HAL
open science

Quelques problèmes mathématiques relatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur

Nadia Benhaboucha

To cite this version:

Nadia Benhaboucha. Quelques problèmes mathématiques relatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2003. Français. NNT : . tel-00005482

HAL Id: tel-00005482

https://theses.hal.science/tel-00005482v1

Submitted on 29 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Table des matières

Introduction générale **3**
Références 6

1 Sur la modélisation d'un couplage film mince-milieu poreux mince **9**
1.1 Introduction 9
1.2 Position du problème, notations 10
1.2.1 Position du problème 10
1.2.2 Adimensionnement 11
1.2.3 Changement d'échelle et formulation variationnelle 12
1.3 Estimations et convergences 14
1.3.1 Hypothèses sur les conditions aux limites 14
1.3.2 Estimations et convergence de la pression dans le film mince . . . 15
1.3.3 Prolongement et convergence de la pression dans le milieu poreux 17
1.3.4 Convergence de la vitesse dans le film mince et dans le milieu poreux 23
1.4 Equations limites dans le film mince et le milieu poreux 26
1.4.1 Equation limite dans le film mince 26
1.4.2 Equation limite dans le milieu poreux 27
1.5 Cas critique - Equation de Reynolds généralisée 30
1.5.1 Détermination du cas critique 30
1.5.2 Continuité de la pression à l'interface : 31
1.5.3 Détermination de la vitesse tangentielle à l'interface Σ 34
1.5.4 Equation de Reynolds généralisée 36
1.6 Application et comparaison avec d'autres modèles 38
1.6.1 Un dispositif physique particulier 38
1.6.2 L'équation de Reynolds correspondante 39
1.6.3 Comparaison avec d'autres modèles 40
1.6.4 Résultats numériques 44
Références 53

2 Sur la prise en compte des rugosités de surface **54**
2.1 Introduction 54
2.2 Notations de base 56
2.2.1 Définitions et notations 56
2.2.2 Les équations de Stokes 57
2.2.3 Rescaling 57
2.3 Etude asymptotique quand $\eta \to 0$ à ϵ fixé 59
2.3.1 Comportement de la vitesse 59

2.3.2 Estimation sur la pression et détermination du problème limite . . 60
2.3.3 Comportement asymptotique des contraintes 64
2.4 Etude asymptotique quand $\epsilon \to 0$ 71
2.4.1 Rappels sur la convergence double échelle : 71
2.4.2 Homogénéisation 74
2.4.3 Détermination du problème limite 77
2.4.4 Contraintes homogénéisées 80
2.5 Etude asymptotique quand le rapport $\lambda = \dfrac{\eta}{\epsilon}$ est constant 83
2.5.1 Formulation variationnelle du problème de Stokes dans un domaine indépendant de ϵ 84
2.5.2 Estimations 85
2.5.3 Convergence de la pression 88
2.5.4 Convergence double échelle de la vitesse 92
2.5.5 Problèmes locaux 95
2.5.6 Convergence des contraintes 104
2.6 Etude asymptotique quand λ tend vers zéro 109
2.6.1 Convergence des solutions des problèmes locaux 109
2.6.2 Régularité en x des solutions des problèmes locaux 112
2.6.3 Convergence des contraintes quand λ tend vers zéro 124
Références 128

3 Nouvelles conditions aux limites associées à un écoulement micropolaire 131
3.1 Introduction 131
3.2 Problem situation 132
3.2.1 Basic micropolar equations : 132
3.2.2 Rescaling 134
3.2.3 Weak formulation of the problem 135
3.3 Existence and uniqueness 137
3.3.1 Existence and uniqueness with mixed formulation 137
3.3.2 Existence and uniqueness with fixed point procedure 140
3.4 Thin film approximation 141
3.4.1 Rescaling and estimates 141
3.4.2 Asymptotic study 144
3.4.3 Generalized micropolar Reynolds equation 150
3.4.4 Micropolar Reynolds equations for large β 154
3.5 Comparison with previous work 156
3.5.1 Definitions 156
3.5.2 The slider bearing 157
3.5.3 The journal bearing 163
Bibliographie 165

Introduction générale

Dans les écoulements de faible épaisseur, lorsque l'épaisseur diminue, l'influence relative des effets de surface par rapport aux effets de volume augmente. Il convient alors d'accorder une importance particulière à ce qui se passe à l'interface fluide solide et qui induit les conditions aux limites à imposer aux équations décrivant l'écoulement. Le point de départ de nos travaux est l'équation de Stokes.

Usuellement, la plupart des travaux mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes supposent des conditions d'adhérence aux parois, plus rarement des conditions de glissement ou des conditions en pression. Dans le cas des écoulements de faible épaisseur, on sait justifier [2], [5], [11], [15] par des techniques asymptotiques l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds, laquelle prend en compte implicitement les conditions limites aux parois :

$$\text{div}\,\left(h^3\nabla p\right) = \text{div}\,(Sh) \tag{1}$$

où S est un vecteur donné et h l'épaisseur de l'écoulement.

Celle-ci permet d'obtenir la pression hydrodynamique, indépendante de la variable décrivant l'épaisseur de l'écoulement. C'est l'analogue de l'équation des plaques en élasticité. On sait aussi obtenir des modèles asymptotiques dans des dispositifs comportant des zones de faible épaisseur de fluide et des zones d'épaisseurs normales [16].

Le but de ce travail est l'obtention rigoureuse d'équations du type de Reynolds lorsque l'on prend en compte pour décrire ce qui se passe au voisinage de la paroi des conditions plus réalistes que les conditions usuelles d'adhérence. Sera ainsi successivement étudiée :
-La présence d'un milieu poreux mince modélisant une microstructure attachée à la paroi,
-La rugosité de la paroi,
-L'interaction particule-paroi pour un écoulement micropolaire.

Dans tous les cas, la démarche sera la même. On établira un théorème d'existence pour les équations de type Navier-Stokes adaptées à la configuration physique considérée et on mettra en évidence plusieurs petits paramètres. En effet en dehors du paramètre "primordial" que constitue l'épaisseur de l'écoulement, chacun des phénomènes étudiés fait intervenir des paramètres propres qu'il faut mettre à l'échelle par rapport à l'épaisseur.

Des changements d'échelles permettront d'obtenir des estimations dans un domaine "fixe". On passera à la limite par des techniques asymptotiques ou d'homogénéisation

double échelle. On discutera ensuite des propriétés de ces équations limites, en particulier compte tenu de l'ordre de grandeur des paramètres spécifiques.

Dans le chapitre 1, on étudie le couplage entre un film fluide mince et un milieu poreux mince modélisant une microstructure attachée à une paroi. En effet, en raison des réactions physico-chimiques entre le fluide et la paroi, il se forme à la surface de celle-ci une couche extrêmement fine. Cette couche ne peut-être négligée dans les écoulements de très faible épaisseur. Tichy [18] a proposé de la modéliser par un milieu poreux faisant intervenir deux paramètres, son épaisseur et sa porosité. Il obtient ainsi un modèle complet avec d'une part l'équation de Reynolds classique dans l'écoulement mince et d'autre part une équation de type Darcy unidirectionnel dans le milieu poreux. La difficulté est de coupler ces deux équations en pression -vitesse. Plusieurs possibilités de couplage sont discutées dans [18] et plusieurs équations asymptotiques sont proposées. En s'inspirant des travaux de [4], nous montrons l'existence d'un rapport critique entre la taille de la microstructure (dans le milieu poreux) et celle de l'épaisseur du fluide "libre" pour laquelle une partie des hypothèses de [18] (égalité des deux pressions dans les deux milieux) est satisfaite. Cependant l'étude rigoureuse des conditions de raccordement des vitesses à l'interface film fluide-milieu poreux conduit à rejeter la condition de continuité des vitesses proposée et à la remplacer par une condition de glissement sur l'interface, les vitesses dans les deux milieux convergeant à des ordres de grandeur différents.

On établit ainsi rigoureusement l'obtention d'une nouvelle équation de Reynolds. On présente des résultats numériques montrant les différences (dans un cas simple) entre les répartitions de pression calculées par les différents modèles. Enfin, on discute de l'interprétation à donner à la notion de rapport critique et à son utilisation dans la pratique pour des données géométriques effectuées.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'étude d'un écoulement de faible épaisseur quand une des surfaces est rugueuse. Ceci peut être relié à l'étude du chapitre précédent en considérant un milieu poreux qui ne comporterait qu'une seule couche. La prise en compte de la rugosité dans un écoulement lubrifié a été et est toujours l'objet de nombreux travaux tant mécaniques que mathématiques. Les rugosités traduisent des défauts de surface liés à l'usure des mécanismes ou créés volontairement dans le but par exemple de faciliter l'écoulement du fluide. Dans ce dernier cas leur forme et leur fréquence sont parfaitement connues et on peut valablement utiliser la théorie de l'homogénéisation périodique pour obtenir une équation macroscopique décrivant l'ensemble de l'écoulement. Clairement les deux petits paramètres à envisager sont l'épaisseur η et la période ϵ des rugosités. Des travaux antérieurs [3], [13], [17], [10] ont permis d'obtenir une équation de Reynolds homogénéisée à partir de l'équation de Reynolds classique dite, "équation de Reynolds rugueuse" dans laquelle les coefficients (décrivant la hauteur du fluide $h(x)$) oscillent :

$$\operatorname{div}(A(x).\nabla p) = \operatorname{div}(b(x)) \tag{2}$$

Tant du point de vue mécanique que mathématique ceci revient à considérer l'équation (1) où $h(x)$ est une fonction de η et de ϵ. On fait d'abord tendre η vers zéro (approche asymptotique) puis ϵ vers zéro (homogénéisation) et donc ceci impose que $\epsilon >> \eta$. Dans [4], on a étudié le cas où ϵ et η sont du même ordre de grandeur ($\lambda = \dfrac{\eta}{\epsilon}$ constante). Il

a été montré de manière en partie formelle qu'en passant à la limite (ϵ tend vers zéro) dans l'équation de Stokes, on obtenait une équation de Reynolds généralisée dont les coefficients dépendent de λ. Faisant tendre ensuite λ vers zéro, l'équation de Reynolds limite (2) a été trouvée.

Dans le chapitre 2 de ce travail, on utilise la technique de la double échelle pour justifier rigoureusement les résultats précédents, ceux ci concernant essentiellement les convergences des pressions et des vitesses. En outre, la convergence des contraintes normales et tangentielles sur les surfaces lisses et rugueuses est effectuée. On étudie donc d'abord le cas où η puis ϵ tendent vers zéro sans hypothèse forte sur h. On retrouve en particulier les résultats des mécaniciens [14], [17] sur les contraintes homogénéisées. L'étude de la convergence de l'équation de Stokes à λ fixé est beaucoup plus complexe car il faut effectuer simultanément une homogénéisation non uniforme et une étude asymptotique sur un ouvert oscillant. Il faut noter à ce propos que le résultat de convergence sur une partie des contraintes n'est pas optimal, la convergence n'étant obtenue qu'après multiplication par une puissance de ϵ trop élevée pour retrouver ce que l'on obtient formellement.

Dans le chapitre 3, nous considérons les équations décrivant un écoulement micropolaire [1], [12] :

$$-(\nu+\nu_\gamma)\triangle u+\nabla p=2\nu_\gamma \operatorname{rot}\omega$$
$$-(c_a+c_d)\triangle\omega+4\nu_\gamma\omega=2\nu_\gamma \operatorname{rot} u$$
$$\operatorname{div} u=0$$

Celles-ci comportent outre les champs de pression et de vitesse un troisième champ : celui des microrotations des particules "rigides" présentes dans le fluide. Ces équations sont utilisées par exemple pour décrire l'écoulement dans les vaisseaux sanguins ou un lubrifiant additivé. Elles nécessitent de connaître les conditions aux limites pour les vitesses et les microrotations. On utilise habituellement des conditions de type Dirichlet et on sait alors obtenir [7], [6] une équation limite pour des écoulements micropolaires de faible épaisseur. Dans [8], Bessonov propose de remplacer une partie des conditions limites précédentes par une condition de couplage entre la microrotation et le rotationnel de la vitesse :

$$\omega=\frac{\alpha}{2}\nabla\times u$$

Il justifie cette approche par des mesures expérimentales [9] mettant en évidence l'existence d'une viscosité frontière dans la partie proche de l'interface fluide-solide différente de la viscosité du reste du fluide et reliée au paramètre α. En couplant cette condition avec une condition de Dirichlet sur la vitesse tangentielle :

$$u_1=s$$

où s est la vitesse tangentielle de la paroi, il obtient formellement une équation de Reynolds "micropolaire" genéralisée. En cherchant à justifier de manière rigoureuse cette démarche, nous montrons qu'il n'est pas possible de considérer simultanément ces deux conditions aux limites. Pour obtenir un problème bien posé, nous avons remplacé la condition aux limites d'adhérence en vitesse par une condition de glissement :

$$(\nabla\times\omega)_1=\frac{-2\nu_\gamma}{c_a+c_d}\beta(u_1-s)$$

Dans ce cadre, nous avons obtenu un théorème d'existence et d'unicité pour les solutions d'une formulation faible du problème couplé. Après passage à la limite, compte tenu de la faible épaisseur de l'écoulement, nous obtenons une famille d'équation de Reynolds dépendant de paramètres α et β introduits dans les conditions aux limites. Des résultats numériques permettent de voir l'influence de ces paramètres sur les caractéristiques mécaniques dans le cadre d'un dispositif lubrifié particulier.

Bibliographie

[1] E.L Aero, A.N Bulygin and E.V Kuvshinskii, *A Symetric hydromechanics*, J. Appl. Math. Mech. 29 N° 2 (1965) 297-308 (in Russian)

[2] A. Assemein, G. Bayada and M. Chambat, *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow*, Publications du laboratoire d'Analyse Numérique, Université Lyon 1, N° 121, Octobre 1991.

[3] G. Bayada et J.B. Faure, *Application des techniques d'homogénéisation à des phénomènes de rugosité en lubrification hydrodynamique*, PUBLICATIONS U.A. 740 CNRS Lyon St Etienne, 32 (1984) 1-52.

[4] G. Bayada and M. Chambat, *On interface conditions for a thin film flow past a porous medium*, SIAM J. Math. anal., 26, 5,1113-1129 (1995).

[5] G. Bayada and M. Chambat, *The transition between the Stokes Equation and Reynolds Equation. A mathematical Proof*, Applied Mathematics and Optimisation 14, 73-93 (1986).

[6] G. Bayada, M. Chambat, S.R. Gamouana, *About thin film micropolar asymptotic equations,* Quart. Appl. Math. 59 N° 3 (2001) 413–439.

[7] G. Bayada, G. Łukaszewicz, *On micropolar fluids in the theory of lubrication. Rigorous derivation of an analogue of the Reynolds equation*, Int. J. Engng Sci. Vol. 34 N° 13 (1996) 1477-1490.

[8] N.M.Bessonov, *Boundary viscosity conception in hydrodynamical theorey of lubrication*, Preprint 81, Russian Academy of Sciences, Institute of the Problems of Mechanical Engineering, St-Petersbourg, 1993.

[9] N.M.Bessonov, *A new generalization of the Reynolds equation for a micropolar fluid and its application to bearing theory*, Tribology International (1994) 105-108.

[10] A.W. Bush et G.D. Hugues, *The average flow model*, Proceedings of the X th. leeds-Lyon Symposium on new numerical and experimental methods in lubrification, 1984.

[11] G. Cimatti, *How the Reynolds Equation is related to the Stokes Equation.* Appl Math. and Optim. ,10 (1983), 267-274.

[12] A.C. Eringen, *Theory for micropolar fluid*, J .Math .Mech. 16 N° 1 (1966) 1-16.

[13] J.B. Faure, *Application des techniques d'homogénéisation à la prise en compte des phénomènes de rugosité en lubrification hydrodynamique*, thèse, lyon 1, 1986.

[14] N. Letalleur, *Influence de la gómétrie des aspérités dans un contact hydrodynamique lubrifié ultra mince. Effets locaux et comportement moyen*, Thèse, Insa-Lyon ISAL 0113 2000.

[15] S. A. Nazarov *Asymptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid.* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 31 (1990), N° 2, 131-144.

[16] G. Panasenko, *Method of asymptotic partial decomposition of domain*, Math. Models Methods Appl. Sci. 8 (1998), N° 1, 139-156.

[17] N. Patir et H.S. Cheng, *An average flow model for determining effects of three dimensional roughness in partial hydrodynamic roughness*, J. of Lub. Tech., Trans. ASME, F100 (1978) 12-17.

[18] J.A. Tichy, *A Porous media model for thin film Lubrication*, ASME J. of Tribology, 117 (1995), 16-21.

Chapitre 1

Sur la modélisation d'un couplage film mince-milieu poreux mince

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on cherche à justifier le type de conditions aux limites à imposer à l'interface d'un écoulement de faible épaisseur et d'un milieu poreux adjacent. Cette question a déjà été largement étudiée si l'on ne tient pas compte du caractère mince de l'écoulement, tant du point de vue mécanique et formel [2], [8], [6], [13], [14] que du point de vue mathématique [6]. D'autre part on peut trouver des références sur cette question lorsqu'on considère un écoulement mince le long d'un milieu poreux d'épaisseur "non mince", on peut citer des travaux mécaniques [10], [12] et mathématiques [1], [3] qui font état de la continuité à l'interface pour la pression, alors que ceci n'est pas vrai pour la vitesse tangentielle. Les résultats sont obtenus pour un rapport critique entre l'épaisseur du film mince et la taille de la microstructure poreuse, ce rapport intervenant aussi dans d'autres études faisant intervenir un couplage de telles géométries [4], [7].

Dans notre étude, le milieu poreux est introduit dans le but de modéliser une couche limite à l'interface fluide-solide où la réalité microscopique est difficile à décrire. On peut donc dans la situation où il y a deux couches minces adjacentes introduire trois petits paramètres : la taille ϵ de la microstructure du milieu poreux, l'épaisseur $\epsilon^s (s > 0)$ du film mince et l'épaisseur $\epsilon^\alpha (0 < \alpha < 1)$ du milieu poreux mince ; α est supposé inférieur à 1 pour que ce milieu poreux comporte plusieurs couches.

On montrera qu'il existe une taille critique entre ces paramètres :

$$\alpha = 3s - 2$$

pour laquelle l'analyse asymptotique par estimations a priori, convergence simple et double échelle, démontrera l'existence d'un modèle asymptotique bien posé, où la pression sera du même ordre de grandeur dans les deux milieux et sera solution d'une équation globale de Reynolds généralisée :

$$\text{div} \left((A + \frac{h^3}{12}) \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h}{2} \right)$$

Le plan du chapitre est le suivant. Dans le paragraphe 1.2 après avoir précisé les notations, on introduira les trois petits paramètres à travers des normalisations et des

changements de variables dans les équations de Stokes de l'écoulement général. Dans le paragraphe 1.3, on effectuera une étude asymptotique séparément dans chacun des deux milieux à partir d'estimations a priori globales ; ceci permet de démontrer des résultats de convergence pour les vitesses et les pressions. Des équations de type Darcy seront ensuite obtenues dans le paragraphe 1.4. L'introduction du cas critique au paragraphe 1.5, qui couple les différentes données géométriques, permet de définir une équation limite globale pour la pression. Au dernier paragraphe, on montrera que la situation critique qui permet d'obtenir ce modèle limite est en fait générique des situations mécaniques réelles. Enfin, des résultats numériques compareront ce modèle avec deux autres modèles proposés dans la littérature mécanique [18].

1.2 Position du problème, notations

1.2.1 Position du problème

On considère un domaine mince E de $\mathbb{R}^n, (n = 2, 3)$ formé d'une partie poreuse E_1 et d'une partie "fluide" E_2 décrites par (dans le cas $n = 3$) :

$$E_1 = \{(Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{R}^3; \quad Z = (Z_1, Z_2) \in w, \quad h_2(Z) < Z_3 < h_2(Z) + h_1(Z)\}$$

$$E_2 = \{(Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{R}^3; \quad Z = (Z_1, Z_2) \in w, \quad 0 < Z_3 < h_2(Z)\}$$

où $h_i, i = 1, 2$ sont des fonctions définies sur un ouvert borné régulier w du plan (Z_1, Z_2). (voir Figure 1.1).

La microstructure du milieu poreux est formée de cellules réparties périodiquement avec une période l, contenant des obstacles solides.

Dans la partie fluide de $E = E_1 \cup E_2$, on suppose que l'écoulement vérifie les équations de Stokes :

$$\begin{cases} \mu \triangle u = \nabla p \\ \text{div } u = 0 \end{cases}$$

où μ est la viscosité du fluide, u le champ de vitesse et p la pression.

On suppose des conditions d'adhérence à la paroi, sous la forme :

$$u = g \quad \text{sur} \quad \partial E.$$

On note L une dimension caractéristique de w, et on définit le "petit " paramètre sans dimension $\epsilon = \dfrac{l}{L}$.

Pour tenir compte du fait que E_1 et E_2 sont minces et qu'ils sont définis à partir de h_1 et h_2, on exprime la dépendance en ϵ des fonctions h_1 et h_2 par :

$$h_1(Z) = L\epsilon^{\alpha} H_1(Z), \qquad h_2(Z) = L\epsilon^{s} H_2(Z)$$

où $H_i, i = 1, 2$ sont deux fonctions régulières indépendantes de ϵ, avec $0 < \alpha < 1$ et $s > 0$.

La condition $\alpha < 1$ est nécessaire pour que le milieu poreux soit formé de plusieurs couches de cellules.

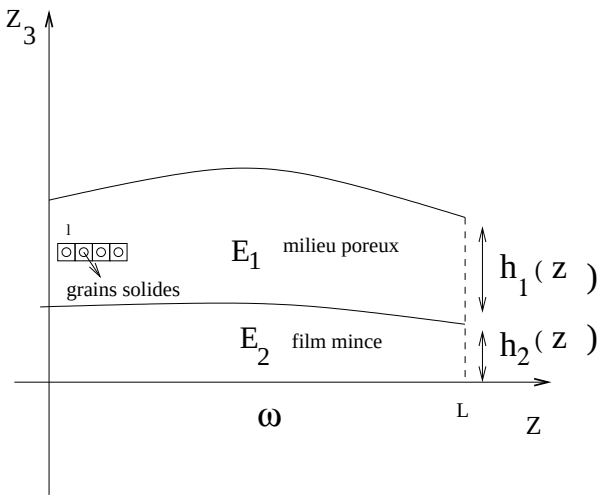

FIG. 1.1 – Géométrie du domaine E

1.2.2 Adimensionnement

Pour adimensionner le domaine, on introduit le changement de variables suivant :

$$z_i = \frac{Z_i}{L} \qquad i = 1, 2, 3$$

et on utilisera la notation $\hat{}$ sur les fonctions et les domaines en z_i. Avec ce changement de variables E, E_1 et E_2 exprimés en variables z_i sont implicitement des domaines dépendants de ϵ notés respectivement $\hat{D}^\epsilon$, $\hat{\Omega}^\epsilon$ et $\hat{F}_2^\epsilon$. ($\hat{\Omega}^\epsilon$ étant le milieux poreux dont la partie fluide sera notée ultérieurement $\hat{F}_1^\epsilon$. $\hat{F}_2^\epsilon \subset \hat{\Omega}^\epsilon$).

Le milieu poreux $\hat{\Omega}^\epsilon$ est maintenant formé de cellules réparties périodiquement de période ϵ. Chacune de ces cellules est supposée être obtenue par translation et homothétie à partir d'une cellule de base définie dans le cube $Y = [0, 1]^3$ qui contient une partie solide notée T, telle que $Y - T$ est connexe.

<u>Hypothèses sur $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$</u> :
On supposera que les fonctions $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$ sont de classe $\mathcal{C}^1(\hat{w})$ et qu'il existe des constantes a_i et b_i telles que :

$$0 < a_i \leq \hat{H}_i(z) \leq b_i \quad \forall i = 1, 2 \quad \forall z \in \hat{w}$$

On note $\hat{T}^\epsilon$ la réunion des grains solides du milieu poreux et $\hat{F}_1^\epsilon$ l'ouvert associé à la partie fluide, supposé connexe et de frontière régulière.

Le fluide occupe le volume $\hat{F}^\epsilon = \hat{F}_1^\epsilon \cup \hat{F}_2^\epsilon \cup \hat{\Sigma}^\epsilon$, où $\hat{\Sigma}^\epsilon$ est" l'interface" entre le milieu poreux et le film mince définie par : $z_3 = \epsilon^s \hat{H}_2(z)$.
On note : $\hat{\Gamma}_+^\epsilon, \hat{\Gamma}_-^\epsilon, \hat{\Gamma}_l^\epsilon$ les frontières supérieures, inférieures et latérales de $\hat{D}^\epsilon$:

$$\hat{\Gamma}_+^\epsilon = \{(z, z_3),\ z \in \hat{w} \ \text{ et } \quad z_3 = \epsilon^\alpha \hat{H}_1(z) + \epsilon^s \hat{H}_2(z)\}$$
$$\hat{\Gamma}_-^\epsilon = \{(z, z_3),\ z \in \hat{w}, \quad z_3 = 0\}$$

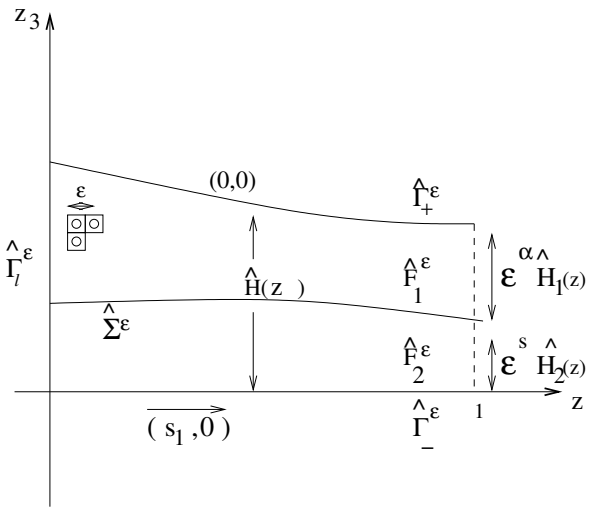

FIG. 1.2 – Géométrie du domaine $\hat{D}^\epsilon$

$$\hat{\Gamma}_l^\epsilon = \{(z, z_3) \;\; z \in \partial\hat{w} \;\; \text{et} \;\; 0 \leq z_3 \leq \epsilon^\alpha \hat{H}_1(z) + \epsilon^s \hat{H}_2(z) \;\}$$

On notera s_0 une valeur caractéristique de la vitesse au bord, et on adimensionne la vitesse et la pression de la façon suivante :

$$\hat{u}^\epsilon = \frac{u}{s_0}, \qquad \hat{g}^\epsilon = \frac{g}{s_0}$$

$$\hat{p}^\epsilon = \frac{L}{\mu s_0} p$$

Dans $\hat{F}^\epsilon$ le fluide satisfait maintenant les équations de Stokes normalisées :

$$\begin{cases} \triangle \hat{u}^\epsilon = \nabla \hat{p}^\epsilon & \text{dans } \hat{F}^\epsilon \\ \text{div} \;\; \hat{u}^\epsilon = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

associées aux conditions aux limites :

$$\hat{u}^\epsilon = \hat{g}^\epsilon \quad \text{sur} \;\; \partial\hat{F}^\epsilon$$

où

$$\hat{g}^\epsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\hat{F}^\epsilon)^3 \;\; \text{et} \int_{\partial\hat{F}^\epsilon} \hat{g}^\epsilon . \hat{n} \; d\sigma = 0$$

$\hat{n}$ est le vecteur unitaire normal à la frontière de $\hat{F}^\epsilon$, orienté vers l'extérieur du domaine, $\hat{g}^\epsilon$ sera précisé dans la suite en 1.3.1.

1.2.3 Changement d'échelle et formulation variationnelle

Afin d'obtenir des estimations sur $\hat{u}^\epsilon$ et $\hat{p}^\epsilon$ dans un domaine fixe dans lequel l'interface film mince-milieu poreux sera horizontale, on introduit le changement de variables

suivant :

$$\begin{cases} x_i = z_i, \quad i = 1,2 \text{ et } \; x_3 = \dfrac{z_3 - \epsilon^s \hat{H}_2(z)}{\epsilon^\alpha} \;\; \text{si} \;\; (z_1, z_2, z_3) \in \hat{F}_1^\epsilon \\ \\ x_i = z_i, \quad i = 1,2 \text{ et } \; x_3 = \dfrac{z_3 - \epsilon^s \hat{H}_2(z)}{\epsilon^s} \;\; \text{si} \;\; (z_1, z_2, z_3) \in \hat{F}_2^\epsilon \end{cases} \tag{1.2}$$

Les fonctions et les domaines après changement de variables seront notés sans " ^". Les domaines $T^\epsilon, F^\epsilon, F_1^\epsilon$ restent dépendants de ϵ . Ceux qui deviennent indépendants de ϵ seront notés : $\Omega, D, F_2, \Gamma_-, \Gamma_+, \Gamma_l$ et Σ. (voir figure 1.3).

On introduit les opérateurs suivants :

$$\nabla_{\alpha,s} = (\frac{\partial}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}, \; \frac{\partial}{\partial x_2} - \epsilon^{s-\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \; \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$\nabla_s = (\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}, \; \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \; \frac{1}{\epsilon^s}\frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$\text{div}_{\alpha,s}\phi = \sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} - \epsilon^{s-\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial x_3}) + \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}$$

$$\text{div}_s\phi = \sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} - \frac{\partial H_2}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial x_3}) + \frac{1}{\epsilon^s}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}$$

La formulation variationnelle correspondante à (1.1) est :

Trouver u^ϵ dans $(H^1(F^\epsilon))^3$, p^ϵ dans $L^2(F^\epsilon)/\mathbb{R}$, tels que :

$$\epsilon^\alpha \int_{F_1^\epsilon} \nabla_{\alpha,s}u^\epsilon.\nabla_{\alpha,s}\phi \, dx\, dx_3 + \epsilon^s \int_{F_2} \nabla_s u^\epsilon.\nabla_s\phi \, dx\, dx_3 = \epsilon^\alpha \int_{F_1^\epsilon} p^\epsilon \text{div}_{\alpha,s}\phi \, dx\, dx_3$$

$$+\epsilon^s \int_{F_2} p^\epsilon \text{div}_s\phi \;\; dx\, dx_3 \qquad\qquad \forall \phi \;\in H_0^1(F^\epsilon)^3 \tag{1.3}$$

$$\epsilon^\alpha \int_{F_1^\epsilon} \text{div}_{\alpha,s}u^\epsilon \varphi \, dx\, dx_3 + \epsilon^s \int_{F_2} \text{div}_s u^\epsilon \varphi \, dx\, dx_3 = 0 \qquad\qquad \forall \varphi \in L^2(F^\epsilon) \tag{1.4}$$

$$u^\epsilon = g^\epsilon \qquad \text{sur} \quad \partial F^\epsilon$$

L'existence et l'unicité de la solution sont bien connues [17].

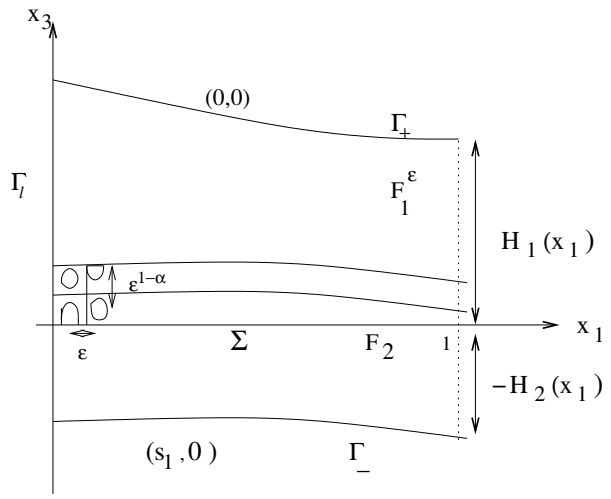

FIG. 1.3 – La géométrie du domaine D

1.3 Estimations et convergences

Dans toute la suite de ce chapitre, on travaillera en dimension 2, on notera x_1 à la place de $x = (x_1, x_2)$, où x_1 appartient à $w =]0,1[$, et on notera $(u_1^\epsilon, u_3^\epsilon)$ les deux composantes du vecteur vitesse u^ϵ. Cependant, tous nos calculs peuvent être généralisés à la dimension 3 et on donnera les résultats correspondants dans la remarque 1.6.2.
On notera systématiquement par K des constantes indépendantes de ϵ, la notation K_A pourra préciser la dépendance de cette constante par rapport à l'objet A.

1.3.1 Hypothèses sur les conditions aux limites

La valeur aux bords de la vitesse est supposée vérifier :

$$g^\epsilon = (g_1, \epsilon^s g_3)$$

où les g_i appartiennent à $H^{\frac{1}{2}}(\partial F^\epsilon)$, sont indépendants de ϵ et tels que :

$$g_i = 0 \ \text{ sur } \partial F_1^\epsilon - \Sigma$$
$$g = (s_1, 0) \ \text{ sur } \ \Gamma_-$$

où s_1 est une fonction donnée dans $\mathcal{C}^1(w)$, avec la condition de compatibilité suivante :

$$\int_{-H_2(0)}^{0} g_1(0, x_3)\, dx_3 = \int_{-H_2(1)}^{0} g_1(1, x_3)\, dx_3$$

Pour construire un relèvement à divergence nulle de ces conditions aux bords, il est utile d'introduire le changement de variables provisoire différent de (1.2) :

$$z_1' = z_1, \qquad z_3' = \frac{z_3}{\epsilon^s}.$$

Ce changement de variables permet de dilater le film mince en un domaine $\hat{\hat{F}}_2$ qui ne dépend pas de ϵ. Les domaines et les fonctions correspondants seront notés avec $\hat{\hat{}}$.

On note :

$$\hat{\hat{g}} = \begin{cases} (\hat{\hat{g}}_1, \hat{\hat{g}}_3) & \text{sur } \partial\hat{\hat{F}}_2 - \hat{\hat{\Sigma}} \\ 0 & \text{sur } \hat{\hat{\Sigma}} \end{cases}$$

Et on a :

$$\int_{\partial\hat{\hat{F}}_2} \hat{\hat{g}}.n \, d\sigma = - \int_{-\hat{\hat{H}}_2(0)}^{0} \hat{\hat{g}}_1(0, z_3') \, dz_3' + \int_{-\hat{\hat{H}}_2(1)}^{0} \hat{\hat{g}}_1(1, z_3') \, dz_3' = 0$$

Les hypothèses faites sur $\hat{\hat{g}}$ permettent de construire un relèvement $\hat{\hat{J}}$, indépendant de ϵ, qui appartient à $H^1(\hat{\hat{F}}_2)^2$ tel que : [5]

$$\mathrm{div}_{z_1' z_3'} \hat{\hat{J}} = 0$$

En revenant aux variables x_1, x_3, on pose :

$$J^\epsilon(x_1, x_3) = (J_1, \epsilon^s J_3) = (\hat{\hat{J}}_1, \epsilon^s \hat{\hat{J}}_3)$$

J^ϵ prolongé par zéro dans F_1^ϵ, appartient à $H^1(F^\epsilon)$, vérifie $\mathrm{div}_s \, J^\epsilon = 0$ et les mêmes conditions aux bords que la vitesse u^ϵ.

1.3.2 Estimations et convergence de la pression dans le film mince

Lemme 1.3.1. *On a les estimations suivantes :*

$$\|\nabla_{\alpha,s} u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^4} \leq \frac{K}{\epsilon^{\frac{\alpha+s}{2}}} \qquad \|\nabla_s u^\epsilon\|_{L^2(F_2)^4} \leq \frac{K}{\epsilon^s}$$

Preuve

On choisit $\phi = u^\epsilon - J^\epsilon$ comme fonction test dans (1.3) où J^ϵ est défini dans le paragraphe 1.3.1. On prolonge u^ϵ par zéro dans T^ϵ :

$$\int_\Omega \epsilon^\alpha (\nabla_{\alpha,s} u^\epsilon)^2 \, dx_1 \, dx_3 + \epsilon^s \int_{F_2} (\nabla_s u_1^\epsilon)^2 \, dx_1 \, dx_3 - \epsilon^s \int_{F_2} \nabla_s u_1^\epsilon . \nabla_s J_1 \, dx_1 \, dx_3 +$$
$$\epsilon^s \int_{F_2} (\nabla_s u_3^\epsilon)^2 \, dx_1 \, dx_3 - \epsilon^{2s} \int_{F_2} \nabla_s u_3^\epsilon . \nabla_s J_3 \, dx_1 \, dx_3 = 0$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\epsilon^\alpha \|\nabla_{\alpha,s} u^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)^4} + \epsilon^s \left(\|\nabla_s u_1^\epsilon\|_{L^2(F_2)^2} - \frac{1}{2} \|\nabla_s J_1\|_{L^2(F_2)^2} \right)^2 +$$

$$\epsilon^s \left(\|\nabla_s u_3^\epsilon\|_{L^2(F_2)^2} - \frac{\epsilon^s}{2} \|\nabla_s J_3\|_{L^2(F_2)^2} \right)^2 \leq \frac{\epsilon^s}{4} \|\nabla_s J_1\|^2_{L^2(F_2)^2} + \frac{\epsilon^{3s}}{4} \|\nabla_s J_3\|^2_{L^2(F_2)^2}$$

Comme

$$\|\nabla_s J_i\|^2_{L^2(F_2)^2} \leq \frac{K}{\epsilon^{2s}} \quad i = 1, 3$$

On en déduit le résultat. □

Maintenant on va déduire des estimations sur la pression dans F_2, qui nous permettront de passer à la limite en choisissant une détermination de cette pression. Plus précisément, on a :

Lemme 1.3.2. *Soit p_2^ϵ la restriction à F_2 de p^ϵ solution de* (1.3)*, dont la détermination est choisie telle que $\int_{F_2} p_2^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 = 0$. Il existe une sous suite de p_2^ϵ telle que $\epsilon^{2s} p_2^\epsilon$ converge faiblement vers $p_2^\star$ dans $L^2(F_2)$ qui ne dépend pas de x_3.*

Preuve

Soit ϕ dans $H_0^1(F_2)$, $(\phi, 0)$ prolongé par zéro dans Ω est une fonction-test pour l'équation (1.3) :

$$\epsilon^s \int_{F_2} \nabla_s u_1^\epsilon . \nabla_s \phi \, dx_1 \, dx_3 = -\epsilon^s \langle \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_3}, \phi \rangle_{H^{-1}(F_2), H_0^1(F_2)}$$

En utilisant les estimations du lemme 1.3.1 sur la vitesse, on obtient :

$$\| \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_3} \|_{H^{-1}(F_2)} \leq \frac{K}{\epsilon^{2s}}$$

De même, en prenant $(0, \phi)$ comme fonction-test pour l'équation (1.3), on obtient :

$$\epsilon^s \int_{F_2} \nabla_s u_3^\epsilon . \nabla_s \phi \, dx_1 \, dx_3 = -\langle \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_3}, \phi \rangle_{H^{-1}(F_2), H_0^1(F_2)}$$

Ce qui implique :

$$\| \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_3} \|_{H^{-1}(F_2)} \leq \frac{K}{\epsilon^s}$$

A partir de ces deux estimations, on déduit que :

$$\| \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_1} \|_{H^{-1}(F_2)} \leq \frac{K}{\epsilon^{2s}} \qquad \text{et } \|\nabla p_2^\epsilon\|_{H^{-1}(F_2)} \leq \frac{K}{\epsilon^{2s}}$$

Dans tout domaine Δ lipschitzien borné, on a l'inégalité suivante : [17]

$$\|\phi\|_{L^2(\Delta)} \leq K \left(\|\nabla \phi\|_{H^{-1}(\Delta)^2} + |\int_\Delta \phi \, dx_1 \, dx_3| \right) \qquad \forall \phi \in L^2(\Delta) \tag{1.5}$$

On applique cette inégalité pour $\Delta = F_2$ et $\phi = p_2^\epsilon$. Comme p_2^ϵ est choisi à moyenne nulle dans F_2, on obtient :

$$\|p_2^\epsilon\|_{L^2(F_2)} \leq \frac{K}{\epsilon^{2s}}$$

Alors, il existe une sous-suite de p_2^ϵ telle que $\epsilon^{2s} p_2^\epsilon$ converge faiblement dans $L^2(F_2)$ vers une fonction $p_2^\star(x_1, x_3)$.

Comme :

$$\|\epsilon^{2s} \frac{\partial p_2^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(F_2)} \leq K \epsilon^s$$

on déduit que :

$$\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_3} = 0 \qquad \text{dans} \quad H^{-1}(F_2)$$

Cette égalité implique que $p_2^\star$ ne dépend pas de x_3. $\square$.

1.3.3 Prolongement et convergence de la pression dans le milieu poreux

Dans les problèmes d'homogénéisation du système de Stokes, il est nécessaire de trouver des estimations sur la vitesse et la pression dans tout le domaine Ω. La vitesse est prolongée par zéro dans les parties solides des pores. Pour la pression, on utilise le prolongement de Tartar [16]. Dans notre géométrie, les pores de taille ϵ sont dans le milieu poreux $\hat{\Omega}^\epsilon$, le prolongement de la pression se fait dans ce domaine mince qui dépend de ϵ. Il faut donc reprendre la construction de ce prolongement pour connaître la dépendance en ϵ ; on constatera que les constantes K du lemme suivant sont indépendantes de ϵ même si $\hat{\Omega}^\epsilon$ en dépend.

Lemme 1.3.3. *Il existe un opérateur linéaire :*

$$\hat{R}^\epsilon : H^1(\hat{\Omega}^\epsilon)^2 \ \rightarrow \ H^1(\hat{F}_1^\epsilon)^2$$

$$\hat{w} \mapsto \hat{R}^\epsilon(\hat{w})$$

tel que :

$$\hat{R}^\epsilon(\hat{w}) = \hat{w} \quad \textit{sur } \partial\hat{\Omega}^\epsilon \quad \textit{et } \hat{R}^\epsilon(\hat{w}) = 0 \quad \textit{sur } \partial\hat{T}^\epsilon$$

De plus si

$$\text{div } \hat{w} = 0 \quad \textit{alors} \quad \text{div } \hat{R}^\epsilon(\hat{w}) = 0$$

et on a les estimations suivantes :

$$\|\hat{R}^\epsilon(\hat{w})\|_{L^2(\hat{F}_1^\epsilon)^2} \leq K \left(\|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \epsilon \|\nabla \hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4} \right)$$

$$\|\nabla \hat{R}^\epsilon(\hat{w})\|_{L^2(\hat{F}_1^\epsilon)^4} \leq K \left(\frac{1}{\epsilon} \|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \|\nabla \hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4} \right)$$

Preuve

Dans la cellule de base $Y = [0,1]^2$, il existe un opérateur linéaire

$$R : H^1(Y)^2 \ \rightarrow \ H^1(Y)^2$$

tel que : (voir lemme 3, p371, [17]) :

$$R(w) = 0 \,\text{sur } \ \partial T \,\text{et} \, \|R(w)\|_{H^1(Y)^2} \leq K \|w\|_{H^1(Y)^2} \tag{1.6}$$

On effectue un quadrillage du plan $\mathbb{R}^2$ par translation de la cellule ϵY. A toute cellule notée $\hat{B}_k^\epsilon, k = 1, N^\epsilon$, est associé un couple (n, m) tel que :

$$\hat{B}_k^\epsilon = \{(z_1, z_3) \in \mathbb{R}^2 : \quad n\epsilon < z_1 < (n+1)\epsilon, \, m\epsilon < z_3 < (m+1)\epsilon\}$$

N^ϵ est le nombre maximum de cellules dont l'intersection avec $\hat{\Omega}^\epsilon$ est non vide. On note n_ϵ le nombre de cellules qui sont entièrement contenues dans $\hat{\Omega}^\epsilon$ de sorte qu'on a :

$$\bigcup_{k=1}^{n_\epsilon} \hat{B}_k^\epsilon \subseteq \hat{\Omega}^\epsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^{N^\epsilon} \hat{B}_k^\epsilon$$

On pose :

$$\hat{\Omega}^\epsilon = (\bigcup_{k=1}^{n_\epsilon} \hat{B}_k^\epsilon) \cup \hat{\mathcal{B}}^\epsilon$$

où $\hat{\mathcal{B}}^\epsilon$ est le complémentaire constitué des morceaux de cellules dans $\hat{\Omega}^\epsilon$ qui coupent le bord $\partial\hat{\Omega}^\epsilon$.

On notera $\hat{w}_k$ la restriction de $\hat{w}$ à $\hat{B}_k^\epsilon$, quand cela sera nécessaire.

On construit alors $\hat{R}^\epsilon$, en appliquant R sur les n_ϵ cellules entièrement contenues dans $\hat{\Omega}^\epsilon$, on l'étend ensuite à $\hat{\Omega}^\epsilon$, en posant :

$$\hat{R}^\epsilon(\hat{w}) = \begin{cases} \hat{R}^\epsilon(\hat{w}) & \text{dans } \hat{B}_k^\epsilon \\ \hat{w} & \text{dans } \hat{\mathcal{B}}^\epsilon \end{cases}$$

Pour se ramener à la cellule de base Y, on introduit le changement de variables suivant dans chaque cellule $\hat{B}_k^\epsilon$:

$$y_1 = \frac{z_1 - n\epsilon}{\epsilon} \quad \text{et } y_3 = \frac{z_3 - m\epsilon}{\epsilon}$$

Pour $\hat{w}$ dans $H^1(\hat{\Omega}^\epsilon)^2$:

$$\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\hat{R}^\epsilon(\hat{w}))^2 \, dz_1 \, dz_3 = \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\hat{R}^\epsilon(\hat{w}_k))^2 \, dz_1 \, dz_3 + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} (\hat{w})^2 \, dz_1 \, dz_3$$

$$= \epsilon^2 \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \int_Y R(w_k)^2 \, dy_1 \, dy_3 + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} (\hat{w})^2 \, dz_1 \, dz_3$$

D'après (1.6) :

$$\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\hat{R}^\epsilon(\hat{w}))^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq K \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \epsilon^2 \left(\int_Y w_k^2 \, dy_1 \, dy_3 + \int_Y (\nabla w_k)^2 \, dy_1 \, dy_3 \right) + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} \hat{w}^2 \, dz_1 \, dz_3$$

$$= K \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \left(\int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\hat{w}_k)^2 \, dz_1 \, dz_3 + \int_{\hat{B}_k^\epsilon} \epsilon^2 (\nabla \hat{w}_k)^2 \, dz_1 \, dz_3 \right) + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} \hat{w}^2 \, dz_1 \, dz_3$$

$$\leq K \left(\|\hat{w}\|^2_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \epsilon^2 \|\nabla \hat{w}\|^2_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4} \right)$$

De la même façon, sur le gradient de $\hat{R}^\epsilon$, on a :

$$\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\nabla \hat{R}^\epsilon(\hat{w}))^2 \, dz_1 \, dz_3 = \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\nabla \hat{R}^\epsilon(\hat{w}_k))^2 \, dz_1 \, dz_3 + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} (\nabla \hat{w})^2 \, dz_1 \, dz_3$$

$$= \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \int_Y (\nabla R(w_k))^2 \, dy_1 \, dy_3 + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} (\nabla \hat{w})^2 \, dz_1 \, dz_3$$

D'après (1.6) :

$$\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\nabla \hat{R}^\epsilon(\hat{w}))^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq K \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \left(\int_Y w_k^2 \, dy_1 \, dy_3 + \int_Y (\nabla w_k)^2 \, dy_1 \, dy_3 \right) + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} (\nabla \hat{w})^2 \, dz_1 \, dz_3$$

$$= K \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \left(\int_{\hat{B}_k^\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} (\hat{w}_k)^2 \, dz_1 \, dz_3 + \int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\nabla \hat{w}_k)^2 \, dz_1 \, dz_3 \right) + \int_{\hat{\mathcal{B}}^\epsilon} \nabla \hat{w}^2 \, dz_1 \, dz_3$$

$$\leq K \left(\frac{1}{\epsilon^2} \|\hat{w}\|^2_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \|\nabla \hat{w}\|^2_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4} \right)$$

□

Le lemme suivant donne les estimations correspondantes dans l'ouvert fixe Ω :

Lemme 1.3.4. *Pour $w \in H^1(\Omega)^2$, on pose : $R^\epsilon(w) = \hat{R}^\epsilon(\hat{w}^\epsilon)$ où $w(x_1, x_3) = \hat{w}^\epsilon(z_1, z_3)$ et $\hat{R}^\epsilon$ est défini dans le lemme 1.3.3. On a les estimations suivantes :*

$$\|R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^2} \leq K \|w\|_{H^1(\Omega)^2} \text{ et } \|\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^4} \leq \frac{K}{\epsilon} \|w\|_{H^1(\Omega)^2}$$

Preuve

Avec le changement de variable (1.2) et le lemme 1.3.3, on a :

$$\|R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^2} = \epsilon^{\frac{-\alpha}{2}} \|\hat{R}^\epsilon(\hat{w})\|_{L^2(\hat{F}_1^\epsilon)^2} \leq K \epsilon^{\frac{-\alpha}{2}} \left(\|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \epsilon \|\nabla \hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4} \right)$$

$$= K \left(\|w\|_{L^2(\Omega)^2} + \epsilon \|\nabla_{\alpha,s} w\|_{L^2(\Omega)^4} \right)$$

De la même façon pour le gradient, on a :

$$\|\frac{\partial R^\epsilon(w)}{\partial x_3}\|_{L^2(F_1^\epsilon)^2} = \epsilon^{\frac{\alpha}{2}} \|\frac{\partial \hat{R}^\epsilon(\hat{w})}{\partial z_3}\|_{L^2(\hat{F}_1^\epsilon)^2} \leq K \epsilon^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{\epsilon} \|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \|\nabla \hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4} \right)$$

$$= K \epsilon^\alpha \left(\frac{1}{\epsilon} \|w\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\nabla_{\alpha,s} w\|_{L^2(\Omega)^4} \right)$$

D'après la définition de $\nabla_{\alpha,s}$, on a :

$$\frac{1}{\epsilon^\alpha} \|\frac{\partial R^\epsilon(w)}{\partial x_3}\|_{L^2(F_1^\epsilon)^2} \leq K \left(\frac{1}{\epsilon} \|w\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\frac{\partial w}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)^2} + \epsilon^{s-\alpha} \|\frac{\partial w}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2} + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \|\frac{\partial w}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2} \right) \quad (1.7)$$

$$\leq K \max(\frac{1}{\epsilon}, \epsilon^{s-\alpha}, \frac{1}{\epsilon^{\alpha}})\|w\|_{H^1(\Omega)^2} = K\frac{1}{\epsilon}\|w\|_{H^1(\Omega)^2}$$

De la même façon , on a :

$$\|\frac{\partial R^\epsilon(w)}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial R^\epsilon(w)}{\partial x_3}\|_{L^2(F_1^\epsilon)^2} = \frac{1}{\epsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\|\frac{\partial \hat{R}^\epsilon(\hat{w})}{\partial z_1}\|_{L^2(\hat{F}_1^\epsilon)^2}$$

D'après le lemme 1.3.3, on a :

$$\|\frac{\partial R^\epsilon(w)}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial R^\epsilon(w)}{\partial x_3}\|_{L^2(F_1^\epsilon)^2} \leq \frac{K}{\epsilon^{\frac{\alpha}{2}}}\left(\frac{1}{\epsilon}\|\hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} + \|\nabla \hat{w}\|_{L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)^4}\right)$$

En se ramenant au domaine Ω et en majorant $\nabla_{\alpha,s}$, on peut majorer le membre de droite par :

$$K\left(\frac{1}{\epsilon}\|w\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\frac{\partial w}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)^2} + \epsilon^{s-\alpha}\|\frac{\partial w}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2} + \frac{1}{\epsilon^{\alpha}}\|\frac{\partial w}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2}\right) \tag{1.8}$$

On cherche une estimation sur $\|\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^4}$, on déduit de (1.7) et (1.8) que :

$$\|\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^4} \leq K\left(\frac{1}{\epsilon}\|w\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\frac{\partial w}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)^2} + \epsilon^{s-\alpha}\|\frac{\partial w}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2} + \frac{1}{\epsilon^{\alpha}}\|\frac{\partial w}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2}\right)$$

et finalement que :

$$\|\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^4} \leq K \max(\frac{1}{\epsilon}, \epsilon^{s-\alpha}, \frac{1}{\epsilon^{\alpha}})\|w\|_{H^1(\Omega)^2} = \frac{K}{\epsilon}\|w\|_{H^1(\Omega)^2}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de définir le prolongement de Tartar de la pression dans Ω et de donner les estimations sur une détermination précise.

Lemme 1.3.5. *Il existe un prolongement noté P_1^ϵ de la pression dans Ω , tel que :*

$\epsilon^{1+\frac{s+\alpha}{2}}\|P_1^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K$ *avec* $\int_\Omega P_1^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 = 0$

Preuve

L'opérateur $\hat{R}^\epsilon$ défini dans le lemme 1.3.3, permet d'introduire un prolongement du gradient de la pression en définissant $\hat{C}^\epsilon$ dans $H^{-1}(\hat{\Omega}^\epsilon)^2$ par :

$$\langle \hat{C}^\epsilon, \hat{w}\rangle_{H^{-1}(\hat{\Omega}^\epsilon)^2, H_0^1(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} = \langle \nabla \hat{p}^\epsilon, \hat{R}^\epsilon(\hat{w})\rangle_{H^{-1}(\hat{F}_1^\epsilon)^2, H_0^1(\hat{F}_1^\epsilon)^2} \qquad \forall \hat{w} \in H_0^1(\hat{\Omega}^\epsilon)^2$$

On fait le produit de dualité de l'équation (1.1) par $\hat{R}^\epsilon(\hat{w})$ qui appartient à $H_0^1(\hat{F}_1^\epsilon)^2$, et qui est prolongé par zéro dans $\hat{F}_2^\epsilon$, on a :

$$\langle \hat{C}^\epsilon, \hat{w}\rangle_{H^{-1}(\hat{\Omega}^\epsilon)^2, H_0^1(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} = -\int_{\hat{F}_1^\epsilon} \nabla \hat{u}^\epsilon . \nabla \hat{R}^\epsilon(\hat{w}) \, dz_1 \, dz_3 \tag{1.9}$$

De plus si : $\operatorname{div} \hat{w} = 0$ alors $\langle \hat{C}^\epsilon, \hat{w}\rangle_{H^{-1}(\hat{\Omega}^\epsilon)^2, H_0^1(\hat{\Omega}^\epsilon)^2} = 0$. On déduit par le théorème de de Rham, qu'il existe $\hat{P}_1^\epsilon$ qui appartient à $L^2(\hat{\Omega}^\epsilon)/\mathbb{R}$ tel que :

$$\hat{C}^\epsilon = \nabla \hat{P}_1^\epsilon$$

Soit $w = (0, w_3)$ dans $H_0^1(\Omega)^2$, on a :

$$\langle \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_3\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\frac{1}{\epsilon^\alpha}\int\limits_\Omega P_1^\epsilon \frac{\partial w_3}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3$$

$$= -\frac{1}{\epsilon^\alpha}\int\limits_{\hat\Omega^\epsilon} \hat P_1^\epsilon \frac{\partial \hat w_3}{\partial z_3}\, dz_1\, dz_3 = \langle \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial \hat P_1^\epsilon}{\partial z_3}, \hat w_3\rangle_{H^{-1}(\hat\Omega^\epsilon),H_0^1(\hat\Omega^\epsilon)}$$

D'après (1.9) :

$$\langle \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_3\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\frac{1}{\epsilon^\alpha}\int\limits_{\hat F_1^\epsilon} \nabla \hat u^\epsilon.\nabla \hat R^\epsilon(\hat w)\, dz_1\, dz_3 = -\int\limits_{F_1^\epsilon} \nabla_{\alpha,s} u^\epsilon.\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\, dx_1\, dx_3$$

D'après Cauchy-Schwarz :

$$\left|\langle \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_3\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right| \leq \|\nabla_{\alpha,s} u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^4}\|\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^4} \tag{1.10}$$

D'après les lemmes 1.3.1 et 1.3.4, on en déduit que :

$$\frac{1}{\epsilon^\alpha}\|\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq K\epsilon^{-(1+\frac{s+\alpha}{2})} \tag{1.11}$$

De la même façon, en prenant $w = (w_1, 0)$ dans $H_0^1(\Omega)^2$, on a :

$$\langle \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int\limits_\Omega P_1^\epsilon \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial w_1}{\partial x_3}\right)\, dx_1\, dx_3$$

D'après (1.9), on obtient :

$$\langle \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\frac{1}{\epsilon^\alpha}\int\limits_{\hat\Omega^\epsilon} \nabla \hat u^\epsilon.\nabla \hat R^\epsilon(\hat w)\, dz_1\, dz_3 = -\int\limits_{\hat F_1^\epsilon} \nabla_{\alpha,s} u^\epsilon.\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\, dx_1\, dx_3$$

D'après Cauchy-Schwarz, on en déduit que :

$$\left|\langle \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right| \leq \|\nabla_{\alpha,s} u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^4}\|\nabla_{\alpha,s} R^\epsilon(w)\|_{L^2(F_1^\epsilon)^4} \tag{1.12}$$

et d'après les lemmes 1.3.1 et 1.3.4, on en déduit que :

$$\|\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq K\epsilon^{-(1+\frac{s+\alpha}{2})} \tag{1.13}$$

Avec $w = (w_1, w_3)$ dans $H_0^1(\Omega)^2$, on a :

$$\left|\langle \nabla P_1^\epsilon, w\rangle_{H^{-1}(\Omega)^2,H_0^1(\Omega)^2}\right| \leq \left|\langle \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha} H_2' \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1\rangle\right| + \left|\langle \epsilon^s H_2' \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1\rangle\right| + \epsilon^\alpha \left|\langle \frac{1}{\epsilon^\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_3\rangle\right|$$

De (1.11) et (1.13) et tenant compte que $\alpha, s > 0$, on déduit que :

$$\|\nabla P_1^\epsilon\|_{H^{-1}(\Omega)^2} \leq K\epsilon^{-(1+\frac{s+\alpha}{2})} \tag{1.14}$$

En choisissant P_1^ϵ à moyenne nulle dans Ω et en utilisant (1.5) avec $\Delta = \Omega$, on trouve l'estimation annoncée :

$$\|P_1^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K\epsilon^{-(1+\frac{s+\alpha}{2})}$$

$\square$

On rappelle le lemme suivant (chap 8, [15]) qui est un résultat classique dans la théorie des espaces de Hilbert et dont on aura besoin :

Lemme 1.3.6. *Soit M un espace de Hilbert, M' son dual. Soit f^ϵ une suite qui converge faiblement vers f dans M'. Si pour toute suite w^ϵ qui converge faiblement vers w dans M, on a*

$\langle f^\epsilon, w^\epsilon\rangle_{M,M'} \to \langle f, w\rangle_{M',M}$ *alors* $f^\epsilon \to f$ *forte dans* M'.

Lemme 1.3.7. *il existe une sous-suite de $\epsilon^{1+\frac{\alpha+s}{2}}P_1^\epsilon$ qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $p_1^\star$ qui ne dépend pas de x_3, avec $\int_\Omega p_1^\star\, dx_1\, dx_3 = 0$.*
De plus, on a les convergences fortes suivantes :

$i)\epsilon^{1+\frac{\alpha+s}{2}}\dfrac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} \to \dfrac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$

$ii)$ *il existe* $\xi^\star$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$ *telle que* $\epsilon^{1+\frac{\alpha-s}{2}}\dfrac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} \to \xi^\star$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$

$iii)\epsilon^{1+\frac{\alpha+s}{2}}\dfrac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} \to 0$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$

Preuve : posons $\gamma = 1 + \frac{\alpha+s}{2}$.

