k/|\zeta|}\Delta^s\lambda^{sk} \tag{5.10}$$

où $k$ est assez grand pour que les atomes de $a_k^0$ aient un diamètre plus petit que $\epsilon$. La dimension de Hausdorff $s$ est telle que $\lambda^s\Lambda = 1$, i.e. $\lambda^{sk} = \Lambda^{-k}$. Comme

$$\beta^{1/|\varsigma|} < \Lambda$$

l'estimation (5.10) tend vers zéro quand $k \longrightarrow \infty$ et $\mathcal{M}^s(\Gamma_l) = 0$. $\square$

Jusqu'à maintenant, tous les résultats géométriques de cette section reposent sur les propriétés de $U$, $L$ et $T_L$. Ces objets existent toujours indépendamment de $\tilde{U}$. Le lemme 22 nous prouve donc bien que, comme $U$ est un $s$-ensemble, $\mathcal{M}^s(\tilde{U}) > 0$. Donc en particulier $\tilde{U}$ est non vide et $\dim_H(\tilde{U}) = \dim_H(U)$. De plus, la proposition 23 nous indique l'existence d'une fonction positive $f \in L^1(\varphi\mu)$ telle que :

$$\mathcal{M}^s(\tilde{U}) = \int_{\tilde{U}} f d\varphi\mu > 0.$$

Ainsi $\varphi\mu(\tilde{U}) > 0$ ce qui est équivalent à $\mu(\tilde{L}) > 0$. Comme $\mu$ est ergodique et que $\tilde{L}$ est invariant on a finalement :

$$\mu(\tilde{L}) = 1.$$

On a ainsi prouvé la proposition suivante :

**Proposition 24** *L'application $T$ sur $\tilde{U}$ est conjuguée en mesure à $(X_{\mathcal{B}}, V_{\mathcal{B}})$.*

### 5.2.3 Lien avec les I.F.S Graphe-Dirigés

On a déjà évoqué la possibilité de considérer $U$ comme un attracteur de construction graphe-dirigée. On rappelle qu'ici, les sommets du graphe seront les éléments de $\mathcal{A}$, une flèche allant de $\alpha$ à $\beta$ si et seulement si $\chi(\alpha) = \psi(\beta)$. La matrice d'incidence de ce graphe est $M$. La famille de compacts initiaux est :

$$\left\{J_\nu = T_\nu h \bar{P}_\nu\right\}_{\nu\in\mathcal{A}} \text{ qui vérifient } J_\alpha \supset \bigcup_{\nu\in\psi^{-1}(\chi(\alpha))} T_\nu h J_\nu.$$

Cette famille n'est pas disjointe mais les chevauchements de ses ensembles ne s'opèrent que sur leurs bords. Le théorème de la section 2.3.4 ne s'applique cependant pas directement. Pourtant, on va voir que le résultat reste valide. En effet, la matrice d'incidence pondérée du graphe dans notre cas est :

$$W_s = \lambda^s M$$

puisque les coefficients de contraction sont ici tous égaux à $\lambda$. On sait que le rayon spectral de $M$ est $\Lambda$. Ainsi le rayon spectral de $W_s$ est $\lambda^s\Lambda$. Le théorème de la section 2.3.4 nous indique que la dimension fractale $s$ est telle que le rayon spectral de $W_s$ est égal à 1. Or c'est exactement ce qu'indique la proposition 22. Le fait que ces valeurs coïncident s'explique si on regarde la preuve du théorème 2.3.4. La preuve de l'existence des ensembles comme le calcul d'un majorant de la dimension de Hausdorff n'ont pas de lien avec le fait que les ensembles compacts que l'on considère soient disjoints ou pas. Par contre, le calcul d'un minorant de la dimension est fait d'une manière très similaire à celle employée dans la proposition 22. La différence réside dans le fait que l'on utilise ici une bijection presque partout au lieu d'une bijection stricte. Ainsi, même si les ensembles $J_\nu$ ne sont pas disjoints, leurs chevauchements sont négligeables pour la mesure servant à l'évaluation du minorant (via l'utilisation du lemme 2).

### 5.2.4 Codage "dynamique"

Le codage que l'on a utilisé jusqu'ici n'est pas le codage "naturel" des isométries par morceaux introduit dans les chapitres précédents. C'est pourtant à partir de ce code que l'on a appelé "géométrique" que l'on va démontrer le résultat suivant :

**Proposition 25** *La dynamique sur $\tilde{U}$ est conjuguée en mesure au système substitutif engendré par la substitution $\sigma$.*

La conjugaison n'étant autre que l'application de codage standard $\iota$ restreinte à $\tilde{U}$. On utilisera dans la preuve les techniques qui ont été esquissées dans la section 3.2.2.
**Preuve**
En prenant chaque terme de l'intersection (5.7), on peut déterminer une partie du code "dynamique". En effet, pour $x \in \tilde{U}$ et $\nu = \kappa(x)$ (par exemple) :

$$x \in T_{\nu^1} h P_{\nu^1} \cap T_{\nu^1} h T_{\nu^2} h P_{\nu^2} \cap T_{\nu^1} h T_{\nu^2} h T_{\nu^3} h P_{\nu^3}$$

nous permet de dire, grâce à la proposition 12, que :

$$\begin{array}{lcl} x \in T_{\nu^1} h P_{\nu^1} & \Rightarrow & \iota(x) = s^{|\nu^1|}\sigma(\chi(\nu^1))\cdots \\ x \in T_{\nu^1} h T_{\nu^2} h P_{\nu^2} & \Rightarrow & \iota(x) = s^{|\nu^1|}\sigma(s^{|\nu^2|}\sigma(\chi(\nu^2)))\cdots \\ x \in T_{\nu^1} h T_{\nu^2} h T_{\nu^3} h P_{\nu^3} & \Rightarrow & \iota(x) = s^{|\nu^1|}\sigma(s^{|\nu^2|}\sigma(s^{|\nu^3|}\sigma(\chi(\nu^3))))\cdots \end{array} \tag{5.11}$$

où $s$ est le décalage vers la gauche du mot, et la notation $|\nu^1|$ traduit la longueur du préfixe "désindicé" $\pi(\nu^1)$. Dans le mot indiqué ci-dessus, les décalages traduisent l'effet de la dynamique (les applications successives de $T$) et les substitutions $\sigma$ les changements d'échelle, c'est-à-dire les applications successives de $h$. Ainsi, on va définir $\rho$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{llcl} \rho : & \mathcal{A}^\star & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}^\star \\ & (\nu^1 \cdots \nu^k) & \longmapsto & s^{|\nu^1|}\sigma(s^{|\nu^2|}\sigma(\cdots s^{|\nu^k|}\sigma(\chi(\nu^k))\cdots). \end{array}$$

En général, comme $\nu^k$ est un préfixe, $\sigma(\chi(\nu^k))$ est plus long d'au moins une lettre que $\nu^k$ et ainsi, on peut appliquer le décalage. Cependant, la longueur peut ne différer que de un, et le résultat d'une itération : $s^{|\nu^k|}\sigma(\chi(\nu^k))$ peut n'être qu'une lettre. Donc en général, il pourrait arriver que la longueur de $\rho(\nu^1 \cdots \nu^k)$ reste bornée même si $k \to \infty$. Il faudrait alors que tous les préfixes soient des quasi-mots à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que $\nu \in T_{\max}$. Le but est d'étendre l'application $\rho$ afin d'avoir une correspondance entre les points et les itinéraires sous $T$. Or, $\mathrm{Cl}(\tilde{\mathcal{A}}^\star)$ est un espace complet. On suppose $m > k$, donc :

$$x \in T_{\nu^1} h P_{\nu^1} \cap T_{\nu^1} h T_{\nu^2} h P_{\nu^2} \cap \cdots \cap T_{\nu^1} h T_{\nu^2} h \cdots T_{\nu^m} h P_{\nu^m}$$

nous indique, comme dans (5.11), que :

$$\iota(x) = s^{|\nu^1|}\sigma(s^{|\nu^2|}\sigma(\cdots s^{|\nu^m|}\sigma(\chi(\nu^m))))\cdots = s^{|\nu^1|}\sigma(s^{|\nu^2|}\sigma(\cdots s^{|\nu^k|}\sigma(\chi(\nu^k))))\cdots$$

La quantité :

$$d(\rho(\nu^1 \cdots \nu^k), \rho(\nu^1 \cdots \nu^m)) \leq \frac{1}{2^{|\rho(\nu^1 \cdots \nu^k)|}}$$

tend donc vers 0, pourvu que $|\rho(\nu^1 \cdots \nu^k)| \to \infty$ quand $k \to \infty$. Cela arrive certainement si $x \notin T_{\max}$. Ainsi $(\rho(\nu^1 \cdots \nu^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et possède donc une limite. On définira ainsi $\rho$ sur $\tilde{L} \setminus T_{\max}$ en l'étendant aux mots infinis, en associant à chaque mot infini de

$(\nu^1 \cdots) \in L$ la limite de la suite $\rho((\nu^1 \cdots \nu^k))_{k\in\mathbb{N}}$.
On sait que $L_{\max} \subset T_{\max}$ et que $L_{\max} \cap \tilde{L} = \emptyset$. Si on fait l'hypothèse que certains points de $T_{\max}$ sont dans $\tilde{L}$, alors la section ("Codage géométrique") donne un moyen de calculer le code de leurs itérés successifs. On voit alors qu'un point de $T_{\max}$ finira forcément par aboutir dans $L_{\max}$. Or $\tilde{L}$ est en bijection avec $\tilde{U}$ (qui est un ensemble invariant) donc cela est impossible. Ainsi $T_{\max} \cap \tilde{L} = \emptyset$ et $\rho$ se trouve défini sur tout $\tilde{L}$.
La définition de $\rho$ ne nous donne pas beaucoup d'indications intuitives concernant la structure du langage des points de $\tilde{U}$. Pour en savoir plus, on va prendre un autre point de vue consistant à considérer les suffixes plutôt que les préfixes. On notera $\mathcal{S} = \cup_{i=1\cdots m}\mathrm{Suff}(\mu^{\mathrm{i}})$. On introduit l'ensemble des suffixes indicés comme on avait introduit celui des préfixes indicés. À un préfixe $\nu \in \mathcal{A}$, on associe un et un seul suffixe indicé $\bar{\nu}$ tel que toutes les fonctions caractéristiques s'étendent aux suffixes :

$$\chi(\bar{\nu}) = \chi(\nu) \quad \text{et} \quad \pi(\bar{\nu}) \in \mathcal{S} \cup \{\epsilon\}$$

et tel que

$$\pi(\nu)\psi(\nu)\pi(\bar{\nu}) = \mu^{\chi(\nu)}.$$

Ainsi, à chaque mot $\omega \in L$, on associe l'unique mot $\bar{\omega} \in \bar{L}$ (qui note ici l'ensemble des images par l'application "barre") des suffixes $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1 \cdots \bar{\omega}_k \cdots)$. L'application "barre" $\omega \mapsto \bar{\omega}$ est bijective de $L$ sur $\bar{L}$. On peut alors remarquer que :

$$s^{|\omega_k|}\sigma(\chi(\omega_k)) = s^{|\omega_k|}\pi(\omega_k)\psi(\omega_k)\bar{\omega}_k = \psi(\omega_k)\bar{\omega}_k = \chi(\omega_{k-1})\bar{\omega}_k$$

et que

$$\begin{aligned} s^{|\omega_{k-1}|}\sigma(s^{|\omega_k|}\sigma(\chi(\omega_k))) &= s^{|\omega_{k-1}|}\sigma(\chi(\omega_{k-1})\bar{\omega}_k) \\ &= s^{|\omega_{k-1}|}\sigma(\chi(\omega_{k-1}))\sigma(\bar{\omega}_k) \\ &= \psi(\omega_{k-1})\bar{\omega}_{k-1}\sigma(\bar{\omega}_k) \\ &= \chi(\omega_{k-2})\bar{\omega}_{k-1}\sigma(\bar{\omega}_k) \end{aligned}$$

En itérant le processus, on a :

$$s^{|\omega_1|}\sigma(s^{|\omega_2|}\sigma(\cdots\ s^{|\omega_k|}\sigma(\chi(\omega_k))\cdots)) = \psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\sigma^2(\bar{\omega}_3)\cdots\sigma^{k+1}(\bar{\omega}_k) \tag{5.12}$$

Donc, en particulier, si $\omega \in \tilde{L}$ alors $\forall k > 0$ :

$$\rho(\omega) = s^{|\omega_1|}\sigma(\cdots s^{|\omega_k|}\sigma(\chi(\omega_k))\cdots)\cdots = \psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\cdots\sigma^{k+1}(\bar{\omega}_{k+1})\cdots \tag{5.13}$$

