



**HAL**  
open science

# Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion

Olivier Thomas

► **To cite this version:**

Olivier Thomas. Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI; Telecom ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00005656v2

**HAL Id: tel-00005656**

**<https://theses.hal.science/tel-00005656v2>**

Submitted on 18 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité :

Mécanique – Acoustique

présenté par

**Olivier THOMAS**

pour obtenir le grade de DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

**Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de  
milieux minces élastiques**

—

**Application aux instruments de percussion**

Soutenue de 26 Octobre 2001,

devant le jury composé de :

Olivier ALLIX	<i>Rapporteur</i>
José ANTUNÈS	<i>Rapporteur</i>
Denis AUBRY	<i>Examineur</i>
Xavier BOUTILLON	<i>Examineur</i>
Antoine CHAIGNE	<i>Directeur de thèse</i>
Jean-Baptiste LEBLOND	<i>Président du jury</i>
Christophe PIERRE	<i>Examineur</i>



*à mon grand père,  
Blaise Thomas,  
ajusteur ;*

*à ma grand mère,  
Marie Rey.*





[...] L'orchestre se compose d'un percussionniste, d'un frappeur de cymbales, d'un chanteur-prieur et de deux souffleurs de trompe. Il est possible d'évoquer les percussions, les heurts de cymbales, la mélodée du chanteur. Depuis Stravinsky et après les apports du jazz et de la musique concrète, notre oreille est à même de saisir les timbres marqués, les attaques abruptes du son, la prévalence du rythme, ou de la polyrythmie sur la ligne mélodique. Cependant, dans le concert des instruments bouddhistes, les trompes échappent à notre entendement. Les basses qui surgissent n'ont aucun équivalent en quelques musiques que l'Occident ait conçues ou adoptées. Le basson, le tuba, le saxophone baryton, la clarinette basse... rien ne peut suggérer de telles vibrations. [...]

Le bouquet des basses tibétaines se brise aussitôt émis. C'est un son fractal. Ou plutôt, ses contours se fractionnent ipso facto. Ils sont soufflés en puissance, en volume, en timbre, et cependant se brisent dès l'émission. Se pulvérisant, ils gardent néanmoins toute leur puissance et leur ampleur. [...]

Ces basses comme de gros coussins de terre cuite et de vent. Un saxophone baryton, ayant avalé au préalable un tuba, explose amoureusement à vos pieds, en vous, tout autour. [...]

Pierre Sterckx,

[107], chap. "Images écrites au Tibet", pp. 153-154.



---

---

## Remerciements

*Mes premiers remerciements s'adressent tout naturellement à l'initiateur de ce travail de thèse, Antoine Chaigne, qui m'a accordé sa confiance tout au long de ces trois années passées à ses côtés. Je lui suis particulièrement reconnaissant de m'avoir confié un sujet de recherche qui m'a enthousiasmé, par son originalité, à la frontière entre la mécanique, l'acoustique et les instruments de musique, et sa portée, à la fois théorique et expérimentale. Je pense avoir beaucoup appris, et je le remercie de m'avoir laissé une grande autonomie, tout en guidant mon travail avec un regard extérieur, expérimenté et avisé, même si cela n'a pas été facile pour moi tous les jours.*

*Je tiens à remercier José Antunès et Olivier Allix pour avoir accepté de rapporter mon travail. Leur lecture en a été minutieuse, en un temps record, et leurs rapports élogieux. Je suis particulièrement reconnaissant à José Antunès, qui a bien voulu être rapporteur, bien qu'il ne soit pas officiellement désigné comme tel sur la couverture des manuscrits envoyés aux archives de l'université.*

*Je remercie chaleureusement Denis Aubry, Xavier Boutillon, Jean-Baptiste Leblond et Christophe Pierre qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury. Je les remercie plus particulièrement pour l'intérêt qu'ils ont clairement manifesté à l'égard de mon travail et pour les critiques et suggestions judicieuses qu'ils ont proposées, à la fois sur le contenu de mon travail et sur les perspectives possibles.*

*La suite de mes remerciements s'adresse tout naturellement à mon fidèle compère, Cyril Touzé, avec qui le travail devient une vraie partie de plaisir. La complémentarité de nos compétences a permis d'attaquer le problème sur plusieurs fronts, et a facilité notre compréhension des phénomènes. Je le remercie pour sa rigueur scientifique, son humilité devant des phénomènes physiques encore incompris, son recul vis à vis de nos recherches, et enfin sa relecture attentive et pertinente de mes travaux. Je remercie aussi vivement François Ollivier, pour avoir consacré du temps et de l'intérêt au Gong. Les analyses modales dont celui-ci a fait l'objet au Laboratoire de Mécanique Physique se sont avérées indispensables dans notre compréhension de son fonctionnement. Merci également à Olivier Millet, Aziz Hamdouni et Alain Cimetière, dont les discussions de dernière minute furent fructueuses. Mes remerciements arrivent naturellement à Benoit Fabre, qui, derrière la caméra du Laboratoire d'Acoustique Musicale, a été captivé par les ondulations de la petite plaque. Je remercie aussi Julien Boissinot : sans sa patience et le temps qu'il y a consacré, la plaque n'aurait jamais tourné rond. Leur contribution et leurs conseils artistiques ont donné lieu à un grand moment de cinéma.*

*Je tiens à remercier certains enseignants que j'ai eu la chance d'avoir, sans qui je n'aurais ja-*

---

*mais été amené à faire de la mécanique et de la recherche : MM. Viallon, Toureille, Patrice Schwartz, Hervé Halter, Croisot, Michel Boulaton, Jacky Rea, Hervé Gayvallet, Pierre Ladévèze, Arnaud Poutou, Jean-Claude Risset et René Caussé. Qu'ils reçoivent mon meilleur souvenir.*

*Le présent manuscrit n'aurait jamais vu le jour si Éric Moulines et Paul Planchet ne m'avaient pas autorisé à créer une annexe de l'ENST au fin fond de la Haute-Loire. Qu'ils en soient remerciés, ainsi que le support technique de haut niveau dont j'ai bénéficié, incarné par Olivier Cappé, Jean-François Cardoso, Louis Montagne et Michel Coret. Merci au département Traitement du Signal ET des Images, qui m'a accueilli pendant trois ans.*

*Un grand nombre de personnes ont eu une part dans ce travail, indirecte mais importante, car ils ont contribué au jour le jour à rythmer le quotidien, diurne et nocturne, et ainsi à m'écarter souvent et avantageusement de mes obligations doctorantes. Je tiens en ce sens à remercier tout d'abord les "collegues" du laboratoire, sans qui il eût été facile d'oublier les pauses-café : Stéphanie Dubost, Julie Rosier, Ludivine Ménéz, Christian Berthomier, Gilles Fay, Vincent Buchoux, Randal Douc, François Roueff, Jamal Najim, David Heleschewitz, Olivier Bermont ; mention spéciale de Denis Matignon, Jean-Marie Nicolas et Jacques Prado. Un grand merci à une foule de gens d'horizons différents : les fidèles manutentionnaires du Rhodes dans "M. Thomas", Bruno Craoued & co, le Cancrelat des Iles et autres amateurs de Clavans et du 21, rue du bois de la Caille, les usagers, chauffeurs et mécaniciens du Combi vert, les cachanais, le CGC, les amis de Fresnes et Gentilly, les clermontois, Solidarité Tibet, Chawata, le DEA Assssiam, l'IRCAM et ses habitants, les Brandewinder, les Boulets, André Cartier, les vignes du Bois-Dieu.*

*Enfin, merci à Marie-Thérèse et Régis Thomas, pour tout. Merci à Fanny, pour son soutien fidèle et continu, sa relecture prompte et attentive, et la chaleur inhérente à son arrivée.*

---

---

# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>6</b>
----------------------	----------

## I GONGS ET CYMBALES

<b>1 Introduction</b>	<b>15</b>
1.1 Les cymbales et les gongs . . . . .	15
1.1.1 Géométrie, utilisation . . . . .	15
1.1.2 Fabrication . . . . .	19
1.2 Cadre de la présente étude . . . . .	19
1.2.1 Acoustique instrumentale et modèles physiques . . . . .	19
1.2.2 Vibrations non-linéaires de cymbales et de gongs . . . . .	20
1.2.3 Modélisation . . . . .	22
1.2.4 Organisation du manuscrit . . . . .	22
<b>2 Analyse des vibrations d'un gong</b>	<b>23</b>
2.1 Le gong . . . . .	23
2.2 Analyse modale expérimentale . . . . .	24
2.3 Analyse en régime libre . . . . .	32
2.4 Analyse en régime forcé . . . . .	35
2.4.1 Détails expérimentaux . . . . .	35
2.4.2 Vibrations unimodale . . . . .	35
2.4.3 Route vers le chaos . . . . .	41
2.4.4 Examen de quelques couplages . . . . .	43
2.5 Conclusion . . . . .	53

## II PLAQUES CIRCULAIRES

<b>3 Vers les équations de Von-Kàrmàn</b>	<b>57</b>
3.1 Introduction . . . . .	58
3.2 Établissement des équations non-linéaires de plaque . . . . .	60
3.2.1 Notations . . . . .	60
3.2.2 La transformation . . . . .	60
3.2.3 Les déformations . . . . .	63
3.2.4 Les contraintes . . . . .	64
3.2.5 Forces de membrane et moments de flexion . . . . .	67

3.2.6	Application du principe des travaux virtuels . . . . .	68
3.2.7	Analyse dimensionnelle des équations et simplifications . . . . .	72
3.2.8	Effort tranchant . . . . .	73
3.3	Formulation non-linéaire du problème de vibration de plaque . . . . .	75
3.3.1	Récapitulatif : formulation en efforts . . . . .	75
3.3.2	Formulation en déplacement . . . . .	76
3.3.3	Fonction de force et conditions de compatibilité . . . . .	77
3.3.4	Formulation mixte . . . . .	78
3.3.5	Conditions aux limites . . . . .	80
3.4	Discussion . . . . .	80
3.4.1	Non-linéarités et domaine de validité . . . . .	80
3.4.2	Validation mathématique des hypothèses . . . . .	81
3.4.3	Modèles d'ordre supérieur . . . . .	82
	Récapitulatif des notations . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Projection modale</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.1.1	Projection sur les modes propres linéaires . . . . .	87
4.1.2	Modes normaux non-linéaires . . . . .	88
4.2	Formulation du problème . . . . .	89
4.2.1	Amortissement . . . . .	89
4.2.2	Formulation adimensionnée des équations . . . . .	89
4.3	Modes de vibration . . . . .	91
4.3.1	Fréquences et déformées . . . . .	91
4.3.2	Orthogonalité . . . . .	97
4.4	Projection modale . . . . .	99
4.4.1	Fonction de force . . . . .	100
4.4.2	Déplacement transversal . . . . .	101
4.4.3	Discussion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Réduction à un mode</b>	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	105
5.1.1	Relations de résonances . . . . .	106
5.1.2	Cadre de notre étude . . . . .	106
5.2	Vibrations de flexion axisymétriques . . . . .	108
5.2.1	Solution perturbative en régime forcé . . . . .	108
5.2.2	Solution perturbative en régime libre conservatif . . . . .	112
5.3	Vibrations de flexion asymétriques . . . . .	114
5.3.1	Influence de légères imperfections de la plaque . . . . .	115
5.3.2	Couplage non-linéaire entre les deux configurations préférentielles . . . . .	116
5.3.3	Influence des paramètres . . . . .	120
5.3.4	Solution générale - Ondes progressives . . . . .	120
5.4	Effets non-linéaires de membrane . . . . .	122
5.4.1	Mode axisymétrique . . . . .	122
5.4.2	Mode asymétrique . . . . .	126
5.4.3	Vibrations de membrane en régime couplé . . . . .	131
5.5	Conclusion . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Validations expérimentales</b>	<b>133</b>
6.1	Détails expérimentaux . . . . .	133
6.2	Mode axisymétrique . . . . .	135
6.3	Couplage non-linéaire entre les deux configurations préférentielles . . . . .	137
6.3.1	Configurations préférentielles . . . . .	137
6.3.2	Observations expérimentales . . . . .	139

6.3.3	Modèle théorique avec $Q_2$ non nul . . . . .	141
6.3.4	Recalage du modèle . . . . .	146
6.4	Cas d'un désaccord négatif entre les pulsations propres . . . . .	146
6.4.1	Un peu de théorie . . . . .	146
6.4.2	Observations expérimentales . . . . .	147
6.5	Discussion . . . . .	147
6.5.1	Symétrie du système . . . . .	147
6.5.2	Ordre de grandeur du déplacement . . . . .	149
6.5.3	Effet du second ordre . . . . .	149
6.6	Conclusion . . . . .	151

### III DES SYSTÈMES DISCRETS À 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ

<b>7</b>	<b>Non-linéarités géométriques</b>	<b>155</b>
7.1	Une barre isolée . . . . .	155
7.1.1	Effort normal . . . . .	155
7.1.2	Domaine de validité . . . . .	156
7.2	Système "plat" . . . . .	158
7.2.1	Force de rappel . . . . .	158
7.2.2	Force de rappel avec comportement linéaire des barres . . . . .	159
7.2.3	Discussion . . . . .	159
7.3	Système avec inclinaison initiale . . . . .	161
7.3.1	Force de rappel . . . . .	161
7.3.2	Influence de la courbure . . . . .	162
7.4	Systèmes avec raideur en flexion . . . . .	163
7.4.1	Équations d'équilibre . . . . .	164
7.4.2	Cas des extrémités fixes : influence de l'épaisseur . . . . .	166
7.4.3	Cas des extrémités mobiles : retour sur les équations de Von Kàrmàn . . . . .	168
7.5	Conclusion . . . . .	169
<b>8</b>	<b>Oscillations non-linéaires</b>	<b>171</b>
8.1	Le pendule . . . . .	171
8.2	Effet raidissant ou assouplissant . . . . .	175
8.2.1	Solution analytique perturbative de l'équation du mouvement . . . . .	175
8.2.2	Influence de l'inclinaison et de l'épaisseur . . . . .	177
8.2.3	Les gongs d'opéra chinois . . . . .	179
8.2.4	Les modes du tam-tam . . . . .	179
8.3	Distortion dissymétrique des oscillations . . . . .	181
8.3.1	Effets de la courbure . . . . .	181
8.3.2	Interprétation géométrique des effets raidissant et assouplissant . . . . .	184
8.4	Vibrations de grande amplitude . . . . .	185
8.4.1	Système sans raideur en flexion . . . . .	185
8.4.2	Influence de l'épaisseur . . . . .	187
<b>9</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>191</b>
9.1	Non-linéarités géométriques dans les milieux minces . . . . .	192
9.2	Vers un modèle continu de cymbales et de gongs . . . . .	193
9.3	Dans le futur... . . . .	197



## ANNEXES

<b>A</b>	<b>Étude et calibration d'un excitateur électromagnétique</b>	<b>201</b>
A.1	Description . . . . .	201
A.2	Modélisation du comportement magnéto-dynamique . . . . .	201
A.2.1	Champ magnétique créé par la bobine . . . . .	201
A.2.2	Force exercée sur l'aimant . . . . .	203
A.3	Mesures de la force exercée sur la structure . . . . .	205
A.3.1	Montage expérimental . . . . .	205
A.3.2	Étude mécanique du système tête d'impédance-aimant . . . . .	205
A.3.3	Force en fonction de la position . . . . .	206
A.3.4	Force en fonction de l'intensité du courant . . . . .	206
A.4	Conclusions . . . . .	209
<b>B</b>	<b>Quelques analyses modale</b>	<b>211</b>
B.1	Déformées modales non-identifiées du gong. . . . .	211
B.2	Analyses modales par la méthode des Éléments Finis. . . . .	211
<b>C</b>	<b>Travaux virtuels dans le cas de la plaque</b>	<b>213</b>
C.1	Travail virtuel des efforts intérieurs . . . . .	213
C.2	Travail virtuel des efforts extérieurs . . . . .	215
C.3	Travail virtuel des quantités d'accélération . . . . .	216
<b>D</b>	<b>Calcul des coefficients de couplage dans les plaques</b>	<b>219</b>
D.1	Coefficients $\Gamma_{pq\alpha u}$ . . . . .	219
D.1.1	Cas des vibrations axisymétriques . . . . .	219
D.1.2	Cas des vibrations asymétriques . . . . .	220
D.2	Coefficients $G_{pqb}$ . . . . .	224
D.2.1	Cas d'un mode axisymétrique . . . . .	224
D.2.2	Cas d'un mode asymétrique . . . . .	224
	<b>Bibliographie</b>	<b>225</b>

PARTIE I

---

## Gongs et cymbales

*Voici le gong, infiniment plus brutal [...]. Bref, le gong, même comparé en pensée ou par la mémoire à d'autres gongs, déchire le système de l'orchestre, et il faut l'aimable hospitalité du laxisme contemporain pour jouir de ce pavé dans la mare, de cette énorme faute d'orthographe, et pour orner aussitôt cette idole de guirlandes...Ce gong nous vient d'ailleurs. Il émerge, objet sonore solitaire. On n'entend que lui. [...]*

*Pierre Schaeffer,  
[104], §18.7, Diabolus in musica*



---

# Introduction

Le travail de thèse exposé dans ce manuscrit s’inscrit dans le cadre général de recherches sur des modèles physiques d’instruments de musique dirigées par Antoine Chaigne ; il fait suite au travail de thèse de Cyril Touzé [122], et correspond ainsi à la deuxième étude sur les instruments de percussions dits “non-linéaires” menée au département Traitement du Signal et des Images de l’École Nationale Supérieure des Télécommunications. La présente étude a pour objectif de contribuer à l’élaboration d’un modèle physique de comportement, en situation de jeu, des instruments de percussion du type cymbales et gongs. Avant toute chose, il convient de présenter brièvement les objets de cette étude.

## 1.1 Les cymbales et les gongs

Dans la classification utilisée usuellement en occident<sup>1</sup>, les cymbales et les gongs font partie de la famille des instruments de percussion, et plus particulièrement de celle des idiophones (“le son de l’instrument est produit par la matière même, sans qu’on ait recours à la tension de membranes ou de cordes”, [126]). Ces instruments sont parfois qualifiés de “non-linéaires” [122], du fait que les mécanismes de production de leur son ne peuvent pas être prédits par des modèle mathématique linéarisés. Par abus de langage, les phénomènes particuliers associés à des modèles non-linéaires seront simplement qualifiés de “non-linéaires” dans la suite. Une photographie représentée sur la figure 1.1 représente certains de ces instruments.

### 1.1.1 Géométrie, utilisation

#### Les gongs

Les gongs sont des instruments originaire d’Asie du sud-est, les premiers modèles tels que nous le connaissons aujourd’hui ayant fait leur apparition en Chine au VI<sup>e</sup> siècle. Ils sont en général fabriqués en bronze (alliage de cuivre et d’étain). Leur géométrie est celles de coques circulaires axi-symétriques, plus ou moins bombées. Ils possèdent tous des bords recourbés vers l’intérieur, en une paroi latérale. Selon l’importance des phénomènes non-linéaires mis en jeu, on peut classer ces instruments en trois familles.

---

<sup>1</sup>La classification utilisée ici est celle de Hornbostel/Sachs, qui distingue les *idiophones*, les *membranophones*, les *cordophones* et les *aérophones*, avec les deux premiers couramment regroupés dans les instruments de percussion. Les chinois utilisent une classification en huit classes (métal, pierre, terre, bois, bambou, calebasse, peau, soie), fondée sur la matière principale dont l’instrument est fabriqué [126].



FIG. 1.1 – Quelques gongs et cymbales. De gauche à droite : cymbale “crash”, cymbale “splash”, cymbales charleston, gong viet-namiens (du type des “kempuls” indorésiens), tam-tam chinois.

- La première famille comprend les gongs de forte épaisseur par rapport à leur diamètre (4 mm environ pour un diamètre extérieure de 600 mm, par exemple). Ils possèdent en général une protubérance arrondie en leur centre, appelée *dôme* ou *bulbe*, sur laquelle l’instrumentiste frappe avec une mailloche en feutre. Le dôme, la large paroi latérale et la forte épaisseur confèrent à la structure une forte rigidité en flexion, qui limite l’amplitude des vibrations en conditions normales de jeu. Ces instruments présentent des effets non-linéaires très faibles, qui se manifestent par un enrichissement du spectre au bout de quelques secondes de son, tout en gardant une hauteur tonale<sup>2</sup> précise et fixe au cours du temps [94]. En Asie du sud-est, et en particulier en Indonésie, les gongs sont déclinés en plusieurs tailles, correspondant à des notes précises, et rassemblés en carillons par familles de profils, formant ainsi des instruments mélodiques. Dans le Gamelan javanais, les gongs de plus fort diamètre (et de notes les plus graves), de 400 mm à 1 m de diamètre environ, sont suspendus verticalement par des cordes (cf. Figure 1.2(a)), formant un carillon nommé *kempul*. Des gongs de plus petit diamètre (de 150 mm à 400 mm environ) sont disposés horizontalement sur des cordes tendues, et forment ainsi une sorte de clavier de gongs. Cet ensemble est appelé *kenong* pour le plus grave et *bonang* pour le plus aigu (cf. Figure 1.2(b)).
- La deuxième famille regroupe les gongs utilisés traditionnellement dans l’opéra chinois. Ils sont d’épaisseur plus fine que les gongs de la famille précédente, ne possèdent pas de dôme central, et ont leur paroi latérale peu larges (cf. Figure 1.2(c)). Leur taille varie, de l’aigu au grave, de

<sup>2</sup>La hauteur tonale est la valeur de la note de musique associée à la fréquence fondamentale perçue par l’auditeur, si elle existe. Le musicien parlera de “hauteurs”, le physicien de “fréquences”.

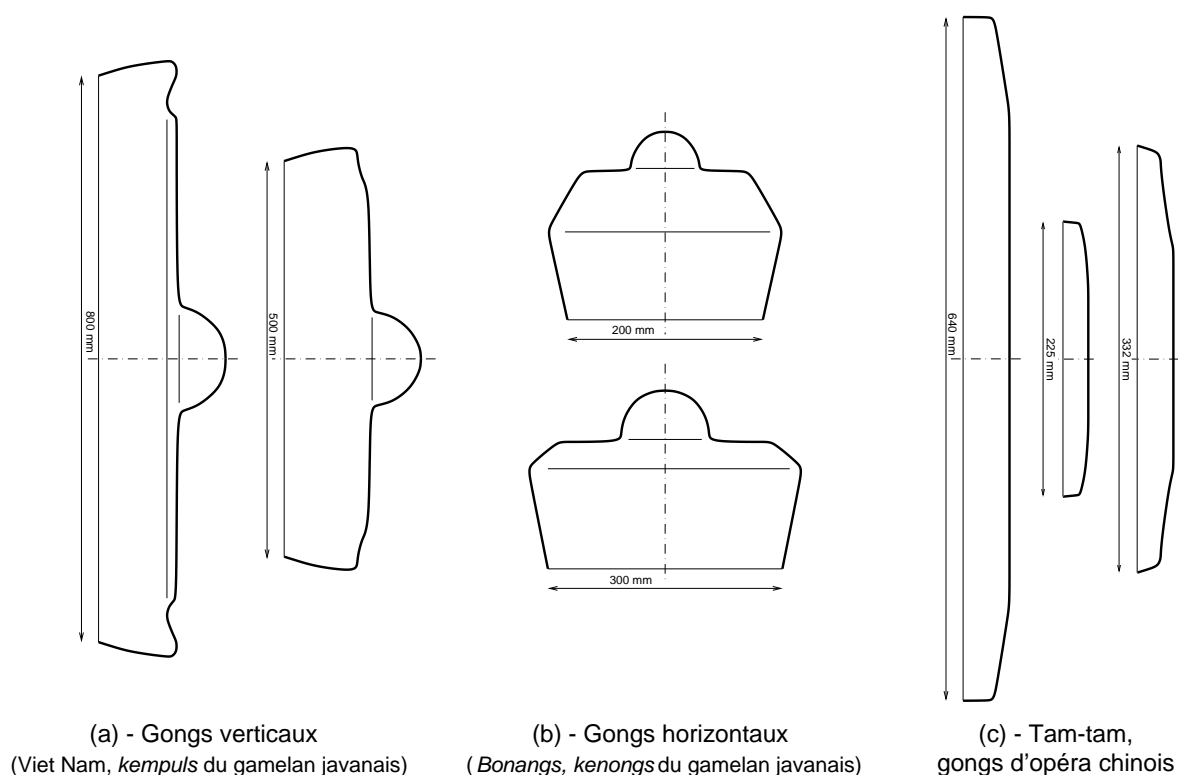


FIG. 1.2 – Profils de quelques gongs typiques (les dimensions spécifiées sont des ordres de grandeur). Les ‘tam-tams’ et les gongs d’opéra chinois (c) ne possèdent pas de dôme, sont d’épaisseur plus fine et n’ont pas de hauteur harmonique spécifique. Les autres (en particulier en Indonésie et au Viet-Nam, (a) et (b)) possèdent un dôme, sont plus épais et sont accordés à une hauteur spécifique. Des gongs de ce type, de différentes tailles, et donc de différentes hauteurs, sont souvent rassemblés en carillons, constituant ainsi un instrument mélodique.

100 mm de diamètre pour les plus petits, jusqu’à 500 mm. Ils sont suspendus en général par un cordage, soit à l’intérieur d’un cadre, soit tenus par l’instrumentiste, et sont frappés en leur centre au moyen d’une mailloche de taille adaptée au diamètre de l’instrument. Ces gongs, à diamètre égal, ont une rigidité inférieure à celle des gongs de la première famille. Leur son très particulier a une hauteur tonale perceptible, mais qui varie au cours du temps, en un *glissando* typique. De plus, selon leur géométrie plus ou moins galbée, le *glissando* peut être montant, ou descendant [37]. Ce phénomène de dépendance de la fréquence en fonction de l’amplitude des oscillations de la structure est typique d’effets de non-linéarités faibles.

- La troisième famille est constituée des *tam-tams* (à ne pas confondre avec les tambours africains du même nom). Ils sont originaires de Chine, et sont les gongs les plus utilisés dans l’orchestre symphonique occidental. Ils ont en général un profil similaire aux gongs d’opéra chinois, mais sont de taille beaucoup plus importante, de 500 mm de diamètre jusqu’à 1.2 m parfois (cf. Figure 1.2(c)). Ils sont suspendus en général à l’intérieur d’un cadre monté sur pieds, et sont frappés en leur centre au moyen d’une mailloche. Les tam-tams, à diamètre égal, ont une rigidité inférieure à celle des gongs des deux premières familles. Leur caractéristique principale est que pour des conditions analogues d’excitation, le timbre d’un tam-tam n’a pas de hauteur tonale précise. Son contenu spectral est variable au cours du temps : lorsque l’instrument est frappé en son centre, le support spectral se confine au basses fréquences pendant un court ins-

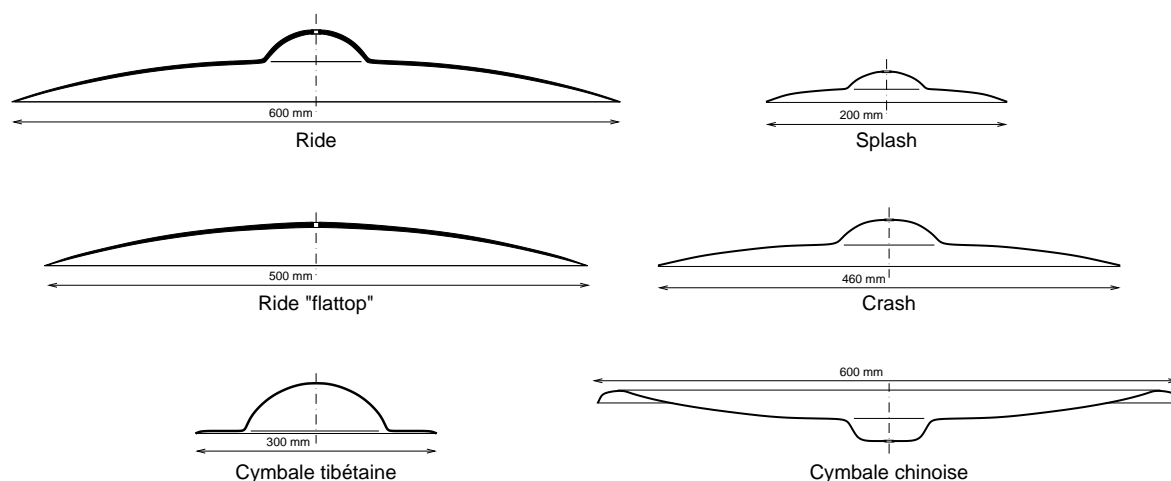


FIG. 1.3 – Profils de quelques cymbales typiques (les dimensions spécifiées sont des ordres de grandeur).

tant, pour glisser vers les hautes fréquences ensuite ; le son devient alors plus brillant et éclatant, avant de s'éteindre lentement. Ces effets, on le verra, sont typiques de fortes non-linéarités, menant dans ce cas à des oscillations chaotiques de la structure [56, 123]. Principalement utilisé comme bruitage en musique occidentale avant le XX<sup>e</sup> siècle<sup>3</sup> ou dans les bandes son de films, il trouve un emploi plus fréquent en musique contemporaine<sup>4</sup>.

## Les cymbales

Les cymbales ont aussi une origine asiatique, et ont été utilisées traditionnellement sous diverses formes en musique militaire et religieuse dans de nombreuses cultures. Rapportées d'orient par les croisés, elles occupent aujourd'hui une place de choix dans les orchestres symphoniques, les fanfares et les formations de jazz. Comme les gongs, les cymbales sont fabriquées généralement en bronze. Leur géométrie est aussi celle d'une coque axisymétrique, de courbure plus continue que celle d'un gong, ce qui lui confère une forme comparable à celle d'une soucoupe. Elles possèdent presque toutes un dôme central, et n'ont pas de bordure latérale (cf. Figure 1.3). Les cymbales possèdent un trou central qui permet de les fixer horizontalement sur un support, et dans ce cas d'en jouer en les frappant avec divers accessoires : une baguette de bois, une mailloche, des "balais"<sup>5</sup> de batteur, une tringle de triangle... La zone de frappe est choisie en fonction du timbre désiré : directement sur le bord, avec le plat de la baguette, l'amplitude de vibration de la cymbale est la plus importante, et le timbre est le plus chargé en harmoniques ; sur le dessus du plateau, le son est plus coloré, et plus vers le centre, sur le dôme, le choc est plus brillant. L'orifice central peut aussi servir à nouer une lanière au moyen de laquelle l'instrumentiste frappe deux cymbales l'une contre l'autre. Cela est utilisé dans les fanfares populaires et en musique traditionnelle tibétaine. Enfin, une utilisation moins courante consiste à mettre en vibration la cymbale en la frottant, soit sur le bord avec un archet de violon, soit avec un bâton de bois, en un mouvement rotatif, de façon similaire à l'utilisation d'un bol chantant tibétain. Les batteurs de jazz utilisent des onomatopées issues de l'anglais pour qualifier les cymbales, dont les principales sont *ride*, *crash* et *splash*. Deux familles de cymbales peuvent être dégagées, selon

<sup>3</sup>“[le tam-tam] ne s'emploie que dans les compositions funèbres et les scènes dramatiques où l'horreur est portée à son comble”, selon Berlioz ([126], p. 55)

<sup>4</sup>cf. la citation de P. Schaeffer, p. 13.

<sup>5</sup>sorte de fagot de fils métallique ou de nylon, rassemblés au bout d'une poignée, que les batteurs de jazz utilisent parfois comme baguette pour produire des sons plus doux.

l'importance des phénomènes non-linéaires mis en jeu, comme dans le cas des gongs.

- La première famille correspond à des cymbales de forte épaisseur par rapport au diamètre (par exemple 2 à 3 mm pour un diamètre extérieur de 600 mm). Elles sont en général frappées sur le dessus, et un son tintant et précis est obtenu, comparable à celui d'une cloche, sans toutefois avoir une hauteur tonale définissable. Le contenu spectrale est alors discret, et varie très peu au cours du temps. Cela permet aux batteurs de les utiliser pour marquer le rythme, en particulier avec les cymbales "ride", de grand diamètre (de 450 à 600 mm), et les cymbales "charleston", de diamètre plus faible (de 325 à 350 mm), utilisées par paire : soit en les heurtant l'une contre l'autre au moyen d'une pédale, soit en frappant la cymbale supérieure au moyen d'accessoires. On peut aussi classer dans cette famille des cymbales à dôme central de grand diamètre tenues en mains et heurtées ou frottées l'une contre l'autre lors des rituels religieux tibétains.
- La deuxième famille regroupe des cymbales d'épaisseur plus fine, qui produisent des sons plus bruyants. Leur spectre s'apparente à celui des tam-tams, puisqu'il est bruité, à large bande et continu, avec un contenu fonction de la force de frappe, et variable au cours du temps. Elles sont en générales utilisées ponctuellement, comme bruitage, pour ponctuer ou marquer des changements dans musique. Parmi les éléments d'une batterie, on trouve les "crash", de diamètre variable (de 300 à 450 mm) et les "splash", plus petites (de 150 à 300 mm), de profil similaire. Les cymbales "chinoises", qui peuvent atteindre de très grande taille (de 300 à 800 mm), ont leurs bords légèrement recourbés, et produisent un son très caractéristique. Ces cymbales sont jouées principalement avec des baguettes, sur le bord, ou au moyen de mailloche de feutre en coup unique ou en roulement. En particulier, on retrouve le phénomène d'enrichissement spectral des tam-tams décrit précédemment lorsque une cymbale crash, par exemple, est frappée avec une mailloche.

### 1.1.2 Fabrication

La fabrication des cymbales est majoritairement industrielle, vue leur utilisation très répandue en jazz et musique de variété, alors que celle des gongs est principalement artisanale. Elle est la conjugaison de laminage, repoussage, martelage et traitements thermiques diverses, dont les détails précis, parfois ancestraux, sont souvent gardés secrets par les fabricants/artisans, surtout dans le cas des gongs. On peut trouver dans [111] une description assez complète de la fabrication des cymbales.

## 1.2 Cadre de la présente étude

### 1.2.1 Acoustique instrumentale et modèles physiques

Le rôle premier de l'acoustique instrumentale est de comprendre et d'expliquer en détail des mécanismes de production du son dans les instruments de musique. Elle ne veut remplacer en aucun cas la connaissance des facteurs, qui comprennent mieux que quiconque le fonctionnement des instruments qu'ils fabriquent et améliorent. En revanche, elle permet d'offrir de nouvelles explications, fondées sur les outils et le langage de la physique et des mathématiques. Les études ont porté sur une grande variété d'instruments, essentiellement depuis ces cinquante dernières années. On peut citer en premier lieu les ouvrages de la fin du dix-neuvième siècle de J. W. S. Rayleigh [84, 85], puis ceux du début du vingtième siècle de H. Bouasse [14, 15, 17, 16], probablement les premières publications sur les instruments de musique écrites par des physiciens. Ensuite, les travaux de É. Leipp [57], pionnier de l'acoustique musicale en France, et ceux recensés par N. Fletcher et T. Rossing [39] offrent une vue exhaustive et homogène de la connaissance actuelle en physique des instruments de musique.



Les instruments de musique sont conçus dans le but de produire des sons qui vont être écoutés par l'oreille, un "capteur" extrêmement fin et précis. Ils sont en général le fruit de plusieurs siècles de modifications et d'améliorations. Leur fonctionnement est en ce sens souvent subtil et compliqué et il est impératif de prendre en compte dans un modèle de comportement des phénomènes souvent négligeables en terme d'énergie (comme des non-linéarités faibles, par exemple), mais dont les effets sonores sont prépondérants. Une des applications principales de ces travaux est la mise au point d'outils de simulation numérique de ces modèles, appliqués à la synthèse sonore. Leur but premier est bien évidemment la "synthèse de son par modèle physique" pouvant être utilisée par des musiciens. Elle peut donner des résultats particulièrement intéressants, tout d'abord en terme de timbres extrêmement réalistes ; mais aussi parce qu'un modèle donné offre une palette de sons de synthèse très variés, et facilement réglables intuitivement, puisque les paramètres du son sont ici des paramètres "physiques" comme le diamètre, la courbure, le matériau de la mailloche etc. . .

Ces outils de simulation peuvent aussi être d'un grand intérêt pour le physicien, car ils offrent un moyen puissant de mise au point et de validation de modèles physiques, en profitant des grandes capacités d'analyse et de discernement de l'oreille. Ils peuvent permettre en particulier d'identifier des correspondances entre des phénomènes perceptifs et la physique des systèmes étudiés, par la méthode la plus naturelle et habituelle qui soit : l'écoute<sup>6</sup>. La portée de ces techniques dépasse ainsi l'acoustique musicale, car elles offrent :

- une connaissance fine du comportement vibro-acoustique, linéaire et non-linéaire, de constituants classiques que sont les tuyaux, les barres, les cordes et dans la présente étude les plaques et les coques ;
- des modèles pouvant être appliqués à la synthèse sonore, qui en plus de son intérêt musical peut s'avérer être un outil d'analyse et de validation particulièrement efficace.

## 1.2.2 Vibrations non-linéaires de cymbales et de gongs

Parmi tous les instruments présentés au paragraphe 1.1, certains présentent en conditions normales de jeu des amplitudes de vibration grandes devant l'épaisseur moyenne de l'instrument. Cela conduit d'un point de vue mathématique à ne plus pouvoir négliger les termes non-linéaires dans les équations pour obtenir un modèle de comportement valable.

Les études antérieures ne proposent que des ébauches d'explications. Les instruments de percussion du type gongs et cymbales ont été étudiés principalement par N. Fletcher et T. Rossing ces 20 dernières années. Ils ont proposé différents bilans de leurs études [93, 36, 38, 39], et se sont intéressés aux comportements :

- des gongs d'opéra chinois, faiblement non-linéaires, dont le timbre présente une hauteur tonale glissante et dépendante de l'amplitude de vibration de la structure [92, 37] ;
- non-linéaire et chaotique de tam-tam chinois [91, 56] ;
- non-linéaire et chaotique de cymbales [95, 105, 124, 123].

Les phénomènes d'origine non-linéaire mis en jeu dans ces instruments se manifestent sous différentes formes. Dans les gongs d'opéra chinois, le *glissando* fréquentiel provient du fait que les fréquences d'oscillations des modes propres dépendent de l'amplitude de vibrations, lorsque celle-ci devient non-négligeable devant l'épaisseur de la structure [74, 37]. Dans les tam-tams et les cymbales, des structures moins rigides en flexion, les amplitudes de vibrations sont plus importantes, et ces systèmes présentent toutes les caractéristiques des systèmes non-linéaires chaotiques, à savoir :

- des signaux de vibration dont le spectre est continu et à large bande,
- un comportement sensible aux conditions initiales,
- des bifurcations menant à un régime de vibration chaotique.

Musicalement et auditivement, ces caractéristiques se manifestent par un timbre qui tient du bruit

<sup>6</sup>Cf. la citation de H. Bouasse, p. 55.

coloré, dont la hauteur est indéfinissable et dont le contenu spectral est dépendant du temps et des conditions d'excitation.

Notre étude vise à compléter nos connaissances sur les mécanismes physiques non-linéaires mis en jeu dans la production des sons de cymbales et de gong. Les phénomènes rencontrés dans ces instruments sont typiques de non-linéarités géométriques, qui se manifestent dès que les déplacements ou les déformations deviennent importants, alors que le comportement du matériau demeure élastique et linéaire. Une deuxième source de non-linéarité pourrait être un comportement non-linéaire du matériau. Dans le cas des métaux, la seule non-linéarité matérielle possible se rencontre à la suite de grandes sollicitations lorsque le matériau sort de son domaine élastique pour entrer dans la zone de plasticité [1, 32]. Si tel était le cas dans le cadre de nos instruments de percussion, des déformations rémanentes subsisteraient après arrêt des sollicitations, ce qui entraînerait des modifications et des dégradations de la structure allant à l'encontre du comportement souhaité ; en particulier, le son ne serait plus reproductible d'une utilisation à l'autre de l'instrument.

Une des difficultés de l'étude de ces instruments est que, en situation normale de jeu, la structure est frappée par une mailloche ou une baguette, si bien qu'un grand nombre de modes de vibrations sont excités simultanément. Par le jeu des couplages non-linéaires internes entre ces modes, les formes d'ondes et les spectres obtenus sont complexes, ce qui rend leur étude difficile. L'idée a donc été d'étudier ces structures soumises à une excitation forcée monofréquentielle. Les avantages sont les suivants :

- peu de modes de vibration sont directement excités en régime permanent,
- les caractéristiques (amplitude, fréquence) du signal d'excitation sont facilement contrôlables, et reproductibles,
- la réponse de la structure devient rapidement permanente, du fait de l'amortissement.

C'est pour ces raisons que la majorité de notre travail a porté sur l'étude de structures en vibrations forcées.

Les analyses expérimentales sur les instruments de percussion ont été menées sur un tam-tam chinois, en régime forcé monofréquentiel, lorsque la fréquence d'excitation est proche d'une des fréquences propres. Plusieurs régimes de vibration ont été mis en évidence, selon la valeur de l'amplitude des vibrations.

- Pour des faibles amplitudes, on observe des réponses *périodiques*, dont l'amplitude et la phase dépendent des conditions initiales. Des classiques courbes de résonances incurvées sont obtenues, caractérisées par des phénomènes de saut et une hystérésis lorsque la fréquence d'excitation est lentement variée. Une distortion harmonique dont l'importance dépend de l'amplitude des vibrations est aussi observée.
- Pour des amplitudes moyennes, des régimes de vibrations *quasi-périodiques* sont obtenus. Ils proviennent de combinaison de résonances qui se manifestent par des échanges d'énergie entre certains modes non-excités directement par le forçage. Des fréquences incommensurables apparaissent alors dans la réponse.
- Des régimes *chaotiques* sont obtenus à plus fortes amplitudes. Ils présentent une grande similitude, à l'écoute, avec le comportement de la structure en situation de jeu, c'est-à-dire lorsque l'excitation est impulsionnelle. Cela offre une validité supplémentaire aux études en régime forcé.

Des comportements analogues ont été mis en évidence dans les cymbales par C. Touzé *et al* dans [124, 123, 122]

### 1.2.3 Modélisation

L'idée première en terme de modèle mécanique est de représenter les gongs et les cymbales par une coque à symétrie de révolution. Les équations associées à ce genre de systèmes sont assez complexes, et ne possèdent des solutions analytiques que dans les cas de géométrie simple, comme les coques sphériques, cylindriques ou coniques. Ainsi, dans le but de construire un modèle physique de comportement de cymbales et de gongs, l'idée a consisté à simplifier dans un premier temps leur géométrie, pour aller le plus loin possible dans l'étude analytique. Le travail de modélisation a donc été concentré sur des plaques circulaires. Un premier avantage est que les techniques de résolution sont les mêmes que celles associées aux coques, mais appliquées à des équations plus simples. Le deuxième avantage est qu'on observe dans le cas des plaques des comportements vibratoires périodiques, quasi-périodiques et chaotiques similaires à ceux rencontrés dans les gongs et les cymbales et décrits précédemment.

La deuxième tâche de modélisation a consisté à construire des petits modèles de comportement, fondés sur des systèmes de barres élastiques articulées en grand déplacement. L'idée principale de ce travail est de représenter les structures minces telles que les coques et les plaques par un ensemble de fibres superposées, représentées chacune par une barre. On obtient alors des systèmes discrets à un degré de liberté dont le fonctionnement très simple en facilite l'étude. Cela permet en premier lieu de dégager des interprétations physiques des phénomènes non-linéaires observés dans les structures continues. En second lieu, la courbure des coques peut être prise en compte sans grande complication du modèle, ce qui permet d'en étudier les effets principaux, ce qui était impossible avec le modèle de plaque.

### 1.2.4 Organisation du manuscrit

Ce travail est organisé autour de trois parties. La première a pour objectif, à la suite de la présente introduction, d'exposer différentes observations expérimentales effectuées sur le gong du laboratoire. Cela permet de se familiariser avec les objets de cette étude, les instruments de percussion, et de dégager les phénomènes non-linéaires principaux observés dans ces structures (chap. 2).

La seconde partie est consacrée au développement d'un modèle de vibrations de plaques en grands déplacements et moyennes rotations. Les équations de la mécanique des milieux continus tridimensionnels non-linéaires sont appliquées à la géométrie particulière de la plaque, à partir des hypothèses classiques associées aux milieux minces (chap. 3). Une résolution basée sur un développement de la solution sur les modes propres de la structure est ensuite réalisée (chap. 4). Le système temporel obtenu est alors résolu en régime faiblement non-linéaire dans les cas simples de vibration sur un seul mode, ce qui permet d'expliquer certains des comportements du gong exposés dans la première partie (chap. 5). Enfin, des validations expérimentales des résultats théoriques précédents sont proposées (chap. 6).

La troisième partie présente et étudie les systèmes de barres articulées. Les équations du mouvement sont établies pour différentes configurations des systèmes, ce qui permet de dégager certaines interprétations sur l'origine physique des non-linéarités géométriques (chap. 7). Ensuite, les équations sont résolues, et certains phénomènes oscillants non-linéaires, comme les effets raidissant et assouplissant, sont expliqués et interprétés. L'influence de la courbure est aussi abordée (chap. 8).



## Analyse des vibrations d'un gong

Ce chapitre se propose de présenter par différentes analyses l'objet de notre étude : le gong. Sans utiliser de développements mathématiques, les phénomènes principaux mis en jeu dans les vibrations du gong sont mesurés, et une première analyse en est dégagée.

### 2.1 Le gong

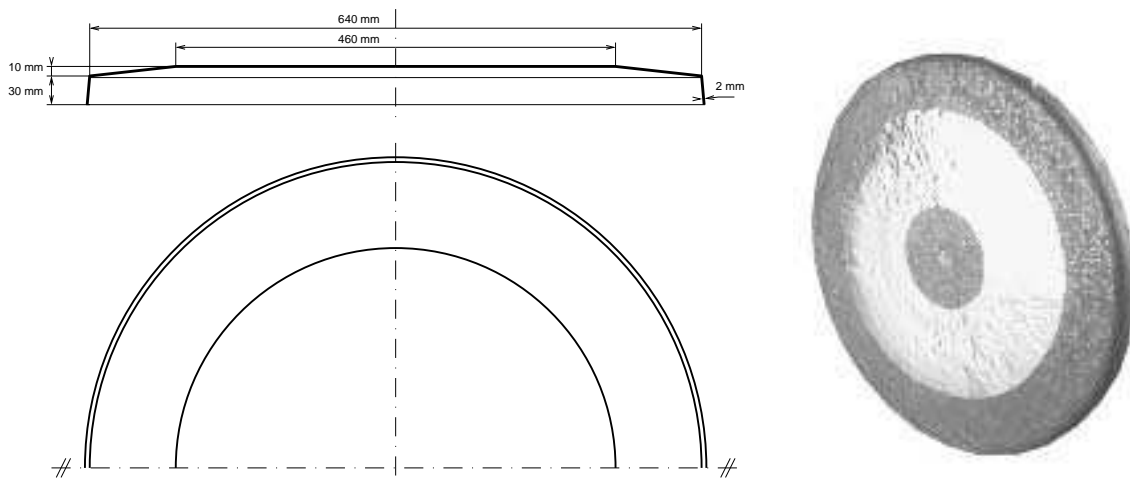


FIG. 2.1 – Schéma théorique et photographie du tam-tam du laboratoire

Le gong du laboratoire sur lequel les mesures et analyses ont été effectuées est un tam-tam chinois, dont le profil, la vue de face et une mise en situation sont présentés Fig.2.1. Sa géométrie idéalisée est celle d'une coque à symétrie de révolution, de diamètre extérieur 640 mm et d'épaisseur 2 mm. La surface supérieure est plate sur les 3/4 du diamètre, puis faiblement conique sur l'extérieur. Un anneau de 30 mm de large rigidifie la structure.

La géométrie ci-dessus est idéalisée, car le gong présente une structure fortement martelée, d'épaisseur peu homogène (la moyenne est 2 mm). Il paraît avoir en premier lieu été forgé à chaud, puis martelé, ce qui lui confère un aspect brut, sauf sur une partie annulaire qui a fait l'objet d'un tournage par enlèvement de matière, dont l'aspect est brillant (Fig. 2.1). Ainsi, il est clair que le matériau, du bronze, n'est pas homogène (on peut penser que la partie martelée est écrouie en surface).

En utilisation en conditions normales de jeu, le gong est suspendu dans un portique au moyen de deux cordages de nylon (Fig. 2.1). L'instrument est alors frappé en son centre au moyen d'une mailloche de feutre, et on obtient alors le son caractéristique de ce genre d'instruments.

## 2.2 Analyse modale expérimentale

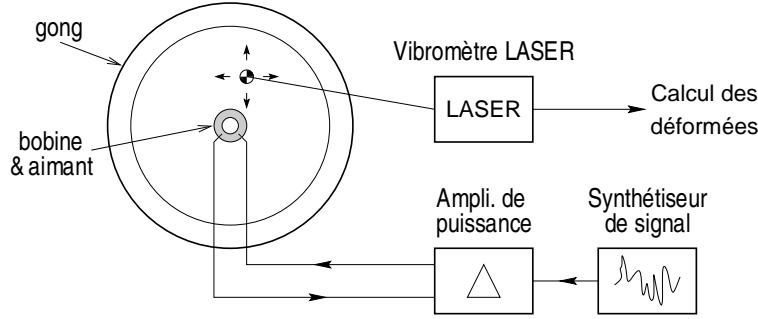


FIG. 2.2 – Schéma expérimental utilisé pour l'analyse modale du gong.

Synthétiseur de signal	Oros	Carte OR 25.4 II
Amplificateur de puissance	Crown	Macrotech 2400
Vibromètre LASER	Ometron	VPI sensor

TAB. 2.1 – Références des appareils utilisés pour les analyses modales

Des analyses modales expérimentales ont été menées sur le gong au Laboratoire de Mécanique Physique<sup>1</sup>. Le principe de ces analyses est le suivant (Cf. Fig. 2.2 et Tab. 2.4) : le gong est suspendu par ses deux cordages de nylon (cf. Fig. 2.1). Il est mis en vibration par le système bobine/aimant décrit en annexe A, qui permet d'imposer une force proportionnelle au signal d'intensité qui parcourt la bobine. Une somme de sinusoides à phases aléatoires ("random multisine" en anglais) est choisie comme signal d'excitation de la structure. Son expression mathématique est :

$$s(t) = S_m \sum_{k=0}^N \sin \left( 2\pi(f_m + k\Delta f)t + \varphi_k \right) \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{f_M - f_m}{N}. \quad (2.1)$$

On choisit les fréquences minimum  $f_m$  et maximum  $f_M$ , le pas fréquentiel  $\Delta f$  ; la phase  $\varphi_k$  de chaque sinusoides est choisie aléatoirement. La réponse en vitesse de la structure est mesurée en chacun des points de coordonnées  $(x_i, y_j)$ ,  $(i, j) \in \{1 \dots P\}^2$  d'une grille carrée de  $P \times P$  points et de largeur le diamètre extérieur du gong (640 mm). Ces signaux, notés  $v(x_i, y_j; t)$  sont échantillonnés à la fréquence  $f_e = 2f_M$ . La densité spectrale de puissance (DSP), moyennée  $Q$  fois, estimée à partir de la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) sur  $N$  points (calculé par l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide, FFT), de chacun des  $P \times P$  signaux de vitesse  $v(x_i, y_j; t)$  est [7] :

$$G_v(x_i, y_j; f_k) = \frac{2}{N f_e} \left[ \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} |V(x_i, y_j; f_k)_q|^2 \right] \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique Physique, Université Pierre et Marie Curie, CNRS UPESA 7068, 2, Place de La Gare de Ceinture, 78210 Saint-Cyr-L'École

où  $V(x_i, y_j; f_k)_q$  est la TFTD suivante :

$$V(x_i, y_j; f_k)_q = \sum_{n=0}^{N-1} v(x_i, y_j; (n\Delta t + qT)) e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} \quad (2.3)$$

avec  $f_k = k.f_e/N$ ,  $k = 1 \dots N/2$  les fréquences discrètes,  $\Delta t = 1/f_e$  le pas d'échantillonnage et  $T = N.\Delta t$  la longueur de la fenêtre temporelle.

À partir des DSP précédentes, on obtient deux types de représentations :

- une DSP globale de la structure étudiée, obtenue par moyennage des DSPs précédentes sur les *points de mesure*. Elle s'écrit :

$$\bar{G}_v(f_k) = \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} G_v(x_i, y_j; f_k) \quad (2.4)$$

Cette représentation, correspondant à la Fig. 2.3, est utile pour identifier les fréquences propres  $f_{kn}$  de la structure, qui correspondent aux maxima locaux de  $\bar{G}_v(f_k)$

- les  $N/2$  cartes de déformées, pour chaque fréquence  $f_k$ , obtenues en traçant dans le plan  $(xy)$  les  $P \times P$  valeurs de  $G_v(x_i, y_j; f_k)$ ,  $(i, j) \in \{1 \dots P\}^2$ . Les déformées modales sont les cartes correspondantes aux fréquences  $f_{kn}$ . Elles sont représentées pour le gong Fig. 2.5-2.7.

Pour identifier un maximum de modes du gong, deux séries de mesures ont été menées, pour deux positions d'excitations différentes : (i) au centre (expérience 1), (ii) à 100 mm du centre (expérience 2). En effet, en excitant au centre, seuls les modes qui ne possèdent pas de noeud au centre sont excités. Dans une structure théoriquement parfaite, tous les modes asymétriques possèdent un noeud au centre. Ils ne sont donc pas excités, et la réponse ne contient des contributions que de modes axisymétriques. Les paramètres de mesures sont rappelés dans le tableau 2.2.

	Expérience 1	Expérience 2
Position d'excitation	centre	100 mm du centre
Nb. de points de mesure ( $P \times P$ )	$20 \times 20$	$20 \times 20$
Fréq. d'échantillonnage ( $f_e$ )	1205 Hz	2000 Hz
Nb. d'échantillons ( $N$ )	1024	1024
Résolution fréq. ( $\Delta f$ )	1.177 Hz	1.953 Hz
Nombre de moyennes ( $Q$ )	12	12

TAB. 2.2 – Paramètres des analyses modales expérimentales

La Fig. 2.3 représente la moyenne des DSPs pour les deux expériences, pour les fréquences inférieures à 600 Hz. Les déformées modales associées à chacun des pics sont représentées Fig. 2.5-2.7. Un calcul des déformées modales du gong, modélisé par la méthode des éléments finis (EF) implantée dans le code de calcul CASTEM 2000 [2], fournit une comparaison, et permet de mieux identifier les différentes déformées. On trouvera plus de détails sur ce calcul numérique en annexe B.2. Avant toute chose, on peut remarquer que la moyenne des DSP issue de l'expérience 1 (excitation au centre) fait intervenir principalement les modes axisymétriques, alors que l'autre (excitation décalée du centre) offre des réponses de modes asymétriques non négligeables, ce qui était attendu.

Le gong sujet du calcul par EF est à symétrie de révolution, à épaisseur constante, de matériau homogène et isotrope dont les constantes d'élasticité ont été choisies de sorte que les fréquences propres calculées se rapprochent au mieux des fréquences propres mesurées ( $\rho = 8420 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $E = 120.10^9 \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0.3$ ). Les déformées modales issues de ce calcul, que l'on peut qualifier de

théoriques, possèdent des lignes nodales qui se répartissent en  $k$  diamètres et  $n$  cercles concentriques. On peut classer les modes en deux groupes.

- les déformées modales du premier groupe ne déforment que la surface supérieure du gong, avec le bord et la collerette qui subit un mouvement de solide rigide. Ces modes ressemblent aux modes d'une plaque circulaire à bord encasté (Cf. figure 4.2, p. 96), et la collerette du gong a ici un effet rigidifiant. Ce sont les *modes de plaque*.
- Les autres déformées, classées dans le deuxième groupe, ne font intervenir que le bord du gong et sa collerette, si bien que les modes correspondants seront appelés *modes de bord*.

D'autre part, certains modes ne possèdent pas de rayons nodaux, ce qui leur confère une déformée *axisymétrique*. Les autres, qualifiés d'*asymétrique*, sont toujours associés par deux. Si la structure est à parfaite symétrie de révolution, matérielle et géométrique, à chaque fréquence propre associée à une déformée modale asymétrique correspond deux modes propres. Mathématiquement, la recherche des fréquences et de déformées modales d'une structure se caractérise par un problème aux valeurs propres. Les propriétés de symétrie produisent des valeurs propres de multiplicité 2, qui correspondent aux fréquences des modes asymétriques [67]. Les deux déformées modales associées ont le même nombre de diamètres et de cercles nodaux, mais diffèrent simplement par la position de leur rayons nodaux, ceux de l'une étant positionnés sur les ventres de l'autre. On choisit de nommer ces deux modes propres les *configurations préférentielles* associées à un couple  $(k, n)$ ,  $k \geq 1$ , terme introduit par Tobias *et al* [121] lors d'études de vibrations asymétriques de plaques circulaires, sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 5 et 6. Dans le cas d'une structure avec des défauts de symétrie, comme le gong, les fréquences des configurations préférentielles se dédoublent, et les déformées modales ne sont plus tout à fait identiques par rotation. Le tableau 2.3 donne pour chacun des modes du gong, les fréquences propres mesurées et celles issues du calcul EF., leurs nombres  $(k, n)$  de diamètre et cercles nodaux, et précise si il est axisymétrique, asymétrique ou un mode de bord (qui ne peut être qu'asymétrique). On peut noter que certains modes asymétriques présentent des configurations préférentielles de fréquences éloignées, ce qui sous-entend des défauts importants de la symétrie de révolution du gong.

Avec les deux positions d'excitation, la majorité des modes du gong prédits par le calcul EF. ont été identifiés. On peut constater néanmoins qu'ils ne sont pas tout à fait dans le même ordre de fréquence. L'un d'entre eux (la deuxième configuration préférentielle du mode (4,0)), n'ont pas pu être identifiés avec les deux seules expériences effectuées. De plus, certaines cartes de déformée correspondant à certaines fréquences (dont les pics sont indiqués avec des “?” Fig. 2.3, et les déformées modales sont précisées Fig. B.1, p. 212 en annexe) se sont avérées peu ressemblantes aux déformées EF. Une troisième expérience, avec une nouvelle position d'excitation, permettrait sans doute d'identifier les modes manquant, de confirmer les identifications des Fig. 2.5-2.7, et d'interpréter les déformées modales non prévues par le calcul EF.

Pour finir, la Fig. 2.4 donne un résumé de la valeur des fréquences modales mesurées et calculées par EF, en fonction des nombres  $k$  de cercle nodaux et  $n$  de rayons nodaux.

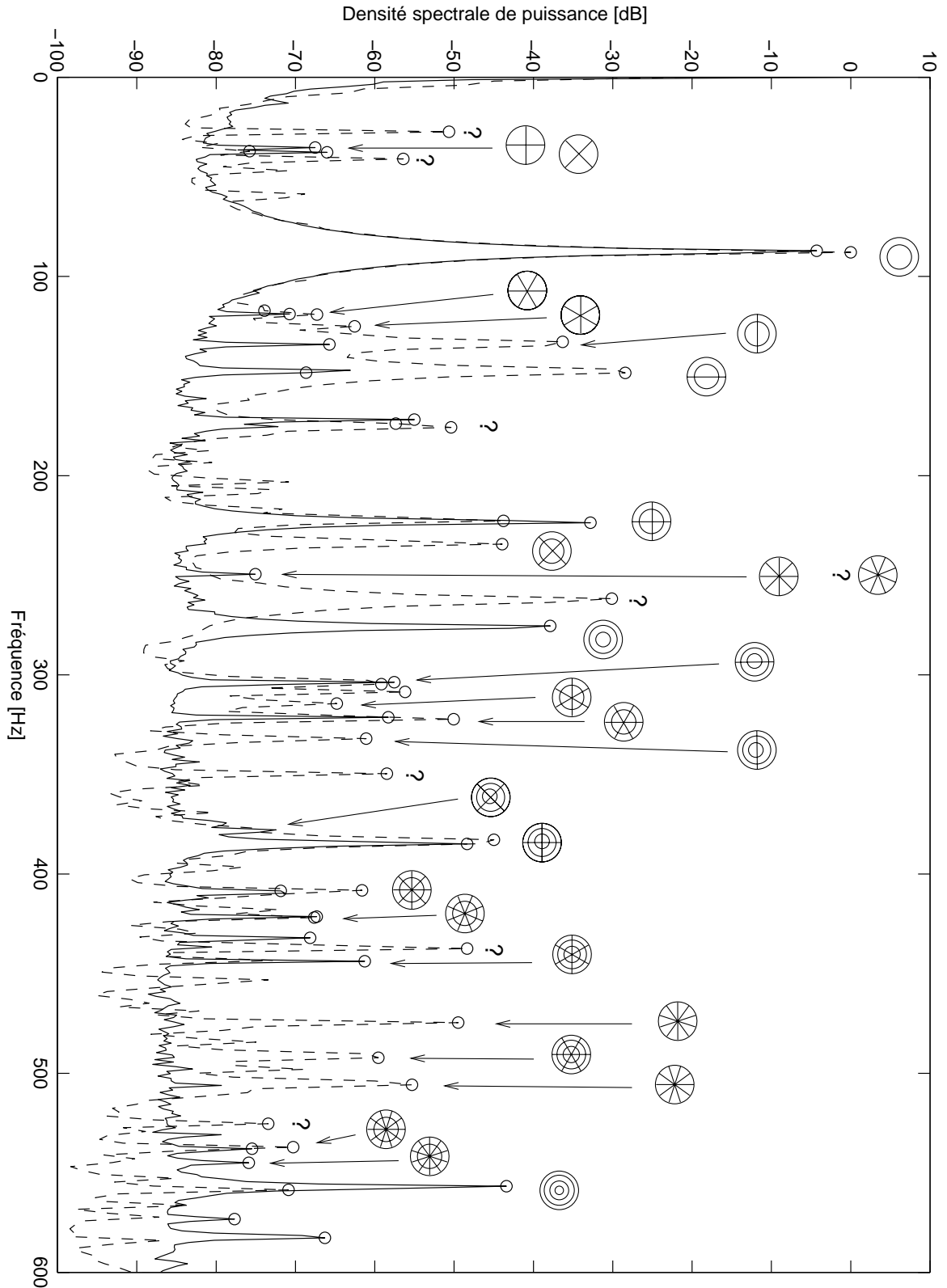


FIG. 2.3 – Moyenne des DSPs pour les  $P \times P$  points de mesure. (—) : Expérience 1, excitation au centre du gong, (---) expérience 2, excitation à 100 mm du centre.



Fréquence (Hz)		Modes de plaque		Modes de bord
Mesurées	Calculées (CASTEM 2000)	Axisym.	Asym.	(Asym.)
35.3 - 37.7	50.9 - 51.0	–	–	2,0
87.1	82.3	0,1	–	–
119.1 - 125.0	174.5 - 174.5	–	–	3,0
134.2 - 148.3	148.1 - 148.1	–	1,1	–
223.6 - 234.4	234.4 - 234.5	–	2,1	–
249.5 - ?	364.2 - 365.1	–	–	4,0
275.4	278.4	0,2	–	–
303.7 - 332.0	383.3 - 383.3	–	1,2	–
314.4 - 321.3	351.1 - 351.1	–	3,1	–
384.9 - ?	516.8 - 517.4	–	2,2	–
408.4 - 421.8	490.8 - 491.4	–	4,1	–
443.7 - 492.2	675.1 - 675.1	–	3,2	–
474.6 - 505.8	572.2 - 572.2	–	–	5,0
537.1 - 545.0	650.4 - 650.4	–	5,1	–
556.7	539.2	0,3	–	–

TAB. 2.3 – Fréquences propres du gong inférieures à 600 Hz, avec les nombres  $k, n$  de cercles ( $k$ ) et de rayons ( $n$ ) nodaux. Les valeurs sont spécifiées avec une tolérance de  $\pm \Delta f / 2 = 0.6$  Hz

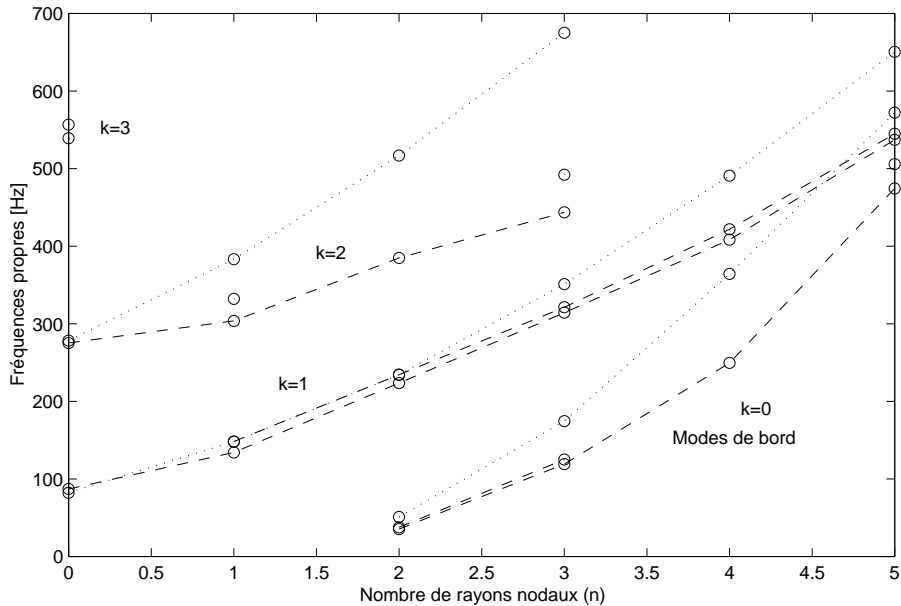


FIG. 2.4 – Fréquences modales en fonction du nombre de rayons nodaux. (---) : mesurées, (···) : calculées par EF.

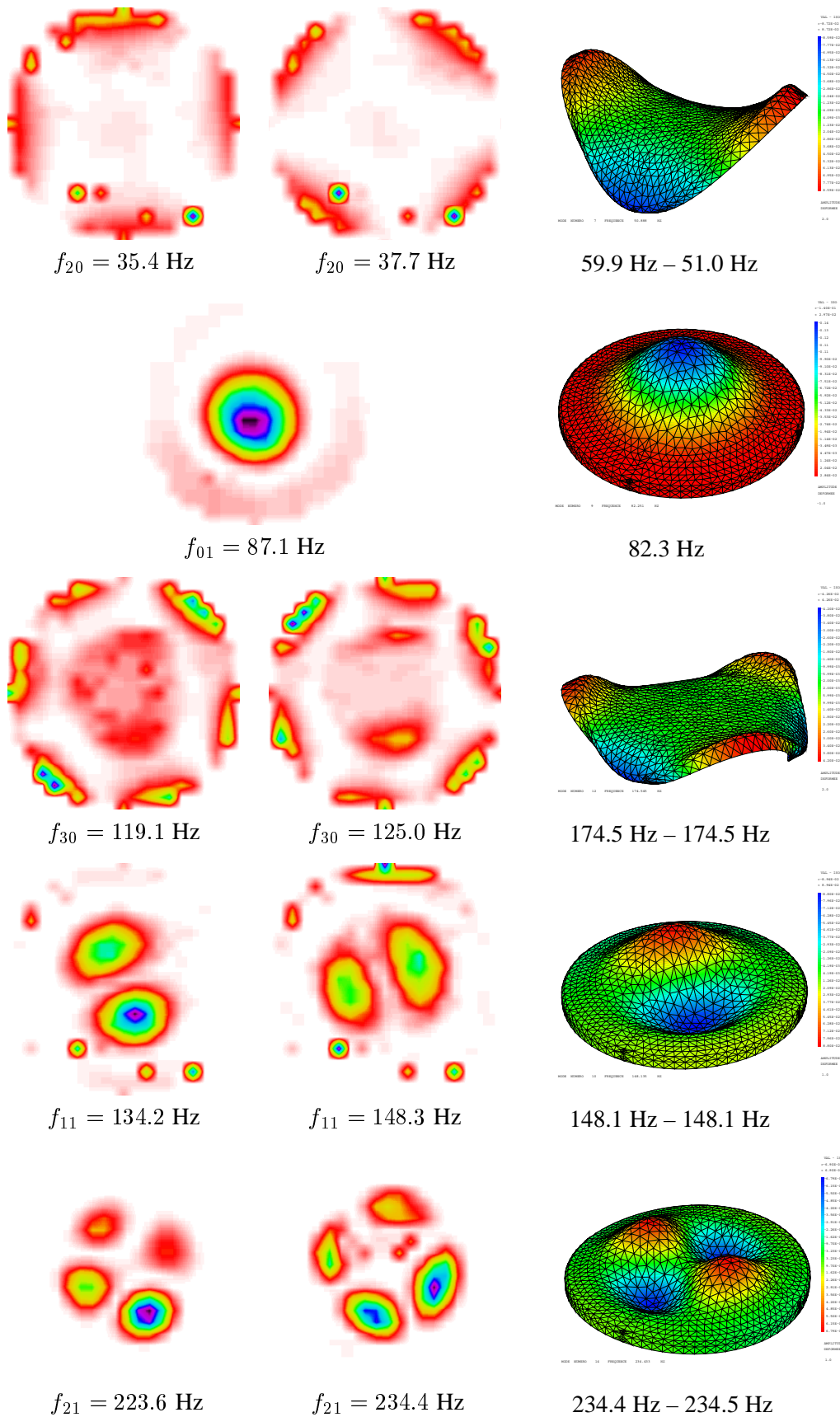


FIG. 2.5 – Déformées et fréquences modales du gong, expérimentales (colonnes de gauche) et numérique par EF. (colonne de droite). Les déformées modales expérimentales sont tracées à partir des DSP des signaux, si bien que les ventres supérieurs et inférieurs sont représentés en positif, avec les mêmes coloris.

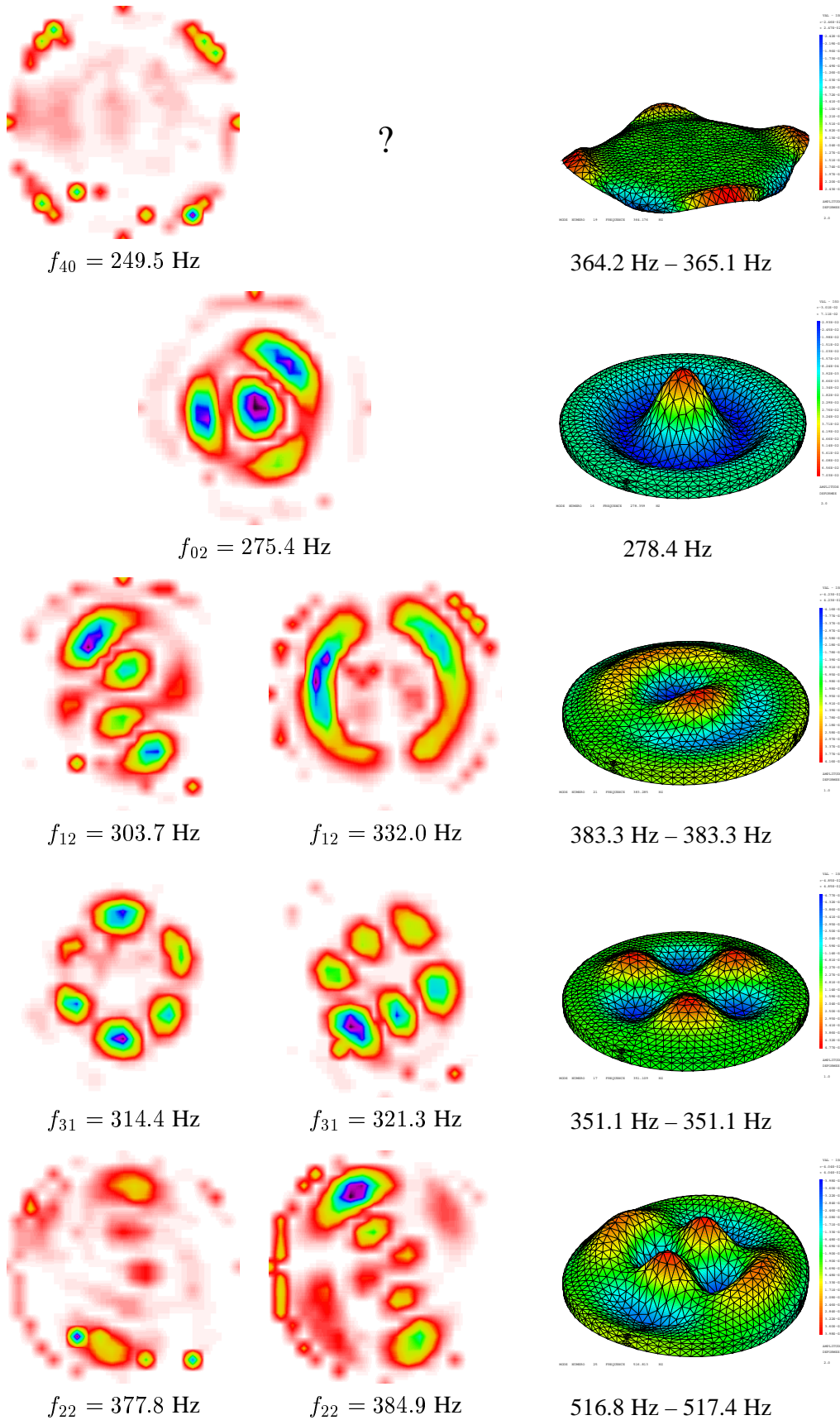


FIG. 2.6 – Suite de la Fig. 2.5.

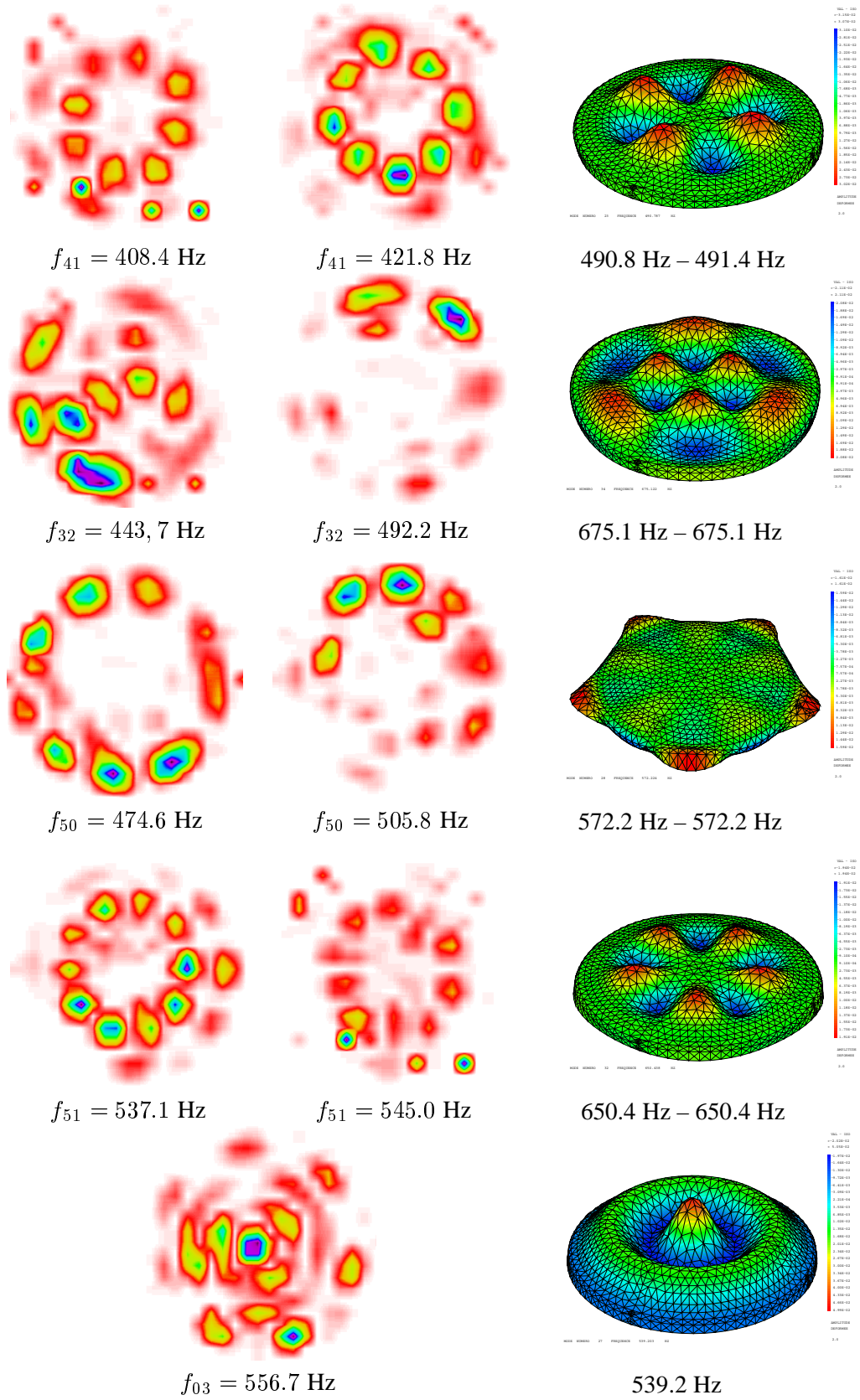


FIG. 2.7 – Fin des Fig. 2.5 et 2.6.

## 2.3 Analyse en régime libre

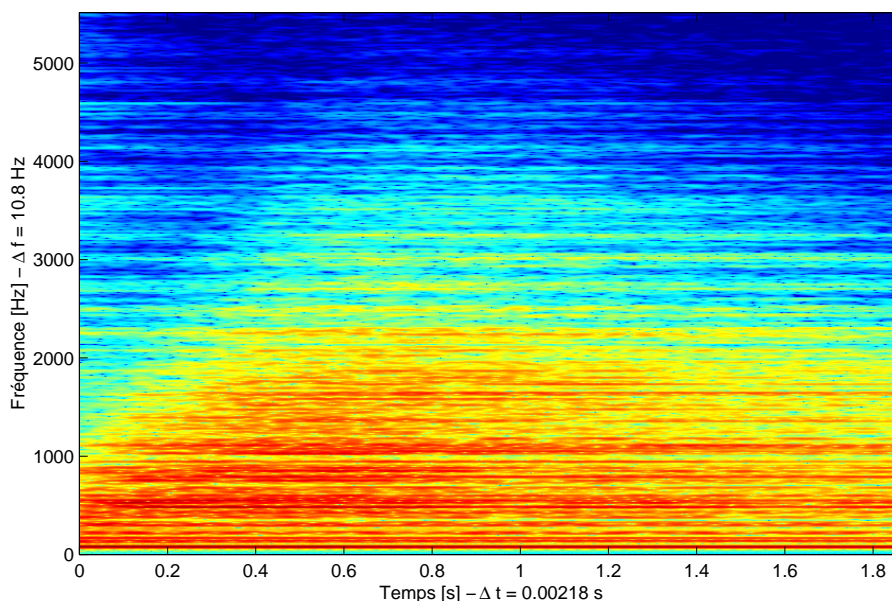


FIG. 2.8 – Zoom entre 0 et 2s du spectrogramme de la Fig. 2.9(c).

Pour étudier le comportement du gong en situation de jeu, des mesures en régime libre ont été effectuées. Le gong est, comme pour les analyses modales de la section précédente, suspendu par ses cordages de nylon. Il est mis en vibration au moyen d'une mailloche, et la vibration est mesurée à 80 mm du centre par un accéléromètre de très petite taille (Brüel & Kjør 4374, masse : 0.65 g), collé au moyen de cire d'abeille. La position décalée par rapport au centre a été choisie pour mesurer des contributions de modes asymétriques, qui pourrait ne pas apparaître dans une mesure au centre du gong. L'accélération du point considéré est alors enregistrée au moyen d'un magnétophone numérique DAT (Digital Audio Tape), pour ensuite être traitée.

La Fig. 2.9 montre les spectrogrammes de l'accélération mesurée, lorsque le gong est frappé en son centre par une mailloche, avec trois forces d'excitation différentes. On remarque que le contenu fréquentiel de l'instrument est différent selon la force d'excitation : pour les excitations modérées, il reste confiné dans les basses fréquences (en dessous de 600 Hz, Fig. 2.9(a)), alors que pour une excitation vigoureuse, le contenu fréquentiel s'étend vers les hautes fréquences (jusqu'à 3000 Hz, Fig. 2.9(c)).

Cet enrichissement spectral dans les hautes fréquences n'est pas instantané, comme le montrent les Fig. 2.8 et 2.10 : le son est confiné dans les graves (en dessous de 1000 Hz) à l'instant de la frappe, et le spectre s'élargit rapidement pour atteindre toute sa brillance au bout de 1 s environ. On parle alors de glissement spectral vers les hautes fréquences. Ensuite, les modes de haute fréquence étant plus amortis que ceux de basse fréquence [51], leur extinction est la plus rapide, et seule l'oscillation des modes basse fréquence subsiste à la fin du son (Fig. 2.10(d)). On constate en outre que ces derniers sont très peu amortis, et que leur oscillation peut durer plus d'une minute. Ces caractéristiques sont typiques des timbres de tam-tams chinois, déjà décrits dans [91, 56]. De plus, la Fig. 2.10 montre un comportement du gong similaire à celui d'une cymbale "crash", étudié dans [92].

Ce contenu fréquentiel variable (i) au cours du temps, et (ii) en fonction de la force de frappe, est caractéristique des systèmes présentant des phénomènes d'origine non-linéaire. En effet, lorsque la mailloche frappe le gong, le support spectral de l'énergie envoyée à la structure est confiné dans les basses fréquences (en dessous de 1000 Hz), du fait de la faible rigidité du feutre, matériau de



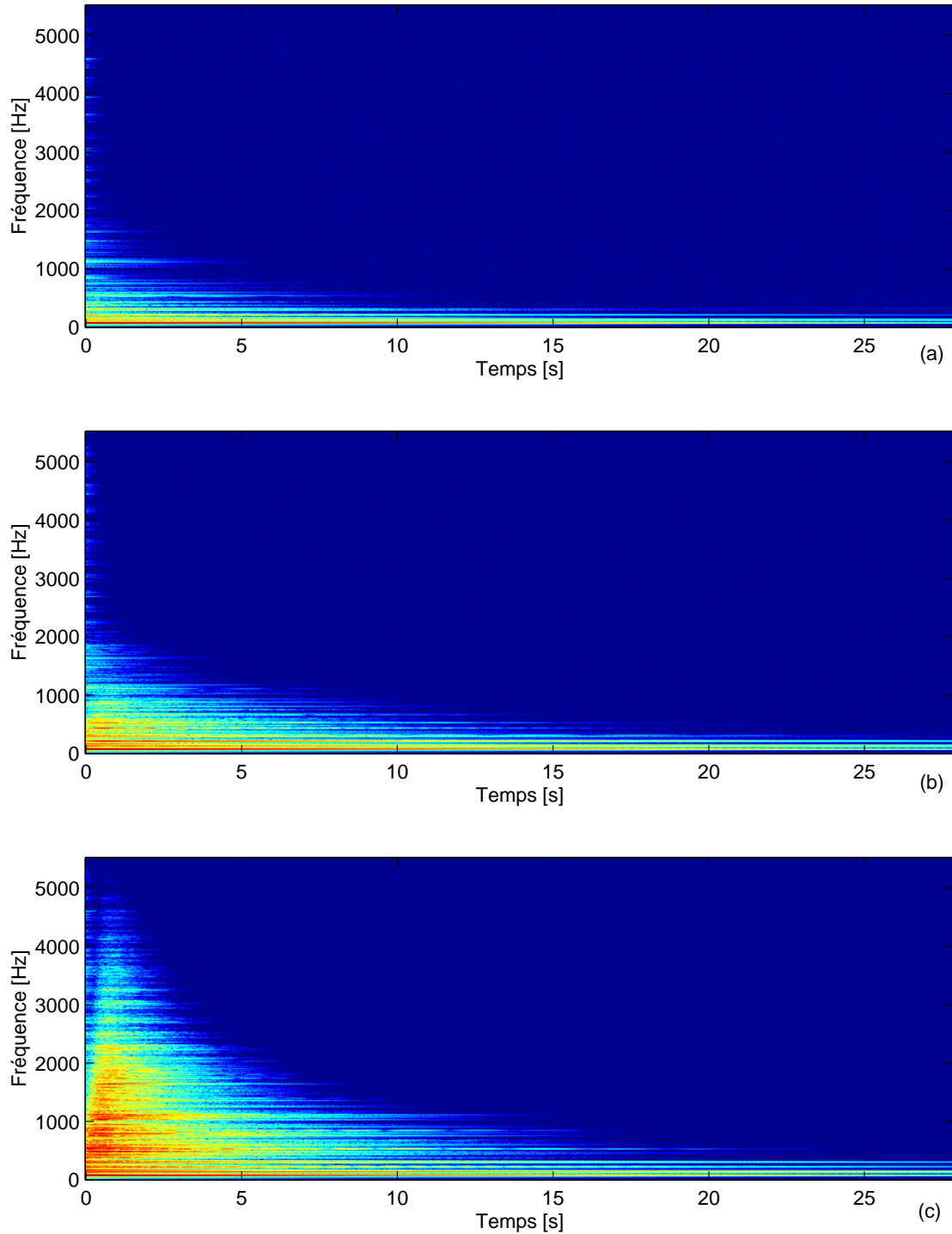


FIG. 2.9 – Spectrogramme de l'accélération d'un point décalé de 80 mm du centre du gong, pour trois forces d'excitation différentes, au centre, avec une mailloche tendre. (a) : excitation faible, (b) : moyenne, (c) : forte. FFT sur 1024 points, avec fenêtre de Hanning glissante et recouvrement de 512 points.  $f_e = 11025 \text{ Hz}$ ,  $\Delta f = 10.8 \text{ Hz}$

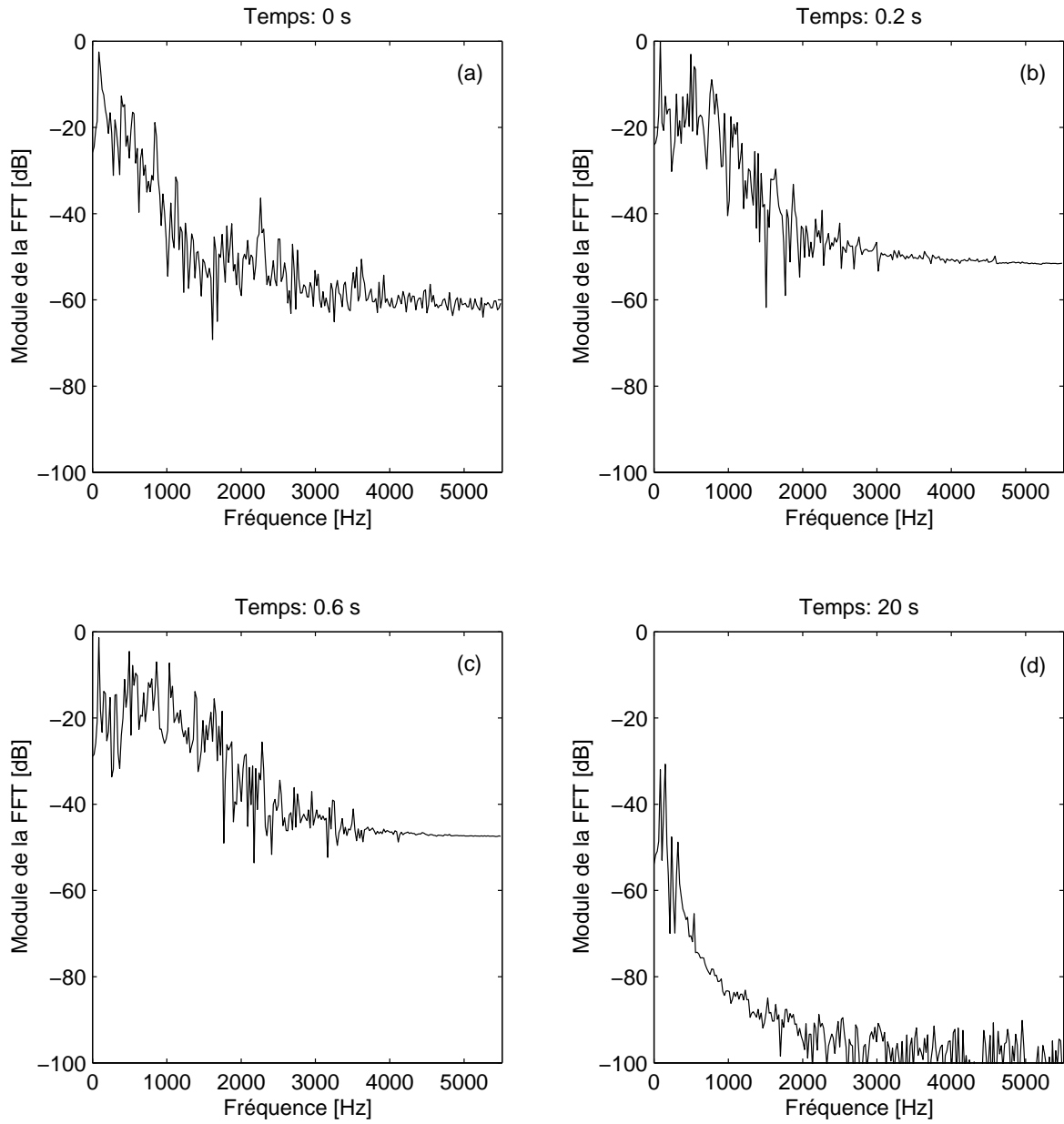


FIG. 2.10 – Spectre de Fourier à 4 dates différentes de la Fig. 2.9(c). (a) : 0 s, (b) : 0.2 s, (c) 0.6 s et (d) : 20 s. FFT sur 512 points.  $f_e = 11025$  Hz,  $\Delta f = 21.53$  Hz.

la mailloche<sup>2</sup>. Une structure linéaire répondrait avec un support spectral situé dans la même zone fréquentielle, sans transfert d'énergie vers les hautes fréquences.

## 2.4 Analyse en régime forcé

La première difficulté rencontrée lors de l'analyse de ces systèmes est que le support spectral de l'excitation due à la mailloche (ou à une baguette, dans le cas de cymbale, par exemple) en régime libre est à large bande (Cf. note 2, p. 35). De ce fait, un grand nombre de modes sont excités simultanément, ce qui rend la réponse de la structure complexe, et ainsi difficile à étudier. L'idée est donc d'étudier les structures soumises à une excitation forcée monofréquentielle. Il est alors plus aisé de mettre en évidence et d'étudier différents régimes de vibration non-linéaires (périodiques, quasi-périodiques, chaotiques), et les transitions entre ces différents régimes, appelées bifurcations. Un autre avantage primordial des études en régime forcé est que les caractéristiques (amplitude, fréquence) du signal d'excitation sont facilement contrôlables, et donc reproductibles, conditions difficiles à réunir dans le cadre d'une excitation impulsionnelle. De plus, la réponse en régime forcé de la structure devient rapidement permanente (lorsque le régime transitoire s'est éteint du fait de l'amortissement), ce qui laisse tout le temps nécessaire pour effectuer les mesures, alors qu'en régime libre, la réponse de la structure n'est jamais permanente. On peut noter enfin que la réponse du gong en excitation forcée monofréquentielle de la Fig. 2.17 possède de grandes similitudes avec celle du gong frappé avec une mailloche, Fig. 2.9(c), en terme de timbre et de richesse spectrale, ce qui valide d'autant plus ces études. Cela a déjà été noté dans le cas d'un cymbale dans [122, 123], et se vérifie très bien à l'écoute.

### 2.4.1 Détails expérimentaux

La figure 2.12 et le tableau 2.4 précisent le matériel utilisé lors des expériences. Le gong est mis en vibration par le système bobine/aimant décrit en annexe A, et déjà utilisé lors des analyses modales expérimentales précédemment évoquées (§ 2.2). L'aimant est collé au centre du gong au moyen de cire d'abeille. Une sinusoïde, de fréquence  $f_{exc} = \Omega/2\pi$  est amplifiée, puis envoyée à la bobine. Comme le signal délivré par le synthétiseur n'est pas purement sinusoïdal, un filtre passe-bas est inséré à l'entrée de l'amplificateur. Une mesure de l'intensité du courant parcourant la bobine permet d'obtenir une estimation de l'amplitude de la force imposée à la structure (Cf. annexe A).

Les vibrations de la structure sont mesurées par un accéléromètre, délivrant l'accélération du point où il est collé, et un vibromètre laser calculant la vitesse du point sur lequel le Laser est dirigé, par effet Doppler. L'intérêt du vibromètre est que celui-ci offre une mesure sans contact, et donc qu'aucune masse additionnelle ne perturbe la réponse de la structure (ce qui est le cas avec un accéléromètre). En revanche, une mesure d'accélération est intéressante car elle est liée à la pression acoustique en champ proche [81], et donne donc une idée plus précise du timbre de l'instrument. Le signal de l'accéléromètre est échantillonné et enregistré par un magnétophone DAT, pour être ensuite traité.

### 2.4.2 Vibrations unimodale

En premier lieu, on décide de mesurer la réponse de la structure sollicitée avec un signal harmonique de fréquence proche de la fréquence propre d'un mode de vibration. En condition normale de jeu, lorsque le gong est frappé en son centre par une mailloche, ce sont les modes axisymétriques qui sont directement mis en vibration. On a choisi pour cette raison de présenter des mesures sur les modes

<sup>2</sup>La réponse exacte de la mailloche utilisée ici n'a pas été étudiée. On sait cependant que le comportement à l'écrasement du feutre est non linéaire, et qu'il est d'autant plus rigide qu'il est comprimé [89]. Cela explique probablement le fait que le support spectral initial (à  $t=0$  s) de la réponse du gong est plus large Fig. 2.9(c) [0-1000 Hz] que Fig. 2.9(a) [0-600 Hz]



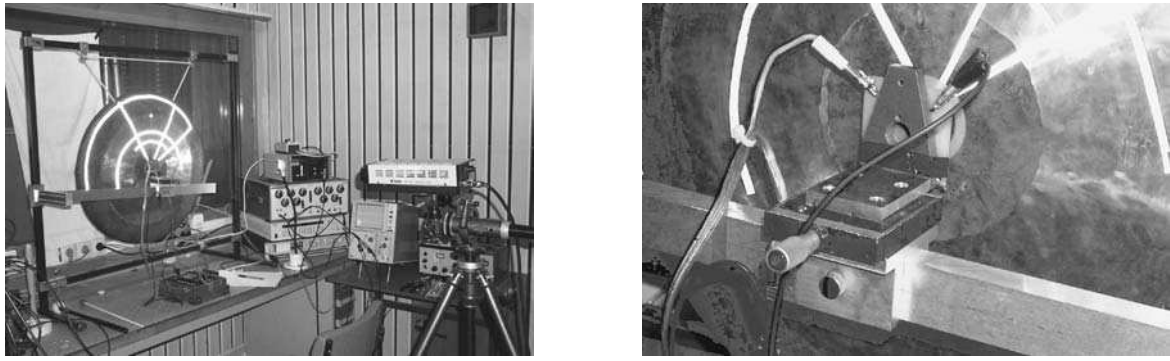


FIG. 2.11 – Photographies du dispositif expérimental et du système d'excitation électromagnétique

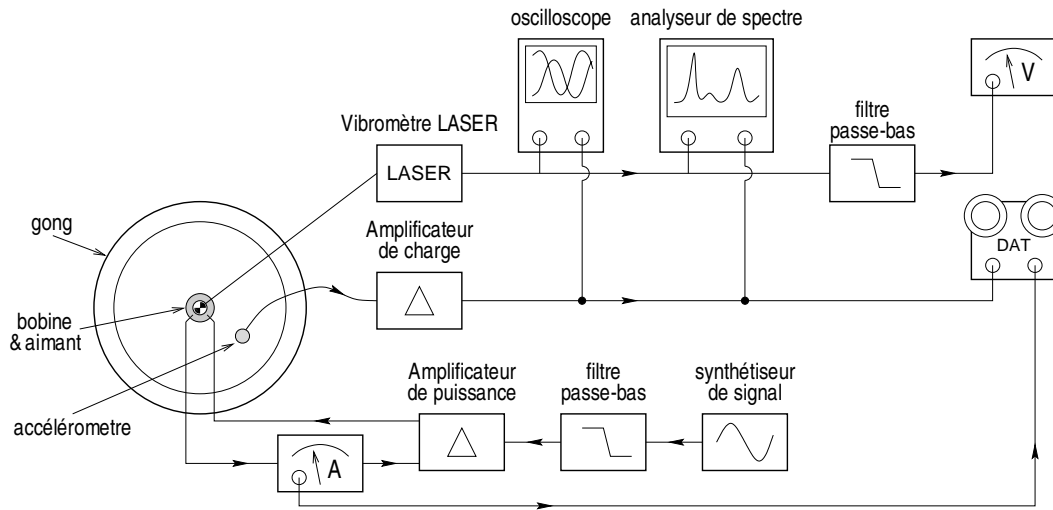


FIG. 2.12 – Schéma expérimental utilisé pour les mesures.

