



**HAL**  
open science

# Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach

Angelo Murrone

► **To cite this version:**

Angelo Murrone. Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach. Sciences de la Terre. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2003. Français. NNT: . tel-00005951

**HAL Id: tel-00005951**

**<https://theses.hal.science/tel-00005951>**

Submitted on 23 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PROVENCE (Aix-Marseille I)

---

Ecole Doctorale Mécanique Physique et Modélisation

# Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 décembre 2003

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE**

Spécialité Mécanique Energétique

par

**Angelo MURRONE**

### Composition du jury

*Président* : Roger Martin  
*Directeur* : Hervé Guillard  
*Rapporteurs* : Rémi Abgrall  
Jean-Paul Caltagirone  
*Examineurs* : Marc Grandotto  
Richard Saurel

---

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Cette thèse a été cofinancée par le CEA Cadarache et la région Provence Alpes Côte d’Azur, et en partenariat avec l’entreprise PRINCIPIA de la Seyne-sur-Mer. Elle s’inscrit dans le cadre d’une collaboration entre le CEA, l’INRIA Sophia-Antipolis et l’IUSTI Marseille. Je tiens à souligner le confort matériel et culturel dont j’ai bénéficié dans ces trois instituts.

Mes premiers remerciements vont évidemment “Al Mio Grande Direttore” Hervé Guillard, responsable scientifique du projet SMASH de l’INRIA. Je le remercie pour avoir dirigé ces travaux depuis mon stage de DEA jusqu’à l’aboutissement de cette thèse. Je souhaite à tous les doctorants d’avoir un directeur comme lui. En effet sa patience, ses grandes compétences et son sens de la pédagogie m’ont permis d’accomplir sereinement ce travail. Je lui suis également reconnaissant pour m’avoir ouvert la voie vers l’analyse numérique et pour avoir consacré beaucoup de son temps à me faire partager sa grande expérience. Enfin je le remercie pour m’avoir offert en plus de tout le reste, son amitié qui est pour moi d’une immense valeur.

Je remercie le professeur Richard Saurel de l’IUSTI, pour avoir fortement contribué à l’élaboration de cette thèse. Sa perspicacité ainsi que sa très grande expérience des modèles et méthodes numériques pour les écoulements diphasiques ont toujours été une source de progression des travaux. Je le remercie infiniment pour s’être montré disponible et pour m’avoir aidé et encouragé à chaque fois que j’en avais besoin. Travailler avec lui a toujours été pour moi très plaisant et enrichissant.

Je remercie Marc Grandotto chercheur au CEA pour avoir investi beaucoup de son temps à suivre ce travail. Ses remarques pertinentes sur la physique des écoulements diphasiques ont toujours été très bénéfiques à l’avancement des travaux.

Je remercie Pierre Gubernatis, chef du laboratoire de thermo-hydraulique du CEA et Pascal Monier, ingénieur chez PRINCIPIA, pour s’être intéressés à ce travail et pour avoir toujours su m’encourager.

Je remercie Rémi Abgrall et Jean-Paul Caltagirone pour avoir accepté de rapporter cette thèse et j’en suis très honoré.

Je remercie Jean-Claude Loraud et Eric Daniel enseignants chercheurs à l’IUSTI pour m’avoir aiguillé vers le stage de DEA qui a abouti sur cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers Alain Dervieux et Jean-Antoine Désidéri pour m’avoir accueilli au sein du projet SINUS de l’INRIA, durant mon stage de DEA et pour m’avoir fait partager un peu de leur grande expérience en analyse numérique. Je les remercie aussi pour leur humour toujours très réconfortant et encourageant.

Je remercie également Marie-Hélène Lallemand pour son aide précieuse sur les procédures de relaxation dans la résolution numérique du modèle diphasique à sept équations.

Je remercie vivement Boniface Nkonga et Abderrahmane Habbal pour m’avoir permis d’enseigner au laboratoire de mathématiques appliquées de l’Université de Bordeaux I et à l’ESSI de l’Université de Nice Sophia-Antipolis.

Et puis je n’oublie pas tous mes autres collègues et amis : M. Argente, D. Avanesoff, G. Carte, A. Janka, R. Lardat, P. Maleyran, O. Pourtalier, C. Viozat, M. Belliard, S. Pascal, O. Point, D. Soussan.

Enfin je remercie infiniment mes parents pour m’avoir toujours aidé et encouragé. Je leur dédie cette thèse pour deux raisons. La première est qu’ils ont toujours su me conseiller tout en respectant mes choix. La deuxième est qu’ils ont fait tous les sacrifices possibles pour permettre à leur enfants d’étudier. En effet, ils ont donné également la chance de faire des études à mes deux adorables sœurs Maria et Teresa, que je salue affectueusement pour leur soutien permanent tout au long de ces années. L’équilibre familial dans lequel j’ai vécu, a été un atout considérable dans la réalisation de tous mes projets.



# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>1</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre 1 Modélisation des écoulements diphasiques</b>	<b>7</b>
1.1 Equations de bilan Eulériennes monophasiques . . . . .	7
1.2 Extension des équations à tout le domaine . . . . .	8
1.3 Equations sur les grandeurs moyennes . . . . .	9
1.4 Lois de fermeture et modèles bi-fluides à six et sept équations . . . . .	13
1.4.1 Modèles bi-fluides à six équations . . . . .	13
1.4.2 Modèles bi-fluides à sept équations de type Baer-Nunziato . . . . .	15
<b>Chapitre 2 Comportement des schémas de type Godunov dans la limite des faibles nombres de Mach</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Le problème continu . . . . .	21
2.3 Etude du problème de Riemann dans la limite des faibles nombres de Mach . . . . .	25
2.4 L'effet du préconditionnement . . . . .	29
2.5 Comparaison avec la solution incompressible . . . . .	34
2.6 Une alternative au préconditionnement . . . . .	37
2.7 Conclusion . . . . .	41
<b>Chapitre 3 Un modèle réduit à cinq équations pour les écoulements diphasiques compressibles</b>	<b>43</b>
3.1 Introduction . . . . .	44
3.2 Etablissement du modèle . . . . .	45
3.2.1 Le modèle à sept équations . . . . .	45
3.2.2 Forme quasi-linéaire du modèle en variables entropiques . . . . .	46
3.2.3 Etablissement d'un modèle réduit . . . . .	48
3.2.4 Application au modèle à sept équations : modèle à l'ordre 0 . . . . .	50
3.2.5 Modèle à l'ordre $\varepsilon$ . . . . .	53
3.3 Etude mathématique . . . . .	59
3.3.1 Hyperbolicité . . . . .	59
3.3.2 Existence d'une entropie mathématique . . . . .	61
3.3.3 Structure des ondes . . . . .	61
3.3.4 Invariants de Riemann . . . . .	62

3.4	Approximation numérique . . . . .	63
3.4.1	Schéma de type VFRoe-ncv . . . . .	63
3.4.2	Evolution d'une discontinuité de contact . . . . .	65
3.4.3	Solveur Acoustique . . . . .	66
3.4.4	Formulation décentrée à l'ordre deux : MUSCL . . . . .	67
3.5	Résultats numériques . . . . .	69
3.5.1	Problèmes multifluides ou d'interfaces : tests de validation . . . . .	69
3.5.2	Problèmes diphasiques : comparaison avec le modèle à sept équations . . . . .	73
3.5.3	Cas test bidimensionnels . . . . .	79
3.6	Conclusion . . . . .	83
<b>Chapitre 4 Préconditionnement pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach</b>		<b>85</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Le problème continu . . . . .	86
4.3	Matrice Jacobienne . . . . .	88
4.4	Préconditionnement . . . . .	91
4.5	Approximation numérique . . . . .	95
4.6	Résultats numériques . . . . .	97
4.6.1	Méthode implicite . . . . .	97
4.6.2	Schéma préconditionné . . . . .	101
4.7	Conclusion . . . . .	107
<b>Chapitre 5 Etude du modèle diphasique à sept équations</b>		<b>109</b>
5.1	Introduction . . . . .	109
5.2	Relaxation des pressions et modèles à six équations . . . . .	110
5.3	Implicitation des solveurs de type VFRoe pour le modèle à sept équations . . . . .	115
5.3.1	Matrice Jacobienne . . . . .	115
5.3.2	Problème de Riemann approché . . . . .	118
5.3.3	Matrices de passage . . . . .	120
5.3.4	Approximation numérique . . . . .	122
5.3.5	Résultats numériques . . . . .	124
5.4	Conclusion . . . . .	127
<b>Conclusions et Perspectives</b>		<b>129</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>131</b>
<b>Annexes</b>		<b>135</b>
<b>Annexe A Equations discrètes limites du schéma de Godunov</b>		<b>135</b>
<b>Annexe B Accumulation d'erreurs d'arrondis</b>		<b>139</b>

# Table des figures

2.1	Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3114 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Schéma de Roe (gauche), schéma VFRoe (milieu) et schéma de Godunov (droite). . . . .	19
2.2	Les quatre cas possibles dans la construction de la solution du problème de Riemann : (a) 1-détente, contact, 3-choc, (b) 1-choc, contact, 3-détente, (c) 1-détente, contact, 3-détente, (d) 1-choc, contact, 3-choc. . . . .	25
2.3	Intersection des courbes de détente pour $u_{R,1} - u_{L,1} > 0$ (gauche) et des courbes de choc pour $u_{R,1} - u_{L,1} < 0$ (droite). . . . .	27
2.4	Comparaison entre le solveur exact de Godunov et l'analyse asymptotique pour $u_R - u_L > 0$ (gauche) et pour $u_R - u_L < 0$ (droite). . . . .	28
2.5	Représentation du problème de Riemann d'un système linéaire hyperbolique. . . . .	31
2.6	Fluctuations de pression en fonction du nombre de Mach à l'infini, pour le schéma VFRoe-Turkel. Pour comparaison la courbe $y = x^2$ est représentée en traits pointillés. . . . .	32
2.7	Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3114 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Schéma VFRoe-Turkel. . . . .	33
2.8	Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 451 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Schéma VFRoe (gauche) et schéma VFRoe-Turkel (droite). . . . .	35
2.9	Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3277 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Schéma VFRoe (gauche) et schéma VFRoe-Turkel (droite). . . . .	36
2.10	Isovaleurs de la pression pour le calcul incompressible sur un maillage à 3244 nœuds. . . . .	36
2.11	Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3114 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Première correction du schéma de Godunov (gauche), deuxième correction (milieu) et schéma VFRoe-Turkel (droite). . . . .	40
3.1	Courbe de la vitesse du son pour un mélange eau-air sous pression atmosphérique. Modèle réduit à 5 équations (traits pleins) et modèle de transport à 5 équations (traits pointillés). . . . .	60
3.2	Cellule construite autour du nœud $i$ (gauche). Triangles amont $T_{ij}$ et aval $T_{ji}$ (droite). . . . .	68
3.3	Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle de transport à 5 équations (droite). Advection d'interface. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles). . . . .	70
3.4	Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle de transport à 5 équations (droite). Tube à choc liquide-gaz. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles) et solutions exactes (traits pleins). . . .	71
3.5	Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle de transport à 5 équations (droite). Tube à choc liquide-gaz. Variables phasiques. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles). . . . .	72



3.6	Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle complet à 7 équations (droite). Premier problème diphasique. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles). . . . .	74
3.7	Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle complet à 7 équations (droite). Deuxième problème diphasique. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles). . . . .	75
3.8	Représentation de l'impact d'un piston sur un milieu diphasique. . . . .	76
3.9	Modèle réduit à 5 équations pour le problème d'Hugoniot. Variables de mélange et phasiques pour une vitesse d'impact de 3000 m.s <sup>-1</sup> . Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds. . . . .	77
3.10	Modèle réduit à 5 équations (traits pleins) et modèle à 7 équations de [56] (traits pointillés) pour le problème d'Hugoniot. Vitesse du choc en fonction de l'impact. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds. Résultats expérimentaux (symboles). . . . .	78
3.11	Modèle à 7 équations résolu avec la méthode des équations discrètes [9] (traits pointillés) pour le problème d'Hugoniot. Vitesse du choc en fonction de l'impact. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds. Résultats expérimentaux (symboles). . . . .	78
3.12	Données initiales du premier cas test bidimensionnel : chute d'une goutte. . . . .	79
3.13	Isovaleurs de la fraction volumique pour le premier cas test bidimensionnel : chute d'une goutte. . . . .	80
3.14	Données initiales du deuxième cas test bidimensionnel. . . . .	81
3.15	Isovaleurs de la fraction volumique pour le deuxième cas test bidimensionnel. En bas à droite on a effectué un zoom du champ de fraction volumique. . . . .	82
4.1	Isovaleurs des variables de mélange sur un maillage à 3277 nœuds à $M_\infty = 0.5$ . Schéma implicite classique. . . . .	97
4.2	Isovaleurs de la fraction volumique pour la chute d'une goutte à $t = 0$ s, 0.1 s, 0.15 s et 0.2 s. Schéma implicite classique (gauche) et schéma explicite (droite). . . . .	99
4.3	Isovaleurs de la fraction volumique pour la chute d'une goutte à $t = 0.25$ s, 0.3 s, 0.35 s et 0.4 s. Schéma implicite classique (gauche) et schéma explicite (droite). . . . .	100
4.4	Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3277 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Schéma classique (gauche) et schéma préconditionné (droite). . . . .	102
4.5	Profils de pression sur les bords de la tuyère, sur un maillage à 3277 nœuds à $M_\infty = 0.1$ (haut), $M_\infty = 0.01$ (milieu), $M_\infty = 0.001$ (bas). Schéma classique (gauche) et schéma préconditionné (milieu)-(droite). . . . .	103
4.6	Isovaleurs de la fraction volumique, pour le schéma classique et sur un maillage de 100 x 100 nœuds. . . . .	105
4.7	Isovaleurs de la fraction volumique, pour le schéma préconditionné et sur un maillage de 100 x 100 nœuds. . . . .	105
4.8	Isovaleurs de la fraction volumique, pour le schéma classique et sur un maillage de 400 x 400 nœuds. . . . .	106
4.9	Norme L2 de l'erreur sur la fraction volumique (gauche) et sur la pression (droite). Schéma classique (traits pleins) et schéma préconditionné (traits pointillés). . . . .	106
5.1	Schéma représentatif du problème de Ransom. . . . .	124
5.2	Résultats numériques du modèle à sept équations pour le cas test de Ransom. . . . .	125
5.3	Résultats de la méthode implicite pour le modèle à 7 équations relaxé en vitesses et en pressions, pour le calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère et sur un maillage à 3277 nœuds. . . . .	126
5.4	Convergence itérative de la méthode implicite (traits pointillés) et explicite (traits pleins) pour le modèle à 7 équations relaxé en vitesses et en pressions, pour le calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère et sur un maillage à 3277 nœuds. . . . .	127

# Nomenclature

## ⇒ Grandeurs caractéristiques des écoulements diphasiques

$k$	indice désignant la phase $k$
$k'$	indice désignant la phase $k' \neq k$
I	indice désignant l'interface I entre deux phases
$X_k$	fonction indicatrice de la phase $k$
$\mathbf{n}_k$	vecteur normal à l'interface et extérieur à la phase $k$
$\boldsymbol{\sigma}$	vecteur vitesse de l'interface
$\alpha_k$	fraction volumique de la phase $k$
$Y_k$	fraction massique de la phase $k$
$\rho_k$	densité de la phase $k$ en $\text{kg.m}^{-3}$
$\mathbf{u}_k$	vecteur vitesse de la phase $k$ en $\text{m.s}^{-1}$
$\mathbf{u}_{k\text{I}}$	vecteur vitesse de la phase $k$ à l'interface
$p_k$	pression de la phase $k$ en Pa
$p_{k\text{I}}$	pression de la phase $k$ à l'interface
$\varepsilon_k$	énergie interne spécifique en $\text{J.kg}^{-1}$
$e_k$	énergie totale spécifique égale à $\varepsilon_k + \mathbf{u}_k^2/2$
$h_k$	enthalpie spécifique égale à $\varepsilon_k + p_k/\rho_k$
$H_k$	enthalpie totale spécifique égale à $h_k + \mathbf{u}_k^2/2$
$s_k$	entropie en $\text{J.kg}^{-1}\text{T}^{-1}$
$T_k$	température en K
$C_{v,k}$	chaleur spécifique de la phase $k$ à volume constant
$C_{p,k}$	chaleur spécifique de la phase $k$ à pression constante
$\gamma_k$	rapport des chaleurs spécifiques de la phase $k$
$\pi_k$	paramètre de la loi d'état de type Stiffened-Gas pour la phase $k$
$a_k$	vitesse du son de la phase $k$ en $\text{m.s}^{-1}$
$a_{k\text{I}}$	vitesse du son de la phase $k$ à l'interface
$M_k$	nombre de Mach relatif à la phase $k$ et égal à $\ \mathbf{u}_k\ /a_k$
$\bar{\tau}_k$	tenseur des contraintes de viscosité en $\text{kg.m}^{-3}\text{s}^{-1}$
$\mathbf{q}_k$	flux de chaleur sur la phase $k$ en $\text{W.m}^{-2}$
$\mathbf{f}_k^v$	ensemble des forces volumiques sur la phase $k$
$\Gamma_k$	terme de transfert de masse pour la phase $k$
$\mathbf{F}_k^d$	forces de frottement sur la phase $k$ à l'interface
$\dot{\alpha}_k$	terme de variation de la fraction volumique de la phase $k$
$\lambda$	coefficient de relaxation des vitesses en $\text{kg.m}^{-2}\text{s}^{-2}$
$\mu$	coefficient de relaxation des pressions en $\text{Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$

## ⇒ Grandeurs géométriques et temporelles

$\Omega$	ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ , $d=2$ ou $3$
$\mathbf{x}$	point appartenant au domaine $\Omega$
$\partial\Omega$	bord du domaine $\Omega$
$t$	temps

**⇒ Opérateurs et tenseurs**

$\frac{\partial g}{\partial t}$  dérivée partielle en  $t$  de la fonction scalaire  $g$

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  dérivée partielle en  $t$  du vecteur  $\mathbf{u}$

$\nabla g$  gradient de la fonction  $g$  égal au vecteur de  $i^{\text{e}}$  composante  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$

$\text{div} \mathbf{u}$  divergence du vecteur  $\mathbf{u}$  égale à  $\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  égal à  $\sum_i u_i v_i$

$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  tenseur d'ordre 2 de coefficients  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j$

$\text{div} \bar{\tau}$  divergence du tenseur  $\bar{\tau}$  égale au vecteur de  $j^{\text{e}}$  composante  $\sum_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_i}$

$\|\mathbf{u}\|$  norme  $L_2$  du vecteur  $\mathbf{u}$  égale à  $\sqrt{\sum_i u_i^2}$

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}}$  Jacobien de coefficients  $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial v_j}$

**⇒ Grandeurs liées à la discrétisation**

$\Delta t$  pas de temps

$C_i$  cellule construite autour du nœud  $i$

$A_i$  volume de la cellule  $C_i$

$\partial C_i$  bord de la cellule  $C_i$

$v(i)$  ensemble des nœuds voisins du nœud  $i$

$\partial C_{ij}$  interface entre les nœuds  $i$  et  $j$  égale à  $\partial C_i \cap \partial C_j$

$\mathbf{n}_{ij}$  vecteur normal moyen lié à l'interface et égal à  $\int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n} dl$

$\beta$  paramètre du préconditionneur de Turkel

$\bar{\beta}$  paramètre de décentrage pour l'ordre 2 avec la méthode MUSCL

# Introduction Générale

Ce travail porte sur l'étude de modèles et de méthodes numériques pour les écoulements diphasiques compressibles. L'ensemble de ces problèmes en mécanique des fluides est très vaste et relativement compliqué. Par définition, un écoulement diphasique représente un mélange de deux phases où la topologie, la composition et les phénomènes d'échanges sont des paramètres qui peuvent constamment varier. De part leur grande diversité, on les rencontre fréquemment dans les applications industrielles : réacteur nucléaire, turbo-propulseur, injecteur diphasique... On s'aperçoit donc très vite qu'ils peuvent donner naissance à des phénomènes très complexes et que leur modélisation n'est pas aisée. Même s'il est toujours possible d'écrire des équations locales, la résolution directe semble quasiment inabordable à cause des petites échelles du problème et la modélisation des écoulements rencontrés dans l'industrie nécessite une approche de type homogénéisation [33], [18]. Dans les méthodes Eulériennes que l'on a choisies d'utiliser pour ce travail, la modélisation consiste à écrire les équations de Navier-Stokes compressibles pour chacune des phases et à moyenniser les bilans de conservation. L'avantage de cette approche est de s'affranchir d'une description trop locale des équations tout en gardant la possibilité de résoudre des écoulements où le comportement des deux phases peut être très différent. L'inconvénient majeur est que ce procédé d'homogénéisation introduit dans le système, des termes d'une part très difficiles à modéliser et à évaluer et d'autre part délicats à appréhender numériquement à cause de leur nature mathématique. De plus les phénomènes d'interaction entre phases apparaissent souvent à travers des termes sources qui peuvent être fortement non linéaires et représenter une difficulté supplémentaire.

Habituellement, ce procédé d'homogénéisation conduit à des systèmes bi-fluides à six équations en une dimension d'espace, qui sont généralement fermés par une relation d'égalité entre pressions phasiques. Ces modèles ont fait l'objet de nombreux travaux [15], [32], [24], [40], [3], [43], [13], [31], [63], [20], [21] et ont été très utilisés notamment dans les codes de l'industrie nucléaire et pétrolière. On peut citer par exemple les codes de calculs tridimensionnels RELAP5 [51], [52], TRAC [69], CATHARE [5]. Ces modèles ont donné des résultats très probants ; cependant il est bien connu que leur caractère non hyperbolique a toujours pénalisé dans une certaine mesure les méthodes numériques. En effet il conduit à des problèmes mathématiques potentiellement mal posés, et les schémas numériques qui ne peuvent pas être construits en utilisant explicitement les valeurs propres du système, deviennent instables en dessous d'un pas d'espace critique [30]. Aussi depuis les années 80, on a introduit à partir de la même technique d'homogénéisation, des modèles à sept équations de type Baer-Nunziato [54], [64]. Ces modèles au lieu d'être fermés par une relation algébrique d'égalité des pressions, le sont par une équation topologique supplémentaire. Leur grand avantage par rapport aux modèles à six équations est qu'ils sont inconditionnellement hyperboliques. Ces systèmes ont été pendant longtemps peu utilisés à cause de leur complexité. Cependant depuis quelques années, les travaux numériques sur ce type de modèles se sont multipliés et ont montré que l'hyperbolicité représentait un avantage certain pour les schémas numériques [4], [56]. La majeure partie de ces travaux [55], [56], [58], [9] s'est cependant concentrée sur des applications toujours très compressibles et à grande vitesse. D'un point de vue numérique, ces travaux ont donc pu employer des schémas explicites en temps.

Ce travail représente une première étape dans l'utilisation des modèles à sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach. En effet dans le cadre des applications nucléaires qui nous conduisent dans cette thèse, il est nécessaire de disposer de méthodes numériques qui couvrent l'ensemble de la gamme des nombres de Mach. Par exemple, les études des circuits de transfert de l'énergie dans les réacteurs montrent la présence d'écoulements diphasiques, liquide-vapeur, que ce soit en fonctionnement normal (générateurs de vapeur, condenseurs, échangeurs, cœurs bouillants) où en situation accidentelle (tuyaux, injecteurs, cœurs pressurisés). Les situations accidentelles impliquent plutôt des écoulements vio-

lents et fortement transitoires. En revanche les régimes en fonctionnement normal entrent dans la gamme des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, qui vont poser un certain nombre de problèmes d'analyse numérique et qui sont souvent mal résolus par les algorithmes classiques. C'est dans le but de résoudre en partie ces problèmes que nous avons décidé d'utiliser les modèles hyperboliques à sept équations. L'intérêt n'est pas seulement d'utiliser un seul algorithme pour tous les types d'applications, mais aussi de pouvoir calculer avec précision les régimes très lents. Les enjeux principaux dans le cadre des applications nucléaires, sont l'optimisation des rendements, la prévision des usures et le contrôle des accidents. On notera que les écoulements à faible nombre de Mach sont très répandus dans beaucoup d'autres applications industrielles et qu'il est donc important d'avoir des méthodes numériques précises et performantes pour ce type de régime.

La notion de faible nombre de Mach qui représente le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son, apparaît lorsque l'on s'intéresse aux écoulements compressibles à faible vitesse. Quand ce paramètre devient petit, on est confronté à deux types de problèmes numériques. D'une part les pas de temps des schémas explicites deviennent très petits à cause du critère de stabilité CFL et il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes implicites. Et d'autre part la précision des approximations décentrées se dégrade fortement. Cette perte de précision n'est pas encore complètement comprise et ce n'est que récemment qu'on a commencé à s'y intéresser. Cette étude participe à ce travail d'explication et de compréhension.

En ce qui concerne le manque de précision des approximations décentrées pour les écoulements à faible nombre de Mach, une des solutions consiste à calculer l'écoulement avec des modèles obtenus par simplifications du modèle compressible standard. Néanmoins cela présente deux inconvénients majeurs ; premièrement si l'écoulement n'est pas toujours suffisamment lent pour être calculé avec des modèles simplifiés et deuxièmement si on veut pouvoir traiter tous les types de régime. Ainsi durant ces dernières années, de nombreux travaux ont permis d'analyser les équations limites de ce type d'écoulements [82], [73], [38], [6], [16], [29], [77], [10], [79] et de construire des schémas numériques plus précis pour ces régimes spécifiques [16], [29], [72], [10], [79], [28]. L'objectif recherché est de résoudre des écoulements pratiquement incompressibles mais dilatables par des solveurs compressibles. La solution que nous avons choisie pour ce travail repose sur des méthodes de préconditionnement initialement développées pour les calculs stationnaires [71], [73], [19] que l'on applique ici seulement à réduire la diffusion numérique des schémas. A l'heure actuelle, la situation semble assez bien comprise pour le monophasique tant du point de vue des équations continues que des modèles discrets. Notre travail constitue une première étape pour étendre ce type d'analyses et de méthodes aux écoulements diphasiques à faible nombre de Mach. Il s'est focalisé et articulé sur les trois thèmes suivants.

### **(I) Faible nombre de Mach**

La nature hyperbolique des modèles bi-fluides auxquels on s'intéresse dans cette étude, incite à utiliser des schémas décentrés de type Godunov. Le premier volet de cette thèse a donc consisté à analyser cette classe de schémas dans la limite des faibles nombres de Mach. Dans un premier temps nous avons constaté que les problèmes rencontrés sur la plupart des schémas décentrés pour traiter ce type d'écoulements se retrouvaient pour les schémas de type Godunov. La partie originale dans ce travail a consisté à élucider cette défaillance d'un point de vue théorique par analyse asymptotique du problème de Riemann exact, issu des équations d'Euler [28]. Dans un deuxième temps nous avons sélectionné une classe de solveurs de type VFRoe [44], [8], qui sont des schémas de type Godunov où le problème de Riemann est résolu de façon approchée et non exacte. La première raison de ce choix a été la possibilité d'adapter les techniques de préconditionnement sur ce type de solveurs et la deuxième, que ces schémas étaient relativement bien adaptés aux modèles hyperboliques à sept équations pour lesquels on ne sait pas résoudre de façon exacte le problème de Riemann.

### **(II) Modèle réduit à cinq équations**

L'analyse du modèle diphasique à sept équations dans la limite des faibles nombres de Mach n'est pas aisé, notamment à cause des termes de relaxation des pressions et des vitesses, qui introduisent des temps caractéristiques difficiles à mettre en relation avec ceux de la partie hyperbolique. Ainsi nous avons choisi de faire une étape supplémentaire avant de passer à l'analyse du modèle complet dans la limite faible Mach. Pour cela, nous avons dans un premier temps cherché à réduire ce modèle et à développer

un schéma numérique adapté pour des temps de relaxation infiniment petits. Nous avons abouti à un modèle à cinq équations lui aussi hyperbolique. Notre premier apport sur ce thème a été d'introduire une méthode de réduction originale et rationnelle applicable à des modèles hyperboliques avec termes sources raides [27]. Ensuite, une analyse mathématique du modèle réduit, a révélé une structure assez proche de celle des équations d'Euler et nous a incité à développer les méthodes de préconditionnement pour ce modèle diphasique réduit ainsi qu'une méthode implicite basée sur les solveurs de type VFRoe. La mise au point de schémas implicites n'était pas aisée mais nécessaire dans le cadre des écoulements à faible nombre de Mach.

### (III) Modèle diphasique complet

Une première partie dans l'étude du modèle à sept équations a consisté à montrer que d'une certaine manière, il contient le modèle bi-fluides à six équations. En effet nous montrons que la limite du modèle à sept équations lorsque les temps caractéristiques des termes de relaxation de pression tendent vers zéro, est un système à six équations équivalent aux modèles bi-fluides classiques à six équations. En conséquence, un solveur hyperbolique pour les modèles à sept équations couplé à une procédure de relaxation des pressions constitue une méthode originale de résolution par relaxation des modèles bi-fluides à six équations. Dans la deuxième partie, nous proposons pour le modèle diphasique complet à sept équations, une méthode implicite linéarisée, basée sur les solveurs de type VFRoe. Cette méthode implicite représente un réel intérêt en temps de calcul pour les écoulements diphasiques très lents et notamment pour les calculs stationnaires. En effet, les méthodes numériques implicites peuvent être utilisés "sans" restriction sur les pas de temps. Néanmoins, les termes de relaxation peuvent introduire des temps caractéristiques limites et l'association avec la partie hyperbolique n'est pas facile.

### Contenu du mémoire

Dans le chapitre 1, on décrit la modélisation Eulérienne des écoulements diphasiques que l'on a choisie d'utiliser, et qui est typiquement basée sur un procédé d'homogénéisation [33], [18]. Cette modélisation sous sa forme la plus générale aboutit à des systèmes de six équations. Nous montrons comment les relations de fermeture sur ces systèmes peuvent aboutir à deux classes de modèles différents; les modèles bi-fluides classiques à six équations et les modèles bi-fluides à sept équations de type Baer-Nunziato.

Dans le chapitre 2, nous menons une analyse du schéma de Godunov pour les équations d'Euler via celle du problème de Riemann dans la limite des faibles nombres de Mach. Cette analyse nous a permis d'expliquer de façon rigoureuse pourquoi les équations discrètes ne présentent pas le bon comportement et ne convergent pas vers les solutions des équations limites continues. A l'issue de cette analyse, nous proposons aussi deux méthodes pour remédier à ce problème. La première consiste à adapter les techniques inspirées par les travaux de Turkel [19], [72] sur les solveurs de type VFRoe et cela en modifiant le problème de Riemann linéarisé et sans changer la formulation générale du schéma. Ces travaux sont étroitement liés à ceux réalisés sur le schéma de Roe. En effet, une analyse asymptotique dans la limite des faibles nombres de Mach nous a montré que les équations limites discrètes données par les deux classes de schémas étaient quasiment similaires. La deuxième méthode consiste à effectuer directement une correction des flux obtenue par analyse asymptotique du problème de Riemann. Elle est applicable au solveur exact.

Dans le chapitre 3, nous réalisons un travail de modélisation théorique pour la résolution de problèmes d'interfaces et diphasiques avec faible déséquilibre cinématique entre phases. Ceci nous a conduit à un modèle réduit à cinq équations, qui s'est avéré bien adapté aux problèmes de détonation et de calcul d'interfaces entre fluides compressibles. La modélisation consiste à réduire par analyse asymptotique le modèle diphasique complet proposé par Abgrall et Saurel dans [56], pour aboutir à un système réduit. L'étude mathématique du modèle nous a permis de développer un ensemble de techniques numériques adaptées et très robustes dans le cadre des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach.

Dans le chapitre 4, nous adaptons les techniques de préconditionnement à faible nombre de Mach, au modèle diphasique réduit. Auparavant, on effectue une analyse des équations limites de ce système. Celle-ci nous guide dans la transposition des techniques étudiées au chapitre 2 dans un cadre monophasique vers des modèles diphasiques.

Dans le chapitre 5, on montre que le solveur hyperbolique pour le modèle à sept équations couplé à une procédure de relaxation des pressions [56], [58], [42] pour des temps infiniment petits, peut représenter une méthode numérique alternative pour la résolution des modèles bi-fluides à six équations. Enfin nous appliquons la méthode implicite basée sur les solveurs de type VFRoe à ce modèle diphasique complet. Cette méthode nécessite le calcul de la matrice Jacobienne du système écrit en variables conservatives ainsi que celui des matrices de passage entre les variables entropiques du solveur explicite et les variables conservatives.

**Les travaux présentés dans ce mémoire ont fait l'objet des communications suivantes :**

*Article en revue internationale avec comité de lecture*

- H. Guillard et A. Murrone (2001). On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Rapport de Recherche INRIA N° 4189*.
- H. Guillard et A. Murrone (2003). A five equation reduced Model for compressible two phase flow problems. *Rapport de Recherche INRIA N° 4778 et soumis au Journal of Computational Physics 2003*.
- H. Guillard et A. Murrone (2004). On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Computers and Fluids, 33 : 655-675, 2004*.

*Communications lors de conférences*

- A. Murrone. On the behavior of Godunov type schemes in the low Mach number limit. *Trends in Numerical and Physical Modeling for Industrial Multiphase Flows, Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Corse, France, 26 au 28 Septembre 2001*.
- A. Murrone. Introduction aux solveurs de Riemann et aux méthodes de préconditionnement pour les écoulements compressibles à faible nombre de Mach. *6<sup>e</sup> Ecole d'Eté du GUT, Porquerolles, France, 23 au 29 Juin 2002*.
- A. Murrone. A five equation reduced Model for compressible two phase flow problems. *15<sup>e</sup> Séminaire de Mécanique des Fluides, CEA Saclay, France, 28 au 30 Janvier 2003*.
- A. Murrone. Low Mach preconditioning for compressible two phase flow problems. *Séminaire CEA-EDF Neptune, EDF Chatou, France, 18 au 19 Juin 2003*.
- A. Murrone. Un modèle réduit à cinq équations pour les problèmes d'écoulements diphasiques compressibles. *16<sup>e</sup> Congrès de Mécanique, Nice, France, 1 au 5 septembre 2003*.
- A. Murrone. Low Mach preconditioning for compressible two phase flow problems. *Workshop on Multiphase and Complex Flow Simulation for Industry, Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, Corse, France, 20 au 24 octobre 2003*.

# Chapitre 1

## Modélisation des écoulements diphasiques

*Il existe deux grandes classes de méthodes de modélisation des écoulements diphasiques : les méthodes Lagrangiennes et les méthodes Eulériennes. Dans les méthodes Eulériennes que l'on a choisies d'utiliser pour ce travail, la modélisation des écoulements diphasiques est basée sur un procédé d'homogénéisation [33], [18]. Ces techniques consistent à considérer les deux phases comme deux milieux continus distincts avec interpénétration et à résoudre des équations qui gouvernent les variables d'état moyennes de chacune des phases. Sous leur forme la plus générale, elles aboutissent à des systèmes ouverts, caractérisés par deux vitesses et deux pressions distinctes. Ainsi en une dimension d'espace, ces modèles se composent d'au moins six équations ; deux équations de conservation de la masse, deux équations de quantité de mouvement, deux équations d'énergie ou de pression, auxquelles il faut rajouter des relations de fermeture.*

*Le but de ce premier chapitre introductif est de rappeler brièvement l'origine physique de ces modèles. A l'échelle microscopique, les écoulements diphasiques peuvent être vus comme un ensemble de régions purement monophasiques, séparées par des interfaces au travers desquelles s'opèrent des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Pour développer un modèle macroscopique, on écrit d'abord les équations Eulériennes de bilan valables à l'intérieur de chaque région purement monophasique, puis par un procédé de moyennes on étend ces équations à tout le domaine et on modélise les transferts aux interfaces.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Equations de bilan Eulériennes monophasiques . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Extension des équations à tout le domaine . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Equations sur les grandeurs moyennes . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.4</b>	<b>Lois de fermeture et modèles bi-fluides à six et sept équations . . . . .</b>	<b>13</b>
1.4.1	Modèles bi-fluides à six équations . . . . .	13
1.4.2	Modèles bi-fluides à sept équations de type Baer-Nunziato . . . . .	15

---

### 1.1 Equations de bilan Eulériennes monophasiques

Dans la suite on notera  $k = 1, 2$  les indices respectifs à chaque phase. Tout milieu diphasique peut être assimilé à un ensemble de régions purement monophasiques, dans lesquelles les équations locales de la mécanique des fluides s'appliquent, ces régions étant séparées par des interfaces infiniment minces et supposées sans masse. On écrit les bilans de conservation pour les masses  $\rho_k$ , les quantités de mouvement  $\rho_k \mathbf{u}_k$ , et les énergies totales  $\rho_k e_k = \rho_k \varepsilon_k + \rho_k \mathbf{u}_k^2 / 2$  avec  $\varepsilon_k(\rho_k, p_k)$  les énergies internes spécifiques dépendant des densités  $\rho_k$  et des pressions  $p_k$ . On obtient ainsi pour chaque phase, le système classique des équations de Navier-Stokes :



$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla p_k + \operatorname{div}(-\bar{\tau}_k) = \rho_k \mathbf{f}_k^v \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho_k e_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k e_k + p_k) \mathbf{u}_k + \operatorname{div}(\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) = \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \quad (1.1.3)$$

où  $\bar{\tau}_k$  est le tenseur des contraintes visqueuses,  $\mathbf{f}_k^v$  l'ensemble des forces volumiques extérieures s'appliquant sur la phase  $k$  et  $\mathbf{q}_k$  le flux de chaleur.

## 1.2 Extension des équations à tout le domaine

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , le domaine spatial de l'écoulement observé, indépendant du temps, avec  $d$  un entier inférieur ou égal à 3. On note  $\Omega_k(t) \subset \Omega$  le domaine spatial occupé par la phase  $k$  dans le domaine d'écoulement à l'instant  $t$ . Le domaine  $\Omega_k(t)$  peut être non connexe et on définit  $X_k$  la fonction caractéristique de la phase  $k$  par :

$$X_k(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_k(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2)$$

Cette fonction discontinue aux interfaces permet d'étendre les équations (1.1) valides à l'intérieur d'une phase, c'est-à-dire  $\forall \mathbf{x} \in \Omega_k(t)$ , à tout le domaine  $\Omega$  de l'écoulement. Rappelons que la fonction  $X_k$  vérifie au sens des distributions les égalités suivantes :

$$\nabla(X_k g) = X_k \nabla g - g \mathbf{n}_k \delta \quad (1.3.1)$$

$$\operatorname{div}(X_k \mathbf{u}) = X_k \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_k \delta \quad (1.3.2)$$

$$\operatorname{div}(X_k \bar{\tau}) = X_k \operatorname{div} \bar{\tau} - \bar{\tau} \cdot \mathbf{n}_k \delta \quad (1.3.3)$$

où  $\mathbf{n}_k$  est le vecteur normal à l'interface  $\partial\Omega_k(t)$  extérieur à  $\Omega_k(t)$ ,  $g$  une fonction scalaire,  $\mathbf{u}$  un vecteur,  $\bar{\tau}$  un tenseur et  $\delta$  la fonction caractéristique de l'interface. Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  la vitesse de l'interface, on a aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t}(X_k g) = X_k \frac{\partial g}{\partial t} + g \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k \delta \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(X_k \mathbf{u}) = X_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k \delta \quad (1.4.2)$$

Si on pré-multiplie chacune des équations (1.1) relatives à la phase  $k$  par la fonction caractéristique  $X_k$  ; on obtient donc a priori, des équations valides dans tout le domaine y compris aux interfaces (supposées infiniment minces et sans masse) et quel que soit le temps :

$$X_k \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k) \right) = 0 \quad (1.5.1)$$

$$X_k \left( \frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla p_k + \operatorname{div}(-\bar{\tau}_k) \right) = X_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \quad (1.5.2)$$

$$X_k \left( \frac{\partial \rho_k e_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k e_k + p_k) \mathbf{u}_k + \operatorname{div}(\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \right) = X_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \quad (1.5.3)$$

La notion de dérivée au sens des distributions permet d'introduire la fonction caractéristique à l'intérieur des opérateurs différentiels et les équations (1.5) deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial t}(X_k \rho_k) + \operatorname{div}(X_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \rho_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta = 0 \quad (1.6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(X_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}(X_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla X_k p_k + \operatorname{div}(-X_k \bar{\tau}_k) \\ + \rho_k (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta - \rho_k \mathbf{u}_k (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) \delta + p_k \mathbf{n}_k \delta - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta = X_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(X_k \rho_k e_k) + \operatorname{div} X_k (\rho_k e_k + p_k) \mathbf{u}_k + \operatorname{div} X_k (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \\ + \rho_k e_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta + p_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta + (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta = X_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Les équations (1.6) sont une extension des équations locales (1.1) à tout le domaine de l'écoulement et sont également valables aux interfaces.

### 1.3 Equations sur les grandeurs moyennes

Les équations des échanges locaux instantanés (1.6) ne peuvent être résolues car on ne connaît pas la position de l'interface qui est distribuée aléatoirement dans le temps et dans l'espace. On écrit donc les équations en moyenne, ce qui permet de reconstituer deux milieux continus fictifs. On introduit donc un opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  qui vérifie les propriétés classiques de linéarité  $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$  et  $\langle \lambda a \rangle = \lambda \langle a \rangle$ , d'idempotence  $\langle \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle$  et de commutativité avec les opérateurs de différentiation.

On peut alors décomposer une variable locale instantanée quelconque  $a$  en une valeur moyenne  $\langle a \rangle$  et une fluctuation  $a'$  qui vérifie  $\langle a' \rangle = 0$ . L'opérateur  $\langle \cdot \rangle$  peut être défini comme la limite de la moyenne arithmétique sur un nombre  $N$  de réalisations tendant vers l'infini, du phénomène :

$$\langle a \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N a \quad (1.7)$$

Par rapport à des moyennes spatiales, temporelles ou spatio-temporelles, la moyenne statistique est la seule valable pour des écoulements non homogènes instationnaires. On définit le taux de présence de la phase  $k$  comme la moyenne de la fonction caractéristique de cette phase :

$$\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle X_k \rangle \quad (1.8)$$

Dans la suite du mémoire, on désignera la variable  $\alpha_k$  comme la fraction volumique de la phase  $k$ . Cette dénomination peut s'expliquer si on interprète la moyenne  $\langle \cdot \rangle$  comme une moyenne volumique. En effet dans ce cas, on aura :

$$\alpha_k = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle V_k \rangle}{V} \quad (1.9)$$

où  $V_k \subset V$  est le volume occupé par la phase  $k$  :

$$V_k = \int_V X_k dV \quad \text{et} \quad \langle V_k \rangle = \int_V \alpha_k dV \quad (1.10)$$

On définit la moyenne Eulérienne phasique classique, notée  $\bar{a}_k$ , d'une grandeur quelconque  $a_k$  par la formule :

$$\bar{a}_k = \frac{\langle X_k a_k \rangle}{\langle X_k \rangle} = \frac{\langle X_k a_k \rangle}{\alpha_k} \quad (1.11)$$

En décomposant les variables en une valeur moyenne plus une fluctuation :  $a_k = \bar{a}_k + a'_k$ , on obtient grâce au théorème d'idempotence :

$$\langle X_k a'_k \rangle = 0 \quad (1.12)$$

L'examen des équations de bilan montre cependant qu'il est plus pratique de définir, pour les écoulements compressibles, la moyenne de la vitesse et de l'énergie interne comme une moyenne pondérée par la masse volumique, appelée moyenne de Favre et qui s'écrit :

$$\tilde{a}_k = \frac{\langle X_k \rho_k a_k \rangle}{\alpha_k \bar{\rho}_k} \quad (1.13)$$

Dans ce cas on aura à la place de l'expression (1.12), les relations  $\langle X_k \rho_k \mathbf{u}_k'' \rangle = 0$  et  $\langle X_k \rho_k \varepsilon_k'' \rangle = 0$  où  $\mathbf{u}_k''$  et  $\varepsilon_k''$  sont respectivement les fluctuations de la vitesse et de l'énergie interne. On applique alors l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  aux équations (1.6) et on obtient le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k \rangle + \text{div} \langle X_k \rho_k \mathbf{u}_k \rangle + \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = 0 \quad (1.14.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k \mathbf{u}_k \rangle + \text{div} \langle X_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rangle + \nabla \langle X_k p_k \rangle + \text{div} \langle -X_k \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \rangle \\ + \langle \rho_k (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \rho_k \mathbf{u}_k (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) \delta \rangle + \langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = \langle X_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \rangle \end{aligned} \quad (1.14.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k e_k \rangle + \text{div} \langle X_k (\rho_k e_k + p_k) \mathbf{u}_k \rangle + \text{div} \langle X_k (\mathbf{q}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{u}_k) \rangle \\ + \langle \rho_k e_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle p_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle (\mathbf{q}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = \langle X_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \rangle \end{aligned} \quad (1.14.3)$$

A l'aide des définitions (1.11) et (1.13), l'équation de conservation de la masse (1.14.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) + \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = 0 \quad (1.15)$$

Et l'équation de quantité de mouvement (1.14.2), peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k) + \nabla (\alpha_k \bar{p}_k) + \text{div} (-\alpha_k (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k - \overline{\rho_k \mathbf{u}_k'' \otimes \mathbf{u}_k''})) \\ + \langle \rho_k (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \rho_k \mathbf{u}_k (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) \delta \rangle + \langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v} \end{aligned} \quad (1.16)$$

On notera aussi que les définitions (1.11) et (1.13) entraînent  $\langle X_k \rho_k e_k \rangle = \alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k''^2 / 2}$  où on a noté  $\tilde{e}_k = \tilde{\varepsilon}_k + \tilde{\mathbf{u}}_k^2 / 2$  l'énergie totale moyenne. Et l'équation de conservation de l'énergie (1.14.3) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \frac{\overline{\rho_k \mathbf{u}_k''^2}}{2})) + \text{div} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k + \frac{\overline{\rho_k \mathbf{u}_k''^2}}{2}) \tilde{\mathbf{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k (\bar{\mathbf{q}}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \tilde{\mathbf{u}}_k + \overline{\rho_k H_k \mathbf{u}_k''} - \overline{\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{u}_k''})) \\ + \langle \rho_k e_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle p_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle (\mathbf{q}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k} \end{aligned} \quad (1.17)$$

où  $H_k = e_k + p_k / \rho_k$  désigne l'enthalpie totale spécifique de la phase  $k$  et où  $\overline{\rho_k \mathbf{u}_k''^2 / 2}$  représente l'énergie cinétique turbulente. En introduisant  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_k^T = -\overline{\rho_k \mathbf{u}_k'' \otimes \mathbf{u}_k''}$  et  $\mathbf{q}_k^T = \overline{\rho_k H_k \mathbf{u}_k''} - \overline{\bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{u}_k''}$  le flux turbulent de chaleur prenant en compte l'énergie turbulente de convection et le travail lié à la turbulence, on réécrit les équations (1.15), (1.16) et (1.17) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) + \langle \rho_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = 0 \quad (1.18.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k) + \nabla (\alpha_k \bar{p}_k) + \text{div} (-\alpha_k (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k + \bar{\boldsymbol{\tau}}_k^T)) \\ + \langle \rho_k (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \rho_k \mathbf{u}_k (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) \delta \rangle + \langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v} \end{aligned} \quad (1.18.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \frac{\overline{\rho_k \mathbf{u}_k''^2}}{2})) + \text{div} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k + \frac{\overline{\rho_k \mathbf{u}_k''^2}}{2}) \tilde{\mathbf{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k (\bar{\mathbf{q}}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \tilde{\mathbf{u}}_k + \mathbf{q}_k^T)) \\ + \langle \rho_k e_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle p_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle (\mathbf{q}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k} \end{aligned} \quad (1.18.3)$$

Le terme  $\Gamma_k = -\langle \rho_k(\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  dans l'équation de conservation de la masse (1.15) représente la densité volumique des apports de masse à la phase  $k$ , résultant des échanges aux interfaces. Il vérifie l'équation de bilan aux interfaces  $\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0$ .

On notera respectivement  $\mathbf{M}_k = -\langle \rho_k(\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle \rho_k \mathbf{u}_k (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) \delta \rangle - \langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  et  $E_k = -\langle \rho_k e_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle p_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  les termes sources de quantité de mouvement et d'énergie, liés au transfert interfacial. On réécrit alors le système sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \bar{\rho}_k) + \text{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) = \Gamma_k \quad (1.19.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) + \text{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k) + \nabla(\alpha_k \bar{p}_k) + \text{div}(-\alpha_k (\bar{\boldsymbol{\tau}}_k + \bar{\boldsymbol{\tau}}_k^T)) \\ & = \mathbf{M}_k + \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{f}_k^v} \end{aligned} \quad (1.19.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \frac{\overline{\rho_k \mathbf{u}_k^2}}{2})) + \text{div}(\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k + \frac{\overline{\rho_k \mathbf{u}_k^2}}{2}) \tilde{\mathbf{u}}_k) + \text{div}(\alpha_k (\bar{\mathbf{q}}_k - \bar{\boldsymbol{\tau}}_k \cdot \tilde{\mathbf{u}}_k + \mathbf{q}_k^T)) \\ & = E_k + \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k} \end{aligned} \quad (1.19.3)$$

On s'intéresse maintenant à la modélisation des termes de transfert  $\Gamma_k, \mathbf{M}_k, E_k$ . Dans tous ces termes apparaît le gradient  $\nabla X_k = -\mathbf{n}_k \delta$  qui est différent de zéro seulement aux interfaces et qui définit la position de l'interface à l'échelle microscopique. Les produits  $-a_k \mathbf{n}_k \delta = a_k \nabla X_k$  et  $-\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta = \mathbf{u}_k \cdot \nabla X_k$  définissent les valeurs de la fonction  $a_k$  et du vecteur  $\mathbf{u}_k$  aux interfaces, notées  $a_{k\mathbb{I}}$  et  $\mathbf{u}_{k\mathbb{I}}$ . Le terme macroscopique de transfert de quantité de mouvement  $\mathbf{M}_k$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= -\langle \rho_k(\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle \rho_k \mathbf{u}_k (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k) \delta \rangle - \langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle \\ \mathbf{M}_k &= -\langle \rho_k(\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle \\ \mathbf{M}_k &= \mathbf{M}_k^\Gamma + p_{k\mathbb{I}} \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d \end{aligned} \quad (1.20)$$

où on a posé  $-\langle p_k \mathbf{n}_k \delta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_{k\mathbb{I}} \nabla \alpha_k$ . Le terme  $\mathbf{M}_k^\Gamma = -\langle \rho_k(\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  représente le transfert de quantité de mouvement dû au transfert de masse et s'effectuant aux interfaces et  $\mathbf{F}_k^d = \langle \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  correspond à la force de frottement interfacial s'exerçant sur la phase  $k$ . Le terme macroscopique de transfert d'énergie  $E_k$  est alors réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} E_k &= -\langle \rho_k e_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle p_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle \\ E_k &= -\langle \rho_k H_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle p_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle - \langle \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle + \langle (\bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle \\ E_k &= H_k^\Gamma - p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{k\mathbb{I}} + Q_{k\mathbb{I}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

où on a posé  $\langle (\bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{k\mathbb{I}}$ . Le terme  $H_k^\Gamma = -\langle \rho_k H_k (\mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  représente le transfert d'énergie dû au transfert de masse et  $Q_{k\mathbb{I}} = -\langle \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \delta \rangle$  le transfert de chaleur interfacial. En remplaçant  $\mathbf{M}_k$  et  $E_k$  par les expressions (1.20) et (1.21), le système (1.19) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \bar{\rho}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) = \Gamma_k \quad (1.22.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\mathbf{u}}_k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k) + \nabla(\alpha_k \bar{p}_k) + \operatorname{div}(-\alpha_k(\bar{\tau}_k + \bar{\tau}_k^T)) \\ &= \mathbf{M}_k^\Gamma + p_{k\mathbb{I}} \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d + \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v} \end{aligned} \quad (1.22.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k(\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \frac{\rho_k \mathbf{u}_k'^2}{2})) + \operatorname{div}(\alpha_k(\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k + \frac{\rho_k \mathbf{u}_k'^2}{2}) \tilde{\mathbf{u}}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k(\bar{\mathbf{q}}_k - \bar{\tau}_k \cdot \tilde{\mathbf{u}}_k + \mathbf{q}_k^T)) \\ &= H_k^\Gamma - p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{k\mathbb{I}} + Q_{k\mathbb{I}} + \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k} \end{aligned} \quad (1.22.3)$$

Le procédé d'homogénéisation nous a donc conduit à écrire le système (1.22) auquel il faut rajouter les conditions d'interface moyennées :

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0 \quad (1.23.1)$$

$$\sum_{k=1}^2 \mathbf{M}_k^\Gamma + p_{k\mathbb{I}} \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d = 0 \quad (1.23.2)$$

$$\sum_{k=1}^2 H_k^\Gamma - p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{k\mathbb{I}} + Q_{k\mathbb{I}} = 0 \quad (1.23.3)$$

Un tel modèle est dit bi-fluides. Néanmoins, cette forme générale constitue un système ouvert et nous verrons les différentes relations de fermeture dans le prochain paragraphe 1.4. Il reste de plus à modéliser un certain nombre de termes tels que  $\Gamma_k, \bar{p}_k, \bar{\tau}_k, \bar{\tau}_k^T, \mathbf{M}_k^\Gamma, p_{k\mathbb{I}}, \mathbf{F}_k^d, \mathbf{f}_k^v, \bar{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k^T, H_k^\Gamma, \mathbf{u}_{k\mathbb{I}}, Q_{k\mathbb{I}}$  et c'est ce que nous décrivons maintenant.

Commençons par la modélisation de  $\bar{p}_k$ . Dans un fluide pur, la pression est fonction de la masse volumique et de l'énergie interne. Nous ferons l'hypothèse que la pression moyenne suit cette même loi d'état :  $\bar{p}_k = \bar{p}_k(\bar{\rho}_k, \tilde{e}_k)$ .

On s'intéresse à présent aux termes de transfert interfacial liés au transfert de masse  $\Gamma_k, \mathbf{M}_k^\Gamma, H_k^\Gamma$ . Dans la suite du travail, le transfert de masse n'est pas pris en compte ( $\Gamma_k = 0$ ) et par conséquent les termes  $\mathbf{M}_k^\Gamma, H_k^\Gamma$  s'annulent également. Les conditions d'interface à l'échelle microscopique se résument à  $\mathbf{u}_{k\mathbb{I}} = \mathbf{u}_{\mathbb{I}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  pour les vitesses. Notons simplement que la modélisation du transfert de masse est un point qui pose de réelles difficultés et que souvent on utilise les approximations  $\mathbf{M}_k^\Gamma = \mathbf{u}_{k\mathbb{I}} \Gamma_k$  et  $H_k^\Gamma = H_{k\mathbb{I}} \Gamma_k$ . Toute la difficulté de la modélisation repose alors sur l'approximation du terme  $\Gamma_k$ .

Généralement, le terme de transfert de chaleur  $Q_{k\mathbb{I}}$  est considéré comme étant égal à l'expression  $\alpha_1 \alpha_2 \rho_k (h_k^s - h_k) / \tau$  où  $h_k^s$  désigne l'enthalpie spécifique de saturation de la phase  $k$ .

Quand au terme de force de frottement interfacial  $\mathbf{F}_k^d$ , son expression dépend extrêmement de la topologie de l'écoulement et il existe un grand nombre de corrélations dans la littérature. La partie principale de ce terme est la force de traînée. Pour les écoulements à bulles, on rencontre souvent l'expression suivante où  $C_f$  est une constante positive :

$$\mathbf{F}_k^d = -C_f \alpha_k (1 - \alpha_k) \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k'}) \quad (1.24)$$

mais il existe beaucoup d'autres corrélations expérimentales. Dans le cadre des modèles à sept équations, les travaux [36], [56], [58] justifient, par des critères physiques, la proportionnalité au différentiel de vitesses entre phases et on a  $\mathbf{F}_k^d = \lambda (\mathbf{u}_{k'} - \mathbf{u}_k)$  où  $\lambda$  est un paramètre positif de relaxation qui peut tendre vers l'infini dans le cadre des problèmes à interfaces ou de détonations dans les matériaux condensés énergétiques.

On considère par la suite que les valeurs moyennes définissent les grandeurs moyennes de l'écoulement et on néglige les termes de turbulence  $\overline{\rho_k \mathbf{u}_k''^2}/2$ ,  $\overline{\tau_k^T}$ ,  $\mathbf{q}_k^T$ .

On supposera aussi que le tenseur des contraintes visqueuses, le flux de chaleur et l'ensemble des forces volumiques extérieures sont égaux à leurs valeurs moyennes  $\overline{\tau_k} = \bar{\tau}_k$ ,  $\mathbf{q}_k = \bar{\mathbf{q}}_k$  et  $\mathbf{f}_k^v = \bar{\mathbf{f}}_k^v$ . On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = \Gamma_k \quad (1.25.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\alpha_k p_k) + \operatorname{div}(-\alpha_k \bar{\tau}_k) \\ &= \mathbf{M}_k^\Gamma + p_{k\mathbb{I}} \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \end{aligned} \quad (1.25.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k e_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k e_k + \alpha_k p_k) \mathbf{u}_k + \operatorname{div}(\alpha_k (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k)) \\ &= H_k^\Gamma - p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{k\mathbb{I}} + Q_{k\mathbb{I}} + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (1.25.3)$$

Enfin il reste à traiter de la modélisation des grandeurs interfaciales  $\mathbf{u}_{k\mathbb{I}}$  et  $p_{k\mathbb{I}}$  qui représente un point délicat dans la description des écoulements diphasiques. Il est cependant nécessaire de se donner ces valeurs pour pouvoir résoudre le système d'équations. Le choix des valeurs aux interfaces présente deux problématiques : d'une part le "meilleur" choix pour ces valeurs peut dépendre des applications et d'autre part ce choix peut modifier la structure mathématique du système [12]. Nous détaillerons cette modélisation dans le cadre des modèles bi-fluides à six équations décrits au paragraphe 1.4.1 et dans le cadre des modèles à sept équations de type Baer-Nunziato décrits au paragraphe 1.4.2.

## 1.4 Lois de fermeture et modèles bi-fluides à six et sept équations

L'écriture (1.25) correspond à la forme générale des modèles bi-fluides obtenue par la procédure de moyenne habituelle [33], [18]. Néanmoins dans ce système, on compte seulement 6 équations pour 7 inconnues  $\rho_k$ ,  $\mathbf{u}_k$ ,  $e_k$ ,  $\alpha_k$ . Ce système est ouvert et il faut se donner des relations de fermeture. Nous allons voir que cela peut aboutir à deux types de modèles qui présentent chacun leurs avantages et inconvénients.

### 1.4.1 Modèles bi-fluides à six équations

Dans les modèles bi-fluides classiques à six équations, ce problème est résolu par l'existence d'une relation entre les pressions  $p_1$  et  $p_2$ . L'hypothèse des pressions communes est très répandue [15], [40], [3]. En effet il est physiquement légitime de supposer l'égalité des pressions phasiques :

$$p_1 = p_2 = p \quad (1.26)$$

et ainsi des lois constitutives de la forme  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\rho_k, p)$  pour les énergies internes phasiques.

En l'absence de transfert de masse, les vitesses d'interface sont telles que  $\mathbf{u}_{k\mathbb{I}} = \mathbf{u}_{\mathbb{I}} = \langle \sigma \rangle$  et les modèles bi-fluides classiques à six équations s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (1.27.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \alpha_k \nabla p + \operatorname{div}(-\alpha_k \bar{\tau}_k) \\ &= (p_{k\mathbb{I}} - p) \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \end{aligned} \quad (1.27.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k e_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k e_k + \alpha_k p) \mathbf{u}_k + \operatorname{div}(\alpha_k (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k)) \\ &= -p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{\mathbb{I}} + Q_{k\mathbb{I}} + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (1.27.3)$$

La vitesse d'interface est le plus souvent prise comme égale à la vitesse du centre de masse :

$$\mathbf{u}_I = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k} \quad (1.28)$$

Il reste donc pour fermer totalement le système à modéliser la pression  $p_{kI}$  de la phase  $k$  à l'interface. Dans ce modèle, les pressions des deux phases sont égales. Néanmoins la pression d'interface  $p_{kI}$  peut être différente de la pression commune  $p$  des deux phases, si on considère par exemple des effets de tension superficielle. On trouve beaucoup de corrélations dans la littérature qui expliquent la régularisation et l'interprétation physique de ce terme  $(p_{kI} - p)\nabla\alpha_k$  appelé force de pression d'interface. Par exemple, les travaux présentés dans [41] proposent pour des écoulements à bulles, l'expression suivante pour l'écart de pression :

$$\begin{cases} p - p_{1I} = 0 \\ p - p_{2I} = C_p(\alpha_1)\rho_2\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 \end{cases} \quad (1.29)$$

où l'indice 1 dénote la phase gazeuse ou la plus compressible et l'indice 2 le liquide ou le fluide le moins compressible. La correction de pression utilisée dans le code CATHARE [5] est donnée par :

$$p - p_{1I} = p - p_{2I} = \frac{\alpha_1\rho_1\alpha_2\rho_2}{\alpha_1\rho_2 + \alpha_2\rho_1}\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 \quad (1.30)$$

Dans le cas où l'on considère que  $p_{kI} = p$ , on obtient le modèle bi-fluides standard à six équations qui est strictement non hyperbolique.

Cela présente un inconvénient considérable dans la mise en œuvre de méthodes numériques adaptées et stables. Pour rendre le système hyperbolique, le terme  $(p - p_{kI})\nabla\alpha_k$  de force interfaciale dans les équations de quantité de mouvement est souvent considéré comme non nul. Ainsi certains auteurs proposent de toujours prendre en compte l'écart de pression quelque soit la configuration de l'écoulement de manière à rendre le système hyperbolique. Par exemple les travaux présentés dans [67], proposent la corrélation :

$$p - p_{1I} = p - p_{2I} = \delta\alpha_1\rho_2\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|^2 \quad (1.31)$$

Celle-ci permet d'assurer l'hyperbolicité du système bi-fluides comme on le décrit ci-dessous. On introduit la vitesse du son  $a_m$  d'un mélange diphasique en déséquilibre cinématique. Cette vitesse peut être reliée à la vitesse du son  $\hat{a}$  du mélange où les deux phases sont en équilibre des vitesses, par la relation :

$$a_m = \hat{a} \left( \frac{\rho(\alpha_1\rho_2 + \alpha_2\rho_1)}{\rho_1\rho_2} \right)^{1/2} \quad (1.32)$$

Ensuite on suppose que l'écart des vitesses entre phases est beaucoup plus petit que la vitesse  $\hat{a}$  et on introduit le petit paramètre :

$$\xi = \frac{\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|}{a_m} \ll 1 \quad (1.33)$$

On montre alors par une méthode de perturbation par rapport à  $\xi$ , que le système est hyperbolique au premier ordre, en prenant  $\delta < \delta_0$ . Le coefficient  $\delta_0$  dans le cas où la phase 1 est un gaz parfait, s'écrit :

$$\delta_0 = \frac{\alpha_2\gamma_1 p}{\alpha_1\rho_2 a_m^2} \quad (1.34)$$

D'autres méthodes pour obtenir l'hyperbolicité du modèle bi-fluides ont été introduites. En particulier, on peut rajouter un autre terme correctif tel que la force de masse ajoutée, liée aux variations de l'écart des vitesses phasiques et donc à l'accélération du mouvement relatif des deux phases [83], [17]. Les méthodes de perturbation fournissent également un moyen pratique pour analyser l'hyperbolicité des modèles et obtenir des approximations des valeurs propres et des vecteurs propres [40], [14], qui peuvent conduire au premier ordre d'approximation à un système hyperbolique.

