Rotations d'un condensat de Bose-Einstein

Vincent Bretin

▶ **To cite this version:**

Vincent Bretin. Rotations d'un condensat de Bose-Einstein. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00005961

HAL Id: tel-00005961

https://theses.hal.science/tel-00005961

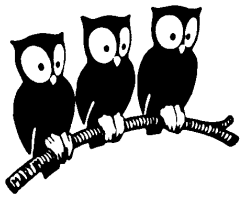
Submitted on 26 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Département de Physique
Ecole Normale Supérieure

Laboratoire Kastler Brossel



THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Vincent BRETIN

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Rotations d'un condensat de Bose-Einstein

Soutenue le 19 Mars 2004
devant le jury composé de :

Mme	**C. Lhuillier**	Présidente du jury
M.	**P. Bouyer**	Rapporteur
M.	**G. Shlyapnikov**	Rapporteur
M.	**C. Cohen-Tannoudji**	Examinateur
M.	**J. Dalibard**	Directeur de thèse

Remerciements

Mon travail de thèse s'est déroulé de septembre 2000 à mars 2004 au Laboratoire Kastler Brossel, dans le département de physique de l'Ecole normale supérieure. Ce laboratoire est un milieu extrêmement dynamique et stimulant, où sont regroupées d'excellentes conditions de travail. Pour m'y avoir accueilli, je tiens à remercier ses directeurs successifs Elisabeth Giacobino et Frank Laloë. Mes remerciements vont également à l'ensemble des membres du jury : Claire Lhuillier, Philippe Bouyer, Gora Shlyapnikov et Claude Cohen-Tannoudji. Je leur suis très reconnaissant de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et du soin avec lequel ils ont relu le présent manuscrit.

Cette thèse a été dirigée par Jean Dalibard. Avant d'être mon directeur de thèse, Jean a été, en 1998, mon directeur de stage à l'occasion de ma première expérience de recherche d'un mois. Depuis cette rencontre, j'ai pu apprécier sa personnalité exceptionnelle comme ses qualités scientifiques et humaines. Jean est tout d'abord un physicien d'une grande culture. Sa formidable connaissance du domaine des atomes froids, ainsi que sa curiosité pour les problématiques nouvelles, en ont fait un interlocuteur passionnant : ses idées et propositions, partagées quotidiennement, ont nourri un très grand nombre de discussions et noirci de nombreuses pages de calcul. Son sens de la pédagogie, ainsi que son exigence permanente de compréhension, restent un modèle pour moi. Jean a également été un directeur de thèse patient, plein de tact et d'attention, et éternellement optimiste. Souvent, alors que nous étions sur le point de capituler sur une expérience, il a su nous apporter sa confiance et sa bonne humeur. Aujourd'hui, alors que s'achève ce travail de recherche, j'ai conscience d'avoir largement évolué depuis mes débuts au laboratoire, tant scientifiquement que personnellement. Je crois que Jean a joué dans cette évolution un rôle clé, et je tiens à le remercier chaleureusement, pour cela et pour tout le reste.

Tout au long de ma thèse, j'ai travaillé en équipe avec d'autres étudiants ou post-doctorants. Je voudrais les remercier ici en quelques mots. La première équipe est celle de mes prédécesseurs, Frédéric Chevy et Kirk Madison, qui ont détecté pour la première fois les vortex dans un condensat. Ils m'ont légué un montage expérimental d'une rare stabilité. L'équipe qu'ils formaient, d'une grande complémentarité, m'a énormément appris sur les plans expérimentaux et théoriques. Leur bonne humeur restera un excellent souvenir, comme cette journée où nous avions délaissé nos condensats pour fabriquer un piège de Paul avec quelques bouts de ficelle...

En 2002, Peter Rosenbusch et moi avons dû prendre la relève et faire fonctionner l'expérience. L'ingéniosité et la patience de Peter nous ont permis d'adopter rapidement l'expérience et d'en tirer de nouveaux résultats. A cette époque, on s'ingéniait beaucoup à compenser les variations de champ magnétique que causaient les laboratoires voisins. Bruno Durin, stagiaire de DEA qui s'est joint à nous pendant plusieurs mois, a su nous aider sur ce sujet délicat comme sur le reste de l'expérience. Séverine Paul, stagiaire durant l'été 2002, nous a également apporté son aide et sa bonne humeur.

Après le départ de Peter fin 2002, Sabine Stock nous a rejoint pour commencer sa thèse. Sa grande patience ainsi que sa volonté d'apprendre rapidement le fonctionnement de notre expérience en ont fait en quelques semaines une collaboratrice efficace et autonome. L'équipe que nous avons formé, à deux puis avec Yannick Seurin, restera un excellent souvenir : l'atmosphère

détendue et la connaissance commune que nous avions de notre expérience ont rendu possibles les derniers résultats de ma thèse. Aujourd'hui, Sabine fait partie de l'équipe qui conduit la suite des expériences sur notre montage, équipe à laquelle se sont joints Zoran Hadžibabić et Baptiste Battelier. La vitesse à laquelle ils ont su maîtriser l'expérience pour en tirer de nouveaux résultats me rend très optimiste pour l'avenir de notre montage. Je leur souhaite bonne chance.

Je voudrais aussi remercier les théoriciens avec lesquels j'ai eu la chance d'interagir régulièrement durant ma thèse : Yvan Castin, Subhasis Sinha, Gora Shlyapnikov, Sandro Stringari, Marco Cozzini, Amandine Aftalion et Ionut Danaila. Leurs lumières m'auront été plus d'une fois utiles.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des membres du groupe "atomes froids". Par ordre de préséance atomique, les membres de l'équipe Hélium viennent les premiers : Michèle Leduc, Franck Pereira dos Santos, Junmin Wang, Francisco Perales, Jérémie Léonard, Carl Barrelet, Unikrischnan, Matt Walhout, Sylvain "Michoko" Schwartz (merci pour la relecture !), Erwan Jahier, Tobias Müller, Umakant Rapol, Steven Moal et Jae-Wan Kim. Puis viennent les Lithium : Christophe Salomon, Gabriele Ferrari, Florian Schreck, Julien "Wjlk" Cubizolles, Kristan Corwin, Lev Khaykovich, Thomas Bourdel, Servaas Kokkelmans, Zing Zhang, Martin Teichmann, Leticia Tarruel. L'autre équipe Rubidium vient ensuite : David Guéry-Odelin, Philippe Cren, Christian Roos, Aydin Aclan, Thierry Lahaye, Johnny Vogels et Kenneth Günter. Merci enfin aux théoriciens de l'équipe d'Yvan Castin : Iacopo Carusotto, Carlos Lobo, Christophe Mora et Lincoln Carr. Je garderai longtemps le souvenir des discussions enthousiastes du séminaire interne, comme celui des déjeuners et soirées passés ensemble. L'excellente ambiance qui règne sur les mezzanines et dans les salles de manip me manquera.

Durant ma thèse, j'ai — à de nombreuses occasions — sollicité les services techniques et administratifs du département et du laboratoire. Je tiens à les remercier pour l'accueil toujours chaleureux qu'ils m'ont réservé, et pour leur aide toujours précieuse. Merci donc au personnel administratif du LKB : Nicole Neveux, Geneviève Piard, Zora Ouassyoun, Corinne Pascandolo, Linda Krikorian, Vera da Costa et Thierry Tardieu. Merci aussi aux ingénieurs et techniciens des ateliers de mécanique/électronique du LKB : Yvon Cabirou, Lionel Perennes et Patrick Giron. Merci enfin au personnel du département dans son ensemble, et plus particulièrement à : Régine André, Marie-Françoise Ducos, Anne-France Seyer, Jack Olejnik, Zaïre Dissi, Denis Jaggi, Jean-François Point, Bruno Fabre, Daniel Lemoal et Alain Launay.

Il me reste à remercier tous ceux qui m'ont aidé sans pour autant refroidir des atomes avec moi : mes amis et ma famille. Ils se reconnaîtront d'eux-mêmes : ils ont été présents à de nombreux moments clés, ont souvent écarquillé les yeux en découvrant la "machine" sur laquelle je travaillais, ont lentement appris à prononcer correctement "condensat de Bose-Einstein", et m'ont malgré tout régulièrement demandé, sans y croire : "Alors, ils tournent ces atomes ?". Eh bien, oui, parfois, ils tournent... Merci à tous...

Table des matières

Présentation générale 9

I Avant la rotation

Introduction 17

1 Condensat de Bose-Einstein au repos 19
- 1.1 Piégeage et refroidissement d'atomes froids . . . 19
- 1.2 Le phénomène de condensation de Bose-Eintein . . . 28
- 1.3 Description de la fraction d'atomes condensés . . . 31
- 1.4 Dynamique d'un condensat . . . 34
- 1.5 Condensats à température nulle et non nulle . . . 37
- 1.6 Conclusion . . . 40

2 Mode monopolaire transverse d'un condensat 43
- 2.1 Présentation des modes monopolaires . . . 43
- 2.2 Méthode d'excitation . . . 44
- 2.3 Modèles et expériences à température nulle (ou presque) . . . 44
- 2.4 Amortissement dans le régime linéaire . . . 48
- 2.5 Amortissement non-linéaire . . . 53
- 2.6 Conclusion . . . 56

II Débuts de rotation : écoulements irrotationnels

Introduction 61

3 Mise en rotation d'un condensat 63
- 3.1 Comment faire tourner des atomes piégés ? . . . 63
- 3.2 Rotation perturbative du condensat : le mode quadrupolaire . . . 68
- 3.3 États stationnaires du condensat : excitation non-linéaire du mode quadrupolaire 72
- 3.4 Exploration expérimentale des états stationnaires . . . 74
- 3.5 Conclusion . . . 78

4 Mode ciseaux d'un condensat tournant 79
- 4.1 Mode ciseaux dans un piège statique . . . 79
- 4.2 Mode ciseaux dans le référentiel tournant : approche analytique . . . 81
- 4.3 Observation expérimentale du mode ciseaux tournant . . . 83

4.4 Conclusion 85

III Rotations quantifiées : dynamique d'une ligne de vortex

Introduction **91**

5 Les vortex **93**
5.1 Propriétés générales d'un vortex 93
5.2 Apparition des vortex dans le condensat 100
5.3 D'autres vortex 106
5.4 Conclusion 108

6 Forme d'équilibre d'une ligne de vortex unique **111**
6.1 Observation d'une ligne de vortex unique 111
6.2 Approche théorique 115
6.3 Vie et mort d'une ligne de vortex 119
6.4 Mesure du moment cinétique associé à une ligne de vortex 121
6.5 Conclusion 123

7 Modes de vibration d'une ligne de vortex : les kelvons **125**
7.1 Présentation des modes de Kelvin 125
7.2 Effet des kelvons sur les modes quadrupolaires 128
7.3 Une première expérience : excitation percussionnelle 131
7.4 Une seconde expérience : excitation résonnante 134
7.5 Interprétation des résultats 137
7.6 Conclusion 138

IV Rotations rapides : vers les régimes corrélés

Introduction **145**

8 Rotations rapides et états corrélés **147**
8.1 Condensats avec de nombreux vortex 147
8.2 De l'oscillateur harmonique à l'effet Hall Quantique 151
8.3 Bosons en rotation 155
8.4 Conclusion 160

9 Rotation rapide dans un piège hybride **161**
9.1 Introduction d'un terme quartique transverse dans le potentiel 161
9.2 Procédure expérimentale et résultats 165
9.3 Détermination de Ω_{eff} par trois méthodes 169
9.4 Pourquoi les vortex disparaissent : quelques pistes 175
9.5 Conclusion 177

10 Mode monopolaire transverse d'un condensat en rotation rapide **179**
10.1 Observation de l'oscillation monopolaire d'un gaz en rotation rapide 179
10.2 Interprétation de la fréquence 182

10.3 Structure du mode 184
10.4 Conclusion 185

Conclusion générale **190**

Bibliographie **193**

Présentation générale

Un million d'atomes, tous d'un même élément, flottant dans un enceinte où règne un vide très poussé, confinés dans une région de quelques microns de large et à une température de quelques dizaines de nanoKelvin : voilà ce que les expériences d'atomes froids permettent de produire au terme d'un cycle de quelques secondes. Un tel échantillon est un objet très pur, que l'on peut fabriquer avec différentes motivations. On peut chercher à étudier les propriétés individuelles ou faiblement collectives des atomes qui le composent : la spectroscopie de précision [11], la mesure de constantes fondamentales [12], ou l'étude des propriétés collisionnelles [13] en sont des exemples. Dans de telles expériences, le nombre d'atomes de l'échantillon a pour rôle essentiel d'augmenter le signal recherché. On peut également s'intéresser aux propriétés collectives du gaz. Aux faibles températures atteintes, et dans ces conditions de densité, de forts effets quantiques se font sentir. Les atomes bosoniques peuvent former un condensat de Bose-Einstein ; les atomes fermioniques peuvent former une mer de Fermi. Avec l'observation récente de tels systèmes, c'est un nouveau champ d'étude qui s'est ouvert : celui des systèmes condensés.

De leur domaine d'origine — l'optique atomique —, les atomes froids ont gardé leurs propriétés individuelles : ils sont manipulables comme le sont des atomes seuls, essentiellement par les champs électromagnétiques. Les champs très désaccordés en fréquence par rapport aux transitions atomiques déplacent les niveaux d'énergie et exercent des forces, les champs statiques électriques ou magnétiques agissent sur les dipôles permanents des atomes, et les champs résonants, dans le domaine optique ou radio-fréquence, permettent de contrôler l'état interne des atomes. Finalement, c'est toute la palette de l'optique atomique qui peut être utilisée pour manipuler l'échantillon dans son ensemble. Les récents succès dans la production contrôlée de molécules [14, 15] et de condensats moléculaires [16], ou dans la modification des interactions entre particules [17], témoignent de la puissance de ces outils.

De leur nouveau domaine d'application — la matière condensée —, les gaz d'atomes froids récupèrent la très grande richesse des comportements collectifs propres aux fluides quantiques. Plusieurs transitions de phase quantiques, souvent déjà étudiées sur d'autres systèmes, ont ainsi été observées avec des atomes froids : transition de Bose-Einstein [18], dans des configurations à trois, deux et une dimension(s), et transition de Mott [19]. D'autres transitions font l'objet de recherches intensives et pourraient être observées prochainement : transition BCS dans les systèmes fermioniques, ou encore transition de Kosterlitz-Thouless dans les systèmes bidimensionnels.

Dans les gaz d'atomes froids, la condensation de Bose-Einstein est de loin la plus populaire et la plus étudiée des transitions [20]. Dictée par la statistique de Bose-Einstein, elle se produit lorsque les fonctions d'ondes des particules sont suffisamment étendues pour se recouvrir entre elles[1] : un nombre macroscopique d'atomes occupent alors un même état quantique. Un tel fluide quantique est décrit par une fonction d'onde unique et son évolution est gouvernée par une équation de Schrödinger non linéaire. Il possède des propriétés de cohérence remarquables, qui ont pu être démontrées par des expériences d'interférences [21] ou de diffraction d'ondes de

[1] Ce critère est un double critère, de densité élevée et de température faible (*cf.* chapitre 1).

matières issues d'un condensat [22]. A température suffisamment faible, un condensat de Bose-Einstein est également superfluide, c'est-à-dire dépourvu de viscosité. Cet effet collectif non trivial est ancien : il a été observé en 1938 par Allen et Misener dans l'hélium liquide refroidi en-dessous de 2.2 K [23], puis expliqué par London [24, 25].

La combinaison de ces deux propriétés essentielles d'un condensat — cohérence et superfluidité — conduit, dans l'hélium superfluide, à l'observation de comportements spectaculaires et contre-intuitifs [26,27]. Un premier effet surprenant apparaît lorsqu'un récipient rempli d'hélium-II est mis en rotation doucement. On constate qu'il n'entraîne pas le fluide qu'il contient, et ce malgré la rugosité des parois. Lorsque la rotation est accélérée, cette inertie du fluide laisse place à un comportement encore plus remarquable : le fluide se met à tourner, mais d'une manière très différente d'un fluide classique. Il développe en son sein des lignes tourbillonnaires quantifiées et arrangées en réseau régulier : les vortex. La rotation a ainsi été, pour l'hélium, un moyen particulièrement efficace de démontrer des effets non triviaux, liés aux propriétés originales d'un superfluide. On peut pousser un peu plus loin et remarquer que des vortex ont aussi été observés dans les supraconducteurs de type II placés dans un fort champ magnétique [28]. Ces expériences ne sont pas des expériences de rotation, mais on sait qu'un champ magnétique et un champ inertiel de rotation partagent de nombreuses caractéristiques : ce sont tous deux des pseudo-vecteurs, exerçant des forces proportionnelles et perpendiculaires au vecteur vitesse. Les électrons chargés et la phase superfluide BCS dans le premier cas sont ainsi l'équivalent des particules massives et de la phase superfluide condensée dans le second ; les vortex des supraconducteurs sont, pour ces raisons, très proches de ceux des superfluides [29].

Au vu de cet héritage de la matière condensée, la mise en rotation des condensats gazeux constitue un enjeu expérimental et théorique de taille. Les motivations sont multiples : la dynamique de rotation d'un superfluide, en premier lieu, est un sujet fondamental plein de questions. En effet, la rotation en bloc n'est pas possible : le fluide a le choix entre rester immobile ou contenir des vortex. Les conditions de ce choix, les mécanismes d'apparition des vortex, leurs propriétés statiques et dynamiques, sont autant de sujets riches et ouverts, qui sont largement discutés dans ce manuscrit. La deuxième motivation que l'on peut trouver pour étudier des condensats gazeux en rotation est la perspective de les adapter à la mesure des mouvements de rotation. A l'image des gyromètres superfluides fonctionnant avec de l'hélium [30] ou des SQUIDs composés de petites boucles de courant supraconducteur et sensibles aux champs magnétiques [31], il est envisageable de construire des condensats toriques qui seraient très sensibles aux mouvements de rotation. Des études sont menées dans cette direction par d'autres groupes. Enfin, les condensats en rotation pourraient conduire à un nouveau type de transition quantique dans la limite des rotations rapides. Un nouveau champ théorique se développe depuis quelques années autour de la possibilité de voir fondre le réseau de vortex en tournant rapidement, pour laisser place à un nuage qui ne serait ni un nuage classique, ni un condensat, mais un système quantique très fortement corrélé. Ce régime, inspiré de l'effet Hall quantique fractionnaire observé dans des gaz d'électrons bidimensionnels, est un nouvel exemple de phénomène issu de la physique de la matière condensée, qui pourrait être observé dans les gaz d'atomes froids.

Ce manuscrit, intitulé "Rotations d'un condensat de Bose-Einstein", décrit les travaux effectués dans notre groupe dans la période Septembre 2000- Septembre 2003 sur des condensats de Rubidium. Il fait suite à celui de Frédéric Chevy où sont discutées les propriétés dynamiques d'un condensat, et plus particulièrement la nucléation et l'observation des vortex, ainsi que la mesure de leur moment cinétique et de leur phase [32]. Le présent manuscrit s'articule autour de la notion centrale de vortex quantifié : suivant le nombre de ces entités, le mouvement de rotation d'un condensat se fait avec une liberté plus ou moins grande. Qu'aucun vortex ne soit présent et le mouvement de rotation est extrêmement contraint, forcé de se développer par le biais de modes de surfaces. Lorsqu'un vortex seul est contenu par le condensat, la rotation se fait autour de ce vortex, et la circulation de la vitesse est quantifiée. Enfin, lorsque de nombreux

vortex sont présents, la limite des rotations rapides est atteinte, et le régime d'effet Hall peut être approché.

Ce manuscrit est fait de quatre parties, dont trois consacrées à la rotation, mettant en jeu des nombres croissants de vortex : aucun, 1, puis beaucoup. Elles s'organisent comme suit :

I. Avant la rotation. Cette partie est un préliminaire aux études des mouvements de rotation. Nous y avons rassemblé l'ensemble des notions théoriques et résultats d'où la rotation est absente. Le premier chapitre a un double objectif : celui de présenter notre dispositif expérimental de base, et celui de décrire un certain nombre d'outils théoriques pour la description des condensats de Bose-Einstein. Il est suivi d'un chapitre consacré à une série d'expériences portant sur un mode d'oscillation monopolaire du condensat.

II. Débuts de rotation : écoulements irrotationnels. Cette partie porte sur les mouvements de rotation irrotationnels, consistant essentiellement en modes de surface. Ces modes sont le moyen par lequel nous pouvons initier un mouvement de rotation dans le condensat, aussi leur étude est très importante. Le chapitre 3 est consacré à la mise en rotation d'un condensat par une "cuillère" constituée d'un laser en mouvement. Les modes de surface sont d'abord décrits perturbativement et associés à un moment cinétique. Puis le cas du mode quadrupolaire est détaillé dans la limite non-linéaire : l'existence de solutions stationnaires très déformées est discutée, puis suivie d'une présentation de résultats expérimentaux où ces solutions ont pu être observées. Le chapitre 4 complète l'étude des états stationnaires par l'observation d'un mode de basse fréquence du condensat en rotation.

III. Rotations quantifiées : dynamique d'une ligne de vortex. Cette partie traite des condensats contenant un seul et unique vortex. Le chapitre 5 présente de manière théorique la notion de vortex, avant de montrer comment la nucléation des vortex se produit dans nos expériences. Dans le chapitre 6, nous abordons le problème de la forme tridimensionnelle de la ligne de vortex dans un condensat allongé. Les expériences que nous présentons montrent que cette ligne est courbée à ses deux extrémités, et permettent de visualiser la forme de la ligne durant l'intégralité de son cycle de vie. Le chapitre 7 traite de la dynamique d'une ligne unique et de ses oscillations. Le rôle de ces modes de vibration dans la dynamique de l'amortissement des modes de surface est mis en évidence par deux types d'expériences, dans les domaines temporel et spectral.

IV. Rotations rapides : vers les régimes corrélés. Cette partie est consacrée à la limite des rotations rapides. Dans le chapitre 8, essentiellement théorique, on tâche de répondre à la question : quel est l'état d'un condensat dans la limite des rotations rapides ? Dans le cas d'un piège harmonique, le condensat pourrait laisser place à un état de type effet Hall quantique fractionnaire. Cette perspective est discutée dans la seconde partie du chapitre 8. Les chapitres 9 et 10 décrivent des expériences que nous avons réalisées dans un piège harmonique légèrement modifié. Les nuages en rotations rapides obtenus dans ce piège sont décrits et analysés dans le chapitre 9. Leur mode de respiration monopolaire fait l'objet du chapitre 10.

Chaque partie commence par une introduction aux notions théoriques qui lui sont propres ; ainsi, les quatre parties peuvent, dans une certaine mesure, être lues indépendamment.

Première partie

Avant la rotation

Sommaire

Introduction **17**

1 Condensat de Bose-Einstein au repos **19**
1.1 Piégeage et refroidissement d'atomes froids 19
1.1.1 Cycle expérimental 19
1.1.2 Le piège magnétique 21
1.1.3 Refroidissement évaporatif 24
1.1.4 Dispositif d'imagerie 25
1.2 Le phénomène de condensation de Bose-Eintein 28
1.2.1 Une inversion d'ellipticité 28
1.2.2 Interprétation : saturation des états excités 29
1.3 Description de la fraction d'atomes condensés 31
1.3.1 Collisions à basse température : longueur de diffusion 31
1.3.2 L'équation de Gross-Pitaevskii 31
1.3.3 Approximation de Thomas-Fermi 32
1.3.4 La longueur de relaxation 33
1.4 Dynamique d'un condensat 34
1.4.1 Description hydrodynamique 34
1.4.2 Dynamique dans un piège harmonique : lois d'échelle 35
1.4.3 Oscillations de faible amplitude du condensat 36
1.5 Condensats à température nulle et non nulle 37
1.5.1 Quantification des modes d'excitation 37
1.5.2 Condensat à température nulle 38
1.5.3 Condensat à température non nulle 38
1.5.4 Condensats gazeux et superfluidité 39
1.6 Conclusion 40

2 Mode monopolaire transverse d'un condensat **43**
2.1 Présentation des modes monopolaires 43
2.2 Méthode d'excitation 44
2.3 Modèles et expériences à température nulle (ou presque) 44
2.3.1 Lois d'échelle pour le monopôle 44
2.3.2 Comportement 2D aux temps courts 45
2.3.3 A trois dimensions : comportement linéaire aux temps longs 47
2.4 Amortissement dans le régime linéaire 48
2.4.1 Un facteur de qualité de 2000 49
2.4.2 Mesure de la durée de vie et de la fréquence en fonction de T 49
2.4.3 Evaluation de l'amortissement de Landau (d'après Guilleumas et Pitaevskii) 50

2.4.4 Oscillation en phase avec le nuage thermique (d'après Jackson et Zaremba) 51
2.5 Amortissement non-linéaire 53
2.5.1 Observation d'une résurgence aux temps longs 53
2.5.2 Excitation paramétrique de phonons (d'après Kagan et Maksimov) 56
2.6 Conclusion 56

Introduction

La condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'atomes froids a été observée pour la première fois en 1995 [18, 33]. Ses découvreurs Eric Cornell, Wolfgang Ketterle et Carl Wieman ont reçu en 2001 le prix Nobel de Physique. Depuis 1995, de nombreux laboratoires ont reproduit et varié la séquence expérimentale historique qui conduisit aux premiers succès. On compte à ce jour quelque 50 dispositifs expérimentaux capables d'atteindre la condensation de Bose-Einstein, et environ 10 espèces condensées.

Chacune des méthodes employées a son propre degré de sophistication, dépendant de l'atome choisi et des objectifs à atteindre. Le cas de l'hydrogène étant mis à part, toutes suivent un schéma général qui a peu évolué depuis les premières expériences. Capture et refroidissement des atomes, transfert dans un piège non-dissipatif, puis refroidissement évaporatif sont ainsi les étapes courantes d'un cycle expérimental. Parallèlement à ces avancées expérimentales, les condensats de Bose-Einstein gazeux ont attiré un énorme intérêt théorique. Parmi les propriétés les plus remarquables qui ont pu être mises à jour, on peut retenir la superfluidité et la cohérence : les condensats de Bose-Einstein sont des objets quantiques macroscopiques.

L'objet de cette première partie n'est certainement pas de donner une vue générale du domaine. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux cours donnés par Claude Cohen-Tannoudji au Collège de France [34–39], ainsi qu'aux ouvrages récents de Pethick et Smith [40], et de Lev Pitaevskii et Sandro Stringari [20]. Il s'agit davantage ici de montrer comment sont produits, sur notre expérience, les condensats au repos que nous ferons tourner dans les parties suivantes. Le chapitre 1 rassemble ainsi la description de quelques éléments de notre montage expérimental. Des observations simples sont mises en regard de quelques notions théoriques sur les condensats. Ces dernières devraient nous permettre de nous construire une intuition de ce que représente un condensat. Des bases seront ainsi posées pour les analyses ultérieures.

Un second chapitre se joint à la description d'un condensat au repos. Il résume les études expérimentales que nous avons réalisées sur un mode élémentaire du condensat : le mode de respiration transverse. Nous aurons ainsi l'occasion de voir le déroulement d'une séquence expérimentale complète. Quelques phénomènes génériques de la dynamique des condensats se manifesteront, comme l'oscillation de modes propres ou leur amortissement. L'étude théorique de la dynamique du mode sera l'occasion de développer plus avant les modèles généraux du premier chapitre. Nous aurons ainsi complété le tableau d'un condensat au repos, en le laissant osciller un peu, avant la rotation...

Chapitre 1

Condensat de Bose-Einstein au repos

Les atomes de ^{87}Rb qui ont été choisis pour notre expérience en 1998 sont probablement parmi les plus simples à refroidir jusqu'au seuil de condensation. Ces atomes "populaires" réunissent en effet de nombreuses qualités pour l'expérimentateur : résonances optiques accessibles avec des diodes lasers, forte pression de vapeur saturante et propriétés collisionnelles favorables. Notre montage expérimental de condensation du ^{87}Rb a gardé le squelette de ses débuts en 1998. Nous en proposons dans ce chapitre une rapide visite[1], au cours de laquelle seront suivies les différentes étapes conduisant à un condensat au repos.

Suite à cet aperçu de la séquence expérimentale de base, nous introduisons un petit nombre de notions théoriques afin de compléter le tableau. Le phénomène de condensation de Bose-Einstein est expliqué à partir des propriétés statistiques des bosons. Un condensat au repos est modélisé en premier lieu par une seule fonction d'onde, qui est solution de la célèbre équation de Gross-Pitaevskii. La description dynamique d'un condensat est ensuite présentée, à travers plusieurs méthodes. Puis nous décrivons le condensat à températures nulle et non nulle, montrant que dans les deux cas il convient d'ajouter aux atomes condensés un cortège d'excitations. Enfin, le concept de superfluidité, qui jouera un rôle clé lors des mouvements de rotation, est introduit.

1.1 Piégeage et refroidissement d'atomes froids

Depuis le début des années 1980, des nombreuses méthodes de manipulation des atomes en phase gazeuse ont vu le jour. Ces découvertes, récompensées par le prix Nobel 1997, fournissent à l'expérimentateur une vaste palette de techniques de piégeage et de refroidissement [42–44]. Complétées par la méthode du refroidissement évaporatif, ces techniques forment le squelette de notre expérience.

1.1.1 Cycle expérimental

Notre dispositif expérimental est représenté sur la figure 1.1. Son fonctionnement routinier consiste en un cycle expérimental d'une durée d'environ une minute au cours de laquelle s'enchaînent les opérations suivantes :

- **Création d'un jet d'atomes froids** (figure 1.1(a)) : un piège magnéto-optique (PMO) est chargé dans la cellule de verre supérieure à partir d'une vapeur résiduelle de ^{87}Rb de $\sim 10^{-8}$mBar. Un faisceau laser additionnel (faisceau pousseur) traverse le PMO du haut vers le bas, créant une direction de fuite pour les atomes [45]. On obtient ainsi un jet d'atomes froids quasi-monocinétique avec une vitesse typique de $14\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

[1] De plus amples informations pourront être trouvées dans les manuscrits de thèse de mes prédécesseurs David Guéry-Odelin [41] et Frédéric Chevy [32].

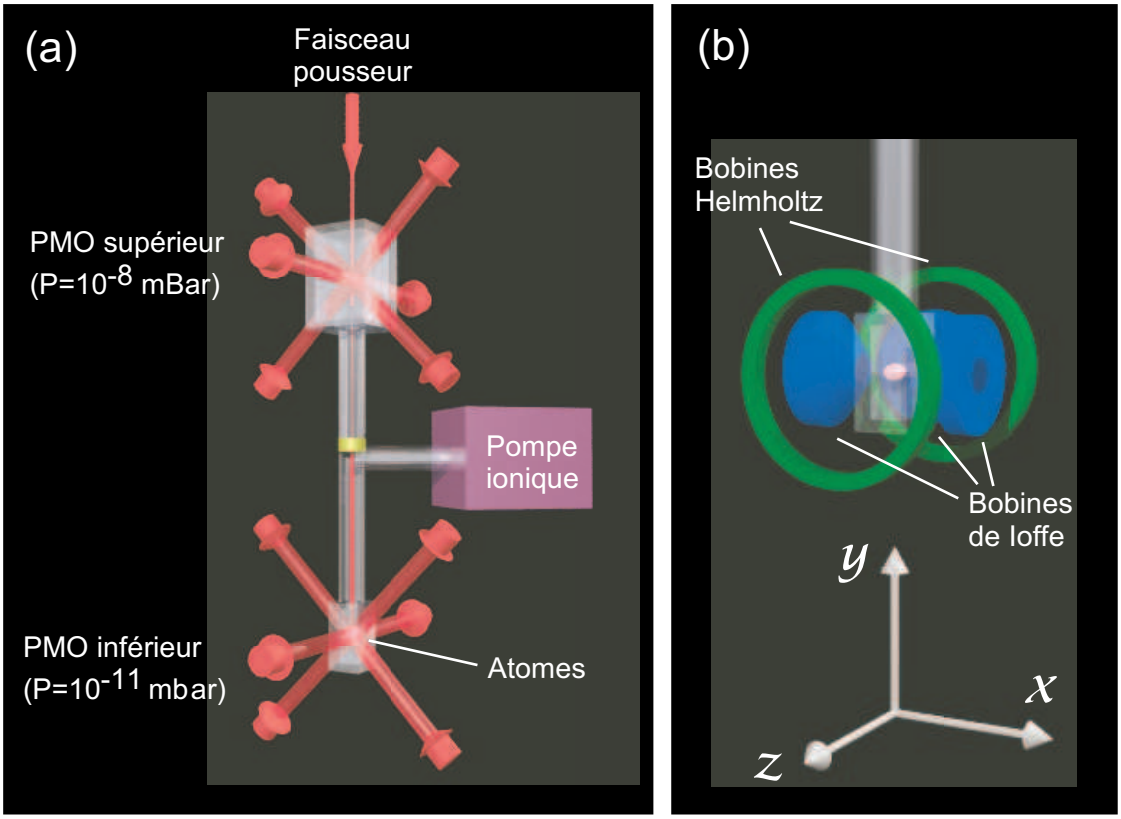


FIGURE 1.1 – Dispositif expérimental. (a) Vue d'ensemble du système à deux cellules : seule la cellule inférieure est pompée par une pompe ionique. Un vide différentiel est maintenu entre les deux cellules. Les bobines des pièges magnéto-optiques (PMO) ont été omises. (b) Piège magnétique. Ce piège est installé autour de la cellule inférieure. Après le chargement du PMO inférieur, les atomes sont transférés dans ce piège, puis refroidis par évaporation.

- **Chargement du piège magnéto-optique inférieur** : les deux cellules communiquent via un capillaire de 20 cm à travers lequel passe le jet. Dans la cellule inférieure, où règne un vide poussé (mieux que $\sim 10^{-11}$mBar), un second PMO capture les atomes du jet. Il se remplit de quelque 10^9 atomes en 15 secondes.
- **Transfert dans un piège magnétique** : après chargement du PMO inférieur, les champs magnétiques sont coupés et les atomes subissent une phase de mélasse optique de 10 ms. Du fait de mécanismes de refroidissement de type Sisyphe [46], la température de l'échantillon s'abaisse aux alentours de 100 μK. Les atomes sont alors pompés optiquement dans l'état $|F = m_F = 2\rangle$, puis transférés dans un piège magnétique de type Ioffe-Pritchard (figure 1.1(b)).
- **Refroidissement évaporatif** : alors que les atomes sont maintenus par le piège magnétique, on applique une onde radio-fréquence (rf) dont la fréquence $\nu_{\mathrm{rf}}(t)$ est scannée de 15 MHz à $\sim$1 MHz en $\sim$30 s. Cette onde a pour effet de coupler entre eux les différents sous-niveaux Zeeman sur la surface définie par $\mu|\boldsymbol{B}| = h\nu_{\mathrm{rf}}(t)$. Les atomes les plus énergétiques qui sont amenés à croiser cette surface passent ainsi dans un état interne non-piégé et s'échappent du piège. Les atomes restants rethermalisent à une température inférieure. L'abaissement continuel de ν_{rf} permet d'atteindre un régime d'emballement pour lequel la densité d'atomes dans l'espace des phases croît avec le temps.
- **Temps de vol et imagerie** : afin d'observer le nuage d'atomes, on procède en fin de cycle à un temps de vol (coupure des champs magnétiques piégeants et vol balistique de $\sim$20 ms), suivi d'une imagerie par absorption le long de deux directions orthogonales.

Il faut noter que la relative complexité de ces étapes et de leur enchaînement contraste avec la simplicité de l'état final du nuage d'atomes. En effet, le nuage d'atomes obtenu à la fin du cycle expérimental peut être caractérisé — à géométrie de piégeage donnée — par seulement deux paramètres : le nombre d'atomes N et la température T. Une bonne optimisation de toute la séquence permet seulement d'obtenir plus d'atomes à température donnée.

La suite de cette section discute plus en détail les trois derniers éléments de la séquence :

- Le piège magnétique : son caractère harmonique, ainsi que les valeurs des fréquences de piégeage joueront un rôle crucial dans la suite.
- La radio-fréquence : sa présence sous forme d'un "bouclier" lors des expériences sur les condensats stabilisera la température des échantillons.
- Le système d'imagerie : c'est par lui que seront recueillies toutes les informations sur l'état du nuage d'atomes.

1.1.2 Le piège magnétique

Afin de piéger un atome neutre avec des champs électromagnétiques, on peut chercher à tirer profit soit d'un moment magnétique atomique permanent, soit d'un dipôle électrique induit. La première de ces options conduit aux pièges magnétiques, la seconde aux pièges dipolaires. C'est la première option que nous avons choisie dans notre expérience[2].

Moments magnétiques atomiques dans un champ B uniforme

Nos atomes sont pompés optiquement dans l'état $|F = m_F = 2\rangle$ avant leur passage dans le piège magnétique. Leurs moments magnétiques sont ainsi tous anti-parallèles au champ magnétique. Un couple $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ tend donc à les retourner afin qu'ils minimisent leur énergie. Ce retournement est toutefois impossible : la proportionnalité entre moment magnétique et

[2]Comme le montreront les chapitres suivants, nous avons aussi utilisé des potentiels dipolaires, non pas pour piéger, mais pour manipuler les condensats.

moment cinétique impose à la projection de ces deux quantités sur l'axe du champ de rester constante. Les atomes restent donc tous anti-parallèles au champ magnétique[3], et leur énergie d'interaction avec ce champ s'écrit :

$$E_{\mathrm{mag}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = \mu B.$$

Piégeage d'un moment magnétique autour d'un minimum de champ

La formule précédente montre que les atomes polarisés dans $|F = m_F = 2\rangle$ sont attirés dans les régions de champ B faible. Pour les piéger, il faut donc créer une configuration de champ qui assure un minimum de B en un point qui sera le centre du piège[4]. A cette condition, il convient d'ajouter que ce minimum doit être non nul. En effet, les atomes doivent rester anti-parallèles au champ B, c'est à dire suivre ses variations adiabatiquement. Cette adiabaticité est impossible à satisfaire autour d'un point où B s'annule puisqu'alors tous les sous-niveaux Zeeman ont la même énergie (on parle de transitions Majorana entre différents sous-niveaux).

Différentes configurations ont été imaginées pour éviter que le champ ne soit nul au centre du piège. Le TOP ("Time Orbiting Potential") est la première solution à avoir conduit à l'observation de la condensation de Bose-Einstein [18]. Il consiste en un piège quadrupolaire donc le zéro décrit un cercle très rapidement, de sorte qu'en moyenne le minimum de champ est réalisé au centre du cercle et prend une valeur non nulle. Ce piège est encore utilisé par plusieurs équipes, dont certaines sont impliquées dans des travaux sur les condensats en rotation [47, 48].

Notre piège magnétique a été construit sur un autre modèle, appelé piège de Ioffe-Pritchard.

Piège de Ioffe-Pritchard

La géométrie de notre piège magnétique est présentée sur la figure 1.2 : trois bobines identiques (dites bobines de Ioffe) pointent leur flux vers le centre du piège. Un développement limité du champ à l'ordre deux au voisinage du centre peut être suivi :

- Ordre zéro : seule contribue la bobine centrale (numérotée 2 sur la figure). Cette composante s'écrit $B_0 \boldsymbol{u}_z$.
- Ordre un : les gradients selon z se compensent. Les gradients suivant x et y sont égaux et notés b' (sur notre montage, $b' \sim 100\,\mathrm{T.m^{-1}}$).
- Ordre deux : le seul terme important pour la suite est la courbure du champ suivant z due à la bobine centrale, notée b'' (sur notre montage, $b'' \sim 80\,\mathrm{T.m^{-2}}$).

On obtient ainsi pour notre configuration à trois bobines :

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b''}{2} \begin{pmatrix} A \\ B \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Un développement limité à l'ordre 2 du module du champ conduit à la forme (quadratique) suivante pour l'énergie potentielle :

$$U(x,y,z) = U_0 + \frac{1}{2} m\omega_\perp^2 (x^2+y^2) + \frac{1}{2} m\omega_z z^2, \tag{1.1}$$

[3] Cette propriété n'est pas affectée par d'éventuelles collisions dépolarisantes entre atomes piégés : les atomes sont en effet dans un état complètement polarisé, ce qui empêche l'un d'entre eux d'augmenter son moment cinétique lors d'une collision avec un autre.

[4] Des atomes polarisés dans $|F = 2; m_F = -2\rangle$ seraient attirés par les régions de champ fort, mais le théorème de Wing montre qu'il n'existe pas de configuration de champ magnétique présentant un maximum du module [34].

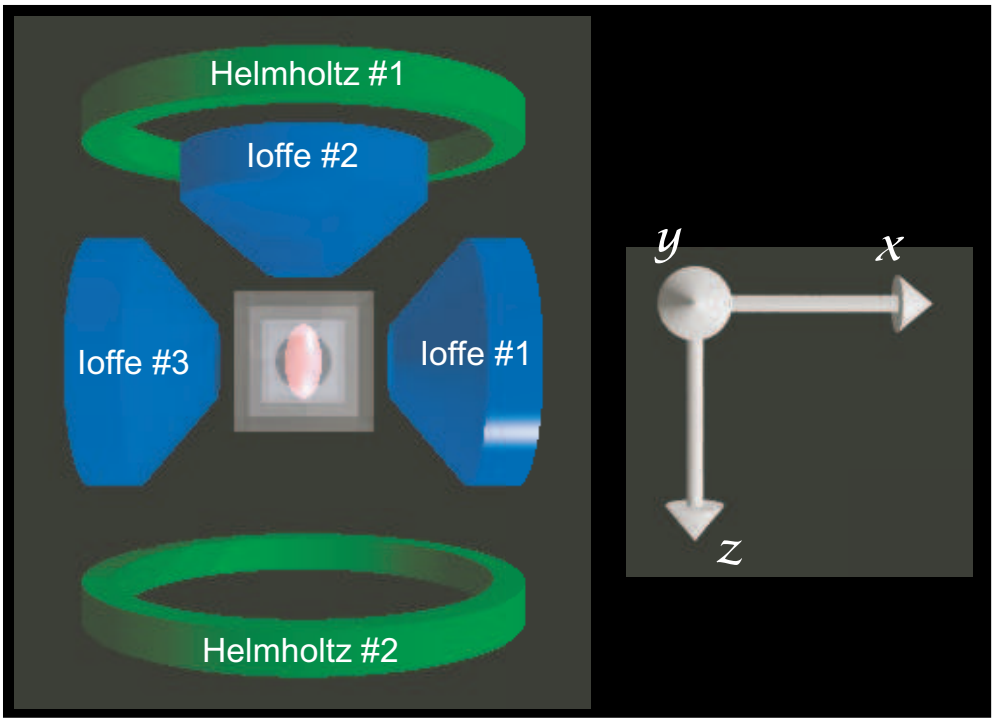


FIGURE 1.2 – Vue du dessus du piège magnétique. Les trois bobines de Ioffe créent un minimum local du module du champ magnétique au centre du piège. Les deux bobines de Helmholtz modifient la raideur transverse du piège.

avec :

$$\omega_z = \sqrt{\frac{\mu b''}{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega_\perp = \sqrt{\frac{\mu}{m}\left(\frac{b'^2}{B_0} - \frac{b''}{2}\right)}. \tag{1.2}$$

Notre piège est donc à cet ordre un piège harmonique dans les trois directions. Cette approximation reste valable tant que l'on n'explore pas des régions trop éloignées du centre, ce qui est toujours le cas aux basses températures auxquels sont réalisées nos expériences. Lorsque les trois bobines Ioffe sont parcourues par un même courant de 45 A, on mesure des fréquences de l'ordre de 10 Hz dans les trois directions de l'espace. C'est dans ce piège quasi-isotrope que sont chargés les atomes.

Compression du piège

On remarque que la fréquence axiale (selon z) est indépendante de B_0, alors que les fréquences radiales sont des fonctions décroissantes de B_0. Cette propriété est utilisée sur notre montage pour modifier $\omega_\perp$ après chargement des atomes dans le piège magnétique : on a ajouté pour cela deux bobines en configuration Helmholtz le long de l'axe z (figure 1.2), dont le seul effet est de diminuer la valeur de B_0 jusqu'à des valeurs de l'ordre du Gauss. Il est ainsi possible d'atteindre des fréquences radiales de plusieurs centaines de Hz. Le nuage atomique dans le piège a alors une forme de cigare.

La transition d'un piège isotrope à un piège de type cigare est assurée par un branchement adiabatique du courant dans les bobines de Helmholtz. Cette phase de compression a lieu juste après le transfert dans le piège magnétique et dure 500 ms. L'évaporation rf commence après la compression et se déroule — ainsi que toutes les étapes ultérieures — dans le piège comprimé

de type cigare. Les fréquences de ce piège sont typiquement dans un rapport de 10 :

$$\omega_z/2\pi = 11\,\mathrm{Hz} \qquad \text{et} \qquad \omega_\perp/2\pi = 100\,\mathrm{Hz}.$$

Pour mesurer ces dernières, on excite le mouvement du centre de masse du nuage puis on suit son évolution temporelle qui est une oscillation à la fréquence recherchée.

Effet de la gravité sur les fréquences du piège

La direction axiale de notre piège est horizontale, de telle sorte que si l'on tient compte du champ de gravité terrestre g_0, la symétrie de rotation dans le plan xy est brisée. L'effet peut être calculé : on montre que le piège reste harmonique, mais que son centre est abaissé de δy et la fréquence verticale ω_y diminuée de $|\delta\omega_y|$:

$$\delta y = \frac{g_0}{\omega_\perp^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta\omega_y}{\omega_\perp} \simeq -\frac{3}{4}\left(\frac{mg_0}{\mu b'}\right)^2. \tag{1.3}$$

Cette levée de dégénérescence des fréquences transverses, intrinsèque à notre géométrie, est de l'ordre de 1% et ne peut être corrigé facilement[5]. Les expériences qui sont décrites dans ce manuscrit impliquent des mouvements de rotation dans le plan xy, et souffrent par conséquent — plus ou moins — de cette asymétrie du piège. Dans la plupart de nos modélisations, cette asymétrie a été volontairement omise, soit qu'elle n'y jouât qu'un rôle mineur, soit qu'elle compliquât trop les calculs. Son existence et son rôle possibles n'en ont pour autant pas été négligés, et on verra dans ce manuscrit qu'à plusieurs reprises ils ont été déterminants.

1.1.3 Refroidissement évaporatif

Les atomes piégés magnétiquement ne sont pas encore condensés : il reste pour cela à augmenter la densité dans l'espace des phases d'un facteur $\sim 10^6$. Autrement dit, il faut soit diminuer la température considérablement, soit augmenter la densité spatiale, soit encore provoquer une combinaison de ces deux phénomènes. C'est ce que réalise la technique d'évaporation proposée par Hess pour refroidir l'hydrogène polarisé [49].

Refroidissement évaporatif

Le principe est illustré sur la figure 1.3(a). Le potentiel de piégeage est tronqué de manière abrupte aux bords : un atome possédant une grande énergie cinétique peut ainsi basculer et s'échapper. On comprend l'intérêt qu'il y a à se débarrasser d'un atome rapide : l'énergie cinétique moyenne par particule des atomes restants diminue, et avec elle la température.

La troncature du piège est réalisée expérimentalement à l'aide d'une onde rf de fréquence ν_{rf}. Les sous-niveaux magnétiques sont couplés par l'onde rf lorsque la condition $h\nu_{\mathrm{rf}} = \mu B$ est satisfaite, c'est-à-dire sur une hypersurface $B = \mathrm{Cte}$. Pour un piège harmonique à trois dimensions, cette hypersurface est un ellipsoïde centré sur le centre du piège magnétique. Lorsqu'un atome piégé traverse la surface d'évaporation, ses différents états magnétiques sont couplés de telle sorte qu'à sa sortie il a effectué un passage adiabatique d'un état piégé à un état anti-piégé (figure 1.3(b).

L'effet de l'évaporation ne se résume pas à tronquer la distribution de vitesse des atomes pour "enlever les atomes chauds" : en effet, deux atomes d'énergies cinétiques égales, suite à une collision, peuvent se partager l'énergie cinétique disponible de manière non équitable dans

[5] De récentes tentatives réalisées sur notre montage semblent montrer qu'un champ vertical alternatif peut améliorer l'isotropie du piège.

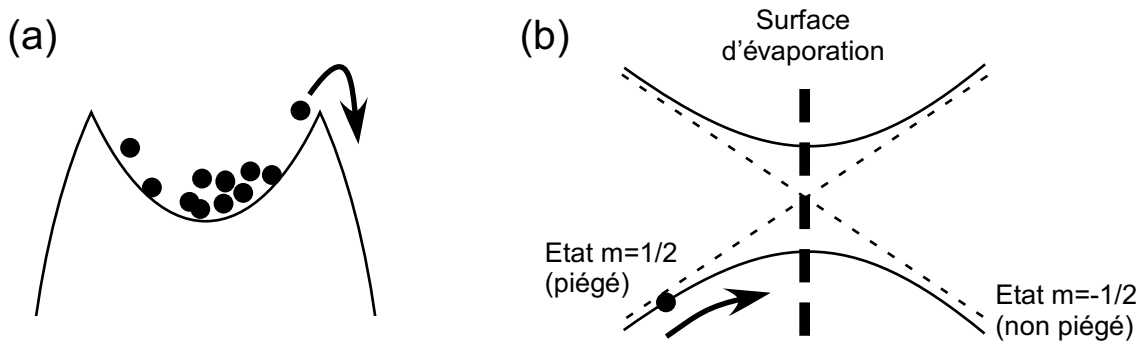


FIGURE 1.3 – Principe du refroidissement évaporatif. (a) Elimination d'un atome énergétique par troncature du piège. (b) Réalisation expérimentale d'une troncature (cas d'un spin 1/2) : une onde rf couple les différents sous-niveaux magnétiques sur une surface B=Cte. En traversant cette surface, un atome subit une transition adiabatique d'un état piégé à un état anti-piégé.

le référentiel du laboratoire, de sorte que l'un d'entre eux devient très énergétique. Si cet atome "chaud" est évaporé, celui qui reste apportera à l'énergie totale une contribution diminuée.

Enfin, pour que l'évaporation soit la plus efficace possible, le niveau de la troncature est continûment abaissé (*ie.* la fréquence $\nu_{\rm rf}$ est continûment abaissée). Si l'on agit de façon suffisamment lente, le nuage est à tout instant dans un état de quasi-équilibre. On définit alors un paramètre d'évaporation η égal au rapport de l'énergie d'évaporation sur la température du nuage (écrit ici pour nos atomes dans l'état $m_F = 2$) :

$$\eta = \frac{2h(\nu_{\rm rf} - \nu_{\rm rf}^{(0)})}{k_B T}.$$

Si le taux de collisions est suffisamment élevé, on peut montrer qu'il existe des régimes dits "d'emballement" pour lesquels η reste constant alors que la densité dans l'espace des phases ainsi que le taux de collisions divergent [34]. C'est ce type de régime que l'on recherche expérimentalement afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. Il est obtenu sur notre dispositif par une rampe (décroissance exponentielle) de $\nu_{\rm rf}$ pouvant durer 25 à 40 secondes selon la raideur du piège.

On notera que le centre du piège et le centre de l'ellipsoïde d'évaporation ne coïncident pas parfaitement en réalité : la gravité déplace en effet le centre du piège magnétique vers le bas, de sorte que l'évaporation a lieu préférentiellement vers le bas. Cet effet devient important quand le rayon d'évaporation $\sqrt{2\eta k_B T/m\omega_\perp^2}$ devient proche du décalage dû à la gravitation $g_0/\omega_\perp^2$, soit pour des températures de l'ordre de 200 nK (figure 1.4). Pour des nuages en rotation, cette asymétrie conduit à une évaporation sélective en moment angulaire qui a des conséquences multiples dans nos expériences.

1.1.4 Dispositif d'imagerie

Les images des nuages d'atomes représentent toute l'information dont nous disposons pour les analyser. Nous détaillons ici la procédure d'imagerie.

