



**HAL**  
open science

# Analyses multiéchelle et multifractale d'images météorologiques: Application à la détection de zones précipitantes

Jacopo Grazzini

► **To cite this version:**

Jacopo Grazzini. Analyses multiéchelle et multifractale d'images météorologiques: Application à la détection de zones précipitantes. Interface homme-machine [cs.HC]. Université de Marne la Vallée, 2003. Français. NNT: . tel-00005940v2

**HAL Id: tel-00005940**

**<https://theses.hal.science/tel-00005940v2>**

Submitted on 15 Sep 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE**

École Doctorale Information, Communication, Modélisation et Simulation

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité :

INFORMATIQUE

soutenue par

**Jacopo GRAZZINI**

le 19 décembre 2003

Titre :

**Analyses multiéchelle et multifractale  
d'images météorologiques :  
Application à la détection de zones précipitantes**

---

**Multiscale and multifractal analysis of meteorological images :  
Application to the detection of rainfall areas**

Devant le jury composé de :

Président :	<b>J.-P. NADAL</b>	Directeur de Recherche, LPS/CNRS
Directeur de thèse :	<b>J. BERSTEL</b>	Professeur, Université de Marne-la-Vallée
Rapporteurs :	<b>F.-X. LE DIMET</b> <b>É. MÉMIN</b>	Professeur, Université Joseph Fourier de Grenoble Maître de Conférences, Université de Rennes I
Examineurs :	<b>I. HERLIN</b> <b>A. SZANTAÏ</b> <b>A. TURIEL</b> <b>H. YAHIA</b>	Directeur de Recherche INRIA Ingénieur d'Étude, LMD/CNRS Ingénieur de Recherche, ICM/CSIC Chargé de Recherche INRIA



# Table des matières

Résumé . . . . .	9
Notations . . . . .	11

## **I Contexte de l'étude et objectifs** **13**

### **1. Introduction** **15**

1.1. Motivations : intérêts de l'imagerie satellitaire pour l'étude des systèmes convectifs précipitants . . . . .	15
1.2. Contexte : le traitement d'images infrarouges et l'analyse des écoulements fluides . .	16
1.3. Notre approche : présentation méthodologique . . . . .	17
1.4. Plan du document . . . . .	19

### **2. Acquisitions satellitaires et observation des phénomènes météorologiques** **23**

2.1. Nature des mesures satellitaires . . . . .	23
2.1.1. Principes généraux de télédétection . . . . .	23
2.1.2. Mesures du satellite <b>Meteosat</b> : visible, infrarouge et vapeur d'eau . . . . .	25
2.1.3. Mesures micro-ondes . . . . .	27
2.1.4. Colocalisation des données <b>Meteosat</b> et <b>TRMM</b> . . . . .	30
2.2. Description et caractérisation des phénomènes météorologiques au dessus de l'Afrique de l'Ouest . . . . .	31
2.2.1. Les lignes de grain . . . . .	32
2.2.2. Description des systèmes convectifs et des précipitations . . . . .	33
2.3. Caractérisation des précipitations sur les images satellitaires . . . . .	35
2.3.1. Mesure des précipitations dans les données <b>MO</b> . . . . .	35
2.3.2. Caractérisation des précipitations sur les données <b>IR-VIS</b> . . . . .	36
2.4. Conclusion . . . . .	43

---

<b>II</b>	<b>Segmentation et classification d'images météorologiques : contraintes et limitations</b>	<b>45</b>
<b>3.</b>	<b>Techniques de segmentation : état de l'art</b>	<b>47</b>
3.1.	La segmentation pour l'extraction de structures d'intérêt . . . . .	47
3.1.1.	Les différentes approches pour segmenter une image . . . . .	47
3.1.2.	Objectifs . . . . .	48
3.2.	Approches <i>contour</i> . . . . .	49
3.2.1.	Algorithme de détection de contours . . . . .	49
3.2.2.	Pré et post-traitement : méthodes de filtrage et de correction . . . . .	50
3.2.3.	Méthodes de différentiation de l'image . . . . .	50
3.3.	Approches <i>région</i> . . . . .	55
3.3.1.	Méthodes par division et/ou fusion . . . . .	55
3.3.2.	Méthodes de classification . . . . .	57
3.4.	Approches <i>mixtes</i> . . . . .	59
3.4.1.	Méthodes variationnelles . . . . .	59
3.4.2.	Méthodes de type <i>scale-space</i> . . . . .	62
3.4.3.	Champs de Markov et segmentation bayésienne . . . . .	64
3.4.4.	Méthodes morphologiques . . . . .	66
3.5.	Conclusion . . . . .	68
<b>4.</b>	<b>Attributs texturels d'analyse d'images météorologiques</b>	<b>69</b>
4.1.	Description de la texture dans les images . . . . .	69
4.1.1.	La notion de texture . . . . .	69
4.1.2.	Contenu textuel des images météorologiques . . . . .	70
4.1.3.	Analyse de la texture : objectifs et méthodes . . . . .	71
4.2.	Représentation de la texture à l'aide des matrices de cooccurrence . . . . .	72
4.2.1.	Méthodes basées sur les matrices de cooccurrence . . . . .	72
4.2.2.	Variantes des <b>MC</b> et <b>MC</b> -attributs . . . . .	76
4.2.3.	Représentation du contenu textuel des images <b>IR</b> par les <b>MC</b> -attributs . . . . .	78
4.2.4.	Conclusion . . . . .	87
4.3.	Généralisation multiéchelle des matrices de cooccurrence . . . . .	88
4.3.1.	La texture à travers les échelles . . . . .	88
4.3.2.	<b>MC</b> et <b>MC</b> -attributs multiéchelles . . . . .	89
4.4.	Analyse et classification dans l'espace de représentation des <b>MC</b> -attributs . . . . .	93
4.4.1.	Contraintes dues à la classification . . . . .	94

4.4.2.	Sélection et extraction de descripteurs . . . . .	95
4.4.3.	Analyse de la corrélation entre les attributs . . . . .	99
4.4.4.	Classification automatique . . . . .	106
4.4.5.	Discussion . . . . .	108
4.5.	Conclusion . . . . .	109

### **III Formalisme multifractal pour la détection de structures d'intérêt dans les données turbulentes 111**

#### **5. Des outils multiéchelles et multifractals d'analyse d'images 113**

5.1.	L'invariance d'échelle comme paradigme à l'analyse multiéchelle . . . . .	113
5.1.1.	Invariance d'échelle et auto-similarité d'un objet, d'un signal . . . . .	113
5.1.2.	Invariance d'échelle des images naturelles . . . . .	114
5.1.3.	L'approche multiéchelle . . . . .	116
5.1.4.	Objectifs . . . . .	116
5.2.	Un outil idéal d'analyse multiéchelle des images : les ondelettes . . . . .	117
5.2.1.	La transformée en ondelettes . . . . .	117
5.2.2.	Analyse multirésolution et décomposition en ondelettes . . . . .	120
5.2.3.	Maxima d'ondelettes et détection de contours . . . . .	125
5.2.4.	Conclusion . . . . .	129
5.3.	Le formalisme multifractal pour l'analyse d'images . . . . .	130
5.3.1.	Mesure de régularité d'une fonction . . . . .	130
5.3.2.	Dimensions fractales d'un ensemble . . . . .	132
5.3.3.	Multifractals et spectres multifractals . . . . .	134
5.3.4.	Images et analyse multifractale . . . . .	136
5.3.5.	Conclusion . . . . .	139
5.4.	Un modèle multifractal pour l'extraction des singularités d'une image . . . . .	140
5.4.1.	Motivation : description statistique <i>vs.</i> description géométrique . . . . .	140
5.4.2.	Mesure multifractale . . . . .	141
5.4.3.	Exposants de singularité . . . . .	145
5.4.4.	Méthode d'estimation des exposants de singularité . . . . .	146
5.4.5.	Sélection d'ondelettes analysantes . . . . .	147
5.4.6.	Décomposition multifractale . . . . .	152
5.4.7.	Description des composantes fractales . . . . .	156

5.5.	... Et un modèle de reconstruction d'une image à partir de ses singularités . . . . .	157
5.5.1.	Formulation du processus de reconstruction . . . . .	158
5.5.2.	Construction du noyau de propagation . . . . .	158
5.5.3.	Propriétés de la reconstruction . . . . .	163
5.6.	Des applications du modèle multifractal à l'analyse d'images satellitaires - Partie I .	166
5.6.1.	Détection de contours et description du contenu textuel d'une image . . . . .	166
5.6.2.	Compression d'images . . . . .	171
5.6.3.	Fusion d'images de différentes résolutions spatiales . . . . .	173
5.7.	Conclusion . . . . .	177
<b>6.</b>	<b>Le formalisme multifractal : du modèle de turbulence au modèle d'image</b>	<b>179</b>
6.1.	La physique du formalisme multifractal : la turbulence . . . . .	179
6.1.1.	Pourquoi s'intéresser à la turbulence ? . . . . .	179
6.1.2.	Objectifs . . . . .	180
6.2.	Notions de dynamique des fluides et turbulence . . . . .	180
6.2.1.	Équations de Navier-Stokes . . . . .	181
6.2.2.	Nombre de Reynolds et échelles de l'écoulement . . . . .	181
6.2.3.	Turbulence . . . . .	182
6.3.	Description et formalisation statistiques de la turbulence . . . . .	183
6.3.1.	La démarche statistique . . . . .	183
6.3.2.	Le modèle auto-similaire . . . . .	184
6.3.3.	Modèles d'intermittence . . . . .	184
6.3.4.	Le modèle multifractal . . . . .	185
6.3.5.	Le modèle de cascades . . . . .	186
6.3.6.	Conclusion : les modélisations de la turbulence . . . . .	187
6.4.	Le modèle log-Poisson et l'analyse multifractale d'images . . . . .	188
6.4.1.	Le modèle de cascade log-Poisson en turbulence . . . . .	188
6.4.2.	Les cascades log-Poisson dans le modèle d'image . . . . .	189
6.4.3.	Les cascades log-Poisson pour décrire la structure des images et du flot . . . . .	197
6.5.	Conclusion . . . . .	203

<b>IV. Entropie multiéchelle et analyse multifractale appliquées à la détection des zones précipitantes</b>	<b>205</b>
<b>7. Mesures entropiques et décomposition multifractale pour la détection de structures d'intérêt</b>	<b>207</b>
7.1. Pertinence des objets et structures dans les images <b>IR</b> . . . . .	207
7.1.1. Détection de structures d'intérêt . . . . .	207
7.1.2. Outils d'interprétation des structures détectées . . . . .	208
7.2. Critères entropiques pour l'extraction de structures informatives . . . . .	208
7.2.1. Quantification de la notion d'information . . . . .	208
7.2.2. Information et entropie . . . . .	209
7.2.3. Entropie multiéchelle . . . . .	213
7.3. Comparaison entre les mesures entropiques et l'analyse multifractale . . . . .	217
7.3.1. Estimation de l'entropie locale des images <b>IR</b> . . . . .	217
7.3.2. Lien entre les descriptions entropique et multifractale . . . . .	220
7.3.3. Conclusion . . . . .	221
7.4. Des applications du modèle multifractal à l'analyse d'images satellitaires - Partie II	222
7.4.1. Présegmentation d'images haute-résolution . . . . .	222
7.4.2. Restauration d'images satellitaires . . . . .	229
7.5. Conclusion . . . . .	232
<b>8. Formalisme des sources pour la détection et la segmentation des foyers convectifs précipitants</b>	<b>233</b>
8.1. Le formalisme multifractal pour modéliser le flot atmosphérique . . . . .	233
8.1.1. Description des mouvements dans l'atmosphère : advection <i>vs.</i> convection . .	233
8.1.2. Objectifs de l'approche multifractale . . . . .	235
8.2. Un modèle de description de l'advection dans les images <b>IR</b> : l'image chromatiquement réduite . . . . .	236
8.2.1. La <b>MSM</b> et ses connections avec la thermodynamique du système . . . . .	236
8.2.2. Construction d'une image chromatiquement réduite . . . . .	237
8.2.3. Caractérisation de l'advection dans le flot . . . . .	240
8.3. Un outil mathématique de détection de la convection dans les images <b>IR</b> : le champ des sources . . . . .	242
8.3.1. Influence du mouvement des systèmes convectifs sur le champ de température	243
8.3.2. Utilisation de l'information contenue dans la <b>MSM</b> et la <b>CRI</b> . . . . .	244
8.3.3. Formalisation mathématique du champ des sources . . . . .	246

8.3.4.	Propriétés du champ des sources . . . . .	249
8.3.5.	Caractérisation de la convection dans le flot . . . . .	250
8.4.	Extraction des zones de divergence du mouvement . . . . .	257
8.4.1.	Motivation . . . . .	257
8.4.2.	Le problème de l'estimation du mouvement . . . . .	258
8.4.3.	Calcul des champs de vitesse . . . . .	259
8.4.4.	Extraction de points singuliers divergents . . . . .	260
8.4.5.	Discussion . . . . .	263
8.5.	Segmentation des zones précipitantes . . . . .	264
8.5.1.	Motivation . . . . .	264
8.5.2.	L'entropie comme attribut thermodynamique . . . . .	264
8.5.3.	Calcul des sources associées à l'entropie . . . . .	265
8.5.4.	Extractions de régions de transition de la phase des sources . . . . .	267
8.5.5.	Discussion . . . . .	272
8.6.	Conclusion . . . . .	274

**V. Conclusion générale** **275**

**Bibliographie** **283**

**Annexes** **297**

**A. Structures nuageuses et précipitations** **297**

A.1.	La formation des nuages . . . . .	297
A.2.	Classification des nuages . . . . .	298
A.3.	Nuages convectifs et précipitations . . . . .	300

**B. Notions de théorie de l'information : mesures entropiques** **303**

B.1.	Quantité d'information . . . . .	303
B.2.	Entropie . . . . .	303
B.3.	Entropie mutuelle . . . . .	304
B.4.	Entropie conditionnelle . . . . .	305
B.5.	Information mutuelle . . . . .	305

<b>C. Représentations harmoniques : de Fourier aux ondelettes</b>	<b>307</b>
C.1. La Transformée de Fourier . . . . .	307
C.2. Le principe d'incertitude de Heisenberg . . . . .	307
C.3. Représentations dans le plan temps-fréquence . . . . .	308
C.4. La transformée en ondelettes . . . . .	310
C.5. Résolution dans le plan temps-échelle . . . . .	310
<b>Liste des figures</b>	<b>313</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>319</b>



## Résumé

La connaissance des systèmes nuageux est d'un grand intérêt pour nombre d'applications météorologiques et climatiques. Les données d'étude généralement employées sont des images acquises par satellite géostationnaire, car elles bénéficient d'une couverture géographique quasi uniforme ; parmi celles-ci, les données infrarouges apportent de l'information sur la température du sommet des formations nuageuses. Dans ce travail de recherche, nous nous intéressons à la caractérisation, sur les images infrarouges, de systèmes convectifs, qui sont à l'origine de situations météorologiques violentes susceptibles d'engendrer de fortes pluies. L'objectif est d'améliorer les résultats des modèles de prévision atmosphérique.

Notre démarche d'analyse consiste à identifier les problèmes pratiques et à les relier à des concepts théoriques de vision par ordinateur. Nous sommes naturellement conduits à nous intéresser à la physique régissant l'évolution de l'atmosphère. L'étude des propriétés physiques et statistiques des phénomènes météorologiques observés révèle une évolution chaotique et un régime de nature turbulente, mis notamment en évidence par l'invariance d'échelle de certaines grandeurs significatives. Nous envisageons ainsi un cadre d'analyse multiéchelle afin de prendre en compte la dépendance de ces phénomènes vis-à-vis de l'échelle d'observation. Nous proposons d'introduire des méthodes de traitement d'image dérivées de concepts thermodynamiques et qui constituent un prolongement des méthodes d'analyse de la turbulence. Nous utilisons tout d'abord un modèle multifractal qui respecte les propriétés des systèmes analysés. Ce modèle permet de détecter les singularités du signal et d'exhiber, dans une décomposition hiérarchique de l'image, des structures pertinentes pour la compréhension des processus atmosphériques. En se référant à la mécanique et à la thermodynamique des fluides, nous établissons un lien entre les propriétés géométriques et statistiques des images infrarouges et les différents mécanismes mis en évidence dans ces images.

Nous proposons ensuite une extension du modèle multifractal pour déterminer les mécanismes de transport dans le flux atmosphérique. Nous étudions notamment les caractéristiques des structures extraites en relation avec les notions d'advection et de convection. Nous mettons en évidence les zones de diffusion de la luminance dans l'image et nous identifions ces zones aux régions où de l'énergie et de la matière sont injectées dans le système. Ces régions apportent une information critique sur la nature du mouvement de l'atmosphère ; elles sont utilisées pour la détection des structures convectives associées au transport vertical. Dans le prolongement de cette analyse, nous étudions les propriétés entropiques des images infrarouges. Nous combinons finalement ces deux approches pour interpréter l'état de l'atmosphère et traduire les propriétés des systèmes précipitants considérés dans le système atmosphérique.



## Principaux acronymes et abréviations

<b>ACP</b>	: méthode d'Analyse en Composantes Principales.
<b>AMR</b>	: l'Analyse MultiRésolution.
<b>BR</b>	: une image Basse-Résolution.
<b>CRI</b>	: l'image chromatiquement réduite ( <i>Chromatically Reduced Image</i> ).
<b>FRI</b>	: l'image reconstruite ( <i>Fully Reconstructed Image</i> ).
<b>GLCM</b>	: une approche de calcul des matrices de cooccurrence ( <i>Grey Level Cooccurrence Matrix</i> ).
<b>GLDV</b>	: <i>ibid</i> ( <i>Grey Level Difference Vector</i> ).
<b>GLV</b>	: <i>ibid</i> ( <i>Grey Level Vector</i> ).
<b>EG</b>	: l'Entropie Globale d'un signal.
<b>EL</b>	: l'Entropie Locale.
<b>ELM</b>	: l'Entropie Locale avec pondération Multiéchelle.
<b>EOFC</b>	: une contrainte du flot optique étendue ( <i>Extended Optical Flow Constraint</i> ).
<b>ESS</b>	: auto-similarité étendue ( <i>Extended Self-Similarity</i> ).
<b>HR</b>	: une image Haute-Résolution.
<b>IR</b>	: la mesure dans le canal InfraRouge.
<b>ITCZ</b>	: en météorologie, désigne la zone de convergence intertropicale ( <i>InterTropical Convergence Zone</i> ).
<b>MC</b>	: une Matrice de Cooccurrence.
<b>MC-attributs</b>	: attributs texturels calculés à partir des Matrices de Cooccurrence.
<b>MMTO</b>	: les Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes.
<b>MO</b>	: la mesure dans le canal MicroOnde.
<b>MSM</b>	: la variété la plus singulière ( <i>Most Singular Manifold</i> ).
<b>NIR</b>	: la mesure dans le canal proche-infrarouge ( <i>Near InfraRed</i> ).
<b>OMSM</b>	: la variété la plus singulière orientée ( <i>Orientated Most Singular Manifold</i> ), <i>i.e.</i> sur laquelle on tient compte de l'orientation du gradient de l'image originale.
<b>SADH</b>	: une approche de calcul des matrices de cooccurrence ( <i>Sum And Difference Histograms</i> ).
<b>TCD</b>	: le régime de Turbulence Complètement Développée.
<b>TOC</b>	: la Transformée en Ondelettes Continue.
<b>TO</b>	: la Transformée en Ondelettes discrète.
<b>TRMM</b>	: le satellite <i>Tropical Rainfall Measuring Mission</i> .
<b>VIS</b>	: la mesure dans le canal VISible.
<b>WV</b>	: la mesure dans le canal vapeur d'eau ( <i>Water Vapor</i> ).

## Symboles mathématiques - Symboles courants

$\mathcal{D}$  : le support (discret ou réel) d'une image; dans le cas discret,  $\mathcal{D} = \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$  est la grille de l'image.

$I_{\mathcal{D}}$ ou $I$	: une image, définie sur un domaine $\mathcal{D}$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{G}$ .
$\mathcal{G}$	: l'ensemble (discret ou réel) des valeurs prises par une image ; dans le cas discret, $\mathcal{G} = \{1, \dots, N_{\mathcal{G}}\}$ est l'ensemble des niveaux de gris.
$(i, j)$	: une paire de niveaux de gris de l'image $I$ , quand on ne le précise pas.
$\vec{x} = (x, y)$	: un pixel d'une image à la position $(x, y)$ , et plus généralement un point de l'espace 2D ( $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ ) de coordonnées $(x, y)$ .
$x$	: un point d'un espace 1D.
$ x $	: la norme de $\vec{x}$ ou de $x$ suivant la dimension de l'espace dans lequel on se trouve.
$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$	: une fréquence, <i>i.e.</i> un point du domaine de Fourier, transformé du domaine spatial.
$ \nu $	: la norme de $\vec{\nu}$ .
$B_r(\vec{x})$	: le voisinage d'un point $\vec{x}$ de l'espace, généralement pour la norme euclidienne.
$\mathcal{W}$	: une fenêtre d'une image discrète, <i>i.e.</i> un voisinage pour la norme sup.
$\mathbf{u}$	: un vecteur quelconque, tel qu'un vecteur de déplacement $\mathbf{t}$ ou un champ de vitesse $\mathbf{v}$ .
$\partial_x$	: une dérivée partielle dans la direction $x$ .
$\nabla$	: un gradient, tel que le gradient de l'image $\nabla I$ .
$\partial_t \mathbf{v}$	: la dérivée eulérienne de la vitesse.
$D_t \mathbf{v}$	: la dérivée lagrangienne de la vitesse : $D_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ .
$L^2(\mathbb{R})$	: espace des fonctions de carré intégrable.
$\ \cdot\ _2$	: norme sur $L^2(\mathbb{R})$ .
$\mathcal{F}[\cdot]$	: l'opérateur de transformée de Fourier.
$\psi$ et $\Psi$	: représenteront <i>resp.</i> des ondelettes 1D et 2D.
$T_{\Psi}$	: la transformée en ondelette avec l'ondelette $\Psi$ .
$E[\cdot]$	: désigne une espérance.
$\mu$ et $\boldsymbol{\mu}$	: mesure et mesure complexe.
$h$ et $\eta$	: des exposants de singularité, <i>resp.</i> exposant de Hölder et exposant multifractal.
$D(h)$ ou $D_h$	: le spectre de singularités.
$D_{\infty}$ et $h_{\infty}$	: les grandeurs caractérisant la <b>MSM</b> : la valeur de l'exposant le plus singulier et la dimension fractale de cet ensemble.
$\delta \mathbf{v}_r$	: les accroissements longitudinaux de la vitesse pour décrire un champ turbulent.
$\mathcal{Re}$	: le nombre de Reynolds.
$\mathcal{P}(\cdot)$	: désigne une distribution de probabilité.
$P$ ou $P_{\mathcal{W}}$	: des probabilités empiriques, globales ou locales sur une fenêtre $\mathcal{W}$ .
$p$ ou $p_{\mathcal{W}}$	: des fréquences empiriques, <i>ibid</i> globales ou locales.
$s$ ou $S$	: des entropies globales ou locales.

## Convention

Toutes les horaires figurant dans ce document (pour préciser l'instant d'acquisition des données) sont indiquées en temps universel (**TU**), *i.e.* par rapport à l'heure du méridien de Greenwich.

---

**Première partie.**

**Contexte de l'étude et objectifs**

---



---

# 1. Introduction

La recherche effectuée dans cette thèse concerne l'étude de scènes acquises par imagerie satellitaire permettant d'observer des phénomènes météorologiques. Elle vise essentiellement à l'analyse de ces phénomènes à l'aide d'outils multiéchelles de traitement d'image issus de concepts thermodynamiques. La finalité de ces travaux de recherche est notamment d'améliorer les résultats des modèles de prévision atmosphérique et d'exploiter au mieux les images utilisées pour la connaissance des phénomènes météorologiques.

## 1.1. Motivations : intérêts de l'imagerie satellitaire pour l'étude des systèmes convectifs précipitants

Depuis le lancement des tout premiers satellites **Tiros** d'observation de la Terre au début des années 1960, l'imagerie satellitaire a permis des améliorations significatives dans l'étude des différents phénomènes géophysiques à grande échelle. L'exploitation des informations provenant de différents capteurs embarqués est d'un intérêt majeur pour ces problèmes. Plus généralement, le spectre des applications associées à l'utilisation des images satellitaires est très large, puisque celles-ci sont aussi variées que la prévision météorologique (prévision immédiate, analyse dynamique), l'océanographie (analyse des systèmes complexes marins), l'hydrologie (prévention des inondations, estimation des précipitations) ou la télédétection (observation de la surface terrestre, étude des changements).

Dans le cadre d'étude des phénomènes météorologiques, une meilleure connaissance du climat global de la Terre passe par une meilleure compréhension des nombreux mécanismes mis en jeu dans l'atmosphère. Une des tâches importantes dévolues aux météorologues est notamment l'analyse des systèmes convectifs à l'origine de situations météorologiques violentes susceptibles d'engendrer de fortes pluies, des grêles ou bien encore des orages. En particulier, les météorologues sont intéressés par la détermination des systèmes précipitants dans les zones tropicales. En effet, les précipitations dans ces régions ( $\pm 30^\circ$  par rapport à l'équateur) représentent les deux tiers des précipitations totales sur la surface du globe. La détection des orages tropicaux constitue un enjeu (scientifique, économique, humanitaire) fondamental. Dans ce contexte, les acquisitions satellitaires constituent une source d'information indispensable : les tropiques étant couverts à 75 % par les océans, seule une étude des précipitations depuis l'espace peut permettre une estimation globale. Elles complètent les rares mesures de pluie effectuées depuis le sol (pluviomètres, radars).

L'analyse des systèmes convectifs précipitants requiert, compte tenu de leur grande variation tem-

---

porelle et spatiale et de leur courte durée de vie, l'utilisation d'images acquises par des satellites géostationnaires à haute fréquence d'acquisition temporelle. Ces données bénéficient en effet, en plus de la grande couverture géographique, de la haute résolution spatiale et de l'échantillonnage temporel élevé (actuellement 15 ou 30 *min* selon le satellite) ; elles permettent d'accéder à de l'information de nature très variée sur les systèmes nuageux : forme, structure, aspect, composition... Parmi celles-ci, les images infraouges fournissent de l'information pertinente sur les grandeurs thermodynamiques et physiques du système Terre-atmosphère-océan. Elles renseignent notamment sur la température du sommet des formations nuageuses, et offrent également la possibilité de dériver des informations quantitatives sur l'altitude des nuages. Cependant, elles ne permettent pas d'accéder directement à la connaissance sur les zones précipitantes. Il s'agit donc de proposer des outils de traitement automatique des images infrarouges afin, idéalement, de localiser et d'extraire les systèmes convectifs et de déterminer les zones précipitantes.

### **1.2. Contexte : le traitement d'images infrarouges et l'analyse des écoulements fluides**

Compte tenu des nombreux avantages offerts par l'imagerie numérique, l'utilisation des outils de traitement d'image et de vision par ordinateur s'est accentuée dans des domaines très divers durant ces deux dernières décennies. De nombreuses améliorations techniques et théoriques ont été proposées dans ces domaines, de sorte qu'aujourd'hui des études de plus en plus précises sont envisageables. Ainsi, de nombreuses recherches sur l'exploitation d'images acquises par capteurs satellitaires en général, et météorologiques en particulier, sont actuellement en cours. Les techniques élaborées en traitement d'image et en vision par ordinateur offrent en effet la possibilité d'exploiter les données de façon plus ou moins supervisée et/ou interactive. Certaines d'entre elles sont plus particulièrement dédiées à l'étude (l'extraction mais aussi le suivi) de structures nuageuses telles que les structures convectives. L'utilisation de ces méthodes apparaît donc très attractive pour notre problème.

Cependant, la plupart des techniques développées jusqu'ici s'avèrent limitées pour le traitement de données telles que les images météorologiques infrarouges. En effet, les méthodes usuelles de traitement d'image reposent sur des hypothèses souvent trop simplistes en regard de la physique des phénomènes que l'on rencontre. En particulier, les images infrarouges présentent une structure extrêmement complexe, que les approches classiques de traitement d'image ne permettent pas d'appréhender. L'origine de cette complexité réside dans la nature même des données infrarouges. Les images acquises dans ce canal traduisent les propriétés physiques du sol et, lorsque celui-ci est couvert, des couches supérieures des objets présents dans l'atmosphère. Elles mesurent directement une grandeur thermodynamique, la température, dans un écoulement fluide turbulent, l'atmosphère. Les images infrarouges mettent ainsi en évidence des phénomènes complexes liés au caractère chaotique des phénomènes observés, à la nature turbulente de l'atmosphère.

Les méthodes développées en traitement d'image se proposent généralement d'étudier les phénomènes visualisés dans les images en se basant essentiellement sur les propriétés image et en laissant - tota-

lement ou en partie - de côté les propriétés physiques sous-jacentes. La modélisation des lois fondamentales (lois de conservation thermodynamiques et dynamiques) régissant un écoulement fluide est en effet particulièrement complexe - les équations ne peuvent notamment pas être résolues analytiquement, excepté dans des situations très simples - et coûteuse en temps de calcul. Par conséquent, le processus non-linéaire de formation des nuages et la nature complexe de leur mouvement fluide sont rarement abordés dans l'analyse des images météorologiques. La prise en compte (au moins partielle) de la physique des phénomènes naturels, et notamment des phénomènes convectifs, apparaît néanmoins nécessaire. Plus généralement, dans le cadre des écoulements fluides, le besoin de développer des méthodes d'analyse adéquates est particulièrement important en raison des nombreuses applications concernées. La turbulence est un sujet d'intérêt majeur ; sa difficulté théorique vient du fait que c'est un problème de physique non linéaire où un grand nombre de degrés de liberté rentre en jeu.

### 1.3. Notre approche : présentation méthodologique

Notre démarche d'analyse consiste tout d'abord à identifier, à partir de l'observation des images météorologiques, des problèmes pratiques et à les relier à des concepts théoriques de vision par ordinateur, afin de définir des méthodes algorithmiques permettant de résoudre ces problèmes. Nous sommes naturellement conduits à nous intéresser aux propriétés physiques et géométriques des structures complexes observées. Celles-ci sont liées au caractère turbulent du fluide atmosphérique. Compte tenu de ces propriétés, nous proposons d'introduire des méthodes de traitement d'image dérivées de concepts thermodynamiques et qui constituent un prolongement des méthodes d'analyse de la turbulence. Ces méthodes permettent d'adopter une approche qui respecte, voire reproduise, les propriétés des systèmes analysés. Nous proposons ensuite de traduire les résultats que nous obtenons en terme physique, en rapport avec les phénomènes météorologiques sous-jacents. Une interprétation thermodynamique des structures mises en évidence est justement rendue possible par les outils que nous utilisons. Nous sommes finalement en mesure de relier les diverses propriétés discutées au problème de détection des zones précipitantes.

Dans notre travail de recherche, la notion d'échelle s'introduit tout naturellement et apparaît comme un des thèmes centraux. Celle-ci peut être déclinée sous différents points de vue :

- *physique* : les phénomènes observés peuvent être considérés comme la "superposition" de phénomènes d'échelles différentes, et, bien souvent, ce ne sont pas les mêmes facteurs qui interviennent selon les échelles ; il apparaît important que l'analyse des systèmes météorologiques prenne en compte cette variabilité aux différentes échelles,
- *traitement du signal* : il est couramment observé que les propriétés statistiques et géométriques des images naturelles doivent être considérées à travers une large gamme d'échelles,
- *mathématique* : en conséquence, il n'existe pas d'échelle privilégiée d'observation et d'étude ; les modèles adaptés à l'étude des objets physiques et des images doivent intégrer la notion d'échelle dans leur schéma d'analyse,

et nous observons que le comportement en échelle caractéristique mis en évidence dans les images météorologiques est une propriété d'invariance d'échelle. Notons que ces considérations ont depuis longtemps conduit les chercheurs à décrire et mesurer les variations des images (pas seulement météorologiques) à différents niveaux d'échelles. Les premières définitions formelles sont ainsi données en terme de facteur de dilatation d'une fonction d'analyse : l'échelle d'un filtre est par exemple définie comme son coefficient de dilatation par rapport à un filtre canonique ; cette conception constitue également un des fondements de la théorie des ondelettes. De même, nous sommes amenés à considérer une approche multiéchelle afin de prendre en compte la dépendance des phénomènes vis-à-vis de l'échelle d'observation et d'étude, et les méthodes de traitement d'image que nous introduisons respectent l'invariance d'échelle. Le meilleur outil d'étude est ainsi fourni par l'analyse multifractale, qui utilise, entre autre, l'outil ondelette.

Un autre thème qui sous-tend notre recherche et qui détermine le choix d'un schéma d'analyse est la propriété d'intermittence. Celle-ci caractérise les données météorologiques et constitue la principale explication de leur nature chaotique. Notons que cette propriété est également présente dans les systèmes précipitants : sur une large gamme d'échelles spatio-temporelles, la pluie met en évidence une variabilité extraordinaire et une intermittence extrêmement forte. Là encore, l'analyse multifractale apparaît encore comme l'approche la plus adaptée pour appréhender ce type de comportement. La multifractalité est en fait une propriété caractéristique des systèmes turbulents et le formalisme multifractal a été introduit pour modéliser des écoulements fluides complexes. Il a initialement été appliqué à de nombreux domaines de la géophysique et est adapté à l'analyse des grandeurs physiques présentant un comportement turbulent. L'utilisation d'un modèle multifractal est donc assez naturelle. En fait, comme l'atmosphère se comporte comme un flot en turbulence complètement développée, on s'attend à ce que toute grandeur physique intensive se comporte comme un processus ergodique et définisse une structure multifractale.

Le formalisme multifractal nous permet ainsi de décrire complètement les images météorologiques de l'échelle la plus grossière à l'échelle la plus fine. Il offre notamment une description de ces données en terme statistique et géométrique, et permet ainsi d'extraire des structures pertinentes de ces deux points de vue. Les résultats obtenus sur les images infrarouges en utilisant ce modèle nous permettent d'interpréter l'état de l'atmosphère. Pour cela, nous établissons un lien entre les propriétés géométriques des images et les propriétés physiques des phénomènes sous-jacents, ce qui conduit notamment aux considérations suivantes :

- les fronts de température dans une image infrarouge s'identifient aux transitions les plus singulières du signal, *i.e.* à ses contours,
- la distribution de la luminance dans l'image (information apportée par la connaissance du gradient de l'image) renseigne sur la distribution de la température dans le système,
- les foyers de convection correspondent à des zones d'injection d'énergie dans le flot et peuvent être assimilés à des sources de luminance dans l'image.

Les propriétés des différentes structures ainsi mises en évidence nous permettent d'effectuer une recherche qualitative de l'activité au sein des systèmes nuageux et de déterminer les principaux mécanismes de transfert d'énergie dans le flux atmosphérique. Sans information temporelle, on ex-

trait notamment l'information pertinente sur les propriétés dynamiques des structures météorologiques, principalement les mouvements verticaux. On propose finalement un outil de détection des zones nuageuses critiques dans lesquelles se produisent des mouvements de convection associés à des précipitations.

## 1.4. Plan du document

Ce document est organisé en 4 parties, dont celle-ci. Sa lecture se veut linéaire en ce sens que nous introduisons progressivement les outils et méthodes qui vont nous permettre d'obtenir des résultats significatifs.

Dans le chapitre suivant, nous présentons plus en détails les différentes caractéristiques physiques des imageurs satellitaires exploités, et la nature des données que nous avons utilisées dans notre travail de recherche. Nous (ré-)introduisons la problématique de ce travail de recherche dans un cadre davantage applicatif. Ces données justifient pleinement (nous devrions en fait dire qu'elles l'imposent) l'emploi des méthodes que nous allons présenter dans la suite.

Nous abordons ce problème comme un problème classique de traitement d'images. Nous nous intéressons aux diverses méthodologies et techniques développées dans la littérature pour la segmentation et la classification d'images. À cet effet, nous effectuons tout d'abord, dans le chapitre 3, un état de l'art des méthodes couramment employées pour l'analyse bas-niveau des images. Nous évoquons, de manière non exhaustive, les principales approches de segmentation et de classification et nous nous focalisons principalement sur les techniques développées dans le cadre de l'analyse de données météorologiques, que nous illustrons par quelques exemples. Nous nous concentrons ensuite sur les méthodes de classification de structures nuageuses basées sur l'analyse de la texture. Ces techniques requièrent de déterminer des attributs descriptifs, observables ou mesurables, caractérisant les éléments présents dans les images. Dans le chapitre 4, nous présentons les descripteurs basés sur les matrices de cooccurrence. Nous en donnons une interprétation dans le cadre de l'analyse d'images infrarouges et nous montrons les limitations de ces approches sur de telles images. La définition classique fournit une estimation des attributs à une échelle fixe (la dimension de la fenêtre analysante) incapable de saisir la diversité d'échelles présentes dans des structures turbulentes. Pour cette raison, nous proposons de reformuler l'expression de ces attributs et de généraliser ce concept dans un cadre multiéchelle. Cependant, nous montrons que, même généralisés dans un cadre multiéchelle, les techniques de classification ne permettent pas d'appréhender la structure complexe des images infrarouges. L'intérêt de ces deux chapitres est de soulever les principaux problèmes liés à l'étude des données infrarouges. La grande majorité des techniques supposent notamment des propriétés de régularité sur les signaux analysés qui ne sont pas vérifiées par les images infrarouges. Ces considérations permettent d'entrevoir quelques unes des propriétés caractéristiques des images infrarouges ; on aborde notamment la notion d'invariance d'échelle.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à la présentation d'un modèle multifractal d'analyse d'image. À partir de la propriété d'invariance d'échelle, nous introduisons, dans le chapitre 5, l'outil idéal d'analyse mutiéchelle, les ondelettes, et nous présentons les principales méthodes à

base d'ondelette développées en traitement d'image. Nous abordons également le formalisme multifractal. Nous présentons finalement un modèle original d'analyse multifractale, introduit dans le cadre de la théorie multifractale de la turbulence, et développé pour l'analyse et la compression d'images naturelles. Au travers d'une étude des transitions les plus singulières du signal, ce modèle permet une caractérisation à la fois géométrique et statistique des différentes structures observées dans l'image. Il consiste essentiellement à vérifier une dépendance en loi de puissance d'une certaine mesure de la régularité locale du signal suivant un paramètre d'échelle. Nous obtenons ainsi une décomposition hiérarchique des images dans laquelle les composantes fractales détectées caractérisent le comportement local du signal. L'approche multifractale s'avère particulièrement adaptée aux données exhibant une structure complexe, telles que les images infrarouges. Plus généralement, le modèle peut être utilisé afin d'analyser une image de nature quelconque, sans hypothèse particulière (de fractalité ou de multifractalité) sur la structure du signal. Le spectre des applications envisageables est très large car le modèle permet d'appréhender des objets non fractals, et nous évoquons d'ailleurs quelques applications que nous avons pu entreprendre durant cette thèse. Dans le chapitre 6, nous revenons sur la modélisation de la turbulence. Il apparaît en effet naturel de s'intéresser aux mécanismes plus généralement mis en jeu dans l'évolution d'un flot turbulent. Nous présentons succinctement les outils classiques issus de la théorie du même nom, qui permettent de traiter les problèmes d'analyse de flots caractérisés par une structure chaotique. Nous esquissons les principaux résultats des différentes descriptions statistiques de la turbulence et nous les relierons au modèle que nous utilisons pour analyser les images. L'objectif est d'établir un lien entre les différentes descriptions : nous obtenons finalement une caractérisation thermodynamique des structures géométriques mises en évidence par le modèle d'analyse multifractal. Nous sommes ainsi en mesure de relier la structure et les propriétés des images avec les phénomènes météorologiques sous-jacents. Ceci fait l'objet de la dernière partie de la thèse.

Dans cette dernière partie, nous proposons en effet diverses extensions du modèle multifractal en rapport avec la physique des phénomènes observés dans les images infrarouges et dans le but de détecter les zones précipitantes. Nous proposons tout d'abord, au chapitre 7 une caractérisation multi-sémantique des structures extraites par le modèle multifractal. L'introduction d'une variable basée sur l'estimation multiéchelle d'une entropie locale permet notamment de relier la décomposition multifractale à une description hiérarchique du contenu d'information dans les images. L'adoption de critères thermodynamiques pour décrire les images infrarouges met également en évidence la pertinence des composantes fractales. La formalisation multifractal apparaît finalement comme l'approche la plus adaptée à l'extraction d'ensembles cohérents et pertinents du point de vue géométrique, statistique et thermodynamique. On est ainsi à même, *via* les ensembles fractals de la décomposition multifractale, de décrire, analyser et interpréter les différentes structures présentes dans une image. Diverses considérations nous amènent alors à construire, au chapitre 8, une image synthétique pour traduire des propriétés du flot. Celle-ci est définie par la donnée d'une composante fractale particulière, qui représente la variété la plus singulière du signal, et est construite de manière à traduire une hypothèse d'advection du champ de température. Ses propriétés géométriques et chromatiques permettent d'envisager la caractérisation de l'activité au sein des structures convectives. Pour ce faire, nous introduisons le formalisme dit des sources. Celui-ci

consiste à comparer, au travers d'une dérivée de Radon-Nykodym, cette image et l'image infrarouge originale. On obtient de cette manière un champ de vecteurs qui fournit une information remarquable : il met en évidence les zones de diffusion de la luminance dans une image. Les singularités de ce champ renseignent notamment sur la répartition des zones de diffusion "énergétiques" dans une image. En combinant ce modèle à la variable entropique locale, nous pouvons caractériser les "foyers" principaux des pluies convectives. Ceux-ci sont en effet associés à des mouvements verticaux importants au sein des nuages, qui correspondent, en terme physique, à des zones d'injection ou de déplétion de matière et qui se traduisent sur les images par des zones de diffusion de la luminance et des variations "anormales" de l'entropie.

En conclusion, nous considérons les différents apports de ce travail de recherche. Nous présentons les avantages de l'approche que nous proposons et du modèle que nous utilisons, en considération des résultats obtenus. Nous envisageons les améliorations à apporter à cette étude, sur un plan tant théorique que pratique, et nous proposons quelques extensions naturelles. Nous montrons notamment que de nombreuses applications sont encore envisageables, et pas uniquement dans le domaine météorologique.



---

## 2. Acquisitions satellitaires et observation des phénomènes météorologiques

Après un bref rappel sur le fondement de la télédétection et de l'imagerie satellitaire, nous présentons les images que nous avons utilisées dans ce travail de recherche. Ces données permettent d'observer et d'étudier divers phénomènes météorologiques dont nous décrivons brièvement les caractéristiques physiques. Nous évoquons les problématiques qui découlent de ces observations, telles que la détection des systèmes convectifs et l'extraction des zones précipitantes. Les principales propriétés liées aux différentes acquisitions satellitaires que nous présentons dans ce chapitre permettent de concevoir le traitement d'image comme un outil intéressant d'analyse de ces données.

### 2.1. Nature des mesures satellitaires

Les données considérées dans ce travail de recherche sont des mesures de nature physique très diverses acquises par des satellites différents. Dans cette section, nous rappelons tout d'abord les grands principes de l'utilisation des données satellitaires. Nous décrivons ensuite succinctement la physique des capteurs **Meteosat** et **TRMM** ayant servi à produire des données infrarouges et hyperfréquences.

#### 2.1.1. Principes généraux de télédétection

##### Les systèmes imageurs

Les satellites météorologiques (géostationnaires ou à orbite basse) permettent l'acquisition de séries temporelles d'images dans des plages spectrales déterminées (visible, infrarouge thermique, infrarouge vapeur d'eau, hyperfréquences,...) et à des instants réguliers.

Les mesures issues d'un capteur satellitaire peuvent être discrètes, correspondre à des points échantillonnés de mesures ou à un profil le long de la trajectoire du capteur. Elles peuvent également se présenter comme des grilles à deux dimensions, *i.e.* des *images*, dont les caractéristiques sont :

- la *résolution spatiale* : chaque pixel représente une certaine étendue de la surface réelle visualisée sur l'image,
  - la *résolution temporelle* : les systèmes de télédétection, et plus particulièrement ceux embarqués à bord des satellites, permettent d'observer la surface terrestre avec une plus ou
-

moins grande régularité temporelle,

- la *résolution spectrale* : les mesures du capteur sont effectuées à une certaine longueur d’onde ou plage de longueurs d’onde.

Une image obtenue par un capteur satellitaire particulier, quel qu’il soit, représente une mesure de la quantité de rayonnement électromagnétique recueilli par le capteur en ce pixel ou sur une petite zone qui l’entoure. Ce rayonnement peut être de plusieurs types :

- le rayonnement d’origine naturelle (Soleil) est réfléchi en partie par toute surface terrestre ; il peut être aussi réfléchi et/ou absorbé en partie par l’atmosphère qui joue alors le rôle de filtre (télédétection passive),
- le rayonnement émis par la surface terrestre : c’est alors la source d’énergie (télédétection passive) ; il est en partie absorbé par l’atmosphère,
- le rayonnement d’origine artificielle (radar, laser) est réfléchi par toute surface terrestre (télédétection active).

Dans tous les cas, il y a émission d’un rayonnement électromagnétique dans une certaine plage de longueurs d’onde.

### Applications

Quelques unes des applications importantes de la télédétection sont [Mather, 1995] :

- évaluation et surveillance de l’environnement (érosion du sol, pollution, suivi de la qualité de l’air, croissance urbaine, suivi des feux de forêt), surveillance des ressources naturelles (sols, océans, forêts),
- détection et surveillance des changements globaux (trou d’ozone, déforestation, réchauffement du globe),
- agriculture (croissance des cultures, prévision des récoltes),
- prospection des ressources non renouvelables (gaz naturel, pétrole),
- météorologie (prévision du temps, dynamique de l’atmosphère),
- cartographie (topographie, occupation du sol), reconnaissance et surveillance militaire.

Pour satisfaire à ces objectifs, on utilise plusieurs types de capteurs satellitaires, offrant des caractéristiques spectrale, spatiale et temporelle variées. En météorologie, on a généralement besoin d’une fréquence temporelle élevée, sans exigence de résolution spatiale précise. D’autres utilisateurs, au contraire, désirent le maximum de résolution spatiale (cartographie), avec parfois une fréquence d’acquisition très élevée (surveillance militaire). En général, une résolution spatiale élevée se fait au détriment de la fréquence temporelle et vice-versa ; suivant l’application voulue, on recherche le capteur offrant le meilleur compromis spatio-temporel.

Pour notre part, nous entendons tirer parti des fréquences d’acquisition offertes par les satellites géostationnaires pour analyser, dans les scènes observées, l’évolution des phénomènes atmosphériques. L’application principale de ce travail est liée à l’extraction d’information de nature météorologique : nous entendons utiliser les images satellitaires pour détecter des zones de précipitations au sein des structures nuageuses.

### 2.1.2. Mesures du satellite Meteosat : visible, infrarouge et vapeur d'eau

#### Le satellite Meteosat

Le satellite **Meteosat** est un satellite géostationnaire développé par l'agence **EUMETSAT**. Il possède 3 capteurs météorologiques permettant d'acquérir simultanément des images dans les canaux appelés *visible (VIS)*, *infrarouge (IR)* et *densité de vapeur d'eau (WV)* qui correspondent *resp.* aux longueurs d'ondes suivantes :  $0.4 - 1.1 \mu\text{m}$ ,  $10.5 - 12.5 \mu\text{m}$  et  $5.7 - 7.1 \mu\text{m}$ . La position normale de **Meteosat** ( $36000 \text{ km}$  au-dessus de l'équateur, à  $0^\circ E$ ) lui permet de couvrir l'Afrique, l'Europe, l'Atlantique Est et Central, ainsi qu'une partie du Moyen Orient et de l'Amérique du Sud.

Comme le satellite **Meteosat** est un satellite en orbite géostationnaire, les images acquises couvrent toujours la même zone du globe terrestre durant un intervalle de temps fixé à l'avance. Chaque pixel représente une surface de  $5 \text{ km}$  sur  $5 \text{ km}$  pour les données **IR** et **WV**, de  $2.5 \text{ km}$  sur  $2.5 \text{ km}$  pour les données **VIS** au point subsatellite (*i.e.* à la verticale sous le satellite).

#### Caractéristiques du capteur infrarouge

L'imagerie dans la partie **IR** du spectre est basée sur les émissions thermiques de la surface de la Terre, des nuages et de l'atmosphère même. L'utilisation de détecteurs sensibles à ces émissions permet d'acquérir des *images thermiques* aussi bien la nuit que le jour. Tous les objets à des températures supérieures au zéro absolu émettent un rayonnement thermique. À la température de la Terre et de son atmosphère ces émissions sont concentrées dans la bande grande longueur d'onde au dessus de  $4 \mu\text{m}$ . L'imagerie **IR** conventionnelle utilise ce qu'on appelle les fenêtres dans cette bande pour obtenir des images du sol, des océans et des nuages. Le canal **IR** thermique observe plus particulièrement le rayonnement électromagnétique dans la bande de fréquence  $10.5$  à  $12.5 \mu\text{m}$ .

La fenêtre atmosphérique dans l'**IR** thermique couvre en fait la région où l'émission propre de la Terre est maximale. Elle mesure donc une grande partie du rayonnement thermique émis par l'élément terrestre observé (sol, mer ou nuage). Il est important de souligner que la mesure effectuée par un tel capteur est bien une température : la mesure **IR** est directement liée à l'émission des structures observables sur les données, et correspond donc bien à la température des points observés. On peut notamment déduire les températures de brillance par simple conversion des températures obtenues. Notons quelques unes des propriétés liées à cette bande spectrale :

- quasi-transparence de l'atmosphère,
- faible réflectivité des objets observés,
- faible intensité du rayonnement solaire,
- forte émissivité de la surface et des nuages épais.

On note ainsi que le rayonnement **IR** interagit très peu avec l'atmosphère, hormis les nuages. À des températures de nuages aux alentours de  $260 \text{ K}$ , le pic d'émission se situe près de  $11 \mu\text{m}$ , ce qui rend cette bande spectrale idéale pour des objectifs météorologiques. D'autre part la contribution des réflexions (émissions solaires réfléchies par la Terre) est négligeable.

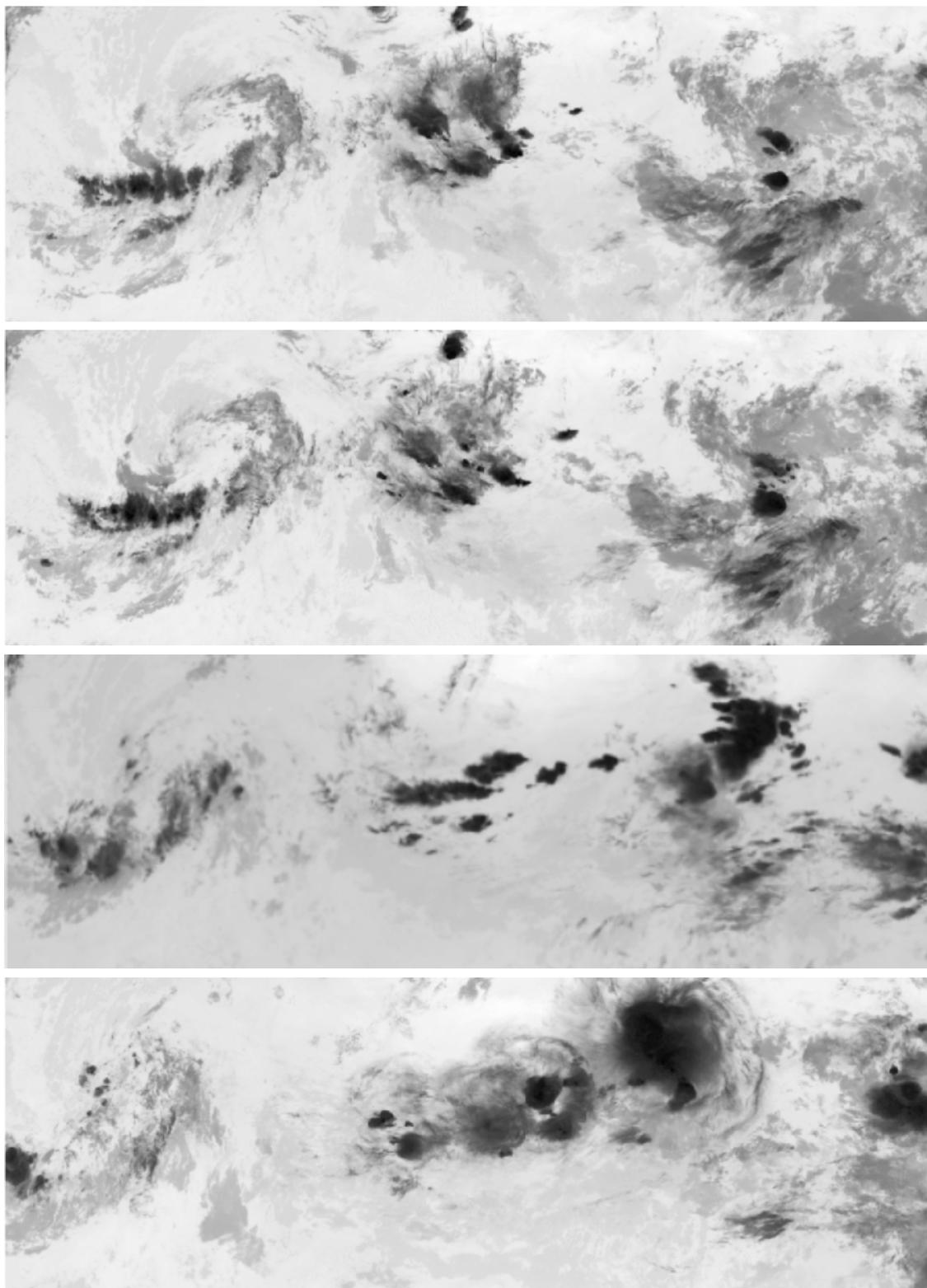


FIG. 2.1.: Exemples d'images **Meteosat** acquises dans le canal **IR** resp. à 2h, 4h, 18h30 le 31/07/1998 et à 1h30 le 1/08/98, au dessus de l'Afrique de l'Ouest (dim. : 1350 × 460 pixels). Les images ont été normalisées pour faciliter la visualisation. Les structures les moins énergétiques, comme les nuages, apparaissent en foncé sur les images. *Ces données, ainsi que toutes les images **Meteosat** et **TRMM** présentées dans ce document, nous ont été fournies par le Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD, CNRS/X).*

### Caractéristiques des capteurs visible et vapeur d'eau

Les images du canal **VIS** sont obtenues par détection de la lumière réfléchi dans le domaine visible du spectre. Il s'agit d'une bande à minimum d'absorption du rayonnement solaire par les gaz atmosphériques. Pour ce canal, les images ne sont évidemment utilisables en météorologie que le jour. Concernant les nuages, le canal **VIS** indique la mesure de l'intensité de la réflexion de la lumière solaire sur le sommet des nuages. Plus le nuage est réfléchissant, plus la couleur tendra vers le blanc. La couleur de ces images peut notamment être interprétée comme un relief superficiel.

Le canal **WV** détecte le rayonnement thermique non absorbé par la vapeur d'eau dans la moyenne troposphère (entre 5 et 12 km d'altitude environ). Les images **WV** donnent une indication sur la quantité de vapeur d'eau contenue dans cette couche de l'atmosphère. Elles permettent notamment d'observer sur l'Atlantique les grands mouvements atmosphériques faisant monter la vapeur d'eau. Elles permettent parfois également de déterminer, au sein d'une grosse masse nuageuse, le détail des zones potentiellement pluvieuses.

### Nature des observations météorologiques

Pour les longueurs **IR** et **VIS**, le rayonnement ne pénètre pas à travers les nuages denses. Ces nuages apparaissent opaques, les températures de brillance mesurées depuis le satellite correspondent essentiellement à des observations du sommet des nuages.

Le canal **IR** permet généralement une bonne détection des grosses zones nuageuses, avec des variantes suivant la taille des systèmes, leur composition... Les zones les plus sombres sur les images **IR** correspondent aux zones les plus froides et les moins énergétiques : elles sont interprétées comme représentant des nuages (figure 2.1). Les zones les plus claires dans les images correspondent, quant à elles, à des zones sans nuages. Par ailleurs, la température permet de distinguer les nuages de faible ou de forte altitude. La température de brillance peut en effet être utilisée comme indicateur qualitatif du niveau du sommet des nuages : les nuages les plus froids (*i.e.* les plus foncés) sont aussi situés le plus haut. La mesure **VIS** reconstitue la part du rayonnement solaire réfléchi par les nuages : les données dans ce canal dépendent donc de l'albédo<sup>1</sup> de la surface nuageuse observée mais aussi de caractéristiques telles que leur orientation (jeu d'ombres). Les études météorologiques sont donc plus précises sur les données **IR**, où la masse nuageuse est mieux représentée que sur le canal **VIS** notamment. Cette bande de fréquences n'est par ailleurs pas affectée par le rayonnement solaire et peut être utilisée jour et nuit pour observer les nuages et déterminer leur température ainsi que celle de la surface.

#### 2.1.3. Mesures micro-ondes

##### Le satellite TRMM

Le satellite **TRMM** (*Tropical Rainfall Measuring Mission*) est un satellite développé par la **NASA** et le **Goddard Space Flight Center**, et dédié à la mesure des précipitations dans les zones

---

<sup>1</sup>L'albédo est la fraction de l'intensité lumineuse solaire réfléchi par la surface, de jour.

tropicales (tropiques et sub-tropiques). Ce satellite a une orbite circulaire : il tourne autour de la Terre à une altitude de  $350\text{ km}$  suivant une orbite inclinée de  $35^\circ$  par rapport à l'équateur, permettant ainsi d'observer à différentes heures chaque jour une zone située entre  $38^\circ$  Nord et  $38^\circ$  Sud. Il comporte 3 capteurs de natures différentes : le capteur micro-onde passif TMI, le radar PR et le capteur visible/infrarouge VIRS.

### Propriétés du capteur TMI

Compte tenu de la période de rotation du satellite autour de la Terre ( $91\text{ min}$ ), un point donné de la zone sub-tropicale est revu à la même heure avec une période de 42 jours ; la fréquence de revisite d'un point situé entre l'équateur et  $\pm 20^\circ$  est quant à elle de l'ordre d'une observation par jour ; pour les points situés aux latitudes de  $\pm 35^\circ$ , elle est en moyenne de trois observations par jour. L'altitude de  $350\text{ km}$  permet un compromis entre une bonne résolution des observations (de l'ordre de  $4\text{ km}$  pour le canal le plus favorable) et une couverture spatiale suffisante chaque jour (largeur de fauchée :  $760\text{ km}$  qui correspond à la bande observée sur les images de la figure 2.2).

Le radiomètre TMI (*TRMM Microwave Imager*) est un capteur passif *micro-onde* (ou *hyperfréquence*) comportant 9 canaux. Il mesure le rayonnement micro-onde (**MO**) propre émis par la Terre et diffusé ou absorbé-émis par l'atmosphère. Dans le spectre électromagnétique, le domaine **MO** correspond aux longueurs d'ondes comprises entre  $300\ \mu\text{m}$  et  $30\text{ cm}$ . Chacun des canaux mesure le rayonnement dans une bande de fréquence différente, allant de  $10.65\text{ GHz}$  à  $85.5\text{ GHz}$  avec des polarisations différentes (horizontale ou verticale). Les canaux 8 et 9 de ce capteur, qui nous intéressent plus particulièrement, mesurent les signaux émis dans la bande de fréquence  $85.5\text{ GHz}$ . Ces canaux présentent par ailleurs une résolution spatiale intéressante de  $4,6 \times 7,2\text{ km}$  par pixel. Tous les détails sur la mission et le satellite **TRMM**, les caractéristiques du capteur TMI, ainsi que les algorithmes associés aux différentes acquisitions, sont très bien décrits dans les ouvrages suivants : [Simpson et al., 1996] [Ramage, 2002].

### Nature des mesures atmosphériques

Les principaux objectifs de la mission **TRMM** sont de mesurer les précipitations ainsi que les échanges énergétiques dans les régions tropicales. L'estimation de la quantité d'eau dans l'atmosphère ou de la quantité de précipitations à la surface est basée sur la modification du rayonnement émis par les constituants atmosphériques et mesuré par les radiomètres.

Il existe deux types d'interaction entre les hydrométéores et le rayonnement **MO** émis à la surface de la Terre ou par l'atmosphère : l'absorption-émission et la diffusion, qui existent à toutes les fréquences. Quelque soit la fréquence, on a un mélange de ces deux processus, mais l'absorption est prépondérante dans les basses fréquences et la diffusion l'est dans les hautes fréquences. Pour les basses fréquences ( $\leq 22\text{ GHz}$ ), le rayonnement ascendant émis à la surface de la Terre ou par l'atmosphère est principalement absorbé par les gouttes d'eau liquides en présence de nuages précipitants (ou les zones d'eau liquide telles que l'océan pour les basses fréquences comme le  $10\text{ GHz}$ ). La diffusion par la glace ou l'eau liquide sont négligeables à ces fréquences. À  $37\text{ GHz}$ ,

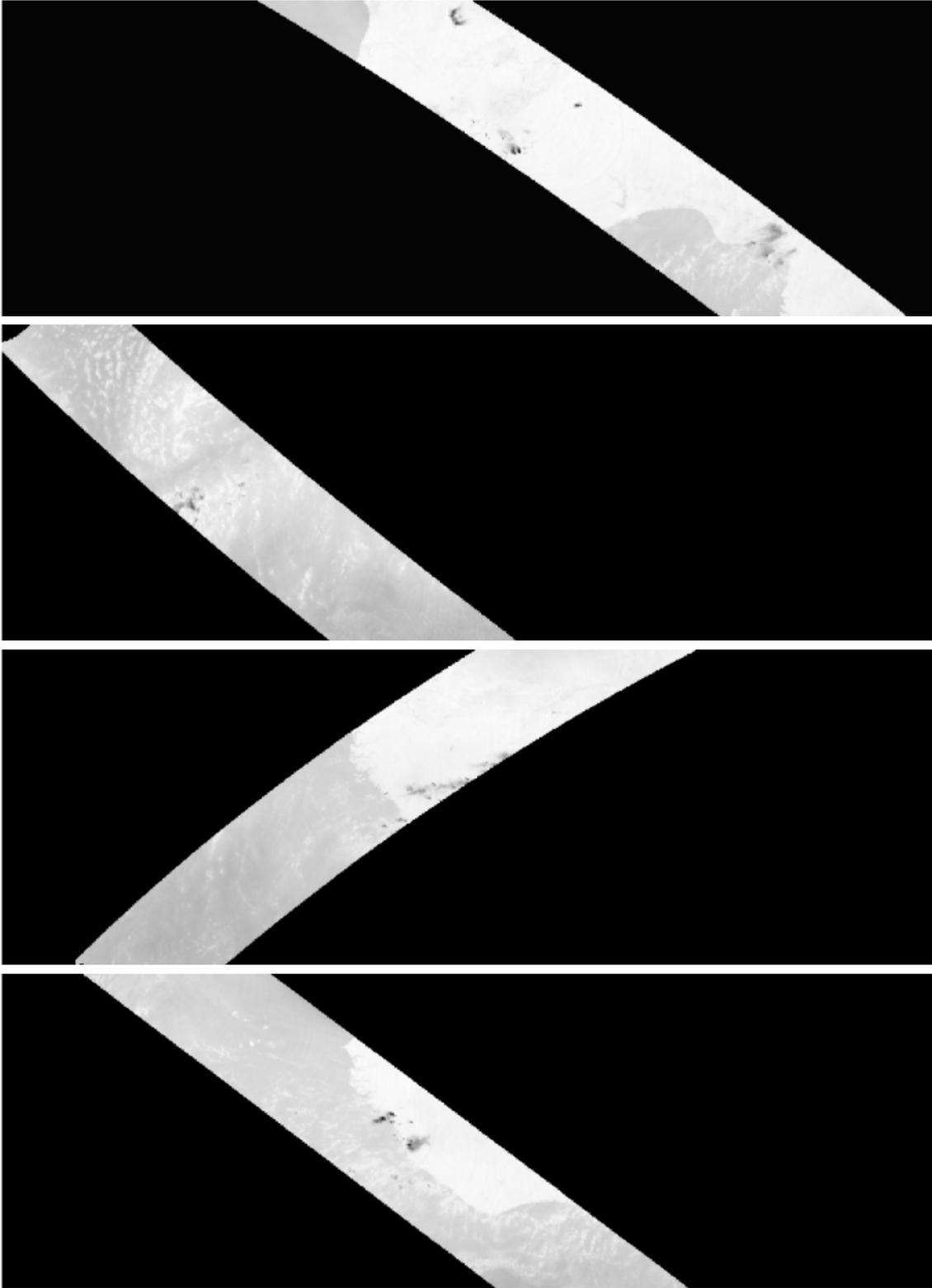


FIG. 2.2.: Exemples d'images **TRMM MO** du canal à  $87.5\text{ GHz}$ , acquises au dessus de l'Afrique de l'Ouest, *resp.* à  $2\text{ h }45$ ,  $4\text{ h }16$ ,  $17\text{ h }22$  le  $31/07/1998$  et à  $3\text{ h }05$  le  $1/08/98$ . Les données concernent la région entre les 2 bandes noires seulement, elles ont été recalées géométriquement sur la grille des images **Meteosat**. L'information n'est pas toujours pertinente : la scène observée est limitée et ne concerne pas forcément un phénomène météorologique d'intérêt.

on a un mélange à peu près égal des deux, ce qui rend ce canal difficile à exploiter puisqu'il faut tenir compte des deux phénomènes. Pour les hautes fréquences ( $\geq 60 \text{ GHz}$ ), le rayonnement est aussi bien absorbé par les gouttes d'eau liquide que diffusé par la glace ou l'eau liquide. Néanmoins, le mécanisme de diffusion est prépondérant et plus particulièrement en présence de particules de glace<sup>2</sup>, et cette prédominance augmente avec la fréquence.

Il est donc essentiel de souligner qu'à ces longueurs d'onde, le rayonnement n'interagit que très peu avec les gouttes formant les nuages (taille de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ ). Contrairement au rayonnement **IR** et **VIS**, le rayonnement pénètre donc à l'intérieur des nuages. La pluie constitue alors la principale source de perturbation de la propagation des ondes **MO** : celles-ci interagissent directement avec les particules précipitantes dont la taille varie de  $100 \mu\text{m}$  à plus de  $1 \text{ cm}$ .

#### 2.1.4. Colocalisation des données Meteosat et TRMM

L'utilisation et la comparaison des données satellitaires issues de plusieurs instruments nécessitent de travailler sur une grille ou une représentation géographique commune à ces données. Les données **Meteosat** sont fournies dans la grille correspondant à la projection sur la surface terrestre du champ de vue du satellite. La fenêtre d'étude couvre l'Afrique soudano-sahélienne (Afrique de l'Ouest) et l'Atlantique Tropical entre l'équateur et  $20^\circ$  Nord et  $40^\circ$  Ouest et  $20^\circ$  Est. Elle permet de suivre l'évolution des phénomènes météorologiques dans cette région pendant deux journées de la saison des pluies (juin-septembre) en 1998 : le 31 juillet et le 1<sup>er</sup> août. Un recalage géométrique<sup>3</sup> s'avère nécessaire pour utiliser conjointement les données des deux satellites et permettre, éventuellement, une analyse géographique des résultats. La méthode utilisée pour projeter l'ensemble des données **Meteosat** et **TRMM** dans une grille commune est présentée dans [Ramage, 2002]. La grille **Meteosat** sert en fait de grille de référence : les données **TRMM** ont été projetées dans cette grille, suivant une méthode basée sur le principe des plus proches voisins, avec des variantes selon le canal considéré. La projection induit des distorsions des images originales. Le décalage spatial maximum entre un pixel projeté et sa position réelle ne dépasse cependant pas  $8 \text{ km}$ . Une autre source d'erreur est liée au décalage temporel entre les observations **TRMM** et **Meteosat**. En effet, chaque pixel de la grille **Meteosat** n'est pas observé en même temps par les deux satellites. Compte tenu de la fréquence des acquisitions **Meteosat**, qui est d'une image toutes les  $30 \text{ min}$ , le décalage temporel maximum entre une observation **TRMM** et une observation **Meteosat** pour un pixel donné est de  $15 \text{ min}$  au plus. En considérant qu'un nuage se déplace à la vitesse de  $10 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui correspond à la vitesse moyenne de déplacement des lignes de grain sur l'Afrique de l'Ouest [Szantaï, 1996] [Ramage, 2002] (voir aussi la section suivante), le décalage temporel entre les observations des deux satellites peut induire un décalage spatial de l'ordre de  $9 \text{ km}$  entre les pixels **TRMM** et **Meteosat** correspondant à ce nuage. On peut encore ajouter à ces incertitudes de localisation, liées à la projection utilisée ou au décalage temporel entre les acquisitions, l'erreur due aux angles de visée des deux satellites. On estime que le décalage maximum est finalement, lorsque l'on cumule les différentes sources d'erreur sur la localisation, de l'ordre de  $30 \text{ km}$  : ceci représente par exemple une

---

<sup>2</sup>On verra plus loin que la présence de glace est caractéristique du sommet des nuages dits convectifs.

<sup>3</sup>Pour les images à notre disposition, ce travail a été effectué par les équipes du **LMD**.

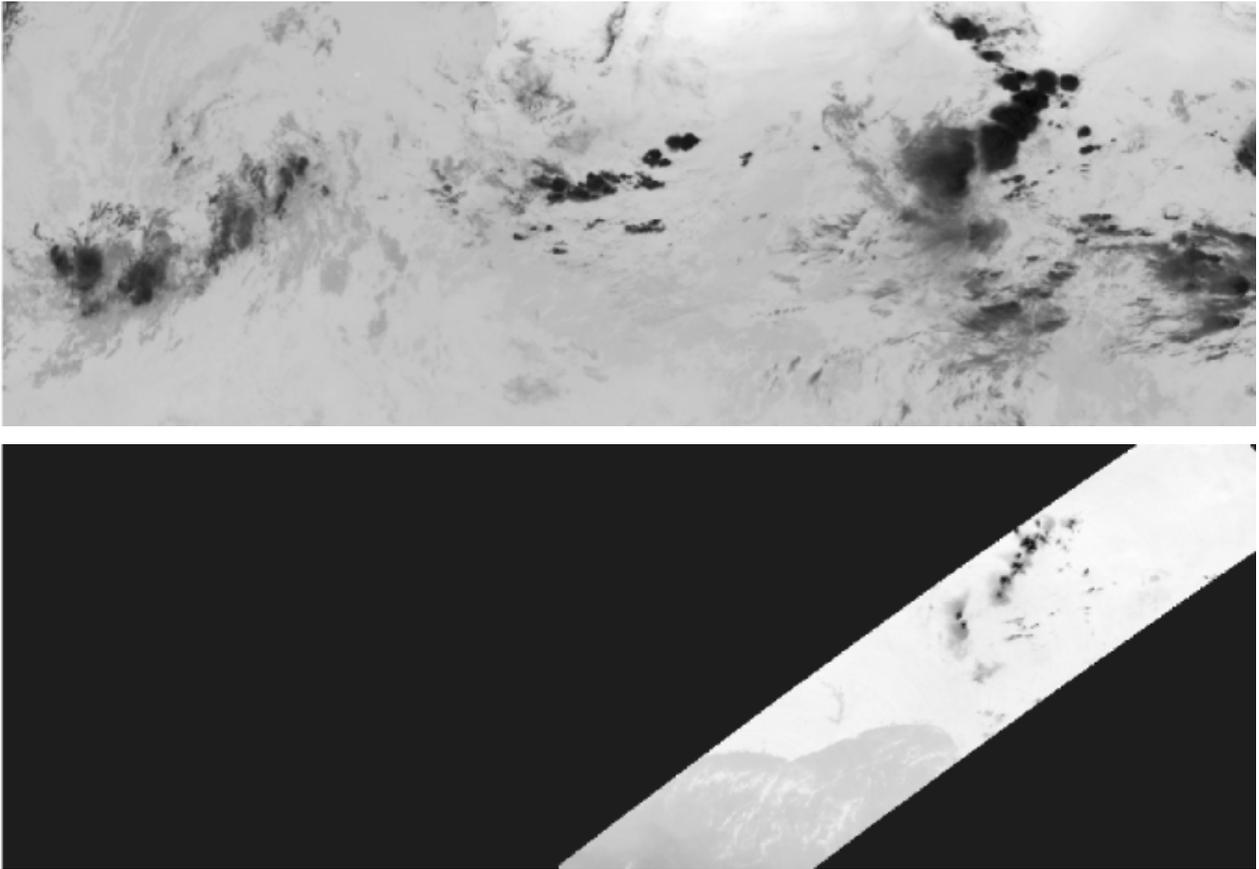


FIG. 2.3.: Mise en correspondance d'acquisitions au dessus de l'Afrique de l'Ouest le 31/07/1998.  
**En haut** : image acquise à 16 h dans le canal **IR** du satellite **Meteosat**. **En bas** : image **MO** acquise à 15 h 51 par le satellite **TRMM**.

incertitude de 6 pixels sur les données **IR**. Ces décalages peuvent être particulièrement importants, lorsque l'on considère les bords des nuages notamment.

Les données utilisées pour la partie expérimentale du travail de recherche présenté dans cette thèse sont des séquences d'images **IR** et **MO** : la séquence **IR** comporte 96 images de 460 lignes et 1350 colonnes, tandis que la séquence **MO** comporte seulement 17 images pour la même période et la même zone considérées. La figure 2.6 montre un exemple d'image **IR** sur laquelle on observe une structure nuageuse et l'image **MO** correspondante (extraite sur la même zone géographique avec un décalage temporel de 9 min) qui permet d'exhiber des zones de pluie au sein de ce nuage.

## 2.2. Description et caractérisation des phénomènes météorologiques au dessus de l'Afrique de l'Ouest

Compte tenu de la localisation géographique des processus météorologiques que nous considérons, les principaux phénomènes observés sont liés à la présence de *lignes de grains* et de *systèmes convec-*

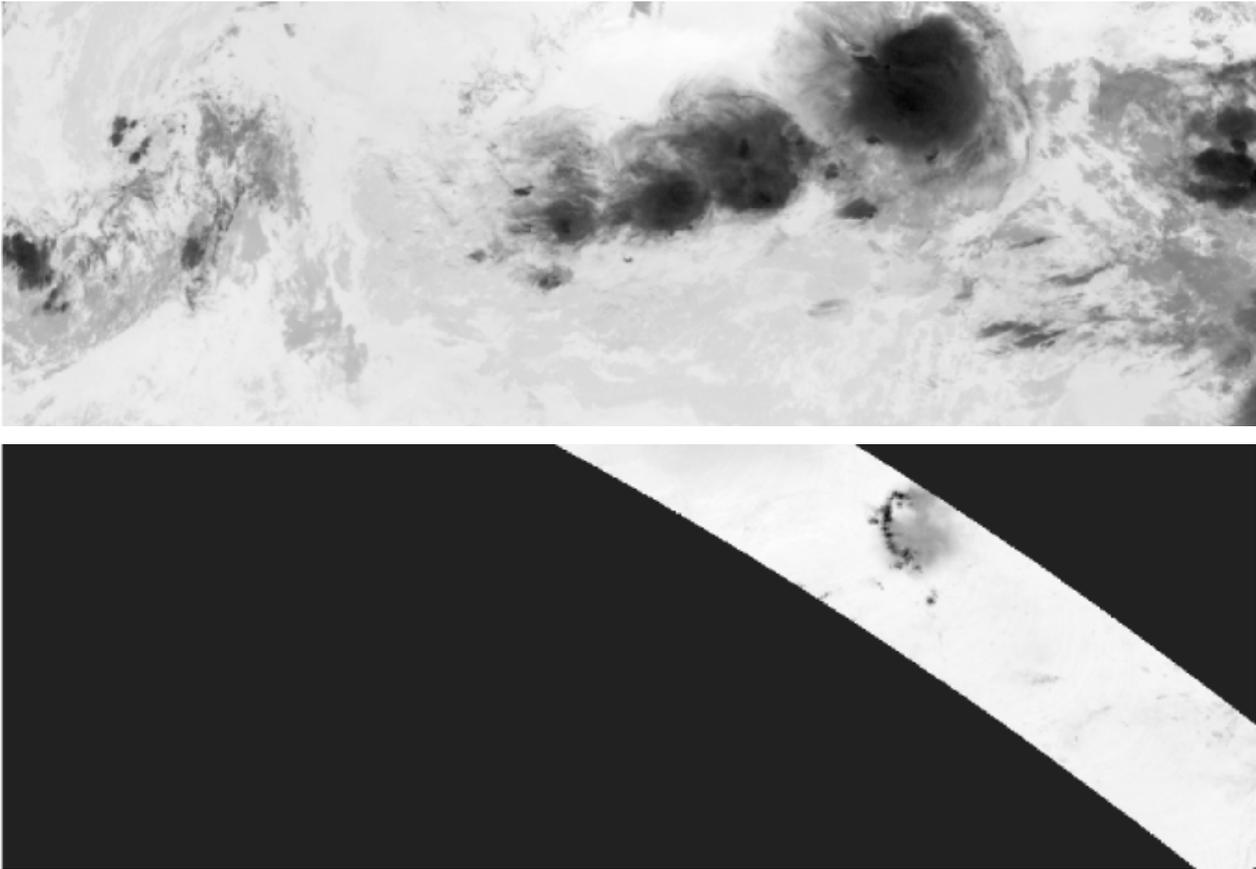


FIG. 2.4.: Image acquise à 1h30 le 1/08/98 dans le canal **IR** du satellite **Meteosat** (**en haut**) et image **MO** acquise à 1h34 le même jour par le satellite **TRMM** (**en bas**).

*tifs*. Nous nous attachons à expliquer les mécanismes physiques entrant en jeu dans l'identification de ces structures et nous essayons de donner une caractérisation de ces phénomènes dans les images à notre disposition. Pour une description détaillée des phénomènes majeurs observés au dessus de l'Afrique tropicale, on pourra consulter [Szantai, 1996] [Ramage, 2002].

### 2.2.1. Les lignes de grain

Le climat de l'Afrique de l'Ouest est notamment marqué par la présence de la zone très instable de convergence intertropicale (**ITCZ**, *InterTropical Convergence Zone*). L'**ITCZ** est, à l'échelle planétaire, le lieu de rencontre des masses d'air sec poussées par un vent de Nord-Est et d'air humide apporté par la mousson africaine de Sud ou Sud-Ouest ; ces masses d'air sont cependant thermiquement homogènes. Au sud de la ligne de rencontre en surface de ces masses d'air, située dans la zone sahélienne (vers  $15^{\circ} - 20^{\circ}N$ ) au mois d'août, la convection intense qui se produit se matérialise sous forme d'une ceinture plus ou moins continue de *cumulonimbus* (voir annexe A pour une description de ce type de nuages) de tailles diverses, auxquels sont généralement associées des précipitations [Desbois et al., 1989].

À l'échelle régionale, les fronts et les masses d'air sont caractérisés par des lignes de grain. Ce sont des amas nuageux pouvant avoir sur plusieurs centaines de kilomètres d'extension Nord-Sud et Est-Ouest, en mouvement rapide ( $10 - 30 m.s^{-1}$ ) vers l'Ouest. Ils présentent des variations très importantes de la vitesse du vent et sont généralement accompagnés d'une averse ou d'un orage. L'avant d'une ligne de grain (coté Ouest) est une région d'intense **convection**, un alignement transversal de *cumulonimbus* qui se déplace parfois à une vitesse supérieure à celle du vent environnant à tous les niveaux. L'arrière (coté Est) est constitué de nuages stratiformes, aux contours moins nets. L'arrivée du front avant d'une ligne de grain se traduit par des précipitations importantes dont l'intensité s'atténue en quelques dizaines de minutes et qui s'arrêtent en quelques heures. On observe qu'au moment du passage de la ligne de grain, le vent change de direction et se renforce brusquement (de  $15$  à  $30 m.s^{-1}$  en quelques minutes), la pression augmente et la température chute. La dynamique d'une ligne de grain est liée aux apports d'humidité, en particulier par la mousson, aux interactions de courants-jets et peut-être d'ondes d'Est d'une période de  $3 - 4$  jours. La naissance de lignes de grain se produit de manière privilégiée dans certaines régions humides ou côtières et sur certains reliefs. Elles peuvent persister pendant quelques heures, voire plusieurs jours (figure 2.5). Généralement elles ne se développent pas sur l'océan à cause de la présence de masses d'air froides consécutives à la remontée d'eau froide. Les lignes de grain se déplacent en été dans la région soudano-sahélienne, entre  $5$  et  $20^{\circ}N$ . Les lignes de grain ont une importance capitale dans cette région puisqu'elles fournissent  $80\%$  des précipitations pendant la saison des pluies.

À l'échelle locale, on trouve des nuages convectifs de taille plus petite et de durée de vie plus courte que les lignes de grain. Ils se déplacent peu. Leur formation est principalement liée aux conditions géographiques.

### 2.2.2. Description des systèmes convectifs et des précipitations

Des études climatiques [Desbois et al., 1989] portant sur l'Afrique tropicale ont montré que l'arrivée des pluies se manifeste indirectement par deux paramètres révélés sur les images :

- la température des sommets des nuages : il existe une relation entre les nuages à sommet froid (*tours convectives*) et les pluies au sol, due au fait que  $80$  à  $90\%$  des précipitations en zone tropicale proviennent des pluies d'orage ;
- la température de surface de sol : un sol humide a une émissivité plus élevée qu'un sol sec et ne répercute donc pas de la même manière les variations de température.

De nombreuses études ont ainsi été menées dans le but de décrire les caractéristiques des *systèmes convectifs* [Desbois et al., 1989] [Rowell et Milford, 1993].

Les lignes de grain semblent se générer dans les régions où existent des accidents de relief : plateaux, collines ou massifs montagneux. Il reste cependant que le rôle des facteurs géographiques dans l'activité des systèmes convectifs n'est pas bien connu. En revanche, les phénomènes physiques à l'origine de la pluie dans les systèmes convectifs sont bien connus. Décrivons grossièrement ce phénomène. Le soleil réchauffe le sol et celui-ci communique sa chaleur à l'air situé juste au-dessus. Sous l'effet combiné des vents de l'**ITCZ** et des nombreux courants convectifs de cette région (l'air

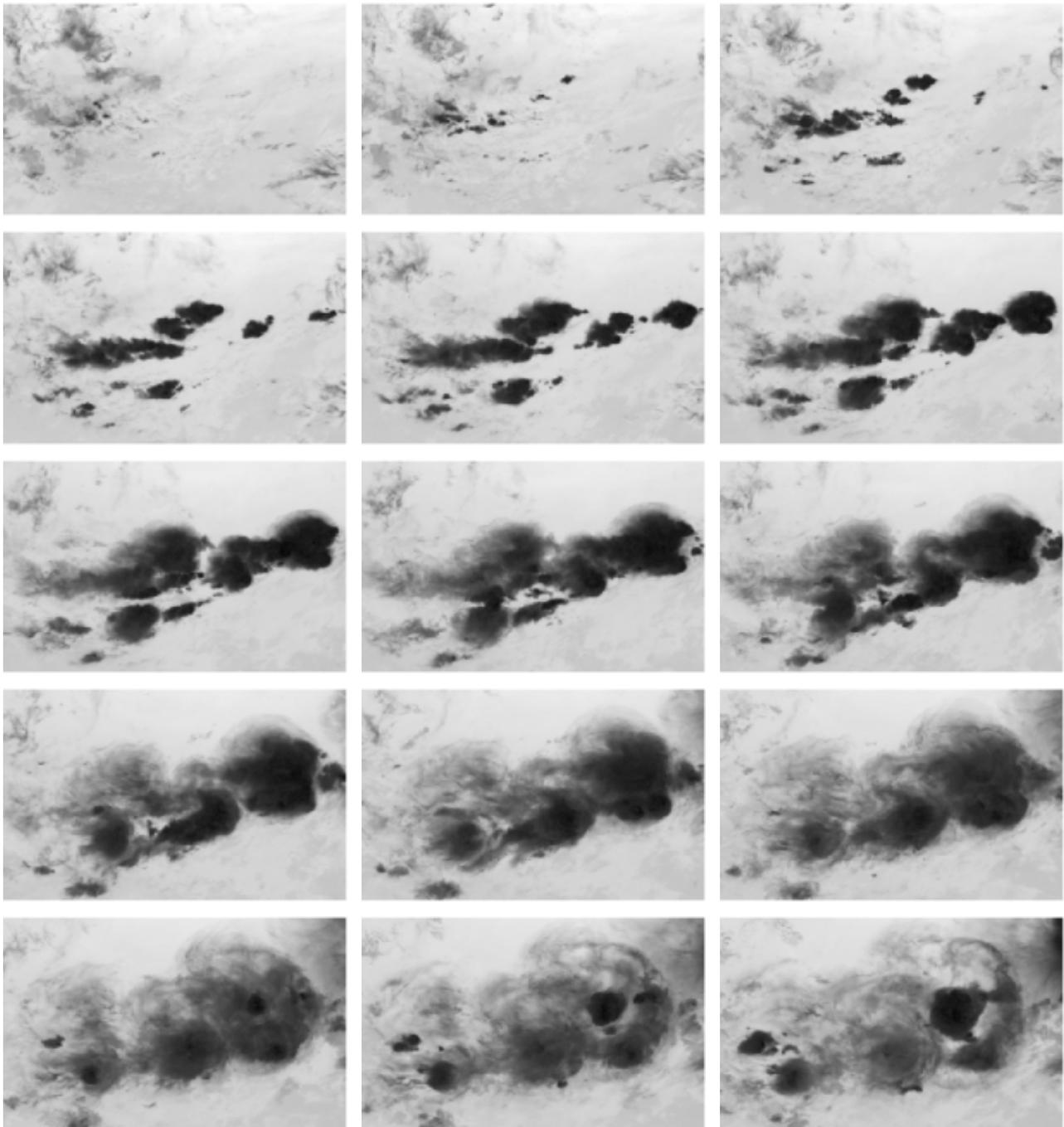


FIG. 2.5.: Suivi de l'évolution d'un *cumulonimbus* sur une séquence de 15 images **IR** successives.  
Formation de plusieurs amas convectifs de tailles différentes.

chaud plus léger a tendance à monter, 1 ou 2 degrés de différence avec l'air ambiant suffit)), l'air humide et instable est entraîné vers le haut. Il en découle la formation d'importants *cumulonimbus*, dont les sommets atteignent parfois les 70000 pieds (18 km). Certaines poches d'air reçoivent plus de chaleur que d'autres, selon que le sol soit recouvert d'herbe, d'eau ou d'habitations, et elles s'élèvent alors plus rapidement. L'air près du sol est plus dense que dans les couches supérieures. C'est pourquoi une parcelle d'air qui s'élève subit une expansion, sa densité diminue et il se refroidit donc. Plus l'air s'élève, plus il se refroidit. À un certain moment, la température atteinte ne permet plus à l'humidité de rester sous forme de vapeur invisible. À cause du refroidissement, l'humidité se condense alors en gouttelettes d'eau ou en cristaux de glace.

## 2.3. Caractérisation des précipitations sur les images satellitaires

### 2.3.1. Mesure des précipitations dans les données MO

#### Mesure de l'interaction du rayonnement avec la pluie

Les propriétés du rayonnement **MO** par rapport à l'eau peuvent être utilisées pour étudier les précipitations. En effet, l'estimation de la quantité d'eau dans l'atmosphère, basée sur la modification du rayonnement émis par les constituants atmosphériques, doit permettre de mesurer les précipitations. Comme nous l'avons établi dans la section 2.1.3, l'utilisation systématique des radiomètres multi-canaux du capteur TMI permet d'isoler les différents signaux atmosphériques : la vapeur d'eau et l'eau liquide aux basses fréquences, la glace aux hautes fréquences. Compte tenu de ces propriétés, on dispose *a priori* de deux types de mesure de la pluie :

- avec les basses fréquences, on a un signal qui dépend complètement de la pluie proprement dite (interaction avec les gouttes d'eau liquide) : on mesure directement le signal émis par les gouttes d'eau liquide ; le problème majeur de ces fréquences est lié à la mauvaise résolution spatiale des canaux (plusieurs dizaines de km de résolution), ce qui est fortement incompatible avec la variabilité spatiale naturelle des pluies<sup>4</sup> ;
- avec les hautes fréquences, on a des résolutions plus amènes de rendre compte de la pluie, cependant on n'observe pas directement la pluie, mais la glace au sommet des tours convectives ; l'estimation des pluies avec ces canaux hautes fréquences est assez bonne avec les gros systèmes convectifs que l'on observe en Afrique de l'Ouest.

Ces propriétés du rayonnement **MO** permettent *a priori* de détecter et d'estimer les précipitations au-dessus du continent. Néanmoins, il reste difficile de relier quantitativement le signal reçu par le radiomètre **MO** avec les taux de précipitations associés aux scènes observées. La mesure effective des précipitations à partir des données **MO** nécessiterait l'introduction de méthodes spécifiques.

---

<sup>4</sup>Le problème est qu'avec les résolutions de ces canaux, il devient très difficile de déconvoluer le signal dû aux précipitations qui se trouve mélangé avec le rayonnement de la surface. Autant sur la mer, qui est une surface fortement polarisée, on peut à peu près extraire le signal dû aux pluies en utilisant les différences de polarisation, autant sur terre, où la polarisation varie énormément suivant le type de surface et où le signal émis est la plupart du temps non polarisé, il devient très difficile de déconvoluer le signal. C'est pourquoi on utilise les hautes fréquences sur terre.

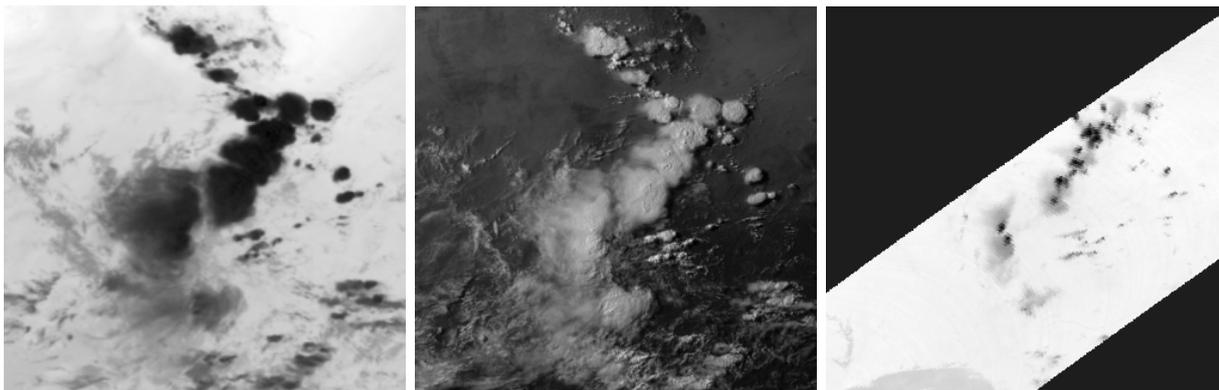


FIG. 2.6.: Exemple d'un grand système convectif observé dans les images **Meteosat** et acquisition correspondante par le satellite **TRMM**. **De gauche à droite** : détails ( $320 \times 320$  pixels) des images **IR** et **MO** de la figure 2.3, détail ( $640 \times 640$  pixels) **VIS** correspondant. Notons que sur l'image **VIS**, on arrive à discerner le sommet des tours convectives.

### Détection des zones précipitantes

Pour notre part, nous retiendrons que :

1. les pluies dans les régions tropicales sont essentiellement d'origine convective, *i.e.* associées à la formation de tours convectives [Arnaud et al., 1992]; cette observation est également effectuée sous nos latitudes où beaucoup de pluies d'orage sont engendrées par de grands systèmes de *cumulonimbus*,
2. la présence de grosses particules de glace ou d'eau liquide au sommet d'un nuage constitue la signature du processus de formation de précipitation [Rosenfeld et Lensky, 1998]; cette caractéristique peut être utilisée pour identifier les zones de nuages associées à une forte probabilité de pluie,
3. les images **MO** dans les canaux mesurant l'interaction entre les particules de glace et le rayonnement fournissent de l'information utile sur la présence de pluie [Ramage, 2002],

et finalement nous nous contenterons de cette information. En première approximation, nous identifierons les zones de pluies avec les zones les plus sombres de l'image **MO** (niveaux de gris les plus faibles). Nous nous intéressons donc principalement aux précipitations engendrées par les systèmes convectifs, car ceux-ci constituent la principale source de pluie dans de nombreuses régions du globe. Sur la figure 2.7, nous avons représenté différents isothermes de la mesure **MO** pour des images sur lesquelles apparaissent des zones de précipitation relativement importantes.

#### 2.3.2. Caractérisation des précipitations sur les données IR-VIS

Bien qu'une mesure directe de l'interaction entre le rayonnement et les précipitations n'est pas accessible à partir des données **VIS** ou **IR**, nous entendons utiliser ces dernières afin de détecter les zones de précipitations. Ces données bénéficient, en plus de la grande couverture géographique, de la haute résolution spatiale et de l'échantillonnage temporel élevé rendus possibles par les satellites

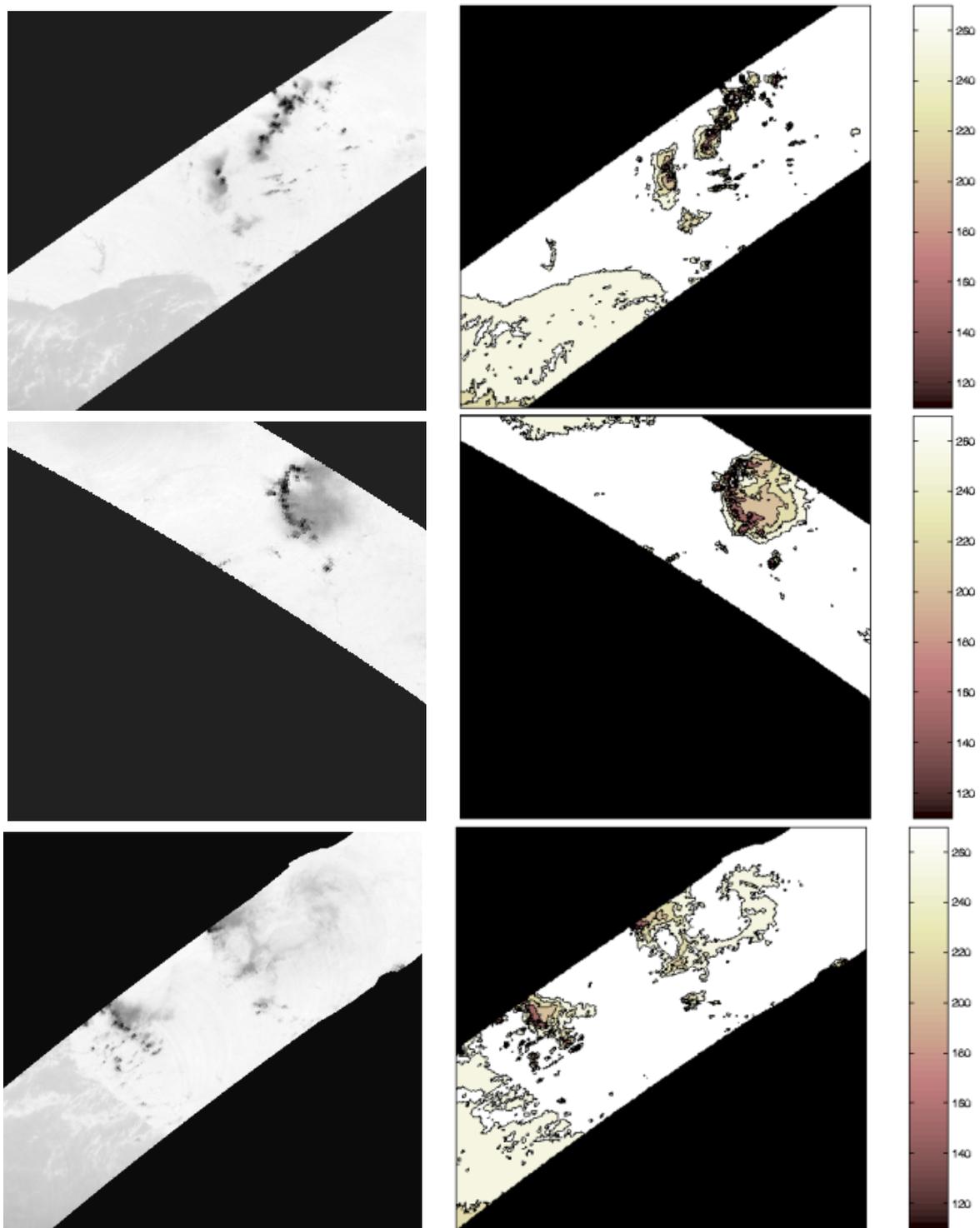


FIG. 2.7.: Fronts de température observés dans le canal **MO** à  $87,5 \text{ GHz}$  : les contours représentent les isothermes à 110, 150, 200, 220, 250 et  $270 \text{ K}$ . **De haut en bas** : détails des acquisitions du 31/07/1998 à 15 h 51, du 1/08/98 à 1 h 34 et à 16 h 12.

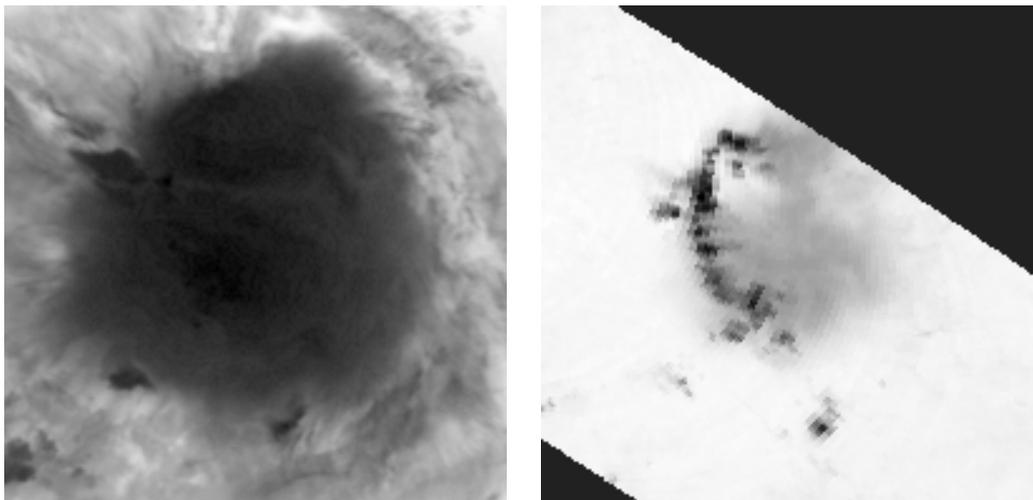


FIG. 2.8.: Détails ( $200 \times 200$  pixels) des images **IR** (à gauche) et **MO** (à droite) de la figure 2.4. Le front de précipitations, où ont lieu les pluies les plus intenses, est localisé à l'avant de la structure (partie Ouest). Des pluies plus faibles ont lieu derrière le front, à l'Est. Cette scène ayant été acquise pendant la nuit, nous ne disposons pas de l'image dans le canal **VIS**.

géostationnaires (dont **Meteosat**), afin de rendre compte de la variabilité spatiale et temporelle des précipitations.

L'utilisation des données du satellite **Meteosat** doit nous permettre d'identifier et de suivre, à grande échelle, l'évolution spatio-temporelle des systèmes convectifs de méso-échelle tels que les nuages associés au flux de mousson, les nuages de convection locale et les lignes de grains qui sont les principaux générateurs de précipitations au Sahel. De fait, pour caractériser les nuages précipitants, les diverses informations dont nous disposons sont les signatures spectrales brutes, mais nous avons également accès aux propriétés spatiales et géométriques des structures nuageuses, ou bien encore on peut suivre leur cycle de vie [Levizzani, 2000]. L'utilisation de données **IR** et **VIS** est fondée sur l'observation qu'il existe une forte corrélation entre les propriétés structurelles et spectrales des nuages (altitude, surface, épaisseur) et le volume total de pluie qu'ils engendrent. Décrivons succinctement quelques unes des propriétés observées des systèmes précipitants dans les images **IR** et **VIS**.

### Caractérisation spectrale

Compte tenu des fréquences accessibles dans les canaux **IR** et **VIS** (*cf.* section 2.1.2), les nuages peuvent être classés suivant leurs propriétés radiatives : les radiances **VIS** permettent de connaître leur épaisseur et les températures de brillance **IR**, l'altitude de leur sommet. En particulier, les nuages précipitants, qui sont souvent des nuages haut, épais et froids [Scofield, 1987], tels que les *cumulonimbus* (*cf.* annexe A), peuvent être distingués des autres nuages par des niveaux de gris élevés sur les données **VIS** et une température froide sur les données **IR**. Cependant, les données

**VIS** ne sont disponibles que le jour et ne peuvent donc pas rendre compte de la variabilité nocturne des précipitations ; or, pour certaines régions comme le Sahel, la majeure partie des pluies se produit pendant la nuit [Ramage, 2002].

Nous nous intéressons principalement à la détection des pluies d'origine convective, *i.e.* engendrées par des nuages de haute altitude et optiquement épais. Les températures sont bien évidemment déterminantes. Sur les images **IR**, les lignes de grain paraissent très froides, avec un bord avant nettement marqué. Des seuillages appropriés sur les images **IR** permettent notamment de séparer les

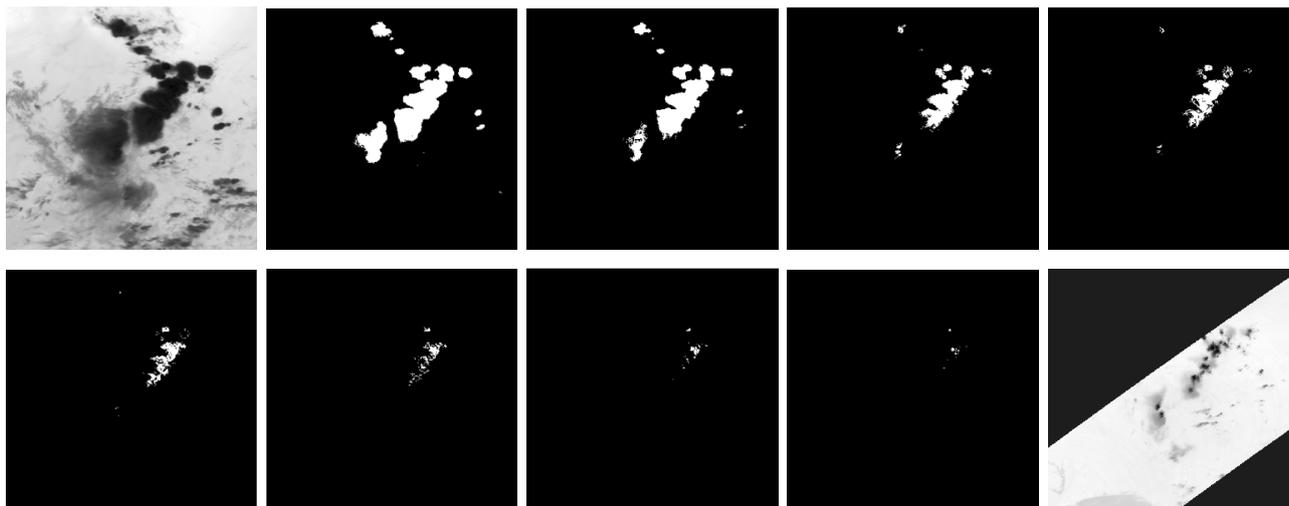


FIG. 2.9.: Seuillage progressif d'une image **IR** et comparaison avec une image **MO**. De gauche à droite, de haut en bas : image **IR**, images seuillées à 210  $K$ , 205  $K$ , 200  $K$ , 199  $K$ , 198  $K$ , 196  $K$ , 194  $K$  et 192  $K$  et image **MO**.

systèmes potentiellement précipitants des nuages non-précipitants. La détermination des valeurs de seuil sur des images **IR** a fait l'objet de nombreuses études afin de disposer de paramètres de référence [Arkin, 1979]. Ces valeurs peuvent varier en fonction de l'application et de la latitude de la zone observée. Néanmoins, elles se situent toujours dans un intervalle compris entre 213  $K$  et 253  $K$ . On trouve par exemple : 235  $K$  [Arkin et Meisner, 1987], 253  $K$  dans [Adler et Negri, 1988], 233  $K$  dans [Arnaud et al., 1992], entre 213  $K$  et 253  $K$  dans [Laurent, 1994], entre 218  $K$  et 238  $K$  dans [Morel et al., 1997] (figure 2.10). Il apparaît généralement impossible de différencier les structures convectives des *cirrus épais* ou encore des corps de perturbation non-convectifs. Sur la figure 2.9, on a représenté les différentes zones extraites par seuillage d'une structure nuageuse précipitante. Les précipitations sont incluses dans les régions les plus froides du signal **IR**, mais cette information reste complexe à extraire. On peut également considérer non plus directement les signatures spectrales, mais des transformations de ces signatures [Szejwach, 1982] [Lovejoy et Austin, 1979]. Notons par ailleurs que l'utilisation d'observations dans des canaux autres que le canal **IR** thermique (proche infrarouge - **NIR** - par exemple) pourrait permettre une description de la microphysique des nuages afin d'apporter des informations supplémentaires pour l'identification des nuages précipitants. Certains canaux sont plus particulièrement adaptés à la détection de glace au sommet des nuages, et

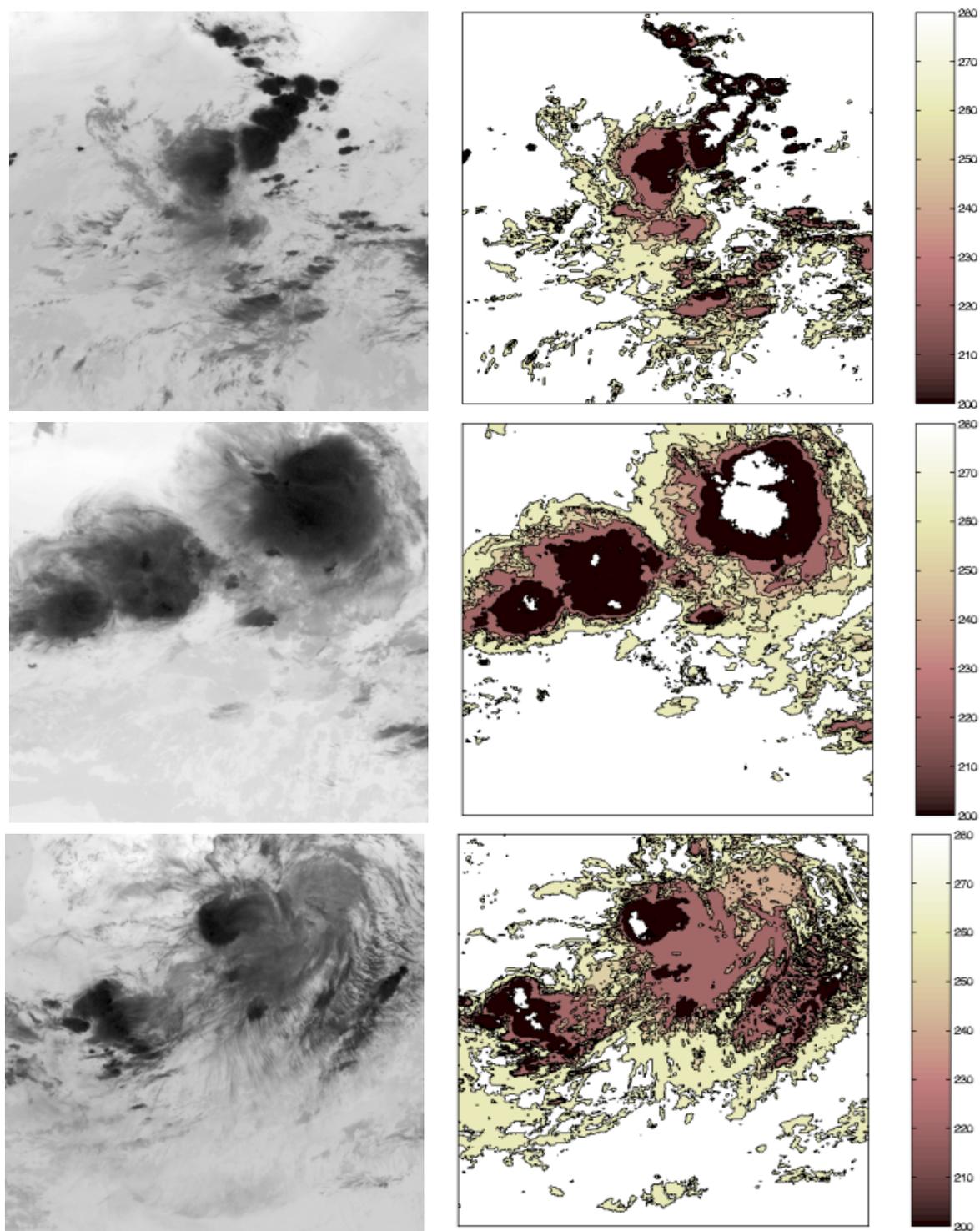


FIG. 2.10.: Fronts de température observés dans le canal **IR** thermique : les contours représentent les isothermes à 200, 220, 240, 250, 260 et 280  $K$  (l'intérieur des nuages est en dessous de 200  $K$ , l'extérieur est au dessus de 280  $K$ ). **De haut en bas** : détails des acquisitions du 31/07/1998 à 16  $h$ , du 1/08/98 à 1  $h$  30 et à 16  $h$ . Voir la correspondance avec les acquisitions du canal **MO** (figure 2.7).

donc à l'identification des parties convectives associées aux pluies les plus intenses.

La figure 2.11 représente l'histogramme 2D des températures de brillance **IR** thermique en fonction des températures de brillance **MO** à  $85\text{ GHz}$ , sur des observations (presque) synchrones d'un système convectif au-dessus du Sahel (à deux instants de son cycle de vie). Les températures de brillance **MO** froides, correspondant aux pixels pluvieux, sont essentiellement observées pour les pixels les plus froids en **IR**. Les températures **IR** chaudes, correspondant aux nuages bas, sont majoritairement associées aux températures **MO** chaudes, *i.e.* aux pixels non-pluvieux. En revanche, si l'on observe les températures **IR** les plus froides (de l'ordre de  $200\text{ K}$ ), associées aux nuages de haute altitude, l'histogramme montre que les observations **MO** s'étalent sur l'ensemble de la gamme de températures (de  $100\text{ K}$  à  $280\text{ K}$ ). Dans cette gamme de températures **IR**, les températures **MO** froides correspondent aux nuages de convection profonde (tels que les *cumulonimbus*) et les températures les plus chaudes représentent les nuages hauts non-précipitants (tels que les *cirrus*).

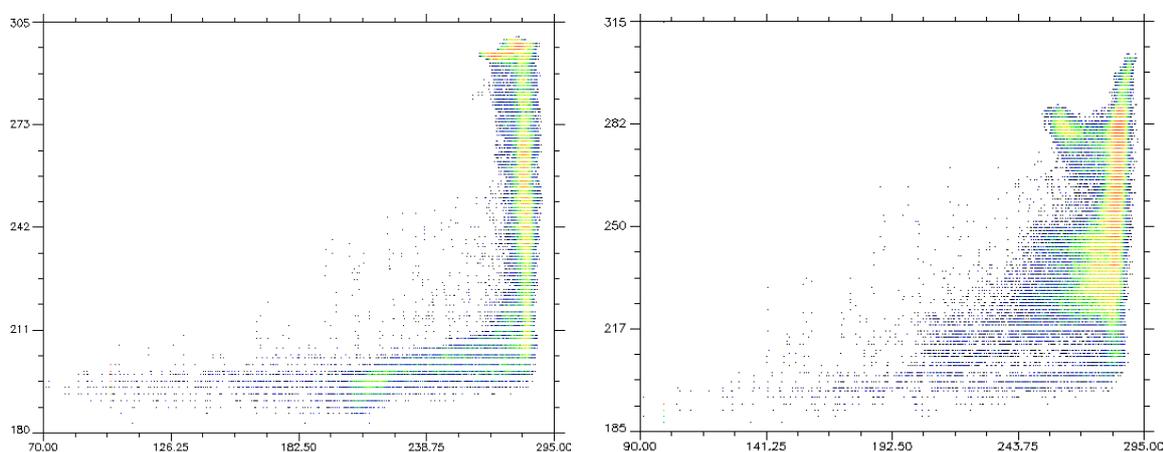


FIG. 2.11.: Histogramme 2D de distributions conjointes des températures sur les données **IR** et **MO**. En abscisses, les températures de brillance **MO**, en ordonnées, les températures de brillance **IR**.

### Caractérisation structurelle

On peut également apporter, en plus des paramètres thermiques, de l'information sur les propriétés géométriques et morphologiques des cellules nuageuses. Ces propriétés, lorsqu'elles sont couplées aux signatures spectrales, telles qu'elles sont accessibles dans les données **IR**, fournissent de l'information discriminante pour la détection des zones convectives précipitantes [Adler et Negri, 1988]. Dans ce contexte, des critères géométriques et spatiaux tels que la forme et la taille des structures (ellipticité, surface, périmètre,...) peuvent être introduits pour décrire les structures [Brewer et al., 1997]. Des propriétés intrinsèques des structures observées peuvent en effet être dérivées des observations spectrales ; on peut par exemple citer la hauteur effective, la répartition du nuage dans les différentes couches de l'atmosphère [Garand, 1988], l'altitude du sommet du nuage, l'albédo et la fraction nua-

geuse [Grassoti et Garand, 1994]. La taille des structures nuageuses ou leur taux de croissance sont également des informations accessibles [Levizzani, 1998] [Levizzani et al., 2002]. On serait en effet tenté de penser que l'intensité des pluies sous un pixel **IR** ou **MO** est liée à la taille du système auquel le pixel appartient. Néanmoins, ce comportement n'est pas systématiquement mis en évidence. Il faut davantage raisonner en terme de probabilité : il y a plus de chance de trouver des pixels très froids en **MO** (donc des pluies plus fortes) dans un gros nuage que dans un système de petite taille. Mais il n'y a pas de relation linéaire entre la taille d'un système nuageux et le taux de pluie sous un élément du système. D'autant qu'un système convectif peut continuer à s'élargir durant son cycle de vie alors que la partie purement convective du système devient moins active, diminuant les taux de pluie associés. Le taux de pluie dans un système nuageux dépend en fait du stade dans lequel il se trouve au cours de son cycle de vie et également de sa taille [Griffith et al., 1978] [Negri et al., 1984]. La taille des systèmes nuageux peut, semble-t'il, être reliée à leurs propriétés précipitantes [Ramage, 2002] : différents régimes de convection en fonction de la taille des amas convectifs peuvent coexister. Les structures nuageuses à grande échelle (systèmes de *cumulonimbus* dont l'étendue excède les 1000 km), notamment, sont particulièrement importantes pour la prévision [Brewer et al., 1997] [Seddon, 1985].

### Caractérisation temporelle

Avec les acquisitions **Meteosat**, nous disposons d'information sur l'évolution temporelle des systèmes convectifs. Les différentes phases d'un système convectif au cours de son cycle de vie sont caractéristiques de l'activité précipitante [Griffith et al., 1978]. Le taux de pluie attribué à la fraction pluvieuse peut en effet être ajusté [DeLeonibus et al., 1997] : celui-ci augmente rapidement pendant la phase de croissance du système nuageux, alors que les précipitations sont plus faibles pendant la phase de dissipation du nuage. Cependant, les systèmes convectifs tropicaux offrent une évolution complexe [Arnaud et al., 1992]. Un nuage tropical ne se déplace pas réellement, il s'agit plutôt d'un mécanisme de formation à l'avant du nuage et de dissipation à l'arrière du front nuageux. Ils sont par ailleurs soumis à des divisions ou des fusions avec d'autres nuages : le nuage, en avançant, peut se fragmenter en plusieurs composantes, puis se dissiper ou encore absorber d'autres nuages. Globalement, la topologie de ces structures change au cours du temps ce qui les rend difficiles à identifier.

Concernant l'éventuelle relation entre intensité pluviométrique et mouvement des nuages, il n'y en a pas *a priori* de directe. En revanche, si un système nuageux a une vitesse de déplacement importante ainsi qu'une durée de vie relativement grande, il s'agit vraisemblablement d'une ligne de grain (pour l'Afrique de l'Ouest) et donc d'une zone où l'intensité pluviométrique est importante. La configuration de nuages chauds et non pluvieux advectés par les vents dans un environnement de grande échelle est cependant tout à fait possible.

Pour une revue complète des méthodes de caractérisation et d'identification des systèmes nuageux, on pourra consulter [Levizzani et al., 2001]. Il apparaît que les propriétés spatiales et temporelles des satellites géostationnaires, combinées aux caractéristiques spectrales des données **IR**,

permettent d'obtenir une information intéressante sur les structures convectives et les pluies notamment. Les différentes études qui ont été menées pour caractériser les systèmes précipitants, en Afrique de l'Ouest, montrent cependant que la taille du système, sa vitesse, l'altitude du sommet sont des paramètres nécessaires mais non suffisants [Szantai et al., 1998] [Arnaud et al., 1992].

## 2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les caractéristiques générales et les utilisations principales de l'imagerie satellitaire. Sont décrites, de manière concise, les principales propriétés spectrales, spatiales et temporelles des capteurs **Meteosat** et **TRMM** ayant produit les images utilisées dans notre étude. Nous évoquons également les principaux phénomènes mis en jeu et l'intérêt de leur étude : une modélisation des lignes de grain fournirait, par exemple, aux météorologues une meilleure compréhension de la dynamique des nuages précipitants.

Le signal mesuré par un radiomètre spatial correspond à la température de brillance de la couche de l'atmosphère où se produit l'interaction ; dans le cas des données **MO**, cette interaction permet une mesure directe (ou presque) des précipitations. Cependant, pour observer et suivre un nuage tout au long de son cycle de vie, l'utilisation des images acquises à haute fréquence (généralement, par des satellites géostationnaires) se révèle indispensable. Or, les images acquises par le satellite **TRMM** ne bénéficient pas d'une grande couverture spatiale, ni d'un échantillonnage temporel satisfaisant, contrairement aux données **Meteosat**. Compte tenu de la grande variation temporelle et spatiale des systèmes précipitants, il apparaît donc nécessaire d'utiliser les données acquises par ce satellite, et, finalement, les seules données **IR** car celles-ci sont disponibles de jour comme de nuit.

L'application principale de notre étude est ainsi présentée : notre objectif est d'analyser, d'identifier et d'extraire les parties précipitantes dans les images satellitaires, à partir des données **IR**. Il s'agit de déterminer s'il existe effectivement un lien entre l'information accessible dans les images **IR** et la présence de zones de pluie, accessibles dans les données **MO**. À partir des premières propriétés des systèmes convectifs mises en évidence, il semble que de l'information de nature diverse fournie par les données **IR** puisse permettre de caractériser et de discriminer les zones précipitantes. Une observation initiale des données laisse notamment entrevoir que le cycle de vie des zones de pluie est corrélé à la distribution spatiale des niveaux de gris des nuages observés dans le canal **IR**. Cependant, il s'agit d'un problème complexe.

Dans la suite, nous proposons d'opter pour une approche de traitement d'image pour s'attaquer à ce problème. Divers objectifs apparaissent : la détection des structures nuageuses, la recherche de la présence d'activité convective (et plus particulièrement des zones de pluie) en leur sein en extrayant de l'information pertinente des images **IR**.



---

**Deuxième partie.**

**Segmentation et classification d'images  
météorologiques : contraintes et  
limitations**

---



---

## 3. Techniques de segmentation : état de l'art

Avant d'envisager des traitements de haut niveau sur les images, nous nous intéressons, dans ce chapitre, aux principales méthodes utilisées pour l'analyse et la segmentation d'images. L'objectif de cet état de l'art est de pouvoir analyser quelques unes des approches couramment adoptées, notamment dans le cadre de l'analyse de données météorologiques, afin de mettre en avant leurs avantages et leurs limitations, et de sélectionner celles dont nous allons éventuellement pouvoir étendre les propriétés dans le système de segmentation que nous souhaitons concevoir. Nous nous intéressons plus spécifiquement aux travaux qui portent sur la détection et l'identification des structures nuageuses.

### 3.1. La segmentation pour l'extraction de structures d'intérêt

La segmentation vise à la décomposition spatiale de l'image en zones d'intérêt homogènes (au vu de certaines caractéristiques) et à l'extraction d'entités significatives [Gonzalez et Woods, 2002]. Elle joue un rôle prépondérant dans le traitement et l'analyse d'image et la vision par ordinateur. Elle constitue une étape fondamentale, qui se situe entre, d'une part, l'acquisition de l'image et son amélioration et, d'autre part, sa description et la prise de décision finale.

#### 3.1.1. Les différentes approches pour segmenter une image

La segmentation est un traitement bas niveau<sup>1</sup> qui consiste à créer une partition (du domaine) de l'image observée  $I$  en un certain nombre de sous-ensembles  $R_i$ , appelés régions [Jain, 1989] :

$$\forall i, R_i \neq \emptyset \quad \forall i \neq j, R_i \cap R_j = \emptyset \quad I = \cup_i R_i.$$

La segmentation doit permettre d'extraire les informations nécessaires à la localisation et la délimitation des structures d'intérêt dans l'image.

Le choix d'une stratégie de segmentation dépend de plusieurs facteurs tels que la nature de l'image, les conditions de son acquisition, les entités à extraire et également les contraintes d'exploitation. Beaucoup de travaux ont été consacrés à ce problème [Gonzalez et Woods, 2002]. Dans le cadre de la segmentation d'images météorologiques satellitaires, les études menées s'intéressent essentiellement à la segmentation automatique de régions de nuages homogènes. Elle constitue une étape

---

<sup>1</sup>On désigne par *traitements bas-niveau* les techniques qui opèrent directement sur les valeurs accessibles dans l'image, par opposition aux *traitements haut-niveau* qui utilisent des descriptions symboliques provenant déjà d'une interprétation de l'image.

---

préalable à la classification et l'identification des structures météorologiques caractéristiques des régions observées sur les images [Pankiewicz, 1995]. Chronologiquement, les premières méthodes apparues sont développées pour le cas très simple où la définition de l'homogénéité repose uniquement sur les niveaux de gris : on pense essentiellement à des techniques de seuillage [Weszka, 1978], de détection de contours, de croissance de régions [Zucker, 1976] ou les schémas hiérarchiques [Chen et Pavlidis, 1980]. Certaines de ces techniques ont été généralisées à l'utilisation d'attributs multiples et ont été appliquées au problème plus complexe de la segmentation de textures [Haralick, 1979] [Welch et al., 1988]. En terme de traitement d'images, ces diverses méthodes peuvent être regroupées en deux grandes catégories :

1. les approches *contour*, qui consistent à trouver les discontinuités de l'image,
2. les approches *région*, qui reposent sur la recherche des régions homogènes de l'image.

Les contours sont associés à une variation brutale de l'intensité lumineuse ou à une discontinuité entre les propriétés de deux ensembles de points connexes. Les régions font quant à elles référence à des groupements de points ayant des caractéristiques similaires et font appel à la notion d'homogénéité. Bien que ces approches soient duales, elles fournissent généralement des résultats assez différents. Étant donné la complexité du problème, les méthodes les plus récentes tentent de faire coopérer plusieurs méthodes de segmentation, afin de combiner les avantages de chaque méthode ou d'exploiter leurs complémentarités. Ces méthodes sont regroupées au sein d'une troisième grande famille :

3. les approches *mixtes* (frontière-région), qui sont fondées sur une coopération des deux premières approches.

### 3.1.2. Objectifs

Nous faisons, dans les sections suivantes, un état de l'art (qui ne se veut pas exhaustif) de quelques unes des méthodes couramment rencontrées, principalement dans le domaine de la segmentation d'images satellitaires. Nous appliquerons essentiellement, à titre d'illustration, les différentes techniques de segmentation que nous présenterons sur trois images naturelles en niveaux de gris : une image proche infrarouge (**NIR**) acquise par le satellite **Spot** et deux images **IR** acquises par le satellite **Meteosat** (figure 3.1). Ces images appartiennent à la classe des images dites "naturelles" au sens où elles présentent des objets non artificiels, sans arrangement particulier, et où elles sont acquises avec des conditions de luminance naturelles. Cependant on notera que, compte tenu de leurs caractéristiques d'acquisition, elles présentent des objets assez différents : les images **Spot** ont en effet une bien meilleure résolution spatiale ( $20\text{ m} \times 20\text{ m}$  par pixel) que les données **Meteosat** et proposent des objets davantage structurés.

Notre objectif, ici, est non seulement, de montrer que les méthodes usuelles produisent des résultats peu satisfaisants sur les images météorologiques, mais aussi de mettre en évidence certaines propriétés des images **Meteosat IR** (en opposition aux images **Spot** par exemple) qui expliquent les limitations des approches classiques.

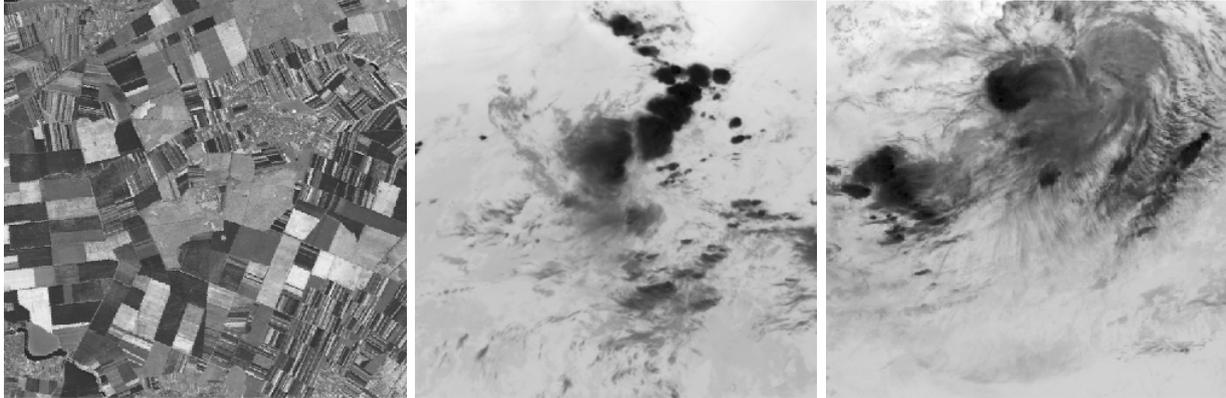


FIG. 3.1.: Images  $I$  utilisées dans la suite pour illustrer les différentes techniques de segmentation : une image **NIR** acquise par le satellite **Spot** sur laquelle on distingue nettement des champs, des routes, ... qui constituent des zones homogènes ; deux images **IR** présentant des structures nuageuses complexes, mais également avec des régions relativement homogènes en niveaux de gris (aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des nuages).

## 3.2. Approches *contour*

Dans les approches de type *contour*, on s'intéresse à l'extraction des frontières  $\partial R_i$  des régions  $R_i$  de l'image. La définition même de ces frontières demeure très vague, mais s'apparente le plus souvent aux discontinuités de la luminance (variations de l'intensité des pixels) ou de toute autre fonction caractérisant l'image.