Accéléromètre	Brüel & Kjær	4374
Amplificateur de charge	Brüel & Kjær	Nexus <sup>TM</sup>
Vibromètre LASER	Polytec	OFV 2600
Filtres pass-bas	Rockland	1042F
Voltmètre	Philips	PM2519
Synthétiseur de signaux	Fluke	PM5193
Amplificateur de puissance	Crown	Macrotech 2400
Amperemètre	Hewlett-Packard	3478A
Magnétophone DAT	Tascam	DA-P1

TAB. 2.4 – Références des appareils utilisés pour les mesures

axisymétriques de la structure. L'excitation est donc imposée au centre, et plusieurs expériences sont menées en vue de caractériser les vibrations du gong.

### Déformée de la réponse périodique du gong

Lorsque le gong est excité par un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{exc} = \Omega/2\pi = 87$  Hz proche de la fréquence du premier mode axisymétrique, et pour une amplitude d'excitation suffisamment forte (0.5 N ici), la réponse est périodique, mais non sinusoïdale, comme ce serait le cas avec une structure parfaitement linéaire. Le signal de vitesse comporte des harmoniques d'amplitude non négligeable par rapport à celle de la fondamentale (Cf. Fig. 2.13). Pour examiner la dépendance spatiale de la déformée de la structure, on utilise le même protocole que pour les analyses modales expérimentales (§2.2). La densité spectrale de puissance moyennée sur tous les points de mesure est présentée Fig. 2.13 et la Fig. 2.14 donne les cartes des déformées pour chacun des pics de la DSP, situés aux fréquences  $2f_{exc} = 174$  Hz,  $3f_{exc} = 261$  Hz...

On constate que les déformées du gong pour chacun des pics sont relativement similaires à la déformée du premier mode axisymétrique, même si les déformées du gong pour les harmoniques (174 Hz, 261 Hz...) apparaissent assez perturbées. Cela provient d'un mauvais rapport signal/bruit, qui résulte du fait que les amplitudes des pics des harmoniques sont petites par rapport à celle de la fondamentale (-30 dB en dessous, Fig. 2.13). Une mesure avec une amplitude d'excitation plus forte offrirait une réponse avec des harmoniques d'amplitude plus importante, et ainsi des cartes de déformées plus claires<sup>3</sup>.

Néanmoins, ces analyses permettent de valider un modèle de comportement couramment utilisé, qui consiste à séparer les variables temps et espace dans l'expression du déplacement des points de la structure, ce qui s'écrit ici :

$$w(\vec{x}, t) = \Phi_{01}(\vec{x}) \cdot q(t) = \Phi_{01}(\vec{x}) [a_1 \cos(\Omega t + \phi) + a_2 \cos 2(\Omega t + \phi) + \dots] \quad (2.5)$$

où  $\Phi_{01}(\vec{x})$  est l'expression de la déformée modale du mode (0,1) fonction de la variable d'espace  $\vec{x}$ . Ce modèle sera utilisé et discuté plus loin, en particulier aux chapitres 4 et 5 (§ 5.2.1).

### Courbes de résonance

La vitesse du point central du gong est mesurée au moyen du vibromètre LASER. Dans ce paragraphe et le suivant, pour comparer les résultats des expériences à la modélisation qui sera présentée dans les chapitres suivants, et pour faciliter les mesures d'amplitude<sup>4</sup>, un filtre passe-bas est ajouté à l'entrée du multimètre (Cf. Fig. 2.12), si bien que les valeurs d'amplitudes mesurées sont celles de la *composante fondamentale* du signal. Cela sera comparé à la solution au premier ordre obtenu par les calcul perturbatif du chapitre 5, qui correspond à la fondamentale du signal (Cf. Eq. (5.19)).

Les courbes présentées dans la suite font apparaître l'*amplitude* de la *composante fondamentale* du *déplacement* du point central du gong. En notant  $s^{(rms)}$  l'amplitude efficace du signal de vitesse filtré, l'amplitude de déplacement  $w(t)$  est obtenue par :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\Omega} s^{(rms)}, \quad \text{avec} \quad w(t) = a \cos \Omega t. \quad (2.6)$$

<sup>3</sup>Les expériences de mesure de déformées sont assez longues. À forte amplitude d'excitation, des courants importants traversent la bobine, si bien que le système bobine/aimant s'échauffe rapidement. C'est pour cette raison que les mesures à forte amplitude n'ont pas été effectuées

<sup>4</sup>Les mesures d'amplitudes efficace (RMS, Root Mean Square en anglais) sont effectuées au moyen de multimètre numérique. Celui-ci n'effectue pas les intégrations temporelles nécessaires à la détermination de la valeur efficace du signal, mais en donne une bonne estimation si le signal est sinusoïdal.

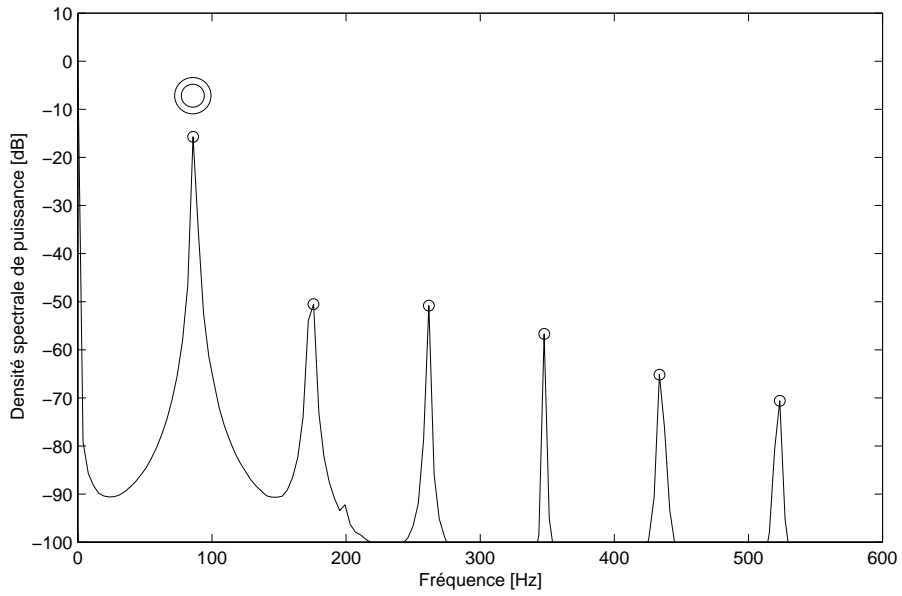


FIG. 2.13 – Moyenne des DSPs pour les  $P \times P$  points de mesure. Paramètres d'analyse :  $P = 30$  points au carré,  $f_e = 2000$  Hz,  $N = 512$  échantillons,  $\Delta f = 3.9$  Hz,  $Q = 4$  moyennes.

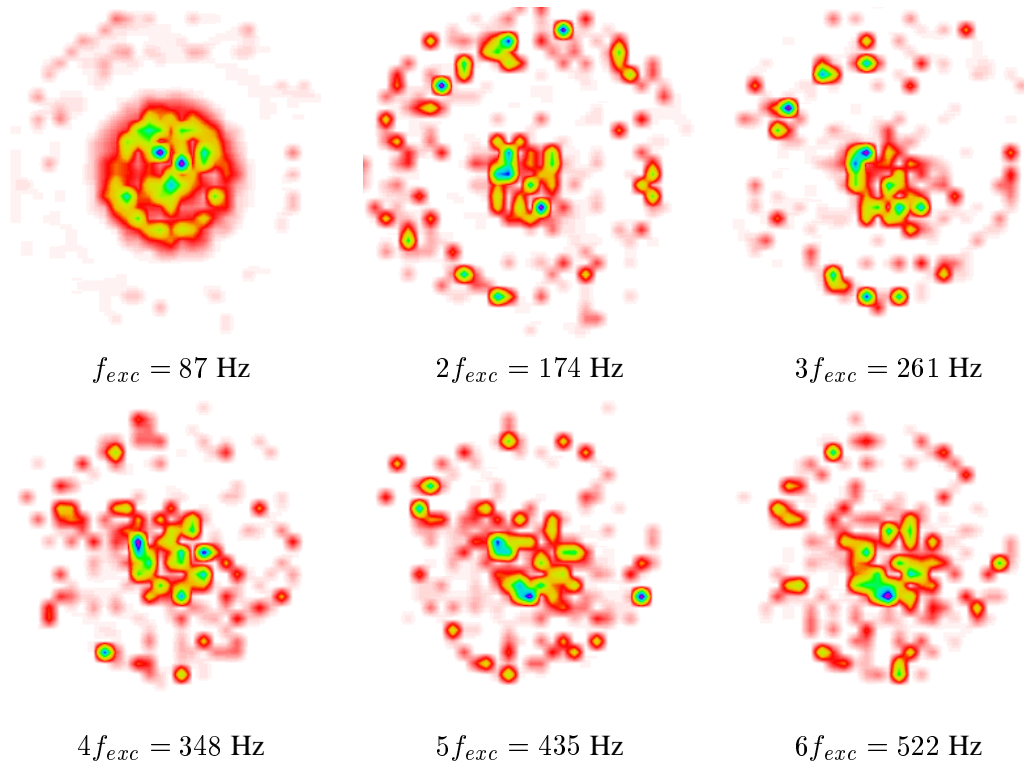


FIG. 2.14 – Carte des déformées du gong correspondant aux fréquences des pics de la figure 2.13.

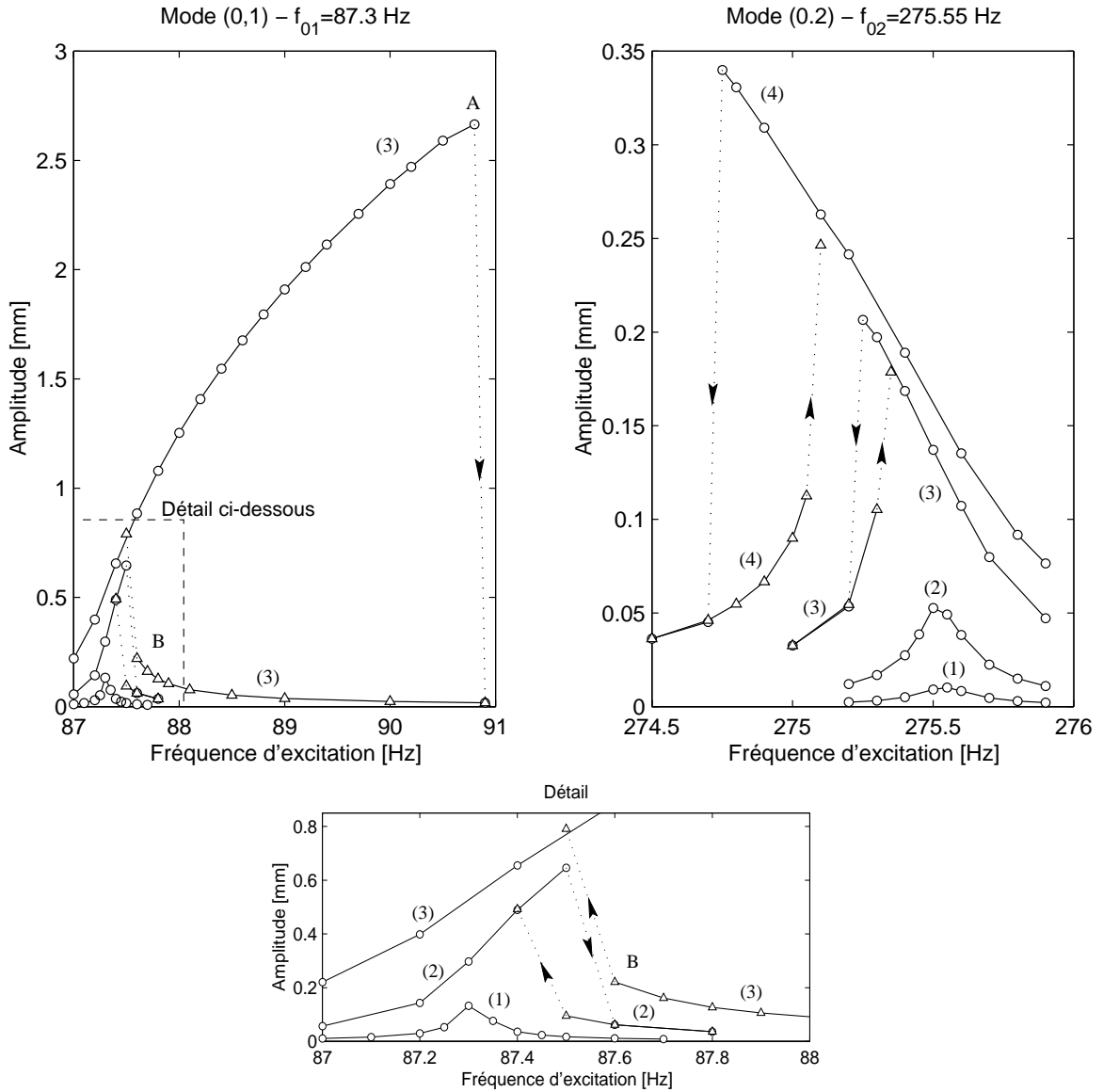


FIG. 2.15 – Courbes de résonance des deux premiers modes axisymétriques du gong. (a) et (c) : mode (0,1), (b) : mode (0,2). Les courbes de même numéro correspondent au même forçage : courbe (1) :  $13 \cdot 10^{-3} N$ , (2) :  $64 \cdot 10^{-3} N$ , (3) :  $0.25 N$  et (4) :  $0.51 N$ . Les ‘ $\triangle$ ’ se rapportent aux branches inférieures, les ‘ $\circ$ ’ aux branches supérieures.

La Fig. 2.15 présente des courbes de résonance pour les deux premiers modes axisymétriques du gong. Chacune de ces courbes est obtenue à amplitude d'excitation constante, en traçant l'amplitude du déplacement du centre du gong en fonction de la fréquence de l'excitation. Pour les petites amplitudes de vibration, les courbes sont des traditionnelles courbes de résonance, analogues à la réponse d'un oscillateur linéaire du second ordre (courbe (1) pour le mode (0,1) ; courbes (1) et (2) pour le mode (0,2)). En revanche, pour des amplitudes de vibrations plus importantes, on remarque que pour certaines fréquences d'excitation, deux valeurs d'amplitudes sont susceptibles d'être atteintes. Par exemple, sur la Fig. 2.15(a), la courbe (3) supérieure (avec des 'o') a été suivie en augmentant la fréquence par petits paliers. Arrivé au point *A*, à la suite d'une petite augmentation de la fréquence d'excitation, le système saute de la solution supérieure à la solution inférieure. Cela se manifeste par une brusque diminution de l'amplitude du déplacement, qui se stabilise sur la courbe inférieure (notée avec des '△'). Cette deuxième solution peut alors être suivie en diminuant la fréquence jusqu'au point *B*, où l'amplitude augmente brusquement, pour atteindre la solution supérieure. Ces "phénomènes de saut" sont caractéristiques des systèmes non-linéaires en régime forcé, qui présentent plusieurs solutions stables pour certaines valeurs des paramètres d'excitation [74]. Ce sont les conditions initiales, imposées au système chaque fois que l'on change la valeur des paramètres d'excitation, qui déterminent sur quelle solution le système se stabilise. Ces courbes sont analogues aux courbes de résonance d'oscillateur du second ordre à non-linéarité cubique du type de l'oscillateur de Duffing qui seront étudiés dans le cadre des plaques circulaires au chapitre 5 (§ 5.2.1).

On peut remarquer que l'incurvation des courbes de résonance se fait vers les fréquences positives ou négatives, selon le mode de vibration considéré. En particulier, le mode (0,1), dont la courbe est incurvée vers les fréquences positives, est dit avoir un comportement *raidissant*, alors que le mode (0,2) a un caractère *assouplissant*<sup>5</sup>. Le sens physique de ces termes sera expliqué au paragraphe suivant, et au chapitre 8. Il en résulte que les courbes de résonance supérieure du mode (0,2) (Fig. 2.15(b)) sont décrites en diminuant la fréquence d'excitation.

### Fréquence des oscillations en régime libre

Dans un oscillateur linéaire, la fréquence d'oscillation  $\tilde{f}$  du système en régime libre ne dépend pas de l'amplitude des oscillations. Elle est égale à la fréquence propre du système ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  est la pulsation propre d'un système masse ( $m$ ) / ressort (de raideur  $k$ ), par exemple). En revanche, lorsque l'amplitude des vibrations devient importante, et que les non-linéarités de l'oscillateur deviennent non négligeables, la fréquence des oscillations devient dépendante de l'amplitude. On peut citer l'exemple d'un pendule, pour lequel la durée d'un aller et retour (sa période d'oscillation) est d'autant plus importante que l'amplitude des oscillations est importante (Cf. § 8.1). Ainsi, une caractéristique du comportement non-linéaire d'un système oscillant est la courbe donnant sa fréquence d'oscillation en régime libre en fonction de l'amplitude de ses oscillations. Une telle courbe est souvent appelée "*backbone curve*"<sup>6</sup> [74], car elle correspond<sup>7</sup> au lieu, dans le plan amplitude-fréquence, des maxima (c'est-à-dire le point *A* pour la courbe (3) de la Fig. 2.15(a)) des courbes de résonance non-linéaire, lorsqu'on fait varier le forçage. Une explication plus exhaustive est présentée au chapitre 5 (§ 5.2.2). Cette propriété intéressante permet de tracer aisément des "backbone curves" expérimentales très précises. Celles pour les trois premiers modes axisymétriques sont présentées Fig. 2.16. Chaque point de mesure est obtenu, pour un forçage donné, en faisant varier la fréquence d'excitation, et en relevant le couple amplitude-fréquence de coordonnées du point d'amplitude maximum, soit le point *A* de la courbe (3) de la Fig. 2.15(a).

<sup>5</sup>Les termes anglais associées sont *hardening* et *softening*, ou *hard spring* et *soft spring* [74].

<sup>6</sup>On a choisi de garder le terme anglais, plutôt que sa traduction française : courbe en colonne vertébrale

<sup>7</sup>Cela est vrai pour des systèmes très peu amortis, ce qui est le cas ici, où la fréquence de résonance se confond avec la fréquence propre en régime linéaire (Cf. §5.2.2).

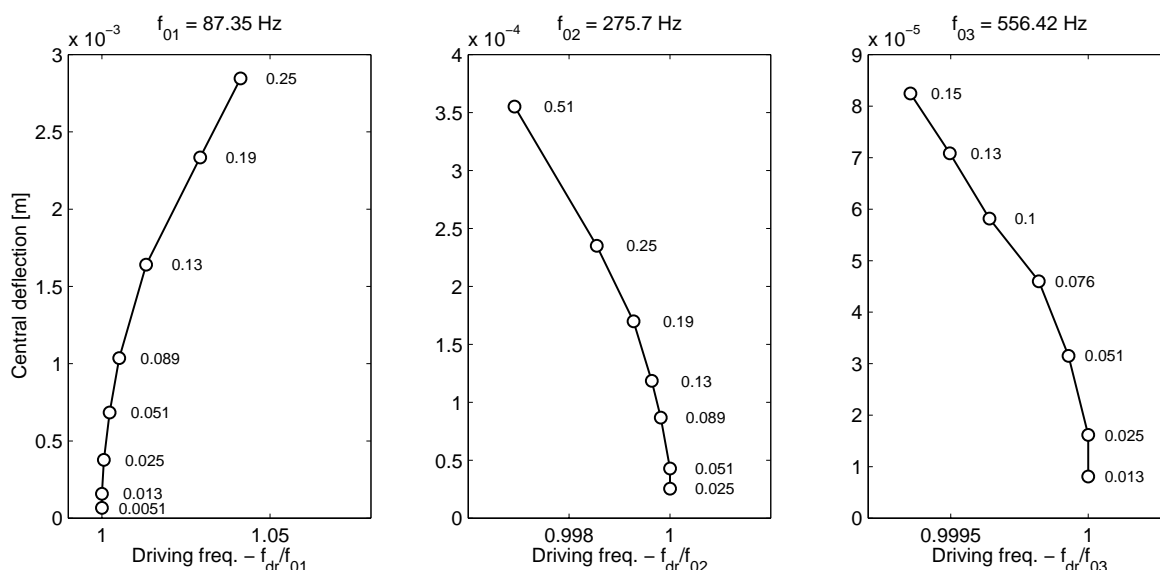


FIG. 2.16 – “backbone curves” des trois premiers modes axisymétriques du gong. Les amplitudes de forçage (en N) correspondant à chaque point de mesure sont précisées.

On peut alors donner un sens plus physique au comportement raidissant (pour le mode (0,1)) et assouplissant (pour les deux autres, (0,2) et (0,3)). Dans le cas du mode (0,1), par exemple, plus l’amplitude des oscillations est importante, plus la fréquence d’oscillation est importante (ou en d’autres termes plus la période d’aller et retour est faible). De façon analogue, plus la raideur d’un ressort est importante, plus celui-ci est dit “raide”, et plus sa fréquence propre est importante ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ). On reviendra au chapitres 5 et 8 sur ses différences de comportement, d’un mode à l’autre, qui sont, on le verra, caractéristiques des structures à profil courbé (§ 5.2.2, 8.2.2 et 8.2.4).

On peut constater que pour les amplitudes de forçage identique, l’amplitude de vibration pour un mode haute fréquence est plus faible que pour un mode basse fréquence. Cela implique que le rapport de la fréquence d’oscillation sur la fréquence propre  $\tilde{f}/f_0$  est plus faible, à même niveau de forçage, pour les modes de haute fréquence (pour un forçage de 0.15 N, le mode (0,1) oscille avec 2 mm,  $\tilde{f}/f_{01} = 2.5\%$ ; pour le (0,3), l’oscillation est de 83  $\mu\text{m}$ , avec  $\tilde{f}/f_{03} = 0.07\%$ ). Cela montre que l’amplitude des déplacements de la structure est un bon indicateur de l’importance des non-linéarités, caractéristique des non-linéarités géométriques, ce que l’on confirmera théoriquement dans les chapitres suivants. Enfin, les mesures pour les modes (0,2) et (0,3) ont été stoppées aux valeurs de forçage 0.51 N et 0.15 N car au-delà, des couplages avec les modes de plus basses fréquences apparaissent, ce qui est évoqué au paragraphe suivant.

On peut remarquer que la valeur des fréquences propres du gong varie très faiblement d’une expérience à l’autre (pour le mode (0,1),  $f_{01} = 87.1 \pm 0.6$  Hz pour les analyses modales,  $f_{01} = 87.3 \pm 0.05$  Hz lors des courbes de résonance et  $f_{01} = 87.35 \pm 0.05$  Hz pour les *backbone curves*). Ces variations proviennent probablement des conditions aux limites expérimentales, imposées par les cordages de Nylon, dont l’inclinaison n’a pas été précisément reproduite d’une expérience à l’autre.

### 2.4.3 Route vers le chaos

Les mesures de la section précédente supposent que sous une excitation sinusoïdale de fréquence proche de l’une de ses fréquences propres, le gong répond en tout point de sa géométrie avec un

signal *périodique*. Lorsqu'on se place dans des conditions où l'amplitude du forçage est plus grande que celles considérées précédemment, on obtient des régimes de vibrations plus complexes, qui font intervenir d'autres modes de vibration que ceux directement excités. On obtient des régimes de vibrations qualifiés de *quasi-périodiques*, et, pour des amplitudes de forçage importantes, des régimes *chaotiques* apparaissent.

Avec une excitation sinusoïdale, deux paramètres de contrôle sont réglables : l'amplitude du forçage, et sa fréquence  $f_{exc}$ . Dans les expériences suivantes, l'un de ces paramètres est gardé constant, et l'autre modifié, faisant apparaître des changements qualitatifs de régime appelés *bifurcations*.

Le gong est excité au centre, et la vibration est recueillie par un accéléromètre placé à 80 mm du centre, pour que les contributions éventuelles des modes asymétriques, qui ont un noeud au centre, soient mesurées. Les pages suivantes montrent deux expériences, effectuées toutes les deux à fréquence d'excitation constante (Expérience 1 :  $f_{exc} = 555.4$  Hz, expérience 2 :  $f_{exc} = 554.7$  Hz, non loin de la fréquence propre du mode (0,3)) et amplitude croissante. Les Fig. 2.17 et 2.18 présentent les spectrogrammes de la réponse pour les deux expériences. Les figures suivantes (Fig. 2.19 à 2.22) détaillent la réponse du gong à différentes dates, et donnent à chaque fois l'évolution temporelle du signal d'accélération, son spectre de Fourier, et la reconstruction bidimensionnelle du signal dans l'espace des phases (c'est-à-dire un diagramme où le signal est porté en abscisse, en fonction de ce même signal retardé de  $T$  échantillons, en ordonnée). Sans entrer dans des détails qui dépassent le cadre de cet exposé, la représentation dans ce pseudo espace des phases nous sert ici à caractériser visuellement et qualitativement la complexité du régime de vibration [117]. Une étude de ces représentations, appliquées à des vibrations de cymbales et de gong est présentée dans le manuscrit de thèse de Cyril Touzé [122] et dans [123].

Pour des amplitudes très faibles, le régime est linéaire et la réponse est composée d'une seule raie à la fréquence d'excitation. L'amplitude augmentant, des harmoniques de fréquences multiples de la fréquence d'excitation ( $2f_{exc}$ ,  $3f_{exc}$ ...) apparaissent. Cela correspond au début des spectrogrammes. Puis, dans les deux expériences, une première bifurcation apparaît avec la contribution de deux partiels de fréquences ( $f_1$  et  $f_2$ ) incommensurables avec la fréquence d'excitation, et telles que  $f_1 + f_2 = f_{exc}$ . Le régime se complexifie par l'apparition de raies à des fréquences multiples de  $f_1$  et  $f_2$  (du type  $nf_1 + mf_2$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ ). C'est alors qu'arrive une deuxième bifurcation, qui mène à un régime chaotique, caractérisé par un diagramme de phase très brouillé et spectre large bande. Cela est le cas précisément pour l'expérience 1 vers 50 s, où le spectre est continu. Pour l'expérience 2, on a constaté après la deuxième bifurcation un élargissement des raies spectrales qui donne un spectre chaotique moins dense que pour l'expérience 1. Des spectres similaires ont été obtenus lors d'expériences analogues sur une cymbale [122], p. 19.

Les descriptions précédentes sont restées volontairement très qualitatives. Une véritable caractérisation des régimes de vibration consisterait à faire un calcul d'exposant de Lyapunov à partir des signaux de gong. Cela a été fait par Cyril Touzé lors de son travail de thèse au laboratoire, sur un signal du gong excité à 556 Hz. Il a trouvé une valeur positive pour le plus grand exposant de Lyapunov, prouvant que le signal correspondant était chaotique [122], p. 70. Les résultats analysés ici corroborent le scénario de route vers le chaos pour les cymbales et les gongs conjecturé dans [122], où il est montré, en appliquant uniquement des techniques de traitement de signal (analyses de Fourier et calcul d'exposants de Lyapunov), que le scénario généralement observé suit les étapes de la transition vers la turbulence proposée par Ruelle et Takens [96]. Plus précisément, le scénario de Ruelle-Takens stipule qu'après un nombre fini de bifurcations de Hopf, les attracteurs quasi-périodiques sont structurellement instables par rapport aux perturbations que l'on impose au système, au profit d'un mouvement chaotique sur un attracteur étrange. Ce que l'on observe sur les cymbales et les gongs suit qualitativement les étapes de ce scénario. Tirant le système loin de l'équilibre par introduction d'un forçage, on observe tout d'abord un cycle limite à la fréquence d'excitation  $f_{exc}$  (Cf. Fig. 2.19 haut et 2.21 haut). Augmentant le forçage, on observe l'apparition d'une combinaison de résonances,

$f_1 + f_2 = f_{exc}$ , menant génériquement à un régime quasi-périodique. Puis, une troisième bifurcation a lieu, et le mouvement devient chaotique, ce qui est caractérisé par un spectre continu (Cf. Fig. 2.20 bas et 2.22 bas) et un exposant de Lyapunof positif [123, 122].

#### 2.4.4 Examen de quelques couplages

On se propose ici d'examiner plus précisément les régimes quasipériodiques relevés plus haut, à la lumière des analyses modales du gong. Après la première bifurcation, il apparaît systématiquement une relation de résonance d'ordre 2, du type :

$$f_i = f_j + f_k, \quad (2.7)$$

où les  $f_i$  sont à prendre parmi les fréquences de résonance du gong et la fréquence d'excitation  $f_{exc}$  (Cf. § 5.1.1). Le Tab. 2.5 récapitule les combinaisons de résonance rencontrées lors de nos expériences sur le gong. Les expériences 1 et 2 de la section précédente sont détaillées sur les figures des pages suivantes.

L'expérience 1 ( $f_{exc} = 555.4$ ) est remarquable, car elle met en évidence au moins 4 combinaisons de résonances. Lors du régime quasi-périodique, la dynamique paraît être gouvernée par les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  correspondant aux modes (2,1) et (3,1), qui apparaissent en premier. Ensuite, les fréquences multiples du type  $nf_1 + mf_2$  apparaissent, et un certain nombre d'entre elles coïncident avec d'autres fréquences de résonance du gong, récapitulées dans le Tab. 2.5. En revanche, l'expérience 2 est plus simple, et ne fait apparaître qu'une seule combinaison de résonances.

Un cas intéressant est présenté Fig. 2.27 et 2.28, où une résonance sous-harmonique apparaît. Le paramètre de contrôle est ici la fréquence d'excitation, alors que c'est l'amplitude du forçage qui est gardée constante, à l'inverse des cas évoqués précédemment. Ici, une fréquence  $f_i$  apparaît, qui coïncide avec le mode (1,1), et telle que :

$$f_{exc} = 2f_1. \quad (2.8)$$

Ces expériences montrent qu'un modèle de comportement du gong en régime forcé quasi-périodique doit comporter plusieurs degrés de liberté, prenant en compte plusieurs modes de vibration. En particulier, l'expérience 1 fait intervenir 4 résonances internes, dont une (celle des modes (2,1) et (3,1)) paraît prépondérante. Il est logique de prendre en compte dans un éventuel modèle les modes (2,1) et (3,1) en plus du mode (0,3) directement excité. En revanche, doit-on considérer les 6 autres modes, correspondant aux 3 résonances internes supplémentaires ? Si tel est le cas, un modèle à 9 modes propres est nécessaire. À ce stade de l'étude, et sans calculs, il est difficile de déterminer combien de modes doivent être considérés dans un modèle de comportement.



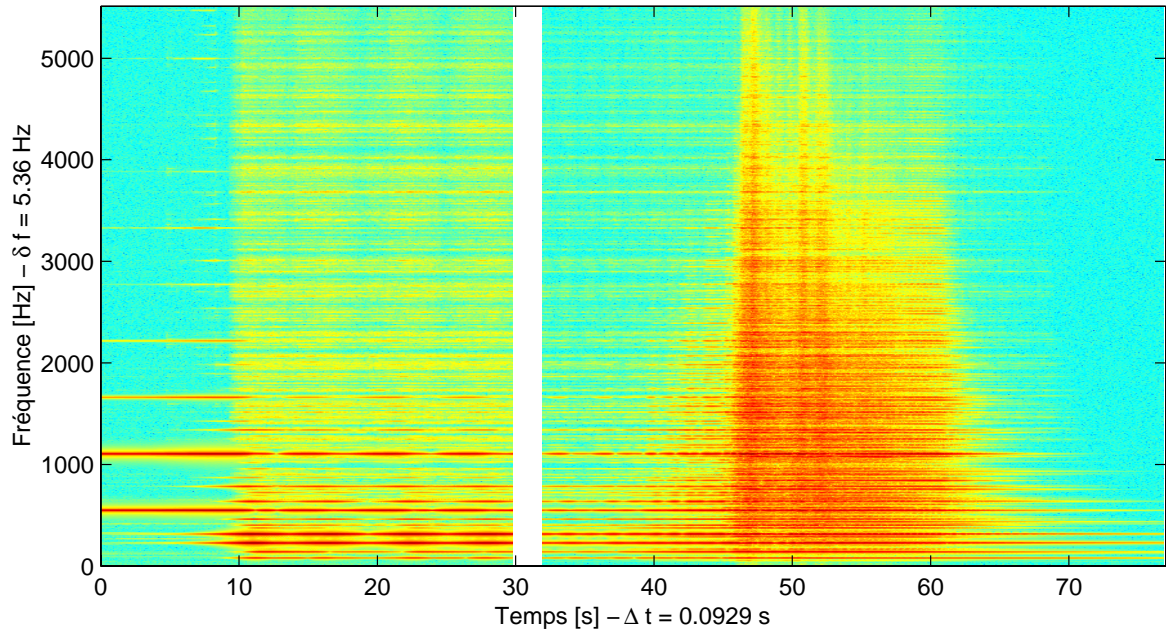


FIG. 2.17 – EXPÉRIENCE 1 - Suite de deux bifurcations menant au chaos. Spectrogramme de l'accélération du gong, pour le même signal que Fig. 2.23. Excitation au centre à  $f_{exc} = 555.4$  Hz constante et amplitude croissante ( $63 \cdot 10^{-3}$  N jusqu'à 32 s ; augmentation de 1.3 N à 2.6 N entre 32 et 45 s, date à partir de laquelle l'amplitude est gardée constante, jusqu'à 60 s où elle est annulée).

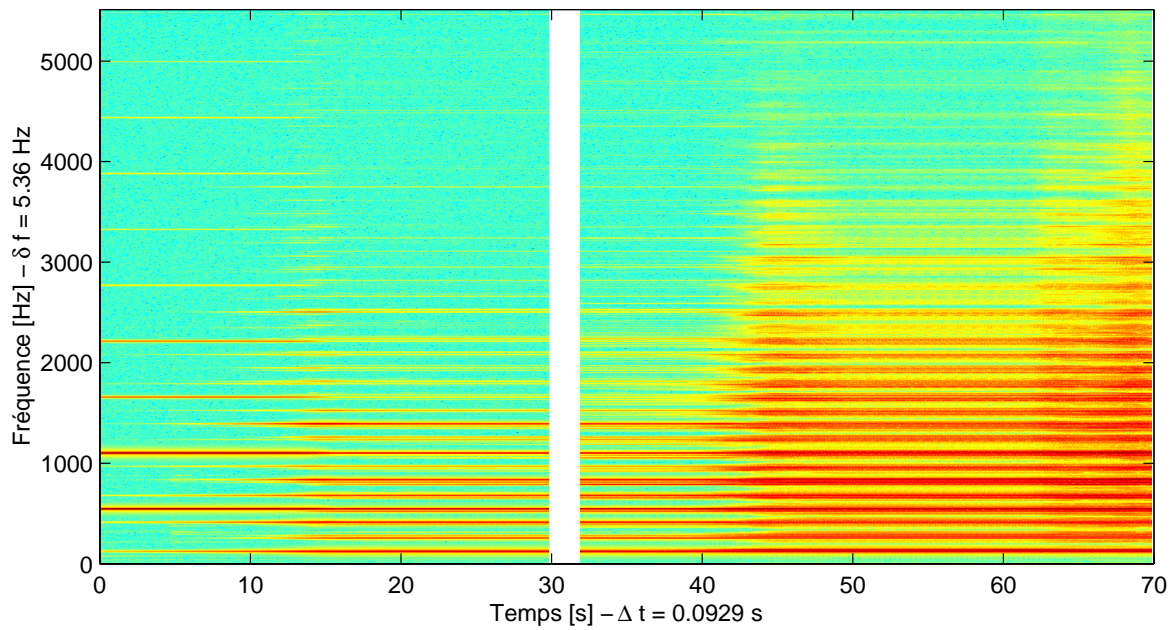


FIG. 2.18 – EXPÉRIENCE 2 - Suite de deux bifurcations menant au chaos. Spectrogramme de l'accélération du gong excité au centre à  $f_{exc} = 554.7$  Hz constante et amplitude croissante (0.13 N jusqu'à 10 s, puis 0.27 N ; 0.76 N de 32 à 40 s, puis 1.0 N jusqu'à 63 s et 1.3 N ensuite).

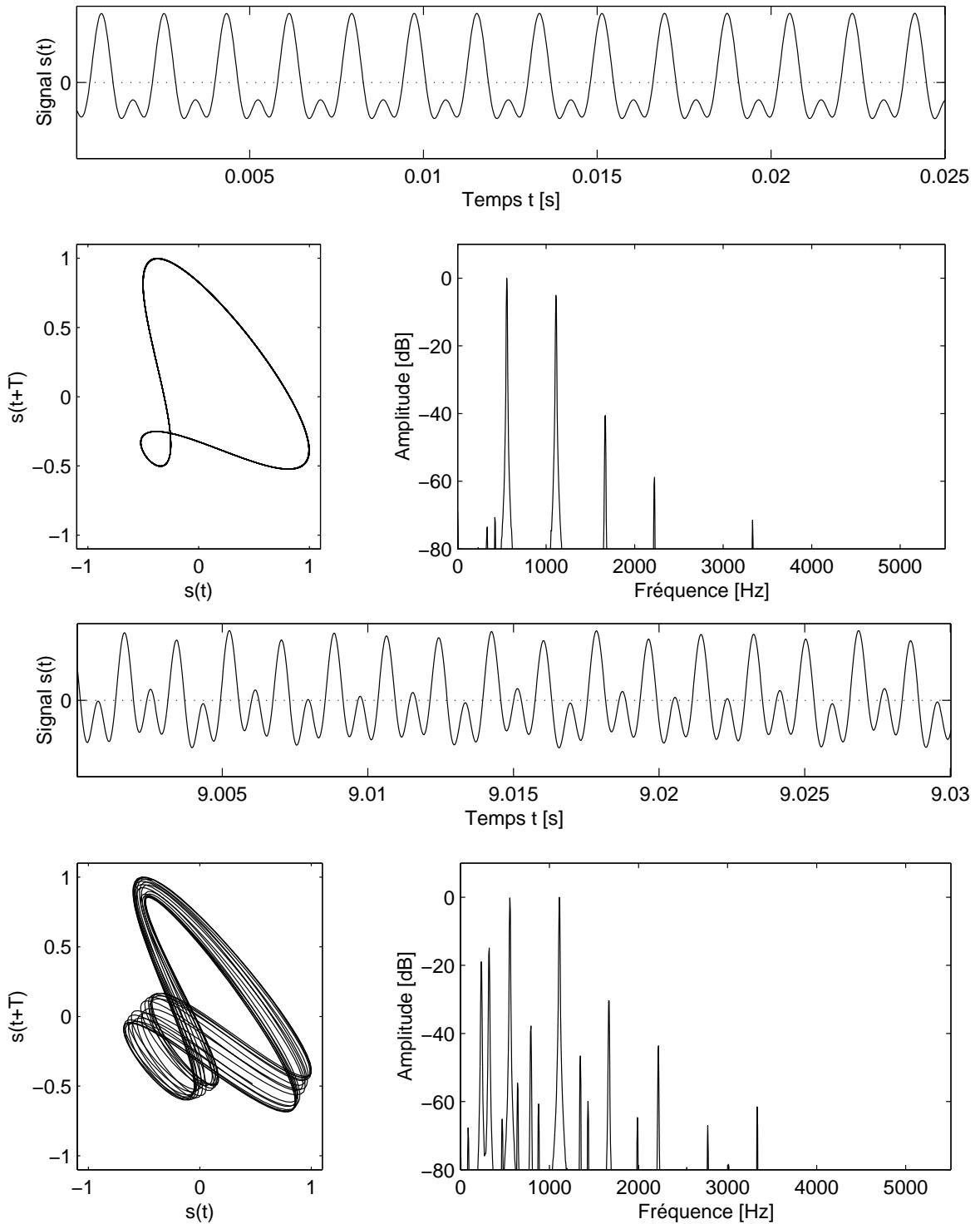


FIG. 2.19 – Évolution temporelle de l'accélération, reconstruction bidimensionnelle et spectre de Fourier du signal à plusieurs dates correspondant à la Fig. 2.17. Paramètres : décalage de  $T = 20$  échantillons pour le diagramme de phase, spectre sur 2048 échantillons,  $\Delta f = 5.38$  Hz, fenêtrage de Hanning.

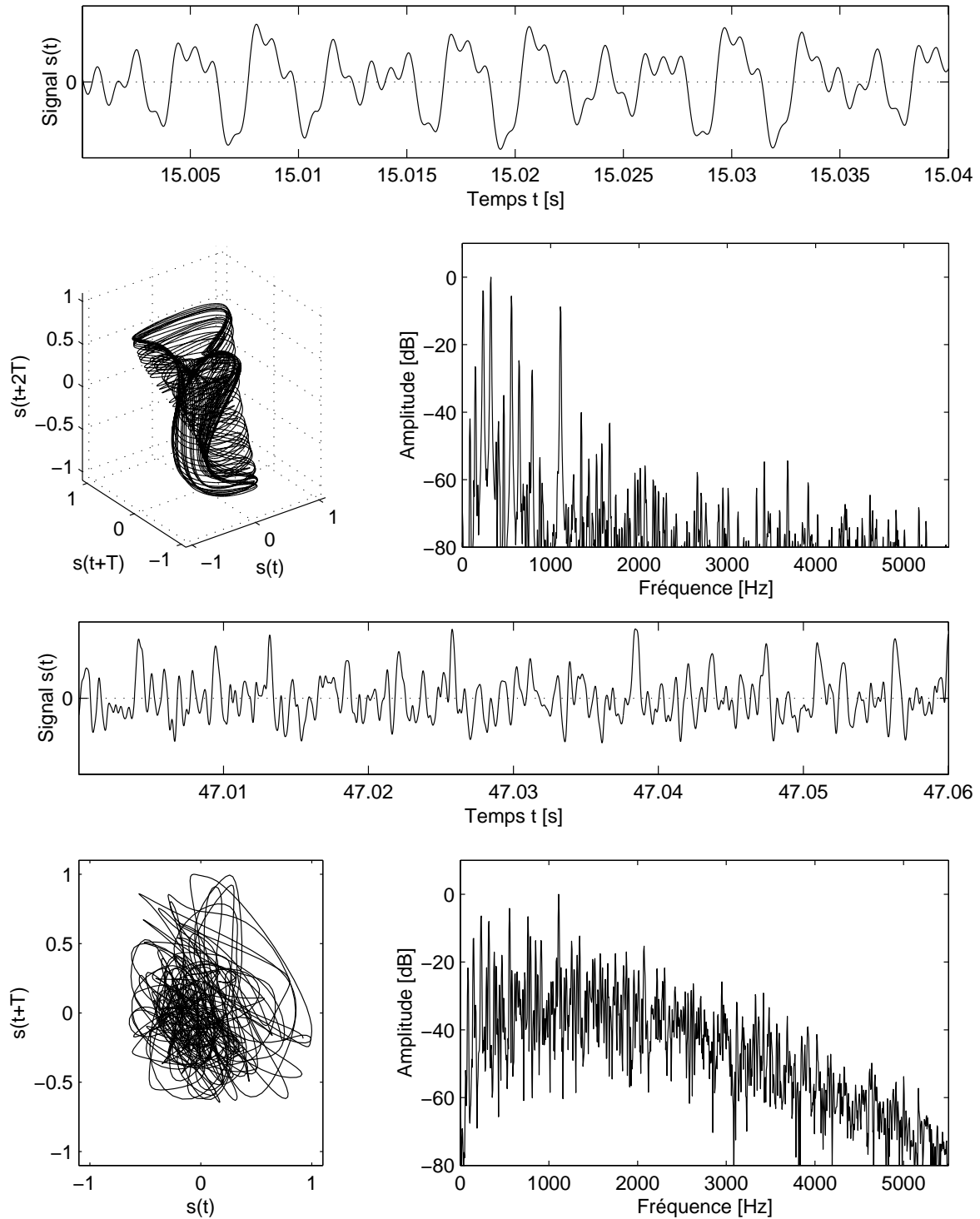


FIG. 2.20 – Suite de la figure précédente.

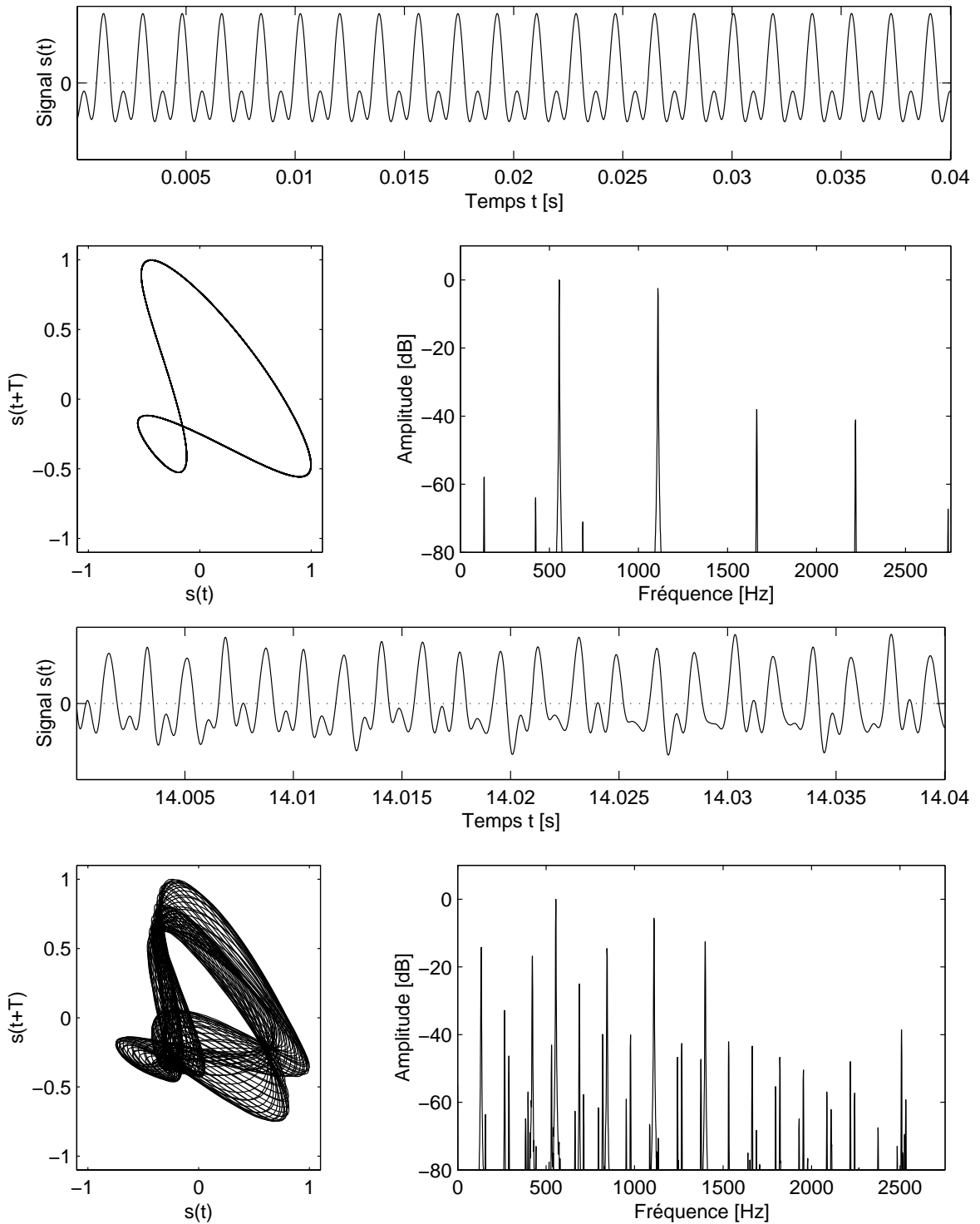


FIG. 2.21 – Évolution temporelle de l'accélération, reconstruction bidimensionnelle et spectre de Fourier du signal à plusieurs dates correspondant à la Fig. 2.18. Paramètres : décalage de  $T = 20$  échantillons pour le diagramme de phase, FFT sur 2048 échantillons,  $\Delta f = 2.69$  Hz, fenêtrage de Hanning.

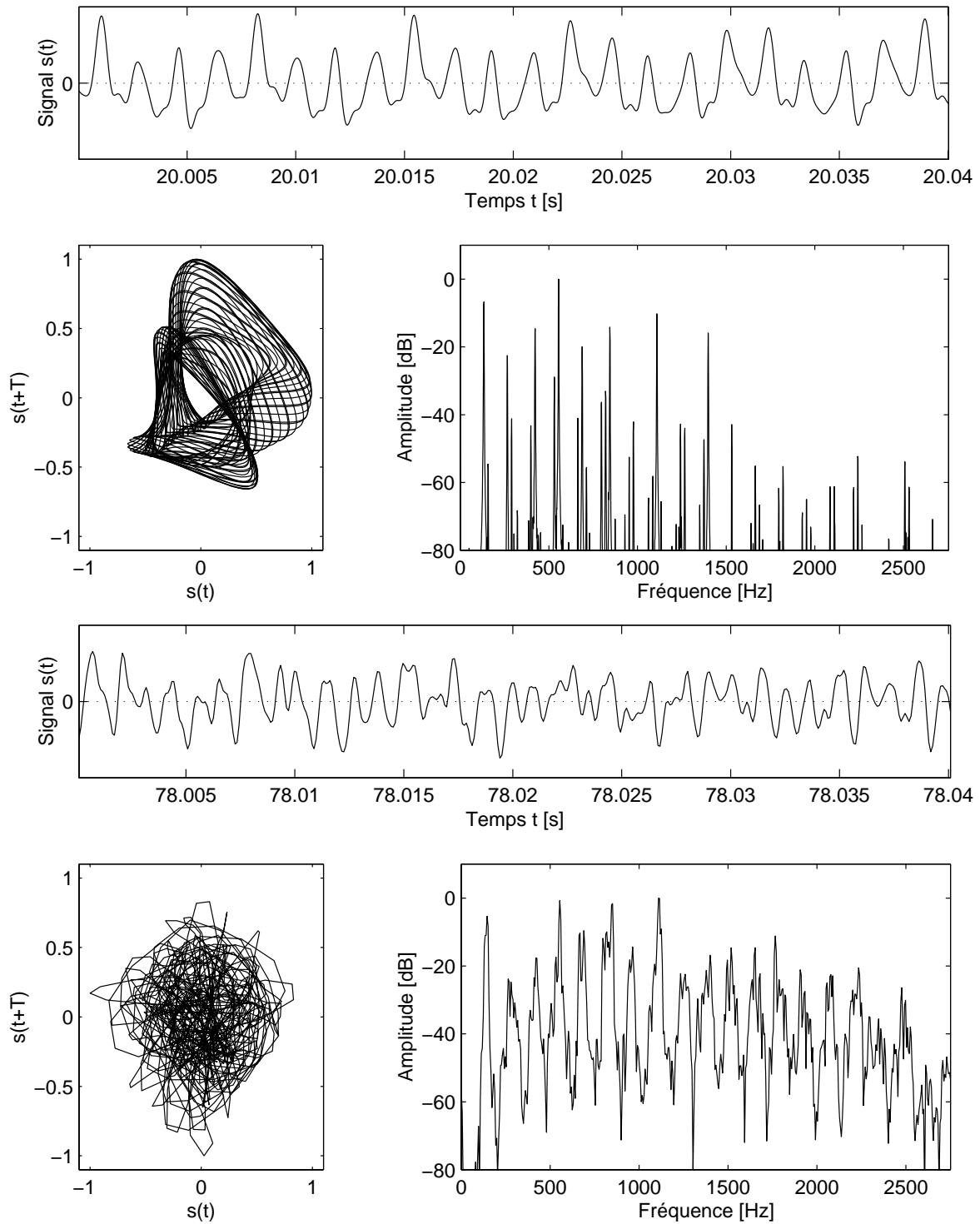


FIG. 2.22 – Suite de la figure précédente.

Fig.	Fréquence d'excitation [Hz]	Fréquences en combinaisons de résonance mesurées [Hz]	Fréquences propres correspondantes [Hz]
2.24	$555.4 \simeq f_{03}$	234.2 ; 321.3 87.1 ; 468.3 147.4 ; 408.5 133.6 ; 421.2	$f_{21} = 234.4 ; f_{31} = 321.3$ $f_{01} = 87.1 ; f_{50} = 474.6$ $f_{11} = 148.3 ; f_{41} = 408.4$ $f_{11} = 134.2 ; f_{41} = 421.8$
2.26	$554.7 \simeq f_{03}$	132.6 ; 421.9	$f_{11} = 134.2 ; f_{41} = 421.8$
–	$234.4 \simeq f_{21}$	–	$f_{01} = 87.1 ; f_{11} = 148.3$
–	$321.3 \simeq f_{31}$	–	$f_{01} = 87.1 ; f_{21} = 234.4$
–	$552 \simeq f_{03}$	–	$f_{02} = 275.4$
2.28	$274.9 \simeq f_{02}$	137.3	$f_{11} = 134.2$

TAB. 2.5 – Récapitulatif des combinaisons de résonances identifiées expérimentalement. Les deux premières lignes correspondent aux expériences 1 et 2 de la section précédente, et les spectres correspondants sont représentés Fig. 2.24 et 2.26. Les deux lignes suivantes font références à des expériences non présentées ici. Les deux dernières lignes se rapportent à des résonances sous-harmoniques, dont la première est illustrée Fig. 2.28.

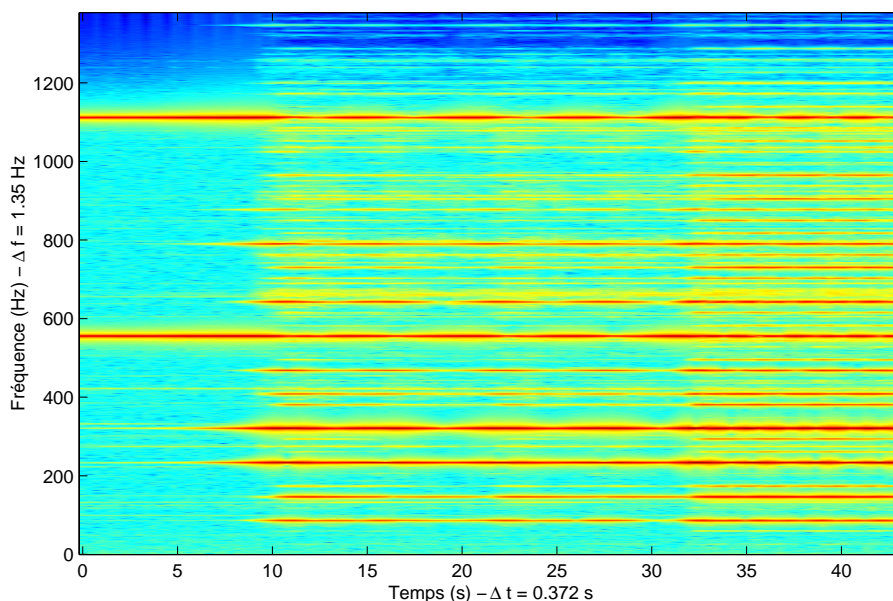


FIG. 2.23 – Apparitions de plusieurs combinaisons de résonances, au début de l'expérience 1 Fig. 2.17. Spectrogramme de l'accélération du gong excité au centre à  $f_{exc} = 555.4$  Hz constante et amplitude croissante ( $45 \cdot 10^{-3}$  N jusqu'à 32 s, puis  $90 \cdot 10^{-3}$  N).

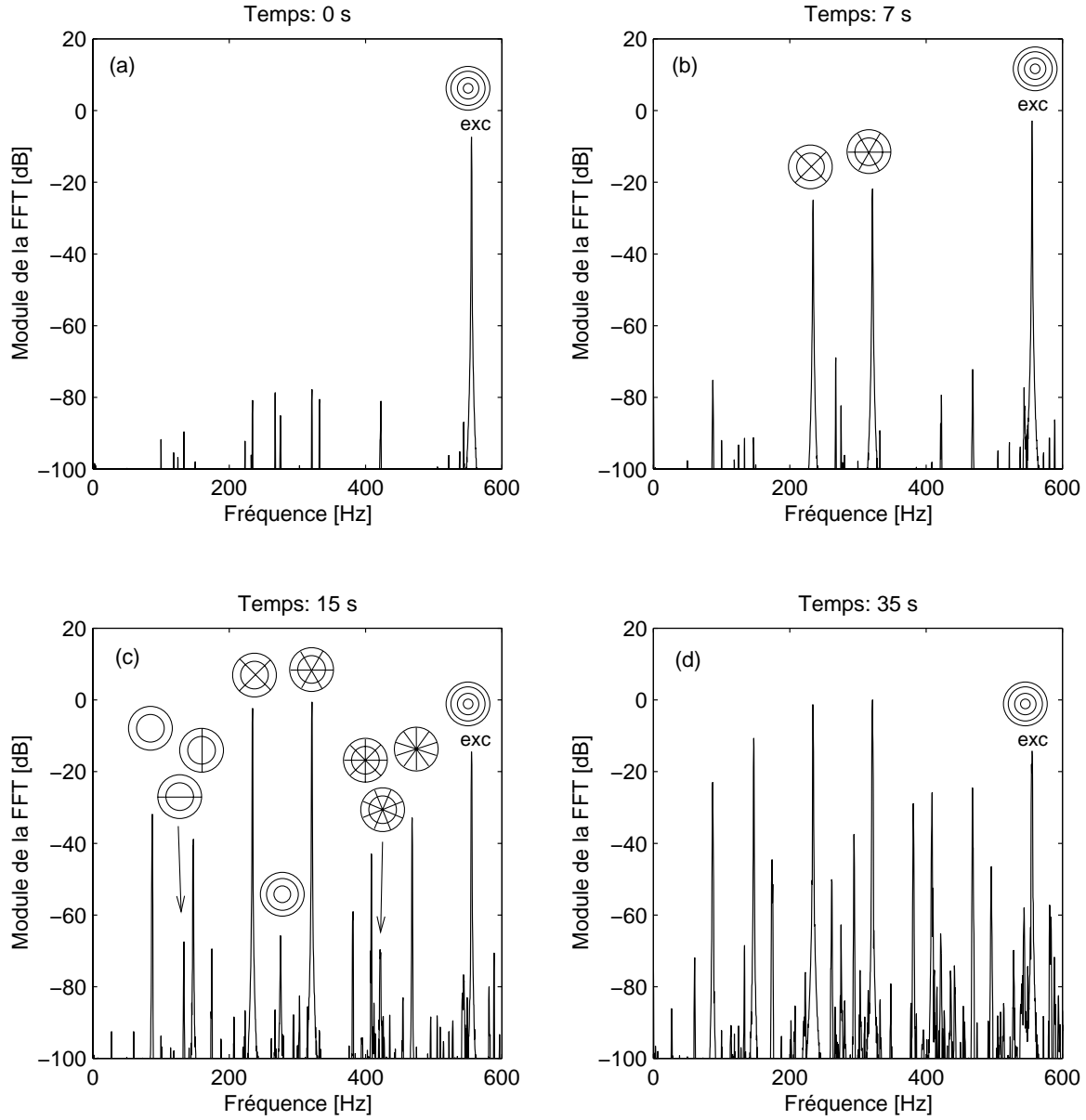


FIG. 2.24 – Spectre de Fourier à 4 dates de la Fig. 2.23 précédente. (a) : 0 s, (b) : 7 s, (c) : 15 s et (d) : 37 s. FFT sur 2048 points, fenêtrage de Hanning.  $f_e = 1378$  Hz,  $\Delta f = 0.67$  Hz.



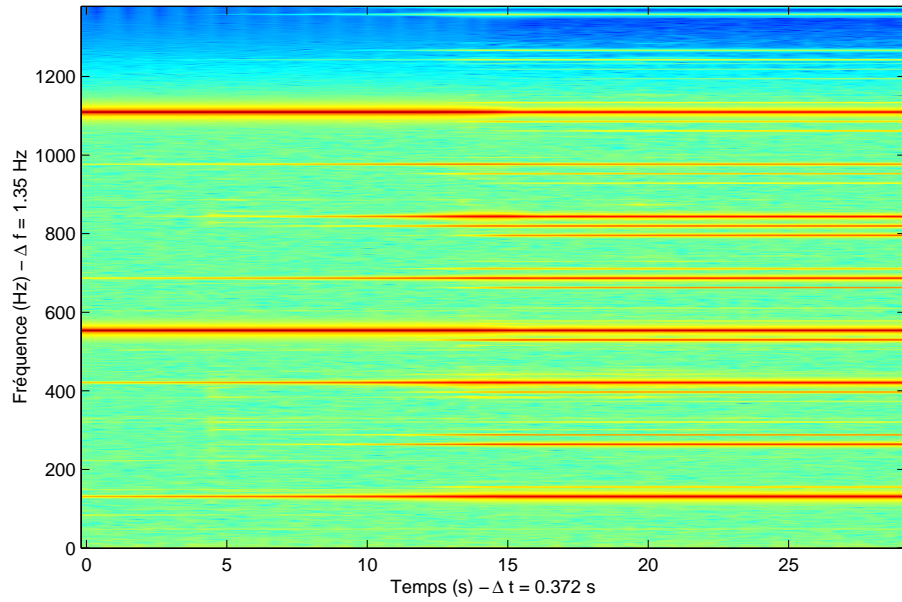


FIG. 2.25 – Apparitions de plusieurs combinaisons de résonances, au début de l'expérience 2 Fig. 2.18. Spectrogramme de l'accélération du gong excité au centre à  $f_{exc} = 554.7$  Hz constante et amplitude croissante (0.09 N jusqu'à 10 s, puis 0.18 N).

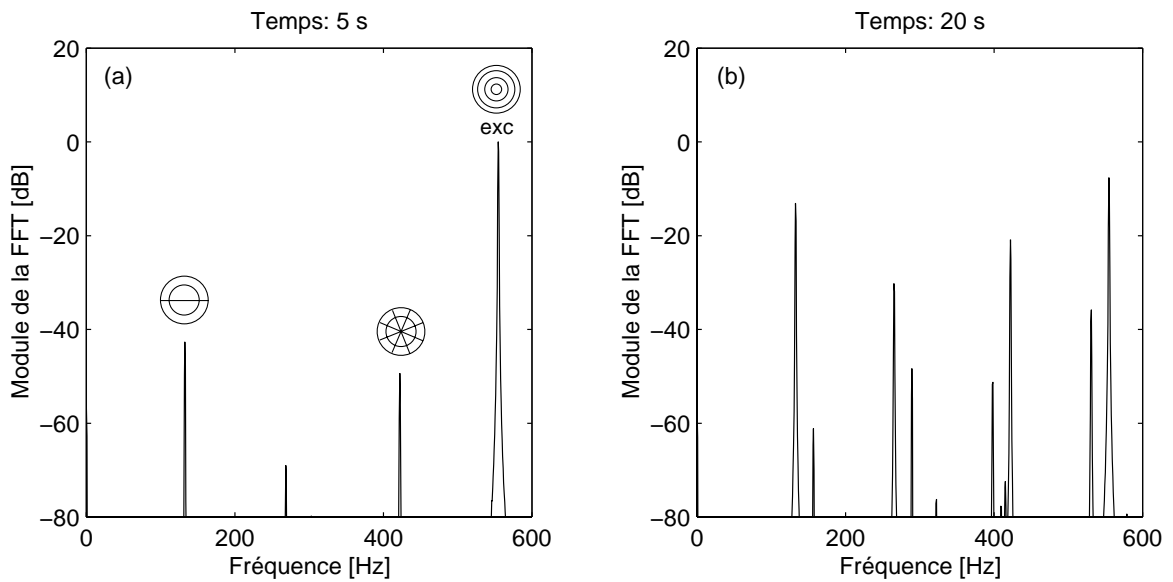


FIG. 2.26 – Spectre de Fourier à 2 dates de la Fig. 2.25 précédente. (a) : 5 s, (b) : 20 s. FFT sur 2048 points, fenêtrage de Hanning.  $f_e = 1378$  Hz,  $\Delta f = 0.67$  Hz.



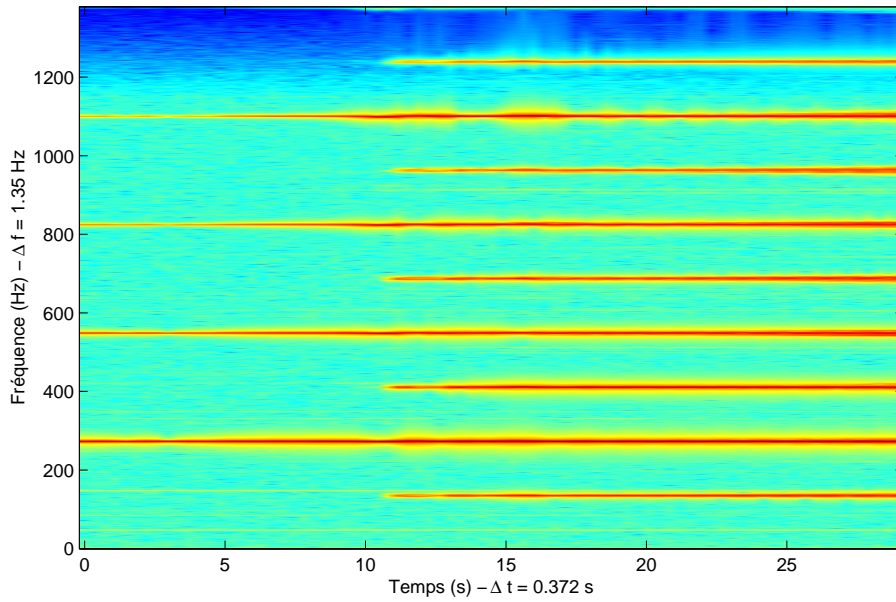


FIG. 2.27 – Apparition d'une résonance sous-harmonique. Spectrogramme de l'accélération du gong excité au centre à amplitude 1 N constante et fréquence variable ( $f_{exc} = 275$  Hz avant 5 s, puis 274.9 Hz).

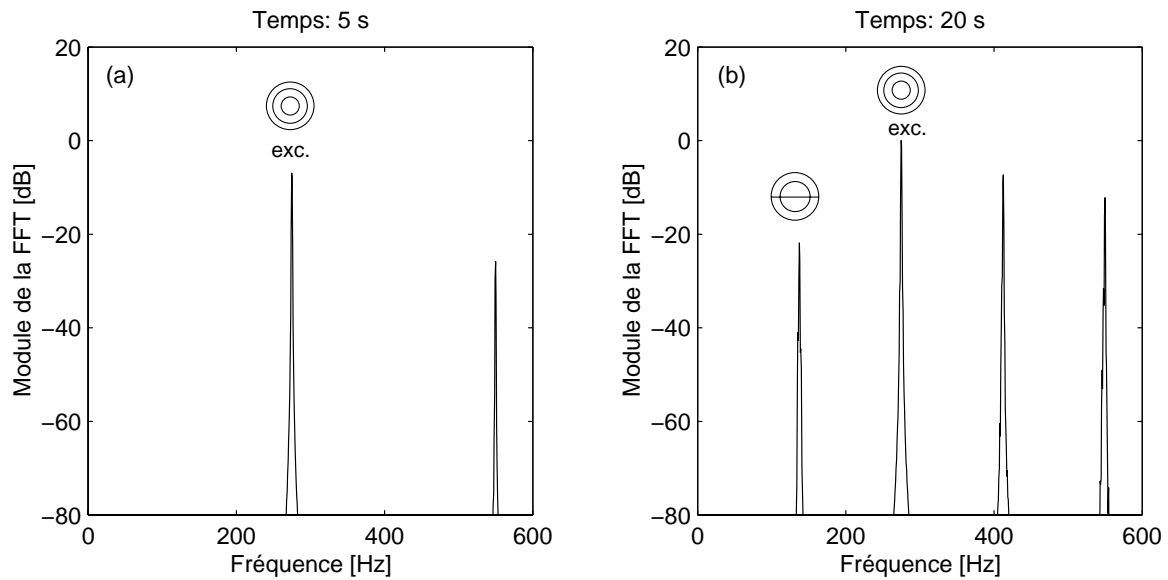


FIG. 2.28 – Spectre de Fourier à 2 dates de la Fig. 2.27 précédente. (a) : 5 s, (b) : 20 s. FFT sur 2048 points, fenêtrage de Hanning.  $f_e = 1378$  Hz,  $\Delta f = 0.67$  Hz

## 2.5 Conclusion

Les études expérimentales décrites dans le présent chapitre ont pour but de décrire à la fois qualitativement (§2.3) et quantitativement (§2.2 et 2.4) différents phénomènes caractéristiques du comportement du gong, en vue de se familiariser avec celui-ci, et d'introduire la modélisation qui va être présentée dans les chapitres suivants. Les résultats du présent chapitre ont fait l'objet d'une publication associée à une communication de congrès [22].

L'examen des régimes quasi-périodiques montre qu'un modèle de comportement correct du gong doit mettre en jeu plusieurs modes de vibrations, pour rendre compte des échanges d'énergie entre ceux-ci. En vue d'effectuer un maximum de calculs analytiques, la première idée a été d'étudier le comportement de plaques minces circulaires homogènes, ce qui est présenté dans les chapitres 3 à 6. Les plaques offrent l'avantage d'être modélisable par des équations plus simples que celles des coques de révolution, tout en présentant des phénomènes non-linéaires analogues à ceux décrits dans ce chapitre. En particulier, le timbre d'une plaque circulaire frappée avec une mailloche en son centre présente un enrichissement spectral analogue à celui du gong. Seules les vibrations forcées de plaques seront étudiées ici, en vue de les comparer aux mesures du gong en régime forcé.

En revanche, la simplification majeure associée à un modèle de plaques, est que celui-ci ne prend pas en compte l'influence de la géométrie courbée du gong. L'étude des effets de la courbure d'une structure seront étudiés aux chapitres 7 et 8, au moyen de petits treillis à 1 degré de liberté soumis à de grands déplacements. On verra en particulier que les combinaisons de résonance représentées par les équations (2.7) et (2.8) sont d'ordre 2 [66, 65], typiques des structures à courbure non-nulle.





PARTIE **II**

---

## Plaques circulaires

*Faire de l'acoustique sans oreille c'est prier un aveugle de dresser le plan d'une ville : il y parviendra en quelques siècles, à supposer qu'il y parvienne.*

*H. Bouasse,  
[17], p. 4*



## Vers les équations de Von-Kàrmàn

Ce chapitre propose un établissement des équations de vibrations de plaques en grands déplacements et rotations modérées<sup>1</sup>. Ces équations sont très classiques et ont été fréquemment utilisées dans la littérature. En revanche, leur démonstration n’a fait l’objet que d’une publication originale, par G. Herrmann [47]. Il nous a semblé important de les établir une nouvelle fois dans cette étude pour plusieurs raisons.

- Tout d’abord, mêmes si les hypothèses nécessaires à l’établissement des équations sont précisées dans le travail d’Herrmann, le domaine de validité de la théorie n’apparaît pas clairement.
- D’autre part, la justification de la relation (3.65) (entre l’effort tranchant  $\vec{Q}$  et le moment fléchissant généralisé  $\underline{M}$ ), ainsi que l’introduction de la fonction de force associée à la condition de compatibilité, dans la formulation mixte (Cf. § 3.3.4), ne nous parraissait pas clair dans les travaux antérieurs.
- De plus, certaines hypothèses émises par Herrmann, devenues classiques depuis, sont en fait une conséquence des autres. Il nous a paru important de souligner en particulier que les hypothèses qui consistent à négliger l’inertie longitudinale et l’inertie de rotation sont en fait une conséquence de la mise à l’échelle du déplacement transverse.
- Ensuite, les conditions aux limites ne sont pas clairement explicitées dans le travail d’Herrmann. Cela nous a poussé à utiliser une formulation faible du problème, avec la méthode des travaux virtuels, qui permet tout naturellement d’établir les conditions aux limites.
- Enfin, on a trouvé intéressant de formuler les développements mathématiques avec des grandeurs intrinsèques. Cela permet d’étendre le travail d’Herrmann à une géométrie quelconque du bord de la plaque, et d’unifier ainsi des résultats disparates de la littérature<sup>2</sup>, en terme de conditions aux limites et de formulation du problème. On obtient de plus des équations plus compactes, ce qui rend les analyses dimensionnelles plus aisées. Enfin, cette formulation est particulièrement adaptée pour décrire dans le cas général des structures à géométrie plus compliquée comme des coques, travail qui pourra être envisagé dans le futur.

Les développements mathématiques sont conduits à partir des équations de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Les différentes hypothèses classiques sont émises au

---

<sup>1</sup>Les termes “grands déplacements” et “moyennes rotations” désignent ici simplement des déplacements et rotations plus importants que ceux et celles qui limitent la théorie linéaire ; on y reviendra au paragraphe 3.4.1.

<sup>2</sup>La démonstration des équations dynamiques de Von-Kàrmàn n’a été publiée que par Herrmann, en coordonnées cartésiennes, pour des plaques rectangulaires. Seule la formulation en déplacement y est exposée. Pour les plaques circulaires, c’est une publication d’Efstathiades [35] qui fait référence, mais l’établissement des équations, et en particulier de la condition de compatibilité, n’est pas précisé.

fur et à mesure, ce qui permet de particulariser petit à petit le modèle, d'un milieu continu tridimensionnel quelconque vers une plaque mince. Les simplifications ne provenant pas directement des hypothèses sont justifiées par des analyses dimensionnelles des équations, ce qui est original. Les formulations traditionnelles (formulation en effort, formulation en déplacement, et formulation mixte avec la fonction de force) du problème sont clairement établies. La démarche d'établissement des équations proposée ici, est comparée à une méthode asymptotique en fin de chapitre.

### 3.1 Introduction

La première théorie non-linéaire de plaques minces a été proposée par T. Von-Kàrmàn en 1910 [129]. Elle consiste à prendre en compte, dans les équations classiques linéaires des plaques, les termes décrivant l'élongation non-linéaire du plan moyen de la plaque lorsque celle-ci est soumise à des grands déplacements transverses et des rotations moyennes<sup>3</sup>. Ce modèle, qui ne décrit que les déformations de flexion statique, est basé sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love (Hyp. 3.2, p. 61). En 1944, Reissner [87] introduit les effets du cisaillement dans les équations statiques linéaires des plaques, analogues des apports de Timoshenko à la théorie des poutres [118], et c'est en 1957 que ces effets sont inclus par le même auteur dans la théorie non-linéaire statique [88]. En 1951, ce sont les équations dynamiques linéaires qui sont généralisées par Mindlin [72], qui y inclut les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation. Ces modèles, connus aujourd'hui sous le nom de leurs auteurs : Reissner-Mindlin, permettent de décrire des plaques plus épaisses (d'où la dénomination de plaque "épaisse" au lieu de plaque "mince"), et donnent de bon résultats pour des comportements dynamiques de fréquences plus élevées.

Parallèlement à cela, en 1955, Herrmann [47] propose une théorie non-linéaire de vibrations de plaques, équivalent dynamique des équations de Von-Kàrmàn. Berger présente la même année une théorie simplifiée, en négligeant le second invariant  $\tilde{I}_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}(\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}})^2) - (\text{tr}(\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}))^2$  du tenseur des déformations de membrane [10]. Les équations obtenues sont beaucoup plus simples, et c'est pour cette raison que cette méthode a été largement utilisée depuis. Néanmoins, des restrictions ont été mises en évidence, en particulier car cette méthode ne donne de bon résultats que si les déplacements du plan moyen de la plaque sont imposés nuls (par exemple avec des conditions aux limites encastrees ou simplement supportées); elle ne semble ainsi pas être appropriée à des conditions aux limites libres. On peut consulter sur ce sujet [79, 128], et [74, 24] qui renvoient à de nombreuses références. Ces deux modèles théoriques de plaques en grands déplacements paraissent être les deux principaux à avoir été utilisés; ils ont été appliqués à une multitude de cas précis, qui sont inventoriés dans les remarquables articles de Leissa [59, 60, 61] et Sathyamoorthy [100, 101, 102]. Chia a consacré un ouvrage aux plaques en grands déplacements, où une grande variété de problèmes est traitée [24].

Dans le cadre de la présente étude, la question s'est posée de savoir quel modèle de plaque adopter, entre celui de Von-Kàrmàn et celui de Berger. Il est clair que le second est beaucoup plus simple d'utilisation. En revanche, le premier offre l'avantage d'être basé sur moins de simplifications, et donc d'avoir une portée plus générale, qui dépasse le cadre des plaques, puisqu'il possède ses équivalents, largement appliqués aussi, dans le domaine des poutres, des arches et des coques. C'est pour cette raison, associée aux restrictions d'emploi précédemment évoquées sur la méthode de Berger, que la théorie dynamique de Von-Kàrmàn a été choisie ici. Sathyamoorthy a généralisé les équations dynamiques de Von-Kàrmàn aux plaques épaisses, et montre [99] que les effets de l'inertie de rotation sont négligeables devant ceux du cisaillement, qui le deviennent aussi lorsque la plaque est suffisamment fine, pour des fréquences de vibration pas trop élevées. Ces effets seront ici négligés, vue la géométrie particulière des gongs et des cymbales, qui possèdent un rapport épaisseur sur diamètre ( $h/L$ , Cf. hyp. 3.2) très faible (de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-3}$  pour le gong, par exemple).

<sup>3</sup>Cf. note 1, p. 57

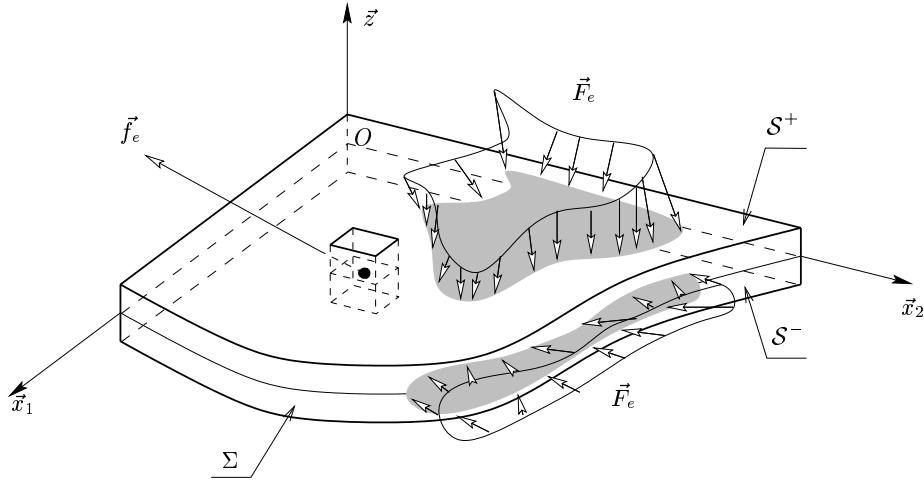


FIG. 3.1 – Modélisation géométrique de la plaque et efforts extérieurs imposés.  $\vec{F}_e$  (force surfacique) et  $\vec{f}_e$  (force volumique) sont imposés à la structure, respectivement sur  $\partial\Omega = S^+ \cup S^- \cup \Sigma$  et dans  $\Omega$ .

Une plaque est intuitivement un solide plat dont l'épaisseur est faible devant les autres dimensions. C'est cette caractéristique particulière qui est à la base des simplifications des équations de la mécanique des milieux continus tridimensionnels qui conduisent aux modèles classiques des milieux minces, comme celui des plaques. Avant tout, précisons le modèle géométrique associé à une plaque.

Soit  $\mathcal{E}$  l'espace euclidien de dimension 3, qui sera dans la suite identifié à  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $O$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z})$  un repère orthonormé de  $\mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{S}$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ , contenu dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , de point courant  $G$ , de frontière  $\partial\mathcal{S}$  de forme quelconque, régulière par morceaux (pour prendre en compte des géométries polygonales). Soit  $h$  un réel positif non nul. On définit alors les ensembles :

$$\Omega = \mathcal{S} \times \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \quad (3.1a)$$

$$\Sigma = \partial\mathcal{S} \times \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \quad S^\pm = \mathcal{S} \times \left\{ \pm \frac{h}{2} \right\}, \quad (3.1b)$$

$$\mathcal{D} = G \times \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]. \quad (3.1c)$$

La frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  est alors la réunion de la surface latérale  $\Sigma$  et des faces supérieures et inférieures de la plaque  $S^+$  et  $S^-$ .

La plaque mince est supposée occuper le domaine  $\Omega$  dans sa configuration non-déformée. Son épaisseur est  $h$ ,  $\mathcal{S}$  est sa surface moyenne,  $\Sigma$  est appelé le *bord*. Tout segment  $\mathcal{D}$ , normal à la surface moyenne, dont les extrémités appartiennent aux surfaces  $S^+$  et  $S^-$  est appelé *segment normal*. La plaque est soumise sur sa frontière aux efforts surfaciques (exprimés en  $N.m^{-2}$ ) ( $\vec{F}_e$ ) :  $\partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et en tout point de l'intérieur de la structure aux efforts volumiques (exprimés en  $N.m^{-3}$ ) ( $\vec{f}_e$ ) :  $\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (Cf. Fig. 3.1). Ces efforts, imposés sur la configuration de référence, sont issus d'un transport *parallèle* des efforts imposés sur la configuration courante. Si  $d\mathcal{S}$  est un élément de surface infinitésimal de  $\mathcal{S}$ , on appellera dans la suite *buchette* tout élément de volume élémentaire  $dV = hd\mathcal{S}$  de la plaque.



HYPOTHÈSE 3.1

On suppose que la plaque est mince, c'est-à-dire que le rapport de l'épaisseur  $h$  sur une longueur caractéristique de la surface moyenne  $L$  est un petit paramètre :

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1$$

### 3.2 Établissement des équations non-linéaires de plaque

Ce paragraphe propose une démonstration de l'analogie dynamique des équations de Von-Kàrmàn. Les calculs seront menés le plus possible avec des notations intrinsèques, qui ont l'avantage de ne pas particulariser la géométrie de la plaque. Lorsque cela sera nécessaire, pour plus de clarté, une projection sur la base cartésienne  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z})$  sera utilisée. Les équations du problème de plaque seront projetées dans une base cylindrique au chapitre 4, pour être appliquées à une géométrie circulaire.

Les développements de ce paragraphe sont relativement classiques, et ont été publiés plusieurs fois, notamment en premier lieu par Herrmann [47]. On a toutefois décidé de les faire figurer en détail ici, en particulier pour pouvoir clarifier toutes les hypothèses sur lesquelles la théorie est basée, et ensuite les discuter, ce qui sera traité au paragraphe 3.4. Elles seront introduites au fur et à mesure du développement. La méthode utilisée ici est le *Principe des Travaux Virtuels* (PTV), qui permet naturellement et systématiquement d'établir les équations d'équilibre *et toutes* les conditions aux limites par le même calcul. Herrmann utilise le principe de Hamilton, qui conduit à des calculs analogues.

La théorie est déduite des équations de la mécanique des milieux continus en grande transformation, en description lagrangienne. Tout d'abord, la transformation imposée au milieu continu sera explicitée (§ 3.2.2). Les tenseurs des déformations et des contraintes seront calculés et une première analyse dimensionnelle permettra de négliger certains termes (§ 3.2.3, § 3.2.4). Les efforts généralisés (forces de membrane et moments de flexion) seront introduits (§ 3.2.5) et les équations d'équilibre de la plaque seront obtenues à partir du PTV (§ 3.2.6). Une deuxième analyse dimensionnelle sera alors nécessaire pour négliger les termes liés aux inerties de rotation et longitudinale (§ 3.2.7). Enfin, les efforts tranchants seront calculés à partir des conditions aux limites (§ 3.2.8).

#### 3.2.1 Notations

Dans ce qui suit, les indices grecs  $\alpha$  et  $\beta$  seront supposés varier dans  $\{1, 2\}$ , pour représenter les indices dans le plan de la plaque, et les indices latins dans  $\{1, 2, z\}$ , pour des indices dans l'espace. Les notations suivantes seront utilisées : Grad, Div et  $\Delta$  désigneront le gradient, la divergence et le laplacien *tridimensionnels*, et grad, div et  $\Delta_2$  le gradient, la divergence et le laplacien *bidimensionnels*<sup>4</sup>. Ces opérateurs sont tous *lagrangiens*, c'est-à-dire que les dérivations spatiales qu'ils sous-entendent se font par rapport aux variables de la configuration *non-déformée*. Les dérivations partielles de la fonction  $w$  par rapport à la variable d'espace  $x_\alpha$  et par rapport au temps seront notées respectivement  $w_{,\alpha}$  et  $\dot{w}$ . Un récapitulatif des notations utilisées dans le présent chapitre est présenté en page 85.

#### 3.2.2 La transformation

Sous l'action des efforts extérieurs, le milieu continu se déforme, de sorte que tout point  $M$  de la plaque est soumis au déplacement  $\vec{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et est animé de la transformation suivante :

<sup>4</sup>L'opérateur Div, par exemple, s'applique à tout champ de tenseurs ( $\underline{T}$ ) :  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^9$ , et  $\text{Div } \underline{T} = T_{ij,j} \vec{x}_i$  est défini dans  $\mathbb{R}^3$ , alors que div s'applique à tout champ de tenseurs ( $\underline{\tilde{T}}$ ) :  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$ , et  $\text{div } \underline{\tilde{T}} = \tilde{T}_{\alpha\beta,\beta} \vec{x}_\alpha$  est défini dans  $\mathbb{R}^2$ .

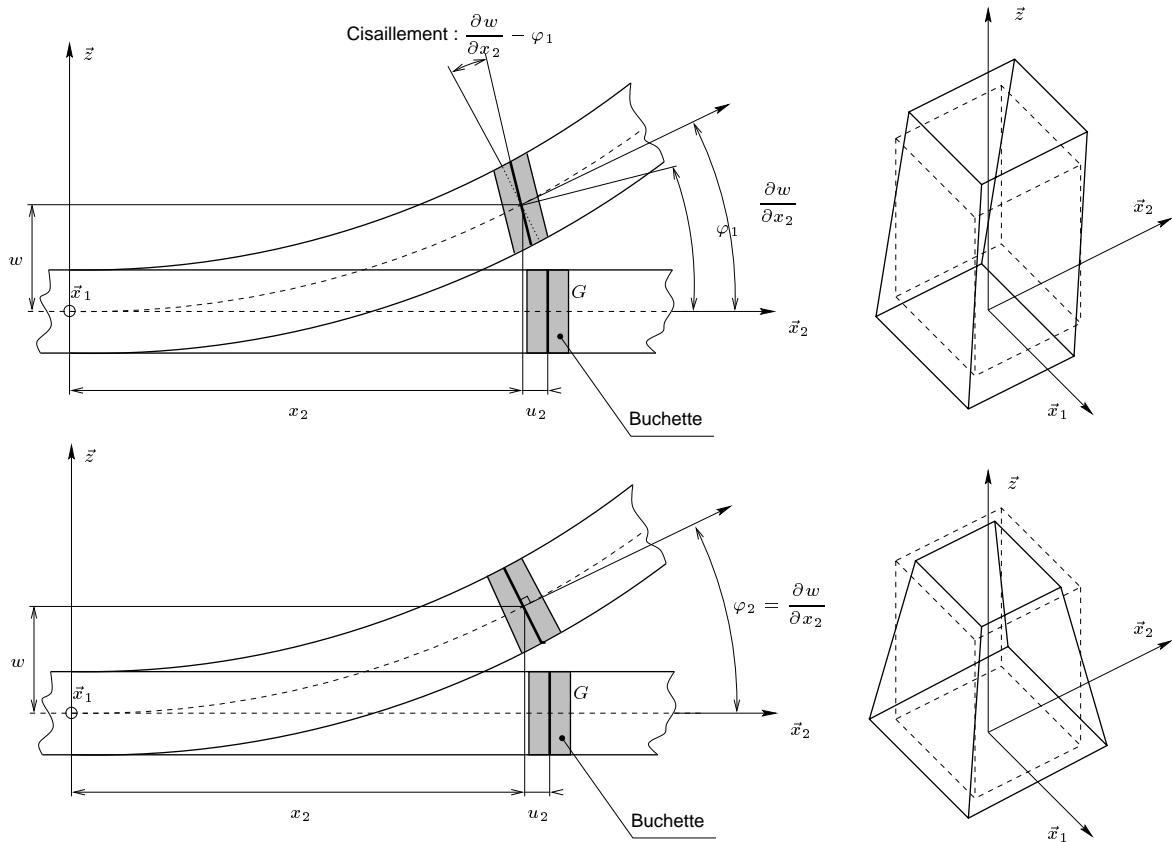


FIG. 3.2 – Déformation de la plaque. (a) - Avec cisaillement (Hyp. de Reissner-Mindlin) ; (b) - cisaillement négligé (Hyp. de Kirchhoff-Love).

### HYPOTHÈSE 3.2

On suppose, selon les hypothèses de Kirchhoff-Love, que tout segment normal à la surface moyenne avant déformation reste droit, et normal à la déformée de la surface moyenne après déformation<sup>5</sup>, sans variation de longueur, ce qui signifie que :

- tout segment normal est animé d'un mouvement de solide rigide<sup>6</sup>,
- le cisaillement est négligé, et la rotation de tout segment droit est reliée à la déformée de la surface moyenne (Cf. Fig. 3.2).

Le déplacement de solide se décompose en un déplacement  $\vec{U}(G)$  du centre  $G$  du segment, associé à une rotation d'opérateur antisymétrique  $\underline{\Phi}$ , qui ne dépend que des coordonnées de  $G$ . On suppose alors que :

<sup>5</sup>On peut représenter le mouvement des segments droits par celui des poils d'un paillason que l'on fléchit : ils restent perpendiculaires à l'armature du paillason, qui par analogie correspond à la surface moyenne de la plaque.

<sup>6</sup>Si on utilisait les hypothèses de Reissner-Mindlin on serait amené à n'utiliser que le premier point des hypothèses de Kirchhoff-Love, à savoir que tout segment normal est animé d'un mouvement de solide rigide. Aucune contrainte sur la rotation de ce segment ne serait introduite. On néglige d'autre-part la variation d'épaisseur de la plaque due à l'effet de Poisson.

## HYPOTHÈSE 3.3

la rotation de tout segment de la plaque est suffisamment petite pour que le sinus et le cosinus des angles de rotation soient linéarisés au premier ordre, de sorte que :

$$\begin{aligned} \sin \varphi_\alpha &\simeq \varphi_\alpha, & \cos \varphi_\alpha &\simeq 1. \\ \underline{\underline{\Phi}} &= \vec{\varphi} \wedge, & \text{avec } \vec{\varphi} &= \varphi_1 \vec{x}_1 + \varphi_2 \vec{x}_2. \end{aligned}$$

où le vecteur rotation est :  $(\vec{\varphi}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$  et le produit vectoriel est noté par  $\wedge$ .

On décompose les vecteurs position et déplacement de tout point  $M$  de la plaque par leurs composantes plane et transverse, de sorte que :

$$\vec{OG} = \vec{x}, \quad (3.2a)$$

$$\vec{OM} = \vec{OG} + \vec{GM} = \vec{x} + z\vec{z} = x_1\vec{x}_1 + x_2\vec{x}_2 + z\vec{z}, \quad (3.2b)$$

$$\vec{U}(G) = \vec{u} + w\vec{z} = u_1\vec{x}_1 + u_2\vec{x}_2 + w\vec{z}, \quad (3.2c)$$

$$\vec{U}(M) = \vec{U}(G) + \underline{\underline{\Phi}} \cdot \vec{GM} = \vec{U}(G) + \vec{\varphi} \wedge \vec{GM}, \quad (3.2d)$$

où  $\vec{x} \in \mathcal{S}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .  $\vec{u}$  et  $w$  sont des fonctions de  $\vec{x}$  uniquement, de sorte que :  $(\vec{u}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  et  $(w) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Négliger le cisaillement permet d'introduire une relation entre les angles de rotation et les dérivées spatiales du déplacement transverse, ce qui est illustré sur la figure 3.2. Cela s'écrit :

$$\vec{\varphi} = \vec{\text{Grad}} w \wedge \vec{z}, \quad \text{soit } \varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (3.3)$$

Le déplacement de tout point  $M$  de la structure est alors :

$$\vec{U} = \vec{U}(M) = \vec{u}(\vec{x}) + w(\vec{x})\vec{z} - z \cdot \vec{\text{Grad}} w(\vec{x}) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &= (u_\alpha - z \cdot w_{,\alpha}) \vec{x}_\alpha + w\vec{z} \\ &: \begin{pmatrix} \vec{u} - z \cdot \vec{\text{grad}} w \\ \dots\dots\dots \\ w \end{pmatrix}_{(\cdot, \cdot, \vec{z})} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où on a séparé les parties plane et transverse de  $\vec{U}$ . Notons que  $\vec{u}$  et  $w$  ne dépendent que de  $\vec{x}$ , ce que nous ne précisons plus ;  $(\cdot, \cdot, \vec{z})$  désigne toute base orthonormée ayant  $\vec{z}$  comme troisième vecteur. Le gradient de  $\vec{U}$  s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) = \underline{\underline{\text{Grad}}} \vec{u} - z \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \vec{\text{Grad}} w - \vec{z} \otimes \vec{\text{Grad}} w + \vec{\text{Grad}} w \otimes \vec{z}, \quad (3.6)$$

où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel. Par projection dans  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z})$ , on obtient :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) : \begin{pmatrix} u_{,1} - w_{,11}z & u_{,2} - w_{,12}z & -w_{,1} \\ v_{,1} - w_{,21}z & v_{,2} - w_{,22}z & -w_{,2} \\ w_{,1} & w_{,2} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z})} \quad (3.7)$$

ou encore :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) : \begin{pmatrix} \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} - z \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w & : & -\vec{\text{grad}} w \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \vec{\text{grad}}^t w & & 0 \end{pmatrix}_{(\cdot, \cdot, \vec{z})} \quad (3.8)$$

où la notation précédente rend compte des parties plane et antiplane (transverse) du tenseur.

Une conséquence primordiale des hypothèses de Kirchhoff-Love est que les déformations de la surface moyenne imposent automatiquement celles du reste de la structure. Autrement dit, pour connaître le déplacement de tout point de la structure, il suffit de connaître celui du point  $G$  associé, et donc les grandeurs  $\vec{u}(\vec{x})$  et  $w(\vec{x})$ . Ce sont les nouvelles inconnues du problème de mécanique des milieux continus, qui est maintenant bidimensionnel, et qui a remplacé le problème initial tridimensionnel.