Cette dernière expression met principalement en scène des suffixes et évite une expression récursive de $\rho$. Elle va aussi nous permettre de mettre en lumière une propriété fondamentale de la structure des itinéraires. En effet, on a par définition $\sigma(\chi(\omega_k)) = \pi(\omega_k)\psi(\omega_k)\bar{\omega}_k$ et que $\psi(\omega_k)\bar{\omega}_k$ est donc un suffixe de $\sigma(\chi(\omega_k))$. De la même manière :

$$\sigma^2(\chi(\omega_k)) = \sigma(\pi(\omega_k)\psi(\omega_k)\bar{\omega}_k) = \sigma(\pi(\omega_k))\sigma(\chi(\omega_{k-1}))\sigma(\bar{\omega}_k)$$

donc

$$\sigma^2(\chi(\omega_k)) = \sigma(\pi(\omega_k))\pi(\omega_{k-1})\psi(\omega_{k-1})\bar{\omega}_{k-1}\sigma(\bar{\omega}_k)$$

et on a cette fois que $\psi(\omega_{k-1})\bar{\omega}_k\sigma(\bar{\omega}_k)$ est un suffixe de $\sigma^2(\chi(\omega_k))$. Si on suppose vrai qu'à l'ordre $k$ :

$$\psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\cdots\sigma^{k-1}(\bar{\omega}_k) \quad \text{est suffixe de} \quad \sigma^k(\chi(\omega_k)) \tag{5.14}$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1})) &= \sigma^k(\sigma(\chi(\omega_{k+1}))) \\ &= \sigma^k(\omega_{k+1}\psi(\omega_{k+1})\bar{\omega}_{k+1})) \\ &= \sigma^k(\pi(\omega_{k+1}))\sigma^k(\chi(\omega_k))\sigma^k(\bar{\omega}_{k+1}) \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence (5.14) on sait qu'il existe un préfixe $\zeta \in \tilde{\mathcal{A}}^\star$ tel que :

$$\sigma^k(\chi(\omega_k)) = \zeta\psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\cdots\sigma^{k-1}(\bar{\omega}_k)$$

donc

$$\sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1})) = \sigma^k(\pi(\omega_{k+1}))\zeta\psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\cdots\sigma^{k-1}(\bar{\omega}_k)\sigma^k(\bar{\omega}_{k+1})$$

ce qui indique bien que

$$\psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\cdots\sigma^{k-1}(\bar{\omega}_k)\sigma^k(\bar{\omega}_{k+1}) \quad \text{est suffixe de} \quad \sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1}))$$

ce qui conclut la récurrence.

On va maintenant introduire le système dynamique de la substitution $\sigma$. En général, elle peut avoir plusieurs points fixes, mais pourvu qu'elle soit primitive, le lemme 1 de la section 2.2.2 nous assure que cela ne pose pas de problème. Si on considère maintenant un point $x \in \rho(\tilde{L})$, alors

$$\forall k > 0, \quad \exists \zeta_k \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}, \quad x = \psi(\omega_1)\bar{\omega}_1\sigma(\bar{\omega}_2)\cdots\sigma^k(\bar{\omega}_{k+1})\zeta_k$$

et par (5.14) on sait que

$$\forall k > 0, \quad \exists (N_k), \quad x = s^{N_k}\sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1}))\zeta_k$$

ce qui nous donne :

$$d(s^{N_k}\sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1})), s^{N_k}\sigma^\infty(\chi(\omega_{k+1}))) < \frac{1}{2^{|\sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1}))-N_k|}}.$$

On sait que $|\sigma^{k+1}(\chi(\omega_{k+1})) - N_k| \longrightarrow \infty$, donc :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists k > 0 \quad \text{tel que} \quad d(x, \Sigma_{\chi(\omega_{k+1})}) < \epsilon$$

et on peut écrire :

$$d(x, \bigcup_{\nu \in \mathcal{A}} \Sigma_{\chi(\nu)}) = 0.$$

Par le lemme précédent, tous les ensembles $\Sigma_{\chi(\nu)}$ sont identiques. On notera $\Sigma$ l'un quelconque de ces ensembles. On vient ainsi de montrer que :

$$\rho(\tilde{L}) \subset \Sigma.$$

Or on sait que, pourvu que $\sigma$ soit primitive et ait un point fixe, le système $(\Sigma, s)$ est uniquement ergodique (cf. [47]).

On remarque que $\rho$ est bijective de $\overline{(\tilde{L})}$ dans $\rho(\tilde{L})$. En effet, il est clair que si $\bar{\omega}^1 \neq \bar{\omega}^2$ :

$$\psi(\omega_1^1)\bar{\omega}_1^1\sigma(\bar{\omega}_2^1)\sigma^2(\bar{\omega}_3^1)\cdots \neq \psi(\omega_1^2)\bar{\omega}_1^2\sigma(\bar{\omega}_2^2)\sigma^2(\bar{\omega}_3^2)\cdots$$

L'injectivité de $\rho$ revient à celle de l'application "barre" $\omega \mapsto \bar{\omega}$, qui est bijective. Ainsi, $\rho$ est injective et non surjective dans $\Sigma$. On a finalement le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & \tilde{U} & \xrightarrow{T} & & \tilde{U} \\ \kappa & \downarrow & & \kappa & \downarrow \\ & \tilde{L} & & & \tilde{L} \\ \rho & \downarrow & & \rho & \downarrow \\ & \Sigma & \xrightarrow{s} & & \Sigma \end{array}$$

et la semi-conjugaison :

$$\forall x \in \tilde{U}, \quad \rho \circ \kappa \circ T(x) = s \circ \rho \circ \kappa(x),$$

l'application $\rho \circ \kappa$ étant injective. Pour en faire une conjugaison, il faut considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \tilde{U} & \xrightarrow{T} & & \tilde{U} \\ \rho \circ \kappa & \downarrow & & \rho \circ \kappa & \downarrow \\ & \rho \circ \kappa(\tilde{U}) \subset \Sigma & \xrightarrow{s} & & \rho \circ \kappa(\tilde{U}) \subset \Sigma \end{array}$$

qui commute. Le sous-shift $(\rho \circ \kappa(\tilde{U}), s)$ de $(\Sigma, s)$ est en bijection avec $(\tilde{U}, T)$, qui est équipé de $\mu$ son unique mesure $T$-invariante. La mesure image de $\mu$ par $\rho \circ \kappa$ est $s$-invariante et donc elle est l'unique mesure invariante du système $(\Sigma, s)$. Ainsi $\rho \circ \kappa(\tilde{U})$ est de mesure 1 dans $\Sigma$. $\square$

## 5.3 Théorème

On va résumer tous les résultats précédents dans un théorème afin d'y faire référence plus commodément par la suite.

**Théorème 28** *Soit $T$ une isométrie par morceaux de $\mathbb{R}^n$ définie sur $m$ atomes $(A_i)_{i=1,\dots,m}$. On notera $T_\mu = T_{\mu_1 \cdots \mu_{|\mu|}} = T_{\mu_{|\mu|}} \cdots T_{\mu_1}$, $\forall \mu \in \{1, \dots, m\}^\star = \tilde{\mathcal{A}}^\star$. On va supposer qu'il existe des mots $(\mu^i)_{i=1,\dots,m}$ tels que la substitution $\sigma$ définie comme suit :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}^\star \\ & i & \longmapsto & \mu^i \end{array}$$

*soit primitive et apériodique. On suppose aussi l'existence d'ensembles ouverts d'adhérences compactes $(P_i)_{i=1,\dots,m}$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, m$ :*

- *Il existe $h$ une similitude contractante telle que $T_{\mu^i} = hT_ih^{-1}$.*
- *$P_i \subset A_i$ et $hP_i \subset P_{\mu_1^i}$.*
- *$T_{\mu_1^i \cdots \mu_{j-1}^i} hP_i \subset P_{\mu_j^i}, \forall j \in \{0, \dots, |\mu^i| - 1\}$.*

*On supposera enfin qu'il existe un polyèdre $P_{i_0}$ tel que :*

- *Pour chaque face $C_l$ de $P_{i_0}$, il existe $i_l$ et $j_l$ tels que $T_{\mu_1^{i_l} \cdots \mu_{j_l}^{i_l}} h\bar{P}_{i_l} \cap C_l = \emptyset$ et $\mu_{j_l+1}^{i_l} = i_0$.*

*Alors :*

- *À tout point fixe de $T$ est associé une famille infinie de cellules périodiques dont les codes sont donnés par la substitution $\sigma$.*
- *Il existe un ensemble invariant $\tilde{U}$ de points apériodiques inclus dans l'ensemble exceptionnel de $T$ constructible comme un attracteur d'I.F.S. graphe-dirigé.*
- *La dynamique sur ce dernier ensemble est minimale et uniquement ergodique. En particulier, elle est conjuguée en mesure au système substitutif engendré par $\sigma$.*
- *La dimension de Hausdorff de $\tilde{U}$ est donnée par :*

$$\dim_H(\tilde{U}) = -\frac{\log(\Lambda)}{\log(\lambda)}$$

*où $\lambda$ est le rapport de contraction de $h$ et $\Lambda$ la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de $\sigma$.*

**Preuve**

Certains résultats des pages précédentes nécessitent que chaque mot $\mu^i$ contienne toutes les

lettres de $\tilde{\mathcal{A}}$. Dans ce théorème, on demande que $\sigma$ soit primitive. Or on sait par le lemme 16 qu'il existe une puissance $k$ de $T$ pour laquelle les hypothèses ci-dessus sont vérifiées et telle que tous les mots $\sigma^k(\mu^i)$ contiennent toutes les lettres.
Le premier point est donné par la proposition 13.
Le second est impliqué par les propositions 15 et 16. La proposition 15 prouve en effet l'existence de l'ensemble $\tilde{U}$ construit explicitement et dont l'invariance est elle-même prouvée par la proposition 16. De plus, la proposition 22 nous donne explicitement la dimension de Hausdorff de $U$, qui est aussi celle de $\tilde{U}$ par la proposition 23. La section (5.2.3) nous indique que $U$ est un attracteur d'I.F.S. graphe-dirigé.
La minimalité évoquée dans le troisième point est donnée dans la proposition 19 alors que l'unique ergodicité et la conjugaison sont données par les propositions 24 et 25. Ces dernières conjugaisons impliquent d'ailleurs que $\tilde{U}$ est complètement déconnecté comme image par une fonction continue d'un espace symbolique et qu'aucun point de $\tilde{U}$ n'a un code périodique (puisqu'en bijection avec une substitution minimale). Ainsi, tous les points de $\tilde{U}$ ont des codes différents, c'est-à-dire que les cellules de $\tilde{U}$ sont réduites à des points, ce qui prouve que $\tilde{U}$ est dans l'ensemble exceptionnel. □

Une première illustration immédiate de ce résultat est l'exemple de la section 3.2.1. On y assure en effet que la rotation du cercle $Tx = x + \varphi^{-1} \bmod 1$, la contraction $hx = (2-\varphi)x$, les ensembles $\{I_0, I_1\}$ et la substitution :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & 0 & \longmapsto & 01 \\ & 1 & \longmapsto & 011 \end{array}$$

vérifient bien les hypothèses du théorème 28. Pour le quatrième point des hypothèses, on remarque simplement qu'en choisissant $I_0$ par exemple, $hI_0$ est disjoint de $1-\varphi^{-1}$ et $hI_1$ disjoint de 0.
Ainsi, il existe un ensemble $\tilde{U} \subset [0,1[$ sur lequel la dynamique de $T$ est uniquement ergodique. L'application étant simple, on a explicité le diagramme de Bratteli auquel elle est conjuguée à la figure 5.4.

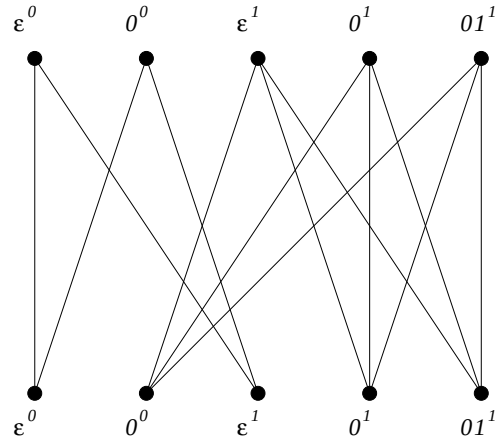


FIG. 5.4 – Un étage du diagramme de Bratteli facteur de $T$.

Sa matrice d'incidence, qui est aussi la matrice d'incidence de la substitution lue sur le diagramme, est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est indexée par l'alphabet :

$$\mathcal{A} = \{\epsilon^0, 0^0, \epsilon^1, 0^1, 01^1\}$$

dans cet ordre. Sa valeur propre dominante est :

$$\Lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi = \varphi^2.$$

On note que c'est aussi celle de $M_\sigma$ la matrice d'incidence de $\sigma$ :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la dimension de Hausdorff de $\tilde{U}$ est :

$$\dim_H(\tilde{U}) = \frac{-\log(\varphi^2)}{\log(2-\varphi)}.$$

Or, on a : $-\log(\varphi^2) = \log(\varphi^{-2})$ et comme :

$$(\varphi^{-1})^2 = (\varphi - 1)^2 = \varphi^2 - 2\varphi + 1 = 2 - \varphi,$$

finalement $\dim_H(\tilde{U}) = 1$, ce qui nous donne que $\tilde{U}$ est dense dans $[0, 1[$.
Ici, les ensembles que, dans les pages précédentes, on a appelés $a_k^1$ sont tous constitués d'un ensemble fini de points, ce qui nous assure que $\Gamma$ est dénombrable. Aussi, dans ce cas précis, $U = [0, 1]$ et la conjugaison opère Lebesgue presque partout. Presque tous les points de $[0, 1[$ ont une orbite uniquement ergodique.