### 1.4.2 Modèles bi-fluides à sept équations de type Baer-Nunziato

Dans les modèles de type Baer-Nunziato, l'hypothèse des pressions communes est remplacée par une équation topologique supplémentaire, sur la fraction volumique  $\alpha_k$  de la forme :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{u}_\Gamma \cdot \nabla \alpha_k = \dot{\alpha}_k \quad (1.35)$$

où le terme de production de fraction volumique  $\dot{\alpha}_k$  nécessite une modélisation supplémentaire. Baer et Nunziato ont été les premiers à supposer le terme de production comme étant proportionnel à la différence des pressions phasiques  $\dot{\alpha}_k = -\mu(p_{k'} - p_k)$  où  $\mu > 0$  est un coefficient qui contrôle la vitesse à laquelle les deux phases atteignent l'équilibre des pressions. Dans toute la suite de l'étude, nous conserverons cette modélisation et nous noterons que ce terme de production entraînera des termes  $\mu p_\Gamma (p_{k'} - p_k)$  de variation dans les équations de conservation de l'énergie, dus au travail de la pression interfaciale.

Il reste donc à présent, pour fermer complètement le système, à modéliser les vitesses et pressions aux interfaces. Dans le modèle original de Baer-Nunziato 1986 [4] et dans [36],  $p_\Gamma$  est égale à la pression de la phase la plus compressible tandis que  $\mathbf{u}_\Gamma$  est égale à la vitesse de la phase la moins compressible. Dans [22], le choix inverse est effectué. Dans [56], la pression d'interface est prise comme une pression de mélange  $p_\Gamma = \sum_{k=1}^2 \alpha_k p_k$  et la vitesse d'interface comme celle du centre de masse. Récemment des choix plus généraux ont été proposés à l'aide d'une analyse obtenue à partir d'une nouvelle méthode d'homogénéisation [1]. Ces exemples montrent que beaucoup de choix sont possibles et que la discussion du meilleur choix reste un sujet très difficile et encore ouvert. Les travaux présentés dans [12] apportent de nombreux éléments de réponses à ces questions et montrent en particulier que le choix des valeurs d'interface peut avoir un effet très important sur la structure mathématique des ondes et aussi sur l'existence d'entropies mathématiques.

Finalement les modèles à sept équations de type Baer-Nunziato, sans transfert de masse, s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (1.36.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\alpha_k p_k) + \operatorname{div}(-\alpha_k \bar{\tau}_k) \\ &= p_\Gamma \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \end{aligned} \quad (1.36.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k e_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k e_k + \alpha_k p_k) \mathbf{u}_k + \operatorname{div}(\alpha_k (\mathbf{q}_k - \bar{\tau}_k \cdot \mathbf{u}_k)) \\ &= p_\Gamma \mathbf{u}_\Gamma \cdot \nabla \alpha_k + \mu p_\Gamma (p_{k'} - p_k) + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_\Gamma + Q_{k\Gamma} + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}_k^v \cdot \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (1.36.3)$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{u}_\Gamma \cdot \nabla \alpha_k = -\mu (p_{k'} - p_k) \quad (1.36.4)$$

C'est sur ce modèle (1.36) que porte notre étude dans le cadre des écoulements diphasiques. L'avantage de ce modèle à sept équations par rapport au modèle bi-fluides classique à six équations, est d'être inconditionnellement hyperbolique. Cette hyperbolicité est obtenue en raison de l'hypothèse de compressibilité de chaque phase et permet ainsi l'utilisation d'un seul solveur. Le système possède sept valeurs propres réelles ;  $u_\Gamma$  la vitesse d'interface,  $u_k$  les ondes matérielles et  $u_k \pm a_k$  les ondes acoustiques de chaque phase  $k$  où  $a_k$  représente la vitesse du son de la phase  $k$ .





## Chapitre 2

# Comportement des schémas de type Godunov dans la limite des faibles nombres de Mach

*Etant donné l'hyperbolicité des modèles à sept équations, nous allons utiliser des schémas décentrés de type Godunov pour leur résolution numérique. Or il est bien connu que les approximations décentrées sont imprécises dans la limite des faibles nombres de Mach. Ainsi nous commencerons par étudier le comportement des schémas de type Godunov dans cette limite et dans un cadre monophasique.*

*Ce chapitre<sup>1</sup> présente une analyse du comportement du schéma de Godunov dans la limite des faibles nombres de Mach. L'étude du problème de Riemann montre que la pression à l'interface entre deux cellules contient des ondes acoustiques d'ordre Mach même si les données initiales sont bien préparées et ne contiennent que des fluctuations de pression d'ordre Mach au carré. Nous proposons alors de modifier les flux calculés par les schémas de type Godunov en résolvant un problème de Riemann préconditionné au lieu du problème original. Cette stratégie est appliquée à un solveur de type VFRoe et nous montrons qu'elle permet de retrouver un bon comportement de la pression.*

*Une alternative au préconditionnement, basée sur les résultats de l'analyse asymptotique est également développée. Cette alternative consiste à corriger le flux du schéma de Godunov sans modifier le problème de Riemann. Même si cette alternative est très proche des techniques de préconditionnement, elle présente un double intérêt. D'une part elle est plus facile à mettre en œuvre et d'autre part elle est développée avec le schéma original de Godunov c'est-à-dire celui basé sur la résolution du problème de Riemann exact. Des expériences numériques viennent confirmer les résultats théoriques.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Le problème continu</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Etude du problème de Riemann dans la limite des faibles nombres de Mach</b>	<b>25</b>
<b>2.4</b>	<b>L'effet du préconditionnement</b>	<b>29</b>
<b>2.5</b>	<b>Comparaison avec la solution incompressible</b>	<b>34</b>
<b>2.6</b>	<b>Une alternative au préconditionnement</b>	<b>37</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

---

<sup>1</sup>Ce chapitre est issu de : H. Guillard et A. Murrone (2004). On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Computers and Fluids*, 33 : 655-675, 2004.

## 2.1 Introduction

Les écoulements incompressibles sont un cas particulier des écoulements compressibles et en théorie, un solveur compressible devrait être capable de calculer ce type d'écoulements. Malheureusement, les expériences numériques montrent que pour un maillage donné, les solutions des équations discrètes régissant les écoulements compressibles ne correspondent pas à une approximation précise des solutions du modèle incompressible (voir [80]). Une première analyse de ce problème est apparue dans [73] et les questions relatives à ce sujet ont considérablement retenu l'attention [82], [38], [6], [16], [77], [29], [10], [79] au cours de ces dernières années. Plusieurs travaux proposent d'expliquer les raisons de ces difficultés et également de construire des schémas numériques valables pour tout nombre de Mach. Certains de ces travaux étendent au régime compressible les méthodes numériques utilisées pour le calcul d'écoulements incompressibles. Des exemples de ce type de méthodes se trouvent par exemple dans [82] ou [6]. D'autres approches sont basées sur la modification des techniques de capture de choc d'ordre élevé. Ces approches sont par exemple décrites dans [29], [72], [10] pour le schéma de Roe, dans [16] pour les schémas de type HLLC et dans [79] pour les schémas de flux. L'ingrédient principal de ces méthodes est l'utilisation des techniques de préconditionnement, initialement développées pour les calculs stationnaires [71], [73], [19] et que l'on applique ici, de manière sélective, uniquement à la viscosité artificielle.

Dans [29], cette technique est examinée pour le solveur de Roe où le flux numérique entre deux cellules s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_L) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_R)) + \left| \frac{\partial \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}}{\partial q} \right| \Delta_{LR} q \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{n}_{LR}$  représente le vecteur normal unitaire à l'interface et où  $\Delta_{LR} q = q_L - q_R$  est le saut entre les valeurs  $q_L$  et  $q_R$  des variables conservatives de part et d'autre de l'interface.

En effectuant une analyse asymptotique des équations discrètes, on identifie les équations limites du schéma de Roe et on montre que les solutions limites contiennent des fluctuations de pression d'ordre  $\mathcal{O}(M_*)$  où  $M_*$  est un nombre de Mach de référence. Ainsi, les solutions du solveur compressible de Roe ne peuvent pas correspondre à des approximations précises dans la limite des faibles nombres de Mach. En effet quand le nombre de Mach tend vers zéro, on peut montrer pour les équations continues que les fluctuations de pression sont proportionnelles au nombre de Mach *au carré*. Plusieurs travaux [73], [77], [72] montrent que le problème est directement lié à la forme du tenseur de viscosité artificielle quand le nombre de Mach tend vers zéro.

Ici, le même problème est étudié pour les schémas de type Godunov. En contraste avec les solveurs de Roe, le flux considéré ici est de la forme :

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_{LR}) \quad (2.2)$$

où  $q_{LR}$  est la solution d'un problème de Riemann exact ou approché, entre les états  $q_L$  et  $q_R$ .

La Figure 2.1 montre que ce type de schémas exhibe le même problème de manque de précision que le solveur de Roe. Cette Figure représente une série de simulations numériques sur le même maillage et pour le calcul d'écoulements autour d'une aile de NACA0012, où l'on fait décroître le nombre de Mach. Dans ces simulations, la vitesse et la densité à l'infini sont maintenues constantes et égales à l'unité, tandis que l'on augmente la pression à l'infini. Ainsi le nombre de Mach à l'infini décroît. La Figure trace les isovalues de la pression normalisée  $p - p_{\min}/p_{\max} - p_{\min}$ . Comme le nombre de Mach décroît, les résultats se dégradent et les solutions ne convergent pas vers une approximation raisonnable de la solution incompressible. Les Figures représentent de gauche à droite les résultats obtenus avec le schéma de Roe où le flux est de la forme (2.1), et ceux obtenus avec le schéma VFRoe (décrit dans la suite) et le schéma de Godunov où les flux sont de la forme (2.2). On voit clairement que les résultats obtenus avec ces trois différents schémas décentrés, sont quasiment identiques.

Expliquer les raisons de ce comportement dans le cas du schéma de Godunov est particulièrement intéressant. Pour ce schéma, l'expression du flux n'est pas explicitement connue. Ainsi, il n'est pas possible d'obtenir directement les ordres de grandeur des différents termes du tenseur de viscosité artificielle.

Il est donc nécessaire de passer par une étape intermédiaire d'analyse du problème de Riemann. D'un point de vue continu, on sait que pour des données initiales bien préparées, les équations limites du système compressible tendent vers les solutions du système incompressible. D'un point de vue discret, les travaux précédents montrent que l'on n'aboutit pas à la même conclusion pour un certain nombre de classes de schémas décentrés. En effet même pour des données initiales bien préparées où les fluctuations de pression sont d'ordre  $\mathcal{O}(M_*^2)$ , les équations discrètes limites pour ces schémas, aboutissent dans la limite des faibles nombres de Mach à des solutions où les fluctuations de pression sont d'ordre  $\mathcal{O}(M_*)$  et donc à des approximations imprécises des solutions incompressibles.

Un premier point de vue naïf, pourrait nous laisser penser que le solveur de Godunov donne des approximations précises des solutions incompressibles puisque dans ce cas précis, le flux calculé à l'interface est exact. La figure 2.1 (colonne de droite) montre que ce n'est malheureusement pas le cas.

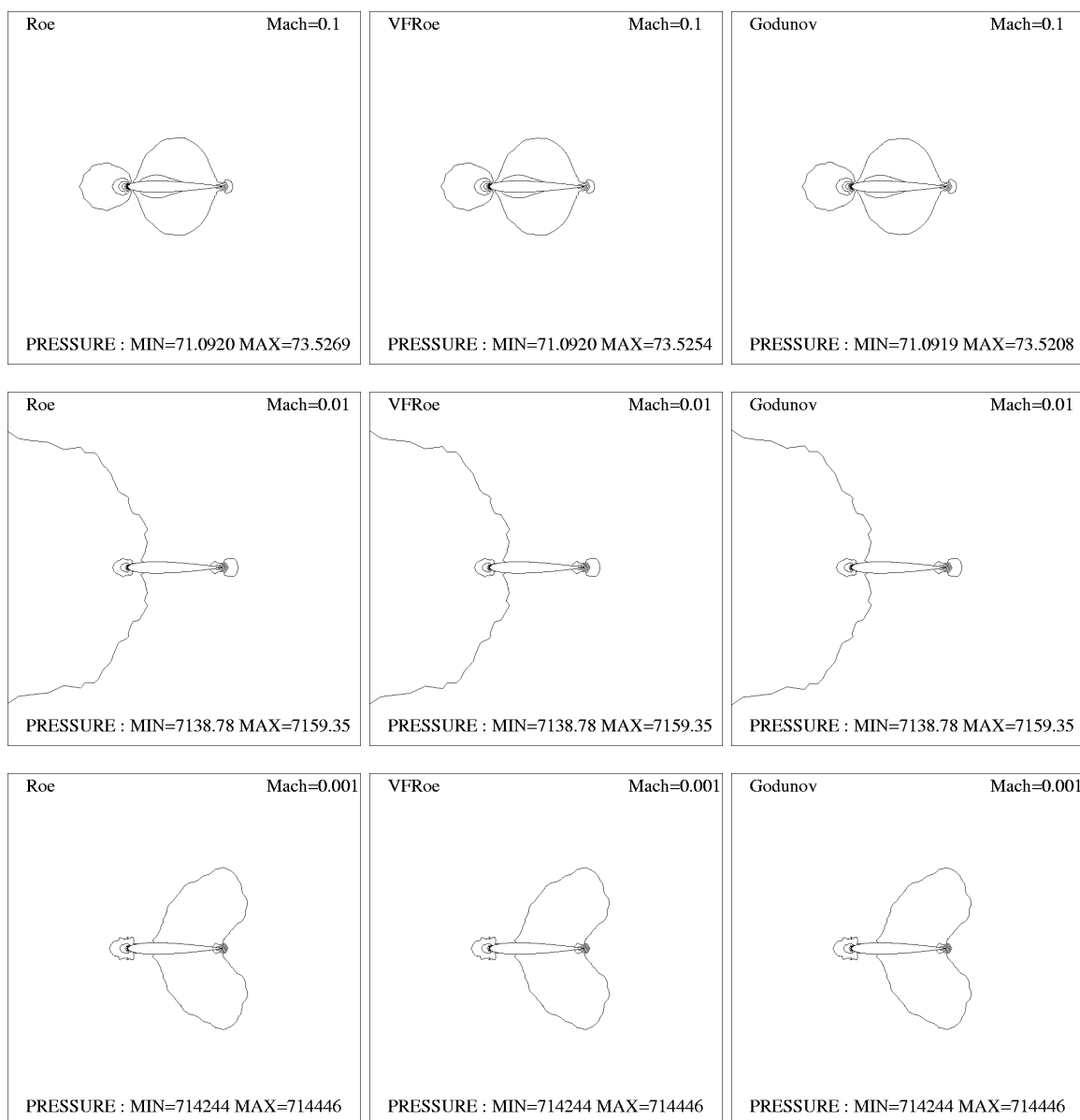


FIG. 2.1 – Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3114 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Schéma de Roe (gauche), schéma VFRoe (milieu) et schéma de Godunov (droite).

La raison pour laquelle le schéma de Godunov n'est pas capable de calculer précisément des écoulements proches de la limite incompressible est profondément liée au comportement des solutions des équations d'Euler dans la limite des faibles nombres de Mach. Le point fondamental à comprendre est que dans le cas général, quand le nombre de Mach tend vers zéro, il n'y a pas convergence forte des solutions des équations d'Euler compressibles vers les solutions du système incompressible. D'après les travaux de S. Schochet [61] (voir aussi [25]), ce comportement pour des données initiales quelconques, est assez bien compris pour les équations isentropiques et peut être résumé comme ci-dessous : les solutions limites sont formées d'une composante acoustique qui dépend d'une variable rapide  $t/M_*$  et d'une partie lente indépendante de cette dernière variable. De plus cette partie lente est solution des équations incompressibles. Si on note  $q(\mathbf{x}, t)$  les solutions du système compressible quand le nombre de Mach tend vers zéro, celles-ci peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$q(\mathbf{x}, t) = q_{slow}(\mathbf{x}, t) + q_{osc}(\mathbf{x}, t, t/M_*) + H.O.T \quad (2.3)$$

où  $q_{slow}(\mathbf{x}, t)$  représente la solution des équations incompressibles,  $q_{osc}(\mathbf{x}, t, t/M_*)$  une composante oscillante décrite par des équations de type acoustique et  $H.O.T$  des termes d'ordre supérieur.

Pour des données initiales particulières (mais non pour le cas général), la composante acoustique n'est pas présente aux ordres dominants et il y a dans ce cas précis, convergence forte des solutions des équations d'Euler compressibles vers celles des équations incompressibles. (voir [39] et [37]). Dans la littérature mathématique, ces conditions initiales particulières sont appelées "données initiales bien préparées".

Pour le cas non isentropique, la situation est beaucoup moins claire. Si on considère des "données initiales bien préparées", les travaux de [60], montrent qu'il y a encore convergence forte des solutions des équations compressibles vers les solutions incompressibles. Le même résultat peut être également établi pour des données initiales quelconques dans le cas où l'on considère un domaine spatial non borné [46]. Cependant dans le cas périodique, un certain nombre de questions reste encore sans réponses (voir [47] pour des résultats plus récents sur ce problème).

Ce comportement très complexe des équations explique pourquoi le schéma de Godunov ne donne pas un calcul précis des écoulements qui tendent vers la limite incompressible. Comme nous le verrons au paragraphe 2.3, les solutions calculées aux interfaces par le solveur de Riemann, contiennent des composantes acoustiques qui véhiculent des sauts de pression d'ordre 1 par rapport au nombre de Mach. Ceci est totalement en accord avec les résultats théoriques que nous avons rappelés ci-dessus. En effet puisque les conditions initiales du problème de Riemann sont discontinues (et par conséquent ne sont pas des données initiales bien préparées), on ne peut pas s'attendre à ce que les solutions du problème de Riemann ne contiennent pas de composantes acoustiques. Une conséquence directe de ce fait est que le champ résultant des équations discrètes représente un équilibre d'ondes acoustiques au lieu de représenter un champ vérifiant les équations incompressibles.

Décrivons à présent le plan suivi dans ce chapitre. Au paragraphe 2.2, on rappelle un certain nombre de résultats sur le comportement des solutions des équations d'Euler dans la limite des faibles nombres de Mach. Le but de ce paragraphe est de montrer que les solutions des équations du modèle incompressible sont seulement les limites au sens faible, des solutions des équations d'Euler compressibles. Pour cela nous introduisons un modèle linéaire simplifié qui présente le même comportement que les équations d'Euler et nous expliquons comment les résultats obtenus peuvent être étendus aux équations d'Euler non linéaires.

Au paragraphe 2.3, nous étudions les solutions du problème de Riemann dans la limite des faibles nombres de Mach. On montre que même pour des conditions initiales bien préparées, proches d'un champ incompressible avec uniquement des fluctuations de pression de l'ordre du nombre de Mach au carré, les solutions du problème de Riemann exhibent des fluctuations acoustiques de pression de l'ordre du nombre de Mach. Ce phénomène est une conséquence directe du comportement des solutions des équations compressibles. Il est simplement dû au fait que la projection des données initiales sur des fonctions constantes par morceaux, crée des discontinuités artificielles qui génèrent des ondes de pression d'ordre  $\mathcal{O}(M_*)$ .

Pour le schéma de Roe, on sait que l'utilisation des techniques de préconditionnement représente un moyen efficace pour remédier au manque de précision du schéma [29], [77], [72], [10]. Et on aboutit aux mêmes conclusions pour d'autres classes de schémas décentrés comme les schémas de type HLLC [16] ou ceux de type VFFC [79].

Dans tous ces travaux, le préconditionnement est appliqué seulement à la partie décentrée du schéma c'est-à-dire sur le tenseur de viscosité artificielle. Une telle stratégie n'est pas directement possible pour les schémas de type Godunov où le flux s'exprime sous la forme (2.2). Ainsi au paragraphe 2.4, on applique directement l'idée du préconditionnement sur le solveur de Riemann et on résout un problème de Riemann préconditionné au lieu du problème de Riemann original. Cette stratégie est appliquée aux solveurs de type VFRoe [44] où le problème de Riemann est linéarisé. Pour le solveur de Riemann exact, le préconditionnement n'est pas directement applicable et on propose au paragraphe 2.6 une technique alternative. Les tests numériques sont très convaincants et montrent que pour les schémas de type Godunov, le préconditionnement représente aussi un moyen très efficace de retrouver une bonne précision pour le calcul d'écoulements à faible nombre de Mach.

## 2.2 Le problème continu

Pour faciliter la compréhension du comportement des schémas décentrés dans la limite des faibles nombres de Mach, on rappelle un certain nombre de résultats pour les équations continues. On commence avec le cas isentropique pour lequel la théorie mathématique est assez complète et on se restreint au cas périodique. (On notera que si on considère l'espace infini, même pour des données initiales générales, on peut montrer des résultats plus forts grâce à la disparition à l'infini de l'énergie des composantes acoustiques. Comme il est prouvé dans [74], les solutions limites des équations compressibles satisfont le système des équations incompressibles bien que la convergence uniforme soit rompue près de  $t = 0$ .)

Les équations d'Euler isentropiques s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dans ces équations,  $\mathbf{u} = (u, v)$  est un champ vectoriel et  $\rho$  un champ scalaire, définis sur  $\mathbb{R} \times T^2$  où  $T^2$  est un domaine périodique bidimensionnel. La pression  $p$  est reliée à la densité  $\rho$  par la loi d'état isentropique  $p = A \rho^\gamma$  où  $A$  est une constante et  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques. Pour l'analyse de ce système, il est pratique de mettre celui-ci sous forme symétrique, en définissant la nouvelle variable :

$$\tilde{r} = \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{p'(\rho)} = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \sqrt{p'(\rho)} \tag{2.5}$$

En termes de variables  $(r, \mathbf{u})$ , le système (2.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla r + \tilde{\gamma} r \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tilde{\gamma} r \nabla r &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Définissons alors  $\rho_{ref}$  une valeur de référence pour le champ de densité et  $a_{ref} = \sqrt{\gamma A \rho_{ref}^{\gamma-1}}$  la vitesse du son de référence. De plus, on notera  $u_{ref}$  une valeur de référence pour la vitesse des particules. Le nombre de Mach de référence est défini comme le rapport  $M_* = u_{ref}/a_{ref}$  et on s'intéresse au comportement des solutions du système (2.6) quand ce paramètre tend vers zéro. Pour analyser ce comportement, on peut déjà observer qu'à une constante près, la variable  $r$  correspond à la vitesse du son  $\sqrt{p'(\rho)}$ . Ainsi dans le système (2.6), on remplace le système de variables original par les nouvelles variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned} r &= a_{ref}(r_0 + M_* r_1) \\ \mathbf{u} &= a_{ref}(0 + M_* \mathbf{u}_1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où  $r_0$  est une constante. Ensuite, on désigne par  $x_{ref}$  une longueur de référence, et on définit une échelle de temps caractéristique  $t_{ref}$  égale au temps nécessaire aux particules pour parcourir la longueur  $x_{ref}$ . On a donc  $t_{ref} = x_{ref}/u_{ref} = x_{ref}/(a_{ref}M_*)$  et on définit alors les deux variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned} t &= t_{ref}\tau \\ x &= x_{ref}\xi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Avec ce choix de variables, le système (2.6) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \tau} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla r_1 + \tilde{\gamma} r_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \frac{\tilde{\gamma} r_0}{M_*} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \tau} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma} r_1 \nabla r_1 + \frac{\tilde{\gamma} r_0}{M_*} \nabla r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'après (2.9), on peut s'attendre à ce que pour des échelles de temps très petites de l'ordre de  $\tau = \mathcal{O}(M_*)$  (c'est-à-dire de l'ordre de  $t = x_{ref}/a_{ref}$ ), le comportement des solutions de (2.9) soit totalement dominé par la partie acoustique  $\tilde{\gamma} r_0 (\operatorname{div} \mathbf{u}_1, \nabla r_1)^t$  et que ces solutions de (2.9) soient proches des solutions du système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} + \tilde{\gamma} r_0 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \theta} + \tilde{\gamma} r_0 \nabla r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec  $\theta = \tau/M_*$  (c'est-à-dire  $\theta = a_{ref}t/x_{ref}$ ).

Cependant, comme le noyau de l'opérateur linéaire acoustique est non nul d'après (2.9), on peut également s'attendre à ce que les composantes des solutions de (2.9) contenues dans le noyau (c'est-à-dire la partie incompressible de la solution caractérisée par  $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0$  et  $\nabla r_1 = 0$ ) ne soient pas affectées par l'opérateur acoustique et soient présentes dans la solution pour de grandes échelles de temps. Ces composantes obéissent aux équations d'Euler incompressibles :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \tau} + P((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1) = 0 \quad (2.11)$$

où  $P$  est la projection sur des champ de vecteurs à divergence nulle. Ainsi de manière générale, d'après la structure du système (2.9), on s'attend à ce que dans la limite des faibles nombres de Mach, les solutions soient caractérisées par une partie incompressible lente (où les échelles de temps sont de l'ordre de  $x_{ref}/u_{ref}$ ) et une partie rapide acoustique (où les échelles de temps sont de l'ordre de  $x_{ref}/a_{ref}$ ).

Comme première étape dans l'analyse de ce comportement complexe, on considère un problème modèle plus simple et obtenu par linéarisation du système (2.9) autour de l'état  $(r_1, \mathbf{u}_1) = (0, \mathbf{a})$  où  $\mathbf{a}$  est un vecteur constant. Par la suite, on posera  $\tilde{\gamma} r_0 = 1$  pour simplifier les calculs et le système linéaire modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \tau} + \mathbf{a} \cdot \nabla r_1 + \frac{1}{M_*} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \tau} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \frac{1}{M_*} \nabla r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

On réécrit alors ce système linéaire sous la forme :

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + Hq + \frac{1}{M_*} Lq = 0 \quad (2.13)$$

où  $Hq = \mathbf{a} \cdot \nabla q$  est un opérateur linéaire d'advection à vitesse constante. En écrivant le système (2.13) dans l'espace de Fourier, les composantes  $\hat{q}(\mathbf{k})$  du vecteur  $q$ , vérifient :

$$\frac{\partial \hat{q}(\mathbf{k})}{\partial \tau} + i \left[ \hat{H}(\mathbf{k}) + \frac{1}{M_*} \hat{L}(\mathbf{k}) \right] \hat{q}(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{k} \in Z^2 \quad (2.14)$$

où la matrice  $\hat{H}(\mathbf{k}) + \frac{1}{M_*} \hat{L}(\mathbf{k})$  est égale à :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} & k_1/M_* & k_2/M_* \\ k_1/M_* & \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} & 0 \\ k_2/M_* & 0 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

avec  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  le produit scalaire euclidien des deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Cette matrice est diagonalisable et ses vecteurs propres sont donnés par :

$$s_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -k_1/|\mathbf{k}| \\ -k_2/|\mathbf{k}| \end{pmatrix}, \quad s_2(\mathbf{k}) = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}, \quad s_3(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ k_1/|\mathbf{k}| \\ k_2/|\mathbf{k}| \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

tandis que les valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} - \frac{|\mathbf{k}|}{M_*}, \quad \lambda_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}, \quad \lambda_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} + \frac{|\mathbf{k}|}{M_*} \quad (2.17)$$

Ainsi la solution de (2.14) est donnée par :

$$\hat{q}(\mathbf{k}, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0) - \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) - \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) e^{-i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} - |\mathbf{k}|/M_*)\tau} s_1(\mathbf{k}) \\ + \frac{1}{|\mathbf{k}|} (-k_2 \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) + k_1 \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \tau} s_2(\mathbf{k}) \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0) + \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) + \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) e^{-i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} + |\mathbf{k}|/M_*)\tau} s_3(\mathbf{k}) \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0)$ ,  $\hat{u}_1(\mathbf{k}, 0)$ ,  $\hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)$  sont les composantes de Fourier correspondant aux données initiales. D'après (2.18), on voit que la solution se divise en une partie oscillante rapide qui dépend de la variable rapide  $\theta = \tau/M_*$  :

$$\hat{q}_{osc}(\mathbf{k}, \tau, \tau/M_*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} (\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0) - \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) - \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) e^{-i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} - |\mathbf{k}|/M_*)\tau} s_1(\mathbf{k}) \\ + \\ (\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0) + \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) + \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) e^{-i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} + |\mathbf{k}|/M_*)\tau} s_3(\mathbf{k}) \end{cases} \quad (2.19)$$

et une partie lente indépendante de cette variable rapide :

$$\hat{q}_{slow}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{|\mathbf{k}|} (-k_2 \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) + k_1 \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \tau} s_2(\mathbf{k}) \quad (2.20)$$

Dans l'espace de Fourier, le noyau de l'opérateur acoustique linéaire  $\hat{L}(\mathbf{k})$  est l'espace vectoriel engendré par le vecteur  $s_2(\mathbf{k}) = (0, -k_2, k_1)^t$ . Cet espace correspond à l'espace physique défini par :

$$\ker L = \{(r_1, \mathbf{u}_1); r_1 = \text{constante}, \text{div} \mathbf{u}_1 = 0\} \quad (2.21)$$

La partie lente  $q_{slow} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{q}_{slow}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  est alors la projection de la solution dans cet espace et représente la composante *incompressible* de la solution. Elle est solution du "système incompressible" :

$$\frac{\partial q_{slow}}{\partial \tau} + H q_{slow} = 0 \quad (2.22)$$

muni de la condition initiale  $q_{slow}(\tau = 0) = P q(\tau = 0)$  où  $P$  est la projection sur  $\ker L$ .

D'après l'expression (2.19), il est à noter que  $q_{osc}$  tend vers 0 au sens des distributions, quand  $M_* \rightarrow 0$ . Cependant cette convergence correspond seulement à une convergence au sens faible.



Ainsi excepté pour une classe spéciale de conditions initiales, la solution contient toujours une composante oscillante très rapide qui ne disparaît pas quand  $M_* \rightarrow 0$ . En général, même pour de très faibles nombres de Mach  $M_*$ , il faut écrire :

$$q(\mathbf{x}, t) = q_{slow}(\mathbf{x}, t) + q_{osc}(\mathbf{x}, t/M_*) \quad (2.23)$$

On décrit à présent une classe particulière de conditions initiales pour lesquelles il y a convergence forte des solutions du système compressible vers les solutions du système incompressible. Une condition nécessaire pour que  $q(\mathbf{x}, t)$  converge au sens fort vers la limite incompressible  $q_{slow}(\mathbf{x}, t)$  est que la composante  $q_{osc}(\mathbf{x}, t, t/M_*)$  converge au sens fort vers 0. Ceci n'est pas possible *excepté* dans le cas où les conditions initiales sont proches du noyau de  $L$ . C'est ce cas précis que nous avons appelé le cas de "données initiales bien préparées". Pour les équations d'Euler isentropiques, cette situation a été examinée dans [37] et [39] tandis que pour les équations non isentropiques, on peut se référer aux travaux de [60].

Pour notre problème linéaire modèle (2.12), le cas de "données initiales bien préparées" peut être décrit comme suivant. Il est clair d'après (2.18), que si

$$\begin{cases} (\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0) - \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) - \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) = \mathcal{O}(M_*) \\ (\hat{r}_1(\mathbf{k}, 0) + \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} \hat{u}_1(\mathbf{k}, 0) + \frac{k_2}{|\mathbf{k}|} \hat{v}_1(\mathbf{k}, 0)) = \mathcal{O}(M_*) \end{cases} \quad (2.24)$$

alors la composante oscillante de la solution  $q_{osc}$  converge vers 0 au sens fort. On a donc convergence forte de la solution vers la limite incompressible  $q_{slow}$  quand  $M_* \rightarrow 0$ .

Dans l'espace physique, les deux conditions initiales (2.24) impliquent que les données initiales soient de la forme suivante :

$$\begin{cases} r_1(\mathbf{x}, 0) = M_* r_2(\mathbf{x}, 0) \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}'_1(\mathbf{x}, 0) + M_* \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0) \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $r_2(\mathbf{x}, 0)$  est un scalaire d'ordre  $\mathcal{O}(1)$ ,  $\mathbf{u}'_1(\mathbf{x}, 0)$  et  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0)$  sont deux champs de vecteurs d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  et le champ  $\mathbf{u}'_1(\mathbf{x}, 0)$  est tel que  $\text{div} \mathbf{u}'_1 = 0$ .

Revenons à présent aux équations d'Euler isentropiques (2.4). Bien que l'analyse et les techniques requises pour prouver les résultats précédents soient beaucoup plus complexes que dans le cas du système linéaire, les résultats sont essentiellement les mêmes. Les travaux de [61], [25] montrent que dans la limite des faibles nombres de Mach, la solution peut s'écrire sous la forme :

$$q(\mathbf{x}, \tau) = q_{slow}(\mathbf{x}, \tau) + q_{osc}(\mathbf{x}, \tau, \tau/M_*) + \mathcal{O}(M_*) \quad (2.26)$$

et peut être décomposée en une partie acoustique  $q_{osc}(\mathbf{x}, \tau, \tau/M_*)$  qui dépend d'une variable rapide  $\tau/M_*$  et en une partie lente  $q_{slow}(\mathbf{x}, \tau)$ . De plus, la partie lente est solution des équations incompressibles :

$$\text{div}(\mathbf{u}_1) = 0 \quad (2.27.1)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{u}_1 + \text{div}(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) \right) + \nabla \pi = 0 \quad (2.27.2)$$

En général  $q_{slow}(\mathbf{x}, \tau)$  correspond seulement à la limite des solutions au sens faible, excepté pour des "données initiales bien préparées" proches du noyau de  $L$ . Comme pour le problème linéaire modèle, cette classe particulière de conditions initiales est caractérisée par :

$$\begin{cases} r_1(\mathbf{x}, 0) = M_* r_2(\mathbf{x}, 0) \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}'_1(\mathbf{x}, 0) + M_* \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0) \quad \text{avec} \quad \text{div} \mathbf{u}'_1 = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Et si on revient aux variables originales  $(p, \mathbf{u})$ , cela implique que les conditions initiales soient de la forme :

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}, 0) = \rho_{ref} a_{ref}^2 (\text{Constante} + M_*^2 p_2(\mathbf{x}, 0)) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = a_{ref} (0 + M_* \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0) + M_*^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0)) \quad \text{avec} \quad \text{div} \mathbf{u}_1 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $p_2(\mathbf{x}, 0)$ ,  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, 0)$  sont des fonctions régulières de classe  $C^1$ .

## 2.3 Etude du problème de Riemann dans la limite des faibles nombres de Mach

Nous nous intéressons à présent au calcul d'écoulements proches de la limite incompressible. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, si les conditions initiales sont bien préparées et de la forme (2.29) avec des fluctuations de pression de l'ordre du nombre de Mach au carré, alors il y a convergence forte des solutions des équations compressibles vers celles des équations incompressibles. Cependant, même si les données initiales vérifient cette hypothèse, la projection de ces données sur des fonctions constantes par morceaux, génère des discontinuités artificielles aux interfaces entre deux cellules de contrôle. Ces discontinuités correspondent précisément aux données initiales du problème de Riemann et en conséquence une contribution acoustique avec des fluctuations de pression de l'ordre du nombre de Mach sera présente dans la solution du problème de Riemann. On considère le problème de Riemann associé aux équations d'Euler et défini par :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F(q)}{\partial x} = 0$$

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_L & \text{si } x < 0 \\ q_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(q) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Afin de comprendre plus facilement la description du problème de Riemann dans la limite des faibles nombres de Mach, on rappelle ci-dessous comment résoudre le problème dans le cas général. Pour plus de détails sur cette résolution, on pourra par exemple se référer à [66], [26]. La solution est composée de 4 différents états constants  $q_L, q_L^*, q_R^*, q_R$  connectés par trois ondes qui peuvent être de gauche à droite, une 1-détente ou un 1-choc, une discontinuité de contact et une 3-détente ou un 3-choc. Les quatre configurations possibles sont représentées en Figure 2.2.

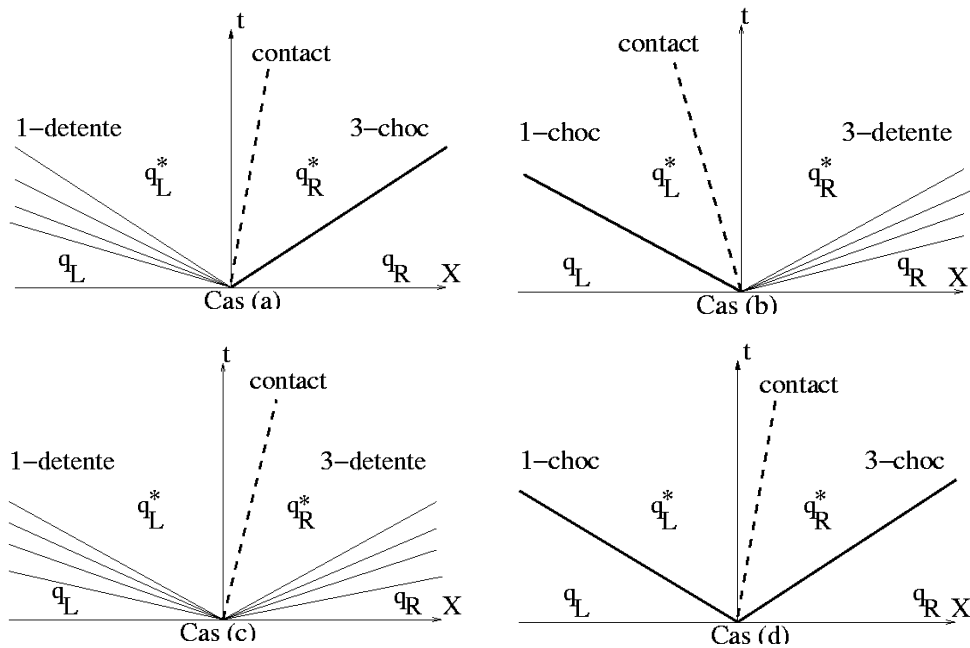


FIG. 2.2 – Les quatre cas possibles dans la construction de la solution du problème de Riemann : (a) 1-détente, contact, 3-choc, (b) 1-choc, contact, 3-détente, (c) 1-détente, contact, 3-détente, (d) 1-choc, contact, 3-choc.

A travers une 1-détente, l'entropie, la vitesse tangentielle et la quantité  $u + 2a/(\gamma - 1)$  où  $a$  est la vitesse du son  $\sqrt{\gamma p/\rho}$ , sont constantes. Ainsi, les états  $\rho, u, v, p$  qui peuvent être connectés à l'état  $\rho_L, u_L, v_L, p_L$  à travers une 1-détente doivent satisfaire :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_L}{\rho_L^\gamma} \quad ; \quad u + \frac{2a}{\gamma - 1} = u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} \quad (2.32)$$

et

$$v = v_L \quad (2.33)$$

En combinant les deux équations (2.32), on obtient la courbe d'une 1-détente qui définit dans le plan  $(u, p)$  les états pouvant être connectés à  $q_L$  :

$$u = u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_L}\right)^\alpha\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = (\gamma - 1)/2\gamma \quad \text{et} \quad p < p_L \quad (2.34)$$

De façon similaire, en écrivant que les invariants de Riemann sont constants à travers une 3-détente, on obtient la courbe d'une 3-détente qui définit tous les états possibles pouvant être connectés à  $q_R$  par une 3-détente :

$$u = u_R - \frac{2a_R}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_R}\right)^\alpha\right) \quad \text{avec} \quad p < p_R \quad (2.35)$$

La prise en compte des courbes (2.34)-(2.35) permet de calculer la solution du problème pour le cas (c) de la Figure 2.2. Pour les trois autres cas, il faut tenir compte de la présence d'ondes de choc. En écrivant les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} \Delta \rho u = \sigma \Delta \rho \\ \Delta \rho u^2 + p = \sigma \Delta \rho u \\ \Delta \rho u v = \sigma \Delta \rho v \\ \Delta (\rho e + p) u = \sigma \Delta \rho e \end{cases} \quad (2.36)$$

à travers les chocs, on obtient les courbes de 1-choc et 3-choc :

$$u = u_L - \frac{p - p_L}{\sqrt{p + \mu^2 p_L}} \sqrt{(1 - \mu^2)/\rho_L} \quad \text{avec} \quad p > p_L \quad (2.37)$$

$$u = u_R + \frac{p - p_R}{\sqrt{p + \mu^2 p_R}} \sqrt{(1 - \mu^2)/\rho_R} \quad \text{avec} \quad p > p_R \quad (2.38)$$

où  $\mu^2 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ . La solution est alors déterminée en cherchant le point d'intersection  $(u^*, p^*)$  des courbes de détente et de chocs dans les états  $q_L^*$  et  $q_R^*$ . D'un point de vue algébrique, cela revient à chercher le point d'intersection d'une courbe de 1-détente-1-choc partant de  $(u_L, p_L)$  avec une courbe de 3-détente-3-choc passant par  $(u_R, p_R)$ . Excepté le cas particulier du vide, ces courbes admettent un point d'intersection unique qui permet ensuite de déterminer complètement la solution du problème.

On s'intéresse maintenant à cette solution dans la limite des faibles nombres de Mach. De manière plus précise et en accord avec les résultats du paragraphe 2.2, on considère des conditions initiales  $(q_L, q_R)$  proches d'un champ incompressible à densité constante, comme décrites ci-dessous :

$$\begin{aligned} \rho_L &= \rho_{ref}(\rho_0 + M_*^2 \rho_{L,2} + \dots) \\ u_L &= a_{ref}(0 + M_* u_{L,1} + \dots) \\ v_L &= a_{ref}(0 + M_* v_{L,1} + \dots) \\ p_L &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (p_0 + M_*^2 p_{L,2} + \dots) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \rho_R &= \rho_{ref}(\rho_0 + M_*^2 \rho_{R,2} + \dots) \\ u_R &= a_{ref}(0 + M_* u_{R,1} + \dots) \\ v_R &= a_{ref}(0 + M_* v_{R,1} + \dots) \\ p_R &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (p_0 + M_*^2 p_{R,2} + \dots) \end{aligned} \quad (2.40)$$

où  $\rho_{ref}, a_{ref}$  et  $M_* = u_{ref}/a_{ref}$  sont des valeurs de référence pour la densité, la vitesse du son et le nombre de Mach. Ces conditions initiales correspondent à la projection sur des fonctions constantes par morceaux, des données "bien-préparées" (2.29) considérées au paragraphe 2.2. On remarquera notamment que le champ de pression ne contient pas de fluctuations de l'ordre du nombre de Mach  $M_*$ .

Pour déterminer la solution du problème de Riemann dans la limite  $M_* \rightarrow 0$ , on écrit celle-ci sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{ref}(\rho_0 + M_*\rho_1 + M_*^2\rho_2 + \dots) \\ u &= a_{ref}(0 + M_*u_1 + \dots) \\ v &= a_{ref}(0 + M_*v_1 + \dots) \\ p &= \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*p_1 + M_*^2p_2 + \dots) \end{aligned} \quad (2.41)$$

En introduisant ces expressions dans les courbes de détente et de choc (2.34)-(2.35)-(2.37)-(2.38), on obtient après calculs que ces courbes dans la limite  $M_* \rightarrow 0$ , dégèrent en droites de pentes  $\pm 1/\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$  :

$$\begin{aligned} \text{1-Détente} \quad u_1 &= u_{L,1} - \frac{1}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} p_1 \quad \text{pour } p_1 < 0 \\ \text{1-Choc} \quad u_1 &= u_{L,1} - \frac{1}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} p_1 \quad \text{pour } p_1 > 0 \\ \text{3-Détente} \quad u_1 &= u_{R,1} + \frac{1}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} p_1 \quad \text{pour } p_1 < 0 \\ \text{3-Choc} \quad u_1 &= u_{R,1} + \frac{1}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} p_1 \quad \text{pour } p_1 > 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comme le montre la Figure 2.3, des quatre cas présentés en Figure 2.2, seuls deux cas restent possibles. Il s'agit des cas ; 1-détente-3-détente (pour  $u_{R,1} - u_{L,1} > 0$ ) et 1-choc-3-choc (pour  $u_{R,1} - u_{L,1} < 0$ ).

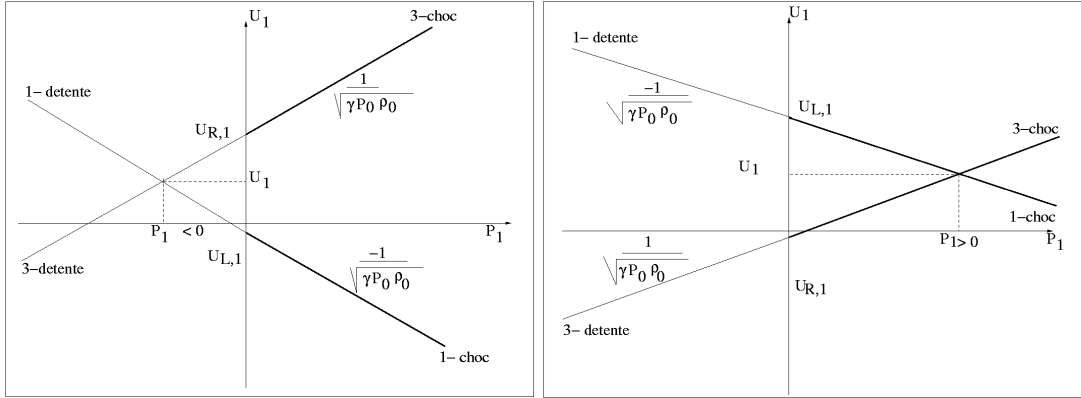


FIG. 2.3 – Intersection des courbes de détente pour  $u_{R,1} - u_{L,1} > 0$  (gauche) et des courbes de choc pour  $u_{R,1} - u_{L,1} < 0$  (droite).

Pour ces deux cas, le calcul du point d'intersection des courbes (2.42) donne :

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_{L,1} + u_{R,1})/2 \\ p_1 &= -\sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \Delta u_1 / 2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec  $\Delta u_1 = \Delta_{RL} u_1 = u_{R,1} - u_{L,1}$ . Ainsi on voit que même avec des conditions initiales de la forme (2.39)-(2.40) où  $p_{L,1} = p_{R,1} = 0$ , la pression calculée à l'interface contient une fluctuation de l'ordre du nombre de Mach  $M_*$  :

$$p = \rho_{ref} a_{ref}^2 \left( p_0 - \frac{M_*}{2} \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \Delta u_1 + \dots \right) \quad (2.44)$$

En fait, cette fluctuation de pression est purement d'origine acoustique. Les courbes de choc (2.42) sont les relations de Rankine-Hugoniot pour un système acoustique et (2.43) est en fait la solution du problème *acoustique linéaire* défini par l'équation (2.10) ou bien en termes de variables  $u_1, p_1$  par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho_0 \\ \gamma p_0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.45)$$

Ainsi, le flux calculé à l'interface n'est pas une approximation du "flux incompressible" mais il est aux ordres dominants le flux issu d'un problème *acoustique* généré par les discontinuités artificielles aux interfaces entre deux cellules.

Afin d'illustrer cette analyse, on compare en Figure 2.4, la solution du problème de Riemann (2.30) et l'expression asymptotique (2.43) pour des données initiales de la forme (2.39)-(2.40) définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_L = 1. \\ u_L = 1. \\ v_L = 1. \\ p_L = 10001. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_R = 1. \\ u_R = 1.75 \quad \text{ou} \quad 0.25 \\ v_R = 1.45 \\ p_R = 10001.85 \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Le nombre de Mach de référence pour ce cas est de l'ordre de  $10^{-2}$ . En Figure 2.4, la colonne gauche montre le cas de deux détentés (quand  $u_R > u_L$ ) tandis que celle de droite illustre le cas de deux chocs (quand  $u_R < u_L$ ). Dans les deux cas, on observe que le saut de pression entre les états gauche et droit initiaux est très faible (de l'ordre de 0.01%), mais que le saut de vitesse entraîne une variation beaucoup plus grande de la pression à l'interface.

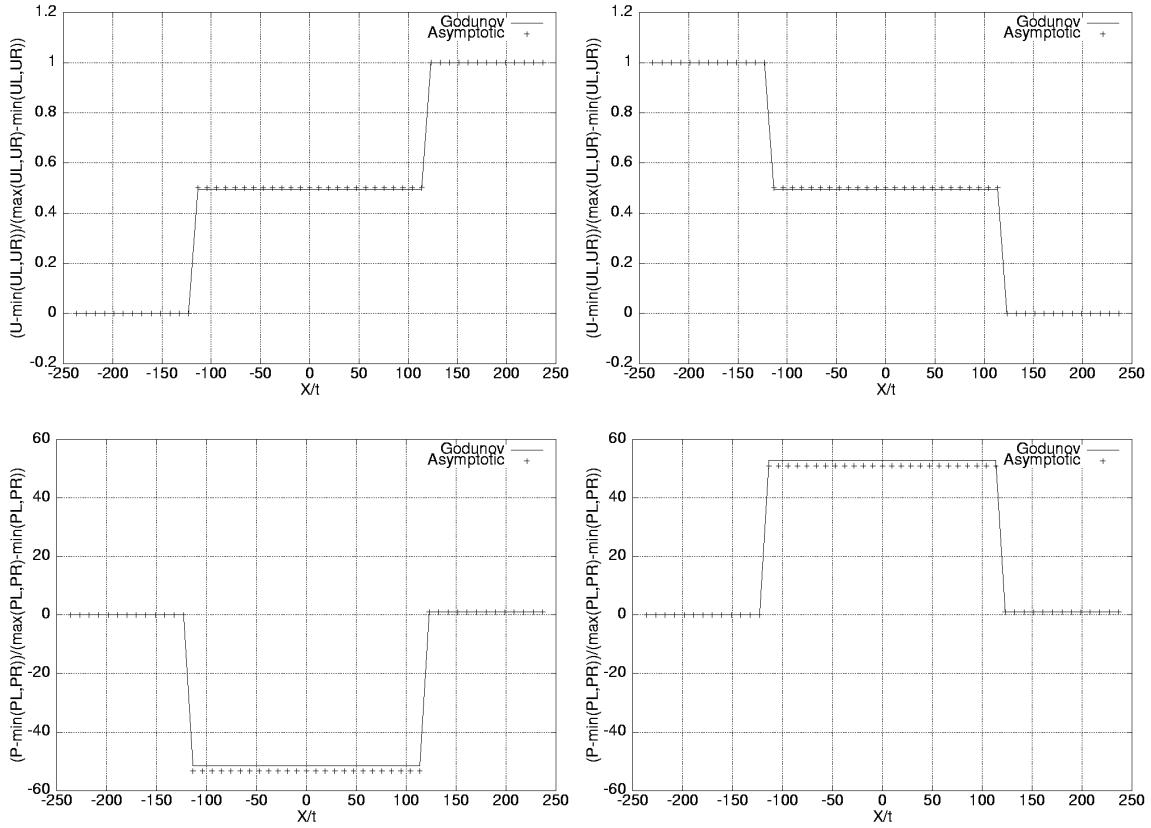


FIG. 2.4 – Comparaison entre le solveur exact de Godunov et l'analyse asymptotique pour  $u_R - u_L > 0$  (gauche) et pour  $u_R - u_L < 0$  (droite).

Par analyse du problème de Riemann dans la limite  $M_* \rightarrow 0$ , on peut ainsi conclure que même si les données initiales sont proches d'un champ incompressible à densité constante, le champ calculé par un solveur exact de Godunov, contient après un pas de temps, des ondes de pression d'origine acoustique de l'ordre de  $M_*$ . Ces fluctuations sont beaucoup plus grandes que celles présentes dans les composantes incompressibles. Ces composantes acoustiques restent présentes à travers tous les pas de temps suivants et l'état d'équilibre discret (s'il existe) peut être décrit comme un équilibre d'ondes acoustiques au lieu de représenter une approximation d'un champ incompressible. En annexe A, figurent les équations limites discrètes du schéma de Godunov dans la limite des faibles nombres de Mach. On remarquera par ailleurs la similarité de ces équations avec celles obtenues dans [29] par analyse asymptotique du schéma de Roe.

## 2.4 L'effet du préconditionnement

Dans le cas du schéma de Roe, il est prouvé dans [29] que pour le calcul d'écoulements vraiment subsoniques, une nette amélioration de la précision peut être obtenue en modifiant le flux numérique (2.1) de la façon suivante :

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_L) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_R) + P^{-1} |P \frac{\partial \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}}{\partial q} |_{\Delta_{LR} q}) \quad (2.47)$$

où  $P$  est une matrice de préconditionnement. Dans ce paragraphe, on propose une stratégie similaire pour remédier au problème de précision des schémas de type Godunov. Plus précisément, on appliquera cette technique de préconditionnement à la classe des schémas de type VFRoe, que nous décrivons maintenant. Les schémas de type VFRoe [44] utilisent un flux de la forme :

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_{LR}) \quad (2.48)$$

où  $q_{LR}$  est un état calculé par résolution d'un problème de Riemann entre les états  $q_L, q_R$ . Si ce problème de Riemann est défini à partir des équations d'Euler non linéaires, le schéma défini par (2.48) correspond simplement au schéma de Godunov. Cependant d'un point de vue calculatoire, il peut être intéressant de définir ce problème de Riemann à partir des équations linéarisées entre les deux états  $(q_L, q_R)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \langle A \rangle \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} &= 0 \\ \tilde{q}(x, 0) &= \begin{cases} \tilde{q}_L & \text{si } x < 0 \\ \tilde{q}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.49)$$

où  $\langle A \rangle$  est une matrice constante et où le vecteur  $\tilde{q}$  peut être le vecteur  $q$  des variables conservatives ou tout autre système de variables indépendantes. Ici, par exemple, nous utilisons le vecteur des variables "entropiques"  $\tilde{q} = (p, u, v, s)^t$  et la matrice  $\langle A \rangle$  est définie par :

$$\langle A \rangle = \begin{pmatrix} \langle u \rangle & \gamma \langle p \rangle & 0 & 0 \\ 1/\langle \rho \rangle & \langle u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle u \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle u \rangle \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

où  $\langle . \rangle = ((.)_L + (.)_R)/2$  représente la moyenne arithmétique entre les états  $(\tilde{.})_L$  et  $(\tilde{.})_R$ . Ainsi dans l'expression du flux (2.48),  $q_{LR}$  est le vecteur des variables conservatives correspondant à la solution  $\tilde{q}_{LR}$  en variables entropiques du problème de Riemann linéarisé (2.49). Une analyse asymptotique de cette classe de schémas décentrés, similaire à celle présentée au paragraphe 2.3, aboutit aux mêmes conclusions que dans le cas du schéma de Godunov. Elle montre que la pression sur l'interface est donnée par l'expression (2.44) et donc que le champ de pression contient des fluctuations de l'ordre du nombre de Mach.

En s'inspirant des techniques de préconditionnement utilisées pour le schéma de Roe (2.47), on propose de modifier le flux calculé à l'interface  $\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_{LR})$  en calculant  $q_{LR}$  comme la solution d'un problème de Riemann *préconditionné*. Plus spécifiquement, dans l'expression (2.48), on prend  $q_{LR}$  comme la solution du problème préconditionné suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + P \langle A \rangle \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} &= 0 \\ \tilde{q}(x, 0) &= \begin{cases} \tilde{q}_L & \text{si } x < 0 \\ \tilde{q}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

où  $P$  est la matrice de préconditionnement proposée dans [70] avec  $\beta$  un paramètre de l'ordre du nombre de Mach :  $\beta = M_* \beta_1$  et  $\beta_1 = \mathcal{O}(1)$ .

$$P = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

On propose à présent de montrer que la pression d'interface solution du problème de Riemann *préconditionné* (2.51) ne contient plus de fluctuations de l'ordre de  $M_*$  si le champ initial de pression contient seulement des fluctuations de l'ordre de  $M_*^2$ . Les états gauche et droit du problème sont définis par :

$$\begin{aligned} \rho_L &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_*\rho_{L,1} + M_*^2\rho_{L,2} + \dots) \\ u_L &= a_{ref}(0 + M_*u_{L,1} + \dots) \\ v_L &= a_{ref}(0 + M_*v_{L,1} + \dots) \\ p_L &= \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*^2p_{L,2} + \dots) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \rho_R &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_*\rho_{R,1} + M_*^2\rho_{R,2} + \dots) \\ u_R &= a_{ref}(0 + M_*u_{R,1} + \dots) \\ v_R &= a_{ref}(0 + M_*v_{R,1} + \dots) \\ p_R &= \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*^2p_{R,2} + \dots) \end{aligned} \quad (2.54)$$

On remarquera que dans (2.53)-(2.54), nous autorisons la présence de discontinuités de densités d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  mais que le saut de pression entre les états gauche et droit est bien de l'ordre de  $M_*^2$ .

Pour obtenir une expression explicite de la solution de (2.51), la matrice  $P < A >$  est diagonalisée. Ses valeurs propres sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tilde{q}) &= [(1 + \beta^2) < u > - \sqrt{X}]/2 \\ \lambda_2(\tilde{q}) &= \lambda_3(\tilde{q}) = < u > \\ \lambda_4(\tilde{q}) &= [(1 + \beta^2) < u > + \sqrt{X}]/2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

avec  $X = [(1 - \beta^2) < u >]^2 + 4\beta^2\gamma < p > / < \rho >$ . Les vecteurs propres à droite  $r_i(\tilde{q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) qui vérifient la relation  $PA(\tilde{q})r_i(\tilde{q}) = \lambda_i(\tilde{q})r_i(\tilde{q})$  peuvent être choisis comme suit :

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - \beta^2 < u >}{\beta^2\gamma < p >} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_4 - \beta^2 < u >}{\beta^2\gamma < p >} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

De plus, on notera  $l_i(\tilde{q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) les vecteurs propres à gauche qui vérifient la relation  ${}^t[PA](\tilde{q})l_i(\tilde{q}) = \lambda_i(\tilde{q})l_i(\tilde{q})$ . Après normalisation des vecteurs à droite et à gauche pour avoir  ${}^tl_i(\tilde{q}).r_j(\tilde{q}) = \delta_{ij}$ , on obtient :

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{X}} \begin{pmatrix} -(\lambda_1 - < u >) \\ -\beta^2\gamma < p > \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_4 = \frac{1}{\sqrt{X}} \begin{pmatrix} \lambda_4 - < u > \\ \beta^2\gamma < p > \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Finalement, si on introduit les coordonnées  $\alpha_i(\Delta_{RL}\tilde{q}) = {}^tl_i(\tilde{q}).\Delta_{RL}\tilde{q}$  du saut  $\Delta_{RL}\tilde{q} = \tilde{q}_R - \tilde{q}_L$  dans la base des vecteurs propres  $r_i$  :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{(\lambda_1 - < u >)\Delta p + \beta^2\gamma < p > \Delta u}{\sqrt{X}} & \alpha_2 &= \Delta S \\ \alpha_3 &= \Delta v & \alpha_4 &= \frac{(\lambda_4 - < u >)\Delta p + \beta^2\gamma < p > \Delta u}{\sqrt{X}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

alors la solution de (2.51) est donnée par 4 états constants  $\tilde{q}_L, \tilde{q}_L^*, \tilde{q}_R^*, \tilde{q}_R$  définis par :

$$\tilde{q}(x, t) = \begin{cases} \tilde{q}_L & \text{pour } x/t < \lambda_1 \\ \tilde{q}_L^* = \tilde{q}_L + \alpha_1 r_1 & \text{pour } \lambda_1 < x/t < \lambda_2 \\ \tilde{q}_R^* = \tilde{q}_R - \alpha_4 r_4 & \text{pour } \lambda_2 < x/t < \lambda_4 \\ \tilde{q}_R & \text{pour } \lambda_4 > x/t \end{cases} \quad (2.59)$$

La formule (2.59) est obtenue par résolution d'un problème de Riemann pour un système linéaire hyperbolique. On rappelle la méthode de résolution ci-dessous. La solution du problème dépend seulement de la variable  $x/t$  et se compose dans le plan  $(x, t)$  d'états constants séparés par les lignes caractéristiques (voir Figure 2.5).

A partir des vecteurs propres à droite et à gauche, on écrit le vecteur  $\tilde{q}$  dans la base des vecteurs propres à droite, sous la forme :

$$\tilde{q} = \sum_i \alpha_i r_i \quad (2.60)$$

Le problème de Riemann (2.51) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i \alpha_i r_i \right) + P < A > \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_i \alpha_i r_i \right) = 0 \quad (2.61)$$

ou encore, en utilisant la définition des vecteurs propres :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i(\tilde{q}) + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \alpha_i(\tilde{q}) = 0 \quad (2.62)$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} \alpha_i(\tilde{q}) = \alpha_i(\tilde{q}_0(x - \lambda_i t)) \\ \tilde{q}_0 = \tilde{q}_L \quad \text{si } x - \lambda_i t < 0 \\ \tilde{q}_0 = \tilde{q}_R \quad \text{si } x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

Ainsi la solution peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{q}(x, t) = \sum_i \alpha_i(\tilde{q}_0(x - \lambda_i t)) r_i \quad (2.64)$$

$$\tilde{q}(x, t) = \tilde{q}_L + \alpha_i(\tilde{q}_0(x - \lambda_i t) - \tilde{q}_L) r_i$$

Or on cherche la solution sur l'interface c'est-à-dire en  $x/t = 0$ . Cette solution s'écrit :

$$\tilde{q}(0, t) = \tilde{q}_L + \alpha_i(\tilde{q}_0(-\lambda_i t) - \tilde{q}_L) r_i \quad (2.65)$$

Et la solution du problème de Riemann linéarisé est donc bien donnée par la formule (2.59).

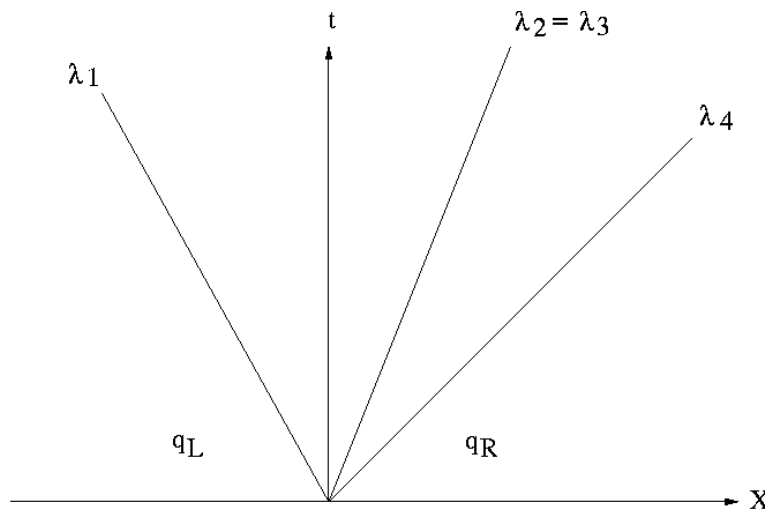


FIG. 2.5 – Représentation du problème de Riemann d'un système linéaire hyperbolique.



En utilisant les expressions des vecteurs propres à gauche et à droite (2.58)-(2.56), avec les développements asymptotiques (2.53)-(2.54), on obtient les expressions asymptotiques suivantes pour les deux états  $\tilde{q}_L^*$ ,  $\tilde{q}_R^*$  : (On signale que les valeurs de  $u$  et  $p$  sont identiques dans les deux états  $\tilde{q}_L^*$ ,  $\tilde{q}_R^*$ )

$$\begin{aligned} u^* &= a_{ref}(0 + M_*(< u_1 > - \frac{< u_1 >}{2\sqrt{X_0}} \Delta u_1 - \frac{\Delta p_2}{< \rho_0 > \sqrt{X_0}})) \\ &+ M_*^2(< u_2 > - \frac{< u_1 >}{2\sqrt{X_0}} \Delta u_2 + (\dots)\Delta u_1 + \frac{< \rho_1 > \Delta p_2}{< \rho_0 > \sqrt{X_0}} + (\dots)\Delta p_2) + \dots \\ p^* &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (p_0 + M_*^2(< p_2 > - \frac{\beta_1^2 \gamma p_0}{\sqrt{X_0}} \Delta u_1 + \frac{< u_1 >}{2\sqrt{X_0}} \Delta p_2) + \dots) \end{aligned} \quad (2.66)$$

où  $X_0 = (< u_1 >)^2 + 4\beta_1^2 \gamma p_0 / < \rho_0 >$  et  $(\dots)$  symbolise des termes compliqués que nous n'avons pas explicités ici. Les valeurs des densités et des vitesses tangentielles sont données par :

$$\begin{aligned} \rho_L^* &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_* \rho_{L,1} + M_*^2(\rho_{L,2} - \frac{\beta_1^2 \rho_{L,0}}{\sqrt{X_0}} \Delta u_1 + \frac{\rho_{L,0} < u_1 >}{2\gamma p_0 \sqrt{X_0}} \Delta p_2 + \frac{\rho_{L,0}}{2\gamma p_0} \Delta p_2) + \dots) \\ v_L^* &= v_L \\ \rho_R^* &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_* \rho_{R,1} + M_*^2(\rho_{R,2} - \frac{\beta_1^2 \rho_{R,0}}{\sqrt{X_0}} \Delta u_1 + \frac{\rho_{R,0} < u_1 >}{2\gamma p_0 \sqrt{X_0}} \Delta p_2 - \frac{\rho_{R,0}}{2\gamma p_0} \Delta p_2) + \dots) \\ v_R^* &= v_R \end{aligned} \quad (2.67)$$

D'après l'expression (2.66), on voit que la pression à l'interface ne contient pas de fluctuations de l'ordre du nombre de Mach.