On introduit maintenant des grandeurs sans dimension, écrites ici surmontées de barres, qui nous serviront dans la suite à justifier certaines approximations :

$$\bar{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{u_m}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_m}, \quad \bar{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\alpha} = L \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = h \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.9)$$

où  $u_m$  et  $w_m$  désignent les déplacements longitudinal et transverse maxima, de sorte que les grandeurs sans dimension valent 1 lorsque la grandeur dimensionnée correspondante atteint sa valeur maximum.

HYPOTHÈSE 3.4

On suppose que le déplacement transverse est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque :

$$w \simeq h \implies w_m = h$$

HYPOTHÈSE 3.5

On suppose que le déplacement longitudinal est d'un ordre inférieur au déplacement transverse, de sorte que :

$$\|\bar{\vec{u}}\| \simeq \varepsilon w \implies u_m = \varepsilon w_m = \frac{h}{L} w_m$$

Dans toute la suite on ne précisera plus la barre supérieure dans les notations des grandeurs sans dimension, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Le gradient du déplacement s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) : \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} - z \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{\text{grad}}} w \right) & : & -\varepsilon \underline{\underline{\text{grad}}} w \\ \dots & & \dots \\ \varepsilon \underline{\underline{\text{grad}}}^t w & & 0 \end{pmatrix}_{(\cdot, \cdot, \bar{z})} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Les déformations

On caractérise les déformations du milieu continu par  $(\underline{\underline{e}}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^9$ , le tenseur lagrangien des déformations de Green-Lagrange, qui s'écrit [97] :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) + \underline{\underline{\text{Grad}}}^t(\vec{U}) + \underline{\underline{\text{Grad}}}^t(\vec{U}) \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) \right) \quad (3.11)$$

En remarquant que le produit ligne colonne de deux tenseurs s'applique de la façon suivante entre les parties plane et antiplane :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{a}} & : & \vec{a}_1 \\ \dots & & \dots \\ \vec{a}_2^t & : & a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{b}} & : & \vec{b}_1 \\ \dots & & \dots \\ \vec{b}_2^t & : & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}} + \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_2 & : & \underline{\underline{a}} \cdot \vec{b}_1 + b_z \vec{a}_1 \\ \dots & & \dots \\ (\underline{\underline{b}} \cdot \vec{a}_2 + a_z \vec{b}_2)^t & : & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 + a_z b_z \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

On obtient :

$$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\tilde{e}}} & : & \vec{\tilde{\gamma}} \\ \dots & & \dots \\ \vec{\tilde{\gamma}}^t & : & 0 \end{pmatrix}_{(\cdot, \cdot, \bar{z})}, \quad (3.13)$$

où  $(\underline{\underline{\tilde{e}}}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$  est le tenseur des contraintes planes et  $(\vec{\tilde{\gamma}}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$  désigne les termes de cisaillement, qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{e}}} = \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} \right) + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} w \otimes \vec{\text{grad}} w - z \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w \right] \\ + \varepsilon^4 \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} - z \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{\text{grad}} w \right) \cdot \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} - z \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w \right), \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$\vec{\tilde{\gamma}} = \varepsilon^3 \frac{1}{2} \left( -\underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} w + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{\text{grad}} w \cdot \vec{\text{grad}} w \right). \quad (3.14b)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) qui conduit à la théorie des plaques linéarisée classique, la partie non-linéaire de  $\underline{\underline{e}}$ , quadratique en fonction du déplacement, est négligée devant la partie linéaire, ce qui conduirait à obtenir des termes de cisaillement  $\vec{\tilde{\gamma}}$  nuls. D'autre part, on peut remarquer que les termes non-linéaires présent dans les déformations planes sont du *nême* ordre de grandeur que les termes linéaires, lorsque  $w$  est de l'ordre de l'épaisseur  $h$ . On reviendra sur ce point au paragraphe 3.4.2.

#### HYPOTHÈSE 3.6

On décide de ne négliger que les termes d'ordre  $\varepsilon^4$  devant ceux d'ordre  $\varepsilon^3$ , soit :

$$\varepsilon^4 \ll \varepsilon^3.$$

L'expression des termes de cisaillement de change pas, et celle des déformations planes devient :

$$\underline{\underline{\tilde{e}}} = \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} \right) + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} w \otimes \vec{\text{grad}} w - z \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w \right] + \underline{\underline{Q}}(\varepsilon^4), \quad (3.15)$$

soit, dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  :

$$\underline{\underline{\tilde{e}}} : \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_{1,1} + \frac{1}{2} w_{,1}^2 - z w_{,11} & \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2} w_{,1} w_{,2} - z w_{,12} \\ & u_{2,2} + \frac{1}{2} w_{,2}^2 - z w_{,22} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} + \underline{\underline{Q}}(\varepsilon^4), \quad (3.16)$$

qui est symétrique. On désignera dans la suite par  $O(\varepsilon^n)$ ,  $\vec{O}(\varepsilon^n)$  et  $\underline{\underline{Q}}(\varepsilon^n)$  des fonctions respectivement scalaire, vectorielle et tensorielle tendant vers 0 à la même vitesse que  $\varepsilon^n$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

L'expression (3.15) précédente des déformations est celle qui est postulée par la plupart des auteurs [47, 24].

On peut en outre constater que comme dans la théorie linéaire, les déformations planes sont linéaires par rapport à la coordonnée d'épaisseur  $z$ , de sorte que :

$$\underline{\underline{\tilde{e}}}(\vec{x}, z) = \underline{\underline{\tilde{e}}}^0(\vec{x}) + z \cdot \underline{\underline{\tilde{e}}}^1(\vec{x}), \quad (3.17)$$

où les expressions de  $\underline{\underline{\tilde{e}}}^0$  et  $\underline{\underline{\tilde{e}}}^1$  en fonction de  $w$  et  $\vec{u}$  sont évidentes avec l'équation 3.15.

### 3.2.4 Les contraintes

On utilise en grande transformation le 2e tenseur lagrangien des contraintes de Piola-Kirchhoff  $(\underline{\underline{\pi}}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^9$  [97], appelé aussi tenseur des contraintes de Kirchhoff-Trefftz [41]. La relation :

$$\frac{\underline{\underline{\pi}}}{\rho} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho_t} \underline{\underline{F}}^{-t} \quad (3.18)$$

le relie au tenseur des contraintes de Cauchy ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ) :  $\Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^9$ , qui représente directement les contraintes dans la configuration déformée. On a noté  $\Omega_t$  le domaine occupé par la plaque dans sa configuration déformée à la date  $t$ ,  $\rho$  et  $\rho_t$  les masses volumiques respectivement des configurations initiales et déformées, et  $\underline{\underline{F}}$  le gradient de la transformation :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\text{Grad}}} \vec{\phi} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \vec{U} \quad (3.19)$$

où  $\vec{\phi} : \Omega \rightarrow \Omega_t$  est l'opération qui transforme un point  $M$  de  $\Omega$  en  $M_t$  de  $\Omega_t$ , avec  $O\vec{M}_t = \vec{\phi}(O\vec{M})$ .  
 $\underline{\underline{\pi}}$  est une mesure des contraintes dans la configuration déformée *transportées convectivement* vers la configuration initiale [97].

### Relation de comportement

La plaque est supposée homogène et isotrope, si bien que les grandeurs caractérisant le matériau ne dépendent pas du point considéré dans  $\Omega$ .

#### HYPOTHÈSE 3.7

On suppose que les contraintes restent suffisamment faibles durant les transformations du milieu continu pour que le matériau (du bronze) reste dans le domaine élastique, caractérisé par la relation de comportement linéaire :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\pi}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{1}} \quad (3.20)$$

où  $E$  et  $\nu$  désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. D'autre part,

#### HYPOTHÈSE 3.8

On néglige la composante  $\pi_{zz}$  du tenseur des contraintes devant les autres composantes :

$$\pi_{zz} \ll \pi_{\alpha\beta}, \quad \pi_{zz} \ll \pi_{\alpha z}.$$

On définit alors le tenseur des contraintes planes ( $\underline{\underline{\tilde{\pi}}}$ ) :  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$  et les termes de cisaillement ( $\vec{\tilde{\tau}}$ ) :  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de sorte que :

$$\underline{\underline{\tilde{\pi}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\tilde{\pi}}} & : & \vec{\tilde{\tau}} \\ \dots & & \dots \\ \vec{\tilde{\tau}}^t & : & 0 \end{pmatrix}_{(\cdot, \cdot, \vec{z})}, \quad (3.21)$$

En remarquant que  $\text{tr} \underline{\underline{\tilde{\pi}}} = \text{tr} \underline{\underline{\pi}}$ , on peut re-écrire la loi de comportement en fonction des contraintes plane et antiplane, de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{\pi}}} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \underline{\underline{\tilde{e}}} + \frac{\nu}{1 - \nu} \text{tr} \underline{\underline{\tilde{e}}} \underline{\underline{\tilde{1}}} \right), \quad (3.22a)$$

$$\vec{\tilde{\tau}} = \frac{E}{1 + \nu} \vec{\tilde{\gamma}} \quad (3.22b)$$

où  $\underline{\underline{\tilde{1}}}$  est le tenseur identité bidimensionnel. Ces équations étant linéaires, l'évolution des contraintes planes le long de l'épaisseur de la plaque est la même que celle des déformations planes (Eq. (3.17)) :

$$\underline{\underline{\tilde{\pi}}}(\vec{x}, z) = \underline{\underline{\tilde{\pi}}}^0(\vec{x}) + z \cdot \underline{\underline{\tilde{\pi}}}^1(\vec{x}), \quad (3.23)$$

Des relations de comportements identiques à (3.22a) existent alors entre  $\underline{\underline{\tilde{\pi}}}^n$  et  $\underline{\underline{\tilde{e}}}^n$ ,  $n \in \{0, 1\}$  :

$$\underline{\underline{\tilde{\pi}}}^n = \frac{E}{1 + \nu} \left( \underline{\underline{\tilde{e}}}^n + \frac{\nu}{1 - \nu} \text{tr} \underline{\underline{\tilde{e}}}^n \underline{\underline{\tilde{1}}} \right). \quad (3.24)$$

On définit les grandeurs sans dimensions suivantes, en s'assurant que les grandeurs dimensionnées correspondantes apparaissent aux mêmes ordres de grandeurs que les déformations dans les équations 3.22 :

$$\bar{\pi}_{\alpha\beta} = \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\varepsilon^2 E}, \quad \bar{\pi}_{\alpha z} = \frac{\pi_{\alpha z}}{\varepsilon^3 E}, \quad (3.25)$$

### Comparaison avec la théorie statique linéarisée

Lorsque les HPP sont vérifiées, les configurations initiales et déformées sont confondues, et  $\underline{\underline{\pi}}$  s'identifie à  $\underline{\underline{\sigma}}$ , qui est solution des équations d'équilibre suivantes :

$$\text{Div } \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f}_e = \vec{0}, \quad (3.26)$$

qui s'écrivent aussi :

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha z,z} + f_{e\alpha} = 0 \quad (3.27)$$

$$\sigma_{z\beta,\beta} + \sigma_{zz,z} + f_{ez} = 0 \quad (3.28)$$

Dans le cas d'une plaque métallique d'épaisseur 1 cm et de diamètre 1 m ( $\varepsilon = 10^{-2}$ ), la composante verticale des efforts volumiques est de l'ordre de  $10^{-8} E/h = \varepsilon^4 E/h$ . En supposant ici que les efforts volumiques ne sont dus qu'à la pesanteur, les équations d'équilibre précédentes s'écrivent, du fait des opérations de dérivation :

$$\varepsilon^2 \bar{\sigma}_{\alpha\beta,\beta} + \varepsilon \bar{\sigma}_{\alpha z,z} = 0 \quad (3.29)$$

$$\varepsilon^3 \bar{\sigma}_{z\beta,\beta} + \varepsilon^2 \bar{\sigma}_{zz,z} + \varepsilon^4 \bar{f}_{ez} = 0 \quad (3.30)$$

de sorte que si les contraintes apparaissent aux mêmes ordres de grandeur dans les équations ci-dessus, on a  $\bar{\sigma}_{\alpha z} = O(\varepsilon^3)$  et  $\bar{\sigma}_{zz} = O(\varepsilon^4)$  lorsque  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = O(\varepsilon^2)$ . On retrouve l'hypothèse 3.8 et les ordres de grandeurs des contraintes de cisaillement explicitées précédemment (Eq. 3.25).

### Tenseur des contraintes de Boussinesq

Le tenseur des contraintes de Boussinesq ( $\underline{\underline{B}}$ ) :  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^9$ , aussi appelé tenseur de Piola-Lagrange ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff est défini par :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\pi}} = (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\underline{U}}) \underline{\underline{\pi}}. \quad (3.31)$$

qui n'est pas symétrique. Son expression intervient dans les équations d'équilibre en grande transformation, et dans le PTV que nous utiliserons au paragraphe 3.2.6.

$$\underline{\underline{B}} : \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon^2 (\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} - z \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{\text{grad}}} w) & \vdots & -\varepsilon \underline{\underline{\text{grad}}} w \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon \underline{\underline{\text{grad}}}^t w & \vdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \underline{\underline{\tilde{\pi}}} & \vdots & \varepsilon^3 \underline{\underline{\vec{\tau}}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon^3 \underline{\underline{\vec{\tau}}}^t & \vdots & 0 \end{pmatrix}_{(\cdot,\cdot,\vec{z})}, \quad (3.32)$$

si bien que, en ne gardant que les termes d'ordre égal ou inférieur à  $\varepsilon^3$ , on obtient :

$$\underline{\underline{B}} : \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \underline{\underline{\tilde{\pi}}} & \vdots & \varepsilon^3 \underline{\underline{\vec{\tau}}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon^3 (\underline{\underline{\tilde{\pi}}} \underline{\underline{\text{grad}}} w)^t + \varepsilon^3 \underline{\underline{\vec{\tau}}}^t & \vdots & 0 \end{pmatrix}_{(\cdot,\cdot,\vec{z})} + \underline{\underline{\tilde{Q}}}(\varepsilon^4), \quad (3.33)$$

On décide d'autre part de revenir aux grandeurs dimensionnées, jusqu'au paragraphe 3.2.7.

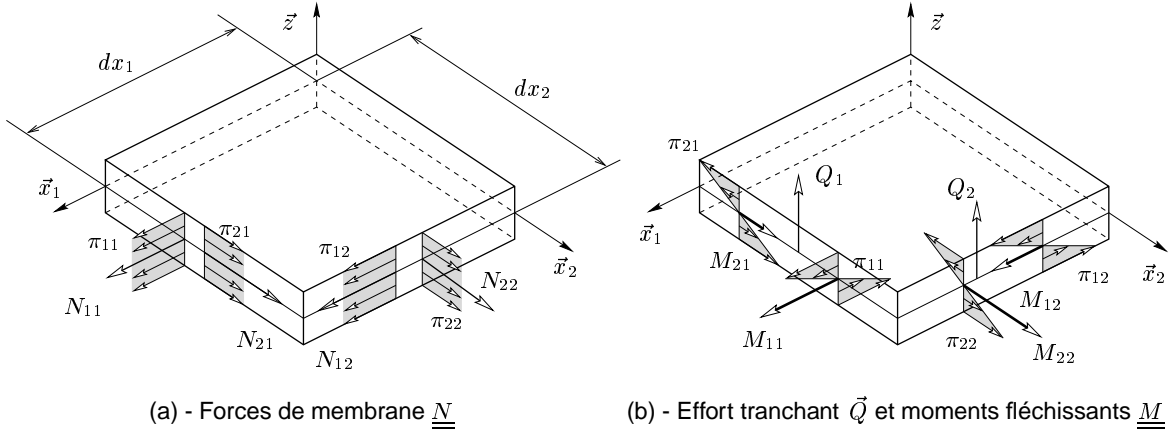


FIG. 3.3 – Efforts généralisés appliqués sur un élément de plaque

### 3.2.5 Forces de membrane et moments de flexion

On définit maintenant à partir des contraintes des grandeurs plus commodes à utiliser, appelées parfois efforts généralisés : le tenseur des *forces de membrane* ( $\underline{\underline{N}}$ ) :  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$  et le tenseur des *moments de flexion* ( $\underline{\underline{M}}$ ) :  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$ , tous les deux symétriques, qui sont définis par :

$$\underline{\underline{N}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\tilde{\pi}}} dz, \quad \underline{\underline{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} z \underline{\underline{\tilde{\pi}}} dz. \quad (3.34)$$

Des relations, que l'on peut qualifier de loi de comportement, existe alors entre, d'une part les efforts généralisés  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$ , et d'autre part les déplacements de la plaque. En intégrant sur l'épaisseur la loi de comportement (3.22a), et en constatant que l'intégrale sur l'épaisseur des puissances impaire de  $z$  est nulle, on obtient :

$$\underline{\underline{N}} = h \cdot \underline{\underline{\tilde{\pi}}}^0 = \frac{hE}{1+\nu} \left( \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^0 \underline{\underline{\tilde{1}}} \right) \quad (3.35a)$$

$$\underline{\underline{M}} = \frac{h^3}{12} \cdot \underline{\underline{\tilde{\pi}}}^1 = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^1 + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^1 \underline{\underline{\tilde{1}}} \right) \quad (3.35b)$$

Ces dernières relations permettent au passage de préciser la dépendance linéaire des contraintes planes en fonction de  $z$ , à partir des équations (3.15) et (3.23) :

$$\underline{\underline{\tilde{\pi}}}(\vec{x}, z) = \frac{1}{h} \underline{\underline{N}}(\vec{x}) + z \cdot \frac{12}{h^3} \underline{\underline{M}}(\vec{x}). \quad (3.36)$$

En observant que :

$$\text{tr} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \left( \text{div} \vec{u} + \frac{1}{2} \text{grad}^2 w - z \Delta_2 w \right),$$

la relation (3.15) entre  $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$  et les déplacements réels  $\vec{u}$  et  $w$ , permet d'obtenir :

$$\underline{\underline{N}} = \frac{K}{2} \left[ (1-\nu) \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}} w \otimes \underline{\underline{\text{grad}}} w \right) + \nu \left( 2 \text{div} \vec{u} + \text{grad}^2 w \right) \underline{\underline{\tilde{1}}} \right], \quad (3.37a)$$

$$\underline{\underline{M}} = -D \left[ (1-\nu) \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{\text{grad}}} w + \nu \Delta_2 w \cdot \underline{\underline{\tilde{1}}} \right], \quad (3.37b)$$



soit, dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  :

$$\underline{\underline{N}} : K \begin{pmatrix} u_{1,1} + \frac{1}{2}w_{,1}^2 + \nu \left( u_{2,2} + \frac{1}{2}w_{,2}^2 \right) & \frac{1}{2}(1 + \nu) (u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2}) \\ \cdot & u_{2,2} + \frac{1}{2}w_{,2}^2 + \nu \left( u_{1,1} + \frac{1}{2}w_{,1}^2 \right) \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}$$

$$\underline{\underline{M}} : -D \begin{pmatrix} w_{,11} + \nu w_{,22} & (1 - \nu)w_{,12} \\ \cdot & w_{,22} + \nu w_{,11} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}$$

où on a noté

$$\boxed{K = \frac{hE}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{h^3 E}{12(1 - \nu^2)},} \quad (3.38)$$

respectivement la *raideur en traction* (N.m<sup>-1</sup>) et la *raideur en flexion* (N.m) de la plaque.

Si on considère une sous-structure  $\Omega'$  de surface moyenne  $S'$ , de normale extérieure  $\vec{n}$  et d'abscisse curviligne  $s$  sur le bord  $\partial S'$ ,  $\underline{\underline{N}}\vec{n}$  et  $\underline{\underline{M}}\vec{n}$  correspondent aux efforts par unité de longueur exercés par le reste de la structure sur  $\Omega'$ , à travers la surface de hauteur  $h$  et de largeur élémentaire  $ds$  (Fig. 3.3).  $N_{\alpha\beta}$  s'exprime en N.m<sup>-1</sup>,  $M_{\alpha\beta}$  en N. Comme ils sont issus du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, il est nécessaire de leur appliquer un transport convectif de  $\Omega$  vers  $\Omega_t$ , pour obtenir les efforts intérieurs à la structure déformée [29, 97]. On reverra ce point au paragraphe 3.2.8.

### 3.2.6 Application du principe des travaux virtuels

Considérons le milieu continu, qui occupe de domaine  $\Omega$  dans sa configuration de référence et  $\Omega_t$  à la date  $t$ . Soit une transformation infinitésimale, représentée par le champ de vecteurs<sup>7</sup>  $(\delta\vec{U}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , qui transforme le milieu continu de  $\Omega_t$  en une configuration voisine. Ce champ est appelé *déplacement infinitésimal virtuel*, car la transformation associée est arbitraire et imaginaire, et ne s'identifie pas obligatoirement avec la transformation réelle subie par le milieu continu. Selon les auteurs, le principe que nous utilisons ici prend différentes formes, rigoureusement équivalentes. Soit il est écrit en terme de vitesses virtuelles, et dans ce cas c'est le Principe de Puissances Virtuelles, soit il est écrit en terme de déplacements, et on obtient [42, 29, 97, 48] :

#### PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

1. Pour toute partie  $\omega_t$  du milieu continu  $\Omega_t$ , le travail des efforts intérieurs pendant tout déplacement virtuel infinitésimal rigidifiant  $\omega_t$  est nul :

$$\forall t, \quad \forall \omega_t \subset \Omega_t \quad \forall (\delta\vec{U}_0, \delta\vec{\theta}_0) / \delta\vec{U} = \delta\vec{U}_0 + \delta\vec{\theta}_0 \wedge O\vec{M}, \quad \delta\mathcal{W}_{(i)}(\delta\vec{U}) = 0 \quad (3.39a)$$

2. Dans tout référentiel galiléen, pour toute partie  $\omega_t$ , la somme du travail des efforts extérieurs et du travail des efforts intérieurs est égale à tout instant au travail des quantités d'accélération, pendant tout déplacement virtuel infinitésimal :

$$\forall t, \quad \forall \omega_t \subset \Omega_t \quad \forall \delta\vec{U} \quad \delta\mathcal{W}_{(e)}(\delta\vec{U}) + \delta\mathcal{W}_{(i)}(\delta\vec{U}) = \delta\mathcal{W}_{(a)}(\delta\vec{U}) \quad (3.39b)$$

<sup>7</sup> $\delta\vec{U}$  est bien défini sur la configuration de référence  $\Omega$ . En effet, si  $(\vec{U}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $(\vec{U}') : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont deux champs de déplacement qui permettent de transformer  $\Omega$  en deux configurations voisines  $\Omega_t$  et  $\Omega'_t$ , alors  $\delta\vec{U} = \vec{U}' - \vec{U}$ .

En représentation lagrangienne, le calcul des différents travaux est mené sur la configuration de référence, dont une partie quelconque est noté  $\omega$ , telle que  $\omega_t = \vec{\phi}(\omega)$ . Leurs expressions sont [29, 97, 48] :

$$\delta\mathcal{W}_{(i)}(\delta\vec{U}) = - \iiint_{(\omega)} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\delta e}} d\omega = - \iiint_{(\omega)} \underline{\underline{B}}^t : \underline{\underline{\text{Grad}}} \delta\vec{U} d\omega \quad (3.40a)$$

$$\delta\mathcal{W}_{(e)}(\delta\vec{U}) = \iiint_{(\omega)} \vec{f}_e \cdot \delta\vec{U} d\omega + \iint_{(\partial\omega)} \vec{F}_e \cdot \delta\vec{U} dS \quad (3.40b)$$

$$\delta\mathcal{W}_{(a)}(\delta\vec{U}) = \iiint_{(\omega)} \rho \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2} \cdot \delta\vec{U} d\Omega \quad (3.40c)$$

où “:” désigne le produit doublement contracté<sup>8</sup>. Pour appliquer le PTV au milieu continu que constitue la plaque, on choisit le déplacement virtuel :

$$\forall(\delta\vec{u}, \delta w), \quad \delta\vec{U} = \delta\vec{u} + \delta w \vec{z} - z \cdot \text{Grad} \delta w, \quad (3.41)$$

compatible avec la transformation imposée au milieu (3.4). Le calcul des différents travaux virtuels est ensuite mené, en fonction de  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$  et des déplacements réels  $\vec{u}$  et  $w$ . Dans un souci de concision, les développements mathématiques sont précisés en annexe, § C. Ils consistent à utiliser les relations (3.40a-3.40c), à les intégrer sur l’épaisseur de la plaque, et à effectuer quelques intégrations par partie pour faire apparaître les déplacements virtuels  $\delta\vec{u}$  et  $\delta w$  en facteur.

### Travail virtuel des efforts intérieurs

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{(i)} = & \iint_{(S)} \left\{ \text{div} \underline{\underline{N}} \cdot \delta\vec{u} + \left[ \text{div} \text{div} \underline{\underline{M}} + \text{div} \left( \underline{\underline{N}} \text{grad} w \right) \right] \delta w \right\} dS \\ & - \oint_{(\partial S)} \left\{ \left( \underline{\underline{N}} \delta\vec{u} \right) \cdot \vec{n} + \left[ \left( \underline{\underline{N}} \text{grad} w \right) \cdot \vec{n} + \text{div} \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t} \right) \right] \delta w \right\} ds \\ & + \oint_{(\partial S)} \left( \vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds + \sum_{\text{pt. sing. } H(s)} \left[ \left( \vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t} \right) \cdot \delta w \right]_{s^-}^{s^+}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

où le dernier terme correspond à la variation de la quantité entre crochets à la traversée d’un point singulier de  $\partial S$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  sont respectivement les vecteurs normal extérieur et tangent au bord  $\partial S$  et  $s$  est l’abscisse curviligne.

### Travail virtuel des efforts extérieurs

Du fait des intégrations sur l’épaisseur, et pour être homogène avec le caractère bidimensionnel du problème de plaque mince, on définit de nouveaux efforts extérieurs, dont certains sont imposés sur  $S$ , et d’autres sur le bord  $\partial S$  (fig. 3.4).

<sup>8</sup>La convention utilisée ici pour le produit doublement contracté est, pour tout tenseurs  $\underline{\underline{T}}$  et  $\underline{\underline{T}}'$ ,  $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}' = T_{ij} T'_{ji} = \text{tr}(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}')$ . Elle n’est pas générale dans la littérature, et est utilisée dans [97]. Dans [48], notamment, l’ordre de contraction sur les indices est inversé, si bien que  $\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}' = T_{ij} T'_{ij} = \text{tr}(\underline{\underline{T}}^t \cdot \underline{\underline{T}}')$ .

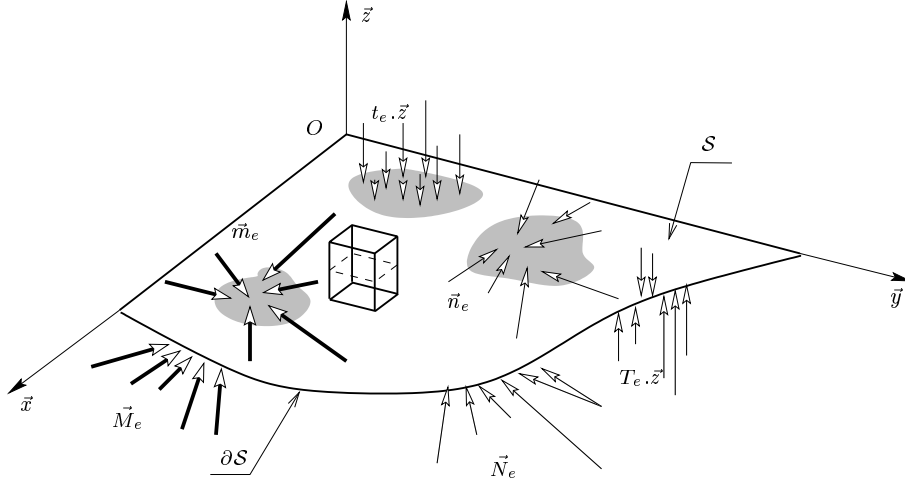


FIG. 3.4 – Efforts extérieurs imposés à la plaque de surface neutre  $S$ . Les flèches “grasses” représentent des moments ; les “fines” des forces.

- Sur la surface neutre  $S$ , le milieu extérieur impose
  - les forces surfaciques ( $\text{N.m}^{-2}$ )

$$t_e \cdot \vec{z} + \vec{n}_e = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{f}_e dz + \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-, \quad (3.43a)$$

- les moments surfaciques ( $\text{N.m.m}^{-2}$ )

$$\vec{m}_e = \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{f}_e dz + \frac{h}{2} (\vec{F}_e^+ - \vec{F}_e^-), \quad \text{et} \quad \vec{m}_e \cdot \vec{z} = 0; \quad (3.43b)$$

- Sur le bord  $\partial S$ , le milieu extérieur impose
  - les forces linéiques ( $\text{N.m}^{-1}$ )

$$T_e \cdot \vec{z} + \vec{N}_e = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{F}_{e(P \in \Sigma)} dz, \quad (3.43c)$$

- les moments linéiques ( $\text{N.m.m}^{-1}$ )

$$\vec{M}_e = \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{F}_{e(P \in \Sigma)} dz, \quad \text{et} \quad \vec{M}_e \cdot \vec{z} = 0. \quad (3.43d)$$

Ces efforts sont, comme  $\vec{F}_e$  et  $\vec{f}_e$ , obtenus à partir des efforts imposés sur la structure déformée, après un transport *parallèle* de  $S_t$  vers  $S$ . Comme il n’y a pas de variation d’épaisseur de la plaque, ce sont *rigoureusement les mêmes efforts*<sup>9</sup> (en direction et intensité) qui sont imposés sur  $\Omega_t$  et  $\Omega$ . Mathématiquement, si on appelle  $t_{et}(\vec{x}_t) \cdot \vec{z}$  la force surfacique transverse imposée sur  $S_t$ , alors :

$$t_{et}(\vec{x}_t) \cdot \vec{z} = t_e \left[ \vec{\phi}(\vec{x}) \right] \cdot \vec{z} = t_e(\vec{x}) \cdot \vec{z}. \quad (3.44)$$

<sup>9</sup> Un transport parallèle ne change pas l’intensité de l’effort si celui-ci est rapporté à la surface (si c’est un effort surfacique) ou au volume (si c’est un effort volumique), ce qui est le cas pour  $\vec{F}_e$  et  $\vec{f}_e$  [97]. Cela aurait pu être différent pour les efforts  $t_e$ ,  $\vec{n}_e$ , etc... qui sont issus d’intégrations sur l’épaisseur de la plaque.

Ce qui peut être déroutant est que si  $t_e \vec{z}$  est normal à  $\mathcal{S}$ ,  $t_{et} \vec{z}$  n'est probablement pas normal à  $\mathcal{S}_t$ , car ils sont tous les deux projetés dans la base  $(\cdot, \cdot, \vec{z})$  associée à la configuration de référence. Des remarques analogues pourraient être faites sur les autres efforts extérieurs.

Le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_{(e)} = & \iint_{(S)} \left[ \vec{n}_e \cdot \delta \vec{u} + (t_e + \operatorname{div} \vec{m}_e) \delta w \right] dS \\ & + \oint_{(\partial S)} \left\{ \vec{N}_e \cdot \delta \vec{u} + \left[ T_e + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{M}_e \cdot \vec{t}) \right] \delta w - \vec{M}_e \cdot \vec{n} \cdot \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right\} ds \\ & - \sum_{\text{pt. sing. } H(s)} \left[ \vec{M}_e \cdot \vec{t} \cdot \delta w \right]_{s^-}^{s^+} \end{aligned} \quad (3.45)$$

### Travail virtuel des quantités d'accélération

$$\delta \mathcal{W}_{(a)} = \iint_{(S)} \left[ m \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} + (m \ddot{w} - I \operatorname{div} \operatorname{grad} \ddot{w}) \delta w \right] dS + \oint_{(\partial S)} I \operatorname{grad} \ddot{w} \cdot \vec{n} \delta w ds \quad (3.46)$$

où

$$m = \rho h, \quad I = \frac{\rho h^3}{12}, \quad (3.47)$$

sont respectivement la masse surfacique (kg.m<sup>2</sup>) et le moment d'inertie surfacique (kg) de la plaque.

### Équations locales

L'application de PTV consiste maintenant à vérifier les relations (3.39a) et (3.39b), avec les expressions des différents travaux virtuels calculés aux paragraphes précédents. Ici, il est clair que tout déplacement virtuel rigidifiant le milieu continu entraîne un état de contrainte nul, ce qui vérifie la première condition du PTV<sup>10</sup>.

La deuxième condition du PTV, rappelée ci-après :

$$\forall t, \quad \forall \omega_t \subset \Omega_t \quad \forall (\delta \vec{u}, \delta w) \quad \delta \mathcal{W}_{(e)}(\delta \vec{u}, \delta w) + \delta \mathcal{W}_{(i)}(\delta \vec{u}, \delta w) = \delta \mathcal{W}_{(a)}(\delta \vec{u}, \delta w)$$

est équivalente, dans notre présent problème, aux vues des expressions des différents travaux virtuels (eq. (3.42), (3.45) et (3.46)), à :

$$\begin{aligned} \forall t, \quad \forall S' \subset \mathcal{S} \quad \forall (\delta \vec{u}, \delta w) \quad & \iint_{(S')} \left( \vec{I}_u \cdot \delta \vec{u} + I_w \cdot \delta w \right) dS \\ & + \oint_{(\partial S')} \left( \vec{J}_u \cdot \delta \vec{u} + J_w \cdot \delta w + J'_w \cdot \delta \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds \\ & + \sum_{\text{pt. sing. } H(s)} [K_w \cdot \delta w]_{s^-}^{s^+} = 0 \end{aligned}$$

<sup>10</sup>En fait, la première condition imposée par le PTV est automatiquement vérifiée par les travaux virtuels des efforts intérieurs calculés à partir de (3.40a)

Comme cette équation variationnelle est valable quels que soient les déplacements virtuels  $\delta \vec{u}$  et  $\delta w$ , elle est équivalente aux équations suivantes :

$$\forall G(\vec{x}) \in \mathcal{S}, \quad \vec{I}_u(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad I_w(\vec{x}) = 0$$

$$\forall H(\vec{x}) \in \partial \mathcal{S}, \quad \begin{cases} \vec{J}_u(\vec{x}) = \vec{0} \\ J_w(\vec{x}) = 0 \\ J'_w(\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\forall H(s) \in \partial \mathcal{S} \text{ point anguleux}, \quad K_w(s^+) = K_w(s^-)$$

Avec les équations (3.42), (3.45) et (3.46), on obtient les équations suivantes :

– Équations locales, valables en tout point de la surface neutre  $\mathcal{S}$  :

$$\text{div} \vec{\underline{N}} + \vec{n}_e = m\ddot{u} \quad (3.48a)$$

$$\text{div} \text{div} \vec{\underline{M}} + \text{div} \left( \vec{\underline{N}} \vec{\text{grad}} w \right) + t_e + \text{div} \vec{m}_e = m\ddot{w} - I \text{div} \vec{\text{grad}} \ddot{w} \quad (3.48b)$$

– Conditions aux limites. Quatre conditions à vérifier simultanément :

– en tout point  $H$  du bord  $\partial \mathcal{S}'$  :

$$\vec{\underline{N}} \vec{n} = \vec{N}_e \quad (3.49a)$$

$$\text{div} \vec{\underline{M}} \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{n}^t \cdot \vec{\underline{M}} \cdot \vec{t}) + \left( \vec{\underline{N}} \vec{\text{grad}} w \right) \cdot \vec{n} = T_e + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{M}_e \cdot \vec{t}) - I \vec{\text{grad}} \ddot{w} \cdot \vec{n} \quad (3.49b)$$

$$(\vec{n}^t \cdot \vec{\underline{M}} \cdot \vec{n}) = \vec{M}_e \cdot \vec{n} \quad (3.49c)$$

– en tout point anguleux  $H$  de  $\partial \mathcal{S}'$ , d'abscisse curviligne  $s$  :

$$K_w(s^+) = K_w(s^-) \quad \text{avec} \quad K_w = (\vec{n}^t \cdot \vec{\underline{M}} \cdot \vec{t}) - \vec{M}_e \cdot \vec{t} \quad (3.50)$$

Les équations précédentes incluent certains termes négligeables, comme ceux induits par les effets de l'inertie de rotation (les termes facteurs de  $I$ , dans les équations (3.48b) et (3.49b)). Une analyse dimensionnelle supplémentaire, associée à l'hypothèse 3.6 permet de justifier ces simplifications, ce qui est fait au paragraphe suivant.

### 3.2.7 Analyse dimensionnelle des équations et simplifications

On va montrer ici que l'hypothèse 3.6 permet à elle seule de justifier que (i) les termes dus à l'inertie de rotation  $I$ , et (ii) les termes d'inertie longitudinale  $m\ddot{u}$  sont négligeables. Ils sont négligés dans le plupart des théories sans justifications mathématiques [47].

On introduit tout d'abord les grandeurs sans dimension suivantes :

$$\bar{t} = \frac{t}{t_c}, \quad \vec{\underline{N}} = \frac{\vec{\underline{N}}}{N_m}, \quad \vec{\underline{M}} = \frac{\vec{\underline{M}}}{M_m}, \quad (3.51)$$

$$\bar{\vec{n}}_e = \frac{\vec{n}_e}{n_{em}}, \quad \bar{t}_e = \frac{t_e}{t_{em}}, \quad \bar{\vec{m}}_e = \frac{\vec{m}_e}{m_{em}}, \quad \vec{\bar{N}}_e = \frac{\vec{N}_e}{N_{em}}, \quad \bar{T}_e = \frac{T_e}{T_{em}}, \quad \vec{\bar{M}}_e = \frac{\vec{M}_e}{M_{em}}. \quad (3.52)$$

Les équations (3.37), en se référant aux équations (3.9), permettent de déterminer l'ordre de grandeur de  $\vec{\underline{N}}$  et  $\vec{\underline{M}}$  :

$$N_m = \varepsilon^2 \frac{K}{2}, \quad M_m = \frac{hD}{L^2} = \varepsilon^2 \frac{hK}{12}. \quad (3.53)$$

En introduisant les équations précédentes dans l'équation d'équilibre (3.48b), et en s'assurant que  $\ddot{w}$ ,  $\vec{t}_e$  et  $\vec{m}_e$  apparaissent au même ordre de grandeur que  $\vec{\underline{M}}$ , on obtient :

$$\varepsilon^4 \text{div} \text{div} \vec{\underline{M}} + 6\varepsilon^4 \text{div} \left( \vec{\underline{N}} \vec{\text{grad}} w \right) + \varepsilon^4 \bar{t}_e + \varepsilon^4 \text{div} \vec{m}_e = \varepsilon^4 \ddot{w} - \frac{\varepsilon^6}{12} \text{div} \vec{\text{grad}} \ddot{w}, \quad (3.54)$$

avec

$$t_c = T_0 = L^2 \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad t_{em} = \varepsilon^4 \frac{E}{12(1-\nu^2)}, \quad m_{em} = \varepsilon^3 \frac{hE}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.55)$$

Cela signifie que :

- les amplitudes de  $t_e$  et  $\vec{m}_e$  doivent être respectivement de l'ordre  $\varepsilon^4$  et  $\varepsilon^3$  pour créer un moment de l'ordre de  $\varepsilon^4$ , et donc un déplacement  $w$  de l'ordre de  $h$  (Eq. (3.9)) ;
- le temps caractéristique du mouvement est  $t_c = T_0$ , qui est non loin de la période du premier mode de vibration de la plaque<sup>11</sup>, lorsque la longueur caractéristique  $L$  est le rayon de la plaque. Cela signifie que la fréquence maximale du mouvement doit être inférieure à  $1/T_0 = f_0$ , c'est à dire inférieure à la fréquence du premier mode de vibration, pour que le mouvement transverse  $w$  soit de l'ordre de grandeur de  $h$ .

On justifie aussi que les contraintes transversales  $\pi_{zz}$  ont été négligées. En effet, elles sont en équilibre avec  $t_e$ , et sont donc de l'ordre de grandeur de  $\varepsilon^4$ , ce qui confirme l'hypothèse 3.8 et la comparaison avec le cas linéaire de l'équation (3.29).

D'autre part, lorsque  $w$  est de l'ordre de  $h$ , on constate que le terme de rotation,  $I \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{w}$  est de l'ordre  $\varepsilon^6$ , ce qui est négligeable à la vue de l'hypothèse 3.6.

La valeur de  $t_c$ , imposée aussi par l'adimensionnement de  $\underline{\underline{M}}$  dans (3.54) permet maintenant de déterminer l'ordre de grandeur de  $\ddot{u}$ , qui, remplacé dans (3.48a), donne :

$$6\varepsilon^3 \operatorname{div} \underline{\underline{N}} + \varepsilon^3 \vec{n}_e = \varepsilon^5 \ddot{u}, \quad (3.57)$$

avec

$$n_{em} = \varepsilon^3 \frac{E}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.58)$$

On justifie alors que le terme d'inertie longitudinal est négligeable devant les forces de membrane. De la même façon que précédemment, on constate que l'amplitude de  $\vec{n}_e$  doit être de l'ordre de  $\varepsilon^3$  pour créer des efforts de membrane compatibles avec un déplacement  $w$  de l'ordre de  $h$ . La même opération sur les conditions aux limites (3.49) donne :

$$\varepsilon^3 \left[ \operatorname{div} \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial s} (\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t}) + 6\varepsilon^3 (\underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w) \cdot \vec{n} \right] = \varepsilon^3 \left[ \vec{T}_e + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{M}_e \cdot \vec{t}) \right] - \frac{\varepsilon^5}{12} \operatorname{grad} \ddot{w} \cdot \vec{n} \quad (3.59)$$

avec :

$$N_{em} = N_m = \varepsilon^2 \frac{K}{2}, \quad T_{em} = \varepsilon^3 \frac{hE}{12(1-\nu^2)}, \quad M_{em} = \varepsilon^2 \frac{h^2 E}{12(1-\nu^2)} = M_m. \quad (3.60)$$

Cette dernière mise à l'échelle précise l'ordre de grandeur de  $\vec{N}_e$ ,  $T_e$  et  $\vec{M}_e$ , et confirme l'ordre de grandeur négligeable du terme dû à l'inertie de rotation.

### 3.2.8 Effort tranchant

Comme la transformation imposée au milieu continu par le déplacement  $\vec{U}$  (Eq. (3.4)) n'impose aucune déformation de cisaillement à celui-ci (cela provient des hypothèses de Kirchhoff-Love qui

<sup>11</sup> dans le cas d'une plaque circulaire à bord libre, la période du premier mode est (Cf. Eq. 4.29) :

$$T_{20} = \frac{1}{f_{20}} = \frac{2\pi a^2}{\omega_{20}} \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi a^2}{5.09} \sqrt{\frac{m}{D}} \simeq a^2 \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad (3.56)$$

avec  $a$  le rayon de la plaque.

imposent à tout segment normal de rester normal à la surface moyenne durant la déformation), l'effort tranchant  $(\vec{Q}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ne travaille pas durant la transformation<sup>12</sup>. C'est pour cette raison qu'aucune équation établie à partir du PPV, avec  $\delta\vec{U}$  comme déplacement virtuel, ne le fait intervenir naturellement. Il est défini par :

$$\vec{Q} = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\tau} dz, \quad (3.61)$$

si bien que toute section droite, de normale  $\vec{n}$ , interne à la plaque est soumise à un effort tranchant  $(\vec{Q} \cdot \vec{n})\vec{z}$  vertical (Cf. Fig. 3.3).

En appliquant la condition aux limites (3.49b) à un sous-domaine de la plaque, représenté par une surface  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ , les efforts  $\vec{N}_e, T_e$ , etc... extérieurs à  $\mathcal{S}'$  sont alors imposés par  $\mathcal{L}\mathcal{S}'$  sur  $\mathcal{S}'$ , et sont identifiables aux efforts intérieurs (Cf. Fig. 3.3). Étant donné que les équations d'équilibre sont formulées en grandes transformations, on doit être prudent quand à la nature des différents efforts.

Considérons comme au paragraphe 3.2.5 une sous structure  $\mathcal{Q}$  de surface moyenne  $\mathcal{S}'$ , dont le bord  $\partial\mathcal{S}'$  est orienté par sa normale sortante  $\vec{n}$ .  $\mathcal{Q}, \mathcal{S}'$  et  $\vec{n}$  sont transformés par  $\phi$  en  $\Omega_t, \mathcal{S}_t$  et  $\vec{n}_t$ .  $\vec{Q}$  est déterminé à partir du tenseur de Piola-Kirchhoff. L'effort tranchant  $Q_n\vec{z} = (\vec{Q} \cdot \vec{n})\vec{z}$  sur  $\Omega$  est donc transformé en  $Q_{nt}\vec{z}_t = \underline{\underline{F}}[(\vec{Q} \cdot \vec{n})\vec{z}]$  sur  $\Omega_t$ , par un transport convectif. Il est en particulier tout le temps normal à la surface moyenne courante  $\mathcal{S}'$ . Il n'a donc pas la même direction absolue dans  $\Omega$  et  $\Omega_t$ . En revanche,  $T_e$  est identique sur les deux structures (Cf. note 9, p. 70), et est donc dans les deux cas colinéaire à  $\vec{z}$ . Comme les conditions aux limites (3.49a-3.50) sont écrites sur la configuration de référence  $\Omega$ , l'effort tranchant  $\vec{Q} \cdot \vec{n}$  que l'on cherche, imposé par  $\mathcal{L}\mathcal{S}'$  sur  $\mathcal{S}'$  à travers de bord de  $\mathcal{S}'$  de normale  $\vec{n}$  n'est donc pas exactement  $T_e$ . Il s'identifie à la force  $T_e\vec{z} + \vec{N}_e$  transporté convectivement de  $\Omega_t$  vers  $\Omega$  et projeté sur la vertical  $\vec{z}$ , soit :

$$(\vec{Q} \cdot \vec{n})\vec{z} = \left[ \underline{\underline{F}}^{-1} \left( T_e\vec{z} + \vec{N}_e \right) \right] \vec{z} \quad (3.62)$$

or

$$\underline{\underline{F}} = 1 + \underline{\underline{\text{Grad}}}(\vec{U}) : \begin{pmatrix} \tilde{1} + O(\varepsilon^2) & : & -\varepsilon \text{grad } w \\ \dots & & \dots \\ \varepsilon \text{grad }^t w & : & 1 \end{pmatrix}_{(\cdot, \cdot, \vec{z})} \quad (3.63)$$

qui est une matrice antisymétrique, de sorte que  $\underline{\underline{F}}^{-1} = -\underline{\underline{F}}$  ( $\underline{\underline{F}}^{-1}$  correspond au premier ordre à une rotation d'angle  $-\vec{\varphi} = -\text{Grad } w \wedge \vec{z}$ ). On obtient alors  $\vec{Q} \cdot \vec{n} = \varepsilon^3(T_e - \vec{N}_e \cdot \text{grad } w) + O(\varepsilon^4)$ . En injectant cette dernière relation dans (3.49b), tous les termes se simplifient avec l'aide de (3.49a) et on obtient :

$$\forall \vec{n}, \quad \text{div } \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} M_{ns} + \left( \underline{\underline{N}} \text{grad } w \right) \cdot \vec{n} = \vec{Q} \cdot \vec{n} + \left( \underline{\underline{N}} \text{grad } w \right) \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} M_{ns} \quad (3.64)$$

soit :

$$\boxed{\vec{Q} = \text{div } \underline{\underline{M}}} \quad (3.65)$$

Ce résultat a été montré de façon plus succincte par Herrmann [47], et est rarement justifié dans la littérature, bien que  $\vec{Q}$  soit largement utilisé dans tous les modèles de plaque [24, 41].

Une explication plus physique des calculs précédents est que si on observe la direction des efforts sur la configuration déformé,  $T_e$  a pour direction  $\vec{z}$ , alors que  $\vec{Q} \cdot \vec{n}$  a pour direction la normale courante à la plaque, noté  $\vec{z}_t$ . Il y a en première approximation un angle  $\vec{\varphi} = \text{Grad } w \wedge \vec{z}$  entre les deux. En particulier, une répartition de pression normale à la surface supérieure courante n'est pas normale à  $\mathcal{S}$ . Elle oscille au gré des oscillations de la structure.

<sup>12</sup>Il travaillerait si les buchettes se déformaient par glissement des sections les unes contre les autres lors de la transformation (Cf. Fig. 3.2)

### 3.3 Formulation non-linéaire du problème de vibration de flexion de plaque mince

Les développements mathématiques du paragraphe 3.2 conduisent à formuler le problème de mécanique en terme des efforts généralisés  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$ . D'autres formulations sont possibles ; elles sont énumérées ci-après.

#### 3.3.1 Récapitulatif : formulation en efforts

Les hypothèses sont rappelées ci-dessous, puis les équations, et enfin l'ordre de grandeur des différents termes.

#### Hypothèses

1. Le rapport de l'épaisseur sur une longueur caractéristique  $\varepsilon = h/L$  est petit devant 1 (hyp. 3.1).
2. Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love (hyp. 3.2).
3. Les sinus et cosinus des rotations sont linéarisés au premier ordre (hyp. 3.3).
4. Le déplacement transverse  $w$  est de l'ordre de l'épaisseur  $h$  (hyp. 3.4).
5. Le déplacement longitudinal  $\vec{u}$  est d'un ordre inférieur au déplacement transverse (hyp. 3.5).
6. Les termes d'ordre  $\varepsilon^4$  sont négligés devant ceux d'ordre  $\varepsilon^3$  (hyp. 3.6)
7. Le comportement du matériau est élastique linéaire (hyp. 3.7).
8. La composante transversale  $\pi_{zz}$  du tenseur des contraintes est négligée devant les autres composantes (hyp. 3.8) (*Cette hypothèse a été justifiée après avoir été utilisée au paragraphe 3.2.7, et aussi après calcul de l'ordre de grandeur des efforts  $t_e$ . Elle peut donc être considérée comme une conséquence des précédentes 3.1-3.7.*)

#### Équations

– ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

$$\operatorname{div} \underline{\underline{N}} + \vec{n}_e = 0 \quad (3.66a)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \underline{\underline{M}} + \operatorname{div} \left( \underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w \right) + t_e + \operatorname{div} \vec{m}_e = m\ddot{w} \quad (3.66b)$$

$$\left( \operatorname{div} \vec{Q} + \operatorname{div} \left( \underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w \right) + t_e + \operatorname{div} \vec{m}_e = m\ddot{w} \right) \quad (3.66c)$$

– CONDITIONS AUX LIMITES

– en tout point  $H$  du bord  $\partial S'$  :

$$\underline{\underline{N}} \vec{n} = \vec{N}_e \quad (3.67a)$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} + \left( \underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w \right) \cdot \vec{n} = T_e + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{M}_e \cdot \vec{t}) \quad (3.67b)$$

$$\left( \vec{Q} \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} + \left( \underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w \right) \cdot \vec{n} = T_e + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{M}_e \cdot \vec{t}) \right) \quad (3.67c)$$

$$M_{nn} = \vec{M}_e \cdot \vec{n} \quad (3.67d)$$



– en tout point anguleux  $H$  de  $\partial S'$ , d'abscisse curviligne  $s$  :

$$\left[ M_{nt} - \vec{M}_e \cdot \vec{t} \right]_{s^-}^{s^+} = 0 \quad (3.67e)$$

– RELATIONS DE COMPORTEMENT

$$\underline{\underline{N}} = \frac{K}{2} \left[ (1 - \nu) \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} + \text{grad} \vec{w} \otimes \text{grad} w \right) + \nu \left( 2 \text{div} \vec{u} + \text{grad}^2 w \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right], \quad (3.68a)$$

$$\underline{\underline{M}} = -D \left[ (1 - \nu) \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w + \nu \Delta_2 w \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right], \quad (3.68b)$$

$$\vec{Q} = \text{div} \underline{\underline{M}} = -D \text{grad} (\Delta_2 w) \quad (3.68c)$$

– CALCUL DES CONTRAINTES

$$\tilde{\pi}(\vec{x}, z) = \frac{1}{h} \underline{\underline{N}}(\vec{x}) + z \cdot \frac{12}{h^3} \underline{\underline{M}}(\vec{x}). \quad (3.69)$$

– CALCUL DES DÉPLACEMENTS

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w = \tilde{\underline{\underline{\epsilon}}}^1 = \frac{12}{h^3} \left[ \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{M}} \right], \quad (3.70a)$$

$$\tilde{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} \right) = \frac{1}{h} \underbrace{\left[ \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{N}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right]}_{\tilde{\underline{\underline{\epsilon}}}^0} - \frac{1}{2} \text{grad} w \otimes \text{grad} w. \quad (3.70b)$$

### Ordres de grandeur

– Déplacements :

$$w \simeq h, \quad u_\alpha \simeq \varepsilon h, \quad (3.71)$$

– Contraintes :

$$\pi_{\alpha\beta} \simeq \varepsilon^2 E, \quad \pi_{\alpha z} \simeq \varepsilon^3 E, \quad \pi_{zz} \ll \pi_{\alpha z}, \pi_{\alpha\beta} \quad (3.72)$$

– Efforts généralisés :

$$N_{\alpha\beta} \simeq \varepsilon^2 h E, \quad M_{\alpha\beta} \simeq \varepsilon^2 h^2 E, \quad Q_\alpha \simeq \varepsilon^3 h E, \quad (3.73)$$

– Efforts extérieurs :

$$t_e \simeq \varepsilon^4 E, \quad n_{e\alpha} \simeq \varepsilon^3 E, \quad m_{e\alpha} \simeq \varepsilon^3 h E, \quad (3.74)$$

$$T_e \simeq \varepsilon^3 h E, \quad N_{e\alpha} \simeq \varepsilon^2 h E, \quad M_{e\alpha} \simeq \varepsilon^2 h^2 E. \quad (3.75)$$

### 3.3.2 Formulation en déplacement

Cette formulation consiste à remplacer les efforts généralisés par leur valeur en fonction des déplacements, à partir des équations (3.68a) et (3.68b). Elle est en général utilisée pour résoudre des problèmes de plaques rectangulaire [47, 24]. Les équations du mouvement obtenues alors s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} \left[ (1-\nu)\Delta_2 \vec{u} + (1+\nu)\text{grad} \text{div} \vec{u} \right] + \vec{n}_e - \rho h \ddot{\vec{u}} = \\ - \frac{K}{2} \left[ (1-\nu)\Delta_2 w \cdot \text{grad} w + (1+\nu)\underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w \cdot \text{grad} w \right], \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\begin{aligned} D\Delta_2 \Delta_2 w + \rho h \ddot{w} - t_e - \text{div}(\vec{z} \wedge \vec{m}_e) = \\ K \left[ (1-\nu)\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} : \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w + \nu \text{div} \vec{u} \cdot \Delta_2 w \right] \\ \frac{K}{2} \left[ (1-\nu)\text{grad} w \cdot (\underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w) \cdot \text{grad} w + \nu \text{grad}^2 w \cdot \Delta_2 w \right]. \end{aligned} \quad (3.76b)$$

### 3.3.3 Fonction de force et conditions de compatibilité

Un cas pratique très courant est celui où les efforts linéiques longitudinaux répartis,  $\vec{n}_e$ , sont nuls partout sur  $\mathcal{S}$ . Dans ce cas, l'équations (3.66a) devient :

$$\text{div} \underline{\underline{N}} = \vec{0}. \quad (3.77)$$

et le terme non-linéaire dans l'équation (3.66b) :

$$\text{div} \left( \underline{\underline{N}} \text{grad} w \right) = \text{div} \underline{\underline{N}}^t \cdot \text{grad} w + \underline{\underline{N}}^t : \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w = \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w,$$

de sorte que l'équation (3.66b) s'écrit, en remplaçant  $\underline{\underline{M}}$  par sa valeur en fonction de  $w$  :

$$D\Delta_2 \Delta_2 w + m\ddot{w} = \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w + t_e + \text{div} \vec{m}_e \quad (3.78)$$

Le problème de mécanique est alors équivalent aux équations (3.77) et (3.78), associées aux conditions aux limites (3.67a-e), et à la relation de comportement (3.68a). Les inconnues du problème sont alors  $\underline{\underline{N}}$  et  $w$ , qui représentent au total 4 champs scalaires inconnus ( $\underline{\underline{N}}$  est symétrique), alors que 3 équations scalaires locales sont seulement disponibles. Il manque donc une équation.

Une autre manière de voir les choses est de considérer les inconnues en déplacement du problème,  $\vec{u}$  et  $w$ , qui correspondent à 3 champs scalaires inconnus. On obtient la formulation du paragraphe 3.3.2, où la première équation (Eq. (3.76a)), vectorielle, régie le mouvement longitudinal, et la deuxième (Eq. (3.76b)), scalaire, gouverne le mouvement transverse. Ici, l'inconnue  $\vec{u}$  a été remplacée par  $\underline{\underline{N}}$ , à partir de la relation (3.68a), qui fait intervenir la partie symétrique du gradient de  $\vec{u}$ , et le déplacement  $w$ . Il faut donc écrire une *condition de compatibilité*, relation qui donne à  $\underline{\underline{N}}$  les propriétés suffisantes pour que  $\vec{u}$  existe. Ce sont ici des analogues des équations de Beltrami sur le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans un problème linéaire plan formulé en contrainte [98]. La condition pour qu'un tenseur ( $\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}$ ) :  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$  dérive d'un champ de gradient est :

$$2\underline{\underline{\hat{\epsilon}}} = \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} \iff \Delta_2 \text{tr} \underline{\underline{\hat{\epsilon}}} - \text{div} \text{div} \underline{\underline{\hat{\epsilon}}} = 0 \quad (3.79)$$

En constatant que seule la partie de  $\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}$  qui ne dépend pas de  $z$ , noté  $\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}^d$  (Eq. (3.17)), intervient dans l'expression de  $\underline{\underline{N}}$  (Eq. (3.35a)), il advient qu'il faut appliquer l'équation ci-dessus au tenseur :

$$\underline{\underline{\hat{\epsilon}}} = \underline{\underline{\hat{\epsilon}}}^d - \frac{1}{2} \text{grad} w \otimes \text{grad} w = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^t \vec{u} \right)$$

ce qui s'écrit :

$$\Delta_2 \text{tr} \underline{\underline{\hat{\epsilon}}}^d - \text{div} \text{div} \underline{\underline{\hat{\epsilon}}}^d = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w : \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad} w - (\Delta_2 w)^2 \right) = -\frac{1}{2} L(w, w), \quad (3.80)$$

où  $L$  sera explicité un peu plus loin. Il suffit ensuite d'exprimer  $\underline{\underline{\tilde{e}}}$  en fonction de  $\underline{N}$  en inversant la relation (3.35a), et de remplacer le résultat dans l'équation (3.80) pour obtenir la condition de compatibilité sur  $\underline{N}$ .

Il est maintenant commode de constater que l'équation (3.77) est équivalente à l'existence d'une fonction  $(F) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , exprimée ici en N.m, appelée *fonction de force* ou *fonction d'Airy* [24, 34], telle que (définition) :

$$\underline{N} = \Delta_2 F \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} F. \quad (3.81)$$

En constatant que :

$$\underline{N} : \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w = \Delta_2 F \Delta_2 w - \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} F : \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w = L(F, w), \quad (3.82)$$

et

$$\Delta_2 \text{tr} \underline{\underline{\tilde{e}}}^0 - \text{div} \vec{\text{div}} \underline{\underline{\tilde{e}}}^0 = \frac{1}{Eh} \Delta_2 \Delta_2 F, \quad (3.83)$$

et en remplaçant (3.82) dans (3.78), et (3.83) dans (3.80), on formule le problème en terme de  $F$  et  $w$ , ce qui est présenté au paragraphe suivant (§ 3.3.4).

L'établissement de la condition de compatibilité n'est pas justifié dans les travaux de Chia [24] et d'Efstathiades [35], qui sont les plus cités comme référence pour la formulation mixte présentée ci-après. C'est pour cette raison qu'il nous a semblé nécessaire de faire figurer dans ce travail la justification précédente.

### 3.3.4 Formulation mixte

– ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\Delta \Delta F = -\frac{hE}{2} L(w, w) \quad (3.84a)$$

$$D \Delta \Delta w + m \ddot{w} = L(F, w) + t_e + \text{div} \vec{m}_e \quad (3.84b)$$

avec

$$L(F, w) = \Delta F \Delta w - \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} F : \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} w \quad (3.84c)$$

– CONDITIONS AUX LIMITES

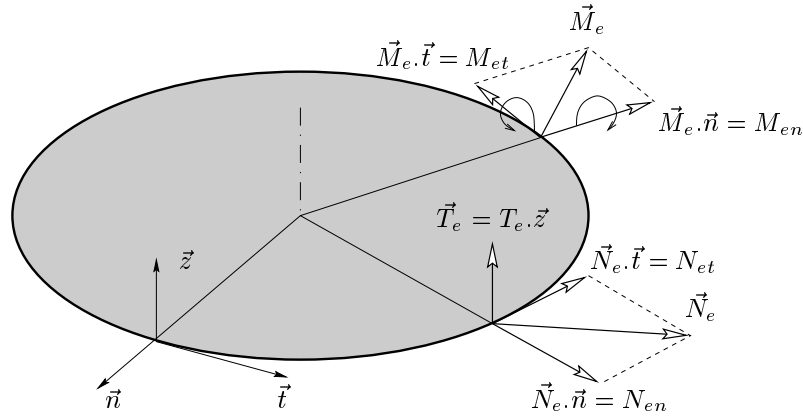
Ces sont les mêmes équations que (3.67a-e), écrites en terme de  $w$  et  $F$  à partir de (3.68b) et de la relation :

$$\underline{N} = \Delta F \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} F, \quad (3.85)$$

– CALCUL DES DÉPLACEMENTS LONGITUDINAUX

$$\frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}} {}^t \vec{u} \right) = \underline{\underline{\tilde{e}}} = \frac{1}{h} \underbrace{\left[ \frac{1}{E} \Delta F \underline{\underline{1}} - \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\text{grad}} F \right]}_{\underline{\underline{\tilde{e}}}} - \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} w \otimes \vec{\text{grad}} w. \quad (3.86)$$

L'avantage majeur de cette formulation est que le problème ne comporte plus que deux inconnues scalaires : la fonction de force  $F$  et le déplacement transverse  $w$ . Toutes les autres grandeurs (contraintes, efforts généralisés, déplacements longitudinaux) sont alors calculables à partir de la donnée de  $w$  et  $F$ .



Type de condition aux limites	Équations correspondantes
Encastrées, immobiles longitudinalement 	$\vec{u} = \vec{0}$ $w = 0$ $w_{,n} = 0$
Encastrées, libres longitudinalement 	$\vec{N}_e = \vec{0} \implies \underline{\underline{N}}\vec{n} = \vec{0}$ $w = 0$ $w_{,n} = 0$
Simplement supportées, immobiles longitudinalement 	$\vec{u} = \vec{0}$ $w = 0$ $\vec{M}_e \cdot \vec{n} = 0 \implies \vec{n} \underline{\underline{M}} \vec{n} = M_{nn} = 0$
Simplement supportées, libres longitudinalement 	$\vec{N}_e = \vec{0} \implies \underline{\underline{N}}\vec{n} = \vec{0}$ $w = 0$ $\vec{M}_e \cdot \vec{n} = 0 \implies \vec{n} \underline{\underline{M}} \vec{n} = M_{nn} = 0$
Libres 	$\vec{N}_e = \vec{0} \implies \underline{\underline{N}}\vec{n} = \vec{0}$ $T_e = \vec{M}_e \cdot \vec{t} = 0 \implies \vec{Q} \cdot \vec{n} + (\vec{n} \underline{\underline{M}} \vec{t})_{,s} = 0$ $\vec{M}_e \cdot \vec{n} = 0 \implies \vec{n} \underline{\underline{M}} \vec{n} = M_{nn} = 0$

TAB. 3.1 – Expression des conditions aux limites imposées à la plaques dans des cas simples [24]. Le dessin représente une plaque circulaire, mais les équations, écrites en fonction des vecteurs normal  $\vec{n}$  et tangent  $\vec{t}$  locaux, sont valables quelle que soit le profil du bord de la plaque.

### 3.3.5 Conditions aux limites

Dans les trois formulations précédentes, les conditions aux limites exprimées par les relations (3.67a,(b ou c),d,e) peuvent être imposées en effort ou en déplacement : si on impose un effort sur le bord, alors le déplacement correspondant est calculé, et inversement si un déplacement est imposé, alors l'effort correspondant peut être calculé après résolution du problème. Le déplacement dual de  $\vec{N}_e$  est  $\vec{u}$ ,  $w$  est associé à  $T_e$  et  $\vec{M}_e \cdot \vec{t}$ , et  $\vec{M}_e \cdot \vec{n}$  est la contrepartie de  $\partial w / \partial n$ . L'expression de ces conditions aux limites dans les cas simples classiques sont résumées dans le tableau 3.1. D'autres conditions aux limites sont imaginables théoriquement, mais ne sont pas rencontrées dans la pratique<sup>3</sup>. Des conditions aux limites élastiques sont aussi possibles. Elles s'écrivent en imposant une liaison entre les efforts et le déplacement associé, et ne sont pas précisées dans le tableau 3.1, par concision.

## 3.4 Discussion

Dans les trois formulations exposées au paragraphe 3.3, le problème de mécanique est bien posé : il est composé, comme dans le cas tridimensionnel :

- des équations d'équilibre (ou équations du mouvement), valables en tout point de l'intérieur du milieu continu ((3.66a,b) ou (3.76a,b) ou (3.84a,b)) ;
- des conditions aux limites, valables sur le bord (3.67a,(b ou c),d,e) ;
- des relations de comportement reliant efforts/contraintes et déplacements/déformations (3.68a,b,c).

### 3.4.1 Non-linéarités et domaine de validité

La première des équations du mouvement gouverne le mouvement longitudinal, la deuxième régit le mouvement transversal. Ces deux équations sont couplées par la fonctionnelle  $L(\cdot, \cdot)$ , si bien qu'un mouvement transversal (efforts de flexion) va forcément de pair avec un mouvement longitudinal (efforts de membrane). Néanmoins, comme  $L(w = 0, F) \equiv 0$ , un chargement longitudinal ne peut théoriquement pas donner naissance à un mouvement transverse, *sans que celui-ci n'est été préalablement initié*. C'est ainsi qu'il est possible de produire des déplacements transverse important en excitant la plaque par des efforts longitudinaux<sup>4</sup>. En revanche, un mouvement transverse entraîne automatiquement un chargement du plan moyen, puisque le terme  $L(w, w)$  est présent dans le second membre de (3.84a). C'est l'effet principal pris en compte par ces équations en grand déplacement.

Ces couplages se manifestent de deux façons :

- Le terme de couplage non-linéaire présent dans les équations du mouvement transversal, qui s'écrit  $\text{div}(\underline{N}_{\text{grad}} w)$  (Cf. Eq. (3.66b)), provient des termes antiplans du tenseur des contraintes de Boussinesq  $\underline{B}$  (Eq. (3.33)). Il est dû au fait que en grandes transformations, on ne peut plus confondre la configuration déformée avec la configuration initiale<sup>5</sup>. Plus précisément, il correspond à une opération de projection sur la verticale des forces de membranes, colinéaires à la surface moyenne *déformée*. L'angle de projection est l'angle  $\vec{\varphi} = \text{grad } w \wedge \vec{z}$  qui existe entre la surface moyenne et sa déformée. Autrement dit, les forces de membrane ont, *en grands déplacements*, une projection sur la verticale non nulle, qui intervient naturellement dans l'équation régissant le mouvement vertical  $w$  de la plaque.
- Le terme de couplage qui intervient dans l'équation du mouvement longitudinal est lié à la dépendance non-linéaire qui existe entre  $\underline{N}$  et  $w$  (Eq. 3.37a), qui provient des termes quadratiques de  $\underline{e}$  en fonction de  $w$  (Eq. 3.15). C'est là encore un effet de projection sur la verticale,

<sup>3</sup>On peut imaginer imposer l'inclinaison du bord nulle ( $w_{,n} = 0$ ), sans imposer le déplacement transverse ( $T_e = \vec{M}_e \cdot \vec{t} = 0$ ).

<sup>4</sup>Cela est en général appelé "excitation paramétrique". Une étude de ce type est proposé dans [133]

<sup>5</sup>c'est la raison principale pour laquelle on a été amené à utiliser  $\underline{\pi}$  et  $\underline{B}$  au lieu de  $\underline{\sigma}$ , pour pouvoir effectuer tous les calculs dans la configuration de référence, puisque la configuration déformée n'est pas connue.

puisqu'un déplacement  $w$  a pour effet d'augmenter la composante verticale des forces de membrane. Vue d'une autre façon, un déplacement  $w$  entraîne tout naturellement une variation de l'étendue de la surface moyenne, associée forcément à un chargement de celle-ci. C'est cet effet qui entraîne l'augmentation de la tension d'une corde ou d'une membrane tendue lorsqu'elle est écartée de sa position d'équilibre.

Lorsqu'on linéarise ces équations, ces deux effets disparaissent, puisque l'on confond les structures initiales et déformées.

On peut aussi remarquer que les conditions aux limites sur le bord sont identiques à celles de la théorie linéaire, à un terme additionnel près, qui s'écrit  $(\underline{N} \text{grad } w) \cdot \vec{n} = \vec{N}_e \cdot \text{grad } w$  car  $\underline{N}$  est symétrique. La présence de ce terme souligne que les conditions aux limites longitudinales sont couplées aux transversales, et donc que, au contraire de la théorie linéaire, on est obligé de connaître les conditions aux limites longitudinales lorsqu'on s'intéresse au mouvement transverse de la plaque (Cf. Tab. 3.1). L'interprétation physique est analogue au premier effet expliqué plus haut : lorsqu'on impose un effort horizontal  $\vec{N}_e$ , sa projection  $\vec{N}_e \cdot \text{grad } w$  sur la normale à la plaque déformée est non nulle, et influe donc sur le mouvement transverse.

De façon plus générale, on peut résumer les remarques précédentes en soulignant que les effets non-linéaires sont le résultat du chargement du plan moyen : plus celui-ci est important, plus le terme  $\underline{N} \text{grad } w$  dans l'équation du mouvement transverse est important. Ce chargement du plan moyen dépend en premier lieu du déplacement transverse  $w$ , mais aussi des conditions aux limites longitudinales : pour un  $w$  donné, le chargement du plan moyen  $\underline{N}$  est plus important lorsque  $\vec{u}$  est imposé nul sur le bord (bord encastré ou simplement supporté) que lorsque le bord est libre. On reviendra sur ce point lors du calcul des efforts de membrane, aux paragraphes 5.4.1 et 5.4.2.

Les termes de couplage non-linéaires évoqués ci-dessus sont liés à la quantité  $\text{grad } w$  qui correspond à la rotation d'un élément de la plaque durant la transformation. C'est la valeur de cette quantité qui détermine le degré de simplification du modèle, puisque c'est en la négligeant qu'on obtient le modèle linéaire ; on est alors dans un cas de "petites rotations". Le présent modèle non-linéaire est souvent associé au terme "rotations moyennes", et le terme "grandes rotations" est réservé au cas où les rotations sont telles que l'on ne peut plus linéariser leurs sinus et leurs cosinus (Cf. hyp 3.3). On reviendra sur ce point au paragraphe 3.4.3.

Le terme "grands déplacements" est souvent associé au modèle non-linéaire présenté dans ce chapitre car il constitue la grandeur observable le plus facilement. Cela va aussi dans le sens du fait que de rotations moyennes peuvent créer de grands déplacements. En revanche, les déformations de la structure restent suffisamment petites pour que la loi de comportement élastique linéaire du matériau reste valable (hyp. 3.7). Un récapitulatif est proposé dans le tableau 3.2, p. 84

### 3.4.2 Validation mathématique des hypothèses

Le modèle non-linéaire de vibrations de plaques établi au paragraphe 3.2 est basé sur des hypothèses justifiées par l'expérience, mais non par des calculs. En effet, il paraîtrait logique que les hypothèses 3.5 et 3.8 soient des conséquences mathématiques des hypothèses 3.1 et 3.2, puisque c'est ce qui est observé en pratique. Une démonstration de ce type a été proposée par Millet *et al* dans une série d'articles [71, 68, 69, 70]. Elle consiste à chercher une solution aux équations d'équilibre de la mécanique des milieux continus tridimensionnels à partir d'un développement asymptotique sur les puissances de  $\varepsilon$ . Leur démarche est la suivante, décrite avec les notations du paragraphe 3.2. Le

système d'équation de départ est :

$$\text{Div } \underline{\underline{B}}^t = -\vec{f}_e \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.87a)$$

$$\vec{U} = \vec{0} \quad \text{sur } \Sigma, \quad (3.87b)$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \vec{n} = \vec{F}_e \quad \text{sur } \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^- \quad (3.87c)$$

Avec les hypothèses suivantes :

- Le rapport épaisseur sur diamètre est petit devant 1 ( $\varepsilon \ll 1$ )
- Le déplacement transverse est de l'ordre de l'épaisseur ( $w \simeq h$ )
- Les efforts extérieurs transverses  $t_e$  sont de l'ordre de  $\varepsilon^4 E$ , et les efforts longitudinaux  $n_{e\alpha}$  de l'ordre de  $\varepsilon^3 E$ .

la solution est cherchée sous la forme de :

$$(\vec{V}, w) = (\vec{V}^0, w^0) + \varepsilon(\vec{V}^1, w^1) + \varepsilon^2(\vec{V}^2, w^2) + \dots \quad (3.88)$$

où  $\vec{V}$  est le déplacement longitudinal de tout point de la structure ( $\vec{U} = \vec{V} + w\vec{z}$ ). Les résultats obtenus sont que, pour les niveaux d'efforts énumérés précédemment :

- le déplacement longitudinal est d'un ordre inférieur au déplacement transversal ( $u_x \simeq \varepsilon w$ );
- le premier terme  $(\vec{V}^0, w^0)$  du développement obtenu est un déplacement de Kirchhoff-Love :

$$w^0 = w = w(\vec{x}), \quad \vec{V}^0 = \vec{V} = \vec{u}(\vec{x}) - z.\text{grad } w(\vec{x}) \quad (3.89)$$

qui vérifie les équations du modèle de Von-Kármán (3.66a-3.69).

- la contrainte transverse  $\pi_{zz}$  est d'un ordre de grandeur inférieur aux contraintes tangentielles  $\pi_{\alpha z}$  qui sont elles même d'un ordre de grandeur inférieur aux contraintes planes  $\pi_{\alpha\beta}$

Les développements de Millet *et al* offrent une justification rigoureuse des résultats énumérés ci-dessus, seulement dans le cas particulier où le bord de la plaque est imposé immobile transversalement (Cf. Eq. (3.87b)), et pour des déplacements statiques (Cf. Eq. (3.87a)). Malgré cela, ils offrent un début de justification des hypothèses des formulations classiques du modèle dynamique de Von-Kármán, comme celle qui est présentée au paragraphe 3.2. La généralisation au cas où les conditions aux limites sont imposées libres n'a, à notre connaissance, pas encore été publiée.

L'approche de Millet *et al* permet aussi de montrer que le modèle linéaire de plaques, déduit des équations d'équilibre non-linéaires (3.87), est valable pour des niveaux d'efforts plus faible ( $t_e \simeq \varepsilon^5 E$  et  $n_{e\alpha} \simeq \varepsilon^4 E$ ) que ceux définissant le domaine de validité des équations de Von-Kármán ( $t_e \simeq \varepsilon^4 E$  et  $n_{e\alpha} \simeq \varepsilon^3 E$ ). Ces efforts conduisent à des déplacements transverses de l'ordre de  $\varepsilon$  fois l'épaisseur pour la théorie linéaire, et de l'ordre de l'épaisseur pour le modèle de Von-Kármán [70]. Ces résultats confirment le fait que lorsque  $w$  est de l'ordre de grandeur de  $h$ , les termes non-linéaires de  $\underline{\underline{e}}$  sont du même ordre de grandeur que les termes linéaires, ce qui montre que la théorie linéaire n'est plus valable pour ce niveau d'amplitude. (Cf. Eq. (3.15)). Ces développements sont validés par des résultats d'existence et d'unicité par les travaux de Ciarlet [26], qui a utilisé une formulation variationnelle mixte contrainte-déplacements (de type Hellinger-Reisner) du problème.

### 3.4.3 Modèles d'ordre supérieur

On peut maintenant se poser la question de savoir si les approximations associées au modèle présenté ici ne sont pas trop restrictives pour décrire les vibrations de gongs et de cymbales. La littérature ([46, 23, 83]) montre que le modèle de Von-Kármán permet de prédire des phénomènes non-linéaires similaires à ceux observés lors des expériences sur les gongs et les cymbales, comme des combinaisons de résonances et des comportements chaotiques. Même si le travail exposé ici, en

particulier aux chapitres 4 et 5, ne s'intéresse qu'aux régimes de vibration faiblement non-linéaires et à des combinaisons de résonances simples, le modèle de Von-Kàrmàn paraît être suffisant pour prédire le comportement des instruments de percussion.

Un modèle valable pour des amplitudes de vibration plus importantes peut être construit en gardant les hypothèses de Kirchhoff-Love, mais en supposant les rotations importantes (modèle "grandes rotations"). Ce modèle est indispensable dans le cas des poutres très minces lorsque les extrémités de celles-ci ne sont pas immobilisées selon la direction de l'axe de la poutre (i.e avec des conditions aux limites encasté-libre ou libre-libre). Dans ce cas, les hypothèses du modèle de Von-Kàrmàn conduisent à des équations linéaires, car un déplacement transverse n'introduit pas de chargement de la ligne moyenne de la poutre (Cf. § 7.4.3 et [74, 86, 117]). Des équations de barres inextensibles en vibration de flexion et torsion et grandes rotations ont été établies par Crespo da Silva et Glynn [27, 28] et utilisées par Cusumano et Moon dans [30, 31].

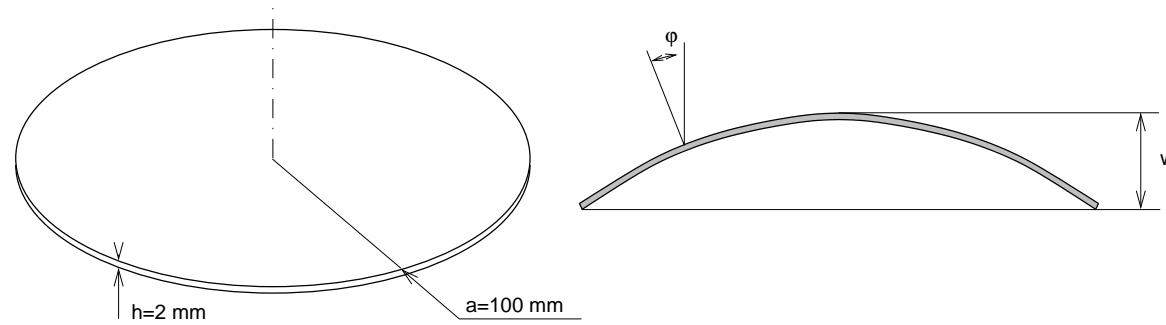
Dans le cas des plaques, les effets non-linéaires se font sentir pour des amplitudes de vibrations plus petites, car le chargement du plan moyen est un résultat du caractère bidimensionnel de la géométrie de la plaque (Cf. § 5.4). Cela restreint l'amplitude des vibrations et celles des rotations, à efforts égaux, ce qui fait que le modèle de Von-Kàrmàn reste valable pour une grande variété de problèmes de plaque. Un modèle en grande rotation du type de celui de Crespo da Silva et Glynn étendu aux plaques sous-entend que la surface moyenne soit *inextensible*, et donc que sa déformée soit *développable*<sup>16</sup>, ce qui exclu son utilisation dans le présent cadre de la modélisation des gongs et des cymbales par des plaques (il suffit d'observer les modes propres des figures 4.1 et 4.2 pour s'en convaincre). De plus, les grandes rotations associées aux grands déplacements iraient de pair avec des déformations qui pourrait dépasser la limite élastique du matériau, dans le cas des plaques métalliques, et a fortiori des coques, encore plus rigides du fait de la courbure. C'est pour cette raison que nous n'avons pas fait d'étude bibliographique poussée<sup>17</sup> sur le sujet.



<sup>16</sup>De tels modèles peuvent servir pour décrire le comportement de feuilles de papier (Cf. par exemple [82, 3])

<sup>17</sup>On peut citer une étude de Schmidt [106], présentant une théorie de coques en grande rotation avec des hypothèses cinématiques de type Kirchhoff-Love, fondée sur une décomposition polaire du tenseur des déformations.





Théories	Hypothèses cinématiques	Domaines de validité	
		Déplacement tranverse	Rotations
<b>Modèle linéaire</b>	Kirchhoff-Love		
“Petits déplacements”	$\sin \varphi \simeq \varphi, \cos \varphi \simeq 1$	$w \simeq \frac{h^2}{a} = 0.04 \text{ mm}$	$\varphi \simeq \frac{h^2}{a^2} = 0.023 \text{ deg}$
“Petites rotations”	$(w_\alpha)^2 \ll hw_{,\alpha\beta}$		
<b>Modèle de Von-Kàrmàn</b>	Kirchhoff-Love		
“Grands déplacements”	$\sin \varphi \simeq \varphi, \cos \varphi \simeq 1$	$w \simeq h = 2 \text{ mm}$	$\varphi \simeq \frac{h}{a} = 1.14 \text{ deg}$
“Rotations moyennes”	$(w_\alpha)^2 \simeq hw_{,\alpha\beta}$		
<b>Modèle “grandes rotations”</b>	Kirchhoff-Love	$w \simeq a = 100 \text{ mm}$	$\varphi \simeq 1 = 57.3 \text{ deg}$

TAB. 3.2 – Récapitulatif des domaines de validité de trois modèles de plaque, en fonction de l’ordre de grandeur des rotations. Les ordres de grandeurs numériques correspondent à la figure, avec  $E = 200 \text{ GPa}$ .

### Récapitulatif des notations du chapitre 3

Notation	Signification	1 <sup>ère</sup> formule
$\Omega, \partial\Omega$	Domaine occupé par la plaque et sa frontière,	
	dans la configuration de référence	(3.1a)
$\Omega_t, \partial\Omega_t$	idem, dans la configuration déformée	(3.19)
$\mathcal{S}, \partial\mathcal{S}$	Surface moyenne et bord de la plaque,	
	dans la configuration de référence	(3.1b)
$\mathcal{S}_t, \partial\mathcal{S}_t$	idem, dans la configuration déformée	(3.62)
$d\mathcal{S}, ds$	Élément de surface dans $\mathcal{S}$ , élément curviligne dans $\partial\mathcal{S}$	(3.42)
$h$	Épaisseur de la plaque	hyp. 3.1
$\rho, \rho_t$	Masse volumique de la plaque,	
	dans les configurations de référence et déformée	(3.19)
$E, \nu$	Module d'Young et coefficient de Poisson du matériau	(3.20)
$m, I$	Masse surfacique et moment d'inertie surfacique de la plaque	(3.47)
$K, D$	Rigidité en traction et en flexion de la plaque	(3.38)
$\alpha, \beta$	indices variant dans $\{1, 2\}$	hyp. 3.3
$(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$	base de $\mathcal{S}$	hyp. 3.3
$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z})$	base de $\Omega$	hyp. 3.3
$(\vec{x}_{1t}, \vec{x}_{2t}, \vec{z}_t)$	base de $\Omega_t$	(3.62)
$(x_\alpha, z)$	Coordonnées de tout point de $\Omega$	(3.2)
Div, Grad, $\Delta$	Opérateurs langrangiens tridimensionnels différentiels sur $\Omega$	(3.3)
div, grad, $\Delta_2$	Opérateurs langrangiens bidimensionnels différentiels sur $\mathcal{S}$	(3.10)
$\vec{x}$	Vecteur position de tout point de $\mathcal{S}$	(3.2)
$\vec{\phi}$	Bijection de $\Omega$ vers $\Omega_t$	(3.19)
$\underline{\underline{F}}$	Tenseur gradient de la transformation	(3.19)
$\vec{U}$	Vecteur déplacement de tout point de la plaque	(3.2)
$\vec{u}, w$	Déplacements longitudinal et transverse	(3.2)
$\vec{\varphi}$	Vecteur rotation de tout segment droit	hyp. 3.3
$\underline{\underline{e}}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange	(3.11)
$\underline{\underline{\tilde{e}}}, \vec{\gamma}$	Parties planes et anti-planes de $\underline{\underline{e}}$	(3.13)
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de Cauchy	(3.18)
$\underline{\underline{\pi}}$	2 <sup>ème</sup> tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff	(3.18)
$\underline{\underline{B}}$	Tenseur des contraintes de Boussinesq	(3.31)
$\underline{\underline{\tilde{\pi}}}, \vec{\tau}$	Parties planes et anti-planes de $\underline{\underline{\pi}}$	(3.21)
$\underline{\underline{N}}$	Tenseur des forces de membrane	(3.34)
$\underline{\underline{M}}$	Tenseur des moments de flexion	(3.34)
$\vec{Q}$	Vecteur des efforts tranchants	(3.61)
$\vec{f}_e$	Forces volumiques extérieurs, dans $\Omega$	§ 3.1, (3.40b)
$\vec{F}_e$	Forces surfaciques extérieurs, sur $\partial\Omega$	§ 3.1, (3.40b)
$\vec{n}_e, t_e$	Forces de traction et effort tranchant surfaciques, sur $\mathcal{S}$	(3.43a)
$\vec{m}_e$	Moments surfaciques, sur $\mathcal{S}$	(3.43b)
$\vec{N}_e, T_e$	Forces de traction et effort tranchant linéiques, sur $\partial\mathcal{S}$	(3.43c)
$\vec{M}_e$	Moments linéiques, sur $\partial\mathcal{S}$	(3.43d)



---

---

## Projection modale

Le but de ce chapitre est de présenter une solution analytique aux équations non-linéaires de vibrations de plaques minces établies au chapitre précédent. En cherchant la solution sous la forme d'un développement sur les modes propres du problème linéarisé associé, on obtient deux problèmes distincts. Le premier consiste à effectuer le calcul des modes propres et à projeter la solution sur ceux-ci. C'est le problème *spatial*, à la suite de quoi un système constitué d'une infinité d'équations différentielles du second ordre, non-linéaires et couplées est obtenu. Ce dernier permet de calculer les évolutions *temporelles* de chacun des modes propres, ce qui constitue le deuxième problème, qui sera traité au chapitre suivant.

Cette approche est générale, et peut être appliquée à une grande variété de structures minces, comme des poutres, des plaques ou des coques [74]. Le cas des plaques circulaires, avec des conditions aux limites libres est traité en détail ici, dans l'idée de comprendre à partir d'une structure simple certains phénomènes non-linéaires mis en évidence dans le comportement des gongs et des cymbales. Cette géométrie particulière a déjà été traitée dans la littérature, mais presque systématiquement avec des conditions aux limites encastées ou simplement supportées [109, 110].

### 4.1 Introduction

#### 4.1.1 Projection sur les modes propres linéaires

Des solutions exactes au problème non-linéaire de vibrations de plaques (Eq. (3.66-3.67)) n'existant pas, on a recouru à des solutions approchées. Des méthodes de résolution purement numériques ont été développées, de type éléments finis, différences finies ou un mélange des deux, mais elles sont souvent très coûteuses en temps de calcul lorsqu'elles sont appliquées d'emblée à des problèmes de vibrations. On a donc cherché, dans ce travail, à pousser les développements analytiques le plus loin possible, ce qui permet de simplifier le problème, quitte à revenir à une résolution numérique ensuite. De façon usuelle, la solution est séparée en temps et en espace (Cf. Eq. (4.16) ou (4.52)), et deux problèmes séparés sont alors à traiter.

Le problème spatial peut être résolu par un développement de la solution sur les modes propres du système. Lorsque la structure étudiée n'est pas trop complexe, en terme de géométrie et de conditions aux limites, les modes propres peuvent être calculés analytiquement à partir du problème linéarisé associé. C'est ce qui sera utilisé ici, dans le cadre d'une plaque mince circulaire en conditions libres. Si le calcul exact des modes propres n'est pas possible, des méthodes analytiques comme la procédure de Galérkin ou la méthode de Ritz permettent d'approcher les déformées modales et les fréquences propres [35, 137]. Enfin, la méthode des éléments finis peut être utilisée pour calculer numériquement

ces mêmes quantités, ce qui peut être intéressant dans le cas de structures à géométrie et conditions aux limites plus complexes comme les gongs et les cymbales<sup>1</sup> [63].

Le développement de la solution sur les modes propres conduit à un système d'une infinité d'équations différentielles du second ordre, non-linéaires et couplées, qui caractérise la partie temporelle du problème. Une solution analytique approchée peut être obtenue par la méthode de l'équilibrage harmonique<sup>2</sup> lorsque la solution attendue est périodique [13, 78, 12], ou par des méthodes de perturbation lorsque les non-linéarités sont faibles [74]. Dans d'autres cas, certaines approches permettent d'obtenir des résultats analytiques, notamment pour des oscillateurs isolés et fortement non-linéaires, en utilisant des changements de variables temporels appropriés [18, 19]. Néanmoins, le recours à des procédures numériques est souvent la solution la plus simple lorsque les non-linéarités sont fortes, en particulier lorsqu'on est intéressé aux vibrations de grandes amplitudes du système. La méthode des échelles multiples sera utilisée aux chapitres suivants 5 et 6 pour caractériser le comportement de la plaque circulaire. Un calcul numérique par Runge-Kutta sera appliqué aux systèmes de barres au chapitre 8, pour obtenir des solutions en grande amplitude.

### 4.1.2 Modes normaux non-linéaires

D'autres méthodes de résolution ont été développées pour décrire les vibrations de grandes amplitudes. On observe en effet que lorsque le déplacement transverse de la plaque devient de l'ordre de 2 fois son épaisseur, le profil de la déformée de la structure devient significativement dépendant de l'amplitude du déplacement [6]. Différents modèles ont été proposés pour décrire ce phénomène. Une première approche, présentée dans une série d'articles et appliquée aux barres et aux plaques rectangulaires encastrées par Bennouna *et al* [9, 4, 5], utilise un développement sur les modes propres de la structure associée à la méthode de l'équilibrage harmonique. C. Pierre *et al* [108, 80] propose une approche plus générale, permettant de définir des modes normaux non-linéaires. Leur utilisation permet de décrire élégamment des phénomènes typiquement non-linéaires qui apparaissent aux fortes amplitudes de vibrations. On peut citer l'exemple des oscillations forcées de l'élastica, qui deviennent fortement asymétriques par rapport à la position d'équilibre [30], et l'apparition d'un troisième mode de vibration dans un système masses-ressorts à 2 DDL [127].

Ces approches dépassent *a priori* le cadre de cette étude, car les amplitudes de vibrations de la plaque que nous étudions restent de l'ordre de grandeur de son épaisseur. Les méthodes utilisant des modes non-linéaires sont de plus très lourdes d'utilisation lorsque plusieurs modes de vibrations sont impliqués, notamment si des combinaisons de résonances apparaissent. Elles mériteraient d'être citées, car elles pourraient devenir utiles dans le futur pour décrire les vibrations de cymbales, qui sont parfois au niveau du bord de l'ordre de 10 fois l'épaisseur. On reviendra sur l'approche avec les modes normaux non-linéaires au paragraphe 6.5.3.

La recherche de la solution approchée par projection modale sera exposée au paragraphe 4.4. Les développements présentés resteront les plus généraux possible, en utilisant le moins possible les propriétés liées à la géométrie particulière de la plaque. En revanche, les équations (Eq. (3.66-3.67)) seront adaptées à une géométrie circulaire (§ 4.2), et les modes propres associés seront ensuite calculés (§ 4.3).

<sup>1</sup>Outre leur géométrie non triviale, les conditions aux limites associées à des cymbales ne sont pas simples. La fixation usuelle d'une cymbale en son centre, sur un pied, est effectuée au moyen de rondelles de feutre, qui ont un comportement à l'écrasement visco-élastique non-linéaire, qui est intermédiaire entre un encastrement et un bord libre. Pour une paire de cymbales charleston, les conditions aux limites sont là aussi non-linéaires, puisque les deux cymbales sont tantôt au contact l'une de l'autre, tantôt libres, et cela sur une certaine partie de leur pourtour, variable au cours de la vibration.

<sup>2</sup>Cette méthode est appelée "harmonic balance" dans la littérature anglo-saxonne.

## 4.2 Formulation du problème

Les équations établies au chapitre précédent sont ici appliquées au cas d'une plaque circulaire de rayon  $a$ , d'épaisseur constante  $h$ , constituée d'un matériau homogène et isotrope de masse volumique  $\rho$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de module d'Young  $E$ .

### 4.2.1 Amortissement

L'analogie dynamique des équations de Von-Kármán ne prend pas en compte les phénomènes d'amortissement. Ceux-ci sont complexes, et de plusieurs natures. La dissipation de l'énergie peut être due à des phénomènes internes à la structure, ou externes. Les pertes internes sont intrinsèques au matériau utilisé, et peuvent être de nature viscoélastique, ou thermoélastique. Les pertes externes sont principalement dues à des transferts d'énergie vibratoire de la plaque vers le milieu fluide environnant, qui est d'ailleurs le phénomène physique qui génère les ondes sonores. Il peut y avoir dans certains cas<sup>3</sup> des pertes par transmission mécanique au niveau des bords de la plaque, qui n'ont pas lieu ici du fait des conditions aux limites imposées libres.

Une étude théorique et expérimentale sur ces phénomènes dissipatifs est proposée dans [51, 21, 52]. Elle montre que des matériaux comme l'aluminium et le bronze sont à dissipation intrinsèque très faible. Les pertes sont donc principalement dues au couplage de la structure avec le fluide environnant, prépondérantes dans la zone de fréquence correspondant aux modes d'ordres élevés, de fréquences supérieures à la fréquence critique :

$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{h^2 D}}$$

où  $c_0$  est la vitesse du son dans le milieu fluide, et  $D$  la raideur en flexion de la plaque. Pour les premiers modes, il ressort des études précédemment citées que se sont les pertes thermoélastiques qui dominent. Des mesures, faites sur une plaque d'aluminium, montrent dans [51] que les coefficients pour les premiers modes de vibration ont des valeurs voisines, de l'ordre de grandeur de  $1 \text{ s}^{-1}$ , ce qui est très faible.

Les phénomènes dissipatifs sont pris en compte dans notre étude au moyen d'un modèle d'amortissement visqueux, qui a l'avantage d'être très simple, et qui décrit bien le comportement des structures comme les plaques circulaires, considérées dans le présent chapitre, ou les cymbales et les gongs. Un terme  $c \dot{w}$  est donc introduit dans l'équation conservative (3.84b), comme une petite perturbation de celle-ci. Il conduit à un amortissement modal identique pour tous les modes. Le modèle est ensuite raffiné en introduisant après projection sur la base des modes propres, des facteurs d'amortissement différents pour chacun des modes, qui permettent de prendre en compte les différences d'amortissement d'un mode à l'autre observées en pratique (Cf. Eq. (4.62)).

### 4.2.2 Formulation adimensionnée des équations

La formulation présentée ici a déjà été utilisée sous cette forme par Efstathiades [35] et Sridhar *et al* [110]. Le déplacement de tout point de la plaque est (Cf. Eq. (3.4)) :

$$\vec{U}(r, \theta, z) = \vec{u}(r, \theta) - z \cdot \text{grad } w(r, \theta) + w(r, \theta) \vec{z}, \quad (4.1)$$

$$\vec{u}(r, \theta) = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta, \quad (4.2)$$

avec  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  les vecteurs unitaires radial et orthoradial, et  $(r, \theta)$  les coordonnées cylindriques de tout point du plan de la plaque, telles que :

$$\vec{x} = r \vec{e}_r = r (\cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{x}_2). \quad (4.3)$$

<sup>3</sup>Les conditions aux limites évoquées dans la note 1, p. 88 sont dans ce cas. Notamment, lorsque la fixation de la cymbale sur son pied est trop serrée, les rondelles de feutre jouent le rôle d'amortisseur, et le son s'éteint rapidement.