D'après le lemme 1.3.5, il existe une sous-suite de $\epsilon^\gamma P_1^\epsilon$ qui converge faiblement vers $p_1^\star(x_1, x_3)$ dans $L^2(\Omega)$.

D'après (1.11) et (1.14), il existe $\xi^\star$ dans $H^{-1}(\Omega)$ tel que :

$$\epsilon^\gamma\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \epsilon^{\gamma-\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \xi^\star \qquad H^{-1}(\Omega) \text{ faible} \tag{1.15}$$

Par suite

$$\epsilon^\gamma\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_3} = 0$$

On utilise maintenant le lemme 1.3.6 pour obtenir la convergence forte. Soit w^ϵ une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)^2$ qui converge faiblement vers w dans $H_0^1(\Omega)^2$.
On calcule le produit de dualité :

$$A^\epsilon = \left|\left(\langle\epsilon^\gamma\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_1}, w_1^\epsilon\rangle + \langle\epsilon^{\gamma-\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_3^\epsilon\rangle\right) - \left(\langle\frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}, w_1\rangle + \langle\xi^\star, w_3\rangle\right)\right|$$

$$= \left|\langle\epsilon^\gamma\nabla_{\alpha,s}P_1^\epsilon, w^\epsilon - w\rangle + \langle\epsilon^{\gamma+s-\alpha}H_2'\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1^\epsilon - w_1\rangle + \langle\epsilon^\gamma\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} - \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}, w_1\rangle + \langle\epsilon^{\gamma-\alpha}\frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} - \xi^\star, w_3\rangle\right|$$

D'après la convergence faible (1.15) :

$$\langle \epsilon^\gamma \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} - \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_3}, w_1 \rangle \to 0 \text{ et } \langle \epsilon^{\gamma-\alpha} \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3} - \xi^\star, w_3 \rangle \to 0$$

D'après (1.12), (1.10) et (1.8) et le lemme 1.3.1 :

$$|\langle \epsilon^\gamma \nabla_{\alpha,s} P_1^\epsilon, w^\epsilon - w \rangle| + \left| \langle \epsilon^{\gamma+s-\alpha} H_2' \frac{\partial P_1^\epsilon}{\partial x_3}, w_1^\epsilon - w_1 \rangle \right| \leq K B^\epsilon$$

avec

$$B^\epsilon = \epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} \|w^\epsilon - w\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\frac{\partial}{\partial x_1}(w^\epsilon - w)\|_{L^2(\Omega)^2} \right) + \epsilon^{1+s-\alpha} \|\frac{\partial}{\partial x_3}(w^\epsilon - w)\|_{L^2(\Omega)^2} +$$

$$\epsilon^{1-\alpha} \|\frac{\partial}{\partial x_3}(w^\epsilon - w)\|_{L^2(\Omega)^2}$$

Par injection compacte de H^1 dans L^2, w^ϵ converge fortement dans $L^2(\Omega)^2$, les autres termes de B^ϵ tendent vers zéro car $\alpha < 1$ et $1 - \alpha + s > 0$. On a donc la convergence de B^ϵ vers zéro, et par suite de A^ϵ aussi.

On applique alors le lemme 1.3.6 à :

$$f^\epsilon = (\epsilon^\gamma \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial x_1}, \epsilon^{\gamma-\alpha} \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_3})$$

On en déduit i) et ii). Et puis iii) de ii).

Pour en déduire la convergence forte de la pression, on applique (1.5) avec $\Delta = \Omega$:

$$\|\epsilon^\gamma P_1^\epsilon - p_1^\star\|_{L^2(\Omega)} \leq K \left(\|\epsilon^\gamma \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\epsilon^\gamma \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} \right)$$

D'après i) et iii) on a :

$$\|\epsilon^\gamma \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$$

et

$$\|\epsilon^\gamma \frac{\partial p_1^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$$

donc

$$\|\epsilon^\gamma P_1^\epsilon - P_1^\star\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

D'où la convergence forte de la pression. □

1.3.4 Convergence de la vitesse dans le film mince et dans le milieu poreux

Théorème 1.3.8. *Il existe $u^\star$ dans $V(x_3), s_1^\star$ dans $L^2(w)$, tels qu'une sous-suite de u^ϵ converge faiblement vers $u^\star$ dans $V(x_3)$ avec :*

$$u_1^\star = s_1^\star \quad sur \quad \Sigma$$

$$u_1^\star = s_1 \quad sur \quad \Gamma_-$$
$$u_3^\star = 0 \quad dans \quad F_2$$

où $V(x_3)$ est l'espace de Hilbert :

$$V(x_3) = \{\phi \in L^2(F_2)^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \in L^2(F_2)^2\}$$

muni de la norme :

$$\|\phi\|_{V(x_3)} = \left(\|\phi\|^2_{L^2(F_2)} + \|\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\|^2_{L^2(F_2)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve :
D'après le lemme 1.3.1 et l'inégalité de Friedrich dans la direction x_3, on a :

$$\|u^\epsilon\|_{L^2(F_2)^2} \leq K \|\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_3}\|_{L^2(F_2)^2} \leq K$$

On en déduit que u^ϵ est borné dans $V(x_3)$. Ce qui implique l'existence de $u^\star$ dans $V(x_3)$, tel que u^ϵ converge faiblement dans $V(x_3)$ vers $u^\star$.
De plus, il y a continuité de l'application trace de $V(x_3)$ sur $L^2(\Gamma_-)^2$ et sur $L^2(\Sigma)^2$, on en déduit que :

$u^\star = (s_1, 0)$ sur Γ_- et il existe $s_1^\star$ tel que u_1^ϵ converge dans $L^2(w)$ faible vers $s_1^\star$.

Pour démontrer que $u_3^\star = 0$ dans F_2, on utilise l'équation (1.4), en prenant ϕ dans $\mathcal{D}(F_2)$ prolongée par zéro dans F_1^ϵ, on obtient :

$$-\epsilon^s \int_{F_2} u_1^\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_3 - \epsilon^s \int_{F_2} H_2' \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} \phi \, dx_1 \, dx_3 + \int_{F_2} \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_3} \phi \, dx_1 \, dx_3 = 0$$

En passant à la limite dans chaque terme et en utilisant la convergence $V(x_3)$ de u^ϵ, on obtient :

$$\int_{F_2} \frac{\partial u_3^\star}{\partial x_3} \phi \, dx_1 \, dx_3 = 0$$

donc $u_3^\star$ ne dépend pas de x_3. Comme $u_3^\star$ est nulle sur Γ_-, on en déduit que $u_3^\star = 0$ dans F_2. □

Montrons maintenant la convergence de la vitesse dans le milieu poreux :

Lemme 1.3.9. *Il existe $v_1^\star$ dans $L^2(\Omega)$ tels que :*

$$\frac{u^\epsilon}{\epsilon^{1-\frac{s+\alpha}{2}}} \quad \textit{converge faiblement vers} \quad (v_1^\star, 0) \textit{ dans } L^2(\Omega)^2$$

Preuve
Elle repose sur une inégalité de type Poincaré [16] dans le milieu poreux entre la vitesse et son gradient, habituellement utilisée dans un milieu poreux fixe et qui est ici généralisée à un milieu poreux dont l'épaisseur dépend de ϵ, ce qui nécessite de reprendre la

démonstration pour préciser la dépendance des "constantes" en ϵ.
Soit $\hat{B}_k^\epsilon$ une cellule dans $\hat{\Omega}^\epsilon$. On utilise le changement de variables et les notations correspondantes définies dans le lemme 1.3.3, pour se ramener à la cellule de base Y et l'inégalité de Poincaré dans Y :

$$\|u^\epsilon\|_{L^2(Y)^2} \leq K\|\nabla u^\epsilon\|_{L^2(Y)^2}$$

$$\int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\hat{u}^\epsilon)^2 \, dz_1 \, dz_3 = \epsilon^2 \int_Y (u^\epsilon)^2 \, dy_1 \, dy_3 \leq K\epsilon^2 \int_Y (\nabla u)^2 \, dy_1 \, dy_3$$

En sommant sur toutes les cellules qui intersectent $\hat{\Omega}^\epsilon$, et où la vitesse est prolongée par zéro :

$$\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\hat{u}^\epsilon)^2 \, dz_1 \, dz_3 = \sum_{k=1}^{N^\epsilon} \int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\hat{u}^\epsilon)^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^\epsilon} \int_Y (\nabla u^\epsilon)^2 \, dy_1 \, dy_3 = K\epsilon^2 \int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\nabla \hat{u}^\epsilon)^2 \, dz_1 \, dz_3$$

En utilisant le changement de variables (1.2), on se ramène au domaine F_1^ϵ. Après prolongement de la vitesse par zéro dans T^ϵ, on obtient :

$$\int_\Omega (u^\epsilon)^2 \, dx_1 \, dx_3 = \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\hat{u}^\epsilon)^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq K\epsilon^2 \int_\Omega (\nabla_{\alpha,s} u^\epsilon)^2 \, dx_1 \, dx_3$$

Les estimations du lemme 1.3.1, impliquent l'existence de $v^\star$, limite faible de $\dfrac{u^\epsilon}{\epsilon^{1-\frac{s+\alpha}{2}}}$ dans $L^2(\Omega)^2$.

Pour démontrer que $v_3^\star = 0$, on choisit d'abord ψ dans $H^1(\Omega)$ nulle sur $\partial\Omega - \Gamma_+$, prolongé par zéro dans F_2 comme fonction test dans (1.4), il vient :

$$-\epsilon^\alpha \int_\Omega u_1^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_3 + \epsilon^s \int_\Omega H_2' \, u_1^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \, dx_1 \, dx_3 - \int_\Omega u_3^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \, dx_1 \, dx_3 = 0$$

Après multiplication par $\epsilon^{-1+\frac{s+\alpha}{2}}$ et passage à la limite, on obtient :

$$\int_\Omega v_3^\star \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \, dx_1 \, dx_3 = 0$$

En choisissant ψ nulle sur Γ_+, on en déduit que :

$$\frac{\partial v_3^\star}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega)$$

qui implique que $v_3^\star$ ne dépend pas de x_3.

En choisissant maintenant $\psi = x_3\theta$, où θ appartient à $\mathcal{D}(w)$, on obtient :

$$\int_w v_3^\star \theta(x_1) \, dx_1 = 0 \qquad \forall \theta \in \mathcal{D}(w)$$

On en conclut que $v_3^\star$ est nulle dans F_2. $\square$

1.4 Equations limites dans le film mince et le milieu poreux

1.4.1 Equation limite dans le film mince

Théorème 1.4.1. *Dans le film mince la vitesse et la pression limites vérifient la relation :*

$$\overline{u}_1^\star = -\frac{H_2^2}{12}\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_1} + \frac{s_1 + s_1^\star}{2} \quad \textit{dans } L^2(w)$$

où

$$\overline{u}_1^\star = \frac{1}{H_2}\int_{-H_2}^{0} u_1^\star(x_1, x_3)\, dx_3$$

En particulier $p_2^\star$ appartient á $H^1(w)$

Preuve :
Soit $\theta(x_1)$ dans $H_0^1(w)$, on choisit comme fonction-test dans l'équation (1.3) :

$$\psi = (\psi_1, 0) \quad \text{où } \psi_1 = \begin{cases} x_3(x_3 + H_2)\theta(x_1) & \text{dans } F_2 \\ 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Il vient :

$$\epsilon^s \int_{F_2} \nabla_s u_1^\epsilon . \nabla_s \psi_1 \, dx_1\, dx_3 = \int_{F_2} \epsilon^s p^\epsilon \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \right) dx_1\, dx_3$$

On multiplie les deux membres par ϵ^s, et on pose :

$$I_1^\epsilon = \epsilon^{2s} \int_{F_2} (\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3})(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3})\, dx_1\, dx_3$$

$$I_2^\epsilon = \int_{F_2} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3 = \int_{F_2} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3}(2x_3 + H_2)\theta(x_1)\, dx_1\, dx_3$$

En utilisant Green :

$$I_2^\epsilon = -2\int_{F_2} u_1^\epsilon \theta\, dx_1\, dx_3 + \int_{\Sigma \cup \Gamma_-} u_1^\epsilon n_3 (2x_3 + H_2)\theta\, d\sigma$$

On pose :

$$I_3^\epsilon = \int_{F_2} \epsilon^{2s} p^\epsilon \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - H_2'(2x_3 + H_2)\theta \right) dx_1\, dx_3$$

D'après les estimations du lemme 1.3.1, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_1^\epsilon = 0$$

D'après le théorème 1.3.8, on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_2^\epsilon = -2\int_{F_2} u_1^\star\theta\ dx_1\,dx_3 + \int_w s_1 H_2\theta\ dx_1 + \int_w s_1^\star H_2\theta\,dx_1$$

Et d'après le lemme 1.3.2 :

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_3^\epsilon = \int_{F_2} p_2^\star\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - H_2'(2x_3+H_2)\theta\right)\,dx_1\,dx_3$$

Comme $p_2^\star$ ne dépend pas de x_3 :

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_3^\epsilon = \int_w p_2^\star\left(-\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial x_1}(\theta H_2^3)\right)\,dx_1 = \frac{1}{6}\langle H_2^3\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_1},\theta\rangle_{H^{-1}(F_2),H_0^1(F_2)}$$

L'équation limite est donc :

$$-2\int_{F_2} u_1^\star\theta\,dx_1\,dx_3 + \int_w s_1^\star H_2\theta\ dx_1 + \int_w s_1 H_2\theta\,dx_1 = \frac{1}{6}\langle H_2^3\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_1},\theta\rangle_{H^{-1}(F_2),H_0^1(F_2)}\ \forall\theta\in H_0^1(w)\ (1.16)$$

Ce qui implique :

$$-2\overline{u}_1^\star H_2 + (s_1^\star + s_1)H_2 = \frac{1}{6}H_2^3\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_1}$$

D'après le théorème 1.3.8, le membre de gauche de cette égalité est dans $L^2(w)$, d'où l'appartenance à $H^1(w)$ de $p_2^\star$. □

1.4.2 Equation limite dans le milieu poreux

Pour obtenir dans le milieu poreux une relation du type Darcy entre le gradient de la pression et la vitesse, on introduit des problèmes élémentaires classiques dans la cellule de base. Ils seront ensuite adaptés à la géométrie particulière de milieu poreux mince. On définit les espaces suivants :

$$H_\#^1(Y) = \{\phi\in H^1(\mathbb{R}^2), \phi \ \text{ est } Y-\text{périodique et nulle sur}\,\partial T\}$$

muni de la norme de $H_0^1(Y)$.

$$L_\#^2(Y) = \{\phi\in L^2(\mathbb{R}^2), \phi \ \text{ est } \ Y-\text{périodique}\}$$

On introduit les problèmes locaux suivants, où e_k est le vecteur unitaire de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ suivant l'axe k :

$$(PL^k)\begin{cases}\text{Chercher } \ (w^k,\pi^k) \text{ dans } H_\#^1(Y)^2\times L_\#^2(Y)\\ \triangle w^k - \nabla\pi^k + e_k = 0\\ \operatorname{div} w^k = 0 \qquad\qquad k=1,3\\ w^k = 0 \ \text{ sur } \ \partial T\end{cases}$$

On a les estimations habituelles dans la cellule de base :

Lemme 1.4.2. *[15] on a :*

$$\|w^k\|_{H^1_\#(Y)^2} \leq K \quad et \quad \|\pi^k\|_{L^2_\#(Y)} \leq K$$

On définit à partir des problèmes (PL^k) dans Y par homothétie et périodicité des problèmes dans $\hat{\Omega}^\epsilon$ qui, après changement de variable, s'écrivent dans le domaine F_1^ϵ :

$$\begin{cases} \triangle_{\alpha,s} w^{\epsilon k} - \frac{1}{\epsilon}\nabla_{\alpha,s}\pi^{\epsilon k} + \frac{1}{\epsilon^2}e_k = 0 & \\ \mathrm{div}_{\alpha,s} w^{\epsilon k} = 0 & \text{dans } F_1^\epsilon \\ w^{\epsilon k} = 0 & \text{sur } T^\epsilon \end{cases} \tag{1.17}$$

Lemme 1.4.3. *Les estimations suivantes sont valables dans Ω :*

$$\|w^{\epsilon k}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K, \quad \|\pi^{\epsilon k}\|_{L^2(\Omega)} \leq K$$

$$\|\nabla_{\alpha,s} w^{\epsilon k}\|_{L^2(\Omega)^4} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

Preuve

D'après le changement de variables défini par (1.2) dans $\hat{\Omega}^\epsilon$, on a :

$$\int_\Omega (w^{\epsilon k})^2\, dx_1\, dx_3 = \frac{1}{\epsilon^\alpha}\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\hat{w}^{\epsilon k})^2\, dz_1\, dz_3$$

Sachant qu'il existe K tel que :

$$N^\epsilon \leq K\epsilon^{\alpha-2}$$

où N^ϵ est le nombre maximal de cellules qui couvrent $\hat{\Omega}^\epsilon$, on a :

$$\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\hat{w}^{\epsilon k})^2\ dz_1\, dz_3 \leq \sum_{k=1}^{N^\epsilon}\int_{\hat{B}_k^\epsilon} (\hat{w}^{\epsilon k})^2 dz_1\, dz_3 = N^\epsilon\epsilon^2\int_Y (w^k)^2\ dy_1\, dy_3$$

D'après le lemme 1.4.2, on obtient :

$$\int_\Omega (w^{\epsilon k})^2\ dx_1\, dx_3 \leq KN^\epsilon\epsilon^{2-\alpha} \leq K$$

De la même façon :

$$\int_\Omega (\pi^{\epsilon k})^2\ dx_1\, dx_3 \leq K$$

D'autre part :

$$\frac{1}{\epsilon^{2\alpha}}\int_\Omega (\frac{\partial w^{\epsilon k}}{\partial x_3})^2 dx_1\, dx_3 = \frac{1}{\epsilon^\alpha}\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\frac{\partial \hat{w}^{\epsilon k}}{\partial z_3})^2\, dz_1\, dz_3 \leq \frac{N^\epsilon}{\epsilon^\alpha}\int_Y (\frac{\partial w^k}{\partial y_3})^2\, dy_1\, dy_3$$

et

$$\int_\Omega (\frac{\partial w^{\epsilon k}}{\partial x_1} - \epsilon^{s-\alpha}H_2'\frac{\partial w^{\epsilon k}}{\partial x_3})^2\, dx_1\, dx_3 = \frac{1}{\epsilon^\alpha}\int_{\hat{\Omega}^\epsilon} (\frac{\partial \hat{w}^{\epsilon k}}{\partial z_1})^2\, dz_1\, dz_3 \leq \frac{1}{\epsilon^\alpha}N^\epsilon\int_Y (\frac{\partial w^k}{\partial y_1})^2\, dy_1\, dy_3$$

Du lemme 1.4.2, on déduit que :

$$\int_\Omega (\nabla_{\alpha,s} w^{\epsilon k})^2 \, dx_1 \, dx_3 \leq \frac{K}{\epsilon^2}$$

$\square$

On rappelle le lien entre les problèmes locaux et la matrice de perméabilité :

Lemme 1.4.4. *[15] on a :*

$$w_j^{\epsilon k} \rightharpoonup K_{kj} \qquad \textit{dans } \; L^2(\Omega) \textit{ faible}$$

où K est la matrice de perméabilité (symétrique et définie positive) définie par :

$$K_{kj} = \int_Y w_j^k \quad (\textit{ composante } j \textit{ de } w^k) \qquad k, j = 1, 3$$

On peut déduire maintenant un résultat de convergence dans le milieu poreux Ω.

Théorème 1.4.5. *$v_1^\star$ et $p_1^\star$ vérifient la loi de Darcy suivante dans Ω :*

$$v_1^\star = -\frac{detK}{K_{33}} \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}$$

Preuve :
Soit ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, pour k fixé, on multiplie scalairement la première équation dans (1.17) par ϕu^ϵ et on intègre sur Ω, en prolongeant u^ϵ par zéro dans T^ϵ :

$$\int_\Omega \nabla_{\alpha,s} w^{\epsilon k} . \nabla_{\alpha,s} (\phi u^\epsilon) \, dx_1 \, dx_3 = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \pi^{\epsilon k} \mathrm{div}_{\alpha,s} (\phi u^\epsilon) \, dx_1 \, dx_3 + \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega \phi u_k^\epsilon \, dx_1 \, dx_3$$

$\phi w^{\epsilon k}$ prolongé par zéro dans T^ϵ et dans F_2 est fonction-test pour l'équation (1.3).
On retranche ces deux dernières équations et après simplification, on obtient :

$$\int_\Omega \left(\nabla_{\alpha,s} w^{\epsilon k} . u^\epsilon - \nabla_{\alpha,s} u^\epsilon . w^{\epsilon k} \right) \nabla_{\alpha,s} \phi \, dx_1 \, dx_3 = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \pi^{\epsilon k} \nabla_{\alpha,s} \phi . u^\epsilon \; dx_1 \, dx_3 + \frac{1}{\epsilon^2} \int_\Omega \phi u_k^\epsilon \; dx_1 \, dx_3 + \int_\Omega \nabla_{\alpha,s} P_1^\epsilon . \phi w^{\epsilon k} \; dx_1 \, dx_3$$

Après multiplication par $\epsilon^{1+\frac{s+\alpha}{2}}$, l'équation précédente s'écrit :

$$A_1^\epsilon = A_2^\epsilon + A_3^\epsilon + A_4^\epsilon$$

$$A_1^\epsilon = \epsilon^{1+\frac{s+\alpha}{2}} \int_\Omega \left(\nabla_{\alpha,s} w^{\epsilon k} . u^\epsilon - \nabla_{\alpha,s} u^\epsilon . w^{\epsilon k} \right) \nabla_{\alpha,s} \phi \, dx_1 \, dx_3$$

$$A_2^\epsilon = \epsilon^{\frac{s+\alpha}{2}} \int_\Omega \pi^{\epsilon k} \nabla_{\alpha,s} \phi . u^\epsilon \; dx_1 \, dx_3$$

$$A_3^\epsilon = \epsilon^{-1+\frac{s+\alpha}{2}} \int_\Omega \phi u_k^\epsilon \, dx_1 \, dx_3$$

$$A_4^\epsilon = \epsilon^{1+\frac{s+\alpha}{2}} \int_\Omega \nabla_{\alpha,s} P_1^\epsilon . \phi w^{\epsilon k} \, dx_1 \, dx_3$$

On étudie les limites de chacun de ces termes :

D'après les lemmes 1.3.1, 1.4.2 et 1.4.3, on obtient :

$$|A_1^\epsilon| \leq K\epsilon^{1-\alpha}, \quad \text{et} \qquad |A_2^\epsilon| \leq \epsilon^{1-\alpha}$$

Après passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{\epsilon \to 0} A_1^\epsilon = 0, \quad \text{et} \qquad \lim_{\epsilon \to 0} A_2^\epsilon = 0$$

D'après le lemme 1.4.2 :

$$\lim_{\epsilon \to 0} A_3^\epsilon = \int_\Omega v_k^\star \phi \, dx_1 \, dx_3$$

Et à cause des convergences fortes des pressions (lemme 1.3.7) et le lemme 1.4.4 on obtient :

$$\lim_{\epsilon \to 0} A_4^\epsilon = \int_\Omega \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1} K_{k1} \phi \, dx_1 \, dx_3 + \int_\Omega \xi^\star K_{k3} \phi \, dx_1 \, dx_3$$

En faisant successivement $k = 1$ et 3, on obtient donc les équations limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1^\star}{\partial x_1} K_{11} + \xi^\star K_{13} = -v_1^\star \\ \\ \dfrac{\partial p_1^\star}{\partial x_1} K_{31} + \xi^\star K_{33} = 0 \end{cases}$$

K_{33} étant non nul, cela induit :

$$v_1^\star = -\frac{detK}{K_{33}} \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}$$

□

Remarque 1.4.6. *Cette loi de type Darcy n'est pas classique, la deuxième équation traduit le fait que $v_3^\star = 0$, ce qui provient du fait que $p_1^\star$ ne dépend pas de x_3. Le phénomène est directement lié au fait qu'on étudie ici un milieu poreux de faible épaisseur.*

1.5 Cas critique - Equation de Reynolds généralisée

1.5.1 Détermination du cas critique

Pour que les effets hydrodynamiques dans chacun des deux milieux interviennent effectivement dans le comportement asymptotique qui est gouverné essentiellement par

la pression, on considèrera le cas où les pressions dans les deux milieux sont de même ordre de grandeur quand ϵ est petit. Ceci a lieu pour

$$\alpha = 3s - 2$$

et correspond à ce que l'on appellera le "cas critique".

On montrera dans cette section que sous cette hypothèse, la pression est continue à l'interface Σ et l'on en déduira une équation de Reynolds genéralisée pour la pression qui permet ensuite de calculer le champ des vitesses dans les deux milieux.

1.5.2 Continuité de la pression à l'interface :

La pression $\hat{P}_1^\epsilon$ introduite dans la preuve du lemme 1.3.5, correspond en fait [9] au prolongement sur chaque partie solide connexe de la pression $\hat{p}^\epsilon$ définie dans l'équation (1.1) par une constante, à savoir sa moyenne dans la partie fluide de la cellule correspondante. Cette pression $\hat{P}_1^\epsilon$ se prolonge donc naturellement en un champ de pression $\hat{P}^\epsilon$ défini dans $\hat{D}^\epsilon$ à une constante près, que l'on fixera par :

$$\int_{\hat{D}^\epsilon} \hat{P}^\epsilon \, dz_1 \, dz_3 = 0 \tag{1.18}$$

Cette pression $\hat{P}^\epsilon$ se note P^ϵ dans le domaine fixe D et est reliée aux déterminations particulières introduites dans chacun des deux milieux minces par :

$$P^\epsilon = \begin{cases} P_1^\epsilon + c_1^\epsilon & \text{dans } \Omega \\ p_2^\epsilon + c_2^\epsilon & \text{dans } F_2 \end{cases} \tag{1.19}$$

où c_1^ϵ et c_2^ϵ sont des constantes. Les convergences de P_1^ϵ et p_2^ϵ démontrées dans les paragraphes 3.2 et 3.3 induiront celle de P^ϵ sous réserve de l'étude des constantes. De plus il faut remarquer que les limites obtenues dans chacun des milieux sont indépendantes de x_3, par conséquent la question se pose de savoir s'il y a continuité à l'interface.

On étudie la convergence des constantes associées aux pressions à moyenne nulle.

Lemme 1.5.1. *Il existe $c^\star$ tel que $\epsilon^{2s} c_2^\epsilon$ tend vers $c^\star$ et $\epsilon^{2s} P^\epsilon$ converge dans $L^2(D)$ vers $p^\star$ où*

$$p^\star = \begin{cases} p_1^\star & \textit{dans} \quad \Omega \\ p_2^\star + c^\star & \textit{dans} \quad F_2 \end{cases}$$

Preuve

De l'équation (1.18), on déduit que : $\epsilon^\alpha \int_\Omega P^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 + \epsilon^s \int_{F_2} P^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 = 0$.

comme $\int_\Omega P_1^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 = 0$ et $\int_{F_2} p_2^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 = 0$, on en déduit :

$$\epsilon^\alpha mes(\Omega) c_1^\epsilon + \epsilon^s mes(F_2) c_2^\epsilon = 0$$

Ce qui implique :

$$c_1^\epsilon = -\epsilon^{2(1-s)} c_2^\epsilon \frac{mes(F_2)}{mes(\Omega)} \tag{1.20}$$

Pour tout φ dans $\mathcal{D}(w)$, il existe (ψ, ϕ) dans $H^1(F_2) \times H^1(\Omega)$, tels que $\psi = 0$ sur $\partial F_2 - \Sigma$, $\phi = 0$ sur $\partial\Omega - \Sigma$ et $\psi = \phi = \varphi$ sur Σ. On prend comme fonction-test dans (1.3), la fonction :

$$\theta^\epsilon = \begin{cases} \phi R^\epsilon(e_3) & \text{dans} F_1^\epsilon \\ (0, \psi) & \text{dans } F_2 \end{cases}$$

On prolonge u^ϵ et θ^ϵ par zéro dans T^ϵ. Tenant compte de (1.19) et (1.20) :

$$\epsilon^\alpha \int_\Omega \nabla_{\alpha,s} u^\epsilon . \nabla_{\alpha,s}(\phi R^\epsilon(e_3))\, dx_1\, dx_3 + \epsilon^s \int_{F_2} \nabla_s u_3^\epsilon . \nabla_s \psi\ dx_1\, dx_3 = \epsilon^\alpha \int_\Omega P_1^\epsilon \nabla_{\alpha,s}\phi . R^\epsilon(e_3)\, dx_1\, dx_3$$

$$+ \int_{F_2} p_2^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\ dx_1\, dx_3 + c_2^\epsilon \left(\int_{F_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\ dx_1\, dx_3 - \int_\Omega \epsilon^s \frac{mes(F_2)}{mes(\Omega)} \nabla_{\alpha,s}\phi . R^\epsilon(e_3)\, dx_1\, dx_3 \right) \quad (1.21)$$

Après multiplication par ϵ^{2s}, on écrit l'équation précédente sous la forme :

$$B_1^\epsilon + B_2^\epsilon = B_3^\epsilon + B_4^\epsilon + B_5^\epsilon$$

avec :

$$B_1^\epsilon = \int_\Omega \epsilon^{5s-2} \nabla_{\alpha,s} u^\epsilon . \nabla_{\alpha,s}(\phi R^\epsilon(e_3))\, dx_1\, dx_3$$

$$B_2^\epsilon = \epsilon^{3s} \int_{F_2} \nabla_s u_3^\epsilon . \nabla_s \psi\ dx_1\, dx_3$$

$$B_3^\epsilon = \epsilon^{5s-2} \int_\Omega P_1^\epsilon \nabla_{\alpha,s}\phi . R^\epsilon(e_3)\, dx_1\, dx_3$$

$$B_4^\epsilon = \epsilon^{2s} \int_{F_2} p_2^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\ dx_1\, dx_3$$

$$B_5^\epsilon = \epsilon^{2s} c_2^\epsilon \left(\int_{F_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3 - \int_\Omega \epsilon^s \frac{mes(F_2)}{mes(\Omega)} \nabla_{\alpha,s}\phi . R^\epsilon(e_3)\, dx_1\, dx_3 \right)$$

D'après les lemmes 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4 et 1.3.5, on a :

$$|B_1^\epsilon| \leq K\epsilon^{3s-2}, \quad |B_2^\epsilon| \leq K\epsilon^s, \quad |B_3^\epsilon| \leq K \quad \text{et} \quad |B_4^\epsilon| \leq K$$

Comme $s < 1$ (car $\alpha < 1$) on obtient :

$$|\epsilon^{2s} c_2^\epsilon| \leq K$$

Ce qui implique d'après (1.20) :

$$|\epsilon^{2s} c_1^\epsilon| \leq K\epsilon^{2(1-s)}$$

On a donc existence de $c^\star = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{2s} c_2^\epsilon$ et $\epsilon^{2s} c_1$ tend vers 0.

La définition de P^ϵ dans (1.19) et les convergences de la pression dans le milieu poreux et le film mince (lemmes 1.3.2 et 1.3.5) donnent le résultat. $\square$

Corollaire 1.5.2. *$p^\star$ est continue sur Σ*

Preuve

On passe à la limite dans (1.21). Avec les notations du lemme précédent, on sait que :

$$\lim_{\epsilon\to 0} B_1^\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} B_2^\epsilon = 0$$

D'autre part :

$$R^\epsilon(e_3)_3 \rightharpoonup 1 \qquad \text{dans } L^2(\Omega)$$

D'après les résultats classiques des fonctions Y-périodiques, on a :

$$R^\epsilon(e_3) \rightharpoonup \int_Y R(e_3)\, dy_1\, dy_3$$

On rappelle d'après le lemme 1.3.3 que :

$$\mathrm{div} R(e_3) = 0 \quad \text{dans}\, Y$$

Soit $\varphi(y_1, y_3) = y_3$, φ appartient à $H^1(Y)$, on a alors :

$$0 = \int_Y \mathrm{div} R(e_3)\varphi\, dy_1\, dy_3 = -\int_Y R(e_3)_3\, dy_1\, dy_3 + \int_{\partial Y} n_3 y_3\, d\sigma$$

Ceci implique que :

$$\lim_{\epsilon\to 0} B_3^\epsilon = \int_\Omega p_1^\star \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0} B_4^\epsilon = \int_{F_2} p_2^\star \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3$$

Et d'après le lemme précédent :

$$\lim_{\epsilon\to 0} B_5^\epsilon = \int_{F_2} c^\star \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, l'équation (1.21) devient à la limite :

$$\int_\Omega p_1^\star \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3 + \int_{F_2} (p_2^\star + c^\star) \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3 = 0$$

Tenant compte que $p_1^\star$ et $p_2^\star$ ne dépendent pas de x_3, on obtient :

$$-\int_w p_1^\star \varphi\, dx_1 + \int_w (p_2^\star + c^\star)\varphi\, dx_1 = 0$$

d'où le résultat. $\square$

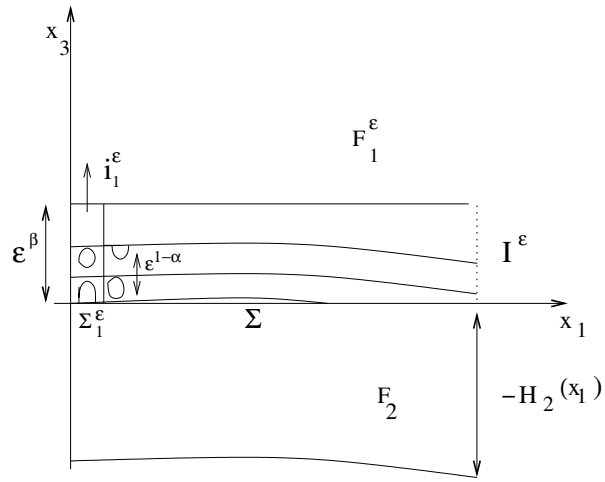

FIG. 1.4 – La bande mince I^ϵ

1.5.3 Détermination de la vitesse tangentielle à l'interface Σ

On a besoin d'avoir le comportement des vitesses de part et d'autre de l'interface pour pouvoir déduire l'équation limite en pression.

Lemme 1.5.3. *La vitesse tangentielle $s_1^\star(x_1)$ est nulle sur Σ.*

Preuve
On procède comme dans [11]. Soit β tel que $0 < 2(1-s) < \beta < 3(1-s)$.
On considère une bande mince dans Ω définie par : (voir Figure 1.4)

$$I^\epsilon = \cup_k i_k^\epsilon$$

avec

$$i_k^\epsilon = \{(x_1, x_3), \quad k\epsilon < x_1 < (k+1)\epsilon, \quad 0 < x_3 < \epsilon^\beta\}$$

On pose :

$$\Sigma_k^\epsilon = \partial i_k^\epsilon \cap \Sigma$$

En effectuant dans chaque rectangle i_k^ϵ le changement de variables suivant :

$$y_1 = \frac{x_1 - k\epsilon}{\epsilon}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{\epsilon^\beta},$$

on se ramène à un ouvert fixe Y_k ($Y = Y_k \cup T_k$. voir Figure 1.5).

Dans les variables (x_1, x_3), une cellule du milieu poreux a les dimensions $(\epsilon, \epsilon^{1-\alpha})$. Comme $0 < \beta < 1-\alpha = 3(1-s)$, alors chaque rectangle i_k^ϵ et donc Y_k contient au moins une partie solide où la vitesse est prolongée par zéro, et dans laquelle on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré.

On a :

$$\int_{\Sigma_k^\epsilon} (u_1^\epsilon)^2 \, dx_1 = \epsilon \int_{y_3=0} (u_1^\epsilon)^2 \, dy_1 \leq \epsilon K \|u_1^\epsilon\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial Y)^2}$$

On se place dans Y et non pas dans Y_k pour que la constante K soit indépendante de

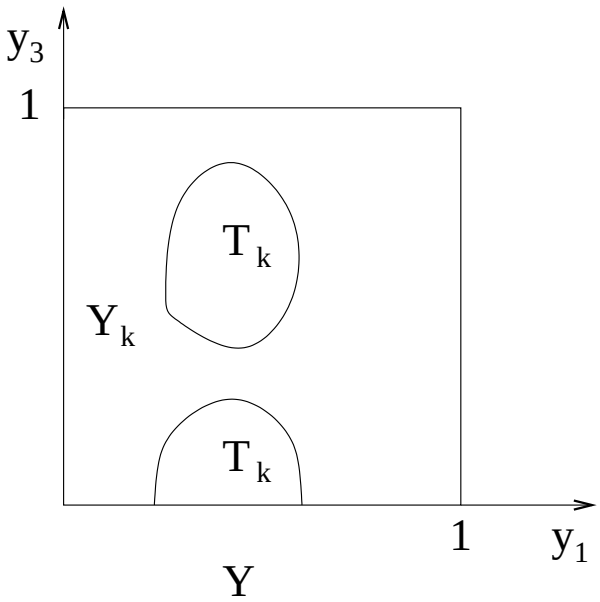

FIG. 1.5 – La cellule en Y

la position de T_k dans Y qui varie avec k. Par continuité de la fonction trace :

$$\|u_1^\epsilon\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial Y)} \leq K\|u_1^\epsilon\|^2_{H^1(Y)}$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Poincaré :

$$\|u_1^\epsilon\|^2_{H^1(Y)} = \int_Y (u_1^\epsilon)^2\, dy_1\, dy_3 + \int_Y (\nabla u_1^\epsilon)^2\, dy_1\, dy_3 = \int_{Y_k} (u_1^\epsilon)^2\, dy_1\, dy_3 + \int_{Y_k} (\nabla u_1^\epsilon)^2\, dy_1\, dy_3$$

$$\leq K \int_Y (\nabla u_1^\epsilon)^2\, dy_1\, dy_3 = K \int_{Y_k} (\nabla u_1^\epsilon)^2\, dy_1\, dy_3$$

En se ramenant en variables x_1, x_3, on obtient :

$$\int_{\Sigma_k^\epsilon} (u_1^\epsilon)^2\, dx_1 \leq K\epsilon^{2-\beta} \left(\int_{i_k^\epsilon} (\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_1})^2\, dx_1\, dx_3 + \int_{i_k^\epsilon} \epsilon^{2(\beta+\alpha-1)} (\frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3})^2\, dx_1\, dx_3 \right)$$

En sommant sur tous les rectangles i_k^ϵ, on obtient :

$$\int_\Sigma (u_1^\epsilon)^2\, dx_1 \leq K\epsilon^{2-\beta} \left(\int_{I^\epsilon} (\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_1})^2\, dx_1\, dx_3 + \int_{I^\epsilon} \epsilon^{2(\beta+\alpha-1)} (\frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3})^2\, dx_1\, dx_3 \right)$$

et d'après les estimations du lemme 1.3.1, on déduit que :

$$\int_\Sigma (u_1^\epsilon)^2 dx_1 \leq K\epsilon^{\beta-2(1-s)}$$

Le choix de $\beta - 2(1-s) > 0$ implique le résultat. $\square$

1.5.4 Equation de Reynolds généralisée

On peut maintenant énoncer le résultat principal du chapitre :

Théorème 1.5.4. *$p^\star$ est l'unique solution d'une équation de type Reynolds suivante :* $(w =]0,1[)$

$$\int_w \left(\frac{detK}{K_{33}}H_1 + \frac{1}{12}H_2^3\right)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,dx_1 = \int_w \frac{s_1}{2}H_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,dx_1 - [f(1)\varphi(1) - f(0)\varphi(0)]$$
$$\forall \varphi \in H^1(w) \qquad (1.22)$$

où f est le flux défini par :

$$f(x_1) = \int_{-H_2(x_1)}^{x_1} g_1(x_1,\xi)\,d\xi$$

Les vitesses limites sont données par :

$$\begin{cases} u_1^\star = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p^\star}{\partial x_1}x_3(x_3+H_2) - s_1\dfrac{x_3}{H_2} & \text{dans } F_2 \\ u_3^\star = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_1^\star = -\dfrac{detK}{K_{33}}\dfrac{\partial p^\star}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega \\ v_3^\star = 0 \end{cases}$$

Preuve

Prenons φ dans $H^1(w)$ comme fonction-test dans (1.4) :

$$\epsilon^\alpha \int_{F_1^\epsilon} \mathrm{div}_{\alpha,s}u^\epsilon\varphi\,dx_1\,dx_3 + \epsilon^s\int_{F_2}\mathrm{div}_s u^\epsilon\varphi\,dx_1\,dx_3 = 0$$

On prolonge la vitesse par zéro dans les parties solides. En appliquant Green sur tous les termes, on obtient :

$$-\epsilon^\alpha\int_\Omega u_1^\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_3 + \epsilon^\alpha\int_{\partial\Omega}u_1^\epsilon n_1\,\varphi\,d\sigma - \epsilon^s\int_{\partial\Omega}H_2'u_1^\epsilon n_3\,\varphi\,d\sigma + \int_{\partial\Omega}u_3^\epsilon n_3\,\varphi\,d\sigma -$$

$$\epsilon^s\int_{F_2}u_1^\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_3 + \epsilon^s\int_{\partial F_2}u_1^\epsilon n_1\varphi\,d\sigma - \epsilon^s\int_{\partial F_2}H_2'u_1^\epsilon n_3\,\varphi\,d\sigma + \int_{\partial F_2}u_3^\epsilon n_3\,\varphi\,d\sigma = 0$$

Tenant compte des conditions aux limites en vitesse, après simplification, on obtient :

$$-\epsilon^{\frac{\alpha-(3s-2)}{2}}\int_\Omega\frac{u_1^\epsilon}{\epsilon^{1-\frac{s+\alpha}{2}}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_3 - \int_{F_2}u_1^\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_3 + \int_{\Gamma_l\cap\partial F_2}g_1 n_1\,\varphi\,d\sigma = 0 \qquad (1.23)$$

D'après le théorème 1.3.8 et le lemme 1.4.2, et tenant compte de la relation critique ($\alpha = 3s - 2$), on peut passer à la limite :

$$\int_{\Omega} v_1^\star \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \int_{F_2} u_1^\star \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \int_{\Gamma_l \cap \partial F_2} g_1 n_1 \, \varphi \, d\sigma$$

On exprime cette équation en utilisant les expressions de $p^\star$ données dans les théorèmes 1.4.1 et 1.4.5, et en posant

$$f(x_1) = \int_{-H_2(x_1)}^{x_1} g_1(x_1, \xi) \, d\xi$$

on obtient le premier résultat.

Pour obtenir les champs de vitesse, on choisit ϕ dans $H_0^1(F_2)$; $(\phi, 0)$ prolongée par zéro dans F_1^ϵ est pris comme fonction-test dans (1.3) (on choisit la détermination p_2^ϵ de la pression par exemple) :

$$\epsilon^{2s} \int_{F_2} \left(\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) dx_1 \, dx_3 + \int_{F_2} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \, dx_1 \, dx_3 = \epsilon^{2s} \int_{F_2} p_2^\epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) dx_1 \, dx_3$$

Après passage à la limite, sachant que

$$\epsilon^{2s} \int_{F_2} \left(\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) dx_1 \, dx_3 \to 0$$

on obtient l'équation entre la vitesse limite et la pression limite suivante :

$$\int_{F_2} \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \, dx_1 \, dx_3 = \int_{F_2} p_2^\star \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - H_2' \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) dx_1 \, dx_3 = - \int_{F_2} \frac{\partial p^\star}{\partial x_1} \phi \, dx_1 \, dx_3$$

Ce qui implique que :

$$\frac{\partial^2 u_1^\star}{\partial x_3^2} = \frac{\partial p_2^\star}{\partial x_1} \qquad \text{dans} \qquad H^{-1}(F_2)$$

En intégrant deux fois en x_3 dans F_2 et en tenant compte du fait que $p^\star$ qui ne dépend pas de la variable x_3 et des conditions aux bords de la vitesse données dans le théorème 1.3.8, on obtient le premier résultat. Le deuxième résultat a été démontré au théorème 1.4.5.

Remarque 1.5.5. *1. Si on se place dans le cas non critique $\alpha > 3s-2$, après passage à la limite dans l'équation* (1.22)*, on obtient :*

$$\int_{F_2} u_1^\star \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx_1 = f(1)\varphi(1) - f(0)\varphi(0) \qquad \forall \varphi \in H^1(w)$$

Ce cas, correspond à un milieu poreux imperméable, qui n'a pas d'influence sur le film mince, et la pression vérifie l'équation de Reynolds classique :

$$\int_w \frac{1}{12} H_2^3 \frac{\partial p^\star}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1 = \int_w \frac{s_1}{2} H_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1 - (f(1)\varphi(1) - f(0)\varphi(0)) \quad \forall \varphi \in H^1(w)$$

Par contre pour $\alpha < 3s - 2$, on obtient seulement le fait que $v_1^\star$ est nulle dans Ω, ce qui ne donne pas le terme significatif.

2. *La formulation forte associée à (1.22) est :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\dfrac{detK}{K_{33}} H_1 + \dfrac{H_2^3}{12}\right)\dfrac{\partial p^\star}{\partial x_1}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[s_1 \dfrac{H_2}{2}\right] \\ \left[\left(\dfrac{detK}{K_{33}} H_1 + \dfrac{H_2^3}{12}\right)\dfrac{\partial p^\star}{\partial x_1}\right](x) = -f(x) + \dfrac{s_1}{2} H_2(x) \qquad pour\, x = 0, 1 \end{cases}$$

1.6 Application et comparaison avec d'autres modèles

1.6.1 Un dispositif physique particulier

On considère un dispositif de type palier dont les caractéristiques géométrique réelles sont :

l taille de la microstructure dans un milieu poreux.
L largeur du palier.
$h_1(Z_1)$ épaisseur de la couche poreuse.
$h_2(Z_1)$ épaisseur du film mince.
s_0 vitesse tangentielle de la paroi inférieure.
μ viscosité du fluide.

Le rapport $\epsilon = \dfrac{l}{L}$ fixe la valeur du petit paramètre par rapport auquel on va exprimer les données h_1 et h_2.

Il est toujours possible de se ramener au cas critique étudié dans la section 5 de la partie théorique qui implique que le milieu poreux a une influence sur l'écoulement. On introduit les fonctions H_1, H_2 et le paramètre α de la manière suivante : On définit d'abord α et H_1 par :

$$h_1(Z_1) = L\epsilon^\alpha H_1(Z_1)$$

de telle manière que H_1 soit de l'ordre de grandeur de 1, par exemple

$$\min_{Z_1} H_1(Z_1) = 1$$

On définit ensuite H_2 de telle sorte :

$$h_2(Z_1) = L\epsilon^s H_2(Z_1), \quad \text{où } s = \frac{\alpha + 2}{3} \text{ (“cas critique”)}$$

H_2 pourra être petit ou grand.

Après changement de variables :

$$z_i = \frac{Z_i}{L} \qquad i = 1, 3$$

et en posant :

$$\hat{p}^\epsilon = \frac{L}{s_0 \mu} p, \qquad \hat{u}^\epsilon = \frac{u}{s_0} \tag{1.24}$$

où p et u sont respectivement les champs de vitesse et pression réels, le fluide satisfait aux équations de Stokes normalisées suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{u}_1^\epsilon}{\partial z_1^2} + \dfrac{\partial^2 \hat{u}_1^\epsilon}{\partial z_3^2} = \dfrac{\partial \hat{p}^\epsilon}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\epsilon}{\partial z_1^2} + \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\epsilon}{\partial z_3^2} = \dfrac{\partial \hat{p}^\epsilon}{\partial z_3} \\ \dfrac{\partial \hat{u}_1^\epsilon}{\partial z_1} + \dfrac{\partial \hat{u}_3^\epsilon}{\partial z_3} = 0 \end{cases}$$

dans le domaine $\{(z_1, z_3), \quad 0 < z_1 < 1 \quad \text{et } 0 < z_3 < \epsilon^\alpha \hat{H}_1(z_1) + \epsilon^s \hat{H}_2(z_1)\}$ où $\hat{H}_i(z_1) = H_i(Z_1)$. On est donc dans le cas critique et les résultats du paragraphe 5 sont applicables.

1.6.2 L'équation de Reynolds correspondante

Les résultats théoriques du paragraphe 5.4 montrent que $\epsilon^{2s}\hat{p}^\epsilon$ converge vers $\hat{p}^\star(z_1)$. (On rappelle que z_1 correspond à la variable x_1 introduite dans la partie théorique et qu'en tenant compte de la normalisation précédente en vitesse la variable s_1 de la partie théorique vaut 1)

L'équation de type-Reynolds avec ces notations, obtenue dans le paragraphe 4.4 s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\left(\frac{detK}{K_{33}}\hat{H}_1(z_1) + \frac{1}{12}\hat{H}_2^3(z_1)\right)\frac{\partial \hat{p}^\star}{\partial z_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{H}_2}{\partial z_1}(z_1)$$

où les K_{ij} sont déterminés par :
$K_{ij} = \int_Y w_j^i \, dy_1 \, dy_3$
avec $w^i i = 1, 2$, solutions des problèmes locaux définis dans $Y = [0, 1]^2$

$$\begin{cases} \triangle w^i = \nabla \pi^i + e_i \\ \operatorname{div} w^i = 0 \qquad \text{dans } Y \\ w^i = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial T \end{cases}$$

On prend donc comme approximation de la pression réelle, la pression toujours notée p et qui vaut $\dfrac{1}{\epsilon^{2s}}\dfrac{s_0\mu}{L}\hat{p}^\star$ (cela correspond au premier terme d'un développement asymptotique de la pression réelle par rapport à ϵ) ; p satisfait l'équation de Reynolds suivante :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial Z_1}\left(\left(\frac{detK}{K_{33}}l^2 h_1 + \frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial Z_1}\right) = \frac{s_0}{2}\frac{\partial h_2}{\partial Z_1} \tag{1.25}$$

D'après l'étude théorique, on a montré que cette approximation de la pression physique p ne dépend pas de la variable Z_3, et qu' elle est identique dans les deux milieux.

Les champs de vitesse limites normalisés se déduisent de $\hat{p}^\star$ (voir section 1.3.4) et sont définis :

- dans le milieu poreux (voir lemme 1.4.2) :

$$\begin{cases} \hat{v}_1^\star = \lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{\hat{u}_1^\epsilon}{\epsilon^{2(1-s)}} \\ \hat{v}_3^\star = \lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{\hat{u}_3^\epsilon}{\epsilon^{2(1-s)}} = 0 \end{cases}$$

- dans le film mince (voir théorème 1.3.8)

$$\begin{cases} \hat{u}_1^\star = \lim_{\epsilon\to 0} \hat{u}_1^\epsilon \\ \hat{u}_3^\star = \lim_{\epsilon\to 0} \hat{u}_3^\epsilon = 0 \end{cases}$$

Tenant compte de la normalisation en vitesse (1.24), les champs de vitesse réels notés (u_1, u_2) sont approchés par :

$u \sim \epsilon^{2(1-s)} s_0 \hat{v}^\star$ dans le milieu poreux,

$u \sim s_0 \hat{u}^\star$ dans le film mince.

On remarque les différences d'ordre de grandeur des vitesses d'écoulement dans le film mince et dans le milieu poreux :

Les champs de vitesses sont reliés à la pression physique ; dans le milieu poreux, il vérifie l'équation de Darcy suivante :

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{detK}{\mu K_{33}} l^2 \dfrac{\partial p}{\partial Z_1} \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

et dans le film mince :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2\mu} \dfrac{\partial p}{\partial Z_1} Z_3(Z_3 - h_2) - s_0 \dfrac{Z_3 - h_2}{h_2} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Dans le milieu poreux la vitesse est indépendante de la variable Z_3 est de l'ordre de grandeur de $\epsilon^{2(1-s)}$. Dans le film mince elle est de l'ordre de grandeur de 1 et elle est nulle sur l'interface milieu poreux-film mince (pour $Z_3 = h_2$). Ceci met en évidence la discontinuité de la vitesse tangentielle de ce modèle limite à l'interface milieu poreux-film mince. Ceci traduit un glissement à l'interface, il est faible sauf si s est "proche " de 1 (ce qui correspond aussi à α "proche" de 1).

Un glissement du même ordre existe à l'interface entre le fluide et la paroi supérieure supposée immobile.

1.6.3 Comparaison avec d'autres modèles

Géométrie du blochet

On considère la géométrie particulière de la figure 1.6 où l'épaisseur du milieu poreux est constante et l'épaisseur 'totale' est donnée par :

$$h(Z_1) = H(1 + m\frac{Z_1}{L})$$

Le milieu poreux est défini par :

$$h_1 = Hl_0(1+m)$$

et le film fluide par :

$$h_2(Z_1) = H(1 + m\frac{Z_1}{L} - l_0(1+m))$$

La description géométrique est donc liée à la donnée des paramètres L, H, m et l_0, tels que : $-1 < m < 0$ et $\quad 0 < l_0 < 1$.

Avec ces définitions et notations, l'équation (1.22) s'écrit :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial Z_1}\left(\left(\frac{detK}{K_{33}}l^2Hl_0(1+m)+H^3\frac{\left(1+m\frac{Z_1}{L}-l_0(1+m)\right)^3}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial Z_1}\right)=\frac{s_0}{2}\frac{Hm}{L}\ 0 < Z_1 < L \tag{1.27}$$

On adimensionne dans la direction de Z_1, en posant :

$$z_1 = \frac{Z_1}{L}$$

et on utilisera la pression adimensionnée définie par :

$$\overline{\overline{p}} = \frac{H^2}{\mu s_0 L}p \tag{1.28}$$

Alors l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\left(\frac{detK}{K_{33}}\frac{l^2}{H^2}l_0(1+m)+\frac{(1+mz_1-l_0(1+m))^3}{12}\right)\frac{\partial\overline{\overline{p}}}{\partial z_1}\right) = \frac{m}{2} \quad 0 < z_1 < 1 \tag{1.29}$$

La solution de cette équation sera comparée avec celles obtenues pour d'autres modèles décrits ci -après.

Les autres modèles [18]

On présente ici, deux autres modélisations introduites formellement dans [18] où la pression est supposée a priori indépendante de la variable Z_3 et identique dans les deux milieux, film mince et milieu poreux.

Dans le milieu poreux, la vitesse horizontale du fluide est supposée obéir à une loi de Darcy, où le gradient de la pression est proportionnel à la vitesse et à la viscosité :

$$\frac{\partial p}{\partial Z_1} = -\frac{\mu}{\beta^2(Z_3)}u_1 \qquad h_2(Z_1) < Z_3 < h(Z_1) \tag{1.30}$$

où β désigne la porosité et est reliée à la taille du pore ou à la longueur caractéristique de l'écoulement. Dans le cas général, β peut dépendre de Z_3 mais en fait sera supposé constant.

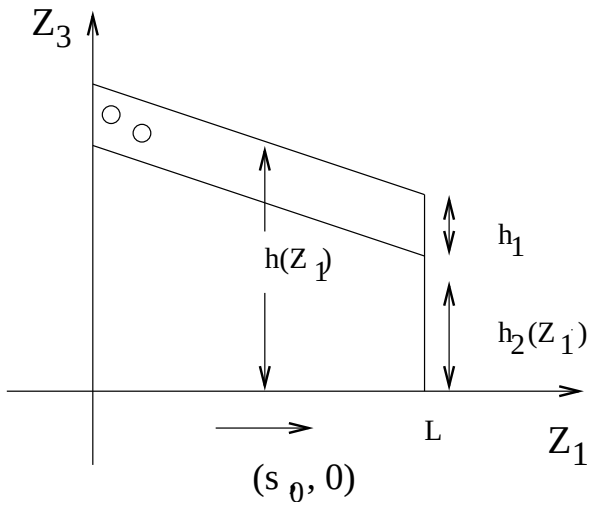

FIG. 1.6 – Géométrie du domaine

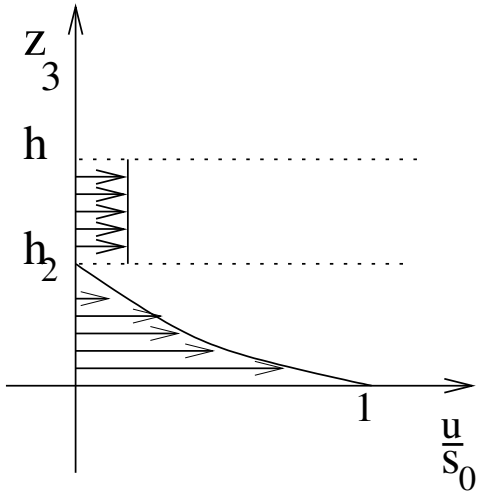

FIG. 1.7 – champ de vitesse du modèle théorique

Dans le film mince, l'équation " des films minces" classique suivante est retenue :

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial Z_3^2} = \frac{\partial p}{\partial Z_1} \qquad 0 < Z_3 < h_2(Z_1) \tag{1.31}$$

En intégrant deux fois l'équation précédente dans l'épaisseur, on obtient :

$$u_1(Z_1, Z_3) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial Z_1} Z_3^2 + C_1(Z_1) Z_3 + C_2(Z_1) \tag{1.32}$$

Il reste à identifier les "constantes" de l'équation (1.32) ; pour cela, il est supposé qu'il y a continuité de la vitesse à l'interface milieu poreux- film mince et adhérence du fluide à la paroi inférieure :

$$Z_3 = 0 \quad : u_1 = s_0 \quad , Z_3 = h_2 \quad : u_{/(\text{milieu poreux})} = u_{/(\text{film mince })}$$

L'équation (1.32) s'écrit alors en tenant compte de (1.30)

$$u_1 = s_0 \frac{h_2 - Z_3}{h_2} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial Z_1}\left(Z_3^2 - \left(h_2 + \frac{2\beta^2}{h_2}\right) Z_3\right) \tag{1.33}$$

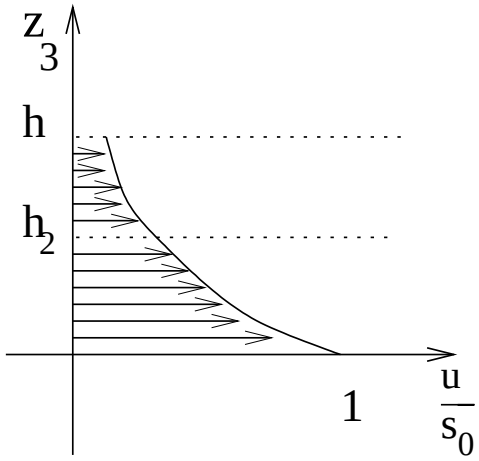

FIG. 1.8 – champ de vitesse dans le modèle 1

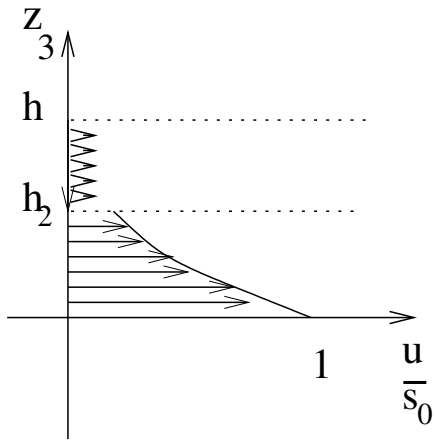

FIG. 1.9 – champ de vitesse dans le modèle 2

Le débit est défini par :

$$Q(Z_1) = \int_0^{h_2} u_1 \, dZ_3 + \int_{h_2}^{h} u_1 \, dZ_3$$

Il est alors proposé deux façons différentes de calculer $Q(Z_1)$ en choisissant deux valeurs différentes de u_1 dans le milieu poreux :

- Dans un premier modèle, le débit est calculé en tenant compte de (1.30) et (1.33) :

La continuité du débit :

$$\frac{\partial Q(Z_1)}{\partial Z_1} = 0$$

permet alors d'obtenir l'équation de Reynolds suivante :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial Z_1}\left(\left(\beta^2\frac{h+h_1}{2}+\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial Z_1}\right) = \frac{s_0}{2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial Z_1}\right) \quad 0 < Z_1 < L \tag{1.34}$$

- Dans un deuxième modèle, le débit tangentiel issu du milieu poreux est supposé négligeable et le calcul du débit n'utilise que l'équation (1.33). Notons que la porosité β intervient quand même par l'intermédiaire de (1.33)

On obtient l'équation de Reynolds suivante :

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial Z_1}\left(\left(\beta^2\frac{h_2}{2}+\frac{h_2^3}{12}\right)\frac{\partial p}{\partial Z_1}\right)=\frac{s_0}{2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial Z_1}\right)\quad 0<Z_1<L \tag{1.35}$$

On va écrire les équations (1.34) et (1.35) pour la pression $\overline{\overline{p}}$ définie par (1.28), en introduisant les paramètres l_0, m et en définissant la porosité β à partir d'un paramètre a :

$$\beta = aH$$

Les équations (1.34) et (1.35) s'écrivent respectivement (on a noté p_1 et p_2 les solutions correspondantes) par rapport à la variable z_1.