Revenons à présent aux expériences numériques que nous avons présentées en introduction. La Figure 2.7 présente le champ de pression pour les trois mêmes tests qu'en Figure 2.1 où l'on fait décroître le nombre de Mach. Contrairement aux résultats obtenus avec le flux original, les solutions convergent vers une unique solution.

Sur la Figure 2.6 sont représentées les fluctuations de pression en fonction du nombre de Mach. Comme l'implique l'expression (2.66), les fluctuations de pression sont proportionnelles au nombre de Mach au carré, en accord avec le comportement des équations continues dans le cas de données initiales bien préparées.

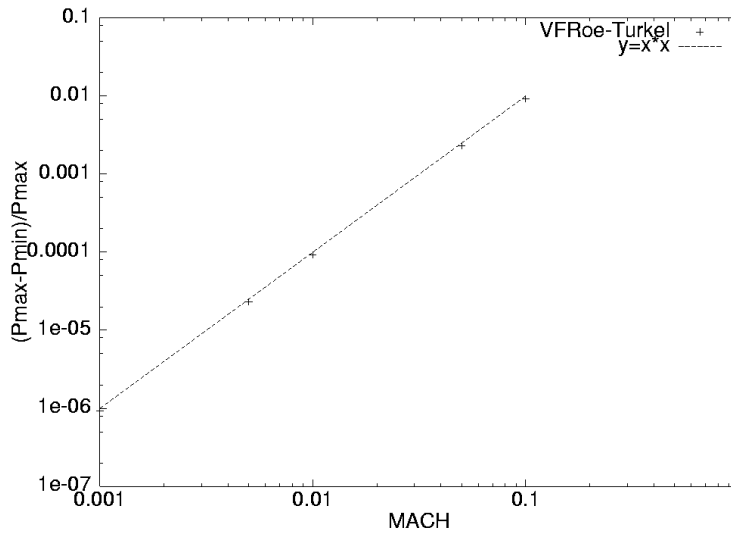


FIG. 2.6 – Fluctuations de pression en fonction du nombre de Mach à l'infini, pour le schéma VFRoe-Turkel. Pour comparaison la courbe  $y = x^2$  est représentée en traits pointillés.

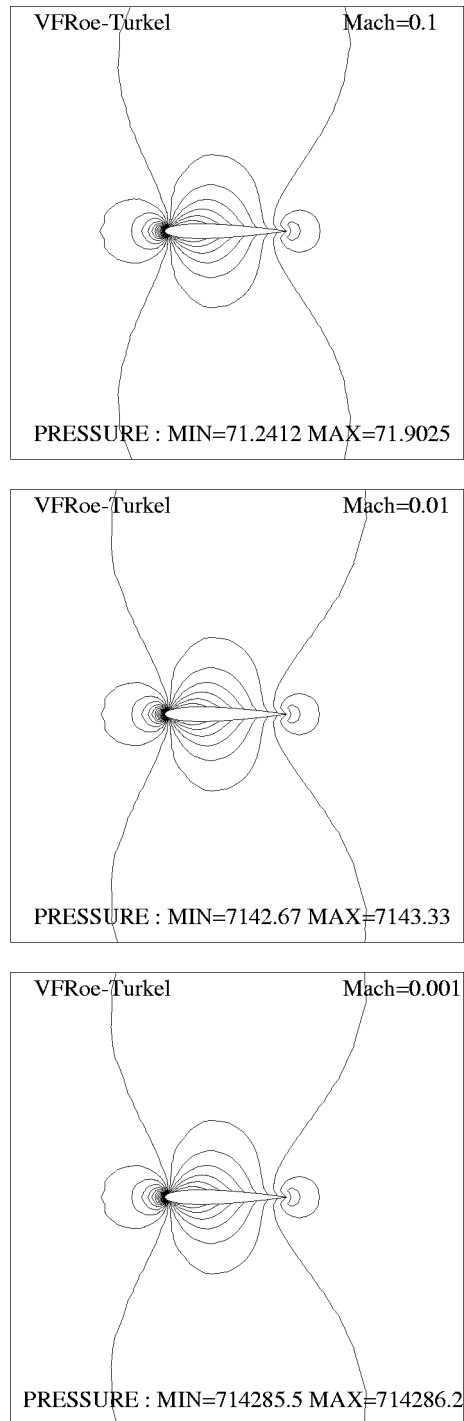


FIG. 2.7 – Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3114 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Schéma VFRoe-Turkel.

## 2.5 Comparaison avec la solution incompressible

On présente ici une série de simulations d'écoulements dans une tuyère dans laquelle le nombre de Mach tend vers zéro. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par un calcul incompressible. Ce type de simulations est similaire aux expériences précédentes réalisées autour du profil d'aile de NACA0012. Puisqu'on cherche des solutions stationnaires, les pas de temps utilisés par la méthode implicite sont calculés avec un CFL inversement proportionnel au résidu non linéaire de la densité en norme L2 :

$$\text{CFL} = \frac{1}{\text{Res}(\rho)} \quad \text{avec} \quad \text{CFL}_{\max} = 10^6 \quad (2.68)$$

Les solutions discrètes stationnaires présentées sont celles obtenues pour un résidu non linéaire de  $10^{-9}$ .

Dans ces simulations avec le modèle compressible, le nombre de Mach  $M_*$  tend vers zéro et les résultats obtenus sont comparés avec les solutions des équations d'Euler incompressibles :

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.69.1)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) + \nabla \pi = 0 \quad (2.69.2)$$

De plus, ce problème stationnaire résolu avec le modèle compressible, revient en fait à un problème encore plus simple que celui décrit par le système (2.69). En effet, il revient à calculer un écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible. Nous décrivons ci-dessous ce type d'écoulement. On considère l'écoulement engendré par un obstacle solide indéformable au sein d'un fluide parfait incompressible animé d'un champ de vitesse irrotationnel  $\text{rot} \mathbf{u} = 0$ . Dans ce cas, il existe un potentiel  $\phi$  tel que  $\mathbf{u} = \nabla \phi$ ;  $\phi$  ne dépendant que de la position  $\mathbf{x}$  dans le cas stationnaire. Le système (2.69) d'une part et les conditions aux limites d'autre part se traduisent alors par :

$$\rho = \rho_0 \quad (2.70.1)$$

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.70.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{paroi} \quad (2.70.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{entrée-sortie} \quad (2.70.4)$$

qui contient une équation de Poisson, et l'équation d'Euler conduit à :

$$\nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} \right) = \frac{\mathbf{f}^v}{\rho_0} \quad (2.71)$$

de telle sorte que, si les forces extérieures dérivent d'un potentiel  $\Upsilon$ , on a la relation :

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} - \Upsilon = \text{cte} \quad (2.72)$$

Les deux relations (2.71)-(2.72) permettent la détermination de  $\mathbf{u}$  puis de  $p$ , dans la mesure où  $p$  est connu en un point à l'infini. Ici nous négligerons la gravité et nous avons donc  $\Upsilon = 0$ . De plus on a fixé  $\rho_0 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\|\mathbf{u}_0\| = 1 \text{ m.s}^{-1}$ .

Les Figures 2.8 et 2.9 montrent les résultats de la pression normalisée  $p - p_{\min} / p_{\max} - p_{\min}$  pour l'état stationnaire discret calculé, respectivement sur un maillage grossier de 451 nœuds et sur un maillage plus fin de 3277 nœuds. On présente de gauche à droite les résultats obtenus avec le schéma classique VFRoe et celui préconditionné VFRoe-Turkel.

La Figure 2.10 montre les résultats de la pression donnés par un calcul incompressible réalisé par une méthode d'éléments finis pour le système (2.70) et sur un maillage de 3244 nœuds. Ce dernier calcul a été réalisé avec le logiciel GENEPI au CEA Cadarache.

Les Figures 2.8 et 2.9 montrent clairement que la solution obtenue avec le schéma classique VFRoe, n'est pas symétrique et ne peut donc pas représenter une approximation raisonnable d'un écoulement potentiel dont la solution est symétrique par rapport à l'axe de la tuyère. Comme le nombre de Mach décroît, les résultats du schéma classique se dégradent et les solutions ne convergent pas vers une approximation raisonnable de la solution incompressible. En revanche les résultats obtenus avec le schéma préconditionné VFRoe-Turkel, convergent vers une solution unique et symétrique. Aussi quand on compare les solutions données par le schéma préconditionné à celles obtenues avec un modèle incompressible, les différences sont quasiment nulles. Ceci met une nouvelle fois en évidence la nécessité et aussi l'efficacité du preconditionnement dans la simulation numérique des écoulements à faible nombre de Mach.

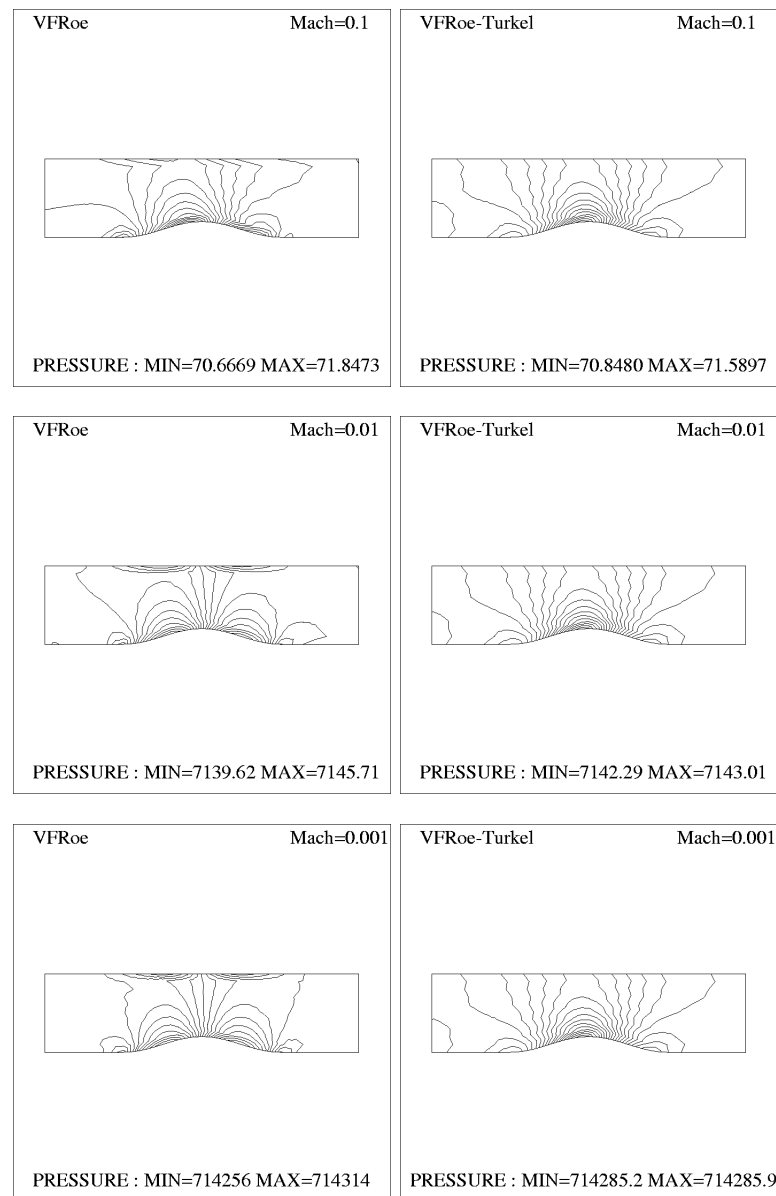


FIG. 2.8 – Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 451 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Schéma VFRoe (gauche) et schéma VFRoe-Turkel (droite).

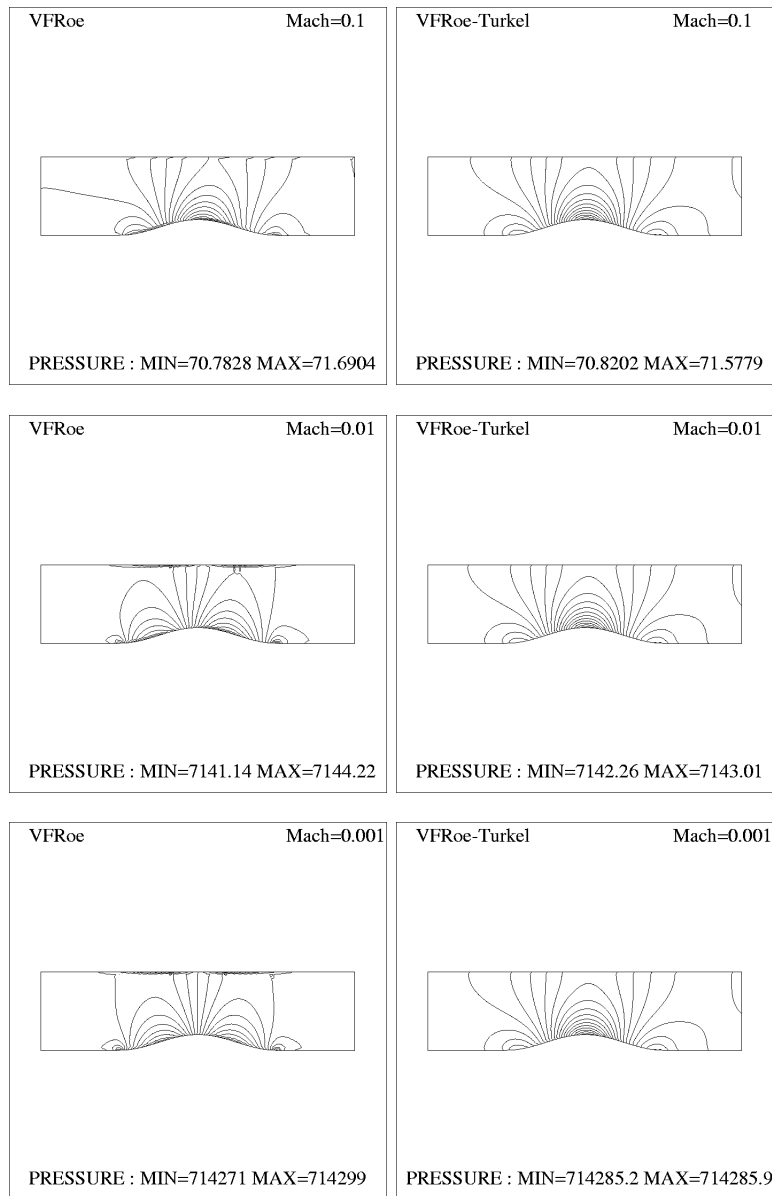


FIG. 2.9 – Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3277 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Schéma VFRoe (gauche) et schéma VFRoe-Turkel (droite).

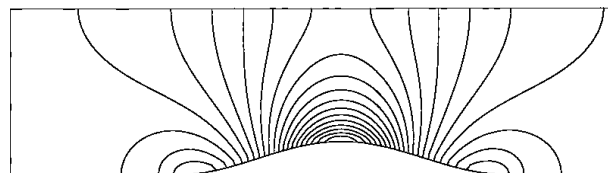


FIG. 2.10 – Isovaleurs de la pression pour le calcul incompressible sur un maillage à 3244 nœuds.

## 2.6 Une alternative au préconditionnement

Nous avons vu que la méthode de préconditionnement dans la limite des faibles nombres de Mach pour les schémas de type Godunov, revenait à modifier le problème de Riemann. Néanmoins, cette méthode n'est utilisable que pour les solveurs de Riemann linéarisés (par exemple de type VFRoe). Ici nous proposons une approche légèrement différente qui consiste à corriger la solution  $q_{LR}$  utilisée pour le calcul des flux. Cette alternative est appliquée au schéma original de Godunov c'est-à-dire celui basé sur la résolution exacte du problème de Riemann.

Dans la limite des faibles nombres de Mach, les flux calculés aux interfaces par le schéma de Godunov sont aux ordres dominants par rapport à  $M_*$ , des flux issus de problèmes acoustiques générés artificiellement par les discontinuités des solutions discrètes sur le maillage. Le premier point essentiel dans cette nouvelle approche est donc de faire disparaître toute contribution acoustique que l'on notera  $q_{LR}^{acous}$ . Cependant si l'on se limite à cette modification des valeurs aux interfaces, le flux obtenu est proche d'un flux centré. Il est alors nécessaire pour stabiliser le schéma de rajouter une contribution  $q_{LR}^{vis}$  donnant lieu à une viscosité artificielle. Cette contribution sera évaluée en se guidant par l'exemple du schéma préconditionné. Pour mettre en évidence l'importance de ces modifications, nous allons donc tester numériquement l'utilisation des flux suivants :

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR} (q_{LR} - q_{LR}^{acous}) \quad (2.73.1)$$

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR} (q_{LR} - q_{LR}^{acous} + q_{LR}^{vis}) \quad (2.73.2)$$

où  $q_{LR}$  est la solution du problème de Riemann exact.

La première partie de cette étude consiste à calculer la solution asymptotique du problème de Riemann exact. Cette solution permettra de donner l'expression de la composante "acoustique"  $q_{LR}^{acous}$  malheureusement présente dans la solution. Ensuite on comparera l'état  $q_{LR} - q_{LR}^{acous}$  à la solution asymptotique du problème de Riemann préconditionné (2.66)-(2.67) et la différence nous permettra de définir une contribution visqueuse  $q_{LR}^{vis}$ .

On se donne comme conditions initiales du problème de Riemann, les deux états  $q_L$  et  $q_R$  généraux suivants :

$$\begin{aligned} \rho_L &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_* \rho_{L,1} + M_*^2 \rho_{L,2} + \dots) \\ u_L &= a_{ref}(0 + M_* u_{L,1} + \dots) \\ v_L &= a_{ref}(0 + M_* v_{L,1} + \dots) \\ p_L &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (p_0 + M_* p_{L,1} + M_*^2 p_{L,2} + \dots) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \rho_R &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_* \rho_{R,1} + M_*^2 \rho_{R,2} + \dots) \\ u_R &= a_{ref}(0 + M_* u_{R,1} + \dots) \\ v_R &= a_{ref}(0 + M_* v_{R,1} + \dots) \\ p_R &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (p_0 + M_* p_{R,1} + M_*^2 p_{R,2} + \dots) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Pour valider cette approche dans un cadre assez général, on suppose que les conditions initiales admettent une discontinuité de densité à l'ordre 0. De ce fait on ne sait plus définir exactement l'acoustique associée au problème. Ainsi la définition de la contribution acoustique  $q_{LR}^{acous}$  sera une formule approchée.

Comme au paragraphe 2.3, on introduit ces développements asymptotiques dans les courbes de détente et de chocs. Il est aisé de voir que ces courbes sont alors confondues et qu'elles dégèrent en droites de pentes  $-1/\sqrt{\gamma p_0 \rho_{L,0}}$  et  $+1/\sqrt{\gamma p_0 \rho_{R,0}}$ . Le point d'intersection donne les valeurs de  $u^*$  et  $p^*$  :

$$\begin{aligned} u^* &= a_{ref} \left( 0 + M_* \left( \frac{\sqrt{\rho_{L,0}} u_{L,1} + \sqrt{\rho_{R,0}} u_{R,1}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma p_0}} \frac{\Delta p_1}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \right) + M_*^2 (\langle u_2 \rangle + \dots) + \mathcal{O}(M_*^3) \right) \\ p^* &= \rho_{ref} a_{ref}^2 \left( p_0 + M_* \left( \frac{\sqrt{\rho_{R,0}} p_{L,1} + \sqrt{\rho_{L,0}} p_{R,1}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} + q_{LR,1}^{acous,p^*} \right) + M_*^2 (\langle p_2 \rangle + q_{LR,2}^{acous,p^*} + \dots) + \mathcal{O}(M_*^3) \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Les valeurs des densités de part et d'autre de la discontinuité de contact sont déduites par écriture des invariants de Riemann et on obtient :

$$\begin{aligned}\rho_L^* &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_*(\rho_{L,1} + q_{LR,1}^{acous,\rho_L^*} + \frac{\rho_{L,0}\sqrt{\rho_{L,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta p_1}{\gamma p_0})) + M_*^2(\rho_{L,2} + q_{LR,2}^{acous,\rho_L^*} + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3) \\ \rho_R^* &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_*(\rho_{R,1} + q_{LR,1}^{acous,\rho_R^*} + \frac{\rho_{R,0}\sqrt{\rho_{R,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta p_1}{\gamma p_0})) + M_*^2(\rho_{R,2} + q_{LR,2}^{acous,\rho_R^*} + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3)\end{aligned}\quad (2.77)$$

où (...) symbolise des termes d'ordre 2, qui ne sont pas significatifs et que l'on n'a pas explicités. Les termes dissipatifs en  $\Delta u_1$  présents à l'ordre  $M_*$  dans les expressions de  $p^*$ ,  $\rho_L^*$ ,  $\rho_R^*$  sont purement d'origine acoustique et donc transposés dans  $q_{LR}^{acous}$ . En revanche les termes en  $\Delta p_1$  à l'ordre  $M_*$  dans les valeurs de la vitesse et des densités n'ont pas été pris en compte dans la composante acoustique  $q_{LR}^{acous}$  car ces termes disparaissent dans l'hypothèse d'un champ initial incompressible où  $\Delta p_1 = 0$ .

En conclusion, la contribution acoustique peut s'écrire en revenant aux variables dimensionnées :

$$\begin{aligned}q_{LR}^{acous,p^*} &= -\frac{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)\rho_L\rho_R}}{\sqrt{2\rho_L} + \sqrt{2\rho_R}} \Delta u \\ q_{LR}^{acous,\rho_L^*} &= -\frac{\sqrt{2\rho_L}}{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)}} \frac{\sqrt{\rho_L\rho_R}\Delta u}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ q_{LR}^{acous,\rho_R^*} &= -\frac{\sqrt{2\rho_R}}{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)}} \frac{\sqrt{\rho_L\rho_R}\Delta u}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}\end{aligned}\quad (2.78)$$

La solution limite obtenue en supprimant la contribution acoustique, s'écrit pour la pression sous la forme :

$$p^* = \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*(0) + M_*^2(\langle p_2 \rangle + (\dots))) + \mathcal{O}(M_*^3) \quad (2.79)$$

et pour les densités sous la forme :

$$\begin{aligned}\rho_L^* &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_*(\rho_{L,1} + \frac{\rho_{L,0}\sqrt{\rho_{L,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta p_1}{\gamma p_0})) + M_*^2(\rho_{L,2} + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3) \\ \rho_R^* &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_*(\rho_{R,1} + \frac{\rho_{R,0}\sqrt{\rho_{R,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta p_1}{\gamma p_0})) + M_*^2(\rho_{R,2} + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3)\end{aligned}\quad (2.80)$$

En supprimant toute contribution acoustique, on perd toute la viscosité sur la pression  $p^*$  à l'ordre  $M_*$  et il en est de même pour les densités  $\rho_L^*$ ,  $\rho_R^*$  dans le cas de données initiales incompressibles où  $\Delta p_1 = 0$ . En analysant la solution asymptotique du problème de Riemann préconditionné (2.66), nous avons vu que des termes purement dissipatifs viennent se rajouter sur la vitesse  $u^*$  à l'ordre  $M_*$ . C'est ces termes qui nous intéressent et qui vont définir l'expression de  $q_{LR}^{vis}$ . Nous avons vu au paragraphe 2.4 que la solution limite du problème de Riemann préconditionné, pour la vitesse, pouvait s'écrire sous la forme :

$$u^* = a_{ref}(0 + M_*(\langle u_1 \rangle - \frac{\langle u_1 \rangle}{2\sqrt{X_0}} \Delta u_1 - \frac{\Delta p_2}{\langle \rho_0 \rangle \sqrt{X_0}})) + M_*^2(\langle u_2 \rangle + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3) \quad (2.81)$$

Maintenant on compare cette solution à celle du problème de Riemann original et exact, dans le cas où  $\Delta p_1 = 0$  :

$$u^* = a_{ref}(0 + M_*(\frac{\sqrt{\rho_{L,0}}u_{L,1} + \sqrt{\rho_{R,0}}u_{R,1}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}})) + M_*^2(\langle u_2 \rangle + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3) \quad (2.82)$$

Alors on distingue aisément les termes de viscosité artificielle induits par le préconditionnement, et la solution  $u^*$  du système préconditionné, s'écrit sous la forme :

$$u^* = a_{ref}(0 + M_*(\langle u_1 \rangle + q_{LR,1}^{vis,u^*})) + M_*^2(\langle u_2 \rangle + q_{LR,2}^{vis,u^*} + (\dots)) + \mathcal{O}(M_*^3) \quad (2.83)$$

On définit  $q_{LR}^{vis}$  en revenant aux variables dimensionnées, par l'expression :

$$q_{LR}^{vis, u^*} = -\frac{\langle u \rangle}{2\sqrt{X}} \Delta u - \frac{\Delta p}{\sqrt{\rho_L \rho_R X}} \quad (2.84)$$

où  $X = (\langle u \rangle)^2 + 2\beta^2 \gamma (p_L + p_R) / \sqrt{\rho_L \rho_R}$  et  $\beta$  est proportionnel au nombre de Mach. Cette étude nous permet alors de proposer les deux corrections suivantes.

**Première correction :**  $\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR} (q_{LR} - q_{LR}^{acous})$

$$q_{LR} - q_{LR}^{acous} = \begin{pmatrix} p^* \\ u^* \\ \rho_L^* \\ v_L^* \\ \rho_R^* \\ v_R^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)\rho_L\rho_R}}{\sqrt{2\rho_L} + \sqrt{2\rho_R}} \Delta u \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2\rho_L}}{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)}} \frac{\sqrt{\rho_L\rho_R}\Delta u}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2\rho_R}}{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)}} \frac{\sqrt{\rho_L\rho_R}\Delta u}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

où  $(p^*, u^*, \rho_L^*, v_L^*, \rho_R^*, v_R^*)$  est la solution exacte du problème de Riemann. Il est à noter qu'une correction similaire a été proposée pour le schéma de Roe dans [68]. Cette dernière consiste à modifier le flux de Roe comme ci-dessous où  $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$  représente la vitesse du son :

$$\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_L) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}(q_R)) + \left| \frac{\partial \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR}}{\partial q} \right| \Delta_{LR} q + \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \rho a \rangle \mathbf{n}_{LR}^x \Delta u \\ \langle \rho a \rangle \mathbf{n}_{LR}^y \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

**Deuxième correction :**  $\Phi(q_L, q_R, \mathbf{n}_{LR}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{LR} (q_{LR} - q_{LR}^{acous} + q_{LR}^{vis})$

$$q_{LR} - q_{LR}^{acous} + q_{LR}^{vis} = \begin{pmatrix} p^* \\ u^* \\ \rho_L^* \\ v_L^* \\ \rho_R^* \\ v_R^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)\rho_L\rho_R}}{\sqrt{2\rho_L} + \sqrt{2\rho_R}} \Delta u \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2\rho_L}}{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)}} \frac{\sqrt{\rho_L\rho_R}\Delta u}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2\rho_R}}{\sqrt{\gamma(p_L + p_R)}} \frac{\sqrt{\rho_L\rho_R}\Delta u}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\langle u \rangle}{2\sqrt{X}} \Delta u - \frac{\Delta p}{\sqrt{\rho_L \rho_R X}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Revenons à présent aux calculs d'écoulements à faible nombre de Mach autour d'une aile de NACA0012. La Figure 2.11 présente le champ de pression pour les deux schémas corrigés et pour le schéma préconditionné VFRoe-Turkel.

La première correction donne un résultat acceptable à Mach 0.1 mais en dessous de cette valeur les résultats se dégradent et le schéma devient oscillant. En particulier, il faut noter que les résultats présentés pour Mach 0.01 et 0.001 correspondent à des calculs qui n'ont pas convergé en temps. En utilisant la correction (2.85), le résidu se met à osciller autour de la valeur  $10^{-3}$ . Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, ceci est dû au manque de viscosité artificielle. On notera que ces oscillations ont déjà été observées pour la correction (2.86) du schéma de Roe présentée dans [68], et nous en expliquons ici les raisons.

En revanche dans les résultats présentés en Figure 2.11 et qui utilisent la deuxième correction (2.87), la valeur d'interface a été corrigée de façon à incorporer une viscosité artificielle équivalente à celle du schéma préconditionné. La Figure 2.11 montre que les résultats sont comparables à ceux obtenus avec le schéma préconditionné.



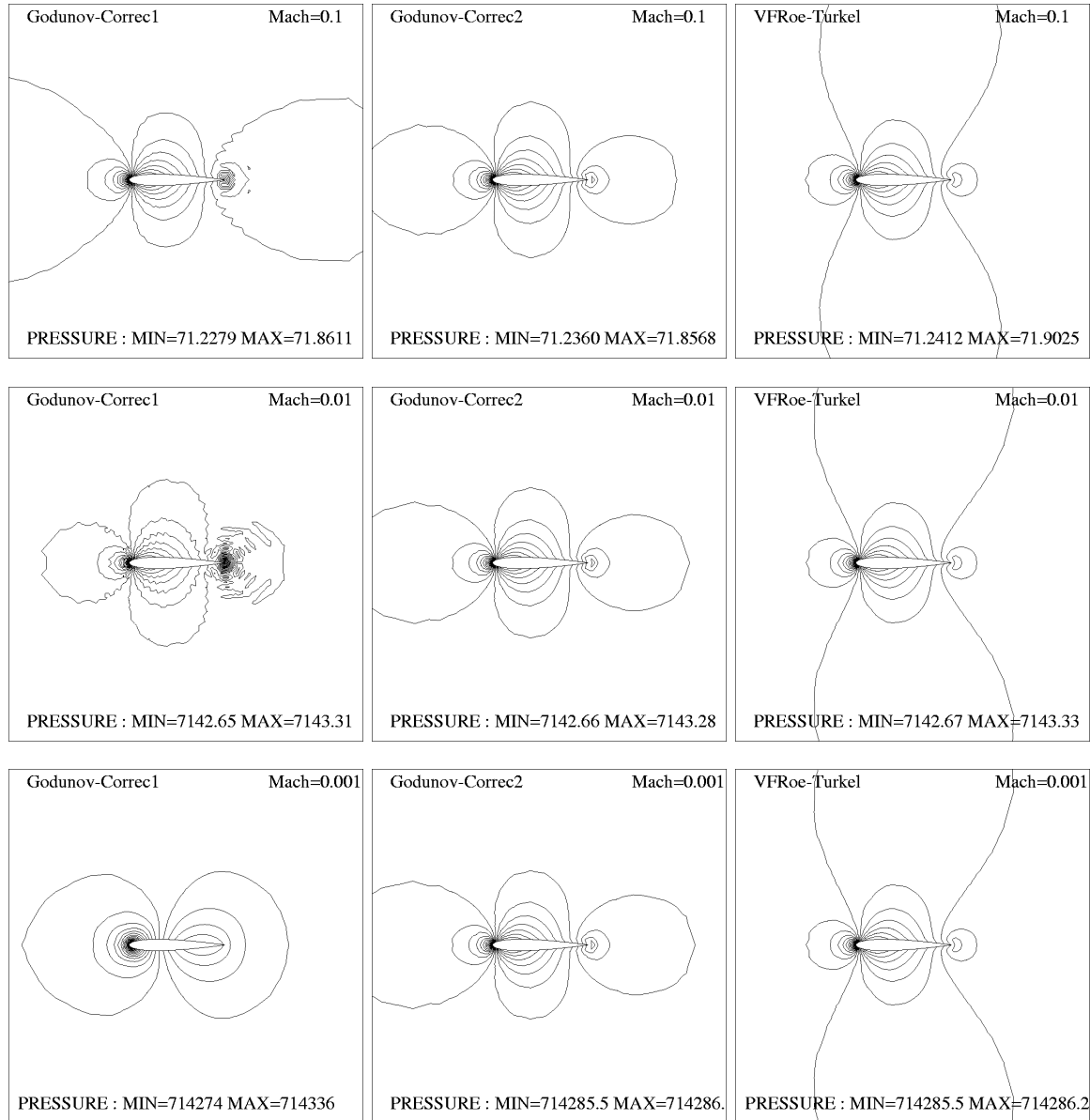


FIG. 2.11 – Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3114 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Première correction du schéma de Godunov (gauche), deuxième correction (milieu) et schéma VFRoe-Turkel (droite).

En conclusion, nous avons proposé dans ce paragraphe deux corrections des flux du schéma de Godunov qui représentent une alternative au préconditionnement. Si la première correction aboutit à un schéma qui peut devenir oscillant, la deuxième donne des résultats comparables à ceux obtenus avec la méthode préconditionnée. Cette alternative présente le double intérêt d'être moins compliquée que le préconditionnement à mettre en œuvre et d'être possible en gardant un solveur exact de Riemann. En effet, le problème de Riemann n'est pas explicitement modifié dans la mise en œuvre de cette alternative au préconditionnement.

## 2.7 Conclusion

En menant à bien une analyse asymptotique du schéma de Godunov, nous avons exhibé le mécanisme qui empêche ce type d'approximations de calculer précisément des écoulements proches du régime incompressible. Le problème vient du fait que la pression calculée à l'interface par le solveur de Riemann contient des fluctuations de pression de l'ordre du nombre de Mach, même si les données initiales du problème de Riemann ne contiennent que des fluctuations de l'ordre du nombre de Mach au carré. Ce phénomène est lié au comportement des solutions des équations d'Euler à faible nombre de Mach. Si les conditions initiales ne sont pas bien préparées, alors, en plus des composantes incompressibles, les solutions des équations d'Euler contiennent des composantes acoustiques extrêmement rapides. Ces dernières sont calculées par les équations discrètes qui prennent en compte les discontinuités artificielles dues à la projection des données initiales sur des fonctions constantes par morceaux, créant ainsi des ondes acoustiques aux interfaces entre les cellules.

Comme dans le cas du schéma de Roe [29], cette situation peut être contrôlée en modifiant les flux du schéma à l'aide des techniques de préconditionnement. Plus précisément, on propose de changer le problème de Riemann original en un problème de Riemann linéarisé et *préconditionné*. Cette stratégie est appliquée aux schémas de type VFRoe. On montre alors d'un point de vue théorique et numérique que la solution du problème de Riemann possède des fluctuations de pression de grandeur correcte. Par ailleurs pour le schéma de Godunov utilisant le solveur exact de Riemann, on ne peut pas appliquer directement cette stratégie mais on propose tout de même une alternative intéressante à ces techniques de préconditionnement.

Les solveurs compressibles préconditionnés [29], [10], [16], [72], [77] sont capables de traiter la singularité des équations d'Euler dans la limite des faibles nombres de Mach. Les comparaisons avec les solveurs incompressibles et les solveurs faible Mach montrent un excellent comportement de ces méthodes de préconditionnement (voir [78], [49], [50], [59], [77]). Cependant, il nous semble que les raisons de ce bon comportement restent partiellement incompréhensibles. Comme il est mentionné dans [76], l'effet bénéfique du préconditionnement sur la précision des solveurs compressibles dans la limite des faibles nombres de Mach était un effet inattendu. Dans cette étude, en première étape dans l'analyse de ces méthodes, nous avons montré que l'effet principal du préconditionnement consistait à supprimer les fluctuations de pression de l'ordre du nombre de Mach sur l'interface. Ainsi d'une certaine manière, les solveurs préconditionnés ont pour effet de supprimer les ondes acoustiques indésirables, générées par les discontinuités aux interfaces. Il resterait à prouver que les flux résultants aboutissent à une bonne approximation du système incompressible. Bien que les expériences numériques le montrent assez clairement, la preuve théorique reste à trouver.



## Chapitre 3

# Un modèle réduit à cinq équations pour les écoulements diphasiques compressibles

*Le modèle hyperbolique à sept équations couple les équations de deux fluides compressibles. Par conséquent, il met en jeu deux vitesses du son différentes et l'acoustique associée à ce modèle n'est pas aisée à calculer. De plus, les paramètres de relaxation induisent des temps caractéristiques qu'il faut mettre en relation avec ceux des phénomènes acoustiques. Devant toutes ces difficultés, l'analyse du modèle dans la limite des faibles nombres de Mach ne semble pas aisée et nous avons décidé de réaliser une étape supplémentaire.*

*Le point de départ de ce chapitre <sup>2</sup> est le modèle à sept équations contenant deux pressions et deux vitesses. Ce modèle contient des termes sources de relaxation qui conduisent le système vers l'équilibre des pressions et des vitesses. Une analyse asymptotique de ce système dans la limite des temps de relaxation infiniment petits est réalisée et un modèle réduit à cinq équations, inconditionnellement hyperbolique est établi. Nous étudions les propriétés mathématiques du système. Deux schémas numériques sont ensuite proposés pour ce système. Le premier est basé sur un solveur de Riemann linéarisé tandis que le deuxième utilise de manière plus forte la structure du modèle et se base sur la linéarisation des relations caractéristiques. Enfin nous présentons une série d'expériences numériques et des comparaisons avec les résultats donnés par le modèle à deux pressions et deux vitesses, ainsi que des expériences sur des problèmes d'interfaces.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
<b>3.2</b>	<b>Etablissement du modèle</b>	<b>45</b>
3.2.1	Le modèle à sept équations	45
3.2.2	Forme quasi-linéaire du modèle en variables entropiques	46
3.2.3	Etablissement d'un modèle réduit	48
3.2.4	Application au modèle à sept équations : modèle à l'ordre 0	50
3.2.5	Modèle à l'ordre $\varepsilon$	53
<b>3.3</b>	<b>Etude mathématique</b>	<b>59</b>
3.3.1	Hyperbolicité	59
3.3.2	Existence d'une entropie mathématique	61
3.3.3	Structure des ondes	61
3.3.4	Invariants de Riemann	62
<b>3.4</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>63</b>
3.4.1	Schéma de type VFRoe-ncv	63

---

<sup>2</sup>Ce chapitre est issu de : H. Guillard et A. Murrone (2003). A five equation reduced Model for compressible two phase flow problems. *Rapport de Recherche INRIA No 4778* et soumis au *Journal of Computational Physics 2003*.

---

3.4.2	Evolution d'une discontinuité de contact . . . . .	65
3.4.3	Solveur Acoustique . . . . .	66
3.4.4	Formulation décentrée à l'ordre deux : MUSCL . . . . .	67
<b>3.5</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>69</b>
3.5.1	Problèmes multifluides ou d'interfaces : tests de validation . . . . .	69
3.5.2	Problèmes diphasiques : comparaison avec le modèle à sept équations . . . . .	73
3.5.3	Cas test bidimensionnels . . . . .	79
<b>3.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>83</b>

---

## 3.1 Introduction

La modélisation des écoulements diphasiques est typiquement basée sur un processus d'homogénéisation des équations locales monophasiques [33], [18]. Sous leur forme la plus générale, ces techniques aboutissent à des modèles caractérisés par deux vitesses et deux pressions, auxquels on peut rajouter une ou plusieurs équations topologiques supplémentaires. Ainsi pour le cas monodimensionnel et non isentropique, un modèle de ce type pour les écoulements diphasiques est caractérisé par au moins sept équations (deux équations de conservation de masse, deux équations pour les quantités de mouvement et deux équations d'énergie ou de pression, auxquelles vient s'ajouter une équation topologique). Ces modèles sont connus depuis longtemps [54], [64], [4] mais ont été peu utilisés à cause de leur complexité. Cependant des travaux récents [56] ont montré que ces modèles possédaient plusieurs avantages par rapport aux modèles bi-fluides classiques à six équations. En effet ces modèles sont inconditionnellement hyperboliques, ils sont capables de décrire des mélanges diphasiques aussi bien que des problèmes d'interfaces entre fluides compressibles. Ils permettent de traiter des fluides caractérisés par des thermodynamiques très différentes car chaque fluide possède sa propre loi d'état. Cependant quand on s'intéresse à leur modélisation numérique, elle en résulte complexe à cause du grand nombre d'ondes présentes dans la structure du système mais aussi à travers la sensibilité des résultats par rapport aux procédures de relaxation. Toutes ces difficultés motivent la recherche de modèles moins coûteux et donc les travaux présentés dans ce chapitre.

Dans de nombreux cas, les temps relatifs à la mise en équilibre des pressions et des vitesses de chaque fluide sont assez petits. Ceci permet *a priori* la construction d'un modèle réduit basé sur une analyse asymptotique du modèle à sept équations, pour des temps de relaxation infiniment petits. La procédure de réduction que nous utilisons ici est assez semblable à celle proposée pour les problèmes de détonations dans [35].

Le plan du chapitre est le suivant. Au paragraphe 3.2, on rappelle le modèle à sept équations que nous avons déjà présenté au chapitre 1. Ensuite une analyse asymptotique de ce modèle est effectuée dans la limite de temps de relaxation infiniment petits. Le paragraphe 3.3 présente l'étude mathématique du modèle réduit obtenu. On montre en particulier que le système est de nouveau inconditionnellement hyperbolique. Nous étudions aussi sa structure mathématique et montrons qu'elle ne présente que des champs caractéristiques vraiment non linéaires ou linéairement dégénérés. Enfin nous donnons l'expression des invariants de Riemann associés aux différents champs. Au paragraphe 3.4, on propose deux méthodes numériques pour résoudre ce système. Elles ne nécessitent aucune hypothèse restrictive sur la nature des fluides. La première est basée sur un solveur de Riemann linéarisé de type VFRoe-ncv (voir [8]) écrit en variables entropiques. La deuxième utilise de manière plus forte la structure mathématique et peut être vue comme une extension du solveur acoustique décrit par exemple dans [66] pour les équations d'Euler. Par rapport aux tests que nous avons effectués, le deuxième schéma s'est avéré beaucoup plus robuste pour les écoulements à faible nombre de Mach et spécialement pour les problèmes d'interfaces. Enfin au paragraphe 3.5, nous présentons une série de tests numériques difficiles et des comparaisons avec les résultats du modèle complet à sept équations. Dans tous les cas, les méthodes ont donné des résultats très satisfaisants, montrant leur capacité à calculer de très violentes ondes de choc ainsi que des problèmes d'interfaces.

## 3.2 Etablissement du modèle

### 3.2.1 Le modèle à sept équations

Le point de départ de cette étude est le modèle à sept équations présenté dans [56] qui correspond en fait à une légère variante du modèle original proposé par Baer et Nunziato en 1986 dans [4]. En termes de variables conservatives  ${}^t(\alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k e_k, \alpha_2)$ , on peut écrire ce système sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \alpha_1 p_1 = p_{\mathbf{I}} \nabla \alpha_1 + \lambda (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1 e_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 e_1 + \alpha_1 p_1) \mathbf{u}_1 = p_{\mathbf{I}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \lambda \mathbf{u}_{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2) = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \alpha_2 p_2 = p_{\mathbf{I}} \nabla \alpha_2 - \lambda (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2 e_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 e_2 + \alpha_2 p_2) \mathbf{u}_2 = -p_{\mathbf{I}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \lambda \mathbf{u}_{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \mathbf{u}_{\mathbf{I}} \cdot \nabla \alpha_2 = \mu (p_2 - p_1) \quad (3.1.7)$$

Les notations sont classiques. Les variables  $\alpha_k$  représentent les fractions volumiques de chaque phase ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ),  $\rho_k$  les densités phasiques,  $\mathbf{u}_k$  les vecteurs vitesse,  $p_k$  les pressions et  $e_k = \varepsilon_k + \mathbf{u}_k^2/2$  les énergies totales spécifiques, avec  $\varepsilon_k$  les énergies internes spécifiques. D'autre part,  $p_{\mathbf{I}}$  et  $\mathbf{u}_{\mathbf{I}}$  sont respectivement les valeurs de la pression et de la vitesse aux interfaces entre les deux phases. Dans le modèle original de Baer-Nunziato 1986 [4],  $p_{\mathbf{I}}$  est égale à la pression de la phase la plus compressible tandis que  $\mathbf{u}_{\mathbf{I}}$  est égale à la vitesse de la phase la moins compressible. Mais nous avons vu que beaucoup d'autres choix sont possibles et dans la suite de cette thèse nous conserverons le choix fait par Abgrall et Saurel dans [56] où les vitesses et pressions aux interfaces sont données par les formules suivantes :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{I}} = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k} \quad \text{et} \quad p_{\mathbf{I}} = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k p_k}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k} \quad (3.2)$$

Nous avons déjà signalé au premier chapitre que le choix de ces valeurs pouvait avoir un effet très important sur la structure mathématique des ondes présentes dans ce modèle et aussi sur la possibilité d'écrire des inégalités pour les entropies phasiques (voir [12]). Néanmoins, toute l'étude de ce chapitre repose sur le fait que les vitesses et les pressions des deux phases vont relaxer vers la même valeur et ceci a pour conséquence de minimiser l'importance de ces valeurs aux interfaces qui n'influenceront alors pas notre analyse. En fait le système (3.1) contient des paramètres de relaxation  $\lambda$  et  $\mu > 0$  qui déterminent la vitesse à laquelle les deux phases vont atteindre l'équilibre des vitesses et des pressions. Les critères physiques qui justifient l'introduction de ces paramètres sont développés par exemple dans [56]. Ici nous nous intéressons à des situations où les temps de relaxation sont très petits par rapport aux autres échelles de temps caractéristiques du système. Ainsi pour réaliser une étude asymptotique, nous poserons  $\lambda = \lambda^0/\varepsilon$  et  $\mu = \mu^0/\varepsilon$  où  $\lambda^0$  et  $\mu^0$  sont d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  et nous analyserons le cas  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Cette analyse pourrait être réalisée directement sur la forme (3.1) du système écrit en variables conservatives  ${}^t(\alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k e_k, \alpha_2)$ . Néanmoins, nous avons trouvé plus judicieux de travailler avec les variables entropiques  ${}^t(s_k, \mathbf{u}_k, p_k, \alpha_2)$  où les variables  $s_k$  sont les entropies phasiques et d'utiliser alors le système sous une forme quasi-linéaire. L'écriture de ces équations est réalisée ci-dessous. On notera que cette forme des équations sera aussi utilisée au chapitre 5 pour construire un solveur de type VFRoe pour le système (3.1).

### 3.2.2 Forme quasi-linéaire du modèle en variables entropiques

Par la suite, la dérivée totale ou Lagrangienne d'une quantité  $\phi$  par rapport à la vitesse  $\mathbf{u}_k$  de chaque phase ou par rapport à la vitesse interfaciale  $\mathbf{u}_I$ , sera notée comme ci-dessous :

$$\frac{D_k \phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}_k \cdot \nabla \phi \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad \text{et } k = I \quad (3.3)$$

En utilisant cette notation ainsi que les équations de quantité de mouvement (3.1.2)-(3.1.5) et les équations de conservation de masse (3.1.1)-(3.1.4), on en déduit facilement que les équations gouvernant les vitesses  $\mathbf{u}_k$  s'écrivent sous la forme :

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \mathbf{u}_1}{Dt} + \nabla \alpha_1 p_1 = p_I \nabla \alpha_1 + \lambda (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.4.1)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 \mathbf{u}_2}{Dt} + \nabla \alpha_2 p_2 = p_I \nabla \alpha_2 - \lambda (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.4.2)$$

à partir desquelles on obtient les équations pour les énergies cinétiques  $\mathbf{u}_k^2/2$  de chaque phase :

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \mathbf{u}_1^2/2}{Dt} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \alpha_1 p_1 = p_I \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \alpha_1 + \lambda \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.5.1)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 \mathbf{u}_2^2/2}{Dt} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \alpha_2 p_2 = p_I \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \alpha_2 - \lambda \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.5.2)$$

A partir des équations (3.5.1)-(3.5.2), en utilisant  $e_k = \varepsilon_k + \mathbf{u}_k^2/2$  et les équations de conservation d'énergie (3.1.3)-(3.1.6), on obtient celles qui gouvernent l'évolution des énergies internes spécifiques  $\varepsilon_k$  :

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \varepsilon_1}{Dt} + \alpha_1 p_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = p_I (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \mu p_I (p_2 - p_1) + \lambda (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.6.1)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 \varepsilon_2}{Dt} + \alpha_2 p_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = p_I (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \alpha_2 - \mu p_I (p_2 - p_1) - \lambda (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.6.2)$$

Ensuite, en utilisant l'équation topologique de la fraction volumique (3.1.7), il est facile de voir que les équations de conservation de masse (3.1.1)-(3.1.4) peuvent se réécrire en termes de densités phasiques  $\rho_k$  sous la forme :

$$\alpha_1 \frac{D_1 \rho_1}{Dt} + \alpha_1 \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \rho_1 (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \mu \rho_1 (p_2 - p_1) \quad (3.7.1)$$

$$\alpha_2 \frac{D_2 \rho_2}{Dt} + \alpha_2 \rho_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = \rho_2 (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \alpha_2 - \mu \rho_2 (p_2 - p_1) \quad (3.7.2)$$

Pour obtenir à présent, les équations décrivant l'évolution des entropies  $s_k$ , on utilise la relation de Gibbs qui s'écrit pour chaque phase  $k$  :

$$d\varepsilon_k = T_k ds_k + \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.8)$$

où  $T_k$  est la température de la phase  $k$ . En prenant la dérivée totale de la relation de Gibbs (3.8) et en multipliant par  $\alpha_k \rho_k$  on obtient la relation :

$$\alpha_k \rho_k T_k \frac{D_k s_k}{Dt} = \alpha_k \rho_k \frac{D_k \varepsilon_k}{Dt} - \frac{\alpha_k p_k}{\rho_k} \frac{D_k \rho_k}{Dt} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.9)$$

à partir de laquelle on déduit avec (3.6.1)-(3.6.2)-(3.7.1)-(3.7.2), les équations pour les entropies  $s_k$  :

$$\alpha_1 \rho_1 T_1 \frac{D_1 s_1}{Dt} = (p_I - p_1) (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \mu (p_I - p_1) (p_2 - p_1) + \lambda (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.10.1)$$

$$\alpha_2 \rho_2 T_2 \frac{D_2 s_2}{Dt} = (p_I - p_2) (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \alpha_2 - \mu (p_I - p_2) (p_2 - p_1) - \lambda (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.10.2)$$

Finalement, pour avoir les équations sur les pressions  $p_k$  de chaque phase, on écrit les lois d'état sous la forme implicite  $p_k = p_k(\rho_k, s_k)$  et on obtient l'expression suivante pour la différentielle  $dp_k$  :

$$dp_k = \left( \frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} d\rho_k + \left( \frac{\partial p_k}{\partial s_k} \right)_{\rho_k} ds_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.11)$$

En introduisant à présent les coefficients  $\chi_k = (\partial \varepsilon_k / \partial \rho_k)_{p_k}$  et  $\kappa_k = (\partial \varepsilon_k / \partial p_k)_{\rho_k}$ , on écrit la différentielle des énergies internes spécifiques  $\varepsilon_k$  sous la forme suivante :

$$d\varepsilon_k = \chi_k d\rho_k + \kappa_k dp_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.12)$$

En écrivant alors l'égalité entre les relations (3.8) et (3.12), on peut en déduire une expression de  $dp_k$  et en la comparant avec (3.11) on obtient les relations classiques qui nous donnent une expression de la vitesse du son  $a_k$  et de la température de chaque phase  $k$  :

$$a_k^2 = \left( \frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} = \frac{1}{\kappa_k} \left( \frac{p_k}{\rho_k^2} - \chi_k \right) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial p_k}{\partial s_k} \right)_{\rho_k} = \frac{T_k}{\kappa_k} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.13)$$

A partir des relations (3.11)-(3.13) et après multiplication par la fraction volumique  $\alpha_k$ , on obtient la relation :

$$\alpha_k \frac{D_k p_k}{Dt} = \frac{\alpha_k}{\kappa_k} \left( \frac{p_k}{\rho_k^2} - \chi_k \right) \frac{D_k \rho_k}{Dt} + \frac{\alpha_k T_k}{\kappa_k} \frac{D_k s_k}{Dt} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.14)$$

à partir de laquelle on déduit avec (3.7.1)-(3.7.2)-(3.10.1)-(3.10.2), les équations gouvernant l'évolution des pressions  $p_k$  de chaque phase :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{D_1 p_1}{Dt} + \alpha_1 \rho_1 a_1^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= \frac{\rho_1}{\kappa_1} \left( \frac{p_1}{\rho_1^2} - \chi_1 \right) (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \mu \frac{\rho_1}{\kappa_1} \left( \frac{p_1}{\rho_1^2} - \chi_1 \right) (p_2 - p_1) \\ &+ \frac{\lambda}{\kappa_1 \rho_1} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (3.15.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \frac{D_2 p_2}{Dt} + \alpha_2 \rho_2 a_2^2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 &= \frac{\rho_2}{\kappa_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2^2} - \chi_2 \right) (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \alpha_2 - \mu \frac{\rho_2}{\kappa_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2^2} - \chi_2 \right) (p_2 - p_1) \\ &- \frac{\lambda}{\kappa_2 \rho_2} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (3.15.2)$$

Enfin en introduisant  $a_{kI}^2 = (p_I / \rho_k^2 - \chi_k) / \kappa_k$  la vitesse du son de la phase  $k$  aux interfaces ainsi que les impédances acoustiques  $C_k = \rho_k a_k^2$  et  $C_{kI} = \rho_k a_{kI}^2$ , le modèle à sept équations (3.1) peut se réécrire, en termes de variables entropiques  ${}^t(s_k, \mathbf{u}_k, p_k, \alpha_2)$ , sous la forme quasi linéaire :

$$\alpha_1 \rho_1 T_1 \frac{D_1 s_1}{Dt} = (p_I - p_1) (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \mu (p_I - p_1) (p_2 - p_1) + \lambda (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.16.1)$$

$$\alpha_2 \rho_2 T_2 \frac{D_2 s_2}{Dt} = (p_I - p_2) (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \alpha_2 - \mu (p_I - p_2) (p_2 - p_1) - \lambda (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.16.2)$$

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \mathbf{u}_1}{Dt} + \nabla \alpha_1 p_1 = p_I \nabla \alpha_1 + \lambda (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.16.3)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 \mathbf{u}_2}{Dt} + \nabla \alpha_2 p_2 = p_I \nabla \alpha_2 - \lambda (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.16.4)$$

$$\alpha_1 \frac{D_1 p_1}{Dt} + \alpha_1 C_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = C_{1I} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \mu C_{1I} (p_2 - p_1) + \frac{\lambda}{\kappa_1 \rho_1} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.16.5)$$

$$\alpha_2 \frac{D_2 p_2}{Dt} + \alpha_2 C_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = C_{2I} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla \alpha_2 - \mu C_{2I} (p_2 - p_1) - \frac{\lambda}{\kappa_2 \rho_2} (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (3.16.6)$$

$$\frac{D_I \alpha_2}{Dt} = \mu (p_2 - p_1) \quad (3.16.7)$$



### 3.2.3 Etablissement d'un modèle réduit

Afin de simplifier les notations dans ce paragraphe, on présente simplement le cas monodimensionnel ou l'expression  $A(\mathbf{U})\partial\mathbf{U}/\partial x$  peut être interprétée comme une écriture simplifiée de  $\sum_{j=1}^d A_j(\mathbf{U})\partial\mathbf{U}/\partial x_j$ .

L'établissement du modèle peut être brièvement présenté comme suit. On considère un système hyperbolique avec terme source raide :

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U})\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} = \frac{R(\mathbf{U})}{\varepsilon} \quad (3.17)$$

Dans cette équation, le vecteur d'état  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$  appartient à  $\Omega$ , un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On suppose que le système (3.17) est hyperbolique c'est-à-dire que quelque soit  $\mathbf{U} \in \Omega$ , la matrice  $A(\mathbf{U})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et possède un système complet de vecteurs propres.

On s'intéresse au comportement des solutions de (3.17) quand le temps de relaxation  $\varepsilon$  tend vers zéro. Ainsi, on s'attend à ce que ces solutions soient proches de  $\mathcal{E}$  le sous ensemble de  $\mathbb{R}^N$  défini par :

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N; R(\mathbf{U}) = 0\} \quad (3.18)$$

L'hypothèse suivante est faite :

**Hypothèse 1 :** Le système d'équations  $R(\mathbf{U}) = 0$  définit implicitement une sous-variété de dimension  $n$ . De plus, pour tout vecteur  $\mathbf{U} \in \mathcal{E}$ , on connaît *explicitement* une paramétrisation  $M$  de  $\omega$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $V$  un voisinage de  $\mathbf{U}$  dans  $\mathcal{E}$ .

On rappelle la définition d'une sous variété définie implicitement et des espaces tangents associés.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $R_1, \dots, R_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $C^1$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $\mathbf{U}$  tels que :

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N; R_1(\mathbf{U}) = 0, \dots, R_N(\mathbf{U}) = 0\} \quad (3.19)$$

On suppose que parmi les différentielles  $DR_1(\mathbf{U}), \dots, DR_N(\mathbf{U})$ , les  $n$  premières sont indépendantes en tout point de  $\mathcal{E}$ . Alors  $\mathcal{E}$  est une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^N$ .

L'espace vectoriel tangent en  $\mathbf{V}$  à  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)$  tels que :

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial R_1}{\partial U_j}(\mathbf{V})U_j = 0, \dots, \sum_{j=1}^N \frac{\partial R_n}{\partial U_j}(\mathbf{V})U_j = 0 \quad (3.20)$$

L'espace affine tangent en  $\mathbf{V}$  à  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_N)$  tels que :

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial R_1}{\partial U_j}(\mathbf{V})(U_j - V_j) = 0, \dots, \sum_{j=1}^N \frac{\partial R_n}{\partial U_j}(\mathbf{V})(U_j - V_j) = 0 \quad (3.21)$$

Dans cette étude, on appelle  $\mathcal{E}$  la sous-variété d'équilibre tandis que le difféomorphisme  $M$  sera appelé la Maxwellienne, en référence aux équations de Boltzmann. On note que pour tout  $\mathbf{u} \in \omega$  la matrice Jacobienne  $dM_{\mathbf{u}}$  est une matrice de rang maximum. D'ailleurs, on a les résultats suivants :

**Proposition 1 :** Les vecteurs colonnes de  $dM_{\mathbf{u}}$  forment une base de  $\ker R'(M(\mathbf{u}))$ .

*Preuve :* Notons  $T_{\mathbf{U}}(\mathcal{E})$  l'espace vectoriel tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{U}$ . Puisque  $M$  est un difféomorphisme de  $\omega$  dans  $V \subset \mathcal{E}$ ,  $dM_{\mathbf{u}}$  est une bijection de  $\mathbb{R}^n$  dans  $T_{M(\mathbf{u})}(\mathcal{E})$ . Ainsi, les vecteurs colonnes de  $dM_{\mathbf{u}}$  sont  $n$  vecteurs indépendants et forment une base de  $T_{M(\mathbf{u})}(\mathcal{E})$ . Mais comme la sous-variété d'équilibre  $\mathcal{E}$  est définie implicitement par le système d'équations (3.18), le résultat peut être montré, simplement, en remarquant que  $T_{M(\mathbf{u})}(\mathcal{E})$  est précisément  $\ker R'(M(\mathbf{u}))$ .

On notera les vecteurs colonnes de  $dM_{\mathbf{u}}$ ,  $\{dM_{\mathbf{u}}^1, \dots, dM_{\mathbf{u}}^n\}$ . Notons à présent  $\{I^1, \dots, I^{N-n}\}$  une base de  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  l'image de  $R'(M(\mathbf{u}))$  et définissons la matrice  $S$  de dimension  $N \times N$  par :

$$S = [dM_{\mathbf{u}}^1, \dots, dM_{\mathbf{u}}^n, I^1, \dots, I^{N-n}] \quad (3.22)$$

En vertu de la proposition 1, la matrice  $S$  est une matrice inversible. On désignera par  $P$  et  $Q$  les matrices de dimension  $n \times N$  et  $N - n \times N$ , formées respectivement des  $n$  premières et  $N - n$  dernières lignes de la matrice inverse. Alors on a :

**Proposition 2 :** Considérons que  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  et  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  sont munis de leurs bases respectives  $\{dM_{\mathbf{u}}^1, \dots, dM_{\mathbf{u}}^n\}$  et  $\{I^1, \dots, I^{N-n}\}$ , alors dans ces bases,  $P$  et  $Q$  sont respectivement la projection sur  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  dans la direction  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  et la projection sur  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  dans la direction  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$ .

*Preuve :* Soient  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N-n}$ , pour tout  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$  on écrit :

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}^j dM_{\mathbf{u}}^j + \sum_{j=1}^{N-n} \mathbf{w}^j I^j \quad (3.23)$$

Alors il est clair que les vecteurs  $\sum_{j=1}^n \mathbf{v}^j dM_{\mathbf{u}}^j$  et  $\sum_{j=1}^{N-n} \mathbf{w}^j I^j$  sont respectivement la projection sur  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  dans la direction  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  et la projection sur  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  dans la direction  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  du vecteur  $\mathbf{U}$ . Sous forme matricielle, la relation (3.23) peut s'écrire :

$$\mathbf{U} = S \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

de laquelle on déduit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = S^{-1} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} P\mathbf{U} \\ Q\mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

On remarquera les propriétés évidentes suivantes :

**Proposition 3 :** On a

1.  $P.dM_{\mathbf{u}} = Id(n)$  où  $Id(n)$  est la matrice identité de dimension  $n$  par  $n$
2.  $P.R'(M(\mathbf{u})) = 0$

*Preuve :* Le premier résultat vient simplement de  $S^{-1}.S = Id(N)$ . Et pour prouver le deuxième résultat, on notera que pour tout  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur  $R'(M(\mathbf{u}))\mathbf{U}$  appartient à l'image de  $R'(M(\mathbf{u}))$ .

On notera que l'hypothèse 1 est vraiment très faible. Toutefois, il est important d'insister sur le fait que cette hypothèse donne simplement la possibilité d'écrire un développement asymptotique *formel*. En particulier cette hypothèse n'implique *ni* que le système réduit est mathématiquement bien-posé ou hyperbolique, *ni* que le développement asymptotique converge. Des hypothèses plus fortes sont nécessaires pour établir des résultats de ce type. Pour des résultats plus détaillés sur la réduction de systèmes hyperboliques avec terme source raide, on pourra se référer aux travaux présentés dans [48].

Maintenant, pour obtenir un modèle réduit, on cherche des solutions sous la forme suivante :

$$\mathbf{U} = M(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{V} \quad (3.26)$$

En introduisant cette expression dans (3.17) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M(\mathbf{u})}{\partial t} + A(M(\mathbf{u})) \frac{\partial M(\mathbf{u})}{\partial x} - R'(M(\mathbf{u})).\mathbf{V} \\ & + \varepsilon \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A(M(\mathbf{u})) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial A}{\partial U_i} \mathbf{V}_i \right] \frac{\partial M(\mathbf{u})}{\partial x} - \frac{1}{2} R''(M(\mathbf{u}))(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \right] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ensuite, en vertu de la proposition 3, et en multipliant cette équation par la matrice  $P$ , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + P.A(M(\mathbf{u})).dM_{\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.28)$$

Enfin, le modèle réduit de (3.17) est ainsi obtenu en négligeant les termes d'ordre  $\varepsilon$ .