### 3.2.1. Algorithme de détection de contours

Quelque soit sa complexité, un algorithme de détection de contours procède généralement en 3 étapes :

1. On fait précéder la recherche des discontinuités par une étape de filtrage afin de réduire les effets du bruit.
2. On détecte un ensemble de contours candidats, généralement avec des techniques de dérivation. En pratique, la détection des contours consiste à balayer l'image avec une fenêtre définissant une zone d'intérêt, et à appliquer, à chaque position, un opérateur sur les pixels de la fenêtre afin d'estimer s'il y a une transition de l'attribut choisi (*e.g.* la luminance). Un pixel de contour correspond ainsi à un extremum local de la dérivée première, ou un passage par zéro de la dérivée seconde, ou encore un passage par zéro du laplacien.
3. On effectue un filtrage des contours possibles pour ne garder que ceux qui semblent être les plus sûrs. Ce filtrage est généralement réalisé par des opérations de seuillage et de suivi des contours qui permettent d'éliminer le bruit et d'affiner les contours.

### 3.2.2. Pré et post-traitement : méthodes de filtrage et de correction

Afin de réduire la quantité de bruit présent dans l'image, un opérateur de lissage est préalablement appliqué au moyen d'un filtre, dont l'échelle détermine la qualité du lissage. Le lissage garantit la dérivabilité de certaines grandeurs de l'image : on recherche notamment la double dérivabilité du signal lui-même. L'inconvénient majeur est l'élimination et le déplacement de certains contours ainsi que la création de faux contours : à large échelle, l'image est fortement lissée et la détection des contours est bonne (forte probabilité de marquer un vrai contour et faible probabilité de marquer un faux contour), mais la localisation est mauvaise ; inversement à petite échelle, la localisation est bonne mais la détection est mauvaise.

Une fois que l'image de contours a effectivement été obtenue (*cf.* paragraphe suivant), une étape supplémentaire de correction est également réalisée. Elle permet d'éliminer les faux contours, par un seuillage approprié, et de supprimer les discontinuités dans les contours obtenus, par un algorithme de fermeture. La méthode d'extraction et de sélection des contours la plus simple consiste à appliquer un seuil aux valeurs de chaque pixel, au dessus duquel on considère qu'un contour est présent, mais des seuillages plus performants peuvent être utilisés. Il est ensuite également fréquent de procéder à une fermeture des contours si l'on souhaite obtenir une partition de l'image. Dans ce but, des méthodes de connexité, des techniques d'exploitation de graphe ou encore de contours déformables peuvent être utilisées.

### 3.2.3. Méthodes de différentiation de l'image

Les approches dérivatives, basées sur l'utilisation des dérivées des fonctions de niveaux de gris, sont les approches les plus immédiates pour détecter et localiser les variations du signal. On distingue deux types d'opérateurs :

- les opérateurs du 1<sup>er</sup> ordre exploitant les dérivées partielles premières ; ceux-ci utilisent essentiellement l'opérateur directionnel *vecteur gradient* calculé en chaque pixel  $\vec{x} = (x, y)$  de l'image :

$$\nabla I(\vec{x}) = (\partial_x I(\vec{x}), \partial_y I(\vec{x}))^T ,$$

où les opérateurs  $\partial_x = \partial/\partial x$  et  $\partial_y = \partial/\partial y$  désignent *resp.* les dérivées partielles en  $x$  et en  $y$ . On s'intéresse également à sa norme  $|\nabla I|$  et sa direction  $\phi$  dans l'image :

$$|\nabla I|(\vec{x}) = \sqrt{(\partial_x I(\vec{x}))^2 + (\partial_y I(\vec{x}))^2} \quad \phi(\vec{x}) = \arctan(\partial_y I(\vec{x})/\partial_x I(\vec{x}))$$

Un contour d'orientation  $\theta$  au pixel  $\vec{x}$  est ainsi détecté par un maximum de la dérivée directionnelle  $\nabla I \cdot \mathbf{n}$  dans la direction  $\phi$  du gradient  $\nabla I$  ( $\mathbf{n}$  représente le vecteur unitaire dans la direction du gradient) : la normale à la direction du vecteur gradient fournit l'orientation du contour, *i.e.*  $\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$ . Notons que dans le cas où le module du gradient est nul, par exemple sur un extremum local, l'orientation  $\theta$  est indéterminée.

- les opérateurs du 2<sup>nd</sup> ordre travaillant à partir des dérivées partielles secondes mais qui utilisent de préférence l'opérateur isotrope *laplacien* :

$$\nabla^2 I(\vec{x}) = \partial_x^2 I(\vec{x}) + \partial_y^2 I(\vec{x})$$

où les notations  $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$  et  $\partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$  désignent les dérivées partielles 2<sup>ndes</sup> *resp.* dans les directions  $x$  et  $y$ . Les points de contour sont recherchés parmi les passages par zéro du laplacien<sup>2</sup>.

Théoriquement, les opérateurs de 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordres permettent d'extraire les mêmes contours en 1D. Il n'en est pas de même en 2D ; en pratique cependant, ils fournissent des résultats relativement proches.

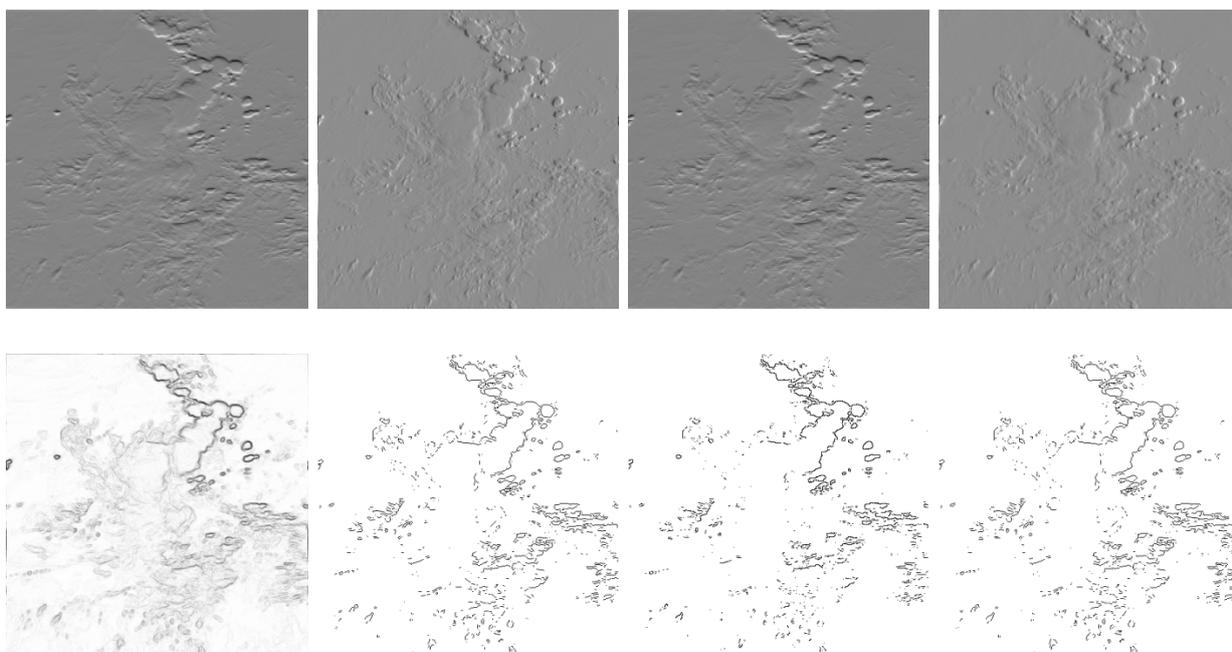


FIG. 3.2.: **En haut** : approximation des dérivées d'ordre 1 ; de gauche à droite : estimation des dérivées  $\partial_x I$  et  $\partial_y I$  par les masques de Sobel et de Prewitt. **En bas** : détection des contours à l'aide des opérateurs d'ordre 1 ; de gauche à droite : estimation de la norme du gradient à l'aide du filtre de Sobel, détection de contours à l'aide des filtres de Sobel, de Roberts et de Prewitt ; les contours sont obtenus par seuillage sur la norme du gradient.

### Opérateurs simples

Dans le cas le plus simple, les dérivées directionnelles de la fonction image  $I$  sont approchées par des différences finies :

$$\partial_x I(\vec{x}) \approx \Delta_x I(\vec{x}) = I(x+n, y) - I(x, y), \quad \partial_y I(\vec{x}) \approx \Delta_y I(\vec{x}) = I(x, y+n) - I(x, y)$$

avec  $n = 1$  en général. Parmi les opérateurs du 1<sup>er</sup> ordre, on trouve également les gradients obtenus par application de masques permettant d'approximer les dérivées directionnelles. Sur ce

<sup>2</sup>L'approche gradient consiste à déterminer les passages par zéro de la dérivée seconde dans la direction du gradient : ceci est différent des passages par zéro du laplacien

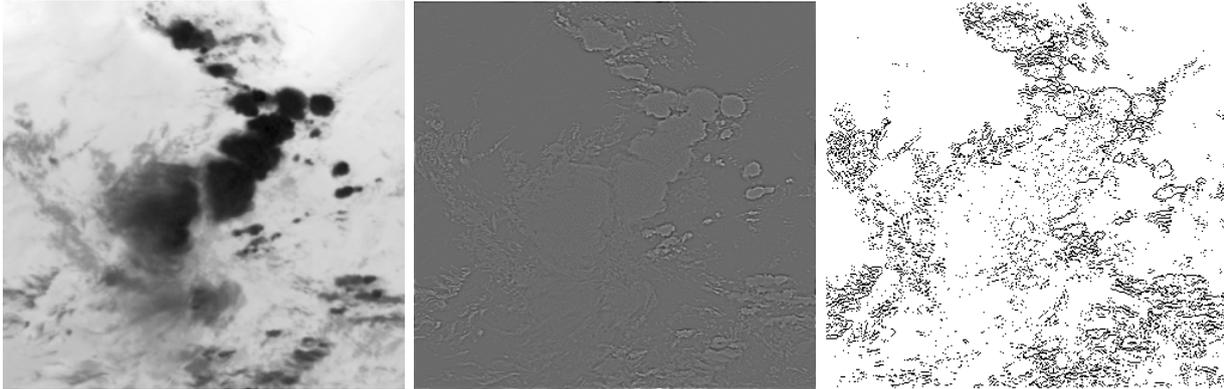


FIG. 3.3.: Détection de contours par les passages par zéro du laplacien. **De gauche à droite** : détail de l'image **IR** de la figure 3.1, estimation du laplacien (par convolution avec un masque  $3 \times 3$ ); localisation des contours après seuillage du laplacien.

principe, des masques de convolution  $(m_x, m_y)$  (masques de Roberts, masques de Prewitt et Sobel [Jain, 1989]) sont utilisés pour estimer le module du gradient par  $\sqrt{(I \star m_x)^2 + (I \star m_y)^2}$  (figure 3.2). Sur le même modèle, il existe des masques de dimension plus grande ou des masques multiples (masque de Kirsch [Jain, 1989]). Enfin, l'application de masques spécifiques permet également d'approximer le laplacien dont les passages par zéro localisent les contours de l'image (figure 3.3).

Tous ces opérateurs fournissent des résultats peu significatifs sur des données telles que les images météorologiques; ils se limitent à une phase de différentiation uniquement. Dans le cas de l'application de masques, ils dépendent par ailleurs fortement de la taille de ceux-ci; l'augmenter signifie augmenter la qualité des résultats obtenus, mais accroît le temps de calcul.

### Opérateurs avec filtrage optimal

Pour surmonter les difficultés de précision, de localisation et d'efficacité de détection, Canny [Canny, 1986] propose de formaliser mathématiquement une approche optimale de détection. Pour cela, il définit trois critères : bonne détection (l'opérateur donne une réponse au voisinage d'un contour), bonne localisation (optimisation de la précision avec laquelle le contour est détecté) et unicité des réponses (le contour doit provoquer une réponse unique de l'opérateur).

Trois filtres optimaux majeurs, utilisant tous la méthode de base fondée sur des calculs différentiels et la combinant avec un opérateur de lissage, ont été obtenus en prenant en compte ces critères :

1. L'écriture des critères de Canny conduit à une équation différentielle dont la solution est choisie de façon à ce que le filtre soit à réponse impulsionnelle finie. Au vu de la forme de ce filtre, Canny propose une approximation par la dérivée 1<sup>ère</sup> d'une gaussienne [Canny, 1986] .
2. Suivant la même approche, Dérêche cherche une solution sous la forme d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie [Dérêche, 1987]. Il aboutit, pour les gradients directionnels, à des expressions aux dérivées partielles, combinant un opérateur 1D de dérivation  $f_d$  selon  $x$  et  $y$

avec un opérateur 1D de lissage  $f_l$  selon  $y$  et  $x$ , *resp.* :

$$\begin{cases} f_l(x) = c_0(1 + \alpha|x|) e^{-\alpha|x|} \\ f_d(x) = c_1 x e^{-\alpha|x|} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $c_0$  et  $c_1$  des constantes de normalisation. Le paramètre  $\alpha$  détermine en quelque sorte l'échelle de l'opérateur : plus sa valeur est faible, plus l'opérateur utilise des données éloignées du pixel courant.

3. Shen et Castan [Shen et Castan, 1986] mettent au point un filtre passe-bas optimal au sens d'un critère élaboré sur un modèle de saut d'amplitude bruité et incluant la détection et la localisation. Il en ressort les filtres linéaires optimaux de lissage et de dérivation suivants :

$$\begin{cases} f_l(x) = c_0 e^{-\alpha|x|} \\ f_d(x) = c_1 (-1)^{\delta_{x>0}} e^{-\alpha|x|} \end{cases}$$

avec  $c_0$  et  $c_1$  des constantes de normalisation et  $(-1)^{\delta_{x>0}}$  la variable valant -1 si  $x > 0$ , 1 sinon. Le paramètre  $\alpha$  détermine là encore la largeur du filtre (plus  $\alpha$  est petit, plus le lissage est important).

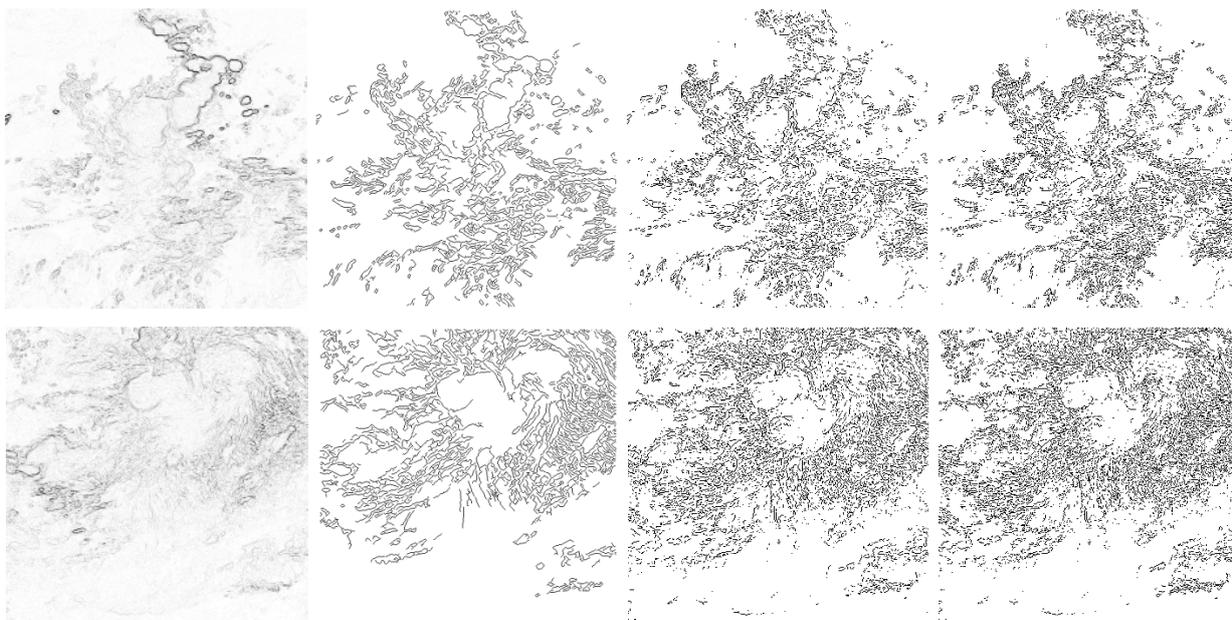


FIG. 3.4.: Extractions de contours sur deux images **IR**. **De gauche à droite** : norme du gradient de Roberts, norme du gradient du filtre de Canny seuillée pour 2 valeurs de seuil, zéros du Laplacien seuillés.

Ces différentes démarches sont intéressantes car elles procèdent d'une optimisation des opérateurs vis-à-vis d'un critère approprié à la détection de contours. Une limitation importante cependant (et qui vaut généralement pour tous les opérateurs de gradient) est qu'elles supposent un modèle de contour assez simple (discontinuités de type marche) et inadapté aux contours réels (figure 3.4). Les images **Meteosat** par exemple présentent des contours plutôt irréguliers, bien plus que les

images **Spot**. Une autre contrainte réside dans le fait qu'elles nécessitent encore l'utilisation à leur suite d'un seuil heuristique de détection des contours.

### Opérateurs gaussiens et dérivées de gaussiennes

Ces méthodes consistent essentiellement à mesurer le laplacien de l'image filtrée par la dérivée seconde d'un filtre passe-bas puis à détecter les zéros de la fonction ainsi obtenue. Outre le fait qu'il soit presque optimal au sens des critères de Canny, l'opérateur *dérivé de gaussienne* a l'avantage de combiner, en une seule et même opération, filtrage gaussien et dérivation, puisque les dérivées de l'image lissée par un filtre gaussien (noté  $G(\vec{x}) = \exp(-|\vec{x}|^2/2\sigma^2)$ ) s'écrivent :

$$\partial_x(G \star I) = \partial_x G \star I \quad \partial_y(G \star I) = \partial_y G \star I .$$

Sur la base de ce filtre, les méthodes de laplacien-gaussien (LoG, *Laplacian of Gaussians*) et différence de gaussiennes (DoG, *Difference of Gaussians*) consistent à utiliser des filtres de réponse impulsionnelle *resp.* :

$$LoG(\vec{x}) = \left(\frac{r^2}{\sigma^2} - 1\right) e^{-r^2/2\sigma_1^2}, \quad DoG(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma_1^2} e^{-r^2/2\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} e^{-r^2/2\sigma_2^2}, \quad r = |\vec{x}|.$$

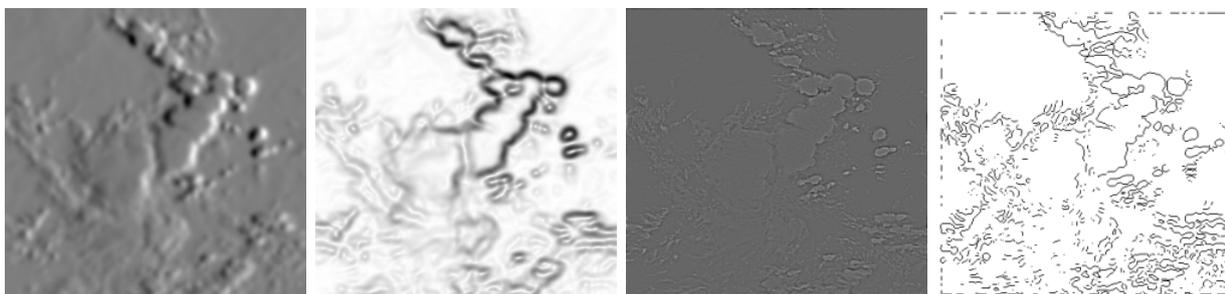


FIG. 3.5.: Filtrage de l'image de la figure 3.3 par des filtres gaussiens et dérivés de gaussiennes. **De gauche à droite** : estimation du gradient directionnel  $\partial_x G \star I$  avec un filtre gaussien  $G$  de variance 1, estimation de la norme du gradient correspondante, filtrage  $LoG$  avec une gaussienne de variance 0.5 et estimation des contours par détection des passages par zéro du filtre  $LoG$ .

Ces méthodes conduisent généralement à la détection de contours fermés, ce qui ne traduit pas toujours de vraies relations de connexité dans l'image. Leur inconvénient majeur réside là encore dans l'utilisation d'un facteur d'échelle lié aux variances des filtres gaussiens, qui détermine la qualité finale des estimations. Les masques de variances trop larges dégradent l'image et ne permettent pas la détection de structures fines ; à l'inverse, une variance trop faible conduit à une détection du bruit trop importante. On remarque ainsi que la localisation est très peu précise et, dans le cas d'images complexes, les résultats obtenus conduisent à de fausses détections dans les zones bruitées ou texturées ou à la perte de contours significatifs lorsque le gradient est faible (figure 3.5).

### 3.3. Approches *région*

Les méthodes de segmentation par approche *région* reposent sur la recherche de zones  $\hat{R}_i$  regroupant des ensembles de pixels qui possèdent des propriétés communes. Le choix des propriétés étudiées est déterminé par les critères de segmentation. Il y a principalement deux types de méthodes de segmentation qui adoptent cette approche : les segmentations par accroissements de régions et celles qui opèrent des classifications sur des statistiques (locales ou globales) de l'image.

#### 3.3.1. Méthodes par division et/ou fusion

Les segmentations par croissance de régions ou par division-fusion consistent à fusionner des ensembles de pixels ayant des caractéristiques proches. Elles ont pour principe d'effectuer un découpage arbitraire de l'image, de réaliser des tests de "cohésion" des zones puis de modifier ces zones. Elles peuvent se faire à partir de plusieurs niveaux, le plus élémentaire étant le pixel.

##### Division et fusion

L'approche par division consiste à décomposer l'image originale en régions homogènes au sens d'un critère donné (*e.g.* la luminance). Des caractéristiques sont ainsi extraites de manière globale sur une région, déterminant si elle est homogène ou non, en décomposant éventuellement cette région en plusieurs sous-régions. L'inconvénient majeur de ces méthodes est qu'elles reposent sur des statistiques globales et qu'elles conduisent souvent à une sur-segmentation de l'image.

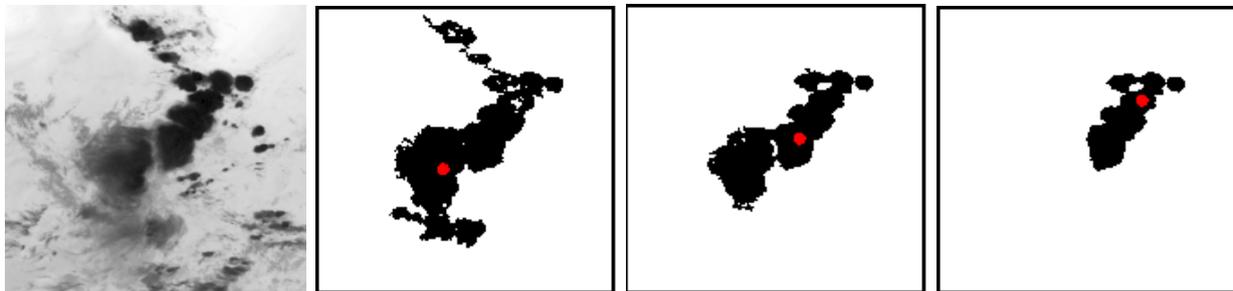


FIG. 3.6.: Croissance de régions. En rouge sont (grossièrement) localisés les pixels qui servent de points germes, *ie.* d'initialisation au processus d'agrégation ; ceux-ci ont été arbitrairement choisis parmi des minima locaux du signal. On voit sur cet exemple que les résultats sont très peu stables.

La méthode de fusion par croissance de régions est une méthode d'agrégation qui permet de regrouper un ensemble de pixels selon un double critère d'homogénéité et d'adjacence [Chang et Li, 1994]. Ces méthodes peuvent intégrer des informations locales. La localisation des contours est beaucoup moins précise qu'avec les techniques de détection de contours et la qualité du résultat dépend fortement du seuil d'agrégation retenu. Une variante de cette approche consiste à regrouper les pixels ayant des niveaux de gris proches par classification d'attributs tels que la moyenne ou la variance.

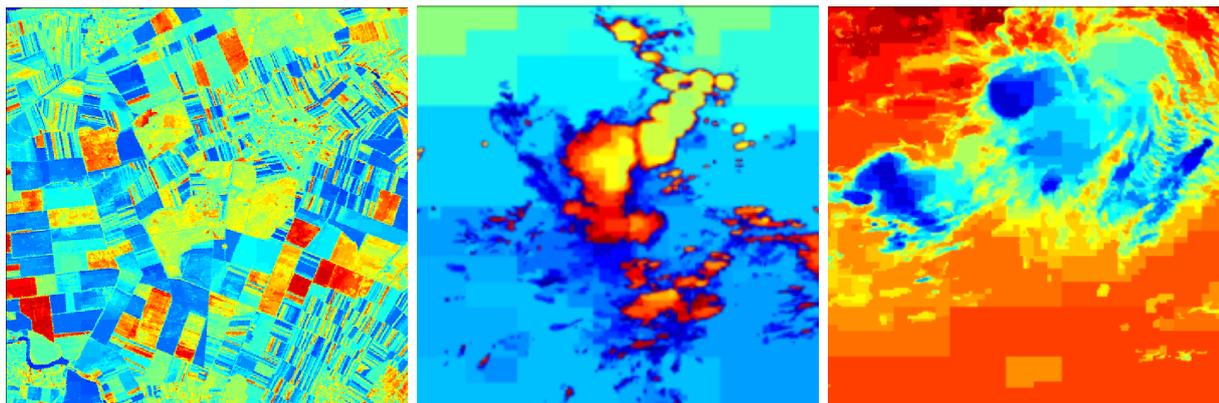


FIG. 3.7.: Segmentation par division-fusion. Résultats de l'algorithme *split & merge* sur les images de la figure 3.1 avec un critère d'homogénéité basé sur la variance. Dans le cas des données **Meteosat**, le critère ne permet pas de distinguer des petites régions car la dynamique interne des images est très faible : la segmentation est très grossière.

L'inconvénient principal des méthodes de division et de fusion est qu'elles nécessitent de définir des critères qui varient fortement d'une image à une autre. L'autre inconvénient majeur est qu'elles sont coûteuses en temps de calcul. Par ailleurs, la segmentation finale est très sensible au bruit et peut également dépendre de l'ordre dans lequel les régions sont fusionnées. Sur l'exemple de la figure 3.6, on voit que les régions fusionnées à partir d'un seul point germe varient suivant le point considéré, bien que tous ceux retenus appartiennent au nuage d'intérêt. Les résultats sont très peu stables.

### Split & merge

Cette méthode de division-fusion consiste à utiliser des propriétés globales pour diviser l'image en zones homogènes puis à fusionner certaines de ces régions grâce à des caractéristiques locales [Gallaudet et Simpson, 1991]. L'algorithme de division-fusion consiste, dans un premier temps, à découper l'image en zones de taille moyenne, puis à parcourir chacune des régions en cherchant si elle vérifie un critère d'homogénéité et à les diviser en sous-régions jusqu'à avoir des régions homogènes. Une étape de fusion permet enfin regrouper les zones contiguës correspondant à la même région. Un grand nombre de variantes sont là encore possibles en fonction de la taille minimale des zones que l'on utilise et du critère d'homogénéité (figure 3.7).

La méthode *split & merge* permet de réduire de manière considérable le coût algorithmique de la segmentation par fusion. Cependant le choix des critères d'homogénéité et de fusion constitue une limitation à ces méthodes. Dans le cas des images **IR**, la segmentation est rendue très difficile par la très faible dynamique des données ; la segmentation obtenue est très grossière (figure 3.7).

### 3.3.2. Méthodes de classification

Les méthodes de classification consistent à constituer des paramètres représentatifs de l'image, puis à utiliser une méthode de classification à partir de ces paramètres pour extraire des régions homogènes [Jain et Dubes, 1978]. Le choix des paramètres (ou attributs) extraits permettant de décrire et quantifier les caractéristiques des pixels ou de régions de l'image ainsi que le choix d'une méthode de classification permettent d'envisager de nombreuses approches.

Concernant le choix d'une classification, on distingue deux types d'approches [Duda et Hart, 1973] [Jain, 1989] : le premier, dit *supervisé*, se base sur l'exploitation d'une population de paramètres jugés représentatifs des différentes classes par des experts et par un partitionnement préalable (au cours d'une phase d'apprentissage) de l'espace de représentation des classes ; le deuxième type d'approches, dit *non supervisé* ou classification *automatique*, exploite lors de sa phase d'apprentissage des données non étiquetées. Dans le cadre de la segmentation automatique d'images notamment, le schéma couramment retenu est celui d'une classification non-supervisée de l'image réalisée par des techniques usuelles d'analyse de données [Duda et Hart, 1973]. Concernant le choix des paramètres descriptifs, les critères généralement retenus pour la discrimination spatiale des structures nuageuses permettent de les regrouper dans deux grandes familles [Congalton, 1991] : les paramètres spectraux, mesurant l'information radiative (spectrale) de l'image, et les paramètres texturaux, quantifiant son contenu textuel.

#### Classification sur l'espace des luminances

La source d'information la plus naturelle et la plus immédiate utilisée pour classifier les pixels est de nature spectrale : il s'agit d'utiliser les niveaux de gris présents dans l'image [Acton, 1996]. La classification des luminances peut s'effectuer à partir de l'histogramme des niveaux de gris présents dans l'image, par des techniques de recherche des modes et vallées de l'histogramme ou des méthodes plus complexes. La difficulté de cette approche réside dans la détermination du nombre de classes présentes dans l'image ainsi que des niveaux de gris délimitant chaque classe [Fauqueur et Boujemaa, 2004]. Ce type d'approches n'est pas significatif lorsque l'histogramme est unimodal, or c'est souvent le cas des images satellitaires qui présentent beaucoup d'objets et structures de taille importante et couvrant chacun un rang de valeurs d'intensité très large. La limitation principale de cette approche réside évidemment dans le fait qu'elle ne tient pas compte de l'information spatiale.

Bien que les algorithmes les plus fréquents ne tiennent compte que d'un pixel à la fois, d'autres méthodes regardent la structure des alentours, soit en mesurant l'homogénéité, soit en identifiant des unités de structure aussi homogènes que possible [Wang, 1990] [Congalton, 1991] [Acton, 1996]. Entre autres exemples, on peut citer la classification à partir d'attributs tels que la moyenne des intensités, la variance de l'intensité, ... [Baum et al., 1997] qui ne se limitent plus forcément à l'étude du seul histogramme des niveaux de gris.

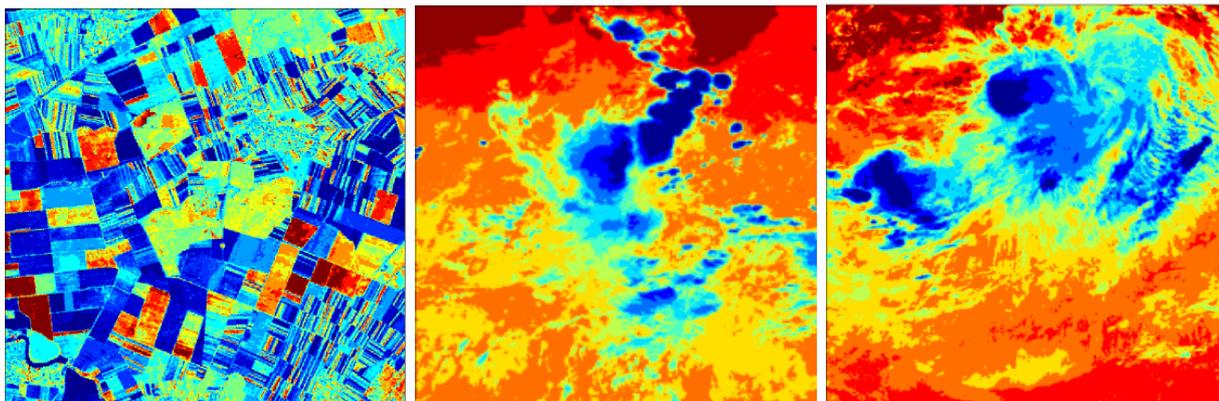


FIG. 3.8.: Segmentation en 10 classes par classification sur l'histogramme des luminances par un algorithme de type K-means 1D [Jain, 1989].

### Classification à partir d'attributs de texture

Soulignons l'importance des méthodes de classification à partir d'attributs de description des textures<sup>3</sup> [Haralick, 1979]. Celles-ci ont en effet trouvé de nombreuses applications et rencontré un large succès en segmentation d'images satellitaires. Le problème de la segmentation de textures consiste à proposer des modèles de textures adaptés aux données d'une part, et des critères de comparaison de ces textures d'autre part. Une approche région pour l'analyse de la texture, permet de rassembler les petites zones homogènes et donc de mettre en évidence des zones plus grandes pour lesquelles l'information de texture est significative ; la connaissance sur les pixels appartenant à ces régions permet cependant de tenir compte des variations spatiales et est plus adaptée à la détection des détails de l'image.

Les informations textuelles sont généralement utilisées conjointement avec les informations spectrales pour la classification des nuages. Dans [Ebert, 1989], les attributs spectraux sont combinés avec des attributs de texture afin d'identifier, sur des données **AVHRR**, différents types de surface et de discriminer les nuages à haute altitude. La méthode développée dans [Wu et al., 1985] consiste également à utiliser conjointement des attributs de texture et des attributs de radiance afin d'estimer les taux de pluviométrie dans les nuages précipitants à partir d'un couple d'images **VIS-IR** ou à partir d'images **IR** seules. Les auteurs de [Gu et al., 1991] s'intéressent quant à eux à la discrimination de plusieurs classes nuageuses et de deux classes de ciel découvert (mer et terre) à l'aide de descripteurs spatiaux et texturaux calculés sur des images acquises par le satellite **NOAA** dans le **VIS**, le **NIR** et l'**IR** thermique. Ils soulignent que les critères spectraux sont les plus discriminants pour un certain nombre de grands groupes nuageux, mais ils montrent également (contrairement aux résultats antérieurs de [Parikh, 1977]), que les attributs texturaux permettent d'améliorer les résultats de la discrimination dans certains cas. Les approches exploitant l'information de texture, de manière directe ou combinée avec d'autres sources d'information, produisent des résultats intéressants pour la segmentation d'images satellitaires. Cependant, les méthodes usuelles

<sup>3</sup>Par attributs de texture, nous entendons l'extraction de valeurs donnant une mesure des propriétés de texture.

ont généralement besoin d'être étendues pour prendre davantage en compte l'information sous-jacente dans les images [Lakshmanan et al., 2000]. Nous reviendrons, dans le chapitre 4, sur les attributs de description de la texture ainsi que sur les méthodes de classification à partir de tels attributs.

### 3.4. Approches *mixtes*

Dans le domaine de la coopération *région/contour*, nous présentons les modèles dynamiques fondés sur des approches mixtes. Nous abordons les *templates déformables* puis les contours actifs, qui constituent une approche où régions et contours sont des notions totalement duales. Nous présentons également les méthodes par champs de Markov. Nous évoquons les méthodes de diffusion, linéaire ou non, dérivées du *scale-space*. Enfin, nous présentons quelques outils de morphologie mathématique.

#### 3.4.1. Méthodes variationnelles

##### Templates et templates déformables

Dans cette approche, on utilise une forme géométrique appelée *template* que l'on tente de localiser sur l'image. Le principe est de connaître exactement (ou presque) la forme de l'objet que l'on cherche à segmenter (*e.g.* à partir d'une base d'apprentissage) et de parcourir toute l'image pour placer le *template* à l'endroit le plus vraisemblable. La généralisation grâce aux *templates déformables* permet de construire et d'adapter la forme prototype par le biais de paramètres contrôlant ses déformations propres et ses déplacements relatifs, pour accéder à une gamme étendue de structures similaires à extraire. L'utilisation de ce type de modèles permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté et de définir de manière paramétrique le contour recherché. En contrepartie, la connaissance *a priori* sur la forme des objets et régions à extraire constitue une contrainte très forte.

Des *templates* ont notamment été utilisés en météorologie dans [Bouthemy et Benveniste, 1984] pour la détection de structures nuageuses à grande échelle : ils sont utilisés pour les grandes perturbations atmosphériques spiralées à l'aide d'un modèle de représentation paramétrique. Un modèle est défini à partir d'informations géométriques et photométriques : l'information géométrique permet de modéliser les frontières des structures par des spirales logarithmiques tandis que les distributions d'intensité de ces régions sont modélisées par un modèle gaussien. L'estimation des paramètres est contrainte à une fenêtre circulaire centrée sur les centres communs des spirales modélisant les frontières du système nuageux (figure 3.9).

##### Contours actifs

Les méthodes par *templates* nécessitent la connaissance *a priori* de la topologie des objets à détecter. Cette limitation est particulièrement contraignante dans le cadre de notre application : les structures nuageuses sont amenées, durant leur cycle de vie, à subir de fortes transformations, voire des

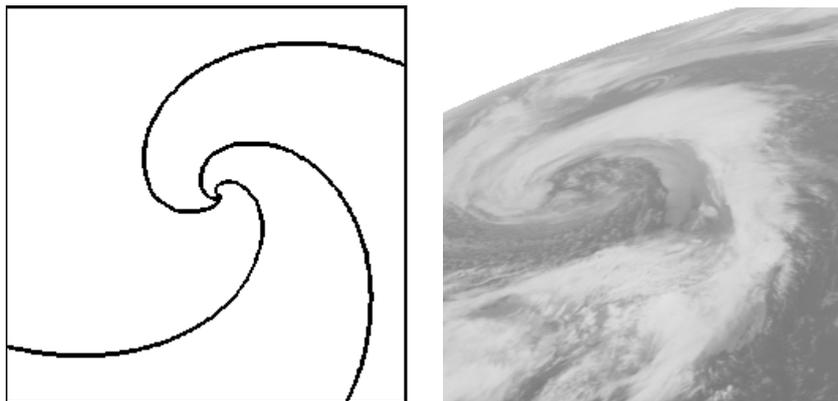


FIG. 3.9.: **À gauche** : modèle de spirale logarithmique proposé comme *template* déformable dans [Bouthemy et Benveniste, 1984] pour la modélisation des vortex nuageux. **À droite** : exemple de vortex nuageux de grande échelle observé au dessus de l'Europe sur une image **IR**.

changements de topologie, et à interagir avec d'autres cellules voisines, et de manière générale, avec leur environnement proche ; elles ne permettent donc pas de définir de forme prototype.

Pour répondre à ce problème, une stratégie communément adoptée consiste à exploiter des contours actifs, introduits sous le nom de *snakes* [Kass et al., 1988]. Les *snakes* sont modélisés par des courbes élastiques : à partir d'une position initiale et en utilisant des contraintes internes et externes sur les contours, ces contours sont modifiés pour tendre vers l'objet désiré. Pour cela, on associe au *snake* une énergie dont la définition est étroitement liée à celle des points de contours. Une initialisation permet de positionner, au voisinage du contour à détecter, une courbe paramétrée  $\mathcal{C}$  représentée par :

$$\mathcal{C} = \{\vec{v}(s) = (x(s), y(s)) \mid s \in [a, b]\}$$

( $s$  est l'abscisse curviligne le long de  $\mathcal{C}$ ,  $a$  et  $b$  sont les extrémités du contour et  $\vec{v}(s)$  est le point courant) que l'on déforme progressivement, selon certains critères, jusqu'à ce qu'elle épouse au mieux le contour de l'objet à détecter. Un critère de déformation courant [Kass et al., 1988] consiste à minimiser une énergie qui se présente sous la forme d'une somme pondérée de trois termes traduisant des contraintes différentes :

$$E_{snake}(\mathcal{C}) = E_{int}(\mathcal{C}) + \lambda_1 E_{ext}(\mathcal{C}) + \lambda_2 E_{interact}(\mathcal{C}).$$

L'introduction de cette fonction d'énergie permet de contrôler les déformations appliquées à la courbe  $\mathcal{C}$  par le biais de forces élastiques, de forces d'expansion et de données extraites de l'image dont elle traduit les effets conjugués :

- $E_{ext}(\mathcal{C}) = - \int_a^b |\nabla \mathbf{I}(\vec{v}(s))|^2 ds$  représente l'énergie potentielle du contour. Elle modélise les caractéristiques à rechercher dans l'image, *i.e.* les lignes de fort gradient, que le *snake* va avoir tendance à recouvrir. Cette énergie traduit en fait les forces exercées par l'image à segmenter sur le contour et impose un terme d'attache aux données.

- $E_{int}(\mathcal{C}) = \int_a^b (\alpha(s)|\partial_s \vec{v}(s)|^2 + \beta(s)|\partial_s^2 \vec{v}(s)|^2) ds$  est un terme régularisant qui permet de rechercher une solution donnant des contours assez réguliers en réduisant les oscillations dues au bruit. Le terme  $|\partial_s \vec{v}(s)|^2$  agit comme une force élastique sur la longueur du *snake* et  $\alpha(s)$  représente sa rigidité. Le terme  $|\partial_s^2 \vec{v}(s)|^2$  agit comme une force de flexion sur la courbure et  $\beta(s)$  représente son élasticité. Les paramètres  $\alpha(s)$  et  $\beta(s)$  sont généralement pris constants.
- $E_{interact}(\mathcal{C})$  est une énergie externe qui provient d'une connaissance *a priori* de l'image et permet de guider l'évolution de la courbe dans une direction particulière. Ce terme permet d'introduire de manière interactive des informations telles que la présence de frontières préalablement détectées ou de points de passage obligés du contour. Il est généralement omis.

La minimisation de la fonctionnelle  $E_{snake}(\mathcal{C})$  est obtenue lorsque les pixels formant la courbe correspondent aux gradients élevés, tout en respectant les contraintes liées aux propriétés de la courbe. Elle peut se ramener à la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Le modèle de contours actifs possède l'inconvénient majeur d'être très dépendant de la valeur des paramètres. Il utilise une partie de modélisation *a priori*, de nature physique ou géométrique, sur la forme des structures et sur les déformations à estimer. Une autre difficulté réside dans le choix de l'énergie externe. Par ailleurs, il ne permet pas de gérer efficacement les changements de topologie des objets que l'on souhaite détecter, comme c'est souvent le cas pour les systèmes nuageux.

### Level-sets

De nombreuses améliorations au modèle de *snakes* ont cependant été proposées dans la littérature. Parmi les extensions développées, l'approche par contours géodésiques (ensembles de niveau ou *level-sets*) répond de manière satisfaisante à ce problème et permet d'extraire une segmentation des objets déformables sans connaissances *a priori* sur leur topologie [Caselles et al., 1995]. Cette approche a déjà été largement employée pour des applications météorologiques [Cohen et Herlin, 1999]. Elle consiste à modéliser l'évolution des contours de façon implicite par l'intermédiaire d'une hypersurface, *i.e.* d'une fonction de dimension supérieure à celle des contours recherchés. Le contour est défini comme l'ensemble de niveau  $z = 0$  de la surface  $z = f(\vec{x})$ , de sorte que sur le contour :

$$\partial_s z = \partial_x z \frac{dx}{ds} + \partial_y z \frac{dy}{ds} = 0$$

et la courbe de niveau évolue en fonction des itérations effectuées en  $t$  selon l'équation :

$$\partial_t z = |\nabla z| \mathbf{n} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

où  $\mathbf{n}$  représente la normale au contour  $\vec{v}$ .

L'intérêt essentiel de l'approche par *level-sets* est de pouvoir gérer les changements de topologie; elle peut de plus s'adapter à des contours présentant de fortes irrégularités. Cette approche est ainsi utilisée par Papin *et al.* pour l'analyse dynamique de séquences d'images **Meteosat IR** [Papin et al., 1998] [Papin et al., 1999]. Leur méthode est tout particulièrement adaptée à la détection et au suivi des structures convectives. Les auteurs intègrent au formalisme des *level-sets* des informations sur le mouvement et sur les variations de la luminance pour déformer et propager les contours qu'ils font évoluer. Ils exploitent l'expression de la divergence du mouvement à

l'intérieur des contours et les variations thermiques associées. Le contour est notamment déformé par la comparaison des températures locales avec la température caractéristique prédite de la cellule nuageuse à l'instant courant : ainsi, en fonction du contexte photométrique local, les contours se dilatent ou se contractent. Cette approche est très intéressante, et fournit, également, de très bons résultats [Papin et al., 2000], mais nous nous en démarquons dans la mesure où, pour notre part, nous n'utiliserons pas d'information de nature dynamique. Dans [Yahia et al., 1998], les auteurs exploitent aussi la formalisation par ensemble de niveaux pour l'analyse d'images météorologiques. Pour modéliser les surfaces de façon précise, et afin de transformer l'expression d'une équation aux dérivées partielles en un problème de minimisation en faible dimension, ils introduisent des systèmes de particules dont ils gèrent le nombre et qui permettent adaptivité et flexibilité dans le suivi des structures nuageuses. Cette approche est également adoptée par Brewer *et al.* [Brewer et al., 1997] afin d'extraire les régions des nuages convectifs. Les auteurs introduisent différentes probabilités *a posteriori* associées aux différents types nuageux. L'initialisation des contours correspond à des points germes préalablement définis par l'utilisateur, et une force d'expansion fait évoluer ces contours vers les frontières d'intérêt.

### 3.4.2. Méthodes de type *scale-space*

La théorie du *scale-space* est utilisée pour représenter simultanément tous les niveaux de résolution d'une image [Lindenberg, 1994]. Ces méthodes consistent à définir une image comme une superposition hiérarchique de différents niveaux de description. Elles considèrent l'échelle d'une image comme son degré de lissage et cette grandeur est régie à l'aide des équations de la diffusion. Ces méthodes constituent ce que l'on appelle la famille des *méthodes de diffusion* et peuvent être classées en deux grandes catégories : le *scale-space linéaire* et les techniques de *diffusion anisotrope*.

#### Diffusion linéaire

L'idée générale du *scale-space linéaire* est de construire une famille d'images paramétrées par l'échelle à partir de l'image originale. En pratique, chaque image est obtenue par convolution de l'image avec un noyau gaussien de taille croissante. La famille ainsi créée est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t I(\vec{x}) = c \cdot \nabla I(\vec{x}) \quad (3.2)$$

et vérifie un certain nombre de propriétés : homogénéité, isotropie et causalité. Ces méthodes sont bien évidemment liées au filtrage gaussien présenté dans la section 3.2.3 où l'échelle de l'image représente un lissage et le degré du lissage est défini par la variance du noyau de convolution. Ces propriétés donnent au *scale-space* linéaire un cadre théorique très pratique. En particulier, un de ses avantages fondamentaux est la connaissance théorique du comportement à travers les échelles de points particuliers tels que les passages par zéro des dérivées de l'image.

Cependant, la diffusion linéaire possède un défaut majeur : plus la résolution est faible et plus il est difficile de localiser précisément les contours des objets. Non seulement, cette technique délocalise les contours, mais elle peut aussi les faire disparaître.

### Diffusion anisotropique

Afin de localiser les contours, Perona et Malik [Perona et Malik, 1990] utilisent une méthode de détection basée sur la diffusion anisotropique (non-linéaire). Ils introduisent l'idée d'un lissage non-homogène qui laisserait les contours intacts. Pour cela, ils rendent variable le coefficient de conduction de l'équation de la chaleur (3.2) :

$$\partial_t I = \text{div}(c(\vec{x}, t) \cdot \nabla I) \quad (3.3)$$

avec  $c(\vec{x}, t)$  de la forme  $g(|\nabla I(\vec{x}, t)|)$ , un certain nombre de propriétés étant exigées sur la décroissance de  $g$ . En écrivant le coefficient de conduction du processus de diffusion comme une fonction normalisée du gradient de l'image, on contraint ainsi le "flux de chaleur" : le coefficient  $c$ , non nul à l'intérieur d'une zone homogène et nul sur les bords, est utilisé pour contrôler le processus de diffusion, de sorte que les discontinuités de l'image constituent des barrières locales à la diffusion. De cette façon, le filtrage passe-bas est effectué dans chaque région et non pas entre les régions dont les bords restent intacts. En itérant le processus de diffusion, les contours deviennent plus francs et les régions sont lissées (figure 3.10). Cette approche basée sur l'évolution de l'image à travers les échelles équivaut, en un sens, à un processus de minimisation d'énergie, tel que proposé par l'approche fonctionnelle de Mumford et Shah [Mumford et Shah, 1985] [Robin et al., 2003]. De nombreuses variations ont été proposées à partir de cette idée. Les premières ont pour objectif d'améliorer le modèle qui pose des problèmes théoriques de stabilité et n'admet pas de solution régulière, d'autres développements portent sur le renforcement du caractère anisotrope de l'équation de diffusion.

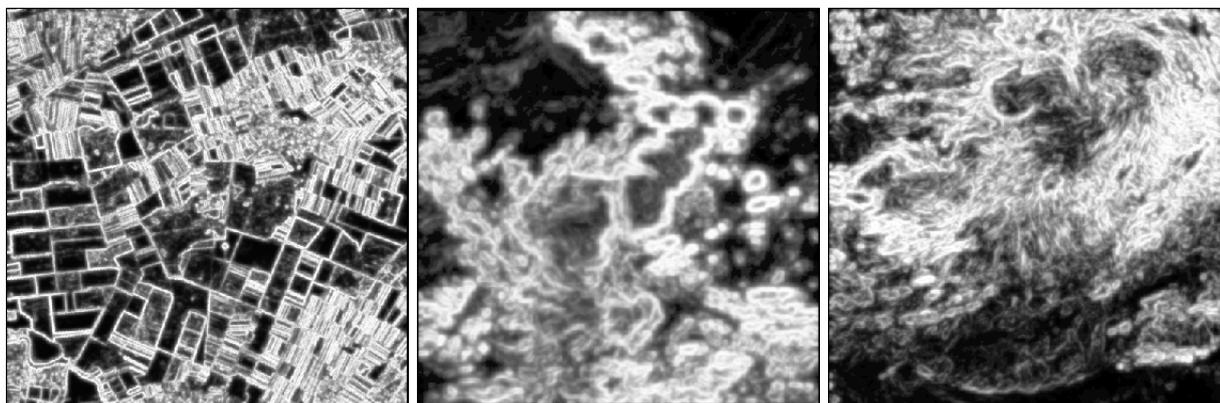


FIG. 3.10.: Génération d'un processus de diffusion non-linéaire pour extraire les pixels qui appartiennent potentiellement à des contours.

Notons que ces méthodes ont été très peu utilisées pour l'analyse d'images météorologiques. Cependant, nous voulons ici souligner l'intérêt d'une telle approche : dans le cas particulier de l'étude des données **IR**, qui sont une mesure de la température, on devrait pouvoir établir un lien entre le processus de diffusion et les transferts de température observés au sein des structures nuageuses.

L'inconvénient majeur est cependant le lissage trop important qui est effectué dans les régions homogènes qui contiennent un peu de bruit.

### 3.4.3. Champs de Markov et segmentation bayésienne

L'intérêt de l'utilisation de la théorie bayésienne et des modèles markoviens, en traitement d'image est de ne pas se limiter aux seules données image mais de considérer conjointement des données contextuelles [Winkler, 1995]. Ils sont ainsi largement exploités dans les problèmes de segmentation pour la détection de contours [Geman et al., 1990].

Ces approches utilisent une modélisation aléatoire des images. Elles considèrent généralement l'image comme un champ  $I = \{I_s, s \in \mathcal{D}\}$  de variables aléatoires (*v.a*) indexées par le domaine  $\mathcal{D}$  des sites  $s$  de l'image, chacune de ces *v.a* étant à valeurs dans  $\mathcal{G}$  : une réalisation  $i_s$  de la *v.a*  $I_s$  est le niveau de gris de l'image  $I$  au site  $s$ . De même, un champ  $R = \{R_s, s \in \mathcal{D}\}$  de *v.a.* à valeurs dans  $\{1, \dots, n_{\text{régions}}\}$  permet de modéliser les régions de l'image : une réalisation  $r_s$  de la *v.a*  $R_s$  est l'étiquette du pixel situé au site  $s$ .

#### Champs de Markov

Les *champs de Markov* permettent de ramener des propriétés globales à des contraintes locales. Le champ aléatoire  $I$  est supposé avoir de bonnes propriétés (sa distribution de probabilité  $P$  satisfait localement des hypothèses dites de positivité, d'homogénéité et de markoviannité [Winkler, 1995]), de sorte qu'il permet de définir un champ de Markov. Le théorème de Hammersley-Clifford, en faisant l'équivalence entre champs de Gibbs et champs de Markov, permet d'extraire les contraintes locales sous forme de potentiel énergétique [Winkler, 1995] [Memin et Pérez, 1998] :

$$\pi_t = \frac{1}{Z} e^{\frac{-U(i_s)}{t}}$$

où  $U$  est une fonction d'énergie,  $Z$  une constante de normalisation, et fournit ainsi une formulation explicite de la distribution  $\mathcal{P}[I_s = i_s]$ . La segmentation se ramène alors essentiellement à un problème d'optimisation : le but est de trouver le minimum global de la fonctionnelle d'énergie  $U$ , qui décrit les interactions entre les différentes variables modélisant les caractéristiques images du problème. Cette fonction est généralement formée de deux termes :

- un terme d'attache aux données qui permet d'attribuer à chaque pixel le label de segmentation le plus probable selon la configuration des valeurs des pixels dans son voisinage,
- un terme de régularité qui permet d'obtenir un résultat de segmentation régulier, au sens des propriétés désirées.

Les modèles de Markov fonctionnent généralement à différentes échelles : soit ils agissent simultanément sur plusieurs niveaux (pixels, régions), soit ils travaillent à une résolution donnée puis passent à une résolution supérieure pour affiner les résultats [Memin et Pérez, 1998].

Dans [Béréziate, 1999], Béréziate combine des propriétés spatiales simples des structures nuageuses, correspondant à l'observation visuelle d'images **IR**, pour segmenter ces images à l'aide d'un modèle

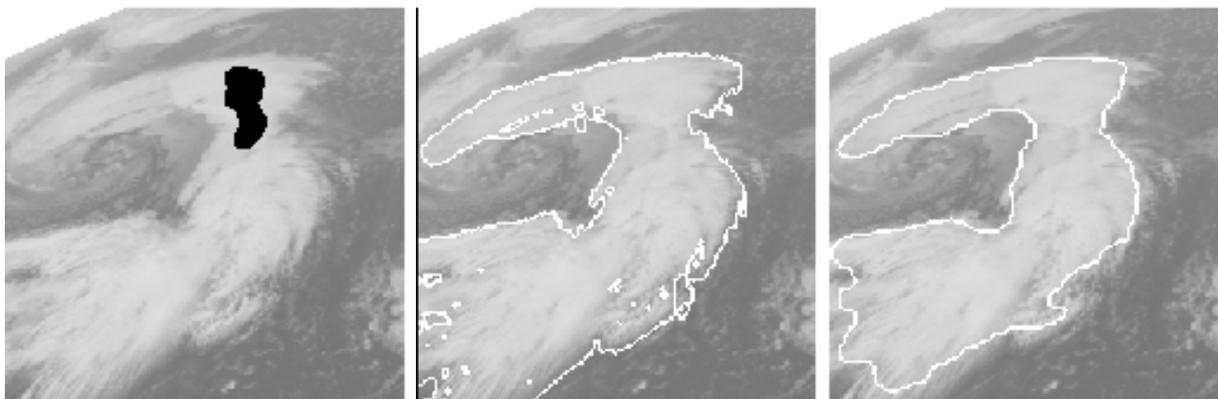


FIG. 3.11.: Résultats d'un processus de segmentation markovienne sur une image **Meteosat IR**. De gauche à droite : initialisation en noir, segmentation par un algorithme déterministe (ICM), segmentation finale après régularisation (modèle d'Ising [Winkler, 1995]). Reproduit de [Béréziat, 1999] avec l'aimable autorisation de D. Béréziat.

markovien. Les propriétés qu'il impose concernent l'homogénéité des niveaux de gris à l'intérieur des structures nuageuses, le positionnement de la courbe frontière sur les pixels à fort gradient spatial et la régularité des régions résultant de la segmentation. Il obtient des bons résultats de segmentation sur des structures caractéristiques tels que des *vortex* ou des *jetstreams* (figure 3.11). Dans [Papin et al., 1998], Papin *et al.* proposent une méthode statistique contextuelle de détection des nuages bas dans des séquences d'images **Meteosat IR**. Ils exploitent au sein d'un modèle markovien des informations de nature thermique et dynamique afin de segmenter des zones d'intérêt dans les images. Ils estiment les paramètres du modèle statistique correspondant à la composante thermique de l'attache aux données et introduisent une minimisation spécifique de la fonction d'énergie associée. Le principal problème de ce type d'approches reste cependant le choix d'un modèle pour l'image.

### Classification bayésienne

On peut se placer dans le cadre où les lois  $\mathcal{P}[R = r]$  (où  $r \in \{1, \dots, n_{\text{régions}}\}$ ) de probabilité *a priori* d'étiquetage  $R = r$  et  $\mathcal{P}[I = i | R = r]$  de probabilité conditionnelle d'avoir  $I = i$  sachant  $R = r$  (où  $i \in \{1, \dots, N_G\}$ ) sont connues : la méthode est supervisée par la connaissance *a priori* des distributions. On est alors en mesure de calculer pour chaque pixel sa probabilité d'appartenir à une région étant donnée une observation. De nombreuses méthodes d'attribution d'une région à un pixel ont été proposées dans la littérature [Winkler, 1995], mais la plus simple consiste à calculer directement la probabilité  $\mathcal{P}[R_s = r_s | I = i]$  à l'aide de la formule de Bayes (figure 3.12).

Dans le cadre non-supervisé, les distributions *a priori* du champ aléatoire ne sont pas connues. Une étape préliminaire permet d'estimer les paramètres relatifs à ces distributions.

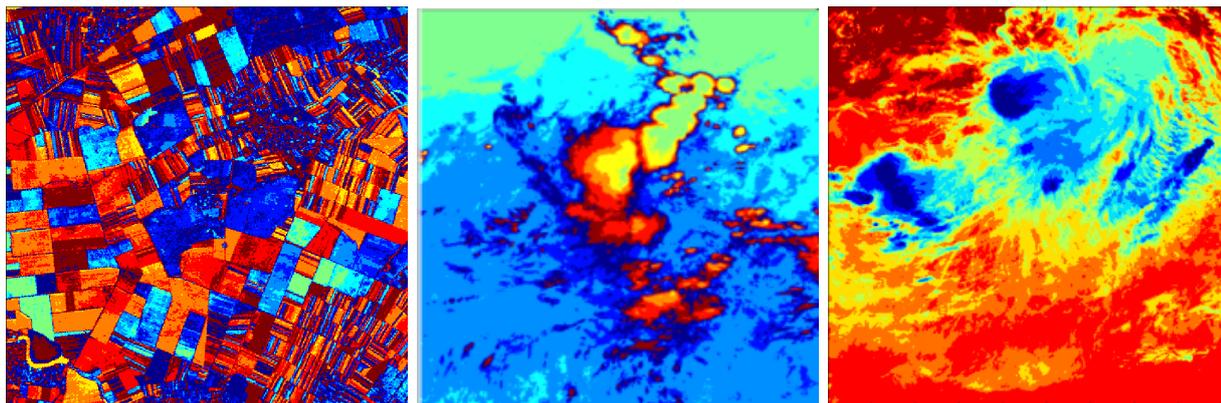


FIG. 3.12.: Segmentation par maximum de vraisemblance en 10 classes. La distribution locale des niveaux de gris est explicitement modélisée par une distribution gaussienne.

### 3.4.4. Méthodes morphologiques

Le filtrage non-linéaire obtenu en morphologie mathématique est utilisé en traitement d'image pour partitionner une image en zones homogènes selon certains critères et également pour isoler directement certains objets à étudier.

#### Opérateurs simples

La morphologie mathématique propose une théorie et des opérateurs que l'on peut appliquer localement dans les images pour extraire et modifier des formes. Les transformations de base sont les opérateurs non-linéaires et inversibles de dilatation, d'érosion, d'ouverture et de fermeture (les deux derniers se définissant à partir des deux premiers). Ces transformations consistent essentiellement à analyser les structures spatiales de l'image en la comparant localement avec un élément de base, appelé élément structurant, dont on contrôle la forme et la taille (figure 3.13). De nombreuses transformations complexes peuvent être dérivées de ces opérateurs, telles que des ouvertures ou fermetures successives réalisées à partir d'éléments structurants de formes diverses. Le gradient morphologique, notamment, peut être utilisé comme approximation du module du vecteur gradient en un point. Celui est exprimé dans l'espace discret par :

$$|\nabla I| = (I \oplus \epsilon) - (I \ominus \epsilon)/2$$

où  $\oplus$  et  $\ominus$  représentent *resp.* les opérateurs de dilatation et d'érosion et  $\epsilon$  est l'élément structurant. Ce traitement simple conduit cependant à des sur-segmentations. Toutes ces transformations sont en fait fondées sur une approche ensembliste du traitement d'image.

#### Ligne de partage des eaux

Un autre outil morphologique classique est la *ligne de partage des eaux*, à rapprocher de la croissance de régions, qui permet d'extraire directement des contours fermés à partir d'une image de

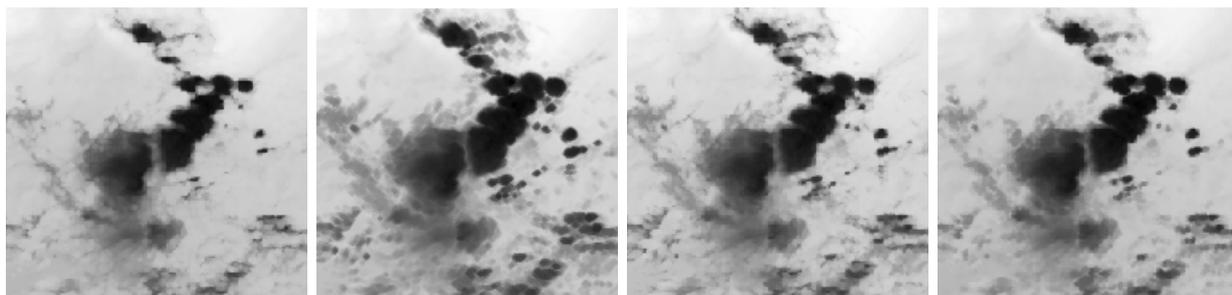


FIG. 3.13.: Opérations morphologiques sur l'image **IR** de la figure 3.3. **De gauche à droite** : érosion, dilatation, ouverture et fermeture par des éléments structurants de rayon  $r = 2$ .

contours. Cette méthode consiste à modéliser l'image en 2D par des lignes de niveau. Sur une image en niveaux de gris, ces lignes de niveau renseignent sur les variations de niveaux de gris, et les lignes de crête, qui sont constituées des points les plus élevés, sont souvent en correspondance avec les maxima locaux du module du gradient dans la direction du gradient. Pour trouver la ligne de partage des eaux d'une image, il faut la "noyer" progressivement, jusqu'à ce qu'elle soit totalement "immergée", de telle façon à former des "lacs" qui fusionnent progressivement ; au moment de la fusion, on construit un "barrage". Seul subsiste à la fin de l'algorithme l'ensemble des barrages, qui forme les "bassins versants" (figure 3.14). La ligne de partage des eaux donne souvent un résultat sur-segmenté dû aux nombreux minima locaux dont la plupart sont non significatifs. Leur suppression est généralement obtenue en la contraignant soit par des marqueurs, soit par le contraste. L'intérêt de cette segmentation réside dans le fait que les contours obtenus sont fermés. Cependant, il est couramment reconnu que les résultats obtenus sur des images météorologiques sont très peu significatifs [Lakshmanan et al., 2003].

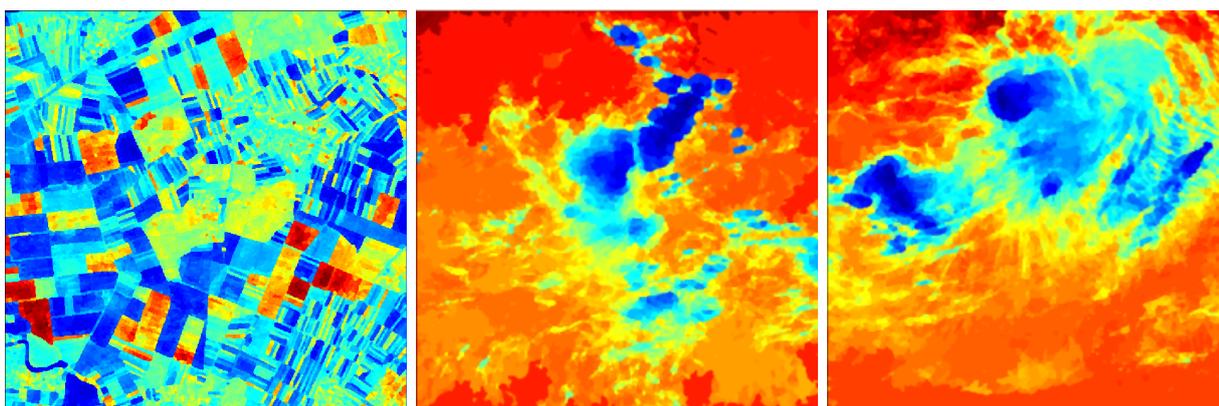


FIG. 3.14.: Segmentations par ligne de partage des eaux obtenues à l'aide de critères portant sur la variance. Là encore, les régions d'intérêt principales des images météorologiques (l'intérieur des nuages) sont très grossièrement segmentées.

### 3.5. Conclusion

Les différents résultats obtenus avec les méthodes évoquées dans ce chapitre laissent entrevoir les limitations des techniques de segmentation classiques pour l'analyse des images météorologiques **Meteosat IR**. Ces méthodes appliquées sur d'autres types d'images satellitaires, telles que des données **Spot**, ayant une structure plus régulière, paraissent pourtant relativement significatifs. Les limitations observées sur les images **IR** s'expliquent en fait essentiellement par la nature même des données. Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- les images **IR** présentent des contours très irréguliers [Papin et al., 2000],
- la dynamique des régions d'intérêt des images **IR** (principalement, les structures nuageuses) est très faible : la quantité de niveaux de gris accessibles est faible ; pourtant, la variance des niveaux de gris n'est pas négligeable [Lakshmanan et al., 2003],
- l'aspect textuel des images **IR** est très important et les surfaces observées sur les nuages, surtout, sont caractéristiques [Lakshmanan et al., 2000].
- la résolution semble relativement pauvre comparée à l'échelle des phénomènes [Peak et Tag, 1994].

Ainsi, les méthodes de détection de contours supposent des états de régularité qui ne sont pas vérifiés par les images **IR**. Les méthodes de segmentation par région basées sur des critères d'homogénéité produisent, quant à elles, des segmentations grossières compte tenu de la faible dynamique des images. Cependant, les méthodes mixtes, combinant les deux approches : méthodes de type *scale-space*, *levels-sets* ou certaines approches markoviennes, ainsi que les méthodes textuelles, conjuguant l'aspect global à l'information locale dans les images, permettent généralement d'obtenir des résultats plus intéressants et ont alimenté de nombreux travaux sur l'analyse d'images satellitaires. Il nous apparaît donc essentiel de proposer une méthode qui prenne en particulier en compte les informations de type région et de type contour dans l'analyse des données **IR**.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous concentrer sur une approche basée sur la notion de texture que nous avons déjà évoqué ici. La texture offre une description à la fois locale et globale des images, *i.e.* elle est caractérisée par une invariance de certaines mesures locales ou par des propriétés sur une région de l'image. Par ailleurs, dans le cadre de l'analyse d'images satellitaires, les méthodes utilisant la texture ont rencontré un grand succès. Elles ont notamment produit des résultats significatifs pour la classification des structures nuageuses.

---

## 4. Attributs texturels d'analyse d'images météorologiques

Dans ce chapitre, nous utilisons l'information textuelle en vue de segmenter et classifier les structures observées dans les images météorologiques **IR**. Nous nous intéressons en particulier aux méthodes basées sur le calcul des matrices de cooccurrence. Compte tenu des limitations de ces représentations de la texture, nous proposons tout naturellement d'adopter une approche multiéchelle afin d'améliorer l'estimation et la localisation des attributs caractéristiques du signal. Nous présentons les résultats de classification des données dans l'espace multidimensionnel formé de ces nouveaux attributs. Nous montrons qu'une représentation significative par des attributs texturels, même généralisés dans un cadre multiéchelle, est subordonnée à une certaine régularité des données qui n'est pas vérifiée dans le cas des images **IR**.

### 4.1. Description de la texture dans les images

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, la segmentation automatique des nuages pour la prévision du temps est une des applications importantes étudiées en météorologie. Nous proposons d'utiliser l'information textuelle dans les images **IR** afin d'étudier les propriétés de ces images. Dans les paragraphes suivants, nous définissons la texture et nous présentons quelques méthodes adaptées à sa description en terme quantitatif.

#### 4.1.1. La notion de texture

Revenons sur la notion de *texture*. Celle-ci est en fait difficile à définir quantitativement ; elle caractérise l'organisation et la structure d'une région macroscopique d'une image. Nous retiendrons la définition suivante, proposée par Haralick [Haralick, 1979] :

**Définition 4.1** *La texture peut être décrite comme une structure hiérarchique à deux niveaux. Le premier concerne la description d'éléments de base ou primitives, à partir desquels est construite la texture. Le second niveau est relatif à la description de l'organisation spatiale de ces primitives, à l'agencement des motifs texturaux entre eux, qui peut satisfaire aussi bien à des lois stochastiques que déterministes.*

---

Une autre approche consiste à définir la texture à partir de deux types d'informations essentielles que comporte l'image : les contours, de type monodimensionnel, qui marquent les frontières entre régions homogènes, et l'aspect de surface, de type bidimensionnel, qui définit les régions homogènes. Notons que la description d'une texture peut s'avérer erronée à une autre échelle d'observation, *i.e.* en changeant la résolution [Gagalowicz, 1981].

#### 4.1.2. Contenu textuel des images météorologiques

Les méthodes utilisées pour la classification et la segmentation des images consistent à définir des paramètres suffisamment pertinents permettant de discriminer et classer les textures observées dans autant d'ensembles cohérents et distincts. L'utilisation de l'information spectrale, généralement couplée à l'information spatiale et géométrique, est largement motivée par de nombreuses études de la littérature.

Dans les images satellitaires, l'information textuelle est au moins aussi importante que l'information radiative pour la discrimination des surfaces observées [Baraldi et Parmiggiani, 1995]. Les résultats obtenus dans les différents travaux utilisant l'information de texture [Wu et al., 1985] [Kittler et Pairman, 1985] montrent que la distribution spatiale et l'organisation des niveaux de gris comportent beaucoup d'information pour la caractérisation et la classification des structures nuageuses. Nous ne pouvons donc pas nous limiter à l'utilisation des seuls niveaux de gris accessibles. Les images **IR** par exemple (figure 4.1) permettent notamment de visualiser des surfaces constituant

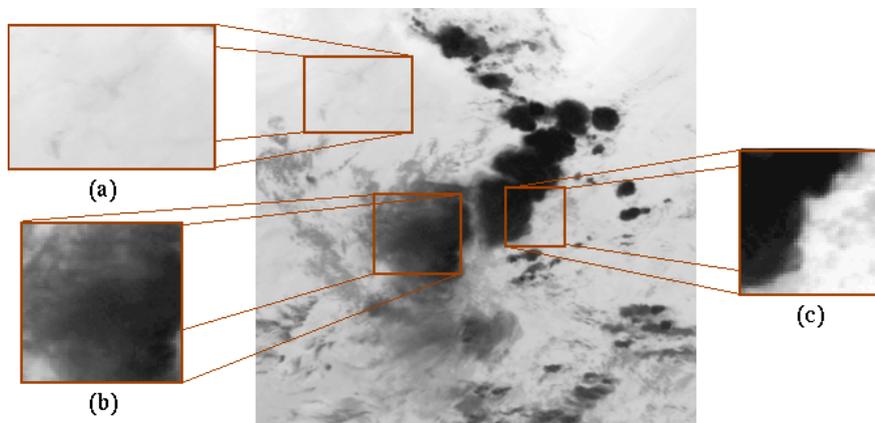


FIG. 4.1.: Quelques variétés de textures accessibles dans une image **IR**.

quelques variétés de textures typiques. Les zones de fort contraste (*i.e.* les zones caractérisées par un rassemblement de petites zones très homogènes présentant des signatures spectrales très différentes entre elles) sont visibles essentiellement sur les frontières des structures nuageuses (figure 4.1, zone (c)). De grandes zones de l'image apparaissent être homogènes en niveaux de gris, caractérisées par de faibles fréquences spatiales (figure 4.1, zone (a)); elles correspondent généralement à des zones continentales (sur les acquisitions 2.1 au Sud et au Nord) ou à de la mer (à l'Ouest). Les structures nuageuses elles-mêmes sont particulièrement homogènes, avec une très faible dynamique interne de la luminosité (figure 4.1, zone (b)). Notons, à titre de comparaison, que les images **VIS**

(figure 2.6) disposent d'une résolution plus importante et offrent davantage de détails. L'aspect texturé et homogène est cependant moins évident sur ce type d'images. Ces considérations expliquent notamment que les attributs de texture aient été si largement utilisés pour la segmentation d'images satellitaires [Haralick et al., 1973]. Le problème préalable demeure le choix des paramètres, ou *attributs de texture*, qui conduisent à une valeur représentative des textures observées permettant leur discrimination dans un espace multidimensionnel.

### 4.1.3. Analyse de la texture : objectifs et méthodes

Le but de l'analyse de texture est de formaliser les descriptifs de la texture par des paramètres servant à l'identifier. Le choix des attributs texturaux, permettant d'extraire des caractéristiques sur la texture d'une région de l'image, est primordial, quelque soit l'application recherchée. Les propriétés généralement exigées afin de quantifier le contenu textuel de l'image sont [Pietikäinen et al., 1983] :

- la réduction du bruit pour renforcer l'homogénéité des pixels appartenant à une même région,
- la préservation et la localisation des frontières,
- et également la rapidité de traitement.

Une multitude de méthodes, de variantes et de combinaisons de méthodes ont déjà été proposées dans la littérature et éprouvées en pratique [Randen et Husoy, 1999]. Classiquement, on distingue quatre grandes familles d'extraction de caractéristiques textuelles [Strand et Taxt, 1994] :

- Les approches statistiques se fondent la plupart du temps sur les niveaux de gris des pixels et sur la description statistique de leur arrangement. Elles consistent à extraire les propriétés stochastiques des variations des niveaux de gris. Typiquement, cette information est extraite de paramètres statistiques estimés dans des voisinages locaux des pixels de l'image [Tuceryan et Jain, 1992].
- Les approches issues du traitement du signal reposent sur des transformations, généralement orthogonales, de l'image, sur des représentations spatio-fréquentielles notamment. La plupart des techniques utilisent des bancs de filtre sélectifs en fréquence, en orientation et en échelle : bancs de filtre de Gabor [Bovik et al., 1990] ou ondelettes [Unser et Eden, 1989].
- les méthodes stochastiques considèrent la texture comme la réalisation d'un processus stochastique stationnaire. Ces méthodes se fondent sur la recherche d'un modèle pour décrire la texture ; elles consistent à définir le processus qui a généré la texture. La modélisation auto-régressive, les modèles de champs de Markov [Woods, 1972] ou les méthodes fractales [Pentland, 1984] en sont des exemples.
- Les méthodes géométriques cherchent à reconnaître les primitives géométriques ayant permis de générer les textures. Dans ce type d'approches, il est fréquent de calculer des statistiques sur la texture ou d'extraire les règles de positionnement des différents motifs de la texture.

De par l'importance de la composante stochastique dans les textures naturelles, ce sont les méthodes de caractérisation statistique qui sont le plus souvent employées en analyse d'image. Parmi celles-ci, les matrices de cooccurrence ont permis d'obtenir de bons résultats pour la segmentation de surfaces quelconques dans des images satellitaires. Nous proposons d'utiliser ces outils afin d'étudier

les surfaces de nuages observées dans les images **IR**. Des différentes représentations que nous allons obtenir, nous entendons déduire certaines caractéristiques des images. L'objectif est de définir les propriétés qu'une méthode devra satisfaire pour permettre une bonne analyse de ces données.

## 4.2. Représentation de la texture à l'aide des matrices de cooccurrence

Les approches basées sur les matrices de cooccurrence sont parmi les approches qui ont rencontré le plus grand succès en analyse de la texture. Appliquées initialement à la classification d'images satellitaires moyenne-résolution [Haralick et al., 1973] [Weszka et al., 1976], elles ont trouvé, ensuite, un très large écho dans le traitement d'images satellitaires de type et de résolution quelconques [Wu et al., 1985]. De nombreuses méthodes ont également été dérivées de ces mesures [Welch et al., 1988] [Chen et al., 1989].

### 4.2.1. Méthodes basées sur les matrices de cooccurrence

Malgré la pertinence de statistiques d'ordre<sup>1</sup> supérieur à 2, nombre d'approches texturelles, utilisant la conjecture de Julesz [Julesz, 1965], se limitent à une description d'ordre 2. La popularité des méthodes d'ordre 2, dont les matrices de cooccurrence, résulte essentiellement de leur efficacité et de leur simplicité [Gotlieb et Kreyszig, 1990].

#### Construction des matrices de cooccurrence

Les approches statistiques, qui s'appuient sur la distribution des niveaux de gris des pixels négligent *a priori* l'aspect structurel des textures. Pour remédier à ce défaut, les matrices de cooccurrence permettent de décrire les textures à partir d'histogrammes bivariés directionnels, *i.e.* de la distribution conjointe des niveaux de gris des couples de pixels situés à des positions relatives données par un déplacement fixé (approche **GLCM** : *Grey Level Cooccurrence Matrix*) [Haralick et al., 1973]. Soit une image  $I_{\mathcal{D}}$  (plus simplement notée  $I$  par la suite) à valeurs dans  $\mathcal{G}$  :  $\mathcal{D}$  est l'ensemble d'indices définissant le support de l'image  $I$ , ou d'une région de l'image, et  $\mathcal{G}$  est l'ensemble des niveaux de gris accessibles. On note :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{t}} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{D}^2 \mid \vec{y} = \vec{x} + \mathbf{t}\}$$

l'ensemble des couples de pixels séparés l'un de l'autre par une translation  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2$ .

**Définition 4.2** La matrice de dépendance spatiale des niveaux de gris  $M_{\mathbf{t}}(i, j)$ , ou **matrice de cooccurrence (MC)**, est définie pour le déplacement  $\mathbf{t}$  par :

$$M_{\mathbf{t}}(i, j) = \text{Card} \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{t}} \mid I(\vec{x}) = i, I(\vec{y}) = j\} \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>La notion de statistique d'ordre  $k \geq 2$  se réfère aux moments et moyennes (empiriques) d'espace du même ordre, calculées sur des  $k$ -uplets de pixels vérifiant une relation spatiale donnée.

Il s'agit donc du nombre d'occurrences d'un couple de pixels séparés par la translation  $\mathbf{t}$  et possédant *resp.* les niveaux de gris  $i$  et  $j$ . Les dimensions de cette matrice correspondent au nombre  $N_G = \text{Card } \mathcal{G}$  de niveaux de gris dans l'image. Les **MC** sont sensibles aux variations de niveaux de gris ; pour cette raison, une normalisation ou une égalisation d'histogramme des niveaux de gris est généralement réalisée au préalable. Cela permet de ramener le rang des niveaux de gris à une taille raisonnable, facilitant le calcul. Par ailleurs, lorsque les **MC** de plusieurs paires de pixels, séparés par différentes translations  $\mathbf{t}$ , sont calculées, on peut procéder, afin également de simplifier les calculs, à un moyennage des matrices obtenues, pour se ramener au cas d'une **MC** simple. La figure 4.2 représente les **MC** calculées à partir de l'histogramme global d'une image **IR** pour différentes quantifications de l'image et différents vecteurs de déplacement.

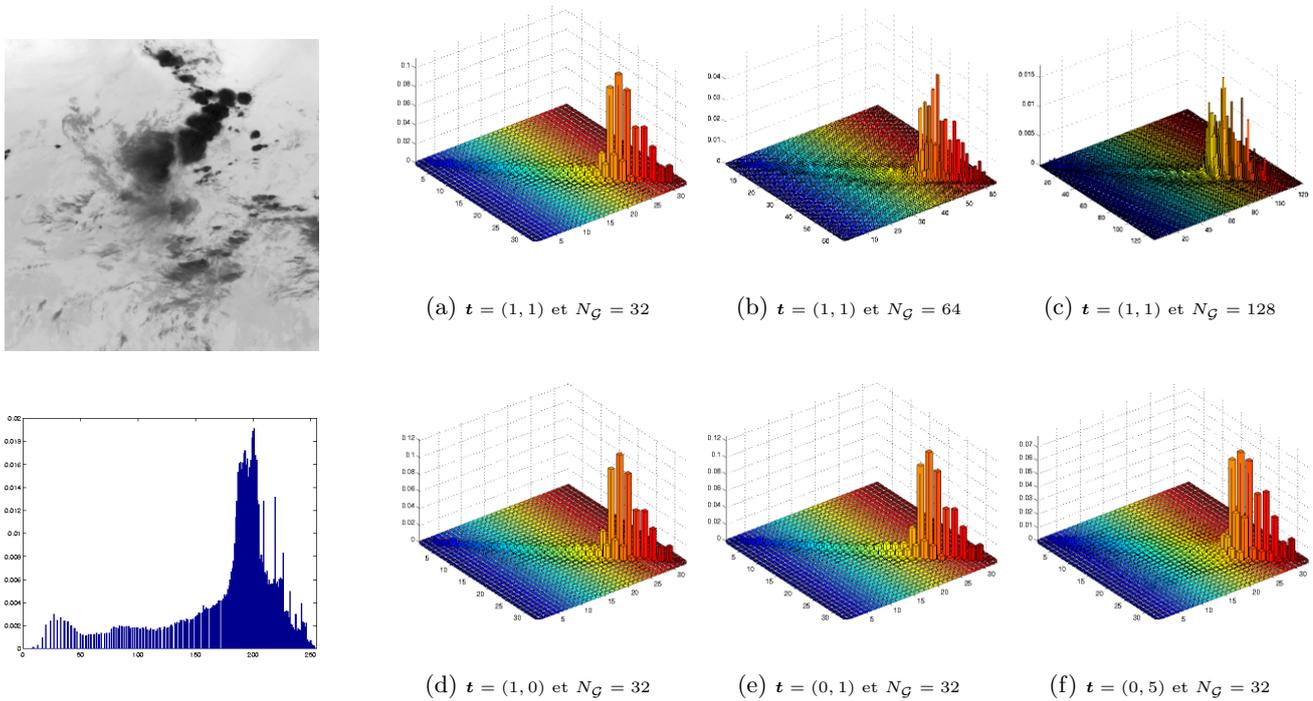


FIG. 4.2.: **À gauche** : image **IR** quantifiée sur  $N_G = 256$  niveaux de gris et son histogramme marginal. **À droite** : (a)-(f) représentation 3D des **MC** globales normalisées  $M_{\mathbf{t}}$  de l'image **IR** quantifiée sur  $N_G$  niveaux de gris, en fonction de  $N_G$  et du déplacement  $\mathbf{t}$ .

### Propriétés

La matrice  $M_{\mathbf{t}}$  est une mesure statistique de second ordre des variations des niveaux de gris. Si l'image est considérée comme la réalisation d'un processus discret bidimensionnel, alors  $M_{\mathbf{t}}(i, j)$  constitue (après normalisation par le nombre total de couples  $N_C = \text{Card}(\mathcal{C}_{\mathbf{t}})$ ) une estimation de la distribution conjointe  $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}(i, j)$  (plus simplement noté  $\mathcal{P}(i, j)$  dans la suite, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, et représenté par sa fonction de probabilité empirique  $P(i, j)$ ) qu'un couple de pixels

séparés par la translation  $\mathbf{t}$  ait pour valeurs respectives  $i$  et  $j$  :

$$P(i, j) = P(I(\vec{x}) = i, I(\vec{x} + \mathbf{t}) = j) \propto \frac{1}{N_C} M_{\mathbf{t}}(i, j) . \quad (4.2)$$

En particulier, une fois normalisée, les valeurs des éléments de cette matrice sont dans  $[0, 1]$  et de somme égale à 1. Notons par ailleurs que les **MC** sont invariantes pour des transformations monotones des niveaux de gris.

La démarche par **MC** est finalement similaire aux approches markoviennes (*cf.* section 3.4.3) : le niveau de gris d'un pixel d'une image dépend fortement des niveaux de gris des pixels voisins, ce qui signifie que la connaissance de toute l'image autour d'un pixel donné est pratiquement équivalente à la connaissance du seul voisinage de ce pixel. Cependant, le désavantage principal des **MC** est qu'elles ne transcrivent pas cette modélisation spatiale : elles ne comportent pas d'information sur les structures et les formes présentes dans l'image.

### Extraction d'attributs des MC

Certaines approches utilisent directement les **MC** pour la caractérisation des textures, au prix d'une complexité en temps de calcul et en besoin d'espace mémoire très élevée. Toutefois, les matrices  $M_{\mathbf{t}}$  ne servent la plupart du temps que d'intermédiaires au calcul d'indicateurs texturaux. Des attributs sont généralement extraits de la **MC** en appliquant une fonction de poids à tous les éléments de la matrice et en sommant les valeurs pondérées de ces éléments. En variant la nature de la fonction de pondération, on fait varier la nature de l'information extraite de la matrice de cooccurrence [Walker et al., 1995].

**Définition 4.3** *Pour une MC  $M_{\mathbf{t}}$  de dimension  $N_G \times N_G$ , on définit un attribut  $\mathcal{A}$  en effectuant la somme pondérée des  $N_G^2$  éléments de  $M_{\mathbf{t}}$  :*

$$\mathcal{A}(\mathbf{t}) = \sum_{i,j=1}^{N_G} g(i, j) P(i, j) \quad (4.3)$$

où  $P(i, j)$  désigne la probabilité du couple de niveau de gris  $(i, j)$ , *i.e.* l'entrée  $(i, j)$  de la **MC**  $M_{\mathbf{t}}$  normalisée, et où  $g(i, j)$  est la fonction de pondération appliquée à  $P(i, j)$ .

Cette fonction de pondération peut être de deux types :

- *fonctionnelle*, *ie.* basée sur la valeur des entrées  $P(i, j)$  de la matrice :  $g(i, j) = f(P(i, j))$ ,
- *spatiale*, *ie.* basée sur la position spatiale  $(i, j)$  des éléments dans la matrice :  $g(i, j) = f(i, j)$ .

Les attributs extraits des matrices de cooccurrence ont été initialement définis [Haralick et al., 1973] afin de caractériser la texture dans des images **Landsat** d'occupation du sol : Haralick *et al.* cherchent essentiellement à segmenter les zones urbaines sur ces images. Ils ont défini pour cela quatorze fonctions de pondération (figure 4.3), et donc quatorze attributs, dérivés de la matrice  $M_{\mathbf{t}}$ . Six attributs sont généralement considérés comme les plus significatifs pour l'analyse de la texture :

le *contraste*, l'*énergie* (ou second moment angulaire), l'*homogénéité*, la *corrélation*, l'*entropie* ainsi que la *variance* [Welch et al., 1988] :

$$\begin{aligned}
 \text{Contraste} &= \sum_{i,j=1}^{N_G} (i-j)^2 P(i,j) & \text{Corrélation} &= \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \sum_{i,j=1}^{N_G} (ij P(i,j) - \mu_x \mu_y) \\
 \text{Énergie} &= \sum_{i,j=1}^{N_G} (P(i,j))^2 & \text{Entropie} &= - \sum_{i,j=1}^{N_G} P(i,j) \log(P(i,j)) \\
 \text{Homogénéité} &= \sum_{i,j=1}^{N_G} \frac{1}{1 + (i-j)^2} P(i,j) & \text{Variance} &= \sum_{i,j=1}^{N_G} (i - \mu_x)(j - \mu_y) P(i,j)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où  $\mu_x$  et  $\sigma_x$  désignent la moyenne et l'écart-type des vecteurs de probabilités marginales, obtenues en sommant selon les lignes de la **MC** ; les termes  $\mu_y$  et  $\sigma_y$  sont relatifs aux colonnes. Dans la suite du document, nous dirons d'un attribut textuel extrait d'une **MC** qu'il est un **MC**-attribut.

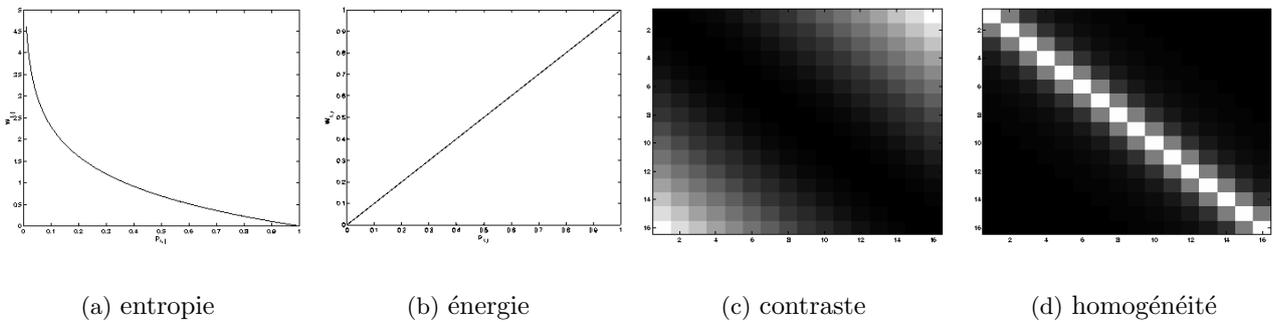


FIG. 4.3.: Exemples de fonctions de pondération de la **MC** pour le calcul des attributs : (a),(b) pondération fonctionnelle, (c),(d) pondération spatiale.

Le calcul des **MC**-attributs est classiquement [Ebert, 1989] [Welch et al., 1988] opéré sur des voisinages disjoints partitionnant l'image de texture, tels que sur l'exemple de la figure 4.4. De nombreux travaux, concernant la classification d'occupation du sol ou de structures nuageuses, montrent que les **MC**-attributs fournissent bien souvent de meilleurs résultats que des méthodes basées sur des attributs fréquentiels [Weszka et al., 1976] [Welch et al., 1988] ou des méthodes de décision bayésienne [Kittler et Pairman, 1985].

### Attributs de texture locaux

La segmentation de texture implique d'identifier, dans une image donnée, les régions avec des textures uniformes et des frontières nettes, et nécessitent donc une analyse locale. Afin de définir la valeur locale d'un attribut en chaque pixel de l'image, on propose de calculer des **MC** dans des fenêtres d'analyse locales. Pour chaque pixel de l'image, une **MC** est remplie en regard d'une fenêtre de taille prédéfinie et centrée sur ce pixel : des couples de pixels à l'intérieur de cette fenêtre, séparés par une translation fixée, sont utilisés pour le calcul des cooccurrences des niveaux de gris.

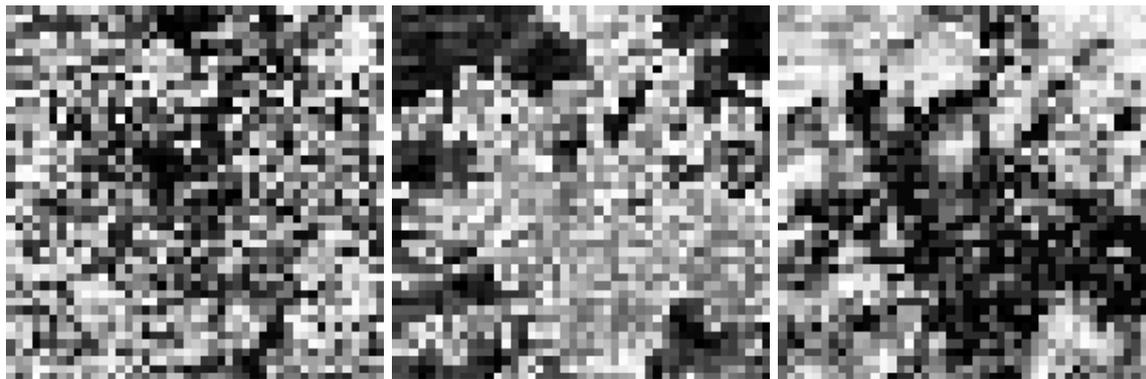


FIG. 4.4.: Exemples d'attributs de texture calculés sur des blocs disjoints  $20 \times 20$  de l'image **IR** de la figure 4.2. **De gauche à droite** : contraste, homogénéité et énergie.

Soit un pixel  $\vec{x}$  de l'image  $I$  et une fenêtre  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\vec{x}}$  (de dimension  $2 \times l_{\mathcal{W}} + 1$ ) autour de ce pixel, on étend la formule (4.1) à une définition locale :

**Définition 4.4** La **MC** locale  $M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}$  en un pixel  $\vec{x}$  est donnée, pour un vecteur de déplacement  $\mathbf{t}$ , par :

$$M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}(i, j) = \text{Card} \{ (\vec{y}, \vec{y}') \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}, \mathbf{t}} \mid I(\vec{y}) = i, I(\vec{y}') = j \} \quad (4.5)$$

où  $\mathcal{C}_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}$  désigne l'ensemble :  $\{ (\vec{y}, \vec{y}') \in \mathcal{W}^2 \mid \vec{y}' = \vec{y} + \mathbf{t} \}$  des paires de pixels de la fenêtre  $\mathcal{W}$  séparés l'un de l'autre par un déplacement de vecteur  $\mathbf{t}$ .

Les **MC**-attributs, comme définis en (4.4), peuvent alors être calculés à partir de la matrice  $M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}$  et des probabilités  $P_{\mathcal{W}, \mathbf{t}} = P_{\mathcal{W}}$  locales. On attribue finalement au pixel  $\vec{x}$  la valeur de l'attribut calculé à partir de la **MC** locale.

Les versions locales des **MC** ont fourni, dans de très nombreux cas d'études (comparaison sur des *benchmarks* de textures [Randen et Husoy, 1999] [Du Buf et al., 1990], des résultats au moins aussi bons, si ce n'est meilleurs, que d'autres approches classiques, telles que les méthodes fractales, les méthodes par champs de Markov ou les méthodes utilisant des filtres locaux [Strand et Taxt, 1994] [Ohanian et Dubes, 1992]. L'utilisation de **MC** locales augmente cependant encore la complexité en temps de calcul.

#### 4.2.2. Variantes des MC et MC-attributs

##### Définitions de statistiques dérivées des MC

Compte tenu de la complexité en temps de calcul et les besoins en espace mémoire des **MC**, de nombreux travaux ont été menés visant à réduire la complexité algorithmique. Ceux-ci consistent généralement à effectuer des opérations vectorielles plus simples et plus efficaces.

On peut notamment utiliser le fait que la somme  $S = I_1 + I_2$  et la différence  $D = I_1 - I_2$  de deux variables aléatoires  $I_1$  et  $I_2$  de même loi sont décorréélées et définissent les axes d'inertie de la

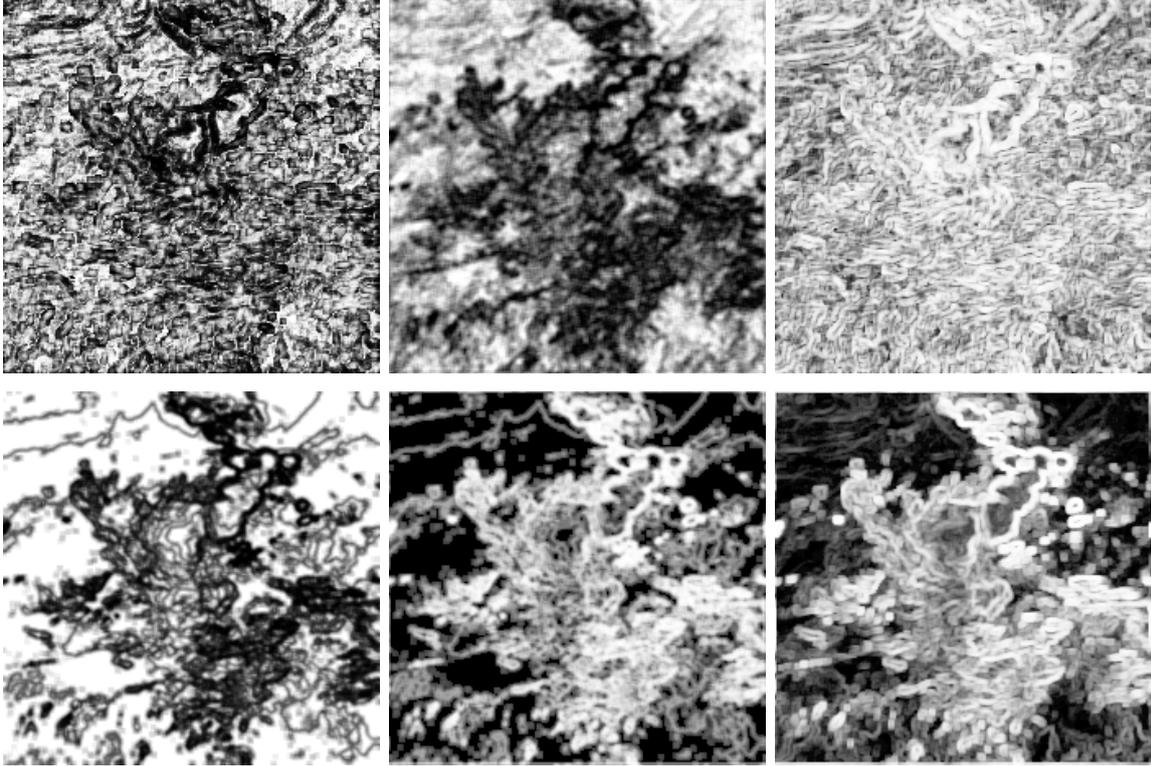


FIG. 4.5.: Exemples d'attributs locaux calculés sur une image **IR**. **De haut en bas, de gauche à droite** : contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie et variance. L'image est ramenée sur 16 niveaux de gris à l'intérieur de fenêtres analysantes de dimension  $7 \times 7$  dans lesquelles sont calculées les **MC** locales.

fonction de probabilité conjointe  $P = P_{I_1, I_2}$ . En faisant l'hypothèse d'indépendance des variables  $S$  et  $D$ , la fonction de probabilité conjointe peut alors être approximée par le produit des fonctions de probabilité selon les axes principaux constitués par  $S$  et  $D$  [Unser, 1986] :

$$P(i, j) = P_{S, D}(i + j, i - j) \simeq P_S(i + j) \cdot P_D(i - j). \quad (4.6)$$

La démarche suivie consiste alors à remplacer le calcul des **MC** par celui des histogrammes des sommes et différences de niveaux de gris entre couples de pixels (approche **SADH** : *Sum And Difference Histograms*). En outre, l'utilisation du seul histogramme de différences  $P_D$  des niveaux de gris (approche **GLDV** : *Grey Level Difference Vector*) conduit à des résultats intéressants. Les cooccurrences peuvent être efficacement remplacées par les différences de niveaux de gris ; sous l'hypothèse d'indépendance de  $I_1$  et  $D$ , on a une approximation de la probabilité conjointe  $P(i, j)$  de deux pixels voisins [Unser, 1986] [Chen et al., 1989] :

$$P(i, j) = P_{I_1, D}(i, i - j) \simeq P_{I_1}(i) \cdot P_D(i - j). \quad (4.7)$$

La perte d'information liée à cette factorisation est minimale. Comme la distribution  $P_{I_1}(i)$  n'apporte pas d'information sur la texture mais sur la luminance globale de l'image, l'approche **GLDV** est fondée uniquement sur la distribution  $P_D(i - j)$  et les différences de niveaux de gris. Des

histogrammes multi-dimensionnels de cooccurrence de niveaux de gris peuvent également être envisagés, *i.e.* l'extension des **MC** à des groupes de plus de deux pixels [Valkealahti et Oja, 1998]. Ces définitions sont toutes généralisables à des statistiques locales.

### Extraction d'attributs de texture

Dans le cas **GLDV**, basé sur les histogrammes de différences de niveaux de gris, la plupart des descripteurs proposés par Haralick peuvent aisément être recalculés. L'alternative aux définitions de (4.4) des attributs consiste à considérer les moments statistiques de ces histogrammes. On définit, pour un déplacement  $\mathbf{t}$ , la fonction de densité de probabilité  $P_{\mathbf{t}}$  associée à l'histogramme des différences :

$$P_{\mathbf{t}}(i) = \text{Card} \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{t}} / |I(\vec{x}) - I(\vec{y})| = i\}$$

(plus simplement notée  $P(i)$ ) à partir de laquelle on peut étendre la définition des **MC**-attributs suivant les relations :

$$\begin{aligned} \text{Contraste} &= \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{G}}-1} \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} i^2 & \text{Entropie} &= - \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{G}}-1} \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} \log \left( \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} \right) \\ \text{Énergie} &= \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{G}}-1} \left( \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} \right)^2 & \text{Moyenne} &= \frac{1}{N_{\mathcal{G}}} \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{G}}-1} \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} i \\ \text{Homogénéité} &= \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{G}}-1} \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} \frac{1}{1+i^2} & \text{Variance} &= \sum_{i=0}^{N_{\mathcal{G}}-1} \left( (i-\mu)^2 \frac{P(i)}{N_{\mathcal{C}}} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

où  $\mu$  désigne la moyenne des probabilités,  $N_{\mathcal{G}}$  représente le nombre de niveaux de gris considérés et  $N_{\mathcal{C}} = \text{Card}(\mathcal{C}_{\mathbf{t}})$ .

Cette variante est très souvent utilisée dans le domaine de la classification nuageuse [Chen et al., 1989] [Welch et al., 1988]. Dans [Chen et al., 1989], une comparaison des approches **GLCM**, **SADH** et **GLDV** montre que les deux dernières techniques, évidemment moins coûteuses en temps de calcul et en espace mémoire, fournissent, par ailleurs, des résultats équivalents en terme de précision et de qualité d'estimation. De nombreux autres travaux ont montré que ces attributs sont adaptés à la classification de structures nuageuses [Lee et al., 1990] [Pankiewicz, 1996]. Ces recherches mettent en évidence le fait que l'information de texture est en fait principalement contenue dans les statistiques des différences de niveaux de gris : la notion de dynamique interne des textures est primordiale<sup>2</sup>.

#### 4.2.3. Représentation du contenu textuel des images IR par les MC-attributs

Nous utilisons les échantillons **IR** et **VIS** de séquences **Meteosat**, déjà présentés au chapitre 2, mettant en évidence des structures nuageuses, plus ou moins complexes, de dimension plus ou moins importante, afin d'étudier les propriétés et caractéristiques de ces données vis-à-vis des **MC**-attributs. Notons que nous ne nous intéressons, pour le moment, qu'au calcul de vecteurs de

<sup>2</sup>Nous trouverons dans la suite une approche semblable lorsque nous analyserons une image *via* son gradient.

description locale des images ; nous essayons de fournir une interprétation et nous nous limitons à une description qualitative de ces descripteurs en terme visuel et théorique, comme dans l'étude [Baraldi et Parmiggiani, 1995]. Nous n'établirons de résultat de classification que dans la section suivante.

### Contraintes expérimentales

L'estimation des **MC** locales  $M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}$  nécessite la définition de différents paramètres. Les  $M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}$  sont calculées dans des *fenêtres mobiles* définies en tout pixel de l'image à l'aide de l'équation (4.5). Il n'existe pas de méthode précise pour déterminer les vecteurs de déplacement pertinents, et calculer les **MC** pour tous les déplacements possibles est évidemment infaisable. Il en va de même pour la sélection de la taille de la fenêtre analysante. Certaines études [Puig et Garcia, 2001] proposent des algorithmes de sélection de la dimension  $l_{\mathcal{W}}$  de cette fenêtre (basés sur la calcul d'une dimension optimale au sens d'un critère de discrimination des textures, ce qui alourdit encore les calculs), mais la plupart des méthodes définissent ces dimensions expérimentalement sans vraiment justifier leurs choix. Par souci de réduction de la complexité calculatoire, le calcul de ces matrices est réduit à un nombre limité de niveaux de gris mais aussi de déplacements.

Lors du calcul de la **MC** en un pixel  $\vec{x}$ , deux approches différentes d'estimation de l'histogramme local de distribution conjointe des paires de niveaux de gris accessibles dans la fenêtre analysante  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\vec{x}}$  doivent être adoptées suivant le type d'attribut que l'on souhaite extraire :

- Pour des **MC**-attributs tels que le contraste, l'homogénéité ou la corrélation, les niveaux de gris sont requantisés localement, *i.e.* les niveaux de gris sont normalisés par rapport aux extrema locaux de la fenêtre  $\mathcal{W}$  avant de calculer l'histogramme local qui est discrétisé sur 32 niveaux de gris (ce qui correspond à une précision de 5 bits comme le suggèrent de nombreuses études afin d'alléger les calculs [Shokr, 1991]). Cela permet de comparer les **MC**-attributs pour des dynamiques équivalentes à l'intérieur des fenêtres.
- En revanche pour le calcul de l'entropie ou de l'énergie, les quantités calculées doivent être du même ordre en différents pixels : les voisinages considérés doivent avoir une dynamique similaire. Cela signifie qu'on procède au préalable à une compression de la dynamique de l'image originale (sur 32 niveaux de gris également) et que l'histogramme local de distribution conjointe dans la fenêtre  $\mathcal{W}_{\vec{x}}$  est calculé compte tenu des extrema globaux de l'image (et non pas de ceux de la fenêtre).

Nous illustrons le calcul des **MC**-attributs pour différents déplacements  $\mathbf{t}$  définis par leur orientation  $\theta$  ( $0, \pi/4, \pi/2$  et  $3\pi/4$ ) et leur norme  $d$  ( $1, \sqrt{2}$  et 5 pixels, ce qui représente des cellules nuageuses séparées d'environ 5, 7 et 25 *km* sur les images **IR**, de 2.5, 3.5 et 7.5 *km* sur les images **VIS**, pour tâcher de rester à l'intérieur des structures nuageuses) ainsi que différentes fenêtres analysantes de dimension  $l_{\mathcal{W}}$  (2, 5 et 10 pixels). Ces exemples nous permettent d'étudier l'arrangement spatial des niveaux de gris des images et de mettre en évidence certaines propriétés.

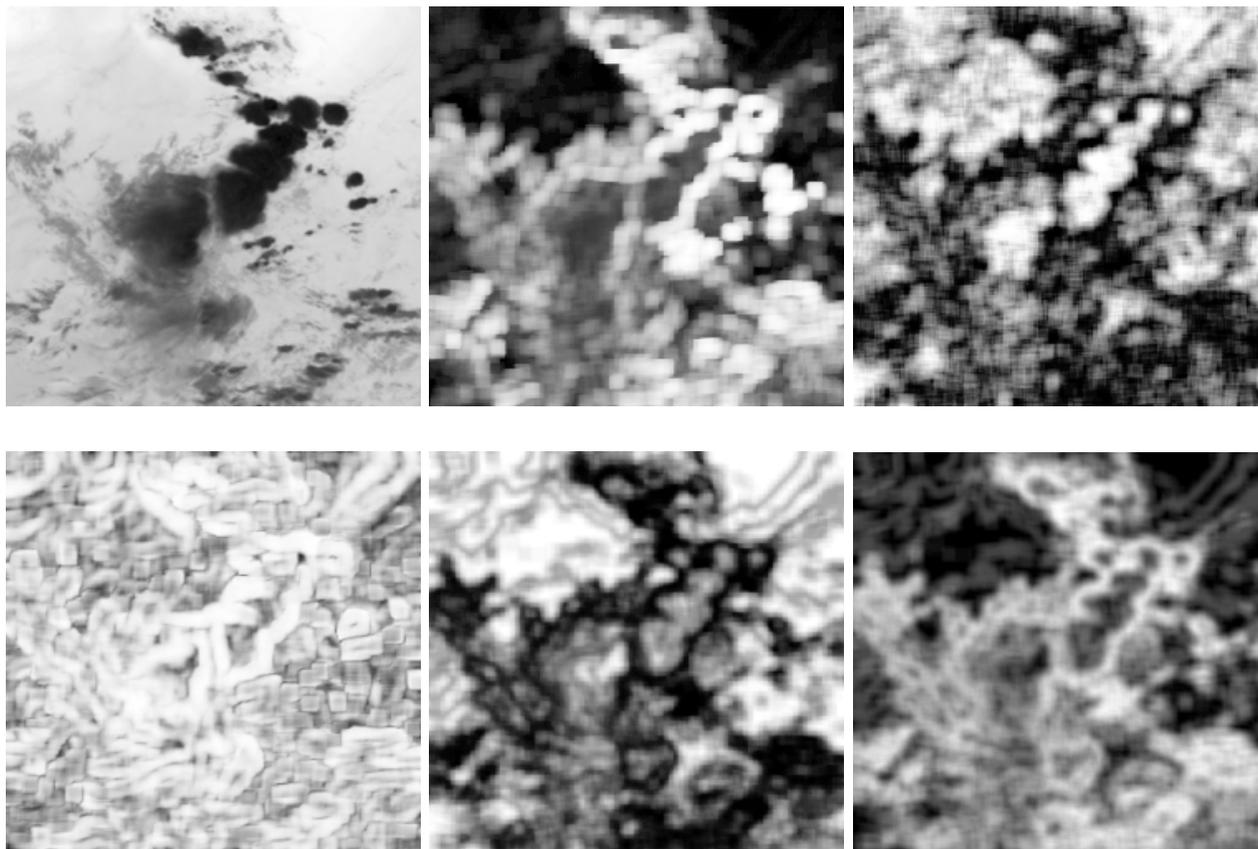


FIG. 4.6.: Calcul par la méthode **GLCM** de **MC**-attributs locaux sur une image **IR**. De haut en bas, de gauche à droite : image **IR**, contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie. Les paramètres d'analyse sont : la taille  $l_{\mathcal{W}} = 5$  de la fenêtre  $\mathcal{W}$ , l'orientation  $\theta = \pi/4$  et la distance  $d = \sqrt{2}$  du déplacement entre les pixels considérés pour le calcul de  $M_{\mathcal{W},t}$ .

### Analyse des résultats

Le contraste permet de mesurer les variations locales de niveau de gris : il est une mesure naturelle de la dispersion des niveaux de gris. Une petite valeur de contraste indique une forte concentration des occurrences de niveaux de gris sur la diagonale principale de la **MC** et représente donc une texture grossière ; une grande valeur de contraste décrit des occurrences étalées autour de la diagonale principale et représente une structure fine à l'échelle et à la distance  $d$  observée. L'attribut de contraste permet essentiellement de mettre en évidence les frontières des structures. Compte tenu de la faible dynamique (à l'exemple du nuage observé sur l'image 4.9), les valeurs de contraste sont très faibles à l'intérieur des nuages et ne permettent pas de discriminer des sous-structures particulières. Généralement, on peut vérifier que les petites cellules nuageuses présentent de grandes variations de luminosité, tandis que les structures plus grandes présentent des variations plus douces, plus graduelles et paraissent plus lisses. Pour cette raison, les petites cellules fortement convectives proposent de grandes variations du contraste sur de faibles distances, tandis que les grandes structures

nuageuses présentent de faibles variations. Lorsque l'on augmente la taille du voisinage de calcul des matrices de cooccurrence (figure 4.11(a)), les frontières détectées sont rendues plus floues ; les bords sont diffusés et nettement moins localisés. La capacité de détection diminue avec l'échelle d'analyse. Notons qu'une image de faible contraste n'est pas nécessairement caractérisée par une distribution de niveaux de gris concentrée, *i.e.* elle ne présente pas forcément une faible variance, mais elle possède en tout cas fréquences spatiales très faibles. C'est notamment typiquement le cas des images météorologiques [Lakshmanan et al., 2000].

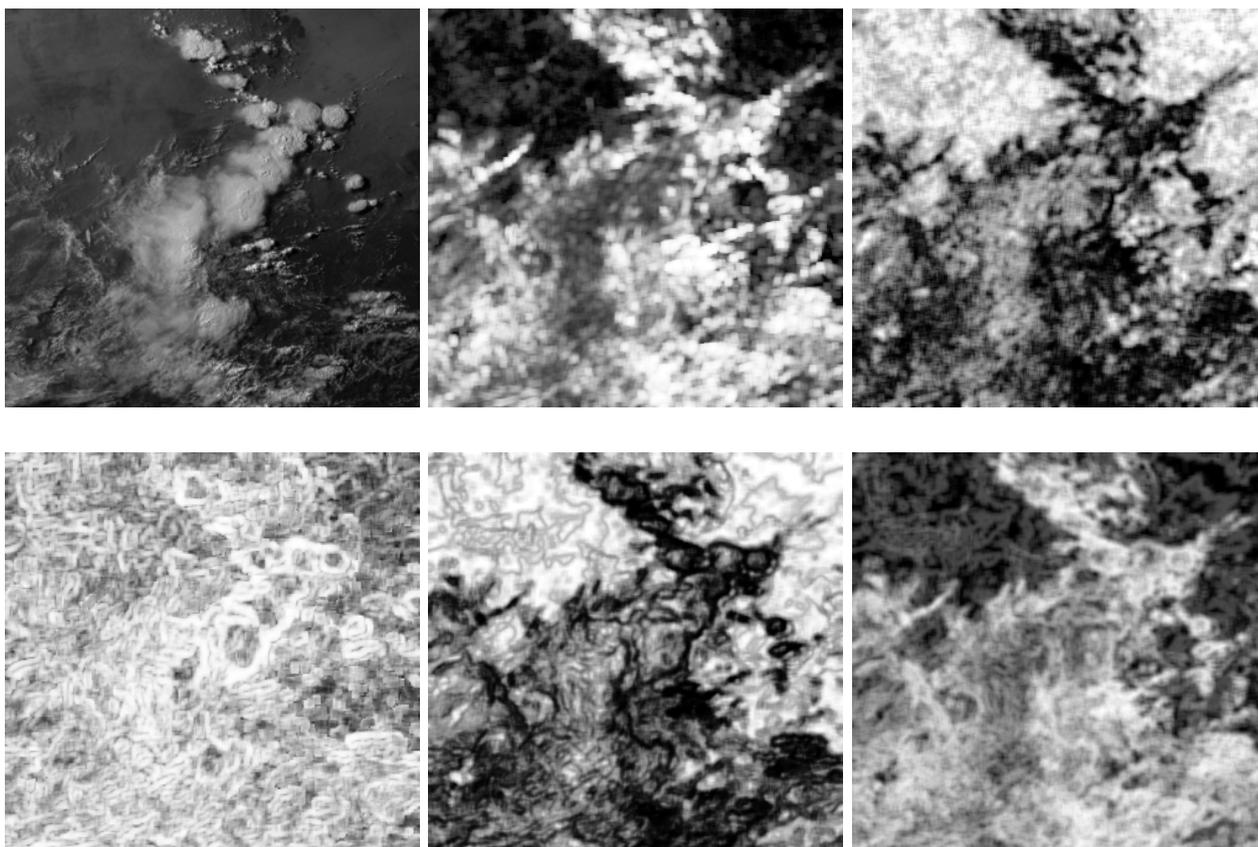


FIG. 4.7.: Calcul par la méthode **GLCM** de **MC**-attributs locaux sur une image **VIS**. De haut en bas, de gauche à droite : acquisition **VIS**, contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie. Les paramètres d'analyse sont :  $l_{\mathcal{V}} = 5$ ,  $\theta = \pi/4$  et  $d = \sqrt{2}$ .

L'homogénéité donne une idée des similarités locales. Comme cet attribut affecte de grandes valeurs aux petites différences de niveaux de gris entre paires de pixels, il est donc sensible à la présence, dans la **MC**, d'entrées proches de la diagonale principale, *i.e.* à de faibles contrastes et à des structures organisées. L'homogénéité locale se révèle fortement corrélée avec le contraste, possédant un comportement totalement opposé à celui de cet attribut : les régions de faible contraste présentent une forte homogénéité locale, et inversement (*cf.* comparaison des figures 4.6, 4.7 et 4.8). L'homogénéité et le contraste sont, classiquement, les **MC**-attributs les plus utilisés dans les méthodes de classification des structures nuageuses [Welch et al., 1988] ; les régions à fort contraste sont

généralement considérées comme des régions à forte activité convective. Remarquons les très fortes valeurs d'homogénéité à l'intérieur du nuage de la figure 4.9. On pourrait vérifier que pour des couples de pixels séparés par une distance de plus en plus grande (mais inférieur à la taille du nuage) le contraste resterait relativement faible. Comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre 3, si les valeurs de la luminance apparaissent relativement uniformes dans cette zone, c'est parce que la dynamique de l'intensité est très faible (spécialement sur cet exemple). De même que pour le contraste, lorsque l'on augmente la dimension de la fenêtre analysante (*cf.* figures 4.10(a)), la capacité de détection des éléments de l'image diminue.

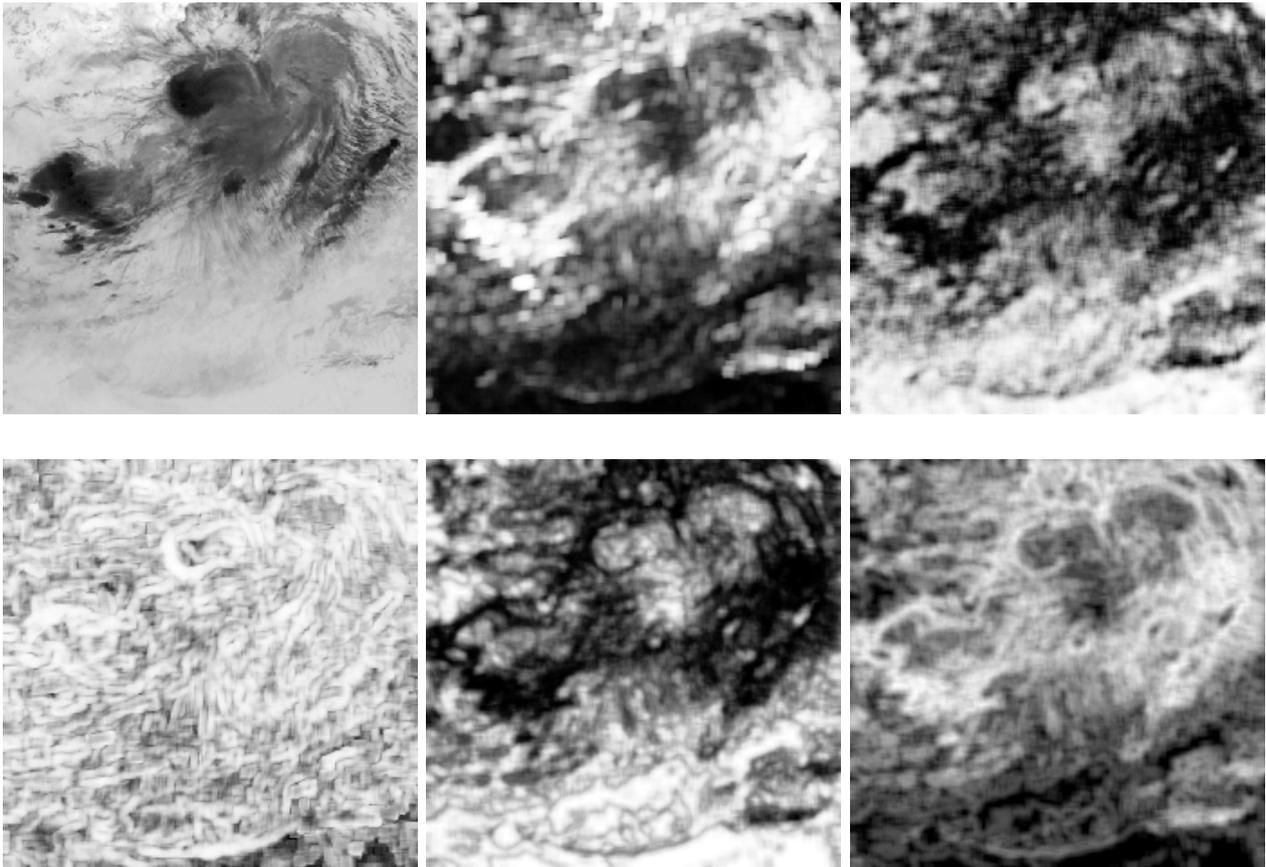


FIG. 4.8.: Calcul par la méthode **GLCM** de **MC**-attributs locaux sur une image **IR**. **De haut en bas, de gauche à droite** : acquisition **IR**, contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie. Les paramètres d'analyse sont : la taille  $l_{\mathcal{W}} = 5$  de la fenêtre  $\mathcal{W}$ , l'orientation  $\theta = \pi/4$  et la distance  $d = \sqrt{2}$  du déplacement.

La corrélation est une mesure de la dépendance linéaire entre les niveaux de gris. De fortes valeurs de corrélation implique une forte dépendance linéaire des niveaux de gris de paires de pixels dans la direction considérée. La corrélation devrait tenir compte de la directionnalité de la structure nuageuse, davantage que ne le fait le contraste. On ne note cependant pas sur ces images (figure 4.11(c)) de différences particulières entre les valeurs de la corrélation locale calculées pour

des orientations  $\theta$  différentes; la distribution des niveaux de gris dans la structure nuageuse de l'image 4.9 est particulièrement isotropique. On voit sur la figure 4.11(b) que la corrélation décroît avec la distance séparant les couples de pixels que l'on considère dans le calcul de la **MC** (davantage dans la direction horizontale  $\theta = 0$  en fait). Il y a peu de corrélation à grande échelle dans la structure. Lorsque on augmente l'échelle d'analyse, on perd la capacité de détection des frontières de l'attribut de corrélation. Il y a un effet de bord avec la fenêtre, puisqu'on peut appréhender très nettement, pour une fenêtre de taille  $21 \times 21$ , le lissage qui est effectué à l'intérieur de celle-ci. On perd bien évidemment en localisation des structures.

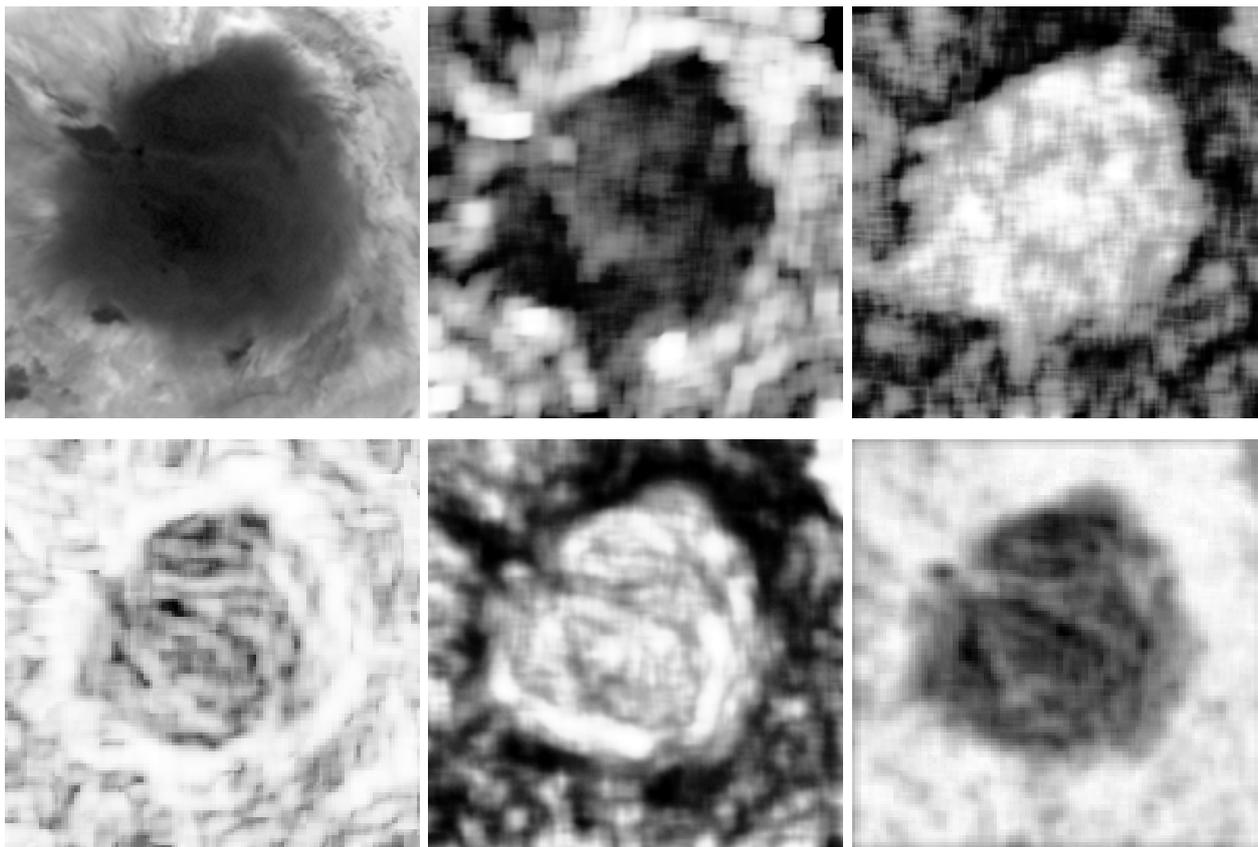


FIG. 4.9.: **MC**-attributs **GLCM** sur une image **IR** : détails. De haut en bas, de gauche à droite : acquisition **IR**, contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie. Les paramètres d'analyse sont :  $l_W = 5$ ,  $\theta = \pi/4$  et  $d = \sqrt{2}$ .