Temps de vol

Les images des nuages ne sont que rarement prises lorsque les atomes sont piégés. En effet, aux températures les plus froides, les atomes occupent une région de l'espace de quelques microns, taille typique qu'il faut comparer aux 5 μm de résolution spatiale de notre dispositif d'imagerie.

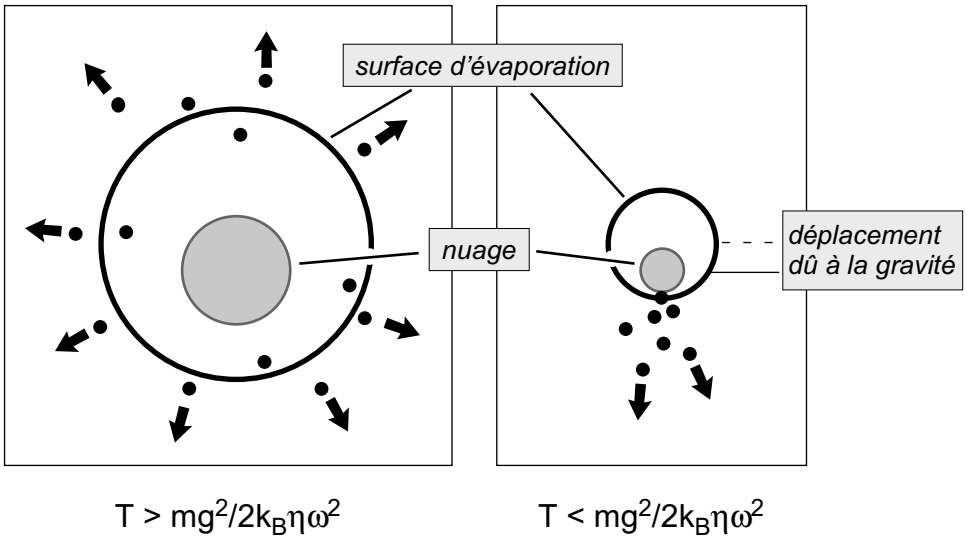


FIGURE 1.4 – Effet de la gravité sur l'évaporation : le centre du nuage se trouvant sous le centre magnétique, l'évaporation se fait préférentiellement vers le bas. Le phénomène devient significatif lorsque la taille du rayon d'évaporation devient de l'ordre du décalage gravitationnel.

La solution consiste à couper brutalement les champs magnétiques de piégeage afin de laisser le nuage tomber un peu : après 20 ms de temps de vol, le nuage s'est considérablement dilaté de sorte qu'il devient possible d'en faire des images de qualité.

Imagerie par absorption : principe

La caractérisation du nuage d'atomes est basée sur une méthode d'imagerie par absorption (figure 1.5) : un faisceau laser de grande taille par rapport au nuage d'atomes est allumé pendant quelques dizaines de microsecondes. Il est grossièrement centré sur le nuage de sorte que là où sont les atomes, l'absorption de lumière résulte dans un trou dans le profil d'intensité du laser. Ce profil $I(x, y)$ tel qu'il est au niveau des atomes est conjugué au capteur CCD d'une caméra par un système optique composé d'un doublet et d'un ménisque (focale totale de 130 mm, nombre d'ouverture $\sim$4). Il est ensuite comparé à un profil de référence sans atomes $I_{\mathrm{ref}}(x, y)$. Un traitement simple (soustraction du bruit électronique, rapport entre les deux images, logarithme) conduit à une image typique, pour laquelle chaque point correspond à la densité optique du nuage définie par :

$$\mathrm{do}(x, y) = -\ln \frac{I(x, y)}{I_{\mathrm{ref}}(x, y)}.$$

L'interprétation d'une image s'appuie sur la relation suivante entre la densité optique et la densité d'atomes dans le nuage :

$$\mathrm{do}(x, y) = \sigma \int n(x, y, z)\mathrm{d}z \tag{1.4}$$

où σ est la section efficace d'absorption des atomes. A résonance et pour un nuage dilué et dépolarisé, on a :

$$\sigma = \frac{7}{15}\frac{3\lambda^2}{2\pi}. \tag{1.5}$$

C'est donc la densité atomique intégrée dans une direction que l'on observe sur nos images.

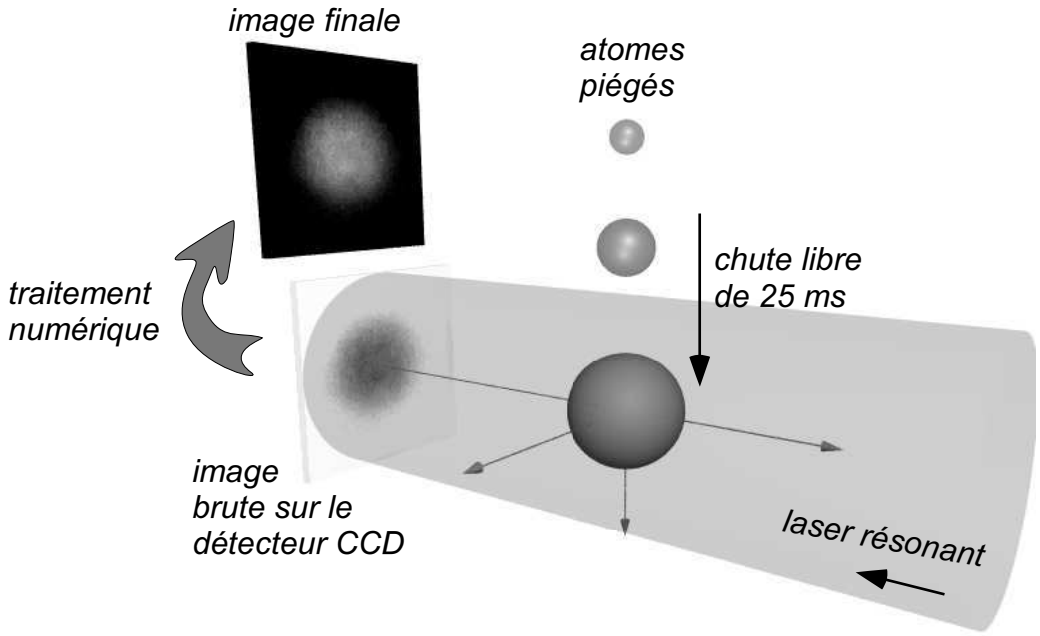


FIGURE 1.5 – Principe de l'imagerie par absorption. Un large faisceau laser résonant est envoyé sur le nuage d'atomes après 25 ms de chute libre. Le profil d'intensité du laser est imagé sur un détecteur CCD puis analysé.

Double imagerie

En pratique, nous avons dédoublé le système précédent sur les deux axes horizontaux de l'expérience : nous prenons ainsi deux images simultanément, sur deux régions séparées du détecteur de la caméra. Nous avons pu vérifier que la double illumination n'affectait pas significativement la qualité des images. Dans la plupart de nos expériences, nous avons donc eu accès à deux images de chaque nuage, une prise le long de l'axe de symétrie du piège (z), et une prise dans une direction orthogonale (x). Les images prises le long de l'axe de symétrie du piège sont appelées "images longitudinales", et les autres "images transverses".

Analyse des images

La figure 1.6 montre quelques images typiques de nuages d'atomes prises après un temps de vol de 25 ms (ces images seront commentées plus loin). Dans le cas où le nuage peut être décrit par la statistique de Boltzmann (figure 1.6(a)), on réalise un ajustement gaussien bidimensionnel afin de déterminer la position du centre du nuage, les paramètres de la gaussienne ainsi que le nombre d'atomes. On montre que pour un temps de vol long devant la période du piège[6], la densité spatiale des atomes est le reflet exact de la distribution en impulsion des atomes piégés. La température du nuage peut donc être déduite directement de sa taille après expansion. On notera d'ailleurs qu'un nuage de Boltzmann après expansion a une forme isotrope. Ceci peut être expliqué par le théorème d'équipartition de l'énergie. Chaque degré de liberté en impulsion a une énergie moyenne égale à $k_B T/2$: il en résulte que la vitesse moyenne d'expansion est la même dans toutes les directions.

Enfin, lorsque les nuages ne sont plus décrits par la statistique de Boltzmann, l'analyse

[6]Il faut également supposer que le gaz thermique est dans un régime faiblement collisionnel, ce qui est toujours le cas dans nos expériences.

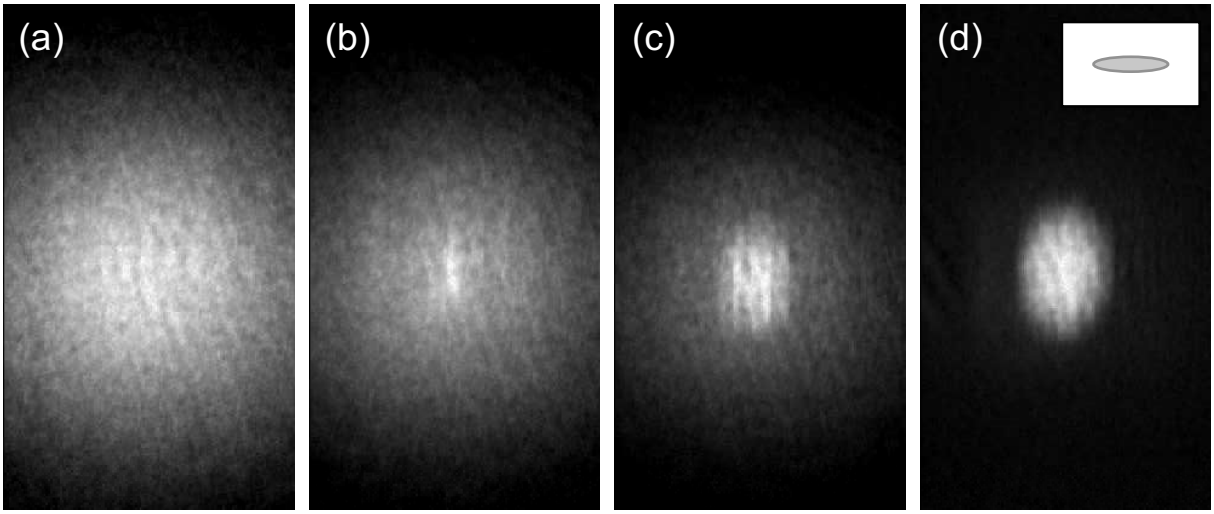


FIGURE 1.6 – Condensation de Bose-Einstein (images transverses). La radio-fréquence est abaissée un peu plus à chaque image : (a) $\nu_f - \nu_0 = 60\,\mathrm{kHz}$, (b) $\nu_f - \nu_0 = 55\,\mathrm{kHz}$, (c) $\nu_f - \nu_0 = 47\,\mathrm{kHz}$, (d) $\nu_f - \nu_0 = 22\,\mathrm{kHz}$. Sur les images (b-d), on observe l'apparition d'une structure centrale anisotrope : il s'agit d'un condensat de Bose-Einstein. L'encart sur la dernière image représente le nuage tel qu'il est avant le temps de vol. On notera que l'ellipticité s'est inversée durant le temps de vol.

des images se fait par un ajustement bidimensionnel avec une fonction adaptée à la situation étudiée. Le plus souvent, il s'agit d'une parabole inversée (intégrée selon la direction d'imagerie) correspondant au profil de Thomas-Fermi (Eq. 1.15).

1.2 Le phénomène de condensation de Bose-Eintein

1.2.1 Une inversion d'ellipticité

Le nuage de la figure 1.6(a) est un nuage de Boltzmann obtenu en arrêtant la rf à une centaine de kHz au-dessus de $\nu_{\mathrm{rf}}^{(0)}$. Si l'on décide de poursuivre l'évaporation, voici ce que l'on observe sur les images transverses (figure 1.6(b-d)) : le nuage devient de plus en plus petit (*i.e.* de plus en plus froid), jusqu'à ce qu'une structure non isotrope apparaisse au centre puis s'impose. Si l'on tient compte de la forme initiale du nuage dans le piège — c'est une forme horizontale allongée analogue à un cigare —, on se rend compte que le nuage a inversé son ellipticité durant le temps de vol. Cette inversion de l'ellipticité est devenue, depuis sa première observation en 1995, la signature quasi-univoque de l'entrée dans le régime de condensation de Bose-Einstein[7].

Les atomes qui sont présents dans la portion du nuage qui s'inverse durant le temps de vol constituent un nouvel état de la matière, très différent du gaz de Boltzmann évoqué plus haut. Cet état est appelé condensat de Bose-Einstein (ou plus simplement condensat). Nous allons montrer qu'il est le produit d'une transition de phase tout à fait remarquable, induite par la nature même de la statistique bosonique.

[7] Elle n'est pourtant pas une preuve irréfutable de la condensation. Les équipes qui recherchent une transition BCS dans des mélanges fermioniques ont observé de telles inversions, qu'elles ont néanmoins dû attribuer à des effets hydrodynamiques plutôt qu'à une transition de phase. [50, 51]

1.2.2 Interprétation : saturation des états excités

Calcul du nombre d'atomes dans les états excités

Les atomes de ^{87}Rb sont des bosons et sont décrits par la distribution statistique de Bose-Einstein [20]. Celle-ci donne le nombre moyen de particules dans un état d'énergie ϵ sous la forme suivante :

$$\langle n(\epsilon)\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

μ étant le potentiel chimique. Ce dernier doit rester négatif afin que l'occupation moyenne du fondamental $n(\epsilon = 0)$ soit positive.

Nous allons montrer qu'à température donnée, il existe un nombre maximal d'atomes que l'on peut placer dans les états excités (*ie.* l'ensemble des états excepté l'état fondamental $\epsilon = 0$). Pour cela, nous allons nous placer dans un potentiel de piégeage harmonique (Eq. 1.1) analogue à celui des expériences. Les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique à trois dimensions sont connus, et conduisent à la densité d'états suivante :

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2\hbar^2\omega_\perp^2\omega_z}\epsilon^2.$$

Comme la densité d'états s'annule en $\epsilon = 0$, on obtient le nombre de particules dans les états excités N_{exc} en calculant une intégrale semi-classique allant de $\epsilon = 0$ à l'infini :

$$N_{\text{exc}} = \int_0^\infty \rho(\epsilon) n(\epsilon) \mathrm{d}\epsilon.$$

Cette intégrale ne peut être calculée directement : $n(\epsilon)$ doit d'abord être développé sous forme de série entière, puis on doit inverser l'intégration et la sommation. Tous calculs faits, on obtient :

$$N_{\text{exc}} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 g_3(e^{\beta\mu}) \qquad \text{avec} \qquad \bar{\omega} = (\omega_\perp^2\omega_z)^{1/3}. \tag{1.6}$$

g_3 est la fonction polylogarithmique définie par :

$$g_3(z) = \sum_n \frac{z^n}{n^3}.$$

Comme μ reste négatif, $e^{\beta\mu}$ est inférieur à 1, de sorte que $g_3(e^{\beta\mu})$ est toujours inférieur à $g_3(1)$. On déduit de l'Eq. 1.6 que le nombre d'atomes dans les états excités est borné supérieurement :

$$N_{\text{exc}} \leq \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 g_3(1) = N_{\text{exc}}^{(\max)}. \tag{1.7}$$

$N_{\text{exc}}^{(\max)}$ est ainsi le nombre maximum d'atomes que peuvent contenir les états excités du piège.

Une expérience de pensée : diminution de T à nombre d'atomes fixé

Regardons ce qui se passe lorsque, à nombre d'atomes total donné N_0, nous faisons varier la température (*cf.* figure 1.7) : tant que N_0 reste inférieur à $N_{\text{exc}}^{(\max)}$, les atomes se répartissent sur l'ensemble des états, conduisant à une distribution thermique proche de celle de Boltzmann. Néanmoins, lorsque T diminue, $N_{\text{exc}}^{(\max)}$ diminue comme T^3, de sorte qu'il existe une température T_C pour laquelle ce nombre devient inférieur à N_0. On parle de saturation des états excités : un nombre macroscopique au moins égal à $N_0 - N_{\text{exc}}^{(\max)}$ d'atomes occupent alors le seul état restant, l'état fondamental du piège.

Cette transition de phase à T_C porte le nom de transition de Bose-Einstein ; les $N_0 - N_{\text{exc}}^{(\max)}$ atomes condensés sont tous dans le même état quantique : comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, ce sont ces atomes condensés qui forment la structure elliptique piquée de la figure 1.6.

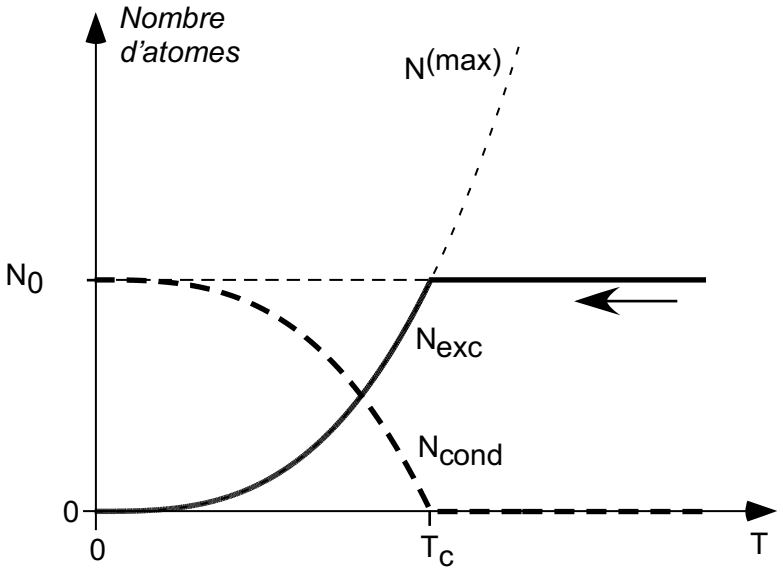


FIGURE 1.7 – Condensation de Bose-Einstein à nombre d'atomes fixé. Le nombre d'atomes dans les états excités est borné supérieurement : pour des températures inférieures à T_C, ce nombre atteint sa limite supérieure $N_{\rm exc}^{(\rm max)}$, et le reste N_0 des atomes présents occupe l'état fondamental.

Une expérience réelle : diminution de T et N à η fixé

Le refroidissement évaporatif qui nous permet d'atteindre la condensation de Bose-Einstein se distingue de l'expérience de pensée précédente : en effet, s'il permet d'abaisser la température, il ne le fait qu'au prix d'une perte continue d'atomes. T et N_0 diminuent ainsi simultanément, et il n'est pas évident que l'on atteigne encore la transition de Bose-Einstein, même à très basse température. Toutefois nous allons voir que l'évaporation à η constant conduit systématiquement à la transition (en l'absence de collisions inélastiques).

On introduit pour cela la longueur d'onde de de Broglie thermique :

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}.$$

On montre d'après l'Eq. 1.7 que la condensation de Bose-Einstein se produit lorsque la densité n_0 au centre du nuage vérifie :

$$n_0\Lambda^3 = \frac{g_3(1)}{2\sqrt{2}} \simeq 0.425 \tag{1.8}$$

Le membre de gauche, produit d'une densité par un volume, peut être identifié à une densité dans l'espace des phases. La transition de Bose-Einstein dans un piège harmonique apparaît donc non pas à une température critique, mais à une densité dans l'espace des phases critique. C'est ce dernier paramètre qui doit être optimisé dans une expérience visant la condensation, et non directement la température. Lors d'une rampe d'évaporation à η constant, on montre qu'en l'absence de collisions inélastiques la densité dans l'espace des phases diverge exponentiellement [34]. Le seuil de condensation est donc automatiquement atteint dans ces conditions. On notera toutefois que l'effet des collisions inélastiques est de stopper cette divergence à un certain point : suivant l'importance de cet effet, les atomes peuvent ou non atteindre la densité critique[8].

[8] Le dispositif expérimental que nous avons utilisé était dédié en 1995-1997 au refroidissement du ^{133}Cs : un fort taux de collisions inélastiques avait cependant empêché l'équipe d'atteindre la condensation avec cet atome [41].

1.3 Description de la fraction d'atomes condensés

Dans le traitement de la transition de Bose-Einstein, il n'a été fait aucune mention des interactions entre atomes : c'est que dans un nuage thermique dilué, leur seul rôle est d'assurer la rethermalisation de l'échantillon[9]. Elles n'influent ni sur la forme du nuage, ni sur les états d'énergie. En revanche, lorsqu'on atteint la condensation de Bose-Einstein, un grand nombre de particules s'accumulent dans un même état : les densités augmentent significativement, de sorte que l'on ressent directement l'effet des interactions sur la forme d'équilibre du nuage.

1.3.1 Collisions à basse température : longueur de diffusion

Le potentiel d'interaction entre deux atomes a une forme exacte complexe qu'il n'est pas question de considérer ici. Par chance, le comportement des collisions se simplifie considérablement aux basses températures : nous admettrons que dans nos conditions expérimentales, la partie en onde s de la collision est la seule qui contribue aux déphasages [36].

Lorsque la température devient inférieure à une certaine valeur ($\sim 200\,\mu$K pour nos atomes), la section efficace de collision devient indépendante des impulsions relatives et vaut $8\pi a^2$, où a est une constante appelée longueur de diffusion. Le signe de a exprime la nature de l'interaction (répulsive si $a > 0$, attractive si $a < 0$), et son module est lié à la force de ces interactions. Dans le cas d'atomes de ^{87}Rb polarisés dans $|F = m_F = 2\rangle$, on a $a \simeq 5\,$nm.

Le potentiel d'interaction entre deux atomes peut être remplacé à basse température par un potentiel effectif[10] :

$$V(r) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta(r) = g\delta(r) \tag{1.9}$$

Ce potentiel en delta va nous permettre de prendre en compte très simplement l'effet des interactions entre atomes dans un condensat. Son utilisation se justifie tant que les particules ne se rapprochent pas davantage que a, ce qui s'écrit :

$$\rho a^3 \ll 1, \tag{1.10}$$

ρ étant la densité de particules dans le nuage. Cette condition de faibles interactions (gaz dilué) sera toujours largement vérifiée dans nos expériences.

1.3.2 L'équation de Gross-Pitaevskii

L'Hamiltonien du système de N bosons piégés dans le potentiel 1.1, et interagissant via le potentiel 1.9, s'écrit en seconde quantification :

$$\hat{H} = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\hat{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\nabla}\hat{\Psi} + U(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\int \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')V(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{1.11}$$

L'équation d'évolution de $\hat{\Psi}$ est donnée en représentation de Heisenberg par

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}],$$

ce qui conduit à

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi} = \left[\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}) + g\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}\right]\hat{\Psi}. \tag{1.12}$$

[9] Il peut néanmoins y avoir des effets de champ moyen dans un nuage thermique dense [52].

[10] Il existe quelques difficultés mathématiques liées à l'usage d'un potentiel en fonction δ. Une autre forme de potentiel effectif (pseudo-potentiel) permet de lever ces difficultés [36].

Nous cherchons à décrire les atomes condensés, qui par définition sont tous dans le même état microscopique. En optique, une situation analogue existe dans les lasers, lorsqu'un nombre macroscopique de photons sont dans un même mode. Le champ quantique est alors très bien décrit par un champ classique, qui se trouve vérifier les équations de Maxwell.

Par analogie, nous allons donc décrire les N atomes condensés par un champ classique $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ que nous allons substituer à l'opérateur champ $\hat{\Psi}$. Avant d'opérer la substitution, on peut remarquer que l'état à N atomes se déduit facilement du champ classique Ψ :

$$\phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_N)=\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi(\boldsymbol{r}_1)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi(\boldsymbol{r}_2)\right)\ldots\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi(\boldsymbol{r}_N)\right).$$

C'est un état complètement factorisé, sans corrélations entre les atomes. L'utilisation d'un champ classique implique ainsi l'absence de corrélations, ce qui est caractéristique d'une approche de type *champ moyen*. Avec cette définition, la densité de probabilité $|\Psi|^2$ est normalisée au nombre de particules N.

L'équation 1.12 d'évolution de l'opérateur champ devient une équation différentielle non-linéaire pour le champ classique :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\left[\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}+U(\boldsymbol{r})+g|\Psi|^2\right]\Psi. \tag{1.13}$$

Cette équation porte le nom d'*équation de Gross-Pitaevskii*. Elle est l'analogue des équations de Maxwell pour des bosons condensés. Le champ classique Ψ est aussi appelé *paramètre d'ordre* du système. Ce paramètre d'ordre contient une phase qui est uniforme dans un condensat au repos ; l'apparition de cette phase, alors que rien ne la prédispose à prendre une valeur plutôt qu'une autre, est le fait d'une brisure spontanée de symétrie.

On peut rechercher des solutions stationnaires de l'équation de Gross-Pitaevskii sous la forme :

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\Psi(\boldsymbol{r})e^{-i\mu t/\hbar}.$$

On montre alors que μ s'identifie au potentiel chimique $\partial E/\partial N$. $\Psi(\boldsymbol{r})$ est solution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire :

$$\mu\Psi=\left[\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}+U(\boldsymbol{r})+g|\Psi|^2\right]\Psi. \tag{1.14}$$

Le champ classique Ψ est souvent appelé *fonction d'onde du condensat*, du fait que l'équation de Gross-Pitaevskii a la forme d'une équation de Schrödinger non-linéaire.

1.3.3 Approximation de Thomas-Fermi

Nous partons ici de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire, et tâchons d'évaluer le poids des différents termes. Par souci de simplicité, le potentiel $U(\boldsymbol{r})$ sera considéré isotrope ($\omega_\perp=\omega_z=\omega$). Nous pouvons ainsi introduire une longueur typique du piège, la taille de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique :

$$a_{\mathrm{oh}}=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

ainsi qu'une longueur typique du nuage, notée R. La fonction d'onde du condensat s'étend sur un volume R^3, de sorte que sa valeur moyenne sur ce volume vaut $\sim(N/R^3)^{\frac{1}{2}}$. On distingue trois contributions à l'énergie totale :

– L'énergie cinétique :

$$E_c\propto\frac{\hbar^2}{mR^2}\approx\hbar\omega\frac{a_{\mathrm{oh}}^2}{R^2}.$$

– L'énergie potentielle de piégeage :

$$E_p \propto m\omega^2 R^2 \approx \hbar\omega \frac{R^2}{a_{\rm oh}^2}.$$

– L'énergie d'interaction :

$$E_{\rm int} \propto g\Psi^2 \approx \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N}{R^3} \approx \hbar\omega \frac{a_{\rm oh}^3}{R^3}\left(\frac{Na}{a_{\rm oh}}\right).$$

Un terme tend à confiner les atomes (le terme d'énergie potentielle) alors que les deux autres (énergie cinétique et interactions) tendent à augmenter la taille du nuage. De la compétition de ces deux effets résulte une taille R optimale pour le nuage. Suivant la valeur du paramètre $Na/a_{\rm oh}$, on distingue deux régimes :

– Régime de faibles interactions ($Na/a_{\rm oh} \ll 1$) : le terme expulsant le plus fort est celui d'énergie cinétique. Les solutions stationnaires de l'Eq. 1.14 sont proches des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique. Le condensat au repos a un profil de densité gaussien.

– Régime de Thomas-Fermi ($Na/a_{\rm oh} \gg 1$) : le terme expulsant le plus fort est celui dû aux interactions.

Pour les expériences que nous avons conduites, $N \sim 10^5$ atomes et $a_{\rm oh}$ ∼1 μm, soit $Na/a_{\rm oh}$ ∼500. Nous sommes donc pleinement dans le régime de Thomas-Fermi, ce qui nous autorise à négliger la contribution de l'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire. Dans ces conditions, il devient trivial d'exprimer le profil de densité du condensat :

$$|\Psi|^2 = \frac{\mu - U(\boldsymbol{r})}{g}. \tag{1.15}$$

On voit que la densité du condensat reproduit en négatif la forme du potentiel qui le piège. Dans le cas du potentiel harmonique 1.1, le profil de densité est une parabole inversée :

$$\rho = |\Psi|^2 = |\Psi(0)|^2\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R_\perp^2} - \frac{z^2}{r_z^2}\right). \tag{1.16}$$

Les rayons $R_\perp$ et R_z sont définis par

$$\frac{1}{2}m\omega_\perp^2 R_\perp^2 = \frac{1}{2}m\omega_z^2 R_z^2 = \mu$$

et peuvent s'exprimer directement en fonction du nombre d'atomes :

$$R_\perp = (a_{\rm oh})_\perp \frac{\bar\omega}{\omega_\perp}\left(15N\frac{a}{a_{\rm oh}}\right)^{\frac{1}{5}} \qquad \text{et} \qquad R_z = (a_{\rm oh})_z \frac{\bar\omega}{\omega_z}\left(15N\frac{a}{a_{\rm oh}}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Enfin, le potentiel chimique vaut :

$$\mu = \frac{\hbar\bar\omega}{2}\left(15\frac{aN}{\bar a_{\rm oh}}\right)^{2/5}. \tag{1.17}$$

1.3.4 La longueur de relaxation

Une grandeur apparaît naturellement lorsque l'on se place dans l'approximation de Thomas-Fermi : il s'agit de la longueur typique sur laquelle les énergies cinétiques et d'interaction sont comparables. Cette longueur, appelée longueur de relaxation, vaut :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8\pi a\rho}}. \tag{1.18}$$

Si on impose à la fonction d'onde du condensat de s'annuler en un point, ξ est la longueur typique sur laquelle la densité passe de 0 à sa valeur asymptotique locale. En d'autres termes, les défauts éventuels de la fonction d'onde sont gommés sur une échelle de ξ. C'est pourquoi cette longueur est parfois appelée longueur de cicatrisation ("healing length"). L'approximation de Thomas-Fermi ne tient plus sur des échelles de longueurs inférieures à ξ.

Les trois longueurs caractéristiques d'un condensat piégé dans le régime de Thomas-Fermi s'ordonnent simplement :

$$\xi \ll a_{\mathrm{oh}} \ll R.$$

Elles vérifient en outre : $R/a_{\mathrm{oh}} \sim a_{\mathrm{oh}}/\xi$. Dans la limite $\rho a^3 \ll 1$, on peut inclure la longueur de diffusion a et la distance moyenne entre particules $1/\rho^{1/3}$ dans cette classification :

$$a\,(5\,\mathrm{nm}) \ll \frac{1}{\rho^{1/3}}\,(0.2\,\mu\mathrm{m}) < \xi\,(0.3\,\mu\mathrm{m}) \ll a_{\mathrm{oh}}\,(1\,\mu\mathrm{m}) \ll R\,(5\,\mu\mathrm{m}).$$

1.4 Dynamique d'un condensat

L'équation de Gross-Pitaevskii à laquelle satisfait le champ classique n'est pas la plus simple à mettre en oeuvre lorsqu'il s'agit de déterminer l'évolution dans le temps du condensat. Nous présentons ici trois approches théoriques complémentaires pour les études dynamiques des condensats : la première est la description hydrodynamique, très générale et fondée sur l'approximation de Thomas-Fermi. La seconde s'appuie sur des solutions d'échelles exactes dans le cas particulier des potentiels harmoniques. La troisième est une approche perturbative des modes d'excitation du condensat.

1.4.1 Description hydrodynamique

La description dynamique d'un condensat dérive de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps. Dans le cas d'un condensat non-stationnaire, l'approximation de Thomas-Fermi ne peut pas raisonnablement consister à négliger la totalité de la contribution de l'énergie cinétique : le condensat n'aurait alors plus d'inertie. L'approximation de Thomas-Fermi doit être considérée avec plus de précaution et nous allons montrer qu'elle amène à négliger une partie seulement de l'énergie cinétique.

On pose pour commencer :

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r},t)}e^{i\Phi(\boldsymbol{r},t)}. \tag{1.19}$$

Cette transformation est appelée transformation de Madelung [20]. On voit immédiatement que ρ joue le rôle d'une densité locale d'atomes. Voyons quelle forme prend la densité de courant de la fonction d'onde Ψ :

$$\boldsymbol{j} = \frac{i\hbar}{2m}[\Psi\boldsymbol{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\boldsymbol{\nabla}\Psi] = \rho\frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\Phi.$$

La densité de courant s'identifie à l'expression courante $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ si on définit le champ de vitesse suivant :

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\Phi. \tag{1.20}$$

On peut injecter la forme 1.19 dans l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps (Eq. 1.13). On aboutit à un ensemble de deux équations couplées pour ρ et $\boldsymbol{v}$:

$$m\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U + g\rho\right) = 0 \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.22}$$

On reconnaît le couple que forment l'équation d'Euler et l'équation de continuité. Deux termes peuvent être interprétés comme des pressions :

$$P_{\rm cm} = \frac{g\rho^2}{2}, \qquad P_Q = -\int \rho \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{1.23}$$

La première provient du champ moyen, alors que la seconde, appelée pression quantique, a une nature profondément quantique. Le fait que ces deux pressions ne dépendent que de ρ montre que le condensat est un fluide barotrope.

L'approximation de Thomas-Fermi revient à négliger le terme de pression quantique. En effet, ce terme est l'analogue du terme d'énergie cinétique que nous avions négligé dans l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire. Il provient des gradients de densité du nuage ; un autre terme cinétique, provenant des gradients de phase (absents dans un nuage au repos), apparaît sous la forme classique de $m\boldsymbol{v}^2/2$: ce dernier ne pourra être négligé, même dans l'approximation de Thomas-Fermi.

Les équations hydrodynamiques prennent finalement la forme suivante :

$$m\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U + g\rho\right) = 0 \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.25}$$

Ces équations décrivent l'évolution d'un condensat dans l'approximation de Thomas-Fermi, et constituent le point de départ de la plupart des calculs développés dans ce manuscrit. Le condensat y apparaît comme un fluide barotrope à la fois *parfait* (sans viscosité) et *irrotationnel* (car la vitesse dérive d'un potentiel). Ces deux caractéristiques majeures sont les signatures hydrodynamiques d'une propriété essentielle des condensats : la superfluidité. La vitesse du son dans un condensat homogène de densité ρ_0 vaut :

$$c = \sqrt{\frac{g\rho_0}{2m}}. \tag{1.26}$$

Les écoulements sont incompressibles tant que les vitesses mises en jeu n'excèdent pas c.

1.4.2 Dynamique dans un piège harmonique : lois d'échelle

Les équations hydrodynamiques prennent une forme particulière lorsque le potentiel extérieur reste harmonique à tout instant :

$$U(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i \frac{1}{2} m\omega_i^2(t) x_i^2.$$

Castin et Dum, ainsi que Kagan, Shlyapnikov et Walraven, ont montré que le condensat garde un profil de densité parabolique [53, 54], avec des rayons de Thomas-Fermi R_i qui dépendent du temps : $R_i(t) = \lambda_i(t) R_i(0)$. Les paramètres $\lambda_i(t)$ décrivent complètement l'évolution du système, sous forme de lois d'échelle.

En injectant ce profil de Thomas-Fermi dans les équations hydrodynamiques, on obtient un ensemble d'équations différentielles non-linéaires pour les λ_i :

$$\ddot{\lambda}_i + \omega_i^2(t)\lambda_i = \frac{\omega_i^2(0)}{\lambda_x\lambda_y\lambda_z\lambda_i} \tag{1.27}$$

Ces équations permettent d'obtenir des solutions exactes pour l'évolution du condensat lorsque le piège reste harmonique à tout temps[11]. Elles donnent ainsi accès au comportement de certains modes comme le mode de respiration transverse (chapitre 2).

De manière plus inattendue, elles donnent aussi l'évolution d'un condensat durant un temps de vol : couper le piège magnétique revient en effet à annuler tous les $\omega_i(t)$. Pour notre piège en forme de cigare ($\omega_\perp \gg \omega_z$), on peut ainsi trouver analytiquement une solution approchée pour les λ_i durant le temps de vol :

$$\lambda_\perp(t) = \sqrt{1+\omega_\perp^2 t^2} \tag{1.28}$$

$$\lambda_z(t) = 1 + \frac{\omega_z^2}{\omega_\perp^2}\left[(\omega_\perp t)\arctan(\omega_\perp t) - \ln\sqrt{1+\omega_\perp^2 t^2}\right]. \tag{1.29}$$

Au premier ordre en $\omega_z/\omega_\perp$, seule la direction transverse subit une dilatation : le nuage initialement en forme de cigare, devient au cours du temps de vol une sorte de crêpe. C'est la célèbre inversion d'ellipticité du condensat qui a été observée pour la première fois en 1995 [18] et que l'on retrouve sur la figure 1.6. Cette inversion tient à ce que, dans l'approximation de Thomas-Fermi, l'énergie de champ moyen est convertie en énergie cinétique lors des premiers instants du temps de vol. Il n'est pas étonnant alors que la direction transverse s'étende plus rapidement, puisqu'avant c'était la direction la plus comprimée.

1.4.3 Oscillations de faible amplitude du condensat

Pour décrire la dynamique, nous disposons d'équations très générales (l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, équations hydrodynamiques) ou de solutions exactes dans un cas particulier (équations d'échelle dans le cas harmonique). Nous présentons ici une approche perturbative de l'équation de Gross-Pitaevskii qui permet d'obtenir un système d'équations linéaires couplées pour les modes d'excitation élémentaires.

Nous partons d'un champ $\Psi_0(\boldsymbol{r})$ solution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire, et nous le perturbons légèrement :

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \left[\Psi_0(\boldsymbol{r}) + \delta\Psi(\boldsymbol{r},t)\right] e^{-i\mu t/\hbar} \qquad \text{avec} \qquad \delta\Psi(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} + v^*(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}. \tag{1.30}$$

En injectant cette expression dans l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, on montre que les fonctions $u(\boldsymbol{r})$ et $v(\boldsymbol{r})$ vérifient un système d'équations linéaires (équations de Bogoliubov-de Gennes) :

$$(\mu+\hbar\omega)u = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\boldsymbol{r}) + 2g|\psi_0(\boldsymbol{r})|^2\right]u + g\left[\Psi_0(\boldsymbol{r})\right]^2 v \tag{1.31}$$

$$(\mu-\hbar\omega)v = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\boldsymbol{r}) + 2g|\psi_0(\boldsymbol{r})|^2\right]v + g\left[\Psi_0^*(\boldsymbol{r})\right]^2 u. \tag{1.32}$$

Les solutions de ces équations sont les modes propres du condensat. Voici quelques cas particuliers intéressants :

– **Cas d'un condensat uniforme** ($U = 0$) : les u et v sont des ondes planes repérées par un vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Le spectre de Bogoliubov a alors la forme suivante :

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + g\rho\right)}. \tag{1.33}$$

[11] Une généralisation de ces équations a été proposée par Storey et Olshanii dans le cas d'un potentiel harmonique contenant des termes croisés du type xy [55].

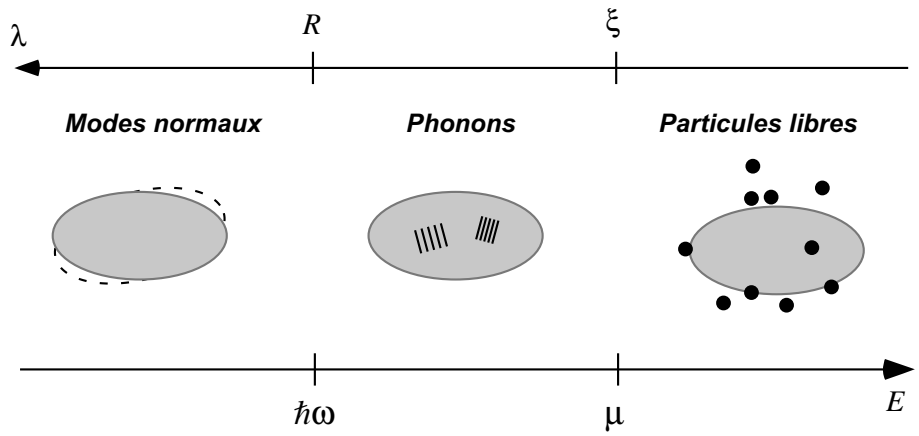


FIGURE 1.8 – Modes d'un condensat de Bose-Einstein piégé dans le régime de Thomas-Fermi.

Il s'agit à basse énergie ($E < \mu$) d'un spectre de phonons ; les modes de basse énergie correspondent à des couples de particules avec des impulsions opposées. Les modes de haute énergie ($E > \mu$) correspondent à des particules uniques libres.

- **Cas d'un condensat piégé** : les modes sont quantifiés en énergie. Pour des longueurs d'onde courtes devant la taille du nuage, on retrouve un comportement proche de celui d'un condensat homogène. Pour des longueurs d'ondes de l'ordre de la taille du condensat, on identifie un certain nombre de modes normaux [56], correspondant à des oscillations de forme du condensat. Ces modes comme les phonons peuvent être étudiés dans l'approximation hydrodynamique puisqu'ils mettent en jeu des longueurs d'onde supérieures à ξ [57]. La figure 1.8 replace ces modes sur les échelles d'énergie et de longueur d'onde.
- **Cas d'un condensat cylindrique** (confinement harmonique $U = m\omega_\perp^2 r_\perp^2/2$ dans le plan transverse et invariance par translation dans la direction longitudinale) : cette situation est un cas limite de potentiel harmonique en forme de cigare dont la fréquence longitudinale ω_z tend vers zéro. Les modes dans cette géométrie se décomposent en modes longitudinaux de type phonons (repérés par un vecteur d'onde k_z) et en modes transverses. Ces derniers ont un spectre discret et sont repérés par deux nombres quantiques, angulaire et radial. On compte parmi eux les modes monopolaires, dipolaires et quadrupolaires qui ont été étudiés au cours de ce travail de thèse. L'analyse de ces modes est détaillée dans des chapitres ultérieurs.

1.5 Condensats à température nulle et non nulle

Si nous disposons d'une équation pour décrire les atomes condensés, il nous reste à prendre en compte les autres atomes éventuellement présents. Ces derniers occupent les premiers états excités du condensat. Le spectre de ces états a été décrit dans la section précédente, à partir d'une théorie de perturbation. Il nous reste à les quantifier, puis à évaluer leurs taux d'occupation à températures nulle et non nulle.

1.5.1 Quantification des modes d'excitation

Il est possible de bâtir une théorie complète des modes d'excitation d'un condensat dans le formalisme de la seconde quantification. Cette théorie, élaborée par Bogoliubov en 1947, consiste

à approcher le Hamiltonien par une expression quadratique que l'on diagonalise ensuite [58]. On obtient alors un ensemble d'opérateurs associés aux modes propres du système.

Une approche moins formelle consiste à quantifier directement les modes classiques obtenus à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii [20]. En effet ces modes sont autant d'oscillateurs harmoniques indépendants, pour lesquels le passage en seconde quantification est immédiat. On obtient ainsi un ensemble d'opérateurs de création $\hat{b}_i^\dagger$ et d'annihilation $\hat{b}_i$ vérifiant entre eux les relations de commutation bosoniques :

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij},$$

et associés aux modes classiques déduits des équations de Bogoliubov-de Gennes. Ils décrivent la création et l'annihilation de quasi-particules indépendantes.

Lorsque ces modes sont excités, ils le sont le plus souvent macroscopiquement, de sorte que leur description en termes quantiques n'est que rarement indispensable. Il y a toutefois des problématiques dans lesquelles leur aspect quantique joue un rôle important : il s'agit de l'évaluation à températures nulle et non nulle de la fraction non-condensée[12].

1.5.2 Condensat à température nulle

La théorie de Bogoliubov est plus complète que la simple équation de Gross-Pitaevskii. C'est donc d'elle que nous devons déduire l'état du système de N bosons à température nulle. Cet état est simplement le vide d'excitation $|0\rangle$ défini par la relation $\hat{b}_i|0\rangle = 0$ valable quelque soit i.

Il est important de noter que le fondamental ("vide") des opérateurs $\hat{b}_i$ diffère de la fonction d'onde du condensat telle que nous l'avons définie avec l'équation de Gross-Pitaevskii. Cette dernière était en effet l'état "vide" dans la base d'opérateurs initiale, base qui ne diagonalise pas l'Hamiltonien à N corps. Le véritable état fondamental n'est donc pas un état factorisé de type Hartree-Fock que l'on peut décrire par un champ classique ; c'est un état partiellement corrélé, non factorisable, et qui inclut une population non-nulle des premiers états excités à température nulle : on parle de *déplétion quantique*.

Si ce raisonnement semble remettre en question notre vision d'un condensat pur à température nulle, il convient d'évaluer l'ampleur de cette déplétion. On peut montrer [20] que la fraction d'atomes qui occupent ces modes est de l'ordre de $(\rho a^3)^{1/2}$, a étant la longueur de diffusion caractérisant la force des interactions et ρ la densité moyenne. En tenant compte de paramètres caractéristiques des expériences dans les gaz dilués ($\rho \sim 10^{15}$ atomes/cm^3 et $a \simeq 5\,$nm), on trouve que $(\rho a^3)^{1/2} \sim 3\,10^{-3}$. Le phénomène de déplétion quantique est donc mineur dans les systèmes gazeux dilués ; un condensat à température nulle peut donc être assimilé à N atomes occupant un même état quantique. En d'autres termes, à température nulle, la fraction condensée contient quasiment tous les atomes.

1.5.3 Condensat à température non nulle

Comme on peut le remarquer sur la figure 1.6, on peut observer des condensats à des températures non nulles pour lesquelles une large fraction des atomes ne sont pas condensés. Ces atomes non-condensés sont des quasi-particules dans la théorie de Bogoliubov. On peut connaître leur distribution d'après la statistique de Bose-Einstein appliquée à ces quasi-particules.

Ces quasi-particules sont à l'origine de deux types d'amortissement dans les condensats à température non nulle. On montre en effet que les développements de la théorie de Bogoliubov, poussée à un ordre supérieur, conduisent à des termes d'ordre trois décrivant l'interaction entre quasi-particules. Ces termes peuvent mettre en jeu la désintégration d'une quasi-particule en une

[12] L'aspect quantique du mode quadrupolaire apparaît aussi lorsqu'on couple ce mode aux modes d'oscillation de la ligne de vortex (voir chapitre 7).

paire de quasi-particules : on parle d'amortissement de Beliaev [59]. Ils peuvent aussi mettre en jeu la diffusion d'une quasiparticule par une autre, conduisant à la création d'une troisième : on parle alors d'amortissement de Landau.

Dans des conditions expérimentales typiques, le potentiel chimique μ est tel que $\mu \sim k_b T \sim 5 - 10\,\hbar\omega_\perp$; la température est donc suffisamment grande pour que soient peuplés un grand nombre de modes de Bogoliubov. En notant R un rayon typique du condensat, on montre que les trois grandes catégories de modes d'un condensat piégé sont peuplées (cf figure 1.8) :

- **Les modes normaux** ($E \lesssim \hbar\omega_\perp$) : ces modes sont les modes de vibration à basse fréquence du condensat. Ils sont peuplés de manière incohérente à température non nulle. Leur longueur d'onde est de l'ordre de R.
- **Les phonons** ($\hbar\omega_\perp < E < \mu$) : ce sont des quasi-particules faites d'ondes planes. Ils sont responsables des fluctuations d'apparence du condensat sur des échelles de longueur comprises entre R et la longueur de relaxation ξ.
- **Les quasi-particules d'énergie** $E > \mu$: du fait de leur haute énergie, ces quasi-particules sont proches de particules libres évoluant loin du condensat. Elles forment un nuage thermique dilué autour du condensat qui reste en équilibre thermique avec lui. La distribution de vitesse de ce nuage thermique est proche de celle d'un nuage non condensé, de sorte qu'il est possible de déduire de sa taille après expansion la température de l'échantillon. Cette mesure de température ne peut être effectuée que pour des températures supérieures à $\sim T_C/2$. Pour des températures inférieures, il est d'usage d'extrapoler la relation température/hauteur d'évaporation et d'en déduire une estimation de la température :

$$k_B T \simeq \frac{h(\nu_{\mathrm{rf}} - \nu_{\mathrm{rf}}^{(0)})}{\eta}. \tag{1.34}$$

  C'est ce que nous faisons dans le chapitre 2 pour l'étude en température du mode monopolaire.

1.5.4 Condensats gazeux et superfluidité

Introduction

La superfluidité désigne la propriété d'un fluide de s'écouler sans viscosité (phénomène observé dans l'hélium-II par Kapitza en 1937 [60]). En 1938, London a suggéré que le phénomène était une conséquence de la condensation de Bose-Einstein [24]. Depuis, un lien indissociable semble exister entre les deux notions, bien qu'il n'ait pas encore été prouvé rigoureusement à ce jour. En 1999, Anthony Leggett pouvait ainsi dire, parlant de l'hélium-II [26] : "In the sixty years since London's original proposal, while there has been almost universal belief that the key to superfluidity is indeed the onset of BEC at the lambda-temperature it has proved very difficult, if not impossible, to verify the existence or the latter phenomenon directly."

L'hélium-II est un liquide dont les constituants (les atomes d'hélium 4) interagissent fortement entre eux. Le domaine des atomes froids aborde le problème par un angle très différent, puisqu'il met en jeu des gaz dilués. Comme nous l'avons vu, la condensation de Bose-Einstein est simple à identifier en phase gazeuse : on observe un changement net dans la densité spatiale du nuage. La question de la superfluidité du condensat vient alors naturellement. A ce titre, un certain nombre de propriétés ont été observées et considérées comme des conséquences de la superfluidité : l'écoulement sans friction autour d'un obstacle [61], la nucléation de vortex [62–65], et la réduction du moment d'inertie [66, 67]. Nous verrons dans des chapitres ultérieurs que, hormis la première propriété mentionnée, ces phénomènes sont des conséquences directes du fait que le condensat est décrit par un champ classique complexe.

Critère de Landau

En 1941, Landau propose un modèle à deux fluides pour décrire les superfluides : l'un des fluides est appelé superfluide, et circule sans viscosité. L'autre est appelé composante normale : c'est un fluide classique et visqueux. Les propriétés de la composante superfluide peuvent être interprétées simplement à partir du spectre des excitations $\epsilon(\boldsymbol{p})$. En effet, lors du passage d'un objet de masse M et de vitesse $\boldsymbol{V}$, supposer qu'il y a de la viscosité revient à dire que l'objet est ralenti et qu'une excitation élémentaire est émise dans le fluide. La conservation de l'énergie et de l'impulsion conduit à :

$$\frac{MV^2}{2} = \epsilon(\boldsymbol{p}) + \frac{(M\boldsymbol{V}-\boldsymbol{p})^2}{2M} = \frac{MV^2}{2} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{p^2}{2M}.$$

Lorsque l'on fait tendre M vers l'infini, le dernier terme disparaît, ce qui conduit à l'égalité :

$$\epsilon(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{V} < pV. \tag{1.35}$$

La création d'une excitation n'est donc possible que s'il existe un vecteur $\boldsymbol{p}$ tel que $\epsilon(\boldsymbol{p})/p < V$. Dans le cas où le rapport $\epsilon(\boldsymbol{p})/p$ admet une valeur minimum v_c non nulle (généralement égale à la vitesse du son pour les branches de type phonons), on constate que v_c est une vitesse en-dessous de laquelle aucune excitation n'est créée[13]. Autrement dit, un tel fluide se déplace sans viscosité tant que sa vitesse n'excède pas v_c. Ce critère est connu sous le nom de critère de Landau, et tient en particulier pour un condensat homogène pour lequel la relation de dispersion 1.33 démarre linéairement. C'est cette propriété qui a été testée dans l'expérience du MIT mentionnée précédemment [61] en déplaçant un laser très désaccordé à des vitesses variables dans un condensat.

Fraction condensée, fraction superfluide

Une dernière précaution doit être prise lorsque les phénomènes de condensation de Bose-Einstein et de superfluidité sont mis en parallèle. Il s'agit d'une distinction importante qui existe entre fraction condensée et fraction superfluide. La fraction condensée désigne les atomes qui sont dans le même état quantique : on la décrit par un champ classique vérifiant l'équation de Gross-Pitaevskii. La fraction superfluide quant à elle désigne la fraction d'atomes qui occupent l'état fondamental du hamiltonien à N corps : elle inclut ainsi à la fois les atomes condensés et la déplétion quantique.