### Équations locales

Les équations du mouvement (3.84a) et (3.84b) deviennent alors :

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2}L(w, w), \quad (4.4a)$$

$$D\Delta\Delta w + m\ddot{w} = L(w, F) - c\dot{w} + t_e(r, \theta, t), \quad (4.4b)$$

où (Eq. (3.84c))

$$\begin{aligned} L(w, F) = & w_{,rr} \left( \frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left( \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) \\ & - 2 \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le laplacien bidimensionnel s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_{,rr} + \frac{1}{r}(\cdot)_{,r} + \frac{1}{r^2}(\cdot)_{,\theta\theta}$$

La fonction de force est définie par (Eq. (3.85)) :

$$N_r = F_{,rr}, \quad N_\theta = \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\theta\theta}, \quad N_{r\theta} = N_{\theta r} = \frac{1}{r^2}F_{,\theta} - \frac{1}{r}F_{,r\theta}, \quad (4.6)$$

et les déplacements longitudinaux se calculent par (Eq. (3.86)) :

$$u_{,r} = e_{rr}^0 - \frac{1}{2}(w_{,r})^2 = \frac{1}{Eh} \left( \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\theta\theta} - \nu F_{,rr} \right) - \frac{1}{2}(w_{,r})^2, \quad (4.7a)$$

$$\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} = e_{\theta\theta}^0 - \frac{1}{2r^2}(w_{,\theta})^2 = \frac{1}{Eh} \left[ F_{,rr} - \nu \left( \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\theta\theta} \right) \right] - \frac{1}{2r^2}(w_{,\theta})^2, \quad (4.7b)$$

$$\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_\theta = e_{r\theta}^0 - \frac{1}{r}w_{,r}w_{,\theta} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \left( \frac{1}{r^2}F_{,\theta} - \frac{1}{r}F_{,r\theta} \right) - \frac{1}{r}w_{,r}w_{,\theta}. \quad (4.7c)$$

### Conditions aux limites

Dans le cas de conditions aux limites libres, les efforts sont imposés nuls sur le bord, qui est ici une courbe sans point anguleux, si bien que les conditions aux limites sont (Eq. (3.67a,c,d)) :

$$N_{rr} = N_{r\theta} = 0 \quad (4.8a)$$

$$Q_r + \frac{1}{r}M_{r\theta,\theta} = 0, \quad M_r = 0 \quad (4.8b)$$

Les expressions de  $\vec{Q}$  et  $\underline{M}$  en fonction de  $w$  nécessaires sont :

$$M_r = -D \left( w_{,rr} + \frac{\nu}{r}w_{,r} + \frac{\nu}{r^2}w_{,\theta\theta} \right), \quad (4.9a)$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\nu) \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right), \quad (4.9b)$$

$$Q_r = -D(\Delta w)_{,r}. \quad (4.9c)$$

En combinant les équations (4.8a,b) avec (4.6) et (4.9a-c), on obtient :

$$F_{,r} + \frac{1}{a}F_{,\theta\theta} = 0, \quad F_{,r\theta} + \frac{1}{a}F_{,\theta} = 0, \quad \text{en } r = a \quad (4.10a)$$

$$w_{,rr} + \frac{\nu}{a}w_{,r} + \frac{\nu}{a^2}w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{en } r = a \quad (4.10b)$$

$$w_{,rrr} + \frac{1}{a}w_{,rr} - \frac{1}{a^2}w_{,r} + \frac{2-\nu}{a^2}w_{,r\theta\theta} - \frac{3-\nu}{a^3}w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{en } r = a. \quad (4.10c)$$

### Adimensionnement des équations

On introduit les variables sans dimension suivantes :

$$r = a\bar{r}, \quad t = a^2\sqrt{\frac{m}{D}}\bar{t}, \quad w = \frac{h^2}{a}\bar{w}, \quad F = \frac{Eh^5}{a^2}\bar{F} \quad (4.11)$$

$$c = 2m\mu, \quad \mu = \frac{Eh^5}{ma^4}\sqrt{\frac{m}{D}}\bar{\mu}, \quad t_e = \frac{Eh^7}{a^7}\bar{p}. \quad (4.12)$$

où  $\mu$  est le coefficient d'amortissement, exprimé en  $s^{-1}$  ( $c$  est exprimé en  $\text{kg.m.s}^{-1}$ ). Après avoir remplacé les grandeurs précédentes dans les équations (4.4a,b), on obtient les équations suivantes, dans lesquelles les nombres sans dimension sont notés sans barre supérieure, ce qui sera le cas dans la suite lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté :

$$\Delta\Delta w + \ddot{w} = \varepsilon [L(w, F) - 2\mu \dot{w} + p], \quad (4.13a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{1}{2}L(w, w), \quad (4.13b)$$

où

$$\varepsilon = 12(1 - \nu^2)\frac{h^2}{a^2}. \quad (4.14)$$

La version sans dimension des conditions aux limites est identique aux équations (4.10a-c), avec  $a = 1$ . La solution est d'autre part imposée bornée en  $r = 0$ .

On peut remarquer que  $w$  a été supposé de l'ordre de grandeur de  $u_m = h^2/a$ . Si  $w_m = h$  avait été choisi, comme c'était le cas dans le chapitre précédent, on aurait obtenu un paramètre  $\varepsilon = 12(1 - \nu^2) = 11.8$  avec  $\nu = 0.33$ , non négligeable<sup>4</sup> devant 1. Les présents développements vont conduire à un système d'équations différentielles, qui sera résolu par une méthode perturbative au chapitre suivant. Cette méthode nécessite pour être mathématiquement valide que les non-linéarités n'apportent qu'une perturbation des équations correspondantes linéaires, et donc que  $\varepsilon$  soit petit devant 1. C'est pour cette raison que  $w$  a été choisi d'un ordre de grandeur inférieur à l'épaisseur. La théorie analytique qui sera exposée au chapitre suivant est intermédiaire entre la théorie linéaire (valable pour  $w \ll h$ ) et la théorie de Von-Karman (valable pour  $w \simeq h$ ) [110]. En revanche, le développement sur la base des modes propres du paragraphe 4.4 n'impose aucune restriction sur l'amplitude de  $w$ .

## 4.3 Modes de vibration

Avant d'utiliser les modes propres pour déterminer une solution approché des équations de plaque, on se propose ici de rappeler leur calcul dans le cas de conditions aux limites libres et encastées. Notons que ce sont ici les modes propres *du problème linéarisé associé aux équations (4.13a,b) et (4.10a-c)* dont il est question ici. On précisera ensuite leur propriété d'orthogonalité. Les développements généraux de ce paragraphe sont classiques, et peuvent être trouvés notamment dans [67, 41].

### 4.3.1 Fréquences et déformées

On s'intéresse ici à la solution du problème linéarisé conservatif associé au problème (4.13), en vibrations libres transversales, qui s'écrit :

$$-\Delta\Delta w = \ddot{w}. \quad (4.15)$$

<sup>4</sup>On retrouve ici les remarques finales du paragraphe 3.4.2 qui précise que les termes non-linéaires sont du même ordre de grandeur que les termes linéaires lorsque  $w$  est de l'ordre de  $h$ .



On cherche des solutions découplées en temps et en espace, soit :

$$w(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}) \cdot q(t). \quad (4.16)$$

En remplaçant l'équation précédente dans (4.15), on obtient :

$$\Delta \Delta \Phi(\vec{x}) \cdot q(t) = -\Phi(\vec{x}) \cdot \ddot{q}(t),$$

soit encore :

$$\frac{\Delta \Delta \Phi(\vec{x})}{\Phi(\vec{x})} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}.$$

Du fait de l'hypothèse de séparation des variables, le membre de gauche de l'équation ci-dessus ne dépend que de  $\vec{x}$ , et le membre de droite que de  $t$ . Ils sont donc tous les deux égaux à une constante, que l'on suppose positive et que l'on note  $\omega^2$ , ce qui sera justifié un peu plus loin. On obtient alors deux équations, qui sont :

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0. \quad (4.17a)$$

$$\Delta \Delta \Phi(\vec{x}) - \omega^2 \Phi(\vec{x}) = 0, \quad (4.17b)$$

La première équation se résout facilement et donne :

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.18)$$

ce qui justifie le choix du signe de la constante. En effet, le système est conservatif, et la solution  $w$  doit rester finie lorsque  $t$  augmente.

La deuxième équation (Eq. (4.17b)) permet de déterminer les modes propres, et les valeurs de  $\omega$ . Elle s'écrit :

$$\Delta \Delta \Phi(\vec{x}) - \zeta^4 \Phi(\vec{x}) = 0, \quad \zeta^4 = \omega^2, \quad (4.19)$$

ce qui est équivalent à résoudre les deux équations homogènes suivantes :

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_1(\vec{x}) + \Phi_2(\vec{x}), \quad (4.20a)$$

$$(\Delta + \zeta^2)\Phi_1 = 0, \quad [\Delta + (i\zeta)^2]\Phi_2 = 0 \quad (4.20b)$$

On doit ensuite particulariser la géométrie, qui ici est circulaire. En séparant encore une fois les variables, i.e  $\Phi_i = \Theta_i(\theta) \cdot R_i(r)$ , on montre que les  $\Theta_i$  sont tous les deux solutions d'une équation différentielle harmonique, et que  $R_1$  et  $R_2$  sont solutions d'équations de Bessel respectivement ordinaires et modifiées [67]. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Phi_k(r, \theta) = & [A_{1k} J_k(\zeta r) + A_{3k} Y_k(\zeta r) + B_{1k} I_k(\zeta r) + B_{3k} K_k(\zeta r)] \sin k\theta \\ & + [A_{2k} J_k(\zeta r) + A_{4k} Y_k(\zeta r) + B_{2k} I_k(\zeta r) + B_{4k} K_k(\zeta r)] \cos k\theta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $k$  est nécessairement un entier,  $J_k$  et  $Y_k$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $k$  respectivement de première et seconde espèce, et  $I_k(\cdot) = J_k(i\cdot)$  et  $K_k(\cdot) = Y_k(i\cdot)$  sont les fonctions de Bessel modifiées. Ce sont alors les conditions aux limites qui permettent d'imposer la valeur de sept des neuf constantes ( $A_i$ ,  $B_i$  et  $\zeta$ ).

### Plaque circulaire à bord libre

Les calculs qui suivent sont inspirés des ouvrages de L. Meirovitch [67] et A. Leissa [58]. Ces deux ouvrages, et en particulier le deuxième, qui offre une étude très complète des plaques munies de conditions aux limites variées, ne précisent pas l'expression mathématique des déformées modales d'une plaque libre. Les développements suivant ont été soumis pour publication dans [125].

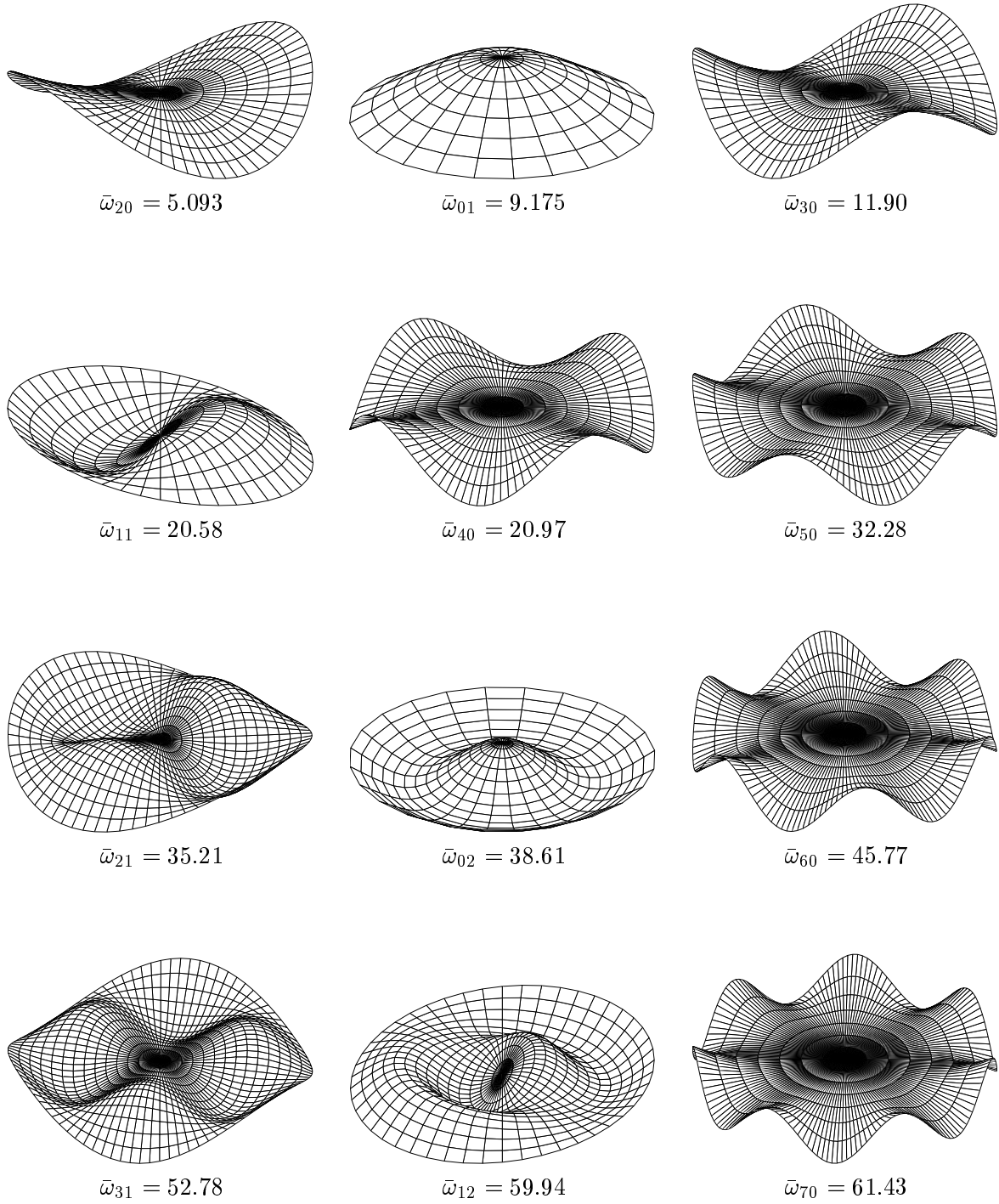


FIG. 4.1 – Déformées modales et pulsation propres adimensionnées ( $\bar{\omega}_{kn} = \zeta_{kn}^2$ ) d'une plaque circulaire à bord libre. Les déformées et pulsations dépendent dans ce cas de la valeur du coefficient de Poisson, ici  $\nu = 0.38$ .

Les conditions aux limites sont :

$$\Phi_{,rr} + \nu\Phi_{,r} + \nu\Phi_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{en } r = 1, \quad (4.22a)$$

$$\Phi_{,rrr} + \Phi_{,rr} - \Phi_{,r} + (2 - \nu)\Phi_{,r\theta\theta} - (3 - \nu)\Phi_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{en } r = 1, \quad (4.22b)$$

$$\Phi(r = 0) \text{ est borné} \quad (4.22c)$$

La dernière équation conduit à éliminer les fonctions  $Y_k$  et  $K_k$  qui tendent vers l'infini en  $r = 0$ . Après quelques calculs, la première équation, valable quel que soit  $\theta$ , permet d'imposer la valeur des constantes  $B_i$  :

$$\Phi_k(r, \theta) = \left[ J_k(\zeta_{kn}r) - \frac{\tilde{J}_k(\zeta_{kn})}{\tilde{I}_k(\zeta_{kn})} I_k(\zeta_{kn}r) \right] (A_{1k} \sin k\theta + A_{2k} \cos k\theta), \quad (4.23)$$

et la relation (4.22b) fournit une équation permettant de calculer des valeurs de  $\zeta$  pour chaque valeur de  $k$ , de sorte que les modes de vibration sont :

$$\Phi_{0n}(r, \theta) = R_{0n}(r) \quad \text{pour } k = 0 \quad (4.24a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{kn1}(r, \theta) \\ \Phi_{kn2}(r, \theta) \end{array} \right| = R_{kn}(r) \left| \begin{array}{l} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{array} \right| \quad \text{pour } k > 0 \quad (4.24b)$$

avec

$$R_{kn}(r) = \kappa_{kn} \left[ J_k(\zeta_{kn}r) - \frac{\tilde{J}_k(\zeta_{kn})}{\tilde{I}_k(\zeta_{kn})} I_k(\zeta_{kn}r) \right] \quad (4.25)$$

où  $\tilde{J}_k$  et  $\tilde{I}_k$  sont définies par :

$$\tilde{J}_k(x) = x^2 J_{k-2}(x) + x(\nu - 2k + 1)J_{k-1}(x) + k(k+1)(1-\nu)J_k(x), \quad (4.26a)$$

$$\tilde{I}_k(x) = x^2 I_{k-2}(x) + x(\nu - 2k + 1)I_{k-1}(x) + k(k+1)(1-\nu)I_k(x). \quad (4.26b)$$

et la constante  $\kappa_{kn}$  est choisie de sorte que

$$\iint_{(S)} \Phi_{kn}^2 dS = 1. \quad (4.27)$$

$\zeta_{kn}$  est la  $\tilde{n}$ -ième solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_k(\zeta) \left[ \zeta^3 J_{k-3}(\zeta) + \zeta^2(4-3k)J_{k-2}(\zeta) \right. \\ & \quad \left. + \zeta k(k+1+\nu-2)J_{k-1}(\zeta) + k^2(1-\nu)(1+k)J_k(\zeta) \right] \\ & - \tilde{J}_k(\zeta) \left[ \zeta^3 I_{k-3}(\zeta) + \zeta^2(4-3k)I_{k-2}(\zeta) \right. \\ & \quad \left. + \zeta k(k+1+\nu-2)I_{k-1}(\zeta) + k^2(1-\nu)(1+k)I_k(\zeta) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

$k$  est le nombre de rayons nodaux. Du fait des conditions aux limites imposées libres, le bord de la plaque n'est pas un cercle nodal, et le mode  $\Phi_{10}$  est un mode de solide rigide. Le nombre  $n$  de rayons nodaux n'est donc pas égal à  $n$  pour toutes les valeurs de  $k$  ; lorsque  $k = 1$ ,  $n = \tilde{n}$ , et pour  $k \neq 1$ ,  $n = \tilde{n} - 1$  [58, 125]. Des valeurs de  $\zeta_{kn}$  calculées à partir d'une résolution numérique de l'équation précédentes avec MATLAB<sup>5</sup> et les déformées modales correspondantes sont précisées sur la figure 4.1, pour  $\nu = 0.38$ . Ces valeurs des  $\zeta_{kn}$  sont voisines de celle calculées dans [58], et permettent de déterminer les valeurs théoriques des fréquences propres d'une plaque à bord libre par la formule :

$$f_{kn} = \frac{\omega_{kn}}{2\pi} = \frac{\bar{\omega}_{kn}}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{\zeta_{kn}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (4.29)$$

<sup>5</sup> <http://www.mathworks.com>

### Configurations préférentielles

On peut remarquer que les conditions aux limites ne permettent d'imposer la valeur que de sept constantes, et donc que  $A_{1k}$  et  $A_{2k}$  restent indéterminées (Eq. (4.23)), si bien que lorsque  $k \neq 0$ , c'est-à-dire lorsque la déformée modale correspondante est asymétrique (par opposition aux déformées modales des modes  $\Phi_{0n}$  qui sont axisymétriques), à chaque valeur de  $\zeta_{kn}$  est associé deux modes propres, l'un en cosinus, l'autre en sinus (Eq. (4.24a,b)). Cela montre que les modes  $\Phi_{kn}$  avec  $k \neq 0$  sont dégénérés, et que les valeurs propres associées sont de multiplicité 2.  $\Phi_{1kn}$  et  $\Phi_{2kn}$  ont été choisis orthogonaux entre eux, si bien qu'ils sont linéairement indépendants. Cette propriété due à la symétrie de révolution de la structure, aura une grande importance dans les chapitres suivants. Par abus de langage, on parlera *du* mode asymétrique  $(k, n)$ ,  $k \neq 0$ , et des deux *configurations préférentielles* associées,  $\Phi_{1kn}$  et  $\Phi_{2kn}$ , selon la terminologie introduite par Tobias et Arnold en 1957 [121], travaux sur lesquels nous reviendrons aux chapitres suivants.

### Plaque circulaire à bord encasté

Nous aurons aussi besoin au paragraphe 4.4 des modes propres de la plaque à bord encasté. Les conditions aux limites associées sont :

$$\Psi(r = 1, \theta) = 0, \quad (4.30a)$$

$$\Psi_{,\theta}(r = 1, \theta) = 0 \quad (4.30b)$$

$$\Psi(r = 0) \text{ est borné} \quad (4.30c)$$

Les calculs, quoique un peu moins longs, sont similaires à ceux du paragraphe précédent. On obtient :

$$\Psi_{0m}(r, \theta) = S_{0m}(r) \quad \text{pour } l = 0 \quad (4.31a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{lm1}(r, \theta) \\ \Psi_{lm2}(r, \theta) \end{array} \right| = S_{lm}(r) \left| \begin{array}{l} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{array} \right| \quad \text{pour } l > 0 \quad (4.31b)$$

avec

$$S_{lm}(r) = \lambda_{lm} \left[ J_l(\xi_{lm}r) - \frac{J_l(\xi_{lm})}{I_l(\xi_{lm})} I_l(\xi_{lm}r) \right] \quad (4.32)$$

où  $\xi_{lm}$  est la  $m$ -ième solution de l'équation :

$$J_{l-1}(\xi)I_l(\xi) - I_{l-1}(\xi)J_l(\xi) = 0. \quad (4.33)$$

Des valeurs calculées par résolution numérique de l'équation précédente avec MATLAB<sup>6</sup>, similaires à celles présentées dans [58], et les déformées modales correspondantes, sont présentées sur la figure 4.2. On peut remarquer que comme les conditions aux limites sont indépendantes de  $\nu$ , les valeurs des  $\xi_{lm}$  sont indépendantes de cette grandeur.

$\lambda_{lm}$ , est une constante, choisie de telle sorte que :

$$\iint_{(S)} \Psi_{lm}^2 dS = 1. \quad (4.34)$$

$l$  et  $m$  correspondent respectivement au nombre de rayons nodaux, et au nombre de cercles nodaux (en comptant le bord).

<sup>6</sup>Idem note 5

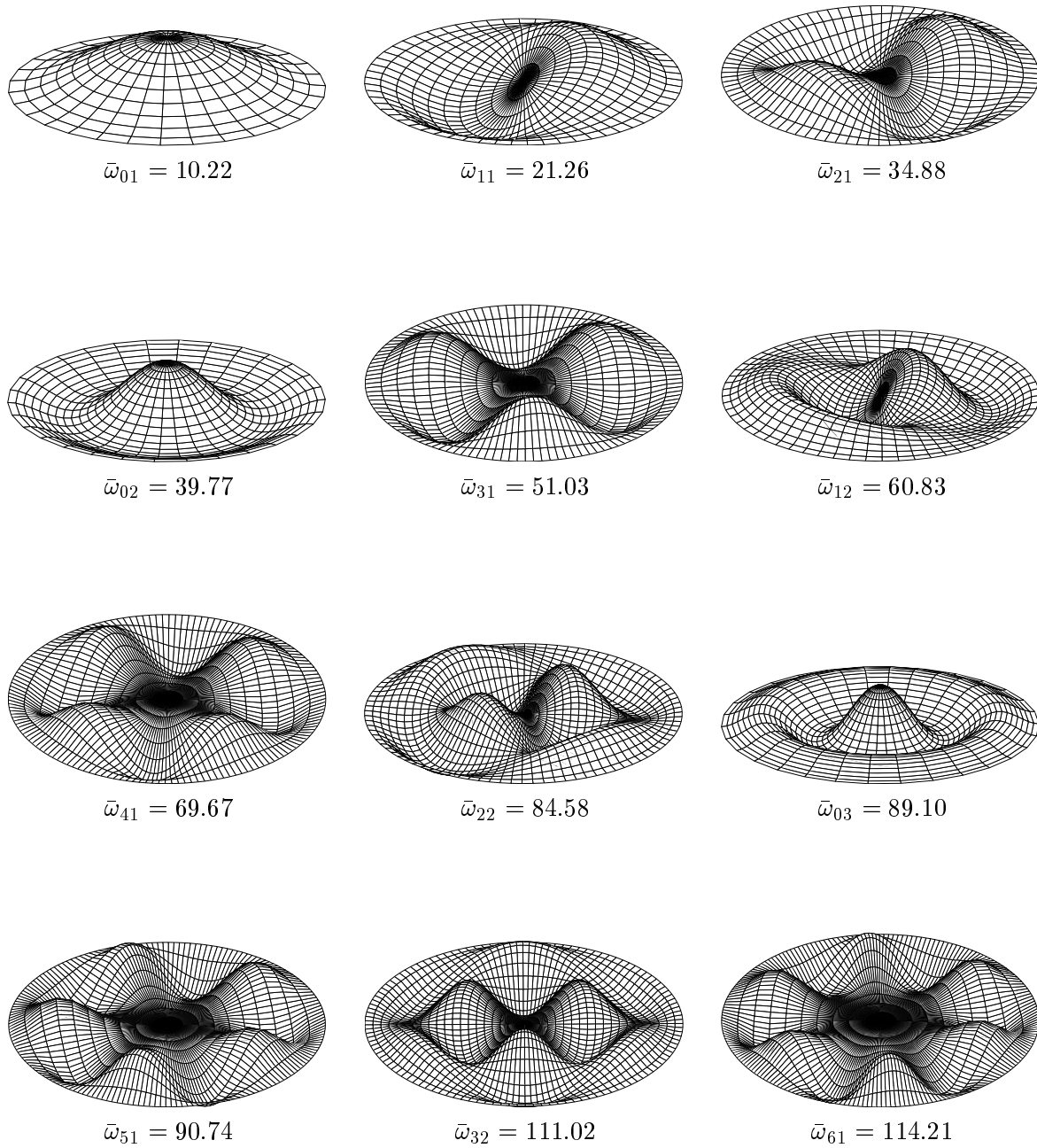


FIG. 4.2 – Déformées modales et pulsation propres adimensionnées ( $\bar{\omega}_{kn} = \xi_{kn}^2$ ) d'une plaque circulaire à bord encasté.

### 4.3.2 Orthogonalité

Les développements de ce paragraphe sont inspirés de [67], qui ne traite que le cas où la plaque est encadrée sur son bord. Bien que similaire, le cas où les conditions aux limites sont libres, est moins trivial et mérite d'être développé ici.

#### Problème aux valeurs propres

L'équation (4.17b) est un cas particulier de l'équation :

$$\mathcal{L}(\Phi) = \lambda \mathcal{M}(\Phi), \quad (4.35)$$

où  $\lambda$  est un paramètre et  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  sont deux opérateurs différentiels linéaires et homogènes d'ordre respectif  $2p$  et  $2q$ ,  $p > q$ . L'équation précédente est en outre valable en tout point d'un domaine  $\Omega$ . Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathcal{B}_i(\Phi) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.36)$$

où les  $\mathcal{B}_i$  sont des opérateurs différentiels linéaires homogènes d'ordre  $2p-1$ . Les équations précédentes sont valables en tout point du bord  $\partial\Omega$ .

Le problème aux valeurs propres défini par les équations (4.35) et (4.36) consiste à chercher les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles l'équation (4.35) a d'autres solutions que  $\Phi \equiv 0$ .

Une fonction  $\Phi$  est appelée *fonction de comparaison* si elle satisfait les conditions aux limites (4.36), et si elle est  $2p$ -différentiable sur le domaine  $\Omega$ . On dit que le problème aux valeurs propres est *auto-adjoint* si, pour deux fonctions de comparaison  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$

$$\int_{\Omega} \Phi_1 \mathcal{L}(\Phi_2) d\Omega = \int_{\Omega} \Phi_2 \mathcal{L}(\Phi_1) d\Omega, \quad (4.37)$$

$$\int_{\Omega} \Phi_1 \mathcal{M}(\Phi_2) d\Omega = \int_{\Omega} \Phi_2 \mathcal{M}(\Phi_1) d\Omega, \quad (4.38)$$

Si de plus, pour toute fonction de comparaison  $\Phi$  :

$$\int_{\Omega} \Phi \mathcal{L}(\Phi) d\Omega \geq 0, \quad (4.39)$$

$\mathcal{L}$  est dit *positif*. Il est *défini positif* si l'intégrale précédente est nulle si et seulement si  $\Phi$  est nul.

Le problème aux valeurs propres précédent a une séquence infinie et dénombrable de solutions  $\lambda_i$ , les valeurs propres, chacune d'elles étant associée à une fonction propre  $\Phi_i$ .

#### Orthogonalité

Soit deux valeurs propres  $\lambda_p$  et  $\lambda_q$ , et les fonctions propres associées  $\Phi_p$  et  $\Phi_q$ . On a :

$$\mathcal{L}(\Phi_p) = \lambda_p \mathcal{M}(\Phi_p), \quad (4.40a)$$

$$\mathcal{L}(\Phi_q) = \lambda_q \mathcal{M}(\Phi_q), \quad (4.40b)$$

en multipliant chacune des deux équations précédentes respectivement par  $\Phi_q$  et  $\Phi_p$ , en les soustrayant et en intégrant le résultat, on obtient :

$$\int_{\Omega} [\Phi_q \mathcal{L}(\Phi_p) - \Phi_p \mathcal{L}(\Phi_q)] d\Omega = \int_{\Omega} [\lambda_p \Phi_q \mathcal{M}(\Phi_p) - \lambda_q \Phi_p \mathcal{M}(\Phi_q)] d\Omega. \quad (4.41)$$

Si le problème est auto adjoint, on obtient :

$$(\lambda_p - \lambda_q) \int_{\Omega} \Phi_q \mathcal{M}(\Phi_p) d\Omega = 0 \quad (4.42)$$

de sorte que :

$$\forall (p, q) / \lambda_p \neq \lambda_q, \quad \int_{\Omega} \Phi_q \mathcal{M}(\Phi_p) d\Omega = \langle \Phi_q | \Phi_p \rangle_{\mathcal{M}} = \delta_{pq}, \quad (4.43)$$

$$\int_{\Omega} \Phi_q \mathcal{L}(\Phi_p) d\Omega = \langle \Phi_q | \Phi_p \rangle_{\mathcal{L}} = \lambda_p \delta_{pq}. \quad (4.44)$$

Cette dernière proposition montre que si le problème aux valeurs propres est auto-adjoint, alors des valeurs propres distinctes ont leurs fonctions propres correspondantes orthogonales pour les formes bilinéaires  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ . On dit usuellement qu'elles sont orthogonales. Si en plus les opérateurs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  sont définis positifs, alors les deux formes bilinéaires associées le sont aussi, et sont alors des produits scalaires. Lorsque des valeurs propres sont multiples, les fonctions propres correspondantes sont orthogonales aux autres modes, mais, en général, elles ne le sont pas entre elles. On peut néanmoins trouver deux combinaisons linéaires de ces fonctions, qui sont orthogonales entre elles [67]. Les deux configurations préférentielles en  $\sin k\theta$  et  $\cos k\theta$  associées à un mode asymétrique de plaque circulaire, présentées au paragraphe 4.3.1, ont été choisies dans ce sens, et sont orthogonales.

### Cas de la plaque circulaire

Dans le cas d'une plaque circulaire, les opérateurs sont respectivement  $\mathcal{L}(\Phi) = \Delta\Delta\Phi$  et  $\mathcal{M}(\Phi) = \Phi$ , si bien que les formes bilinéaires s'écrivent :

$$\langle \Phi_p | \Phi_q \rangle_{\mathcal{L}} = \iint_{(S)} \Phi_p \Delta\Delta\Phi_q dS, \quad (4.45)$$

$$\langle \Phi_p | \Phi_q \rangle_{\mathcal{M}} = \iint_{(S)} \Phi_p \Phi_q dS. \quad (4.46)$$

De plus, l'équation (4.17a) impose aux valeurs propres d'être positives :  $\lambda = \omega^2$ . Il est clair que  $\mathcal{M}$  est auto-adjoint, et défini positif. Prouvons que  $\mathcal{L}$  est aussi auto-adjoint. Après deux intégrations par parties, on montre que :

$$\langle \Phi_p | \Phi_q \rangle_{\mathcal{L}} = \iint_{(S)} \Delta\Phi_p \Delta\Phi_q dS + \oint_{(\partial S)} \left[ \Phi_p \cdot \text{grad}(\Delta\Phi_q) \cdot \vec{n} - \Delta\Phi_p \cdot \text{grad}\Phi_q \cdot \vec{n} \right] ds. \quad (4.47)$$

Avec les conditions aux limites, on obtient :

- Conditions aux limites libres et  $\partial S$  sans point anguleux (Eq. (4.22))

$$\begin{aligned} \langle \Phi_p | \Phi_q \rangle_{\mathcal{L}}^{lib} &= \iint_{(S)} \Delta\Phi_p \Delta\Phi_q dS \\ &\quad - (1 - \nu) \oint_{(\partial S)} [\Phi_{p,r} \cdot \Phi_{q,r} + \Phi_{p,\theta} \cdot \Phi_{q,\theta} - (\Phi_{p,\theta} \cdot \Phi_{q,r\theta} + \Phi_{p,r\theta} \cdot \Phi_{q,\theta})] ds \end{aligned} \quad (4.48)$$

- Conditions aux limites encastées (Eq. (4.30))

$$\langle \Psi_p | \Psi_q \rangle_{\mathcal{L}}^{enc} = \iint_{(S)} \Delta\Psi_p \Delta\Psi_q dS \quad (4.49)$$

Les deux équations précédentes montrent bien que dans les deux cas, les opérateurs sont auto-adjoints. De plus, il est clair que dans le cas encastré,  $\mathcal{L}^{enc}$  est défini positif. Dans le cas libre, il n'est pas immédiat à partir de (4.48) que  $\mathcal{L}^{lib}$  est défini positif. On peut s'en assurer en constatant que les fréquences propres de la plaque à bord libre sont non-nulles (Cf. Eq. (4.28)), si bien que la défini-positivité de  $\mathcal{M}$  entraîne celle de  $\mathcal{L}^{lib}$  par la relation suivante, qui découle de (4.40) :

$$\langle \Phi_p | \Phi_p \rangle_{\mathcal{L}^{lib}} = \omega_p^2 \langle \Phi_p | \Phi_p \rangle_{\mathcal{M}}$$

On a donc montré que les modes propres de plaque sont orthogonaux pour les produits scalaires  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ , dans les cas où le bord est encastré ou libre. En ce qui concerne les modes asymétriques, il est aisé de vérifier que les deux configurations préférentielles sont orthogonales entre elles, du fait de leur dépendance en sin et cos.

## 4.4 Projection modale

Les développements qui suivent sont inspirés des travaux de P. Manneville [65] et de A. H. Nayfeh *et al* [76, 75]. Ils ont fait l'objet de contributions dans des actes de congrès [113, 116] et ont été soumis pour publication dans [125].

La présente méthode de résolution est applicable chaque fois que le système physique étudié évolue autour d'un état de référence stationnaire  $\mathbf{w}_0$ . Formellement, ce genre de problème peut être décrit de la façon suivante. Dans le cas général, le comportement du système est régi par un ensemble d'équations différentielles assorties de conditions aux limites :

$$\mathcal{H} \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{w}, \mathbf{r} \right) = 0, \quad (4.50)$$

où  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{r}$  sont deux vecteurs où sont regroupées les inconnues et des paramètres de contrôle. Lorsque le système est étudié autour de  $\mathbf{w}_0$ , l'équation précédente peut être écrite :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \mathcal{L} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{w} + \mathcal{N}(\mathbf{w}), \quad (4.51)$$

où  $\mathcal{L}$  est la linéarisation de  $\mathcal{H}$  autour de l'état de référence  $\mathbf{w}_0$  et  $\mathcal{N}$  regroupe les termes non-linéaires [65, 122, 76, 75]. Le passage de l'équation (4.50) à l'équation (4.51) correspond dans notre étude à l'application des hypothèses 3.1 à 3.8, et donc à l'application du modèle de Von-Kàrmàn. Les effets de grandes déformations et les phénomènes de plasticité, notamment, sont négligés. L'approche qui suit est donc valable lorsque la plaque évolue autour de sa position d'équilibre, sans trop s'en éloigner, c'est-à-dire pour des déplacements  $w$  de l'ordre de l'épaisseur  $h$  (Cf. Tab. 3.2, p. 84).

On va maintenant utiliser les modes propres du problème *linéarisé*, que l'on a calculé au paragraphe précédent, pour établir une solution approchée du problème *non-linéaire* : les équations (4.13a,b) associées aux conditions aux limites (4.10a-c). Les calculs qui suivent sont basés sur les propriétés d'orthogonalité des modes propres, et n'introduisent aucune restriction mathématique supplémentaire. On reviendra sur ce point et sur la validité *physique* de ces développements au paragraphe 4.4.3.

On cherche la solution  $w$  sous la forme d'un développement sur les modes propres de la plaque à bord libre. En classant préalablement les modes  $\Phi_{kn}$  par ordre de fréquences croissantes, on choisit pour simplifier de les noter avec un seul indice, sans perte de généralité, de sorte que  $\Phi_p(r, \theta)$  désigne dans la suite le  $p$ -ième mode propre, défini par les relations (4.24). La solution est alors écrite sous la forme :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p(r, \theta) q_p(t), \quad (4.52)$$



où les  $q_p$  sont des fonctions inconnues du temps.

#### 4.4.1 Fonction de force

En substituant l'équation (4.52) dans l'équation (4.13b), on obtient :

$$\Delta\Delta F = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} E_{pq}(r, \theta) q_p(t) q_q(t), \quad (4.53)$$

avec

$$E_{pq} = -\frac{1}{2} L(\Phi_p, \Phi_q). \quad (4.54)$$

où  $L$  est définie par l'équation (4.5). On suppose alors que l'expression de  $F$  est un développement sur des fonctions spatiales  $\Psi_s$ , de la même manière que pour  $w$  :

$$F(r, \theta, t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \Psi_s(r, \theta) \eta_s(t), \quad (4.55)$$

ce qui implique

$$\Delta\Delta F = \sum_{s=1}^{+\infty} [\Delta\Delta \Psi_s(r, \theta)] \eta_s(t), \quad (4.56)$$

où les  $\eta_s$  sont des fonctions inconnues du temps. Les  $\Psi_s$  sont choisis de telle sorte qu'ils vérifient l'équation suivante :

$$\Delta\Delta \Psi(r, \theta) = \xi^4 \Psi(r, \theta), \quad (4.57)$$

où  $\xi$  est un nombre réel. Les conditions aux limites (4.10a), écrites en fonction de  $\Psi$  à partir de l'équation (4.55), sont :

$$\Psi(r = 1, \theta) = 0, \quad \Psi_{,r}(r = 1, \theta) = 0. \quad (4.58)$$

Il apparaît alors que les  $\Psi_s$ , solutions des équations (4.57) et (4.58), ont exactement la même forme que les modes d'une plaque circulaire à bord *encasté*, calculés au paragraphe 4.3.1, et que  $\xi$  prend les valeurs discrètes définies par l'équation (4.33).

En substituant l'équation (4.56) dans l'équation (4.53), puis en multipliant le résultat par un des modes  $\Psi_b$ , en intégrant ensuite sur la surface moyenne ( $S$ ) de la plaque et enfin en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes  $\Psi_b$  vues au paragraphe 4.3.2 (Eq. (4.43)), on obtient :

$$\eta_b(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} G_{pqb} q_p(t) q_q(t), \quad (4.59)$$

avec

$$G_{pqb} = \frac{\iint_{(S)} E_{pq} \Psi_b dS}{\xi_b^4 \iint_{(S)} \Psi_b^2 dS} = -\frac{1}{2} \frac{\iint_{(S)} L(\Phi_p, \Phi_q) \Psi_b dS}{\xi_b^4 \iint_{(S)} \Psi_b^2 dS}, \quad (4.60)$$

de sorte que

$$F(r, \theta, t) = \sum_{b=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} G_{pqb} q_p(t) q_q(t) \right) \Psi_b(r, \theta). \quad (4.61)$$

### 4.4.2 Déplacement transversal

Le déplacement transversal  $w$  est maintenant obtenu en substituant l'expression de  $F$  calculée ci-dessus dans l'équation (4.13a); on multiplie ensuite les deux membres de l'équation obtenue par un des modes  $\Phi_\alpha$ , puis on intègre sur la surface moyenne ( $S$ ) de la plaque. Les propriétés d'orthogonalité des  $\Phi_\alpha$  mènent alors au système d'équations suivant :

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2 q_\alpha(t) = \varepsilon \left[ - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \Gamma_{pq\alpha u} q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_\alpha \dot{q}_\alpha(t) + \tilde{Q}_\alpha(t) \right], \quad (4.62)$$

où  $\mu_\alpha$  est le coefficient d'amortissement sans dimension, dont la valeur est ajustée pour chaque mode, comme prévu au paragraphe 4.2.1. La pulsation sans dimension  $\omega_\alpha$ , les coefficients  $\Gamma_{pq\alpha u}$  et le terme de forçage  $\tilde{Q}_\alpha(t)$  sont définis comme suit :

$$\omega_\alpha^2 = \frac{\iint_{(S)} \Phi_\alpha \Delta \Delta \Phi_\alpha dS}{\iint_{(S)} \Phi_\alpha^2 dS}, \quad \tilde{Q}_\alpha(t) = \frac{\iint_{(S)} p \Phi_\alpha dS}{\iint_{(S)} \Phi_\alpha^2 dS}, \quad (4.63)$$

$$\Gamma_{pq\alpha u} = - \sum_{b=1}^{+\infty} G_{pqb} \frac{\iint_{(S)} \Phi_\alpha L(\Phi_u, \Psi_b) dS}{\iint_{(S)} \Phi_\alpha^2 dS} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\iint_{(S)} L(\Phi_p, \Phi_q) \Psi_b dS \iint_{(S)} \Phi_\alpha L(\Phi_u, \Psi_b) dS}{\xi_b^4 \iint_{(S)} \Phi_\alpha^2 dS \iint_S \Psi_b^2 dS}. \quad (4.64)$$

Les deux équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées (4.13a,b) ont été remplacées par deux problèmes distincts.

- Le premier problème consiste à calculer (§ 4.3) les modes propres  $\Phi_{kn}$  et  $\Psi_{kn}$  de la structure. Ce sont eux qui gouvernent la dépendance *spatiale* de la structure déformée.
- Le second problème consiste à résoudre le système (4.62), constitué d'une infinité d'équations différentielles du second ordre, non-linéaires et couplées. Ce système constitue la partie *temporelle* du problème initial.

Chacune des équations du système (4.62), par exemple la  $\alpha$ -ième, décrit le mouvement du mode  $\Phi_\alpha$ .

Les développements présentés ici s'inspirent de ceux de Sridhar *et al* [110], appliqués au cas des plaques circulaires à bord *encastré*. L'approche adoptée dans cette dernière étude diffère de la notre dans le sens où la méthode des échelles multiples est utilisée dès le début, et appliquée directement aux équations aux dérivées partielles (4.13a,b). Le développement sur les modes propres est introduit alors automatiquement comme solution du problème au premier ordre, mais le système (4.62) n'apparaît pas explicitement. Cette approche oblige d'autre part à formuler les approximations sur le nombre de modes entrant en jeu dans le système beaucoup plus tôt. L'avantage de la procédure présentée dans notre étude est que le problème spatial et le problème temporel sont clairement séparés, et que la méthode utilisée pour résoudre le problème spatial n'est pas imposée (Le système (4.62) peut par exemple être résolu par une approche numérique, pour des amplitudes de vibrations plus importantes que celles sous-entendues par la méthode des échelles multiples).

### 4.4.3 Discussion

#### Domaine de validité

On peut remarquer qu'aucune approximation n'a été formulée pour établir le système (4.62). Cela signifie que *mathématiquement*, la solution présentée ici a le même domaine de validité que le modèle de Von-Kàrmàn présenté au chapitre 3 et précisé dans le tableau 3.2, p. 84, c'est-à-dire pour des déplacements  $w$  de l'ordre de l'épaisseur  $h$ . Néanmoins, il faut théoriquement prendre en compte l'infinité des modes propres pour obtenir une solution valide, ce qui ne simplifie pas la tâche initiale. En revanche, dans beaucoup de cas pratiques, et en particulier lorsque le système est sujet à une excitation forcée de support spectral réduit (par exemple monofréquentielle), on vérifie expérimentalement que peu de modes ont une contribution non négligeable dans la solution. Cela conduit à ne garder dans le système (4.62) qu'un faible nombre d'équations, ce qui réduit avantageusement la dimension du problème. Le chapitre suivant suivra cette démarche, et le cas où un seul des modes de vibrations est impliqué sera étudié en détail. Une méthode de perturbation sera utilisée pour résoudre le système (4.62). Elle est théoriquement valide lorsque  $\varepsilon \ll 1$ , ce qui est très restrictif, puisque dans ce cas là  $w$  est de l'ordre de grandeur de  $h^2/a$ . On montrera au chapitre 6 que cette solution prédit correctement les résultats expérimentaux pour des amplitudes  $w$  de l'ordre de  $h/2$ .

Le comportement éventuellement irrégulier de la solution est, de plus, rejeté dans la partie temporelle de celle-ci, puisque la partie spatiale est décrite par les modes propres linéaires de la structure. On voit donc que cette méthode n'est avantageusement applicable qu'à des systèmes où le problème spatial n'est pas trop complexe, ce qui exclu en particulier les cas de chaos spatio-temporel<sup>7</sup>.

En conclusion, on peut retenir que la méthode présentée ici a la même validité que le modèle de Von-Kàrmàn, c'est-à-dire  $w \simeq h$ , et que selon la méthode de résolution utilisée, on est amené à émettre des hypothèses fondées sur des études expérimentales. Cela va de pair avec une restriction du domaine de validité de la solution, qui est variable selon les approximations choisies. Une vérification expérimentale est alors nécessaire pour estimer le domaine de validité (Cf. § 6.5.2).

#### Cas des coques

On peut noter que les développements mathématiques précédents ont été gardés les plus généraux possible, et que même si les conditions aux limites et la géométrie du bord ont été particularisées, une théorie similaire est applicable à d'autres géométries et conditions aux limites. Le cas des coques, et donc des cymbales et des gongs, peut ainsi être traité de façon similaire.

On peut remarquer que les équations décrivant les vibrations transversales de la plaque sont à non-linéarité cubique uniquement. Cela est visible tout d'abord à partir des équations du mouvement (4.4). Le chargement du plan moyen  $F$  apparaît être quadratique, puisque il est directement fonction de  $L(w, w)$  qui est quadratique en  $w$ . Ensuite, les termes non-linéaires de (4.4b) sont issus de  $L(F, w)$  qui est une fonction cubique de  $w$ . Cela se retrouve dans les équations (4.61) et (4.62), respectivement quadratiques et cubiques en fonction des  $q_n$ . Si la structure présentait une courbure initiale non-nulle (ce serait alors une coque), des termes quadratiques seraient présents dans les équations (4.4b) et (4.62) [136]. Une interprétation physique des constatations précédentes sera proposée au chapitre 8.

<sup>7</sup>Les cas de chaos spatio-temporel peuvent être théoriquement traités par la présente méthode, mais cela conduit à prendre en compte un grand nombre de modes propres pour obtenir une solution réaliste. Il est alors difficile de réduire le nombre d'équation du système (4.62), si bien que le problème est difficile à résoudre.

Cela souligne qu'un modèle correct analogue au système (4.62) pour les gongs et les cymbales serait :

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2 q_\alpha(t) = \varepsilon \left[ - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \beta_{pq\alpha} q_p(t) q_q(t) - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \Gamma_{pq\alpha u} q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_\alpha \dot{q}_\alpha(t) + \tilde{Q}_\alpha(t) \right]. \quad (4.65)$$

Un tel système est obtenu par Yasuda pour décrire des vibrations de calottes sphériques [136]. Il resterait encore à estimer les déformées modales d'une telle structure, ce qui est aisé par exemple avec la méthode des éléments finis<sup>8</sup>. Il serait ensuite possible de calculer les différents coefficients  $\beta_{pq\alpha}$  et  $\Gamma_{pq\alpha u}$  à partir de ces modes.



<sup>8</sup>Le code de calcul EF CASTEM 2000 a été utilisé pour le calcul de modes propres au paragraphe 2.2.



## Réduction à un mode

L'objectif de ce chapitre est d'établir et d'étudier certaines solutions du problème de vibrations de plaques circulaires, à bord libre, en grand déplacement. La plaque sera étudiée en régime forcé, excitée par un effort transversal sinusoïdal de fréquence proche de la fréquence propre d'un des modes de vibration de la structure. La vibration sera supposée n'être gouvernée que par un seul mode, soit axi-symétrique, soit asymétrique. Dans ce dernier cas, on verra que les deux configurations préférentielles en combinaison de résonances peuvent donner naissance à des ondes progressives tournantes.

### 5.1 Introduction

La partie spatiale du problème ayant été traitée dans le chapitre précédent, il reste à résoudre la partie temporelle, qui est décrite par le système (4.62). Ce système possédant une infinité d'équations différentielles couplées, la première étape consiste à définir précisément le cadre de l'étude, en particulier en choisissant les efforts surfaciques imposés. Deux cas se présentent alors.

- Soit on se place dans une étude de la plaque en vibrations *libres*. Dans ce cas, les efforts extérieurs sont imposés nuls, et se sont les conditions initiales qui déterminent la vibration. Un grand nombre de modes est alors mis en vibration, et peu de simplifications peuvent être raisonnablement apportées. L'étude est dans ce cas compliquée, et il est dur de mettre en évidence des comportements simples de la structure qui pourraient nous permettre d'expliquer le comportement des gongs et des cymbales. Il est d'ailleurs probable qu'une modélisation différente soit souhaitable, sans approche modale, avec un modèle temporel [51].
- Soit on impose des efforts sinusoïdaux dans le but d'obtenir une réponse en régime *foré* de la plaque. Dans ce cas, notre modélisation modale prend toute sa valeur, puisque le système peut être étudié en régime permanent, où peu de modes offrent une réponse significative, ce qui permet de simplifier le système (4.62). De plus, certains comportements simples typiquement non-linéaires peuvent être mis en évidence, parmi lesquels on peut citer : des phénomènes de saut, la distortion harmonique des signaux solution, des échanges d'énergie entre modes résultant de résonances internes... Ces derniers ont été mis en évidence expérimentalement sur le gong du laboratoire (Cf. § 2.4) ; c'est dans ce cas que l'on va se placer ici.

Dans ce qui suit, on va supposer que les efforts surfaciques imposés sur la surface de la plaque sont localisés dans une petite surface notée  $S_{exc}$ , d'aire négligeable devant celle de  $\mathcal{S}$ , où leur évolution temporelle est supposée sinusoïdale, de pulsation notée  $\Omega = 2\pi f_{exc}$ . Les termes de forçages des

équations (4.62) s'écrivent alors :

$$\tilde{Q}_\alpha = Q_\alpha \cos \Omega t \quad (5.1)$$

où  $Q_\alpha$  est une constante qui dépend de la déformée modale  $\Phi_\alpha$  et de l'amplitude des efforts surfaciques.

La réponse de la plaque en régime permanent est alors gouvernée par (i) les modes excités directement lorsque  $\Omega$  est proche de leur fréquence de résonance, et (ii) par les modes excités indirectement par une combinaison de résonances. Les autres modes, éventuellement impliqués dans le régime transitoire, voient leur amplitude décroître vers une valeur négligeable, à cause de l'amortissement.

### 5.1.1 Relations de résonances

On pourrait montrer, par exemple par une analyse conduite avec la méthode des échelles multiples du système (4.62) [74], ou avec la théorie des formes normales [65], que lorsque plusieurs fréquences propres de la plaque sont commensurables, les modes correspondants sont fortement couplés et sont dits être en *résonance interne*. Cela se manifeste lorsque le système est en régime libre par des échanges d'énergies continus entre les modes en résonances internes. Les relations de résonances dépendent de l'ordre de la non-linéarité. Dans notre cas où la plaque est à non-linéarité cubique, des résonances internes ont lieu dans les cas suivants :

$$\omega_q \simeq \omega_p, \quad \omega_q \simeq 3\omega_p, \quad \omega_r \simeq 2\omega_q \pm \omega_p, \quad \omega_s \simeq \omega_r \pm \omega_q \pm \omega_p, \quad (5.2)$$

Dans le cas où le système est forcé à la pulsation  $\Omega$ , des *combinaisons de résonances* avec  $\Omega$  peuvent mener à une réponse du système impliquant plusieurs modes. La formule suivante résume les résonances internes et combinaisons de résonances possibles :

$$p\Omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \dots + a_N\omega_N, \quad p \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{Z} \quad (5.3a)$$

$$p + \sum_{n=1}^N |a_n| = M + 1, \quad (5.3b)$$

où  $N$  est le nombre de degré de liberté du système et  $M$  l'ordre des non-linéarités. Le nombre de modes en combinaison de résonance avec  $\Omega$  est donc borné par l'ordre des non-linéarités : dans le cas de la plaque, 3 modes au maximum (et par suite, 4 au maximum en résonance interne, avec  $p = 0$ ) [74]. Des exemples de combinaisons de résonances quadratiques ( $M = 2$ ) dans les gongs ont été exposés aux paragraphes 2.4.3 et 2.4.4.

Il est donc nécessaire d'examiner la valeur des fréquences propres du système que l'on désire étudier, pour en déduire d'éventuelles relations de résonances. On peut alors négliger dans le système (4.62) les contributions des modes qui ne sont ni excités directement par les efforts extérieurs, ni en relation de résonance.

### 5.1.2 Cadre de notre étude

On va s'intéresser ici aux cas où la valeur de  $\Omega$  est choisie voisine d'une pulsation propre  $\omega_j = \omega_{kn}$  de la plaque, si bien que le mode correspondant est excité directement. Nous ne considérerons ici que les résonances internes 1 : 1, qui mettent en jeu deux modes de pulsations propres sensiblement égales, c'est-à-dire lorsque :

$$\omega_1 \simeq \omega_2.$$

Ce cas correspond à la première des équations (5.2). Les résonances d'ordres supérieurs ne seront pas étudiées, et le lecteur est renvoyé aux travaux de Nayfeh *et al* sur les plaques circulaires encastées en vibrations axisymétriques [109, 46] et asymétriques [110], qui considèrent des combinaisons de

Mode $(k,n)$	$\omega_{kn}$	$\Gamma$ (axisym.)	$\Gamma$ (asym.)	Nombre de termes <sup>a</sup>
2,0	5,093	–	1,898	3
0,1	9,175	8,575	–	4
3,0	11,90	–	17,03	4
1,1	20,58	–	31,83	5
4,0	20,97	–	70,72	8
2,1	35,21	–	70,01	9
0,2	38,61	164,4	–	4
0,3	87,92	1078,0	–	6

<sup>a</sup>Nombre de modes  $\Psi_b$  (Cf. Eq. (4.64)) pris en compte dans le calcul numérique des coefficients  $\Gamma$  pour obtenir une précision à 4 chiffres significatifs.

TAB. 5.1 – Fréquences propres  $\omega_{kn}$  et coefficient  $\Gamma$  (coefficient des termes non-linéaires dans (5.4b) et (5.5b,c)) pour quelques modes, issus d'un calcul numérique avec MATLAB. Les  $\omega_{kn}$  proviennent de la résolution numérique de l'équation (4.28), et le calcul des  $\Gamma$  est présenté en annexe D. Les modes propres utilisés dans ces calculs sont ceux du paragraphe 4.3.

résonance avec trois modes propres. Par conséquent, seules les équations régissant les oscillations des modes propres de fréquence proche de  $\Omega$  sont conservées dans le système (4.62).

Lorsque  $\Omega$  est proche de la pulsation propre  $\omega_{0n}$  d'un mode axisymétrique, on suppose que seul ce mode a une réponse prépondérante en régime permanent. Le système (4.62) se réduit alors à une seule équation, de sorte que le problème devient :

$$w(r, t) = R_{0n}(r) q(t), \quad (5.4a)$$

$$\ddot{q}(t) + \omega_{0n}^2 q(t) = \varepsilon [-\Gamma q(t)^3 - 2\mu_{0n} \dot{q}(t) + Q \cos \Omega t]. \quad (5.4b)$$

où l'expression de  $R_{0n}(r)$  est définie à partir des équations de Bessel au paragraphe 4.3.1. Le seul coefficient,  $\Gamma = \Gamma_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ , est calculé en annexe, paragraphe D.1.1, et les valeurs correspondantes sont indiquées tableau 5.1.

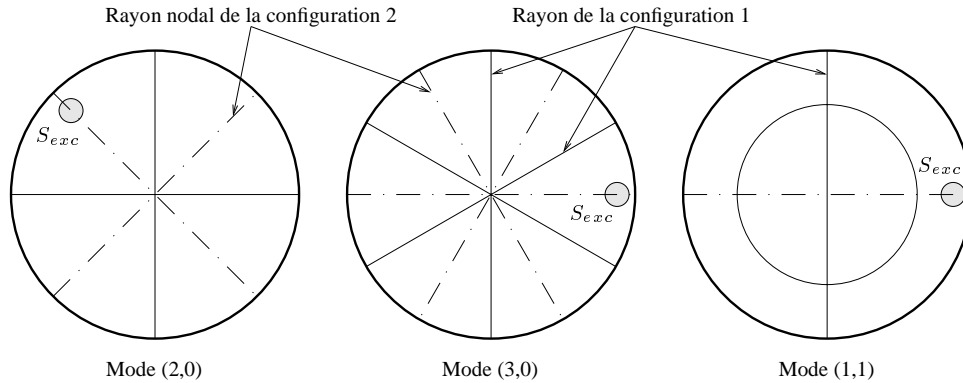


FIG. 5.1 – Position des rayons nodaux des deux configurations pour 3 modes asymétriques, dans le cas d'une plaque parfaite. Les positions des surfaces  $S_{exc}$  d'excitation sont aussi indiquées, de sorte que seules les configurations 1 sont directement excitées.

Lorsque  $\Omega$  est proche de la pulsation propre  $\omega_{kn}$ ,  $k \neq 0$ , d'un mode asymétrique, les deux configurations préférentielles,  $\Phi_{1kn}$  et  $\Phi_{2kn}$ , orthogonales, sont susceptibles d'être excitées. Les déformées modales correspondantes possèdent  $k$  rayons nodaux et  $n$  cercles nodaux, et la même dépendance en



$r$ . En revanche, les rayons nodaux de l'une sont situés sur les ventres de l'autre (la déformée de l'une se déduit de l'autre par une rotation d'angle  $\pi/2k$ ). Pour simplifier le problème et mieux identifier la réponse vibratoire de la plaque, on suppose que la surface  $S_{exc}$  est centrée sur un rayon nodal de la configuration 2, si bien que *seule la configuration 1 est excitée directement*, ce qui est illustré sur la figure 5.1. Le problème s'écrit alors :

$$w(r, \theta, t) = R_{kn}(r) [q_1(t) \cos k\theta + q_2(t) \sin k\theta], \quad (5.5a)$$

$$\ddot{q}_1 + \omega_{kn}^2 q_1 = \varepsilon [\Gamma (q_1^3 + q_1 q_2^2) - 2\mu_{kn} \dot{q}_1 + Q_1 \cos \Omega t], \quad (5.5b)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_{kn}^2 q_2 = \varepsilon [\Gamma (q_2^3 + q_1^2 q_2) - 2\mu_{kn} \dot{q}_2]. \quad (5.5c)$$

où  $R_{kn}$ ,  $k \neq 0$  est défini à partir des équations de Bessel au paragraphe 4.3.1. On peut remarquer que les coefficients des termes non-linéaires dans les équations précédentes sont tous égaux, et que les termes  $q_2^3$  et  $q_1^2 q_2$  dans (5.5a) et  $q_1^3$  et  $q_1 q_2^2$  dans (5.5b) n'apparaissent pas. Ceci est une conséquence de la dépendance en *sin* et *cos* des déformées modales, de sorte qu'elles sont parfaitement symétriques l'une par rapport à l'autre. Cette propriété a déjà été observée par Efstathiades [35], et la démonstration est écrite en annexe (§ D.1.1). Ce résultat peut probablement être étendu aux coques minces de révolution, et en particulier aux gongs et aux cymbales. Les valeurs des coefficients  $\Gamma$  sont indiquées dans le tableau 5.1.

## 5.2 Vibrations de flexion axisymétriques

Les vibrations axisymétriques unimodales de plaques circulaires ont été étudiées fréquemment par le passé. On peut citer deux études [132, 50], fondées sur la formulation du problème définie par les équations (5.4a,b), sans amortissement, et qui étudient la réponse de la plaque sur son premier mode axisymétrique. La déformée modale de ce dernier est approchée par un polynôme dont les coefficients sont ajustés avec la méthode de Galerkin. Yamaki [132] propose une étude relativement exhaustive, en explorant plusieurs géométries (rectangulaire et circulaire) et plusieurs conditions aux limites (bord encasté, i.e  $w = w_{,r} = 0$ , ou simplement supporté, i.e  $w = M_{e,r} = 0$ , avec dans chaque cas le déplacement de membrane imposé nul, i.e  $u = 0$ , ou sans effort, i.e  $N_{e,r} = 0$ ). Le déplacement transverse statique, des courbes de résonance en régime forcé et l'évolution de la fréquence des oscillations en régime libre sont étudiées. Kung et Pao [50] proposent une étude similaire pour une plaque circulaire encastée, étoffée de validations expérimentales. L'étude proposée ici s'inscrit dans la continuité de ces travaux, puisque l'amortissement est pris en compte, et les conditions aux limites sont imposées libres, ce qui n'a pas été traité auparavant. Le cas d'oscillations sous-harmonique axisymétriques a été traité par Yasuda [135] en utilisant une approche similaire à la notre.

### 5.2.1 Solution perturbative en régime forcé

L'équation du mouvement (5.4b) est une classique équation de Duffing forcée. On utilise ici une méthode perturbative pour en déterminer une solution approchée lorsque  $\varepsilon$  (Eq. (4.14)) est petit. Ces techniques consistent à considérer que les termes non-linéaires et l'amortissement ne sont que des petites perturbations de l'équation linéarisée correspondante, dont on connaît une solution analytique. On utilise ici la méthode des échelles multiples [74, 65]. Pour cela, on introduit plusieurs échelles de temps :

$$T_n = \varepsilon^n t \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.6)$$

et la solution est cherchée sous la forme d'un développement en puissances de  $\varepsilon$  :

$$q(t) = q_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (5.7)$$

On mesure l'écart entre la pulsation d'excitation et la pulsation propre par le paramètre  $\sigma$ , défini par :

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \quad (5.8)$$

où on a noté  $\omega_0 = \omega_{0n}$ . Les dérivées temporelles s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (5.9a)$$

$$\frac{d}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (5.9b)$$

où  $D_n = \partial/\partial T_n$ . Par substitution des équations (5.7), (5.8) et (5.9) dans l'équation (5.4b), et en identifiant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient le système suivant :

$$\text{ordre 1 : } D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = 0 \quad (5.10a)$$

$$\text{ordre } \varepsilon : D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \Gamma q_0^3 - 2\mu D_0 q_0 + Q \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (5.10b)$$

où  $\mu = \mu_{0n}$ . La solution générale de (5.10a) s'écrit :

$$q_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + cc, \quad (5.11)$$

où  $A$  est une fonction complexe de  $T_1$  à déterminer, et  $cc$  désigne le complexe conjugué du terme précédent. Par substitution de (5.11) dans (5.10b), on obtient :

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = & -2i [\omega_0(A' + \mu A) + 3\Gamma A^2 \bar{A}] \exp(i\omega_0 T_0) \\ & - \Gamma A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) + \frac{1}{2} Q \exp[i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)] + cc, \end{aligned} \quad (5.12)$$

où  $\bar{A}$  est le complexe conjugué de  $A$ , et  $A' = D_1 A$ . On remarque alors qu'un terme *résonant* (c'est à dire un terme correspondant à un forçage à la fréquence de résonance  $\omega_0$  de l'oscillateur considéré) apparaît dans l'équation (5.12). Cela introduit un terme non borné dans la solution de (5.12), appelé *terme séculaire*, qui donne à cette solution une validité limitée dans le temps. On obtient une solution uniforme en temps en annulant le facteur du terme résonant. On obtient alors la *condition de solvabilité* [74, 65], qui donne une relation sur le paramètre libre  $A$ , comme suit :

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\Gamma A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} Q \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (5.13)$$

On note :

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp(i\beta(T_1)) \quad (5.14)$$

où  $a$  et  $\beta$  sont des fonctions réelles, ce qui permet de séparer la partie imaginaire et la partie réelle de (5.13) :

$$a' = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{Q}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (5.15a)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{Q}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (5.15b)$$

On rend alors le système (5.15) homogène avec le changement de variable  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ . On s'intéresse de plus au régime permanent, c'est-à-dire lorsque  $d = \gamma' = 0$ , ce qui s'écrit :

$$\mu a = \frac{1}{2} \frac{Q}{\omega_0} \sin \gamma \quad (5.16a)$$

$$a\sigma - \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{\omega_0} a^3 = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\omega_0} \cos \gamma \quad (5.16b)$$

En élevant au carré ces équations, et en les ajoutant, on obtient l'équation implicite suivante, donnant l'amplitude  $a$  en fonction du paramètre de désaccord  $\sigma$  :

$$\left[ \left( \sigma - \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{\omega_0} a^2 \right)^2 + \mu^2 \right] a^2 = \frac{Q^2}{4\omega_0^2} \quad (5.17)$$

si bien que la solution de l'équation (5.4b) est, au premier ordre et en régime permanent :

$$q(t) = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\varepsilon) \quad (5.18)$$

soit encore

$$\boxed{w(r, t) = a \Phi_{0n}(r) \cos(\Omega t - \gamma)} \quad (5.19)$$

avec  $a$  défini par (5.17) et  $\gamma$  par (5.16a,b).

### Hystérésis et phénomènes de saut

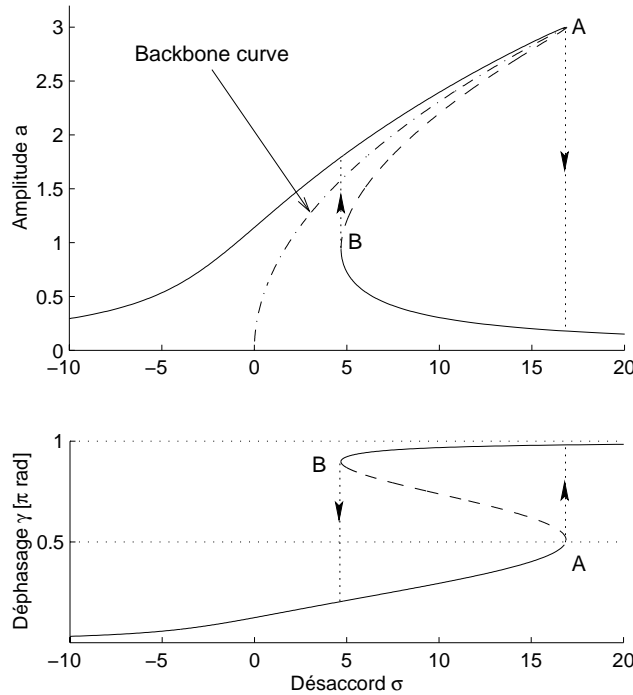


FIG. 5.2 – Amplitude et phase de la solution d'un oscillateur de Duffing, forcé en régime permanent, à amplitude constante, en fonction du déphasage  $\varepsilon\sigma = \Omega - \omega_0$

Ainsi, au premier ordre, c'est-à-dire pour des amplitudes de vibration pas trop importantes, les oscillations sont sinusoïdales. Les évolutions de  $a$  et  $\gamma$  en fonction de  $\sigma$  sont représentées sur la figure 5.2. On constate que pour certaines valeurs de  $\sigma$ , trois valeurs de  $a$  sont possibles. Une étude de stabilité montrerait que parmi ces trois solutions possibles, seules deux sont stables [74], Elles sont tracées en trait plein sur la figure. En régime permanent, le système se stabilise sur l'une ou l'autre

<sup>1</sup>Les points  $A$  et  $B$  sont des points de bifurcation *nœud-col*, qui fait apparaître une solution stable (un nœud dans le plan de phase) et une solution instable (un col) [117]. Ici, l'apparition des deux solutions se fait pour une augmentation de  $\sigma$  au point  $B$ , et une diminution de  $\sigma$  au point  $A$ .

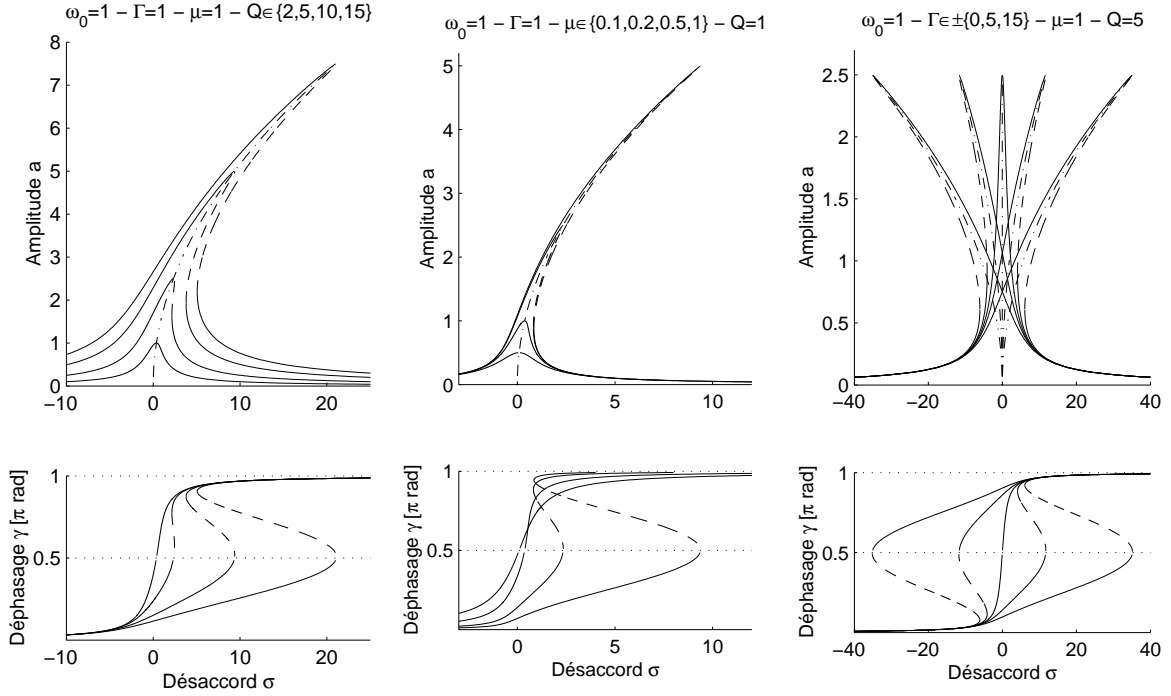


FIG. 5.3 – Courbes de résonance de l’oscillateur de Duffing pour plusieurs valeurs des paramètres  $Q$ ,  $\mu$  et  $\Gamma$  (de gauche à droite).

des solutions stables, en fonction des conditions initiales. Cela est à l’origine de phénomènes de sauts liés à un comportement en hystérésis, lorsque l’on fait varier lentement la fréquence d’excitation, à amplitude d’excitation constante. Cela a déjà été évoqué au paragraphe 2.4.2 à propos du gong, pour lequel on observe une réponse similaire, et une validation expérimentale sera proposée au chapitre suivant (§ 6.2).

La figure 5.3 montre des courbes de résonance pour plusieurs valeurs des paramètres. Lorsque  $Q$  varie, le sommet  $A$  de la courbe de résonance décrit une courbe qui est appelée couramment “backbone curve”<sup>2</sup> [74]. Elle est représentée sur la figure 5.2. Lorsque  $\mu$  varie, c’est aussi la “backbone curve” que décrit le point  $A$ . On remarque aussi que la valeur de  $\Gamma$  impose l’incurvation générale de la courbe, et que la valeur de l’amplitude maximum atteignable par le système ne dépend pas de  $\Gamma$ .

D’un point de vue physique, pour une plaque donnée, seule la figure 5.3 à gauche a un sens, puisque  $Q$  est le seul paramètre que l’on peut faire varier,  $\mu$  et  $\Gamma$  étant imposés pour chacun des modes. De plus, tous les  $\Gamma$  sont positifs dans le cas des plaques (Cf. Tab. 5.1), si bien que les courbes de résonance sont toutes incurvées vers les fréquences positives. Le cas des gongs apparaît moins simple, puisque certains modes sont raidissants ( $\Gamma > 0$ ) et d’autres assouplissants ( $\Gamma < 0$ , Cf. § 2.4.2). On étudiera cette propriété en fonction de la courbure au chapitre 8 (§ 8.2)

### Distorsion harmonique du signal de vibration

Avec l’annulation des termes séculaires au premier ordre, la solution générale de l’équation (5.10b) s’écrit :

$$q_1 = \frac{\Gamma A^3}{4\omega_0^2} \exp(3i\omega_0 T_0) + cc. \quad (5.20)$$

<sup>2</sup>Cf. note 6, p. 40

de sorte que, en régime permanent :

$$q(t) = a \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon \frac{\Gamma a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\Omega - 3\gamma) + O(\varepsilon^2). \quad (5.21)$$

$a$  et  $\gamma$  sont ici des fonctions de  $T_1$  et  $T_2$ , car on doit aller à un ordre supérieur<sup>3</sup> si on veut tenir compte de l'harmonique 3. Nous n'explicitons pas les valeurs de  $a$  et  $\gamma$ . Les effets du second ordre seront évoqués lors de l'étude du régime libre, au paragraphe suivant.

Cela nous permet néanmoins de constater que les non-linéarités introduisent une distortion du signal de vibration en ajoutant des harmoniques, qui sont dans le cas de la plaque, uniquement d'ordre impair (de fréquences  $3\Omega$ ,  $5\Omega$ , etc...). Cela est directement lié à l'absence de non-linéarités quadratiques dans l'équation (5.4b), elle-même liée à l'absence de courbure de la structure. En revanche, les signaux mesurés sur le gong en régime forcé, et exposés au chapitre 2 (§ 2.4) présentent tous un spectre complet. Cela montre encore une fois que les équations décrivant les vibrations du gong, et plus généralement de coques, présentent des termes quadratiques, qui créent une distorsion harmonique complète.

### 5.2.2 Solution perturbative en régime libre conservatif

En régime libre, l'équation 5.4b devient :

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = -\varepsilon \Gamma q(t)^3. \quad (5.22)$$

On utilise là encore la méthode des échelles multiples. Les équations (5.6), (5.7) et (5.9) restent valables. Le système (5.10) s'écrit ici :

$$\text{ordre 1 : } D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = 0 \quad (5.23a)$$

$$\text{ordre } \varepsilon : D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \Gamma q_0^3 \quad (5.23b)$$

$$\text{ordre } \varepsilon^2 : D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 = -2D_0 D_1 q_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) q_0 - 3\Gamma q_0^2 q_1 \quad (5.23c)$$

Les développements calculatoires étant omis pour plus de concision (on peut les trouver dans [73]), on obtient :

$$q(t) = a \cos(\tilde{\omega} t + \beta_0) + \varepsilon \frac{\Gamma a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\tilde{\omega} t + 3\beta_0) + O(\varepsilon^2), \quad (5.24)$$

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{3\Gamma}{8\omega_0^2} \varepsilon a^2 - \frac{15}{256} \frac{\Gamma^2}{\omega_0^4} \varepsilon^2 a^4 \right] + O(\varepsilon^3) \quad (5.25)$$

Ainsi, la pulsation des oscillations libres dépend de l'amplitude, ce qui a déjà été observé pour le gong au paragraphe 2.4.

#### “Backbone curve”

On va montrer dans ce paragraphe que la “backbone curve” de la figure 5.2 est en fait la courbe donnant la pulsation en régime libre en fonction de l'amplitude. La “backbone curve”, rappelons-le, est le lieu dans le plan  $a/\sigma$  du sommet de la courbe de résonance. L'équation (5.17) s'écrit :

$$\sigma = \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{\omega_0} a^2 \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4a^2 \omega_0^2} - \mu^2} \quad (5.26)$$

<sup>3</sup> $a$  et  $\gamma$  sont solution d'un système dynamique plus complexe que (5.15), écrit à partir des conditions de solvabilité de l'ordre  $\varepsilon^2$ , que l'on peut trouver notamment dans [78]. La valeur limite de  $a$  en régime permanent issue de ce système dynamique s'écrit  $a = a_0 + \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2)$ , avec  $a_0$  la solution du système (5.16). C'est pour cette raison que lorsqu'on tient compte de l'harmonique 3 issue de  $q_1$ , il faut aussi tenir compte des conditions de solvabilité introduites par l'équation en  $q_2$ . Cela apporte une faible correction sur  $a$ , du même ordre de grandeur que l'harmonique 3.

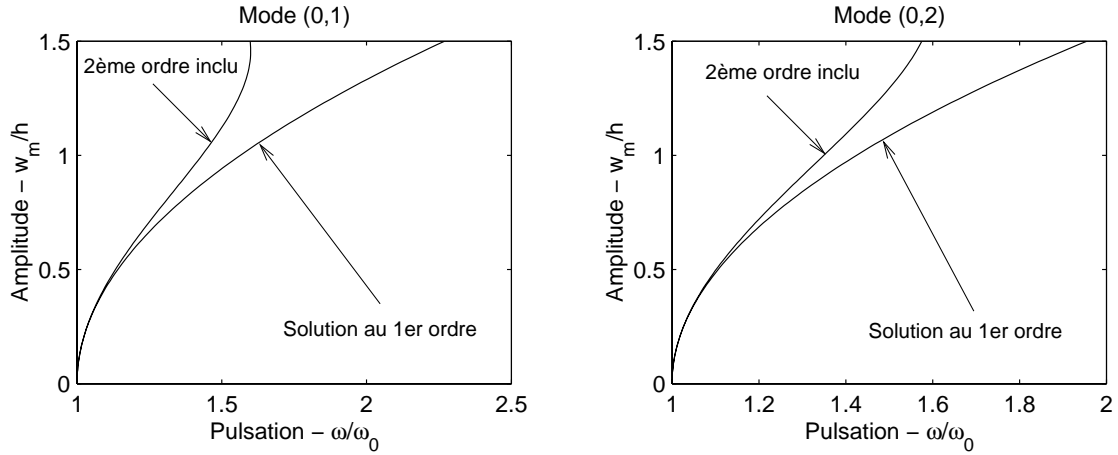


FIG. 5.4 – “Backbone curves” pour les deux premiers modes axisymétriques de la plaque, avec ou sans les effets du second ordre.

Le sommet  $A$  correspond au point où les deux solutions sont égales, c'est-à-dire où la racine carrée est nulle. Les coordonnées du point  $A$  sont alors :

$$a_A = \frac{Q}{2\omega_0\mu}, \quad \sigma_A = \frac{3}{32} \frac{\Gamma Q^2}{\omega_0^3 \mu^2} \quad (5.27)$$

L'équation de la backbone curve est obtenu en éliminant  $Q$  :

$$a_A^2 = \frac{8}{3} \frac{\omega_0}{\Gamma} \sigma_A \quad (5.28)$$

En utilisant l'équation (5.8) avec  $\Omega = \tilde{\omega}$ , on obtient la relation donnant la pulsation des oscillations libres en fonction de l'amplitude  $a$ , tronquée au premier ordre :

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{3\Gamma}{8\omega_0^2} \varepsilon a^2 \right] + O(\varepsilon^2) \quad (5.29)$$

Cette propriété est très intéressante dans des conditions expérimentales, car elle permet de mesurer la pulsation  $\tilde{\omega}$  des oscillations *libres* d'un système à partir du sommet de la courbe de résonance, mesuré en régime *forcé*. Cela permet en outre d'obtenir une estimation de  $\tilde{\omega}$  pour chacun des modes d'une structure, grandeurs difficiles à mesurer en oscillations libres. C'est de cette façon que les mesures du paragraphe 2.4.2 ont été effectuées.

Les remarques précédentes sont valables, à condition que l'amortissement soit très faible, car le calcul de la solution en régime libre a été effectué à partir de l'équation (5.22), qui est conservative.

### Effets du second ordre

En vue de revenir aux grandeurs physiques, on rappelle la définition de  $\varepsilon$  (Eq. (4.14)) et  $\bar{w}$  (Eq. (4.11)) :

$$w = \frac{h^2}{L} \bar{w}, \quad \varepsilon = 12(1 - \nu^2) \frac{h^2}{L^2}. \quad (5.30)$$

où  $L$  désigne le rayon de la plaque. Le déplacement en tout point de la plaque s'écrit :

$$w(r, t) = \frac{h^2}{L} \cdot R_{0n}(r) \cdot q(t) \quad (5.31)$$

de sorte que le déplacement du centre de la plaque est, en régime libre :

$$w(0, t) = w_m \left[ \cos(\tilde{\omega}t + \beta_0) + \frac{3(1 - \nu^2)\Gamma}{8\omega_0^2} \left(\frac{w_m}{h}\right)^2 \cos(3\tilde{\omega}t + 3\beta_0) \right], \quad (5.32)$$

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{9(1 - \nu^2)}{2} \frac{\Gamma}{\omega_0^2} \left(\frac{w_m}{h}\right)^2 - \frac{135(1 - \nu^2)^2}{16} \frac{\Gamma^2}{\omega_0^4} \left(\frac{w_m}{h}\right)^4 \right] \quad (5.33)$$

où

$$w_m = \frac{h^2}{L} \cdot R_{0n}(0) \cdot a \quad (5.34)$$

La figure 5.4 permet de comparer la solution au premier ordre, et celle avec le terme au second ordre inclu. On s'aperçoit que l'incurvation de la courbe est moins prononcée à mesure que l'amplitude augmente, et ainsi que le "raidissement" du système est moindre. Cependant, cela ne veut pas dire que pour une certaine amplitude, le système va devenir assouplissant, ce qui pourrait être déduit de la figure 5.4. En effet, les effets des ordres supérieurs viennent contrecarrer les effets du second ordre, et même si la courbure des "backbone curves" est modifiée par les effets des ordres supérieurs, le comportement reste raidissant. En revanche, on verra au chapitre 8 (§ 8.4) que des systèmes assouplissants à faible amplitude deviennent raidissant à forte amplitude. Une mesure expérimentale des "backbone curve" permettra de valider le présent modèle théorique au chapitre suivant (§ 6.5.3).

### 5.3 Vibrations de flexion asymétriques

À la différence des vibrations axisymétriques, peu d'études concernent les vibrations asymétriques de plaques circulaires. Malgré la relative complexité des calculs par rapport au cas axisymétrique, il est important d'aborder les vibrations asymétriques dans ce travail, en relation avec le fonctionnement des gongs et des cymbales. En effet, la majorité des modes des structures de type gong et cymbale sont asymétriques (on compte notamment presque 10 modes asymétriques pour un mode axisymétrique en basse fréquence, Cf. Fig. 2.5-2.7, 4.1, 4.2.). Les observations expérimentales du chapitre 2 montrent de plus que les vibrations du gong sont gouvernées principalement par les modes asymétriques.

La principale contribution sur le sujet est offerte par Tobias, Arnold et Williams qui sont les premiers à avoir considéré le couplage entre les deux configurations préférentielles d'un mode asymétrique. Ils ont étudié le comportement de disques en rotation, encastés au centre et libres à l'extérieur. Leurs études ont fait l'objet de plusieurs publications, à la fois théoriques [119, 131, 130] et expérimentales [121, 120], qui montrent et expliquent l'apparition d'ondes progressives résultant d'un couplage entre les deux configurations préférentielles en régime non-linéaire. Leur modèle théorique néglige les effets de l'amortissement. Une contribution majeure est apportée par Efstathiades [35], qui établit un modèle théorique qui prend en compte de légères imperfections de la plaque. Son modèle, également conservatif, utilise les équations de Von-Kàrmàn et la procédure de Galerkin pour déterminer les déformées modales. Néanmoins, le couplage entre les configurations préférentielles n'est pas abordé. On peut citer aussi deux contributions plus succinctes, de Dugdale [33], qui prend en compte l'amortissement dans un modèle de disques en rotations, et Irons et Kennedy [49] qui établissent un modèle de plaque avec épaisseur variable. Plus récemment, le modèle d'Efstathiades a été appliqué à l'étude d'ondes progressives sous-harmoniques [77]. Les vibrations asymétriques de plaques circulaires impliquant plus de deux modes, ont été abordées par peu de travaux. On peut citer la contribution remarquable de Sridhar *et al* [110] qui offre une étude systématique des combinaisons de résonance, et celle de Lobitz *et al* [63] qui prend en compte des irrégularités dans la géométrie de la plaque. Elles utilisent toutes les deux une approche similaire à celle que nous utilisons, avec une solution développée sur les modes propres linéaires et approchée par la méthode des échelles multiples.

Le cas présent de résonance interne 1 : 1 entre deux configurations préférentielles a des analogues dans le cas des plaques rectangulaires, qui présentent aussi des modes dégénérés<sup>4</sup>. Ce problème est décrit par un système de deux équations similaires à (5.5), qui a été étudié par Yasuda et Asano [134] et de façon très complète par Chang, Bajaj et Krousgrill [23]. Yasuda et Asano se sont intéressés plus particulièrement au cas où les deux modes sont également forcés ( $Q_1 \simeq Q_2$ ), pour des membranes rectangulaires, et Chang *et al* ont conduit une étude exhaustive sur les bifurcations, en négligeant parfois l'amortissement. Le cas de l'excitation paramétrique du plan moyen d'une plaque carrée a été étudié par Yang et Sethna dans [133].

Les paragraphes 5.3.2 et 5.3.3 sont principalement dûs aux travaux de Cyril Touzé, et seules les grandes étapes de calculs et les principaux résultats sont exposés ici. En particulier, son étude est menée dans un cadre plus général qu'ici, où les coefficients des quatre termes non-linéaires du système 5.5 sont choisis différents. Le lecteur est renvoyé au travail de thèse de C. Touzé [122] et à [125] soumise pour publication, pour plus de précisions. Ici, seul le cas d'une plaque circulaire avec de faibles imperfections est considéré.

### 5.3.1 Influence de légères imperfections de la plaque

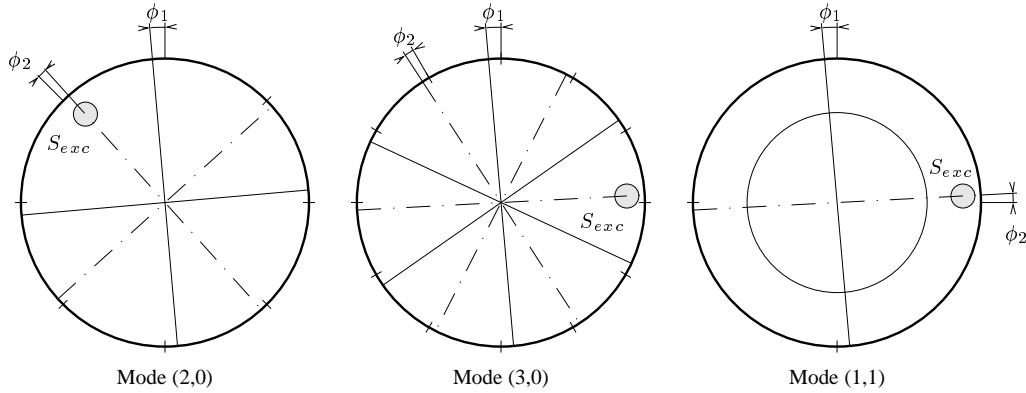


FIG. 5.5 – Décalages angulaires des rayons nodaux des configurations préférentielles, par rapport à la situation parfaite (Fig. 5.1), dans le cas d'une plaque réelle.

En situations expérimentales usuelles, une plaque supposée parfaite *a priori* présente toujours des fréquences de configurations préférentielles légèrement différentes. On observe d'autre part que les déformées modales correspondantes ne sont pas exactement symétriques l'une par rapport à l'autre : il existe toujours de petits angles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  entre les rayons nodaux des deux configurations préférentielles et ceux de la situation parfaite (Cf. Fig. 5.5, chapitre 6 et [121, 35, 114]). C'est pour cette raison que dans les développements mathématiques qui suivent, des fréquences propres distinctes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , avec  $\omega_1 \simeq \omega_2$  sont associées aux deux configurations préférentielles  $\Phi_1 = \Phi_{1kn}$  et  $\Phi_2 = \Phi_{2kn}$ . Les décalages angulaires sont introduits comme suit dans l'expression des déformées modales :

$$\Phi_1^*(r, \theta) = R_{kn}(r) \cos(k\theta + \phi_1), \quad (5.35a)$$

$$\Phi_2^*(r, \theta) = R_{kn}(r) \sin(k\theta + \phi_2). \quad (5.35b)$$

<sup>4</sup>Dans le cas des plaques rectangulaires, du fait de la différence de longueur entre l'un des cotés et l'autre, il peut y avoir des modes à déformées modales différentes qui ont des fréquences propres voisines. Par exemple, une plaque de dimension  $a \times b$  avec  $b = 1.63a$  a ses modes (1, 2) et (3, 1) de fréquences voisines ( $(m, n)$  est un mode comportant  $m$  ligne nodales normales au coté de longueur  $a$  et  $n$  à celui de longueur  $b$ ) [20].



Le déplacement transversal devient alors, à partir de l'équation (5.5a) :

$$w(r, \theta, t) = R_{kn}(r) [q_1^*(t) \cos(k\theta + \phi_1) + q_2^*(t) \sin(k\theta + \phi_2)] \quad (5.36a)$$

$$= R_{kn}(r) [q_1(t) \cos(k\theta) + q_2(t) \sin(k\theta)] \quad (5.36b)$$

avec

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_2 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Il apparait alors que le système (5.5b,c), avec deux pulsations propres différentes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  est suffisant pour décrire la dynamique de la plaque réelle. En fait, en connaissant  $q_1$  et  $q_2$  à partir de (5.5b,c), il suffit d'inverser la relation (5.37) pour obtenir  $q_1^*$  et  $q_2^*$ , et de les remplacer dans l'équation (5.36a) pour finalement obtenir le déplacement  $w$  en tout point. Les valeurs de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  peuvent être mesurées directement sur la plaque réelle.

Parmi des imperfections possibles, outre les inhomogénéités dans la structure de la plaque (masse volumique et constantes élastiques non uniformes) et les défauts dans les dimensions (épaisseur non-homogène, défaut de circularité du bord), on peut citer des cas pratiques courants où on est amené, pour les besoins des expériences (Cf. chapitre 6, [114]), à briser la symétrie de la plaque. Des trous sont souvent nécessaires pour la fixation de la structure, ce qui brise du même coup la symétrie circulaire des conditions aux limites. Des masses additionnelles, telles des accéléromètres et des aimants peuvent être collées sur la surface de la plaque. Le modèle présenté dans ce paragraphe n'apporte qu'une correction à la théorie de la plaque parfaite. Il n'est en particulier pas valable lorsque les imperfections citées plus haut brisent de façon non négligeable la symétrie de la plaque. Dans le cas inverse, le calcul des déformées modales, et en particulier l'hypothèse de séparation des variables radiale et axiale (4.21), ne sont plus valables. Un calcul par éléments finis est alors une solution possible [63].

Enfin, pour décrire plus précisément les observations expérimentales qui seront exposées au chapitre suivant, on impose un faible forçage  $Q_2$  de la configuration 2. Le problème s'écrit alors :

$$w(r, \theta, t) = R_{kn}(r) (q_1(t) \cos k\theta + q_2(t) \sin k\theta), \quad (5.38a)$$

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon [-\Gamma (q_1^3 + q_1 q_2^2) - 2\mu \dot{q}_1 + Q_1 \cos \Omega t], \quad (5.38b)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon [-\Gamma (q_2^3 + q_2 q_1^2) - 2\mu \dot{q}_2 + Q_2 \cos \Omega t]. \quad (5.38c)$$

### 5.3.2 Couplage non-linéaire entre les deux configurations préférentielles

#### Calcul de la solution

On utilise une nouvelle fois la méthode des échelles multiples. D'une manière analogue aux calculs du paragraphe 5.2.1, une solution du système (5.38) est cherchée sous la forme de :

$$q_1(t) = q_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{12}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2), \quad (5.39a)$$

$$q_2(t) = q_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon q_{22}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2). \quad (5.39b)$$

En substituant ces expressions dans (5.38b,c), et en identifiant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient

$$\text{ordre 1 : } D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = 0 \quad (5.40a)$$

$$D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = 0 \quad (5.40b)$$

$$\text{ordre } \varepsilon : D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} = -2D_0 D_1 q_{11} - \Gamma (q_{11}^3 + q_{11} q_{21}^2) - 2\mu D_0 q_{11} + Q_1 \cos \Omega t \quad (5.40c)$$

$$D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} = -2D_0 D_1 q_{21} - \Gamma (q_{21}^3 + q_{21} q_{11}^2) - 2\mu D_0 q_{21} + Q_2 \cos \Omega t \quad (5.40d)$$

La solution du système (5.40a,b) est :

$$q_{11}(t) = A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + cc, \quad (5.41a)$$

$$q_{21}(t) = A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + cc \quad (5.41b)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des fonctions inconnues de  $T_1$ , et  $cc$  désigne le complexe conjugué du terme qui le précède. On introduit alors les deux paramètres de désaccord  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \quad \Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2. \quad (5.42)$$

$\sigma_1$  mesure le désaccord entre les deux pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et  $\sigma_2$  celui entre la pulsation d'excitation  $\Omega$  et la première pulsation propre  $\omega_1$ . On supposera dans la suite, sans perte de généralité, que  $\omega_1 < \omega_2$ . Dans un cas de plaque parfaite, on a  $\sigma_1 = 0$ .