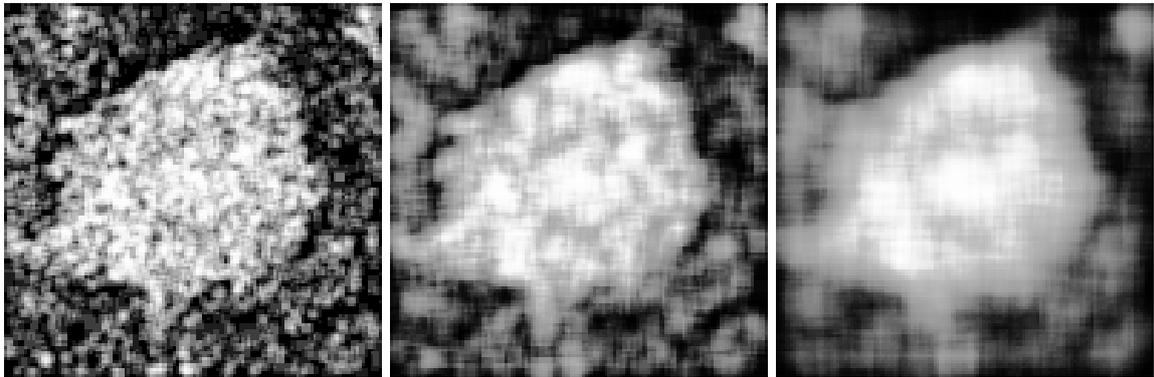
L'entropie est une mesure du désordre dans l'image. Lorsque l'image n'est pas textuellement uniforme, beaucoup d'entrées de la matrice de cooccurrence ont de faibles valeurs, et, en conséquence, l'entropie est très grande. Dans le cas limite où l'on considèrerait une distribution aléatoire de niveaux de gris dans une fenêtre de dimension finie, l'histogramme serait constant et l'entropie atteindrait son maximum relativement à la taille de la fenêtre. Le calcul de l'entropie locale montre que, si, globalement, l'entropie de l'intérieur des nuages est faible, il y a des zones de forte entropie qui peuvent être discriminées. L'entropie tient en fait compte de la répartition des niveaux de gris,

indépendamment des valeurs de niveaux de gris accédés localement ; elle est d'autant plus élevée que les niveaux de gris sont également distribués. Cet attribut permet d'atténuer le problème de la faible dynamique (étendue des niveaux de gris) interne des structures nuageuses. L'entropie locale permet de discriminer grossièrement (et de manière discontinue) des zones à l'intérieur des nuages mieux que sur les images originales. À l'intérieur notamment du nuage 4.9, on peut mettre en évidence différents éléments de la structure : il y a des zones de forte entropie, alors que globalement l'entropie de tout le nuage est faible. Une telle discrimination n'est pas possible avec des **MC**-attributs tels que le contraste ou l'homogénéité, puisque ceux-ci tiennent compte des valeurs de niveaux de gris accessibles. Ainsi, malgré de nombreuses transitions de niveaux de gris dans les zones de forte entropie, ces transitions ne donnent lieu qu'à de très faibles valeurs de contraste (*resp.*, de très fortes valeurs d'homogénéité), puisqu'elles ont lieu entre très peu de niveaux de gris. L'énergie mesure l'uniformité texturale, *i.e.* les répétitions de paires de pixels. Elle est d'autant plus petite que les niveaux de gris sont également distribués. Une grande valeur de l'énergie indique au contraire qu'il y a des niveaux de gris prépondérants (davantage représentés). Lorsque la zone considérée est homogène (seules des paires de pixels très semblables sont présentes) ou, similairement, quand elle est texturellement uniforme (le vecteur de déplacement fournit toujours le même couple de niveaux de gris), seulement un petit nombre d'entrées de la matrice seront plus différentes de 0, très proches de 1, tandis que la plupart seront à 0. En conséquence, de hautes valeurs d'énergie se produisent lorsque la distribution des niveaux de gris dans la zone considérée est soit constante, soit périodique. Les faibles valeurs de l'énergie à l'intérieur des nuages indiquent en fait une homogénéité de la luminance (reliée à la faible dynamique). Pour une région homogène de l'image où il y a très peu de niveaux de gris dominants (*i.e.* lorsque la répartition des niveaux de gris est équiprobable), la matrice de cooccurrence a très peu d'entrées, et, en conséquence, l'énergie (qui est la somme des carrés des entrées de la matrice de cooccurrence) est faible. Ainsi, pour l'image de la figure 4.9, de fortes valeurs de l'énergie à l'intérieur du nuage vont de paire avec de fortes valeurs d'entropie.

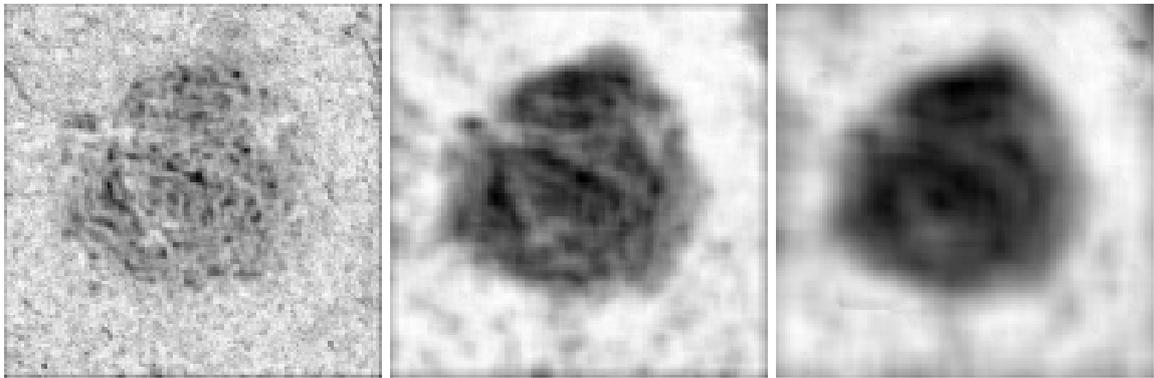
### Discussion

Il ressort de cette étude plusieurs remarques. Tout d'abord, concernant les propriétés des images **IR**, les considérations de la conclusion du chapitre précédent trouvent ici tout leur sens. Les **MC**-attributs, qui décrivent les relations (statistiques, mais aussi spatiales) entre les niveaux de gris mettent notamment en évidence la faible dynamique des données. Et la structure interne des nuages n'est pas capturée par ces attributs. Du point de vue méthodologique, on est confrontés aux limitations des méthodes de représentation qui nécessitent le calcul de nombreux attributs. Un algorithme de segmentation automatique nécessite le calcul préalable des **MC**-attributs ainsi que la définition et la sélection des différents paramètres à fixer avant l'analyse. Cela exige en fait la connaissance préalable des caractéristiques des textures pour effectuer ces choix, excluant la réalisation d'une segmentation non supervisée. Par ailleurs, le nombre de **MC**-attributs nécessaires croît très rapidement avec le nombre de textures à discriminer.

Il ressort également que l'échelle d'analyse des images joue un rôle important dans la description



(a) Homogénéité pour  $l_W = 2$ ,  $l_W = 5$  et  $l_W = 10$ .

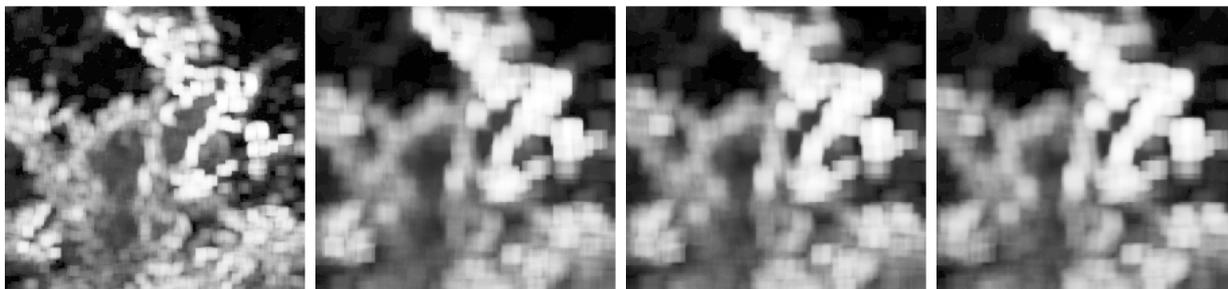


(b) Entropie pour  $l_W = 2$ ,  $l_W = 5$  et  $l_W = 10$ .

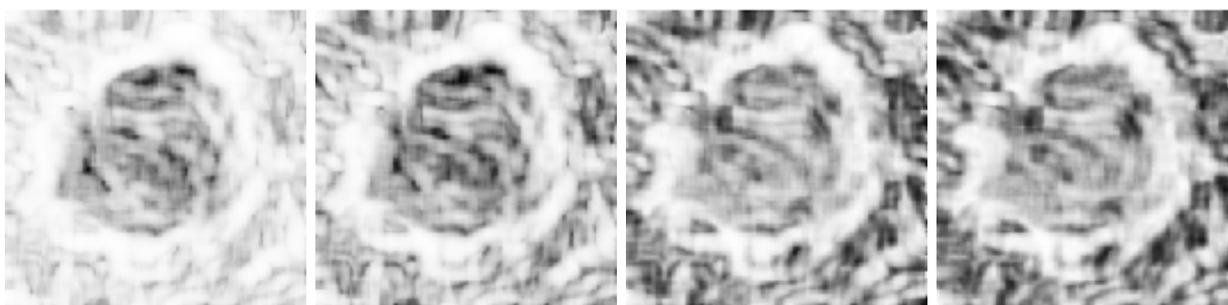


(c) Corrélacion pour  $l_W = 2$ ,  $l_W = 5$  et  $l_W = 10$ .

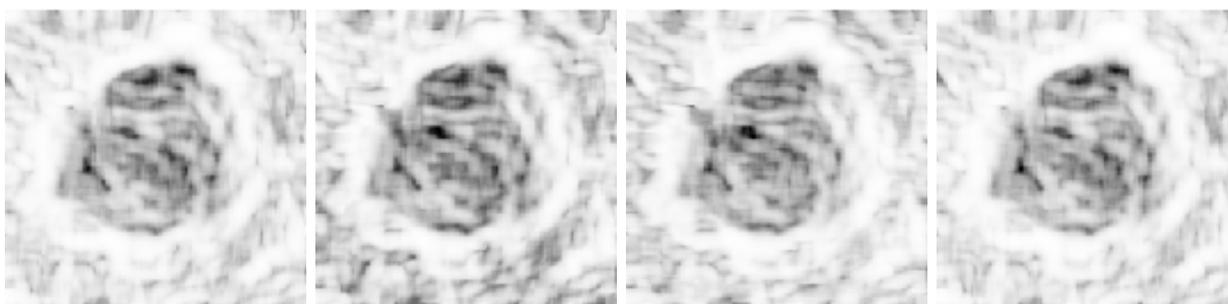
FIG. 4.10.: Influence de la taille  $l_W$  de la fenêtre sur le calcul de différents MC-attributs. Le déplacement entre pixels est fixé à  $\theta = \pi/4$  et  $d = \sqrt{2}$ .



(a) Contraste pour  $d = 1, d = 2, d = 4$  et  $d = 7, \theta = 0$ .



(b) Corrélation pour  $d = 1, d = 2, d = 4$  et  $d = 7, \theta = 0$ .



(c) Corrélation pour  $d = 1$  et  $\theta = 0, d = \sqrt{2}$  et  $\theta = \pi/4, d = 1$  et  $\theta = \pi/2, d = \sqrt{2}$  et  $\theta = 3\pi/4$ .

FIG. 4.11.: Influence des paramètres  $d$  et  $\theta$  de déplacement entre pixels sur le calcul des MC-attributs : le *contraste* et la *corrélation*. La dimension de la fenêtre analysante est fixée à  $l_W = 5$ .

de la texture, en particulier en terme de détection et de localisation de structures d'intérêt. Les propriétés d'homogénéité, d'orientation ou d'isotropie d'une texture, par exemple, sont directement liés à l'échelle d'observation de cette texture [Azencott et al., 1990]. Cette notion d'échelle concerne la dimension de la fenêtre analysante. Rappelons que  $M_{\mathbf{t}}(i, j) \simeq P(i, j)$ , (à un facteur d'échelle près, équation (4.2)), *i.e.* les **MC** permettent d'estimer localement les distributions de probabilité conjointe de paires de pixels dans l'image : la texture est ainsi caractérisée localement par cette distribution dans un voisinage de taille fixe. Dans une fenêtre de dimension  $n \times n$  ( $n = 2 \times l_{\mathcal{W}} + 1$ ) codée sur un ensemble de  $N_G$  niveaux de gris, la quantité moyenne de pixels disponibles pour estimer la probabilité d'un niveau de gris est  $\frac{n \times n}{N_G}$ . Si l'on considère l'exemple d'une fenêtre de taille  $n = 32$  codée sur  $N_G = 32$  niveaux de gris, le nombre moyen de pixels disponibles pour l'évaluation de la probabilité de chaque niveau de gris est de 32 pixels, ce qui constitue encore un échantillon raisonnable. Cependant, on ne dispose plus, sur le même exemple, que de  $\frac{n \times n}{(N_G)^2} = 1$  pixel pour estimer la probabilité conjointe d'apparition d'un couple de niveaux de gris<sup>3</sup>. L'utilisation des **MC** locales (ou des histogrammes de différences de niveaux de gris) présente le désavantage d'exiger un compromis entre la qualité de l'information contenue et la résolution de l'image finale. En effet, les probabilités sont calculées sur des échantillons de taille réduite autour du pixel étudié. Pour éviter un bruit dû à la faible étendue des bases de calcul des probabilités, il convient de prendre des fenêtres d'analyse suffisamment grandes. De petites fenêtres ne permettent pas d'avoir une bonne estimation de la vraie distribution des niveaux de gris, et, par conséquent, de l'attribut ; en revanche, plus grande est cette fenêtre, plus faible est le bruit dans l'estimation et plus précis est le calcul de l'attribut. Cependant, une grande fenêtre implique davantage de moyennage des différentes textures qui peuvent coexister près des frontières d'une région : en effet, dans les zones caractérisées par des non-stationnarités de l'image, le fait de mélanger deux populations différentes de pixels donne un effet de lissage dans lequel l'information de frontière est perdue. Un algorithme de classification aura plus de difficulté à détecter ces frontières.

#### 4.2.4. Conclusion

Les résultats obtenus avec des méthodes classiques de description de la texture, sur les quelques exemples que nous avons présentés ici, laissent penser que l'information de texture est significative. L'intérêt des **MC**-attributs est de pouvoir évaluer localement le contenu textuel dans une petite région de l'image, permettant ainsi de détecter des changements dans les statistiques locales du signal. Un attribut comme l'entropie, par exemple, permet de s'affranchir de certaines contraintes liées à la nature des données. Cependant, la présence d'une discontinuité à la frontière de deux zones stationnaires adjacentes soulève des questions par rapport à une analyse en fenêtres. Les fenêtres qui chevauchent des régions contenant des jeux de données ayant des distributions de probabilité inconsistantes ne permettent pas d'extraire des statistiques représentatives. Avec ce type d'approche, les textures sont identifiées en utilisant des mesures locales simples, supposant implicitement qu'elles sont autosimilaires à des échelles différentes. Elles ne modélisent, par exemple,

<sup>3</sup>Remarquons tout de même que, dans la pratique, les images n'ont pas de statistiques uniformes, que le bruit est concentré sur les probabilités les plus faibles et que l'ensemble des niveaux de gris disponibles n'est pas forcément occupé, ce qui diminue l'erreur moyenne sur le calcul des probabilités.

pas exactement des textures avec des frontières fines ou des discontinuités brusques. En fait, les approches classiques ne permettent pas de tenir compte de l'invariance d'échelle exhibée, comme nous le verrons dans la suite, par les images **IR**. En conséquence il est habituellement difficile d'extraire des régions des structures irrégulières.

L'information de texture dans les images est clairement dépendante de l'échelle à laquelle se produit le phénomène, et par conséquent, la classification des structures dépend de la résolution des images. L'idée fondamentale est qu'il est indispensable d'observer tous les niveaux d'échelle en même temps pour analyser les structures différentielles d'une image [Lakshmanan et al., 2000] [Peak et Tag, 1994].

### 4.3. Généralisation multiéchelle des matrices de cooccurrence

Dans la mesure où il n'y a pas d'échelle optimale pour analyser toutes les structures présentes dans les images, il convient d'adopter une approche multiéchelle qui permette d'appréhender les propriétés de la texture à différentes échelles. Nous entendons dans la suite développer des attributs de description de la texture qui ne se fondent pas sur une fenêtre spatiale fixe comme c'est le cas dans les méthodes habituelles de traitement d'image. Il s'agit en fait de généraliser les **MC**-attributs classiques à des versions multiéchelles.

#### 4.3.1. La texture à travers les échelles

Une image de texture contient de l'information globale et de l'information locale. Cependant la résolution spatiale et la résolution fréquentielle de l'image sont physiquement reliés par la contrainte du principe d'invariance dans les deux directions (*cf.* annexe C). Ce principe exprime simplement qu'une haute précision en espace et en fréquence ne peut être atteinte simultanément. Pour la classification (nous devrions plutôt parler de discrimination) de texture, une mesure précise des fréquences (information globale portée par l'image) est nécessaire, et, par conséquent, un opérateur à noyau large doit être utilisé ; pour la détection de contours, il est au contraire nécessaire d'utiliser un opérateur à noyau de petite dimension afin d'exploiter le signal spatialement localisé (information locale). Dans le cas de la segmentation, il convient de conserver la précision maximale offerte par l'image originale. Il y a donc un compromis à trouver entre la discrimination et la détection des bords.

Comme nous l'avons souligné plus haut, lorsque l'on effectue une analyse locale, de petites fenêtres analysantes tendent à réduire la capacité de discrimination des textures, puisqu'elles estiment grossièrement ces distributions de probabilité, en prélevant des échantillons de niveaux de gris de taille insuffisante. D'un autre côté, de grandes fenêtres réduisent la capacité de détecter précisément les frontières, puisque les niveaux de gris sont lissés à l'intérieur de ces fenêtres. Il apparaît naturel de proposer une approche multiéchelle afin d'effectuer une segmentation qui réponde aux différentes contraintes.

### 4.3.2. MC et MC-attributs multiéchelles

Nous souhaitons extraire de l'image des attributs caractéristiques de l'échelle, sans perdre aucune information. Notre approche sera d'autant meilleure que toutes les échelles seront prises en compte mais que la redondance au sens des échelles sera faible. Nous désirons conserver la localisation spatiale du signal, tout en obtenant une localisation en échelles équivalente.

#### Introduction d'une pondération multiéchelle

Afin de satisfaire la contrainte multiéchelle, on peut envisager diverses techniques généralisant les MC. La distance  $d$  du déplacement  $\mathbf{t}$  peut tout d'abord être interprétée comme un paramètre d'échelle [Bradley et al., 1995] [Visa et al., 1991] : on obtient ainsi des MC tridimensionnelles sur lesquelles on peut calculer des MC-attributs. Une autre approche possible [Metzler et al., 2000] consiste à générer (*e.g.* par des filtrages successifs) une représentation multiéchelle de la texture et à introduire des corrélations à différentes échelles caractéristiques des propriétés de la texture. Des MC-attributs sont calculés pour des échelles individuelles, et ceux ayant le plus fort pouvoir discriminant à travers les échelles sont retenus. Cependant, toutes ces approches augmentent encore la complexité algorithmique car ils imposent de calculer plusieurs MC ou plusieurs représentations.

Afin de surmonter cette difficulté, il est possible d'introduire simplement une pondération invariante d'échelle dans le support spatial du voisinage de chaque pixel de l'image [Grazzini et al., 2003b]. L'estimation de la distribution conjointe  $P(i, j)$  telle qu'elle est classiquement proposée et réalisée [Haralick et al., 1973] consiste, comme on l'a vu dans la section précédente, à enregistrer les fréquences relatives des couples de niveaux de gris dans une fenêtre de taille fixe  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\vec{x}}$  centrée autour du pixel d'intérêt  $\vec{x}$ . Ceci implique que toutes les paires de pixels de cette fenêtre contribuent également à l'estimation de  $P(i, j)$ . Notre méthode se résume à substituer cette pondération uniforme par une pondération non-uniforme et fonction de la distance au pixel d'intérêt. Pour cela nous considérons une fenêtre  $\mathcal{W}$  de taille relativement importante dans laquelle les paires de pixels se voient assignés un poids en fonction de la distance de leur barycentre au pixel central  $\vec{x}$ . Lorsqu'un couple de niveaux de gris  $(i, j)$  est observé en une paire de pixels  $(\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ , séparés par un vecteur de déplacement  $\mathbf{t}$  donné, on ajoute à l'intervalle de l'histogramme correspondant à  $(i, j)$  la valeur  $\mathcal{N}/r^\alpha$ , où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation,  $r$  est la distance entre le barycentre du couple  $(\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  et  $\vec{x}$  et  $\alpha$  est un facteur d'échelle.

#### Construction de MC multiéchelles et calcul de MC-attributs multiéchelles

L'introduction d'une fonction de pondération spatiale, portant uniquement sur les positions relatives des paires de pixels par rapport au pixel central, permet de généraliser très facilement la formule (4.5) :

**Définition 4.5** *Pour un vecteur de déplacement  $\mathbf{t}$ , la MC locale multiéchelle  $M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}^m$  en  $\vec{x}$  est fonc-*

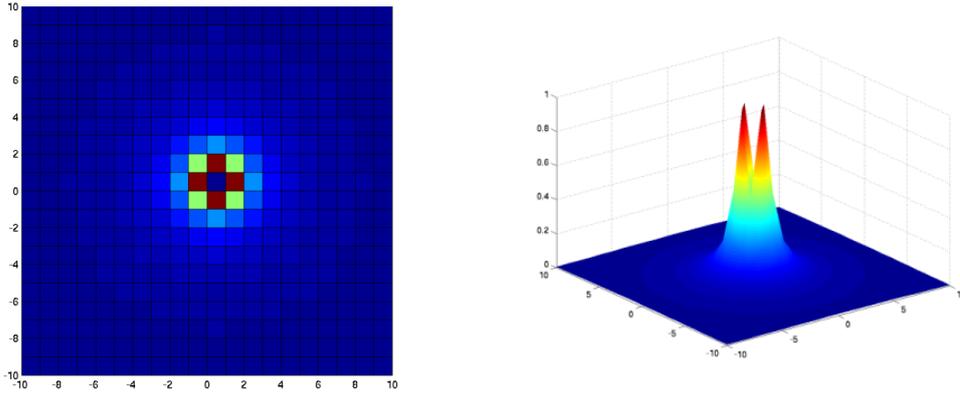


FIG. 4.12.: Représentations du facteur de pondération multi-échelle  $1/r^2$  sur une fenêtre de taille  $21 \times 21$  (à gauche : 2D, à droite : 3D). La pondération porte sur les barycentres des paires de pixels ; le pixel central n'est pas pris en compte (poids nul).

tion des positions des barycentres des paires de pixels et est donnée par :

$$M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}^m(i, j) = \sum_{(\vec{y}_0, \vec{y}_1) \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}, \mathbf{t}} | I(\vec{y}_0) = i, I(\vec{y}_1) = j} \left| \vec{x} - \frac{\vec{y}_0 + \vec{y}_1}{2} \right|^{-\alpha} \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{C}_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}$  désigne le voisinage :  $\{(\vec{y}_0, \vec{y}_1) \in \mathcal{W} | \vec{y}_1 = \vec{y}_0 + \mathbf{t}\}$ , avec la convention d'une pondération nulle lorsque le barycentre coïncide avec le pixel central.

Dans la suite, nous prendrons  $\alpha = 2$  (figure 4.12). D'autres choix de  $\alpha$  fourniraient en fait des résultats similaires (voire meilleurs) et toujours invariants d'échelle (figure 4.13) ; cependant, intuitivement, le choix de  $\alpha = 2$  se justifie davantage. En introduisant une telle pondération, on fait davantage contribuer les valeurs des paires de pixels proches du pixel d'intérêt que les valeurs des paires éloignées. Ceci assure une moindre dépendance dans la taille de la fenêtre et également une meilleure localisation (figure 4.14). Les calculs réalisés sont ainsi indépendants d'une échelle fixée : notre méthode est invariante d'échelle. En pratique, on effectue tout de même, pour limiter la complexité numérique, les calculs sur des voisinages de taille finie. Cependant, afin d'avoir un échantillonnage assez fin du signal et de limiter l'erreur de calcul sur la probabilité estimée, il convient de traiter un nombre suffisamment important de pixels, *i.e.* un histogramme de taille suffisante. Finalement, on choisit des fenêtres suffisamment grandes de dimension  $21 \times 21$  ( $l_{\mathcal{W}} = 10$  pixels), centrées en chaque pixel. Expérimentalement, les estimations changent très peu significativement pour des tailles de fenêtres plus grandes et une quantisation de  $I$  sur 64 niveaux de gris, ce qui n'implique pas de perte en localisation.

L'introduction des **MC** multiéchelles revient à considérer des fréquences  $p_{\mathcal{W}}^m$  (noté  $p^m$ ) de répartition conjointe multiéchelle dont les valeurs sont données par les entrées de la matrice  $M_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}^m$ . On est donc en mesure de définir une probabilité multiéchelle :

$$P^m(i, j) \propto \frac{1}{|\mathcal{W}^*|} \sum_{(\vec{y}_0, \vec{y}_1) \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}, \mathbf{t}}} \left| \vec{x} - \frac{\vec{y}_0 + \vec{y}_1}{2} \right|^{-\alpha} \delta_{I(\vec{y}_0) = i, I(\vec{y}_1) = j} \quad (4.10)$$

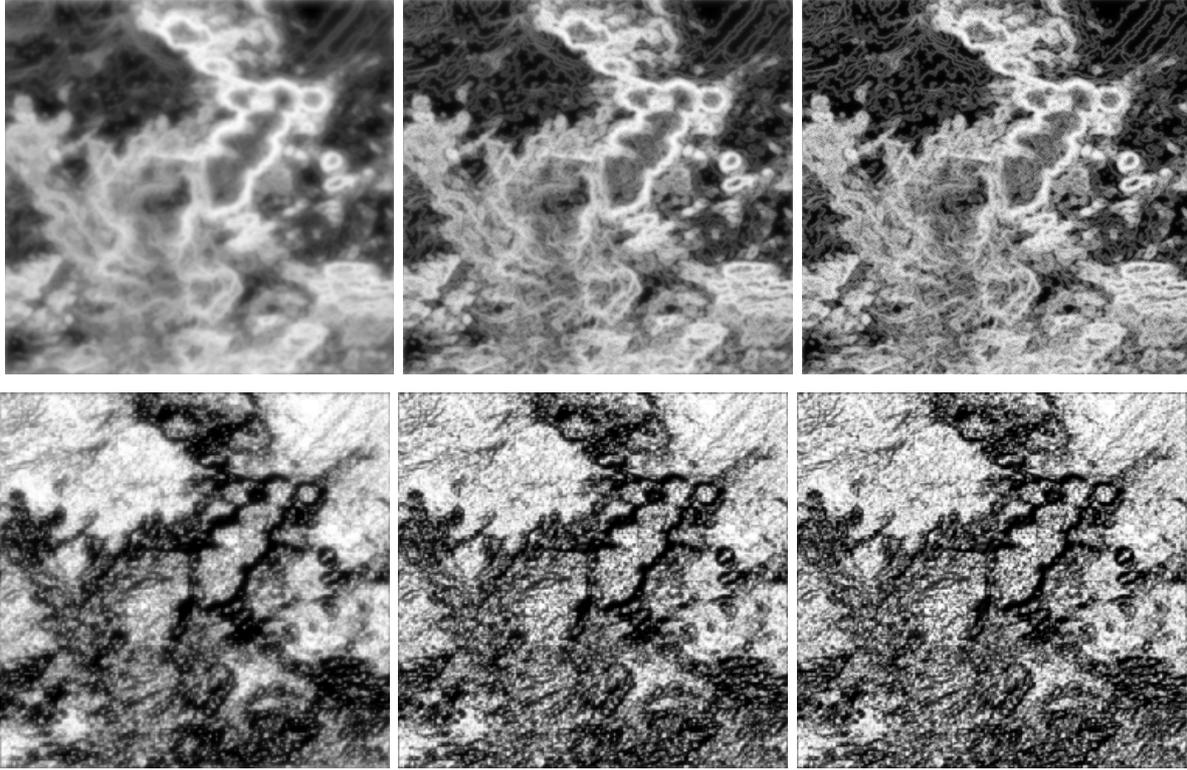


FIG. 4.13.: Calcul d'attributs multiéchelles (**en haut** : entropie, **en bas** : homogénéité) en fonction de l'exposant de pondération  $\alpha$ . **De gauche à droite** :  $\alpha = 2, 3$  et  $4$ . En augmentant l'exposant, on localise davantage les structures d'intérêt.

où  $\mathcal{C}_{\mathcal{W},t}$  désigne le même ensemble que ci-dessus, où  $\delta$  représente la fonction indicatrice et où le facteur de normalisation  $|\mathcal{W}^*|$  vaut simplement :

$$|\mathcal{W}^*| = \sum_{(\vec{y}_0, \vec{y}_1) \in \mathcal{C}_{\mathcal{W},t}} \left| \vec{x} - \frac{\vec{y}_0 + \vec{y}_1}{2} \right|^{-\alpha},$$

toujours avec la convention d'une pondération nulle lorsque le barycentre coïncide avec le pixel central. À partir de ces probabilités, l'équation (4.3) nous permet d'estimer des **MC**-attributs grâce à la formule :

$$\mathcal{A}^m(\mathbf{t}) = \sum_{i,j=1}^{N_g} g(i,j) P^m(i,j) \quad (4.11)$$

avec les mêmes fonctions  $g$  que celles proposées dans [Haralick et al., 1973].

### Variantes

Le temps de calcul d'un histogramme ou d'un histogramme joint sur une fenêtre relativement grande est équivalent au temps de calcul d'un filtre de la taille de la fenêtre d'analyse, ce qui est relativement coûteux et peut le devenir encore plus pour des fenêtres très grandes. Or, en

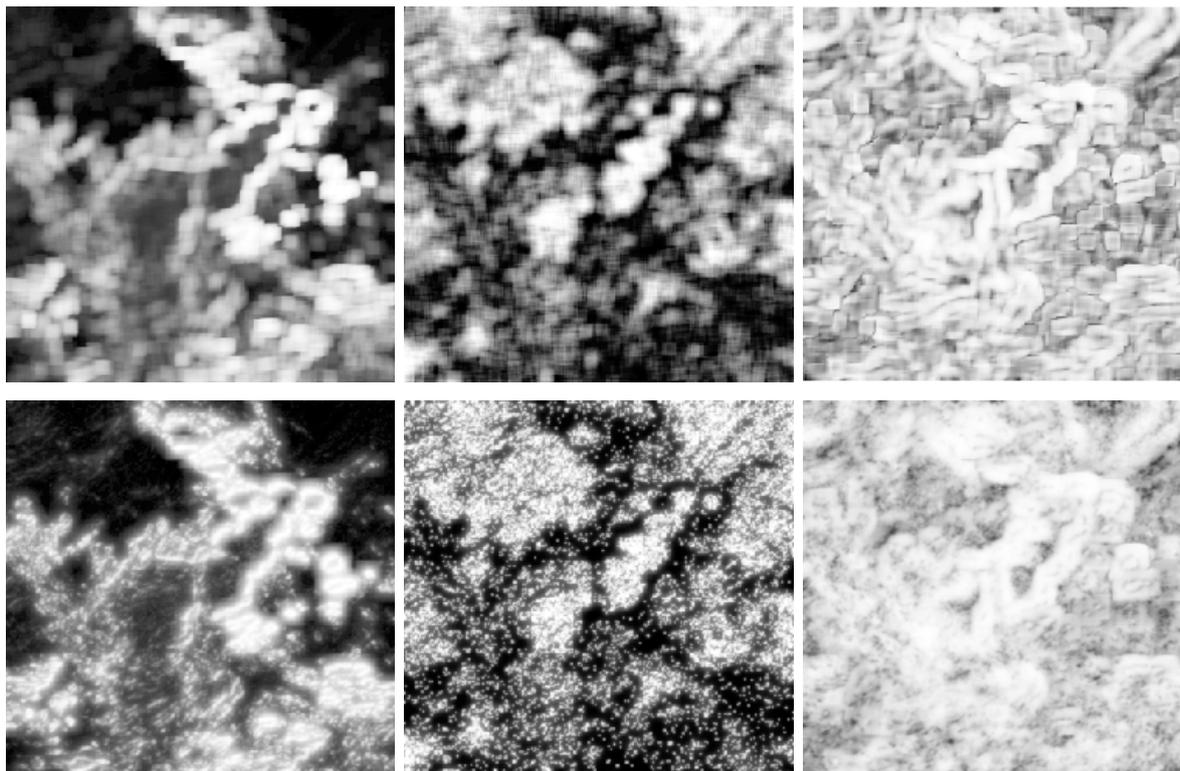


FIG. 4.14.: Comparaison de différents **MC**-attributs calculés par la méthode **GLCM** classique (**haut**) et la méthode **GLCM** multiéchelle (**bas**). De gauche à droite : contraste, homogénéité et corrélation.

supposant l'invariance par translation des statistiques de l'image<sup>4</sup>, il est possible de considérer les distributions marginales au lieu des distributions conjointes (approche **GLV**, *Grey Level Vector* [Baum et al., 1997]) pour l'estimation de certains **MC**-attributs tels que l'énergie ou l'entropie.

On définit ainsi, similairement à l'équation (4.10), la probabilité  $P^m$  de distribution marginale multiéchelle par :

$$P^m(i) \propto \frac{1}{|\mathcal{W}^*|} \sum_{\vec{y} \in \mathcal{W}^*} |\vec{x} - \vec{y}|^{-\alpha} \delta_{I(\vec{y})=i} \quad (4.12)$$

où le facteur de normalisation est égal à  $|\mathcal{W}^*| = \sum_{\vec{y} \in \mathcal{W}^*} |\vec{x} - \vec{y}|^{-\alpha}$ . Ce dernier est donc égal à l'inverse de la distance du pixel considéré au pixel central. De nombreux auteurs ont montré que l'utilisation des distributions marginales (au même titre que la distribution des différences, approche **GLDV**) permet d'obtenir d'aussi bonnes estimations des **MC**-attributs [Baum et al., 1997] [Unser, 1986]. Comme le montre la figure 4.15, c'est encore le cas lorsque l'on considère une version multiéchelle de ces probabilités.

<sup>4</sup>C'est une hypothèse classique sur les images naturelles, qui se ramène essentiellement à l'ergodicité du "processus" image.

1. On construit un masque  $\mathcal{M}$  (de même dimension  $n \times n$  que la fenêtre  $\mathcal{W}$ ) de pondération en loi de puissance  $r^{-2}$  à la distance  $r$  au centre du masque et de valeur nulle au centre.
2. Le pas de discrétisation  $N_G$  du signal est fonction de la taille  $n$  du masque. Le signal est ainsi discrétisé sur  $N_G$  niveaux de gris avec  $\log_2 N_G = 2\lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ . En particulier, pour  $n = 21$ , on a  $N_G = 128$ .
3. On tient compte des contraintes exprimées dans la section 4.2.3 : suivant l'attribut considéré, le rang de discrétisation est ramené aux extrema locaux dans la fenêtre  $\mathcal{W}$  ou aux extrema globaux du signal.
4. En chaque pixel  $\vec{x}$  de l'image :
  - on considère un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\vec{x}$  de la taille du masque  $\mathcal{M}$ .
  - on pondère la fréquence des paires de niveaux de gris par les entrées du masque  $\mathcal{M}$  ; pour toutes les paires  $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) \in \mathcal{W}$  séparés par le vecteur de déplacement  $\mathbf{t}$ , si le couple de niveaux de gris observé est  $(i, j)$ , alors le poids  $\mathcal{M}(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = |\vec{x} - (\vec{y}_0 + \vec{y}_1)/2|^{-2}$  est ajouté à l'histogramme des fréquences  $p^m(i, j)$ .
  - Un attribut  $\mathcal{A}^m(\mathbf{t})$  calculé à l'aide des probabilités  $P^m(i, j)$ , du facteur  $|\mathcal{W}^*|$ , qui est la somme des entrées du masque  $\mathcal{M}$ , et de la fonction  $g$  est assigné au pixel  $\vec{x}$ .

**Algorithme 1:** Calcul d'un MC-attribut multiéchelle.

### Propriétés

La généralisation multiéchelle à l'aide d'une fonction de pondération non-uniforme permet d'accéder de manière très simple (*cf.* algorithme (1)) à de l'information que l'utilisation des MC-attributs classiques ne permettrait d'obtenir qu'en considérant différentes tailles de fenêtres analysantes. Les avantages de cette méthode sont donc [Grazzini et al., 2003b] :

- la garantie de la stationnarité des données sélectionnées, mêmes dans les zones de l'image comportant des structures très fines ou dans des zones texturées,
- la disponibilité d'un nombre d'échantillons suffisamment grand pour estimer plus précisément les statistiques nécessaires pour le calcul de la valeur filtrée du pixel courant.

Par ailleurs, pour certains MC-attributs, notre méthode permet d'obtenir une moindre complexité en temps de calcul en considérant des probabilités marginales au lieu des probabilités conjointes.

## 4.4. Analyse et classification dans l'espace de représentation des MC-attributs

Intéressons nous à l'information apportée par les MC-attributs calculés à partir des MC multiéchelles. Pour cela, nous analysons les représentations des images dans l'espace multidimensionnel formé par les MC-attributs. Notre propos ici est de discuter l'intérêt des représentations par des attributs texturels, cette fois-ci généralisés dans un cadre multiéchelle, pour l'analyse de données **IR**.

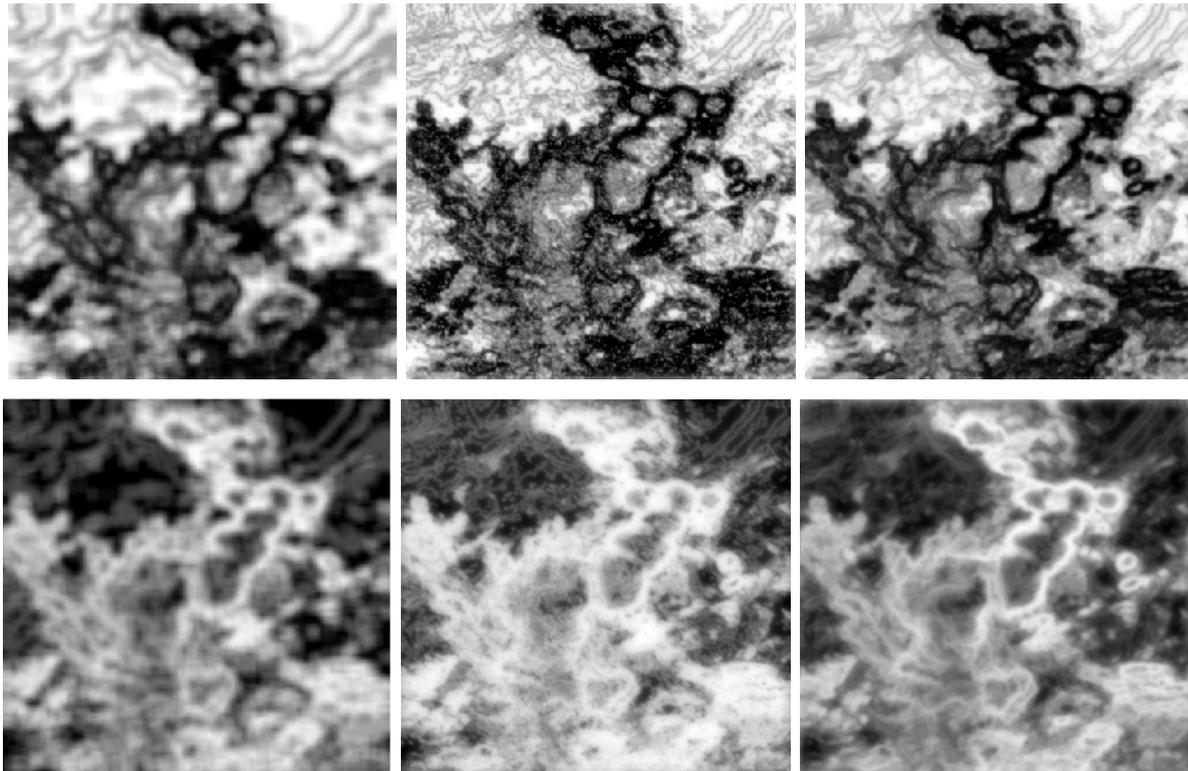


FIG. 4.15.: Calculs de MC-attributs fondés sur différentes approches. **En haut** : énergie, **en bas** : entropie. **De gauche à droite** : calcul classique (approche **GLCM** sans pondération), calculs multiéchelles (approches **GLCM** et **GLV** avec pondération).

Nous nous référerons également aux nombreux travaux ayant traité de la segmentation d'images météorologiques.

#### 4.4.1. Contraintes dues à la classification

L'extraction et le calcul de MC-attributs permet d'engendrer un espace multidimensionnel dans lequel va s'opérer la classification de l'image : la méthode courante consiste à utiliser un algorithme de classification dans cet espace. Les méthodes de classification multidimensionnelles sont confrontées aux contraintes suivantes [Duda et Hart, 1973] :

- Elles nécessitent tout d'abord de choisir un ensemble d'attributs appropriés parmi une grande quantité de MC-attributs possibles (par suite du nombre de coefficients générés par le grand choix de paramètres) ; il s'agit de déterminer les attributs qui soient les plus discriminants, éventuellement combiner plusieurs d'entre eux.
- La dimensionnalité de l'espace des attributs est le plus souvent très grande ; en d'autres termes, il faut se restreindre à une faible dimension de l'espace des MC-attributs pour privilégier une segmentation efficace et robuste. En effet, plus le nombre d'attributs utilisés est important et plus le processus de classification sera en mesure de discriminer un grand nombre de classes ; cependant, avec l'augmentation de la quantité d'attributs à analyser, il

est probable que certains de ces descripteurs fournissent une information redondante sur les mêmes classes, et conduisent même à une augmentation des erreurs de classification.

Ces problèmes impliquent une plus grande complexité de la règle de décision adoptée. Vu l'importance du nombre de paramètres qui peuvent être utilisés (dans [Haralick et al., 1973], quatorze mesures associées à la MC sont définies), il est donc souvent nécessaire d'étudier, dans une étape préliminaire, la redondance ou la corrélation des MC-attributs sélectionnés. Nous rappelons tout d'abord les méthodes classiques de sélection des MC-attributs en vue d'une classification/discrimination. Nous analysons ensuite les relations, dans l'espace de représentation, entre les différents MC-attributs multiéchelles calculés sur les images IR, en comparaison avec d'autres types d'images satellitaires. Nous opérons enfin une classification non-supervisée à l'aide des MC-attributs multiéchelles.

#### 4.4.2. Sélection et extraction de descripteurs

Comme nous l'avons souligné plus haut, les descripteurs utilisés dans le processus de classification doivent être significatifs et leur nombre doit si possible être restreint.

##### Méthodes de sélection

Une procédure de sélection des MC-attributs, consistant à éliminer les paramètres n'améliorant pas la discrimination entre les différentes classes, est couramment employé afin de réduire la taille de l'espace de représentation [Gu et al., 1991] [Ebert, 1989]. Cela permet de réduire le coût de la classification et assure une plus grande précision de la classification finale. La sélection s'effectue généralement en évaluant un critère de discrimination établi à partir d'indices permettant de quantifier le pouvoir discriminant des attributs sur lesquels ils sont calculés. Parmi ces indices :

- L'utilisation de la *variance* des attributs consiste à supprimer naïvement les réponses sur la base de leur variance globale. Elle implique de choisir arbitrairement un seuil en dessous duquel les attributs sont considérés comme non discriminants [Duda et Hart, 1973].
- La *distance de Fisher* définie par [Duda et Hart, 1973] :

$$J_{ij}(\mathcal{A}) = \frac{|\mu_i - \mu_j|}{\sigma_i - \sigma_j},$$

où  $\mu_i$  et  $\mu_j$ ,  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  désignent *resp.* les moyennes et les écarts-type de l'attribut  $\mathcal{A}$  sur les classes  $i$  et  $j$ , permet de comparer le pouvoir discriminant des différents attributs. Les descripteurs optimaux présentant les valeurs les plus élevées de l'indice  $J_{ij}$  sont sélectionnés un par un [Parikh, 1977]. Cependant, ce critère est valable dans le cas où les distributions des attributs sont normales et d'écarts-type identiques. En conséquence, la règle de sélection peut être adaptée : il peut par exemple être décidé qu'un attribut  $\mathcal{A}$  est discriminant s'il vérifie  $J_{ij}(\mathcal{A}) > 1$  alors qu'il est automatiquement éliminé dès que  $J_{ij}(\mathcal{A}) < 1/2$  [Ebert, 1989] [Garand et Weinman, 1986].

- La *divergence transformée* utilisée dans [Gu et al., 1991] permet d'effectuer directement une sélection de vecteurs multidimensionnels  $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$  d'attributs en comparant les caractéristiques (moyenne et covariance) des distributions de ces vecteurs dans l'espace de représentation.
- Le *critère de Wilks*  $\Lambda(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$  permet d'effectuer une sélection sur les différents attributs en déterminant leurs apports respectifs dans le processus de discrimination [Welch et al., 1988]. Un attribut  $\mathcal{A}$  peut être ajouté ou éliminé au vu de sa contribution à l'indice  $\Lambda(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A})$  et de l'importance des modifications apportées comparé à l'indice  $\Lambda(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ .

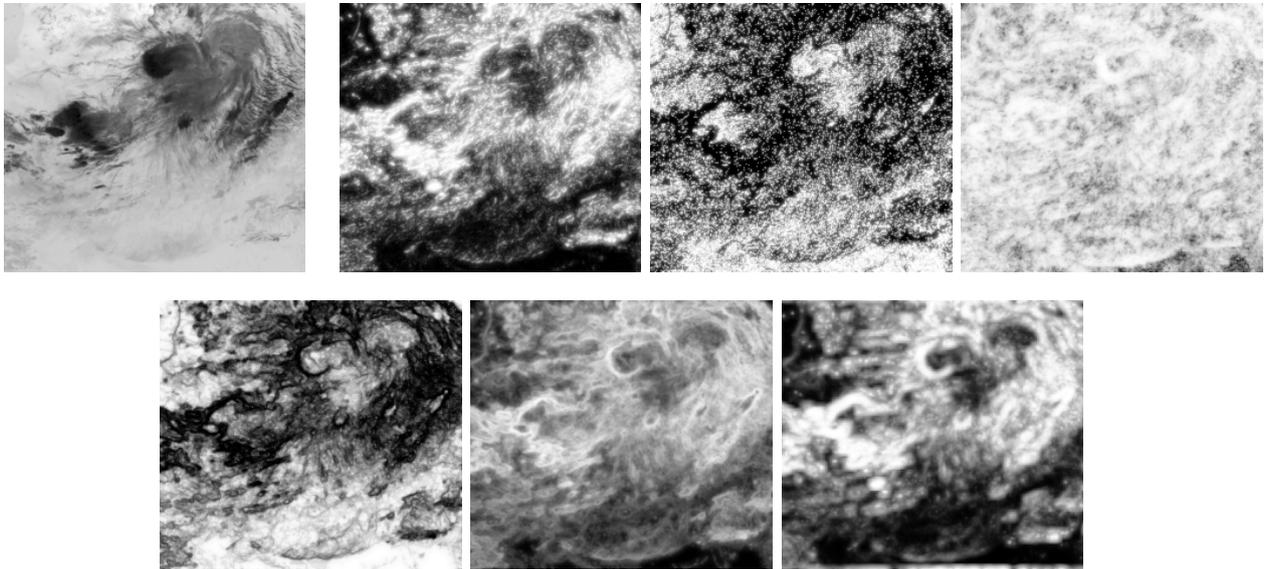
Le calcul de tous ces indices consiste en fait à évaluer le pouvoir discriminant des différents **MC**-attributs estimés sur des échantillons préalablement sélectionnés (cadre supervisé). Il nécessite donc de disposer d'ensembles d'apprentissage et de connaître *a priori* les différentes classes ainsi que leurs caractéristiques. Nous nous plaçons ici dans un cadre non supervisé.

### Méthode d'extraction

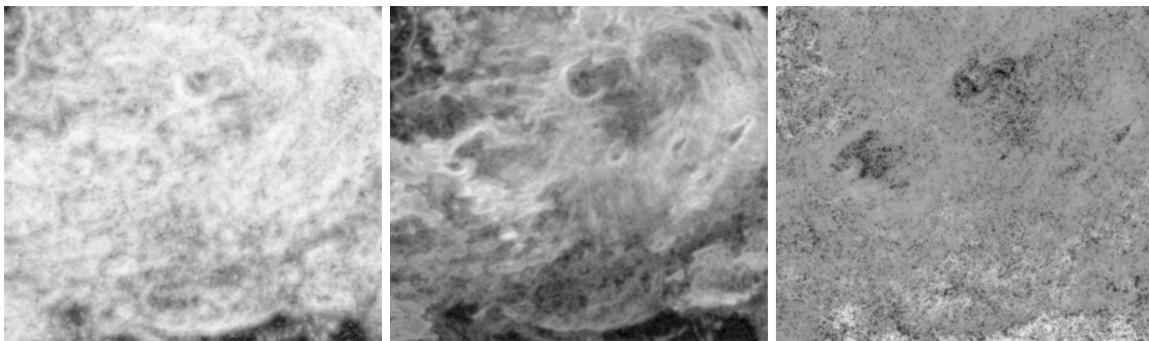
Une procédure d'extraction des **MC**-attributs est plus communément employée lorsque l'on ne dispose d'aucune information *a priori* sur la classification (cadre non-supervisé). Au cours d'une telle procédure, on conserve généralement l'ensemble des attributs disponibles mais on s'applique, grâce à des transformations pertinentes, à les projeter dans un espace de dimension réduite [Kittler, 1986].

Parmi les méthodes d'extraction, nous retiendrons essentiellement l'analyse en composantes principales (**ACP**) qui permet de combiner les différents **MC**-attributs pour former de nouveaux attributs optimaux au sens d'un critère d'inertie [Jain et Dubes, 1978]. Le but de l'**ACP** est en fait de rechercher des axes, ou directions orthogonales, qui représentent au mieux l'ensemble des attributs. Définissons la matrice de corrélation  $\Sigma$  des  $n$  attributs  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  disponibles dans l'espace de représentation. Si l'on désigne par  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres de  $\Sigma$ , alors les vecteurs propres  $v_i, i = 1, \dots, n$  associés satisfont la relation suivante :  $\Sigma \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i, \forall i = 1, \dots, n$ . Dans la mesure où la matrice  $\Sigma$  est symétrique et à valeurs réelles, il est possible de trouver des vecteurs propres orthogonaux :  $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire. La matrice de corrélation peut alors s'écrire sous la forme :  $\Sigma = V \cdot D \cdot V^T$ , où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $V = (v_1 | \dots | v_n)$ , et où le symbole  $T$  représente la transposée. Une fois calculés la matrice  $V$  et le vecteur d'attribut moyen  $\bar{\mathcal{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ , l'**ACP** permet alors de décorrélérer l'ensemble d'attributs  $\mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n$  et d'extraire des composantes significatives. Les attributs obtenus par cette transformation, appelés *composantes principales*, sont notés  $\tilde{\mathcal{A}}_i, i = 1, \dots, n$  et se déduisent des attributs de l'espace de représentation original par projection :  $\tilde{\mathcal{A}}_i = V \cdot (\mathcal{A}_i - \bar{\mathcal{A}}), \forall i = 1, \dots, n$ . La quantité d'information apportée par une composante (également appelée inertie) est renseignée par le rapport de la valeur propre associée sur la somme de toutes les valeurs propres, de sorte que :

- les attributs  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  associés à des valeurs propres importantes sont conservés dans l'espace de représentation,
- les attributs  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  ayant une valeur propre peu significative peuvent être éliminés de manière à réduire l'espace de représentation ; ceux-ci jouent en effet un rôle négligeable dans la discrimination une fois que les premiers attributs sont connus.



(a) MC-attributs multiéchelles  $\mathcal{A}$ . De haut en bas, de gauche à droite : image IR, contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie et variance.

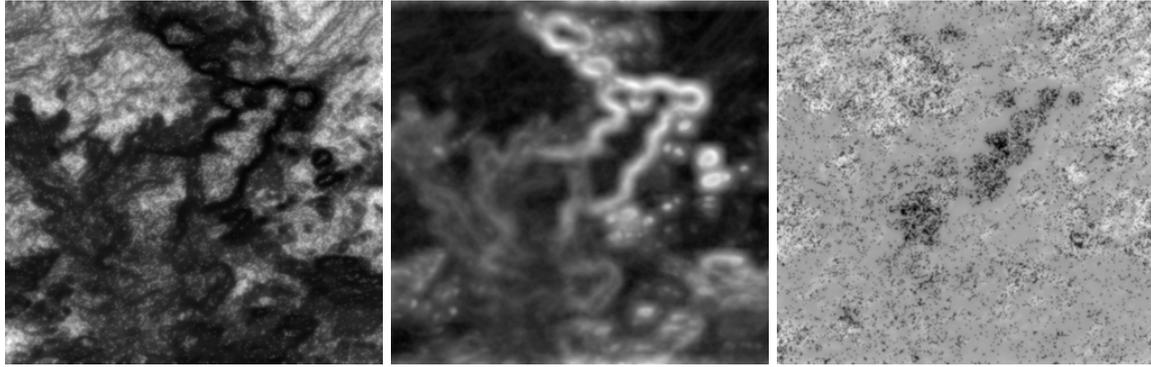


(b) Composantes principales  $\tilde{\mathcal{A}}$ . De gauche à droite : 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> composantes.

1 <sup>ère</sup> comp.	2 <sup>ème</sup> comp.	3 <sup>ème</sup> comp.	4 <sup>ème</sup> , 5 <sup>ème</sup> et 6 <sup>ème</sup> comp.
73 %	24 %	1.8 %	< 1.2 %

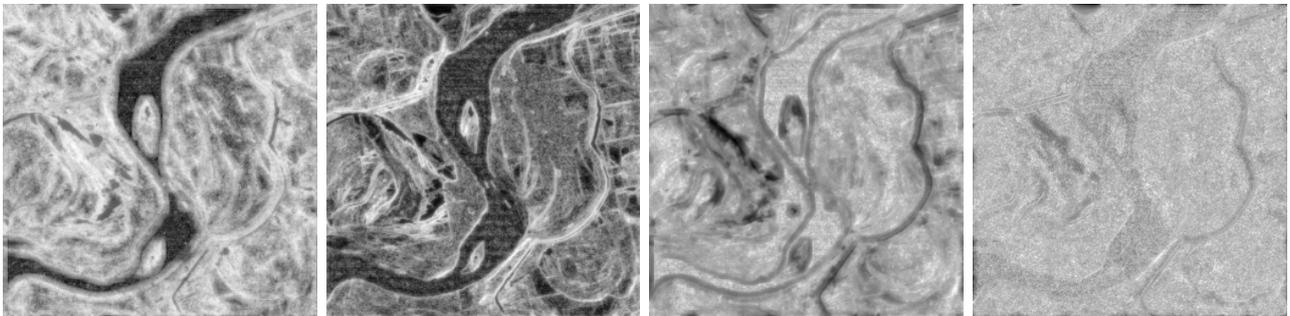
(c) Inertie représentée par les différentes composantes  $\tilde{\mathcal{A}}$  de l'ACP.

FIG. 4.16.: ACP d'une collection de six MC-attributs multiéchelles. Notez la ressemblance entre les 2 premières composantes et les seuls attributs d'entropie et de corrélation.



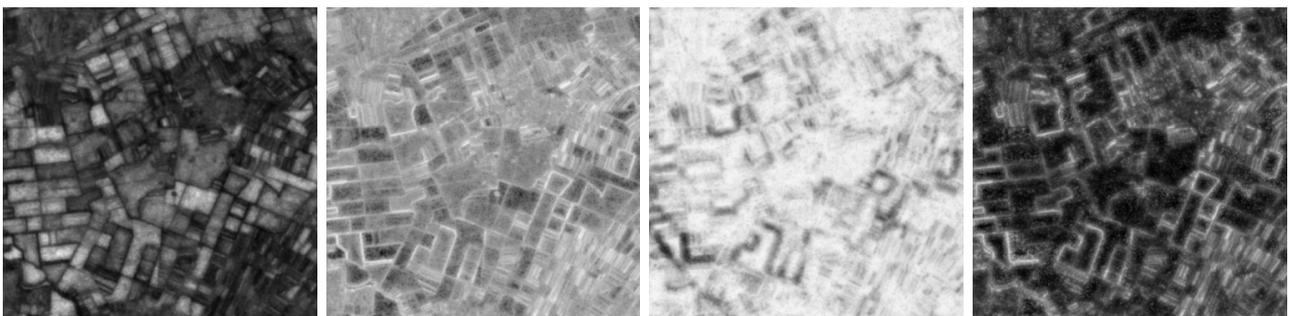
1 <sup>ère</sup> comp.	2 <sup>ème</sup> comp.	3 <sup>ème</sup> comp.	4 <sup>ème</sup> , 5 <sup>ème</sup> et 6 <sup>ème</sup> comp.
82 %	18 %	1.1 %	< 0.9 %

(a) Résultats de l'ACP sur l'image **Meteosat** de la figure 4.6.



1 <sup>ère</sup> comp.	2 <sup>ème</sup> comp.	3 <sup>ème</sup> comp.	4, 5 et 6 <sup>èmes</sup> comp.
61 %	22 %	12 %	~ 5 %

(b) Résultats de l'ACP sur l'image **Landsat** de la figure 4.19(b).



1 <sup>ère</sup> comp.	2 <sup>ème</sup> comp.	3 <sup>ème</sup> comp.	4, 5 et 6 <sup>èmes</sup> comp.
68 %	16 %	13 %	~ 3 %

(c) Résultats de l'ACP sur l'image **Spot** de la figure 3.1.

FIG. 4.17.: Résultats de l'ACP sur les représentations des MC-attributs multiéchelles calculés sur une image **Meteosat**, une image **Landsat** et une image **Spot**.

On réduit finalement la complexité de la classification et on l'améliore, en principe, en utilisant les composantes principales car l'utilisation conjointe d'attributs redondants n'apporte aucune information complémentaire.

## Résultats

Nous choisissons de sélectionner automatiquement les attributs que nous allons utiliser dans le processus de classification. On ne retient que six MC-attributs, qui sont classiquement considérés comme les plus discriminants en analyse d'images satellitaires [Gong et al., 1992] [Shokr, 1991] [Baraldi et Parmiggiani, 1995] : il s'agit du **contraste**, de l'**homogénéité** de la **corrélation**, de l'**entropie**, de l'**énergie** et de la **variance**, mais dans leur version multiéchelle. On suppose tout naturellement que la généralisation multiéchelle ne peut qu'améliorer les caractéristiques de ces attributs, et ne peut en aucun cas diminuer leur pouvoir discriminant. Nous limitons par ailleurs les calculs à un seul vecteur de déplacement  $\mathbf{t}$ , défini par  $d = \sqrt{2}$  et  $\theta = \pi/4$  [Baum et al., 1997].

Lorsque l'on calcule les composantes principales extraites de ces MC-attributs, il se trouve généralement, dans le cas des images **Meteosat**, que seules les deux premières sont significatives. Ainsi, sur l'exemple de la figure 4.16, les quatre dernières composantes représentent moins de 3 % de l'inertie totale : la part d'information apportée par ces composantes est négligeable pour la description de l'ensemble des attributs. Par ailleurs, on remarque, sur cet exemple particulier, que les deux premières composantes (qui représentent les 97 % restants de l'inertie totale) sont très proches (en terme visuel) de deux attributs particuliers, l'entropie et la corrélation. Cela signifie que l'information apportée par l'ensemble des MC-attributs peut se réduire exclusivement aux contributions de deux d'entre eux. Même si cette observation n'est pas systématiquement vérifiée, elle illustre cependant bien les résultats généralement obtenus avec les images **Meteosat IR** (figure 4.17(a)). L'information fournie par l'ensemble des six attributs peut presque toujours se réduire à celle fournie par deux composantes, deux directions, principales, voire une seule : la connaissance des six attributs est donc équivalente à la connaissance de ces seules composantes. Il apparaîtra que les MC-attributs, lorsqu'ils sont calculés sur des images **Meteosat** sont fortement corrélés. En revanche, sur des images satellitaires de nature différente (figures 4.17(c) et 4.17(b)), cette corrélation n'est pas aussi forte : l'information apportée par les composantes suivantes (jusqu'à la quatrième au moins) est rarement négligeable. Dans la suite, nous allons essayer de quantifier la corrélation entre les MC-attributs.

### 4.4.3. Analyse de la corrélation entre les attributs

#### Mesure de la redondance

La recherche, dans le sous-espace de représentation finalement sélectionné, d'attributs décorrélés, parmi les MC-attributs retenus, apparaît indispensable, car il est possible qu'un certain nombre d'entre eux soient redondants. Ce problème a fait l'objet de nombreuses études dans le domaine de l'analyse d'images satellitaires [Ebert, 1989] [Shokr, 1991]. L'étude de [Baraldi et Parmiggiani, 1995]

s'intéresse en particulier à la signification des différents descripteurs de texture et à leur interprétation visuelle et théorique sur des images **NOAA/AVHRR**. Ils testent ces attributs (l'énergie, le contraste, la variance, la corrélation, l'entropie et l'homogénéité) afin d'étudier leurs performances et d'évaluer les différences fonctionnelles entre eux. Une discrimination non supervisée des différentes textures présentes sur ces images leur permet notamment d'estimer qualitativement la corrélation entre les attributs au vu de l'information qu'ils fournissent. Ils tentent d'attribuer à chacun de ces attributs une signification en terme textuel, dans le but de réaliser une sélection de descripteurs qui soit indépendante de l'image. Les auteurs concluent notamment que les attributs d'énergie et de contraste sont les plus efficaces en terme de discrimination et recommandent ainsi l'utilisation combinée de ces paramètres. D'autres études précisent que l'énergie, le contraste et la corrélation sont les attributs les moins corrélés et présentent l'énergie comme le meilleur paramètre [Gong et al., 1992]. Dans [Shokr, 1991], l'homogénéité est choisie comme l'attribut le plus discriminant. Tous ces résultats sont clairement liés au type d'images analysées mais aussi à l'objectif recherché. Quelque soit leur pouvoir discriminant, les **MC**-attributs sont usuellement combinés avec des attributs spectraux pour segmenter les images.

Suivant l'approche de [Baraldi et Parmiggiani, 1995], nous proposons d'analyser la relation fonctionnelle qu'il existe entre les six **MC**-attributs sélectionnés. L'analyse de la corrélation a pour objectif d'évaluer la redondance d'information entre attributs afin de ne conserver que les plus significatifs. Dans [Ebert, 1989] et [Garand, 1988], les auteurs complètent la phase de sélection des **MC**-attributs avec une phase d'étude de leur corrélation. Ils utilisent pour cela tout naturellement le coefficient de corrélation :

$$r(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = cov(\mathcal{A}, \mathcal{A}') / (\sigma^2(\mathcal{A})\sigma^2(\mathcal{A}'))$$

(où  $cov$  et  $\sigma^2$  désignent *resp.* la covariance et la variance des variables  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ ) qu'ils calculent sur l'ensemble des attributs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  et retiennent un seuil de 0.7 sur ce coefficient pour éliminer un des deux attributs corrélés. Nous proposons pour notre part de calculer, sur tout couple  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  d'attributs, deux indices permettant de mesurer leur dépendance mutuelle [Grazzini et al., 2003b] :

- l'*information mutuelle*  $i_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$  qui est une mesure de l'indépendance de deux variables :

$$i_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = S(\mathcal{A}) - S(\mathcal{A} | \mathcal{A}') \tag{4.13}$$

où la fonction  $S$  désigne l'entropie statistique (*cf.* annexe B) et où le symbole  $|$  représente le conditionnement. En particulier, si  $i_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = S(\mathcal{A})$ , alors  $S(\mathcal{A} | \mathcal{A}') = 0$

- le *rapport de corrélation*  $i_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$  qui mesure la corrélation fonctionnelle (et généralise en un sens le coefficient de corrélation linéaire  $r$ ) :

$$i_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = \sigma^2(E[\mathcal{A} | \mathcal{A}']) / \sigma^2(\mathcal{A}) \tag{4.14}$$

où les fonctions  $E$  et  $\sigma^2$  désignent *resp.* l'espérance et la variance, et où le symbole  $|$  représente encore le conditionnement. En particulier, si  $i_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = 1$ , alors  $E[\mathcal{A} | \mathcal{A}'] = 0$ , ce qui signifie qu'à  $\mathcal{A}'$  fixé la variance de  $\mathcal{A}$  est nulle, donc que  $\mathcal{A}$  ne prend qu'une seule valeur : le rapport de corrélation  $i_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$  est maximal lorsque  $\mathcal{A}$  est lié fonctionnellement à  $\mathcal{A}'$ .

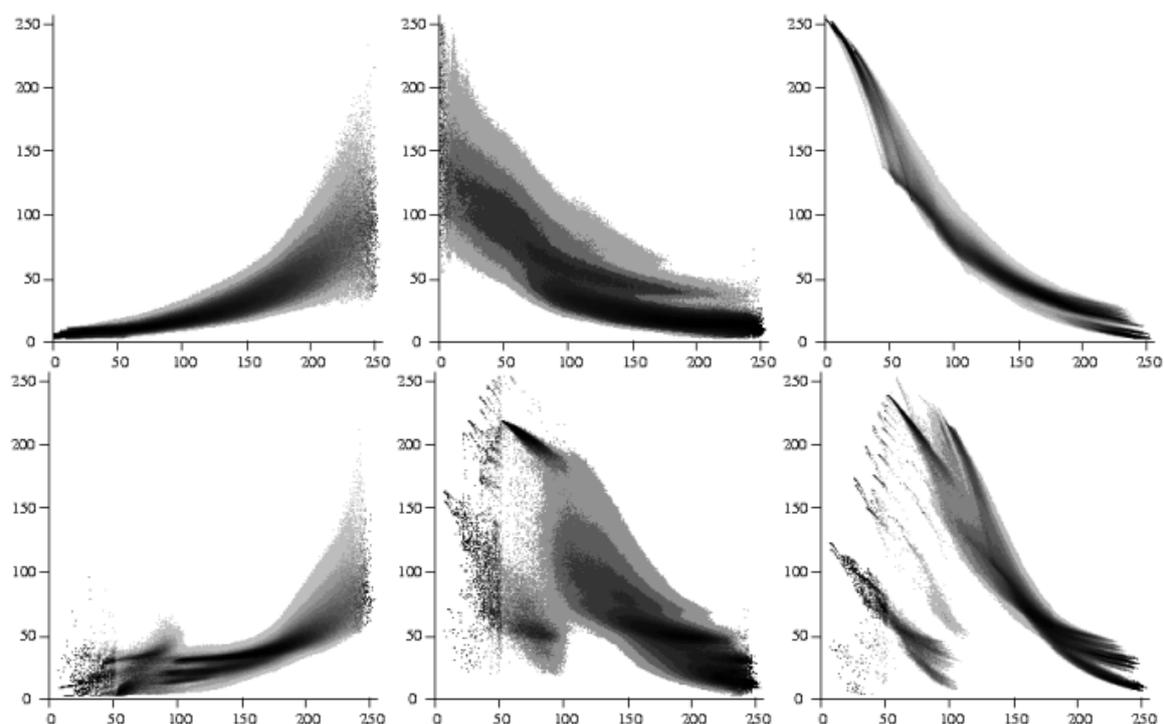


FIG. 4.18.: Distributions conditionnelles  $P(\mathcal{A} = x \mid \mathcal{A}' = y)$  de différents MC-attributs multiéchelles  $\mathcal{A}$  par rapport à l'entropie  $\mathcal{A}'$ . **En haut** : résultats **Meteosat**, **en bas** : résultats **Spot**. **De gauche à droite** : histogrammes de probabilité conditionnelle des attributs de *contraste*, d'*homogénéité* et d'*énergie*. Les calculs ont été réalisés sur des échantillons de 20 images **Meteosat** de dimension  $1350 \times 460$  et 20 images **Spot** de dimension  $1000 \times 1000$  (soit plus de  $10^6$  attributs comparés - un par pixel - dans les deux cas); les attributs ont été discrétisés sur 255 valeurs.

Ces indicateurs sont donc d'autant plus proches de leurs bornes supérieures ( $H(\mathcal{A})$  dans le cas de  $i_1$ , 1 dans le cas de  $i_2$ ) que les attributs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont dépendants : au contraire, des valeurs de  $i_1$  et  $i_2$  proches de 0 traduisent l'indépendance des attributs.

## Résultats

Les mesures sont effectuées pour des collections importantes d'images satellitaires de différentes natures afin de comparer l'information apportée par les MC-attributs multiéchelles dans ces différents cas : en plus des images **IR** thermiques auxquelles nous nous intéressons depuis le début, nous considérons des images **Spot** et **Landsat** acquises dans le **NIR** (aux longueurs d'onde  $0.79 \mu\text{m}$  –  $0.89 \mu\text{m}$  et  $0.76 \mu\text{m}$  –  $0.90 \mu\text{m}$  *resp.*). Il est important de noter que ces satellites proposent plusieurs bandes fréquentielles d'acquisition de la même scène ; parmi celles-ci, les bandes spectrales que nous avons choisi d'analyser offrent, dans les deux cas, une haute résolution spatiale (bande 4 à  $15 \times 15 m$  de résolution pour les images **Landsat**, canal TOC à  $20 \times 20 m$  pour les images **Spot**).

Dans la table 4.1, nous présentons les résultats du calcul des indices de corrélation  $i_1$  et  $i_2$  sur des

collections de **MC**-attributs  $\mathcal{A}$  conditionnés par l'entropie  $\mathcal{A}'$ . Nous présentons sur la figure 4.24 les résultats de l'estimation des lois de distribution conditionnelle correspondantes. Il apparaît que la dépendance entre le contraste, l'homogénéité, l'énergie, la variance et l'entropie est plus forte sur les images **Meteosat** que sur les images **Spot**. La corrélation et l'entropie sont, dans les deux cas, les attributs les moins corrélés ; cependant, la corrélation est très peu intéressante car elle n'offre pas de bons résultats (en terme visuel, *ie.* d'un point de vue qualitatif) pour la localisation des structures. On pourrait également quantifier l'apport d'information des différents **MC**-attributs, afin de mettre en évidence la redondance globale des paramètres. Une analyse plus approfondie des résultats montre que :

- les **MC**-attributs exhibent un remarquable degré de dépendance entre eux.

Aux mesures effectuées par les indices (tableau 4.1), s'ajoutent par ailleurs les observations sur les distributions conditionnelles :

- les distributions conditionnelles sont très concentrées et à caractère univalué (une seule branche de dépendance fonctionnelle sur la figure 4.18).

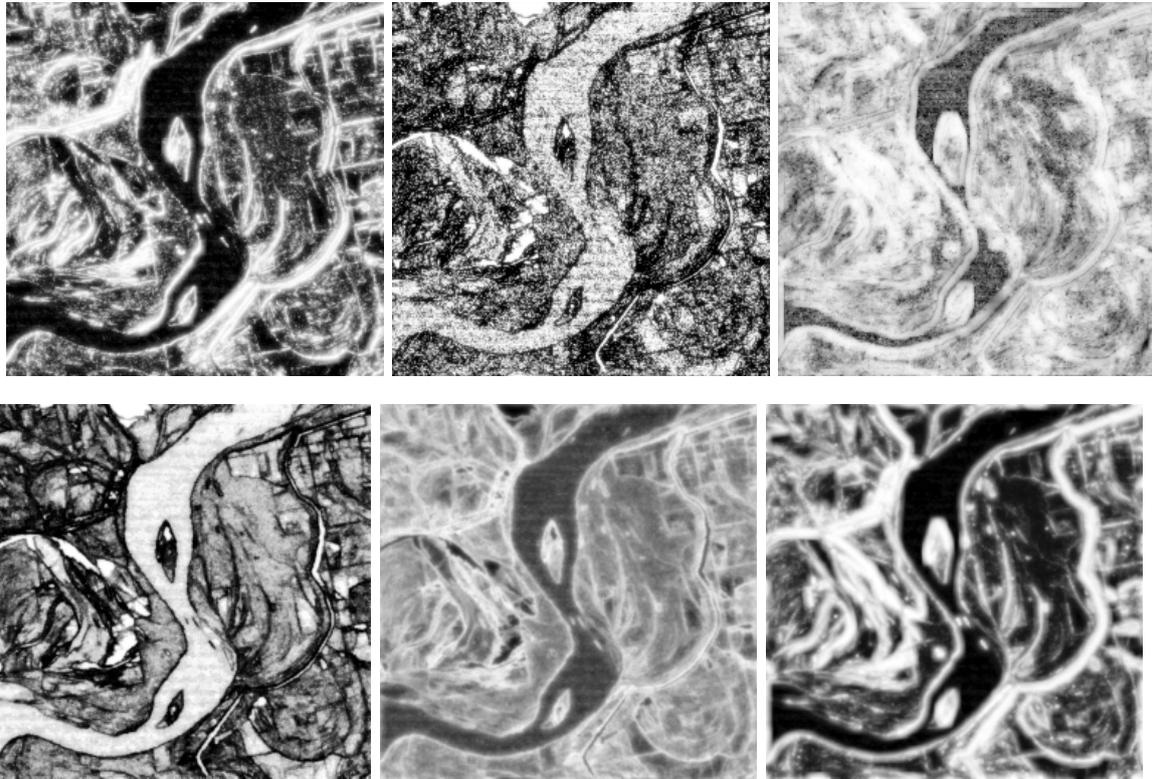
attributs $\mathcal{A}$		cont.	homo.	corr.	énerg.	var.
<b>Meteosat</b>	$i_1$	1.416	0.987	0.280	2.621	1.533
	$i_2$	0.756	0.668	0.331	0.899	0.744
<b>Spot</b>	$i_1$	0.812	0.517	0.236	1.622	1.104
	$i_2$	0.402	0.389	0.202	0.680	0.533

TAB. 4.1.: Mesures de la corrélation entre différents **MC**-attributs  $\mathcal{A}$  et un attribut particulier, l'entropie : information mutuelle  $i_1$  (en bits) et rapport de corrélation  $i_2$ . Les échantillons **Meteosat** et **Spot** analysés ici sont les mêmes que ceux utilisés pour l'élaboration des résultats de la figure 4.18.

La relative corrélation exhibée par les **MC**-attributs, lorsque ceux-ci sont calculés sur des images de couverture de terrain (images **Landsat** et **Spot**), est, quant à elle, plutôt liée à l'existence de classes bien définies spatialement dans ce type d'images. En l'occurrence, elle naît de la dépendance fonctionnelle des pixels appartenant à une même classe dans l'image : sur l'image **Spot**, les classes sont principalement des classes de culture qui définissent des régions sur lesquelles les attributs sont fortement corrélés, mais d'une région à une autre, cette corrélation devient faible. Cette dépendance entre les attributs se traduit par :

- une dépendance fonctionnelle entre les pixels (mesurée dans le tableau 4.1 par l'information mutuelle  $i_1$  et le rapport de corrélation  $i_2$ ) relativement faible comparée à celle exhibée par les données **Meteosat**,
- le caractère multi-valué (plusieurs branches sur la figure 4.18) des distributions conditionnelles (car différentes textures sont finalement représentées par différentes classes dans l'espace des attributs).

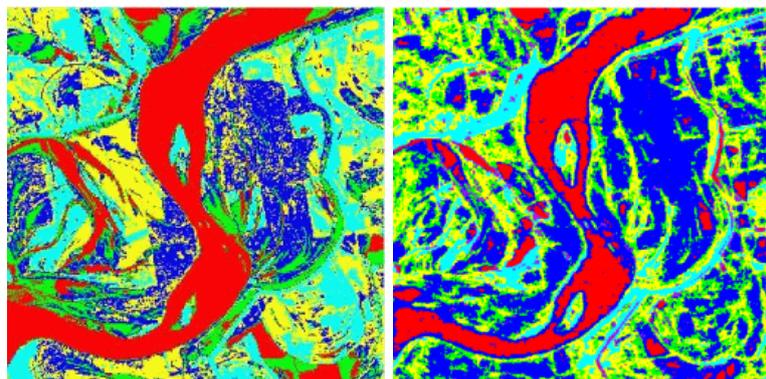
Ceci montre les limitations de méthodes de classification combinant les **MC**-attributs dans une phase d'analyse de la texture dans des images **IR** (hormis, peut-être, pour la segmentation de



(a) MC-attributs calculés sur l'image **Landsat** (b) ci-dessous. De haut en bas, de gauche à droite : contraste, homogénéité, corrélation, énergie, entropie et variance.



(b) Image **LandSat NIR** acquise au dessus du Mississippi.



(c) Classification en  $K = 10$  classes par une méthode K-means à l'aide des attributs spectraux seuls (à gauche) ou texturaux seuls (droite).

FIG. 4.19.: Interprétation de la classification d'une image **Landsat** à l'aide des MC-attributs.

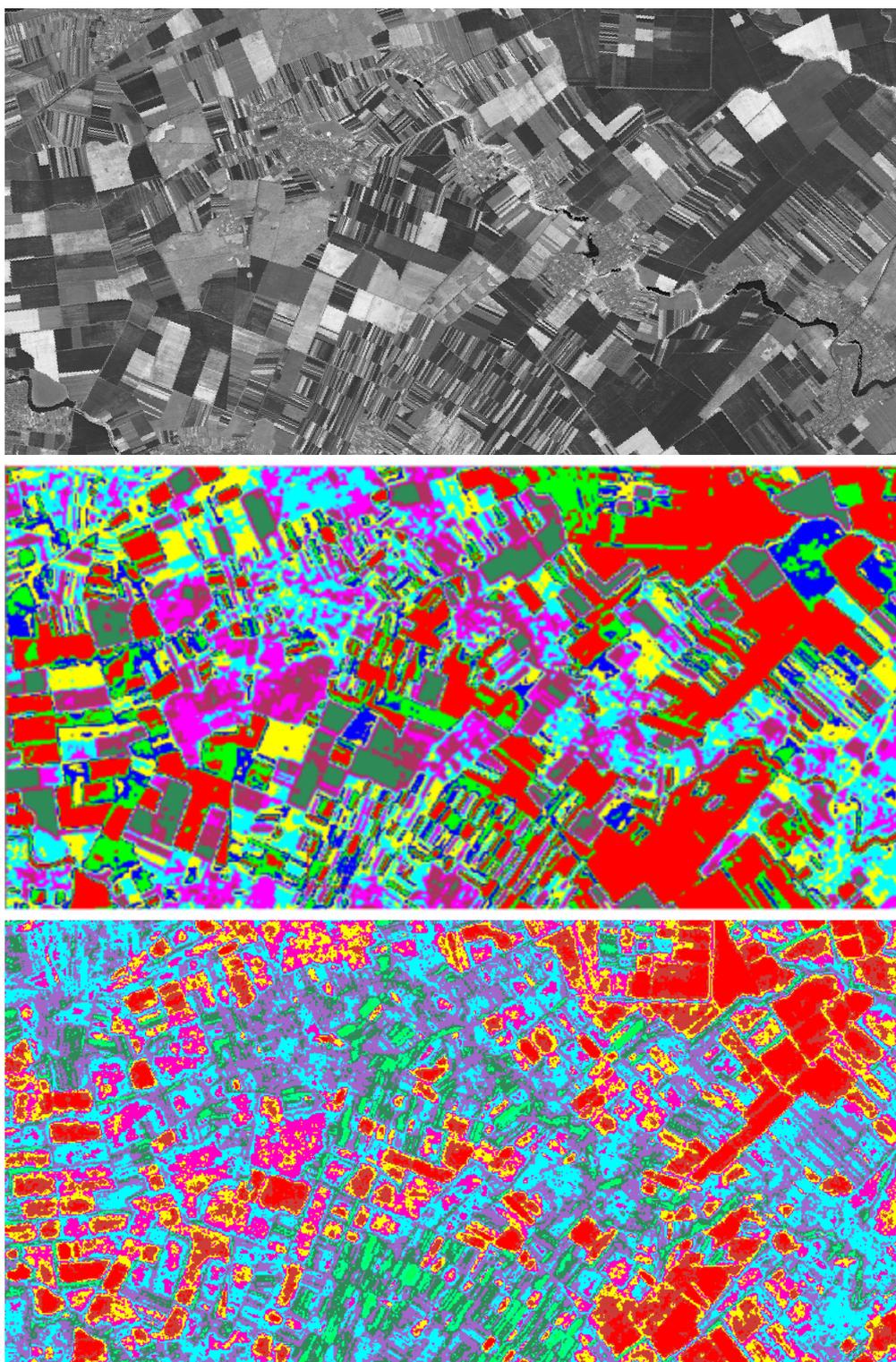


FIG. 4.20.: Classification en  $K = 10$  classes par une méthode K-means d'une image **Spot NIR**.  
**De haut en bas** : image originale, classifications à l'aide des attributs spectraux seuls et texturels seuls.

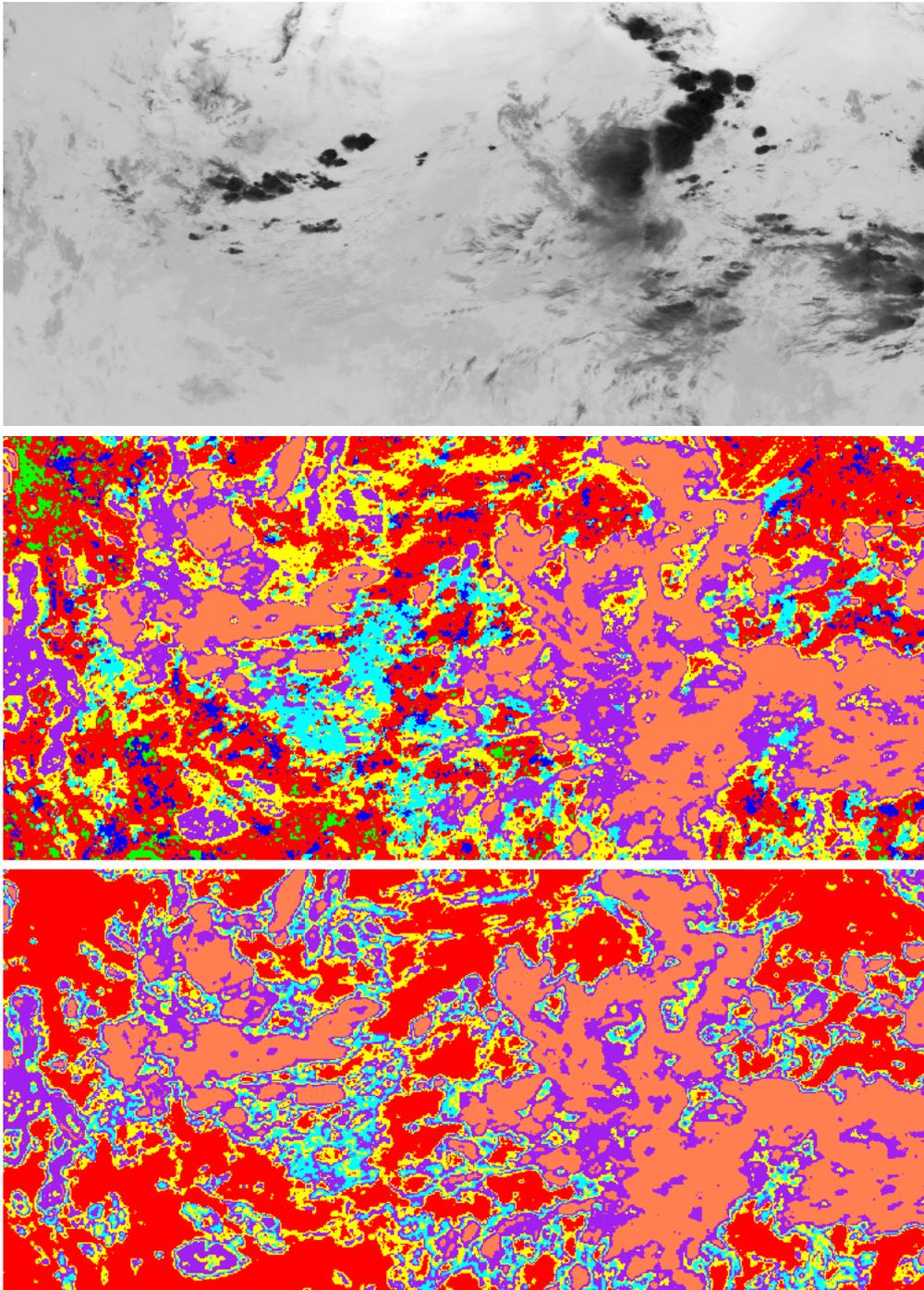


FIG. 4.21.: Segmentation en  $K = 10$  classes d'une image **Meteosat IR**. De haut en bas : image originale, classification par une méthode K-means à l'aide des attributs texturaux seuls et segmentation par une classification de type K-means 1D à partir de l'attribut d'entropie.

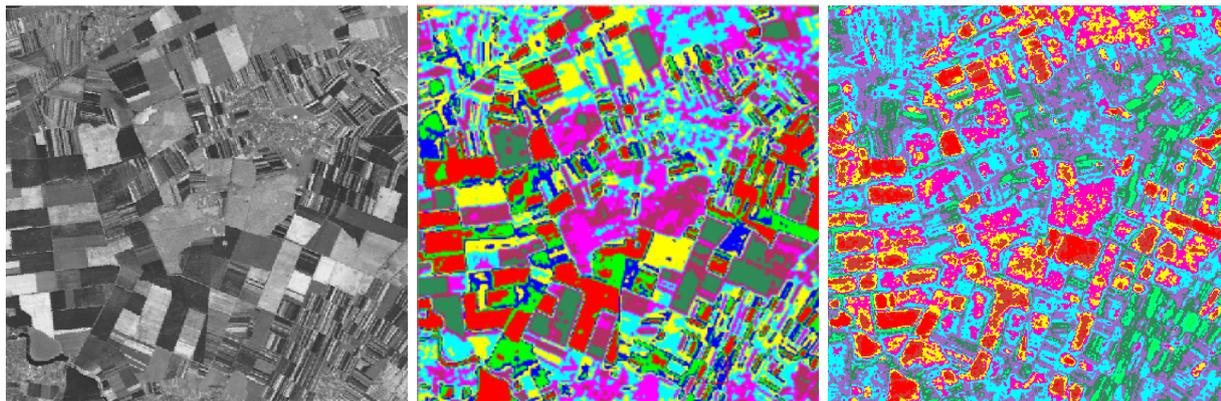


FIG. 4.22.: Détail de l'image de classification sur des champs de l'image **Spot** (à gauche); au milieu : à l'aide des attributs spectraux, à droite : à l'aide des **MC**-attributs.

différents types de nuages), puisque ces attributs apportent des informations similaires. Nous illustrons ce propos dans la section suivante.

#### 4.4.4. Classification automatique

##### Méthode des K-means

Rappelons que, dans la mesure où ne pouvons pas formuler de connaissance *a priori* sur l'image ou sur la segmentation, nous nous plaçons dans un cadre non-supervisé. Nous présentons ici un algorithme très utilisé et connu sous le nom de *K-means* (ou *K-moyennes*) [Jain, 1989]. Le principe de cette méthode repose sur la minimisation de distance et consiste à rechercher la classe la plus proche pour chaque pixel, ou groupe de pixels. La notion de proximité est liée à la distance considérée. Cette méthode est très simple et très souvent utilisée, mais n'est pas robuste au bruit car elle ne comporte pas de terme de régularisation. Elle est non-supervisée, cependant le nombre de classes doit être donné, mais pas nécessairement leurs paramètres. L'algorithme est le suivant (l'indice  $n$  est relatif au nombre de **MC**-attributs sélectionnés dans la classification) :

1. on choisit au préalable  $K$  vecteurs de **MC**-attributs  $\{\mathcal{A}_{1,\dots,n}^k\}$ , qui ne font pas forcément partie des vecteurs de l'ensemble de départ, et qui représentent les centres des  $K$  classes,
2. pour tout vecteur, on calcule les  $K$  distances de similarité par rapport aux centres  $\{\mathcal{A}_{1,\dots,n}^k\}$  des classes ; on affecte le vecteur à la classe qui réalise la plus petite distance,
3. une fois les  $K$  classes formées, on calcule les nouveaux centres de classes  $\{\mathcal{A}_{1,\dots,n}^k\}$ ,
4. on itère la procédure jusqu'à stabilité des centres des classes.

Lorsque les paramètres des classes ne sont pas connus, l'étape d'initialisation peut se résumer à sélectionner aléatoirement  $K$  sites de l'image (et à considérer, en chaque site, les  $n$  **MC**-attributs estimés pour former les vecteurs  $\{\mathcal{A}_{1,\dots,n}^k\}$ ). Puis, on effectue des itérations jusqu'à convergence de l'algorithme. À chaque itération, on balaye l'image en attribuant une étiquette par minimisation de distance, ici la distance euclidienne.

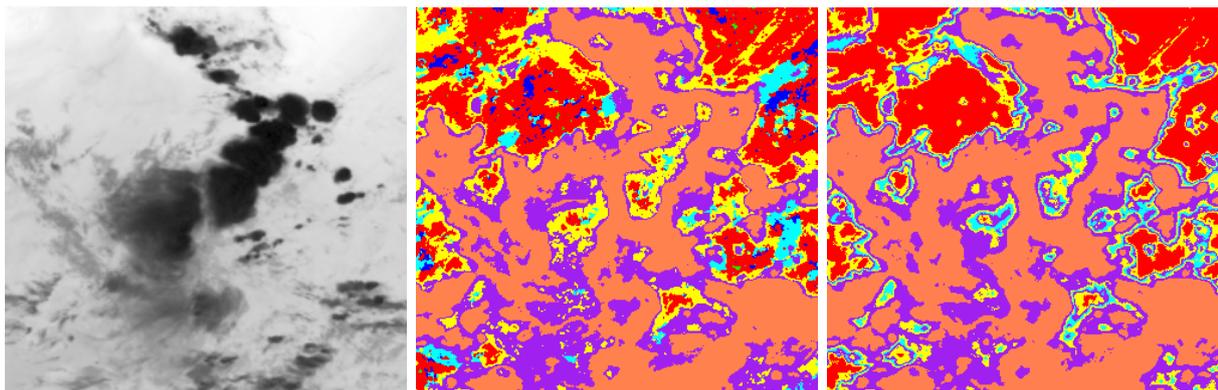


FIG. 4.23.: Détail des résultats de segmentation sur une zone nuageuse de l'image **Meteosat IR** (à gauche) : à l'aide des attributs texturaux seuls (au milieu), à l'aide de l'entropie seule (à droite). On distingue très peu de différences entre les deux segmentations : la segmentation basée sur l'entropie seule est à peine plus grossière.

## Résultats

La classification effectuée sur l'image **Landsat** de la figure 4.19 avec les **MC**-attributs seuls produit des résultats comparables avec ceux d'une classification réalisée avec les attributs spectraux seuls (les sept canaux disponibles sur le satellite **Landsat** permettent de visualiser la même scène dans sept bandes spectrales). Même si les petites régions texturées sont difficilement discernables, la segmentation obtenue permet de mettre en évidence des régions significatives dans l'image (des champs, des rivières, des routes). Les mêmes remarques valent pour les images **Spot** (figures 4.20) et 4.22 : les textures de l'image originale sont grossièrement segmentées mais ont une bonne correspondance avec la segmentation à l'aide des attributs spectraux seuls. La segmentation obtenue est donc bien sensée, elle est cohérente avec la scène observée. En revanche, pour les images **Meteosat** (figure 4.21), les résultats ne sont pas si bons : la segmentation est trop grossière pour permettre d'extraire des zones significatives à l'intérieur des nuages. Par ailleurs, le fait de considérer tous les **MC**-attributs n'améliore pas la segmentation effectuée à l'aide d'un seul d'entre eux (figure 4.23). Cette propriété découle de la corrélation entre les différents attributs : l'information apportée par les différents attributs est similaire de sorte que la segmentation finale n'est pas meilleure lorsque l'on considère de nouveaux attributs dans le schéma de classification

Ces résultats découlent essentiellement de la nature des images et des scènes observées. Les images météorologiques, par exemple, contiennent des variations d'intensité quelque soit la direction, la distance considérée. Les images haute-résolution **Landsat** et **Spot** sont, quant à elles, constituées de régions localement uniformes. Par ailleurs, certains objets des scènes **Landsat** ou **Spot**, tels que les champs de culture, ayant une structure linéaire, présentent des variations d'intensité dans des directions privilégiées. L'anisotropie de certaines zones de l'image est de plus en plus visible avec l'augmentation de la résolution. Surtout, les images d'occupation de sol présentent davantage de structures homogènes et fortement texturées, à des échelles privilégiées.

#### 4.4.5. Discussion

Les méthodes de segmentation de images **Meteosat** basée sur la représentation par **MC**-attributs, même généralisés dans un cadre multiéchelle, ne produisent pas de résultats significatifs. Les limitations de tels outils étaient déjà évoquées dans [Ebert, 1989] et [Gu et al., 1991], mais ici nous soulignons les raisons de ces limitations :

- les **MC**-attributs fournissent de l'information redondante qui peut être réduite à la connaissance de quelques attributs seulement ; ils exhibent un remarquable degré de corrélation entre eux,
- il y a un rapport fonctionnel entre les outils texturels, notamment mis en évidence par les histogrammes conjoints (figure 4.18) ; les descripteurs calculés par les outils texturels ne sont pas indépendants, ni spatialement ni fonctionnellement.

La dépendance entre les **MC**-attributs signifie en fait que tous sont sensibles à la même propriété, qu'ils détectent la même structure, dans l'image. Ceci explique que le schéma de classification prenant en compte plusieurs **MC**-attributs ne fournisse pas de meilleurs résultats qu'une simple segmentation basée sur un seul de ces attributs. Notons, par ailleurs, que si l'on compare les espérances

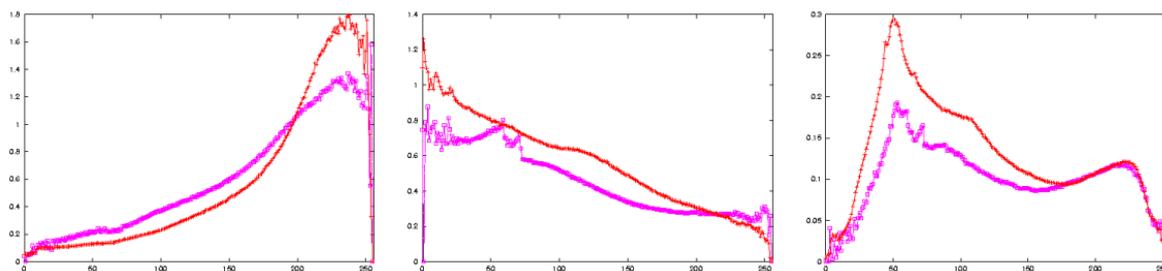


FIG. 4.24.: Courbes de régression des espérances conditionnelles  $E(\mathcal{A} \mid \mathcal{A}' = y)$  de différents **MC**-attributs  $\mathcal{A}$  par rapport à l'entropie  $\mathcal{A}'$ . Le calcul est effectué pour des attributs calculés avec la méthode **GLCM** (courbe rose) et avec la généralisation multiéchelle (courbe rouge) sur le même échantillon que celui utilisé dans la figure 4.18. L'attribut  $\mathcal{A}$  considéré est, **de gauche à droite** : le contraste, l'homogénéité et l'énergie.

des distributions conditionnelles des **MC**-attributs calculés dans le cadre multiéchelle et les mêmes espérances calculées dans le cadre **GLCM**, la dépendance fonctionnelle apparaît plus forte dans le premier cas (figure 4.24). Cela est essentiellement dû au fait que la généralisation multiéchelle permet de gagner en localisation des structures : la corrélation fonctionnelle de pixels mieux localisés spatialement est ainsi accentuée. En particulier, on suppose qu'il existe, dans l'image, une structure sous-jacente qui est indifféremment détectée par tous les attributs multiéchelles. Dans le pire des cas, la corrélation entre les **MC**-attributs peut entraver le déroulement de la segmentation en réduisant la distance entre les vecteurs caractéristiques des différentes textures.

Une des raisons de ces limitations réside là encore dans le fait que l'approche par attributs de texture suppose des hypothèses de régularité qui ne sont pas satisfaites par les images **Meteosat**. Il est alors plus difficile, en l'absence de connaissance *a priori* sur les entités à segmenter, de définir

---

des critères de similarité ou de regroupement, du fait de l'interdépendance entre les attributs. En conséquence, les techniques de classification basées sur les représentations dans des espaces multi-dimensionnels ne peuvent pas produire de résultats satisfaisants.

## 4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on utilise, pour résoudre le problème de la segmentation des images météorologiques, des techniques d'analyse de la texture : cette approche se justifie en partie par l'abondante littérature sur le sujet. Il est apparu alors approprié d'adapter les attributs de représentation au caractère multiéchelle de la texture : celle-ci dépend tout naturellement de l'échelle à laquelle on l'observe. Nous proposons ainsi une généralisation multiéchelle du calcul des **MC**-attributs. L'idée est que l'information dans le signal ne peut être extraite à une seule échelle. L'intérêt de cette méthode est de garantir, d'une part, la qualité d'estimation des statistiques du signal, mais aussi, d'autre part, de préserver sa résolution spatiale et sa localisation. Cependant, la classification basée sur les représentations par des descripteurs multi-dimensionnels (même généralisés dans un cadre multiéchelle) n'est pas adaptée à l'analyse des images **IR**.

Une considération essentielle, et finalement assez intuitive, qui ressort de cette étude est que l'extraction d'attributs descriptifs (de la texture ou de toute autre caractéristique) doit se faire en regard des propriétés des images. Nous voyons que la définition d'une méthodologie d'analyse d'images qui se voudrait universelle et indépendante de la nature de l'image considérée (ou, plutôt, des propriétés statistiques de la famille à laquelle l'image considérée appartient) n'est pas fondée, contrairement à ce qui est avancé dans [Baraldi et Parmiggiani, 1995] par exemple. En particulier, les propriétés des systèmes étudiés doivent être prises en compte dans la démarche d'analyse, comme dans le cas des images météorologiques, qui sont des données complexes.

Le cadre multiéchelle, utilisé pour la généralisation des outils classiques, se révèle adapté à l'étude des images **IR**. Cependant, le fait qu'une méthode d'analyse (comme la classification à partir des **MC**-attributs multiéchelles) rentre dans ce cadre n'en assure pas l'efficacité. D'autres propriétés des images **IR** doivent être prises en compte, qui découlent essentiellement des propriétés physiques du système considéré (variable thermodynamique dans un écoulement en turbulence complètement développée, laquelle est par conséquent non seulement multiéchelle, mais aussi invariante d'échelle). Idéalement, la modélisation devra reposer sur une approche qui permette de rendre compte de certains phénomènes physiques du type "turbulence". C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant, après avoir introduit quelques uns des principaux outils d'analyse multiéchelle.



---

**Troisième partie.**

**Formalisme multifractal pour la  
détection de structures d'intérêt dans les  
données turbulentes**

---



---

## 5. Des outils multiéchelles et multifractals d'analyse d'images

Compte tenu des propriétés d'invariance d'échelle qui caractérisent à la fois les objets visualisés dans les images météorologiques et la structure des images elles-mêmes, l'analyse de ces images doit tout naturellement se faire à travers l'examen d'une large gamme d'échelles, *i.e.* à travers une **analyse multiéchelle**. À partir de la notion d'invariance d'échelle, nous introduisons dans ce chapitre l'outil idéal d'analyse mutiéchelle, les ondelettes, puis nous abordons le formalisme multifractal. Nous présentons en détail un modèle original d'analyse multifractale, issu de cette même théorie, pour l'étude des images naturelles. Ce modèle, au travers d'une étude des transitions les plus singulières du signal, permet une caractérisation à la fois géométrique et statistique des différentes structures observées dans le signal. Outre de nombreuses applications pour le traitement des images satellitaires, ce modèle apparaît plus particulièrement adapté à l'analyse des images météorologiques.

### 5.1. L'invariance d'échelle comme paradigme à l'analyse multiéchelle

Une propriété essentielle qui sous-tend nos travaux, et va en fait déterminer la méthodologie que nous allons employer, est l'**invariance d'échelle**. Celle-ci intervient, en effet, à la fois :

- dans **la physique des phénomènes observés** : les structures météorologiques, dont l'évolution est liée à celle de l'atmosphère qui est un flot turbulent complexe, exhibent typiquement ce genre de comportement, de sorte qu'aucune échelle d'analyse n'est privilégiée par rapport à une autre (nous reviendrons sur l'analyse des flots turbulents au chapitre suivant),
- dans **l'analyse mathématique du signal** : il est couramment observé (et reconnu) que les statistiques des images naturelles sont laissées invariantes par une action de dilatation des objets.

#### 5.1.1. Invariance d'échelle et auto-similarité d'un objet, d'un signal

Le phénomène d'invariance d'échelle est associé à l'absence d'échelle de temps ou d'espace privilégiée : toutes les échelles sont représentées sans distinction d'aucune d'entre elles.

**Définition 5.1** *En un sens général, un objet d'étude est **invariant d'échelle** s'il est laissé inchangé par l'action d'une dilatation : il est symétrique pour cette transformation.*

---

Énoncée ainsi, cette propriété est incomplète car elle nécessite que soit définie la notion d'échelle :

**Définition 5.2** *L'échelle se définit généralement pour un objet, elle est la taille significative de cet objet, i.e. la plus petite des dimensions. La notion d'échelle est directement liée à celle de taille ou au moins à une grandeur physique.*

Par conséquent, cette propriété signifie que le changement d'échelle d'observation, en considérant une partie du signal étudié, ne change pas les statistiques calculées à partir du signal ; autrement dit, le changement d'échelle conserve l'aspect général de l'objet.

On peut considérer des échelles plus intuitives de temps ou d'espace, par exemple les fréquences. Il apparaît alors que la notion d'invariance d'échelle est intimement liée aux **spectres dits en 1/f** et peut être associée au concept de **fractal** [Mandelbrot, 1982]. Puisqu'il n'existe pas d'échelle privilégiée et donc aucune fréquence  $\vec{\nu}$  caractéristique, la puissance spectrale  $\Gamma_I$  vérifie une relation de la forme :

$$\forall \vec{\nu}, \forall a > 0, \quad \frac{\Gamma_I(a\vec{\nu})}{\Gamma_I(\vec{\nu})} = g(a).$$

Ce modèle satisfait l'intuition des comportements en lois d'échelle : entre deux fréquences caractéristiques, on ne distingue plus de fréquences jouant un rôle privilégié, le spectre étant invariant par une opération de dilatation. Cette analyse simple justifie notamment l'émergence des lois de puissance dans les problèmes à invariance d'échelle : il ressort de cette expression que  $g$ , et par conséquent  $\Gamma_I$ , suivent une loi de puissance du type  $|\nu|^{-\eta}$ . On parle de comportement **auto-similaire**. Les objets mathématiques fractals [Mandelbrot, 1982], par exemple, présentent cette propriété, soit parce qu'ils sont constitués de formes répétées à différentes échelles, soit parce que leurs propriétés présentent une invariance d'échelle, sans pour autant reproduire la même forme à toutes les échelles.

### 5.1.2. Invariance d'échelle des images naturelles

Dans le cas des images, la notion d'échelle coïncide avec l'échelle spatiale. Notons que cette notion est souvent confondue avec celle de **résolution**, qui définit plutôt une mesure physique directement liée au système imageur<sup>1</sup>. L'invariance d'échelle se traduit sur la forme spatiale des statistiques calculées sur le signal (*e.g.* l'espérance de la puissance spectrale, l'autocorrélation, ...). Une statistique  $s_I$ , fonction de la variable spatiale  $\vec{x}$ , n'est pas affectée, à une constante multiplicative près, par un changement d'échelle selon la définition suivante [Field, 1987] :

$$\forall \vec{x}, \forall a > 0, \quad s_I(a\vec{x}) = c(a) s_I(\vec{x})$$

où  $c$  est une fonction du paramètre d'échelle  $a$ .

L'auto-similarité exacte est une propriété forte dans la mesure où elle met en jeu les statistiques de tous ordres. Devant les difficultés pratiques des statistiques d'ordre supérieur à 2, on se contente parfois d'envisager l'existence de comportements en lois d'échelle dans les statistiques d'ordre 2

---

<sup>1</sup>La résolution est la période spatiale minimale accessible dans l'image : elle correspond en fait à la taille de la zone couverte par un pixel de l'image.

uniquement et on vérifie l'adéquation avec un spectre en  $1/f$ . Ainsi, les images naturelles, *i.e.* sans organisation particulière des objets, ont souvent été décrites comme mettant en évidence le comportement fractal décrit plus haut : elles ne possèdent pas d'échelle propre et sont auto-similaires. Cette propriété est principalement mise en évidence et vérifiée sur le seul spectre de puissance ; en effet, expérimentalement, il est statistiquement observé (*i.e.* sur de grandes collections d'images) que la puissance spectrale présente une décroissance en loi de puissance du type [Field, 1987] :

$$\Gamma_I(\vec{\nu}) \sim |\nu|^{-(d-\epsilon)} \quad (5.1)$$

où  $d = 2$  est la dimension de l'espace et où  $|\nu|$  est la fréquence radiale<sup>2</sup>. L'exposant  $\epsilon$  est généralement très petit et dépend des particularités de l'échantillon d'images considérées [Ruderman, 1994]. Cette propriété est essentiellement due à la nature des arrangements des contours et des textures à l'intérieur des images naturelles [Turiel et Parga, 2000a]. En effet, la dépendance en  $|\nu|^{-2}$  traduit les changements lisses d'illumination de l'image, dont la régularité n'est finalement perturbée que par la présence de contours.

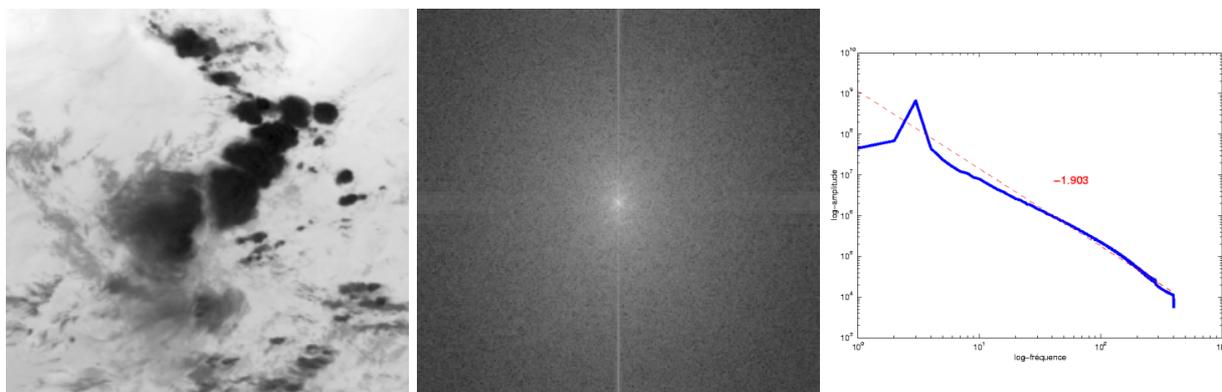


FIG. 5.1.: Illustration de l'invariance d'échelle sur le spectre de puissance. **De gauche à droite** : image originale, puissance spectrale (log-représentation) et diagramme log – log de la puissance spectrale en fonction de la fréquence spatiale radiale (la puissance spectrale est intégrée sur des couronnes du domaine fréquentiel). Le spectre exhibe une dépendance de la forme  $|\nu|^{2-\epsilon}$  avec  $\epsilon \approx 0.097$  (les petits rayons ne sont pas utilisés dans le calcul de  $\epsilon$  car l'estimation dans les couronnes près de l'origine est mauvaise).

La propriété d'auto-similarité ne suffit cependant pas à décrire, de manière précise et détaillée, la structure et le contenu local des images naturelles [Ruderman et Bialek, 1994] [Ruderman, 1997]. Ceci provient essentiellement du fait que ce comportement revient à assigner le même exposant d'échelle à tous les pixels de l'image. Nous verrons qu'il est nécessaire, afin d'obtenir une meilleure description de l'image, de définir localement une variable elle-même capable de décrire des caractéristiques locales [Turiel et al., 2004]. L'idée sous-jacente est de pouvoir décrire, à l'aide d'une seule variable définie sur toute l'image, les différents comportements d'échelle des pixels de l'image [Turiel et al., 2000].

<sup>2</sup>Cette relation n'est cependant pas forcément vérifiée de manière déterministe : il est évidemment difficile de dire qu'une image conserve réellement son aspect par changement d'échelle.

### 5.1.3. L'approche multiéchelle

Lorsque l'on évoque la notion d'invariance d'échelle, il est naturel de faire appel à une description multiéchelle pour analyser les images : l'opération fondamentale pour l'analyse des lois d'échelles réside effectivement dans la variation de la résolution. L'objectif est de pouvoir observer éventuellement de nouvelles propriétés se manifestant au niveau des représentations à différentes résolutions.

**Définition 5.3** Une analyse multiéchelle est une description de l'image qui fait intervenir simultanément les représentations de l'image à différentes échelles (*i.e.* différents niveaux de résolution).

Il peut s'avérer que les propriétés de l'image ne découlent finalement pas de l'invariance d'échelle, mais l'approche multiéchelle reste évidemment valide. Celle-ci permet de "découper" une image quelconque et de savoir l'information contenue à chaque niveau de l'échelle. Notons cependant que, sous le terme générique d'analyses multiéchelles, on distingue généralement :

- les analyses en échelles qui produisent des images dont le contenu est caractérisé par une échelle. Elles opèrent un filtrage de type passe-bande qui permet de sélectionner les objets et détails dont la taille est proche de la taille désirée.
- les analyses en résolutions qui produisent des images caractérisées par leur résolution. L'image de résolution donnée contient alors la fréquence spatiale maximale ainsi que toute les fréquences inférieures possibles. On passe donc de l'image originale à la composante en résolution par un filtrage passe-bas.

Ce dernier type d'analyses permet d'avoir une vision hiérarchique du contenu de l'image, mais redondante au sens des échelles contrairement aux analyses en échelles.

### 5.1.4. Objectifs

L'invariance d'échelle caractérise donc, d'une part, les propriétés physiques (et également statistiques) des phénomènes sous-jacents à l'évolution des structures et objets observés dans les images **IR** et, d'autre part, les propriétés statistiques des images elles-mêmes. De ce fait, il apparaît que les images **IR** présentent un caractère invariant d'échelle. Leur étude doit donc se faire à travers l'examen d'une large gamme d'échelles (idéalement toutes), *i.e.* à travers une *analyse multiéchelle*. Il est alors tout naturellement nécessaire d'introduire des outils respectant une certaine invariance d'échelle, de façon à reproduire les caractéristiques observées.

L'outil naturel d'analyse multiéchelle est la transformée en ondelettes. En effet, les ondelettes sont elles-mêmes construites en respectant une certaine invariance d'échelle, et sont dotées de nombreuses propriétés qui les rendent malléables et efficaces. Elles constituent notamment un outil puissant pour l'analyse des images, en offrant une décomposition en plusieurs niveaux de détails, et la compression, en fournissant une description compacte.

## 5.2. Un outil idéal d'analyse multiéchelle des images : les ondelettes

La transformée en ondelettes est apparue en géophysique au début des années 1980 pour l'analyse des signaux sismiques et a été formalisée plus tard dans [Grossmann et Morlet, 1984]. Les ondelettes ont trouvé là une impulsion initiale fulgurante puis un terrain propice à un fantastique essor dans les communautés du traitement du signal et des mathématiques. C'est au sein de ces dernières communautés que des développements théoriques et appliqués majeurs ont eu lieu ces 20 dernières années [Meyer, 1989] [Mallat, 1989]. Des avancées significatives ont encore été faites dans [Daubechies, 1992] [Chui, 1992] [Wornell, 1995] [Holschneider, 1995]. Ces avancées ont alors influencé d'autres domaines de recherche, dont, en particulier, des applications pour la compréhension des processus géophysiques [Kumar et Foufoula-Georgiou, 1997] [Arrault et al., 1997].

Dans la suite, nous définissons tout d'abord la transformée en ondelettes (**TO**). Nous nous limitons à l'introduction des notions essentielles. Nous nous intéressons ensuite au principe de l'analyse multi-résolution (associée à la représentation en ondelettes) qui laisse entrevoir les possibilités offertes par l'analyse en ondelettes. Dans le cadre du traitement d'images, la détection de contours ou la compression du signal sont devenues des applications courantes. Nous renvoyons à l'ouvrage de référence [Mallat, 2000] pour une revue complète de l'outil ondelette.

### 5.2.1. La transformée en ondelettes

La **TO** d'un signal permet de représenter le signal sur un espace bidimensionnel, appelé plan "temps-échelle", fournissant sur le signal des informations conjointes en temps et en fréquence (cf. annexe C). Le pavage du plan "temps-fréquence" induit par cette transformée a pour particularité de permettre une résolution temporelle fine aux hautes fréquences et une résolution fréquentielle fine aux basses fréquences. Cette propriété est particulièrement intéressante pour l'analyse des signaux.

#### La transformée en ondelettes continue

Choisissons une fonction de base  $\psi$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , appelée **ondelette mère** et considérons un ensemble de fonctions  $\psi_{a,\tau}$ , appelée simplement **ondelettes**, qui sont obtenues à partir de la dilatation et de la translation de la fonction  $\psi$  [Mallat, 1989] [Daubechies, 1992] :

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right). \quad (5.2)$$

Le facteur  $1/\sqrt{a}$  normalise  $\psi_{a,\tau}$  afin de préserver l'énergie :  $\|\psi_{a,\tau}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{a,\tau}(t)|^2 dt = 1$ .

**Définition 5.4** La transformée en ondelettes continue (**TOC**)  $\mathcal{TOC}[f]$  d'une fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  est définie comme la projection de  $f$  sur l'ensemble des ondelettes  $\{\psi_{a,\tau}\}$  :

$$\begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}^2) \\ f & \mapsto & \mathcal{TOC}_\psi[f](a, \tau) = \langle f, \psi_{a,\tau} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt. \end{cases} \quad (5.3)$$

Les coefficients d'ondelettes  $\mathcal{TOC}_\psi[f](a, \tau)$  dépendent donc de deux paramètres qui peuvent varier continûment : un facteur d'échelle,  $a$ , et un facteur de translation,  $\tau$ . La transformée en ondelettes continue peut également s'écrire comme un produit de convolution :

$$\mathcal{TOC}_\psi[f](a, \tau) = f \star \psi_a(\tau) \quad (5.4)$$

avec la fonction dilatée  $\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$ .

Tout comme la transformée de Fourier, le **TOC** est inversible sous certaines conditions :

**Proposition 5.1** *Si l'ondelette mère  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  vérifie la condition suivante, dite **condition d'admissibilité** :*

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}[\psi](\nu)|}{|\nu|} d\nu < +\infty \quad (5.5)$$

alors la **TOC** est inversible (à gauche), et la transformée inverse s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{\mathbb{R}} \mathcal{TOC}_\psi[f](a, \tau) \psi_{a,b}(t) \frac{da d\tau}{\tau^2} \quad (5.6)$$

Cette condition implique que l'ondelette mère oscille, *i.e.* :

$$\mathcal{F}[\psi](0) = \int \psi(t) dt = 0. \quad (5.7)$$

et donc que  $\psi$  possède un spectre de type passe-bande. Elle impose également que le spectre de l'ondelette mère ait une décroissance au moins en  $|\nu|^{-1/2}$  à l'infini.

Sous la condition d'admissibilité, la représentation par les coefficients d'ondelettes est une représentation complète et stable du signal, mais également redondante : on obtient plus de coefficients d'ondelettes qu'il n'en est nécessaire pour décrire le signal de manière exhaustive.

### La transformée en ondelettes discrète

Compte tenu de la redondance de la **TOC**, il est avantageux de discrétiser la représentation continue en échantillonnant à la fois le paramètre d'échelle  $a$  et le paramètre temporel  $\tau$ . En pratique, on a plus souvent affaire à des signaux discrets, mais même sans cela il suffit de quelques coefficients pour couvrir entièrement le plan temps-échelle. La grille d'échantillonnage retenue, qui permet de trouver un compromis entre redondance et perte d'information, est la suivante :

$$\{(a, \tau) = (a_0^j, k\tau_0 a_0^j), a_0 > 1, \tau_0 > 0\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$$

et  $j, k$  représentent les nouveaux indices d'échelle et de temps.

**Définition 5.5** *La transformée en ondelettes discrète (**TOD**), simplement notée  $\mathcal{T}_\psi$ , est définie par l'application :*

$$\begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^2) \\ f & \mapsto \mathcal{T}_\psi[f](j, k) = a_0^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(a_0^{-j}t - k\tau_0) dt \end{cases} \quad (5.8)$$

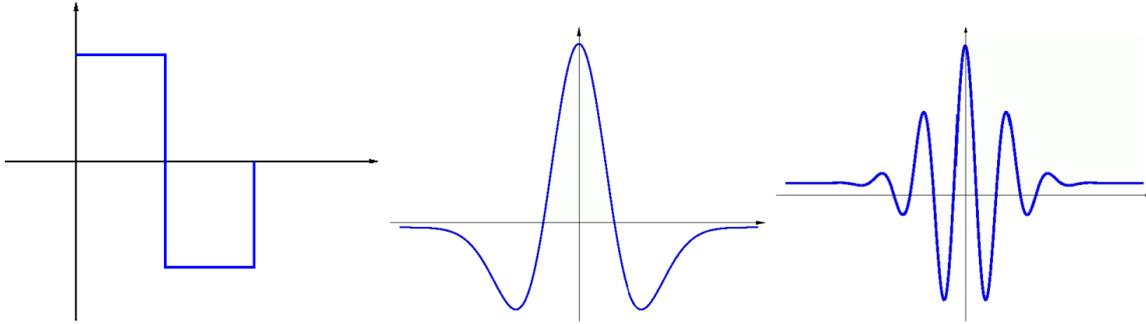


FIG. 5.2.: Exemples d'ondelettes analysantes classiques. **De gauche à droite** : ondelette de Haar, ondelette mexicaine et ondelette de Morlet (pour cette dernière, seule la partie réelle est représentée).

Cette transformée peut être inversée à l'aide d'une somme discrète mettant en jeu la base duale  $\tilde{\psi}_{jk}$  de  $\psi_{jk}$  :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_\psi[f](j, k) \tilde{\psi}_{jk}(t).$$

En particulier, si on choisit  $a_0 = 2$  et  $\tau_0 = 1$ , on est amené à considérer la famille d'ondelettes  $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ , et on parle alors de **TOD** dyadique :

**Définition 5.6** La projection en ondelettes dyadique d'un signal  $f$ , notée  $\mathcal{T}_\psi[f](2^j, \cdot)$ , est définie par :

$$\mathcal{T}_\psi[f](2^j, k) = 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(2^{-j} t - k) dt. \quad (5.9)$$

Le choix privilégié du couple  $(a_0, \tau_0) = (2, 1)$  a conduit à proposer des algorithmes rapides d'opérateurs de décimation et d'interpolation d'un facteur 2. Ces opérateurs constituent notamment la base de la théorie de l'**analyse multirésolution** [Mallat, 2000], à l'origine de la construction de bases discrètes d'ondelettes dyadiques, qui sera introduite dans la section suivante. En vision par ordinateur, l'utilisation de telles ondelettes est également largement motivée par des études physiologiques de la perception visuelle [Unser et Eden, 1989].

### Quelques propriétés des ondelettes

Un bon nombre de propriétés permet de caractériser les ondelettes. Certaines de ces propriétés interagissent entre elles, ne pouvant pas toutes être satisfaites en même temps : un compromis doit donc être trouvé pour le choix (ou la construction) de l'ondelette, en accord avec l'application envisagée.

- (i) **Localisation** - La qualité de localisation en temps et en fréquence peut se mesurer par rapport à la borne d'incertitude du *principe de Heisenberg* (cf. annexe C) qui, lorsqu'elle est atteinte, assure la meilleure localisation possible. Une mauvaise localisation induit un

étalement de l'énergie du signal autour d'un instant moyen et d'une fréquence moyenne pour une échelle donnée.

- (ii) **Régularité** - Une des propriétés les plus importantes d'une ondelette est la *cancellation* qui est liée à sa régularité et qui dépend en fait du nombre  $n$  de ses moments nuls. L'appartenance à cette classe d'ondelettes est équivalente à :

$$\forall 0 \leq k \leq n : \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0 \quad (\text{autrement dit : } \frac{d^k \mathcal{F}[\psi](0)}{d\nu^k} = 0).$$

La nullité des moments de l'ondelette permet l'analyse de la régularité locale d'un signal, mais elle permet également de caractériser une propriété "duale", *i.e.* l'ordre des singularités d'un signal. En outre, dans la phase de reconstruction du signal, la qualité de restitution dépend de la régularité de l'ondelette.

- (iii) **Compacité** - La compacité est liée aux propriétés de localisation de l'ondelette. Elle permet de garantir une grande précision dans le calcul des coefficients car elle évite le problème de troncature dans le cas des supports à durée infinie. La cancellation des moments de l'ondelette accroît sa régularité, mais elle augmente aussi la taille de son support.
- (iv) **Symétrie** - Les fonctions symétriques ou antisymétriques sont importantes parce qu'elles permettent de construire des bases d'ondelettes régulières sur un intervalle, et non plus sur tout l'axe réel.
- (v) **Orthogonalité** - L'ondelette mère  $\psi$  est dite orthogonale lorsque la famille d'ondelettes  $\{\psi_{jk}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}}$  est une base orthogonale :

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{j'k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'}.$$

L'orthogonalité de l'ondelette minimise la redondance de la représentation, produisant ainsi un codage efficace grâce au faible nombre de coefficients : l'indépendance des coefficients, résultant de la condition d'orthogonalité, se traduit par une absence d'information redondante. En revanche, si l'on veut que l'ondelette  $\psi$  soit symétrique ou qu'elle préserve la phase linéaire, ce qui est très important en traitement d'image, la base d'ondelettes ne devra pas être orthogonale.

### 5.2.2. Analyse multirésolution et décomposition en ondelettes

L'analyse multirésolution (**AMR**) permet de décomposer un signal sur une série de sous espaces de  $L^2(\mathbb{R})$  : les espaces dits d'approximations et de détails. Le principe consiste à décomposer le signal à analyser en une suite de coefficients, également dits d'approximation et de détail, chaque suite d'approximation se décomposant à son tour en approximation et détail. Les ondelettes apparaissent naturellement dans le formalisme de l'**AMR**, la **TOD** (généralement dyadique) étant ici utilisée pour fournir la décomposition du signal sur les espaces de détails. Dans le cadre du traitement d'image, l'**AMR** a rencontré un grand succès, surtout pour des applications d'analyse et de compression.

Dans la suite, nous évoquons succinctement le cadre théorique de l'**AMR** pour la génération d'ondelettes orthogonales 1D et nous présentons sa généralisation aux images.

### Cadre théorique de l'AMR

Mallat [Mallat, 1989] et Meyer [Meyer, 1989] montrent que des bases orthonormées d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$  peuvent être obtenues à partir de la notion d'**AMR**. L'**AMR** consiste à définir des espaces sous-empoîtés  $V_j$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  qui vérifient diverses contraintes d'invariance par translation et par changement d'échelles relatives [Mallat, 2000] :

**Définition 5.7** Une suite  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , de sous espaces vectoriels de  $L^2(\mathbb{R})$  est une **approximation multirésolution** (et chacun des espaces est un espace d'approximation) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

Il existe une fonction  $\phi$  telle que  $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de Riesz de  $V_0$ , i.e. :

$$\exists A > 0, B \mid \forall f \in V_0, f = \sum_k g_k \phi(t - k) \text{ avec } A \|f\|_2^2 \leq \sum g_k^2 \leq B \|f\|_2^2.$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_{j-1} \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_j$$

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j.$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

Chaque espace  $V_j$  à la résolution  $2^j$  est ainsi caractérisé par une base orthonormale  $(\phi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$  dont les fonctions sont obtenues à partir d'un même motif  $\phi$ , appelé **fonction d'échelle**, suivant le schéma :

$$\{\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}.$$

Les ondelettes apparaissent alors naturellement comme un moyen d'écrire la différence entre deux espaces  $V_j$  et  $V_{j+1}$  consécutifs. Un des principaux résultats de l'**AMR** fournit en effet l'existence d'une fonction  $\psi$ , appelée **ondelette mère**, telle que les familles :

$$\{\psi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

soient des bases orthonormales des espaces de détail  $W_j$  définis comme les complémentaires orthogonaux des espaces d'approximation :

$$W_j \oplus V_j = V_{j-1}. \quad (5.10)$$

La construction effectuée par l'**AMR** fournit une décomposition naturelle d'un signal  $f$ , puisque la somme directe des  $W_j$  recouvre  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_j \oplus \bigoplus_{j' \leq j} W_{j'}, \quad (5.11)$$

et cette décomposition consiste en des projections sur les bases  $\{\phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  :

1. l'approximation d'un signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  à la résolution  $2^j$  correspond à sa projection sur l'espace  $V_j$ , elle est donc caractérisée par la suite de coefficients d'approximation  $(a_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$  :

$$a_{jk} = \langle f, \phi_{jk} \rangle \quad f_{V_j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} \phi_{jk}.$$

2. les détails du signal  $f$  à la résolution  $2^j$  sont définis par la projection de  $f$  sur  $W_j$  :

$$d_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \mathcal{T}_\psi[f](2^j, k) \quad f_{W_j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{jk}$$

et sont caractérisés par la suite des coefficients en ondelettes  $(d_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Plus l'échelle est fine, plus l'approximation est précise. En passant d'une échelle  $j$  à une échelle  $j-1$ , on rajoute des détails au signal. Ainsi, la relation (5.10) implique que l'approximation du signal à un niveau  $j-1$  correspond à une approximation plus grossière, au niveau  $j$ , complétée par le détail au même niveau :

$$f_{V_{j-1}} = f_{W_j} + f_{V_j}$$

et la relation (5.11) implique que pour tout signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{W_j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{jk} \\ &= f_{V_j} + \sum_{j' \leq j} f_{W_{j'}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} \phi_{jk} + \sum_{j' \leq j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j'k} \psi_{j'k} \end{aligned}$$

L'avantage du formalisme de l'**AMR** est lié à l'existence de bancs de filtres discrets qui déterminent de manière unique la fonction d'échelle et l'ondelette mère. Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont en effet entièrement définies par la seule donnée de filtres miroirs en quadrature  $h$  (passe-haut) et  $g$  (passe-bas) suivant les relations d'échelle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \phi(t-k) = h \star \phi(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \phi(t-k) = g \star \phi(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Notons que l'**AMR** peut être étendu pour la génération de bases d'ondelettes non-orthogonales. Des espaces de détail  $\tilde{V}_j$  et d'approximation  $\tilde{W}_j$  duals sont alors construits, de sorte qu'une **AMR** duale est induite :  $W_j$  et  $\tilde{V}_j$  sont orthogonaux, ainsi que  $V_j$  et  $\tilde{W}_j$ , mais pas  $V_j$  et  $W_j$ , ni  $\tilde{V}_j$  et  $\tilde{W}_j$ . La décomposition d'un signal  $f$  peut alors s'effectuer dans les bases des deux **AMR** duales, et on a l'identité :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}(t)$$

où  $\{\tilde{\psi}_{jk}\}$  désigne la base duale de  $\{\psi_{jk}\}$ . Des ondelettes différentes sont ainsi utilisées pour l'analyse et la synthèse. La construction par l'**AMR** permet par ailleurs d'expliciter les bases duales, qui sont également des bases d'ondelettes :  $\tilde{\psi}$  (et similairement  $\tilde{\phi}$ ) sont entièrement déterminés par des filtres discrets  $\tilde{h}$  et  $\tilde{g}$ , appelés filtres miroirs conjugués, suivant des formules identiques aux équations (5.12).

### Extension au cas 2D

Une **AMR** peut être définie dans le cas 2D comme une séquence de sous-espaces emboîtés  $V_j$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Les définitions en 1D sont également valables, de sorte qu'il existe une fonction d'échelle  $\Phi$  engendrant l'**AMR**, *i.e.* telle que les familles de fonctions :

$$\{\Phi_{j,(k,l)}(\vec{x}) = 2^{-j}\Phi(2^{-j}x - k, 2^{-j}y - l)\}_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}, \quad \vec{x} = (x, y)$$

soient des bases orthonormées des espaces  $V_j$ .