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\left(a^2\frac{1+mz_1+l_0(1+m)}{2}+\frac{(1+mz_1-l_0(1+m))^3}{12}\right)\frac{\partial p_1}{\partial z_1}\right)=\frac{m}{2}\ 0<z_1<1 \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\left(a^2\frac{1+mz_1-l_0(1+m)}{2}+\frac{(1+mz_1-l_0(1+m))^3}{12}\right)\frac{\partial p_2}{\partial z_1}\right)=\frac{m}{2}\ 0<z_1<1 \tag{1.37}$$

Remarque 1.6.1. *Dans [18] sont introduits deux solutions 'limites'. L'une correspondant à l'absence de milieu poreux ($l_0 = 0, a = 0$) est dénommée solution "newtonienne". Elle vérifie l'équation de Reynolds classique dans tout le "gap" h :*

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{(1+mz_1)^3}{12}\frac{\partial p_n}{\partial z_1}\right)=\frac{m}{2}\ 0<z_1<1 \tag{1.38}$$

L'autre correspondant à un milieu poreux imperméable ($l_0 \neq 0, a = 0$) est appelée "non-newtonienne" et vérifie l'équation de Reynolds classique dans un "gap" réduit h_2 :

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{(1+mz_1-l_0(1+m))^3}{12}\frac{\partial p_i}{\partial z_1}\right)=\frac{m}{2}\quad 0<z_1<1 \tag{1.39}$$

1.6.4 Résultats numériques

Comme on l'a montré dans l'étude théorique, les conditions aux limites à imposer sur le problème limite devraient être de type Neumann. Cependant, pour faciliter l'interprétation et les comparaisons avec les résultats des mécaniciens, nous utilisons des conditions limites de Dirichlet homogènes comme dans ces travaux :

$$p(0) = p(1) = 0$$

Dans les coefficients de l'équation (1.29) apparaissent plusieurs termes du tenseur de perméabilité du milieu poreux. Pour simplifier, nous supposerons que la matrice K est diagonale, alors $\dfrac{detK}{K_{33}} = K_{11}$ sera le seul paramètre définissant la géométrie de la

microstructure du milieu poreux. On remarquera en comparant les deux équations de Darcy (1.26) et (1.30) que :

$$\beta^2 = a^2 H^2 = K_{11} l^2 \tag{1.40}$$

La porosité β dépend donc de la géométrie du pore par K_{11} et de l qui représente la taille vraie de la microstructure de la cellule dans le milieu poreux. A l'aide de (1.40), l'équation (1.27) ne dépendra que de a, l_0 et m et s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\left(a^2 l_0(1+m) + \frac{(1+mz_1 - l_0(1+m))^3}{12}\right)\frac{\partial p_0}{\partial z_1}\right) = \frac{m}{2} \quad 0 < z_1 < 1 \tag{1.41}$$

Pour comparer de manière synthétique les différents modèles, on introduit la charge w définie par :

$$w = \int_0^1 p\, dz_1$$

On notera :

w_0 la charge calculée à partir de la solution p_0 de l'équation (1.41)
w_1 celle calculée à partir de la solution p_1 de l'équation(1.36)
w_2 celle calculée à partir de la solution p_2 de l'équation (1.37)
w_n celle calculée à partir de la solution p_n de l'équation (1.38)
w_i celle calculée à partir de la solution p_i de l'équation (1.39).

Les tableaux 1.1, 1.2 et 1.3 donnent respectivement les valeurs de $\frac{w_0}{w_1}$ et $\frac{w_0}{w_2}$ pour $m = -0.2$, $m = -0.6$ et $m = -0.8$ (rappellons que m présente la pente du "blochet" que l_0 est le rapport entre l'épaisseur du milieu poreux et $h_{min} = H(1+m)$) en fonction de la porosité du milieu poreux.

Dans tous les cas, on remarque que lorsque a tend vers 0, les solutions des différents modèles décrits par les équations (1.36) (1.37) et (1.41) convergent vers la même solution qui n'est autre que la solution 'imperméable' ce qui est logique. Les différences entre le modèle théorique et les deux autres modèles sont d'autant plus importantes que la pente m est grande.

La différence entre le modèle théorique et le modèle 1 est en général d'autant plus faible que la partie poreuse est importante, mais c'est plutôt le contraire avec le modèle 2. Une explication serait qu'entre le modèle théorique et le modèle 2 la différence est liée à ce qui se passe dans le milieu poreux. Dans le modèle théorique et le modèle 1, la différence se fait plus sentir dans la partie "fluide" de l'écoulement.

Les tableaux 1.4, 1.5, 1.6 permettent de comparer le modèle théorique avec les modèles newtoniens et imperméables, ils donnent les valeurs de $\frac{w_0}{w_n}$ et $\frac{w_0}{w_{imp}}$.

Clairement le modèle théorique tend vers le modèle newtonien si l_0 est petit et d'autant plus vite que a est petit, l'augmentation de la pente diminuant les différences.

La figure 1.10 représente pour $m = -0.6, l_0 = 0.5$ et $a = 0.2$ les courbes de pressions solutions de (1.41) (1.36) (1.37) (1.38) et (1.39). On remarque que la pression imperméable solution de (1.39) est beaucoup plus importante que les autres pressions.

La charge relative sera notée par :

$$W_i = \frac{w_i}{w_n}$$

	$l_0 = 0.1$	$l_0 = 0.5$	$l_0 = 0.9$	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.33	1.36	1.11	a=0.2
$\frac{w_0}{w_2}$	1.27	0.75	0.12	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.08	1.17	1.1	a=0.1
$\frac{w_0}{w_2}$	1.07	0.88	0.16	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.02	1.05	1.08	a=0.05
$\frac{w_0}{w_2}$	1.01	0.96	0.26	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.04	a=0.02
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	0.99	0.52	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.01	a=0.01
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.76	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.005
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.91	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.002
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.98	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.001
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.99	

TAB. 1.1 – m=-0.2

	$l_0 = 0.1$	$l_0 = 0.5$	$l_0 = 0.9$	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.59	1.44	1.26	a=0.2
$\frac{w_0}{w_2}$	1.5	0.93	0.38	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.17	1.2	1.15	a=0.1
$\frac{w_0}{w_2}$	1.14	0.92	0.43	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.04	1.08	1.07	a=0.05
$\frac{w_0}{w_2}$	1.03	0.96	0.5	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.01	1.03	a=0.02
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	0.99	0.65	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.01	a=0.01
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.78	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.005
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.9	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.002
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.98	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.001
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.99	

TAB. 1.2 – m=-0.6

	$l_0 = 0.1$	$l_0 = 0.5$	$l_0 = 0.9$	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.88	1.51	1.34	a=0.2
$\frac{w_0}{w_2}$	1.77	1.07	0.59	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.32	1.24	1.16	a=0.1
$\frac{w_0}{w_2}$	1.27	0.97	0.59	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.09	1.11	1.08	a=0.05
$\frac{w_0}{w_2}$	1.08	0.95	0.61	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.01	1.03	1.03	a=0.02
$\frac{w_0}{w_2}$	1.01	0.98	0.69	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.01	a=0.01
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.77	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.005
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.86	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.002
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.95	
$\frac{w_0}{w_1}$	1.	1.	1.	a=0.001
$\frac{w_0}{w_2}$	1.	1.	0.98	

TAB. 1.3 – m=-0.8

	$l_0 = 0.1$	$l_0 = 0.5$	$l_0 = 0.9$	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.23	2.25	2.04	a=0.2
$\frac{w_0}{w_i}$	0.93	0.37	0.013	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.3	4.17	7.6	a=0.1
$\frac{w_0}{w_i}$	0.98	0.7	0.04	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.31	5.35	24.38	a=0.05
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.9	0.15	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.32	5.83	72.61	a=0.02
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.98	0.47	
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.74	a=0.01
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.9	a=0.005
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.98	a=0.002
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.98	0.99	a=0.001

TAB. 1.4 – m=-0.2

	$l_0 = 0.1$	$l_0 = 0.5$	$l_0 = 0.9$	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.07	1.24	1.21	a=0.2
$\frac{w_0}{w_i}$	0.889	0.39	0.07	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.17	2.09	2.93	a=0.1
$\frac{w_0}{w_i}$	0.98	0.66	0.17	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.2	2.73	5.54	a=0.05
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.86	0.32	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.21	3.06	9.76	a=0.02
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.97	0.57	
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.75	a=0.01
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.89	a=0.005
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.97	a=0.002
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.98	0.99	a=0.001

TAB. 1.5 – m=-0.6

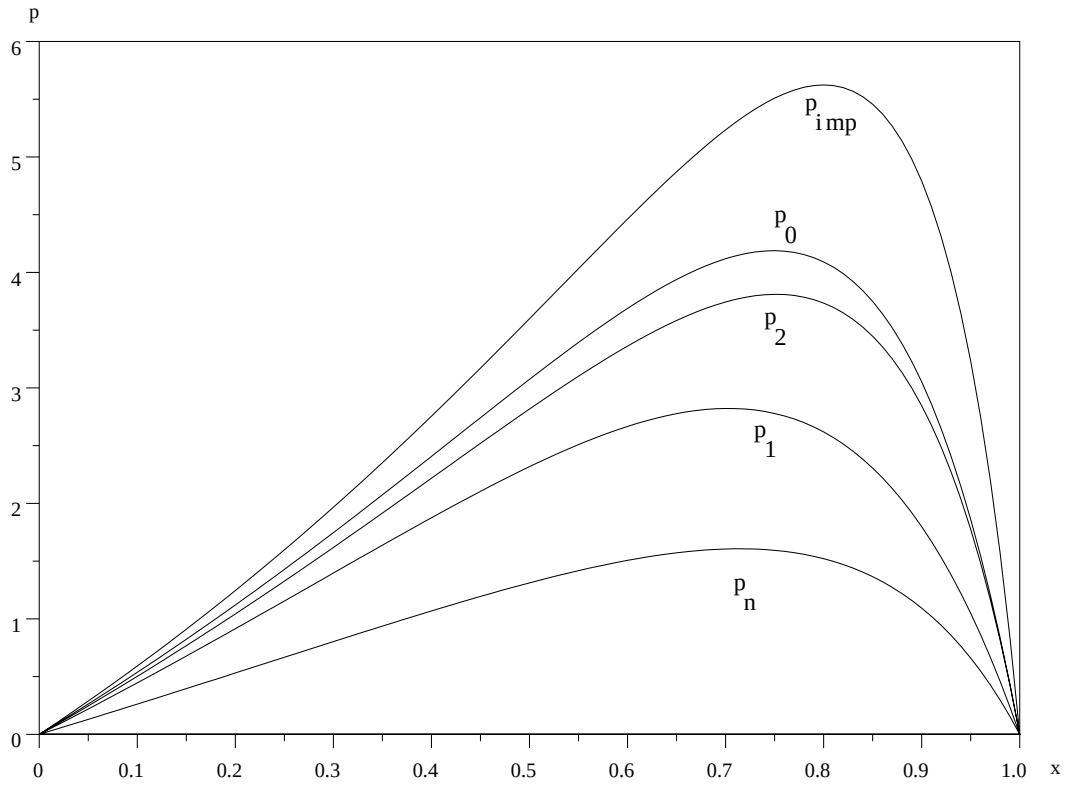

FIG. 1.10 – Pressions dans les cinq modèles pour $m = -0.6, l_0 = 0.5$ et $a = 0.2$

	$l_0 = 0.1$	$l_0 = 0.5$	$l_0 = 0.9$	
$\frac{w_0}{w_n}$	0.92	0.8	0.74	a=0.2
$\frac{w_0}{w_i}$	0.8	0.37	0.11	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.06	1.27	1.41	a=0.1
$\frac{w_0}{w_i}$	1.93	0.59	0.21	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.12	1.7	2.29	a=0.05
$\frac{w_0}{w_i}$	0.98	0.79	0.35	
$\frac{w_0}{w_n}$	1.13	2.04	3.6	a=0.02
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.94	0.55	
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.98	0.71	a=0.01
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.84	a=0.005
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.99	0.95	a=0.002
$\frac{w_0}{w_i}$	0.99	0.98	0.98	a=0.001

TAB. 1.6 – m=-0.8

On veut aussi comparer numériquement les trois modèles avec le modèle newtonien. Les figures 1.11, 1.12 et 1.13 donnent W_i en fonction du paramètre de perméabilité $\sqrt{a} = \sqrt{K_{11}}\dfrac{l}{H}$ pour différentes valeurs de m et l_0 qui définissent l'épaisseur du milieu poreux.

Ces figures montrent l'influence du milieu poreux qui est plus importante pour l_0 grand et m petit.

Remarque 1.6.2. *La généralisation des résultats précédents peut-être obtenue en dimension trois d'espace. Dans le film mince, la vitesse et la pression vérifient la relation suivante (voir théorème* 1.4.1*)*

$$\overline{u}_i^\star = -\frac{H_2^2}{12}\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_i} + \frac{s+s_i}{2}, \qquad i = 1,2$$

Dans le milieu poreux la loi de Darcy s'écrit en dimension 3 *: (voir théorème* 1.4.5*) :*

$$-v_i^\star = \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_1}\left(K_{i1} - \frac{K_{i3}K_{31}}{K_{33}}\right) + \frac{\partial p_1^\star}{\partial x_2}\left(K_{i2} - \frac{K_{i3}K_{32}}{K_{33}}\right), \qquad i = 1,2$$

Alors l'équation de Reynolds généralisée est :

$$\sum_{i,j=1,2}\int_\omega \left(\left(K_{ji} - \frac{K_{j3}K_{3i}}{K_{33}}\right)H_1 + \frac{H_2^3}{12}\delta_{ij}\right)\frac{\partial p^\star}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx_1dx_2 = \sum_{i=1,2}\int_\omega \frac{s_i}{2}H_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx_1dx_2 - \int_{\partial\omega} f.n\,\varphi\,d\sigma,$$

$$\textit{avec} \qquad f_i(x) = \int_{-H_2(x)}^{x} g_i(x,\xi)\,d\xi.$$

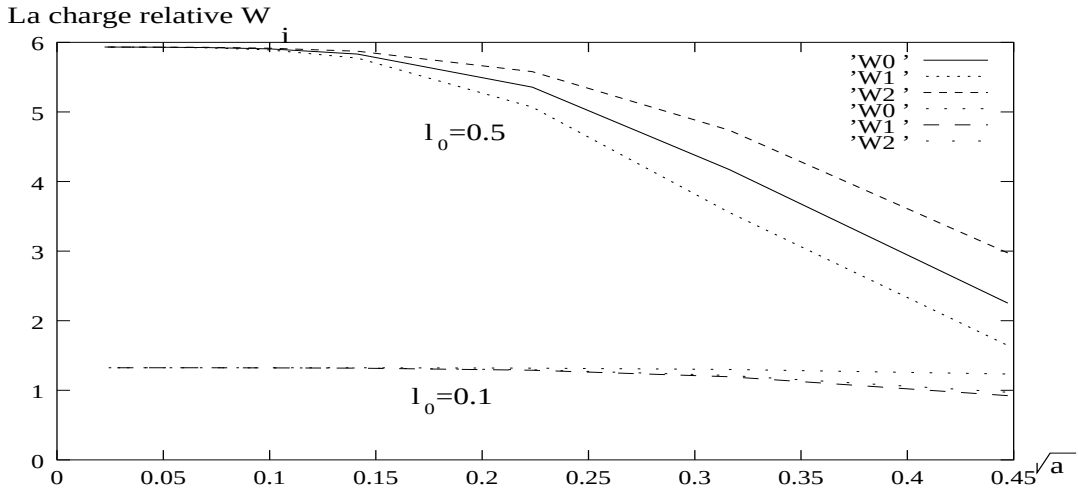

FIG. 1.11 – Charge relative des modèles W_0, W_1, W_2 pour différentes valeurs de l_0 et $m = -0.2$

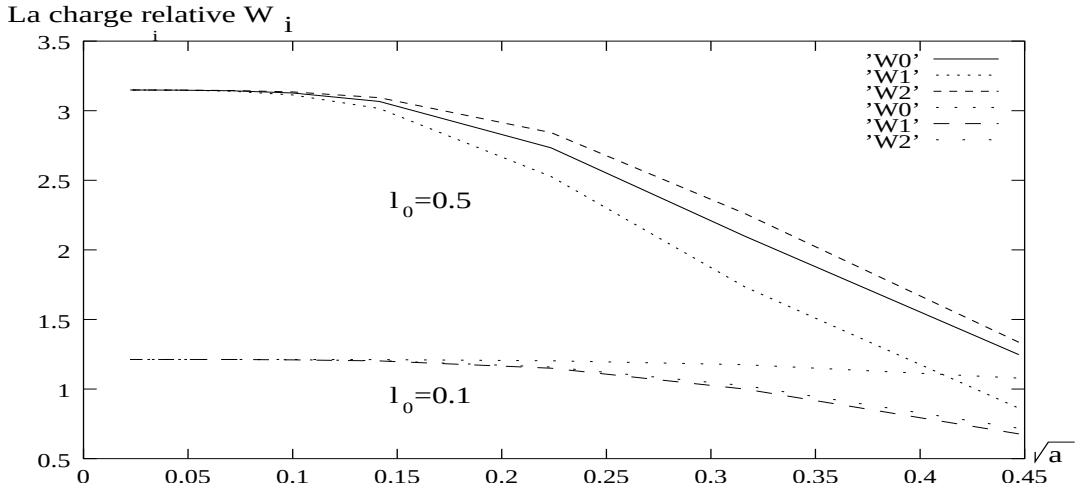

FIG. 1.12 – Charge relative des modèles W_0, W_1, W_2 pour différentes valeurs de l_0 et $m = -0.6$

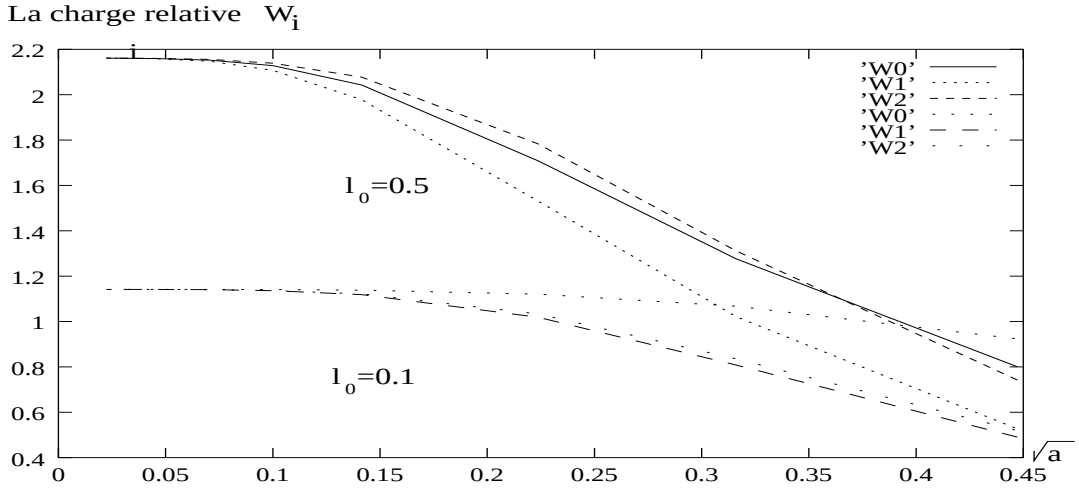

FIG. 1.13 – Charge relative des modèles W_0, W_1, W_2 pour différente valeur de l_0 et $m = -0.8$

Bibliographie

[1] G. Bayada and M. Chambat, *On interface conditions for a thin film flow past a porous medium*, SIAM J. Math. anal. , 26, 5 , (1995), 1113-1129.

[2] G.S. Beavers and D.D. Joseph, *Boundary conditions at a naturally permeable wall*, J. Fluid Mech., 30 (1967), 197-207.

[3] M. Boukrouche and G. Bayada, *Mathematical model, existence and uniqueness of a cavitation problem in a porous journal bearing*, Nonlinear Anal., 20 ,(1993), 895-920.

[4] A. Bourgeat, H. Elamri and R. Tapiero, *Existence d'une taille critique pour une fissure dans un milieu poreux*, in Second Colloque Franco Chilien de Mathématiques Appliquées, Cepadués Edts. Toulouse, France (1991), 67-80.

[5] V. Girault and P.A. Raviart, *Finite element approximation of the Navier Stokes equation*, Springer-Verlag, 1979.

[6] W. Jäger, A. Mikelic and N. Neuss, *Asymptotic analysis of the laminar viscous flow over a porous bed*, SIAM J. Sci. Comp., 22 , 6 ,(2000), 2006-2028.

[7] T. Levy, *Filtration in a porous fissured rock : Influence of the fissures connexity*, European J. Mech., B, 9, (1990), 309-327.

[8] T. Levy and E. Sanchez-Palencia, *On boundary conditions for fluid flow in porous media*, Internat. J. Engrg. Sci., 13 ,(1975), 923-940.

[9] R. Lipton, M. Avellaneda, *A darcy law for slow viscous flow past a stationary array of bubbles*,Proc. Rot. Soc. Edinburgh, 114 A, Vol XII, fasc.3 (1990), 71-79.

[10] M.H. Meurisse and B. Guidicelli, *On the mathematical models of porous journal bearing , in Mathematical Modelling in Lubrication*, Publ. Univ. Vigo, Spain,(1991), 79-85.

[11] G.Nguesteng, *A general convergence result for a fonctional related to the theory of homogenezation*, SIAM J. Math. anal., 20 (1989), 608-623.

[12] B.R. Reason and A.H. Siew, *A refined numerical solution for the hydrodynamic lubrication of finite porous journal bearings*, Proc. Inst. Mech. Engrs., 199 (1985), 85-93.

[13] S. Richardson, *A model for the boundary condition of the porous material*, Part 2, J. Fluid Mech., 49 (1971), 327-336.

[14] P.G. Saffman, *On the boundary condition at the surface of the porous medium*, Stud. Appl. Math., 2, (1971), 93-101.

[15] E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory.* Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[16] L. Tartar, *Convergence of the homogenization process*, Appendix of [15].

[17] R. Temam, *Navier Stokes Equation. Theory and numerical analysis.* North Holland, Amsterdam (1979).

[18] J.A. Tichy, *A Porous media model for thin film Lubrication*, ASME J. of Tribology, 117 (1995), 16-21.

Chapitre 2

Sur la prise en compte des rugosités de surface

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique d'un fluide dans un domaine mince dont les frontière sont rugueuses. On suppose l'écoulement régi par le système de Stokes en vitesse-pression :

$$-\mu\triangle u + \nabla p = 0$$

$$\text{div } u = 0$$

où μ est la viscosité du fluide. On impose des conditions aux limites du type non glissement.

L'épaisseur du domaine est exprimée en fonction d'un petit paramètre η tandis que la rugosité de la surface est décrite par l'intermédiaire d'un deuxième petit paramètre ϵ. La hauteur réelle de l'écoulement sera notée $h^{\eta\epsilon}$.

L'hypothèse d'un écoulement de faible épaisseur différencie ces travaux de ceux concernant l'influence de la rugosité des parois sur un écoulement "libre" [1] [3] [15]. Remarquons aussi que dans ce dernier contexte, l'épaisseur de la rugosité est égale à sa période et est infiniment petite par rapport à l'épaisseur de l'écoulement tandis que dans notre travail, l'épaisseur de la rugosité peut-être du même ordre de grandeur que celle de l'écoulement.

Les travaux de Bayada-Chambat ont montré de manière formelle dans [5] et de manière rigoureuse dans [4] que les passages à la limite ϵ puis η tendent vers zéro ou bien η puis ϵ tendent vers zéro ne sont pas commutatifs. Sous l'hypothèse d'une rugosité uniforme ($h^{\eta\epsilon}$ périodique) et en utilisant une conjecture sur le comportement limite de la pression, ils ont obtenu une équations de Reynolds limite lorsque η et ϵ sont du même ordre de grandeur. Des études analogues comportant plusieurs petits paramètres ont été menées en élasticité ou en thermique [10].

En utilisant les techniques de la convergence double échelle [2], nous montrons dans ce travail qu'il est possible de s'affranchir de l'hypothèse $h^{\eta\epsilon}$ uniformément périodique et de la conjecture sur le comportement de la pression. De plus, nous étudions (au moins

partiellement) la convergence des contraintes exercées par le fluide sur les parois des surfaces solides.

Ce chapitre comporte deux parties distinctes, bien qu'utilisant les mêmes outils mathématiques.

Dans une première partie, on suppose que la période des rugosités est plus importante que l'épaisseur de l'écoulement ce qui justifie d'étudier la convergence de la pression et de la vitesse d'abord en faisant tendre η vers zéro puis ϵ. Le passage η tend vers zéro est effectué de manière classique [7]. Il permet d'obtenir une équation dite de Reynolds rugueuse dont les coefficients présentent des oscillations et sont fonction de ϵ. Le comportement limite de cette équation pour ϵ petit a été étudié formellement dans [11] [17] puis de manière plus rigoureuse dans [13]. Des résultats de convergence des contraintes pour ces deux passages à la limite sont donnés dans les paragraphes 2.3.3 et 2.4.4.

Dans une seconde partie, on considère le cas où ϵ et η sont du même ordre de grandeur ($\frac{\eta}{\epsilon} = \lambda$) et on étudie le passage à la limite pour ϵ tend vers zéro à λ constant. On obtient une équation de type Reynolds dont les coefficients sont donnés à partir de problèmes locaux de type Stokes.

Un changement de variable en épaisseur est nécessaire pour se ramener à un domaine "non mince" mais qui dépend quand même de ϵ par sa frontière rugueuse laquelle est définie par une fonction non uniformément oscillante :

$$h^\epsilon(x) = h(x, \frac{x}{\epsilon})$$

Il est facile d'étudier le comportement asymptotique de la vitesse prolongée par zéro dans un domaine fixe plus grand qui ne dépend pas de ϵ. Dans la section 2.5, pour trouver des estimations sur la pression, la méthode utilisée sera de redresser la frontière rugueuse par le changement de variable :

$$t_3 = \frac{x_3}{h^\epsilon(x)}$$

On cherchera des estimations dans le nouveau domaine et on les réécrira dans le domaine initial. Il ne sera pas nécessaire de faire des hypothèses restrictives sur l'uniforme périodicité de la fonction h^ϵ et sa géométrie locale [6]. On utilisera la méthode de la double échelle pour le passage à la limite ϵ tend vers zéro et on obtiendra la même équation de Reynolds que dans [4] pour laquelle on démontrera aussi des résultats d'unicité.

La dernière partie sera consacrée au passage à la limite -λ tend vers zéro-. Ce cas revient à supposer que l'épaisseur du "gap" tend vers zéro plus rapidement que la période d'oscillation ϵ (on devrait donc retrouver les résultats de la première partie de ce chapitre). La convergence de l'équation de Reynolds obtenue dans la partie 2.5, est difficile à traiter à cause de la présence d'un produit de deux termes qui dépendent de λ. Un résultat de régularité supplémentaire permettra de passer à la limite.

L'étude de la convergence des contraintes sur les parois solides présente des difficultés sur la partie rugueuse où il sera nécessaire de redresser la frontière au prix de complications techniques importantes. En comparant avec les résultats de la première partie de ce chapitre, on retrouve les mêmes limites pour la pression, la vitesse et les contraintes sur la surface lisse. Sur la surface rugueuse, les résultats de convergence pour

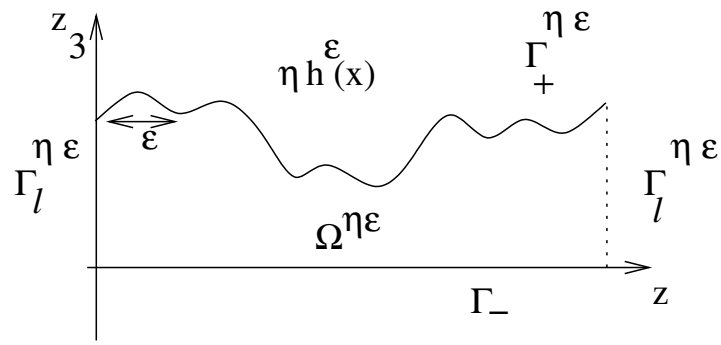

FIG. 2.1 – Domaine $\Omega^{\eta\epsilon}$

les contraintes tangentielles quand λ tend vers zéro ne sont pas optimaux par rapport à ceux de la première partie (η tend vers zéro puis ϵ tend vers zéro).

2.2 Notations de base

2.2.1 Définitions et notations

On note $Z = (z_1, z_2, z_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $z = (z_1, z_2)$ sa projection sur $\mathbb{R}^2$.
w est un ouvert lipschitzien borné de $\mathbb{R}^2$ et $Y = [0,1]^3$ est la cellule de base de $\mathbb{R}^3$.
h est une fonction, définie pour z dans w et y dans $\mathbb{R}^2$, y- périodique de période $]0,1[^2$, et telle que :

$$(H_0) \qquad h \in \mathcal{C}^2(w \times]0,1[^2),\ \exists\, a, b > 0 \quad a \leq h(z,y) \leq b \quad \forall z \in w,\ y \in]0,1[^2. \tag{2.1}$$

Dans tout le chapitre 2, on supposera que l'hypothèse (H_0) est satisfaite.

On définit :

$$h_{min}(z) = \min_{y \in]0,1[^2} h(z,y), \quad h_{max}(z) = \max_{y \in]0,1[^2} h(z,y) \quad \forall z \in w$$

$$h_{min} = \min_{(z,y) \in w \times]0,1[^2} h(z,y), \quad h_{max} = \max_{(z,y) \in w \times]0,1[^2} h(z,y)$$

ϵ est un petit paramètre lié à la rugosité. On introduit une fonction rapidement oscillante en posant :

$$h^\epsilon(z) = h(z, \frac{z}{\epsilon}) \qquad \forall z \in \omega$$

η est un petit paramètre lié à l'épaisseur d'un domaine mince défini par :

$$\Omega^{\epsilon\eta} = \{(z, z_3)/ \ \ z \in w \ \ et \ \ 0 < z_3 < \eta h^\epsilon(z)\}$$

$\Omega^{\epsilon\eta}$ est limité par une frontière supérieure "rugueuse" notée $\Gamma_+^{\eta\epsilon}$, une frontière inférieure lisse notée Γ_- et un bord latéral $\Gamma_l^{\eta\epsilon}$ tels que : (voir figure 2.1)

$$\Gamma_+^{\eta\epsilon} = \{(z, z_3),\ z \in w \quad z_3 = \eta h^\epsilon(z)\}$$

$$\Gamma_- = \{(z, z_3),\ z \in w, \quad z_3 = 0\}$$
$$\Gamma_l^{\eta\epsilon} = \partial\Omega^{\eta\epsilon} - \overline{(\Gamma_+^{\eta\epsilon} \cup \Gamma_-)}$$

On notera systématiquement par K des constantes indépendantes de η et ϵ, K_ϵ des constantes indépendantes de η. La notation K_A pourra préciser la dépendance de cette constante par rapport à l'objet A.

2.2.2 Les équations de Stokes

On étudie le comportement d'un fluide situé entre la surface rugueuse $\Gamma_+^{\eta\epsilon}$ supposée au repos et la surface lisse Γ_-. Le mouvement du fluide est généré par la surface Γ_- qui se déplace avec une vitesse constante parallèle au plan $(z_1 z_2)$. Le fluide incompressible est supposé vérifier le système linéaire de Stokes :

$$\mu \triangle \hat{u}^{\eta\epsilon} = \nabla \hat{p}^{\eta\epsilon} \qquad \text{dans } \Omega^{\epsilon\eta} \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \hat{u}^{\eta\epsilon} = 0 \qquad \text{dans } \Omega^{\epsilon\eta} \tag{2.3}$$

où $\hat{u}^{\eta\epsilon}$ et $\hat{p}^{\eta\epsilon}$ sont la vitesse et la pression, μ est la viscosité du fluide.

Des conditions de type Dirichlet sont imposées sur la frontière du domaine :

$$\hat{u}^{\eta\epsilon} = \hat{g}^{\eta} \text{ sur } \partial\Omega^{\eta\epsilon}$$

$$\hat{g}^{\eta\epsilon} = \begin{cases} (\hat{s}_1, \hat{s}_2, 0) & \text{sur } \Gamma_- \\ (\hat{g}_1^{\eta\epsilon}, \hat{g}_2^{\eta\epsilon}, 0) & \text{sur } \Gamma_l^{\eta\epsilon} \\ (0,0,0) & \text{sur } \Gamma_+^{\eta\epsilon} \end{cases}$$

$\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ est une fonction donnée dans $\mathcal{C}^1(w)^2$. On suppose que $\hat{g}^{\eta\epsilon}$ appartient à $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\epsilon))^3$, et vérifie la condition de compatibilité :

$$\int_{\partial\Omega^{\eta\epsilon}} \hat{g}^{\eta\epsilon}.\hat{n}^{\eta\epsilon} d\sigma = 0 \tag{2.4}$$

$\hat{n}^{\eta\epsilon}$ est le vecteur unitaire normal à la frontière de $\Omega^{\eta\epsilon}$, orienté vers l'extérieur du domaine, $d\sigma$ est l'élément de surface.

2.2.3 Rescaling

Nous voulons étudier le comportement asymptotique des solutions du problème défini au paragraphe 2.2.2 quand les petits paramètres η et ϵ tendent vers zéro. Il sera nécessaire pour obtenir des convergences de se placer sur des domaines indépendants de ces paramètres. On utilisera la technique de l'homogénéisation pour étudier la convergence en ϵ. On s'affranchit du paramètre η dans le domaine par un changement d'échelle dans l'épaisseur du domaine. Pour cela, on fait le changement de variables suivant :

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{z_3}{\eta} \tag{2.5}$$

On introduit les opérateurs suivants :

$$\triangle_\eta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^3}$$
$$\nabla_\eta = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_3})$$
$$\mathrm{div}_\eta = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

On définit les domaines :

$$\Omega^\epsilon = \{(x, x_3) : \ x \in w, \ 0 < x_3 < h^\epsilon(x)\}$$
$$\Gamma_+^\epsilon = \{(x, x_3) : \ x \in w, \ x_3 = h^\epsilon(x)\}$$
$$\Omega_{max} = \{(x, x_3) : \ x \in \omega, \ 0 < x_3 < h_{max}(x)\}$$
$$\Omega_{min} = \{(x, x_3) : \ x \in \omega, \ 0 < x_3 < h_{min}(x)\}$$

On suppose qu'il existe g dans $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min}))^3$, indépendant de η et ϵ tel que :

$$g(x, x_3) = 0 \ \text{ pour } \ x_3 = h_{min}(x) \tag{2.6}$$

avec

$$\int_{\partial\Omega_{min}} g.n \, d\sigma = 0 \tag{2.7}$$

et que la donnée au bord $\hat{g}^{\eta\epsilon}$ est telle que :

$$\hat{g}^{\eta\epsilon}(z, z_3) = \begin{cases} g(z, \dfrac{z_3}{\eta}) & \forall (z, z_3) \in \partial\Omega^{\eta\epsilon} \cap \{z_3 \leq h_{min}(z)\} \\ 0 & \forall (z, z_3) \in \partial\Omega^{\eta\epsilon} \cap \{z_3 \geq h_{min}(z)\} \end{cases} \tag{2.8}$$

La condition de compatibilité (2.4) est alors vérifiée.

Le problème de Stokes s'écrit dans le domaine Ω^ϵ :

$$\mu \triangle_\eta u^{\eta\epsilon} = \nabla_\eta p^{\eta\epsilon} \qquad \text{dans } \Omega^\epsilon \tag{2.9}$$

$$\mathrm{div}_\eta u^{\eta\epsilon} = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\epsilon \tag{2.10}$$

$$u^{\eta\epsilon} = g \qquad \text{sur } \ \partial\Omega^\epsilon \tag{2.11}$$

La formulation variationnelle correspondant au problème de Stokes dans le domaine Ω^ϵ est :

Trouver $u^{\eta\epsilon}$ dans $H^1(\Omega^\epsilon)^3$, $p^{\eta\epsilon}$ dans $L^2(\Omega^\epsilon)$ défini à une constante près, tels que :

$$\mu \int_{\Omega^\epsilon} \nabla_\eta u^{\eta\epsilon} \nabla_\eta \phi \, dx \, dx_3 + \int_{\Omega^\epsilon} \nabla_\eta p^{\eta\epsilon} \phi \, dx \, dx_3 = 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega^\epsilon)^3 \tag{2.12}$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} \mathrm{div}_\eta u^{\eta\epsilon} \, q \, dx \, dx_3 = 0 \qquad \forall q \ \in L^2(\Omega^\epsilon) \tag{2.13}$$

$$u^{\eta\epsilon} = g \qquad \text{dans} \quad (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\epsilon))^3$$

2.3 Etude asymptotique quand $\eta \to 0$ à ϵ fixé

Dans tout ce paragraphe ϵ est fixé, les limites obtenues seront donc indicées par l'exposant ϵ.

2.3.1 Comportement de la vitesse

On introduit l'espace de Hilbert :

$$V(x_3) = \{v \in L^2(\Omega^\epsilon)^3, \frac{\partial v}{\partial x_3} \in L^2(\Omega^\epsilon)^3\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{V(x_3)} = \|v\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} + \|\frac{\partial v}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^3}$$

Proposition 2.3.1. *Pour ϵ fixé, il existe $u^\epsilon \in V(x_3)$ tel que lorsque η tend vers zéro, à une sous-suite extraite près,*

$$u^{\eta\epsilon} \rightharpoonup u^\epsilon \qquad (L^2(\Omega^\epsilon))^3 faible$$

$$\eta \frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \qquad (L^2(\Omega^\epsilon))^3 faible \qquad \forall i = 1, 2$$

$$\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_3} \quad (L^2(\Omega^\epsilon))^3 faible$$

$$u_3^\epsilon = 0 \;\; dans \;\; \Omega^\epsilon, \;\; u^\epsilon = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_+^\epsilon \;\; et \;\; u^\epsilon = (s_1, s_2, 0) \quad sur \;\; \Gamma_-$$

Preuve :
D'après les conditions (2.6) à (2.8), il existe un relèvement $G = (j_1, j_2, j_3)$ dans $H^1(\Omega_{min})^3$ à divergence nulle, tel que $G = g$ sur $\partial\Omega_{min}$.

On pose $G^\eta = (j_1, j_2, \eta j_3)$. G^η est indépendant de ϵ, on le prolongera par zéro dans Ω^ϵ en une fonction notée $\overline{G}^\eta$.
D'après (2.8), $U^{\eta\epsilon} = u^{\eta\epsilon} - \overline{G}^\eta \in H_0^1(\Omega^\epsilon)^3$ et $\mathrm{div}_\eta \overline{G}^\eta = 0$.
$U^{\eta\epsilon}$ est une fonction-test dans (2.12) qui est à div_η nulle :

$$\int_{\Omega^\epsilon} (\nabla_\eta u^{\eta\epsilon})^2 dx dx_3 - \int_{\Omega^\epsilon} \nabla_\eta u^{\eta\epsilon} \nabla_\eta \overline{G}^\eta dx dx_3 = 0$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\|\nabla_\eta u^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^9} \leq \|\nabla_\eta \overline{G}^\eta\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^9} = \|\nabla_\eta G^\eta\|_{L^2(\Omega_{min})^9}$$

donc :

$$||\nabla_\eta u^{\eta\epsilon}||_{L^2(\Omega^\epsilon)^6} \leq \frac{K}{\eta} \tag{2.14}$$

D'après l'inégalité de Friedrich-Poincaré dans la direction x_3, pour tout ϕ dans $H^1(\Omega^\epsilon)$ nul sur Γ_+^ϵ, on a : (avec b défini dans (2.1))

$$||\phi||_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq b \; ||\frac{\partial \phi}{\partial x_3}||_{L^2(\Omega^\epsilon)} \tag{2.15}$$

$u^{\eta\epsilon}$ est nulle sur Γ_+^ϵ, on peut appliquer (2.15) et avec (2.14) il vient :

$$||u^{\eta\epsilon}||_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} \leq b||\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}||_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} \leq K$$

Des suites $(u^{\eta\epsilon}, \eta\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_1}, \eta\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_2}, \frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3})$, on peut extraire des sous-suites qui convergent faiblement dans $(L^2(\Omega^\epsilon))^3$. En particulier, $u^{\eta\epsilon}$ converge dans $V(x_3)$ faible vers u^ϵ. On a aussi :

$$\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^\epsilon)^3 \ \ \forall i = 1, 2$$

et

$$\eta\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \ \ \forall i = 1, 2$$

D'après la continuité des traces de $V(x_3)$ dans $L^2(\Gamma_+^\epsilon)^3$ et $L^2(\Gamma_-)^3$, on en déduit : [6]

$$\begin{cases} u^{\eta\epsilon} \rightharpoonup 0 & \text{dans } L^2(\Gamma_+^\epsilon)^3 \\ \\ u^{\eta\epsilon} \rightharpoonup (s_1, s_2, 0) & \text{dans } L^2(\Gamma_-)^3 \end{cases}$$

Prenons $\eta\phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega^\epsilon)$ comme fonction- test dans l'équation (2.13) :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left(\eta\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_1} + \eta\frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\right)\phi dx dx_3 = 0$$

Passant à la limite quand $\eta \to 0$:

$$\int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_3}\phi \ dx dx_3 = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega^\epsilon)$$

donc

$$\frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_3} = 0 \qquad \text{dans } \Omega^\epsilon.$$

Sachant que $u_3^\epsilon = 0$ sur Γ_+^ϵ, on déduit que u_3^ϵ est nulle dans Ω^ϵ.

□

2.3.2 Estimation sur la pression et détermination du problème limite

Dans la suite, on fixe la détermination de la pression telle que :

$$\int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon} \, dx \, dx_3 = 0$$

Proposition 2.3.2. *L'estimation suivante est vérifiée :*

$$\|\eta^2 p^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq K_\epsilon$$

Preuve :
Prenons successivement comme fonctions-test $(\psi_1^\epsilon, 0, 0), (0, \psi_2^\epsilon, 0)$ dans l'équation (2.12), avec ψ_i^ϵ dans $H_0^1(\Omega^\epsilon)$ pour $i = 1, 2$.

$$-\mu \int_{\Omega^\epsilon} \sum_{j=1,2} \left(\frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i^\epsilon}{\partial x_j} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^\epsilon}{\partial x_3} \right) dx dx_3 = \langle \frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial x_i}, \psi_i^\epsilon \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Des estimations de la vitesse, on déduit :

$$\left| \langle \eta^2 \frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial x_i}, \psi_i^\epsilon \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \right| \leq K \|\psi_i^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega^\epsilon)} \qquad \forall i = 1, 2 \tag{2.16}$$

De même, en prenant $(0, 0, \psi_3^\epsilon)$ dans (2.12) avec ψ_3^ϵ dans $H_0^1(\Omega^\epsilon)$, on obtient :

$$\left| \langle \eta \frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}, \psi_3^\epsilon \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \right| \leq K \|\psi_3^\epsilon\|_{(H_0^1(\Omega^\epsilon))^3} \tag{2.17}$$

(2.16) et (2.17) induisent :

$$||\eta^2 \nabla p^{\eta\epsilon}||_{H^{-1}(\Omega^\epsilon)^3} \leq K_\epsilon$$

La pression dans l'équation de Stokes est définie à une constante près. Soit $p^{\eta\epsilon}$ une détermination choisie à moyenne nulle dans Ω^ϵ, d'après (1.5) pour $\Omega^\epsilon = \Delta$ domaine lipschitzien borné, on a :

$$\forall \phi \in L^2(\Omega^\epsilon) \qquad \|\phi\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq K_{\Omega^\epsilon} \left(\|\nabla \phi\|_{H^{-1}(\Omega^\epsilon)^3} + \left| \int_{\Omega^\epsilon} \phi \, dx \right| \right) \tag{2.18}$$

Pour $\phi = p^{\eta\epsilon}$ avec $\int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon} dx dx_3 = 0$, on a d'après (2.18) :

$$||p^{\eta\epsilon}||_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq K_{\Omega^\epsilon} ||\nabla p^{\eta\epsilon}||_{H^{-1}(\Omega^\epsilon)^3} \leq \frac{K_\epsilon}{\eta^2} \tag{2.19}$$

□

Le théorème suivant nous donne le problème limite :

Théorème 2.3.3. *Pour ϵ fixé, lorsque $\eta \to 0$, $\eta^2 p^{\eta\epsilon}$ converge dans $L^2(\Omega^\epsilon)$ vers $p^\epsilon(x)$, unique solution dans $H^1(w)$ de :*

$$\int_w \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \nabla_x p^\epsilon . \nabla_x \phi dx = \int_w \frac{h^\epsilon}{2} s . \nabla_x \phi \, dx - \int_{\partial w} \left(\int_0^{h_{min}} g.n \, dx_3 \right) \phi \quad dx \quad \forall \phi \in H^1(w) \tag{2.20}$$

avec

$$\int_w h^\epsilon(x) p^\epsilon dx = 0 \tag{2.21}$$

Preuve :

Partie 1 : *Convergence et régularité supplémentaire*

D'après la proposition 2.3.2, $\eta^2 p^{\eta\epsilon}$ est bornée dans $L^2(\Omega^\epsilon)$ et il existe p^ϵ dans $L^2(\Omega^\epsilon)$ tel que une sous-suite extraite de $p^{\eta\epsilon}$ converge vers p^ϵ dans $L^2(\Omega^\epsilon)$ faible. Donc on a aussi :

$$\eta^2 \frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_3} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

D'après (2.17) :

$$\eta^2 \frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup 0 = \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_3}$$

Soit $\psi^\epsilon = (x_3(x_3 - h^\epsilon(x))\theta(x), 0, 0)$ où θ appartient à $D(w)$. Tenant compte de la régularité de h^ϵ, la fonction $\eta^2\psi^\epsilon$ est une fonction test pour (2.12) :

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega^\epsilon} \eta^2 \frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_3(x_3 - h^\epsilon(x))\theta(x)\right) \, dx \, dx_3 + \mu \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} (2x_3 - h^\epsilon)\theta(x) \, dx \, dx_3$$
$$-\eta^2 \int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_3(x_3 - h^\epsilon(x))\theta\right) \, dx \, dx_3 = 0$$

Passant à la limite en η :

$$\mu \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} (2x_3 - h^\epsilon(x))\theta(x) \, dx dx_3 - \int_w p^\epsilon(x) \left(\int_0^{h^\epsilon} (x_3(x_3 - h^\epsilon) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1} \theta) \, dx_3 \right) dx = 0$$

D'autre part :

$$\int_0^{h^\epsilon} \left(x_3(x_3 - h^\epsilon) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1} \theta \right) \, dx_3 = - \left(\frac{(h^\epsilon)^3}{6} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{(h^\epsilon)^2}{2} \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1} \theta \right) = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{(h^\epsilon)^3}{6} \theta \right)$$

Donc

$$\mu \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} (2x_3 - h^\epsilon(x))\theta(x)) \, dx dx_3 + \int_w p^\epsilon(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{(h^\epsilon)^3}{6} \theta \right) dx = 0$$

En utilisant la formule de Green :

$$-2\mu \int_{\Omega^\epsilon} u_1^\epsilon \theta(x) \, dx \, dx_3 + \mu \int_w s_1 h^\epsilon \theta \, dx - \frac{1}{6} < \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1} (h^\epsilon)^3, \theta >_{D',D} = 0$$

Ceci étant vrai pour tout θ dans $\mathcal{D}(w)$, s'écrit aussi :

$$\tilde{u_1^\epsilon} = \frac{h^\epsilon}{2} s_1 - \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(w) \tag{2.22}$$

où on l'a noté :

$$\tilde{u_1^\epsilon} = \int_0^{h^\epsilon} u_1^\epsilon dx_3$$

De la même façon, en choisissant $\psi^\epsilon = \eta^2(0, x_3(x_3 - h^\epsilon(x))\theta(x), 0)$ on obtient :

$$\tilde{u_2^\epsilon} = \frac{h^\epsilon}{2} s_2 - \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_2} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(w) \tag{2.23}$$

(2.22) et (2.23) impliquent que $\nabla_x p^\epsilon$ appartient à $L^2(w)$ car $\tilde{u_i^\epsilon}$ est dans $L^2(w)$ pour tout $i = 1, 2$. Donc la limite p^ϵ est en fait dans $H^1(w)$.

<u>Partie 2</u> : *Détermination du problème limite :*

Dans l'équation de la divergence (2.13), on choisit $\phi \in H^1(w)$ comme fonction test :

$$0 = \int_{\Omega^\epsilon} \text{div}_\eta u^{\eta\epsilon} \phi \; dx \; dx_3 = -\int_{\Omega^\epsilon} u^{\eta\epsilon}.\nabla_\eta \phi \; dx \; dx_3 + \int_{\partial\Omega^\epsilon} u^{\eta\epsilon}.n\phi d\sigma$$

Tenant compte des conditions en vitesse sur $\partial\Omega^\epsilon$, il vient :

$$-\int_{\Omega^\epsilon} u_1^{\eta\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx dx_3 - \int_{\Omega^\epsilon} u_2^{\eta\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx dx_3 + \int_{\Gamma_l} g.n \; \phi \, d\sigma = 0$$

En passant à la limite, comme g ne dépend pas de η, il vient :

$$-\int_{\Omega^\epsilon} u_1^\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx dx_3 - \int_{\Omega^\epsilon} u_2^\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \, dx \; dx_3 + \int_{\Gamma_l} g.n\phi \, d\sigma = 0$$

qui s'écrit aussi :

$$-\int_w \tilde{u_1^\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \, dx - \int_w \tilde{u_2^\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \, dx + \int_{\Gamma_l} g.n\phi d\sigma = 0$$

En utilisant (2.22) et (2.23), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{2} \int_w \left(-\frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{s_i}{2} h^\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\Gamma_l} g.n \;\; \phi \;\; d\sigma \qquad \forall \phi \in H^1(w)$$

D'autre part :

$$\int_{\Gamma_l} g.n \; \phi \quad d\sigma = \int_{\partial w} \left(\int_0^{h_{min}} g.n dx_3 \right) \; \phi \, dx$$

On obtient finalement :

$$\int_w \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \nabla_x p^\epsilon . \nabla_x \phi \; dx = \int_w \frac{h^\epsilon}{2} s.\nabla_x \phi \; dx - \int_{\partial w} \left(\int_0^{h_{min}} g.n dx_3 \right) \; \phi \, dx$$

Cette équation correspond à la formulation variationnelle d'un problème de Neumann admettant une infinité de solutions définies à une constante près, mais $p^{\eta\epsilon}$ vérifie la condition supplémentaire :

$$\eta^2 \int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon} \; dx \; dx_3 = 0$$

Après passage à la limite, comme p^ϵ ne dépend pas de x_3, cette condition s'écrit :

$$\int_w h^\epsilon(x) p^\epsilon \, dx = 0$$

et assure l'unicité de la limite p^ϵ et la convergence de toute la suite $p^{\eta\epsilon}$.

□

Remarque 2.3.4. *La formulation forte associée à* (2.20) *est :*

$$\begin{cases} \mathrm{div}_x \left(\frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \nabla_x p^\epsilon \right) = \mathrm{div}_x \left(\frac{h^\epsilon}{2} s \right) & \textit{dans } w \\ \\ \dfrac{\partial p^\epsilon}{\partial n} = -\dfrac{12\mu}{(h^\epsilon)^3} \displaystyle\int_0^{h_{min}} g.n \, dx_3 + \dfrac{6\mu}{(h^\epsilon)^2} \sum_{i=1}^{2} s_i.n_i & \textit{sur } \partial w \end{cases}$$

Le champ de vitesse limite se calcule alors par le :

Théorème 2.3.5. *la vitesse limite est donnée par*

$$u_i^\epsilon(x, x_3) = \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i} \frac{x_3}{2\mu}(x_3 - h^\epsilon) - \frac{s_i}{h^\epsilon} x_3 + s_i \qquad i = 1, 2 \tag{2.24}$$

$$u_3^\epsilon(x, x_3) = 0$$

Preuve :
On prend successivement $(\eta^2 \psi_1^\epsilon, 0, 0)$ et $(0, \eta^2 \psi_2^\epsilon, 0)$ comme fontions-test dans l'équation (2.12) avec $\psi_i^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$, $i = 1, 2$. On passe à la limite et on obtient :

$$\mu \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_i^\epsilon}{\partial x_3} \, dx dx_3 + \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1} \psi_i \, dx dx_3 = 0 \quad \forall i = 1, 2$$

Ce qui s'écrit dans $H^{-1}(\Omega^\epsilon)$:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i^\epsilon}{\partial x_3^2} = \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2$$

On intègre deux fois, par rapport a x_3 et on utilise les conditions aux bords données dans la proposition 2.3.1 pour fixer les constantes d'intégration.

□

2.3.3 Comportement asymptotique des contraintes

Les résultats précédents permettent de connaître la pression et la vitesse. D'autres quantités caractéristiques de l'écoulement intéressent le mécanicien. Ce sont les efforts et les contraintes exercées (ponctuellement ou en moyenne) sur la surface solide par le fluide. Nous nous intéressons dans cette partie, après en avoir rappelé les définitions, au comportement asymptotique de ces grandeurs quand η tend vers zéro.

Dans un premier temps nous donnons un résultat de convergence relativement immédiat qui ne concerne pas les "vrais normales" mais les normales aux surfaces rescalées.

On s'intéresse ensuite au comportement limite quand η tend vers zéro des contraintes dans le vrai domaine et en particulier sur $\Gamma_+^{\eta\epsilon} \cup \Gamma_-$. Cela fait intervenir non seulement le caractère oscillant des termes du tenseur des contraintes, mais aussi le caractère oscillant de la frontière elle-même au travers des normales à la surface sur $\Gamma_+^{\eta\epsilon}$ où nous n'obtenons que des résultats de convergences en moyenne sur $\Gamma_+^{\eta\epsilon}$. Par contre sur Γ_- qui n'oscille pas, on peut obtenir des résultats asymptotiques ponctuels.

Un second théorème nous permet d'obtenir la convergence souhaitée des efforts sous une hypothèse supplémentaire. On suppose que h^ϵ, $\hat{g}^{\eta\epsilon}$ et w sont tels que :

$$(H_1) \qquad (\hat{u}^{\eta\epsilon}, \hat{p}^{\eta\epsilon}) \text{ est dans } H^2(\Omega^{\eta\epsilon}) \times H^1(\Omega^{\eta\epsilon}) \qquad [12]$$

On notera dans cette section $\hat{f}$ une fonction dans l'ouvert initial $\Omega^{\eta\epsilon}$ et f la fonction correspondante définie dans l'ouvert rescalé Ω^ϵ :

$$\hat{f}(z, z_3) = f(z, \frac{z_3}{\eta})$$

Définition 2.3.6. *Dans le domaine initial $\Omega^{\eta\epsilon}$, le tenseur des contraintes $\hat{\sigma}^{\eta\epsilon} = (\hat{\sigma}_{ij}^{\eta\epsilon})_{i,j=1,2,3}$ est défini par :*

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\eta\epsilon} = \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_i^{\eta\epsilon}}{\partial z_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^{\eta\epsilon}}{\partial z_i} \right) \qquad i \neq j$$

$$\hat{\sigma}_{ii}^{\eta\epsilon} = -\hat{p}^{\eta\epsilon} + 2\mu \frac{\partial \hat{u}_i^{\eta\epsilon}}{\partial z_i}$$

Pour une surface S dont le vecteur normal est noté $\hat{n}^{\eta\epsilon}$, le vecteur contrainte à cette surface est :

$$\hat{\sigma}^{\eta\epsilon}.\hat{n}^{\eta\epsilon}$$

Définition 2.3.7. *On étudiera la limite d'un vecteur contrainte normalisé défini par :*

$$\hat{V}^{\eta\epsilon} = \begin{pmatrix} \eta\hat{\sigma}_{11}^{\eta\epsilon} & \eta\hat{\sigma}_{12}^{\eta\epsilon} & \eta\hat{\sigma}_{13}^{\eta\epsilon} \\ \eta\hat{\sigma}_{21}^{\eta\epsilon} & \eta\hat{\sigma}_{22}^{\eta\epsilon} & \eta\hat{\sigma}_{23}^{\eta\epsilon} \\ \eta^2\hat{\sigma}_{31}^{\eta\epsilon} & \eta^2\hat{\sigma}_{32}^{\eta\epsilon} & \eta^2\hat{\sigma}_{33}^{\eta\epsilon} \end{pmatrix} .\hat{n}^{\eta\epsilon}$$

Les efforts correspondants sur une surface S dans la direction z_i sont définis par :

$$\hat{F}_i^{\eta\epsilon} = \int_S \hat{V}_i^{\eta\epsilon} \, d\sigma \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

Nous appliquons cette définition aux surfaces $\Gamma_+^{\eta\epsilon}$, et Γ_- dans le système d'axes initial (z_1, z_2, z_3). Posons :

$$\hat{F}_{+i}^{\eta\epsilon} = \int_{\Gamma_+^{\eta\epsilon}} \hat{V}_i^{\eta\epsilon} d\sigma \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.25}$$

$$\hat{F}^{\eta\epsilon}_{-i} = \int_{\Gamma_-} \hat{V}^{\eta\epsilon}_i d\sigma \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.26}$$

avec respectivement $\hat{n}^{\eta\epsilon}_+$ et $\hat{n}^{\eta\epsilon}_-$, les vecteurs unitaires normaux aux surfaces $\hat{\Gamma}^{\eta\epsilon}_+$ et $\hat{\Gamma}_-$ donnés par :

$$\hat{n}^{\eta\epsilon}_+ = \begin{pmatrix} -\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_1}\frac{1}{\sqrt{1+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_1})^2+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_2})^2}} \\ -\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_2}\frac{1}{\sqrt{1+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_1})^2+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_2})^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_1})^2+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial z_2})^2}} \end{pmatrix} ; \ \hat{n}^{\eta\epsilon}_- = \hat{n}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que sans l'hypothèse (H_1), $\hat{V}^{\eta\epsilon}_{/\partial\Omega^{\eta\epsilon}}$ serait seulement dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^{\eta\epsilon})$ donc on ne pourrait pas donner de sens à $\hat{F}^{\eta\epsilon}_{+i}$ et $\hat{F}^{\eta\epsilon}_{-i}$.