Ainsi, à température nulle, la fraction superfluide contient tous les atomes, alors que la fraction condensée n'en contient qu'une partie. Cette distinction est presque inutile dans les systèmes gazeux (la fraction condensée contenant plus de 99% des atomes), mais elle est cruciale dans l'hélium liquide où du fait des fortes interactions, la fraction condensée est estimée à 10% à T=0 (figure 1.9).

1.6 Conclusion

Nous disposons d'une séquence expérimentale automatisée conduisant en moins d'une minute à la formation d'un condensat de Bose-Einstein en forme de cigare. Cet objet quantique est décrit par une unique fonction d'onde, vérifiant l'équation de Gross-Pitaevskii. Plusieurs méthodes théoriques issues de cette équation permettent de décrire la dynamique du condensat. La plus remarquable est la description de notre système en termes hydrodynamiques : le condensat apparaît comme un fluide barotrope, inviscide et irrotationnel. Ces deux dernières propriétés sont celles d'un superfluide.

[13] L'absence d'autres modes que les phonons à basse énergie est un élément clé. Feynman en donne une interprétation qualitative très suggestive dans un article consacré à l'hélium superfluide et aux vortex [68].

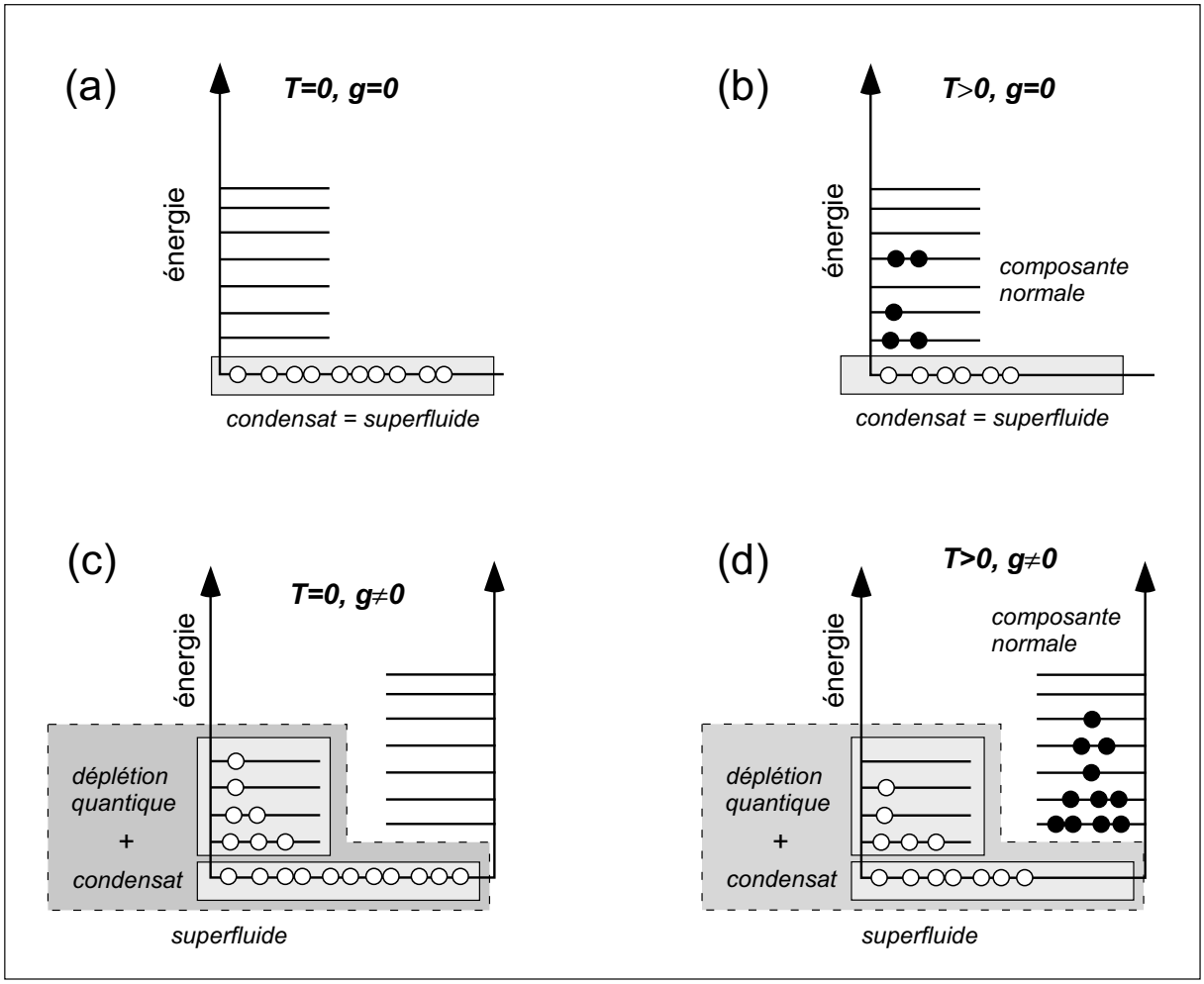


FIGURE 1.9 – Représentation schématique de la fraction condensée et de la fraction superfluide, à température nulle puis non nulle, avec et sans interactions (d'après [29]). La force des interactions est caractérisée par un paramètre g. Les états d'énergie à gauche de chaque figure sont des états à une particule. Les états à droite sont les états propres compte-tenu des interactions. (a) Condensat pur à $T = 0$ et sans interactions. (b) Condensat et partie thermique (composante normale) dans le cas sans interactions. (c) Condensat et déplétion quantique à $T = 0$ et $g \neq 0$, l'ensemble formant la fraction superfluide. (d) Fraction superfluide et composante normale à $T > 0$ et $g \neq 0$. Dans nos expériences, la déplétion quantique représente moins de 1%, alors que dans l'Hélium-II elle représente $\sim 90\%$.

Chapitre 2

Mode monopolaire transverse d'un condensat

Un premier mode du condensat va attirer notre attention dans ce chapitre : le mode monopolaire transverse. Sa géométrie est simple : il s'agit d'une oscillation du rayon transverse du condensat.

L'étude expérimentale du mode monopolaire ne présente aucune difficulté de principe, puisqu'elle implique des séquences temporelles bien maîtrisées et une analyse des données fondée sur une seule observable, le rayon transverse du condensat. Il est ainsi possible d'analyser quantitativement le comportement de ce mode, en particulier la manière dont il relaxe en fonction de la température et de son amplitude initiale. C'est cette étude expérimentale que nous décrivons ici, étude au cours de laquelle le monopôle s'est avéré être un mode original au comportement riche [3]. Ce chapitre aborde également quelques interprétations théoriques qui ont été publiées suite à ces travaux [69–71].

2.1 Présentation des modes monopolaires

La désignation de monopôle suppose généralement une structure identique dans toutes les directions de l'espace. C'est ainsi qu'il faut comprendre le mode monopolaire d'un condensat : il s'agit d'un mode de respiration, durant lequel toutes les directions subissent périodiquement et en phase des séquences de dilatation/contraction.

Les modes monopolaires des gaz d'atomes froids piégés sont intéressants à plus d'un titre. Quelques résultats théoriques méritent d'être rappelés ici :

- **Gaz de Boltzmann tridimensionnel isotrope** : il est connu qu'un gaz quelconque piégé dans un potentiel harmonique isotrope à trois dimensions peut osciller *sans amortissement* sous la forme d'un mode monopolaire [72]. Ce résultat peut être dérivé dans le formalisme de l'équation de Boltzmann et ne dépend pas de la nature des interactions entre atomes : il provient d'une symétrie dans l'intégrale de collision qui annule le terme usuel de friction. Ce résultat tient aussi à deux et une dimension(s).
- **Gaz bidimensionnel avec des interactions ponctuelles entre atomes** : Pitaevskii et Rosch ont montré qu'un tel gaz piégé harmoniquement présente des oscillations monopolaires dites "universelles", associées à une symétrie cachée du problème [73]. De telles oscillations sont des solutions exactes du problèmes à N corps et ne sont pas amorties. La démonstration s'appuie sur le fait que la partie cinétique et la partie d'interaction en delta (à deux dimensions) sont invariantes d'échelle dans la transformation $r \to \lambda r$. L'usage d'un potentiel en delta à deux dimensions est néanmoins délicat en général, comme le mentionnent les auteurs.

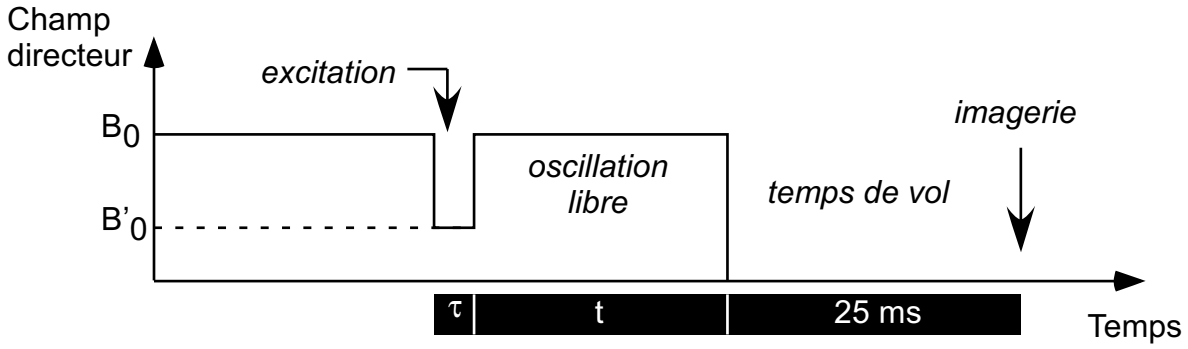


FIGURE 2.1 – Séquence expérimentale pour l'étude du mode monopolaire.

Notre condensat n'est ni isotrope, ni bidimensionnel. Toutefois la forme quasi-cylindrique de cigare allongé va nous permettre de négliger sous certaines conditions les oscillations suivant z ; nous verrons qu'alors les prédictions de Pitaevskii et Rosch peuvent être mises en relation avec certaines observations expérimentales.

2.2 Méthode d'excitation

Notre étude a porté sur un mode monopolaire transverse dans le plan xy. Voici comment nous procédons : après avoir produit un condensat au repos dans un piège avec $\omega_\perp/2\pi \sim 190\,\mathrm{Hz}$, nous modifions légèrement le potentiel de piégeage transverse afin de mettre le condensat hors d'équilibre. Pour cela, le champ directeur B_0 est abaissé pendant une durée τ (fraction de milliseconde) à une valeur B_0', puis ramené à sa valeur initiale B_0 (figure 2.1). Après cette phase d'excitation, on laisse le condensat évoluer librement dans le piège pendant un temps t. On coupe alors brutalement le piège et on laisse tomber le condensat pendant 25 ms, après quoi il est imagé par les techniques usuelles.

D'après les équations 1.2, la fréquence transverse $\omega_\perp$ augmente lorsque B_0 diminue, et vaut alors $\omega_\perp'$; la fréquence longitudinale ω_z demeure quant à elle inchangée puisqu'elle ne dépend pas de B_0. L'excitation procurée au condensat est ainsi par construction purement transverse[1], et elle respecte la symétrie de révolution autour de l'axe z. Le mode que nous excitons dépend donc uniquement de $r_\perp$. L'excitation est en outre provoquée par un potentiel purement harmonique. Dans ces conditions et d'après les résultats de Castin et Dum [53], un condensat dans le régime de Thomas-Fermi garde un profil parabolique à tout instant. En conséquence, l'observable pertinente pour l'étude de ce mode est la valeur moyenne $\langle r_\perp^2 \rangle$.

2.3 Modèles et expériences à température nulle (ou presque)

2.3.1 Lois d'échelle pour le monopôle

Le potentiel de piégeage reste harmonique durant toute la séquence expérimentale, de sorte qu'il est possible d'écrire l'évolution du condensat sous forme d'une simple transformation d'échelle. Les paramètres d'échelle $\lambda_\perp(t)$ et $\lambda_z(t)$ vérifient les équations 1.27. On pourrait théoriquement résoudre ces équations durant les trois phases (excitation, oscillation libre et temps de vol), mais il est plus rapide de faire deux simplifications :

[1] Elle s'accompagne néanmoins d'une excitation verticale du centre de masse du nuage : en effet, le décalage gravitationnel (Eq. 1.3) dépend de B_0 qui est varié pendant l'excitation du monopôle. Cet effet est sans conséquence pour l'étude du monopôle.

– La phase d'excitation étant courte devant la période du piège, on considérera que son seul effet est de donner une vitesse initiale transverse aux particules. Son effet sera pris en compte sous la forme de conditions initiales :

$$\dot{\lambda}_\perp(0) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \dot{\lambda}_z(0) = (\lambda_\perp(0) - 1) = (\lambda_z(0) - 1) = 0. \tag{2.1}$$

– La phase de temps de vol réalisant une simple dilatation du nuage, il n'est pas nécessaire de la modéliser explicitement.

Seules restent à résoudre les équations du mouvement durant la phase d'oscillation libre :

$$\ddot{\lambda}_\perp + \omega_\perp^2 \lambda_\perp = \frac{\omega_\perp^2}{\lambda_\perp^3 \lambda_z} \tag{2.2}$$

$$\ddot{\lambda}_z + \omega_z^2 \lambda_z = \frac{\omega_z^2}{\lambda_\perp^2 \lambda_z^2}, \tag{2.3}$$

avec les conditions initiales 2.1. Nous allons résoudre ces équations dans deux cas limites étudiés expérimentalement.

2.3.2 Comportement 2D aux temps courts

Comme $\dot{\lambda}_z(0) = (\lambda_z(0) - 1) = 0$, on peut considérer que sur des échelles de temps courtes devant $2\pi/\omega_z$, le paramètre d'échelle λ_z reste égal à un. Cette approximation revient à considérer la limite $\omega_z \to 0$ qui correspond au cas d'un cylindre infiniment long, proche de la situation décrite dans [73]. Une seule équation reste à résoudre :

$$\ddot{\lambda}_\perp + \omega_\perp^2 \lambda_\perp = \frac{\omega_\perp^2}{\lambda_\perp^3}. \tag{2.4}$$

On introduit le paramètre $A = \lambda_\perp^2$ pour lequel il est possible de trouver une intégrale première du mouvement[2] :

$$\frac{1}{2}\dot{A}^2 + 2\omega_\perp^2(A^2 + 1) = CA$$

où $C = 4\omega_\perp^2 + 2\alpha^2$. Finalement, on montre que A satisfait à une équation linéaire :

$$\ddot{A} + 4\omega_\perp^2 A = C \tag{2.5}$$

qui conduit à la solution :

$$A(t) = \cosh(\gamma) + \sinh(\gamma)\sin(2\omega_\perp t + \phi) \tag{2.6}$$

où γ et ϕ peuvent être explicités en fonction des conditions initiales. A est donc une quantité qui oscille sinusoïdalement dans le temps, à une fréquence $2\omega_\perp$ qui ne dépend pas de la force de l'excitation.

Ce résultat est confirmé par l'observation expérimentale reportée sur la figure 2.2 où l'on a volontairement excité le mode monopolaire de façon forte. Pour cette expérience, on a mesuré $\omega_\perp/2\pi = 188.7(3)\,\text{Hz}$; la fréquence du piège durant l'excitation était fixée à $\omega'_\perp/2\pi = 250\,\text{Hz}$ pour une durée $\tau = 800\,\mu\text{s}$. L'oscillation de $A(t)$ est très bien ajustée par un sinus (insert), sinus qui doit simplement être assorti d'un léger amortissement pour pouvoir rendre compte de l'évolution de A jusqu'à des temps de l'ordre de 75 ms (courbe principale). La fréquence donnée par l'ajustement est $\omega_{\text{mp}}/2\pi = 374.5(4)\,\text{Hz}$, ce qui conduit à $\omega_{\text{mp}}/2\omega_\perp = 0.9976 \pm 0.0027$.

[2] Dans le cas d'un condensat symétrique autour de l'axe z, A est proportionnel à l'aire d'une coupe transverse du nuage.

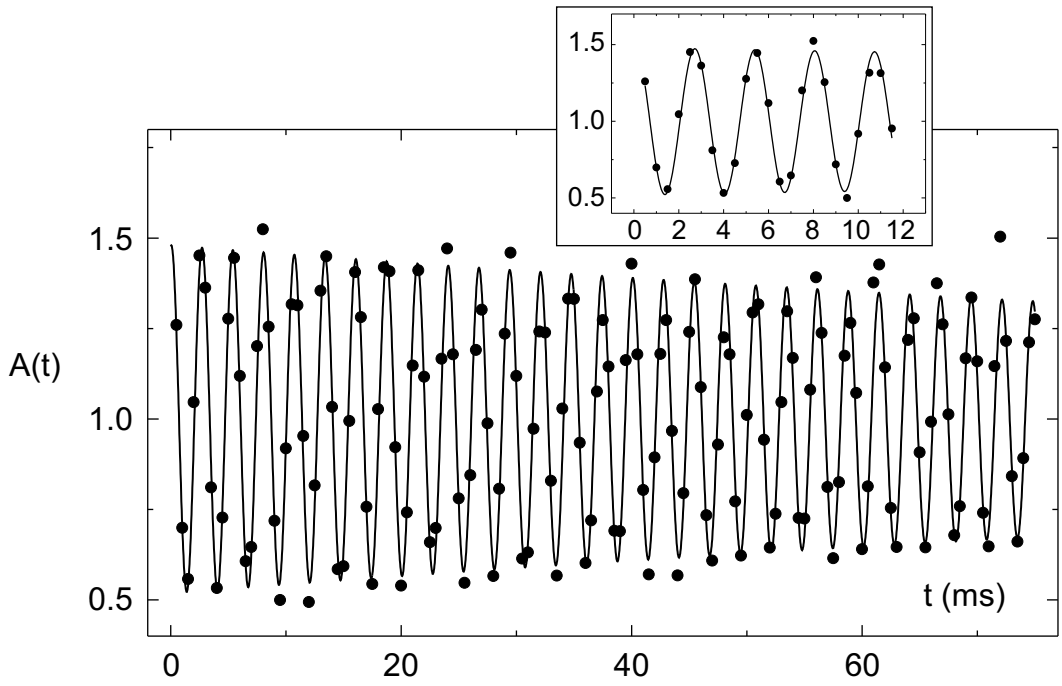


FIGURE 2.2 – Comportement de la quantité $A(t) \propto R_\perp^2$ (normalisée à l'unité) aux temps courts et très courts (insert) après une excitation de $\tau = 800\,\mu$s avec $\omega'_\perp/2\pi = 250\,$Hz. Les points expérimentaux sont moyennés sur deux passages identiques. La ligne pleine est un ajustement sinusoïdal avec un léger amortissement exponentiel (constante de temps $\simeq 190\,$ms). La fréquence déduite de l'ajustement est 374.5(4) Hz.

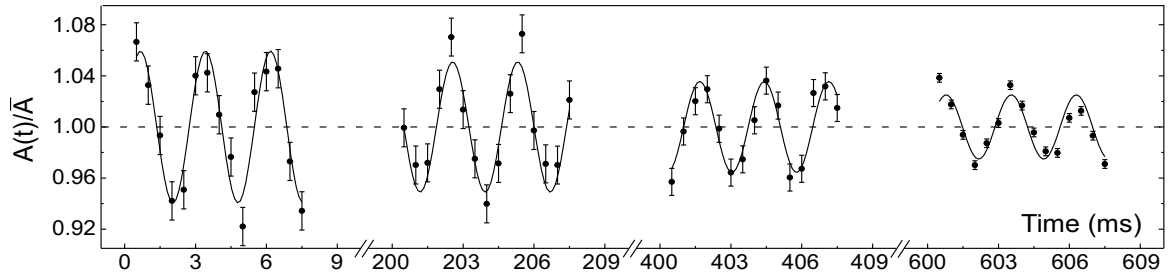


FIGURE 2.3 – Comportement de la quantité $A(t) \propto R_\perp^2$ (normalisée à l'unité) aux temps longs après une excitation de $\tau = 75\,\mu$s avec $\omega_\perp/2\pi = 230\,$Hz. La ligne pleine est un ajustement sinusoïdal avec un léger amortissement exponentiel (constante de temps $\sim 1\,$s). La fréquence déduite de l'ajustement est 366.3(5) Hz.

Nous retrouvons ainsi le fait que le mode monopolaire transverse oscille dans le régime de Thomas-Fermi à une fréquence double de celle du piège ; ce résultat trouvé à une précision de quelques 10^{-3} et dans des conditions de forte excitation prouve que l'oscillation monopolaire transverse est bien un mode pur du condensat sur des échelles de temps courtes devant $2\pi/\omega_z \sim 100\,$ms.

2.3.3 A trois dimensions : comportement linéaire aux temps longs

Nous nous intéressons maintenant au comportement aux temps longs, l'oscillation libre pouvant durer plusieurs centaines de millisecondes. Nous le verrons plus loin, l'évolution du mode aux temps longs est loin d'être triviale lorsqu'il est fortement excité. Pour cette raison, nous allons nous limiter ici au cas des excitations faibles qui conduisent à des comportements essentiellement linéaires.

On a reporté sur la figure 2.3 un exemple de courbe expérimentale d'oscillation de A sur des échelles de temps 10 fois plus longues que dans le cas précédent. Le temps d'excitation a été considérablement réduit ($\tau = 75\,\mu$s) et $\omega'_\perp/2\pi = 230\,$Hz. L'excitation communiquée au condensat est ainsi environ 10 fois plus faible que lors de l'expérience aux temps courts.

Les données ont été prises sur quatre intervalles de 8 ms espacés de 200 ms, et dans un piège dont la fréquence transverse vaut $\omega_\perp/2\pi = 182.6(3)\,$Hz. L'ajustement sinusoïdal porte sur l'ensemble des points. La fréquence de l'oscillation peut être déduite de l'ajustement : $\omega_{\rm mp}/2\pi = 366.3(5)\,$Hz. Le rapport de la fréquence du monopôle sur le double de la fréquence du piège vaut donc $\omega_{\rm mp}/2\omega_\perp = 1.0030 \pm 0.0030$. Ces résultats sont très analogues à ceux obtenus aux temps courts avec une excitation quelconque : même sur des échelles de temps longues, le mode de respiration transverse oscille librement, et il semble que l'on peut rendre compte de son comportement par une équation du type de (2.6). Autrement dit, le fait que l'approximation $\lambda_z = 1$ ne tienne plus ne semble pas affecter l'évolution du mode.

Voyons comment il est possible de justifier cela théoriquement. L'excitation du mode est perturbative, de sorte que l'on peut linéariser les paramètres d'échelle :

$$\lambda_\perp(t) = 1 + \epsilon_\perp(t) \qquad \lambda_z(t) = 1 + \epsilon_z(t).$$

En remplaçant dans les Eqs. (2.2), on peut obtenir un système d'équation linéaires pour $\epsilon_\perp$ et ϵ_z :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}\epsilon_\perp\\ \epsilon_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\omega_\perp^2 & \omega_\perp^2\\ 2\omega_z^2 & 3\omega_z^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_\perp\\ \epsilon_z\end{pmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

Ce système se diagonalise sans peine et fait apparaître deux modes [57] :

$$\omega^2_{\text{rapide}} = \frac{4\omega_\perp^2 + 3\omega_z^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{16\omega_\perp^4 - 16\omega_\perp^2\omega_z^2 + 9\omega_z^4} \tag{2.8}$$

$$\omega^2_{\text{lent}} = \frac{4\omega_\perp^2 + 3\omega_z^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{16\omega_\perp^4 - 16\omega_\perp^2\omega_z^2 + 9\omega_z^4}. \tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

Dans nos expériences, $\omega_z/\omega_\perp \sim 1/15$ de sorte que l'on peut se contenter dans ces expressions de développements à l'ordre un en ω_z^2. Dans ces conditions, les modes rapide et lent du système peuvent être explicités :

$$\omega_{\text{rapide}} = 2\omega_\perp\left(1 + \frac{\omega_z^2}{16\omega_\perp^2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\text{rapide}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega_z^2}{2\omega_\perp^2} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$\omega_{\text{lent}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\omega_z \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\text{lent}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Le mode rapide consiste donc en l'oscillation en phase des directions transverse et longitudinale, avec un poids très faible pour la composante longitudinale. A l'inverse, le mode lent consiste en l'oscillation en opposition de phase des deux directions, les deux composantes étant cette fois comparables. Deux points importants apparaissent ici, qui expliquent l'oscillation libre de la figure 2.3 :

- **Un mode rapide oscillant presque à** $2\omega_\perp$: en effet, compte tenu du fait que $\omega_z/\omega_\perp \sim 1/15$, on constate que $\omega_{\text{rapide}} \simeq 2\omega_\perp \times 1.00024$. Le mode rapide oscille donc presque à la fréquence du mode purement transverse d'un condensat infiniment long.
- **Un mode lent quasiment pas peuplé par une excitation transverse** : le nuage est initialement excité de manière purement transverse, ce qui signifie *a priori* que les modes rapide et lent sont tous deux excités. L'excitation est très courte, de sorte qu'elle n'agit que sur les dérivées. Les conditions initiales sont donc :

$$\boldsymbol{\epsilon}(0) = \alpha_r \sin\phi_r \boldsymbol{\epsilon}_{\text{rapide}} + \alpha_l \sin\phi_l \boldsymbol{\epsilon}_{\text{lent}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(0) = \alpha_r \cos\phi_r \omega_{\text{rapide}} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{lent}} + \alpha_l \cos\phi_l \omega_{\text{lent}} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{lent}} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  On en déduit que $\phi_r = \phi_l = 0$ et que $\alpha_r/\alpha_l = \sqrt{5/2}\omega_\perp/\omega_z$. La projection du mode lent sur la direction transverse est donc $\sqrt{40}\omega_\perp/\omega_z \sim 100$ fois plus faible que la composante rapide, ce qui la rend difficilement décelable sur un signal transverse.

Pour ces deux raisons, nous voyons $A(t) \simeq 1 + 2\epsilon_\perp(t)$ osciller sur la figure 2.3 à une fréquence très proche de (et même expérimentalement égale à) la fréquence du mode purement transverse étudié aux temps courts. Dans un telle expérience, le fait que le nuage ne soit pas infiniment allongé dans la direction longitudinale n'a aucune incidence sur le comportement transverse du nuage. Aussi peut-on espérer retrouver certaines propriétés des systèmes bidimensionnels étudiés par Pitaevskii et Rosch [73] : en particulier, l'observation d'un amortissement extrêmement faible dans ces conditions peut être rapprochée des prédictions de ces auteurs assurant que le mode monopolaire n'est pas amorti à deux dimensions.

2.4 Amortissement dans le régime linéaire

S'il n'est pas difficile de construire un modèle théorique du mode monopolaire à température nulle, il est bien plus complexe d'en évaluer le comportement à température finie — en particulier

le taux d'amortissement. A ce titre, des données quantitatives sur l'amortissement des modes collectifs sont toujours utiles pour tester les différentes théories (voir par exemple [74–83]), d'autant plus que de telles données sont plutôt rares [84–86]. En particulier, nous montrons ici que le monopôle a un comportement non trivial, très différent des autres modes.

2.4.1 Un facteur de qualité de 2000

Les expériences présentées précédemment sous la dénomination "température nulle" ne sont bien entendu pas réalisées à température nulle, mais à des températures assez faibles pour que le condensat contienne presque tous les atomes. C'est donc sans surprise que l'on constate que l'oscillation de faible amplitude de la figure 2.3 est amortie. L'ajustement doit être fait par une fonction sinusoïdale amortie :

$$A(t) = A_0 + \delta A e^{-\gamma_0 t/\tau} \sin(\omega_{\rm mp} t + \phi). \tag{2.13}$$

On mesure d'après les données de la figure 2.3 un taux d'amortissement $\gamma_0 = 1.2(2)\,{\rm s}^{-1}$. Le facteur de qualité du mode monopolaire $Q = \omega_{\rm mp}/\gamma_0$ est donc de l'ordre de 2000. Ce chiffre est à comparer aux résultats obtenus dans d'autres groupes sur d'autres modes :

- $Q = 200$ pour le mode monopolaire dans une géométrie de crêpe $\omega_\perp < \omega_z$ (JILA [84]).
- $Q = 80$ pour le mode quadrupolaire basse fréquence dans un piège de géométrie cigare (MIT [85]).
- $Q = 70$ pour le mode ciseau d'un condensat dans un piège TOP (Oxford [86]).

Notre mode monopolaire semble ainsi avoir une résistance remarquable à la dissipation. La section suivante présente des résultats plus quantitatifs qui abondent dans ce sens.

2.4.2 Mesure de la durée de vie et de la fréquence en fonction de T

Nous avons effectué un ensemble de mesures de taux d'amortissement à différentes températures. Pour cela, nous avons reproduit 10 fois la même série d'expériences, en ajustant à chaque fois la radio-fréquence de fin de rampe à des hauteurs variables pour obtenir des condensats de températures différentes. Les valeurs sélectionnées vont de 6 kHz au-dessus de la fréquence qui vide le piège, à 33 kHz, avec un pas de 3 kHz entre deux mesures successives. La relation entre température et fréquence d'évaporation peut être étalonnée dans une région où le condensat coexiste avec une fraction thermique appréciable (figure 2.4). En-dessous de cette région, les températures sont extrapolées linéairement. Les températures explorées vont de 40 nK à 200 nK, alors que la condensation se produit autour de T_C =290 nK. Enfin, on notera que notre méthode pour modifier la température ne se fait pas à nombre d'atomes constant, de sorte que nous prendrons soin dans la suite de préciser ce dernier pour chaque mesure.

Une expérience type consiste en l'acquisition de trois courbes d'oscillations monopôlaires (15 points couvrant 8 ms) séparées entre elles de 100 ms. Chaque segment de 8 ms est ajusté par une fonction sinusoïdale dont on déduit une amplitude d'oscillation. On obtient ainsi trois valeurs pour l'amplitude de l'oscillation $\delta A(t)$, que l'on ajuste par une fonction exponentielle décroissante. Le taux d'amortissement de cet ajustement donne γ_0. La fréquence du mode est quant à elle déduite d'un ajustement simultané des trois morceaux d'oscillation.

La figure 2.5 montre l'évolution de la fréquence et du taux d'amortissement en fonction de la température. Le nombre d'atomes a également été reporté, puisque celui-ci dépend non trivialement de la température et qu'il peut affecter le comportement du condensat. Deux enseignements essentiels peuvent être tirés de ces courbes :

- **Fréquence constante** : la fréquence du monopôle reste constante sur toute la gamme de températures explorée. Tout au plus peut-on distinguer une légère tendance décroissante,

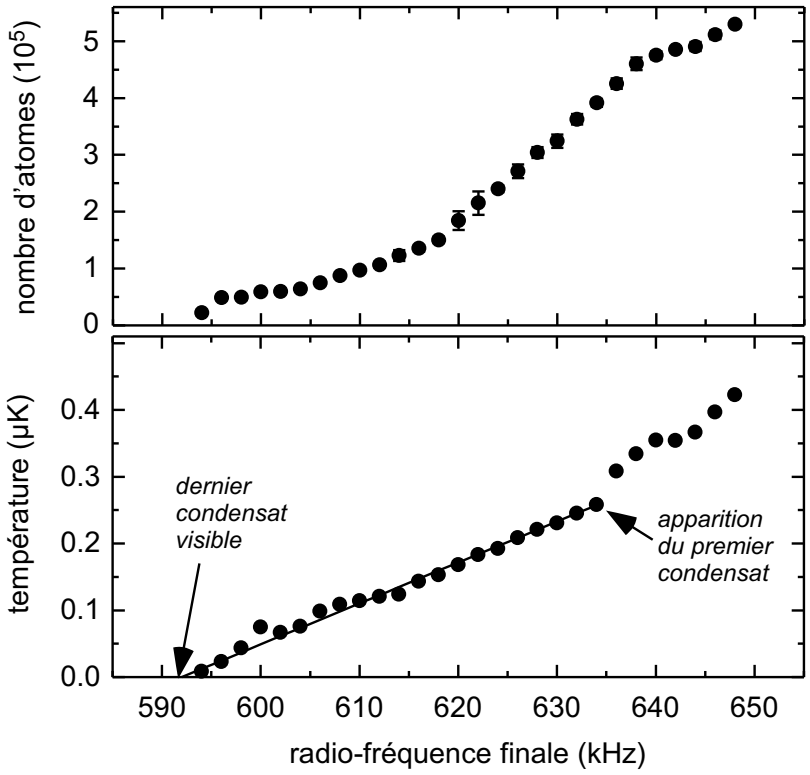


FIGURE 2.4 – Etalonnage de la température et du nombre d'atomes.

tendance inférieure au pourcent et comprise dans les barres d'erreur. Ce résultat est remarquable : c'est en effet le seul mode observé à ce jour sur un condensat et pour lequel la fréquence ne dépend pas de la température. Les modes observés dans d'autres équipes [84–86] présentent tous une dépendance nette en température. La plupart des modèles théoriques à température finie prédisent également une telle dépendance : les prédictions de [77] anticipent ainsi une augmentation de 10 % de la fréquence du monopôle entre $T = 0$ et $T = 0.8\,T_C$.

– **Amortissement faible et linéaire en température** : les taux d'amortissement observés sont environ 10 fois plus faibles que ceux observés sur d'autres modes. En outre, le taux d'amortissement augmente quasi-linéairement avec la température. Cette tendance est nette et peut servir de support à une analyse théorique quantitative.

Il ressort de cette analyse que le mode monopolaire transverse se distingue de tous les autres modes. Aussi sa description théorique est un défi original. Plusieurs équipes, suite à nos travaux, ont développé des modèles pour tenter de comprendre les caractéristiques singulières de ce mode. Nous essayons d'en donner un aperçu dans les sections suivantes.

2.4.3 Evaluation de l'amortissement de Landau (d'après Guilleumas et Pitaevskii)

Cette section décrit les travaux de Guilleumas et Pitaevskii [69] sur l'amortissement de Landau dans un condensat infiniment allongé dans la direction z. Afin d'évaluer l'amortissement de Landau des modes de basse énergie, ces auteurs calculent numériquement le spectre de Bogoliubov. Chaque mode dans ce spectre est caractérisé par un triplet $i = (n, m, k)$, n donnant le nombre de nœuds dans la direction radiale, m donnant la projection du moment cinétique, et k étant un vecteur d'onde dans la direction z. L'amortissement de Landau repose sur des processus

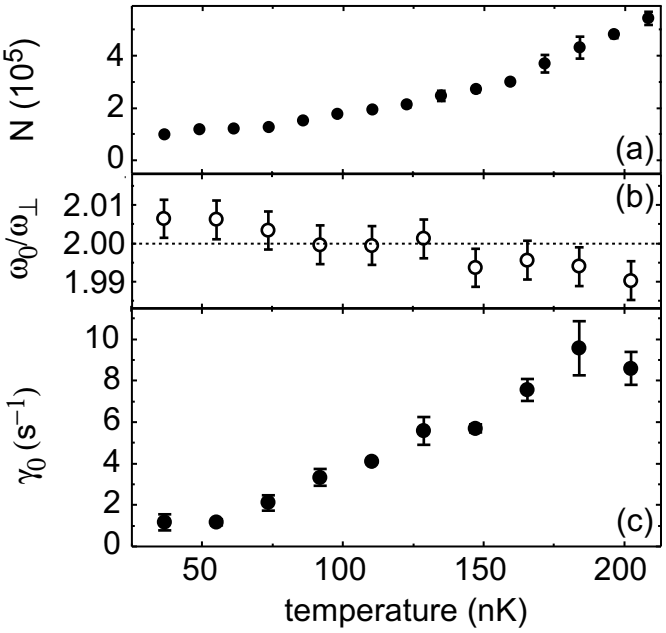


FIGURE 2.5 – Bilan de l'étude en température du mode monopolaire. On a reporté (a) le nombre d'atomes, (b) la fréquence du mode $\omega_{\rm mp}$ en unités de $\omega_\perp$ et (c) le taux d'amortissement du mode. On note que la fréquence reste constante à 10^{-2} près, et que le taux d'amortissement augmente linéairement avec T.

au cours desquels un quantum du mode monopolaire et un quantum d'un mode i s'annihilent et donnent naissance à un quantum dans le mode j. Passant par une règle d'or de Fermi, on peut montrer que le taux d'amortissement de Landau vaut[3] :

$$\gamma_L = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{ij} |A_{ij}|^2 (f_i - f_j) \delta(\omega_{ij} - \omega_{\rm mp})$$

où les f_i désignent des facteurs de Bose $f_i = 1/[\exp(E_i/k_BT) - 1]$. Les éléments de matrice A_{ij} sont calculés numériquement d'après la structure des modes de Bogoliubov et en respectant des règles de sélection sur les nombres quantiques i et j ($\Delta m = 0$ et $\Delta k = 0$).

Les auteurs trouvent par cette méthode un taux d'amortissement $\gamma_L = 0.16\,{\rm s}^{-1}$ pour $k_BT = 1.5\mu$. Cette valeur est 8 fois plus faible que le taux d'amortissement le plus faible observé expérimentalement (figure 2.5). Il est important de noter que cette même méthode appliquée au mode quadrupolaire transverse donne des taux d'amortissement de l'ordre de $50\,{\rm s}^{-1}$, valeur proche des observations expérimentales[4].

L'amortissement de Landau γ_L est donc très faible pour le mode monopolaire dans une géométrie cylindrique. L'amortissement observé expérimentalement est lui-même faible, mais reste 10 fois supérieur à γ_L de sorte qu'on peut éliminer — comme le suggèrent les auteurs — le mécanisme de Landau comme mécanisme principal de l'amortissement du mode monopolaire.

2.4.4 Oscillation en phase avec le nuage thermique (d'après Jackson et Zaremba)

Des travaux menés par Jackson et Zaremba [70] permettent de comprendre pourquoi l'évaluation précédemment décrite sous-estime la valeur réelle. Ces auteurs remarquent que la véritable

[3] Comme le remarquent les auteurs de [69], il y a un facteur 2 entre notre définition de γ et la leur. Leurs formules ont été modifiées ici pour correspondre à notre définition.

[4] Voir par exemple les valeurs données dans le chapitre 7 où ce mode est étudié en détail.

singularité du mode monopolaire transverse tient à un fait très simple : l'égalité entre les fréquences de ce mode à $T = 0$ (condensat pur) et à $T > T_C$ (nuage thermique pur). En effet, dans la limite $\omega_z/\omega_\perp \to 0$ et pour un condensat pur, nous avons déjà constaté que le mode rapide tend vers $2\omega_\perp$ (Eq. (2.11)), résultat qui est d'ailleurs plus général à deux dimensions [69]. Et pour $T > T_C$, on peut calculer la fréquence du mode de monopolaire transverse par une méthode des moments dans le cadre de l'équation de Boltzmann [87] : on trouve que ce mode du nuage thermique oscille aussi à la fréquence $2\omega_\perp$. Cette coïncidence accidentelle invalide le traitement usuel de l'amortissement de Landau : en effet, un tel traitement présuppose que le nuage thermique qui entoure le condensat est au repos. Mais comme ce nuage a dans le cas présent une fréquence propre égale à celle à laquelle oscille le condensat, on imagine que les deux nuages vont osciller ensemble. L'amortissement de Landau change donc de nature dans cette situation, et d'autres mécanismes peuvent jouer un rôle significatif.

Les auteurs ont réalisé des simulations numériques du mode monopolaire à température finie — et dans une géométrie tridimensionnelle identique à la nôtre — partant d'un système de deux équations couplées [88] : une équation de Gross-Pitaevskii généralisée pour décrire le condensat et une équation de Boltzmann modifiée pour décrire le nuage thermique. Voici la forme générale de ces équations :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\Psi} = \left(-\tfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U + g[\rho_c + 2\rho_t] - iR\right)\Psi, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla f - \nabla(U + 2g[\rho_c + \rho_t])\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} f = C_{12}[f] + C_{22}[f]. \tag{2.15}$$

ρ_c représente la densité du condensat, ρ_t la densité du nuage thermique, et $f = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ la distribution dans l'espace de phases du nuage thermique. Ces équations sont doublement couplées : (1) par un terme de champ moyen proportionnel à g, (2) par un terme dissipatif lié aux collisions. Ce dernier terme apparaît sous la forme d'un terme non-hermitien $iR \propto i\int \mathrm{d}\boldsymbol{p} C_{12}[f]$ dans l'équation de Gross-Pitaevskii généralisée, et dans la seconde équation sous la forme d'une intégrale de collisions $C_{12}[f]$ entre atomes thermiques et atomes du condensat. Le terme $C_{22}[f]$ est une intégrale de collisions impliquant les seuls atomes du nuage thermique.

Les auteurs ont résolu numériquement le système d'équations 2.14 dans le cas général et ont montré que — du fait de la coïncidence accidentelle des fréquences du mode monopolaire — le nuage thermique oscille en phase avec le condensat, avec une amplitude comparable. En ajustant leurs données par une expression analogue à 2.13, ils ont pu évaluer un taux d'amortissement pour chaque température. Leurs résultats, reportés sur la figure 2.6, sont en excellent accord avec nos résultats expérimentaux.

Finalement, les auteurs ont pu montrer que les deux intégrales de collision $C_{12}[f]$ et $C_{22}[f]$ sont nécessaires pour rendre compte complètement de l'amortissement du monopôle. Voici comment on peut tenter d'interpréter physiquement ce résultat :

- **Cas où le nuage thermique reste immobile** : quand un mode du condensat est excité, il rencontre l'opposition du nuage thermique qui est au repos par rapport à ce mode. Dans un cas usuel où il n'y pas de dégénérescence accidentelle entre les modes du condensat et ceux du nuage thermique, le condensat n'entraîne pas le nuage thermique. L'amortissement du mode du condensat est alors dominé par la friction avec le nuage thermique qui reste au repos (terme de Landau).
- **Cas où le nuage thermique oscille aussi** : dans notre cas, il y a quasi-égalité entre les fréquences du mode monopolaire du condensat et du nuage thermique. Ce dernier est donc entraîné dans le même mouvement que le condensat, de sorte que la friction due au mouvement relatif des deux composantes est beaucoup plus faible qu'à l'accoutumée. La dissipation dans cette situation provient à la fois du terme de Landau et des collisions entre atomes du nuage thermique ; elle est beaucoup plus faible que lorsque le nuage thermique est au repos par rapport au condensat.

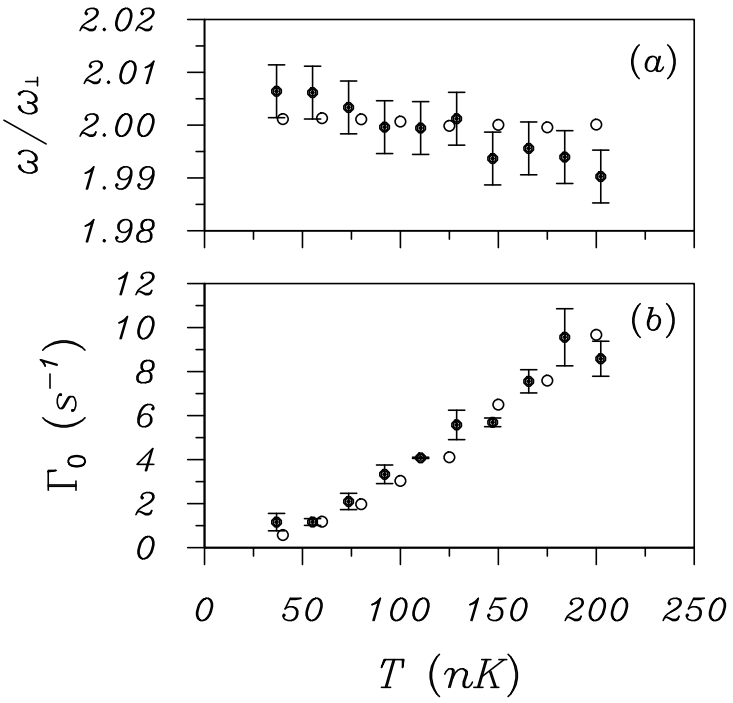


FIGURE 2.6 – Comparaison des résultats expérimentaux avec les simulations numériques (tiré de [70]). Le points expérimentaux sont en noir, les points théoriques en blanc.

Plus formellement, on peut remarquer que le traitement usuel de l'amortissement de Landau est un cas limite des équations 2.14, où l'on procède à deux approximations : (1) le couplage de champ moyen est négligé dans l'équation de Gross-Pitaevskii généralisée. (2) La distribution dans l'espace des phases f est remplacée par sa valeur stationnaire. Le fait que le nuage thermique oscille avec le condensat rend impossible un tel traitement, et explique que l'évaluation de Guilleumas et Pitaevskii ne puisse bien rendre compte des résultats expérimentaux.

2.5 Amortissement non-linéaire

L'étude de l'amortissement peut être étendue aux situations où l'excitation initiale du mode est plus forte. Nous montrons ici que l'amortissement n'est pas toujours monotone et tentons de reproduire les explications proposées par Kagan et Maksimov [71] pour rendre compte de cette non-linéarité.

2.5.1 Observation d'une résurgence aux temps longs

La figure 2.7(a) montre le comportement aux temps longs de l'amplitude $\delta A(t)$ du mode monopolaire. Un phénomène remarquable apparaît pour des amplitudes initiales supérieures à $\sim 20\%$: l'oscillation monopolaire ne décroît pas de manière monotone, mais passe par un minimum autour de $t = 300\,\mathrm{ms}$, remonte, atteint un maximum vers $t = 500\,\mathrm{ms}$, puis décroît de nouveau. Cette résurgence surprenante est un effet non-linéaire qui disparaît aux faibles amplitudes d'excitation.

Nous avons ajusté ces données avec la forme empirique :

$$\delta A(t) = \delta A_0 \left(1 - \xi \sin^2(\delta\omega\, t)\right)\, e^{-\gamma_0 t}. \tag{2.16}$$

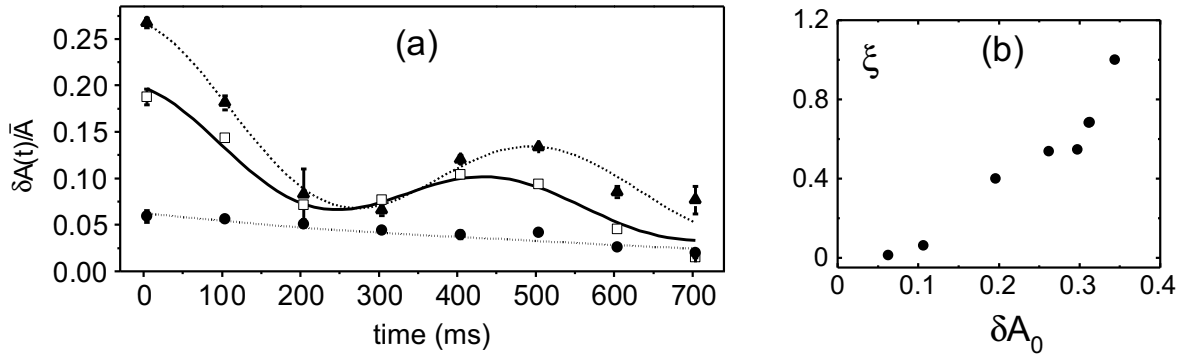


FIGURE 2.7 – Amortissement non-linéaire du mode monopolaire : (a) évolution temporelle de l'amplitude δA du mode pour différents temps d'excitation ($\bullet$: $\tau = 75\,\mu$s, $\square$: $\tau = 300\,\mu$s, $\blacktriangle$: $\tau = 450\,\mu$s). (b) Paramètre ξ caractérisant la force de la résurgence (voir texte) en fonction de l'amplitude initiale δA_0.

ξ est ainsi une mesure du contraste de la résurgence, que nous pouvons tracer comme fonction de l'amplitude initiale δA_0 (figure 2.7(b)) : ξ est une fonction croissante de δA_0. L'effet semble donc être non-linéaire.

Deux explications peuvent être avancées :

- **Battement entre deux modes** : on peut imaginer que l'on excite non pas un mais deux modes de fréquences proches et que le battement de ces modes produit la modulation de δA que l'on observe. Toutefois, un tel effet est linéaire et ne devrait pas disparaître pour de faibles amplitudes. Il a d'ailleurs pu être écarté définitivement suite à une simulation numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii dans nos conditions expérimentales [89].
- **Oscillation paramétrique** : le mode monopolaire est susceptible de se convertir en une somme d'autres modes par un processus de type Beliaev. Si les nouveaux modes excités ne sont pas trop amortis, l'énergie peut éventuellement revenir dans le mode monopolaire, comme cela a été vu sur d'autres modes à Oxford [90].

Pour cette oscillation paramétrique, plusieurs modes-relais peuvent être envisagés : il suffit que leur fréquence soit un sous-multiple entier de la fréquence du monopôle $2\omega_\perp$. Un premier candidat est la paire de modes $l = 2$, $m = \pm 1$ (dits modes ciseaux [66, 67] — voir aussi le chapitre 4) dont la fréquence $\sqrt{\omega_\perp^2 + \omega_z^2}$ est proche de $\omega_\perp$. Nous avons recherché des traces d'excitation de ce mode sur des images transverses : nous avons constaté qu'il est légèrement excité lors des expériences où l'on excite le mode monopolaire. Mais son amplitude se stabilise rapidement à une valeur stationnaire, sans que ne soit visible une oscillation à basse fréquence complémentaire de celles de la figure 2.7. Le mode ciseau ne semble donc pas responsable de la résurgence observée.

Un autre processus possible est la conversion paramétrique du monopôle en paires de phonons longitudinaux suggérée par Kagan et Maksimov [80]. Cette hypothèse a fait l'objet d'une publication spécifique des mêmes auteurs [71], et sera discutée dans la section suivante. Nous donnons ici les éléments expérimentaux qui peuvent être pertinents pour sa discussion.

Du fait de la dimension finie du condensat, le spectre des phonons est discret et vérifie la relation de dispersion suivante [91] :

$$\omega_k^2 = \frac{k(k+3)}{4}\omega_z^2, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Les phonons sont ainsi séparés entre eux d'environ $\omega_z/2 \sim 2\pi \times 6\,$Hz. La condition de résonance $2\omega_\perp \simeq 2\omega_k$ suggère que la résurgence doit dépendre de la coïncidence ou non d'un niveau de

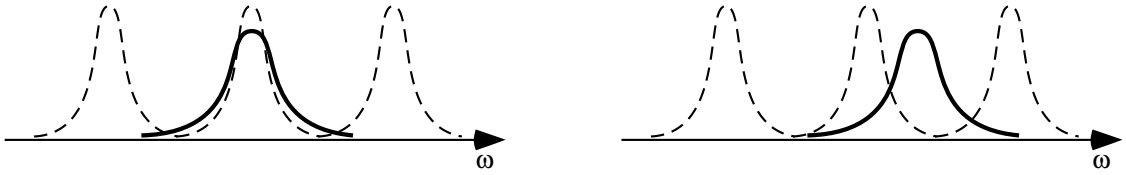


FIGURE 2.8 – L'efficacité du couplage entre le mode monopolaire (courbes en trait plein) et les phonons (courbes en traits pointillés) doit dépendre de la coïncidence en fréquence d'une paire de phonons et du mode monopolaire. A gauche : coïncidence parfaite, la résurgence doit être importante. A droite : coïncidence imparfaite, la résurgence doit être plus faible.