En pratique, la méthode la plus simple consiste à construire des **AMR** séparables de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  par produit tensoriel d'une **AMR** de  $L^2(\mathbb{R})$ . Chaque espace  $V_j$  se développe ainsi en un produit tensoriel de sous-espaces identiques  $V_j^1$  de  $L^2(\mathbb{R})$  :  $V_j = V_j^1 \otimes V_j^1$ , de sorte que :

$$\Phi(\vec{x}) = \phi(x)\phi(y)$$

où  $\phi$  est la fonction d'échelle 1D de  $V_j^1$ . Si  $\psi$  désigne l'ondelette 1D associée à  $\phi$ , alors on peut définir une base orthonormale du complémentaire orthogonal  $W_j$  de  $V_j$  en translatant et dilatant trois fonctions d'ondelettes 2D :

$$\Psi^1(\vec{x}) = \phi(x)\psi(y), \quad \Psi^2(\vec{x}) = \psi(x)\phi(y), \quad \Psi^3(\vec{x}) = \psi(x)\psi(y).$$

Les projections sur les espaces  $V_j$  et  $W_j$  permettent de définir *resp.* les coefficients d'approximation et de détail qui interviennent dans le changement de bases :

$$\{\Phi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \leftrightarrow \{\Phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\Psi_{jk}^1\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\Psi_{jk}^2\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\Psi_{jk}^3\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

À l'échelle  $j$ , une image  $I$  ( $I \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ) est décomposée en un jeu de quatre coefficients selon :

$$a_j = \langle I, \Phi_j \rangle, \quad d_j^1 = \langle I, \Psi_j^1 \rangle, \quad d_j^2 = \langle I, \Psi_j^2 \rangle, \quad d_j^3 = \langle I, \Psi_j^3 \rangle. \quad (5.13)$$

L'analyse par ondelettes consiste donc à déterminer les suites  $\{a_{jk} = \langle I, \phi_{jk} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{d_{jk}^r = \langle I, \psi_{jk}^r \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}, r \in \{1,2,3\}}$  pour différentes résolutions. Mallat propose dans [Mallat, 1989] un algorithme récursif permettant de les calculer de façon simple et rapide, suivant un schéma de décomposition en sous-bandes utilisant les paires de filtres conjugués en quadrature  $h$  et  $g$ , qui déterminent complètement les ondelettes. La nature dyadique de l'**AMR** est étroitement liée à la possibilité d'opérer des sous-échantillonnages élémentaires du signal par suppression d'un terme sur deux, et des suréchantillonnages élémentaires par insertion d'un 0 tous les deux coefficients : en effet les équations (5.12) peuvent être vues comme des relations de filtrage-décimation.

### Décomposition multiéchelle de l'image

L'intérêt des ondelettes est de permettre la décomposition de l'image à différentes résolutions et d'essayer d'extraire l'information pour chacune de ces résolutions. À chaque échelle, on considère une approximation de l'image à étudier, et un certain nombre de détails, correspondant éventuellement à plusieurs orientations, le tout constituant des sous-bandes.

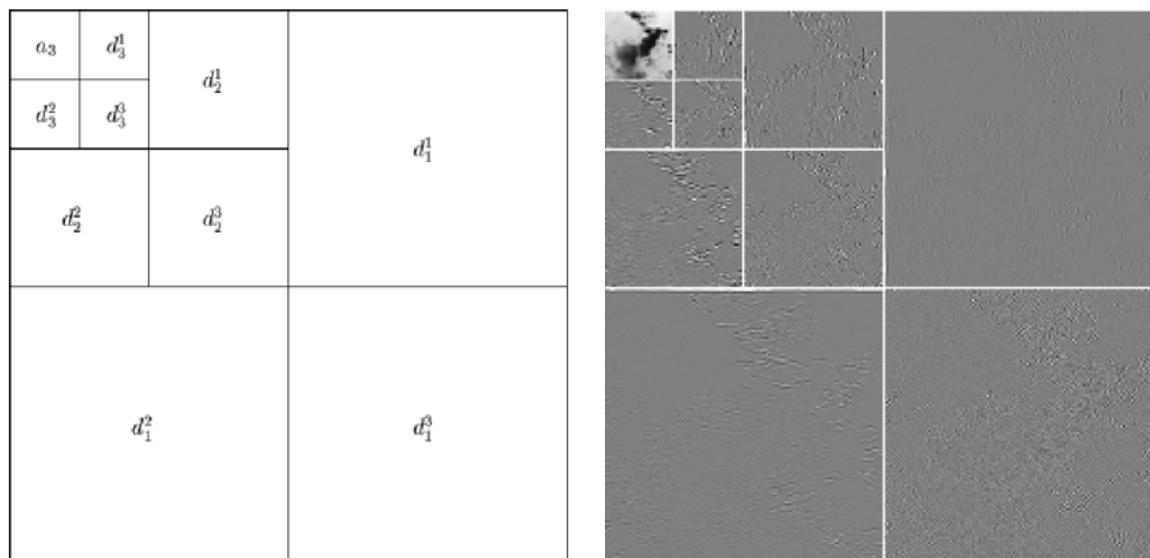


FIG. 5.3.: Décomposition d'une image en détails et approximation de l'AMR. **À gauche** : représentation de l'arbre de décomposition sur  $J = 3$  résolutions. On obtient ainsi  $3J + 1 = 10$  sous-images. **À droite** : décomposition d'une image **IR** (l'ondelette utilisée est ici l'ondelette de Daubechies d'ordre 8 [Daubechies, 1992]); l'image originale est présentée en figure 5.4.

On représente classiquement les coefficients de décomposition d'une image en partageant le plan image en imagerie de façon récursive. Pour  $J > 0$  quelconque, une image  $I$  est représentée de manière exhaustive par les  $3J + 1$  images discrètes suivantes :

$$\{a_j, (d_j^1)_{1 \leq j \leq J}, (d_j^2)_{1 \leq j \leq J}, (d_j^3)_{1 \leq j \leq J}\}.$$

Le nombre d'échantillons représentant l'image reste le même quel que soit la profondeur de décomposition. Dans ce processus d'itération, chaque image approximée  $a_{j-1}$  est décomposée en  $a_j$ ,  $d_j^1$ ,  $d_j^2$  et  $d_j^3$  jusqu'à la profondeur  $J$ . Cette décomposition en ondelettes peut s'interpréter comme une décomposition du signal en un ensemble de canaux fréquentiels indépendants spatialement orientés. En effet, puisque  $\phi$  et  $\psi$  réalisent *resp.* des filtrages passe-bas et passe-haut :

- $a_j$  correspond aux basses fréquences de l'image  $a_{j-1}$ ,
- $d_j^1$  donne les hautes fréquences verticales (*i.e.* les contours horizontaux),
- $d_j^2$  donne les hautes fréquences horizontales (*i.e.* les contours verticaux),
- $d_j^3$  donne les hautes fréquences dans les 2 directions (*i.e.* les coins, les diagonales).

On peut ainsi définir un arbre de décomposition indiquant la hiérarchie des espaces d'approximation et de détail. Là encore, l'ouvrage de Mallat [Mallat, 2000] fournit une description détaillée des algorithmes de transformation directe (décomposition, *cf.* figure 5.3) et, également, de transformation inverse (reconstruction, *cf.* figure 5.4).



FIG. 5.4.: Compression d'image obtenue par quantisation des coefficients d'ondelette. **De gauche à droite** : image **IR** originale, reconstruction, erreur.

### Discussion

En segmentation d'images, diverses méthodes utilisant les coefficients en ondelette ont été employées. Les méthodes de décomposition dans des bases d'ondelettes de l'**AMR** permettent tout naturellement d'extraire les détails des différentes sous-bandes jusqu'à une certaine résolution. Les détails correspondant notamment aux coefficients d'ondelette les plus élevés peuvent alors être identifiés aux contours des images. On peut également extraire des caractéristiques de texture en utilisant ces décompositions [Mallat, 1989]. Pour chaque sous-image obtenue, la décomposition fournit une carte d'énergie permettant d'extraire les composantes les plus significatives ; à partir de ces cartes, la discrimination des textures est effectuée en définissant une carte des distances. Les filtres d'ondelettes couramment utilisés sont les filtres proposés par Daubechies [Unser et Eden, 1989] ou les ondelettes de Gabor [Ma et Manjunath, 1996]. On peut également généraliser la **TO** en construisant les paquets d'ondelettes où les détails peuvent aussi être décomposés. Bien qu'ayant de bonnes performances expérimentales, ces méthodes reposent sur des réglages empiriques de paramètres, qui rend leur analyse mathématique difficile.

En compression d'image, le recours à la décomposition en ondelettes consiste à ne retenir que les coefficients significatifs les plus représentatifs de l'image, puis à les coder [Cohen et Froment, 1992]. Les algorithmes de compression par ondelettes classiquement proposés privilégient les coefficients de valeur absolue élevée. Notons que ces coefficients possèdent une double corrélation spatiale et inter-échelle car ils se situent en fait le long des lignes de discontinuités de l'image à l'échelle considérée, *i.e.* à l'emplacement des contours multiéchelles tels qu'ils sont définis par Marr [Marr, 1982]. Cette idée est à l'origine de la détection des contours multiéchelles par les maxima d'ondelettes.

#### 5.2.3. Maxima d'ondelettes et détection de contours

Il apparaît, dans le cadre 2D, que l'information essentielle portée par une représentation en ondelettes est donnée par ses coefficients de grande amplitude, lesquels sont localisés au voisinage des contours. Il existe une corrélation géométrique entre les coefficients des différentes échelles. Ces re-

marques conduisent à considérer un échantillonnage adaptatif de la **TOC** de façon à ce que les coefficients retenus correspondent directement aux différents contours multiéchelles [Mallat et Zhong, 1992]. C'est le principe de la représentation par les maxima du module de la transformée en ondelettes (**MMTO**).

### Cadre théorique de la représentation par les MMTO

La **TOC** d'une image  $I$  est obtenue par filtrage multiéchelle d'une ondelette 2D séparable  $\Psi = (\psi^1, \psi^2)$  construite comme la dérivée partielle selon  $x$  et selon  $y$  d'une fonction régulière  $\theta$  de  $\vec{x} = (x, y)$  [Mallat, 2000] :

$$\psi^1(\vec{x}) = -\frac{\partial\theta(\vec{x})}{\partial x} \quad \text{et} \quad \psi^2(\vec{x}) = -\frac{\partial\theta(\vec{x})}{\partial y}. \quad (5.14)$$

Dans les deux directions indexées par  $1 \leq i \leq 2$ , on utilise la **TO** dyadique en  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  :

$$\mathcal{T}_{\Psi}^i[I](2^j, \tau) = \langle I, \Psi_{2^j, \tau}^i \rangle = I \star \bar{\psi}_{2^j}^i(\tau)$$

où on pose :

$$\psi_{2^j}^i(\vec{x}) = \frac{1}{2^j} \psi^i\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\psi}_{2^j}^i(\vec{x}) = \psi_{2^j}^i(-x, -y).$$

Le noyau  $\theta$  apparaissant dans (5.14) est en fait utilisé, *via* ses dilatations, pour lisser l'image. Les coefficients de la **TOD** dyadique correspondent au jacobien :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\Psi}^1[I](2^j, \tau) \\ \mathcal{T}_{\Psi}^2[I](2^j, \tau) \end{pmatrix} = 2^j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_1} (I \star \bar{\theta}_{2^j})(\tau) \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} (I \star \bar{\theta}_{2^j})(\tau) \end{pmatrix} = 2^j \nabla (I \star \bar{\theta}_{2^j})(\tau) \quad (5.15)$$

et sont donc proportionnels aux coordonnées du vecteur gradient  $\nabla I$  de  $I$  lissé par  $\bar{\theta}_{2^j}$  :

$$\bar{\theta}_{2^j}(\vec{x}) = \theta_{2^j}(-x, -y) = 2^{-j} \theta(-2^j x, -2^j y).$$

La représentation par **MMTO** correspond à l'échantillonnage suivant de la représentation en ondelettes dyadiques [Mallat et Zhong, 1992] : pour chaque échelle  $2^j$ , les maxima du module de la transformée en ondelettes sont définis aux points où le module du jacobien (5.15) est localement maximal le long des points parallèles à la direction donnée par ce jacobien. Le module du jacobien  $\nabla (I \star \bar{\theta}_{2^j})(\tau)$  est proportionnel au module de la **TO** :

$$\mathcal{M}_{\Psi}[I](2^j, \tau) = \sqrt{|\mathcal{T}_{\Psi}^1[I](2^j, \tau)|^2 + |\mathcal{T}_{\Psi}^2[I](2^j, \tau)|^2}.$$

Si l'angle du vecteur de la **TO** dans le plan est exprimé par :

$$\mathcal{A}_{\Psi}[I](2^j, \tau) = \begin{cases} a(\tau) & \text{si } \mathcal{T}_{\Psi}^1[I](2^j, \tau) \geq 0 \\ \pi - a(\tau) & \text{si } \mathcal{T}_{\Psi}^1[I](2^j, \tau) < 0 \end{cases}$$

avec  $a(\tau) = \tan^{-1}(\mathcal{T}_{\Psi}^1[I](2^j, \tau)/\mathcal{T}_{\Psi}^2[I](2^j, \tau))$ , alors la direction de  $\nabla (I \star \bar{\theta}_{2^j})(\tau)$  est pointée par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}_j(\tau) = (\cos \mathcal{A}_{\Psi}[I](2^j, \tau), \sin \mathcal{A}_{\Psi}[I](2^j, \tau))$ . Les **MMTO**, à une échelle  $2^j$ , correspondent aux points  $\tau_0$  pour lesquels le module  $\mathcal{M}_{\Psi}[I](2^j, \tau)$  est localement maximal en  $\tau = \tau_0$  lorsque  $\tau = \tau_0 + \lambda \mathbf{n}_j(\tau)$  pour  $|\lambda|$  petit. Ces points particuliers se traduisent par la notion de contours.

### Contours multiéchelles

Les **MMTO** permettent d'étudier à différentes échelles, les points de discontinuités présent dans l'information analysée. Cette définition est en fait un cas particulier de celle des contours multiéchelles donnée dans [Canny, 1986], en continuité des travaux de [Marr, 1982] : les contours formalisés par des discontinuités de l'intensité sont des singularités qui ont tendance à se propager à toutes les échelles et qui se manifestent par des coefficients de valeur élevée. Les points de contours multiéchelles s'identifient donc aux **MMTO**.

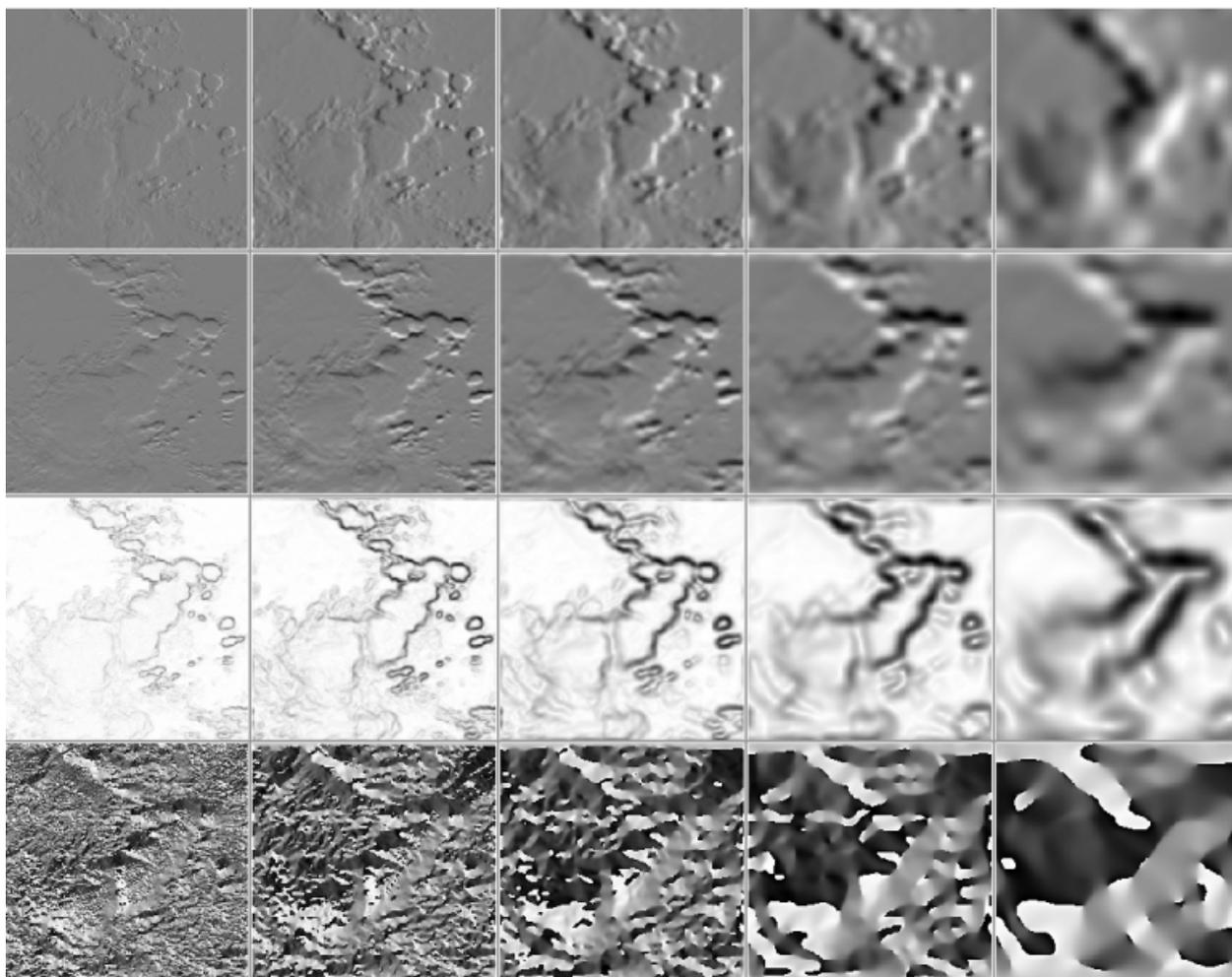


FIG. 5.5.: Représentation par **MMTO** à différentes résolutions  $j$ . **De haut en bas** : composantes  $\mathcal{T}_{\Psi}^1[I](2^j, \tau)$  et  $\mathcal{T}_{\Psi}^2[I](2^j, \tau)$  dans les directions horizontale et verticale *resp.*, modules  $\mathcal{M}_{\Psi}[I](2^j, \tau)$  (les pixels blancs et noirs correspondent *resp.* aux valeurs nulles et maximales de l'amplitude), angles  $\mathcal{A}_{\Psi}[I](2^j, \tau)$ . **De gauche à droite** : résolutions  $j = 1, \dots, 5$ . Ces images, ainsi que celles des figures 5.6, 5.7 et 5.24 ont été obtenues en utilisant les codes fournis par le logiciel **LastWave** © [LastWave].

L'algorithme de détection de contours utilise la représentation module-angle définie ci-dessus et

peut être divisé en deux principales étapes :

- à chaque échelle  $j$ , on cherche un point  $\tau_0$  correspondant au maximum des modules en comparant  $\mathcal{M}_\Psi[I](2^j, \tau)$  à ses voisins dans la direction  $\mathbf{n}_j(\tau)$ .
- le point  $\tau_0$  correspond à un maximum de module à travers les échelles.

La représentation finalement obtenue permet d'introduire une composante géométrique, les courbes de contour à une échelle donnée, lesquelles sont obtenues par chaînage des maxima voisins formant une direction orthogonale à celle du jacobien. À cette composante géométrique sont associées les valeurs des coefficients en ondelettes de chaque maxima. Dans l'implémentation discrète, cela correspond au même type d'algorithme de filtrage en sous-bandes que celui utilisé dans le cadre des **AMR**, la différence étant qu'aucune opération de décimation n'est effectuée.

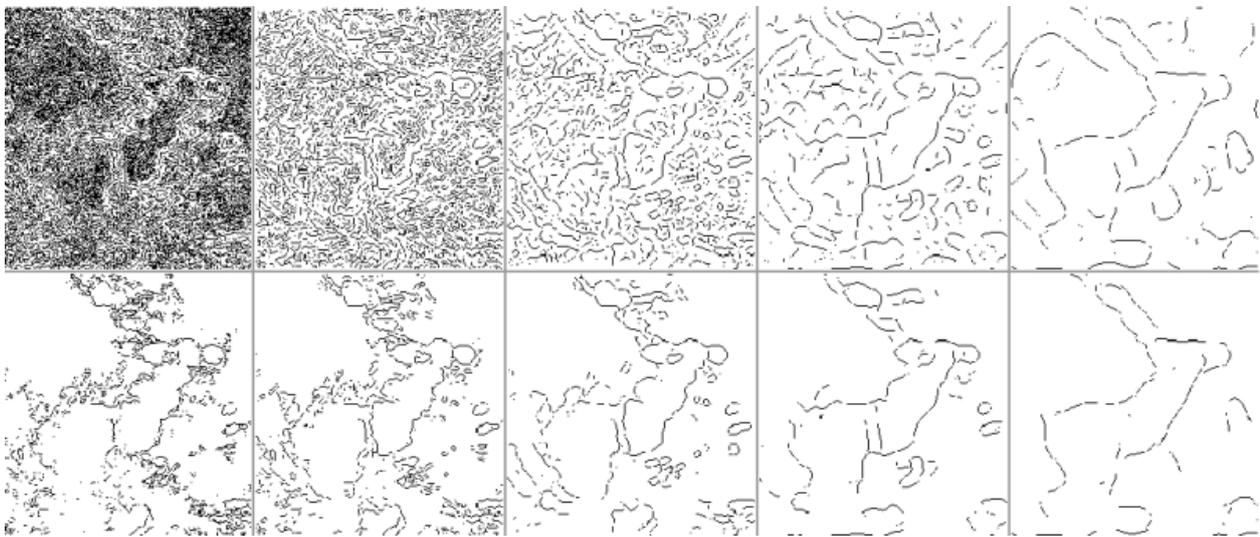


FIG. 5.6.: Contours multiéchelles obtenus à partir de la représentation de la figure 5.5. **En haut** : modules maximaux, **en bas** : modules maximaux seuillés.

### Reconstruction à partir des modules maximaux

Les maxima d'ondelettes permettent de disposer d'une représentation illustrant les bords de l'image à différentes échelles. De plus, cette représentation a la particularité d'être empiriquement inversible. Ceci a ouvert le champ des applications vers des problématiques de débruitage, de compression [Cohen et Froment, 1992].

De fait, une application de cette représentation à la compression d'images a tout de suite été proposé [Froment et Mallat, 1991]. Elle consiste à représenter une image par son approximation la plus grossière et par ses maxima dyadiques. Lorsque tous les maxima locaux sont conservés, cette représentation permet de reconstruire une image visuellement identique à l'originale. L'algorithme de reconstruction proposé alterne une projection sur l'espace des **TO** avec une projection sur l'espace des images possédant la même représentation par maxima.

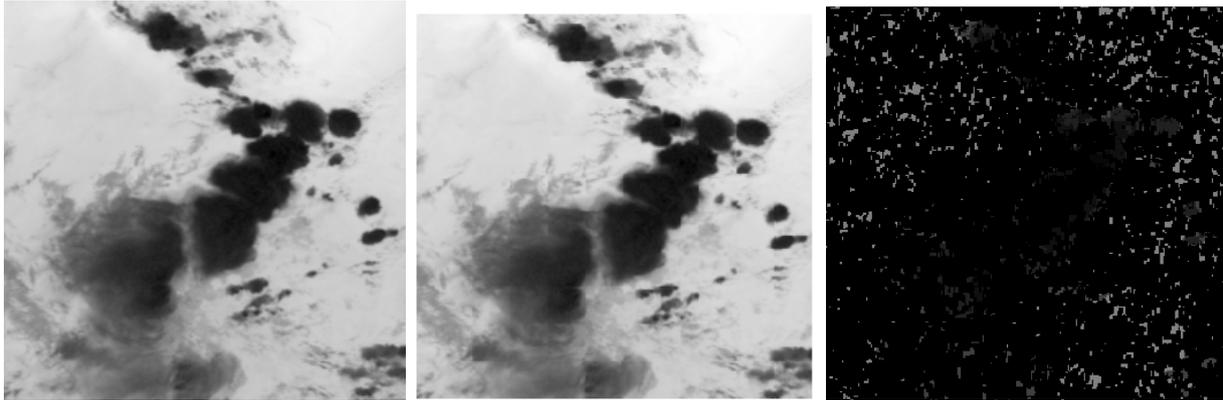


FIG. 5.7.: Reconstruction à partir des **MMTO** : ceux-ci sont obtenus par seuillage des modules à toutes les résolutions. **De gauche à droite** : image originale, image reconstruite et erreur.

### Discussion

L'approche par maxima locaux revient à considérer, en quelque sorte, les ondelettes comme des opérateurs de dérivation multiéchelle : d'une part, les discontinuités spatiales se retrouvent à différentes échelles, et, d'autre part, les zones régulières de taille suffisante se manifestent par de faibles coefficients à de nombreuses échelles. On obtient ainsi une meilleure caractérisation théorique des contours multiéchelles. Par ailleurs, les maxima locaux conduisent à une représentation plus stable, autorisant notamment une reconstruction de qualité. L'idée essentielle que suggère cette méthode est, comme nous le verrons dans la suite, que la **TO** constitue un outil bien adapté à la caractérisation des singularités du signal (en l'occurrence, dans l'approche par **MMTO**, les maxima sont justement liés à ces singularités).

Cependant, contrairement à la représentation par bases d'ondelettes, la représentation par maxima locaux a suscité peu de recherches ultérieures en traitement d'image, et elle demeure peu utilisée dans les applications. La caractérisation exacte des contours multiéchelles nécessite notamment un grand nombre de maxima en ondelettes. L'échantillonnage et la quantification de ces maxima peuvent entraîner des erreurs qui se matérialisent par des artefacts au voisinage des contours.

#### 5.2.4. Conclusion

L'analyse en ondelettes, qui s'intéresse à toutes les échelles à la fois, peut être vue comme un "microscope mathématique" bien adapté à la caractérisation des propriétés d'invariance d'échelle [Mallat, 2000] : elle constitue l'outil particulièrement adapté pour l'étude des comportements qui mettent en jeu toutes les échelles conjointement. De nombreux travaux ont montré sa pertinence pour l'analyse des phénomènes de loi d'échelle. Intuitivement, il y a une adéquation (pour l'analyse et pour la synthèse) entre le problème étudié (comportements à travers les échelles) et l'outil mis en œuvre (analyse multiéchelle). Elle permet de prélever des paramètres locaux dans le domaine spatial, dans le domaine fréquentiel, à des résolutions multiples ainsi que des paramètres inter-

échelles.

La représentation en ondelettes permet ainsi d'étudier à différentes échelles, les points de discontinuités présent dans l'information analysée. En 2D, ces points particuliers se traduisent tout naturellement par la notion de contours. Nous allons voir que l'approche multifractale, *via* l'utilisation de l'outil ondelette, fournit un formalisme idéalement adapté à l'étude et la modélisation des comportements à travers les d'échelle. Elle offre notamment une définition plus riche, du point de vue géométrique, des contours.

### 5.3. Le formalisme multifractal pour l'analyse d'images

La **géométrie fractale** a été introduite pour décrire les relations d'échelle entre des structures géométriques et l'échelle d'analyse de ces structures : la "taille" d'un ensemble fractal varie comme l'échelle à laquelle il est examiné, donné par la dimension fractale [Mandelbrot, 1982] [Wornell, 1995]. La généralisation à la notion de **multifractal** [Lévy Véhel, 2000] revient essentiellement à considérer les ensembles multifractals comme une hiérarchie d'ensembles dont chacun a sa propre dimension fractale. Ainsi l'analyse multifractale fournit une relation d'échelle qui requiert une famille (éventuellement infinie) de dimensions, plutôt qu'une seule dimension comme dans le cas de la géométrie fractale [Abry et al., 2002].

Nous nous contenterons ici de rappeler les principales définitions et propriétés du formalisme multifractal [Lévy Véhel et al., 1997]. L'idée de départ est d'analyser la régularité locale du signal, sur laquelle on n'a fait aucune hypothèse. La notion de singularité est ainsi introduite. Il apparaît que l'information de régularité ponctuelle est très utile sous cette forme, mais qu'il faut lui adjoindre des informations structurelles. Précisément, l'analyse locale est complétée par une description globale, de plus haut niveau. Cette description consiste le plus souvent à mesurer la taille des ensembles de points de même régularité : c'est la notion de dimension qui est définie. Nous envisagerons également les applications dans le cadre du traitement d'image.

#### 5.3.1. Mesure de régularité d'une fonction

Il existe diverses méthodes permettant de quantifier la régularité d'un signal ou d'un ensemble de points. Précisons tout d'abord ce que nous entendons par régularité : nous nous limitons à un type de régularités, les régularités Hölderiennes, que nous présentons dans le cas 1D.

##### Exposant de Hölder

L'introduction des exposants de Hölder permet de mesurer la régularité locale d'un signal. L'idée est de définir une exposant  $\eta$  tel qu'un signal  $f$  se comporte comme  $|t - t_0|^\eta$  au voisinage de  $t_0$  : cette notion reprend donc d'une certaine façon la notion de dérivée.

**Définition 5.8** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite ponctuellement **Hölderienne** d'exposant  $\eta > 0$  au point  $t_0$ , si et seulement s'il existe deux constantes  $C_{t_0} > 0$  et  $\epsilon_0 > 0$  et un polynôme  $P_n$  de

degré inférieur ou égal à  $n = \lfloor \eta \rfloor$  ( $\lfloor \eta \rfloor$  est la partie entière de  $\eta$ ) tels que :

$$\forall \epsilon < \epsilon_0, \quad |f(t_0 + \epsilon) - P_n(\epsilon)| \leq C_{t_0} |h\epsilon|^\eta. \quad (5.16)$$

Géométriquement cela signifie que le graphe de  $f$  autour de  $t_0$  ressemble à une courbe du type  $t \rightarrow P_n(\epsilon) + C_{t_0} |\epsilon|^\eta$ . Notons que dans le cas où  $f$  n'est pas dérivable,  $\eta < 1$  et  $P_n(\epsilon) = f(t_0)$ , on a donc une relation de la forme  $|f(t_0 + \epsilon) - f(t_0)| \sim C|\epsilon|^\eta$  : ceci correspond à un comportement homogène de degré  $\eta$ . Dans le cas où  $f$  est dérivable, mais où une dérivée d'ordre supérieur n'existe pas, la condition (5.16) revient à retrancher à  $f$  son polynôme de Taylor pour se retrouver dans la situation précédente.

**Définition 5.9** On appelle **exposant de Hölder**  $\eta(t_0)$  de  $f$  en  $t_0$ , la borne supérieure de toutes les valeurs pour lesquelles l'équation (5.16) est vérifiée.

Habituellement, on retient la caractérisation suivante de l'exposant de Hölder  $\eta(t_0)$ , car elle est plus générale :

- (i)  $\forall \gamma < \eta(t_0), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \epsilon) - P_n(\epsilon)}{|\epsilon|^\gamma} = 0$
- (ii) si  $\eta(t_0) < +\infty$ , alors  $\forall \gamma > \eta(t_0), \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \epsilon) - P_n(\epsilon)}{|\epsilon|^\gamma} = +\infty$ .

avec le même polynôme  $P_n$ . L'exposant de Hölder permet, en un sens, de généraliser le concept de développement de Taylor pour les signaux irréguliers.

### Estimation des exposants de Hölder

Classiquement, l'estimation de l'exposant  $\eta(t_0)$  en  $t_0$  se fait par régression linéaire sur le nuage de coordonnées  $(\log |\epsilon|, \log |f(t_0 + \epsilon) - f(t_0)|)$  dont la pente fournit l'exposant  $\eta(t_0)$ , :

$$\eta(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log |f(t_0 + \epsilon) - f(t_0)|}{\log |\epsilon|} \quad (5.17)$$

Nous verrons qu'il existe d'autres méthodes d'estimations. Notons par ailleurs que le terme  $|\epsilon|$  apparaissant dans (5.17) représente la mesure de Lebesgue de l'intervalle  $[t_0, t_0 + \epsilon]$ . L'utilisation d'une mesure différente permet d'analyser la régularité de  $f$  en fonction de cette nouvelle mesure. L'estimation de l'exposant  $\eta(t_0)$  résulte alors de la régression faite sur le nuage de points  $(\log |g(t_0 + \epsilon) - g(t_0)|, \log |f(t_0 + \epsilon) - f(t_0)|)$  où  $g$  définit la mesure de référence.

### Les singularités comme caractéristiques du signal

L'exposant de Hölder étant défini en tout  $t$ , on peut introduire la fonction de Hölder  $t \rightarrow \eta(t)$  qui permet de décrire la régularité de  $f$ . On introduit également tout naturellement la notion de **singularité** en un point comme l'absence de régularité du signal en ce point :

**Définition 5.10** On dit qu'une fonction  $f$  est **singulière** en  $t_0$ , si elle n'est pas Hölderienne d'exposant 1 en  $t_0$ .

Cependant, nous dirons plus généralement que la fonction  $f$  a une singularité d'ordre  $\eta$  au point  $t_0$  si son exposant de Hölder au point  $t_0$  est  $\eta(t_0) = \eta$ . La condition (5.16) revient finalement à supposer que la dérivée  $n$ -ième de  $f$  a une singularité d'exposant  $\eta - n$ . L'irrégularité d'une fonction résulte donc d'une série de singularités de la fonction elle-même ou d'une de ses dérivées d'ordre  $n$ . En résumant, plus  $\eta$  est grand, plus la fonction est régulière. Intuitivement, en terme d'échelle d'analyse, plus  $\eta$  est grand, moins la fonction  $f$  contient de petites échelles.

Les **singularités** jouent un rôle essentiel dans l'étude des signaux irréguliers. Dans le cas 2D, par exemple, les contours d'une image correspondent à des discontinuités ou des variations brusques dans les niveaux de gris, information justement enregistrée par une singularité d'ordre  $\eta$ .

**Remarque : influence sur les coefficients d'ondelette**

Reprenons l'exemple de la régularité Hölderienne, avec un exposant  $0 < \eta < 1$ . La relation (5.16) est équivalente à  $|f(t_0 + \epsilon) - f(t_0)| \leq C_{t_0} |\epsilon|^\eta$ . Sous ces conditions, il peut être montré [Bacry et al., 1990] que si  $\psi$  est une ondelette telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha |\psi(u)| du < +\infty$$

alors il existe une constante  $C'_{t_0}$  telle que les coefficients d'ondelette à l'échelle  $a$  vérifient :

$$|\mathcal{T}_\psi(a, \tau)| \leq C'_{t_0} (|\tau - t_0|^\eta + a^\eta).$$

On aboutit ainsi à une caractérisation des comportements singuliers des fonctions en tous points grâce aux ondelettes. La **TO** permet en fait de déceler les singularités, ainsi que leur ordre de singularité. L'idée intuitive est que les parties régulières du signal sont contenues dans la résolution la plus grossière. On peut également espérer reconstruire le signal à partir de cette résolution grossière et les modules maximaux d'ondelettes : c'est exactement le principe de la détection de contours multiéchelles et de la reconstruction par **MMTO**. En cas de singularité, un maximum est présent dans les échelles fines, et, en général, on détecte une suite de modules maximaux convergeant vers la singularité.

Plus généralement, les ondelettes sont parfaitement adaptées à l'étude des singularités dans les signaux. Ce résultat aura de multiples applications pratiques, dont en particulier le formalisme multifractal pour les fonctions, qui revient à utiliser la **TO** pour faire la statistique des singularités d'un signal. Nous évoquerons ces applications dans les sections suivantes.

**5.3.2. Dimensions fractales d'un ensemble**

Les mesures usuelles de longueur ne sont pas adaptées à la caractérisation des propriétés topologiques des objets dits fractals, notamment. Cela a poussé Hausdorff à proposer une nouvelle définition de la dimension fondée sur les variations de la taille des ensembles lors d'un changement d'échelle. Les dimensions fractales introduites dans le cadre de l'analyse fractale permettent d'obtenir une mesure de la régularité d'une fonction.

### Mesure et dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff repose sur la mesure de Hausdorff. Si l'on se place dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $D$ , on peut définir pour chaque ensemble  $\Omega \subset E$  son diamètre, noté  $|\Omega|$ , comme la borne supérieure (éventuellement infinie) des distances entre deux points de  $\Omega$ . On introduit la notion d' $\epsilon$ -recouvrement de  $\Omega$  [Berroir, 1994] :

**Définition 5.11** Si  $\{U_i\}$  est un ensemble dénombrable d'ensembles tels que  $\forall i, |U_i| < \epsilon$  et  $\Omega \subset \cup_{i=1}^{+\infty} U_i$ , alors  $\{U_i\}$  est un  $\epsilon$ -recouvrement de  $\Omega$ .

Étant donné un nombre réel  $s \geq 0$ , on définit ensuite pour tout  $\Omega$  la quantité suivante :

$$\mathcal{H}_\epsilon^s(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ est un } \epsilon\text{-recouvrement de } \Omega \right\}.$$

Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , les recouvrements étant emboîtés, la suite positive  $\sum_{i=1}^{+\infty} |U_i|^s$  décroît, et, par conséquent,  $\mathcal{H}_\epsilon^s(\Omega)$  croît et admet une limite (éventuellement infinie) :

**Définition 5.12** On appelle **mesure de Hausdorff de dimension  $s$**  de l'ensemble  $\Omega$  la limite :

$$\mathcal{H}^s(\Omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\epsilon^s(\Omega).$$

$\mathcal{H}^s(\Omega)$  est une mesure qui permet de généraliser les notions de longueurs, d'aires et de volumes [Falconer, 1990]. Les propriétés de changement d'échelle de cette mesure permettent de définir une valeur de coupure  $d_{\mathcal{H}}(\Omega)$  telle que la mesure de Hausdorff de dimension  $s$  est infinie si  $s < d_{\mathcal{H}}(\Omega)$ , et nulle si  $s > d_{\mathcal{H}}(\Omega)$  [Berroir, 1994] :

**Définition 5.13** La **dimension de Hausdorff**  $d_{\mathcal{H}}(\Omega)$  d'un ensemble  $\Omega$  est définie par :

$$d_{\mathcal{H}}(\Omega) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \mathcal{H}^s(\Omega) = 0\} = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid \mathcal{H}^s(\Omega) = \infty\} \quad (5.18)$$

Notons que si  $\Omega$  est régulier, alors dimension de Hausdorff et dimension topologique coïncident.

### Dimension de boîtes

Comme elle dérive d'une mesure, la dimension de Hausdorff est l'outil le mieux adapté pour décrire les objets fractals, mais présente l'inconvénient d'être difficile à estimer. D'ailleurs, elle est inutilisable en pratique et on lui préfère les dimensions de boîtes de signification voisine :

**Définition 5.14** Soient  $\Omega$  un ensemble borné de  $E$ ,  $\epsilon > 0$  et  $N_\epsilon(\Omega)$  le plus petit nombre d'ensembles de diamètres au plus  $\epsilon$  recouvrant  $\Omega$ . On définit alors les **dimensions de boîtes inférieure et supérieure** de  $\Omega$  par :

$$d_B^-(\Omega) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_\epsilon(\Omega)}{\log \epsilon} \quad d_B^+(\Omega) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_\epsilon(\Omega)}{\log \epsilon}$$

Si ces nombres coïncident, on appelle leur valeur commune **dimension de boîtes** de  $\Omega$  et on la note  $d_B(\Omega)$ .

Ces dimensions reposent sur une notion de contenu généralisant la notion de volume. Par contre, leur définition, qui est plus simple, permet d'écrire des algorithmes d'estimation de la dimension fractale. En pratique, le calcul de la dimension de boîtes est effectuée en remplaçant  $N_\epsilon(\Omega)$  par le nombre de cubes intersectant  $\Omega$  dans un pavage de l'espace par des cubes d'arête  $\epsilon$ , car cette définition, qui est strictement équivalente, dispense de la recherche d'un minimum. On utilise également, pour  $N_\epsilon(\Omega)$ , l'expression du nombre minimal de boules de rayon  $\epsilon$  nécessaire au recouvrement de  $\Omega$ . Notons que, lorsque la dimension de boîtes  $d_B(\Omega)$  est définie, la définition est équivalente à la relation :

$$N_\epsilon(\Omega) \sim \epsilon^{-d_B(\Omega)}. \quad (5.19)$$

### 5.3.3. Multifractals et spectres multifractals

On constate très souvent que les phénomènes naturels présentent un caractère de fractalité sur une très petite plage de variations de la variable analysée et ne sont pas simplement fractals mais plutôt **multifractals**. De manière simple, on peut concevoir un ensemble multifractal comme un ensemble fractal pour lequel la dimension caractéristique ( $d_{\mathcal{H}}$ ) varie (continûment ou non) en fonction des coordonnées [Abry et al., 2002] : les singularités notamment présentes dans les multifractales varient souvent d'un point à un autre.

On parle d'**analyse multifractale** [Lévy Véhel et al., 1997] lorsqu'on décrit la collection  $\eta$  d'exposants observés non pas sous la forme de la fonction  $\eta(t)$  mais à travers la notion de **spectres multifractals**. Notons qu'en fait il existe des formalismes multifractals pour les mesures, les fonctions et les processus aléatoires [Arnéodo et al., 1995].

#### Spectre de Hausdorff

Le spectre de Hausdorff (ou spectre de singularités) décrit l'ensemble des exposants observés sur la fonction  $f$  en associant à chaque valeur  $\eta_0$  la dimension de Hausdorff  $d_{\mathcal{H}}$  de l'ensemble géométrique constitué des points  $t$  où  $\eta(t) = \eta_0$ .

**Définition 5.15** Soit  $t \rightarrow \eta(t)$  la fonction de Hölder associée à un signal  $f$ . À chaque exposant  $\eta$ , on associe l'ensemble des points où l'exposant de Hölder vaut  $\eta$  :

$$E_\eta \equiv \{t \mid \eta(t) = \eta\} \quad (5.20)$$

et on définit alors le **spectre de Hausdorff** du signal  $f$  comme la fonction  $\eta \rightarrow D_{\mathcal{H}}(\eta)$  qui à toute valeur  $\eta$  fait correspondre la dimension de Hausdorff de  $E_\eta$  :

$$D_{\mathcal{H}}(\eta) = d_{\mathcal{H}}(E_\eta). \quad (5.21)$$

Le spectre de Hausdorff fournit une caractérisation géométrique globale des singularités du signal. Il mesure ainsi la répartition globale des différents exposants de Hölder. Le spectre de Hausdorff renseigne principalement sur la proportion de singularités Hölderiennes d'ordre  $\eta$  apparaissant à une échelle quelconque  $\epsilon$  puisque les relations (5.19) et (5.21) permettent d'écrire

[Lévy Véhel et al., 1997] :

$$N_\epsilon(E_\eta) \sim \epsilon^{-D_{\mathcal{H}}(\eta)}. \quad (5.22)$$

Le spectre de Hausdorff permet ainsi de considérer la distribution des singularités. Cependant, c'est une fonction généralement non triviale, car la fonction  $\eta(t)$  peut présenter à son tour de très fortes irrégularités.

**Définition 5.16** Une fonction **multifractale** est une fonction dont le spectre de Hausdorff est non réduit à un point.

### Spectre de Legendre

Le formalisme multifractal permet dans certains cas de substituer au spectre de Hausdorff un spectre qui lui est égal, mais qui est plus simple à estimer. Quoique bien fondé théoriquement, il apparaît que la détermination de la régularité de signaux quelconques en chaque point, puis le calcul de toutes les dimensions de Hausdorff correspondantes, est une tâche extrêmement complexe. Pour pallier cette difficulté, ont été proposés deux autres spectres multifractals, le spectre de grains (dont nous ne parlerons pas ici) et le spectre de Legendre [Abry et al., 2002].

Ce dernier repose sur la notion de fonction de structures, définie, dans le cas 1D, à partir des accroissements  $\delta_r f$  du signal  $f$  par :

$$\mathcal{Z}_r(p) = \frac{1}{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \delta_r f(k)^p \quad (5.23)$$

avec  $\delta_r f(k) = |f((k+1)r) - f(kr)|$  et  $n_r \rightarrow \infty$  quand  $r \rightarrow 0$ . On définit ensuite la fonction  $\tau(p)$  qui mesure la décroissance de  $\mathcal{Z}_r(p)$  dans les échelles fines par :

$$\tau(p) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{Z}_r(p)}{\log |r|} \quad (5.24)$$

autrement dit :

$$\mathcal{Z}_r(p) \sim r^{\tau(p)} \quad \text{pour } r \rightarrow 0. \quad (5.25)$$

La fonction  $\tau(p)$  est relativement facile à estimer en pratique : sa définition ne fait intervenir que des quantités moyennées sur tout le signal, au lieu des calculs d'exposants en chaque point. Sous certaines hypothèses, cette fonction possède une propriété de concavité et est partout dérivable (hormis peut-être sur un ensemble de points isolés). Elle permet ainsi de définir un autre spectre :

**Définition 5.17** On appelle **spectre de Legendre** la fonction  $\eta \rightarrow D_{\mathcal{L}}(\eta)$  qui fait correspondre à toute valeur  $\eta$  la transformée de Legendre de  $\tau(p)$  :

$$D_{\mathcal{L}}(\eta) \equiv \inf_{p \in \mathbb{R}} \{\eta p - \tau(p)\}. \quad (5.26)$$

En toute généralité, le spectre de Legendre  $D_{\mathcal{L}}$  fournit l'enveloppe convexe du spectre de Hausdorff  $D_{\mathcal{H}}$  et on a la relation suivante :

$$D_{\mathcal{H}}(\eta) \leq D_{\mathcal{L}}(\eta) .$$

Néanmoins, pour certains signaux, il y a égalité :  $D_{\mathcal{H}}(\eta) = D_{\mathcal{L}}(\eta)$ , et on dit alors qu'ils vérifient le formalisme multifractal : on trouve ici un autre point de vue de la définition 5.16. Grâce à des arguments de convexité, on peut montrer que la transformée de Legendre (5.26) est alors inversible [Parisi et Frisch, 1985] [Muzy et al., 1994] :

$$\tau(p) = \inf_{p \in \mathbb{R}} \{ \eta p - D_{\mathcal{H}}(\eta) \} . \quad (5.27)$$

En pratique, même lorsqu'il n'y a pas de raison de croire que le signal vérifie le formalisme multifractal, il est toujours intéressant de calculer le spectre de Legendre. Cette fonction est en effet simple à calculer, car elle ne nécessite notamment pas d'évaluer des dimensions de Hausdorff, et elle permet d'obtenir une estimation du spectre multifractal et ainsi de la gamme des exposants de singularité ou de régularité présents dans le signal.

#### 5.3.4. Images et analyse multifractale

Les définitions ci-dessus peuvent tout naturellement être généralisées en dimension supérieure. Elles permettent ainsi d'introduire les outils multifractals pour l'analyse des signaux 2D [Lévy Véhel, 2000] [Lévy Véhel et al., 1997]. Leur utilisation se justifie d'ailleurs très intuitivement dans l'analyse d'image :

- on s'attend à ce que les contours correspondent à des points de faible régularité. Or la valeur exacte des exposants des points de contour ne saurait être universelle (*i.e.* réduite à une seule valeur) : une transformation non linéaire d'une image peut par exemple modifier les valeurs des exposants tout en conservant les contours. La régularité globale ne suffit pas à décrire l'image.
- si dans la même image on observe des zones texturées, il n'apparaît pas sensé d'affecter chaque pixel à une texture donnée selon sa régularité ponctuelle. La seule régularité locale ne fournit donc pas toute l'information pertinente. Il apparaît nécessaire d'introduire une information structurelle sur l'organisation dans l'image.

L'*analyse multifractale*, qui consiste, rappelons-le, en deux étapes : dans un premier temps, on construit des ensembles qui possèdent un comportement local homogène, puis, dans un second temps, on étudie ces ensembles d'un point de vue globale, permet de répondre à ces attentes en proposant deux niveaux de description de l'image. Nous présentons ici quelques unes des approches courantes.

#### Le choix d'une approche multifractale

Dans les premières méthodes fractales, l'image était considérée comme une surface dans un espace 3D, la troisième dimension étant le niveau de gris de l'image. Plusieurs travaux ont ainsi

cherché à caractériser les textures à l'aide du calcul de la dimension fractale, extension au cas 2D des études menées par Mandelbrot [Pentland, 1984]. Une méthode classique d'évaluation de  $d_{\mathcal{H}}$  est la méthode de *box counting* : l'image étant quadrillée à un pas de résolution  $r$ , on compte le nombre de boîtes  $N_r$  nécessaires pour contenir l'image ; en faisant varier la résolution  $r$ , on obtient le graphe de l'évolution de la quantité  $\log(N_r)$  en fonction de  $\log(r)$  ; le coefficient directeur de la droite ajustant le mieux ce nuage de points constitue une estimation de la dimension fractale. Cependant, cette approche présente l'inconvénient de ne pas rendre compte de la diversité des comportements locaux et la transformation d'un problème 2D en un problème 3D accroît la complexité algorithmique.

Pour remédier à ces contraintes, l'approche multifractale a permis plutôt de considérer l'intensité lumineuse comme une mesure portée par l'image, afin de tenir compte de l'information locale [Lévy Véhel, 1996] [Berroir, 1994]. On attribue ainsi à chaque point  $\vec{x}$  de l'image un exposant de Hölder  $\eta = \eta(\vec{x})$  suivant la formule (5.17) qui informe sur la régularité locale de l'image au voisinage de  $\vec{x}$ . La difficulté majeure est liée à la limitation de la résolution numérique qui rend difficile la mesure de la régularité ponctuelle. Une fois que cette estimation est effectuée sur toute l'image, il est possible de construire des ensembles regroupant les points de l'image ayant des exposants de Hölder proches, afin de mesurer la dimension  $D_{\mathcal{H}}(\eta)$  de ces ensembles : cela constitue la deuxième principale difficulté. L'information  $(\eta, D_{\mathcal{H}}(\eta))$  ainsi obtenue peut être utilisée pour différentes applications, par exemple, pour décider si l'on a affaire ou pas à un point de contour [Lévy Véhel et Mignot, 1994]. Une zone bruitée peut par exemple donner lieu à un grand nombre de singularités isolées qui ne correspondent à aucun contour véritable : l'information de régularité ( $\eta$ ) ne suffit pas à elle seule, il faut tout naturellement lui associer une dimension de Hausdorff ( $D_{\mathcal{H}}(\eta)$ ). Une bonne partie du bruit (pixels de singularités isolées) peut ainsi être éliminée en effectuant un seuillage basé sur la dimension. On peut également utiliser le couple  $(\eta, D_{\mathcal{H}}(\eta))$  pour mesurer la rugosité d'une texture [Lévy Véhel et al., 1992].

### Estimations à l'aide de mesures et de capacités

Les définitions de l'analyse multifractale peuvent être réécrites pour des mesures qui sont fonctions des niveaux de gris de chaque région mesurée [Lévy Véhel et Mignot, 1994]. Classiquement la mesure somme est utilisée :

$$\mu_{\Sigma}(A) = \sum_{\vec{x} \in A} I(\vec{x}) .$$

Cette définition permet de définir les quantités suivantes :

$$\eta_{\mu_{\Sigma}}(A) = \frac{\log \mu_{\Sigma}(A)}{\log \lambda(A)} ,$$

sur un ensemble mesurable  $A$  de mesure de Lebesgue  $\lambda(A)$ . L'image est alors généralement décrite à l'aide des exposants de Hölder relatifs à la mesure  $\mu_{\Sigma}$  :

$$\eta_{\mu_{\Sigma}}(\vec{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \eta_{\mu_{\Sigma}}(B_r(\vec{x}))$$

lorsque la limite est bien définie.

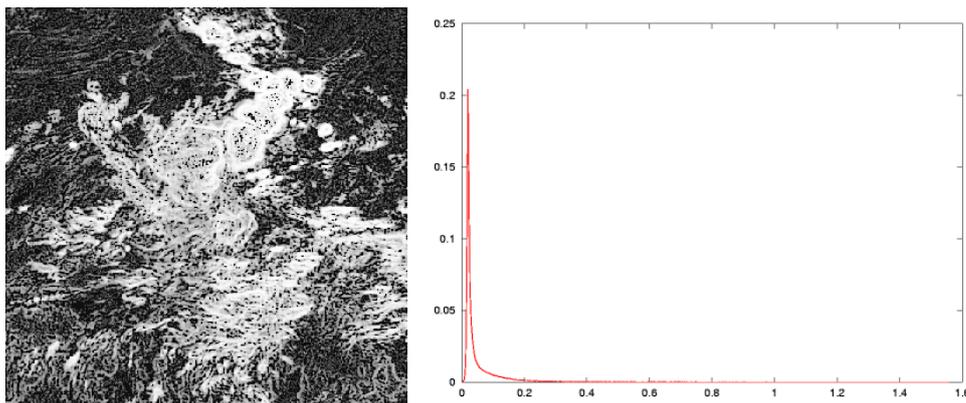


FIG. 5.8.: Estimation des exposants de singularité  $\eta_\mu$  associés à la capacité  $\mu_{\max}$ . **À gauche** : image des exposants ; plus clair est le pixel, plus forte est la valeur de l'exposant en ce point. **À droite** : distribution des exposants ; le rang des singularités estimées est  $[0, 2]$ . Les fortes singularités sont mal estimées.

Afin de réduire la sensibilité des contours au bruit, et pour obtenir une segmentation plus nuancée de l'image, des fonctions d'ensemble autres que la mesure somme, peuvent être introduites, telles que des capacités de Choquet [Lévy Véhel et al., 1992] (pour lesquelles la condition d'additivité n'est pas respectée, contrairement à une mesure). Celles-ci permettent de définir de nouveaux exposants de Hölder ponctuels, sensibles à différents aspects de la variabilité locale de l'image (figure 5.8). Par exemple, la capacité  $\mu_{\max}$  peut être définie par :

$$\mu_{\max}(\vec{x}, \epsilon) = \max_{\vec{y} \in A} I(\vec{y}) .$$

D'autres exemples peuvent être trouvés dans la littérature [Lévy Véhel et Vojak, 1998].

### Estimations à l'aide des MMTO

Il est également possible de formuler les analyses présentées ci-dessus directement sur les coefficients d'ondelette [Decoster et al., 2000]. Le calcul de l'exposant de régularité peut en effet s'effectuer en théorie *via* l'étude du comportement des coefficients d'ondelettes à travers les échelles [Arnéodo et al., 2000]. La méthode qui donne le meilleur résultat en pratique pour le calcul de ces coefficients est l'approche **MMTO** [Arrault et al., 1997] [Arnéodo et al., 1995] déjà présenté dans la section 5.2.3. Celle-ci consiste principalement à suivre à travers les échelles les lignes de maxima des coefficients d'ondelettes ; le taux de décroissance des maxima le long des courbes indique alors l'ordre des singularités isolées [Mallat et Huang, 1992].

La détermination du spectre de singularités peut être réalisée à partir des lignes de **MMTO**. Sur la base de la formulation (5.23), on construit une fonction de structure non plus formulée sur les accroissements du signal, mais sur les coefficients de sa représentation en ondelettes :

$$\mathcal{Z}_a(p) = \sum_{x_i} |T_\Psi[I](x_i, a)|^p$$

où  $\{x_i\}_i$  constitue l'ensemble des maxima locaux de l'échelle  $a$  : l'ondelette est en fait vue comme une sorte de boule de taille  $a$  qui recouvre le support du signal en se plaçant sur les maxima locaux<sup>3</sup>. Le comportement dans les petites échelles permet alors de définir de manière identique l'exposant  $\tau(p)$  :

$$\mathcal{Z}_a(p) \sim a^{\tau(p)} \quad \text{quand } a \rightarrow 0 .$$

Le formalisme multifractal assure alors que la dimension fractale  $D_{\mathcal{H}}$  se déduit des exposants  $\tau(p)$  par transformée de Legendre. Cependant, de façon pratique, le spectre est estimé en se plaçant dans un cadre canonique, sans passer par cette transformée. Le lecteur est renvoyé à [Arnéodo et al., 2000] pour une description de la méthode d'estimation multifractale à l'aide des **MMTO**. Cette approche a notamment été mise en œuvre pour l'analyse d'images satellitaires dans la série d'articles [Arnéodo et al., 2000], [Roux et al., 2000] et [Decoster et al., 2000]. Les auteurs utilisent la méthode **MMTO** pour l'analyse multifractale de surfaces rugueuses dans des images météorologiques haute résolution (**NASA**) de champs de radiance. Ils montrent ainsi que les surfaces de nuages observées se prêtent très bien à une description multifractale. La structure des nuages de type *stratocumulus*, en particulier, reflète fidèlement les propriétés d'invariance d'échelle statistique des champs scalaires passifs en turbulence complètement développée (voir chapitre suivant). Des applications similaires sont également envisagées dans [Arnéodo et al., 1999] et [Arrault et al., 1997].

### 5.3.5. Conclusion

L'intérêt essentiel du *formalisme multifractal* est de permettre d'établir un lien entre une description *géométrique*, faisant appel à la notion de dimension fractale d'un ensemble de points (spectre de Hausdorff), et une description *statistique*, utilisant les lois d'échelle des moments (spectre de Legendre) :

- tout d'abord la présence d'un arrangement multifractal est traduite au travers de propriétés statistiques,
- par ailleurs, les composantes fractales sont des ensembles ayant une signification géométrique particulière, effectivement liée aux propriétés statistiques de l'image et non pas une définition conventionnelle.

Pour établir cette correspondance, les méthodes multifractales proposent une description à la fois locale et globale de la structure singulière des signaux analysés. Elles mettent l'accent sur une description multiéchelle du signal (*via* des moyennes spatiales et/ou des transformées en ondelettes) et accordent une attention spéciale aux singularités du signal et à la notion de dimension d'ensembles. Ces méthodes permettent finalement d'exploiter au mieux les propriétés d'invariance d'échelle d'une image, même si celles-ci ne se manifestent souvent que dans un sens restreint.

---

<sup>3</sup>Cette construction vient essentiellement de la remarque suivante : les accroissements  $\delta_r f$  de la relation (5.23) peuvent être réécrits sous la forme d'une transformée en ondelettes à l'aide de l'ondelette dite "du pauvre" ; l'introduction d'autres ondelettes, moins naïves, permet naturellement d'améliorer l'estimation des singularités.

## 5.4. Un modèle multifractal pour l'extraction des singularités d'une image

Les images naturelles possèdent une structure multifractale, et ceci peut être démontré de différentes manières. Comme nous l'avons souligné précédemment, il apparaît naturel d'adopter une approche qui respecte, voire reproduise les propriétés des systèmes analysés : le meilleur outil d'étude est fourni par l'analyse multifractale.

Dans [Turiel et Parga, 2000a], Turiel et Parga introduisent une technique d'analyse des images basée sur le formalisme multifractal et l'analyse multiéchelle des transitions de niveaux de gris. Cette approche conduit à une décomposition géométrique de l'image, en extrayant un ensemble de pseudo-contours et en exhibant également des structures texturées<sup>4</sup>. Nous développons dans la suite les bases de ce modèle d'analyse qui va nous servir dans nos travaux.

### 5.4.1. Motivation : description statistique *vs.* description géométrique

Revenons sur la manière d'aborder l'analyse multifractale d'un signal. Celle-ci peut être réalisée au travers de deux approches : en analysant soit les propriétés statistiques des données, soit leurs propriétés géométriques.

- (i) L'approche statistique consiste à définir une variable dépendant d'un paramètre d'échelle, puis, à analyser les moments de la distribution afin de mettre en évidence un comportement multiéchelle en loi de puissance. Cela revient essentiellement à calculer ses moments en moyennant les réalisations de cette variable sur un échantillon de points du signal. La variable est dite multifractale si ses moments exhibent une dépendance en loi de puissance selon le paramètre d'échelle.
- (ii) L'approche géométrique vise également à vérifier une dépendance en loi de puissance d'une certaine variable suivant un paramètre d'échelle, mais pour l'ensemble des points du signal (et non plus seulement pour une moyenne de réalisations). Cela revient en fait à effectuer un test direct de la multifractalité en calculant les exposants de singularité en chaque point afin d'obtenir les composantes fractales et de vérifier que l'ensemble est organisé suivant une hiérarchie multifractale.

Les deux formulations sont complémentaires [Abry et al., 2002] puisque elles aboutissent finalement à la même description (à la fois géométrique et statistique, *cf.* conclusion 5.3.5). Cependant, le plus souvent, le caractère multifractal d'un signal est analysé au travers de ses propriétés statistiques (*cf.* les méthodes précédentes exposées à la section 5.3.4) ; l'approche géométrique est plus rarement adoptée car la détermination des exposants d'échelle est *a priori* plus complexe. L'avantage de l'approche géométrique est pourtant évident en terme de localisation spatiale des structures de l'image suivant leur propriétés fractales (on obtient un exposant pour chaque point du signal).

Le modèle multifractal proposé dans [Turiel et Parga, 2000a] présente justement l'avantage d'adopter une approche géométrique pour décrire les structures multifractales de l'image. En outre, il per-

---

<sup>4</sup>Les différentes structures pourront être ultérieurement assimilées aux régions turbulentes complexes du signal.

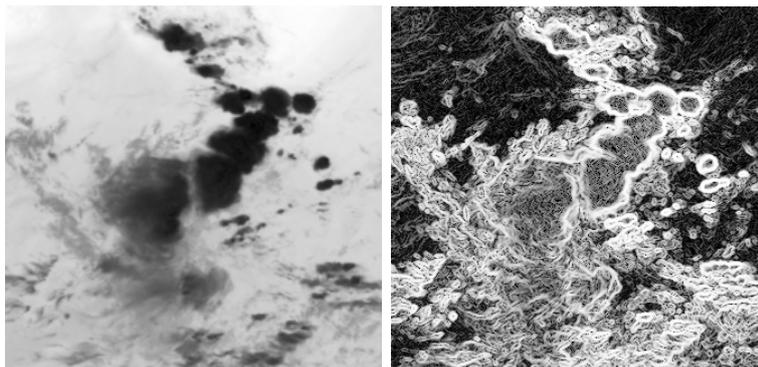


FIG. 5.9.: Image **IR** et norme du gradient (calculée naïvement) sur cette image. L'image de gradient a été transformée par égalisation d'histogramme afin d'accentuer le contraste.

met d'obtenir l'information statistique sous-jacente à partir de la connaissance de la distribution des exposants calculés. Il combine ainsi, de manière efficace, l'information géométrique et l'information statistique, pour permettre une interprétation duale des différentes structures analysées [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b].

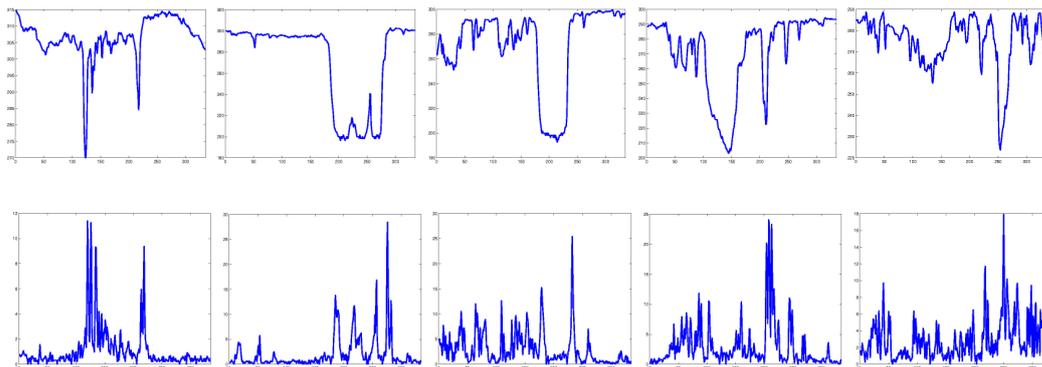
### 5.4.2. Mesure multifractale

#### Stationnarité du signal, de la norme du gradient du signal

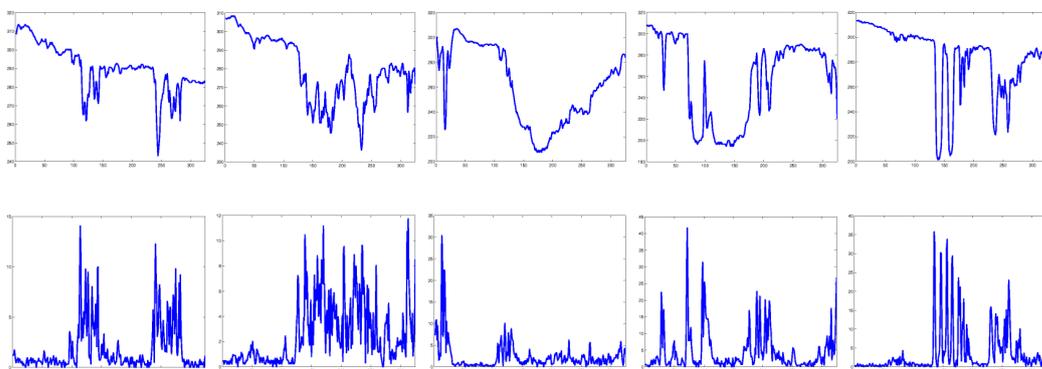
Une caractéristique essentielle des images naturelles est leur non-stationnarité [Ruderman, 1994]. Par exemple, les images **IR** sont composées de régions de différents aspects. On peut notamment distinguer les zones texturées (motifs plus ou moins réguliers), les zones homogènes (faibles variations d'intensité), les contours (zones de transition de l'intensité) ainsi que des petits détails qui ne ressemblent ni à des textures, ni à des contours. Au contraire, l'image de la norme du gradient laisse surtout apparaître des zones de transition brusque du signal (figure 5.9). On a illustré, sur la figure 5.10, les propriétés de non-stationnarité du signal et de stationnarité de la norme du gradient lorsque l'on considère les marginales du signal. L'image n'est pas stationnaire, puisque qu'apparaissent de fortes variations de niveaux de gris qui sont durables dans le temps : on parle de transitions à longue portée ; au contraire, les variations de la norme du gradient de l'image sont très courtes. La non-stationnarité implique que les images ne peuvent notamment pas être modélisées par des processus de 2<sup>nd</sup> ordre, et, en particulier, que les statistiques ne suivent généralement pas de distribution gaussienne [Srivastava et al., 2003]. On entrevoit ici toutes les limitations des techniques classiques d'analyse statistique d'images. L'analyse par spectre de puissance, par exemple, est seulement une statistique de 2<sup>nd</sup> ordre et caractérise la variabilité du signal en supposant implicitement que celui-ci est *quasi* gaussien.

Dans la suite, on sera donc plutôt amenés à considérer le gradient  $\nabla I$  du signal plutôt que le signal  $I$  lui-même. En effectuant un développement à l'ordre 2 du signal :

$$I(\vec{x} + r) = I(\vec{x}) + r \nabla I(\vec{x}) + o(|r|^2)$$



(a) Les signaux sont extraits suivant les lignes de l'image.



(b) Les signaux sont extraits suivant les colonnes de l'image.

FIG. 5.10.: Illustration des propriétés de stationnarité du signal et du signal dérivé. On considère pour cela des signaux marginaux. Pour le signal original, de fortes variations durables apparaissent : celui-ci n'est pas stationnaire.

on voit que le gradient de l'image est une approximation du 1<sup>er</sup> ordre qui décrit essentiellement le comportement des corrélations à courte durée dans le signal. Celle-ci s'exprime en effet par :

$$corr(r) = \langle I(\vec{x}), I(\vec{x} + r) \rangle \sim r^{-\eta}$$

compte tenu de l'invariance d'échelle, et elle est dominée par  $\langle \nabla I(\vec{x}), \nabla I(\vec{x} + r) \rangle$ . L'idée intuitive sous-jacente est que la valeur du signal dépend fortement des valeurs du gradient. Comme le gradient est faiblement corrélé, on pourra considérer le signal et sa dérivée comme indépendants.

L'utilisation du gradient spatial pour décrire les statistiques du signal est, en fait, courante dans la littérature et repose essentiellement sur l'hypothèse d'indépendance des distributions suivantes :

$$\mathcal{P}_{I, \nabla I}(i, j) \simeq \mathcal{P}_I(i) \cdot \mathcal{P}_{\nabla I}(j)$$

ce qui autorise une description des distributions de probabilité conjointes des couples de niveaux de gris au travers des distributions des niveaux de gris et de leur gradient. Il est intéressant de remarquer que cette relation peut être reliée à la relation 4.7 d'indépendance des distributions des

niveaux de gris et des différences de niveaux de gris effectuée par [Unser, 1986] dans le cadre de l'hypothèse **GLDV** pour l'analyse de texture par **MC** (cf. section 4.2.2). Intuitivement, la distribution  $\nabla I$  contient une information suffisante pour la connaissance du signal  $I$ . Nous avons alors déjà souligné le fait que l'information de texture était principalement contenue dans les statistiques (alors notées  $P_D$ ) des différences de niveaux de gris.

### Construction d'une mesure stationnaire sur l'image

Le premier point du modèle d'analyse multifractal concerne la définition d'une mesure appropriée sur l'image : dans [Turiel et Parga, 2000a], Turiel et Parga proposent d'utiliser une mesure positive définie à partir du signal dérivé.

**Définition 5.18** *Pour une image  $I$  représentée par sa fonction de luminance (ou niveau de gris)  $I(\vec{x})$  en chaque pixel  $\vec{x}$ , on introduit une mesure  $\mu$  de densité :*

$$d\mu(\vec{x}) \equiv d\vec{x} |\nabla I|(\vec{x}), \quad (5.28)$$

où  $|\nabla I|(\vec{x})$  désigne la norme du gradient  $\nabla I$  de l'image en  $\vec{x}$ .

La mesure d'un sous-ensemble quelconque  $A$  de l'image est donc donnée par :

$$\mu(A) = \int_A d\vec{x} |\nabla I|(\vec{x}), \quad (5.29)$$

En fait, la mesure affectée à  $A$  est égale à la somme des variations absolues de l'image sur ce sous-ensemble. Sur une région  $A$  de l'image, la mesure  $\mu(A)$  est d'autant plus faible que cette région est homogène en niveau de gris.

**Proposition 5.2** *La mesure  $\mu$  définie par (5.29) est  $\sigma$ -finie, mais pas nécessairement finie.*

En pratique, on considère des images à support borné (même compact), donc  $\mu$  est en fait à support compact, et également finie. Un des avantages principaux de la mesure ainsi définie est d'être construite à partir du signal  $|\nabla I|$  qui est stationnaire, contrairement à  $I$ .

Notons par ailleurs qu'on opère une normalisation préalable du signal :

$$c(\vec{x}) = I(\vec{x}) - I_0, \quad I_0 = \int_{\vec{x}} I(\vec{x}) d\vec{x}$$

de sorte que la fonction  $c(\vec{x})$  ainsi obtenue est de moyenne nulle. Le modèle d'analyse multifractale est ainsi invariant par multiplication des intensités lumineuses par tout coefficient positif, mais pas invariant par addition. La normalisation du signal permet de s'affranchir de cette contrainte. Dans la suite, on confondra donc la fonction de contraste normalisée  $c$  avec le signal  $I$ .

### Comportement multifractal de la mesure

Pour analyser le signal, nous ne nous intéressons pas aux variations de la mesure  $\mu$  sur des sous-ensembles de différentes tailles, mais à son évolution sous l'effet de changements d'échelle. Le comportement local de l'intensité  $I$  en chaque pixel  $\vec{x}$  de l'image peut en effet être caractérisé par l'évaluation de la mesure  $\mu(B_r(\vec{x}))$  pour différents rayons  $r$ .

Avec la définition (5.29), la mesure d'une boule  $B_r(\vec{x})$  de rayon  $r$  centrée en un pixel  $\vec{x}$  est donnée par :

$$\mu(B_r(\vec{x})) = \int_{B_r(\vec{x})} d\vec{y} |\nabla I|(\vec{y}) \quad (5.30)$$

Cette mesure donne une idée de la variabilité locale des niveaux de gris autour du point  $\vec{x}$ . Notons que dans des flots turbulents, une expression semblable définit la dissipation locale de l'énergie, et permet de discriminer les structures compliquées dans lesquelles de l'énergie est injectée et absorbée au sein de l'écoulement (*cf.* chapitre suivant). Pour une mesure quelconque, la collection  $\{\mu(B_r(\vec{x}))\}_{r>0}$  présente généralement une dépendance complexe en la variable  $r$ . L'étude de cette dépendance est particulièrement intéressante, surtout lorsqu'elle traduit un comportement en loi de puissance, comme dans le cas où la mesure  $\mu$  est une **mesure multifractale**.

**Définition 5.19** Une mesure  $\mu$  est dite multifractale<sup>5</sup> si la mesure  $\mu(B_r(\vec{x}))$  de la boule  $B_r(\vec{x})$  évolue comme une puissance de  $r$  à un exposant caractéristique  $h(\vec{x})$ , ne dépendant que de  $\vec{x}$ , lorsque  $r$  tend vers 0 :

$$\mu(B_r(\vec{x})) = \alpha(\vec{x}) r^{d+h(\vec{x})} + o(r^{d+h(\vec{x})}) \quad (5.31)$$

où  $d$  désigne la dimension de l'espace ( $d = 2$  pour des images) et où le coefficient  $\alpha(\vec{x})$  ne dépend pas de l'échelle  $r$ .

La méthode la plus naturelle permettant de vérifier la nature multifractale de la mesure (pourvu que le signal soit échantillonné avec la bonne fréquence spatiale) consiste donc tout naturellement à déterminer si tous les points (pixels) du signal peuvent effectivement être caractérisés par un exposant local  $h(\vec{x})$  vérifiant la relation (5.31). Nous verrons dans la suite que la relation (5.31) et le comportement en loi d'échelle associé sont couramment observés pour de grandes collections d'images naturelles [Turiel et al., 1998], telles que les images météorologiques [Grazzini et al., 2002a]. Cette propriété se traduit essentiellement par un comportement très irrégulier de la fonction de luminosité : en certains pixels, les transitions du signal peuvent être régulières, en d'autres, elles peuvent être très brusques (figure 5.10).

<sup>5</sup>Cette dénomination tient bien sur au fait que l'équation (5.31) permet, comme nous le verrons, de décomposer l'image en plusieurs composantes fractales

### 5.4.3. Exposants de singularité

#### Définition et caractérisation

L'exposant apparaissant dans l'équation (5.31) est particulièrement important dans la mesure où il caractérise la structure multifractale de l'image.

**Définition 5.20** *L'exposant  $h(\vec{x})$  de l'équation (5.31) est appelé **exposant local de singularité**.*

Notons qu'on appelle cet exposant *exposant de singularité* bien qu'il puisse être en fait positif et traduire un comportement localement régulier du signal. Il représente plus généralement le degré de singularité (cas  $< 0$ ) ou de régularité (cas  $> 0$ ) du signal  $|\nabla I|$  (comme l'exposant de Hölder, nous y reviendrons). La relation (5.31) implique que, lorsque l'on considère des petits rayons  $r$ , les plus grandes valeurs de la mesure  $\mu(B_r(\vec{x}))$  correspondent aux exposants  $h(\vec{x})$  les plus faibles. La relation (5.31) s'écrit en fait sous une forme mathématiquement plus rigoureuse :

$$A(\vec{x})r^{d+h(\vec{x})} \leq \mu(B_r(\vec{x})) \leq B(\vec{x})r^{d+h(\vec{x})} \quad (5.32)$$

où  $A(\vec{x})$  et  $B(\vec{x})$  sont des constantes positives appropriées. Les exposants  $h(\vec{x})$  quantifient le comportement local de  $I$ . Pour chaque pixel  $\vec{x}$ ,  $h(\vec{x})$  est indépendant de l'échelle. Pour cette raison, on utilise ces exposants comme attributs de description multiéchelle de l'image.

#### Lien avec l'exposant de Hölder

Rappelons qu'il est courant d'avoir recours au calcul de l'**exposant de Hölder** en tout point  $\vec{x}$  de l'image (cf. section 5.3.1) afin de décrire les signaux chaotiques, caractérisés par une distribution irrégulière des transitions et une invariance d'échelle de la fonction de luminance  $I$  sur l'image : c'est l'objet même des méthodes classiques d'analyse multifractale des images [Lévy Véhel, 1996]. L'expression (5.17) peut être réécrite pour décrire les singularités hölderiennes du signal 2D  $I$  sous la forme :

$$\eta(\vec{x}) = \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} \frac{\log |I(\vec{y}) - I(\vec{x})|}{\log |\vec{y} - \vec{x}|} \quad (5.33)$$

On s'attend en effet tout naturellement à ce que les transitions du signal  $I$  soit gouverné, lorsque  $\vec{y} \rightarrow \vec{x}$ , par une relation de la forme :

$$|I(\vec{y}) - I(\vec{x})| \sim |\vec{y} - \vec{x}|^{\eta(\vec{x})},$$

ce qui permet de contrôler, suivant la valeur de l'exposant de Hölder, la régularité locale du signal (plus  $\eta(\vec{x})$  est grand, plus le signal est régulier en  $\vec{x}$ ).

Cependant, cette définition des exposants de singularité n'est pas vraiment adapté à la description des signaux localement non-stationnaires pour lesquels l'absence de stationnarité masque en fait la présence d'exposants de Hölder positifs, les rendant impossibles à détecter. Pour remédier à cette difficulté, on peut soit construire une mesure stationnaire (on considère alors un signal qui est stationnaire), soit projeter le signal sur une base d'ondelettes (on régularise ainsi le signal en

l'interpolant sur des échantillons discrets). C'est une combinaison de ces deux approches que l'on adopte ici : on définit la mesure stationnaire  $\mu$  à partir de la norme  $|\nabla I|$  du gradient de l'image  $I$  et on calcule les exposants de lois d'échelle associés  $h$  à l'aide d'une méthode de projection en ondelettes que nous présentons dans la section suivante. On montrerait en fait que l'exposant de singularité  $h(\vec{x})$  est également directement lié à l'exposant de Hölder du signal et que cette relation prend la forme :  $\eta(\vec{x}) = h(\vec{x}) + d$  ( $d = 2$ ) lorsque  $\eta(\vec{x})$  a un sens.

#### 5.4.4. Méthode d'estimation des exposants de singularité

##### Projection en ondelette de la mesure

Le calcul des exposants de singularité, caractérisant la structure multifractale de l'image, fait appel à l'utilisation d'ondelettes analysantes. En effet, les exposants  $h(\vec{x})$  peuvent être estimés par régression log-log-linéaire de l'équation (5.31) :

$$h(\vec{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_r(\vec{x}))}{\log r} - d. \quad (5.34)$$

Cependant, pour des images discrètes, il est difficile d'effectuer une telle régression car elle fournit de mauvais résultats d'estimation. Une application directe de la formule (5.31) n'est pas intéressante, car nous n'avons accès qu'à un nombre fini de pixels, et, par conséquent, à des valeurs entières de  $r$  uniquement ; on néglige l'analyse du comportement de la mesure pour des rayons représentant des valeurs non-entières.

L'efficacité des transformées en ondelettes pour caractériser les comportements en loi d'échelle des signaux est maintenant largement établie (*cf.* remarque de la section 5.3.1). Ainsi, dans ce cas particulier, il est préférable d'utiliser la projection en ondelette de la mesure  $\mu$  pour évaluer la mesure d'une boule  $\mu(B_r)$ . Celle-ci permet d'effectuer une interpolation de la mesure sur des boules  $B_r$  de rayon  $r$ , lorsque  $r$  est un nombre non-entier de pixels. La transformée de la mesure  $\mu$  avec une ondelette  $\Psi$ , au point  $\vec{x}$  et à l'échelle  $r$ , est donnée par [Daubechies, 1992] :

$$T_{\Psi}\mu(\vec{x}, r) \equiv \frac{d\mu}{d\vec{x}} \star \Psi_r(\vec{x}) = \int d\mu(\vec{y}) \Psi_r(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5.35)$$

où le symbole  $\star$  désigne la convolution et où  $\Psi_r(\vec{x}) = \frac{1}{r^d} \Psi(\frac{\vec{x}}{r})$  est une version dilatée-translatée de la fonction  $\Psi$ . Ainsi, au lieu d'appliquer la mesure à une boule de rayon  $r$ , on calcule la convolution de cette mesure par une version dilatée par un facteur  $r$  de l'ondelette  $\Psi$  :

$$T_{\Psi}\mu(\vec{x}, r) = \int d\mu(\vec{y}) \Psi_r(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{r^d} \int \Psi\left(\frac{\vec{x} - \vec{y}}{r}\right) |\nabla I|(\vec{y}) d\vec{y} \quad (5.36)$$

On retombe ainsi sur une expression similaire à l'équation (5.4) de transformée en ondelette dans un cadre 2D avec la fonction  $|\nabla I|$ . Une différence essentielle avec cette équation réside cependant dans le facteur de normalisation de l'ondelette. Si l'on s'en tenait à cette définition, celui-ci devrait en effet être  $r^{d/2}$  au lieu de  $r^d$ . Le critère couramment retenu, et qui correspond au facteur  $r^{d/2}$ , est la conservation de l'énergie. Dans le contexte multifractal, on fait un choix de normalisation particulier qui assure une variation d'énergie en  $r^{-d/2}$ .

En considérant la relation (5.36) au lieu de l'expression (5.30), on réalise en quelque sorte une interpolation de la mesure : on est à même d'analyser le comportement de cette mesure sur des boules  $B_r$  de rayon  $r$  non entier. Le choix de l'ondelette influence par ailleurs le mode d'interpolation. Une projection avec une ondelette régulière aura tendance à varier faiblement suivant le rayon  $r$  ; la projection avec une ondelette à support compact donnera lieu à des mesures proches de la dilatation de rayon  $r$  du compact. Nous discuterons dans la suite la sélection d'ondelettes appropriées.

### Comportement multifractal de la projection

L'intérêt principal de la projection en ondelettes est donc de réaliser une interpolation "continue" (en des valeurs de  $r$  non discrètes) du signal. Par ailleurs, l'autre intérêt majeur est de permettre le calcul des exposants de singularité lorsque la mesure projetée est multifractale. En effet, pour un choix d'ondelette analysante  $\Psi$  appropriée, la projection  $T_\Psi\mu$  de la mesure multifractale  $\mu$  exhibera également un comportement multifractal ; une relation semblable à l'équation (5.31) est alors valable [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b] :

$$T_\Psi\mu(\vec{x}, r) = \alpha_\Psi(\vec{x}) r^{h(\vec{x})} + o(r^{h(\vec{x})}) \quad (5.37)$$

avec le même exposant  $h(\vec{x})$  qui ne dépend que du pixel  $\vec{x}$  et de la mesure  $\mu$  (*i.e.* de l'image  $I$ ). Le coefficient  $\alpha_\Psi$  est dépendant de l'ondelette  $\Psi$  et de la mesure  $\mu$ , mais pas de l'échelle  $r$ . Notons par ailleurs que le facteur de normalisation  $r^{-d}$  apparaissant dans la formule (5.36) de la projection (et dont le but est d'assurer la stabilité de l'ondelette pour  $r \rightarrow 0$ ) explique que le facteur de la loi d'échelle soit diminué d'une constante  $d$ .

**Proposition 5.3** *Les exposants de singularité  $h(\vec{x})$  peuvent être estimés à partir des projections en ondelette  $T_\Psi\mu$  à l'aide d'une log-log-régression sur l'équation (5.37) :*

$$h(\vec{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log T_\Psi\mu(\vec{x}, r)}{\log r} \quad (5.38)$$

Nous présentons maintenant la classe de fonctions d'ondelette pour laquelle la projection en ondelettes a un caractère multifractal.

#### 5.4.5. Sélection d'ondelettes analysantes

##### Contraintes sur l'ondelette

La détermination des exposants de singularité de l'image requiert d'utiliser une ondelette analysante  $\Psi$  pour laquelle la transformée  $T_\Psi\mu$  aura effectivement un comportement multifractal. La classe de fonctions d'ondelettes adaptées à l'analyse des singularités (*i.e.* pour lesquelles la relation (5.37) est vérifiée) est définie par la proposition suivante [Turiel et Parga, 2000a] :

**Proposition 5.4** *Soit une ondelette  $\Psi$  ayant les propriétés suivantes :*

- (i)  $\Psi$  est positive, *i.e.*  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \Psi(\vec{x}) \geq 0$ , et  $\Psi(0) \neq 0$ ,

(ii)  $\Psi$  est continue, i.e.  $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^2)$

(iii)  $\Psi$  est à décroissance rapide, i.e.  $\exists L > 0, \forall |\vec{x}| > L, \forall K > 1 :$

$$\exists \Omega : \lim_{K \rightarrow \infty} K^N \Omega(K) = 0 \mid \forall N > 0 \text{ tel que } \Psi(K\vec{x}) < \Omega(K)\Psi(\vec{x}),$$

alors la projection  $T_\Psi \mu$  de la mesure multifractale  $\mu$  sur l'ondelette  $\Psi$  vérifie la relation (5.37) :

$$T_\Psi \mu(\vec{x}, r) \sim \alpha_\Psi(\vec{x}) r^{h(\vec{x})}$$

avec le même exposant de singularité  $h(\vec{x})$  que dans l'équation (5.31).

Cette proposition peut être démontrée simplement [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b] : la démonstration nécessite trois étapes, que nous résumons ici. La propriété est tout d'abord démontrée pour la classe de fonctions caractéristiques de la boule  $B_r(\vec{x})$ , par simple intégration, puis est étendue aux fonctions constantes par morceaux. La propriété est ensuite démontrée pour l'ensemble des fonctions à support compact : pour cela, on vérifie la relation (5.32). L'existence de la borne inférieure  $A$  résulte de la propriété (i) de positivité de l'ondelette  $\Psi$  et du fait que  $\Psi(0) \neq 0$  ; l'existence de la borne supérieure  $B$  résulte quant à elle trivialement de la continuité (ii) et de la compacité de l'ondelette. Finalement, pour la classe de fonctions d'ondelettes définie comme ci-dessus, c'est encore la relation (5.32) qui est vérifiée. La borne inférieure  $A$  est déterminée comme précédemment, tandis que dans le calcul de la borne supérieure  $B$  intervient une série dont la convergence découle de la propriété (iii) de décroissance rapide

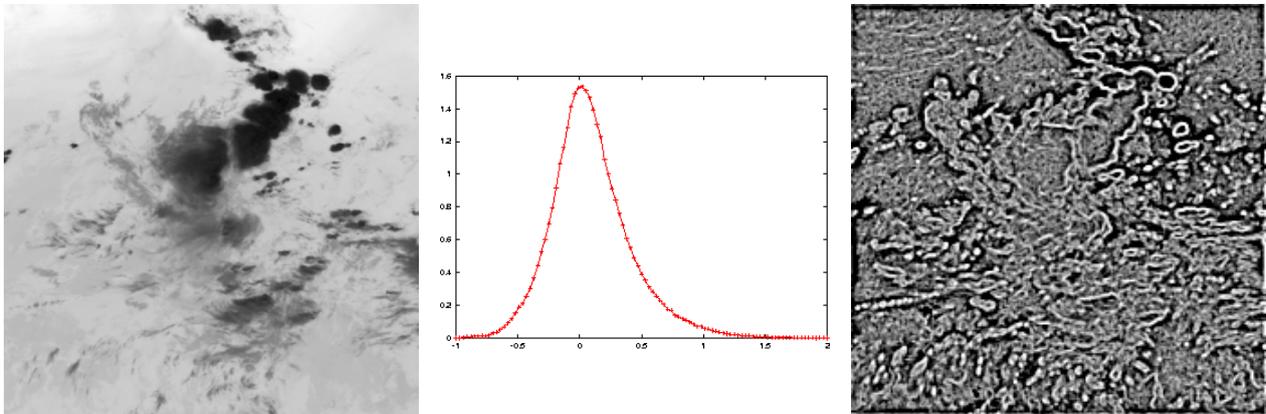


FIG. 5.11.: Estimation des exposants de singularité d'une image **Meteosat IR** à l'aide d'une ondelette  $\Psi$  gaussienne. **De gauche à droite** : extrait original ; distribution des valeurs des exposants de singularité des pixels de l'image ; représentation en niveaux de gris des exposants de singularité : plus un pixel est clair, plus son exposant est faible.

La propriété indispensable pour la sélection de l'ondelette est la propriété (iii) de décroissance rapide qui signifie que l'ondelette doit être bornée par une fonction à décroissance rapide, i.e. qu'elle doit décroître plus vite que n'importe quel polynôme. Notons par ailleurs que la propriété (i) de positivité de l'ondelette implique en particulier que celle-ci n'est pas admissible : la relation (5.5) est mise en défaut (d'ailleurs  $\Psi(0) \neq 0$ ) ; elle ne pourra, par conséquent, pas être utilisée pour la

reconstruction du signal [Daubechies, 1992]. Cependant elle peut tout naturellement être utilisée pour l'analyse des singularités du signal. Le problème majeur lié à l'utilisation d'ondelettes admissibles, et qui s'accroît avec l'augmentation du nombre de moments nuls, concerne la qualité de l'interpolation avec de telles ondelettes. Lorsque le nombre de passages par zéro de l'ondelette augmente, la résolution minimale à laquelle on peut projeter le signal (et donc l'analyser) sur cette ondelette augmente également, *i.e.* la taille de l'échantillon de points que l'on utilise pour estimer l'exposant de singularité augmente. Par conséquent, on préfère utiliser des ondelettes ayant une structure moins complexe (moins d'oscillations, *i.e.* moins de passages par zéro) mais permettant une échelle d'analyse plus fine. La figure 5.11 représente le calcul des exposants à l'aide d'une ondelette gaussienne (notons, en particulier, que cette ondelette est positive et donc non admissible). Certaines hypothèses sur l'ondelette peuvent cependant être affaiblies, notamment la positivité, afin d'élargir la variété d'ondelettes utilisables. Même la condition de décroissance rapide de la fonction d'ondelette peut également être affaiblie lorsque, en contrepartie, de l'information *a priori* sur la mesure multifractale est ajoutée. Cette information concerne le rang des valeurs pour les exposants de singularité : lorsque la borne supérieure des valeurs possibles de singularités est connue, des ondelettes polynômiales peuvent être utilisées. Précisément, notons  $h_M$  cette borne supérieure lorsqu'elle existe :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, h(\vec{x}) \leq h_M$$

et considérons une ondelette  $\Psi$  qui décroît comme  $|\vec{x}|^{-N_M}$  à l'infini :

$$|\Psi(\vec{x})| \sim |\vec{x}|^{-N_M} \text{ lorsque } |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

pour un certain exposant  $N_M$ . On pourrait montrer que l'existence d'une borne supérieure  $B$  dans la relation (5.32) appliquée à la fonction  $\Psi$  est liée aux propriétés de convergence d'une série entière, qui est assurée en tout point dès que  $N_M > h_M + d$ . En particulier, en tout point  $\vec{x}$ , la projection en ondelette vérifiera une relation de la forme de (5.37) :  $T_\Psi \mu(\vec{x}, r) \sim r^{h_\Psi(\vec{x})}$  avec un certain exposant :

$$h_\Psi(\vec{x}) = \begin{cases} h(\vec{x}) & \text{si } h(\vec{x}) < N_M - d \\ N_M - d & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cela revient à affaiblir la propriété (iii) de décroissance rapide en considérant que l'ondelette doit être bornée par une fonction à décroissance rapide vérifiant :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} K^N \Omega(K) = 0 \quad \forall N < N_M$$

et donc à choisir une ondelette parmi n'importe quelle fonction rationnelle d'ordre  $N > N_0$ . On est donc en mesure de sélectionner efficacement des ondelettes analysantes dès que l'on a une connaissance *a priori* sur la nature des singularités (on parle de modèle multifractal).

### Exemples d'ondelettes analysantes

D'un point de vue théorique, le choix de l'ondelette analysante  $\Psi$  dans la classe des ondelettes ci-dessus importe guère. Cependant, certaines ondelettes s'avèrent davantage appropriées à l'estimation des exposants de singularité. L'ondelette analysante doit permettre de saisir au mieux

les caractéristiques essentielles des structures analysées. Une bonne estimation d'un exposant de singularité en un point de l'image va de paire avec une bonne représentation du voisinage de ce point par l'ondelette à toutes les échelles. La forme de l'ondelette joue *a priori* un rôle important, à plusieurs niveaux.

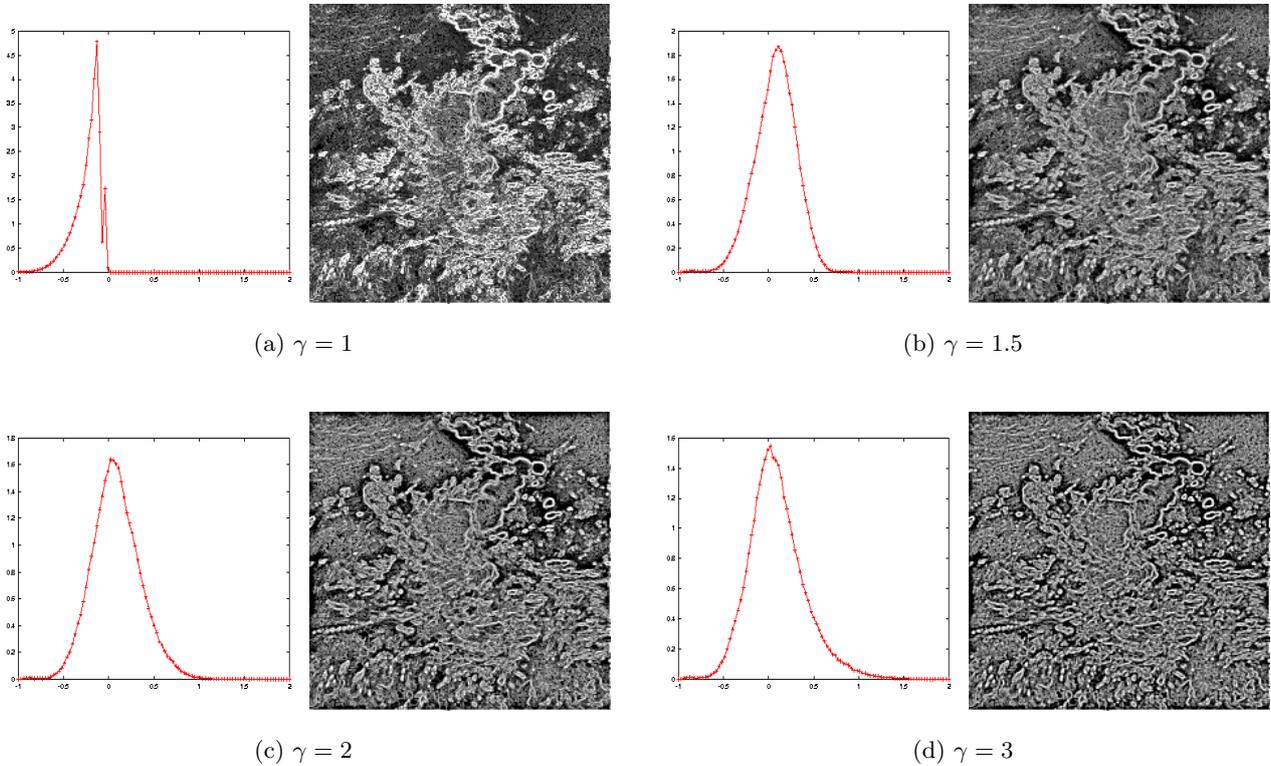


FIG. 5.12.: Estimation des exposants de singularité (distribution à gauche et représentation en niveaux de gris correspondante à droite) de l'image de la figure 5.11 à l'aide d'ondelettes  $\Psi_1$  lorentziennes d'ordres  $\gamma$  différents.

Dans [Turiel et Parga, 2000a], Turiel et Parga déterminent la structure multifractale d'une collection d'images de la base de données de Van Hateren [Van Hateren et Van der Schaaf, 1998] en employant différentes ondelettes vérifiant les propriétés du théorème (5.4) :

– des ondelettes lorentziennes :

1. l'ondelette lorentzienne  $\Psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{(1+r^2)^\gamma}$  d'ordre  $\gamma$ , où l'on a noté  $r = |\vec{x}|$ ,
2. la dérivée radiale d'ordre 1 de l'ondelette lorentzienne d'ordre 1  $\Psi_2(\vec{x}) = \frac{d\Psi_1}{dr}(|\vec{x}|) = \frac{-2r}{(1+r^2)^2}$ ,
3. la dérivée radiale d'ordre 2 de l'ondelette lorentzienne d'ordre 1  $\Psi_3(\vec{x}) = \frac{d^2\Psi_1}{dr^2}(|\vec{x}|) = (r^2 - 1)e^{r^2/2}$ ,

– une ondelette gaussienne :

4.  $\Psi_4(\vec{x}) = e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2}}$ .

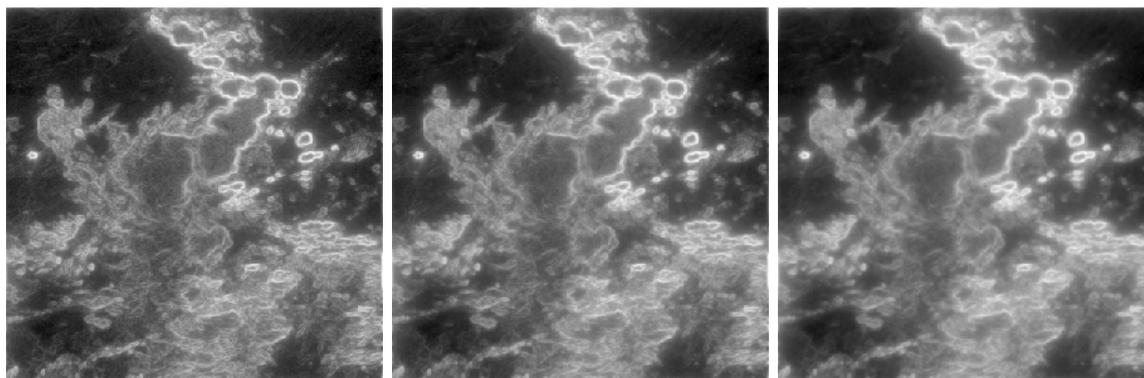


FIG. 5.13.: Projections en ondelette de l'image **IR** de la figure 5.12 effectuée avec l'ondelette lorentzienne  $\Psi_1$  d'ordre 1. **De gauche à droite** : de la résolution la plus fine à la plus grossière.

Pour chaque image, les exposants sont obtenus en moyennant les estimations obtenues à l'aide des différentes ondelettes (figures 5.11 et 5.12). On peut également imaginer d'autres fonctions faisant par exemple intervenir des log pour corriger les variations de l'ondelette :

$$5. \Psi_5(\vec{x}) = \frac{\log(1+|\vec{x}|)}{(1+|\vec{x}|^2)^2},$$

$$6. \Psi_6(\vec{x}) = \frac{1}{\log(1+|\vec{x}|)(1+|\vec{x}|^2)}.$$

La distribution des exposants est estimée à l'aide des fréquences relatives des valeurs observées, *i.e.* par log-régression sur les valeurs des projections en ondelette (figure 5.13) : c'est ce qu'exprime la relation (5.38). Typiquement, l'exposant le plus singulier est calculé comme la moyenne des valeurs d'exposants dans les quantiles à 1% et à 5%. La dispersion autour de cette valeur est conventionnellement fixée, mais en fonction de l'image tout de même. Les singularités sont généralement détectées dans l'intervalle de valeurs  $[-1, 2]$ , de la plus singulière à la plus régulière. Mais la qualité et la précision de la détection dépendent, là encore, fortement de l'ondelette utilisée [Turiel, 2003]. Par exemple, suivant la valeur de  $\gamma$ , l'ondelette lorentzienne  $\Psi_1$  d'ordre 1 détectera plus ou moins bien les fortes singularités (figure 5.12).

Notons que dans [Turiel et Parga, 2003], les auteurs déterminent une ondelette optimale permettant de décrire et de représenter les scènes observées dans une collection d'images naturelles. Celle-ci est construite comme un modèle moyen, tenant compte des propriétés statistiques moyennes de la collection d'images. Cependant, si optimale soit-elle, cela ne permet évidemment pas de fournir une description universelle des détails de formes variées localisées spatialement. Nous nous limiterons pour notre part aux ondelettes introduites ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur à [Turiel et Parga, 2003] pour une discussion complète et une description des propriétés de quelques ondelettes intéressantes.

### 5.4.6. Décomposition multifractale

#### Décomposition de l'image

Comme nous l'avons déjà souligné dans la section 5.1.2, il a été montré expérimentalement qu'une grande variété d'images naturelles exhibaient des propriétés d'invariance d'échelle, et même qu'elles étaient organisées suivant une hiérarchie multifractale [Turiel et al., 1998] et vérifiaient également le formalisme multifractale. L'idée principale de la définition (5.31) des exposants de singularité est de décrire ces images localement car elles ne présentent généralement pas de comportement régulier, uniforme vis-à-vis de la mesure  $\mu$ . Cependant, on désire ensuite, comme dans les approches multifractales classiques (*cf.* section 5.3) obtenir une description à un niveau supérieur : il s'agit de regrouper les pixels ayant un comportement local similaire.

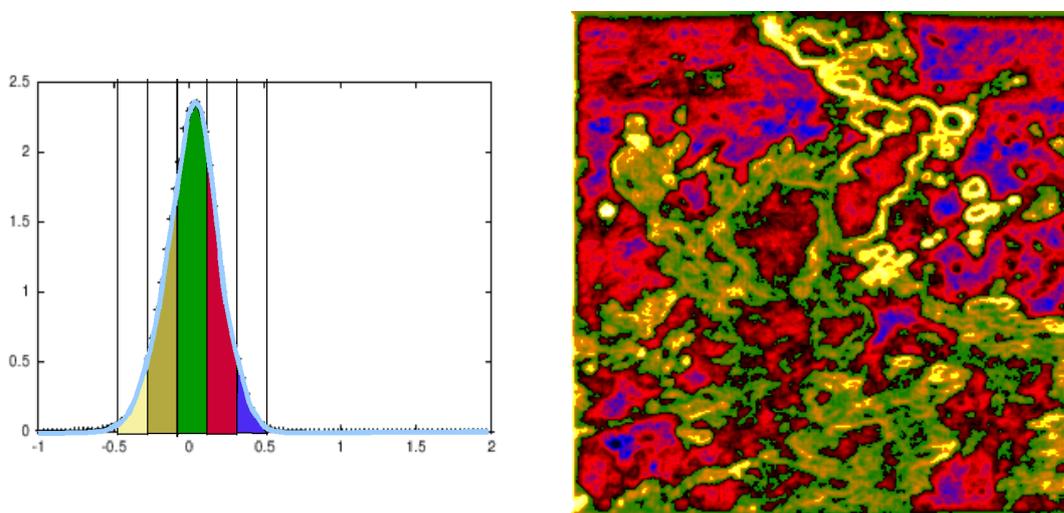


FIG. 5.14.: **À gauche** : distribution des exposants de singularité estimés à l'aide d'une ondelette lorentzienne d'ordre  $\gamma = 1.5$  ; l'histogramme est divisé en  $N = 5$  classes. **À droite** : décomposition de l'image en  $N$  ensembles fractals obtenus en regroupant les pixels de l'image d'exposant  $h$  similaire ; le code couleur d'un pixel désigne la composante fractale à laquelle il appartient, de la plus régulière (en bleu) à la plus singulière (en jaune).

Une fois que les exposants  $h(\vec{x})$  ont été calculés en chaque pixel  $\vec{x}$  avec une ondelette appropriée (*cf.* section précédente), on peut définir les ensembles  $F_h$  qui correspondent aux *level-sets* de la fonction  $\vec{x} \rightarrow h(\vec{x})$ , *i.e.* les ensembles de pixels de l'image qui ont des exposants de singularité similaires :

$$F_h \equiv \{\vec{x} \mid h(\vec{x}) \approx h\}. \quad (5.39)$$

Du point de vue géométrique, la collection d'ensembles  $\{F_h\}_h$  fournit une décomposition disjointe du support  $\text{supp}(\mu)$  de la mesure  $\mu$ , *i.e.* de l'image :

$$\cup_h F_h = \text{supp}(\mu). \quad (5.40)$$

À partir de la distribution des exposants (figure 5.14), on est donc en mesure de proposer une décomposition hiérarchique de l'image en affectant chaque pixel au sous-ensemble  $F_h$  associé à

la valeur  $h$  de son exposant de singularité. Les pixels de l'image sont ainsi regroupés selon les caractéristiques locales du signal (de la mesure).

En pratique, les ensembles  $F_h$  de la décomposition hiérarchique ainsi obtenue sont déterminés à partir de l'estimation d'un exposant minimal, dont l'existence est assurée par la nature de la distribution des exposants de singularité (nous reviendrons sur cet exposant particulier dans la suite). Si l'on désigne par  $h_\infty$  l'exposant le plus singulier, les exposants des pixels appartenant à l'ensemble  $F_{h_i}$ ,  $0 \leq i < N$ , vérifient :  $h_\infty + (2i-1)\Delta_h \leq h(\vec{x}) \leq h_\infty + (2i+1)\Delta_h$ . La construction de ces ensembles est présentée dans l'algorithme (2). Les figures 5.14 et 5.15 représentent les ensembles  $F_{h_i}$  de l'image 5.11 obtenus lorsque l'on considère  $N = 5$  classes d'exposants de singularité.

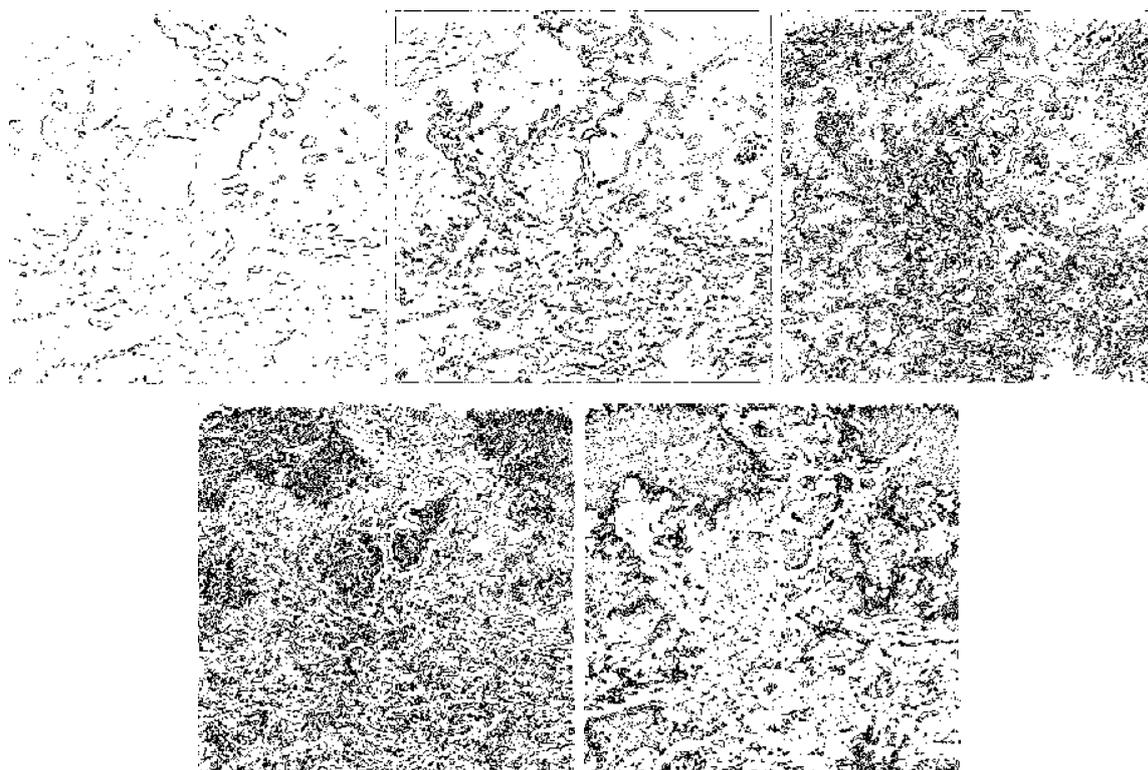


FIG. 5.15.: Exemple de décomposition en  $N = 5$  sous-ensembles fractals. **De gauche à droite** : les différents  $F_h$  sont représentés par des pixels blanc dans l'image, du plus singulier ( $h$  faible) au moins singulier ( $h$  fort).

### Composantes fractales

La collection d'ensembles  $\{F_h\}_h$  fournit une **décomposition multifractale** de la mesure  $\mu$ . Chacun des sous-ensembles  $F_h$  se révèle en effet être un ensemble fractal, *i.e.* il exhibe la même structure géométrique à différentes échelles. C'est la raison pour laquelle on parle d'*analyse multifractale* lorsque l'on considère toutes les composantes fractales de l'image. Chacun des ensembles  $F_h$  a une structure complexe, liée à la présence des singularités de la fonction  $|\nabla I|$ ; en particulier, leur dimension fractale  $D_h$  est généralement non triviale. Cela signifie que le comportement du signal  $|\nabla I|$

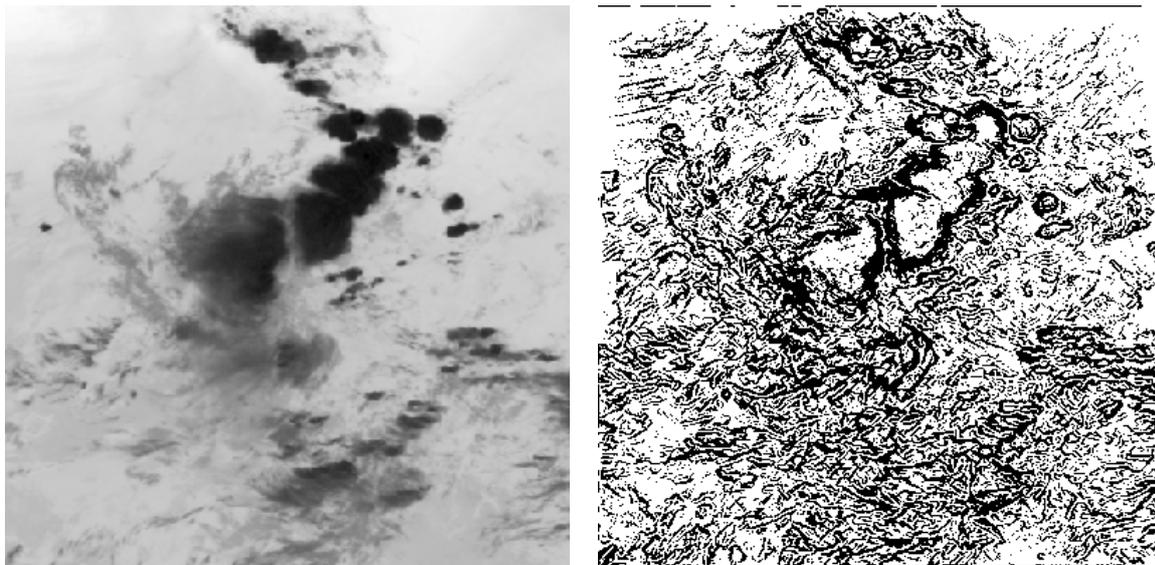


FIG. 5.16.: Extraction de la variété la plus singulière. **À gauche** : image IR. **À droite** : ensemble des pixels de la MSM (en noir), correspondant aux exposants de valeur minimale (singularité forte); cet ensemble regroupe 44.49% des pixels de l'image.

sous l'effet de changement d'échelle est le même pour les pixels appartenant à un même ensemble  $F_h$ , les transitions du signal sont du même ordre; ces ensembles ont une propriété d'auto-similarité, les pixels d'une même composante fractale partagent les mêmes propriétés statistiques d'invariance d'échelle (les mêmes exposants d'échelle). On a représenté sur la figure 5.14 les différentes composantes fractales obtenues à partir de la distribution de exposants de l'image de la figure 5.15. L'arrangement des pixels de l'image dans les différentes composantes fractales ainsi définies est caractéristique de la structure géométrique de l'image et est reflété par les propriétés statistiques du signal (*cf.* section suivante).

### Extraction de la variété la plus singulière

Il apparaît assez naturel de s'intéresser aux pixels de l'image ayant les exposants les plus faibles. En effet, compte tenu de la relation (5.31), les pixels d'exposant négatif sont ceux qui contribuent le plus à la mesure  $\mu$  aux petites échelles, *i.e.* lorsque l'on considère des rayons  $r$  proches de 0.

Ainsi, parmi tous les ensembles fractals  $F_h$  considérés, on s'intéresse à un ensemble particulier du point de vue géométrique et statistique, la MSM (*Most Singular Manifold*). Il s'agit de la composante  $F_\infty$  associée à la singularité minimale, *i.e.* celle qui contient les pixels d'exposant  $h_\infty$  minimal (déjà introduit plus haut), ou qui s'en approchent (figure 5.16). De fait, la MSM représente les fronts de transition dans l'image. À ce stade, une objection pourrait être adressée à propos de l'existence de l'exposant  $h_\infty$ . Celle-ci est cependant assurée par le formalisme multifractal, et, plus précisément, par le formalisme log-Poisson : la distribution des exposants de singularité d'une mesure multifractale s'apparente à une distribution log-Poisson, qui admet une borne inférieure. En revanche, l'existence d'une borne supérieure (*i.e.* d'un exposant le plus régulier) n'est pas assurée,

1. On sélectionne une ondelette d'analyse  $\Psi$  ayant de "bonnes" propriétés.
2. On détermine une plus petite échelle d'analyse  $a_0$ , un facteur d'échelle  $q$  ainsi que le nombre  $n_r$  d'échelles  $\{r = a_0 \cdot q^i, i = 1, \dots, n_r\}$  pour lesquelles la projection  $T_\Psi(\vec{x}, r)$  va être estimée en chaque pixel  $\vec{x}$ . La régression sera effectuée sur ces  $n_r$  estimations. Typiquement, un échantillon de  $n_r = 8$  échelles est suffisant et permet des calculs efficaces.
3. Pour chaque résolution  $r$  (*i.e.* échelle d'analyse) sélectionnée, on détermine les valeurs des projections  $T_\Psi(\cdot, r)$  de la mesure  $d\mu = |\nabla I| d\vec{x}$  sur l'ondelette correspondante pour l'ensemble de l'image. Pour cela on calcule successivement :
  - la transformée de Fourier  $\mathcal{F}[|\nabla I|]$  du module du gradient,
  - la transformée de Fourier  $\mathcal{F}[\Psi_r]$  de l'ondelette dilatée sur toute l'image,
  - le produit  $\mathcal{F}[|\nabla I|] \cdot \mathcal{F}[\Psi_r]$  des deux champs complexes ainsi obtenus,
  - la transformée de Fourier inverse  $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[|\nabla I|] \cdot \mathcal{F}[\Psi_r]]$  du champ résultant.
4. Une fois que la projection a été calculée sur toute l'image et à toutes les échelles, on effectue, en chaque pixel  $\vec{x}$ , une régression en  $r$  de la formule de projection en ondelette  $T_\Psi(\vec{x}, r)$  afin d'estimer les exposants de singularité  $h(\vec{x})$ .
5. On détermine la valeur  $h_\infty$  de l'exposant le plus singulier à partir de la distribution des exposants.  $h_\infty$  est généralement calculé comme la moyenne des exposants aux quantiles à 1 % et 5 %. La dispersion  $\Delta h$  autour de cette valeur est également fixée conventionnellement (*e.g.*  $\Delta h = \pm 0.2$ ). Les paramètres  $h_\infty$  et  $\Delta h$  permettent de déterminer l'ensemble des pixels de la MSM.
6. On effectue un découpage du rang de valeurs des exposants de singularité en  $N$  intervalles de pas  $\Delta h$ . La collection de sous-ensembles obtenus est ainsi de la forme :  $F_{h_i} = \{\vec{x} \mid h(\vec{x}) \in [h_i \pm \Delta h]\}$ ,  $0 \leq i < N$ , ce qui permet de construire la décomposition multifractale de l'image.

**Algorithme 2:** Calcul des exposants de singularité et détermination des différentes composantes fractales et de la MSM.

bien que ce soit toujours le cas en pratique. Nous reviendrons sur le modèle log-Poisson au chapitre suivant. Nous retiendrons pour l'instant qu'il permet de décrire de grandes collections d'images naturelles [Turiel et al., 1998].

Sur la figure 5.16, nous avons représenté la MSM extraite d'une image **IR**. La détermination de la MSM est effectuée à partir de la distribution des exposants de singularité de l'image suivant le mode opératoire décrit dans l'algorithme (2). Il apparaît que les structures appartenant à la MSM rassemblent essentiellement les principaux contours des objets de l'image. Cependant, celle-ci ne s'apparente pas à des lignes régulières, sa dimension fractale est généralement  $D_\infty \neq 1$ .

### 5.4.7. Description des composantes fractales

#### Propriétés statistiques : le spectre de singularité

La structure très irrégulière et non-triviale des différentes composantes fractales peut être caractérisée à l'aide de la *dimension fractale*, *i.e.* de la *dimension de Hausdorff* définie par la relation (5.18) :

$$D_h \equiv d_H(F_h)$$

puisque la composante fractale  $F_h$  rassemble tous les points d'exposant semblable égal à  $h$  (à une constante  $\Delta h$  près).  $D_h$  mesure la taille de  $F_h$ . Le spectre de singularité correspond aux dimensions :

$$D_{\mathcal{H}}(h) = D_h$$

et renseigne donc sur les dimensions de toutes les composantes fractales de la décomposition multifractale. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les exposants de singularité peuvent être obtenus par une transformée de Legendre du spectre de singularité. Grâce à cette correspondance, on voit que l'on peut obtenir un formalisme similaire aux méthodes présentées dans la section 5.3 :

- le support de la mesure est partitionné en des régions possédant un comportement local identique (*i.e.* un exposant de singularité voisin),
- chaque ensemble ainsi constitué est décrit dans sa globalité à l'aide d'une dimension fractale (la dimension de Hausdorff).

Désignons maintenant par  $N_r(h, \Delta h)$  le nombre<sup>6</sup> de pixels d'exposant de singularité égal à  $h$  dans une boule  $B_r$  de rayon  $r$ . Alors, suivant la relation (5.22), la dimension  $D_h$  vérifie l'expression :

$$N_r(h, \Delta h) \sim r^{D_h}, \quad r \rightarrow 0.$$

Heuristiquement, le sens de  $D_h$  est le suivant :

**Proposition 5.5** *Soit  $\mathcal{P}$  la probabilité uniforme, la probabilité  $\mathcal{P}_r(h, \Delta h)$  pour une boule  $B_r$  de rayon  $r$  de contenir un pixel appartenant à la composante fractale  $F_h$  vérifie :*

$$\mathcal{P}_r(h, \Delta h) \simeq r^{d-D_h}, \tag{5.41}$$

où  $d = 2$  désigne la dimension de l'image.

Cela signifie que pour  $r$  suffisamment petit, la probabilité de rencontrer un exposant d'ordre  $h$  est en  $r^{d-D_h}$ . On voit alors que, dès que  $D_h$  est strictement inférieure à  $d$ , la probabilité de rencontrer un exposant proche de  $h$  décroît exponentiellement vite vers 0 lorsque la résolution tend vers l'infini. En particulier,  $\mathcal{P}_r(h, \Delta h)$  augmente lorsque la dimension  $D_h$  approche la dimension de l'image. Seuls les  $h$  tels que  $D_h = d$  pourront être observés à la limite.

Nous voyons, là encore, comment le spectre  $D(h)$  permet de combiner les deux approches du formalisme multifractal :

---

<sup>6</sup>Le paramètre  $\Delta h$  est ici introduit simplement pour rappeler que les distributions des exposants, notamment, sont discrétisées. Mais  $\Delta h$  n'intervient pas dans les considérations.

- l'**approche géométrique**, *via* la décomposition en sous-ensembles fractals : on calcule la dimension des ensembles de points ayant le même exposant,
- l'**approche statistique**, *via* les propriétés d'échelle des moments : on s'intéresse à la probabilité de rencontrer à une résolution fixée un exposant donné, et, plus précisément à la façon dont cette probabilité évolue quand la résolution tend vers 0.

### Propriétés topologiques

Soulignons également quelques unes des propriétés topologiques intéressantes de la décomposition hiérarchique ainsi obtenue [Turiel et Parga, 2000a]

#### Propriété 5.1

- (i) *Chacune des composantes fractales  $F_h$  est dense dans l'image, en particulier, la MSM est elle-même dense dans l'image.*
- (ii) *La mesure  $\mu$  n'a pas de point isolé (sinon, la collection  $\{F_h\}_h$  serait réduite à une seule composante fractale et la mesure  $\mu$  serait monofractale).*
- (iii) *La fonction  $\vec{x} \rightarrow h(\vec{x})$  est partout discontinue dans l'image ou  $\mu$  est monofractale.*

Notons qu'il découle de la propriété (i) que l'utilisation d'une méthode classique de *box counting* (cf. section 5.3.4) pour estimer la dimension fractale des différents ensembles fractals est ici inopérante. En effet, la dimension fractale calculée par cette méthode est, en théorie, égale pour un ensemble et son adhérence. Elle serait donc toujours trivialement égal à 2.

La théorie multifractale nous dit en outre que les caractéristiques statistiques [Turiel et Parga, 2000a] de la MSM lui confèrent une signification particulière en terme de théorie de l'information puisque cet ensemble pourra être considéré comme le plus informatif dans l'image. Cette propriété est liée à une autre caractéristique du modèle multifractal de décomposition : nous allons voir qu'il est en effet possible de reconstruire l'image entière à partir de la MSM et de la seule connaissance du gradient de l'image sur cet ensemble [Turiel et del Pozo, 2002].

## 5.5. ... Et un modèle de reconstruction d'une image à partir de ses singularités

Dans son livre sur la vision, Marr a émis la conjecture selon laquelle il serait possible de reconstruire une image à partir de ses contours multiéchelles [Marr, 1982]. Une conjecture similaire dans le cadre de la théorie des processus log-Poisson permet d'élaborer un algorithme de reconstruction des images naturelles à partir d'un ensemble particulier de l'image, essentiellement constitué des contours multiéchelles.

### 5.5.1. Formulation du processus de reconstruction

Comme nous l'avons évoqué dans la section 5.4.7, les distributions des singularités observées sur des images naturelles sont généralement similaires à celles simulées par des processus log-Poisson [Turiel et al., 1998]. Dans la théorie des processus log-Poisson, le signal multifractal peut être reconstruit à partir d'une seule composante fractale, la composante associée aux exposants les plus singuliers, *i.e.* la **MSM**.

Turiel et del Pozo [Turiel et del Pozo, 2002] utilisent cette propriété pour formaliser un algorithme de reconstruction : le principe est celui d'un processus de diffusion du gradient de l'image sur les pixels de la **MSM**, qui permet d'obtenir une estimation du signal original. En regard des propriétés qu'ils exigent pour le processus de reconstruction, ils cherchent à définir un noyau **G** de propagation simple qui vérifie des axiomes raisonnables, à savoir :

- (i) **G** doit être déterministe,
- (ii) **G** doit être linéaire,
- (iii) **G** doit être invariant par translation,
- (iv) **G** doit être isotrope,
- (v) **G** doit permettre de conserver le spectre de puissance.

et qui permette de reconstruire la mesure multifractale de densité  $|\nabla I|$  à partir de sa restriction sur  $F_\infty$ .

Quelle est l'idée intuitive de l'algorithme de reconstruction ? Tout d'abord, concernant la **MSM** : l'information contenue localement par cet ensemble suffit à reconstruire l'image. Enfin, concernant le gradient de l'image : celui-ci permet de propager l'information contenue dans la **MSM**.

### 5.5.2. Construction du noyau de propagation

Le noyau de propagation **G** défini par les propriétés ci-dessus est en fait un opérateur universel de reconstruction [Turiel et del Pozo, 2002]. Il est ainsi défini de manière unique, indépendamment de l'image que l'on cherche à reconstruire :

- (i) **G est déterministe** - Le noyau est une fonction déterministe en chaque pixel où il est défini, et non pas une variable aléatoire de l'image. La formule de reconstruction, si elle est possible, prend donc nécessairement la forme :

$$|\nabla I|(\vec{x}) = \mathbf{G} (|\nabla I|(\vec{x}) \delta_{F_\infty}(\vec{x})) \quad (5.42)$$

où, rappelons-le, l'ensemble  $F_\infty$  désigne la **MSM**, et où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker et donc la fonction  $\delta_{F_\infty}$  est la densité de la mesure de Hausdorff sur  $F_\infty$  :

$$\delta_{F_\infty}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in F_\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La valeur du gradient de l'image ainsi reconstruite en chaque point est donc une fonction des valeurs de  $|\nabla I|$  considéré sur la **MSM** seule.

- (ii) **G est linéaire** - Cela implique de considérer le gradient  $\nabla \mathbf{I}$  de l'image au lieu de son module, car le module est un opérateur non-linéaire, et d'avoir finalement une relation de la forme :

$$\nabla \mathbf{I}(\vec{x}) = \mathbf{G} (\nabla \mathbf{I}(\vec{x}) \delta_{F_\infty}(\vec{x})) . \quad (5.43)$$

Cette hypothèse n'est en fait pas contradictoire avec la formulation précédente, au contraire, puisque le gradient contient davantage d'information que son module : si la reconstruction est possible à partir du module (hypothèse (5.42)), elle est *a fortiori* possible à partir du gradient lui-même (hypothèse (5.43)).

Il existe alors, d'après le théorème de représentation de Riesz des formes linéaires [Rudin, 1987], une représentation intégrale pour l'opérateur linéaire  $\mathbf{G}$  :

$$\nabla \mathbf{I}(\vec{x}) = \int_{F_\infty} dl(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) \nabla \mathbf{I}(\vec{y}) \quad (5.44)$$

avec  $G(\vec{x}, \vec{y})$  la densité de l'opérateur  $\mathbf{G}$ . L'intégrale  $\int_{F_\infty} dl(\vec{y})$  désigne l'intégration le long de la **MSM**. En toute rigueur, on n'est pas assuré de l'existence de cette intégrale, car  $F_\infty$  peut avoir une dimension fractale  $D_\infty \neq 1$  ; par ailleurs, la **MSM** est dense dans l'image, ce qui accroît le risque que l'équation (5.44) ne soit pas définie. On ignore cependant ces limitations dans la suite ; le lecteur est renvoyé à [Turiel et del Pozo, 2002] et à [Turiel et Parga, 2000a] pour une discussion. Intuitivement, cette intégrale donne une mesure des points qui appartiennent à la **MSM** :  $\int_{F_\infty} dl(\vec{y}) = \int \delta_{F_\infty}(\vec{y}) d\vec{y}$ , où la densité  $\delta_{F_\infty}$  peut être assimilée à une fonction indicatrice dont le support est  $F_\infty$ .