Nous voulons étudier la convergence de la contrainte $\hat{V}^{\eta\epsilon}$, définie dans $\Omega^{\eta\epsilon}$ à partir de la normale relative à $\Omega^{\eta\epsilon}$. Pour cela on se ramène à l'ouvert rescalé indépendant de η en utilisant le changement de variables (2.5) ; la contrainte sera notée $V^{\eta\epsilon}$ et s'écrit :

$$V^{\eta\epsilon} = V^{\eta\epsilon}_+ = (b^{\eta\epsilon}(x)\Sigma^{\eta\epsilon}).N^\epsilon_+ \qquad \text{sur } \Gamma^\epsilon_+ \tag{2.27}$$

et

$$V^{\eta\epsilon} = V^{\eta\epsilon}_- = \Sigma^{\eta\epsilon}.N_- \qquad \text{sur } \Gamma_- \tag{2.28}$$

avec

$$\Sigma^{\eta\epsilon} = \begin{pmatrix} \eta^2\sigma^{\eta\epsilon}_{11} & \eta^2\sigma^{\eta\epsilon}_{12} & \eta\sigma^{\eta\epsilon}_{13} \\ \eta^2\sigma^{\eta\epsilon}_{21} & \eta^2\sigma^{\eta\epsilon}_{22} & \eta\sigma^{\eta\epsilon}_{23} \\ \eta^3\sigma^{\eta\epsilon}_{31} & \eta^3\sigma^{\eta\epsilon}_{32} & \eta^2\sigma^{\eta\epsilon}_{33} \end{pmatrix}$$

et

$$b^{\eta\epsilon}(x) = \frac{\sqrt{1+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}}{\sqrt{1+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\eta\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}}$$

N^ϵ est le vecteur unitaire normal à la frontière de Ω^ϵ dans le système d'axes (x, x_3), en particulier on notera pour ce qui concerne les bords supérieurs et inférieurs :

$$N^\epsilon = N^\epsilon_+ = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} \\ -\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} \end{pmatrix} ; \ N^\epsilon = N_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il est à remarquer dans (2.27) et (2.28) que le tenseur des contraintes normalisées qui intervient $\Sigma^{\eta\epsilon}$ n'est pas le même que celui qui intervient dans la définition 2.3.7 de $V^{\eta\epsilon}$. Ceci vient du fait que pour étudier la convergence de $V^{\eta\epsilon}$ sur Γ^ϵ_+, la normale dépend de η dans l'ouvert géométrique et n'est pas la même dans l'ouvert rescalé, ce qui conduit à travailler sur un terme modifié (voir lemme 2.3.10).

Lemme 2.3.8. *Lorsque $\eta \to 0$ chaque vecteur ligne $\Sigma_i^{\eta\epsilon}$ du tenseur normalisé $\Sigma^{\eta\epsilon}$ converge dans $H(\mathrm{div};\Omega^\epsilon)$ vers le vecteur ligne Σ_i^ϵ de :*

$$\Sigma^\epsilon = \begin{pmatrix} -p^\epsilon & 0 & \mu\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} \\ 0 & -p^\epsilon & \mu\frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & -p^\epsilon \end{pmatrix}$$

où p^ϵ est la solution de (2.20) et (2.21) et u^ϵ est défini dans (2.24).

Preuve :
L'équation (2.2) s'écrit sous forme divergentielle :

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{\sigma}_{i1}^{\eta\epsilon} + \frac{\partial}{\partial z_2}\hat{\sigma}_{i2}^{\eta\epsilon} + \frac{\partial}{\partial z_3}\hat{\sigma}_{i3}^{\eta\epsilon} = 0 \qquad \forall i = 1,2,3 \tag{2.29}$$

En faisant le changement de variables (2.5), la définition 2.3.7 donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-p^{\eta\epsilon} + 2\mu\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_1}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_1}\right) + \frac{\mu}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{2.30}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-p^{\eta\epsilon} + 2\mu\frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_2}\right) + \mu\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{2.31}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_1} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-p^{\eta\epsilon} + \frac{2\mu}{\eta}\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{2.32}$$

Multipliant les équations (2.30), (2.31) et (2.32) respectivement par η^2, η^2 et η^3 on en déduit : (la normalisation sur les contraintes a été choisie pour cela),

$$\mathrm{div}\ \Sigma_i^{\eta\epsilon} = 0 \qquad \forall i = 1,2,3$$

Les estimations en vitesse et pression impliquent que :

$$||\Sigma_i^{\eta\epsilon}||_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq K_\epsilon \quad \forall i = 1,2,3$$

On déduit la convergence dans $H(\mathrm{div};\Omega^\epsilon)$ de $\Sigma_i^{\eta\epsilon}$ vers une limite notée Σ_i^ϵ et calculée en passant à la limite dans (2.30) (2.31) (2.32).

□

Proposition 2.3.9. *On suppose que :*

$$(H_2) \qquad h(x,y) \in \mathcal{C}^3(w\times]0,1[^2)$$

Alors, on a :
i) $b^{\eta\epsilon}(x)$ est borné dans $W^{2,\infty}(w)$
ii) $b^{\eta\epsilon}(x)$ converge fortement dans $W^{1,\infty}(w)$ vers

$$b^\epsilon(x) = \sqrt{1 + (\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2} \tag{2.33}$$

Preuve :
De l'hypothèse (H_2) sur $h(x,y)$, on déduit que $h^\epsilon(x)$ appartient à $\mathcal{C}^3(\overline{w})$. La dépendance en η du dénominateur de $b^{\eta\epsilon}(x)$ implique que toutes ses dérivées jusqu'a l'ordre 2 sont bornées dans $L^\infty(w)$ quand η tend vers zéro, ce qui démontre le point *i)*.
Par compacité de $W^{2,\infty}(w)$ dans $W^{1,\infty}(w)$, on déduit de *i)* qu'à une sous suite près de $b^{\eta\epsilon}(x)$ converge fortement dans $W^{1,\infty}(w)$. Par ailleurs, $b^{\eta\epsilon}(x)$ converge ponctuellement vers $b^\epsilon(x)$ défini par (2.33), ce qui par unicité de la limite termine la démonstration.

□

Lemme 2.3.10. *Sous l'hypothèse (H_2), $b^{\eta\epsilon}\Sigma_i^{\eta\epsilon}$ converge faiblement dans $H(\mathrm{div},\Omega^\epsilon)$ vers $b^\epsilon\Sigma_i^\epsilon$*

Preuve :
Pour tout φ dans $L^2(\Omega^\epsilon)$, d'après la proposition 2.3.9 *ii)* , on a :

$$b^{\eta\epsilon}\varphi \to b^\epsilon\varphi \text{ fortement dans } L^2(\Omega^\epsilon)$$

Du lemme 2.3.8, on sait que :

$$\Sigma_i^{\eta\epsilon} \rightharpoonup \Sigma_i^\epsilon \text{ faible dans } L^2(\Omega^\epsilon)$$

donc

$$\int_{\Omega^\epsilon} b^{\eta\epsilon}\Sigma_i^{\eta\epsilon}\varphi\, dx\, dx_3 \to \int_{\Omega^\epsilon} b^{\eta\epsilon}\Sigma_i^{\eta\epsilon}\varphi\, dx\, dx_3$$

De la même manière, on obtient :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \mathrm{div}\,(b^{\eta\epsilon}\Sigma_i^{\eta\epsilon})\,\varphi\, dx\, dx_3 \to \int_{\Omega^\epsilon} \mathrm{div}\,(b^{\eta\epsilon}\Sigma_i^{\eta\epsilon})\,\varphi\, dx\, dx_3$$

Ce qui termine la démonstration.

□

Théorème 2.3.11. *i) $V_-^{\eta\epsilon}$ défini par (2.28) converge dans $\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-)'\right)^3$ vers V_-^ϵ qui appartient à $L^2(w)^3$ et qui vaut :*

$$V_-^\epsilon = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1}\dfrac{h^\epsilon}{2} + \mu\dfrac{s_1}{h^\epsilon} \\ \\ \dfrac{\partial p^\epsilon}{\partial x_2}\dfrac{h^\epsilon}{2} + \mu\dfrac{s_2}{h^\epsilon} \\ \\ p^\epsilon \end{pmatrix} \quad sur\ \Gamma_- \tag{2.34}$$

ii)Sous l'hypothèse (H_2), $V_+^{\eta\epsilon}$ défini par (2.27) converge dans $\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\epsilon)'\right)^3$ vers V_+^ϵ qui appartient à $L^2(w)^3$ et qui vaut :

$$V_+^\epsilon = \begin{pmatrix} p^\epsilon\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1}\dfrac{h^\epsilon}{2} - \mu\dfrac{s_1}{h^\epsilon} \\ \\ p^\epsilon\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p^\epsilon}{\partial x_2}\dfrac{h^\epsilon}{2} - \mu\dfrac{s_2}{h^\epsilon} \\ \\ -p^\epsilon \end{pmatrix} \quad sur\ \Gamma_+^\epsilon \tag{2.35}$$

Preuve :

i) D'après le lemme 2.3.8, $\Sigma^{\eta\epsilon}.N^\epsilon$ converge faiblement dans $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\epsilon)\right)^3$ vers $\Sigma^\epsilon.N^\epsilon$. En prenant une fonction test dans $\left(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_-)\right)^3$, on obtient :

$$V_-^{\eta\epsilon} \rightharpoonup \Sigma^\epsilon.N^\epsilon_{/\Gamma_-} = \Sigma^\epsilon.N_{-/\Gamma_-} = \begin{pmatrix} -\mu\dfrac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_3} \\ -\mu\dfrac{\partial u_2^\epsilon}{\partial x_3} \\ p^\epsilon \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 2.3.3, p^ϵ est dans $H^1(w)$. En utilisant la régularité $\mathcal{C}^2(\overline{w})$ de h^ϵ et (2.24), la trace de $\dfrac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3}$ sur Γ_- est dans $L^2(w)$ et égale à :

$$-\frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i}\frac{h^\epsilon}{2\mu} - \frac{s_i}{h^\epsilon}$$

ce qui donne (2.34).

ii) D'après le lemme 2.3.10, $b^{\eta\epsilon}\Sigma^{\eta\epsilon}.N^\epsilon$ converge faiblement dans $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\epsilon)\right)^3$, vers $b^\epsilon\Sigma^\epsilon.N^\epsilon$. En prenant une fonction test dans $\left(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_+^\epsilon)\right)^3$, on obtient :

$$V_+^{\eta\epsilon} \rightharpoonup b^\epsilon(x)\Sigma^\epsilon.N_+^\epsilon = \begin{pmatrix} \left(p^\epsilon\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1} + \mu\dfrac{\partial u_1^\epsilon}{\partial_{x_3}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} \\ \left(p^\epsilon\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2} + \mu\dfrac{\partial u_2^\epsilon}{\partial_{x_3}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} \\ -p^\epsilon\dfrac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} \end{pmatrix} \cdot\sqrt{1+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}$$

D'après la régularité $H^1(w)$ de p^ϵ, en utilisant (2.24), la trace sur Γ_+^ϵ de $\dfrac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3}$ est dans $L^2(w)$ et vaut :

$$\frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3} = +\frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i}\frac{h^\epsilon}{2\mu} - \frac{s_i}{h^\epsilon} \qquad \forall i = 1,2$$

ce qui donne le résultat.

□

On donne maintenant les efforts limites F_+^ϵ et F_-^ϵ dans le lemme suivant :

Lemme 2.3.12. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), les efforts limites sont :*

$$F_+^\epsilon = \begin{pmatrix} \int\limits_w \left(p^\epsilon \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1} \frac{h^\epsilon}{2} - \mu \frac{s_1}{h^\epsilon} \right) dx \\ \int\limits_w \left(p^\epsilon \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_2} \frac{h^\epsilon}{2} - \mu \frac{s_2}{h^\epsilon} \right) dx \\ - \int\limits_w p^\epsilon dx \end{pmatrix} \qquad sur \ \Gamma_+^\epsilon$$

$$F_-^\epsilon = \begin{pmatrix} \int\limits_w \left(\frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_1} \frac{h^\epsilon}{2} - \mu \frac{s_1}{h^\epsilon} \right) dx \\ \int\limits_w \left(\frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_2} \frac{h^\epsilon}{2} - \mu \frac{s_2}{h^\epsilon} \right) dx \\ + \int\limits_w p^\epsilon dx \end{pmatrix} \qquad sur \ \Gamma_-$$

Preuve :
D'après le lemme 2.3.8, $\Sigma^{\eta\epsilon}.N^\epsilon$ converge faiblement dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\epsilon)^3$ vers $\Sigma^\epsilon.N^\epsilon$ qui est un élément de $(L^2(\partial\Omega^\epsilon))^3$, on a :

$$< \Sigma^\epsilon.N^\epsilon, 1 >= \int\limits_{\partial\Omega^\epsilon} \Sigma^\epsilon.N^\epsilon d\sigma$$

On peut donc intégrer chaque composante sur des morceaux de la frontière de $\partial\Omega^\epsilon$. Sur Γ_+^ϵ l'élément de la longueur est $d\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_2})^2}} dx$ et on obtient l'effort limite :

$$F_{+i}^\epsilon = \int\limits_{\Gamma_+^\epsilon} (\Sigma^\epsilon.N^\epsilon)_i \, d\sigma = \int\limits_w \left(p^\epsilon \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3} \right) dx \quad i = 1, 2$$

et pour la troisième composante :

$$F_{+3}^\epsilon = - \int\limits_w p^\epsilon \, dx$$

De même, on intègre $\Sigma^\epsilon.N^\epsilon$ sur Γ_- :

$$F_{-i}^\epsilon = \int\limits_{\Gamma_-} (\Sigma^\epsilon.N^\epsilon)_i \, d\sigma = \int\limits_w -\mu \frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3} \, dx \quad i = 1, 2$$

et pour la troisième composante :

$$F_{-3}^\epsilon = \int\limits_w p^\epsilon \, dx$$

D'après (2.24), on exprime $\dfrac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_3}$ en fonction de $\dfrac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i}$ dans les expressions de F_{+i}^ϵ et F_{-i}^ϵ, et on trouve le résultat.

$\square$

Remarque 2.3.13. *On a démontré la convergence des contraintes normales sur la totalité du bord, mais dans un sens trop faible pour séparer le bord en morceaux. Donc on pourra seulement dire que formellement F_+^ϵ (resp. F_-^ϵ) est la limite de $F_+^{\eta\epsilon}$ (resp. $F_-^{\eta\epsilon}$)*

2.4 Etude asymptotique quand $\epsilon \to 0$

Dans le paragraphe précédent, le problème asymptotique (2.20) (2.21) a été obtenu après avoir fait tendre η vers zéro. Il vérifie une équation de type Reynolds dans un domaine mince en présence d'une frontière rugueuse. Nous utilisons la théorie de l'homogénéisation pour étudier son comportement limite quand le paramètre ϵ de la rugosité tend vers zéro. Nous commençons par quelques rappels sur la convergence double échelle avant de l'utiliser pour étudier le problème (2.20) (2.21).

2.4.1 Rappels sur la convergence double échelle :

Rappelons pour la dimension n les espaces fonctionnels qui seront utilisés dans la partie suivante :

$\mathcal{C}_\#^\infty(Y) = \{\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad Y - \text{périodique}\}$

$H_\#^1(Y) =$ le complété de $\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$ pour la norme $H^1(Y)$

$\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y)) =$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeur dans $\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$

$L^2(\Omega, H_\#^1(Y)) =$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à valeur dans $H_\#^1(Y)$

$L^2(\Omega, H_\#^1(Y)/R) =$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$à valeur dans $H_\#^1(Y)/\mathbb{R}$

$V(x_n) = \{\varphi \in L^2(\Omega), \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \in L^2(\Omega)\}$

Définition 2.4.1. *[16] une suite v^ϵ de $L^2(\Omega)$ converge double échelle vers une fonction v de $L^2(\Omega \times Y)$ si pour toute fonction $\phi(X,Y)$ de $\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}_\#^\infty(Y))$, on a :*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega v^\epsilon(X)\phi(X, \frac{X}{\epsilon})dX = \int_\Omega \int_Y v(X,Y)\phi(X,Y)\, dX\, dY$$

le symbole $\twoheadrightarrow$ désignera la convergence " double échelle"

Lemme 2.4.2. *[16] De toute suite v^ϵ bornée de $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge double échelle vers $v(X,Y)$ de $L^2(\Omega \times Y)$ et on a pour toute fonction $\phi(X,Y)$*

de $L^2(\Omega, \mathcal{C}_\#(Y))$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega v^\epsilon(X)\phi(X,\frac{X}{\epsilon})dX = \int_\Omega\int_Y v(X,Y)\phi(X,Y)\,dX\,dY$$

Lemme 2.4.3. *[2] Soit (v^ϵ) une suite bornée dans $L^2(\Omega)$ et soit v sa limite double échelle, alors v^ϵ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $\tilde{v}$ défini par :*

$$\tilde{v} = \int_Y v(X,Y)\,dY$$

Lemme 2.4.4. *[2] Si (v^ϵ) est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, alors sa limite double échelle est dans $H^1(\Omega)$ et ne dépend que de X ; de plus il existe une fonction $v_0(X,Y)$ de $L^2(\Omega, H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ telle que :*

$$\nabla_X v^\epsilon \twoheadrightarrow \nabla_X v(X) + \nabla_Y v_0(X,Y)$$

Lemme 2.4.5. *Soit (v^ϵ) une suite bornée dans $V(x_n)$, soit $v(X,Y)$ sa limite double échelle, alors il existe une fonction $v_1(X,Y)$ de $L^2(\Omega\times Y)$ avec $\dfrac{\partial v_1}{\partial y_n}$ dans $L^2(\Omega\times Y)$ telle que :*

$$\frac{\partial v}{\partial y_n} = 0 \quad et \qquad \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_n} \twoheadrightarrow \frac{\partial v}{\partial x_n}(X,y) + \frac{\partial v_1}{\partial y_n}(X,Y)$$

Preuve

Soit (v^ϵ) une suite bornée dans $V(x_n)$, alors il existe v dans $L^2(\Omega\times Y)$ et ρ dans $L^2(\Omega\times Y)$ tel que pour tout ψ dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$ on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega v^\epsilon(x,x_n)\psi(x,x_n,\frac{x}{\epsilon},\frac{x_n}{\epsilon})\,dx\,dx_n \to \int_\Omega\int_Y v(x,x_n,y,y_n)\psi(x,x_n,y,y_n)\,dx\,dx_n\,dy\,dy_n \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_n}(x,x_n)\psi(x,x_n,\frac{x}{\epsilon},\frac{x_n}{\epsilon})\,dx\,dx_n \to \int_\Omega\int_Y \rho(x,x_n,y,y_n)\psi(x,x_n,y,y_n)\,dx\,dx_n\,dy\,dy_n \end{cases} \tag{2.36}$$

En intégrant par partie, on a :

$$\epsilon\int_\Omega \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_n}(x,x_n)\psi(x,x_n,\frac{x}{\epsilon},\frac{x_n}{\epsilon})\,dx\,dx_n = -\int_\Omega v^\epsilon(x,x_n)\left(\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x,x_n,\frac{x}{\epsilon},\frac{x_n}{\epsilon}) + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}(x,x_n,\frac{x}{\epsilon},\frac{x_n}{\epsilon})\right)\,dx\,dx_n$$

En passant à la limite dans les deux termes, tenant compte de (2.36) on obtient :

$$0 = -\int_\Omega\int_Y v(x,x_n,y,y_n)\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\,dx\,dx_n\,dy\,dy_n$$

Ceci implique que $v(x,x_n,y,y_n)$ ne dépend pas de la variable y_n.

On choisit maintenant dans (2.36) une fonction ψ qui ne dépend pas de la variable y_n. En intégrant par partie, on a :

$$\int_\Omega v^\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, dx\, dx_n = -\int_\Omega \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_n}\psi\, dx\, dx_n$$

En passant à la limite dans les deux termes, on obtient :

$$\int_\Omega \int_Y v \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\, dx\, dx_n\, dy\, dy_n = -\int_\Omega \int_Y \rho\psi\, dx\, dx_n\, dy\, dy_n$$

Comme ψ ne dépend pas de la variable y_n, on a :

$$\int_0^1 \left(\rho - \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) dy_n = 0$$

Posons :

$$v_1(X,Y) = \int_0^{y_n} \left(\rho - \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) ds_n$$

$v_1(X,Y)$ est dans $L^2(\Omega \times Y)$, $\dfrac{\partial v_1}{\partial y_n}$ est aussi dans $L^2(\Omega \times Y)$, v_1 est y_n-périodique et :

$$\rho(x, x_n, y, y_n) - \frac{\partial v}{\partial x_n} = \frac{\partial v_1}{\partial y_n}$$

Ce qui termine la preuve. $\square$.

Lemme 2.4.6. *Si (v^ϵ) est une suite bornée dans $L^2(\Omega)$, telle que $(\epsilon\dfrac{\partial v^\epsilon}{\partial x_i})$ est aussi bornée dans $L^2(\Omega)$, $i = 1, n-1$. Notons $v(x, x_n, y, y_n)$ sa limite double échelle, alors*

$$\epsilon\frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_i} \twoheadrightarrow \frac{\partial v}{\partial y_i} \qquad i = 1, n-1$$

Preuve

Si (v^ϵ) et $(\epsilon\dfrac{\partial v^\epsilon}{\partial x_i})$ pour un i entre $1, n-1$ sont des suites bornées dans $L^2(\Omega)$, alors il existe v et ρ_0 dans $L^2(\Omega \times Y)$ tels que pour tout ψ dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$ on ait :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega v^\epsilon(x, x_n)\psi(x, x_n, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x_n}{\epsilon})\, dx\, dx_n \to \int_\Omega \int_Y v(x, x_n, y, y_n)\psi(x, x_n, y, y_n)\, dx\, dx_n\, dy\, dy_n \\ \displaystyle\epsilon\int_\Omega \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_i}(x, x_n)\psi(x, x_n, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x_n}{\epsilon})\, dx\, dx_n \to \int_\Omega \int_Y \rho(x, x_n, y, y_n)\psi(x, x_n, y, y_n)\, dx\, dx_n\, dy\, dy_n \end{cases} \tag{2.37}$$

En intégrant par partie, on a :

$$\epsilon\int_\Omega \frac{\partial v^\epsilon(x, x_n)}{\partial x_i}\psi(x, x_n, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x_n}{\epsilon})\, dx\, dx_n = -\int_\Omega v^\epsilon(x, x_n)\left(\epsilon\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, x_n, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x_n}{\epsilon}) + \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(x, x_n, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x_n}{\epsilon})\right) dx dx_n$$

En passant à la limite dans les deux termes, tenant compte de (2.37) on obtient :

$$\int_\Omega \int_Y \rho(x,x_n,y,y_n)\psi(x,x_n,y,y_n)\,dx\,dx_n\,dy\,dy_n = -\int_\Omega \int_Y v(x,x_n,y,y_n)\frac{\partial \psi}{\partial y_i}\,dx\,dx_n\,dy\,dy_n$$

$$= \int_\Omega \int_Y \frac{\partial v(x,x_n,y,y_n)}{\partial y_i}\psi\,dx\,dx_n\,dy\,dy_n$$

□.

Lemme 2.4.7 (Convergence double échelle forte). *[2] Soit (v^ϵ) une suite bornée dans $L^2(\Omega)$ qui converge double échelle vers $v(X,Y)$ de $L^2(\Omega\times Y)$, on suppose en outre que :*

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||v^\epsilon||_{L^2(\Omega)} = ||v||_{L^2(\Omega\times Y)}$$

alors pour tout ξ^ϵ qui converge à double échelle vers $\xi(x,y)\in L^2(\Omega\times Y)$ on a :

$$v^\epsilon\xi^\epsilon \rightharpoonup \int_Y v(X,Y)\xi(X,Y)\,dY \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.38}$$

Proposition 2.4.8. *[2] Toute fonction Ψ de $L^2(\Omega, C_\#(Y))$ satisfaisant :*

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||\Psi^\epsilon||_{L^2(\Omega)} = ||\Psi||_{L^2(\Omega\times Y)}$$

alors $\Psi^\epsilon(X) = \Psi(X,\frac{X}{\epsilon})$ converge double échelle fort vers $\Psi(X,Y)$

2.4.2 Homogénéisation

Dans cette partie, on rappelle des notations de la section 2.2.
w est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\tilde{h}(x) = \int_0^1\int_0^1 h(x,y)\,dy$ avec $h(x,y)$ vérifiant (H_0).
On définit l'espace suivant :

$$H^1_\star = \{\phi\in H^1(w) : \int_w \tilde{h}(x)\phi(x)dx = 0\}$$

Lemme 2.4.9 (Inégalité de Poincaré généralisée). *[20] Soit l une forme linéaire de : $H^1(w)\to\mathbb{R}$, alors il existe une constante $K>0$ dépendent de l et de w telle que :*

$$||\phi||_{L^2(w)} \le K\left(\|\nabla\phi\|_{L^2(w)^2} + |l(\phi)|\right) \qquad \forall\phi\in H^1(w)$$

Lemme 2.4.10. *$\|\nabla\phi\|_{L^2(w)}$ définit une norme équivalente à la norme $H^1(w)$ sur $H^1_\star$, et on a :*

$$\|\phi\|_{L^2(w)} \le K\|\nabla\phi\|_{L^2(w)^2} \qquad \forall\phi\in H^1_\star$$

Preuve :
C'est une application du lemme 2.4.9, il suffit de prendre la forme linéaire :

$$l(\phi) = \int_w \tilde{h}(x)\phi\,dx$$

□

Théorème 2.4.11. *p^ϵ est bornée dans $H^1(w)$, et on a les convergences suivantes :*

$$p^\epsilon \twoheadrightarrow p_0(x), \qquad \nabla_x p^\epsilon \twoheadrightarrow \nabla_x p_0 + \nabla_y p_1 \tag{2.39}$$

où (p_0, p_1) est l'unique solution dans $H = H^1_\star \times L^2(w, H^1_\#(]0,1[^2)/\mathbb{R})$ du problème variationnel mixte :

$$\int_w \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} (\nabla_x p_0 + \nabla_y p_1) . (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1)\, dx\, dy = \int_w \int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2} s. (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1)\ dx\ dy$$

$$- \int_{\partial w} \left(\int_0^{h_{min}} g.n\, dx_3 \right) \phi_0\ dx \qquad \forall (\phi_0, \phi_1) \in H^1(w) \times L^2(w, H^1_\#(]0,1[^2)) \tag{2.40}$$

Preuve :
<u>Partie 1 :</u> on sait déjà que p^ϵ est dans $H^1(w)$, d'après (2.21) .
On prend p^ϵ comme fonction test dans l'équation (2.20)

$$\int_w \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} (\nabla_x p^\epsilon)^2\ dx = \int_w \frac{h^\epsilon}{2} s. \nabla_x p^\epsilon\ dx - \int_{\partial w} \left(\int_0^{h_{min}} g.n\ dx_3 \right) p^\epsilon\ dx$$

$$\frac{a^3}{12\mu} \int_w (\nabla_x p^\epsilon)^2\, dx \leq \left| \int_w \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} (\nabla_x p^\epsilon)^2\, dx \right| \leq \frac{b}{2} ||s||_{(L^2(w))^2} ||\nabla_x p^\epsilon||_{(L^2(w))^2} + K ||p^\epsilon||_{L^2(\partial w)}$$

$$\leq \frac{b}{2} ||s||_{(L^2(w))^2} ||\nabla_x p^\epsilon||_{(L^2(w))^2} + K ||p^\epsilon||_{H^1(w)}$$

En utilisant (2.21) et le lemme 2.4.9, il est facile de démontrer que :

$$\|p^\epsilon\|_{H^1(w)} \leq K \|\nabla_x p^\epsilon\|_{(L^2(w))^2}$$

On obtient :

$$\|\nabla_x p^\epsilon\|_{L^2(w)^2} \leq \frac{12\mu}{a^3} \left(\frac{b}{2} ||s||_{(L^2(w))^2} + K \right) \leq K$$

Le lemme 2.4.4 de la convergence double échelle permet d'obtenir l'existence de p_0 et p_1 tels que (2.39) soit vrai.

Soit (ϕ_0, ϕ_1) dans $\mathcal{C}^\infty(w) \times \mathcal{D}(w, C^\infty_\#(]0,1[^2))$, on prend $\phi_0 + \epsilon \phi_1^\epsilon$ comme fonction test dans (2.20), d'où :

$$\int_w \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu} \nabla_x p^\epsilon . \left(\nabla_x \phi_0 + \epsilon \nabla_x \phi_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y \phi_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) =$$

$$\int_w \frac{h^\epsilon}{2} s. \left(\nabla_x \phi_0 + \epsilon \nabla_x \phi_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \nabla_y \phi_1(x, \frac{x}{\epsilon}) \right) - \int_{\partial w} \left(\int_0^{h_{min}} g.n dx_3 \right)\ \phi_0\ d\sigma$$

Or $(h^\epsilon)^3\nabla_x\phi_0$ est une fonction test pour la convergence double échelle (lemme 2.4.2), $\epsilon(h^\epsilon)^3\nabla_x\phi_1$ converge vers zéro et $(h^\epsilon)^3\nabla_y\phi_1^\epsilon$ est dans $L^2(w)$ et converge double échelle fort vers $h^3\nabla_y\phi_1$ (elle vérifie les hypothèses du lemme 2.4.7). On peut donc passer à la limite double échelle dans chacun des termes produits de l'égalité ci-dessus :

$$\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\left(\nabla_x p_0+\nabla_y p_1\right).\left(\nabla_x\phi_0+\nabla_y\phi_1\right)=\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h}{2}s.\left(\nabla_x\phi_0+\nabla_y\phi_1\right)$$

$$-\int_{\partial w}\left(\int_0^{h_{min}} g.ndx_3\right)\ \phi_0\ d\sigma \qquad \forall(\phi_0,\phi_1)\in\mathcal{C}^\infty(w)\times\mathcal{D}(w,\mathcal{C}^\infty_\#(]0;1[^2)) \quad (2.41)$$

Par densité ceci reste vrai pour tout $(\phi_0,\phi_1)\in H^1(w)\times L^2(w,H^1_\#(Y))$

Il reste à démontrer l'existence et l'unicité du couple (p_0,p_1). On va utiliser le théorème de Lax-Milgram en posant :

$$A((\phi_0^0,\phi_1^0),(\phi_0^1,\phi_1^1))=\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{(h^\epsilon)^3}{12\mu}\left(\nabla_x\phi_0^0+\nabla_y\phi_1^0\right).\left(\nabla_x\phi_0^1+\nabla_y\phi_1^1\right)$$

H est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$||(\phi_0,\phi_1)||_H^2=||\nabla_x\phi_0||^2_{L^2(w)}+||\nabla_y\phi_1||^2_{L^2(w\times Y)}$$

On vérifie facilement que A est une forme bilinéaire continue sur $H^1(w)\times L^2(w,H^1_\#(Y))$; de plus elle est coercive dans $H=H^1_\star\times L^2(w,H^1_\#(Y)/R)$.
En effet :

$$A((\phi_0,\phi_1),(\phi_0,\phi_1))\geq\frac{a^3}{12\mu}\int_w\int_0^1\int_0^1\left(\nabla_x\phi_0+\nabla_y\phi_1\right)^2\ dx\,dy$$

$$=\frac{a^3}{12\mu}\int_w\int_0^1\int_0^1\left((\nabla_x\phi_0)^2+(\nabla_y\phi_1)^2\right)\ dx\,dy+\frac{a^3}{6\mu}\int_w\int_0^1\int_0^1\nabla_x\phi_0.\nabla_y\phi_1\,dx\,dy$$

le terme $\int_w\int_0^1\int_0^1\nabla_x\phi_0.\nabla_y\phi_1 dxdy$ est nul par périodicité.
On obtient :

$$A((\phi_0,\phi_1),(\phi_0,\phi_1))\geq\frac{a^3}{12\mu}||(\phi_0,\phi_1)||_H^2$$

Ceci assure l'existence et l'unicité de la solution (p_0,p_1) dans H du problème (2.41).

□

2.4.3 Détermination du problème limite

Nous introduisons maintenant les problèmes locaux qui vont permettre d'éliminer la deuxième pression p_1.

Soient π^i les uniques solutions des problèmes locaux suivants (x est fixé dans w) :

$$\mathrm{div}_y\left(\frac{h^3}{12\mu}(e_i+\nabla_y\pi^i)\right)=0 \qquad \pi^i\in H^1_\#(]0,1[^2)\cap L^2_0(]0,1[^2),\quad i=1,2 \tag{2.42}$$

$$\mathrm{div}_y\left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla_y\pi^3\right)=\left(\frac{s}{2}.\nabla_y h\right) \qquad \pi^3\in H^1_\#(]0,1[^2)\cap L^2_0(]0,1[^2) \tag{2.43}$$

Les formulations variationnelles correspondant aux problèmes (2.42) (2.43) sont : ($i=1,2$)

Chercher π^i dans $H^1_\#(]0,1[^2)\cap L^2_0(]0,1[^2)$ tel que :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}(e_i+\nabla_y\pi^i).\nabla_y\phi\,dy=0 \qquad \forall\phi\in H^1_\#(]0,1[^2) \tag{2.44}$$

Chercher π^3 dans $H^1_\#(]0,1[^2)\cap L^2_0(]0,1[^2)$ tel que :

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\nabla_y\pi^3.\nabla_y\phi\,dy=\int_0^1\int_0^1 h\frac{s}{2}.\nabla_y\phi\,dy \qquad \forall\phi\in H^1_\#(]0,1[^2) \tag{2.45}$$

Proposition 2.4.12.

$$\pi^i\in L^\infty(w;H^1_\#(]0,1[^2)),i=1,2,3$$

Preuve :
Il est évident que : ($i=1,2,3$)

$$\|\nabla_y\pi^i\|_{L^2(]0,1[^2)^2}\le c$$

où c est une constante indépendante de x et de w. □

Proposition 2.4.13. *On a la relation suivante :*

$$p_1=\sum_{j=1}^2\frac{\partial p_0}{\partial x_j}\pi^j+\pi^3$$

Preuve :
Soit $\psi=\phi_0(x)\phi_1(y)$ où $\phi_0(x)$ est dans $\mathcal{D}(w)$ et $\phi_1(y)$ dans $\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$, $(0,\psi)$ est une fonction test pour (2.40) :

$$\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\left(\nabla_x p_0+\nabla_y p_1\right).(\nabla_y\phi_1)\phi_0(x)\,dx\,dy=\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h}{2}(s.\nabla_y\phi_1)\phi_0(x)\,dx\,dy$$

$$\int_w \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} (\nabla_x p_0 + \nabla_y p_1).\nabla_y \phi_1 \, dy \right) \phi_0(x) dx = \int_w \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2} s.\nabla_y \phi_1 dy \right) \phi_0(x) dx$$

ceci est vrai pour tout ϕ_0 dans $\mathcal{D}(w)$, donc à x et p_0 fixés, p_1 se trouve être l'unique solution du problème variationnel suivant :

Chercher p_1 dans $H^1_\#(]0,1[^2)$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \nabla_y p_1.\nabla_y \phi_1 \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2} s.\nabla_y \phi_1 \, dy - \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \nabla_x p_0 \nabla_y \phi_1 \, dy \; \forall \phi \in H^1_\#(]0,1[^2) \quad (2.46)$$

on pose

$$v = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \pi^i + \pi^3, \quad v \in L^2(w, H^1_\#(]0,1[^2))$$

On veut montrer que v vérifie aussi (2.46), pour cela, on calcule :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \nabla_y v.\nabla_y \phi_1 \, dy$$

On remplace v par sa valeur en fonction de p_0, on obtient :

$$I = \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \nabla_y \pi^i.\nabla_y \phi_1 dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12} \nabla_y \pi^3.\nabla_y \phi_1 dy$$

D'autre part, si on prend $\frac{\partial p_0}{\partial x_i} \phi_1(y)$ comme fonction test dans (2.44), avec $\phi_1(y)$ dans $H^1_\#(Y)$, on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \left(e_i + \nabla_y \pi^i \right) .\nabla_y \phi_1 = 0 \quad \forall i = 1,2 \quad (2.47)$$

$\phi_1(y)$ dans $H^1_\#(Y)$ est aussi fonction test dans (2.45), on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \nabla_y \pi^3.\nabla_y \phi_1 = \int_0^1 \int_0^1 h \frac{s}{2}.\nabla_y \phi_1 \, dy \quad (2.48)$$

Remplaçant, (2.47) et (2.48) dans la formule de I, on obtient :

$$I = -\sum_{i=1}^{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} e_i.\nabla_y \phi_1 + \int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2} s.\nabla_y \phi_1 \, dy$$

ce qui implique que

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2} s.\nabla_y \phi_1 dy - \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \nabla_x p_0.\nabla_y \phi_1 \, dy$$

donc v est solution de (2.46), et par unicité $p_1 = v$

$\square$

Théorème 2.4.14. *$p_0 \in H^1_\star$ est l'unique solution de l'équation de Reynolds homogénéisée :*

$$\int_w \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial p_0}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx = \int_w \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\tilde{h}}{2}s_i - b_i(x)\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx - \int_{\partial w}\left(\int_0^{h_{min}} g.n\,dx_3\right)\phi\,dx\ \forall \phi \in H^1(w) \tag{2.49}$$

où $A(x) = (a_{ij}(x))_{i=1,2}$ est la matrice définie par :

$$a_{ij}(x) = \int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^i}{\partial y_j})\,dy \tag{2.50}$$

$$b_i(x) = \int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial \pi^3}{\partial y_i}\,dy \qquad i = 1,2$$

Preuve :
Choisissons $(\phi, 0)$ comme fonction-test dans (2.40), avec ϕ dans $H^1(w)$

$$\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\left(\nabla_x p_0 + \nabla_y p_1\right).\nabla_x\phi = \int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h}{2}s.\nabla_x\phi\,dx\,dy - \int_{\partial w}\left(\int_0^{h_{min}} g\,dx_3\right).n\phi\,dx$$

En remplaçant p_1 par sa valeur donnée dans la proposition 2.4.13, on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_w\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p_0}{\partial x_j}\left(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx\,dy =$$

$$\int_w\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{h}{2}s - \frac{h^3}{12\mu}\nabla_y \pi^3\right).\nabla_x\phi\,dx\,dy - \int_{\partial w}\left(\int_0^{h_{min}} g\,dx_3\right).n\phi\,dx$$

ce qui implique l'équation (2.49).
Pour montrer l'unicité de p_0, il suffit de montrer que la formulation (2.49) correspond à un problème coercif. Pour ceci on va montrer que la matrice $A(x)$ est symétrique définie positive.
On prend $\phi = \dfrac{\pi^j}{12}$ dans (2.44)

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}(e_i + \nabla_y \pi^i).\nabla_y \pi^j\,dy = 0$$

Alors, (2.50) se met sous la forme :

$$a_{ij}(x) = \int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}(e_i + \nabla_y \pi^i)(e_j + \nabla_y \pi^j)\,dy$$

ce qui montre en particulier que $A(x)$ est une matrice symétrique.
Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$\xi^t A\xi = \int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\sum_{i,j=1}^{2}\xi_i(e_i+\nabla_y\pi^i).(e_j+\nabla_y\pi^j)\xi_j\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{h^3}{12\mu}\left(\sum_{i=1}^{2}\xi_i(e_i+\nabla_y\pi^i)\right)^2 dy$$

donc

$$\xi^t A\xi \geq \frac{a^3}{12\mu}\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{2}\xi_i(e_i+\nabla_y\pi^i)\right)^2 dy$$

$$= \frac{a^3}{12\mu}\int_0^1\int_0^1\left(\xi_1^2(e_1+\nabla_y\pi^1)^2+\xi_2^2(e_2+\nabla_y\pi^2)^2+2\xi_1\xi_2(e_1+\nabla_y\pi^1)(e_2+\nabla_y\pi^2)\right)\,dy$$

D'autre part, pour chaque $i = 1, 2$:

$$\int_0^1\int_0^1 \xi_i^2(e_i+\nabla_y\pi^i)^2\,dy = \int_0^1\int_0^1 \xi_i^2(1+(\nabla_y\pi^i)^2+2\frac{\partial\pi^i}{\partial y_i})\,dy = \int_0^1\int_0^1 \xi_i^2 dy+\int_0^1\int_0^1 \xi_i^2(\nabla_y\pi^i)^2\,dy$$

et

$$2\int_0^1\int_0^1 \xi_1\xi_2(e_1+\nabla_y\pi^1)(e_2+\nabla_y\pi^2)\,dy = 2\int_0^1\int_0^1 \xi_1\xi_2\nabla_y\pi^1.\nabla_y\pi^2\,dy$$

Alors

$$\xi^t A\xi \geq \frac{a^3}{12\mu}\int_0^1\int_0^1\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\,dy+\frac{a^3}{12\mu}\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2(\nabla_y\pi^i)^2+2\xi_1\xi_2(e_1+\nabla_y\pi^1)(e_2+\nabla_y\pi^2)\right)dy$$

$$= \frac{a^3}{12\mu}\int_0^1\int_0^1\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\,dy+\frac{a^3}{12\mu}\int_0^1\int_0^1\left(\xi_1\nabla_y\pi^1+\xi_2\nabla_y\pi^2\right)^2 dy$$

On a donc

$$\xi^t A\xi \geq \frac{a^3}{12\mu}\,|\xi|^2$$

ce qui assure la coercivité de (2.49) □

2.4.4 Contraintes homogénéisées

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux limites des forces s'exerçant sur les interfaces fluide-solide en terme de contraintes et d'efforts. Pour faire converger les efforts, on aura besoin de supposer que la fonction h^ϵ ne dépend pas de ϵ sur ∂w et on notera l'hypothèse correspondante :

$$(H_3) \qquad \forall x \in \partial w\ h^\epsilon(x) = h_0(x)$$

Lemme 2.4.15. *Soient V_+^ϵ (resp. V_-^ϵ) les contraintes définies dans le théorème* 2.3.11, *alors lorsque $\epsilon \to 0$, sous l'hypothèse (H_2), on a les convergences suivantes :*

$$V_+^\epsilon \text{ converge dans } (H^{-1}(w))^3 \text{ faible vers } V_+ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}(p_0\tilde{h}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{1j}(x) - d_1(x) - \mu s_1 \widetilde{h^{-1}} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}(p_0\tilde{h}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{2j}(x) - d_2(x) - \mu s_2 \widetilde{h^{-1}} \\ \\ -p_0(x) \end{pmatrix}$$

et

$$V_-^\epsilon \text{ converge dans } (H^{-1})(w)^3 \text{ faible vers } V_- = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{1j}(x) + d_1(x) + \mu s_1 \widetilde{h^{-1}} \\ \\ \sum_{j=1}^{2} \dfrac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{2j}(x) + d_2(x) + \mu s_2 \widetilde{h^{-1}} \\ \\ p_0(x) \end{pmatrix}$$

avec

$$c_{ij}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i}\right) \frac{h}{2}\, dy \qquad i = 1, 2$$

$$d_i(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \pi^3}{\partial y_i} \frac{h}{2}\, dy \qquad i = 1, 2$$

Preuve :
On va étudier la convergence de chaque composante de V_+^ϵ donné dans (2.35) et qui sera noté $V_{+i}^\epsilon, i = 1, 2, 3$. Pour tout φ dans $H_0^1(w)$, on a :

$$< V_{+i}^\epsilon, \varphi >_{H^{-1}, H_0^1} = \int_w \left(p^\epsilon \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i} \frac{h^\epsilon}{2}\right) \varphi\, dx - \mu \int_w \frac{s_i}{h^\epsilon} \varphi\, dx \qquad i = 1, 2$$

et la troisième composante :

$$< V_{+3}^\epsilon, \varphi >_{H^{-1}(w), H_0^1(w)} = -\int_w p^\epsilon \varphi\, dx$$

Appliquant la formule de Green sur le premier terme, on obtient :

$$< V_{+i}^\epsilon, \varphi >_{H^{-1}(w), H_0^1(w)} = -\int_w \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i} h^\epsilon \varphi + p^\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} h^\epsilon\right) dx - \mu \int_w \frac{s_i}{h^\epsilon} \varphi\, dx \qquad i = 1, 2$$

Quand $\epsilon \to 0$, on utilise le théorème 2.4.11 ; on obtient la convergence vers :

$$-\int_w \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i})h\varphi + p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} h \right) dx\, dy - \mu \int_w \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{h} \right) s_i \varphi\, dx \qquad i = 1, 2$$

Remplaçant p_1 par sa valeur en fonction de p_0, et appliquant la formule de Green sur le deuxième terme, il vient :

$$-\int_w \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1,2} \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} + \frac{\partial \pi^3}{\partial y_i} \right) h\varphi\, dx\, dy +$$

$$\int_w \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}(p_0 h)\varphi\, dx\, dy - \mu \int_w \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{h} \right) s_i \varphi\, dx \; i = 1, 2$$

et

$$< V_{+3}^{\epsilon}, \varphi >_{H^{-1}, H_0^1} \to -\int_w p_0 \varphi\, dx$$

La limite de V_-^{ϵ} s'obtient de la même façon

. □

Théorème 2.4.16. *Soient F_+^{ϵ} (resp. F_-^{ϵ}) les efforts définis dans le lemme 2.3.12, sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), quand $\epsilon \to 0$, on a les convergences suivantes :*

$$F_+^{\epsilon} \to \begin{pmatrix} \int_w \left(-\sum_{j=1}^2 \frac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{1j}(x) - d_1(x) - \mu s_1 \widetilde{h^{-1}} \right) dx + \int_{\partial w} p_0 h_0 n_1\, dx \\ \int_w \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2} h - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{2j}(x) - d_2(x) - \mu s_2 \widetilde{h^{-1}} \right) dx + \int_{\partial w} p_0 h_0 n_2\, dx \\ -\int_w p_0(x)\, dx \end{pmatrix}$$

et

$$F_-^{\epsilon} \to \begin{pmatrix} \int_w \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{1j}(x) + d_1(x) + \mu s_1 \widetilde{h^{-1}} \right) dx \; i = 1, 2 \\ \int_w \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial p_0}{\partial x_j} c_{2j}(x) + d_2(x) + \mu s_2 \widetilde{h^{-1}} \right) dx \; i = 1, 2 \\ \int_w p_0(x)\, dx \end{pmatrix}$$

Preuve

On traitera chaque composante de F_+^{ϵ} (resp. F_-^{ϵ}) qui sont notées par F_{+i}^{ϵ} (resp. F_{-i}^{ϵ}) :

$$F_{+i}^{\epsilon} = \int_w \left(p^{\epsilon} \frac{\partial h^{\epsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial p^{\epsilon}}{\partial x_i} \frac{h^{\epsilon}}{2} \right) dx - \mu \int_w \frac{s_i}{h^{\epsilon}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_w \frac{\partial p^\epsilon}{\partial x_i} h^\epsilon \, dx + \int_{\partial w} p^\epsilon h_0 n_i \, dx - \mu \int_w \frac{s_i}{h^\epsilon} \, dx \qquad i = 1, 2$$

et

$$F^\epsilon_{+3} = -\int_w p^\epsilon \, dx$$

Comme p^ϵ converge dans $H^1(w)$, on a la convergence de sa trace dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial w)$, on peut donc passer à la limite lorsque $\epsilon \to 0$:

$$F^\epsilon_{+i} \twoheadrightarrow -\frac{1}{2}\int_w \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i}\right) h \, dx \, dy + \int_{\partial w} p_0 h_0 n_i \, dx - \int_w \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{h}\right) s_i \, dx \qquad i = 1, 2$$

Remplaçant p_1 par sa valeur en fonction de p_0, on obtient :

$$-\frac{1}{2}\int_w \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1,2} \frac{\partial p_0}{\partial x_j}\frac{\partial \pi^j}{\partial y_i} + \frac{\partial \pi^3}{\partial y_i}\right) h \, dx \, dy + \int_{\partial w} p_0 \, h_0 n_i \, dx - \int_w s_i \left(\frac{1}{h} dy\right) dx \qquad i = 1, 2$$

Pour la troisième composante, on a :

$$F^\epsilon_{+3} \to -\int_w p_0 \, dx$$

La limite de F^ϵ_- s'obtient de la même façon.

□

Remarque 2.4.17. *Pour éliminer l'hypothèse (H_2), il suffit que $h^\epsilon_{/\partial w}$ converge fort dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial w)$, mais en pratique ce résultat paraît peu exploitable.*

2.5 Etude asymptotique quand le rapport $\lambda = \dfrac{\eta}{\epsilon}$ est constant

On se place dans la situation où les deux petits paramètres sont du même ordre. Cela se traduit par l'introduction du rapport :

$$\lambda = \frac{\eta}{\epsilon}$$

Une difficulté intervient dans ce cas là, car le domaine dépend "doublement" du petit paramètre ϵ, à travers son épaisseur et par sa frontière rugueuse. Le changement de variables pour se ramener à un domaine indépendant à la fois de ϵ et de η va nécessiter de redresser la frontière oscillante, introduisant des coefficients oscillants dans la formulation variationnelle du problème de Stokes et des difficultés techniques supplémentaires.

2.5.1 Formulation variationnelle du problème de Stokes dans un domaine indépendant de ϵ

On introduit le changement de variables suivant pour se ramener à un domaine fixe qui ne dépend pas de ϵ :

$$t = z, \quad \text{et} \quad t_3 = \frac{z_3}{\eta h^\epsilon} = \frac{x_3}{h^\epsilon} \tag{2.51}$$

Le domaine Ω^ϵ devient le domaine fixe :

$$B = \{(t, t_3),\ t \in \omega,\ 0 < t_3 < 1\}$$

Proposition 2.5.1. *Soit f dans $L^2(\Omega^{\eta\epsilon})^3$, on a :*

$$\mathrm{div}_{zz_3} f = 0 \Longrightarrow \mathrm{div}_{tt_3}\left(\eta h^\epsilon B^\epsilon . f\right) = 0$$

avec

$$B^\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-t_3}{h^\epsilon}\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} & \dfrac{-t_3}{h^\epsilon}\dfrac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} & \dfrac{1}{\eta h^\epsilon} \end{pmatrix}$$

Preuve

Soit f dans $L^2(\Omega^{\eta\epsilon})^3$ telle que :

$$\mathrm{div}_{zz_3} f = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} + \frac{\partial f_3}{\partial z_3} = 0$$

En faisant le changement de variables (2.51), on obtient :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_1} - \frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_3} + \frac{\partial f_2}{\partial t_2} - \frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2}\frac{\partial f_2}{\partial t_3} + \frac{1}{\eta h^\epsilon}\frac{\partial f_3}{\partial t_3} = 0$$

en multipliant par ηh^ϵ, cette équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\eta h^\epsilon f_1\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} f_1\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\eta h^\epsilon f_2\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} f_2\right) + \frac{\partial f_3}{\partial t_3} = 0$$

qui s'écrit aussi sous la forme matricielle donnée dans la proposition. □

La formulation variationnelle du problème (2.12)-(2.13) s'écrit dans B, en utilisant la proposition 2.5.1 :

Trouver $u^{\eta\epsilon} \in H^1(B)^3$, $p^{\eta\epsilon} \in L^2(B)$ avec $\displaystyle\int_B h^\epsilon p^{\eta\epsilon}\, dt\, dt_3 = 0$ tels que :

$$\mu \int_B \sum_{j=1}^{3} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_j^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_j^{\eta\epsilon}) \right) . \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon \varphi_j) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} \varphi_j) \right) + \frac{\partial u_j^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_3} \right] \frac{dt\, dt_3}{\eta h^\epsilon}$$

$$= \int_B p^{\eta\epsilon} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon \varphi_i) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} \varphi_i) \right) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_3} \right] dt\, dt_3 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(B)^3 \tag{2.52}$$

$$\mathrm{div}_{tt_3}(\eta h^\epsilon B^\epsilon.u^{\eta\epsilon}) = 0 \qquad \text{dans } B \tag{2.53}$$

$$u^{\eta\epsilon} = g \qquad \text{dans } (H^{\frac{1}{2}}(\partial B))^3$$

2.5.2 Estimations

Lemme 2.5.2. *Dans B, à λ fixé, on a les estimations suivantes :*

$$\|\epsilon\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_i}\|_{L^2(B)^3} \leq K,\ i = 1,2,\ \ \|\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\|_{L^2(B)^3} \leq K \text{ et } \|u^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)^3} \leq K$$

Preuve

Il est plus facile de chercher d'abord les estimations sur la vitesse dans le domaine Ω^ϵ puis les déduire dans le domaine fixe B.

Dans la preuve de la proposition 2.3.1 à ϵ et η fixés, on a trouvé des estimations où les constantes sont indépendantes de ϵ. Donc elles sont valables pour $\eta = \epsilon\lambda$ avec λ étant fixé. D'après (2.14), on a :

$$\|\epsilon\lambda\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} \leq K,\ i = 1,2,\ \|\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} \leq K, \text{ et } \|u^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} \leq K \tag{2.54}$$

D'après le changement de variables (2.51), on a :

$$\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_i} = \frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_i}\frac{x_3}{h^\epsilon}\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3},\ \ i = 1,2$$

donc

$$\int_B (\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_i})^2\ dt\ dt_3 = \int_{\Omega^\epsilon} \left(\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_i}\frac{x_3}{h^\epsilon}\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\right)^2 \frac{1}{h^\epsilon}\ dx\ dx_3 \qquad i = 1,2$$

Sachant que

$$\|\frac{\partial h^\epsilon}{\partial x_i}\|_{L^\infty(w)} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

On en déduit d'après (2.54) :

$$\|\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_i}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq \frac{K}{\epsilon} \qquad i = 1,2$$

De la même façon :

$$\int_B (\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_3})^2\ dt\ dt_3 = \int_{\Omega^\epsilon} (\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3})^2 h^\epsilon\ dx\ dx_3 \leq K$$

D'après l'inégalité de Poincaré dans la direction de t_3 dans B, on a pour une fonction nulle sur le bord $t_3 = 1$:

$$\int_B (u^{\eta\epsilon})^2\ dt\ dt_3 \leq K \int_B (\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial t_3})^2\ dt\ dt_3 \leq K$$

$\square$

Pour la pression, on obtient directement les estimations dans B à partir de celles sur la vitesse. Ensuite, on utilisera la convergence double échelle dans B et dans Ω^ϵ successivement.

Lemme 2.5.3. *Dans B, à λ fixé, on a les estimations suivantes :*

$$\|\frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial t_i}\|_{H^{-1}(B)} \leq \frac{K}{\epsilon^2},\ \|\frac{\partial p^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\|_{H^{-1}(B)} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

Preuve

Choisissant d'abord $(0,0,\frac{1}{h^\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_k}\varphi)$ comme fonction test dans (2.52) avec $\varphi \in H_0^1(B)$, avec $k=1$ ou 2 :

$$\mu \int_B \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_3^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_3^{\eta\epsilon})\right) . \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_k}\varphi) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta \frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_k}\varphi)\right) \frac{dt\, dt_3}{\eta h^\epsilon} +$$

$$\mu \int_B \frac{1}{\eta h^\epsilon}\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\frac{\partial}{\partial t_3}(\frac{1}{h^\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_k}\varphi)\, dt\, dt_3 = \int_B p^{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t_3}(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_k}\frac{\varphi}{h^\epsilon})\right)\, dt\, dt_3$$

En utilisant les estimations du lemme 2.5.2, on obtient :

$$\left|\int_B p^{\eta\epsilon}\frac{\partial}{\partial t_3}\left(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_k}\frac{\varphi}{h^\epsilon}\right)\right| \leq \frac{K}{\epsilon^2}\|\varphi\|_{H_0^1(B)} \qquad k=1,2 \tag{2.55}$$

Prenons maintenant $(0,0,\varphi)$ comme fonction test dans (2.52) avec $\varphi \in H_0^1(B)$:

$$\mu \int_B \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_3^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_3^{\eta\epsilon})\right)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon \varphi) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\varphi)\right) + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\frac{\partial \varphi}{\partial t_3}\right] \frac{dt\, dt_3}{\eta h^\epsilon}$$

$$= \int_B p^{\eta\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial t_3}\, dt\, dt_3$$

D'après le lemme 2.5.2, on a :

$$\left|\int_B p^{\eta\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial t_3}\, dt\, dt_3\right| \leq \frac{K}{\epsilon}\|\varphi\|_{H_0^1(B)} \tag{2.56}$$

D'autre part, prenons $(\frac{\varphi}{h^\epsilon},0,0)$ comme fonction-test dans (2.52) avec φ dans $H_0^1(B)$:

$$I_1^\epsilon = \mu \int_B \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_1^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_1^{\eta\epsilon})\right) . \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta\varphi) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{1}{h^\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\varphi)\right) + \frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\frac{\partial \varphi}{h^\epsilon \partial t_3}\right] \frac{dt dt_3}{\eta h^\epsilon}$$

$$= \int_B p^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t_1}(\eta\varphi) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} \frac{\varphi}{h^\epsilon}) \right) dt\, dt_3$$

ce qui implique que :

$$\int_B p^{\eta\epsilon} \frac{\partial}{\partial t_1}(\eta\varphi)\, dt\, dt_3 = I_1^\epsilon + \int_B p^{\eta\epsilon} \frac{\partial}{\partial t_3} \left(\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} \frac{\varphi}{h^\epsilon} \right) dt\, dt_3$$

D'après les estimations du lemme 2.5.2 et (2.55), on en déduit :

$$\left| \int_B p^{\eta\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\, dt\, dt_3 \right| \leq \frac{K}{\epsilon^2} \|\varphi\|_{H_0^1(B)} \tag{2.57}$$

De la même façon, prenant $(0, \frac{\varphi}{h^\epsilon}, 0)$ comme fonction-test dans (2.52), on démontre que :

$$\left| \int_B p^{\eta\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\, dt\, dt_3 \right| \leq \frac{K}{\epsilon^2} \|\varphi\|_{H_0^1(B)} \tag{2.58}$$

(2.56) (2.57) et (2.58) impliquent les estimations annoncées.

Proposition 2.5.4. *on a*

$$\|\epsilon^2 p^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)} \leq K \quad avec \quad \int_B h^\epsilon p^{\eta\epsilon}\, dt\, dt_3 = 0$$

Preuve

Dans la formulation variationnelle $p^{\eta\epsilon}$ a été fixé à moyenne nulle dans Ω^ϵ :

$$0 = \int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon}\, dx\, dx_3 = \int_B p^{\eta\epsilon} h^\epsilon\, dt\, dt_3$$

On introduit donc l'espace suivant :

$$V^\epsilon = \{\phi \in L^2(B) : \int_B h^\epsilon \phi\, dt\, dt_3 = 0\}$$

muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_{V^\epsilon} = \int_B h^\epsilon u.v\, dt\, dt_3$. C'est un espace de Hilbert (un sous-espace de L^2).

Pour tout ϕ dans V^ϵ, $h^\epsilon \phi$ est dans $L_0^2(B)$ alors il existe ψ dans $H_0^1(B)^3$, avec $h^\epsilon \phi = \mathrm{div}\psi$

et on a [19]

$$\|\psi\|_{H_0^1(B)^3} \leq K \|\mathrm{div}\psi\|_{L^2(B)} = K \|h^\epsilon \phi\|_{L^2(B)}$$

Donc :

$$\langle p^{\eta\epsilon}, \phi \rangle_{V^\epsilon} = \int_B p^{\eta\epsilon} (h^\epsilon \phi)\, dt\, dt_3 = \int_B p^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial t_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial t_3} \right) dt\, dt_3$$

En utilisant les estimations (2.56) (2.57) et (2.58) :

$$|\langle p^{\eta\epsilon}, \phi\rangle|_{V^\epsilon} \leq \frac{K}{\epsilon^2}\|\psi\|_{H_0^1(B)} \leq \frac{K}{\epsilon^2}\|h^\epsilon\phi\|_{L^2(B)}$$

Prenons $\phi = p^{\eta\epsilon}$, ceci implique :

$$\int_B h^\epsilon (p^{\eta\epsilon})^2 \, dt \, dt_3 \leq \frac{K}{\epsilon^2}\|h^\epsilon p^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)} \leq \frac{Kb}{\epsilon^2}\|p^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)}$$

D'autre part, h^ϵ est minoré par a, on a :

$$a\|p^{\eta\epsilon}\|^2_{L^2(B)} \leq \int_B h^\epsilon (p^{\eta\epsilon})^2 \, dt \, dt_3$$

donc :

$$\|p^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)} \leq \frac{K}{\epsilon^2}$$

2.5.3 Convergence de la pression

Dans toute la suite, on notera $Y =]0,1[^3$ et $(y, y_3) \in Y$

Dans cette partie, on détermine le problème limite quand ϵ tend vers zéro en utilisant la méthode de la convergence double échelle dans B dont les définitions et les résultats de base ont été rappelés dans le paragraphe 2.4.1. On passera dans un deuxième temps à la convergence dans le domaine Ω^ϵ par l'intermédiaire de $\Omega_{max} = w \times]0, h_{max}[$ indépendant de ϵ.