# Chapitre 6

# Applications

## 6.1 Exemples Classiques

### 6.1.1 Introduction

Le chapitre précédent nous donne des hypothèses générales pour lesquelles les isométries par morceaux peuvent avoir des familles infinies de points périodiques et des dynamiques ergodiques. Ces hypothèses permettent en particulier de décomposer la dynamique en "composantes renormalisables". Plutôt que d'avoir une dynamique qui est globalement auto-similaire, comme celle de la section 3.3.1, on peut espérer trouver des sous-ensembles sur lesquels on aurait une renormalisation possible, même si celle-ci ne décrit pas la totalité des orbites.

**Définition 47** *Pour une isométrie par morceaux $T = (T_i, A_i)_{i=1,\dots,m}$, on appellera "composante renormalisable" de $T$ la donnée d'une famille de $m$ mots $\mu^i$ (ou bien de manière équivalente de la substitution $\sigma : i \mapsto \mu^i$), de $m$ ensembles $P_i$ et d'une contraction $h$ vérifiant les hypothèses du théorème 28.*

En particulier, les applications du chapitre 4 et de la section 3.3.1 sont des exemples d'application de ce principe. On verra que le triplet $(\{P_0, P_1\}, \{001, 11001\}, h)$ est une composante renormalisable pour $T$ (la rotation par morceaux sur trois triangles) comme on le verra dans la section suivante.
En général, une isométrie par morceaux peut avoir plusieurs, et même une infinité de composantes renormalisables. Par le théorème 28, l'existence de chaque composante signifie l'existence d'une composante ergodique de la mesure invariante portée par l'ensemble exceptionnel. Si toutes les composantes sont "deux à deux disjointes", c'est-à-dire que ni les éventuelles familles de points périodiques ni les points apériodiques décrits par chaque composante renormalisable ne s'intersectent, alors la mesure invariante portée par l'ensemble exceptionnel doit avoir aussi une infinité de composantes ergodiques. On va voir que la rotation par morceaux du chapitre 4 est un tel exemple.

### 6.1.2 L'Exemple du Chapitre 4

Une application immédiate du résultat 28 peut se faire sur l'exemple du chapitre 4. On considère en effet la rotation par morceaux $\tilde{T}$ définie par les rotations $R_0$ et $R_1$ sur $A_0 = \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ et $A_1 = \mathbb{C} \setminus A_0$. La substitution

$$\sigma : \begin{cases} 0 & \longmapsto & \mu^0 = 001 \\ 1 & \longmapsto & \mu^1 = 11001 \end{cases}$$

est clairement primitive. On a même que $\mu^0$ et $\mu^1$ contiennent toutes les lettres. Le lemme 5 nous indique qu'il existe une contraction $h = \lambda z$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{T}_{\mu^0} & = & h\tilde{T}_0 h^{-1}, \\ \tilde{T}_{\mu^1} & = & h\tilde{T}_1 h^{-1}. \end{array}$$

De plus, les ensembles $P_0$ et $P_1$ sont bien des ouverts d'adhérence compacte et la preuve du lemme 6 donne que :

$$\begin{array}{lcl} hP_0 & \subset & P_0 \\ T_0 hP_0 & \subset & P_0 \\ T_{00} hP_0 & \subset & P_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcl} hP_1 & \subset & P_1 \\ T_1 hP_1 & \subset & P_1 \\ T_{11} hP_1 & \subset & P_0 \\ T_{110} hP_1 & \subset & P_0 \\ T_{1100} hP_1 & \subset & P_1. \end{array}$$

On en a d'ailleurs une illustration dans la figure 5.2. Pour le quatrième et dernier point des hypothèses, on va choisir l'ensemble $P_1 = [oda]$. On voit que :

$$T_1 hP_1 \cap [od] = \emptyset, \quad hP_1 \cap [da] = \emptyset, \quad T_1 hP_1 \cap [oa] = \emptyset.$$

Toutes les hypothèses du théorème 28 sont vérifiées. Son application nous donne qu'il existe deux familles infinies de points périodiques dont les codes sont $\overline{\sigma^k(0)}$ et $\overline{\sigma^k(1)}$ (ce qui n'est autre que le théorème 24), ainsi qu'un ensemble invariant $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_0$ de points apériodiques vérifiant les règles d'invariance suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{U}_0 & = & hU_0 \cup T_0 hU_0 \cup T_{11} hU_1 \cup T_{110} hU_1 \\ \tilde{U}_1 & = & hU_1 \cup T_{00} hU_0 \cup T_1 hU_1 \cup T_{1100} hU_1 \end{array}$$

et sur lequel la dynamique de $T$ est uniquement ergodique. Cet ensemble peut être vu comme un attracteur d'I.F.S dont la construction serait dirigée par le graphe de sommets :

$$\mathcal{A} = \{hP_0,\ T_0 hP_0,\ T_{11} hP_1,\ T_{110} hP_1,\ hP_1,\ T_{00} hP_0,\ T_1 hP_1,\ T_{1100} hP_1\}$$

que l'on abrègera en :

$$\{\epsilon^0, 0, 11, 110, \epsilon^1, 00, 1, 1100\}.$$

On notera également :

$$\mathcal{A}_0 = \{\epsilon^0, 0, 11, 110\}, \quad \mathcal{A}_1 = \{\epsilon^1, 00, 1, 1100\}$$

et

$$\mathcal{A}^0 = \{\epsilon^0, 0, 00\}, \quad \mathcal{A}^1 = \{\epsilon^1, 1, 11, 110, 1100\}$$

Dans ces conditions, les flèches du graphe seront :

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}^1 \times \mathcal{A}_1.$$

La matrice d'incidence de ce graphe est une matrice carrée $8 \times 8$ que l'on n'explicitera pas ici. La matrice d'incidence de $\sigma$ est :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sa valeur propre dominante est 4. Donc, par la proposition 22, la dimension fractale de $\tilde{U}$ est :

$$\dim_H(\tilde{U}) = -\frac{\log 4}{\log \lambda} \sim 0.856.$$

De plus, dans la section 4.3.3, il est montré que le lemme 7 est valide pour tout $\alpha$ dans l'intervalle $[0, \pi/5]$. Ainsi, la discussion ci-dessus est aussi valable pour tous ces cas, on a un ensemble invariant dont la dimension fractale varie continuement, puisque $\lambda = 4\sin^2(\alpha/2)$ varie continuement en $\alpha$.

### 6.1.3 L'Exemple de la Section 3.3.1

L'exemple de la section 3.3.1 peut aussi s'analyser directement dans ce contexte. En conservant les notations de cette section, l'application $T$, la substitution primitive $\sigma$ :

$$\sigma : \begin{cases} 0 & \longmapsto & \mu^0 = 111 \\ 1 & \longmapsto & \mu^1 = 101 \end{cases}$$

les ensembles $\{Q_0, Q_1\}$ et la contraction $S$ de rapport $\sqrt{2} - 1$ vérifient les hypothèses du théorème 28. En effet, on a bien :

$$SQ_0 \subset Q_1, \quad T_1SQ_0 \subset Q_1, \quad T_{11}SQ_0 \subset Q_1$$

et

$$SQ_1 \subset Q_1, \quad T_1SQ_1 \subset Q_0, \quad T_{10}SQ_1 \subset Q_1$$

avec

$$\begin{cases} ST_0S^{-1} = T_{111} \\ ST_1S^{-1} = T_{101}. \end{cases}$$

Pour le quatrième point des hypothèses, on choisit l'ensemble $Q_1$. On peut en effet vérifier que le côté $[ed]$ est disjoint de $SQ_0$ et de $SQ_1$, que $[da']$ est disjoint de $T_1SQ_0$ et de $T_1SQ_1$ et enfin que $[ea']$ est disjoint de $T_{11}SQ_0$ et de $T_{10}SQ_1$.
Ainsi le point fixe $v$ donne bien naissance à une famille infinie de points périodiques et il existe un ensemble de points $U$ dans l'ensemble exceptionnel de $T$ dont la dynamique est uniquement ergodique. La dimension de Hausdorff de cet ensemble peut être calculée avec la matrice d'admissibilité du langage $L$ définie sur l'alphabet :

$$\mathcal{A} = \{\epsilon^0, 1^0, 11^0, \epsilon^1, 1^1, 10^1\}$$

qui s'exprime comme la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est plus facile de considérer la matrice d'incidence de $\sigma$ :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

dont la valeur propre dominante est 3. Ainsi, on retrouve bien la même valeur que précédemment pour la dimension de Hausdorff :

$$\dim_H(U) = -\frac{\log 3}{\log(\sqrt{2}-1)} = \frac{\log 3}{\log(\sqrt{2}+1)}.$$

Ici, l'ensemble $U$ s'exprime comme la réunion $U_0 \cup U_1$ où :

$$\begin{array}{rcl} U_0 & = & T_1 h U_1 \\ U_1 & = & hU_0 \cup hU_1 \cup T_1 hU_0 \cup T_{11} hU_0 \cup T_{10} hU_1. \end{array}$$

Cette expression peut cependant se simplifier et l'ensemble $U_1$ peut s'exprimer comme un attracteur d'I.F.S. simple, invariant par rapport à cinq contractions :

$$U_1 = hT_1hU_1 \cup hU_1 \cup T_1hT_1hU_1 \cup T_{11}hT_1hU_1 \cup T_{10}hU_1$$

Ainsi, les ensembles $U$, $U_1$ et $U_0$ ont tous la même dimension de Hausdorff, qui peut être calculée grâce aux formules classiques (cf. [17]), qui indiquent que celle-ci est solution de l'équation suivante :

$$3(\sqrt{2}-1)^{2s} + 2(\sqrt{2}-1)^s = 1$$

qui est bien vérifiée par $s = \ln(3)/\ln(\sqrt{2}+1)$ puisque cette valeur est telle que :

$$3\lambda^s = 1.$$

On retrouve ainsi toutes les conclusions de [1].

## 6.2 Décomposition de la Dynamique de la Tour à Trois Triangles

### 6.2.1 Outils Informatiques

Le chapitre 4 fait grand usage des propriétés algébriques des quantités intervenant dans le problème. Beaucoup de preuves reviennent alors à des calculs algébriques sur des polynômes que l'on ne s'est pas caché d'avoir vérifiés avec un logiciel de calcul formel. Pour effectuer une étude plus poussée de la dynamique de $T$, il faudra avoir recours à des outils informatiques sophistiqués. Les dessins et les calculs qui suivent ont tous été réalisés par des programmes *Mathematica* écrits par M. A. Goetz et moi-même. Ces programmes consistent en des bibliothèques de fonctions permettant les manipulations les plus variées sur des isométries par morceaux planes et d'atomes convexes. Elles permettent, entre autres, de calculer les applications de premier retour dans des cellules données. Les calculs peuvent se faire numériquement, pour privilégier la rapidité, ou bien symboliquement. Dans ce dernier cas, toutes les quantités intervenant dans le problème doivent être des nombres algébriques. Ici, toutes les longueurs, tous les angles peuvent êtres exprimés comme des polynômes de degré au plus 14 et ont été traités comme des vecteurs à 14 composantes rationnelles. Toutes les preuves qui suivent sont assistées par ordinateur.