### 3.2.4 Application au modèle à sept équations : modèle à l'ordre 0

L'application de l'analyse asymptotique que nous avons présentée, au modèle diphasique à sept équations sous sa forme quasi linéaire (3.16) s'avère assez aisée. Si on pose  $\lambda = \lambda^0/\varepsilon$  et  $\mu = \mu^0/\varepsilon$  où  $\lambda^0$  et  $\mu^0$  sont  $\mathcal{O}(1)$ , ce système (3.16) en termes de variables entropiques  $\mathbf{U} = {}^t(s_1, s_2, u_1, u_2, p_1, p_2, \alpha_2)$  s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{R(\mathbf{U})}{\varepsilon} \quad (3.29)$$

où la matrice  $A(\mathbf{U})$  est donnée par :

$$A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (p_{\text{I}} - p_1)(u_{\text{I}} - u_1)/(\alpha_1 \rho_1 T_1) \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(p_{\text{I}} - p_2)(u_{\text{I}} - u_2)/(\alpha_2 \rho_2 T_2) \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 1/\rho_1 & 0 & (p_{\text{I}} - p_1)/(\alpha_1 \rho_1) \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 1/\rho_2 & -(p_{\text{I}} - p_2)/(\alpha_2 \rho_2) \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & u_1 & 0 & C_{1\text{I}}(u_{\text{I}} - u_1)/\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & u_2 & -C_{2\text{I}}(u_{\text{I}} - u_2)/\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

et où le vecteur du terme source de relaxation  $R(\mathbf{U})$  s'écrit :

$$R(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mu^0(p_{\text{I}} - p_1)(p_2 - p_1)/(\alpha_1 \rho_1 T_1) + \lambda^0(u_{\text{I}} - u_1)(u_2 - u_1)/(\alpha_1 \rho_1 T_1) \\ -\mu^0(p_{\text{I}} - p_2)(p_2 - p_1)/(\alpha_2 \rho_2 T_2) - \lambda^0(u_{\text{I}} - u_2)(u_2 - u_1)/(\alpha_2 \rho_2 T_2) \\ \lambda^0(u_2 - u_1)/(\alpha_1 \rho_1) \\ -\lambda^0(u_2 - u_1)/(\alpha_2 \rho_2) \\ \mu^0 C_{1\text{I}}(p_2 - p_1)/\alpha_1 + \lambda^0(u_{\text{I}} - u_1)(u_2 - u_1)/(\alpha_1 \rho_1 \kappa_1) \\ -\mu^0 C_{2\text{I}}(p_2 - p_1)/\alpha_2 - \lambda^0(u_{\text{I}} - u_2)(u_2 - u_1)/(\alpha_2 \rho_2 \kappa_2) \\ \mu^0(p_2 - p_1) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Il reste alors à identifier la Maxwellienne  $M(\mathbf{u})$  et à calculer la Jacobienne  $dM_{\mathbf{u}}$  et la matrice de projection  $P$ . Soit  $\mathbf{u} = {}^t(s_1, s_2, u, p, \alpha_2) \in \mathbb{R}^5$ , on définit la Maxwellienne par :

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U} = M(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ u \\ u \\ p \\ p \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

La matrice Jacobienne de cette transformation est donnée par :

$$dM_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

On rappelle que l'on a posé  $C_k = \rho_k a_k^2$  et  $C_{k\text{I}} = \rho_k a_{k\text{I}}^2$  pour les impédances acoustiques où  $a_k$  et  $a_{k\text{I}}$  sont respectivement la vitesse du son de la phase  $k$  et la vitesse du son de la phase  $k$  à l'interface. Dans cette analyse, les pressions à l'ordre 0 tendent vers une pression commune  $p$ . Par conséquent, la valeur de la pression à l'interface  $p_{\text{I}}$  à l'ordre 0 sera aussi égale à cette valeur  $p$  et on en déduit pour les impédances acoustiques que  $C_{k\text{I}} = C_k$ . La Jacobienne du terme source évaluée sur la Maxwellienne s'écrit donc :

$$R'(M(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^0/(\alpha_1 \rho_1) & \lambda^0/(\alpha_1 \rho_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^0/(\alpha_2 \rho_2) & -\lambda^0/(\alpha_2 \rho_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^0 C_1/\alpha_1 & \mu^0 C_1/\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^0 C_2/\alpha_2 & -\mu^0 C_2/\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^0 & \mu^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Une base de l'image  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  de cette matrice est donnée par l'ensemble des deux vecteurs :

$$I^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda^0/(\alpha_1\rho_1) \\ \lambda^0/(\alpha_2\rho_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu^0 C_1/\alpha_1 \\ \mu^0 C_2/\alpha_2 \\ -\mu^0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Ensuite, l'inversion de la matrice  $S = [dM_{\mathbf{u}}^1, \dots, dM_{\mathbf{u}}^5, I^1, I^2]$  donne la matrice de projection sur le noyau  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1\rho_1}{\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2} & \frac{\alpha_2\rho_2}{\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_2 C_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

La matrice  $PA(M(\mathbf{u})).dM_{\mathbf{u}}$  est donc égale à :

$$PA(M(\mathbf{u})).dM_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & \frac{1}{\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & u & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1\alpha_2(C_2 - C_1)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 0 & u \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Et finalement, on obtient un modèle réduit à cinq équations écrit en termes de variables entropiques  ${}^t(s_1, s_2, \mathbf{u}, p, \alpha_2)$  :

$$\frac{Ds_1}{Dt} = 0 \quad (3.38.1)$$

$$\frac{Ds_2}{Dt} = 0 \quad (3.38.2)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \quad (3.38.3)$$

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho\hat{a}^2\text{div}\mathbf{u} = 0 \quad (3.38.4)$$

$$\frac{D\alpha_2}{Dt} = \alpha_1\alpha_2 \frac{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \text{div}\mathbf{u} \quad (3.38.5)$$

où nous avons introduit la notation  $D\phi/Dt = \partial\phi/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi$ , la densité de mélange  $\rho$  définie par :

$$\rho = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \quad (3.39)$$

et la vitesse du son moyenne  $\hat{a}$  définie par la formule suivante (qui représente la courbe de la vitesse du son de Wallis, bien connue dans l'étude des écoulements diphasiques [18]) :

$$\frac{1}{\rho\hat{a}^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\rho_k a_k^2} \quad (3.40)$$

Il faut noter cependant que ce système (3.38) n'est pas nouveau. En effet, la transformation permettant de passer des variables  ${}^t(s_1, s_2, \mathbf{u}, p, \alpha_2)$  aux variables  ${}^t(s_1, s_2, \mathbf{u}, p, Y_2)$  (où  $Y_2 = \alpha_2 \rho_2 / \rho$  représente la fraction massique de la phase 2) est inversible, et on montre que le système (3.38) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{Ds_1}{Dt} = 0 \quad (3.41.1)$$

$$\frac{Ds_2}{Dt} = 0 \quad (3.41.2)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (3.41.3)$$

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho \hat{a}^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (3.41.4)$$

$$\frac{DY_2}{Dt} = 0 \quad (3.41.5)$$

Et ce système a déjà été obtenu en variables  ${}^t(s_1, s_2, \mathbf{u}, \rho, Y_2)$  dans [64]. Il a aussi été testé pour des problèmes de détonations dans [81], avec des termes de transfert de masse additionnels.

Pour conclure ce paragraphe, on notera que ce système (3.38) peut s'écrire en termes de variables conservatives  ${}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho \mathbf{u}, \rho e, \alpha_2)$  sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}) = 0 \quad (3.42.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}) = 0 \quad (3.42.2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (3.42.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e + p) \mathbf{u} = 0 \quad (3.42.4)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k a_k^2} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (3.42.5)$$

où  $e$  représente l'énergie totale spécifique de mélange  $e = \varepsilon + \mathbf{u}^2/2$  tandis que l'énergie interne spécifique de mélange  $\varepsilon$  est donnée par la relation  $\rho \varepsilon = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \varepsilon_k(p, \rho_k)$ .

**Remarque :** Dans [45] et [2], un modèle Eulérien pour la simulation de problèmes d'interfaces entre fluides compressibles a été introduit. Ce modèle que l'on appellera par la suite "modèle de transport à cinq équations" est très semblable à (3.42) mis à part que l'équation (3.42.5) gouvernant l'évolution de la fraction volumique est simplement une équation de transport qui s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_2 = 0 \quad (3.43)$$

Au regard de l'équation (3.42.5) et étant donné que pour les problèmes d'interfaces, on s'attend à ce que le produit  $\alpha_1 \alpha_2$  soit petit, la différence entre les deux modèles semble insignifiante. Cependant nous proposons de montrer que les propriétés mathématiques sont assez différentes. En particulier le modèle que nous appelons "modèle de transport à cinq équations" de [45] et [2] n'est pas compatible avec le fait que les dérivées matérielles des entropies soient nulles. Ceci peut être compris assez facilement en observant la forme (3.38) du modèle réduit. Mais ceci peut également être montré en écrivant l'égalité des pressions de chaque phase :

$$p_1(s_1, \rho_1) = p_2(s_2, \rho_2) \quad (3.44)$$

En prenant la dérivée matérielle de cette dernière expression, on obtient :

$$\left( \frac{\partial p_1}{\partial s_1} \right)_{\rho_1} \frac{Ds_1}{Dt} - \left( \frac{\partial p_2}{\partial s_2} \right)_{\rho_2} \frac{Ds_2}{Dt} = \left( \frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} \right)_{s_2} \frac{D\rho_2}{Dt} - \left( \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right)_{s_1} \frac{D\rho_1}{Dt} \quad (3.45)$$

En utilisant à présent les équations (3.42.1)-(3.42.2), il vient :

$$\frac{D\rho_k}{Dt} = \frac{1}{\alpha_k} \left[ \frac{D\alpha_k \rho_k}{Dt} - \rho_k \frac{D\alpha_k}{Dt} \right] = -\frac{1}{\alpha_k} [\alpha_k \rho_k \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_k \frac{D\alpha_k}{Dt}] \quad (3.46)$$

et on obtient à partir de l'équation (3.45) :

$$\left( \frac{\partial p_1}{\partial s_1} \right)_{\rho_1} \frac{Ds_1}{Dt} - \left( \frac{\partial p_2}{\partial s_2} \right)_{\rho_2} \frac{Ds_2}{Dt} + (\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2) \operatorname{div} \mathbf{u} = \left( \frac{\rho_2 a_2^2}{\alpha_2} + \frac{\rho_1 a_1^2}{\alpha_1} \right) \frac{D\alpha_2}{Dt} \quad (3.47)$$

qui montre que l'équation (3.42.5) est une conséquence directe des hypothèses  $Ds_1/Dt = Ds_2/Dt = 0$ . En revanche, l'hypothèse  $D\alpha_2/Dt = 0$  n'est pas compatible avec ces dernières relations. En fait, l'équation (3.47) montre que si l'on a  $D\alpha_2/Dt = 0$ , alors l'évolution des entropies phasiques est régie par :

$$\left( \frac{\partial p_1}{\partial s_1} \right)_{\rho_1} \frac{Ds_1}{Dt} - \left( \frac{\partial p_2}{\partial s_2} \right)_{\rho_2} \frac{Ds_2}{Dt} = (\rho_2 a_2^2 - \rho_1 a_1^2) \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (3.48)$$

### 3.2.5 Modèle à l'ordre $\varepsilon$

Dans ce paragraphe, nous proposons de poursuivre l'analyse asymptotique du modèle à sept équations, décrite précédemment, jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$ . Le but est d'obtenir un modèle réduit à cinq équations contenant une pression  $p^0$  et une vitesse  $\mathbf{u}^0$  à l'ordre 0, plus éventuellement des termes d'ordre supérieur en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  modélisant un déséquilibre des pressions et des vitesses. On conserve les notations  $C_k = \rho_k a_k^2$  et  $C_{k\mathbb{I}} = \rho_k a_{k\mathbb{I}}^2$  pour les impédances acoustiques, ainsi que  $Y_k = \alpha_k \rho_k / \rho$  pour les fractions massiques. Comme précédemment, on s'intéresse à des situations où les temps de relaxations sont infiniment petits par rapport aux autres temps caractéristiques de l'écoulement. Ainsi, on pose  $\lambda = \lambda^0 / \varepsilon$  et  $\mu = \mu^0 / \varepsilon$  où  $\lambda^0$  et  $\mu^0$  sont  $\mathcal{O}(1)$  et on analyse le cas  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dans le paragraphe précédent, l'analyse a été réalisée avec le système écrit en variables entropiques  $\mathbf{U} = {}^t(s_k, u_k, p_k, \alpha_2)$ . Pour poursuivre l'analyse jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$ , nous avons trouvé plus simple de travailler avec le système écrit en variables primitives  $\mathbf{U} = {}^t(\alpha_k \rho_k, u_k, p_k, \alpha_2)$  où les équations de conservation de masse ne contiennent pas de termes sources. En se référant alors aux résultats du paragraphe 3.2.2, le modèle à sept équations en variables  $\mathbf{U} = {}^t(\alpha_k \rho_k, u_k, p_k, \alpha_2)$ , s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{R(\mathbf{U})}{\varepsilon} \quad (3.49)$$

où la matrice  $A(\mathbf{U})$  est donnée par :

$$A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \alpha_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \alpha_2 \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 1/\rho_1 & 0 & (p_{\mathbb{I}} - p_1)/(\alpha_1 \rho_1) \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 1/\rho_2 & -(p_{\mathbb{I}} - p_2)/(\alpha_2 \rho_2) \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & u_1 & 0 & C_{1\mathbb{I}}(u_{\mathbb{I}} - u_1)/\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & u_2 & -C_{2\mathbb{I}}(u_{\mathbb{I}} - u_2)/\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{\mathbb{I}} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

et où le vecteur du terme source de relaxation  $R(\mathbf{U})$  s'écrit :

$$R(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda^0(u_2 - u_1)/(\alpha_1 \rho_1) \\ -\lambda^0(u_2 - u_1)/(\alpha_2 \rho_2) \\ \mu^0 C_{1\mathbb{I}}(p_2 - p_1)/\alpha_1 + \lambda^0(u_{\mathbb{I}} - u_1)(u_2 - u_1)/(\alpha_1 \rho_1 \kappa_1) \\ -\mu^0 C_{2\mathbb{I}}(p_2 - p_1)/\alpha_2 - \lambda^0(u_{\mathbb{I}} - u_2)(u_2 - u_1)/(\alpha_2 \rho_2 \kappa_2) \\ \mu^0(p_2 - p_1) \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

On s'attend à trouver des solutions proches du sous-ensemble de  $\mathbb{R}^7$  défini par  $\mathcal{E} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^7; R(\mathbf{U}) = 0\}$ . On sait que cet ensemble est une sous variété de dimension 5. De plus, on connaît explicitement une paramétrisation  $M$  de cet équilibre  $\mathcal{E}$ . En effet, on définira la transformation  $M : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbf{U} \in \mathbb{R}^7$  par  $M(\mathbf{u}) = {}^t(\alpha_k^0 \rho_k^0, u^0, u^0, p^0, p^0, \alpha_2^0)$  où  $\mathbf{u} = {}^t(\alpha_k^0 \rho_k^0, u^0, p^0, \alpha_2^0)$ .

La matrice Jacobienne de la transformation  $M$  est donnée par :

$$dM_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

On rappelle que l'on a posé  $C_k = \rho_k a_k^2$  et  $C_{k\Gamma} = \rho_k a_{k\Gamma}^2$  pour les impédances acoustiques où  $a_k$  et  $a_{k\Gamma}$  sont respectivement la vitesse du son de la phase  $k$  et la vitesse du son de la phase  $k$  à l'interface. Dans cette analyse, les pressions à l'ordre 0 tendent vers une pression commune  $p^0$ . Par conséquent, la valeur de la pression à l'interface  $p_\Gamma$  à l'ordre 0 sera aussi égale à cette valeur  $p^0$  et on en déduit pour les impédances acoustiques que  $C_{k\Gamma}^0 = C_k^0$ . La Jacobienne du terme source évaluée sur la Maxwellienne  $M(\mathbf{u})$  s'écrit donc :

$$R'(M(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^0/(\alpha_1^0 \rho_1^0) & \lambda^0/(\alpha_1^0 \rho_1^0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^0/(\alpha_2^0 \rho_2^0) & -\lambda^0/(\alpha_2^0 \rho_2^0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^0 C_1^0/\alpha_1^0 & \mu^0 C_1^0/\alpha_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^0 C_2^0/\alpha_2^0 & -\mu^0 C_2^0/\alpha_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^0 & \mu^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Une base de l'image  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  de cette matrice est l'ensemble des deux vecteurs :

$$I^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda^0/(\alpha_1^0 \rho_1^0) \\ \lambda^0/(\alpha_2^0 \rho_2^0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu^0 C_1^0/\alpha_1^0 \\ \mu^0 C_2^0/\alpha_2^0 \\ -\mu^0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Et l'inversion de la matrice  $S = [dM_{\mathbf{u}}^1, \dots, dM_{\mathbf{u}}^5, I^1, I^2]$  donne les matrices de projections  $P$  et  $Q$  respectivement sur le noyau  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  et l'image  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  de l'opérateur :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1^0 & Y_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1^0 C_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} & \frac{\alpha_2^0 C_1^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_1^0 \alpha_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} & \frac{\alpha_1^0 \alpha_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\rho^0 Y_1^0 Y_2^0}{\lambda^0} & \frac{\rho^0 Y_1^0 Y_2^0}{\lambda^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_1^0 \alpha_2^0 / \mu_0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} & \frac{\alpha_1^0 \alpha_2^0 / \mu_0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Comme au paragraphe précédent, on cherche donc des solutions de (3.49) sous forme d'un développement asymptotique :  $\mathbf{U} = M(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{V}$ . On connaît la paramétrisation  $M(\mathbf{u}) = {}^t(\alpha_k^0 \rho_k^0, u^0, u^0, p^0, p^0, \alpha_2^0)$  mais il nous faut encore définir le vecteur des fluctuations  $\mathbf{V}$ .

Pour cela, nous allons à présent chercher ce vecteur  $\mathbf{V} = {}^t((\alpha_1\rho_1)^1, (\alpha_2\rho_2)^1, u_1^1, u_2^1, p_1^1, p_2^1, \alpha_2^1)$  tel que  $\mathbf{V} \in \text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$ . On en explique ci-dessous les raisons, qui sont au cœur des développements de type Chapman-Enskog.

**Proposition 1 :** Soit  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$  un vecteur de la forme  $\mathbf{U} = M(\mathbf{u}) + \varepsilon\mathbf{U}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Il existe alors  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{V} \in \text{Rng}(R'(M(\mathbf{v})))$  tels que :

$$\mathbf{U} = M(\mathbf{v}) + \varepsilon\mathbf{V} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.57)$$

*Preuve :* Notons tout d'abord qu'il existe  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N-n}$  tels que :

$$\mathbf{U}_1 = dM_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{z} + I_{N-n}\mathbf{w} \quad (3.58)$$

Ainsi en utilisant cette décomposition, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= M(\mathbf{u}) + \varepsilon\mathbf{U}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \mathbf{U} &= M(\mathbf{u}) + \varepsilon(dM_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{z} + I_{N-n}\mathbf{w}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \mathbf{U} &= M(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{z}) + \varepsilon I_{N-n}\mathbf{w} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.59)$$

et la conclusion de la preuve est alors possible si l'on considère que l'espace vectoriel  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{z})))$  correspond simplement à une perturbation d'ordre  $\varepsilon$  de l'espace  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$ .

D'après la proposition 1, on cherche donc  $\mathbf{V} \in \text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$ . Grâce aux matrices de projections  $P$  et  $Q$ , on décompose le vecteur des fluctuations autour de l'état d'équilibre sous la forme :

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^5 \mathbf{v}^j dM_{\mathbf{u}}^j + \sum_{j=1}^2 \mathbf{w}^j I^j \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = S^{-1}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} P\mathbf{V} \\ Q\mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Après des calculs algébriques, on obtient les expressions suivantes pour la décomposition du vecteur  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 \mathbf{v}^j dM_{\mathbf{u}}^j &= \begin{bmatrix} (\alpha_1\rho_1)^1 \\ (\alpha_2\rho_2)^1 \\ Y_1^0 u_1^1 + Y_2^0 u_2^1 \\ Y_1^0 u_1^1 + Y_2^0 u_2^1 \\ (\alpha_1^0 C_2^0 p_1^1 + \alpha_2^0 C_1^0 p_2^1) / (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0) \\ (\alpha_1^0 C_2^0 p_1^1 + \alpha_2^0 C_1^0 p_2^1) / (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0) \\ \alpha_1^0 \alpha_2^0 (p_2^1 - p_1^1) / (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0) + \alpha_2^1 \end{bmatrix} \\ \sum_{j=1}^2 \mathbf{w}^j I^j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Y_2^0 (u_2^1 - u_1^1) \\ Y_1^0 (u_2^1 - u_1^1) \\ -\alpha_2^0 C_1^0 (p_2^1 - p_1^1) / (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0) \\ \alpha_1^0 C_2^0 (p_2^1 - p_1^1) / (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0) \\ -\alpha_1^0 \alpha_2^0 (p_2^1 - p_1^1) / (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Et puisque  $\mathbf{V} \in \text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$ , on a alors  $\sum_{j=1}^5 \mathbf{v}^j dM_{\mathbf{u}}^j = 0$  qui donne les quatre relations suivantes :

$$\begin{cases} (\alpha_k \rho_k)^1 & = 0 & (3.62.1) \\ Y_1^0 u_1^1 + Y_2^0 u_2^1 & = 0 & (3.62.2) \\ \alpha_1^0 C_2^0 p_1^1 + \alpha_2^0 C_1^0 p_2^1 & = 0 & (3.62.3) \\ \frac{\alpha_1^0 \alpha_2^0 (p_2^1 - p_1^1)}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} + \alpha_2^1 & = 0 & (3.62.4) \end{cases}$$



On cherche donc des solutions de (3.49) sous forme d'un développement asymptotique :  $\mathbf{U} = M(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{V}$ . En introduisant cette expression dans le système (3.49), on obtient à l'ordre 0 :

$$\frac{\partial M(\mathbf{u})}{\partial t} + A(M(\mathbf{u})) \frac{\partial M(\mathbf{u})}{\partial x} - R'(M(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{V} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.63)$$

qui s'écrit sous forme développée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k^0 \rho_k^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k^0 \rho_k^0 u^0) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \frac{\partial u^0}{\partial t} + u^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_k^0} \frac{\partial p^0}{\partial x} - \frac{\lambda^0}{\alpha_k^0 \rho_k^0} (u_{k'}^1 - u_k^1) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \frac{\partial p^0}{\partial t} + u^0 \frac{\partial p^0}{\partial x} + C_k^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} - \frac{\mu^0 C_k^0}{\alpha_k^0} (p_{k'}^1 - p_k^1) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial x} - \mu^0 (p_2^1 - p_1^1) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.64)$$

En manipulant les équations sur les vitesses et les pressions, on en déduit les termes de relaxation à l'ordre  $\varepsilon$  :

$$\lambda^0 (u_2^1 - u_1^1) = \rho^0 Y_1^0 Y_2^0 \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} \quad (3.65.1)$$

$$\mu^0 (p_2^1 - p_1^1) = \alpha_1^0 \alpha_2^0 \frac{C_1^0 - C_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad (3.65.2)$$

On peut alors combiner les relations de projection (3.62.1)-(3.62.2)-(3.62.3)-(3.62.4) avec les expressions (3.65.1)-(3.65.2) des termes de relaxations et on obtient les fluctuations des densités, des vitesses, des pressions et des fractions volumiques de chaque phase  $k$ , à l'ordre  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} (\alpha_1 \rho_1)^1 = (\alpha_2 \rho_2)^1 = 0 \end{cases} \quad (3.66.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1^0 \rho_1^0 u_1^1 = -\alpha_2^0 \rho_2^0 u_2^1 = -\frac{(\rho^0 Y_1^0 Y_2^0)^2}{\lambda^0} \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} \end{cases} \quad (3.66.2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1^0 C_2^0 p_1^1 = -\alpha_2^0 C_1^0 p_2^1 = -\frac{(\alpha_1^0 \alpha_2^0)^2 C_1^0 C_2^0 (C_1^0 - C_2^0)}{\mu^0 (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0)^2} \frac{\partial u^0}{\partial x} \end{cases} \quad (3.66.3)$$

$$\begin{cases} \alpha_2^1 = -\alpha_1^1 = -\frac{(\alpha_1^0 \alpha_2^0)^2 (C_1^0 - C_2^0)}{\mu^0 (\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0)^2} \frac{\partial u^0}{\partial x} \end{cases} \quad (3.66.4)$$

On veut maintenant utiliser ces résultats pour écrire le modèle limite jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$  et en variables conservatives  ${}^t(\alpha_k^0 \rho_k^0, \rho^0 u^0, \rho^0 e^0, \alpha_2^0)$ . Pour cela, on revient à la forme quasi-conservative (3.1) du modèle complet à sept équations. On rappelle que  $\rho^0 = \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0$  est la densité de mélange à l'ordre 0 et que  $e^0$  représente l'énergie totale spécifique de mélange  $e^0 = \varepsilon^0 + (\mathbf{u}^0)^2/2$  tandis que l'énergie interne spécifique de mélange  $\varepsilon^0$  est donnée par la relation  $\rho^0 \varepsilon^0 = \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^0(p^0, \rho_k^0)$ .

En utilisant la relation (3.66.1) qui donne  $(\alpha_k \rho_k)^1 = 0$ , on peut écrire les équations de conservation de masse jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$  sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k^0 \rho_k^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k^0 \rho_k^0 u^0) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.67)$$

Ensuite, la somme des deux équations de quantité de mouvement donne l'équation suivante pour la quantité de mouvement globale  $\rho^0 u^0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 u^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 (u^0)^2 + p^0) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 \right) \\ + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 u^0 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p_k^1 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^1 p^0 \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.68)$$

De même, en sommant les deux équations de conservation des énergies totales phasiques, on obtient l'équation gouvernant l'évolution de l'énergie globale  $\rho^0 e^0$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 e^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 e^0 + p^0)u^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^1 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 u^0 \right) \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^0 u_k^1 \right) + \frac{3\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 (u^0)^2 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^1 u^0 \right) \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^1 p^0 u^0 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p_k^1 u^0 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p^0 u_k^1 \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

On cherche ensuite à éliminer les termes de dérivées temporelles faisant intervenir les énergies internes phasiques d'ordre  $\varepsilon$ . Pour cela, on utilise les équations (3.6) gouvernant l'évolution des énergies internes phasiques, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \varepsilon_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k \varepsilon_k u_k) + \alpha_k p_k \frac{\partial u_k}{\partial x} &= p_{\text{I}}(u_{\text{I}} - u_k) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \\ &+ \mu p_{\text{I}}(p_{k'} - p_k) + \lambda(u_{\text{I}} - u_k)(u_{k'} - u_k) \end{aligned} \quad (3.70)$$

En sommant ces dernières équations pour les deux phases, on obtient à l'ordre  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^1 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^0 u_k^1 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^1 u^0 \right) \\ & = -\varepsilon \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k^1 p^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} + \alpha_k^0 p_k^1 \frac{\partial u^0}{\partial x} + \alpha_k^0 p^0 \frac{\partial u_k^1}{\partial x} \right) - \varepsilon p^0 (u_2^1 - u_1^1) \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial x} + \varepsilon \lambda^0 (u_2^1 - u_1^1)^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

En remarquant alors que  $-\varepsilon p^0 (u_2^1 - u_1^1) \nabla \alpha_2^0 = -\varepsilon \sum_{k=1}^2 p^0 u_k^1 \nabla \alpha_k^0$ , cette dernière équation peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^1 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^0 u_k^1 \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 \varepsilon_k^1 u^0 \right) \\ & = -\varepsilon \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k^1 p^0 \frac{\partial u^0}{\partial x} + \alpha_k^0 p_k^1 \frac{\partial u^0}{\partial x} + p^0 \frac{\partial \alpha_k^0 u_k^1}{\partial x} \right) + \varepsilon \lambda^0 (u_2^1 - u_1^1)^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Enfin, en introduisant cette équation (3.72) dans (3.69), on réécrit l'équation d'énergie globale sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 e^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 e^0 + p^0)u^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 u^0 \right) + \frac{3\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 (u^0)^2 \right) \\ & + \varepsilon u^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^1 p^0 \right) + \varepsilon u^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p_k^1 \right) + \varepsilon \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k^0 u_k^1 \frac{\partial p^0}{\partial x} \right) + \varepsilon \lambda^0 (u_2^1 - u_1^1)^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Et en remarquant que  $\sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 u_k^1 \nabla p^0 + \lambda^0 (u_2^1 - u_1^1)^2 = 0$ , d'après (3.66.2) et (3.65.1), l'équation d'énergie peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 e^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 e^0 + p^0)u^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 u^0 \right) + \frac{3\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 (u^0)^2 \right) \\ & + \varepsilon u^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p_k^1 \right) + \varepsilon u^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k^1 p^0 \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Enfin, l'équation de fermeture sur la fraction volumique s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha_2^0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \alpha_2^1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial x} + \varepsilon u_1^1 \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial x} + \varepsilon u^0 \frac{\partial \alpha_2^1}{\partial x} - \mu^0 (p_2^1 - p_1^1) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.75)$$

Pour simplifier ces équations, on utilise les résultats (3.62) de la projection de  $\mathbf{V}$  sur le noyau.

En particulier, la relation (3.62.2) qui s'écrit  $\sum_{k=1}^2 Y_k^0 u_k^1 = 0$  entraîne  $\sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1 = 0$ . De plus, la vitesse d'interface a été choisie telle que  $u_1 = \sum_{k=1}^2 Y_k u_k$ . On en déduit que la vitesse d'interface à l'ordre  $\varepsilon$  est donc nulle.

En injectant ces deux résultats dans les équations obtenues, le système limite jusqu'aux ordres en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k^0 \rho_k^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k^0 \rho_k^0 u^0) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k^0 \rho_k^0 u_k^1) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 u^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 (u^0)^2 + p^0) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p_k^1) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\sum_{k=1}^2 \alpha_k^1 p^0) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 e^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 e^0 + p^0) u^0 + \varepsilon u^0 \frac{\partial}{\partial x}(\sum_{k=1}^2 \alpha_k^0 p_k^1) + \varepsilon u^0 \frac{\partial}{\partial x}(\sum_{k=1}^2 \alpha_k^1 p^0) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \alpha_2^1}{\partial t} + u^0 \frac{\partial \alpha_2^0}{\partial x} + \varepsilon u^0 \frac{\partial \alpha_2^1}{\partial x} - \mu^0 (p_2^1 - p_1^1) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Et finalement, en introduisant les formules (3.66.2)-(3.66.3)-(3.66.4) obtenues pour les fluctuations des vitesses, des pressions et de la fraction volumique, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1^0 \rho_1^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1^0 \rho_1^0 u^0) - \frac{\varepsilon}{\lambda^0} \frac{\partial}{\partial x} \left( (\rho^0 Y_1^0 Y_2^0)^2 \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.77.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2^0 \rho_2^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2^0 \rho_2^0 u^0) - \frac{\varepsilon}{\lambda^0} \frac{\partial}{\partial x} \left( (\rho^0 Y_1^0 Y_2^0)^2 \left( \frac{1}{\rho_2^0} - \frac{1}{\rho_1^0} \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.77.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 u^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 (u^0)^2 + p^0) - \frac{\varepsilon}{\mu^0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \alpha_1^0 \alpha_2^0 \frac{C_1^0 - C_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} \right)^2 \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.77.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^0 e^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho^0 e^0 + p^0) u^0 - \frac{\varepsilon}{\mu^0} u^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \alpha_1^0 \alpha_2^0 \frac{C_1^0 - C_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} \right)^2 \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.77.4)$$

$$\frac{D^0 \alpha_2^0}{Dt} - \alpha_1^0 \alpha_2^0 \frac{C_1^0 - C_2^0}{\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0} \frac{\partial u^0}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\mu^0} \frac{D^0}{Dt} \left( \frac{(\alpha_1^0 \alpha_2^0)^2 (C_1^0 - C_2^0)}{(\alpha_1^0 C_2^0 + \alpha_2^0 C_1^0)^2} \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.77.5)$$

où  $D^0/Dt = \partial/\partial t + u^0 \cdot \nabla$  représente la dérivée totale ou Lagrangienne à l'ordre 0.

Ce modèle limite à l'ordre  $\varepsilon$  est intéressant car même si le vecteur des variables contient une unique vitesse  $u^0$  et une unique pression  $p^0$ , il contient implicitement à travers des termes diffusifs un déséquilibre des vitesses et des pressions des deux phases. De plus, les termes de diffusion dans les équations de conservation de quantité de mouvement et d'énergie ont un signe négatif qui donne un effet stabilisant au système. Pour avoir cette même propriété dans les équations de conservation de la masse, on pourrait utiliser au lieu des deux équations phasiques, l'équation phasique donnant  $(1/\rho_k^0 - 1/\rho_{k'}^0) > 0$  couplée à l'équation de conservation de la densité de mélange  $\partial \rho / \partial t + \partial(\rho^0 u^0) / \partial x = 0$  qui ne comporte pas de terme diffusif.

### 3.3 Etude mathématique

On réalise ici l'étude mathématique du modèle réduit à cinq équations c'est-à-dire celui obtenu au paragraphe 3.2.4, en négligeant les termes d'ordre  $\varepsilon$ . Pour des solutions suffisamment régulières, l'étude mathématique du système peut être effectuée sur le système écrit à partir de n'importe quel vecteur de variables indépendantes. Ici nous avons choisi le vecteur  ${}^t(s_1, s_2, \mathbf{u}, p, Y_2)$  où  $Y_k = \alpha_k \rho_k / \rho$  représentent les fractions massiques et le modèle réduit à cinq équations peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{Ds_1}{Dt} = 0 \quad (3.78.1)$$

$$\frac{Ds_2}{Dt} = 0 \quad (3.78.2)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (3.78.3)$$

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho \hat{a}^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (3.78.4)$$

$$\frac{DY_2}{Dt} = 0 \quad (3.78.5)$$

où  $\rho$  est la densité de mélange et  $\hat{a}$  la vitesse du son, définies dans le paragraphe 3.2.4. D'autre part, il est clair que le système est invariant par rotation. Nous pouvons alors par souci de clarté, mener l'analyse pour le cas monodimensionnel.

#### 3.3.1 Hyperbolicité

Si on pose  $\mathbf{q} = {}^t(s_1, s_2, u, p, Y_2)$ , alors pour des solutions suffisamment régulières, le système (3.78) s'écrit en une dimension d'espace sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0 \quad (3.79)$$

où la matrice  $A(\mathbf{q})$  est définie par :

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \hat{a}^2 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

L'équation caractéristique de cette matrice  $A(\mathbf{q})$  s'écrit  $(u - \lambda)^3((u - \lambda)^2 - \hat{a}^2) = 0$ , et on obtient trois valeurs propres réelles et distinctes données par :

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{q}) = u - \hat{a} \\ \lambda_2(\mathbf{q}) = \lambda_3(\mathbf{q}) = \lambda_4(\mathbf{q}) = u \\ \lambda_5(\mathbf{q}) = u + \hat{a} \end{cases} \quad (3.81)$$

où  $\hat{a}$  est donné par la relation (3.40). Puisque  $\hat{a}$  est réel, toutes les valeurs propres de  $A(\mathbf{q})$  le sont également. L'expression (3.40) dans laquelle l'impédance acoustique moyenne  $\rho \hat{a}^2$  apparaît comme une moyenne harmonique des impédances phasiques implique que la vitesse du son dans un mélange peut devenir plus petite que les deux vitesses du son des fluides purs. Ce fait est très bien connu dans la littérature (voir par exemple [64] ou [18]) et il peut être également observé expérimentalement.

Les vecteurs propres à droite  $r_i(\mathbf{q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$ ) qui vérifient la relation  $A(\mathbf{q})r_i(\mathbf{q}) = \lambda_i(\mathbf{q})r_i(\mathbf{q})$  peuvent être choisis comme :

$$r_1(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{a} \\ -\rho\hat{a}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_2(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_3(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_4(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_5(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{a} \\ \rho\hat{a}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

On notera aussi par  $l_i(\mathbf{q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$ ) les vecteurs propres à gauche qui vérifient la relation  ${}^t A(\mathbf{q})l_i(\mathbf{q}) = \lambda_i(\mathbf{q})l_i(\mathbf{q})$ . Après normalisation des vecteurs à droite et à gauche pour avoir  ${}^t l_i(\mathbf{q}) \cdot r_j(\mathbf{q}) = \delta_{ij}$ , on obtient :

$$l_1(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2\hat{a} \\ -1/2\rho\hat{a}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_4(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad l_5(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2\hat{a} \\ 1/2\rho\hat{a}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

Le système est alors clairement hyperbolique puisque la matrice  $A(\mathbf{q})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et que ses vecteurs propres engendrent l'espace vectoriel complet  $\mathbb{R}^5$ . On notera aussi que cette hyperbolicité est inconditionnelle étant donné que les vitesses du son de chaque fluide sont réelles.

**Remarque :** Pour le “modèle de transport à cinq équations” de [45], [2], la vitesse moyenne du son s'écrit :

$$\xi\hat{a}^2 = \sum_{k=1}^2 \xi_k Y_k a_k^2 \quad (3.84)$$

où  $\xi_k = (\partial \rho_k \varepsilon_k / \partial p_k)_{\rho_k}$  et  $\xi = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \xi_k$ . Ainsi, comme pour la formule (3.40), la vitesse du son du mélange apparaît comme une moyenne des vitesses du son phasiques. Cependant, les moyennes sont différentes pour chaque modèle. Dans des cas extrêmes de fluides réels, les coefficients  $\xi_k$  peuvent être négatifs et la formule (3.84) ne garantit pas que la vitesse du son du mélange reste réelle alors que la formule (3.40) donne toujours une vitesse du son réelle.

La Figure 3.1 trace pour les deux modèles, la vitesse du son d'un mélange d'air et d'eau sous pression atmosphérique. Celles-ci sont tracées par rapport à la fraction volumique d'air dans le mélange et on peut observer une très large différence entre les deux systèmes.

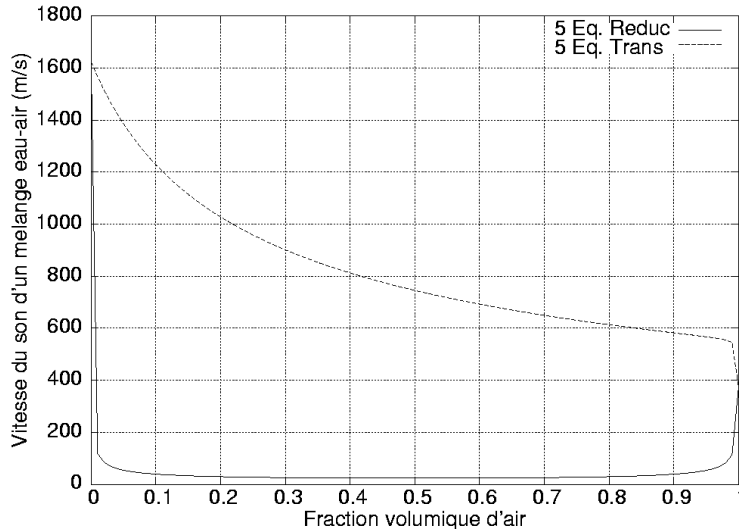


FIG. 3.1 – Courbe de la vitesse du son pour un mélange eau-air sous pression atmosphérique. Modèle réduit à 5 équations (traits pleins) et modèle de transport à 5 équations (traits pointillés).

### 3.3.2 Existence d'une entropie mathématique

Puisque les deux entropies phasiques  $s_1, s_2$  vérifient les équations (3.78.1)-(3.78.2), l'existence d'une entropie mathématique est évidente. Le choix le plus simple est de définir une entropie de mélange  $S$  par :

$$\rho S = \alpha_1 \rho_1 s_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2 = \rho Y_1 s_1 + \rho Y_2 s_2 \quad (3.85)$$

et on a alors :

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \text{div}(\rho S \mathbf{u}) = 0 \quad (3.86)$$

### 3.3.3 Structure des ondes

Dans ce paragraphe, on analyse la structure mathématique des ondes présentes dans ce modèle réduit. L'objectif est de montrer que le système ne contient que des champs vraiment non linéaires ou linéairement dégénérés (voir par exemple [23] pour la définition de ces notions). Nous commençons donc par les champs caractéristiques associés aux ondes  $u - \hat{a}$  et  $u + \hat{a}$ .

**Proposition 1 :** Les champs caractéristiques associés aux ondes  $\lambda_1(\mathbf{q}) = u - \hat{a}$  et  $\lambda_5(\mathbf{q}) = u + \hat{a}$  sont vraiment non linéaires c'est-à-dire que nous avons  $\nabla_{\mathbf{q}} \lambda_1(\mathbf{q}) \cdot r_1(\mathbf{q}) \neq 0$  et  $\nabla_{\mathbf{q}} \lambda_5(\mathbf{q}) \cdot r_5(\mathbf{q}) \neq 0$  pour tout vecteur d'état admissible  $\mathbf{q}$ .

*Preuve :* On peut déduire des valeurs propres (3.81) et des vecteurs propres à droite (3.82) la relation :

$$\nabla_{\mathbf{q}} \lambda_1(\mathbf{q}) \cdot r_1(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \lambda_5(\mathbf{q}) \cdot r_5(\mathbf{q}) = \hat{a} + \rho \hat{a}^2 \frac{\partial \hat{a}}{\partial p} \quad (3.87)$$

La démonstration consiste donc à montrer que le terme  $\hat{a} + \rho \hat{a}^2 \partial \hat{a} / \partial p$  est toujours non nul et la difficulté principale réside dans l'évaluation de la partie  $\partial \hat{a} / \partial p$ . Ainsi réécrivons tout d'abord la densité de mélange (3.39) en termes de fractions massiques  $Y_k$ , sous la forme :

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{\rho_k} \quad (3.88)$$

ainsi que la vitesse du son (3.40) sous la forme :

$$\frac{1}{(\rho \hat{a})^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{(\rho_k a_k)^2} \quad (3.89)$$

Considérons à présent la différentiation suivante de la vitesse du son  $\hat{a}$ , pour toute variable  $\phi$  :

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial \phi} = -\hat{a} \left[ \frac{(\rho \hat{a})^2}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{(\rho \hat{a})^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] \quad (3.90)$$

En utilisant cette relation (3.90) pour  $\phi = p$  et en introduisant les expressions (3.88)-(3.89) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{a} + \rho \hat{a}^2 \frac{\partial \hat{a}}{\partial p} &= \hat{a} - \rho \hat{a}^3 \left[ \frac{(\rho \hat{a})^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left( \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{(\rho_k a_k)^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial p} \left( \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{\rho_k} \right) \right] \\ \hat{a} + \rho \hat{a}^2 \frac{\partial \hat{a}}{\partial p} &= \hat{a} - \rho \hat{a}^3 \left[ \frac{(\rho \hat{a})^2}{2} \sum_{k=1}^2 Y_k \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{(\rho_k a_k)^2} \right) - \rho \sum_{k=1}^2 Y_k \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\rho_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

En introduisant ensuite les coefficients  $\psi_k = (\partial a_k / \partial p_k)_{s_k}$  pour chaque phase et en rappelant que la définition des vitesses du son phasiques implique  $(\partial \rho_k / \partial p_k)_{s_k} = 1/a_k^2$ , on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \hat{a} + \rho \hat{a}^2 \frac{\partial \hat{a}}{\partial p} &= \hat{a} - \rho \hat{a}^3 \left[ -(\rho \hat{a})^2 \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k (1 + \rho_k a_k \psi_k)}{\rho_k^3 a_k^4} + \rho \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{(\rho_k a_k)^2} \right] \\ \hat{a} + \rho \hat{a}^2 \frac{\partial \hat{a}}{\partial p} &= \hat{a} - \rho \hat{a}^3 \left[ -(\rho \hat{a})^2 \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k (1 + \rho_k a_k \psi_k)}{\rho_k^3 a_k^4} + \frac{1}{\rho \hat{a}^2} \right] \\ \hat{a} + \rho \hat{a}^2 \frac{\partial \hat{a}}{\partial p} &= \rho^3 \hat{a}^5 \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k (1 + \rho_k a_k \psi_k)}{\rho_k^3 a_k^4} \end{aligned} \quad (3.92)$$

En supposant enfin que  $\psi_k > 0$ , c'est-à-dire que la vitesse du son est fonction croissante de la pression, à entropie constante, on obtient  $(1 + \rho_k a_k \psi_k) > 1$  et ceci termine la démonstration.

**Remarque :** On notera que pour des fluides régis par une loi d'état de type Stiffened-Gas ; la condition  $\psi_k > 0$  est équivalente à  $\gamma_k > 1$  où  $\gamma_k$  est le rapport des chaleurs spécifiques de la phase  $k$ .

Examinons à présent le champ caractéristique associé à l'onde  $u$ .

**Proposition 2 :** Le champ caractéristique associé à l'onde  $\lambda_2(\mathbf{q}) = \lambda_3(\mathbf{q}) = \lambda_4(\mathbf{q}) = u$  est linéairement dégénéré c'est-à-dire que l'on a  $\nabla_{\mathbf{q}} \lambda_i(\mathbf{q}) \cdot r_i(\mathbf{q}) = 0$  (pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ ) et pour tout vecteur d'état admissible  $\mathbf{q}$ .

*Preuve :* On peut déduire de l'expression des valeurs propres (3.81), la relation :

$$\nabla_{\mathbf{q}} \lambda_i(\mathbf{q}) \cdot r_i(\mathbf{q}) = (0, 0, 1, 0, 0) \cdot r_i(\mathbf{q}) \quad \text{pour } i \in \{2, 3, 4\} \quad (3.93)$$

En introduisant alors les vecteurs propres à droite (3.82) dans cette relation (3.93), on peut facilement voir que  $\nabla_{\mathbf{q}} \lambda_i(\mathbf{q}) \cdot r_i(\mathbf{q}) = 0$  (pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ ) et ceci complète la preuve.

### 3.3.4 Invariants de Riemann

Dans ce paragraphe on propose le calcul des invariants de Riemann du système. Commençons par le calcul des invariants de Riemann  $\omega$  associés à la valeur propre  $\lambda_1(\mathbf{q}) = u - \hat{a}$ . Le problème consiste donc à chercher les fonctions  $\omega$  telles que  $\nabla_{\mathbf{q}} \omega \cdot r_1(\mathbf{q}) = 0$ . Ainsi, si on recherche  $\omega$  tel que le gradient  $\nabla_{\mathbf{q}} \omega$  soit colinéaire à  ${}^t l_2(\mathbf{q})$ ,  ${}^t l_3(\mathbf{q})$  et  ${}^t l_4(\mathbf{q})$ , on obtient immédiatement que  $s_1$ ,  $s_2$  et  $Y_2$  sont trois invariants de Riemann associés à cette onde. Maintenant si on cherche  $\nabla_{\mathbf{q}} \omega$  colinéaire à  ${}^t (2\hat{a}l_5) = (0, 0, 1, 1/\rho\hat{a}, 0)$ , on en déduit le dernier invariant :

$$u + \int_p \frac{dp}{\rho \hat{a}} \quad (3.94)$$

On note que cette dernière expression pour  $\omega$  est formellement équivalente à l'invariant de Riemann  $u + 2a/(\gamma - 1)$  pour les gaz parfaits dans le cadre des équations d'Euler. Si on résume les résultats obtenus ; les invariants de Riemann associés à l'onde  $u - \hat{a}$  sont définis par :

$$\left\{ s_1, \quad s_2, \quad Y_2, \quad u + \int_p \frac{dp}{\rho \hat{a}} \right\} \quad (3.95)$$

Après des calculs similaires, on en déduit les invariants de Riemann associés à l'onde  $u + \hat{a}$  :

$$\left\{ s_1, \quad s_2, \quad Y_2, \quad u - \int_p \frac{dp}{\rho \hat{a}} \right\} \quad (3.96)$$

Enfin, il est trivial de montrer que les invariants de Riemann associés à l'onde matérielle  $u$  sont donnés par :

$$\{ u, \quad p \} \quad (3.97)$$

Pour terminer ce paragraphe, notons que si le système est écrit en termes de variables conservatives, les quatre premières équations (3.42) sont écrites sous une forme conservative et nous donnent un ensemble de quatre relations de saut ou de Rankine-Hugoniot, vérifiées par les discontinuités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta[\alpha_1 \rho_1 (u - \sigma)] = 0 \quad (3.98.1) \\ \Delta[\alpha_2 \rho_2 (u - \sigma)] = 0 \quad (3.98.2) \\ \Delta[\rho u (u - \sigma) + p] = 0 \quad (3.98.3) \\ \Delta[\rho e (u - \sigma) + pu] = 0 \quad (3.98.4) \end{array} \right.$$

avec  $\Delta\phi = \phi_R - \phi_L$  et  $\sigma$  la vitesse de la discontinuité. Cependant, l'équation pour la fraction volumique  $\alpha_2$  ne s'écrit pas sous forme conservative. De ce fait, le système doit être complété ou régularisé pour permettre connaître les solutions discontinues admissibles. Comme il est proposé dans [35], des régularisations de ce type peuvent être obtenues à l'aide d'un examen précis de la structure des zones de relaxation ou bien encore par construction de sous modèles des processus physiques intervenant à l'intérieur des zones de discontinuité. On adopte ici une approche plus simple qui laisse la viscosité artificielle du schéma numérique régulariser le modèle.

## 3.4 Approximation numérique

### 3.4.1 Schéma de type VFRoe-ncv

Dans ce paragraphe, on propose un schéma numérique quasi conservatif de type volumes finis. La méthode est basée sur les solveurs de type VFRoe-ncv [8] et donc sur la résolution d'un problème de Riemann linéarisé sur chaque interface du maillage. On considère le problème de Riemann suivant entre les états  $(.)_L$  et  $(.)_R$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A(\langle \mathbf{q} \rangle) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} &= 0 \\ \mathbf{q}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{q}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{q}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Nous utiliserons ici le vecteur de variables  $\mathbf{q} = {}^t(s_1, s_2, v_n, v_t, p, Y_2)$  où  $v_n, v_t$  sont respectivement les deux composantes du vecteur vitesse dans la base locale  $(\boldsymbol{\eta}_{LR}, \boldsymbol{\eta}_{LR}^\perp)$  où  $\boldsymbol{\eta}_{LR}$  est le vecteur normal unitaire lié à l'interface. On définit alors  $A(\langle \mathbf{q} \rangle)$  par :

$$A(\langle \mathbf{q} \rangle) = \begin{pmatrix} \langle v_n \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle v_n \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle v_n \rangle & 0 & \langle 1/\rho \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle v_n \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \rho \hat{a}^2 \rangle & 0 & \langle v_n \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle v_n \rangle \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

où  $\langle . \rangle = ((.)_L + (.)_R)/2$  représente la moyenne arithmétique entre les états  $(.)_L$  et  $(.)_R$ . D'après le paragraphe 3.3.1 où on a montré l'hyperbolicité du système, on sait que la matrice  $A(\langle \mathbf{q} \rangle)$  est diagonalisable et on a donc à résoudre un problème de Riemann pour un système linéaire hyperbolique.

On notera  $r_i(\langle \mathbf{q} \rangle)$  (pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ) les vecteurs propres à droite et  $l_i(\langle \mathbf{q} \rangle)$  les vecteurs propres à gauche  $A(\langle \mathbf{q} \rangle)$ , vérifiant  ${}^t l_i(\langle \mathbf{q} \rangle) \cdot r_j(\langle \mathbf{q} \rangle) = \delta_{ij}$ . La solution du problème dépend uniquement de la variable  $x/t$  et se compose dans le plan  $(x, t)$ , d'états constants séparés par les lignes caractéristiques. On s'intéresse ici à la solution sur l'interface c'est-à-dire en  $x/t = 0$ .



La solution approchée sur l'interface, que l'on notera  $\mathbf{q}_{LR}^*$  est donnée par la formule :

$$\mathbf{q}_{LR}^* = \mathbf{q}\left(\frac{x}{t} = 0, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R\right) = \begin{cases} \mathbf{q}_L + \sum_{\lambda_i < 0} {}^t l_i(\langle \mathbf{q} \rangle) \cdot (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) r_i(\langle \mathbf{q} \rangle) \\ \mathbf{q}_R - \sum_{\lambda_i > 0} {}^t l_i(\langle \mathbf{q} \rangle) \cdot (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) r_i(\langle \mathbf{q} \rangle) \end{cases} \quad (3.101)$$

Dans la suite on notera par  $\mathbf{Q} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho u, \rho v, \rho e, \alpha_2)$  le vecteur des variables conservatives où  $u, v$  sont les deux composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  dans la base globale d'espace, correspondant au vecteur  $\mathbf{q}$  écrit en variables entropiques  ${}^t(s_1, s_2, v_n, v_t, p, Y_2)$ . En particulier  $\mathbf{Q}_{LR}^*$  représentera la solution du problème de Riemann linéarisé (3.99), écrite en variables conservatives.

Pour approcher l'équation non conservative :

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (3.102)$$

on la réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \mathbf{u}) + B(\mathbf{Q}) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{avec} \quad B(\mathbf{Q}) = \frac{-\alpha_2 \rho_1 a_1^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \quad (3.103)$$

Le modèle réduit à cinq équations est alors mis sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (3.104)$$

où le vecteur  $\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = {}^t(0, 0, 0, 0, 0, B(\mathbf{Q}))$ .

L'intégration de cette équation sur une cellule  $C_i$  donne :

$$A_i \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dl + \int_{C_i} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \operatorname{div} \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.105)$$

où  $N$  est le nombre de cellules et  $A_i$  l'aire de la cellule  $C_i$ . On fait alors évoluer les variables  $\mathbf{Q}_i$  dans le temps, suivant l'expression :

$$A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\mathbf{n}_{ij}\| \psi(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) = 0 \quad (3.106)$$

où  $v(i)$  est l'ensemble des cellules  $C_j$  ayant une arête commune avec  $C_i$  et où  $\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n} dl$  est le vecteur moyen normal à l'interface  $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$ . En définissant  $\boldsymbol{\eta}_{ij} = \mathbf{n}_{ij} / \|\mathbf{n}_{ij}\|$  et

$$\begin{cases} (v_n)_{ij} = \mathbf{u}_{ij} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} = u_{ij} \eta_{ij}^x + v_{ij} \eta_{ij}^y & (3.107.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_t)_{ij} = \mathbf{u}_{ij} \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}^\perp = -u_{ij} \eta_{ij}^y + v_{ij} \eta_{ij}^x & (3.107.2) \end{cases}$$

les composantes normales et tangentielles de la vitesse par rapport à l'interface, on propose l'expression suivante pour  $\psi(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n)$  :

$$\psi(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} \quad (3.108)$$

où  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  est la solution (3.101) du problème de Riemann linéarisé entre les états  $(\cdot)_i$  et  $(\cdot)_j$ .

La partie conservative  $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}$  peut être explicitement écrite comme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} = {}^t((\alpha_1 \rho_1 v_n)_{ij}^*, (\alpha_2 \rho_2 v_n)_{ij}^*, (\rho u v_n)_{ij}^* + p_{ij}^* \eta_{ij}^x, (\rho v v_n)_{ij}^* + p_{ij}^* \eta_{ij}^y, ((\rho e + p) v_n)_{ij}^*, (\alpha_2 v_n)_{ij}^*) \quad (3.109)$$

tandis que la partie non conservative  $\mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}$  est définie par :

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} = {}^t(0, 0, 0, 0, 0, B(\mathbf{Q}_i^n) (v_n)_{ij}^*) \quad (3.110)$$

### 3.4.2 Evolution d'une discontinuité de contact

Comme le montre les travaux présentés dans [57], un point clé pour la simulation des problèmes d'interfaces entre fluides compressibles est la capacité du schéma à calculer une discontinuité de contact isolé sans faire apparaître d'oscillations de pression. Dans la suite, on étudie donc la capacité du schéma que nous avons proposé, à préserver les écoulements à champs de pression et vitesse uniformes. On considère un écoulement initial où la pression et la vitesse ont des valeurs uniformes ;  $u_{i-1} = u_i = u_{i+1} = u$  et  $p_{i-1} = p_i = p_{i+1} = p$ . Les autres variables  $\alpha_k \rho_k, \alpha_2$  peuvent être discontinues. On notera  $\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i+1}$  les vecteurs des variables conservatives dans les cellules  $\{i-1, i, i+1\}$ . En supposant par exemple  $u > 0$ , il est facile de voir que la solution du problème de Riemann linéarisé sur chaque interface est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1/2}^* = \mathbf{Q}_{i-1} \\ \mathbf{Q}_{i+1/2}^* = \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_{i+3/2}^* = \mathbf{Q}_{i+1} \end{cases} \quad (3.111)$$

Ainsi la seule cellule où la variable  $\mathbf{Q}$  peut évoluer entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , est la cellule en aval de la discontinuité. La valeur de  $\mathbf{Q}$  dans cette cellule devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i+1}^{n+1} &= \mathbf{Q}_{i+1}^n - \lambda(\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+3/2}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+1/2}^*)) - \lambda \mathbf{B}(\mathbf{Q}_{i+1}^n)(u_{i+3/2}^* - u_{i+1/2}^*) \\ \mathbf{Q}_{i+1}^{n+1} &= \mathbf{Q}_{i+1}^n - \lambda(\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i)) - \lambda \mathbf{B}(\mathbf{Q}_{i+1}^n)(u_{i+1} - u_i) \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\mathbf{Q}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{Q}_{i+1}^n - \lambda(\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i))$$

avec  $\lambda = \Delta t / A_i$ . Les équations de conservation de la masse peuvent alors s'écrire :

$$(\alpha_k \rho_k)_{i+1}^{n+1} = (\alpha_k \rho_k)_{i+1}^n - \lambda u [(\alpha_k \rho_k)_{i+1}^n - (\alpha_k \rho_k)_i^n] \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (3.113)$$

Et on peut en déduire l'équation d'évolution pour la densité de mélange  $\rho = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k$ , qui s'écrit :

$$\rho_{i+1}^{n+1} = \rho_{i+1}^n - \lambda u [\rho_{i+1}^n - \rho_i^n] \quad (3.114)$$

Or d'après l'équation de conservation de quantité de mouvement, on a :

$$(\rho u)_{i+1}^{n+1} = (\rho u)_{i+1}^n - \lambda [\rho_{i+1}^n u^2 + p - \rho_i^n u^2 + p] \quad (3.115)$$

$$(\rho u)_{i+1}^{n+1} = (\rho u)_{i+1}^n - \lambda u^2 [\rho_{i+1}^n - \rho_i^n]$$

et en combinant cette dernière relation avec (3.114), on obtient :

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n = u \quad (3.116)$$

Ensuite l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$(\rho e)_{i+1}^{n+1} = (\rho e)_{i+1}^n - \lambda u [(\rho e)_{i+1}^n - (\rho e)_i^n] \quad (3.117)$$

A l'aide de l'équation pour la densité de mélange (3.114) et du résultat  $u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n = u$ , on obtient l'équation suivante où  $\varepsilon$  représente l'énergie interne de mélange :

$$(\rho \varepsilon)_{i+1}^{n+1} = (\rho \varepsilon)_{i+1}^n - \lambda u [(\rho \varepsilon)_{i+1}^n - (\rho \varepsilon)_i^n] \quad (3.118)$$

En utilisant alors l'équation d'état de type Stiffened-Gas pour chaque phase, on a l'expression suivante pour l'énergie interne de mélange :

$$\rho \varepsilon = \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k (p + \gamma_k \pi_k)}{\gamma_k - 1} \quad (3.119)$$

En résolvant la pression dans l'équation (3.118) grâce à l'expression (3.119), et en utilisant l'équation pour la fraction volumique :

$$(\alpha_2)_{i+1}^{n+1} = (\alpha_2)_{i+1}^n - \lambda u [(\alpha_2)_{i+1}^n - (\alpha_2)_i^n] \quad (3.120)$$

Il vient :

$$p_{i+1}^{n+1} = p_{i+1}^n = p \quad (3.121)$$

Ainsi, le résultat garantit que le schéma conservera des champs uniformes de pression et de vitesse sur les discontinuités de contact bien que celles-ci évoluent sur un profil quelque peu élargi par la diffusion numérique du schéma.

### 3.4.3 Solveur Acoustique

Les résultats du paragraphe précédent montre que le schéma de type VFRoe-ncv que nous avons proposé, préserve les conditions d'interface sur la vitesse et la pression qui doivent rester constantes sur les discontinuités de contact. Les expériences numériques réalisées montrent effectivement que c'est le cas ; excepté pour les écoulements à très faible nombre de Mach. Cela peut paraître très surprenant puisque la démonstration du paragraphe précédent est effectuée indépendamment du nombre de Mach. Néanmoins, celle-ci suppose que les calculs numériques soient faits à partir des formules arithmétiques exactes. En pratique, on s'aperçoit que ce n'est pas le cas et que les erreurs d'arrondis peuvent perturber les résultats. Un examen précis des résultats montre que les calculs de la vitesse et de la pression aux interfaces sont très sensibles aux erreurs d'arrondis pour les écoulements à faible nombre de Mach (voir annexe B).

Ceci est la raison pour laquelle nous développons dans ce paragraphe, un autre solveur de Riemann où les calculs de la vitesse et de la pression aux interfaces semblent beaucoup moins sensibles aux erreurs d'arrondis. Ce deuxième schéma numérique utilise de manière plus forte la structure mathématique du modèle réduit. Il peut être vu comme une extension du solveur acoustique décrit par exemple dans [66] pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz. Par rapport aux différents tests numériques que nous avons effectués, ce solveur acoustique s'est avéré beaucoup plus robuste pour la simulation d'écoulements à faible nombre de Mach et spécialement en présence d'interfaces entre deux fluides. Le principe de base du solveur consiste en une linéarisation des droites caractéristiques en partant des deux côtés de la discontinuité de contact. Ensuite, leur intersection donne les valeurs de la vitesse et de la pression à l'interface. Plus précisément, la première étape consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires et ceci en multipliant les équations du système par les vecteurs propres à gauche de la matrice Jacobienne. On obtient alors le système suivant :

$${}^t l_i(\mathbf{q}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.122)$$

que l'on peut réécrire immédiatement sous la forme :

$${}^t l_i(\mathbf{q}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \lambda_i(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.123)$$

Si on note respectivement  $q_L^*$ ,  $q_R^*$ , les états gauche et droit de part et d'autre de la discontinuité de contact, la linéarisation de (3.123) en partant de  $q_L$  et  $q_R$  s'écrit :

$$\begin{cases} {}^t l_5(\mathbf{q}_L) \cdot (\mathbf{q}_L^* - \mathbf{q}_L) = 0 \\ {}^t l_1(\mathbf{q}_R) \cdot (\mathbf{q}_R^* - \mathbf{q}_R) = 0 \end{cases} \quad (3.124)$$

qui nous donne après un certain nombre de calculs algébriques :

$$\begin{cases} \rho_L \hat{a}_L (u_L^* - u_L) + (p_L^* - p_L) = 0 \\ \rho_R \hat{a}_R (u_R^* - u_R) - (p_R^* - p_R) = 0 \end{cases} \quad (3.125)$$

En utilisant alors  $u_L^* = u_R^* = u^*$  et  $p_L^* = p_R^* = p^*$ , on obtient les expressions suivantes pour  $u^*$  et  $p^*$  :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\rho_L \hat{a}_L u_L + \rho_R \hat{a}_R u_R}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} - \frac{p_R - p_L}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} \\ p^* = \frac{\rho_R \hat{a}_R p_L + \rho_L \hat{a}_L p_R}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} - \frac{\rho_L \hat{a}_L \rho_R \hat{a}_R (u_R - u_L)}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} \end{cases} \quad (3.126)$$

Et finalement la solution du problème de Riemann à l'interface est donnée par :

$$\mathbf{q}\left(\frac{x}{t}, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R\right) = \begin{cases} \mathbf{q}_L & \text{si } \frac{x}{t} < u_L - \hat{a}_L \\ \mathbf{q}_L^* & \text{si } u_L - \hat{a}_L < \frac{x}{t} < u^* \\ \mathbf{q}_R^* & \text{si } u^* < \frac{x}{t} < u_R + \hat{a}_R \\ \mathbf{q}_R & \text{si } u_R + \hat{a}_R < \frac{x}{t} \end{cases} \quad (3.127)$$

Le même schéma numérique que celui présenté au paragraphe 3.4.1 peut être utilisé avec ce deuxième solveur de Riemann. On notera également que l'expression (3.126) garantit d'un point de vue arithmétique que le calcul de la pression et de la vitesse sur une discontinuité de contact isolé avec  $p_L = p_R$  et  $u_L = u_R$  redonnera ces valeurs communes. Les résultats du paragraphe (3.4.2) restent ainsi valables si on utilise ce deuxième solveur de Riemann.