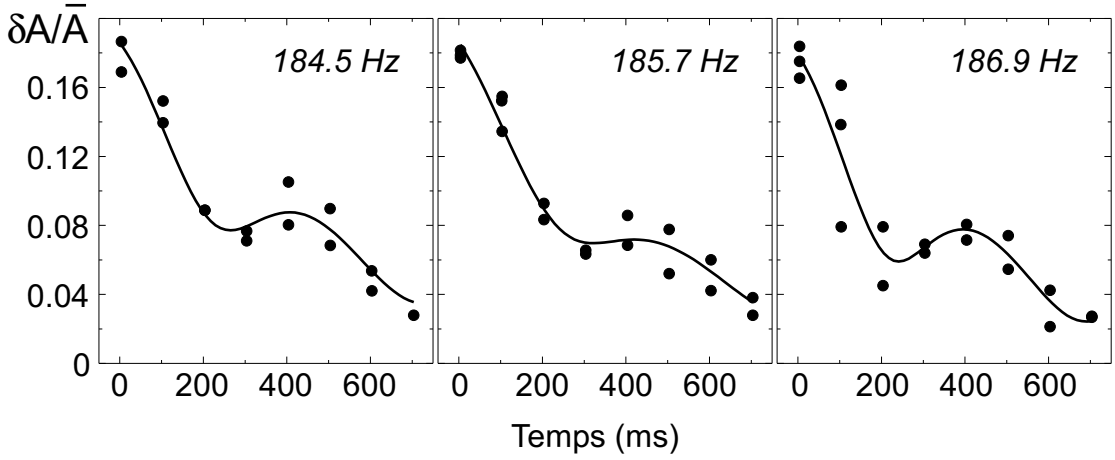


FIGURE 2.9 – Evolution de l'amplitude d'oscillation du mode monopolaire pour $\omega_\perp/2\pi$ =184.5 Hz, 185.7 Hz et 186.9 Hz. Les lignes en trait plein sont des ajustements par la fonction 2.16. Aucune tendance nette ne se dessine sur ces résultats, mais une étude plus poussée serait nécessaire pour conclure sur l'hypothèse d'une excitation des phonons longitudinaux.

phonons avec la fréquence $\omega_\perp$: en effet, la largeur de 1 ou 2 Hertz de la résonance monopolaire est faible devant l'écart entre phonons. En supposant que ceux-ci sont également peu amortis de sorte que leur spectre conserve son caractère discret, on constate que le mode monopolaire ne peut se coupler qu'à une seule paire de phonons à la fois. Si la fréquence $\omega_\perp$ varie, ce couplage peut être plus ou moins efficace selon que le mode monopolaire se couple exactement ou non à une paire de phonons(figure 2.8).

Nous avons ainsi modifié $\omega_\perp$ très légèrement au cours d'une série de trois expériences reportées sur la figure 2.9. Sur les trois ensembles de données, il semble que l'amplitude de la résurgence soit comparable. Pourtant ces trois situations ne peuvent toutes correspondre à une résonance exacte du monopôle et d'une paire de phonons, puisque l'écart entre ces derniers est estimé à 6 Hz. On devrait conclure d'un tel test que les phonons ne sont pas ces modes-relais que nous cherchons. Pour cela, il serait néanmoins souhaitable de disposer de données plus nombreuses, couvrant au moins un intervalle de 6 Hz.

Un dernier élément mérite d'être mentionné : il s'agit de la présence éventuelle de faibles termes en x^2z et y^2z dans le potentiel de piégeage. Ces termes pourraient coupler le mode monopolaire aux modes longitudinaux.

2.5.2 Excitation paramétrique de phonons (d'après Kagan et Maksimov)

L'hypothèse d'un couplage paramétrique du mode monopolaire avec les phonons reste l'hypothèse la plus convaincante pour expliquer la résurgence de la figure 2.7. Kagan et Maksimov ont prolongé les travaux publiés dans [80] afin d'étudier quantitativement cette hypothèse [71,92]. Ils ont pu ainsi montrer que le monopôle pouvait céder de l'énergie aux phonons puis la récupérer. Nous donnons ici les grandes lignes de leur raisonnement.

L'origine du couplage entre mode monopolaire et phonons longitudinaux peut être interprétée simplement en termes d'excitation paramétrique : en effet, lors de l'oscillation monopolaire, la densité ρ_0 au centre du nuage est modulée dans le temps à la fréquence $2\omega_\perp$. Or la vitesse du son au centre du nuage vaut $c = \sqrt{g\rho_0/2m}$. Cette dernière oscille donc à la même fréquence $2\omega_\perp$. Les phonons qui se propagent à la vitesse du son subissent ainsi une amplification paramétrique. Lors d'un tel processus, une fluctuation initiale est nécessaire : elle est donnée à $T > 0$ par l'occupation thermique des phonons, et à $T = 0$ par l'occupation faible mais non nulle due à la déplétion quantique. L'amortissement par les phonons est donc un mécanisme qui fonctionne même à $T = 0$.

Le point de départ des auteurs est un Hamiltonien de couplage :

$$\hat{H} = i\hbar W(\hat{c}_\parallel^\dagger \hat{c}_\parallel^\dagger \hat{c}_\perp - \hat{c}_\perp^\dagger \hat{c}_\parallel \hat{c}_\parallel)$$

dans lequel les opérateurs $\hat{c}_i$ sont les opérateurs de destruction d'une quasi-particule dans le mode i. En écrivant les équations d'évolution de ces opérateurs et en les remplaçant par des champs classiques, il est possible d'écrire un système non-linéaire de trois équations couplées pour les amplitudes b_i de ces modes et pour leur phase relative φ. Ces équations incluent un taux d'amortissement des phonons : ce dernier est évalué en ne prenant en compte que la conversion du mode de phonon excité en d'autres modes de phonons d'énergie plus basse. L'estimation proposée est dans l'intervalle $5 - 10\,\mathrm{s}^{-1}$.

La résolution du système de trois équations pour des conditions proches des conditions expérimentales de la figure 2.7 conduit à une variation non monotone de $b_\perp(t)$, avec un minimum autour de 200 ms qui coïncide avec un maximum de $b_\parallel$. Ce phénomène n'est observé que pour des excitations initiales de $b_\perp$ suffisamment grandes, en accord avec les données expérimentales.

2.6 Conclusion

Le mode monopolaire, malgré une structure simple, s'avère donc un mode à la dynamique très riche. Des symétries fondamentales semblent maintenir sa fréquence d'oscillation à la valeur limite de $2\omega_\perp$. Son amortissement s'est lui avéré très lent, phénomène qui est lié à la coïncidence accidentelle des fréquences d'oscillation du condensat et du nuage thermique ; il est vraisemblable que les mécanismes d'amortissement majeurs soient des collisions entre atomes non condensés. Enfin, le comportement aux temps longs s'est révélé surprenant, avec en particulier une résurgence sur des échelles de temps de plusieurs centaines de millisecondes. L'explication retenue met en jeu une conversion réversible d'énergie dans un autre mode.

Enfin il existe une proposition originale d'extension de ce travail, par Fedichev, Fischer et Recati [93]. Ces auteurs suggèrent d'exciter très fortement le mode monopolaire de telle sorte que l'écoulement devienne supersonique durant une partie des expansions/contractions. Le mécanisme de désexcitation prédominant à basse température serait dans cette situation la création de paires vortex-antivortex.

Deuxième partie

Débuts de rotation : écoulements irrotationnels

Sommaire

Introduction **61**

3 Mise en rotation d'un condensat **63**
3.1 Comment faire tourner des atomes piégés ? 63
3.1.1 La cuillère 63
3.1.2 Effets de la rotation sur une particule unique 65
3.1.3 Effets de la rotation sur un nuage thermique 66
3.2 Rotation perturbative du condensat : le mode quadrupolaire 68
3.2.1 Courbe de résonance du mode quadrupolaire 68
3.2.2 Modes propres d'un condensat infiniment long : mode quadrupolaire . . . 69
3.2.3 Moments cinétique et d'inertie associés aux modes propres 71
3.3 États stationnaires du condensat : excitation non-linéaire du mode quadrupolaire 72
3.3.1 Equations hydrodynamiques et forme d'équilibre du condensat 72
3.3.2 Déformations stationnaires du condensat 73
3.3.3 Un champ de vitesse irrotationnel et un condensat qui tourne 73
3.4 Exploration expérimentale des états stationnaires 74
3.4.1 Variation de Ω à ϵ constant 74
3.4.2 Variation de ϵ à Ω constant 76
3.5 Conclusion 78

4 Mode ciseaux d'un condensat tournant **79**
4.1 Mode ciseaux dans un piège statique 79
4.1.1 Le mode ciseaux est un mode quadrupolaire 79
4.1.2 Limite des faibles excitations : mouvement de ciseaux 80
4.1.3 Cas d'un piège presque isotrope : moment d'inertie et force de rappel . . 80
4.2 Mode ciseaux dans le référentiel tournant : approche analytique 81
4.2.1 Principe 81
4.2.2 Mode de plus basse fréquence 82
4.2.3 Brisure spontanée de symétrie et mode ciseaux 82
4.3 Observation expérimentale du mode ciseaux tournant 83
4.3.1 Séquence expérimentale 83
4.3.2 Oscillation de l'angle et de l'ellipticité 83
4.3.3 Dépendance en fonction de ϵ 84
4.3.4 Contrôle du mode ciseaux : adiabaticité 85
4.4 Conclusion 85

Introduction

A partir de ces pages — et jusqu'à la fin du manuscrit —, il n'est plus question que de condensats en rotation. Il faut toutefois se méfier de la sémantique : la langue a consacré le mot d'irrotationnel pour décrire un fluide dont le vecteur tourbillon est nul en tout point. Une fluide rotationnel est à l'opposé un fluide qui présente localement une structure de rotation. Rien n'est pourtant plus trompeur que de croire qu'un fluide irrotationnel ne tourne pas, ou qu'un écoulement rotationnel implique une rotation d'ensemble.

Aussi distinguerons nous les notions de rotation locale et de rotation d'ensemble. On dira d'un objet qu'il tourne à un instant donné si à cet instant son moment cinétique est non nul. Pour un solide, le vecteur tourbillon $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$ est uniforme et proportionnel au moment cinétique, de sorte que le passage d'une rotation locale ($\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}\neq 0$) à une rotation globale ($L_z\neq 0$) est immédiat. Le cas d'un fluide est naturellement différent, car de nombreux degrés de liberté supplémentaires sont à disposition. Certaines parties d'un fluide peuvent tourner dans un sens, d'autres dans un sens opposé, de sorte que dans son ensemble le fluide peut très bien ne pas tourner. La trainée turbulente dans un fluide visqueux est ainsi un exemple d'écoulement rotationnel n'impliquant aucune rotation d'ensemble.

A l'opposé, on peut se demander s'il est possible de faire tourner un fluide dans son ensemble sans qu'aucune de ses sous-parties ne présente de mouvement de rotation locale ; cette problématique s'applique en particulier aux condensats puisque leur champ de vitesse est par construction irrotationnel. Il apparaît tout de suite que tout mouvement de rotation solide est à exclure. Nous allons néanmoins montrer qu'il est possible, en déformant le condensat, de lui donner un moment cinétique important malgré la condition $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0$. Les solutions stationaires correspondantes sont basées essentiellement sur des écoulements quadrupolaires et ont été étudiées par Recati, Zambelli et Stringari [94]. On ne saurait dire assez l'importance de ces états stationaires tournants dans nos expériences : ils sont en effet le moyen unique et incontournable d'initier un mouvement de rotation dans un piège harmonique par des méthodes dynamiques. Ils constituent de ce fait le passage obligé de toutes nos expériences de rotation.

Le chapitre 3 commence par une présentation de notre outil de rotation (la cuillère) et de ses conséquences directes sur une particule unique et sur un nuage thermique. Nous décrivons ensuite les mouvements de rotation "irrotationnels". Une extension de ces études est proposée au chapitre 4, où sont reportés des résultats théoriques et expérimentaux sur un mode d'excitation qui se superpose à ces écoulements quadrupolaires.

Chapitre 3

Mise en rotation d'un condensat

3.1 Comment faire tourner des atomes piégés ?

3.1.1 La cuillère

Pour manipuler les atomes — et éventuellement les faire tourner — il faut disposer d'un outil adéquat, une cuillère qui puisse les entraîner comme on entraîne les particules d'un liquide. Cet outil a été développé en 1998-1999, antérieurement au travail de thèse décrit dans ce manuscrit [32]. Nous rappelons ici ses principales caractéristiques.

Potentiel dipolaire

La cuillère est obtenue à partir d'un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda_c \simeq 850\,\mathrm{nm}$. Ce faisceau est très désaccordé par rapport à la raie de résonance du ^{87}Rb de sorte que son effet principal est de déplacer les niveaux d'énergie électroniques[1]. Comme il est désaccordé vers le rouge, le niveau fondamental voit son énergie déplacée vers le bas proportionnellement à l'intensité de la cuillère :

$$\Delta E(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar\Gamma^2}{8\delta_c}\frac{I(\boldsymbol{r})}{I_{\mathrm{sat}}}. \tag{3.1}$$

Γ est la largeur du niveau excité ($5P_{3/2}$), $\delta_c = \omega_c - \omega_{\mathrm{at}} < 0$ le désaccord entre le laser et la fréquence atomique et I_{sat} l'intensité de saturation de la raie. Ce déplacement est négatif et peut être exprimé numériquement :

$$\frac{\Delta E}{k_B}(\mu\mathrm{K}) \simeq -5 \times 10^{-5}\, I(\mathrm{mW/mm^2}).$$

Le point essentiel est que cet effet dépend de l'intensité locale du laser, de sorte qu'en illuminant de manière inhomogène des atomes déjà piégés magnétiquement, on peut modifier l'allure du potentiel de piégeage.

La figure 3.1 montre comment le faisceau cuillère est installé sur l'expérience : le faisceau laser se propage le long de l'axe z et est focalisé sur les atomes par un lentille de focale 400 mm (lentille L_3). La taille typique du col du faisceau au niveau des atomes est de $20\,\mu$m, de sorte que la longueur de Rayleigh vaut 1.5 mm. Cette dernière longueur est à comparer à la longueur typique d'un condensat selon z, soit environ $100\,\mu$m. Le profil d'intensité du faisceau est donc approximativement invariant suivant z à l'échelle du condensat. Pour cette raison, le déplacement d'énergie (3.1) a une dépendance purement transverse : on le note $\Delta E(x, y)$.

[1] Son absorption par les atomes est de l'ordre de 1 photon par atome toutes les 10 secondes et sera négligée.

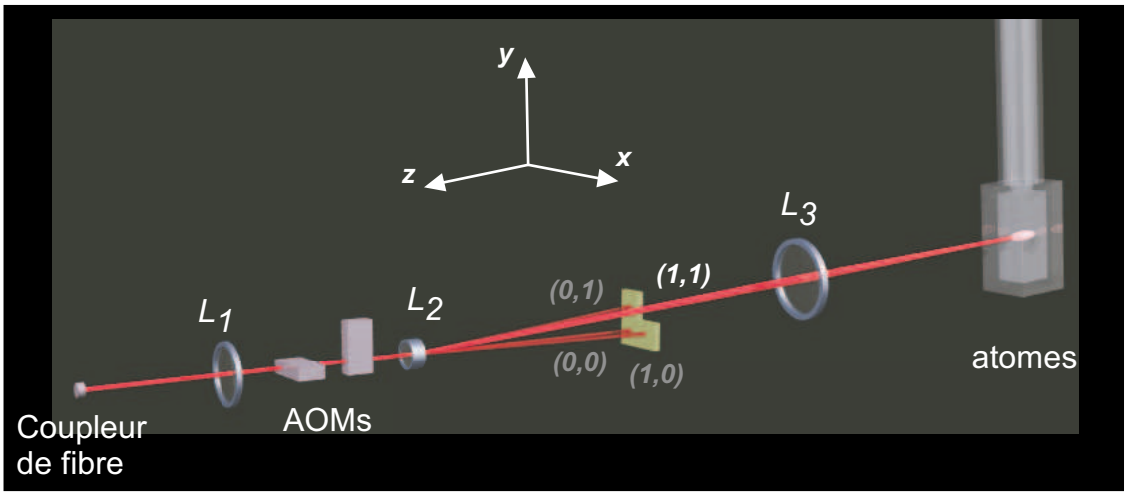


FIGURE 3.1 – Schéma de principe de la cuillère : un faisceau laser très désaccordé vers le rouge traverse deux modulateurs acousto-optiques croisés (AOMs). Le faisceau correspondant à l'ordre 1 de chaque AOM est focalisé sur les atomes par la lentille L_3.

Déplacements transverses et rotation

Le potentiel $V(x, y)$ ne réalise pas encore une véritable cuillère qui permette de remuer le condensat : il faut pour cela introduire une dépendance en temps non triviale. La figure 3.1 montre comment nous procédons : à sa sortie de fibre optique, le laser passe dans un système de deux modulateurs acousto-optiques (AOMs) croisés. Quatre faisceaux principaux peuvent être distingués parmi les ordres de diffraction : un faisceau (0,0) qui n'a subi aucune déviation, deux faisceaux (1,0) et (0,1) qui ont été déviés par un seul des deux AOMs, et enfin un faisceau (1,1) qui correspond à l'ordre un de chaque AOM. C'est ce dernier faisceau qui envoyé sur les atomes. Sa particularité est de pouvoir être déplacé à volonté en changeant la fréquence des AOMs. En imposant aux deux AOMs horizontal et vertical des fréquences $f_{\text{hor}}(t)$ et $f_{\text{vert}}(t)$, on obtient un faisceau qui se déplace au niveau des atomes en suivant une courbe paramétrée dans le plan xy donnée par $x(t) = \alpha f_{\text{hor}}(t)$ et $y(t) = \beta f_{\text{vert}}(t)$ (α et β ne sont pas rigoureusement égaux).

Le potentiel tournant

Voyons maintenant à quoi ressemble le potentiel dipolaire que nous avons utilisé dans la plupart de nos expériences de rotation et qui constitue à proprement parler notre cuillère. La forme de base telle qu'elle est vue par les atomes est illustrée sur la figure 3.2 : il s'agit de deux faisceaux éloignés d'environ $20\,\mu$m, une taille comparable au col du laser. Le dédoublement du faisceau (1,1) qui conduit à cette paire de faisceaux est temporel : un unique faisceau saute très rapidement ($\sim$100 kHz) d'une position à l'autre sous le contrôle des AOMs. Les atomes ne sont pas sensibles à des fréquences grandes devant les fréquences de piégeage de sorte qu'ils voient un potentiel moyenné qui leur semble provenir d'une paire de faisceaux.

La paire de faisceaux peut être mise en rotation toujours par le biais des AOMs, à une fréquence de rotation Ω contrôlée très précisément : cet ensemble de deux faisceaux en rotation autour de l'axe z constitue notre cuillère. Le référentiel $\mathcal{R}_\Omega$ qui tourne avec la cuillère est bien entendu un référentiel privilégié. On lui associe un système de coordonnées (X, Y, z) en rotation à la vitesse Ω autour de l'axe z (figure 3.2) :

$$\begin{cases} X = x\cos(\Omega t) + y\sin(\Omega t) \\ Y = -x\sin(\Omega t) + y\cos(\Omega t) \end{cases} \tag{3.2}$$

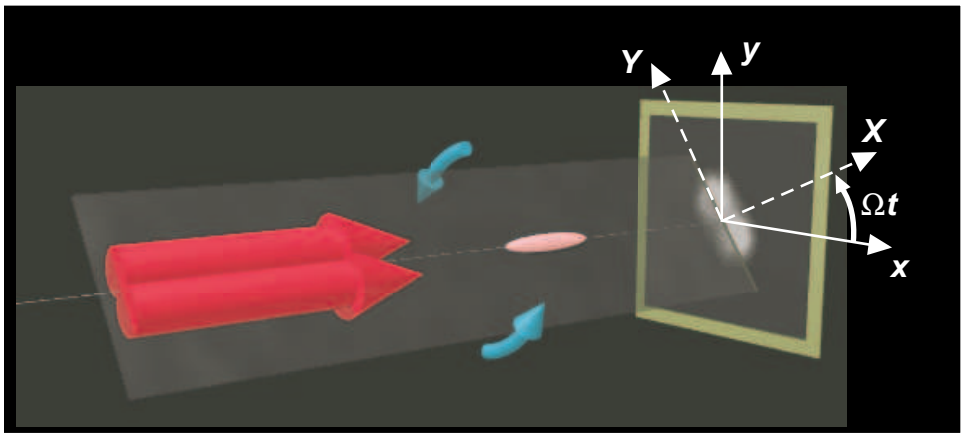


FIGURE 3.2 – En tournant autour d'un axe commun, les deux faisceaux composant la cuillère créent un potentiel tournant au niveau des atomes (au centre).

Le profil d'intensité est indépendant du temps dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$ et présente deux taches décalées de $\pm a/2$ le long de Y :

$$I(X,Y) = I_0\, e^{-\frac{2X^2}{w^2}} \left[e^{-\frac{2(Y-a/2)^2}{w^2}} + e^{-\frac{2(Y+a/2)^2}{w^2}} \right].$$

On réalise généralement $a \sim w \sim 20\,\mu$m ; ces grandeurs sont suffisamment grandes devant la taille transverse des condensats étudiés ($5-10\,\mu$m) pour que l'on puisse faire un développement limité des exponentielles et ne conserver que les termes quadratiques. Le potentiel lumineux vu par les atomes se déduit de (3.1). Il prend la forme générale suivante dans $\mathcal{R}_\Omega$:

$$V(X,Y) = \frac{1}{2} m(\Delta\omega_\perp^2)(X^2+Y^2) + \frac{1}{2} m\omega_\perp^2 \epsilon (X^2 - Y^2). \tag{3.3}$$

C'est un potentiel harmonique dans lequel on distingue deux contributions : le premier terme est une modification globale de la fréquence transverse, qui de sa valeur $\omega_\perp$ dans un piège magnétique seul passe à une valeur plus élevée. Cet effet est généralement de quelques pourcents et joue un rôle mineur dans nos expériences. Ce terme sera souvent omis.

Le second terme contient toute la substance de la cuillère : c'est lui qui brise l'invariance par rotation autour de l'axe z. Exprimé dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_0$, il contient une dépendance explicite en temps qui autorise le transfert de moment cinétique, l'excitation de modes de surfaces, bref toute la mise en rotation d'un condensat telle qu'elle sera décrite dans la suite de ce manuscrit. On l'exprime en fonction des paramètres du piège magnétique et d'un paramètre d'anisotropie ϵ qui en donne la force. ϵ est généralement compris entre 0 et 20 %.

On notera pour finir tout l'intérêt qu'il y a à dédoubler le faisceau cuillère : on élimine ainsi les termes linéaires en Y qui apparaîtraient sinon dans V. La présence de tels termes n'enlèverait pas à la cuillère ses propriétés essentielles mais serait susceptible d'exciter le mouvement du centre de masse du nuage, ce qui n'est généralement pas souhaité.

3.1.2 Effets de la rotation sur une particule unique

Nous décrivons ici la dynamique dans le plan xy d'une particule placée dans la somme des potentiels magnétique (U) et dipolaire (V), ce dernier étant mis en rotation à une fréquence fixe Ω. Le potentiel total est indépendant du temps dans le référentiel $\mathcal{R}_\Omega$, où les équations du

mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\omega_\perp^2(1+\epsilon)X + \Omega^2 X + 2\Omega\dot{Y} \\ \ddot{Y} = -\omega_\perp^2(1-\epsilon)Y + \Omega^2 Y - 2\Omega\dot{X} \end{cases} \tag{3.4}$$

Dans ce système linéaire, on reconnaît les contributions des forces d'inertie (termes en Ω^2) et de Coriolis (termes en Ω). En recherchant les solutions sous la forme $(X_0, Y_0)\exp(\Lambda t)$, on montre que Λ doit être solution de l'équation bicarrée suivante :

$$\Lambda^4 + 2(\omega_\perp^2 + \Omega^2)\Lambda^2 + (\omega_\perp^2 - \Omega^2)^2 - \epsilon\omega_\perp^4 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est toujours positif, ce qui signifie que Λ^2 est toujours réel. En particulier, si Λ^2 est positif, il existe une racine Λ positive et le système est instable dynamiquement. Cela se produit lorsque :

$$\omega_\perp^2(1-\epsilon) < \Omega^2 < \omega_\perp^2(1+\epsilon). \tag{3.5}$$

Le système est donc instable si la fréquence de rotation appartient à un petit intervalle centré sur $\omega_\perp$. On remarquera que les bornes de cet intervalle sont les fréquences transverses dans le référentiel tournant, soit :

$$\omega_X = \omega_\perp\sqrt{1+\epsilon}, \qquad \omega_Y = \omega_\perp\sqrt{1-\epsilon}. \tag{3.6}$$

L'apparition d'une instabilité pour $\Omega > \omega_Y$ tient à ce que, lorsque la fréquence de rotation dépasse la fréquence de piégeage, la force centrifuge devient plus forte que la force de confinement dans la direction Y. Le fait que les solutions soient de nouveau stables pour $\Omega > \omega_X$ est plus surprenant : cela s'explique par l'action de la force de Coriolis qui stabilise les trajectoires malgré un potentiel déconfinant. Un phénomène analogue stabilise les trajectoires des ions dans les pièges de Penning, sous l'action cette fois de la force de Lorentz [95].

3.1.3 Effets de la rotation sur un nuage thermique

Rotation d'un nuage thermique

Imaginons que nous placions un nuage d'atomes froids non condensés dans un piège tournant constitué des potentiels U et V, ce dernier tournant à la fréquence Ω. Le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$ est le seul dans lequel l'énergie potentielle individuelle des atomes est indépendante du temps. Le nuage thermique, du fait de la dissipation apportée par les collisions, doit donc tendre vers un état stationnaire dans ce référentiel. L'échelle de temps de cette évolution est l'ordre du temps de collision τ. La forme d'équilibre du nuage sera celle d'un nuage piégé dans un potentiel harmonique dont la fréquence transverse $\omega_\perp$ a été diminuée sous l'effet de la force centrifuge :

$$\tilde{\omega}_\perp = \sqrt{\omega_\perp^2 - \Omega^2}. \tag{3.7}$$

La mise en rotation d'un nuage thermique peut être étudiée à partir de l'équation de Boltzmann par une méthode des moments [96,97]. On montre ainsi qu'un gaz entraîné par un potentiel harmonique $V = m\omega_\perp^2\epsilon(X^2 - Y^2)/2$ tournant à la vitesse Ω, atteint son état stationnaire en un temps de l'ordre de $\tau_{\rm up} \simeq 8\tau\Omega^2/\epsilon^2\omega_\perp^2$. Pour des paramètres expérimentaux typiques ($\Omega = 0.7\omega_\perp$ et $\epsilon = 0.1$), ce temps de mise en rotation est de l'ordre de $400\tau \sim 6\,$s. Cette valeur plutôt grande suggère que la mise en rotation d'un nuage classique est difficile est qu'elle doit être perturbée par les imperfections du piège.

Effet d'une anisotropie transverse du piège magnétique

Si les fréquences transverses du piège ω_x et ω_y ne sont pas rigoureusement égales, le piège magnétique contient une anisotropie susceptible d'arrêter un gaz en rotation. C'est le problème inverse du précédent, où un gaz initialement en rotation à la vitesse Ω évolue dans un potentiel qui est indépendant du temps dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_0$:

$$U_{\text{reel}} = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2) + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\eta(x^2-y^2). \tag{3.8}$$

η caractérise l'anisotropie du piège et provient essentiellement de la gravitation (Eq. 1.3). Il vaut $\sim 1\%$ dans nos expériences.

La situation de l'évolution d'un gaz initialement en rotation dans un piège anisotrope au repos peut sembler symétrique de la précédente, où nous étudiions dans un piège anisotrope en rotation l'évolution vers l'équilibre d'un gaz initialement au repos. Mais on montre que le temps nécessaire pour atteindre l'état stationnaire de repos vaut cette fois $\tau_{\text{down}} \simeq 8\tau\eta_c^2/\eta^2$ où $\eta_c = 1/4\omega_\perp\tau \sim 2.5\%$. Cette différence ne doit pas étonner : les deux référentiels $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_\Omega$ ne sont pas équivalents puisque l'un tourne et l'autre pas. Dans ce dernier cas, on a approximativement $\tau_{\text{down}} \sim 50\tau$.

La comparaison des temps $\tau_{\text{up}} \sim 400\tau$ et $\tau_{\text{down}} \sim 50\tau$ met en évidence une forte asymétrie entre la mise en rotation et l'arrêt d'un gaz en rotation. Ce dernier phénomène est généralement beaucoup plus rapide. Dans une expérience réaliste où l'on tente de faire tourner le nuage thermique avec une anisotropie tournante ϵ alors que le piège magnétique présente une faible anisotropie statique η, il y a compétition entre les mécanismes de mise en rotation et de freinage de cette rotation. Comme le mécanisme le plus rapide est celui de freinage, le gaz reste pratiquement au repos [2]. Ceci explique que lors des études préliminaires des condensats en rotation[3], il n'ait pas été possible de mettre le nuage thermique en rotation. Depuis, l'équipe d'Eric Cornell à Boulder a repoussé cette limite technique en égalant les fréquences ω_x et ω_y à mieux que 10^{-3}. Le nuage thermique a ainsi pu être mis en rotation, et la condensation atteinte dans un référentiel en rotation [98].

Rotation critique d'un nuage thermique

Le nuage thermique, du fait de l'anisotropie statique du piège, semble voué à rester insensible aux mouvements de la cuillère. Cette image prédomine effectivement pour les fréquences de rotation qui n'approchent pas de trop près les fréquences transverses du piège ω_x et ω_y (ou encore de leur moyenne $\omega_\perp$). Néanmoins, lorsque Ω devient de l'ordre de ces fréquences, plusieurs modes peuvent être excités de manière résonnante, et le nuage thermique devient fortement susceptible. Ce domaine de fréquences de rotation est souvent appelée domaine de rotation critique.

Quels modes peuvent être excités dans un nuage thermique lorsque $\Omega \sim \omega_\perp$? Le premier est le mode dipolaire, dont la fréquence est $\omega_\perp$. Il s'agit d'une oscillation du centre de masse découplée des degrés de liberté interne du nuage. Un second mode peut être excité : il s'agit du mode quadrupolaire $m_z = +2$. Ce mode purement transverse consiste en une paire de lobes de surface tournant à la fréquence $\omega_\perp$ [87].

Nous avons exploré expérimentalement la région $\Omega \sim \omega_\perp$; on part d'un nuage thermique de $\sim 10^7$ atomes à environ 5 microkelvins, température à laquelle le nuage n'est pas condensé. Ce nuage est excité par une cuillère tournant à $\Omega = \omega_\perp$ et caractérisée par une anisotropie $\epsilon = 0.09$. Après un temps variable d'excitation, on procède à la séquence temps de vol/imagerie habituelle.

[2] Ceci a été vérifié dans des simulations numériques [96], où l'on voit le gaz atteindre une valeur stationnaire du moment cinétique qui est faible devant la valeur attendue en cas d'équilibre dans $\mathcal{R}_\Omega$.

[3] Ces travaux sont antérieurs au présent travail de thèse. Aucun changement d'aspect du nuage thermique n'avait été observé.

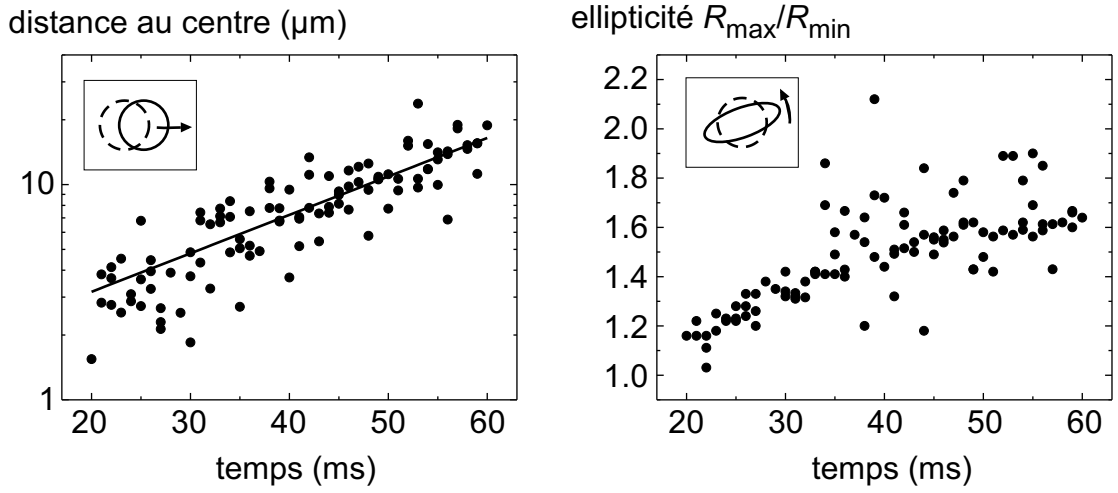


FIGURE 3.3 – Comportement du nuage thermique (10^7 atomes à $5\,\mu$K) à la rotation critique $\Omega \sim \omega_\perp$: la distance au centre (figure de gauche) ainsi que l'ellipticité (figure de droite) augmentent continûment avec le temps d'excitation. Dans chaque graphique, un insert décrit la géométrie du mode excité.

Les nuages sont imagés dans le plan xy, puis ajustés par une gaussienne à deux dimensions dont les axes peuvent tourner librement dans le plan. Les résultats sont reportés sur la figure 3.3.

On constate que la distance au centre du piège augmente exponentiellement avec le temps, signe d'une excitation résonante du centre de masse du nuage — ou de manière équivalente du mode dipolaire. Parallèlement, on note une augmentation continue du rapport $R_{\max}/R_{\min}$ qui témoigne de l'excitation du mode quadrupolaire. Par le biais de ces deux modes, la cuillère a donc augmenté le moment cinétique du nuage thermique. On notera toutefois le prix à payer : le nuage est déstabilisé et s'éloigne de plus en plus rapidement du centre du piège. Ainsi, s'il est possible de contourner les difficultés liées à l'anisotropie statique en excitant deux modes, il n'est pas envisageable d'utiliser cette méthode pour produire un nuage en rotation dont le centre de masse soit immobile.

3.2 Rotation perturbative du condensat : le mode quadrupolaire

Dans le cas d'un condensat, nous allons montrer que les fréquences des modes dipolaires et quadrupolaires ne sont pas égales, de sorte qu'il est possible d'exciter le mode quadrupolaire sélectivement ; le mode quadrupolaire ressortira de cette analyse comme une première manière de faire tourner un condensat.

3.2.1 Courbe de résonance du mode quadrupolaire

Commençons par donner un résultat expérimental, sous la forme d'une courbe de résonance (figure 3.4) : il s'agit de la susceptibilité linéaire du condensat en réponse à une excitation par une cuillère tournante. La séquence expérimentale comprend la formation d'un condensat au repos dans un piège de fréquence transverse $\omega_\perp/2\pi = 186.0\,\text{Hz}$, son excitation à une fréquence Ω pendant une durée de six périodes de rotation ($6 \times 2\pi/\Omega$), et enfin un temps de vol suivi de l'habituelle imagerie par absorption. L'observable mesurée et reportée sur la figure 3.4 est l'ellipticité transverse du nuage, définie comme le rapport de son rayon transverse le plus grand sur son rayon transverse le plus petit. Cette quantité est clairement résonante autour de $\Omega/2\pi \simeq$

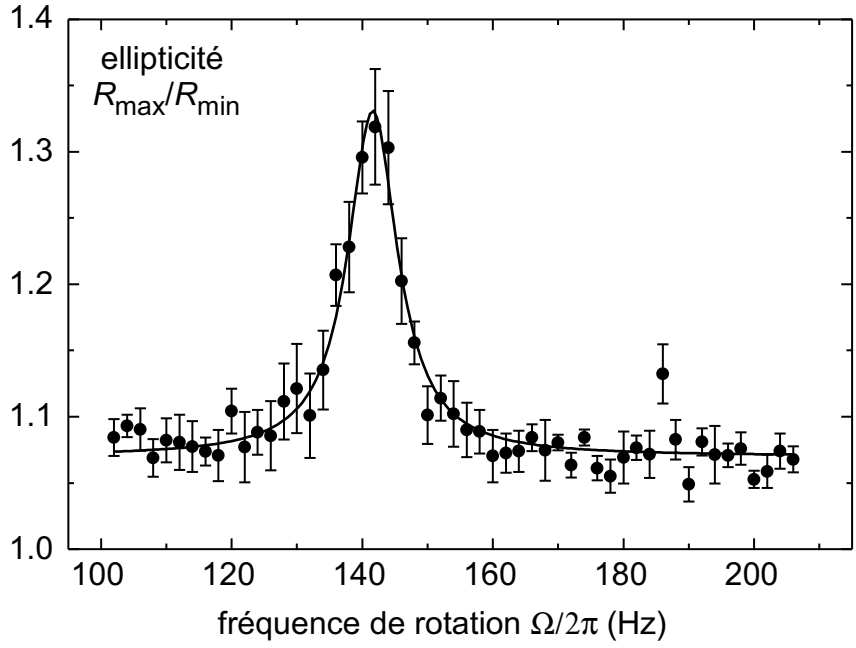


FIGURE 3.4 – Ellipticité transverse du condensat en fonction de la fréquence de rotation de la cuillère. La mesure est faite après une excitation qui tourne à Ω durant environ six périodes de rotation. Chaque point est la moyenne de cinq valeurs correspondant à des temps d'excitation très légèrement différents. La ligne pleine est un ajustement lorentzien.

141.3 Hz, valeur qu'il faut comparer à la fréquence transverse du piège magnétique $\omega_\perp/2\pi \simeq$ 186 Hz. Une excitation de l'ellipticité du nuage se produit donc à des fréquences de rotation nettement inférieures à la fréquence critique $\Omega = \omega_\perp$.

Alors qu'un nuage thermique ne devient elliptique sous l'effet d'une cuillère tournante que lorsque $\Omega = \omega_\perp$ (figure 3.3), on constate qu'un condensat répond à des fréquences nettement plus basses. Nous allons montrer que cette propriété essentielle s'explique très bien lorsque l'on étudie les modes quadrupolaires transverses dans le régime de Thomas-Fermi.

3.2.2 Modes propres d'un condensat infiniment long : mode quadrupolaire

Recherche des modes transverses

Nous partons d'un condensat infiniment long ($\omega_z/\omega_\perp \sim 0$). La recherche des modes propres de ce condensat peut se faire en linéarisant les équations hydrodynamiques (1.21) autour de la solution stationnaire :

$$\rho_0 = \frac{\mu - U(\boldsymbol{r})}{g}, \qquad \boldsymbol{v}_0 = 0,$$

où $U = m\omega_\perp^2 r_\perp^2/2$. On pose pour cela $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ et $\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{v}$. Les équations hydrodynamiques conduisent à l'équation suivante pour $\delta\rho$:

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = \frac{g}{m}\boldsymbol{\nabla}\left[\rho_0 \boldsymbol{\nabla}(\delta\rho)\right]. \tag{3.9}$$

On notera que la forme du piège n'intervient que dans l'expression de ρ_0. Le terme de droite comprend deux dérivations spatiales ainsi qu'une multiplication par ρ_0 qui est d'ordre 2 en $r_\perp$. Si $\delta\rho$ est un polynôme de degré N en $r_\perp$, le membre de droite est donc également un polynôme de degré N. C'est aussi le cas du membre de gauche, de sorte que nous pouvons rechercher les

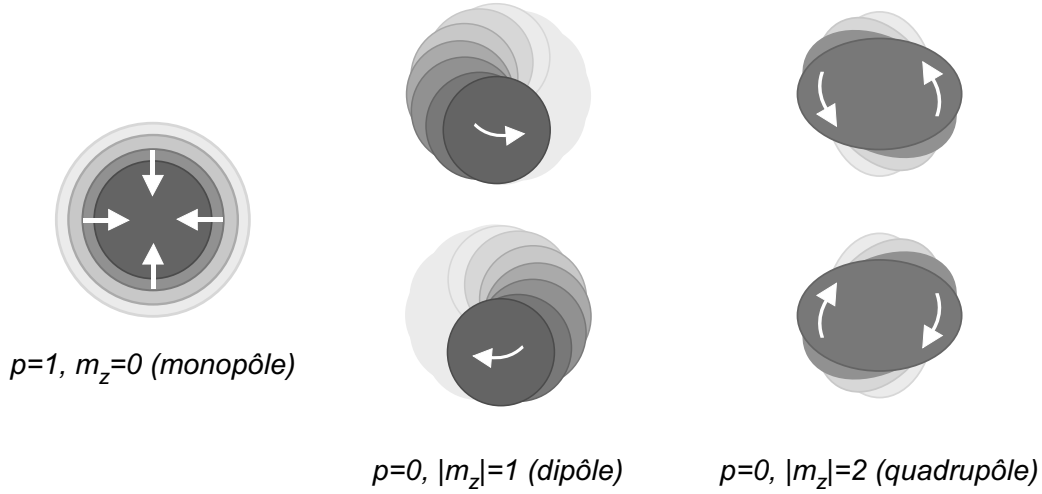


FIGURE 3.5 – Modes d'excitation d'un condensat cylindrique. Le condensat est représenté à plusieurs instants par différents niveaux de gris. Le mode monopolaire est un mode d'excitation purement radial, alors que les autres sont des modes d'excitation purement angulaires, pouvant tourner dans les deux sens.

solutions de (3.9) sous la forme de polynômes. Afin de respecter la symétrie de révolution autour de l'axe z, il est commode de séparer contributions angulaire et radiale :

$$\delta\rho(t) = e^{im_z\theta} r_\perp^{|m_z|} P(r_\perp^2) e^{-i\omega t}.$$

où P est un polynôme de degré p. En injectant cette forme dans (3.9), on trouve des relations sur les coefficients du polynôme P ainsi que la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = \omega_\perp^2 (2p + |m_z| + 2p|m_z| + 2p^2). \tag{3.10}$$

Les modes dans le plan xy sont donc repérés par deux nombres quantiques p et m_z, le premier donnant le nombre de nœuds dans la direction radiale[4], et le second la symétrie du mode par rapport à l'axe z. On notera la symétrie entre les deux sens de rotation autour de l'axe z, traduite par l'invariance de la fréquence dans la transformation $m_z \to -m_z$.

La figure 3.5 représente schématiquement les modes les plus simples. Le mode $(p = 1, m_z = 0)$ est le mode de respiration $\delta\rho \propto r_\perp^2 e^{i\omega t}$ qui a fait l'objet du second chapitre et pour lequel l'équation (3.10) redonne la fréquence $\omega = 2\omega_\perp$. Nous allons détailler maintenant les modes dipolaires et quadrupolaires.

Modes dipolaires

Les modes dipolaires sont les modes pour lequel $p = 0$ et $m_z = \pm 1$. Ils ne présentent pas de nœud dans la direction radiale. Pour ces modes, on a $\delta\rho = A_1 r_\perp e^{\pm i\theta} e^{-i\omega t}$. Si l'on calcule la valeur moyenne $\langle x \rangle$ lors de cette excitation, on constate que cette valeur vaut :

$$\langle x \rangle = \frac{\int \rho x}{\int \rho} = r_0 \cos(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad r_0 = \frac{A_1 R_\perp^2}{2\rho_0(0)},$$

où $R_\perp$ est le rayon de Thomas-Fermi du nuage et $\rho_0(0)$ sa densité centrale. Pour $\langle y \rangle$, on trouve :

$$\langle y \rangle = m_z r_0 \sin(\omega t).$$

[4] On montre en effet que les signes des coefficients de P sont alternés.

Comme cela a été représenté sur la figure 3.5, les modes dipolaires correspondent donc à un mouvement du centre de masse selon des orbites circulaires gauche ($m_z = 1$) ou droite ($m_z = -1$). Leur fréquence, déduite de (3.10), vaut tout simplement $\omega_\perp$. Ce résultat signifie que l'oscillation du centre de masse est un mode propre du condensat, décorrélé des autres degrés de liberté, et qu'elle se produit à la fréquence attendue classiquement $\omega_\perp$.

Modes quadrupolaires

Passons aux modes $m_z = \pm 2$, appelés modes quadrupolaires. Leur structure est donnée par $\delta\rho = A_2 r_\perp^2 e^{\pm 2i\theta} e^{-i\omega_{\pm 2}t}$, avec $\omega_{\pm 2} = \sqrt{2}\omega_\perp$. On peut calculer la valeur des moments quadrupolaires $\langle x^2 - y^2\rangle$ et $\langle xy\rangle$ dans le référentiel du laboratoire :

$$\langle x^2 - y^2\rangle = \langle x^2 + y^2\rangle \delta_0 \cos(\omega_{\pm 2} t),$$
$$\langle xy\rangle = -\langle x^2 + y^2\rangle m_z \frac{\delta_0}{4} \sin(\omega_{\pm 2} t).$$

On a introduit la grandeur δ_0 :

$$\delta_0 = \frac{A_2 R_\perp^2}{\rho_0(0)},$$

grandeur qui caractérise l'amplitude du mode. On peut vérifier que le mode quadrupolaire $m = +2$ correspond à une compression dans une direction et à un étirement dans la direction orthogonale, le tout tournant dans le sens direct à la fréquence $\omega_{+2}/2 = \omega_\perp/\sqrt{2}$ (figure 3.5). Le mode quadrupolaire $m_z = -2$ tourne à la même fréquence, mais dans le sens opposé.

L'excitation en ellipticité de la figure 3.4 s'identifie à une excitation du mode quadrupolaire $m_z = +2$. Cela n'est pas surprenant si l'on considère la forme du potentiel créé par la cuillère 3.3 : il contient explicitement des termes en XY, qui se couplent directement au quadrupôle. La fréquence centrale de la résonance (141.3 Hz) est proche de $\omega_{+2}/2 = \omega_\perp/\sqrt{2} = 131.5\,\text{Hz}$, quoique non parfaitement égale à cette dernière. L'écart observé tient probablement au fait que la présence de la cuillère augmente légèrement la fréquence transverse (Eq. 3.3) par rapport à la valeur mesurée dans un piège magnétique nu.

3.2.3 Moments cinétique et d'inertie associés aux modes propres

Lorsque les modes dipolaires et quadrupolaires sont excités, le nuage a un moment cinétique par particule $\langle L_z\rangle$ non nul :

$$\langle L_z\rangle_1 = m\omega_\perp x_0^2 \qquad (m_z = 1) \tag{3.11}$$
$$\langle L_z\rangle_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} m\omega_\perp R_\perp^2 \delta_0^2 \qquad (m_z = 2). \tag{3.12}$$

Il est intéressant de calculer le moment d'inertie du nuage dans chaque cas :

$$\Theta_1 = \frac{\langle L_z\rangle_1}{\omega_\perp} = m\langle r^2\rangle \qquad (m_z = 1) \tag{3.13}$$
$$\Theta_2 = \frac{\langle L_z\rangle_2}{\omega_\perp/\sqrt{2}} = m\langle r^2\rangle \delta_0^2 \qquad (m_z = 2). \tag{3.14}$$

Le moment d'inertie associé au dipôle est ainsi identique à celui d'un objet classique. Néanmoins on conviendra que ce mouvement ne présente que peu d'intérêt car il n'implique aucune rotation autour du centre de masse du condensat, mais plutôt une translation circulaire autour d'un axe fixe.

Le mode quadrupolaire est très différent : il semble n'entraîner qu'une partie des atomes, que l'on peut schématiquement considérer comme étant ceux contenus dans les lobes de déformation.

En conséquence le moment d'inertie associé apparaît être beaucoup plus petit que celui d'un objet classique tant que δ_0 reste faible. Le mode quadrupolaire permet d'initier un mouvement de rotation, mais dans de modestes proportions tant que nous sommes dans le régime linéaire $\delta_0 \ll 1$. Pour injecter beaucoup de moment cinétique dans le condensat, nous devons donc comprendre le comportement du mode quadrupolaire dans son régime non-linéaire.

3.3 États stationnaires du condensat : excitation non-linéaire du mode quadrupolaire

L'analyse linéaire précédente nous fait pressentir le rôle que peut jouer le mode quadrupolaire dans les expériences de rotation : il contient du moment cinétique, et il se couple à la cuillère dans un domaine de fréquence où le centre de masse n'est pas affecté. Nous pouvons donc essayer de forcer ce mode avec la cuillère au-delà du régime linéaire.

3.3.1 Equations hydrodynamiques et forme d'équilibre du condensat

Nous recherchons la forme d'équilibre du condensat en présence d'une cuillère tournant à Ω. Pour cela, nous écrivons les équations hydrodynamiques dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$:

$$m\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U + V + g\rho - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\right) = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot[\rho(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})] = 0. \tag{3.16}$$

où $\boldsymbol{v}$ désigne (volontairement) le champ de vitesse dans le référentiel du laboratoire[5]. Les gradients s'entendent par rapport aux coordonnées X et Y dans $\mathcal{R}_\Omega$.

Suivant [94], nous recherchons le champ de vitesse sous la forme :

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{\nabla}(XY) = \alpha\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

L'équation 3.15 conduit immédiatement à l'expression de la densité stationnaire, qui reste une parabole inversée :

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{g}\left[\tilde{\mu} - \frac{1}{m}(\tilde{\omega}_X^2 X^2 + \tilde{\omega}_Y^2 Y^2 + \omega_z^2 z^2)\right] \tag{3.18}$$

où $\tilde{\mu}$ est une constante, et où les fréquences effectives sont données par :

$$\tilde{\omega}_X^2 = (1+\epsilon)\omega_\perp^2 + \alpha^2 - 2\alpha\Omega \tag{3.19}$$

$$\tilde{\omega}_Y^2 = (1-\epsilon)\omega_\perp^2 + \alpha^2 + 2\alpha\Omega. \tag{3.20}$$

Avec l'équation de continuité (3.16), on montre enfin que α vérifie une équation de degré trois :

$$\alpha^3 + \alpha(\omega_\perp^2 - 2\Omega^2) + \epsilon\Omega\omega_\perp^2 = 0. \tag{3.21}$$

Une solution α de cette équation caractérise complètement un état stationnaire possible du condensat.

[5] Ces équations se déduisent des équations 1.24 par deux étapes : la première est le passage dans le référentiel tournant pour toutes les quantités y compris la vitesse. Il suffit pour cela d'ajouter un terme centrifuge dans l'équation d'Euler. La seconde étape consiste à remplacer la vitesse dans le référentiel tournant par $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ où $\boldsymbol{v}$ désigne la vitesse dans le référentiel du laboratoire.

3.3.2 Déformations stationnaires du condensat

Tout d'abord, tâchons de relier α aux caractéristiques géométriques du condensat. On peut montrer que :

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_X^2 - \tilde{\omega}_Y^2}{\tilde{\omega}_X^2 + \tilde{\omega}_Y^2}. \tag{3.22}$$

Compte-tenu de la définition des rayons de Thomas-Fermi, cette relation prend la forme :

$$\alpha = \Omega \frac{R_X^2 - R_Y^2}{R_X^2 + R_Y^2} = \Omega\delta. \tag{3.23}$$

Au facteur Ω près, α est donc égal à la déformation quadrupolaire δ. Il prend des valeurs dans l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$, les valeurs négatives correspondant à un condensat ayant son axe long dans la direction faible du piège tournant, et la valeur nulle correspondant à des condensats ronds.

On a tracé sur la figure 3.6 les solutions α en fonction de Ω, le tout pour plusieurs valeurs de ϵ. Deux branches apparaissent[6] pour $\epsilon \neq 0$, issues d'une structure en bifurcation à $\epsilon = 0$: une branche inférieure (I) couvrant toutes les valeurs de Ω, et une branche supérieure (II) pliée en deux et ne couvrant qu'un intervalle $\Omega \in [\Omega_c(\epsilon), \omega_\perp]$. Suivant les valeurs de Ω et de ϵ, il existe donc de une à trois solutions stationnaires. Il a été montré dans [94] que la partie supérieure ($\partial\alpha/\partial\Omega > 0$) de la branche (II) est instable vis à vis de petites oscillations quadrupolaires. La partie inférieure de cette branche est stable et montre en particulier l'existence d'une région autour de $\omega_\perp$ où l'état stationnaire du nuage est quasiment rond : un condensat soumis à une cuillère tournant à la fréquence critique $\Omega = \omega_\perp$ ne devient pas elliptique, alors que le mouvement de son centre de masse est fortement excité. Ce comportement très différent de celui d'un gaz thermique a été étudié dans [4].