### 6.2.2 Premier Retour dans $P_0 \cup P_1$

Toute la longue discussion qui suit a pour but principal de prouver le théorème suivant :

**Théorème 29** *La mesure invariante supportée par l'ensemble exceptionnel de $T$ admet une infinité dénombrable de composantes ergodiques.*

La méthode consiste à trouver un schéma auto-similaire donnant une mesure uniquement ergodique sur un ensemble invariant lui-même contenu dans un schéma auto-similaire et qui se répète à une infinité d'échelles. Pour cela, on aura recours à plusieurs applications auxiliaires dont le choix n'est pas unique. On ne prétend pas que notre manière de faire soit la meilleure dans quelque sens que ce soit, il s'agit simplement d'une parmi d'autres.
Étant donnée l'application du chapitre 4, on considère l'application $U$ de premier retour dans $P_0 \cup P_1$. Les calculs par ordinateur nous donnent que c'est une isométrie par morceaux sur sept atomes que l'on appellera $A_0^U, \ldots, A_6^U$ et qui ont les coordonnés :

$$\begin{array}{rcl}
A_0^U & = & [-2+2\rho-2\rho^2+\rho^3, -1+\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4+\rho^5, -1+\rho^5] \\
A_1^U & = & [-2+3\,\rho-3\,\rho^2+2\,\rho^3-\rho^4, -\rho^3+\rho^4, -1+\rho^3-\rho\ ^4] \\
A_2^U & = & [-1, -1+\rho-\rho^2, -1+\rho^2-2\,\rho^3+2\,\rho^4-\rho^5] \\
A_3^U & = & [-1+\rho-\rho^2, -\rho^3, -\rho+2\,\rho^2-3\,\rho^3+2\,\rho^4-\rho^5] \\
A_4^U & = & [-2+2\,\rho-2\,\rho^2+\rho^3, -1, 0, -1+\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4+\rho^5] \\
A_5^U & = & [-2+3\,\rho-3\,\rho^2+2\,\rho^3-\rho^4, -1+\rho^3-\rho^4, -1+\rho^2-2\,\rho^3+2\,\rho^4-\rho^5, -1+\rho-\rho^2] \\
A_6^U & = & [-1+\rho-\rho^2, -\rho+2\,\rho^2-3\,\rho^3+2\,\rho^4-\rho^5, 0, -\rho^3+\rho^4].
\end{array}$$

Les isométries $\{U_0, \ldots, U_6\}$ définies sur $\{A_0^U, \ldots, A_6^U\}$ respectivement auront la forme :

$$\begin{array}{rcl}
U_0(z) & = & R_0(z) = (-1+\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4+\rho^5)z-1+\rho^5 \\
U_1(z) & = & R_{122222}(z) = -\rho^3 z-\rho^3 \\
U_2(z) & = & R_{12}(z) = z+1-\rho+\rho^2-\rho^3 \\
U_3(z) & = & R_1(z) = -\rho z-\rho+\rho^2-\rho^3 \\
U_4(z) & = & R_0(z) = (-1+\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4+\rho^5)z-1+\rho^5 \\
U_5(z) & = & R_{1222}(z) = -\rho^5 z-\rho^4 \\
U_6(z) & = & R_1(z) = -\rho z-\rho+\rho^2-\rho^3.
\end{array}$$

Ici, les expressions sont obligatoirement des polynômes en $\rho$, ce qui explique les différences entre les expressions du chapitre 4 et celles-ci. Dans ce dernier chapitre, on avait préféré la concision alors qu'ici, on utilise des méthodes de calcul systématique automatisées qui se font dans un cadre fixe. On donnera les expressions comme elles sont utilisées par l'ordinateur.

Cette application est illustrée par la figure 6.1. Elle a une composante renormalisable constituée par le triplet $(\{A_0^U, \ldots, A_6^U\}, \sigma, h)$, où $h(z) = \lambda z$, le paramètre $\lambda = 2-\rho-\rho^{-1}$ étant celui défini dans le chapitre 4. La substitution $\sigma$ agit sur $\{0, \ldots, 6\}^\star$ donnant le début du code des ensembles $\{\lambda A_0^U, \ldots, \lambda A_6^U\}$ :

$$\begin{array}{rrcl}
\sigma : & 0 & \longmapsto & \mu^0 = 406 \\
 & 1 & \longmapsto & \mu^1 = 634053405340534053406 \\
 & 2 & \longmapsto & \mu^2 = 634023444023402344402 3406 \\
 & 3 & \longmapsto & \mu^3 = 63403 \\
 & 4 & \longmapsto & \mu^4 = 403 \\
 & 5 & \longmapsto & \mu^5 = 634053406 \\
 & 6 & \longmapsto & \mu^6 = 63406.
\end{array}$$

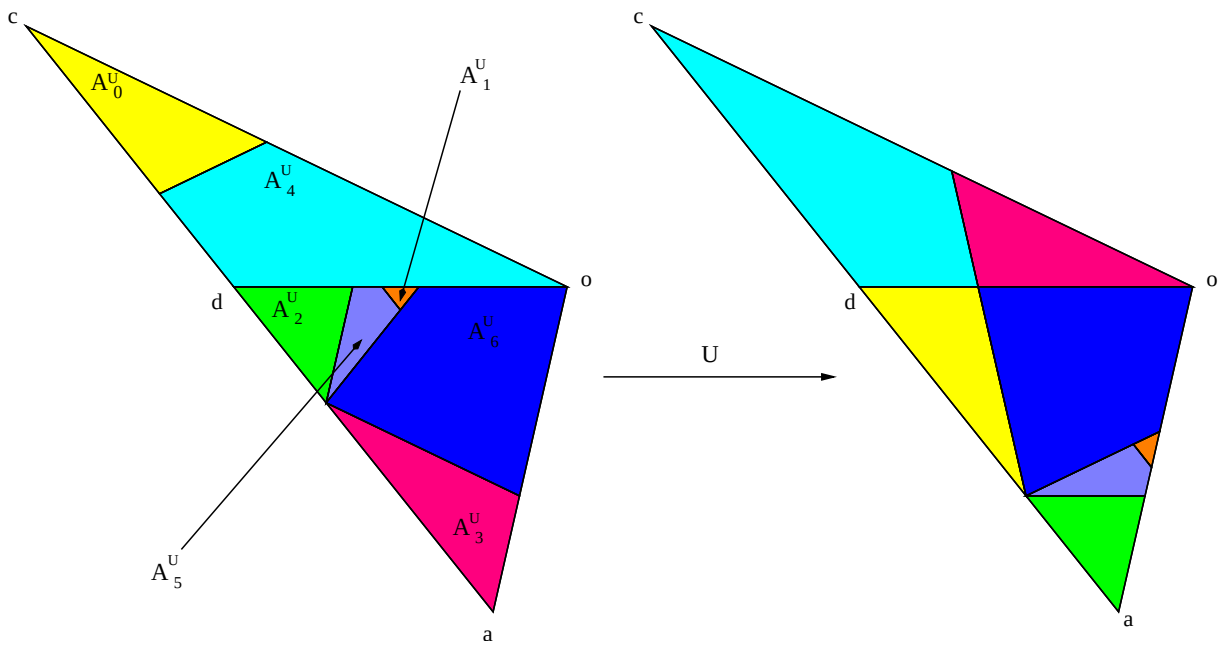


FIG. 6.1 – L'action de l'application $U$.

On a en effet que l'application $U^{\triangle}$ de premier retour dans $\lambda(P_0 \cup P_1)$ est définie sur $\{\lambda A_0^U, \ldots, \lambda A_6^U\}$ respectivement par :

$$\begin{array}{lclcl}
U_0^{\triangle}(z) & = & U_{406}(z) & = & (-1+\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4+\rho^5)z-\rho+2\rho^2-2\rho^3+\rho^4 \\
U_1^{\triangle}(z) & = & U_{634053405340534053406}(z) & = & -\rho^3 z+\rho^2-2\rho^3+\rho^4 \\
U_2^{\triangle}(z) & = & U_{6340234440234023444023406}(z) & = & z+2-3\rho+3\rho^2-2\rho^3+\rho^5 \\
U_3^{\triangle}(z) & = & U_{63403}(z) & = & -\rho z+1-3\rho+4\rho^2-3\rho^3+\rho^4 \\
U_4^{\triangle}(z) & = & U_{403}(z) & = & (-1+\rho-\rho^2+\rho^3-\rho^4+\rho^5)z-\rho+2\rho^2-2\rho^3+\rho^4 \\
U_5^{\triangle}(z) & = & U_{634053406}(z) & = & -\rho^5 z+\rho^3-2\rho^4+\rho^5 \\
U_5^{\triangle}(z) & = & U_{63406}(z) & = & -\rho z+1-3\rho+4\rho^2-3\rho^3+\rho^4.
\end{array} \tag{6.1}$$

On peut vérifier directement que, pour tout $i = 0, \ldots, 6$ :

$$U_i^{\triangle}(\lambda z) = \lambda U_i(z). \tag{6.2}$$

La preuve que tous les ensembles $\lambda A_i^U$ suivent les bons itinéraires à été faite par ordinateur, on en donne une illustration graphique dans les figures 6.2, 6.3 et 6.4.

### 6.2.3 Premier Retour dans $A_1^U$

On va maintenant considérer l'application $G$ de premier retour dans l'atome $A_1^U$ de $U$. Ce sera une isométrie par morceaux sur 3 atomes notés respectivement $A_1^G$, $A_2^G$ et $A_3^G$ et de coordonnées :

$$\begin{array}{lcl}
A_0^G & = & [-2+3\rho^2-5\rho^3+5\rho^4-3\rho^5, -2+3\rho-3\rho^2+2\rho^3-\rho^4, -1-\rho+3\rho^2-2\rho^3] \\
A_1^G & = & [-2+3\rho^2-5\rho^3+5\rho^4-3\rho^5, -1-\rho+3\rho^2-2\rho^3, -\rho^3+\rho^4] \\
A_2^G & = & [-2+3\rho^2-5\rho^3+5\rho^4-3\rho^5, -1+\rho^3-\rho^4, -2+3\rho-3\rho^2+2\rho^3-\rho^4]
\end{array}$$

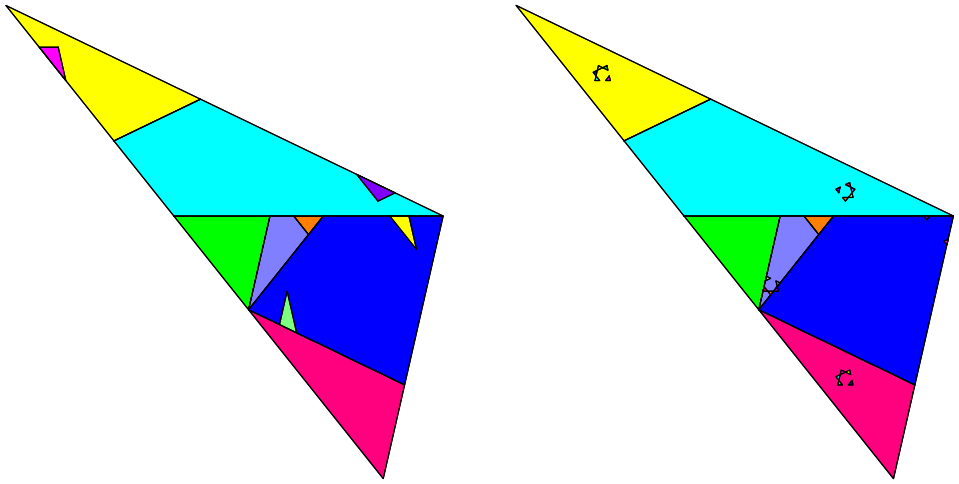

FIG. 6.2 – De gauche à droite, les itinéraires des ensembles $\lambda A_0^U, \lambda A_1^U$.

dont les isométries $G_0, G_1, G_2$ s'expriment sur $A_0^G, A_1^G, A_2^G$ respectivement comme :

$$\begin{array}{rcl} G_0(z) & = & -\rho z + 1 - 2\rho + 2\rho^3 - 3\rho^4 + 2\rho^5 \\ G_1(z) & = & -\rho^3 z + 1 - 2\rho + 2\rho^2 - 2\rho^3 + \rho^5 \\ G_2(z) & = & \rho z^4 - 1 + 2\rho - 3\rho^2 + 2\rho^3. \end{array}$$

Elle est illustrée dans la figure 6.5. Les isométries ci-dessus sont exprimées en fonction de $U_0, \ldots, U_6$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} G_0(z) & = & U_{16534023405653402340561}(z) \\ G_1(z) & = & U_{16561}(z) \\ G_2(z) & = & U_{16534023402340561}(z) \end{array} \tag{6.3}$$

En observant la mosaïque des cellules de $G$, on soupçonne plusieurs endroits où la géométrie semble se répliquer. Un de ces endroits est le sommet situé à l'extrême droite de $A_1^G$. C'est donc assez naturellement que l'on va rechercher l'application $H$ de premier retour dans $A_1^G$. Cette application est illustrée dans la figure 6.7. Elle est définie par les isométries suivantes

$$\begin{array}{rcl} H_0(z) & = & z - 1 + 4\rho - 6\rho^2 + 4\rho^3 - \rho^4 \\ H_1(z) & = & \rho^4 z + 1 - 3\rho + 3\rho^2 - 4\rho^3 + 5\rho^4 - 2\rho^5 \\ H_2(z) & = & -\rho^5 z - 8 + 10\rho - 5\rho^2 - 2\rho^3 + 6\rho^4 - 6\rho^5 \\ H_3(z) & = & z - 4 + 10\rho - 13\rho^2 + 10\rho^3 - 4\rho^4 \\ H_4(z) & = & -\rho^3 z - 2\rho + 5\rho^2 - 8\rho^3 + 6\rho^4 - 2\rho^5 \\ H_5(z) & = & -\rho^5 z - 5 + 5\rho - 2\rho^2 - 2\rho^3 + 5\rho^4 - 5\rho^5 \end{array}$$