### 3.4.4 Formulation décentrée à l'ordre deux : MUSCL

Dans ce paragraphe, nous proposons une extension de type MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) [75] du schéma, précise à l'ordre 2 en espace. La méthode que nous décrivons ci-dessous est appliquée à des maillages triangulaires non structurés. En suivant la méthode MUSCL, une manière d'obtenir une précision spatiale d'ordre 2 consiste à évaluer les termes  $\psi(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j)$  avec des *valeurs extrapolées*  $\mathbf{U}_{ij}$  et  $\mathbf{U}_{ji}$  sur l'interface  $\partial C_{ij}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{ij} = \mathbf{U}_i + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U})_{ij} \cdot \mathbf{i}j & (3.128.1) \\ \mathbf{U}_{ji} = \mathbf{U}_j - \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U})_{ji} \cdot \mathbf{i}j & (3.128.2) \end{cases}$$

où le vecteur  $\mathbf{U} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \mathbf{u}, p, \alpha_1)$  est choisi comme le vecteur des variables primitives, dans le but de préserver les conditions d'interface sur la vitesse et la pression, pour le schéma d'ordre 2.

Pour les schémas de type Godunov, ces *valeurs extrapolées* deviennent les nouvelles conditions initiales du problème de Riemann résolu sur l'interface et la partie conservative  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}$  sera entièrement évaluée avec ces *nouvelles valeurs extrapolées*. En ce qui concerne la partie non conservative, elle s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} = {}^t(0, 0, 0, 0, 0, B(\mathbf{Q}_i^n)(v_n)_{ij}^*) \quad (3.129)$$

Nous proposons alors de calculer  $(v_n)_{ij}^*$  avec les *valeurs extrapolées* tout en conservant le terme  $B(\mathbf{Q}_i^n)$  à l'ordre 1 en espace.

Les gradients nodaux approchés  $(\nabla \mathbf{U})_{ij}$  et  $(\nabla \mathbf{U})_{ji}$  sont obtenus en utilisant un  $\bar{\beta}$ -schéma qui combine les gradients nodaux centrés et les gradients totalement décentrés :

$$(\nabla \mathbf{U})_{ij} = (1 - \bar{\beta})(\nabla \mathbf{U})_{ij}^{Cent} \cdot \mathbf{i}j + \bar{\beta}(\nabla \mathbf{U})_{ij}^{Upw} \cdot \mathbf{i}j \quad (3.130)$$

Le gradient nodal centré au milieu de l'arête  $(\nabla \mathbf{U})_{ij}^{Cent}$  (obtenu pour  $\bar{\beta} = 0$ ) est défini par :

$$(\nabla \mathbf{U})_{ij}^{Cent} \cdot \mathbf{i}j = \mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i \quad (3.131)$$

Et le gradient totalement décentré (obtenu pour  $\bar{\beta} = 1$ ) est défini à l'aide des triangles amont et aval associés au segment  $[S_i, S_j]$  (voir Figure 3.2) :

$$(\nabla \mathbf{U})_{ij}^{Upw} = \nabla \mathbf{U}^G T_{ij} \quad (3.132)$$

où  $\nabla \mathbf{U}^G T = \sum_{k \in T} \mathbf{U}_k \nabla N_k^T$  est l'approximation du gradient de type P1 Galerkin sur le triangle T. Les triangles  $T_{ij}$  et  $T_{ji}$  sont définis en Figure 3.2.  $\bar{\beta}$  est le paramètre de décentrement inclus dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Dans les tests numériques proposés par la suite, ce coefficient sera pris égal à  $\bar{\beta} = 1/2$  ou  $\bar{\beta} = 1/3$ .

Par ailleurs, le schéma décrit ci-dessus n'est pas monotone. Il peut introduire dans la solution discrète des extremums locaux qui peuvent ne pas exister dans la solution exacte (c'est-à-dire ne pas avoir de signification physique), particulièrement dans les applications transsoniques et supersoniques.

Pour réduire les oscillations dans la solution numérique, une procédure de limitation de pente LED (Local Extremum Diminishing) peut être utilisée même si elle dégrade quelque peu la précision globale. Nous décrivons ci-dessous deux procédures classiques que nous utiliserons dans cette thèse.

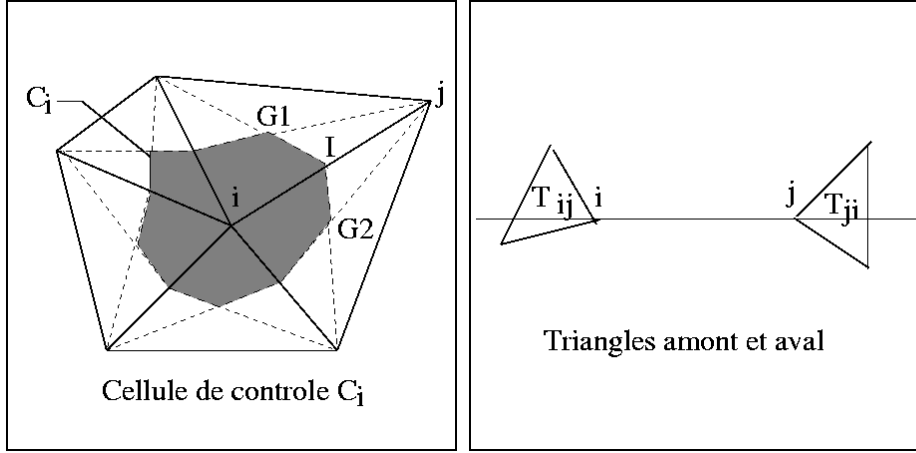


FIG. 3.2 – Cellule construite autour du nœud  $i$  (gauche). Triangles amont  $T_{ij}$  et aval  $T_{ji}$  (droite).

**Limiteur de Van Albada-Van Leer :** Cette procédure de limitation de pente permet de calculer un coefficient de décentrement  $\bar{\beta}^{lim} \in [0, 1]$  qui donne un bon compromis pour la combinaison des gradients centrés et totalement décentrés. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} U_{ij} = U_i + \frac{1}{2} \text{Lim}_{vavl} \left( (\nabla U)_{ij}^{Upw}, (\nabla U)_{ij}^{Cent} \right) .ij & (3.133.1) \\ U_{ji} = U_j - \frac{1}{2} \text{Lim}_{vavl} \left( (\nabla U)_{ji}^{Upw}, (\nabla U)_{ji}^{Cent} \right) .ij & (3.133.2) \end{cases}$$

où

$$\text{Lim}_{vavl}(a, b) = \bar{\beta}^{lim} a + (1 - \bar{\beta}^{lim}) b \quad \text{si } ab > 0 \quad \text{avec } \bar{\beta}^{lim} = \frac{b^2 + \varepsilon}{a^2 + b^2 + 2\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.134)$$

$$\text{Lim}_{vavl}(a, b) = 0 \quad \text{si } ab < 0$$

**Limiteur de Spekreijse :** Cette procédure de limitation de pente utilise le rapport entre les gradients centrés et totalement décentrés. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} U_{ij} = U_i + \frac{1}{2} \text{Lim}_{spek} \left( (\nabla U)_{ij}^{Upw}, (\nabla U)_{ij}^{Cent} \right) .ij & (3.135.1) \\ U_{ji} = U_j - \frac{1}{2} \text{Lim}_{spek} \left( (\nabla U)_{ji}^{Upw}, (\nabla U)_{ji}^{Cent} \right) .ij & (3.135.2) \end{cases}$$

où

$$\text{Lim}_{spek}(a, b) = \max\left(0, \min\left(2\frac{b+\varepsilon}{a+\varepsilon}, \min\left(\bar{\beta} + (1 - \bar{\beta})\frac{b+\varepsilon}{a+\varepsilon}, 2\right)\right)\right), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.136)$$

Ensuite, pour stabiliser le schéma explicite, l'ordre 2 en temps est obtenu en utilisant le schéma de type Runge et Kutta décrit dans [62], et qui s'écrit pour les variables conservatives  $\mathbf{Q}$  :

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^n + \Delta t \psi(\mathbf{Q}^n) \quad (3.137.1)$$

$$\mathbf{Q}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{Q}^n + \frac{1}{4}\mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \psi(\mathbf{Q}^{(1)}) \quad (3.137.2)$$

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{Q}^n + \frac{2}{3}\mathbf{Q}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \psi(\mathbf{Q}^{(2)}) \quad (3.137.3)$$

où  $\psi$  est l'opérateur hyperbolique défini par le schéma de type VFRoe du paragraphe 3.4.1 ou bien par le solveur de Riemann de type acoustique présenté au paragraphe 3.4.3.

## 3.5 Résultats numériques

### 3.5.1 Problèmes multifluides ou d'interfaces : tests de validation

#### Advection d'interface entre fluides purs

Le premier test de validation proposé est une advection d'interface entre de l'air et de l'eau. Les lois d'états de l'air et de l'eau sont données par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \quad \text{et} \quad \pi_1 = 0 & \text{air} & (3.138.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \quad \text{et} \quad \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (3.138.2) \end{cases}$$

La longueur du domaine de calcul est égale à 1 mètre et l'interface est initialement positionnée en  $x = 0.5$  m. L'eau, de densité  $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , se trouve du côté gauche de l'interface tandis que l'air, de densité  $\rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3}$ , se trouve du côté droit. Les deux fluides ont même pression  $p = 10^5$  Pa et même vitesse  $u = 1000 \text{ m.s}^{-1}$  à l'instant  $t = 0$ . Une petite proportion d'eau  $\alpha_2 = 10^{-8}$  (respectivement de gaz) est initialement présente du côté du gaz (respectivement du côté de l'eau). En effet, la méthode numérique n'est pas adaptée aux cas  $\alpha_2 = 0$  ou  $\alpha_2 = 1$ . La discrétisation est réalisée sur 1000 cellules de calcul et le CFL est pris constant égal à 0.6. On utilise le schéma de type VFRoe à l'ordre 1 en espace et en temps. Les résultats sont montrés à l'instant  $t = 229\mu\text{s}$ . Dans le but de comparer les résultats avec ceux d'un autre modèle Eulérien, la Figure 3.3 donne les résultats pour la densité de mélange, la pression, la vitesse et la fraction volumique pour le modèle réduit à cinq équations et pour le "modèle de transport à cinq équations" présenté dans [45] et [2]. Pour ce dernier modèle la méthode numérique utilisée est celle présentée dans [45]. Sur ce cas test très simple, les deux modèles donnent des résultats quasiment identiques avec des diffusions numériques comparables et montrent la même capacité à préserver des écoulements uniformes en pression et en vitesse.

#### Tube à choc liquide-gaz

On considère un tube à choc de 1 mètre rempli d'eau à haute pression du côté gauche ( $x < 0.7$ ) et d'air à pression atmosphérique du côté droit. Ce cas test représente un problème classique de tube à choc avec deux fluides et admet une solution exacte. Les lois d'états sont les mêmes que précédemment :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \quad \text{et} \quad \pi_1 = 0 & \text{air} & (3.139.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \quad \text{et} \quad \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (3.139.2) \end{cases}$$

Les conditions initiales mettent en jeu une discontinuité de pression entre le côté gauche où l'eau est à  $p = 10^9$  Pa et le côté droit où l'air est à pression ambiante  $p = 10^5$  Pa. Comme sur le cas test précédent, les côtés gauche et droit ne contiennent pas tout à fait des fluides purs : la fraction volumique du gaz du côté de l'eau vaut  $\alpha_1 = 10^{-8}$  et inversement la fraction volumique de l'eau du côté du gaz vaut  $\alpha_2 = 10^{-8}$ . On compare à nouveau les résultats du modèle réduit à cinq équations avec ceux donnés par le "modèle de transport à cinq équations" présenté dans [45] et [2]. La Figure 3.4 montre les résultats numériques des deux modèles pour la densité de mélange, la pression, la vitesse et la fraction volumique du gaz. Les solutions exactes pour les trois premières variables sont représentées en traits pleins. Dans cette simulation, la discrétisation est réalisée sur 1000 cellules avec un CFL égal à 0.6 et les résultats sont montrés pour l'instant  $t = 229\mu\text{s}$ . On utilise le schéma de type VFRoe à l'ordre 1 en espace et en temps. Il faut noter également que dans les premiers pas de temps, le CFL n'est pas égal à 0.6. En effet, on augmente le CFL par une loi de type  $\text{CFL} = 0.005n$  où  $n$  représente le nombre d'itérations. Les tests numériques ont montré que pour calculer des chocs très violents, le schéma utilisé avec un CFL de 0.6 dès les premières itérations peut conduire à des échecs numériques. On constate que les résultats donnés par les deux modèles sont de précision comparable par rapport à la solution exacte.

Bien que pour ce problème, les densités et les énergies internes phasiques n'aient pas vraiment de sens physique, il peut être intéressant de revenir à ces variables mono-fluide et de regarder les résultats de la Figure 3.5. Si pour les variables de mélange, les deux modèles donnent des résultats très similaires, il est clair que le comportement des deux modèles est très différent quand on regarde les résultats pour les quantités phasiques. On notera enfin que les résultats du modèle réduit à cinq équations pour ces variables, comparés à ceux du modèle de transport à cinq équations, sont beaucoup plus proches de ceux donnés par le modèle complet à sept équations (Comparer la Figure 3.5 (gauche) avec par exemple la Figure 7 de [56]).

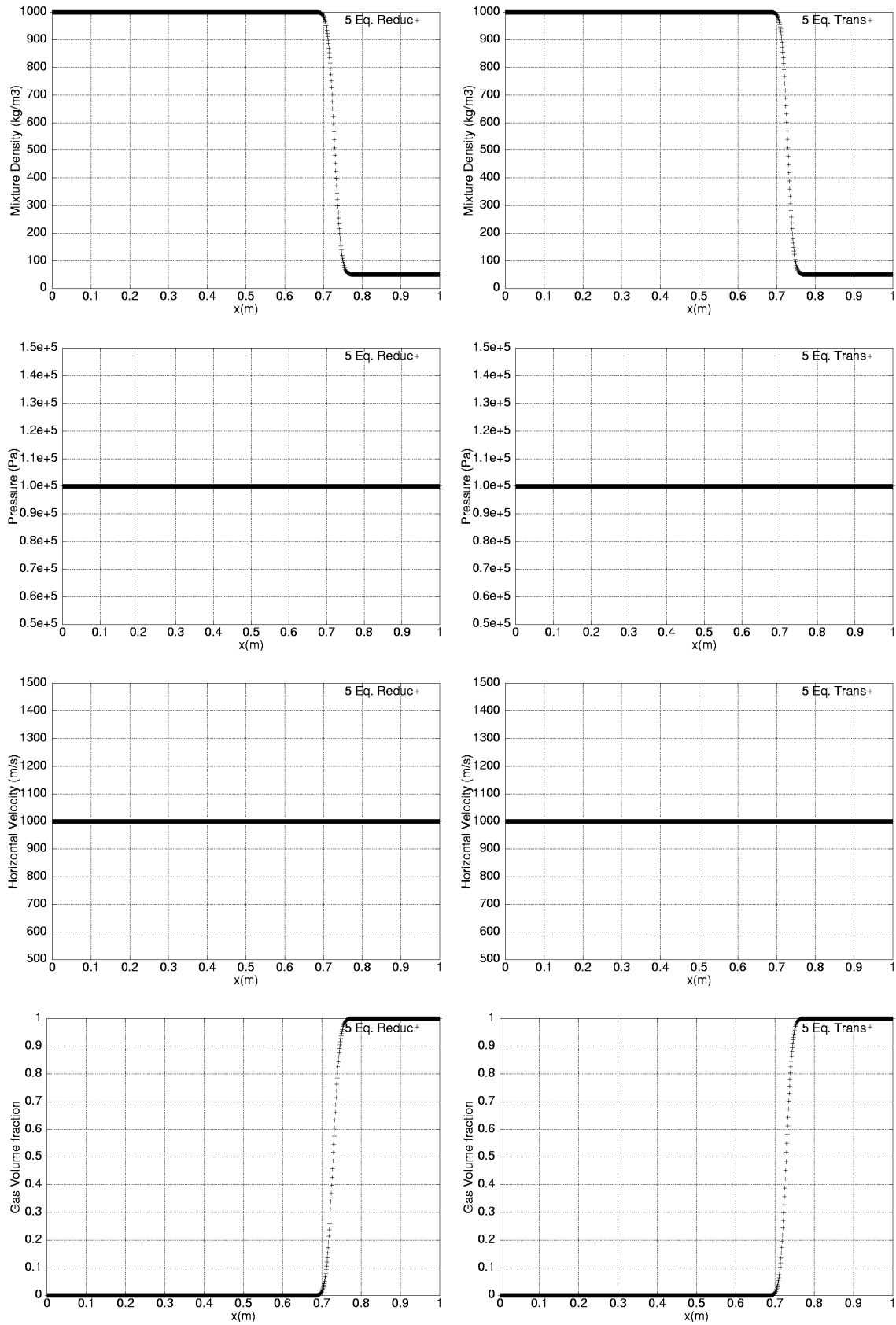


FIG. 3.3 – Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle de transport à 5 équations (droite). Advection d’interface. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles).

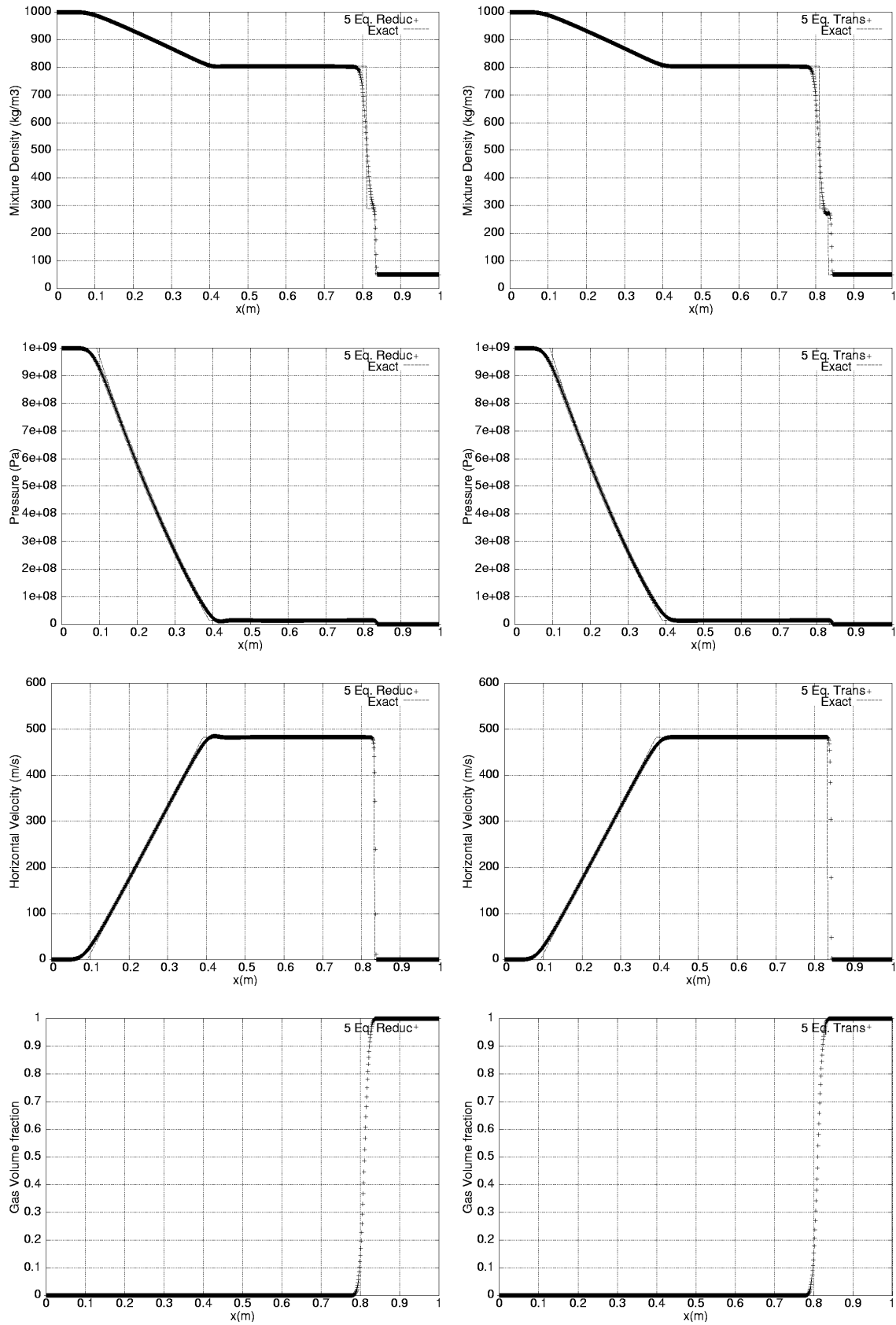


FIG. 3.4 – Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle de transport à 5 équations (droite). Tube à choc liquide-gaz. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles) et solutions exactes (traits pleins).



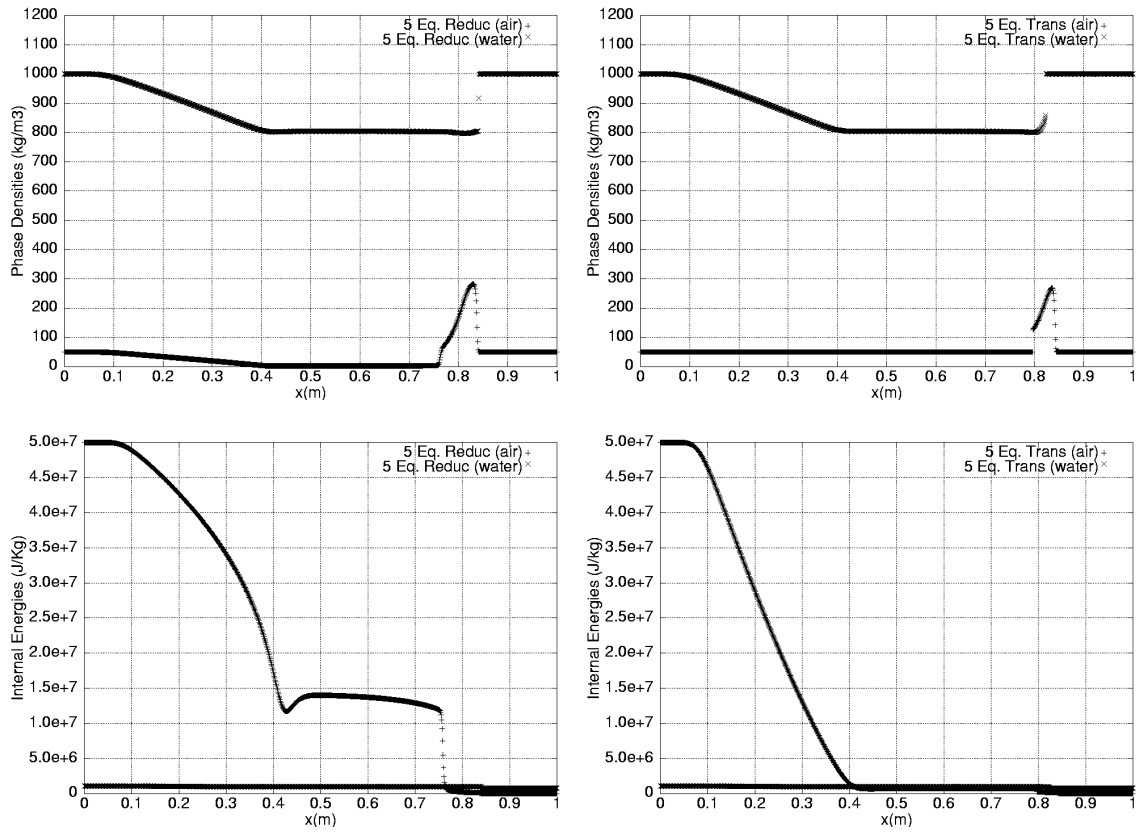


FIG. 3.5 – Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle de transport à 5 équations (droite). Tube à choc liquide-gaz. Variables phasiques. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles).

### 3.5.2 Problèmes diphasiques : comparaison avec le modèle à sept équations

#### Premier problème diphasique

Cette deuxième série d'expériences présente des problèmes d'écoulements diphasiques (et non plus des problèmes d'interface) où les deux phases sont simultanément présentes au même endroit. Le premier test reprend le même problème que précédemment excepté le fait que la fraction volumique de gaz est constante dans tout le domaine et égale à  $\alpha_1 = 0.5$ . Les lois d'états des deux fluides sont une nouvelle fois données par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas, avec  $\rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \text{ et } \pi_1 = 0 & \text{air} & (3.140.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \text{ et } \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (3.140.2) \end{cases}$$

Du côté gauche ( $x < 0.5$ ) la pression est égale à  $10^9$  Pa tandis qu'elle est égale à  $10^5$  Pa du côté droit. La vitesse initiale de l'écoulement à l'instant  $t = 0$  est nulle. On garde la même discrétisation que précédemment et une loi de CFL identique. On utilise une nouvelle fois le schéma de type VFRoe à l'ordre 1 en espace et en temps. Les résultats sont montrés à l'instant  $t = 200\mu\text{s}$ . On compare en Figure 3.6, les résultats obtenus avec le modèle réduit et ceux donnés par le modèle complet à sept équations. La méthode numérique utilisée pour résoudre le modèle à sept équations est celle présentée dans [56], excepté pour les procédures de relaxation qui sont celles présentées dans [42]. Les résultats sont très proches et ceci confirme que le modèle réduit à cinq équations est une bonne approximation du modèle complet à sept équations pour des temps de relaxation infiniment petits. En particulier, on observe que même si la composition initiale du mélange est constante, elle évolue dans le temps et dans l'espace et de façon quasiment identique pour les deux modèles.

#### Deuxième problème diphasique

On considère à présent le même problème que ci-dessus où l'on change la composition initiale du mélange. On modifie également la position initiale de la discontinuité ainsi que la valeur de la densité phasique du gaz prise égale à  $\rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les conditions initiales sont alors données par :

$$\begin{cases} \rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3} & \text{si } x < 0.7 & \rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3} & \text{sinon} \\ \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & \text{si } x < 0.7 & \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & \text{sinon} \\ p = 10^9 \text{ Pa} & \text{si } x < 0.7 & p = 10^5 \text{ Pa} & \text{sinon} \\ u = 0 \text{ m.s}^{-1} & \text{si } x < 0.7 & u = 0 \text{ m.s}^{-1} & \text{sinon} \\ \alpha_1 = 0.2 & \text{si } x < 0.7 & \alpha_1 = 0.8 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.141)$$

On présente les résultats à l'instant  $t = 200\mu\text{s}$  (voir Figure 3.7). On garde les mêmes paramètres de calcul que ci-dessus, pour le maillage, le schéma et le CFL. Les courbes de pression et de vitesse obtenues pour les deux modèles sont identiques mais on peut noter quelques différences sur les courbes de la fraction volumique et de la densité de mélange. En particulier, les valeurs de la densité et de la fraction volumique après le choc sont quelque peu différentes pour les deux modèles. Le modèle à sept équations donne une oscillation près de la discontinuité de contact, qui n'est pas présente dans les résultats du modèle réduit. Actuellement, nous ne connaissons pas les raisons exactes de ces différences. Des tests supplémentaires ont été faits en changeant le solveur hyperbolique et les procédures de relaxation pour la résolution du modèle complet à sept équations. Ils ont donné les mêmes résultats. De ce fait, il semble que les différences observées ne soient pas purement numériques et qu'elles viennent vraiment de la solution du modèle complet.

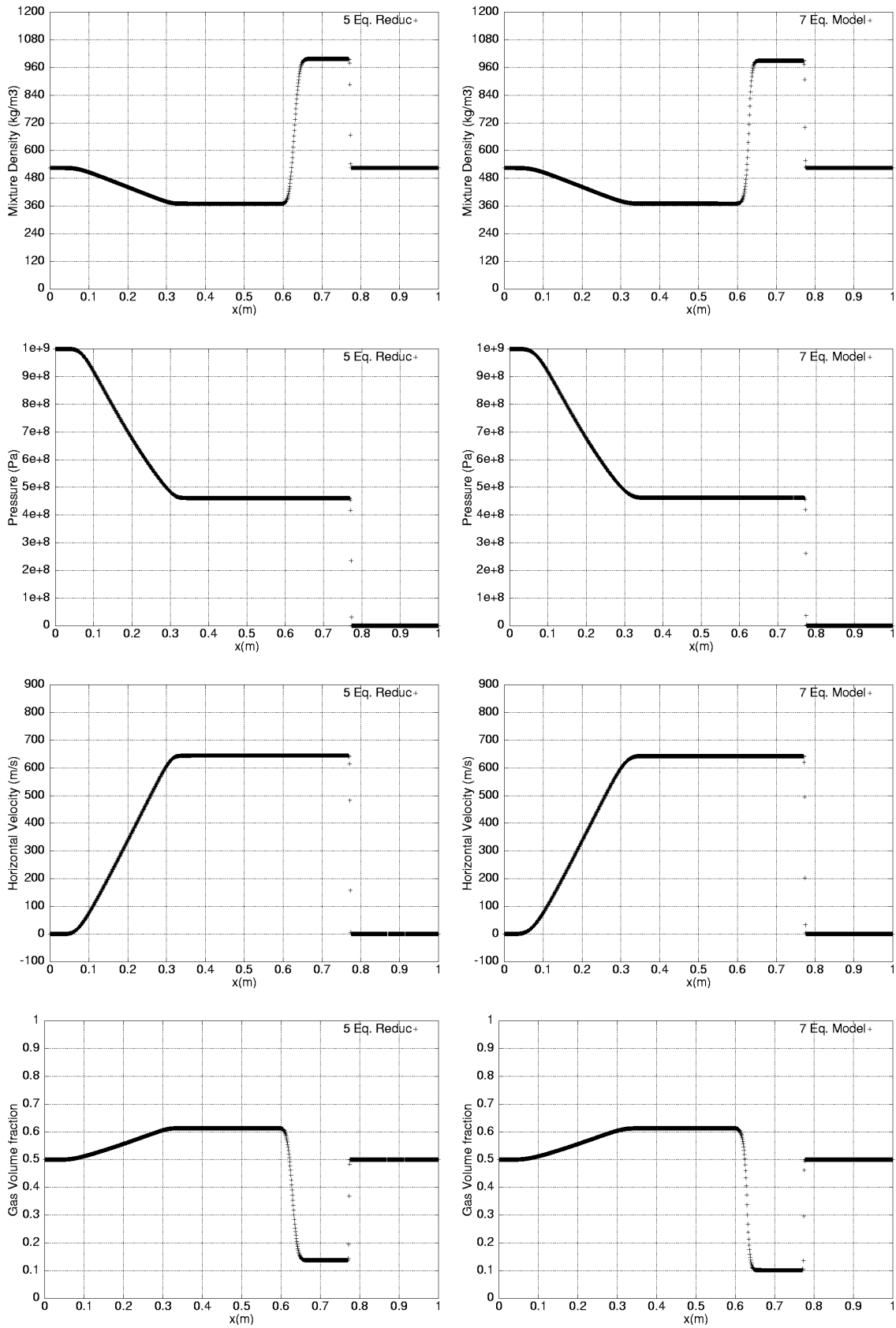


FIG. 3.6 – Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle complet à 7 équations (droite). Premier problème diphasique. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles).

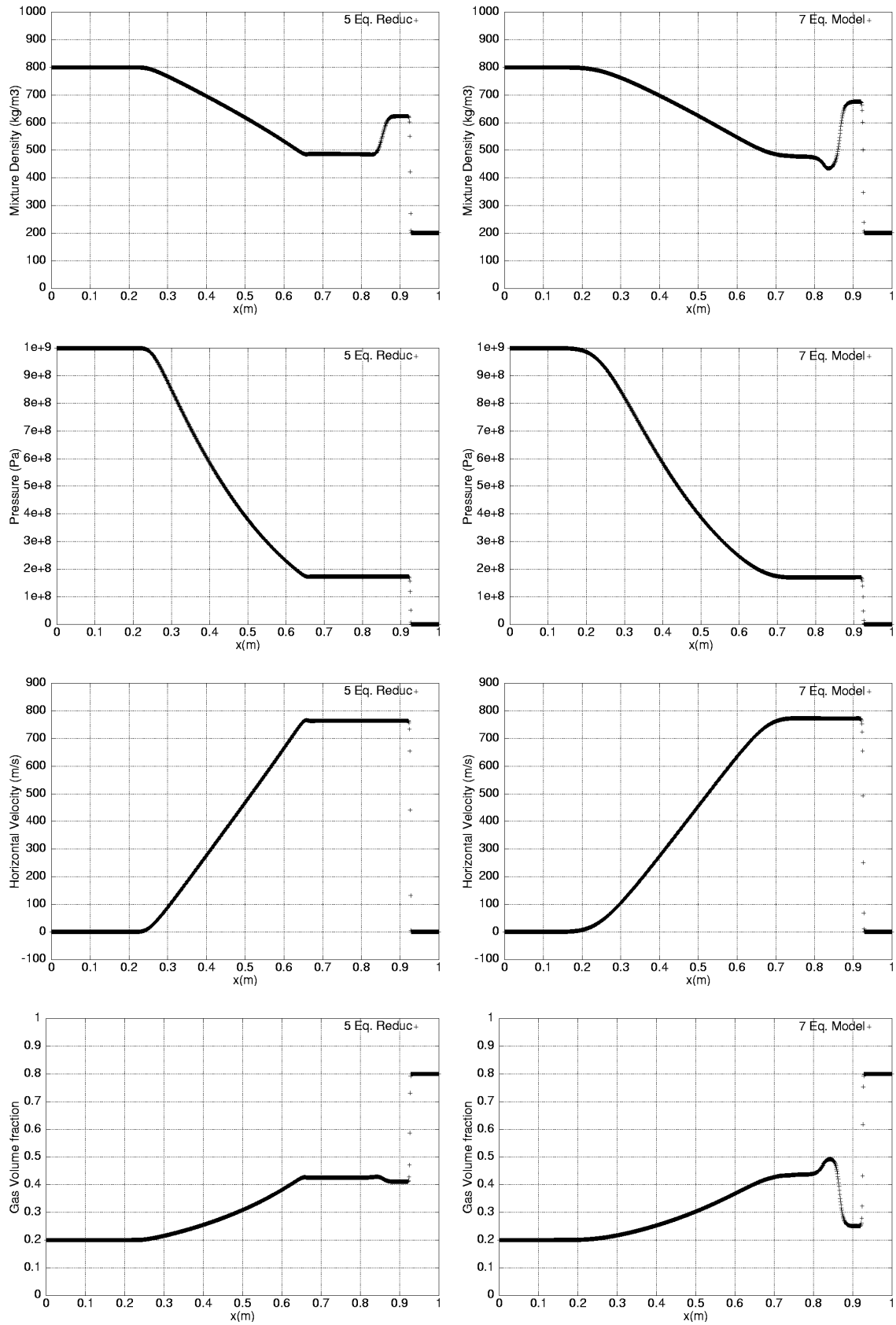


FIG. 3.7 – Modèle réduit à 5 équations (gauche) et modèle complet à 7 équations (droite). Deuxième problème diphasique. Variables de mélange. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds (symboles).

### Propagation des ondes de choc dans les alliages

On souhaite à présent évaluer la capacité du modèle à capturer correctement des ondes de choc très violentes se propageant dans des mélanges diphasiques non réactifs, c'est-à-dire à composition figée. Pour cela, on considère des alliages métalliques. En effet lors de la propagation d'une onde de choc forte, chaque constituant de l'alliage devient compressible. Il est alors possible d'utiliser le modèle à cinq équations pour décrire le comportement de cet alliage. Ce genre de test est particulièrement important pour les applications de détonique. Même si le modèle n'admet pas un système complet de relations de Rankine-Hugoniot, il est tout de même possible de résoudre les équations pour des régimes instationnaires et de déterminer ainsi des vitesses de choc données par la méthode numérique. Ceci est réalisé en simulant des impacts de piston sur le mélange diphasique comme le décrit la Figure 3.8.



FIG. 3.8 – Représentation de l'impact d'un piston sur un milieu diphasique.

Dans le but d'évaluer la précision des résultats, on les comparera à ceux donnés par le modèle à sept équations ainsi qu'à ceux obtenus expérimentalement. En fait, pour un certain nombre de matériaux, la relation entre la vitesse du choc et la vitesse d'impact du piston est linéaire. Cette relation intrinsèque aux caractéristiques du matériau que l'on appelle courbe d'Hugoniot expérimentale, peut être déterminée expérimentalement et s'exprime sous la forme :

$$u_s = a_0 + s u_p \quad (3.142)$$

où  $a_0$  est la vitesse de propagation du son dans le matériau sous conditions atmosphériques,  $u_s$  la vitesse du choc,  $u_p$  la vitesse d'impact du piston et  $s$  un nombre constant sans dimension. La relation (3.142) est connue pour un certain nombre de matériau. Ici, nous considérons un alliage d'époxy-spinel. Les lois d'état respectives des matériaux sont modélisées par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \rho_1 = 1185 \text{ kg.m}^{-3} \quad \gamma_1 = 2.94 \quad \text{et} \quad \pi_1 = 3.2.10^9 \text{ epoxy} \quad (3.143.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \rho_2 = 3622 \text{ kg.m}^{-3} \quad \gamma_2 = 1.62 \quad \text{et} \quad \pi_2 = 141.10^9 \text{ spinel} \quad (3.143.2) \end{cases}$$

Plusieurs situations d'impact sont simulées en considérant différentes vitesses de conditions limites de piston et la vitesse du choc est évaluée en fonction de la vitesse matérielle de piston. Ceci permet alors de déterminer numériquement la courbe (3.142) que l'on compare à la courbe d'Hugoniot expérimentale.

La Figure 3.9 trace les résultats aux différents instants  $t = 30, 60$  et  $90 \mu\text{s}$  pour une simulation où la vitesse d'impact est de  $u_p = 3000 \text{ m.s}^{-1}$  et la proportion d'époxy dans l'alliage est de  $\alpha_1 = 0.595$ .

Plusieurs simulations de ce type effectuées pour différentes vitesses de piston, donnent les résultats présentés en Figure 3.10. Tous les tests ont été faits sur une maillage comportant 1000 cellules et avec un CFL égal à 0.6, excepté dans les premières itérations où  $\text{CFL} = 0.005n$ . On utilise le schéma de type VFRoe à l'ordre 1 en espace et en temps. On peut constater un bon accord entre les résultats numériques et les courbes expérimentales. De plus, la Figure 3.10 présente aussi les résultats obtenus avec le modèle complet à sept équations. La méthode numérique utilisée pour résoudre le modèle à sept équations est celle qui figure dans [56], excepté pour les procédures de relaxation qui correspondent à celles présentées dans [42].

Par rapport aux données expérimentales, on observe que les résultats du modèle réduit à cinq équations présentent une précision "comparable" à celle donnée par la résolution du modèle complet.

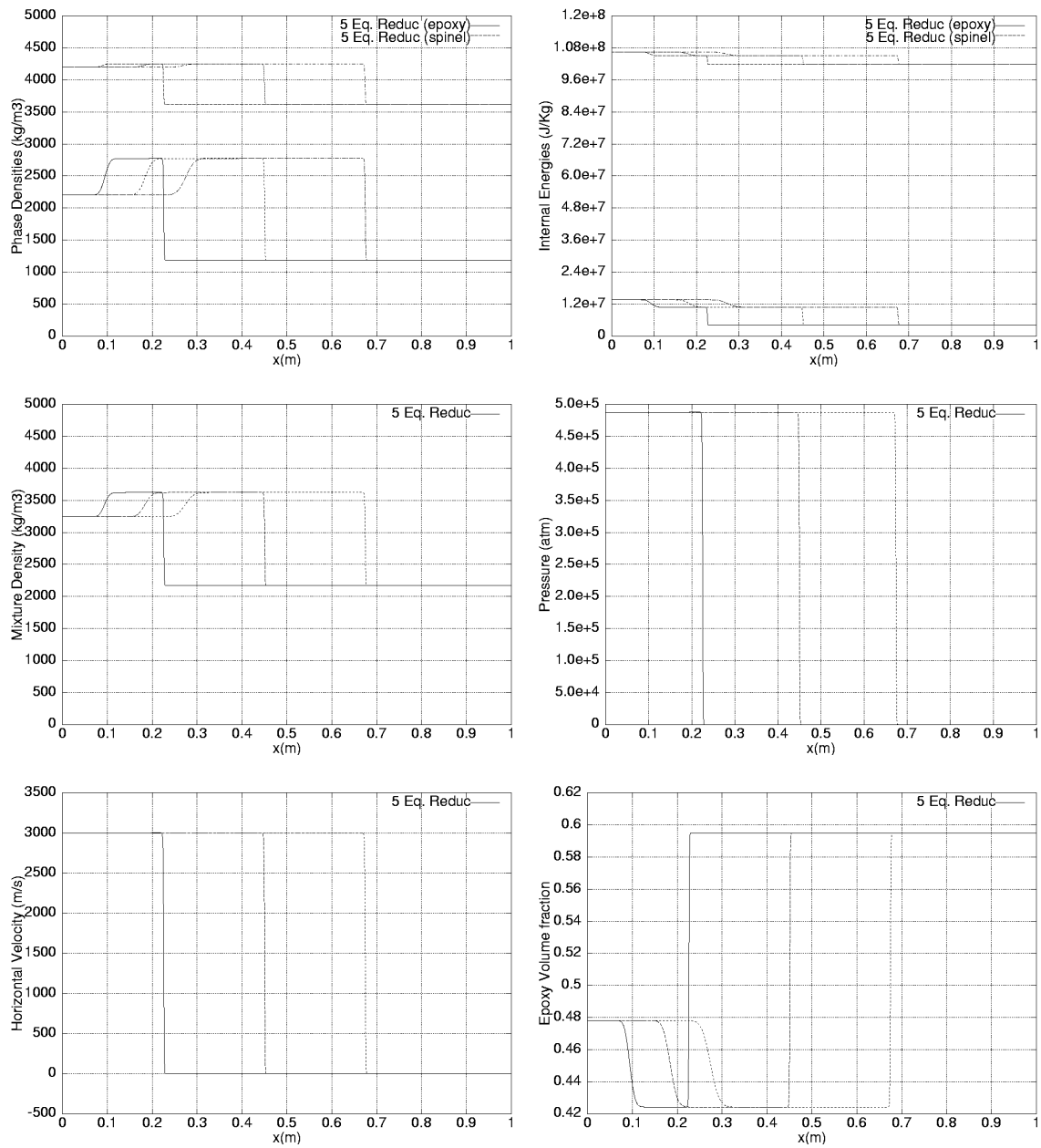


FIG. 3.9 – Modèle réduit à 5 équations pour le problème d'Hugoniot. Variables de mélange et phasiques pour une vitesse d'impact de  $3000 \text{ m.s}^{-1}$ . Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds.

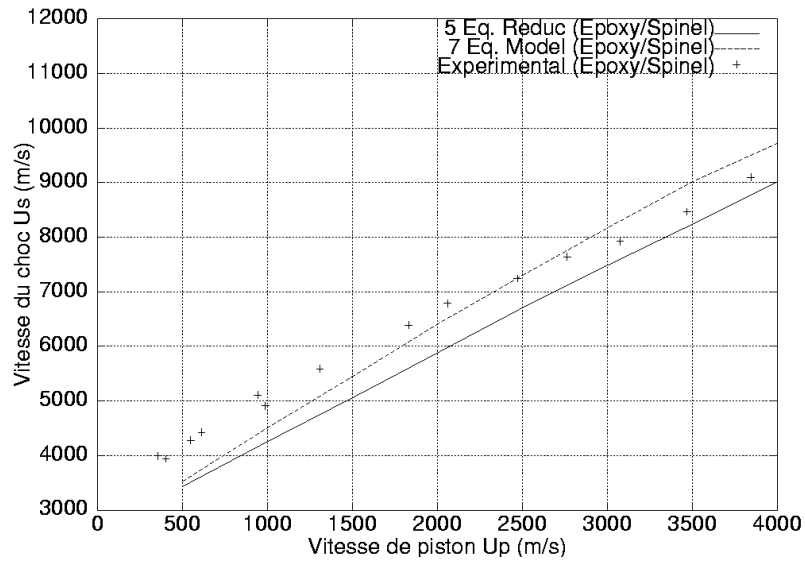


FIG. 3.10 – Modèle réduit à 5 équations (traits pleins) et modèle à 7 équations de [56] (traits pointillés) pour le problème d’Hugoniot. Vitesse du choc en fonction de l’impact. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds. Résultats expérimentaux (symboles).

Sur ce type de cas test, un meilleur accord a été obtenu dans [9] en résolvant un modèle à 7 équations avec une méthode numérique adaptée aux ondes de choc dans les milieux diphasiques. Comme l’illustre la figure 3.11, la méthode décrite dans [9] produit des résultats en très bon accord avec l’expérience, au prix toutefois d’une complexité supérieure puisque le modèle fait intervenir deux vitesses et deux pressions.

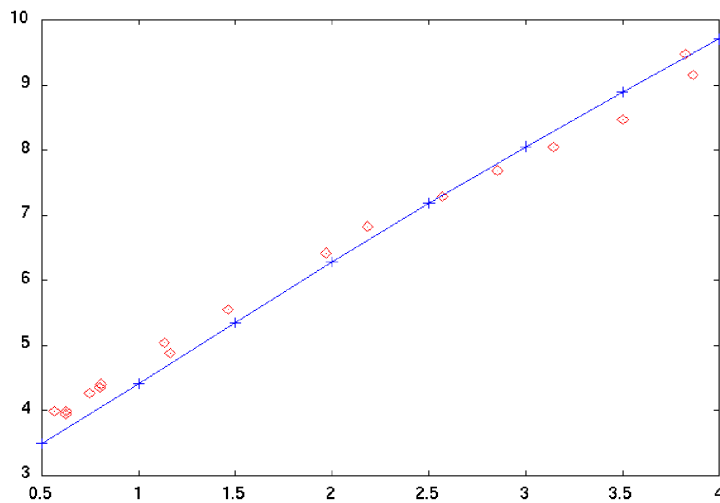


FIG. 3.11 – Modèle à 7 équations résolu avec la méthode des équations discrètes [9] (traits pointillés) pour le problème d’Hugoniot. Vitesse du choc en fonction de l’impact. Solutions calculées sur un maillage de 1000 nœuds. Résultats expérimentaux (symboles).

### 3.5.3 Cas test bidimensionnels

Nous terminons cette série d'expériences numériques par deux problèmes bidimensionnels. Pour ces deux derniers tests, on utilise le schéma d'ordre 2 en espace de type MUSCL avec un coefficient d'interpolation  $\bar{\beta} = 1/2$  et le limiteur de Van Albada-Van Leer. L'ordre 2 en temps est obtenu par une discrétisation de type Runge et Kutta non linéaire en 3 étapes. Ces procédures ont été décrites au paragraphe 3.4.4.

#### Premier cas test bidimensionnel : chute d'une goutte

Comme le décrit la Figure 3.12, ce premier test montre la chute d'une goutte de densité  $\rho = 4 \text{ kg.m}^{-3}$  sous l'effet de la gravité. Les deux fluides sont considérés comme des gaz parfaits et les rapports des chaleurs spécifiques  $\gamma_1, \gamma_2$  sont donnés en Figure 3.12. La simulation est réalisée dans une boîte fermée, remplie d'air de densité  $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ . Initialement la goutte contient une quantité  $\varepsilon = 10^{-8}$  d'air et inversement l'air contient une quantité  $\varepsilon = 10^{-8}$  du fluide de la goutte. Même si ce test paraît physiquement très simple, il présente d'un point de vue numérique plusieurs difficultés. En particulier, le nombre de Mach relatif à l'écoulement est assez petit (il est initialement nul puis il croît lentement pour atteindre une valeur de l'ordre de  $10^{-2}$  en fin de simulation). C'est pour cette raison que nous utilisons ici le solveur acoustique que nous avons construit au paragraphe 3.4.3 et non pas le solveur de type VFRoe qui peut conduire à des échecs numériques. La largeur de la boîte est égale à un mètre tandis que la hauteur est égale à deux mètres. Le maillage est composé de  $50 \times 100$  points. Dans cette simulation, le CFL est pris constant et égal à 0.8. L'effet de la gravité  $\mathbf{g}$  est introduit dans le modèle à travers deux termes sources dans l'équation de quantité de mouvement et dans celle de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \rho \mathbf{g} \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div}(\rho e + p) \mathbf{u} &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.144)$$

Les équations de conservation de la masse ainsi que l'équation gouvernant l'évolution de la fraction volumique restent inchangées.

La Figure 3.13 trace les isovaleurs de la fraction volumique de la goutte aux instants  $t = 0 \text{ s}, 0.1 \text{ s}, 0.15 \text{ s}, 0.2 \text{ s}, 0.25 \text{ s}, 0.3 \text{ s}, 0.35 \text{ s}, 0.4 \text{ s}$ . Bien que des résultats vraiment précis nécessiteraient un maillage beaucoup plus fin (ou une procédure de maillage adaptatif pour suivre l'interface), les résultats obtenus sur ce maillage sont déjà très prometteurs. En particulier, la diffusion numérique n'empêche pas le développement d'instabilités au niveau de l'interface et le champ de fraction volumique reste borné.

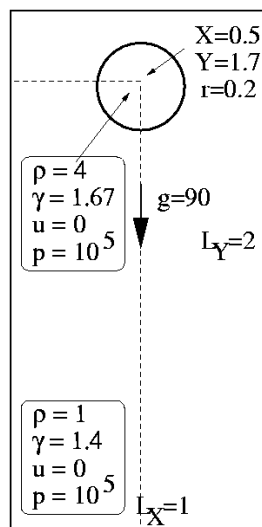


FIG. 3.12 – Données initiales du premier cas test bidimensionnel : chute d'une goutte.



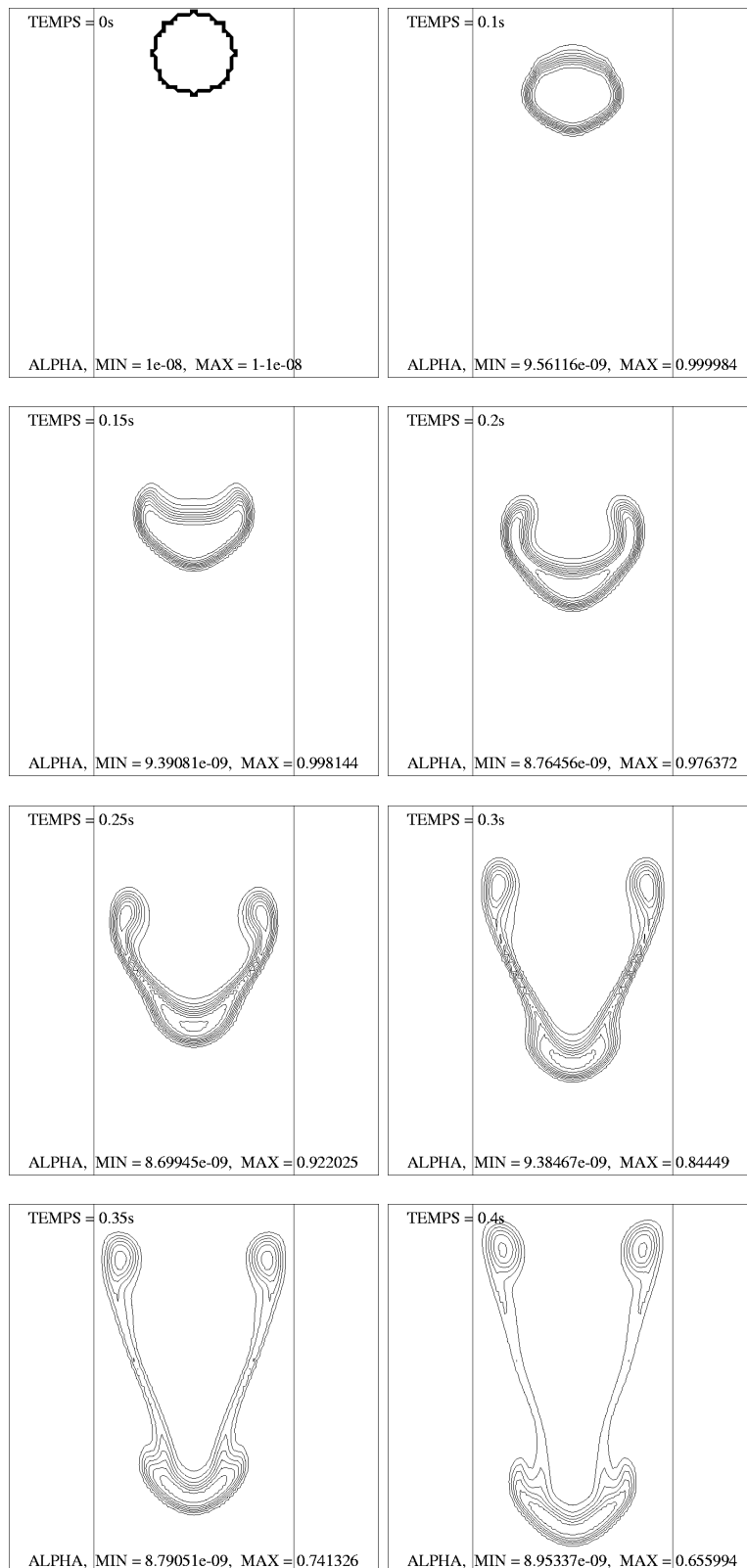


FIG. 3.13 – Isovaleurs de la fraction volumique pour le premier cas test bidimensionnel : chute d’une goutte.

### Deuxième cas test bidimensionnel

Ce deuxième problème bidimensionnel représente l'évolution d'une sphère de fluide léger entourée par une enveloppe de fluide lourd. Ce test a déjà été considéré dans [45]. Dans ce test, la gravité n'est pas prise en compte. La configuration initiale du problème est représentée en Figure 3.14. Les deux fluides sont considérés comme des gaz parfaits et les rapports des chaleurs spécifiques  $\gamma_1, \gamma_2$  sont donnés en Figure 3.14. Initialement, le fluide lourd contient une quantité  $\varepsilon = 10^{-8}$  de fluide léger et inversement, le fluide léger contient une quantité  $\varepsilon = 10^{-8}$  de fluide lourd. Pour ce test, on utilise un maillage très fin de 400 x 400 points. Comme précédemment, on utilise le solveur acoustique avec un schéma explicite d'ordre 2 en espace et en temps. Le coefficient d'interpolation spatiale est pris égal à  $\bar{\beta} = 1/2$  et le limiteur de pente est toujours celui de Van Albada-Van Leer. Le calcul est réalisé avec un CFL constant égal à 0.8. Le maillage non structuré est en drapeaux anglais et revient donc à un maillage régulier. En raison de cette structure quasi cartésienne, les arcs de cercle vont contenir des imperfections. Ces dernières couplées aux ondes de choc dans les directions normales aux interfaces, sont suffisantes pour amorcer le phénomène d'instabilités hydrodynamiques. La Figure 3.15 montre les isovaleurs de la fraction volumique aux instants  $t = 0, 1.58$  ms, 2.63 ms. On observe clairement le développement intense d'instabilités de type Richtmyer-Meshkov, produisant un mélange des fluides lourd et léger. On notera que les résultats obtenus avec le modèle réduit à cinq équations ne sont pas totalement identiques à ceux obtenus avec le modèle de transport à cinq équations dans [45]. Néanmoins, ils restent comparables à ceux-ci.

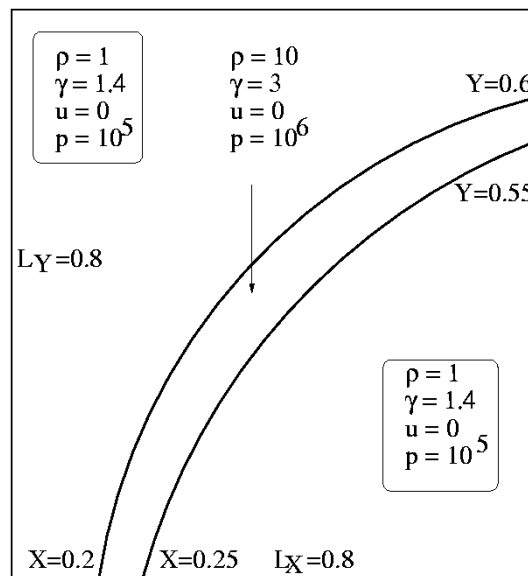


FIG. 3.14 – Données initiales du deuxième cas test bidimensionnel.

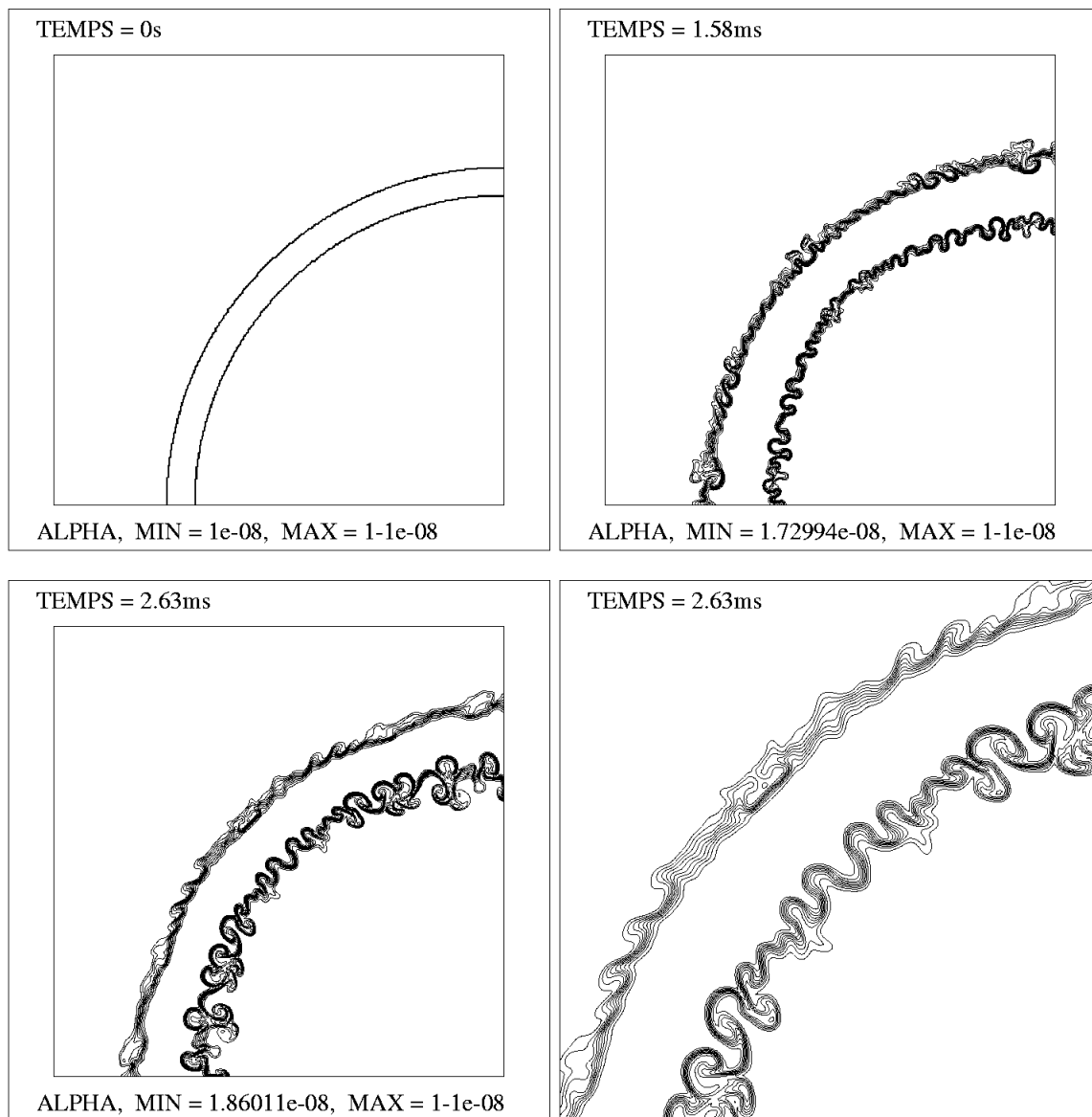


FIG. 3.15 – Isovaleurs de la fraction volumique pour le deuxième cas test bidimensionnel. En bas à droite on a effectué un zoom du champ de fraction volumique.

## 3.6 Conclusion

En conclusion, nous avons établi un modèle réduit à cinq équations (1-pression et 1-vitesse) en effectuant une analyse asymptotique du modèle à sept équations (2-pressions et 2-vitesses), pour des temps de relaxation des pressions et des vitesses infiniment petits. Bien que ce modèle ne puisse pas se mettre sous forme conservative, nous avons analysé sa structure mathématique et montré qu'elle était très proche de celle des équations d'Euler monophasiques. Ce modèle représente une alternative très intéressante à l'utilisation du modèle diphasique complet à sept équations. En effet ce modèle est moins coûteux, il est plus simple à implémenter et il ne nécessite plus l'utilisation de procédures de relaxation. De plus, il s'étend facilement aux problèmes multiphasiques avec un nombre arbitraire de matériaux. Par exemple, dans le cas tridimensionnel et pour un nombre  $k$  de matériaux différents, le modèle complet nécessitera  $6k - 1$  variables, alors que le modèle réduit nécessitera  $2k + 3$  variables.

D'un point de vue numérique, nous avons proposé deux solveurs pour la résolution du modèle réduit. Le premier est un solveur de type VFRoe-ncv et il est basé sur la résolution d'un problème de Riemann linéarisé. Le deuxième que nous avons appelé solveur acoustique, utilise de manière plus approfondie la structure mathématique du système et se base sur la linéarisation des lignes caractéristiques correspondant aux ondes acoustiques. Ce deuxième solveur s'est révélé beaucoup plus robuste et notamment pour les problèmes d'interfaces entre deux fluides où celles-ci bougent à faible vitesse ou à faible nombre de Mach.

Les résultats numériques montrent que le modèle réduit à cinq équations est capable de calculer précisément des problèmes d'interfaces entre fluides compressibles ainsi que certains problèmes diphasiques (avec la présence simultanée des deux phases en un même point d'espace) où le déséquilibre des pressions et des vitesses n'est pas trop important.



# Chapitre 4

## Préconditionnement pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach

*Comme nous l'avons vu pour les équations monophasiques dans le chapitre 2, la simulation des écoulements à faible nombre de Mach continue d'être un point délicat pour les solveurs compressibles et un algorithme général n'a pas encore été trouvé. Pour les écoulements à faible vitesse, les schémas décentrés présentent un manque de précision et il est nécessaire d'utiliser des techniques de preconditionnement pour retrouver des résultats corrects.*

*Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre l'analyse des équations continues et les techniques de preconditionnement aux écoulements diphasiques à partir du modèle réduit à cinq équations que nous avons développé dans le chapitre 3.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>85</b>
<b>4.2</b>	<b>Le problème continu</b>	<b>86</b>
<b>4.3</b>	<b>Matrice Jacobienne</b>	<b>88</b>
<b>4.4</b>	<b>Préconditionnement</b>	<b>91</b>
<b>4.5</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>95</b>
<b>4.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>97</b>
4.6.1	Méthode implicite	97
4.6.2	Schéma preconditionné	101
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>

---

### 4.1 Introduction

D'un point de vue théorique, si la situation commence à être bien comprise pour les équations de Navier-stokes monophasiques, le sujet de ce chapitre est d'étendre l'analyse du comportement des schémas décentrés aux écoulements compressibles diphasiques. Le point de départ est le modèle à cinq équations (1-vitesse et 1-pression) pour les écoulements diphasiques, proposé dans le chapitre 3. Sa structure mathématique est très proche de celle des équations d'Euler monophasiques. Cette raison ainsi que l'analyse asymptotique menée au paragraphe 4.2, nous ont fortement motivé et guidé pour adapter les techniques de preconditionnement faible Mach présentées dans le chapitre 2, aux problèmes diphasiques.