Lemme 2.5.5. *il existe $p^\lambda(t)$ dans $L^2(\omega)$, tel qu'on a la convergence double-échelle suivante :*

$$\epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow p^\lambda(t) \qquad \text{dans } L^2(B \times]0,1[^2)$$

avec

$$\int_w \tilde{h} p^\lambda(t) \, dt = 0$$

et

$$\tilde{h} = \int_0^1 \int_0^1 h(t, y) \, dy$$

Preuve :
D'après la proposition 2.5.4, et le lemme 2.4.2 de la convergence double échelle, il existe $p^\lambda(t, t_3, y, y_3)$ dans $L^2(B \times Y)$ tel que :

$$\epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow p^\lambda(t, t_3, y, y_3) \quad \text{dans } L^2(B \times Y)$$

Montrons que p^λ ne dépend pas de y_3 :

Soit $\phi \in \mathcal{D}(B, \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$, posons $\phi^\epsilon = \phi(t, t_3, \frac{t}{\epsilon}, \frac{t_3}{\epsilon})$. Alors $(0, 0, \phi^\epsilon)$ est fonction test pour (2.52) et on a en détaillant les termes prépondérants :

$$J_1^\epsilon = \mu \int_B \left[\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_3^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_3^{\eta\epsilon}) \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon \phi^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} \phi^\epsilon) \right) + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_3} \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t_3} \right] \frac{dt \, dt_3}{\eta h^\epsilon}$$

$$= \int_B p^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_3} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial y_3} \right) \, dt \, dt_3$$

Multiplions cette équation par ϵ^3, on a d'après le lemme 2.5.2

$$\left| \epsilon^3 J_1^\epsilon \right| = \left| \int_B \epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t_3} + \frac{\partial \phi}{\partial y_3} \right) \, dt \, dt_3 \right| \leq K\epsilon$$

Après passage à la limite, on a :

$$\int_B \int_Y p^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_3} \, dt \, dt_3 \, dy \, dy_3 = 0$$

ce qui implique que p^λ ne dépend pas de la variable y_3. Montrons que p^λ ne dépend pas de t_3 non plus.

On choisit ϕ indépendante de la variable y_3 dans $\mathcal{D}(B, \mathcal{C}_\#^\infty(]0,1[^2))$, on pose $\phi^\epsilon = \phi(t, t_3, \frac{t}{\epsilon})$, et on prend $(0, 0, \phi^\epsilon)$ comme fonction test dans (2.52) :

$$J_2^\epsilon = \mu \int_B \left[\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_3^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_3^{\eta\epsilon}) \right) . \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon \phi^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} \phi^\epsilon) \right) + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_3} \frac{\partial \phi^\epsilon}{h^\epsilon \partial t_3} \right] \frac{dt \, dt_3}{\eta h^\epsilon}$$

$$= \int_B p^{\eta\epsilon} \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t_3} \, dt \, dt_3$$

Multiplions cette équation par ϵ^2, on a d'après le lemme 2.5.2

$$\left| \epsilon^2 J_2^\epsilon \right| = \left| \int_B \epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t_3} \, dt \, dt_3 \right| \leq K\epsilon$$

Après passage à la limite double échelle, on obtient :

$$\int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t_3} \, dt \, dt_3 \, dy = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(B, \mathcal{C}_\#^\infty(]0,1[^2)) \tag{2.59}$$

ce qui implique que p^λ ne dépend pas de la variable t_3. Montrons que p^λ ne dépend pas de $y = (y_1, y_2)$.

En prenant le même ϕ dans $\mathcal{D}(B, \mathcal{C}_\#^\infty(]0,1[^2))$ et $(\frac{\phi^\epsilon}{h^\epsilon}, 0, 0)$ comme fonction test dans (2.52) :

$$\mu \int_B \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta h^\epsilon u_1^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta t_3 \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} u_1^{\eta\epsilon}) \right) . \left(\frac{\partial}{\partial t_i}(\eta \phi^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta \frac{t_3}{h^\epsilon} \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i} \phi^\epsilon) \right) + \frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial t_3} \frac{\partial \phi^\epsilon}{\partial t_3} \frac{1}{h^\epsilon} \right] \frac{dt \, dt_3}{\eta h^\epsilon}$$

$$= \int_B p^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t_1}(\eta\phi) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_1}(\eta\phi) + \frac{\partial}{\partial t_3}(-\eta \frac{t_3}{h^\epsilon} \frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} \phi) \right) \, dt \, dt_3$$

Multiplions cette équation par ϵ^2, on a d'après le lemme 2.5.2 et après passage à la limite :

$$\int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\, dt\, dt_3\, dy - \int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \frac{\partial}{\partial t_3}(\frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial y_1}\phi)\, dt\, dt_3\, dy = 0$$

On a d'après (2.59) qui, par densité est vrai pour une fonction test dans $L^2(B, H^1_\#(]0,1[^2))$:

$$\int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \frac{\partial}{\partial t_3}(\frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial y}\phi)\, dt\, dt_3\, dy = 0$$

ce qui implique que

$$\int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\, dt\, dt_3\, dy = 0$$

p^λ ne dépend pas de la variable y_1. On démontre de la même façon, que p^λ ne dépend pas de la variable y_2.

D'après la proposition 2.5.4, on a quand ϵ tend vers zéro :

$$0 = \int_B \epsilon^2 h^\epsilon p^\epsilon\, dt\, dt_3 \;\twoheadrightarrow\; \int_B \int_0^1 \int_0^1 h p^\lambda(t)\, dt\, dt_3\, dy = \int_w \tilde{h} p^\lambda(t)\, dt$$

où

$$\tilde{h}(t) = \int_0^1 \int_0^1 h(t,y)\, dy$$

□

Ces résultats de convergence double échelle dans l'ouvert fixe B à frontière redressée nous permettent maintenant de passer à la limite dans l'ouvert rescalé oscillant Ω^ϵ en prolongeant la pression par zéro dans $\Omega_{max} = w \times]0, h_{max}[$. On note $\overline{p}^{\eta\epsilon}$ ce prolongement.

Proposition 2.5.6. *Il existe ξ appartenant à $L^2(\Omega_{max} \times Y)$ tel que :*

$$\epsilon^2 \overline{p}^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow \xi(x, x_3, y, y_3) \quad \textit{dans } L^2(\Omega_{max} \times Y)$$

avec

$$\frac{\partial \xi}{\partial y_3} = 0$$

et

$$\xi(x, x_3, y) = \begin{cases} p^\lambda(x) & \forall x_3 < h(x,y) \\ \\ 0 & \forall\, x_3 \geq h(x,y) \end{cases}$$

Preuve

On définit le domaine suivant :

$$Q = \{(x, x_3, y) :\ x \in w,\ y \in]0,1[^2,\ 0 < x_3 < h(x,y)\}$$

D'après le changement de variables (2.51) et l'estimation de la proposition 2.5.4, on a :

$$\|\overline{p}^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{max})} = \|p^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} = \left(\int_B (p^{\eta\epsilon})^2 h^\epsilon \, dt \, dt_3\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{K}{\epsilon^2}$$

d'où l'existence de $\xi(t, t_3, y, y_3)$ dans $L^2(\Omega_{max} \times Y)$ tel que à une sous suite extraite :

$$\epsilon^2 \overline{p}^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow \xi \quad \text{dans } L^2(\Omega_{max} \times Y) \tag{2.60}$$

-Montrons d'abord que ξ ne dépend pas de la variable y_3 :

Soit $\varphi(x, x_3, y, y_3)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_{max}, \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$ tel que $\varphi = 0$ si $x_3 \geq h(x, y)$. Posons $\varphi^\epsilon(x, x_3) = \varphi(x, x_3, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x_3}{\epsilon})$, alors $(0, 0, \varphi^\epsilon)$ est une fonction test pour (2.12) :

$$I_1^\epsilon = \mu \int_{\Omega^\epsilon} \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right) + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\right)\right] dx\, dx_3 = \frac{1}{\eta}\int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\right) dx\, dx_3$$

On prolonge $u^{\eta\epsilon}$, $p^{\eta\epsilon}$ par zéro (ils seront notés $\overline{u}^{\eta\epsilon}$, $\overline{p}^{\eta\epsilon}$) dans Ω_{max}, multipliant par ϵ^4, on a :

$$\left|\epsilon^4 I_1^\epsilon\right| \leq K\epsilon$$

et en passant à la limite, on obtient :

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left[\frac{\epsilon^3}{\eta}\int_{\Omega^\epsilon} p^{\eta\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\, dx\, dx_3\right] = \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_{max}}\int_Y \xi \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\, dx\, dx_3\, dy\, dy_3 = 0$$

ce qui implique que ξ ne dépend pas de la variable y_3 pour $x_3 \leq h(x, y)$.

ξ et p^λ sont deux limites double échelle de la même fonction, mais définies dans des domaines différents. Comme les limites ne dépendent pas de y_3 le choix d'une fonction test indépendante de la variable y_3 va nous permettre de démontrer d'abord que ξ est aussi nulle si $x_3 \geq h(x, y)$ puis de démontrer leur égalité dans la partie

$$Q = (0 < x_3 < h(x, y))$$

en explicitant le changement de variables.

-Montrons que $\xi = 0$ pour $x_3 \geq h(x, y)$:

Soit ψ dans $\mathcal{D}(\Omega_{max}, \mathcal{C}^\infty_\#(]0, 1[^2))$ tel que $\psi = 0$ si $x_3 \leq h(x, y)$. Posons $\psi^\epsilon = \psi(x, x_3, \frac{x}{\epsilon})$ on a d'après (2.60) quand ϵ tend vers zéro :

$$0 = \int_{\Omega^\epsilon} \epsilon^2 p^{\eta\epsilon}\psi^\epsilon\, dx\, dx_3 = \int_{\Omega_{max}} \epsilon^2 \overline{p}^{\eta\epsilon}\psi^\epsilon\, dx\, dx_3 \twoheadrightarrow \int_{\Omega_{max}\times]0,1[^2} \xi\psi\, dx\, dx_3\, dy = \int_{\Omega_{max}\times]0,1[^2 - Q} \xi\psi\, dx\, dx_3\, dy = 0$$

ce qui implique que

$$\xi = 0 \text{ dans } \Omega_{max}\times]0, 1[^2 - Q$$

-Montrons que $\xi(x, x_3, y) = p^\lambda$ pour $x_3 < h(x, y)$

Soit ψ dans $\mathcal{D}(B, \mathcal{C}^\infty_\#(]0,1[^2))$. On pose $\psi^\epsilon(t, t_3) = \psi(t, t_3, \frac{t}{\epsilon})$. Soit aussi $\varphi(x, x_3, y) = \psi(x, \frac{x_3}{h}, y)$ et $\varphi^\epsilon(x) = \varphi(x, x_3, \frac{x}{\epsilon})$. D'après le changement de variables donné dans (2.51), on a :

$$\int_B \epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \psi^\epsilon \, dt \, dt_3 = \int_{\Omega^\epsilon} \epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \varphi^\epsilon \frac{1}{h^\epsilon} \, dx \, dx_3$$

On prolonge $p^{\eta\epsilon}$ et φ^ϵ par zéro dans Ω_{max}, on obtient :

$$\int_B \epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \psi^\epsilon \, dt \, dt_3 = \int_{\Omega_{max}} \epsilon^2 \overline{p}^{\eta\epsilon} \overline{\varphi}^\epsilon \frac{1}{h^\epsilon} \, dx \, dx_3 \tag{2.61}$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \psi \, dt \, dt_3 \, dy = \int_{\Omega_{max}} \int_0^1 \int_0^1 \xi \overline{\varphi} \frac{1}{h} \, dx \, dx_3 \, dy \tag{2.62}$$

où $\overline{\varphi}$ est le prolongement par zéro de φ sur $\Omega_{max} \times]0,1[^2$. Comme ξ est nul pour $x_3 > h(x, y)$, le terme de droite de (2.62), s'écrit :

$$\int_Q \xi(x, x_3, y) \varphi(x, x_3, y) \frac{1}{h} \, dx \, dx_3 \, dy$$

En se ramenant à $B \times]0,1[^2$, par le changement de variables inverse, on obtient :

$$\int_B \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda \psi \, dt \, dt_3 \, dy = \int_B \int_0^1 \int_0^1 \xi(t, ht_3, y) \psi(t, t_3, y) \, dt \, dt_3 \, dy$$

ce qui montre le résultat □

2.5.4 Convergence double échelle de la vitesse

Pour la vitesse, on peut passer à la limite directement dans Ω_{max}

Proposition 2.5.7. *Il existe $u^\lambda(x, x_3, y)$ dans $L^2(\Omega_{max} \times]0,1[^2)$ telle que :*

$$\overline{u}^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow u^\lambda \quad \textit{dans} \;\; L^2(\Omega_{max} \times]0,1[^2)$$

avec

$$\int_0^1 \int_0^1 u_3^\lambda \, dy = 0 \tag{2.63}$$

et

$$u^\lambda = 0 \quad si \; x_3 \geq h(x, y)$$

avec u^λ *est périodique en* y *et* $\dfrac{\partial u^\lambda}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u^\lambda}{\partial y}$ *sont dans* $L^2(\Omega_{max}\times]0,1[^2)$.

On a de plus les convergences double échelle suivantes. Il existe $v_0 \in L^2(\Omega_{max}\times Y)$, y_3- *périodique, avec* $\dfrac{\partial v_0}{\partial y_3}$ *dans* $L^2(\Omega_{max}\times Y)$, *telle que :*

$$\epsilon\frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \twoheadrightarrow \frac{\partial u^\lambda}{\partial y_i} \quad i=1,2$$

$$\frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \twoheadrightarrow \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_3}+\frac{\partial v_0}{\partial y_3}$$

$$\forall x\in w \qquad \mathrm{div}_\lambda u^\lambda = \frac{\partial u_1^\lambda}{\partial y_1}+\frac{\partial u_2^\lambda}{\partial y_2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_3^\lambda}{\partial x_3}=0$$

Preuve

D'après les estimations (2.54) du lemme 2.5.2, on a :

$$\|\overline{u}^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{max})^3} = \|u^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega^\epsilon)^3} \le K$$

$$\epsilon\|\frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega_{max})^3} \le K, \qquad i=1,2$$

$$\|\frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega_{max})^3} \le K$$

D'après le lemme 2.4.2 de la convergence double échelle, il existe $u^\lambda(x,x_3,y,y_3)$dans $L^2(\Omega_{max}\times Y)$ tel que :

$$\overline{u}^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow u^\lambda$$

-Montrons que u^λ ne dépend pas de la variable y_3.

Soit ψ dans $\mathcal{D}(\Omega_{max}\times]0,1[^2)^3$ avec $\psi=0$ si $x_3\le h(x,y)$ (c'est-à-dire $\psi=0$ dans Q).

$$0=\int_{\Omega^\epsilon} u^{\eta\epsilon}.\psi^\epsilon\,dx\,dx_3 = \int_{\Omega_{max}} \overline{u}^{\eta\epsilon}.\overline{\psi}^\epsilon\,dx\,dx_3 \twoheadrightarrow \int_{\Omega_{max}}\int_0^1\int_0^1 u^\lambda\psi\,dx\,dx_3\,dy = \int_{\Omega_{max}\times]0,1[^2-Q} u^\lambda.\psi\,dx\,dx_3\,dy=0$$

ce qui montre que $u^\lambda=0$ pour $x_3\ge h(x,y)$.

Soit maintenant $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega_{max}\times Y)^3$ avec $\varphi=0$ si $x_3\ge h(x,y)$. Posons

$$\varphi^\epsilon=\varphi(x,x_3,\frac{x}{\epsilon},\frac{x_3}{\epsilon})$$

on a :

$$\int_{\Omega^\epsilon}\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\varphi^\epsilon\,dx\,dx_3 = -\int_{\Omega^\epsilon} u^{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}+\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}\right)dx\,dx_3 = -\int_{\Omega_{max}}\overline{u}^{\eta\epsilon}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}+\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}\right)dx\,dx_3$$

On multiplie par ϵ et on passe à la limite dans Ω_{max} on obtient :

$$0=\int_{\Omega_{max}}\int_0^1\int_0^1 u^\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}\,dx\,dx_3\,dy$$

ce qui implique que $\dfrac{\partial u^\lambda}{\partial y_3} = 0$ pour $x_3 < h(x,y)$, et avec le résultat précédent que u^λ ne dépend pas de y_3.

Comme $\overline{u}^{\eta\epsilon}$ est bornée dans $V(x_3)$, d'après le lemme 2.4.5 de la convergence double échelle, il existe $v_0(x, x_3, y, y_3)$ dans $L^2(\Omega_{max} \times Y)$ avec :

$$\frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \twoheadrightarrow \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_3} + \frac{\partial v_0}{\partial y_3}$$

et d'après le lemme 2.4.6 de la convergence double échelle, on a :

$$\epsilon \frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \twoheadrightarrow \frac{\partial u^\lambda}{\partial y_i}$$

Pour montrer (2.63), montrons d'abord que $\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\displaystyle\int_0^1\int_0^1 u_3^\lambda \, dy\right) = 0$:

Soit $\varphi(x, x_3)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_{max})$, comme fonction test dans l'équation de divergence (2.13), on a :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left(\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\right) \varphi \, dx \, dx_3 = \int_{\Omega_{max}} \left(\frac{\partial \overline{u}_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{u}_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \overline{u}_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}\right) \varphi \, dx \, dx_3 = 0$$

En appliquant la formule de Green sur tous les termes, on obtient :

$$\int_{\Omega_{max}} \left(\overline{u}_1^{\eta\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \overline{u}_2^{\eta\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1}{\eta}\overline{u}_3^{\eta\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) dx \, dx_3 = 0$$

Après multiplication par η et passage à la limite, on obtient :

$$\int_{\Omega_{max}} \int_0^1 \int_0^1 u_3^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \, dx \, dx_3 \, dy = 0$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\int_0^1\int_0^1 u_3^\lambda \, dy\right) = 0 \qquad \text{dans } \Omega_{max}$$

Posons :

$$Q(x, x_3) = \int_0^1\int_0^1 u_3^\lambda(x, x_3, y) \, dy$$

Il est facile de voir que $\overline{u}_3^{\eta\epsilon}$ converge faiblement dans $V(x_3)$ vers $Q(x, x_3)$ en utilisant le lemme 2.4.3. Donc sa trace en $x_3 = 0$ converge faiblement dans $L^2(w)$ vers $Q(x, 0)$. On a démontré que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = 0$$

Donc Q ne dépend pas de la variable x_3, d'où :

$$Q(x, x_3) = Q(x, 0) = 0$$

ceci montre(2.63).

-Montrons enfin que $\mathrm{div}_\lambda u^\lambda = 0$

Soit φ dans $\mathcal{D}(\Omega_{max}, \mathcal{C}^\infty_\#(]0,1[^2))$ avec $\varphi = 0$ si $x_3 \geq h(x,y)$. Posons $\varphi^\epsilon = \varphi(x, x_3, \dfrac{x}{\epsilon})$. φ^ϵ est une fonction test dans l'équation de divergence :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left(\frac{\partial u_1^{\eta\epsilon}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \right) \varphi^\epsilon \, dx \, dx_3 = 0$$

Appliquant Green sur tous les termes, on obtient :

$$\int_{\Omega^\epsilon} u_1^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) dx \, dx_3 + \int_{\Omega^\epsilon} u_2^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \right) dx \, dx_3 + \frac{1}{\eta} \int_{\Omega^\epsilon} u_3^{\eta\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \, dx \, dx_3 = 0$$

En multipliant par ϵ, passant à la limite après prolongement de la vitesse par zéro dans Ω_{max}, on obtient :

$$\int_Q \left(u_1^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + u_2^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \frac{1}{\lambda} u_3^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) dx \, dy \, dx_3 = \int_Q \mathrm{div}_\lambda u^\lambda \varphi \, dx \, dy \, dx_3 = 0$$

Ce qui implique le résultat et termine la démonstration de la proposition 2.5.7 □

2.5.5 Problèmes locaux

On introduit les problèmes locaux de Stokes suivants, définis dans un domaine noté B_x^λ qui dépend de λ et de x fixé dans w :

$$\begin{cases} -\mu \triangle w^{k\lambda} + \nabla \pi^{k\lambda} = -e_k & k = 1, 2 \\ \mathrm{div} w^{k\lambda} = 0 \end{cases} \tag{2.64}$$

avec $w^{k\lambda}$ y- périodique et :

$$w^{k\lambda} = 0 \text{ si } x_3 = 0 \text{ et } x_3 = h(x,y)$$

dans le domaine :

$$B_x^\lambda = \{(y, X) : \qquad y \in]0,1[^2, \ 0 < X < \lambda h(x,y)\}$$

et

$$\begin{cases} -\mu \triangle w^{3\lambda} + \nabla \pi^{3\lambda} = 0 \\ \mathrm{div} w^{3\lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } B_x^\lambda \tag{2.65}$$

avec $w^{3\lambda}$ y- périodique et :

$$w^{3\lambda} = (0,0,0) \text{ si } x_3 = 0 \text{ et } w^{3\lambda} = (s_1, s_2, 0) \text{ si } x_3 = h(x,y)$$

Pour se ramener à un domaine fixe indépendant de λ, on introduit le changement de variables suivant :

$$x_3 = \frac{X}{\lambda} \tag{2.66}$$

Soit

$$B_x = \{(y, x_3),\ y \in]0,1[^2,\ 0 < x_3 < h(x,y)\}$$

et les espaces suivants :

$$L_0^2(B_x) = \{\varphi \in L^2(B_x),\ \int_{B_x} \varphi\, dy\, dx_3 = 0\}$$

$$H_\#^1(B_x) = \{\phi \in H^1(B_x),\ \phi - y \text{ périodique}\}$$

$$H_{0\#}^1(B_x) = \{\phi \in H_\#^1(B_x),\ \phi(y,0) = \phi(y, h(x,y)) = 0\}$$

et les opérateurs :

$$\triangle_\lambda = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3}$$

$$\nabla_\lambda = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$\mathrm{div}_\lambda = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

alors $w^{k\lambda}, \pi^{k\lambda},\ k = 1,2,3$ sont les uniques solutions des formulations suivantes :

Trouver $(w^{k\lambda}, \pi^{k\lambda})(k = 1,2)$ dans $H_{0\#}^1(B_x) \times L_0^2(B_x)$ tels que :

$$\mu \int_{B_x} \nabla_\lambda w^{k\lambda}.\nabla_\lambda \varphi\, dy\, dx_3 = \int_{B_x} \pi^{k\lambda}\, \mathrm{div}_\lambda \varphi\ dy\ dx_3 - \int_{B_x} \varphi_k\, dy\, dx_3\ \forall \varphi \in H_{0\#}^1(B_x)^3 \tag{2.67}$$

$$\int_{B_x} \mathrm{div}_\lambda w^{k\lambda} q\ dy\ dx_3 = 0 \qquad \forall q \in L^2(B_x)$$

$w^{k\lambda}$ y- périodique, $w^{k\lambda} = 0$ si $x_3 = 0$ et $x_3 = h(x,y)$

et trouver $(w^{3\lambda}, \pi^{3\lambda})$ dans $H_\#^1(B_x) \times L_0^2(B_x)$:

$$\mu \int_{B_x} \nabla_\lambda w^{3\lambda}.\nabla_\lambda \varphi\, dy\, dx_3 = \int_{B_x} \pi^{3\lambda}\, \mathrm{div}_\lambda \varphi\ dy\ dx_3 \qquad \forall \varphi \in H_{0\#}^1(B_x)^3 \tag{2.68}$$

$$\int_{B_x} \mathrm{div}_\lambda w^{3\lambda} q\ dy\ dx_3 = 0 \qquad \forall q \in L^2(B_x)$$

$w^{3\lambda}$ y- périodique, $w^{3\lambda} = (s_1, s_2, 0)$ si $x_3 = 0$ et $w^{3\lambda} = (0,0,0)$ si $x_3 = h(x,y)$

Lemme 2.5.8. *Pour λ petit, on a les estimations suivantes :* $(k = 1, 2)$

$$\frac{1}{\lambda^2}\|w^{k\lambda}\|_{L^2(B_x)^3} \leq K,\ \frac{1}{\lambda^2}\|\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial x_3}\|_{L^2(B_x)^3} \leq K,\ \textit{et}\ \frac{1}{\lambda}\|\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial y_i}\|_{L^2(B_x)^3} \leq K, \quad i = 1, 2$$

$$\|\pi^{k\lambda}\|_{L^2(B_x)} \leq K,\ \frac{1}{\lambda}\|\frac{\partial \pi^{k\lambda}}{\partial x_3}\|_{(H^1_{0\#}(B_x))'} \leq K\ \ \textit{et}\ \|\frac{\partial \pi^{k\lambda}}{\partial y_i}\|_{(H^1_{0\#}(B_x))'} \leq K \quad i = 1, 2$$

où K sont des constantes qui ne dépendent ni de x ni de λ.

Preuve

Pour $k = 1, 2$, prenons $w^{k\lambda}$ comme fonction test dans (2.67), on a :

$$\mu \int_{B_x} (\nabla_\lambda w^{k\lambda})^2\, dy\, dx_3 = \left| \int_{B_x} w_k^{k\lambda}\, dy\, dx_3 \right| \leq \sqrt{b}\|w_k^{k\lambda}\|_{L^2(B_x)^3} \tag{2.69}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, Pour toute fonction φ nulle sur le bord $x_3 = h(x, y)$, on a :

$$\|\varphi\|_{L^2(B_x)} \leq b\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\|_{L^2(B_x)} \tag{2.70}$$

Pour $\varphi = w^{k\lambda}$, de (2.69) on déduit :

$$\mu \int_{B_x} (\nabla_\lambda w^{k\lambda})^2\, dy\, dx_3 \leq b\sqrt{b}\|\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial x_3}\|_{L^2(B_x)^3} \quad k = 1, 2 \tag{2.71}$$

Ce qui implique que :

$$\|\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial y_1}\|^2 + \|\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial y_2}\|^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\|\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial x_3}\| - \lambda\frac{b\sqrt{b}}{2\mu}\right)^2 \leq \lambda^2\frac{b^3}{4\mu^2}$$

On obtient donc les premières estimations annoncées avec des constantes qui ne dépendent pas de x.

Il reste à trouver les estimations sur $\pi^{k,\lambda}$. Soit φ dans $H^1_{0\#}(B_x)$, alors $(\varphi, 0, 0)$ est fonction test pour (2.67). On a :

$$\mu \int_{B_x} \nabla_\lambda w_1^{k\lambda}.\nabla_\lambda \varphi\, dy\, dx_3 = \int_{B_x} \pi^{k\lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\, dy\, dx_3 - \int_{B_x} \delta_{1k}\varphi\, dy\, dx_3$$

On a :

$$\left|\langle\frac{\partial \pi^{k\lambda}}{\partial y_1}, \varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'} = \left|\int_{B_x} \pi^{k\lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\, dy\, dx_3\right| \leq \mu\left|\int_{B_x} \nabla_\lambda w_1^{k\lambda}.\nabla_\lambda \varphi\, dy\, dx_3\right| + \left|\int_{B_x} \delta_{1k}\varphi\, dy\, dx_3\right|$$

On obtient donc pour λ petit :

$$\left|\langle\frac{\partial \pi^{k\lambda}}{\partial y_1}, \varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'} \leq K\|\varphi\|_{H^1_{0\#}(B_x)}$$

De la même façon, en prenant $(0,\varphi,0)$ comme fonction test dans (2.67) :

$$\left|\langle\frac{\partial\pi^{k\lambda}}{\partial y_2},\varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'}\leq K\|\varphi\|_{H^1_{0\#}(B_x)}$$

Enfin soit φ dans $H^1_{0\#}(B_x)$, alors $(0,0,\varphi)$ est fonction test dans (2.67), on a :

$$\int\limits_{B_x}\nabla_\lambda w_3^{k\lambda}.\nabla_\lambda\varphi\,dy\,dx_3=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{B_x}\pi^{k\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\,dy\,dx_3$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda}\left|\langle\frac{\partial\pi^{k\lambda}}{\partial x_3},\varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'}=\frac{1}{\lambda}\left|\int\limits_{B_x}\pi^{k\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\,dy\,dx_3\right|\leq\left|\int\limits_{B_x}\nabla_\lambda w_3^{k\lambda}.\nabla_\lambda\varphi\,dy\,dx_3\right|\leq K\|\varphi\|_{H^1_{0\#}(B_x)}$$

Comme $\pi^{k\lambda}$ est choisi à moyenne nulle, on a alors d'après (2.18) :

$$\|\pi^{k\lambda}\|_{L^2(B_x)}\leq K\left(\|\nabla\pi^{k\lambda}\|+\left|\int\limits_{B_x}\pi^{k\lambda}\,dy\,dx_3\right|\right)\leq K\|\nabla\pi^{k\lambda}\|$$

On en déduit pour λ petit :

$$\|\pi^{k\lambda}\|_{L^2(B_x)}\leq K$$

□

Lemme 2.5.9. *On a les estimations suivantes :*

$$\|w^{3\lambda}\|_{L^2(B_x)^3}\leq K,\quad \|\frac{\partial w^{3\lambda}}{\partial x_3}\|_{L^2(B_x)^3}\leq K\quad et\ \lambda\|\frac{\partial w^{3\lambda}}{\partial y_i}\|_{L^2(B_x)^3}\leq K\quad i=1,2,$$

$$\lambda^2\|\pi^{3\lambda}\|_{L^2(B_x)}\leq K,\quad \lambda\|\frac{\partial\pi^{3\lambda}}{\partial x_3}\|_{(H^1_{0\#}(B_x))'}\leq K\ et\ \lambda^2\|\frac{\partial\pi^{3\lambda}}{\partial y_i}\|_{(H^1_{0\#}(B_x))'}\leq K\quad i=1,2$$

Preuve

Il existe un relèvement I dans $(H^1_\#(B_x))^3$ des conditions aux limites de $w^{3\lambda}$, tel que $I=(0,0,0)$ si $x_3=h(x,y)$, $I=(s_1,s_2,0)$ si $x_3=0$ avec div$I=0$. Posons $I^\lambda=(I_1,I_2,\lambda I_3)$ alors $w^{3\lambda}-I^\lambda$ est fonction test dans (2.68) :

$$\int\limits_{B_x}\nabla_\lambda w^{3\lambda}.\nabla_\lambda(w^{3\lambda}-I^\lambda)\,dy\,dx_3=0$$

ce qui implique :

$$\|\nabla_\lambda w^{3\lambda}\|_{L^2(B_x)}\leq\|\nabla_\lambda I^\lambda\|_{L^2(B_x)}\leq\frac{K}{\lambda}$$

Pour obtenir l'estimation sur la pression $\pi^{3\lambda}$, on considère φ dans $H^1_{0\#}(B_x)$, alors $(\varphi,0,0)$ est fonction test dans (2.68) et on a :

$$\int\limits_{B_x}\nabla_\lambda w_1^{3\lambda}.\nabla_\lambda\varphi\,dy\,dx_3=\int\limits_{B_x}\pi^{3\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\,dy\,dx_3$$

On obtient pour λ petit :

$$\left|\langle\frac{\partial\pi^{3\lambda}}{\partial y_1},\varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'} = \left|\int_{B_x}\pi^{3\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\,dy\,dx_3\right| \leq \|\nabla_\lambda w_1^{3\lambda}\|\|\nabla_\lambda\varphi\| \leq \frac{K}{\lambda^2}\|\varphi\|_{H^1_{0\#}(B_x)}$$

De la même façon, en prenant $(0,\varphi,0)$ comme fonction test dans (2.68), on obtient :

$$\left|\langle\frac{\partial\pi^{3\lambda}}{\partial y_2},\varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'} \leq \frac{K}{\lambda^2}\|\varphi\|_{^1_{0\#}}$$

Enfin, $(0,0,\varphi)$ est fonction test dans (2.68) :

$$\mu\int_{B_x}\nabla_\lambda w_3^{3\lambda}.\nabla_\lambda\varphi\,dy\,dx_3 = \frac{1}{\lambda}\int_{B_x}\pi^{3\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\,dy\,dx_3$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda}\left|\langle\frac{\partial\pi^{3\lambda}}{\partial x_3},\varphi\rangle\right|_{H^1_{0\#},(H^1_{0\#})'} = \frac{1}{\lambda}\left|\int_{B_x}\pi^{3\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\,dy\,dx_3\right| \leq \left|\int_{B_x}\nabla_\lambda w_3^{3\lambda}.\nabla_\lambda\varphi\,dy\,dx_3\right| \leq \frac{K}{\lambda^2}\|\varphi\|_{H^1_{0\#}(B_x)}$$

Comme $\pi^{3\lambda}$ est choisi à moyenne nulle, on conclut pour λ petit que :

$$\|\pi^{3\lambda}\|_{L^2(B_x)} \leq \frac{K}{\lambda^2} \qquad \square$$

Ces problèmes locaux ont été introduits pour exprimer la vitesse en fonction du gradient de pression, qui traduit une loi de type Darcy.

Proposition 2.5.10. *On a la relation suivante :*

$$u_i^\lambda = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}w_i^{j\lambda} + w_i^{3\lambda} \qquad i=1,2,3 \tag{2.72}$$

Preuve

La démonstration se fait en plusieurs étapes. On va montrer d'abord que u^λ est solution d'un problème de Stokes en y_1, y_2, x_3 tel que :

$$p.p.\ x\in w: \qquad \mu\int_{B_x}\nabla_\lambda u^\lambda.\nabla_\lambda\varphi\,dx_3\,dy = -\int_{B_x}\left(\varphi_1\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_1}+\varphi_2\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_2}\right)\,dx_3\,dy \tag{2.73}$$

puis que p^λ appartient à $H^1(w)$.

<u>Etape 1 :</u> Soit $\varphi\in(\mathcal{D}(\Omega_{max},\mathcal{C}^\infty_\#(]0,1[)^2))^3$, avec $\varphi=0$ si $x_3\geq h(x,y)$ et $\mathrm{div}_\lambda\varphi=0$. Prenons $\varphi^\epsilon=\varphi(x,x_3,\frac{x}{\epsilon})$. Alors φ^ϵ appartient à $\mathcal{D}(\Omega^\epsilon)$ et peut être pris comme fonction test dans (2.12) qui s'écrit alors dans Ω_{max} :

$$\mu\int_{\Omega_{max}}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_i}.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)+\frac{1}{\lambda^2\epsilon^2}\frac{\partial\overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_3}.\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right]\,dx\,dx_3$$

$$= \int_{\Omega_{max}} \overline{p}^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} + \frac{1}{\lambda\epsilon}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) dx\, dx_3$$

Comme $\mathrm{div}_\lambda \varphi = 0$, on obtient :

$$\mu \int_{\Omega_{max}} \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} . \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) + \frac{1}{\lambda^2\epsilon^2}\frac{\partial \overline{u}^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} . \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right] dx\, dx_3 = \int_{\Omega_{max}} \overline{p}^{\eta\epsilon} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) dx\, dx_3$$

Après multiplication par ϵ^2 et passage à la limite, sachant que u^λ et φ ne dépendent pas de la variable y_3, on obtient :

$$\mu \int_{\Omega_{max}} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u^\lambda}{\partial y_i} . \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\, dx\, dx_3\, dy + \int_{\Omega_{max}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial x_3} + \int_0^1 \frac{\partial v_0}{\partial y_3}\, dy_3 \right) . \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\, dx\, dx_3\, dy$$

$$= \int_{\Omega_{max}} \int_0^1 \int_0^1 p^\lambda(x) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) dx\, dx_3\, dy$$

Or $\int_0^1 \frac{\partial v_0}{\partial y_3}\, dy_3 = 0$ par périodicité, et u^λ est nulle si $x_3 \geq h(x,y)$, donc on obtient :

$$\mu \int_w \int_{B_x} \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u^\lambda}{\partial y_i} . \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial u^\lambda}{\partial x_3} . \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right] dx\, dx_3\, dy = \int_w \int_{B_x} p^\lambda(x) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) dx\, dx_3\, dy \tag{2.74}$$

Ce problème est de type Stokes en x, y_1, y_2, x_3 où le deuxième membre est une force.

Etape 2 : Montrons (2.73). Soit $\psi = \psi(y_2, x_3)$ une fonction indépendante de y_1 dans $H^1_{0\#}(]0,1[\times]0,h_{min}[)$. Notons $\overline{\psi}$ son prolongement par zéro dans B_x. On suppose que $\tilde{\psi} = \int_{B_x} \overline{\psi}\, dx_3\, dy \neq 0$. Posons $\phi = (\frac{\theta\overline{\psi}}{\tilde{\psi}}, 0, 0)$ avec θ dans $\mathcal{D}(w)$, alors ϕ est fonction test dans (2.74) et en remarquant que $\mathrm{div}_\lambda \phi = 0$ par construction ; on obtient :

$$\mu \int_w \int_{B_x} \nabla_\lambda u^\lambda . \nabla_\lambda \phi\, dx\, dx_3\, dy = \int_w \int_{B_x} p^\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\theta \frac{\overline{\psi}}{\tilde{\psi}} \right) dx\, dx_3\, dy$$

Comme θ et p^λ ne dépendent pas des variables y, x_3, on obtient :

$$\frac{\mu}{\tilde{\psi}} \int_w \theta(x) \left(\int_{B_x} \nabla_\lambda u_1^\lambda \nabla_\lambda \overline{\psi}\, dx_3\, dy \right) dx = \int_w p^\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \left(\int_{B_x} \overline{\psi} \frac{1}{\tilde{\psi}}\, dx_3\, dy \right) dx = \int_w p^\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\, dx$$

Donc

$$\left| \langle \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_1}, \theta \rangle \right|_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = \left| \frac{\mu}{\tilde{\psi}} \int_w \theta(x) \left(\int_{B_x} \nabla_\lambda u_1^\lambda \nabla_\lambda \overline{\psi}\, dx_3\, dy \right) dx \right|$$

Or $\nabla_\lambda u_1^\lambda \in L^2(w \times B_x)^3$ ce qui entraine :

$$\frac{1}{\tilde{\psi}} \left(\int_{B_x} \nabla_\lambda u_1^\lambda \nabla_\lambda \overline{\psi} \, dx_3 \, dy \right) \in L^2(w)$$

et donc

$$\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_1} \in L^2(w)$$

De la même façon, on démontre que $\dfrac{\partial p^\lambda}{\partial x_2} \in L^2(w)$, en choisissant $(0, \theta \dfrac{\overline{\psi}}{\tilde{\psi}}, 0)$ comme fonction test dans (2.74) avec ψ indépendant de la variable y_2. Ainsi p^λ appartient à $H^1(w)$.

On choisit maintenant comme fonction test dans (2.74), $\psi = \theta(x).\varphi(y, x_3)$ avec $\theta \in \mathcal{D}(w)$, $\varphi \in H^1_{0\#}(B_x)^3$ et $\mathrm{div}_\lambda \varphi = 0$:

$$\mu \int_w \theta \left(\int_{B_x} \nabla_\lambda u^\lambda . \nabla_\lambda \varphi \, dx_3 \, dy \right) dx = \int_w \int_{B_x} p^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\theta \varphi)_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\theta \varphi)_2 \right) dx \, dx_3 \, dy$$

$$= - \int_w \left[\int_{B_x} \left(\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_1} \varphi_1 + \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_2} \varphi_2 \right) dx_3 \, dy \right] \theta \, dx$$

Ceci étant vrai pour tout θ dans $\mathcal{D}(w)$, ce qui implique (2.73).

En utilisant les problèmes locaux (2.67) (2.68), on montre par linéarité que u^λ s'exprime en fonction de p^λ par la relation (2.72). □

On démontre maintenant une relation de type conservation de flux qui permettra dans un deuxième temps d'obtenir une équation de type Reynolds satisfaite par p^λ.

Proposition 2.5.11. *on a :*

$$\int_w \int_{B_x} \left(u_1^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + u_2^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx \, dx_3 = \int_{\partial w} f.n\varphi \, d\sigma \qquad \forall \varphi \in H^1(w) \tag{2.75}$$

avec

$$f = \int_0^{h_{min}} g \, dx_3$$

Preuve

Soit φ dans $H^1(w)$, comme fonction test dans l'équation de la divergence (2.13) :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial x_1} \varphi \, dx \, dx_3 + \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_2^{\eta\epsilon}}{\partial x_2} \varphi \, dx \, dx_3 + \frac{1}{\lambda \epsilon} \int_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \varphi \, dx \, dx_3 = 0$$

En appliquant la formule de Green sur tous les termes, on obtient :

$$-\int_{\Omega^\epsilon} u_1^{\eta\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx\,dx_3+\int_{\partial\Omega^\epsilon} u_1^{\eta\epsilon}n_1\varphi\,d\sigma-\int_{\Omega^\epsilon} u_2^{\eta\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx\,dx_3+\int_{\partial\Omega^\epsilon} u_2^{\eta\epsilon}n_2\varphi\,d\sigma+\frac{1}{\lambda\epsilon}\int_{\partial\Omega^\epsilon} u_3^{\eta\epsilon}n_3\varphi\,d\sigma=0$$

Tenant compte des conditions aux limites de la vitesse $u^{\eta\epsilon}$, il vient :

$$-\int_{\Omega^\epsilon} u_1^{\eta\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx\,dx_3-\int_{\Omega^\epsilon} u_2^{\eta\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx\,dx_3+\int_{\Gamma_l} g.n\varphi\,d\sigma=0$$

En passant à la limite (après avoir prolongé par zéro la vitesse dans Ω_{max}), on obtient :

$$\int_w\int_{B_x} u_1^\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx\,dx_3+\int_w\int_{B_x} u_2^\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,dx\,dx_3=\int_{\Gamma_l} g.n\varphi\,d\sigma=\int_{\partial w}\left(\int_0^{h_{min}} g\,dx_3\right).n\varphi\,d\sigma \qquad \square$$

On peut maintenant trouver l'équation limite vérifiée par p^λ.

Théorème 2.5.12. *À λ fixé, p^λ est l'unique solution dans $H^1(w)$ de :*

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_w a_{ij}^\lambda\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx=\sum_{i=1}^{2}\int_w b_i^\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\int_{\partial w} f.n\,\varphi\,d\sigma \qquad \forall\varphi\in H^1(w) \tag{2.76}$$

$$\int_w \tilde{h}p^\lambda\,dx=0 \tag{2.77}$$

avec

$$a_{ij}^\lambda=-\int_{B_x} w_i^{j\lambda}\,dy\,dx_3, \qquad i,j=1,2,\ \text{et}\ b_i^\lambda=\int_{B_x} w_i^{3\lambda}\,dy\,dx_3 \qquad i=1,2$$

Preuve

En remplaçant (2.72) dans (2.75), on obtient :

$$\int_w\int_{B_x}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}w_i^{j\lambda}+w_i^{3\lambda}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\int_{\partial w} f.n\varphi\,d\sigma \qquad \forall\varphi\in H^1(w)$$

Comme p^λ et φ ne dépendent pas des variables y et x_3, cette dernière équation s'écrit :

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_w\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\int_{B_x} w_i^{j\lambda}\,dx_3\,dy\right)dx+\sum_{i=1}^{2}\int_w\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\int_{B_x} w_i^{3\lambda}\,dx_3\,dy\right)dx=\int_{\partial w} f.n\varphi\,d\sigma$$

En posant

$$a_{ij}^\lambda=-\int_{B_x} w_i^{j\lambda}\,dx_3\,dy, \qquad b_i^\lambda=\int_{B_x} w_i^{3\lambda}\,dx_3\,dy$$

on obtient l'équation (2.76).

Dans la suite, on va démontrer que A^λ est symétrique, définie positive, ce qui assure l'unicité de p^λ solution de (2.76).

-Montrons d'abord que $a_{12}^\lambda = a_{21}^\lambda$:

Prenons $w^{1\lambda}$ (resp. $w^{2\lambda}$) comme fonction test dans (2.67) avec k=2 (resp. k=1), on obtient :

$$\mu \int_{B_x} \nabla_\lambda w^{1\lambda}.\nabla_\lambda w^{2\lambda}\, dy\, dx_3 = -\int_{B_x} w_1^{2\lambda} = a_{12}^\lambda$$

et

$$\mu \int_{B_x} \nabla_\lambda w^{2\lambda}.\nabla_\lambda w^{1\lambda}\, dy\, dx_3 = -\int_{B_x} w_2^{1\lambda} = a_{21}^\lambda$$

d'où le résultat.

-Montrons que A^λ est définie positive : Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, il faut démontrer que :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i a_{ij}^\lambda \xi_j \geq 0. \tag{2.78}$$

et

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i a_{ij}^\lambda \xi_j = 0 \Longrightarrow \xi = 0 \tag{2.79}$$

Pour cela, on utilise les problèmes locaux. Soit $\xi_i \xi_j w^{j\lambda}$ fonction test dans (2.67), on a :

$$\mu \xi_i \xi_j \int_{B_x} \nabla_\lambda w^{i\lambda}.\nabla_\lambda w^{j\lambda}\, dx_3\, dy = -\int_{B_x} \xi_i \xi_j w_i^{j\lambda}\, dy\, dx_3 = \xi_i \xi_j a_{ij}^\lambda$$

En sommant sur $i, j = 1, 2$ on obtient :

$$\mu \int_{B_x} \left(\xi_1 \nabla_\lambda w^{1\lambda} + \xi_2 \nabla_\lambda w^{2\lambda}\right)^2\, dy\, dx_3 = \sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j a_{ij}^\lambda$$

ce qui implique que :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j a_{ij}^\lambda \geq 0$$

Montrons (2.79) :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \xi_j a_{ij}^\lambda = 0 \Longrightarrow \int_{B_x} \left(\xi_1 \nabla_\lambda w^{1\lambda} + \xi_2 \nabla_\lambda w^{2\lambda}\right)^2\, dy\, dx_3 = \int_{B_x} \left(\nabla_\lambda \left(\xi_1 w^{1\lambda} + \xi_2 w^{2\lambda}\right)\right)^2\, dy\, dx_3 = 0$$

Comme c'est une norme dans l'espace $H_{0\#}^1(B_x)$, ceci implique que

$$\xi_1 w^{1\lambda} + \xi_2 w^{2\lambda} = 0$$

En utilisant le changement de variables (2.66) dans (2.64), pour $k = 1$ et 2, $\xi_1 w^{1\lambda} + \xi_2 w^{2\lambda}$ vérifie :

$$0 = \mu \triangle_\lambda \left(\xi_1 w^{1\lambda} + \xi_2 w^{2\lambda}\right) = \xi_1 \nabla_\lambda \pi^{1\lambda} + \xi_1 e_1 + \xi_2 \nabla_\lambda \pi^{2\lambda} + \xi_2 e_2$$

Ce qui implique les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \xi_1 \dfrac{\partial \pi^{1\lambda}}{\partial y_1} + \xi_1 + \xi_2 \dfrac{\partial \pi^{2\lambda}}{\partial y_1} = 0 \\ \xi_1 \dfrac{\partial \pi^{1\lambda}}{\partial y_2} + \xi_2 \dfrac{\partial \pi^{2\lambda}}{\partial y_2} + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

En intégrant les deux équations en y, tenant compte de la périodicité de $\pi^{k\lambda}$ $(k = 1, 2)$, on obtient que :

$$\xi_1 = \xi_2 = 0$$

Supposons maintenant que p_1^λ et p_2^λ sont deux solutions de l'équation (2.76) ; on pose $P^\lambda = p_1^\lambda - p_2^\lambda$. En prenant $\varphi = P^\lambda$ comme fonction test dans (2.76), alors P^λ vérifie l'équation :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_w a_{ij}^\lambda \frac{\partial P^\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial P^\lambda}{\partial x_i} \, dx = 0$$

D'après (2.78), en posant $\xi = \nabla P^\lambda$, on déduit que :

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^\lambda \frac{\partial P^\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial P^\lambda}{\partial x_i} = 0 \qquad p.p.\ x \in w$$

D'après (2.79), on en déduit que P^λ est constant. La relation (2.77) implique alors que $P^\lambda = 0$, d'où l'unicité.

□

2.5.6 Convergence des contraintes

Nous étudions la convergence des contraintes. Comme dans le paragraphe 2.3.3, nous serons obligés de distinguer la partie supérieure Γ_+^ϵ "rugueuse" et la partie inférieure Γ_-. Sur cette dernière nous obtiendrons le même type de résultat que précédemment, la démonstration ne nécessitant pas de travailler dans tout le domaine (qui dépend de ϵ) mais dans Ω_{min}. Pour la partie supérieure, on est conduit à multiplier par une puissance de ϵ supplémentaire pour obtenir des résultats de convergence.

2.5.6.1 Contrainte sur la partie inférieure :

Théorème 2.5.13. *Sur Γ_-, le vecteur contrainte définie dans* (2.28) *converge dans $\mathcal{D}'(\Gamma_-)^3$ vers la trace dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)^3$ de V_-^λ défini par :*

$$V_-^\lambda = \begin{pmatrix} -\mu\left(\sum_{j=1}^2 \dfrac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\dfrac{\partial \widetilde{w}_1^{j\lambda}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial \widetilde{w}_1^{3\lambda}}{\partial x_3}\right) \\ -\mu\left(\sum_{j=1}^2 \dfrac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\dfrac{\partial \widetilde{w}_2^{j\lambda}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial \widetilde{w}_2^{3\lambda}}{\partial x_3}\right) \\ \lambda^2 p^\lambda \end{pmatrix}$$

avec

$$\widetilde{\frac{\partial w_k^{j\lambda}}{\partial x_3}} = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial w_k^{j\lambda}}{\partial x_3}\,dy = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\int_0^1\int_0^1 w_k^{j\lambda}\,dy\right) = \frac{\partial \widetilde{w}_k^{j\lambda}}{\partial x_3}$$

Preuve

D'après (2.28), on a :

$$V_-^{\eta\epsilon} = \Sigma^{\eta\epsilon}.N_-$$

où $\Sigma^{\eta\epsilon}$ est le tenseur des contraintes normalisé défini dans le paragraphe 2.3.3 et N_- est le vecteur unitaire normal à la surface Γ_-.

Γ_- est considéré comme partie de la frontière du domaine Ω_{min} indépendant de ϵ.

En utilisant les équations (2.30), (2.31) et (2.32) où l'on a posé $\eta = \epsilon\lambda$, on déduit que chaque ligne de $\Sigma^{\eta\epsilon}$ est à divergence nulle. De plus les estimations en vitesse dans (2.54) et pression (proposition 2.5.6)) restent vraies dans Ω_{min} et impliquent que :

$$\epsilon^2\|\sigma_{ii}^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{min})} \leq K \quad \text{et} \quad \epsilon\|\sigma_{ij}^{\eta\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{min})} \leq K \qquad i \neq j$$

Ceci montre que chaque ligne $\Sigma_i^{\eta\epsilon}$ est bornée dans $H(\mathrm{div}, \Omega_{min})$. Il existe donc Σ^λ tel que $\Sigma^{\eta\epsilon}$ converge ligne par ligne vers Σ^λ dans $H(\mathrm{div}, \Omega_{min})$.

De plus, d'après les résultats de convergence double échelle des propositions 2.5.6 et 2.5.7, on peut déduire les convergences faibles suivantes :

$$u^{\eta\epsilon} \rightharpoonup \widetilde{u^\lambda} = \int_0^1\int_0^1 u^\lambda\,dy \qquad L^2(\Omega_{min})^3$$

$$\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial x_3} + \frac{\partial v_0}{\partial y_3}\right)\,dy\,dy_3 = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_3}\,dy \qquad L^2(\Omega_{min})^3$$

$$\epsilon\frac{\partial u^{\eta\epsilon}}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \qquad i = 1, 2$$

et

$$\epsilon^2 p^{\eta\epsilon} \rightharpoonup p^\lambda \qquad L^2(\Omega_{min})$$

Alors, après passage à la limite, Σ^λ est défini par :

$$\Sigma^\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda^2 p^\lambda & 0 & \mu \widetilde{\dfrac{\partial u_1^\lambda}{\partial x_3}} \\ 0 & -\lambda^2 p^\lambda & \mu \widetilde{\dfrac{\partial u_2^\lambda}{\partial x_3}} \\ 0 & 0 & -\lambda^2 p^\lambda \end{pmatrix}$$

On en déduit aussi la convergence au bord :

$$\Sigma^{\eta\epsilon}.N \to \Sigma^\lambda.N \qquad H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min})^3$$

Pour travailler sur la partie Γ_- du bord, on construit une fonction test particulière : Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ appartenant à $\mathcal{D}(\Gamma_-)^3$. On peut construire une fonction de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min})^3$ en posant :

$$\hat{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{sur } \Gamma_- \\ 0 & \text{sur } \partial\Omega_{min}/\Gamma_- \end{cases}$$

On a alors :

$$\langle V_-^{\eta\epsilon}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_-),\mathcal{D}(\Gamma_-)} = \langle \Sigma^{\eta\epsilon}.N_-, \varphi\rangle = \langle \Sigma^{\eta\epsilon}.N, \hat{\varphi}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min}),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min})}$$

$$\text{qui converge vers } \langle \Sigma^\lambda.N, \hat{\varphi}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min}),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{min})} = \langle \Sigma^\lambda.N_-, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma_-),\mathcal{D}(\Gamma_-)}$$

D'après (2.72), u_i^λ s'exprime en fonction de p^λ indépendant de x_3 et des solutions des problèmes locaux. On peut déduire en dérivant en x_3 que :

$$\frac{\partial u_i^\lambda}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3} + \frac{\partial w_i^{3\lambda}}{\partial x_3}$$

En moyennant par rapport à y, (p^λ n'en dépend pas) :

$$\widetilde{\frac{\partial u_i^\lambda}{\partial x_3}} = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial u_i^\lambda}{\partial x_3}\,dy = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3}\,dy + \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial w_i^{3\lambda}}{\partial x_3}\,dy = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial \widetilde{w}_i^{j\lambda}}{\partial x_3} + \frac{\partial \widetilde{w}_i^{3\lambda}}{\partial x_3}$$

Donc dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-)$, on obtient le résultat annoncé. □

2.5.6.2 Les contraintes sur la partie rugueuse

Pour étudier le comportement des contraintes quand ϵ tend vers zéro sur la partie rugueuse qui dépend de ϵ, il sera nécessaire de faire le changement de variables défini par (2.51) pour se ramener à un domaine B de frontière fixe. On s'intéresse à la convergence de $V_+^{\eta\epsilon}$ défini par (2.27). Les résultats de convergence sont obtenus en multipliant ses deux premières composantes par une puissance de ϵ plus forte que pour la contrainte sur la frontière Γ_-.

Le tenseur des contraintes s'écrit dans le domaine rescalé B :

$$\sigma_{ii}^{\eta\epsilon} = -p^{\eta\epsilon} + 2\mu\left(\frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial t_i} - 2\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\right) \qquad i = 1,2$$

$$\sigma_{33}^{\eta\epsilon} = -p^{\eta\epsilon} + \mu\frac{2}{\eta h^\epsilon}\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}$$

$$\sigma_{ij}^{\eta\epsilon} = \mu\left(\frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial t_j} - 2\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_j}\frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial t_3} + \frac{\partial u_j^{\eta\epsilon}}{\partial t_i} - 2\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial u_j^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\right) \qquad i \neq j = 1,2$$

$$\sigma_{i3}^{\eta\epsilon} = \sigma_{3j}^{\eta\epsilon} = \mu\left(\frac{1}{\eta h^\epsilon}\frac{\partial u_i^{\eta\epsilon}}{\partial t_3} + \frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_i} - 2\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\frac{t_3}{h^\epsilon}\frac{\partial u_3^{\eta\epsilon}}{\partial t_3}\right) \text{ avec } \eta = \lambda\epsilon,\ i = 1,2$$

Le vecteur contrainte $V_+^{\eta\epsilon}$ s'écrit dans B à partir de (2.51) sous la forme :

$$V_+^{\eta\epsilon} = \begin{pmatrix} -\eta^2\sigma_{11}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} - \eta^2\sigma_{12}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} + \eta\sigma_{13}^{\eta\epsilon} \\ -\eta^2\sigma_{21}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} - \eta^2\sigma_{22}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} + \eta\sigma_{23}^{\eta\epsilon} \\ -\eta^3\sigma_{31}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} - \eta^3\sigma_{32}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} + \eta^2\sigma_{33}^{\eta\epsilon} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}} \tag{2.80}$$

On introduit donc un tenseur de contraintes $\mathcal{A}^{\eta\epsilon}$ modifié de telle sorte que la troisième colonne pour $t_3 = 1$ soit exactement $V_+^{\eta\epsilon}$:

$$\mathcal{A}^{\eta\epsilon} = \begin{pmatrix} \eta^2 h^\epsilon\sigma_{11}^{\eta\epsilon} & \eta^2 h^\epsilon\sigma_{12}^{\eta\epsilon} & t_3(-\eta^2\sigma_{11}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} - \eta^2\sigma_{12}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} + \eta\sigma_{13}^{\eta\epsilon}) \\ \eta^2 h^\epsilon\sigma_{21}^{\eta\epsilon} & \eta^2 h^\epsilon\sigma_{22}^{\eta\epsilon} & t_3(-\eta^2\sigma_{21}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} - \eta^2\sigma_{22}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} + \eta\sigma_{23}^{\eta\epsilon}) \\ \eta^3 h^\epsilon\sigma_{31}^{\eta\epsilon} & \eta^3 h^\epsilon\sigma_{22}^{\eta\epsilon} & t_3(-\eta^3\sigma_{31}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1} - \eta^3\sigma_{32}^{\eta\epsilon}\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2} + \eta^2\sigma_{33}^{\eta\epsilon}) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}}$$

Lemme 2.5.14. *Pour $i = 1,2$, $\epsilon\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon}$ et $\mathcal{A}_3^{\eta\epsilon}$ sont bornés dans $H(\mathrm{div}; B)$ où $\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon}$ est le $i^{ème}$ vecteur ligne de la matrice $\mathcal{A}^{\eta\epsilon}$.*

Preuve

L'équation de divergence nulle (2.29) s'écrit en faisant le changement de variables (2.51), d'après la proposition 2.5.1 sous la forme : $(i = 1,2,3)$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(h^\epsilon\sigma_{i1}^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_2}(h^\epsilon\sigma_{i2}^{\eta\epsilon}) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left(-t_3\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1}\sigma_{i1}^{\eta\epsilon} - t_3\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2}\sigma_{i2}^{\eta\epsilon} + \frac{1}{\eta}\sigma_{i3}^{\eta\epsilon}\right) = 0 \tag{2.81}$$

Le calcul de $\mathrm{div}_{tt_3}\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon}$ en utilisant (2.81) donne :

$$\mathrm{div}_{tt_3}\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon} = \eta^2 h^\epsilon\sigma_{i1}^\epsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}}\right) + \eta^2 h^\epsilon\sigma_{i2}^{\eta\epsilon}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}}\right)$$

et

$$\mathrm{div}_{tt_3}\mathcal{A}_3^{\eta\epsilon} = \eta^3 h^\epsilon\sigma_{31}^\epsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}}\right) + \eta^3 h^\epsilon\sigma_{32}^{\eta\epsilon}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2 + \eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}}\right)$$

Les estimations du lemme 2.5.2 et la proposition 2.5.4 sur la vitesse et la pression ainsi que :

$$\|\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}\|_{L^\infty(w)} = \|\frac{\partial h}{\partial t_i} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial h}{\partial y_i}\|_{L^\infty(w)} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

impliquent les majorations suivantes :

$$\eta^2\|\sigma_{ii}^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)} \leq K, \qquad i = 1,2,3, \quad \eta\|\sigma_{ij}^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)} \leq K \qquad i \neq j = 1,2,3 \tag{2.82}$$

Ceci permet de conclure :

$$\|\epsilon\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)^3} \leq K, \quad \|\epsilon\mathrm{div}\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)^3} \leq K \qquad i = 1,2$$

et

$$\|\mathcal{A}_3^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)^3} \leq K, \quad \|\mathrm{div}\mathcal{A}_3^{\eta\epsilon}\|_{L^2(B)^3} \leq K \qquad \square$$

On veut maintenant étudier la convergence de $V_+^{\eta\epsilon}$ donné dans (2.80) :

Lemme 2.5.15. $(\epsilon V_{+1}^{\eta\epsilon}, \epsilon V_{+2}^{\eta\epsilon}, V_{+3}^{\eta\epsilon})$ *converge dans* $\mathcal{D}'(\Gamma_+)^3$ *vers* V_+^λ *donné par :*

$$V_+^\lambda = \begin{pmatrix} \int_0^1\int_0^1 \frac{\lambda^2\frac{\partial h}{\partial y_1}}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} p^\lambda\, dy \\ \int_0^1\int_0^1 \frac{\lambda^2\frac{\partial h}{\partial y_2}}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} p^\lambda\, dy \\ \int_0^1\int_0^1 \frac{-\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} p^\lambda\, dy \end{pmatrix}$$

Preuve

D'après le lemme 2.6.16, il existe une matrice $\mathcal{A}^\lambda$ dans $L^2(B)^9$ telle que :

$$\epsilon\mathcal{A}_i^{\eta\epsilon} \rightharpoonup \mathcal{A}_i^\lambda \qquad i = 1,2; \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_3^{\eta\epsilon} \rightharpoonup \mathcal{A}_3^\lambda \qquad \text{dans } H(\mathrm{div}; B)$$

D'après les estimations données dans (2.82), les deux premières colonnes de cette matrice sont nulles. Pour la troisième colonne, la multiplication par ϵ induit des limites nulles pour les dérivées de la vitesse. Il ne reste donc que les termes en pression dans $\sigma_{ii}^{\eta\epsilon}$. Rappelons que :

$$\eta^2 p^{\eta\epsilon} \twoheadrightarrow \lambda^2 p^\lambda(t) \qquad L^2(B\times]0,1[^2)$$

En écrivant

$$\frac{\epsilon\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_i}}{\sqrt{1+\eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2+\eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}} = e_i^\epsilon + \frac{\frac{\partial h}{\partial y_i}}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial y_2})^2}}$$

avec

$$e_i^\epsilon = \frac{\epsilon\frac{\partial h}{\partial t_i}}{\sqrt{1+\eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2+\eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}} + \frac{\partial h}{\partial y_i}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_1})^2+\eta^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial t_2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h^\epsilon}{\partial y_2})^2}}\right]$$

Comme e_i^ϵ converge vers 0 dans $L^\infty(B)$ fort, on obtient :

$$\mathcal{A}^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 t_3 \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial h}{\partial y_1}}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} dy \right) p^\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 t_3 \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{\partial h}{\partial y_2}}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} dy \right) p^\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 t_3 \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} dy \right) p^\lambda \end{pmatrix}$$

Pour la convergence au bord, on a :

$$\epsilon \mathcal{A}_i^{\eta\epsilon}.N \longrightarrow \mathcal{A}_i^\lambda.N \qquad i=1,2 \text{ et } \mathcal{A}_3^{\eta\epsilon}.N \longrightarrow \mathcal{A}_3^\lambda.N \qquad H^{-\frac{1}{2}}(\partial B)$$

En particulier, en localisant la convergence sur le bord défini par $t_3 = 1$, on obtient le résultat annoncé sur Γ_+.