En substituant les relations (5.41) dans (5.40c,d), et en annulant les termes séculaires pour obtenir une solution valide uniformément en temps, on obtient :

$$-2i\omega_1(A_1' + \mu A_1) - 3\Gamma A_1^2 \bar{A}_1 - \Gamma A_2(2A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2 e^{2i\sigma_1 T_1}) + \frac{Q_1}{2} e^{i\sigma_2 T_1} = 0, \quad (5.43a)$$

$$-2i\omega_2(A_2' + \mu A_2) - 3\Gamma A_2^2 \bar{A}_2 - \Gamma A_1(2A_2 \bar{A}_1 + \bar{A}_2 A_1 e^{-2i\sigma_1 T_1}) + \frac{Q_2}{2} e^{i(\sigma_2 - \sigma_1) T_1} = 0, \quad (5.43b)$$

où  $(\cdot)'$  désigne la dérivation par rapport à  $T_1$ . Les équations précédentes sont résolues en introduisant les notations suivantes :

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1(T_1) \exp(i\theta_1(T_1)), \quad (5.44a)$$

$$A_2(T_1) = \frac{1}{2} a_2(T_1) \exp(i\theta_2(T_1)), \quad (5.44b)$$

où les amplitudes  $a_i$  et phases  $\theta_i$  sont des fonctions réelles de  $T_1$ . En substituant (5.44) dans les conditions de solvabilité (5.43), et en égalant parties imaginaires et parties réelles dans le résultat, on obtient un système dynamique qui gouverne l'évolution de l'amplitude et de la phase de la réponse. Il peut être rendu autonome par le changement de variable

$$\gamma_1 = \sigma_2 T_1 - \theta_1, \quad (5.45a)$$

$$\gamma_2 = (\sigma_2 - \sigma_1) T_1 - \theta_2. \quad (5.45b)$$

On arrive finalement à :

$$a_1' = -\mu a_1 + \frac{\Gamma a_1 a_2^2}{8\omega_1} \sin 2(\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{Q_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1, \quad (5.46a)$$

$$a_1 \gamma_1' = \sigma_2 a_1 - \frac{3\Gamma}{8\omega_1} a_1^3 - \frac{\Gamma a_1 a_2^2}{8\omega_1} (2 + \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1)) + \frac{Q_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1, \quad (5.46b)$$

$$a_2' = -\mu a_2 - \frac{\Gamma a_2 a_1^2}{8\omega_2} \sin 2(\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{Q_2}{2\omega_2} \sin \gamma_2, \quad (5.46c)$$

$$a_2 \gamma_2' = (\sigma_2 - \sigma_1) a_2 - \frac{3\Gamma}{8\omega_2} a_2^3 - \frac{\Gamma a_2 a_1^2}{8\omega_2} (2 + \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1)) + \frac{Q_2}{2\omega_2} \cos \gamma_2. \quad (5.46d)$$

Dans un cas général,  $Q_2$  n'est pas obligatoirement négligeable devant  $Q_1$ , ce qui signifie que  $a_1$  et  $a_2$  sont tous les deux non nuls. L'étude de ce cas oblige à considérer le système dynamique précédent dans son intégralité, et les calculs analytiques deviennent difficiles. En revanche, le cas  $Q_2 = 0$  permet d'aller plus loin dans les développements analytiques et ainsi de dégager des interprétations simples du comportement de (5.46). Ce cas a donc été étudié en détail dans [125]. Le cas où  $Q_2$  est non-nul

et faible sera traité avec une résolution numérique au chapitre suivant, pour comparer le modèle à des résultats expérimentaux.

Le système dynamique (5.46) est doté de comportements variés, comme des oscillations sur cycles limites et des solutions chaotiques [122, 23]. Dans la présente étude, nous nous sommes restreints au cas où la configuration non directement excitée gagne de l'énergie par couplage interne non-linéaire. De plus, les expériences sur des plaques circulaires ou sur le gong ou des cymbales (Chap. 2, [124]) montrent qu'une combinaison de résonances apparaît avant que les comportements chaotiques prédits par la résolution de (5.46) soient effectivement observés. Une étude méticuleuse de (5.46) est proposée dans [23].

### Solutions en régime permanent

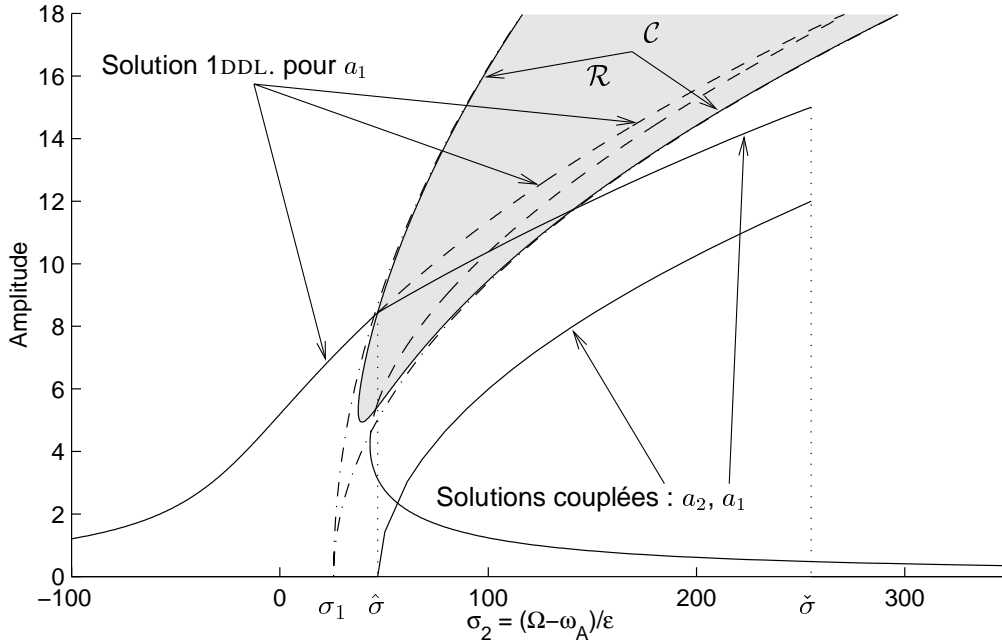


FIG. 5.6 – Courbe de résonance théorique montrant la zone  $\mathcal{R}$ , la solution 1DDL et les solutions couplées stables  $a_1$  et  $a_2$ . Traits pleins : solutions stables, traits interrompus : solutions instables.

En régime permanent (lorsque les  $a_i$  et  $\gamma_i$  sont des constantes) et lorsque  $Q_2 = 0$ , le système (5.46) devient :

$$\mu a_1 = \frac{\Gamma a_1 a_2^2}{8\omega_1} \sin 2(\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{Q_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1, \quad (5.47a)$$

$$\sigma_2 = \frac{3\Gamma}{8\omega_1} a_1^2 + \frac{\Gamma a_2^2}{8\omega_1} (2 + \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1)) - \frac{Q_1}{2\omega_1 a_1} \cos \gamma_1, \quad (5.47b)$$

$$\mu a_2 = -\frac{\Gamma a_2 a_1^2}{8\omega_2} \sin 2(\gamma_2 - \gamma_1), \quad (5.47c)$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{3\Gamma}{8\omega_2} a_2^2 + \frac{\Gamma a_1^2}{8\omega_2} (2 + \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1)). \quad (5.47d)$$

En éliminant les angles dans le système précédent, on obtient deux équations reliant les solutions en régime permanent, c'est-à-dire les points fixes de (5.46) dans l'espace  $(\sigma_2, a_1, a_2)$ . Ces relations

sont :

$$\frac{Q_1^2}{4\omega_1^2} = \mu^2 a_1^2 \left[ 1 + \frac{\omega_2 a_2^2}{\omega_1 a_1^2} \right]^2 + \left[ \frac{3\Gamma}{8\omega_1} a_1^3 \left( \frac{a_2^4}{a_1^4} - 1 \right) + \sigma_2 a_1 + 2(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\omega_2 a_2^2}{\omega_1 a_1} \right]^2, \quad (5.48a)$$

$$\left[ \sigma_2 - \sigma_1 - \frac{3\Gamma}{8\omega_2} (3a_2^2 + 2a_1^2) \right]^2 + \mu^2 = \frac{\Gamma^2 a_1^4}{64\omega_2^2}. \quad (5.48b)$$

Avec  $a_2 = 0$  dans l'équation (5.48a), on retrouve l'équation (5.17) permettant de déterminer les points fixes de (5.15) régissant la dynamique d'un système à un degré de liberté. Donc, si  $a_2 = 0$ , la configuration 1 a le comportement du système à 1DDL décrit au paragraphe 5.2.1. Et  $a_1$  en fonction de  $\sigma_2$ , est décrit par la courbe de résonance de la figure 5.2, représentée aussi sur la figure 5.6. Cette solution sera désignée "solution 1DDL" dans la suite.

Les solutions couplées (c'est-à-dire lorsque  $a_2 \neq 0$ ) sont solutions du système 5.48 entier. Les solutions communes aux deux équations, lorsque  $a_2 = 0$ , constituent donc la jonction entre les solutions avec  $a_2 \neq 0$  et la solution 1DDL. La relation (5.48b) donne ainsi le lieu, dans le plan  $(\sigma_2, a_1, a_2 = 0)$ , où les solutions couplées peuvent prendre naissance.  $a_2 = 0$  remplacé dans (5.48b) donne les deux relations :

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{\Gamma a_1^2}{4\omega_2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2 a_1^4}{64\omega_2^2} - \mu^2}, \quad (5.49)$$

qui correspondent à deux courbes dont la réunion est notée  $\mathcal{C}$  sur la figure 5.6.

On peut montrer [122, 125] que la courbe  $\mathcal{C}$  définit une région  $\mathcal{R}$  à l'intérieur de laquelle la solution 1DDL devient instable, par bifurcation fourchée<sup>5</sup>, au profit d'une solution stable avec  $a_2$  non-nul, qui se développe hors du plan  $(\sigma, a_1, a_2 = 0)$ . Cette solution sera nommée "solution couplée" dans la suite, et la région  $\mathcal{R}$  "région d'instabilité". Les calculs de stabilité sont menés en examinant le signe des valeurs propres du jacobien du système dynamique (5.46).

Ainsi, la région  $\mathcal{R}$  apparaît déterminante pour prévoir l'occurrence de régime couplé entre  $q$  et  $q_2$ . Cela est illustré sur la figure 5.6, où les solutions couplées ont été déterminées par une résolution numérique à partir du logiciel DSTOOL [45]. Lorsqu'on fait croître  $\sigma_2$ , la solution couplée se développe à partir de la solution 1DDL lorsque celle-ci entre dans dans la région  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire pour  $\sigma = \hat{\sigma}$ . Cette solution cesse d'exister pour  $\sigma = \check{\sigma}$ , une valeur impossible à déterminer analytiquement. Il est important de noter que la valeur  $\check{\sigma}$  ne correspond pas à une éventuelle sortie de la solution 1DDL de la région  $\mathcal{R}$ , puisque la solution couplée est hors du plan  $(\sigma, a_1, a_2 = 0)$ , et n'a donc plus de rapport avec la solution 1DDL. On décrira plus largement cette solution couplée au chapitre suivant, où elle sera comparée à des résultats expérimentaux.

On verra au chapitre suivant l'évolution des phases des solutions couplées. L'équation (5.47c) permet de préciser que dans le cas d'un amortissement nul, la différence de phase est strictement égale à  $\pm\pi/2$ , si bien que les deux solutions sont exactement en quadrature de phase. La situation expérimentale exposée au chapitre suivant sera non loin de ce cas, puisque l'amortissement dans la plaque étudié est très faible.

D'autres solutions couplées sont possibles, mais on montre que la seule qui est stable est celle décrite plus haut [125]. On verra au chapitre suivant que lorsque  $Q_2$  est non nul, même faible, la situation est moins simple.

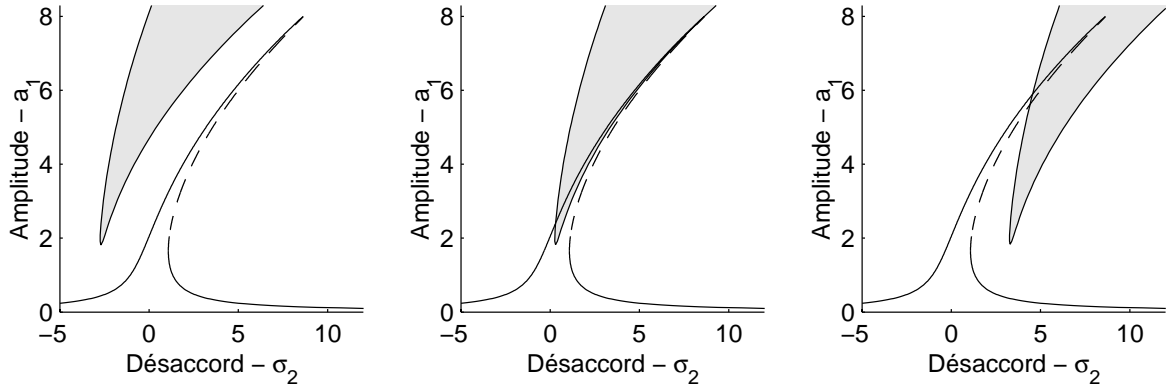


FIG. 5.7 – Influence du paramètre de désaccord interne  $\sigma_1$  sur la zone d'instabilité.  $\omega_0 = 5$ ,  $\Gamma = 1.8$ ,  $Q_1 = 12$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\sigma_2 \in \{-3, 0, 3\}$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

### 5.3.3 Influence des paramètres

La valeur du paramètre  $\sigma_1$  correspond à l'intersection des asymptotes de la zone d'instabilité avec l'axe des  $\sigma_2$  (Cf. Fig. 5.6). Les variations du paramètre  $\sigma_1$  entraînent une translation de la zone d'instabilité (Fig. 5.7).  $\sigma_1$  n'a aucune influence sur la courbe de résonance 1DDL.

Le paramètre d'amortissement, en revanche, influe à la fois sur la zone d'instabilité et la courbe de résonance 1DDL. Une augmentation de l'amortissement a pour effet de diminuer la valeur de l'amplitude du sommet de la courbe de résonance, et aussi de remonter le sommet inférieur de la zone d'instabilité. Cette dernière propriété n'avait pas été mise en évidence dans les travaux précédents [23]. Le forçage  $Q$  produit un effet inverse sur la résonance, sans influencer sur la zone d'instabilité. Ces propriétés sont illustrées sur la figure 5.8.

L'action combinée des trois paramètres précédents, détermine si la courbe de résonance 1DDL entre dans la zone d'instabilité, rendant ainsi possible l'occurrence d'une solution couplée. Ainsi, lorsque les deux fréquences propres sont trop éloignées, ou si  $Q$  est trop petit, ou  $\mu$  trop grand, aucun régime couplé n'est possible.

### 5.3.4 Solution générale - Ondes progressives

À partir des équations (5.39), (5.41), (5.44) et (5.38a), le déplacement en tout point de la plaque est, au premier ordre :

$$w(r, \theta) = R_{kn}(r) \left[ a_1 \cos(\Omega t - \gamma_1) \cos k\theta + a_2 \cos(\Omega t - \gamma_2) \sin k\theta \right]. \quad (5.50)$$

$w$  apparaît alors comme le résultat de la superposition des oscillations des deux configurations préférentielles, qui constituent chacune une onde stationnaire. Après quelques calculs,  $w$  s'exprime sous la forme :

$$w(r, \theta) = R_{kn}(r) \left[ a_3(\theta) \cos(\Omega t - \epsilon k\theta - \gamma_3(\theta)) \right], \quad (5.51)$$

<sup>5</sup>En un point de bifurcation *fourche*, une solution stable devient instable, et donne naissance à deux solutions stables symétriques (elle est qualifiée dans ce cas de *supercritique*) [117]. Ici, la solution 1DDL devient instable et donne naissance à deux solutions couplées avec  $a_2 \neq 0$ , symétriques par rapport à  $a_2 = 0$  ( $a_2$  et  $-a_2$ ; seule celle où  $a_2$  est positif est représentée figure 5.6).

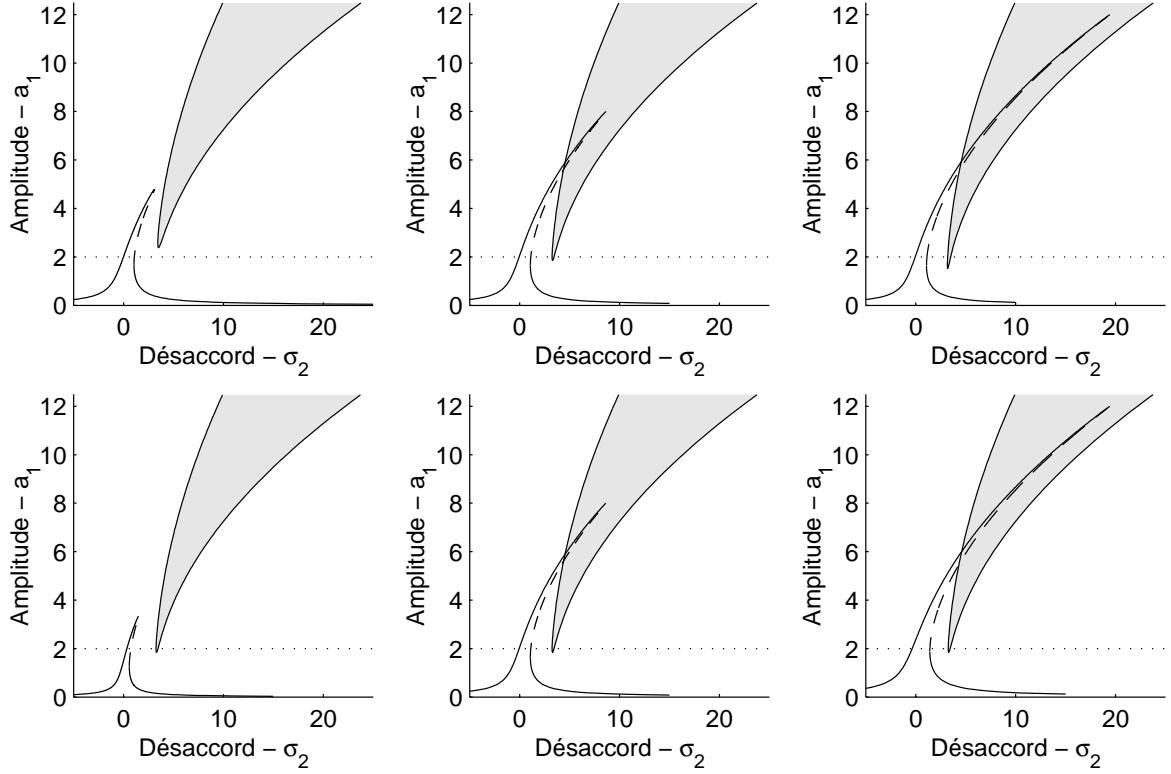


FIG. 5.8 – LIGNE SUPÉRIEURE : influence de l'amortissement  $\mu$ ;  $\omega_0 = 5$ ,  $\Gamma = 1.8$ ,  $Q_1 = 12$ ,  $\mu \in \{0.25, 0.15, 0.1\}$ ,  $\sigma_2 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . LIGNE INFÉRIEURE : influence du forçage  $Q$ ;  $\omega_0 = 5$ ,  $\Gamma = 1.8$ ,  $Q_1 \in \{5, 12, 18\}$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\sigma_2 = 3$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .

où  $a_3$  et  $\gamma_3$  sont des constantes lorsque<sup>6</sup>  $\gamma_2 - \gamma_1 = \varepsilon\pi/2$ ,  $a_1 = \pm a_2$  et  $\varepsilon = \pm 1$ . Le déplacement  $w$  peut donc être vu comme une surface d'équation  $R_{kn}(r) \cos k\theta$  animée d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire  $\Omega/k$  autour de l'axe de la plaque, caractéristique d'une onde progressive tournante (Cf. Fig. 5.9). Elle tourne dans le sens horaire ou trigonométrique en fonction du signe de  $\varepsilon$ . Si  $a_1 \simeq \pm a_2$  et  $\gamma_2 - \gamma_1 \simeq \varepsilon\pi/2$ ,  $a_3$  et  $\gamma_3$  sont des fonctions dont les variations restent proches des valeurs lorsque  $a_1 = \pm a_2$  et  $\gamma_2 - \gamma_1 = \varepsilon\pi/2$ , si bien que le mouvement est toujours équivalent à une onde progressive tournante, animée de battements (son amplitude et sa vitesse de rotation sont faiblement variables en fonction de  $\theta$ ). Cela a été vérifié expérimentalement au moyen d'un stroboscope, et une onde progressive a clairement été observée lorsque les amplitudes des deux configurations sont comparables. (Les deux configurations sont toujours très proches de la quadrature, à cause de l'amortissement très faible (§ 5.3.2)). On retrouve ici les résultats de Tobias *et al* [121, 120].

<sup>6</sup>L'expression de  $a_3$  et  $\gamma_3$  en fonction de  $\theta$  est :

$$a_3(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \sqrt{(a_1^2 - a_2^2)^2 + 4a_1^2 a_2^2 \cos^2(\gamma_1 - \gamma_2)}} \cos\left(2k\theta - \arctan \frac{2a_1 a_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}{a_1^2 - a_2^2}\right)$$

$$\gamma_3 = \arctan \frac{a_2 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \sin k\theta}{a_1 \cos k\theta + a_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \sin k\theta}$$

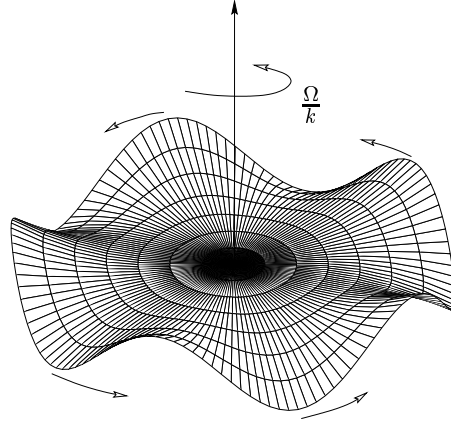


FIG. 5.9 – Onde progressive tournante, pour le mode (5,0)

## 5.4 Effets non-linéaires de membrane

On a vu au chapitre 3 que les effets non-linéaires géométriques proviennent du chargement du plan moyen de la plaque dû à un déplacement transversal. Connaissant la solution en déplacement  $w(r, \theta, t)$  dans les deux cas de vibrations unimodales étudiés précédemment, il est possible de calculer les effets non-linéaires de membranes créés par  $w$ . Ces effets sont caractérisés par les forces de membrane  $\underline{N}$ , les déformations planes  $\underline{\underline{\epsilon}}$  à  $z = 0$  et les déplacements longitudinaux  $\vec{u}$  :

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_{rr} & N_{r\theta} \\ \cdot & N_{\theta\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)}, \quad \underline{\underline{\epsilon}}^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr}^0 & \epsilon_{r\theta}^0 \\ \cdot & \epsilon_{\theta\theta}^0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)}, \quad \vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta. \quad (5.52)$$

Ces quantités peuvent se calculer à partir de la fonction de force  $F$  au moyen des équations (4.6) et (4.7). Dans le cas général,  $F$  s'écrit en fonction des évolutions temporelles  $q(t)$  des modes transverses (Eq. (4.61)) :

$$F(r, \theta, t) = \sum_{b=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} G_{pqb} q_p(t) q_q(t) \right) \Psi_b(r, \theta). \quad (5.53)$$

### 5.4.1 Mode axisymétrique

Dans le cas où la vibration transverse n'est gouvernée que par un mode axisymétrique  $\Phi_p = \Phi_{0n}$ , d'évolution temporelle  $q_p = q_{0n}$ , seuls les coefficients  $G_{ppb}$  interviennent. On montre de plus en annexe (§ D.2.1) que les  $G_{ppb}$  sont nuls lorsque  $\Psi_b$  est un mode asymétrique. L'expression de  $F$  se simplifie en :

$$F(r, \theta, t) = F(r, t) = q_{0n}^2(t) \sum_{b=1}^{+\infty} G_m \Psi_{0m}(r, \theta) = q_{0n}^2(t) \sum_{m=1}^{+\infty} G_m S_{0m}(r). \quad (5.54)$$

soit encore, au premier ordre (Eq. 5.18)

$$F(r, t) = F_m \left( \sum_{m=1}^{+\infty} G_m S_{0m}(r) \right) \cos^2(\Omega t - \gamma), \quad (5.55)$$

où (Eq. (4.60))

$$G_m = -\frac{1}{2} \frac{\iint_{(S)} L(\Phi_{0n}, \Phi_{0n}) \Psi_{0m} dS}{\xi_{0m}^4 \iint_{(S)} \Psi_{0m}^2 dS}, \quad (5.56)$$

avec  $\Psi_b = \Psi_{0m} = S_{0m}(r)$  le mode longitudinal comportant  $m$  cercles nodaux (Cf. § 4.3.1 et Eq. (4.31)).  $F$  ne dépend donc que des modes de membrane axisymétriques.

Les équations (4.6) et (4.7) se simplifient avec la symétrie axiale, et s'écrivent :

$$N_{rr} = F_{,rr}, \quad N_{\theta\theta} = \frac{F_{,r}}{r}, \quad N_{,r\theta} = 0, \quad (5.57)$$

si bien que les forces de membrane de cisaillement  $N_{,r\theta}$  sont nulles. Les déformations sont :

$$e_{rr}^0 = \frac{F_{,r}}{r} - \nu F_{,rr}, \quad e_{\theta\theta}^0 = F_{,rr} - \nu \frac{F_{,r}}{r}, \quad e_{r\theta}^0 = 0. \quad (5.58)$$

Il est alors possible d'obtenir directement les déplacements :

$$u_r = r \cdot e_{\theta\theta}^0 = r \cdot F_{,rr} - \nu F_{,r}, \quad u_\theta = 0. \quad (5.59)$$

Les évolutions de ces grandeurs en fonction de  $r$  sont représentées sur les figures 5.10 et 5.11, respectivement pour le premier et le troisième mode axisymétrique de la plaque. La première figure (en haut) représente le déplacement des points de la plaque, avec l'échelle du déplacement radial augmentée par rapport à celle du déplacement transversal.

### Comparaison avec les poutres

Il est intéressant à ce stade de comparer le comportement axisymétrique de la plaque avec celui d'une poutre. En effet, une poutre avec ses extrémités non immobilisées dans la direction longitudinale, ne présente des effets non-linéaires que lorsque les rotations deviennent grandes. Un modèle de Von-Kàrmàn pour les poutres est dans ce cas *linéaire*, car il ne prédit pas de chargement de la ligne moyenne de la poutre. Dans le cas des plaques, en revanche, il y a bien des effets non-linéaires géométriques, qui résultent du chargement du plan moyen. On peut donc en déduire que c'est la structure en deux dimensions de la plaque qui introduit les effets non-linéaires géométriques. Les figures 5.10 et 5.11 montrent en particulier que l'effet de Poisson est déterminant, puisque c'est lui qui crée des efforts et des déformations orthoradiaux(ales) ( $N_{\theta\theta}$  et  $e_{\theta\theta}^0$ ) alors que le déplacement n'est que radial ( $u_\theta = 0$ ). On y reviendra au chapitre 7 (§ 7.4.3)

Cela permet aussi de corroborer le fait que le chargement du plan moyen est plus important, à déplacement transverse égal, lorsque le déplacement longitudinal est imposé nul sur le bord que lorsque celui-ci n'est pas contraint, et a fortiori lorsque les conditions aux limites sont libres. Les effets non-linéaires étant directement liés au chargement du plan moyen, ceux-ci sont plus importants lorsque le bord de la plaque est encastré que lorsqu'il est libre. Ces effets ont été observés par Yamaki [132] et Sathyamoorthy [103], qui ont comparé les pulsations des oscillations libres du premier mode axisymétrique d'une plaque circulaire à bord encastré et à bord libre. Ils ont constaté que les effets "raidissants" sont plus importants dans le cas encastré que dans le cas libre.



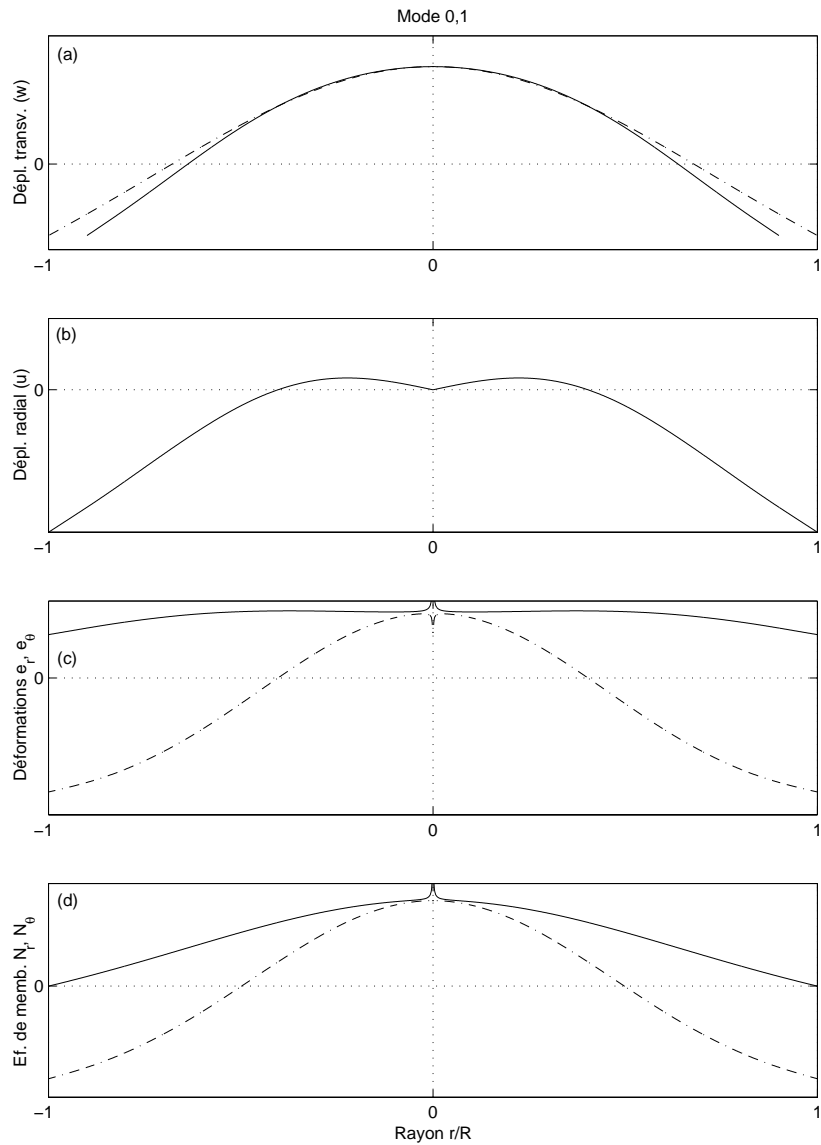


FIG. 5.10 – Déplacement transverse  $w$ , déplacement radial  $u_r$ , déformations  $e_r$  et  $e_\theta$  et efforts de membrane  $N_r, N_\theta$  pour le premier mode axisymétrique de la plaque. Le déplacement radial  $u_r$  est précisé sur (a), pour la courbe en trait plein.

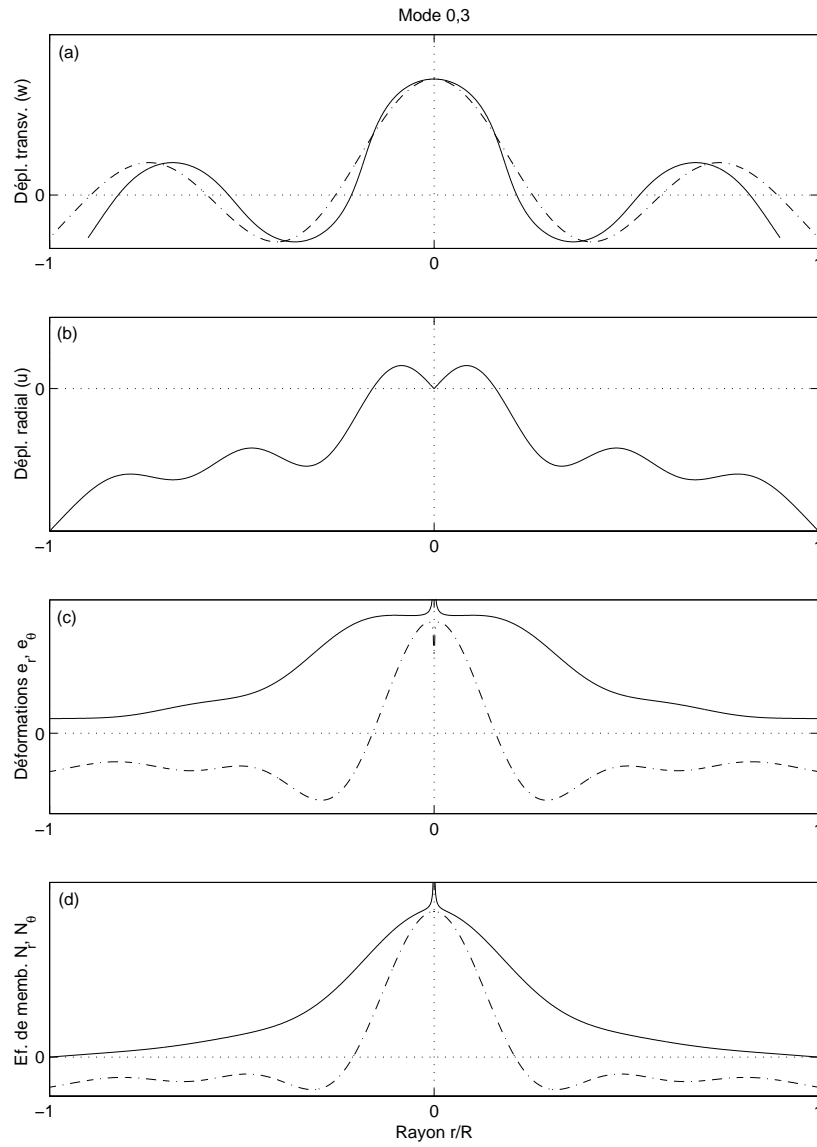


FIG. 5.11 – *Idem pour le 3ème mode axisymétrique*

### 5.4.2 Mode asymétrique

On s'intéresse ici au cas où la vibration transversale n'est gouvernée que par la configuration préférentielle d'un mode transverse *asymétrique* :

$$\Phi_{kn\alpha}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \Phi_{kn1}(r, \theta) \\ \Phi_{kn2}(r, \theta) \end{vmatrix} = R_{kn}(r) \begin{vmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{vmatrix} \quad \text{avec } k \neq 0.$$

On montre en annexe (§ D.2.2) que parmi les coefficients  $G_{ppb}$  qui interviennent, les seuls qui sont non nuls sont ceux où  $\Psi_b = \Psi_{0m}$  est axisymétrique et ceux où  $\Psi_b = \Psi_{lm1}$  est asymétrique, en cosinus, avec  $l = 2k$  rayons nodaux. L'expression de la fonction de force est alors, au premier ordre (Eq. 5.50, avec  $a_1$  ou  $a_2$  nul)

$$F(r, \theta, t) = F_m \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} (G_m^0 S_{0m}(r) - (-1)^\alpha G_m^* S_{2km}(r) \cos 2k\theta) \right] \cos^2(\Omega t - \gamma_\alpha), \quad (5.60)$$

où (§ D.2.2 en annexe) :

$$G_m^0 = G_{1m}^0 = G_{2m}^0 \quad \text{et} \quad G_m^* = G_{1m}^* = -G_{2m}^*$$

avec (Eq. (4.60))

$$G_{\alpha m}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\iint_{(S)} L(\Phi_{kn\alpha}, \Phi_{kn\alpha}) \Psi_{0m} dS}{\xi_{0m}^4 \iint_{(S)} \Psi_{0m}^2 dS}, \quad G_{\alpha m}^* = -\frac{1}{2} \frac{\iint_{(S)} L(\Phi_{kn\alpha}, \Phi_{kn\alpha}) \Psi_{2km1} dS}{\xi_{2km}^4 \iint_{(S)} \Psi_{2km1}^2 dS}, \quad (5.61)$$

Les figures 5.12-5.15 montrent les effets de membranes pour les modes (2,0), (3,0), (1,2) et (2,1) *en cosinus* ( $\alpha = 1$ ). On remarque que les déformations des modes  $(k,0)$  sont gouvernées principalement par leur composante orthoradiale, ce qui est très clair dans le cas des modes  $(k,0)$  ne comportant pas de cercle nodal, où  $N_r$  apparaît uniforme. Cela prouve encore une fois que la structure en deux dimensions de la plaque est prépondérante pour les effets non-linéaires.

Les figures analogues à celles présentées sur les figures 5.12-5.15, pour les modes  $(k,n)$  *en sinus* ( $\alpha = 2$ ) sont obtenues par rotation d'un angle  $\pi/2k$ . Cela se retrouve à partir de la formule (5.60)<sup>7</sup>.

### Couplage non-linéaire entre modes propres

On peut alors donner une interprétation qualitative des transferts d'énergie qui peuvent apparaître lors du couplage entre les deux configurations préférentielles. Les mouvements de membrane induits par l'une ou l'autre des deux configurations préférentielles sont gouvernés par les mêmes modes de vibration : les modes  $\Psi_{0m}$  axisymétriques et les modes en cosinus  $\Psi_{1(2k)m}$ . Le couplage peut être traduit de la façon suivante : la configuration 1, en vibrant transversalement excite le mouvement de membrane, qui à son tour peut venir entraîner en vibration la configuration 2. Cela n'est possible que si la configuration 2 possède une toute petite énergie initialement, pour initier le mouvement.

On pourrait vérifier avec des calculs similaires à ceux de l'annexe D que le couplage via le chargement du plan moyen est possible quels que soient les modes considérés. Ainsi, le couplage est dominé par des relations de résonance interne entre les fréquences propres. Cela a été noté par Lobitz *et al* [63] qui précisent que de faibles imperfections géométriques, tout en ayant un effet négligeable sur les déformées modales, peuvent entraîner des différences importantes des valeurs des fréquences

<sup>7</sup>On obtient  $F_{\sin}(r, \theta, t) = F_{\cos}(r, \theta + \pi/2k, t)$ , en constatant que  $\cos[2k(\theta + \pi/2k)] = -\cos 2k\theta$ .

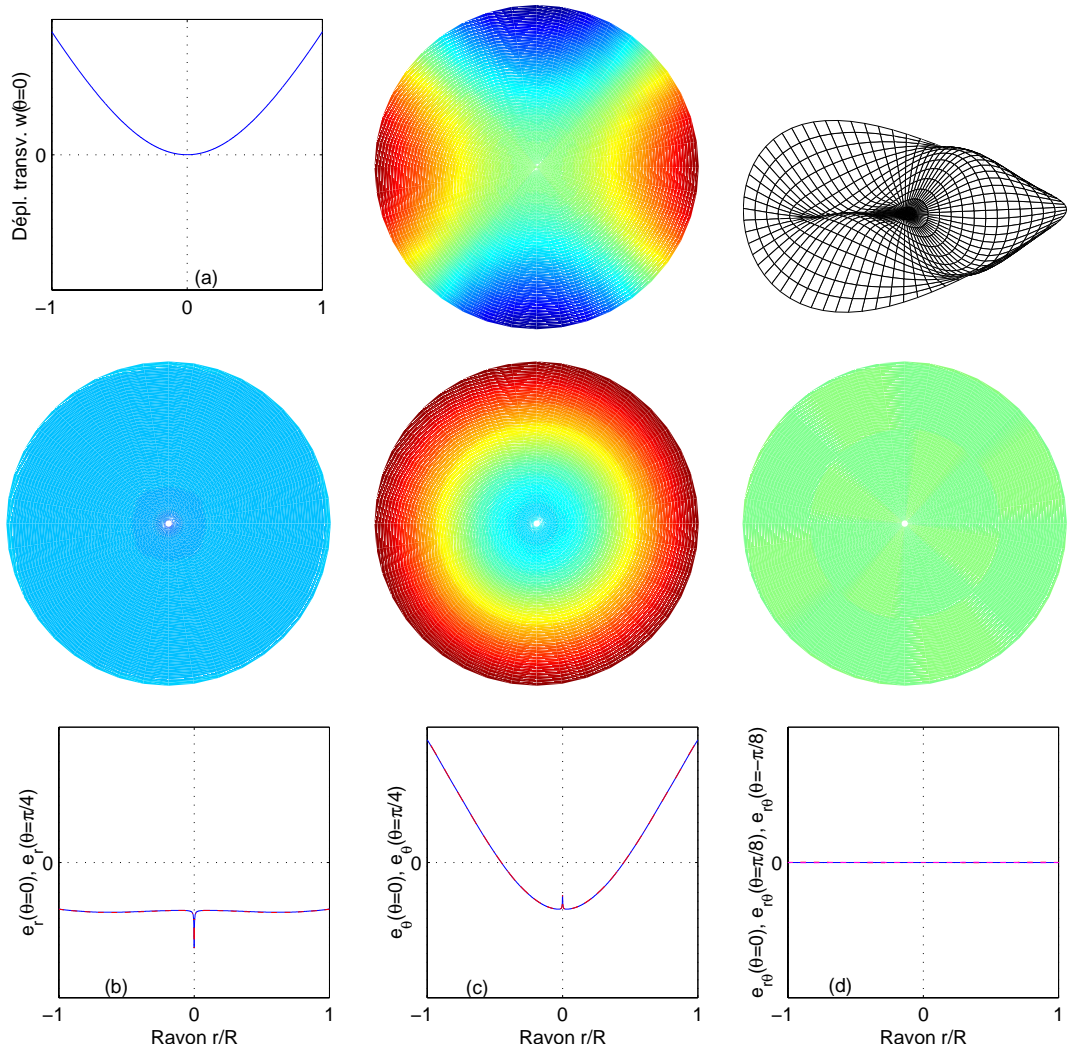


FIG. 5.12 – Effets de membrane pour le mode  $(2,0)$ . La déformée modale est représenté sur la première ligne. La deuxième ligne représente des cartes 2D des déformations planes; de gauche à droite :  $e_{rr}^0$ ,  $e_{\theta\theta}^0$ ,  $e_{r\theta}^0$ . La troisième ligne représente l'évolution de ces même quantités sur des rayons particuliers, précisés sur les figures. Les échelles en amplitude des déformations sont les mêmes pour la deuxième (niveau de couleur) et la troisième ligne (échelle verticale).

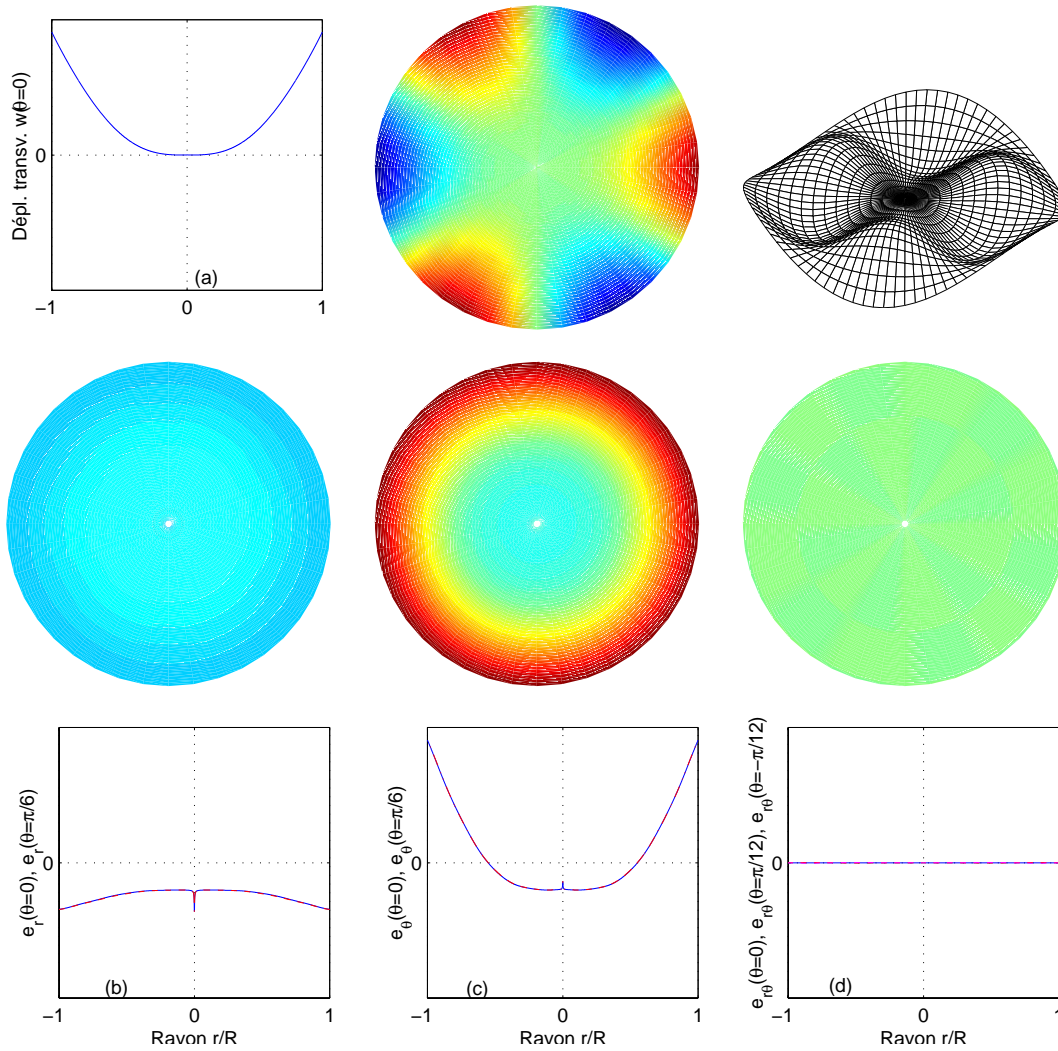


FIG. 5.13 – Idem que la figure précédente pour le mode  $(3,0)$

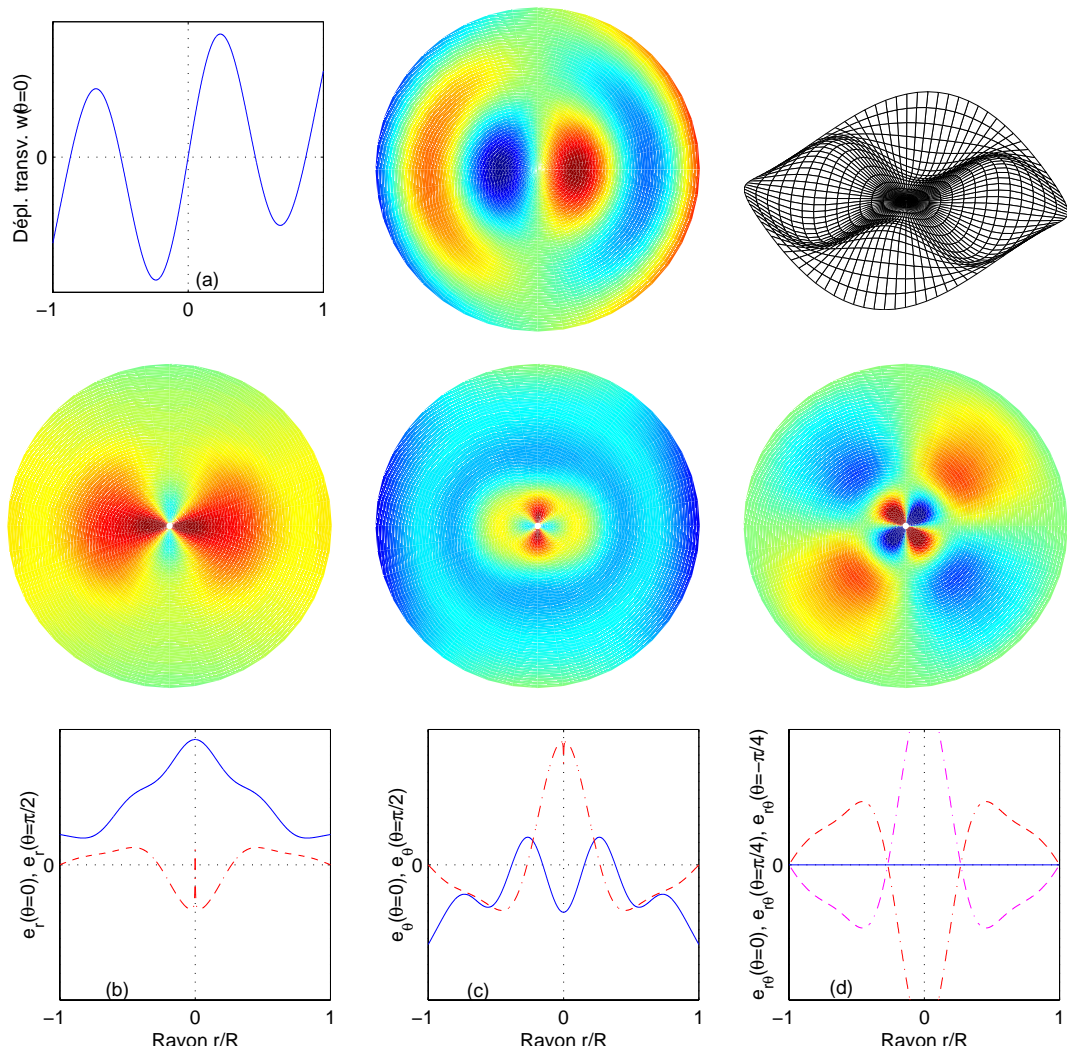


FIG. 5.14 – *Idem que la figure précédente pour le mode (1,2)*

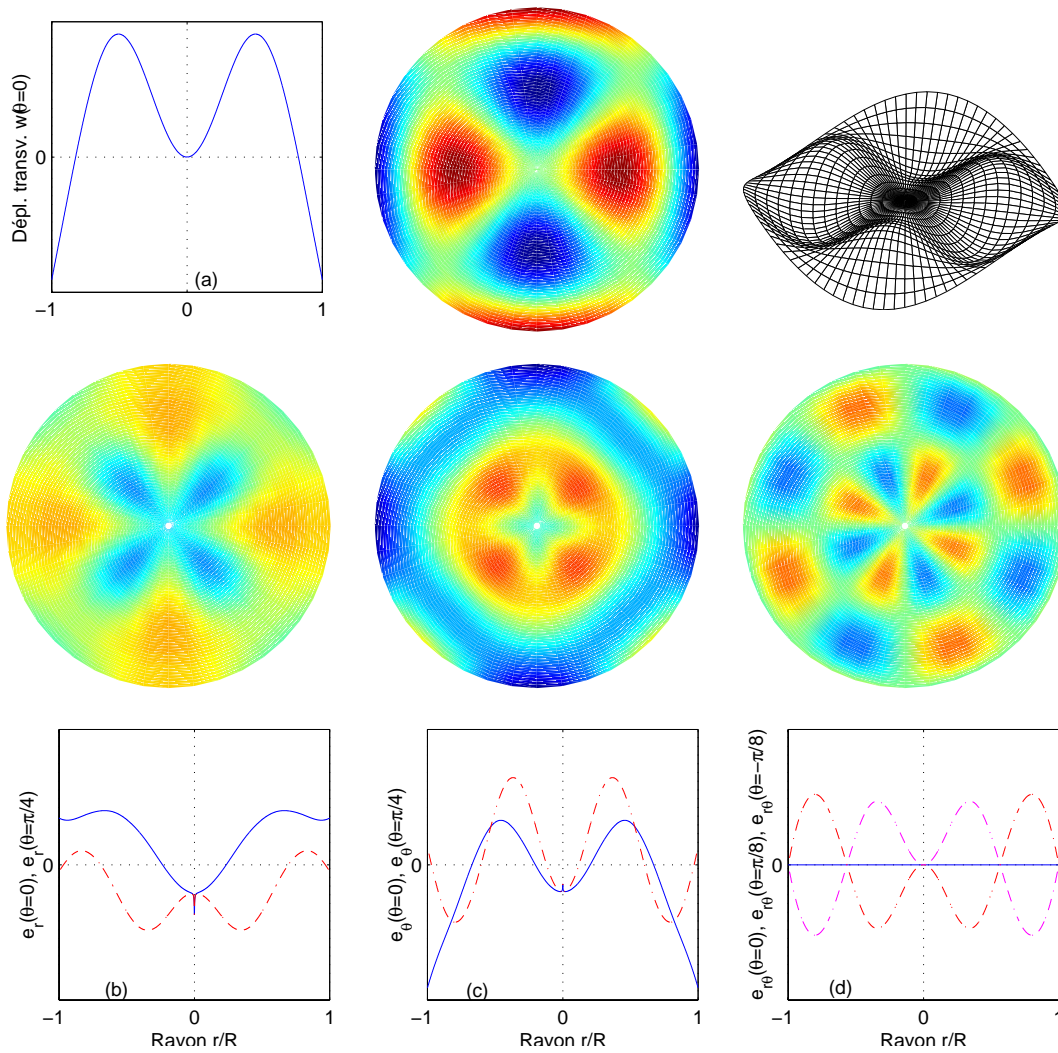


FIG. 5.15 – Idem que la figure précédente pour le mode (2,1)

propres. Ainsi, de faibles imperfections peuvent changer radicalement les relations de combinaisons de résonances du paragraphe 5.1.1, et par suite le choix des modes impliqués dans la déformation. C'est pour cette raison que deux plaques légèrement différentes par leur géométrie peuvent avoir des réponses spatiales assez éloignées, et que *ce sont les valeurs des fréquences propres et non les déformées modales qui gouvernent les différents couplages entre modes propres*.

### 5.4.3 Vibrations de membrane en régime couplé

Lorsque, cette fois-ci  $q_1$  et  $q_2$  sont non-nuls, on montre que parmi les coefficients  $G_{12b}$  qui interviennent, seuls ceux où  $\Psi_b = \Psi_{2lm} = \Psi_{2(2k)m} = S_{(2k)m}(r) \cdot \sin 2k\theta$  est asymétrique avec  $l = 2k$  rayons nodaux sont non nuls. On obtient alors l'expression de la fonction de force dans ce cas là :

$$F(r, \theta, t) = \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} G_m^0 S_{0m}(r) \right] (q_1^2 + q_2^2) + \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} G_m^* S_{2k m}(r) \cos 2k\theta \right] (q_1^2 - q_2^2) + 2 \left[ \sum_{m=1}^{+\infty} G_m^* S_{2k m}(r) \sin 2k\theta \right] q_1 q_2. \quad (5.62)$$

Ce résultat est identique à ceux de Efstathiades [35].

## 5.5 Conclusion

L'approche développée dans les chapitres 3, 4 et 5 est générale, et peut être appliquée à d'autres milieux minces, et en particulier aux cymbales et aux gongs. Pour cela, les étapes suivantes sont envisageables :

- Il faut d'abord écrire les équations régissant les vibrations non-linéaires de coques de révolution minces, faiblement courbées ("shallow" en anglais), avec un profil quelconque. Il existe un analogue de la théorie présentée ici pour les plaques dans le cas des coques sphériques [136], qui doit pouvoir être étendu à un profil non circulaire.
- La partie spatiale du problème est basée sur un développement de la solution sur les modes propres de la structure linéaire. Leurs propriétés d'orthogonalités sont indispensables. On obtient alors un système d'une infinité d'équations différentielles non-linéaires et couplées, du type de (4.65). Le calcul des modes propres peut ensuite être traité de différentes manières ; analytique exacte (c'est l'approche adoptée ici), analytique approchée avec des méthodes de type Galerkin, ou numérique, avec la méthode des éléments finis, par exemple. Le calcul des coefficients de couplage  $\Gamma_{pq\alpha u}$  et  $\beta_{pqu}$  découle alors du calcul précédent des modes propres.
- La seconde partie du problème consiste à résoudre le système temporel. On commence tout d'abord par simplifier le nombre de modes pris en compte, ce qui limite la taille du système à intégrer. Cela peut être effectué après analyses expérimentales du types de celles présentées au paragraphe 2.4. Ensuite, là encore, plusieurs méthodes sont possibles. En régime faiblement non-linéaire, les méthodes de perturbation donnent de bons résultats analytiques approchés. Dans les autres cas, des résolutions numériques sont souvent indispensables.







## Validations expérimentales

Le but de ce chapitre est de présenter une série de mesures en vue de vérifier les développements théoriques établis au chapitre précédent. La plaque est excitée au moyen d'un aimant collé sur la structure et mise en vibration avec un solénoïde. Le signal d'excitation est choisi sinusoïdal, de fréquence proche d'une fréquence propre de la plaque. Comme au chapitre précédent, les deux cas d'un mode axisymétrique et d'un mode asymétrique sont considérés. Dans ce dernier cas, les phénomènes d'échange d'énergie entre les deux configurations préférentielles sont mis en évidence. Des "backbone curves" expérimentales sont comparées à celles issues de la théorie, ce qui permet de valider les approximations du modèle. Ces résultats ont fait l'objet d'un article soumis pour publication [114].

### 6.1 Détails expérimentaux

Nos expériences ont été menées sur une plaque circulaire de diamètre extérieur  $2a = 220$  mm, d'épaisseur  $h = 1.6$  mm, fabriquée en laiton de masse volumique  $\rho = 7974$  kg.m<sup>-3</sup>, de module d'Young  $E = 85.10^9$  Pa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.38$ . Trois petits trous de diamètre 2 mm ménagés près du bord permettent de suspendre la plaque au moyen de fils de nylon.

#### Appareillage et instruments de mesure

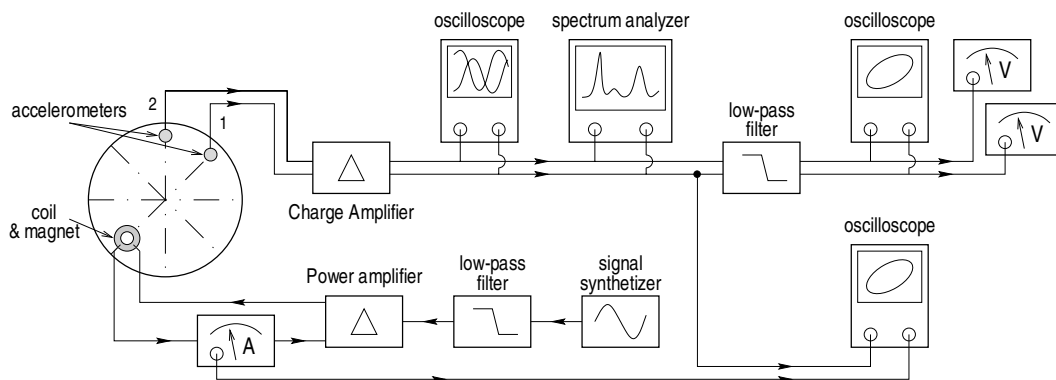


FIG. 6.1 – Schéma expérimental utilisé pour les mesures.

Accéléromètres 1 & 2	Bruel & Kjør	4374
Amplificateur de charge	Bruel & Kjør	Nexus™
Filtres pas-bas	Rockland	1042F
Multimètres	Philips	PM2519
Synthétiseur de signal	Fluke	PM5193
Amplificateur de puissance	Crown	Macrotech 2400
Ampèremètre	Hewlett-Packard	3478A
	Ateliers Pérly, Paris	Univa 100
Analyseur de spectre	Bruel & Kjør	2035
Oscilloscopes	Tektronix	5110
		DM44

 TAB. 6.1 – *Appareils utilisés durant les expériences*

L'appareillage utilisé durant les mesures est représenté sur la figure 6.1 et les références des différents appareils sont précisées dans le tableau 6.1.

La plaque est entraînée en vibration par un aimant de diamètre 8 mm, collé sur la structure au moyen de cire d'abeille, et mis en vibration par une bobine. La bobine est alimentée par un courant sinusoïdal. La position de l'aimant sera choisie selon les expériences soit (i) au centre de la plaque (§ 6.2, *Cf.* Fig. 6.2), pour exciter un mode axisymétrique, soit (ii) sur un nœud de la configuration 2, pour n'exciter que la configuration 1 d'un mode asymétrique (§ 6.3, *Cf.* Fig. 6.4). Le signal de sortie du synthétiseur est amplifié par un amplificateur de puissance, pour atteindre des intensités compatibles avec les amplitudes des efforts désirées. Un filtre passe-bas permet d'éliminer des harmoniques indésirables dans le signal d'excitation. La position de la bobine par rapport à l'aimant est ajustée de sorte que le signal dépende le moins possible de la position de l'aimant<sup>1</sup>, et ainsi que le système bobine - aimant soit linéaire (*Cf.* § A en annexe).

Le coefficient de proportionnalité entre la force et l'intensité a été mesuré en régime harmonique. Les résultats, présentés en annexe (§ A), montrent que ce coefficient dépend de la fréquence  $f_{xc} = \Omega/2\pi$  du signal, probablement à cause de courants de Foucault qui se développent dans l'aimant, et qui dissipent une partie de l'énergie. Une autre influence de ces courants se fait sentir à forte intensité par un échauffement de l'aimant qui peut aller jusqu'à faire fondre la cire qui le maintient collé. Une valeur moyenne du coefficient de proportionnalité entre l'amplitude de la force et l'amplitude du courant dans la bobine est  $0.18 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}$ , pour des fréquences  $\Omega$  entre 200 et 2000 Hz, et pour une position de la bobine situé à une distance  $d = e/2$  de la plaque, où  $e$  est l'épaisseur de l'aimant (*Cf.* Fig. A.1, p. 202, en annexe). C'est cette valeur qui sera utilisée dans la suite pour calculer un ordre de grandeur de la force imposée sur la plaque, en mesurant l'intensité du courant avec l'ampèremètre.

Les vibrations sont mesurées avec des accéléromètres, qui délivrent l'accélération locale de la plaque, à l'endroit où ils sont collés. Selon les expériences, soit (i) un accéléromètre est collé au centre pour mesurer l'accélération d'un mode axisymétrique (§ 6.2, *Cf.* Fig. 6.2), soit (ii) deux accéléromètres sont utilisés pour mesurer l'accélération des deux configurations préférentielles. Pour ce dernier cas, l'accéléromètre 1 (resp. 2) est collé sur un rayon nodal de la configuration 2 (resp. 1), de sorte que les vibrations des deux configurations sont correctement différenciées (§ 6.3, *Cf.* Fig. 6.4). Les signaux sont traités par un amplificateur de charge. Un oscilloscope et un analyseur de spectre sont utilisés pour observer l'évolution temporelle et le spectre de Fourier des accélérations

<sup>1</sup>Le facteur de proportionnalité entre l'intensité du courant dans la bobine et la force appliquée sur l'aimant dépend du champ magnétique local créé par le système (bobine, aimant, plaque), qui n'est pas uniforme. L'aimant est en position adéquate lorsque son centre est situé dans le plan latéral de la bobine (*Cf.* § A en annexe).

mesurées. Deux multimètres permettent de calculer la valeur efficace des signaux, et la différence de phase entre les deux oscillations est mesurée graphiquement sur l'oscilloscope. La différence de phase entre l'excitation et l'accélération de la configuration 1 est mesurée avec un deuxième oscilloscope, en utilisant la tension aux bornes de l'ampèremètre, qui est proportionnelle à l'intensité qui le traverse (L'ampèremètre peut être vu comme une résistance très faible).

Lorsque la plaque est soumise à des amplitudes d'oscillation de l'ordre du millimètre, les signaux d'accélération délivrés par les accéléromètres ne sont pas des sinusoïdes pures, comme ce serait le cas dans un système linéaire ; ils présentent des harmoniques d'amplitude parfois non-négligeable, qui perturbent les mesures. C'est pour cette raison que des filtres passe-bas sont introduits, de sorte que les valeurs mesurées correspondent à la *fondamentale* du signal, de fréquence  $\Omega$ . Cela facilite les mesures des phases à l'oscilloscope, et les résultats donnés par les multimètres sont de bonnes estimations de la valeur efficace des signaux<sup>2</sup>.

### Mesure des courbes de résonance

Dans ce qui suit, des courbes de résonances expérimentales sont présentées et comparées à celles issues de la théorie (Figures 5.2 et 5.6). L'amplitude de l'excitation est gardée constante, et notée  $F_{exc}$ . Sa fréquence est lentement variée autour des fréquences propres des modes mesurés. Les amplitudes des *déplacements* correspondants aux mesures des accéléromètres sont alors tracées en fonction de la fréquence d'excitation. Pour cela, il faut intégrer deux fois les signaux ; en gardant à l'esprit qu'ils sont sinusoïdaux, on utilise les formules suivantes :

$$w_{mi} = \frac{\sqrt{2}}{\Omega^2} s_i^{(rms)}, \quad (6.1a)$$

$$\gamma_i = \varphi_i + \pi, \quad (6.1b)$$

où  $(s_i, \varphi_i)$  représentent respectivement l'amplitude et la phase du signal d'*accélération* par rapport au signal d'excitation  $F(t)$ , et  $(a_i, \gamma_i)$  sont l'amplitude et la phase du déplacement  $w_i$  (Cela a déjà été utilisé pour des expériences similaires sur le gong, au paragraphe 2.4.2). Pour fixer les idées, leurs expressions mathématiques sont :

$$F(t) = F_{exc} \cos \Omega t, \quad (6.2a)$$

$$w_i = w_{mi} \cos(\Omega t - \gamma_i). \quad (6.2b)$$

## 6.2 Mode axisymétrique

Des mesures de courbes de résonance du premier mode axisymétrique (0,1), de fréquence propre  $f_{01} = 197$  Hz, ont été menées sur la plaque dont les caractéristiques sont énumérées en exergue du paragraphe 6.1. La plaque est suspendue par deux fils de nylon. Le troisième est omis pour minimiser la précontrainte du plan moyen de la plaque introduite par la tension des fils. L'aimant et l'accéléromètre sont collés au centre de la plaque (figure 6.2). Le bord de la plaque est supposé être libre, en supposant que les fils perturbent le moins possible le mouvement du bord.

Il s'agit ici de les comparer au modèle de vibration unimodale axisymétrique établi au paragraphe 5.2.1. Pour cela, on décide de procéder à un *recalage de modèle*, c'est-à-dire d'ajuster les paramètres du modèle théorique, de façon à faire coïncider le mieux possible les courbes de résonance théoriques avec les mesures. Les paramètres du modèle sont au nombre de quatre : la pulsation propre  $\bar{\omega}_0$ , le forçage  $Q$ , le coefficient d'amortissement  $\bar{\mu}$  et le coefficient du terme non-linéaire  $\Gamma$ . Nous noterons

<sup>2</sup>Voir note 4, p. 37.

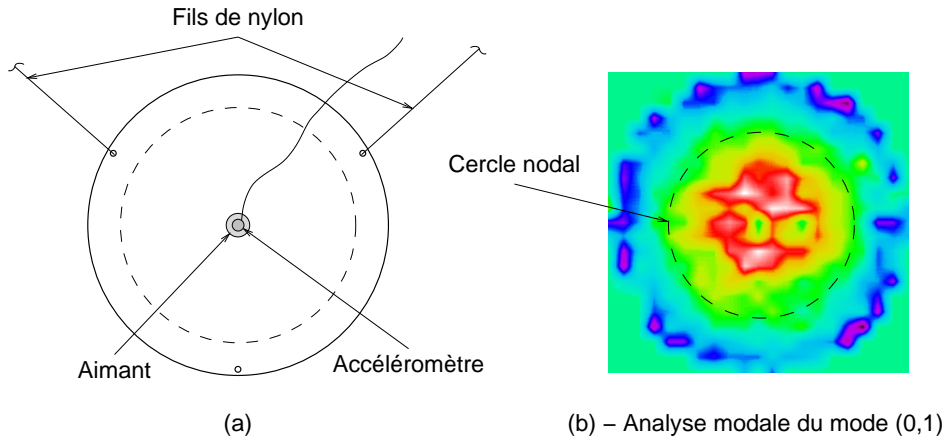


FIG. 6.2 – (a) - Fixation de la plaque avec des fils de nylon ; position de l'accéléromètre et de l'aimant. (b) : vue 2-D de la déformée modale du mode (0,1), issue d'une analyse modale in situ (le protocole est celui décrit au § 2.2).

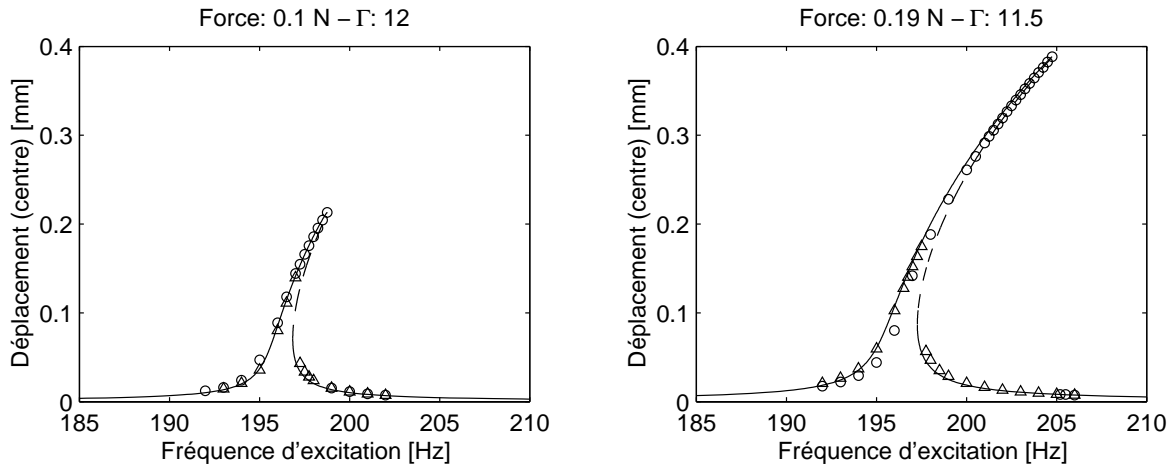


FIG. 6.3 – Recalage du modèle sur les expériences pour deux amplitudes d'excitation différentes ; les 'o' sont obtenus en augmentant la fréquence, les 'Δ' en diminuant la fréquence.

	Modèle de plaque parfaite <sup>a</sup>	Résultats du recalage	
		Exc. faible	Exc. forte
Fréquence propres	$f_{01} = 196.7 \text{ Hz}$ ( $\bar{\omega}_{01} = 9.17$ )	$f_0 = 196 \text{ Hz}$ ( $\bar{\omega}_0 = 9.14$ )	
Forçage	–	$F_{exc} = 0.10 \text{ N}$ ( $Q = 821$ )	$F_{exc} = 0.19 \text{ N}$ ( $Q = 1497$ )
Amortissement	–	$\mu = 1.2 \text{ s}^{-1}$	
Coef. non-linéaire	$\Gamma_{01} = 8.58$	$\Gamma = 12$	$\Gamma = 11.5$

<sup>a</sup>Valeurs issues du calcul avec les modes propres théoriques (§ 4.3.1, Tab. 5.1).

TAB. 6.2 – Différents paramètres du modèle unimodal axisymétrique.

ici les grandeurs adimensionnées surmontées d'une barre ; leur relation avec les grandeurs physiques associées sont (Eq. (4.11), p.91),

$$r = L\bar{r}, \quad w_m = \frac{h^2}{L} R_{01}(r_{mes})a, \quad (6.3a)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{D}{m}} \bar{\omega}_0, \quad f_{exc} = \frac{1}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{D}{m}} (\bar{\omega}_0 + \varepsilon\sigma), \quad (6.3b)$$

$$\mu = \frac{Eh^5}{mL^4} \sqrt{\frac{m}{D}} \bar{\mu}, \quad (6.3c)$$

$$Q = \frac{L^5}{Eh^7} R_{01}(r_{exc}) F_{exc} \quad (6.3d)$$

où  $L$  est le rayon de la plaque (pour ne pas le confondre avec l'amplitude  $a$  issue du modèle),

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 33.9 \text{ N.m}, \quad (6.4a)$$

$$m = \rho h = 12.8 \text{ kg.m}^{-2} \quad (6.4b)$$

$$\varepsilon = 12(1-\nu^2) \frac{h^2}{L^2} = 0.0022, \quad (6.4c)$$

sont respectivement la rigidité en flexion, la masse surfacique de la plaque et le petit paramètre.  $w_m$  est l'amplitude du déplacement définie par l'équation (6.1a).  $r_{mes}$  et  $r_{exc}$  sont les rayons des points d'excitation et de mesure (ici,  $r_{mes} = r_{exc} = 0$ ), qui permettent d'introduire dans  $w_m$  et  $Q$  le facteur correctif dû à la déformée modale  $R_{01}$ .

Le calcul de  $\Gamma$  et de  $Q$  est possible à partir de la position  $(\sigma_A, a_A)$  du sommet de la courbe de résonance expérimentale, avec les formules (Cf. Eq. 5.27 et Fig. 5.2) :

$$a_A = \frac{Q}{2\bar{\omega}_0\bar{\mu}}, \quad \sigma_A = \frac{3}{32} \frac{\Gamma Q^2}{\bar{\omega}_0^3 \bar{\mu}^2} \quad (6.5)$$

Il suffit alors d'ajuster  $\bar{\omega}_0$ , proche de  $\bar{\omega}_{01}$ , et  $\bar{\mu}$  de sorte que les courbes se superposent au mieux.

Des mesures pour deux valeurs de l'excitation sont représentées sur la figure 6.3 par des 'o' et des 'Δ'. Le phénomène d'hystérésis et les phénomènes de saut sont clairement visibles. Le résultat du recalage est superposé sur les mêmes figures en trait plein, et les coefficients correspondants sont précisés dans le tableau 6.2. Le coefficient  $\Gamma$  issu du recalage est proche de celui calculé à partir des déformées modales théoriques. Les courbes de résonance théoriques et expérimentales étant très voisines, on peut considérer que le modèle décrit au paragraphe 5.2.1 fournit une excellente prédiction du comportement vibratoire unimodal axisymétrique de la plaque.

## 6.3 Couplage non-linéaire entre les deux configurations préférentielles

De la même façon qu'au paragraphe précédent, on se propose ici de comparer le modèle aux résultats expérimentaux, dans le cas où le mode excité est asymétrique.

### 6.3.1 Configurations préférentielles

La plaque est suspendue dans les mêmes conditions que dans le cas des vibrations axisymétriques présentées au paragraphe précédent (figure 6.4(a)). Le mode asymétrique (2,0) a été choisi pour illustrer le recalage de modèle dans cette étude. Une analyse modale préliminaire, centrée autour des fréquences propres des deux configurations préférentielles du mode (2,0), a été menée avec le protocole décrit au paragraphe 2.2. Les déformées modales obtenues sont représentées sur les figures

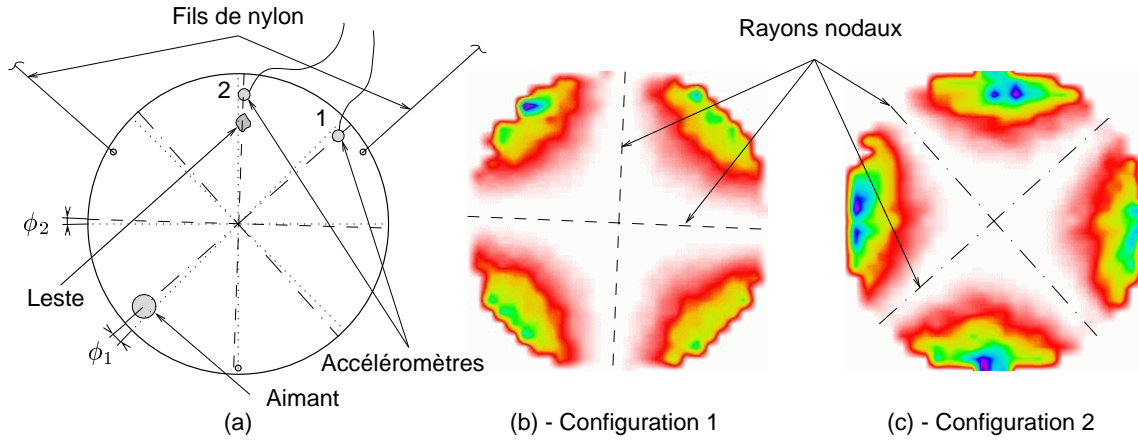


FIG. 6.4 – (a) - Fixation de la plaque avec des fils de nylon ; positions des accéléromètres et de l'aimant relatives aux rayons nodaux des deux configurations préférées. (b, c) - vue 2-D des déformées modales des deux configurations préférées du mode (2,0), issue d'une analyse modale *in situ*.

	Configuration 1 : $f_1$ (Hz)	Configuration 2 : $f_2$ (Hz)
Plaque nue et suspendue	108	111
Avec les deux accéléromètres	107.5	110.5
Avec l'aimant	106	111
Avec aimant et accéléromètres	105.5	110.5
Avec leste, aimant et accéléromètres	105.5	108

TAB. 6.3 – Mesure des fréquences propres des deux configurations

6.4(b,c). Si la plaque était parfaite (homogène, isotrope, circulaire et d'épaisseur constante), avec des conditions aux limites parfaitement libres, la position des rayons nodaux serait arbitraire. Dans le cas présent, les fils de suspension fixent la position des rayons nodaux, dans une configuration à peu près symétrique par rapport à la verticale. L'ajout de l'aimant et de l'accéléromètre collé sur les nœuds ou les ventres de l'une ou l'autre des configurations préférées, change très peu la position des rayons nodaux. Cette dernière peut être mesurée par deux angles  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , par rapport à la symétrie verticale. Leur différence,  $|\phi_1 - \phi_2|$  représente le décalage angulaire introduit par les imperfections de la plaque qui a été évoqué au paragraphe 5.3.1. Ce décalage est ici le résultat (i) d'imperfections structurelles éventuelles, (ii) de la dissymétrie verticale introduite par les fils de suspension et, (iii) de l'influence des masses additionnelles collées sur la plaque. La valeur exacte du décalage angulaire est de l'ordre de quelques degrés.

La position de l'aimant et des accéléromètres doit être ajustée précisément. Cela se fait en deux étapes. Tout d'abord, les analyses modales de la figure 6.4(b,c) permettent de localiser approximativement la position des rayons nodaux. Ensuite, une position optimale est déterminée, de sorte que le signal de l'accéléromètre 2 délivre un signal d'amplitude la plus faible possible lorsque l'aimant excite la configuration 1. Il est, en effet, difficile de n'exciter que la configuration 1, si bien qu'une excitation résiduelle de la configuration 2 est inévitable, à cause de la surface finie de l'aimant.

Les fréquences propres  $f_1$  et  $f_2$  des deux configurations sont légèrement différentes, et dépendent aussi des conditions expérimentales (i), (ii) et (iii) énumérées précédemment. Le tableau 6.3 regroupe leurs valeurs, associées à différentes configurations des masses additionnelles. Elles ont été mesurées

graphiquement au moyen de l'analyseur de spectre, avec la plaque vibrant en régime libre. Les masses sont positionnées comme précisé sur la figure 6.4(a). L'aimant, de masse 6 g, collé sur un nœud de la configuration 2, à 1 cm du bord, diminue la fréquence propre de la configuration 1 d'approximativement 2 Hz. Un accéléromètre, de masse 0.6 g, à une position similaire, diminue  $f_1$  de 0.5 Hz. Un lest de 11 g est ajouté sur un ventre de la configuration 2 pour diminuer  $f_2$  et ainsi diminuer l'écart entre  $f_1$  et  $f_2$ , pour faciliter le couplage.

Les variations de la position des rayons nodaux et des fréquences propres des configurations préférentielles, a fait l'objet d'une étude méticuleuse dans [121].

### 6.3.2 Observations expérimentales

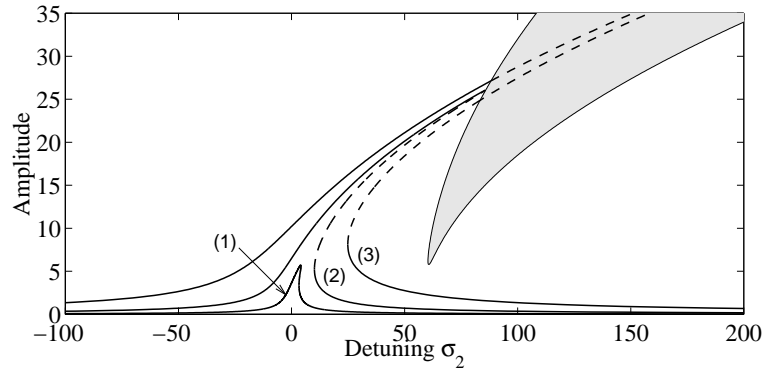


FIG. 6.5 – Solutions 1DDL théoriques et région d'instabilité pour trois niveaux de forçage différents ; (1) :  $F_{dr} = 9.9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ , (2) :  $45 \cdot 10^{-3} \text{ N}$  et (3) :  $0.17 \text{ N}$ . (1) et (3) correspondent aux deux situations expérimentales des figures 6.6 et 6.7 ; (2) correspond au forçage minimum nécessaire à l'obtention du régime couplé.

Ce paragraphe permet d'illustrer, avec des résultats expérimentaux, les phénomènes de couplage entre les deux configurations préférentielles mis en évidence théoriquement au paragraphe 5.3.2. La configuration de la plaque est celle de la figure 6.4(a), avec les fréquences propres de la dernière ligne du tableau 6.3. Le désaccord est ici positif, ce qui correspond à  $\sigma_1 > 0$  dans le modèle.

Dans ce qui suit, la réponse de la plaque est analysée pour deux niveaux de forçage, qui sont représentés sur la figure 6.5 par les solutions 1DDL (Cf. § 5.3.2) notées (1) et (3). On peut remarquer que comme la courbe (1) n'entre pas dans la région d'instabilité, aucun régime couplé n'est attendu. En revanche, la courbe (3) y entre, ce qui prédit qu'un régime couplé peut prendre naissance, entraînant un transfert d'énergie de la configuration 1 vers la configuration 2. Le forçage correspondant à la courbe (2) est le minimum nécessaire pour obtenir un régime couplé. Il serait juste de représenter les courbes dans un espace en trois dimensions ( $f_{exc}, w_{m1}, w_{m2}$ ), où un régime de vibration apparaît comme une seule courbe (Cf. Fig. 6.9). Néanmoins, pour plus de clarté, les courbes sont projetées dans un plan amplitude/fréquence d'excitation, où un régime donné est représenté par deux courbes, une pour  $w_{m1}$ , l'autre pour  $w_{m2}$ .

La figure 6.6 montre les amplitudes et les phases ( $w_{m1}, \gamma_1$ ) et ( $w_{m2}, \gamma_2$ ) (Cf. Eq. (6.2a,b)) des déplacements  $w_1$  et  $w_2$  des deux configurations préférentielles, pour une amplitude d'excitation constante de  $9.9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ , correspondant à la courbe (1) de la figure 6.5. Le forçage résiduel de la configuration 2 produit une faible excitation de celle-ci, observable autour de sa fréquence propre 108 Hz. Les réponses  $w_1$  et  $w_2$  des deux configurations peuvent être qualifiées de "découplées" du fait que leur comportement est similaire à celui d'un oscillateur de Duffing forcé (Cf. 5.2). En effet, on constate que



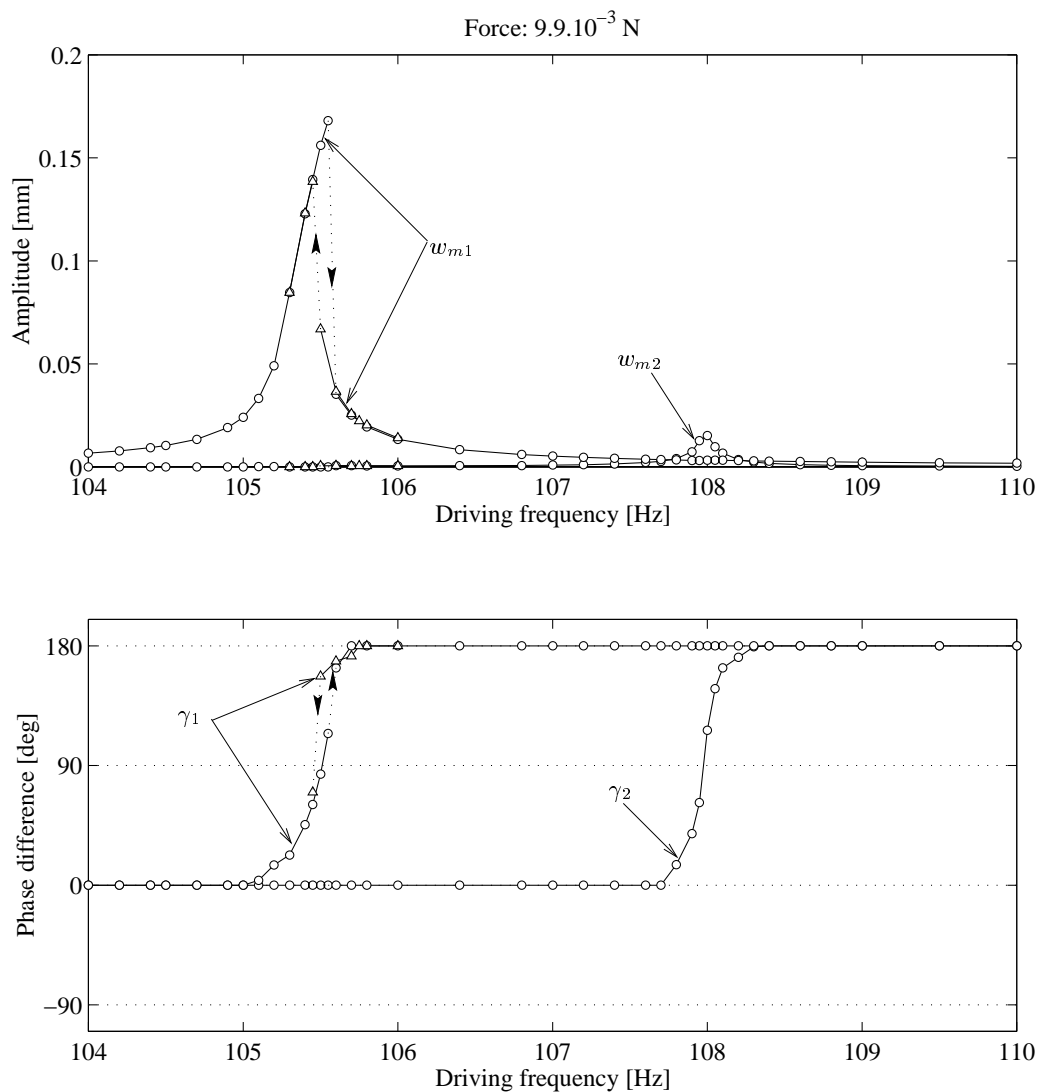


FIG. 6.6 – Courbes de résonance expérimentales des deux configurations préférentielles, pour une amplitude de forçage de  $8.4 \cdot 10^{-3}$  N. 'o' : parcours à fréquences croissantes ; ' $\Delta$ ' : parcours à fréquences décroissantes. ( $w_1, \gamma_1$ ) et ( $w_2, \gamma_2$ ) désignent l'amplitude et la phase des déplacements de chacune des configurations préférentielles.

les amplitudes  $w_{m1}$  et  $w_{m2}$  passent chacune par un pic de résonance, et que les phases  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  augmentent de 0 à  $\pi$ , dans des zones de fréquences localisées autour des fréquences propres  $f_1 = 105.5$  Hz et  $f_2 = 108$  Hz. Le forçage de la configuration 1 est suffisant pour qu'on puisse observer des phénomènes de saut, alors que  $w_2$  reste dans le domaine linéaire.

Une expérience analogue est représentée sur la figure 6.7, avec une amplitude de forçage de 0.17 N, ce qui correspond à la courbe (3) de la figure 6.5. À cette amplitude de forçage, une solution couplée est prévisible. Lorsqu'on parcourt ces courbes à fréquence d'excitation croissante, en partant de  $f_{exc} = 104$  Hz, un seul régime de vibration est possible entre les points  $O$  et  $A$ . À partir du point  $A$ ,  $w_{m2}$  commence à augmenter : la configuration 2 gagne de l'énergie provenant de la configuration 1, qui est directement excitée.  $w_{m1}$  et  $w_{m2}$  augmentent, jusqu'à atteindre le point  $B$ . Entre  $O$  et  $A$ , les deux déplacements  $w_1$  et  $w_2$  sont approximativement en phase. Au début du couplage,  $\gamma_2$  décroît rapidement, et  $w_2$  vient se caler en quadrature avec  $w_1$ , jusqu'à la fin de ce régime. Arrivé au point  $B$ , le système change de régime par le premier saut et se stabilise au point  $C$  avec  $w_{m1}$  et  $w_{m2}$  proche de zéro et les phases égales à  $\pi$  rad. On note  $\zeta_1$  la première branche de solution, parcouru de  $O$  à  $B$ , et  $\zeta_2$  celle atteinte au point  $C$ .

Si l'expérience est maintenant menée à fréquences décroissantes, à partir d'une fréquence d'excitation supérieure à celle du point  $C$ , seule la solution  $\zeta_2$  est atteignable. Le détail de la figure 6.7 est représenté sur la figure 6.8. Lorsque la fréquence est diminuée, le point  $D$  est atteint. On observe alors un saut du système de la solution  $\zeta_2$  vers une nouvelle, appelé  $\zeta_3$ , atteinte au point  $E$ . À partir de là, deux solutions sont possibles. Si on diminue la fréquence d'excitation, le système reste sur la branche  $\zeta_3$ , jusqu'à arriver au point  $F$  où un nouveau phénomène de saut permet au système de se stabiliser sur  $\zeta_1$ . En revanche, si à partir du point  $E$  la fréquence est augmentée,  $w_{m2}$  grandit jusqu'à atteindre le point  $H$ , ou un saut vers la branche  $\zeta_2$  est observé.

Dans la zone où des échanges d'énergie entre les deux configurations sont observés (entre  $A$  et  $B$ ), la différence de phase entre les deux configurations est voisine de  $\pi/2$  rad, si bien que la superposition de leurs oscillations donne naissance à une onde progressive (Cf. § 5.3.4). Cela a été vérifié expérimentalement au moyen d'un stroboscope, et une onde progressive tournant dans le sens trigonométrique a été observée.

On peut remarquer que le régime  $\zeta_1$  est particulier, puisque il est caractérisé par un couplage entre les deux configurations. En revanche, on retrouve pour les branches  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  des caractéristiques typiques d'un oscillateur de Duffing isolé, ce qui s'observe aisément sur la figure 6.9, dans le plan  $(\sigma_2, a_2)$ . Ce dernier comportement est directement lié à l'excitation résiduelle de la configuration 2, qui était supposée nulle pour établir la théorie du paragraphe 5.3.2.

### 6.3.3 Modèle théorique avec $Q_2$ non nul

La différence principale entre les courbes de résonance théoriques du paragraphe 5.3.2 et celles issues des expériences, est que dans le deuxième cas, on ne peut annuler complètement le forçage  $Q_2$  de la configuration 2. Le système dynamique (5.46) gouvernant l'évolution des amplitudes et des phases de la réponse doit alors être étudié en entier, avec  $Q_2$  non nul. Cela conduit à obtenir un  $a_2$  non nul, et l'étude analytique du système et des points fixes (Eq. 5.48) n'est plus possible. Les branches de solutions sont alors calculées avec le logiciel DSTOOL [45], et représentées sur les figures 6.9 et 6.10.

Lorsque  $Q_2$  est non-nul,  $a_2$  n'est jamais nul, si bien que la solution 1DDL n'est plus une solution du système. Cette dernière et la solution couplée sont remplacées par une unique solution,  $\zeta_1$ , qui est voisine, mais décalée vers les  $a_2$  positifs. Une deuxième conséquence est que la résonance du deuxième oscillateur excité par  $Q_2$  (Eq. (5.38c)) est maintenant liée à une valeur particulière de  $a_1$ . Cette résonance n'est visible que pour les faibles valeurs de  $a_1$  (et donc de  $w_{m1}$ ), et elle est liée à

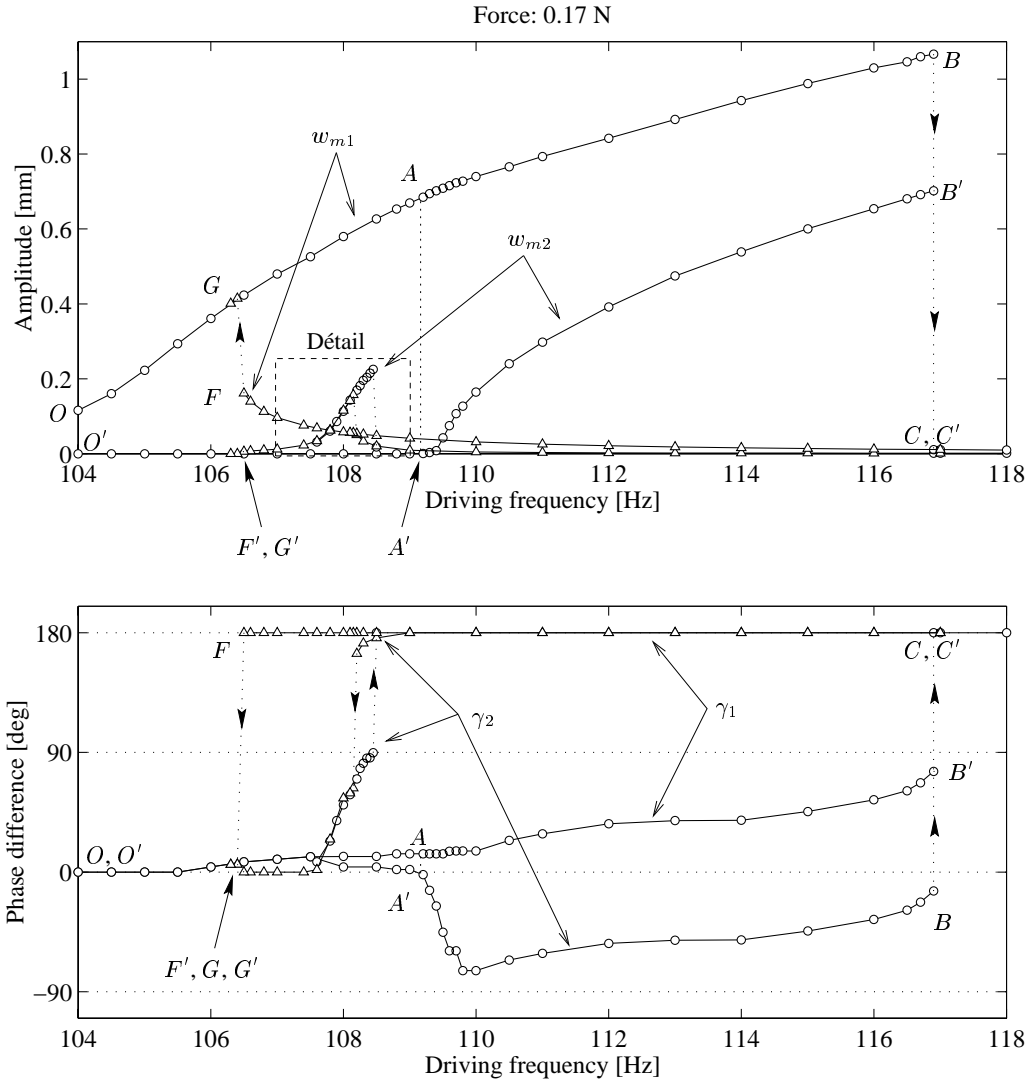


FIG. 6.7 – Courbes de résonance expérimentales des deux configurations préférées, pour une amplitude de forçage de 0.17 N. 'o' : parcours à fréquences croissantes ; 'Δ' : parcours à fréquences décroissantes. ( $w_1, \gamma_1$ ) et ( $w_2, \gamma_2$ ) désignent l'amplitude et la phase des déplacements de chacune des configurations préférées.

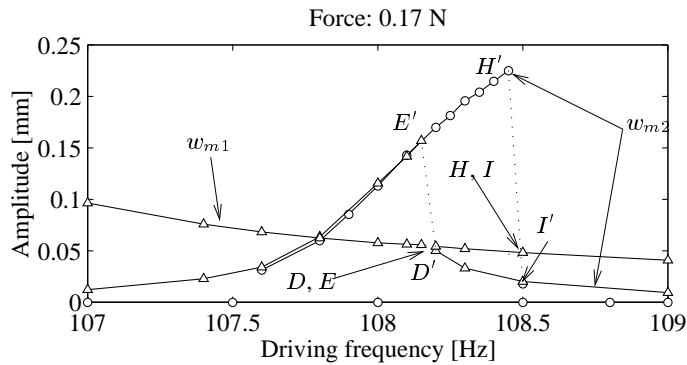


FIG. 6.8 – Détail de la figure 6.7.