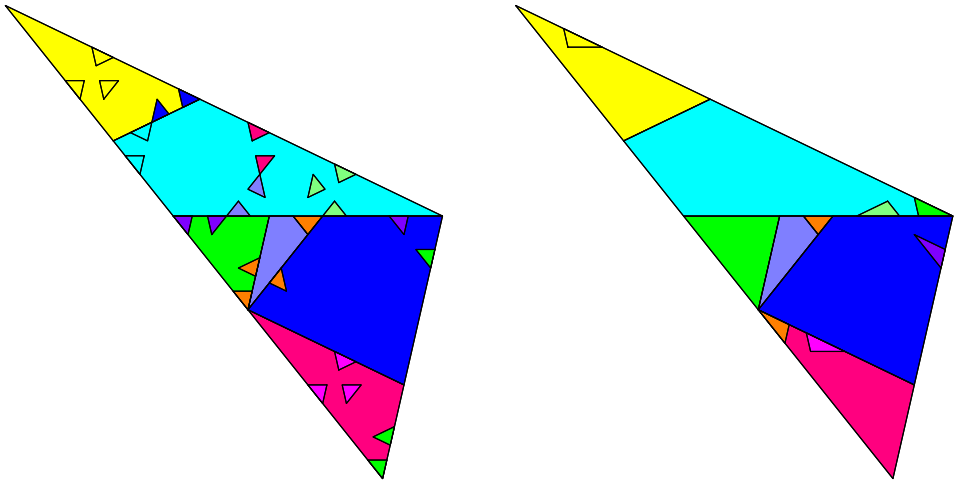

FIG. 6.3 – De gauche à droite, les itinéraires des ensembles $\lambda A_2^U, \lambda A_3^U$.

sur les atomes $\{A_0^H, \ldots, A_5^H\}$ qui ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{rcl}
A_0^H & = & [-5+9\rho^2-15\rho^3+15\rho^4-9\rho^5, -5\rho+9\rho^2-6\rho^3+\rho^4, -\rho^3+\rho^4] \\
A_1^H & = & [-2+3\rho^2-5\rho^3+5\rho^4-3\rho^5, -1-\rho+3\rho^2-2\rho^3, -1-\rho^2+4\rho^3-4\rho^4+\rho^5] \\
A_2^H & = & [-1-5\rho+8\rho^2-6\rho^3+5\rho^4-4\rho^5, 1-\rho+8\rho^2-11\rho^3+5\rho^4, 4-10\rho+13\rho^2-11\rho^3+5\rho^4] \\
A_3^H & = & [-1-\rho+3\rho^2-2\rho^3, 4-10\rho+13\rho^2-11\rho^3+5\rho^4, -1-\rho+8\ \rho^2-11\rho^3+5\rho^4] \\
A_4^H & = & [-5+9\rho-10\rho^2+8\rho^3-4\rho^4, -1-5\rho+13\rho^2-15\rho^3+10\rho^4-4\rho^5, \\
 & & -1-5\rho+8\rho^2-6\rho^3+5\rho^4-4\rho^5, 4-10\rho+13\rho^2-11\rho^3+5\rho^4] \\
A_5^H & = & [-5+9\rho^2-15\rho^3+15\rho^4-9\rho^5, -1-\rho^2+4\rho^3-4\rho^4+\rho^5, \\
 & & -1-5\rho+13\rho^2-15\rho^3+10\rho^4-4\rho^5, -5+9\rho-10\rho^2+8\rho^3-4\rho^4, -5\rho+9\rho^2-6\rho^3+\rho^4].
\end{array}$$

Les isométries $\{H_0, \ldots, H_5\}$ s'expriment de la façon suivante en fonction de $G$ :

$$\begin{array}{rcl}
H_0(z) & = & G_{121}(z) \\
H_1(z) & = & G_{1221}(z) \\
H_2(z) & = & G_{12022222021}(z) \\
H_3(z) & = & G_{12022021}(z) \\
H_4(z) & = & G_{1202021}(z) \\
H_5(z) & = & G_{12021}(z).
\end{array} \tag{6.4}$$

### 6.2.4 Premier Retour dans $A_0^H$

L'application de premier retour $H^\triangle$ dans $A_0^H$ est une isométrie par morceaux similaire à $H$ via la contraction $h$ définie comme suit :

$$h = \lambda(z-c)+c \quad \text{où} \quad c = \rho^4 - \rho^3.$$

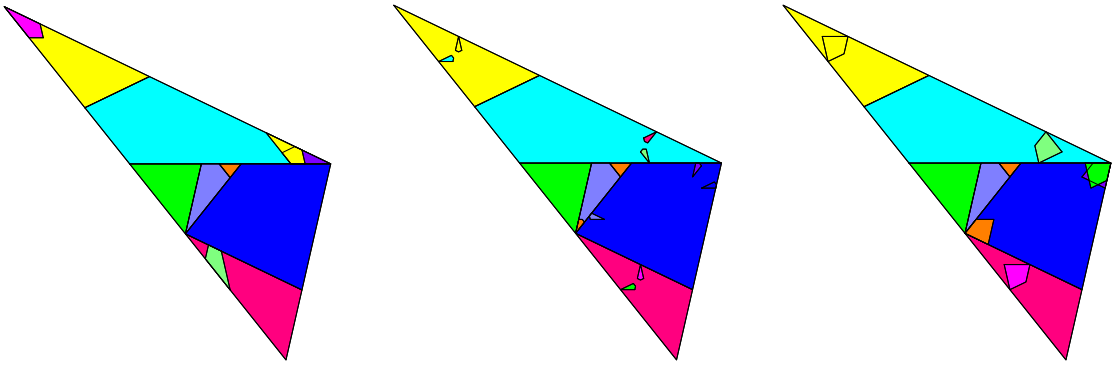

FIG. 6.4 – De gauche à droite, les itinéraires des ensembles $\lambda A_4^U, \lambda A_5^U, \lambda A_6^U$.

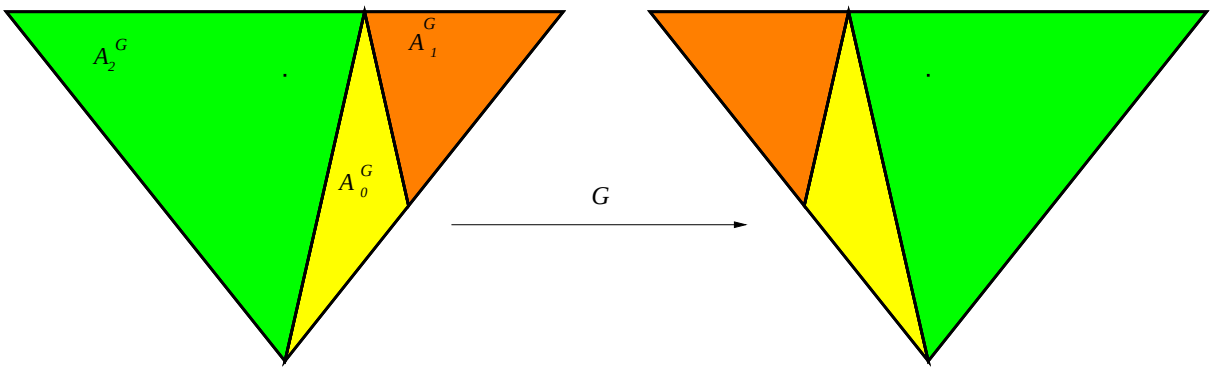


FIG. 6.5 – L'action de l'application $G$.

Les isométries de $H^\triangle$ définies respectivement sur $\{hA_0^H, \ldots, hA_6^H\}$ ayant les expressions polynomiales suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
H_0^\triangle(z) & = & z - 5 + 14\rho - 19\rho^2 + 14\rho^3 - 5\rho^4 \\
H_1^\triangle(z) & = & \rho^4 z + 3 - 8\rho + 9\rho^2 - 10\rho^3 + 10\rho^4 - 4\rho^5 \\
H_2^\triangle(z) & = & -\rho^5 z - 23 + 29\rho - 15\rho^2 - 6\rho^3 + 20\rho^4 - 19\rho^5 \\
H_3^\triangle(z) & = & z - 14 + 33\rho - 42\rho^2 + 33\rho^3 - 14\rho^4 \\
H_4^\triangle(z) & = & -\rho^3 z - 6\rho + 15\rho^2 - 21\rho^3 + 16\rho^4 - 6\rho^5 \\
H_5^\triangle(z) & = & \rho^5 z - 14 + 15\rho - 6\rho^2 - 6\rho^3 + 15\rho^4 - 14\rho^5
\end{array}$$

s'expriment comme suit par rapport à $H$ :

$$\begin{array}{rcl}
H_0^\triangle(z) & = & H_{030}(z) \\
H_1^\triangle(z) & = & H_{010}(z) \\
H_2^\triangle(z) & = & H_{035152515303530}(z) \\
H_3^\triangle(z) & = & H_{0351530}(z) \\
H_4^\triangle(z) & = & H_{0353530}(z) \\
H_5^\triangle(z) & = & H_{03530}(z).
\end{array}$$

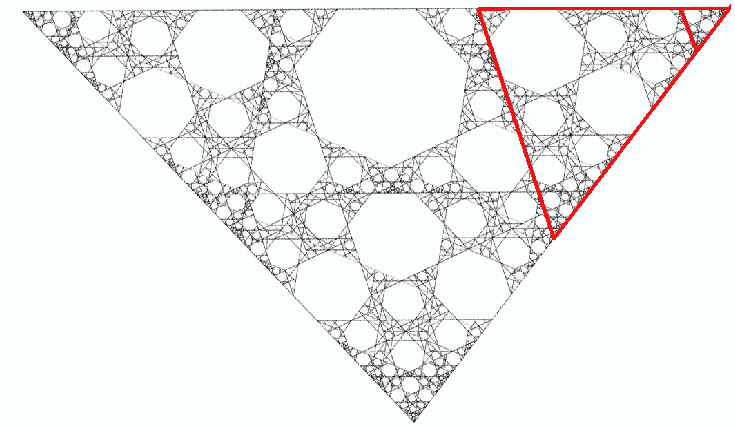

FIG. 6.6 – La mosaïque de l'application $G$. En rouge, on montre une zone où les motifs semblent se répéter.

Si on définit la substitution :

$$\begin{array}{rccl} \zeta : & 0 & \longmapsto & 030 \\ & 1 & \longmapsto & 010 \\ & 2 & \longmapsto & 035152515303530 \\ & 3 & \longmapsto & 0351530 \\ & 4 & \longmapsto & 0353530 \\ & 5 & \longmapsto & 03530 \end{array}$$

alors le triplet $(\{A_0^H, \ldots, A_5^H\}, \zeta, h)$ est une composante renormalisable de $H$ si $\zeta$ est primitive. On présente comme précédemment une preuve graphique que les ensembles $\{hA_0^H \cdots hA_5^H\}$ suivent les bons itinéraires constituées par la série de figures 6.8 et 6.9. On peut facilement vérifier que :

$$H_i^{\triangle}(hz) = hH_i(z), \ \forall i = 0, \cdots, 6.$$

L'application $H$ admet deux points fixes $s_0 \in A_0^H$ et $s_4 \in A_4^H$ de coordonnées :

$$\begin{array}{rcl} s_0 & = & 1/7(-10 + 6\rho + 12\rho^2 - 23\rho^3 + 13\rho^4 - 3\rho^5) \\ s_4 & = & 1/7(-1 - 19\rho + 18\rho^2 - 10\rho^3 + 16\rho^4 - 15\rho^5) \end{array}$$

Le défaut de primitivité de $\zeta$ n'a pas de conséquence sur les premiers résultats du chapitre 5 qui assurent que ces points donnent naissance à deux familles infinies de points périodiques (illustrées en figure 6.10). On va voir comment appliquer malgré tout les résultats suivants concernant les points apériodiques.