Enfin on peut noter qu'un condensat en rotation présente une brisure spontanée de symétrie : dans la limite $\epsilon \to 0$ (qui correspond à un piège à symétrie de révolution) le condensat admet des solutions stationnaires qui ne respectent pas la symétrie de révolution.

3.3.3 Un champ de vitesse irrotationnel et un condensat qui tourne

Le champ de vitesse de l'écoulement quadrupolaire est très différent du champ de vitesse de rotation solide auquel est généralement associé un mouvement de rotation (figure 3.7) : ce dernier est un champ de vitesse à symétrie de révolution et dont le rotationnel vaut 2Ω en tout point. Le champ quadrupolaire est quant à lui irrotationnel, puisqu'il dérive d'un potentiel. Il présente une ligne expulsante (première bissectrice de XY) et une ligne attractive perpendiculaire, cette figure d'ensemble tournant avec le référentiel $\mathcal{R}_\Omega$. On peut montrer que le moment cinétique par particule associé à cet écoulement est non nul et vaut :

$$\langle L_z \rangle = m\langle r_\perp^2 \rangle \delta^2 \Omega. \tag{3.24}$$

Ce résultat est analogue à celui trouvé dans la limite linéaire (Eq. (3.14)). Toutefois nous ne sommes plus dans la limite linéaire : δ pouvant devenir de l'ordre de 1 (figure 3.6), le moment cinétique du condensat $\langle L_z \rangle/\Omega$ peut donc s'approcher de la valeur classique $m\langle r_\perp^2 \rangle$. Cela se comprend aisément à partir de la figure 3.7 : un condensat très étiré selon la direction X a une densité non nulle uniquement près de l'axe X, où le champ de vitesse est très proche du champ de rotation solide.

La déformation du condensat rend donc possible un mouvement de rotation dans un écoulement par essence irrotationnel, c'est-à-dire pour lequel $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ en tout point du condensat. Ce

[6] Cette structure à deux branches, ainsi que la forme de l'équation cubique 3.21, évoquent l'excitation d'un oscillateur non-linéaire [99].

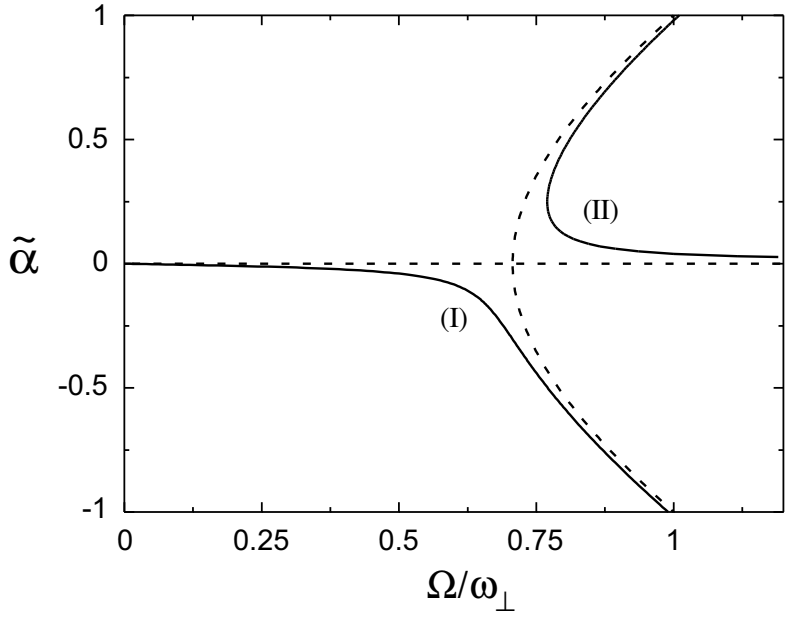


FIGURE 3.6 – Etats stationnaires d'un condensat dans un piège tournant : la grandeur tracée $\tilde{\alpha}$ est proportionnelle à la déformation du condensat. Pour une déformation du piège ϵ nulle, la branche solution bifurque pour $\Omega/\omega_\perp = 1/\sqrt{2}$. Lorsque ϵ augmente, deux branches se dessinent, l'une couvrant toutes les valeurs de Ω (branche (I)) et l'autre se repliant sur elle même au niveau d'un point de rebroussement (branche (II)).

mouvement de rotation, qui est le premier que nous rencontrons, n'est pas le seul qui soit une solution stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii. L'introduction de singularités dans la fonction d'onde ouvre en effet la voie à d'autres types de solutions ; ces singularités, appelées vortex, font l'objet des troisième et quatrième parties de ce manuscrit.

3.4 Exploration expérimentale des états stationnaires

Les solutions stationnaires que nous venons d'étudier définissent deux nappes dans l'espace $(\Omega, \epsilon, \alpha)$. D'un point de vue chronologique, nous avions initialement exploré ces nappes solutions dans le contexte de la nucléation des vortex [1]. Nous faisons ici le choix de présenter ces résultats indépendamment de leur lien avec l'apparition ou non de vortex dans le condensat. Ce dernier point est discuté dans la troisième partie du manuscrit.

3.4.1 Variation de Ω à ϵ constant

Un premier type d'expérience consiste à soumettre le condensat à une cuillère de force ϵ donnée, tout en augmentant lentement la vitesse de rotation : plus précisément, Ω croît linéairement de 0 à Ω_f en 75 périodes de la fréquence finale. Le condensat est imagé directement après ; on déduit le paramètre de déformation δ des rayons de Thomas-Fermi[7], puis α. Nous avons reporté sur la figure 3.8(a), en cercles pleins, la valeur absolue de $\tilde{\alpha} \equiv \alpha/\omega_\perp$ comme fonction de Ω_f. On constate que le condensat a initialement une forme ronde $\alpha = 0$ caractéristique de $\Omega/\omega_\perp = \epsilon = 0$, puis suit adiabatiquement la branche (I) jusqu'à $\Omega/\omega_\perp \sim 0.8$

[7]Les mesures étant effectuées après temps de vol, cette valeur de δ peut différer un peu de sa valeur dans le piège. Cet effet a été étudié théoriquement [32, 100, 101] et n'excède pas 10%. Nous le négligeons ici.

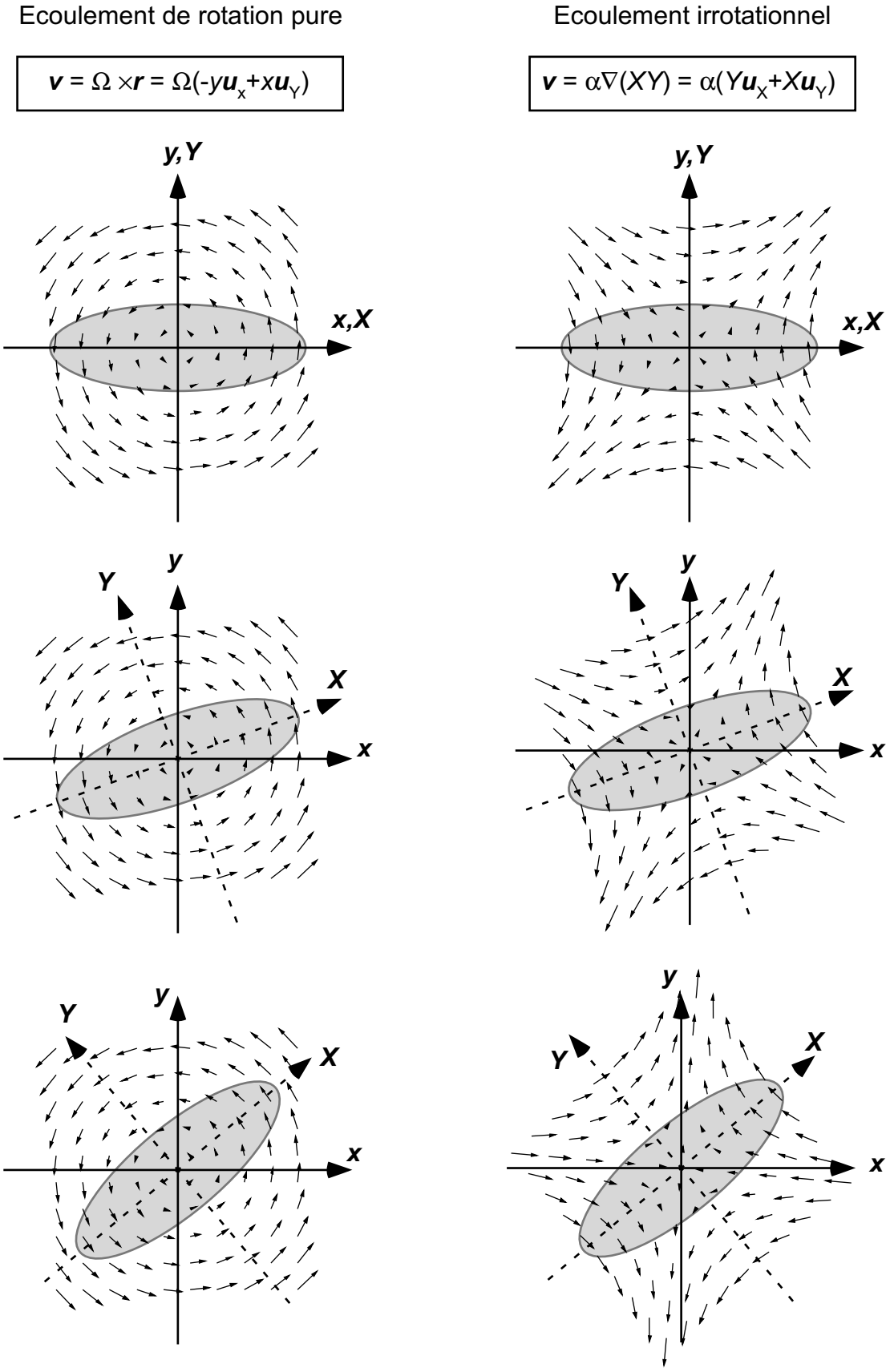


FIGURE 3.7 – Comparaison des champs de vitesse de rotation solide (gauche) et de rotation quadrupolaire (droite). Ce dernier écoulement est irrotationnel et ne dépend pas du temps dans le référentiel tournant.

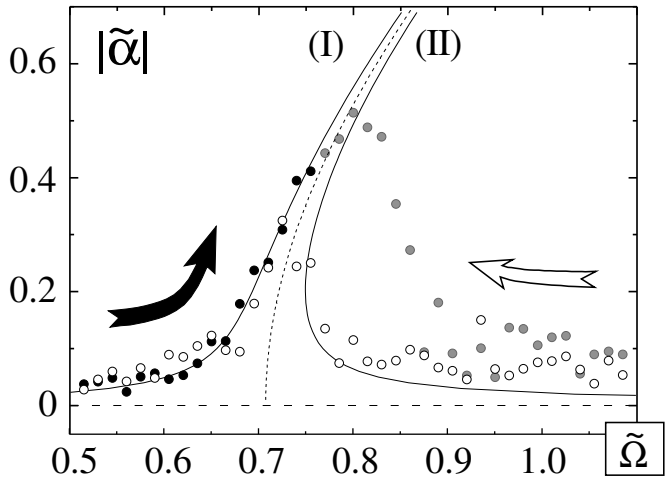


FIGURE 3.8 – Evolution de $|\tilde{\alpha}| = \Omega|\delta|/\omega_\perp$ en fonction de la fréquence finale réduite $\tilde{\Omega} = \Omega_f/\omega_\perp$ pour une rampe de fréquence croissante (•) et décroissante (○). Les courbes en trait plein figurent les branches des états stationnaires étudiées précédemment. Elles dépendent des seules valeurs de ϵ et $\omega_\perp$, lesquelles sont mesurées préalablement par une détermination de la plage d'instabilité du centre de masse (Eq. 3.5) : $\omega_\perp/2\pi = 195(1)\,\mathrm{Hz}$ et $\epsilon = 0.025(5)$; le tracé correspond à des valeurs légèrement différentes $\omega_\perp/2\pi = 200\,\mathrm{Hz}$ et $\epsilon = 0.022$ pour lesquelles l'accord est meilleur. Les points gris représentent aux condensats obtenus avec une rampe croissante de Ω qui relaxent plus tard vers des états contenant des vortex [1].

où la déformation devient très importante. Plus loin le condensat semble se détacher de la branche (I) : les mesures qui suivent sont très bruitées et témoignent probablement du fait que le condensat n'est plus dans un état stationnaire.

Le condensat de départ étant rond, on peut aussi imaginer partir d'une fréquence de rotation élevée afin de suivre la branche (II). C'est ce que montre la figure 3.8 (cercles creux) pour laquelle Ω a été varié de $3\Omega_f$ à Ω_f en 50 périodes de la fréquence finale. Le condensat suit la partie inférieure de la branche (II) jusqu'au point où cette courbe se replie, puis rejoint la branche (I) qu'il suit jusqu'aux valeurs les plus faibles de Ω_f. On remarquera que ces données sont loin de se superposer à celles obtenues en augmentant Ω : ce phénomène d'hystérésis témoigne du caractère non-linéaire de l'excitation quadrupolaire.

3.4.2 Variation de ϵ à Ω constant

Un second type d'expérience consiste à augmenter lentement la force ϵ de la cuillère à fréquence de rotation fixée (figure 3.9). Deux situations peuvent se présenter :

- $\Omega/\omega_\perp < 1/\sqrt{2}$: dans ce cas le condensat part de la branche (I) et la suit quelle que soit la valeur finale de ϵ (figures $\Omega/\omega_\perp = 0.65 - 0.70$).
- $\Omega/\omega_\perp > 1/\sqrt{2}$: le condensat commence sur la branche (II) et la suit tant qu'il n'atteint pas la valeur $\epsilon_c(\Omega)$ où se trouve le point de rebroussement (figures $\Omega/\omega_\perp = 0.75 - 0.80$). Si ce point est dépassé (figure $\Omega/\omega_\perp = 0.75$), le condensat entre dans un régime non stationnaire, probablement turbulent.

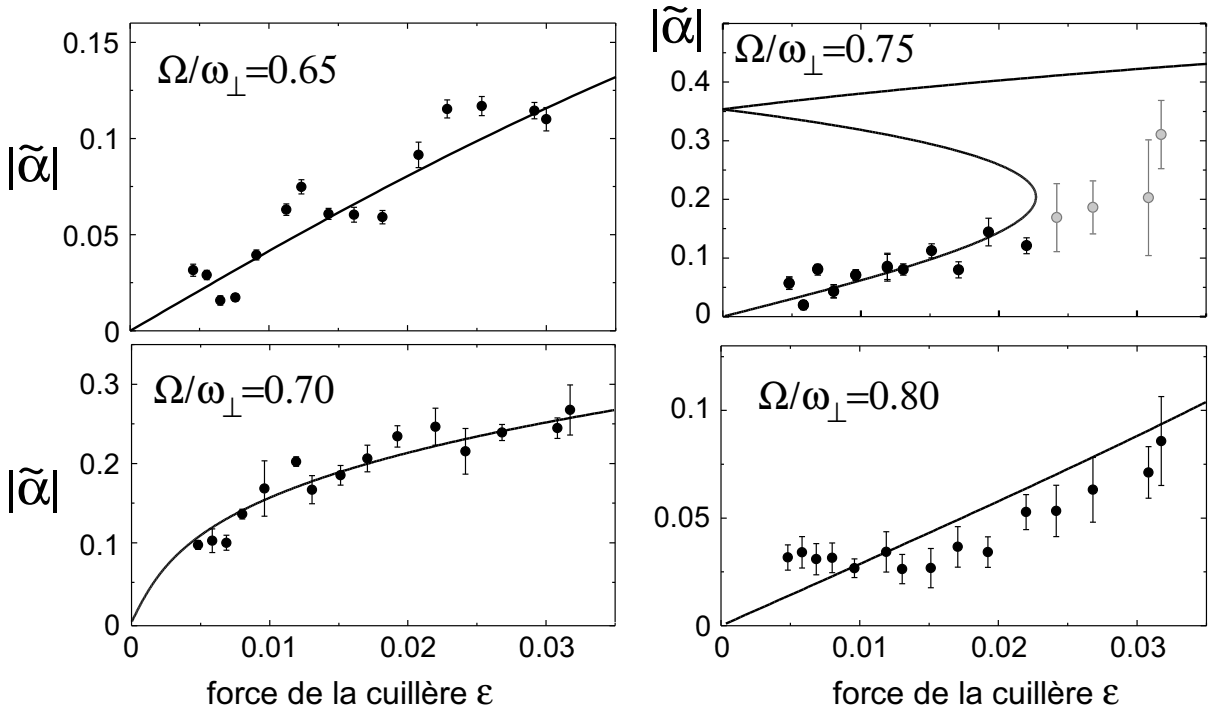


FIGURE 3.9 – Suivi des états stationnaires par une augmentation de ϵ à Ω fixé. ϵ est augmenté à la vitesse $\dot{\epsilon} = 0.078\,\mathrm{s}^{-1}$. Les courbes en trait plein noir sont les solutions de 3.21 en supposant $\omega_\perp$ =200 Hz. Suivant que Ω est inférieur ou supérieur à $\omega_\perp/\sqrt{2}$, le condensat part de la branche (I) ou de la branche (II). Dans ce dernier cas, il peut atteindre le point de rebroussement et quitter la courbe des états stationnaires ($\Omega/\omega_\perp = 0.75$ — les points gris correspondent à des condensats qui relaxent vers des états contenant des vortex [1]).

3.5 Conclusion

Nous disposons donc d'une cuillère créant un potentiel harmonique pour faire tourner les atomes. Son effet sur le nuage thermique n'est pas directement utilisable car les fréquences d'excitation des modes quadrupolaires et dipolaires coïncident. Par contre, un condensat dans le régime de Thomas-Fermi peut être excité sélectivement sur son mode quadrupolaire.

Nous avons montré ainsi que la contrainte $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ n'empêche pas de créer des condensats avec une rotation d'ensemble. L'accord entre l'expérience et la théorie hydrodynamique est globalement satisfaisant sur les figures 3.8 et 3.9. Lorsqu'un écart est observé, nous pouvons avancer deux hypothèses :

- Les courbes solutions présentent un point de rebroussement au-delà duquel il n'y a pas d'état stationnaire voisin : c'est ce qui semble se passer sur la figure 3.9 lorsque $\Omega/\omega_\perp = 0.75$.
- Les solutions stationnaires de 3.21 sont instables vis à vis d'excitations quadrupolaires ou d'ordre supérieur [94, 102] : c'est vraisemblablement la raison pour laquelle les points (disques noirs) de la figure 3.8 décrochent de la branche (I) autour de $\Omega/\omega_\perp = 0.8$.

Ces deux situations d'écart par rapport aux états stationnaires tournants sont susceptibles de conduire à des comportements plus complexes, éventuellement turbulents. Le chapitre 5 sera l'occasion de revenir sur ces instabilités et sur leur rôle dans la nucléation des vortex.

Enfin, un point mérite d'être soulevé : le tracé de courbes telles que celles de la figure 3.8 suppose que les états stationnaires ont été suivis de manière adiabatique. Or il se trouve qu'ne pratique, cette adiabaticité n'est pas évidente à assurer. Pour mieux appréhender la condition d'adiabaticité, il peut donc être utile de connaître les modes d'excitation de basse fréquence. Nous présentons l'un d'entre eux — un mode ciseaux — dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Mode ciseaux d'un condensat tournant

Nous avons montré dans le chapitre précédent l'existence d'états stationnaires pour un condensat dans un piège tournant. Ces états sont des écoulements irrotationnels, de forme quadrupolaire, et indépendants du temps dans le référentiel tournant. Nous abordons dans ce chapitre une extension naturelle de l'étude de ces états : celle d'un mode d'oscillation autour de l'état stationnaire, le mode ciseaux. Cette étude a été menée conjointement avec Marco Cozzini et Sandro Stringari [6], qui ont suggéré l'existence de ce mode et développé un traitement théorique pour le décrire.

Ce mode s'apparente au mode ciseaux qui existe dans un piège statique : c'est pourquoi nous rappelons dans un premier temps les résultats théoriques et expérimentaux obtenus sur la version "statique" du mode ciseaux. Nous ajoutons ensuite aux équations les termes décrivant la rotation : le mode ciseaux apparaît alors comme le mode de plus basse fréquence pour un condensat en rotation. La dernière partie est consacrée à l'observation expérimentale de ce mode.

4.1 Mode ciseaux dans un piège statique

Le mode ciseaux a été étudié expérimentalement dans le groupe de Christopher Foot à Oxford [67, 86] d'après une proposition de David Guéry-Odelin et Sandro Stringari [66]. Nous reprenons ici quelques éléments de leurs travaux.

4.1.1 Le mode ciseaux est un mode quadrupolaire

Le mode ciseaux est le mode quadrupolaire d'un condensat piégé harmoniquement suivant deux directions, ces deux directions ayant des fréquences de piégeages différentes. La situation est très proche de celle abordée dans le chapitre 3 lorsque nous avions étudié le mode quadrupolaire d'un condensat infiniment long. La seule différence tient au fait qu'ici la symétrie de révolution autour de l'axe z est perdue.

Le potentiel de piégeage s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2.$$

Nous partons de l'équation hydrodynamique linéarisée (3.9) et recherchons quel mode quadrupolaire en est solution. Comme la symétrie autour de z est perdue, il n'est pas commode d'écrire les modes en séparant partie radiale et angulaire. Les axes x et y sont néanmoins axes de symétrie de sorte qu'on recherche le mode sous la forme :

$$\delta\rho(t) = Axy\, e^{-i\omega t} = \frac{A}{2i}\left(e^{i2\theta} r_\perp^2 e^{-i\omega t} - e^{-i2\theta} r_\perp^2 e^{-i\omega t}\right).$$

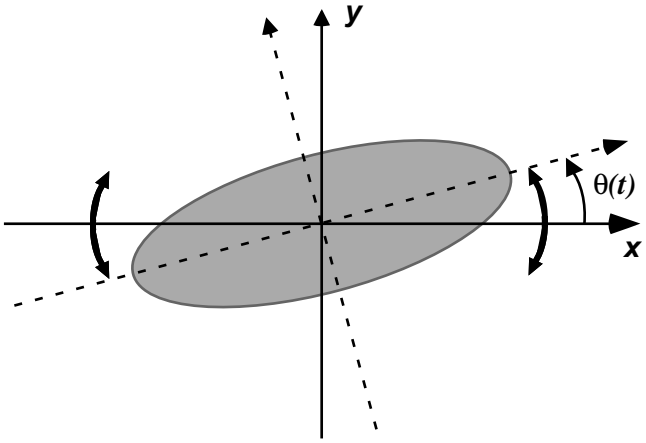


FIGURE 4.1 – Forme du mode ciseaux dans la limite des faibles excitations : il s'agit d'une oscillation d'une ellipse de forme fixe autour de l'axe z.

Comme l'indique la dernière égalité, ce mode n'est rien d'autre qu'une superposition des modes $m = +2$ et $m = -2$. En remplaçant dans (3.9), on constate que ce mode est bien un mode propre, de fréquence $\omega_{\rm cis} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$. Dans le cas $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ (piège à symétrie de révolution), on retrouve le résultat classique $\omega = \sqrt{2}\omega_\perp$.

4.1.2 Limite des faibles excitations : mouvement de ciseaux

Pour de faibles excitations, il est possible d'expliciter la nature de l'oscillation du nuage. Ecrivons pour cela la densité du nuage :

$$\rho = \frac{1}{g}\left[\mu - \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2\right] - Axy\, e^{-i\omega_{\rm cis}t}.$$

Pour des valeurs $A \ll \rho_0/R^2$, on peut montrer que cette densité est indépendante du temps dans un référentiel tourné d'un angle $\theta(t) \ll 1$, avec :

$$\theta(t) = \frac{2Ag}{\epsilon\omega_\perp^2}\cos(\omega_{\rm cis}t). \tag{4.1}$$

Le nuage a une forme d'équilibre elliptique. Lorsque ce mode est excité faiblement, cette forme reste donc inchangée, mais elle pivote autour de l'axe z et oscille comme un pendule de torsion autour de son angle d'équilibre (figure 4.1). On peut ainsi dire que l'axe long du nuage et l'axe faible du piège font l'un par rapport à l'autre comme un mouvement de ciseaux, d'où le nom de mode ciseaux. Cette appellation ne date pas d'ailleurs de l'étude des condensats gazeux : elle était déjà employée il y a plus de vingt ans en physique nucléaire à propos du mouvement relatif des protons et des neutrons dans les noyaux atomiques (voir références dans [66]).

4.1.3 Cas d'un piège presque isotrope : moment d'inertie et force de rappel

Nous en venons à une situation proche de celle que nous rencontrerons dans le référentiel tournant : celle où les deux fréquences ω_x et ω_y sont proches l'une de l'autre, et notées :

$$\omega_x^2 = (1+\epsilon)\omega_\perp^2 \qquad \text{et} \qquad \omega_y^2 = (1-\epsilon)\omega_\perp^2.$$

où $\epsilon \ll 1$ caractérise la déformation du piège. C'est exactement le type de potentiel qui découle de la combinaison piège magnétique+cuillère, ici avec une cuillère statique. Avec ces notations, la fréquence du mode ciseaux vaut tout simplement $\omega_{\rm cis} = \sqrt{2}\omega_\perp$. Tâchons de comprendre comment ϵ a pu disparaître de cette expression. Nous avons déjà mentionné l'analogie avec un pendule de torsion. Si on la développe un peu, on doit introduire un couple de rappel $-\Gamma\theta$. On peut montrer[1] que Γ est proportionnel à ϵ^2. En écrivant $\Gamma \sim m\epsilon^2\omega_\perp^2 R^2$, où R est une taille typique du nuage, l'équation classique du pendule de torsion s'écrit :

$$\Theta\ddot{\theta} + \Gamma\theta = 0$$

où Θ est le moment d'inertie du système. La fréquence du mode est donnée par :

$$\omega_{\rm cis} = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Theta}}.$$

Une approximation naïve consisterait à utiliser pour Θ la valeur classique mR^2. La fréquence qu'on déduit d'une telle approximation est $\omega_{\rm cis} \sim \epsilon\omega_\perp$, ce qui est contradictoire avec le résultat exact. Le problème vient de l'évaluation du moment d'inertie du système. Le moment d'inertie associé à un mode quadrupolaire est proportionnel à la déformation δ du nuage (chapitre 3, Eq. 3.14). Ici cette déformation se calcule à partir de la forme d'équilibre et vaut simplement $\delta = \epsilon$. Cela conduit à un moment d'inertie $\Theta = m\epsilon^2 R^2$, et finalement à une fréquence indépendante de ϵ et de l'ordre de $\omega_\perp$. La fréquence du mode ciseaux d'un condensat est ainsi directement liée à son caractère irrotationnel, par le biais du moment d'inertie quadrupolaire.

Passons maintenant au cas d'un gaz à $T \neq 0$. Naturellement, un nuage thermique a un moment d'inertie classique. On montre ainsi que son oscillation "ciseaux" contient deux fréquences, une basse associée à la partie rotationnelle de l'écoulement, et l'autre largement plus grande associée à la partie irrotationnelle [66]. Les études expérimentales du mode ciseaux dans les régimes thermique et condensé ont confirmé cette différence de comportement entre nuage thermique et condensat [67].

4.2 Mode ciseaux dans le référentiel tournant : approche analytique

Nous passons maintenant au mode ciseaux que nous avons étudié, qui a lieu dans le référentiel tournant. Il s'apparente au mode ciseaux précédent : le nuage oscille autour d'une solution d'équilibre dans un potentiel légèrement anisotrope. Toutefois, cette oscillation se produit dans le référentiel tournant, autour d'un état stationnaire tournant. Cette distinction est essentielle, et conduit à un comportement très différent.

4.2.1 Principe

Rappelons que la solution stationnaire des équations 3.15 et 3.16 dans le référentiel tournant est de la forme $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{\nabla}(XY)$. Les modes propres autour de l'état stationnaire peuvent être recherchés sous la forme :

$$\begin{aligned}\delta\rho &= [a_0 + a_X X^2 + a_Y Y^2 + a_z z^2 + a_{XY} XY]e^{-i\omega t}\\ \delta\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\nabla}(\alpha_0 + \alpha_X X^2 + \alpha_Y Y^2 + \alpha_z z^2 + a_{XY} XY)e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans les équations hydrodynamiques 3.15 et 3.16 linéarisées, on aboutit à un système linéaire de neufs équations pour les paramètres a_i et α_i, qui se réduit après

[1] Il faut pour cela calculer la valeur moyenne de $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ dans l'état ρ perturbé. La force est naturellement proportionnelle à ϵ. Un second facteur ϵ apparaît lors du calcul de l'intégrale et vient de l'expression 4.1.

quelques manipulations à un système linéaire de quatre équations pour les quatre inconnues α_i. Les solutions sont obtenues par l'annulation du déterminant du système, ce qui conduit à :

$$\omega^8 + c_3\omega^6 + c_2\omega^4 + c_1\omega^2 + c_0 = 0, \tag{4.2}$$

où les coefficients c_i sont des fonctions de $\omega_\perp$, ω_z, Ω, ϵ et α (leurs expressions détaillées pourront être trouvées dans [6]). α est le paramètre caractérisant l'état stationnaire du condensat.

4.2.2 Mode de plus basse fréquence

Si l'on considère un condensat dont l'état stationnaire est localisé sur la branche (I), on peut remplacer α par son expression solution de 3.21. On constate alors que le coefficient c_0 tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. En conséquence, il existe un mode de basse fréquence dont on peut calculer la fréquence en ne gardant que les termes d'ordre zéro et deux dans (4.2). Tous calculs faits, on obtient :

$$\omega_{\rm cis}^2 = -\frac{c_0}{c_1} = \frac{10\,\omega_\perp^2\,\Omega(\omega_\perp^2 - \Omega^2)\sqrt{2\,\Omega^2 - \omega_\perp^2}}{3\,\omega_\perp^4 + 3\,\omega_\perp^2\,\Omega^2 + 2\,\Omega^4}\,\epsilon\ . \tag{4.3}$$

Ce mode n'existe que pour des fréquences de rotation supérieures à $\omega_\perp/\sqrt{2}$ et sa fréquence est proportionnelle à $\sqrt{\epsilon}$. Il correspond à une oscillation de type ciseaux qui, étant superposée à une rotation d'ensemble (solution stationnaire) a lieu dans le référentiel tournant. En particulier on montre que dans la limite des faibles ϵ, ce mode correspond à une oscillation en quadrature de l'angle θ et du paramètre de déformation δ. Le lien entre ces deux quantités est donné par la relation suivante :

$$\delta(t) - \delta_0 = \frac{\omega_\perp^2\,\dot\theta}{\Omega^2\sqrt{2\,\Omega^2 - \omega_\perp^2}}\ . \tag{4.4}$$

4.2.3 Brisure spontanée de symétrie et mode ciseaux

Revenons un instant à l'image classique que nous avions développée pour le mode ciseaux dans un référentiel au repos, celle d'un pendule de torsion. Pour le mode ciseaux d'un condensat tournant, on montre que le moment de rappel est proportionnel à ϵ. Ce comportement est analogue à celui d'un mode ciseaux dans un référentiel au repos, quoique la puissance de ϵ soit plus faible maintenant[2]. Par contre, une grande différence apparaît dans l'expression du moment cinétique. En effet, pour un condensat en rotation sur la branche (I) avec $\Omega > \omega_\perp/\sqrt{2}$, le moment cinétique ne tend pas vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro (Eq. 3.24). C'est un effet de la brisure spontanée de symétrie et de l'existence de solutions non symétriques dans la limite $\epsilon \to 0$ (voir chapitre 3). Ainsi, si l'on évalue la fréquence du mode ciseaux dans ce cas, elle s'exprime encore une fois en fonction du rapport du moment de rappel sur le moment d'inertie. ϵ n'apparaissant que dans l'expression du moment de rappel, on en déduit que $\omega_{\rm cis}$ est proportionnel à $\sqrt{\epsilon}$, ce qui correspond à l'équation 4.3.

A la lumière de cette image classique, le fait que la fréquence du mode ciseaux tende vers zéro quand la déformation du piège ϵ tend vers zéro apparaît comme une conséquence directe de la brisure spontanée de symétrie. Nous résumons dans le tableau suivant les dépendances en ϵ des différents paramètres déterminant la fréquence du mode.

	moment Θ	rappel Γ	fréquence(s) ω
Gaz classique	1	ϵ^2	$\propto \omega_\perp$, $\propto \epsilon\omega_\perp$
Condensat (piège au repos)	ϵ^2	ϵ^2	$\sqrt{2}\omega_\perp$
Condensat (piège tournant)	1	ϵ	$\propto \sqrt{\epsilon}$

[2]Un seul facteur ϵ apparaît cette fois dans le calcul, celui contenu dans la force.

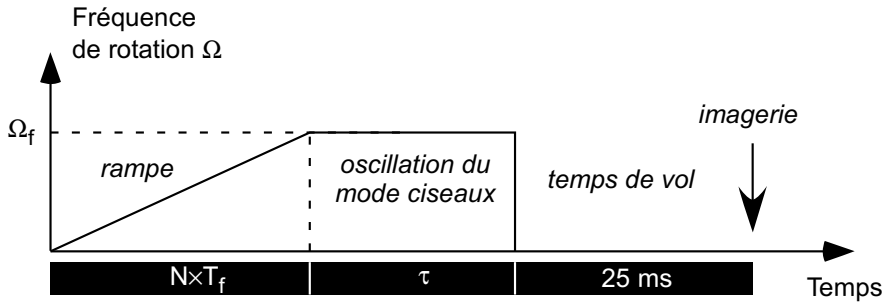


FIGURE 4.2 – Séquence expérimentale pour l'étude du mode ciseaux. Le condensat est placé dans un potentiel anisotrope tournant dont la fréquence de rotation Ω augmente linéairement jusqu'à la valeur Ω_f. Ω est ensuite maintenu constant pour une durée variable τ. Si la rampe était suffisamment lente, l'état final serait un état stationnaire de la branche (I). Avec une rampe plus courte, le mode ciseaux est excité.

4.3 Observation expérimentale du mode ciseaux tournant

4.3.1 Séquence expérimentale

La figure 4.2 résume la séquence expérimentale typique pour l'étude du mode ciseaux : un condensat est formé dans un piège tel que $\omega_\perp/2\pi = 182\,\mathrm{Hz}$. Puis il est soumis à une cuillère d'intensité fixée ϵ et dont on augmente linéairement la fréquence de rotation Ω jusqu'à une valeur finale Ω_f égale à $2\pi \times 139\,\mathrm{Hz}$. La durée de cette rampe est comptée en unités de la période finale $T_\mathrm{f} = 2\pi/\Omega_\mathrm{f}$ et notée NT_f. Une fois Ω_f atteinte, la fréquence de rotation est maintenue constante pendant une durée τ. On notera que la fréquence $\Omega(t)$ ainsi que la phase $\int \Omega(t)\mathrm{d}t$ de la cuillère sont des fonctions continues du temps, la première grandeur discontinue étant l'accélération $\dot{\Omega}$. Enfin, on coupe simultanément la cuillère et le piège magnétique avant de procéder à l'habituel temps de vol.

Une telle séquence doit *a priori* conduire à un résultat simple : le suivi des états stationnaires de la branche (I), du moins tant qu'on ne s'aventure pas trop loin sur cette branche. La valeur finale de $\Omega/\omega_\perp$ a d'ailleurs été choisie autour de 0.76 afin d'être nettement inférieure à la valeur $\Omega/\omega_\perp \simeq 0.8$ pour laquelle des instabilités apparaissent sur cette branche [102].

Une phase supplémentaire avait été ajoutée initialement afin d'exciter le mode ciseaux : elle consistait en un saut de phase de la cuillère et avait lieu après la rampe. Toutefois nous avons eu la surprise de découvrir que pour des temps de rampe de l'ordre de 50 périodes ($N = 50$), le mode ciseaux oscillait durant la phase $\Omega = \Omega_\mathrm{f}$ même lorsque le saut de phase était neutralisé. Il est apparu plus tard que l'origine de cette excitation tenait au suivi imparfaitement adiabatique de la branche (I) lorsque de la rampe de Ω.

La plupart de nos expériences sur ce mode ont donc été menées sans phase d'excitation spécifique et en s'appuyant simplement sur un suivi imparfait des états stationnaires de la branche (I). Le problème de l'adiabaticité de ce suivi est discuté en fin de chapitre.

4.3.2 Oscillation de l'angle et de l'ellipticité

Le mode ciseaux consiste en l'oscillation en quadrature de deux quantités : l'ellipticité du nuage (ou son paramètre de déformation δ), et son angle θ dans le référentiel tournant. Cette dernière quantité est mesurée dans le référentiel du laboratoire. Sur des données typiques, elle oscille entre 0 et 360 degrés de 10 à 20 fois. On retranche à cette évolution rapide l'angle que fait le référentiel $\mathcal{R}_\Omega$ avec le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_0$.

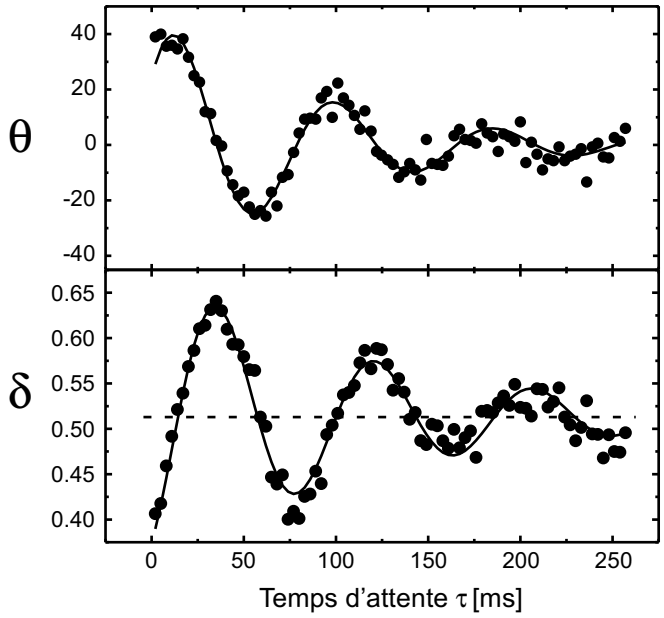


FIGURE 4.3 – Oscillations de θ et δ suite à une rampe de 360 ms ($N = 50$) avec $\epsilon = 0.017(6)$. Les lignes pleines sont des ajustements par des fonctions sinusoïdales amorties. Les deux quantités oscillent à une même fréquence de 11.6(1) Hz, et en quadrature.

Les données de la figure 4.3 montrent les oscillations de θ et δ obtenues suite à une rampe de 360 ms ($N = 50$) avec $\epsilon = 0.017(6)$. On constate que les deux grandeurs oscillent autour d'une valeur d'équilibre. Chacune des courbes est ajustée par une sinusoïde amortie, de laquelle on déduit la fréquence commune d'oscillation, $\omega_{\rm cis}/2\pi = 11.6(1)$ Hz. La valeur attendue d'après l'équation 4.3 est de $11.4(\pm 2.1)$ Hz, l'incertitude provenant essentiellement de la mesure de ϵ. La différence de phase entre les deux oscillations est de l'ordre de 90 degrés, ce qui signifie que θ et δ oscillent en quadrature. Pour la suite de ce chapitre, $\Delta\theta$ et $\Delta\delta$ désignent respectivement les amplitudes initiales de l'oscillation de l'angle et de l'oscillation du paramètre de déformation.

4.3.3 Dépendance en fonction de ϵ

L'une des prédictions essentielles du traitement théorique est que la fréquence du mode ciseaux est proportionnelle à $\sqrt{\epsilon}$. Pour tester cette loi, nous avons répété l'expérience de la figure 4.3 avec quatre valeurs différentes de l'intensité I de la cuillère. L'intensité de la cuillère peut être mesurée précisément ; du fait de la proportionnalité entre ϵ et I, ϵ est donc connu avec une bonne précision relative (quelques pourcents). Pour toutes les valeurs de I, on a choisi $N = 50$, sauf pour la plus faible intensité pour laquelle il a été nécessaire d'augmenter la durée de la rampe ($N = 100$) afin que le condensat suive approximativement la branche (I) des états stationnaires.

On a reporté $\omega_{\rm cis}^2$ sur la figure 4.4(a) en fonction de l'intensité I du laser cuillère. La loi 4.3 — qui peut s'écrire aussi $\omega_{\rm cis}^2 \propto I$ — est très bien vérifiée. La seconde partie de cette figure (figure 4.4(b)) montre comment le rapport $\Delta\delta/\Delta\theta$ évolue avec la fréquence du mode ciseaux. La relation 4.4 implique que

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta\theta} = \frac{\omega_\perp^2}{\Omega^2\sqrt{2\,\Omega^2 - \omega_\perp^2}}\,\omega_{\rm cis}.$$

La linéarité en $\omega_{\rm cis}$ apparaît clairement sur les données. La pente déduite d'un ajustement

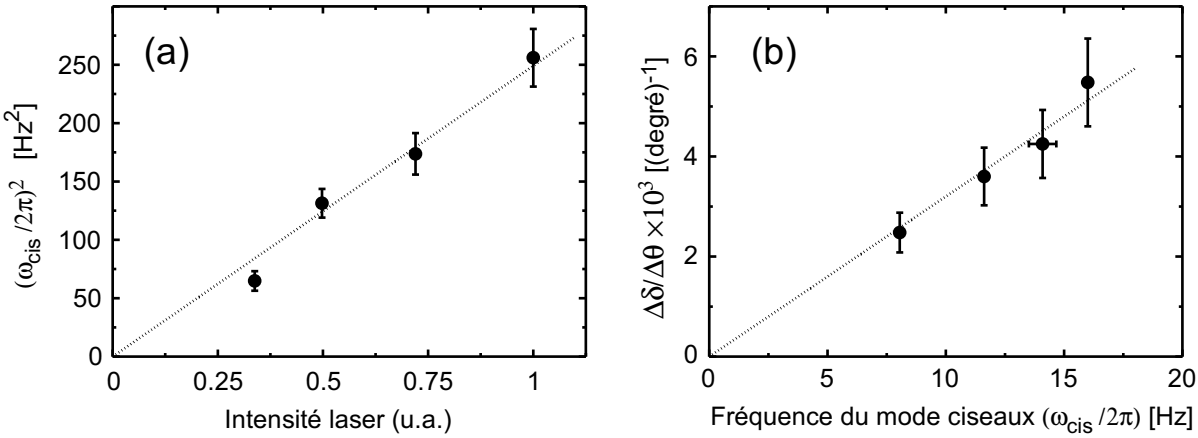


FIGURE 4.4 – Etude du mode ciseaux pour différentes valeurs de ϵ : (a) Carré de la fréquence du mode ciseaux en fonction de l'intensité laser I de la cuillère ($I \propto \epsilon$ — voir texte), (b) Rapport entre les amplitudes d'excitation de l'angle $\Delta\theta$ et de la déformation $\Delta\delta$ en fonction de la fréquence du mode ciseaux (*cf.* Eq. 4.4).

linéaire est de $3.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{deg}^{-1}.\mathrm{Hz}^{-1}$, ce qui est comparable à l'estimation théorique de $4 \times 10^{-4}\,\mathrm{deg}^{-1}.\mathrm{Hz}^{-1}$. L'écart observé entre les deux valeurs pourrait venir d'une non-linéarité dans les expériences, les amplitudes mesurées ne correspondant pas toutes à de faibles excitations ($\Delta\theta$ vaut typiquement de 20 à 45 degrés). Ces expériences confirment le fait que lorsque la déformation du piège ϵ tend vers 0 — et partant la fréquence ω_{cis} —, l'oscillation de l'angle devient nettement plus importante que celle du paramètre de déformation. C'est dans cette limite que le mode est à proprement parler un mode ciseaux.

4.3.4 Contrôle du mode ciseaux : adiabaticité

Le mode ciseaux est excité dans notre séquence expérimentale du fait d'un suivi imparfaitement adiabatique de la branche (I) lorsqu'on augmente la fréquence de rotation (*cf.* figure 4.2). Nous avons étudié comment varient les deux amplitudes $\Delta\theta$ et $\Delta\delta$ quand la durée de la rampe de fréquence est changée. La figure 4.5 montre les résultats obtenus pour des rampes allant de N =40 périodes (288 ms) à N =80 périodes (576 ms). De manière logique, le mode ciseaux est de moins en moins excité lorsque la durée de la rampe est augmentée. Pour le dernier point obtenu (80 périodes), aucune oscillation n'est vraiment visible, de sorte que l'on peut considérer que le suivi est adiabatique dans ces conditions.

La même étude réalisée pour une autre valeur de ϵ conduirait probablement à des résultats de même nature, mais avec des échelles de temps différentes. En effet, plus ϵ est petit, plus la branche (I) est incurvée au voisinage de $\Omega = \omega_\perp/\sqrt{2}$ (*cf.* figure 3.6) ; à vitesse $\dot{\Omega}$ fixée, l'état du nuage subit donc des variations d'autant plus brutales que ϵ est faible. Nous n'avons réalisé aucune étude systématique d'un tel effet, mais nous avons observé à plusieurs reprises des comportements qui vont dans ce sens.

4.4 Conclusion

Nous avons caractérisé dans ce chapitre un mode de basse fréquence du condensat en rotation. Ce mode transverse consiste, pour de faibles amplitudes d'excitation, en une oscillation de l'angle fait par le grand axe avec un axe du référentiel tournant. Il est naturellement excité si l'on tente de suivre trop rapidement les états stationnaires tournants.

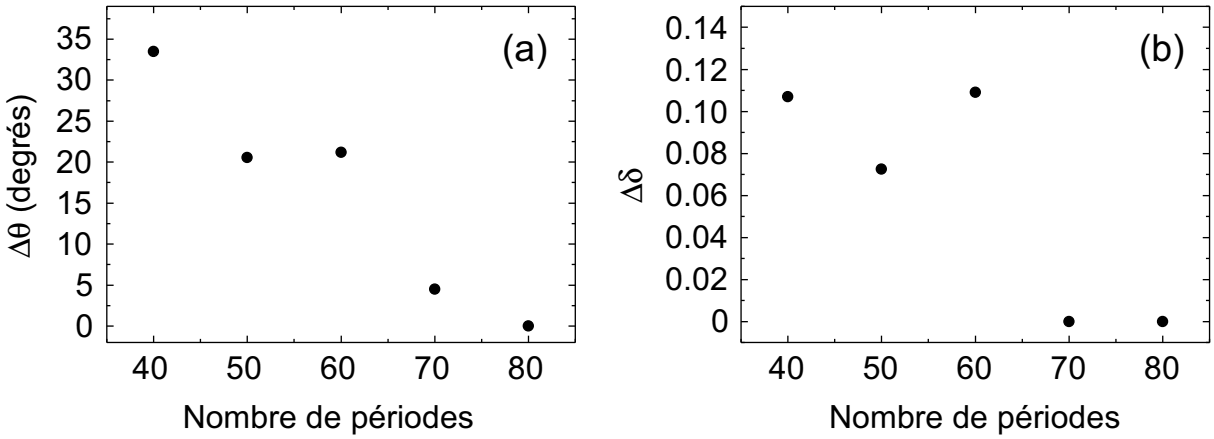


FIGURE 4.5 – Etude de l'adiabaticité du suivi de la branche (I) : (a) amplitude de l'oscillation de l'angle en fonction du temps de montée (compté en périodes de la fréquence finale) ; (b) amplitude de l'oscillation de la déformation δ en fonction du temps de montée. Ces données ont été prises pour $\epsilon = 0.025(9)$.

Finalement, il est intéressant de se retourner vers la courbe du suivi de la branche (I) (chapitre 3 — figure 3.8) réalisée antérieurement aux travaux sur le mode ciseaux : on peut en effet se demander si le suivi était réellement adiabatique, ou si le mode ciseaux (ou d'autres modes) étaient excités lors de l'évolution. Les données de la figure 3.8 ont été prises avec $\epsilon = 0.025$, donc dans des conditions semblables à celles de la figure 4.5. On avait alors choisi une rampe de 75 périodes ; d'après la figure 4.5, cette durée est suffisante pour que le mode ciseaux ne soit quasiment pas excité par la rampe. Le mode ciseaux étant en outre un mode de particulièrement basse fréquence, il est probable que tous les autres modes soient de fréquence plus élevée ; ainsi la condition d'adiabaticité vis à vis de ces modes est moins contraignante que celle portant sur le mode ciseaux, et l'on peut raisonnablement penser que si l'évolution est adiabatique par rapport au mode ciseaux, elle l'est par rapport à tous les autres modes.

Troisième partie

Rotations quantifiées : dynamique d'une ligne de vortex

Sommaire

Introduction **91**

5 Les vortex **93**
5.1 Propriétés générales d'un vortex . . . 93
5.1.1 Quantification de la phase . . . 93
5.1.2 Champ de vitesse et profil de densité d'un vortex . . . 94
5.1.3 Énergie et moment cinétique d'une ligne de vortex . . . 95
5.1.4 Forces agissant sur un vortex et dynamique . . . 96
5.2 Apparition des vortex dans le condensat . . . 100
5.2.1 Nucléation par augmentation lente de ϵ . . . 100
5.2.2 Nucléation par une augmentation brutale de ϵ . . . 101
5.2.3 Nucléation, turbulence et dissipation . . . 103
5.3 D'autres vortex . . . 106
5.3.1 Autres méthodes de nucléation dans les condensats gazeux . . . 106
5.3.2 Les vortex quantifiés en physique de la matière condensée . . . 108
5.4 Conclusion . . . 108

6 Forme d'équilibre d'une ligne de vortex unique **111**
6.1 Observation d'une ligne de vortex unique . . . 111
6.1.1 Un réseau de vortex vu de côté : premiers indices . . . 111
6.1.2 Obtention d'une ligne de vortex unique . . . 113
6.1.3 Des "U" et des "N" . . . 114
6.2 Approche théorique . . . 115
6.2.1 Equation du mouvement d'un vortex à trois dimensions . . . 115
6.2.2 Minimisation de l'énergie . . . 117
6.2.3 Expression approchée de la fonctionnelle d'énergie . . . 118
6.2.4 Bien comparer avec les expériences . . . 118
6.3 Vie et mort d'une ligne de vortex . . . 119
6.3.1 Evolution dans le temps de la ligne de vortex . . . 119
6.3.2 Etude quantitative de l'expulsion de la ligne de vortex . . . 120
6.4 Mesure du moment cinétique associé à une ligne de vortex . . . 121
6.4.1 Modes quadrupolaires et moment cinétique . . . 121
6.4.2 Moment cinétique d'une ligne de vortex courbée et décentrée . . . 122
6.5 Conclusion . . . 123

7 Modes de vibration d'une ligne de vortex : les kelvons **125**
7.1 Présentation des modes de Kelvin . . . 125
7.1.1 Vitesse d'un anneau de vorticité . . . 125

7.1.2 De l'anneau de vorticité aux oscillations de Kelvin 126
7.1.3 Relation de dispersion des modes de Kelvin 126
7.1.4 Polarisation et moment cinétique des modes de Kelvin 128
7.2 Effet des kelvons sur les modes quadrupolaires 128
7.2.1 Quantification des modes de Kelvin : les kelvons 128
7.2.2 Le processus Beliaev couplant le mode quadrupolaire $m_z = -2$ aux kelvons 128
7.2.3 Traitement théorique quantitatif 131
7.3 Une première expérience : excitation percussionnelle 131
7.3.1 Principe de l'expérience 131
7.3.2 Modèle pour les fonctions d'ajustement 133
7.3.3 Résultats quantitatifs 134
7.4 Une seconde expérience : excitation résonnante 134
7.4.1 Principe de l'expérience 135
7.4.2 Modèle pour la fonction d'ajustement 135
7.4.3 Résultats quantitatifs 136
7.5 Interprétation des résultats 137
7.5.1 La durée de vie du mode $m_z = -2$ est plus grande que celle du mode $m_z = +2$ 137
7.5.2 Le nuage thermique ne semble pas responsable de cet écart 137
7.5.3 Observation directe des kelvons 138
7.6 Conclusion 138

Introduction

Les mouvements de rotation dans les fluides peuvent parfois être spectaculaires et violents. Ainsi dans les tornades, la rotation est concentrée dans une petite région de l'espace. Au cœur de cette région, comme dans l'œil d'un typhon, le fluide est presque au repos. Et tout autour, des vents et des courants très puissants tournent à grande vitesse. Formellement, cela se traduit par un champ de vitesse dont le rotationnel $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ est nul ou petit partout, sauf dans la colonne centrale. En termes de rotation locale et globale, un tourbillon se distingue ainsi par le fait qu'il entraîne tout le fluide dans un mouvement de rotation globale, alors que seulement une faible partie (la colonne centrale) subit un mouvement de rotation locale.