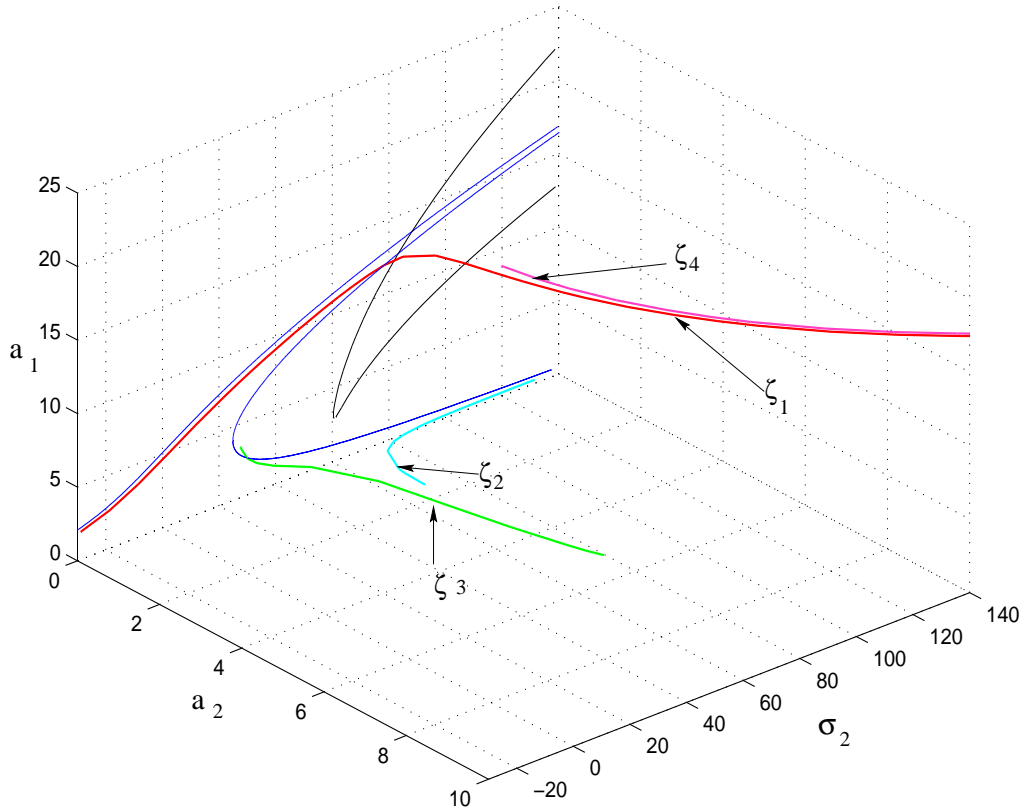


FIG. 6.9 – Différentes solutions théoriques issues du recalage du modèle sur l'expérience de la figure 6.7. La courbe de résonance de la solution 1ddl pour  $w_{m1}$  lorsque  $Q_2 = 0$  est tracée dans le plan  $w_{m2} = 0$  pour clarifier la figure, même si elle ne constitue pas une branche de solution. La région d'instabilité, établie avec  $Q_2 = 0$  est aussi représentée.

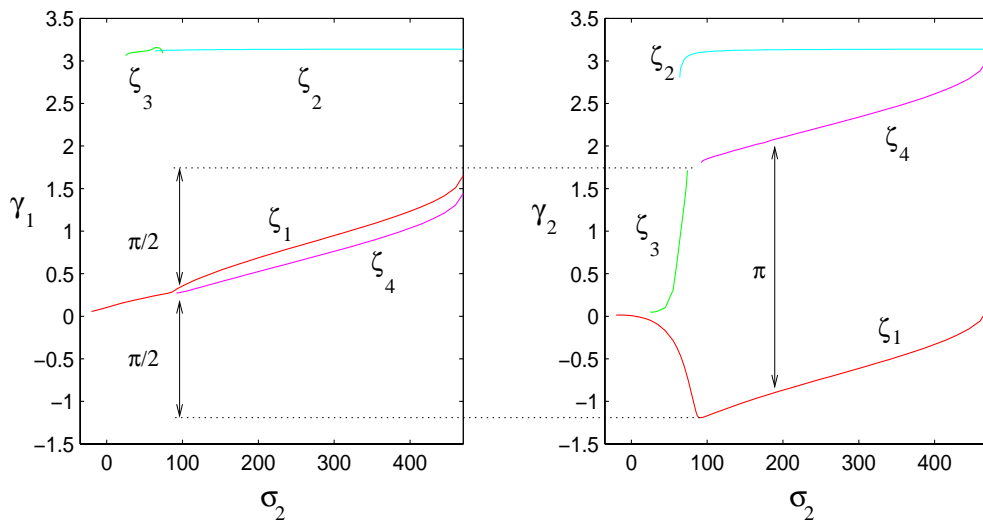


FIG. 6.10 – Phases des différentes branches de la figure 6.9 :  $\gamma_1$  à gauche et  $\gamma_2$  à droite.

la branche de solution inférieure de  $a_1$ . Les solutions correspondantes sont  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ . Cela explique pourquoi la résonance de  $w_2$  n'est observée expérimentalement que lorsque la fréquence d'excitation est diminuée, puisque lorsqu'elle est augmentée, c'est la branche  $\zeta_1$  qui est suivie.

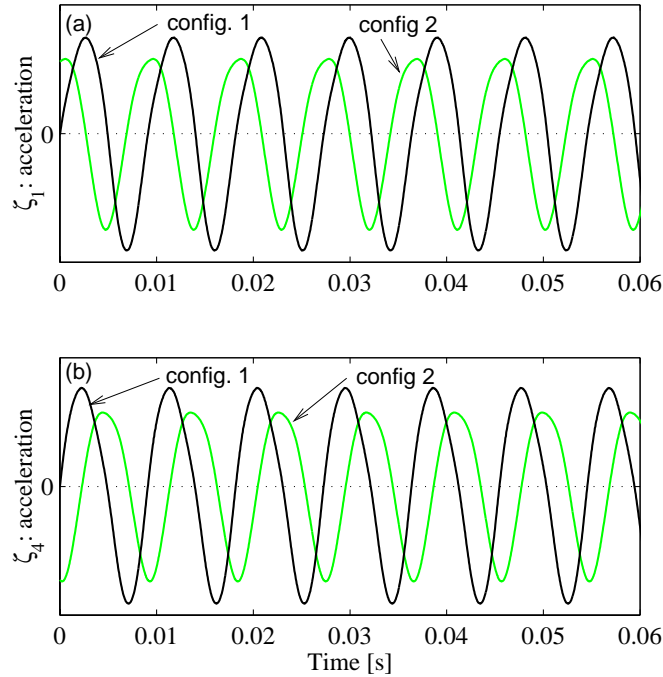


FIG. 6.11 – Accélérations, non filtrées, des deux configurations préférées, pour une excitation de 112 Hz et d'amplitude 0.17 N, pour les deux régimes  $\zeta_1$  (a) et  $\zeta_4$  (b).

La simulation numérique avec  $Q_2$  non-nul permet aussi de mettre en évidence une branche de solution supplémentaire, notée  $\zeta_4$  sur les figures 6.9 et 6.10. Elle prend naissance pour une valeur de fréquence voisine de la fréquence où le couplage apparaît ( $\sigma_2 = 92$  sur les figures 6.9 et 6.10), par une bifurcation *nœud-coï*, et meurt en même temps que  $\zeta_1$ . Elle est caractérisée par des valeurs d'amplitudes voisines de celles de la branche  $\zeta_1$ . Par contre, alors que les valeurs de  $\gamma_1$  pour  $\zeta_1$  et  $\zeta_4$  sont voisines, celles de  $\gamma_2$  montre une différence de  $\pi$  rad (Cf. Fig. 6.10).

Lorsque la fréquence est lentement augmentée, la solution naturelle suivie par le système est  $\zeta_1$ . Les courbes théoriques prédisent qu'une perturbation du système, lorsque la fréquence d'excitation correspond à un  $\sigma_2$  supérieur à 92, peut mener à un saut de  $\zeta_1$  vers  $\zeta_4$ . Cela a été effectivement observé expérimentalement en frappant doucement sur la plaque pour une fréquence de 112 Hz (Cf. Fig. 6.7). L'évolution temporelle des deux configurations est représentée sur la figure 6.11. La quadrature positive ou négative apparaît clairement, et les amplitudes d'une solution à l'autre sont voisines de l'égalité.

Cette solution  $\zeta_4$  n'apparaît pas naturellement en pratique, et il est intéressant de noter que c'est le modèle qui en a prédit l'existence, ce qui a été vérifié expérimentalement ensuite.

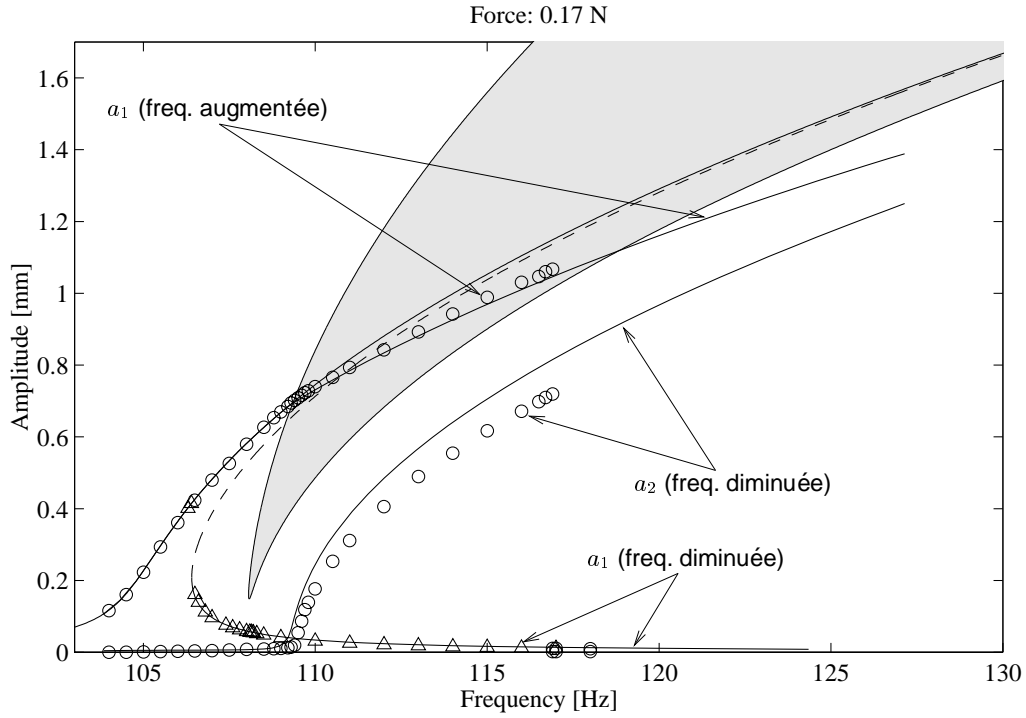


FIG. 6.12 – Recalage du modèle sur les mesures. 'o' : points expérimentaux ; '-' : modèle. Pour plus de clarté, les branches pour  $w_{m2}$  obtenues en diminuant la fréquence (les solutions  $\zeta_2$  and  $\zeta_3$ , montrées sur la figure 6.8) ne sont pas représentées. On obtient la aussi une coïncidence excellente entre modèle et résultats expérimentaux.

	Modèle de plaque parfaite	Mesures	Résultats du recalage
Fréquences propres	$f_{20} = 109.2 \text{ Hz}$ ( $\bar{\omega}_{20} = 5.09$ )	$f_1 = 105.5 \text{ Hz}$	$f_1 = 105.25 \text{ Hz}$ ( $\bar{\omega}_1 = 4.9$ )
		$f_2 = 108 \text{ Hz}$	$f_2 = 108.2 \text{ Hz}$ ( $\bar{\omega}_2 = 5.05$ )
Forçage	–	$F_{exc} = 0.15 \text{ N}$	$F_{exc} = 0.17 \text{ N}$ ( $Q_1 = 1323$ )
	–	–	$Q_2 \simeq Q_1/10 = 150$
Amortissement	–	$\mu_1 = 0.36 \text{ s}^{-1}$	$\mu_1 = 0.4 \text{ s}^{-1}$
	–	$\mu_2 = 0.62 \text{ s}^{-1}$	$\mu_2 = \mu_1$
Coef. non-linéaire	$\Gamma = 1.90$	–	$\Gamma = 1.65$

<sup>a</sup>Valeurs issues du calcul avec les modes propres théoriques (§ 4.3.1, Tab. 5.1).

<sup>b</sup> $f_i$  et  $\mu_i$  sont mesurées en vibrations libres, avec la méthode ESPRIT [54];  $F_{exc}$  est calculée à partir de l'intensité mesurée (Cf. § 6.1).

TAB. 6.4 – Différents paramètres du modèle unimodal asymétrique.

### 6.3.4 Recalage du modèle

Un recalage de modèle similaire a celui effectué dans le cas axisymétrique est présenté ici. Les formules (6.3) sont toujours valables. Le désaccord s'écrit :

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\varepsilon} = \frac{2\pi L^2}{\varepsilon} \sqrt{\frac{m}{D}} (f_2 - f_1). \quad (6.6)$$

On a de plus  $\bar{r}_{mes} = \bar{r}_{exc} = 0.9$ . Le résultat graphique du recalage est représenté sur la figure 6.12, et les valeurs des paramètres sont regroupées dans le tableau 6.4.

On peut constater que l'utilisation de la méthode ESPRIT, basée sur une reconstruction du signal en somme de sinusoides amorties [54], conduit à estimer des valeurs du coefficient d'amortissement, différentes pour les deux configurations, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle. Cela explique probablement pourquoi il est difficile de trouver des valeurs des paramètres pour lesquelles les courbes d'amplitude  $w_{m2}$  se superposent (Fig. 6.12). La présence des éléments collés à la cire d'abeille sur la structure à tendance à amortir la vibration, et le lest fixé sur un ventre de la configuration 2, explique probablement le fait que  $\mu_2 > \mu_1$ .

La figure 6.12 montre que même si les points expérimentaux sont assez proches des courbes théoriques, la fréquence théorique du saut de  $\zeta_1$  vers  $\zeta_2$  (127 Hz) est différente de celle mesurée expérimentalement (112 Hz). On peut montrer avec le logiciel DSTOOL, par exemple, que le bassin d'attraction de la solution  $\zeta_1$  se réduit considérablement à mesure que la fréquence d'excitation augmente. Cela signifie que cette solution est de plus en plus sensible à une perturbation extérieure (comme l'augmentation discrète de fréquence d'excitation pour passer d'un point de mesure au suivant), et donc qu'elle saute d'autant plus facilement vers  $\zeta_2$ . Cela est aussi un effet de  $\mu_2 > \mu_1$ .

En conclusion, on a montré que toutes les caractéristiques qualitatives (phénomènes de saut, existence de la résonance non-linéaire pour  $w_2$  uniquement à fréquences descendantes, existence de la solution  $\zeta_4$ ) mises en évidence durant les expériences, sont prédites par le modèle. Quantitativement, les différences entre les courbes expérimentales et théoriques sont assez faibles.

## 6.4 Cas d'un désaccord négatif entre les pulsations propres

### 6.4.1 Un peu de théorie

Le cas d'un désaccord négatif entre les pulsations propres a été examiné en plaçant l'aimant sur un des nœuds de la configuration 1, de plus basse fréquence propre, si bien que la configuration 2 se trouve maintenant excitée en priorité. Sa déformée modale est celle de la figure 6.4c, et son déplacement est noté  $w_2$ . Dans le modèle,  $\sigma_1$  est négatif.

Ce cas particulier est intéressant, car la région d'instabilité se trouve maintenant décalée vers la gauche de la solution 1DDL, si bien que les solutions couplées ne sont possibles que pour des valeurs de l'amplitude d'excitation supérieures à celles nécessaires lorsque  $\sigma_1$  est positif.

La figure 6.13, à comparer avec la figure 6.5, montre de plus qu'il existe des valeurs de  $\sigma_2$  pour lesquelles la solution 1DDL sort de la région d'instabilité, et redevient stable. Cela arrive pour  $\sigma_2 > \sigma^{(e)}$ , où de ce fait, les deux branches de solution 1DDL coexistent. La solution couplée est obtenue en augmentant la fréquence, et en pénétrant dans la zone d'instabilité. En revanche, la solution 1DDL supérieure est atteignable pour  $\sigma_2 > \sigma^{(e)}$  en diminuant la fréquence sur la solution inférieure, de la même façon que lors des expériences sur un oscillateur de Duffing usuel.

Des simulations numériques avec DSTOOL montrent que dans le cas étudié ici, l'amplitude de la configuration 1, *non-excitée directement* ici, atteint des valeurs *supérieures* à l'amplitude de  $w_2$ .

<sup>3</sup>Cf. note 1, p. 110

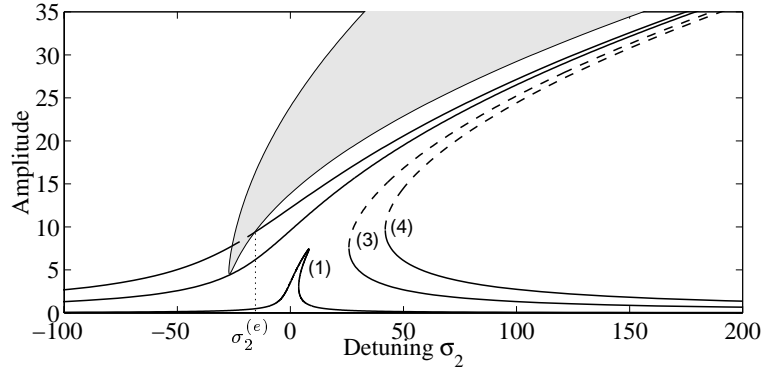


FIG. 6.13 – Solutions IDDL théoriques et région d’instabilité pour trois niveaux de forçages différents, lorsque  $\sigma_1 < 0$ ; (1) :  $F_{exc} = 9.9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ , (3) :  $0.17 \text{ N}$  and (4) :  $0.32 \text{ N}$ . (3) correspond au même niveau de forçage que celui de l’expérience précédente ( $\sigma_1 > 0$ , courbe (3) de la figure 6.5, figure 6.7), et n’est plus suffisant pour obtenir le régime couplé. (4) correspond à la situation expérimentale de la figure 6.14.

Ce fait singulier, qui signifie que l’oscillateur non-excité directement a plus d’énergie que celui excité directement, est observé expérimentalement (Fig. 6.14). Un parallèle peut être établi entre cette situation et un cas de résonance interne décrit dans [109], où les modes non-excités montrent des amplitudes supérieures à celle du mode directement excité.

## 6.4.2 Observations expérimentales

Les figures 6.14 et 6.15 sont similaires aux figures 6.7 et 6.8, avec une amplitude de forçage supérieure ( $F_{exc} = 0.32 \text{ N}$ ) et un désaccord entre les fréquences propres négatif. Les deux fréquences propres sont maintenant  $f_1 = 107.8 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 109.2$ , du fait que l’aimant est maintenant sur un ventre de la configuration 2, qui, d’autre part, n’est plus lestée. On doit garder à l’esprit que la configuration *directement* excitée est maintenant *la deuxième*. Comme prévu au paragraphe précédent, la solution IDDL est stable entre les points  $J$  et  $L$ , sur les figures 6.14 et 6.15. Cette solution peut être atteinte après le saut des points  $F, F'$  aux points  $G, G'$ . Lorsqu’on suit cette dernière solution en diminuant la fréquence, les points  $J, J'$  sont atteints, la solution IDDL entre dans la région d’instabilité, devient instable, et un saut permet de stabiliser le système aux points  $K, K'$ , sur la solution couplée. Le classique saut entre les deux solutions IDDL arrive entre les points  $L$  et  $M$ .

On peut observer que la configuration non-directement excitée, c’est-à-dire  $u_1$  ici, ne montre pas de résonance non-linéaire comme c’est le cas lorsque  $\sigma_1$  est positif (les sauts de  $D'$  vers  $E'$  et de  $H'$  vers  $I'$ , sur la figure 6.8).

## 6.5 Discussion

### 6.5.1 Symétrie du système

Dans toutes les expériences menées sur les plaques, la présence d’harmoniques d’ordre pair (de pulsations  $2\Omega, 4\Omega, \dots$ ) dans les signaux mesurés a été observée systématiquement lorsque l’amplitude devenait suffisamment importante. Cela paraît étonnant du fait que le modèle théorique ne fait intervenir que des équations à termes non-linéaires cubiques, et que la distortion harmonique qui en résulte n’est théoriquement dûe qu’à des harmoniques impaires (de pulsations  $3\Omega, 5\Omega, \dots$ , voir le paragraphe 5.2.1). Ce phénomène a déjà été observé par Kung et Pao [50], dont la forme de leurs signaux de me-



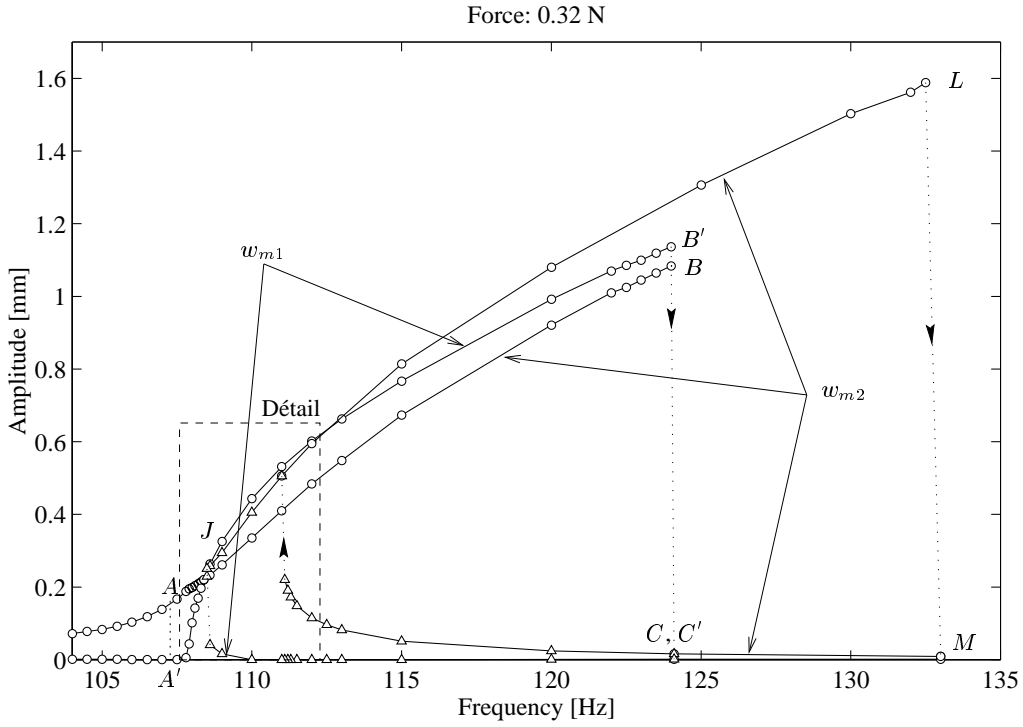


FIG. 6.14 – Courbes de résonance expérimentales des deux configurations préférées, pour une amplitude de forçage de 0.17 N. 'o' : parcours à fréquences croissantes ; 'Δ' : parcours à fréquences décroissantes. ( $w_1, \gamma_1$ ) et ( $w_2, \gamma_2$ ) désignent l'amplitude et la phase des déplacements de chacune des configurations préférées.

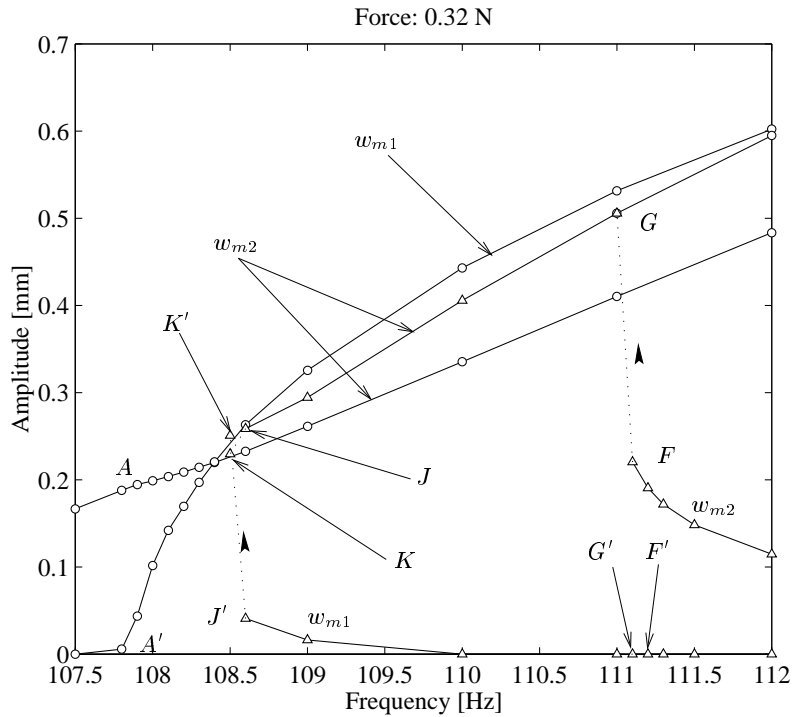


FIG. 6.15 – Détail de la courbe de résonance de la figure 6.14.

sure est composée de périodes asymétriques, ce qui est caractéristique de la présence d’harmoniques paires (voir le paragraphe 8.3). Benamar *et al* ont aussi rapporté dans [9] et étudié dans [6] la présence d’harmoniques paires dans leur signaux de mesure, mais n’ont proposé aucune explication.

La présence d’harmoniques paires peut provenir soit de l’excitation électromagnétique, soit de la structure. Comme le champ magnétique n’est pas uniforme sur l’axe de la bobine, et donc sur le trajet de l’aimant, même si l’intensité du signal est parfaitement sinusoïdale, à grande amplitude, la force appliquée à l’aimant peut présenter des harmoniques paires (Voir annexe A). Une autre source de ces harmoniques peut être une perte de symétrie du système dans la direction transversale, par rapport au plan moyen. Cette symétrie peut être brisée par : (i) les masses additionnelles collées seulement sur un seul côté de la plaque, (ii) un défaut de planéité de la plaque (iii) un défaut de symétrie causé par les fils de suspension.

Une étude théorique et numérique de P. Ribeiro [90] apporte deux éléments d’explication à l’occurrence d’harmoniques paires. Premièrement, lorsque l’excitation est parfaitement transverse, la présence d’une composante continue en plus de la sinusoïde fondamentale crée des harmoniques paires dans la réponse. En second lieu, lorsque l’excitation n’est pas purement transversale, la réponse de la plaque est composée, en plus des harmoniques impaires, d’une composante continue et d’harmoniques paires. Cela provient du fait que le plan moyen est excité directement par la composante longitudinale de l’excitation. Dans ce cas, l’inertie longitudinale n’est plus négligeable.

Dans notre cas, il est difficile de déterminer quelle est la (ou les) raison(s) de la présence de ces harmoniques d’ordre pair.

### 6.5.2 Ordre de grandeur du déplacement

Les modèles théoriques présentés au chapitre précédent (§ 5.2.1 et 5.3.2) sont issus d’un calcul par la méthode des échelles multiples tronqué au premier ordre, qui est théoriquement valide pour un déplacement transverse de l’ordre de  $h^2/L = 0.023$  mm (voir l’équation 4.11 et la discussion qui suit). Or les deux recalages de modèle prouvent que ces derniers rendent compte de l’expérience jusqu’à des amplitudes du déplacement de l’ordre du millimètre, c’est-à-dire de la moitié de l’épaisseur de la plaque.

En revanche, dans le cas de forçages plus importants comme  $F_{exc} = 0.32$  N décrit au paragraphe 6.4, il n’a pas été possible de recalculer quantitativement le modèle sur les expériences. Cela provient probablement d’effets du second ordre, qui ne peuvent plus être négligés pour ces niveaux d’amplitude. Cela est discuté au paragraphe suivant.

En conclusion, même si le modèle est mathématiquement valide pour des déplacements de l’ordre de  $h^2/L$ , il apparaît être encore valable pour  $w$  de l’ordre de la moitié de l’épaisseur,  $h/2 = 0.8$  mm. Cela apporte une nouveauté aux travaux de Nayfeh *et al* [74, 109, 110], dans le sens où les expériences présentées ici, valident leurs travaux pour une gamme plus importante de conditions expérimentales. Néanmoins, une limite théorique précise est difficile à estimer, et des expériences semblent inévitables chaque fois que l’on veut préciser le domaine de validité d’un modèle.

### 6.5.3 Effet du second ordre

Les effets du second ordre peuvent modifier l’étude de façon substantielle [78]. Ils modifient en premier lieu la fréquence des oscillations libres en fonction de l’amplitude [73], ce qui a été évoqué au paragraphe 5.2.2 et qui sera appliqué au cas présent dans la suite. En second lieu, leur introduction dans la théorie oblige à tenir compte de tous les modes non-excités directement par le forçage, et même ceux qui ne sont pas en relation de résonance interne. Le résultat est que les modes propres *linéaires* peuvent être combinés pour former des modes *non-linéaires*, dont les déformées sont faiblement dépendantes de l’amplitude du déplacement [77]. On montre ainsi que l’introduction des

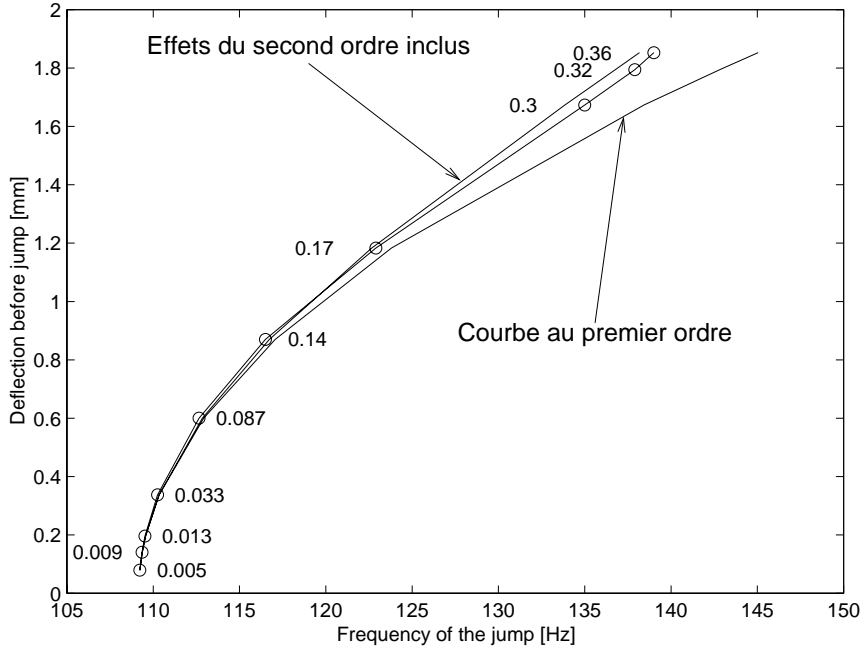


FIG. 6.16 – “Backbone curves” expérimentales comparées à la théorie, limitée au premier et au deuxième ordre. L’amplitude de la force d’excitation est précisée à côté des points expérimentaux. La courbe expérimentale a été mesurée dans les conditions du paragraphe 6.4 ( $\sigma_1 < 0$ ,  $f_1 = 105.5$  Hz,  $f_2 = 108$  Hz)

modes non-linéaires n’est nécessaire que lorsque on décide de poursuivre les développements perturbatif (Cf. § 5.2.1 et 5.3.2) jusqu’à l’ordre 2 en  $\varepsilon$ . On retrouve ainsi les résultat de [6], qui disent que la dépendance en l’amplitude de vibration  $w$  des déformées modales n’est significative que pour de grandes amplitudes, lorsque  $w$  est de l’ordre de 2 fois l’épaisseur. En outre, cela ne change pas le comportement qualitatif du système. Un rappel des références bibliographiques et une discussion sur ce sujet est proposé au paragraphe 4.1.2.

D’après l’équation (5.33), la pulsation d’un oscillateur de Duffing en fonction de l’amplitude des oscillations s’écrit :

$$\bar{\omega} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{9(1 - \nu^2)}{2} \frac{\Gamma}{\omega_0^2} \left( \frac{w_m}{h} \right)^2 - \frac{135(1 - \nu^2)^2}{16} \frac{\Gamma^2}{\omega_0^4} \left( \frac{w_m}{h} \right)^4 \right] \quad (6.7)$$

Une expression voisine<sup>4</sup> est proposée dans [114], obtenue à partir d’une intégration de la trajectoire du système dans le plan de phase pendant une période.

La “backbone curve” a été tracée expérimentalement pour la configuration 2, pour  $\sigma_1 < 0$ , dans les conditions du paragraphe 6.4. Comme la branche supérieure de la solution 1DDL n’est pas contenue intégralement dans la région d’instabilité, il est possible de mesurer les coordonnées  $(f_{xc}, w_m)$  du sommet de la courbe de résonance et ainsi de tracer la “backbone curve” (Cf. § 5.2.2). Le résultat est représenté sur la figure 6.16, superposé avec les solutions théoriques tronquées au premier et deuxième ordre en  $(w_m/h)^2$ , à partir de l’équation (6.7). Cette figure est utile pour déterminer à

<sup>4</sup>Les deux expressions sont égales au premier ordre et diffèrent par le facteur du terme du second ordre, du fait que le  $w_m$  de l’équation 6.7 est l’amplitude de la fondamentale du signal, et non celle du signal entier, qui dépend de l’harmonique 3, non-négligeable au second-ordre

partir de quel niveau de forçage les différentes solutions cessent d'être valides. Ainsi, pour une amplitude d'excitation supérieure à 0.14 N, ce qui correspond à un déplacement de l'ordre de la moitié de l'épaisseur de la plaque,  $h/2 = 0.8$  mm, la solution au premier ordre n'est plus valable. Cela permet d'estimer la limite supérieure de la gamme de validité du modèle du chapitre 5, et montre qu'un développement à l'ordre 2 est nécessaire pour prédire quantitativement les cas où le déplacement est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque  $h$ . En particulier, ces considérations expliquent pourquoi le recalage de modèle n'a pas été possible au paragraphe 6.4, pour une amplitude de la force d'excitation de 0.32 N. Néanmoins, la solution au premier ordre est intéressante, puisqu'elle prédit qualitativement toutes les caractéristiques mises en évidence expérimentalement.

## 6.6 Conclusion

Ce chapitre termine la deuxième partie, consacrée à l'établissement, la résolution et la validation expérimentale d'un modèle de plaque. Le diagramme de la figure 6.17, p. 152 résume certaines approches possible pour résoudre un problème de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques.



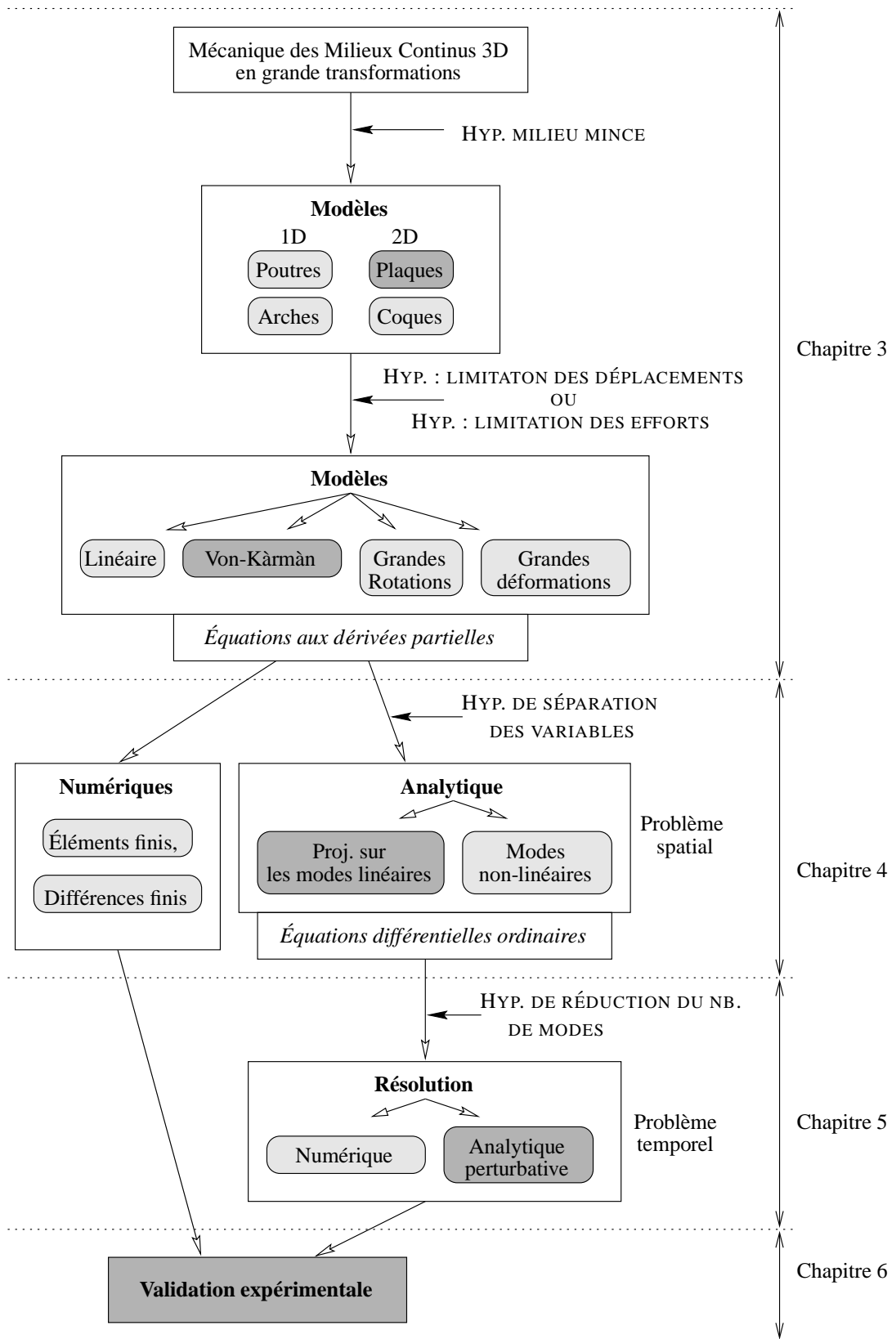


FIG. 6.17 – Diagramme résumant les approches évoquées dans la deuxième partie de ce manuscrit. Les cadres gris foncés correspondent à la méthode utilisées pour calculer une solution au problème de plaque mince, qui consiste, à partir des équations de la mécanique des milieux continus tridimensionnels, à calculer les déplacements et les contraintes dans la plaque.

PARTIE **III**

---

## Des systèmes discrets à 1 degré de liberté

*As we have said, lattice trusses and solid beams can nearly always be used interchangeably, and so, as one might suppose, the stress system within a truss is not very different in principle from that in a solid beam, although it has the advantage of being rather easier to visualize.*

*J. E. Gordon,  
[43], Chap. "The advantage of being a beam", p. 236*



## Non-linéarités géométriques

Ce chapitre propose d'étudier les propriétés de systèmes discrets à un seul degré de liberté (1 DDL), en vue de dégager des interprétations simples des comportements non-linéaires de structures continues plus complexes comme les plaques et les coques minces, et ainsi les gongs et les cymbales. L'idée est de représenter les fibres de ces systèmes minces continus par des barres élastiques. Les systèmes ainsi obtenus sont composés de barres rotulées soumises à des vibrations de grande amplitude, ce qui permet de prendre en compte des non-linéarités géométriques. Leur extrême simplicité permet l'écriture de modèles analytiques élégants, nécessitant un minimum de simplification, et le comportement de chacune des barres est alors facilement identifiable. Les calculs qui suivent sont inspirés des ouvrages de mécanique des milieux continus de J. Salençon [97, 98] et l'idée de ces petits systèmes est venue après lecture des travaux de M. Géradin et D. Rixen [41] et J. Antunes *et al* [1].

### 7.1 Une barre isolée

#### 7.1.1 Effort normal

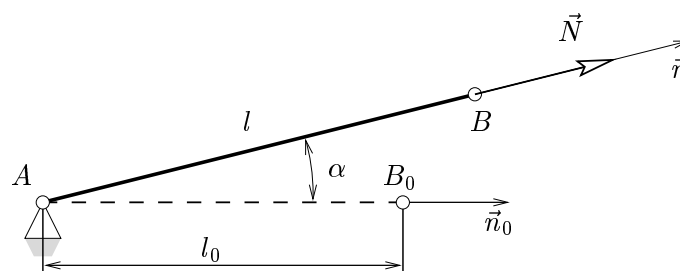


FIG. 7.1 – Schéma d'une barre isolée soumise à une elongation.

En premier lieu, on se propose de préciser le modèle utilisé pour une barre isolée, représentée Fig. 7.1 et soumise à des grands déplacements. A cause de l'articulation au point \$A\$, la barre à l'équilibre sous l'action de la force \$\vec{N}\$ appliquée en \$B\$ n'est chargée que suivant son axe longitudinal courant \$\vec{n}\$. On note \$A\_0\$ la section constante de la barre, \$l\$ sa longueur courante, \$l\_0\$ sa longueur au repos et \$\vec{n}\$ et \$\vec{n}\_0\$ les vecteurs directeurs unitaires des deux configurations. On supposera que :

1. la ligne neutre de la poutre reste une droite au cours de la transformation, et que chacune des sections normales et droites subit une translation suivant l'axe courant de la poutre (elles restent



donc normales à la ligne neutre) ;

2. seule la contrainte normale de Cauchy est non nulle, c'est-à-dire que le tenseur associé s'écrit  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_n \vec{n} \otimes \vec{n}$  ;
3. le matériau, homogène et isotrope, reste élastique linéaire au cours de la transformation ;

Comme la barre est soumise à des grands déplacements, on ne peut pas confondre la configuration déformée et la configuration de repos, et la loi de comportement fait intervenir le tenseur symétrique des contraintes de Piola-Kirchhoff<sup>d</sup>  $\underline{\underline{\pi}}$  et le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{e}}$ . Cette loi s'écrit [98] :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\pi}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\pi}}) \underline{\underline{1}} \quad (7.1)$$

De plus, sous les hypothèses précédemment énumérées, on montre que  $\underline{\underline{\pi}}$  a la même forme que  $\underline{\underline{\sigma}}$ , soit  $\underline{\underline{\pi}} = \pi_n \vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0$ , ce qui entraîne que :

$$\underline{\underline{e}} : \begin{pmatrix} \frac{\pi_n}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \pi_n & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \pi_n \end{pmatrix}_{(\vec{n}_0, \vec{t}_{10}, \vec{t}_{20})} \quad (7.2)$$

Les 2 termes de déformations tangentielles, non nuls, montrent que la section de la poutre se réduit sous l'action de l'effort normal. Cela est communément appelé l'effet de Poisson.

Par ailleurs, la déformation normale s'écrit :

$$e_n = \vec{n}_0 \cdot \underline{\underline{e}} \vec{n}_0 = \frac{l}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.3)$$

où  $\varepsilon$  la déformation linéarisée et  $\Delta l$  l'allongement.

L'effort normal par unité de surface dans la barre courante,  $d\vec{N} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS = \sigma_n \vec{n} dS$ , est le transport convectif de l'effort normal de Piola-Kirchhoff par unité de surface dans la barre non-déformée,  $d\vec{N}_0 = \underline{\underline{\pi}} \vec{n}_0 dS_0 = \pi_n \vec{n}_0 dS$ . Après intégration sur la section de la barre, on montre (§??) que l'effort normal est :

$$N = \frac{l}{l_0} N_0 = \frac{l}{l_0} A_0 \pi_n = \frac{l}{l_0} E A_0 e_n, \quad (7.4)$$

soit :

$$\boxed{\vec{N} = \frac{1}{2} E A_0 \left[ \left( \frac{l}{l_0} \right)^3 - \frac{l}{l_0} \right] \vec{n} = E A_0 \left( \varepsilon + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \right) \vec{n}.} \quad (7.5)$$

La non-linéarité, appelée *géométrique*, provient du fait que, en grands déplacements :

- on ne peut pas linéariser les déformations (ce qui serait le cas si  $\varepsilon \ll 1$ ), et la mesure des déformations est une fonction non-linéaire des déplacements des points de la structure (Eq. (7.3)) ;
- on ne peut pas confondre la configuration de repos et la configuration courante du système ; cela conduit à un effort normal dans la barre fonction non-linéaire des déformations (Eq. (7.4)).

Néanmoins, il convient de préciser le domaine numérique de validité de ces équations.

### 7.1.2 Domaine de validité

Le domaine de validité de la relation de comportement élastique linéaire utilisée ci-dessus (Eq. (7.1)) peut être précisé par un essai de traction effectué sur une éprouvette fabriquée dans le matériau utilisé. La Fig. 7.2 donne la courbe contrainte/déformation pour un acier courant, typique des métaux.

<sup>d</sup> $\underline{\underline{\pi}}$  est aussi appelé 2<sup>e</sup> tenseur de Piola-Kirchhoff [97, 98, 55] ou tenseur des contraintes de Kirchhoff-Trefftz [41]

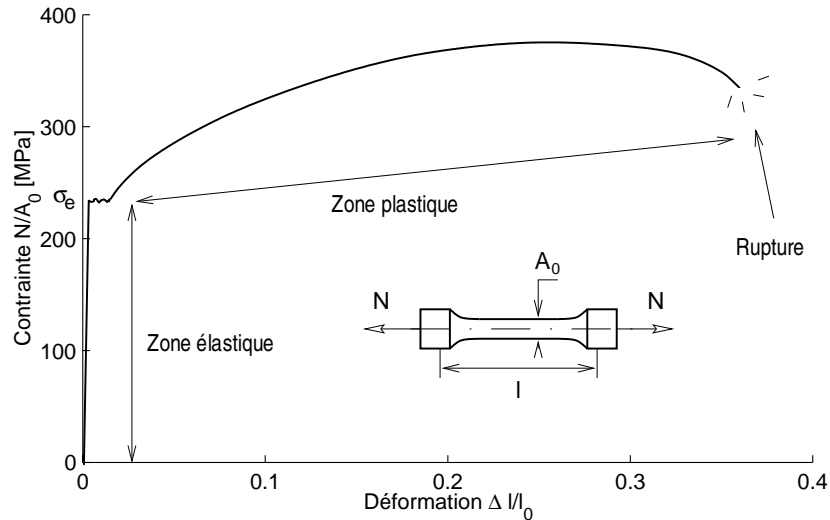


FIG. 7.2 – Essai de traction typique, pour un acier ordinaire, tiré de [32]. Une éprouvette est sollicitée en traction, et la contrainte normale (rapport de  $N$  par la section initiale  $A_0$ ) est tracé en fonction de la déformation  $\Delta l/l_0 = (l - l_0)/l_0$ .

Pour des déformations très faibles, la contrainte mesurée est proportionnelle à la déformation, et le comportement est ainsi élastique linéaire. Le coefficient de proportionnalité est le module d'Young (ou module d'élasticité,  $E$ ) du matériau. Lorsque la limite d'élasticité  $\sigma_e$ , et la déformation associée  $\varepsilon_e = \sigma_e/E$  est dépassée, le comportement du matériau devient plastique, et des déformations rémanentes persistent après annulation du chargement [32]. Lors du fonctionnement normal de gongs et de cymbales, le matériau ne dépasse pas la limite d'élasticité, car cela entraînerait des dégradations de la structure qui se manifesteraient notamment par un changement de la géométrie et du timbre de l'instrument. Cela serait incompatible avec une utilisation normale de ces instruments. Le but des petits modèles de barres est de prédire le comportement de structures qui restent dans le domaine élastique. Par conséquent, la déformation de toute barre isolée ne doit pas dépasser la valeur de  $\varepsilon_e$ .

Matériau	Module d'Young $E$ [GPa]	Limite élastique $\sigma_e$ [MPa]	Déformation à la limite élastique $\varepsilon_e$ [ $10^{-3}$ ]
Acier courant	210	220	1.05
Acier à ressort	220	550	2.5
Laiton (Cu 80% - Zn 20%), qualité ressort	120	400	3.3
Bronze (Cu 80% - Sn 20%), écrouis (cymbales, gongs)	120	400	3.3

TAB. 7.1 – Ordre de grandeur des propriétés élastiques de quelques matériaux, à partir de [32], p. 297 et 339, et [34] p. 85.

La littérature est très pauvre en données précises sur le comportement mécanique des matériaux comme le bronze et le laiton, qui sont utilisés de façon très ponctuelle dans l'industrie. Des valeurs moyennes de module d'Young et de limite élastique sont précisées Tab. 7.1. On peut penser qu'une des raisons des multiples martelages et traitements thermiques que subissent les gongs et les cymbales lors de leur fabrication est d'augmenter leur limite élastique par écrouissage. Les valeurs de  $\sigma_e = 400$  MPa

et donc  $\varepsilon_e = 3.3 \cdot 10^{-3}$  sont donc probablement des ordres de grandeur plausibles.

## Conclusion

Lorsque les effets non-linéaires évoqués au paragraphe précédent (§7.1.1) sont négligés, l'effort normal dans la barre est proportionnel à la déformation linéarisée, et s'écrit :

$$N^{lin} = EA_0 \varepsilon \quad (7.6)$$

Une différence de 1% est décelable entre  $N$  et  $N^{lin}$  à partir d'une déformation linéarisée  $\varepsilon = 6.6 \cdot 10^{-3}$  en traction et  $\varepsilon = -6.7 \cdot 10^{-3}$  en compression, valeurs bien supérieures aux valeurs de  $\varepsilon_e$  courantes. Ainsi, les effets des *non-linéarités géométriques sur une barre isolée* ne sont perceptibles que lorsque les contraintes dans la barre ont dépassé la limite élastique du matériau. Elles sont donc *négligeables* lorsque le système ne dépasse pas la limite élastique du matériau, ce qui est le cas pour les cymbales et les gongs.

## 7.2 Système "plat"

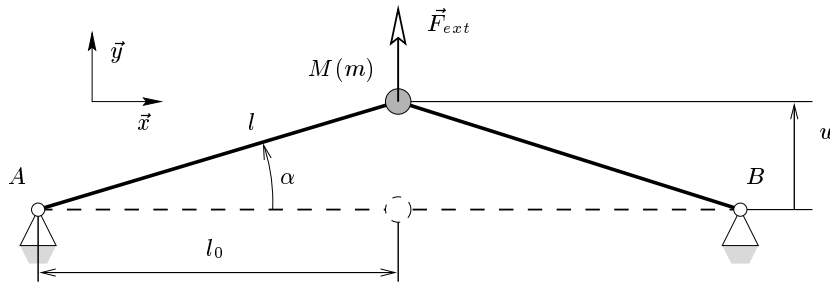


FIG. 7.3 – Schéma du système "plat" de deux barres. La configuration non-déformée est dessinée en traits interrompus.

Le système que l'on étudie ici, représenté Fig. 7.3, est constitué d'une masse  $m$ , située au point  $M$ , reliée au bâti par deux barres de section  $A_0$ , de longueur  $l$  dans la configuration courante, et  $l_0$  dans la configuration de référence, au repos. Les liaisons entre (i) les barres et la masse (point  $M$ ) et (ii) les barres et le bâti (points  $A$  et  $B$ ) sont toutes des articulations parfaites. On supposera dans cette étude que la masse ne se déplace que suivant la *verticale*  $\vec{y}$ , déplacement noté  $w$ , si bien que le système est symétrique par rapport à  $\vec{y}$ . De plus, le poids de tous les constituants du système (barres et masse) est négligé devant les autres efforts. La distance entre les points  $A$  et  $B$  vaut exactement  $2l_0$ , si bien qu'au repos, le système est plat ( $\alpha = 0$ ), et les barres ne sont pas chargées<sup>2</sup>.

### 7.2.1 Force de rappel

Tout d'abord, on se propose de calculer la force de rappel  $\vec{F}_w$  exercée par la masse sur l'ensemble des deux barres, en fonction du déplacement  $w$  de celle-ci. La composante normale du tenseur des déformations dans chacune des barres est :

$$e_n = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2, \quad (7.7)$$

<sup>2</sup>Le présent système, plat au repos, est en fait hyperstatique de degré 1, car les seules équations de la statique des solides ne permettent pas de calculer les efforts dans les barres.

où on a utilisé le théorème de Pythagore.

Comme dans le paragraphe 7.1 précédent, on utilise le tenseur symétrique de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{\pi}}$  pour calculer l'effort normal dans les barres, si bien que :

$$\vec{N} = \frac{l}{l_0} N_0 \vec{n} = EA_0 \frac{l}{l_0} \cdot e_n \vec{n}, \quad (7.8)$$

où  $\vec{n}$  est la direction courante de la barre considérée. La force de rappel  $\vec{F}_w$ , de direction verticale, est obtenue en sommant les projections sur la verticale des efforts normaux  $\vec{N}$  dans les barres, d'où :

$$\vec{F}_w = 2N \sin \alpha \vec{y} \quad (7.9a)$$

$$= 2 \underbrace{\left(\frac{w}{l_0}\right)}_{\frac{l}{l_0} \cdot \sin \alpha} \underbrace{EA_0 \frac{1}{2} \left(\frac{w}{l_0}\right)^2}_{\frac{l_0}{l} N} \vec{y}, \quad (7.9b)$$

et enfin :

$$\boxed{\vec{F}_w = EA_0 \left(\frac{w}{l_0}\right)^3 \vec{y}.} \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Force de rappel avec comportement linéaire des barres

On note :

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (7.11)$$

la déformation linéaire de chacune des barres. L'effort normal dans chacune des barres en comportement linéaire est (Eq. (7.12c)) :

$$N^{lin} = EA_0 \varepsilon = EA_0 \frac{l - l_0}{l_0} \quad (7.12a)$$

$$= EA_0 \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) = EA_0 \left( \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - 1 \right) = EA_0 \left( \sqrt{1 + \left(\frac{w}{l_0}\right)^2} - 1 \right) \quad (7.12b)$$

$$= \frac{1}{2} EA_0 \left\{ \left(\frac{w}{l_0}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{w}{l_0}\right)^4 + O \left[ \left(\frac{w}{l_0}\right)^6 \right] \right\}, \quad (7.12c)$$

Par suite, la force de rappel est :

$$F_w^{lin} = 2N^{lin} \sin \alpha = 2EA_0 \frac{l - l_0}{l_0} \frac{w}{l} \quad (7.13a)$$

$$= 2EA_0 \left( 1 - \frac{l_0}{l} \right) \frac{w}{l_0} = 2EA_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right) \frac{w}{l_0} \quad (7.13b)$$

$$= EA_0 \left\{ \left(\frac{w}{l_0}\right)^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{w}{l_0}\right)^5 + O \left[ \left(\frac{w}{l_0}\right)^7 \right] \right\}. \quad (7.13c)$$

### 7.2.3 Discussion

D'après les calculs précédents, la force de rappel ne possède pas de terme linéaire par rapport au déplacement transverse. En effet, un "petit" déplacement  $w/l_0$  de la masse à partir de la position de repos se manifeste en première approximation par une rotation des deux barres autour des points  $A$  et  $B$ , sans élongation de celles-ci. Les termes d'ordres supérieurs montrent qu'un déplacement vertical  $w$  imposé à la masse crée :

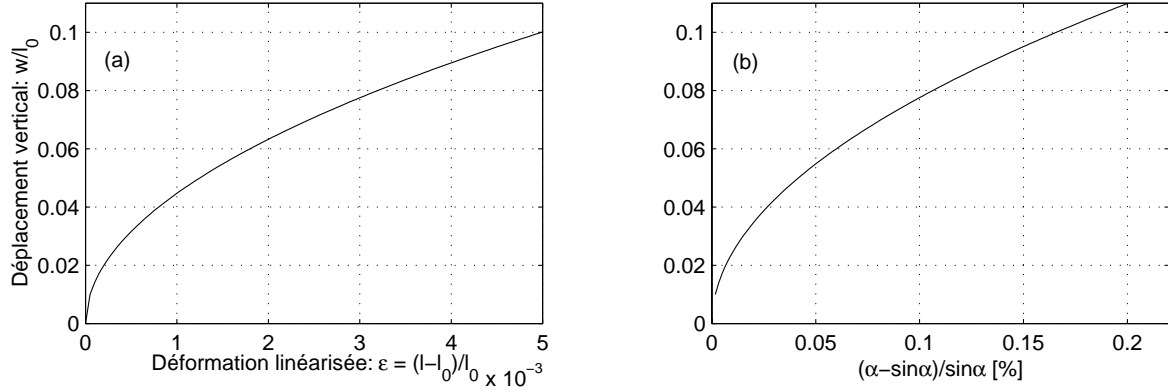


FIG. 7.4 – Déplacement vertical  $w$  fonction de : (a) - la déformation linéarisée des barres ; (b) - le pourcentage entre l'angle  $\alpha$  et son sinus.

- un effort normal  $\vec{N}$  dans les barres proportionnel au carré du déplacement ;
- une force de rappel  $\vec{F}_w$  proportionnelle au cube du déplacement.

En d'autres termes, un mouvement transversal de la masse entraîne un allongement des barres, qui est du second ordre. Cet effet est communément appelé *effet de cable* [41], typique des non-linéarités de type géométrique. Cela se manifeste par des effets analogues dans les structures minces, notamment dans les plaques, où un déplacement transverse induit un chargement quadratique du plan moyen (Cf. chapitres 4 et 5). Examinons maintenant plus précisément les causes de ces non-linéarités géométriques.

Le déplacement vertical de la masse s'écrit :

$$\frac{w}{l_0} = \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - 1} \quad (7.14a)$$

$$= \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2} \quad (7.14b)$$

La Fig. 7.4(a) donne le graphe de la fonction précédente. On constate que pour les valeurs de  $\varepsilon$  du domaine de validité du comportement élastique linéaire des barres,  $w$  est de l'ordre de grandeur de  $0.08l_0$  (pour une déformation linéarisée de  $\varepsilon_e = 3.2 \cdot 10^{-3}$ ). Cela prouve que le terme d'ordre 4 dans l'Eq. (7.12c) et celui d'ordre 5 dans l'Eq. (7.13c) sont négligeables devant les termes d'ordre inférieur. Ainsi, on retrouve que les non-linéarités induites par le comportement non-linéaire géométrique (Eq. (7.7) et (7.8)) des barres *isolées* sont négligeables : les non-linéarités présentes dans  $\vec{F}_w$  et  $\vec{N}$  ne sont issues que de l'opération de projection sur la verticale. Elles se manifestent par :

- une déformation (et donc un effort normal) non-linéaire par rapport à  $w$  (Eq. (7.12b)) ;
- la force de rappel  $F_w$  non-linéaire par rapport à l'effort normal  $N$  (7.13a)).

La Fig. 7.4(b) montre que si les barres ne sortent pas de leur domaine de comportement élastique linéaire, l'approximation  $\sin \alpha \simeq \alpha$  est valide ( $(\alpha - \sin \alpha) / \sin \alpha = 0.17\%$  pour  $\varepsilon = \varepsilon_e = 3.2 \cdot 10^{-3}$ ), même si c'est la projection (d'angle  $\alpha$ ) sur la verticale qui est la cause des non-linéarités géométriques. Cela donne une validation des hypothèses des équations de Von Kàrmàn du chapitre 3 où chacun des segments droits de la plaque est supposé subir un déplacement de solide rigide avec rotation linéarisée (Hypothèse 3.2, p. 61).

## Conclusion

Dans le domaine où la relation de comportement des barres est valable, c'est-à-dire lorsque le matériau reste élastique linéaire, chacune des barres subit une transformation en *petites perturbations*. Cela signifie que les effets non-linéaires induits par le comportement non-linéaire des barres isolées (qui proviennent (i) des termes quadratiques dans les déformations de Green-Lagrange et (ii) de la configuration déformée que l'on ne confond pas avec la configuration au repos du système) sont *négligeables* devant les non-linéarités provenant de l'opération de projection sur la verticale. La seule source des termes non-linéaires dans les équations est donc la *petite rotation* des barres, d'angle  $\alpha$ . Il est ainsi possible d'observer des déplacements transverses importants alors que les déformations restent petites. On retrouve ici des dénominations classiques associées aux milieux minces : grands déplacements, rotations modérées (ou grandes rotations, pour certains modèles de poutres) et petites déformations.

Devant la grande simplicité des calculs du paragraphe 7.2.1 par rapport à ceux du paragraphe 7.2.2, aucune approximation ne sera effectuée dans les calculs qui suivent. Il faudra toutefois garder à l'esprit que les effets du comportement géométrique non-linéaire de chacune des barres isolées sont négligeables.

## 7.3 Système avec inclinaison initiale

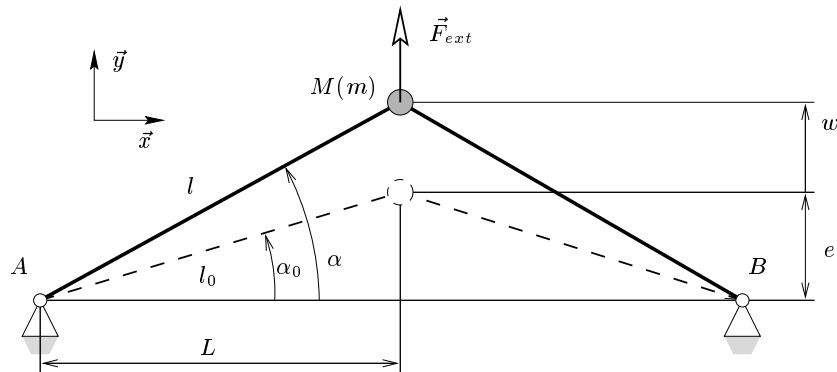


FIG. 7.5 – Schéma du système de deux barres. La configuration non-déformée, d'angle  $\alpha_0$  par rapport à l'horizontale, est dessinée en traits interrompus.

Le système que l'on étudie ici, représenté Fig. 7.5, est similaire au système "plat" de la Fig. 7.3, à la différence que, en position de repos, les barres sont inclinées d'un angle  $\alpha_0$ . On note  $e$  la hauteur de la masse en position de repos, si bien que  $\sin \alpha_0 = e/l_0$ . Là encore, le poids de la masse  $m$  est négligé devant les efforts élastiques mis en jeu, si bien qu'au repos, les barres ne sont pas chargées<sup>3</sup>.

### 7.3.1 Force de rappel

Comme précédemment, la composante normale du tenseur des déformations dans chacune des barres est :

$$e_n = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{e}{l_0} \frac{w}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 = \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2, \quad (7.15)$$

<sup>3</sup>Ici, l'hyperstaticité du système "plat" (Cf. note 2, p. 158) est levée à cause de  $\alpha_0 \neq 0$

où on a utilisé le théorème de Pythagore. L'effort normal dans les barres s'écrit :

$$\vec{N} = \frac{l}{l_0} N_0 \vec{n} = EA_0 \frac{l}{l_0} \cdot e_n \vec{n}, \quad (7.16)$$

où  $\vec{n}$  est la direction courante de la barre considérée. La force de rappel  $\vec{F}_w$ , de direction verticale, est obtenue en sommant les projections sur la verticale des efforts normaux  $\vec{N}$  dans les barres, d'où :

$$\vec{F}_w = 2N \sin \alpha \vec{y} \quad (7.17a)$$

$$= 2 \underbrace{\left( \frac{w}{l_0} + \sin \alpha_0 \right)}_{\frac{l}{l_0} \cdot \sin \alpha} EA_0 \underbrace{\left( \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 \right)}_{\frac{l_0}{l} N} \vec{y}, \quad (7.17b)$$

et enfin :

$$\vec{F}_w = 2EA_0 \left\{ \sin^2 \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \frac{3}{2} \sin \alpha_0 \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right\} \vec{y}. \quad (7.18)$$

La détermination de l'effort normal dans les barres est moins immédiate, et nécessite d'effectuer le développement limité de  $l/l_0$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{l}{l_0} &= \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = \cos \alpha_0 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \cos \alpha_0 \sqrt{1 + \left( \tan \alpha_0 + \frac{w}{L} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2 \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \left( \frac{w}{l_0} \right)^2} \\ &= 1 + \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \frac{\cos^2 \alpha_0}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right], \end{aligned} \quad (7.19)$$

de sorte que :

$$\vec{N} = EA_0 \left\{ \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \left( \frac{1}{2} + \sin^2 \alpha_0 \right) \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right] \right\} \vec{n}, \quad (7.20)$$

On peut remarquer que l'on retrouve bien les expressions de  $F_w$  et  $N$  calculées dans le cas du système plat au paragraphe 7.2 précédent (Eq. (7.10) et (7.12c)), lorsque  $\alpha_0$  est supposé nul dans les équations (7.18) et (7.20).

### 7.3.2 Influence de la courbure

Lorsque l'inclinaison au repos des barres est non nulle ( $\alpha_0 \neq 0$ ), des termes sont ajoutés dans l'expression de l'effort normal  $\vec{N}$  et de la force de rappel  $\vec{F}_w$ . L'Eq. (7.17b) aide à identifier leur origine.

- Le terme *linéaire* provient de la projection sur l'axe vertical des efforts normaux dans les barres, avec l'angle  $\alpha$  considéré *constant* et égal à sa valeur  $\alpha_0$  au repos. Cela donne une raideur linéaire  $2EA_0 \sin^2 \alpha_0$  au système, d'autant plus importante que l'inclinaison initiale est grande.
- Le terme *quadratique* provient du fait que la raideur *courante* du système,  $F_w/w$  est proportionnelle à  $\sin \alpha \sin \alpha_0$ , et dépend ainsi de l'inclinaison *courante* du système. Si  $w$  augmente (resp. diminue),  $\alpha$  augmente (resp. diminue) aussi, ce qui induit une augmentation (resp. diminution) de la raideur du système. D'un point de vue plus mécanique, plus les barres sont inclinées,

plus elles offrent une résistance importante à un effort extérieur vertical. Le cas limite arrive lorsque la barre est verticale, où l'effort *normal* s'oppose directement au chargement. Lorsque le système est chargé, les barres s'inclinent d'un petit angle, qui introduit une faible variation de raideur, responsable du terme quadratique.

– Le terme *cubique* est identique à celui de l'Eq. (7.10) pour le cas du système "plat".

Un parallèle peut être fait entre ce dernier système et des structures plus compliquées comme des arches et des coques minces à courbure non-nulle, si les effets de la rigidité en flexion sont négligés devant la rigidité de membrane. Dans ce cas, un déplacement normal à la surface moyenne (ou la ligne moyenne pour une arche) de la structure induit un chargement de cette surface (resp. ligne) qui possède un terme quadratique. Ainsi, l'inclinaison initiale du système est comparable à la courbure non-nulle de l'arche où de la coque, qui induit des termes quadratiques dans l'expression de la force de rappel [136].

## 7.4 Systèmes avec raideur en flexion

Pour prendre en compte l'influence de l'épaisseur d'une structure mince continue (de type coque, arche...) sur ses vibrations, on décide de complexifier le système de la Fig. 7.5 en lui ajoutant de nouvelles barres. Elles permettent de rendre compte des sollicitations en traction/compression de certaines fibres prises dans l'épaisseur de la structure continue associée, et ainsi d'ajouter une raideur analogue à la raideur en flexion d'une arche où d'une coque.

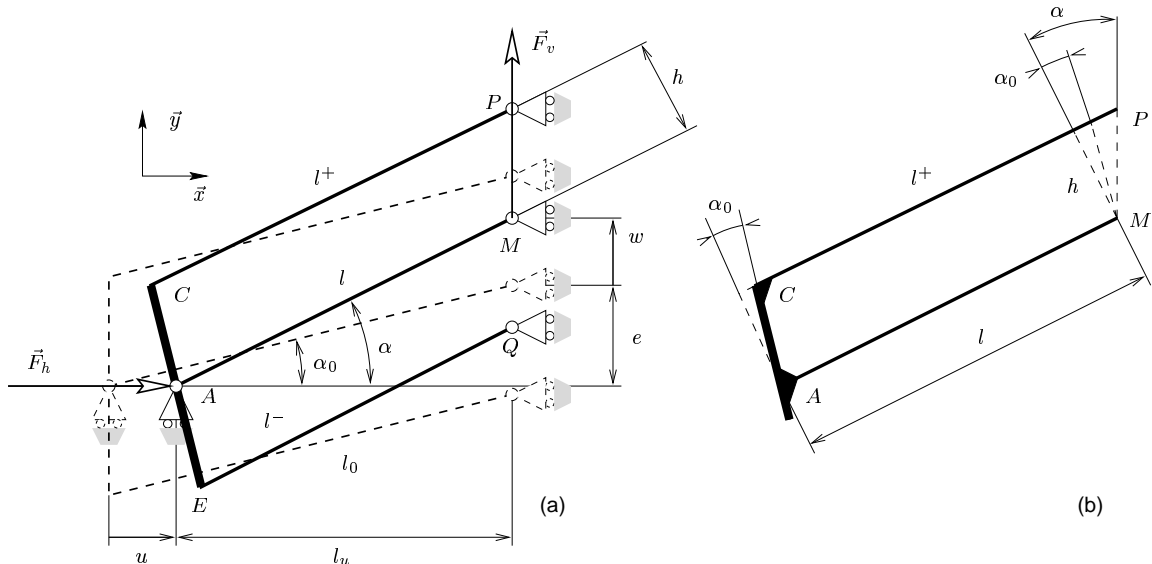


FIG. 7.6 – (a) - Schéma du sous-système avec raideur en flexion. La configuration non-déformée, d'angle  $\alpha_0$  par rapport à l'horizontale, est dessinée en traits interrompus. (b) - Géométrie de la partie supérieure

Le nouveau système est toujours symétrique par rapport à la verticale, si bien que l'étude de l'un des sous-systèmes, représenté Fig. 7.6(a), est suffisante. Il est composé de trois barres de sections  $A_0$ , supposées ne pouvoir se déformer qu'en elongation. La barre centrale est liée au bâti par deux appuis mobiles, en  $A$  et  $M$ . Les barres supérieure et inférieure sont liées d'un côté au bâti par deux appuis mobiles en  $P$  et  $Q$ , et de l'autre côté par des encastres avec un élément  $(EAC)$ , lui même encasté par rapport à la barre centrale en  $A$ . Toutes les liaisons mobiles sont supposées sans



frottement, si bien que les barres restent *parallèles* et *équidistantes* les unes des autres pendant le mouvement<sup>4</sup>. L'inclinaison initiale des barres est  $\alpha_0$ , et l'angle entre  $(EAC)$  et la direction courante des barres est constant et vaut  $\pi/2 - \alpha_0$ . Les trois barres ont la même longueur initiale, notée  $l_0$ , et leurs longueurs courantes sont  $l$ ,  $l^+$  et  $l^-$ , et leur inclinaison courante est notée  $\alpha$ . Un effort vertical extérieur  $\vec{F}_v$  est imposé au point  $M$ , qui se déplace de  $w$ , et un effort horizontal  $\vec{F}_h$  est imposé au point  $A$ , qui se déplace de  $u$ .

L'idée sous-jacente à ce système est de fournir une modèle simple rendant compte du comportement non-linéaire de structures possédant à la fois une raideur en flexion et une courbure initiale, comme les arches et les coques. On peut faire un parallèle entre la quantité  $2h$ , distance constante entre les deux barres extérieures, et l'épaisseur de la coque, constante au cours de la transformation du fait des hypothèses de Kirchhoff-Love. De la même façon, l'inclinaison  $\alpha_0$  initiale des barres est analogue à la courbure de la coque. Ainsi, la barre centrale et les deux barres extérieures représentent des fibres prises respectivement dans la surface moyenne et sur les deux surfaces extérieures de la coque. En particulier, sous l'action de l'effort  $\vec{F}_v$ , l'inclinaison du système augmente, la barre supérieure s'allonge, la barre inférieure se rétrécit, ce qui est analogue au comportement des fibres d'une coque en flexion.

### 7.4.1 Équations d'équilibre

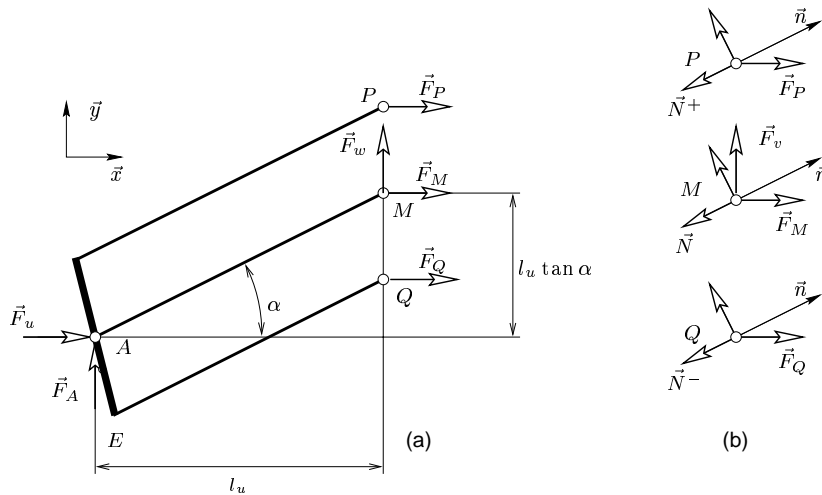


FIG. 7.7 – (a) - Équilibre du sous-système représenté Fig. 7.6. (b) - Équilibre des nœuds  $P$ ,  $M$  et  $Q$ .

Comme lors des systèmes précédents, on se propose de calculer les forces exercées par le système sur les points  $M$  et  $A$ , appelées respectivement  $\vec{F}_w$  et  $\vec{F}_u$ . Pour cela, on utilise le Principe Fondamental de la Statique appliqué d'abord à l'ensemble mobile (Cf. Fig. 7.7(a)) et ensuite à chacun des nœuds

<sup>4</sup>On peut imaginer qu'un système annexe oblige chacune des barres à rester rectiligne et équidistante des autres. C'est ce système qui équilibre les efforts tangentiels dans les barres.

$P$ ,  $M$  et  $Q$  (Cf. Fig. 7.7(b)). On obtient alors les 6 équations suivantes :

$$\text{Res./}\vec{x} : F_u + F_P + F_M + F_Q = 0, \quad (7.21a)$$

$$\text{Res./}\vec{y} : F_A + F_w = 0, \quad (7.21b)$$

$$\text{Mom./}M : l_u \tan \alpha \cdot F_u - l_u \cdot F_A - \frac{h}{\cos \alpha} F_P + \frac{h}{\cos \alpha} F_Q = 0, \quad (7.21c)$$

$$\text{Nœud } M/\vec{n} : -N + F_w \sin \alpha + F_M \cos \alpha = 0, \quad (7.21d)$$

$$\text{Nœud } P/\vec{n} : -N^+ + F_P \cos \alpha = 0, \quad (7.21e)$$

$$\text{Nœud } Q/\vec{n} : -N^- + F_Q \cos \alpha = 0. \quad (7.21f)$$

En substituant d'une part (7.21e) et (7.21f) dans (7.21a), puis l'équation obtenue dans (7.21d), et d'autre part (7.21b), (7.21e) et (7.21f) dans (7.21c), on obtient le système suivant :

$$F_w \cdot \sin \alpha - F_u \cdot \cos \alpha = N + N^+ + N^-, \quad (7.22a)$$

$$F_w + F_u \cdot \tan \alpha = \frac{h}{l_u} \frac{1}{\cos^2 \alpha} (N^+ - N^-), \quad (7.22b)$$

de sorte que :

$$F_u = \frac{h \tan \alpha}{l \cos \alpha} (N^+ - N^-) - \cos \alpha (N + N^+ + N^-), \quad (7.23a)$$

$$F_w = \frac{h}{l \cos \alpha} (N^+ - N^-) + \sin \alpha (N + N^+ + N^-). \quad (7.23b)$$

Les relations de comportement de chacune des barres (Eq. (7.5)) permettent alors de calculer les forces de rappel. Les efforts normaux dans les barres dépendent des longueurs courantes de chacune des barres, que l'on détermine avec l'aide de la Fig. 7.6(b), et qui sont :

$$\text{Barre supérieure : } l^+ = l + h(\tan \alpha - \tan \alpha_0), \quad (7.24a)$$

$$\text{Barre inférieure : } l^- = l - h(\tan \alpha - \tan \alpha_0). \quad (7.24b)$$

On obtient alors :

$$N + N^+ + N^- = \frac{3}{2} E A_0 \left\{ \left( \frac{l}{l_0} \right)^3 + \frac{l}{l_0} \left[ 2 \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 (\tan \alpha - \tan \alpha_0)^2 - 1 \right] \right\}, \quad (7.25a)$$

$$N^+ - N^- = \frac{1}{2} E A_0 (\tan \alpha - \tan \alpha_0) \left\{ 2 \left[ 3 \left( \frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{h}{l_0} + 2 \left( \frac{h}{l_0} \right)^3 (\tan \alpha - \tan \alpha_0)^2 \right\}, \quad (7.25b)$$

Finalement, les forces de rappel sont :

$$F_u = \frac{1}{2}EA_0 \left\{ -3 \cos \alpha \left( \frac{l}{l_0} \right)^3 + 3 \frac{l}{l_0} \cos \alpha \left[ 2 \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 (\tan \alpha - \tan \alpha_0) (\tan^3 \alpha - \tan \alpha_0) + 1 \right] \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 \frac{l_0}{l} \tan \alpha (\tan \alpha - \tan \alpha_0) \left[ \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 (\tan \alpha - \tan \alpha_0)^2 - 1 \right] \right\}, \quad (7.26a)$$

$$F_w = \frac{1}{2}EA_0 \left\{ 3 \sin \alpha \left( \frac{l}{l_0} \right)^3 \right. \\ \left. + 3 \frac{l}{l_0} \left[ 2 \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 \left( \frac{1}{\cos \alpha} (\tan \alpha - \tan \alpha_0) + \sin \alpha (\tan \alpha - \tan \alpha_0)^2 \right) - \sin \alpha \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{\cos \alpha} \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 \frac{l_0}{l} \left[ \left( \frac{h}{l_0} \right)^2 (\tan \alpha - \tan \alpha_0)^3 - (\tan \alpha - \tan \alpha_0) \right] \right\}. \quad (7.26b)$$

Ces formules sont intéressantes, car elles sont implicites en fonction de  $l$  et  $\alpha$ , qui représentent la géométrie du système. Celle-ci n'est donc pas connue *a priori*. Ces deux forces de rappel s'équilibrent avec les forces extérieures imposées  $\vec{F}_h$  et  $\vec{F}_v$ . Ce sont alors les conditions aux limites qui permettent de déterminer d'abord  $l$ , et ensuite  $\alpha$  :

- si le point  $A$  est supposé fixe (à rapprocher à des conditions “simplement supporté” dans le cas d'une structure continue,  $u = 0$ ), alors c'est la longueur  $l$  qui est imposée, et l'Eq. (7.26(a)) permet de calculer la force de rappel  $F_u = -F_h$  qui en résulte ; l'Eq. (7.26(b)) donne alors  $F_w$  en fonction de  $\alpha$  quelle que soit la valeur de celui-ci.
- si le point  $A$  est libre de se déplacer horizontalement (à rapprocher de conditions aux limites “libres”,  $F_h = 0$ ), alors l'effort extérieur horizontal  $F_h = -F_u$  est imposé nul, et la résolution se fait en deux temps : l'Eq. (7.26(a)) permet de calculer la longueur  $l$  courante, et ensuite l'Eq. (7.26(b)) donne  $F_w$  en fonction de  $\alpha$ . Le processus est alors itératif.

On peut rapprocher ces dernières remarques des problèmes de mécanique des milieux continus en grandes transformations où une des difficultés est que les efforts imposés sont appliqués sur la structure *courante*, dont la géométrie est inconnue, puisqu'elle constitue la solution du problème (Cf. § 3.2.8 et [97]).

## 7.4.2 Cas des extrémités fixes : influence de l'épaisseur

La structure obtenue dans ce cas là est celle de la Fig. 7.8, qui offre une généralisation des systèmes des Fig. 7.3 et 7.5. Ici, seule l'Eq. (7.26(b)) est utile. Elle se simplifie en remarquant que :

$$\tan \alpha - \tan \alpha_0 = \frac{w}{L}, \quad \frac{L}{l_0} = \cos \alpha_0 \quad l = \frac{L}{\cos \alpha},$$

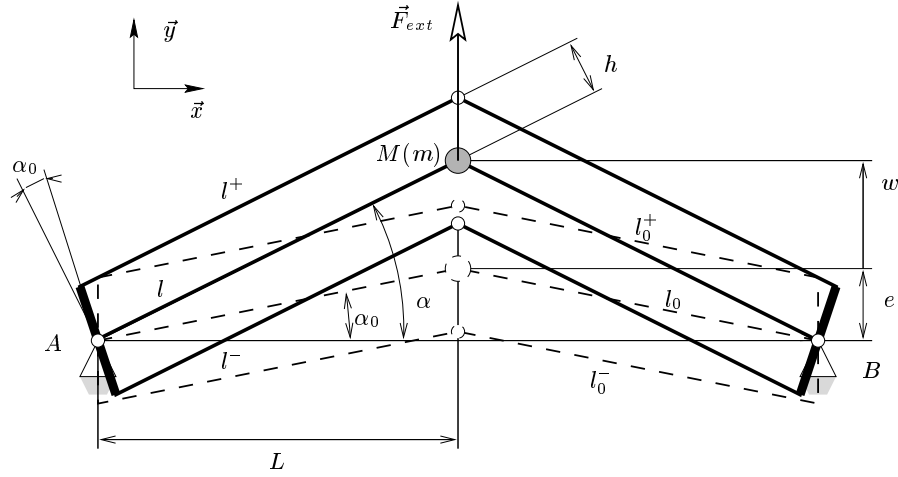


FIG. 7.8 – Schéma du système de six barres. La configuration non-déformée, d'angle  $\alpha_0$  par rapport à l'horizontale, est dessinée en traits interrompus.

de sorte que la force de rappel devient, en sommant la contribution des deux sous-systèmes :

$$\vec{F}_w = 2EA_0 \left\{ \underbrace{\frac{w}{l_0} \left[ 3 \sin^2 \alpha_0 + 2 \frac{h^2}{l_0^2} (1 + \tan^2 \alpha_0) \right]}_{\gamma_1} + \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 \underbrace{\sin \alpha_0 \left[ \frac{9}{2} + 9 \frac{h^2}{l_0^2} (1 + \tan^2 \alpha_0) \right]}_{\gamma_2} + \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \underbrace{\left[ \frac{3}{2} + 6 \frac{h^2}{l_0^2} (1 + \tan^2 \alpha_0) + 2 \frac{h^4}{l_0^4} (1 + \tan^2 \alpha_0)^2 \right]}_{\gamma_3} \right\} \vec{y}. \quad (7.27)$$

Dans le cas de ce système, il est intéressant de calculer les quantités  $\tilde{N} = N + N^+ + N^-$ , la tension généralisée, et  $\tilde{M} = N^+ - N^-$ , le moment de flexion généralisé. Ils se calculent à partir des Eq. (7.25a) et (b), et en utilisant (7.19). On obtient :

$$\tilde{N} = 3EA_0 \left\{ \sin \alpha_0 \frac{w}{l_0} + \left[ \frac{1}{2} + \sin^2 \alpha_0 + (1 + \tan^2 \alpha_0) \frac{h^2}{l_0^2} \right] \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right] \right\}, \quad (7.28)$$

$$\tilde{M} = 2EA_0 \frac{h}{l_0} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha_0} \frac{w}{l_0} + 3 \tan \alpha_0 \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + O \left[ \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right] \right\}. \quad (7.29)$$

On peut remarquer que l'on retrouve les équations (7.18) et (7.20), avec 3 barres au lieu d'une seule, lorsque  $h$  est pris nulle dans les équations (7.27) et (7.28).

L'ajout d'"épaisseur"  $2h$  au système introduit une raideur linéaire de valeur  $4EA_0(h/l_0)^2$  dans le système plat au repos (avec  $\alpha_0 = 0$ ). Cela permet de faire une analogie avec une plaque mince, où la raideur en flexion est proportionnelle au moment quadratique de la section :

$$I = \iint_{(\text{section})} y^2 dS = \frac{2bh^3}{3}$$

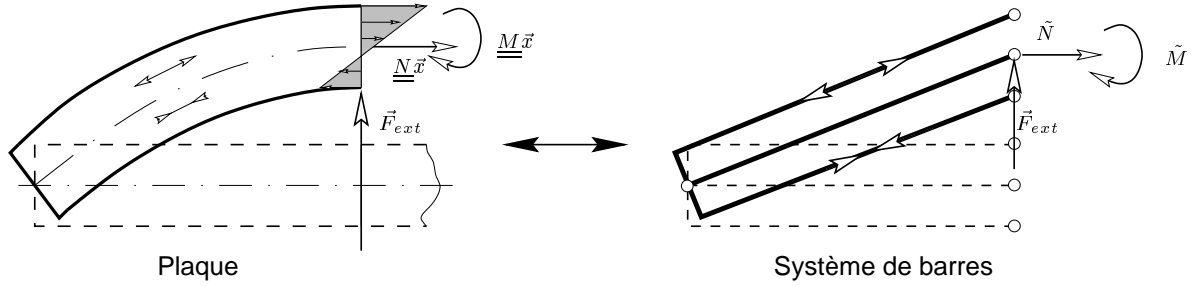


FIG. 7.9 – Comparaison entre une plaque (vue en coupe) et le système de barre

dans le cas d'une section rectangulaire de section  $2h \times b$ . Lorsque le système est chargé transversalement selon  $+\vec{y}$ , les fibres situées au-dessus du plan moyen sont chargées en traction, alors que les fibres inférieures sont comprimées. Cela crée des moments fléchissants  $\underline{M}$  dans la plaque, qui peuvent être comparés à la grandeur  $\tilde{M}$ , responsables de la raideur en flexion (Cf. Fig. 7.9).

Un terme non-linéaire cubique en  $w/l_0$  est aussi ajouté, analogue à la non-linéarité cubique des plaques (Cf. chapitre 5). La quantité  $\tilde{N}$  peut être comparée aux forces de membranes  $\underline{N}$  d'une plaque mince. On retrouve que des grands déplacements transverses créent un étirement du plan moyen quadratique (Eq. (7.28)), et qu'à l'ordre  $O[(w/l_0)^2]$ , le moment fléchissant  $\tilde{M}$  est linéaire (Eq. (7.29)). Si maintenant on considère une inclinaison initiale non-nulle, un terme quadratique est ajouté dans l'expression de la force de rappel, ce qui a déjà été discuté au paragraphe 7.3, et qui est analogue au cas des coques [136]. Le comportement dynamique de ces petits systèmes sera étudié au chapitre suivant.

### 7.4.3 Cas des extrémités mobiles : retour sur les équations de Von Kàrmàn

L'idée dans ce paragraphe est d'étudier l'influence des conditions aux limites à bord libre, avec le système de la Fig. 7.8 où les points  $A$  et  $B$  sont libres de se déplacer horizontalement. Pour simplifier les calculs, et avoir un élément de comparaison avec les plaques évoquées au chapitre 3, on ne considère que le système plat au repos, c'est-à-dire avec  $\alpha_0 = 0$ .

#### Équations du mouvement

Pour se rapprocher des hypothèses des équations dynamique de Von Kàrmàn pour les plaques, où l'inertie longitudinale est négligée, on suppose que le point  $A$  est sans masse. Le Principe Fondamentale de la Dynamique appliqué aux points  $A$  et à la masse  $M$  ( $m$ ) s'écrit :

$$\vec{F}_h - \vec{F}_u = \vec{0}; \quad \vec{F}_v - \vec{F}_w = m \ddot{w} \vec{y}, \quad (7.30)$$

où les forces de rappel  $\vec{F}_u$  et  $\vec{F}_w$  sont données par les Eq. (7.26a) et (b). Après développements limités en  $u/l_0$  et  $w/l_0$ , on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$EA_0 \left[ 3 \frac{u}{l_0} - \frac{3}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 \right] = F_h \quad (7.31a)$$

$$m\ddot{w} + EA_0 \left[ 2 \frac{h^2}{l_0^2} \frac{w}{l_0} - 3 \frac{u}{l_0} \frac{w}{l_0} + \frac{3}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right] = F_v. \quad (7.31b)$$

où les termes d'ordre  $(u/l_0)^2$ ,  $(u/l_0)(w/l_0)^2$ ,  $(w/l_0)^5$  et  $(h/l_0)^2(w/l_0)^3$  et d'ordre supérieur ont été négligés, pour être en accord avec les hypothèses des équations de Von Kàrmàn (en particulier, l'épaisseur de la plaque est supposée petite devant les autres dimensions).

Il est intéressant de remarquer que les Eq. (7.31a) et (b) précédentes sont analogues aux équations de Von-Kàrmàn pour une plaque, écrites en coordonnées cartésiennes ([25, 24]), lorsque le mouvement  $v$  selon  $y$  est annulé ( $\partial/\partial y = 0$ ,  $v = 0$ ), qui sont :

$$Ku_{,xx} + n_{ex} = -Kw_{,x}w_{,xx} \quad (7.32a)$$

$$D\Delta_2\Delta_2w + m\ddot{w} - t_e = Kw_{,xx}u_{,x} + \frac{1}{2}Kw_{,xx}w_{,x}^2 \quad (7.32b)$$

### Comparaisons avec des barres à extrémités libres - retour sur les non-linéarités dans les plaques

Si les conditions aux limites sont supposées libres,  $F_h = 0$  dans l'Eq. (7.31a). On obtient alors la valeur de  $u/l_0$ , qui reportée dans l'Eq. (7.31b) donne :

$$\frac{u}{l_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2,$$

$$m\ddot{w} + 2EA_0 \frac{h^2}{l_0^2} \frac{w}{l_0} = F_v.$$

L'équation du mouvement transverse obtenue est alors *linéaire*. On obtient un résultat analogue en intégrant l'Eq. (7.32a) par rapport à  $x$  et en reportant le résultat dans (7.32b), et aussi lorsqu'on applique les hypothèses du modèle de Von-Kàrmàn à une poutre qui a ses extrémités libres [8, 74, 86, 117]. En effet, sous ces hypothèses, la déformation longitudinale d'une poutre est :

$$\varepsilon = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 = \frac{N}{EA_0}, \quad (7.33)$$

$$m\ddot{w} + EIw_{,xxxx} - Nw_{,xx} = 0, \quad (7.34)$$

avec  $u$  le déplacement longitudinal,  $w$  le déplacement transverse,  $N$  l'effort normal,  $E$  le module d'Young,  $A_0$  et  $I$  l'aire et le moment quadratique de la section de la poutre. Si les extrémités sont libres de se déplacer, l'effort normal  $N$  dans la poutre est nul, et on obtient une équation linéaire. Les non-linéarités apparaissent dans le modèle de poutre libre lorsque on prend en compte des rotations finies [27, 31, 117].

Les développements précédents montrent que les non-linéarités géométriques prises en compte par le modèle de Von-Kàrmàn proviennent du chargement de la ligne moyenne de la poutre, qui est non-linéaire (quadratique) par rapport au déplacement transverse. Ce chargement n'est possible que si les extrémités de la poutre sont immobilisées (conditions aux limites encastées ou simplement supportées). Dans le cas des plaques, même si le bord est libre, on obtient quand même un chargement non-linéaire du plan moyen (Cf. § 5.4). Cela provient de la structure en deux dimensions de la plaque, qui fait qu'un déplacement transverse induit une variation de l'aire de la surface moyenne, et ainsi un chargement du plan moyen dans les deux dimensions longitudinales. C'est pour cette raison que les Eq. (7.32), dont la dimension selon  $y$  a été annulée, donnent un modèle linéaire en conditions aux limites libres.

## 7.5 Conclusion

Les petits systèmes présentés dans ce chapitre permettent de mettre en évidence plusieurs mécanismes qui conduisent à des réponses non-linéaires de structures minces. Les deux causes de non-linéarités sont d'une part les déformations non-linéaires de chaque fibres, et d'autre part les rotations finies de ces fibres. A première vue, même avec une loi de comportement élastique linéaire, chacune des fibres prise dans l'épaisseur de la structure est dotée d'une dépendance non-linéaire entre l'effort

normale et l'élongation de la fibre lorsque celle-ci devient grande. L'examen quantitatif de la loi de comportement élastique linéaire des gongs et des cymbales, montre que ces effets sont négligeables en conditions normales de jeu. Les non-linéarités géométriques ne proviennent donc que des rotations des fibres, qui se manifestent mathématiquement par une opération de projection sur la verticale, d'angle  $\alpha$ . Ces rotations restent quand même petites, puisque l'approximation  $\sin \alpha \simeq \alpha$  est valide, ce qui corrobore une des hypothèses du modèle de Von-Kàrmàn.

Ces non-linéarités se manifestent par un changement de taille de la surface moyenne, qui induit un chargement non-linéaire de celle-ci, qui est quadratique par rapport au déplacement transverse. La force de rappel, ou la raideur de la structure, gagnent alors des termes cubiques, et quadratiques si la structure possède une courbure initiale non-nulle. Ces non-linéarités n'apparaissent que si le changement de taille de la surface moyenne est imposé soit par les conditions aux limites (poutre simplement supportée, par exemple), soit par la structure bidimensionnelle de la surface moyenne (plaques et coques en conditions aux limites libres).



## Oscillations non-linéaires

Ce chapitre propose d'étudier des propriétés oscillantes caractéristiques des systèmes de barres introduits au chapitre précédent, lorsque ceux-ci sont sujets à de grandes amplitudes de vibrations. Les non-linéarités, qui deviennent alors non négligeables, ont principalement deux effets. En premier lieu, la fréquence des oscillations en régime libre de ces systèmes devient une fonction de l'amplitude des oscillations. En second lieu, les non-linéarités produisent une distortion harmonique des signaux d'oscillation, qui se traduit par l'apparition d'harmoniques d'amplitudes non-négligeables par rapport à la fondamentale. La grande simplicité structurelle des systèmes de barres (*Cf.* chapitre 7) permet une interprétation physique aisée des phénomènes, qui peut être ensuite élargie au cas de structures plus complexes comme les plaques et les coques. Notamment, l'influence de l'inclinaison initiale du système, dont l'influence est aisément identifiable ici, permet de dégager quelques idées liées à la courbure d'une coque, sans avoir à écrire les équations de la mécanique des milieux continus correspondant aux équations de Von-Kàrmàn pour les plaques. Enfin, le cas de gongs d'opéra chinois et celui du tam-tam du laboratoire seront abordés.

### 8.1 Le pendule

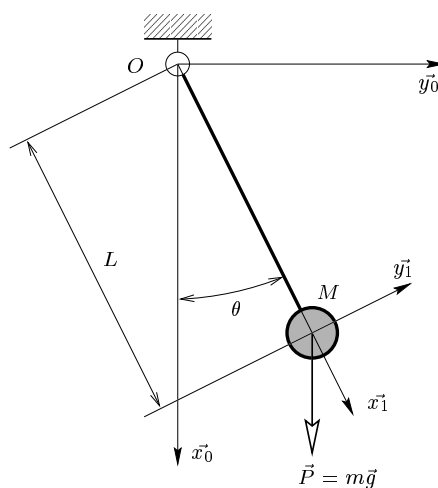
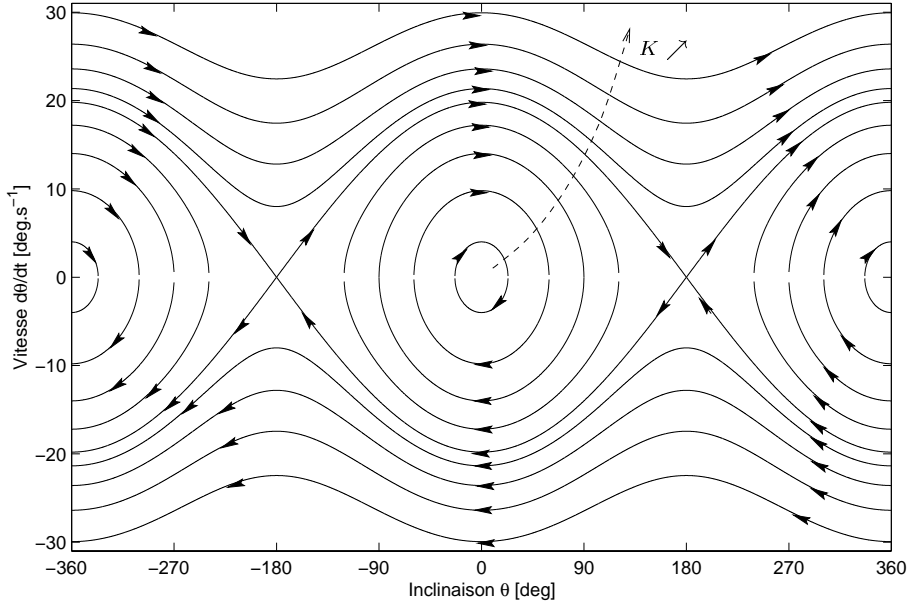


FIG. 8.1 – Schéma du pendule

Le pendule de la Fig. 8.1 est un exemple très simple de système à non-linéarités géométriques.