### 6.2.5 Une Infinité de Composantes Ergodiques

La substitution $\zeta$ est clairement non primitive, puisqu'aucune image de lettre ne contient la lettre 4. Pourtant, elle possède un seul point fixe. Il commence par 0 et peut être obtenu comme limite de $\zeta^k(i)$ pour n'importe quelle lettre de $i = \{0, \ldots, 5\}$. De plus, ce point fixe ne contient pas de 2 puisque seule l'image de 2 en contient. Ainsi, le système substitutif de $\zeta$ est le même que si on la considère comme n'agissant pas sur la lettre 4 ni sur la lettre 2. Or la substitution

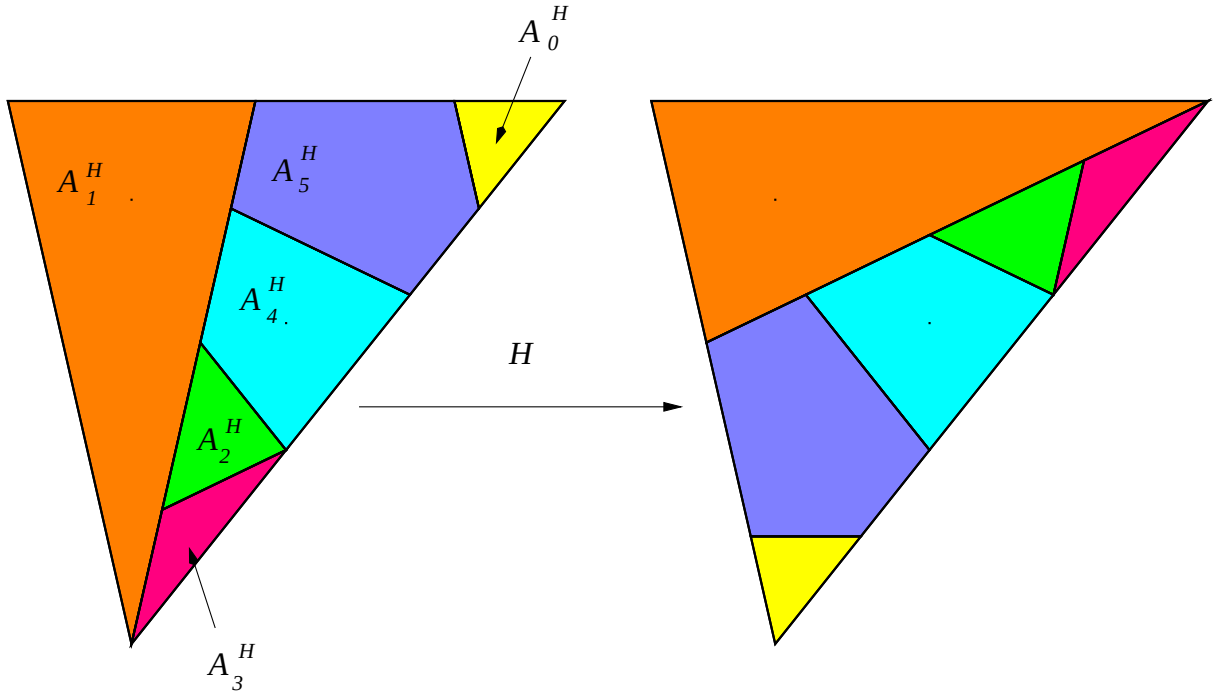


FIG. 6.7 – L'action de l'application $H$.

définie sur $\{1, 3, 5\}$ par :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{\zeta}: & 0 & \longmapsto & 030 \\ & 1 & \longmapsto & 010 \\ & 3 & \longmapsto & 0351530 \\ & 5 & \longmapsto & 03530 \end{array}$$

a pour matrice d'incidence :

$$M_{\tilde{\zeta}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dont la troisième puissance est positive. Donc $\tilde{\zeta}$ est primitive et le système substitutif qu'elle engendre est uniquement ergodique. L'application $H$ supporte ainsi une dynamique uniquement ergodique sur un sous-ensemble $Z^H$ de son ensemble exceptionnel $\Delta_H$ par le théorème 28. Cet ensemble, conformément à la description du chapitre 5, se scinde en 5 parties $\{Z_0^H,\ Z_1^H,\ Z_2^H,\ Z_3^H,\ Z_5^H\}$. En effet, il n'y a aucun itéré de la famille $\{hA_0^H, \ldots, hA_5^H\}$ dans l'atome $A_4^H$ donc, d'après le mode de construction décrit dans le chapitre 5, on voit qu'on ne peut avoir un ensemble $Z_4^H \subset A_4^H$. L'ensemble $Z^H$ respecte donc les règles d'invariance suivantes :

$$\begin{array}{rcl} Z_0^H & = & hZ_0^H \cup hZ_1^H \cup hZ_2^H \cup hZ_3^H \cup hZ_5^H \cup H_{01}hZ_1^H \cup H_{03515251530353}hZ_2^H \cup H_{035153}hZ_3^H \cup H_{0353}hZ_5^H \\ Z_1^H & = & H_0hZ_1^H \cup H_{035}hZ_2^H \cup H_{0351525}hZ_2^H \cup H_{035}hZ_3^H \\ Z_2^H & = & H_{03515}hZ_2^H \\ Z_3^H & = & H_0hZ_0^H \cup H_0hZ_2^H \cup H_0hZ_3^H \cup H_0hZ_5^H \cup H_{035152515}hZ_2^H \cup H_{0351525153035}hZ_2^H \cup \\ & & \cup H_{03515}hZ_3^H \cup H_{035}hZ_5^H \\ Z_5^H & = & H_{03}hZ_2^H \cup H_{0351}hZ_2^H \cup H_{035152}hZ_2^H \cup H_{035152515303}hZ_2^H \cup H_{03}hZ_3^H \cup H_{0351}hZ_3^H \cup H_{03}hZ_5^H \end{array}$$

On remarque que $Z_2^H$ doit être réduit au point fixe de la contraction $H_{03515}$.
Comme $H$ est le premier retour dans $A_0^G$ pour l'application $G$, on construit l'ensemble $Z^G$,

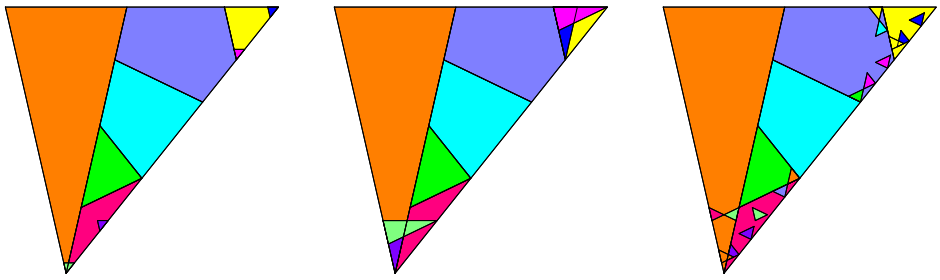

FIG. 6.8 – De gauche à droite, les itinéraires des ensembles $hA_0^H, hA_1^H, hA_2^H$.

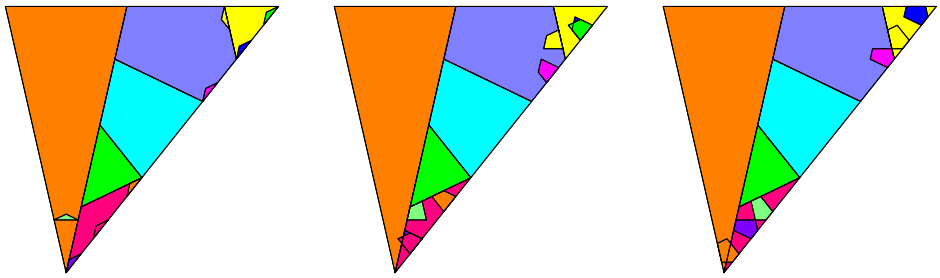

FIG. 6.9 – De gauche à droite, les itinéraires des ensembles $hA_3^H, hA_4^H, hA_5^H$.

sous-ensemble de l'ensemble exceptionnel $\Delta_G$, que l'on peut définir comme $\tilde{Z}^G = \cup_{i=0,\dots,5} Z_i^G$ avec :

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{Z}_0^G & = & Z_0^H \cup G_1 Z_0^H \cup G_{12} Z_0^H \\
\tilde{Z}_1^G & = & Z_1^H \cup G_1 Z_1^H \cup G_{12} Z_1^H \cup G_{122} Z_1^H \\
\tilde{Z}_2^G & = & Z_2^H \cup G_1 Z_2^H \cup G_{12} Z_2^H \cup G_{120} \cup G_{1202} Z_2^H \cup \cdots \cup G_{1202222202} Z_2^H \\
\tilde{Z}_3^G & = & Z_3^H \cup G_1 Z_3^H \cup G_{12} Z_3^H \cup G_{120} Z_3^H \cup G_{1202} Z_3^H \cup \cdots \cup G_{1202202} Z_3^H \\
\tilde{Z}_5^G & = & Z_5^H \cup G_1 Z_5^H \cup G_{12} Z_5^H \cup G_{120} Z_5^H \cup G_{1202} Z_5^H
\end{array}$$

en suivant l'expression de $H$ en fonction de $G$ donnée par les relations (6.4). L'ensemble $Z^G$ est un ensemble invariant pour $G$ constitué d'un nombre fini de répliques similaires de $Z^H$. Puisque la dynamique de $H$ est uniquement ergodique sur $Z^H$, alors celle de $G$ est aussi uniquement ergodique sur $Z^G$. Le même raisonnement va être fait pour construire un ensemble invariant de $T$ à partir de $Z^G$, puisque l'application $G$ est définie à partir de $U$ via les relations (6.3). Cependant, pour cela, il faut savoir comment $Z^G$ se répartit dans les atomes de $G$. La formulation précédente n'est donc pas très pratique. Il serait préférable de scinder $Z^G$ en trois parties, chacune étant dans un atome différent de $G$. Or on sait que $Z^G$ se décrit comme une réunion d'ensembles de la forme $G_{\nu_1 \cdots \nu_k} Z_\alpha^H$ dont on sait qu'ils sont chacun dans $A_{\nu_{k+1}}^G$. On reformule donc $Z^G$ comme la réunion de trois ensembles $Z_0^G$, $Z_1^G$ et $Z_2^G$, chacun étant contenu dans $A_0^G$, $A_1^G$ et $A_2^G$ respectivement. On n'écrira pas explicitement ces réunions car elles sont lourdes et on ne les utilisera plus par la suite. On préférera travailler directement avec les ensembles $Z_i^G$. Pour décrire l'application, on utilisera un formalisme identique à celui rencontré dans le chapitre 5. A savoir que l'on notera

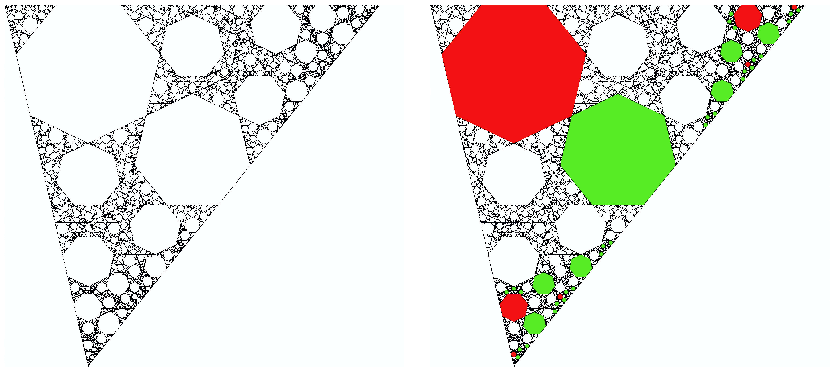

FIG. 6.10 – À gauche, la mosaïque de cellules de l'application $H$. À droite, les deux familles de cellules périodiques de $H$, engendrées par $s_0$ (en rouge), et par $s_4$ (en vert).

$\mu^0, \ldots, \mu^5$ les mots $\{121^0, 1221^1, 12022222021^2, 12022021^3, 1202021^4, 12021^5\}$ que l'on indexera en fonction de l'application $H$ qu'ils décrivent dans les relations (6.4). L'ensemble $\mathcal{A}$ décrira l'ensemble des préfixes de ces mots munis de leurs indices respectifs :

$$\mathcal{A} = \{1^0, 12^0, 1^1, 12^1, 122^1, 1^2, 12^2, 120^2, 1202^2, 12022^2, 120222^2, 1202222^2, \ldots\}.$$

On utilisera les fonctions $\chi$, $\psi$ de la même manière que dans le chapitre 5, c'est-à-dire que $\chi(\alpha)$ donne l'indice du préfixe et $\psi(\alpha)$ la lettre qui vient juste après le préfixe $\alpha$ dans le mot $\mu^{\chi(\alpha)}$ ; par exemple $\psi(12^1) = 2$, $\chi(12^1) = 1$ etc.
Avec ce formalisme, les ensembles $Z_i^G$ s'écrivent :

$$Z_1^G = Z_0^H \cup Z_1^H \cup Z_2^H \cup Z_3^H \cup Z_5^H \cup \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(1)} G_\nu Z^H_{\chi(\nu)}$$

puisque $Z^H \subset A_1^G$, et

$$Z_0^G = \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(0)} G_\nu Z^H_{\chi(\nu)}$$

$$Z_2^G = \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(2)} G_\nu Z^H_{\chi(\nu)}.$$

En se fondant maintenant sur les relations (6.3), on va construire $Z^U$ un ensemble invariant par $U$ à partir de $Z^G$. On va donc faire exactement le même travail que ci-dessus. Pour les mots utilisés dans les relations (6.3) indicés par les isométries de $G$ qu'elles définissent :

$$\{1653402340565340234056 1^0, 16561^1, 1653402340234023405 61^2\}$$

on considère $\mathcal{A}^U$ l'ensemble de tous leurs préfixes dûment indicés :

$$\mathcal{A}^U = \{1^0, 16^0, 165^0, \ldots, 1^1, 16^1, 165^1, 1656^1, \ldots, 1^2, 16^2, 165^2, \ldots\}.$$