Spectaculaires dans les fluides classiques, les tourbillons sont encore plus intrigants dans les superfluides et autres fluides quantiques. Leur histoire commence il y a un demi-siècle, avec Onsager et Feynman. Intéressés par le problème de la rotation d'un superfluide, ils ont suggéré l'existence de lignes de densité nulle, sur lesquelles la condition draconienne $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ pourrait enfin n'être pas vérifiée. Sur ces lignes où la fonction d'onde s'annule, la phase de la fonction d'onde n'est pas définie. Autour, la vitesse des particules est inversement proportionnelle à la distance. Enfin, en conséquence du caractère quantique du fluide, la circulation de la vitesse autour de la ligne est quantifiée.

Ces tourbillons quantiques — que nous appellerons vortex dans la suite —, apparaissent dans l'hélium-II pourvu que l'on tourne le conteneur à une vitesse suffisante. Leur présence a ainsi été détectée en 1961 par Vinen [103], dans une célèbre expérience qui démontra la quantification de la circulation. Toutefois leur observation directe n'a été possible que bien plus tard, dans l'expérience de Yarmchuck, Gordon et Packard en 1979 [104]. La méthode utilisée consistait à piéger des ions dans les lignes de vortex puis à les accélérer vers un détecteur.

Depuis quatre ans, des vortex quantifiés ont été observés dans les condensats gazeux, dans plusieurs groupes dont le nôtre [62–65]. Pour ces systèmes, la principale difficulté à surmonter a été d'introduire des vortex dans le condensat, et non de les visualiser. Le chapitre 5, après une description théorique des vortex, montre comment les vortex entrent dans le condensat sous l'effet d'une cuillère tournante. Les mécanismes de cette nucléation sont analysés à partir de publications théoriques récentes. Le chapitre se clôt sur un bref panorama des vortex, dans les condensats et dans les autres systèmes qui en contiennent.

Les deux autres chapitres sont consacrés à l'étude de condensats contenant une ligne de vortex unique. Dans le chapitre 6, on montre comment il est possible d'obtenir une seul ligne de vortex, puis quelle forme d'équilibre cette ligne adopte au cours d'une évolution libre dans le piège. L'évolution et l'expulsion de cette ligne hors du condensat sont suivis, en particulier par la mesure du moment cinétique. Enfin, le chapitre 7 rapporte l'étude des modes d'excitation (modes de Kelvin) de la ligne de vortex. Ces modes sont excités indirectement par couplage Beliaev avec un mode de surface.

Chapitre 5

Les vortex

La partie précédente a permis de montrer qu'il est possible de mettre un condensat en rotation en excitant fortement le mode quadrupolaire. On peut se demander s'il existe d'autres états stationnaires tournants de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les expériences ont prouvé que la réponse est positive, et qu'elle implique des objets particuliers appelés vortex. Nous commençons le chapitre par une description théorique des vortex[1] : nous introduisons les notions de singularité de phase dans un superfluide et calculons champ de vitesse, énergie et moment cinétique pour un vortex droit. Nous nous intéressons ensuite aux multiples manières dont les vortex peuvent être introduits dans un condensat. Nous détaillons celle qui a été développée dans notre groupe [32,63] et qui s'appuie sur l'action d'une cuillère tournante. L'entrée d'un vortex est décrite et interprétée à la lumière de récentes publications théoriques. Enfin, nous disons un mot des vortex observés ailleurs que dans notre groupe, d'abord dans d'autres systèmes d'alcalins gazeux, puis dans de nombreux systèmes de matière condensée et d'astrophysique.

5.1 Propriétés générales d'un vortex

5.1.1 Quantification de la phase

La définition hydrodynamique du champ de vitesse d'un condensat (Eq. 1.20) a des conséquences très fortes sur la forme de l'écoulement. $\boldsymbol{v}$ dérive en effet d'un potentiel :

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\Phi,$$

ce qui implique qu'il est irrotationnel en tout point où la densité n'est pas nulle. La circulation de la vitesse autour d'un contour $\mathcal{C}_1$ à l'intérieur duquel $\rho \neq 0$ vaut donc 0 d'après le théorème de Stockes (figure 5.1(a)) :

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{l} = \int_{S_1} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}^2S = 0.$$

Si toutefois on autorise à la fonction d'onde de s'annuler dans une région de l'espace $\mathcal{E}_0$, le rotationnel peut prendre des valeurs non nulles dans cette région, et par suite la circulation Γ du champ de vitesse sur un lacet $\mathcal{C}_2$ entourant cette région peut être différente de zéro (figure 5.1(a)). Si l'on suit ce contour sur un tour, la phase de la fonction d'onde augmente d'une quantité :

$$\Delta\Phi = \frac{m}{\hbar}\oint_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{l}.$$

[1] Nous rappelons l'existence de l'ouvrage de synthèse écrit par R. J. Donnelly : "Quantized vortices in Helium-II" (référence [27]). On y trouvera de nombreuses informations tant générales que spécifiques à la physique de l'hélium-II. Sur les vortex dans les fluides classiques, on pourra consulter "Vortex dynamics" de P. G. Saffman [105].

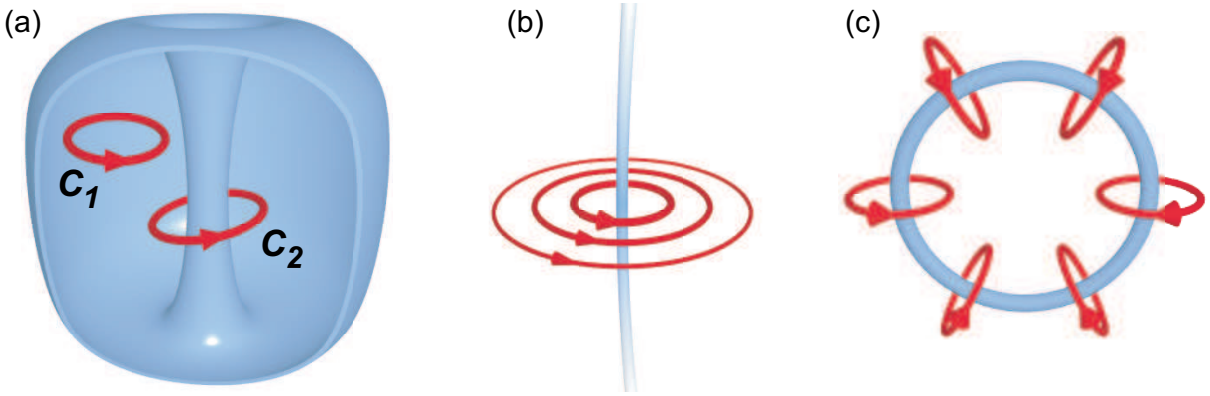


FIGURE 5.1 – Géométrie des supercourants dans les superfluides. (a) Lacet libre ($\mathcal{C}_1$) et lacet entourant une région où la densité s'annule ($\mathcal{C}_2$). La circulation du champ de vitesse sur $\mathcal{C}_1$ est nulle, alors qu'elle peut prendre des valeurs multiples de h/m sur $\mathcal{C}_2$. (b) Ligne de vortex (verticale) s'étendant à l'infini dans les deux directions. Les cercles figurent des lignes de courant autour du vortex. La vitesse est une fonction décroissante de la distance au vortex. (c) Anneau de vorticité. Il y a un flux entrant du champ de vitesse.

Cette quantité doit être un multiple entier de 2π car la fonction d'onde du condensat est univaluée. Le saut de phase de 2π autour d'un vortex a été visualisé dans les condensats par des expériences d'interférences [2, 32, 106]. Ainsi, les valeurs autorisées pour $\Gamma_{\mathcal{C}_2}$ sont quantifiées :

$$\Gamma_{\mathcal{C}_2} = n\frac{h}{m}. \tag{5.1}$$

L'écoulement autour de la singularité de phase est souvent appelé supercourant.

Plusieurs configurations sont envisageables pour la région $\mathcal{E}_0$. Dans certains cas la région $\mathcal{E}_0$ est créée par le potentiel confinant ou par les murs du conteneur : c'est le cas lorsque de l'hélium liquide superfluide est placé entre deux cylindres concentriques[2] (géométrie de Couette-Taylor). La vitesse autour de l'anneau est quantifiée et l'écoulement est métastable [27, 107]. Les bobines supraconductrices relèvent d'une même description, le superfluide étant remplacé par la phase BCS du supraconducteur [28].

Dans d'autres cas, la région $\mathcal{E}_0$ peut exister sans contrainte extérieure, au niveau d'une singularité de phase. Nos condensats gazeux, lorsqu'ils sont au repos dans un piège harmonique, sont en effet simplement connexes : aucun trou n'est creusé dans le superfluide du fait de contraintes extérieures. La région $\mathcal{E}_0$ n'est donc pas définie *a priori* : nous avons le choix de la géométrie. Toutefois, on peut remarquer que toute déformation continue (homotopie) du lacet $\mathcal{C}_2$ doit conduire à un lacet $\mathcal{C}_2'$ de même circulation. La région où la densité s'annule doit donc s'étendre jusqu'aux bords du condensat (figure 5.1(b)) ou se refermer sur elle-même (figure 5.1(c)). On parle respectivement de ligne de vortex et d'anneau de vorticité. Le nombre entier n dans l'équation 5.1 est appelé charge du vortex.

5.1.2 Champ de vitesse et profil de densité d'un vortex

Nous faisons ici et pour toute la suite l'hypothèse que l'écoulement est incompressible. Cette simplification est valable tant que les vitesses mises en jeu dans notre description restent faibles devant la vitesse du son. Elle ne tient plus près des vortex, là où la vitesse diverge (la région où

[2] C'est aussi d'une certaine manière ce qui était réalisé lors de la création des premiers vortex au JILA [62], où le centre du nuage était occupé par des atomes dans un autre état de spin.

l'écoulement est compressible autour d'un vortex a une taille de l'ordre de ξ — voir plus loin). Le vecteur vitesse vérifie les deux équations :

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{5.2}$$

Nous insistons sur le fait que la seconde équation ne vaut que pour un écoulement incompressible. Les vortex sont des lignes où $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \neq 0$. La phase du condensat est singulière sur ces lignes, et la densité de particules s'y annule.

Cet ensemble d'équations est complètement équivalent à celles vérifiées par le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dans l'espace libre. Les vortex sont l'équivalent des fils de courants pour la magnétostatique. Ainsi, un vortex peut être considéré comme une source du champ de vitesse, au même titre qu'un fil électrique parcouru par un courant est une source du champ magnétique. Le champ de vitesse créé par une ligne de vortex courbée dans l'espace est donc donné par une loi de type Biot et Savart [27] :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{n\hbar}{2m} \int_{\boldsymbol{r}' \in \text{ligne}} \frac{(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|^3} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{5.3}$$

Pour le cas particulier d'un vortex droit aligné selon z, on peut appliquer le théorème de Stockes et trouver une forme simple :

$$\boldsymbol{v}(r, \theta, z) = \frac{n\hbar}{mr} \boldsymbol{u}_\theta, \tag{5.4}$$

avec les notations courantes des coordonnées cylindro-polaires. La vitesse est donc purement orthoradiale, et son module est inversement proportionnel à la distance au vortex. La divergence au voisinage du cœur ne doit pas inquiéter : la densité s'y annule proportionnellement à r^2, ce qui conduit à une énergie cinétique totale finie (voir plus loin).

Il est intéressant d'évaluer la taille typique de ce cœur. Une résolution analytique de l'équation de Gross-Pitaevskii n'est pas possible en général [108], aussi nous contenterons nous d'arguments qualitatifs. Ce qui empêche les atomes d'occuper le centre est la barrière centrifuge associée au champ de vitesse (5.4) :

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m v^2 \sim \frac{n^2 \hbar^2}{m r^2}.$$

De nombreuse forces contrebalancent cette force expulsive : le piégeage (s'il est confinant), la pression quantique, ou encore le champ moyen. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, c'est ce dernier terme qui domine. En égalant une énergie d'interaction typique $g\rho$ avec l'énergie centrifuge, on obtient une échelle de longueur typique pour $n = 1$:

$$R_\text{vortex} \sim \left(\frac{\hbar^2}{mg\rho} \right)^{1/2} \sim \xi$$

qui s'identifie à la longueur de relaxation ξ définie au chapitre 1 (Eq. 1.18). L'apparition de cette taille n'a d'ailleurs rien de surprenant puisqu'elle décrit la manière dont se réorganise le condensat autour d'une singularité, que celle-ci soit le bord du condensat dans un boîte ou le cœur d'une ligne de vortex.

5.1.3 Énergie et moment cinétique d'une ligne de vortex

L'énergie associée à la présence d'un vortex est de deux natures, cinétique (on introduit un champ de vitesse) et de champ moyen (la distribution spatiale est modifiée). Cette dernière est négligeable car elle affecte une petite région (de taille ξ) autour du vortex, de sorte que l'on peut écrire pour l'énergie cinétique par atome E_vortex :

$$E_\text{vortex} = \frac{1}{2} \int \rho m v^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \frac{\pi n^2 \hbar^2}{m} \int \rho \frac{1}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}z. \tag{5.5}$$

On note en apparence une double divergence logarithmique aux petits rayons et aux grands rayons. La première disparaît lorsque l'on remplace ρ par sa forme exacte [108], celle-ci s'annulant en $r = 0$ proportionnellement à r^2. Au lieu de préciser cette forme, on peut de manière équivalente introduire un rayon de coupure ξ (*cutoff*) et remplacer ρ par sa valeur asymptotique. La divergence aux grands rayons subsiste, de sorte que l'on est obligé de prendre en compte la taille finie de l'échantillon. On considérera ici une boîte cylindrique de hauteur L et de rayon $R_\perp$, portant le vortex sur son axe de symétrie ; la densité ρ est alors uniforme (sauf au voisinage du vortex) et vaut approximativement $N/\pi L R_\perp^2$. L'énergie du vortex peut être exprimée par unité de longueur :

$$\frac{E_{\text{vortex}}}{L} = \frac{n^2\hbar^2}{mR_\perp^2} \ln\left(\frac{R_\perp}{\xi}\right). \tag{5.6}$$

Cette forme, bien que déduite d'arguments qualitatifs, reste valable dans un piège harmonique [108].

Le moment cinétique — par rapport à l'axe z et par particule — d'un vortex centré prend une expression très simple. En effet, le moment cinétique d'une particule quelconque du fluide autour de l'axe z vaut :

$$L_z = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_z = n\hbar.$$

Cette quantité ne dépend pas de la particule considérée : toutes les particules tournant autour d'un vortex ont donc le même moment cinétique. Ainsi, dans cette géométrie, le moment cinétique par particule est tout simplement $n\hbar$. Si le vortex est décentré par rapport à l'axe z, son moment cinétique est inférieur à cette valeur.

5.1.4 Forces agissant sur un vortex et dynamique

Nous connaissons maintenant le champ de vitesse associé à un vortex, soit en termes électromagnétiques l'effet des charges sur les champs. Il nous reste donc à trouver l'équivalent de l'effet des champs sur les charges, c'est-à-dire la force qu'exerce l'écoulement sur la ligne de vortex. La forme que nous trouverons ne sera pas sans rappeler la force de Laplace.

Forces transverses : la force de Magnus

Nous nous intéressons à un vortex rectiligne, de charge unité, placé dans un champ de vitesse uniforme $\boldsymbol{v}_0$. On note $\boldsymbol{v}_L$ la vitesse de la ligne dans le référentiel du laboratoire, et on néglige le potentiel de piégeage. La vitesse loin du vortex est égale à $\boldsymbol{v}_0$.

Il est commode pour raisonner de se placer dans le référentiel $\mathcal{R}'$ d'axes fixes et dont l'origine se déplace avec la ligne de vortex. Il est possible de superposer le champ de vitesse du vortex et le champ uniforme à l'infini tant que l'on suppose l'écoulement incompressible. La vitesse $\boldsymbol{v}'$ dans ce référentiel s'écrit alors :

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}', t) = \frac{\Gamma}{2\pi r'}\boldsymbol{u}_{\theta'} + \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L(t).$$

La figure 5.2(a) représente le vortex et les différents champs de vitesse mis en jeu.

Nous allons calculer la résultante des forces de pression sur un cylindre entourant la ligne de vortex. Ce système étant ouvert, deux termes doivent être évalués :

- La contribution des forces extérieures (la pression de champ moyen).
- La contribution de la quantité de mouvement des particules entrant et sortant du cylindre.

Pour calculer le premier terme, on écrit l'équation d'Euler 1.24 dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$m\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}')^2 + g\rho\right) + m\frac{d\boldsymbol{v}_L}{dt} = 0.$$

On notera l'apparition d'un terme d'inertie (dernier terme). Dans l'expression de $\boldsymbol{v}'$, les deux premiers ne contiennent aucune dépendance en temps, de sorte que $\partial \boldsymbol{v}'/\partial t = -d\boldsymbol{v}_L/dt$. L'équation d'Euler ne contient donc plus que le gradient, et on peut écrire le théorème de Bernouilli :

$$g\rho + \frac{1}{2}m[\boldsymbol{v}'(r')]^2 = \text{Cte}.$$

La densité locale est modifiée par la vitesse de l'écoulement : elle est d'autant plus grande que l'écoulement est lent. En développant le terme cinétique, on obtient :

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \rho_0 - \frac{m}{2g}\left[\frac{\Gamma^2}{(2\pi r')^2} + \frac{\Gamma}{\pi r'}\boldsymbol{u}_{\theta'} \cdot (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L)\right].$$

Le premier terme entre crochets traduit l'expulsion centrifuge des atomes proches du vortex et varie comme $1/r'^2$. Le second terme, dominé pour les faibles valeurs de r' par le premier, devient plus important quand on s'éloigne du vortex. Il est à l'origine d'un déséquilibre de la densité autour du vortex (figure 5.2(b)) : du côté où le champ de vitesse du condensat s'ajoute au champ uniforme, la densité est abaissée par rapport à sa valeur asymptotique, et le phénomène opposé se produit de l'autre côté.

Enfin la pression du champ moyen est donnée par $P = g\rho^2/2$, ce qui donne ici :

$$P(\boldsymbol{r}') \simeq \frac{g\rho_0^2}{2} - \frac{m\rho_0}{2}\left[\frac{\Gamma^2}{(2\pi r')^2} + \frac{\Gamma}{\pi r'}\boldsymbol{u}_{\theta'} \cdot (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L)\right].$$

On a négligé les termes d'ordre 4 en vitesse conformément à l'hypothèse d'incompressibilité $mv^2 < g\rho$. Le dernier terme n'est pas symétrique de part et d'autre du vortex, et conduit à une force nette agissant sur le vortex (figure 5.2(b)). La résultante de la pression sur un cylindre de longueur L de rayon r' entourant la ligne de vortex est donnée par :

$$\boldsymbol{F}_M^{(1)} = \int P(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{S}.$$

où $d\boldsymbol{S}$ est dirigé vers le centre du cylindre. On trouve :

$$\frac{\boldsymbol{F}_M^{(1)}}{L} = \frac{1}{2}m\rho_0(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L) \times (\Gamma \boldsymbol{u}_z).$$

Ceci donne la contribution de la pression de champ moyen à la résultante totale des forces. Cette contribution est indépendante du rayon r' du cylindre choisi pour définir le système.

Nous passons à la contribution de la quantité de mouvement des particules entrantes et sortantes. La figure 5.2(c) montre les lignes de courant vues du dessus. Le champ de vitesse n'est pas symétrique autour du vortex et le bilan d'impulsion n'est pas nul. La force résultante s'écrit :

$$\boldsymbol{F}_M^{(2)} = \int (m\boldsymbol{v}')\rho(r')\boldsymbol{v}' \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Pour ce terme, et à l'ordre le plus bas en $mv^2/g\rho$, on peut considérer ρ comme constante à la surface du cylindre. On trouve alors :

$$\frac{\boldsymbol{F}_M^{(2)}}{L} = \frac{1}{2}m\rho_0(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L) \times (\Gamma \boldsymbol{u}_z).$$

Cette expression est exactement identique à la contribution du terme de champ moyen. Elle est également indépendante du rayon du cylindre. La force totale par unité de longueur vaut :

$$\frac{\boldsymbol{F}_M}{L} = m\rho_0(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L) \times (\Gamma \boldsymbol{u}_z). \tag{5.7}$$

Cette expression porte le nom de force de Magnus. Elle donne la force agissant sur un vortex lorsque celui-ci est en mouvement par rapport au fluide qui l'entoure. On notera qu'elle peut être retrouvée dans le cadre du problème quantique à N corps [109].

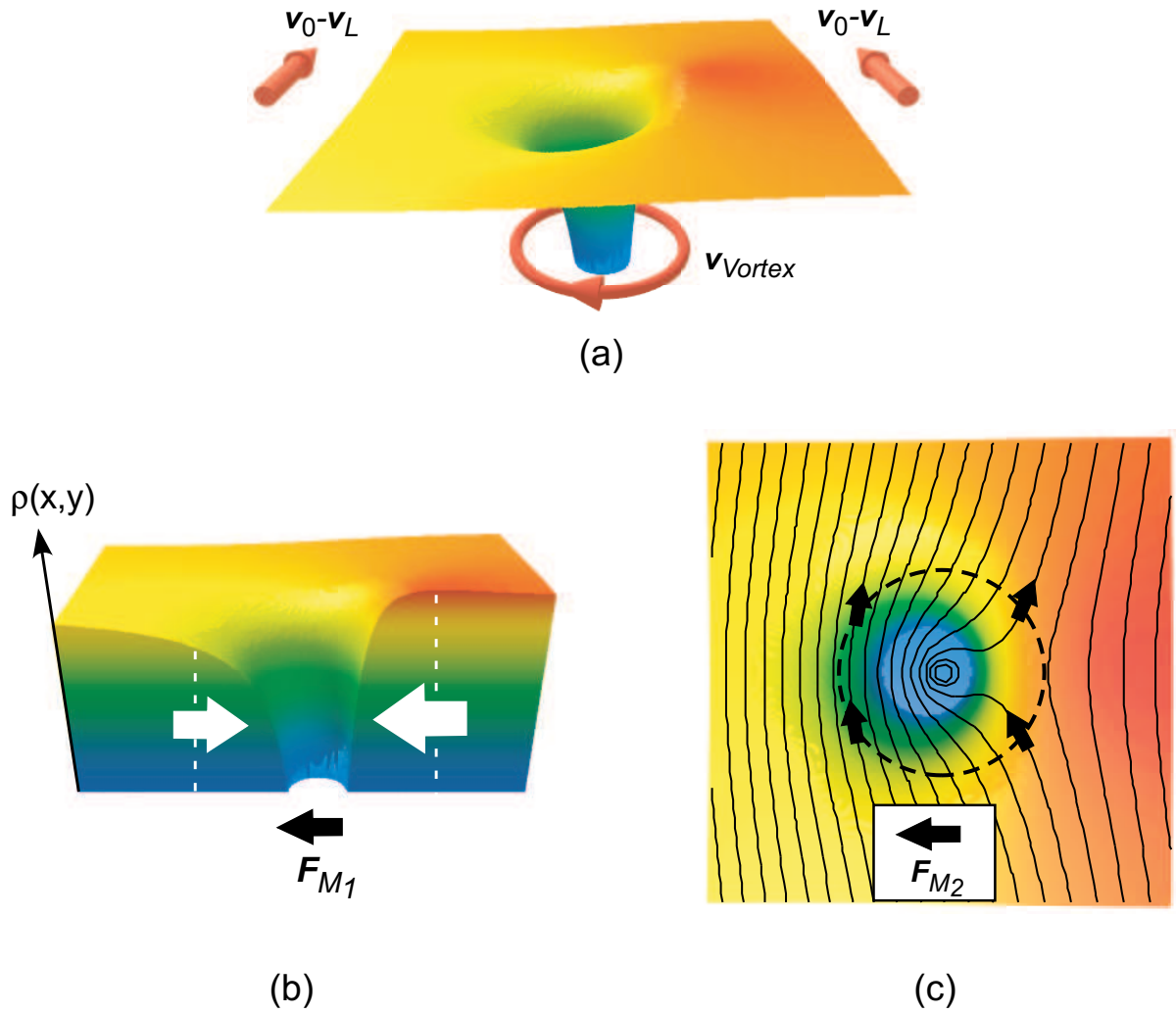


FIGURE 5.2 – Origine physique de la force de Magnus. (a) Représentation du fluide (la hauteur est proportionnelle à la densité) et des différents champs de vitesse qui se superposent : un champ uniforme $\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_L$ loin du vortex, et le champ de vitesse du vortex. (b) Coupe de la figure (a). La densité n'est pas symétrique autour du vortex, ce qui conduit à des forces de pressions non symétriques, dirigées des régions de haute densité vers celles de plus faible densité. (c) Vue du dessus de la figure (a) montrant les lignes de courant. Le cylindre entourant le vortex est un système ouvert. Les particules qui entrent sont défléchies vers la droite, exerçant au total une force vers la gauche.

Forces de Iordanskii

Lorsque le fluide est à température non nulle, il coexiste avec un bain d'excitations thermiques. Les interactions d'un vortex avec ces excitations conduisent à une force dite de Iordanskii et qui a pour forme générale[3] :

$$\frac{\boldsymbol{F}_I}{L} = D(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_L) + D'(\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_L) \times \boldsymbol{t}. \tag{5.8}$$

$\boldsymbol{t}$ est un vecteur tangent à la ligne de vortex. $\boldsymbol{v}_n$ est la vitesse de la composante normale du fluide, et D et D' sont des coefficients. La vitesse qui intervient est la vitesse relative de la ligne de vortex par rapport au gaz d'excitations. Le premier terme est dit longitudinal, et le second transverse. Ils s'annulent tous les deux à température nulle.

Cette force a été explicitée pour la première fois par Iordanskii en 1964 [111]. Nous l'évoquerons de manière qualitative pour décrire les processus dissipatifs à l'origine de la friction subie par un vortex. On notera que son expression exacte semble toujours faire débat [110, 112].

Masse d'une ligne de vortex et dynamique

Connaissant les principales forces agissant sur un vortex, nous sommes presque en mesure d'écrire une équation dynamique. Il nous manque pour cela une expression de la masse de la ligne de vortex. On remarquera que la dérivation de la force de Magnus a fait apparaître le fait qu'un vortex est un système ouvert (figure 5.2(c)). Les échanges de quantité de mouvement avec l'extérieur ont été inclus dans la force de Magnus — nous avons vu qu'ils y contribuent de moitié. Nous nous autoriserons donc à parler d'un vortex comme d'un objet dynamique, de masse finie et subissant des forces extérieures.

Pour évaluer sa masse, on peut simplement remarquer qu'un vortex en mouvement a une énergie supérieure à celle de l'équation 5.6 car une petite quantité de matière doit être déplacée. Cette quantité de matière est proportionnelle à la longueur L du vortex et à la surface de son cœur $\sim \pi\xi^2$, de sorte que la masse effective du vortex par unité de longueur vaut [113] :

$$\lambda^* = m\rho\pi\xi^2. \tag{5.9}$$

Cette masse est très faible, puisqu'elle est égale à celle du fluide multipliée par le facteur $\xi^2/R^2 \ll 1$.

On peut maintenant écrire l'équation décrivant la dynamique d'un vortex en présence des forces de Magnus et de Iordanskii :

$$\lambda^* \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_L}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_M + \boldsymbol{F}_I. \tag{5.10}$$

Oubliant pour le moment la force de Iordanskii, on constate que le vecteur $(\boldsymbol{v}_L - \boldsymbol{v}_0)$ précesse autour de l'axe du vortex à une fréquence de Larmor :

$$\omega_L = \frac{h}{m\pi\xi^2} \sim \frac{\mu}{\hbar}.$$

Le mouvement de précession est un mode de haute fréquence, très rapide à cause de la faible masse du vortex[4]. On peut remarquer qu'il se moyenne à zéro dans le temps, de sorte que le

[3] Ces interactions sont traitées dans [110] comme un effet Aharonov-Bohm d'interférence d'une quasi-particule passant de part et d'autre de la ligne de vortex.

[4] Ce mouvement est l'analogue du mouvement cyclotron d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Dans le référentiel attaché à la ligne, la force de Magnus est ainsi équivalente à la force de Lorentz.

mouvement de la ligne se réduit à une dérive[5] dans le champ de vitesse $\boldsymbol{v}_0$. Une ligne de vortex soumise à la seule force de Magnus a donc une dynamique extrêmement simple : elle se déplace avec le superfluide qui l'entoure. On a :

$$\boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{v}_0. \tag{5.11}$$

Dans le cas d'un champ de vitesse $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r})$ non uniforme, on pourra appliquer cette relation si les variations spatiales de ce champ se font sur des distances supérieures à ξ. Chaque morceau de la ligne de vortex sera considéré indépendamment, comme un vortex rectiligne et plongé dans un écoulement de vitesse localement uniforme.

Ce résultat essentiel, simple dans son apparence, ne rend pas l'ensemble de la dynamique d'un vortex simple pour autant, car il reste à évaluer correctement la vitesse $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r})$ en prenant en compte l'action de toutes les parties de la ligne de vortex (lorsqu'ils sont courbés), les effets de bord ainsi que la présence éventuelle d'autres vortex. La dynamique d'un vortex unique fait l'objet des chapitres 6 et 7, celle d'un réseau de vortex étant traitée plus loin, dans la quatrième partie.

Le théorème de Kelvin-Helmholtz et les vortex

On pourrait imaginer de retrouver le résultat $\boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{v}_0$ à partir du théorème de Kelvin-Helmholtz. Celui-ci s'applique en effet à tout fluide barotrope dépourvu de viscosité, et s'énonce ainsi : la circulation de la vitesse sur un contour fermé qui se déplace avec le fluide ne dépend pas du temps [114]. Prenant pour contour un petit cercle autour du vortex, on retrouve — en apparence — l'égalité $\boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{v}_0$.

Cette dérivation est toutefois en partie incorrecte, car le théorème de Kelvin-Helmholtz ne s'applique plus si la densité s'annule en un point du lacet. Cela rend son application aux vortex quantifiés délicate [115], puisque l'un d'entre eux peut *a priori* croiser le contour à tout moment. Le contour peut aussi évoluer significativement, par exemple s'étirer vers le bord du condensat et atteindre des régions où la densité s'annule. Le théorème de Kelvin-Helmholtz convient donc pour les situations simples où l'évolution du lacet considéré n'est pas singulière. L'analyse par les forces semble plus recommandable dans un cas général, et permet de surcroît d'inclure des effets visqueux.

5.2 Apparition des vortex dans le condensat

Après cette introduction très générale sur les vortex, nous revenons au condensat tel que l'avaient laissé les excitations non-linéaires par la cuillère (*cf.* chapitre 3). Nous allons montrer que les instabilités observées alors correspondent à l'entrée dans le condensat de plusieurs vortex. Ce phénomène de nucléation soulève de nombreuses questions auxquelles nous essayons de donner de modestes réponses, nous appuyant sur de récents travaux théoriques.

5.2.1 Nucléation par augmentation lente de ϵ

Nous avons vu que deux types d'instabilités peuvent apparaître lorsque l'on tente de suivre les états stationnaires donnés par l'équation 3.21 :

– Le repliement d'une courbe lorsqu'on tente de la suivre jusqu'à son point de rebroussement : c'est ce qui se produit sur la figure 3.9 lorsqu'on suit les états à Ω fixé en augmentant ϵ.

[5] La dérive dans le champ de vitesse uniforme s'apparente à la dérive d'une particule chargée dans des champs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ statiques : au mouvement cyclotron haute fréquence se superpose un mouvement basse fréquence durant lequel la particule suit les équipotentielles de $\boldsymbol{E}$.

Arrivé au point de rebroussement de la branche (II), le condensat ne peut plus suivre la courbe et se retrouve dans un état non stationnaire. Une telle instabilité se produit aussi sur la figure 3.8 lorsque l'on part des grandes valeurs de Ω pour ensuite redescendre à travers la résonance quadrupolaire.

– Une instabilité vis à vis d'autres modes dans une région bien définie : c'est ce qui a été observé sur la figure 3.8. Lors de l'augmentation de Ω, il y a un point $\Omega/\omega_\perp \sim 0.8$ à partir duquel le condensat quitte la courbe des états stationnaires. Une telle instabilité a été discutée théoriquement dans [102].

Nous avons reproduit l'expérience de la figure 3.8 (augmentation de ϵ à Ω fixé) en ajoutant après la phase d'excitation par la cuillère une phase d'évolution libre dans le seul piège magnétique (figure 5.3). Le condensat a ainsi la possibilité d'évoluer vers un nouvel état d'équilibre même s'il passe momentanément par des états non stationnaires. Les images longitudinales (i.e. prises selon z) de la figure 5.3 montrent que tant que ϵ reste inférieur à ~ 0.029, le nuage relaxe vers un état rond ($\delta = 0$) avec la structure de parabole inversée. Par contre, pour des valeurs finales de ϵ dépassant ~ 0.029, le nuage relaxe vers un état complètement différent : la forme reste ronde, mais le profil de densité révèle des trous régulièrement espacés. Ces trous sont des vortex. Leur arrangement en réseaux réguliers est discuté dans la quatrième partie. Une signature de la présence de ces vortex est visible sur la courbe de la figure 5.3, où l'on a reporté l'aire moyenne des condensats après toute la séquence expérimentale. Les condensats contenant des vortex sont nettement plus grands que les autres, ce qui donne un moyen quantitatif des les repérer. Un autre moyen consiste à mesurer le moment cinétique du nuage [116] (nous détaillerons cette méthode au chapitre suivant) : on peut montrer que l'apparition de vortex correspond à l'apparition de moment cinétique dans le nuage [1].

Une expérience analogue a été réalisée pour suivre l'évolution du condensat après son décrochage de la branche (I) quand on augmente Ω à ϵ fixé [1]. Bien que la branche suivie ne présente pas de point de repliement, on a montré que les états stationnaires n'étaient plus suivis à partir d'un certain Ω, et que les condensats relaxaient alors vers des réseaux de vortex.

Ainsi les situations où le condensat décroche des branches (I) et (II) peuvent-elles conduire à de nouveaux états contenant des objets particuliers, les vortex. Le principe général de cette méthode de nucléation de vortex est d'amener adiabatiquement le condensat à un point où deux ingrédients sont réunis :

– **Un moment cinétique important** : le condensat contient un grand moment cinétique juste avant de quitter les états stationnaires.

– **Une instabilité de surface** : la bordure du condensat devient le lieu de diverses excitations qui résultent dans la nucléation de vortex.

5.2.2 Nucléation par une augmentation brutale de ϵ

Une autre méthode de nucléation, plus simple et plus brutale, a été utilisée sur notre montage : elle consiste en un allumage quasi-instantané d'une cuillère tournant à une fréquence fixe Ω. Le paramètre ϵ est amené en un temps court (20 ms) à sa valeur finale et y est maintenu durant toute l'excitation. L'évolution d'un condensat et de $\tilde{\alpha} = \Omega\delta/\omega_\perp$ dans de telles conditions est montrée sur la figure 5.4 pour $\Omega/\omega_\perp = 0.7$; ϵ est maintenu constant durant 300 millisecondes à la valeur $\epsilon = 0.032$, puis ramené brutalement à une valeur nulle afin de laisser au condensat une phase d'évolution libre. Les images sont des images longitudinales du condensat prises toutes les 150 millisecondes. Le condensat devient elliptique aux temps courts, et le paramètre $\tilde{\alpha}$ subit quelques oscillations de basse fréquence. Au moment de la coupure de ϵ, le condensat a une forme qui évoque celle d'une "galaxie", avec des traces de turbulence sur les bords. Lors de son évolution libre, cette galaxie relaxe doucement vers un condensat contenant 7 vortex arrangés

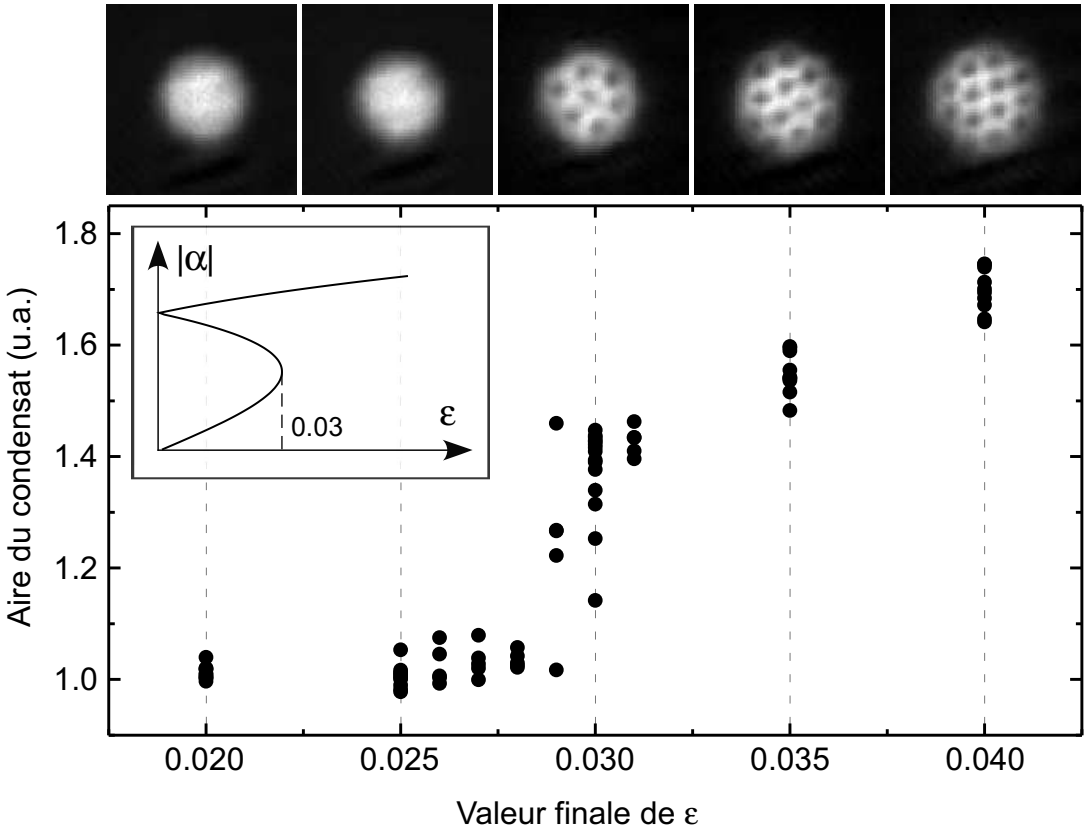


FIGURE 5.3 – Nucléation des vortex par une augmentation lente de ϵ à $\Omega/2\pi$ = fixé (ϵ est augmenté en 50 ms vers sa valeur maximale, puis maintenu à cette valeur pendant 400 ms, avant d'être ramené à la valeur nulle en 50 ms). L'aire du condensat est mesurée après 400 ms d'évolution libre, qui font suite à l'excitation par la cuillère. Si la cuillère dépasse (pendant sa phase d'application) une puissance critique $\epsilon_c \simeq 0.029$, le condensat relaxe pendant la phase suivante vers un état contenant des vortex, caractérisé par une aire significativement plus grande. Un insert rappelle la forme de la courbe $|\alpha(\epsilon)|$.

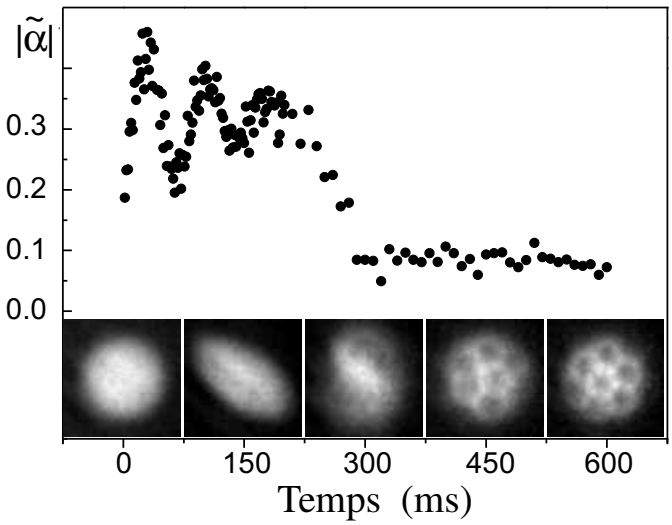


FIGURE 5.4 – Nucléation de vortex par la méthode la plus courante : le condensat est soumis pendant 300 ms à une cuillère dont les paramètres $\Omega/\omega_\perp = 0.7$ et $\epsilon = 0.032$ sont fixes, puis laissé libre de relaxer. La cuillère excite fortement et non adiabatiquement le mode quadrupolaire : le paramètre de déformation du nuage $|\tilde{\alpha}|$ oscille. Le condensat prend une forme allongée, puis de galaxie, avant de relaxer vers un réseaux de vortex.

selon un réseau hexagonal. On notera que contrairement à ce qui se passe lorsqu'on augmente doucement ϵ, le condensat n'est à aucun moment — excepté à la fin de la séquence — dans un état stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii.

Ce protocole expérimental de nucléation de vortex est celui qui a permis la première observation des vortex sur notre expérience [32, 63]. C'est aussi cette méthode qui est utilisée dans presque toutes les expériences décrites dans ce manuscrit, parce qu'elle est à la fois simple à mettre en œuvre et efficace. Elle permet en particulier d'atteindre les deux conditions évoquées précédemment : un grand moment cinétique et une instabilité de surface. Elle fonctionne en outre pour des valeurs de Ω plus faibles que les autres méthodes. Le paragraphe suivant est consacré à l'interprétation de cette méthode de nucléation.

5.2.3 Nucléation, turbulence et dissipation

Nous essayons ici de dégager quelques éléments pour la compréhension de la nucléation des vortex et la relaxation vers un arrangement ordonné de vortex. Un vortex ne pouvant apparaître *ex-nihilo* au milieu du condensat (cela contredirait le théorème de Kelvin-Helmholtz), nous supposerons qu'il est créé au bord et qu'il est amené vers le centre ensuite[6].

Nucléation : il faut introduire une longueur de l'ordre de ξ

Le piège dans lequel nous tentons de nucléer des vortex est — aux imperfections de construction près — purement harmonique, même en ce qui concerne sa partie tournante, la cuillère. Ainsi, d'après les lois d'échelle généralisées, l'évolution de la densité spatiale dans le temps doit correspondre à des polynômes de degré deux. Dans ces conditions, on voit difficilement comment peut se créer une petite excitation de la taille d'un vortex (rappelons que $\xi \ll R_\perp$).

[6] On peut aussi imaginer la création de paires vortex anti-vortex en tout point du condensat, ou d'anneaux de vorticité de rayon initialement nul [117].

La solution provient de la turbulence aux bords du nuage, telle qu'on peut l'observer sur la troisième image de la figure 5.4. Le condensat excité par la cuillère tourne rapidement et s'est déjà largement déformé ; à sa surface, on devine une région turbulente. Deux instabilités peuvent expliquer l'apparition de courtes longueurs d'ondes à la surface du condensat : dynamique ou thermodynamique. Une instabilité thermodynamique se produit lorsque la fréquence d'un mode devient négative. L'état fondamental n'est plus alors celui de basse énergie. Une instabilité dynamique signifie que la fréquence d'un mode devient imaginaire, conduisant à une croissance exponentielle de son amplitude.

L'instabilité dynamique d'un condensat tournant a été étudiée par Castin et Sinha [102] : ils ont montré que le mode du condensat de moment cinétique 3 devient instable au-delà d'une fréquence de rotation $\Omega/\omega_\perp \sim 0.7$ qui dépend de ϵ et de la procédure expérimentale exacte. Sa fréquence devenant imaginaire, il croît rapidement et déforme la surface du condensat. D'autres modes d'ordre plus élevé peuvent d'ailleurs devenir instables dynamiquement dans la région $\Omega/\omega_\perp \sim 0.7$ [118].

L'instabilité thermodynamique quant à elle se produit dans le référentiel tournant à Ω lorsque $l\Omega > \omega_l$, l désignant l'ordre du mode $(l, m_l = l)$ considéré. On peut interpréter cette condition comme un critère de Landau appliqué à la rotation [119] : pour qu'une excitation soit émise par un objet en mouvement, il faut que la vitesse de cet objet soit supérieure à la vitesse du son (voir chapitre 1). On montre ainsi que l'énergie de nombreux modes devient négative autour de $\Omega/\omega_\perp \sim 0.5$ [120]. Cette valeur dépend du rapport d'aspect $\omega_\perp/\omega_z$ du condensat.

Le rôle de ces deux types d'instabilités dans notre expérience n'est pas complètement élucidé. Des simulations numériques dans des conditions proches de celles de la figure 5.4 ont été réalisées par Kasamatsu, Tsubota et Ueda [118]. Elles semblent montrer que l'instabilité essentielle est celle de Landau. Toutefois, les auteurs remarquent que pour se développer, une instabilité thermodynamique a besoin de la dissipation due au du nuage thermique environnant. Celui-ci est peu important au début de l'expérience, mais pourrait selon les auteurs devenir plus dense en bordure du condensat du fait de la turbulence générée par les modes instables dynamiquement. C'est donc un mécanisme en deux temps (instabilité dynamique qui peuple le nuage thermique, puis instabilité de Landau qui introduit des échelles de longueurs de l'ordre de ξ) qui serait à l'origine de la nucléation des vortex en bordure de condensat. D'autres simulations numériques ont permis de confirmer le rôle de la turbulence en bord de condensat [120, 121].

Energie : l'état à un vortex doit être énergétiquement favorable

Pour qu'il existe un espoir de voir rentrer un vortex, il faut imposer au condensat des conditions qui favorisent énergétiquement un tel état. L'énergie d'une ligne de vortex est donnée par (5.6) :

$$\frac{E_{\text{vortex}}}{N} = \frac{n^2\hbar^2}{mR_\perp^2} \ln\left(\frac{R_\perp}{\xi}\right).$$

Dans le référentiel du laboratoire, une ligne de vortex a donc une énergie strictement positive, puisque de nature cinétique. Si l'on souhaite qu'un état contenant un vortex soit favorable énergétiquement par rapport à un état où le condensat est au repos, il faut imposer au condensat de s'équilibrer dans un référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$, en faisant en sorte que le potentiel de piégeage soit indépendant du temps seulement dans un tel référentiel. En effet, l'énergie dans le référentiel tournant se déduit de celle dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_0$ par la transformation :

$$E \to E - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{L}_z. \tag{5.12}$$

Un vortex est associé à un moment cinétique L_z non nul. On peut montrer qu'il existe des valeurs de Ω pour lesquelles cette énergie est négative, de sorte que l'état avec un vortex devient favorable. Notons que la présence d'un référentiel explicitement tournant avec une fréquence de

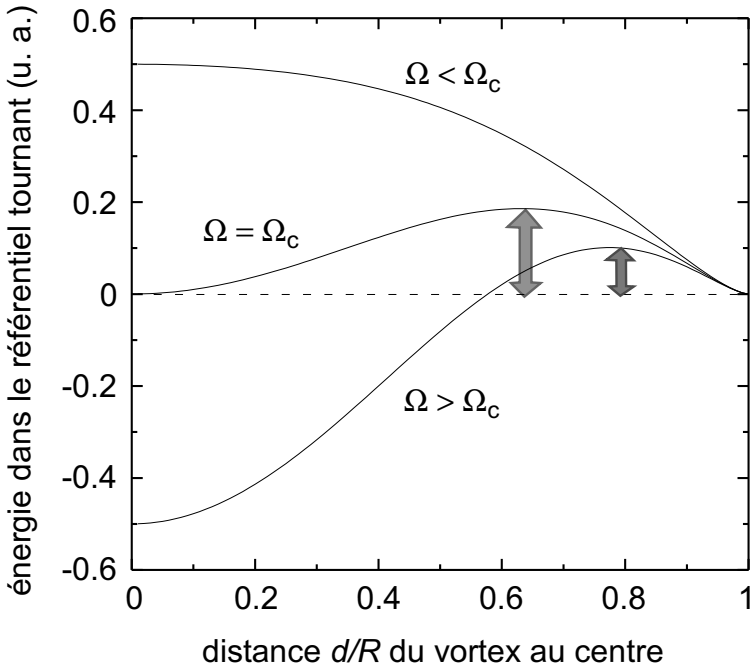


FIGURE 5.5 – Energie du vortex dans le référentiel tournant en fonction de sa distance d/R au centre du condensat. L'état $d/R = 0$ devient favorable énergétiquement lorsque $\Omega > \Omega_c$, mais un barrière énergétique bloque le vortex au bord du nuage. Cette métastabilité peut disparaître dans un condensat elliptique [126].

rotation Ω n'est pas indispensable. Il est tout aussi efficace de fixer la variable conjuguée L_z et de travailler dans un piège à symétrie de révolution. Les deux situations sont équivalentes à une transformation de Legendre près.

Plusieurs auteurs ont évalué la fréquence Ω_c au-delà de laquelle l'état à un vortex a une énergie négative [108,122–125]. Cette fréquence donne un critère thermodynamique d'entrée d'un vortex dans le condensat. Ce critère, qui était le seul considéré dans les premières estimations de la fréquence critique de nucléation, doit toutefois être nuancé du fait de phénomènes de métastabilité.

Métastabilité : il doit exister un chemin sans barrière de potentiel

Nous nous inspirons ici de l'article de Krämer, Pitaevskii, Stringari et Zambelli [126]. Ces auteurs évaluent l'énergie et le moment cinétique d'un vortex dans un condensat tel que le nôtre et placé dans un piège tournant à Ω, lorsque ce vortex est à une distance d quelconque du centre du nuage. Cela permet d'évaluer l'énergie dans le référentiel tournant :

$$E_\Omega(d/R_\perp, \mu) = E_{\Omega=0}(d=0,\mu)\left[1-\left(\frac{d}{R_\perp}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - \Omega N\hbar\left[1-\left(\frac{d}{R_\perp}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}. \tag{5.13}$$

Cette énergie est tracée sur la figure 5.5 en fonction de la distance d : on constate que même quand l'énergie présente un minimum en $d = 0$ (i.e. lorsque $\Omega > \Omega_c$), il y a une barrière à surmonter.

Cette métastabilité d'un vortex en bord de condensat peut sembler rédhibitoire. Elle peut néanmoins disparaître sous certaines conditions. En effet, lorsque le condensat devient elliptique sous l'action d'une cuillère, un second paramètre intervient dans l'expression de l'énergie : la

déformation du nuage δ. Les auteurs de [126] ont montré que pour des valeurs de Ω suffisamment grandes, il existe un chemin dans le plan (d, δ) partant d'un vortex au bord et aboutissant à un vortex centré, et le long duquel l'énergie décroît de manière monotone. Un vortex au bord n'est plus métastable dans ces conditions.

Dissipation : il faut des frottements pour amener le(s) vortex au centre

Imaginons qu'un condensat rond contienne un vortex droit à une certaine distance de son centre. A tout instant, la distribution de vitesse dans le condensat peut être calculée à partir des conditions aux bords et des termes sources (ici le vortex). Un plan contenant l'axe de rotation et le vortex est plan d'antisymétrie pour les sources de sorte que la vitesse dans ce plan doit être orthoradiale. Si seule la force de Magnus agit sur le vortex, celui-ci suit l'écoulement local. La vitesse étant orthoradiale, il décrit des cercles à égale distance du centre [127]. Ce phénomène de précession a été étudié expérimentalement au JILA [128].