 FIG. 8.2 – Trajectoires du pendule conservatif dans le plan de phase  $\dot{\theta} - \theta$ .

Par application du principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté sur la direction  $\vec{y}$ , on obtient l'équation du mouvement du pendule. Si on suppose toute la masse du pendule concentrée autour du point  $M$ , et si on note  $L$  la longueur du fil et  $\vec{g} = g\vec{x}_0$  l'accélération de la pesanteur, cette équation s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (8.1)$$

où  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$  est la fréquence propre du système et  $\mu$  le coefficient d'amortissement, exprimé en  $s^{-1}$ .

Si  $\mu = 0$ , c'est-à-dire lorsque le pendule est conservatif, en multipliant les deux membres de l'Eq. 8.1 par  $\dot{\theta}$  et en intégrant, on obtient l'équation des trajectoires du pendule dans le plan de phase  $\dot{\theta} - \theta$  :

$$\dot{\theta}^2 - 2\omega_0^2 \cos \theta = K, \quad (8.2)$$

où

$$K = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega_0^2 \cos \theta_0$$

est la constante d'intégration, exprimée en fonction des conditions initiales  $\theta = \theta|_{t=0}$  et  $\dot{\theta} = \dot{\theta}|_{t=0}$ .  $K$  peut être vu comme l'énergie initiale, par unité de masse et par unité de longueur, communiquée au pendule. Les trajectoires correspondantes (à énergie mécanique constante) sont tracées Fig. 8.2, pour plusieurs valeurs de  $K$ .

### Linéarisation

Lorsque l'amplitude des vibrations est très petite, c'est-à-dire lorsque  $\theta \ll 1$ , alors

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3) \quad (8.3)$$

et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (8.4)$$

La solution analytique est :

$$\theta(t) = \theta_m e^{-\mu t} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (8.5)$$

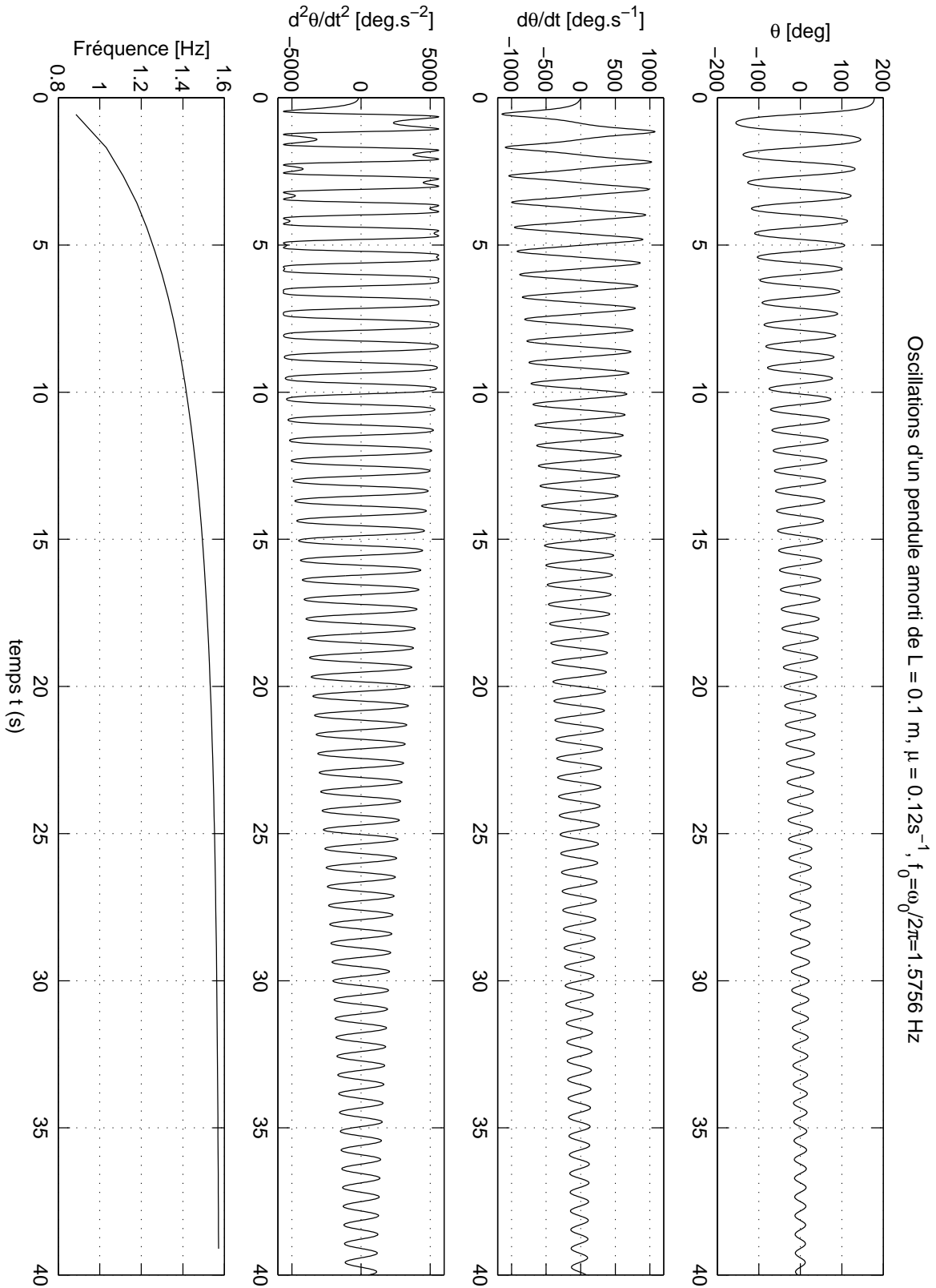


FIG. 8.3 – Évolution temporelle de l'inclinaison  $\theta$ , de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , de l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  et de la fréquence instantanée du pendule amorti.  $\theta_0 = 178 \text{ deg}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ .

où  $\theta_m$  et  $\varphi$  sont déterminés par les conditions initiales  $\theta_0$  et  $\dot{\theta}_0$ .

Ainsi, pour des petits mouvements autour de la position de repos  $\theta = 0$ , (i) les oscillations du pendule sont parfaitement sinusoïdales lorsque  $\mu = 0$  et (ii) la fréquence des oscillations est une constante. Dans le plan de phase, la trajectoire devient une ellipse, d'équation :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\theta_m^2} + \frac{\theta^2}{\omega_0^2 \theta_m^2} = 1. \quad (8.6)$$

On retrouve les courbes de la Fig. 8.2 pour les faibles  $K$ .

### Grands déplacements

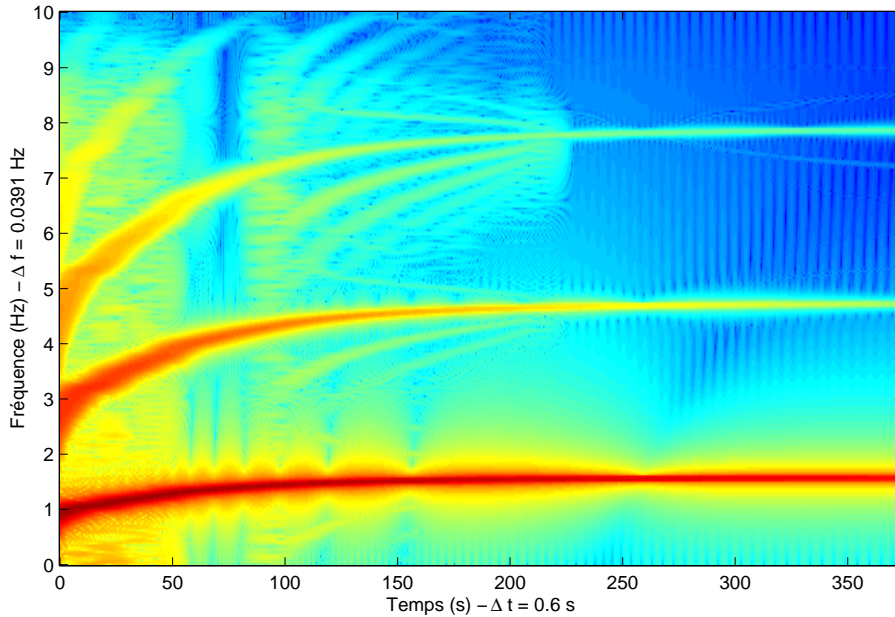


FIG. 8.4 – Spectrogramme de l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  du pendule amorti.  $\theta_0 = 178 \text{ deg}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$  et le coefficient d'amortissement est 10 fois moindre que pour la figure précédente ( $\mu = 0.012 \text{ s}^{-1}$ ).

Lorsque l'amplitude des oscillations augmente, on ne peut plus confondre  $\sin \theta$  et  $\theta$ , et l'équation du mouvement devient non-linéaire. La Fig. 8.3 donne l'évolution temporelle de l'inclinaison  $\theta$ , la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  du pendule, obtenues par une résolution numérique de l'Eq. (8.1), par la méthode de Runge-Kutta implantée dans le logiciel MATLAB<sup>1</sup>. L'amortissement a été choisi non-nul, pour montrer l'évolution du profil de la solution en fonction de l'amplitude des oscillations. On constate que plus l'amplitude du déplacement est importante, plus le profil de la solution est éloigné d'une sinusoïde, que l'on retrouve pour les faibles amplitudes. En particulier, l'accélération est bornée par la valeur  $\ddot{\theta}_M = \omega_0^2$ , lorsque  $\sin \theta = \pm 1$ , c'est-à-dire lorsque le pendule passe par l'horizontale ( $\theta = \pm 90 \text{ deg}$ ), pour les fortes oscillations. On remarque aussi que la fréquence instantanée du pendule dépend de l'amplitude des oscillations : elle est de plus en plus faible lorsque l'amplitude augmente, et tend vers la fréquence propre du système ( $f = \omega_0/2\pi = 1.58 \text{ Hz}$ ) lorsque l'amplitude tend vers 0. Cela s'explique simplement en constatant que le pendule met d'autant plus de temps pour parcourir un aller et retour que l'amplitude des oscillations est importante. Par conséquent, sa période augmente avec l'amplitude des oscillations, et la fréquence instantanée diminue. Ce comportement est couramment appelé *assouplissant*<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>C'est ici la routine ode45 qui a été utilisée. <http://www.mathworks.com>

<sup>2</sup>Cf. note 5, p. 40, et [74].

Le spectrogramme de la Fig. 8.4 confirme la distorsion harmonique constatée sur le profil des évolutions temporelles. On peut noter que celle-ci n'est créée que par des harmoniques d'ordre impair (de pulsation  $3\omega_0, 5\omega_0 \dots$ ), ce qui est une conséquence du comportement symétrique du pendule par rapport à la position  $\theta = 0$ . Plus mathématiquement, cela résulte des monômes non-linéaires introduits par le sinus dans l'équation du mouvement, dont aucun n'est d'ordre pair ( $\sin \theta = \theta - \theta^3/6 + o(\theta^5)$ ). Cela se manifeste aussi par une déformation de la trajectoire du pendule dans le plan de phase, qui s'éloigne de l'ellipse lorsque l'amplitude des oscillations augmente.

En conclusion, l'exemple simple du pendule non-linéaire permet d'introduire les non-linéarités géométriques, et deux de leur conséquences sur les systèmes à un seul degré de liberté (1DDL) :

- la dépendance de la fréquence instantanée des oscillations en fonction de leur amplitude, et,
- la distorsion harmonique qui apparaît à forte amplitude.

Cela va être étudié en détail dans les paragraphes suivants.

## 8.2 Effet raidissant ou assouplissant

La dépendance en amplitude de la fréquence des oscillations libres du système à 1DDL non-linéaire introduit précédemment dans le cas du pendule, est une propriété générale des oscillateurs de type Duffing [74]. Selon les cas, la fréquence augmente en fonction de l'amplitude des oscillations, et le système est qualifié de *raidissant*. A l'opposé, si la fréquence diminue avec l'amplitude, l'oscillateur est dit *assouplissant* (Cf. § 2.4.2 et [74]).

### 8.2.1 Solution analytique perturbative de l'équation du mouvement

On considère le système de la figure 7.8. Pour obtenir l'équation du mouvement de la masse  $M(m)$ , on lui applique le principe fondamental de la dynamique. Elle est soumise à la force de rappel imposée par les barres,  $-\vec{F}_w$  (Eq. (7.27)), et la force verticale extérieure  $\vec{F}_{ext}$ . On obtient alors :

$$\vec{F}_{ext} - \vec{F}_w = m\ddot{w},$$

soit :

$$\ddot{w} + \omega_0^2 w + \beta w^2 + \Gamma w^3 = \frac{F_{ext}}{m}, \quad (8.7)$$

où  $\ddot{w}$  est la dérivée seconde par rapport au temps du déplacement vertical  $w$ . La fréquence propre  $\omega_0$  du système linéaire associé et les coefficients  $\beta$  et  $\Gamma$  sont définis par :

$$\omega_0^2 = \frac{2EA}{ml_0} \gamma_1, \quad \beta = \frac{2EA}{ml_0^2} \gamma_2, \quad \Gamma = \frac{2EA}{ml_0^3} \gamma_3, \quad (8.8)$$

où  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  ont été introduits par l'équation (7.27).

L'équation (8.7) est une équation de Duffing conservative, avec un terme quadratique supplémentaire. La réponse en oscillations libres de cette équation, c'est-à-dire lorsque le terme de forçage  $F_{ext}$  est nul, peut être obtenue de façon analytique par une méthode perturbative. Cela consiste à considérer que les termes non-linéaires sont suffisamment petit pour que leur contribution n'apparaisse que comme une petite perturbation de la partie linéaire de l'équation. Dans notre cas, l'importance des non-linéarités dépend de la valeur de l'amplitude du mouvement, que l'on note  $w_m$ . Pour faire apparaître l'échelle des différents termes, on introduit un petit paramètre  $\varepsilon$  dans l'équation du mouvement comme suit :

$$\varepsilon = \frac{w_m}{l_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_m}, \quad (8.9)$$

de sorte que :

$$\ddot{\bar{w}} + \omega_0^2 \bar{w} + \varepsilon \beta' \bar{w}^2 + \varepsilon^2 \Gamma' \bar{w}^3 = 0, \quad (8.10)$$

où  $\beta' = l_0 \cdot \beta$ ,  $\Gamma' = l_0^2 \cdot \Gamma$  et  $\varepsilon \ll 1$  lorsque  $w_m$  est petit devant  $l_0$ . La mise à l'échelle des différents termes est alors automatique.

On utilise la méthode des échelles multiples [74, 65] pour calculer une solution approchée. Pour cela, on introduit plusieurs échelles de temps :

$$T_n = \varepsilon^n t \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8.11)$$

et la solution est cherchée sous la forme d'un développement en puissances de  $\varepsilon$  :

$$\bar{w}(t) = w_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon w_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 w_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (8.12)$$

Les dérivées temporelles deviennent alors :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (8.13a)$$

$$\frac{d}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (8.13b)$$

où  $D_n = \partial/\partial T_n$ . Par substitution des équations (8.12) et (8.13) dans l'équation (8.10), et en identifiant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient le système suivant :

$$\text{ordre 1 : } D_0^2 w_0 + \omega_0^2 w_0 = 0 \quad (8.14a)$$

$$\text{ordre } \varepsilon : D_0^2 w_1 + \omega_0^2 w_1 = -2D_0 D_1 w_0 - \beta' w_0^2 \quad (8.14b)$$

$$\text{ordre } \varepsilon^2 : D_0^2 w_2 + \omega_0^2 w_2 = -2D_0 D_1 w_1 - (2D_0 D_2 + D_1^2) w_0 - 2\beta' w_0 w_1 - \Gamma' w_0^3 \quad (8.14c)$$

La solution de (8.14a) s'écrit :

$$w_0 = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + cc, \quad (8.15)$$

où  $A$  est une fonction complexe de  $T_1$  et  $T_2$  à déterminer, et  $cc$  désigne le complexe conjugué du terme précédent. Par substitution de (8.15) dans (8.14b), on obtient :

$$D_0^2 w_1 + \omega_0^2 w_1 = -2i\omega_0 D_1 A \exp(i\omega_0 T_0) - \beta' (A^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + A\bar{A}) + cc, \quad (8.16)$$

où  $\bar{A}$  est le complexe conjugué de  $A$ . La condition de solvabilité, qui permet d'éliminer les termes séculaires (Cf. § 5.2.1 et [74, 65]), fixe la valeur du paramètre libre  $A$  comme suit :

$$D_1 A = 0. \quad (8.17)$$

Par conséquent  $A$  ne dépend pas de  $T_1$ , et la solution générale de (8.16) est :

$$w_1 = \frac{\beta' A^2}{3\omega_0^2} \exp(2i\omega_0 T_0) - \frac{\beta'}{\omega_0^2} A\bar{A} + cc, \quad (8.18)$$

Par suite, l'équation (8.14c) s'écrit :

$$\begin{aligned} D_0^2 w_2 + \omega_0^2 w_2 = & - \left[ 2i\omega_0 D_2 A - \frac{10\beta'^2 - 9\Gamma'\omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} \right] \exp(i\omega_0 T_0) \\ & - \frac{3\Gamma'\omega_0^2 - 10\beta'^2}{3\omega_0^2} A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) + cc, \end{aligned} \quad (8.19)$$

et la condition de solvabilité est :

$$2i\omega_0 D_2 A - \frac{10\beta'^2 - 9\Gamma'\omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} = 0. \quad (8.20)$$

On note :

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a(T_2) \exp(i\varphi(T_2)), \quad (8.21)$$

où  $a$  et  $\varphi$  sont des fonctions réelles de  $T_2$ , de sorte qu'en séparant partie réelle et partie imaginaire dans (8.20), on obtient :

$$a' = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 a \varphi' + \frac{10\beta'^2 - 9\Gamma'\omega_0^2}{24\omega_0^2} a^3 = 0, \quad (8.22)$$

où  $a'$  et  $\varphi'$  sont les dérivées de  $a$  et  $\varphi$  par rapport à  $T_2$ .  $a$  apparait donc comme une constante, et

$$\varphi = \frac{9\Gamma'\omega_0^2 - 10\beta'^2}{24\omega_0^2} a^2 T_2 + \varphi_0 = \frac{9\Gamma'\omega_0^2 - 10\beta'^2}{24\omega_0^2} a^2 \varepsilon^2 t + \varphi_0, \quad (8.23)$$

où on a utilisé  $T_2 = \varepsilon^2 t$ . En conclusion, une solution approchée de (8.10) est :

$$\bar{w} = a \cos(\omega_0 t + \varphi) - \varepsilon \frac{a^2 \beta'}{2\omega_0^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (8.24)$$

Les conditions initiales imposent les valeurs de  $a$  et de  $\varphi_0$ . En utilisant les relations (8.9), on obtient :

$$\boxed{w = w_m \cos(\tilde{\omega} t + \varphi_0) - w_m^2 \frac{\beta}{2\omega_0^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos(2\tilde{\omega} t + 2\varphi_0) \right] + O(w_m^3)}, \quad (8.25a)$$

$$\boxed{\tilde{\omega} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{9\Gamma\omega_0^2 - 10\beta^2}{24\omega_0^2} w_m^2 + O(w_m^4) \right]} \quad (8.25b)$$

où on a pris  $w_m a = w_m$  comme constante d'amplitude imposée par les conditions initiales. L'introduction de plusieurs échelles de temps se justifie ici. On voit en effet que  $T_0$  est une échelle rapide, qui prend en compte les variations de la réponse du système aux fréquences de l'ordre de  $\omega_0$ , et que  $T_1$  et  $T_2$  sont des échelles de temps plus lentes, qui correspondent à une modulation lente de la phase  $\varphi$  (Cf. Eq. (8.23)) causées par les non-linéarités. C'est à cette échelle de temps qu'évolue la correction de la pulsation  $\tilde{\omega}$  par rapport à la pulsation propre  $\omega_0$  (Eq. (8.25b)), qui décale lentement et de plus en plus la solution non-linéaire de la solution linéarisée lorsque le temps avance [65].

La réponse en oscillations libres du système de la figure 7.8 est constitué d'un terme oscillant à la fréquence fondamentale  $\tilde{\omega}$ , fonction de  $w_m$  et proche de  $\omega_0$ , d'harmoniques de fréquence  $2\tilde{\omega}$ ,  $3\tilde{\omega}$  et d'un terme constant. On retrouve ici les deux effets des non-linéarités géométriques évoqués à propos du pendule au paragraphe 8.1. On peut remarquer que les déphasages des harmoniques sont multiples de celui de la fondamentale : le déphasage de la  $n$ -ième harmonique vaut exactement  $n\varphi_0$ .

### 8.2.2 Influence de l'inclinaison et de l'épaisseur

Les équations (8.25) sont similaires en structure à celles obtenues lorsque la non-linéarité est simplement cubique (c'est à dire si  $\beta = 0$ , Cf. § 5.2.2 en annexe et [74]). La différence majeure provient de l'apparition du coefficient  $\beta$  résultant directement de l'inclinaison non-nulle, qui peut changer le signe de la correction dans  $\tilde{\omega}$ . Il introduit dans le système un comportement obligatoirement assouplissant, quel que soit le signe de  $\beta$ , puisqu'il est élevé au carré dans (8.25b). En ce qui concerne

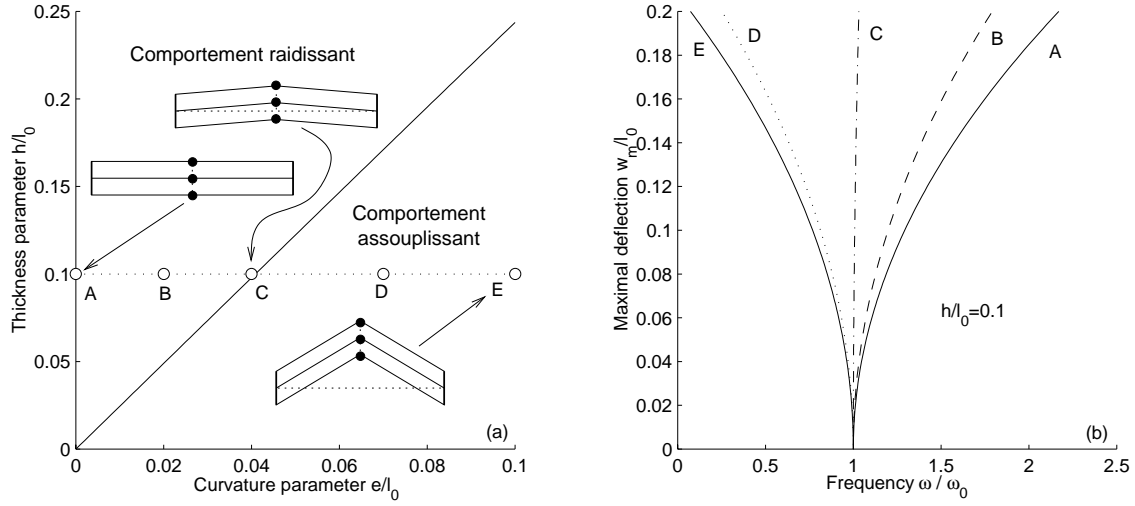


FIG. 8.5 – (a) - *Comportement du système fonction de  $h/l_0$  et  $e/l_0$ .* (b) - “*Backbone curves*” théoriques ( $\tilde{\omega}$  fonction de  $w_m$ ), pour les cinq configurations au repos du système, représentées par des ‘o’ Fig. (a). Chacune de ces configurations a la même épaisseur,  $h/l_0 = 0.1$ , et diffère des autres par son inclinaison initiale  $e/l_0$ .

la distorsion harmonique, on peut déjà remarquer à la vue de l’équation (8.25a), que l’inclinaison initiale est responsable des harmoniques d’ordre pair dans la réponse du système ; nous y reviendrons au paragraphe 8.3.

D’après l’équation (8.25b), la pulsation des oscillations libres est une fonction croissante (cas d’un système raidissant) ou décroissante (cas d’un système assouplissant) de l’amplitude  $w_m$ , dépendant du signe de  $9\Gamma\omega_0^2 - 10\beta^2$ . Cette dernière expression est directement reliée aux valeurs de  $\alpha_0$  et  $h/l_0$  par les quantités  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  introduites dans l’équation (7.27). Après quelques calculs, on montre que  $9\Gamma\omega_0^2 - 10\beta^2$  est positif si :

$$\sin^2 \alpha_0 \leq \frac{3\xi + 12\xi^2 + 4\xi^3}{18 + 72\xi + 84\xi^2} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{h^2}{l_0^2}(1 + \tan \alpha_0). \quad (8.26)$$

Comme les systèmes que l’on étudie, tels que les plaques et les coques, sont minces, on suppose ici pour simplifier que  $h/l_0 \ll 1$ . La relation précédente se simplifie alors en :

$$\frac{h}{l_0} \geq \sqrt{6} \frac{e}{l_0} \sqrt{1 - \left(\frac{e}{l_0}\right)^2}, \quad (8.27)$$

où on a représenté l’inclinaison initiale du système par  $e/l_0 = \sin \alpha_0$ .

L’équation précédente montre que le plan  $(e/l_0)/(h/l_0)$  est partagé en deux régions, qui sont représentées Fig. 8.5(a). Cinq courbes donnant la pulsation  $\tilde{\omega}$  en fonction de l’amplitude des vibrations  $w_m$  sont tracées Fig. 8.5(b), pour cinq configurations initiales du système. Ces figures montrent que si l’épaisseur  $h$  est 2.5 fois supérieure au paramètre d’inclinaison initiale  $e$ , alors le comportement du système est raidissant, ce qui correspond à la région supérieure du plan  $(e/l_0)/(h/l_0)$ . Inversement, la région inférieure correspond à un comportement assouplissant.

L’inclinaison initiale  $e$  crée un terme quadratique (de coefficient  $\beta$ ) dans l’équation du mouvement, qui produit un comportement assouplissant. Inversement, l’épaisseur  $h$  du système n’apporte qu’un terme cubique (de coefficient  $\Gamma$ ), qui est responsable de comportement raidissant. C’est l’équilibrage entre ces deux paramètres géométriques qui détermine le comportement réel du système.

On peut là encore faire un parallèle entre le système de barres et des systèmes minces continus. Notamment, le comportement d'une coque sphérique est raidissant si la demi-épaisseur (équivalent de  $h$ ) est supérieure à 0.5 fois la hauteur sous dôme (équivalent à  $e$ ), et assouplissant sinon, pour le premier mode axisymétrique [44]. Des coques de pourtour rectangulaire possédant deux rayons de courbures montrent aussi des effets raidissants ou assouplissants selon la valeur des courbures [62]. On peut citer enfin les structures plates comme les plaques, qui sont dotées d'un comportement raidissant (Cf. chapitre 5 et 6 et [25, 136, 58, 125, 114]), de la même façon que le système de barres avec  $e = 0$ .

### 8.2.3 Les gongs d'opéra chinois

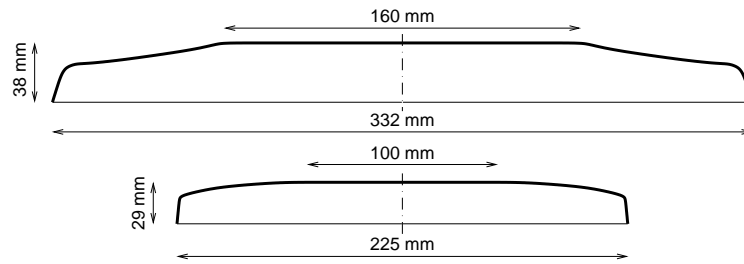


FIG. 8.6 – Profil des gongs chinois étudiés par N. Fletcher et T. Rossing dans [92, 37]

Une autre analogie peut être faite avec les gongs d'opéra chinois étudiés par N. Fletcher et T. Rossing [92, 37]. Ces gongs ont la géométrie d'une coque de révolution, et leurs profils sont présentés Fig. 8.6. Leur timbre est caractérisé par un glissando fréquentiel montant ou descendant, selon l'instrument considéré. Dans les études précédemment citées, N. Fletcher et T. Rossing remarquent que la vibration sur le premier mode axisymétrique est confinée principalement dans la partie centrale du gong, et que la colerette extérieure est animée d'un déplacement de solide rigide. Cela permet de rapprocher le comportement vibratoire des gongs de celui du premier mode axisymétrique d'une coque sphérique, et d'étudier sa réponse en fonction de son épaisseur et de sa courbure. N. Fletcher et T. Rossing expliquent de cette façon que le gong de plus grande taille de la Fig. 8.6, le plus plat des deux, présente un glissando descendant, c'est-à-dire que la fréquence de son premier mode axisymétrique diminue lorsque l'amplitude de vibration diminue, à cause de dissipations. En revanche, le timbre du deuxième gong, à géométrie bombée, est caractérisé par un glissando montant. Les résultats du paragraphe 8.2.2 offrent une explication qualitative de ces effets.

### 8.2.4 Les modes du tam-tam

Étant donné que le système de barres n'a qu'un seul degré de liberté (DDL), il ne peut prédire que le comportement d'un mode isolé d'une structure continue. Des expériences, déjà décrites au paragraphe 2.4.2, ont été réalisées sur le tam-tam du laboratoire, en vue de caractériser le comportement vibratoire de ses modes de vibration. Les "backbone curves" de la figure 8.7, introduites au paragraphe 2.4.2, ont été obtenues avec le même protocole expérimental que celui déjà décrit dans le cas des plaques circulaires (Cf. § 6.5.3). Ces courbes montrent que les modes du gong n'ont pas tous le même comportement : certains sont raidissant (le premier mode axisymétrique, (0,1)), d'autres sont assouplissants (le deuxième (0,2) et le troisième (0,3), et probablement tous les autres modes sont axisymétriques). Cela est probablement dû à la courbure du gong qui est non uniforme sur l'étendue de la structure, comme on va le voir. Il serait intéressant de vérifier par le calcul si des structures simples comme les coques sphériques présentent aussi des comportements différents selon le mode considéré.



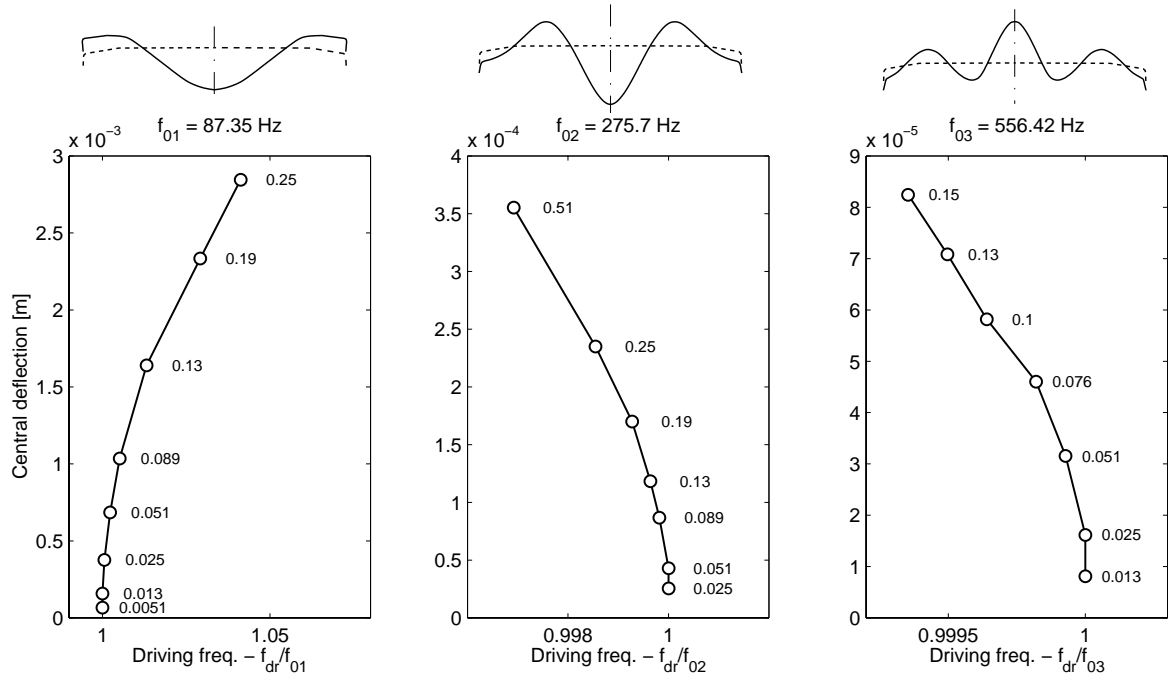


FIG. 8.7 – “backbone curves” expérimentales des trois premiers modes axisymétriques du gong (Cf. Fig. 2.16, p. 41). Les profils des déformées modales correspondantes sont figurés, avec le profil non déformé du gong en pointillé. Les amplitudes de forçage (en N) correspondant à chaque point de mesure sont précisées.

Les analyses modales numériques par la méthode des Éléments Finis (EF) déjà présentées au paragraphe 2.2, permettent d’extraire les profils des déformées modales du gong, qui sont représentés en haut de la figure 8.7. Le premier schéma montre que la déformation de la structure sur le mode (0,1) ne met en jeu principalement que la partie centrale et plate du gong, et que cette déformée est peu éloignée de celle du premier mode axisymétrique d’une plaque circulaire encastree (Cf. Fig. 4.2, p. 96). Cela est probablement dû aux effets rigidifiants de la colerette extérieure du gong, déjà mentionnés dans [37] à propos des gongs d’opéra chinois. Une visualisation expérimentale au moyen d’un stroboscope, lorsque le gong est forcé sur le mode (0,1) à amplitude suffisante (de l’ordre de 3 mm au centre), confirme les remarques précédentes. Un système de barres à comportement analogue aurait une inclinaison initiale faible devant son épaisseur. En revanche, les déformées des modes (0,2) et (0,3) mettent en jeu une surface plus large, plate au centre, et conique près du bord. Leur comportement assouplissant est donc probablement causé par la partie conique. Un système de barres correspondant aurait son inclinaison grande devant son épaisseur.

Les résultats précédents sur le tam-tam du laboratoire pourraient mettre en doute l’explication qualitative du fonctionnement des gongs d’opéra chinois du paragraphe 8.2.3 et de [37]. En effet, les glissandi fréquentiels n’ont été expliqués qu’en considérant le comportement du premier mode axisymétrique. Or on peut penser que le comportement des modes d’ordre supérieur est également différent, et que ainsi, pour le gong de grande taille, si la fréquence d’oscillation du premier mode est animée d’un glissando *descendant*, celles des autres modes peuvent montrer un glissando *ascendant*, et que de ce fait le timbre général de l’instrument est plus complexe. Néanmoins, on peut penser que en conditions normales de jeu, tous les modes axisymétriques sont sollicités avec la même intensité. Or, les courbes de la figure 8.7 montrent que, à même niveau de forçage, les fréquences  $f_{02}$  et  $f_{03}$  des modes (0,2) et (0,3) s’éloignent beaucoup moins des fréquences propres correspondantes que  $f_{01}$  : pour 0.25 N,  $f_{01}$  varie de 5%, alors que  $f_{02}$  varie de 0.2%. Donc, si le glissando du mode (0,1) est

perceptible, celui des modes supérieurs apparaît être négligeable dans le cas du tam-tam, ce qui doit aussi être le cas pour les gongs d'opéra, ce qui corrobore les résultats de N. Fletcher [37].

Les résultats du présent paragraphe 8.2 ont fait l'objet d'une publication associée à une communication de congrès [115].

### 8.3 Distortion dissymétrique des oscillations

On se propose dans ce paragraphe de décrire de façon qualitative le comportement oscillatoire du système de barres de la figure 7.8, pour différentes valeurs des paramètres géométriques d'épaisseur  $h/l_0$  et d'inclinaison  $e/l_0$ . L'équation (8.7) est simulée numériquement au moyen de la méthode de Runge-Kutta (Cf. note 1, p. 174), en vue d'identifier la distortion harmonique induite par les non-linéarités, et son influence sur les profils temporels du déplacement, de la vitesse et de l'accélération de la particule  $M$ . Cela a en particulier, été motivé par l'idée de dégager des interprétations sur le comportement vibratoire des plaques et du tam-tam du laboratoire à partir de simples mesures d'accélération.

#### 8.3.1 Effets de la courbure

Une grande différence de comportement existe entre un système plat au repos (lorsque  $e = 0$ ) et un système avec inclinaison initiale non-nulle. La figure 8.8 se propose de résumer la discussion<sup>3</sup>. Elle permet de comparer un système plat avec un système de même épaisseur et d'inclinaison non nulle. L'idée générale qui se dégage de ces courbes est que le système plat vibre de façon *synétrique* autour de la position de repos  $w = 0$ , alors que lorsque l'inclinaison au repos n'est pas nulle, les oscillations présentent une *dissymétrie*, qui est identifiable par observation des mesures temporelles et des spectres correspondants.

Dans le cas d'un système plat au repos, la structure au repos est géométriquement symétrique par rapport à la position  $w = 0$ , qui est sa position d'équilibre. Cette symétrie se retrouve dans les fonctions de  $w$  que sont  $K$  (la raideur),  $F_w$  (la force de rappel) et  $E_p$  (l'énergie potentielle de la masse), qui sont respectivement paire, impaire et paire. Mathématiquement, si  $e = 0$ , le coefficient  $\beta$  est nul (Cf. Eq. (8.8) et (7.27)), et la force de rappel ne possède pas de terme quadratique, comme le précisent les équations suivantes :

$$K = F_w/w = m (\omega_0^2 + \Gamma w^2), \quad (8.28a)$$

$$F_w = m (\omega_0^2 w + \Gamma w^3), \quad (8.28b)$$

$$E_p = \int_0^w F_w(u) du = m \left( \frac{1}{2} \omega_0^2 w^2 + \frac{1}{4} \Gamma w^4 \right), \quad (8.28c)$$

Le résultat sur les profils de déplacement, vitesse et accélération est que le tracé de chacune des périodes (de durée  $T$ ) possède des symétries centrales par rapport aux points de dates  $t_M + T/4$  et  $t_M + 3T/4$ , si on note  $t_M$  la date de l'un des maxima de  $w$ . On a :

$$w(T/2 - t) = -w(t) \quad \text{et} \quad w(T - t) = -w(t + T/2), \quad (8.29)$$

et des relations analogues pour  $\dot{w}$  et  $\ddot{w}$ . Lorsque maintenant on examine le spectre du signal d'accélération<sup>4</sup>, on constate que les harmoniques d'ordre *pair* en sont absentes. Mathématiquement, c'est

<sup>3</sup>Toutes les grandeurs des graphiques de la figure 8.8 ne sont pas adimensionnées. Elles correspondent à un système de barres de longueur  $l_0 = 100$  mm, de section circulaire de rayon 2 mm, fabriquées dans un matériau de module d'Young  $200.10^9$  Pa. La masse ponctuelle est de 0.1 kg.

<sup>4</sup>on a choisi de tracer le spectre de l'accélération, car c'est, par rapport à la vitesse et le déplacement, le plus riche en harmoniques, du fait du caractère "passe bas" de l'opération d'intégration

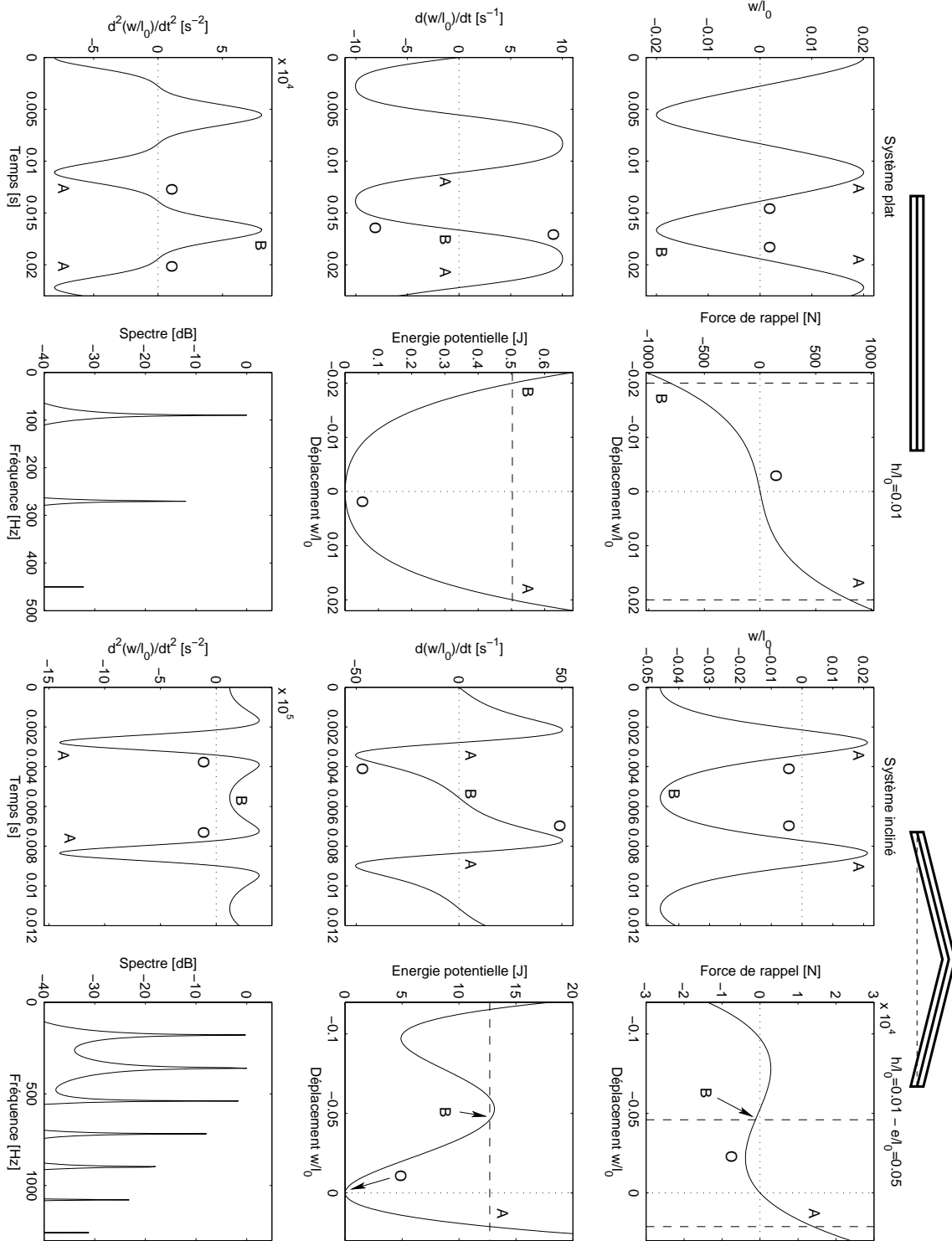


FIG. 8.8 – Comparaison de la réponse en régime libre du système plat ( $h/l_0 = 0.01$ ,  $e = 0$ , à gauche) et du système de même épaisseur avec inclinaison initiale ( $h/l_0 = 0.01$ ,  $e/l_0 = 0.05$ , à droite). La figure est rangée en deux colonnes de quatre courbes. Pour chaque système, on trouve : les profils temporels du déplacement  $w$ , de la vitesse  $\dot{w}$  et de l'accélération  $\ddot{w}$ , et le spectre de cette dernière ; la force de rappel  $F_w$  et l'énergie potentielle  $E_p$  en fonction du déplacement  $w$ .

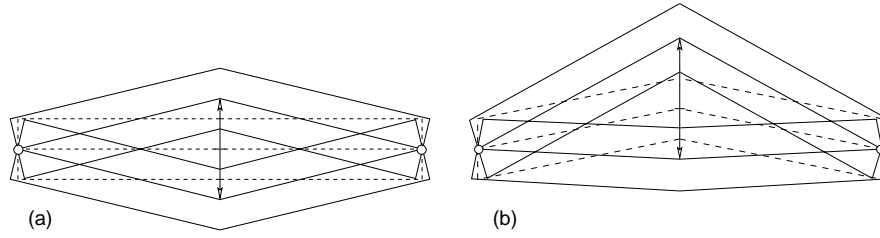


FIG. 8.9 – Comparaison des géométries des deux systèmes : (a) - plat au repos ; (b) - avec inclinaison initiale.

un résultat général des non-linéarités cubiques, qui ne créent que des harmoniques d'ordre impair. Cela a été montré à partir des calculs analytiques perturbatifs du paragraphe 5.2 et dans [74]. Plus physiquement, les propriétés mécaniques du système, en particulier sa raideur, sont les mêmes pour une position  $w$  et sa symétrique  $-w$ . La figure Fig. 8.9(a) illustre ce comportement symétrique en ce qui concerne l'allongement des barres : si la barre supérieure s'allonge, l'autre est comprimée, et leur rôle est inversé si le déplacement est de signe opposé. En revanche, la barre centrale s'allonge quel que soit le signe de  $w$ , ce qui a déjà été discuté aux paragraphes 7.4.2 et 7.4.3.

En revanche, si le système possède une inclinaison initiale, la structure au repos n'est plus géométriquement symétrique par rapport à la position d'équilibre caractérisé par  $w = 0$ , que ce soit au repos, ou décalé de l'équilibre. En particulier, la figure 8.9(b) montre bien que les *trois barres* s'allongent lorsque  $w$  est positif, et qu'elles sont toutes les trois comprimées lorsque  $w$  est négatif. Les propriétés de symétrie des fonctions mathématiques  $K$ ,  $F_w$  et  $E_p$  n'ont plus lieu : ce sont maintenant des polynômes complets en  $w$  :

$$K = m (\omega_0^2 + \beta w + \Gamma w^2), \quad (8.30a)$$

$$F_w = m (\omega_0^2 w + \beta w^2 + \Gamma w^3), \quad (8.30b)$$

$$E_p = m \left( \frac{1}{2} \omega_0^2 w^2 + \frac{1}{3} \beta w^3 + \frac{1}{4} \Gamma w^4 \right), \quad (8.30c)$$

Cela se visualise très bien sur les représentations graphiques de ces deux dernières grandeurs, Fig. 8.8. La distorsion harmonique des évolutions temporelles est ici créée par un spectre harmonique complet, ce qui se traduit par un décalage vers les valeurs négatives du profil de  $w$ , et un arrondissement de ses pics négatifs, alors que les pics positifs sont plus aigus. Cela peut être expliqué physiquement en remarquant que le système est plus raide vers les  $w$  positifs qu'il ne l'est vers les  $w$  négatifs, propriété qui a déjà été évoquée au paragraphe 7.3.2, et qui provient du terme linéaire dans (8.30a).

On peut citer une autre propriété de symétrie, qui cette fois-ci est commune aux deux systèmes. Lors d'un déplacement du système pendant une période, les courbes de la force de rappel  $F_w$  et  $E_p$  sont décrites une fois dans un sens, par exemple de  $A$  vers  $B$  (pendant la première demi-période), et une fois dans l'autre, de  $B$  vers  $A$ . Le déplacement  $w$  de la masse pour l'une de ces demi-périodes est égal et opposé à celui de l'autre demi-période, ce qui produit une symétrie axiale à  $t_M + T/2$  pour  $w$  et  $\ddot{w}$ , et une symétrie centrale pour  $\dot{w}$ , de sorte que :

$$w(T - t) = w(t), \quad \dot{w}(T - t) = -\dot{w}(t) \quad \text{et} \quad \ddot{w}(T - t) = \ddot{w}(t) \quad (8.31)$$

Cette dernière propriété vient étendre le résultat de l'équation (8.25a), valable pour des oscillations de faible amplitude, qui stipule que le déphasage de chacune des harmoniques est multiple du déphasage

de la fondamentale ( $\varphi_n = n\varphi_0$ ). Le déplacement s'écrit ainsi :

$$\text{système plat : } w(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \cos(n\tilde{\omega}t + n\varphi_0) \quad (8.32a)$$

$$\text{système incliné : } w(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\tilde{\omega}t + n\varphi_0) \quad (8.32b)$$

A partir de ces expressions, on montre très facilement les propriétés de symétrie des équations (8.29) et (8.31). Les expressions (8.32) sont probablement générales pour les systèmes à un degré de liberté de type Duffing. Elles sont validées par les simulations numériques précédentes, qui justifient de la même façon des hypothèses de calcul analytique couramment rencontrées, par exemple lorsque la méthode de l'équilibrage harmonique est utilisée, notamment pour étudier des vibrations de grandes amplitudes où les méthodes perturbatives ne fonctionnent plus [13, 112, 78, 12, 64]. Dans cette étude, seules des simulations numériques de ces petits systèmes en vibration de grande amplitude seront présentées, au paragraphe 8.4.

On peut là encore faire un parallèle entre ces deux systèmes de barres et les plaques et les coques. L'étude précédente, et en particulier la figure 8.9, représente probablement assez bien comment les fibres supérieures et inférieures d'une plaque et d'une coque se comportent lors des oscillations. L'évolution temporelle de l'accélération du système avec inclinaison initiale, représentée figure 8.8, est en très bon accord avec des accélérations couramment mesurées sur le tam-tam du laboratoire en vibrations forcées, dont certaines sont représentées sur les figures 2.19 (p. 45) et 2.21 (p. 47). En revanche, les plaques n'ont étrangement jamais vibré avec des évolutions temporelles telles que celles du système plat. Cela a déjà été discuté au § 6.5.1.

### 8.3.2 Interprétation géométrique des effets raidissant et assouplissant

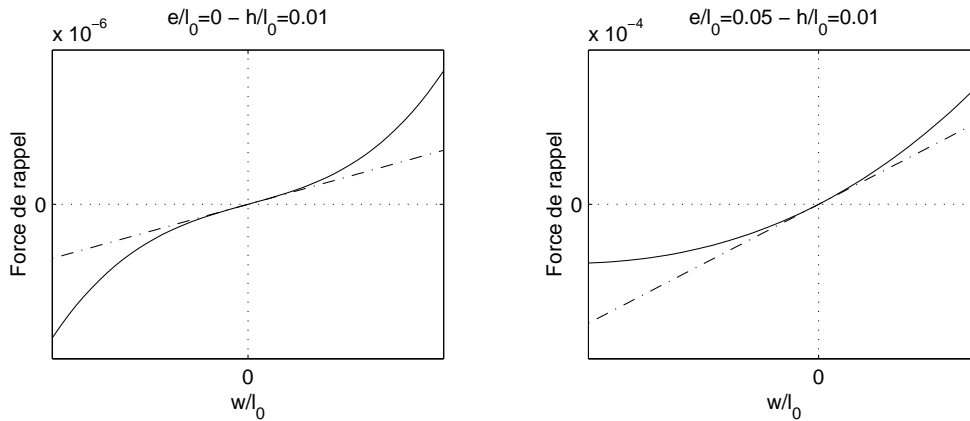


FIG. 8.10 – Évolution de la force de rappel pour deux systèmes de barres à comportement opposé : (gauche) - système plat à comportement raidissant ; (droite) - système avec inclinaison initiale à comportement assouplissant.

Une explication physique peut être donnée sur les comportements raidissant et assouplissant des systèmes à un degré de liberté, en comparant l'évolution de la force de rappel  $F_w$  du système non-linéaire à celle du système correspondant linéarisé. Ces évolutions sont représentées en fonction de  $w$  sur la figure 8.10, pour un système plat au repos, dont on a vu qu'il avait un comportement raidissant, et du système avec la même épaisseur  $h$ , munie d'une inclinaison initiale valant  $e/b = 0.05$ , qui est assouplissant (Cf. Fig. 8.5). Tout d'abord, puisque les comportements que l'on cherche à interpréter

dépendent de la fréquence d'oscillation, il est important de considérer une période entière du système. Remarquons que, d'après l'équation du mouvement (8.7) du système en oscillations libres, la force de rappel  $F_w$  est à tout moment égale et opposée à la quantité d'accélération du système, soit :

$$F_w = -m\ddot{w} \quad (8.33)$$

D'après cette équation, les courbes de la figure 8.10 représentent aussi l'évolution de l'accélération de la masse, à une constante multiplicative près. Lors d'une oscillation du système, ces courbes sont décrites en un aller et retour.

Si le système est linéaire,  $F_w$  est proportionnelle à  $w$ , et les droites en trait mixte de la figure sont obtenues. Soit une oscillation d'amplitude maximale  $w_m$ . Plus  $w_m$  est grand, plus la masse a de chemin à parcourir, et à l'opposé, plus son accélération est grande. Puisque le système est linéaire, ces deux effets contraires s'annulent, si bien que la période, et donc la fréquence est une constante en fonction de  $w_m$ .

Si le système est celui de la figure de gauche, il possède un comportement symétrique par rapport à  $w = 0$ , et à toute date, la force de rappel, et donc l'accélération, est supérieure en valeur absolue à celle du comportement linéaire, et la différence entre les deux est croissante en fonction de l'amplitude. La durée d'un aller et retour est donc moindre, et d'autant plus faible *par rapport* à la durée linéaire, que l'amplitude  $w_m$  est importante. Par conséquent, la fréquence d'oscillation augmente en fonction de l'amplitude, le comportement est raidissant.

Si le système est celui de la figure de droite, le comportement n'est plus symétrique. Pour les valeurs de  $w$  positives, l'accélération du système avec les non-linéarités est supérieure en valeur absolue à celle du système linéaire alors que pour les  $w$  négatifs, c'est l'inverse. De plus,  $|\max(w)| < |\min(w)|$  sur une oscillation : l'oscillation est décalées vers les  $w$  négatifs. Cela a pour effet, globalement sur une demi-période, de fournir une perte d'accélération plus importante, dans les  $w$  négatifs, que le gain d'accélération dans les  $w$  positifs. Le bilan est que la durée d'un aller et retour est plus grande que pour le système linéaire équivalent, et cela va en augmentant avec l'amplitude des oscillations. Le système a un comportement assouplissant.

## 8.4 Vibrations de grande amplitude

Dans les paragraphes précédents, seules les oscillations proches de la position d'équilibre ont été considérées, que ce soit dans le calcul analytique de la solution par la méthode des échelles multiples (§8.2), ou lors des simulations numériques (§8.3). La figure 8.11 montre l'évolution de la force de rappel  $F_w$  et de l'énergie potentielle de la masse  $E_p$  en fonction de  $w$ , pour trois valeurs particulières des paramètres géométriques d'épaisseur ( $h$ ) et d'inclinaison ( $e$ ). Le système noté  $A$  est plat, le système  $D$  est dépourvu d'épaisseur, et  $B$  et  $C$  sont intermédiaires..

### 8.4.1 Système sans raideur en flexion

La courbe d'énergie potentielle de  $D$  montre que le système correspondant possède trois positions d'équilibre, représentées figure 8.12. Deux sont stables, et la troisième est instable. Les deux positions stables ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) étant symétriques par rapport à ( $I$ ), et situées respectivement en  $w = 0$ ,  $w = -2e$  et  $w = -e$ . Une simulation numérique de l'équation du mouvement (8.7) de ce système en vibrations libres est présentée figure 8.13. Un terme d'amortissement visqueux  $\mu\dot{w}$  a été ajouté, pour pouvoir visualiser l'évolution des profils temporels et de la fréquence d'oscillation, en fonction de l'amplitude maximale des vibrations. La fréquence instantanée a été calculée comme l'inverse de la période  $T$  du signal de déplacement, identifiée à la durée entre deux maxima des oscillations. Ce système montre clairement deux régimes de vibrations différents.

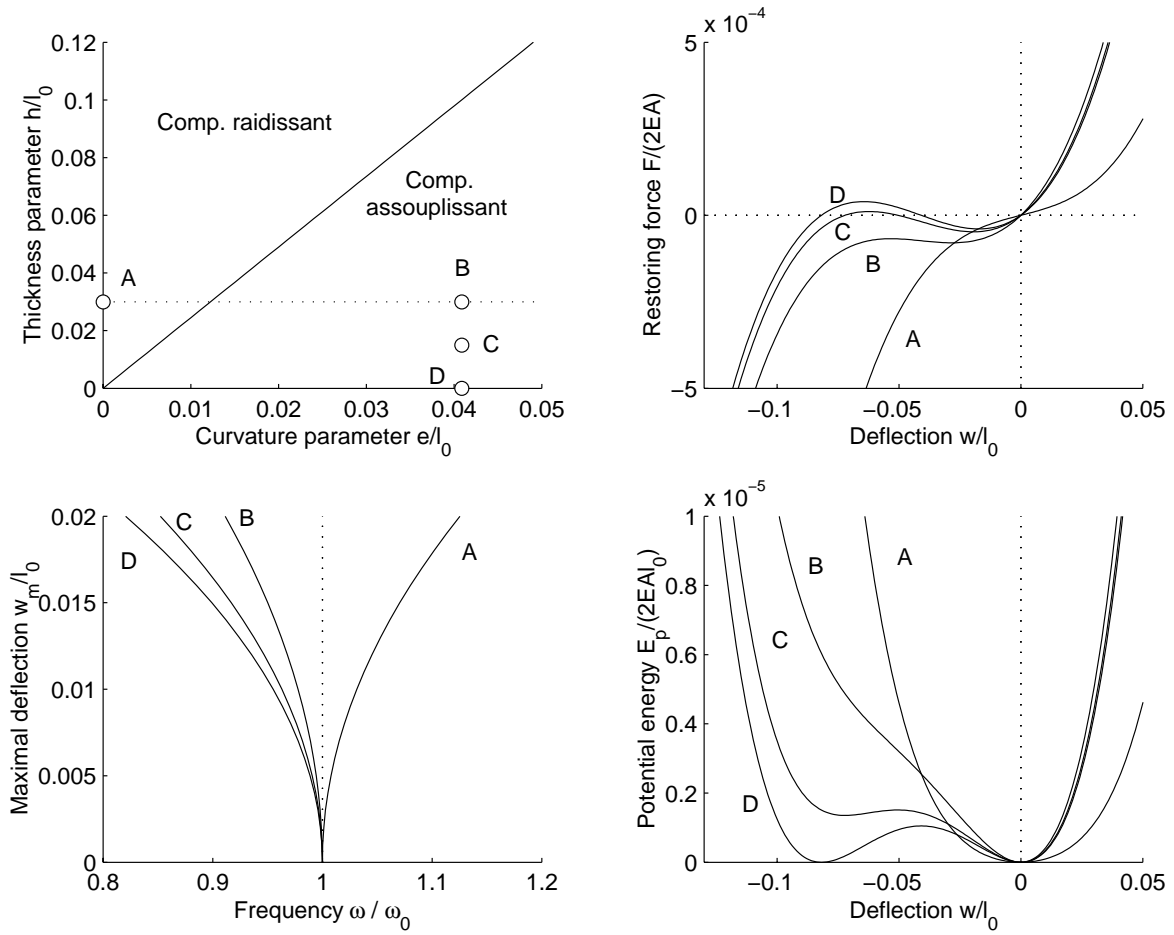


FIG. 8.11 – Comparaison des forces de rappel  $F_w$  et des énergies potentielles  $E_p$  pour quatre systèmes de barres.

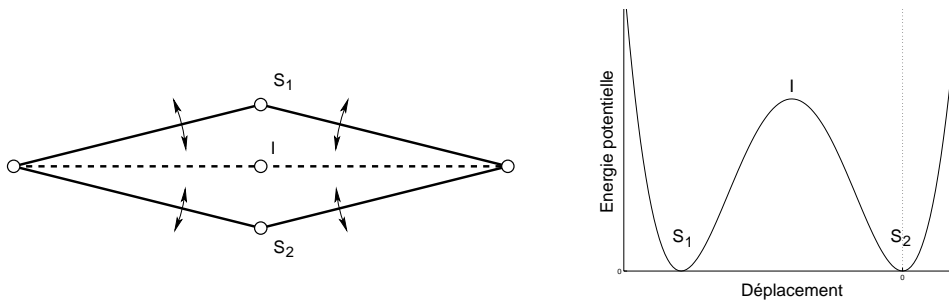


FIG. 8.12 – Positions d'équilibre du système sans raideur en flexion. ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) : stables, ( $I$ ) : instables.

- Le premier régime, noté (I), apparaît à partir de  $t = 0.15$  s. Il correspond aux oscillations du système autour de la position d'équilibre ( $S_1$ ), lorsque l'énergie mécanique de celui-ci est suffisamment faible pour qu'il ne traverse pas le point d'équilibre instable ( $I$ ). Ce régime est celui déjà étudié précédemment (§ 8.3), et on retrouve les profils temporels dissymétriques de la figure 8.8, colonne de droite. Le comportement du système est assouplissant, puisque la fréquence augmente lorsque l'amplitude diminue. L'équation du mouvement est à non-linéarités quadratique et cubique, issue de 8.7 avec  $h = 0$  :

$$\ddot{w} + \mu\dot{w} + \frac{2EA_0}{m} \left[ \frac{e^2}{l_0^2} \frac{w}{l_0} + \frac{3}{2} \frac{e}{l_0} \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{w}{l_0} \right)^3 \right] = 0. \quad (8.34)$$

- Le second régime, noté (II), est obtenu de  $t = 0$  à  $t = 0.15$  s pour des oscillations du système en grande amplitude, lorsque son énergie mécanique est suffisamment grande pour que les oscillations traversent le point d'équilibre instable ( $I$ ). Les profils temporels possèdent toutes les propriétés de symétrie centrale des oscillations à harmoniques impaires (Eq. 8.29). En constatant que les oscillations sont symétriques par rapport à la position du point d'équilibre instable ( $I$ ), on re-écrit l'équation du mouvement précédente par rapport au point ( $I$ ), avec le changement de variable  $w' = w + e$ , où  $w'$  représente le déplacement du système par rapport à ( $I$ ). On obtient :

$$\ddot{w}' + \mu\dot{w}' + \frac{2EA_0}{m} \left[ -\frac{1}{2} \frac{e^2}{l_0^2} \frac{w'}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{w'}{l_0} \right)^3 \right] = 0, \quad (8.35)$$

Cette équation est du type Duffing, c'est-à-dire composée uniquement d'une non-linéarité cubique. Pour trouver une solution approchée de cette équation, les méthodes de perturbations ne s'appliquent pas, car l'équation linéaire associée est instable. La méthode de l'équilibrage harmonique [74], par exemple, montrerait que la solution n'est composée que d'harmoniques impaires [13], et que le comportement du système dans ce régime est raidissant.

Lorsque le système possède de l'amortissement, le passage d'un régime à l'autre s'effectue naturellement, avec un doublement de la fréquence d'oscillation, ce qui est illustré par la figure 8.13, à  $t = 0.15$ s. Ce doublement de fréquence, provient du fait que comme le système est symétrique par rapport au point d'équilibre instable ( $I$ ), à la limite entre les deux régimes, une oscillation sur le régime (I) correspond à exactement deux oscillations sur le régime (II), l'une dans le même sens, l'autre en sens opposé. Par conséquent, il faut deux fois plus de temps pour osciller sur le régime (I) que sur le (II).

Le cas limite de ce système avec raideur en flexion nulle peut être rapproché de celui de structure comme des coques et des arches peu épaisses, où les efforts de flexion sont négligés devant les efforts de membrane. Beaucoup d'études ont portées sur les oscillations de ce genre de systèmes, car il offre des comportements chaotiques en régime forcé. Du point de vue mathématique, on peut citer [112, 78, 64] et d'un point de vue plus mécanique, Blair *et al* retrouvent en régime forcé le phénomène de doublement de fréquence évoqué plus haut, à propos d'une arche faiblement courbée [11].

### 8.4.2 Influence de l'épaisseur

Lorsqu'on ajoute de l'épaisseur au système de barres, c'est-à-dire que  $h$  est non nulle, le système perd sa symétrie par rapport à la position d'équilibre ( $I$ ), (système  $C$  de la figure 8.11) jusqu'à ce qu'une seule position d'équilibre ne persiste, pour les grandes valeurs de  $h$  (système  $B$ ). Le cas limite est le système noté  $A$ , où l'inclinaison est nulle et le système est symétrique, cette fois-ci par rapport à sa seule position d'équilibre  $w = 0$ .

Comme pour le système sans épaisseur, des simulations numériques ont été menées. La figure 8.14 montre que si le système possède une épaisseur suffisante pour qu'il ne présente qu'une seule position d'équilibre, la transition entre les régimes (I) et (II) est beaucoup moins brutale. Les évolutions



temporelles du régime (II) sont ici hybrides entre celles des deux régimes de la figure 8.13. D'autre part, il n'y a pas de discontinuité de la fréquence des oscillations : à grande amplitude, le système a un comportement raidissant, qui laisse la place au comportement assouplissant à faible amplitude déjà étudié au paragraphe 8.2.2. Un comportement analogue a été mis en évidence sur des coques sphériques par Fletcher [37].



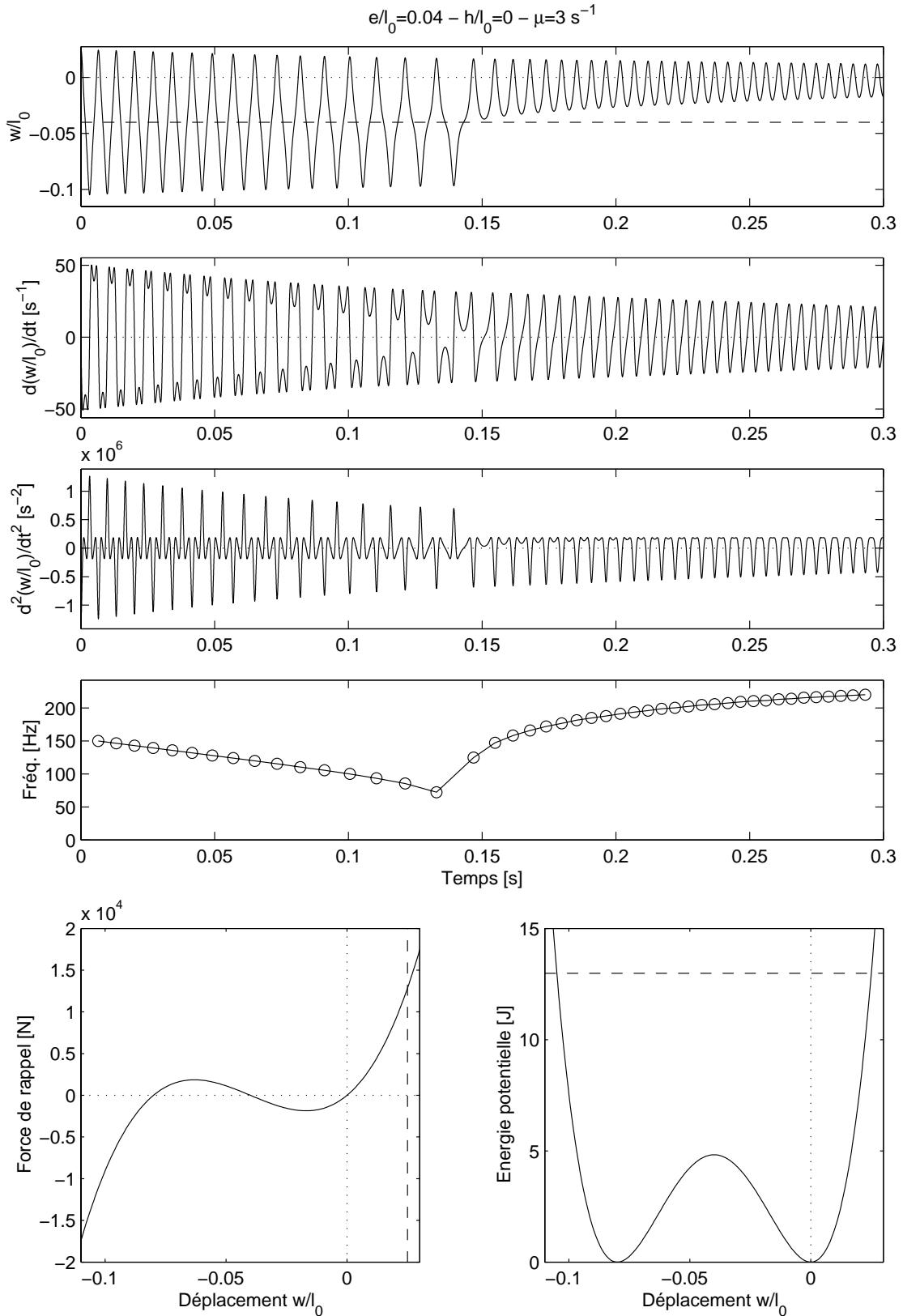


FIG. 8.13 – Évolutions temporelles du déplacement, de la vitesse et de l'accélération et de la fréquence d'oscillation du système  $D$ , sans raideur en flexion ( $e/l_0 = 0.04$ ,  $h = 0$ ), avec dissipations.

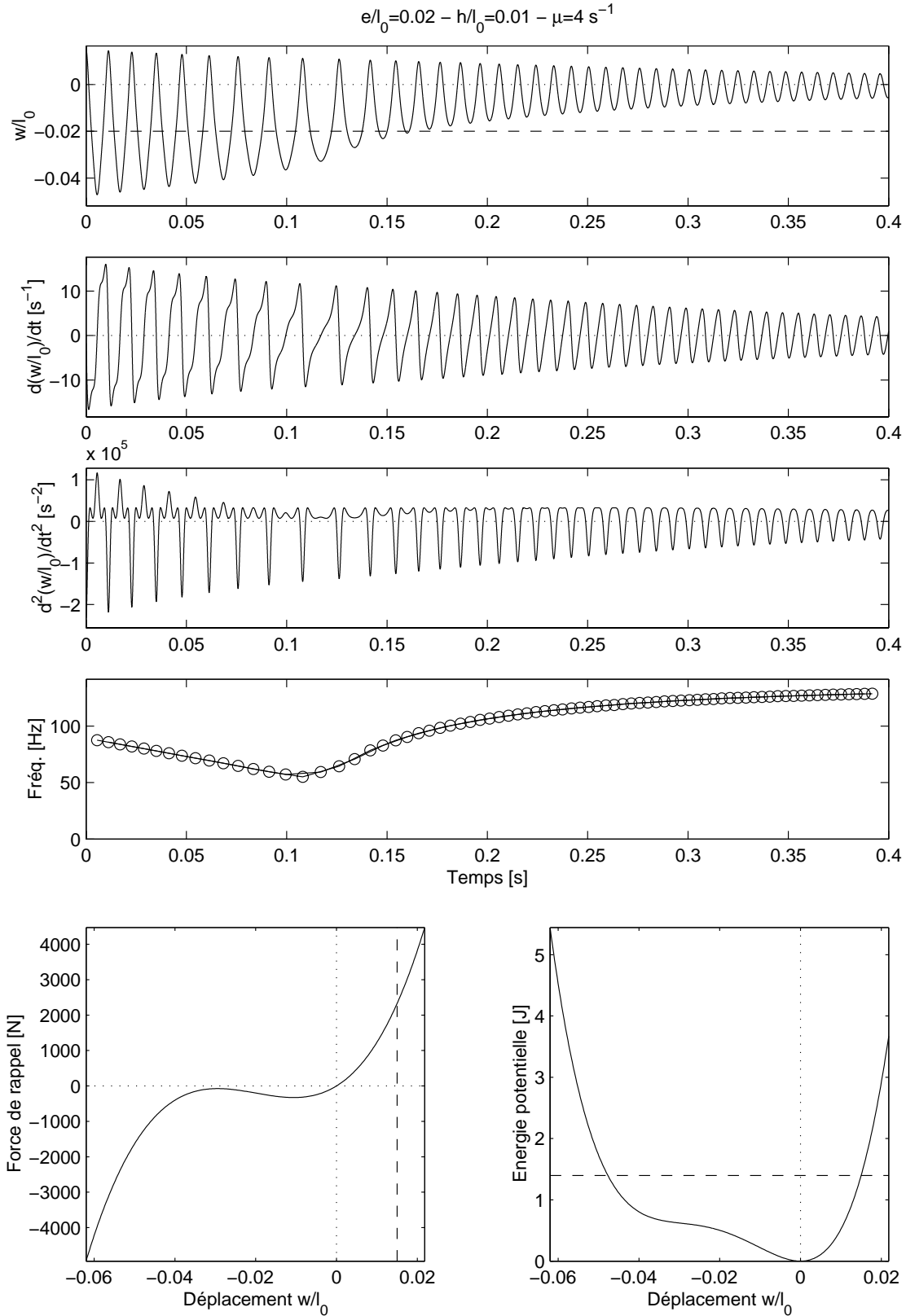


FIG. 8.14 – Évolutions temporelles du déplacement, de la vitesse et de l'accélération et de la fréquence d'oscillation du système avec  $e/l_0 = 0.02$  et  $h = 0.01$ , avec dissipation.

---

---

## Conclusion générale et perspectives

L'objectif principal de ce travail consistait en la compréhension des phénomènes non-linéaires mis en jeu dans les instruments de percussion du type des cymbales et des gongs. Cela s'inscrivait dans la continuité des recherches du laboratoire dans le domaine de la synthèse sonore par modèle physique, et en particulier de la thèse de Cyril Touzé [122]. L'idée était de contribuer aux études préliminaires nécessaires à l'établissement du modèle pour la synthèse sonore, qui nécessite une connaissance approfondie des mécanismes de production du son, et donc du comportement vibratoire des instruments. Dans le cas des cymbales et des gongs, les études existantes étaient assez ponctuelles, et aucun modèle global n'avait été construit (On peut se reporter au paragraphe 1.2.2 pour plus de détail). Le travail de thèse de Cyril Touzé, effectué simultanément, a offert une contribution très complète sur deux aspects :

- Une analyse de signaux vibratoires mesurés sur une cymbale et sur le gong du laboratoire par des méthodes de traitement du signal, est proposée. Cela a permis de mettre en évidence différents régimes de vibrations (périodiques, quasi-périodiques et chaotiques), et de conjecturer un scénario de transition du régime périodique vers le chaos.
- Un début de modélisation des gongs et des cymbales par des plaques circulaires en conditions aux limites libres, en vibrations faiblement non-linéaires, en contribution avec l'auteur.

L'idée a donc été dans ce travail, de poursuivre les travaux de Cyril dans deux directions. La première avait pour objectif d'établir un modèle de comportement en partant de la mécanique des milieux continus appliquée aux coques de révolution ; la seconde consistait en des analyses expérimentales nécessaires pour valider le modèle.

Devant la relative complexité des modèles non-linéaires de coques, deux directions pour la modélisation ont été choisies.

- La première a consisté à construire et étudier un modèle de comportement de plaques circulaires, en vibrations de grande amplitude et conditions aux limites libres (deuxième partie du document).
- Comme la courbure de la géométrie des gongs et des cymbales n'est pas prise en compte par un modèle de plaque, et aussi dans l'idée de comprendre et d'expliquer les phénomènes non-linéaires principaux mis en jeu dans ces instruments, des petits modèles discrets à un degré de liberté ont été développés en second lieu (troisième partie).

Différentes observations expérimentales, sur le gong du laboratoire (première partie) et sur les plaques circulaires (deuxième partie, chapitre 6) sont venues étayer la démarche de modélisation.

## 9.1 Non-linéarités géométriques dans les milieux minces

Les systèmes de barres étudiés lors de la troisième partie du manuscrit, bien qu'étant discrets et ne comportant qu'un degré de liberté, sont riches en enseignements sur les principaux phénomènes non-linéaires observés dans les cymbales et les gongs, et plus généralement dans les coques.

### Source des non-linéarités

Si on imagine que le milieu continu que constitue la coque, est constitué de fibres superposées<sup>1</sup>, lorsque l'amplitude des vibrations est suffisamment importante (on précisera cet ordre de grandeur dans la suite), le comportement *global* de la structure est *non-linéaire*, alors que chacune des fibres a un comportement *linéaire*. Cela montre que les non-linéarités sont simplement créées par une rotation des fibres (qui est négligée dans un modèle linéaire), qui apparaît lors du changement de géométrie du milieu induite par les déformations. La direction des fibres est alors variable en fonction du déplacement transverse, et c'est la projection des efforts normaux dans les fibres (les efforts de membrane) sur la direction transversale qui crée les non-linéarités. Ces conclusions ont été obtenues à la fois à partir des systèmes de barres (chap. 7) et du modèle continu de plaque (chap. 3).

Cela conduit à constater que les effets non-linéaires sont directement liés au chargement de la surface/ligne moyenne de la structure (c'est une droite pour une poutre, une courbe pour une arche, un plan pour une plaque). Deux conséquences en découlent :

- Les conditions aux limites *longitudinales* ont une influence sur l'importance des non-linéarités. Dans le cas des plaques, des conditions aux limites encastrees créent un chargement du plan moyen plus important, à déplacement transverse égal, que des conditions aux limites libres. Cela signifie que pour un déplacement  $w$  donné, les non-linéarités sont plus fortes dans le cas encastree que dans le cas libre<sup>2</sup>. Dans le cas des poutres, le modèle équivalent à celui de Von Kàrmàn pour les plaques donne des équations linéaires lorsque l'une des extrémités n'est pas immobilisée.
- C'est la structure bidimensionnelle de la plaque qui crée le chargement de son plan moyen, à la source des non-linéarités, lorsque les conditions aux limites sont libres.

Une étude intéressante sur ce sujet consisterait à comparer, pour un déplacement transverse maximum  $w_m$  donné, l'importance des non-linéarités dans plusieurs structures minces, associées à plusieurs conditions aux limites (plaques à bord libre et encastree, poutre encastree, encastree/libre, simplement supportée...).

Enfin, notons que le paramètre principal gouvernant l'importance des non-linéarités est l'amplitude maximum  $w_m$  du déplacement transverse. En effet, c'est ce dernier qui crée le chargement de la surface moyenne responsable des effets non-linéaires.

### Phénomènes non-linéaires

Les oscillations d'un système non-linéaires sont marquées par des phénomènes typiques, qui sont énumérés ci-dessous.

<sup>1</sup>Ce serait strictement le cas avec un matériau orthotrope comme du bois ou un matériau composite ayant comme directions d'orthotropie les directions longitudinale et transverse de la plaque ou de la coque.

<sup>2</sup>En terme d'effet sonore, cela ne veut pas dire pour autant qu'une plaque encastree est "plus non-linéaire" qu'une plaque libre : lorsque elle est frappée par une mailloche, c'est les *effort* qui sont imposés, et non les déplacements. À efforts égaux, les déplacements sont nettement plus faibles dans le cas encastree que dans le cas libre ; on peut donc penser que les effets non-linéaires sont équivalents dans les deux cas, à efforts égaux.

- La fréquence des oscillations en régime libre est dépendante de l’amplitude des oscillations. Deux comportements antagonistes se dégagent, selon si la fréquence est croissante (comportement raidissant) ou décroissante (assouplissant) en fonction de l’amplitude.
- En régime forcé, plusieurs régimes de vibrations coexistent pour une valeur donnée des paramètres de contrôle, ce qui conduit à observer des *phénomènes de saut* entre solutions stables.
- Une distorsion harmonique du signal est observée, en régime forcé ou libre.

Ces trois caractéristiques ont été observées expérimentalement sur le gong au chapitre 2, lorsque sa réponse n’est gouvernée que par un seul mode de vibration. Des comportements analogues ont été mis en évidence à la fois expérimentalement et théoriquement sur les plaques circulaires (chap. 5 et 6).

L’étude des systèmes de barres a permis au chapitre 8 d’étudier l’influence de la courbure d’une coque, non prise en compte dans le modèle de plaque, et a montré en particulier les résultats suivants :

- le comportement raidissant ou assouplissant du système de barres est déterminé par ses caractéristiques géométriques : son épaisseur est responsable d’un comportement raidissant, alors que sa courbure apporte un comportement assouplissant. C’est l’équilibre entre ces deux effets qui détermine le comportement du système.
- un système plat (de courbure nulle) ne possède que des non-linéarités cubiques, ce qui entraîne une distorsion harmonique du signal constituée que d’harmoniques impaires. La courbure apporte un terme quadratique dans les équations, qui est responsable d’une distorsion harmonique complète.

## 9.2 Vers un modèle continu de cymbales et de gongs

La deuxième partie a permis d’exposer une démarche complète de résolution du problème non-linéaire de plaques, des équations non-linéaires de la mécanique des milieux continus à une solution approchée, donnant le déplacement en tout point de la structure en fonction du temps. Reprenons les résultats principaux, et voyons quelles en sont les extensions possibles vers le cas des gongs et des cymbales.

### Le modèle non-linéaire de milieux minces.

Les équations de Von-Kàrmàn établies au chapitre 3 constituent un modèle non-linéaire de plaques permettant de décrire une grande variété de phénomènes non-linéaires. Le domaine de validité de cette théorie a clairement été précisé au chapitre 3 : les équations de Von-Kàrmàn sont valables jusqu’à des amplitudes du déplacement transverse de l’ordre de l’épaisseur  $h$  de la plaque, ce qui semble suffisant à la vue des amplitudes de vibration observées expérimentalement sur le gong. Ce modèle permet de décrire des phénomènes non-linéaires liés à des combinaisons de résonances et des comportements quasi-périodiques [46], similaires à ceux rencontrés avec le gong du laboratoire, et exposés au chapitre 2. On peut en outre penser que le domaine de validité de ces équations est plus étendu, pour des amplitudes de l’ordre de plusieurs fois l’épaisseur  $h$ , ce qui est alors intéressant dans le cas des cymbales. Cela nécessiterait toutefois d’être vérifié expérimentalement.

Les hypothèses qui conduisent à l’établissement du modèle de Von-Kàrmàn peuvent être appliquées à d’autres milieux minces, comme les poutres, les arches et les coques. On obtient alors des théories analogues [74, 117]. La méthode utilisée au chapitre 3 pour réduire le problème de mécanique tridimensionnel au cas des milieux minces utilise le *Principe des Travaux Virtuels*, associé à des analyses dimensionnelles pour justifier les simplifications. Même si dans le cadre de ce travail, seul le modèle continu de plaques a été étudié, l’approche est générale, et pourrait être appliquée au cas des coques de révolution faiblement courbées<sup>3</sup>, à profil quelconque. Ce genre de modèle serait alors tout

<sup>3</sup>“shallow shells” dans la littérature anglo-saxonne.

a fait adapté pour décrire le comportement en situation de jeu des instruments de percussion, tels que les gongs et les cymbales. Un début d'étude dans cette direction a été effectué par M. Fontaine au laboratoire de mécanique de l'ENSTA<sup>4</sup>, dans le cadre d'un stage de DEA [40].

### Une méthode de résolution générale

La méthode de résolution utilisée dans ce travail, exposée au chapitre 4, permet de remplacer les *équations aux dérivées partielles* de départ (Eq.4.4a,b), qui régissent le mouvement de la structure, par le problème suivant :

$$w(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \Phi_{\alpha}(\vec{x}) \cdot q_{\alpha}(t), \quad (9.1a)$$

$$\ddot{q}_{\alpha}(t) + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}(t) = \varepsilon \left[ - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \Gamma_{pq\alpha u} q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}(t) + \tilde{Q}_{\alpha}(t) \right], \quad (9.1b)$$

constitué d'une infinité d'*équations différentielles ordinaires*, non-linéaires et couplées. Cette méthode offre plusieurs avantages :

- Aucune approximations supplémentaires ne sont nécessaires, si bien que le problème (9.1a,b) a le même domaine de validité que les équations de Von-Kàrmàn :  $w \simeq h$ .
- Cette approche fait apparaître clairement les modes de vibration linéaires de la structure, qui sont facilement identifiables expérimentalement, par la mesure des fréquences propres  $f_{kn}$  et des déformées modales  $\Phi_{kn}$ . Cela permet en particulier de simplifier le problème (9.1a,b) en un système à nombre fini d'équations et de vérifier ces approximations expérimentalement. C'est ce qui a été fait aux chapitres 5 et 6 dans les cas simples de vibrations sur un seul mode.

**Cas des coques** Dans le cas où la structure est courbée, les chapitres 7 et 8, et des études sur des calottes sphériques [136] montrent que des non-linéarités quadratiques apparaissent dans les équations. Un traitement analogue aux développements du chapitre 4 appliqué à des équations non-linéaires de coques donnerait un système analogue aux équations (9.1b), avec des termes quadratiques en plus, ce qui s'écrit :

$$w(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \Phi_{\alpha}(\vec{x}) \cdot q_{\alpha}(t), \quad (9.2a)$$

$$\ddot{q}_{\alpha}(t) + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}(t) = \varepsilon \left[ - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \beta_{pq\alpha} q_p(t) q_q(t) - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{u=1}^{+\infty} \Gamma_{pq\alpha u} q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}(t) + \tilde{Q}_{\alpha}(t) \right]. \quad (9.2b)$$

La décomposition définie par l'équation (9.2a) est validée<sup>5</sup>, dans le cas du gong en régime forcé, par une expérience présentée au chapitre 2, lorsque l'excitation est proche d'une résonance axi-symétrique et qu'il n'y a pas de combinaisons de résonances (Cf. § 2.4.2 et l'équation (2.5), p. 37).

<sup>4</sup>ENSTA-UME, Chemin de la lumière, 91761 Palaiseau Cedex. Responsable : A. Chaigne

<sup>5</sup>L'analyse du paragraphe 2.4.2 est néanmoins *qualitative*. En particulier, les résultats de la figure 2.14 ne permettent pas de déterminer si la géométrie de la déformée de la structure ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, comme c'est en général le cas à forte amplitude, par exemple dans le cas des plaques (Cf. § 6.5.3 et [6]). Si tel était le cas, l'utilisation de modes non-linéaires serait intéressante pour décrire *quantitativement* ce phénomène.

## Réduction du nombre de modes impliqués

Les systèmes (9.1b) ou (9.2b) comportant une infinité d'équations, il est nécessaire pour les traiter d'étudier expérimentalement la structure en vue de dégager des comportements simples ne faisant intervenir qu'un nombre faible de modes propres. En régime forcé, la *dynamique* de la structure n'est gouvernée que par les modes directement excités, et ceux en combinaison de résonances, soit  $N$  modes propres, pourvu que le système ne s'éloigne pas trop de sa position au repos. Il est alors possible de ne garder dans les systèmes (9.1b) ou (9.2b) qu'un nombre  $N$  réduit d'équations. Le traitement des problèmes (9.1a,b) ou (9.2a,b) peut alors être effectué de plusieurs manières :

- L'approche utilisée au chapitre 5 consiste à chercher une solution approchée du problème (9.1a,b) par des méthodes perturbatives, dont la critique suit.
- L'avantage primordial de ces méthodes est qu'elles fournissent une solution approchée *analytique* du problème. Cela permet de caractériser et d'évaluer efficacement le comportement du système. Un deuxième avantage est que les solutions obtenues peuvent servir à valider d'éventuelles méthodes de résolution numérique s'attaquant directement aux équations aux dérivées partielles, ce qui pourrait être intéressant dans le futur pour valider des algorithmes de synthèse sonore.
- L'utilisation de ces méthodes perturbatives va néanmoins de paire avec une réduction du domaine de validité. Dans le cadre des plaques, les calculs sont *mathématiquement* valables jusqu'à des amplitudes transverses  $w$  de l'ordre de  $h^2/R$ , où  $R$  est le rayon de la plaque (ou une dimension transverse caractéristique dans le cas de plaques à géométrie non-circulaire). Les validations expérimentales du chapitre 6 ont montré que la solution analytique, approchée par la méthode des échelles multiples, était en fait valable jusqu'à des amplitudes transverses  $w$  plus importantes, de l'ordre de  $h/2$ . Cela montre que les domaines de validité déterminés mathématiquement peuvent être très restrictif<sup>6</sup>, et qu'il est donc intéressant de les valider par des expériences
- Ces méthodes perturbatives permettent de décrire des solutions quasi-périodiques, obtenues par exemple lorsque la vibration est gouvernée par une combinaison de résonances entre trois modes propres [46]. À la vue des résultats expérimentaux du chapitre 2 sur le gong, où les vibrations de celui-ci ne paraissent être gouvernées que par un nombre réduit de modes propres, l'approche analytique perturbative, appliquée au cas des coques de révolution, serait probablement riche d'enseignements pour comprendre le comportement des instruments de percussion.
- L'inconvénient majeur est que les calculs deviennent très vite complexes. En effet, la méthode des échelles multiples conduit au premier ordre à déterminer deux quantités pour chacun des modes propres  $\Phi_\alpha$  : l'amplitude  $a_\alpha$  et la phase  $\gamma_\alpha$  de ses oscillations. Le problème à  $N$  oscillateurs non-linéaires est alors remplacé par un système dynamique de dimension  $2N$ .
- Pour éviter les limitations sur l'amplitude des vibrations associées aux méthodes perturbatives, une résolution numérique est possible, par exemple par la méthode de Runge-Kutta. Cette approche a été utilisée au chapitre 8 (§8.4) pour évaluer le comportement des systèmes de barres en grande amplitude de vibrations. Cette approche devrait permettre de simuler des régimes fortement non-linéaires et chaotiques, impossible à obtenir par les méthodes perturbatives.

Lorsque le déplacement transverse devient de l'ordre de 2 fois l'épaisseur de la plaque, on constate que la déformée de la structure devient dépendante de l'amplitude du mouvement. Cela provient du

<sup>6</sup>cela n'est pas étonnant, car les domaines de validité dépendent des puissances de  $\varepsilon$ , si bien que la discrétisation est très large : avec  $\varepsilon = 10^{-2}$ , les ordres de grandeurs possibles sont  $\varepsilon h = h/100$ ,  $h$  et  $h/\varepsilon = 100h$ . Ainsi, les ordres de grandeurs  $10h$  et  $h/10$ , qui sont physiquement intéressants, ne sont pas prévus. Un développement en puissances de  $\sqrt{\varepsilon}$  pourrait être alors envisageable dans le futur.



fait que même si la *dynamique* du système n'est gouvernée que par les  $N$  modes en combinaison de résonance, il est nécessaire de considérer plus de modes (un nombre  $P > N$ ) si on veut décrire *quantitativement* les vibrations du système. Il est alors intéressant d'introduire des *modes non-linéaires*, ce qui n'a pas été abordé dans le présent travail. Une étude sur ce sujet est en cours actuellement au laboratoire, et des références bibliographiques sont proposées au chapitre 4 (§4.1.2) et 6 (§6.5.3).

### Vers le chaos

Les chapitres 5 et 6 proposent une étude *complète* du problème de vibration de plaques lorsque celle-ci n'est gouvernée que par un seul mode axisymétrique, ou par deux modes propres asymétrique dégénérés. Ce cas très simple a l'avantage de présenter des solutions analytiques élégantes, et de mettre en évidence un premier cas de couplage entre deux modes propres  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , lorsque leurs fréquences sont proches l'une de l'autre ( $f_1 \simeq f_2$ ). Ce modèle analytique est validé par une étude expérimentale, qui permet d'une part d'en effectuer un recalage, et d'autre part d'en évaluer le domaine de validité (l'importance de ce dernier point a été évoquée plus haut). Le modèle obtenu prédit alors quantitativement très précisément le comportement de la structure.

Une même démarche peut être appliquée aux instruments de percussion, qui, du fait de leur symétrie de révolution, possèdent aussi des modes asymétriques dégénérés (Cf. chapitre 2, §2.2).

Néanmoins, le cas précédent d'une combinaison de résonances simple 1 : 1 n'est qu'un début d'étude : il est en particulier impossible d'obtenir un comportement chaotique sans faire intervenir d'autres combinaisons de résonance<sup>7</sup>. Il permet de présenter une démarche générale (exposée au chapitre 5 pour la théorie et au chapitre 6 pour la validation expérimentale), qui peut être appliquée à des cas de résonances internes plus compliquées. Un travail de DEA sur une combinaison de résonance faisant intervenir 3 modes axisymétriques, dans le cas d'une plaque, a été menée au laboratoire de mécanique de l'ENSTA<sup>8</sup> récemment par P. Lanchantin [53]. Dans le cas des gongs et des cymbales, les expériences du chapitre 2 et les travaux de Cyril Touzé [123, 122] montrent qu'un nombre réduit de mode (entre 3 et 10) est probablement suffisant pour décrire les comportements quasi-périodiques et chaotiques observés en régime forcé.

### Oscillations libres – oscillations forcées

Enfin, une question importante persiste : comment traiter le régime de vibrations libre des gongs et des cymbales, qui correspond au comportement naturel de ces structures en condition de jeu ? Les travaux de thèse de Cyril Touzé [122] et les expériences sur le gong (chapitre 2) montrent qu'un grand nombre de modes, de l'ordre de 30, sont impliqués de manière non-négligeable dans le régime de vibrations libre. Ils sont soit directement excités par le choc initial avec la mailloche (ou la baguette), soit indirectement à la suite des couplages internes résultant des non-linéarités. Le système (9.1b) est alors composé d'un grand nombre d'équations, et devient de la sorte impossible à traiter analytiquement, et probablement difficilement résoluble numériquement, dans des temps de calcul envisageables.

En revanche, l'étude en régime libre des systèmes réduits (comportant  $N$  oscillateurs,  $N = 3, 4, 5, \dots$ ) obtenus pour les régimes forcés n'est pas à écarter. Même si celle-ci n'est pas réaliste, elle permettrait probablement d'expliquer les mécanismes de couplage entre modes propres qui sont observés en régime libre, et en particulier l'enrichissement spectral caractéristique des gongs et des cymbales.

<sup>7</sup>Des comportements chaotiques ont été mis en évidence pour des valeurs particulières des coefficients  $\Gamma_{pq\alpha u}$ , qui ne sont pas celles associées au cas d'une plaque circulaire [125]. De plus aucun cas de chaos n'est apparu expérimentalement, sans que d'autres modes que ceux en résonance 1 : 1 n'apparaissent.

<sup>8</sup>Cf. note 4, p. 194

### 9.3 Dans le futur...

Les modèles fondés sur les systèmes de barres articulées présentés dans ce travail ne comportant qu'un seul degré de liberté, leur domaine de description est limité à un seul des modes de vibrations d'une structure continue. Pour s'en approcher, il serait intéressant de développer des modèles analogues, de type treillis, comportant 2 ou 3 degrés de liberté. Malgré la relative complication des développements mathématiques, il serait probablement possible de mieux comprendre les échanges d'énergie entre modes propres qui sont à la source du comportement non-linéaire des instruments de percussion.

De façon plus anecdotique, la présence d'harmonique 2 dans les signaux de mesures obtenues au chapitre 6, dans le cas de plaques en vibration, reste très mystérieuse : tous les modèles théoriques prédisent des non-linéarités cubiques dans les équations, et ainsi seule des harmoniques impaires devraient être observées. Une des causes intuitives principale est un défaut de planéité de la plaque. Les systèmes de barres, avec une inclinaison initiale très faible par rapport à l'épaisseur, peuvent permettre d'étudier l'influence de ce défaut, et fournissent ainsi une piste de recherche.