La densité  $G$  apparaissant dans l'équation (5.44) est une matrice de dimension  $2 \times 2$ . Désignons les éléments de cette matrice par  $G_{ij}(\vec{x}, \vec{y})$  pour  $i, j \in \{1, 2\}$  et les composantes de  $\nabla \mathbf{I}$  par  $\partial_j I, j \in \{1, 2\}$ , alors les quantités  $(w_1, w_2)$  définies par :

$$w_i(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^2 G_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) \partial_j I(\vec{y}), \quad i \in \{1, 2\} ,$$

sont les coordonnées du vecteur  $\mathbf{w}(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{x}, \vec{y}) \nabla \mathbf{I}(\vec{x}, \vec{y})$ . Celui-ci représente en fait la densité vectorielle du gradient  $\nabla \mathbf{I}$ , car lorsqu'on l'intègre sur la **MSM**, on doit retrouver la mesure initiale :

$$\int_{F_\infty} dl(\vec{y}) \mathbf{w}(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla \mathbf{I}(\vec{x}) .$$

- (iii) **G est invariant par translation** - C'est une hypothèse courante qui signifie qu'il n'y a pas de position privilégiée des objets dans les images naturelles. Bien entendu, cette propriété est limitée empiriquement par la dimension (finie) des images. Du point de vue de la représentation intégrale (5.44), cela signifie que la densité  $G$  de l'opérateur  $\mathbf{G}$  dépend en fait uniquement de la distance  $\vec{x} - \vec{y}$  :

$$\nabla \mathbf{I}(\vec{x}) = \int_{F_\infty} dl(\vec{y}) G(\vec{x} - \vec{y}) \nabla \mathbf{I}(\vec{y}) \quad (5.45)$$

Cette équation peut être simplifiée en une formule scalaire : le terme de gauche désigne un gradient, donc son rotationnel est nul :  $\nabla \wedge \nabla \mathbf{I} = 0$ . Cette propriété implique alors, pour

l'opérateur  $G$ , la contrainte :

$$\partial_1 G_{2j}(\vec{x}) - \partial_2 G_{1j}(\vec{x}) = 0, \quad j \in \{1, 2\},$$

d'où l'existence d'un champ de vecteur  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$  dont  $G$  dérive :

$$G_{ij}(\vec{x}) = \partial_i g_j(\vec{x}), \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

*i.e.*  $G$  s'exprime comme le gradient du champ  $\mathbf{g}$ . Par conséquent, la formule de reconstruction (5.45) peut être intégrée pour s'écrire :

$$I(\vec{x}) = \int_{F_\infty} dl(\vec{y}) \mathbf{g}(\vec{x} - \vec{y}) \nabla I(\vec{y}). \quad (5.46)$$

Si l'on définit maintenant le *gradient essentiel* comme le champ de vecteurs 2D égal au gradient de l'image originale sur la **MSM** et nul en dehors :

$$\nabla I_\infty(\vec{x}) = \nabla I(\vec{x}) \delta_{F_\infty}(\vec{x}), \quad (5.47)$$

alors l'équation (5.46) représente une convolution :

$$I(\vec{x}) = \int \mathbf{g}(\vec{x} - \vec{y}) \nabla I_\infty(\vec{y}) d\vec{y} = \mathbf{g} \star \nabla I_\infty(\vec{x}). \quad (5.48)$$

puisque l'intégration est maintenant réalisée sur tout l'espace et n'est plus seulement limitée à la seule **MSM** : la restriction à la **MSM** est en fait maintenant introduite au travers du champ de vecteurs  $\nabla I_\infty$ . La formule de reconstruction (5.48) peut être exprimée de manière parfaitement équivalente dans l'espace des fréquences par l'équation :

$$\mathcal{F}[I](\vec{\nu}) = \mathcal{F}[\mathbf{g}](\vec{\nu}) \cdot \mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}). \quad (5.49)$$

où les symboles  $\mathcal{F}$  et  $\cdot$  désignent *resp.* la transformée de Fourier et le produit scalaire de vecteurs complexes ; la variable  $\vec{\nu}$  représente la fréquence spatiale (la variable dans le domaine des fréquences). Notons que les "conditions aux bords" (valeurs de la mesure sur les contours, *i.e.* sur la **MSM**) et toute l'information apportée par l'image (géométrie de la **MSM**) sont finalement contenus dans le champ de vecteurs  $\nabla I_\infty$ , qui dépend de l'image traitée. Le noyau de reconstruction  $\mathbf{G}$ , lui, en revanche, ne contient pas d'information sur la localisation des contours et sur la valeur du signal sur ces contours ; il est simplement défini par la donnée du champ vectoriel complexe  $\mathcal{F}[\mathbf{g}](\vec{\nu})$  dans l'espace des fréquences.

- (iv) **G est isotrope** - En effet, il est nécessaire, pour que le propagateur soit universel, que les autres informations sur l'image, telles que les directions de diffusion de la luminance, soient là encore contenues dans le champ de vecteurs  $\nabla I_\infty$ . Il s'agit de ne pas introduire dans la reconstruction d'artefacts liés à la rotation des motifs de l'image, autrement dit qu'il y ait une invariance par rotation. Cela implique que le noyau de propagation  $\mathbf{g}$ , exprimé dans l'espace des fréquences, prend la forme :

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}](\vec{\nu}) = i g(\vec{\nu}) \frac{\vec{\nu}}{|\nu|} \quad (5.50)$$

où  $i$  désigne l'unité imaginaire :  $i = \sqrt{-1}$  (l'opérateur  $\mathbf{g}$  est réel) et où  $|\nu|$  et  $g(\vec{\nu})$  représentent *resp.* le module du vecteur fréquence et le module du noyau de propagation. La propriété d'isotropie signifie en particulier que  $g(\vec{\nu})$  ne dépend plus que de  $|\nu|$ .

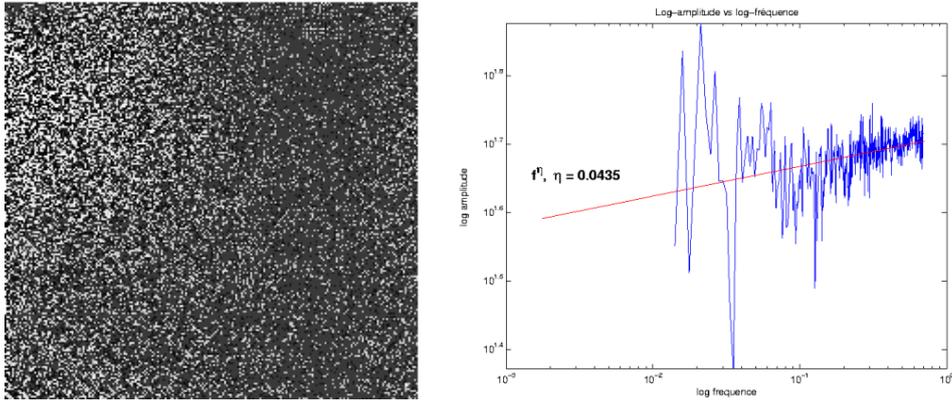


FIG. 5.17.: Calcul de la fonction  $|\mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}|^2 / |\nu|^2$  sur l'image de la figure 5.11. On vérifie sur cet exemple que cette fonction représente essentiellement du bruit et varie comme une puissance de  $|\nu|$  avec un exposant très faible (ici,  $\eta = 0.0435$ ).

- (v) **G conserve le spectre de puissance** - On exige du noyau de reconstruction qu'il permette de retomber sur le même spectre de puissance : le spectre de puissance de l'image originale et celui de l'image reconstruite doivent être identiques. D'après l'expression (5.49), le spectre de l'image reconstruite est :

$$\begin{aligned} \Gamma_I(\vec{\nu}) \equiv |\mathcal{F}[I](\vec{\nu})|^2 &= |\mathcal{F}[g](\vec{\nu}) \cdot \mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu})|^2 \\ &= g^2(\vec{\nu}) \frac{|\mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}|^2}{|\nu|^2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Or, nous avons vu (*cf.* section 5.1.2) que la propriété d'invariance d'échelle des images naturelles implique que le spectre de puissance des images suit une loi d'échelle. Nous rappelons ici l'équation (5.1) donnant la forme du spectre :

$$\Gamma_I(\vec{\nu}) \approx \frac{1}{|\nu|^{2-\epsilon}} \quad (5.52)$$

où l'exposant  $\epsilon \ll 1$  dépend de l'image considérée. En identifiant cette expression à la relation (5.51), il apparaît naturel de penser que le terme  $g^2(\vec{\nu})$  de l'équation (5.51) doit être responsable de la dépendance en  $|\nu|^{-2}$  du spectre de puissance, et donc que la forme la plus simple pour le noyau de propagation est donnée par  $g(\vec{\nu}) = 1/|\nu|$ , soit finalement :

$$\mathcal{F}[g](\vec{\nu}) = i \frac{\vec{\nu}}{|\nu|^2}. \quad (5.53)$$

Le facteur  $|\nu|^{-2}$  crée une diffusion de la luminance :  $|\nu|^{-2}$  est la transformée de Fourier de la fonction de Green de l'opérateur Laplacien<sup>7</sup>. Cela signifie que la reconstruction peut effectivement être assimilée à un processus de diffusion. Le terme  $|\mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}) \cdot \vec{\nu}|^2 / |\nu|^2$  introduit quant à lui la dépendance en  $|\nu|^\epsilon$  dans l'expression (5.52), et, compte tenu de l'isotropie du noyau de propagation, doit contenir les éventuelles anisotropies du signal (*i.e.* de la fonction de luminance  $I$ ).

<sup>7</sup>En particulier, la dérivée de  $g$  est un noyau au sens mathématique, l'opérateur  $g$  lui-même n'en est pas un ; nous continuerons cependant d'utiliser le terme *noyau* pour le désigner.

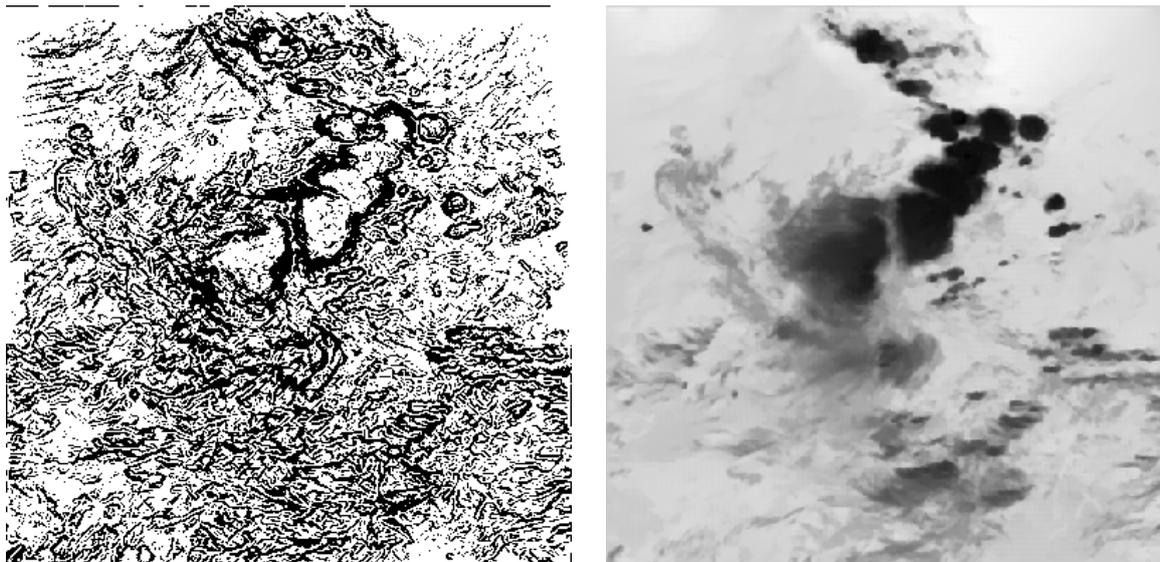


FIG. 5.18.: **À gauche** : ensemble des pixels de la **MSM**. **À droite** : reconstruction de l'image à partir de l'information de gradient sur la **MSM**; le rapport-crête **PSNR**, qui sera rappelé plus loin, vaut  $31,34\text{ dB}$ .

Finalement :

**Proposition 5.6** *La formule de reconstruction de l'image  $I$  est donnée dans l'espace des fréquences, à l'aide du noyau défini en (5.53), par :*

$$\mathcal{F}[I](\vec{\nu}) = \frac{i \vec{\nu} \cdot \mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu})}{|\nu|^2}. \quad (5.54)$$

Pratiquement, l'application directe de (5.54) est rendue possible sur les images naturelles grâce à un algorithme de reconstruction relativement simple [Turiel et del Pozo, 2002], dont les étapes successives sont résumées dans la table (3). La figure 5.18 présente un exemple de reconstruction : l'image **IR** est reconstruite à partir de l'information géométrique contenue dans la **MSM** et de l'information de gradient de l'image originale (orientation + direction + norme) sur la **MSM**. La reconstruction est d'autant meilleure que la densité de la **MSM** dans l'image (simplement exprimée par le rapport  $d_\infty = \text{Card}\{\text{MSM}\}/\text{Card}\{\text{image}\}$ ), *i.e.* la proportion de pixels considérés dans la **MSM**, est importante. Cette propriété est liée à la linéarité de l'algorithme de reconstruction en les données, que nous décrivons dans la section suivante. Expérimentalement, cela consiste essentiellement à modifier le pas de tolérance  $\Delta h$  que l'on utilise pour l'estimation des composantes fractales.

Dans la suite, nous désignerons par **FRI** (*Fully Reconstructed Image*) l'image reconstruite à l'aide du noyau de propagation  $g$ . Nous allons voir que l'on peut considérer, dans le schéma de reconstruction, d'autres champs que le gradient essentiel  $\nabla I_\infty$  défini sur la **MSM**.

1. On estime les exposants de singularité  $h(\vec{x})$  en tout pixel  $\vec{x}$  et on détermine l'exposant le plus singulier  $h_\infty$  à l'aide des étapes 1 à 5 de l'algorithme (2).

2. On construit la fonction indicatrice de la MSM :

$$\delta_{F_\infty}(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_\infty - \Delta h \leq h(\vec{x}) \leq h_\infty + \Delta h \\ 0 & \text{sinon } (h(\vec{x}) < h_\infty - \Delta h \text{ ou } h(\vec{x}) > h_\infty + \Delta h) \end{cases}$$

3. On calcule le gradient de l'image  $\nabla I$  et on déduit le gradient essentiel  $\nabla I_\infty(\vec{x}) = \nabla I(\vec{x}) \delta_{F_\infty}(\vec{x})$  restreint à la MSM.

4. On calcule ensuite successivement :

- la transformée de Fourier du champ  $\nabla I_\infty$  pour obtenir un champ bidimensionnel complexe :  $\mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}) \equiv (\mathcal{F}[\partial_1 I_\infty](\vec{\nu}), \mathcal{F}[\partial_2 I_\infty](\vec{\nu}))$ ,
- le produit scalaire de ce champ de vecteur avec le vecteur fréquence :  $\vec{\nu} \cdot \mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}) = \nu_1 \mathcal{F}[\partial_1 I_\infty](\vec{\nu}) + \nu_2 \mathcal{F}[\partial_2 I_\infty](\vec{\nu})$ ,
- le nombre complexe ainsi obtenu en chaque pixel est multiplié par  $i = \sqrt{-1}$  puis divisé par le module du vecteur fréquence :  $|\nu|^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2$  pour obtenir  $\mathcal{F}[I]$ ,
- la transformée de Fourier inverse  $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[I]]$  du champ finalement obtenu permet de retrouver l'image.

**Algorithme 3:** Étapes de l'algorithme de reconstruction.

### 5.5.3. Propriétés de la reconstruction

#### Généralisation de la formule de reconstruction

La formule de reconstruction (5.48) peut en fait être généralisée à n'importe quel sous-ensemble de l'image, *i.e.* on peut chercher à reconstruire un ensemble à partir du gradient restreint à une région quelconque de l'image. Une relation similaire à l'équation (5.47) permet en effet de définir un gradient restreint à un sous-ensemble  $\varphi$  de l'image :

$$\nabla I_\varphi(\vec{x}) = \nabla I(\vec{x}) \delta_\varphi(\vec{x}) \quad (5.55)$$

avec  $\delta_\varphi$  la fonction indicatrice de  $\varphi$ . La formule de reconstruction de l'image à partir de la région  $\varphi$  s'écrit alors simplement :

$$I(\vec{x}) = \mathbf{g} \star \nabla I_\varphi(\vec{x}) . \quad (5.56)$$

L'équation (5.48) correspond simplement au cas particulier où l'on considère le sous-ensemble  $\varphi = F_\infty$ , et l'image reconstruite est alors égale (en théorie) à l'image originale :  $I_{F_\infty} = I$ . De manière similaire on peut proposer de généraliser l'équation (5.54) exprimée dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{F}[I](\vec{\nu}) = \frac{i \vec{\nu} \cdot \mathcal{F}[\nabla I_\varphi](\vec{\nu})}{|\nu|^2} . \quad (5.57)$$

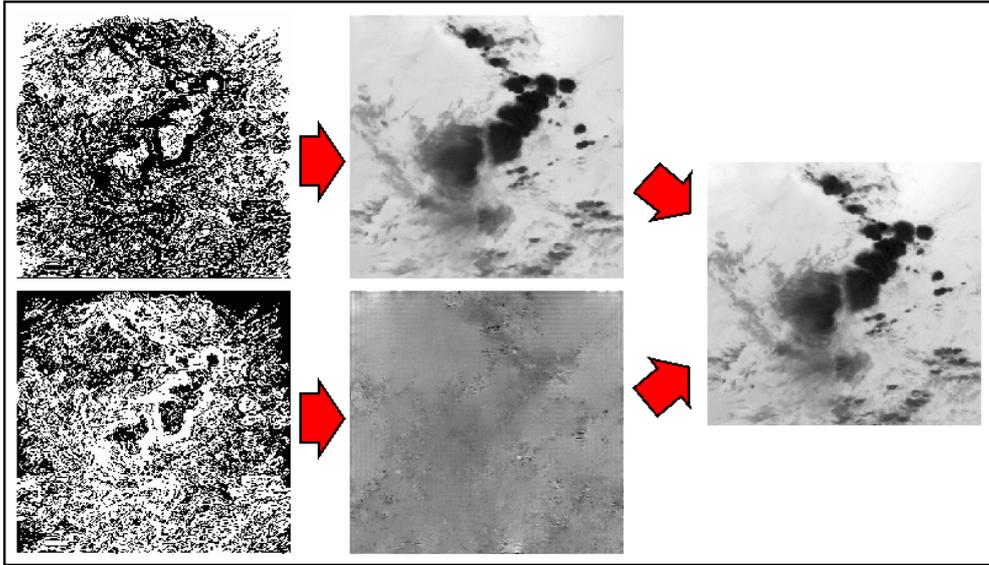


FIG. 5.19.: Illustration de la linéarité de l'algorithme de reconstruction. **En haut** : les pixels de la **MSM** et l'image reconstruite à partir de cet ensemble. **En bas** : l'ensemble complémentaire de la **MSM** et l'image reconstruite correspondante. Compte tenu de la linéarité de l'algorithme, la somme des deux reconstructions est égale à l'image originale.

### Propriétés de l'algorithme de reconstruction

L'utilisation de l'expression (5.56) nous permet de définir l'algorithme de reconstruction comme un processus  $\varphi \rightarrow I_\varphi$  dépendant du sous-ensemble  $\varphi$  uniquement (rappelons que le noyau de reconstruction est un opérateur universel) et de souligner quelques unes de ses propriétés importantes :

- Il est linéaire en la variable  $\varphi$ . Il suffit en effet de remarquer que pour deux ensembles disjoints de l'image  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ( $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \emptyset$ ), on a :  $\nabla I_{\varphi_1 \cup \varphi_2} = \nabla I_{\varphi_1} + \nabla I_{\varphi_2}$ , et, en conséquence, puisque le produit de convolution est associatif :  $I_{\varphi_1 \cup \varphi_2} = I_{\varphi_1} + I_{\varphi_2}$  (figure 5.19).
- Il admet un ensemble pour lequel la **FRI** est exacte. En effet, si  $\varphi = \mathcal{D}$  (le support de l'image entière), alors  $\nabla I_\varphi = \nabla I$  (car  $\delta_\varphi = 1$ ), ce qui, compte tenu de la relation  $\mathcal{F}[\nabla I](\vec{\nu}) = -i\vec{\nu} \cdot \mathcal{F}[I](\vec{\nu})$  et de la définition de  $\mathbf{g}$ , conduit à :  $I_\varphi = I$ .
- La **MSM** est l'ensemble à partir duquel on obtient le meilleur résultat de reconstruction. En théorie, on a  $I_{F_\infty} = I$ ; en pratique, ça n'est généralement pas le cas, cependant c'est l'ensemble à partir duquel on obtient le meilleur résultat de reconstruction. Si l'on remplace  $F_\infty$  par n'importe quel sous-ensemble  $\varphi$  de pixels choisis aléatoirement et de même densité que  $F_\infty$ , la qualité de la reconstruction est moindre :  $I_\varphi \subset I_\infty$ . Par ailleurs, si la reconstruction à partir de la **MSM** n'est pas exacte, elle peut toujours être améliorée en considérant en sus dans le processus de reconstruction, les autres composantes fractales.
- En conséquence des deux propriétés précédentes, si  $\varphi^c$  désigne l'ensemble complémentaire de l'ensemble  $\varphi$ , on a :  $I_\varphi + I_{\varphi^c} = I$ , autrement dit :  $I - I_\varphi = I_{\varphi^c}$  et la **FRI** reconstruite à partir

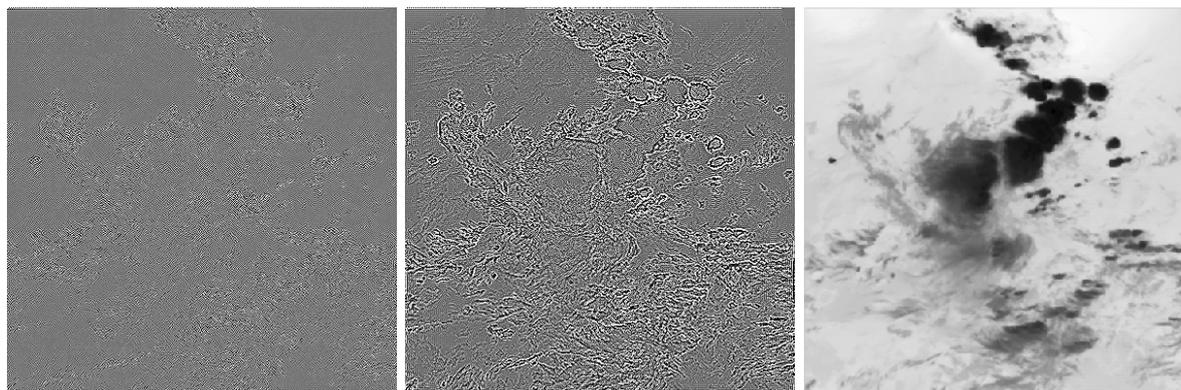


FIG. 5.20.: Exemples d'images reconstruites en utilisant des noyaux de propagation  $\mathbf{g}$  de la forme  $\mathcal{F}[\mathbf{g}](\vec{\nu}) = i\vec{\nu}/|\nu|^{2-\gamma}$  pour différentes valeurs de  $\gamma$ . **De gauche à droite** :  $\gamma = 3$ ,  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 0$  (schéma de reconstruction **FRI**). Les deux premières images ont subi une égalisation d'histogramme afin d'accentuer le contraste.

de l'ensemble complémentaire est simplement la différence entre l'image originale et la **FRI** reconstruite à partir de l'ensemble lui-même (*i.e.* l'image d'erreur).

Toutes ces propriétés sont illustrées de manière élégante dans [Turiel, 2003]. L'intérêt de la formule de reconstruction (5.48) est de pouvoir reconstruire (en pratique, presque parfaitement) le signal à partir de la connaissance du gradient de l'image sur la seule **MSM**. Notons que cela signifie en particulier que les différentes composantes fractales sont, en un sens, corrélées à la **MSM** puisqu'elles peuvent être prédites par l'application d'un noyau linéaire sur la **MSM**.

### Caractéristiques du noyau de propagation

La forme du noyau de propagation défini par l'équation 5.53 implique que celui-ci varie en  $|\nu|^{-1}$  dans le domaine fréquentiel et donc également en  $|x|^{-1}$  dans le domaine spatial. Similairement, on peut définir des noyaux de propagation de la forme :

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}](\vec{\nu}) = i \frac{\vec{\nu}}{|\nu|^{2-\gamma}} \quad (5.58)$$

qui varient en  $|\nu|^{\gamma-1}$  dans le domaine fréquentiel et donc en  $|x|^{-1-\gamma}$  dans le domaine spatial. Par conséquent, plus  $\gamma$  est grand, plus vite le noyau de propagation décroît. En ce qui concerne la reconstruction, les modifications dues à l'utilisation de tels noyaux portent sur la distribution de la luminance dans l'image : les valeurs des niveaux de gris sur la **MSM** sont d'autant moins diffusées que  $\gamma$  croît. À la limite, lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , la luminance n'est plus diffusée de la **MSM** vers les autres parties de l'image et l'image tend à s'annuler en dehors de cet ensemble.

Cependant, notons une propriété intéressante : quelque soit le noyau de la forme (5.58) utilisé pour la reconstruction, la structure géométrique, et, plus exactement, la structure multifractale de l'image originale est en principe conservée. En particulier, la **MSM** est préservée (bien que difficilement discernables dans la figure 5.20, les principaux contours des objets subsistent) et il

pourrait être montré que les exposants de singularité des différentes images reconstruites sont identiques. En fait, le changement de l'exposant  $\gamma$  se traduit essentiellement par une modification du spectre. De manière générale, toute transformation agissant sur le spectre ne modifiera pas la structure multifractale. Des noyaux de nature totalement différente et qui préservent également la structure multifractale peuvent encore être exhibés. Cette idée sera reprise au chapitre 7, où l'on va définir une image dite chromatiquement réduite en modifiant la forme du noyau utilisé pour la reconstruction.

### Remarques

Ces propriétés laissent entrevoir des prolongements intéressants du modèle multifractal de reconstruction :

- on peut considérer des ensembles de reconstruction  $\varphi$  différents suivant les propriétés que l'on requiert pour la **FRI**,
- de même, on peut envisager d'utiliser un autre champ de reconstruction que le gradient original  $\nabla I_\varphi$  restreint à l'ensemble  $\varphi$ ; on verra au chapitre 7 une variante sur ce principe,
- on peut construire d'autres noyaux de reconstruction  $g$ .

Ainsi, le spectre des applications envisageables est très grand.

## 5.6. Des applications du modèle multifractal à l'analyse d'images satellitaires - Partie I

Nous envisageons ici diverses applications du modèle que nous venons de présenter, dans le cadre d'analyse de données satellitaires. Ces applications découlent soit directement du formalisme multifractal, ou de l'approche qui a motivé le modèle, soit moins directement, mais en utilisant pleinement les caractéristiques du modèle.

### 5.6.1. Détection de contours et description du contenu textuel d'une image

#### Approche proposée

L'analyse multifractale des transitions de niveaux de gris permet d'analyser localement le degré de régularité du signal. Les contours d'une image s'identifient tout naturellement à la composante associée aux singularités les plus fortes, *i.e.* la **MSM**, et la détection des contours se ramène ainsi à la détermination de la **MSM**. Celle-ci décrit en effet les fronts de singularité du signal, *i.e.* l'ensemble des pixels au-dessus desquels les changements les plus importants (les transitions les plus brusques) des niveaux de gris interviennent. La méthode de détection des contours est donc résumé par l'algorithme (2).

La technique d'analyse est particulièrement adaptée à l'étude des structures turbulentes présentes dans les images météorologiques [Grazzini et al., 2002a] [Grazzini et al., 2002b]. Expérimentalement,

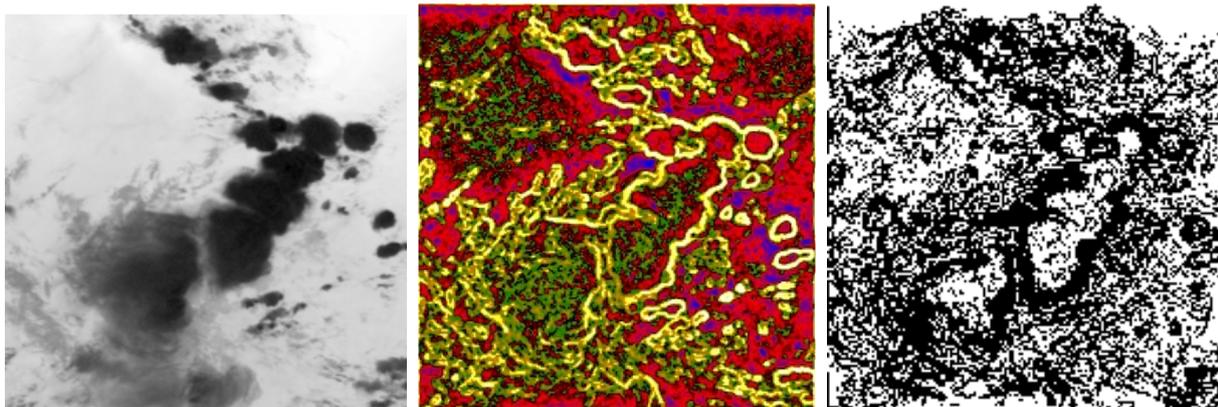


FIG. 5.21.: De gauche à droite : détail de l'image **IR** ; décomposition de l'image en  $N = 5$  classes ; le code couleur d'un pixel désigne la composante fractale à laquelle il appartient ; celui-ci va du blanc-jaune (composantes les plus singulières) au bleu-noir (composantes les plus régulières) ; extraction de la **MSM** regroupant les pixels les plus singuliers.

la **MSM** rassemble les contours multiéchelles de l'image. Sur la figure 5.22, on peut voir différentes estimations des contours de l'image de la figure 5.21. Des détails de plus en plus grossiers sont incorporés au fur et à mesure que l'on augmente le nombre autorisé de pixels dans la **MSM**, et ceci est fait graduellement, selon leur degré de singularité.

### Comparaison avec les méthodes de détection de contours classiques

**Détecteurs classiques** - Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce document (*cf.* chapitre 3), les méthodes classiques de segmentation définissent généralement les contours comme les points où l'intensité de l'image présente une transition brutale. C'est notamment la notion de *gradient local* qui est centrale pour les méthodes de détection de contours : ces derniers sont recherchés parmi les *extrema du gradient*  $\nabla I$  de la fonction image  $I$ . Cette définition n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons :

- les images de texture, par exemple, peuvent avoir des variations d'intensité brusques qui ne sont pas considérées comme des contours : la séparation entre contours et texture dépend alors de l'échelle d'analyse.
- les images météorologiques mettent quant à elles en évidence des structures d'intérêt présentant des transitions chaotiques entre les niveaux de gris ; leur acquisition peut par ailleurs être bruitée, provoquant très souvent de nombreux artefacts sur les régions turbulentes.

Sur cette dernière famille d'images, les algorithmes classiques d'extraction de contours ne sont absolument pas adaptés : ceci explique les résultats peu significatifs que nous avons obtenus avec les outils de segmentation classique.

**Le détecteur de Dérêche** - Lorsque l'on compare cette méthode à un détecteur de contours classique, tel que le filtre de Dérêche (*cf.* section 3.2.3, équation 3.1), un des avantages principaux



FIG. 5.22.: Estimation de la **MSM** à partir de la distribution de l'image de la figure 5.21. Le facteur discriminant ici est la densité  $d_\infty$  de la **MSM** dans l'image. **De gauche à droite** :  $d_\infty = 25\%$ ,  $35\%$  et  $40\%$ .

de notre approche réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas un lissage préalable de l'image, et, en conséquence :

- la localisation des contours est très bonne puisqu'elle est effectuée à différentes échelles,
- la technique multiéchelle nécessiterait justement l'utilisation de différentes tailles de filtres (les paramètres  $\alpha$  de l'équation (3.1)),
- il est possible de détecter des structures fines qui sont perdues lorsqu'on effectue un lissage,
- la sensibilité au bruit est *a priori* plus forte ; cependant, dans le cas de données chaotiques comme les images météorologiques, ce bruit peut être assimilé à de l'information essentielle.

L'autre avantage est bien entendu le caractère multiéchelle de l'analyse par ondelettes. Cela justifie que l'on compare plutôt le modèle multifractal avec des méthodes multiéchelles.

### Comparaison avec les méthodes textuelles

**Les MC-attributs** - Idéalement, la segmentation multifractale que nous obtenons ne pourrait être établie à l'aide des outils textuels que dans la limite des petites échelles, *i.e.* dans le cas où la dimension de la fenêtre tendrait vers 0. Évidemment, les contradictions liées à la taille de la fenêtre analysante utilisée pour les estimations locales réapparaissent. L'adoption d'un cadre multiéchelle (*cf.* section 4.3), en remédiant aux contradictions des **MC-attributs**, permet d'obtenir de meilleurs résultats de localisation.

**La classification multi-dimensionnelle** - Nous pouvons également essayer d'interpréter les résultats obtenus lors du processus de classification à l'aide des attributs de texture. Les caractéristiques de la **MSM** doivent expliquer la corrélation entre les différents attributs utilisés dans la représentation multi-dimensionnelle (*cf.* section 4.4). Les pixels de la **MSM** ont des valeurs significatives et les descripteurs textuels sont sensibles aux propriétés de cet ensemble. Dans le cas des images météorologiques **Meteosat**, il n'y a pas de textures à des échelles privilégiées, plutôt des microtextures. Bien que la dynamique des images soit relativement faible, le signal est suffisamment



FIG. 5.23.: Contours détectés à l'aide de filtres de Dérivée. On ne représente ici que les maxima de la norme du gradient (aucun seuillage ultérieur n'est effectué). Le réglage de la largeur  $\alpha$  du filtre de l'équation (3.1) sert à affiner les détails. **De gauche à droite** :  $\alpha = 1., 1.2$  et  $1.8$ .

chaotique pour que se produisent des transitions à toutes les échelles, de sorte que l'on ne puisse pas vraiment extraire de textures bien définies. Dans le cas des images **Spot** ou **Landsat** d'occupation du sol, la présence de classes de textures à des échelles caractéristiques distinctes se traduit par une forte corrélation intra-classe et le caractère multi-valué des distributions conditionnelles.

### Comparaison avec les méthodes par ondelettes

Rappelons que les méthodes par ondelettes consistent à utiliser les coefficients de représentation, à différentes échelles, de la transformée sur une base d'ondelettes déterminée pour détecter les contours. Le principe sous-jacent est que les discontinuités spatiales (correspondant aux contours) se retrouvent à différentes échelles et se manifestent par des coefficients élevés, tandis que les zones régulières de taille suffisante (correspondant aux régions homogènes) se manifestent par de faibles coefficients, également à de nombreuses échelles.

**L'AMR** - Les méthodes de décomposition (*cf.* section 5.2.2) consistent à extraire les détails des différentes sous-bandes jusqu'à une certaine résolution. Le problème cependant avec cette technique est que certaines singularités peuvent théoriquement apparaître (résonner) à un niveau de détail inférieur à celui où l'on a stoppé l'extraction de contours. Notre approche en revanche permet de considérer simultanément toutes les singularités présentes dans le signal en attribuant à chacune un attribut de quantification du degré d'irrégularité. On peut ainsi effectuer une classification de tous les pixels de l'image puisque l'exposant de singularité est connu pour tous. L'objection principale à l'utilisation de cette méthode est liée au fait qu'elle ne constitue pas une approche continue.

**Les MMTO** - Les méthodes par **MMTO** (*cf.* section 5.2.3) consistent à suivre les lignes de maxima du module de la **TO** puisque ceux-ci se propagent à travers les échelles [Mallat et Huang, 1992]. En comparaison, la méthode que nous proposons conduit à l'estimation pour tous les pixels de l'image (et pas seulement pour les pixels les plus singuliers) d'un exposant de singularité. Une



FIG. 5.24.: Contours détectés par la méthode des **MMTO**. De gauche à droite : de la résolution la plus fine à la plus grossière.

autre différence essentielle avec les méthodes de détection de contours multiéchelles par **MMTO** est notamment liée au fait que nous considérons, dans notre approche, non pas le signal lui-même (la fonction de luminance  $I$ ) mais sa dérivée (plus exactement  $|\nabla I|$ ). En particulier, la détermination de l'exposant  $h(\vec{x})$  ne dépend pas des variations absolues du signal  $I$  autour de  $\vec{x}$ , mais de ses variations relativement aux pixels dans un voisinage de  $\vec{x}$ . Ainsi la multiplication du signal  $I$  par une constante entraîne une modification du coefficient  $\alpha(\vec{x})$  de l'équation (5.31), mais laisse l'exposant  $h(\vec{x})$  inchangé.

### Comparaison avec les méthodes multifractales

**Les mesures multifractales** - Comme nous l'avons déjà souligné lors de la présentation du modèle multifractal (*cf.* section 5.4.1), notre approche se distingue des approches multifractales classiques en ce sens qu'elle vise à vérifier la dépendance en loi de puissance suivant le paramètre d'échelle pour l'ensemble des points du signal et non pas pour une moyenne de réalisations seulement. Généralement, les méthodes multifractales consistent en effet à analyser les moments de la distribution (au travers d'une mesure de comptage par exemple) afin de mettre en évidence un comportement multiéchelle en loi de puissance [Bacry et al., 1990]. Ici, l'approche adoptée, que l'on qualifie de géométrique, consiste à effectuer un test direct de la multifractalité.

**L'estimation multifractale à l'aide des MMTO** - Lorsqu'elle est utilisée pour l'estimation des spectres de Legendre [Arnéodo et al., 2000] [Arnéodo et al., 1999] (*cf.* section 5.3.4), l'approche par **MMTO** permet de retrouver sensiblement les mêmes singularités que notre modèle (en 1D au moins). Il pourrait être montré qu'elle conduit à l'estimation des mêmes singularités. Cependant, comme nous l'avons écrit plus haut, une limitation essentielle à l'emploi de cette méthode (par ailleurs très répandue) réside dans le fait qu'elle ne restitue pas les exposants des points autres que les singularités. Elle s'intéresse en fait plutôt aux spectres multifractals. Le modèle d'analyse multifractale que nous avons présenté permet quant à lui d'attribuer un exposant non seulement aux pixels de la **MSM**, mais aussi à ceux appartenant à d'autres composantes fractales, *i.e.* les pixels en dehors de la **MSM**. Ce modèle, en mesurant le degré de régularité de tous les **points**

du signal, rend possible une décomposition hiérarchique de l'image. Cette propriété permet de classifier les pixels, des contours jusqu'aux textures, en considérant les exposants de singularité comme des descripteurs locaux. Les différents spectres calculés directement à partir des exposants ainsi obtenus vérifient alors tout naturellement le formalisme multifractal [Turiel et Parga, 2000a] [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b].

### 5.6.2. Compression d'images

#### Rappel : mesures d'erreur

Afin d'évaluer quantitativement les différences entre l'image initiale  $I$  et l'image reconstruite  $R$ , on introduit des mesures de distance entre images. Rappelons que le rapport-crête  $PSNR$  (*Peak Signal to Noise Ratio*) est une mesure, en décibels ( $dB$ ), de l'erreur quadratique normalisée par la valeur maximale  $I_{\max}$  de l'image originale :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{I_{\max}^2}{\mathcal{R}_{\text{MSE}}}$$

où l'erreur quadratique moyenne  $\mathcal{R}_{\text{MSE}}$  représente la puissance du signal d'erreur :

$$\mathcal{R}_{\text{MSE}} = E[(I - R)^2] = \frac{1}{\text{Card } \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} (I(\vec{x}) - R(\vec{x}))^2 d\vec{x}$$

avec  $\mathcal{D}$  le support de l'image. L'utilisation de ce critère permet de s'affranchir de la dispersion et de la dynamique de l'image originale pour la comparer à l'image reconstruite.

#### Description de la méthode

Dans le formalisme multifractal précédemment présenté, nous disposons d'un ensemble, la **MSM**, qui se trouve contenir de l'information essentielle sur l'image<sup>8</sup> : du point de vue de la théorie du codage, il permet la reconstruction de l'image. L'algorithme de reconstruction, défini par l'équation (5.57), consiste à diffuser les valeurs du signal sur cet ensemble au reste de l'image. Le modèle multifractal proposé peut tout naturellement être utilisé comme point de départ d'un schéma de codage, à partir du moment où la **MSM** retient les caractéristiques les plus significatives de l'image, et où elle permet une reconstruction précise. Retenons le schéma suivant pour la compression des images :

1. tout d'abord, l'extraction du sous-ensemble le plus singulier de l'image, *i.e.* la **MSM**, permet de retenir l'information primordiale (essentiellement constituée des bords des objets) de l'image,
2. puis, la reconstruction de la **FRI** par propagation des valeurs de niveaux de gris du gradient spatial de l'image de la **MSM** vers les autres régions de l'image,

qui est décrit en détail par l'algorithme (3).

<sup>8</sup>Nous donnerons plus loin un sens à la notion d'"ensemble le plus informatif" en ce qui concerne la **MSM**.

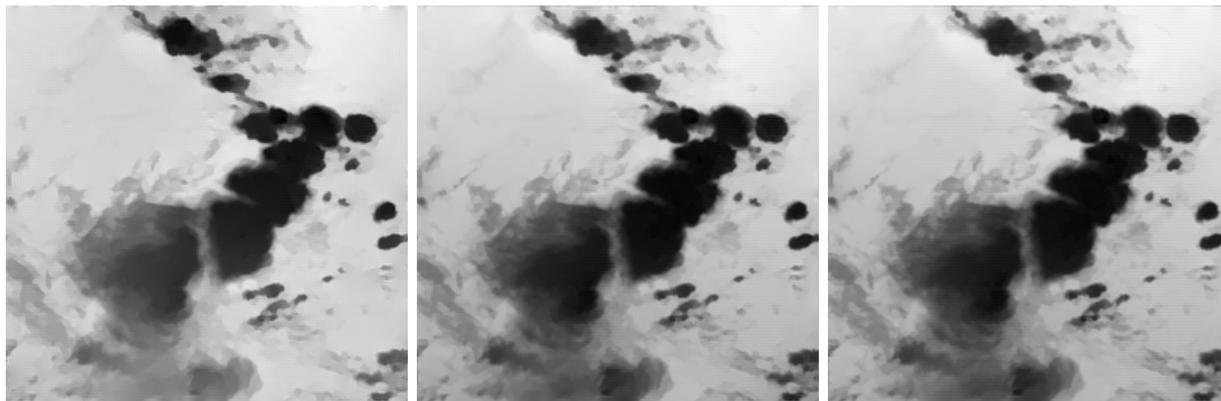


FIG. 5.25.: Reconstructions de l'image de la figure 5.21 à partir des estimations de la **MSM** de la figure 5.22. **De gauche à droite** :  $PSNR = 22.24 dB$ ,  $28.96 dB$  et  $30.08 dB$ .

Enfin, une des caractéristiques essentielles de l'algorithme de reconstruction est sa linéarité qui porte sur la **FRI** (cf. section 5.5.3). Cela signifie, rappelons-le, que, si la **MSM** est l'union de deux sous-ensemble  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , alors la **FRI**  $I_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2}$  reconstruite à partir de cette composante est égale à la somme des deux **FRI**  $I_{\mathcal{P}_1}$  et  $I_{\mathcal{P}_2}$  reconstruites à partir de chaque ensemble séparément. En particulier, la reconstruction serait parfaite si la **MSM** contenait tous les points de l'image. Ainsi, plus la **MSM** regroupe de pixels singuliers, meilleure est l'approximation de l'image originale par la **FRI**. En conséquence, l'image compressée peut approximer l'image originale autant que l'on souhaite, *i.e.* le niveau de compression peut être ajusté. Il est simplement nécessaire de déterminer la densité de la **MSM** utilisée pour la reconstruction, *i.e.* il faut ajuster l'intervalle  $\Delta h$  des valeurs acceptées pour les exposants de singularités  $h$  des pixels de la **MSM**. Sur la figure 5.26, on a ainsi représenté l'évolution de la qualité de la reconstruction (*via* le **PSNR**) en fonction de la densité  $d_\infty$  de la **MSM** utilisée pour la reconstruction. En augmentant le nombre de pixels de la **MSM**, *i.e.* lorsque  $d_\infty$  croît, on améliore la reconstruction. Rappelons qu'idéalement, lorsque la **MSM** représente tous les pixels de l'image, la reconstruction est parfaite. Cependant, notons qu'il y a des paliers. Il y a tout d'abord une certaine proportion de points de la **MSM**, les plus singuliers (jusqu'à 20 % de l'image), qui ne permettent pas une reconstruction efficace. En ajoutant alors d'autres pixels à l'ensemble considéré pour la reconstruction, on améliore notablement la qualité de la reconstruction, et celle-ci ne cesse de croître lorsqu'on ajoute d'autres pixels, jusqu'à un certain palier (la **MSM** contient alors un peu moins de 50 % des pixels de l'image). À partir de ce palier, les améliorations sont très sensibles. Cela signifie que les nouveaux pixels que l'on ajoute n'apportent pas davantage d'information pour la reconstruction : en fait, ils ne correspondent pas à des transitions brusques du signal, ce sont des points réguliers. Cet exemple montre que l'information nécessaire à la reconstruction est vraiment contenue dans un sous-ensemble particulier de l'image constitué des points les plus singuliers.

### Comparaison avec la compression par MMT0

Comme la représentation multifractale, la représentation par maxima d'ondelettes permet à l'aide d'un algorithme approprié de reconstruire l'image (cf. section 5.2.3). Mise à part leur caractère

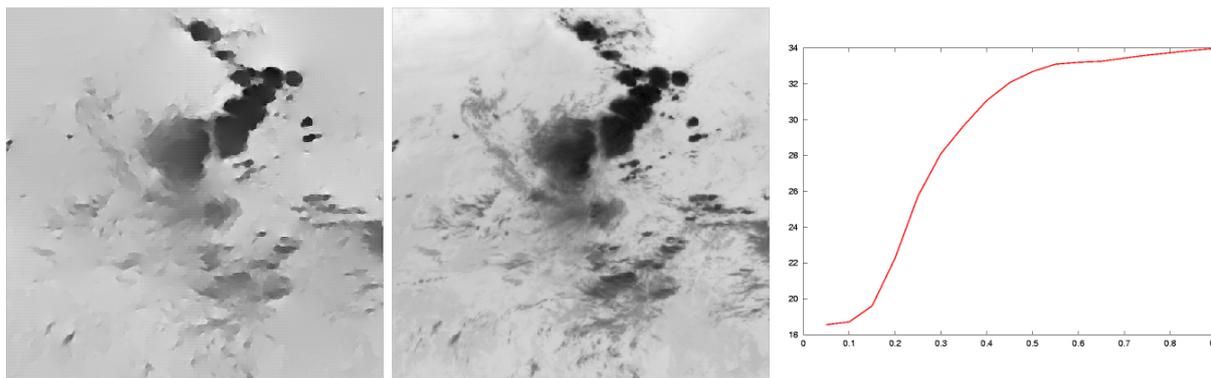


FIG. 5.26.: Évolution de la qualité de la reconstruction (et donc du taux de compression) en fonction de la densité  $d_\infty$  de la **MSM** utilisée pour la reconstruction. **De gauche à droite** : reconstructions de l'image de la figure 5.11 dans les cas extrêmes  $d_\infty = 5\%$  et  $d_\infty = 90\%$ , graphe du **PSNR** (*ord.*) en fonction de  $d_\infty$  (*abs.*) pour différentes reconstructions effectuées sur la même image.

multiéchelle, nous pouvons souligner une caractéristique commune essentielle de ces deux approches ; toutes deux tendent à distinguer deux structures fondamentales dans les images naturelles :

1. les contours des objets sont les structures géométriques principales :
  - dans les algorithmes de Mallat *et al.* [Mallat et Zhong, 1992] [Froment et Mallat, 1991], ces contours sont représentés par les courbes de **MMTO** les plus significatives. En y ajoutant une approximation basse-résolution de l'image, ces courbes de maxima permettent d'approximer l'image naturelle.
  - dans l'algorithme de [Turiel et del Pozo, 2002], ces contours permettent de reconstruire une image ayant la même structure géométrique que l'image originale. En y ajoutant une information d'illumination de la scène, ils permettent de reconstruire une bonne approximation.
2. dans les deux cas, l'information perdue dans les approximations précédentes ne participe pas à des structures géométriques : l'image d'erreur a essentiellement l'aspect de microtextures<sup>9</sup> (figure 5.19).

### 5.6.3. Fusion d'images de différentes résolutions spatiales

#### La fusion de données

En un sens très large, la fusion d'images satellitaires consiste à combiner plusieurs images provenant de capteurs différents, et permettant éventuellement d'observer des scènes différentes, en une seule

<sup>9</sup>En ce qui concerne le modèle multifractal, ce terme de "microtextures" n'est pas tout à fait juste. L'information perdue correspond plutôt à de l'information de nature chromatique. Cependant, elle n'est effectivement pas de nature géométrique.

[Pohl et Van Genderen, 1998]. L'objectif est d'intégrer toute l'information pertinente contenue dans les images d'entrée et de produire, en sortie, une image qui retienne toutes les caractéristiques essentielles de chacune d'entre elles. Un état de l'art récent et complet sur les nombreux problèmes en fusion de données, ainsi que les diverses méthodes proposées pour les résoudre, est présenté dans [Pohl et Van Genderen, 1998]. Les techniques varient d'une application à une autre et vont du simple schéma de fusion par moyennage des pixels à des schémas plus compliqués tels que la fusion par **ACP** ou par transformées en ondelettes [Ranchin et Wald, 1993].

Pour notre part, nous nous intéressons à la fusion d'images permettant d'observer une même scène avec des résolutions spatiales différentes. L'intérêt d'une telle approche est de combiner deux sources d'observation (*resp.* basse et haute-résolution) pour pré-segmenter une image [Yocki, 1995] :

- l'image basse-résolution (**BR**) fournit de l'information sur les régions homogènes, les zones texturées de la scène observée,
- l'image haute-résolution (**HR**) fournit de l'information sur les contours principaux et les bords des structures importantes.

La figure 5.27 présente l'exemple de deux images **HR** et **BR** acquises par le satellite **Landsat**, permettant d'observer la même scène et de résolutions respectives  $15 \times 15 m$  et  $60 \times 60 m$ .

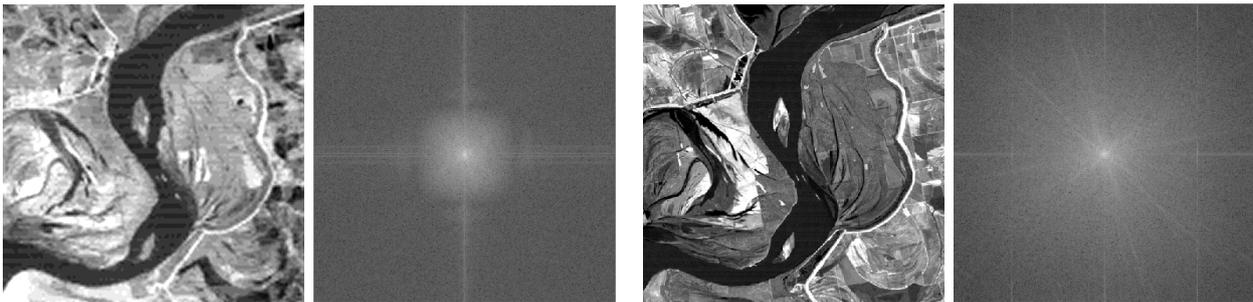


FIG. 5.27.: Deux images acquises simultanément par le satellite **Landsat**. À gauche : image **BR** et son spectre de puissance ; à droite : image **HR** et son spectre de puissance.

La combinaison des deux sources d'information doit permettre de réduire la complexité des données tout en conservant l'information essentielle qu'elles fournissent. La fusion ainsi opérée peut ensuite servir comme donnée d'entrée dans des traitements ultérieurs, *e.g.* pour de la segmentation ou de la classification. Retenons que l'une des techniques les plus fréquentes utilise les **TO** : elle consiste essentiellement à substituer les approximations, à un certain niveau de résolution, de la décomposition, dans une base d'ondelettes, de l'image **HR** (*cf.* section 5.2.2) par l'image **BR** elle-même puis à reconstruire l'image à l'aide des détails de l'image **HR** [Wald et al., 1997].

### Approche proposée

Intuitivement, l'idée de la fusion de deux images de résolutions spatiales différentes est de conserver les caractéristiques fréquentielles de l'image **BR** dans les basses résolutions et celles de l'image



FIG. 5.28.: De gauche à droite : contour de l'image **HR**, image reconstruite et graphe des moyennes radiales des spectres de puissance  $\Gamma(\vec{\nu})$  (représentation semi-log) ; en rouge l'image **BR**, en bleu l'image **HR**.

**HR** dans les hautes résolutions. Nous proposons de réaliser cette fusion grâce à l'algorithme de reconstruction multifractal car il possède de bonnes propriétés. Le recours au modèle multifractal pour l'extraction de la **MSM** permet notamment d'extraire les structures principales d'une image, associées aux contours. La reconstruction ensuite conserve les structures extraites. L'idée de notre méthode est de reconstruire une image avec un noyau de reconstruction qui aurait les mêmes propriétés que le noyau  $g$  utilisé dans l'algorithme, mise à part la propriété de conservation du spectre. Le noyau va dépendre des images fusionnées, il ne sera donc plus universel.

On réalise la fusion d'une image **BR**  $I^b$  et d'une image **HR**  $I^h$  grâce aux étapes suivantes. On calcule tout d'abord les moyennes radiales  $\Gamma_{\mathcal{X}}(|\nu|)$  des spectres de puissance des deux images (le symbole  $\mathcal{X}$  tient lieu de  $b$  ou de  $h$ ). Pour cela :

- les puissances spectrales  $\Gamma_{\mathcal{X}}(\vec{\nu})$  des deux images sont estimées à partir de leurs transformées de Fourier  $\mathcal{F}[I^{\mathcal{X}}](\vec{\nu})$  (figure 5.28),
- les spectres ainsi obtenus sont intégrés sur des couronnes du domaine fréquentiel pour obtenir les moyennes radiales :

$$\Gamma_{\mathcal{X}}(|\nu|) = \int_0^{2\pi} \Gamma_{\mathcal{X}}(|\nu| e^{i\theta}) d\theta ;$$

à cet effet, le rang des fréquences est échantillonné de manière à avoir suffisamment de données pour chaque orientation  $\theta$ .

Une fois que les moyennes radiales des spectres de puissance sont calculées, on introduit la fonction radiale  $c$  définie par :

$$c(|\nu|) = \Gamma_b(|\nu|)/\Gamma_h(|\nu|).$$

La suite consiste simplement à reprendre les étapes de l'algorithme (3) de reconstruction de l'image **HR**. On construit le gradient essentiel  $\nabla I_{\infty}^h$  de l'image **HR** et on extrait la **MSM** à l'aide des étapes 1 à 3 (figure 5.28). Ensuite, tous les calculs de l'étape 4 sont réalisés normalement jusqu'à l'obtention du vecteur  $i\vec{\nu} \cdot \mathcal{F}[\nabla I_{\infty}^h](\vec{\nu})/|\nu|$ . Avant d'appliquer la transformée de Fourier inverse, ce nombre est multiplié par le rapport  $c(|\nu|)$  des moyennes radiales des spectres. Finalement, la transformée de Fourier inverse permet de produire l'image fusionnée.

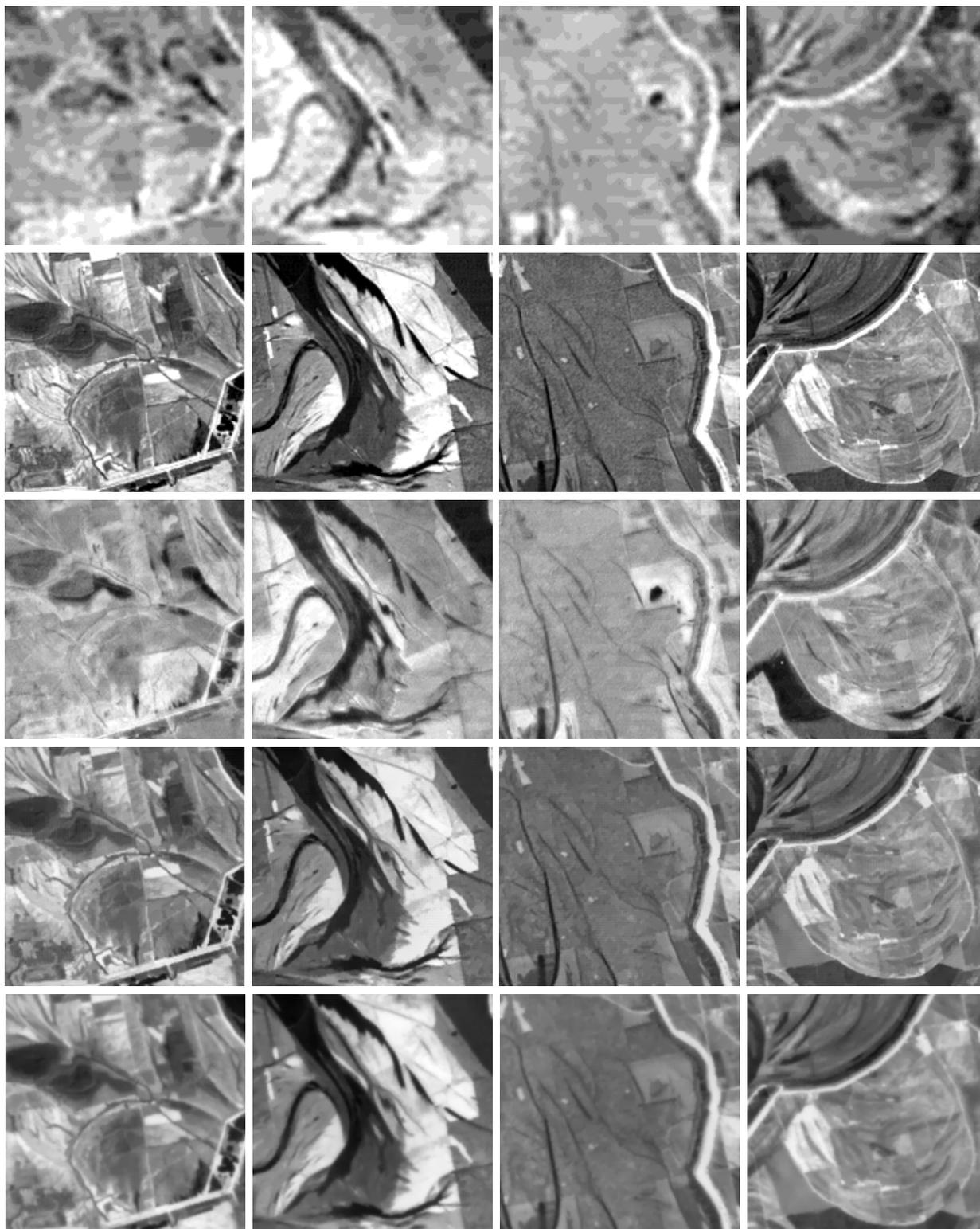


FIG. 5.29.: Détails des résultats d'analyse et de fusion des images **Landsat** de la figure 5.27. **De haut en bas** : image **BR**, image **HR**, image de moyenne des radiances (pixel par pixel), image reconstruite à l'aide de l'algorithme multifractal et image fusionnée par la méthode proposée.

Compte tenu du schéma de fusion, qui est pratiquement le même que celui adopté pour la reconstruction, le noyau de fusion que nous utilisons conserve tout naturellement les propriétés suivantes : déterminisme, linéarité et invariance par translation. L'isotropie découle de la forme de la fonction  $c$ , qui ne dépend que du rayon  $|\nu|$ . En revanche, le noyau n'est plus universel, il est construit à partir des spectres de puissance des données elles-mêmes. Le noyau ne conserve plus non plus le spectre de l'image dont on a extrait la **MSM**, en l'occurrence l'image **HR** ; le spectre de l'image fusionnée tend plutôt à ressembler à celui de l'image **BR**. On voit sur l'image de la figure 5.30 que l'image fusionnée combine les caractéristiques des deux images d'entrée : elle conserve la même structure géométrique, *i.e.* les mêmes contours, que l'image **HR**, et elle présente des régions homogènes, lisses, comme sur l'image **BR**, davantage que sur l'image **HR**. Les résultats sont clairement supérieurs à ceux obtenus à l'aide d'une méthode naïve telle que le moyennage des pixels par exemple (figure 5.29). Avec ce type d'images, qui sont des mesures relativement proches (les caractéristiques spectrales sont similaires), le noyau de fusion produit des résultats intéressants. En revanche, lorsque le noyau de fusion est construit à partir d'images acquises dans des bandes spectrales très différentes, le résultat de fusion n'est pas aussi satisfaisant.

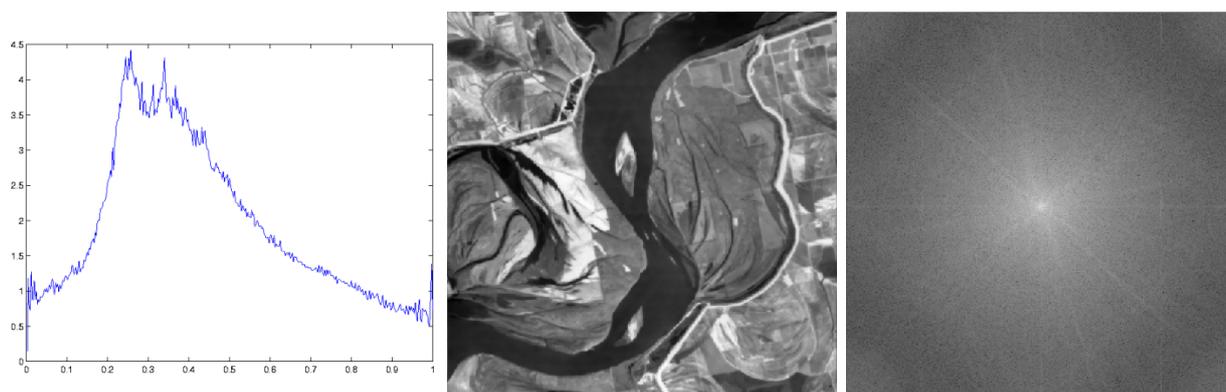


FIG. 5.30.: De gauche à droite : rapport  $c$  des fonctions radiales  $\Gamma(\vec{\nu})$ , image fusionnée et son spectre de puissance.

Ces premiers résultats nous amènent à penser que l'utilisation du modèle multifractal constitue une bonne approche pour des problématiques plus générales de fusion de données. En effet, nous retiendrons essentiellement qu'il permet d'extraire la structure géométrique de l'image **HR**. Celle-ci doit pouvoir être combinée d'une façon ou d'une autre avec de l'information sur l'image **BR** ; on pourrait penser utiliser un autre noyau que  $g$ , utiliser un autre gradient que  $\nabla I_\infty$ , combiner les structures géométriques. Une application très importante qui pourra être envisagée est la fusion d'images panchromatiques **HR** et d'images multispectrales **BR** [Wald et al., 1997].

## 5.7. Conclusion

Un des thèmes centraux de ce chapitre est l'invariance d'échelle : cette propriété est essentielle à la compréhension des données météorologiques et à la détermination d'un outil pour les analyser. Elle

caractérise en effet à la fois les phénomènes visualisés dans les images et la structure des images elles-mêmes. L'invariance d'échelle exhibée par les images **IR** explique notamment les faibles résultats obtenus à l'aide des méthodes de segmentation classiques (*cf.* chapitres 3 et 4). Elle nécessite d'introduire des méthodes d'analyse multiéchelle, qui prennent en compte simultanément toutes les échelles, de manière à reproduire les propriétés des systèmes analysés. Après un bref rappel sur l'outil ondelette et sur le formalisme multifractal, nous présentons un modèle original d'analyse multifractale.

L'idée de l'approche proposée, issue du formalisme multifractal, est que chaque point de l'image peut être classifié selon la nature de la transition que le signal subit, *i.e.* selon la régularité locale du signal. Son originalité réside notamment dans le fait que l'on peut reconstruire l'image à partir des points les plus singuliers. Le modèle présente ainsi tous les avantages du formalisme multifractal : il offre une interprétation à la fois en terme statistique et en terme géométrique aux différentes structures qu'il permet d'extraire. En outre, il exhibe un ensemble particulier, la **MSM**, dont la connaissance suffit à prédire la distribution de la luminance dans l'image. Cet ensemble semble essentiellement constitué des contours des objets d'intérêt, considérés à différentes échelles : il s'apparente aux contours multiéchelles. La description offerte par le modèle permet finalement une description des textures (les plus régulières) aux contours (les plus singuliers), ce que nous recherchons idéalement avec une méthode de segmentation. La **MSM** apparaît à cet effet comme un ensemble très significatif. Nous pouvons tout naturellement trouver de nombreuses applications à cette approche, qui ne se limitent pas à l'étude des seules images vérifiant le formalisme multifractal. En fait, l'approche multifractale peut être adoptée pour décrire et étudier n'importe quel type d'images, sans faire d'hypothèses *a priori* sur la nature de ces images : c'est un outil d'analyse très performant, qui permet d'appréhender la structure d'images non (multi)fractales notamment.

Dans le contexte d'analyse de données météorologiques, ce modèle s'avère particulièrement adapté, car, en un sens, ses propriétés reproduisent celles des objets analysés. Cependant, si l'on souhaite relier la description ainsi obtenue à l'interprétation des phénomènes sous-jacents, la tâche paraît ardue : il semble difficile de pouvoir établir un lien quantitatif entre la dynamique de ces phénomènes, la statistique du modèle et les différentes structures mises en évidence. Cela implique une information de nature *géométrique* dans une description *statistique*, tout en prenant en compte des connaissances physiques. L'autre intérêt majeur de la méthode que nous avons présentée est justement, comme est dérivée de concepts thermodynamiques, d'offrir une interprétation physique aux différentes structures extraites pour l'interprétation des phénomènes sous-jacents : c'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

---

## 6. Le formalisme multifractal : du modèle de turbulence au modèle d'image

Dans ce chapitre, nous présentons succinctement les outils classiques issus de la théorie de la turbulence, qui permettent de traiter les problèmes d'analyse de flots caractérisés par une structure complexe et chaotique. Nous esquissons les principaux résultats des différentes descriptions statistiques de la turbulence avec pour objectif de les relier au modèle d'analyse d'image présenté dans le chapitre précédent. En particulier, nous nous intéressons au formalisme multifractal développé pour l'étude des systèmes turbulents, et à son extension à l'analyse d'images naturelles. Plus précisément, nous montrons que la description hiérarchique des images est liée à une modélisation des transitions du signal par des processus log-Poisson invariants d'échelle, initialement utilisés pour analyser l'évolution des accroissements de la vitesse dans des flots turbulents. Diverses considérations en terme physique et thermodynamique nous permettent ainsi de donner une signification particulière aux structures mises en évidence dans les images météorologiques à l'aide de ce modèle.

### 6.1. La physique du formalisme multifractal : la turbulence

#### 6.1.1. Pourquoi s'intéresser à la turbulence ?

Nous avons deux raisons essentielles de nous intéresser aux phénomènes turbulents et à leur modélisation :

- **la nature et les propriétés des données** : en menant diverses études avec les outils classiques d'analyse d'images (chapitres 3 et 4), nous avons été confrontés à des limitations dues à la structure particulièrement complexe des images **Meteosat IR**. L'origine de cette complexité réside dans la nature même des mesures **IR** effectuées par le satellite **Meteosat** : les images acquises dans ce canal traduisent les propriétés thermodynamiques (la température) des couches supérieures de l'atmosphère, qui est un flot turbulent. Les images **IR** mettent ainsi en évidence des phénomènes complexes liés au caractère chaotique de l'atmosphère. Il apparaît alors naturel de s'intéresser aux mécanismes plus généralement mis en jeu dans l'évolution d'un flot turbulent.
  - **l'origine du formalisme multifractal** : de fait, le formalisme multifractal a été introduit pour l'analyse des données turbulentes [Parisi et Frisch, 1985]. Il a initialement été appliqué à de nombreux domaines de la géophysique (météorologie, climatologie, télédétection,...) et
-

est adapté à l'analyse des grandeurs physiques scalaires intensives présentant des fluctuations importantes. L'outil que nous utilisons est donc un prolongement des méthodes d'analyse de la turbulence.

Concernant les propriétés que nous avons mises en évidence sur les images **IR**, la propriété d'invariance d'échelle (*cf.* chapitre 5), par exemple, est caractéristique des flots turbulents<sup>1</sup>. Dans de tels systèmes, toutes les échelles sont représentées sans distinction d'aucune d'entre elles, on ne peut pas isoler, identifier des échelles jouant un rôle spécifique. Il n'existe pas d'échelle privilégiée, mais plutôt une relation permettant de passer d'une échelle à une autre. Il paraît alors normal que nous retrouvions cette propriété dans les images.

### 6.1.2. Objectifs

La compréhension du phénomène de turbulence dans les fluides a donné lieu à de nombreuses études [Lesieur, 1998]. Le problème de la modélisation et de la description de la turbulence est vaste et mélange des approches allant de la mécanique des fluides appliquée à des travaux phénoménologiques ou des développements mathématiques complexes. Nous présentons dans la suite de ce chapitre les différentes approches qui se proposent d'analyser la structure complexe des données et signaux turbulents. Parmi celles-ci, le formalisme multifractal constitue l'équivalent d'une thermodynamique des signaux turbulents dans le sens où il rend compte des propriétés d'invariance d'échelle de ces signaux au travers de quantités jouant le rôle de potentiels thermodynamiques (exposants des fonctions de structure, spectre des singularités).

L'intérêt majeur des modèles de turbulence est de prédire son comportement statistique en prenant en compte l'existence de structures organisées. Dans ce contexte, notre démarche est d'envergure restreinte, et se limite à relier l'approche multifractale, présentée dans le chapitre précédent, avec une description de la turbulence<sup>2</sup>. Notre objectif principal est de comprendre les relations que la description multifractale de la turbulence entretient (ou pas) avec l'existence de structures géométriquement et dynamiquement organisées dans les images de flot turbulent.

## 6.2. Notions de dynamique des fluides et turbulence

La turbulence reste un sujet d'intérêt majeur ; sa difficulté théorique vient du fait que c'est un problème de physique non linéaire où un grand nombre de degrés de liberté rentre en jeu. Alors que l'équation de Navier-Stokes qui régit les écoulements turbulents est connue depuis plus d'un siècle, il n'existe aucun résultat exact décrivant les statistiques des écoulements turbulents.

---

<sup>1</sup>Notons cependant que les approches actuelles tendent à s'affranchir de cette hypothèse [Chainais et al., 2003].

<sup>2</sup>On notera également que nous allons à l'inverse de la construction et du développement chronologique, puisque nous présentons seulement maintenant les fondements du formalisme multifractal.

### 6.2.1. Équations de Navier-Stokes

Afin de décrire l'écoulement d'un fluide, on utilise généralement une description eulérienne dépendant de plusieurs inconnues régissant l'évolution des structures et fluctuant dans l'espace et le temps : trois champs scalaires, la température  $T(\vec{x}, t)$ , la pression  $p(\vec{x}, t)$  et la densité de masse volumique  $\rho(\vec{x}, t)$ , ainsi qu'un champ vectoriel, la vitesse  $\mathbf{v}(\vec{x}, t)$ . Ces grandeurs hydrodynamiques sont gouvernées par des équations d'état et de conservation : équation d'état du fluide, équations de conservation de la matière et de la quantité de mouvement, équation de bilan thermodynamique [Pedlosky, 1997] [Bougeault et Sadourny, 2001]. L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient sous certaines hypothèses communément admises en turbulence, l'équation de Navier-Stokes :

$$D_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{F} - \nabla p) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (6.1)$$

où  $\nu$  représente ici la viscosité du fluide et  $\mathbf{F}$  désigne les forces extérieures.

Cette équation de base peut être complétée à l'aide de l'équation de continuité  $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ . Dans la plupart des cas, on fait l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, pour lequel la densité  $\rho$  est constante en espace et en temps ( $\rho = 1$  par convention). L'équation de continuité se ramène alors à :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Le problème de la turbulence semble mathématiquement clairement posé puisque ces équations décrivent de manière déterministe la mécanique des fluides. Malheureusement, les équations de Navier-Stokes donnent lieu à des comportements très complexes qui sont impossibles à calculer et prédire numériquement.

### 6.2.2. Nombre de Reynolds et échelles de l'écoulement

La caractéristique essentielle de l'équation (6.1) réside dans le terme d'advection  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  qui lui confère sa forme non-linéaire. Le mécanisme fondamental qui gouverne l'écoulement d'un fluide résulte d'une compétition entre les effets de ce terme et les effets du terme de dissipation  $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ . Le premier terme crée en effet un transfert d'énergie d'une échelle vers une autre plus petite tandis que le second mesure l'énergie dissipée. Afin de quantifier cette concurrence, on introduit le nombre adimensionnel suivant, appelé *nombre de Reynolds* :

$$\mathcal{R}e = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|}. \quad (6.2)$$

Notons qu'une lecture de l'équation de Navier-Stokes peut se faire en terme d'échelles d'espace. En fixant une taille caractéristique  $L$  de l'écoulement et un ordre de grandeur  $U$  des variations de vitesse<sup>3</sup>, on peut opérer le changement de variable suivant :

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}/U, \quad x \rightarrow x = x/L \quad t \rightarrow t = tU/L$$

<sup>3</sup> $U$  est essentiellement la vitesse moyenne du fluide, et  $L$ , la longueur sur laquelle la vitesse passe de 0 à  $U$ .

de sorte que l'équation (6.1) prend la forme adimensionnelle suivante :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathcal{R}e} \nabla^2 \mathbf{v}$$

où les dérivées sont prises par rapport aux nouvelles coordonnées. Le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}e$  est ici évalué par :

$$\mathcal{R}e = \frac{UL}{\nu} \quad (6.3)$$

et est bien un nombre sans dimension décrivant le comportement des solutions. Ce nombre pilote en grande partie le comportement qualitatif de l'écoulement.

### 6.2.3. Turbulence

La turbulence se développe en plusieurs étapes. À bas nombre de Reynolds, il existe des mouvements certes dépendants du temps mais relativement réguliers. La complexité de l'écoulement augmente lorsque le nombre de Reynolds croît, *i.e.* lorsque le terme non-linéaire  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  de l'équation (6.1) est d'importance croissante relativement au terme de dissipation visqueuse  $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ . Ainsi, à plus grand  $\mathcal{R}e$ , les mouvements de fluide sont beaucoup plus irréguliers.

Nombre de Reynolds	Nature du régime
$< 10^3$	laminaire
de $10^3$ à $10^5$	turbulence de transition
$> 10^5 - 10^6$	turbulence développée

TAB. 6.1.: Étapes (approximatives) de la turbulence en fonction du nombre de Reynolds.

On distingue généralement trois états qui correspondent aux différents écoulements observés (*cf.* table 6.1) :

- (i) les *écoulements laminaires* correspondent à la situation (aux nombres de Reynolds les plus bas) où les champs hydrodynamiques sont des fonctions périodiques du temps ; l'écoulement conserve une structure simple, organisée, stable ;
- (ii) la *turbulence molle* est associée aux écoulements de transition ; on observe une succession d'instabilités de plus en plus nombreuses jusqu'à l'apparition d'un chaos spatio-temporel<sup>4</sup> autour d'un nombre de Reynolds critique ;
- (iii) la *turbulence complètement développée* (**TCD**) aux grands nombres de Reynolds.

Cette dernière situation correspond au cas le plus complexe, pour lequel l'obtention d'une solution générale aux équations de la mécanique des fluides devient impossible :

**Définition 6.1** *La turbulence complètement développée est l'état ultime atteint par la turbulence : les mouvements des différents éléments du fluide sont erratiques, presque aléatoires, et il devient impossible de prévoir à long terme l'évolution de l'écoulement.*

<sup>4</sup>La notion de chaos est associée à la sensibilité extrême aux conditions initiales.

La difficulté majeure avec la résolution des équations de Navier-Stokes provient en fait du grand nombre de degrés de liberté mis en jeu dès que  $Re \gg 10^3$ . Dans l'atmosphère, les météorologues sont confrontés à  $L \approx 100 \text{ km}$ ,  $U \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\nu \approx 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ , soit  $Re \gtrsim 10^{11}$  : c'est un exemple typique de **TCD**.

### 6.3. Description et formalisation statistiques de la turbulence

La **TCD** ne peut presque toujours être étudiée qu'à travers les propriétés statistiques des écoulements. Une description en termes de variables, ou champs, aléatoires est couramment utilisée pour analyser la turbulence. Nous esquissons dans cette section les principaux résultats des différentes descriptions statistiques de la turbulence et nous montrons comment les propriétés mises en évidence dans le phénomène de turbulence ont donné naissance à un cadre formel dont dérive l'approche multifractale. L'ouvrage [Frisch, 1995] fournit une discussion complète et une revue détaillée de la théorie de la modélisation de la turbulence.

#### 6.3.1. La démarche statistique

Les équations de Navier-Stokes étant impossibles à résoudre à grand  $Re$ , on abandonne toute idée de description détaillée au profit d'une approche statistique. On est en effet en présence de phénomènes où ce que l'on peut mesurer adopte un caractère aléatoire. Cette nature stochastique est renforcée par les mesures de vitesse, de pression ou autres quantités scalaires de l'écoulement qui sont très fluctuantes d'un point à un autre dans l'espace ainsi qu'au cours du temps. L'intérêt d'une démarche statistique est de permettre l'obtention de descriptions approchées sans recourir à des simulations numériques. Cependant, la question initiale est de savoir quelles sont les propriétés statistiques de l'écoulement et, donc, quelle classe de modélisation adopter.

Les études en **TCD** consistent, pour la plupart, à caractériser les fluctuations de vitesse de l'écoulement, à la fois dans le temps en un point fixe, et dans l'espace à un moment donné. Une quantité importante pour ces études est la différence de vitesse entre deux points voisins ; les écoulements de turbulence sont en effet le plus souvent analysés à partir des accroissements (longitudinaux) des signaux de vitesse<sup>5</sup> :

$$\delta \mathbf{v}_r(\vec{x}) = v_x(\vec{x} + r) - v_x(\vec{x}), \quad (6.4)$$

où  $v_x$  désigne la composante selon  $x$  de  $\mathbf{v}$ . Ces accroissements présentent les caractéristiques suivantes :

- pour un écoulement laminaire, le profil de vitesse est linéaire :  $\delta \mathbf{v}_r$  est constante au cours du temps et varie linéairement en fonction de  $r$  ; la fonction de distribution de  $\delta \mathbf{v}_r$  est une fonction *delta* à une valeur ;
- pour un écoulement en **TCD**, la fonction de distribution des  $\delta \mathbf{v}_r$  est une fonction plus large centrée autour de 0.

---

<sup>5</sup>Notons qu'on ne dispose généralement que d'enregistrements temporels effectués en un point d'espace et non d'enregistrements spatiaux. L'hypothèse d'**ergodicité** permet de passer des uns aux autres.

Ainsi, dans le premier cas, seule la valeur moyenne compte, tandis que dans le second, ce sont les statistiques qui sont intéressantes. Dans le cas turbulent, les questions qui se posent sont les suivantes : quelle est la forme de la fonction de distribution ? Comment varie-t-elle en fonction de la distance  $r$  ? On cherche généralement à caractériser la distribution de probabilité par ses moments  $E[|\delta\mathbf{v}_r|^p]$ , qui sont les valeurs moyennes des puissances des accroissements de vitesse.

### 6.3.2. Le modèle auto-similaire

La théorie de [Kolmogorov, 1941] décrit les premières propriétés statistiques d'un champ de vitesse en **TCD** en proposant une solution stationnaire d'équilibre statistique. Elle suppose que, pour une large gamme d'échelles, appelée **zone inertielle**, entre une échelle caractéristique dissipative  $\eta$  et la grandeur caractéristique  $L$  [Frisch, 1995] :

1. les  $\delta\mathbf{v}_r(\vec{x})$  vérifient localement les symétries que les équations de Navier-Stokes (6.1) acceptent : homogénéité, isotropie, stationnarité et invariance d'échelle,
2. un état d'équilibre statistique est atteint tel que le taux moyen  $\bar{\epsilon} = -E[\frac{d}{dt}\frac{|v|^2}{2}]$  de dissipation d'énergie par unité de masse reste constant et non nul ( $E$  désigne l'espérance.),
3. dans cet état, les accroissements à petite échelle sont exactement **auto-similaires** avec un certain exposant  $\zeta$  :

$$\delta\mathbf{v}_{\lambda r}(\vec{x}) \sim \lambda^\zeta \delta\mathbf{v}_r(\vec{x}).$$

De ces hypothèses, on peut déduire la forme complète des statistiques des accroissements qui sont stationnaires et, donc, suffisent à décrire le champ des vitesses quand  $Re \rightarrow \infty$ . Les résultats établis impliquent que les **fonctions de structure**<sup>6</sup> prennent la forme :

$$\forall \eta \lesssim r \lesssim L, \quad E[|\delta\mathbf{v}_r|^3] = -\frac{4}{5} \bar{\epsilon} r \quad (\text{loi des } 4/5^e) \quad (6.5)$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \eta \lesssim r \lesssim L, \quad E[|\delta\mathbf{v}_r|^p] \propto \bar{\epsilon}^{p/3} r^{p/3}. \quad (6.6)$$

La propriété sous-jacente derrière ces expressions est en fait une **auto-similarité exacte et globale** des accroissements, avec l'exposant  $\zeta = 1/3$ , qui contrôle dimensionnellement les moments à tous ordres [Frisch, 1995] : cela signifie que les distributions des accroissements  $\delta\mathbf{v}_r$  de la vitesse doivent avoir la même forme à toutes les échelles  $r$ .

### 6.3.3. Modèles d'intermittence

Des mesures expérimentales et numériques de plus en plus fines ont remis le modèle de Kolmogorov en question. Il est connu que ce résultat est mis en défaut par le phénomène d'intermittence :

**Définition 6.2** *La notion d'intermittence est liée à la succession, spatiale ou temporelle, d'épisodes calmes et d'épisodes très actifs, elle se caractérise par des transitions soudaines d'un type d'activité à un autre : l'écoulement semble constitué d'une juxtaposition de régions calmes, laminaires et d'autres au contraire fortement irrégulières, chaotiques.*

---

<sup>6</sup>On désigne ainsi les moments des accroissements.

L'intermittence implique des fluctuations importantes des grandeurs mesurées, *e.g.* le champ de vitesse. En particulier, l'intermittence a comme conséquence que la relation (6.6) n'a plus cours dès qu'on s'intéresse aux moments d'ordre supérieur à 3. Elle se traduit en effet par :

- des distributions d'accroissements de vitesse non gaussiennes, avec de fortes fluctuations par rapport à la moyenne, ce caractère étant d'autant plus marqué qu'on se rapproche des petites échelles,
- des exposants inférieurs à ceux prédits dans [Kolmogorov, 1941] pour les fonctions de structure d'ordre 4 ou plus.

Les exposants des lois de puissance ne suivent plus la loi dimensionnelle simple en  $\zeta = 1/3$  de l'auto-similarité exacte ; les fonctions de structure s'écrivent de façon générale :

$$E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \propto \bar{\epsilon}^{p/3} r^{\zeta(p)} \quad (6.7)$$

avec  $\zeta(p) \neq \frac{p}{3}$ . Cette déviation est attribuée à la présence de structures cohérentes (événements rares) et donc au caractère intermittent de la turbulence<sup>7</sup>.

Afin de rendre compte de ces propriétés d'intermittence, divers modèles ont été proposés pour estimer les exposants  $\zeta(p)$ . Ils sont généralement construits en modifiant les hypothèses statistiques de Kolmogorov. C'est par exemple le cas du modèle de Kolmogorov-Obukhov [Kolmogorov, 1962] [Obukhov, 1962] qui propose une hypothèse dite de *similarité améliorée* reliant les fluctuations des accroissements à celles de la dissipation locale moyenne  $\epsilon_r = \frac{1}{r^2} \iint_{|x|<r} \epsilon(\vec{x}, t) d\vec{x}$  :

$$E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \propto E[\epsilon_r^{p/3}] r^{p/3} \quad (6.8)$$

et postule par ailleurs une distribution log-normale de  $\epsilon_r$ . On trouvera un exposé complet des différents modèles dans l'ouvrage [Frisch, 1995].

Deux approches essentielles sont cependant à retenir pour la suite : le cadre multifractal qui permet d'interpréter les déviations intermittentes sous hypothèse que l'on conserve des lois de puissance [Parisi et Frisch, 1985] ; le cadre des cascades qui permet également d'interpréter statistiquement l'intermittence, mais en abandonnant l'invariance d'échelle au profit d'une hypothèse de lois infiniment divisibles [Castaing, 1996] [Chainais et al., 2001].

#### 6.3.4. Le modèle multifractal

L'hypothèse multifractale en turbulence [Parisi et Frisch, 1985] consiste à remplacer l'hypothèse d'auto-similarité globale proposé dans [Kolmogorov, 1941] par une hypothèses d'**auto-similarité statistique locale**. On suppose ainsi qu'en chaque point  $\vec{x}$ , on a un exposant  $h(\vec{x})$  tel que :

$$\delta \mathbf{v}_{\lambda r}(\vec{x}) \sim \lambda^{h(\vec{x})} \delta \mathbf{v}_r(\vec{x})$$

<sup>7</sup>Dans notre contexte d'étude, c'est essentiellement la présence de singularités hölderiennes dans le signal qui contredit les hypothèses de [Kolmogorov, 1941]. Plus généralement, d'autres types de singularités doivent être prises en compte.

dans la limite des petites échelles. La dimension fractale  $D(h)$  est définie comme la dimension de l'ensemble de points  $\{\vec{x} \mid h(\vec{x}) = h\}$  et  $h \rightarrow D(h)$  désigne le spectre multifractal. Cette hypothèse porte en fait sur les exposants de Hölder locaux.

Le formalisme multifractal [Parisi et Frisch, 1985] permet d'établir une connexion inversible entre le spectre multifractal et les exposants de description statistique des accroissements. Comme les exposants  $\zeta(p)$  n'ont aucune raison *a priori* de présenter un comportement linéaire de la forme  $p\zeta$ , les descriptions des lois d'échelle dans les données ne peuvent se faire avec un unique exposant mais en requiert toute une collection. Mesurer les exposants  $\zeta(p)$  de l'équation (6.7) constitue une possibilité *via* la transformée de Legendre, d'estimer le spectre multifractal [Parisi et Frisch, 1985] :

$$\zeta(p) = \min_h \{ph + d - D(h)\} \quad D(h) = \min_p \{ph + d - \zeta(p)\} \quad (6.9)$$

où l'on fait intervenir la dimension  $d$  de l'espace. L'utilisation d'une transformée de Legendre évoque, en outre, une interprétation thermodynamique du spectre multifractal où  $h$ ,  $q$ ,  $\zeta(q)$  et  $D(h)$  représentent respectivement comme une énergie interne, l'inverse d'une température, une énergie libre et une entropie [Arnéodo et al., 1995].

### 6.3.5. Le modèle de cascades

Notons tout d'abord que la description phénoménologique de la turbulence sous forme de cascades n'est pas nouvelle. On décrit généralement les flots turbulents par des cascades d'énergie, dites **cascades de Richardson**, des gros *tourbillons* vers les plus petits [Frisch, 1995] :

**Définition 6.3** *L'énergie est injectée dans l'écoulement à l'échelle  $L$ , et elle est transférée de manière aléatoire, à travers la zone inertielle, d'échelle en échelle sous l'effet d'une cascade d'énergie, jusqu'à l'échelle  $\eta$  à laquelle elle est finalement dissipée.*

Cette description est en fait présente dans toutes les modélisations de la turbulence.

Le concept statistique de *cascades infiniment divisibles* [Castaing et al., 1990] a été introduit pour rendre compte, en un sens, des proportions gouvernant la redistribution de l'énergie à travers les échelles. La présence de cascades traduit la notion d'absence d'échelle de temps privilégiée ; en fait, seules les lois d'échelles relatives restent nécessaires : les processus à une échelle donnée de la cascade sont déterminés par les processus aux échelles précédentes. Une distribution de probabilité permet ainsi de relier les distributions des accroissements entre deux échelles, ce que l'on peut essayer d'exprimer *abusivement* par l'existence d'un processus infiniment divisible  $\alpha_{rL}$  tel que :

$$\delta v_r \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha_{rL} \delta v_L$$

où  $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$  représente l'égalité en loi [Renyi, 1992] et  $L$  est la grande échelle de l'écoulement. L'infinie divisibilité impose que le processus  $\alpha_{rl}$  puisse être infiniment partagé, faisant apparaître une infinité d'états intermédiaires [Castaing, 1996] [Castaing, 1997] :

$$\alpha_{rl} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha_{rr'} \alpha_{r'l}, \quad r < r' < l. \quad (6.10)$$

Pour les fonctions de structure, l'équation (6.7) n'a plus cours et le comportement étudié prend la forme [Chainais et al., 2003] :

$$E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \approx \exp(\zeta(p) (n(r) - n(L))) E[|\delta \mathbf{v}_L|^p], \quad (6.11)$$

où la fonction  $n$  décrit la manière dont la cascade statistique se développe entre les échelles. Cela signifie en fait que les distributions des accroissements se déforment pour évoluer des échelles  $r$  à  $L$  selon un mécanisme qui consiste à réaliser  $n(r) - n(L)$  fois une transformation élémentaire [Abry et al., 2002].

Les cascades permettent notamment de généraliser l'interprétation de l'intermittence au cas non-invariant d'échelle ; le cas invariant d'échelle correspond à la situation où  $n$  prend la forme  $n(r) = \ln r$ . L'existence de lois de puissance résulte de l'hypothèse que la dissipation est rigoureusement sans effet pour toute une gamme d'échelle. Au contraire, lorsque  $n(r)$  dévie de  $\ln r$ , cela signifie que la dissipation peut, *a priori*, avoir lieu à toutes les échelles, y compris les grandes [Chainais et al., 2001] [Castaing, 1996].

### 6.3.6. Conclusion : les modélisations de la turbulence

Les différentes approches développées afin de modéliser la turbulence proposent des lois d'échelle pour décrire statistiquement les fonctions de structure. Ainsi :

- (i) Pour des processus globalement auto-similaires, les fonctions de structure sont décrites par :

$$\forall p, \quad E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \propto \exp(p \zeta \ln r), \quad (6.12)$$

où le seul paramètre  $\zeta$ , le paramètre d'auto-similarité, relié à la régularité globale du signal, suffit à décrire complètement l'évolution de tous les moments à travers les échelles ; dans la théorie de [Kolmogorov, 1941],  $\zeta = 1/3$ .

- (ii) Pour les *modèles multifractals*, on a recours à un ensemble d'exposants  $\zeta(p)$  plutôt qu'un seul  $\zeta$ . Afin de traduire cette dépendance non-linéaire, on écrit :

$$\forall p, \quad E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \propto \exp(\zeta(p) \ln r). \quad (6.13)$$

L'écart de  $\zeta(p)$  à  $p \zeta$  rend compte des fluctuations de la régularité locale des processus. La dépendance en échelle  $r$  est cependant figée en loi de puissance.

Dans ces deux cas, on retrouve l'hypothèse d'invariance d'échelle, puisque l'on a, pour les accroissements de vitesse, une relation de la forme :

$$\forall p, \quad E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \approx r^{\zeta(p)},$$

où la dépendance entre la fonction  $\zeta(p)$  et  $p$  est linéaire ou non, suivant le cas. Le cas auto-similaire correspond au cas monofractal, où un seul type de singularité est présent.

- (iii) Pour les *modèles de cascades infiniment divisibles*, on abandonne les comportements en lois de puissance des moments. La fonction  $\ln r$  est remplacée par une fonction  $n(r)$  dans l'équation (6.13) :

$$\forall p, \quad E[|\delta \mathbf{v}_r|^p] \propto \exp(\zeta(p) n(r)), \quad (6.14)$$

et  $n(r)$  n'est plus *a priori* fixée à la fonction  $\ln r$ . Ces modèles exploitent un degré de liberté supplémentaire : la contrainte d'un comportement exact en loi de puissance des moments est assouplie, au profit d'un comportement à variables séparables entre  $p$  (ordre du moment) et  $r$  (échelle d'analyse). Ils permettent de généraliser l'expression des moments obtenus dans le cas des processus multifractals.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à un modèle en cascades particulier, qui postule l'invariance d'échelle (il appartient donc à la famille (ii) des modèles multifractals) : le modèle log-Poisson associé à des processus multiplicatifs infiniment divisibles.

## 6.4. Le modèle log-Poisson et l'analyse multifractale d'images

Récemment, une nouvelle classe hiérarchique de comportement de lois d'échelle a été introduite et mise en évidence dans les images naturelles [Turiel et al., 1998]. Nous montrons, dans cette section, que ces propriétés se prêtent à une description à l'aide d'un modèle log-Poisson. Nous présentons tout d'abord le modèle de She-Lévêque permettant de décrire l'intermittence statistique en turbulence. Dans le cadre de l'analyse d'images, l'existence de cascades log-Poisson invariantes d'échelle pour décrire certaines transitions du signal conduit tout naturellement au modèle multifractal présenté dans le chapitre précédent [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b].

### 6.4.1. Le modèle de cascade log-Poisson en turbulence

Le modèle log-Poisson a remporté un vif succès car c'est le premier modèle statistique qui ait proposé une interprétation où des structures géométriques singulières jouent un rôle.

#### Les cascades log-Poisson invariantes d'échelle et les exposants de She-Lévêque

Rappelons qu'une distribution de Poisson de paramètre  $\lambda$  est une loi discrète définie par les probabilités  $P_\lambda(k)$  telles que [Renyi, 1992] :

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Le modèle de log-Poisson en turbulence est un modèle en cascade pour la dissipation locale<sup>8</sup> [Dubrulle, 1994] [Frisch, 1995] :

**Définition 6.4** *Sous l'hypothèse de cascades log-Poisson, il existe un processus multiplicatif  $\alpha_{rl} = e^{-\gamma\Delta} \beta^k$  qui relie les  $\epsilon_r$  à différentes échelles  $r$  et  $l > r$  :*

$$\epsilon_l \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha_{rl} \epsilon_r \tag{6.15}$$

---

<sup>8</sup>Notons que généralement les différentes constructions et résultats portent sur la dissipation locale  $\epsilon_r$ , mais l'hypothèse de similarité améliorée permet de retrouver les relations pour les accroissements de vitesse  $\delta v_r$ . En effet, dans le cas invariant d'échelle, l'équation (6.8) implique que si les moments de  $\epsilon_r$  se comportent en  $r^{\zeta(p)}$ , alors ceux de  $\delta v_r$  se comportent en  $r^{\zeta(p/3)+p/3}$ .

et qui dépend par ailleurs des échelles, en ce sens que  $\Delta = n(l) - n(r)$  et l'entier  $k$  obéit à une loi de Poisson de paramètre  $\lambda\Delta$ .

Sous cette hypothèse, la connaissance du processus  $\alpha_{rL}$  et de la distribution de probabilité de  $\epsilon_L$  à l'échelle la plus grande  $L$  permet d'obtenir la distribution de probabilité de  $\epsilon_r$  à toute autre échelle  $r < L$ . La distribution<sup>9</sup> des processus  $\alpha_{rl}$  est donnée, pour  $r < l$ , par [Dubrulle, 1994] :

$$\rho_{rl}(\ln \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta} \delta_{\ln \alpha - k \ln \beta + \gamma\Delta}, \quad (6.16)$$

où ici  $\delta$  tient lieu de la fonction indicatrice, et les  $\alpha_{rl}$  sont construits suivant la relation (6.10). Dans le cas invariant d'échelle,  $n(r) = \ln r$  et la cascade est multifractale avec  $\Delta = \ln(l/r)$ . À partir des paramètres du modèle, qui sont  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $\lambda$ , on peut alors retrouver les exposants  $\zeta(q)$  de la relation (6.13) [She et Levêque, 1994] :

$$\zeta(p) = \gamma p + \lambda(1 - \beta^p). \quad (6.17)$$

On reconnaît dans cette définition l'expression de la fonction génératrice de la version dilatée et translatée  $-\gamma + k \ln \beta$  de la variable  $k$  suivant une loi de Poisson [She et Waymire, 1995]. Sur la figure (6.1), nous avons représenté les fonctions de modélisation des exposants pour les accroissements de la vitesse  $\delta v_r$  de différents modèles, dont le modèle log-Poisson. Les paramètres de log-Poisson ici utilisés sont les valeurs typiques proposées dans [She et Levêque, 1994] pour les accroissements de vitesse :  $\gamma = 1/9$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\beta = (2/3)^{1/3}$ . Notons en particulier qu'il est difficile de discriminer expérimentalement ce modèle des modèles log-normaux également couramment utilisés en analyse de la turbulence.

### Interprétation des cascades log-Poisson invariantes d'échelle

Une interprétation d'une cascade de type log-Poisson consiste à imaginer qu'un nombre aléatoire de structures transfèrent de l'énergie des plus grandes vers les plus petites échelles. Seule une fraction  $\beta < 1$  de l'énergie est transmise. Le nombre  $k$  de structures intervenant dans le transfert d'énergie entre une grande échelle, notée  $l$ , et une plus petite, notée  $r$ , est distribué selon une loi de Poisson de paramètre proportionnel à  $\Delta$ . L'invariance d'échelle ( $n(r) = \ln r$ ) implique que les structures dissipatives sont distribuées avec la même densité à grande et à petite échelle, de sorte que l'on ne peut pas distinguer une zone inertielle d'une zone dissipative.

L'originalité du modèle de [She et Levêque, 1994] réside dans le fait qu'il propose une interprétation de la cascade log-Poisson où interviennent des structures cohérentes singulières et leurs caractéristiques géométriques.

#### 6.4.2. Les cascades log-Poisson dans le modèle d'image

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les images naturelles possèdent un comportement d'échelle en loi de puissance qui est caractéristique de leur propriété d'invariance d'échelle. Cette description peut être reliée au modèle log-Poisson.

<sup>9</sup>Cette distribution est appelée **propagateur de la cascade** en analyse de la turbulence [Frisch, 1995].

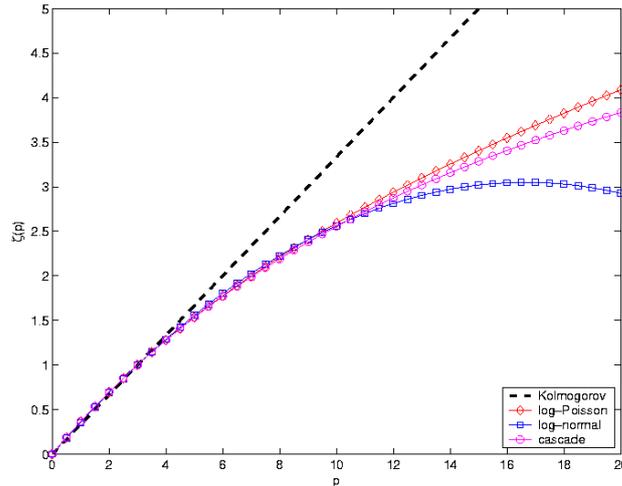


FIG. 6.1.: Comparaison entre les fonctions de modélisation des exposants  $\zeta(p)$  pour le modèle auto-similaire de [Kolmogorov, 1941], un modèle log-normal [Kolmogorov, 1962], le modèle log-Poisson de [She et Levêque, 1994] et un modèle de cascades multiplicatives [Castaing, 1996]. En dessous de  $p = 10$ , on ne peut distinguer les différentes courbes.

### Description des transitions du signal à l'aide de processus multiplicatifs

Similairement aux approches présentées ci-dessus qui donnent une description de la nature singulière du champ de dissipation locale, on peut chercher à décrire les transitions d'une image  $I$  en un point  $\vec{x}$  et à l'échelle  $r$  [Davis et al., 1994]. Il apparaît alors naturel de définir une variable  $\epsilon_r(\vec{x})$  faisant intervenir les variations  $|\nabla I|$  de l'image :

$$\epsilon_r(\vec{x}) = \frac{1}{r^2} \iint_{|x| < r} d\vec{y} |\nabla I|(\vec{y}). \quad (6.18)$$

La variable  $\epsilon_r(\vec{x})$  renseigne sur les variations locales du contraste. Intuitivement, cette quantité fournit de l'information sur la structure locale de l'image et quantifie la déviation de la distribution des transitions du signal par rapport à une distribution uniforme. Si les variations étaient localement constantes,  $\epsilon_r(\vec{x})$  serait indépendant de  $r$  ; au contraire, une dépendance en  $r$  traduit la présence de structures géométriques locales qui perturbe les transitions entre les échelles. On peut également considérer des variables marginales, qui sont définies comme les intégrales le long d'une direction donnée par un vecteur  $\mathbf{r}$  de longueur  $r$  :

$$\epsilon_{\mathbf{r}}(\vec{x}) = \frac{1}{r} \int_{|x| < r} ds |\partial_s I(\vec{x} + s \frac{\mathbf{r}}{r})|. \quad (6.19)$$

Cette définition correspond au calcul d'une moyenne à une échelle  $r$  des variations du contraste locale dans la direction  $\mathbf{r}$ .

Une question naturelle est alors de savoir comment évoluent ces variables à travers les échelles. La réponse est justement liée à l'existence de processus log-Poisson pour décrire cette évolution à travers les échelles : il peut être montré que ces quantités sont reliées par des processus multiplicatifs

log-Poisson invariants d'échelle [Turiel et al., 1998]. Ainsi, la variable  $\epsilon_r$  à l'échelle  $r$  se déduit de  $\epsilon_l$  à une plus grande échelle  $l$  par une relation équivalente à l'équation (6.15) :

$$\epsilon_r \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha_{rl} \epsilon_l, \quad (6.20)$$

où la collection de coefficients aléatoires  $\{\alpha_{rl}\}$  est indépendante de  $\epsilon_l$  et définit un processus log-Poisson vérifiant la propriété (6.10) d'infinie divisibilité. Ce résultat a été établi sur de grandes collections d'images naturelles dans [Turiel et al., 2000] et [Turiel et Parga, 2000a], où le comportement des variables uni-dimensionnelles  $\epsilon_r$  définies par (6.19) est notamment étudié pour  $r$  dans les directions horizontales et verticales. La relation linéaire existant entre les logarithmes des variables  $\epsilon_r$  à différentes échelles (qui découle directement de l'équation (6.20)) est également soulignée dans [Buccigrossi et Simoncelli, 1999] (pour les distributions marginales), mais les auteurs ne relèvent pas l'existence d'un processus multiplicatif pour décrire cette propriété.

Le facteur  $\alpha_{rl}$  permet de prendre en compte les transitions successives de la variable  $\epsilon_r$  des plus grandes échelles vers les plus petites. D'après la définition 6.4, il doit s'écrire sous la forme (sachant  $\Delta = \ln(l/r)$ ) :

$$\alpha_{rl} = \left[ \frac{r}{l} \right]^\gamma \beta^k$$

où  $k$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\propto \ln(l/r)$ . Si ce paramètre s'écrit  $\lambda \ln(l/r)$ , alors l'équation (6.16) fournit la distribution de probabilité  $\rho_{\alpha_{rl}}$  de  $\alpha_{rl}$  :

$$\rho_{\alpha_{rl}}(\ln \alpha) = \left[ \frac{r}{l} \right]^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[ \ln \frac{l}{r} \right]^k \delta_{\ln \alpha - k \ln \beta + \gamma \ln(l/r)} \quad (6.21)$$

Cette distribution ne dépend que du rapport  $l/r$  entre les deux échelles. Le facteur  $\lambda \ln(l/r)$  peut être vu comme le nombre de modulations entre les deux échelles  $r$  et  $l$  : il exprime le nombre de transitions singulières qui se produisent dans les variables  $\epsilon_r$  à ces échelles. Notons que jusqu'ici nous avons considéré les paramètres  $\Delta$ ,  $\gamma$  et  $\lambda$  comme étant indépendants, or, il peut être montré que l'un d'entre eux au moins est déterminé par les autres [Turiel et Parga, 2000a]. De fait, l'hypothèse d'invariance par translation des images naturelles et la relation (6.20) impliquent que  $E[\alpha_{rl}] = 1$ , d'où l'on déduit :

$$\lambda = \frac{\gamma}{\beta - 1} \quad (6.22)$$

et le modèle se résume à la connaissance des paramètres  $(\gamma, \beta)$ .

### Cascades log-Poisson, auto-similarité et auto-similarité étendue

L'existence d'un processus log-Poisson pour décrire les transitions du signal a une conséquence directe sur le comportement de ces variables à travers les échelles. L'équation (6.21) impose que les moments statistiques d'ordre  $p$  de  $\epsilon_r$  obéissent à une loi puissance d'exposant  $\tau_p$  (fonction arbitraire de  $p$ ) de la forme :

$$E[\epsilon_r^p] \propto r^{\tau_p} \quad (6.23)$$

et donc que les  $\epsilon_r$  soient auto-similaires. Cette relation implique à son tour que n'importe quel moment de la variable  $\epsilon_r$  puisse être exprimé en fonction d'un moment d'ordre  $q$ . En particulier, si l'on prend  $q = 2$ , on a une expression de la forme :

$$E[\epsilon_r^p] \propto (E[\epsilon_r^2])^{\rho(p,2)} \quad (6.24)$$

entre les moments à l'ordre  $p$  et le moment d'ordre 2. Cette propriété est désignée sous le terme d'*auto-similarité étendue* (**ESS** pour *Extended Self Similarity*), et permet d'atteindre un niveau supérieur de description de la structure des images. Notons que tout moment d'ordre  $q$  peut être utilisé à la place du moment d'ordre 2 (dès l'instant que  $\rho(p, 2) \neq 0$ ). En particulier, si la variable  $\epsilon_r$  exhibe la propriété (6.23), alors elle vérifie aussi la propriété (6.24) de l'**ESS**, et les exposants  $\rho(p, 2)$  de cette relation sont donnés par :

$$\rho(p, 2) = \frac{\tau_p}{\tau_2}. \quad (6.25)$$

La notion d'**ESS**, traduite par l'équation (6.24), est donc une propriété plus faible que la propriété d'auto-similarité, exprimée par la relation (6.23). En fait, l'**ESS** est une propriété équivalente à l'existence d'une cascade infiniment divisible invariante d'échelle pour décrire la variable  $\epsilon_r$  [Chainais et al., 2003], exprimée au travers de l'équation (6.11).

L'équation (6.21) de la distribution des processus multiplicatifs permet de calculer les exposants  $\rho(p, 2)$  de la relation (6.24). Les  $\rho(p, 2)$  s'expriment en effet par :

$$\rho(p, 2) = \frac{p}{1 - \beta} - \frac{1 - \beta^p}{(1 - \beta)^2} \quad (6.26)$$

et ne dépendent que du paramètre  $\beta$ , qui sert de facteur de modulation. En utilisant l'expression (6.25) reliant les exposants  $\rho(p, 2)$  et  $\tau_p$ , on voit que ces derniers peuvent à leur tour être calculés à partir des deux seuls paramètres  $\beta$  et  $\tau_2$ . En fait, les exposants  $\tau_p$  peuvent tout naturellement s'identifier aux exposants  $\zeta(p)$  introduits dans le contexte de l'analyse de la dissipation locale. Le modèle de She-Lévêque [She et Levêque, 1994] fournit l'expression de ces exposants, à travers l'équation (6.17), d'où l'on déduit :

$$\tau_p = \gamma p + (1 - \beta^p)\lambda = \gamma \left[ p - \frac{1 - \beta^p}{1 - \beta} \right], \quad (6.27)$$

car les paramètres  $\gamma$  et  $\lambda$  sont liés par l'équation (6.22). Finalement, lorsque l'on introduit l'expression (6.26) des exposants  $\rho(p, 2)$ , il vient :

$$\tau_p = \gamma(1 - \beta)\rho(p, 2). \quad (6.28)$$

Nous pouvons finalement relier formellement la modélisation par des processus log-Poisson et l'auto-similarité étendue dans le cadre de l'analyse d'images. L'équivalence évoquée plus haut peut, en fait, être affinée : celle-ci est établie, lorsque les exposants  $\rho(p, 2)$ , définis par l'équation (6.24), vérifient la relation (6.26), entre la propriété d'**ESS** et l'existence d'une cascade multiplicative de type log-Poisson [Turiel et al., 1998]. En particulier, c'est la relation (6.26) qui suffit à assurer, en pratique, que les transitions  $\epsilon_r$  peuvent être modélisées, à travers les échelles, par des processus log-Poisson.

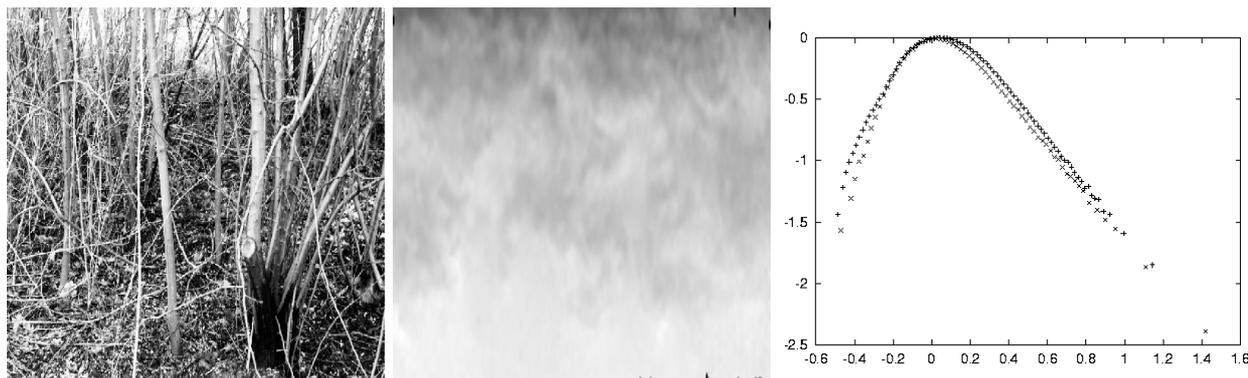


FIG. 6.2.: Résultats de l'estimation du spectre de singularités (*via* la co-dimension  $D(h) - d$ ) pour un ensemble de 6 images de la base de van Hateren [Van Hateren et Van der Schaaf, 1998] et 25 images de vitesses dans un écoulement à  $Re$  élevé. **À gauche** : une image de la base de van Hateren. **Au milieu** : une image de module de champs de vitesses turbulentes. **À droite** : spectres de singularités expérimentaux selon [Turiel et Pérez-Vicente, 2003c] pour l'ensemble considéré (van Hateren : +, vitesse : ×). *Cette figure ainsi que les figures 6.3 et 6.4 sont reproduites avec l'aimable autorisation de A. Turiel.*

### Multifractalité et modélisation de la distribution des exposants

On sait que le modèle de cascades log-Poisson invariantes d'échelle fournit un cadre multifractal à l'analyse de la variable  $\epsilon_r$ . Plus précisément, le comportement en loi de puissance des moments  $E[\epsilon_r^p]$  se traduit par un comportement en loi d'échelle de la variable  $\epsilon_r$  elle-même :

$$\epsilon_r(\vec{x}) \sim r^{h(\vec{x})},$$

avec un certain exposant de singularité  $h(\vec{x})$  qui dépend du point  $\vec{x}$  de l'image. Cette caractérisation locale du comportement de la variable  $\epsilon_r$  autorise une décomposition hiérarchique de l'image en composantes fractales  $F_h$  décrites par le spectre de singularités  $D(h)$ . Le formalisme multifractal [Parisi et Frisch, 1985], déjà évoqué dans la section 6.3.4, permet alors d'établir une connexion entre l'analyse locale des singularités de  $\epsilon_r$  et l'analyse statistique des moments  $E[\epsilon_r^p]$ , *i.e.* entre le spectre multifractal  $D(h)$  et les exposants  $\tau_p$ . D'après l'équation (6.9), la dimension fractale  $D(h)$  de chacun des ensembles fractals  $F_h$  est la transformée de Legendre de  $\tau_p$  (rappelons que les  $\tau_p$  s'identifient aux  $\zeta(p)$ ) :

$$D(h) = \min_p \{ph + d - \tau_p\}$$

où  $d = 2$  désigne la dimension de l'espace. Cette expression permet non seulement le calcul du spectre de singularités à partir des moments du signal (figure 6.2), mais aussi la détermination du rang des singularités observées  $h$ .

Dans la théorie des processus log-Poisson [She et Levêque, 1994], le spectre de singularités est ainsi complètement déterminé par deux paramètres seulement :  $(\gamma, \beta)$ . Compte tenu des équations (6.26)

et (6.28), la dimension fractale  $D(h)$  est donnée par :

$$D(h) = d + \frac{\gamma}{1-\beta} - \frac{h-\gamma}{\ln \beta} \left[ 1 - \ln \left( \frac{(h-\gamma)(1-\beta)}{\gamma \ln \beta} \right) \right]. \quad (6.29)$$

À partir de cette expression pour le spectre de singularités, nous pouvons déduire que :

- il existe une valeur minimale  $h_\infty$  de l'exposant  $h$ , donnée par  $h_\infty = \gamma$ , ce que nous avons déjà évoqué au chapitre précédent ; celle-ci correspond à la valeur de la singularité de la composante fractale la plus singulière ;
- la dimension fractale correspondante, notée  $D_\infty$ , est donnée par  $D_\infty = D(h_\infty) = D(\gamma)$ , et s'exprime, en conséquence, en fonction des paramètres du modèle, par :

$$D_\infty = d + \frac{\gamma}{1-\beta}. \quad (6.30)$$

Notons que d'autres écritures sont possibles suivant les paramètres que l'on fait intervenir dans le modèle [Turiel et Parga, 2000a]. Si l'on décide plutôt d'utiliser l'exposant  $\tau_2$ , apparaissant déjà

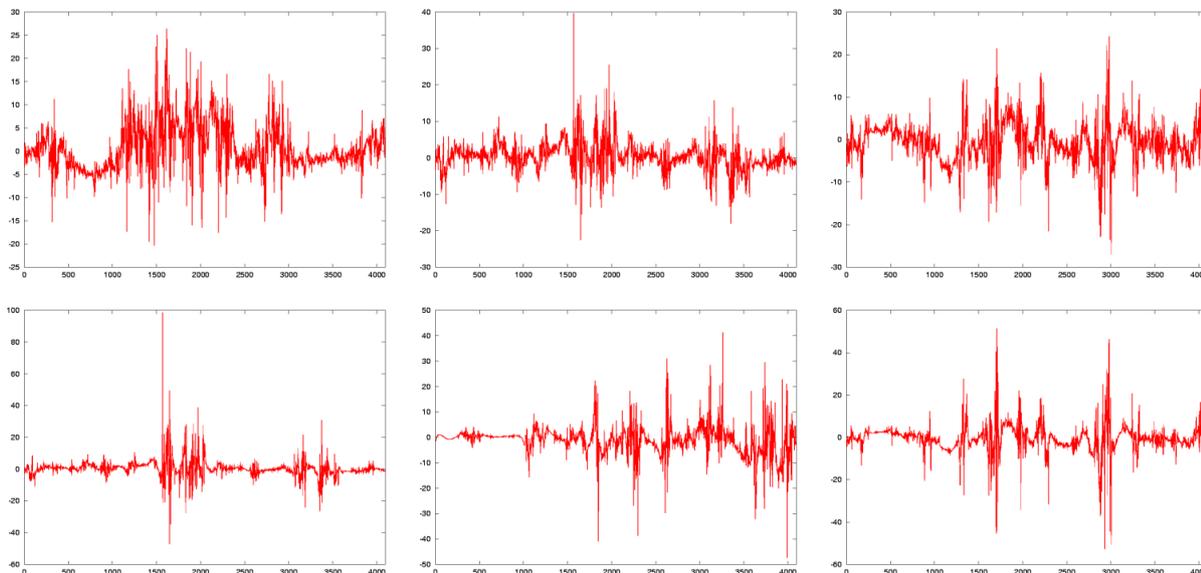


FIG. 6.3.: Exemples de simulations de processus log-Poisson 1D, générés à l'aide du modèle de [Benzi et al., 1993]. Les paramètres déterminant le modèle sont  $(\gamma = h_\infty, \beta = 1 + h_\infty/(d - D_\infty))$ , exprimés au travers de l'exposant de singularité minimale  $h_\infty$  et de la dimension  $D_\infty$ . **En haut** :  $h_\infty = -0.33$ , **en bas** :  $h_\infty = -0.5$  ; la dimension est toujours fixée à  $d - D_\infty = 1$ .

dans l'équation (6.25), on peut montrer que :

$$D_\infty = d - \frac{\tau_2}{(1-\beta)^2}.$$

Pour un modèle log-Poisson de paramètre  $\beta = 0.5$  et  $\tau_2 = -0.25$ , on obtiendra par exemple  $h_\infty = 0.5$  et  $D_\infty = 1$ . Sur la figure 6.3, nous avons représenté des simulations de processus log-Poisson 1D générés à l'aide du modèle de synthèse multifractal décrit dans [Benzi et al., 1993]. Les

paramètres  $(\gamma, \beta)$  utilisés pour générer le modèle log-Poisson sont définis à partir des paramètres multifractals  $(h_\infty, D_\infty)$ . Les spectres expérimentaux, calculés à partir des simulations sur les  $(\gamma, \beta)$ , et les spectres théoriques, calculés à partir de l'expression (6.31) sur les  $(h_\infty, D_\infty)$ , sont comparés sur la figure 6.4 : ils sont en bonne adéquation.

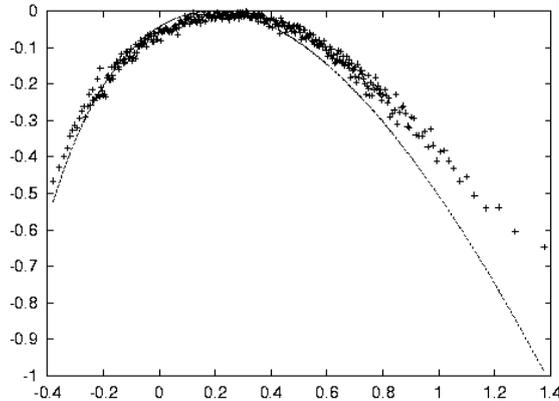


FIG. 6.4.: Spectres de singularités des processus log-Poisson de la figure 6.3 ; les valeurs représentées sont celles de l'opposé de la co-dimension  $D(h) - d$ . Spectre théorique (*i.e.* ce que l'on a introduit dans le modèle de [Benzi et al., 1993] pour la génération des processus) : —, spectre experimental : +.

Il ne nous reste plus qu'à remarquer que la mesure de contour  $\mu$ , définie au chapitre précédent grâce à l'équation (5.29), s'écrit tout simplement :

$$\mu(B_r(\vec{x})) = r^2 \epsilon_r(\vec{x}),$$

*i.e.* ces quantités se déduisent l'une de l'autre grâce à un facteur qui représente la mesure de Lebesgue de la boule de rayon  $r$ . Par conséquent, les variables  $\mu(B_r(\vec{x}))$  et  $\epsilon_r(\vec{x})$  définissent la même structure géométrique (avec des exposants  $h(\vec{x})$  égaux à une constante près) et fournissent les mêmes composantes multifractales. En particulier, la composante la plus singulière associée aux paramètres  $(h_\infty, D_\infty)$  n'est autre que la **MSM** :  $h_\infty$  est l'exposant caractéristique de la **MSM** ( $F_\infty \equiv F_\gamma$ ) et  $D_\infty \equiv D(\gamma)$  est sa dimension. Ainsi, le spectre  $D(h)$  des processus log-Poisson est entièrement déterminé à partir des deux seuls paramètres définissant la **MSM** à l'aide de l'équation :

$$D(h) = D_\infty - \frac{h - h_\infty}{\ln \beta} \left[ 1 - \ln \left( \frac{h - h_\infty}{(d - D_\infty) \ln \beta} \right) \right], \quad (6.31)$$

avec, d'après l'équation (6.30) :

$$\beta = \frac{h_\infty}{d - D_\infty} + 1. \quad (6.32)$$

Cette écriture donne tout son sens à l'algorithme multifractal de reconstruction introduit dans la section 5.5 du chapitre précédent. Nous voyons, en effet, que la seule connaissance des paramètres définissant la **MSM** suffit à la connaissance des propriétés des autres composantes fractales. La

dimension  $D_\infty$  et l'exposant  $h_\infty$  de la **MSM** caractérisent statistiquement l'ensemble des composantes fractales : l'information contenue par la **MSM** permet de décrire et de reconstruire toute l'image [Turiel et Parga, 2000a].

Notons, pour finir, que le rang  $[h_\infty, h_M]$  des valeurs possibles pour les exposants de singularité est fini et borné par l'exposant :

$$h_M = h_\infty - \omega_M(d - D_\infty) \ln \left( 1 + \frac{h_\infty}{d - D_\infty} \right)$$

où  $\omega_M$  est défini par la relation :  $\omega_M(1 - \ln \omega_M) = -D_\infty/(d - D_\infty)$ , et ne dépend donc que de  $D_\infty$  et  $h_\infty$ . En considérant par ailleurs que l'exposant de singularité de la **MSM** est contraint par :  $-1 \leq h_\infty \leq 0$  (ce qui est établi par la théorie multifractale), et que la dimension de cette composante est proche de 1 (ce qui est généralement vérifié car la **MSM** est essentiellement constitué des contours), la relation précédente se ramène à :

$$h_M = h_\infty - \omega_0 \ln(1 + h_\infty)$$

où  $\omega_0$  vérifie :  $\omega_0(1 - \ln \omega_0) = -1$  (i.e.  $\omega_0 \approx 3.60$ ).

### Remarques à propos des hypothèses du modèle

**L'hypothèse d'invariance d'échelle** - La première remarque concerne l'utilisation d'un modèle invariant d'échelle lié au formalisme multifractal. Il a, en effet, été montré que celui-ci avait des limites dans l'analyse des singularités d'un signal [Meyer, 2001]. Le modèle multifractal ne permet notamment pas de modéliser certaines classes de fonctions spécifiques, telles que des constructions mathématiques comportant des *singularités dites oscillantes*. L'apparition de telles singularités ne peut *a priori* pas être appréhendée par le modèle que nous employons, il faudrait abandonner l'hypothèse d'invariance d'échelle (*via* l'utilisation de cascades infiniment divisibles avec  $n(r) \neq \ln r$ ). Cependant, ce type de singularités (et, plus généralement, des singularités autres que les singularités höldériennes) est observé dans des signaux turbulents spécifiques, et très peu dans des images naturelles. Pour notre part, nous considérons que le formalisme multifractal, et le cadre invariant d'échelle, suffisent à décrire le comportement singulier des images météorologiques.

**Les modèles log-Poisson et log-normal** - Une autre remarque essentielle concerne la modélisation des distributions des exposants de singularité. Celle-ci est réalisée à l'aide d'un modèle log-Poisson [Turiel et al., 1998]. Ces distributions apparaissent incompatibles avec des modèles log-normaux, bien que ces derniers soient couramment employés [Arnéodo et al., 1995]. L'utilisation d'un modèle log-normal résulte essentiellement du *Théorème Central Limite* [Renyi, 1992] qui permet d'approximer les processus log-Poisson lorsque le changement d'échelle est suffisamment important. Le caractère infiniment divisible de  $\alpha_{rL}$ , exprimé par l'équation (6.10), implique en effet que  $\ln \alpha_{rL}$  est la somme d'un nombre infini de variables indépendantes. Ainsi, il peut être observé que la distribution approche celle d'une variable log-normale. Ceci explique que les événements les plus fréquents soient effectivement bien estimés, par défaut, par le modèle log-normal, mais les événements les plus rares, tels que les transitions correspondant aux exposants les plus singuliers, sont en revanche

très mal décrits à l'aide de ce modèle. En effet, dans le modèle log-normal, les exposants ne sont pas bornés, ni inférieurement, ni supérieurement : en particulier, la probabilité d'occurrence d'exposants de singularité négatifs très grands est non nulle. L'existence de tels exposants n'est pas compatible avec les distributions des singularités observées sur les images naturelles. Cela devrait se traduire par des transitions brusques du processus et des moments d'ordre élevés qui explosent (ceux-ci sont en effet dominés par les exposants les plus singuliers) [Turiel et Pérez-Vicente, 2003a]. Pour cette raison, on préfère le modèle log-Poisson pour modéliser les statistiques des exposants de singularité.

### 6.4.3. Les cascades log-Poisson pour décrire la structure des images et du flot

L'avantage du modèle log-Poisson est d'offrir des connexions avec une vision plus géométrique et issue des équations de la dynamique de l'écoulement. Ainsi, on ne se limite pas à la seule interprétation statistique, on est en mesure de donner une interprétation de nature géométrique aux structures mises en évidence dans les images par ce modèle [She, 1997]. On peut également obtenir de l'information de nature thermodynamique en relation avec la physique sous-jacente des flots turbulents.

#### Interprétation thermodynamique des cascades log-Poisson

Les processus log-Poisson présentent un comportement statistique caractéristique : lorsqu'un changement d'échelle infinitésimal survient, soit le processus évolue très doucement, soit il subit une variation très brusque. Ces propriétés fournissent une interprétation particulière aux transitions du signal, qui s'interprètent comme des modes de transfert d'énergie entre les différentes échelles.

Considérons un changement d'échelle infinitésimal de  $\epsilon_r$ . À l'échelle  $r$ , la variable  $\epsilon_r$  est générée à partir de la variable  $\epsilon_{r+dr}$  et du processus  $\alpha_{r,r+dr}$  à l'échelle  $r + dr$ . La distribution log-Poisson servant à décrire  $\alpha_{r,l}$  peut alors être approximée par une distribution binomiale [Renyi, 1992]. Pour un changement d'échelles de  $r$  à  $r + dr$ , les coefficients aléatoires  $\alpha_{r,r+dr}$  sont ainsi obtenus en écrivant :

$$\alpha_{r,r+dr} = \begin{cases} (i) & 1 - h_\infty \frac{dr}{r} & \text{avec probabilité } 1 - (d - D_\infty) \frac{dr}{r} \\ (ii) & \beta(1 - h_\infty \frac{dr}{r}) & \text{avec probabilité } (d - D_\infty) \frac{dr}{r} \end{cases} \quad (6.33)$$

Notons que, dans la limite d'un changement non-infinitésimal, cette formule conduit bien à une distribution en log-Poisson de la forme (6.21) pour le processus multiplicatif  $\alpha_{r,l}$ . L'intérêt de cette expression est de permettre de modéliser la redistribution progressive d'énergie dans les échelles de plus en plus fines du système. En effet, on peut interpréter les événements (i) et (ii) comme les modes de transfert d'énergie (les seuls possibles) de l'échelle  $r$  à l'échelle  $r+dr$  [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b] :

- (i) c'est l'événement le plus probable : il correspond à une transition douce de la variable  $\epsilon_r$  entre les échelles  $r$  et  $r + dr$  et intervient presque sûrement (probabilité très proche de 1) ;
- (ii) cet événement correspond, en revanche, à une transition singulière, et sa probabilité est infiniment moins vraisemblable que la précédente (probabilité très proche de 0).

Le paramètre  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) représente la fraction d'énergie conservée par le processus après une transition singulière du type (ii). Cela signifie qu'après une telle transition, une part  $(1 - \beta)$  de la valeur de  $\alpha_{r,r+dr}$  (*i.e.* une part d'énergie) est perdue. Rappelons que ce paramètre n'est en fait pas indépendant, puisqu'il est contrôlé par la relation (6.32) qui le lie à  $(h_\infty, D_\infty)$ .