Ainsi un vortex créé au bord du condensat ne sera pas entraîné vers le centre par l'action de la force de Magnus[7]. C'est donc sur les forces de Iordanskii qu'il faut se reposer pour que le vortex explore réellement tout l'espace mis à sa disposition [129]. Ces forces sont liées à la présence de phonons, ou plus généralement à la température finie de l'échantillon. Les simulations numériques montrent d'ailleurs que même dans un échantillon initialement à température nulle, les vortex finissent par se diriger vers le centre du condensat [121]. Cela tient à la dynamique turbulente de la surface du condensat : celle-ci introduit des excitations de courte longueur d'onde dans le condensat ; ces excitations sont susceptibles de diffuser sur les vortex et de leur prendre un peu d'impulsion.

Enfin, on notera que lorsque plusieurs vortex sont présents, ils cristallisent en un réseau ordonné. C'est là encore la dissipation qui permet au système de trouver l'état d'énergie minimale. Ces réseaux font l'objet de la quatrième partie.

5.3 D'autres vortex

5.3.1 Autres méthodes de nucléation dans les condensats gazeux

Quatre groupes de recherche ont à ce jour étudié les vortex sur des expériences de condensation d'alcalins. Les travaux de notre groupe font l'objet du présent manuscrit ainsi que de celui de Frédéric Chevy [32]. Nous donnons ci-dessous un aperçu des méthodes utilisées dans les trois autres groupes pour nucléer des vortex. Ces méthodes sont le plus souvent complémentaires de la nôtre.

L'impression de phase

La technique de l'impression de phase consiste à modifier localement la phase du condensat afin de façonner l'état recherché, ici un vortex.

L'équipe d'Eric Cornell (JILA) a observé pour la première fois un vortex dans un condensat gazeux en 1999 [62]. Leur technique de fabrication s'inspire d'une proposition de Williams et Holland [130] : par une combinaison d'un laser désaccordé vers le bleu et d'une onde radio-fréquence, il est possible de transférer une couronne d'atomes dans un état de spin $|1\rangle$ alors que le centre reste dans l'état de spin $|2\rangle$. Cette technique permet de laisser aux atomes dans $|1\rangle$ une phase évoluant de 0 à 2π autour de la couronne. Ces atomes sont donc dans un état qui est par construction celui d'un vortex de charge 1. Le cœur du vortex est occupé par des atomes

[7] Une autre façon de dire la même chose : le vortex au centre est une position d'équilibre pour le système et il faut de la friction pour atteindre cette position d'équilibre.

dans l'autre état de spin, qui peuvent ensuite être enlevés. Cette méthode a permis d'étudier la précession du cœur d'un vortex [128] ainsi que les modes de retournement d'un vortex dans un piège quasi-isotrope [131].

Une autre technique d'impression de phase a été développée par le groupe de Wolfgang Ketterle (MIT) [132]. Les atomes sont piégés dans l'état de spin m_F à la surface d'un micro-piège magnétique de type Ioffe-Pritchard. La configuration de champ est antisymétrique dans une permutation du champ directeur B_z, de sorte qu'il est possible de passer continûment d'un piège où les atomes sont orientés suivant $\boldsymbol{u}_z$ à une configuration où ils sont antiparallèles à $\boldsymbol{u}_z$. Lors du retournement des spins, on montre que s'accumule une phase de Berry qui correspond exactement à la phase d'un vortex de charge $2m_F$. Des vortex de charge 2 et 4 ont ainsi été créés, la charge étant vérifiée par une mesure des fréquences des modes quadrupolaires (cette méthode sera détaillée au chapitre suivant). En stoppant le retournement des spins à mi-chemin, les spins ne sont pas orientés de sorte que le condensat contient un degré de liberté interne. Il est alors possible d'observer des vortex spinoriels dont le cœur n'est pas creux [133].

Excitation de modes de surfaces

Cette méthode s'apparente à celle que nous utilisons sur notre expérience. Elle a été appliquée avec des faisceaux de petite taille par rapport au condensat dans le groupe du MIT [64]. Cela a permis d'étudier la nucléation avec des cuillères de géométries variables, avec par exemple des structures à 3 ou 4 faisceaux. La différence essentielle par rapport à notre expérience est que la perturbation tournante n'est pas harmonique. Avec ce dispositif il a été possible de produire des condensats contenant plus de 100 vortex [134] et d'étudier la dynamique de formation et de relaxation des réseaux de vortex [135].

Le groupe de Christopher Foot (Oxford) a mis au point une technique de nucléation purement à base de champs magnétiques dans un piège TOP [65]. Le potentiel tournant est analogue à celui que créé notre cuillère : il est harmonique et caractérisé par un paramètre d'anisotropie ϵ. Des études de la nucléation ont ainsi pu être menées, études complémentaires des nôtres (puisque le piège utilisé est en forme de crêpe — $\omega_z > \omega_\perp$) et où le mode quadrupolaire joue également un très grand rôle. Ce système expérimental a permis l'observation de la précession gyroscopique d'un condensat contenant un vortex [48].

Refroidissement d'un nuage thermique en rotation et accélération par évaporation

L'équipe du JILA a mis au point une technique de nucléation qui commence par la mise en rotation du nuage thermique [98]. Ce dernier est entraîné par une déformation tournante de 25% qui est coupée avant que ne soit atteinte la transition de Bose-Einstein. Les derniers pas vers la condensation sont alors franchis par un abaissement de la radio-fréquence. Il semble que le passage à un piège prolate (en forme de cigare) soit crucial : l'évaporation est en effet sélective spatialement du fait de la gravité. Dans le cas d'un piège prolate vertical, elle enlève des atomes loin du centre du piège mais proches de l'axe de rotation. De tels atomes ont un moment cinétique moyen faible, de sorte que l'évaporation augmente le moment cinétique moyen par particule. Le système condense dans une configuration où de nombreux vortex sont déjà présents.

De larges réseaux de vortex ont ainsi pu être observés [136], réseaux dont la dynamique s'est révélée très riche : des trous stables ont été créés dans les réseaux de vortex [137] et les modes de Tkatchenko ont été caractérisés [138]. Ce dispositif expérimental a également permis récemment de mettre les atomes dans le niveau de Landau fondamental [47] (voir chapitres 8 et 9).

Désexcitation d'un soliton et traînée derrière un obstacle

Deux expériences ont permis la production et l'identification de vortex, mais sans qu'un mouvement de rotation total soit mis en jeu. La première a été réalisée au JILA et a consiste à créer un soliton noir, qui lorsqu'il atteint le bord du condensat se désexcite en un anneau de vorticité [139]. Ce dernier est identifié par la présence systématique de deux trous dans la densité intégrée du nuage. La seconde expérience a été réalisée dans le groupe du MIT, où un obstacle constitué d'un laser très désaccordé était déplacé dans le condensat [106]. Au-delà d'un vitesse critique de déplacement, l'obstacle crée un sillage dans lequel des vortex ont pu être identifiés par des techniques d'interférences.

Ces expériences prouvent le rôle joué par les vortex en tant qu'excitations de basse énergie du superfluide.

5.3.2 Les vortex quantifiés en physique de la matière condensée

Nous donnons ici un aperçu très rapide des domaines de la physique où apparaissent des vortex quantifiés. Nous avons tâché d'accompagner ce paragraphe de quelques références générales ou historiquement importantes, où pourront être trouvés des développement quantitatifs.

L'idée initiale de l'existence des vortex quantifiés revient à Onsager en 1949 [140]. Feynman a repris cette idée en 1955 [68] en dressant une liste de phénomènes dans l'hélium-II qui pourraient être liés à l'existence de ces lignes : rotation "comme un corps solide" avec de nombreux vortex (voir chapitre 8), abaissement de la vitesse critique et turbulence. Ces idées ont trouvé écho dans de nombreux développements ultérieurs [27] : la présence de vortex a été détectée par une mesure de la quantification de la circulation [103] ou encore en piégeant des ions dans leur cœur [141] (figure 5.6(a)). La turbulence superfluide quant à elle repose sur l'idée que de l'énergie peut être cédée au fluide par l'augmentation du nombre de vortex et de leur longueur. Un enlacement chaotique de vortex se crée, qui relaxe par reconnections successives vers des échelles d'énergies plus basses, en particulier par la formation de petits anneaux de vorticité [27, 142, 143].

Les phases de type BCS peuvent également contenir des vortex quantifiés. Ainsi les vortex quantifiés jouent un très grand rôle dans la physique des supraconducteurs de type II [28] : ils correspondent à des lignes de petites tailles où le champ magnétique pénètre l'intérieur du supraconducteur. La circulation du courant est quantifiée autour de ces vortex, qui s'arrangent comme leurs analogues superfluides en réseaux d'Abrikosov [144] (figure 5.6(b)). A une autre échelle d'énergie, on peut aussi signaler que des vortex sont présents dans les étoiles à neutrons (voir références dans [108]). Dans l'hélium-III (phase condensée BCS de l'isotope fermionique ^{3}He), la physique des vortex quantifiés s'enrichit de l'existence d'un spin $S = 1$ et d'un moment angulaire $L = 1$ par paire de Cooper. Les vortex se présentent alors sous la forme de textures de spin et de moment cinétique [145].

Enfin, les vortex jouent un rôle remarquable dans la physique des transitions de phase à deux dimensions. Le modèle théorique canonique de ces transitions est le modèle XY à deux dimensions. Les paires de vortex-antivortex en constituent les excitations de plus basse énergie (figure 5.6(c)). Au-delà d'une température critique, les paires sont cassées par l'agitation thermique et donnent lieu à un gaz de vortex et d'antivortex libres. Cette transition de phase a été introduite par Kosterlitz et Thouless en 1972 [146, 147].

5.4 Conclusion

Les vortex dans les condensats sont des objets topologiques remarquables, autour desquelles la phase de la fonction d'onde est quantifiée. Dans le régime de Thomas-Fermi, ils correspondent à des lignes d'épaisseur ξ sur lesquelles s'annule la densité. Ils apparaissent dans nos expériences

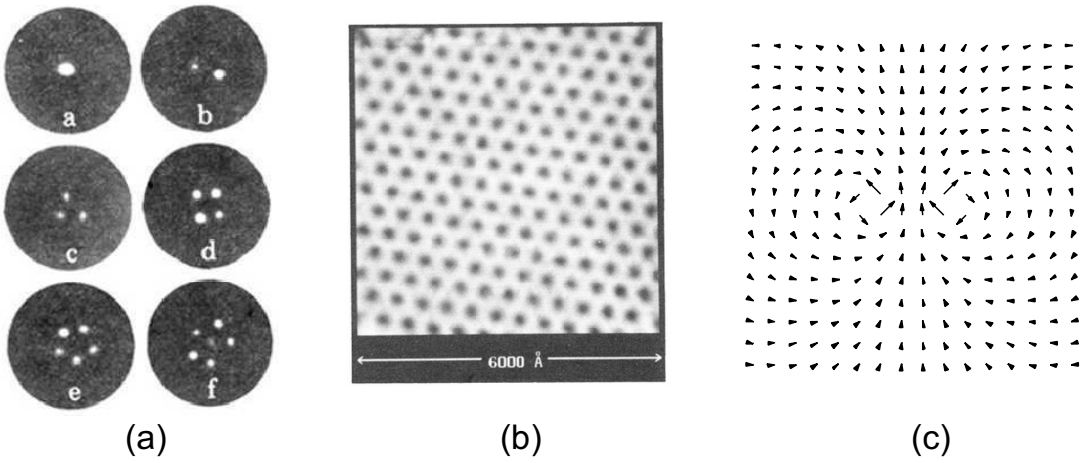


FIGURE 5.6 – Vortex en physique de la matière condensée. (a) Réseaux de vortex observé dans l'hélium-II (figure tirée de [104]). (b) Réseau de vortex observé dans un supraconducteur. (c) Paire de vortex dans le modèle XY.

sur les bords des condensats en rotation, lorsque la surface est perturbée par des instabilités. Ils sont ensuite entraînés vers le centre par des forces de friction. Cette dynamique complexe est imposée par le fait que la densité de superfluide est non nulle. Dans le cas où la transition de Bose-Einstein est atteinte dans un référentiel en rotation, les vortex apparaissent en même temps que la fraction superfluide et peuvent nucléer n'importe où dans l'échantillon [98].

On peut aussi noter que notre méthode de nucléation s'inspire directement des expériences sur l'hélium, où le récipient est mis en rotation. D'autres méthodes de nucléation ont été évoquées, parmi lesquelles des méthodes topologiques de nature quantique. Dans les condensats à deux dimensions, un dernier phénomène pourrait conduire à la nucléation de vortex : il s'agit de la création de paires de vortex sous l'effet des fluctuations thermiques. L'observation de ces paires et de leur dynamique pourrait être l'occasion de mettre en évidence la transition de Kosterlitz-Thouless [146].

Chapitre 6

Forme d'équilibre d'une ligne de vortex unique

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de vortex et calculé un certain nombre de grandeurs : champ de vitesse, énergie, moment cinétique. Tous les raisonnements ont néanmoins été conduits à partir d'une hypothèse très simplificatrice : celle que les vortex sont des objets rectilignes. Or, si un vortex commence et se finit à la surface du condensat, rien ne l'empêche à l'intérieur du condensat de se tordre et d'adopter des formes complexes.

Nous décrivons dans ce chapitre le comportement de condensats contenant une seule ligne de vortex [5, 7]. Après quelques observations de lignes courbées dans des réseaux de vortex, nous présentons la méthode employée pour obtenir de manière reproductible des condensats contenant un unique vortex. Nous montrons ensuite comment les structures en forme de "U" ou de "N" que nous observons peuvent être interprétées à partir d'arguments énergétiques. Enfin, nous détaillons la seconde partie du cycle de vie d'un vortex, à savoir son départ du condensat sous l'effet de la dissipation. Nous faisons en particulier le lien entre moment cinétique et structure de la ligne de vortex.

Dans tout ce chapitre, et sauf précision contraire, le piège magnétique a des fréquences $\omega_z/2\pi \simeq 11.7\,\mathrm{Hz}$ et $\omega_\perp/2\pi \simeq 100\,\mathrm{Hz}$.

6.1 Observation d'une ligne de vortex unique

6.1.1 Un réseau de vortex vu de côté : premiers indices

La figure 6.1 montre quelques images transverses de réseaux de vortex, la direction d'observation étant ainsi perpendiculaire à l'axe de rotation[1]. Ces images ont été obtenues dans un piège dont les fréquences sont approximativement dans un rapport 8 (voir figure pour les valeurs exactes). La méthode de nucléation consiste en un branchement brutal d'une cuillère tournant à une fréquence Ω fixe : cette excitation est maintenue pendant un temps de l'ordre de 300 ms, puis éteinte pour une phase d'évolution libre pouvant varier de 400 ms à quelques secondes. Afin de produire des condensats avec un nombre variable de vortex, nous avons varié l'ensemble des conditions de nucléation, jouant en particulier sur la fréquence de rotation et sur le temps d'évolution libre suivant la phase d'excitation.

L'expansion du condensat pendant 25 ms conduit à l'inversion d'ellipticité classique, de sorte que si les vortex semblent sur les images s'aligner le long de l'axe court du nuage, la situation est inversée dans le piège où ils sont comme un paquet de spaghetti parallèles à l'axe long du cigare. Si l'un des axes du réseau de vortex est aligné avec la direction d'observation,

[1] Des images similaires ont été obtenues au JILA [136]

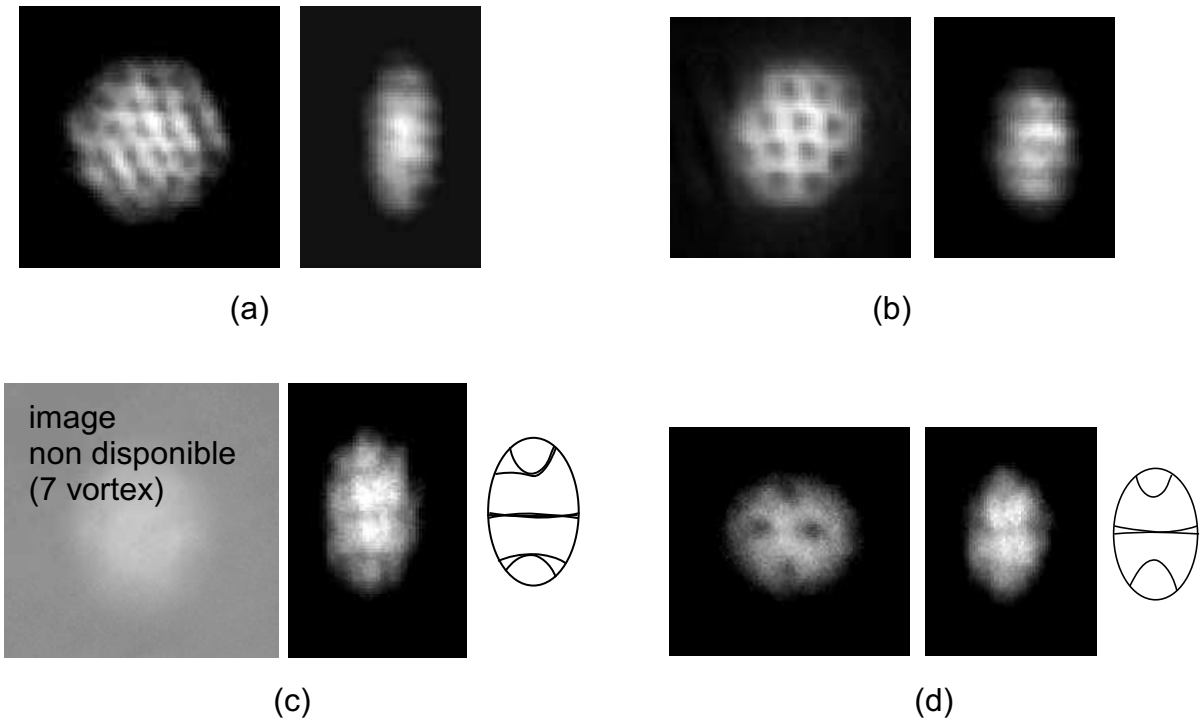


FIGURE 6.1 – Lignes de vortex dans les réseaux de (a) 25 vortex, (b) 13 vortex, (c) 7 vortex et (d) 4 vortex. Les images de gauche sont les images longitudinales (celle qui devrait accompagner la figure (c) n'a pas été prise), les images de droite les images transverses. Les lignes de vortex apparaissent droites sur les images (a) et (b), puis courbées sur les bords lorsque le nombre de vortex diminue (images (c) et (d)). Les schémas qui accompagnent les deux dernières images représentent la forme des lignes de vortex (la qualité des images avant impression permet pratiquement de distinguer les lignes une à une).

les vortex apparaissent sur les images transverses sous la forme de lignes parallèles et droites (figure 6.1(a-b)). Lorsque l'on diminue le nombre de vortex de 25 à 7, ces lignes droites semblent se courber au voisinage des bords du condensat (figure 6.1(c)). Pour de petits nombres de vortex, le phénomène gagne l'ensemble du réseau (figure 6.1(d)) : les lignes sont identifiables une à une, et aucune d'entre elle ne semble être droite.

Ces observations font écho à certains clichés obtenus dans le groupe du MIT [64] où apparaissent des structures courbées. Elles vont être étendues dans la suite à une ligne de vortex unique, qui constitue un système modèle sur lequel peuvent être étudiés plus facilement que sur des réseaux les effets de courbure des vortex.

6.1.2 Obtention d'une ligne de vortex unique

La méthode de nucléation que nous utilisons a été rappelée dans le paragraphe précédent, et décrite en détail dans le chapitre 5 : elle repose sur le transfert de moment cinétique au condensat par le mode quadrupolaire et sur la désexcitation d'instabilités de surface en vortex. Il est clair que cette méthode n'est pas contrôlée et que le nombre de vortex qui entrent dans le condensat ne peut être parfaitement reproductible. En particulier il est très difficile de ne faire rentrer qu'un seul vortex ; cela tient à la brisure de symétrie du mode quadrupolaire (figure 3.6) qui fait passer brutalement d'une excitation peu efficace à une excitation très efficace lorsque Ω varie autour de $\omega_\perp/\sqrt{2}$. Il est bien sûr possible de se placer dans une zone de paramètres marginale, mais les résultats obtenus fluctuent alors d'une réalisation expérimentale à l'autre.

Aussi avons nous développé une méthode indirecte pour produire de manière reproductible des condensats avec un vortex unique. Nous tirons parti de la faible anisotropie transverse du piège magnétique (*cf.* chapitre 1) : le piège n'a pas une parfaite symétrie de révolution de sorte que le moment cinétique n'est pas conservé dans le temps. Nous choisissons pour les paramètres de nucléation des valeurs qui conduisent de manière reproductible à un réseau de 6-8 vortex. Au cours de l'évolution libre de ce réseau (durant un temps T), le moment cinétique diminue ce qui se traduit par la disparition successive de plusieurs vortex. Après un temps de l'ordre de une à deux secondes[2], le condensat ne contient plus qu'un seul vortex (figure 6.2). Ce dernier vortex, comme nous le verrons plus loin, a une durée de vie de 5 à 10 secondes. Appelant τ_N le temps moyen nécessaire à un condensat contenant N vortex pour en perdre un, on constate que τ_1 est très largement supérieur aux autres τ_N. Cette observation a aussi été faite au MIT sur des réseaux plus gros [135] (alors que les 100 vortex initiaux laissent place à un vortex unique au bout de 5 secondes, il faut attendre 40 secondes pour voir disparaître ce dernier). Il y a donc une très large fenêtre temporelle dans laquelle il est très probable qu'il n'y ait qu'un et un seul vortex présent dans le condensat (figure 6.2(h)). C'est dans cette fenêtre que nous avons étudié le comportement d'une ligne de vortex unique.

Le fait que $\tau_1 \gg \tau_N$ suggère que les mécanismes de relaxation d'un réseau de vortex et d'un vortex unique sont très différents. Le nuage thermique, nous l'avons vu au chapitre 3, est très sensible à une anisotropie statique, alors que cette même anisotropie n'affecte pas significativement le comportement du condensat. Il est donc raisonnable d'imaginer que le couplage de l'ensemble des atomes à l'anisotropie statique se fait par l'intermédiaire du nuage thermique [148]. Lorsque ce dernier tourne, le moment cinétique est pompé hors des nuages à un taux bien plus grand que lorsqu'il ne tourne pas.

Dans le cas d'un réseau, le nuage thermique est entraîné par le mouvement d'ensemble du condensat [149]. Le taux de pompage du moment cinétique est donc grand. Un condensat contenant un seul vortex a plus de difficultés à entraîner un nuage thermique : en effet, du fait de la répulsion de champ moyen, le nuage thermique se trouve exclu de la région centrale. Or c'est précisément dans cette région que le champ de vitesse du vortex pourrait entraîner des

[2] Ce temps dépend de la valeur de la radio-fréquence de bouclier.

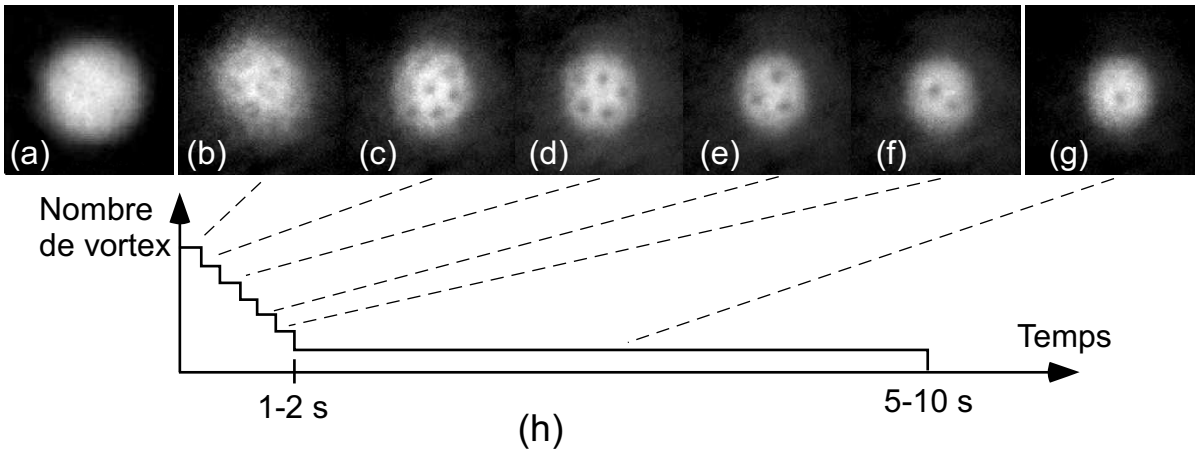


FIGURE 6.2 – Images longitudinales d'un condensat : (a) avant la phase de rotation, (b) au début de la phase d'évolution libre ($T = 0$), (c) à $T = 150$ ms, (d) à $T = 500$ ms, (e) à $T = 800$ ms, (f) à $T = 1200$ ms et (g) à $T = 1800$ ms. Le graphe (h) représente schématiquement l'évolution temporelle du nombre de vortex dans le condensat.

particules thermiques, parce qu'il y est important. Dans cette situation, le nuage thermique est essentiellement au repos, et le moment cinétique est pompé beaucoup plus lentement du nuage total.

6.1.3 Des "U" et des "N"

Nous rappelons sur la figure 6.3(a) le principe de notre système de double imagerie. Trois condensats ont été imagés par ce système, chaque condensat contenant une unique ligne de vortex (figure 6.3(b-e)) : pour chacun, l'image longitudinale (gauche) et l'image transverse (centre) sont reportées. La ligne de vortex n'occupe qu'un faible volume du condensat, et l'imagerie intègre la densité sur toute l'épaisseur du nuage. Néanmoins la ligne s'avère parfaitement visible sur les images transverses. Le contraste est meilleur sur les bords (environ 30%) qu'au centre (où il atteint au mieux 20%), car le volume occupé par la ligne y est proportionnellement plus important.

Un schéma approximatif de la forme de la ligne de vortex telle qu'elle apparaît sur les images transverses a été dessiné à droite de la figure. La ligne de vortex se révèle être une structure tri-dimensionnelle non triviale, capable de se tordre selon des formes de "U" (images (b) et (c)) ou de "N" déplié (image (d)). Des images comme celles de la figure 6.3(e) suggèrent que des configurations intermédiaires en forme de "L" existent. En notant que ce que nous voyons n'est qu'une projection de la forme de la ligne de vortex, on peut ainsi affirmer que les configurations les plus générales se déploient à trois dimensions. Quelques caractéristiques majeures peuvent être dégagées :

– **Un morceau horizontal** : le centre de la ligne est généralement constitué d'un morceau quasi-rectiligne parallèle à l'axe de rotation. C'est ce morceau qui, observé le long de l'axe, donne le trou de densité de l'imagerie longitudinale. Suivant la longueur et le degré de parallélisme de ce segment avec l'axe z, le vortex observé sur une image longitudinale a un contraste plus ou moins élevé. Le vortex peut même disparaître des images longitudinales alors qu'il est toujours présent dans le condensat, au bord et sous une forme très courbée. Cette tendance est visible entre les images (b) et (c) de la figure 6.3, la dernière ayant été prise après un temps d'attente plus long : le segment rectiligne y est réduit à peu de chose, et le vortex est à peine visible sur l'image longitudinale. Enfin, on note que ce segment

horizontal peut être plus ou moins éloigné du centre du nuage. Ce dernier aspect sera développé en fin de chapitre.

– **Deux bras qui rejoignent la surface** : de part et d'autre du segment horizontal, le vortex se courbe significativement et rejoint la surface du nuage. En première approximation, on compte autant de "U" que de "N" (voir plus loin).

6.2 Approche théorique

La description théorique d'un vortex dans un condensat non uniforme n'est pas immédiate. Il faut en effet prendre en compte un grand nombre de phénomènes : effets de bord, action du vortex sur lui-même, etc... Diverses approches théoriques ont ainsi été développées, dont nous donnons quelques éléments dans ce qui suit.

6.2.1 Equation du mouvement d'un vortex à trois dimensions

Fetter et Svindzinsky dérivent dans [150] l'expression de la vitesse d'une ligne de vortex dans un condensat inhomogène. Leur approche consiste à faire coïncider asymptotiquement une description locale du vortex et de son cœur, avec une solution de Thomas-Fermi loin du vortex. Ils en déduisent l'expression suivante pour le champ de vitesse dans un piège harmonique :

$$\boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{r}_0) = -\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{t}\times\nabla U}{g\rho_{\mathrm{TF}}} + k\boldsymbol{b}\right)\ln\left(\xi\sqrt{\frac{1}{R_\perp^2}+\frac{k^2}{8}}\right) + \frac{2[\nabla V_\perp \times \boldsymbol{\Omega}]}{\Delta_\perp U}. \tag{6.1}$$

où U est le potentiel de piégeage, ρ_{TF} la densité de Thomas-Fermi, et k la courbure de la ligne. Le vecteur $\boldsymbol{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe ; le vecteur normal $\boldsymbol{n}$ n'apparaît pas dans cette expression, mais on trouve le vecteur binormal $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$. Détaillons un peu les différents termes de cette vitesse :

– Le premier terme (celui du logarithme) contient deux contributions. La première, proportionnelle à la force classique ∇U, est celle des inhomogénéités du potentiel : elle traduit essentiellement les conditions aux bords. En effet, la contribution directe d'un vortex au champ de vitesse n'est généralement pas tangente à la surface. Pour respecter cette condition, il faut prendre en compte la réflexion de ce champ à la surface[3]. Du fait de cette réflexion, on montre que les vortex non centrés précessent — nous avons déjà mentionné cet aspect dans le chapitre 5. On constate également que ce terme implique que les lignes de vortex sortent perpendiculairement à la surface du condensat : en effet, sur la surface ρ_{TF} s'annule, de sorte que $\boldsymbol{t}$ doit s'aligner sur ∇U.

– La seconde contribution contenue dans le premier terme provient de l'action directe du vortex sur lui-même. Etant courbé, son propre champ de vitesse déduit de l'équation 5.3 prend une valeur non nulle sur la ligne. Cette contribution est à l'origine des modes de Kelvin que nous détaillons dans le prochain chapitre.

– Enfin, le second terme de l'équation 6.1 décrit l'effet d'entraînement dû au passage dans un référentiel tournant.

Partant de cette expression de la vitesse, les auteurs étudient en particulier les modes propres d'un ligne de vortex rectiligne dans un piège allongé. Ils trouvent ainsi que plusieurs modes ont une énergie négative ; ces modes impliquent de grandes fluctuations des extrémités de la ligne de vortex. Ils sont la preuve qu'une ligne de vortex rectiligne n'est pas l'état fondamental du système.

[3] Dans certaines conditions, cette réflexion peut être interprétée comme le champ de vitesse d'un vortex image, placé à l'extérieur du condensat et de charge opposée [105].

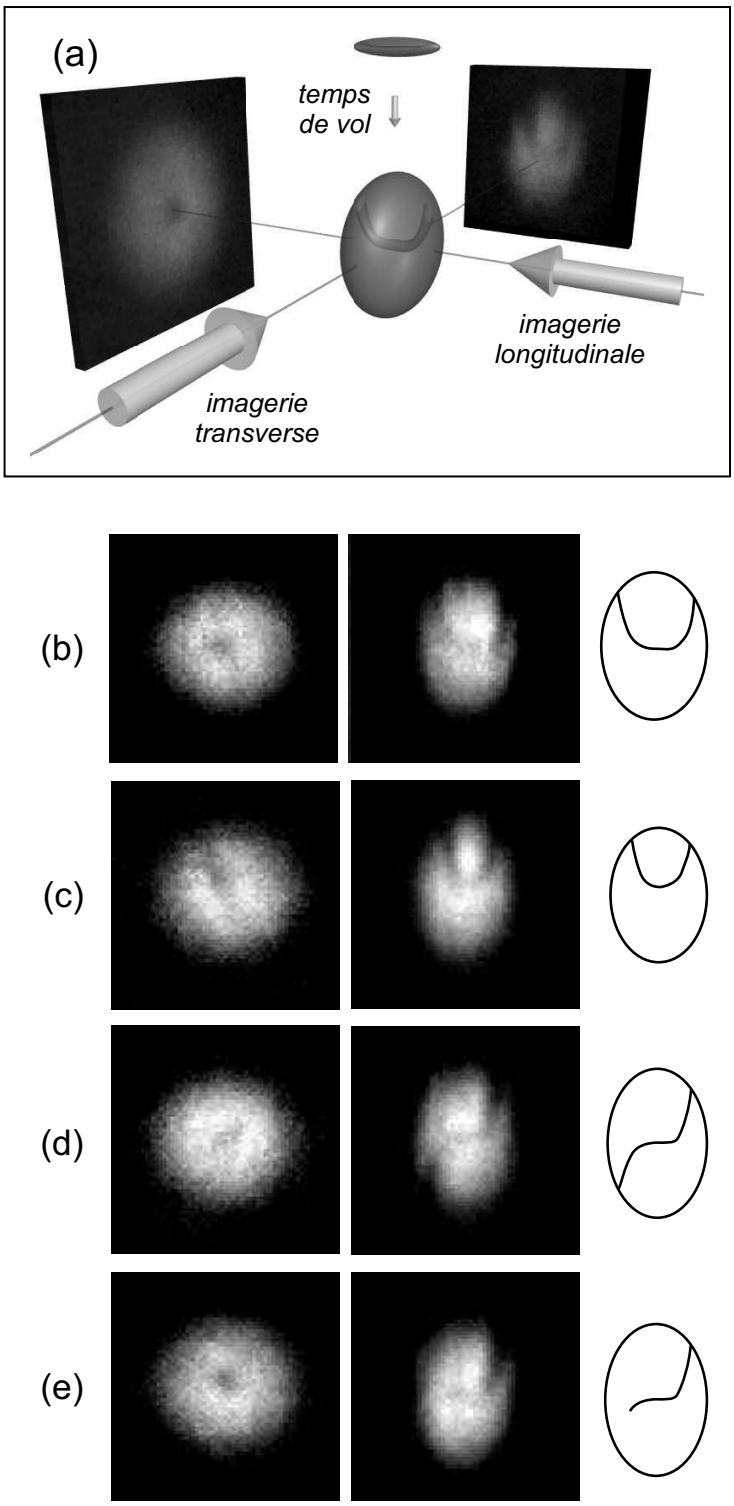


FIGURE 6.3 – (a) Dispositif de double imagerie. (b-d) Images longitudinales (gauche) et transverses (centre) de trois condensats. A droite on a redessiné la forme de la ligne de vortex telle qu'elle apparaît sur les images transverses. Les temps d'attente après nucléation sont (b) $T = 4\,\mathrm{ms}$, (c) $T = 7.5\,\mathrm{ms}$ et (d) $T = 5\,\mathrm{ms}$. (e) Ligne de vortex en forme de "L".

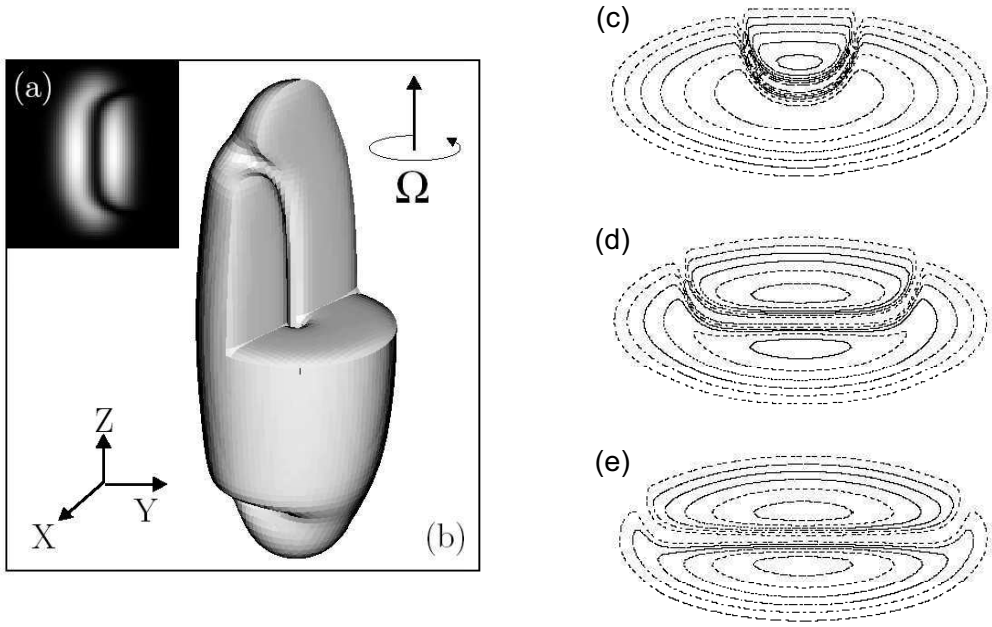


FIGURE 6.4 – Forme de la ligne de vortex prédite par des simulations numériques : (a-b) Figures tirées de [151]. (c-e) Isodensités calculées dans [153] pour $\Omega/\omega_\perp = \{0.37, 0.44, 0.59\}$ (de haut en bas).

6.2.2 Minimisation de l'énergie

Une autre approche du problème de la forme d'une ligne de vortex consiste à minimiser l'énergie de la fonction d'onde par des méthodes numériques. García-Ripoll et Pérez-García ont ainsi montré [151, 152] que l'état fondamental d'un condensat dans un piège tournant assez rapidement contient un vortex non pas droit, mais courbé dans un plan et en forme de "U" (*cf.* figure 6.4(a-b)). Ce résultat a été confirmé par Modugno, Prikoupenko et Castin [153]. La figure 6.4(c-e) montre des coupes de densité obtenues par ces auteurs, illustrant la courbure de la ligne de vortex pour des valeurs variables de Ω.

On remarque que pour toutes ces solutions la partie centrale du "U" est très proche de l'axe. Cela rend bien compte de l'image de la figure 6.3(b), mais nettement moins bien de la figure 6.3(c). Cela tient au fait que les modèles sont faits à vitesse angulaire constante, ce qui ne correspond pas exactement la situation expérimentale. Nous reviendrons sur ce point plus loin. On notera aussi que la forme en "N" déplié de la figure 6.3(b) n'apparaît pas dans les simulations numériques. C'est que cette structure a une énergie légèrement plus élevée que celle en "U" du fait de l'interaction répulsive entre les deux bras du "N". Une procédure de minimisation de l'énergie ne permet naturellement pas de trouver un tel état.

Pour finir voici la forme de l'énergie dans le référentiel tournant qui est minimisée dans ces simulations numériques [153] :

$$E[\Psi, \Psi^*] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \left[\Psi^* \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}) - \Omega L_z \right) \Psi + \frac{Ng}{2}|\Psi|^4 \right].$$

Aucune interprétation simple de la courbure de la ligne ne peut être déduite d'une telle expression. Pour cela, une expression approchée plus parlante peut être dérivée, comme nous allons le voir dans la section suivante.

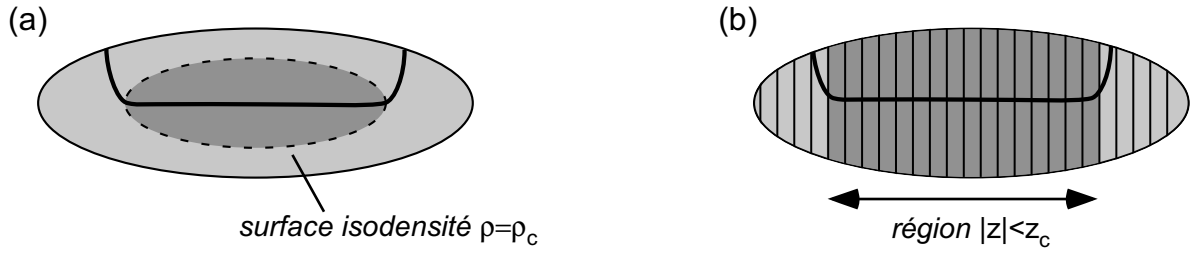


FIGURE 6.5 – Origine physique de la courbure de la ligne de vortex dans un piège : (a) La ligne de vortex n'est stable au centre que pour des densité suffisamment importantes. Au-delà de l'isodensité $\rho = \rho_c$ le vortex rejoint le bord par le chemin le plus court (modèle d'après [155]). (b) Modèle équivalent proposé dans [153] : le condensat est découpé en tranches à l'intérieur desquelles on calcule si le vortex est plus stable au centre (cas du segment $|z| < z_c$) ou au bord (cas des morceaux $|z| > z_c$).

6.2.3 Expression approchée de la fonctionnelle d'énergie

Aftalion et Riviere ont les premiers proposé une expression simplifiée de l'énergie d'une ligne de vortex [154, 155]. Sous sa forme la plus simple et dans un piège allongé, cette expression s'écrit :

$$E[\gamma] = \alpha \int \rho \mathrm{d}l - \beta\Omega \int \rho^2 \mathrm{d}z, \tag{6.2}$$

où α et β sont des coefficients positifs que nous n'expliciterons pas ici. Deux termes entrent en compétition : le premier augmente avec la longueur de la ligne de vortex, de sorte qu'il tend à minimiser la longueur de celle-ci. Le second ramène le vortex vers le centre du condensat, mais n'est proportionnel qu'à la projection de la longueur de la ligne sur l'axe z. On notera que le dernier terme met en jeu une densité au carré, alors que le premier est linéaire en densité. Si la densité est importante — disons supérieure à une densité critique ρ_c —, c'est donc le second terme qui domine : la ligne de vortex reste proche de l'axe de rotation. Dans les régions où la densité est plus faible (inférieure à ρ_c), c'est au contraire le premier terme qui domine, de sorte que la ligne cherche à minimiser sa longueur. Dans un condensat de forme allongée, la meilleure stratégie pour une ligne de vortex consiste donc à se courber et à rejoindre au plus vite le bord du nuage (figure 6.5(a)). On notera que dans un condensat en forme de crêpe ($\omega_\perp < \omega_z$), le même raisonnement permet de montrer que le vortex reste droit jusqu'au bord.

Des arguments analogues sont développés en détail dans [153] : comme les effets de la courbure du condensat sur lui-même sont négligeables, les auteurs suggèrent de découper le condensat en tranches selon z et d'analyser séparément le problème de la minimisation de l'énergie de chaque tranche. Chaque tranche est un système bidimensionnel : il s'agit simplement de déterminer si la solution de plus basse énergie correspond à un vortex au centre ou non. Le résultat est que le vortex centré est une bonne solution tant que $|z| < z_c$. Dans le cas $|z| > z_c$, la densité est trop faible pour qu'un vortex centré soit stable et le vortex recherche le plus court chemin vers le bord du condensat (figure 6.5(b)).

6.2.4 Bien comparer avec les expériences

Afin de rapprocher nos images expérimentales des résultats théoriques que nous venons d'évoquer, il convient de prendre garde à un point important : les simulations numériques, ainsi que les calculs analytiques, sont généralement conduits en imposant une valeur fixée à Ω et en laissant L_z libre. Les expériences quant à elles sont menées dans des conditions significativement différentes ; la cuillère tournante a en effet été coupée une fraction de (ou plusieurs) seconde(s)

avant que le condensat soit imagé. Le système a donc depuis longtemps "oublié" la fréquence Ω à laquelle il a été excité[4]. Le bon paramètre semble donc être le moment cinétique L_z.

Dans un piège parfaitement symétrique autour de l'axe z, L_z serait en effet un bon nombre quantique. Mais du fait de l'anisotropie statique, L_z diminue avec le temps. Aucune des deux quantités L_z ou Ω n'est donc réellement fixée dans une expérience. Toutefois, la décroissance de L_z est particulièrement lente — elle dure plusieurs secondes. Elle est en particulier lente devant les processus de rethermalisation de sorte que le condensat peut ajuster son état adiabatiquement à la valeur instantanée de L_z. Autrement dit, L_z peut être considéré comme constant sur des échelles de temps courtes devant la durée de vie d'un vortex. Finalement, l'approche théorique consistant à fixer L_z pour décrire nos expériences est beaucoup mieux adaptée que celle fixant Ω.

La comparaison entre les deux procédures théoriques (Ω fixé ou L_z fixé) est faite par les auteurs de [153]. Ces auteurs montrent tout d'abord que les minima de la fonctionnelle d'énergie à Ω fixé restent des minima de la fonctionnelle d'énergie à L_z fixé. Ces minima sont les solutions représentées sur les figures 6.4(c-e). Il y a mieux : la fonctionnelle d'énergie à Ω fixé présente des points selles correspondant à des "U" dont la partie horizontale est éloignée de l'axe. De manière remarquable, ces solutions se retrouvent dans la minimisation à L_z constant sous la forme de vrais minima. Cela signifie que l'ensemble des solutions stables à L_z fixé est plus grand qu'à Ω fixé : il contient en plus des formes en "U" nettement décentrées. Ces formes jouent un rôle important dans le cycle de vie d'une ligne de vortex, comme nous le montrons dans la section suivante.

Une autre difficulté de la comparaison théorie/expérience vient du fait que les théories évaluent la forme de la ligne dans le piège alors que les expériences la révèlent après un temps de vol. Rien ne garantit *a priori* que l'expansion de la ligne suive les mêmes lois d'échelles que celles d'un condensat au repos. Néanmoins des études numériques ont montré que c'était le cas à un bon degré d'approximation [153].

6.3 Vie et mort d'une ligne de vortex

6.3.1 Evolution dans le temps de la ligne de vortex

Durant la phase expérimentale où aucune rotation n'est imposée, le moment cinétique diminue dans le temps du fait de l'anisotropie statique. Le vortex, étant le porteur de ce moment cinétique, doit donc s'échapper progressivement. C'est ce que nous observons sur la série d'images de la figure 6.6 où la ligne de vortex a été photographiée après des temps d'évolution libre compris entre une seconde et sept secondes. Par souci de clarté, nous avons placé sur deux rangées différentes les lignes en forme de "U" et "N". Chaque image correspond néanmoins à une réalisation expérimentale différente, de sorte qu'il n'est pas du tout prouvé qu'une ligne en forme de "U" évolue en gardant sa forme de "U", et de manière symétrique qu'une ligne en forme de "N" garde cette forme jusqu'à sa sortie du condensat. Signalons à ce sujet que les "N" apparaissent un peu moins souvent que les "U" aux temps longs (supérieurs à 5 secondes) ou pour des condensats un peu plus chauds que ceux de la figure 6.6.

La dynamique de sortie de la ligne se révèle avoir lieu en deux étapes (figure 6.7) :

– La première consiste en un raccourcissement de la longueur du segment central, ce segment restant très proche de l'axe de rotation. Cette tendance est visible sur les deux rangées d'images de la figure 6.6 durant les $\sim$ 5 premières secondes d'évolution. La diminution de la longueur du segment central se traduit directement par une diminution du moment

[4]Rappelons qu'entre la phase d'excitation et la fin de la séquence expérimentale, le condensat a subi des instabilités de surface, changé de forme, et vu plusieurs vortex rentrer puis ressortir.

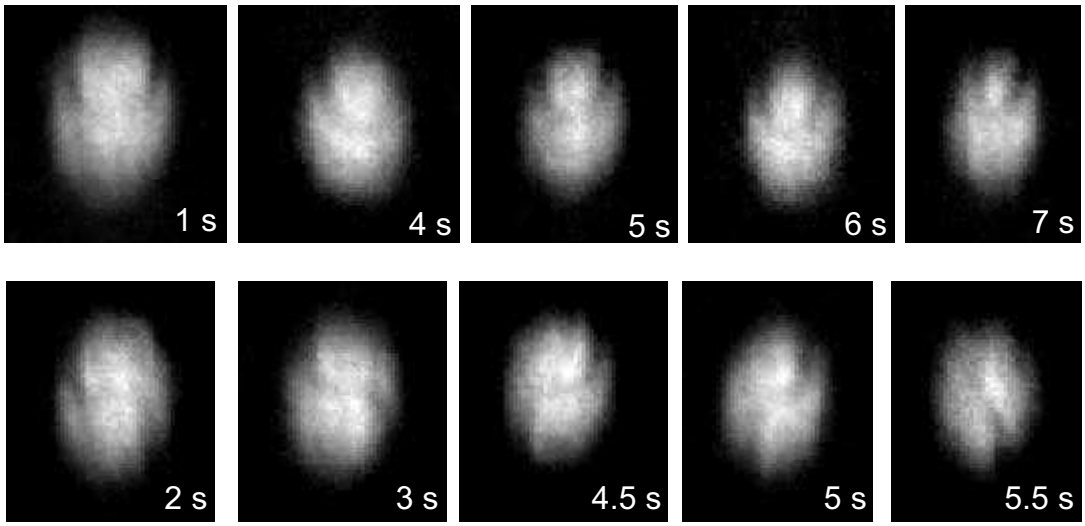


FIGURE 6.6 – Images de la sortie d'une ligne de vortex. Sur la première rangée d'images, on a sélectionné des vortex en forme de "U", et sur la seconde des vortex en forme de "N" déplié. Les temps indiqués sur chaque image correspondent au temps d'évolution libre après l'application de la cuillère.

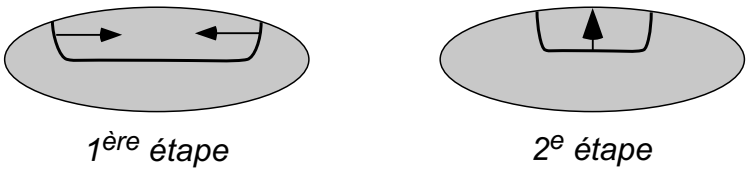


FIGURE 6.7 – Mécanisme de sortie de la ligne de vortex : dans un premier temps, les deux extrémités se rapprochent et le segment central diminue en taille. Au cours d'une deuxième étape, l'ensemble du vortex s'éloigne de l'axe de rotation.

cinétique du condensat, de sorte que durant cette étape L_z est lentement pompé hors du nuage par l'anisotropie statique.

– Pour des temps plus longs, seuls des vortex en forme de "U" sont observés, vortex qui forment un petit "U" près du bord du condensat et donc le segment central a quitté l'axe de rotation. La seconde étape consiste ainsi en un décrochement du vortex, qui se déplace vers le bord avant de disparaître.

Ce mécanisme en deux temps a été interprété dans [153] comme le suivi successif de la branche des minima de l'énergie à Ω fixé (correspondant aussi à des minima à L_z fixé) puis de la branche des solutions qui ne sont stables qu'à L_z fixé et qui correspondent à des vortex significativement décentrés.

6.3.2 Etude quantitative de l'expulsion de la ligne de vortex

Le mécanisme de sortie met en évidence deux paramètres simples caractérisant la géométrie du vortex (figure 6.8(a)) : la séparation selon z des deux points de sortie de la ligne (d_z) et la distance entre le segment central et l'axe de rotation ($d_\perp$). d_z est une mesure approchée de la longueur du segment central car les deux bras du vortex sont pratiquement verticaux. L'évolution temporelle de d_z est reportée sur la figure 6.8(b) : on note une décroissance approximativement

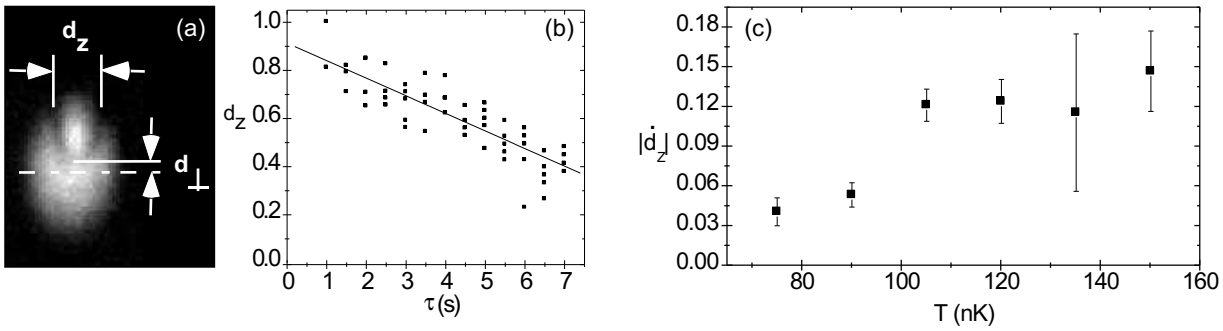


FIGURE 6.8 – Etude quantitative de la sortie d'un vortex : (a) On définit deux grandeurs caractérisant la géométrie de la ligne : d_z donne la séparation suivant z des points de sortie de la ligne (normalisée à la longueur $2R_z$ du condensat selon z) et $d_\perp$ caractérise la distance du segment central à l'axe de rotation z (normalisée au rayon $R_\perp$). (b) Evolution temporelle de d_z (on prend en compte à la fois les lignes en "U" et les lignes en "N"). (c) Pente $|\dot{d}_z|$ en fonction de la température.

linéaire sur toute la plage temporelle étudiée. La pente de cette droite a été déterminée pour différentes températures (figure 6.8(c)) : la durée de vie de la ligne de vortex diminue d'un facteur $\sim$4 lorsque T passe de sa plus basse valeur (75 nK) à sa plus grande valeur (150 nK, qui correspond approximativement à $T_c/2$).