Les fonction $\chi$ et $\psi$ seront définies cette fois sur $\mathcal{A}^U$. L'ensemble $Z^U$ sera scindé en sept parties définies comme suit :

$$Z_1^U = Z_0^G \cup Z_1^G \cup Z_2^G \cup \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(1)} U_\nu Z^G_{\chi(\nu)}$$

puisque $Z^G \subset A_1^U$ et :

$$Z_i^U = \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(i)} U_\nu Z^G_{\chi(\nu)}$$

pour $i = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Or l'application $U$ a une propriété remarquable : elle est conjuguée à l'application $U^\triangle$ de premier retour dans $\lambda U_1 \cup U_0$ (cf. 6.2). Ainsi, si l'application $U$ est uniquement ergodique sur $Z^U$ alors $U^\triangle$ est uniquement ergodique sur $\lambda Z^U$. De plus, ces deux ensembles sont disjoints car les itérés des atomes de $G$ sont disjoints des itérés des atomes de $G^\triangle$, application de premier retour dans $\lambda A_1^U$, comme illustré dans la figure 6.11. Ainsi, il existe pour $U$ un autre ensemble invariant sur lequel la dynamique agit de manière uniquement ergodique. On l'appellera $C^1$. Elle est déterminée précisément par l'expression de $U^\triangle$ en fonction de $U$ donnée par les relations (6.1). $\lambda Z^U$ sera lui aussi scindé en sept parties $\lambda Z_0^U, \ldots, \lambda Z_6^U$. On va considérer l'ensemble des préfixes des mots :

$$\{406, 634053405340534053406, 634023444023402344402340 6, 63403, 403, 634053406, 63406\}$$

dûment indicés par la même méthode que ci-dessus. Cette fois-ci :

$$\mathcal{A}^{U^\triangle} = \{4^0, 40^0, 406^0, 6^1, 63^1, 634^1, 6340^1, \ldots, 6^2, 63^2, 634^2, \ldots, 6^3, 63^3, 634^3 \ldots, \ldots 6340^6\}$$

et

$$C_i^1 = \bigcup_{j=0}^{6} \lambda Z_j^G \cup \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(i)} U_\nu \lambda Z^U_{\chi(\nu)}.$$

Ce raisonnement peut encore être appliqué autant de fois que l'on veut en considérant les applications $U^{\triangle^k}$ de premier retour dans $\lambda^k(P_0 \cup P_1)$. Toutes ces applications sont identiques et donc chacune a un sous-ensemble $\lambda^k Z^U$ de son ensemble exceptionnel sur lequel $U^{\triangle^k}$ est uniquement ergodique. Tous ces ensembles vont nous servir à construire des ensembles invariants de $U$ en appliquant la même méthode que ci-dessus. Si la substitution $\omega$ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \omega : \ 0 & \longmapsto & 406 \\ 1 & \longmapsto & 634053405340534053406 \\ 2 & \longmapsto & 634023444023402344402340 6 \\ 3 & \longmapsto & 63403 \\ 4 & \longmapsto & 403 \\ 5 & \longmapsto & 634053406 \\ 6 & \longmapsto & 63406 \end{array}$$

et que $\mathcal{A}^{\triangle^k}$ est constitué de tous les préfixes des mots $\{\omega(0)^k, \ldots, \omega(6)^k\}$ dûment indicés, alors les ensembles :

$$C_i^k = \bigcup_{j=0}^{6} \lambda^k Z_j^G \cup \bigcup_{\nu \in \psi^{-1}(i)} U_\nu \lambda^k Z^U_{\chi(\nu)}$$

avec $\chi, \psi : \mathcal{A}^{\triangle^k} \to \{0, \ldots, 6\}$ définies comme précédemment, sont des ensembles invariants de $U$ supportant chacun une dynamique uniquement ergodique. On remarque qu'on retrouve bien la définition précédente de $C^1$.
L'ensemble exceptionnel de $U$ possède donc une infinité de sous-ensembles invariants $\{C^k\}_k$ supportant une mesure ergodique. Ainsi, la mesure $U$-invariante sur l'ensemble exceptionnel possède une infinité dénombrable de composantes ergodiques. Bien sûr, par construction, c'est aussi le cas de $T$, ce qui prouve le résultat 29.□

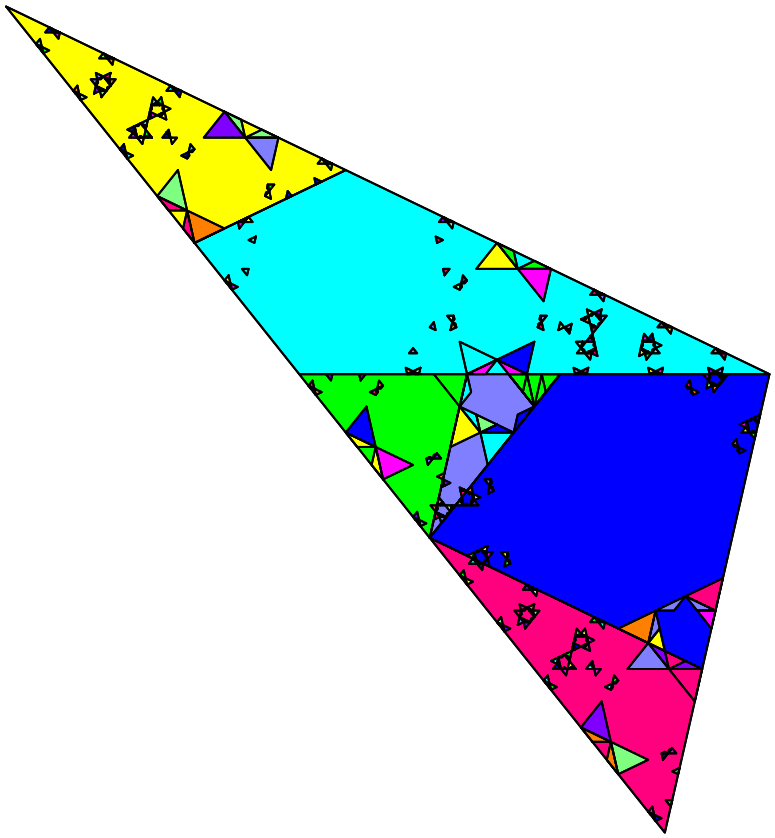

FIG. 6.11 – Les triangles les plus gros représentent les itérés des ensembles $A_0^G, A_1^G$ et $A_2^G$ tandis que les plus petits sont les itérés des ensembles $\lambda A_0^G, \lambda A_1^G, \lambda A_2^G$.

# Chapitre 7

# Conclusion

## Résumé et Conclusions

Dans cette thèse, après la brève introduction aux concepts fondamentaux, on a présenté plusieurs exemples, maintenant devenus classiques, qui illustrent les méthodes de base servant à l'étude des isométries par morceaux. Les résultats très généraux concernant cette classe de systèmes dynamiques sont peu nombreux, ce qui n'est pas étonnant vu qu'elle est très vaste. Aussi, c'est par l'étude des exemples que l'on perçoit la richesse des comportements et que l'on commence, presque au cas par cas à mettre sur pied de nouvelles méthodes d'étude.
Celles-ci sont tout à fait différentes de celles employées dans la théorie ergodique des systèmes dilatants ou contractants. Ici, on ne peut pas faire d'étude statistique sur les orbites car on n'a en général pas ergodicité par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est la principale mesure invariante. On sait qu'une des particularités de ces systèmes est d'ailleurs de faire cohabiter deux types de dynamiques. Outre les régions de discontinuité sur lesquelles l'application n'est finalement définie que conventionnellement, on a ce que l'on a appelé les cellules périodiques d'une part et l'ensemble exceptionnel d'autre part. Le premier de ces deux ensembles invariant supporte une dynamique régulière constituée uniquement de points périodiques ou pseudo-périodiques regroupés en cellules hiérarchisées. Cette hiérarchie peut dans certains cas se décrire par un schéma substitutif. C'est le cas dans [1, 23, 25, 37]. L'ensemble exceptionnel supporte quant à lui une dynamique apériodique qu'il n'est pas aisé de décrire. Dans [1], il est pourtant montré que dans les cas étudiés, elle était ergodique pour une mesure idoine définie sur un espace symbolique.
Tous les exemples d'isométries par morceaux où une étude précise a pu être menée à bien utilisent à peu près les mêmes techniques, reposant sur une propriété fondamentale de la dynamique : l'auto-similarité. Notre travail a consisté en l'étude précise d'un exemple de rotation par morceaux fondée sur trois triangles, extension du travail [23]. Cette étude, menée conjointement avec M. Goetz grâce à des outils informatiques développés pour l'occasion constitue le chapitre 4. Cet exemple possède plusieurs propriétés intéressantes et inattendues. La principale étant encore une fois une propriété d'auto-similarité, mais cette fois-ci, celle-ci n'est que "partielle". On veut dire par là que toute la dynamique n'est pas gouvernée par un schéma substitutif unique. Seule une partie des orbites suivent cette règle. Cette propriété implique en particulier qu'il existe des ensembles pour lesquels les temps de retour deviennent aussi grands que souhaité. Un résultat qui contraste avec le théorème classique valable pour les échanges d'intervalles qui indique en particulier que les temps de retours sont toujours bornés.
Le fait que l'auto-similarité soit partielle est loin d'être limitatif. Au contraire, une même application peut admettre plusieurs schémas de substitutions différents, le chapitre 6 en montre d'ailleurs une infinité. De plus, on se rend compte, à la fin du chapitre 4, que l'auto-similarité

est conséquence d'un ensemble de conditions géométriques et algébriques bien identifiées et que celles-ci peuvent être remplies non seulement par des exemples particuliers et hautement non génériques mais par une famille continue d'isométries par morceaux dont les paramètres varient dans un intervalle. Le chapitre 5 considère ces conditions comme des hypothèses de travail et s'attache à dégager un certain nombres de propriétés qui en découlent. On montre notamment qu'elles impliquent bien l'existence de familles de cellules périodiques hiérarchisées selon un schéma substitutif. La deuxième partie de ce chapitre s'intéresse à la dynamique "limite" qu'engendrent ces hypothèses. On montre alors qu'il doit exister un ensemble non vide de points apériodiques de mesure de Hausdorff positive et finie qui suit une dynamique uniquement ergodique. De plus, la mesure ergodique est intimement reliée à la mesure de Hausdorff et on peut conjuguer la dynamique avec des systèmes classiques (substitutions ou diagrammes de Bratteli). C'est ainsi qu'on prouve au chapitre 6 que notre application modèle admet une infinité d'ensembles invariants disjoints, chacun supportant une dynamique uniquement ergodique. La mesure invariante sur son ensemble exceptionnel admet donc une infinité de composantes ergodiques.

## Perspectives

Une des nouveautés de l'exemple qui nous a servi de modèle tout au long de ce travail est que tous ses paramètres sont des nombres algébriques de degré trois. Le lien entre les propriétés algébriques des paramètres et les propriétés dynamiques des isométries par morceaux n'est pas encore bien établi. Pour autant, on peut raisonnablement suspecter qu'il y en ait un. La section 3.4 donne un exemple où on utilise explicitement les propriétés algébriques des paramètres mais cela ne donne pas de contrainte claire sur la dynamique considérée. Dans les chapitres 4 et 6, on est amenés naturellement à manipuler des polynômes, c'est même la clef de voûte de la structure de données utilisée dans les outils informatiques qui nous ont été si utiles dans l'investigation, autrement impossible, des structures de la dynamique de notre exemple. Mais là encore les propriétés algébriques n'apparaissent pas comme quelque chose de fondamental.
Cependant, si on s'attache à la famille très étudiée des rotations du tore, alors on est forcé de constater qu'il y a une différence dans les structures décrites dans [32] et [33]. Dans le premier article, on traite les cas des rotations sur le tore fondées sur des paramètres quadratiques. Il n'y a qu'un nombre fini de cas à traiter et chacun admet un seul schéma auto-similaire global, c'est-à-dire suffisant pour décrire toute la dynamique. Bien que plus complexes à mettre en pratique, les méthodes utilisées sont finalement assez similaires à celles de [1] ou de [23] qui d'ailleurs traitent eux aussi de cas dont les paramètres sont des entiers quadratiques.
A contrario, dans le second article, où l'on traite de cas dont les paramètres sont des entiers cubiques, des méthodes un peu différentes doivent être mises en œuvre. On ne peut en effet plus traiter toute la dynamique avec un seul schéma global, on a plutôt besoin d'une sorte de catalogue. En effet, en induisant, on ne voit apparaître qu'un nombre fini de structures d'applications induites. On les recenses alors toutes et la dynamique globale se décompose en une sorte d'arbre d'applications induites selon des règles précisent. On retrouve d'ailleurs dans ce travail, cette sorte de similarité partielle qui amène à un résultat analogue concernant les composantes ergodiques de la dynamique sur l'ensemble exceptionnel de l'exemple qui y est traité.
Cette différence de comportement se retrouve aussi entre l'exemple traité dans [23] et celui du présent travail. Ces considérations sont de plus motivées par les travaux de M. Boshernitzan et Carroll qui montrèrent que des échanges d'intervalles fondés sur des paramètres quadratiques n'admettaient qu'un nombre fini d'applications induites possibles. Il est alors naturel de se demander quelles généralisations de ce résultat on pourrait obtenir en dimensions supérieures.

Des questions se posent aussi sur la généricité de ces structures auto-similaires. On a vu que, bien que certains comportements semblent reliés à l'algébricité des paramètres et semblent donc dépendants de leurs propriétés arithmétiques particulières, d'autres au contraire subsistent sur tout un intervalle. En tout cas, l'étude des isométries par morceaux sous un angle plus algébrique semble être une voie de recherche intéressante pour espérer donner un début de réponse aux nombreuses questions qui se posent encore.