La démarche générale exposée aux chapitres 3-6 doit pouvoir être étendue au cas des coques de révolution. Pour se rapprocher de la géométrie particulière des cymbales et des gongs, on peut envisager d'appliquer la méthode du chapitre 3 à une coque de révolution faiblement courbée, en gardant son profil quelconque dans les calculs. Des équations analogues aux équations de Von-Kàrmàn seront alors obtenues, qu'il s'agira ensuite de projeter sur la base des modes propres  $\Phi_\alpha$  de la structure, en vue d'obtenir le système 9.2. Cela permettra de calculer l'expression des coefficients de couplage  $\beta_{pq\alpha}$  et  $\Gamma_{pq\alpha u}$ , en fonction des déformées modales  $\Phi_\alpha(\vec{x})$  (expressions analogues à l'équation 4.64, p. 81). Ces déformées étant difficiles à calculer analytiquement, une estimation de ces coefficients pourra être menée à partir de déformées modales calculées numériquement, avec la méthode des éléments finis (EF). Il sera alors aisé d'obtenir le système 9.2 pour *n'importe quel* profil de cymbale ou de gong, associée à des conditions aux limites *quelconques*. Ensuite, en fonction de la valeur des fréquences propres  $f_\alpha$  de chacun des modes (issues du calcul EF ou de mesures sur une structure réelle), il sera possible d'étudier des modèles à nombre de mode propres réduits, en fonction des combinaisons de résonances éventuelles. En particulier, les cas de régimes de vibrations observés sur le gong au chapitre 2 (tableau 2.5) pourront être envisagés théoriquement de façon précise. Enfin, des validations expérimentales pourront être menées sur des géométries simples et reproductibles comme les calottes sphériques, ou sur des gongs et des cymbales. Un recalage de modèle pourra être envisageable, en vue d'obtenir un modèle de comportement de ces instruments.

Enfin, l'étude en régime libre des systèmes (9.1b) ou (9.2b), réduits à  $N$  équations, peut s'avérer intéressante pour comprendre les phénomènes de transfert d'énergie des fréquences graves vers les fréquences aiguës mises en évidence au chapitre 2 (Fig. 2.9, p. 33). En particulier, les études de système à trois oscillateurs en résonances internes, en régime forcé et dans le cas des plaques, montrent que le transfert d'énergie n'est possible que des hautes fréquences vers les basses fréquences<sup>9</sup> [46, 53], ce qui est le comportement opposé.



<sup>9</sup>Plus précisément, le cas étudié dans [46, 53] est celui d'une combinaison de résonances du type  $\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3$ , avec  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ . Si le système est excité au voisinage de  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ , aucun transfert d'énergie n'est possible vers les deux autres modes. Seul le cas où le mode de pulsation propre  $\omega_3$  est excité autorise un transfert d'énergie.



---

# Annexes



---

# Étude et calibration d'un excitateur électromagnétique

Ce chapitre propose de présenter une description, à la fois théorique et expérimentale, de l'excitateur électromagnétique que nous avons utilisé pour mettre en vibration le gong (Cf. chapitre 2) et la plaque circulaire (Cf. chapitre 6). Une petite étude théorique du comportement magnétodynamique de ce système permet de déterminer la position adéquate de l'aimant par rapport à la bobine. Ensuite, les caractéristiques force/intensité et force/position de l'aimant, en vue de pouvoir estimer l'amplitude de la force exercée sur la bobine par la mesure de l'intensité, et aussi d'évaluer les non-linéarités introduites par le système bobine/aimant.

Un des principaux avantages de cette technique d'excitation est qu'elle modifie très peu les caractéristiques mécaniques de la structure étudiée (en particulier sa masse), par rapport aux amplitudes d'excitation générées. Cela se rapproche d'une excitation sans contact.

## A.1 Description

Le système, utilisé pour mettre en vibration les structures minces, est représenté sur la figure A.1. Il est constitué d'un aimant, de géométrie cylindrique de révolution (épaisseur : 6 mm, diamètre : 11 mm, masse : 6 g), qui est collé sur la structure au moyen de cire d'abeille. Une bobine est placée à proximité, si bien qu'une force proportionnelle à l'intensité qui la parcourt est créée sur l'aimant. Une vis micrométrique, visible sur la photographie, permet d'ajuster la distance  $d$  entre la bobine et la position au repos de la structure.

## A.2 Modélisation du comportement magnéto-dynamique

### A.2.1 Champ magnétique créé par la bobine

Le champ magnétique créé par un solénoïde de diamètre  $2R$  et de longueur  $L$  se calcule à partir du champ magnétique créé par une seule spire de même diamètre, intégré sur la longueur  $L$  du solénoïde. Avec les notations de la figure A.2, le champ magnétique créé en tout point de l'axe, dans le vide, est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{x}, \quad (\text{A.1})$$

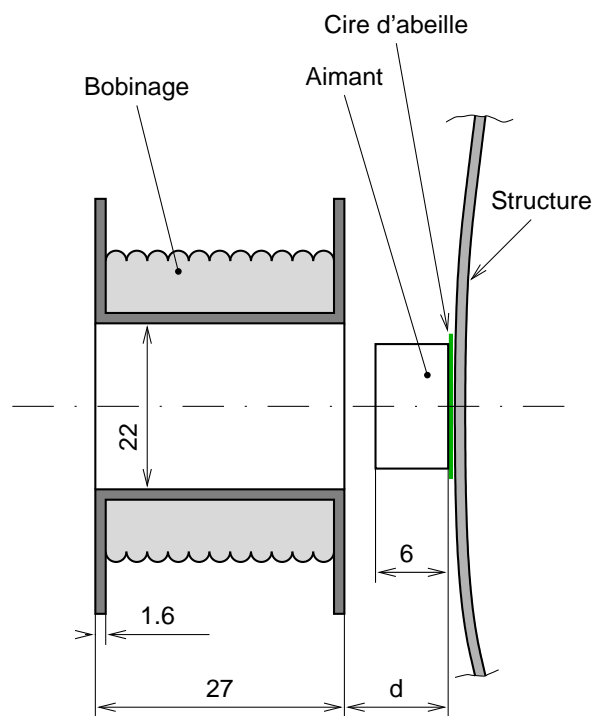
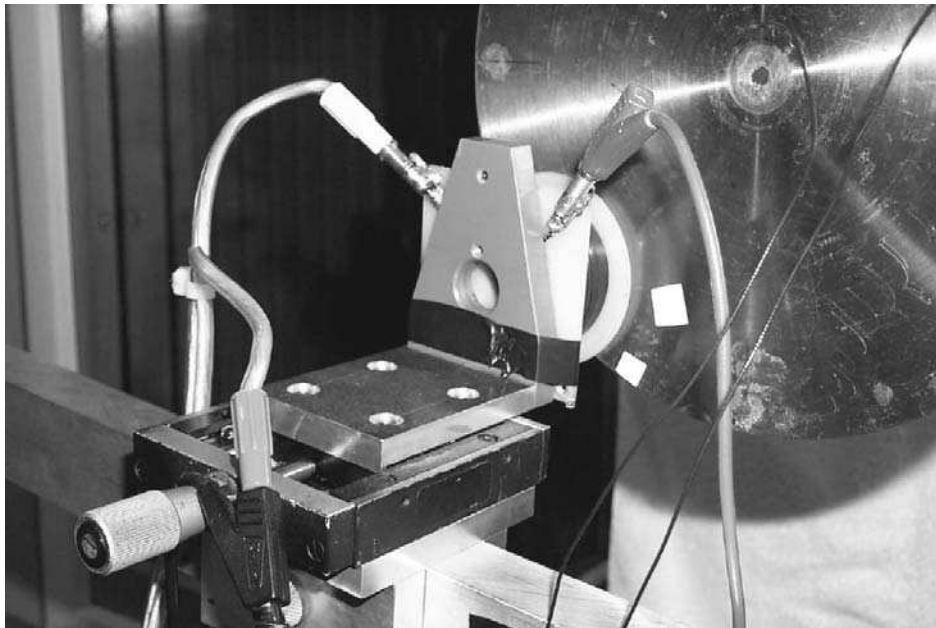


FIG. A.1 – Photographie et vue en coupe du système bobine - aimant. Les dimensions sont indiquées en mm.

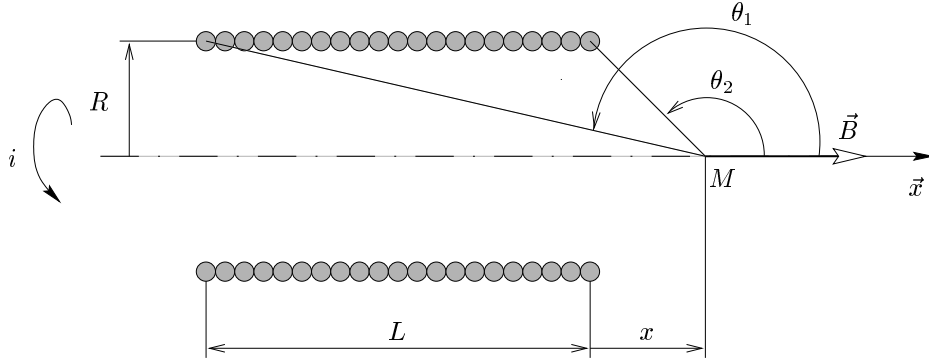


FIG. A.2 – Champ magnétique  $\vec{B}$  créée en un point  $M$  par un solénoïde parcouru par un courant d'intensité  $i$ .

où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m est la perméabilité magnétique du vide,  $n$  le nombre de spires,  $i$  l'intensité du courant. Le sens du champ magnétique, indiqué sur la figure A.2, dépend du sens de parcourt du courant, et peut être déterminé par la règle du bonhomme d'Ampère ou celle du tire-bouchon. En exprimant les cosinus de la formule A.1 en fonction de  $R$  et  $L$ , on obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} \left( \frac{x+L}{\sqrt{(x+L)^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \vec{x}. \quad (\text{A.2})$$

### A.2.2 Force exercée sur l'aimant

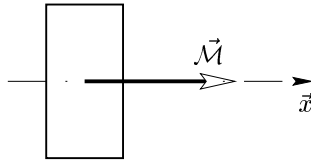


FIG. A.3 – Aimant et son moment magnétique  $\vec{M}$ .

Tout aimant ponctuel, de moment magnétique  $d\vec{M}$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , est soumis à une force :

$$d\vec{F} = \text{grad} (d\vec{M} \cdot \vec{B}). \quad (\text{A.3})$$

En toute rigueur, la force créée par la bobine sur l'aimant est donc :

$$\vec{F} = \iiint_{(\text{aimant})} \text{grad} (d\vec{M} \cdot \vec{B}) dV. \quad (\text{A.4})$$

Si l'aimant est de taille négligeable par rapport aux dimensions internes du solénoïde, on a alors :

$$\vec{F} = \mathcal{M} \frac{dB}{dx} \vec{x} \quad (\text{A.5})$$

La figure A.4 représente l'évolution de  $B$  et de  $dB/dx$  en fonction de  $x$ . On remarque que la force est maximale en module au voisinage des bords du solénoïde. La position exacte de ces maxima dépend en fait du rapport de dimension  $R/L$  de la bobine. Pour les valeurs  $R = 11$  mm et  $L = 27$  mm de notre bobine, ces maxima sont situés à la verticale des bords, en  $x/L = 0$  et  $x/L = -1$ .



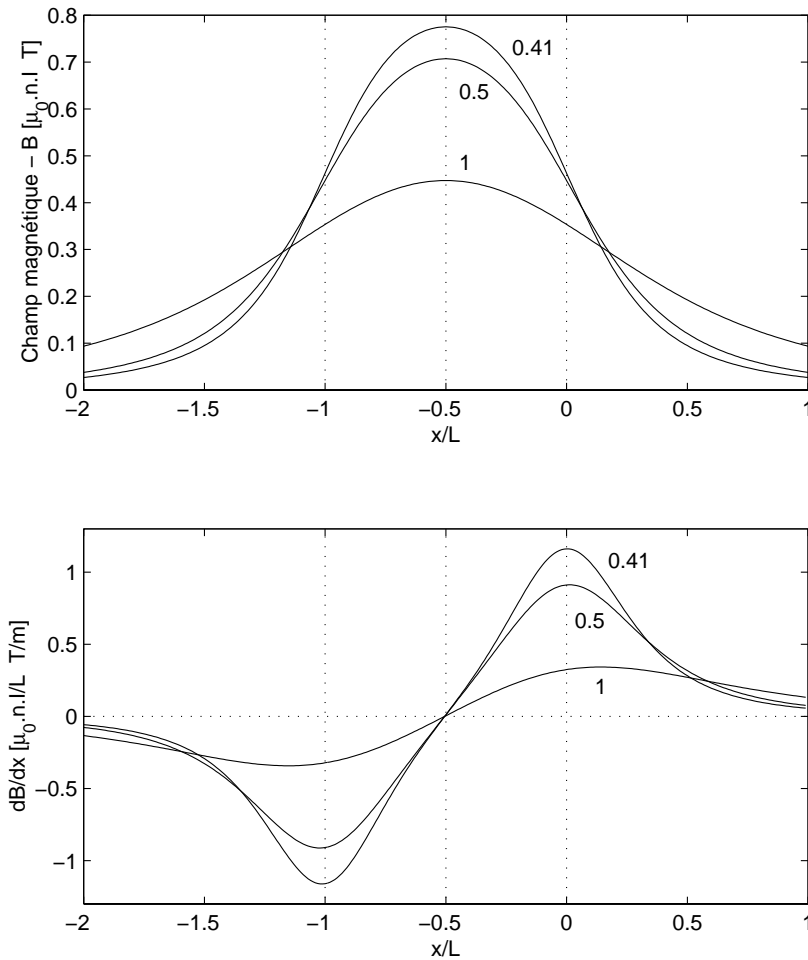


FIG. A.4 – Champ magnétique  $B$  sur l'axe du solénoïde et sa dérivée  $dB/dx$ , proportionnelle à la force exercée sur l'aimant, en fonction de la position axiale  $x$  de l'aimant, pour trois valeurs du rapport rayon/longueur ( $R/L$ ). La valeur  $R/L = 11/27 = 0.41$  correspond aux dimensions de la bobine utilisée pour nos expériences. Le bord droit de la bobine est en  $x/L = 0$ , le bord gauche en  $x/L = -1$ .

Le petit modèle théorique présenté précédemment n'est valable que si l'aimant est de dimensions négligeables devant celles de la bobine, et si le bobinage ne présente qu'une couche d'enroulement. Cela permet néanmoins de donner une idée du comportement de la bobine. En particulier, le choix de la position moyenne de l'aimant devient claire : lorsque le milieu de celui-ci est placé à la verticale du bord (sur la figure A.1,  $d=3$  mm, soit la demi-épaisseur de l'aimant),

- le coefficient de proportionnalité force/intensité est maximum,
- la variation de la force en fonction de la position  $x$  de l'aimant est minimum.

Ce dernier point est très important, car la position de l'aimant n'est pas fixe au cours du temps, du fait des oscillations de la structure sur laquelle il est fixé. Par suite, le coefficient de proportionnalité entre la force et l'intensité dépend aussi du temps, faiblement : plus les variations de  $F$  en fonction de  $x$  sont faibles, plus la dépendance en temps du coefficient est minime. Il est donc prévisible que le système bobine-aimant ne soit linéaire que pour des faibles valeurs de l'amplitude des oscillations de l'aimant.

### A.3 Mesures de la force exercée sur la structure

#### A.3.1 Montage expérimental

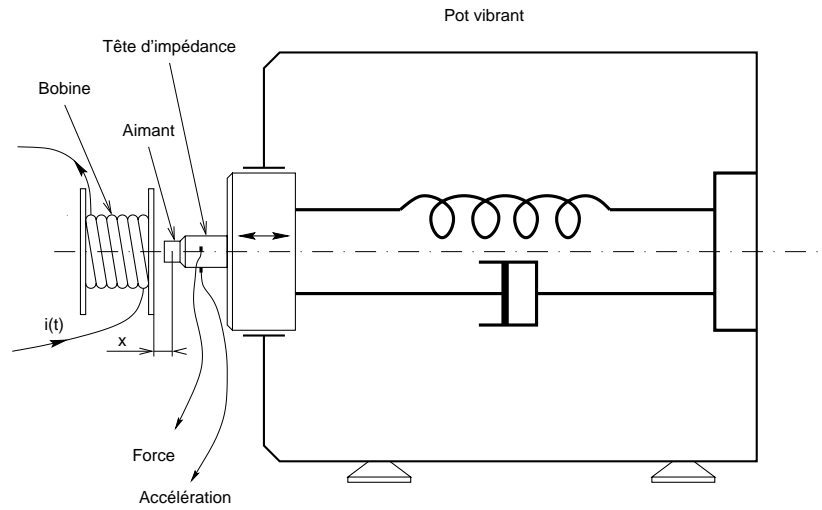


FIG. A.5 – Schéma du dispositif expérimental. Le pot vibrant est utilisé ici non alimenté, simplement comme support de la tête d'impédance et de l'aimant. Il est équivalent à un système élastique linéaire.

La figure A.5 représente le dispositif expérimental. Les mesures de forces sont effectuées au moyen d'une tête d'impédance (Brüel & Kjær 8001), montée sur un pot vibrant (Brüel & Kjær 4809) à une extrémité, avec l'aimant collé sur l'autre. Le pot vibrant n'est utilisé ici que comme support du système aimant-tête d'impédance. En effet, son axe est naturellement guidé en translation rectiligne, et sa liaison avec le bâti est un système élastique linéaire. Une vis micrométrique permet de régler la distance  $x$  entre l'une des extrémités de la bobine et le plan médian de l'aimant, lorsque le système est au repos. En plus de délivrer une mesure de force, la tête d'impédance fournit aussi une mesure de l'accélération. Une vérification de la linéarité du système est alors possible en visualisant à l'oscilloscope la figure de Lissajous force/accélération (position XY de l'oscilloscope, avec la force et l'accélération sur chacune des voies).

#### A.3.2 Étude mécanique du système tête d'impédance-aimant

Une petite étude de la dynamique du système aimant-tête d'impédance est nécessaire pour identifier précisément la nature de la mesure de force délivrée par la tête. Pour cela, la figure A.6 représente une coupe de la tête d'impédance, ce qui permet d'isoler l'ensemble mobile, constitué de l'aimant, de la vis et du sabot de la tête d'impédance. Le principe fondamental donne :

$$N = F - m\gamma \quad (\text{A.6})$$

où  $F$  est la force exercée par la bobine sur l'aimant,  $N$  l'effort normal dans le matériau piézoélectrique délivré par le capteur,  $m$  et  $\gamma$ , respectivement la masse et l'accélération de l'ensemble mobile.  $\gamma$  est aussi mesuré par la tête d'impédance.

La relation (A.6) montre que la mesure de force délivrée par la tête d'impédance  $N$  n'est égale à la force magnétique  $F$  que si le terme  $m\gamma$  est négligeable devant  $F$ . Il faudra le vérifier lors des mesures qui vont suivre. La pesée de l'ensemble vis-aimant donne 7.5 g. La masse  $m$  de l'ensemble mobile est donc de l'ordre de 10 g.

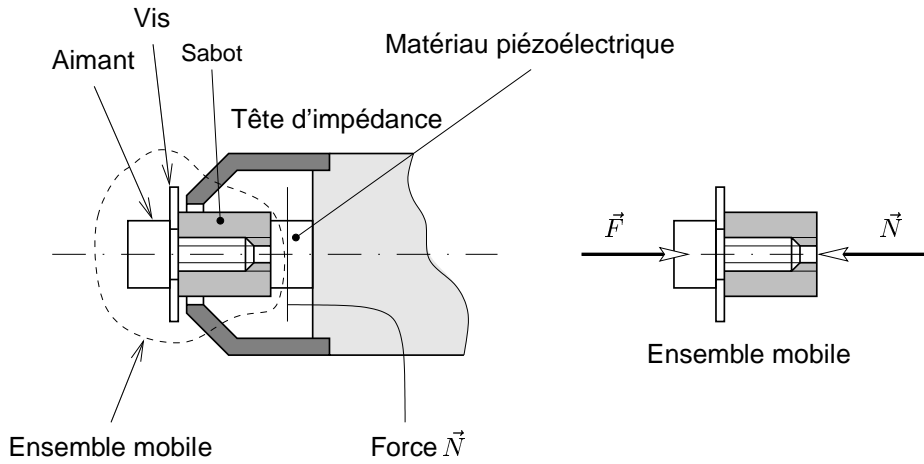


FIG. A.6 – Vue en coupe de l'extrémité de la tête d'impédance Brüel & Kjaer 8001. Équilibre de l'ensemble mobile, soumis à la force magnétique  $\vec{F}$  et la réaction du corps de la tête d'impédance,  $\vec{N}$ , qui est mesuré par le capteur piézoélectrique.

### A.3.3 Force en fonction de la position

La figure A.7 montre les résultats de mesure de la force  $N$  dans la tête d'impédance, et la quantité d'accélération de l'ensemble mobile  $m\gamma$  (en traits pointillés sur la figure supérieure). On constate que la force est maximum à la verticale de l'extrémité de la bobine (en  $x = 0$ ), comme prévu par le modèle du paragraphe A.2.2.

### A.3.4 Force en fonction de l'intensité du courant

L'intensité est mesurée par un ampèremètre<sup>1</sup> pouvant mesurer l'intensité efficace de courants alternatifs de grande amplitude (jusqu'à 20 A efficace).

La figure A.9 montre l'évolution de l'amplitude efficace de la force en fonction de l'amplitude efficace de l'intensité, pour plusieurs fréquences du signal. On constate que l'amplitude de la force est bien proportionnelle à l'intensité, pour une fréquence donnée. Entre  $f_{exc} = 120$  Hz et  $f_{exc} = 1000$  Hz, le coefficient de proportionnalité paraît varier assez peu :

$$K_0 = N/I = 0.175^{\pm 0.003} \text{ N.A}^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

Pour des fréquences plus basses (60 Hz par exemple), le coefficient est plus important.

La figure A.10 précise les remarques précédentes, en donnant la valeur de  $K_0 = N/I$  en fonction de  $f_{exc}$ . On peut constater que les courbes sont assez chahutées, et que  $K_0$  est une fonction de la fréquence. Cette dépendance peut s'expliquer par la présence de courants de Foucault, qui sont créés dans l'aimant par suite de ses oscillations. Ces courants sont d'autant plus importants que la fréquence des oscillations de l'aimant est importante, si bien que la puissance dissipée augmente avec  $f_{exc}$ , et donc la puissance fournie à l'aimant diminue. Il est donc logique de trouver que la force exercée sur l'aimant diminue avec  $f_{exc}$ . Ces courants de Foucault sont par ailleurs dissipés par effet Joule dans l'aimant, ce qui chauffe ce dernier. Cela est parfois gênant à forte intensité, car la chaleur fait fondre la cire qui maintient l'aimant collé sur la structure.

<sup>1</sup>de marque Ateliers PÉKLY, modèle Univa 100, aimablement prêté par le Laboratoire de Mécanique de l'ENSTA, Chemin de la hunière, 91761 Palaiseau Cedex.

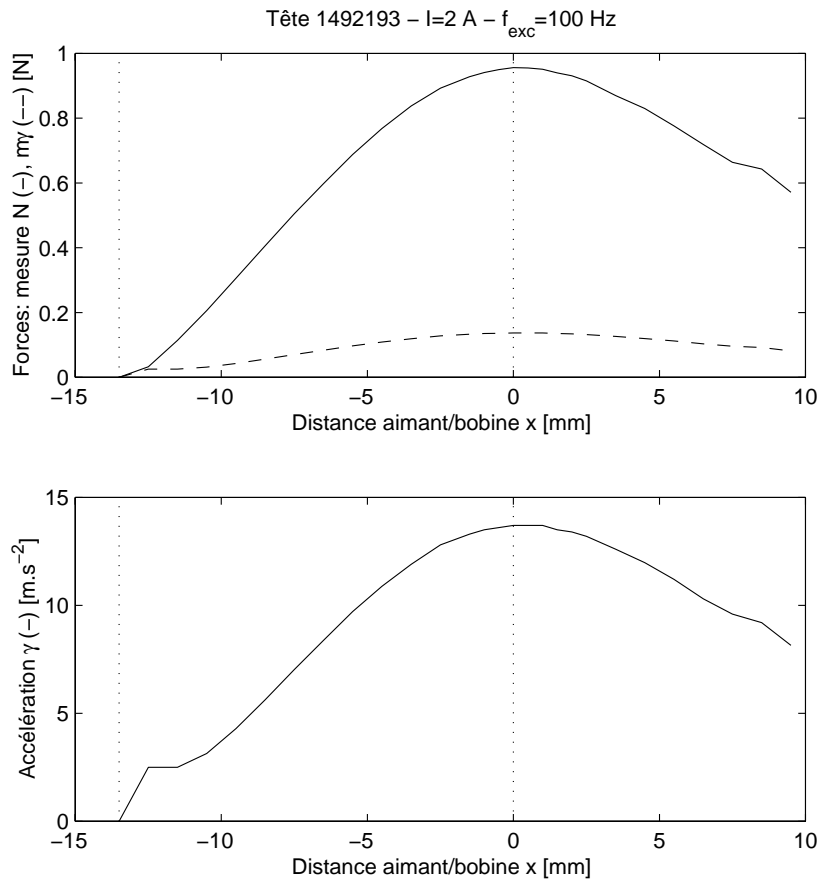


FIG. A.7 – Amplitude crête-crête de la force  $N$  et de l'accélération  $\gamma$  mesurées par la tête d'impédance, lorsque l'intensité du courant dans la bobine est harmonique, de fréquence  $f_{exc} = 100\text{ Hz}$  et d'amplitude  $2\text{ A}$  efficace. La grandeur  $N - m\gamma$  est précisée en trait interrompu.

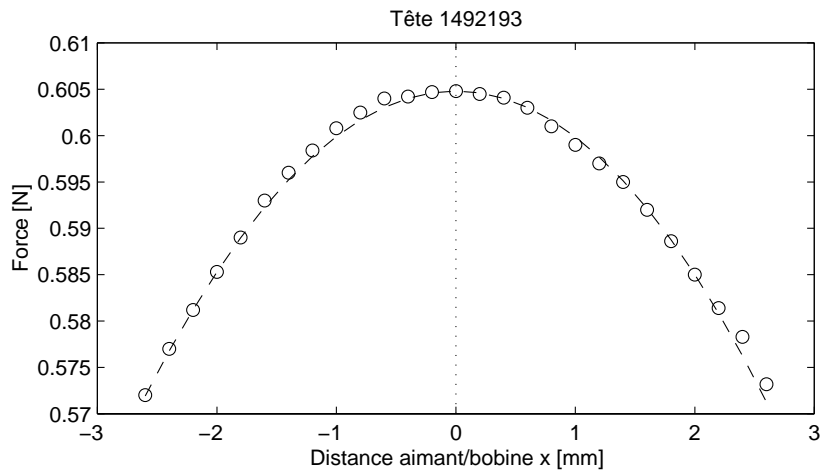


FIG. A.8 – Détail de la figure A.7 autour de l'extrémité de la bobine, en  $x = 0$ .

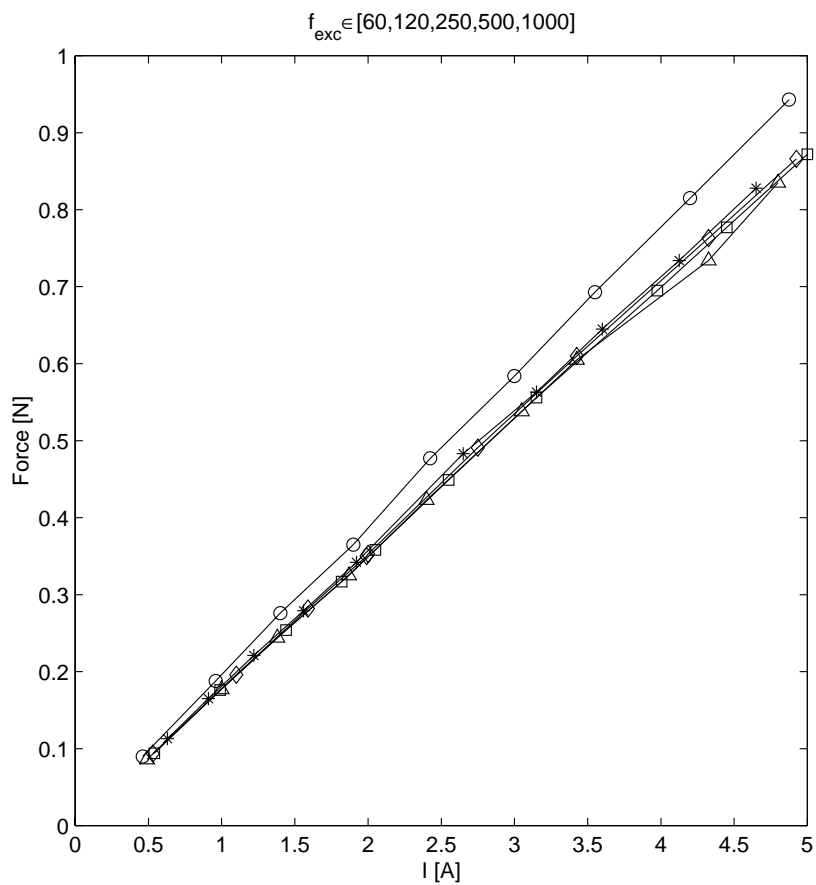


FIG. A.9 – Valeur de l'amplitude efficace de la force mesurée par la tête d'impédance en fonction de l'amplitude efficace de l'intensité, pour 5 valeurs de la fréquence du signal.

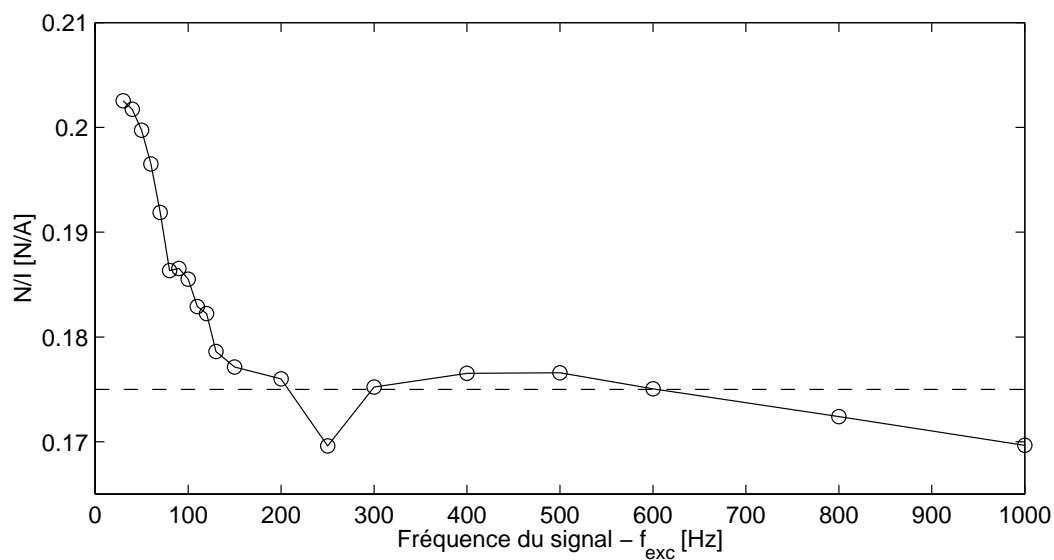


FIG. A.10 – Valeur du coefficient de proportionnalité entre la force et l'intensité en fonction de la fréquence du signal.

## A.4 Conclusions

### Placement de l'aimant

Le placement de l'aimant apparaît très important, à la fois dans la direction axiale et dans la direction radiale. Le paragraphe A.3.3 précédent montre que la position radiale est adéquate lorsque le plan médian de l'aimant se trouve à la verticale de l'extrémité de la bobine. C'est dans cette position ( $d = 3$  mm sur la figure A.1) que le facteur de proportionnalité force/intensité est le plus fort, et que les non-linéarités sont minimales. Il est aussi important de positionner l'aimant au centre de la cavité cylindrique de la bobine, car on a constaté expérimentalement que l'amplitude de la force est très sensible au positionnement radial.

### Mesure de la force

Pour mesurer la force durant les expériences avec le gong ou la plaque circulaire, la première idée a été d'utiliser la tête d'impédance, collée entre l'aimant et la structure. Cela présente deux inconvénients majeurs :

- La masse de l'ensemble tête d'impédance-aimant est de l'ordre de 30 g, ce qui, on l'a constaté, modifie de façon non-négligeable les caractéristiques mécaniques du gong. En particulier, cela modifie la valeur des fréquences propres de la structure, ce qui perturbe les relations de résonances entre celles-ci.
- La masse de l'ensemble mobile de la figure A.6 ( $\simeq 10$  g) est suffisante pour que le terme  $m\gamma$  dans l'équation (A.6) soit de l'ordre de grandeur de la mesure  $N$ , pour bon nombre des expériences sur le gong présentées au chapitre 2. En particulier, si la force  $F$  est sinusoïdale, une distorsion harmonique de  $\gamma$  apparaît à forte amplitude de vibration, du fait des non-linéarités *dans la structure*. On retrouve alors une mesure de  $N$  qui présente une distorsion harmonique, à la différence de  $F$  qui est sinusoïdale.

L'idée est donc d'estimer la valeur de l'amplitude de la force en mesurant l'*intensité* du courant dans la bobine, et en utilisant la valeur moyenne du coefficient de proportionnalité  $K_0$  précisée par l'équation A.7. Cela permet simplement de donner un *ordre de grandeur* de la force imposée sur la structure. C'est cette méthode d'estimation de la force qui a été utilisée au chapitre 6.

### Evaluation des non-linéarités du système aimant-bobine

Ces non-linéarités apparaissent lorsque l'amplitude des oscillations de l'aimant devient suffisamment grande, du fait que la force magnétique  $\vec{F}$  n'est pas une constante en fonction de la position de l'aimant. Une idée d'expérience serait de suspendre l'aimant à un fil, et de mesurer la force exercée sur celui-ci en mesurant son accélération (par exemple avec un accéléromètre). L'aimant étant suspendu, on aurait directement  $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ , sans influence d'un quelconque système annexe. Sa position serait facile à évaluer par double-intégration du signal d'accélération. Le tracé de figures de Lissajous à l'oscilloscope, entre le courant dans la bobine et l'accélération de l'aimant, donnerait visuellement une idée de l'importance des non-linéarités.





---

---

## Quelques analyses modale

### **B.1 Déformées modales non-identifiées du gong.**

Certaines déformées modales issues des mesures du chapitre 2 (§2.2) ne correspondent pas à des déformées issues du calcul élément finis. Elles sont précisées sur la figure B.1.

### **B.2 Analyses modales par la méthode des Éléments Finis.**

Les analyses modales par éléments finis présentées dans ce manuscript ont été effectuées au moyen du code de calcul CASTEM 2000 [2]. Celles présentées au chapitre 2 (§2.2) sur le gong utilisent la géométrie définie sur la figure 2.1, composée d'une surface plane à bord circulaire, d'un tronc de cone, d'un tore pour le rayon de raccordement et d'un cylindre de révolution pour le bord. Les éléments finis sont des éléments de *coque mince avec hypothèse de Kirchhoff discrète* (DKT). Le matériau est élastique homogène et isotrope, de masse volumique  $\rho = 8420 \text{ kg.m}^{-3}$ , de module d'Young  $E = 120.10^9 \text{ Pa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , choisis pour que les fréquences propres calculées correspondent au mieux à celles mesurées.



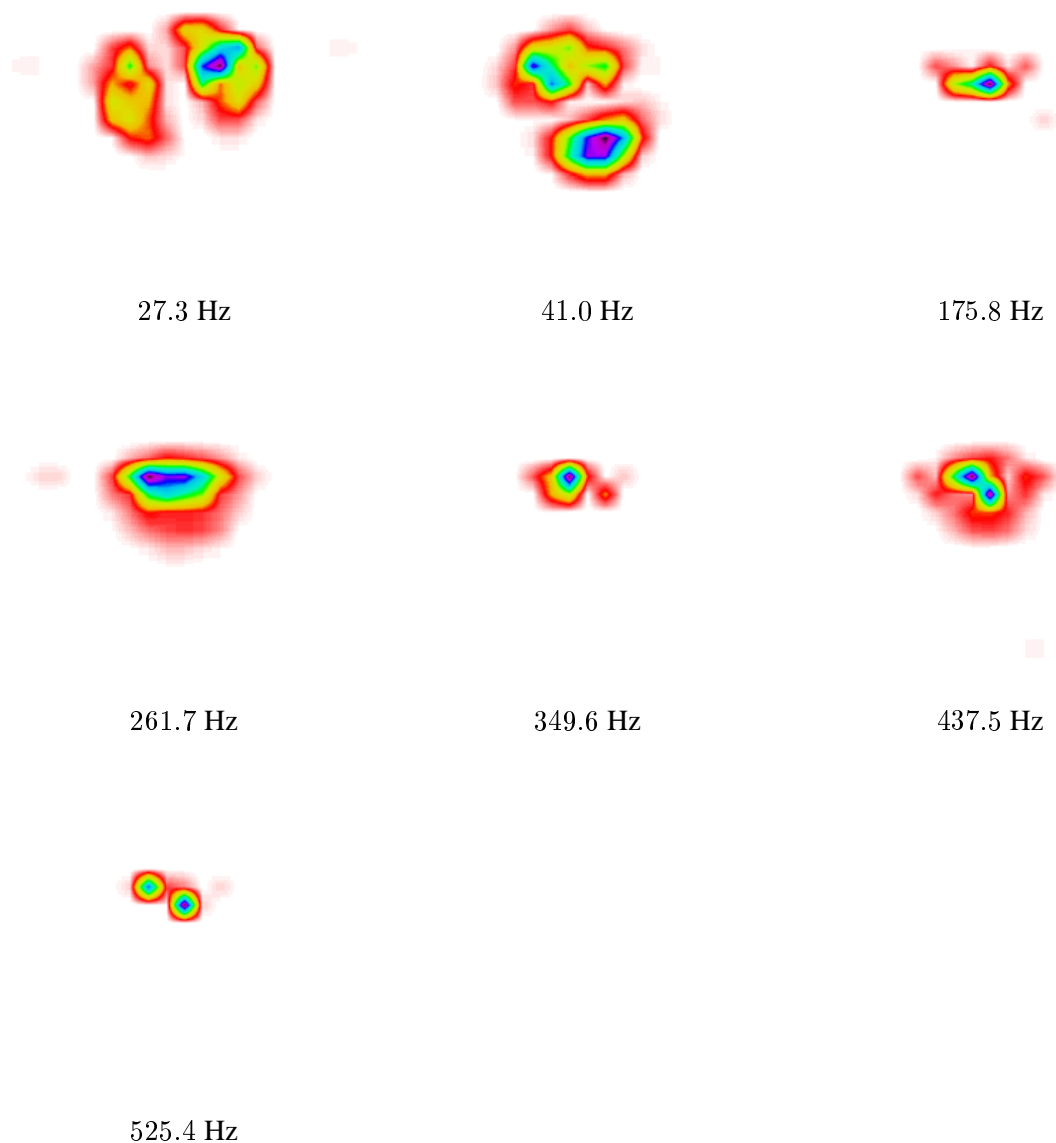


FIG. B.1 – Déformées et fréquences modales expérimentales du gong ne correspondant pas à des déformées modales issues du calcul par éléments finis. Les pics correspondants sont notés avec des “?” sur la figure 2.3, p. 27.

## Travaux virtuels dans le cas de la plaque

Ce chapitre expose le calcul des différents travaux virtuels nécessaires à l'établissement des équations de Von-Kàrmàn du chapitre 3.

### C.1 Travail virtuel des efforts intérieurs

D'après les équations 3.8, 3.33 et 3.40a, on obtient :

$$\underline{\underline{B}}^t : \underline{\underline{\text{Grad}}} \delta \vec{U} = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \delta \vec{u} + \left( \underline{\underline{\pi}} \underline{\underline{\text{grad}}} w \right) \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \delta w - z \cdot \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{\text{grad}}} \delta w + \left( \underline{\underline{\vec{\tau}}} - \underline{\underline{\vec{\tau}}} \right) \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} w \quad (\text{C.1})$$

On peut remarquer que les termes de cisaillement  $\underline{\underline{\vec{\tau}}}$  ne travaillent pas, ce qui est une conséquence des hypothèses de Kirchhoff-Love, qui ne font pas intervenir de déformations de cisaillement. Pour prendre en compte la géométrie particulière de la plaque, on intègre sur l'épaisseur  $h$  de celle-ci, c'est à dire :

$$\iiint_{(\Omega)} d\Omega = \iint_{(S)} \int_{-h/2}^{h/2} dz dS \quad (\text{C.2})$$

Cela permet de faire apparaître le tenseur des *forces de membrane* ( $\underline{\underline{N}}$ ) :  $S \rightarrow \mathbb{R}^4$  et le tenseur des *moments de flexion* ( $\underline{\underline{M}}$ ) :  $S \rightarrow \mathbb{R}^4$ , tous les deux symétriques, qui sont définis par (Cf. Fig. 3.3, Eq.(3.34)) :

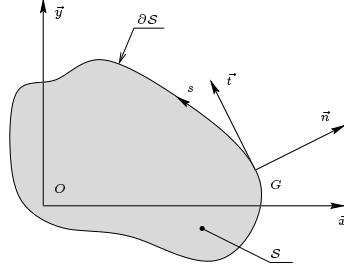
$$\underline{\underline{N}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{\pi}} dz, \quad \underline{\underline{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} z \underline{\underline{\pi}} dz. \quad (\text{C.3})$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs est alors :

$$\delta \mathcal{W}_{(i)} = - \iint_{(S)} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \delta \vec{u} dS - \iint_{(S)} \left( \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\text{grad}}} w \right) : \underline{\underline{\text{grad}}} \delta w dS + \iint_{(S)} \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{\text{grad}}} \delta w dS. \quad (\text{C.4})$$

On va maintenant intégrer par partie l'équation précédente, en vue de faire apparaître les déplacements virtuels  $\delta \vec{u}$  et  $\delta w$  en facteur. On utilise pour cela la formule d'Ostrogradsky, associée aux propriétés :

$$\begin{aligned} \text{div} (\underline{\underline{T}} \vec{v}) &= \text{div} \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v} + \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} \\ \text{div} (\alpha \vec{v}) &= \underline{\underline{\text{grad}}} \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \text{div} \vec{v} \end{aligned}$$


 FIG. C.1 – Vecteur tangent et normal en un point de la frontière de  $S$ 

Après deux intégrations par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_{(i)} = & \iint_{(S)} \left\{ \operatorname{div} \underline{\underline{N}} \cdot \delta \vec{u} + \left[ \operatorname{div} \operatorname{div} \underline{\underline{M}} + \operatorname{div} \left( \underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w \right) \right] \delta w \right\} dS \\ & - \oint_{(\partial S)} \left\{ \left( \underline{\underline{N}} \delta \vec{u} \right) \cdot \vec{n} + \left[ \left( \underline{\underline{N}} \operatorname{grad} w \right) \cdot \vec{n} + \operatorname{div} \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n} \right] \delta w - \left( \underline{\underline{M}} \operatorname{grad} \delta w \right) \cdot \vec{n} \right\} ds, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

où  $\vec{n}$  est la normale sortante au point courant de la frontière  $\partial S$ , et  $s$  est l'abscisse curviligne sur le bord  $\partial S$ .

On peut encore simplifier cette dernière équation, par une intégration par partie par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ . En effet, soit en tout point  $G$  de  $\partial S$   $\vec{t}$  le vecteur tangent à la courbe et  $\vec{n}$  le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de  $S$  (fig. C.1). Soit  $\underline{\underline{M}}$  un tenseur d'ordre 2 et  $\alpha$  un réel. Soit donc  $(s, n)$  les coordonnées de tout point  $G$  de  $\partial S$  dans la base  $(\vec{t}, \vec{n})$ . On a, par projection du gradient en 2 dimension de  $\alpha$  :

$$\operatorname{grad} \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \vec{t} + \frac{\partial \alpha}{\partial n} \vec{n}$$

Ainsi,

$$\left( \underline{\underline{M}} \operatorname{grad} \alpha \right) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cdot (\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t}) + \frac{\partial \alpha}{\partial n} \cdot (\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n})$$

Où  $(\underline{\underline{M}} \cdot \vec{t}) \cdot \vec{n}$  est noté par  $(\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t})$ . Par intégration par partie par rapport à l'abscisse curviligne  $s$ , on a :

$$\oint_{(\partial S)} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cdot (\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t}) ds = - \oint_{(\partial S)} \frac{\partial}{\partial s} (\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t}) \cdot \alpha ds + [(\vec{n}^t \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{t}) \cdot \alpha]_{\partial S} \quad (\text{C.6})$$

Le dernier terme  $[f(s)]_{\partial S}$  de l'équation précédente correspond à la variation de la fonction  $f(s)$  le long de la courbe  $\partial S$ , qui est en fait nulle, sauf si il y a des point singuliers  $H(s)$ , et dans ce cas là elle est égale aux discontinuités de  $f(s)$  à la traversé des points singuliers :

$$[f(s)]_{\partial S} = \sum_{\text{pt. sing. } H(s)} [f(s)]_{s^-}^{s^+} \quad (\text{C.7})$$

En résumé, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{W}_{(i)} = & \iint_{(S)} \left\{ \operatorname{div} \underline{N} \cdot \delta \vec{u} + \left[ \operatorname{div} \operatorname{div} \underline{M} + \operatorname{div} \left( \underline{N} \operatorname{grad} w \right) \right] \delta w \right\} dS \\
 & - \oint_{(\partial S)} \left\{ \left( \underline{N} \delta \vec{u} \right) \cdot \vec{n} + \left[ \left( \underline{N} \operatorname{grad} w \right) \cdot \vec{n} + \operatorname{div} \underline{M} \cdot \vec{n} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \vec{n}^t \cdot \underline{M} \cdot \vec{t} \right) \right] \delta w \right\} ds \\
 & + \oint_{(\partial S)} \left( \vec{n}^t \cdot \underline{M} \cdot \vec{n} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds + \sum_{\text{pt. sing. } H(s)} \left[ \left( \vec{n}^t \cdot \underline{M} \cdot \vec{t} \right) \cdot \delta w \right]_{s^-}^{s^+}
 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Travail virtuel des efforts extérieurs

Tout d'abord, on rappelle l'expression du déplacement virtuel de tout point  $M$  de la plaque (Eq.3.4) :

$$\delta \vec{U} = \delta \vec{u} + \delta w \cdot \vec{z} - z \cdot \operatorname{grad} \delta w$$

Comme pour le calcul du travail virtuel des efforts intérieurs à la plaque, on intègre sur l'épaisseur  $h$  de la plaque (Cf. Eq. C.2). L'intégrale de volume de l'équation 3.40b devient alors :

$$\iiint_{(\Omega)} \vec{f}_e \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \iint_{(S)} (\delta \vec{u} + \delta w \cdot \vec{z}) \int_{-h/2}^{h/2} \vec{f}_e dz dS - \iint_{(S)} \operatorname{grad} \delta w \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \vec{f}_e dz dS \quad (\text{C.9})$$

Pour transformer l'intégrale de surface de l'équation 3.40b, on note  $\vec{F}_e^+$  et  $\vec{F}_e^-$  les densités surfaciques de forces imposées respectivement sur les faces supérieure  $S^+$  et inférieure  $S^-$  de la plaque. On obtient la somme de trois intégrales : sur les faces supérieures et inférieure (en  $z = h/2$  et  $z = -h/2$ ), et sur la frontière de  $S$  :

$$\partial \Omega = S^+ \cup S^- \cup \Sigma \quad \text{et} \quad \iint_{(\Sigma)} d\Sigma = \oint_{\partial S} \int_{-h/2}^{h/2} dz ds$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 \iint_{(\partial \Omega)} \vec{F}_e \cdot \delta \vec{U} dS = & \iint_{(S^+)} \vec{F}_e^+ \cdot (\delta \vec{u} + \delta w \cdot \vec{z} - \frac{h}{2} \operatorname{grad} \delta w) dS + \iint_{(S^-)} \vec{F}_e^- \cdot (\delta \vec{u} + \delta w \cdot \vec{z} + \frac{h}{2} \operatorname{grad} \delta w) dS \\
 & + \oint_{\partial S} (\delta \vec{u} + \delta w \cdot \vec{z}) \int_{-h/2}^{h/2} \vec{F}_e dz ds - \oint_{\partial S} \operatorname{grad} \delta w \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \vec{F}_e dz ds
 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

On définit maintenant des efforts extérieurs plus commodes à utiliser. Du fait des intégrations sur l'épaisseur, et pour être homogène avec le caractère bidimensionnel du problème de plaque mince, on définit des efforts extérieurs dont certains sont imposés sur  $S$ , et d'autres le bord  $\partial S$  (fig. 3.4).

- Sur la surface neutre  $S$ , le milieu extérieur impose
- les forces surfaciques ( $\text{N.m}^{-2}$ )

$$t_e \cdot \vec{z} + \vec{n}_e = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{f}_e dz + \vec{F}_e^+ + \vec{F}_e^-,$$

- les moments surfaciques (N.m.m<sup>2</sup>)

$$\vec{m}_e = \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{f}_e dz + \frac{h}{2} (\vec{F}_e^+ - \vec{F}_e^-), \quad \text{et} \quad \vec{m}_e \cdot \vec{z} = 0;$$

- Sur le bord  $\partial S$ , le milieu extérieur impose
- les forces linéiques (N.m<sup>-1</sup>)

$$T_e \cdot \vec{z} + \vec{N}_e = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{F}_{e(P \in \Sigma)} dz,$$

- les moments linéiques (N.m.m<sup>-1</sup>)

$$\vec{M}_e = \int_{-h/2}^{h/2} z \vec{F}_{e(P \in \Sigma)} dz, \quad \text{et} \quad \vec{M}_e \cdot \vec{z} = 0.$$

Le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit alors :

$$\delta \mathcal{W}_{(e)} = \iint_{(S)} (\vec{n}_e \cdot \delta \vec{u} + t_e \cdot \delta w - \vec{m}_e \cdot \text{grad} \delta w) dS + \oint_{(\partial S)} (\vec{N}_e \cdot \delta \vec{u} + T_e \cdot \delta w - \vec{M}_e \cdot \text{grad} \delta w) ds \quad (\text{C.11})$$

Quelques intégrations par partie sont alors nécessaire pour faire apparaître les déplacements virtuels  $\delta \vec{u}$  et  $\delta w$  en facteur, et, de façon analogue au calcul du travail des efforts intérieurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_{(e)} = & \iint_{(S)} \left[ \vec{n}_e \cdot \delta \vec{u} + (t_e + \text{div} \vec{m}_e) \delta w \right] dS \\ & + \oint_{(\partial S)} \left\{ \vec{N}_e \cdot \delta \vec{u} + \left[ T_e + \frac{\partial}{\partial s} (\vec{M}_e \cdot \vec{t}) \right] \delta w - \vec{M}_e \cdot \vec{n} \cdot \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right\} ds \\ & - \sum_{\text{pt. sing. } H(s)} \left[ \vec{M}_e \cdot \vec{t} \cdot \delta w \right]_{s^-}^{s^+} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

où on a supposé que  $\vec{m}_e$  était nul sur le bord.

### C.3 Travail virtuel des quantités d'accélération

La dérivée seconde du déplacement réel  $\vec{U}$  de la structure est, d'après l'équation 3.4 :

$$\frac{d^2 \vec{U}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + \frac{d^2 w}{dt^2} \cdot \vec{z} - z \cdot \text{grad} \frac{d^2 w}{dt^2}. \quad (\text{C.13})$$

L'expression du travail virtuel des quantités d'accélération est alors :

$$\delta \mathcal{W}_{(a)} = \iiint_{(\Omega)} \rho \left( \ddot{\vec{u}} + \ddot{w} \cdot \vec{z} - z \cdot \text{grad} \ddot{w} \right) \cdot \left( \delta \vec{u} + \delta w \cdot \vec{z} - z \cdot \text{grad} \delta w \right) d\Omega \quad (\text{C.14})$$

En intégrant par rapport à l'épaisseur de la plaque, et en notant :

$$m = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \rho h, \quad I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho h^2 dz = \rho \frac{h^3}{12},$$

respectivement la masse surfacique ( $\text{kg.m}^2$ ) et le moment d'inertie surfacique ( $\text{kg.m}^2.\text{m}^{-2}$ ) de la plaque, on obtient :

$$\delta\mathcal{W}_{(a)} = m \iint_{(S)} \left( \ddot{\vec{u}} \cdot \delta\vec{u} + \ddot{w} \delta w \right) dS + I \iint_{(S)} \text{grad } \ddot{w} \cdot \text{grad } \delta w dS \quad (\text{C.15})$$

où on a utilisé le fait que

$$\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0. \quad (\text{C.16})$$

Le travail des quantités d'accélération apparaît alors comme la somme d'un travail de translation (première intégrale) et d'un travail de rotation (deuxième intégrale). On obtient alors :

$$\delta\mathcal{W}_{(a)} = \iint_{(S)} \left[ m \ddot{\vec{u}} \cdot \delta\vec{u} + \left( m \ddot{w} - I \text{div grad } \ddot{w} \right) \delta w \right] dS + \oint_{(\partial S)} I \text{grad } \ddot{w} \cdot \vec{n} \delta w ds \quad (\text{C.17})$$



# Calcul des coefficients de couplage dans les plaques

## D.1 Coefficients $\Gamma_{pq\alpha u}$

Le présent paragraphe présente le calcul du coefficient  $\Gamma$  des termes non-linéaires nécessaires aux développements des paragraphes 5.2 et 5.3. Ils sont définis par les formules (4.64) et (4.5) :

$$\Gamma_{pq\alpha u} = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\iint_{(S)} L(\Phi_p, \Phi_q) \Psi_b dS \iint_{(S)} \Phi_\alpha L(\Phi_u, \Psi_b) dS}{\xi_b^4 \iint_{(S)} \Phi_\alpha^2 dS \iint_S \Psi_b^2 dS}, \quad (\text{D.1})$$

$$L(\Phi, \Psi) = \Phi_{,rr} \left( \frac{\Psi_{,r}}{r} + \frac{\Psi_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + \Psi_{,rr} \left( \frac{\Phi_{,r}}{r} + \frac{\Phi_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{\Phi_{,r\theta}}{r} - \frac{\Phi_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{\Psi_{,r\theta}}{r} - \frac{\Psi_{,\theta}}{r^2} \right), \quad (\text{D.2})$$

L'utilisation des relations (4.27) et (4.34) permet d'éliminer le dénominateur.

### D.1.1 Cas des vibrations axisymétriques

On se propose ici de calculer le coefficient  $\Gamma$  de l'équation (5.4). Dans ce cas, chacun des modes transverses  $\Phi$  de l'équation (D.1) est égal au mode axisymétrique considéré, soit :

$$\Phi_{0n}(r) = R_{0n}(r), \quad (\text{D.3})$$

si bien que les coefficients  $\Gamma_{pq\alpha u}$  se réduisent qu'à un seul coefficient  $\Gamma$ . La sommation est effectuée sur tous les modes longitudinaux  $\Psi$  :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{lm1}(r, \theta) \\ \Psi_{lm2}(r, \theta) \end{array} \right| = S_{lm}(r) \left| \begin{array}{l} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{array} \right. \quad (\text{D.4})$$

On obtient :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \xi_{lm}^{-4} [\mathcal{I}_1(lm) \mathcal{J}_1(lm) + \mathcal{I}_2(lm) \mathcal{J}_2(lm)] \quad (\text{D.5})$$



avec :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{I}_1(lm) \\ \mathcal{I}_2(lm) \end{array} \right| = \iint_{(S)} L(\Phi_{0n}, \Phi_{0n}) \left| \begin{array}{l} \Psi_{lm1} \\ \Psi_{lm2} \end{array} \right| dS = \int_0^1 L(R_{0n}, R_{0n}) S_{lm} r dr \int_0^{2\pi} \left| \begin{array}{l} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{array} \right| d\theta \quad (\text{D.6a})$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{J}_1(lm) \\ \mathcal{J}_2(lm) \end{array} \right| = \iint_{(S)} \Phi_{0n} L \left( \Phi_{0n}, \left| \begin{array}{l} \Psi_{lm1} \\ \Psi_{lm2} \end{array} \right| \right) dS = \int_0^1 R_{0n} L(R_{0n}, S_{lm}) r dr \int_0^{2\pi} \left| \begin{array}{l} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{array} \right| d\theta \quad (\text{D.6b})$$

Du fait de la valeur des intégrales des fonctions sin et cos sur  $[0, 2\pi]$  dans l'équation précédente, les seuls  $\mathcal{I}_\alpha$  et  $\mathcal{J}_\alpha$  non nuls sont :

$$\mathcal{I}_1(0m) = 4\pi \int_0^1 R_{0n}''(r) R_{0n}'(r) S_{0m}(r) dr \quad (\text{D.7a})$$

$$\mathcal{J}_1(0m) = 2\pi \int_0^1 R_{0n}(r) [R_{0n}''(r) S_{0m}'(r) + R_{0n}'(r) S_{0m}''(r)] dr \quad (\text{D.7b})$$

où  $R'(r)$  désigne la dérivée par rapport à  $r$  de la fonction  $R$ . Par conséquent, on peut remarquer que les seuls modes longitudinaux  $\Psi$  impliqués sont ceux avec  $l = 0$ , c'est-à-dire ceux à déformée axisymétrique. Ce résultat confirme les hypothèses de vibrations axisymétriques conjecturées dans [109].

En conclusion, le coefficient  $\Gamma$  peut être calculé à partir de la formule suivante, résultant d'une somme sur tous les modes  $\Psi_{0m}$  axisymétriques :

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \xi_{0m}^{-4} \mathcal{I}_1(0m) \mathcal{J}_1(0m) \quad (\text{D.8})$$

où les valeurs de  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{J}_1$  sont données par (D.7a,b). Des valeurs de  $\Gamma$  pour les trois premiers modes axisymétriques  $\Phi_{0n}$  sont précisées dans le tableau 5.1.

### D.1.2 Cas des vibrations asymétriques

On se propose ici de calculer le coefficient  $\Gamma$  de l'équation (5.5b-c). Dans ce cas, les modes transverses  $\Phi$  de l'équation (D.1) sont les deux configurations préférentielles d'un mode asymétrique, soit :

$$\left| \begin{array}{l} \Phi_{kn1}(r, \theta) \\ \Phi_{kn2}(r, \theta) \end{array} \right| = R_{kn}(r) \left| \begin{array}{l} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{array} \right| \quad \text{avec } k \neq 0.$$

On doit alors déterminer les 16 coefficients :

$$\Gamma_{\alpha\beta\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = -\frac{1}{2} \sum_{l,m,\gamma} \xi_{lm}^{-4} \mathcal{I}_{\alpha\beta\gamma}(lm) \mathcal{J}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\gamma}(lm), \quad \alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \gamma \in \{1, 2\}^5 \quad (\text{D.9})$$

avec :

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta\gamma}(lm) = \iint_{(S)} L(\Phi_{kn\alpha}, \Phi_{kn\beta}) \Psi_{lm\gamma} dS = -2 I_1(kn, lm) \Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} + 2 I_2(kn, lm) \Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, \quad (\text{D.10a})$$

$$\mathcal{J}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\gamma}(lm) = \iint_{(S)} \Phi_{kn\tilde{\alpha}} L(\Phi_{kn\tilde{\beta}}, \Psi_{lm\gamma}) dS = -2 J_1(kn, lm) \Pi_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\gamma}^{(3)} + J_2(kn, lm) \Pi_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\gamma}^{(2)}, \quad (\text{D.10b})$$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 k\theta \cos l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall l \neq 2k \text{ et } l, k \notin \{0, 0\} \\ \pi/2 & \text{si } l = 2k \text{ et } l, k \notin \{0, 0\} \\ \pi & \text{si } k \neq 0 \text{ et } l = 0 \\ 2\pi & \text{si } k = l = 0 \end{cases}$
$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\theta \cos l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall l \neq 2k \text{ et } l \neq 0 \\ -\pi/2 & \text{si } l = 2k \text{ et } l, k \notin \{0, 0\} \\ \pi & \text{si } k \neq 0 \text{ et } l = 0 \end{cases}$
$\int_0^{2\pi} \cos^2 k\theta \sin l\theta d\theta = 0 \quad \forall k, l$
$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\theta \sin l\theta d\theta = 0 \quad \forall k, l$
$\int_0^{2\pi} \cos k\theta \sin k\theta \cos l\theta d\theta = 0 \quad \forall k, l$
$\int_0^{2\pi} \cos k\theta \sin k\theta \sin l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq 2k \\ \pi/2 & \text{si } l = 2k \end{cases}$

TAB. D.1 – Valeurs de certaines intégrales trigonométriques

et :

$$I_1(kn, lm) = \int_0^1 \left[ \frac{R'_{kn}}{r^2} - 2 \frac{R_{kn} R'_{kn}}{r^3} + \frac{R_{kn}^2}{r^4} \right] S_{lm} dr, \quad (\text{D.11})$$

$$I_2(kn, lm) = \int_0^1 R''_{kn} \left[ R'_{kn} - k^2 \frac{R_{kn}}{r} \right] S_{lm} dr, \quad (\text{D.12})$$

$$J_1(kn, lm) = \int_0^1 kl R_{kn} \left[ \frac{R'_{kn} S'_{lm}}{r} + \frac{R'_{kn} S_{lm} + R_{kn} S'_{lm}}{r^2} + \frac{R_{kn} S_{lm}}{r^3} \right] dr, \quad (\text{D.13})$$

$$J_2(kn, lm) = \int_0^1 R_{kn} \left[ R''_{kn} \left( S'_{lm} - l^2 \frac{S_{lm}}{r} \right) + S''_{lm} \left( R'_{kn} - k^2 \frac{R_{kn}}{r} \right) \right] dr. \quad (\text{D.14})$$

Les  $R_{kn}(r)$  et  $S_{lm}(r)$  dans les équations ci-dessus sont définis par les équations (4.25) et (4.32). Les facteurs  $\Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}(k, l)$  sont définis par les intégrales suivantes :

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}(k, l) = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} -\sin k\theta \\ \cos k\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin k\theta \\ \cos k\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{vmatrix} d\theta,$$

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(k, l) = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{vmatrix} d\theta,$$

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(k, l) = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin k\theta \\ \cos k\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin l\theta \\ \cos l\theta \end{vmatrix} d\theta.$$

Les notations précédentes signifient que chaque produit  $\Pi_{\alpha\beta\gamma}$  est obtenu par le produit de trois fonction sin ou cos, chacune étant prise dans une des matrices colonnes, la ligne étant déterminée par

la valeur de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . ( $\alpha = 1$  correspond au terme 21, situé dans la seconde ligne de la première colonne,  $\gamma = 1$  correspond au terme 31, etc. . .).

Le tableau D.1 résume les valeurs des produits  $\Pi_{\alpha\beta\gamma}$ . Les seules valeurs non-nulles des  $\Pi_{\alpha\beta\gamma}$  sont alors obtenues pour  $l = 0$  ou  $l = 2k$ , si bien que la sommation de l'équation (D.9) est effectuée sur les modes  $\Psi_{0m}$  et  $\Psi_{(2k)m}$ . Le tableau D.2 récapitule les valeurs des quantités  $\mathcal{I}_{\alpha\beta\gamma}$  et  $\mathcal{J}_{\alpha\beta\gamma}$ , en fonction d'une part de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , et d'autre part de la valeur de  $l$  par rapport à  $k$ . Les produits  $\Pi_{\alpha\beta\gamma}$  ont été remplacés par leurs valeurs, en tenant compte du tableau D.1.

Tout d'abord, on peut remarquer que les produits  $\mathcal{I}_{\alpha\alpha\gamma} \cdot \mathcal{J}_{\alpha\beta\gamma}$  et  $\mathcal{I}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \mathcal{J}_{\alpha\alpha\gamma}$  sont nuls lorsque  $\alpha \neq \beta$ , et cela quel que soit  $l$ . Cela implique que :

$$\Gamma_{1112} = \Gamma_{1121} = \Gamma_{2212} = \Gamma_{2221} = \Gamma_{1211} = \Gamma_{2111} = \Gamma_{1222} = \Gamma_{2122} = 0 \quad (\text{D.15})$$

Les  $\Gamma$  non nuls sont alors :

$$\Gamma_{1111} = \Gamma_{2222} = \Gamma_0 + \Gamma^*, \quad \Gamma_{1122} = \Gamma_{2211} = \Gamma_0 - \Gamma^*, \quad (\text{D.16})$$

$$\Gamma_{1212} = \Gamma_{2121} = \Gamma_{1221} = \Gamma_{2112} = \Gamma^* \quad (\text{D.17})$$

avec :

$$\Gamma_0 = -\pi^2 \sum_{m=1}^{+\infty} \xi_{0m}^{-4} (I_{20} - k^2 I_{10}) J_{20} \quad (\text{D.18a})$$

$$\Gamma^* = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \xi_{(2k)m}^{-4} (k^2 I_1^* + I_2^*) \left( \frac{J_2^*}{2} - 2k^2 J_1^* \right) \quad (\text{D.18b})$$

$$I_{i0} = I_i(kn, 0m), \quad J_{i0} = J_i(kn, 0m) \quad (\text{D.18c})$$

$$I_i^* = I_i(kn, (2k)m), \quad J_i^* = J_i(kn, (2k)m). \quad (\text{D.18d})$$

$\Gamma_0$  résulte d'une somme sur tous les modes axisymétriques longitudinaux, et  $\Gamma^*$  d'une somme sur les modes asymétriques longitudinaux avec  $l = 2k$  rayons nodaux.

Pour obtenir les équations (5.5b,c), on doit d'abord déterminer les termes non-linéaires issues du système (4.62). Pour chacune des équations, on a :

$$\text{équation en } q_1 : \quad \Gamma_{11} q_1^3 + \Gamma_{12} q_2^3 + C_{11} q_1 q_2^2 + C_{12} q_1^2 q_2 \quad (\text{D.19})$$

$$\text{équation en } q_2 : \quad \Gamma_{21} q_1^3 + \Gamma_{22} q_2^3 + C_{21} q_1 q_2^2 + C_{22} q_1^2 q_2 \quad (\text{D.20})$$

où

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{1111}, \quad \Gamma_{22} = \Gamma_{2222}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{2212}, \quad \Gamma_{21} = \Gamma_{1121}, \quad (\text{D.21})$$

$$C_{11} = \Gamma_{1212} + \Gamma_{2112} + \Gamma_{2211}, \quad C_{22} = \Gamma_{2121} + \Gamma_{1221} + \Gamma_{1122}, \quad (\text{D.22})$$

$$C_{12} = \Gamma_{1211} + \Gamma_{2111} + \Gamma_{1112}, \quad C_{21} = \Gamma_{1222} + \Gamma_{2122} + \Gamma_{2221}. \quad (\text{D.23})$$

Avec les équations (D.15-D.17), On obtient finalement la valeur du seul coefficient  $\Gamma$  :

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = C_{12} = C_{21} = 0, \quad (\text{D.24})$$

$$\Gamma = \Gamma_{11} = \Gamma_{22} = C_{11} = C_{22} = \Gamma_0 + \Gamma^*. \quad (\text{D.25})$$

		Mode $\Psi_{lm1}$ en cosinus ( $\gamma = 1$ )	Mode $\Psi_{lm2}$ en sinus ( $\gamma = 2$ )	
$\alpha = \beta$	$l \notin \{0, 2k\}$	$\mathcal{I}_{111} = \mathcal{I}_{221} = 0$ $\mathcal{J}_{111} = \mathcal{J}_{221} = 0$	$\forall l$	$\mathcal{I}_{112} = \mathcal{I}_{222} = 0$ $\mathcal{J}_{112} = \mathcal{J}_{222} = 0$
	$l = 0$	$\mathcal{I}_{111} = \mathcal{I}_{221} = -2\pi k^2 I_1 + 2\pi I_2$ $\mathcal{J}_{111} = \mathcal{J}_{221} = \pi J_2$		
	$l = 2k$	$\mathcal{I}_{111} = -\mathcal{I}_{221} = \pi k^2 I_1 + \pi I_2$ $\mathcal{J}_{111} = -\mathcal{J}_{221} = -2\pi k^2 J_1 + \frac{\pi}{2} J_2$		
$\alpha \neq \beta$	$\forall l$	$\mathcal{I}_{121} = \mathcal{I}_{211} = 0$ $\mathcal{J}_{121} = \mathcal{J}_{211} = 0$	$l \neq 2k$	$\mathcal{I}_{122} = \mathcal{I}_{212} = 0$ $\mathcal{J}_{122} = \mathcal{J}_{212} = 0$
			$l = 2k$	$\mathcal{I}_{122} = \mathcal{I}_{212} = \pi k^2 I_1 + \pi I_2$ $\mathcal{J}_{122} = \mathcal{J}_{212} = -2\pi k^2 J_1 + \frac{\pi}{2} J_2$

TAB. D.2 – Coefficients  $\mathcal{I}_{\alpha\beta\gamma}$  et  $\mathcal{J}_{\alpha\beta\gamma}$

## D.2 Coefficients $G_{pqb}$

On se propose ici de calculer les coefficients  $G_{pqb}$  utilisés aux paragraphes 5.4.1 et 5.4.2. Ils sont définis par l'équations (4.60) :

$$G_{pqb} = -\frac{\iint_{(S)} L(\Phi_p, \Phi_q) \Psi_b dS}{\frac{1}{2} \xi_b^4 \iint_{(S)} \Psi_b^2 dS}. \quad (\text{D.26})$$

### D.2.1 Cas d'un mode axisymétrique

Lorsque la vibration n'est gouvernée que par le mode transverse  $\Phi_{0n} = R_{0n}(r)$  axisymétrique, seul ce mode intervient dans la relation (D.26), si bien que dans l'équation (5.53), à tout mode longitudinal  $\Psi_b = \Psi_{lm\gamma}$  ( $\gamma \in \{1, 2\}$ ) correspond le coefficient :

$$G_{lm\gamma} = -\frac{1}{2} \xi_{lm}^{-4} \mathcal{I}_\gamma(lm), \quad (\text{D.27})$$

où  $\mathcal{I}_\gamma(lm)$  est défini par l'équation (D.6a). Comme seuls les  $\mathcal{I}_1(0m)$  ( $l = 0$  et  $\gamma = 1$ ) sont non nuls (Cf. § D.1.1), les seuls coefficients à calculer sont, à la vue de l'équation (D.7a) :

$$G_m = G_{0m1} = -2\pi \xi_{0m}^{-4} \int_0^1 R_{0n}''(r) R_{0n}'(r) S_{0m}(r) dr. \quad (\text{D.28})$$

### D.2.2 Cas d'un mode asymétrique

Lorsque la vibration n'est gouvernée que par une configuration préférentielle du mode transverse  $\Phi_{kn\alpha}$  ( $\alpha \in \{1, 2\}$ ) asymétrique, telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{kn1}(r, \theta) \\ \Phi_{kn2}(r, \theta) \end{array} \right| = R_{kn}(r) \left| \begin{array}{l} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{array} \right. \quad \text{avec } k \neq 0,$$

seul cette configuration intervient dans la relation (D.26). Dans l'équation (5.53), à tout mode longitudinal  $\Psi_b = \Psi_{lm\gamma}$  ( $\gamma \in \{1, 2\}$ ) correspond le coefficient :

$$G_{\alpha lm\gamma} = -\frac{1}{2} \xi_{lm}^{-4} \mathcal{I}_{\alpha\alpha\gamma}(lm), \quad (\text{D.29})$$

où  $\mathcal{I}_{\alpha\alpha\gamma}(lm)$  est défini par l'équation (D.10a). D'après le tableau D.2, les seuls  $\mathcal{I}_{\alpha\alpha\gamma}(lm)$  non-nuls sont ceux pour lesquels  $\Psi_b = \Psi_{lm1}$  est en cosinus et  $l = 0$  ou  $l = 2k$ , si bien que deux familles de coefficients sont obtenues :

$$\begin{aligned} G_{\alpha m}^0 &= G_{\alpha 0 m1} = -\frac{1}{2} \xi_{0m}^{-4} \mathcal{I}_{\alpha\alpha 1}(0m) = \pi \xi_{0m}^{-4} (k^2 I_{10} - I_{20}), \\ G_{\alpha m}^* &= G_{\alpha (2k)m1} = -\frac{1}{2} \xi_{(2k)m}^{-4} \mathcal{I}_{\alpha\alpha 1}((2k)m) = \frac{(-1)^\alpha}{2} \pi \xi_{(2k)m}^{-4} (k^2 I_1^* + I_2^*), \end{aligned}$$

où les  $I_{i0}$  et  $I_i^*$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) sont définis par les équations (D.18c,d).

On peut noter que  $G_{1m}^0 = G_{2m}^0 = G_m^0$ , alors que  $G_{1m}^* = -G_{2m}^* = G_m^*$ .



---

---

# Bibliographie

- [1] ANTUNES, J., AXISA, F., BUNG, H., DOVEIL, F., AND DELANGRE, E. Mise en évidence des phénomènes non-linéaires en dynamique. In *Méthodes d'analyse en dynamique non-linéaire des structures* (May 1991), IPSI - 47 rue Monceau - Paris.
- [2] AXISA, F. CASTEM 2000. Tech. Rep. DMT/96-498, DMT/96-499, DMT/96-500, CEA (French Atomic Research Center), <http://www.castem.org>, 1996.
- [3] BEN AMAR, M., AND POMEAU, Y. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 453 (1997), 729–755.
- [4] BENAMAR, R., BENNOUNA, M. M. K., AND WHITE, R. G. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures. Part I : simply supported and clamped-clamped uniform beam. *J. Sound. Vib.* **149**, 2 (1991), 179–195.
- [5] BENAMAR, R., BENNOUNA, M. M. K., AND WHITE, R. G. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures. Part II : fully clamped rectangular isotropic plates. *J. Sound. Vib.* **164**, 2 (1993), 295–316.
- [6] BENAMAR, R., BENNOUNA, M. M. K., AND WHITE, R. G. The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures. Part III : fully clamped rectangular isotropic plates - measurements of the mode shape amplitude dependence and the spatial distribution of harmonic distortion. *J. Sound. Vib.* **175**, 3 (1994), 377–395.
- [7] BENDAT, J. S., AND PIERSOL, A. G. *Random data : analysis and measurement procedures*. Wiley-interscience, 1971.
- [8] BENNETT, J. A., AND EISLEY, J. G. A multiple degree-of-freedom approach to nonlinear beams vibrations. *AIAA Journal* **8**, 4 (1970), 734–739.
- [9] BENNOUNA, M. M. K., AND WHITE, R. G. The effects of large vibration amplitudes on the fundamental mode shape of a clamped-clamped uniform beam. *J. Sound. Vib.* **96**, 3 (1984), 309–331.
- [10] BERGER, H. M. A new approach to the analysis of large deflections of plates. *J. Appl. Mech.* **22**, 4 (1955), 465–472.
- [11] BLAIR, K. B., KROUSGRILL, C. M., AND FARRIS, T. N. Non-linear dynamic response of shallow arches to harmonic excitation. *J. Sound. Vib.* **194**, 3 (1996), 353–367.
- [12] BLAIR, K. B., KROUSGRILL, C. M., AND FARRIS, T. N. Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of Duffing's equation. *J. Sound. Vib.* **202**, 5 (1997), 717–731.
- [13] BORGES, C. A., CESARI, L., AND SÁNCHEZ, D. A. Functional analysis and the method of harmonic balance. *Quarterly of applied mathematics* **32**, 61 (1975), 457–464.
- [14] BOUASSE, H. *Cordes et membranes*. Delagrave, Paris, 1926.
- [15] BOUASSE, H. *Verges et plaques. Cordes et carillons*. Delagrave, Paris, 1927.
- [16] BOUASSE, H. *Les instruments à vent*. Delagrave, Paris, 1929.
- [17] BOUASSE, H. *Tuyaux et résonateurs*. Delagrave, Paris, 1929.
- [18] BURTON, T. D., AND HAMDAN, M. N. Analysis of non-linear autonomous conservative oscillators by a time transformation method. *J. Sound. Vib.* **87**, 4 (1983), 543–554.

- [19] BURTON, T. D., AND RAHMAN, Z. On the multi-scale analysis of strongly non-linear forced oscillators. *Int. J. Non-linear Mechanics* **21**, 2 (1984), 135–146.
- [20] CALDERSMITH, G., AND ROSSING, T. D. Determination of modal coupling in vibrating rectangular plates. *Applied Acoustics* **17** (1984), 33–44.
- [21] CHAIGNE, A., AND LAMBOURG, C. Time-domain simulation of damped impacted plates. Part I. Theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.* **109**, 4 (2001).
- [22] CHAIGNE, A., TOUZÉ, C., AND THOMAS, O. Non-linear axisymmetric vibrations of gongs. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics* (Perugia, Sept. 2001).
- [23] CHANG, S. I., BAJAJ, A. K., AND KROUSGRILL, C. M. Non-linear vibrations and chaos in harmonically excited rectangular plates in one to one resonance. *Nonlinear dynamics* **4** (1993), 433–460.
- [24] CHIA, C. Y. *Nonlinear analysis of plates*. Mc Graw Hill, 1980.
- [25] CHU, H.-N., AND HERRMANN, G. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *J. Appl. Mech* **23** (1956), 532–540.
- [26] CIARLET, P. G. A justification of the Von-Kàrmàn equations. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **73** (1980), 349–389.
- [27] CRESPO DA SILVA, M. R. M., AND GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. Part 1 : Equations of motion. *J. Struct. Mech.* **6**, 4 (1978), 437–448.
- [28] CRESPO DA SILVA, M. R. M., AND GLYNN, C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. Part 2 : Forced motions. *J. Struct. Mech.* **6**, 4 (1978), 449–461.
- [29] CRISFIELD, M. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, vol. 1 : essentials*. John Wiley & sons, 1991.
- [30] CUSUMANO, J. P., AND MOON, F. C. Chaotic non-planar vibrations of the thin elastica, part 1 : experimental observation of planar instability. *J. Sound Vib.* **179**, 2 (1995), 185–208.
- [31] CUSUMANO, J. P., AND MOON, F. C. Chaotic non-planar vibrations of the thin elastica, part 2 : derivation and analysis of a low-dimensional model. *J. Sound Vib.* **179**, 2 (1995), 209–226.
- [32] DORLOT, J. M., BAÏLON, J.-P., AND MASOUNAVE, J. *Des matériaux*, 2nd. ed. Éd. de l'École polytechnique de Montreal, 1986.
- [33] DUGDALE, D. S. Non-linear vibration of a centrally clamped rotating disc. *Int. J. Engng. Sci.* **17** (1979), 745–756.
- [34] DUVAUT, G. *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1990.
- [35] EFSTATHIADES, G. J. A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin's procedure. *J. Sound Vib.* **16**, 2 (1971), 231–253.
- [36] FLETCHER, N., PERRIN., R., AND LEGGE, K. Nonlinearity and chaos in acoustics. *Acoustics Australia* **18**, 1 (1989), 9–13.
- [37] FLETCHER, N. H. Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells : pitch glide in chinese gongs. *J. Acoust. Soc. Am* **78**, 6 (1985), 2069–2073.
- [38] FLETCHER, N. H. Nonlinear dynamics and chaos in musical instruments. In *Complex systems : from biology to computation*, D. G. Green and T. Bossomaier, Eds. IOS press, Amsterdam, 1998, pp. 106–117.
- [39] FLETCHER, N. H., AND ROSSING, T. D. *The physics of musical instruments*, 2nd. ed. Springer-Verlag, 1998.
- [40] FONTAINE, M. Étude théorique, numérique et expérimentale des vibrations non-linéaires de calottes sphériques minces élastiques. Master's thesis, Stage de DEA ATIAM, Université Pierre et Marie Curie - ENSTA-UME, 2001.
- [41] GÉRADIN, M., AND RIXEN, D. *Théorie des vibrations*, 2nd. ed. Masson, 1996.
- [42] GERMAIN, P. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *Journal de Mécanique* **12**, 2 (1973), 235–274.
- [43] GORDON, J. E. *Structures, or why things don't fall down*. Da Capo Press, New-York, 1978.
- [44] GROSSMAN, P. L., KOPLIK, B., AND YU, Y.-Y. Nonlinear vibrations of shallow spherical shells. *J. Appl. Mech.* **39E** (1969), 451–458.

- [45] GUCKENHEIMER, J., MYERS, M. R., WICKLIN, F. J., AND WORFOLK, P. A. DsTool : a dynamical system toolkit with an interactive graphical interface. Tech. rep., Center for applied mathematics, Cornell University, Ithaca NY 14853, 1995.
- [46] HADIAN, J., AND NAYFEH, A. H. Modal interaction in circular plates. *J. Sound Vib.* **142**, 2 (1990), 279–292.
- [47] HERRMANN, G. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. Tech. Rep. 3578, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1955.
- [48] HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear solid mechanics*. J. Wiley & sons, Chichester, England, 2000.
- [49] IRONS, J., AND KENNEDY, W. Non-linear vibration of centrally clamped thin discs. *Int. J. Non-linear Mechanics* **24**, 4 (1989), 345–352.
- [50] KUNG, G. C., AND PAO, Y.-H. Nonlinear flexural vibrations of clamped circular plate. *J. Appl. Mech.* **39** (1972), 1050–1054.
- [51] LAMBOURG, C. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes. Application à la synthèse sonore*. PhD thesis, Université du Maine, Le Mans, 1997.
- [52] LAMBOURG, C., CHAIGNE, A., AND MATIGNON, D. Time-domain simulation of damped impacted plates. Part II. Numerical model and results. *J. Acoust. Soc. Am.* **109**, 4 (2001).
- [53] LANCHANTIN, P. Vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces. - Réponse temporelle mettant en jeu une résonance interne. Master's thesis, Stage de DEA ATIAM, Université Pierre et Marie Curie - ENSTA-UME, 2001.
- [54] LAROCHE, J. The use of matrix-pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *J. Acoust. Soc. Am.* **94**, 4 (1993), 1658–1965.
- [55] LE TALLEC, P. *Introduction à la dynamique des structures*. Ellipses, École polytechnique, 2000.
- [56] LEGGE, K. A., AND FLETCHER, N. H. Non-linearity, chaos and the sound of shallow gongs. *J. Acoust. Soc. Am.* **86**, 6 (1989), 2439–2443.
- [57] LEIPP, É. *Acoustique et Musique*, 4th. ed. Masson, Paris, 1996.
- [58] LEISSA, A. *Vibration of plates*. Acoustical Society of America, 1993.
- [59] LEISSA, A. W. Recent research in plate vibrations. 1973-1976 : complicating effects. *Shock Vib. Dig.* **10**, 12 (1979), 21–35.
- [60] LEISSA, A. W. Plate vibration research, 1976-1980 : complicating effects. *Shock Vib. Dig.* **13**, 10 (1981), 19–36.
- [61] LEISSA, A. W. Recent studies in plate vibrations : 1981-85. Part II : complicating effects. *Shock Vib. Dig.* **19** (1987), 10–24.
- [62] LEISSA, A. W., AND KADI, A. S. Curvature effects on shallow shell vibrations. *J. Sound Vib.* **16**, 2 (1971), 173–187.
- [63] LOBITZ, D. W., NAYFEH, A. H., AND MOOK, D. T. Non-linear analysis of vibrations of irregular plates. *J. Sound. Vib.* **50**, 2 (1977), 203–217.
- [64] LUO, A. C. J., AND HAN, R. P. S. A quantitative stability and bifurcation analyses of the generalized Duffing oscillator with strong nonlinearity. *J. Franklin. Inst.* **334B**, 3 (1997), 447–459.
- [65] MANNEVILLE, P. Systèmes dynamiques et chaos. Cours de DEA. Ce cours est disponible sur : <http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/manneville.html>.
- [66] MANNEVILLE, P. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Alea saclay, Academic press, 1991.
- [67] MEIROVITCH, L. *Analytical methods in vibrations*. Macmillan Publishing Co., 1967.
- [68] MILLET, O., HAMDOUNI, A., AND CIMETIÈRE, A. Justification du modèle bidimensionnel linéaire de plaque par développement asymptotique de l'équation de Navier. *C. R. Acad. Sci.* **IIb**, 324 (1997), 289–292.
- [69] MILLET, O., HAMDOUNI, A., AND CIMETIÈRE, A. Justification du modèle bidimensionnel non-linéaire de plaque par développement asymptotique des équations d'équilibre. *C. R. Acad. Sci.* **IIb**, 324 (1997), 349–354.



- [70] MILLET, O., HAMDOUNI, A., AND CIMETIÈRE, A. Le modèle linéaire usuel de plaque déduit de l'élasticité non-linéaire tridimensionnelle. *C. R. Acad. Sci.* **IIb**, 326 (1998), 159–162.
- [71] MILLET, O., HAMDOUNI, A., CIMETIÈRE, A., AND ELAMRI, K. Analyse dimensionnelle de l'équation de Navier et application à la théorie des plaques. *J. Phys. III France* **7** (1997), 1909–1925.
- [72] MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.* **18**, 1 (1951), 31–38.
- [73] NAYFEH, A. H. *Perturbation methods*. John Wiley & sons, inc., New-York, 1973.
- [74] NAYFEH, A. H., AND MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & sons, inc., New-York, 1979.
- [75] NAYFEH, A. H., MOOK, D. T., AND LOBITZ, D. W. Numerical-perturbation method for the nonlinear analysis of structural vibrations. *AIAA Journal* **12**, 9 (1974), 1222–1228.
- [76] NAYFEH, A. H., MOOK, D. T., AND SRIDHAR, S. Nonlinear analysis of the forced response of structural elements. *J. Acoust. Soc. Am.* **55**, 2 (1973), 281–291.
- [77] NAYFEH, A. H., AND NAYFEH, S. A. On nonlinear modes of continuous systems. *J. of Vibration and Acoustics* **116** (1994), 129–136.
- [78] NAYFEH, A. H., AND SANCHEZ, N. E. Bifurcations in a forced softening Duffing oscillator. *Int. J. Non-Linear Mechanics* **24**, 6 (1989), 483–497.
- [79] NOWINSKI, J. L., AND OHNABE, H. On certain inconsistencies in Berger equations for large deflections of elastic plates. *Int. J. Mech. Sci* **14** (1972), 165–170.
- [80] PESHECK, E., AND PIERRE, C. A global methodology for the modal reduction of large nonlinear systems containing quadratic and cubic nonlinearities. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences* (Sept. 1997).
- [81] PIERCE, A. D. *Acoustics - An introduction to its physical principles and applications*, 2nd. ed. Acoustical Society of America, 1989.
- [82] POMEAU, Y. Papier froiss. *C. R. Acad. Sci. Paris* **I**, 320 (1995), 975–979.
- [83] RAMAN, A., AND MOTE JR., C. D. Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed. *Int. J. Non-linear Mechanics* **36** (2001), 261–289.
- [84] RAYLEIGH, J. W. S. *The theory of sound, volume 1*, 2nd ed. Dover, 1945.
- [85] RAYLEIGH, J. W. S. *The theory of sound, volume 2*, 2nd ed. Dover, 1945.
- [86] REHFELD, L. W. Nonlinear free vibrations of elastic structures. *Int. J. Solids Structures* **9** (1973), 581–590.
- [87] REISSNER, E. On the theory of bending of elastic plates. *Journal of mathematics and physics* **23** (1944), 184–191.
- [88] REISSNER, E. Finite twisting and bending of thin rectangular elastic plates. *J. Appl. Mech.* **24** (1957), 391–396.
- [89] RHAOUTI, L., CHAIGNE, A., AND JOLY, P. Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum. *J. Acoust. Soc. Am.* **105**, 6 (1999), 3545–3562.
- [90] RIBEIRO, P. The second harmonic and the validity of Duffing's equation for vibration of beams with large displacements. *Computers and structures* **79** (2001), 107–117.
- [91] ROSSING, T. D., AND FLETCHER, N. H. Acoustics of a tam-tam. *Bull. Australian Acoust. Soc.* **10**, 1 (1982), 21–26.
- [92] ROSSING, T. D., AND FLETCHER, N. H. Non-linear vibrations in plates and gongs. *J. Acoust. Soc. Am.* **73**, 1 (1983), 345–351.
- [93] ROSSING, T. D., AND PETERSON, R. W. Vibrations of plates, gongs and cymbals. *Percussive notes* **19**, 3 (1982), 31–41.
- [94] ROSSING, T. D., AND SHEPHERD, R. B. Acoustics of gamelan instruments. *Percussive notes* **19**, 3 (1982), 73–83.
- [95] ROSSING, T. D., AND SHEPHERD, R. B. Acoustics of cymbals. In *11th Intl. Congress on Acoustics* (Paris, 1983), pp. 329–333.

- [96] RUELLE, D., AND TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.* **20** (1971), 167–192.
- [97] SALENÇON, J. *Mécanique des milieux continus, T. 1 : concepts généraux*. Ecole polytechnique, Palaiseau, Fr., 1996.
- [98] SALENÇON, J. *Mécanique des milieux continus, T. 2 : Thermoélasticité*. Ecole polytechnique, Palaiseau, Fr., 1996.
- [99] SATHYAMOORTHY, M. Shear and rotatory inertia effects on the large amplitude vibrations of plates. *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE* **104**, EM5 (1978), 1288–1293.
- [100] SATHYAMOORTHY, M. Nonlinear vibrations of plates - A review. *Shock Vib. Dig.* **15**, 6 (1983), 3–16.
- [101] SATHYAMOORTHY, M. Nonlinear vibration analysis of plates : a review and survey of current developments. *Appl. Mech. Rev.* **40**, 11 (1987), 1553–1561.
- [102] SATHYAMOORTHY, M. Nonlinear vibrations of plates : an update of recent research developments. *Appl. Mech. Rev.* **49**, 10 (1996), S55–S62.
- [103] SATHYAMOORTHY, M., AND E., P. M. Multiple mode nonlinear analysis of circular plates. *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE* **109**, 4 (1983), 1114–1123.
- [104] SCHAEFFER, P. *Traité des objets musicaux*. Éditions du Seuil, Paris, 1966.
- [105] SCHEDIN, S., GREN, P. O., AND ROSSING, T. D. Transient wave response of a cymbal using double-pulsed TV holography. *J. Acoust. Soc. Am.* **103**, 2 (1998), 1217–1220.
- [106] SCHMIDT, R. A current trend in shell theory : constrained geometrically nonlinear Kirchhoff-Love type theories based on a polar decomposition of strains and rotations. *Computers and structures* **20**, 1-3 (1985), 265–275.
- [107] SERRES, M., PEETERS, B., DONNET, P.-A., DOLLFUS, P., AND STERCKX, P. *Au Tibet avec Tintin*. Fondation Hergé, 1994.
- [108] SHAW, S., AND PIERRE, C. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *J. Sound. Vib.* **169**, 3 (1994), 319–347.
- [109] SRIDHAR, S., MOOK, D. T., AND NAYFEH, A. H. Non-linear resonances in the forced responses of plates, part I : symmetric responses of circular plates. *J. Sound Vib.* **41**, 3 (1975), 359–373.
- [110] SRIDHAR, S., MOOK, D. T., AND NAYFEH, A. H. Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II : asymmetric responses of circular plates. *J. Sound Vib.* **59**, 2 (1978), 159–170.
- [111] STERN, C. Inside Sabian. *Modern drummer* (Nov. 1983).
- [112] SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, W. Bifurcations of harmonic solution leading to chaotic motion in the softening type Duffing's oscillator. *Int. J. Non-Linear Mechanics* **23**, 4 (1988), 257–277.
- [113] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Non-linear resonances in large-deflection vibrations of free-edge circular plates. In *Proceedings of the 7th. International Congress on Sound and Vibration* (Garmish Partenkirchen, July 2000).
- [114] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Asymmetric non-linear forced vibrations of circular plates, part 2 : experiments. *J. Sound. Vib.* (2001). Submitted..
- [115] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Non-linear behavior of gongs through the dynamic of simple rods systems. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics* (Perugia, Sept. 2001).
- [116] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Sur la vibration à un mode asymétrique des plaques circulaires en grands déplacements. In *Actes du 15ème Congrès Français de Mécanique* (Nancy, Sept. 2001).
- [117] THOMSEN, J. J. *Vibrations and stability - Order and Chaos*. McGraw Hill, 1997.
- [118] TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine* (1921).
- [119] TOBIAS, S. A. Free undamped non-linear vibrations of imperfect circular disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.* **171** (1957), 691–701.
- [120] TOBIAS, S. A. Non-linear forced vibrations of circular discs. *Engineering, London* **186** (1958), 51–56.

- [121] TOBIAS, S. A., AND ARNOLD, R. N. The influence of dynamical imperfection on the vibration of rotating disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.* **171** (1957), 669–690.
- [122] TOUZÉ, C. *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques. Application aux instruments de percussion non-linéaires*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, Nov. 2000.
- [123] TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Lyapunov exponents from experimental time series : application to cymbal vibrations. *Acustica* **86** (2000), 557–567.
- [124] TOUZÉ, C., CHAIGNE, A., ROSSING, T. D., AND SCHEDIN, S. Analysis of cymbal vibrations and sound using non-linear signal processing methods. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics* (Seattle, July 1998), Leavenworth, Ed.
- [125] TOUZÉ, C., THOMAS, O., AND CHAIGNE, A. Asymmetric non-linear forced vibrations of circular plates, part 1 : theory. *J. Sound. Vib.* (2001). Submitted.
- [126] TRANCHEFORT, F. R. *Les instruments de musique dans le monde*. Col. Points musique. Ed. du Seuil, 1980.
- [127] VAKAKIS, A. F. Non-linear normal modes NNMs and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical systems and signal processing* **11**, 1 (1997), 3–22.
- [128] VENDHAN, C. P. A study of Berger equations applied to nonlinear vibration of elastic plates. *Int. J. Mech. Sci.* **17** (1975).
- [129] VON KARMAN, T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Encyklop adie der Mathematischen Wissenschaften* **4**, 4 (1910), 311–385.
- [130] WILLIAMS, C. J. H. The stability of nodal patterns in disk vibration. *Int. J. Mech. Sci.* **8** (1966), 421–432.
- [131] WILLIAMS, C. J. H., AND TOBIAS, S. A. Forced undamped non-linear vibrations of imperfect circular discs. *Journal of Mechanical Engineering Science* **5** (1963), 325–335.
- [132] YAMAKI, N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **41** (1961), 501–510.
- [133] YANG, X. L., AND SETHNA, P. R. Local and global bifurcations in parametrically excited vibrations of nearly square plates. *Int. J. Non-Linear Mechanics* **26**, 2 (1991), 199–220.
- [134] YASUDA, K., AND ASANO, T. Nonlinear forced oscillations of a rectangular membrane with degenerated modes. *Bull. JSME* **29**, 255 (1986), 3090–3095.
- [135] YASUDA, K., AND HAYASHI, N. Subharmonic oscillations of a prestressed circular plate. *Bull. JSME* **25**, 102 (1982), 620–629.
- [136] YASUDA, K., AND KUSHIDA, G. Non-linear forced oscillations of a shallow spherical shell. *Bull. JSME* **27**, 232 (1984), 2233–2240.
- [137] ZALUTSKY, K. Linear and nonlinear vibrations of rectangular plates. Dept. Mech. Eng. Mech., Lehigh Univ., 1997. Disponible sur :  
[http://indigo1.me.lehigh.edu/konst/Public/Research/Vibration\\_of\\_Plates/head](http://indigo1.me.lehigh.edu/konst/Public/Research/Vibration_of_Plates/head).