□

2.6 Etude asymptotique quand λ tend vers zéro

2.6.1 Convergence des solutions des problèmes locaux

Théorème 2.6.1. *Lorsque $\lambda \to 0$, pour $k = 1, 2$, il existe $w^{k\star}$ dans $V(x_3)$ et $\pi^{k\star}$ dans $L^2(B_x)$ telle que :*

$$\frac{1}{\lambda^2} w^{k\lambda} \rightharpoonup w^{k\star} \qquad \textit{dans } V(x_3)$$
$$\pi^{k\lambda} \rightharpoonup \pi^{k\star} \qquad \textit{dans } L^2(B_x)$$

avec

$$\frac{\partial \pi^{k\star}}{\partial x_3} = 0.$$

$w^{k\star}, \pi^{k\star}$, $k = 1, 2$, vérifient la relation suivante :

$$w_i^{k\star} = \frac{1}{2\mu} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \pi^{k\star}}{\partial y_i} \right) x_3(x_3 - h(x,y)) \qquad k = 1, 2 \tag{2.83}$$

$$w_3^{k\star} = 0$$

avec $\pi^{k\star}, k = 1, 2$ appartient à $L_0^2(]0,1[^2) \cup H_\#^1(]0,1[^2)$, solution unique du problème :

$$-\mathrm{div}_y(\frac{h^3}{12\mu}.\nabla \pi^{k\star}) = \frac{1}{12\mu} \frac{\partial h^3}{\partial y_k}, \qquad k = 1, 2 \tag{2.84}$$

Preuve

D'après les estimations du lemme 2.5.8, pour $k = 1, 2$, il existe $w^{k\star}$ dans $V(x_3)$ limite faible de $\dfrac{w^{k\lambda}}{\lambda^2}$ et $\pi^{k\star}$ dans $L_0^2(B_x)$ limite faible de $\pi^{k\lambda}$ avec

$$\text{pour } i = 1, 2 \qquad \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial y_i} \to 0 \text{ et } \frac{\partial \pi^{k\lambda}}{\partial x_3} \to 0$$

Pour $i = 1, 2$, soit φ dans $H^1_{0\#}(B_x)$. On prend successivement $(\varphi, 0, 0)$ et $(0, \varphi, 0)$ comme fonction test dans (2.67), on obtient les équations suivantes :

$$\mu \int_{B_x} \nabla_\lambda w_i^{k\lambda}.\nabla_\lambda \varphi \, dy \, dx_3 - \int_{B_x} \pi^{k\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy \, dx_3 = - \int_{B_x} \delta_{ik} \varphi \, dy \, dx_3 \qquad i, k = 1, 2$$

En passant à la limite, on obtient :

$$\mu \int_{B_x} \frac{\partial w_i^{k\star}}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \, dy \, dx_3 - \int_{B_x} \pi^{k\star} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \, dy \, dx_3 = - \int_{B_x} \delta_{ik} \varphi \, dy \, dx_3 \quad \forall \varphi \in H^1_{0\#}(B_x) \quad (2.85)$$

Ce qui implique que (au sens des distributions) :

$$\mu \frac{\partial^2 w_i^{k\star}}{\partial x_3^2} = \left(\frac{\partial \pi^{k\star}}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \qquad i, k = 1, 2 \qquad (2.86)$$

Prenons une fonction test particulière dans (2.85) de la forme $x_3(x_3 - h(x, y))\theta(y)$ avec $\theta(y)$ appartient à $H^1_\#(]0, 1[^2)$, on obtient :

$$\mu \int_{B_x} \frac{\partial w_i^{k\star}}{\partial x_3} (2x_3 - h(x, y))\theta(y) \, dy \, dx_3 - \int_{B_x} \pi^{k\star} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(x_3(x_3 - h(x, y))\theta(y) \right) \, dy \, dx_3 =$$

$$- \int_{B_x} \delta_{ik} x_3 (x_3 - h(x, y))\theta(y) \, dy \, dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 \delta_{ik} \frac{h^3}{6} \theta \, dy \quad \forall i, k = 1, 2$$

En appliquant la formule de Green sur le premier terme, et tenant compte du fait que $\pi^{k\star}$ ne dépend pas de la variable x_3, on obtient :

$$-2\mu \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^h w_i^{k\star} \, dx_3 \right) \theta \, dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{h^3}{6} \theta \right) \pi^{k\star} \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \delta_{ik} \frac{h^3}{6} \theta \, dy \qquad \forall \theta \in H^1_\#(]0, 1[^2)$$

ce qui implique que :

$$-2\mu \left(\int_0^h w_i^{k\star} \, dx_3 \right) = \left(\frac{h^3}{6} \right) \frac{\partial \pi^{k\star}}{\partial y_i} + \delta_{ik} \frac{h^3}{6} \qquad i, k = 1, 2 \qquad (2.87)$$

Ce résultat donne la régularité $H^1_\#(]0, 1[^2)$ pour $\pi^{k\star}$. On en déduit que la relation (2.86) est vraie presque partout dans B_x. En intégrant en x_3 et en utilisant la continuité de la trace, on obtient (2.83).

D'autre part, à cause de la divergence nulle dans le problème (2.67), on a pour tout θ dans $H^1_\#(]0, 1[^2)$:

$$\int_{B_x} \left(\frac{\partial w_1^{k\lambda}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_2^{k\lambda}}{\partial y_2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial w_3^{k\lambda}}{\partial x_3} \right) \theta \, dy \, dx_3 = 0 \qquad (2.88)$$

En appliquant la formule de Green, et tenant compte des conditions aux bords, on obtient :

$$\int_{B_x} \left(w_1^{k\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + w_2^{k\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right) \, dy = 0$$

En multipliant par $\dfrac{1}{\lambda^2}$ et en passant à la limite :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^h w_1^{k\star} \, dx_3 \right) \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \, dy + \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^h w_2^{k\star} \, dx_3 \right) \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \, dy = 0 \tag{2.89}$$

Utilisant (2.87) dans (2.89), on obtient (2.84).

Montrons maintenant que la troisième composante $w_3^{k\star} = 0$. Reprenant l'équation de divergence (2.88) avec θ dans $H^1_{0\#}(B_x)$ et appliquant la formule de Green sur tous les termes, on obtient :

$$-\int_{B_x} \left(w_1^{k\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial y_1} + w_2^{k\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial y_2} + \frac{1}{\lambda} w_3^{k\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) \, dy \, dx_3 = 0$$

On multiplie par $\dfrac{1}{\lambda}$, sachant que :

$$\frac{1}{\lambda} w_i^{k\lambda} = \lambda \frac{1}{\lambda^2} w_i^{k\lambda} \rightharpoonup 0 \qquad i, k = 1, 2$$

on obtient après passage à la limite :

$$\int_{B_x} w_3^{k\star} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \, dy \, dx_3 = 0$$

ce qui implique que $w_3^{k\star}$ ne dépend pas de la variable x_3.

D'autre part, la convergence dans $V(x_3)$, permet d'obtenir la convergence des traces :

$$0 = \frac{1}{\lambda^2} w_3^{k\lambda}(y, 0) \rightharpoonup w_3^{k\star}(y, 0) = 0$$

On en déduit alors que $w_3^{k\star} = 0$ dans B_x. □

Théorème 2.6.2. *Lorsque $\lambda \to 0$, il existe $w^{3\star}$ dans $V(x_3)$ et $\pi^{3\star}$ dans $L^2(w)$ tels que :*

$$w^{3\lambda} \rightharpoonup w^{3\star} \qquad \textit{dans} \;\; V(x_3)$$

$$\lambda^2 \pi^{3\lambda} \rightharpoonup \pi^{3\star} \qquad \textit{dans} \;\; L^2(w)$$

avec

$$\frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial x_3} = 0.$$

$w^{3\star}, \pi^{3\star}$ vérifient la relation suivante :

$$w_i^{3\star} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} x_3 (x_3 - h(x, y)) - s_i \frac{x_3}{h} + s_i \tag{2.90}$$

et

$$w_3^{3\star} = 0$$

avec $\pi^{3\star}$ *appartient à* $L_0^2(]0,1[^2) \cup H_\#^1(]0,1[^2)$, *solution unique du problème :*

$$\mathrm{div}_y(\frac{h^3}{12\mu}.\nabla\pi^{3\star}) = \frac{1}{2}\left(s_1\frac{\partial h}{\partial y_1} + s_2\frac{\partial h}{\partial y_2}\right) \tag{2.91}$$

Preuve

D'après les estimations du lemme 2.5.9, il existe $w^{3\star}$ dans $V(x_3)$ limite faible de $w^{3\lambda}$ et $\pi^{3\star}$ dans $L_0^2(B_x)$ limite faible de $\lambda^2\pi^{3\lambda}$ tels que :

$$\lambda^2\frac{\partial\pi^{3\lambda}}{\partial x_3} \to 0 \ \text{ et } \ \lambda^2\frac{\partial w^{3\lambda}}{\partial y_i} \to 0 \qquad i = 1,2$$

Comme dans le théorème 2.6.1, on montre en prenant successivement une fonction test $(\varphi,0,0)$ et $(0,\varphi,0)$ dans (2.68), avec φ dans $H_{0\#}^1(B_x)$, après passage à la limite que :

$$\mu\int_{B_x}\frac{\partial w_i^{3\star}}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_3}\,dy\,dx_3 = \int_{B_x}\pi^{3\star}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_i}\,dy\,dx_3 \qquad i = 1,2 \tag{2.92}$$

ce qui implique que :

$$\mu\frac{\partial^2 w_i^{3\star}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial\pi^{3\star}}{\partial y_i} \qquad i = 1,2$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 2.6.1, on obtient cette fois-ci :

$$-2\mu\left(\int_0^h w_i^{3\star}\,dx_3\right) + \mu s_i h = \left(\frac{h^3}{6}\right)\frac{\partial\pi^{3\star}}{\partial y_i} \qquad i = 1,2 \tag{2.93}$$

La fin de la preuve est identique. □

Remarque 2.6.3. *En comparant les solutions de* (2.42) *avec* (2.84) *et* (2.43) *avec* (2.91) *et tenant compte de l'unicité, on en déduit que :*

$$\pi^{k\star} = \pi^k, \qquad k = 1,2,3$$

2.6.2 Régularité en x des solutions des problèmes locaux

Pour passer à la limite en λ dans l'équation (2.76), il est nécessaire d'avoir une convergence des coefficients a_{ij}^λ dans $\mathcal{C}^0(\overline{w})$. Pour cela, il suffira d'obtenir des estimations dans $W^{1,q}(w)$ avec $q > 1$. Ces coefficients se calculent à partir des solutions des problèmes locaux (2.67) qui dépendent de x à travers le domaine B_x. On se ramène à un domaine fixe en introduisant le changement de variables suivant :

$$t_1 = y_1,\ t_2 = y_2 \qquad \text{et } t_3 = \frac{x_3}{h(x,y)} \tag{2.94}$$

Avec ce changement de variable, l'équation (2.67) est maintenant écrite dans le domaine fixe $Y =]0,1[^3$, x étant un paramètre : $(k = 1, 2)$

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t_3} \right) + \frac{1}{\lambda^2 h^2} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} \frac{\partial \varphi}{\partial t_3} \right] h \, dt \, dt_3$$

$$- \int_Y \pi^{k\lambda} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(h \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_i} - t_3 \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_3} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_3} \right] dt \, dt_3 = - \int_Y \varphi_k h \, dt \, dt_3 \qquad \forall \varphi \in H^1_{0\#}(Y)^3 \tag{2.95}$$

On en déduit :

Lemme 2.6.4. *On a les estimations suivantes dans Y :*

$$\frac{1}{\lambda} \| \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \|_{(L^2(Y))^3} \leq K, \qquad i = 1, 2, \ \frac{1}{\lambda^2} \| \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} \|_{(L^2(Y))^3} \leq K$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \| w^{k\lambda} \|_{(L^2(Y))^3} \leq K, \ \| \pi^{k\lambda} \|_{L^2(Y)} \leq K$$

avec K indépendant de x et de λ.

Preuve

En utilisant le changement de variables (2.94), les estimations du lemme 2.5.8 donnent :

$$\int_Y (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i})^2 \, dt \, dt_3 = \int_{B_x} (\frac{x_3}{h} \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial x_3} + \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial y_i})^2 \frac{1}{h} \, dx_3 \, dy \leq K \lambda^2$$

$$\int_Y (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3})^2 \, dt \, dt_3 = \int_{B_x} h (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial x_3})^2 \, dx_3 \, dy \leq K \lambda^4$$

$$\int_Y (w^{k\lambda})^2 \, dt \, dt_3 = \int_{B_x} (w^{k\lambda})^2 \, \frac{1}{h} dx \, dx_3 \leq K \lambda^4$$

$$\int_Y (\pi^{k\lambda})^2 \, dt \, dt_3 = \int_{B_x} (\pi^{k\lambda})^2 \, \frac{1}{h} dx \, dx_3 \leq K \qquad \square$$

Pour démontrer la régularité de $w^{k\lambda}$, $k = 1, 2$ en x, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 2.6.5. *[9] Soit $v \in L^p(w)$ avec $1 < p \leq \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $v \in W^{1,p}(w)$
ii) il existe une constante c telle que pour tout ouvert avec $\overline{w'} \subset w$ et pour tout $d \in \mathbb{R}^2$, qui vérifie $|d| < dist(w', \partial w)$, on a :

$$\| \mathcal{T}_d v - v \|_{L^p(w')} \leq c \| d \|$$

avec $\mathcal{T}_d v = v(x_1 + d_1, x_2 + d_2)$

De plus, on peut prendre $c = \| \nabla v \|_{L^p(w)^2}$ dans l'inégalité précédente.

Posons :

$$D^1_\delta(v) = \frac{v(x_1+\delta, x_2) - v(x_1, x_2)}{\delta} \text{ et } D^2_\delta(v) = \frac{v(x_1, x_2+\delta) - v(x_1, x_2)}{\delta}$$

De l'inégalité triangulaire :

$$|v(x_1+\delta, x_2+\delta_2) - v(x_1 x_2)| \leq |v(x_1+\delta_1, x_2+\delta_2) - v(x_1, x_2+\delta_2)| + |v(x_1, x_2+\delta_2) - v(x_1, x_2)|$$

on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.6. *Soit $v \in L^p(w)$; supposons qu'il existe $M > 0$ tel que :*

$$\begin{cases} \|D^1_\delta(v)\|_{L^p(w')} \leq M \\ \\ \|D^2_\delta(v)\|_{L^p(w')} \leq M \end{cases} \quad \textit{pour tout } \overline{w'} \subset w \textit{ et pour tout } \delta \in \mathbb{R}, \textit{ vérifiant } w' + (\delta, 0) \subset w$$

alors

$$v \in W^{1,p}(w), \text{ et } \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^p(w)} \leq M \qquad i = 1, 2$$

Proposition 2.6.7. *Il existe une constante $M > 0$, indépendante de x dans w et de λ telle que :*

$$\|\frac{1}{\lambda^2} a^\lambda_{ij}(x)\|_{W^{1,q}(w)} \leq M \quad \forall 1 < q \leq \infty, \ i, j = 1, 2$$

Preuve

a) On commence d'abord par $i = j = k$. D'après le changement de variables (2.94), on a :

$$a^\lambda_{kk}(x) = -\int_{B_x} w^{k\lambda}_k \, dy \, dx_3 = -\int_Y w^{k\lambda}_k h(x,t) \, dt \, dt_3$$

D'après (2.69) :

$$\frac{1}{\lambda^2} \left| a^\lambda_{kk}(x) \right| \leq \frac{\sqrt{b}}{\lambda^2} \|w^{k\lambda}_k\|_{L^2(B_x)}$$

D'après les estimations du lemme 2.5.8, on en déduit :

$$\forall x \in w \qquad \frac{1}{\lambda^2} \left| a^\lambda_{kk}(x) \right| \leq K\sqrt{b} \tag{2.96}$$

Notation : On note $w^{k\lambda'}$ la solution de (2.67) qui correspond à $(x_1+\delta, x_2)$ et on pose $h'(x,t) = h(x_1+\delta, x_2, t)$. On prend $w^{k\lambda}$ comme fonction test dans (2.95), on obtient :

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^2 \left((\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i})^2 - 2\frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_i}\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} + (\frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_i})^2 (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3})^2 \right) + \frac{1}{\lambda^2 h^2} (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3})^2 \right] h \, dt \, dt_3 = -\int_Y w^{k\lambda}_k h \, dt \, dt_3 \tag{2.97}$$

D'autre part, on prend $w^{k\lambda'}$ comme fonction test dans (2.95), écrite pour $(x_1+\delta, x_2)$:

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^2 \left((\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i})^2 - 2\frac{t_3}{h'}\frac{\partial h'}{\partial t_i}\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i}\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} + (\frac{t_3}{h'}\frac{\partial h'}{\partial t_i})^2 (\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3})^2 \right) + \frac{1}{\lambda^2 h'^2} (\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3})^2 \right] h' \, dt \, dt_3 = -\int_Y w^{k\lambda'}_k h \, dt \, dt_3 \tag{2.98}$$

Calculons $\dfrac{(2.98)-(2.97)}{\delta}$, on obtient l'équation suivante (notons que $\dfrac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}$ est une fonction des variables x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 et que D^1_δ ne porte que sur la première variable) :

$$\mu \int_Y \sum_{i=1}^{2} \left[D^1_\delta \left((\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i})^2 h \right) - 2t_3 D^1_\delta \left(\frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} \right) + t_3^2 D^1_\delta \left(\frac{1}{h} (\frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3})^2 \right) \right] dt\, dt_3$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda^2} \int_Y D^1_\delta \left(\frac{1}{h} (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3})^2 \right) dt\, dt_3 = - \int_Y D^1_\delta (w^{k\lambda}_k h)\, dt\, dt_3 \tag{2.99}$$

D'autre part, on prend $\varphi = D^1_\delta(w^{k\lambda})$ comme fonction test dans (2.95) :

$$\mu \int_Y \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}) h - \frac{\partial h}{\partial t_i} t_3 \left(D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}) \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} + D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3}) \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \right) \right) dt\, dt_3$$

$$+ \mu \int_Y \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{h} (t_3 \frac{\partial h}{\partial t_i})^2 \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} . D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3}) + \frac{1}{\lambda^2 h} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3}) \right) dt\, dt_3$$

$$- \int_Y \pi^{k\lambda} . \left[\sum_{i=1}^{2} \left(D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}_i}{\partial t_i}) h - t_3 \frac{\partial h}{\partial t_i} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}_i}{\partial t_3}) \right) + \frac{1}{\lambda} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}_3}{\partial t_3}) \right] dt\, dt_3$$

$$= - \int_Y D^1_\delta (w^{k\lambda}_k) h\, dt\, dt_3 \tag{2.100}$$

Prenons maintenant $\varphi = D^1_\delta(w^{k\lambda})$ comme fonction test dans (2.95) réécrite en $x = (x_1 + \delta, x_2)$:

$$\mu \int_Y \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}) h' - \frac{\partial h'}{\partial t_i} t_3 \left(D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}) \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} + D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3}) \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} \right) \right) dt\, dt_3$$

$$+ \mu \int_Y \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{h'} (t_3 \frac{\partial h}{\partial t_i})^2 . D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3}) \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} + \frac{1}{\lambda^2 h'} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3}) \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} \right) dt\, dt_3$$

$$- \int_Y \pi^{k\lambda'} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}_i}{\partial t_i}) h' - t_3 \frac{\partial h'}{\partial t_i} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}_i}{\partial t_3}) \right) + \frac{1}{\lambda} D^1_\delta (\frac{\partial w^{k\lambda}_3}{\partial t_3}) \right] dt\, dt_3$$

$$= - \int_Y D^1_\delta (w^{k\lambda}_k) h'\, dt\, dt_3 \tag{2.101}$$

Tenant compte de la divergence nulle, on peut écrire le terme en $\pi^{k\lambda}$ dans l'équation (2.100) sous la forme :

$$I_1 = \int_Y \pi^{k\lambda} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(D_\delta^1 (\frac{\partial w_i^{k\lambda}}{\partial t_i}) h - t_3 \frac{\partial h}{\partial t_i} D_\delta^1 (\frac{\partial w_i^{k\lambda}}{\partial t_3}) \right) + \frac{1}{\lambda} D_\delta^1 (\frac{\partial w_3^{k\lambda}}{\partial t_3}) \right] dt\, dt_3$$

$$= \int_Y \frac{\pi^{k\lambda}}{\delta} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{k\lambda'}}{\partial t_i} h - t_3 \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w_i^{k\lambda'}}{\partial t_3} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial w_3^{k\lambda'}}{\partial t_3} \right] dt dt_3$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{k\lambda'}}{\partial t_i} h' - t_3 \frac{\partial h'}{\partial t_i} \frac{\partial w_i^{k\lambda'}}{\partial t_3} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial w_3^{k\lambda'}}{\partial t_3} = 0$$

on obtient :

$$I_1 = - \int_Y \pi^{k\lambda} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{k\lambda'}}{\partial t_i} D_\delta^1 (h) - t_3 \frac{\partial w_i^{k\lambda'}}{\partial t_3} D_\delta^1 (\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) dt\, dt_3 \tag{2.102}$$

En procédant de la même façon pour le terme en pression de (2.101) :

$$I_2 = \int_Y \pi^{k\lambda'} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(D_\delta^1 (\frac{\partial w_i^{k\lambda}}{\partial t_i}) h' - t_3 \frac{\partial h'}{\partial t_i} D_\delta^1 (\frac{\partial w_i^{k\lambda}}{\partial t_3}) \right) + \frac{1}{\lambda} D_\delta^1 (\frac{\partial w_3^{k\lambda}}{\partial t_3}) \right] dt\, dt_3$$

on obtient :

$$I_2 = - \int_Y \pi^{k\lambda'} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{k\lambda}}{\partial t_i} D_\delta^1 (h) - t_3 \frac{\partial w_i^{k\lambda}}{\partial t_3} D_\delta^1 (\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) dt\, dt_3 \tag{2.103}$$

En effectuant (2.99) − (2.100) − (2.101), les termes avec des différences divisées sur des expressions contenant $w^{k\lambda}$ vont se simplifier et ne resteront que des termes avec des différences divisées sur des expressions contenant h.

Expliquons ceci par exemple sur le premier terme, les autres se traitant de la même façon :

On va utiliser la formule suivante :

$$(B' + B) D_\delta^1 (A) = D_\delta^1 (AB) + \frac{1}{\delta} (A'B - AB') \tag{2.104}$$

Ajoutant les deux premiers termes de (2.100) et (2.101) :

$$\left(\frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} h' + \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} h \right) D_\delta^1 (\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i}) = D_\delta^1 \left[(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i})^2 h \right] - \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} D_\delta^1 (h)$$

En calculant le premier terme de (2.99)-(2.100)-(2.101), il vient :

$$\int_Y \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} D_\delta^1 (h)\, dt\, dt_3$$

En procédant ainsi pour tous les termes, on obtient :

$$\mu \int_Y \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} D_\delta^1(h) - t_3 \left(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} + \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} \right) D_\delta^1(\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) \, dt \, dt_3$$

$$+ \int_Y \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} t_3^2 D_\delta^1(\frac{1}{h}(\frac{\partial h}{\partial t_i})^2) + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} D_\delta^1(\frac{1}{h}) \right) \, dt \, dt_3$$

$$+ I_1 + I_2 = - \int_Y D_\delta^1(w_k^{k\lambda} h) \, dt \, dt_3 + \int_Y \left(D_\delta^1(w_k^{k\lambda}) h + D_\delta^1(w_k^{k\lambda}) h' \right) \, dt \, dt_3 \qquad (2.105)$$

Le terme qui nous intéresse est :

$$D_\delta^1(a_{kk}^\lambda) = - \int_Y D_\delta^1(w_k^{k\lambda} h) \, dt \, dt_3$$

Utilisant la propriété suivante :

$$D_\delta^1(AB) = A' D_\delta^1(B) + B D_\delta^1(A) \qquad (2.106)$$

on obtient :

$$D_\delta^1(w_k^{k\lambda}) h + D_\delta^1(w_k^{k\lambda}) h' = 2 D_\delta^1(w_k^{k\lambda} h) - w_k^{k\lambda'} D_\delta^1(h) - w_k^{k\lambda} D_\delta^1(h) \qquad (2.107)$$

Utilisant (2.107) dans (2.105), on obtient :

$$-D_\delta^1(a_{kk}^\lambda) = \mu \int_Y \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} D_\delta^1(h) - t_3 \left(\frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} + \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_i} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} \right) D_\delta^1(\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) \, dt \, dt_3$$

$$+ \mu \int_Y \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} t_3^2 D_\delta^1(\frac{1}{h}(\frac{\partial h}{\partial t_i})^2) + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial w^{k\lambda'}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{k\lambda}}{\partial t_3} D_\delta^1(\frac{1}{h}) \right) \, dt \, dt_3$$

$$+ I_1 + I_2 + \int_Y w_k^{k\lambda} D_\delta^1(h) \, dt \, dt_3 + \int_Y w_k^{k\lambda'} D_\delta^1(h) \, dt \, dt_3 \qquad (2.108)$$

Comme $h \in \mathcal{C}^2(w \times]0,1[^2)$ (hypothèse (H_0)), les estimations du lemme 2.6.4 donnent :

$$\left| D_\delta^1(a_{kk}^\lambda) \right| \leq K \lambda^2$$

On montre de la même façon que :

$$\left| D_\delta^2(a_{kk}^\lambda) \right| \leq K \lambda^2$$

D'après le corollaire 2.6.6, on en déduit que :

$$\frac{a_{kk}^\lambda}{\lambda^2} \text{ est bornée dans } W^{1,p}(w)$$

b) Pour les éléments non diagonaux, comme la matrice A^λ est symétrique, il suffit d'étudier l'élément a^λ_{12}. La technique calculatoire est la même mais est plus compliquée car il faut utiliser les problèmes locaux à la fois pour $w^{1\lambda}$ et $w^{2\lambda}$.

Soit $w^{2\lambda}$ fonction test dans (2.95) avec $k = 1$, on a :

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3} \right) \left(\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3} \right) + \frac{1}{\lambda^2 h^2} \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3} \right] h \, dt \, dt_3 = - \int_Y w_1^{2\lambda} h dt \, dt_3 \tag{2.109}$$

Soit $w^{1\lambda'}$ fonction test dans (2.95) pour $x = (x_1 + \delta, x_2)$ avec $k = 2$:

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_i} - \frac{t_3 \partial h' \partial w^{2\lambda'}}{h' \partial t_i \ \partial t_3} \right) \left(\frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'} \frac{\partial h'}{\partial t_i} \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3} \right) + \frac{1}{\lambda^2 h'^2} \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_3} \right] h' dt \, dt_3 = - \int_Y w_2^{1\lambda'} h' dt \, dt_3 \tag{2.110}$$

Faisant $\dfrac{(2.110) - (2.109)}{\delta}$, et tenant compte de la symétrie de la matrice A^λ, on obtient l'équation suivante :

$$\mu \int_Y \sum_{i=1}^{2} D^1_\delta \left((\frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3})(\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3}) h \right) dt \, dt_3 +$$

$$\mu \int_Y D^1_\delta \left(\frac{1}{\lambda^2 h} \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3} \frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3} \right) dt \, dt_3 = - \int_Y D^1_\delta (w_1^{2\lambda} h) \, dt \, dt_3 \tag{2.111}$$

Prenons $D^1_\delta(w^{2\lambda})$ comme fonction test dans (2.95) avec $k = 1$ respectivement pour (x_1, x_2) et pour $(x_1 + \delta, x_2)$. On obtient les deux équations suivantes :

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3} \right) \left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda})}{\partial t_3} \right) h + \frac{1}{\lambda^2 h} \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3} \frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda})}{\partial t_3} \right] dt \, dt_3 -$$

$$\int_Y \pi^{1\lambda} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial D^1_\delta(w_i^{2\lambda})}{\partial t_3} - \frac{t_3}{h} \frac{\partial h}{\partial t_i} \frac{\partial D^1_\delta(w_i^{2\lambda})}{\partial t_3} \right) h + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial D^1_\delta(w_3^{2\lambda})}{\partial t_3} \right] dt \, dt_3 = - \int_Y D^1_\delta(w_1^{2\lambda}) h \, dt \, dt_3 \tag{2.112}$$

et

$$\mu \int_Y \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'} \frac{\partial h'}{\partial t_i} \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3} \right) \left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'} \frac{\partial h'}{\partial t_i} \frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda})}{\partial t_3} \right) h' + \frac{1}{\lambda^2 h'} \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3} \frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda})}{\partial t_3} \right] dt \, dt_3$$

$$- \int_Y \pi^{1\lambda'} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial D^1_\delta(w_i^{2\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'} \frac{\partial h'}{\partial t_i} \frac{\partial D^1_\delta(w_i^{2\lambda})}{\partial t_3} \right) h' + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial D^1_\delta(w_3^{2\lambda})}{\partial t_3} \right] dt \, dt_3 = - \int_Y D^1_\delta(w_1^{2\lambda}) h' \, dt \, dt_3 \tag{2.113}$$

Prenons de même $D^1_\delta(w^{1\lambda})$ comme fonction test dans (2.95) avec $k = 2$ respectivement pour (x_1, x_2)et pour $(x_1 + \delta, x_2)$. On obtient les deux équations suivantes :

$$\int_Y \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_i}\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3}\right)\left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_i}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda})}{\partial t_3}\right)h + \frac{1}{\lambda^2 h}\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda})}{\partial t_3}\right] dt\, dt_3$$

$$-\int_Y \pi^{2\lambda}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_i)}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_i}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_i)}{\partial t_i}\right)h + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_3)}{\partial t_3}\right] dt\, dt_3 = -\int_Y D^1_\delta(w^{1\lambda}_1)h\, dt\, dt_3 \tag{2.114}$$

et

$$\mu\int_Y \left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'}\frac{\partial h'}{\partial t_i}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_3}\right)\left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'}\frac{\partial h'}{\partial t_i}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda})}{\partial t_3}\right)h' + \frac{1}{\lambda^2 h'}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_3}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda})}{\partial t_3}\right] dt\, dt_3$$

$$-\int_Y \pi^{2\lambda'}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_i)}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'}\frac{\partial h'}{\partial t_i}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_i)}{\partial t_i}\right)h' + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_3)}{\partial t_3}\right] dt\, dt_3 = -\int_Y D^1_\delta(w^{1\lambda}_2)h'\, dt\, dt_3 \tag{2.115}$$

Effectuons la combinaison linéaire $2\times(2.111)-[(2.112)+(2.113)+(2.115)+(2.114)]$. En utilisant encore des formules du type (2.104) et (2.106), on obtient finalement l'équation suivante :

$$\mu\sum_{i=}^{2}\int_Y \left[\left(\frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_i}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_i} + \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_i}\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_i}\right)D^1_\delta(h) - t_3\left(\frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_i} + \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_i}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_3}\right)D^1_\delta(\frac{\partial h}{\partial t_i})\right] dt\, dt_3 +$$

$$\mu\int_Y \sum_{i=1}^{2}\left[t_3\left(\frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3}\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_i} + \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_i}\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3}\right)D^1_\delta(\frac{\partial h}{\partial t_i}) + \left(\frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_3} + \frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3}\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3}\right)t_3^2 D^1_\delta(\frac{1}{h}(\frac{\partial h}{\partial t_i})^2)\right] dt\, dt_3$$

$$+\frac{\mu}{\lambda^2}\int_Y \left(\frac{\partial w^{2\lambda}}{\partial t_3}\frac{\partial w^{1\lambda'}}{\partial t_3} + \frac{\partial w^{1\lambda}}{\partial t_3}\frac{\partial w^{2\lambda'}}{\partial t_3}\right)D^1_\delta(\frac{1}{h}) + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4 =$$

$$2\int_Y D^1_\delta(w^{2\lambda}_1 h)\, dt\, dt_3 - \int_Y \left(D^1_\delta(h)(w^{2\lambda'}_1 + w^{2\lambda}_1 + w^{1\lambda'}_2 + w^{1\lambda'}_2)\right) dt\, dt_3$$

avec

$$\mathcal{T}_1 = \int_Y \pi^{1\lambda}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda}_i)}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_3}\frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda}_i)}{\partial t_3}\right)h + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial D^1_\delta(w^{2\lambda}_3)}{\partial t_3}\right] dt\, dt_3$$

$$\mathcal{T}_2 = \int_Y \pi^{2\lambda}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_i)}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h}\frac{\partial h}{\partial t_3}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_i)}{\partial t_3}\right)h + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial D^1_\delta(w^{1\lambda}_3)}{\partial t_3}\right] dt\, dt_3$$

$$\mathcal{T}_3 = \int_Y \pi^{2\lambda'} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial D_\delta^1(w_i^{1\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'} \frac{\partial h'}{\partial t_3} \frac{\partial D_\delta^1(w_i^{1\lambda})}{\partial t_3} \right) h' + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial D_\delta^1(w_3^{1\lambda})}{\partial t_3} \right] dt\, dt_3$$

$$\mathcal{T}_4 = \int_Y \pi^{1\lambda'} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial D_\delta^1(w_i^{2\lambda})}{\partial t_i} - \frac{t_3}{h'} \frac{\partial h'}{\partial t_3} \frac{\partial D_\delta^1(w_i^{2\lambda})}{\partial t_3} \right) h' + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial D_\delta^1(w_3^{2\lambda})}{\partial t_3} \right] dt\, dt_3$$

On traitera les termes de pressions $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ et $\mathcal{T}_4$, comme I_1 et I_2 dans (2.103) et (2.102), on obtient :

$$\mathcal{T}_1 = -\int_Y \pi^{1\lambda} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{2\lambda'}}{\partial t_i} D_\delta^1(h) - t_3 \frac{\partial w_i^{2\lambda'}}{\partial t_3} D_\delta^1(\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) dt\, dt_3$$

$$\mathcal{T}_2 = -\int_Y \pi^{2\lambda} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{1\lambda'}}{\partial t_i} D_\delta^1(h) - t_3 \frac{\partial w_i^{1\lambda'}}{\partial t_3} D_\delta^1(\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) dt\, dt_3$$

$$\mathcal{T}_3 = -\int_Y \pi^{2\lambda'} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{1\lambda}}{\partial t_i} D_\delta^1(h) - t_3 \frac{\partial w_i^{1\lambda}}{\partial t_3} D_\delta^1(\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) dt\, dt_3$$

$$\mathcal{T}_4 = -\int_Y \pi^{1\lambda'} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_i^{2\lambda}}{\partial t_i} D_\delta^1(h) - t_3 \frac{\partial w_i^{2\lambda}}{\partial t_3} D_\delta^1(\frac{\partial h}{\partial t_i}) \right) dt\, dt_3$$

En utilisant de nouveau les estimations du lemme 2.6.4 et l'hypoyhèse (H_0) sur la fonction h, on obtient :

$$\left| D_\delta^1(a_{12}^\lambda) \right| = \left| \int_Y D_\delta^1(w_1^{2\lambda} h)\, dt\, dt_3 \right| \leq K\lambda^2$$

et de la même façon :

$$\left| D_\delta^2(a_{12}) \right| \leq K\lambda^2$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 2.6.7.

□

Avant de chercher les convergences, on rappelle le théorème fondamental de Lebesgue que nous utiliserons plusieurs fois dans la suite.

Théorème 2.6.8 (Théorème de Lebesgue). *Soit (f_λ) une suite de fonctions de $L^1(w)$ vérifiant :*

$$p.p.\ x \in w \qquad f_\lambda(x) \to f^\star(x)$$

S'il existe une fonction $g(x)$ positive dans $L^1(w)$ telle que :

$$p.p.\ x \in w, \quad \forall \lambda \qquad |f_\lambda(x)| \leq g(x)$$

alors f_λ est intégrable et on a :

$$\int_w f_\lambda(x)\, dx \to \int_w f_\star(x)\, dx$$

Pour démontrer la convergence forte, on aura besoin d'utiliser le lemme classique suivant :

Lemme 2.6.9. *Soit (f_λ) une suite qui converge faiblement vers $f^\star$ dans $L^2(w)$. Si on a la convergence des normes :*

$$\|f_\lambda\|_{L^2(w)} \to \|f_\star\|_{L^2(w)} \tag{2.116}$$

alors f_λ converge fortement vers $f^\star$ dans $L^2(w)$.

On peut énoncer maintenant le résultat de convergence des coefficients dans l'équations en pression (2.76) :

Proposition 2.6.10. *Lorsque λ tend vers zéro, on a les convergences suivantes :*

$$\frac{1}{\lambda^2} a_{ij}^\lambda(x) \text{ converge fortement vers } a_{ij}^\star(x) \text{ dans } \mathcal{C}^0(\overline{w})$$

$$\tilde{w}_i^{3\lambda} \text{ converge faiblement vers } \tilde{w}_i^{3\star} \qquad \text{dans } L^2(w) \qquad i = 1, 2$$

avec

$$a_{ij}^\star(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{h^3}{12\mu} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^{j\star}}{\partial y_i} \right) dy$$

et

$$\tilde{w}_i^{3\star} = \int_0^1 \int_0^1 \left(s_i \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} \right) dy$$

Preuve

D'après le théorème 2.6.1, on a :

$$\forall x \in w \qquad \frac{1}{\lambda^2} w^{k\lambda} \rightharpoonup w^{k\star} \text{ dans } L^2(B_x)^3 \text{ faiblement} \qquad k = 1, 2$$

ce qui implique, en intégrant sur B_x que

$$\forall x \in w \qquad \frac{1}{\lambda^2} a_{ij}^\lambda = -\frac{1}{\lambda^2} \int_{B_x} w_i^{j\lambda} \, dy \, dx_3 \to \tilde{w}_i^{j\star} = -\int_{B_x} w_i^{j\star} \, dy \, dx_3 = \int_Y \frac{h^3}{12\mu} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^{j\star}}{\partial y_i} \right) dy$$

D'autre part, d'après la proposition 2.6.7 ; il existe $a_{ij}^\star$ dans $W^{1,q}(w)$ tels que :

$$\frac{1}{\lambda^2} a_{ij}^\lambda(x) \rightharpoonup a_{ij}^\star(x) \text{ dans } W^{1,q}(w) \qquad \forall q > 1$$

Par inclusion compacte de $W^{1,q} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{w})$ et par unicité de la limite, on déduit que :

$$\frac{1}{\lambda^2} a_{ij}^\lambda(x) \to a_{ij}^\star(x) = \tilde{w}_i^{j\lambda} \text{ dans } \mathcal{C}^0(\overline{w}) \text{ fortement}$$

Pour $w_k^{3\lambda}$, on utilise le théorème 2.6.2, qui affirme la convergence faible de $w^{3\lambda}$ dans $L^2(B_x)^3$, donc en intégrant sur B_x, on a :

$$\forall x \in w \qquad \tilde{w}^{3\lambda} = \int_{B_x} w^{3\lambda}\, dy\, dx_3 \to \int_{B_x} w^{3\star}\, dy\, dx_3$$

Soit φ dans $L^2(w)$. On a pour presque tout x dans w $\quad \varphi\tilde{w}_k^{3\lambda} \to \varphi\tilde{w}_k^{3\star} \qquad k = 1, 2$ et

$$\left|\tilde{w}_k^{3\lambda}\varphi(x)\right| \leq K\,|\varphi(x)|$$

En appliquant le théorème de Lebesgue, pour $f_\lambda(x) = \varphi(x)\widetilde{w}_k^{3\lambda}$, on obtient :

$$\int_w \tilde{w}_k^{3\lambda}\varphi\, dx \to \int_w \tilde{w}_k^{3\star}\varphi\, dx$$

ce qui donne la convergence faible de $\tilde{w}_k^{3\lambda}$ vers $\tilde{w}_k^{3\star}$ dans $L^2(w)$. Le théorème 2.6.2 donne la valeur de $\int_{B_x} w_i^{3\star}\, dy\, dx_3$ en fonction de $\pi^{3\star}$ qui ne dépend pas de x_3 :

$$\widetilde{w}_i^{3\star} = \int_{B_x} w_i^{3\star}\, dx_3\, dy = \int_{B_x} \left(\frac{1}{2\mu}\frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} x_3(x_3 - h) - s_i\frac{x_3}{h} + s_i\right)\, dx_3\, dy = \int_0^1\int_0^1 \left(-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} + s_i\frac{h}{2}\right)\, dy$$

□

Remarque 2.6.11. *On remarque que la matrice*

$$A^\star = (a_{ij}^\star)_{i,j=1,2}$$

est égale à la matrice A définie par la formule (2.50) *dans le théorème* 2.4.14. *Il résulte de ce théorème que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2 \qquad \sum_{i,j=1}^{2} \xi_i a_{ij}^\star \xi_j \geq \frac{a^3}{12\mu}\,|\xi|^2 \tag{2.117}$$

Proposition 2.6.12. *Quand λ tend vers zéro, la matrice $\dfrac{A^\lambda}{\lambda^2}$ est coercive :*

$$\exists \lambda_0 > 0 \qquad \textit{tel que } \; 0 < \lambda < \lambda_0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{2} \frac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2}\xi_i\xi_j \geq \frac{a^3}{24\mu}\,|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

Preuve

Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \frac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2}\xi_j = \sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \left(\frac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2} - a_{ij}^\star\right)\xi_j + \sum_{i,j=1}^{2} \xi_i a_{ij}^\star \xi_j \tag{2.118}$$

D'autre part, d'après la convergence forte de $\dfrac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2}(x)$ vers $a_{ij}^\star(x)$ dans $\mathcal{C}^0(\overline{w})$, on a pour $\lambda < \lambda_0$

$$\forall x \in w : \left|\frac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2} - a_{ij}^\star\right| \leq \frac{a^3}{48\mu} \qquad i, j = 1, 2$$

En multipliant par $|\xi_i\xi_j|$, on obtient :

$$\forall x \in w : \left|\xi_i\xi_j \frac{a_{ij}\lambda}{\lambda^2} - \xi_i\xi_j a^\star_{ij}\right| \leq \frac{a^3}{48\mu}\,|\xi_i\xi_j| \qquad i,j = 1,2$$

$$\xi_i\xi_j(\frac{a^\lambda_{ij}}{\lambda^2} - a^\star_{ij}) \geq -\frac{a^3}{48\mu}\xi_i\xi_j \geq \frac{-a^3}{96\mu}(\xi_i^2 + \xi_j^2) \tag{2.119}$$

(en utilisant $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$)

Remplaçant (2.119) dans (2.118), en sommant en i et j et en utilisant la coercivité de $a^\star_{ij}$ (2.117), on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \frac{a^\lambda_{ij}}{\lambda^2}\xi_j \geq \frac{a^3}{24\mu}\,|\xi|^2$$

□

Proposition 2.6.13. *Quand λ tend vers zéro, $\lambda^2 p^\lambda$ est borné dans $H^1(w)$, donc il existe $p^\star$ dans $H^1(w)$ tel que $\lambda^2 p^\lambda \rightharpoonup p^\star$ dans $H^1(w)$*

Preuve

Montrons d'abord que $\lambda^2 p^\lambda$ est borné dans H^1. D'après le théorème 2.5.12, $\lambda^2 p^\lambda$ appartient à $H^1(w)$. On prend p^λ comme fonction test dans (2.76) :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_w a^\lambda_{ij} \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j}\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_i}\,dx = \sum_{i=1}^{2} \int_w \tilde{w}_i^{3\lambda}\frac{\partial p^\lambda}{\partial x_i}\,dx - \int_{\partial w}\left(\int_0^{h_{min}} g\,dx_3\right).np^\lambda\,d\sigma$$

D'après la coercivité de A^λ :

$$\frac{a^3}{24\mu}\lambda^2\|\nabla p^\lambda\|^2_{L^2(w)^2} \leq \|\tilde{w}^{3\lambda}\|_{L^2(w)^2}\|\nabla p^\lambda\|_{L^2(w)^2} + K\|p^\lambda\|_{L^2(\partial w)}$$

D'après le théorème de trace dans $H^1(w)$:

$$\|p^\lambda\|_{L^2(\partial w)} \leq K\|p^\lambda\|_{H^1(w)}$$

Rappellons que $\displaystyle\int_w \tilde{h}p^\lambda\,dx = 0$, ce qui implique d'après le lemme 2.4.10 :

$$\|p^\lambda\|_{H^1(w)} \leq K\|\nabla p^\lambda\|_{L^2(w)^2}$$

donc

$$\lambda^2\|\nabla p^\lambda\|_{L^2(w)} \leq K$$

d'où le résultat de la proposition. □

Théorème 2.6.14. *$p^\star$ est l'unique solution de l'équation :*

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_w a_{ij}^\star \frac{\partial p^\star}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int_w \sum_{i=1}^{2} b_i^\star \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx - \int_{\partial w} f.n\varphi\, d\sigma \qquad \forall \varphi \in H^1(w)$$

où $a_{ij}^\star$ est défini dans la proposition 2.6.10,

$$b_i^\star = \int_0^1 \int_0^1 \left(s_i \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} \right) dy \qquad i = 1, 2$$

et

$$f = \int_0^{h_{min}} g\, dx_3$$

Preuve

D'après l'équation (2.76), on a :

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_w \frac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2} \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_w \tilde{w}_i^{3\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx - \int_{\partial w} f.n\varphi\, d\sigma$$

D'après la proposition 2.6.10, $\dfrac{a_{ij}^\lambda}{\lambda^2}$ converge fortement dans $\mathcal{C}^0(\overline{w})$. On peut donc passer à la limite dans le produit. D'après la remarque 2.6.11, il y a unicité de la solution $p^\star$ de cette équation.

□

2.6.3 Convergence des contraintes quand λ tend vers zéro

2.6.2.1 Les contraintes sur Γ_-

Dans cette partie, on étudie le passage à la limite de chaque composante du vecteur contrainte sur la partie inférieure du domaine. Ces composantes sont données dans le théorème 2.5.13 par :

$$V_{-i}^\lambda = -\mu \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial p^\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial \widetilde{w}_i^{j\lambda}}{\partial x_3} + \frac{\partial \widetilde{w}_i^{3\lambda}}{\partial x_3} \right)_{x_3=0} \qquad i = 1, 2$$

$$V_{-3}^\lambda = \lambda^2 p^\lambda$$

La convergence de la 3ème composante est immédiate (voir proposition 2.6.13). Pour la convergence des deux premières composantes, on va montrer la convergence forte dans $L^2(w)$ de $\dfrac{\partial \widetilde{w}_i^{j\lambda}}{\partial x_3}$. Pour ceci on démontrera d'abord la convergence ponctuelle en x, puis par le théorème de Lebesgue la convergence forte dans $L^2(w)$.

Posons :

$$\phi_{ij}^{\lambda}(x_3) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3}\, dy \qquad i,j = 1,2$$

et

$$\phi_{i3}^{\lambda}(x_3) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial w_i^{3\lambda}}{\partial x_3}\, dy$$

Lemme 2.6.15. *On a les convergences ponctuelles suivantes :*

$$p.p\ x \in w \qquad \phi_{ij}^{\lambda}(0) \to \phi_{ij}^{\star}(0) \qquad i = 1,2\ j = 1,2,3$$

avec

$$\phi_{ij}^{\star}(0) = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2\mu} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^{j\star}}{\partial y_i} \right) dy \qquad i,j = 1,2$$

et

$$\phi_{i3}^{\star}(0) = -\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{h}{2\mu} \frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} + \frac{s_i}{h} \right) dy$$

Preuve :
On démontre d'abord la convergence faible de $\phi_{ij}^{\lambda}(x_3)$ dans $H^1(]0,h_{min}[)$, ce qui impliquera la convergence forte dans $\mathcal{C}^0([0,h_{min}])$. La limite sera identifiée en utilisant la définition des solutions des problèmes locaux et on obtiendra une convergence ponctuelle de la trace pour $x_3 = 0$.

Pour $j = 1,2$, rappellons que $w_i^{j\lambda}$ vérifie le problème suivant, pour chaque x dans w :

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\mu \frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial y_1} - \delta_{1i}\pi^{j\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\mu \frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial y_2} - \delta_{2i}\pi^{j\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3}\right) = \delta_{ij} \qquad (y,x_3) \in \underline{B} =]0,1[^2 \times]0,h_{min}[$$

En intégrant par rapport à y, tenant compte de la périodicité de $w^{j\lambda}$, $\dfrac{\partial w^{j\lambda}}{\partial y_i}$ et $\pi^{j\lambda}$, on obtient :

$$\frac{\mu}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3}\, dy\right) = \delta_{ij} \qquad x_3 \in]0,h_{min}[)$$

ce qui implique que $\dfrac{\partial \phi_{ij}^{\lambda}}{\partial x_3}(x_3)$ est bornée dans $L^2(]0,h_{min}[)$.

D'autre part (d'après le lemme 2.5.8)

$$\int_0^{h_{min}} (\phi_{ij}^{\lambda}(x_3))^2\, dx_3 = \frac{1}{\lambda^4} \int_0^{h_{min}} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3}\, dy \right)^2 dx_3 \leq \frac{1}{\lambda^4} \int_{\underline{B}} \left(\frac{\partial w_i^{j\lambda}}{\partial x_3} \right)^2 dx_3\, dy \leq K \qquad i,j = 1,2$$

On a donc l'estimation :

$$\|\phi_{ij}^{\lambda}(x_3))\|_{H^1(]0,h_{min}[)} \leq K \tag{2.120}$$

où K est une constante qui ne dépend pas de x. Il existe donc $\phi^\star_{ij}(x_3)$ limite faible de $\phi^\lambda_{ij}(x_3)$ dans $H^1(]0,h_{min}[)$.

D'après le théorème 2.6.1, on déduit de (2.83) que pour tout x dans w : $(i,j=1,2)$

$$\phi^\lambda_{ij}(x_3) \to \phi^\star_{ij}(x_3) = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial w_i^{j\star}}{\partial x_3}\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2\mu}\left(\delta_{ij}+\frac{\partial \pi^{j\star}}{\partial y_i}\right)(2x_3-h(x,y))\,dy \quad \text{dans } H^1(]0,h_{min}[)$$

De la même façon, pour $j=3$, on obtient $(i=1,2)$:

$$\phi^\lambda_{i3}(x_3) \to \phi^\star_{i3}(x_3) = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial w_i^{3\star}}{\partial x_3}\,dy = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2\mu}\frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i}(2x_3-h(x,y)) - s_i\frac{x_3}{h}+s_i\right)dy \text{ dans } H^1(]0,h_{min}[)$$

La convergence dans $H^1(]0,h_{min}[)$ implique la convergence forte suivante :

$$\forall x\in w \qquad \phi^\lambda_{ij}(x_3)\to\phi^\star_{ij}(x_3) \qquad i,j=1,2,3 \qquad \text{dans } \mathcal{C}^0([0,h_{min}])$$

ainsi que la convergence de trace pour $x_3=0$:

$$\forall x\in w \qquad \phi^\lambda_{ij}(0)\to\phi^\star_{ij}(0) \qquad i=1,2, j=1,2,3$$

ce qui termine la démonstration. □

Lemme 2.6.16.

$$\phi^\lambda_{ij}(0)\to\phi^\star_{ij}(0) \qquad \textit{dans } L^2(w) \textit{ fort}$$

Preuve

On utilise le théorème 2.6.8 de Lebesgue rappelé plus haut, d'abord pour la suite $f_\lambda=\varphi(x)\phi^\lambda_{ij}(0)$ qui converge $p.p.$ x vers $f^\star=\varphi(x)\phi^\star_{ij}(0)$ où φ est dans $L^2(w)$.

D'après (2.120), on déduit :

$$\left|\phi^\lambda_{ij}(0)\right| \le K\|\phi^\lambda_{ij}(x_3)\|_{H^1(]0,h_{min}[)} \le K$$

où K est indépendant de x et de λ.

On en déduit que

$$\int_w \varphi(x)\phi^\lambda_{ij}(0)\,dx \longrightarrow \int_w \varphi(x)\phi^\star_{ij}(0)\,dx$$

Puis on utilise le théorème 2.6.8 avec

$$f_\lambda = \left(\phi^\lambda_{ij}(0)\right)^2$$

ce qui donne la convergence :

$$\int_w \left(\phi^\lambda_{ij}(0)\right)^2\,dx \longrightarrow \int_w \left(\phi^\star_{ij}(0)\right)^2\,dx$$

Le lemme 2.6.9 implique la convergence forte de $\phi^\lambda_{ij}(0)$ vers $\phi^\star_{ij}(0)$.

□

Lemme 2.6.17. *Quand $\lambda \to 0$, on a la convergence suivante :*

$$V_-^\lambda \rightharpoonup V_-^\star = \begin{pmatrix} \mu \sum_{i=1}^2 \dfrac{\partial p^\star}{\partial x_j} c_{1j}^\star(x) + \mu d_1^\star(x) \\ \\ \mu \sum_{i=1}^2 \dfrac{\partial p^\star}{\partial x_j} c_{2j}^\star(x) + \mu d_2^\star(x) \\ \\ p^\star \end{pmatrix} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(w)^3$$

avec

$$c_{ij}^\star(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{h}{2\mu} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \pi^{j\star}}{\partial y_i} \right) dy, \qquad d_i^\star(x) = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{h}{2\mu} \frac{\partial \pi^{3\star}}{\partial y_i} + \frac{s_i}{h} \right) dy$$

Preuve

Le lemme précédent permet de passer à la limite dans le produit pour les deux composantes de V_-^λ. Pour la troisième composante le résultat est immédiat.

Remarque 2.6.18. *En comparant $V_-^\star$ avec le vecteur limite V_- de V_-^ϵ obtenu dans le lemme* 2.4.15*, la remarque* 2.6.3 *montre qu'ils sont identiques.*

2.6.2.2 Les contraintes sur la partie supérieure

La convergence des contraintes sur le bord rugueux à λ fixé quand ϵ tend vers zéro est donnée par le lemme 2.5.15. Cette convergence a été obtenue en multipliant les deux premières composantes par ϵ. (voir commentaire § 2.5.6.2)

Le résultat suivant montre que lorsque λ tend vers zéro, les deux premières composantes de V_+^λ convergent vers zéro. Si l'on compare avec les convergences obtenues dans le lemme 2.4.15, on peut penser que ce résultat n'est pas optimal.

Lemme 2.6.19. *lorsque λ tend vers zéro, on a :*

$$V_+^\lambda \ \to \ V_+^{\star\star} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p^\star \end{pmatrix} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(w)^3$$

avec V_+^λ est le vecteur contrainte défini dans le lemme 2.5.15.

Preuve

On démontre d'abord la convergence forte dans $L^2(w\times]0,1[^2)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}}$ vers 1.

En utilisant la formule :

$$0 < x < 1, \qquad 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} < \frac{x}{2}$$

on a :

$$\int_{w\times]0,1[^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} - 1 \right)^2 dx\, dy \leq \lambda^4 \int_{w\times]0,1[^2} \left((\frac{\partial h}{\partial y_1})^2 + \frac{\partial h}{\partial y_2})^2 \right)^2 dx\, dy$$

(2.121)

D'autre part, par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int_w \left(\int_0^1 \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} - 1)\, dy \right)^2 dx \leq \int_w \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} - 1 \right)^2 dxdy$$

On déduit de (2.121) que :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}}\, dy \to 1 \qquad \text{dans } \ L^2(w)$$

Ce qui donne la convergence de la troisième composante de V_+^λ.