Dans le paragraphe 4.2, nous présentons une analyse asymptotique du modèle dans la limite des faibles nombres de Mach. Le but est de montrer que les solutions limites quand le nombre de Mach tend vers zéro, vérifient les équations incompressibles et que la situation est vraiment très proche de celle étudiée pour les équations d'Euler monophasiques. Dans le paragraphe 4.3, nous calculons la matrice Jacobienne

du système et nous en donnons les éléments de diagonalisation. Nous savons déjà que le modèle est inconditionnellement hyperbolique mais le but est d'étudier la forme conservative du modèle qui est utilisée dans l'écriture du schéma numérique implicite. En s'inspirant du travail présenté dans le chapitre 2 pour les équations d'Euler, le paragraphe 4.4 présente une adaptation des techniques de preconditionnement proposées par Turkel [70] sur la forme "entropique" du modèle. Les matrices de passage des variables entropiques aux variables conservatives sont calculées car elles sont utilisées dans le schéma numérique. Ensuite, dans le paragraphe 4.5, nous proposons un schéma numérique implicite basé sur un solveur de type VFRoe-ncv [8] associé à la forme preconditionnée du modèle. Enfin, dans le paragraphe 4.6, une série d'expériences numériques montrant l'effet du preconditionnement est présentée.

## 4.2 Le problème continu

Le but de ce paragraphe est de mener une analyse asymptotique du modèle réduit et d'en écrire les équations limites quand le nombre de Mach tend vers zéro. Ainsi on rappelle la situation pour les équations d'Euler : si le champ initial de pression ne présente que des fluctuations de l'ordre du nombre de Mach au carré  $p(\mathbf{x}, 0) = p^0 + M_*^2 p^2(\mathbf{x})$  et si le champ de vitesse est proche d'un champ à divergence nulle :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + M_* \mathbf{u}^1(\mathbf{x})$  avec  $\text{div} \mathbf{u}^0 = 0$ , alors les solutions des équations compressibles restent bornées quand le nombre de Mach tend vers zéro et elles vérifient les équations incompressibles.

Ainsi nous proposons de montrer un résultat similaire pour les équations du modèle réduit diphasique. En termes de variables conservatives  ${}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho \mathbf{u}, \rho e, \alpha_1)$ , ce système s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}) = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \text{div}(\alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div}(\rho e + p) \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.4)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_2 a_2^2 - \rho_1 a_1^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k a_k^2} \text{div} \mathbf{u} \quad (4.1.5)$$

Les variables  $\alpha_k$  représentent les fractions volumiques,  $\rho_k$  les densités,  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse et  $p$  la pression. Ensuite,  $\rho = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k$  représente la densité de mélange et  $e = \varepsilon + \mathbf{u}^2/2$  est l'énergie totale spécifique  $\varepsilon$  dans laquelle l'énergie interne spécifique est définie par la relation  $\rho \varepsilon = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \varepsilon_k(p, \rho_k)$ .

On étudie à présent de manière formelle la limite du modèle. Pour simplifier les calculs, le système (4.1) sera écrit en remplaçant l'équation de conservation de l'énergie (4.1.4) par l'équation d'évolution de la pression qui s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho \hat{a}^2 \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

Dans cette dernière équation, nous avons introduit la vitesse du son moyennée  $\hat{a}$  dont on rappelle la formule :

$$\frac{1}{\rho \hat{a}^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{\alpha_k}{\rho_k a_k^2} \quad (4.3)$$

La première étape consiste à adimensionner les équations. Soit  $\rho(\mathbf{x}, 0)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$  et  $p(\mathbf{x}, 0)$ , les valeurs initiales de la densité de mélange, du champ de vitesse et de la pression. On définit les valeurs de référence suivantes pour les différentes variables :  $\rho_{ref} = \max[\rho(\mathbf{x}, 0)]$ ,  $u_{ref}^2 = \max[\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, 0)]$  et  $\hat{a}_{ref} = \max[\hat{a}(\mathbf{x}, 0)]$ .

En introduisant les nouvelles variables adimensionnées :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_k &= \frac{\rho_k}{\rho_{ref}} & \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{u}}{u_{ref}} & \tilde{p} &= \frac{p}{\rho_{ref} a_{ref}^2} \\ \tilde{\alpha}_k &= \alpha_k & \tilde{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{\delta_{ref}} & \tilde{t} &= \frac{t u_{ref}}{\delta_{ref}}\end{aligned}\quad (4.4)$$

où  $\delta_{ref}$  est une longueur de référence, on obtient les équations adimensionnées :

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_1 \tilde{\rho}_1}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}(\tilde{\alpha}_1 \tilde{\rho}_1 \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_2 \tilde{\rho}_2}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}(\tilde{\alpha}_2 \tilde{\rho}_2 \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (4.5.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{M_*^2} \nabla \tilde{p} = 0 \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{p} + \tilde{\rho} \tilde{a}^2 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_1}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \frac{\tilde{\rho}_2 \tilde{a}_2^2 - \tilde{\rho}_1 \tilde{a}_1^2}{\sum_{k=1}^2 \tilde{\alpha}_{k'} \tilde{\rho}_k \tilde{a}_k^2} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.5.5)$$

où  $M_* = u_{ref}/a_{ref}$  est le nombre de Mach représentatif.

Nous cherchons à présent des solutions du système (4.5) sous la forme d'un développement asymptotique par rapport au nombre de Mach :

$$(\cdot) = (\cdot)^0 + M_*(\cdot)^1 + M_*^2(\cdot)^2 + \mathcal{O}(M_*^3) \quad (4.6)$$

En introduisant ces expressions dans les équations (4.5) et en regroupant les termes de même puissance de  $M_*$  ; à l'ordre  $1/M_*^2$  et  $1/M_*$ , l'équation de quantité de mouvement (4.5.3) donne :  
(Dans la suite de l'analyse, nous avons omis le  $\tilde{\cdot}$  pour simplifier les écritures)

$$\begin{cases} \nabla p^0 = 0 & (4.7.1) \\ \nabla p^1 = 0 & (4.7.2) \end{cases}$$

En introduisant alors les résultats (4.7.1)-(4.7.2), l'ordre 0 du système (4.5) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \alpha_1^0 \rho_1^0}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1^0 \rho_1^0 \mathbf{u}^0) = 0 \quad (4.8.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2^0 \rho_2^0}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2^0 \rho_2^0 \mathbf{u}^0) = 0 \quad (4.8.2)$$

$$\frac{\partial \rho^0 \mathbf{u}^0}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^0 \mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{u}^0) + \nabla p^2 = 0 \quad (4.8.3)$$

$$\frac{\partial p^0}{\partial t} + \rho^0 (\hat{a}^0)^2 \operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0 \quad (4.8.4)$$

$$\frac{\partial \alpha_1^0}{\partial t} + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \alpha_1^0 = \alpha_1^0 \alpha_2^0 \frac{\rho_2^0 (a_2^0)^2 - \rho_1^0 (a_1^0)^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'}^0 \rho_k^0 (a_k^0)^2} \operatorname{div} \mathbf{u}^0 \quad (4.8.5)$$

Les équations à l'ordre  $1/M_*^2$  et  $1/M_*$  impliquent que le champ de pression soit constant en espace jusqu'aux fluctuations à l'ordre  $M_*^2$ . Ainsi on peut écrire :

$$p(\mathbf{x}, t) = p^0(t) + M_*^2 p^2(\mathbf{x}, t) \quad (4.9)$$



En présence d'un domaine ouvert, la pression thermodynamique  $p^0$  sera imposée et égale à la pression extérieure. Pour des raisons de simplicité dans l'analyse, nous supposons que la pression extérieure est stationnaire. Ainsi la pression  $p^0$  restera constante en espace et en temps :

$$\frac{dp^{Ext}}{dt} = \frac{dp^0}{dt} = 0 \quad (4.10)$$

Nous déduisons ainsi que l'équation de pression (4.8.4) dégénère en :

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0 \quad (4.11)$$

En introduisant cette relation (4.11) dans les équations de conservation de la masse (4.8.1)-(4.8.2) et dans l'équation de la fraction volumique (4.8.5), on obtient :

$$\frac{\partial \rho_k^0}{\partial t} + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \rho_k^0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha_1^0}{\partial t} + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \alpha_1^0 = 0 \quad (4.12)$$

Supposant par simplicité que tous les chemins de particules viennent de régions avec les mêmes densités phasiques, on en conclut que  $\rho_k^0 = \text{Cte}$ .

Ainsi, la limite du modèle se réduit au système d'équations suivant qui peut être vu comme les équations incompressibles pour chaque phase :

$$\rho_1 = \text{Cte} \quad (4.13.1)$$

$$\rho_2 = \text{Cte} \quad (4.13.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho(\alpha_1)} \nabla p = 0 \quad (4.13.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.13.4)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_1 = 0 \quad (4.13.5)$$

où la densité de mélange  $\rho(\alpha_1)$  dépend seulement de la fraction volumique  $\alpha_1$  qui est simplement advectée à la vitesse  $\mathbf{u}$  de l'écoulement. Ce système limite (4.13) peut être compris comme une extension des équations incompressibles monophasiques :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) + \nabla \pi = 0 \quad (4.14.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.14.2)$$

pour les écoulements diphasiques, où  $\rho$  serait régie par des densités phasiques constantes plus une équation de transport de la fraction volumique. Ainsi on espère pouvoir adapter efficacement les techniques de preconditionnement faible Mach du monophasique.

### 4.3 Matrice Jacobienne

Le sujet de ce paragraphe est de calculer la matrice Jacobienne du modèle (4.1) et le premier point consiste à calculer la différentielle de la pression en termes de variables conservatives. Supposons alors que les lois d'états thermodynamiques des deux phases soient telles que  $\rho_k \varepsilon_k = \rho_k \varepsilon_k(\rho_k, p)$  et introduisons les coefficients  $\delta_k = (\partial \rho_k \varepsilon_k / \partial \rho_k)_p$  et  $\xi_k = (\partial \rho_k \varepsilon_k / \partial p)_{\rho_k}$ . La différentielle  $d(\rho_k \varepsilon_k)$  peut alors s'écrire :

$$d(\rho_k \varepsilon_k) = \delta_k d\rho_k + \xi_k dp \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (4.15)$$

L'utilisation de la relation de Gibbs permet d'écrire pour chaque phase  $k$  :

$$d\varepsilon_k = T_k ds_k + \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (4.16)$$

où  $T_k$  est la température de la phase  $k$ . En introduisant  $h_k = \varepsilon_k + p/\rho_k$  qui représente l'enthalpie spécifique de chaque phase, la relation (4.16) de Gibbs peut se réécrire sous la forme :

$$d(\rho_k \varepsilon_k) = \rho_k T_k ds_k + h_k d\rho_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (4.17)$$

En écrivant alors l'égalité de (4.17)-(4.15), on obtient les relations classiques suivantes, qui seront utilisées par la suite :

$$a_k^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} = \frac{h_k - \delta_k}{\xi_k} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial p}{\partial s_k} \right)_{\rho_k} = \frac{\rho_k T_k}{\xi_k} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (4.18)$$

où  $a_k$  représentent les vitesses du son phasiques.

Revenons maintenant au calcul de la différentielle de la pression. En utilisant la définition de l'énergie interne de mélange  $\rho\varepsilon = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \varepsilon_k$  et en sommant les différentielles (4.15) pour chacune des phases, on obtient après quelques calculs :

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_k \xi_k dp = - \sum_{k=1}^2 \delta_k d(\alpha_k \rho_k) + d(\rho\varepsilon) - \sum_{k=1}^2 (\rho_k \varepsilon_k - \rho_k \delta_k) d\alpha_k \quad (4.19)$$

L'introduction du paramètre  $\xi = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \xi_k$  et de la relation  $d(\rho\varepsilon) = \mathbf{u}^2/2 \sum_{k=1}^2 d(\alpha_k \rho_k) - \mathbf{u} \cdot d(\rho\mathbf{u}) + d(\rho e)$ , permet d'obtenir la différentielle de la pression exprimée en termes de variables conservatives :

$$dp = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\xi} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \delta_k \right) d(\alpha_k \rho_k) - \frac{\mathbf{u}}{\xi} \cdot d(\rho\mathbf{u}) + \frac{1}{\xi} d(\rho e) + \frac{1}{\xi} (\rho_2(\varepsilon_2 - \delta_2) - \rho_1(\varepsilon_1 - \delta_1)) d\alpha_1 \quad (4.20)$$

Ainsi en notant  $\mathbf{Q} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho u, \rho v, \rho e, \alpha_1)$  le vecteur des variables conservatives où  $u, v$  sont les deux composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ , pour des solutions suffisamment régulières, le système (4.1) peut s'écrire en deux dimensions d'espace sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + B_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = 0 \quad (4.21)$$

Or le but de ce paragraphe est de calculer, pour tout vecteur normalisé  $\boldsymbol{\eta} = {}^t(\eta_x, \eta_y)$ , la matrice  $D_c(\mathbf{Q})$  ainsi que les éléments permettant sa diagonalisation :

$$D_c(\mathbf{Q}) = A_c(\mathbf{Q})\eta_x + B_c(\mathbf{Q})\eta_y \quad (4.22)$$

Considérons alors la matrice de rotation  $\theta$  qui permet de passer du vecteur  $\mathbf{Q}$  dans la base globale d'espace au vecteur  $\tilde{\mathbf{Q}} = \theta \mathbf{Q} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho v_n, \rho v_t, \rho e, \alpha_1)$  dans la base locale  $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\perp)$ .  $v_n, v_t$  sont respectivement les composantes normales et tangentielles du vecteur vitesse et sont données par les relations :

$$\begin{cases} v_n = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} & (4.23.1) \\ v_t = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}^\perp & (4.23.2) \end{cases}$$

Après calculs, la matrice  $D_c(\mathbf{Q})$  peut s'écrire sous la forme :

$$\left( \begin{array}{cccccc} Y_2 v_n & -Y_1 v_n & Y_1 \eta_x & Y_1 \eta_y & 0 & 0 \\ -Y_2 v_n & Y_1 v_n & Y_2 \eta_x & Y_2 \eta_y & 0 & 0 \\ B_1 \eta_x - u v_n & B_2 \eta_x - u v_n & (1 - \frac{1}{\xi}) u \eta_x + v_n & (1 - \frac{1}{\xi}) v \eta_x - v_t & \frac{\eta_x}{\xi} & M \eta_x \\ B_1 \eta_y - v v_n & B_2 \eta_y - v v_n & (1 - \frac{1}{\xi}) u \eta_y + v_t & (1 - \frac{1}{\xi}) v \eta_y + v_n & \frac{\eta_y}{\xi} & M \eta_y \\ (B_1 - H) v_n & (B_2 - H) v_n & H \eta_x - \frac{u v_n}{\xi} & H \eta_y - \frac{v v_n}{\xi} & (1 + \frac{1}{\xi}) v_n & M v_n \\ -A v_n / \rho & -A v_n / \rho & A \eta_x / \rho & A \eta_y / \rho & 0 & v_n \end{array} \right) \quad (4.24)$$

où les variables  $Y_k = \alpha_k \rho_k / \rho$  représentent les fractions massiques et  $H = \sum_{k=1}^2 Y_k H_k = e + p/\rho$  est l'enthalpie spécifique totale de mélange avec  $H_k = h_k + \mathbf{u}^2/2$  les enthalpies spécifiques totales phasiques. D'autre part, les coefficients  $B_k, M, A$  de la matrice sont définis par :

$$\begin{cases} B_k = \frac{1}{\xi} \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \delta_k \right) & \text{pour } k = 1, 2 & (4.25.1) \\ M = \frac{1}{\xi} (\rho_2 (\varepsilon_2 - \delta_2) - \rho_1 (\varepsilon_1 - \delta_1)) & & (4.25.2) \\ A = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} & & (4.25.3) \end{cases}$$

La matrice  $D_c(\mathbf{Q})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et ses trois valeurs propres sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{Q}) = v_n - \hat{a} \\ \lambda_2(\mathbf{Q}) = \lambda_3(\mathbf{Q}) = \lambda_4(\mathbf{Q}) = \lambda_5(\mathbf{Q}) = v_n \\ \lambda_6(\mathbf{Q}) = v_n + \hat{a} \end{cases} \quad (4.26)$$

où la vitesse du son  $\hat{a}$  est définie par l'expression suivante :

$$\rho \hat{a}^2 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \xi_k \rho_k a_k^2 + MA \quad (4.27)$$

Cette expression est évidemment équivalente à l'expression (4.3) donnée au paragraphe 4.2. En effet, si on utilise (4.25.2)-(4.25.3) ainsi que l'égalité  $\rho_2 \varepsilon_2 - \rho_1 \varepsilon_1 = \rho_2 h_2 - \rho_1 h_1$  seulement valable parce que les deux phases ont la même pression, on obtient :

$$\rho \hat{a}^2 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \xi_k \rho_k a_k^2 + \frac{1}{\xi} (\rho_2 (h_2 - \delta_2) - \rho_1 (h_1 - \delta_1)) \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \quad (4.28)$$

Et en utilisant la relation (4.18) pour les vitesses du son phasiques  $a_k^2 = (h_k - \delta_k)/\xi_k$ , il vient :

$$\rho \hat{a}^2 = \frac{1}{\xi} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \xi_k \rho_k a_k^2 + \frac{1}{\xi} (\xi_2 \rho_2 a_2^2 - \xi_1 \rho_1 a_1^2) \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \quad (4.29)$$

Puis après un certain nombre de calculs algébriques, on obtient l'expression suivante clairement équivalente à la formule harmonique (4.3) donnée au paragraphe 4.2 :

$$\rho \hat{a}^2 = \frac{\rho_1 a_1^2 \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \quad (4.30)$$

Les vecteurs propres à droite  $r_i(\mathbf{Q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ), vérifiant la relation  $D_c(\mathbf{Q})r_i(\mathbf{Q}) = \lambda_i(\mathbf{Q})r_i(\mathbf{Q})$ , peuvent être choisis comme :

$$\begin{aligned} r_1(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ u - \hat{a}\eta_x \\ v - \hat{a}\eta_y \\ H - \hat{a}v_n \\ A/\rho \end{pmatrix} & r_2(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \\ v \\ \mathbf{u}^2/2 + \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} & r_3(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \\ v \\ \mathbf{u}^2/2 + \delta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ r_4(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\eta_y \\ \eta_x \\ v_t \\ 0 \end{pmatrix} & r_5(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M\xi \\ 1 \end{pmatrix} & r_6(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ u + \hat{a}\eta_x \\ v + \hat{a}\eta_y \\ H + \hat{a}v_n \\ A/\rho \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

On notera aussi  $l_i(\mathbf{Q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ) les vecteurs propres à gauche qui vérifient la relation  ${}^t D_c(\mathbf{Q})l_i(\mathbf{Q}) = \lambda_i(\mathbf{Q})l_i(\mathbf{Q})$ . Après normalisation des vecteurs propres à droite et à gauche pour avoir  ${}^t l_i(\mathbf{Q}) \cdot r_j(\mathbf{Q}) = \delta_{ij}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
l_1(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{2\hat{a}^2} \begin{pmatrix} B_1 + \hat{a}v_n \\ B_2 + \hat{a}v_n \\ -u/\xi - \hat{a}\eta_x \\ -v/\xi - \hat{a}\eta_y \\ 1/\xi \\ M \end{pmatrix} & l_2(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{\hat{a}^2} \begin{pmatrix} \hat{a}^2 - Y_1 B_1 \\ -Y_1 B_2 \\ Y_1 u/\xi \\ Y_1 v/\xi \\ -Y_1/\xi \\ -Y_1 M \end{pmatrix} & l_3(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{\hat{a}^2} \begin{pmatrix} -Y_2 B_1 \\ \hat{a}^2 - Y_2 B_2 \\ Y_2 u/\xi \\ Y_2 v/\xi \\ -Y_2/\xi \\ -Y_2 M \end{pmatrix} \\
l_4(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} -v_t \\ -v_t \\ -\eta_y \\ \eta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & l_5(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{\rho\hat{a}^2} \begin{pmatrix} -AB_1 \\ -AB_2 \\ Au/\xi \\ Av/\xi \\ -A/\xi \\ \rho\hat{a}^2 - AM \end{pmatrix} & l_6(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{2\hat{a}^2} \begin{pmatrix} B_1 - \hat{a}v_n \\ B_2 - \hat{a}v_n \\ -u/\xi + \hat{a}\eta_x \\ -v/\xi + \hat{a}\eta_y \\ 1/\xi \\ M \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

## 4.4 Préconditionnement

Le but de ce paragraphe est d'utiliser les techniques de preconditionnement pour le modèle diphasique réduit. Il existe différents preconditionneurs et on choisit dans cette étude celui proposé par Turkel dans [70], qui est formulé en termes de variables entropiques dans le cas des équations d'Euler. En conséquence, on utilisera la forme entropique du modèle donnée dans le chapitre précédent. En termes de variables  $\mathbf{q} = {}^t(p, u, v, s_1, s_2, Y_1)$ , le système s'écrit sous la forme :

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho\hat{a}^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{4.33.1}$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \tag{4.33.2}$$

$$\frac{Ds_1}{Dt} = 0 \tag{4.33.3}$$

$$\frac{Ds_2}{Dt} = 0 \tag{4.33.4}$$

$$\frac{DY_1}{Dt} = 0 \tag{4.33.5}$$

où nous avons introduit la notation  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ . Ensuite, le problème de Riemann dans la base locale  $(\boldsymbol{\eta}_{LR}, \boldsymbol{\eta}_{LR}^\perp)$  avec  $(\cdot)_L$  et  $(\cdot)_R$  comme conditions initiales, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + A_e(\tilde{\mathbf{q}}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} &= 0 \\
\tilde{\mathbf{q}}(x, 0) &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_L & \text{si } x < 0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

où  $\tilde{\mathbf{q}} = \theta \mathbf{q} = {}^t(p, v_n, v_t, s_1, s_2, Y_1)$  et l'expression de la matrice  $A_e(\tilde{\mathbf{q}})$  est évidente.

En s'inspirant des techniques que nous avons développées pour les équations d'Euler, le problème de Riemann original (4.34) va être changé en un problème de Riemann linéarisé (méthode VFRoe) et preconditionné :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + P_e(\beta) A_e(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle) \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} &= 0 \\
\tilde{\mathbf{q}}(x, 0) &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_L & \text{si } x < 0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

où  $\langle . \rangle = ((.)_L + (.)_R)/2$  symbolise la moyenne arithmétique entre les états  $(.)_L$  et  $(.)_R$  et où  $P_e(\beta) = \text{diag}(\beta^2, 1, 1, 1, 1, 1)$  correspond à la matrice de preconditionnement avec  $\beta$  un petit paramètre de l'ordre du nombre de Mach. Ensuite la matrice  $P_e(\beta)A_e(\tilde{\mathbf{q}})$  est donnée par :

$$P_e(\beta)A_e(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \beta^2 v_n & \beta^2 \rho \hat{a}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & v_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_n \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Puisque l'équation caractéristique de cette matrice s'écrit  $(v_n - \lambda)^4(\lambda^2 - (1 + \beta^2)v_n\lambda + \beta^2(v_n^2 - \hat{a}^2)) = 0$ , on obtient trois valeurs propres réelles distinctes :

$$\begin{cases} \lambda_1(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}[(1 + \beta^2)v_n - \sqrt{X}] \\ \lambda_2(\tilde{\mathbf{q}}) = \lambda_3(\tilde{\mathbf{q}}) = \lambda_4(\tilde{\mathbf{q}}) = \lambda_5(\tilde{\mathbf{q}}) = v_n \\ \lambda_6(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}[(1 + \beta^2)v_n + \sqrt{X}] \end{cases} \quad (4.37)$$

dans lesquelles on a introduit le paramètre  $X = [(1 - \beta^2)v_n]^2 + 4\beta^2\hat{a}^2$ . Les vecteurs propres à droite  $r_i(\tilde{\mathbf{q}})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ), qui vérifient la relation  $P_e(\beta)A_e(\tilde{\mathbf{q}})r_i(\tilde{\mathbf{q}}) = \lambda_i(\tilde{\mathbf{q}})r_i(\tilde{\mathbf{q}})$  peuvent être choisis comme :

$$r_1(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -s \\ \beta^2 \rho \hat{a}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_2(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_3(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$r_4(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_5(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_6(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -r \\ \beta^2 \rho \hat{a}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec  $r = \lambda_1 - v_n$  et  $s = \lambda_6 - v_n$ . Les vecteurs propres à gauche  $l_i(\mathbf{q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ) qui vérifient  ${}^t P_e(\beta)A_e(\tilde{\mathbf{q}})l_i(\mathbf{q}) = \lambda_i(\mathbf{q})l_i(\mathbf{q})$  et  ${}^t l_i(\mathbf{q}).r_j(\mathbf{q}) = \delta_{ij}$ , sont alors donnés par :

$$l_1(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{-1}{\sqrt{X}} \begin{pmatrix} r \\ \beta^2 \rho \hat{a}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_3(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$l_4(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_5(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad l_6(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\sqrt{X}} \begin{pmatrix} s \\ \beta^2 \rho \hat{a}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En conclusion, la matrice  $P_e(\beta)A_e(\tilde{\mathbf{q}})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et la procédure de résolution du problème de Riemann revient à celle d'un problème hyperbolique linéaire.

La solution approchée sur l'interface c'est-à-dire en  $x/t = 0$  est donnée en termes de variables entropiques par la formule :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{LR}^* = \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{q}}_L + \tilde{\mathbf{q}}_R + [r_k] \operatorname{sgn}[\operatorname{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{LR}] \quad \text{où} \quad \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{LR} = \tilde{\mathbf{q}}_L - \tilde{\mathbf{q}}_R \quad (4.40)$$

Les colonnes de la matrice  $[r_k]$  sont les vecteurs propres à droite (4.38). La matrice  ${}^t[l_k]$  est la matrice dont les lignes sont les transposés des vecteurs propres à gauche (4.39). Dans la suite de ce chapitre et plus particulièrement pour l'écriture du schéma implicite, nous aurons besoin de revenir à la solution  $\mathbf{Q}_{LR}^*$  exprimée en variables conservatives. Pour cela, il sera nécessaire de se donner les deux matrices  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  de passage des variables conservatives  $\mathbf{Q}$  à celles entropiques  $\mathbf{q}$ . Ici nous proposons de calculer ces deux matrices qui seront ensuite utilisées dans le schéma implicite. On commence alors par le calcul de la matrice  $R$  telle que  $d\mathbf{q} = R d\mathbf{Q}$ . En se reportant au paragraphe 4.3, nous avons déjà :

$$dp = \sum_{k=1}^2 B_k d(\alpha_k \rho_k) - \frac{\mathbf{u}}{\xi} \cdot d(\rho \mathbf{u}) + \frac{1}{\xi} d(\rho e) + M d\alpha_1 \quad (4.41)$$

Il est à présent facile de voir que la différentielle de la vitesse  $\mathbf{u}$  s'écrit :

$$d\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{u}}{\rho} \sum_{k=1}^2 d(\alpha_k \rho_k) + \frac{1}{\rho} d(\rho \mathbf{u}) \quad (4.42)$$

Pour ensuite calculer les différentielles des entropies phasiques  $s_k$ , on utilise la relation  $\rho_k T_k ds_k = \xi_k dp - \xi_k a_k^2 d\rho_k$  qui est une conséquence de (4.15)-(4.17)-(4.18). En introduisant la différentielle  $dp$  dans cette dernière relation, on obtient :

$$ds_k = \frac{\xi_k}{\rho_k T_k} \sum_{k=1}^2 B_k d(\alpha_k \rho_k) - \frac{\xi_k a_k^2}{\alpha_k \rho_k T_k} d(\alpha_k \rho_k) - \frac{\xi_k \mathbf{u}}{\xi \rho_k T_k} \cdot d(\rho \mathbf{u}) + \frac{\xi_k}{\xi \rho_k T_k} d(\rho e) + \frac{\xi_k M}{\rho_k T_k} d\alpha_1 + \frac{\xi_k a_k^2}{\alpha_k T_k} d\alpha_k \quad (4.43)$$

Finalement, en utilisant la définition des fractions massiques  $\rho Y_k = \alpha_k \rho_k$ , on obtient la relation :

$$dY_1 = \frac{Y_2}{\rho} d(\alpha_1 \rho_1) - \frac{Y_1}{\rho} d(\alpha_2 \rho_2) \quad (4.44)$$

qui termine le calcul de la matrice  $R$  donnée par :

$$\left( \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & -u/\xi & -v/\xi & 1/\xi & M \\ -u/\rho & -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ \frac{\xi_1(\alpha_1 B_1 - a_1^2)}{\alpha_1 \rho_1 T_1} & \frac{\xi_1 B_2}{\rho_1 T_1} & -\frac{\xi_1 u}{\xi \rho_1 T_1} & -\frac{\xi_1 v}{\xi \rho_1 T_1} & \frac{\xi_1}{\xi \rho_1 T_1} & \frac{\xi_1 \xi_2 a_1^2 \rho_2 a_2^2}{\xi \alpha_1 T_1 \rho \hat{a}^2} \\ \frac{\xi_2 B_1}{\rho_2 T_2} & \frac{\xi_2(\alpha_2 B_2 - a_2^2)}{\alpha_2 \rho_2 T_2} & -\frac{\xi_2 u}{\xi \rho_2 T_2} & -\frac{\xi_2 v}{\xi \rho_2 T_2} & \frac{\xi_2}{\xi \rho_2 T_2} & -\frac{\xi_1 \xi_2 \rho_1 a_1^2 a_2^2}{\xi \alpha_2 T_2 \rho \hat{a}^2} \\ Y_2/\rho & -Y_1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.45)$$

La matrice inverse  $R^{-1}$  telle que  $d\mathbf{Q} = R^{-1} d\mathbf{q}$  peut être obtenue en suivant le même genre de calculs que précédemment ou bien en inversant la matrice  $R$ . Les détails du calcul ne seront pas explicités. Cette matrice  $R^{-1}$  s'écrit :

$$\left( \begin{array}{cccccc}
 \frac{Y_1}{\hat{a}^2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1^2 \rho_1 T_1}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho_1 T_2}{\xi_2 a_2^2} & \frac{\rho^2}{\rho_2} \\
 \frac{Y_2}{\hat{a}^2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho_2 T_1}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_2^2 \rho_2 T_2}{\xi_2 a_2^2} & -\frac{\rho^2}{\rho_1} \\
 \frac{u}{\hat{a}^2} & \rho & 0 & -\frac{\alpha_1 \rho T_1 u}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_2 \rho T_2 u}{\xi_2 a_2^2} & \rho^2 \left( \frac{u}{\rho_2} - \frac{u}{\rho_1} \right) \\
 \frac{v}{\hat{a}^2} & 0 & \rho & -\frac{\alpha_1 \rho T_1 v}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_2 \rho T_2 v}{\xi_2 a_2^2} & \rho^2 \left( \frac{v}{\rho_2} - \frac{v}{\rho_1} \right) \\
 \frac{H}{\hat{a}^2} & \rho u & \rho v & \alpha_1 T_1 \left( \rho_1 - \frac{\rho H}{\xi_1 a_1^2} \right) & \alpha_2 T_2 \left( \rho_2 - \frac{\rho H}{\xi_2 a_2^2} \right) & \rho^2 \left( \frac{H_1}{\rho_2} - \frac{H_2}{\rho_1} \right) \\
 \frac{A}{\rho \hat{a}^2} & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 T_1}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 T_2}{\xi_2 a_2^2} & \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2}
 \end{array} \right) \quad (4.46)$$

Les matrices  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  sont singulières en  $\alpha_k = 0$  et  $\alpha_k = 1$ . En pratique, dans les simulations numériques, un fluide pur  $k$  sera représenté par  $\alpha_k = 1 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  un petit paramètre. Pour terminer ce paragraphe, nous proposons de donner l'expression des produits matriciels  $T = {}^t [l_k] R \theta$  et  $T^{-1} = \theta^{-1} R^{-1} [r_k]$  qui sont utilisés dans le schéma implicite. On rappelle que la matrice  $\theta$  est la matrice de passage de la base globale d'espace dans la base locale ( $\boldsymbol{\eta}_{LR}, \boldsymbol{\eta}_{LR}^\perp$ ) de l'interface.

$$T = \left( \begin{array}{cccccc}
 \frac{-rB_1 + \beta^2 \hat{a}^2 v_n}{\sqrt{X}} & \frac{-rB_2 + \beta^2 \hat{a}^2 v_n}{\sqrt{X}} & \frac{ru/\xi - \beta^2 \hat{a}^2 \eta_x}{\sqrt{X}} & \frac{rv/\xi - \beta^2 \hat{a}^2 \eta_y}{\sqrt{X}} & \frac{-r}{\sqrt{X}\xi} & \frac{-rM}{\sqrt{X}} \\
 -v_t/\rho & -v_t/\rho & -\eta_y/\rho & \eta_x/\rho & 0 & 0 \\
 \frac{\xi_1(\alpha_1 B_1 - a_1^2)}{\alpha_1 \rho_1 T_1} & \frac{\xi_1 B_2}{\rho_1 T_1} & \frac{-\xi_1 u}{\xi \rho_1 T_1} & \frac{-\xi_1 v}{\xi \rho_1 T_1} & \frac{\xi_1}{\xi \rho_1 T_1} & \frac{\xi_1 \xi_2 a_1^2 \rho_2 a_2^2}{\alpha_1 T_1 \xi \rho \hat{a}^2} \\
 \frac{\xi_2 B_1}{\rho_2 T_2} & \frac{\xi_2(\alpha_2 B_2 - a_2^2)}{\alpha_2 \rho_2 T_2} & \frac{-\xi_2 u}{\xi \rho_2 T_2} & \frac{-\xi_2 v}{\xi \rho_2 T_2} & \frac{\xi_2}{\xi \rho_2 T_2} & \frac{\xi_1 \xi_2 \rho_1 a_1^2 a_2^2}{\alpha_2 T_2 \xi \rho \hat{a}^2} \\
 Y_2/\rho & -Y_1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{sB_1 - \beta^2 \hat{a}^2 v_n}{\sqrt{X}} & \frac{sB_2 - \beta^2 \hat{a}^2 v_n}{\sqrt{X}} & \frac{-su/\xi + \beta^2 \hat{a}^2 \eta_x}{\sqrt{X}} & \frac{-sv/\xi + \beta^2 \hat{a}^2 \eta_y}{\sqrt{X}} & \frac{s}{\sqrt{X}\xi} & \frac{sM}{\sqrt{X}}
 \end{array} \right) \quad (4.47)$$

$$T^{-1} = \left( \begin{array}{cccccc}
 \frac{Y_1}{\hat{a}^2} & 0 & -\frac{\alpha_1^2 \rho_1 T_1}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho_1 T_2}{\xi_2 a_2^2} & \frac{\rho^2}{\rho_2} & \frac{Y_1}{\hat{a}^2} \\
 \frac{Y_2}{\hat{a}^2} & 0 & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \rho_2 T_1}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_2^2 \rho_2 T_2}{\xi_2 a_2^2} & -\frac{\rho^2}{\rho_1} & \frac{Y_2}{\hat{a}^2} \\
 \frac{\lambda_1 \eta_x - \beta^2 v_t \eta_y}{\beta^2 \hat{a}^2} & -\rho \eta_y & -\frac{\alpha_1 \rho T_1 u}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_2 \rho T_2 u}{\xi_2 a_2^2} & \rho^2 \left( \frac{u}{\rho_2} - \frac{u}{\rho_1} \right) & \frac{\lambda_6 \eta_x - \beta^2 v_t \eta_y}{\beta^2 \hat{a}^2} \\
 \frac{\lambda_1 \eta_y + \beta^2 v_t \eta_x}{\beta^2 \hat{a}^2} & \rho \eta_x & -\frac{\alpha_1 \rho T_1 v}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_2 \rho T_2 v}{\xi_2 a_2^2} & \rho^2 \left( \frac{v}{\rho_2} - \frac{v}{\rho_1} \right) & \frac{\lambda_6 \eta_y + \beta^2 v_t \eta_x}{\beta^2 \hat{a}^2} \\
 \frac{H}{\hat{a}^2} - \frac{su}{\beta^2 \hat{a}^2} & \rho v_t & \alpha_1 T_1 \left( \rho_1 - \frac{\rho H}{\xi_1 a_1^2} \right) & \alpha_2 T_2 \left( \rho_2 - \frac{\rho H}{\xi_2 a_2^2} \right) & \rho^2 \left( \frac{H_1}{\rho_2} - \frac{H_2}{\rho_1} \right) & \frac{H}{\hat{a}^2} - \frac{ru}{\beta^2 \hat{a}^2} \\
 \frac{A}{\rho \hat{a}^2} & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 T_1}{\xi_1 a_1^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 T_2}{\xi_2 a_2^2} & \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2} & \frac{A}{\rho \hat{a}^2}
 \end{array} \right) \quad (4.48)$$

## 4.5 Approximation numérique

Dans de nombreux calculs instationnaires et évidemment dans le cas de calculs stationnaires, il n'est pas nécessaire de calculer en détail les phénomènes acoustiques. Ainsi nous proposons de construire une méthode numérique implicite qui pourra être utilisée avec de "grands" pas de temps, ce qui représente un avantage certain pour le calcul d'écoulements à faible nombre de Mach. Malheureusement, le système diphasique ne s'écrit pas sous une forme totalement conservative à cause de l'équation gouvernant la fraction volumique :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\rho_2 a_2^2 - \rho_1 a_1^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (4.49)$$

De ce fait, la mise au point d'un schéma implicite présente des difficultés. On réécrit cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \mathbf{u}) + B(\mathbf{Q}) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{avec} \quad B(\mathbf{Q}) = \frac{-\alpha_1 \rho_2 a_2^2}{\sum_{k=1}^2 \alpha_{k'} \rho_k a_k^2} \quad (4.50)$$

et on peut écrire le modèle sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{B}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (4.51)$$

où le vecteur  $\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = {}^t(0, 0, 0, 0, 0, B(\mathbf{Q}))$ . L'intégration de cette équation sur une cellule de contrôle  $C_i$  donne :

$$A_i \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dl + \int_{C_i} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \operatorname{div} \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (4.52)$$

où  $N$  est le nombre de cellules et  $A_i$  le volume de la cellule  $C_i$ . Nous proposons de faire évoluer la variable  $\mathbf{Q}_i$  par le schéma rétrograde suivant d'ordre 1 en temps :

$$A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\mathbf{n}_{ij}\| \psi(\mathbf{Q}_i^{n+1}, \mathbf{Q}_j^{n+1}) = 0 \quad (4.53)$$

où  $v(i)$  symbolise l'ensemble des cellules  $C_j$  voisines à  $C_i$  et où  $\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n} dl$  est le vecteur normal moyenné à l'interface  $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$ .

En linéarisant la fonction  $\psi(\mathbf{Q}_i^{n+1}, \mathbf{Q}_j^{n+1})$ , grâce à un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps, l'équation (4.53) devient :

$$\begin{aligned} A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\mathbf{n}_{ij}\| [ \psi(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) \\ + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_i}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n)(\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_j}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n)(\mathbf{Q}_j^{n+1} - \mathbf{Q}_j^n) ] = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ensuite, on définit  $\boldsymbol{\eta}_{ij} = \mathbf{n}_{ij} / \|\mathbf{n}_{ij}\|$  et on propose alors l'expression suivante pour  $\psi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j)$  :

$$\psi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i) \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} \quad (4.55)$$

où  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  est la solution en variables conservatives du problème de Riemann préconditionné entre les états  $(\cdot)_i$  et  $(\cdot)_j$ . Cela correspond précisément au solveur de type VFRoe-ncv [8] que nous avons proposé dans le chapitre 3 pour un schéma explicite en temps.

On utilisera les approximations suivantes des dérivées de  $\psi$  par rapport aux états  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_i}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) &\simeq \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \right] \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_i^n} \quad (4.56.1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_j}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) &\simeq \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \right] \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_j^n} \quad (4.56.2) \end{aligned} \right.$$



Si on se réfère alors aux résultats du paragraphe 4.4, la solution du problème de Riemann preconditionné en variables entropiques  $\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^*$  est donnée par la formule (4.40) :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^* = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_j + [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{ij}] \quad \text{où} \quad \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{ij} = \tilde{\mathbf{q}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_j \quad (4.57)$$

où  $\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle = (\tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_j)/2$  avec  $\tilde{\mathbf{q}}$  le vecteur des variables entropiques.

Or on a besoin de calculer les dérivées par rapport à  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$  de la solution  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  en variables conservatives. L'approximation suivante sera faite pour la valeur de  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  :

$$\mathbf{Q}_{ij}^* \simeq \frac{1}{2} [\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j + \theta^{-1} R^{-1} [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] R \theta \Delta \mathbf{Q}_{ij}] \quad (4.58)$$

où  $\theta$  et  $\theta^{-1}$  sont les matrices de rotation définies au paragraphe 4.3 et où  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  sont les matrices de passage des variables conservatives  $\mathbf{Q}$  à celles entropiques  $\mathbf{q}$ .

En rappelant que l'on a posé  $T = {}^t [l_k] R \theta$  et  $T^{-1} = \theta^{-1} R^{-1} [r_k]$ , on réécrit (4.58) sous la forme :

$$\mathbf{Q}_{ij}^* \simeq \frac{1}{2} [\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j + T^{-1} \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)] T \Delta \mathbf{Q}_{ij}] \quad (4.59)$$

On en déduit alors les expressions approchées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_i^n} \simeq \frac{1}{2} [Id + T^{-1} \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)] T] \quad (4.60.1) \\ \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_j^n} \simeq \frac{1}{2} [Id - T^{-1} \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)] T] \quad (4.60.2) \end{array} \right.$$

où  $Id$  est la matrice identité.

En définitive, le schéma implicite rétrograde du premier ordre peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|n_{ij}\| [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}] \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \right] [Id + T^{-1} \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)] T] (\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n) \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \mathbf{u}_{ij}^* \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \right] [Id - T^{-1} \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)] T] (\mathbf{Q}_j^{n+1} - \mathbf{Q}_j^n) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

**Remarque :** Nous avons détaillé la méthode implicite pour le schéma preconditionné mais elle s'applique également au schéma original en considérant le cas particulier  $\beta = 1$  c'est-à-dire  $P(\beta) = Id$ .

## 4.6 Résultats numériques

### 4.6.1 Méthode implicite

#### Calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère, à grand nombre de Mach

Ce premier test consiste à montrer que le schéma implicite que nous avons proposé s'applique également aux écoulements transsoniques ou supersoniques. Dans cette simulation, le mélange diphasique d'eau et d'air ( $\alpha^\infty = 0.5$ ,  $\rho_1^\infty = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_2^\infty = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ) entre dans la tuyère avec une vitesse horizontale imposée  $u^\infty = 1 \text{ m.s}^{-1}$  et un nombre de Mach égal à  $M_* = 0.5$ . En fin de calcul, la solution stationnaire indique un nombre de Mach maximum égal à 1.8. La pression initiale est déduite du nombre de Mach  $M_* = 0.5$  et des valeurs de  $\alpha^\infty, \rho_k^\infty, u^\infty$ . Les lois d'états de l'air et de l'eau sont les suivantes :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \text{ et } \pi_1 = 0 & \text{air} & (4.62.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \text{ et } \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (4.62.2) \end{cases}$$

On utilise le schéma implicite classique (sans préconditionnement) et une discrétisation d'ordre 1 en espace et en temps. Les pas de temps utilisés par la méthode implicite sont calculés avec un CFL inversement proportionnel au résidu non linéaire de la densité en norme L2. La valeur maximale utilisée est  $\text{CFL}_{\text{max}} = 10^6$ . Les solutions discrètes stationnaires présentées en Figure 4.1 sont celles obtenues pour un résidu non linéaire de  $10^{-6}$ .

La Figure 4.1 trace les isovaleurs de la pression (en haut à gauche), de la densité (en haut à droite), du nombre de Mach (en bas à gauche) et de la fraction volumique de gaz (en bas à droite).

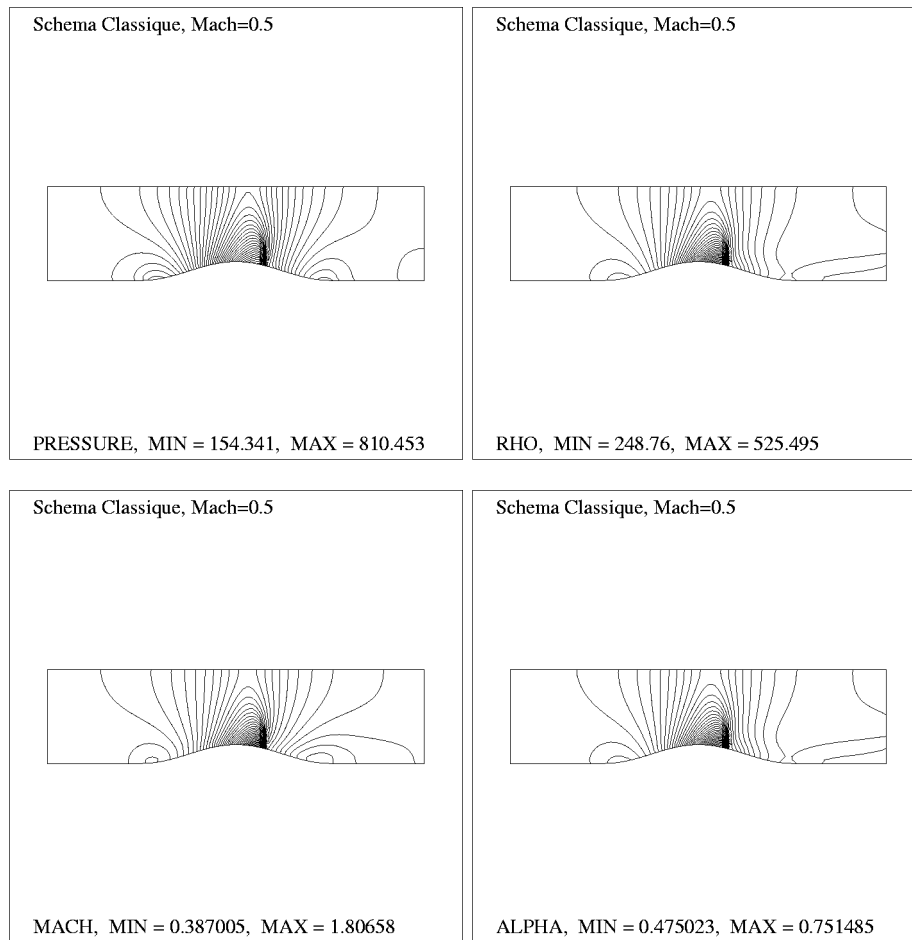


FIG. 4.1 – Isovaleurs des variables de mélange sur un maillage à 3277 nœuds à  $M_\infty = 0.5$ . Schéma implicite classique.

### Chute d'une goutte

Ce deuxième test reprend la chute de la goutte présentée au chapitre 3 et calculée avec la méthode explicite. On réalise ici le même calcul avec la méthode implicite non preconditionnée. Ce calcul nécessite 14624 itérations explicites à cause des faibles nombres de Mach de l'ordre de  $10^{-2}$ . On propose donc de montrer, sur ce test à faible nombre de Mach que la méthode implicite peut être très avantageuse.

Le calcul implicite a été réalisé avec des pas de temps calculés avec une rampe  $CFL = 0.1n$  où  $n$  correspond au nombre d'itérations et jusqu'à  $CFL_{\max} = 40$ . L'ordre 2 en espace est réalisé avec la même stratégie MUSCL ( $\bar{\beta} = 1/2$ ) que pour le calcul explicite, mais le schéma reste à l'ordre 1 en temps. Cette méthode est stable en implicite contrairement au schéma explicite qui nécessite de l'ordre 2 en temps. Les Figures 4.2-4.3 présentent simultanément les résultats de la méthode implicite (gauche) et de la méthode explicite (droite).

Les résultats obtenus avec les deux méthodes (explicite et implicite) sont assez proches. Néanmoins, on notera que les résultats de la méthode implicite sont un peu moins diffusés. En effet, on a  $\alpha_{\max} \simeq 0.75$  en fin de simulation pour le calcul implicite alors que  $\alpha_{\max} \simeq 0.65$  pour le calcul explicite. Cela peut paraître a priori surprenant puisque que sur un pas de temps, le schéma explicite est en théorie moins diffusif que le schéma implicite. Néanmoins, comme la méthode implicite permet d'utiliser des grands pas de temps, le calcul est réalisé avec beaucoup moins d'itérations (495 itérations implicites contre 14624 itérations explicites). Et sur ce cas test, le schéma implicite donne une solution moins diffusée.

Par ailleurs, le coût du temps de simulation a été divisé par un facteur 10 ce qui représente un avantage considérable d'autant plus que la solution obtenue par la méthode implicite est plus précise!

On notera que l'initialisation de la fraction volumique d'air dans la goutte était de  $\alpha_1 = 10^{-8}$  pour le calcul explicite du chapitre 3. Ici elle vaut  $\alpha_1 = 10^{-3}$ . La raison de ce choix provient du fait que l'initialisation à  $\alpha_1 = 10^{-8}$  pour le calcul implicite peut générer des problèmes dans la résolution du système linéaire (dus à la présence de termes en  $1/\alpha_1$  dans la matrice implicite). Néanmoins, on notera que l'initialisation purement artificielle à  $\alpha_1 = 10^{-8}$  ou  $\alpha_1 = 10^{-3}$ , ne change pas les résultats. (Comparer la colonne droite de la Figure 4.2-4.3 à la Figure 3.13 du chapitre 3)

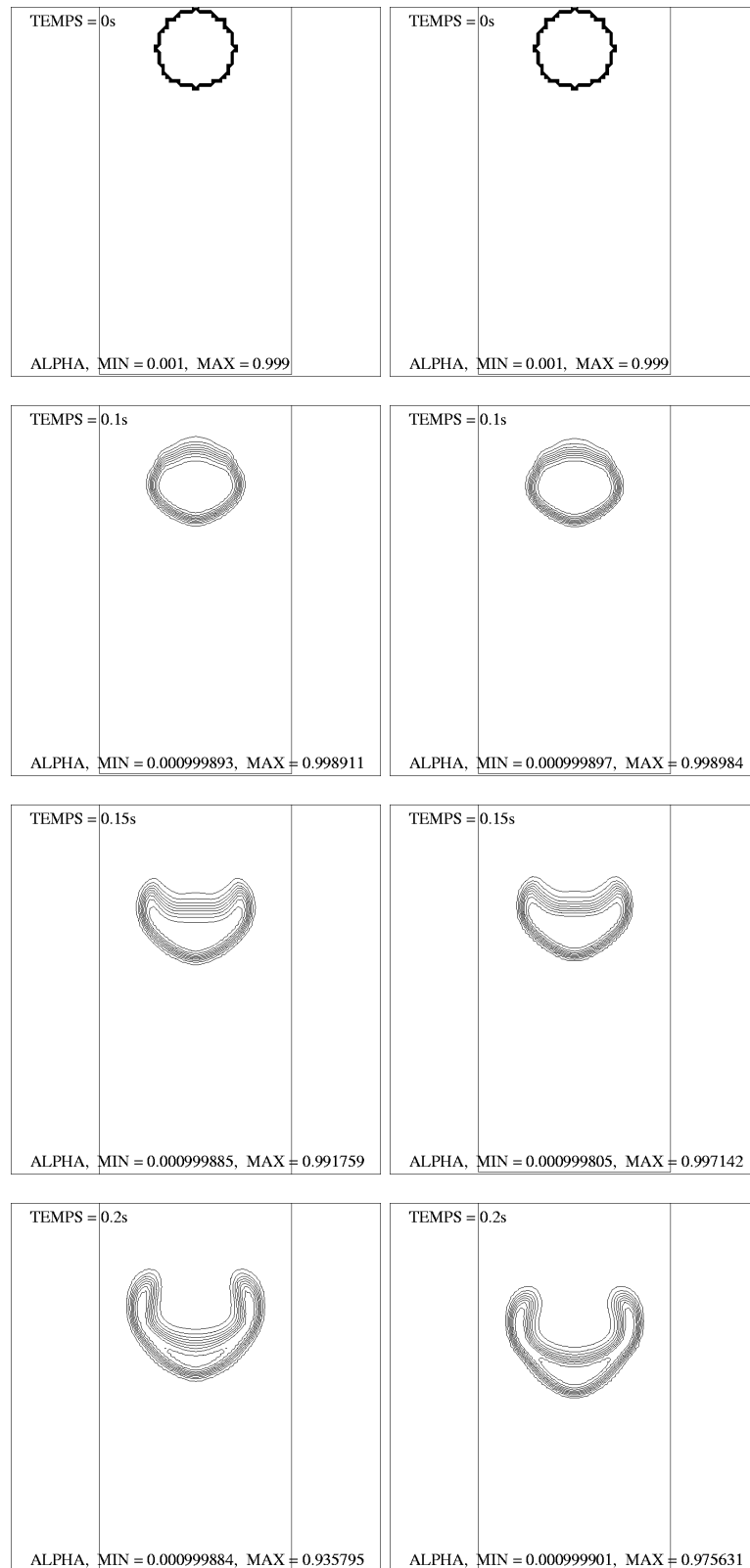


FIG. 4.2 – Isovaleurs de la fraction volumique pour la chute d’une goutte à  $t = 0$  s, 0.1 s, 0.15 s et 0.2 s. Schéma implicite classique (gauche) et schéma explicite (droite).

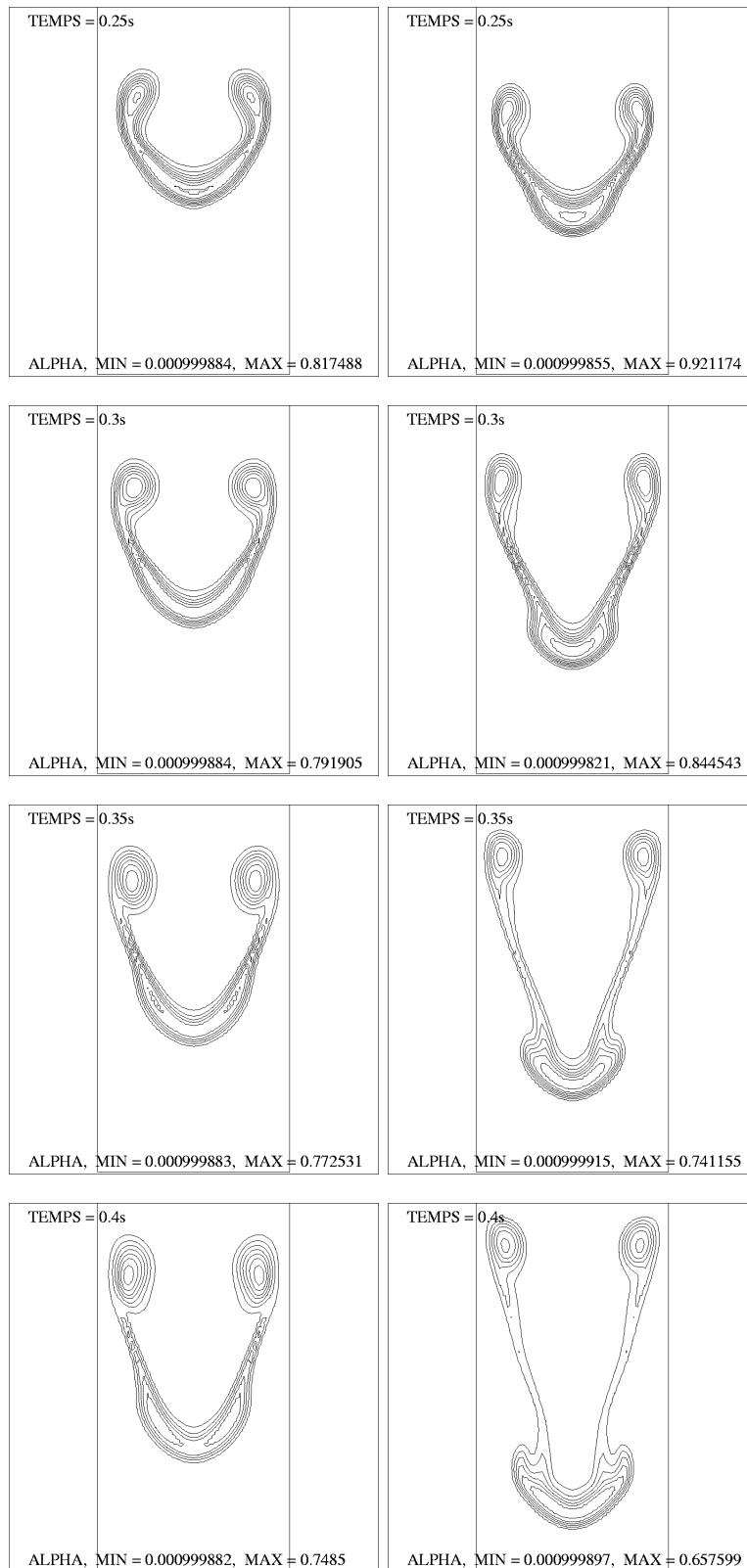


FIG. 4.3 – Isovaleurs de la fraction volumique pour la chute d'une goutte à  $t = 0.25$  s, 0.3 s, 0.35 s et 0.4 s. Schéma implicite classique (gauche) et schéma explicite (droite).

## 4.6.2 Schéma préconditionné

### Calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère, à faible nombre de Mach

Ce premier test présente une série de simulations d'écoulements diphasiques dans une tuyère où le nombre de Mach tend vers zéro et où l'on veut tester l'effet bénéfique du preconditionnement. Ce type de simulations est similaire aux expériences réalisées dans le cadre monophasique. On utilise le schéma implicite en temps et une discrétisation d'ordre 1 en espace. Les pas de temps utilisés par la méthode implicite sont calculés avec un CFL inversement proportionnel au résidu non linéaire de la densité en norme L2 :

$$\text{CFL} = \frac{1}{\text{Res}(\rho)} \quad \text{avec} \quad \text{CFL}_{\max} = 10^6 \quad (4.63)$$

Les solutions discrètes stationnaires présentées sont celles obtenues pour un résidu non linéaire de  $10^{-9}$ .

Dans ces simulations, le mélange diphasique d'eau et d'air ( $\alpha^\infty = 0.5$ ,  $\rho_1^\infty = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_2^\infty = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ) entre dans la tuyère avec une vitesse horizontale imposée  $u^\infty = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . Les lois d'états de l'air et de l'eau sont données par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \quad \text{et} \quad \pi_1 = 0 & \text{air} & (4.64.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \quad \text{et} \quad \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (4.64.2) \end{cases}$$

Le nombre de Mach représentatif de l'écoulement est défini par :

$$M_*^2 = \frac{(u^\infty)^2}{(\hat{a}^\infty)^2} = \frac{1}{(\hat{a}^\infty)^2} \quad (4.65)$$

et on fait tendre  $M_*$  vers zéro à travers trois simulations respectivement à  $M_* = 0.1$ ,  $M_* = 0.01$  et  $M_* = 0.001$ .

La pression imposée en entrée-sortie est donc solution de l'équation du second degré  $M_*^2 - 1/(\hat{a}^\infty)^2 = 0$  qui s'écrit, en utilisant les lois d'états de type Stiffened-Gas pour les deux fluides :

$$M_*^2 - (\alpha^\infty\rho_1^\infty + (1 - \alpha^\infty)\rho_2^\infty) \left( \frac{\alpha^\infty}{\gamma_1(p^\infty + \pi_1)} + \frac{1 - \alpha^\infty}{\gamma_2(p^\infty + \pi_2)} \right) = 0 \quad (4.66)$$

La Figure 4.4 montre les résultats de la pression normalisée  $p - p_{\min}/p_{\max} - p_{\min}$  pour l'état stationnaire discret calculé. La Figure 4.5 montre les résultats de la pression sur les bords inférieur et supérieur de la tuyère. On présente de gauche à droite les résultats obtenus avec le schéma classique et preconditionné.

La Figure 4.5 sur laquelle sont présentés les profils de pression sur les bords de la tuyère montre clairement que la solution obtenue avec le schéma classique n'est pas symétrique et ne peut donc pas être une approximation raisonnable d'un écoulement potentiel qui lui est symétrique par rapport à l'axe géométrique de la tuyère. De plus, on notera que les fluctuations de pression sont beaucoup plus grandes dans le cas du schéma classique (où elles sont de l'ordre de  $M_*$ ) que dans celui du schéma preconditionné (où elles sont de l'ordre de  $M_*^2$ ). Cela montre qu'il n'est pas possible d'approcher précisément la solution incompressible sans preconditionnement. Ainsi les deux premières colonnes de la Figure 4.5 présentent les résultats de la méthode classique et preconditionnée avec les mêmes échelles de tracé pour la pression sur l'axe des  $y$ . On constate que pour le calcul à  $M_* = 10^{-3}$ , on ne perçoit presque plus les fluctuations de pression quand on utilise le preconditionnement. La troisième colonne de cette Figure présente alors les résultats du schéma preconditionné avec une adaptation d'échelle.

Comme le nombre de Mach décroît, la Figure 4.4 montre que les résultats du schéma classique se dégradent de plus en plus et que les solutions ne convergent pas vers une approximation raisonnable de la solution incompressible. En revanche, les résultats obtenus avec le schéma preconditionné convergent vers une solution unique et symétrique dans laquelle les fluctuations de pression sont beaucoup plus petites. Ceci met en évidence la nécessité mais aussi l'efficacité du preconditionnement dans la simulation numérique des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach.

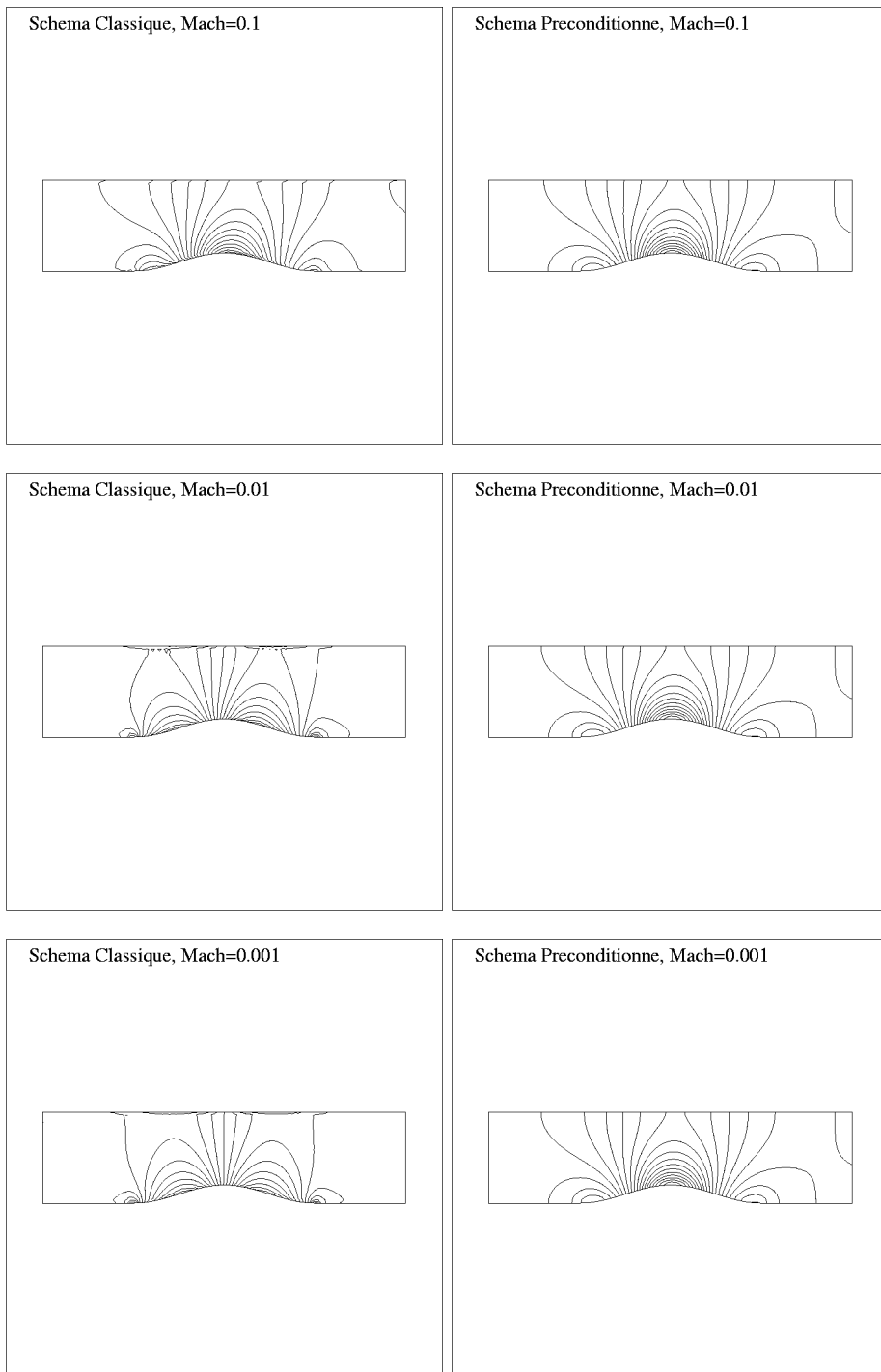


FIG. 4.4 – Isovaleurs de la pression normalisée, sur un maillage à 3277 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Schéma classique (gauche) et schéma préconditionné (droite).