La modélisation des transitions du signal par des processus log-Poisson fournit donc une interprétation en terme de cascade d'énergie au sein du flot turbulent. Intuitivement, comme ce sont les variables  $(h_\infty, D_\infty)$  déterminant la **MSM** qui définissent complètement les paramètres de la cascade, la structure géométrique de cet ensemble particulier doit permettre d'expliquer les transitions observées.

### Interprétation géométrique

Nous avons expliqué plus haut les événements (i) et (ii) en terme statistique et thermodynamique de cascade d'énergie. Ceux-ci peuvent aussi s'interpréter grâce à de l'information de nature géométrique, *via* les propriétés de la **MSM**.

Reprenons l'expression (6.33). D'un point de vue géométrique, les événements (i) et (ii) sont liés à la nature de la transition présente dans le signal  $I$  et rencontrée par la variable  $\epsilon_r$  qui rend compte de ces transitions [Turiel et Parga, 2000a] :

- (i) le contraste subit une transition très faible en un pixel  $\vec{x}$ , *e.g.*  $\vec{x}$  est un pixel d'une surface texturée, et la quantité mesurée par  $\epsilon_r(\vec{x})$  correspond à une moyenne sur une zone sans forte variation du niveau de gris : cet événement a une probabilité très forte de se produire,
- (ii) il y a une transition très forte du contraste, *e.g.*  $\vec{x}$  est près du contour d'un objet : cet événement est infiniment moins vraisemblable que le précédent.

L'apparition d'une transition très forte dans le signal fournit une description géométrique particulière : on l'interprète comme la situation où le signal "traverse" (dans une certaine direction  $\mathbf{r}$ ) un ensemble géométrique significatif qui est le lieu d'injection de l'énergie dans la cascade [Dubrulle, 1994] [Castaing, 1996]. Cet ensemble est la composante fractale contenant les lieux de plus forte transition du signal, *i.e.* la **MSM**. Remarquons que la **MSM** est un ensemble dense, donc *a priori* n'importe quelle ligne dans la direction  $\mathbf{r}$  est censée la traverser, et intersecte, en principe, cet ensemble un nombre infini de fois. En fait, l'interprétation du processus multiplicatif est un peu différente : l'équation (6.33) associée à un changement d'échelle infinitésimal signifie que l'événement le moins probable est, effectivement, la détection de la **MSM** mais à cette échelle particulière. Les images peuvent être décomposées en différents niveaux indépendants de résolution [Turiel et Parga, 2000b], et à chaque niveau on détecte une part indépendante de la **MSM**. Nous retiendrons cependant l'idée qui consiste à interpréter les transitions singulières du signal comme l'apparition d'un élément de la structure géométrique singulière portée par la **MSM**.

Les statistiques log-Poisson des changements d'échelle sont donc caractérisées par la "traversée" ou non de la **MSM** par le signal. En particulier, les propriétés géométriques de cet ensemble suffisent à décrire les propriétés statistiques du signal, ce que l'on savait déjà grâce aux équations (6.31) et (6.33).

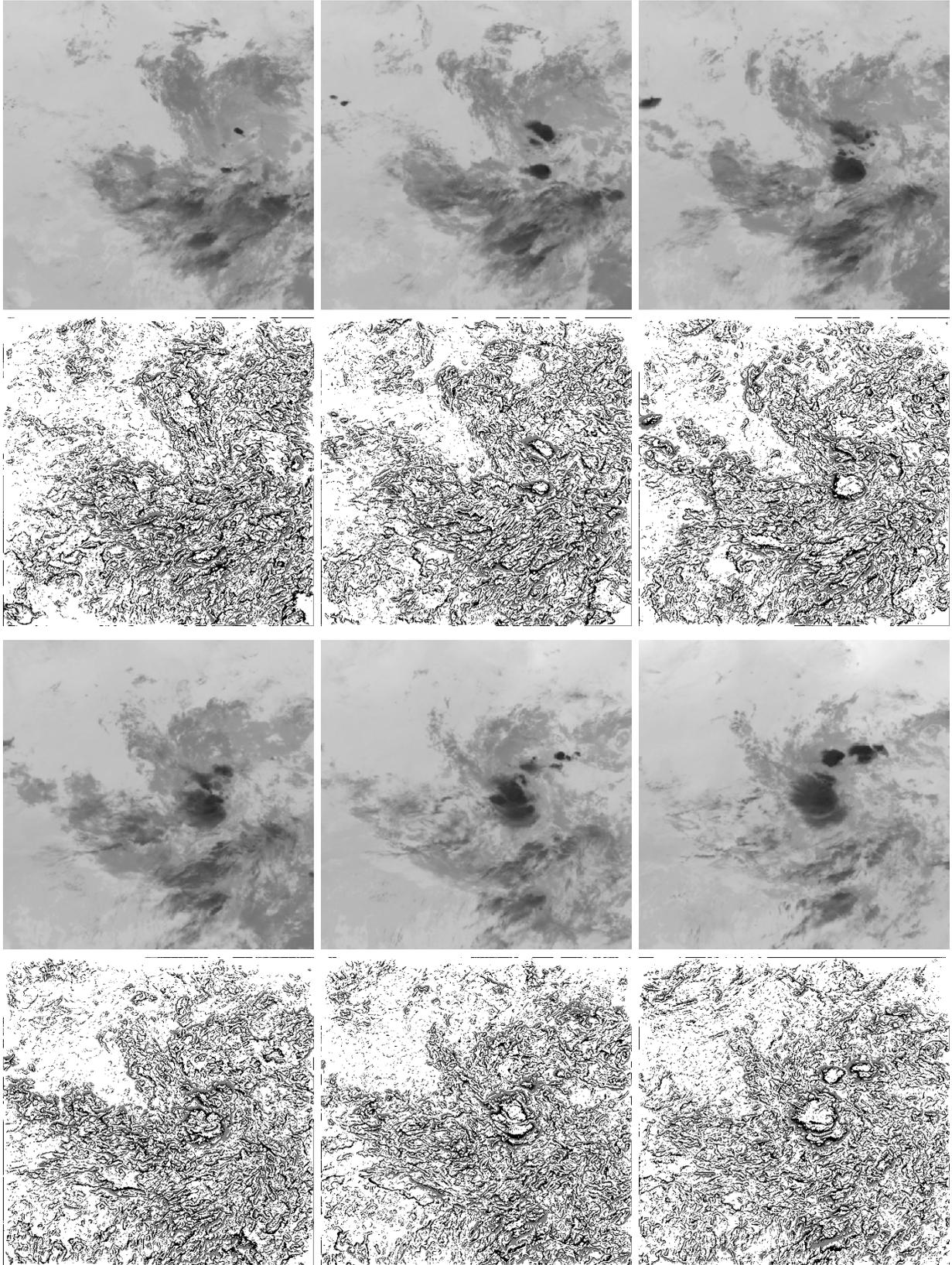


FIG. 6.5.: Situation du 31/07/98 entre 0h et 11h30. Extraction des ensembles les plus singuliers dans le flot. **Lignes du haut** : images **IR** originales, **lignes du bas** : **MSM** extraites à une densité autour de  $d_\infty = 35\%$ . On représente 1 acquisition toutes les 2 heures (dim. :  $460 \times 460$ ).

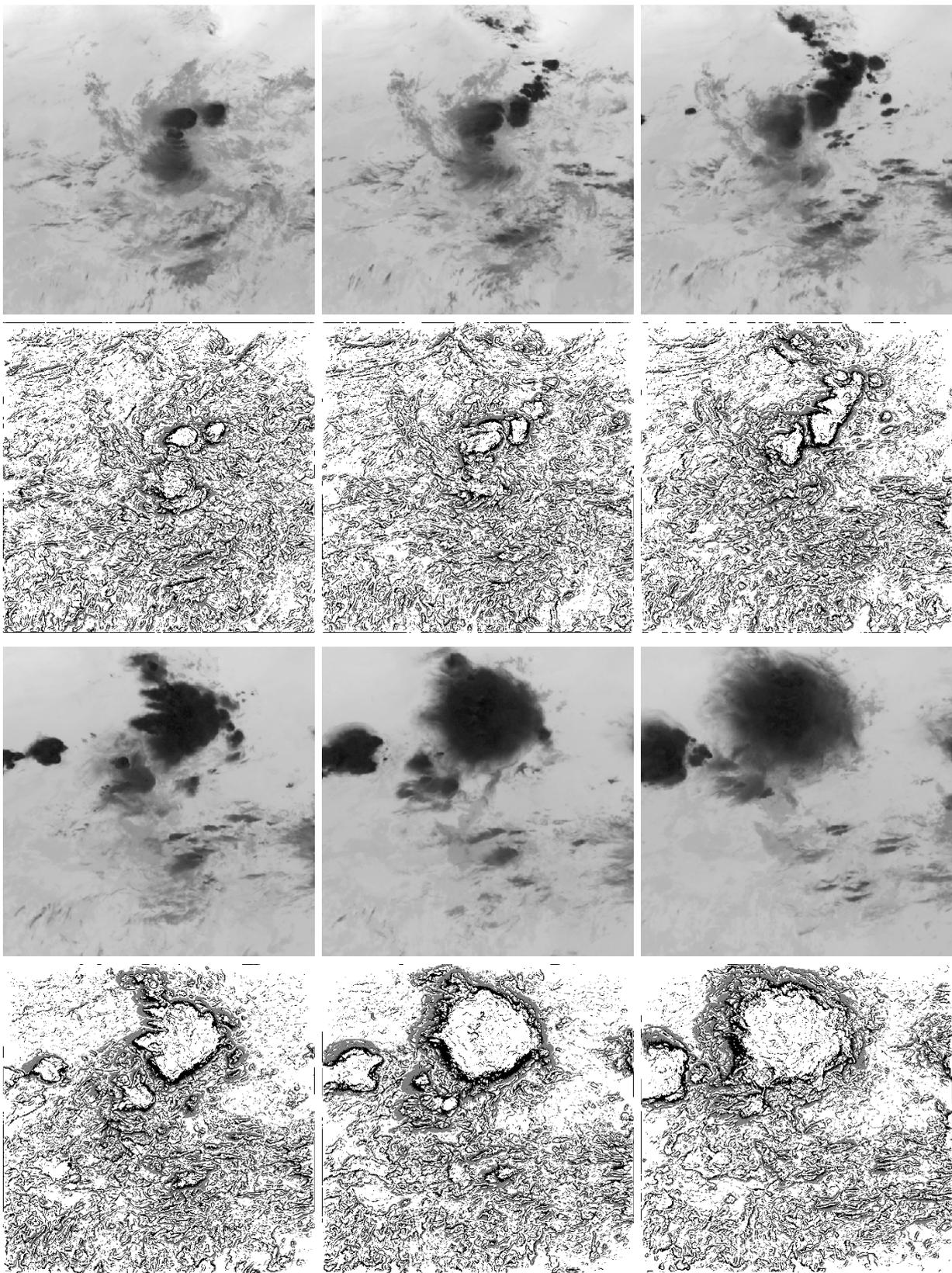


FIG. 6.5.: Suite - situation du 31/07/98 entre 12 h et 22 h 00.

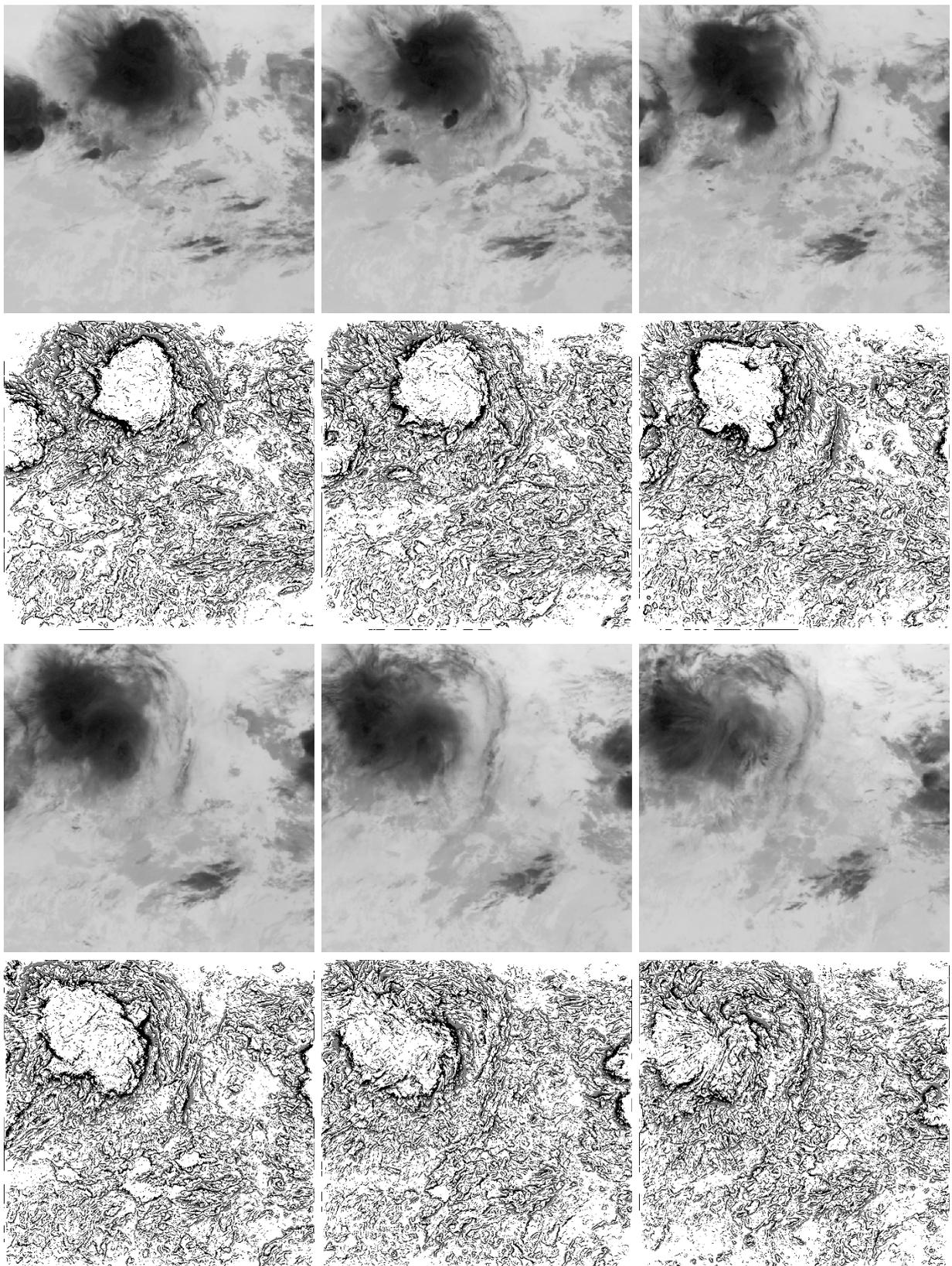


FIG. 6.5.: Suite - situation du 1/08/98 entre 0 h et 10 h00.

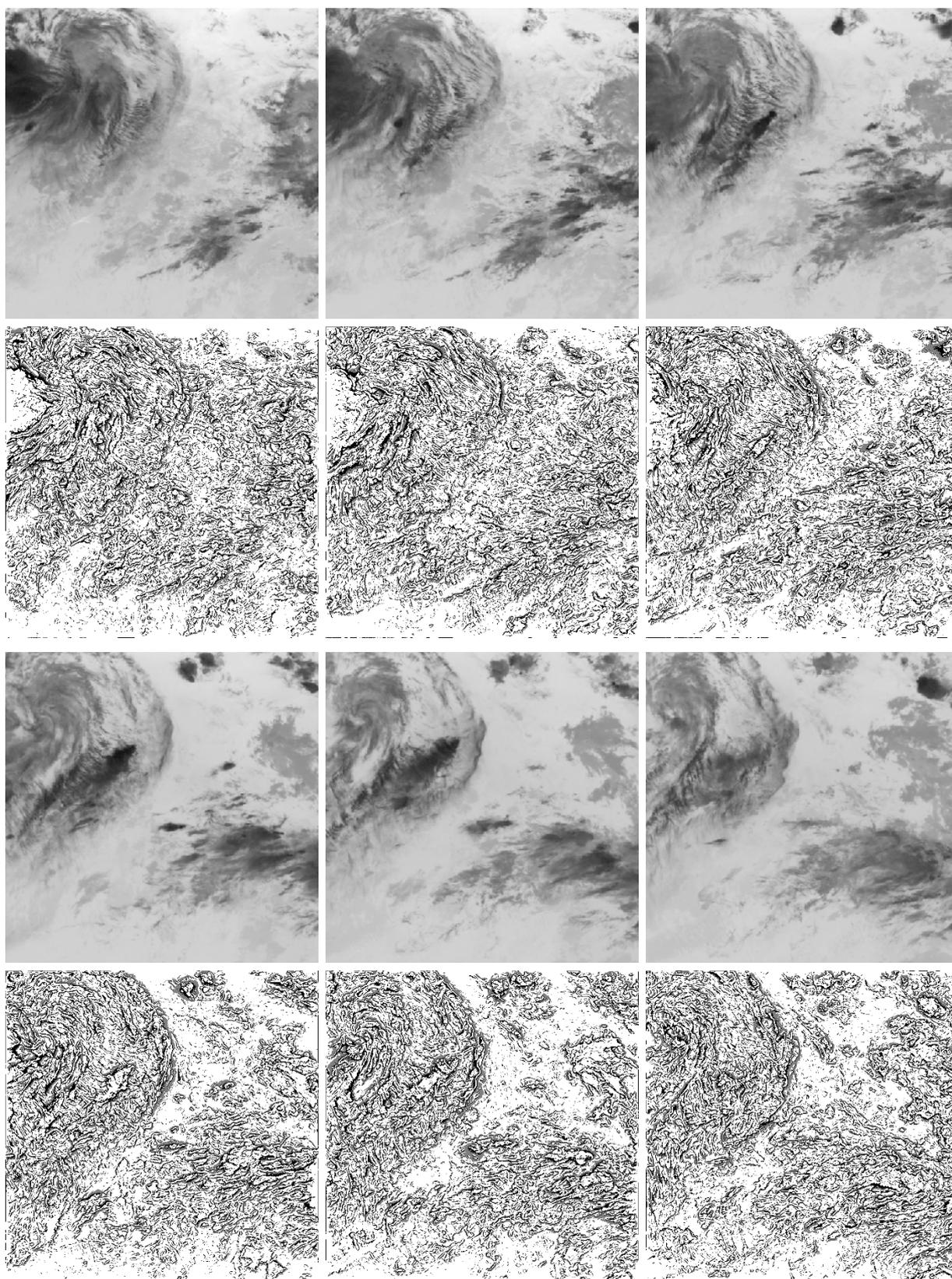


FIG. 6.5.: Suite - situation du 1/08/98 entre 12 h et 22 h 00.

### Quelques résultats sur des images météorologiques

Sur la figure 6.5, nous avons représenté les différentes **MSM** extraites d'une séquence d'image **IR**. La séquence présentée correspond à la situation observée au dessus de l'Afrique (partie occidentale) pendant deux jours de la saison des pluies de 1998, à raison d'une image toutes les 2 h. On peut notamment suivre sur cette séquence la formation et l'évolution de structures nuageuses convectives<sup>10</sup>. L'évolution, tant spatiale que temporelle, de ces structures est particulièrement complexe.

Les **MSM** sont extraites à une résolution assez grossière (elles rassemblent près de 35 % des pixels de l'image) mais permettent d'identifier les principaux fronts de transition dans ces images. Des transitions importantes apparaissent notamment dans les structures nuageuses elles-mêmes. La **MSM** regroupe des structures géométriques qui s'interprètent comme le lieu où de l'énergie est injectée dans le système (notamment à l'intérieur des nuages) et transférée aux autres structures de l'atmosphère. Cependant, une objection (naturelle) au paradigme des cascades d'énergie pour l'interprétation des composantes fractales est liée au fait que les mesures **IR** ne sont pas toutes réalisées à la même altitude : les images infrarouges sont des projections dans un espace 2D d'un phénomène qui a lieu en 3D. Ainsi, la température mesurée est celle du sommet des différentes structures observées. Certaines transitions détectées dans le signal s'expliquent essentiellement par des différences d'altitude entre des structures qui se trouvent dans des couches différentes de l'atmosphère, et non pas par des transferts d'énergie au sein du système. Même si cette remarque reste valable pour les systèmes nuageux, on peut considérer que la mesure effectuée au sommet d'un nuage est une mesure "intégrale" sur toute la hauteur du nuage. On interprète donc encore les singularités détectées comme les projections dans l'espace 2D des transitions de température, *i.e.* les projections des lieux où de l'énergie est injectée dans le nuage.

## 6.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux descriptions de la turbulence pour décrire les structures observées dans les images naturelles. Notre approche apparaît relativement naturelle, pour deux raisons essentielles :

- Les images, qui mettent en évidence des caractéristiques qui ne sont pas celles de simples objets fractals, correspondent à des objets multifractals qui peuvent être décomposés en différents ensembles fractals dont le comportement diffère sous l'effet de changements d'échelle. Or, la multifractalité est en fait une propriété des systèmes turbulents, chaotiques présents dans beaucoup de phénomènes très différents [Parisi et Frisch, 1985].
- Comme l'atmosphère se comporte comme un flot turbulent en **TCD**, on s'attend à ce que toute grandeur physique intensive se comporte comme un processus ergodique et définisse une structure multifractale [Frisch, 1995]. En particulier, les images **IR** sont liées à la thermodynamique de l'atmosphère et constituent une mesure directe d'une grandeur hydrodynamique (la température) sur un flot turbulent.

<sup>10</sup>Nous devons la connaissance des systèmes visualisés sur ces images à d'autres informations fournies soit par des mesures satellitaires, soit par des mesures *in situ*. Ces informations nous ont été communiquées par le **LMD**.

Ainsi, nous sommes amenés à considérer différentes formalisations de la turbulence. En particulier, la **TCD** ne peut presque toujours être étudiée qu'à travers les propriétés statistiques des écoulements.

Finalement, nous montrons que le caractère multifractal des images est clairement lié à l'existence de processus log-Poisson pour décrire les transitions du signal. Nous obtenons ainsi une modélisation des structures dans les images qui implique une information de nature *géométrique* dans une description *statistique*. Par ailleurs, différentes considérations nous permettent d'établir un lien entre la dynamique des structures turbulentes et la statistique du modèle log-Poisson. En particulier, le modèle log-Poisson confère de bonnes propriétés aux ensembles fractals détectés, notamment à la **MSM** qui s'interprète comme le lieu d'injection d'énergie dans le système.

Cette caractérisation des images d'un point de vue thermodynamique nous incite à aller plus loin dans l'analyse des propriétés sous-jacentes des structures.

---

**Quatrième partie.**

**Entropie multiéchelle et analyse  
multifractale appliquées à la détection  
des zones précipitantes**

---



---

## 7. Mesures entropiques et décomposition multifractale pour la détection de structures d'intérêt

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une caractérisation des structures géométriques présentes dans les images **IR**. L'objectif est de combiner de l'information de nature diverse pour décrire, analyser et interpréter les structures détectées dans les images. Nous montrons tout d'abord que l'approche probabiliste associée à une description entropique du contenu des images et l'approche géométrique du modèle multifractal utilisé jusqu'ici fournissent une caractérisation similaire de la structure des images. Nous proposons ainsi une description multi-sémantique des ensembles fractals détectés à l'aide du modèle multifractal. Nous envisagerons ensuite d'interpréter la mesure entropique comme une variable thermodynamique.

### 7.1. Pertinence des objets et structures dans les images **IR**

#### 7.1.1. Détection de structures d'intérêt

Le modèle d'analyse multifractale présenté dans les chapitres précédents permet d'obtenir une segmentation des images en regard d'une mesure qui quantifie la régularité locale du signal. Elle met en évidence, dans une décomposition hiérarchique de l'image (*cf.* chapitre 5), des sous-ensembles fractals caractéristiques des propriétés géométriques (décrites par le comportement de la mesure  $\mu$ , définie en (5.29), dans la limite des petites échelles) et statistiques (décrites, de manière équivalente, par le comportement des moments d'ordre élevé de la variable  $\epsilon_r$ ) du signal. En particulier, la connaissance de l'un de ces sous-ensembles, la **MSM**, permet la reconstruction de l'image entière. Mais les structures extraites sont également cohérentes et significatives du point de vue de la turbulence (*cf.* chapitre 6). Nous avons ainsi vu que les pixels de la **MSM** peuvent s'interpréter comme les zones de transfert d'énergie au sein de l'écoulement fluide. Finalement, avec l'analyse multifractale, nous définissons un critère multiple de discrimination des différentes structures de l'image : sur la base d'information de nature géométrique, statistique mais aussi thermodynamique, on obtient une décomposition cohérente de l'image dans la mesure où les sous-ensembles mis en évidence regroupent des pixels ayant des propriétés similaires sous ces différents aspects.

Afin d'extraire des sous-ensembles significatifs de l'image, une approche courante en traitement du

---

signal consiste à utiliser l'entropie définie par Shannon [Shannon, 1948]. Il paraît en effet naturel que la "pertinence" d'un sous-ensemble de l'image soit évaluée en regard de l'information sur toute l'image que la connaissance que ce seul ensemble fournit, et donc que le critère de discrimination retenu soit la quantité d'information contenue dans les différentes régions de l'image.

### 7.1.2. Outils d'interprétation des structures détectées

Notre objectif est de mettre en évidence la corrélation entre ces deux approches : l'approche probabiliste de la mesure entropique et l'approche géométrique du formalisme multifractal, et de montrer qu'elles fournissent une caractérisation similaire des structures locales. Il s'agit de montrer que la décomposition multifractale est reliée à une description entropique de l'image, et donc que les sous-ensembles fractals que nous détectons sont cohérents au sens d'un nouveau critère quantifiant l'information contenue dans l'image. Ces considérations viendront naturellement conforter les résultats de la théorie multifractale et nous permettront de justifier davantage l'utilisation de cette approche. Elles nous permettront par ailleurs d'envisager de nouvelles applications.

En effet, l'acception du terme "entropie" est multiple et la variable entropie permet, de fait, une interprétation multi-sémantique des structures extraites des images. Dans la mesure où nous analysons des données qui sont une mesure d'une grandeur hydrodynamique, on peut notamment imaginer relier la définition de l'entropie telle que nous allons la définir avec l'entropie réelle des systèmes atmosphériques présents dans les images **IR**. Notre espoir est que, dans le contexte de l'analyse d'images météorologiques, cette approche nous fournisse là encore de l'information de nature thermodynamique sur les systèmes observés.

## 7.2. Critères entropiques pour l'extraction de structures informatives

La détection de structures d'intérêt dans une image nécessite tout naturellement de préciser ce que l'on recherche dans cette image et, en conséquence, de définir des quantités mesurant la pertinence des objets à extraire. À ces fins, les concepts issus de la théorie de l'information [Cover et Thomas, 1991] peuvent être utilisés dans l'analyse et surtout dans l'interprétation des images [Schiele et Crowley, 1998] [Turiel et al., 2004].

### 7.2.1. Quantification de la notion d'information

La théorie de l'information est basée sur l'idée qu'un signal est la réalisation d'une variable aléatoire, suivant une certaine distribution de probabilité et apportant une certaine quantité d'information. L'objectif principal est alors d'établir un lien entre la probabilité des événements observés dans le signal et l'information fournie par le signal lui-même [Cover et Thomas, 1991]. Ainsi, dans un cadre 2D, les objets d'une image sont considérés comme des *sources d'information*; on considère généralement que l'image est riche en information si elle met en évidence beaucoup de structures et objets significatifs; au contraire, elle est pauvre en information si elle contient très peu d'objets ou si elle est uniforme.

La théorie de l'information permet de qualifier une certaine acception de l'information brute d'une image : le nombre de bits nécessaire au codage de chaque pixel de l'image [Shannon, 1978]. Pour cela, plusieurs outils probabilistes destinés à mesurer la quantité d'information brute peuvent être proposés (*cf.* annexe B). L'entropie des niveaux de gris permet notamment d'évaluer la quantité d'information fournie par une image : plus l'entropie est grande, plus le nombre de bits nécessaires au codage de l'image est important ; cette caractérisation trouve des applications non seulement dans la compression et le codage [Mallat, 1989] mais aussi le filtrage et l'analyse d'images [Turiel et Parga, 2000a].

### 7.2.2. Information et entropie

Le terme d'*entropie* est dû à Clausius, et le concept d'entropie a été introduit par Boltzmann en mécanique statistique, afin de quantifier le nombre d'états microscopiques qu'un état macroscopique peut réaliser [de Groot et Mazur, 1962]. Shannon [Shannon, 1948] fonda la théorie mathématique de l'information lorsqu'il suggéra que l'information obtenue dans une mesure ou un signal, dépendait du nombre de résultats possibles. L'idée d'entropie s'appuie ainsi sur l'analogie avec la physique : les configurations les moins probables se voient attribuer un plus grand contenu d'information que les configurations les plus fréquentes. L'entropie au sens de Shannon permet d'évaluer quantitativement cette information ; c'est une quantité globale calculée sur un signal entier.

#### Entropie d'une image

Toute mesure de l'information d'une image est basée sur des caractéristiques de bas-niveau du signal, comme par exemple des indicateurs statistiques ou les densités de probabilités des niveaux de gris. À partir de la définition (B.1) de la quantité d'information d'un événement émis par une *source d'information*, on introduit [Shannon, 1948] :

**Définition 7.1** *L'entropie globale (EG) d'une image  $I$  est définie comme l'information moyenne par niveau de gris de l'alphabet  $\{1, \dots, N_G\}$  :*

$$S = - \sum_{i=1}^{N_G} \mathcal{P}(i) \log_2 \mathcal{P}(i) . \quad (7.1)$$

Le modèle de probabilité retenu pour l'image est celui d'un processus indépendant identiquement distribué [Renyi, 1992] d'ordre  $N$ , où  $N$  désigne le nombre total de pixels : le signal est considéré comme un ensemble de variables individuelles (les pixels) obtenues indépendamment les unes des autres à partir de la même distribution de probabilité  $\mathcal{P}$ . L'EG est ainsi égale à l'entropie de la variable aléatoire sous-jacente à chacun des pixels de l'image (*cf.* formule (B.3)) ce qui revient à considérer l'image comme une source stationnaire<sup>1</sup>.

Cette quantité peut être utilisée pour la maximisation des *bits* transférés sous une contrainte de qualité. Comme le logarithme est exprimé en base 2 l'EG représente en effet le nombre optimal

<sup>1</sup>La stationnarité exprime que les estimations sont indépendantes du point où elles sont réalisées.

de *bits* nécessaires au codage des niveaux de gris ; plus l'**EG** est grande, plus le nombre de bits nécessaires au codage de l'image est important. Cette quantité (exprimée en *bpp*, *bits par pixel*) est minimale et égale à zéro quand le signal est constant, et augmente donc quand apparaissent des fluctuations. Les images codées sur 8 *bits* (255 niveaux de gris) ont ainsi une entropie  $S \leq 8$  *bits*. Pour des images normalement contrastées, utilisant l'essentiel de la dynamique, les valeurs d'entropie rencontrées vont généralement de 4 à 7.5 *bits*.

Cette définition de l'entropie suppose en particulier que l'ensemble de l'information réside dans les distributions marginales des niveaux de gris de l'image. Elle peut cependant être étendue à une source qui émet plusieurs pixels indépendamment les uns des autres :

**Définition 7.2** Si  $\mathcal{P}(i, j)$  désigne la probabilité d'un couple  $(i, j)$  de pixels, l'entropie d'ordre 1 est définie par :

$$S_1 = - \sum_{i=1, j=1}^{N_G} \mathcal{P}(i, j) \log_2 \mathcal{P}(i, j) . \quad (7.2)$$

Cette entropie vérifie  $S \leq S_1 \leq 2S$ , la première égalité étant vérifiée en cas de dépendance linéaire des pixels, la seconde en cas d'indépendance. L'entropie d'ordre 0 coïncide avec la définition 7.1 de l'**EG** ci-dessus, et cette expression peut être étendue pour des sources d'ordre  $o > 2$ , *i.e.* émettant des symboles indépendants composés de  $o + 1$  pixels. L'avantage d'une telle définition de l'entropie est de pouvoir tenir compte des éventuelles corrélations entre les pixels de l'image. L'inconvénient majeur est la prise en compte d'un nombre de plus en plus grand d'événements. Cependant sous certaines hypothèses d'invariance translationnelle, il serait possible de se restreindre à l'**EG**.

### Mesures des distributions de probabilité

Afin d'estimer la densité de probabilité  $\mathcal{P}$  d'une image  $I$ , le nombre de valeurs différentes pour  $I$  est en pratique quantifié, *i.e.* l'espace des niveaux de gris est discrétisé. En partitionnant l'espace des niveaux de gris en  $m \leq N_G$  intervalles de longueur identique  $\Delta$ , on redéfinit en fait une pseudo-variable aléatoire discrète  $I^\Delta = i$ , pour  $i\Delta \leq I < (i + 1)\Delta$ , dont l'histogramme des fréquences est obtenu en sommant, parmi les  $N$  occurrences possibles, la densité dans les intervalles considérés :

$$p(i) = p(I^\Delta = i) = \sum_{\vec{x}} \delta_{i\Delta \leq I(\vec{x}) < (i+1)\Delta}(\vec{x}) \quad (7.3)$$

où  $\delta$  est la mesure de comptage et où la sommation est effectuée sur tous les pixels  $\vec{x}$  de l'image. Chaque valeur  $i$  est ainsi associée à une fréquence  $p(i)$  et la probabilité que des données (niveaux de gris des pixels) appartiennent à un intervalle  $i$  est alors  $p(i)/N$  : on assimile ces fréquences normalisées à la distribution de probabilité  $P$ . La définition de l'**EG** donnée par la formule (7.1) appliquée à la probabilité  $P$  revient alors à :

$$S = - \sum_i^m \frac{p(i)}{N} \log_2 \frac{p(i)}{N} . \quad (7.4)$$

La précision de la mesure entropique est fonction de la qualité des mesures de probabilité des images étudiées. La difficulté avec cette approche réside dans le fait que, parce que le nombre d'occurrences est fini, l'évaluation de  $p(i)$  comporte une erreur proportionnelle à  $m^{-\frac{1}{2}}$  [Frieden, 1991], où  $m$  est le nombre d'intervalles retenus pour le processus discrétisé. L'erreur devient significative quand  $m$  devient faible. Il est important de minimiser cette incertitude sur les fonctions de probabilité afin de disposer d'une estimation fiable de l'entropie.

### Mesure entropique locale

L'entropie au sens de la théorie de l'information est une variable d'état d'un système et par conséquent, n'est jamais localisée. L'équation (7.4) implique en effet que l'**EG** est évaluée globalement sur l'image et ne permet pas de mesurer la quantité d'information contenue dans des structures locales. Elle ne prend en compte aucun facteur contextuel ni aucune connaissance *a priori* sur l'image. Les **EG** d'images dont le contenu sémantique est très différent peuvent être égales si leurs histogrammes sont les mêmes : bien que les deux images de la figure 7.1 ne contiennent de toute évidence pas la même information (l'image **IR** met en évidence des textures et objets définis par leurs contours), elles ont pourtant la même **EG**. On préfère par conséquent au modèle

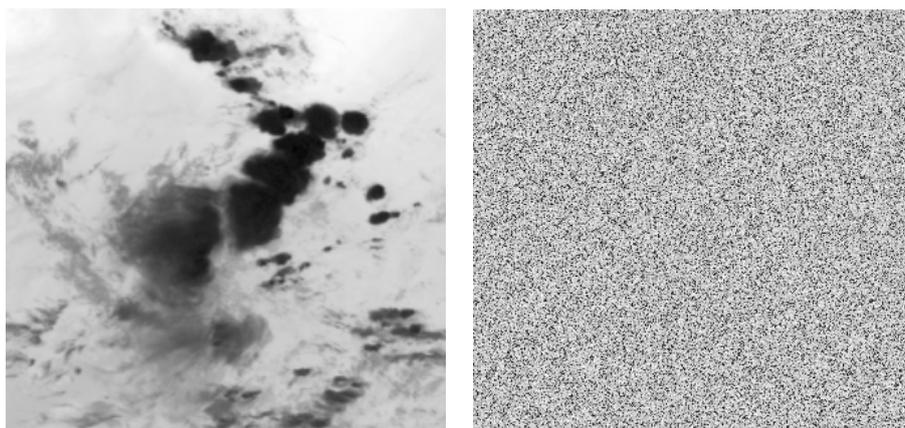


FIG. 7.1.: Deux images contenant une information différente mais ayant la même **EG** ( $S = 7.161 \text{ bpp}$ ). L'image **IR** de gauche a été quantifiée sur 256 niveaux de gris, l'image de droite est obtenue en réarrangeant spatialement les niveaux de gris de celle-ci.

d'**EG** un modèle d'entropie locale, dérivé des méthodes classiques de calcul d'attributs texturaux [Randen et Husoy, 1999] présentées au chapitre 4 et basées sur les distributions locales des niveaux de gris, calculées sur des échantillons de taille réduite :

**Définition 7.3** Pour chaque pixel  $\vec{x}$  de l'image, on considère une fenêtre d'analyse  $\mathcal{W}_{\vec{x}}$  (notée  $\mathcal{W}$  dans la suite afin de ne pas alourdir les notations) centrée en ce pixel et on définit une **entropie locale (EL)** par :

$$s_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = - \sum_i \frac{p_{\mathcal{W}}(i)}{|\mathcal{W}|} \log_2 \frac{p_{\mathcal{W}}(i)}{|\mathcal{W}|} \quad (7.5)$$

où  $|\mathcal{W}| = \sum \delta_{\vec{y} \in \mathcal{W}}$  désigne le nombre de pixels de la fenêtre  $\mathcal{W}$ , et où les probabilités marginales empiriques :

$$p_{\mathcal{W}}(i) = \sum_{\vec{y} \in \mathcal{W}} \delta_{I(\vec{y})=i} \quad (7.6)$$

représentent la fréquence d'apparition locale des niveaux de gris dans  $\mathcal{W}$ .

L'introduction d'un critère local permet d'opérer une classification des pixels de l'image en fonction de la quantité d'information qu'ils lui confèrent et d'extraire localement les structures les plus informatives du signal : elle apparaît, en ce sens, plus adaptée à l'analyse d'images que les définitions classiques. On peut alors considérer la valeur des pixels dans un voisinage d'intérêt comme la contribution de ces pixels à l'information globale dans ce voisinage. La dynamique locale des niveaux de gris dans les voisinages considérés doit être ramenée à un rang de valeurs global, valable pour toute l'image, afin de pouvoir comparer la quantité d'information contenue localement (nous avons déjà abordé ce point en section 4.2.3). En faisant l'hypothèse que l'image est stationnaire et que les fenêtres analysantes permettent de décomposer l'image en ensembles indépendants, on peut estimer l'entropie d'une zone d'intérêt  $\varphi$  de l'image, à partir d'une sommation sur l'ensemble des pixels :

$$S_{\varphi} = \sum_{\vec{x} \in \varphi} s_{\mathcal{W}}(\vec{x}), \quad (7.7)$$

(l'indice de sommation porte sur les centres des fenêtres considérées pour le calcul des entropies locales). En particulier :

**Définition 7.4** *On peut exprimer l'entropie totale de l'image comme la somme des **EL** sur toute l'image :  $S = \sum_{\vec{x}} s_{\mathcal{W}}(\vec{x})$ .*

Comme nous l'avons déjà évoqué pour l'étude des **MC** (cf. section 4.2.3), cette méthode de calcul des distributions de niveaux de gris a le désavantage d'exiger un compromis entre la qualité de l'information contenue et la résolution de l'image finale. En effet pour éviter un bruit dû à la faible étendue des bases de calcul des probabilités, il convient de prendre des fenêtres d'analyse suffisamment grandes. En revanche, la résolution de l'image finale sera d'autant meilleure que les fenêtres d'analyse seront petites. Celle-ci ne tient pas compte de la corrélation spatiale, *i.e.* des dépendances spatiales entre les pixels. Notons par ailleurs que l'hypothèse de partition de l'image en ensembles indépendants (les fenêtres  $\mathcal{W}$ ) est évidemment erronée, d'autant plus que les fenêtres considérées se superposent ; cette méthode fournit cependant une meilleure estimation de l'entropie que la première.

### Limitations des mesures entropiques

Les mesures entropiques ainsi obtenues constituent des mesures à très bas niveau de l'image : elles utilisent uniquement des mesures statistiques brutes du signal basées sur des moments d'ordre 1 du signal. Par conséquent, on ne tient pas compte des dépendances mutuelles et de l'éventuelle

corrélation entre les pixels. Si l'on désirait le faire, il faudrait évaluer une entropie associée aux distributions conjointes des niveaux de gris (entropies d'ordres  $o > 1$ ) : une telle tâche est impossible en terme de capacité mémoire, même pour des images de petite taille. Considérer uniquement les niveaux de gris de l'ensemble n'est cependant pas satisfaisant [Srivastava et al., 2003]. En effet, d'une part, l'**EL** est calculée sur des voisinages bidimensionnels (typiquement, les ensembles qui nous intéressent sont en fait uni-dimensionnels ou fractals [Turiel et al., 1998]), d'autre part, il est impossible de connaître l'importance relative d'un ensemble dans une image sans information complémentaire sur les autres ensembles. La part d'information fournie par un sous-ensemble à toute l'image dépend également de l'information que lui-même reçoit de tous les autres sous-ensembles. Il faudrait tenir compte de ces informations relatives dans le calcul des informations locales et de l'information totale.

### 7.2.3. Entropie multiéchelle

L'information contenue dans une image dépend de l'échelle d'observation, elle est la somme des informations présentes à différents niveaux de résolution. Il apparaît donc naturel d'adopter là encore un traitement multiéchelle pour analyser et extraire l'information à différentes échelles.

#### Mesure multiéchelle de l'information

La mesure entropique définie en (7.5) ne permet pas de mesurer la distribution d'information à différentes échelles de résolution. L'idée d'une mesure entropique multiéchelle est de considérer les variations de l'entropie à travers les échelles pour étudier l'information bas-niveau dans l'image et pour éventuellement identifier des structures, telles que des formes ou des textures, à des échelles différentes, suivant l'information qu'elles contiennent. Cette idée n'est évidemment pas nouvelle en traitement d'image.

Beaucoup de travaux proposent notamment d'effectuer un calcul de l'entropie sur une représentation multiéchelle de l'image afin d'étudier l'influence du facteur d'échelle sur l'entropie. Les méthodes de type *scale-space*, employant des modèles de diffusion pour régulariser la relation d'échelle, sont les méthodes les plus fréquemment employés pour introduire la notion d'échelle. Elles consistent à construire une mesure de l'information basée sur une analyse des représentations multirésolutions [Jägersand, 1995] [Krim et Brooks, 1996]. L'idée d'appliquer la théorie de l'information aux représentations multirésolutions d'une image a notamment été discutée dans [Sporring et Weickert, 1999], où les auteurs s'intéressent à l'évolution de l'entropie à travers les échelles. Cependant, ils interprètent essentiellement l'entropie comme une mesure globale et ne traitent pas localement la notion d'information. Ferraro *et al.* définissent en revanche une mesure locale qui leur permet de segmenter une image, également à partir de ses représentations *scale-space*, et déterminent la production d'entropie (d'information) à travers les échelles [Ferraro et al., 2002]. Cette méthode permet de discriminer différentes régions en fonction de l'information qu'elles contiennent. La production d'entropie mesure la perte locale d'information, elle est forte sur les contours, plus faible dans des régions fortement texturées, et presque nulle dans les régions uniformes. Winter *et al.*

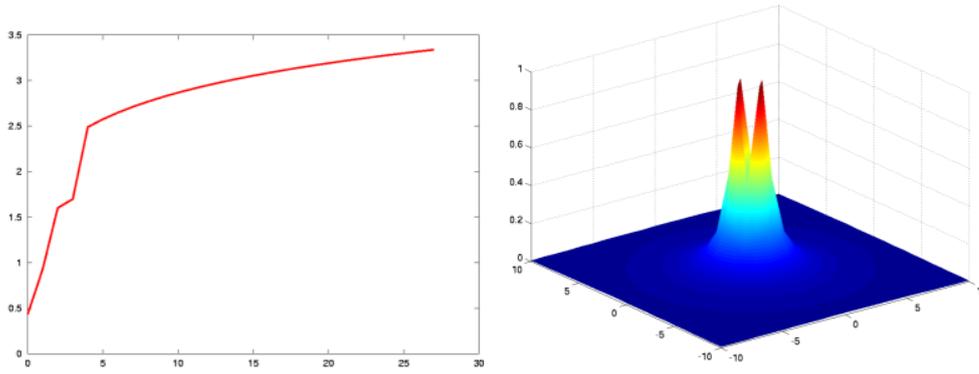


FIG. 7.2.: **À gauche** : évolution de l'ELM moyenne (en bits par pixel) en fonction de la taille de la fenêtre expérimentale choisie pour l'estimation des probabilités marginales sur l'image **IR**. **À droite** : facteur de pondération multiéchelle finalement choisi sur une fenêtre de rayon  $21 \times 21$  pixels.

utilisent également les variations d'entropie à travers les échelles pour étudier l'information et pour identifier les structures significatives à des échelles différentes dans des images satellitaires [Winter et al., 1997]. Ils analysent le comportement d'une image dans les différentes échelles en comparant là encore les images d'échelle de sa représentation multirésolution. L'idée est que les différentes primitives d'une image se répartissent entre les images d'échelle en fonction de leur taille : chaque image de la représentation devrait contenir d'autant plus d'information que l'image originale contient d'objets de l'échelle (*i.e.* la taille) correspondante.

Toutes ces méthodes nécessitent de calculer des représentations multirésolutions des images, ce qui accroît encore la complexité en temps de calcul. L'objection principale à ce type d'approches réside par ailleurs dans la redondance des représentations *scale-space*. Pour notre part, nous entendons considérer toutes les échelles simultanément dans l'estimation de l'entropie.

### Approche proposée

On peut affiner la définition (7.5) de l'EL pour répondre au paradigme d'échelle grâce à l'introduction d'une fonction de pondération spatiale invariante d'échelle dans l'estimation des distributions locales (7.6) des niveaux de gris. La base de représentation du voisinage d'un pixel dans le calcul de l'EL est en effet une grille d'échantillonnage dont tous les éléments ont la même étendue spatiale nulle et interviennent avec la même influence dans le calcul de la mesure entropique. Au lieu de fenêtres  $\mathcal{W}$  uniformes de taille fixe, les pixels intervenant dans le calcul des distributions sont pondérés par une fonction qui décroît en loi de puissance de la distance au pixel d'intérêt.

**Définition 7.5** *L'entropie locale multiéchelle (ELM) associée à un pixel  $\vec{x}$  est définie à l'aide de la formule (7.5), avec les fréquences marginales :*

$$p_{\mathcal{W}}(i) = \sum_{\vec{y} \in \mathcal{W}^*} \delta_{I(\vec{y})=i} |\vec{x} - \vec{y}|^{-2} \quad (7.8)$$

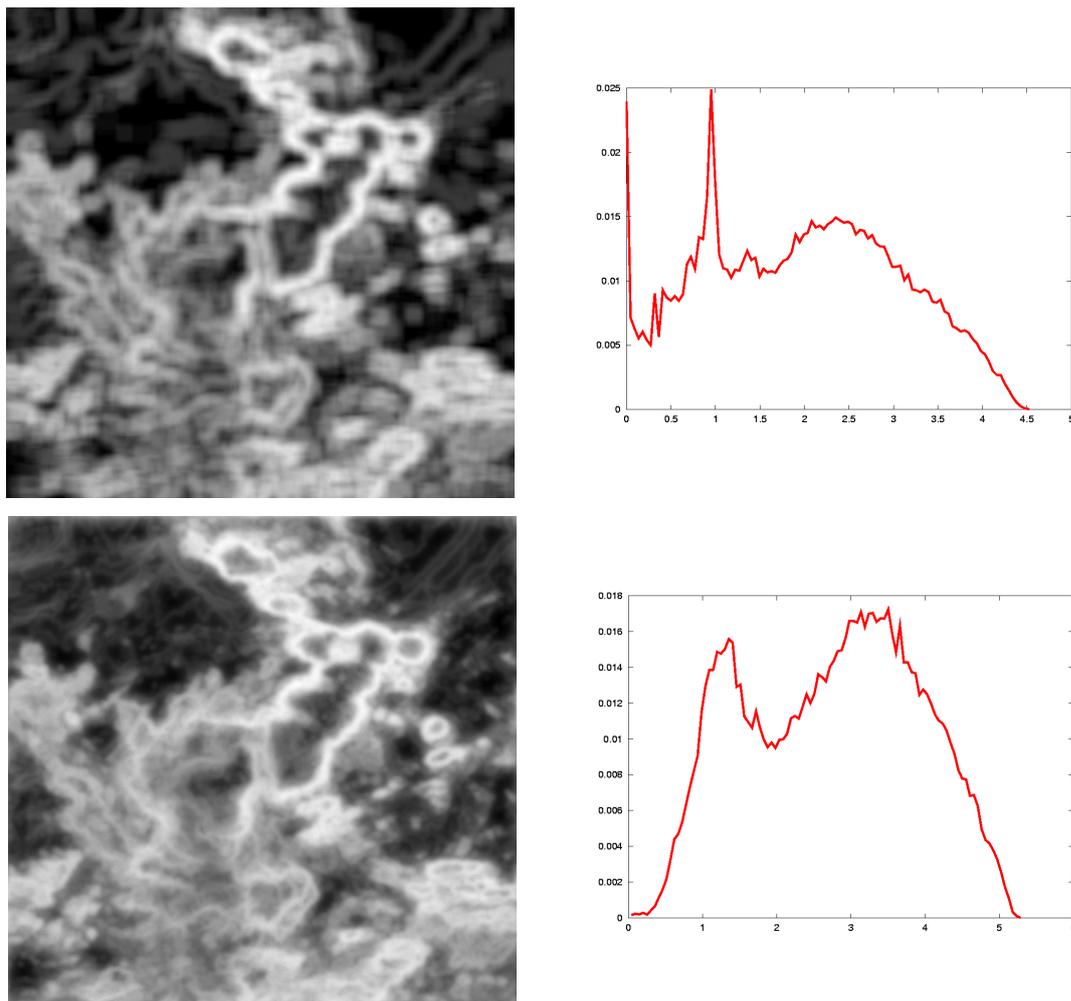


FIG. 7.3.: **De gauche à droite** : représentation de l'entropie estimée sur l'image **IR** de la figure 7.1 et distribution correspondante. **En haut**, l'entropie est calculée sans pondération (**EL**) sur des fenêtres de taille  $10 \times 10$ ; **en bas**, on introduit une pondération multiéchelle (**ELM**) sur des fenêtres de taille  $21 \times 21$ . L'entropie locale moyenne est de  $1.99 \text{ bpp}$  pour le mode de calcul uniforme et de  $2.77 \text{ bpp}$  pour le mode multiéchelle.

où la pondération est effectuée dans la fenêtre  $\mathcal{W}^*$  privée du pixel d'intérêt  $\vec{x}$  lui-même (on lui assigne un poids nul), et le facteur de normalisation  $|\mathcal{W}^*| = \sum_{\vec{y} \in \mathcal{W}^*} |\vec{x} - \vec{y}|^{-2}$ .

Cette définition est bien évidemment à rapprocher de l'équation (4.9) de la définition 4.5 des **MC**-attributs multiéchelles dont elle s'inspire : l'**ELM** calculée ici n'est rien d'autre que l'attribut d'entropie défini au sens de (4.4) calculé dans un cadre **GLV** (cf. section 4.3.2). Afin d'avoir un échantillonnage assez fin du signal et de limiter l'erreur de calcul sur la probabilité estimée, il convient de traiter un nombre suffisamment important de pixels. Comme dans l'approche par **MC** multiéchelles, nous choisissons d'effectuer les calculs sur des fenêtres de dimension  $21 \times 21$  (au-delà de laquelle les changements sont très peu significatifs, figure 7.2). Par ailleurs, nous discrétisons le signal sur  $2^7 = 128$  niveaux de gris à l'intérieur de chaque fenêtre. Le choix de ces paramètres n'implique pas de perte en localisation. Il pourrait cependant être optimisé de manière à obtenir le meilleur

compromis entre la discrétisation du signal et la taille de la fenêtre [Schiele et Crowley, 1998]. Notons par ailleurs que la discrétisation de l'image à l'aide de l'équation (7.3) revient à échantillonner à des valeurs espacées de  $\Delta$  le signal convolué avec un filtre adapté de largeur de bande  $\Delta$ . Cette remarque rejoint l'utilisation des représentations *scale-space* pour un calcul multiéchelle de l'entropie [Sporring et Weickert, 1999]. L'**ELM** ainsi calculée permet d'avoir une idée sur la façon dont l'information d'une image se répartit dans les échelles.

1. On calcule les extrema de l'image. On peut éventuellement périodiser l'image afin d'atténuer les artefacts numériques d'estimation de l'entropie sur les bords.
2. On construit un masque  $\mathcal{M}$  de taille  $n \times n$  de pondération en loi de puissance  $r^{-2}$  à la distance  $r$  au centre du masque. On calcule le facteur de normalisation  $|\mathcal{M}^*|$  qui est la somme des entrées du masque  $\mathcal{M}$ .
3. Le niveau de discrétisation  $N_G$  du signal est fonction de la taille  $n$  du masque :  $\log_2 N_G = 2\lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ .
4. En chaque pixel  $\vec{x}$  de l'image :
  - on considère un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\vec{x}$  de la taille du masque  $\mathcal{M}$ ,
  - on pondère la fréquence des niveaux de gris par les entrées du masque  $\mathcal{M}$ ; pour tout pixel  $\vec{y} \in \mathcal{W}$ , si le niveau de gris observé est  $i$ , alors le poids  $\mathcal{M}(\vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|^{-2}$  est ajouté à l'histogramme des fréquences  $p_{\mathcal{W}}(i)$ ,
  - l'entropie  $s_{\mathcal{W}}(\vec{x})$  calculée à l'aide des  $p_{\mathcal{W}}(i)$  et du facteur  $|\mathcal{W}^*| = |\mathcal{M}^*|$  est assignée au pixel  $\vec{x}$ .

**Algorithme 4:** Calcul de l'**ELM** d'une image.

### Propriétés de l'entropie multiéchelle

L'avantage d'une telle approche est de pouvoir garantir la stationnarité des données sélectionnées, mêmes dans les zones de l'image comportant des structures très fines ou dans des zones texturées et de considérer un échantillon suffisamment grand pour estimer plus précisément les statistiques. Ce modèle permet, comme le précédent, d'étudier les variations spatiales de l'entropie, mais il atteint en plus un compromis entre localisation et qualité de l'estimation (figures 7.3). L'algorithme (4) permettant le calcul de l'**ELM** est extrêmement simple.

La formule (7.7) permet d'accéder à la part d'information relative apportée par un sous-ensemble d'une image en évaluant la part d'entropie qu'il contient localement. Cependant, l'**EL** reste une mesure redondante de la quantité d'information : elle est calculée sur des voisinages de pixels qui se superposent. Un ensemble qui contient la totalité de l'information de l'image peut très bien ne pas contribuer majoritairement à l'entropie calculée à partir des **EL** : cet ensemble peut en effet accroître de façon non négligeable l'estimation de l'**EL** de pixels ne lui appartenant pas mais ayant un voisinage commun. La pondération multiéchelle tend à diminuer cette contribution, mais ce cas de figure est toujours possible. L'**ELM** constitue une mesure toujours redondante de l'information. Il est en fait nécessaire de prendre en compte l'influence de chaque ensemble

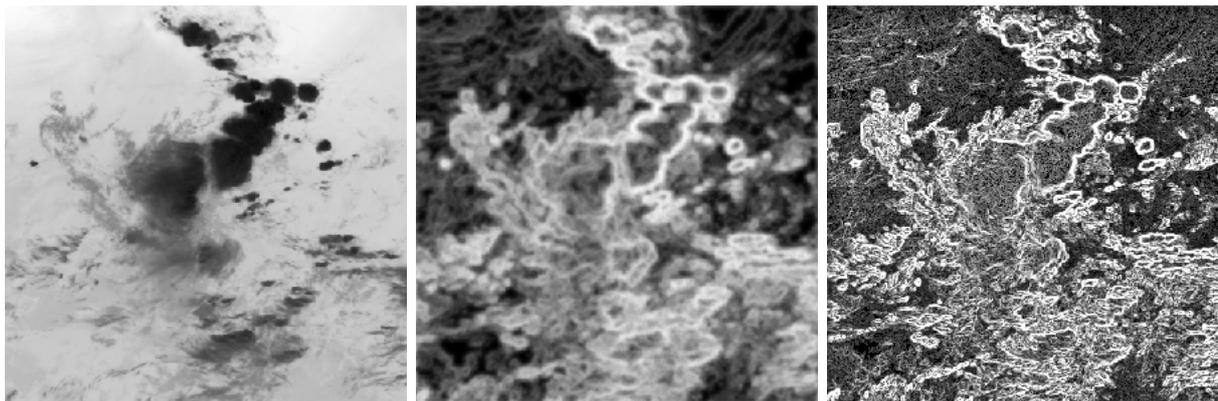


FIG. 7.4.: De gauche à droite : image **IR**, **ELM** et représentation des exposants de singularité (pour les deux dernières images, plus la valeur d'un pixel est claire, plus l'entropie - *resp.* la singularité - est forte en ce pixel).

séparément pour améliorer le critère de mesure de l'information. Par ailleurs, l'entropie d'une image est proportionnelle au contenu de cette image mais aussi à ses propriétés statistiques, radiométriques et fréquentielles. Or l'influence de ces dernières est difficilement modélisable, et c'est pourquoi certaines incohérences peuvent apparaître dans la mesure entropique.

Le caractère fortement non-gaussien des statistiques des images naturelles et leur propriété d'invariance d'échelle [Srivastava et al., 2003] justifie finalement que l'on s'intéresse *a priori* aux statistiques d'ordre supérieur du signal et que l'on incorpore de l'information topologique dans l'analyse des structures présentes dans les images. C'est exactement le point de vue du formalisme multifractal.

### 7.3. Comparaison entre les mesures entropiques et l'analyse multifractale

L'utilisation de l'**ELM** permet d'effectuer une décomposition hiérarchique des images suivant la quantité d'information contenue localement. Similairement, l'utilisation du modèle d'analyse multifractale permet d'obtenir une segmentation des images en regard d'une mesure qui quantifie la régularité locale du signal. Comparons et discutons les deux approches.

#### 7.3.1. Estimation de l'entropie locale des images IR

L'**EG** calculée sur l'image **IR** de la figure 7.4 vaut  $7.26 \text{ bpp}$ , ce qui est relativement proche de la valeur maximale possible pour une image sur 256 niveaux de gris ( $8 \text{ bpp}$ ). Cependant, l'hypothèse de distribution uniforme est clairement mise en défaut. L'estimation de l'**ELM** constitue un bon moyen de caractériser dans l'image les structures significatives, simplement en calculant la part d'entropie totale qu'elles fournissent à l'image. L'**ELM** est essentiellement maximisée sur les contours de l'image. Cette mesure est bien plus significative et confirme que l'information n'est pas

uniformément distribuée dans l'image. L'**EL** moyenne est notamment de  $2.27 \text{ bpp}$ , bien moins que l'**EG**, ce qui montre qu'elle est moins redondante. Cependant, cette mesure étant calculée sur des voisinages qui se superposent, elle reste redondante. La figure 7.4 souligne la bonne correspondance spatiale qu'il existe entre la variable entropique, qui mesure l'information contenue localement, et les exposants de singularité, qui quantifient le degré de régularité locale du signal. En particulier, la variété la plus singulière est proche des maxima locaux de l'**ELM**, tenant compte du fait que les deux techniques employées pour effectuer ces estimations sont très différentes (figures 7.4 et 7.6). Les résultats peuvent être affinés en ajustant les paramètres de détermination de la **MSM**. Pour cet exemple, la **MSM** extraite est relativement grossière et est constituée de 52.15 % des pixels de

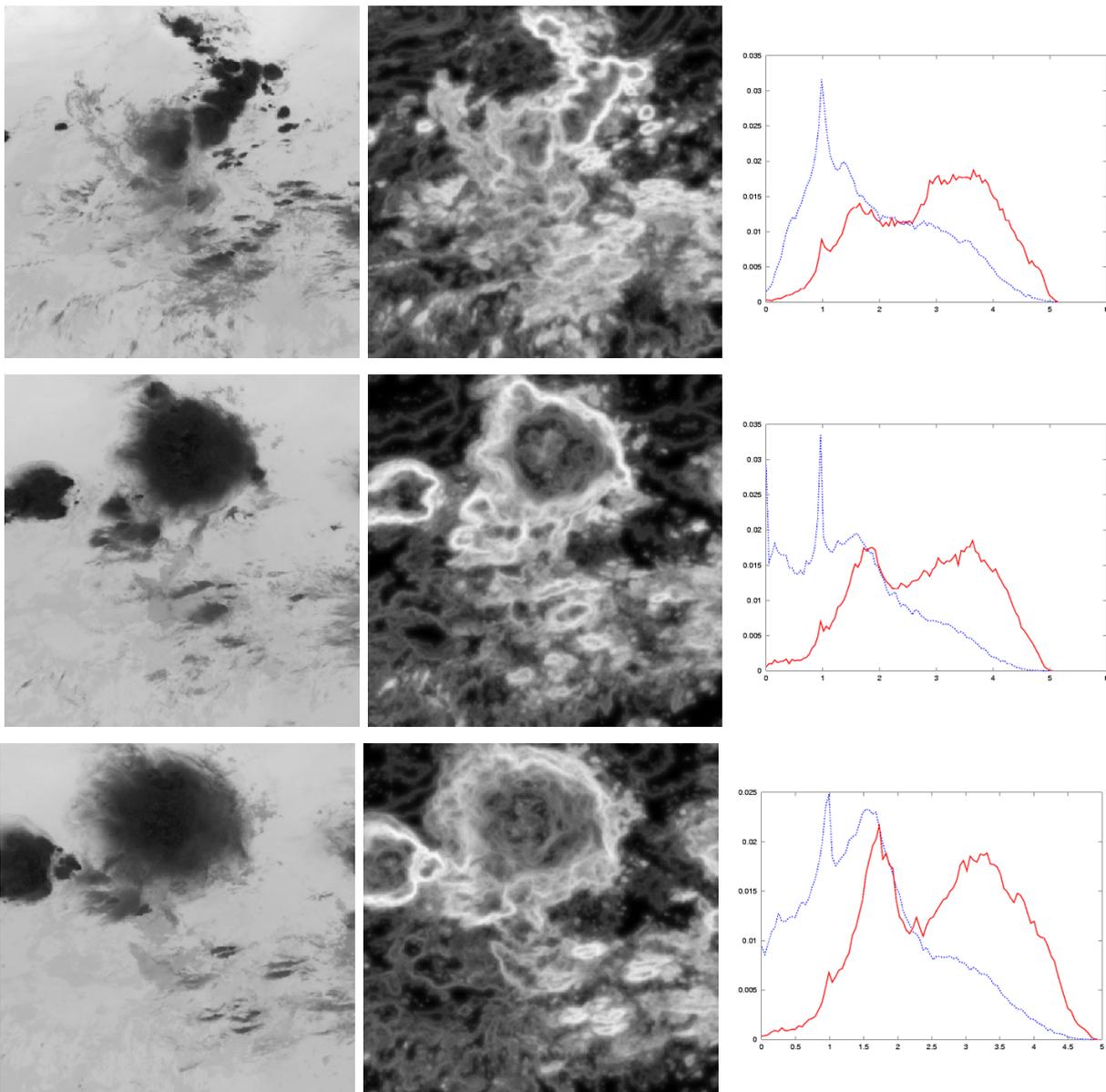


FIG. 7.5.: Calculs d'**ELM** sur des images **IR**. De gauche à droite : images originales, images d'**ELM**, distributions de l'**ELM** sur la **MSM** (en rouge) et sur l'ensemble complémentaire (en bleu). Les fortes valeurs de l'entropie sont concentrées sur la **MSM**.

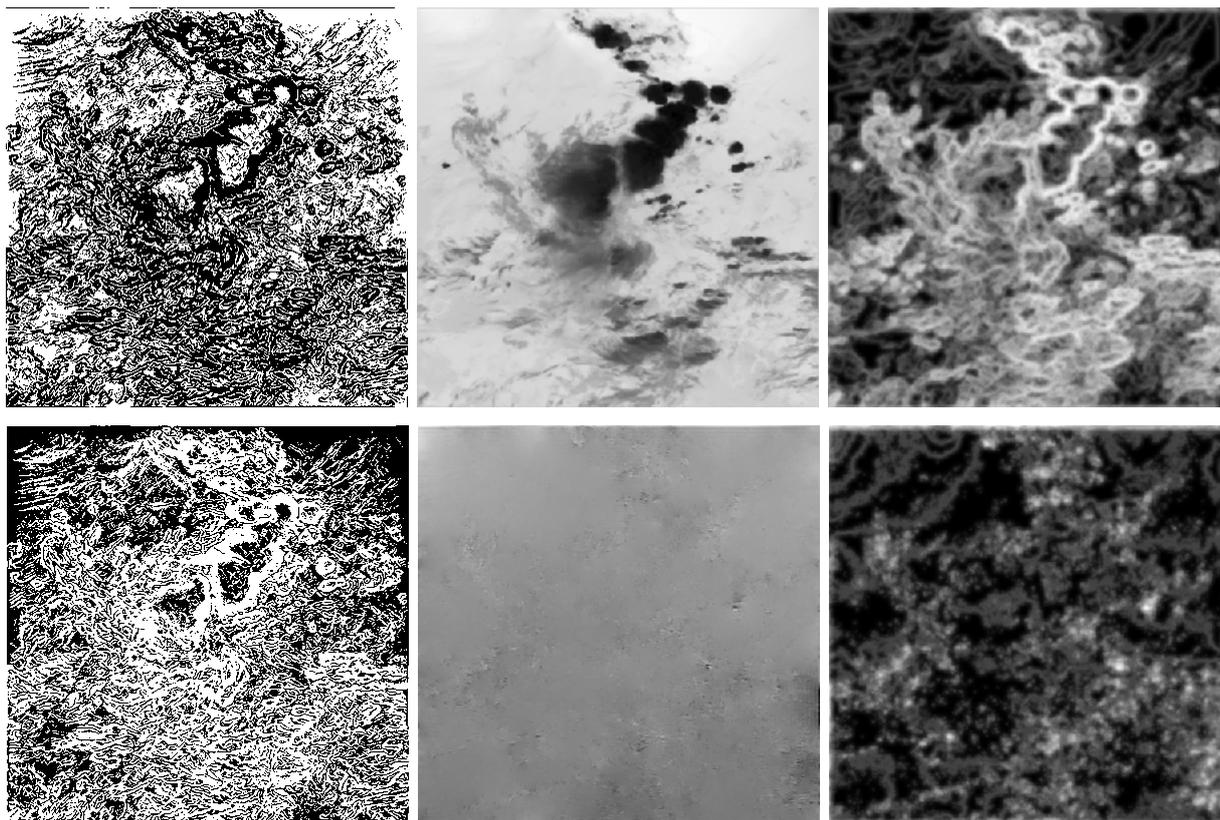


FIG. 7.6.: Mesures de l'ELM pour différentes reconstructions du signal. **De gauche à droite** : ensemble de reconstruction, image reconstruite et entropie multiéchelle sur l'image reconstruite. Les ensembles de reconstruction ici considérés sont la **MSM** (**en haut**, 52.15 % des pixels de l'image) et le complémentaire de la **MSM** (**en bas**). Les reconstructions obtenues ont des *PSNR* resp. égaux à 31.3 dB et 14.59 dB.

l'image (figure 7.6). Cette correspondance confirme le rôle de la **MSM** comme ensemble le plus informatif dans l'image au sens où la connaissance de ce seul ensemble suffit à reconstruire l'image. La figure 7.5 montre que les fortes valeurs de l'entropie sont concentrées sur la **MSM** sur différents exemples d'images **IR**.

L'algorithme multifractal de reconstruction étant linéaire, la reconstruction à partir de la somme des différents ensembles est égale à la somme des reconstructions à partir des ensembles considérés séparément. La reconstruction à partir du complémentaire de la **MSM** est notamment égale au complémentaire de la reconstruction à partir de la **MSM** (la somme des deux reconstructions est égale à l'image originale), et peut ainsi être vue comme une image d'erreur.

Les **EG** calculées sur les images reconstruites à partir de ces deux ensembles valent ainsi respectivement 7.31 *bpp* et 5.62 *bpp* : on voit là encore les limitations de l'**EG** qui ne permet pas d'appréhender l'organisation des structures dans les images, puisqu'en l'occurrence les deux reconstructions n'apportent pas la même information vis-à-vis de l'image originale. On observe en effet que la reconstruction à partir de la **MSM** est bien meilleure que la reconstruction à partir de

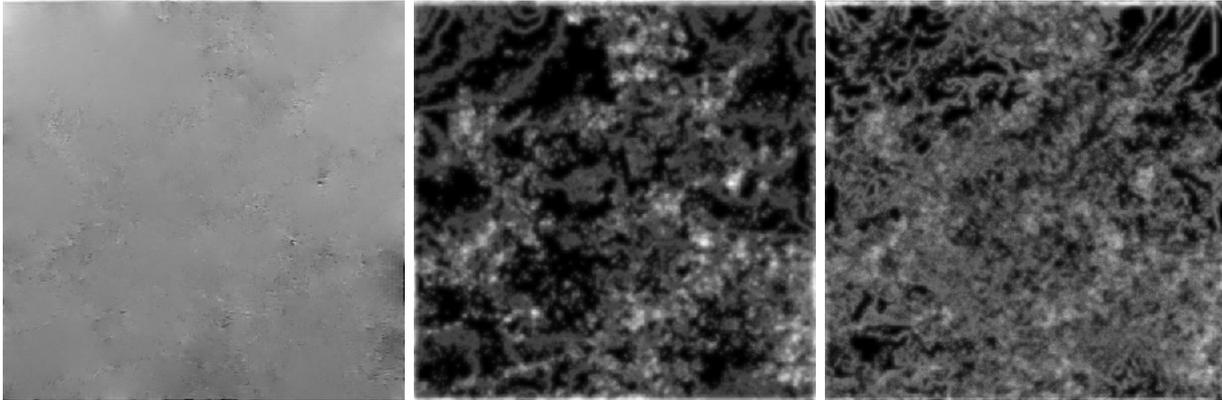


FIG. 7.7.: Image d'erreur de reconstruction à partir de la **MSM** (à gauche) et mesures d'entropie sur cette image : **ELM** (au milieu) et **ELMC** (à droite).

l'ensemble complémentaire (image d'erreur sur laquelle on ne peut discerner que des micro-textures qui ne correspondent pas à des structures significatives de l'image originale), comme le montre le ratio  $PSNR$  (figure 7.6). En revanche, l'**ELM** calculée sur les pixels de la **MSM** vaut  $2.16 \text{ bpp}$ , et est donc proche de l'**ELM** de l'image originale, alors qu'elle ne vaut que  $0.85 \text{ bpp}$  sur les pixels de l'ensemble complémentaire. Cette quantité est donc beaucoup plus significative. Cependant, la valeur de l'**ELM** de l'image reconstruite à partir du complémentaire de la **MSM** indiquerait que cet ensemble fournit encore une part d'information non négligeable sur certaines structures locales de l'image. Une mesure plus appropriée de la fidélité de la reconstruction consiste à considérer des probabilités conditionnelles [Schiele et Crowley, 1998]. Une quantité intéressante est notamment fournie par l'**ELM** conditionnelle (**ELMC**) : celle-ci est définie comme la différence entre l'**ELM** des distributions conjointes des niveaux de gris de l'image originale et de l'image reconstruite (à partir de probabilités conjointes estimées similairement à l'équation (7.8), cf. annexe B) et l'**ELM** de l'image originale [Cover et Thomas, 1991]. L'**ELMC** fournit une mesure de la déviation de l'image reconstruite par rapport à l'image originale ; elle s'annule uniquement quand les deux images sont égales. En fait, cette quantité est exactement égale à l'**ELM** de l'erreur conditionnée par l'image originale : elle mesure donc fidèlement la part d'information qui n'est pas apportée par l'image reconstruite. Ainsi, lorsqu'on calcule cette quantité sur la reconstruction à partir de la **MSM** (l'**ELM** vaut alors en moyenne  $0.67 \text{ bpp}$  seulement), elle apparaît davantage concentrée spatialement sur les régions qui sont effectivement mal reconstruites (figure 7.7).

Il apparaît donc que la caractérisation des sous-ensembles de l'image suivant la quantité d'information qu'ils contiennent est liée à une description multifractale de l'image. La hiérarchie multifractale permet notamment d'accéder aux structures et sous-ensembles les plus informatifs dans l'image.

### 7.3.2. Lien entre les descriptions entropique et multifractale

D'un point de vue méthodologique, nous voyons donc que le formalisme multifractal permet de remédier aux lacunes de la mesure entropique en prenant en compte l'information topologique à différentes échelles et l'information statistique à différents ordres. Nous sommes ainsi en mesure

de proposer une interprétation multi-sémantique (en terme de géométrie, de statistique et d'information) des structures et objets détectés dans l'image à l'aide du modèle multifractal. En reliant la notion d'entropie avec des concepts multiéchelles, on peut également espérer définir un critère de segmentation automatique. Nous envisagerons notamment des applications de segmentation multifractale basée sur des critères entropiques (*cf.* section 7.4).

Concernant les différentes structures extraites, les maxima de l'entropie locale sont en bonne correspondance avec les points d'une structure particulière dans l'image, la **MSM**. Ce résultat peut être montré pour des familles plus générales d'images naturelles. La **MSM** apparaît là encore comme l'ensemble le plus pertinent puisque :

- du point de vue de la *théorie de l'information*, c'est l'ensemble le plus riche en information dans l'image,
- du point de vue de la *théorie multifractale*, elle autorise la reconstruction de l'image.

Il n'est donc pas surprenant que, dans une optique de codage et de compression, elle soit utilisée pour la reconstruction du signal [Turiel et del Pozo, 2002]. Il paraît en fait naturel que toute connaissance *a priori* sur la structure statistique permette d'améliorer le codage. En conséquence, la **MSM**, qui détermine complètement le processus log-Poisson de modélisation des transitions du signal (*cf.* chapitre 6), constitue une représentation compacte de l'image dont elle est extraite. Cela justifie pleinement l'utilisation de la **MSM** comme structure de codage, et même comme ensemble de représentation de l'image.

Notons par ailleurs que Sparring et Weickert soulignaient le lien entre les différentes représentations du signal que sont [Sparring et Weickert, 1999] : les entropies généralisées [Renyi, 1992], le spectre multifractal, les moments des niveaux de gris et l'histogramme des niveaux de gris lui-même. Cependant, la correspondance était établie entre entropies généralisées globales et spectres multifractals. De manière similaire, il pourrait être montré que la distribution de la norme du gradient de l'image (et non pas l'image elle-même) est en correspondance bijective avec le spectre multifractal, *i.e.* que la connaissance de l'histogramme des niveaux de gris de  $|\nabla I|$  permet de déterminer complètement le spectre  $D(h)$  associé aux exposants de singularité  $h$  [Turiel et Pérez-Vicente, 2003a]. Pour notre part, nous nous contentons d'établir une correspondance qualitative entre des attributs locaux, *i.e.* entre les exposants de singularité et la variable entropique.

### 7.3.3. Conclusion

L'introduction de l'**ELM** pour décrire les images constitue un prologue naturel du modèle global d'entropie et fournit une interprétation supplémentaire aux résultats de l'analyse multifractale. Elle permet notamment d'établir un lien entre des méthodes issues de la théorie de l'information (au travers des mesures entropiques) et des concepts multiéchelles (à l'aide de l'outil multifractal). Les structures mises en évidence à l'aide du modèle multifractal pour leurs propriétés statistiques et géométriques s'avèrent également significatives pour l'information qu'elles apportent. L'interprétation des structures est multi-sémantique. Du point de vue méthodologique, on voit dans la prise en compte de propriétés de natures diverses pour caractériser les structures d'une image, un autre avantage à l'utilisation du modèle d'analyse multifractale.

Les propriétés thermodynamiques, déduites de cette analyse conjointe, doivent maintenant être recoupées avec les caractéristiques des images météorologiques. En effet, l'acception du terme "entropie" est multiple, et les mesures effectuées à l'aide de cette quantité peuvent être appréhendées de diverses façons. Notre espoir est que, dans le contexte de l'analyse d'images **IR**, qui sont des mesures d'une grandeur thermodynamique, cette approche nous fournisse une caractérisation thermodynamique des systèmes observés. En l'occurrence, on espère relier l'entropie telle qu'elle est définie ici avec l'entropie réelle des phénomènes atmosphériques sous-jacents. Là encore, la **MSM** va apparaître comme une structure essentielle.

## 7.4. Des applications du modèle multifractal à l'analyse d'images satellitaires - Partie II

Comme cela est déjà suggéré dans [Krim et Brooks, 1996], nous proposons de combiner les concepts entropiques et les méthodes multiéchelles, en l'occurrence, le modèle d'analyse multifractale et les mesures fournies par l'**ELM**, dans des applications de segmentation.

### 7.4.1. Présegmentation d'images haute-résolution

#### Contraintes liées à l'imagerie **HR**

Les dernières générations de capteurs embarqués permettent l'acquisition de nouvelles classes d'images ayant une très forte résolution spatiale (haute-résolution, **HR**). On pense ainsi aux images acquises par les satellites **Spot 5** ( $2.5 \times 2.5 m$  par pixel), **Ikonos** ( $1 \times 1 m$ ) ou encore **QuickBird** ( $0.7 \times 0.7 m$ ). L'accès à une information aussi détaillée sur les propriétés des surfaces observées est de première importance. Des objets de plus en plus petits (rues, maisons, arbres, ... sur des images de zone urbaine par exemple), des contours très précis (champs de culture) sont accessibles. Cependant, l'exploitation de ces données devient très complexe compte tenu de la grande quantité d'information accessible. Les outils classiques sont de moins en moins efficaces : leur utilisation est essentiellement contrariée par la grande hétérogénéité des objets exhibés dans les images **HR**. Avec l'augmentation de la résolution spatiale, la variabilité spectrale des objets augmente également, ce qui affecte naturellement la précision de n'importe quelle méthode de classification ou de segmentation des images [Schiewe, 2002]. Il est courant qu'un processus de segmentation produise à la fois une sous et une sur-segmentation des différentes scènes d'une même image, compte tenu de leur hétérogénéité. Les images **HR** peuvent en effet exhiber des textures locales plus compliquées, car contenant plus de détails, et les objets (champs, bâti,...) ne sont plus homogènes et n'ont alors plus de caractéristiques qui permettent de les distinguer les uns des autres. Ces contraintes contrarient bien évidemment tout traitement ultérieur des données car elle dénature l'information fournie (au moins visuellement) par les images [Schowengerdt, 1997].

Il est par conséquent nécessaire d'introduire des outils permettant l'exploitation de l'imagerie **HR**. Ceux-ci doivent permettre d'effectuer, avant tout traitement de haut niveau, une simplification du contenu des images **HR** tout en préservant l'essentiel de l'information. Cependant, il convient de

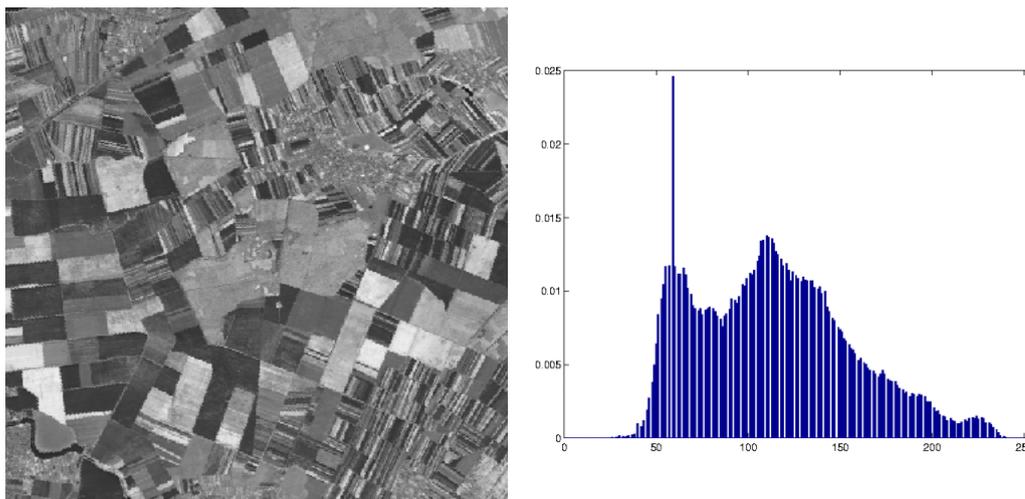


FIG. 7.8.: Image **Spot** moyenne résolution ( $20 \times 20 m$  par pixel) et distribution des niveaux de gris sur cette image. On peut observer sur cette scène des champs de culture, une rivière, des routes mais également des zones urbaines mal délimitées.

définir au préalable ce que l'on entend par "information essentielle". Intuitivement, celle-ci est tout naturellement portée par les contours de l'image. En théorie, c'est aussi le cas : selon la conjecture de [Marr, 1982], l'information essentielle dans une image est contenue dans les bords des objets. Le problème est ainsi relié à l'idée d'une réduction sélective de la résolution. Une méthode adaptée à la présegmentation d'images **HR** devrait idéalement :

- préserver les principaux contours des objets de l'image,
- lisser les autres parties de l'image.

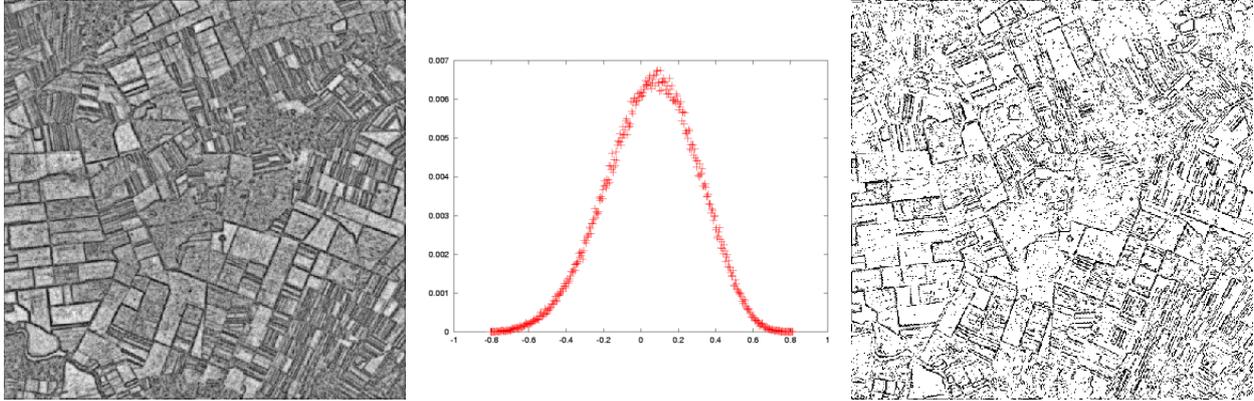
On voit donc que la présegmentation se ramène essentiellement à deux problèmes : comment, tout d'abord, définir, sélectionner et extraire les contours significatifs ? Comment, ensuite, "lisser" de manière sélective l'image ? Ces problématiques recourent celles de la fusion de données abordée en section 5.6.3.

Dans la suite, on utilise, en première validation, des images **Spot** de moyenne résolution (figure 7.8) car nous ne disposons pas de données **HR**. La méthode que nous allons présenter pourra tout naturellement s'étendre à des échantillons d'images **HR** pour lesquelles elle devrait fournir des résultats plus significatifs. Remarquons que l'image que nous considérons (comme toutes les images **HR** généralement, qui sont très structurées) ne vérifie pas rigoureusement le formalisme multifractal : elle présente des objets ayant des échelles bien définies, il y a des échelles préférentielles dans l'image.

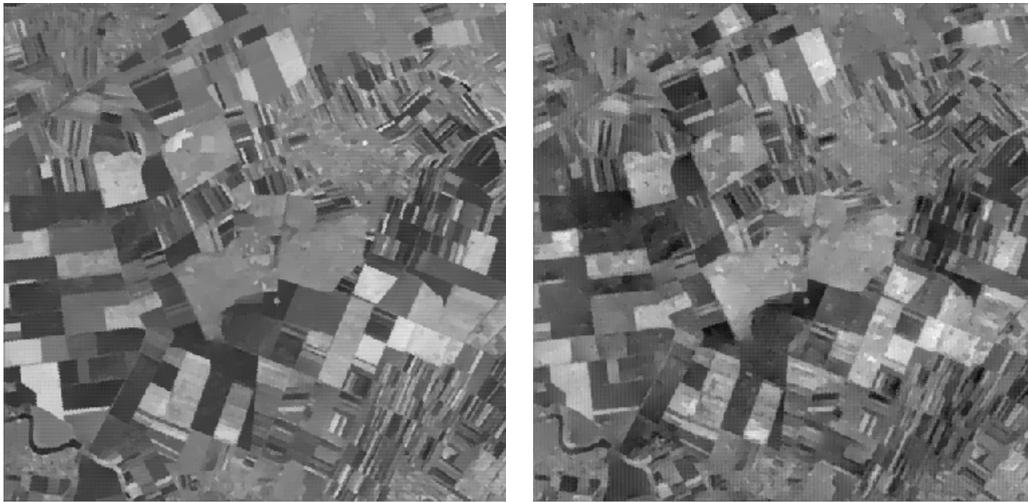
### Description de la méthode

Récemment, Laporterie-Déjean *et al.* ont proposé une méthode multiéchelle, dérivée d'une méthode de compression de données, afin de présegmenter des images **HR** [Laporterie-Déjean et al., 2003]. La méthode consiste à utiliser un algorithme de décomposition multiéchelle et à effectuer une

reconstruction incomplète (et donc inexacte) : à l'aide de pyramides morphologiques, l'image est décomposée en détails et approximations, puis elle est reconstruite en abandonnant certains détails. Nous allons adopter une approche similaire, pour laquelle nous allons employer l'algorithme de reconstruction présenté en section 5.5 dans le but de présegmenter les images **HR**. Nous proposons une approche similaire utilisant le modèle de reconstruction multifractal [Grazzini et al., 2004].



(a) **À gauche** : représentation des exposants de singularité ramenés dans l'intervalle de valeurs  $[0, 255]$  ; plus le niveau de gris d'un pixel  $\vec{x}$  est clair, plus la valeur de l'exposant  $h(\vec{x})$  en ce point est grande. **Au milieu** : distribution des exposants de singularité ; le rang de valeurs obtenues pour les  $h(\vec{x})$  est  $[-0.8, 0.81]$ . **À droite** : **MSM** extraite pour  $h_\infty = -0.42 \pm 0.3$  ; quantitativement, la **MSM** contient 22.29% des pixels de l'image.



(b) Reconstructions à l'aide de la formule (5.57) et de la **MSM** de la figure 7.9(a). **De gauche à droite** : **FRI** et **CRI**, *resp.* reconstruites avec le gradient essentiel  $\nabla I_\infty$ , déduit du gradient original, ( $PSNR = 24.93 dB$ ) et le champ réduit  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  ( $PSNR = 21.34 dB$ ).

FIG. 7.9.: Schéma d'analyse multifractale de l'image **Spot** de la figure 7.8.

On sait (*cf.* chapitre 5) que le modèle de reconstruction multifractal à partir de la **MSM** préserve cet ensemble : image originale et image reconstruite ont la même structure multifractale, *i.e.* la

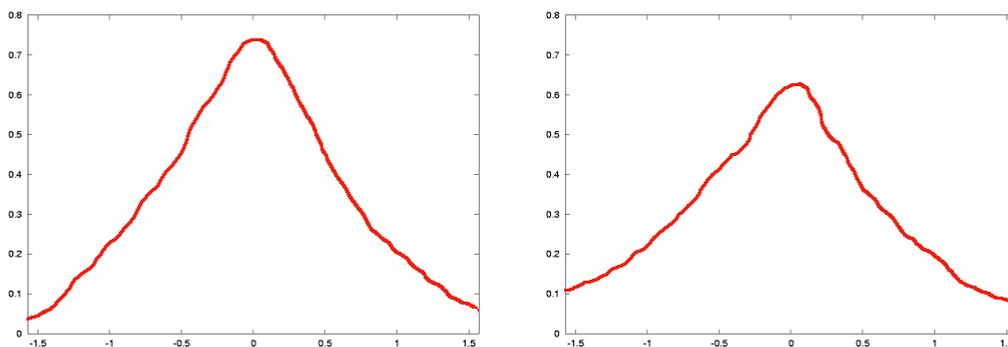


FIG. 7.10.: Distribution de l'angle de déviation entre les champs  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  et  $\nabla I_{\infty}$  mesurée sur les pixels de la **MSM** de l'image **Spot** (à gauche). À titre de comparaison, on a représenté, à la même échelle, la distribution de l'angle de déviation sur l'image **Meteosat IR** de la figure 7.1, pour une densité égale de pixels dans la **MSM** (à droite). La distribution des angles sur l'image **Spot** est nettement plus concentrée autour de l'angle nul.

même **MSM**. On entrevoit donc un premier avantage à utiliser cet algorithme :

- (i) il permet de préserver les contours de l'image **HR** à présegmenter.

Pour les autres régions de l'image, il reste à les approximer grossièrement. Or, l'algorithme de reconstruction constitue, comme nous l'avons vu, un processus de propagation. Rappelons que le noyau de reconstruction est une fonction de Green d'une équation de diffusion, *i.e.* la reconstruction consiste en fait à diffuser les valeurs du signal sur la **MSM** aux autres régions de l'image. Nous voyons donc que l'algorithme répond à la deuxième contrainte de présegmentation :

- (ii) les régions en dehors de la **MSM** (et donc autres que les contours) sont lissées.

Nous connaissons deux exemples d'images reconstruites à l'aide du modèle multifractal : la **FRI**, qui constitue une bonne approximation de l'image originale, et la **CRI**, qui offre une distribution de luminance plus uniforme (ici considérée pour ses propriétés géométriques uniquement). Nous proposons d'utiliser ces approches comme outil de présegmentation.

Sur la figure 7.9(a), nous avons représenté les exposants de singularité calculés sur l'image **Spot** de la figure 7.8. On voit que les valeurs de singularité les plus faibles sont essentiellement concentrées près de et sur les contours des principaux objets de l'image (champs de culture au milieu, rivière dans la partie inférieure) ou dans des petites zones très différenciées (zone urbaine en haut). Mais d'autres sont également détectées dans des zones *a priori* plus homogènes (intérieur des champs). Sur les images de reconstruction et les détails extraits de ces mêmes images (figures 7.9(b) et 7.11), on peut voir que :

- il y a, pour les deux reconstructions, un fort degré de lissage dans les zones plutôt homogènes,
- la plupart des bords sont conservés, même lorsqu'ils ne correspondent qu'à de faibles variations de niveau de gris,
- même s'il peut arriver que les bords entre les petites surfaces soient supprimés, comme pour les petits champs de culture, les petites régions homogènes sont généralement conservées.

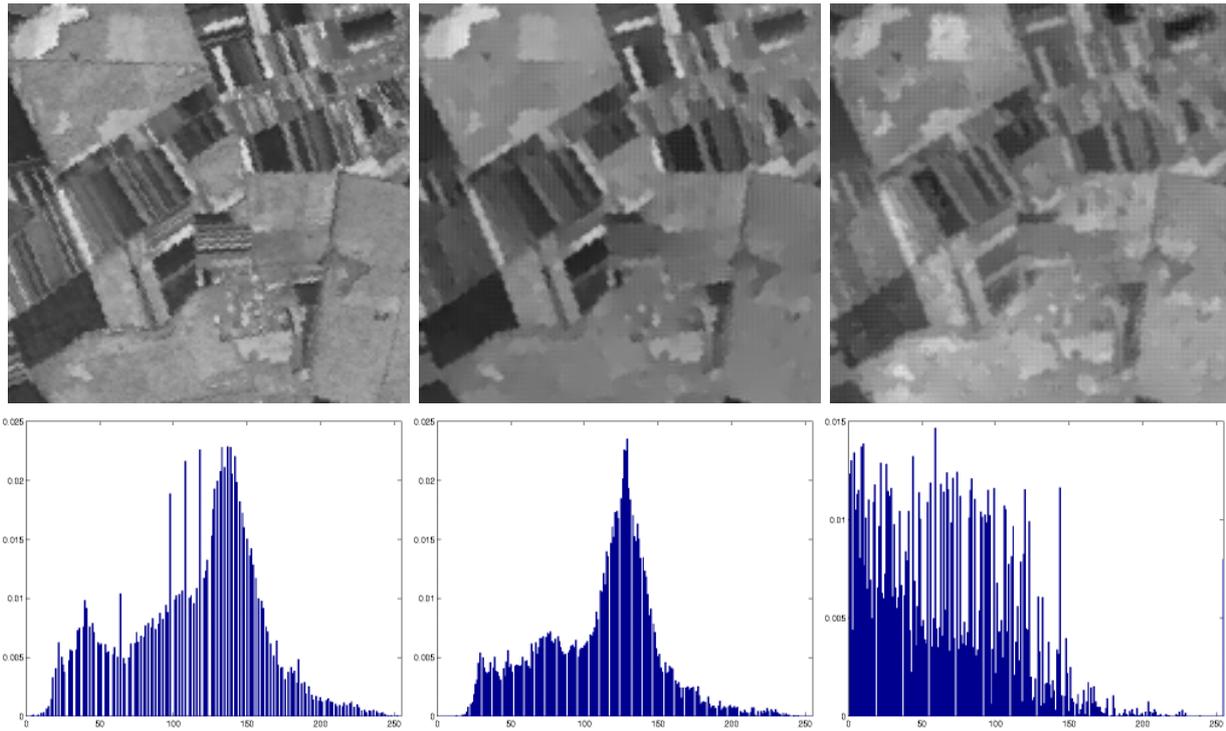


FIG. 7.11.: Comparaison des images reconstruites avec l'image originale (**en haut**) et distribution de niveaux de gris correspondantes (**en bas**). **De gauche à droite** : détail de l'image originale, détails des images *resp.* reconstruites avec le champs  $\nabla I_\infty$  et  $\nabla I_0$ .

La ressemblance entre les deux reconstructions est principalement due au fait que, sur ce type d'images la déviation du champ  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  vis-à-vis du champ  $\nabla I_\infty$  n'est pas très importante. En effet, les structures visualisées sur les images **Spot**, telles que les champs de culture, sont plutôt régulières avec des contours rectilignes. La déviation mesurée entre les deux champs apparaît en tout cas beaucoup plus faible (en moyenne) sur les pixels de la **MSM** d'une image **Spot** que sur ceux de la **MSM** extraite d'une image **Meteosat IR** (figure 7.10). Par conséquent, en première approximation, la **CRI** peut être utilisée pour fournir l'information sur les frontières. Cependant, les distributions de niveaux de gris correspondantes montrent que :

- la **FRI** est une version régulière de l'image originale, dont la distribution est plus lisse que celle de l'image originale et dont les pics ont été éliminés,
- la distribution de luminance de la **CRI** est complètement différente.

En effet, la **CRI** représente une vue de la même scène, avec les mêmes objets et la même structure géométrique que la **FRI** mais avec une distribution de la luminance différente. Bien que la **CRI** présente l'avantage d'offrir une représentation plus compacte de l'image originale, on retient finalement la **FRI** comme approximation appropriée.

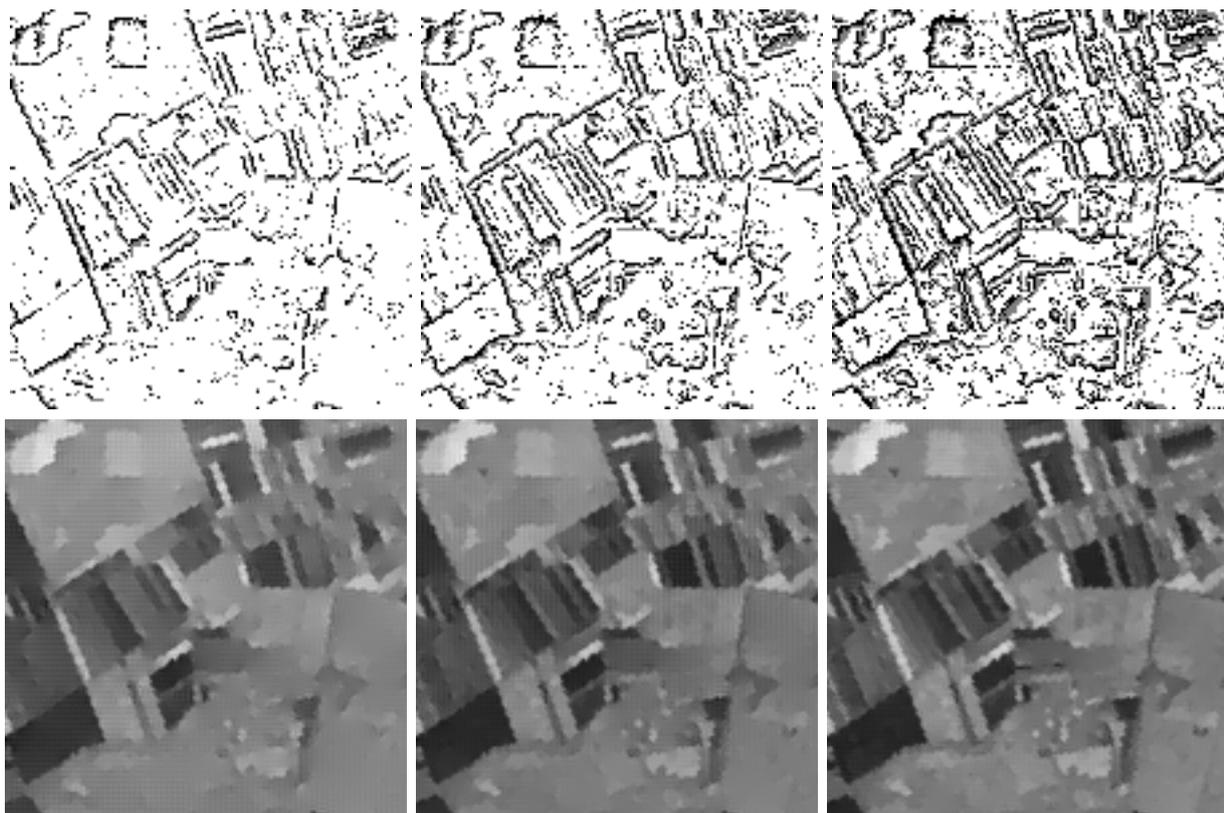


FIG. 7.12.: **FRI** obtenues (**en haut**) en considérant différentes **MSM** pour la reconstruction (**en bas**). Le paramètre de discrimination entre les **MSM** est leur densité dans l'image ( $d_\infty$ , *i.e.* la proportion de pixels inclus dans l'estimation de la **MSM**). **De gauche à droite** : 13.9% et  $PSNR = 23.51\text{ dB}$ , 22.3% et  $PSNR = 24.93\text{ dB}$ , 32.5% et  $PSNR = 25.30\text{ dB}$  (le  $PSNR$  est calculé sur les images entières). Le détail du milieu et celui de la figure 7.11 sont les mêmes.

## Résultats

La stratégie de reconstruction permet d'obtenir des régions très homogènes tout en préservant l'information principale contenue dans les contours des objets. Le calcul d'une image **FRI** permet de régulariser l'image originale tout en préservant ses contours : le bruit est supprimé dans les régions homogènes tandis que les structures importantes ainsi que la distribution de la luminance sont préservées. Une analyse plus fine de l'image montre également que des textures relativement fines, comme des petits champs de culture, sont conservées, tandis que les petites hétérogénéités qu'elles contiennent sont supprimées. L'approximation de l'image originale est de bonne qualité pour la **FRI**. Les principales structures ne sont pas endommagées, ce qui serait préjudiciable pour des traitements ultérieurs (classification ou segmentation) établis sur les attributs de l'image.

Notons enfin qu'un des principaux avantages de cette approche est qu'elle est paramétrable. Puisque l'algorithme de reconstruction de la **FRI** est linéaire, l'image de présegmentation permet d'approximer l'image originale autant que l'on souhaite (*cf.* méthode de compression de la section 5.6.2).

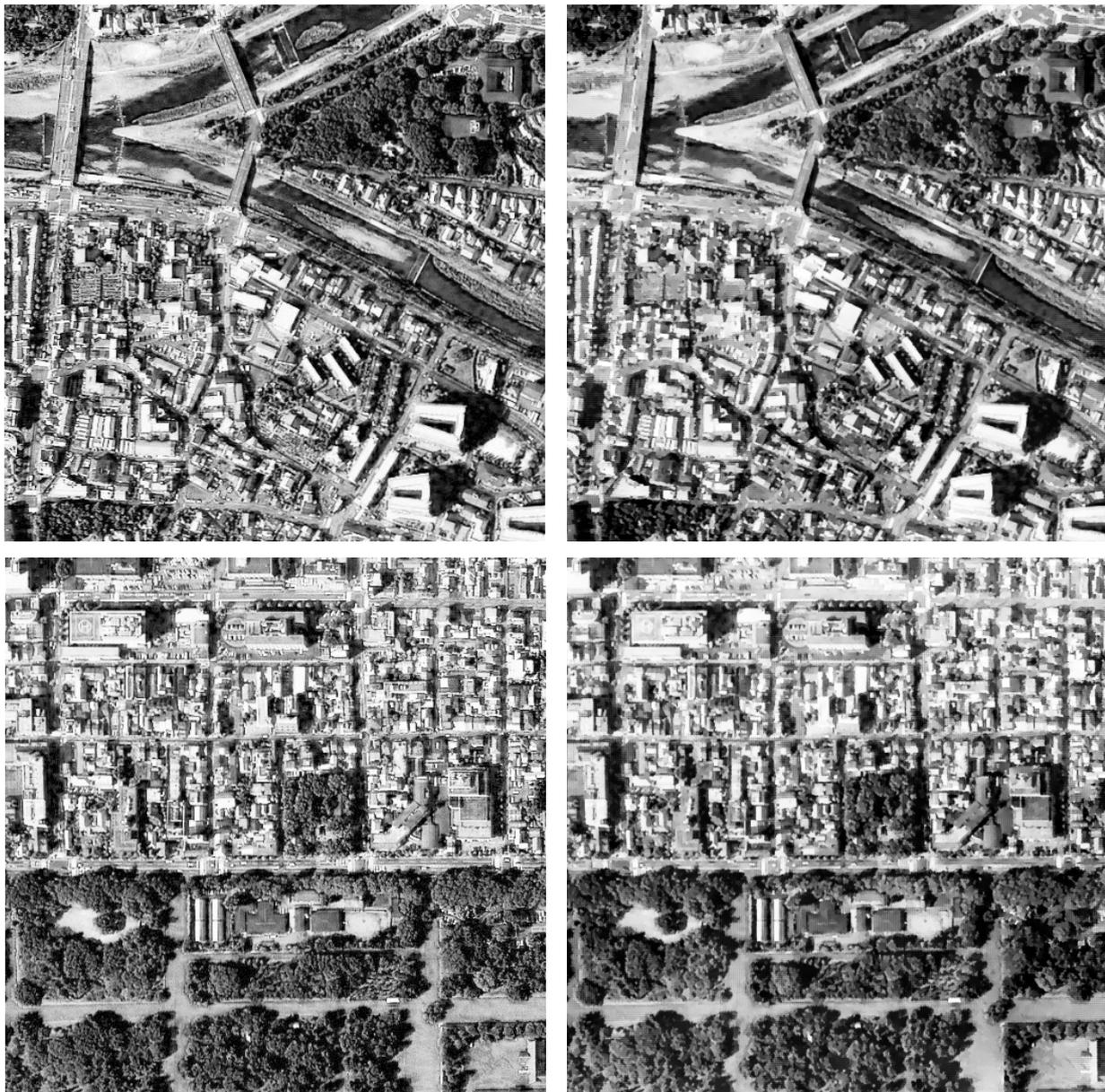


FIG. 7.13.: Résultats de présegmentation d'images **Ikonos** de résolution spatiale  $1 \times 1 m$ . À **gauche** : images originales, à **droite** : images segmentées. Les zones visualisées sont deux quartiers de Kyoto (Japon). Les contours des principaux bâtiments sont conservés tandis que le reste de l'image est lissé; des objets plus complexes tels que les arbres sont également bien restitués.

De cette manière, le degré de lissage des objets dans l'image peut être contrôlé. Sur la figure 7.12, on peut voir que des détails de l'image sont progressivement incorporés dans la reconstruction au fur et à mesure que l'on augmente la proportion de pixels contenus dans la **MSM**. La fidélité à l'image originale peut ainsi être ajustée, en incorporant graduellement autant de détails de l'image originale que souhaité.

### Discussion

Comme dans [Laporterie-Déjean et al., 2003], l'approche que nous proposons se résume essentiellement en :

- une détection multiéchelle des contours qui contiennent l'essentiel de l'information de l'image,
- une reconstruction incomplète de l'image originale qui permet de préserver les contours préalablement détectés.

Le caractère multiéchelle de l'étape d'extraction permet de retenir l'information importante des bords à partir de l'image originale. La **MSM** extraite est, en effet, principalement composée de pixels provenant des frontières des objets de l'image. L'étape de reconstruction à partir de cette composante est consistante avec la conjecture de Marr [Marr, 1982].

Le modèle permet ainsi d'obtenir une représentation de l'image par des régions homogènes (à la place de petites zones hétérogènes) sur lesquelles pourront être calculés les attributs de description utilisés dans tout traitement ultérieur. À titre d'illustration, les résultats de segmentation d'images **Ikonos HR** sont présentés sur la figure 7.13.

#### 7.4.2. Restauration d'images satellitaires

##### Objectifs de la restauration

Dans la continuité des considérations précédentes, nous envisageons également de combiner l'approche multifractale avec la description entropique pour restaurer des images satellitaires. L'objectif de la restauration est de fournir à partir d'une acquisition satellitaire une image qui s'approche le plus de la scène réelle observée. En effet, une image satellitaire comporte généralement du bruit et des dégradations dues à l'optique et à l'électronique utilisées pour son acquisition. Les méthodes les plus souvent rencontrées sont les approches de déconvolution, qui nécessitent l'introduction de modèles de bruit et d'images [Jalobeanu, 2001]. Nous proposons pour notre part d'effectuer un traitement multifractal de l'image satellitaire puis d'opérer une reconstruction sur la base de critères entropiques. Nous esquissons ici les grandes lignes de cette approche, mais celle-ci mériterait d'être davantage approfondie et mathématiquement formalisée.

##### Description de la méthode

L'idée est là encore d'exploiter pleinement les avantages du modèle multifractal :

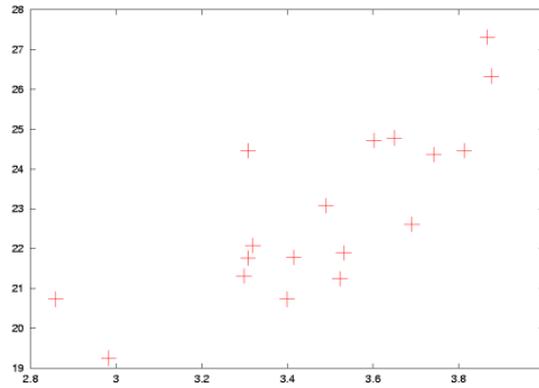


FIG. 7.14.: Graphe des valeurs de  $PSNR$  (ordonnées) de différentes **FRI** en fonction de l'entropie locale moyenne (abscisse) de la **MSM** utilisée pour la reconstruction. Les calculs ont été effectués pour 18 reconstructions à partir de **MSM** ayant la même densité dans l'image. La meilleure approximation est obtenue pour une **MSM** de forte entropie moyenne.

- l'information pertinente de l'image (considérée bruitée) est extraite grâce au modèle de décomposition,
- elle est restituée dans l'image restaurée grâce au modèle de reconstruction,
- l'information non pertinente est éliminée ou corrigée.

Toute la question porte sur la caractérisation de l'"information pertinente" ; or, nous avons défini une variable, l'**ELM**, qui permet de quantifier cette notion. La restauration de l'image est effectuée comme une reconstruction du signal bruité en tenant compte d'un critère basé sur l'**ELM**.

Grâce au modèle de décomposition multifractale, nous extrayons la **MSM** qui contient toutes les transitions irrégulières de l'image, à tous les niveaux de résolution. En particulier, des pixels correspondant à du bruit peuvent tout naturellement être détectés dans la **MSM** comme appartenant à cet ensemble, de sorte que l'algorithme de reconstruction reconstruira également le bruit. L'utilisation d'un critère entropique, *via* la variable d'**ELM**, permet de remédier à cet inconvénient. En effet, l'utilisation de la généralisation multiéchelle permet de réduire l'influence du bruit dans l'estimation des distributions servant au calcul de l'entropie : cette variable apparaît beaucoup moins bruitée que l'image originale car elle lisse les zones où du bruit est présent. On propose alors de filtrer la **MSM** en ne sélectionnant que les points qui contiennent la plus grande part d'information dans l'image au sens de l'**ELM**. Ce nouvel ensemble, constitué des points les plus singuliers et les plus informatifs à la fois, est utilisé comme ensemble de reconstruction par l'algorithme multifractal de reconstruction. Ainsi, les pixels de la **MSM** utilisés pour la reconstruction vérifient une relation double :

$$h(\mathbf{x}) \approx h_\infty \quad \& \quad s(\mathbf{x}) \geq s_{thres}$$

où  $s_{thres}$  est une valeur de seuil en dessous de laquelle les pixels sont considérés comme non pertinents, *i.e.* ils n'apportent rien à la connaissance de l'image. En suivant ce critère de reconstruction, on pourrait montrer que pour différentes configurations de **MSM** ayant sensiblement les mêmes valeurs d'exposants de singularité ( $h_\infty - \Delta h \leq h(\mathbf{x}) \leq h_\infty + \Delta$  pour les pixels des différentes **MSM**)

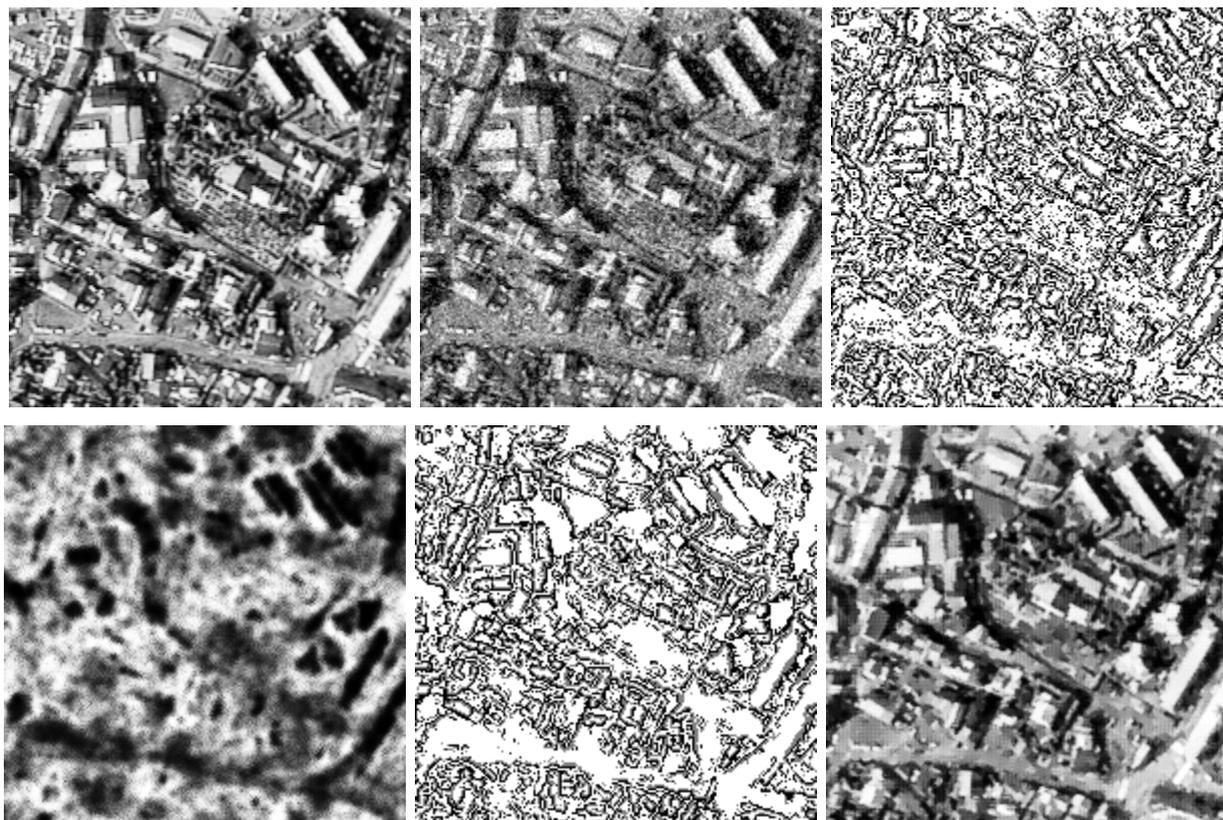


FIG. 7.15.: Exemple de restauration d'une image **Ikonos HR** sur la base d'un critère entropique. **De gauche à droite** : détail **Ikonos** original ( $1 \times 1 m$ ), détail bruité, extraction de la **MSM** sur l'image bruitée, **ELM** de l'image bruitée, filtrage de la **MSM** suivant la quantité d'information contenue localement et image restaurée en effectuant une reconstruction à partir de la **MSM** filtrée.

et avec la même densité dans l'image, la meilleure approximation de l'image originale est fournie par la **MSM** ayant l'entropie moyenne la plus forte (*cf.* figure 7.14).

### Discussion

L'avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite pas d'introduire un modèle d'image ou un modèle de bruit. Cependant, elle nécessite de définir certains paramètres, notamment le seuil d'entropie en deça duquel les pixels sont considérés comme non informatifs et également le degré de régularité (*i.e.* le pas  $\Delta h$  servant à l'estimation de la **MSM**). Sur l'exemple de la figure 7.15, nous présentons le résultat de la restauration d'une image bruitée suivant notre méthode. Les paramètres de cet exemple ont été choisis arbitrairement. Le résultat est plutôt intéressant, comme le bruit est assez bien supprimé tandis que les structures principales de l'image sont préservées. Cependant, le modèle devra être approfondi pour être validé.

Plus généralement, on pourra envisager de combiner ces approches afin de définir par exemple des critères de segmentation automatique. Les mesures fournies par l'**ELM** pourraient servir de

validation pour la méthode de l'analyse multifractale.

## 7.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous réabordons tout d'abord le problème de l'extraction de structures d'intérêt dans une image comme un problème classique de traitement du signal dans lequel la notion d'information permet de quantifier l'apport de sous-ensembles de l'image à la connaissance de l'image entière. Pour cela, l'introduction d'une entropie locale, estimée par une méthode multiéchelle, constitue une extension des mesures entropiques classiques et permet d'extraire des régions pertinentes. Cette approche conforte finalement l'approche multifractale, et permet d'étendre l'interprétation des résultats obtenus dans les chapitres précédents. L'utilisation combinée de concepts entropiques et de méthodes multiéchelles laisse entrevoir de nombreuses applications.

L'utilisation de l'**ELM** permet de mettre en évidence la pertinence des structures et objets détectés à l'aide du modèle multifractal. Du point de vue méthodologique, il apparaît que le formalisme multifractal est particulièrement adapté à l'analyse des images **IR** (et en fait, à l'analyse d'images naturelles quelconques). L'approche multifractale permet de concilier plusieurs points de vue, et offre de fait une interprétation multi-sémantique des différentes composantes fractales. En particulier, la composante la plus singulière peut être interprétée de différentes façons. Compte tenu de ses propriétés statistiques et géométriques, elle apparaît notamment comme le principal support de l'information dans l'image : ceci explique qu'en terme de codage, elle fournisse une représentation compacte du signal.

Cette idée va être reprise dans le chapitre suivant et étendue à une description thermodynamique. En effet, puisque les propriétés statistiques et géométriques de la **MSM** lui confèrent une signification particulière, on s'attend naturellement à ce que cet ensemble soit également, dans les images **IR**, pertinent pour la compréhension des processus physiques sous-jacents, *i.e.* pour la modélisation du fluide atmosphérique.

---

## 8. Formalisme des sources pour la détection et la segmentation des foyers convectifs précipitants

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le problème central de ce travail de recherche, la segmentation des foyers convectifs précipitants. Nous nous intéressons, pour cela, aux différentes caractérisations des structures nuageuses convectives et nous abordons, en particulier, les notions d'advection et de convection permettant de décrire l'écoulement dans l'atmosphère. Diverses considérations sur la nature des mouvements des structures convectives nous amènent à construire, *via* le formalisme multifractal, une image dont les propriétés géométriques traduisent une configuration particulière du flot atmosphérique. Cette formulation nous permet ensuite d'introduire une variable mathématique reliant la thermodynamique des champs advectifs et la géométrie des images **IR**. L'utilisation de cette nouvelle variable permet de déduire la nature des transferts de température au sein de l'écoulement, et rend, en particulier, possible la caractérisation des foyers précipitants associés à de la convection profonde. Nous envisagerons également d'interpréter la mesure entropique comme une variable thermodynamique afin d'étendre cette approche.

### 8.1. Le formalisme multifractal pour modéliser le flot atmosphérique

L'approche multifractale, basée sur une description statistique des signaux, permet d'envisager des applications importantes en analyse de systèmes complexes. Le modèle multifractal (présenté au chapitre 5) permet notamment de mettre en évidence des structures pertinentes pour la connaissance des processus physiques visualisés dans les images **IR**, en relation avec les notions d'advection et de convection dans un fluide turbulent. Dans le cadre de l'étude des systèmes météorologiques, la détermination des différents phénomènes de transport mis en jeu va s'avérer particulièrement importante.

#### 8.1.1. Description des mouvements dans l'atmosphère : advection *vs.* convection

Nous introduisons tout d'abord les principaux concepts permettant de décrire l'évolution des systèmes atmosphériques. Les notions d'advection et de convection (au sens météorologique) permettent notamment d'approximer les mouvements à grande échelle.

---

### L'hypothèse d'advection à grande échelle

Lorsque l'on traite de phénomènes à grande échelle dans l'atmosphère, on est généralement amenés à supposer certaines propriétés d'ordre général afin de disposer d'un cadre d'analyse de la dynamique de l'écoulement [Bougeault et Sadourny, 2001]. Parmi les hypothèses les plus couramment effectuées, l'*hypothèse d'advection* permet d'opérer des simplifications énormes dans l'étude dynamique des mouvements.

**Définition 8.1** *L'advection désigne les transports horizontaux des propriétés de l'atmosphère (et donc de n'importe quelle grandeur associée au flot atmosphérique).*

Elle suppose ainsi un mouvement *quasi* 2D et une stratification verticale du fluide, avec peu d'échanges entre les différentes strates (horizontales). Cette construction s'explique par les caractéristiques du mouvement : celles-ci sont profondément différentes suivant que l'on envisage sa composante horizontale ou sa composante verticale. Par exemple, la première est généralement analysée sur plusieurs centaines ou milliers de *km* et est gouvernée en premier lieu par la pression atmosphérique qui détermine le champ de vent, alors que la seconde, pratiquement limitée à la dizaine ou à la quinzaine de *km* d'altitude de la troposphère, est d'abord liée aux répartitions verticale et horizontale de la température et aux phénomènes d'instabilité qui peuvent en résulter [Pedlosky, 1997].

L'hypothèse d'advection thermique (advection du champ de température) permet en particulier d'explicitier les variations locales de température en un point quelconque de l'espace grâce à l'expression :

$$\partial_t T = -\mathbf{v}_H \cdot \nabla_H \mathbf{T} \quad (8.1)$$

ce qui peut être exprimé simplement par :  $D_t T = 0$ . Ici  $\nabla_H \mathbf{T}$  désigne le gradient horizontal de la température  $T$  et  $\mathbf{v}_H$  la composante horizontale de la vitesse  $\mathbf{v}$  du fluide. L'expression (8.1) signifie simplement qu'une parcelle de fluide est déplacée adiabatiquement (*i.e.* sans changement thermodynamique irréversible) et que la température est conservée dans le plan horizontal. Elle lie le taux de variation locale  $\partial_t T$  de température au terme d'advection  $\mathbf{v}_H \cdot \nabla_H \mathbf{T}$ . Elle implique notamment que les composantes horizontales du gradient de température suffisent à déterminer le champ de vitesses dans l'image.

### La convection comme barrage à l'hypothèse d'advection

Rappelons tout d'abord, qu'au sens météorologique, l'emploi du terme "convection" est limité à une configuration particulière de l'écoulement [Bougeault et Sadourny, 2001] :

**Définition 8.2** *La convection désigne les transports verticaux des propriétés de l'atmosphère<sup>1</sup>.*

---

<sup>1</sup>On distinguera donc l'emploi de ce terme dans un contexte météorologique avec la définition, plus générale, de la convection au sens physique.

En particulier, quand une détente rapide d'une masse d'air, par exemple en ascension, donne lieu à de la condensation et si, comme lors de la formation d'un nuage, les produits de la condensation restent à l'intérieur de la masse d'air, le processus peut être considéré comme adiabatique [Pedlosky, 1997]. Dans un fluide stratifié, l'instabilité convective se développe lorsque le gradient de température excède le gradient adiabatique. Dans le cas d'une couche stratifiée verticalement cela signifie que le fluide est trop chaud (*resp.* froid) et donc généralement trop léger (*resp.* lourd), à la base (*resp.* au sommet) de cette même couche. Son rôle est de transporter du fluide chaud vers le haut et du fluide froid vers le bas afin de réduire le gradient de température initiale. Cela décrit plus généralement le phénomène de convection que l'on observe dans notre tasse à café<sup>2</sup>.

Les situations en météorologie où l'air entreprend un mouvement vertical (vers le haut ou vers le bas) sont nombreuses et sont associées à plusieurs phénomènes (instabilité, relief de la terre, système dépressionnaire). Nombre de mécanismes physiques mis en jeu dans l'atmosphère peuvent ainsi être à l'origine de changements diabatiques dans le flot, et induire des mouvements qui ne soient plus contenus dans le plan de l'image [Bougeault et Sadourny, 2001], parmi lesquels, bien évidemment, la formation de systèmes convectifs. Or, lorsque le mouvement n'est plus seulement horizontal, mais contient également des variations verticales non négligeables, l'équation (8.1) ne suffit plus à décrire l'écoulement. L'hypothèse d'advection ne contient pas de terme traduisant une accélération verticale éventuelle du flot et tend donc à inhiber la présence de transport vertical dans le flot. En conséquence, elle ne permet pas de prendre en compte la présence de structures nuageuses convectives dans l'atmosphère, dont on rappelle qu'elles apportent l'essentiel des précipitations des régions tropicales (*cf.* chapitre 2).

### 8.1.2. Objectifs de l'approche multifractale

Reconstruire le signal à partir de la **MSM** et de l'information de gradient sur cet ensemble est évidemment utile en terme de compression et de codage (*cf.* chapitre 5). Mais cela permet aussi d'envisager des applications thermodynamiques, puisque le sous-ensemble, extrait à différentes échelles, est composé essentiellement des frontières de structures météorologiques et s'identifie aux fronts de température de l'écoulement (*cf.* chapitre 6). Plus généralement, le modèle multifractal introduit plus tôt autorise une classification des différentes composantes chaotiques rencontrées dans le système atmosphérique en fonction de leur pertinence pour la connaissance de la dynamique interne du système. Rappelons que la multifractalité est en fait une propriété caractéristique des systèmes turbulents et que le formalisme multifractal, qui dérive de concepts thermodynamiques, a été introduit pour modéliser des écoulements fluides complexes [Frisch, 1995] [Parisi et Frisch, 1985]. En adoptant une approche thermodynamique, il permet de caractériser les flots turbulents non plus au moyen d'une description microscopique et détaillée mais à l'aide de mesures probabilistes.

L'interprétation thermodynamique du comportement du fluide peut être utilisée pour la modélisation des phénomènes de transport de matière et d'énergie (chaleur, etc.). Afin de comprendre comment les processus observés se manifestent dans les acquisitions **IR**, nous allons utiliser les différents

---

<sup>2</sup>De l'air chaud aura tendance à monter alors que l'inverse se produit avec de l'air froid.

outils fournis par le modèle multifractal. L'idée est de traduire les différentes propriétés thermodynamiques caractérisant la présence de structures convectives sur les propriétés géométriques des images et de comparer les processus observés, appréhendés par les mesures **IR**, avec des simulations produites par le modèle multifractal. Nous entendons notamment développer la représentation et la validation de la convection dans les modèles descriptifs des images. Notre objectif est finalement d'utiliser cet instrument pour détecter et localiser les principaux foyers des pluies convectives.

Nous allons tout d'abord voir comment certaines propriétés thermodynamiques se traduisent sur la nature du champ de température sur la **MSM**.

## 8.2. Un modèle de description de l'advection dans les images **IR** : l'image chromatiquement réduite

L'intensité dans une image météorologique **IR** est une mesure d'une variable thermodynamique, la température, sur les surfaces de la scène observée. Par conséquent, on peut espérer traduire les propriétés physiques des phénomènes atmosphériques sur les propriétés géométriques des images. Les structures mises en évidence par le formalisme multifractal permettent notamment de déterminer la nature du champ de température dans le système et de caractériser qualitativement l'activité au sein des structures nuageuses.

### 8.2.1. La **MSM** et ses connections avec la thermodynamique du système

La **MSM** correspond aux zones où le transfert (mécanismes de diffusion, mais pas seulement) de température est le plus important. D'un point de vue mathématique, elle correspond aux contours ayant les plus fortes valeurs de gradient : les extrema de la norme du gradient sont les extrema des variations spatiales de la température dans la direction du gradient spatial. Elle est, d'après la théorie des processus log-Poisson [She et Levêque, 1994], constituée des zones de plus forte variation de la température, où les discontinuités de température sont notamment les plus appréciables (figure 8.1).

En fait, la théorie multifractale nous dit plus : la **MSM** est non seulement connectée aux propriétés thermiques du flot, mais également à ses propriétés dynamiques [Dubrulle, 1994]. Elle représente les principales *lignes de courant* (*i.e.* elle admet comme tangente en tout point la vitesse en ce point) du flot turbulent [She et Levêque, 1994] [Turiel et al., 1998]. Notons que cette connection entre les contours des structures et la nature de leur mouvement est généralement bien établie expérimentalement : en pratique, la direction du flot est souvent observée comme étant parallèle aux fronts thermiques [Bougeault et Sadourny, 2001] [Essen, 1995]. Cette approximation est également couramment utilisée pour l'estimation de champs de vitesse à partir d'une image unique [Maurizot et al., 1998].

Par conséquent, les propriétés du flot vis-à-vis de la **MSM** caractérisent entièrement son comportement et son évolution dans tout l'espace. En particulier, certaines propriétés hydro et thermodynamiques se traduisent directement par la nature du champ de température sur la **MSM**.