Pour les deux premières composantes, on considère φ dans $\mathcal{D}(w)$, on a :

$$\int_{w\times]0,1[^2} \frac{\dfrac{\partial h}{\partial y_i}}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} \lambda^2 p^\lambda \varphi\, dx\, dy = \int_{w\times]0,1[^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_1})^2+\lambda^2(\frac{\partial h}{\partial y_2})^2}} - 1 \right) \frac{\partial h}{\partial y_i} \lambda^2 p^\lambda \varphi\, dxdy$$

$$+ \int_{w\times]0,1[^2} \frac{\partial h}{\partial y_i} \lambda^2 p^\lambda \varphi\, dx\, dy \qquad i = 1, 2$$

Par périodicité de h, le deuxième terme $\displaystyle\int_{w\times]0,1[^2} \frac{\partial h}{\partial y_i} \lambda^2 p^\lambda \varphi\, dx\, dy$ est nul. La convergence forte du terme entre parenthèse dans $L^2 \times]0,1[^2$ et le fait que $\lambda^2 p^\lambda$ soit borné dans $L^2(w)$, donne une limite nulle.

$\square$

Bibliographie

[1] Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin, *Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries.* J.Comput. Phys. 147 (1998), N° 1, 187-218.

[2] G. Allaire, *Homogenization and Two-Scale convergence*, SIAM .J. Math. Ana. 23 (1992), 1482-1518.

[3] Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine, J. Simon, *Effect of rugosity on a flow governed by stationary Navier-Stokes equations.* Quart. Appl. Math. 59 (2001), N° . 4, 769-785.

[4] G. Bayada, M. Chambat, *Homogenization of the Stokes system in a thin film flow with rapidly varying thickness*, Math. M2AN, vol. 23, N° 2, (1989) , p.205-234

[5] G. Bayada, M. Chambat, *New models in the theory of the hydrodynamic lubrication of rough surfaces,* Trans. of the ASM., J. of Trib., 110, 1988, 402-407.

[6] G. Bayada and M. Chambat, *On interface conditions for a thin film flow past a porous medium*, SIAM J. Math. anal. , 26, 5 , (1995), 1113-1129.

[7] G. Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation : a mathematical proof.* Appl. Math. Optim. 14 (1986), N° 1, 73-93.

[8] G. Bayada, M. Chambat and J.B. Faure, *Some effects of the boundary roughness in a thin film flow*, Preprint N° 58, (1986), lyon1.

[9] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et application*, Dunod, Paris, 1999

[10] I. Charpentier, J. Saint Jean Paulin, *Limit behaviour of a three-dimensional thin tall structure depending on three small parameters,* Ricerche. Mat. 44 (1995), N° 2, 459-488.

[11] H. Christensen et K. Tonder, *The hydrodynamic lubrication of rough bearing surfaces of finite width*, J. of Lub. Tech., Trans. ASME, F, 93 (3) (1971), 324-330.

[12] M.Dauge *Stationary Stokes and Navier-Stokes systems on two-or three-dimensional domains with corners.* Part 1 - linearized equations, SIAM J. Math. Anal. 20 (1989) 74 - 97.

[13] J.B. Faure, *Application des techniques d'homogénéisation à la prise en compte des phénomènes de rugosité en lubrification hydrodynamique*, thèse, lyon 1, 1986.

[14] V. Girault- P.A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier Stokes Equation*, Springer-Verlag, 1979.

[15] W. Jäger, A. Mikelić, *Couette flows over a rough boundary and drag reduction.* Comm. Math. Phys. 232 (2003), N° . 3, 429-455.

[16] G. Nguetseng, *Ageneral Convergence Result for a Fonctional related to the Theory of Homogenezation*, SIAM .J. MATH. anal., 20,3 (1989), 608-623.

[17] N. Phan Thien, *Hydrodynamic lubrication of rough surfaces*, Proc. R. Soc. London, A383 (1982) 439-446.

[18] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[19] R. Temam, *Navier Stokes Equation*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[20] R. Temam, *Cours de Post-Dea de R. Temam, Autour de la Mécanique des fluides*, ENS de Lyon, Mars 2001.

Chapitre 3

Nouvelles conditions aux limites associées à un écoulement micropolaire

3.1 Introduction

The description of fluids with microstructure made of small rigid particles was developped by [10] and [1] in the 1960's. The related mathematical models are based on the introduction of an additional vector field, the microrotation $\hat{\omega}$, to the classical pressure $\hat{p}$ and velocity fields $\hat{u}$. Assuming small Reynolds number and a main direction of the flow (see Remark 3.2.1), it is possible to neglect the non linear terms and to consider the following micropolar equations where $\hat{\omega}$ is a scalar function .

$$-(\nu + \nu_\gamma)\triangle\hat{u} + \nabla\hat{p} = 2\nu_\gamma \mathrm{rot}\,\hat{\omega} \tag{3.1}$$

$$-(c_a + c_d)\triangle\hat{\omega} + 4\nu_\gamma\hat{\omega} = 2\nu_\gamma \mathrm{rot}\,\hat{u} \tag{3.2}$$

$$\mathrm{div}\,\hat{u} = 0 \tag{3.3}$$

the positive constants $\nu, \nu_\gamma, c_a, c_d$ are different viscosities that characterize the isotropic properties of the fluid. [18]

For Dirichlet boundary conditions on velocity and microrotation, this set of equations has been widely studied. Existence and uniqueness results can be found in [4] [18] for both stationary and nonstationary problems in a weak or strong formulation. In that work the Dirichlet boundary conditions for the velocity are related to the classical adhesion assumption. For the microrotation, the situation is more confused as it reflects the micropolar fluid-interface interaction and using zero Dirichlet boundary conditions seems to be a common practice. In [7], an attempt is made to explain the discrepancies between experimental and theoretical measurements of the shear viscosity near the solid surfaces by way of the concept of boundary viscosity. A new coupling relation between the velocity and the microrotation on the boundary is proposed in [7] :

$$\hat{\omega} = \frac{\alpha}{2}\nabla \times \hat{u} \quad \text{and} \quad \hat{u}.n = 0 \tag{3.4}$$

the coefficient α taking a microrotation retardation at the boundary into account and being connected with the different viscosity coefficients.

Deriving in some heuristic way from equation (3.1),(3.2) and (3.3) a thin film approximation system of equations and retaining together with (3.4) a no slip condition for

the velocity, enable a generalized Reynolds equation for the pressure to be obtained [8]. Comparisons between the numerical solutions obtained using newtonian and classical micropolar models appear in [10], while comparisons between classical micropolar model and the present new model are shown in [8].

Let us recall on the other hand that the no-slip assumption of the fluid-solid interface, even for a Newtonian fluid (without microrotation), has often been discussed and numerous boundary conditions allowing slippage at the surface have been introduced [2], [6]. The slippage is assumed to be related to the effect of the roughness or chemical properties of the surfaces.

It is the purpose of this paper to revisit the proposed system (3.1)-(3.4) in a more rigorous way and to derive the related thin film approximation. It will be shown that it is not possible to have simultaneously a condition like (3.4) and a no-slip condition for the velocity. Another boundary condition will be proposed to control the slippage effect on the surface. It turns out to be a Neumann condition for the microrotation, introducing a parameter β such that :

$$(\nabla \times \hat{\omega})_1 = \frac{-2\nu_\gamma}{c_a + c_d} \beta \left(\hat{u}_1 - \hat{s}\right)$$

where $\hat{s}$ is the given tangential velocity of the wall. This condition appears in a natural way using a variational formulation and tends to confirm experimental results in lubrication [12], [13], [14], [15], [16] in which slippage effects are enhanced by the non-Newtonian characteristics of the fluid.

The paper is organized as follows. In section 3.2.3, we give a weak formulation for the system for which existence and uniqueness results are obtained in section 3.3 assuming suitable conditions on the various parameters. Section 3.4 is devoted to the derivation of a generalized micropolar Reynolds equation. For that purpose, we first introduce a small parameter describing the fact that the gap is thin. Then we gain estimates for the velocity, the microrotation and the pressure. Finally we obtain a system coupling the limit velocity, pressure and microrotation with related boundary conditions. The precise description of the corresponding Reynolds equation is detailed in section 3.4.3. In section 3.5, we give some numerical results making evidence of the influence of the new parameters α and β that occur in the boundary conditions. We compare also our results to those obtained by retaining a no slip condition for the velocity [8].

For sake of simplicity, we will consider a $2D$ domain and the new boundary conditions will be introduced only on the flat part of the boundary. (see fig. 3.1)

3.2 Problem situation

3.2.1 Basic micropolar equations :

Let us consider a micropolar flow in a domain $\hat{E}$ defined by :

$$\hat{E} = \{(Z, Z_3) : \qquad 0 < Z < L \ , 0 < Z_3 < \hat{H}(Z)\}$$

where $\hat{H}$ is a continuously differentiable positive function, and $L > 0$ is given.

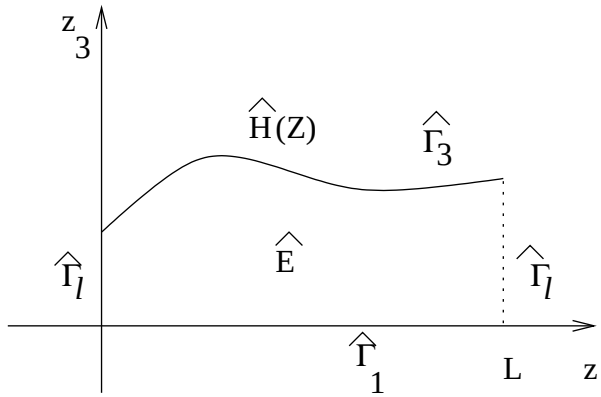

FIG. 3.1 – The domain $\hat{E}$

Let $\hat{\Gamma}_3, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_l$ be the upper, lower and lateral boundaries of $\hat{E}$:

$$\hat{\Gamma}_3 = \{(Z, Z_3),\, 0 < Z < L \text{ et } \quad Z_3 = \hat{H}(Z)\}$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \{(Z, Z_3),\, 0 < Z < L \quad Z_3 = 0\}$$

$$\hat{\Gamma}_l = \partial\hat{E} - (\hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_3)$$

the corresponding equations are (3.1)-(3.3).

Natural boundary conditions for the velocity and microtation are given on $\hat{\Gamma}_3 \cup \hat{\Gamma}_l$:

$$\hat{u} = \hat{G} \text{ on } \hat{\Gamma}_3 \cup \hat{\Gamma}_l \quad \text{with } \hat{G} = 0 \text{ on } \hat{\Gamma}_3 \tag{3.5}$$

$$\hat{\omega} = 0 \quad \text{on } \hat{\Gamma}_3 \cup \hat{\Gamma}_l \tag{3.6}$$

On $\hat{\Gamma}_1$, we consider the condition (3.4) proposed in [7] together with the natural one corresponding to the impermeability of the wall :

$$\hat{u}.n = 0 \qquad \text{on } \hat{\Gamma}_1 \tag{3.7}$$

where n is the unit external normal vector

A supplementary condition on $\hat{\Gamma}_1$ is needed to close the system. We multiply (3.2) by a test function $\hat{\psi}$ belonging to $H^1(\hat{E})$ and equal to zero on $\hat{\Gamma}_3 \cup \hat{\Gamma}_l$.

After integration by part, we get :

$$(c_a + c_d) \int_{\hat{E}} \nabla\hat{\omega}.\nabla\hat{\psi}\, dZ\, dZ_3 + \int_{\hat{\Gamma}_1} \left((c_a + c_d)\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial Z_3} + 2\nu_\gamma \hat{u}_1 \right) \hat{\psi}\, d\sigma +$$

$$4\nu_\gamma \int_{\hat{E}} \hat{\omega}\hat{\psi}\, dZ\, dZ_3 = 2\nu_\gamma \int_{\hat{E}} \operatorname{rot}\hat{\psi}\hat{u}\, dZ\, dZ_3$$

In this equation, the unknown term $\dfrac{\partial\hat{\omega}}{\partial Z_3}$ prevents to get a well posed variational formulation. Let us remark that the value $\hat{u}_1 - \hat{s}$, if no zero, is characteristic of a slippage on $\hat{\Gamma}_1$. It is then possible to get a known term on $\hat{\Gamma}_1$ by assuming :

$$\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial Z_3} = \frac{-2\nu_\gamma}{c_a + c_d}(\hat{u}_1 - \hat{s}) \text{ on } \quad \hat{\Gamma}_1$$

In a more general way, we will impose the following condition :

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial Z_3} = \frac{-2\nu_\gamma}{c_a + c_d}\beta(\hat{u}_1 - \hat{s}) \text{ on } \quad \hat{\Gamma}_1 \tag{3.8}$$

β being an additional parameter which will allow the influence of this new condition to be controlled.

3.2.2 Rescaling

Let us introduce the nondimensional normalized variables and functions :

$$z_1 = \frac{Z}{L},\ z_3 = \frac{Z_3}{L},\ H = \frac{\hat{H}}{L}$$

$$u = \frac{\hat{u}}{g_0},\ p = \frac{L}{g_0(\nu + \nu_\gamma)}\hat{p},\ \omega = \frac{L}{g_0}\hat{\omega}, G = \frac{\hat{G}}{g_0}$$

$$N^2 = \frac{\nu_\gamma}{\nu + \nu_\gamma}, R_M = \frac{c_a + c_d}{\nu + \nu_\gamma}\frac{1}{L^2}, s = \frac{\hat{s}}{g_0}$$

where g_0 is a characteristic velocity of the surface. The fluid domain is then :

$$E = \{(z_1, z_3) : \ z_1 \in]0, 1[,\ 0 < z_3 < H(z_1)\}$$

We assume that a and $b = \max_{z_1} H(z_1)$ exist, such that :

$$0 < a \leq H(z_1) \leq b \qquad\qquad \forall z_1 \in [0, 1]$$

Equations (3.1), (3.2) and (3.3) become :

$$-\triangle u + \nabla p = 2N^2 \mathrm{rot}\, \omega = 2N^2(-\frac{\partial \omega}{\partial z_3}, \frac{\partial \omega}{\partial z_1}) \quad \text{in } E \tag{3.9}$$

$$-R_M \triangle \omega + 4N^2\omega = 2N^2 \mathrm{rot}\, u = 2N^2(\frac{\partial u_1}{\partial z_3} - \frac{\partial u_3}{\partial z_1}) \quad \text{in } E \tag{3.10}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{in } E \tag{3.11}$$

Remark 3.2.1. *Before introducing the weak formulation of problem, we provide one possible mechanical situation leading to present geometrical notations.*
Let us consider the 3D domain :

$$Q = \{(z_1, z_2, z_3) \in R^3 : (z_1, z_3) \in E, -\infty < z_2 < +\infty\}$$

then E may be viewed as a cross-section of Q perpendicular to the z_2-axis. Assuming that the flow in Q does not depend on the z_2- coordinate, the velocity component u_2 in the z_2-direction is zero, and the particles rotation axe are parallel to Oz_2, the fields u and ω reduce to :

$$u = (u_1, 0, u_3)$$

$$\omega = (0, \omega, 0)$$

that are exactly those to be found in equations (3.9)-(3.11).

3.2.3 Weak formulation of the problem

Let us precise some conditions on G, to get a variational formulation :

$$G \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3 \cup \Gamma_l)^2, \text{ with } \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_l} G.n \, d\sigma = 0 \tag{3.12}$$

We introduce a lift of the boundary condition in the following lemma.

Lemma 3.2.2. *There exists J in $H^1(E)^2$ such that*

$$\operatorname{div} J = 0, J = G \quad on\, \Gamma_3 \cup \Gamma_l \text{ and } J_3 = 0 \quad on\, \Gamma_1$$

Proof

Actual known boundary conditions are given on $\Gamma_3 \cup \Gamma_l$. On Γ_1, only the normal component of the velocity (the velocity of the "wall") is known and is zero, while the tangential velocity is unknown. It is always possible to choose an "artifical value g" on Γ_1 such that the function defined by :

$$\xi = \begin{cases} G & \text{on} \quad \Gamma_3 \cup \Gamma_l \\ (g, 0) & \text{on} \quad \Gamma_1 \end{cases}$$

belongs to $H^{\frac{1}{2}}(\partial E)^2$ and fulfils condition $\int_{\partial E} \xi.n \, d\sigma = 0$

This condition allows to construct $J = (J_1, J_3)$ belonging to $H^1(E)^2$ which is a lift of the velocity boundary conditions with $\operatorname{div} J = 0$ in E. □

Remark 3.2.3. *Assuming $G(0,0) = G(L,0) = (s,0)$, a possible choice of ξ in $H^{\frac{1}{2}}(\partial E)^2$ is :*

$$\xi = \begin{cases} G & on\, \Gamma_3 \cup \Gamma_l \\ (s, 0) & on\, \Gamma_1 \end{cases}$$

Now we are able to introduce the variational formulation. Setting :

$$v = u - J$$

equations (3.9)-(3.11) can be rewritten :

$$-\triangle(v + J) + \nabla p = 2N^2 \operatorname{rot} \omega \tag{3.13}$$

$$-R_M \triangle \omega + 4N^2 \omega = 2N^2 \operatorname{rot}(v + J) \tag{3.14}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{3.15}$$

with boundary conditions :

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \nabla \times (v + J) \text{ on } \Gamma_1 \tag{3.16}$$

$$R_M \frac{\partial \omega}{\partial z_3} = -2N^2 \beta (v_1 + g - s) \text{ on } \Gamma_1 \tag{3.17}$$

$$v_3 = 0 \text{ on } \Gamma_1 \tag{3.18}$$

$$v = \omega = 0 \ \text{ on } \Gamma_3 \cup \Gamma_l \tag{3.19}$$

Due to the boundary conditions, we introduce the following functional spaces :

$$V = \{\varphi \in H^1(E)^2,\ \varphi_{/\Gamma_3 \cup \Gamma_l} = 0,\ \varphi_3 = 0 \,\text{on}\, \Gamma_1\}$$

$$V_0 = \{\varphi \in V : \ \ \text{div}\varphi = 0\}$$

$$H = \{\psi \in H^1(E),\ \psi_{/\Gamma_3 \cup \Gamma_l} = 0\}$$

$$L_0^2(E) = \{q \in L^2(E) : \ \int_E q\, dz_1\, dz_3 = 0\}$$

Theorem 3.2.4. *Sufficiently regular solutions of* (3.13) − (3.19) *satisfy the weak formulation : Find* $v \in V_0$, *and* $\omega \in H$ *:*

$$\int_E (\nabla \times v).(\nabla \times \varphi)\, dz_1\, dz_3 - \int_E p\ \text{div}\varphi\, dz_1\, dz_3 - 2N^2 \int_E \text{rot}\ \varphi\omega\, dz_1\, dz_3 -$$

$$2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \omega\varphi_1\, d\sigma = -\int_E (\nabla \times J).(\nabla \times \varphi)\, dz_1\, dz_3 \qquad \forall \varphi \in V \tag{3.20}$$

$$R_M \int_E \nabla\omega.\nabla\psi\, dz_1\, dz_3 + 4N^2 \int_E \omega\psi\, dz_1\, dz_3 - 2N^2 \int_E \text{rot}\,\psi\ v\, dz_1\, dz_3 - 2N^2(\beta - 1) \int_{\Gamma_1} \psi v_1\, d\sigma =$$

$$2N^2 \int_{\Gamma_1} \beta(g - s)\psi\, d\sigma + 2N^2 \int_E \text{rot}\, J\, \psi\, dz_1\, dz_3 \qquad \forall \psi \in H \tag{3.21}$$

Proof

There are several ways to write a weak formulation of the problem, depending how we integrate $\text{rot}\,\omega$ or $\text{rot}\, u$ in the two equations. This leads to equivalent although different formulations.

Let us recall the following formulas :

$$-\triangle\varphi = \nabla \times (\nabla \times \varphi), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(E), \text{ with } \text{div}\,\varphi = 0 \tag{3.22}$$

$$\int_E \text{rot}\ \psi\varphi\ dx\ dz_3 = \int_E \text{rot}\,\varphi\psi + \int_{\Gamma_1} \psi\varphi_1\ d\sigma \qquad \forall (\varphi, \psi) \in V \times H \tag{3.23}$$

Due to (3.15), (3.18) and (3.19), solutions of (3.13)-(3.19) are in $V_0 \times H$.

Choosing (φ, ψ) on $V \times H$, and multiplying (3.13) by φ, we obtain :

$$\int_E (\nabla \times v).(\nabla \times \varphi)\, dz_1\, dz_3 - 2N^2 \int_E \text{rot}\,\varphi\omega\, dz_1\, dz_3 - \int_E p\, \text{div}\varphi\, dz_1\, dz_3 =$$

$$-\int_{\Gamma_1} (\nabla \times v)\varphi_1\, d\sigma + 2N^2 \int_{\Gamma_1} \omega\varphi_1\, d\sigma - \int_E (\nabla \times J).(\nabla \times \varphi) - \int_{\Gamma_1} (\nabla \times J)\varphi_1\, d\sigma\, dz_1\, dz_3 \ \ \forall \varphi \in V$$

Taking into account the boundary condition (3.16), we obtain equation (3.20)

In the same way, multiplying (3.14) by ψ, integrating and using the Green's formula (3.23), we obtain :

$$R_M \int_E \nabla\omega.\nabla\psi \, dz_1 \, dz_3 + 4N^2 \int_E \omega\psi \, dz_1 \, dz_3 - 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \psi v \, dz_1 \, dz_3 = -R_M \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\omega}{\partial z_3}\psi \, d\sigma$$

$$-2N^2 \int_{\Gamma_1} \psi v_1 \, d\sigma + 2N^2 \int_E \operatorname{rot} J\psi \, dz_1 \, dz_3 \qquad \forall \psi \in H$$

Using (3.17), we obtain (3.21). □

Remark 3.2.5. *The boundary conditions* (3.16)-(3.17) *can be recovered for solutions of the weak formulation* (3.20)-(3.21) *by classical argument.*

3.3 Existence and uniqueness

In this section, we give two proofs of the existence and uniqueness of the solution to problem (3.20) (3.21), each valid for different domains for parameters.

Without any other mention, $\| \, \|$ denotes L^2 or $((L^2)^2$ or $(L^2)^4)$ norms.

3.3.1 Existence and uniqueness with mixed formulation

Let us first recall the following lemmas :

Lemma 3.3.1. *[11] Let X and M be two Hilbert spaces with respective norms $\|.\|_X$ and $\|.\|_M$. Let A and B be two continuous bilinear forms and F a continuous linear form. Let us consider the mixed variational problem (P) :*

$$(P) \begin{cases} Find\,(u,p) \in X \times M, \text{ such that}: \\ A(u,v) + B(v,p) = F(v) & \forall v \in X \\ B(u,q) \qquad\qquad = 0 & \forall q \in M \end{cases}$$

Under the hypothesis :

i) $\exists \eta > 0$ *such that* $A(v,v) \geq \eta \|v\|_X^2 \quad \forall v \in \{v \in X, B(v,q) = 0, \ \forall q \in M\}$

ii) $\exists \delta > 0$, *such that* $\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \dfrac{B(v,q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \delta$

the problem (P) has one and only one solution (u,p) in $X \times M$.

Lemma 3.3.2. [20] *For all q in $L_0^2(E)$, there exists v_0 in $H_0^1(E)$ and $C > 0$, such that :*

$$\operatorname{div} v_0 = q \quad \text{and} \quad \|\nabla v_0\|_{L^2(E)^2} \leq C \|q\|_{L^2(E)}.$$

Let us introduce the following notations :

$$\mathcal{A}\left((v,\omega),(\varphi,\psi)\right) = \int_E (\nabla\times v).(\nabla\times\varphi) \, dz_1 \, dz_3 - 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \varphi \, \omega \, dz_1 \, dz_3 - 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \psi.v \, dz_1 \, dz_3$$

$$-2(N^2-\frac{1}{\alpha})\int_{\Gamma_1}\omega\varphi_1\,d\sigma-2N^2(\beta-1)\int_{\Gamma_1}\psi v_1\,d\sigma+R_M\int_E\nabla\omega.\nabla\psi\,dz_1\,dz_3+4N^2\int_E\omega\psi\,dz_1\,dz_3$$

$$\mathcal{B}\left((\varphi,\psi),p\right)=-\int_E p\,\mathrm{div}\,\varphi\,dz_1\,dz_3$$

$$\mathcal{L}(\varphi,\psi)=2N^2\int_E \mathrm{rot}\,J\psi-\int_E(\nabla\times J).(\nabla\times\varphi)\,dz_1\,dz_3+\int_{\Gamma_1}2N^2\beta(g-s)\psi\,d\sigma$$

Problem (3.20) (3.21) can be written in the following mixed variational form :
Find $(v,\omega,p)\in V\times H\times L_0^2(E)$, such that :

$$\mathcal{A}\left((v,\omega),(\varphi,\psi)\right)+\mathcal{B}((\varphi,\psi),p)=\mathcal{L}(\varphi,\psi)\quad\forall(\varphi,\psi)\in V\times H \tag{3.24}$$

$$\mathcal{B}((v,\omega),q)\qquad=0\qquad\forall q\in L_0^2(E) \tag{3.25}$$

Theorem 3.3.3. *Assuming*

$$N^2<\frac{1}{2},\quad \textit{and}\quad \frac{b}{\sqrt{1-2N^2}}\left(\left|\frac{1}{\alpha}-N^2\right|+\beta N^2\right)\leq\frac{\sqrt{R_M}}{2} \tag{3.26}$$

where $b=\max_{z_1}H(z_1)$, *there is one and only solution to* (3.24) − (3.25).

Proof :
We use lemma 3.3.1 with $X=V\times H$, $M=L_0^2(E)$, $A=\mathcal{A}$, $B=\mathcal{B}$, and $F=\mathcal{L}$.
It is obvious that $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ (respectively $\mathcal{L}$) are continuous bilinear forms on $(V\times H)^2$, $V\times H\times L_0^2(E)$ (respectively linear form on $V\times H$).

-We will prove now condition *i)*. For any (φ,ψ) in $V\times H$, we have :

$$\mathcal{A}\left((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\right)=\int_E(\nabla_\epsilon\times\varphi)^2\,dz_1\,dz_3-2N^2\int_E\mathrm{rot}\,\varphi\psi\,dz_1\,dz_3-2N^2\int_E\mathrm{rot}\,\psi\varphi\,dz_1\,dz_3$$

$$+\frac{2}{\alpha}\int_{\Gamma_1}\psi\varphi_1\,d\sigma-2N^2\beta\int_{\Gamma_1}\psi\varphi_1\,d\sigma+R_M\int_E(\nabla\psi)^2\,dz_1\,dz_3+4N^2\int_E\psi^2\,dz_1\,dz_3$$

We derive another expression of $\mathcal{A}$ by applying (3.23) to $\int_E\mathrm{rot}\,\psi.\varphi\,dz_1\,dz_3$:

$$\mathcal{A}\left((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\right)=\int_E(\nabla\times\varphi)^2\,dz_1\,dz_3-4N^2\int_E\mathrm{rot}\,\varphi.\psi\,dz_1\,dz_3$$

$$+2\left(\frac{1}{\alpha}-N^2\right)\int_{\Gamma_1}\psi\varphi_1\,d\sigma-2N^2\beta\int_{\Gamma_1}\psi\varphi_1\,d\sigma+R_M\int_E(\nabla\psi)^2\,dz_1\,dz_3+4N^2\int_E\psi^2\,dz_1\,dz_3$$

From the Poincaré's inequality :

$$\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)}\leq\sqrt{b}\|\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\|_{L^2(E)}\qquad\forall\varphi\in H^1(E),\ \varphi_{/\Gamma_3}=0$$

and the identity :

$$\int_E (\nabla \times \varphi)^2 \, dz_1 \, dz_3 = \int_E (\nabla \varphi)^2 \, dz_1 \, dz_3 \quad \forall \varphi \in V \tag{3.27}$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain :

$$I = \mathcal{A}\left((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\right) \geq \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\|^2 + \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\|^2 + \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_1}\|^2 + \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_3}\|^2 - 4N^2 \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\| \|\psi\|$$

$$-4N^2 \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_1}\| \|\psi\| - 2\left(\left|\frac{1}{\alpha} - N^2\right| + N^2\beta\right) b \|\frac{\partial \psi}{\partial z_3}\| \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\| + R_M \|\nabla \psi\|^2 + 4N^2 \|\psi\|^2$$

For any constants $A_i, i = 1,2,3,\ (B_i, C_i, D_i), i = 1,2$ in R_+ such that

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{2} B_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{2} C_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{2} D_i = 1$$

we get :

$$I \geq \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\|^2 + A_3 \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\|^2 + B_2 \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_1}\|^2 + \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_3}\|^2 + \left[A_1 \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\|^2 - 4N^2 \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\| \|\psi\| + 4N^2 D_1 \|\psi\|^2\right]$$

$$+\left[A_2 \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\|^2 - 2b(\left|\frac{1}{\alpha} - N^2\right| + N^2\beta) \|\frac{\partial \psi}{\partial z_3}\| \|\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_3}\| + R_M C_1 \|\frac{\partial \psi}{\partial z_3}\|^2\right]$$

$$+R_M C_2 \|\frac{\partial \psi}{\partial z_3}\|^2 + R_M \|\frac{\partial \psi}{\partial z_1}\|^2 + \left[B_1 \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_1}\|^2 - 4N^2 \|\frac{\partial \varphi_3}{\partial z_1}\| \|\psi\| + 4N^2 D_2 \|\psi\|^2\right]$$

By choosing :

$$A_1 = 2N^2,\ A_2 = \frac{1-2N^2}{2},\ A_3 = \frac{1-2N^2}{2},\ B_1 = 2N^2,\ B_2 = 1-2N^2, C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = \frac{1}{2}$$

and assuming (3.26), it is easy to prove that the terms into brackets are positive, so that :

$$I \geq \frac{1-2N^2}{2} \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(E)^4} + \frac{R_M}{2} \|\nabla \psi\|^2_{L^2(E)^2} \tag{3.28}$$

so, *i)* is verified.

-Now, to prove condition *ii)*, we use lemma 3.3.2. Let (φ, ψ) belong to $V \times H$, and q to $L^2_0(E)$, we obtain :

$$(H^1_0(E))^2 \times \{0\} \subseteq V \times H$$

so that :

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in V\times H} \frac{\int_E \operatorname{div}\varphi \, q \, dz_1 \, dz_3}{\left(\|\varphi\|^2_V + \|\psi\|^2_{H^1}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \sup_{(\varphi,0)\in (H^1_0)^2\times\{0\}} \frac{\int_E \operatorname{div}\varphi \, q \, dz_1 \, dz_3}{\|\nabla \varphi\|}$$

$$= \sup_{\varphi \in (H^1_0)^2} \frac{\int_E \operatorname{div}\varphi q \, dz_1 \, dz_3}{\|\nabla \varphi\|}$$

According to lemma 3.3.2, for given $q \in L^2_0(E)$, there exists v_0 such that $\operatorname{div} v_0 = q$. Choosing $\varphi = v_0$:

$$\sup_{(\varphi,\psi)\in V\times H} \frac{\int_E \operatorname{div}\varphi \, q \, dz_1 \, dz_3}{\left(\|\varphi\|^2_V + \|\psi\|^2_H\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\int_E \operatorname{div} v_0 \, q \, dz_1 \, dz_3}{\|\nabla v_0\|}$$

$$= \frac{\|q\|^2_{L^2}}{\|\nabla v_0\|} \geq \frac{1}{C}\|q\|$$

which ends the proof. □

3.3.2 Existence and uniqueness with fixed point procedure

It is possible to give another proof of the existence by considering a fixed point procedure, in a similar way as [4]. In that proof, assuming specific values for the coefficients α and β, the existence and uniqueness is obtained for any value of N in $]0,1[$.

Let us define the fixed point procedure $\mathcal{T}$:
For any $\overline{v}$ in V_0, let ω in H be the solution of :

$$R_M \int_E \nabla\omega.\nabla\psi \, dz_1 \, dz_3 + 4N^2 \int_E \omega\psi \, dz_1 \, dz_3 = 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \psi\overline{v} \, dz_1 \, dz_3 + 2N^2(\beta-1) \int_{\Gamma_1} \psi\overline{v}_1 \, d\sigma$$

$$+2N^2 \int_{\Gamma_1} \beta(g-s)\psi \, d\sigma + 2N^2 \int_E \operatorname{rot} J \, \psi \, dz_1 \, dz_3 \qquad \forall\psi \in H$$

For that ω, let us define $v = \mathcal{T}(\overline{v})$ be the unique solution in V_0 of :

$$\int_E (\nabla\times v).(\nabla\times\varphi) \, dz_1 \, dz_3 - \int_E p \operatorname{div}\varphi \, dz_1 \, dz_3 = 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \varphi\omega \, dz_1 \, dz_3 + 2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \omega\varphi_1 \, d\sigma$$

$$-\int_E (\nabla\times J).(\nabla\times\varphi) \, dz_1 \, dz_3 \qquad \forall\varphi \in V$$

Let us first remark that both problems are well defined as soon as $R_M > 0$ and $\alpha \neq 0$, without other assumption on the coefficients.

It is obvious that a fixed point of $\mathcal{T}$ with the associated ω is solution to problem $(3.20) - (3.21)$. We will prove the existence in that way :

Theorem 3.3.4. *For $\beta = 0$ and $\alpha = \dfrac{1}{N^2}$, problem $(3.20) - (3.21)$ has a unique solution*

Proof
We will make the proof with general parameters α and β to show how the condition occurs.
We will prove that $\mathcal{T}$ is a contraction in V by introducing two sequences

$$v' = \mathcal{T}(\overline{v}'), \; v'' = \mathcal{T}(\overline{v}'')$$

and the related ω' and ω''. Denoting $\omega = \omega' - \omega''$, $v = v' - v''$, $\overline{v} = \overline{v}' - \overline{v}''$, and choosing $\varphi = v$ and $\psi = \omega$, we easily get by substraction of the corresponding equations :

$$R_M \int_E (\nabla\omega)^2 \, dz_1 \, dz_3 + 4N^2 \int_E \omega^2 \, dz_1 \, dz_3 = 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \omega\overline{v} \, dz_1 \, dz_3 + 2N^2(\beta-1) \int_{\Gamma_1} \omega\overline{v}_1 \, d\sigma \tag{3.29}$$

and

$$\int_E (\nabla\times v)^2 \, dz_1 \, dz_3 = 2N^2 \int_E \operatorname{rot} v\omega \, dz_1 \, dz_3 + 2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \omega v_1 \, d\sigma \tag{3.30}$$

From (3.30), by applying Cauchy-Schwarz we get :

$$\int_E (\nabla \times v)^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq 2N^2 \int_E \omega^2 \, dz_1 \, dz_3 + \frac{2N^2}{4} \int_E (\nabla \times v)^2 \, dz_1 \, dz_3 + 2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \omega v_1 \, d\sigma$$

So

$$(1 - \frac{N^2}{2}) \int_E (\nabla \times v)^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq 2N^2 \int_E \omega^2 \, dz_1 \, dz_3 + 2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \omega v_1 \, d\sigma \tag{3.31}$$

From (3.29), applying Green's formula to the first term in the right hand side, we obtain :

$$4N^2 \int_E \omega^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq 2N^2 \int_E \operatorname{rot} \overline{v} \omega \, dz_1 \, dz_3 + 2N^2 \beta \int_{\Gamma_1} \omega \overline{v}_1 \, d\sigma$$

$$\leq 2N^2 \left(\int_E \omega^2 \, dz_1 \, dz_3 + \frac{1}{4} \int_E (\nabla \times \overline{v})^2 \, dz_1 \, dz_3 \right) + 2N^2 \beta \int_{\Gamma_1} \omega \overline{v}_1 \, d\sigma \tag{3.32}$$

Taking account of (3.32) into (3.31), we get :

$$(1 - \frac{N^2}{2}) \int_E (\nabla \times v)^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq \frac{N^2}{2} \int_E (\nabla \times \overline{v})^2 \, dz_1 \, dz_3 + 2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \omega v_1 \, d\sigma + 2N^2 \beta \int_{\Gamma_1} \omega \overline{v}_1 \, d\sigma$$

Due to the assumption of the theorem, the boundary integral cancels. As $0 < N < 1$ we get :

$$\int_E (\nabla \times v)^2 \, dz_1 \, dz_3 \leq k \int_E (\nabla \times \overline{v})^2 \, dz_1 \, dz_3$$

where $0 < k = \dfrac{\frac{N^2}{2}}{1 - \frac{N^2}{2}} < 1$ as $0 < N^2 < 1$.

To end the proof, it suffices to remark that (3.27) is fulfilled for any φ in V. So $\mathcal{T}$ is a contraction with the Poincaré's norm $\|\nabla v\|$.

□

3.4 Thin film approximation

3.4.1 Rescaling and estimates

In this section, we will consider the lubrication assumption in which $b = \max_{z_1} H(z_1)$ is small. We set $b = k_1 \epsilon$ with $\epsilon << 1$. In the previous section, it has been shown that a solution (v, ω, p) of the problem (3.20)- (3.21) exists under assumption (3.26). We want to study the behavior of (u, ω, p) denoted by $(v^\epsilon, \omega^\epsilon, p^\epsilon)$ when ϵ tends to zero. We introduce the following variable change :

$$x_1 = z_1, \quad x_3 = \frac{z_3}{\epsilon} \tag{3.33}$$

As classical in such a problem, we make the following assumptions :[3] [9]

$h(x_1) = \frac{1}{\epsilon}H(x_1)$ does not rely on ϵ, so that the initial thin domain E (denoted now by Ω^ϵ) becomes a fixed one

$$\Omega = \{(x_1, x_3),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_3 < h(x_1)\}$$

The lift J defined in lemma 3.2.2 in the domain Ω^ϵ depends now on ϵ. It is denoted by J^ϵ and can be constructed from $\overline{J}$ independent of ϵ, defined in Ω with $\mathrm{div}_x\,\overline{J} = 0$, in this way :

$$J_1^\epsilon(z_1, z_3) = \overline{J}_1(z_1, \frac{z_3}{\epsilon})$$

$$J_3^\epsilon(z_1, z_3) = \epsilon\overline{J}_3(z_1, \frac{z_3}{\epsilon})$$

In lubrication problems (see [4]), the scaling of R_M with respect to ϵ is as follows :

$$R_M = \epsilon^2 R_c,\ R_c > 0$$

so that (3.26) is rewritten in terms of k_1 and R_c :

$$(\mathbf{H1}) \qquad 0 < N^2 < \frac{1}{2} \text{ and } \frac{k_1}{\sqrt{1-2N^2}}\left(\left|\frac{1}{\alpha} - N^2\right| + \beta N^2\right) \leq \frac{\sqrt{R_c}}{2}$$

The theorem 3.3.4 induces the assumption

$$(\mathbf{H2}) \qquad 0 < N < 1, \quad \alpha = \frac{1}{N^2} \text{ and } \beta = 0$$

Let :

$$\triangle_\epsilon = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \qquad \nabla_\epsilon = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial x_3}), \qquad \mathrm{div}_\epsilon = \frac{\partial_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial_3}{\partial x_3}$$

$$\mathrm{rot}_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial_1}{\partial x_3} - \frac{\partial_3}{\partial x_1}$$

By setting $\overline{J}^\epsilon = (\overline{J}_1, \epsilon\overline{J}_3)$ equations (3.13)-(3.19) become :

$$-\triangle_\epsilon(\overline{v}^\epsilon + \overline{J}^\epsilon) + \nabla_\epsilon\overline{p}^\epsilon = 2N^2\mathrm{rot}_\epsilon\,\overline{\omega}^\epsilon \tag{3.34}$$

$$-\epsilon^2 R_c\triangle_\epsilon\overline{\omega}^\epsilon + 4N^2\overline{\omega}^\epsilon = 2N^2\mathrm{rot}_\epsilon\,(\overline{v}^\epsilon + \overline{J}^\epsilon) \tag{3.35}$$

$$\mathrm{div}_\epsilon\,\overline{v}^\epsilon = 0 \tag{3.36}$$

with the boundary conditions :

$$\overline{\omega}^\epsilon = \frac{\alpha}{2}\nabla_\epsilon \times (\overline{v}^\epsilon + \overline{J}^\epsilon) \ \text{ on}\Gamma_1 \tag{3.37}$$

$$\epsilon R_c\frac{\partial\overline{\omega}^\epsilon}{\partial x_3} = -2N^2\beta(\overline{v}_1^\epsilon + g - s) \ \text{ on}\Gamma_1 \tag{3.38}$$

$$\overline{v}_3^\epsilon = 0 \ \text{ on } \ \Gamma_1 \tag{3.39}$$

$$\overline{v}^\epsilon = \overline{\omega}^\epsilon = 0 \ \text{ on } \Gamma_3 \cup \Gamma_l \tag{3.40}$$

The corresponding mixed variational formulation in Ω is :

Find $(\overline{v}^\epsilon, \overline{\omega}^\epsilon, p^\epsilon)$ in $V \times H \times L_0^2(\Omega)$ such that :

$$\epsilon \int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{v}^\epsilon).(\nabla_\epsilon \times \varphi)\, dx_1\, dx_3 - 2N^2\epsilon \int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon\, \varphi \overline{\omega}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 - 2(N^2 - \frac{1}{\alpha}) \int_{\Gamma_1} \overline{\omega}^\epsilon \varphi_1 d\sigma - \epsilon \int_\Omega \overline{p}^\epsilon \mathrm{div}_\epsilon\, \varphi\, dx_1\, dx_3$$

$$-2N^2\epsilon \int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon\, \psi.\overline{v}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 - 2N^2(\beta - 1) \int_{\Gamma_1} \psi \overline{v}_1^\epsilon\, d\sigma + \epsilon^3 R_c \int_\Omega \nabla_\epsilon \overline{\omega}^\epsilon.\nabla_\epsilon \psi\, dx_1\, dx_3 + 4N^2\epsilon \int_\Omega \overline{\omega}^\epsilon \psi\, dx_1\, dx_3$$

$$= -\epsilon \int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon).(\nabla_\epsilon \times \varphi)\, dx_1\, dx_3 + 2N^2\epsilon \int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon\, \overline{J}^\epsilon\, \psi\, dx_1\, dx_3 + \int_{\Gamma_1} 2N^2\beta(g - s)\psi\, d\sigma \quad \forall (\varphi, \psi) \in V \times H \tag{3.41}$$

$$\epsilon \int_\Omega q\, \mathrm{div}_\epsilon\, \overline{v}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \tag{3.42}$$

Theorem 3.4.1. *Under the hypothesis* **(H1)** *or* **(H2)**, *there exists a unique solution* $(\overline{u}^\epsilon, \overline{p}^\epsilon, \overline{\omega}^\epsilon)$ *of* (3.41) − (3.42)

Proof

It a direct consequence of (3.26) of theorem 3.3.3 and theorem 3.3.4.

Lemma 3.4.2. *Under the hypothesis* **(H1)** *or* **(H2)**, *the following estimates hold :*

$$\|\frac{\partial \overline{v}^\epsilon}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K, \quad \|\epsilon \frac{\partial \overline{v}^\epsilon}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K$$

$$\|\epsilon \frac{\partial \overline{\omega}^\epsilon}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)} \leq K, \quad \|\epsilon^2 \frac{\partial \overline{\omega}^\epsilon}{\partial x_1}\|_{L^2(\Omega)} \leq K$$

Proof

Set

$$\mathcal{A}^\epsilon((\varphi, \psi), (\varphi, \psi)) = \epsilon \int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \varphi)^2\, dx_1\, dx_3 - 4N^2\epsilon \int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon\, \varphi\, \psi\, dx_1\, dx_3 + 2(\frac{1}{\alpha} - N^2) \int_{\Gamma_1} \psi \varphi_1\, d\sigma$$

$$-2N^2\beta \int_{\Gamma_1} \psi \varphi_1\, d\sigma + \epsilon^3 R_c \int_\Omega (\nabla_\epsilon \psi)^2\, dx_1\, dx_3 + 4N^2\epsilon \int_\Omega \psi^2\, dx_1\, dx_3$$

From the coerciveness property of the bilinear form of the weak formulation (see (3.28)) and taking (3.33) into account, we have with $\varphi = v^\epsilon$ and $\psi = \omega^\epsilon$:

$$\mathcal{A}^\epsilon = \mathcal{A}((\overline{v}^\epsilon, \overline{\omega}^\epsilon), (\overline{v}^\epsilon, \overline{\omega}^\epsilon)) \geq \frac{1 - 2N^2}{2} \|\nabla_\epsilon \overline{v}^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)^4} + \epsilon^2 \frac{R_c}{2} \|\nabla_\epsilon \overline{\omega}^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)^2}$$

and

$$\mathcal{L}^\epsilon(\overline{v}^\epsilon,\overline{\omega}^\epsilon) = 2N^2\epsilon \int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon \overline{J}^\epsilon\, \overline{\omega}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 - \epsilon \int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon).(\nabla_\epsilon \times \overline{v}^\epsilon) dx_1\, dx_3 + 2N^2\beta \int_{\Gamma_1} (g-s)\, \overline{\omega}^\epsilon\, d\sigma$$

then

$$\mathcal{A}^\epsilon \leq \mathcal{L}^\epsilon(\overline{v}^\epsilon,\overline{\omega}^\epsilon) \leq 2N^2 k_1 \epsilon \|\mathrm{rot}_\epsilon \overline{J}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_\epsilon \overline{\omega}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_\epsilon \overline{v}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+2N^2\beta\sqrt{k_1\epsilon}\|g-s\|_{L^2(\Gamma_1)}\|\nabla_\epsilon \overline{\omega}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^2}$$

which is equivalent to :

$$\frac{1-2N^2}{2}\left(\|\nabla_\epsilon \overline{v}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^4} - \frac{1}{1-2N^2}\|\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\right)^2$$

$$+\frac{R_c}{2}\left(\epsilon\|\nabla_\epsilon \overline{\omega}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^2} - \frac{2N^2k_1}{R_c}\|\mathrm{rot}_\epsilon \overline{J}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} - \frac{2N^2\beta\sqrt{k_1}}{R_c\epsilon}\|g-s\|_{L^2(\Gamma_1)}\right)^2 \leq$$

$$\frac{1}{2(1-2N^2)}\|\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2N^4K_1^2}{R_c}\|\mathrm{rot}_\epsilon \overline{J}^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2N^4\beta^2k_1}{\epsilon^2R_c}\|g-s\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$

$$+4\frac{N^4k_1\sqrt{k_1}\beta}{\epsilon R_c}\|\mathrm{rot}_\epsilon \overline{J}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\|g-s\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \frac{K}{\epsilon^2}$$

so we obtain :

$$\|\nabla_\epsilon \overline{v}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^4} \leq \frac{K}{\epsilon}, \quad \|\nabla_\epsilon \overline{\omega}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{K}{\epsilon^2},$$

□.

3.4.2 Asymptotic study

In this section we recall that hypothesis **(H1)** or **(H2)** will be allways assumed.

Lemma 3.4.3. *There exist $u^\star$ in $V(x_3)$ and $s^\star$ in $L^2(]0,1[)$ such that $\overline{u}^\epsilon$ weakly converges to $(u_1^\star, 0)$ in $V(x_3)$ and $\overline{u}_1^\epsilon(x_1,0)$ weakly converges to $s^\star$ in $L^2(]0,1[)$ with*

$$u^\star(x_1, h(x_1)) = 0, \qquad \forall x_1 \in]0,1[$$

where $V(x_3)$ is the Hilbert space :

$$V(x_3) = \{\phi \in L^2(\Omega)^2,\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \in L^2(\Omega)^4\}$$

Proof

From Friedrich's inequality in x_3- direction, we obtain :

$$\|\overline{u}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K\|\frac{\partial \overline{u}^\epsilon}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)^2}$$

Let $\overline{u}^\epsilon = \overline{v}^\epsilon + \overline{J}^\epsilon$ where $\overline{J}^\epsilon$ is defined in previous section $\overline{J}^\epsilon = (\overline{J}_1, \epsilon\overline{J}_3)$ and from lemma 3.4.2,we deduce :

$$\|\overline{u}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)^2} \leq K$$

$V(x_3)$ is an Hilbert space with the norm :

$$\|\phi\|^2_{V(x_3)} = \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)^2} + \|\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\|^2_{L^2(\Omega)^4}$$

then $\overline{u}^\epsilon$ is bounded in $V(x_3)$, and there exists a weak limit $u^\star$ in $V(x_3)$.

From continuity of the trace application from $V(x_3)$ to $L^2(\Gamma_1)^2$ and $L^2(\Gamma_3)$, we deduce that $u^\star = 0$ sur Γ_3 and that there is $s^\star$ such that $\overline{u}^\epsilon_1$ weakly converges to $s^\star$ in $L^2(]0,1[)$

To prove that $u^\star_3 = 0$ on Ω, the divergence equation is used. Letting ϕ be in $\mathcal{D}(\Omega)$, we obtain :

$$\int_\Omega \overline{u}^\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_3 + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega \frac{\partial \overline{u}^\epsilon_3}{\partial x_3}\phi\, dx_1\, dx_3 = 0$$

Passing to the limit, we obtain, taking into account the $V(x_3)$ convergence :

$$\int_\Omega \frac{\partial u^\star_3}{\partial x_3}\phi\, dx_1\, dx_3 = 0$$

hence $u^\star_3$ does not rely on the x_3 variable. As $u^\star_3$ is equal to zero on Γ_3, we deduce that $u^\star_3 = 0$ in Ω. □

Lemma 3.4.4. *The following estimates are valid*

$$\epsilon^2\|\frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_1}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq K, \quad \epsilon\|\frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq K.$$

Proof

Let ϕ be in $H^1_0(\Omega)$ and choose $((\phi,0),0)$ as test function in (3.41) :

$$\int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{v}^\epsilon)\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3 - 2N^2\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\overline{\omega}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 = -\epsilon\langle \frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_1}, \phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} - \int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon)\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3$$

Using the Green's formula on the second term and the estimates of lemma 3.4.2 we deduce :

$$\|\frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_1}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{K}{\epsilon^2}$$

Taking now $((0,\phi),0)$ as test function in (3.41), we obtain :

$$-\epsilon\int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{v}^\epsilon)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_3 - 2N^2\epsilon\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\overline{\omega}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 = -\langle \frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_3}, \phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} - \epsilon\int_\Omega (\nabla_\epsilon \times \overline{J}^\epsilon)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_3$$

we deduce in the same way :

$$\|\frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_3}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

□

Lemma 3.4.5. *With the same assumptions as in Lemma 3.4.2, there exists $p^\star$ in $L^2(]0,1[)$ so that $\epsilon^2\overline{p}^\epsilon(x_1)$ weakly converges to $p^\star$.*

with

$$\int_\Omega p^\star\, dx_1\, dx_3 = \int_0^1 h(x_1)p^\star\, dx_1 = 0$$

Proof :
Using the inequality (see [17], Remark 1.4 p15)

$$\|\overline{p}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K \left(\|\nabla \overline{p}^\epsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} + \left| \int_\Omega \overline{p}^\epsilon \, dx_1 \, dx_3 \right| \right)$$

from lemma 3.4.4, we conclude that $\epsilon^2 \overline{p}^\epsilon$ weakly converges to $p^\star$ in $L^2_0(\Omega)$ and that $p^\star$ does not rely on x_3. □

Theorem 3.4.6. *There exists $\omega^\star$ in $V(x_3)$ such that $\epsilon\overline{\omega}^\epsilon$ weakly converge to $\omega^\star$ and :*

$$\omega^\star(x_1, h(x_1)) = 0 \quad \forall x_1 \in]0,1[$$

Morever $p^\star(x_1)$ belongs to $H^1(]0,1[)$ and we have the following relation :

$$\frac{h^2}{12}\frac{dp^\star}{dx_1} = -\tilde{u}_1^\star + \frac{s^\star}{2}h - N^2 \left(\int_0^h w^\star(2x_3 - h(x_1)) \, dx_3 \right) \quad \text{in } L^2(]0,1[))$$

with

$$\tilde{u}_1^\star(x_1) = \frac{1}{h} \int_0^h u_1^\star(x_1, x_3) \, dx_3$$

Proof :
From Friedrich's inequality in x_3- direction, we have :

$$\|\overline{\omega}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K \|\frac{\partial \overline{\omega}^\epsilon}{\partial x_3}\|_{L^2(\Omega)}$$

From lemma 3.4.2, we deduce that :

$$\|\overline{\omega}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K}{\epsilon}$$

thus $\epsilon\overline{\omega}^\epsilon$ is bounded in $V(x_3)$, and there exists a weak limit $\omega^\star$ in $V(x_3)$. The continuity of the trace application induces $\omega^\star(x_1, h(x_1)) = 0 \quad \forall x_1 \in]0,1[$.

Let $\theta(x_1)$ be in $\mathcal{D}(]0,1[)$. We choose $(\theta(x_1)x_3(x_3 - h(x_1), 0), 0)$ as test function in (3.41) :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \overline{u}_1^\epsilon}{\epsilon \partial x_3} - \frac{\partial \overline{u}_3^\epsilon}{\partial x_1} \right) \theta(2x_3 - h) \, dx_1 \, dx_3 - 2N^2 \int_\Omega \overline{\omega}^\epsilon (2x_3 - h)\theta \, dx_1 \, dx_3 = -\epsilon \langle \frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_1}, \theta x_3(x_3 - h) \rangle$$

Passing to the limit, we obtain :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} \theta(2x_3 - h) \, dx_1 \, dx_3 - 2N^2 \int_\Omega \omega^\star(2x_3 - h)\theta \, dx_1 \, dx_3 = -\int_\Omega \frac{\partial p^\star}{\partial x_1} \theta x_3(x_3 - h) \, dx_1 dx_3 \quad (3.43)$$

As $p^\star$ does not rely on the x_3 variable, we obtain :

$$\int_\Omega \frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\theta x_3(x_3-h)\,dx_1\,dx_3 = \int_0^1 \left[\int_0^h x_3(x_3-h)\,dx_3\right]\theta\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\,dx_1 = -\int_0^1 \frac{h^3}{6}\theta\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\,dx_1$$

Applying Green 's formula, we obtain :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\theta(2x_3-h)\,dx_1\,dx_3 = -2\int_\Omega u_1^\star\theta\,dx_1\,dx_3 + \int_{\Gamma_1} u_1^\star(x_1,0)h\theta\,d\sigma$$

From lemma 3.4.3 :

$$\int_{\Gamma_1} u_1^\star(x_1,0)h\theta\,d\sigma = \int_0^1 s^\star h\theta\,dx_1$$

So (3.43) becomes :

$$-2\int_\Omega u_1^\star\theta\,dx_1\,dx_3 + \int_0^1 s^\star h\theta\,dx_1 - 2N^2\int_\Omega \omega^\star(2x_3-h)\theta\,dx_1\,dx_3 = \int_0^1 \frac{h^3}{6}\theta\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\,dx_1 \quad \forall\theta\in\mathcal{D}(]0,1[)$$

Because θ is any function in $\mathcal{D}(]0,1[)$, by density, this formula holds in $H^{-1}(\Omega)$. As h is a regular positive function and as $u_1^\star, \omega^\star$ and $s^\star$ lie in $L^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial p^\star}{\partial x_1}$ belongs to $L^2(\Omega)$ and $p^\star$ has the required regularity. □

Theorem 3.4.7. *The limit velocity and pression satisfy the following equations :*

$$-\frac{\partial^2 u_1^\star}{\partial x_3^2} + \frac{\partial p^\star}{\partial x_1} = -2N^2\frac{\partial \omega^\star}{\partial x_3} \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{3.44}$$

$$-R_c\frac{\partial^2 \omega^\star}{\partial x_3^2} + 4N^2\omega^\star = 2N^2\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} \quad \text{in } L^2(\Omega) \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{h(x_1)} u_1^\star(x_1,x_3)\,dx_3 = 0 \tag{3.46}$$

with the boundary conditions :

$$\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}(x_1,0) = \frac{2}{\alpha}\omega^\star(x_1,0) \quad \text{in} \quad L^2(]0,1[) \tag{3.47}$$

$$R_c\frac{\partial \omega^\star}{\partial x_3}(x_1,0) = -2N^2\beta(s^\star(x_1)-s) \quad \text{in} \quad L^2(]0,1[) \tag{3.48}$$

Proof

Let φ_1 be in $H_0^1(\Omega)$ and $((\varphi_1,0),0)$ as test function in (3.41), we obtain :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \overline{u}_1^\epsilon}{\epsilon\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u}_3^\epsilon}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_3 - 2N^2\int_\Omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\overline{\omega}^\epsilon\,dx_1\,dx_3 = -\epsilon\langle\frac{\partial \overline{p}^\epsilon}{\partial x_1},\varphi_1\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

After multiplication by ϵ and passing to the limit and applying Green's formula on the second term, we obtain :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_3 + 2N^2\int_\Omega \frac{\partial \omega^\star}{\partial x_3}\varphi_1\,dx_1\,dx_3 = -\langle \frac{\partial p^\star}{\partial x_1}, \varphi_1\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

so that :

$$-\frac{\partial^2 u_1^\star}{\partial x_3^2} + 2N^2\frac{\partial \omega^\star}{\partial x_3} = -\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} \quad \text{in} \quad H^{-1}(\Omega)$$

From theorem 3.4.6, $\dfrac{\partial p^\star}{\partial x_1}$ is in $L^2(\Omega)$, and (3.44) is proved.

To prove (3.45), we take ψ in $H_0^1(\Omega)$ and $((0,0),\psi)$ as a test function in (3.41) :

$$R_c\epsilon^2\int_\Omega \nabla_\epsilon\overline{\omega}^\epsilon.\nabla_\epsilon\psi\,dx_1\,dx_3 + 4N^2\int_\Omega \overline{\omega}^\epsilon\psi\,dx_1\,dx_3 = 2N^2\int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon\,\psi\overline{u}^\epsilon\,dx_1\,dx_3$$

Passing to the limit after multiplication by ϵ we obtain :

$$R_c\int_\Omega \frac{\partial \omega^\star}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + 4N^2\int_\Omega \omega^\star\psi\,dx_1\,dx_3 = -2N^2\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_3}u_1^\star\,dx_1\,dx_3 = 2N^2\int_\Omega \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\psi\,dx_1\,dx_3$$

We deduce :

$$-R_c\frac{\partial^2 \omega^\star}{\partial x_3^2} + 4N^2\omega^\star = 2N^2\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} \quad \text{in} \quad H^{-1}(\Omega)$$

As $u_1^\star$ and $\omega^\star$ belong to $V(x_3)$, this equation holds in $L^2(\Omega)$

To find the boundary conditions, we choose θ in $\mathcal{D}(]0,1[)$, then there is a lift φ_1 in $H^1(\Omega)$ such that $\varphi_{1/\Gamma_3\cup\Gamma_l} = 0$ and $\varphi_{1/\Gamma_1} = \theta$.

Applying Green's formula, we obtain by (3.44) :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_3 + \int_0^1 \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\theta dx_1 + \int_\Omega \frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\varphi_1\,dx_1\,dx_3 = 2N^2\int_\Omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\omega^\star\,dx_1\,dx_3 + 2N^2\int_0^1 \omega^\star\theta\,dx_1 \tag{3.49}$$

Going $((\varphi_1,0),0)$ as test function in (3.41), we obtain :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \overline{u}_1^\epsilon}{\epsilon\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u}_3^\epsilon}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_3 - 2N^2\int_\Omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\overline{\omega}^\epsilon\,dx_1\,dx_3 - 2(N^2 - \frac{1}{\alpha})\int_0^1 \overline{\omega}^\epsilon\,\theta\,dx_1 = \epsilon\int_\Omega \overline{p}^\epsilon\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_3$$

Passing to the limit, we obtain :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\,dx_1\,dx_3 - 2N^2\int_\Omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\omega^\star\,dx_1\,dx_3 - 2(N^2 - \frac{1}{\alpha})\int_0^1 \omega^\star\theta\,dx_1 = \int_\Omega p^\star\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_3 \tag{3.50}$$

From (3.49) and (3.50), we obtain :

$$\int_0^1 \frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}\theta\, dx_1 = \frac{2}{\alpha}\int_0^1 \omega^\star\theta\, dx_1\,;\quad \forall\theta\in\mathcal{D}(]0,1[)$$

and we deduce that :

$$\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} = \frac{2}{\alpha}\omega^\star \text{ in } \mathcal{D}'(]0,1[)$$

Moreover, $\dfrac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}(x_1,0)$ and $\omega^\star(x_1,0)$ belong to $L^2(]0,1[)$, so the previous equation holds in $L^2(]0,1[)$.