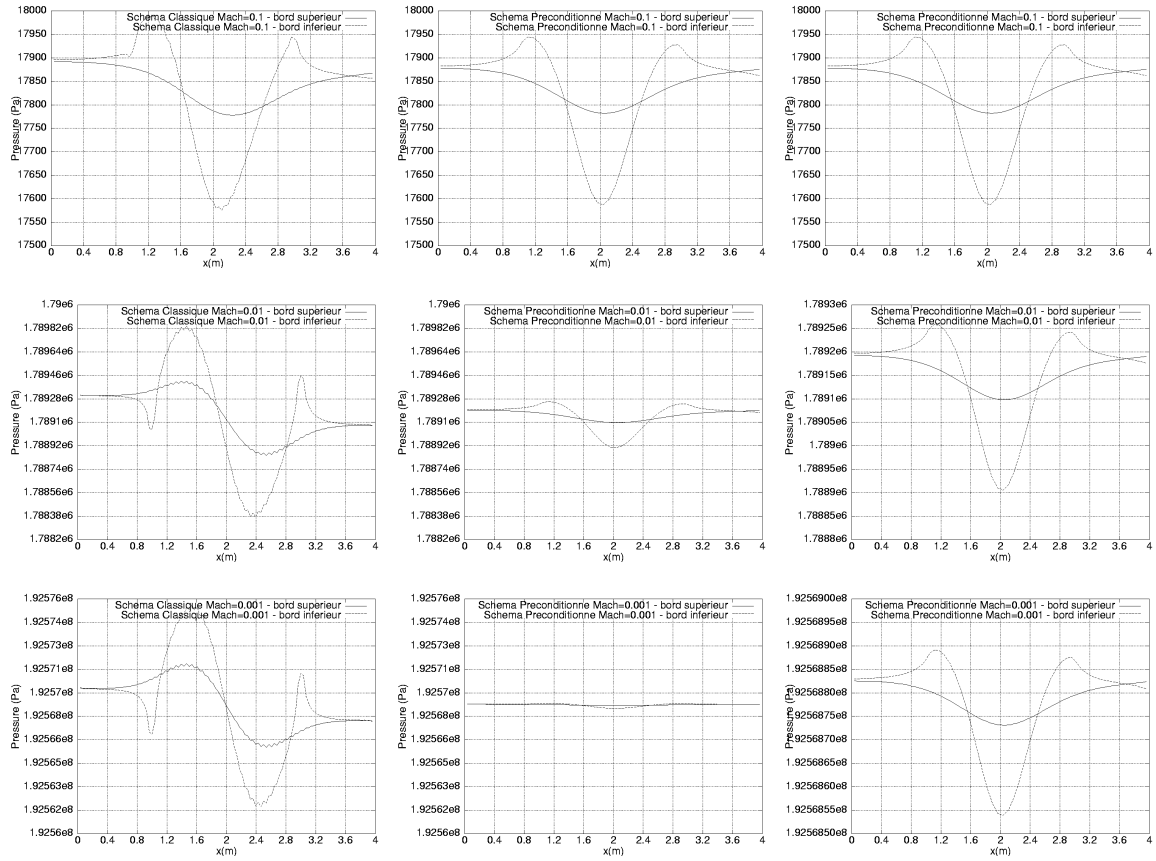


FIG. 4.5 – Profils de pression sur les bords de la tuyère, sur un maillage à 3277 nœuds à  $M_\infty = 0.1$  (haut),  $M_\infty = 0.01$  (milieu),  $M_\infty = 0.001$  (bas). Schéma classique (gauche) et schéma préconditionné (milieu)-(droite).



### Ascension d'une bulle d'air dans de l'eau

Ce deuxième test montre l'ascension d'une bulle d'air sous l'effet de la gravité ( $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ) dans une boîte remplie d'eau. Les lois d'états de l'air et de l'eau sont données par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \text{ et } \pi_1 = 0 & \text{air} & (4.67.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \text{ et } \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (4.67.2) \end{cases}$$

Initialement la bulle est au repos et le champ de pression est hydrostatique. La boîte est un carré dont la longueur des côtés est égale à deux mètres. Le maillage le plus grossier est composé de 100 x 100 points et le maillage le plus fin de 400 x 400 points. Bien que ce test semble assez simple, il présente plusieurs difficultés quand on s'intéresse à sa simulation numérique. En particulier le nombre de Mach durant la simulation est faible (il va partir de zéro pour atteindre lentement une valeur d'environ  $10^{-1}$  en fin de calcul) et le rapport de densité entre les deux fluides est égal à 1000. Sur ce test, nous proposons de montrer l'effet du preconditionnement étant données les faibles vitesses de l'écoulement, celui-ci étant quasiment incompressible.

Sur ce problème d'interface très difficile, il n'a pas été possible d'utiliser la méthode implicite. En effet la bulle étant initialement au repos, toutes les vitesses sont nulles et le paramètre de preconditionnement  $\beta$  est donc égal à zéro. Ceci peut conduire à des échecs numériques déjà constatés dans le cadre monophasique. Ainsi nous avons utilisé le preconditionnement avec la méthode explicite et malheureusement, cela peut rendre le schéma assez instable (voir Figure 4.7 en bas à droite) et donc diminuer l'effet d'amélioration de la précision.

Les différentes simulations ont donc été réalisées avec le schéma explicite en temps de type Runge et Kutta non linéaire (3.112) en trois étapes et une discrétisation spatiale d'ordre 2 ( $\bar{\beta} = 1/2$ ). Le CFL est constant et égal à 0.8. Le calcul sur le maillage le plus fin (Figure 4.8) a nécessité environ 50000 itérations et les calculs sur le maillage le plus grossier (Figure 4.6 et Figure 4.7) ont nécessité environ 12000 itérations.

La Figure 4.6 montre les résultats du champ de fraction volumique aux instants  $t = 0 \text{ s}$ ,  $0.15 \text{ s}$ ,  $0.35 \text{ s}$ ,  $0.55 \text{ s}$ ,  $0.75 \text{ s}$ ,  $1.0 \text{ s}$  pour le schéma classique tandis que la Figure 4.7 montre les résultats du schéma preconditionné aux mêmes instants. On peut clairement observer des différences entre les résultats.

On notera qu'il est difficile sur ce test d'évaluer la qualité des solutions calculées car la modélisation n'inclut pas la viscosité des fluides et les effets de tension superficielle.

Néanmoins, pour tester l'effet du preconditionnement, nous avons simulé avec le schéma classique, le même écoulement (voir Figure 4.8) sur un maillage beaucoup plus fin composé de 400 x 400 points.

En effet nous savons que l'effet principal du preconditionnement est de passer d'une erreur de troncature en  $\mathcal{O}(h/M_*)$  pour les schémas classiques, à une erreur en  $\mathcal{O}(h)$  indépendante du nombre de Mach pour les schémas preconditionnés. La Figure 4.9, trace la norme L2 de l'erreur par rapport à la solution du calcul sur le maillage le plus fin.

$$\|\text{erreur}(\phi)\| = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N [\phi(i) - \phi^{ref}(i)]^2} \quad (4.68)$$

Si nous observons les résultats pour la fraction volumique, l'effet bénéfique du preconditionnement n'apparaît pas de façon évidente. La principale raison peut être le fait que nous avons utilisé le preconditionnement avec la méthode explicite et que le schéma est devenu instable. En revanche, l'amélioration sur la précision du champ de pression discret est assez bien mise en évidence.

En conclusion, l'effet bénéfique du preconditionnement sur la précision du schéma n'a pas été clairement mis en évidence sur ce problème d'interface très difficile. La principale raison pourrait provenir du fait que nous n'avons pas réussi à utiliser la méthode implicite à cause des vitesses initiales nulles conduisant à  $\beta = 0$  dans le preconditionneur.

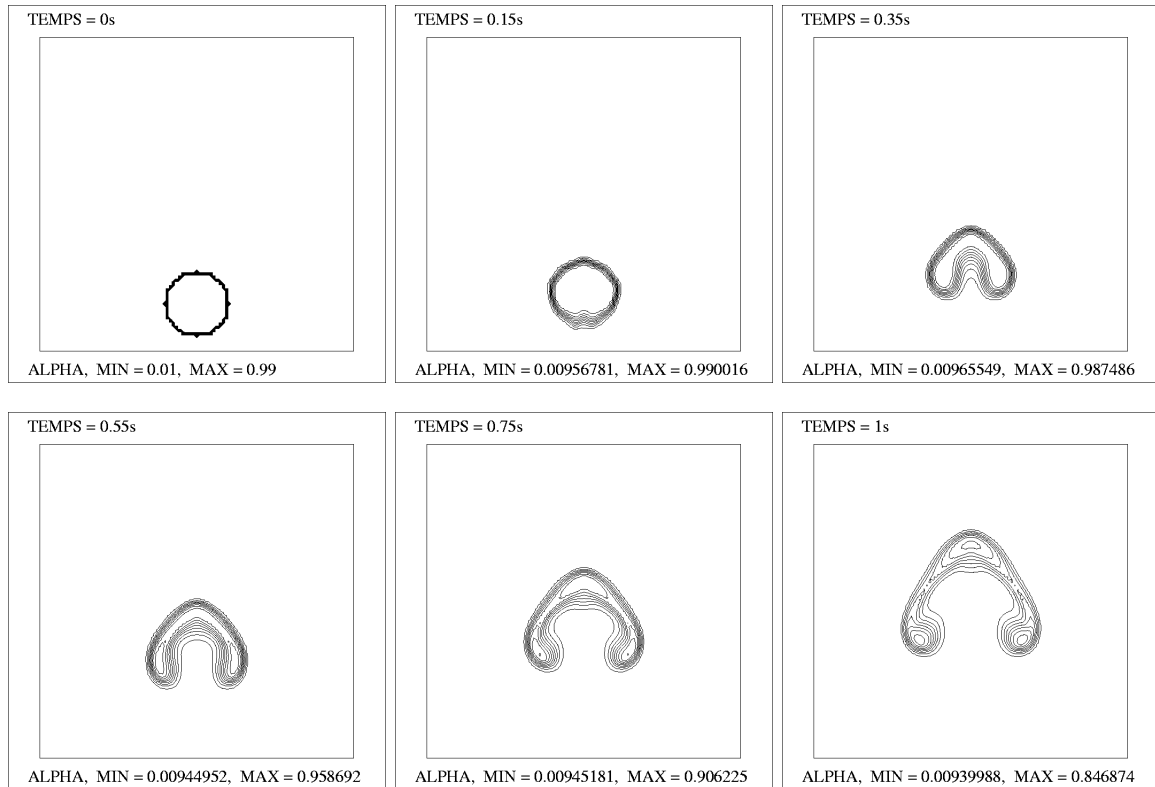


FIG. 4.6 – Isovaleurs de la fraction volumique, pour le schéma classique et sur un maillage de  $100 \times 100$  nœuds.

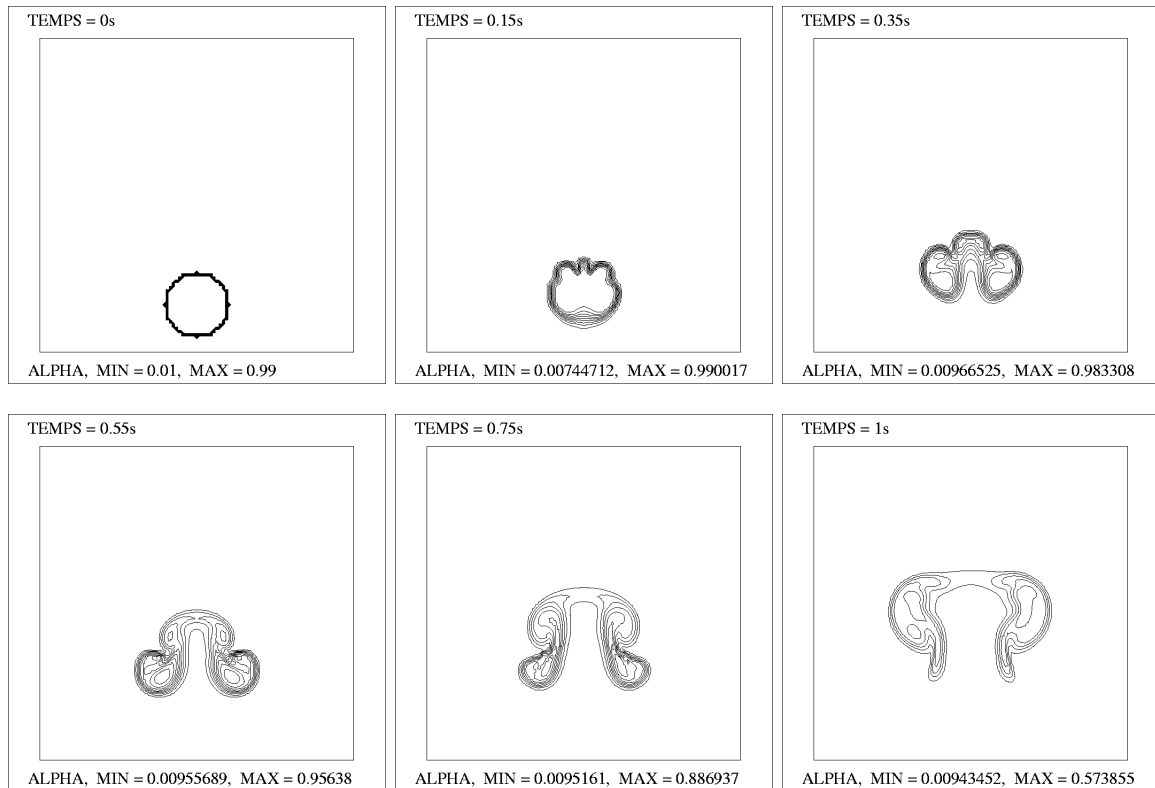


FIG. 4.7 – Isovaleurs de la fraction volumique, pour le schéma préconditionné et sur un maillage de  $100 \times 100$  nœuds.

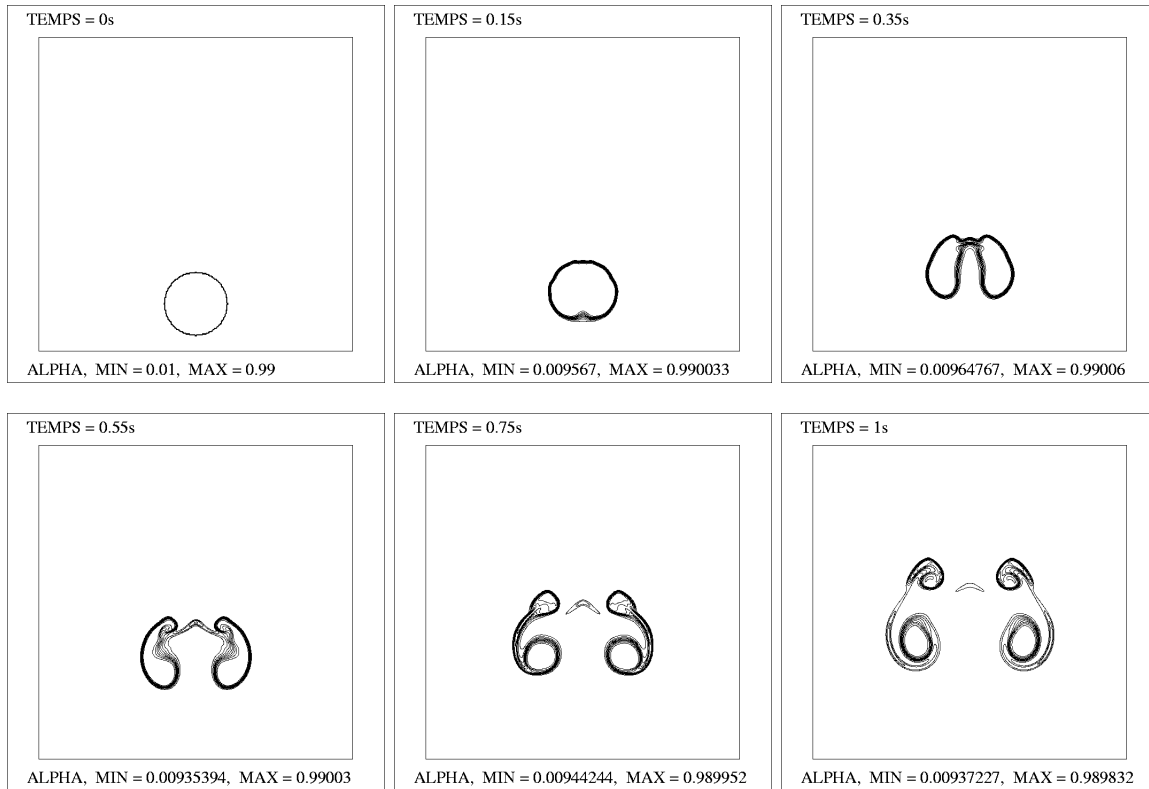


FIG. 4.8 – Isovaleurs de la fraction volumique, pour le schéma classique et sur un maillage de 400 x 400 nœuds.

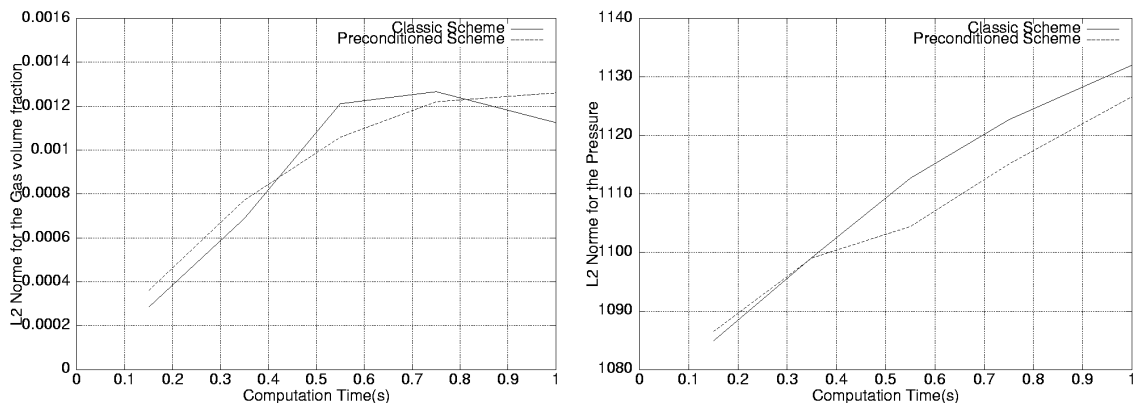


FIG. 4.9 – Norme L2 de l'erreur sur la fraction volumique (gauche) et sur la pression (droite). Schéma classique (traits pleins) et schéma préconditionné (traits pointillés).

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de préconditionnement ainsi qu'un schéma implicite en temps pour un modèle réduit diphasique à cinq équations. Nous avons montré théoriquement et aussi à travers des expériences numériques que cela représente un véritable intérêt aussi bien du point de vue des temps de calculs que de la précision pour le calcul d'écoulements diphasiques à faible nombre de Mach.



# Chapitre 5

## Etude du modèle diphasique à sept équations

*Dans ce chapitre, nous proposons de montrer que les modèles à sept équations de type Baer-Nunziato, dans la limite des temps de relaxation des pressions infiniment petits, tendent vers les modèles bi-fluides à six équations où les pressions des deux phases sont prises comme égales.*

*Ensuite, nous construisons pour le modèle à sept équations, un schéma implicite basé sur un solveur hyperbolique de type VFRoe et une méthode de splitting des opérateurs. Le schéma repose sur une formulation de type volumes finis et en maillages non structurés.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>109</b>
<b>5.2</b>	<b>Relaxation des pressions et modèles à six équations</b>	<b>110</b>
<b>5.3</b>	<b>Implication des solveurs de type VFRoe pour le modèle à sept équations</b>	<b>115</b>
5.3.1	Matrice Jacobienne	115
5.3.2	Problème de Riemann approché	118
5.3.3	Matrices de passage	120
5.3.4	Approximation numérique	122
5.3.5	Résultats numériques	124
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>

---

### 5.1 Introduction

La première partie de ce chapitre présente une étude des modèles à sept équations relaxés en pression. Nous prouvons que d'une certaine manière, le modèle à sept équations contient le modèle bi-fluides à six équations. En effet, nous montrons dans le paragraphe 5.2 que la limite du modèle à sept équations lorsque les temps caractéristiques de relaxation des pressions tendent vers zéro, est un système à six équations équivalent aux modèles bi-fluides classiques à six équations. En conséquence, un solveur hyperbolique pour les modèles à sept équations couplé à une procédure de relaxation des pressions, constitue une méthode originale et stable de résolution par relaxation des modèles bi-fluides à six équations.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la résolution numérique des modèles à sept équations par des méthodes implicites en temps. Les travaux [55], [56], [58], [9] proposent pour la résolution numérique du modèle à sept équations, une méthode de splitting d'opérateurs de type Strang [65]. Néanmoins, ces travaux utilisent des schémas explicites et l'opérateur de la partie hyperbolique impose  $CFL < 1$ . Pour des applications à faible nombre de Mach, cette condition de stabilité conduit à des pas de temps très petits et la convergence des schémas est fortement ralentie. Nous proposons donc d'étudier une méthode de splitting d'opérateurs où le pas hyperbolique est résolu par une méthode implicite.

Le paragraphe 5.3 présente donc une méthode implicite linéarisée basée sur les solveurs de type VFRoe-ncv, appliquée aux modèles bi-fluides à sept équations de type Baer-Nunziato. Le but de cette démarche est de calculer des écoulements diphasiques compressibles à faible nombre de Mach pour lesquels les schémas explicites sont trop coûteux en nombre de pas de temps ( $\Delta t \rightarrow 0$ ). Pour cette raison, les schémas implicites paraissent plus adaptés, notamment pour les calculs diphasiques stationnaires. Le point clé de la méthode implicite développée repose sur l'hyperbolicité inconditionnelle du modèle.

## 5.2 Relaxation des pressions et modèles à six équations

Dans ce paragraphe, on propose de montrer que les équations du modèle à sept équations, pour des temps de relaxation des pressions infiniment petits, tendent vers celles du modèle bi-fluides classique à six équations où la relation de fermeture est donnée par l'égalité des pressions phasiques. Pour réaliser cette étude, on utilise le formalisme de réduction de systèmes hyperboliques avec termes sources raides présenté au chapitre 3.

En l'absence de transfert de masse, de flux de chaleur et de forces extérieures, le modèle à sept équations peut s'écrire en termes de variables primitives  $\mathbf{U} = {}^t(\alpha_k \rho_k, \mathbf{u}_k, p_k, \alpha_2)$  sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\frac{D_k \mathbf{u}_k}{Dt} + \frac{1}{\rho_k} \nabla p_k = \frac{1}{\alpha_k \rho_k} (p_{k\mathbb{I}} - p_k) \nabla \alpha_k + \frac{\mathbf{F}_k^d}{\alpha_k \rho_k} \quad (5.1.2)$$

$$\frac{D_k p_k}{Dt} + C_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k = \frac{C_{k\mathbb{I}}}{\alpha_k} (\mathbf{u}_{\mathbb{I}} - \mathbf{u}_k) \cdot \nabla \alpha_k + \mu \frac{C_{k\mathbb{I}}}{\alpha_k} (p_{k'} - p_k) + \frac{\mathbf{F}_k^d \cdot (\mathbf{u}_{\mathbb{I}} - \mathbf{u}_k)}{\alpha_k \rho_k \kappa_k} \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \mathbf{u}_{\mathbb{I}} \cdot \nabla \alpha_2 = \mu (p_2 - p_1) \quad (5.1.4)$$

où on a introduit les coefficients  $\chi_k = (\partial \varepsilon_k / \partial \rho_k)_{p_k}$  et  $\kappa_k = (\partial \varepsilon_k / \partial p_k)_{\rho_k}$  et où  $D_k \phi / Dt = \partial \phi / \partial t + \mathbf{u}_k \cdot \nabla \phi$ . On rappelle que l'on a posé  $C_k = \rho_k a_k^2$  et  $C_{k\mathbb{I}} = \rho_k a_{k\mathbb{I}}^2$  pour les impédances acoustiques où  $a_k$  et  $a_{k\mathbb{I}}$  sont respectivement la vitesse du son de la phase  $k$  et la vitesse du son de la phase  $k$  à l'interface.

On s'intéresse à des situations où les temps de relaxation des pressions sont petits par rapport aux autres temps caractéristiques de l'écoulement. Ainsi, on pose  $\mu = \mu^0 / \varepsilon$  où  $\mu^0$  est  $\mathcal{O}(1)$  et on analyse le cas  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Par la suite, on ne prend pas en compte les termes liés aux forces de frottements  $\mathbf{F}_k^d = \lambda(\mathbf{u}_{k'} - \mathbf{u}_k)$  qui n'appartiennent pas à la partie hyperbolique et qui n'ont pas d'influence sur notre analyse. On écrit alors le système sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{R(\mathbf{U})}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

La matrice  $A(\mathbf{U})$  est donnée par :

$$A(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \alpha_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \alpha_2 \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 1/\rho_1 & 0 & (p_{1\mathbb{I}} - p_1)/(\alpha_1 \rho_1) \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 1/\rho_2 & -(p_{2\mathbb{I}} - p_2)/(\alpha_2 \rho_2) \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & u_1 & 0 & C_{1\mathbb{I}}(u_{\mathbb{I}} - u_1)/\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & u_2 & -C_{2\mathbb{I}}(u_{\mathbb{I}} - u_2)/\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{\mathbb{I}} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

tandis que le vecteur du terme source de relaxation  $R(\mathbf{U})$  s'écrit :

$$R(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu^0 C_{1\mathbb{I}}(p_2 - p_1)/\alpha_1 \\ -\mu^0 C_{2\mathbb{I}}(p_2 - p_1)/\alpha_2 \\ \mu^0 (p_2 - p_1) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

On cherche des solutions proches de  $\mathcal{E}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^7$  défini par  $\mathcal{E} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^7; R(\mathbf{U}) = 0\}$ . Cet ensemble est une sous variété de dimension 6, définie implicitement. De plus, on en connaît explicitement une paramétrisation  $M$ . En effet, on définit la transformation  $M : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbf{U} \in \mathbb{R}^7$  par  $M(\mathbf{u}) = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, u_1, u_2, p, p, \alpha_2)$  où  $\mathbf{u} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, u_1, u_2, p, \alpha_2)$ .

D'après les résultats du chapitre 3, si on cherche des solutions sous la forme  $\mathbf{U} = M(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{V}$ , le système limite à l'ordre 0 s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + P.A(M(\mathbf{u})).dM_{\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

Il est donc nécessaire de calculer la matrice  $P.A(M(\mathbf{u})).dM_{\mathbf{u}}$  pour obtenir le système réduit en variables  $\mathbf{u} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, u_1, u_2, p, \alpha_2)$ .

La matrice Jacobienne de la transformation  $M$  est donnée par :

$$dM_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Et la Jacobienne du terme source évaluée sur la Maxwellienne  $M(\mathbf{u})$  s'écrit :

$$R'(M(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^0 C_{1I}/\alpha_1 & \mu^0 C_{1I}/\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^0 C_{2I}/\alpha_2 & -\mu^0 C_{2I}/\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^0 & \mu^0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Une base de l'image  $\text{Rng}(R'(M(\mathbf{u})))$  de cette matrice est définie par le vecteur :

$$I^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C_{1I}/\alpha_1 \\ C_{2I}/\alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Et l'inversion de la matrice  $S = [dM_{\mathbf{u}}^1, \dots, dM_{\mathbf{u}}^6, I^1]$  donne la matrice de projection  $P$  sur le noyau  $\ker(R'(M(\mathbf{u})))$  de l'opérateur  $R(\mathbf{U})$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 C_{2I}}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_2 C_{1I}}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$



Après des calculs algébriques, on obtient donc l'expression du produit  $P.A(M(\mathbf{u})).dM\mathbf{u}$  :

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & \alpha_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \alpha_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 1/\rho_1 & (p_{1I} - p)/(\alpha_1\rho_1) \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 1/\rho_2 & -(p_{2I} - p)/(\alpha_2\rho_2) \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 C_1 C_{2I}}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_2 C_2 C_{1I}}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_1 C_{2I} u_1 + \alpha_2 C_{1I} u_2}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{C_{1I} C_{2I} (u_2 - u_1)}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_1 \alpha_2 C_1}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 C_2}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (u_2 - u_1)}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} & \frac{\alpha_1 C_{2I} u_2 + \alpha_2 C_{1I} u_1}{\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Et le système réduit à six équations peut s'écrire :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (5.11.1)$$

$$\frac{D_k \mathbf{u}_k}{Dt} + \frac{1}{\rho_k} \nabla p = \frac{1}{\alpha_k \rho_k} (p_{kI} - p) \nabla \alpha_k \quad (5.11.2)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}) \frac{\partial p}{\partial t} &+ (\alpha_1 C_{2I} \mathbf{u}_1 + \alpha_2 C_{1I} \mathbf{u}_2) \cdot \nabla p \\ &+ (\alpha_1 C_1 C_{2I} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \alpha_2 C_2 C_{1I} \operatorname{div} \mathbf{u}_2) + C_{1I} C_{2I} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.11.3)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}) \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} &+ (\alpha_1 C_{2I} \mathbf{u}_2 + \alpha_2 C_{1I} \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_2 \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 (C_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 - C_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1) + \alpha_1 \alpha_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla p = 0 \end{aligned} \quad (5.11.4)$$

A noter que si on considère que  $p_{kI} = p$ , on a aussi  $C_{kI} = C_k$  et les équations (5.11.3)-(5.11.4) pour la pression et la fraction volumique peuvent alors s'écrire plus simplement sous la forme :

$$(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha_1 C_2 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 C_1 \mathbf{u}_2) \cdot \nabla p + C_1 C_2 \operatorname{div}(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = 0 \quad (5.12)$$

$$(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \alpha_2 C_1 \operatorname{div}(\alpha_1 \mathbf{u}_1) + \alpha_1 C_2 \operatorname{div}(\alpha_2 \mathbf{u}_2) + \alpha_1 \alpha_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla p = 0$$

Maintenant, on cherche à réécrire ce système en variables conservatives  ${}^t(\alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k e_k)$ , dans le but de montrer que ce système d'équations (5.11) est équivalent au système bi-fluides à six équations.

D'après les équations de conservation de la masse (5.11.1) et les équations pour les vitesses (5.11.2), on retrouve les équations classiques de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \alpha_k \nabla p = (p_{kI} - p) \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d \quad (5.13)$$

Ensuite, on cherche à combiner l'équation de pression (5.11.3) et celle de la fraction volumique (5.11.4) afin d'obtenir deux équations de conservation d'énergie.

Aussi, remarquons que les deux équations (5.11.3)-(5.11.4) entraînent :

$$\frac{D_k p}{Dt} + \frac{C_{kI}}{\alpha_k} \frac{D_k \alpha_k}{Dt} + C_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 \quad (5.14)$$

En rappelant que  $d\varepsilon_k = \chi_k d\rho_k + \kappa_k dp$ , on peut alors écrire :

$$\alpha_k \rho_k \frac{D_k \varepsilon_k}{Dt} = \alpha_k \rho_k \chi_k \frac{D_k \rho_k}{Dt} + \alpha_k \rho_k \kappa_k \frac{D_k p}{Dt} \quad (5.15)$$

Et on obtient les équations pour les énergies internes sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \varepsilon_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \varepsilon_k \mathbf{u}_k) = \alpha_k \rho_k \chi_k \frac{D_k \rho_k}{Dt} + \alpha_k \rho_k \kappa_k \frac{D_k p}{Dt} \quad (5.16)$$

En utilisant les équations (5.14) ainsi que les relations pour les vitesses du son  $a_k^2 = (p/\rho_k^2 - \chi_k)/\kappa_k$  et  $a_{k\mathbb{I}}^2 = (p_{\mathbb{I}}/\rho_k^2 - \chi_k)/\kappa_k$ , on obtient après des calculs algébriques :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \varepsilon_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \varepsilon_k \mathbf{u}_k) = -\alpha_k p \operatorname{div} \mathbf{u}_k - p_{k\mathbb{I}} \frac{D_k \alpha_k}{Dt} \quad (5.17)$$

D'après les équations sur les vitesses (5.11.2), on obtient les équations pour les énergies cinétiques :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k^2/2}{\partial t} + \alpha_k \mathbf{u}_k \cdot \nabla p + (p - p_{k\mathbb{I}}) \mathbf{u}_k \cdot \nabla \alpha_k = 0 \quad (5.18)$$

Et en ajoutant ces deux dernières équations (5.17)-(5.18), on obtient finalement les équations de conservation des énergies totales :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k e_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k e_k + \alpha_k p) \mathbf{u}_k = -p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \quad (5.19)$$

Ainsi, le modèle réduit à six équations s'écrit en variables conservatives sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (5.20.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \alpha_k \nabla p = (p_{k\mathbb{I}} - p) \nabla \alpha_k + \mathbf{F}_k^d \quad (5.20.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k e_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k e_k + \alpha_k p) \mathbf{u}_k = -p_{k\mathbb{I}} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \mathbf{F}_k^d \cdot \mathbf{u}_{\mathbb{I}} \quad (5.20.3)$$

où le terme  $\partial \alpha_k / \partial t$  dans l'équation (5.20.3), s'exprime à partir de l'équation (5.11.4).

Cette forme est bien la forme générale (1.27) des modèles bi-fluides classiques à six équations, donnée au chapitre 1. Ainsi, les modèles à sept équations de type Baer-Nunziato relaxés en pressions dégènerent sur les modèles bi-fluides à six équations.

Néanmoins, il reste à montrer que l'hypothèse d'égalité des pressions phasiques  $p_1 = p_2$  entraîne l'équation de la fraction volumique (5.11.4), pour avoir l'équivalence entre le modèle (5.20) et le modèle (5.1) quand  $\mu = \mu^0/\varepsilon$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour cela, écrivons la relation d'égalité des pressions phasiques :

$$p_1(\rho_1, \varepsilon_1) = p_2(\rho_2, \varepsilon_2) \quad (5.21)$$

En dérivant cette relation (5.21), on obtient :

$$\left( \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon_1} \right)_{\rho_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \left( \frac{\partial p_2}{\partial \varepsilon_2} \right)_{\rho_2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \left( \frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} \right)_{\varepsilon_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \left( \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right)_{\varepsilon_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (5.22)$$

Ensuite, on réécrit  $d\varepsilon_k = \chi_k d\rho_k + \kappa_k dp_k$  sous la forme  $dp_k = (1/\kappa_k)d\varepsilon_k - (\chi_k/\kappa_k)d\rho_k$  et la relation (5.22) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} - \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{\chi_1}{\kappa_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\chi_2}{\kappa_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (5.23)$$

Les équations de conservation de masse (5.20.1) nous donnent les expressions suivantes pour les dérivées des densités phasiques :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k) - \frac{\rho_k}{\alpha_k} \frac{D_k \alpha_k}{Dt} \quad (5.24)$$

Et les équations (5.17) nous donnent l'évolution des énergies internes phasiques :

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = -\mathbf{u}_k \cdot \nabla \varepsilon_k - \frac{p}{\rho_k} \operatorname{div} \mathbf{u}_k - \frac{p_{kI}}{\alpha_k \rho_k} \frac{D_k \alpha_k}{Dt} \quad (5.25)$$

En utilisant les expressions (5.24)-(5.25) dans l'équation (5.23), on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_1} \left[ -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \varepsilon_1 - \frac{p}{\rho_1} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 - \frac{p_{1I}}{\alpha_1 \rho_1} \frac{D_1 \alpha_1}{Dt} \right] + \frac{1}{\kappa_2} \left[ \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \varepsilon_2 + \frac{p}{\rho_2} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 + \frac{p_{2I}}{\alpha_2 \rho_2} \frac{D_2 \alpha_2}{Dt} \right] \\ &= \frac{\chi_1}{\kappa_1} \left[ -\operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) - \frac{\rho_1}{\alpha_1} \frac{D_1 \alpha_1}{Dt} \right] + \frac{\chi_2}{\kappa_2} \left[ \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) + \frac{\rho_2}{\alpha_2} \frac{D_2 \alpha_2}{Dt} \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

On rappelle que  $C_{kI} = \rho_k a_{kI}^2$  où  $a_{kI}^2 = (p/\rho_k^2 - \chi_k)/\kappa_k$ . En utilisant cette dernière relation, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{C_{2I}}{\alpha_2} \frac{D_2 \alpha_2}{Dt} - \frac{C_{1I}}{\alpha_1} \frac{D_1 \alpha_1}{Dt} \\ &+ \frac{1}{\kappa_1} \left[ -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \varepsilon_1 - \frac{p}{\rho_1} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \chi_1 \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) \right] + \frac{1}{\kappa_2} \left[ \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \varepsilon_2 + \frac{p}{\rho_2} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 - \chi_2 \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

qui peut se réécrire en remplaçant  $\alpha_1$  par  $1 - \alpha_2$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}) \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + (\alpha_1 C_{2I} \mathbf{u}_2 + \alpha_2 C_{1I} \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_2 \\ &+ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\kappa_1} \left[ -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \varepsilon_1 - \frac{p}{\rho_1} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \chi_1 \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) \right] + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\kappa_2} \left[ \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \varepsilon_2 + \frac{p}{\rho_2} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 - \chi_2 \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

En introduisant les impédances acoustiques phasiques  $C_k = \rho_k a_k^2$  où  $a_k^2 = (p/\rho_k^2 - \chi_k)/\kappa_k$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}) \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + (\alpha_1 C_{2I} \mathbf{u}_2 + \alpha_2 C_{1I} \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_2 \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 (C_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 - C_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\kappa_1} (-\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \varepsilon_1 + \chi_1 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_1) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\kappa_2} (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \varepsilon_2 - \chi_2 \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \rho_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Et finalement, en utilisant le fait que  $dp = (1/\kappa_k)d\varepsilon_k - (\chi_k/\kappa_k)d\rho_k$ , on obtient l'équation suivante pour l'évolution de la fraction volumique :

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_{2I} + \alpha_2 C_{1I}) \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + (\alpha_1 C_{2I} \mathbf{u}_2 + \alpha_2 C_{1I} \mathbf{u}_1) \cdot \nabla \alpha_2 \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 (C_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 - C_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1) + \alpha_1 \alpha_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \nabla p = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Cette équation est bien égale à l'équation (5.11.4) et ceci achève la preuve que l'on a bien équivalence entre le modèle (5.20) et le modèle (5.1) quand  $\mu = \mu^0/\varepsilon$  où  $\mu^0$  est  $\mathcal{O}(1)$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En conclusion, un solveur hyperbolique pour le modèle à sept équations couplé à une procédure de relaxation des pressions [56], [58], [42], peut représenter une méthode numérique alternative pour la résolution des modèles bi-fluides à six équations. Ceci est très intéressant car la non hyperbolicité du modèle à six équations ne pose plus de difficultés pour la méthode numérique.

## 5.3 Implication des solveurs de type VFRoe pour le modèle à sept équations

La mise au point de méthodes numériques *explicites* pour le modèle à sept équations a été largement exploitée pour les schémas de type Godunov [56], [58], [9]. Or dans cette thèse, on s'intéresse aux applications à faible nombre de Mach pour lesquelles les schémas explicites sont très peu performants. Nous proposons donc pour le modèle à sept équations, une méthode numérique *implicite* en temps à partir d'un solveur de type VFRoe-ncv [8]. Le modèle à sept équations comporte une partie hyperbolique plus des termes de relaxation. Ici, l'implication concerne la partie hyperbolique.

Pour parvenir à formuler ce schéma implicite, plusieurs étapes sont nécessaires. Dans le paragraphe 5.3.1, on calcule la Jacobienne du modèle formulé en variables conservatives  ${}^t(\alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k e_k, \alpha_2)$ , qui va être utilisée dans la phase mathématique (ou phase implicite). Dans le paragraphe 5.3.2, on résout le problème de Riemann en variables entropiques  ${}^t(p_k, \mathbf{u}_k, s_k, \alpha_2)$ . Cette solution sert ensuite au calcul des flux explicites dans la méthodologie des solveurs de type VFRoe-ncv ou plus généralement dans le cadre des schémas de type Godunov. Cette phase physique (ou phase explicite) consiste à déterminer les termes de flux assemblant le même second membre que pour un schéma explicite. Le paragraphe suivant 5.3.3 présente le calcul des matrices de passage des variables conservatives à celles entropiques, nécessaires à la construction de la méthode numérique. Puis le paragraphe 5.3.4 explique l'implication du schéma à partir des résultats précédents. Enfin le paragraphe 5.3.5 présente une série de deux simulations numériques. La première utilise le schéma explicite, pour le cas test de Ransom [53] et sert à "valider" la phase explicite du schéma proposé. La deuxième présente un calcul d'écoulement diphasique à faible nombre de Mach et montre l'intérêt du schéma implicite en temps.

### 5.3.1 Matrice Jacobienne

Dans ce paragraphe, on calcule la matrice Jacobienne du modèle à sept équations formulé en variables conservatives  ${}^t(\alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k e_k, \alpha_1)$ , qui s'écrit en deux dimensions d'espace sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + B_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = R(\lambda, \mu, \mathbf{Q}) \quad (5.31)$$

où  $R(\lambda, \mu, \mathbf{Q})$  représente le vecteur des termes sources de relaxation. Ces termes ne sont pas différentiels et n'appartiennent pas à la partie hyperbolique. Ils ne seront pas pris en compte dans la méthode implicite.

Le but de ce paragraphe est de calculer et de diagonaliser la matrice  $D_c(\mathbf{Q}) = A_c(\mathbf{Q})\eta_x + B_c(\mathbf{Q})\eta_y$  pour tout vecteur normé  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$ . Et la principale difficulté consiste à calculer les différentielles de pression  $dp_k$ . On fait l'hypothèse que les équations d'état de chaque phase peuvent s'écrire implicitement  $\rho_k \varepsilon_k = \rho_k \varepsilon_k(\rho_k, p_k)$  et on introduit donc les coefficients  $\delta_k = (\partial \rho_k \varepsilon_k / \partial \rho_k)_p$  et  $\xi_k = (\partial \rho_k \varepsilon_k / \partial p)_{\rho_k}$ . On peut ainsi écrire la différentielle  $d(\rho_k \varepsilon_k)$  sous la forme :

$$d(\rho_k \varepsilon_k) = \delta_k d\rho_k + \xi_k dp_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (5.32)$$

Ensuite, on utilise la relation de Gibbs pour chacune des deux phases  $k$  :

$$d\varepsilon_k = T_k ds_k + \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (5.33)$$

où  $T_k$  et  $s_k$  sont respectivement la température et l'entropie de la phase  $k$ . En introduisant  $h_k = \varepsilon_k + p_k / \rho_k$  qui représente l'enthalpie spécifique, la relation de Gibbs peut se réécrire sous la forme :

$$d(\rho_k \varepsilon_k) = \rho_k T_k ds_k + h_k d\rho_k \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (5.34)$$

Maintenant en écrivant l'égalité entre (5.34)-(5.32), on obtient les relations bien connues :

$$a_k^2 = \left( \frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} = \frac{h_k - \delta_k}{\xi_k} \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial p_k}{\partial s_k} \right)_{\rho_k} = \frac{\rho_k T_k}{\xi_k} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (5.35)$$

où  $a_k$  sont les vitesses du son phasiques. Les différentielles de pression pour chaque phase s'écrivent alors sous la forme :

$$dp_k = \frac{1}{\alpha_k \xi_k} \left( \frac{\mathbf{u}_k^2}{2} - \delta_k \right) d(\alpha_k \rho_k) - \frac{\mathbf{u}_k}{\alpha_k \xi_k} \cdot d(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \frac{1}{\alpha_k \xi_k} d(\alpha_k \rho_k e_k) - \frac{1}{\alpha_k \xi_k} (\rho_k \varepsilon_k - \rho_k \delta_k) d\alpha_k \quad (5.36)$$

Pour simplifier les écritures, on introduit les notations suivantes :

$$\beta_k = \frac{1}{\xi_k} \left( \frac{\mathbf{u}_k^2}{2} - \delta_k \right) \quad \text{et} \quad M_k = -\frac{1}{\xi_k} (\rho_k \varepsilon_k - \rho_k \delta_k) \quad (5.37)$$

Les matrices  $A_c(\mathbf{Q})$  et  $B_c(\mathbf{Q})$  sont alors obtenues en utilisant ces résultats et la matrice  $D_c(\mathbf{Q})$  s'écrit :

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & \eta_x & \eta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \eta_x - \mathcal{U}_1 u_1 & (1 - \frac{1}{\xi_1}) u_1 \eta_x + \mathcal{U}_1 & (1 - \frac{1}{\xi_1}) v_1 \eta_x + \mathcal{V}_1 & \frac{\eta_x}{\xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & (M_1 - \Delta p_{I_1}) \eta_x & \\ \beta_1 \eta_y - \mathcal{U}_1 v_1 & (1 - \frac{1}{\xi_1}) u_1 \eta_y + \mathcal{V}_1 & (1 - \frac{1}{\xi_1}) v_1 \eta_y + \mathcal{U}_1 & \frac{\eta_x}{\xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & (M_1 - \Delta p_{I_1}) \eta_y & \\ (\beta_1 - H_1) \mathcal{U}_1 & H_1 \eta_x - \frac{\mathcal{U}_1 u_1}{\xi_1} & H_1 \eta_y - \frac{\mathcal{U}_1 v_1}{\xi_1} & (1 + \frac{1}{\xi_1}) \mathcal{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 \mathcal{U}_1 - \Delta(p\mathcal{U})_{I_1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_x & \eta_y & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \eta_x - \mathcal{U}_2 u_2 & (1 - \frac{1}{\xi_2}) u_2 \eta_x + \mathcal{U}_2 & (1 - \frac{1}{\xi_2}) v_2 \eta_x + \mathcal{V}_2 & \frac{\eta_x}{\xi_2} & -(M_2 - \Delta p_{I_2}) \eta_x & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \eta_y - \mathcal{U}_2 v_2 & (1 - \frac{1}{\xi_2}) u_2 \eta_y + \mathcal{V}_2 & (1 - \frac{1}{\xi_2}) \eta_y + \mathcal{U}_2 & \frac{\eta_x}{\xi_2} & -(M_2 - \Delta p_{I_2}) \eta_y & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\beta_2 - H_2) \mathcal{U}_2 & H_2 \eta_x - \frac{\mathcal{U}_2 u_2}{\xi_2} & H_2 \eta_y - \frac{\mathcal{U}_2 v_2}{\xi_2} & (1 + \frac{1}{\xi_2}) \mathcal{U}_2 & -(M_2 \mathcal{U}_2 - \Delta(p\mathcal{U})_{I_2}) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_1 \end{array} \right) \quad (5.38)$$

où  $\mathcal{U} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}$  et  $\mathcal{V} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}^\perp$  sont respectivement les vitesses normales et tangentielles dans le repère d'espace  $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\perp)$  et où on a introduit  $H_k = e_k + p_k / \rho_k$  pour les enthalpies spécifiques totales ainsi que les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{U}_{I_k} = \mathcal{U}_I - \mathcal{U}_k \\ \Delta p_{I_k} = p_I - p_k \\ \Delta(p\mathcal{U})_{I_k} = p_I \mathcal{U}_I - p_k \mathcal{U}_k \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Par des calculs algébriques, on obtient les sept valeurs propres de la matrice :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_I \\ \lambda_2(\mathbf{Q}) = \lambda_3(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_1 \\ \lambda_4(\mathbf{Q}) = \lambda_5(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_2 \\ \lambda_6(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_1 - a_1 \\ \lambda_7(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_1 + a_1 \\ \lambda_8(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_2 - a_2 \\ \lambda_9(\mathbf{Q}) = \mathcal{U}_2 + a_2 \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Les vecteurs propres à droite  $r_i(\mathbf{Q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 9\}$ ) qui vérifient la relation  $D_c(\mathbf{Q})r_i(\mathbf{Q}) = \lambda_i(\mathbf{Q})r_i(\mathbf{Q})$  peuvent être choisis comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 r_1(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} -\xi_2\sigma_2 D_1 \\ -\xi_2\sigma_2 D_1(\Delta\mathcal{U}_{I_1}\eta_x + u_1) \\ -\xi_2\sigma_2 D_1(\Delta\mathcal{U}_{I_1}\eta_y + v_1) \\ -\xi_2\sigma_2(D_1(H_1 + \mathcal{U}_1\Delta\mathcal{U}_{I_1}) + \xi_1\sigma_1 p_I) \\ \xi_1\sigma_1 D_2 \\ \xi_1\sigma_1 D_2(\Delta\mathcal{U}_{I_2}\eta_x + u_2) \\ \xi_1\sigma_1 D_2(\Delta\mathcal{U}_{I_2}\eta_y + v_2) \\ \xi_1\sigma_1(D_2(H_2 + \mathcal{U}_2\Delta\mathcal{U}_{I_2}) + \xi_2\sigma_2 p_I) \\ \xi_1\sigma_1\xi_2\sigma_2 \end{pmatrix} & r_2(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ v_1 \\ \mathbf{u}_1^2/2 + \delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_3(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta_y \\ \eta_x \\ \mathcal{V}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 r_4(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \mathbf{u}_2^2/2 + \delta_2 \\ 0 \end{pmatrix} & r_5(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\eta_y \\ \eta_x \\ \mathcal{V}_2 \\ 0 \end{pmatrix} & r_6(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 - a_1\eta_x \\ v_1 - a_1\eta_y \\ H_1 - \mathcal{U}_1 a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 r_7(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 + a_1\eta_x \\ v_1 + a_1\eta_y \\ H_1 + \mathcal{U}_1 a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_8(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 - a_2\eta_x \\ v_2 - a_2\eta_y \\ H_2 - \mathcal{U}_2 a_2 \\ 0 \end{pmatrix} & r_9(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 + a_2\eta_x \\ v_2 + a_2\eta_y \\ H_2 + \mathcal{U}_2 a_2 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

On notera aussi par  $l_i(\mathbf{Q})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 9\}$ ) les vecteurs propres à gauche qui vérifient la relation  ${}^t D_c(\mathbf{Q})l_i(\mathbf{Q}) = \lambda_i(\mathbf{Q})l_i(\mathbf{Q})$ . Après normalisation des vecteurs pour avoir  ${}^t l_i(\mathbf{Q}).r_j(\mathbf{Q}) = \delta_{ij}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 l_1(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{\xi_1\sigma_1\xi_2\sigma_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & l_2(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{a_1^2} \begin{pmatrix} -\beta_1 + a_1^2 \\ u_1/\xi_1 \\ v_1/\xi_1 \\ -1/\xi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p_I/\xi_1 \end{pmatrix} & l_3(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} -\mathcal{V}_1 \\ -\eta_y \\ \eta_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 l_4(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{a_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_2 + a_2^2 \\ u_2/\xi_2 \\ v_2/\xi_2 \\ -1/\xi_2 \\ p_I/\xi_2 \end{pmatrix} & l_5(\mathbf{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{V}_2 \\ -\eta_y \\ \eta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & l_6(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{2a_1^2} \begin{pmatrix} \beta_1 - \mathcal{U}_1 a_1 \\ -u_1/\xi_1 + a_1\eta_x \\ -v_1/\xi_1 + a_1\eta_y \\ 1/\xi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sigma_1^+ p_I - D_1 a_1}{\xi_1 \sigma_1^+} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$l_7(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2a_1^2} \begin{pmatrix} \beta_1 - \mathcal{U}_1 a_1 \\ -u_1/\xi_1 + a_1 \eta_x \\ -v_1/\xi_1 + a_1 \eta_y \\ 1/\xi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sigma_1^- p_{\mathbf{I}} + D_1 a_1}{\xi_1 \sigma_1^-} \end{pmatrix} \quad l_8(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2a_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_2 + \mathcal{U}_2 a_2 \\ -u_2/\xi_2 - a_2 \eta_x \\ -v_2/\xi_2 - a_2 \eta_y \\ 1/\xi_2 \\ \frac{\sigma_2^+ p_{\mathbf{I}} - D_2 a_2}{\xi_2 \sigma_2^+} \end{pmatrix} \quad l_9(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2a_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_2 - \mathcal{U}_2 a_2 \\ -u_2/\xi_2 + a_2 \eta_x \\ -v_2/\xi_2 + a_2 \eta_y \\ 1/\xi_2 \\ \frac{\sigma_2^- p_{\mathbf{I}} + D_2 a_2}{\xi_2 \sigma_2^-} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

où on a introduit pour l'écriture des vecteurs  $l_i(\mathbf{Q})$ , les notations suivantes en plus des précédentes :

$$\begin{cases} \sigma_k^\pm = \mathcal{U}_{\mathbf{I}} - \mathcal{U}_k \pm a_k \\ \sigma_k = \sigma_k^+ \sigma_k^- = (\mathcal{U}_{\mathbf{I}} - \mathcal{U}_k)^2 - a_k^2 \\ D_k = p_{\mathbf{I}} - \xi_k (M_k - (p_{\mathbf{I}} - p_k)) \end{cases} \quad (5.43)$$

Ceci termine la diagonalisation de la matrice Jacobienne du modèle à sept équations écrit en variables conservatives et en deux dimensions d'espace.

### 5.3.2 Problème de Riemann approché

Dans cette partie, on présente la résolution du problème de Riemann approché pour le modèle écrit en variables entropiques  $\mathbf{q} = {}^t(p_k, \mathbf{u}_k, s_k, \alpha_1)$ . On trouve cette écriture sous forme quasi-linéaire dans le chapitre 3. Et le problème de Riemann linéarisé, associé à la partie hyperbolique, s'écrit dans la base locale d'espace  $(\boldsymbol{\eta}_{LR}, \boldsymbol{\eta}_{LR}^\perp)$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + A_e(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle) \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} &= 0 \\ \tilde{\mathbf{q}}(x, 0) &= \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_L & \text{si } x < 0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.44)$$

où  $\tilde{\mathbf{q}} = \theta \mathbf{q} = {}^t(p_k, \mathcal{U}_k, \mathcal{V}_k, s_k, \alpha_2)$  et avec  $\theta$  la matrice de rotation qui permet de passer du repère global d'espace dans le repère local  $(\boldsymbol{\eta}_{LR}, \boldsymbol{\eta}_{LR}^\perp)$ . La matrice  $A_e(\tilde{\mathbf{q}})$  est donnée par :

$$A_e(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(C_{\mathbf{I}1}/\alpha_1)\Delta\mathcal{U}_{\mathbf{I}1} \\ 1/\rho_1 & \mathcal{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta p_{\mathbf{I}1}/(\alpha_1 \rho_1) \\ 0 & 0 & \mathcal{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta p_{\mathbf{I}1} \Delta\mathcal{U}_{\mathbf{I}1}/(\alpha_1 \rho_1 T_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_2 & C_2 & 0 & 0 & (C_{\mathbf{I}2}/\alpha_2)\Delta\mathcal{U}_{\mathbf{I}2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho_2 & \mathcal{U}_2 & 0 & 0 & \Delta p_{\mathbf{I}2}/(\alpha_2 \rho_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_2 & \Delta p_{\mathbf{I}2} \Delta\mathcal{U}_{\mathbf{I}2}/(\alpha_2 \rho_2 T_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{U}_{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

où on a introduit les notations  $C_k = \rho_k a_k^2$  et  $C_{k\mathbf{I}} = \rho_k a_{k\mathbf{I}}^2$ . Les valeurs propres de la matrice sont évidemment les mêmes que précédemment et on gardera les mêmes notations.

En variables entropiques, les vecteurs propres à droite  $r_i(\tilde{\mathbf{q}})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 9\}$ ) qui vérifient la relation  $A_e(\tilde{\mathbf{q}})r_i(\tilde{\mathbf{q}}) = \lambda_i(\tilde{\mathbf{q}})r_i(\tilde{\mathbf{q}})$  ont une forme beaucoup plus simple qu'en variables conservatives ; ils s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 r_1(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} -\alpha_2\sigma_2(C_{I1}\Delta\mathcal{U}_{I1}^2 + a_1^2\Delta p_{I1}) \\ -(\alpha_2\sigma_2/\rho_1)(C_{I1} + \Delta p_{I1})\Delta\mathcal{U}_{I1} \\ 0 \\ -\alpha_2\sigma_2\sigma_1\Delta p_{I1}/(\rho_1 T_1) \\ \alpha_1\sigma_1(C_{I2}\Delta\mathcal{U}_{I2}^2 + a_2^2\Delta p_{I2}) \\ (\alpha_1\sigma_1/\rho_2)(C_{I2} + \Delta p_{I2})\Delta\mathcal{U}_{I2} \\ 0 \\ \alpha_1\sigma_1\sigma_2\Delta p_{I2}/(\rho_2 T_2) \\ \alpha_1\sigma_1\alpha_2\sigma_2 \end{pmatrix} & r_2(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_3(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 r_4(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_5(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & r_6(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} C_1 \\ -a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 r_7(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} C_1 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_8(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & r_9(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_2 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

On notera aussi par  $l_i(\tilde{\mathbf{q}})$  (pour  $i \in \{1, \dots, 9\}$ ) les vecteurs propres à gauche qui vérifient la relation  ${}^t A_e(\tilde{\mathbf{q}})l_i(\tilde{\mathbf{q}}) = \lambda_i(\tilde{\mathbf{q}})l_i(\tilde{\mathbf{q}})$ . Après normalisation des vecteurs pour avoir  ${}^t l_i(\tilde{\mathbf{q}}).r_j(\tilde{\mathbf{q}}) = \delta_{ij}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 l_1(\tilde{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{\alpha_1\sigma_1\alpha_2\sigma_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & l_2(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & l_3(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta p_{I1}}{\alpha_1\rho_1 T_1} \end{pmatrix} \\
 l_4(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & l_5(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{\Delta p_{I2}}{\alpha_2\rho_2 T_2} \end{pmatrix} & l_6(\tilde{\mathbf{q}}) &= \begin{pmatrix} 1/(2C_1) \\ -1/(2a_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{C_{I1}\Delta\mathcal{U}_{I1} - a_1\Delta p_{I1}}{2\alpha_1 C_1 \sigma_1^+} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



$$l_7(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 1/(2C_1) \\ 1/(2a_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{C_{I1}\Delta\mathcal{U}_{I1} + a_1\Delta p_{I1}}{2\alpha_1 C_1 \sigma_1^-} \end{pmatrix} \quad l_8(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/(2C_2) \\ -1/(2a_2) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{C_{I2}\Delta\mathcal{U}_{I2} - a_2\Delta p_{I2}}{2\alpha_2 C_2 \sigma_2^+} \end{pmatrix} \quad l_9(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/(2C_2) \\ 1/(2a_2) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{C_{I2}\Delta\mathcal{U}_{I2} + a_2\Delta p_{I2}}{2\alpha_2 C_2 \sigma_2^-} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Et la solution du problème de Riemann approché, à l'interface, est donnée par l'expression :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{LR}^* = \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{q}}_L + \tilde{\mathbf{q}}_R + [r_k] \operatorname{sgn}[\operatorname{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{LR}] \quad \text{où} \quad \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{LR} = \tilde{\mathbf{q}}_L - \tilde{\mathbf{q}}_R \quad (5.48)$$

où  $\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle = (\tilde{\mathbf{q}}_L + \tilde{\mathbf{q}}_R)/2$  avec  $\tilde{\mathbf{q}}$  le vecteur des variables entropiques. La matrice  $[r_k]$  est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres à droite. La matrice  ${}^t[l_k]$  est la matrice dont les lignes sont les transposés des vecteurs propres à gauche.

Dans la suite de ce chapitre et plus particulièrement pour l'écriture du schéma implicite, nous aurons besoin de revenir à la solution  $\mathbf{Q}_{LR}^*$  exprimée en variables conservatives. Pour cela, il sera nécessaire de se donner les deux matrices  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  de passage des variables conservatives  $\mathbf{Q}$  à celles entropiques  $\mathbf{q}$ . Nous proposons donc de calculer ces deux matrices dans le paragraphe suivant.

### 5.3.3 Matrices de passage

Dans ce paragraphe, on calcule les matrices  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  de passage entre la forme quasi-conservative et la forme "entropique" du modèle. Ces matrices sont ensuite utilisées dans le schéma implicite. On commence par le calcul de la matrice  $R$  telle que  $d\mathbf{q} = R d\mathbf{Q}$ . Si on se réfère aux résultats du paragraphe 5.3.1, on a déjà :

$$\alpha_k dp_k = \beta_k d(\alpha_k \rho_k) - \frac{\mathbf{u}_k}{\xi_k} \cdot d(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \frac{1}{\xi_k} d(\alpha_k \rho_k e_k) + M_k d\alpha_k \quad (5.49)$$

De plus, il est facile de voir que la différentielle des vitesses s'écrit :

$$d\mathbf{u}_k = -\frac{\mathbf{u}_k}{\alpha_k \rho_k} d(\alpha_k \rho_k) + \frac{1}{\alpha_k \rho_k} d(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) \quad (5.50)$$

Ensuite pour calculer la différentielle des entropies  $s_k$ , on utilise la relation  $\rho_k T_k ds_k = \xi_k dp_k - \xi_k a_k^2 d\rho_k$  qui est une conséquence de (5.32)-(5.34)-(5.35). En introduisant  $dp_k$  dans cette dernière relation, on obtient :

$$\alpha_k \rho_k T_k ds_k = \xi_k (B_k - a_k^2) d(\alpha_k \rho_k) - \mathbf{u}_k \cdot d(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + d(\alpha_k \rho_k e_k) + \xi_k (M_k + \rho_k a_k^2) d\alpha_k \quad (5.51)$$

qui peut se réécrire en remarquant que  $M_k + \rho_k a_k^2 = p_k$  :

$$\alpha_k \rho_k T_k ds_k = \xi_k (B_k - a_k^2) d(\alpha_k \rho_k) - \mathbf{u}_k \cdot d(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + d(\alpha_k \rho_k e_k) + p_k d\alpha_k \quad (5.52)$$

Et ceci complète le calcul de la matrice  $R$  donnée par :

$$\left( \begin{array}{cccccccccc}
 \frac{\beta_1}{\alpha_1} & -\frac{u_1}{\alpha_1 \xi_1} & -\frac{v_1}{\alpha_1 \xi_1} & \frac{1}{\alpha_1 \xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_1}{\alpha_1} \\
 -\frac{u_1}{\alpha_1 \rho_1} & \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{v_1}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\xi_1(\beta_1 - a_1^2)}{\alpha_1 \rho_1 T_1} & -\frac{u_1}{\alpha_1 \rho_1 T_1} & -\frac{v_1}{\alpha_1 \rho_1 T_1} & \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 T_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_1}{\alpha_1 \rho_1 T_1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} & -\frac{u_2}{\alpha_2 \xi_2} & -\frac{v_2}{\alpha_2 \xi_2} & \frac{1}{\alpha_2 \xi_2} & -\frac{M_2}{\alpha_2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{u_2}{\alpha_2 \rho_2} & \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{v_2}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi_2(\beta_2 - a_2^2)}{\alpha_2 \rho_2 T_2} & -\frac{u_2}{\alpha_2 \rho_2 T_2} & -\frac{v_2}{\alpha_2 \rho_2 T_2} & \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 T_2} & -\frac{p_2}{\alpha_2 \rho_2 T_2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \quad (5.53)$$

La matrice inverse  $R^{-1}$  telle que  $d\mathbf{Q} = R^{-1}d\mathbf{q}$  peut être obtenue en suivant le même genre de calculs ou bien en inversant la matrice  $R$ . Elle s'écrit :

$$\left( \begin{array}{cccccccccc}
 \frac{\alpha_1}{a_1^2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1 \rho_1 T_1}{\xi_1 a_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 \\
 \frac{\alpha_1 u_1}{a_1^2} & \alpha_1 \rho_1 & 0 & -\frac{\alpha_1 \rho_1 T_1 u_1}{\xi_1 a_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 u_1 \\
 \frac{\alpha_1 v_1}{a_1^2} & 0 & \alpha_1 \rho_1 & -\frac{\alpha_1 \rho_1 T_1 v_1}{\xi_1 a_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 v_1 \\
 \frac{\alpha_1 H_1}{a_1^2} & \alpha_1 \rho_1 u_1 & \alpha_1 \rho_1 v_1 & -\frac{\alpha_1 \rho_1 T_1 (E_{c1} + \delta_1)}{\xi_1 a_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 e_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{a_2^2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2 \rho_2 T_2}{\xi_2 a_2^2} & -\rho_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2 u_2}{a_2^2} & \alpha_2 \rho_2 & 0 & -\frac{\alpha_2 \rho_2 T_2 u_2}{\xi_2 a_2^2} & -\rho_2 u_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2 v_2}{a_2^2} & 0 & \alpha_2 \rho_2 & -\frac{\alpha_2 \rho_2 T_2 v_2}{\xi_2 a_2^2} & -\rho_2 v_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_2 H_2}{a_2^2} & \alpha_2 \rho_2 u_2 & \alpha_2 \rho_2 v_2 & -\frac{\alpha_2 \rho_2 T_2 (E_{c2} + \delta_2)}{\xi_2 a_2^2} & -\rho_2 e_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \quad (5.54)$$

Les matrices  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  sont singulières pour  $\alpha_k = 0$  et  $\alpha_k = 1$ . En pratique pour les simulations numériques, un fluide pur  $k$  est représenté par  $\alpha_k = 1 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  un petit paramètre et ces matrices sont donc toujours définies.