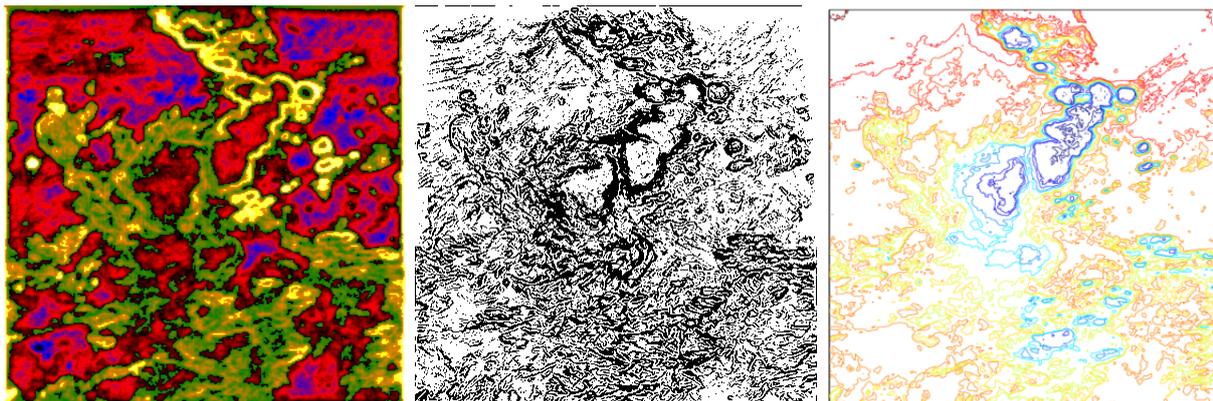


FIG. 8.1.: De gauche à droite : décomposition multifractale, **MSM** ( $d_\infty = 44.49\%$ ) et lignes d'isothermes (égale température) sur l'image **IR** de la figure 7.4. La **MSM** ici représentée est identique à celle estimée sur la figure 5.16 du chapitre 5.

### 8.2.2. Construction d'une image chromatiquement réduite

Nous proposons d'introduire un concept qui découle directement de la construction multifractale et de l'existence de la **MSM** : il s'agit de la notion de *chromaticité réduite* [Grazzini et al., 2003a] [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b]. Cette notion renvoie aux propriétés ("chromatiques") de la luminance dans l'image elle-même, mais elle se réfère surtout aux propriétés thermodynamiques du flot sous-jacent. Elle permet notamment de décrire une certaine configuration de l'atmosphère [Grazzini et al., 2002b].

L'idée est d'établir un modèle qui permette de synthétiser une image :

- ayant la même structure multifractale que l'image originale,
- ayant cependant une distribution de luminance plus "simple", plus uniforme.

Pour cela, on utilise l'algorithme multifractal (3) afin de reconstruire une image ayant un gradient normalisé et la même **MSM** que l'image originale (rappelons-nous que la variété la plus singulière détermine complètement les autres composantes fractales dans la théorie des processus log-Poisson). Nous avons abordé une question similaire à la section 5.5.3 du chapitre 5 ; nous avons vu qu'il était par exemple possible de construire une image ayant la même structure multifractale que l'image originale en considérant un noyau de propagation différent (autre que le noyau de propagation défini par la formule (5.53)), mais en conservant la **MSM** extraite de l'image originale comme ensemble de reconstruction. Nous adoptons donc une approche semblable pour reconstruire une image dite *chromatiquement réduite* :

- nous utilisons naturellement la **MSM** comme ensemble de reconstruction, *i.e.* comme support du champ de propagation,
- nous modifions cependant le champ de propagation lui-même, *i.e.* nous remplaçons l'expression du gradient essentiel par celle d'un champ ayant des propriétés adaptées à ce que l'on souhaite modéliser.

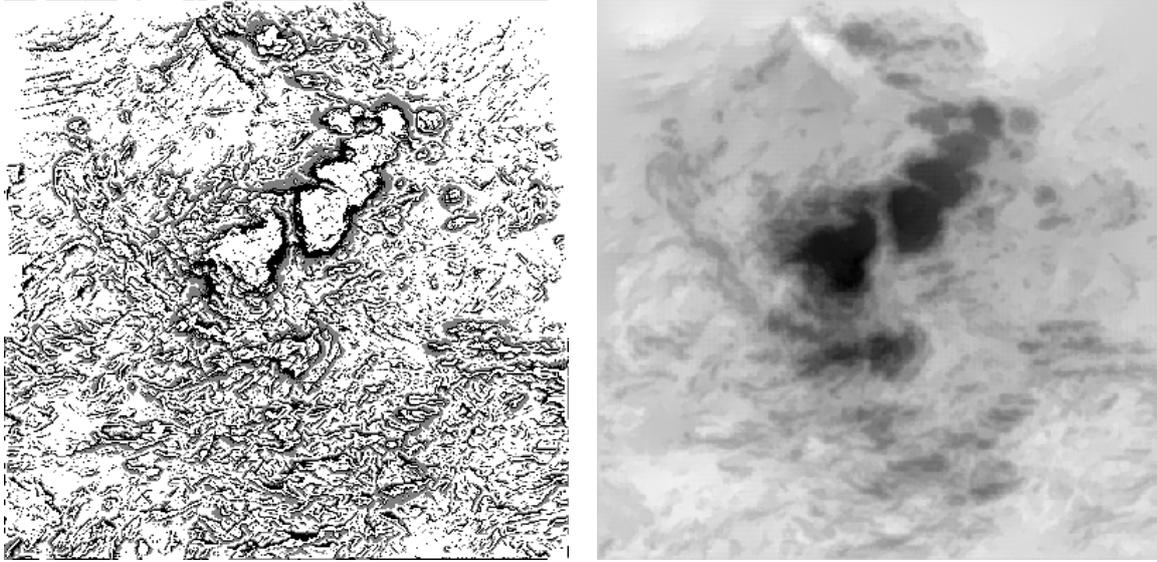


FIG. 8.2.: **À gauche** : l’OMSM, *i.e.* l’ensemble des pixels de la MSM de la figure 8.1 sur lesquels on représente l’orientation du gradient  $\nabla I$  de l’image originale ; celle-ci est ainsi codée en noir lorsqu’elle est positive et en gris lorsqu’elle est négative (avec la convention d’orientation positive lorsque  $\nabla I_{\mathcal{R}} \cdot \nabla I > 0$ ). **À droite** : reconstruction, à l’aide de l’algorithme (3), de l’image à partir de l’information de gradient sur l’OMSM.

Pour construire cette image, on considère finalement un champ naïf sur la MSM, de vecteurs unitaires et de direction perpendiculaire à la MSM. Il est par ailleurs nécessaire de choisir, pour ce champ, une orientation consistante le long des contours de la MSM : le choix de l’orientation en un pixel donné doit en effet être cohérent avec l’orientation des autres pixels du même segment, sinon des transitions brutales du signal seraient induites sur la MSM (suivant les variations de l’orientation du gradient), en contradiction avec le type de comportement que l’on recherche. Si l’on note  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  ce champ synthétique (appelé *gradient essentiel réduit*), l’orientation finalement retenue pour  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  tient compte de l’orientation du gradient propre de l’image originale, de sorte que les deux champs sont, grossièrement, de même direction. En chaque point de la MSM, l’orientation de  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  est telle que son produit scalaire avec le gradient original en ce même point est positif. Lorsque la MSM est connue, la donnée de  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  se réduit simplement à la donnée de la seule fonction décrivant l’orientation de  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  sur la MSM (la direction est renseignée par la normale à la MSM, son module est 1). Il est donc tout naturel d’introduire la fonction de densité de la MSM orientée (OMSM, pour *Orientated Most Singular Manifold*) comme la fonction égale à  $\pm 1$  sur la MSM (selon l’orientation de  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ ) et nulle partout ailleurs. Cette fonction suffit en fait à caractériser entièrement la géométrie de l’image [Grazzini et al., 2002b].

Le champ  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  est ainsi construit à partir de la fonction de densité de l’OMSM de manière immédiate. En appliquant la formule de reconstruction (5.56) au champ  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ , on peut créer l’image chromatiquement réduite  $I_{\mathcal{R}}$  :

$$I_{\mathcal{R}}(\vec{x}) = \mathbf{g} \star \nabla I_{\mathcal{R}}(\vec{x}). \quad (8.2)$$

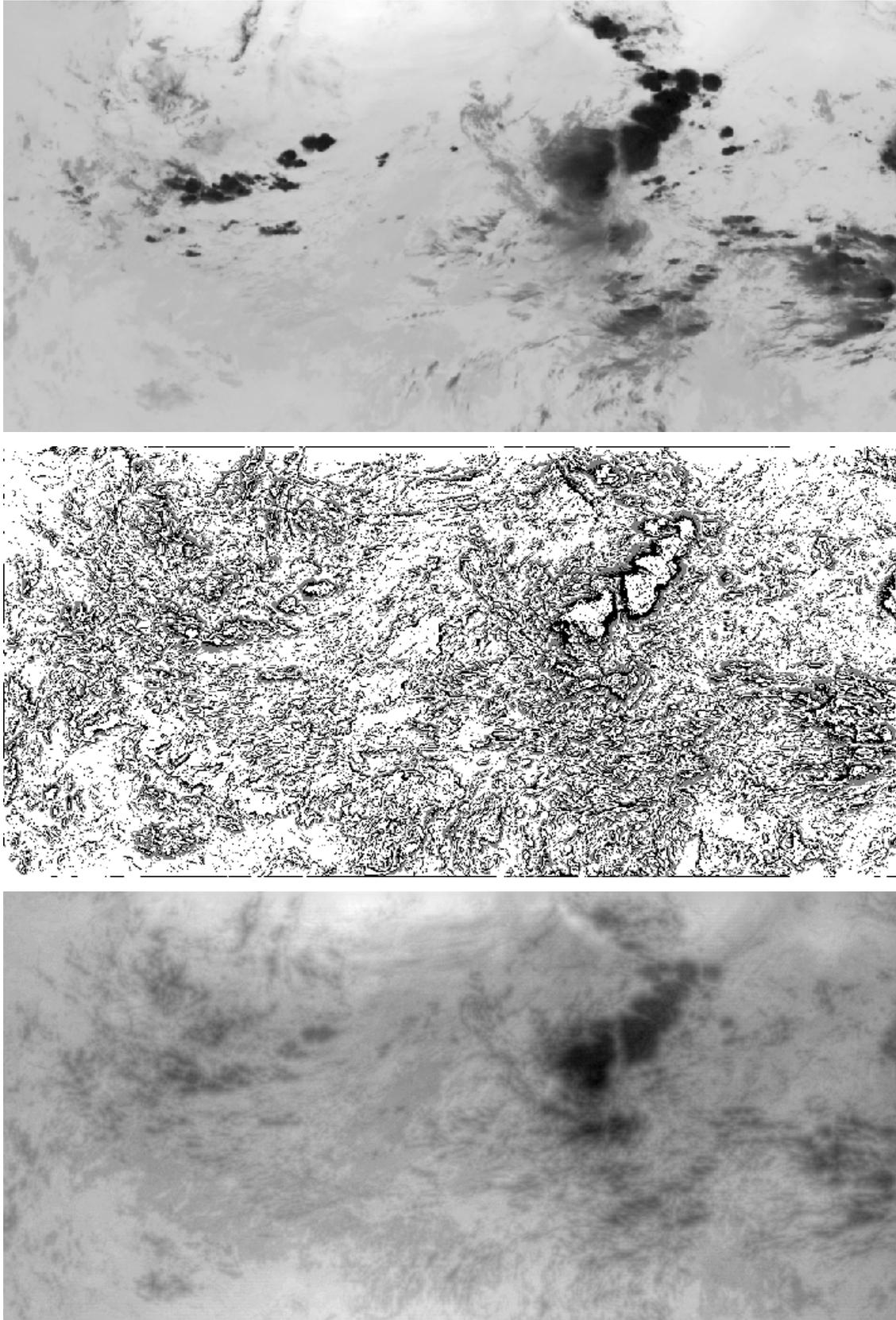


FIG. 8.3.: Analyse et synthèse multifractales d'une image **Meteosat IR**. De haut en bas : image **IR**, **OMSM** et **CRI** correspondantes.

1. On construit la **MSM** à l'aide des étapes 1 à 5 de l'algorithme (2).
2. On construit le *gradient essentiel réduit*  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  ayant les propriétés suivantes :
  - $\nabla I_{\mathcal{R}}$  est de module 1 sur la **MSM** et égale à 0 partout en dehors :

$$|\nabla I_{\mathcal{R}}|(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in \text{MSM} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

- $\nabla I_{\mathcal{R}}$  est perpendiculaire au segment de la **MSM** passant par  $\vec{x}$  :  $\nabla I_{\mathcal{R}}(\vec{x}) \perp (\text{MSM} \cap V_{\vec{x}})$ , où  $V_{\vec{x}}$  désigne un voisinage de  $\vec{x}$ ,
  - le gradient de l'image originale et celui de  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  ont la même orientation :  $\nabla I_{\mathcal{R}} \cdot \nabla I > 0$ .
3. On construit l'image chromatiquement réduite à l'aide de l'étape 4 de l'algorithme (3) en remplaçant le gradient essentiel  $\nabla I_{\infty}$  par le gradient essentiel réduit  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ .

**Algorithme 5:** Construction de l'image chromatiquement réduite.

L'algorithme (5) détaille la construction de  $I_{\mathcal{R}}$ . Dans la suite, nous désignerons par **CRI** (*Chromatically Reduced Image*) cette image. La **CRI** représente une vue de la même scène que l'image originale, comprenant les mêmes objets (et donc la même structure géométrique), mais avec une illumination différente de chaque partie (figure 8.2). Elle constitue une image géométriquement complexe mais chromatiquement simple : ainsi, l'augmentation de la dynamique de l'image originale ne modifie pas  $I_{\mathcal{R}}$ , les seules valeurs définissant la densité de l'**OMSM** étant 0 ou  $\pm 1$ . Remarquons également que toute la géométrie de l'image originale semble ainsi être "capturée" par la fonction de densité de l'**OMSM**, et que seule l'information concernant la distribution de la luminance est manquante.

### 8.2.3. Caractérisation de l'advection dans le flot

Les propriétés "image" (*i.e.* en terme géométrique) de la **CRI** se traduisent naturellement sur les propriétés physiques du flot sous-jacent :

- les fronts de température observés sur la **CRI** sont les mêmes que ceux observés sur l'image originale : la **MSM** est conservée, et, en conséquence, les lieux de transfert de température sont inchangés,
- la distribution de température est beaucoup plus uniforme, la température est diffusée perpendiculairement aux fronts et partout avec la même intensité,

de sorte que le flot synthétique déterminé par ces fronts et visualisé sur la **CRI** est très stable. Cette construction correspond à la configuration de mouvement advectif : la diffusion de température uniforme observée dans la **CRI** traduit l'hypothèse d'advection du flot.

Comme nous l'avons souligné plus haut, le transport dans l'atmosphère est essentiellement stratifié, *quasi* horizontal et dominé par les processus d'advection. Cependant, cette approximation tend à ignorer la présence de transports verticaux, à les négliger. D'après ce qui précède, la **MSM** est le lieu des plus fortes transitions de température, sur lequel les transferts d'énergie et de chaleur

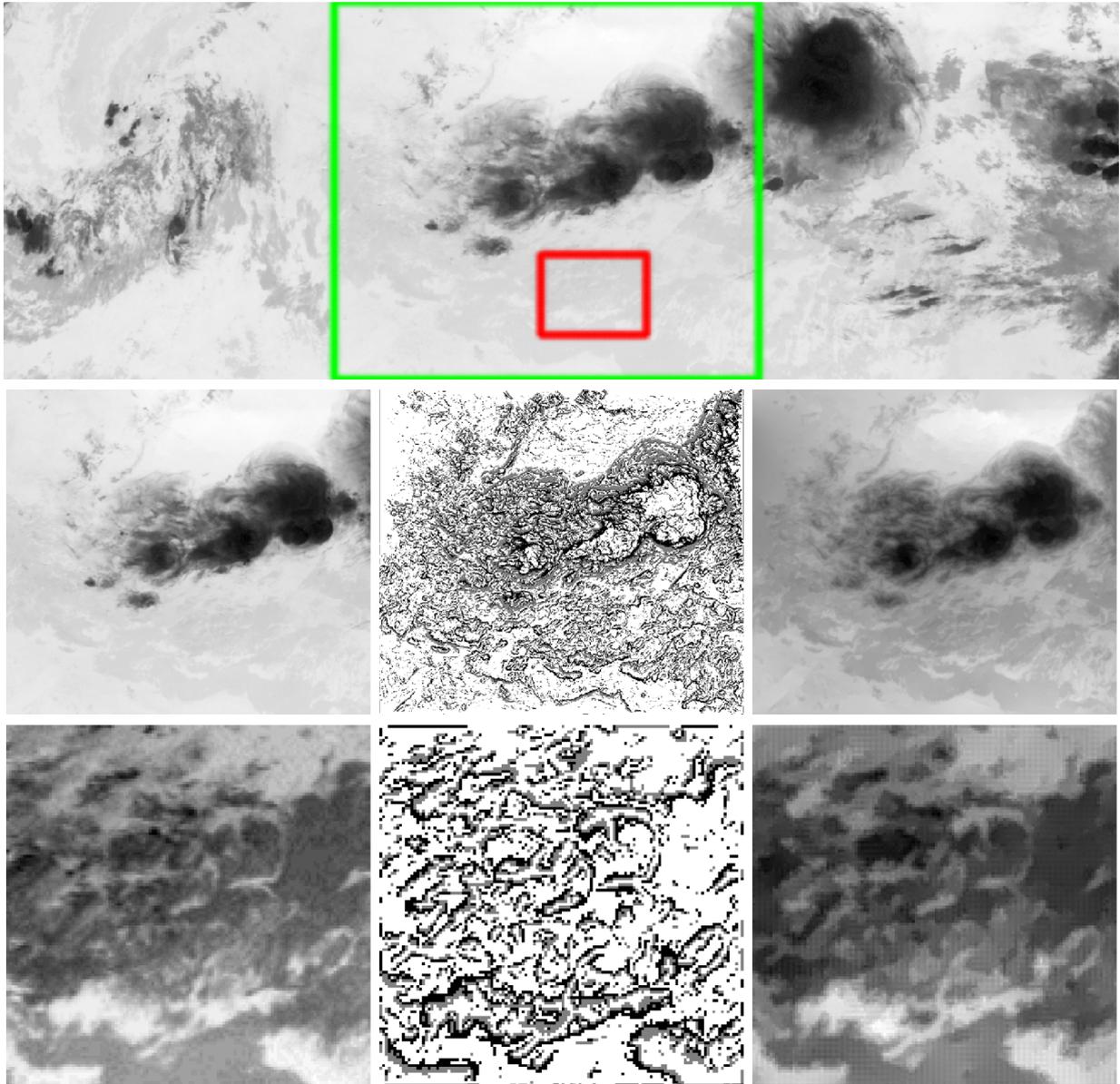


FIG. 8.4.: Illustration de l'hypothèse de champ advectif traduite par la **CRI**. **En haut** : Image **IR** dans laquelle on extrait deux zones significatives. **Au milieu** (de gauche à droite) : premier extrait (cadre vert), **MSM** et **CRI** correspondantes. Les images diffèrent : de la convection est présente. **En bas** (de gauche à droite) : second extrait (cadre rouge), **MSM** et **CRI** correspondantes. Les images sont très proches : l'activité advective est dominante dans l'image. Noter que la dynamique des images (*i.e.*, le nombre de niveaux de gris accessibles) a été étendue de manière à ce que celles-ci soient comparables et qu'elles permettent de visualiser autant de détails que possible.

les plus significatifs se produisent (*cf.* chapitre 6). Identifions alors le gradient horizontal  $\nabla_{\mathbf{H}}T$  de la température  $T$  dans l'écoulement au gradient spatial  $\nabla I$  de l'image  $I$ . Dans les situations où l'hypothèse d'advection est valide, l'équation (8.1) signifie que la température  $T$  est advectée par l'écoulement : son déplacement est horizontal, dans le plan de l'image, et constant le long de la **MSM**, car celle-ci représente les principales lignes de courant. En terme de gradient, la conservation de la température  $T$  implique que  $\nabla I$  soit perpendiculaire aux lignes de la **MSM** et de module constant. L'hypothèse d'advection et le champ de température qui en découle, coïncident donc exactement avec la définition de la **CRI** : le champ  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  désigne le champ de température advecté. Sur la figure 8.4, on a représenté la **CRI** estimée sur deux régions d'une même image **IR**. Il apparaît qu'elle permet de mettre en évidence la propriété d'advection du flot dans la scène. Lorsque le flot est en effet dans cette configuration et n'est, idéalement, perturbé par aucun autre mécanisme de transfert de température, il est bien approximé par la **CRI**. En revanche, la présence de transports verticaux par exemple se traduit par une **CRI** très différente de l'image originale. Ce sont typiquement les structures convectives qui expliquent ce défaut. La **CRI** peut être vue comme une image d'advection.

Compte tenu de ses propriétés géométriques et statistiques, il est normal que la **MSM** joue un rôle essentiel dans la modélisation de l'écoulement. Le formalisme multifractal ayant été développé, pour l'analyse de la turbulence, les structures détectées jouent tout naturellement un rôle dans la description du flot. L'utilisation de la **MSM** seule permet ainsi de décrire une situation où seuls les fronts de température déterminent l'évolution du flot : la distribution de température observée dans la **CRI** est uniforme, la diffusion de la température est régulière et constante, et le flot est stable. La possibilité de traduire l'hypothèse d'advection sur des propriétés géométriques du signal est très intéressante, car nous avons maintenant à notre disposition un outil permettant de retranscrire des hypothèses physiques et de modéliser des situations réelles (bien qu'en pratique le flot ne soit jamais purement advectif).

### 8.3. Un outil mathématique de détection de la convection dans les images IR : le champ des sources

L'hypothèse d'advection est mise en défaut lorsque l'écoulement n'est plus contenu dans le plan horizontal de l'image, *i.e.* lorsque des mouvements verticaux (ou convectifs) sont présents dans l'écoulement. Nous entrevoyons ainsi la possibilité de détecter des zones potentielles de convection en mesurant les déviations du champ de température réelle par rapport à la diffusion normale lorsque celle-ci est approximativement advectée par le flux. Nous introduisons, dans la suite, les attributs qui permettront de caractériser les surfaces sur lesquelles des différences sont mises en évidence.

### 8.3.1. Influence du mouvement des systèmes convectifs sur le champ de température

Intéressons-nous aux principales caractéristiques des systèmes nuageux convectifs qui sont au centre de ce travail de recherche. Dans le cycle de vie d'une cellule convective (*cf.* annexe A), il est possible de distinguer trois phases principales d'activité (*cf.* figure 8.5) [Arnaud et al., 1992] [Papin et al., 1999] :

- la phase d'**ascendance** (croissance) : à son début, chaque cellule est un *cumulus*. À ce stade, un courant vertical ascendant est prédominant dans toute la cellule,
- la phase de **subsidence** (maturité) : lorsque le courant ascendant gagne les hautes altitudes, une abondance de cristaux de glace et de gouttelettes (ce que l'on observe sur les données MO) crée généralement des précipitations. L'apparition des précipitations à la surface indique que l'orage a atteint sa phase de maturité. Au début, ce courant descendant ne touche que les couches intermédiaires et inférieures de la cellule. Il augmente graduellement.
- la phase de **descendance** (dissipation) : le courant descendant gagne graduellement toute la cellule, sauf la partie du sommet où le courant ascendant perdure. À ce stade, l'orage est parvenu au stade de dissipation. La pluie cesse graduellement et le sommet de la cellule, en forme d'enclume, s'effiloche.

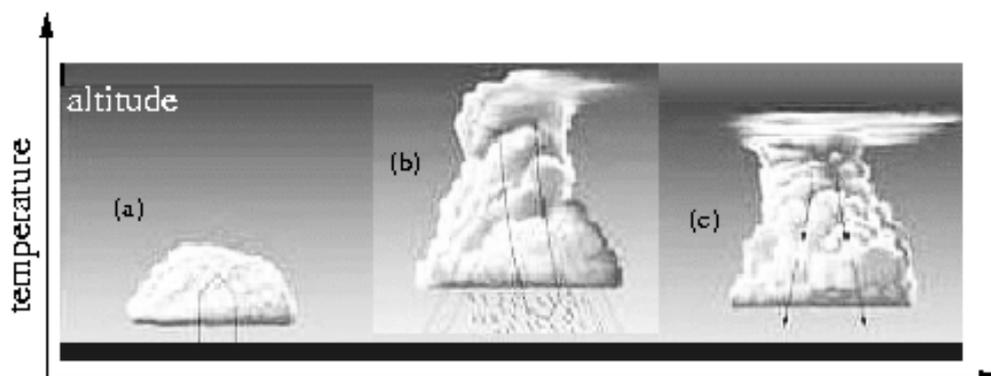


FIG. 8.5.: Représentation des principales phases d'activité d'une cellule convective : croissance (a), maturité (b) et dissipation (c).

Selon le stade dans lequel se trouve la cellule au cours de son évolution, il est possible de déduire directement des propriétés thermodynamiques du système, en particulier [Laing et al., 1999] :

- pendant la phase de croissance, le sommet du nuage se refroidit, pour atteindre à l'état de maturité, une température stable,
- pendant la phase de subsidence, la température augmente (le sommet redescend).

Par conséquent, la tendance verticale des déplacements du nuage détermine ses variations thermiques. Il est également constaté que les différentes phases d'activité d'une structure convective peuvent être caractérisées par le comportement de ses mouvements horizontaux, plus précisément [DeLeonibus et al., 1997] [Papin et al., 2000] :

- la phase d’ascendance est associée à une expansion spatiale du sommet de la structure,
- la subsidence est associée à un rétrécissement de la structure, qui se dissipe progressivement.

En particulier, les propriétés d’ascendance et de subsidence s’accompagnent de variations locales de température dans la direction verticale. L’instabilité convective entretient donc le transport vertical des propriétés de l’air. L’apparition de courants ascendants et descendants forme ainsi une structuration plus ou moins complexe de la zone convective concernée.

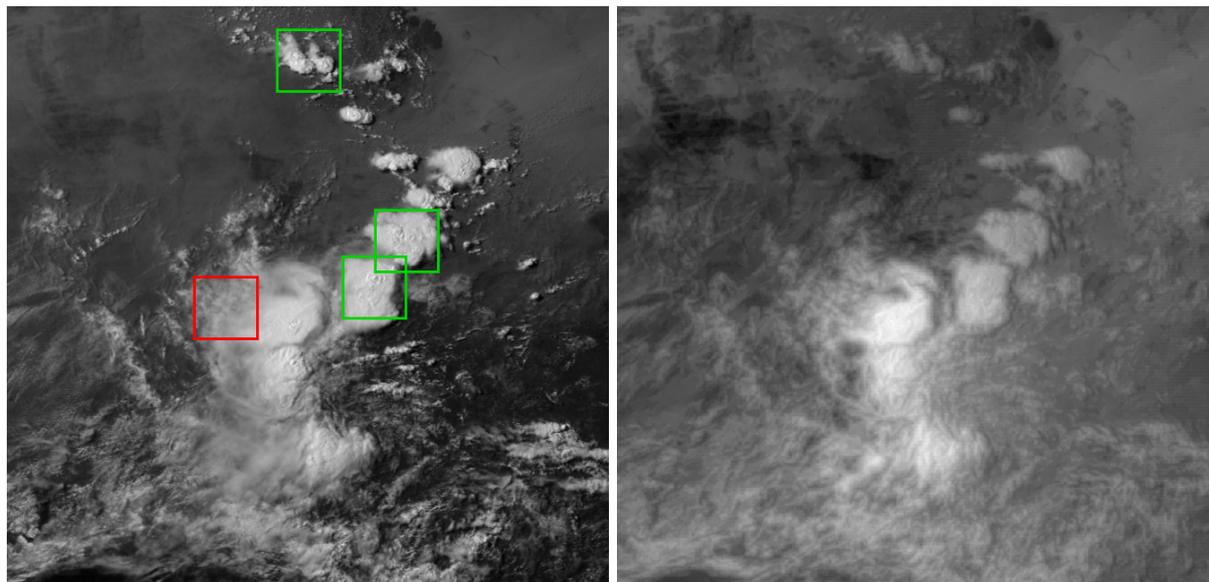
### 8.3.2. Utilisation de l’information contenue dans la MSM et la CRI

Résumons les principaux résultats que nous avons établis jusqu’ici à l’aide du modèle d’analyse multifractal introduit au chapitre 5. En sus de la décomposition multifractale (qui constitue une décomposition hiérarchique somme toute assez classique), le modèle fournit une description d’une image  $I$  au travers de deux définitions :

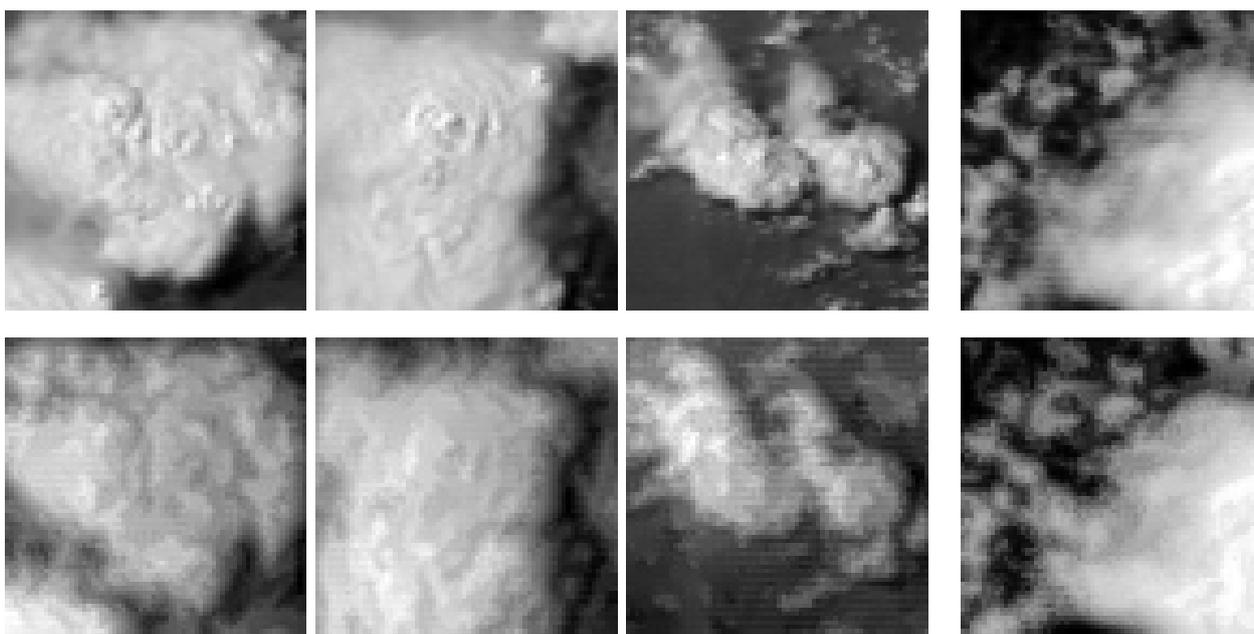
- La première définition concerne une structure particulière dans l’image : il s’agit de la **MSM** qui caractérise les transitions les plus importantes du signal. La donnée de cet ensemble et du gradient essentiel  $\nabla I_\infty = \nabla I \delta_{F_\infty}$  permet de reconstruire l’image originale. Cette structure est significative de plusieurs points de vue : statistique, géométrique et surtout thermodynamique, puisqu’elle est reliée aux fronts de température.
- La deuxième définition concerne l’image dite chromatiquement réduite. Celle-ci décrit la distribution de la luminance sur la **MSM**, et, plus généralement, elle traduit les caractéristiques de la distribution de la luminance dans l’image. Elle a la même structure multifractale que l’image originale : ses exposants de singularité sont identiques à ceux de l’image originale, mais la distribution spatiale de la luminance est plus uniforme. Elle offre également une interprétation thermodynamique puisqu’elle traduit une hypothèse d’advection de la température et le champ normal  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  s’identifie à un champ advectif.

En fait, ces deux définitions sont pratiquement équivalentes, puisque la connaissance de la **CRI** permet de déterminer la **MSM**, et, inversement, la connaissance de la **MSM** (couplée avec l’information d’orientation du gradient de l’image originale) permet de construire la **CRI**.

Compte tenu des remarques précédentes, un moyen simple de vérifier si l’hypothèse d’advection est valide dans le système visualisé consiste à vérifier si le gradient  $\nabla I$  le long de la **MSM** est constant et perpendiculaire à la **MSM**, *i.e.* s’il coïncide avec le champ  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  défini sur la **CRI**. La **CRI** caractérise la présence de convection. Une déviation importante entre l’image originale et la **CRI** (*i.e.* entre les champs de température définis sur ces images) traduit un défaut d’advection et donc, typiquement, la présence de structures convectives. Sur l’exemple de la figure 8.6, on considère, par exemple, des images acquises dans le canal **VIS**, sur lesquelles on distingue très nettement le sommet des tours convectives (la même scène que sur l’image **IR** de la figure 7.4 est ici visualisée). On vérifie alors, par simple inspection visuelle des différents détails de l’image originale et de la **CRI**, que cette dernière permet, en un sens, de supprimer la contribution des zones convectives à la distribution de température (luminance) dans l’image originale. Il s’agit pour nous d’introduire un outil capable de quantifier (et plus seulement de caractériser qualitativement) la déviation entre les deux images.



(a) De gauche à droite : une image **VIS** et la **CRI** correspondante.



(b) Détails de l'image **VIS** (**en haut**) et de l'image réduite (**en bas**). Sur les 3 premiers exemples (cadres verts, images de gauche), on observe le sommet des tours dites convectives : les images sont très différentes, on perd l'impression de profondeur présente dans les zones convectives, tandis que les autres principaux contours sont préservés. Dans le dernier exemple (cadre rouge, image à droite), le flot est dominé par l'advection : les images sont très proches.

FIG. 8.6.: Comparaison entre la configuration réelle du flot, observée sur une image **VIS**, et l'hypothèse d'advection pure, représentée par la **CRI**.

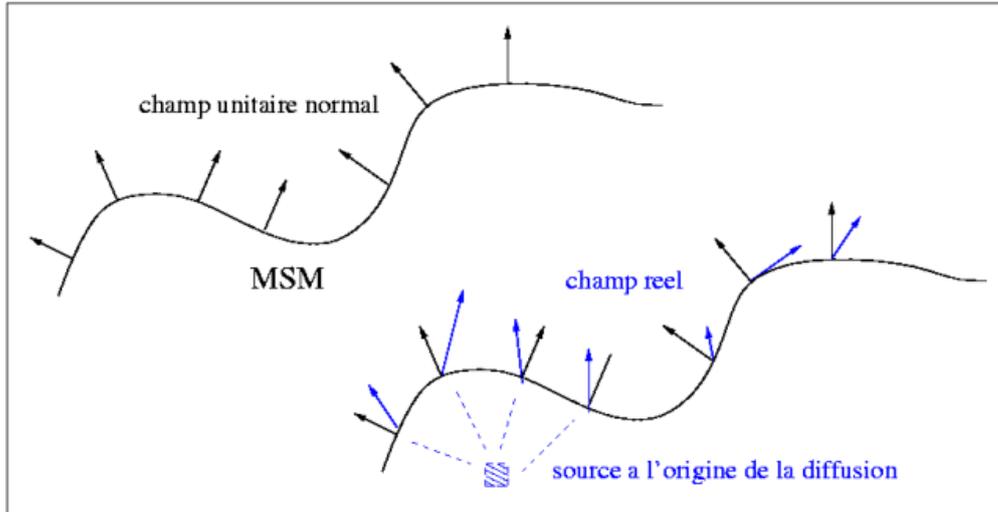


FIG. 8.7.: Principe de la mesure du champ des sources : on dispose d'un contour (la **MSM**) et du gradient unitaire réduit  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  sur ce contour. L'idée est de comparer ce champ avec le champ réel observé. Le résultat est une information de nature non géométrique, les sources, qui renseignent sur la diffusion de la luminance au travers de la **MSM** et dans toute l'image.

### 8.3.3. Formalisation mathématique du champ des sources

Les considérations précédentes doivent nous permettre de détecter la présence de transports verticaux, sans restreindre notre intérêt aux seuls mouvements advectifs. Cependant, la comparaison entre l'image originale  $I$  et la **CRI**, sa contrepartie réduite  $I_{\mathcal{R}}$ , doit être effectuée de manière plus rigoureuse de façon à fournir une mesure plus précise. L'idée est d'introduire une transformation appropriée  $f(I, I_{\mathcal{R}})$  qui exprime mathématiquement la déviation entre l'image originale et la **CRI**. Techniquement, la transformation  $f$  adéquate est donnée par une dérivée de Radon-Nykodim [Rudin, 1987].

Pour comparer l'image originale et la **CRI**, on peut envisager de comparer la mesure  $\mu$  définie sur l'image  $I$  grâce à l'équation (5.29) (*cf.* chapitre 5) et la mesure  $\mu_{\mathcal{R}}$  définie similairement sur l'image  $I_{\mathcal{R}}$ . En utilisant une expression analogue, on peut en effet introduire une mesure  $\mu_{\mathcal{R}}$  dont la densité est la norme du gradient de la **CRI** :

$$\mu_{\mathcal{R}}(B_r(\vec{x})) = \int_{B_r(\vec{x})} d\vec{y} |\nabla I_{\mathcal{R}}|(\vec{y}) . \quad (8.3)$$

On voit alors, puisque la **CRI** a la même structure multifractale que l'image originale, que la mesure  $\mu_{\mathcal{R}}$  qu'elle sert à définir est également multifractale, autrement dit :

$$\mu_{\mathcal{R}}(B_r(\vec{x})) \approx \alpha_{\mathcal{R}}(\vec{x}) r^{d+h(\vec{x})} \quad (8.4)$$

où les exposants de singularité  $h(\vec{x})$  apparaissant dans l'équation sont les mêmes pour les deux mesures  $\mu_{\mathcal{R}}$  et  $\mu$ . Les deux ensembles ont non seulement la même définition spatiale de la **MSM** (même géométrie), mais également les mêmes exposants de singularité pour les pixels de cet ensemble

(mêmes statistiques) : c'est exactement ce que signifie "avoir la même structure multifractale". En particulier, cela implique que les deux mesures sont absolument continues l'une par rapport à l'autre (elles ont le même comportement dans les petites échelles). Par conséquent il y a un sens à la définition de la dérivée de Radon-Nykodin de  $\mu$  par rapport à  $\mu_{\mathcal{R}}$ .

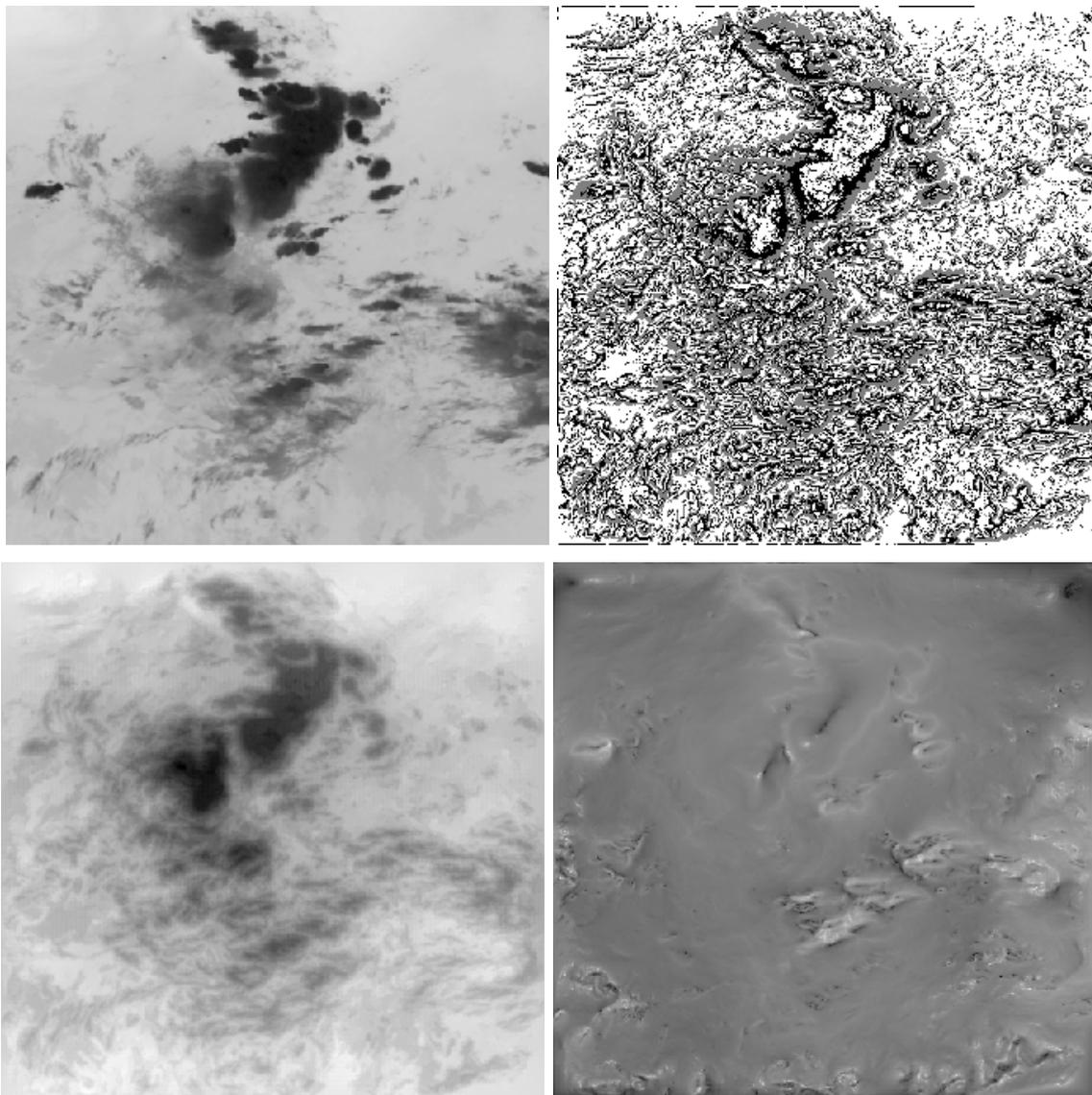


FIG. 8.8.: Représentations multifractales d'une image **IR**. De gauche à droite : image originale, **MSM**, **CRI** sur cette **MSM** et norme du champ des sources (log-représentation).

Afin de prendre en compte le caractère vectoriel des différences entre les signaux, nous généralisons les mesures multifractales en définissant la mesure vectorielle  $\mu$  d'un ensemble quelconque  $A$  sur le signal  $I$  par :

$$\mu(A) \equiv \int_A d\vec{y} \nabla I(\vec{y}) \quad (8.5)$$

et de manière analogue, on définit une mesure  $\mu_{\mathcal{R}}$  pour le signal réduit  $I_{\mathcal{R}}$ . Ici, la densité de la

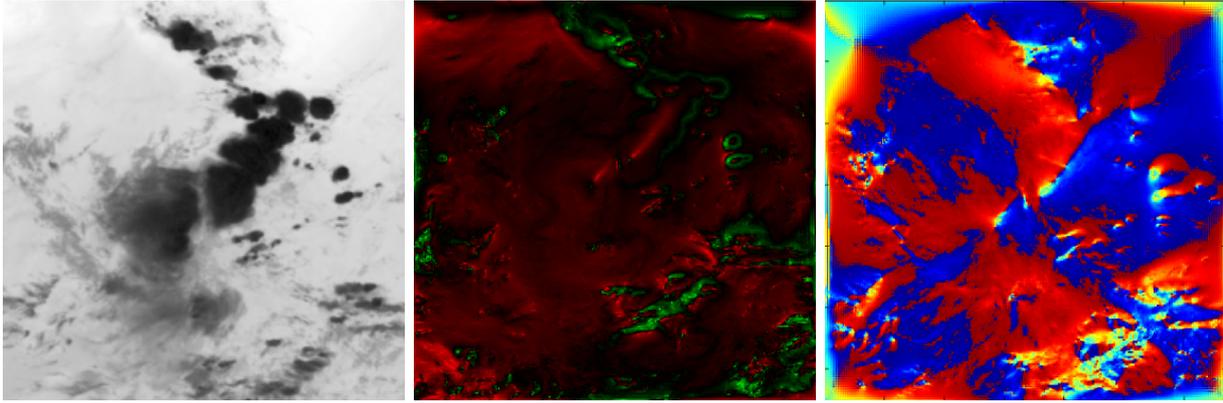


FIG. 8.9.: Représentation de la norme et de la phase du champ des sources calculé sur une image  $\mathbf{IR}$ .

mesure est le gradient de l'image ( $\nabla \mathbf{I}$  ou  $\nabla \mathbf{I}_{\mathcal{R}}$ ), et non plus sa norme ; celui-ci peut être vu comme un champ à valeurs complexes comme nous travaillons dans un espace 2D. Par conséquent, les mesures qui en découlent sont des mesures vectorielles, et peuvent naturellement être assimilées à des mesures à valeurs complexes.

Comme précédemment, on admettra alors :

**Proposition 8.1** *Les mesures  $\mu$  et  $\mu_{\mathcal{R}}$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre.*

En fait, cette propriété est vérifiée, car on a même plus ; les mesures  $\mu$  et  $\mu_{\mathcal{R}}$  sont multifractales au sens où elles vérifient, là encore, une relation de la forme :

$$\mu(B_r(\vec{x})) \sim \alpha(\vec{x}) r^{h(\vec{x})+d} \quad (8.6)$$

et similairement pour  $\mu_{\mathcal{R}}$  avec les mêmes exposants  $h(\vec{x})$ . Par conséquent, elles ont le même comportement dans les petites échelles et, ainsi, les mêmes ensembles négligeables, ce qui implique la proposition 8.1. On peut introduire une nouvelle quantité :

**Définition 8.3** *Le champ vectoriel des sources  $\rho(\mathbf{x})$  est défini comme la dérivée de Radon-Nykodin des mesures vectorielles  $\mu$  et  $\mu_{\mathcal{R}}$  en tout point  $\vec{x}$  de l'image :*

$$\rho(\vec{x}) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(\vec{x}))}{\mu_{\mathcal{R}}(B_r(\vec{x}))}. \quad (8.7)$$

Le champ des sources représente donc la densité de la mesure  $\mu_{\mathcal{R}}$  par rapport à la mesure  $\mu$ . Cette quantité peut être calculée grâce à des projections en ondelette :

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{T_{\Psi}[\nabla \mathbf{I}](\vec{x}, r)}{T_{\Psi}[\nabla \mathbf{I}_{\mathcal{R}}](\vec{x}, r)}$$

pour une certaine ondelette régularisante qui soit intégrable par rapport aux mesures ; cependant en pratique l'estimation du champ  $\rho$  est beaucoup plus simple (*cf.* algorithme (6)).

Compte tenu de leur définition, les sources  $\rho$  constituent un champ vectoriel n'exhibant pas de comportement multifractal (figure 8.9). Les singularités simultanément présentes dans les champs  $\mu$

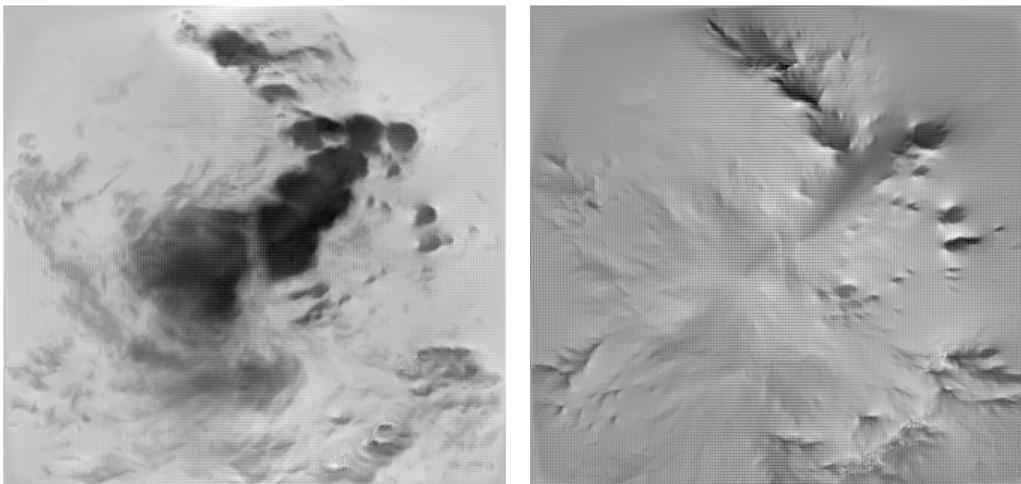


FIG. 8.10.: Reconstruction d'une image **IR** à partir de la **CRI** et d'une seule des deux composantes directionnelles du champ des sources  $\boldsymbol{\rho}$  suivant la formule  $\nabla I = \boldsymbol{\rho} \nabla I_{\mathcal{R}}$ . **À gauche** : l'image est reconstruite avec le champ des sources  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, 0)$ , **à droite** : on utilise le champ  $\boldsymbol{\rho} = (0, \rho_y)$ .

et  $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{R}}$  (les singularités de  $I$  coïncident avec celles  $I_{\mathcal{R}}$ ) sont "anihilées" par l'effet de la division (8.7). En conséquence, le champ des sources ne contient pas de structure géométrique fractale particulière. En effet, l'écriture (8.6) implique que  $\boldsymbol{\rho}$  se met sous la forme d'un rapport  $\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}}$  (ce dernier étant défini similairement à  $\boldsymbol{\alpha}$ ) de coefficients indépendants de l'échelle. Comme  $\boldsymbol{\rho}$  est le rapport de deux images qui présentent la même structure géométrique (*via* le rapport d'échelle  $r^{h(\vec{x})}$ ), le comportement de  $\boldsymbol{\rho}$  n'est plus régi par des lois d'échelle en  $r$ . Ainsi, le champ des sources est finalement indépendant de la structure des images et uniquement déterminé par les différences de distribution de luminance, qui, dans le cas des images **IR**, s'apparentent à des différences de distribution de température.

On obtient de cette manière un champ de vecteurs dont les singularités (les pôles et les zéros) renseignent en particulier sur la répartition des zones de diffusion "énergétiques" dans l'image. Ce champ de vecteurs définit une image elle-même dite de "sources", qui représente la diffusion de la luminance dans la variété la plus singulière (*cf.* figure 8.9).

### 8.3.4. Propriétés du champ des sources

La définition de  $\boldsymbol{\rho}$  permet d'envisager une relation de la forme :

$$\nabla I \approx \boldsymbol{\rho} \nabla I_{\mathcal{R}} \tag{8.8}$$

où le produit ici considéré est un produit entre variables complexes.  $\boldsymbol{\rho}$  représente donc, en un sens, la matrice de passage d'un champ à un autre. Par conséquent,  $\boldsymbol{\rho}$  s'écrit comme une matrice  $2 \times 2$  de la forme  $\{\rho_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 2}$ . Cependant, la relation (8.8) étant établie entre des gradients, l'application des conditions de Cauchy permet de retrouver [Rudin, 1987] :

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_x, \quad \rho_{12} = -\rho_{21} = \rho_y$$

et donc de voir que le champ des sources se résume à  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y)$ .

Notons que l'expression (8.8) nous dit également que l'on peut reconstruire l'image à partir de la **CRI** (ou, de manière équivalente, à partir de l'**OMSM**) et du champ des sources, simplement en effectuant le produit (complexe) entre les deux champs. Dans ce contexte, si le champ des sources est vu comme champ complexe, il s'écrit :  $\rho_x + i\rho_y$ . Par conséquent, le gradient  $\nabla I$  reconstruit à partir des sources  $\boldsymbol{\rho}$  et du gradient  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  de la **CRI** prend (abusivement) la forme :

$$\nabla I = \rho_x \nabla I_{\mathcal{R}} + i \rho_y \nabla I_{\mathcal{R}}$$

où l'on envisage là encore des produits complexes, mais où les  $(\rho_x, \rho_y)$  sont des scalaires. Cette écriture permet notamment d'apprécier la situation où le champ  $\boldsymbol{\rho}$  est réel pur ( $\rho_y = 0$ ) : le gradient de la **FRI** (image reconstruite) est alors partout proportionnel à celui de la **CRI** (image réduite) et de même direction. En particulier, la **FRI** reconstruite avec un champ réel est très proche d'une image d'advection (seule la norme change, cf. figure 8.10). En revanche, la composante imaginaire  $\rho_y$  explique les principales déviations de l'image reconstruite par rapport à l'image originale.

Finalement, l'algorithme (6) de construction des sources est relativement simple dans la mesure où il fait appel à une description des champs de vecteurs par des nombres complexes. Le champ est exactement construit comme le rapport complexe des gradients de l'image originale et de l'image réduite. Nous allons voir que les sources mettent ainsi en évidence les zones de diffusion de la luminance dans une image : c'est une information de nature purement chromatique, pas forcément reliée à de l'information de nature thermodynamique.

1. Calculer le gradient  $\nabla I$  de l'image originale.
2. Calculer l'image chromatiquement réduite  $I_{\mathcal{R}}$  comme dans l'algorithme (5) puis calculer son gradient  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ .
3. les champs  $\nabla I$  et  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  sont considérés comme des champs complexes :  $\nabla I = \partial_x I + i \partial_y I$ ,  $\nabla I_{\mathcal{R}} = \partial_x I_{\mathcal{R}} + i \partial_y I_{\mathcal{R}}$ .
4. Le champ  $\boldsymbol{\rho}$  est simplement calculé comme le rapport des champs complexes  $\nabla I$  et  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  :

$$\boldsymbol{\rho}(\vec{x}) = \nabla I(\vec{x}) / \nabla I_{\mathcal{R}}(\vec{x}).$$

**Algorithme 6:** Calcul du champ des sources.

### 8.3.5. Caractérisation de la convection dans le flot

Un moyen relativement simple de confirmer l'existence de convections dans une région donnée est fourni par le champ des sources. Il s'agit de vérifier si le gradient le long de la **MSM** est constant et perpendiculaire à la **MSM**, *i.e.* si l'image originale diffère de la **CRI**. Compte tenu de la relation (8.8), le champ  $\boldsymbol{\rho}$  permet finalement de discriminer les différentes zones de mouvement caractéristique :

- sur les régions dominées par un mouvement advectif, le champ  $\boldsymbol{\rho}$  est, idéalement, constant, dans la mesure où l'image et la **CRI** correspondante coïncident ; en pratique, les deux images

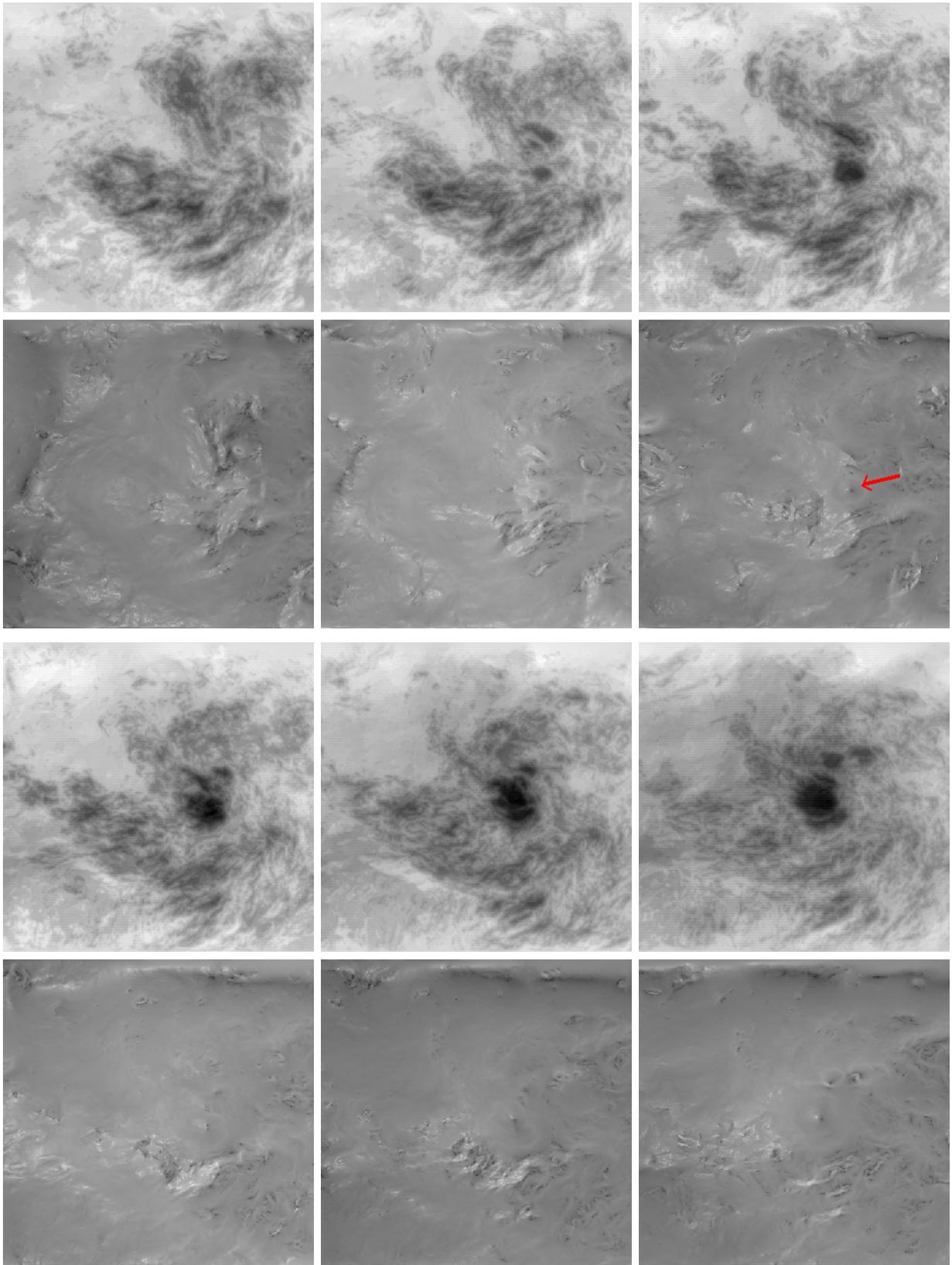


FIG. 8.11.: Situation du 31/07/98 entre 0 h et 11 h30. Calcul des **CRI** et des sources à partir des **MSM** de la figure 6.5. **Lignes du haut** : **CRI**, **lignes du bas** : norme du champ des sources. Une "source" (repérée par une flèche rouge) apparaît sur la 3<sup>ème</sup> image (et les suivantes) ; elle correspond vraisemblablement à la formation d'un système convectif.

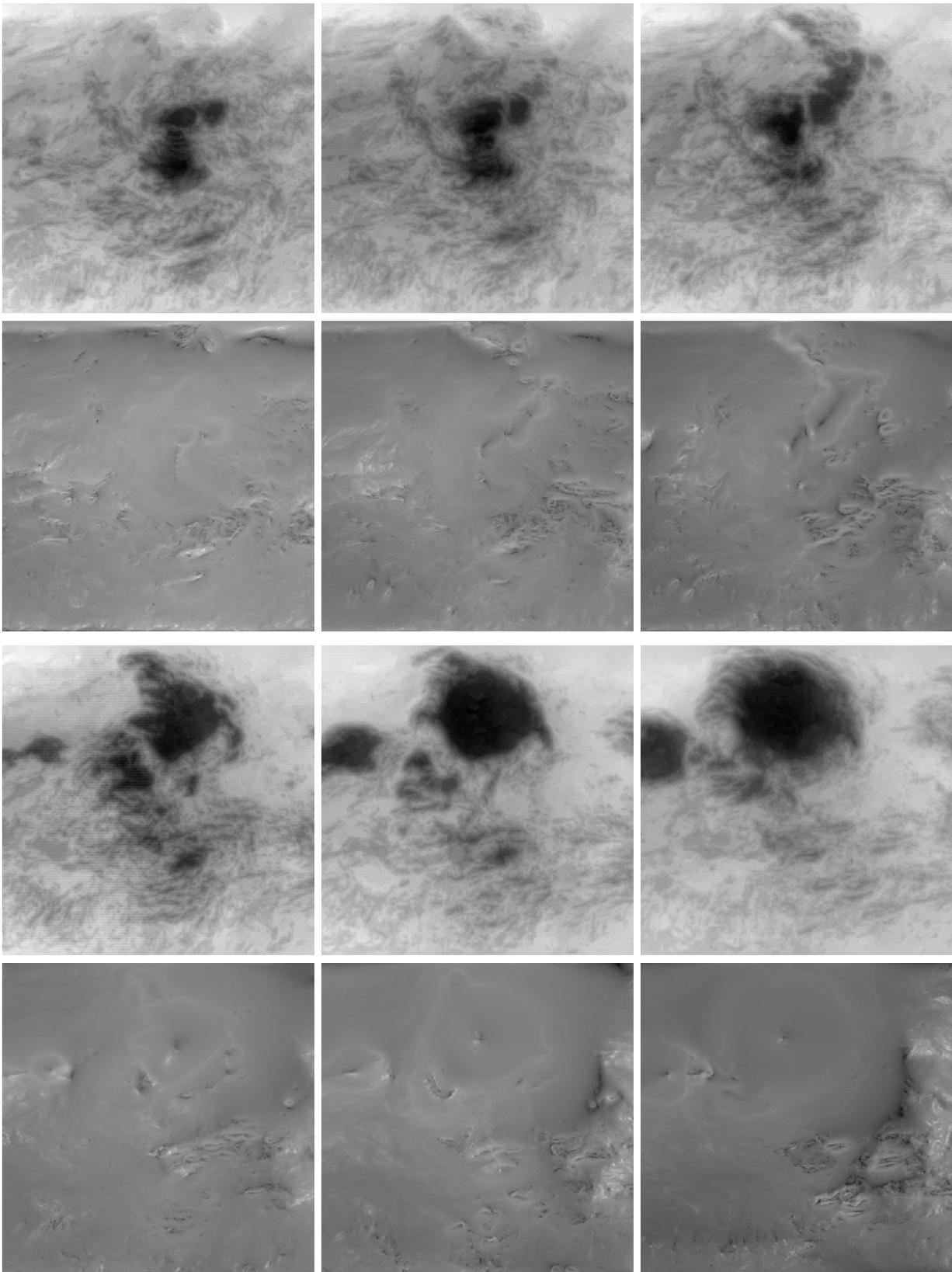


FIG. 8.11.: Suite - situation du 31/07/98 entre 12 h et 23 h 30. *Ibid.*

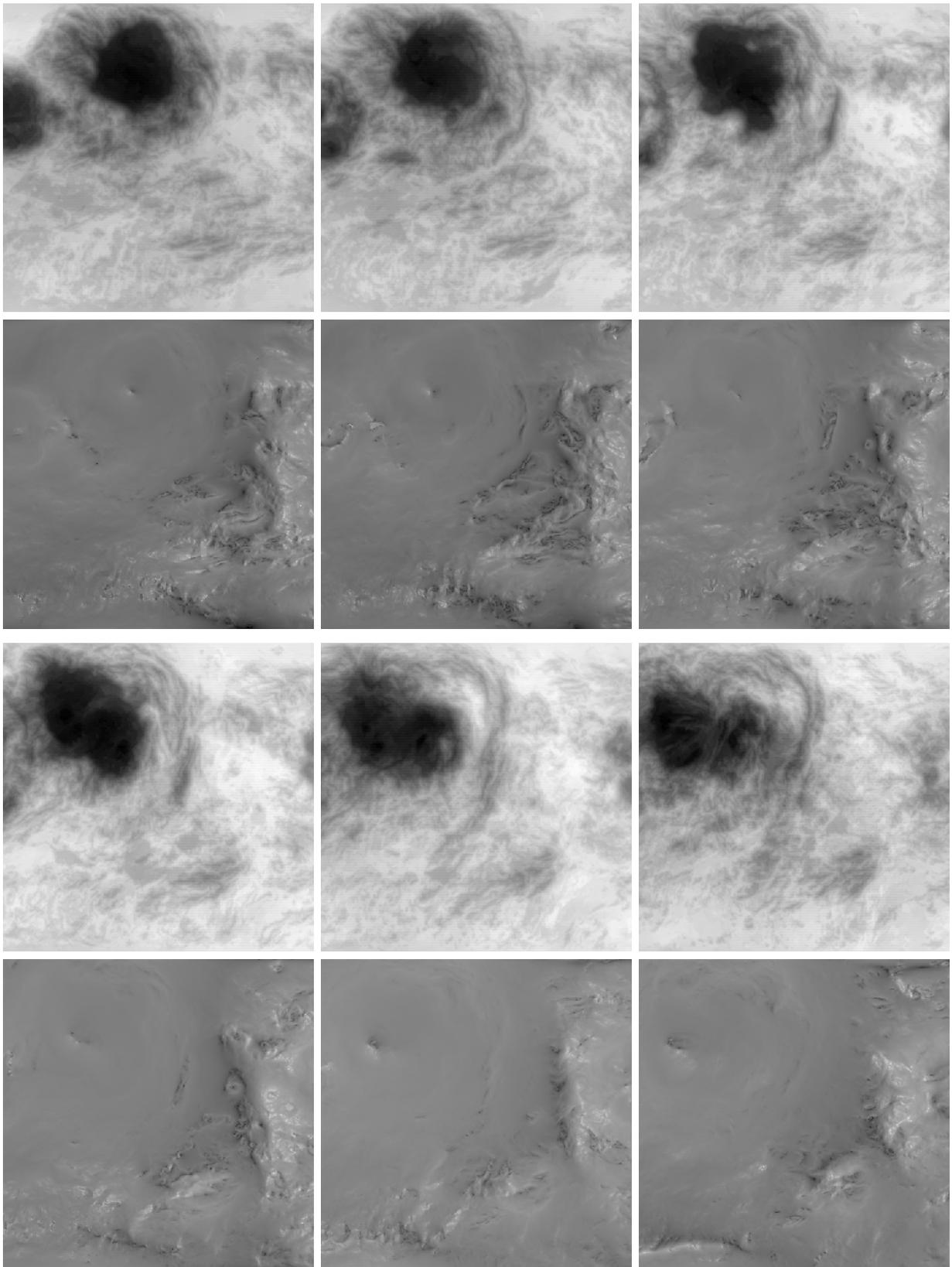


FIG. 8.11.: Suite - situation du 1/08/98 entre 0 h et 12 h 30. *Ibid.*

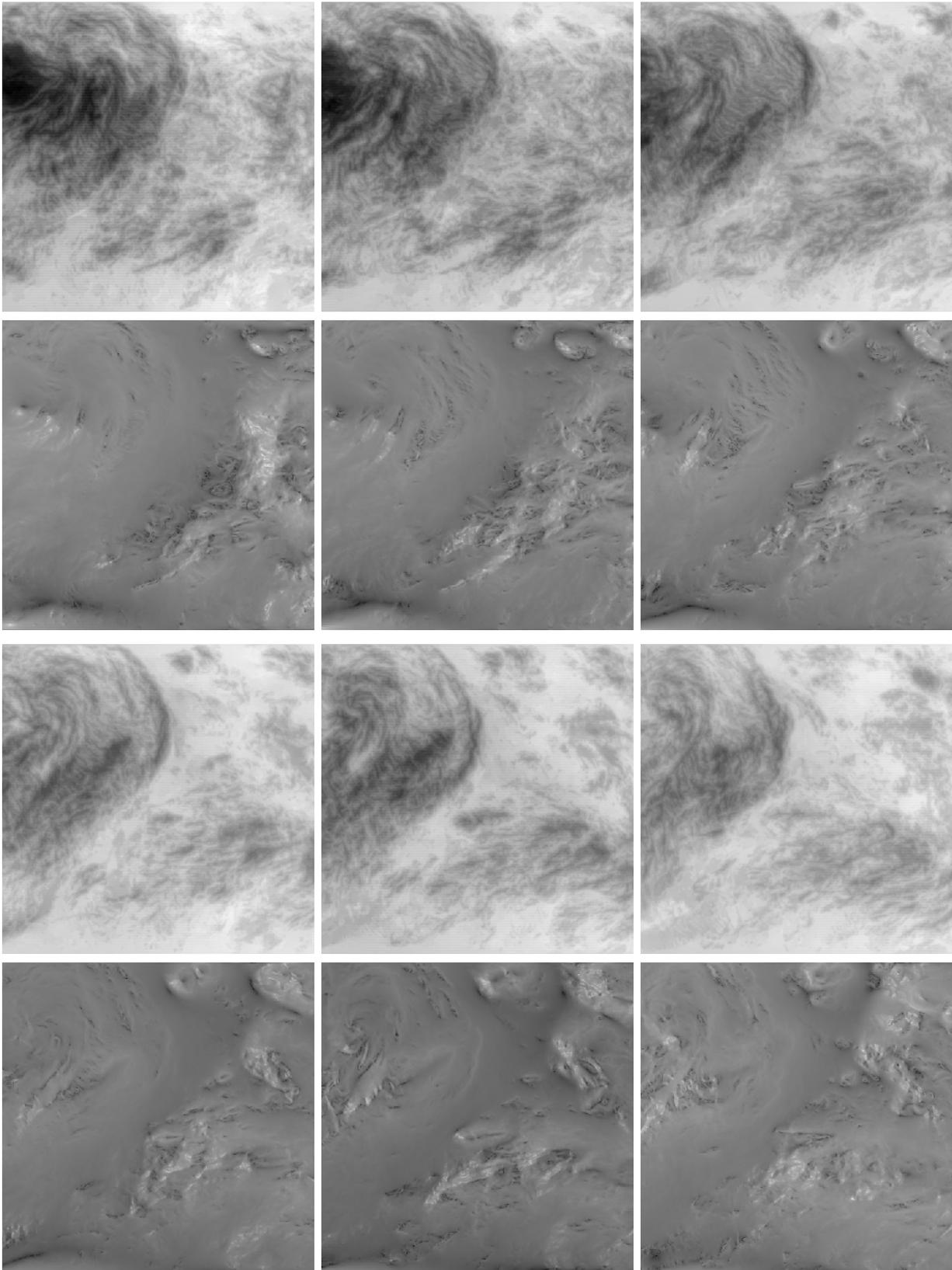


FIG. 8.11.: Suite - situation du 1/08/98 entre 12 h et 23 h 30. *Ibid.* La source que l'on pouvait suivre depuis le début de la séquence disparaît avec la dissipation du nuage convectif.

ne coïncident pas partout, et le champ  $\rho$  est simplement scalaire (réel) non constant :  $\rho = (\rho_x, 0)$ ,

- au contraire, sur les surfaces dominées par les mouvements verticaux, les variations de  $\rho$  sont importantes.

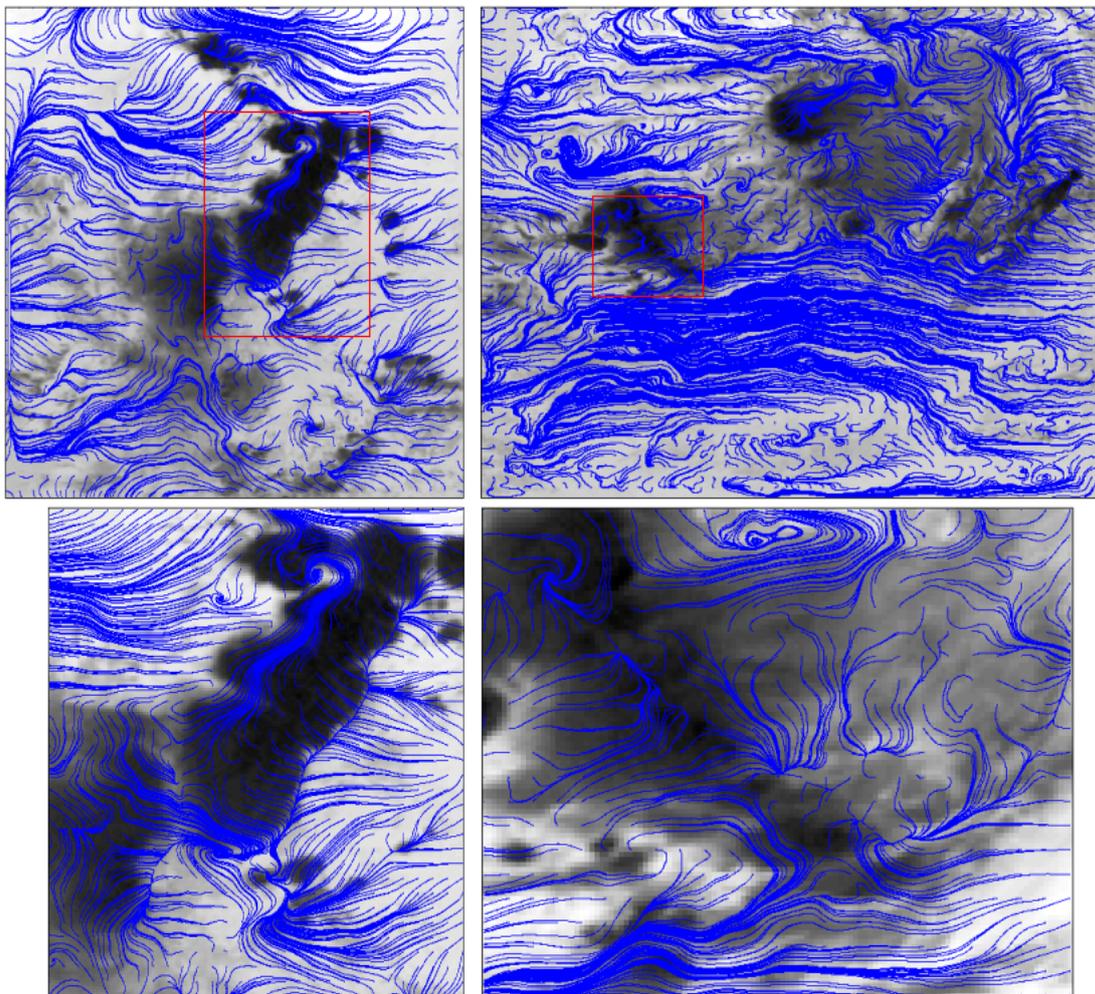


FIG. 8.12.: Trajectoires induites par le champ complexe  $\rho$  des sources : des lignes proches de l'horizontale caractérisent un champ advectif (le champ des sources est alors simplement scalaire  $\rho \approx \rho_x$ ). En revanche, une ligne verticale signifie que la composante imaginaire n'est pas négligeable ( $\rho_y \gg 0$ ), *i.e.* qu'il y a une déviation entre le gradient de l'image originale et celui de la **CRI** : elle révèle la présence d'une source de convection dans notre modèle. **En haut** : le mouvement est globalement advectif dans les images ; **en bas** : les sources de convection sont localisées dans les structures nuageuses.

Le plus grand écart entre les champs  $\nabla I$  et  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  sera observé lorsque l'un des deux s'annule et que l'autre reste fini. Pour cette raison, la plus forte déviation du champ advectif  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  se manifestera sur les pôles et les zéros du champ des sources  $\rho$ . La norme  $|\rho|$  apparaît donc extrêmement pertinente. Notons, par ailleurs, que les zéros et les pôles du champ sont généralement associés à des transitions

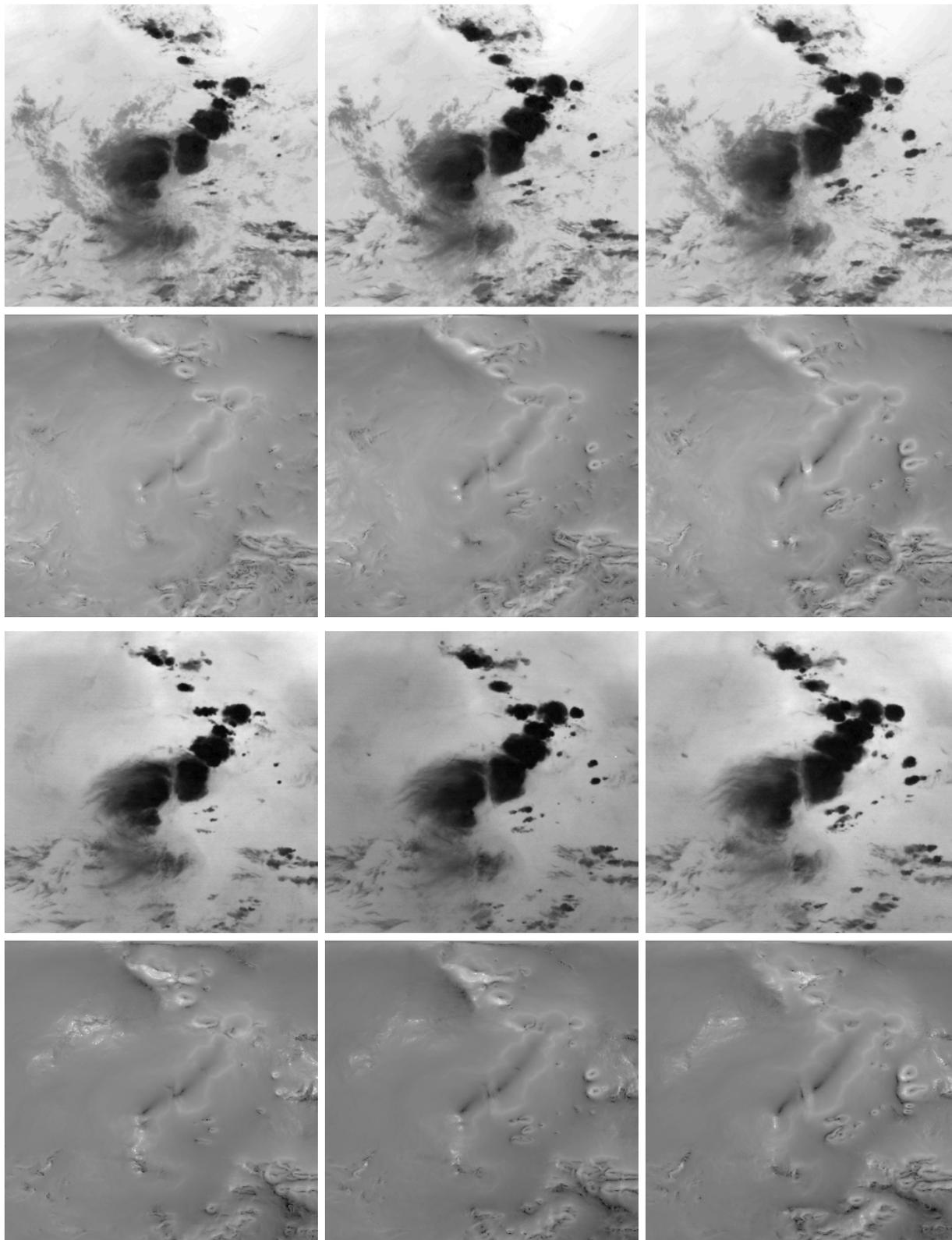


FIG. 8.13.: Comparaison des sources estimées sur des données **IR** et **WV** synchrones. Les images présentées montrent la même scène, acquise le 31/07/98 entre 15 h 30 et 16 h 30. Les sources sont très stables d'un canal à l'autre, en particulier les zéros et les pôles *resp.* détectés dans les signaux **IR** (images du **haut**) et **WV** (images du **bas**) sont en bonne correspondance.

brutales de la phase du champ. Sur la figure 8.4, les mouvements convectifs sont présents là où l'image originale diffère de la **CRI** : ceci induit nécessairement l'existence d'un pôle ou d'un zéro dans les sources. La figure 8.12 représente les trajectoires du champ  $\rho$  vu comme champ 2D : cette visualisation permet d'observer les variations des composantes du champ des sources en fonction de la région traversée. Cela confirme notamment le rôle de la composante  $\rho_y$ , qui explique à elle seule les écarts à l'hypothèse advective.

Il est important de souligner la stabilité des sources lorsque que l'on considère des données **IR** et des données du canal vapeur d'eau (*cf.* section 2.1.2). Sur la figure 8.13, les pôles et les zéros du champ des sources calculés sur des images **WV** coïncident en effet avec ceux calculés sur des images **IR**. Les sources constituent donc des attributs caractéristiques des systèmes complexes turbulents puisqu'on les détecte indifféremment sur des images permettant de visualiser la structure du flot atmosphérique. En revanche, il apparaît que les sources calculées sur des données du canal visible sont très différentes. Il pourrait en fait être montré que les images **VIS** n'ont pas une structure multifractale (et ne vérifient pas le formalisme multifractal à proprement parler), contrairement aux données **IR** et **WV**. Cela s'explique essentiellement par la nature de la mesure physique ; les observations de surface du sol, accessibles dans les zones de ciel clair, notamment, présentent un caractère fortement texturé peu compatible avec le comportement multifractal, ce qui conduit à des résultats peu significatifs. Les sources finalement détectées sur les images météorologiques **IR** ou **WV** apparaissent généralement assez bien localisées (et, en fait, déjà en relativement bonne correspondance avec des données de validation **MO**). Il semble que l'on est ainsi en mesure de détecter la présence mouvements verticaux (*cf.* figure 8.11). Cependant des artefacts se produisent généralement près des bords des structures nuageuses. Ceux-ci peuvent être expliqués par la nature du signal **IR** qui, au niveau des contours des nuages, mesure une transition des strates supérieures (le sommet des nuages) aux strates inférieures de l'atmosphère (les nuages bas), voire au sol. On détecte en fait une transition entre deux mesures qui sont effectuées sur des surfaces à des altitudes très différentes, mais cela ne correspond à aucun mouvement vertical.

## 8.4. Extraction des zones de divergence du mouvement

Les différentes composantes fractales sont évidemment pertinentes pour la compréhension des processus thermodynamiques et la connaissance de l'évolution du flot. Le formalisme des sources permet en un sens de qualifier les différentes propriétés observées dans les images **IR** et fournit ainsi un outil d'interprétation de la nature du flot atmosphérique. Nous présentons ici les principaux résultats permettant d'établir une connection entre les différents outils développés jusqu'ici et les principales propriétés dynamiques du flot.

### 8.4.1. Motivation

L'étude des mouvements perceptibles dans les séquences d'images constitue un outil supplémentaire pour la caractérisation des structures nuageuses. La connaissance du mouvement 2D apparent,

qui est une projection plane de mouvements en 3D, dans les images étudiées permet d'avoir des informations sur les vrais mouvements et sur la nature des structures elles-même.

Nous avons identifié la **MSM**, estimée à partir d'une image unique (et donc de la seule information spatiale), avec les lignes de courant du flot, qui en déterminent l'évolution spatio-temporelle. Cette connection est évidemment très riche de sens, car elle signifie que l'on peut déduire de l'information sur le mouvement à partir de la connaissance de la distribution de température. Elle apparaît cependant assez naturelle puisque les mouvements dans l'atmosphère sont principalement induits par des variations de température et des transferts d'énergie (cela s'apparente en un sens à la notion d'ergodicité). En particulier, l'évolution d'une structure météorologique dans les instants  $t, t+1, \dots$  doit pouvoir être appréhendée dès l'instant  $t$ .

Nous proposons de comparer l'information géométrique apportée par les sources extraites d'une unique image **IR** avec l'information spatio-temporelle fournie par la séquence entière d'images **IR** acquises sur la même scène. Nous rappelons tout d'abord les grandes lignes de l'estimation du mouvement, permettant de calculer des champs de vitesse, avant d'utiliser une méthode adaptée à l'analyse des images **IR**. Nous ne souhaitons en aucun cas faire une revue des méthodes (très nombreuses) d'analyse du mouvement et de suivi. Pour un état de l'art complet sur ces méthodes, dans le cadre très général de l'analyse des fluides (et également la présentation d'une méthode originale d'estimation du mouvement), on consultera [Corpetti, 2002]; pour des applications à l'analyse du mouvement dans des images météorologiques, on consultera aussi [Béréziat, 1999]. Dans la suite, nous allons comparer les résultats de l'analyse des sources avec la description du mouvement obtenue par des champs de vitesse, avec pour principal objectif de valider le rôle de ces sources.

#### 8.4.2. Le problème de l'estimation du mouvement

Lorsque l'on s'intéresse au cycle de vie des systèmes nuageux sur une séquence d'images, une des informations essentielles à laquelle on souhaite avoir accès est tout naturellement fournie par les champs de déplacement. Cette information est nécessaire pour la compréhension (éventuellement la prévision) de l'évolution de ces systèmes [Corpetti et al., 2002] [Papin et al., 2000]. Les acquisitions géostationnaires permettent notamment de suivre l'évolution des structures nuageuses (*cf.* chapitre 2).

Comme dans les méthodes d'analyse de mouvement standards, le mouvement dans les images météorologiques peut être caractérisé au travers de deux approches distinctes, suivant les entités que l'on considère dans les images [Memin et Pérez, 1998] :

- les champs denses de vitesses fournissent les champs de déplacement d'une image à la suivante ; ils peuvent être utilisés pour la visualisation ou encore comme données d'entrée pour des modèles numériques,
- des attributs caractéristiques, tels que les points singuliers, offrent une représentation compacte des flots en ne retenant que l'information pertinente véhiculée par le phénomène.

Dans le cadre des applications météorologiques, mais pas seulement, c'est la première approche, qui

consiste à estimer des champs denses de vitesses, qui est la plus fréquemment retenue pour décrire et analyser le mouvement [Corpetti et al., 2002]. Cependant, de nombreux problèmes se posent dès qu'il s'agit de traiter des données météorologiques ; ceux-ci concernent principalement :

- les phénomènes étudiés : l'estimation automatique du mouvement, dans des images **IR** notamment, est rendue extrêmement compliquée par la nature des structures que l'on désire suivre ; la formation et l'évolution des systèmes nuageux est due en partie à des phénomènes non linéaires complexes, et est reliée à l'évolution d'un fluide en **TCD** (*cf.* chapitre 6) ;
- les données analysées : la fréquence temporelle d'acquisition des images par les satellites géostationnaires demeure relativement importante (*e.g.* 30 *mn* pour **MeteoSat 7**, 15 *mn* pour les **Meteosat Second Generation**), ce qui induit des distorsions spatiales et temporelles, puisque les structures ne sont pas suivies de manière continue ; il est ainsi fréquent que les séquences d'images météorologiques ne permettent pas toujours d'utiliser des estimateurs de mouvement basés sur les gradients spatio-temporels de l'intensité ; les déformations inter-images peuvent être en effet beaucoup trop importantes.
- les algorithmes : l'utilisation de nombreuses images dans une séquence accroît d'autant les besoins en capacité mémoire (pour sauvegarder les données) et en temps (pour les traiter).

Ces différents problèmes constituent des limitations à l'estimation des champs denses de vitesses pour des applications en temps réel. De même, les points singuliers, utilisés pour représenter et décrire le mouvement de manière compacte, sont généralement extraits *a posteriori* à partir de l'estimation de champs de vitesse. Finalement, compte tenu de la complexité des modèles physiques gouvernant l'évolution des structures nuageuses, les objectifs tels que l'estimation du mouvement apparent sont plutôt difficiles à atteindre. Ainsi, la connaissance du mouvement, et surtout sa mesure, demeure un problème très complexe.

### 8.4.3. Calcul des champs de vitesse

De nombreuses méthodes développées pour calculer le mouvement utilisent les hypothèses du flot optique et l'approche différentielle de [Horn et Schunk, 1981]. Ses variantes [Barron et al., 1994] sont devenues une méthodologie classique pour l'estimation du mouvement. Cependant, comme nous venons de la souligner, l'analyse du mouvement dans de telles séquences est particulièrement difficile avec les méthodes classiques en raison de la dynamique chaotique des structures météorologiques. Les techniques automatiques de vision par ordinateur, originellement destinées aux mouvements *quasi* rigides, doivent être étendues pour l'analyse du mouvement sous déformations non rigides pour le suivi de nuages [Béréziat et Herlin, 2000].

Dans ce contexte, les auteurs de [Béréziat et Herlin, 2000] proposent une méthode dérivée du flot optique qui est équivalente, sur les images **IR**, à un principe de pseudo-conservation du volume ; ils intègrent à ce calcul un modèle *a priori* de mouvement affine. Dans [Corpetti et al., 2002], un terme de régularisation *div – curl* est utilisé pour l'estimation du mouvement, qui est également supposé vérifier le principe de conservation de la masse. Pour notre part, nous choisissons d'utiliser la première méthode afin d'estimer le mouvement apparent : nous allons ainsi étendre l'hypothèse

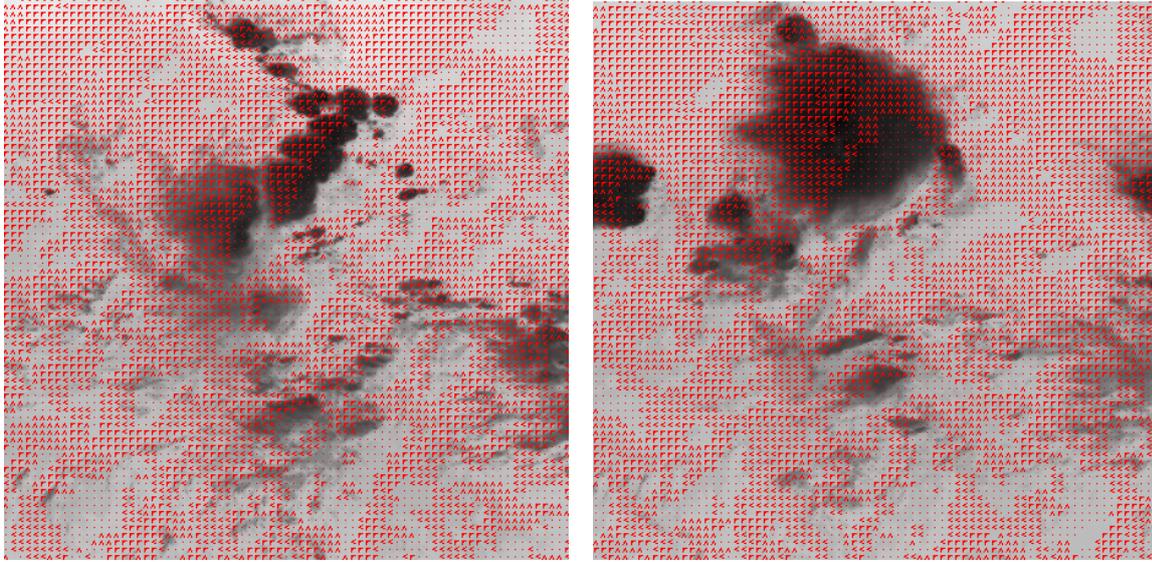


FIG. 8.14.: Champs denses de vitesse, estimés à l'aide de l'hypothèse **EOFC** sur deux images permettant d'observer une même structure nuageuse à 4 h d'intervalle. Les flèches indiquent localement la direction du champ, son orientation et son intensité.

d'invariance de l'intensité des pixels aux objets grâce à la contrainte de l'**EOFC** (*Extended Optical Flow Constraint*). En notant le flot optique  $\mathbf{v}$  (que l'on peut identifier à la vitesse horizontale  $\mathbf{v}_H$ ) et en suivant la construction de [Béréziat et Herlin, 2000] ou de [Béréziat et Berroir, 2000], on exprime l'**EOFC** pour les images **Meteosat IR** par :

$$\nabla I \cdot \mathbf{v} + \partial_t I + (I \cdot \text{div}(\mathbf{v}))\delta_{nuages} = 0 \quad (8.9)$$

où  $\delta_{nuages}$  est égal à 1 sur les régions nuageuses, 0 partout ailleurs (les surfaces nuageuses peuvent être obtenues par simple seuillage de l'image d'entrée). En dehors des zones nuageuses, l'équation (8.9) est équivalente à la contrainte du flot optique classique  $\nabla I \cdot \mathbf{v} + \partial_t I = 0$  : l'hypothèse d'invariance de l'intensité standard est utilisée pour modéliser le mouvement sur les surfaces non nuageuses de l'image. Le terme supplémentaire  $I \cdot \text{div}(\mathbf{v})$  introduit une hypothèse de conservation du volume pour les nuages. En effet, en considérant la description qualitative du profil vertical de température, on peut interpréter le niveau de gris d'une image **IR** comme une mesure de l'élévation du nuage. Ainsi, la variation de l'intensité globale est assimilée à la variation du volume du nuage et l'équation (8.9) revient à considérer une hypothèse de conservation du volume. Sur la figure 8.14, le champ de vitesse apparent  $\mathbf{v}$  estimé sur une séquence entière est représenté sur deux exemples de systèmes nuageux, dont on sait qu'ils sont caractérisés par une intense activité convective.

#### 8.4.4. Extraction de points singuliers divergents

À partir du champ 2D estimé, on choisit alors de mesurer l'information de divergence du mouvement, définie en chaque pixel  $\vec{x}$  de l'image par :

$$\text{div}[\mathbf{v}](\vec{x}) = \partial_x u(\vec{x}) + \partial_y v(\vec{x}) \quad (8.10)$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes du champ de vitesse  $\mathbf{v} = (u, v)$ . Les sources de la figure 8.14, calculées sur des images correspondantes de la figure 8.14, apparaissent assez bien localisées et autorisent à première vue l'extraction de points singuliers associés à une forte divergence du champ de vitesse. En effet, on peut observer, à l'intérieur des nuages au moins, qu'il y a une correspondance plutôt bonne entre les pôles et les zéros des sources  $\rho$  et les fortes valeurs (absolues) de la divergence.

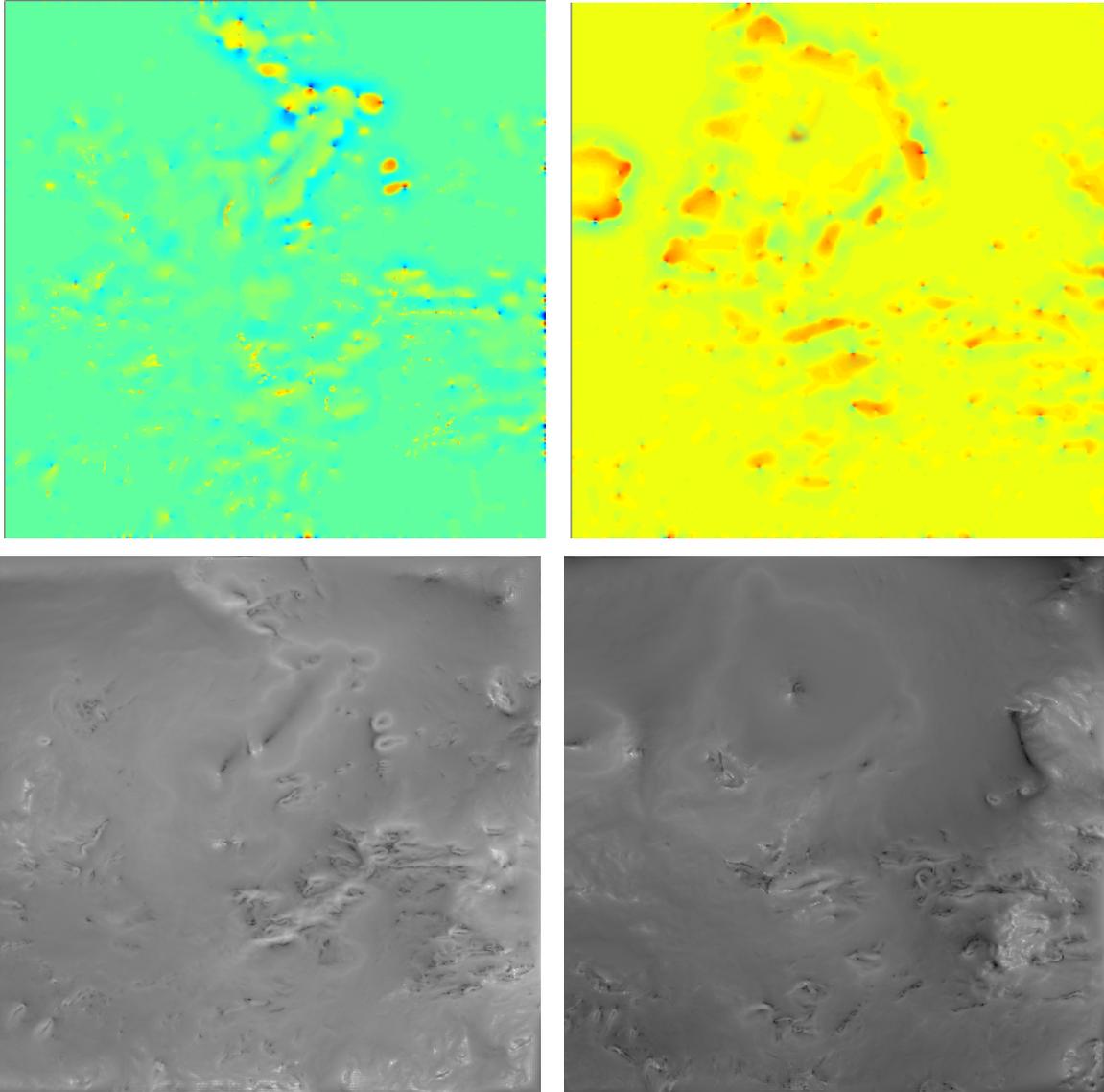


FIG. 8.15.: Comparaison, sur deux systèmes nuageux, entre la divergence des champs de vitesses, estimés à partir des champs de vitesse de la figure 8.14 à l'aide de l'équation (8.10), et la norme du champ des sources (log-représentation). Les valeurs de la divergence vont du bleu (faible divergence) à rouge (forte divergence).

D'un point de vue météorologique, la divergence est une quantité très pertinente : elle permet de caractériser des zones de mouvement significatives, généralement associées à des centres de dépression ou des foyers convectifs [Arnaud et al., 1992] [Bougeault et Sadourny, 2001]. Rappelons notamment qu'une cellule nuageuse convective subit tout d'abord une ascendance caractérisée par

une expansion spatiale de son sommet et une diminution de sa température ; puis, après une phase de stabilité, la cellule subit une phase de subsidence associée à une augmentation de sa température de sommet et à une dissipation de sa structure. Ainsi, l'ascendance est associée à des valeurs  $\text{div}[\mathbf{v}] > 0$  au sommet du nuage tandis que la subsidence est associée à  $\text{div}[\mathbf{v}] < 0$ . Ces mouvements typiques sont caractéristiques de l'activité convective (*cf.* figure 8.16). Finalement, on identifie les zones nuageuses dominées par le transport vertical aux zéros et aux pôles des sources. Notons que dans [Papin et al., 2000], les auteurs utilisaient déjà la divergence du mouvement pour caractériser des structures convectives.

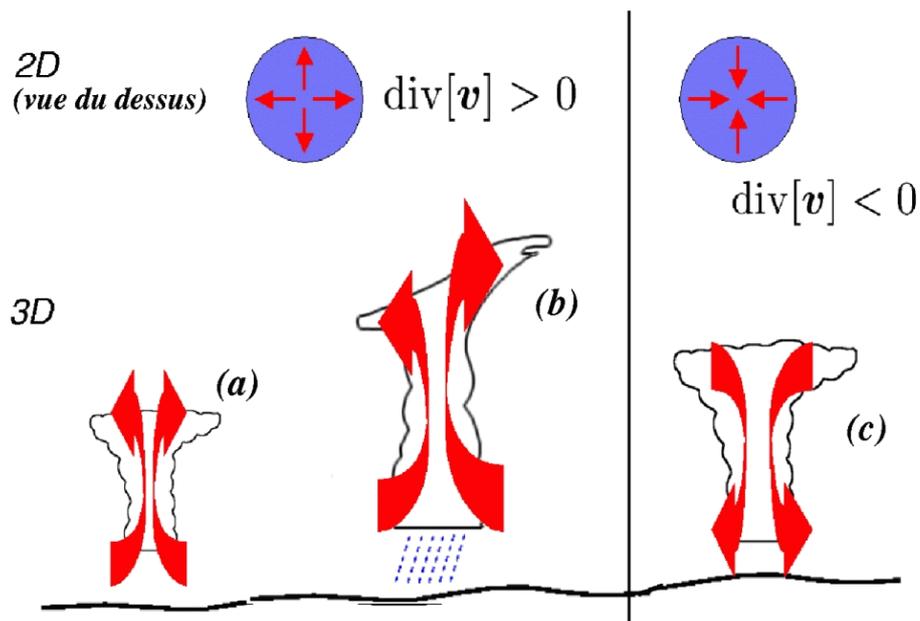


FIG. 8.16.: Divergence du champ de mouvement d'une cellule convective en fonction du stade dans lequel se trouve la cellule au cours de son évolution : croissance (a), maturité (b) ou dissipation (c). Les flèches symbolisent la circulation au sein de la structure.

À ce stade, soulignons également une petite remarque : il pourrait naturellement être objecté que l'utilisation de l'**EOFC** n'est pas adaptée à notre problème. Précisément, dans le contexte d'analyse de zones convectives potentiellement précipitantes, l'hypothèse **EOFC** de conservation du volume est en contradiction avec l'injection de matière effectivement observée dans le système en cas de précipitations. La présence de précipitations contredit l'hypothèse de conservation. Cependant, nous utilisons ici ce modèle d'analyse en première approximation. L'objectif n'est pas d'obtenir des estimations précises, mais plutôt de disposer d'une description qualitative. Malgré ces limitations, les résultats obtenus confortent l'utilisation du champ de sources pour caractériser les mouvements. Ces champs autorisent à première vue l'extraction de points singuliers associés à une divergence du champ de vitesse.

### 8.4.5. Discussion

En météorologie, les points singuliers permettent de localiser les zones de mouvement caractéristiques [Corpetti et al., 2003] : ils sont généralement le centre des dépressions ou le centre de forts mouvements convectifs. En particulier, les zones de divergence (positive ou négative) sont associées aux phénomènes convectifs. En comparaison des méthodes d'estimation du champ de mouvement [Barron et al., 1994], notre méthode a l'avantage de ne nécessiter l'utilisation que d'une seule image pour déterminer les caractéristiques du mouvement. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de calculer au préalable un champ dense de vitesse : c'est un moyen d'éviter un ensemble de calculs susceptibles de fournir des mesures erronées. Cela nous permet finalement de nous affranchir du difficile problème du calcul du flot optique. La principale limitation de cette méthode, cependant, vient du fait qu'elle ne puisse détecter qu'un seul type de singularités, (celles associées à une divergence non nulle), bien que ces dernières soient très pertinentes. On pourra également envisager de construire des trajectoires des points singuliers [Grazzini et al., 2001] [Szantai et Desbois, 1994] pour caractériser notamment l'activité des cellules convectives tout au long de leur cycle de vie. L'apparition et la disparition des sources semblent difficiles à prévoir (les sources peuvent apparaître au milieu du cycle de vie du nuage, disparaître avant sa dissipation, *cf.* figure 8.11), mais traduisent sans aucun doute d'importantes propriétés physiques des systèmes nuageux qu'il serait important de comprendre davantage.

Notons que de nombreuses méthodes ont déjà été proposées afin d'analyser le mouvement fluide à partir d'une image unique. Les algorithmes classiques calculant les champs de vitesses entre deux images successives ne tiennent généralement pas compte de l'information sur le mouvement directement accessible dans une image seule. Une image est supposée offrir une information limitée sur l'évolution du phénomène impliqué dans la scène observée. Cependant, le mouvement peut être déduit à partir d'une image unique puisque les diverses formes et structures visualisées relèvent normalement du processus sous-jacent. Précisément, sur les images **IR**, l'évolution de structures est liée au transfert de chaleur, *i.e.* au gradient de la température. De nombreux auteurs ont souligné l'adéquation entre température et champs de vitesses, et certains d'entre eux ont tenté de déterminer des caractéristiques de mouvement en utilisant cette propriété [Maurizot et al., 1998] [Ford et Strickland, 1995]. En théorie, il est généralement retenu que les directions d'iso-intensité constituent une approximation des principales directions du mouvement. Dans [Maurizot et al., 1998], les auteurs suggèrent que la vitesse est localement tangente à la forme des structures visualisées. Le champ des vitesses associé au modèle de mouvement est alors orthogonal au champ des gradients spatiaux de l'intensité. Dans [Ford et Strickland, 1995], les lignes d'iso-intensité sont considérées comme étant représentatives des lignes de courant. Toutes ces approches sont en fait similaires à celle que nous adoptons. La structure principale qui sous-tend toutes ces considérations est la **MSM**, puisque celle-ci constitue les lignes de courant du flot. En ce sens, notre approche est idéale puisqu'elle permet d'extraire la structure qui détermine la dynamique du flot.

## 8.5. Segmentation des zones précipitantes

### 8.5.1. Motivation

La propriété d'advection n'est en fait pas propre à la température et la **CRI** représente finalement l'hypothèse d'advection de n'importe quelle variable scalaire associée au flot. Elle caractérise n'importe quelle variable thermodynamique intensive. On pourrait par exemple envisager de modéliser l'évolution de la pression dans l'hypothèse d'un flot advectif. Nous proposons en particulier d'utiliser la définition de l'entropie locale (dans sa version multiéchelle, l'**ELM**, cf. figure 8.17) que nous avons introduit au chapitre précédent. L'idée est toujours de comparer la déviation entre la situation réelle où les variations d'entropie sont décrites par son gradient  $\nabla S$  et la situation advective, simplement décrite par la **CRI** (ou, de manière équivalente, l'**OMSM**) afin de saisir certains mécanismes associés aux transferts d'énergie.

Rappelons que l'entropie est en général une façon de mesurer le niveau de turbulence d'un fluide dans un espace de temps déterminé. Intuitivement, les zones les plus chaotiques du signal **IR** (qui correspond à une vue de dessus du phénomène de convection) sont repérables par des sources d'énergie particulières. L'entropie, compte tenu de son interprétation tant sur un plan image que sur un plan physique (en faisant l'hypothèse que celle-ci est bien reliée à l'entropie réelle du système) doit nous permettre d'identifier des zones de l'image ayant des propriétés physiques spécifiques.

### 8.5.2. L'entropie comme attribut thermodynamique

L'entropie physique définie par Clausius [Kittel et Kroemer, 1980] est une fonction d'état interne qui traduit les échanges de chaleur d'un système thermique. L'entropie peut être interprétée de la façon dont Boltzman la définit : *le système (fluide) est en constante évolution vers un désordre (ou une uniformité) maximal et l'entropie fournit une mesure de ce désordre*. Cette définition est reliée à l'entropie au sens de Shannon : il y a bien évidemment équivalence entre l'aspect probabiliste et l'aspect thermodynamique<sup>3</sup>, la variable est basée sur une mesure des configurations possibles au sein du système (stochastique ou thermodynamique). En revanche, l'entropie physique n'a *a priori* pas grand chose à voir avec la définition que nous avons utilisée au chapitre 7, qui est celle d'une entropie spatialement localisée (et qui peut être assimilée à une variable intensive). Cependant, on peut espérer relier l'**ELM** à l'entropie réelle des systèmes atmosphériques, en faisant des hypothèses grossières. Sans établir de lien formel, nous entendons juste donner une intuition de l'emploi que nous allons, ultérieurement, faire de l'**ELM**, en rapport avec la détection de zones particulières d'activité thermodynamique.

On suppose donc que l'**ELM** estimée sur les images **IR** approxime en un sens l'entropie réelle des systèmes observés. Cette quantité est calculée en supposant que le système peut être décomposé en une superposition de voisinages : ce sont les fenêtres  $\mathcal{W}$  de l'expression (7.8). En supposant l'ergodicité de ce système (ce qui est une hypothèse très raisonnable), chaque voisinage  $\mathcal{W}$  peut être assimilé à un sous-ensemble indépendant, une partition, du système. La formule (7.5) donnant

---

<sup>3</sup>La définition de l'entropie de Shannon est d'ailleurs basée sur cette analogie [Shannon, 1948].

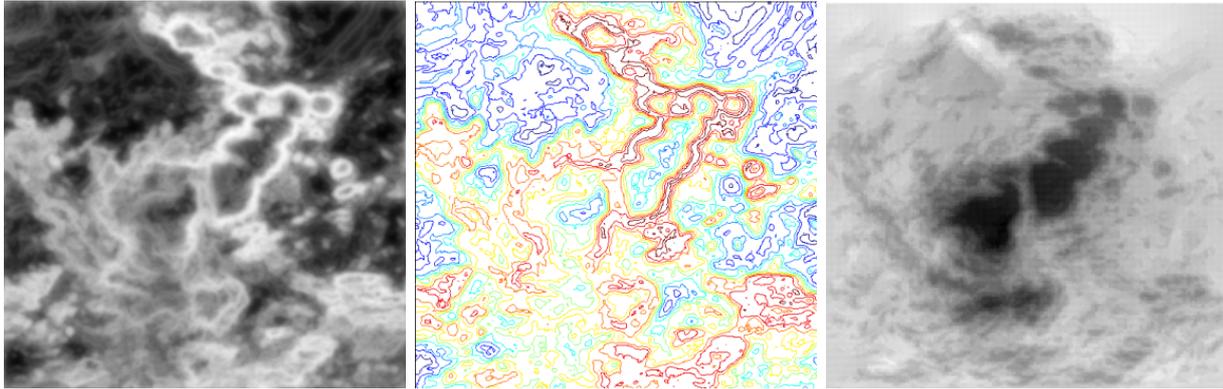


FIG. 8.17.: De gauche à droite : représentation de l'ELM, des lignes d'isentropie correspondantes et de l'ICR, toutes calculées sur l'image IR de la figure 8.9.

l'expression de l'entropie discrète en un point  $\vec{x}$  peut être vue comme une estimation de l'entropie continue définie par :

$$S(\vec{x}) \equiv - \int \rho_{\vec{x}}(I) \log_2 \rho_{\vec{x}}(I) dI \quad (8.11)$$

où  $\rho_{\vec{x}}(I)$  représente la distribution locale de probabilité du signal de radiance (température)  $I$  autour du point  $\vec{x}$ . Dans le cas de l'ELM, cette distribution est estimée en considérant un voisinage multiéchelle  $\mathcal{W}$  du point  $\vec{x}$  et en enregistrant les fréquences relatives pondérées des valeurs de niveaux de gris  $I$ .  $\rho_{\vec{x}}(I)$  est ainsi portée par la famille de probabilités  $\{p(i)\}$ , avec :

$$p(i) = \sum_{\vec{y} \in \mathcal{W}^*} \delta_{I(\vec{y})=i} |\vec{x} - \vec{y}|^{-2}. \quad (8.12)$$

Le choix d'une approche multiéchelle permet l'adéquation avec la propriété d'invariance d'échelle observée dans les systèmes physiques turbulents. L'entropie globale du système est connectée à ces entropies locales :  $S \approx \sum_{\vec{x}} S(\vec{x})$  (ce qui équivaut à un principe d'équirépartition de tous les degrés de liberté du système), mais on s'intéresse plutôt aux variations d'entropie.

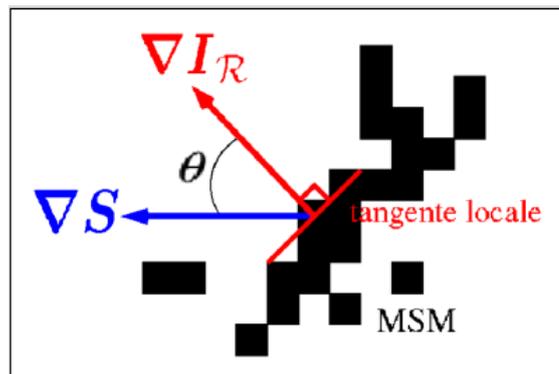
### 8.5.3. Calcul des sources associées à l'entropie

Intuitivement, l'entropie permet de décrire les transferts d'énergie dans le système suivant l'égalité de Clausius [de Groot et Mazur, 1962]. Intéressons-nous aux variations spatiales de l'entropie  $S$ , compte tenu de la définition (8.11) qui fournit une mesure locale. On espère, de cette manière, combiner, au travers des variations spatiales  $\nabla S$ , les changements internes du système et les transferts de chaleur à travers les fronts du système, puisque, en un sens :

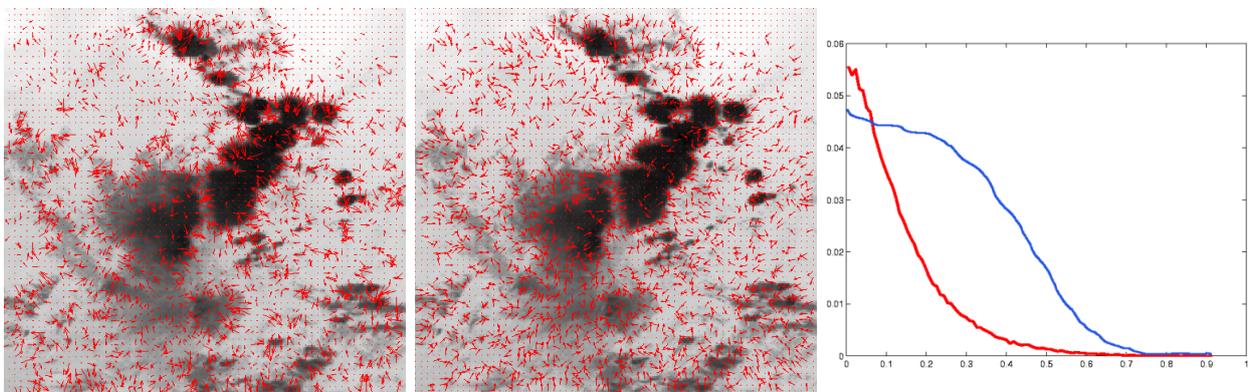
- les variations internes du système sont intégrées par la prise en compte d'un voisinage localisé,
- les transferts de chaleur externes sont traduits par la prise en compte d'un gradient spatial,

de sorte que l'on peut considérer que le gradient  $\nabla S$  de l'entropie fournit une approximation (locale) de la variation  $dS$  d'entropie.

Dans la modélisation des processus atmosphériques, nous avons vu que le transport dans l'atmosphère est dominé par les processus d'advection [Bougeault et Sadourny, 2001]. De nombreux mécanismes physiques impliquant des changements diabatiques peuvent en fait intervenir (et interviennent en réalité), dont les phénomènes de convection turbulente. Ceux-ci s'accompagnent de variations d'entropie (lors de transformations adiabatiques, l'entropie est en revanche conservée). Dans de telles situations, la vitesse verticale est proportionnelle au taux de variation de l'entropie du système [de Groot et Mazur, 1962]. On peut ainsi utiliser le gradient spatial  $\nabla S$  de l'entropie, telle que nous l'avons définie, pour étudier la nature du flot.



(a) Angle  $\theta$  entre les champs  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  et  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  en un point de la MSM.



(b) À gauche et au milieu : représentations des champs  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  et  $\nabla S$  sur la MSM de l'image IR de la figure 8.9. À droite : distribution des valeurs absolues des produits scalaires  $\nabla I_{\mathcal{R}} \cdot \nabla S$  (en bleu) et  $\nabla I_{\mathcal{R}}^{\perp} \cdot \nabla S$  (en rouge), qui renseignent sur la valeur de l'angle  $\theta$ .

FIG. 8.18.: Mesure de la déviation entre le champ unitaire  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ , normal à la MSM, et le gradient de l'entropie  $\nabla S$ .

Ces considérations amènent en effet à penser que l'on est en mesure de détecter la présence de transport vertical, et donc l'activité convective, *via* l'évolution de la température au travers des surfaces isentropiques. Nous proposons de prendre en compte les champs induits par la température et les différences de température. En chaque pixel de l'image, on ne considère pas seulement la

température mesurée localement, mais nous tenons compte aussi de la chaleur transférée par les fronts thermiques, au travers du processus de propagation à partir des valeurs de la température sur la **MSM**. Nous avons vu que les zones les plus chaotiques du signal **IR** sont repérables par des sources d'énergie particulières. L'entropie, compte tenu de son interprétation sur un plan physique doit nous permettre d'identifier ces zones. Nous proposons donc d'appliquer le formalisme des sources à la variable d'entropie. Il s'agit ainsi, simplement, de remplacer dans la définition (8.7) du champ des sources, le gradient de référence de l'image originale par celui de l'**ELM**. Nous introduisons pour cela une mesure définie comme en (8.5) à partir du gradient  $\nabla S$  de l'entropie  $S$  :

$$\mu_S(A) \equiv \int_A \nabla S(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (8.13)$$

Une objection naturelle à cette approche : il n'y a aucune raison que l'**ELM** définisse une structure multifractale identique à celle de l'**ICR**, et donc que la dérivée de Radon-Nykodim ait un sens. Cependant, nous nous affranchissons de cette contrainte, car numériquement cela ne pose pas de problèmes. La hiérarchie induite par l'**ELM** et la décomposition multifractale sont très proches (*cf.* chapitre 7), et, en conséquence, les deux images définissent une structure géométrique proche.

#### 8.5.4. Extractions de régions de transition de la phase des sources

On observe généralement une plus forte variation du gradient de l'entropie dans la direction normale à la **MSM**. Sur la figure 8.18(b), nous représentons le champ unitaire  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  et le gradient de l'entropie  $\nabla S$  sur les pixels de la **MSM**. Sur la même figure, nous calculons également les distributions des produits scalaires (en valeur absolue)  $\nabla I_{\mathcal{R}} \cdot \nabla S$  et  $\nabla I_{\mathcal{R}}^{\perp} \cdot \nabla S$  sur la **MSM**, où  $\cdot$  désigne le produit scalaire et  $\nabla I_{\mathcal{R}}^{\perp}$  représente le champ unitaire tangent à la **MSM** (*i.e.* normal à  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ ). Il apparaît bien que les plus fortes valeurs du gradient de l'entropie (donc les plus fortes variations de l'entropie) sont principalement concentrées suivant la direction  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ . Ceci signifie que le gradient de l'entropie est le plus souvent normal aux fronts de température. En prenant en compte non plus seulement l'angle de la déviation entre les différentes grandeurs thermodynamiques, mais également leur magnitude, le calcul des sources, tel qu'il est proposé ci-dessus, permet de s'intéresser aux configurations du flot pour lesquelles cette observation n'est plus valable (*i.e.* pour lesquelles l'entropie dévie fortement du champ unitaire).

Les premiers résultats montrent que l'on peut envisager de décrire le flot, et la nature du mouvement observé, grâce à cette approche. L'utilisation de l'**ELM** comme variable thermodynamique (en s'octroyant quelques libertés vis-à-vis de la thermodynamique) traduit également des propriétés de l'écoulement. Il semble ainsi que l'on soit capable de discriminer qualitativement les zones dominées par l'advection de celles dominées par la convection [Grazzini et al., 2003a]. Notons que compte tenu du faible jeu de données **MO** à notre disposition (combinaison de la faible fréquence d'acquisition et du nombre important de données manquantes ou peu significatives), nous avons très peu de résultats de validation. Il apparaît sur les exemples des figures 8.19 à 8.24 que les sources sont en relativement bonne correspondance avec ces données de validation, en particulier les précipitations associées à de la convection intense se traduisent par :

- la présence le plus souvent de pôles ou de zéros sur les images de norme des sources,

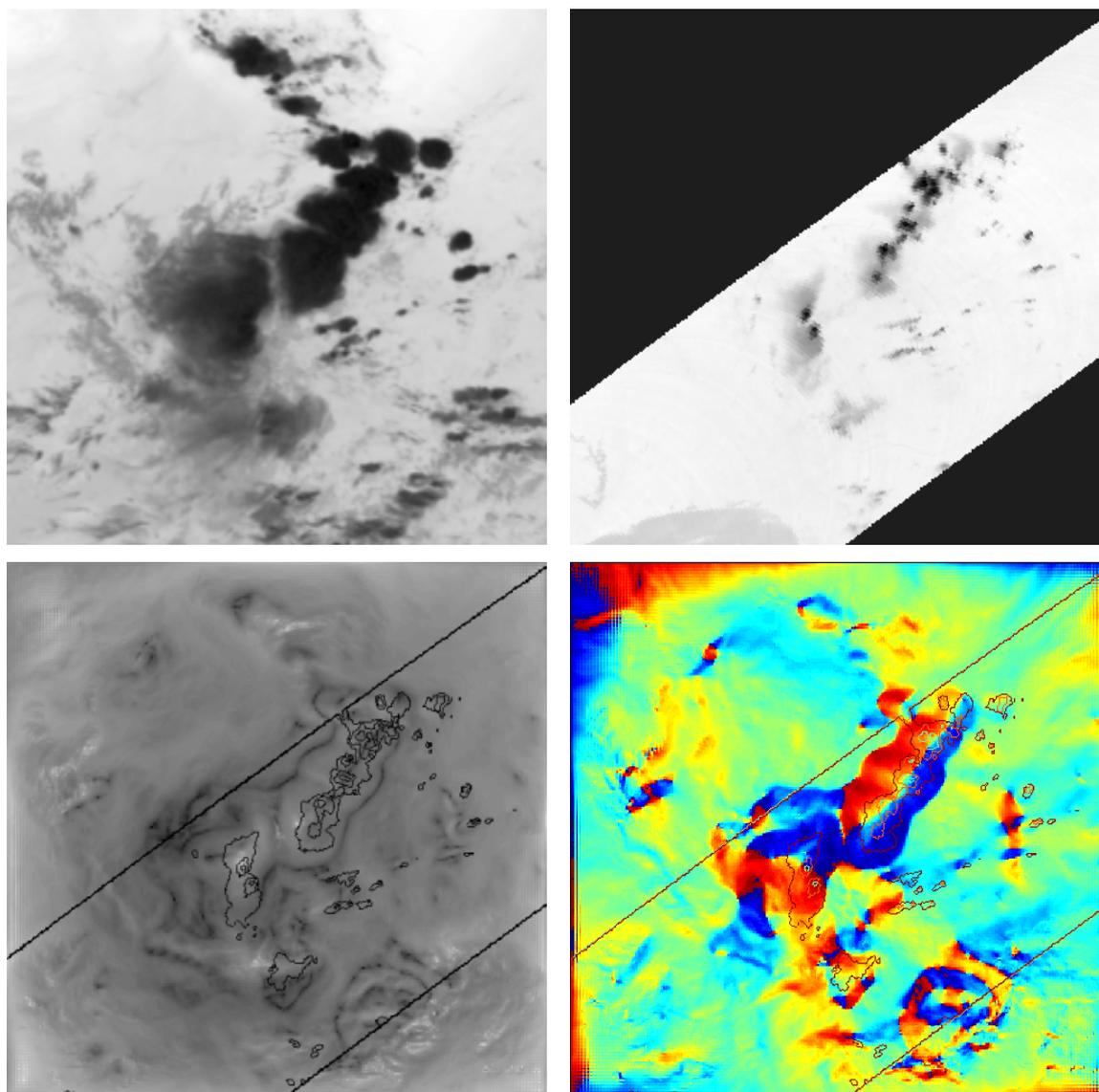


FIG. 8.19.: Visualisation des isothermes **MO** sur les résultats d'analyse de l'image **IR** acquise le 31/07/98 à 16 h. **De gauche à droite, de haut en bas** : image **IR**, image **MO** correspondante acquise à 15 h 51, images de la norme et des phases du champ des sources. La représentation des phases s'étale du bleu (0) au rouge ( $2\pi$ ) en passant par le vert ( $\pi$ ). Les principaux foyers précipitants sont en bonne correspondance avec les sources. Ils se situent par ailleurs sur des zones de transition de la phase (en vert), pour lesquelles les champs d'entropie et de température sont de direction opposée, entourées de zones (en rouge et bleu) pour lesquelles les directions de ces mêmes champs diffèrent fortement. Noter qu'il y a un décalage temporel d'une dizaine de *min* entre les acquisitions **IR** et **MO**, ce qui, compte tenu de la vitesse moyenne des structures nuageuses dans cette région ( $\approx 10 m.s^{-1}$ ), représente, sur cette image, une erreur de 5 à 6 pixels.

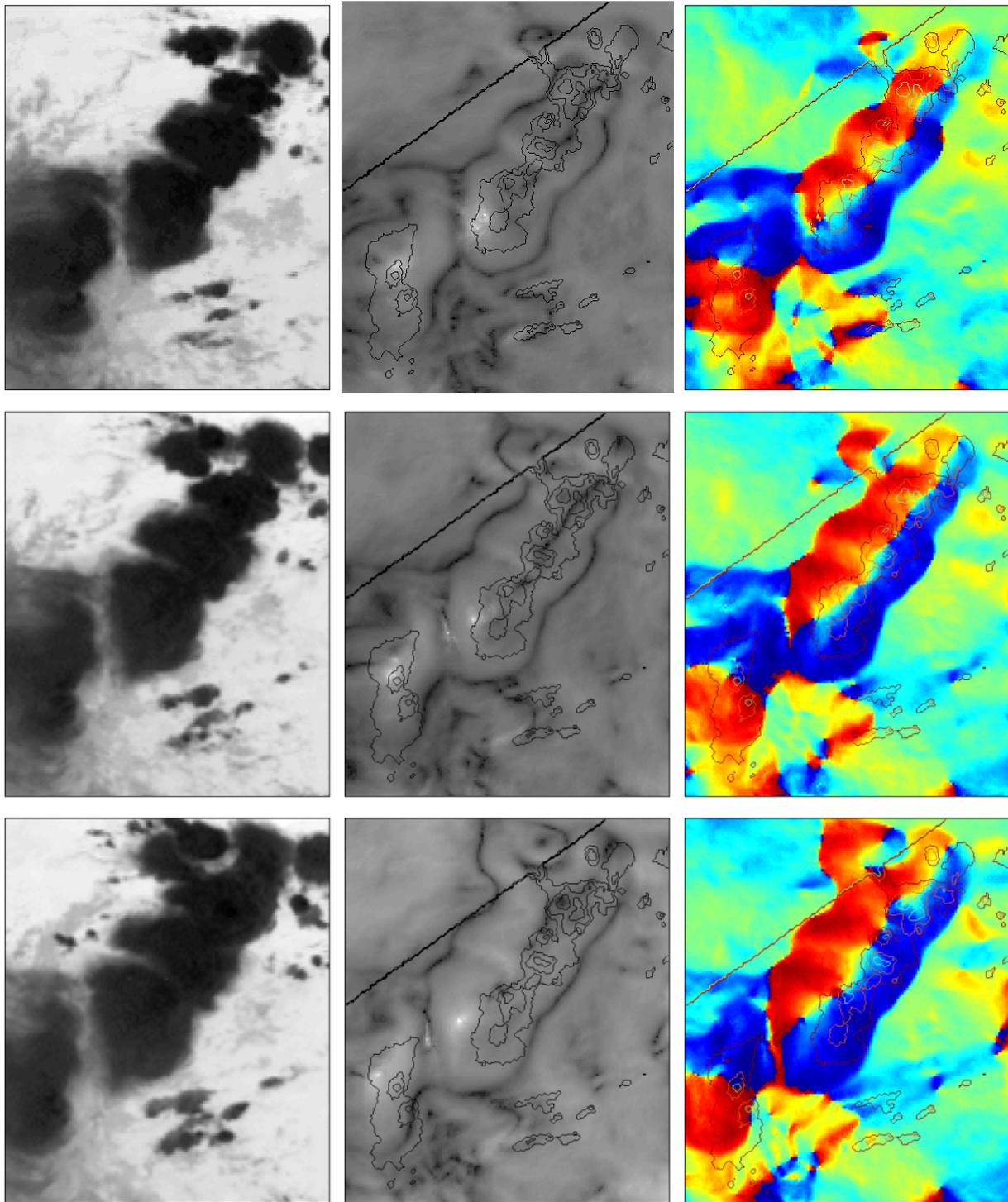


FIG. 8.20.: Détails du calcul du champ des sources sur trois images successives de la séquence **IR**.  
**De haut en bas** : acquisitions du 31/07/98 à 15 h 30, 16 h et 16 h 30 *resp.* **De gauche à droite** : extrait **IR**, images de la norme des sources et de la phase, sur lesquelles on a mis en évidence les fronts de température d'une même image **MO** (acquise à 15 h 51, la seule disponible dans cette plage horaire) déterminant les précipitations.