In the same way, to find the boundary condition (3.48), we multiply (3.45) by ψ in $H^1(\Omega)$ such that $\psi(x_1,0)=\theta$ and $\psi_{\ \Gamma_l\cup\Gamma_3}=0$, and we apply Green's formula :

$$R_c\int_\Omega \frac{\partial\omega^\star}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}+R_c\int_0^1\frac{\partial\omega^\star}{\partial x_3}\theta\, dx_1+4N^2\int_\Omega\omega^\star\psi\, dx_1\, dx_3 = -2N^2\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_3}u_1^\star\, dx_1\, dx_3-2N^2\int_0^1 s^\star(x_1)\theta\, dx_1 \tag{3.51}$$

Choosing $((0,0),\psi)$ as test function in (3.41) so :

$$R_c\epsilon^3\int_\Omega \nabla_\epsilon\overline{\omega}^\epsilon.\nabla_\epsilon\psi\, dx_1\, dx_3 + 4N^2\epsilon\int_\Omega\overline{\omega}^\epsilon\psi\, dx_1\, dx_3 - 2N^2\epsilon\int_\Omega \mathrm{rot}_\epsilon\,\psi\overline{u}^\epsilon\, dx_1\, dx_3 =$$

$$2N^2\beta\int_{\Gamma_1}\theta(\overline{u}_1^\epsilon - s)\, d\sigma - 2N^2\int_{\Gamma_1}\overline{u}_1^\epsilon\theta d\sigma$$

Going to the limit, we obtain :

$$R_c\int_\Omega\frac{\partial\omega^\star}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}+4N^2\int_\Omega\omega^\star\psi\, dx_1\, dx_3+2N^2\int_\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_3}u_1^\star\, dx_1\, dx_3=2N^2\beta\int_0^l(s^\star(x_1)-s)\theta\, dx_1-2N^2\int_0^1 s^\star(x_1)\theta dx_1 \tag{3.52}$$

From (3.51) and (3.52), we deduce that :

$$R_c\frac{\partial\omega^\star}{\partial x_3} = -2N^2\beta(s^\star(x_1)-s)\ ,\ \text{in}\,\mathcal{D}'(]0,1[)$$

Morever, $s^\star - s$ and $\dfrac{\partial\omega^\star}{\partial x_3}$ belong to $L^2(]0,1[)$, so the previous equation holds in $L^2(]0,1[)$.
To proove (3.46), let θ be in $\mathcal{D}(]0,1[)$, we have :

$$\int_\Omega \mathrm{div}_\epsilon\,\overline{u}^\epsilon\theta\, dx_1\, dx_3 = 0 \tag{3.53}$$

Applying Green's formula, we get :

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\frac{\partial\overline{u}_3^\epsilon}{\partial x_3}\theta\, dx_1\, dx_3 = -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\overline{u}_3^\epsilon\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_3 = 0$$

From (3.53), we obtain :

$$\int_\Omega \frac{\partial \overline{u}_1^\epsilon}{\partial x_1}\theta\, dx_1\, dx_3 = 0 = -\int_\Omega \overline{u}_1^\epsilon \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_3$$

Letting ϵ tend to zero, we obtain :

$$0 = -\int_\Omega u_1^\star \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\, dx_1\, x_3 = -\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\left(\int_0^{h(x_1)} u_1^\star dx_3\right) dx_1 = \int_0^1 \theta \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\int_0^{h(x_1)} u_1^\star\, dx_3\right) dx_1 \tag{3.54}$$

which ends the proof. □

3.4.3 Generalized micropolar Reynolds equation

In this section, we give expressions of $u^\star$, $\omega^\star$, solutions of the differential system $(3.44)-(3.48)$, in terms of $p^\star$. Next, putting these expressions in (3.46) will lead to the corresponding Reynolds equation.

Lemma 3.4.8. *Assuming* (**H1**) *or* (**H2**) *, for $\alpha \neq 1$ the solutions to* (3.44)(3.45) *with boundary conditions* (3.47)(3.48) *are :*

$$u_1^\star(x_1,x_3)=\left[\left(\frac{2N^2}{k}\left(sh(kx_3)-sh(kh)\right)+\gamma_\alpha(x_3-h)\right)A_1+\frac{2N^2}{k}\left(ch(kx_3)-ch(kh)\right)B_1+\frac{x_3^2-h^2}{2(1-N^2)}\right]\times$$
$$\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}+\left[\left(\frac{2N^2}{k}\left(sh(kx_3)-sh(kh)\right)+\gamma_\alpha(x_3-h)\right)A_2+\frac{2N^2}{k}\left(ch(kx_3)-ch(kh)\right)B_2\right]s \tag{3.55}$$

$$w^\star=\left[\left(ch(kx_3)+\frac{\gamma_\alpha}{2}\right)A_1+sh(kx_3)B_1+\frac{x_3}{2(1-N^2)}\right]\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}+\left[\left(ch(kx_3)+\frac{\gamma_\alpha}{2}\right)A_2+sh(kx_3)B_2\right]s \tag{3.56}$$

where

$$k=2N\sqrt{\frac{1-N^2}{R_c}},\quad \frac{\gamma_\alpha}{2}=\frac{1-\alpha N^2}{\alpha-1}$$

$$A_1(x_1)=\frac{L(x_1)}{2(1-N^2)}\left(h\left[4N^4(1-ch(kh))+\frac{Rc}{\beta}k^2\right]-ksh(kh)\left[\frac{R_c}{\beta}-2N^2h^2(x_1)\right]\right)$$

$$B_1(x_1)=\frac{L(x_1)}{2(1-N^2)}\left(2N^2h\left[2N^2sh(kh)+\gamma_\alpha kh\right]+k\left[\frac{Rc}{\beta}-2N^2h^2(x_1)\right]\left[ch(kh)+\frac{\gamma_\alpha}{2}\right]\right)$$

$$A_2(x_1)=2N^2kL(x_1)sh(kh)$$

$$B_2(x_1)=-2N^2kL(x_1)\left(\frac{\gamma_\alpha}{2}+ch(kh)\right)$$

$$L(x_1)=-\left(\left[\frac{\gamma_\alpha}{2}+ch(kh)\right]\left[4N^4(1-ch(kh))+\frac{R_c}{\beta}k^2\right]+2N^2sh(kh)\left[\gamma_\alpha kh+2N^2sh(kh)\right]\right)^{-1}$$

Proof

Integrating (3.44) in x_3, we obtain :

$$\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} = \frac{\partial p^\star}{\partial x_1} x_3 + 2N^2 w^\star + K_1(x_1) \tag{3.57}$$

where K_1 is an unknown function. Putting (3.57) into (3.45), we obtain :

$$\frac{\partial^2 w^\star}{\partial x_3^2} - \frac{4N^2}{Rc}(1-N^2)w^\star = -\frac{2N^2}{Rc}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} x_3 - \frac{2N^2}{Rc} K_1(x_1) \tag{3.58}$$

whose solution can be written :

$$w^\star = c_1(x_1)e^{kx_3} + c_2(x_1)e^{-kx_3} + \frac{x_3}{2(1-N^2)}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + \frac{K_1(x_1)}{2(1-N^2)} \tag{3.59}$$

where $c_i(x_1), i = 1, 2$ are unknown functions and $k = 2N\sqrt{\dfrac{1-N^2}{R_c}}$.

Putting (3.59) in (3.57), we obtain :

$$\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3} = \frac{1}{1-N^2}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} x_3 + 2N^2(c_1(x_1)e^{kx_3} + c_2(x_1)e^{-kx_3}) + \frac{K_1(x_1)}{1-N^2} \tag{3.60}$$

Integrating (3.60), we obtain :

$$u_1^\star = \frac{2N^2}{k}\left(A(x_1)sh(kx_3) + B(x_1)ch(kx_3)\right) + \frac{1}{2(1-N^2)}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} x_3^2 + \frac{K_1(x_1)}{1-N^2} x_3 + K_2(x_1) \tag{3.61}$$

where

$$A(x_1) = c_1(x_1) + c_2(x_1),\ B(x_1) = c_1(x_1) - c_2(x_1)$$

and $K_2(x_1)$ is an unknown function.
$\omega^\star$ in (3.59), can be written :

$$w^\star = A(x_1)ch(kx_3) + B(x_1)sh(kx_3) + \frac{1}{2(1-N^2)}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} x_3 + \frac{K_1(x_1)}{2(1-N^2)} \tag{3.62}$$

Using (3.60)and (3.62) in the boundary condition (3.47), we obtain :

$$K_1(x_1) = \gamma_\alpha(1-N^2)A(x_1) \tag{3.63}$$

Using the condition $u_1^\star(x_1, h(x_1)) = 0$ in (3.61), and using (3.63), we obtain :

$$K_2(x_1) = -\left(h(x_1)\gamma_\alpha + \frac{2N^2}{k}sh(kh)\right)A(x_1) - \frac{2N^2}{k}ch(k(h_1))B(x_1) - \frac{h^2}{2(1-N^2)}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}$$

From condition $\omega^\star(x_1, h(x_1)) = 0$ and (3.48), we obtain, using (3.63), the following system :

$$Q\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-h}{2(1-N^2)} \\ \dfrac{\dfrac{Rc}{\beta} - 2N^2h^2(x_1)}{2(1-N^2)} \end{pmatrix}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2N^2 \end{pmatrix} s$$

where Q is the matrix defined by :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_\alpha}{2} + ch(kh(x_1)) & sh(kh(x_1)) \\ 2N^2\left(\gamma_\alpha h(x_1) + \frac{2N^2}{k} sh(kh(x_1))\right) & \frac{-4N^4}{k}(1 - ch(kh(x_1))) - \frac{R_c}{\beta}k \end{pmatrix}$$

The solution of this system is given by :

$$A(x_1) = A_1(x_1)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + A_2(x_1)s,\ B(x_1) = B_1(x_1)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + B_2(x_1)s$$

where $(A_1(x_1), B_1(x_1)$ and $A_2(x_1), B_2(x_1)$ are solutions of :

$$Q\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-h}{2(1-N^2)} \\ \frac{\frac{Rc}{\beta} - 2N^2h^2(x_1)}{2(1-N^2)} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2N^2 \end{pmatrix}$$

Calculating A_i, B_i for $i = 1, 2$, then $u^\star$ and $\omega^\star$ are obtained by (3.61) and (3.62) as functions of $p^\star$ and of known data.

Lemma 3.4.9. *Assuming* (**H1**) *or* (**H2**), *for* $\alpha = 1$ *the solutions to* (3.44)(3.45) *with boundary conditions* (3.47)(3.48) *are such that :*

$$u_1^\star(x_1, x_3) = \left[\frac{2N^2}{k}\left(ch(kx_3) - ch(kh)\right)B_1' + \frac{x_3^2 - h^2}{2(1-N^2)} + \frac{A_1'}{1-N^2}(x_3 - h)\right]\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} +$$

$$\left[\frac{2N^2}{k}\left(ch(kx_3) - ch(kh)\right)B_2' + \frac{A_2'}{1-N^2}(x_3 - h)\right]s \tag{3.64}$$

$$w^\star = \left[sh(kx_3)B_1' + \frac{x_3}{2(1-N^2)} + \frac{A_2'}{2(1-N^2)}\right]\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + \left[sh(kx_3)B_2' + \frac{A_2'}{2(1-N^2)}\right] \tag{3.65}$$

where

$$A_1'(x_1) = L'(x_1)\left(h\left[4N^4(1 - ch(kh)) + \frac{Rc}{\beta}k^2\right] - ksh(kh)\left[\frac{R_c}{\beta} - 2N^2h^2(x_1)\right]\right)$$

$$B_1'(x_1) = k\frac{L(x_1)}{2(1-N^2)}\left(2N^2h + \frac{Rc}{\beta}\right)$$

$$A_2'(x_1) = 4N^2k(1-N^2)L'(x_1)sh(kh)$$

$$B_2'(x_1) = -2N^2kL'(x_1)$$

$$L'(x_1) = -\left(4N^4(1 - ch(kh)) + \frac{R_c}{\beta}k^2 + 4N^2khsh(kh)\right)^{-1}$$

Proof

The beginning of the proof is as in lemma 3.4.8

Using (3.60)and (3.62) in the boundary condition (3.47), for $\alpha = 1$, we obtain :

$$A(x_1) = 0 \tag{3.66}$$

Using the condition $u_1^\star(x_1, h(x_1)) = 0$ in (3.61), taking (3.66) into account, we obtain :

$$K_2(x_1) = -\left(\frac{2N^2}{k} ch(kh)B(x_1) + \frac{h^2}{2(1-N^2)}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + \frac{K_1}{1-N^2}h\right)$$

From condition $\omega^\star(x_1, h(x_1)) = 0$ and (3.48) we obtain using (3.66) the following system :

$$Q'\begin{pmatrix} K_1 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-h}{2(1-N^2)} \\ \\ \dfrac{\frac{Rc}{\beta} - 2N^2h^2(x_1)}{2(1-N^2)} \end{pmatrix}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -2N^2 \end{pmatrix} s$$

where Q' is the matrix defined by :

$$Q' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(1-N^2)} & sh(kh(x_1)) \\ \\ \dfrac{2N^2h}{1-N^2} & \dfrac{-4N^4}{k}(1 - ch(kh(x_1))) - \dfrac{R_c}{\beta}k \end{pmatrix}$$

The solution of this system is given by :

$$K_1(x_1) = A_1'(x_1)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + A_2'(x_1)s,\ B(x_1) = B_1'(x_1)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + B_2'(x_1)s$$

where $(A_1'(x_1), B_1'(x_1)$ and $A_2'(x_1), B_2'(x_1)$ are solutions of :

$$Q'\begin{pmatrix} A_1' \\ B_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-h}{2(1-N^2)} \\ \\ \dfrac{\frac{Rc}{\beta} - 2N^2h^2(x_1)}{2(1-N^2)} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q'\begin{pmatrix} A_2' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -2N^2 \end{pmatrix}$$

□

Remark 3.4.10. *The results of lemma* 3.4.9 *are the same as those of lemma* 3.4.8 *by making* γ_α *tend to* ∞ *(*$\alpha = 1$*).*

Theorem 3.4.11. *Assuming* (**H1**) *or* (**H2**), $p^\star$ *verifies the following equation :*

$$\int_0^1 \Theta_1(x_1)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\, dx_1 = \int_0^1 \Theta_2(x_1)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} s\, dx_1 \qquad \forall \theta \in H^1(]0,1[) \tag{3.67}$$

For $\alpha \neq 1$ *:*

$$\Theta_1(x_1) = \frac{h^3(x_1)}{3(1-N^2)} - \left[\frac{2N^2}{k}\left(\frac{ch(kh(x_1)) - 1}{k} - h(x_1)sh(kh(x_1))\right) - \frac{\gamma_\alpha}{2}h^2(x_1)\right] A_1(x_1) -$$

$$\frac{2N^2}{k}\left(\frac{sh(kh(x_1))}{k} - h(x_1)ch(kh(x_1))\right)B_1(x_1) \tag{3.68}$$

$$\Theta_2(x_1) = \left[\frac{2N^2}{k}\left(\frac{ch(kh(x_1))-1}{k} - h(x_1)sh(kh(x_1))\right) - \frac{\gamma_\alpha}{2}h^2(x_1)\right]A_2(x_1)+$$
$$\frac{2N^2}{k}\left(\frac{sh(kh(x_1))}{k} - h(x_1)ch(kh(x_1))\right)B_2(x_1) \tag{3.69}$$

For $\alpha = 1$

$$\Theta_1(x_1) = \frac{h^3(x_1)}{3(1-N^2)} + \frac{h^2}{2(1-N^2)}A_1' - \frac{2N^2}{k}\left[\frac{sh(kh(x_1))}{k} - h(x_1)ch(kh(x_1))\right]B_1'(x_1) \tag{3.70}$$

$$\Theta_2(x_1) = -\frac{h^2}{2(1-N^2)}A_2' + \frac{2N^2}{k}\left[\frac{sh(kh(x_1))}{k} - h(x_1)ch(kh(x_1))\right]B_2'(x_1) \tag{3.71}$$

($A_i,\ A_i',\ B_i,\ B_i', i = 1,2$ are defined in lemma 3.4.8 *and* 3.4.9*).*

Moreover, there is $\alpha_1 > 0$ *and* $\beta_1 > 0$ *such that for any* $0 < \alpha < \alpha_1$ *and* $\beta > \beta_1$*, the solution* $p^\star$ *of* (3.67) *is unique.*

Proof
Using (3.46), we obtain :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{h(x_1)} u_1^\star\, dx_3\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}(x_1)\, dx_1 = 0 \qquad \forall\theta \in H^1(]0,1[)$$

From lemma 3.4.8 or 3.4.9 , averaging (3.55) or (3.64) we obtain :

$$\int_0^{h(x_1)} u_1^\star\, dx_3 = -\Theta_1(x_1)\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + s\Theta_2(x_1)$$

For $\alpha = 0, \dfrac{1}{\beta} = 0$, it is proved in ([5], theorem 3.6) that Θ_1 is strictly positive. As Θ_1 is a continuous function of α and β, it is still positive for small α and $\dfrac{1}{\beta}$. The uniqueness result follows immediatly. □

Remark 3.4.12. *Numerical computations seem to indicate that* Θ_1 *does not have a constant sign for any values of* α *and* β*.*

3.4.4 Micropolar Reynolds equations for large β

By setting $\dfrac{1}{\beta} = 0$ in (3.48), the boundary conditions (3.47) (3.48) become those introduced in [8] :

$$\omega^\star(x_1,0) = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}(x_1,0) \tag{3.72}$$

$$u_1^\star(x_1,0) = s \tag{3.73}$$

Solving (3.44)-(3.46) with conditions (3.72) and (3.73), all the calculations of the previous section (lemmas 3.4.8, 3.4.9 and theorem 3.4.11) are valid with $\frac{1}{\beta} = 0$.

If $\alpha \neq 1$, the corresponding Reynolds equation (3.67) and (3.68)- (3.69) are rewritten with A_i and $B_i, i = 1, 2$ given by :

$$A_1(x_1) = \frac{L(x_1)}{2(1-N^2)} \left(h(x_1)\left[4N^4(1 - ch(kh(x_1)))\right] + 2N^2h^2(x_1)ksh(kh(x_1))\right)$$

$$B_1(x_1) = \frac{L(x_1)}{2(1-N^2)} \left(2N^2h(x_1)\left[2N^2sh(kh(x_1)) + \gamma_\alpha kh(x_1)\right] - 2N^2h^2(x_1)k\left[ch(kh(x_1)) + \frac{\gamma_\alpha}{2}\right]\right)$$

$$A_2(x_1) = 2N^2kL(x_1)sh(kh(x_1))$$

$$B_2(x_1) = 2N^2kL(x_1)\left(\frac{\gamma_\alpha}{2} + ch(kh(x_1))\right)$$

with

$$L(x_1) = -\left(\left[\frac{\gamma_\alpha}{2} + ch(kh)\right]\left[4N^4(1 - ch(kh))\right] + 2N^2sh(kh)\left[\gamma_\alpha kh(x_1) + 2N^2sh(kh)\right]\right)^{-1}$$

and

$$k = 2N\sqrt{\frac{1-N^2}{R_c}}, \quad \frac{\gamma_\alpha}{2} = \frac{1-\alpha N^2}{\alpha - 1}$$

If $\alpha = 1$, we have to use the values of Θ_1 and Θ_2, given by (3.70)-(3.71), in which :

$$A_1'(x_1) = L'(x_1)\left(4hN^4(1 - ch(kh)) + 2N^2h^2(x_1)ksh(kh)\right)$$

$$B_1'(x_1) = 2N^2kh\frac{L(x_1)}{2(1-N^2)}$$

$$A_2'(x_1) = 4N^2k(1-N^2)L'(x_1)sh(kh)$$

$$B_2'(x_1) = -2N^2kL'(x_1)$$

$$L'(x_1) = -\left(4N^4(1 - ch(kh)) + 4N^2khsh(kh)\right)^{-1}$$

Remark 3.4.13. *The usual boundary conditions introduced to study micropolar fluid [4] [5] are :*

$$\omega^\star(x_1, 0) = 0 \tag{3.74}$$

$$u_1^\star(x_1, 0) = s \tag{3.75}$$

They can be obtained from the previous equation by letting $\alpha = 0$ in (3.68)-(3.69) so that :

$$A_1(x_1) = \frac{h(x_1)}{4(1-N^2)}$$

$$B_1(x_1) = -\frac{h(x_1)}{4(1-N^2)th(\frac{kh(x_1)}{2})}$$

$$A_2(x_1) = -\frac{1}{2(\frac{2N^2}{k}th(\frac{kh(x_1)}{2}) - h(x_1))}$$

$$B_2(x_1) = \frac{th(\frac{kh(x_1)}{2})}{2(\frac{2N^2}{k}th(\frac{kh(x_1)}{2}) - h(x_1))}$$

and we find again the "classical" micropolar Reynolds equation (see [5]) :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3(x_1)}{1-N^2}\frac{\partial p_2^\star}{\partial x_1}\left[\frac{1}{12} + \frac{R_c}{4h^2(x_1)(1-N^2)} - \frac{N\sqrt{R_c}}{4\sqrt{1-N^2}h(x_1)}coth(\frac{kh(x_1)}{2})\right]\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h(x_1)s}{2}\right) \tag{3.76}$$

3.5 Comparison with previous work

In this section, we will consider two particular mechanical devices, a slider bearing and a journal bearing, to show the sensitiveness of the operational parameters with respect to α and β.

3.5.1 Definitions

From a mechanical engineering aspect two parameters seem to be important : The load $\hat{W}$ and the friction coefficient $\hat{F}$ along the moving surface $\hat{\Gamma}_1$.

The load is given by :

$$\hat{W} = \int_0^L \hat{p}(Z,0)\, dZ$$

The shear stress along the surface $\hat{\Gamma}_1$ is :

$$(\nu + \nu_\gamma)\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial Z_3}(Z,0) - 2\nu_\gamma \hat{\omega}(Z,0)$$

The friction force $\hat{F}$ is obtained by integrating the shear stress along the moving surface, thus :

$$\hat{F} = \int_0^L \left((\nu + \nu_\gamma)\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial Z_3}(Z,0) - 2\nu_\gamma \hat{\omega}(Z,0)\right)\, dZ$$

The friction coefficient $\hat{c}_f$ is determined by :

$$\hat{c}_f = \frac{\hat{F}}{\hat{W}}$$

As is usual in the lubrication area, the Dirichlet boundary conditions ($\hat{p}(0) = \hat{p}(L) = 0$) are used instead of the Neumann boundary conditions that are implicitly contained in the weak formulation (3.67). We recall (in section 3.2.2) that g_0 is a charateristic velocity of the surface. To simplify, we set $g_0 = \hat{s}$, where $\hat{s}$ is the known velocity of the wall, which implies

$$s = 1.$$

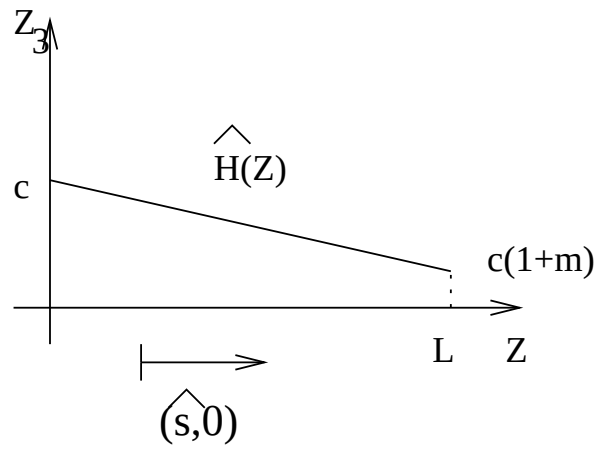

FIG. 3.2 – Geometry of a slider bearing

It has been experimentaly shown that there are chemical interactions between a solid surface and the nearest fluid layer. This has to be taken into account especially for a non-newtonian fluid and very thin gap. It can be done by introducing a viscosity ν_b near the surface which is different from ν and ν_γ. In [7], it has been proposed to define α by means of this 'boundary viscosity' ν_b by :

$$\alpha = \frac{\nu + \nu_\gamma - \nu_b}{\nu_\gamma} \tag{3.77}$$

Following [7], it is possible to give physical limits to ν_b, inducing that :

$$0 \leq \nu_b \leq \nu + \nu_\gamma \;\Rightarrow\; 0 \leq \alpha \leq \frac{\nu + \nu_\gamma}{\nu_\gamma} = \frac{1}{N^2}.$$

The relative viscosity $\overline{\nu}_b$ is defined by :

$$\overline{\nu}_b = \frac{\nu_b}{\nu}$$

From (3.77), the relation between α and $\overline{\nu}_b$ is :

$$\overline{\nu}_b = \frac{1 - \alpha N^2}{1 - N^2}$$

We also set

$$\delta = \frac{R_c}{2N^2\beta}$$

Parameters $\overline{\nu}_b$ and δ are used instead of α and β to compare various possible micropolar fluid models.

3.5.2 The slider bearing

As the first example, we consider a simple device with a negative slope described by figure 2

$$\hat{H}(Z) = c\left(1 + m\frac{Z}{L}\right). \qquad 0 < Z < L \text{ and } m < 0$$

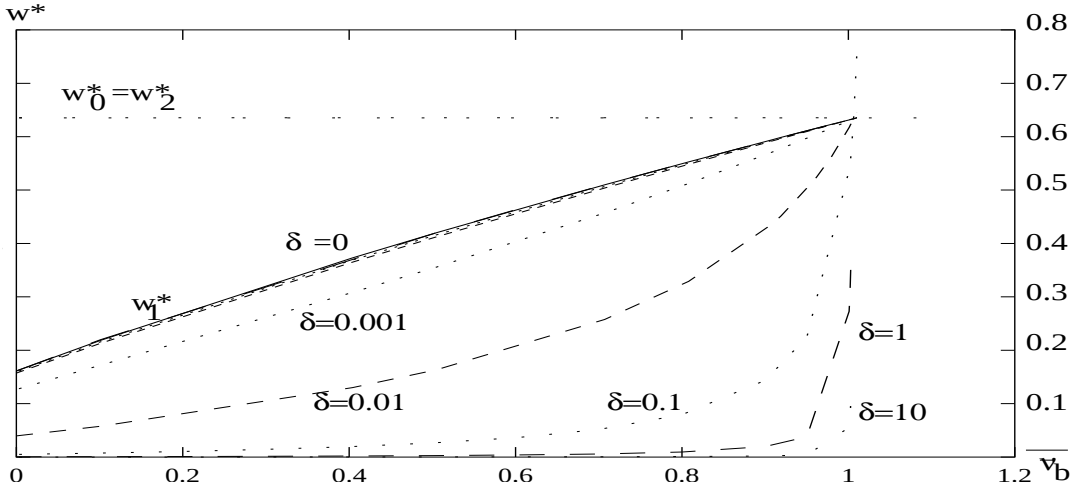

FIG. 3.3 – Adimensional load versus $\overline{\nu}_b$ for various δ , $R_c = 0.01, N = 0.1$

Using the normalization given in section 3.2.2, recalling that $\epsilon = \dfrac{c}{L}$, we define the rescaled gap :

$$h(x_1) = \frac{1}{c}\hat{H}(Lx_1)$$

and the corresponding $W^\star$ and $F^\star$ by :

$$W^\star = \int_0^1 p^\star(x_1)\, dx_1 = \frac{\epsilon^2}{g_0(\nu + \nu_\gamma)}\hat{W}$$

$$F^\star = \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}(x_1, 0) - 2N^2\omega^\star(x_1, 0)\right)\, dx_1 = \frac{\epsilon}{g_0(\nu + \nu_\gamma)}\hat{F}$$

Taking into account conditions (3.47) and (3.55), we obtain :

$$F^\star = \int_0^1 (1 - N^2\alpha)\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_3}(x_1, 0)\, dx_1 = \int_0^1 (1 - N^2)\gamma_\alpha \left(A_1\frac{\partial p^\star}{\partial x_1} + sA_2\right)\, dx_1$$

The friction coefficient $c_f^\star$ is determined by :

$$c_f^\star = \frac{F^\star}{W^\star} = \frac{1}{\epsilon}\hat{c}_f$$

Loads and friction coefficients are computed for a fixed slope $m = -0.5$:

-$W^\star$ (respectively $c_f^\star$) load (resp. friction coefficient) corresponding to the pressure solution of (3.67) depending on $\overline{\nu}_b, \delta,\ N, R_c$;

-$W_1^\star$ (respectively $c_{1f}^\star$) load (resp.friction coefficient) corresponding to the pressure solution on (3.67) with $\dfrac{1}{\beta} = 0$ depending on $\overline{\nu}_b, N, R_c$ $(\delta = 0)$; [8]

-$W_2^\star$ (respectively $c_{2f}^\star$) load (resp.friction coefficient) corresponding to the pressure solution of (3.76) depending on N, R_c $(\delta = \alpha = 0)$; [5]

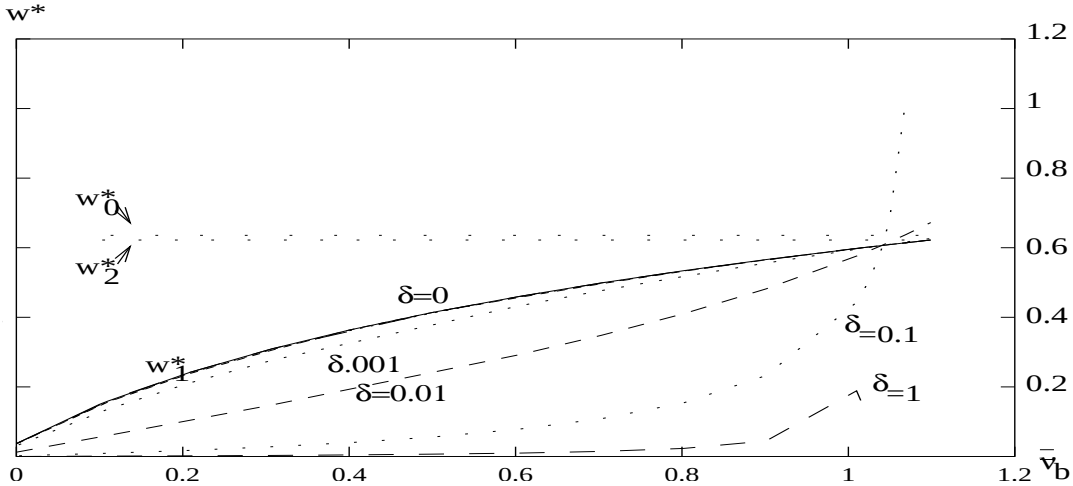

FIG. 3.4 – Adimensional load versus $\overline{\nu}_b$ for various δ , $R_c = 0.01$ and $N = 0.3$

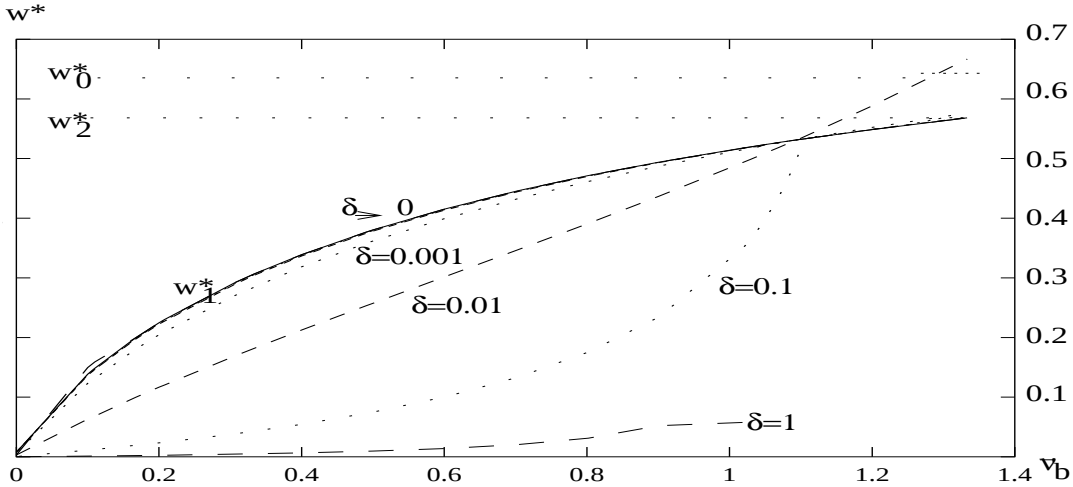

FIG. 3.5 – Adimensional load versus $\overline{\nu}_b$ for various δ , $R_c = 0.01$ and $N = 0.5$

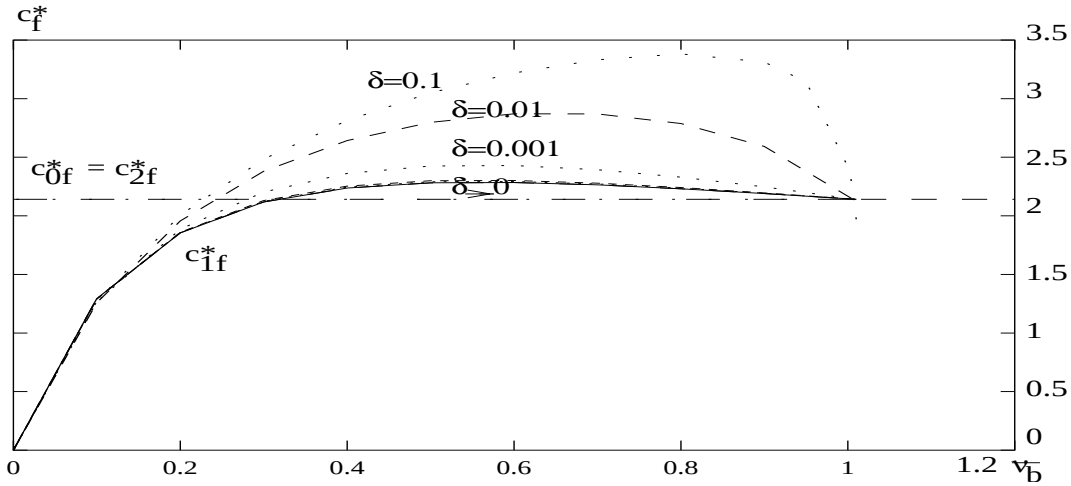

FIG. 3.6 – Adimensional friction coefficient versus $\overline{\nu}_b$ for various δ , $R_c = 0.01$ and $N = 0.1$

-$W_0^\star$ (respectively $c_{0f}^\star$) load (resp. friction coefficient) associated to the classical newtonian Reynolds equation :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3}{12}\frac{\partial p^\star}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{hs}{2}\right) \tag{3.78}$$

Remark 3.5.1. *We recall that the classical Reynolds equation* (3.78) *is obtained from the micropolar Reynolds equation by letting N tend to zero.*

Firstly, we are interested by the study of the influence of the boundary condition parameters on the load and on the friction coefficient (figure 3.3 to 3.8). Taking these parameters into account induces a large variation in the range of the load, especially for moderate N. For $N = 0.1$ and $\overline{\nu}_b = 0.8$, we nearly multiply by five the load by making δ varying from 0.1 to 0.001. The influence of δ on the friction coefficient is relatively less important and does not exceed 20%.

Figures 3.3 to 3.8 also show the convergence of the solutions of the present model $W^\star, c_f^\star$ (4 parameters $N, Rc, \delta, \overline{\nu}_b$) to $W_1^\star, c_{1f}^\star$ (3 parameters $N, Rc, \overline{\nu}_b$), solutions of the model proposed in [8], by making δ tend to zero as previously announced in section 3.3.4. An interesting point is that the load $W^\star$ is nearly always smaller than $W_1^\star$ and $W_2^\star$. This is the consequence of the introduction of a slipage effect implicitly contained in the model. On the contrary, friction coefficient is larger. Also to be mentioned is the convergence of the load towards the value of the load $W_2^\star$, corresponding to the classical micropolar model (two parameters N, Rc) as $\overline{\nu}_b$ is close to $\dfrac{1}{1-N^2}$, whatever be the value of the parameter δ .

As a classical result, we find again that $W_2^\star$ is close to the newtonian load $W_0^\star$ as N tends to zero (figure 3.3). The same result is true for the friction coefficient $c_{2f}^\star$ and $c_{0f}^\star$ (figure 3.6).

Lastly, let us mention that the range of the values of δ and $\overline{\nu}_b$ presented here is the one for which the coefficient Θ_1 of the Reynolds equation is numerically positive. Other values can induce unrealistic pressure distribution. This problem is linked with the ability to prove the uniqueness of the solution of the Reynolds equation.

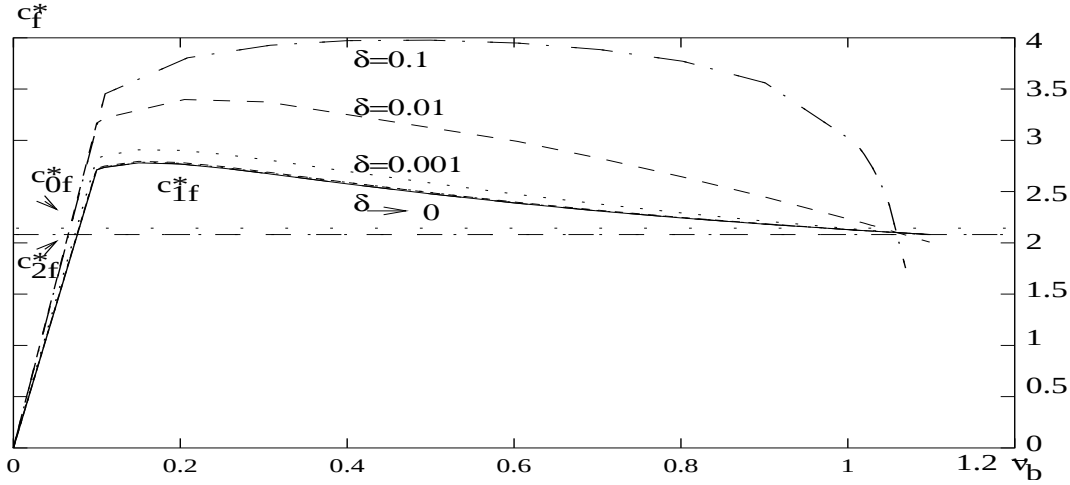

FIG. 3.7 – Adimensional friction coefficient versus $\overline{\nu}_b$ for various δ , $R_c = 0.01$ and $N = 0.3$

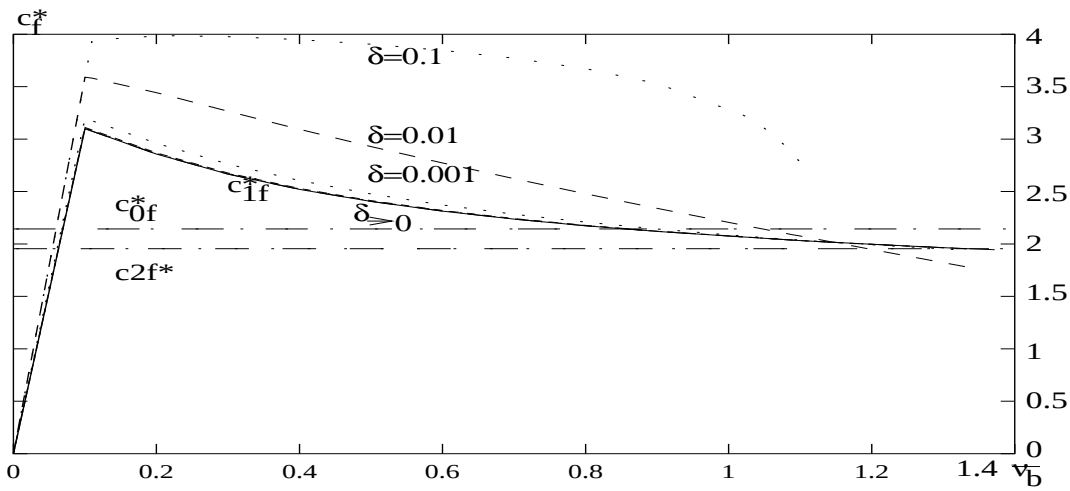

FIG. 3.8 – Adimensional friction coefficient versus $\overline{\nu}_b$ for various δ , $R_c = 0.01$ and $N = 0.5$

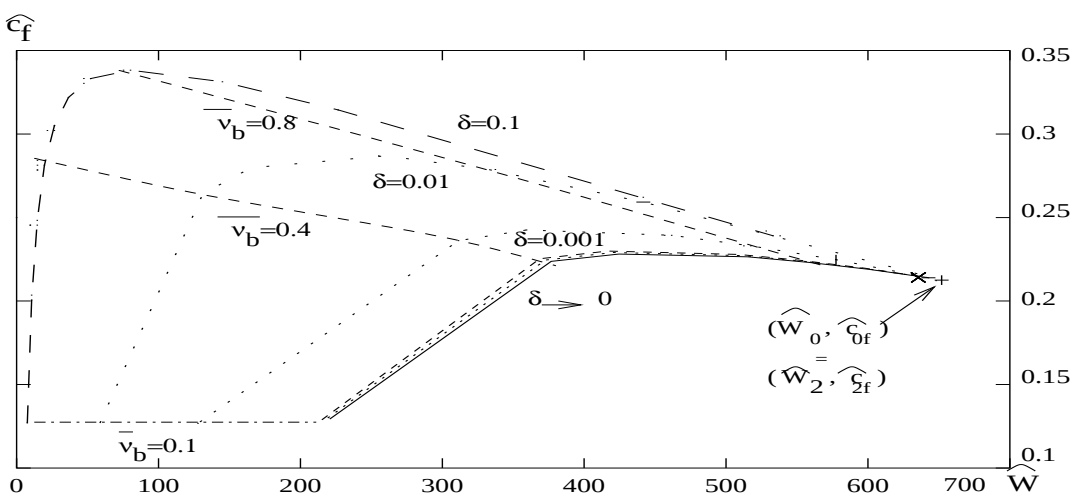

FIG. 3.9 – real friction coefficient versus real load for $\epsilon = 0.1$, $R_c = 0.01$ and $N = 0.1$
$\hat{W}_2 = 683N$, $\hat{c}_{2f} = 0.208$

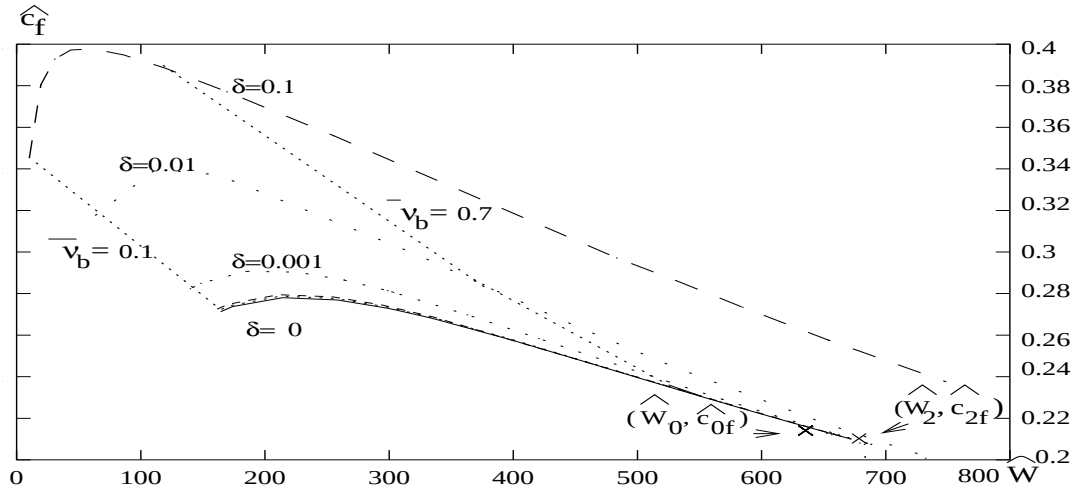

FIG. 3.10 – real friction coefficient versus real load for $\epsilon = 0.1$, $R_c = 0.01$ and $N = 0.3$
$\hat{W}_2 = 683N$, $\hat{c}_{2f} = 0.208$

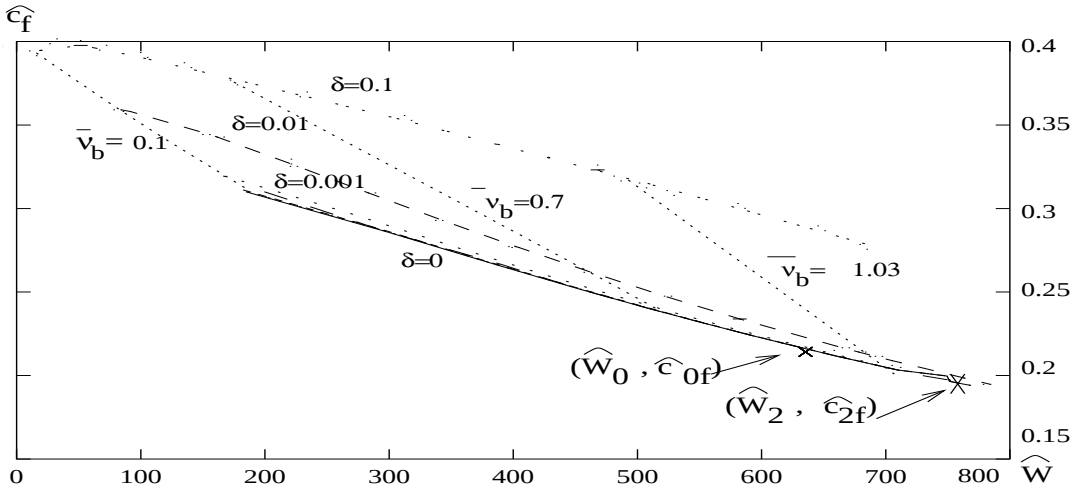

FIG. 3.11 – real friction coefficient versus real load for $\epsilon = 0.1$, $R_c = 0.01$ and $N = 0.5$
$\hat{W}_2 = 757N$, $\hat{c}_{2f} = 0.195$

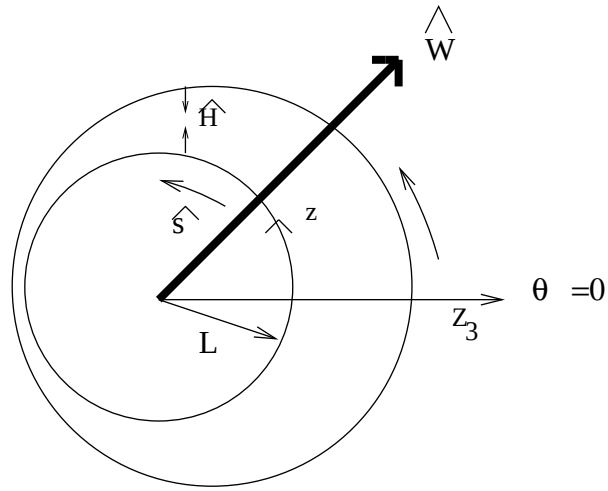

FIG. 3.12 – Journal bearing configuration

In figure 3.9, 3.10, 3.11, we summarize the results in terms of real values of the friction coefficient $\hat{c}_f$ with respect to the load $\hat{W}$ for :

$$\epsilon = 0.1,\ g_0 = 1m/s,\ \nu = 10Kg/m.$$

The load of the newtonian solution (3.78) is $\hat{W}_0 = 641N$ and the friction coefficient is $\hat{c}_{0f} = 0.214$. In these figures, we draw the curves $(\hat{W}, \hat{c}_f)$ for values of δ from 10^{-1} to 10^{-6} by letting $\overline{\nu}_b$ varying from 0.1 to $\dfrac{1}{1-N^2}$. Moreover, we indicate for some particular values of $\overline{\nu}_b$ the corresponding points of the previous curves.

The influence of δ is mainly concerned with relatively small loads, another interesting point is the non-monotonicity of the curves so that the same friction coefficient can be obtained with the same δ for two different loads. This seems to disappear for larger values of N.

3.5.3 The journal bearing

In this case, the fluid is contained between two cylinders in the domain defined in polar coordinates by :

$$\hat{H}(\theta) = c(1 + \zeta cos\,\theta),\ \ c > 0,\ \ 0 < \zeta < 1\ \ 0 \leq \theta < 2\pi$$

where ζ is the eccentricity.

Let us also remark that due to the convergent-divergent phase, the solution of the Reynolds equation is negative in the divergent part of the gap (cavitation phenomenon) [?].

Various models can be used to take such a phenomenon into account. To compare with [19], we will use the half-Sommerfel boundary conditions model in which the pressure is assumed to be zero for $\theta \geq \pi$. For computation of $\hat{W}$ and $\hat{F}$ we take only the positive part of the pressure.

Due to the circular form, the load is now given by :

$$\hat{W} = \sqrt{\hat{W}_n^2 + \hat{W}_m^2} \tag{3.79}$$

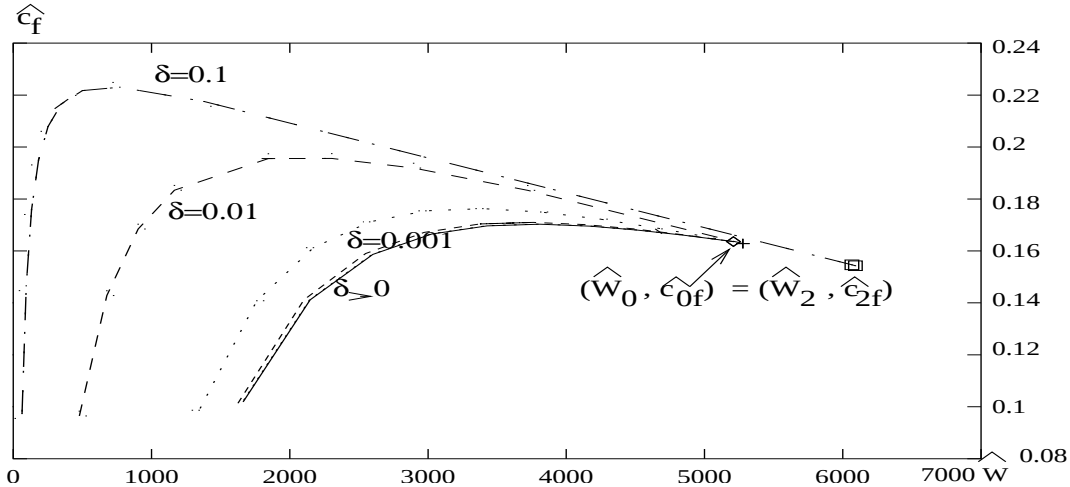

FIG. 3.13 – real friction coefficient versus real load in journal bearing$\epsilon = 0.1,\ R_c = 0.01\ N = 0.1$

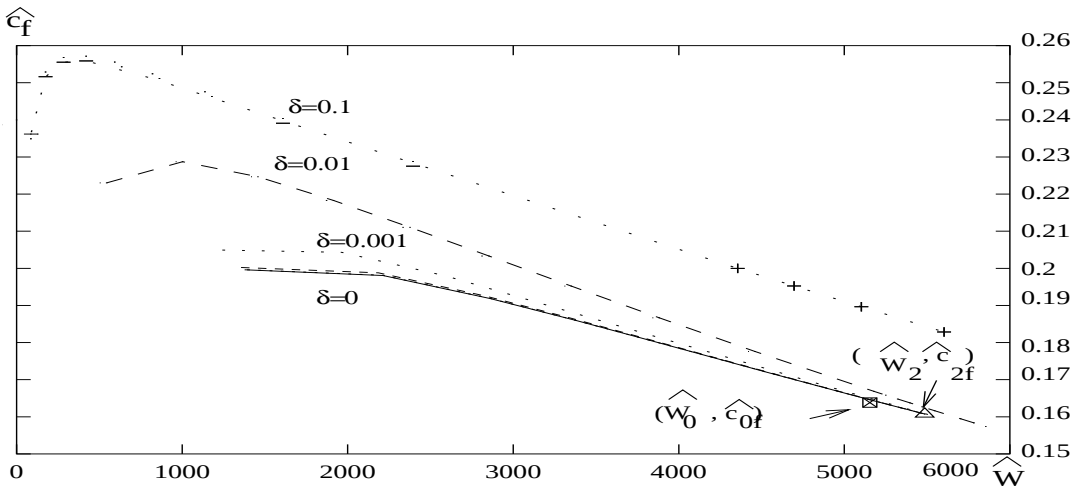

FIG. 3.14 – real friction coefficient versus real load in journal bearing$\epsilon = 0.1,\ R_c = 0.01\ N = 0.3$

where

$$\hat{W}_n = \int_0^{2\pi} \hat{p}\, cos\theta\ d\theta \ \text{ and } \ \hat{W}_m = \int_0^{2\pi} \hat{p}\, sin\theta\ d\theta$$

By introducing $Z = L\theta$, and $0 < Z_3 < \hat{H}(\theta)$, it is usual to define the friction force by :

$$\hat{F} = L \int_0^{2\pi} \left((\nu + \nu_\gamma) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial Z_3}(L\theta, 0) - 2\nu_\gamma \hat{\omega}(L\theta, 0) \right)\ d\theta$$

The friction coefficient is defined by :

$$\hat{c}_f = \frac{\hat{F}}{\hat{W}} \tag{3.80}$$

As for the slider bearing, we aim to compare the results (loads and friction coefficients) obtained by our model with those of [8] (namely $\hat{W}_1,\ \hat{c}_{1f}$) and [19] (namely $\hat{W}_2,\ \hat{c}_{2f}$).

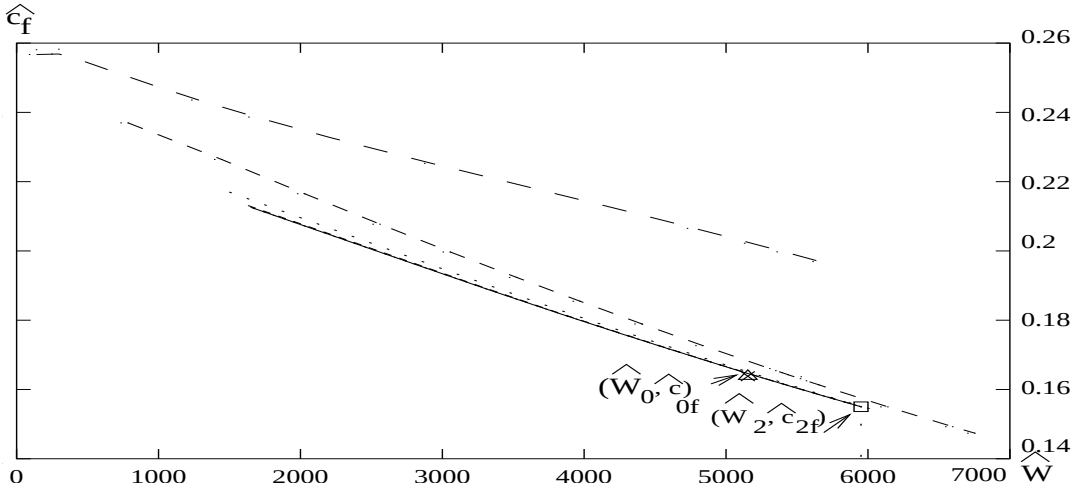

FIG. 3.15 – real friction coefficient versus real load in journal bearing$\epsilon = 0.1,\ R_c = 0.01\ N = 0.5$

In both cases, we have to consider the load defined as (3.79) and friction coefficients defined as in (3.80).

Figures 3.13 to 3.15 give the value of real friction coefficients versus the real load for

$$\zeta = 0.5,\ \epsilon = 0.1\ g_0 = 1m/s,\ \nu = 10Kg/m$$

Although the geometries of the slider and journal bearing are different and in spite of the occurrence of the cavitation phenomenon, numerical results are very similar in both cases and preceding comments are still valid.

As a conclusion, introducing the two parameters α and β seems to be of primary importance for small loads and small values of N. For large values of N and load, the non-newtonian effect of the "bulk fluid" is preponderant.

Bibliographie

[1] E.L Aero, A.N Bulygin and E.V Kuvshinskii, *A Symetric hydromechanics,* J. Appl. Math. Mech. 29 N° 2 (1965) 297-308 (in Russian).

[2] G. Allaire, *Homogenization of the Navier-stokes equations with a slip boundary condition* .Comm. Pure Appl.Math. 44 N° 6 (1991) 605-641.

[3] G Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation : a mathematical proof*, Appl. Math. Opt. 14 (1986) 73-93.

[4] G. Bayada, G. Łukaszewicz, *On micropolar fluids in the theory of lubrication. Rigorous derivation of an analogue of the Reynolds equation*, Int. J. Engng Sci. Vol. 34 N° 13 (1996) 1477-1490.

[5] G. Bayada, M. Chambat, S.R. Gamouana, *About thin film micropolar asymptotic equations*,Quart. Appl. Math. 59 N° 3 (2001) 413-439.

[6] C. Bègue, C.Conca,O. Pironneau, F. Murat, *Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions on the pressure,* in *Nonlinear partial differential equations and their applications.* Collège de France Seminar, Pitman, Res. Notes Math. Ser., 181, Longman Sci. Tech.,Harlow, 1988, 179-264.

[7] N.M.Bessonov, *Boundary viscosity conception in hydrodynamical theory of lubrication*, Preprint 81, Russian Academy of Sciences, Institute of the Problems of Mechanical Engineering, St-Petersbourg, 1993.

[8] N.M.Bessonov *A new generalization of the Reynolds equation for a micropolar fluid and its application to bearing theory*, Tribology International (1994) 105-108.

[9] P.G. Ciarlet, P. Destuynder, *A justification of the two-dimensional linear plate model*, J. Mécanique 18 N° 2 (1979) 315-344.

[10] A.C. Eringen, *Theory for micropolar fluid*, J .Math .Mech. 16 N° 1 (1966) 1-16.

[11] V. Girault , P.A. Raviart, *Finite element approximation of the Navier Stokes equation*, Springer-Verlag, 1979.

[12] E. Hoglund , B.O.Jacobson, *Experimental investigation of the shear strength of lubricants subjected to high pressure and temperature*, ASME, Journal of tribology, vol. 108 (1986) 571-578.

[13] B.O. Jacobson , B.J. Hamrock, *Non-newtonian fluid model incorporated into ehd lubrication of rectangular contacts*, ASME, Journal of tribology, vol. 106 (1984) 275-284.

[14] B.O. Jacobson, *At the boundary between lubrication and wear*, in First world tribology conference, London, 1997, 291-298.

[15] M. Kaneta, H. nishikawa , K. Kameishi, *Observation of wall slip in ehd lubrication*, Journal of tribology, vol. 112 (1990) 447-452.

[16] L. Léger, H. Hervet, R. Pit, *Friction and flow with slip at fluid-solid interfaces, in Interfacial properties on the Submicron Scal*, ACS Symposium series 781, ACS, Washington DC, Chap. 10 (2001) 154-167.

[17] T. Levy ,E. Sanchez-Palencia, *On boundary conditions for fluid flow in porous media*, Int. J. Engng. Sci., 13 (1975) 923-940.

[18] G. Łukaszewicz, *Micropolar fluids, theory and applications.* Modeling and simulation in science, engineering and technology, Birkhäuser Boston, 1999.

[19] J. Prakash, P. Sinha, *Lubrication theory for micropolar fluids and its application to a journal bearing*, Int. J. Engng Sci., 13 (1975) 217-232.

[20] R. Temam, *Navier Stokes Equations, North Holland*, Amsterdam, 1984.