# Bibliographie


[1] R. Adler, B. Kitchens and C. Tresser, *Dynamics of non-ergodic piecewise affine maps of the torus*, Erg. Th. and Dyn. Sys., (2001), vol **21**, no. 4, 959–999.

[2] P. Aswhin, X. C. Fu, *Tangencies in invariant disk packings for certain planar piecewise isometries are rare*, Dyn. Sys., (2001), vol **16**, 333–345.

[3] P. Ashwin, X. C. Fu, *On the geometry of orientation preserving planar piecewise isometries*, J. Nonlinear Sci., (2002), vol **12**, no. 3, 207–240.

[4] M. F. Barnsley, S. Demko, *Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals*, Proc. Royal. Soc. of London, (1985) vol A **399**, 243–275

[5] M. Blank, *Pathologies Generated by Round-off Errors in Dynamical Systems*, PhysicaD, vol **78** (1974), 93–114.

[6] M. Blank, T. Krüger, L. Pustylnikov, *A KAM type theorem for systems with round-off errors*, Preprint, (1997), Universität Bielefeld, 765/3/97.

[7] M. D. Boshernitzan, *A condition for a minimal interval exchange map to be uniquely ergodic*, Duke Math. J., (1985), vol **52**, 723–752.

[8] M. Boshernitzan, *Rank two interval exchange maps*, Erg. Th. and Dyn. Sys., (1988), vol **8**, 379–394.

[9] M. Boshernitzan, A. Nogueira, *Mixing properties of interval exchange transformations*, en préparation.

[10] M. D. Boshernitzan, C. R. Carroll, *An Extension of Lagrange's Theorem to Interval Exchange Transformation over Quadratic Fields*, J. Anal. Math., (1997), vol **72**, 21–44.

[11] D. Bosio, F. Vivaldi, *Round-off errors and p-adic numbers*, Nonlinearity, (2000), vol **13**, 309–322.

[12] J. Buzzi, *Piecewise Isometries have zero topological entropy*, Erg. Th. and Dyn. Sys., (2001), vol **21**, 1371–1377.

[13] L. O. Chua, T. Lin, *Chaos in digital filters*, IEEE Trans. Circuits and Dystems, (1988), vol **35**, 648–658.

[14] L. O. Chua, T. Lin, *Chaos and fractals from third-order digital filters*, Int. J. Circuit Theory Appl., (1990), vol **18**, 241–255.

[15] P. Diamond, P. Kloeden, V. Kozyakin, A. Pokrovskii, *Boundedness and Dissipativity of truncated rotations on uniform planar lattices*, Math. Nachr., (1998), vol **191**, 59–81.

[16] F. Durand, B. Host, C. Skau. *Substitution dynamical systems, Bratteli Diagrams, and Dimension Groups.*, Ergod. Th and Dyn. Sys., (1999), vol **19**(4), 953–993.

[17] K. Falconer, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and Sons, (1990) (re-éditer en 1997), 310p.

[18] K. Falconer, *The Hausdorff Dimension of Some Overlapping Construction*, J. Stat. Phys., (1987), vol **47**, Nos. 1/2, 123–132.

[19] S. Ferenczi, C. Holton, L. Zamboni, *Structure of three-interval exchange transformations I : an arithmetic study*, Ann. Inst. Fourier, (2001), **51**, 861–901.

[20] S. Ferenczi, C. Holton, L. Zamboni, *Structure of three-interval exchange transformations II : a combinatorial description of the trajectories*, J. Anal. Math., (2003), **89**, 239–276.

[21] S. Ferenczi, C. Holton, L. Zamboni, *Structure of three-interval exchange transformations III : Ergodic and Spectral Properties*, preprint 2001, I.M.L.

[22] A.Goetz, *Dynamic of piecewise isometries*, PhD Thesis, (1996), University of Chicago, 126p.

[23] A. Goetz *A self-similar example of a Piecewise Isometric Attractor*, Dynamical Systems, (2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 248–258.

[24] A. Goetz, G. Poggiaspalla, *Rotation By* $\pi/7$, preprint 2002.

[25] B. Kahng, *Dynamics of Symplectic Piecewise Affine Elliptic Rotation Maps on Tori*, Erg. Th. and Dyn. Sys., (2002), vol **22**, 483–505.

[26] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1995, 822p.

[27] A. Katok, A. Stepin, *Approximations in Ergodic Theory*, Usp. Math. Nauk., (1967), vol **22**, 81–106 (en russe), traduction : Russian Math. Surveys, (1967), vol **22**, 76–102.

[28] M. Keane, *Interval exchange transformations* Math. Z., (1975), vol **141**, 25–31.

[29] M. Keane, *Non-ergodic interval exchange transformations* Israel. J. Math., (1977), vol **26**, 188–196.

[30] L. Kocarev, C. W. Wu, L. O. Chua, *Complex Behavior in Digital Filter with Overflow Nonlinearity : Analytical Results*, IEEE Transactions on circuits and systems-II : Analog and digital signal processing, (March 1996), vol **43** No 3, 234–246.

[31] I. P. Kornfeld, S. V. Fomin, Y. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982, 486p.

[32] K. L. Koupstov, J. H. Lowenstein, F. Vivaldi, *Quadratic Rational Rotation of the Torus and Dual Lattice Maps*, Nonlinearity, (2002), vol **15** no. 6, 1795–1842.

[33] K. L. Koupstov, J. H. Lowenstein, F. Vivaldi, *Recursive Tiling and Geometry of Piecewise Rotation by* $\pi/7$ preprint 2003, à paraître dans Nonlinearity.

[34] T. Krüger, S. Troubetzkoy, *Markov partitions and shadowing for nonuniformly hyperbolic systems with singularities,* Erg. Th. and Dyn. Sys., (1992), vol **12**, 487–508.

[35] A. N. Livshitz, A. Vershik, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics*, Representation theory and dynamical systems, (1992), Adv. Sov. Math., vol **9**, 185–204.

[36] J. H. Lowenstein, F. Vivaldi, *Embedding dynamics for round-off errors near a periodic orbit*, Chaos, (2000), vol **10**, 747–755.

[37] J. H. Lowenstein, S. Hatjispyros, F. Vivaldi, *Quasi-periodicity, Global Stability and Scaling in a model of Hamiltonian round-off*, Chaos, (1997), vol **7**, 49–66.

[38] J. H. Lowenstein, F. Vivaldi, *Anomalous transport in a model of hamiltonian round-off errors*, Nonlinearity, (1998), , vol **11**, 1321–1350.

[39] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, (1995), Ed. Champs Flammarion, 208p.

[40] R. D. Mauldin, S. C. Williams, *Hausdorff Dimension in Graph Directed Constructions*, Trans. Amer. Math. Soc, (1988), vol **309**, Number 2, 811–828.

[41] H. Masur *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math., (1982), vol **115**, 169–200.

[42] M. Mendes, *Quasi-Invariant Attractors of Piecewise Isometric Systems*, Dis. and Cont. Dyn. Sys., (2003), vol. **9**, no. 2, 323–338.

[43] M. Mendes, M. Nicol, *Piecewise Isometries of Euclidean spaces*, (2002), à paraître dans Int. J. of Bif. and Chaos.

[44] P. Narbel, *The Boundary of iterated morphisms on free semi-groups*, Internat. J. Algebra Comput., (1996), vol **6**, no. 2, 229–260.

[45] G. Poggiaspalla *Self-Similarity in Piecewise Isometric Systems*, preprint 2003.

[46] M. Pollicott, M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, (1998), London Mathematical Society, Student Texts **40**, Cambridge University Press, 179p.

[47] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*, (1987) Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. **1294**, 240p.

[48] G. Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites* Acta Arith., (1979), vol **34**, 315–328.

[49] A. J. Scott, C. A. Holmes, G. J. Milburn, *Hamiltonian mappings and circle packing in the phase space*, Physica D, (2001), vol **155**, 34–50.

[50] E. Seneta, *Nonnegative Matrices and Markov Chains*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1981.

[51] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panor. Synth., (1995), **(1)**, vi-142.

[52] W. A. Veech, *Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod 2*, Trans. Amer. Math. Soc., (1969), vol **140**, 1–33.

[53] W. A. Veech, *Interval Exchange Transformations*, J. Analyse. Math., (1978), vol **33**, 222–272.

[54] W. A. Veech, *Projective Swiss Cheese and uniquely ergodic interval exchange transformations*, Prog. Math., (1981), vol **10**, Bikhauser, Boston, 113–193.

[55] W. A. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. of Math., (1982), vol **115**, 201–242.

[56] W. A. Veech, *The metric theory of interval exchange transformations I, II, III*, Amer. J. Math., (1984), vol **106**, 1331–1421.

[57] A. Vershik, *The adic realizations of the ergodic actions with the homeomorphisms of the Markov compact and the ordered Bratteli diagrams* Zapiski Nauchn. Semin. POMI, (1995), vol **223**, 120–126. English translation : J. Math. Sci. (1997), **87** No.6, 4054–4058.

[58] F. Vivaldi, F. Vladimirov, *Pseudo-randomness of round-off errors in discretized linear maps on the plane*, à paraître dans Int. J. Bifur. and Chaos., (2003).

[59] I. Vladimirov, *Quantized linear systems on integer lattices : frequency-based approach, Part I*, Center for Applied Dynamical Systems and Environmental Modeling, Deakin University, CADSEM Report 96-032, (1996), 1–37, (Geelong, Victoria, Australia).

[60] I. Vladimirov, *Quantized linear systems on integer lattices : frequency-based approach, Part II*, Center for Applied Dynamical Systems and Environmental Modeling, Deakin University, CADSEM Report 96-033, (1996), 1–50, (Geelong, Victoria, Australia).

**Résumé** : Dans cette thèse, on commence par présenter l'étude d'un système dynamique isométrique par morceaux généralisant un exemple connu. On montre qu'il exhibe une infinité de points périodiques hiérarchisés par une structure auto-similaire. L'application de premier retour dans un de ses atomes est une isométrie par morceaux définie sur une partition auto-similaire comportant une infinité d'atomes dont le temps de retour croit exponentiellement. L'auto-similarité observée n'est que partielle, elle ne décrit pas toute la dynamique, mais elle est préservée quand on varie le paramètre principal de manière continue. Cela permet d'identifier les conditions sous lesquelles une auto-similarité est possible. On dégagera ainsi des hypothèses générales qui ont de nombreuses conséquences intéréssantes. En particulier, outre l'existence éventuelle de familles de cellules périodiques descriptibles par un schéma substitutif, on montrera qu'il doit exister un ensemble non vide de points apériodiques. Cet ensemble est fractal, il peut être construit comme un attracteur d'I.F.S graphe-dirigé et sa dimension de Hausdorff peut être calculée. On montrera aussi que la structure géométrique amène tout naturellement à coder la dynamique par une application de Vershik sur un diagramme de Bratteli stationnaire, uni-ergodique sous des conditions naturelles de primitivité. Ce codage particulier peut être "traduit" dans le langage standard de l'application. Cette dynamique symbolique-ci est alors un système substitutif.
Le cadre présenté est suffisament général pour englober la plupart des cas particuliers étudiés jusqu'alors. A titre d'application, on l'utilise pour montrer que le système cité ci-dessus possède une mesure invariante dotée d'une infinité de composantes ergodiques.
**Mots-clés** : Isometries par morceaux, auto-similairité, fractals, constructions graphe-dirigés, diagrammes de Bratteli, substitutions.

Selfsimilarity in Piecewise Isometric Systems

**Abstract** : In this thesis, we introduce a piecewise isometric system generalising a known example. It is shown to display an infinite number of periodic points following a selfsimilar structure. The first-return map into one of its atom is a piecewise isometry defined over a selfsimilar partition with an infinite number of atoms having exponentially increasing return-times. The displayed self-similarity describes only a part of the dynamics, but it is stable under continuous variations of the main parameter. This property enables us to identify the geometric and algebraic conditions involved in the birth of a self-similar scheme. We then give general assumptions which imply not only the existence of families of periodic cells whose codes follow a substitutive scheme, but the existence of a non-empty set of aperiodic points. This set is fractal, it can be described by a graph-directed construction and its Hausdorff dimension can be computed explicitly. Moreover, we show that the geometric structure leads naturally to measure-theoretic conjugate the dynamics with a Vershik map over a stationary Bratteli diagram, which is uniquely ergodic under natural primitivity conditions. This coding can be "translated" into the regular coding of the piecewise isometry, leading to a substitution dynamical system.
The given framework is general enough to handle many of the piecewise isometries studied up to now. We use it to show that the system mentioned above has an invariant measure with an infinite number of ergodic components.
**Keywords** : Piecewise isometries, selfsimilarity, fractals, graph-directed contructions, Bratteli diagrams, substitutions.

**Discipline** : Physique Mathématique.
**Laboratoire** : Centre de Physique Theorique, Campus de Luminy, Case 907, 13288 Marseille cedex 9, France.