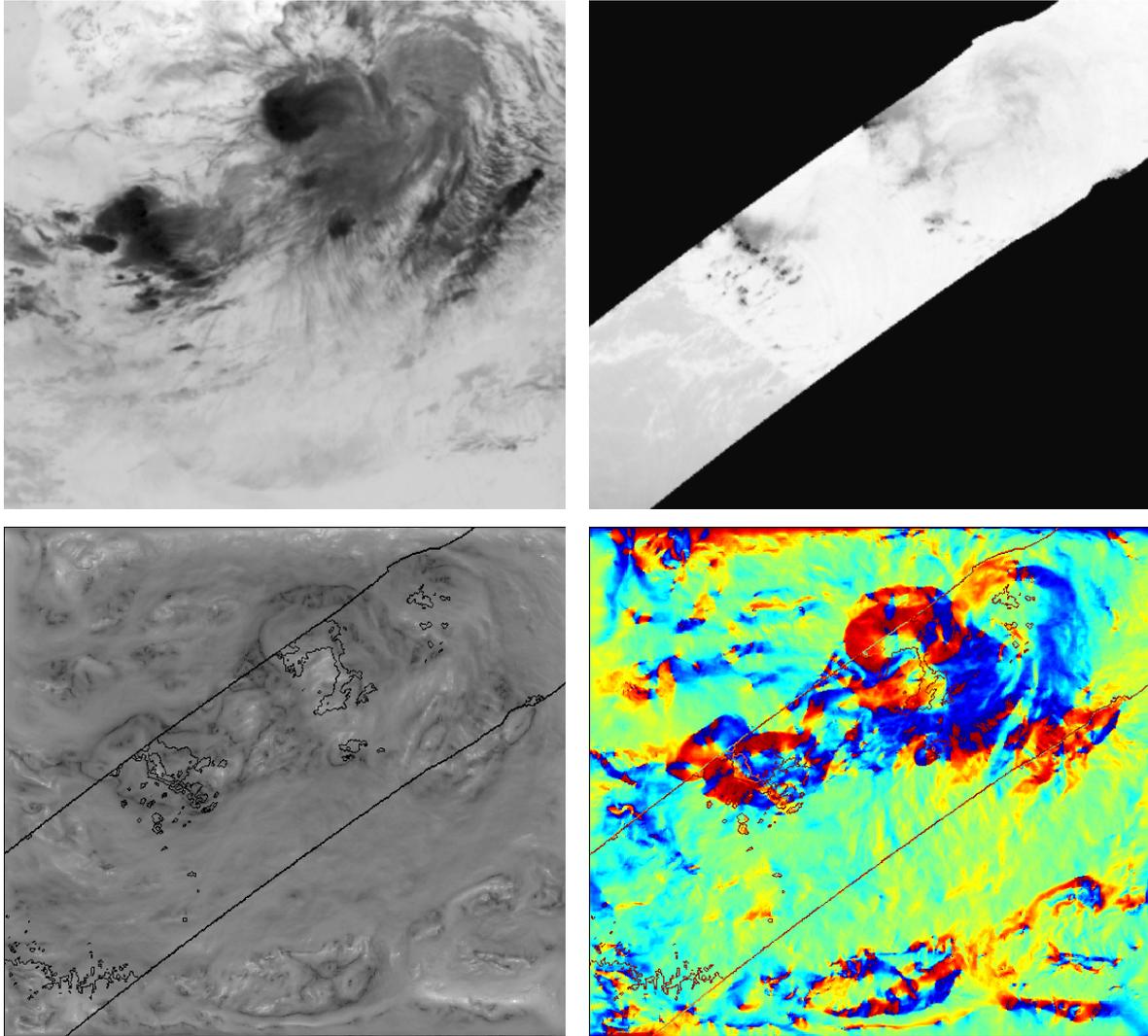
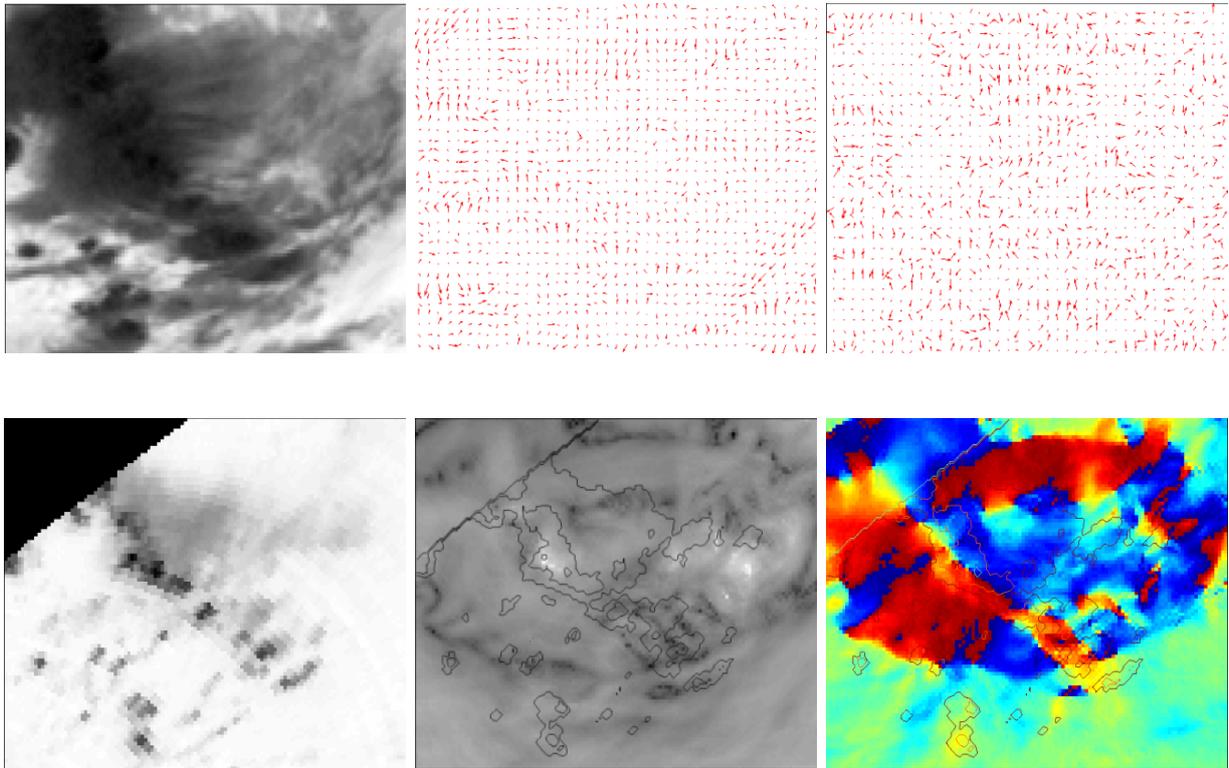


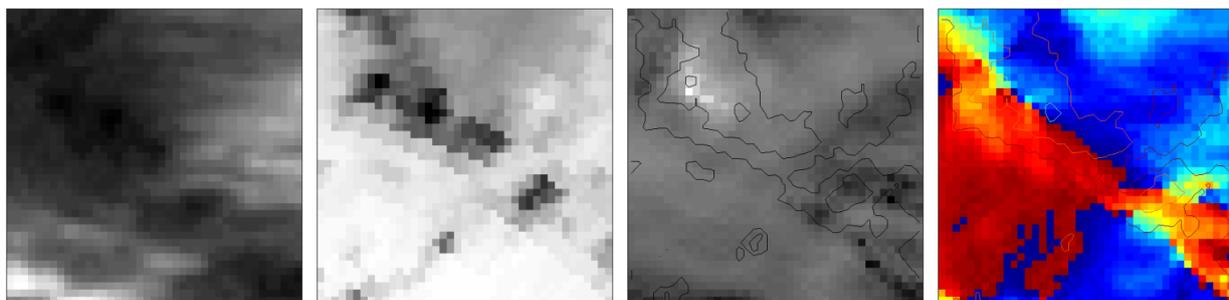
FIG. 8.21.: **En haut** : acquisitions du 01/08/98, à 16 h pour l'image **IR** et à 16 h 12 pour l'image **MO**. **En bas** : résultats de l'analyse avec les sources du champ d'entropie ; norme et phase des sources calculées sur la variable entropie.

- la présence également, et de manière plus significative, d'importantes transitions de la phase des sources.

Il apparaît que les champs d'entropie  $\nabla S$  et de température  $\nabla I_{\mathcal{R}}$  sont orientés, sur les régions précipitantes, suivant la même direction mais suivant des orientations opposées ( $\theta$  proche de  $\pi$ ). À partir des contours des foyers précipitants et tout autour, la déviation entre les champs est beaucoup plus forte ( $|\theta|$  proche de  $\pi/2$ ). On est ainsi en mesure de détecter la présence des principales zones précipitantes sur les images à notre disposition.



(a) De gauche à droite, de haut en bas : extrait  $\mathbf{IR}$ , champ unitaire  $\nabla \mathbf{I}_{\mathcal{R}}$ , gradient de l'entropie  $\nabla S$ , extrait  $\mathbf{MO}$ , images de la norme des sources et de la phase des sources, sur lesquelles on a représenté les fronts de température  $\mathbf{MO}$ .



(b) De gauche à droite, de haut en bas : détail de l'image  $\mathbf{IR}$  ci-dessus, détail  $\mathbf{MO}$ , images correspondantes de la norme des sources et de la phase.

FIG. 8.22.: Résultats sur un extrait de l'image  $\mathbf{IR}$  de la figure 8.21 en correspondance avec une zone de précipitation. Les calculs ont été effectués sur l'acquisition  $\mathbf{IR}$  du 01/08/98 à 16 h. Les données  $\mathbf{MO}$  synchrones ont été acquises à 16 h 12 le même jour (déjà présenté dans la figure 8.21).

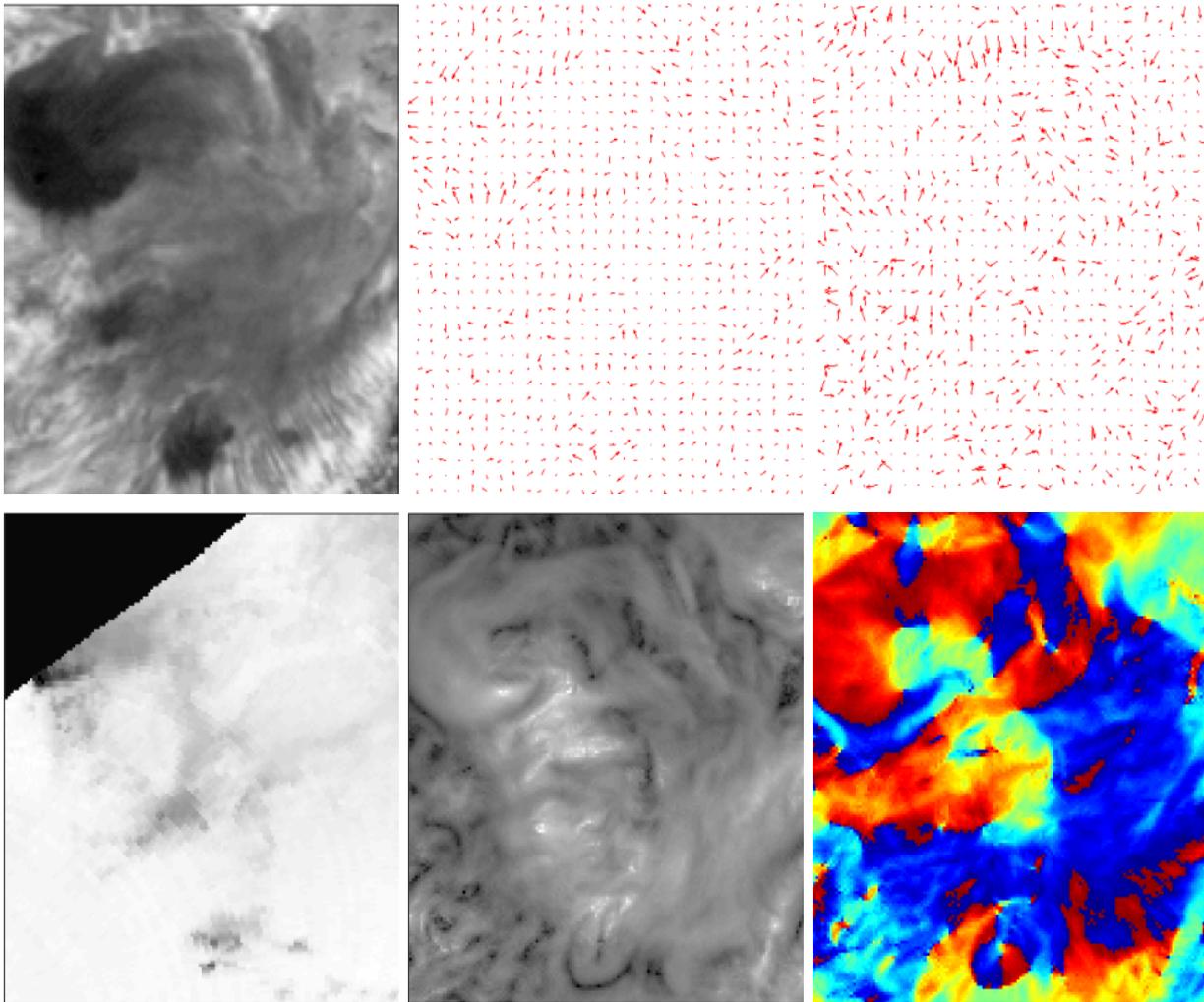


FIG. 8.23.: Résultats sur un extrait de l'acquisition **IR** du 01/08/98 à 16 *h* (figure 8.21). **De gauche à droite, de haut en bas** : extrait **IR**, champ unitaire  $\nabla I_{\mathcal{R}}$ , gradient de l'entropie  $\nabla S$ , extrait **MO**, images de la norme des sources et de la phase des sources.

### 8.5.5. Discussion

Notons, pour rappel, que la hiérarchie multifractale s'interprète comme la représentation géométrique au sein du flot de la cascade d'énergie entre les différentes échelles : les  $F_h$  représentent les structures dans lesquelles l'énergie est injectée (à partir de  $F_\infty$ ) puis dissipée jusqu'à l'échelle suivante. On conçoit l'énergie de deux manières : soit il y a échange de chaleur, soit il y a création de matière. Nous attribuons ainsi ces propriétés de détection à la capacité de l'entropie à mesurer les transferts d'énergie et/ou de matière. En particulier l'injection ou la déplétion d'énergie au sein de l'écoulement pendant les phases d'ascendance et de descendance doit se percevoir sur la variable entropique.

Comment interpréter ces zones de transition de phases ? Disons que la convection est caractérisée par des courants ascendants clairement localisés, séparés par de grandes régions où l'air s'affaisse

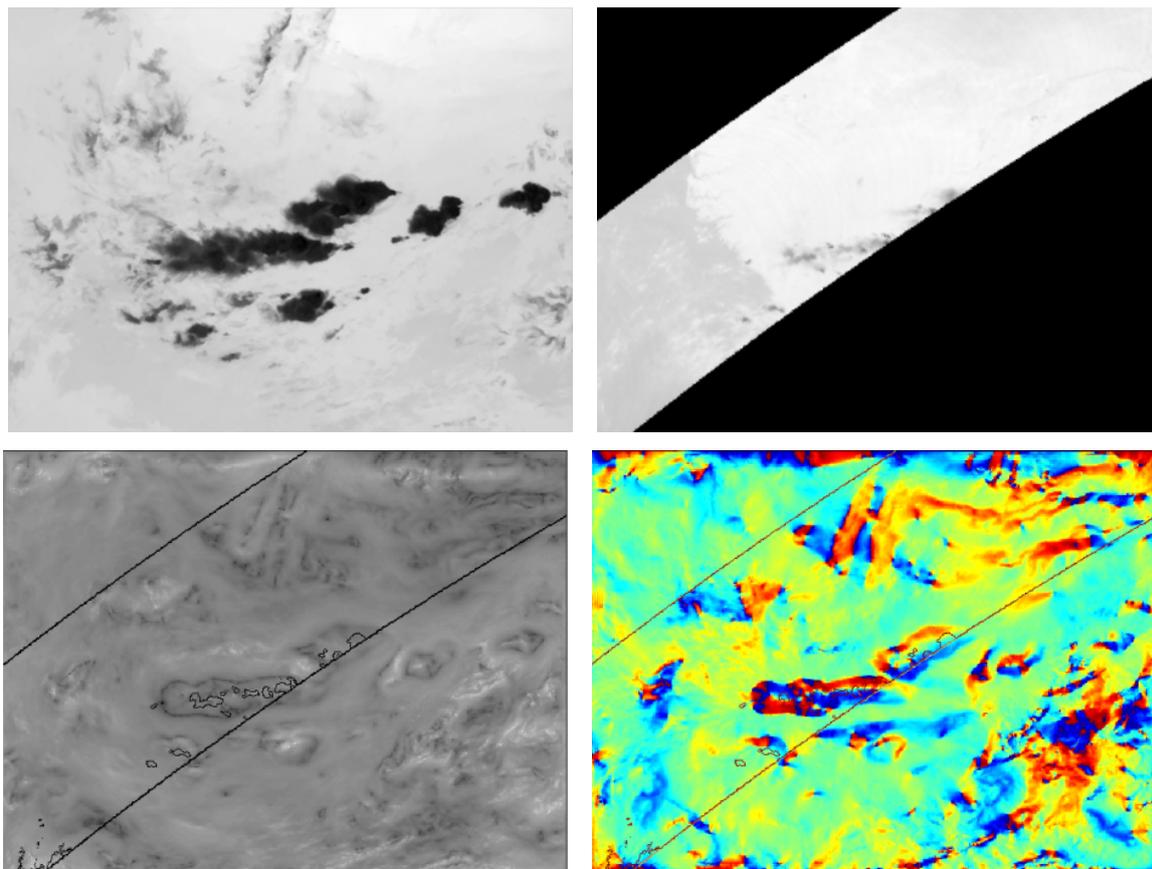


FIG. 8.24.: Résultats sur l'acquisition **IR** le 31/07/98 à 17 h 30. **De haut en bas, de gauche à droite** : extrait **IR**, extrait **MO** acquis le même jour à 17 h 22, norme et phase des sources sur lesquelles on visualise les isothermes **MO**. Faible présence de glace au sommet des nuages, mais la zone est tout de même en correspondance avec des transitions des phases des sources.

graduellement [Arnaud et al., 1992]. Il se trouve que des phénomènes semblables de structuration accompagnent fréquemment la convection. Il s'établit verticalement une circulation d'air en cycle fermé : celle-ci s'organise autour de l'ascendance générée par une instabilité convective et se traduit par un mouvement interne à une zone atmosphérique dont la configuration, au cours d'un certain intervalle de temps au moins, reste relativement stable ; et tant que tourne cette cellule convective, il ne se produit que peu d'échanges de matière et d'énergie entre la zone en question et les zones atmosphériques avoisinantes. Les variations sont surtout observées au niveau du foyer de convection lui-même, pas dans le reste du système nuageux. La différence d'altitude entre le sommet des tours convectives et le reste de la structure explique alors la brusque transition des phases. Tandis que, dans le cœur de la région convective, les champs d'entropie et de température varient suivant la même direction, la déviation entre ces champs est, ailleurs (à partir du bord de la tour convective et dans le reste du nuage), plus forte car la mesure IR n'est, justement, plus effectuée à la même altitude. Notons que la même propriété explique les transitions observées au niveau des contours de la structure nuageuse, qui traduisent cette fois-ci la différence d'altitude entre sommet du nuage

et sol nu.

## 8.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous intéressons tout d'abord aux différentes configurations possibles du flot atmosphérique (advection et convection) ainsi qu'aux propriétés structurelles et thermodynamiques des cellules nuageuses convectives. Compte tenu de ces propriétés, nous sommes amenés à considérer (et construire) une image particulière dont la structure géométrique traduit un phénomène physique bien précis dans le flot visualisé : la **CRI** représente la distribution de température qui serait observée si l'évolution du flot était uniquement régie par l'advection. L'estimation de la **CRI** permet en un sens de mesurer la déviation entre les mécanismes réels observés et l'hypothèse d'advection. Des observations de nature qualitative laissent penser que le mouvement peut être caractérisé localement, et donc que les foyers de précipitation, associés à des mouvements principalement convectifs, peuvent également être localisés par cette approche. Il apparaît ainsi nécessaire, afin de caractériser la présence des structures convectives dans les images **IR**, d'introduire une variable qui quantifie les déviations du signal réel par rapport à la **CRI**, assimilée à un cas parfait de mouvement advectif. Le formalisme dérivé permet d'identifier les sources cachées pour le processus, *i.e.* les surfaces où le mouvement advectif est en défaut ou, de manière similaire, où de l'énergie et de la matière sont injectées dans le système. Ces sources apportent une information critique sur la nature du mouvement considéré. Le formalisme des sources permet de mesurer la déviation entre les mouvements réels de l'atmosphère, observés dans les images **IR**, et les mouvements induits par l'hypothèse d'advection. Ces attributs sont donc tout naturellement utilisés pour la détection des structures convectives associées au transport vertical : les zones de convection correspondent notamment aux zéros et aux pôles du champs de sources. Nous proposons également, comme extension, de qualifier l'activité au sein des structures nuageuses en réintroduisant l'**ELM**, et en comparant les champs d'entropie et de température advective.

Par conséquent, la chaîne de traitement automatique que l'on propose finalement pour caractériser les zones précipitantes convectives sur les données **IR** se déroule en trois étapes. Premièrement, on extrait à différentes échelles le sous-ensemble de l'image regroupant les principales singularités du signal. Ce sous-ensemble contient l'information essentielle de l'image et peut être assimilé à l'ensemble des fronts thermiques : il apparaît comme pertinent à la fois d'un point de vue physique et géométrique. Ensuite, on calcule l'image réduite reconstruite grâce à un schéma de propagation naïf qui découle de l'algorithme de synthèse multifractal. La distribution uniforme de luminance observée sur cette image, qui préserve par ailleurs les principales structures géométriques de l'image originale, est assimilée à un champ de température advectif. Ensuite, on compare le champ de température de l'image originale et le champ réduit *via* leur dérivée de Radon-Nikodym, pour définir les sources. Cette dérivée fournit une information remarquable : elle met en évidence les zones de diffusion de la luminance dans une image. Une variante de cette dernière étape consiste à considérer non plus les déviations de la **CRI** par rapport à l'image originale mais par rapport à l'**ELM**. La méthode que nous proposons apparaît finalement très efficace et fiable dans l'exhibition de caractéristiques météorologiques pertinentes.

---

**Cinquième partie.**

**Conclusion générale**

---



## Bilan méthodologique

Nous nous sommes intéressés dans ce travail de thèse à la caractérisation, à l'aide d'outils de vision par ordinateur, de structures nuageuses particulières, les systèmes convectifs précipitants, dans des images satellitaires infrarouges. La connaissance des caractéristiques de ces systèmes est essentielle dans le contexte des grands programmes d'étude du cycle de l'eau et de l'énergie, et d'étude des changements climatiques. L'originalité de ce travail réside principalement dans l'approche que nous adoptons pour analyser ces images : nous essayons, à chaque fois que cela est possible, d'introduire des techniques dérivées de concepts permettant de décrire, d'analyser et d'interpréter les propriétés (essentiellement physiques) des phénomènes sous-jacents, et pas seulement les seules propriétés des images ; à tout le moins, nous essayons de relier les techniques que nous employons, et qui appréhendent ce problème comme un problème de traitement d'image, aux propriétés de ces phénomènes pour en fournir une interprétation cohérente. L'objectif est naturellement d'adopter une approche qui analyse les données non seulement au travers des propriétés "image", mais aussi en considérant les mécanismes réels mis en jeu.

Cependant, nous abordons tout d'abord ce problème comme un problème classique de traitement d'image : l'objectif est de montrer les limitations des approches classiques, pour ces données particulières, puisqu'elles reposent sur des hypothèses trop simplistes en regard de la physique des phénomènes rencontrés. Nous sommes ainsi naturellement amenés à nous intéresser aux propriétés des images analysées et à la physique des phénomènes sous-jacents. Ces propriétés nécessitent notamment d'introduire des méthodes d'analyse multiéchelle, qui prennent en compte simultanément toutes les échelles, de manière à intégrer les principales caractéristiques des systèmes analysés dans le schéma d'étude. Nous abordons également l'analyse de données turbulentes. En effet, les images infrarouges sont des données complexes qui mettent en évidence une structure chaotique en rapport avec la dynamique turbulente de l'atmosphère. Nous proposons donc d'utiliser un modèle issu du formalisme multifractal pour analyser complètement ces données. L'avantage principal de ce modèle est qu'il fournit une interprétation multi-sémantique (en termes statistique et géométrique) des structures qu'il permet d'extraire. En outre, ce modèle s'avère particulièrement adapté aux images infrarouges, car, en un sens, ses propriétés reproduisent celles des systèmes analysés. En fait, il permet d'envisager l'analyse des images infrarouges comme un problème d'analyse d'écoulement turbulent. Finalement, il permet d'établir un lien quantitatif entre la dynamique de cet écoulement, la statistique des images et les différentes structures mises en évidence.

Le traitement automatique se fait essentiellement en trois étapes. Grossièrement, ces étapes se résument à l'extraction (ou la construction) de trois entités caractéristiques décrivant les propriétés des images, obtenues à l'aide du modèle multifractal (pour l'analyse et la synthèse) et que l'on essaie de relier à chaque fois avec la physique des processus atmosphériques :

- On extrait tout d'abord, à différentes échelles, le sous-ensemble regroupant les plus fortes singularités du signal. Ce sous-ensemble apparaît extrêmement pertinent pour la connaissance des propriétés des images ainsi que de celles des mécanismes mis en jeu dans l'évolution du flot atmosphérique.
- On propose ensuite le calcul d'une image chromatiquement réduite reconstruite grâce à un

schéma de propagation naïf à partir de l'ensemble précédent. L'image ainsi obtenue est assimilée aux propriétés d'un champ de température advectif.

- Finalement, on compare le champ de l'image originale et le champ réduit, à travers une dérivée de Radon-Nikodym, pour définir le champ des sources. On relie cette variable à la distribution de luminance (température) dans l'image et à la propriété de convection dans le flot.

Il est remarquable de voir que les différentes structures/images extraites traduisent des propriétés tant géométriques, en rapport avec les caractéristiques des images, que thermodynamiques, en rapport avec la physique des phénomènes sous-jacents. Une variante de la dernière étape consiste d'ailleurs à introduire une variable dont la définition découle directement de concepts thermodynamiques : l'entropie, à la place de l'image originale dans le calcul de la dérivée de Radon-Nikodym. Dans le cas particulier de notre étude, cette dérivée fournit une information remarquable : elle met en évidence les zones de diffusion de la luminance. Les points sources détectés sont interprétés comme des points critiques pour le mouvement : ils correspondent aux surfaces où le transport vertical de matière et d'énergie est présent.

Un trait caractéristique de notre approche est finalement sa connexion avec des modèles de la thermodynamique en combinaison avec des concepts géométriques et statistiques de traitement d'image. L'hypothèse qui sous-tend notre approche est justement liée à l'évolution des systèmes atmosphériques et nous permet de relier la description du champ de luminance avec les propriétés de transport du flot atmosphérique. Le modèle multifractal, qui est lui-même dérivé de concepts thermodynamiques, en offrant une description géométrique et physique des images, permet d'établir formellement une relation entre mouvement et luminance. L'ensemble regroupant les plus fortes singularités du signal correspond notamment aux variations les plus brutales dans le champ de température : les transitions les plus singulières dans le signal sont reliées avec la dynamique du fluide et sont interprétées comme les lignes de courant de l'écoulement. Le formalisme multifractal permet de prendre en compte à la fois les informations géométriques (organisation spatiale, structure) et physiques (radiance, température) qui sont accessibles dans les images infrarouges.

## Contributions

Les contributions majeures de ce travail de recherche portent sur quatre aspects :

- Du point de vue méthodologique : Nous abordons un problème complexe à l'aide d'outils notamment dérivés de concepts thermodynamiques pour connecter les résultats fournis par ces outils à l'interprétation des mécanismes physiques. Quand ce n'est pas le cas, nous essayons d'adapter notre méthodologie pour répondre aux contraintes liées aux propriétés physiques des objets observés. Nous montrons de manière évidente (si ça ne l'était pas déjà...) qu'un schéma d'analyse d'images ne peut être envisagé sans prise en compte préalable de la nature des données.
- Du point de vue analytique : Nous utilisons un modèle récent d'analyse multifractale en dehors du contexte pour lequel il a été développé et nous lui donnons une interprétation

spécifique dans le cadre de l'analyse d'images météorologiques. Sur la base d'hypothèses reliant les propriétés des images infrarouges et celles de l'écoulement observé, nous étendons par ailleurs ce modèle en proposant de construire des représentations des différentes configurations possibles du flot atmosphérique.

- Du point de vue traitement d'image : Nous avons essentiellement introduit trois concepts : celui d'image chromatiquement réduite, celui de champ de sources et enfin celui d'entropie multiéchelle. Les deux premiers découlent plus ou moins directement du modèle multifractal. Tous trois trouvent en tout cas un cadre d'application adéquat avec l'analyse des images infrarouges, et de manière plus générale, avec l'analyse de données turbulentes. Cependant, le champ des applications envisageables ne se limite bien évidemment pas à l'analyse des seules données météorologiques.
- Du point de vue applicatif : Sur les données actuellement disponibles, on a pu constater une corrélation entre la caractérisation, à l'aide des sources, des structures dans les images infrarouges et les foyers convectifs potentiellement précipitants.

## Perspectives

De nombreuses extensions peuvent être envisagées et des améliorations peuvent également être apportées à ce travail. Le modèle multifractal que nous avons utilisé et étendu laisse notamment encore entrevoir de nombreuses autres extensions :

- Sur le problème lui-même : Maintenant que nous disposons d'un outil d'analyse au point, la validation des résultats doit être effectuée de manière rigoureuse. En particulier, il serait nécessaire de disposer de davantage de données de validation (pour notre part, nous ne disposons que de 6 ou 7 images micro-ondes réellement exploitables).
- Sur le plan applicatif : On peut envisager d'analyser d'autres types de données avec cette approche. On pense tout d'abord naturellement à l'analyse de données océanographiques qui sont également des données permettant de visualiser des écoulements turbulents. Cependant, le modèle n'est absolument pas restrictif, en tout cas, en aucun cas restreint à l'analyse d'images météorologiques (n'oublions pas que le cadre d'application initial est la compression d'image). Plus généralement, on peut l'utiliser pour analyser n'importe quel type d'images, pas nécessairement associées à l'acquisition de systèmes complexes. Le formalisme des sources permet d'envisager une autre forme de compression de données, où le signal est décomposé en une composante purement géométrique et une composante purement chromatique. Par ailleurs, l'image chromatiquement réduite que nous avons introduite ne constitue qu'un exemple particulier de reconstruction. Sa construction est assez intuitive, mais nous pourrions très bien imaginer reconstruire un autre type d'image, traduisant, pourquoi pas, des propriétés thermodynamiques différentes.
- Sur le plan thématique : On a notamment abordé dans cette thèse des problèmes connexes d'analyse d'images satellitaires. Le modèle multifractal est particulièrement attractif car il permet d'extraire et d'utiliser l'information principale contenue dans une image. Les deux

domaines dans lesquels nous attendons des résultats probants à l'aide de ce modèle sont notamment la fusion de données et la restauration d'images. Plus généralement, le spectre d'applications des méthodes multifractales est très large.

- Sur le plan mathématique : De nombreuses améliorations/extensions sont également à envisager. Le formalisme des sources doit être approfondi. Il faudrait notamment pouvoir caractériser les pôles et les zéros du champ des sources, pour en proposer une véritable interprétation physique. Mathématiquement, il faudra analyser le champ des sources vu comme champ complexe.

---

# Bibliographie

---



- [Abry et al., 2002] Abry, P., Gonçalves, P. et Lévy Véhel, J. (eds), *Lois d'Échelle, Fractales et Ondelettes*. Vol. I et II, Hermes Science Publications. 2002.
- [Acton, 1996] Acton, S., On unsupervised segmentation of remotely sensed imagery using nonlinear regression. *Int. Journal of Remote Sensing* 17(7), pp. 1407–1416. 1996.
- [Adler et Negri, 1988] Adler, R. et Negri, A., A satellite infrared technique to estimate tropical convective and stratiform rainfall. *Journal of Applied Meteorology* 27(1), pp. 30–51. 1988.
- [Arkin, 1979] Arkin, P., The relationship between fractional coverage of high cloud and rainfall accumulations during GATE over the B-scale array. *Monthly Weather Review* 107(10), pp. 1382–1387. 1979.
- [Arkin et Meisner, 1987] Arkin, P. et Meisner, B., The relationship between large-scale convective rainfall and cold cloud over the Western Hemisphere during 1982-1984. *Monthly Weather Review* 115(1), pp. 51–74. 1987.
- [Arnaud et al., 1992] Arnaud, Y., Desbois, M. et Maizi, J., Automatic tracking and characterization of African convective systems on Meteosat pictures. *Journal of Applied Meteorology* 31, pp. 443–453. 1992.
- [Arnéodo et al., 1995] Arnéodo, A., Argoul, F., Bacry, E., Elezgaray, J.-F. et Muzy, J., *Ondelettes, Multifractales et Turbulences*. Edition des sciences et des arts, Diderot, Paris. 1995.
- [Arnéodo et al., 1999] Arnéodo, A., Decoster, N. et Roux, S., Intermittency, log-normal statistics and multifractal cascade process in high-resolution satellite images of cloud structure. *Physical Review Letters* 83, pp. 1255–1258. 1999.
- [Arnéodo et al., 2000] Arnéodo, A., Decoster, N. et Roux, S., A wavelet-based method for multifractal image analysis I : Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *European Physical Journal B* 15, pp. 567–600. 2000.
- [Arrault et al., 1997] Arrault, J., Arnéodo, A., Davis, A. et Marshak, A., Wavelet-based multifractal analysis of rough surfaces : Application to cloud models and satellite data. *Physical Review Letters* 79, pp. 75–79. 1997.
- [Azencott et al., 1990] Azencott, R., Graffigne, C. et Labourdette, C., Edge detection and segmentation of textured plane images. In : P. Baronne, A. Frigessi et M. Piccioni (eds), *Stochastic Models, Statistical Method in Image Analysis*, Springer Verlag, pp. 75–88. 1990.
- [Bacry et al., 1990] Bacry, E., Arnéodo, A., Frisch, U., Gagne, Y. et Hopfinger, E., Wavelet analysis of fully developed turbulence data and measurement of scaling exponents. In : M. Lesieur et O. Métais (eds), *Turbulence and Coherent Structures*, Kluwer Academic Publishers, p. 203. 1990.
- [Baraldi et Parmiggiani, 1995] Baraldi, A. et Parmiggiani, F., An investigation of the textural characteristics associated with gray level cooccurrence matrix statistical parameters. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* 33(2), pp. 293–304. 1995.
- [Barron et al., 1994] Barron, J., Fleet, D. et Beauchemin, S., Performance of optical flow techniques. *Int. Journal Computer Vision* 12, pp. 43–77. 1994.
- [Baum et al., 1997] Baum, B., Tovinkere, V., Titlow, J. et Welch, R., Automated cloud classification of global AVHRR data using fuzzy logic approach. *Journal of Applied Meteorology* 36(11), pp. 1519–1533. 1997.
- [Benzi et al., 1993] Benzi, R., Biferale, L., Crisanti, A., Paladin, G., Vergassola, M. et Vulpiani, A., A random process for the construction of multiaffine fields. *Physica D* 65, pp. 352–358. 1993.
- [Berroir, 1994] Berroir, J., *Analyse multifractale d'images*. Thèse, Université Paris IX. 1994.
- [Bougeault et Sadourny, 2001] Bougeault, P. et Sadourny, R., *Dynamique de l'Atmosphère et de l'Océan*. Éditions de l'École Polytechnique, Ellipses diffusion. 2001.

- [Bouthemy et Benveniste, 1984] Bouthemy, P. et Benveniste, A., Modeling of atmospheric disturbances in meteorological pictures. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1984.
- [Bovik et al., 1990] Bovik, A., Clark, M. et Geisler, W., Multichannel texture analysis using localized spatial filters. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12(1), pp. 55–73. 1990.
- [Bradley et al., 1995] Bradley, A., Jackway, P. et Lovell, B., Classification in scale-space : Applications to texture analysis. In : *Proc. of Int. Conf. on Information Processing in Medical Imaging, ICIPMI'95*, pp. 375–382. 1995.
- [Brewer et al., 1997] Brewer, M., Malladi, R., Pankiewicz, G., Conway, B. et Trassenko, L., Methods for large scale segmentation of cloud images. In : *Proc. of Eumetsat Meteorological Satellite Data Users' Conf.*, pp. 131–138. 1997.
- [Béréziat, 1999] Béréziat, D., Détection et suivi de structures déformables en mouvement, application à la météorologie. Thèse, Université Paris-Sud Orsay. 1999.
- [Béréziat et Berroir, 2000] Béréziat, D. et Berroir, J., Motion estimation on meteorological infrared data using a total brightness invariance hypothesis. *Env. Model. Syst.* 2000.
- [Béréziat et Herlin, 2000] Béréziat, D. et Herlin, I., Object optical flow estimation with an affine prior model. In : *Int. Conf. on Pattern Recognition, ICPR'00, Vol. 3*, pp. 1060–1063. 2000.
- [Buccigrossi et Simoncelli, 1999] Buccigrossi, R. et Simoncelli, E., Image compression via joint statistical characterization in the wavelet domain. *IEEE Trans. on Image Processing* 8, pp. 1688–1701. 1999.
- [Canny, 1986] Canny, J., A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 8(6), pp. 679–698. 1986.
- [Caselles et al., 1995] Caselles, V., Kimmel, R. et Sapiro, G., Geodesic active contours. In : *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision, ICCV'95*, pp. 694–699. 1995.
- [Castaing, 1996] Castaing, B., The temperature of turbulent flows. *Journal de Physique II* 6, pp. 105–114. 1996.
- [Castaing, 1997] Castaing, B., Turbulence : statistical approach. In : B. Dubrulle, F. Graner et D. Sornette (eds), *Scale Invariance and Beyond*, Springer, Cambridge, USA, pp. 225–134. 1997.
- [Castaing et al., 1990] Castaing, B., Gagne, Y. et Hopfinger, E., Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D* 46, pp. 177–200. 1990.
- [Chainais et al., 2003] Chainais, P., Riedi, R. et Abry, P., Scale invariant infinitely divisible cascades. In : *Proc. of Int. Symposium on Physics in Signal and Image Processing, ISPIPS'03*. 2003.
- [Chainais et al., 2001] Chainais, P., Roux, S. et Abry, P., Analyse et modélisation de séries temporelles à l'aide de cascades. Application à l'étude du trafic internet. In : *Actes du GRETSI*. 2001.
- [Chang et Li, 1994] Chang, Y. et Li, X., Adaptive image region growing. *IEEE Trans. on Image Processing* 3(6), pp. 868–872. 1994.
- [Chen et al., 1989] Chen, D., Sengupta, S. et Welch, R., Cloud field classification based upon high spatial resolution textural features. Part II : Simplified vector approaches. *Journal of Geophysical Research* 94(D12), pp. 14749–14765. 1989.
- [Chen et Pavlidis, 1980] Chen, P. et Pavlidis, T., Image segmentation as an estimation problem. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 12, pp. 153–172. 1980.
- [Chui, 1992] Chui, C. K. (ed.), *An Introduction to Wavelets*. Academic Press. 1992.
- [Cohen et Froment, 1992] Cohen, A. et Froment, J., Image compression and multiscale approximation. In : Y. Meyer (ed.), *Wavelets and Applications*, Masson, pp. 617–643. 1992.

- 
- [Cohen et Herlin, 1999] Cohen, I. et Herlin, I., Non uniform multiresolution method for optical flow and phase : portrait models : environmental applications. *Int. Journal of Computer Vision* 33, pp. 29–49. 1999.
- [Congalton, 1991] Congalton, R., A review of assessing the accuracy of classification of remotely sensed data. *Remote Sensing of the Environment* 37(1), pp. 35–46. 1991.
- [Corpetti, 2002] Corpetti, T., Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides. Thèse, Université de Rennes. 2002.
- [Corpetti et al., 2002] Corpetti, T., Mémin, E. et Pérez, P., Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24(3), pp. 365–380. 2002.
- [Corpetti et al., 2003] Corpetti, T., Mémin, E. et Pérez, P., Extraction of singular points from dense motion fields : an analytic approach. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 19(3), pp. 175–198. 2003.
- [Cover et Thomas, 1991] Cover, T. et Thomas, J., *Elements of Information Theory*. Wiley and Sons. 1991.
- [Daubechies, 1992] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, Capital City Press, Philadelphia (USA). 1992.
- [Davis et al., 1994] Davis, A., Marshak, A. et Wiscombe, W., Wavelet-based multifractal analysis of nonstationary and/or intermittent geophysical signals. In : E. Foufoula-Georgiou et P. Kumar (eds), *Wavelet in Geophysics*, Academic Press, New-York, pp. 249–298. 1994.
- [de Groot et Mazur, 1962] de Groot, S. et Mazur, P., *Non-Equilibrium Thermodynamics*. North-Holland, Amsterdam. 1962.
- [Decoster et al., 2000] Decoster, N., Roux, S. et Arnéodo, A., A wavelet-based method for multifractal image analysis II : Applications to synthetic multifractal rough surfaces. *European Physical Journal B* 15, pp. 739–764. 2000.
- [DeLeonibus et al., 1997] DeLeonibus, L., Ferri, M. et Zauli, F., Automatic detection and extrapolation of strong isolated convective phenomena. In : *Proc. of Eumetsat Meteorological Satellite Data Users' Conf.*, pp. 13–17. 1997.
- [Desbois et al., 1989] Desbois, M., Kayiranga, T. et Gnamien, B., Diurnal cycle of convective cloudiness over tropical Africa observed from Meteosat : Geographic characterization and interannual variations. *Annales Geophysicae* 7, pp. 395–404. 1989.
- [Dérêche, 1987] Dérêche, R., Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *Int. Journal of Computer Vision* 1(2), pp. 167–187. 1987.
- [Du Buf et al., 1990] Du Buf, J., Kardan, M. et Spann, M., Texture feature performance for image segmentation. *Pattern Recognition* 23(3/4), pp. 291–309. 1990.
- [Dubrulle, 1994] Dubrulle, B., Intermittency in fully developed turbulence : Log-Poisson statistics and generalized scale covariance. *Physical Review Letters* 73, pp. 959–962. 1994.
- [Duda et Hart, 1973] Duda, R. et Hart, P., *Pattern Classification and Scene Analysis*. John Wiley & Sons. 1973.
- [Ebert, 1989] Ebert, E., Analysis of polar clouds from satellite imagery using pattern recognition and a statistical cloud analysis scheme. *Journal of Applied Meteorology* 28, pp. 382–399. 1989.
- [Essen, 1995] Essen, H., Geostrophic surface current as derived from satellite SST images and measured by a landbased HF radar. *Int. Journal of Remote Sensing* 16(2), pp. 239–256. 1995.
- [Falconer, 1990] Falconer, K., *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons. 1990.
-

- [Fauqueur et Boujemaa, 2004] Fauqueur, J. et Boujemaa, N., Region-based image retrieval : Fast coarse segmentation and fine color description. *Journal of Visual Languages and Computing* 15(1), pp. 69–95. 2004.
- [Ferraro et al., 2002] Ferraro, M., Boccignone, G. et Caelli, T., Entropy-based representation of image information. *Pattern Recognition Letters* 23, pp. 1391–1398. 2002.
- [Field, 1987] Field, D., Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells. *Journal of the Optical Society of America A* 4, pp. 2379–2394. 1987.
- [Ford et Strickland, 1995] Ford, R. et Strickland, R., Representing and visualizing fluid flow images and velocimetry data by nonlinear dynamics systems. *Graph. Mod. Im. Proc.* 57(6), pp. 462–482. 1995.
- [Frieden, 1991] Frieden, B., *Probability, Statistical Optics and Data Testing : A Problem Solving Approach*. Springer-Verlag. 1991.
- [Frisch, 1995] Frisch, U., *Turbulence. The Legacy of Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge MA (UK). 1995.
- [Froment et Mallat, 1991] Froment, J. et Mallat, S., Compression d’images et ondelettes : une double approche contours et textures. In : *Actes Ondelettes et Paquets d’Ondes*, INRIA Rocquencourt. 1991.
- [Gagalowicz, 1981] Gagalowicz, A., A new method for texture fields synthesis : Some applications to the study of human vision. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 3, pp. 520–533. 1981.
- [Gallaudet et Simpson, 1991] Gallaudet, T. et Simpson, J., Automated cloud screening of AVHRR imagery using split-and-merge clustering. *Remote Sensing Environment* 38, pp. 77–121. 1991.
- [Garand, 1988] Garand, L., Automated recognition of oceanic cloud patterns. Part I : Methodology and application to cloud climatology. *Journal of Climate* 1, pp. 20–39. 1988.
- [Garand et Weinman, 1986] Garand, L. et Weinman, J., A structural-stochastic model for the analysis and synthesis of cloud images. *Journal of Climate and Applied Meteorology* 25, pp. 1052–1068. 1986.
- [Geman et al., 1990] Geman, D., Geman, S., Graffigne, C. et Pong, D., Boundary detection by constrained optimization. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12(7), pp. 309–328. 1990.
- [Gong et al., 1992] Gong, P., Marceau, J. et Howarth, P., A comparison of spatial feature extraction algorithms for land-use classification with Spot HRV data. *Remote Sensing Environment* 40, pp. 137–151. 1992.
- [Gonzalez et Woods, 2002] Gonzalez, R. et Woods, R., *Digital Image Processing*. Prentice Hall. 2<sup>nde</sup> ed., 2002.
- [Gotlieb et Kreyszig, 1990] Gotlieb, C. et Kreyszig, H., Texture descriptors based on cooccurrence matrices. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 51, pp. 70–86. 1990.
- [Grassoti et Garand, 1994] Grassoti, C. et Garand, L., Classification based-rainfall estimation using satellite data and numerical forecast model fields. *Journal of Applied Meteorology* 33, pp. 159–178. 1994.
- [Grazzini et al., 2001] Grazzini, J., Béréziat, D. et Herlin, I., Analysis of cloudy structures evolution on meteorological satellite acquisitions. In : *Int. Conf. on Image Processing, ICIP’01*. 2001.
- [Grazzini et al., 2002a] Grazzini, J., Turiel, A. et Yahia, H., Entropy estimation and multiscale processing in meteorological satellite images. In : *Proc. of Int. Conf. on Pattern Recognition, ICPR’02, Vol. 3*, pp. 764–768. 2002.
- [Grazzini et al., 2002b] Grazzini, J., Turiel, A. et Yahia, H., Multifractal analysis of flows in fully developed turbulence : Applications to atmospheric entropy estimation and pluviometry. In : *Proc. of Fisica Estadística, FisEs’02*. 2002.

- 
- [Grazzini et al., 2003a] Grazzini, J., Turiel, A. et Yahia, H., Méthodes multiéchelles d'analyse d'images météorologiques inspirées de la thermodynamique : application à la détection de zones convectives précipitantes dans les images infrarouges. In : Actes des journées Thalweg d'étude sur les méthodes pour les signaux complexes en traitement d'image. À paraître, 2003.
- [Grazzini et al., 2003b] Grazzini, J., Turiel, A., Yahia, H. et Herlin, I., Analysis and comparison of functional dependencies of multiscale textural features on monospectral infrared images. In : Proc. of Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS'03, Vol. 3, pp. 2045–2047. 2003.
- [Grazzini et al., 2004] Grazzini, J., Turiel, A., Yahia, H. et Herlin, I., Edge-preserving smoothing of high-resolution images with a partial multifractal reconstruction scheme. In : Int. Society for Photogrammetry and Remote Sensing, ISPRS'04. À paraître, 2004.
- [Griffith et al., 1978] Griffith, C., Woodley, W., Grube, P., Martin, D., Stout, J. et Sikdar, D., Rain estimation from geosynchronous satellite imagery - Visible and infrared studies. *Monthly Weather Review* 106(8), pp. 1153–1171. 1978.
- [Grossmann et Morlet, 1984] Grossmann, A. et Morlet, J., Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 15, pp. 723–736. 1984.
- [Gu et al., 1991] Gu, Z., Duncan, C., Grant, P., Cowan, C., Renshaw, E. et Mugglestone, M., Textural and spectral features as an aid to cloud classification. *Int. Journal of Remote Sensing* 12(5), pp. 953–968. 1991.
- [Haralick, 1979] Haralick, R., Statistical and structural approaches to texture. *Proceedings of the IEEE* 67(5), pp. 786–804. 1979.
- [Haralick et al., 1973] Haralick, R., Shanmugan, K. et Dinstein, I., Textural features for image classification. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 3(6), pp. 610–621. 1973.
- [Holschneider, 1995] Holschneider, M., *Wavelets : An Analysis Tool*. Oxford University Press. 1995.
- [Horn et Schunk, 1981] Horn, B. et Schunk, B., Determining optical flow. *Artificial Intelligence Vol 17*, pp. 185–203. 1981.
- [Jägersand, 1995] Jägersand, M., Saliency maps and attention selection in scale and spatial coordinates : An information theoretic approach. In : Proc. of Int. Conf. on Computer Vision, ICCV'95, pp. 195–202. 1995.
- [Jain, 1989] Jain, A., *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall. 1989.
- [Jain et Dubes, 1978] Jain, A. et Dubes, R., Feature definition in pattern recognition with small sample size. *Pattern Recognition* 10, pp. 85–97. 1978.
- [Jalobeanu, 2001] Jalobeanu, A., *Modèles, estimation bayésienne et algorithmes pour la déconvolution d'images satellitaires et aériennes*. Thèse, Université de Nice Sophia Antipolis. 2001.
- [Julesz, 1965] Julesz, B., Texture and visual perception. *Scientific American* 212, pp. 38–48. 1965.
- [Kass et al., 1988] Kass, M., Witkin, A. et Terzopolos, D., Snakes : active contour models. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* pp. 321–331. 1988.
- [Kittel et Kroemer, 1980] Kittel, C. et Kroemer, H., *Thermal Physics*. W.H. Freeman and Company, New York. 1980.
- [Kittler, 1986] Kittler, J., Feature selection and extraction. In : T. Young et K. Fu (eds), *Handbook of Pattern Recognition and Image Processing*, Academic Press, Orlando, USA, pp. 59–83. 1986.
- [Kittler et Pairman, 1985] Kittler, J. et Pairman, D., Contextual pattern recognition applied to cloud detection and identification. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* GE-23(6), pp. 855–863. 1985.
-

- [Kolmogorov, 1941] Kolmogorov, A., Local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 30, pp. 299–303. 1941.
- [Kolmogorov, 1962] Kolmogorov, A., A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid of high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* 13, pp. 82–85. 1962.
- [Krim et Brooks, 1996] Krim, H. et Brooks, D., Feature based segmentation of ECG signals. In : *Proc. of IEEE Int. Symposium on Time/Frequency Analysis*. 1996.
- [Kumar et Foufoula-Georgiou, 1997] Kumar, P. et Foufoula-Georgiou, E., Wavelet analysis for geophysical applications. *Reviews in Geophysics* 35(4), pp. 385–412. 1997.
- [Laing et al., 1999] Laing, A., Fritsch, J. et Negri, A., Contribution of mesoscale convective complexes to rainfall in Sahelian Africa : Estimates from geostationary infrared and passive microwave data. *Journal of Applied Meteorology* 38, pp. 957–964. 1999.
- [Lakshmanan et al., 2000] Lakshmanan, V., DeBrunner, V. et Rabin, R., Texture-based segmentation of satellite weather imagery. In : *Proc. of Int. Conf. on Image Processing, ICIP'00*, pp. 732–735. 2000.
- [Lakshmanan et al., 2003] Lakshmanan, V., Rabin, R. et DeBrunner, V., Multiscale storm identification and forecast. *Journal of Atmospheric Research*. À paraître, 2003.
- [Laporterie-Déjean et al., 2003] Laporterie-Déjean, F., Lopez-Ornelas, E. et Flouzat, G., Pre-segmentation of high-resolution images thanks to the morphological pyramid. In : *Proc. of Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS'03, Vol. 3*, pp. 2042–2044. 2003.
- [LastWave] LastWave, Logiciel de traitement du signal à l'aide de l'outil ondelette, <http://www.cmap.polytechnique.fr/~bacry/LastWave>,
- [Laurent, 1994] Laurent, H., Tracking of convective cloud clusters from Meteosat data. In : *Proc. of Eumetsat Meteorological Satellite Data Users' Conf.*, pp. 273–279. 1994.
- [Lee et al., 1990] Lee, J., Weger, R., Senugpta, S. et Welch, R., A neural network approach to cloud classification. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing* 28, pp. 846–855. 1990.
- [Lesieur, 1998] Lesieur, M. (ed.), *Turbulence et Déterminisme*. Presses Universitaires de Grenoble. 1998.
- [Levizzani, 1998] Levizzani, V., Intense rainfall monitoring from geostationary satellites. In : *Proc. of Conf. on Satellite Meteorology and Oceanography*, AMS, pp. 327–330. 1998.
- [Levizzani, 2000] Levizzani, V., Satellite rainfall estimates : a look back and a perspective. In : *Proc. of Eumetsat Meteorological Satellite Data Users' Conf.*, pp. 344–353. 2000.
- [Levizzani et al., 2002] Levizzani, V., Amorati, R. et Meneguzzo, F., A review of satellite-based rainfall estimation methods. *Rapport de recherche EVK1-CT-2000-00058, European Commission Project MUSIC*. 2002.
- [Levizzani et al., 2001] Levizzani, V., Schmetz, J., Lutz, H., Kerkmann, J., Alberoni, P. et Cervino, M., Precipitation estimations from geostationary orbit and prospects for Meteosat Second Generation. *Meteorological Applications* 8, pp. 23–41. 2001.
- [Lindenberg, 1994] Lindenberg, T., Scale-space theory : A basic tool for analysing structures at different scales. *Journal of Applied Statistics* 21(2), pp. 225–270. 1994.
- [Lovejoy et Austin, 1979] Lovejoy, S. et Austin, G., The delineation of rain areas from visible and IR satellite data for GATE and mid-latitudes. *Atmsphere-Ocean*. 1979.
- [Lévy Véhel, 1996] Lévy Véhel, J., Introduction to the multifractal analysis of images. In : Y. Fisher (ed.), *Fractal Image Encoding and Analysis*, Springer-Verlag, New-York. 1996.

- 
- [Lévy Véhel, 2000] Lévy Véhel, J., Analyse fractale : une nouvelle génération d'outils pour le traitement du signal. Informatiques - enjeux, tendances et évolution - TSI 19(1-2-3), pp. 335–350. 2000.
- [Lévy Véhel et Mignot, 1994] Lévy Véhel, J. et Mignot, P., Multifractal segmentation of images. *Fractals* 2(3), pp. 371–377. 1994.
- [Lévy Véhel et Vojak, 1998] Lévy Véhel, J. et Vojak, R., Multifractal analysis of Choquet capacities : Preliminary results. *Advances in Applied Mathematics* 20(1), pp. 1–43. 1998.
- [Lévy Véhel et al., 1997] Lévy Véhel, J., Lutton, E. et Tricot, C. (eds), *Fractals in Engineering*. Springer Verlag. 1997.
- [Lévy Véhel et al., 1992] Lévy Véhel, J., Mignot, P. et Berroir, J., Multifractals, texture and image analysis. In : *Proc. of Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'92*, pp. 661–664. 1992.
- [Ma et Manjunath, 1996] Ma, W. et Manjunath, B., Texture feature and learning similarity. In : *Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'96*, pp. 425–430. 1996.
- [Mallat, 1989] Mallat, S., A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11(7), pp. 674–693. 1989.
- [Mallat, 2000] Mallat, S., *Une Exploration des Signaux en Ondelettes*. Éditions de l'École Polytechnique, Ellipses diffusion. 2000.
- [Mallat et Huang, 1992] Mallat, S. et Huang, W., Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. in Information Theory* 38(2), pp. 617–643. 1992.
- [Mallat et Zhong, 1992] Mallat, S. et Zhong, S., Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 14(7), pp. 710–732. 1992.
- [Mandelbrot, 1982] Mandelbrot, M., *The Fractal Geometry of Nature*. W.H.Freeman and Company. 1982.
- [Marr, 1982] Marr, D., *Vision*. W.H. Freeman and Co., San Francisco. 1982.
- [Mather, 1995] Mather, P., *Computer Processing of Remotely-Sensed Images : An Introduction*. John Wiley & Sons, Chichester (UK). 2<sup>nde</sup> ed., 1995.
- [Maurizot et al., 1998] Maurizot, M., Bouthemy, P. et Delyon, B., 2d fluid motion analysis from a single image. In : *Proc. of IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'98*, pp. 184–189. 1998.
- [Memin et Pérez, 1998] Memin, E. et Pérez, P., A multigrid approach for hierarchical motion estimation. In : *Int. Conf. on Computer Vision, ICCV'98*, pp. 933–938. 1998.
- [Metzler et al., 2000] Metzler, V., Palm, C., Lehmann, T. et Aach, T., Texture classification of graylevel images by multiscale cross-cooccurrence matrices. In : *Proc. of Int. Conf. on Pattern Recognition, ICPR'02, Vol. 4*, pp. 549–552. 2000.
- [Meyer, 1989] Meyer, Y., *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*. Springer Verlag, chapter Orthonormal Wavelets, pp. 21–37. 1989.
- [Meyer, 2001] Meyer, Y., *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution*. American Mathematical Society. 2001.
- [Morel et al., 1997] Morel, C., Orain, F. et Senesi, S., Automated detection and characterization of MCS using the Meteosat infrared channel. In : *Proc. of Eumetsat Meteorological Satellite Data Users' Conf.*, pp. 213–220. 1997.
- [Mumford et Shah, 1985] Mumford, D. et Shah, J., Boundary detection by minimizing functionals. In : *Proc. of IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'85*, pp. 22–26. 1985.
- [Muzy et al., 1994] Muzy, J., Bacry, E. et Arnéodo, A., The multifractal formalism revisited with wavelets. *Int. Journal of Bifurcation and Chaos* 4, pp. 245–302. 1994.
-

- [Negri et al., 1984] Negri, A., Adler, R. et Wetzel, P., Rain estimation from satellites : An examination of the Griffith-Woodley technique. *Journal of Climate and Applied Meteorology* 23, pp. 102–116. 1984.
- [Obukhov, 1962] Obukhov, A., Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* 13, pp. 77–81. 1962.
- [Ohanian et Dubes, 1992] Ohanian, P. et Dubes, R., Performance evaluation for four classes of textural features. *Pattern Recognition* 25(8), pp. 819–833. 1992.
- [Pankiewicz, 1995] Pankiewicz, G., Pattern recognition techniques for the identification of cloud and cloud systems. *Meteorological Applications* 2, pp. 257–271. 1995.
- [Pankiewicz, 1996] Pankiewicz, G., Toward synoptic scale cloud classification : Combining spectral and textural features. In : *Proc. of EumetSat Meteorological Satellite Data User's Conf.*, pp. 111–118. 1996.
- [Papin et al., 1999] Papin, C., Bouthémy, P., Mémin, E. et Rochard, G., Tracking and characterization of convective clouds from satellite images. In : *Proc. of Eumetsat Meteorological Satellite Data User's Conf.* 1999.
- [Papin et al., 2000] Papin, C., Bouthemy, P., Mémin, E. et Rochard, G., Tracking and characterization of highly deformable cloud structures. In : *Proc. of European Conf. on Computer Vision, ECCV'00*, pp. 428–442. 2000.
- [Papin et al., 1998] Papin, C., Bouthémy, P. et Mémin, E., Detection of low clouds in Meteosat images based on a contextual spatio-temporal labeling approach. In : *Proc. of Int. Conf. on Image Processing, ICIP'98*, pp. 561–565. 1998.
- [Parikh, 1977] Parikh, J., A comparative study of cloud classification techniques. *Remote Sensing Environment* 6, pp. 67–81. 1977.
- [Parisi et Frisch, 1985] Parisi, G. et Frisch, U., A multifractal model of intermittency. In : M. Ghil, R. Benzi et G. Parisi (eds), *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, *Proc. of Int. School of Physics E.Fermi, North-Holland, Amsterdam*, pp. 84–88. 1985.
- [Peak et Tag, 1994] Peak, J. et Tag, P., Segmentation of satellite weather imagery using hierarchical thresholding and neural networks. *Journal of Applied Meteorology* 33, pp. 605–616. 1994.
- [Pedlosky, 1997] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Verlag. 2<sup>nde</sup> ed., 1997.
- [Pentland, 1984] Pentland, A., Fractal-based description of natural scenes. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 6, pp. 661–674. 1984.
- [Perona et Malik, 1990] Perona, P. et Malik, J., Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Recognition and Machine Intelligence* 12(7), pp. 629–639. 1990.
- [Pietikäinen et al., 1983] Pietikäinen, M., Rosenfeld, A. et Davis, L., Experiments with texture classification using averages of local pattern matches. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 13(3), pp. 421–426. 1983.
- [Pohl et Van Genderen, 1998] Pohl, C. et Van Genderen, J., Multisensor image fusion in remote sensing : concepts, methods and application. *Int. Journal of Remote Sensing* 19(5), pp. 823–854. 1998.
- [Puig et Garcia, 2001] Puig, D. et Garcia, M., Determining optimal window size for texture feature extraction methods. In : *Proc. of Spanish Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 2*, pp. 237–242. 2001.
- [Ramage, 2002] Ramage, K., Contribution à l'estimation des précipitations et à la caractérisation des nuages en Afrique de l'Ouest à partir des observations des satellites Meteosat et TRMM. Thèse, Université Paris VII. 2002.

- 
- [Ranchin et Wald, 1993] Ranchin, T. et Wald, L., The wavelet transform for the analysis of remotely sensed images. *Int. Journal of Remote Sensing* 14(3), pp. 615–619. 1993.
- [Randen et Husoy, 1999] Randen, T. et Husoy, J., Filtering for texture classification : a comparative study. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21(4), pp. 219–310. 1999.
- [Renyi, 1992] Renyi, A., *Calcul des Probabilités - Introduction à la Théorie de l'Information*. Éditions Jacques Gabay. Réédition de 1966, 1992.
- [Robin et al., 2003] Robin, A., de Smit, T., Berroir, J., Herlin, I. et Yahia, Y., Traitements d'images satellites pour l'estimation de paramètres atmosphériques. In : *Actes des Journées ORASIS*, pp. 101–109. 2003.
- [Rosenfeld et Lensky, 1998] Rosenfeld, D. et Lensky, I., Satellite-based insights into precipitation formation processes in continental and maritime convective clouds. *Bulletin of American Meteorological Society* 79(11), pp. 2457–2476. 1998.
- [Roux et al., 2000] Roux, S., Arnéodo, A. et Decoster, N., A wavelet-based method for multifractal image analysis III : Applications to high resolution satellite images of cloud structure. *European Physical Journal B* 15, pp. 765–786. 2000.
- [Rowell et Milford, 1993] Rowell, D. et Milford, J., On the generation of African squall lines. *Journal of Climate* 6, pp. 1181–1193. 1993.
- [Ruderman, 1994] Ruderman, D., The statistics of natural images. *Network* 5, pp. 517–548. 1994.
- [Ruderman, 1997] Ruderman, D., Origins of scaling in natural images. *Vision Research* 37(23), pp. 3385–3398. 1997.
- [Ruderman et Bialek, 1994] Ruderman, D. et Bialek, W., Statistics of natural images : Scaling in the woods. *Physical Review Letters* 73, pp. 814. 1994.
- [Rudin, 1987] Rudin, W., *Analyse Réelle et Complexe*. Dunod. 1987.
- [Schiele et Crowley, 1998] Schiele, B. et Crowley, J., Transinformation for active object recognition. In : *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision, ICCV'98*, pp. 249–254. 1998.
- [Schiewe, 2002] Schiewe, J., Segmentation of high-resolution remotely sensed data - concepts, applications and problems. *Int. Arch. of Photogrammetry and Remote Sensing* 34(4), pp. 380–385. 2002.
- [Schowengerdt, 1997] Schowengerdt, R., *Remote Sensing. Models and Methods for Image Processing*. Academic Press, San Diego (USA). 1997.
- [Scofield, 1987] Scofield, R., The NESDIS operational convective precipitation technique. *Monthly Weather Review* 115, pp. 1773–1792. 1987.
- [Seddon, 1985] Seddon, A., The application of scene analysis techniques to automatic classification of atmospheric data from multispectral satellite imagery. *Int. Journal of Remote Sensing* 6, pp. 717–731. 1985.
- [Shannon, 1948] Shannon, C., A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal* 27, pp. 379–423. 1948.
- [Shannon, 1978] Shannon, C., *A mathematical theory of communication*. The Illinois University Press, Denver (USA). 1978.
- [She et Levêque, 1994] She, Z. et Levêque, E., Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical Review Letters* 72(3), pp. 336–339. 1994.
- [She et Waymire, 1995] She, Z. et Waymire, E., Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Physical Review Letters* 74(2), pp. 262–265. 1995.
- [She, 1997] She, Z.-S., Hierarchical structures and scalings in turbulence. In : *E. et al. (ed.), Lecture Notes in Physics, Vol. 28*, Springer. 1997.
-

- [Shen et Castan, 1986] Shen, J. et Castan, S., An optimal linear operator for edge detection. In : Proc. of IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'86, pp. 109–114. 1986.
- [Shokr, 1991] Shokr, M., Evaluation of second-order textural parameters for sea ice classification in radar images. *Journal of Geophysical Research* 96(C6), pp. 10625–10640. 1991.
- [Simpson et al., 1996] Simpson, J., Kummerow, C., Tao, W.-K. et Adler, R., On the Tropical Rainfall Measuring Mission (TRMM). *Meteorology and Atmospheric Physics* 60, pp. 19–36. 1996.
- [Sporring et Weickert, 1999] Sporrying, J. et Weickert, J., Information measures in scale-space. *IEEE Trans. on Information Theory* 45(3), pp. 1051–1058. 1999.
- [Srivastava et al., 2003] Srivastava, A., Lee, A., Simoncelli, E. et Zhu, S.-C., On advances in statistical modeling of natural images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 18(1), pp. 17–33. 2003.
- [Strand et Taxt, 1994] Strand, J. et Taxt, T., Local frequency features for texture classification. *Pattern Recognition* 27(10), pp. 1397–1406. 1994.
- [Szantai, 1996] Szantai, A., Construction de trajectoires à partir d'images de satellites : Étude de systèmes nuageux. Thèse, Université Paris VI. 1996.
- [Szantai et al., 1998] Szantai, A., Desalmand, F. et Desbois, M., Extraction of monsoon winds and determination of trajectories of convective cloud element over West-Africa. In : Proc. of Conf. on Satellite Meteorology and Oceanography, pp. 416–419. 1998.
- [Szantai et Desbois, 1994] Szantai, A. et Desbois, M., Construction of cloud trajectories to study the cloud life cycle. *Adv. Space Res.* 14(3), pp. 115–118. 1994.
- [Szejwach, 1982] Szejwach, G., Determination of semi-transparent cirrus cloud temperature from IR radiance : Application to Meteosat. *Journal of Applied Meteorology* 21, pp. 384–393. 1982.
- [Tuceryan et Jain, 1992] Tuceryan, M. et Jain, A., Texture analysis. In : C. Chen, L. Pau et P. Wang (eds), *The Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision*, World Scientific Publishing Co., p. chap. 11. 1992.
- [Turiel, 2003] Turiel, A., Relevance of multifractal textures in static images. *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis* 1(1), pp. 35–49. 2003.
- [Turiel et del Pozo, 2002] Turiel, A. et del Pozo, A., Reconstructing images from their most singular fractal set. *IEEE Trans. on Image Processing* 11, pp. 345–350. 2002.
- [Turiel et Parga, 2000a] Turiel, A. et Parga, N., The multifractal structure of contrast changes in natural images : from sharp edges to textures. *Neural Computation* 12, pp. 763–793. 2000.
- [Turiel et Parga, 2000b] Turiel, A. et Parga, N., Multifractal wavelet filter of natural images. *Physical Review Letters* 85, pp. 3325–3328. 2000.
- [Turiel et Pérez-Vicente, 2003a] Turiel, A. et Pérez-Vicente, C., Multifractal geometry in stock market time series. *Physica A* 322, pp. 629–649. 2003.
- [Turiel et Pérez-Vicente, 2003b] Turiel, A. et Pérez-Vicente, C., Multifractal measures : definition, description, synthesis and analysis. A detailed study. In : Actes des journées Thalweg d'étude sur les méthodes pour les signaux complexes en traitement d'image. À paraître, 2003.
- [Turiel et Pérez-Vicente, 2003c] Turiel, A. et Pérez-Vicente, C., Universality classes of multifractal systems. soumis à *Europhysics Letters*, 2003.
- [Turiel et al., 2004] Turiel, A., Grazzini, J., Yahia, H. et Herlin, I., Approches multiéchelles pour l'extraction de structures d'intérêt dans les images naturelles. In : Actes du Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, RFIA'04. À paraître, 2004.

- 
- [Turiel et al., 1998] Turiel, A., Mato, G., Parga, N. et Nadal, J.-P., The self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows. *Physical Review Letters* 80(5), pp. 1098–1101. 1998.
- [Turiel et al., 2000] Turiel, A., Parga, N., Ruderman, D. et Cronin, T., Multiscaling and information content of natural color images. *Physical Review E* 62, pp. 1138–1148. 2000.
- [Turiel et Parga, 2003] Turiel, A. and Nadal, J.-P. et Parga, N., Orientational minimal redundancy wavelets : From edge detection to perception. *Vision Research* 43(9), pp. 1061–1079. 2003.
- [Unser, 1986] Unser, M., Sum and difference histograms for texture classification. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 8, pp. 118–125. 1986.
- [Unser et Eden, 1989] Unser, M. et Eden, M., Multiresolution feature extraction and selection for texture segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11, pp. 717–728. 1989.
- [Valkealahti et Oja, 1998] Valkealahti, K. et Oja, E., Reduced multidimensional cooccurrence histograms in texture classification. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 20(1), pp. 90–94. 1998.
- [Van Hateren et Van der Schaaf, 1998] Van Hateren, J. et Van der Schaaf, A., Independent component filters of natural images compared with simple cells in primary visual cortex. *Proc. of Royal Society London B* 265, pp. 359–366. 1998.
- [Viguier, 1997] Viguier, A., *L'observation Météorologique en Surface : Nuages et Autres Météores*. Librairie Météo-France. 1997.
- [Visa et al., 1991] Visa, A., Valkealahti, K. et Simula, O., Cloud detection based on texture segmentation by neural network methods. In : *Proc. of IEEE Int. Joint Conf. on Neural Networks, IJCNN'91, Vol. 2*, pp. 1001–1006. 1991.
- [Wald et al., 1997] Wald, L., Ranchin, T. et Mangolini, M., Fusion of satellite images of different spatial resolutions : assessing the quality of resulting images. *Photogrammetric Engineering Remote Sensing* 63(6), pp. 691–699. 1997.
- [Walker et al., 1995] Walker, R., Jackway, P. et Longstaff, I., Improving cooccurrence matrix feature discrimination. In : *Proc. of Int. Conf. on Digital Image Computing : Techniques and Applications, DICTA'95*, pp. 643–648. 1995.
- [Wang, 1990] Wang, L. and He, D., A new statistical approach for textural analysis. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* 56(1), pp. 61–66. 1990.
- [Welch et al., 1988] Welch, R., Sengupta, S. et Chen, D., Cloud field classification based upon high spatial resolution textural features. Part I : Gray level cooccurrence matrix approach. *Journal of Geophysical Research* 93(D10), pp. 12663–12681. 1988.
- [Weszka, 1978] Weszka, J., A survey of threshold selection techniques. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 7, pp. 259–265. 1978.
- [Weszka et al., 1976] Weszka, J., Dyer, C. et Rosenfeld, A., A comparative study of texture measures for terrain classification. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 6(4), pp. 2269–2285. 1976.
- [Winkler, 1995] Winkler, G., *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*. Vol. 27, applications of Mathematics, Springer. 1995.
- [Winter et al., 1997] Winter, A., Maître, H., Cambou, N. et Legrand, E., Entropy and multiscale analysis : A new feature extraction algorithm for aerial image. In : *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics and Signal Processing, ICASSP'97, Vol. 3*, pp. 2765–2768. 1997.
- [Woods, 1972] Woods, J., Two-dimensional discrete Markovian fields. *IEEE Trans. on Information Theory* 18, pp. 232–240. 1972.
-

- [Wornell, 1995] Wornell, G., Signal Processing with Fractals : A Wavelet Based Approach. Prentice Hall. 1995.
- [Wu et al., 1985] Wu, R., Weinman, J. et Chin, R., Determination of rainfall rates from GOES satellite images by a pattern recognition technique. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 2, pp. 314–340. 1985.
- [Yahia et al., 1998] Yahia, H. Berroir, J. et Mazars, G., Fast and robust level-set segmentation of deformable structures. In : *Proc. of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASP'98*. 1998.
- [Yocki, 1995] Yocki, D., Image merging and data fusion by means of the discrete 2D wavelet transform. *Journal of Optical Society America A* 12(9), pp. 1834–1841. 1995.
- [Zucker, 1976] Zucker, S., Region growing : Childhood and adolescence. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 5, pp. 382–399. 1976.

---

# Annexes

---



## A. Structures nuageuses et précipitations

Les nuages sont la manifestation la plus évidente du caractère turbulent de la dynamique de l'atmosphère. Ils ont une fonction primordiale dans le contrôle des flux radiatifs dans l'atmosphère et jouent ainsi un rôle majeur dans le climat de la planète. Les nuages sont notamment responsables du transfert de chaleur dans l'atmosphère et se trouvent ainsi à l'origine du cycle hydrologique.

### A.1. La formation des nuages

Pour qu'un nuage se forme, il faut avant tout de la vapeur d'eau et des noyaux de condensation (météores en suspension dans l'air). L'air ne peut contenir qu'une quantité limitée de vapeur d'eau et cette quantité varie en fonction de la température : plus l'air est chaud, plus il peut contenir de vapeur d'eau (tableau A.1). La cause principale de formation d'un nuage est donc un refroidissement de l'air. Lorsque la température baisse, la vapeur se transforme en gouttelettes d'eau ou en cristaux de glace : c'est la condensation, passage de l'état gazeux (vapeur) à l'état liquide (eau) ou solide (glace), qui donne naissance aux nuages. La quantité d'eau condensée est faible (de l'ordre du  $g/m^3$  d'air) et ne représente qu'une faible partie de l'eau atmosphérique, le reste étant constitué par la vapeur d'eau présente dans le nuage.

Température (en <i>Kelvin</i> )	253° K	263° K	273° K	283° K	293° K	303° K
Quantité de vapeur d'eau pour obtenir un air saturé, soit 100% d'humidité (en <i>g</i> de vapeur d'eau/ <i>kg</i> d'air sec)	0,8 g	1,8 g	3,8 g	7,8 g	14,8 g	27,4 g

TAB. A.1.: Quantité de vapeur d'eau nécessaire pour obtenir un air saturé : cette quantité diminue avec la température.

La formation des nuages peut s'expliquer par différents phénomènes tels que :

- une élévation des masses d'air au-dessus des reliefs,
- l'arrivée d'un front froid entre le sol et l'air plus chaud qui s'élève,
- un courant de convection, dû à l'instabilité de l'air, qui provoque une ascendance de l'air,
- une zone de convergence des vents qui, à cause des différences de pression, force également l'air à monter.

## A.2. Classification des nuages

En 1956, une classification des nuages a été adoptée, permettant une observation uniforme à l'échelle mondiale [Viguié, 1997]. C'est une classification en genre, espèce et variété selon des critères précis de forme, de structure interne et de hauteur.

Les nuages sont tout d'abord partagés en quatre groupes sur deux principes simples : l'altitude de leur base et leur forme. À l'exception de quelques nuages spéciaux, les nuages sont généralement situés dans la *troposphère*<sup>1</sup> qui est divisée en trois étages (voir tableau A.2) :

1. étage inférieur, du sol à 2 km dans les régions tropicales,
2. étage moyen, de 2 km à 12 km,
3. étage supérieur, de 6 km à 18 km,

permettant de distinguer les trois premiers groupes, selon la hauteur moyenne de leur base. Le quatrième groupe de nuages tient compte de la forte extension verticale de certains nuages qui peuvent se retrouver sur plus d'un étage à la fois. La forme des nuages permet d'opérer une différenciation

Famille de nuages	Régions polaires	Régions tempérées	Régions tropicales
<i>N. inférieurs</i>	0 à 2 km	0 à 2 km	0 à 2 km
<i>N. moyens</i>	2 à 5 km	2 à 9 km	2 à 12 km
<i>N. supérieurs</i>	3 à 8 km	5 à 13 km	6 à 18 km
<i>N. à développement vertical</i>	0,5 à 8 km	0,5 à 13 km	0,5 à 18 km

TAB. A.2.: Altitudes moyennes des différentes classes de nuages, suivant la région d'observation.

de genres de nuages au sein de ces groupes :

1. les *cirrus* ("boucle" en latin) ont l'aspect de filaments blancs fins,
2. les *stratus* ("allongé" ou "étalé") sont gris et forment une nappe basse et uniforme,
3. les *cumulus* ("tas" ou "monceau") ont une grande extension verticale.

L'introduction de ces différents critères permet finalement de reconnaître 10 genres de nuages (figure A.1). Voici, en résumé, un descriptif de ces nuages et des phénomènes qui les accompagnent :

- *Stratocumulus* : nuages gris avec parties sombres, lenticulaires ou étalés en nappe composée d'éléments en forme de dalles, galets ou rouleaux ; ils donnent des pluies occasionnelles.
- *Nimbostratus* et *Stratus* : couche nuageuse, généralement grise, à base assez uniforme pouvant donner lieu à de la bruine, des cristaux de glace ou de la neige en grains ; ils forment, entre 2 km et 6 km d'altitude, une couche épaisse amorphe, pluvieuse et presque uniformément gris sombre, qui donne du brouillard lorsque leur base touche le sol.
- *Altostratus* : nappe ou couche de nuages blancs et gris, lenticulaires ou étalés en nappe d'aspect ondulé, plus ou moins denses et bourgeonnants ; ils sont principalement constitués

<sup>1</sup>La troposphère est la plus basse couche de l'atmosphère. L'épaisseur de cette enveloppe va de 8 km dans les hautes latitudes à 18 km au dessus de l'équateur et varie également en fonction des saisons. La température décroît avec l'altitude.

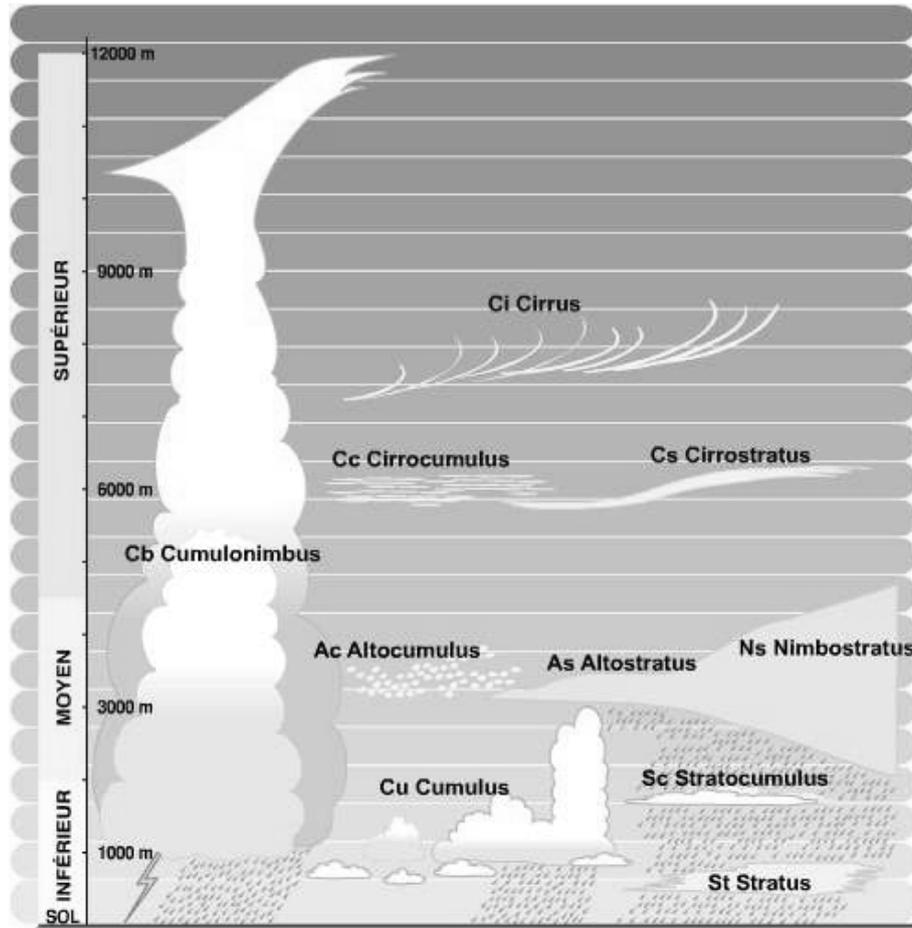


FIG. A.1.: Catégories de nuages observés - Source Météo-France.

de gouttes d'eau liquides ; ils annoncent souvent un changement de temps et donnent assez souvent de faibles précipitations glacées n'atteignant pas le sol.

- *Altostratus* : couche de nuages grisâtres ou bleuâtres, d'aspect uniforme ou vaguement strié, fibreux, couvrant entièrement ou partiellement le ciel ; ils apportent des pluies fines ; près du sol, les nuages à développement horizontal sont sombres et classés en fonction de leur altitude.
- *Cirrus* : nuages non lenticulaires d'aspect fibreux, se présentant sous la forme de délicats filaments blancs composés de bancs ou d'étroites bandes blanches ou en majeure partie blanche ; ils se forment au-delà de 6 km et ne donnent pas de pluie.
- *Cirrocumulus* : banc, nappe ou couche mince de nuages blancs, composés de très petits éléments en forme de granules disposés plus ou moins régulièrement ; ces nuages pommelés apparaissent à partir de 6 km d'altitude et peuvent engendrer des orages.
- *Cirrostratus* : nuages de cristaux de glace, en voile, transparents et blanchâtres, d'aspect fibreux ou lisse, traduisant une stabilité de l'air en altitude ; ils peuvent signaler un front chaud à l'avant d'une perturbation.
- *Cumulus* : nuages détachés, normalement denses et aux contours bien délimités, se développant verticalement sous forme de mamelons, de dômes ou de tours, dont la partie supérieure bour-

geonnante a souvent l'aspect d'un chou-fleur ; ces nuages à base nette et approximativement horizontale se forment dans les couloirs instables de l'atmosphère. Les particules s'élèvent tout en se refroidissant, la vapeur d'eau de l'air se condense en minuscules gouttes.

- *Cumulonimbus* : nuages denses ayant la plus grande extension verticale, en forme de montagne ou de tour immense ; la partie supérieure, d'un blanc éclatant, est presque toujours aplatie, prenant l'aspect d'une enclume, et atteint souvent l'altitude des *cirrus* ; ces nuages d'orage se forment lorsque l'atmosphère est très instable et les courants ascendants, très importants. Leur base est soulevée et leur sommet monte ; ils peuvent se développer jusqu'à une altitude de  $10\text{ km}$  aux latitudes tempérées et de  $15\text{ km}$  sous les tropiques ; ils sont le siège de violents courants et sont donc annonciateurs de pluie, de grêle et de coups de vent soudains et violents.

D'autres particularités, notamment la composition des nuages, permettent de parfaire cette classification. On reconnaît ainsi généralement 14 espèces et 9 variétés de nuages au total.

### A.3. Nuages convectifs et précipitations

La convection est caractérisée par des courants ascendants clairement localisés, séparés par de grandes régions où l'air s'affaisse graduellement ; elle résulte alors de l'échauffement inégal de la surface. Ses lieux de prédilection sont les secteurs côtiers et les rives, où les écarts de température sont les plus marqués, de même que là où il y a un contraste thermique marqué entre d'autres types de terrain.

Les mouvements verticaux de l'air qui contient de la vapeur d'eau provoquent la formation de masses nuageuses plus ou moins importantes, responsables des précipitations. Lorsque l'air s'élève dans l'atmosphère, sa température varie selon son humidité :

- la température de l'air non saturé en vapeur d'eau diminue de  $1^\circ\text{C}$  par  $100\text{ m}$  d'élévation (courbe dite adiabatique sèche),
- pour un air saturé, la variation de température est de  $-0,5^\circ\text{C}$  par  $100\text{ m}$ , car, au fur et à mesure de son élévation, il y a condensation et libération de chaleur, ce qui réduit le refroidissement (courbe pseudo-adiabatique).

Si la variation verticale de température est inférieure à  $-0,5^\circ\text{C}$  par  $100\text{ m}$ , une particule d'air, en s'élevant, va se trouver à une température inférieure à celle de l'air ambiant. Elle sera donc plus lourde et aura tendance à redescendre. Inversement, en descendant, la particule aura une température trop élevée et elle reprendra sa position initiale. Dans les deux cas, il y a stabilité. Les nuages à développement vertical ne peuvent pas se former et il n'y a pas de précipitations.

Si, au contraire, le gradient vertical de température de l'air est fort (par exemple, de l'ordre de  $-1,2^\circ\text{C}$  par  $100\text{ m}$ ), en s'élevant, une particule se retrouvera toujours plus chaude et donc plus légère que l'air ambiant et elle continuera à s'élever. À l'inverse, si la particule subit une impulsion vers le bas, elle sera plus froide que l'air ambiant et s'affaissera encore (instabilité).

Dans les régions équatoriales, l'air étant réchauffé par la base, le gradient de température est fort et l'instabilité peut se développer sur plusieurs  $\text{km}$  de haut ; on a alors des nuages à développement

vertical du type *cumulonimbus*. Dans les régions tempérées, c'est l'arrivée d'air froid en altitude ou le réchauffement par la base de l'air sur un sol chaud en été qui créent généralement l'instabilité.



---

## B. Notions de théorie de l'information : mesures entropiques

Nous rappelons ici les définitions des principales grandeurs de la théorie de l'information. Les mesures entropiques sont très utilisées en traitement du signal et de l'image, tant pour des applications de compression que de classification. La notion d'entropie, notamment, s'applique à tout traitement de données, et est utilisée pour évaluer une quantité d'information présente dans un signal ou une image. L'idée sous-jacente réside dans l'incertitude associée à l'information fournie par ces données.

### B.1. Quantité d'information

L'objectif de la théorie de l'information est de définir une mesure permettant de quantifier l'information disponible dans un système aléatoire. Par système aléatoire, nous entendons la donnée d'une loi de probabilité  $P : \{p(a_1), \dots, p(a_m)\}$  sur un ensemble fini  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ , généralement appelé *alphabet*, de  $m$  symboles indépendants, avec  $\sum_m p(a_i) = 1$  puisque l'union  $(\cup_m a_i)$  est l'événement certain.

La théorie de l'information permet tout d'abord de définir la quantité d'information :

**Définition B.1** *La quantité d'information  $q(a)$  associée à un événement  $a$  de probabilité  $P(a)$  sur  $(\mathcal{A}, P)$  est donnée par :*

$$q_b(a) = -\log_b P(a) . \tag{B.1}$$

La quantité d'information d'un événement  $a$  est donc d'autant plus grande que la probabilité  $P(a)$  qu'il se réalise est faible. Le choix de la base  $b$  du logarithme est arbitraire et correspond au choix d'une unité de mesure : une base  $b = e$  pour l'unité naturelle (*nat*) et une base  $b = 2$  pour l'unité binaire (*bit*). Par la suite, nous fixerons  $b = 2$  pour obtenir des mesures en *bit par pixel (bpp)*.

### B.2. Entropie

L'entropie  $P \rightarrow S(P)$  est une fonction d'incertitude qui s'applique aux lois de probabilité. Shanon l'introduit à partir de la définition de la quantité d'information [Shannon, 1948] :

---

**Définition B.2** *L'entropie de la loi de probabilité  $P$  est définie comme la quantité moyenne d'information par symbole de l'alphabet  $\mathcal{A}$  :*

$$S(P) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} P(a) \log_2 P(a) . \quad (\text{B.2})$$

où  $P(a)$  est la probabilité d'apparition du symbole  $a$ .

Intuitivement, la composition des événements va faire décroître l'entropie. En effet chaque composition crée l'ordre, faisant augmenter la certitude, et, par conséquent, baisser l'entropie. Inversement, la scission des événements accroît l'entropie.

Par extension, si  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  est une variable aléatoire (*v.a.*) définie sur un ensemble probabilisé  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , on définit :  $S(X) = S(P_X)$ . Autrement dit :

**Définition B.3** *L'entropie de la v.a.  $X$  est :*

$$S(X) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} P_X(a) \log_2 P_X(a) , \quad (\text{B.3})$$

où la probabilité  $P_X$  désigne la probabilité image de  $P$  par  $X$  :  $P_X(a) = P(X = a)$ .

Cette entropie est une mesure de la complexité de la *v.a.*  $X$  : plus elle est petite, plus  $X$  est facile à décrire. En terme de codage, on parle généralement, plutôt que de *v.a.*, de *source aléatoire*. L'entropie donne ainsi une mesure du nombre moyen de *bits* nécessaires au codage de la source  $X$ .

### Propriété B.1

1.  $S(P) \geq 0$ .
2.  $P \rightarrow S(P)$  est convexe.
3. Si  $\mathcal{A}$  est fixé,  $S(P)$  est maximale lorsque  $P = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  est la loi uniforme sur  $\mathcal{A}$ , et égale dans ce cas à  $\log_2 |\mathcal{A}|$ .
4. On a  $S(P) = 0$  si et seulement si  $P = \delta_a$  est une loi de Dirac, concentrée sur un unique élément  $a$  de  $\mathcal{A}$ . Par analogie, l'entropie d'une source  $X$  atteint sa valeur minimale ( $S(X) = 0$ ) lorsque  $X$  est presque sûrement constante.

D'autres quantités dérivées de l'entropie sont naturellement introduites.

## B.3. Entropie mutuelle

Il est possible d'étendre l'entropie à des couples de sources en remplaçant les probabilités marginales par des probabilités jointes. On introduit ainsi l'*entropie mutuelle* afin de mesurer la quantité d'information délivrée globalement par plusieurs sources.

**Définition B.4** L'entropie mutuelle est définie, pour deux sources  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$  à valeurs dans les alphabets  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , comme la moyenne de la quantité d'information jointe :

$$S(X, Y) = - \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{B}} P_{(X, Y)}(a, b) \log_2 P_{(X, Y)}(a, b) , \quad (\text{B.4})$$

où  $P_{(X, Y)}(a, b)$  est la probabilité jointe d'apparition des deux événements  $a$  et  $b$  dans les sources respectives  $X$  et  $Y$  :  $P_{(X, Y)}(a, b) = P(X = a, Y = b)$ .

L'entropie mutuelle représente ainsi l'information globalement délivrée par les deux sources. Cette définition s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de sources.

### Propriété B.2

1. L'entropie mutuelle de deux sources  $X$  et  $Y$  est toujours inférieure ou égale à la somme des entropies simples :  $S(X, Y) \leq S(X) + S(Y)$ , i.e. les sources peuvent être partiellement redondantes.
2. L'égalité est vraie si, et seulement si, les deux v.a. sont indépendantes.

## B.4. Entropie conditionnelle

**Définition B.5** Si l'on note :

$$S(Y | X = a) = - \sum_{b \in \mathcal{B}} P_{Y|X=a}(b) \log_2 P_{Y|X=a}(b)$$

où  $P_{Y|X=a}(b)$  désigne la probabilité d'observer  $Y = b$  sachant que  $X = a$  :  $P_{Y|X=a}(b) = P(Y = b | X = a)$ , l'entropie conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$  est définie par :

$$S(Y | X) = \sum_{a \in \mathcal{A}} S(Y | X = a) P(X = a) . \quad (\text{B.5})$$

Cette entropie mesure la complexité résiduelle moyenne de la source  $Y$  lorsque la source  $X$  est observée.

### Propriété B.3

1.  $S(X, Y) = S(Y | X) + S(X)$ .
2. Lorsque les sources  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, l'entropie conditionnelle  $S(Y | X)$  est égale à  $S(Y)$  : la connaissance de  $X$  n'apporte aucune information complémentaire sur celle de  $Y$ .

## B.5. Information mutuelle

Soit  $P$  et  $Q$  deux probabilités définies sur un même alphabet  $\mathcal{A}$ . On définit tout d'abord l'entropie relative :

**Définition B.6** On appelle distance de Küllback entre  $P$  et  $Q$  la quantité positive :

$$D(P\|Q) = S(P) - E_P(\log_2(Q)) = \sum_{a \in \mathcal{A}} P(a) \log_2 \frac{P(a)}{Q(a)}. \quad (\text{B.6})$$

De manière analogue pour deux sources  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$  :

$$D(X\|Y) = \sum_{a \in \mathcal{A}} P(X = a) \log_2 \frac{P(X = a)}{P(Y = a)}.$$

**Définition B.7** L'information mutuelle entre deux sources  $X$  et  $Y$  est la distance de Küllback entre la loi jointe de  $(X, Y)$  et la loi qu'aurait ce couple si  $X$  et  $Y$  étaient indépendantes :

$$I(X, Y) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b \in \mathcal{B}} P_{(X, Y)}(a, b) \log \frac{P_{(X, Y)}(a, b)}{P_X(a)P_Y(b)}. \quad (\text{B.7})$$

C'est une mesure de l'information délivrée par le couplage des deux sources. Elle est le plus souvent utilisée comme une mesure du degré d'indépendance entre  $X$  et  $Y$ .

#### Propriété B.4

1. L'information mutuelle est égale à la somme des informations délivrées par chaque source prise isolément moins l'information délivrée par la réunion des deux sources :  $I(X, Y) = S(X) - S(X | Y) = S(X) + S(Y) - S(X, Y)$ , i.e. elle est une mesure de l'information délivrée par l'intersection des sources.
2. L'information mutuelle est toujours positive ou nulle :  $I(X, Y) \geq 0$ .
3. L'information mutuelle est inférieure à la plus petite des entropies des deux sources :  $I(X, Y) \leq \min(S(X), S(Y))$ .
4. Dans le cas de deux sources indépendantes, l'information mutuelle est nulle.

---

## C. Représentations harmoniques : de Fourier aux ondelettes

Les bases d'ondelettes offrent une alternative séduisante à la représentation trigonométrique classique par la base de Fourier. Elles possèdent une bonne localisation simultanément dans le domaine fréquentiel et dans le domaine spatial : elles réalisent ce que l'on appelle une analyse temps-échelle du signal. Nous rappelons ici les idées majeures, principalement liées aux limitations de la transformée de Fourier, qui ont permis d'introduire la transformée en ondelettes.

### C.1. La Transformée de Fourier

La transformée de Fourier joue un rôle prépondérant dans l'analyse et le traitement des signaux. C'est une transformation linéaire et inversible permettant de décomposer un signal sur la base des exponentielles complexes. Le spectre obtenu permet de rendre compte de la composition fréquentielle du signal original.

**Définition C.1** La transformée de Fourier d'un signal  $f(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  est définie dans l'espace des fréquences  $\nu$  par :

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\nu t} dt. \quad (\text{C.1})$$

La transformée de Fourier inverse représente  $f$  comme une sommation de sinusoides :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\nu) e^{i\nu t} d\nu. \quad (\text{C.2})$$

Les sinusoides  $e^{i\nu t}$  de la représentation de Fourier sont très bien localisées en fréquence, mais pas en temps, car leur support est infini. La transformée de Fourier ne permet par conséquent pas d'analyser le comportement fréquentiel local, ni la régularité locale du signal : c'est une représentation globale du signal. Les signaux possédant des transitoires ou des parties non-stationnaires sont, par exemple, mal décrits ou représentés par une transformée de Fourier.

### C.2. Le principe d'incertitude de Heisenberg

Les ondelettes ont été essentiellement introduites pour combler une lacune entre deux modes extrêmes de représentation du signal : la représentation d'une fonction par son graphe classique

---

(ce qui correspond à une décomposition sur la base continue des distributions de Dirac  $\delta_n$ ) et la représentation dans la base de Fourier  $e^{in}$ . La première représentation donne une information précise en temps, en revanche l'information fréquentielle est nulle. À l'inverse, la représentation de Fourier donne une information très précise en fréquence, mais ne donne aucune information temporelle. On cherche à concevoir des fonctions de base qui se situent à mi-chemin entre ces extrêmes, *i.e.* qui ont à la fois une bonne localisation fréquentielle et une bonne localisation spatiale.

Une limite théorique dans cette perspective est bien connue. C'est le principe d'incertitude de Heisenberg, qui interdit d'avoir une fonction avec des largeurs temporelle et fréquentielle toutes deux aussi petites que l'on veut :

**Théorème C.1** *Soit une fonction de base  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on définit le centre  $c(f)$  et la largeur  $\Delta(f)$  d'une telle fonction par :*

$$c(f) = \int_{\mathbb{R}} u |f(u)|^2 du \quad \text{et} \quad \Delta(f) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (u - c(f))^2 |f(u)|^2 du}$$

*L'inégalité de Heisenberg est une inégalité fondamentale qui stipule que la résolution temps-fréquence est minorée et s'écrit pour toute fonction  $f$  telle que  $\|f\|_2^2 = \int |f(u)|^2 du = 1$  :*

$$\Delta(f) \Delta(\mathcal{F}[f]) \geq \frac{1}{2}. \tag{C.3}$$

Il n'existe en fait aucune fonction d'énergie finie qui soit à support compact à la fois en temps et en fréquence. On connaît cependant les fonctions qui réalisent le minimum de cette limite théorique ; ce sont les fonctions gaussiennes translatées et modulées, dites **ondelettes de Gabor** de la forme :

$$t \rightarrow A e^{-(t-t_0)^2/2\Delta t^2} e^{i\omega_0 t}$$

où  $A$  est un coefficient de normalisation tel que la fonction ait une norme  $L^2$  égale à 1, qui dépend de  $\Delta t$ .

Pour discriminer chacune des fréquences superposées, on est amené à faire une analyse fréquentielle localisée non seulement en temps mais également en fréquence : on est en fait contraint à un compromis entre résolution temporelle et fréquentielle. Cela suppose de comprendre la localisation temps-fréquence d'un signal.

### C.3. Représentations dans le plan temps-fréquence

À une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on associe un **pavage temps-fréquence**, *i.e.* un rectangle dans le plan  $(t, \nu)$  centré en  $(c(f), c(\mathcal{F}[f]))$  et de dimensions  $\Delta(f) \times \Delta(\mathcal{F}[f])$ . Ce pavé est une représentation intuitive de la couverture en temps et en fréquence de cette fonction. On associe également à une base de fonctions un pavage du plan temps-fréquence, qui est un recouvrement du plan  $(t, w)$  par des rectangles de couverture des fonctions de base. Le pavage temps-fréquence correspondant aux bases de fonction de Fourier est, par exemple, un pavage par des rectangles infiniment fins et allongés (*cf.* figure C.1).

Pour représenter un signal comme combinaison de telles fonctions, il est très redondant de laisser varier indépendamment les trois paramètres  $t$ ,  $\nu$  et  $\Delta t$ . Pour pallier à cette déficience, l'approche temps-fréquence considère des fonctions de base dont la largeur spatiale  $\Delta t$  est indépendante de la fréquence  $\nu$ . On a ainsi l'idée d'introduire :

**Définition C.2** La transformée de Fourier à fenêtre du signal  $f$  est définie par la formule :

$$\mathcal{F}_g[f](t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} f(s) g(s - t) e^{i\nu s} ds. \quad (\text{C.4})$$

où  $g$  est une fonction à support compact, i.e. localisée en temps :  $g(t) = A_0 e^{-t^2/2\Delta t^2}$ , dont le rôle est de limiter le domaine d'intégration temporel.

La transformée de Fourier à fenêtre a ainsi deux arguments : le temps  $t$  et la fréquence  $\nu$ . Cependant, elle a une résolution temps-fréquence fixe : la largeur en temps et en fréquence des atomes  $\mathcal{F}_g[f]$  avec lesquels on analyse le signal est fixe et dépend de la fonction  $g$  utilisée. Cette approche n'est par conséquent pas pleinement satisfaisante : pour une taille de fenêtre fixée, la résolution obtenue n'est pas optimale. Une exponentielle basse fréquence modulée par une fenêtre  $g(s - t)$  suffisamment large permettra l'analyse de basses fréquences dans le signal ; en revanche, une exponentielle haute fréquence modulée par cette même fenêtre ne permettra pas une bonne localisation temporelle de cette fréquence. On aurait le même problème avec une fenêtre étroite : bonne localisation en hautes fréquences, mais mauvaise analyse des basses fréquences.

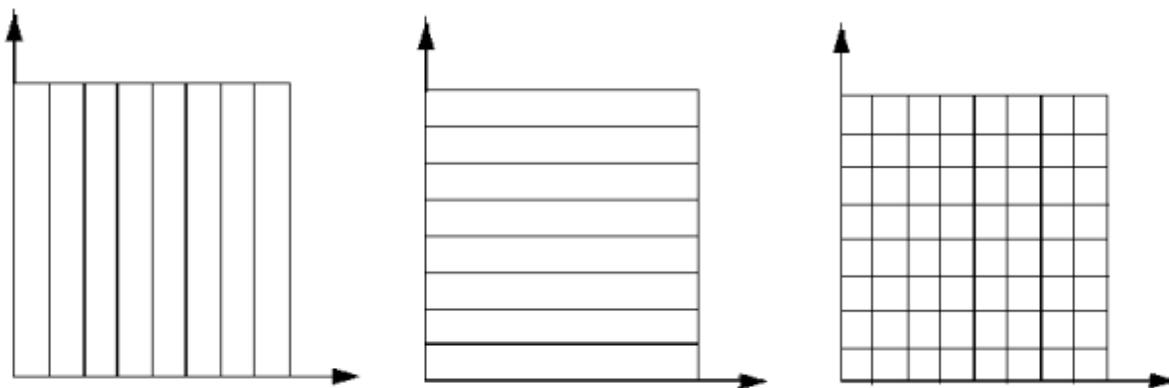


FIG. C.1.: Représentation du pavage temps-fréquence d'un signal. L'axe horizontal représente le temps, l'axe vertical la fréquence. **De gauche à droite** : représentations par les atomes de Dirac, les atomes de la transformée de Fourier et les atomes de la transformée de Fourier à fenêtre glissante.

Il découle de tout ceci qu'il faut faire varier la taille de la fenêtre d'analyse pour pouvoir saisir les hautes et basses fréquences à une résolution acceptable. De plus, le nombre d'oscillations contenues dans la fenêtre d'analyse doit demeurer constant à toutes les fréquences. C'est justement le principe de fonctionnement des ondelettes.

## C.4. La transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes continue réalise une projection sur un ensemble de fonctions, appelées **ondelettes**, dont la construction diffère de celle de la transformée de Fourier : la transformée en ondelettes substitue à la variable de fréquence  $\nu$  celle d'échelle  $a$ , et remplace la sinusoïde par une famille de translations et dilatations d'une même fonction. Partant d'une fonction  $\psi$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , des vecteurs de base sont obtenus par action conjointe des opérateurs de dilatation en échelle :

$$\psi(t) \mapsto \psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$$

et de translation en temps :

$$\psi(t) \mapsto \psi_\tau(t) = \psi(t - \tau).$$

À l'aide de cette transformation, les atomes s'écrivent :

$$\psi_{a,\tau} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right)$$

et définissent le plan **temps-échelle**<sup>1</sup> dans lequel tout signal sera traité. Ainsi, l'écart-type  $\Delta(\psi)$  en temps de  $\psi_{a,\tau}$  est proportionnel à  $a$ , l'écart-type  $\Delta(\mathcal{F}[\psi])$  en fréquence est proportionnel à  $\frac{1}{a}$ .

Ces fonctions permettent d'introduire la transformée en ondelettes :

**Définition C.3** La transformée en ondelettes continue  $\mathcal{TOC}[f]$  d'un signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est définie par :

$$\mathcal{TOC}[f](a, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \psi_{a,\tau}(u) du = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(u) \psi\left(\frac{u - \tau}{a}\right) du.$$

Sous la condition d'admissibilité :  $C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathcal{F}[\psi](\nu)|^2}{|\nu|} d\nu < +\infty$ , la transformée en ondelettes est inversible, et la formule d'inversion s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{TOC}[f](a, \tau) \psi_{a,b}(t) \frac{da d\tau}{\tau^2}. \quad (\text{C.5})$$

La condition d'admissibilité implique en outre que  $\psi$  soit de moyenne nulle :  $\mathcal{F}[\psi](0) = 0$ .

## C.5. Résolution dans le plan temps-échelle

La condition d'admissibilité donne à la fonction ondelette un caractère de type passe-bande qui permet de lui associer une fréquence caractéristique :

$$\nu_\psi = \int_0^{+\infty} \nu |\mathcal{F}[\psi](\nu)|^2 d\nu.$$

La transformée de Fourier de l'ondelette  $\psi_a$ , dilatée de  $\psi$  à l'échelle  $a$ , s'écrit  $\mathcal{F}[\psi_a](\nu) = \sqrt{a} \mathcal{F}[\psi](a\nu)$ . La fréquence centrale est traduite par l'opérateur de dilatation selon :

$$\nu_{\psi_a} = \frac{\nu_\psi}{a}.$$

<sup>1</sup>Le temps fait référence à l'analyse des signaux 1D ; dans le cadre des images, il s'agit du plan et il convient d'utiliser le terme **espace-échelle**.

Les résolutions temporelle et fréquentielle de l'ondelette  $\psi_a$  vérifient par ailleurs :

$$\begin{cases} \Delta t_{\psi_a} = a \Delta t_{\psi} \\ \Delta \nu_{\psi_a} = \frac{\Delta \nu_{\psi}}{a}. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

L'analyse temps-échelle peut ainsi être vue comme une exploration particulière du plan temps-fréquence, *via* la transformation  $a \mapsto \nu_{\psi_a}$  : en répétant la procédure de dilatation, on peut en effet couvrir par décalages successifs l'ensemble du domaine spectral (de la même façon que l'on couvre le domaine temporel par des ondelettes translattées).

Cette couverture du plan temps-fréquence contient l'essentiel de la richesse de l'analyse temps-échelle comparé à l'analyse temps-fréquence :

- dans le cas de l'analyse temps-fréquence, le pavage du plan temps-fréquence obtenu était un pavage par des domaines rectangulaires qui se déduisent les uns des autres par translation dans le plan temps-fréquence (*cf.* figure C.1),
- dans le cas de l'analyse temps-échelle, les domaines sont également de surface constante, mais ont une résolution fréquentielle relative constante : l'aire des cellules élémentaires est conservée, mais celles-ci se déforment en s'allongeant le long de l'axe temporel à mesure que l'échelle augmente (*cf.* figure C.2).

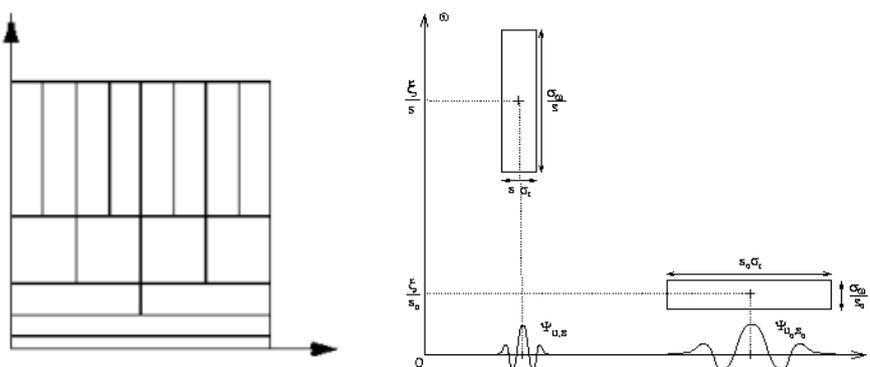


FIG. C.2.: Représentation du pavage temps-échelle d'un signal par la transformée en ondelettes. L'axe horizontal représente le temps, l'axe vertical la fréquence. La forme de l'ondelette peut parfaitement être adaptée pour répondre aux exigences de la représentation temps-échelle. Le schéma de droite est reproduit de [Mallat, 2000].

Les avantages du mode de décomposition temps-échelle sont multiples. On dispose de moyens efficaces pour construire des bases discrètes pour lesquelles les calculs de transformation sont très rapides et l'analyse repose sur une forme de fonction unique. Enfin, dans l'analyse temps-échelle, les fonctions de base ont une taille de support proportionnelle à la résolution spatiale liée à leur fréquence par l'inégalité de Heisenberg.



## Table des figures

2.1. Exemples d'images <b>Meteosat</b> acquises dans le canal <b>IR</b> . . . . .	26
2.2. Exemples d'images <b>TRMM MO</b> acquises dans le canal à $87.5\text{ GHz}$ . . . . .	29
2.3. Mise en correspondance d'acquisitions au dessus de l'Afrique de l'Ouest le 31/07/1998. . . . .	31
2.4. Images <b>IR</b> et <b>MO</b> acquises vers 1h30 le 1/08/98. . . . .	32
2.5. Suivi de l'évolution d'un <i>cumulonimbus</i> sur une séquence de 15 images <b>IR</b> successives. Formation de plusieurs amas convectifs de tailles différentes. . . . .	34
2.6. Exemple d'un grand système convectif observé dans des images <b>IR</b> , <b>VIS</b> et <b>MO</b> . . . . .	36
2.7. Fronts de température observés dans le canal <b>MO</b> à $87,5\text{ GHz}$ . . . . .	37
2.8. Détails des images <b>IR</b> et <b>MO</b> de la figure 2.4. . . . .	38
2.9. Seuillage progressif d'une image <b>IR</b> et comparaison avec une image <b>MO</b> . . . . .	39
2.10. Fronts de température observés dans le canal <b>IR</b> thermique. . . . .	40
2.11. Histogramme 2D de distributions conjointes des températures sur les données <b>IR</b> et <b>MO</b> . En abscisses, les températures de brillance <b>MO</b> , en ordonnées, les températures de brillance <b>IR</b> . . . . .	41
3.1. Images $I$ utilisées pour illustrer les différentes techniques de segmentation. . . . .	49
3.2. Approximation des dérivées et détection des contours à l'aide des opérateurs d'ordre 1. . . . .	51
3.3. Détection de contours par les passages par zéro du laplacien. . . . .	52
3.4. Extractions de contours sur deux images <b>IR</b> . . . . .	53
3.5. Filtrage par des filtres gaussiens et dérivés de gaussiens. . . . .	54
3.6. Croissance de régions. . . . .	55
3.7. Segmentation par division-fusion. . . . .	56
3.8. Segmentation par classification sur l'histogramme des luminances. . . . .	58
3.9. <i>Template</i> déformable pour la modélisation des vortex nuageux. . . . .	60
3.10. Détection de contours par diffusion non-linéaire. . . . .	63
3.11. Résultats d'un processus de segmentation markovienne sur une image <b>Meteosat IR</b> . . . . .	65
3.12. Segmentation par maximum de vraisemblance. . . . .	66

3.13. Opérations morphologiques sur une image <b>IR</b> . . . . .	67
3.14. Segmentations par ligne de partage des eaux. . . . .	67
4.1. Quelques variétés de textures accessibles dans une image <b>IR</b> . . . . .	70
4.2. <b>MC</b> globales normalisées calculées sur image <b>IR</b> . . . . .	73
4.3. Exemples de fonctions de pondération de la <b>MC</b> . . . . .	75
4.4. Exemples d'attributs de texture calculés sur des blocs disjoints. . . . .	76
4.5. Exemples d'attributs locaux calculés sur une image <b>IR</b> . . . . .	77
4.6. Calcul par la méthode <b>GLCM</b> de <b>MC</b> -attributs locaux sur une image <b>IR</b> . . . . .	80
4.7. Calcul par la méthode <b>GLCM</b> de <b>MC</b> -attributs locaux sur une image <b>VIS</b> . . . . .	81
4.8. Calcul par la méthode <b>GLCM</b> de <b>MC</b> -attributs locaux sur une image <b>IR</b> . . . . .	82
4.9. Exemples de <b>MC</b> -attributs <b>GLCM</b> sur une image <b>IR</b> . . . . .	83
4.10. Influence de la taille $l_W$ de la fenêtre sur le calcul de différents <b>MC</b> -attributs. . . . .	85
4.11. Influence des paramètres $d$ et $\theta$ de déplacement entre pixels sur le calcul des <b>MC</b> -attributs. . . . .	86
4.12. Représentations du facteur de pondération multi-échelle $1/r^2$ sur une fenêtre de taille $21 \times 21$ . . . . .	90
4.13. Calcul d'attributs multiéchelles. . . . .	91
4.14. Comparaison de différents <b>MC</b> -attributs calculés par la méthode <b>GLCM</b> classique et la méthode <b>GLCM</b> multiéchelle. . . . .	92
4.15. Calculs de <b>MC</b> -attributs fondés sur différentes approches. . . . .	94
4.16. <b>ACP</b> d'une collection de six <b>MC</b> -attributs multiéchelles. . . . .	97
4.17. Résultats de l' <b>ACP</b> sur les représentations des <b>MC</b> -attributs multiéchelles calculés sur une image <b>Meteosat</b> , une image <b>Landsat</b> et une image <b>Spot</b> . . . . .	98
4.18. Distributions conditionnelles $P(\mathcal{A} = x \mid \mathcal{A}' = y)$ de différents <b>MC</b> -attributs $\mathcal{A}$ par rapport à l'entropie $\mathcal{A}'$ . . . . .	101
4.19. Interprétation de la classification d'une image <b>Landsat</b> à l'aide des <b>MC</b> -attributs. . . . .	103
4.20. Classification par une méthode K-means d'une image <b>Spot</b> . . . . .	104
4.21. Segmentation d'une image <b>Meteosat IR</b> . . . . .	105
4.22. Détail des images de classification sur une image <b>Spot</b> . . . . .	106
4.23. Détail des résultats de segmentation sur une zone nuageuse de l'image <b>Meteosat IR</b> . . . . .	107
4.24. Courbes de régression des espérances conditionnelles $E(\mathcal{A} \mid \mathcal{A}' = y)$ de différents <b>MC</b> -attributs $\mathcal{A}$ par rapport à l'entropie $\mathcal{A}'$ . . . . .	108
5.1. Illustration de l'invariance d'échelle sur le spectre de puissance. . . . .	115
5.2. Exemples d'ondelettes analysantes classiques. . . . .	119

---

5.3. Décomposition d'une image en détails et approximation de l' <b>AMR</b> . . . . .	124
5.4. Compression d'image obtenue par quantisation des coefficients d'ondelette. . . . .	125
5.5. Représentation par <b>MMTO</b> à différentes résolutions. . . . .	127
5.6. Contours multiéchelles obtenus à partir de la représentation par <b>MMTO</b> . . . . .	128
5.7. Reconstruction à partir des <b>MMTO</b> . . . . .	129
5.8. Estimation des exposants de singularité à l'aide de la capacité $\mu_{\max}$ . . . . .	138
5.9. Image <b>IR</b> et norme du gradient (calculée naïvement) sur cette image. . . . .	141
5.10. Illustration des propriétés de stationnarité du signal et du signal dérivé. . . . .	142
5.11. Estimation des exposants de singularité d'une image <b>Meteosat IR</b> à l'aide d'une ondelette gaussienne. . . . .	148
5.12. Estimation des exposants de singularité sur une image <b>IR</b> . . . . .	150
5.13. Projections en ondelette d'une image <b>IR</b> . . . . .	151
5.14. Distribution des exposants de singularité d'une image <b>IR</b> et décomposition multi- fractale. . . . .	152
5.15. Composantes fractales. . . . .	153
5.16. Extraction de la variété la plus singulière. . . . .	154
5.17. Estimation de la fonction $ \mathcal{F}[\nabla I_\infty](\vec{\nu}) \cdot \vec{\nu} ^2 /  \nu ^2$ sur une image <b>IR</b> . . . . .	161
5.18. Reconstruction. . . . .	162
5.19. Illustration de la linéarité de l'algorithme de reconstruction. . . . .	164
5.20. Exemples d'images reconstruites en utilisant des noyaux de propagation $\mathcal{F}[g](\vec{\nu}) =$ $i \vec{\nu} /  \nu ^{2-\gamma}$ pour différentes valeurs de $\gamma$ . . . . .	165
5.21. Décomposition multifractale d'une image <b>IR</b> . . . . .	167
5.22. Estimation de la <b>MSM</b> sur une image <b>IR</b> . . . . .	168
5.23. Contours détectés à l'aide de filtres de Dérêche. . . . .	169
5.24. Contours détectés par la méthode des <b>MMTO</b> . . . . .	170
5.25. Exemples de reconstruction. . . . .	172
5.26. Évolution de la qualité de la reconstruction en fonction de la densité de la <b>MSM</b> . . . . .	173
5.27. Exemples d'images <b>Landsat HR</b> . . . . .	174
5.28. Contour de l'image <b>HR</b> , image reconstruite et graphe des moyennes radiales des spectres de puissance. . . . .	175
5.29. Détails des résultats d'analyse et de fusion d'images <b>Landsat BR</b> et <b>HR</b> . . . . .	176
5.30. Rapport des fonctions radiales, image fusionnée et son spectre de puissance. . . . .	177
6.1. Comparaison entre les fonctions de modélisation des exposants $\zeta(p)$ . . . . .	190
6.2. Résultats de l'estimation du spectre de singularités sur une collection d'images. . . . .	193

---

6.3.	Exemples de simulations de processus log-Poisson 1D. . . . .	194
6.4.	Spectres de singularités des processus log-Poisson de la figure 6.3. . . . .	195
6.5.	Situation du 31/07/98 entre 0 h et 10 h00. Extraction des ensembles les plus singuliers dans le flot. . . . .	199
6.5.	Suite - situation du 31/07/98 entre 12 h et 22 h 00. . . . .	200
6.5.	Suite - situation du 1/08/98 entre 0 h et 10 h00. . . . .	201
6.5.	Suite - situation du 1/08/98 entre 12 h et 22 h 00. . . . .	202
7.1.	Deux images contenant une information différente mais ayant la même entropie globale. . . . .	211
7.2.	Représentation du facteur de pondération multiéchelle. . . . .	214
7.3.	Représentation de l'entropie estimée sur une image <b>IR</b> . . . . .	215
7.4.	Image <b>IR</b> , <b>ELM</b> et représentation des exposants de singularité. . . . .	217
7.5.	Calculs d' <b>ELM</b> sur des images <b>IR</b> . . . . .	218
7.6.	Mesures de l' <b>ELM</b> pour différentes reconstructions du signal. . . . .	219
7.7.	Image d'erreur de reconstruction à partir de la <b>MSM</b> et mesures d'entropie. . . . .	220
7.8.	Image <b>Spot</b> moyenne résolution et distribution des niveaux de gris sur cette image. . . . .	223
7.9.	Schéma d'analyse multifractale de l'image <b>Spot</b> de la figure 7.8. . . . .	224
7.10.	Distribution de l'angle de déviation entre les champs $\nabla I_{\mathcal{R}}$ et $\nabla I_{\infty}$ mesurée sur les pixels de la <b>MSM</b> d'une image <b>Spot</b> et ceux d'une image <b>Meteosat IR</b> . . . . .	225
7.11.	Comparaison des reconstructions d'une image <b>Spot</b> . . . . .	226
7.12.	<b>FRI</b> obtenues en considérant différentes <b>MSM</b> pour la reconstruction d'une image <b>Spot</b> . . . . .	227
7.13.	Présegmentation d'images <b>Ikonos</b> . . . . .	228
7.14.	Graphe des valeurs de <i>PSNR</i> de différentes <b>FRI</b> en fonction de l'entropie locale moyenne de la <b>MSM</b> utilisée pour la reconstruction. . . . .	230
7.15.	Exemple de restauration d'une image <b>Ikonos HR</b> sur la base d'un critère entropique. . . . .	231
8.1.	Décomposition multifractale, <b>MSM</b> et isothermes sur l'image <b>IR</b> de la figure 7.4. . . . .	237
8.2.	Calcul de l' <b>OMSM</b> et la <b>CRI</b> sur une image <b>IR</b> . . . . .	238
8.3.	Analyse et synthèse multifractales d'une image <b>Meteosat IR</b> . . . . .	239
8.4.	Illustration de l'hypothèse de champ advectif traduite par la <b>CRI</b> . . . . .	241
8.5.	Représentation des principales phases d'activité d'une cellule convective. . . . .	243
8.6.	Comparaison entre la configuration réelle du flot, observée sur une image <b>VIS</b> , et l'hypothèse d'advection pure, représentée par la <b>CRI</b> . . . . .	245
8.7.	Principe de la mesure du champ des sources. . . . .	246
8.8.	Représentations multifractales d'une image <b>IR</b> . . . . .	247

8.9. Représentation de la norme et de la phase du champ des sources calculé sur une image <b>IR</b> . . . . .	248
8.10. Reconstruction d'une image <b>IR</b> à partir de la <b>CRI</b> et d'une seule des deux composantes directionnelles du champ des sources $\rho$ . . . . .	249
8.11. Situation du 31/07/98 entre 0 h et 11 h 30. Calcul des <b>CRI</b> et des sources à partir des <b>MSM</b> de la figure 6.5. . . . .	251
8.11. Suite - situation du 31/07/98 entre 12 h et 23 h 30. <i>Ibid.</i> . . . . .	252
8.11. Suite - situation du 1/08/98 entre 0 h et 12 h 30. <i>Ibid.</i> . . . . .	253
8.11. Suite : situation du 1/08/98 entre 12 h et 23 h 30. . . . .	254
8.12. Trajectoires du champ complexe des sources sur des images <b>IR</b> . . . . .	255
8.13. Comparaison des sources estimées à partir de données <b>IR</b> et <b>WV</b> acquises sur les mêmes scènes. . . . .	256
8.14. Champs denses de vitesse, estimés à l'aide de l'hypothèse <b>EOFC</b> sur deux images permettant d'observer une même structure nuageuse à 4 h d'intervalle. . . . .	260
8.15. Comparaison de la divergence des champs de vitesses et de la norme du champ des sources. . . . .	261
8.16. Divergence du champ de mouvement d'une cellule convective en fonction du stade dans lequel se trouve la cellule au cours de son évolution. . . . .	262
8.17. <b>De gauche à droite</b> : représentation de l' <b>ELM</b> , des lignes d'isentrobie correspondantes et de l' <b>ICR</b> , toutes calculées sur l'image <b>IR</b> de la figure 8.9. . . . .	265
8.18. Mesure de la déviation entre le champ unitaire $\nabla I_{\mathcal{R}}$ , normal à la <b>MSM</b> , et le gradient de l'entropie $\nabla S$ . . . . .	266
8.19. Visualisation des isothermes <b>MO</b> sur les résultats d'analyse de l'image <b>IR</b> acquise le 31/07/98 à 16 h. . . . .	268
8.20. Détails du calcul du champ des sources sur trois images successives de la séquence <b>IR</b> . . . . .	269
8.21. Résultats sur une image <b>IR</b> en correspondance avec une zone de précipitations. . . . .	270
8.22. Résultats sur un extrait d'image <b>IR</b> en correspondance avec une zone de précipitation - détail. . . . .	271
8.23. Résultats sur un extrait d'image <b>IR</b> en correspondance avec une zone de précipitation - détail. . . . .	272
8.24. Résultats d'analyse sur une acquisition <b>IR</b> . . . . .	273
A.1. Catégories de nuages observés - Source Météo-France. . . . .	299
C.1. Représentation du pavage temps-fréquence d'un signal : Dirac, transformée de Fourier et transformée de Fourier à fenêtre glissante. . . . .	309
C.2. Représentations temps-échelle d'un signal par la transformée en ondelettes. . . . .	311



## Liste des tableaux

4.1. Mesures de la corrélation entre différents <b>MC</b> -attributs $\mathcal{A}$ et un attribut particulier, l' <i>entropie</i> . . . . .	102
6.1. Étapes (approximatives) de la turbulence en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	182
A.1. Quantité de vapeur d'eau nécessaire pour obtenir un air saturé : cette quantité diminue avec la température. . . . .	297
A.2. Altitudes moyennes des différentes classes de nuages, suivant la région d'observation.	298



Les travaux présentés dans ce mémoire ont été co-financés par l'INRIA et la région Île-de-France (contrat n°E.1358).

*Résumé :*

Dans cette thèse, nous nous intéressons, à la caractérisation, sur des images météorologiques infrarouges, des systèmes convectifs susceptibles d'engendrer de fortes pluies. L'étude des propriétés statistiques des phénomènes observés révèle une évolution chaotique, mise en évidence par l'invariance d'échelle de certaines grandeurs significatives. Pour les étudier, nous introduisons des méthodes multiéchelles de traitement d'image dérivées de concepts thermodynamiques et qui constituent un prolongement des méthodes d'analyse de la turbulence. Nous utilisons tout d'abord un modèle multifractal afin de détecter les singularités du signal et d'extraire, dans une décomposition hiérarchique de l'image, des structures pertinentes pour la compréhension des mécanismes atmosphériques. Nous proposons ensuite une extension de ce modèle permettant d'exhiber les zones de diffusion de la luminance dans l'image et d'identifier les zones de convection associées aux précipitations.

*mots-clés :* traitement d'image, analyse multiéchelle, invariance d'échelle, formalisme multifractal, mesure multifractale, ondelettes, singularités, entropie, thermodynamique, flot turbulent, image infrarouge, précipitations, convection.

*Abstract :*

We are interested with the characterization, on meteorological infrared images, of convective clouds responsible for hard weather situations like rainfalls. The study of the statistical and physical properties of atmospherical phenomena reveals a chaotic and turbulent behaviour, characterized by the scale invariance of some relevant quantities defined on the system. In this context, we use multiscale image processing tools derived from thermodynamical concepts that were initially introduced for turbulent data analysis. First, a multifractal model allows us to detect the strongest transitions in the signal and provides a hierarchical decomposition of the image. We show that the exhibited geometrical structures are related with the atmospherical mechanisms. Then, we propose to extend the multifractal formalism to extract the foci of diffusion of the luminance in the image. We finally identify those foci in infrared images with convective areas associated with rainfalls.

*keywords :* image processing, multiscale analysis, scale invariance, multifractal formalism, multifractal measure, wavelets, singularities, entropy, thermodynamics, turbulent flow, infrared image, precipitations, convection.