### 5.3.4 Approximation numérique

On s'intéresse maintenant à la résolution numérique du modèle à sept équations, qui s'écrit en termes de variables conservatives  ${}^t(\alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k e_k, \alpha_1)$  sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + B_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = R(\lambda, \mu, \mathbf{Q}) \quad (5.55)$$

Cette résolution numérique se fait principalement en 3 étapes : une première étape consistant à résoudre le système par un solveur hyperbolique non conservatif adapté au cas multiphasique, une étape éventuelle de relaxation des vitesses pour les interfaces (si la vitesse est différente pour chacune des phases) et une étape de relaxation instantanée des pressions pour les conditions de pressions aux interfaces. La résolution de ce système nécessite un solveur pour la partie hyperbolique et deux procédures de relaxation pour le calcul des termes sources. En suivant les techniques de splitting de Strang [65], on écrit :

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = L_s^{\Delta t} L_h^{\Delta t} \mathbf{Q}_i^n \quad (5.56)$$

où  $L_h^{\Delta t}$  représente l'opérateur de résolution de la partie hyperbolique du système :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + B_c(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = 0 \quad (5.57)$$

et où  $L_s^{\Delta t}$  est l'opérateur d'intégration des termes sources.

Cet opérateur s'écrit sous la forme suivante pour les vitesses :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = R_v(\lambda, \mathbf{Q}) \quad \text{avec} \quad R_v(\lambda, \mathbf{Q}) = {}^t(0, \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \lambda \mathbf{u}_I(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), 0, -\lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), -\lambda \mathbf{u}_I(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), 0) \quad (5.58)$$

et sous la forme suivante pour les pressions :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = R_p(\mu, \mathbf{Q}) \quad \text{avec} \quad R_p(\mu, \mathbf{Q}) = {}^t(0, 0, \mu p_I(p_2 - p_1), 0, 0, -\mu p_I(p_2 - p_1), -\mu(p_2 - p_1)) \quad (5.59)$$

Pour des détails sur les procédures de relaxation, on pourra se référer à [56], [42]. Ici, on focalisera le travail sur l'opérateur hyperbolique  $L_h^{\Delta t}$ . Pour cela, on réécrit la partie hyperbolique sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + H(\mathbf{Q}) \nabla \alpha_1 = 0 \quad (5.60)$$

où on a séparé la partie conservative  $\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{Q})$  et les produits non conservatifs  $H(\mathbf{Q}) \nabla \alpha_1$ . Le vecteur  $H(\mathbf{Q})$  est donné par :

$$H(\mathbf{Q}) = {}^t(0, -p_I, -p_I \mathbf{u}_I, 0, p_I, p_I \mathbf{u}_I, \mathbf{u}_I) \quad (5.61)$$

L'intégration de cette équation sur une cellule de contrôle  $C_i$  donne :

$$A_i \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dl + \int_{C_i} H(\mathbf{Q}) \nabla \alpha_1 d\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (5.62)$$

où  $N$  est le nombre de cellules et  $A_i$  représente le volume de la cellule  $C_i$ . Nous proposons alors de faire évoluer la variable  $\mathbf{Q}_i$  par le schéma rétrograde suivant d'ordre 1 en temps :

$$A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\mathbf{n}_{ij}\| \psi(\mathbf{Q}_i^{n+1}, \mathbf{Q}_j^{n+1}) = 0 \quad (5.63)$$

où  $v(i)$  symbolise l'ensemble des cellules  $C_j$  voisines à  $C_i$  et où  $\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n} dl$  est le vecteur normal moyenné à l'interface  $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$ .

En linéarisant la fonction  $\psi(\mathbf{Q}_i^{n+1}, \mathbf{Q}_j^{n+1})$  grâce à un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps, l'équation (5.63) devient :

$$\begin{aligned} A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\mathbf{n}_{ij}\| [ \psi(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) \\ + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_i}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n)(\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_j}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n)(\mathbf{Q}_j^{n+1} - \mathbf{Q}_j^n) ] = 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

Ensuite, on définit  $\boldsymbol{\eta}_{ij} = \mathbf{n}_{ij}/\|\mathbf{n}_{ij}\|$  et on propose alors l'expression suivante pour  $\psi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j)$  :

$$\psi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} + H(\mathbf{Q}_i) \alpha_{1,ij}^* \boldsymbol{\eta}_{ij} \quad (5.65)$$

où  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  est la solution en variables conservatives du problème de Riemann en variables entropiques entre les états  $(\cdot)_i$  et  $(\cdot)_j$ .

On utilisera les approximations suivantes des dérivées de  $\psi$  par rapport aux états  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_i}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) \simeq \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + H(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \alpha_{1,ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \boldsymbol{\eta}_{ij} \right] \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_i^n} \end{array} \right. \quad (5.66.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Q}_j}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_j^n) \simeq \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + H(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \alpha_{1,ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \boldsymbol{\eta}_{ij} \right] \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_j^n} \end{array} \right. \quad (5.66.2)$$

Ensuite si on se réfère aux résultats du paragraphe 5.3.2, la solution du problème de Riemann approché en variables entropiques  $\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^*$  est donnée par la formule :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^* = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_j + [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] \Delta \tilde{\mathbf{q}}_{ij}] \quad (5.67)$$

où  $\Delta \tilde{\mathbf{q}}_{ij} = (\tilde{\mathbf{q}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_j)$  et  $\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle = (\tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_j)/2$ . Or on a besoin de calculer les dérivées par rapport à  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$  de la solution  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  en variables conservatives.

Et pour cela, nous ferons l'approximation suivante pour  $\mathbf{Q}_{ij}^*$  :

$$\mathbf{Q}_{ij}^* \simeq \frac{1}{2} [\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j + \theta^{-1} R^{-1} [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] R \theta \Delta \mathbf{Q}_{ij}] \quad (5.68)$$

où  $\theta$  et  $\theta^{-1}$  sont les matrices de rotation de la base globale d'espace dans la base locale et où  $R = \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{Q}$  et  $R^{-1} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{q}$  sont les matrices de passage des variables conservatives  $\mathbf{Q}$  à celles entropiques  $\mathbf{q}$ .

On en déduit alors les expressions approchées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_i^n} \simeq \frac{1}{2} [Id + \theta^{-1} R^{-1} [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] R \theta] \quad (5.69.1) \\ \frac{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_j^n} \simeq \frac{1}{2} [Id - \theta^{-1} R^{-1} [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] R \theta] \quad (5.69.2) \end{array} \right.$$

où  $Id$  est la matrice identité.

Et en définitive, le schéma implicite du premier ordre peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & A_i \frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\mathbf{n}_{ij}\| [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij} + H(\mathbf{Q}_i^n) \alpha_{1,ij}^* \boldsymbol{\eta}_{ij} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + H(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \alpha_{1,ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \boldsymbol{\eta}_{ij} \right] [Id + \theta^{-1} R^{-1} [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] R \theta] (\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n) \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^*) \cdot \boldsymbol{\eta}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} + H(\mathbf{Q}_i^n) \frac{\partial \alpha_{1,ij}^*}{\partial \mathbf{Q}_{ij}^*} \boldsymbol{\eta}_{ij} \right] [Id - \theta^{-1} R^{-1} [r_k] \text{sgn}[\text{diag}(\lambda_k)(\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle)]^t [l_k] R \theta] (\mathbf{Q}_j^{n+1} - \mathbf{Q}_j^n) ] = 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

### 5.3.5 Résultats numériques

#### Le problème de Ransom

Ce test qui est dû à Ransom [53], consiste en un tube vertical de 12 mètres, qui contient une colonne d'eau, entourée par de l'air. En haut du tube, les fractions volumiques et la vitesse du liquide sont données, tandis que la vitesse du gaz est nulle. Le bas du tuyau est ouvert et sous conditions atmosphériques. Sous l'effet de la gravité, un affinement du jet s'effectue. Plusieurs étapes du phénomène sont décrites schématiquement en Figure 5.1.

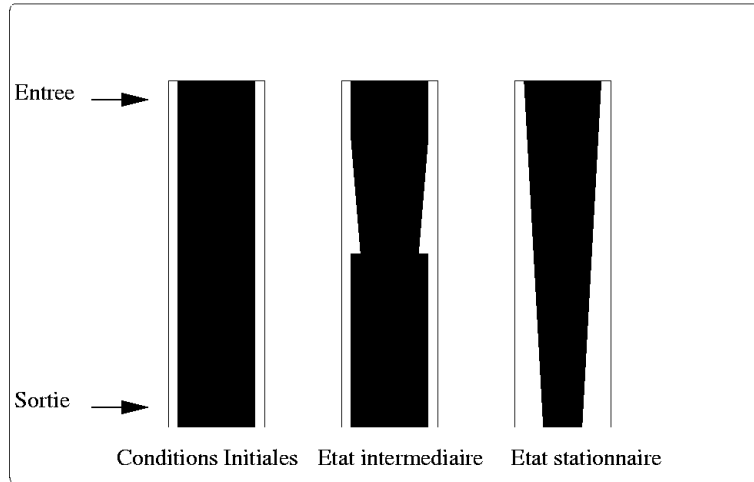


FIG. 5.1 – Schéma représentatif du problème de Ransom.

Les conditions initiales du problème sont décrites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll}
 \text{liquide} & \text{gaz} \\
 \rho_l = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & \rho_g = 1 \text{ kg.m}^{-3} \\
 p_l = 10^5 \text{ Pa} & p_g = 10^5 \text{ Pa} \\
 u_l = 10 \text{ m.s}^{-1} & u_g = 0 \text{ m.s}^{-1} \\
 \alpha_l = 0.8 & \alpha_g = 0.2
 \end{array} \tag{5.71}$$

Les conditions aux limites aux extrémités sont :

$$\begin{array}{ll}
 \text{haut (entrée)} & \begin{array}{ll} \text{liquide} & \text{gaz} \\ u_l = 10 \text{ m.s}^{-1} & u_g = 0 \text{ m.s}^{-1} \\ \alpha_l = 0.8 & \alpha_g = 0.2 \end{array} \\
 \text{bas (sortie)} & \begin{array}{ll} p_l = 10^5 \text{ Pa} & p_g = 10^5 \text{ Pa} \end{array}
 \end{array} \tag{5.72}$$

Et les autres variables de l'écoulement sont données par la solution du problème de Riemann sur les bords du domaine. Sous l'hypothèse d'incompressibilité du liquide et en admettant que les variations de pression du gaz sont négligeables, on peut écrire la solution exacte (voir par exemple [11]) pour l'évolution de la fraction volumique de gaz :

$$\alpha_g = \begin{cases} 1 - \frac{(1 - \alpha_g^0)u_l^0}{\sqrt{2gx + (u_l^0)^2}} & \text{si } x < u_l^0 t + \frac{gt^2}{2} \\ 0.2 & \text{si } x > u_l^0 t + \frac{gt^2}{2} \end{cases} \tag{5.73}$$

où  $\alpha_g^0$  est la fraction volumique initiale de gaz,  $u_l^0$  la vitesse initiale du liquide et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Pour la simulation numérique, les lois d'état de l'air et de l'eau sont données par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas :

$$\begin{cases} p = (\gamma_g - 1)\rho_g\varepsilon_g - \gamma_g\pi_g & \text{avec } \gamma_g = 1.4 \text{ et } \pi_g = 0 & \text{air} & (5.74.1) \\ p = (\gamma_l - 1)\rho_l\varepsilon_l - \gamma_l\pi_l & \text{avec } \gamma_l = 4.4 \text{ et } \pi_l = 6.10^8 & \text{eau} & (5.74.2) \end{cases}$$

Pour ce problème, il n'y a pas de relaxation des vitesses parce que chaque phase possède sa propre vitesse. La comparaison avec la solution exacte est présentée en Figure 5.2. On utilise le schéma explicite VFRoe, pour différents maillages et à l'ordre 1 puis 2 en espace et en temps. Pour l'ordre 2, on utilise la méthode Runge et Kutta non linéaire (3.112) et un coefficient  $\bar{\beta} = 1/2$  pour l'extrapolation de type MUSCL. Le CFL est constant et égal à 0.6.

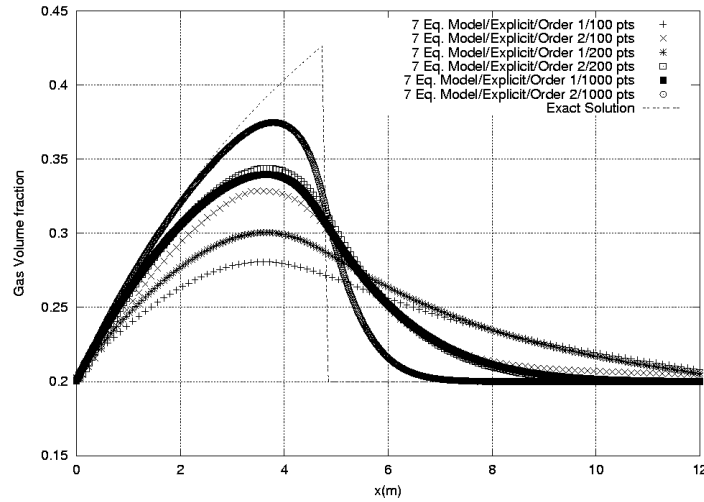


FIG. 5.2 – Résultats numériques du modèle à sept équations pour le cas test de Ransom.

Les résultats présentés en Figure 5.2, montre que l'on se rapproche de la solution exacte quand on procède à un raffinement le maillage ou quand on utilise un schéma d'ordre supérieur en espace et en temps. On constate également qu'aucune oscillation n'apparaît, ce qui montre le bon comportement de la méthode numérique.

### Écoulements diphasiques en tuyère

Ce deuxième test présente le calcul d'un écoulement diphasique (eau-air) à faible vitesse dans une tuyère. Dans cette simulation, le mélange diphasique ( $\alpha^\infty = 0.5$ ,  $\rho_1^\infty = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_2^\infty = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ) entre dans la tuyère avec une vitesse horizontale imposée  $u^\infty = 10 \text{ m.s}^{-1}$  et une pression imposée de 100 atm. Les lois d'états sont données par les formulations suivantes de type Stiffened-Gas :

$$\begin{cases} p = (\gamma_1 - 1)\rho_1\varepsilon_1 - \gamma_1\pi_1 & \text{avec } \gamma_1 = 1.4 \text{ et } \pi_1 = 0 & \text{air} & (5.75.1) \\ p = (\gamma_2 - 1)\rho_2\varepsilon_2 - \gamma_2\pi_2 & \text{avec } \gamma_2 = 4.4 \text{ et } \pi_2 = 6.10^8 & \text{eau} & (5.75.2) \end{cases}$$

Les nombres de Mach représentatifs de l'écoulement sont définis par  $M_k^\infty = 10/a_k^\infty$  et sont de l'ordre de  $2.10^{-3}$  pour l'air et  $6.10^{-3}$  pour l'eau. Ainsi, malgré une pression de 100 atm qui semble élevée, on a bien un écoulement à faible nombre de Mach pour les deux phases. La Figure 5.3 présente les profils des différentes variables sur les bords de la tuyère. On utilise le schéma implicite à l'ordre 1 en espace et en temps. Les pas de temps utilisés par la méthode implicite sont calculés avec un CFL inversement proportionnel au résidu non linéaire de la densité en norme L2 :

$$\text{CFL} = \frac{1}{\text{Res}(\rho)} \quad \text{avec} \quad \text{CFL}_{\max} = 10^6 \quad (5.76)$$

Les solutions discrètes stationnaires présentées sont celles obtenues pour un résidu non linéaire de  $10^{-9}$ . D'autre part, on utilise les procédures de relaxation pour les vitesses et les pressions, décrites dans [42].

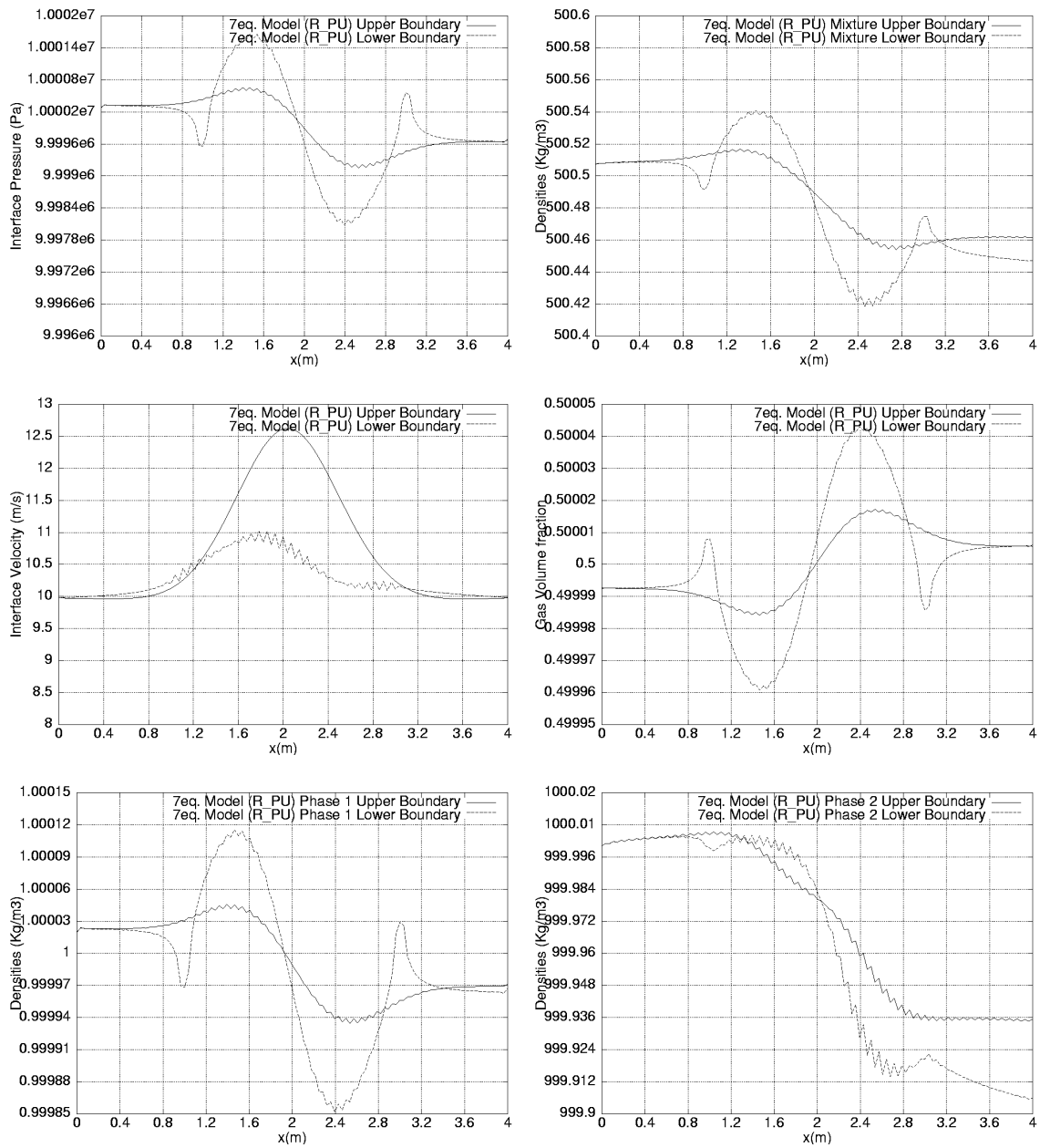


FIG. 5.3 – Résultats de la méthode implicite pour le modèle à 7 équations relaxé en vitesses et en pressions, pour le calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère et sur un maillage à 3277 nœuds.

Enfin, nous avons réalisé ce même cas test avec la méthode explicite, afin de montrer l'intérêt du schéma implicite. La Figure 5.4 présente les courbes de convergence vers l'état stationnaire, respectivement avec le schéma implicite et explicite en temps. Avec la méthode explicite ( $CFL = 0.8$ ), le résidu est encore de l'ordre de  $10^{-4}$  au bout de 2 H 20 mn de temps CPU de calcul alors qu'avec la méthode implicite, il a convergé à  $10^{-9}$  en seulement 0 H 16 mn. Ceci montre clairement qu'il est nécessaire d'utiliser des méthodes implicites pour ce type de calculs.

Méthode	Implicite	Explicite
Itérations	201	100000
Résidu	$10^{-9}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$
Temps physique	14.84 s	0.43 s
Temps CPU	0 H 16 mn	2 H 20 mn

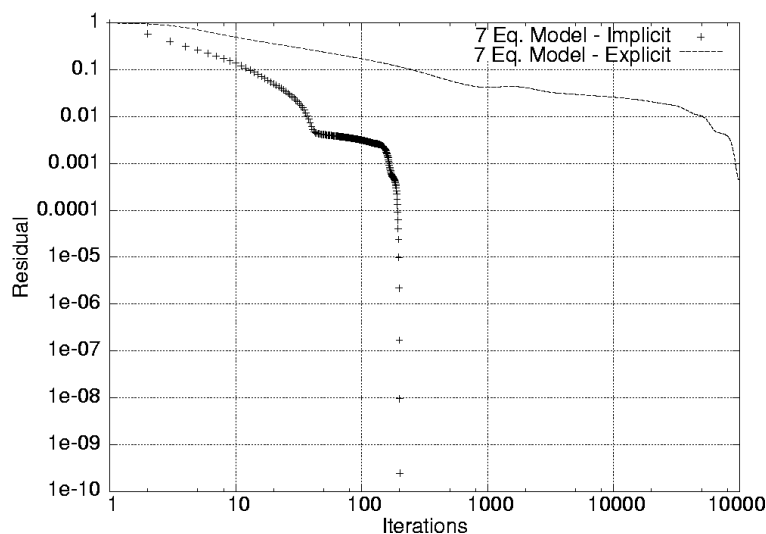


FIG. 5.4 – Convergence itérative de la méthode implicite (traits pointillés) et explicite (traits pleins) pour le modèle à 7 équations relaxé en vitesses et en pressions, pour le calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère et sur un maillage à 3277 nœuds.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode numérique implicite pour résoudre la partie hyperbolique du modèle à sept équations. Cette méthode est basée sur la linéarisation des flux calculés par des solveurs de type VFRoe et repose sur une formulation de type volumes finis en maillages non structurés. De plus, le schéma n'utilise aucune hypothèse sur les lois d'état des fluides. Pour toutes ces raisons, cette méthode qui n'était pas aisée à mettre en œuvre, nous a semblé très intéressante pour la résolution des écoulements diphasiques.

D'autre part, nous avons montré que les modèles à sept équations, dans la limite des temps de relaxation des pressions infiniment petits, dégénèrent sur les modèles bi-fluides classiques à six équations. Ainsi la méthode implicite que nous proposons pour le modèle à sept équations, couplée à une procédure de relaxation des pressions, représente une méthode originale de résolution par relaxation du modèle à six équations. Cette méthode sera a priori plus stable que la résolution directe du modèle à six équations, où on perd l'hyperbolicité inconditionnelle.





# Conclusions et Perspectives

Ce travail apporte un certain nombre d'éléments théoriques et d'outils numériques adaptés, pour la compréhension et la simulation des écoulements diphasiques à partir de modèles à sept équations de type Baer-Nunziato.

Le premier point théorique fondamental développé dans cette thèse est l'explication rigoureuse du manque de précision des schémas décentrés de type Godunov pour le calcul d'écoulements à faible nombre de Mach. Le deuxième point est une méthode originale de réduction de systèmes hyperboliques avec termes sources raides, basée sur l'analyse asymptotique. Cette méthode nous a permis l'établissement d'un modèle réduit à cinq équations, qui s'est montré très bien adapté à la résolution de problèmes de détonation ou de problèmes d'interfaces entre fluides compressibles. A partir de là, on propose deux outils essentiels pour le calcul des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach. Le premier est une méthode de préconditionnement qui permet de retrouver une bonne précision quand on tend vers des régimes quasiment incompressibles, et que l'on applique au modèle diphasique réduit à cinq équations. Le deuxième est une méthode implicite pour les solveurs de type VFRoe et que l'on applique aussi bien au modèle réduit qu'au modèle diphasique complet à sept équations. On montre que ces méthodes implicites sont presque indispensables pour ce type de calculs et qu'elles représentent un gain considérable en temps de simulation. Enfin, nous avons également montré qu'un solveur hyperbolique pour les modèles à sept équations couplé à une procédure de relaxation des pressions, représente une méthode originale de résolution par relaxation des modèles à six équations. Tous les outils numériques sont développés dans le cas multidimensionnel et pour des méthodes de type volumes finis en maillages non structurés.

Les perspectives ouvertes par ce travail me semblent être de deux types.

Premièrement, pour l'approximation des problèmes multi-fluides, nous avons mis au point une modélisation basée sur un système à cinq équations (en 1-D) dont la structure mathématique est particulièrement claire et intéressante. L'approximation numérique de ce modèle s'avère robuste et satisfaisante aussi bien pour des problèmes très compressibles que pour des problèmes proches de l'incompressible. Pour ces derniers, l'analyse asymptotique nous a permis de proposer des méthodes de préconditionnement donnant des résultats de bonne précision. Ce modèle ainsi que la méthode numérique que nous avons proposés semblent donc bien adaptés à la simulation directe de problèmes à interfaces entre milieux compressibles ou incompressibles/compressibles. Il resterait à enrichir ce modèle en y incluant une physique complémentaire, pour permettre le calcul de changements de phase, ou la simulation de phénomènes faisant intervenir la tension superficielle. Ceci devrait être possible sans modifier la partie hyperbolique du système. En effet, le transfert de masse consisterait à rajouter deux termes sources dans chaque équation de conservation de masse. Ensuite, la tension superficielle pourrait être modélisée en utilisant la théorie du second gradient [34] ou une variation du modèle de Brackbill [7]. L'inclusion de ces différents phénomènes dans le modèle, pourrait donc être effectuée sans modification majeure de la méthode numérique que nous avons proposée dans cette thèse. En conséquence, en rajoutant ces modélisations, on aurait enrichi le modèle du point de vue de la physique, tout en gardant l'efficacité de la méthode numérique proposée. D'autre part, toutes les méthodes numériques ont été développées en (2-D), mais l'extension au cas (3-D) semble assez aisée. En effet, tous les schémas sont basés sur des solveurs de Riemann aux interfaces du maillage, et le passage en (3-D) nécessite seulement de rajouter une composante tangentielle dans la formulation du solveur. Le dernier point serait de développer une version parallèle du code en utilisant les bibliothèques de passage MPI. En effet, le calcul détaillé de phénomènes très complexes nécessite l'utilisation

de maillages (3-D) très fins, qui dépasseraient les capacités d'un seul ordinateur. Ces améliorations du point de vue physique, couplées à la méthode numérique, devraient permettre de calculer des phénomènes très complexes. Je serai par exemple très intéressé par l'application de ce modèle à la simulation directe de problèmes de cavitation dans les turbo-propulseurs.

Deuxièmement, cette thèse a également montré que l'utilisation des modèles à sept équations de type Baer-Nunziato pouvait être une alternative séduisante à l'utilisation des modèles bi-fluides à six équations. En effet, il est bien connu que l'approximation numérique de ces modèles non hyperboliques peut s'avérer délicate. L'utilisation des modèles à sept équations associée à une procédure de relaxation des pressions peut donc constituer une autre approche numérique plus robuste et sûre d'un point de vue mathématique. Les travaux précédents [4], [56] avaient montré que c'était le cas pour des problèmes très compressibles. Le travail réalisé dans cette thèse montre que ces conclusions s'étendent aussi pour des écoulements à faible vitesse. Il resterait cependant à valider cette approche sur d'autres cas test que ceux qui ont été présentés dans cette thèse et à réaliser une étude et une comparaison plus exhaustive avec les résultats donnés par les modèles à six équations. Enfin, d'un point de vue théorique, il resterait aussi à étudier le comportement du modèle à sept équations dans la limite des faibles nombres de Mach. Cette étude n'est cependant pas aisée car le comportement peut dépendre de la modélisation des termes de relaxation des pressions et des vitesses. D'un point de vue numérique, l'approximation de ce modèle a été réalisée en utilisant des techniques de splitting associées à des procédures de relaxation vers l'état d'équilibre. Il pourrait être intéressant de coupler la relaxation et le solveur hyperbolique en une seule étape en choisissant des coefficients de relaxation basés sur les pas de temps utilisés. Cette autre approche est possible avec les schémas implicites que nous avons proposés alors qu'elle n'était pas envisageable avec des schémas explicites.

# Bibliographie

- [1] R. Abgrall and R. Saurel. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 186 :361–396, 2003.
- [2] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A Five-Equation Model for the Simulation of Interfaces between Compressible Fluids. *Journal of Computational Physics*, 181 :577–616, 2002.
- [3] K.E. Amine. *Modélisation et analyse numérique des écoulements diphasiques en déséquilibre*. PhD thesis, University of Paris XI, 1997.
- [4] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Journal of Multiphase Flows*, 12 :861–889, 1986.
- [5] D. Bestion. The physical closure laws in the CATHARE code. *Nucl. Eng. Des.*, 124 :229–245, 1990.
- [6] H. Bijl and P. Wesseling. A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary fitted coordinate. *Journal of Computational Physics*, 141 :153–173, 1998.
- [7] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100 :335–354, 1992.
- [8] T. Buffard, T. Gallouët, and J.M. Hérard. A sequel to a Rough Godunov Scheme : Application to Real Gases. *Computers and Fluids*, 29 :673–709, 2000.
- [9] A. Chinnayya. *Construction de modèles et de méthodes numériques pour les écoulements multiphasiques à phases compressibles. Application à la simulation des ondes de détonation dans les matériaux hautement énergétiques*. PhD thesis, University of Aix-Marseille I, 2002.
- [10] S. Clerc. Numerical Simulation of the Homogeneous Equilibrium Model for two-Phase flows. *Journal of Computational Physics*, 161 :354–375, 2000.
- [11] F. Coquel, K. El Amine, E. Godlewski, B. Perthame, and P. Rascle. A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 136 :272–288, 1997.
- [12] F. Coquel, J.M. Hérard, and N. Seguin. Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 334 :1–6, 2002.
- [13] J. Cortes. *Etude de régimes transitoires d'écoulements diphasiques à faible rapport de densité*. PhD thesis, University of Paris XI, 1999.
- [14] J. Cortes, A. Debussche, and I. Toumi. A Density Perturbation Method to Study the Eigenstructure of Two-Phase Flow Equation Systems. *Journal of Computational Physics*, 147 :463–484, 1998.
- [15] J.M. Delhay, M. Giot, and M.L. Riethmuller. *Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*, volume 5 of *A Von Karman Institute Book*. Mc Graw Hill Book Compagny, Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [16] A. Dervieux, D. Guezengar, Hervé Guillard, and C. Viozat. Analysis of low Mach simulations with compressible upwind codes. In *ECCOMAS 98*. John Wiley and Sons, 1998.
- [17] D. Drew, I. Cheng, and R.T. Lahey. The Analysis of Virtual Mass Effects in Two-Phase Flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 5 :233–242, 1979.
- [18] D.A. Drew and S.L. Passman. *Theory of Multicomponent Fluids.*, volume 135 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1998.
- [19] R. Radespiel E. Turkel and N. Kroll. Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics. *Computers and Fluids*, 26 :613–634, 1997.

- 
- [20] X.Y. Fu and M. Ishii. Two-group interfacial area transport in vertical air-water flow : I. mechanistic model. *Nucl. Eng. Des.*, 219 :143–168, 2003.
- [21] X.Y. Fu and M. Ishii. Two-group interfacial area transport in vertical air-water flow : II. model evaluation. *Nucl. Eng. Des.*, 219 :169–190, 2003.
- [22] S. Gavriluyuk and R. Saurel. Mathematical and Numerical Modeling of Two-Phase Compressible Flows with Micro-Inertia. *Journal of Computational Physics*, 175 :326–360, 2002.
- [23] E. Godlewsk and P.A. Raviart. *Numerical Approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1995.
- [24] M. Grandotto and P. Obry. Calculs des écoulements diphasiques dans les échangeurs par une méthode aux éléments finis. *Revue Européenne des éléments finis*, 5 no 1, 1996.
- [25] E. Grenier. Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations. *J. Math. Pures. Appl.*, 76 :477–498, 1997.
- [26] H. Guillard and R. Abgrall. *Modélisation numérique des fluides compressibles*, volume 5 of *SERIES IN APPLIED MATHEMATICS*. Gauthier-Villars-North Holland, Paris, 2001.
- [27] H. Guillard and A. Murrone. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. Technical Report 4778, INRIA, 2003.
- [28] H. Guillard and A. Murrone. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Computers and Fluids*, 33 :655–675, 2004.
- [29] H. Guillard and C. Viozat. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers and fluids*, 28 :63–96, 1999.
- [30] K. Halaoua. *Quelques Solveurs pour les opérateurs de convection et leur application à la mécanique des fluides diphasiques*. PhD thesis, ENS Cachan, 1998.
- [31] T. Hibiki and M. Ishii. One-group interfacial area transport of bubbly flows in vertical round tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43 :2711–2726, 2000.
- [32] M. Hishii and K. Mishima. Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nucl. Eng. Des.*, 82 :107–126, 1984.
- [33] M. Ishii. *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow.*, volume 22 of *Direction des études et recherches d'électricité de France*. Eyrolles, Paris, 1975.
- [34] D. Jamet, D. Torres, and J.U. Brackbill. On the theory and computation of surface tension : The elimination of parasitic currents through energy conservation in the second gradient method. *Journal of Computational Physics*, pages –, 2002.
- [35] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D.S. Stewart. Two-phase modelling of DDT in granular materials : reduced equations. *Physics of Fluids*, 13 :3002–3024, 2001.
- [36] A.K. Kapila, S.F. Son, J.B. Bdzil, R. Menikoff, and D.S. Stewart. Two-phase modelling of DDT : structure of the velocity relaxation zone. *Physics of Fluids*, 9 :3885–3897, 1997.
- [37] S. Klainerman and A. Majda. Compressible and incompressible fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 35 :629–653, 1982.
- [38] R. Klein. Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics I : One-dimensional flow. *Journal of Computational Physics*, 121 :213–237, 1995.
- [39] H.-O. Kreiss. Problems with different time scales for partial differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33 :399–440, 1980.
- [40] A. Kumbaro and I. Touni. An Approximate Linearized Riemann Solver for a Two-Fluid Model. *Journal of Computational Physics*, 124 :286–300, 1996.
- [41] R.T. Lahey. The prediction of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models. *Boiling Heat Transfer, Elsevier Science*, pages 85–121, 1992.
- [42] MH. Lallemand and R. Saurel. Pressure relaxation procedures for multiphase compressible flows. Technical Report 4038, INRIA, 2000.
- [43] J.M. Masella. *Quelques méthodes numérique pour les écoulements diphasiques bi-fluide en conduites pétrolières*. PhD thesis, University of Paris XI, 1997.
- [44] J.M. Masella, I. Faille, and T. Gallouët. On an approximate Godunov scheme. *Int. J. of Comp. Fluid Dyn.*, 12 :133–149, 1999.

- 
- [45] J. Massoni, R. Saurel, B. Nkonga, and R. Abgrall. Propositions de méthodes et modèles Eulériens pour les problèmes à interfaces entre fluides compressibles en présence de transfert de chaleur. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45 No 6 :1287–1307, 2001.
- [46] G. Metivier and S. Schochet. The incompressible limit of the nonisentropic Euler equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2000. to be published.
- [47] G. Metivier and S. Schochet. Limite incompressible des équations d’Euler non-isentropiques. Séminaire équations aux dérivées partielles de l’école Polytechnique, 2001.
- [48] R. Natalini. Recent Mathematical Results on Hyperbolic Relaxation Problems. *Analysis of systems of conservation laws, (Aachen, 1997)*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, pages 128–198, 1999.
- [49] H. Paillere, S. Clerc, C. Viozat, I. Toumi, and J-P. Magnaud. Numerical methods for low Mach number thermal-hydraulic flows. In *ECCOMAS 98*. John Wiley and Sons, 1998.
- [50] H. Paillère, C. Viozat, A. Kumbaro, and I. Toumi. Comparison of low Mach number models for natural convection problems. In *Eurotherm Seminar No 63*, 1999. Genoa, Italy, 6-8 September 1999.
- [51] V.H. Ransom. RELAP5/MOD1 Code Manual Volume 1 : Code Structure, System Models and Numerical Method. Technical Report NUREG/CR-1826, US Nuclear Regulatory Commission, 1982.
- [52] V.H. Ransom. RELAP5/MOD2 Code Manual. Technical Report NUREG/CR-4312, Idaho Engineering Laboratory, 1985.
- [53] V.H. Ransom. *Numerical benchmark tests*, volume 3. G.F. Hewitt and J.M. Delhaye and N. Zuber, Hemisphere Washington, 1987.
- [54] V.H. Ransom and D.L Hicks. Hyperbolic Two-Pressure Models for Two Phase Flow. *Journal of Computational Physics*, 53 :124–151, 1984.
- [55] X. Rogue. *Expériences et simulations d’écoulements diphasiques en tubes à choc*. PhD thesis, University of Provence, 1997.
- [56] R. Saurel and R. Abgrall. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows. *Journal of Computational Physics*, 150 :425–467, 1999.
- [57] R. Saurel and R. Abgrall. A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21 (3) :1115–1145, 1999.
- [58] R. Saurel and O. Le Metayer. A Multiphase Model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 431 :239–271, 2000.
- [59] E. Schall, C. Viozat, B. Koobus, and A. Dervieux. On the computation of unsteady and steady low Mach flows with implicit upwind methods. In *ECCOMAS 2001*, 2001.
- [60] S. Schochet. Asymptotics for symmetric hyperbolic systems with a large parameter. *Journal of differential equations*, 75 :1–27, 1988.
- [61] S. Schochet. Fast singular limits of hyperbolic pdes. *Journal of differential equations*, 114 :476–512, 1994.
- [62] C.W Shu and S. Osher. Efficient Implementation of Essential Non oscillatory Shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77 :439–471, 1988.
- [63] J.H. Song and M. Ishii. On the stability of one-dimensional two-fluid model. *Nucl. Eng. Des.*, 204 :101–115, 2001.
- [64] H.B. Stewart and B. Wendroff. Two-phase flow : Models and methods. *Journal of Computational Physics*, 56 :363–409, 1984.
- [65] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 5(3) :506–517, 1968.
- [66] E.F. Toro. *Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [67] I. Toumi. An Upwind Numerical Method for a 6 equations Two-Phase Flow Model. *Nucl. Eng. Des.*, 123 :147–168, 1996.
- [68] I. Toumi and D. Caruge. An Implicit Second-Order Numerical Method for Three-Dimensional Two-Phase Flow Calculations. *Nucl. Eng. Des.*, 130 :1–13, 1998.

- [69] J.A. Trapp and R.A. Riemke. A Nearly-Implicit Hydrodynamic Numerical Scheme for Two-Phase Flows. *Journal of Computational Physics*, 66 :62–82, 1986.
- [70] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 72 :277–298, 1987.
- [71] E. Turkel. Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 12 :257–284, 1993.
- [72] E. Turkel. Preconditional techniques in computational fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31 :385, 1999.
- [73] E. Turkel, A. Fiterman, and B. van Leer. *Preconditioning and the limit of the compressible to the incompressible flow equations for finite difference schemes*, pages 215–234. John Wiley and Sons, Chichester, 1994.
- [74] S. Ukai. The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 26 :323–331, 1986.
- [75] B. van Leer. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme v. A Second-Order Sequel to Godunov's Method. *Journal of Computational Physics*, 32 :101–136, 1979.
- [76] B. van Leer and D-L. Darmofal. Steady Euler Solutions in  $O(n)$  Operations. In J. Vierendeels E. Dick, K. Rienslagh, editor, *Multigrid methods VI : proceedings of the Sixth European multigrid conference, held in Gent, Belgium, September 27-30, 1999*, pages 24–33. Springer, 2000. Lecture notes in computational science and engineering ; 14.
- [77] J. Vierendeels, K. Rienslagh, and E. Dick. A multigrid semi-implicit line method for viscous incompressible and low-Mach number flows on high aspect ratio grid. *Journal of Computational Physics*, 154 :310–341, 1999.
- [78] C. Viozat. *Calcul d'écoulements stationnaires et instationnaires à petit nombre de Mach et en maillages étirés*. PhD thesis, University of Nice-Sophia-Antipolis, 1998.
- [79] C. Viozat. Calcul d'écoulements diphasiques dans une tuyère : Influence de la renormalisation du schéma de flux. Technical Report SYSCO/LGLS/RT/00-014, CEA, 2000.
- [80] G. Volpe. Performance of compressible flow codes at low Mach number. *AIAA Journal*, 31 :49–56, 1993.
- [81] Shaojie Xu and D.S. Stewart. Deflagration-to-detonation transition in porous energetic materials : a comparative model study. *Journal of Engineering Mathematics*, 31 :143–172, 1997.
- [82] O.C. Zienkiewicz, J. Szmelter, and J. Perraire. Compressible and incompressible flows : An algorithm for all seasons. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 78(1) :105–121, 1990.
- [83] N. Zuber. On the dispersed Two-Phase Flow in the Laminar Regime. *Chem. Eng. Sci*, 19 :897, 1964.

## Annexe A

# Equations discrètes limites du schéma de Godunov

Ici, nous considérons comme au paragraphe 2.3 du chapitre 2, la solution limite du problème de Riemann (2.30) dans le but d'identifier le système limite vérifié par les inconnues discrètes. Au paragraphe 2.3, nous avons montré que même pour des "données initiales bien préparées" de la forme (2.39-2.40), la solution calculée après le premier pas de temps contient des ondes de pression d'ordre  $M_*$ . Ainsi, nous devons considérer des données initiales plus générales que (2.39-2.40), c'est-à-dire des données initiales correspondant toujours à des écoulements à faible nombre de Mach mais ne correspondant plus au cas initial bien préparé. De plus, les équations d'Euler incompressibles permettant la présence de discontinuités de densité, nous considérons également la possibilité d'avoir des discontinuités de densité d'ordre  $\mathcal{O}(1)$ . Ainsi les deux états  $q_L$  et  $q_R$  sont supposés de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\rho_L &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_*\rho_{L,1} + M_*^2\rho_{L,2} + \dots) \\ u_L &= a_{ref}(0 + M_*u_{L,1} + M_*^2u_{L,2} + \dots) \\ v_L &= a_{ref}(0 + M_*v_{L,1} + M_*^2v_{L,2} + \dots) \\ p_L &= \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*p_{L,1} + M_*^2p_{L,2} + \dots)\end{aligned}\tag{A.1}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_R &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_*\rho_{R,1} + M_*^2\rho_{R,2} + \dots) \\ u_R &= a_{ref}(0 + M_*u_{R,1} + M_*^2u_{R,2} + \dots) \\ v_R &= a_{ref}(0 + M_*v_{R,1} + M_*^2v_{R,2} + \dots) \\ p_R &= \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*p_{R,1} + M_*^2p_{R,2} + \dots)\end{aligned}\tag{A.2}$$

En introduisant ces développements asymptotiques dans les courbes de chocs et de détente, il est facile de voir que celles-ci dégénèrent en droites de pentes  $-1/\sqrt{\gamma p_0 \rho_{L,0}}$  et  $+1/\sqrt{\gamma p_0 \rho_{R,0}}$ . Cependant, puisque  $p_{L,1}$  et  $p_{R,1}$  sont non nuls, les quatre cas de la Figure 2.2 dans la construction du problème de Riemann sont possibles. De plus, à cause des discontinuités de densité d'ordre  $\mathcal{O}(1)$ , les vitesses du son de part et d'autre de la discontinuité de contact sont différentes. Néanmoins, dans les quatre cas possibles, l'intersection des courbes de chocs et de détente donne :

$$\begin{aligned}u^* &= a_{ref}(0 + M_*\left(\frac{\sqrt{\rho_{L,0}}u_{L,1} + \sqrt{\rho_{R,0}}u_{R,1}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma p_0}}\frac{\Delta p_1}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}}\right) + M_*^2 \dots) \\ p^* &= \rho_{ref}a_{ref}^2(p_0 + M_*\left(\frac{\sqrt{\rho_{R,0}}p_{L,1} + \sqrt{\rho_{L,0}}p_{R,1}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} - \sqrt{\gamma p_0}\frac{\sqrt{\rho_{L,0}\rho_{R,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}}\Delta u_1\right) + M_*^2 \dots)\end{aligned}\tag{A.3}$$



où  $\Delta(\cdot) = \Delta_{RL}(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L$ . Les valeurs des densités et des vitesses tangentielles de part et d'autre de la discontinuité de contact sont données par :

$$\begin{aligned}
 \rho_L^* &= \rho_{ref}(\rho_{L,0} + M_*(\rho_{L,1} - \rho_{L,0}) \frac{\sqrt{\rho_{L,0}\rho_{R,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta u_1}{\sqrt{\gamma p_0}} + \frac{\rho_{L,0}\sqrt{\rho_{L,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta p_1}{\gamma p_0}) + M_*^2 \dots) \\
 v_L^* &= v_L \\
 \rho_R^* &= \rho_{ref}(\rho_{R,0} + M_*(\rho_{R,1} - \rho_{R,0}) \frac{\sqrt{\rho_{L,0}\rho_{R,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta u_1}{\sqrt{\gamma p_0}} + \frac{\rho_{R,0}\sqrt{\rho_{R,0}}}{\sqrt{\rho_{L,0}} + \sqrt{\rho_{R,0}}} \frac{\Delta p_1}{\gamma p_0}) + M_*^2 \dots) \\
 v_R^* &= v_R
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

On considère maintenant l'application du schéma de Godunov sur un domaine cartésien et par la méthode des volumes finis. Pour des raisons de simplicité, on considère que la grille cartésienne est régulière et que la taille de maille est constante et égale à  $\delta$  dans les deux directions.  $\mathbf{i} = (i, j)$  représente les indices du nœud dont les coordonnées sont  $(i\delta, j\delta)$  et on note  $\mathcal{V}(\mathbf{i}) = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$  ou  $\mathcal{V}(\mathbf{i}) = \{N, S, E, W\}$  pour désigner les voisins du nœud  $\mathbf{i}$ . Le volume de contrôle associé au nœud  $\mathbf{i}$  est  $C_{\mathbf{i}} = [(i-1/2)\delta, (i+1/2)\delta] \times [(j-1/2)\delta, (j+1/2)\delta]$ . Et on note  $\mathbf{n}$  le vecteur normal extérieur à  $\partial C_{\mathbf{i}}$  défini par :

$$\mathbf{n}_{\mathbf{i}\mathbf{l}} = \frac{\int_{C_{\mathbf{i}} \cap C_{\mathbf{l}}} \mathbf{n}}{\delta} \tag{A.5}$$

Quand on atteint un régime stationnaire, l'application du schéma de type volumes finis au premier ordre, donne l'équation semi-discrète suivante :

$$\sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{V}(\mathbf{i})} \vec{F}(q_{\mathbf{i}\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{i}\mathbf{l}} = 0 \tag{A.6}$$

où  $q_{\mathbf{i}\mathbf{l}}$  représente la valeur de l'état aux interfaces entre les cellules  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{l}$ . En suivant l'analyse que nous avons faite pour trouver la solution asymptotique du problème de Riemann, on écrit ces valeurs aux interfaces sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}} &= \rho_{ref} \quad ( \rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 + M_* \rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + M_*^2 \rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^2 + \dots ) \\
 u_{\mathbf{i}\mathbf{l}} &= a_{ref} \quad ( 0 + M_* u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + M_*^2 u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^2 + \dots ) \\
 v_{\mathbf{i}\mathbf{l}} &= a_{ref} \quad ( 0 + M_* v_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + M_*^2 v_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^2 + \dots ) \\
 p_{\mathbf{i}\mathbf{l}} &= \rho_{ref} a_{ref}^2 \quad ( p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 + M_* p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + M_*^2 p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^2 + \dots )
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Ensuite, le flux évalué sur cet état peut s'écrire suivant le développement (ici  $u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}, v_{\mathbf{i}\mathbf{l}}$  représentent respectivement les vitesses normales et tangentielles aux interfaces) :

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}(q_{\mathbf{i}\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{i}\mathbf{l}})_1 &= \rho_{ref} a_{ref} (M_* \rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + \mathcal{O}(M_*^2)) \\
 (\vec{F}(q_{\mathbf{i}\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{i}\mathbf{l}})_2 &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 + M_* p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + M_*^2 (\rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 (u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1)^2 + p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^2) + \mathcal{O}(M_*^3)) \\
 (\vec{F}(q_{\mathbf{i}\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{i}\mathbf{l}})_3 &= \rho_{ref} a_{ref}^2 (M_*^2 \rho_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 v_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + \mathcal{O}(M_*^3)) \\
 (\vec{F}(q_{\mathbf{i}\mathbf{l}}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{i}\mathbf{l}})_4 &= \rho_{ref} a_{ref}^3 (M_* \frac{\gamma}{\gamma-1} p_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^0 u_{\mathbf{i}\mathbf{l}}^1 + \mathcal{O}(M_*^2))
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

D'après l'expression (A.3) de la pression à l'interface, on obtient facilement que  $p_{i\mathbf{l}}^0 = p^0 \forall i\mathbf{l}$ . Ensuite l'ordre 0 de l'équation de quantité de mouvement dégénère en :

$$p^0 \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{V}(i)} \mathbf{n}_{i\mathbf{l}} = 0 \quad (\text{A.9})$$

mais l'ordre  $M_*$  des équations de quantité de mouvement s'écrit :

$$\sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{V}(i)} p_{i\mathbf{l}}^1 \mathbf{n}_{i\mathbf{l}} = 0 \quad (\text{A.10})$$

où la valeur de  $p_{i\mathbf{l}}^1$  est donnée dans (A.3). Ceci donne pour la composante horizontale de l'équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0 p_{\mathbf{W}}^1} + \sqrt{\rho_{\mathbf{W}}^0 p_{\mathbf{i}}^1}}{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0} + \sqrt{\rho_{\mathbf{W}}^0}} + \frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{E}}^0 p_{\mathbf{i}}^1} + \sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0 p_{\mathbf{E}}^1}}{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0} + \sqrt{\rho_{\mathbf{E}}^0}} \\ & = \sqrt{\gamma p^0} \left( \frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0 \rho_{\mathbf{E}}^0}}{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0} + \sqrt{\rho_{\mathbf{E}}^0}} \Delta_{\mathbf{E}\mathbf{i}} u^1 - \frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0 \rho_{\mathbf{W}}^0}}{\sqrt{\rho_{\mathbf{i}}^0} + \sqrt{\rho_{\mathbf{W}}^0}} \Delta_{\mathbf{i}\mathbf{W}} u^1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Et on obtient une expression similaire pour la composante verticale de l'équation de quantité de mouvement. D'après (A.11), il est clair que la composante  $p^1$  ne disparaît pas dès que le champ de vitesse n'est pas uniforme. On notera également que l'équation (A.11) est quasiment identique à l'équation obtenue pour la discrétisation avec le schéma de Roe [29].



## Annexe B

# Accumulation d'erreurs d'arrondis

Nous comparons ici la robustesse des deux solveurs que nous avons proposés pour le modèle réduit à cinq équations, dans la limite des faibles nombres de Mach. Les écoulements à faible nombre de Mach peuvent, d'un point de vue numérique, faire apparaître des problèmes d'erreurs d'arrondis. Les différents tests que nous avons effectués, ont montré que le solveur acoustique était beaucoup plus robuste que celui de type VFRoe, pour le calcul d'écoulements à faible nombre de Mach et notamment pour le calcul d'interface entre fluides purs de natures très différentes. Nous proposons ici de montrer sur un problème d'advection d'interface, que l'accumulation d'erreurs d'arrondis est plus importante pour le solveur de type VFRoe que pour le solveur acoustique.

On se place sur une interface entre deux fluides purs et on a montré d'un point de vue théorique, que les deux solveurs préservent les conditions d'interface. Localement, ceci peut se traduire par le fait que si l'on a  $u_L = u_R$  et  $p_L = p_R$ , alors la solution calculée à l'interface doit être telle que  $u^* = u_L = u_R$  et  $p^* = p_L = p_R$ .

On rappelle les formules du solveur VFRoe :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{\Delta p}{2 \langle \rho \hat{a} \rangle} \\ p^* &= \frac{p_L + p_R}{2} - \frac{\langle \rho \hat{a} \rangle \Delta u}{2} \end{aligned} \tag{B.1}$$

où  $\rho$  est la densité de mélange,  $\hat{a}$  la vitesse du son et où  $\langle . \rangle$  représente la moyenne arithmétique entre les deux états  $L$  et  $R$ .

Et les formules du solveur acoustique sont données par :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{\rho_L \hat{a}_L u_L + \rho_R \hat{a}_R u_R}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} - \frac{p_R - p_L}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} \\ p^* &= \frac{\rho_R \hat{a}_R p_L + \rho_L \hat{a}_L p_R}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} - \frac{\rho_L \hat{a}_L \rho_R \hat{a}_R (u_R - u_L)}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Théoriquement on a  $\Delta u = 0$  et  $\Delta p = 0$  et on a bien  $u^* = u_L = u_R$  et  $p^* = p_L = p_R$ . Informatiquement, les termes  $\Delta u = 0$  et  $\Delta p = 0$  sont nuls aux erreurs machines près que l'on notera  $\varepsilon_u$  et  $\varepsilon_p$  et qui sont d'autant plus importantes que le nombre de Mach diminue.

En introduisant ces erreurs dans les formules du solveur VFRoe, on obtient :

$$\begin{aligned} u^* &= u_L + \frac{\varepsilon_u}{2} - \frac{\varepsilon_p}{2 \langle \rho \hat{a} \rangle} \\ p^* &= p_L + \frac{\varepsilon_p}{2} - \frac{\langle \rho \hat{a} \rangle \varepsilon_u}{2} \end{aligned} \tag{B.3}$$

et pour le solveur acoustique :

$$\begin{aligned} u^* &= u_L + \frac{\rho_R \hat{a}_R \varepsilon_u}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} - \frac{\varepsilon_p}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} \\ p^* &= p_L + \frac{\rho_L \hat{a}_L \varepsilon_p}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} - \frac{\rho_L \hat{a}_L \rho_R \hat{a}_R \varepsilon_u}{\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De plus, on a constaté que les problèmes apparaissaient pour le solveur VFRoe d'autant plus que les fluides de part et d'autre de l'interface étaient de natures différentes. En particulier, on suppose donc que le fluide du côté  $R$  est un fluide lourd de densité  $\rho_0$  dans lequel la vitesse du son  $a_0$  est très élevée. En revanche du côté  $L$ , on a un fluide beaucoup plus léger et dans lequel la vitesse du son est plus petite. Par conséquent on posera  $\rho_L a_L = \tau \rho_0 a_0$  où  $\tau$  est un petit paramètre. Pour exemple, une interface entre de l'eau et de l'air, à pression atmosphérique, donne un paramètre  $\tau$  de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Pour le solveur VFRoe, il nous faut approcher le terme  $\langle \rho \hat{a} \rangle$  donné par :

$$\frac{1}{\langle \rho \hat{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^2 \frac{\langle Y_k \rangle}{\langle \rho_k a_k \rangle^2}} \quad (\text{B.5})$$

Or pour une interface entre fluides purs, on a  $\langle Y_k \rangle \simeq 1/2$  et on obtient donc :

$$\frac{1}{\langle \rho \hat{a} \rangle} = \sqrt{\frac{1/2}{(\tau \rho_0 a_0)^2} + \frac{1/2}{(\rho_0 a_0)^2}} \simeq \frac{1}{\tau \sqrt{2} \rho_0 a_0} \quad (\text{B.6})$$

Ainsi, on obtient les approximations suivantes pour les formules de  $u^*$   $p^*$ , données par le solveur VFRoe :

$$\begin{aligned} u^* &= u_L + \frac{1}{\tau} \left( \frac{\tau \varepsilon_u}{2} - \frac{\varepsilon_p}{2\sqrt{2} \rho_0 a_0} \right) \\ p^* &= p_L + \tau \left( \frac{\varepsilon_p}{2\tau} - \frac{\rho_0 a_0}{\sqrt{2}} \varepsilon_u \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Pour les formules du solveur acoustique, on approchera le terme  $\rho_L \hat{a}_L + \rho_R \hat{a}_R$  par  $\rho_0 a_0$  et on obtient :

$$\begin{aligned} u^* &= u_L + \frac{1}{\tau} \left( \tau \varepsilon_u - \frac{\tau \varepsilon_p}{\rho_0 a_0} \right) \\ p^* &= p_L + \tau (\varepsilon_p - \rho_0 a_0 \varepsilon_u) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Si on compare les formules pour la vitesse  $u^*$  et la pression  $p^*$  obtenues pour les deux solveurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\tau \varepsilon_u}{2} - \frac{\varepsilon_p}{2\sqrt{2} \rho_0 a_0} &\gg \tau \varepsilon_u - \frac{\tau \varepsilon_p}{\rho_0 a_0} \\ \frac{\varepsilon_p}{2\tau} - \frac{\rho_0 a_0}{\sqrt{2}} \varepsilon_u &\gg \tau (\varepsilon_p - \rho_0 a_0 \varepsilon_u) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Si on considère  $\tau \varepsilon_u / 2 \simeq \tau \varepsilon_u / \sqrt{2} \simeq \tau \varepsilon_u$ , dans ces formules (B.9), en notant respectivement  $\mathcal{O}_u$  et  $\mathcal{O}_p$  les erreurs des solveurs sur la vitesse  $u^*$  et la pression  $p^*$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_u(\text{VFRoe}) &\simeq \frac{1}{\tau} \mathcal{O}_u(\text{Acous}) \\ \mathcal{O}_p(\text{VFRoe}) &\simeq \frac{1}{\tau^2} \mathcal{O}_p(\text{Acous}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Le paramètre  $\tau \ll 1$  étant petit, ceci prouve qu'à chaque pas de temps, l'erreur est plus importante pour le solveur VFRoe que pour le solveur acoustique. Ceci explique pourquoi, les tests numériques nous indiquaient que le solveur acoustique était plus robuste. En fait, quand on veut traiter la simulation numérique des écoulements à très faible nombre de Mach (en dessous de la valeur  $10^{-3}$ ), il est plus prudent d'adimensionner certaines variables et notamment la pression, si l'on veut éviter les échecs numériques liés aux accumulations d'erreurs d'arrondis.



## Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de modèles et de méthodes numériques pour les écoulements diphasiques compressibles à faible nombre de Mach. Toutes les méthodes numériques développées dans cette étude sont basées sur une formulation de type volumes finis en maillages non structurés. La première partie de cette thèse propose une analyse du comportement des schémas décentrés de type Godunov dans la limite des faibles nombres de Mach. Nous expliquons de manière rigoureuse les raisons pour lesquelles ces schémas aboutissent à des approximations imprécises lorsque les écoulements sont très proches de l'incompressible. Nous développons alors des méthodes de préconditionnement adaptées qui permettent de retrouver de bonnes approximations. Ce premier travail complète un certain nombre de travaux récents sur l'analyse des schémas décentrés dans la limite des faibles nombres de Mach. Le deuxième point abordé dans cette thèse est un travail de modélisation où nous développons à partir d'un modèle bi-fluides à sept équations de type Baer-Nunziato, un modèle réduit à cinq équations pour les écoulements diphasiques. Ce travail présente une méthode originale de réduction de systèmes hyperboliques avec termes sources raides. Nous développons pour ce modèle un schéma numérique implicite et suivant la stratégie utilisée dans la première partie de cette thèse, une technique de préconditionnement adaptée aux écoulements à faible vitesse. Les expériences numériques réalisées montrent que ce modèle est bien adapté au calcul d'ondes de détonations ainsi qu'à la simulation d'interfaces entre fluides compressibles. Enfin la dernière partie de cette thèse porte sur l'étude d'un modèle à sept équations pour le calcul d'écoulements diphasiques à faible nombre de Mach. On développe des méthodes numériques implicites basées sur des solveurs de Riemann approchés, permettant de réduire les coûts de calcul pour ce type de régime.

**Mots-clés:** Modélisation Eulérienne, Procédé d'homogénéisation, Modèles bi-fluides à six et sept équations, Méthodes volumes finis, Ecoulements compressibles, Faible nombre de Mach, Problème de Riemann, Schémas de type Godunov, Préconditionnement, Ecoulements diphasiques, Problèmes d'interfaces entre fluides compressibles, Relaxation hyperbolique

## Abstract

This thesis deals with the study of models and numerical methods for low Mach number compressible two phase flows. All numerical methods developed in this study are based on finite volume formulation for unstructured mesh. The first part of the thesis propose an analysis of the behavior of upwind Godunov type schemes in the low Mach number limit. We explain the reasons why these schemes give unaccurate approximations when the flows are near the incompressible limit. We consequently develop preconditioning methods which allow to recover good approximations. This first part of the study complete several recent works on the analysis of upwind schemes in the low Mach number limit. The second part of the thesis deals with a modelling work where we derive a five equation reduced model for compressible two phase flows, starting from a seven equation model which is a slight variation of the original Baer-Nunziato model. This work presents an original method to reduce hyperbolic systems with stiff source terms. We develop for this model an implicit numerical scheme and following the strategy of the first part of the thesis, a preconditioning method for low Mach number flows. With respect to the numerical test we have realized, the model seems very suitable to compute detonations waves and also for the simulation of interfaces between compressible fluids. Finally, we develop for a seven equation model, a numerical implicit scheme based on approximate Riemann solvers, which allows to reduce the cost of the computations of low Mach number two phase flows.

**Keywords:** Eulerian modelling, Averaging procedures, Six and seven equation two phase flow models, Finite volume methods Compressible flows, Low Mach number, Riemann problem, Godunov type schemes, Preconditioning, Two phase flows, Compressible Interface problems, Hyperbolic relaxation