6.4 Mesure du moment cinétique associé à une ligne de vortex

6.4.1 Modes quadrupolaires et moment cinétique

Nous avons étudié dans le chapitre 3 les modes quadrupolaires d'un condensat au repos. Il est possible de prolonger cette étude au cas d'un condensat portant un moment cinétique non nul autour de l'axe z [156]. Naturellement, la dégénérescence entre les deux modes $m_z = \pm 2$ est levée par la condition $L_z \neq 0$, et on montre que les fréquences des modes quadrupolaires vérifient les relations :

$$\omega_{+2}^2 + \omega_{-2}^2 = 4\omega_\perp^2, \tag{6.3}$$

$$\omega_{+2} - \omega_{-2} = \frac{2\langle L_z \rangle}{m\langle r^2 \rangle}. \tag{6.4}$$

La seconde relation établit un lien entre le moment cinétique par particule $\langle L_z \rangle$ et les fréquences des modes quadrupolaires. Nous négligeons pour ce qui suit l'amortissement de ces deux modes (voir chapitre 7). Imaginons que nous excitions une superposition linéaire des modes $mz = +2$ et $mz = -2$ (figure 6.9) :

$$\delta\rho = Ar^2 \left[e^{i(2\theta - \omega_{+2}t)} + e^{i(-2\theta - \omega_{-2}t)} \right]. \tag{6.5}$$

Cette excitation s'écrit encore :

$$\delta\rho = 2Ar^2 \, e^{-i(\omega_{+2}+\omega_{-2})t/2} \cos\left[2\theta - \frac{\omega_{+2} - \omega_{-2}}{2} t \right]. \tag{6.6}$$

Dans le cas particulier $\omega_{+2} = \omega_{-2}$, cette perturbation correspond à une oscillation entre un état elliptique d'axe long x et un état elliptique d'axe long y, le passage de l'un à l'autre se faisant

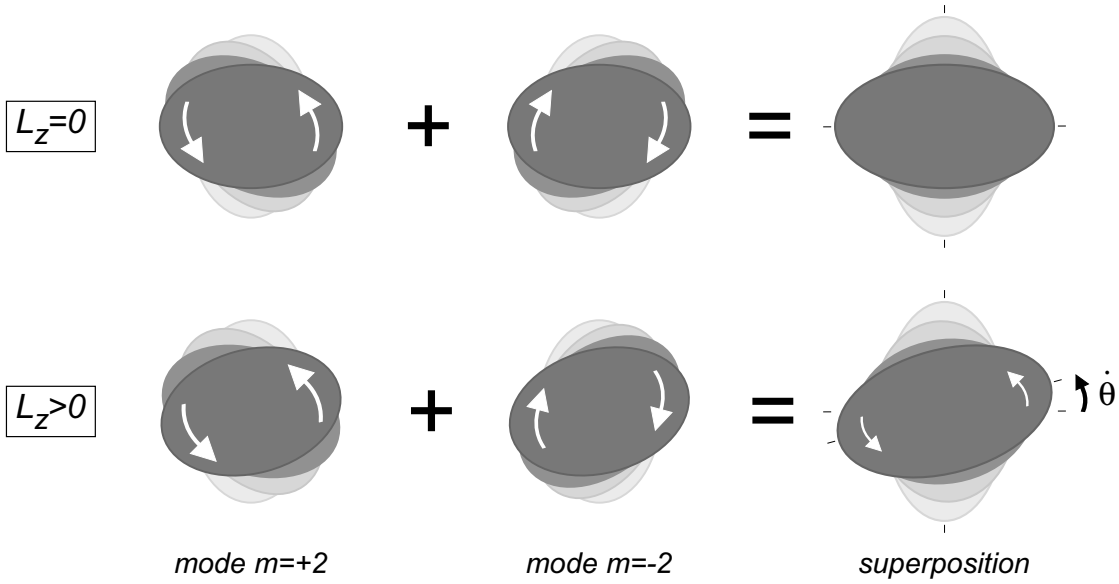


FIGURE 6.9 – Superposition des deux modes quadrupolaires. En gris pâle sont figurés les états antérieurs du condensat. Lorsque les deux modes ne sont plus dégénérés, la superposition oscille par rapport à des axes qui précessent à la vitesse $\dot{\theta}$.

par un état rond (figure 6.9). Le cas $\omega_{+2} \neq \omega_{-2}$ s'en déduit immédiatement (figure 6.9) ; le mouvement d'ensemble reste le même, si ce n'est que les axes propres de l'oscillation précessent à la fréquence :

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_{+2} - \omega_{-2}}{4} = \frac{\langle L_z \rangle}{2m\langle r^2 \rangle}. \tag{6.7}$$

Une mesure de $\dot{\theta}$ donne directement accès au moment cinétique par particule. Cette méthode initialement suggérée par Zambelli et Stringari [156], a été démontrée en 2000 sur notre montage expérimental [32, 116]. D'autres groupes en ont fait usage depuis [131, 132].

6.4.2 Moment cinétique d'une ligne de vortex courbée et décentrée

Afin de mesurer le moment cinétique d'une configuration donnée, nous excitons une superposition des modes quadrupolaires $m_z = \pm 2$ par le branchement brutal d'une cuillère statique ($\Omega = 0$). Après 1.9 millisecondes d'excitation et 2 millisecondes d'oscillation libre, nous prenons une première image du condensat. L'expérience est répétée avec un temps d'oscillation de 9 millisecondes, de sorte que nous disposons de deux images séparées approximativement d'une période d'oscillation quadrupolaire. De l'angle que font entre elles les ellipses des deux images, nous déduisons la vitesse de précession $\dot{\theta}$ et donc L_z. Une troisième image est prise dans des conditions analogues, mais sans excitation quadrupolaire, afin de caractériser la forme de la ligne de vortex. Les paramètres d_z et $d_\perp$ sont mesurés à partir de cette dernière image. Nous prenons en compte le fait que nous ne mesurons qu'une projection de $d_\perp$ en multipliant la valeur mesurée par un facteur géométrique $1/\langle \cos \alpha \rangle = \pi/2$.

La figure 6.10 résume le résultat de cette série de mesures : les paramètres d_z et $d_\perp$ caractérisant la géométrie de la ligne de vortex sont tracés en fonction du moment cinétique. Rappelons que ce dernier vaut théoriquement $\hbar$ en présence d'une ligne de vortex droite et centrée ($d_z = 1$ et $d_\perp = 0$) : ce point apparaît clairement sur la figure 6.10. Pour des moment cinétiques inférieurs à $\hbar$, deux régions peuvent être distinguées. Tant que L_z est supérieur à $0.6\hbar$, le vortex reste centré et perd du moment cinétique par rapprochement de ses deux bras. Pour

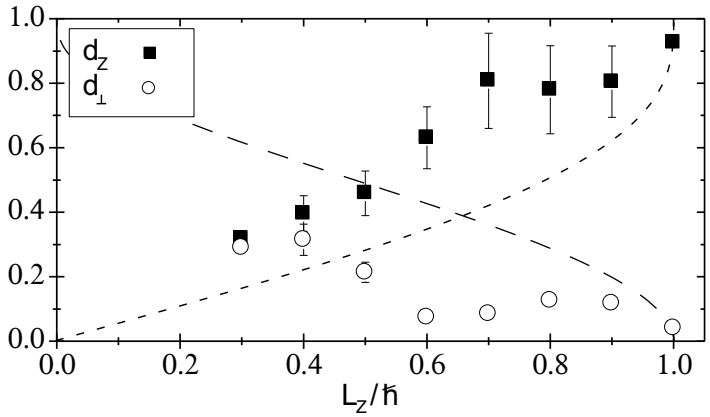


FIGURE 6.10 – Lien entre les paramètres géométriques de la ligne de vortex et le moment cinétique du condensat. La qualité des données pour les plus faibles valeurs de L_z n'étant pas suffisante pour qu'une tendance puisse être dégagée, nous les avons omises. La courbe en pointillés correspond à une borne inférieure pour d_z. La courbe en tirets larges correspond à une borne supérieure pour $d_\perp$ (voir texte).

des valeurs plus faibles de L_z, le vortex se décentre tout en continuant à diminuer sa longueur totale. On notera que cette courbe, si elle est lue de droite à gauche, retrace l'évolution temporelle d'une ligne de vortex alors que le moment cinétique diminue, et fait ressortir les deux phases que nous distinguions dans la section précédente.

En négligeant un éventuel décentrage de la ligne de vortex, il est possible de calculer le moment cinétique d'une ligne de vortex en forme de "U". Le seul paramètre caractérisant la ligne est alors d_z, et on montre que :

$$\frac{L_z}{\hbar} = \frac{15}{8}\left[d_z - \frac{2}{3}d_z^3 + \frac{1}{5}d_z^5\right].$$

Cette équation permet de trouver la fonction $d_z(L_z)$ qui décrit la taille du segment central en fonction de du moment cinétique. Comme un autre effet (le décentrage de la ligne) peut contribuer à diminuer L_z, cette fonction n'est qu'une borne inférieure de d_z. Elle est reportée en pointillés sur la figure 6.10. Un raisonnement analogue supposant que le seul effet est un décentrage de la ligne[5] permet de trouver une borne supérieure pour $d_\perp$ (tirets larges sur la figure).

6.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la ligne de vortex peut être visualisée dans son intégralité sur des images transverses du condensat. Elle y apparaît sous une forme courbée qui s'explique par des arguments énergétiques, le vortex devenant instable lorsque la densité locale est trop faible. Enfin, nous avons suivi l'évolution d'une ligne de vortex durant les 7 à 8 secondes qui lui sont nécessaires pour quitter le condensat. La diminution du moment cinétique se fait en deux temps : tout d'abord, la longueur totale de la ligne diminue alors qu'une large portion de

[5] On trouve alors [126] :

$$L_z = L_z(0)\left[1 - d_\perp^2\right]^{\frac{5}{2}}.$$

.

la ligne de vortex reste centrée, puis le vortex s'éloigne de l'axe de rotation. Ce comportement a été confirmé par la mesure du moment cinétique du condensat.

Chapitre 7

Modes de vibration d'une ligne de vortex : les kelvons

Une ligne de vortex, à l'instar d'une corde, peut se déformer périodiquement et devenir le support d'ondes propagatives. Kelvin donna en 1880 la première description de ces ondes, traitant le cas de plusieurs types de vortex classiques [157]. En 1979, les oscillations des lignes de vortex ont été décelées pour la première fois dans l'hélium-II en analysant la vitesse d'ions issus des lignes de vortex [158]. Ce chapitre relate une série d'expériences démontrant, par des méthodes très différentes, l'existence de ces modes pour une ligne de vortex unique dans un condensat gazeux [8].

Ces expériences sont basées sur une proposition théorique de Gora Shlyapnikov, selon laquelle les modes de Kelvin se couplent à un seul des deux modes quadrupolaires, le mode $m_z = -2$. Après avoir décrit simplement les modes de Kelvin dans un condensat gazeux (première partie), nous présentons ce couplage de type Beliaev entre les modes de Kelvin et le mode $m_z = -2$ (deuxième partie). Les parties suivantes retracent deux séries d'expériences, au cours desquelles nous avons étudié l'amortissement des modes quadrupolaires $m_z = +2$ et $m_z = -2$. L'interprétation des résultats fait l'objet d'une dernière partie, où l'on discute en particulier d'images où les modes de Kelvin sont visualisés directement.

7.1 Présentation des modes de Kelvin

Les modes de Kelvin existent par le jeu des interactions entre une partie d'un vortex et le reste de la ligne. Ces interactions, inexistantes pour un vortex droit, sont d'énergie suffisamment faible pour conduire à des modes d'énergie $\ll \mu$. Nous les introduisons pour commencer sur l'exemple de l'anneau de vorticité.

7.1.1 Vitesse d'un anneau de vorticité

L'anneau de vorticité est un objet théorique sur lequel il est instructif d'étudier l'action du vortex sur lui-même. D'après les résultats généraux du chapitre 5, une ligne de vortex se déplace avec le fluide qui l'entoure. Afin de connaître le mouvement d'un anneau de vorticité, il suffit donc de calculer le champ de vitesse créé au niveau d'un point P de l'anneau par tous les autres morceaux M de la ligne (figure 7.1(a)). Partant de l'expression de Biot et Savart 5.3, nous obtenons pour un anneau de rayon R et de charge unité l'expression suivante :

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{4mR} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta/2)} \boldsymbol{u}_z. \tag{7.1}$$

$\boldsymbol{u}_z$ est un vecteur unitaire aligné sur la vitesse au centre de l'anneau, et θ repère le segment qui crée le champ de vitesse par rapport au point P. Cette expression diverge en $\theta = 0$, de la même façon que la vitesse d'un vortex diverge près du cœur. La solution consiste à exclure du domaine d'intégration une petite région $\theta \sim \xi/R$ (petite portion blanche sur la figure), dans laquelle on sait que l'approximation d'incompressibilité — dont découle la loi de Biot et Savart — ne tient plus. Enfin, comme ce cutoff est particulièrement petit devant 1, seuls les angles θ proches de zéro contribuent à l'intégrale. Le domaine d'intégration effectif est représenté en gris sur la figure 7.1(a) et correspond à $\xi/R \ll \theta \ll \pi$. Le sinus peut être développé au voisinage de zéro, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{2mR} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) \boldsymbol{u}_z. \tag{7.2}$$

Un anneau de vorticité avance donc à une vitesse constante, dans la direction de l'écoulement qu'il crée lui-même en son centre (figure 7.1(b)). Le rond de fumée est un pendant classique célèbre de cet anneau de vorticité.

7.1.2 De l'anneau de vorticité aux oscillations de Kelvin

Les résultats obtenus sur l'anneau de vorticité sont très rapidement transposables sur une ligne de vortex ondulée. Considérons en effet une ligne ondulée comme celle de la figure 7.1(c) : nous avons montré sur l'exemple de l'anneau que les parties de la ligne qui contribuent au mouvement d'un morceau donné sont proches de ce morceau. L'action de toute la ligne sur un morceau donné est donc équivalente à celle d'un anneau tangent. Cette simple analyse conduit à une conclusion importante sur laquelle nous reviendrons : les excitations de la ligne tournent autour de l'axe de rotation avec un sens opposé à celui de la circulation de la vitesse (figures 7.1(c-d)).

De manière plus formelle, nous supposons que la ligne non excitée est rectiligne, et nous désignons par $\boldsymbol{r}(z,t)$ l'écart du point d'altitude z par rapport à l'axe. Introduisant le trièdre direct $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ contenant les vecteurs tangent, normal, et binormal à la ligne (voir figure 7.1(d)), nous constatons que l'anneau par lequel nous devons remplacer localement la ligne est dans le plan $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$, de sorte que sa vitesse est suivant $\boldsymbol{b}$. La vitesse locale de la ligne est ainsi donnée par :

$$\boldsymbol{v}(z,t) = \frac{\hbar}{2mR(z,t)} \ln\left(\frac{R(z,t)}{\xi} \times \theta_{\max}\right) \boldsymbol{b}(z,t), \tag{7.3}$$

où $\theta_{\max}$ figure la borne supérieure d'intégration dans (7.1). Nous faisons maintenant l'hypothèse que l'excitation est de la forme générale suivante :

$$\boldsymbol{r}(z,t) = \boldsymbol{r}_0 \exp[i(kz - \omega t)]. \tag{7.4}$$

Le rayon de courbure vaut alors $R(z,t) = 1/k^2 r_0$, et l'angle $\theta_{\max}$ vaut $1/k\xi$. En remarquant que $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}/r$ et que $\boldsymbol{t} \simeq \boldsymbol{u}_z$, on constate que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} \simeq (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u}_z)/r$. On obtient finalement :

$$-i\omega \boldsymbol{r}_0 = \frac{\hbar k^2}{2m} \ln\left(\frac{1}{k\xi}\right) \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{u}_z. \tag{7.5}$$

7.1.3 Relation de dispersion des modes de Kelvin

En injectant une solution de la forme $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ dans l'équation précédente, on obtient une relation de dispersion reliant ω à k [150] :

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \ln\left(\frac{1}{k\xi}\right). \tag{7.6}$$

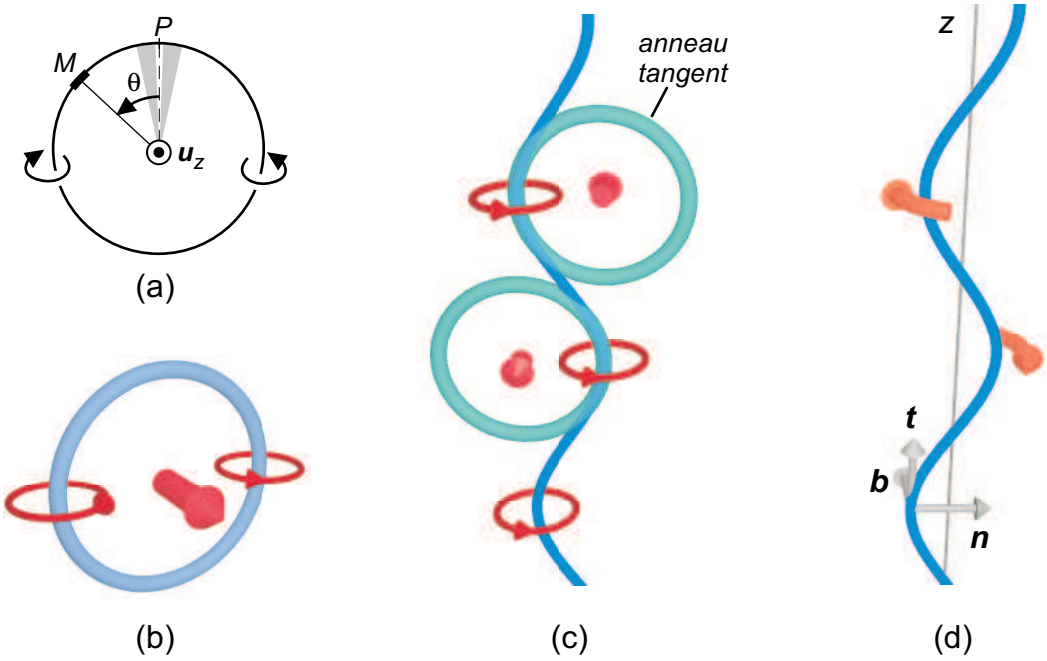


FIGURE 7.1 – Effets des interactions entre les différents morceaux d'une ligne de vortex. (a) Notations pour l'étude de l'anneau de vorticité. Les portions contribuant majoritairement à la vitesse du point P sont situées près de P et correspondent aux angles grisés. (b) La vitesse d'ensemble d'un anneau de vorticité est dirigée selon le flux de particules à l'intérieur de l'anneau. (c) Approximation locale d'une ligne courbée par un anneau tangent. La vitesse du point tangent est proportionnelle à la vitesse d'ensemble de l'anneau. (d) Mouvement d'ensemble de la même ligne de vortex. La rotation de la ligne est rétrograde, opposée au sens de rotation du fluide. En bas : notations curvilignes.

Si l'on met à part le logarithme, cette relation est l'analogue de la relation de dispersion d'une particule libre de masse m. La structure du vortex n'apparaît que dans le logarithme, à travers la longueur de relaxation ξ.

7.1.4 Polarisation et moment cinétique des modes de Kelvin

Les solutions $\boldsymbol{r}_0$ de l'équation 7.5 sont de la forme :

$$\boldsymbol{r}_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

L'unicité de la polarisation solution tient au fait que l'équation 7.5 est du premier degré, autrement dit au fait que la ligne de vortex a une masse nulle et donc pas d'inertie[1]. Cette polarisation correspond à des ondes hélicoïdales. A une altitude z fixée, la ligne effectue un mouvement de rotation rétrograde par rapport à la rotation du fluide. Nous retrouvons ici ce que nous faisait pressentir l'analyse simple des figures 7.1(c-d) : alors que les particules tournent toutes autour d'un vortex dans un sens donné, les excitations de la ligne de vortex tournent toutes dans le sens opposé.

Ainsi le moment cinétique porté par les ondes de Kelvin est toujours négatif. Ce point majeur est à la base des expériences décrites dans ce chapitre.

7.2 Effet des kelvons sur les modes quadrupolaires

7.2.1 Quantification des modes de Kelvin : les kelvons

Les modes de Kelvin sont autant d'oscillateurs harmoniques qu'il est possible de quantifier [159]. Les quanta issus de cette opération sont appelés *kelvons* et ont les propriétés suivantes : ils sont repérés par un vecteur d'onde k, ont une énergie $\hbar\omega(k)$, et un moment cinétique $-\hbar$ (la convention de signe est telle que le moment cinétique du fluide est positif).

Le formalisme développé jusqu'ici suppose que le condensat est infiniment long selon la direction z. Notre géométrie allongé mais finie a pour conséquence de quantifier les valeurs possibles de k. Les conditions aux bords du condensat impliquent que la ligne de vortex sort perpendiculairement à la surface du condensat. k prend donc les valeurs discrètes suivantes :

$$k = \frac{n\pi}{L}, \tag{7.8}$$

où L est la longueur du condensat selon z.

7.2.2 Le processus Beliaev couplant le mode quadrupolaire $m_z = -2$ aux kelvons

Rappelons que le mécanisme dissipatif de Beliaev implique la désintégration d'une excitation en une paire d'excitations de plus basse énergie. Nous envisageons ici le processus au cours duquel un quantum d'excitation du mode quadrupolaire $m_z = -2$ se désintègre en une paire de kelvons. Le bilan détaillé de ce processus est reporté sur la figure 7.2 : l'énergie est conservée en choisissant parmi les kelvons ceux dont la fréquence est une moitié de ω_{-2}. Les deux kelvons créés ont des impulsions p opposées, de sorte que l'impulsion totale est nulle. Enfin, le moment cinétique du quantum de mode quadrupolaire $L_{-2} = -2\hbar$ est partagé par les deux kelvons.

Les processus de type Beliaev assurent le transfert d'énergie d'un mode initialement peuplé vers d'autres modes. Les conséquences de ce transfert dépendent de la structure et de la dynamique de ces derniers modes. Nous dégagerons deux cas (voir figure 7.3(a-b)) :

[1] Nous négligeons ainsi le mouvement de précession très rapide, analogue au mouvement cyclotron (*cf.* chapitre 5)

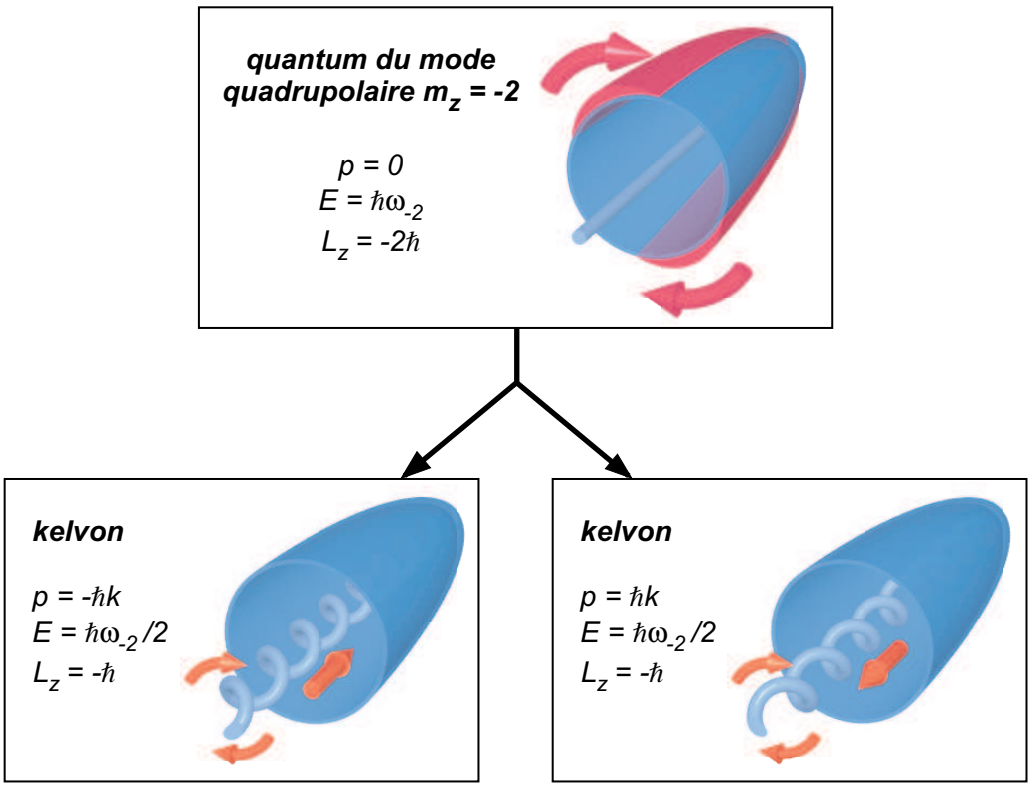


FIGURE 7.2 – Désintégration d'un quantum du mode quadrupolaire contra-propageant $m_z = -2$ en une paire de kelvons. Les trois quantités p (impulsion), E (énergie) et L_z sont conservées. Sur les schémas, il est entendu que le fluide tourne autour du vortex dans le sens trigonométrique direct. L'ensemble des excitations mises en jeu tournent ainsi dans le sens opposé. Il n'existe pas de mécanisme analogue pour l'autre mode quadrupolaire $m_z = +2$ car celui-ci tourne dans le sens direct.

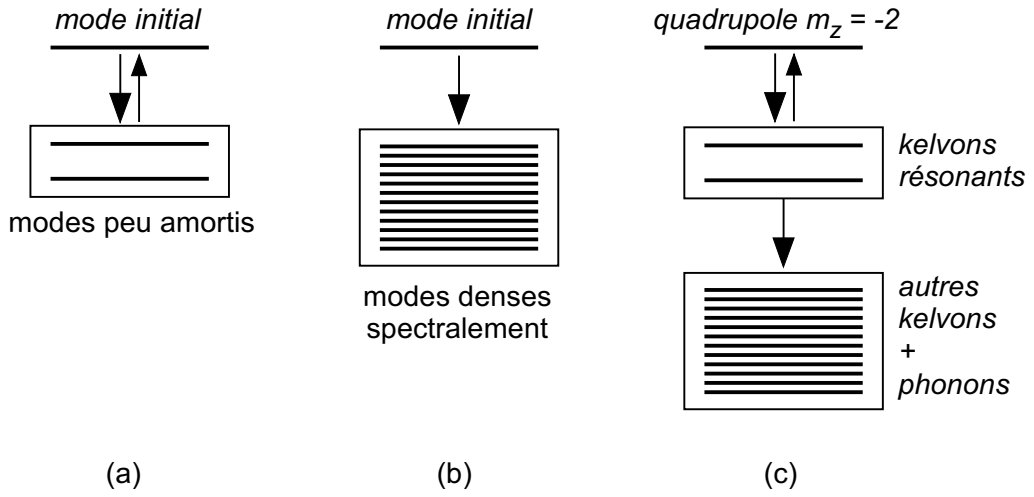


FIGURE 7.3 – Effet d'un couplage Beliaev sur la dynamique du mode initial. (a) Si les modes cibles sont peu nombreux et peu amortis, l'énergie peut faire des aller-retours entre ces modes et le premier mode. (b) Si les modes cibles ont une grande densité spectrale, ils constituent un réservoir qui pompe de manière irréversible l'énergie contenue dans le mode initial. (c) Cas probable du quadrupôle $m_z = -2$ et des kelvons : peu de modes sont directement couplés au mode initial, mais ils sont eux-mêmes en contact avec un bain thermique (autres kelvons et phonons).

- Les modes cibles sont peu nombreux et peu amortis : l'énergie peut alors revenir vers le mode initial. C'est vraisemblablement sur cette base que doit être comprise la résurgence du mode monopolaire (chapitre 2).
- Les modes cibles ont une grande densité spectrale : ils jouent alors le rôle d'un système macroscopique qui pompe de l'énergie au mode initial de manière irreversible. La règle d'or de Fermi peut être appliquée pour estimer la contribution apportée par ces modes à la dissipation totale du mode initial.

Voyons dans quel cas se placent les kelvons : la condition de conservation de l'énergie lors du processus Beliaev implique que pour les kelvons $\omega(k) = \omega_{-2}/2$. De cette égalité et de la relation de dispersion 7.6, on peut déduire k. En prenant $\omega_{-2}/2\pi \sim 60\,\text{Hz}$ et $\omega_\perp/2\pi \sim 100\,\text{Hz}$, on trouve $k \simeq 0.8\,\mu\text{m}^{-1}$. Le condensat fait $L \sim 70\,\mu\text{m}$ de long selon z, et les kelvons ont un vecteur d'onde quantifié $k = n\pi/L$. Le mode $k \simeq 0.8\,\mu\text{m}^{-1}$ correspond donc à $n \sim 18$. Nous pouvons finalement en déduire que l'écart local entre deux modes de Kelvin vaut $\delta\omega \sim 20\,\text{s}^{-1}$. Cette valeur, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, est de l'ordre de la largeur spectrale du mode initial (le mode quadrupolaire $m_z = -2$). Il y a ainsi un nombre limité de modes de Kelvin dans lesquels peut se désexciter le mode quadrupolaire $m_z = -2$. Il n'est donc pas exclu *a priori* que de l'énergie pompée par les kelvons puisse revenir vers le mode quadrupolaire — c'était notre premier cas. Toutefois, les expériences que nous décrivons plus loin montrent qu'un tel phénomène ne se produit pas, ce qui suggère que les kelvons sont eux-mêmes rapidement amortis. La situation se rapproche ainsi du deuxième cas que nous évoquions, où le mode initial se couple à un bain d'oscillateurs — ici à travers un petit nombre de modes relais qui sont les kelvons (figure 7.3(c)).

Finalement, et quelles que soient les conséquences du couplage Beliaev avec les kelvons, il est important de remarquer que ce processus est spécifique du mode quadrupolaire $m_z = -2$ et ne peut en aucun cas être transposé au mode quadrupolaire co-propageant $m_z = +2$. En effet, ce dernier a un moment cinétique positif $L_z = +2\hbar$ alors que les kelvons ont tous un

moment cinétique $L_z = -\hbar$. Du fait des lois de conservation, le mode $m_z = +2$ ne peut donc être couplé aux kelvons. Une nouvelle dissymétrie apparaît ainsi entre les modes quadrupolaires lorsqu'un vortex est présent. Nous avions vu dans le chapitre 6 que les fréquences des deux modes n'étaient plus égales en présence d'un vortex. Le couplage aux kelvons suggère que les phénomènes de dissipation aussi sont de nature différente pour les deux modes. En particulier, on peut s'attendre à ce que le mode contra-propageant $m_z = -2$ soit amorti plus rapidement que le mode co-propageant $m_z = +2$. Les expériences que nous décrivons dans la suite ont pour but de montrer cette dissymétrie de comportement dans les durées de vie.

7.2.3 Traitement théorique quantitatif

Un traitement théorique complet du couplage du mode $m_z = -2$ aux kelvons a été mené par Mizushima, Ichioka et Machida [160]. Partant de l'ensemble des modes de Bogoliubov, ces auteurs calculent la fonction de réponse densité-densité du condensat. Cette méthode décrit aussi bien les mécanismes dissipatifs de type Landau que Beliaev. Le résultat principal de cette étude est la démonstration que, dans des conditions proches de nos conditions expérimentales, le mode $m_z = -2$ est nettement plus amorti que le mode $m_z = +2$. Les auteurs montrent explicitement que cette différence tient à un amortissement de type Beliaev couplant le mode $m_z = -2$ à d'autres modes. Enfin, ces derniers modes sont identifiés comme étant des modes localisés près du cœur du vortex : cela permet de les identifier comme étant des kelvons.

7.3 Une première expérience : excitation percussionnelle

Nous décrivons ici un premier type d'expérience où les modes quadrupolaires $m_z = +2$ et $m_z = -2$ sont excités simultanément puis laissés libres d'évoluer. Pour cette série d'expériences comme pour la suivante, la fréquence transverse du piège vaut $\omega_\perp/2\pi = 98.5\,\mathrm{Hz}$.

7.3.1 Principe de l'expérience

Nous commençons par former un condensat contenant un seul vortex, suivant la méthode exposée dans le chapitre 6. Nous soumettons ensuite ce condensat à une brève impulsion excitatrice de 0.5 ms : une cuillère statique ($\Omega = 0$) et intense ($\epsilon \sim 1$) illumine les atomes pendant ce court instant, réalisant une excitation quasi-percussionelle par le potentiel statique $V(x, y)$ (Eq. 3.3). Il en résulte l'excitation d'une superposition des modes quadrupolaires $m_z = +2$ et $m_z = -2$. Suite à cette excitation, on laisse le condensat évoluer librement dans le piège magnétique, pendant un temps variable $t \in [0, 30]$ ms. Le condensat est ensuite imagé par les méthodes usuelles. Plusieurs informations sont déduites de l'image longitudinale : on ajuste le profil de densité par un profil de Thomas-Fermi d'ellipticité $\zeta = R_{\max}/R_{\min}$ et dont le grand axe fait un angle θ avec l'horizontale. Ces deux grandeurs sont reportées sur la figure 7.5 comme fonction du temps, pour des condensats avec et sans vortex.

Commençons par le cas où aucun vortex n'est présent dans le condensat (figure 7.5(a)). Les deux modes quadrupolaires ont à la fois des fréquences et des durées de vie égales, de sorte que le mouvement libre correspond exactement à ce qui est représenté sur la figure 6.9 (première ligne). L'ellipticité ζ oscille dans le temps, ainsi que l'angle θ qui passe périodiquement et brutalement de 0 à $\pi/2$.

Dans le cas où un vortex est présent dans le condensat (figure 7.5(b)), la symétrie entre les modes $m_z = +2$ et $m_z = -2$ est brisée, et le comportement de leur superposition s'enrichit significativement. Aux temps courts, l'effet principal provient de la différence qui apparaît entre les deux fréquences ω_{+2} et ω_{-2} : l'angle θ, en plus des sauts de $\pi/2$, suit en effet un mouvement de précession. La vitesse angulaire de cette précession peut être reliée au moment cinétique

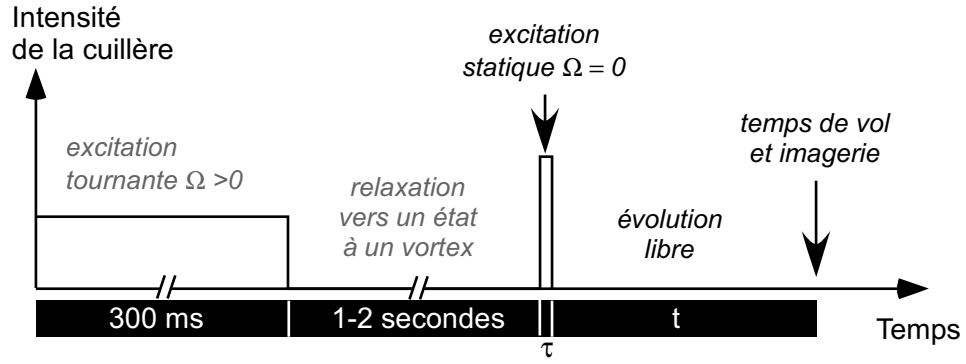


FIGURE 7.4 – Séquence expérimentale des expériences "percussionnelles" : après avoir formé un condensat contenant un seul vortex, on le soumet pendant un temps très court ($\tau = 0.5\,\mathrm{ms}$) à une cuillère statique ($\Omega = 0$). La cuillère est ensuite éteinte afin de laisser le condensat évoluer durant un temps variable t dans le piège magnétique seul.

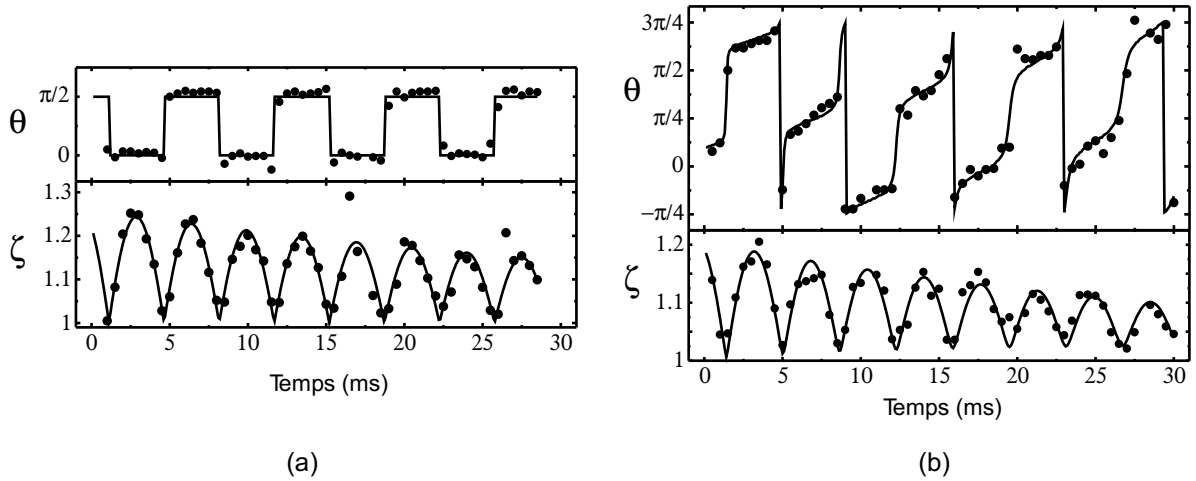


FIGURE 7.5 – Variation de l'angle θ et de l'ellipticité ζ en fonction du temps. Les deux modes quadrupolaires sont excités à poids égal à $t = 0$. Les courbes en trait plein sont les ajustements par les fonctions décrites dans le texte. (a) Cas sans vortex. (b) Cas où une ligne de vortex unique est présente au centre du condensat. En plus de la précession de l'angle entre les sauts de $\pi/2$, on remarque que les sauts nets observés aux temps courts s'arrondissent pour des temps plus longs.

par particule, comme cela a déjà été fait dans le chapitre 6. Pour des temps plus longs, cette figure d'escalier aux marches penchées s'arrondit. Cela ne semble pas être le fait d'un bruit expérimental puisque l'ellipticité reste parfaitement mesurable dans ces régions — et à des valeurs suffisamment élevées pour que l'on puisse se fier aux mesures d'angles. Nous interprétons cette observation comme la signature du fait que le mode $m_z = -2$ disparaît plus vite que le mode $m_z = +2$: en effet, l'angle θ en présence du seul mode $m_z = +2$ augmente linéairement, ce qui modulo π doit apparaître sous la forme de dents de scie. Les formes arrondies de la courbe (b) pourraient donc être un état intermédiaire entre les marches d'escalier de la superposition des deux modes et les dents de scie du seul mode $m_z = +2$.

Il semble donc à la lumière de ces arguments qualitatifs que, d'une part, la fréquence du mode $m_z = +2$ est plus élevée que celle du mode $m_z = -2$ (ce que nous savions déjà et qui est dû à la présence du vortex), et d'autre part que le mode $m_z = +2$ a une durée de vie supérieure à celle du mode $m_z = -2$ (ce qui est probablement dû aux kelvons). Nous allons voir qu'une analyse quantitative des données permet de confirmer ces tendances.

7.3.2 Modèle pour les fonctions d'ajustement

Nous allons chercher quelle fonction doit être utilisée pour l'ajustement des courbes de la figure 7.5. Pour cela, nous décomposons la fonction d'onde juste après l'excitation sur les modes de Bogoliubov.

Nous raisonnons directement sur la fonction d'onde de Gross-Pitaevskii Ψ. Avant l'excitation le condensat est au repos dans l'état Ψ_0. Juste après l'excitation sa fonction d'onde s'écrit $\Psi_0 + \delta\Psi$. La perturbation est appliquée durant un temps τ très court devant les temps caractéristiques d'évolution de la fonction d'onde, de sorte que l'on peut écrire :

$$\delta\Psi(\boldsymbol{r}) = i\frac{V(r,\phi)\tau}{\hbar}\Psi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{i\tau}{2\hbar}m\epsilon\omega_\perp^2 r^2\cos(2\phi - 2\theta_0)\Psi_0(\boldsymbol{r}), \tag{7.9}$$

où ϕ est l'angle polaire dans le plan xy, et θ_0 est un angle fixé qui définit l'orientation du potentiel statique appliqué. Nous allons décomposer cette expression sur les modes quadrupolaires.

En l'absence de vortex, il est possible d'écrire la forme exacte des $u_{\pm2}$ et $v_{\pm2}$ correspondant aux modes quadrupolaires $m_z = \pm2$ [56] :

$$u_{\pm2} = \frac{1}{2}\left(C_+\frac{\Psi_0}{\sqrt{n}} + C_-\frac{\sqrt{n}}{\Psi_0}\right)r^2 e^{\pm2i\phi} \tag{7.10}$$

$$v_{\pm2} = \frac{1}{2}\left(C_+\frac{\Psi_0}{\sqrt{n}} - C_-\frac{\sqrt{n}}{\Psi_0}\right)r^2 e^{\pm2i\phi}, \tag{7.11}$$

où n est la densité centrale du nuage. Le rapport $C_-/C_+ = \hbar\omega_\perp/2\mu$ est très petit devant un.

Cette forme peut être déduite des équations de Bogoliubov-de Gennes dans la limite de Thomas-Fermi et sans vortex [56]. Nous supposerons qu'elle s'applique également lorsqu'un vortex est présent, et que les seules modifications apportées par ce dernier portent sur les fréquences des modes et leurs durées de vie. La perturbation $\delta\Psi$ juste après l'excitation peut être décomposée exactement sur ces modes :

$$\delta\Psi = A\left[(u_2 - v_2^*) + (u_{-2} - v_{-2}^*)\right], \tag{7.12}$$

A étant une constante que nous n'expliciterons pas. Appelant $\omega_{\pm2}$ la fréquence des modes $m = \pm2$ et $\Gamma_{\pm2}$ leur taux de relaxation respectifs[2], on peut écrire l'évolution temporelle de la perturbation :

$$\delta\Psi = A\left[e^{-\Gamma_{+2}t}\left(u_2\, e^{-i(\omega_{+2}t+2\theta_0)} - v_2^*\, e^{i(\omega_{+2}t+2\theta_0)}\right) + e^{-\Gamma_{-2}t}\left(u_{-2}\, e^{-i(\omega_{-2}t-2\theta_0)} - v_{-2}^*\, e^{i(\omega_{-2}t-2\theta_0)}\right)\right]. \tag{7.13}$$

[2]Ces taux sont introduits de manière phénoménologique.

Partant de cette expression, il est possible d'écrire l'évolution de toutes les observables du condensat. Afin de simplifier les notations, il est commode de poser :

$$F(t) = e^{-\Gamma_{-2}t}\sin(\omega_{-2}t - 2\theta_0) + e^{-\Gamma_{+2}t}\sin(\omega_{+2}t + 2\theta_0), \tag{7.14}$$

$$G(t) = e^{-\Gamma_{-2}t}\cos(\omega_{-2}t - 2\theta_0) - e^{-\Gamma_{+2}t}\cos(\omega_{+2}t + 2\theta_0). \tag{7.15}$$

On montre que l'ellipticité vaut alors :

$$\zeta(t) = 1 + \zeta_0\sqrt{F^2 + G^2}. \tag{7.16}$$

Enfin, l'angle $\theta(t)$ que fait l'ellipse avec un axe fixe est mesuré expérimentalement modulo π, de sorte qu'il est plus aisé d'ajuster $\cos(2\theta)$ que θ directement. Comme $\cos(2\theta)$ ne définit pas complètement θ modulo π, nous ajustons en réalité à la fois $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$. L'évolution de ces grandeurs dans notre modèle est donnée par :

$$\cos(2\theta) = \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}}, \tag{7.17}$$

$$\sin(2\theta) = \frac{G}{\sqrt{F^2 + G^2}}. \tag{7.18}$$

7.3.3 Résultats quantitatifs

Le traitement des données avec les équations 7.16, 7.17 et 7.18 est fait par un ajustement simultané sur les trois grandeurs ζ, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$. Les données avec et sans vortex sont traitées de la même manière. Les paramètres des ajustements sont au nombre de sept : un angle initial θ_0, un temps t_0 définissant l'origine des temps, une amplitude ζ_0, les deux fréquences $\omega_{\pm 2}$ et les deux temps de relaxation $\Gamma_{\pm 2}$. Les points pour lesquels l'ellipticité ζ est proche de 1 sont gardés pour l'ajustement de $\zeta(t)$ mais retirés des données pour l'angle θ.

Du fait du grand nombre de paramètres, bon nombre de séries expérimentales ont conduit à des valeurs aberrantes ou peu reproductibles pour $\omega_{\pm 2}$ et surtout $\Gamma_{\pm 2}$. Nous avons donc mis en place un critère de validation des séries expérimentales, en ne gardant que celles dont le résidu χ^2 est inférieur à un certain seuil. Les séries retenues se sont avérées donner des résultats reproductibles. Les courbes de la figure 7.5 montrent la qualité des ajustements obtenus. Le tableau suivant regroupe les valeurs des fréquences et des taux de relaxation obtenues pour ces courbes :

Vortex	$\omega_{+2}/2\pi$ [Hz]	$\omega_{-2}/2\pi$ [Hz]	Γ_{+2} [s^{-1}]	Γ_{-2} [s^{-1}]
0	142.0 ± 0.5		21.3 ± 1.3	
1	159.5 ± 1.0	116.8 ± 1.0	19.1 ± 2.0	35.7 ± 4.0

Les tendances remarquées précédemment se confirment : en présence d'un vortex, la fréquence du mode co-propageant $m_z = +2$ augmente alors que celle du mode contra-propageant $m_z = -2$ diminue. On constate que la somme des carrés de ces fréquences divisée par $4\omega_\perp^2$ vaut 1.007(10), en très bon accord avec la règle de somme (6.3) qui prédit que ce rapport vaut 1. Concernant maintenant les taux de relaxation, il apparaît que celui du mode $m_z = +2$ reste quasiment inchangé lorsqu'un vortex est présent, alors que celui du mode $m_z = -2$ augmente presque d'un facteur 2. Ce résultat témoigne de la dissymétrie entre les processus de relaxation des deux modes quadrupolaires. L'attribution non ambiguë de cette dissymétrie aux kelvons reste à faire, et sera discutée un peu plus loin.

7.4 Une seconde expérience : excitation résonnante

Un autre type d'expérience a permis de déterminer Γ_{+2} et Γ_{-2}. Nous avons pour cela étudié la largeur de la résonance de chacun des modes quadrupolaires.

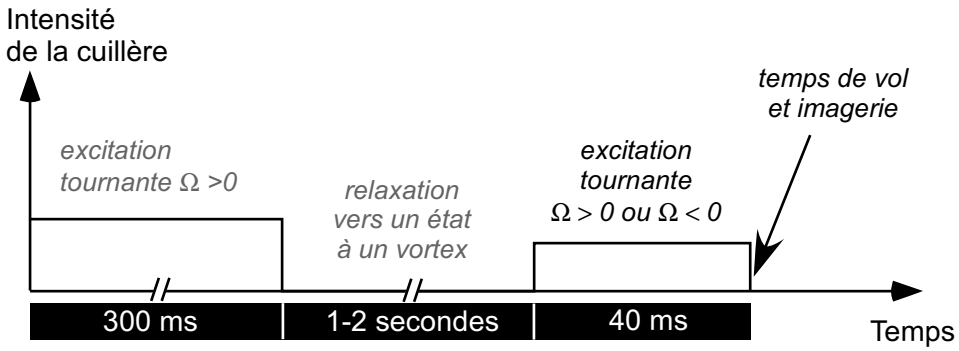


FIGURE 7.6 – Séquence expérimentale des expériences de résonance : après avoir formé un condensat contenant un seul vortex, on le soumet pendant 40 ms à une cuillère tournant dans le sens positif ou négatif à une fréquence angulaire variable Ω.

7.4.1 Principe de l'expérience

Après avoir formé un condensat contenant une seule ligne de vortex, nous le soumettons à 40 millisecondes d'excitation par une cuillère de faible intensité ($\epsilon \simeq 0.025$). Cette cuillère tourne à une vitesse angulaire constante Ω dans le sens positif ou négatif suivant que l'on veut étudier le mode quadrupolaire $m_z = +2$ ou $m_z = -2$. Le nuage est imagé directement après cette phase d'excitation, et son ellipticité est déduite d'une ajustement du profil de densité longitudinal.

En balayant la fréquence de rotation Ω à laquelle est excité le condensat contenant la ligne de vortex, on peut tracer la réponse en ellipticité du condensat en fonction de Ω, et cela pour les deux sens de rotation. Les deux courbes de résonance obtenues ainsi ne sont rien d'autre que les courbes de résonances des modes quadrupolaires $m_z = +2$ et $m_z = -2$. Nous les avons reportées sur la figure 7.7. La levée de dégénérescence de deux fréquences ω_{+2} et ω_{-2} y est parfaitement visible (on prendra garde au fait que la résonance correspond à $2\Omega = \omega_{\pm 2}$ et non à $\Omega = \omega_{\pm 2}$). Les formes des deux résonances sont quant à elles comparables, celle du mode $m_z = -2$ étant plus ténue et peut-être, à vue d'œil, un peu plus large. Un traitement plus précis est néanmoins nécessaire pour tirer des informations quantitatives de ces courbes de résonance.

7.4.2 Modèle pour la fonction d'ajustement

Nous suivons un raisonnement analogue à ce que nous avions fait pour le premier type d'expériences. Le potentiel est cette fois-ci appliqué durant toute l'évolution. Il a pour expression :

$$V(r, \phi, t) = \frac{1}{2} m \epsilon \omega_\perp^2 r^2 \cos(2\Omega t - 2\phi). \tag{7.19}$$

Nous cherchons la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii sous la forme perturbative suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = [\Psi_0(\boldsymbol{r}) + (\alpha(t) u - \alpha^*(t) v^*)]\, e^{-i\mu t/\hbar}. \tag{7.20}$$

u et v sont les composantes de Bogoliubov de celui des modes quadrupolaires que l'on considère. $\alpha(t)$ remplace les exponentielles $e^{i\omega t}$ qui sont présentes lors d'une évolution libre. En injectant cette forme dans l'équation de Gross-Pitaevskii, on montre que cette expression est une solution approchée dans la mesure où l'on peut négliger les termes proportionnels à C_- dans l'expression de u et v. On a alors :

$$i\dot{\alpha} - (\omega - i\Gamma)\alpha = A e^{-2i\Omega t}. \tag{7.21}$$

Pour inclure la dissipation, nous avons pris pour fréquence du mode la quantité $\omega - i\Gamma$. Cette équation est analogue à celle décrivant un oscillateur harmonique forcé. Sa résolution conduit à

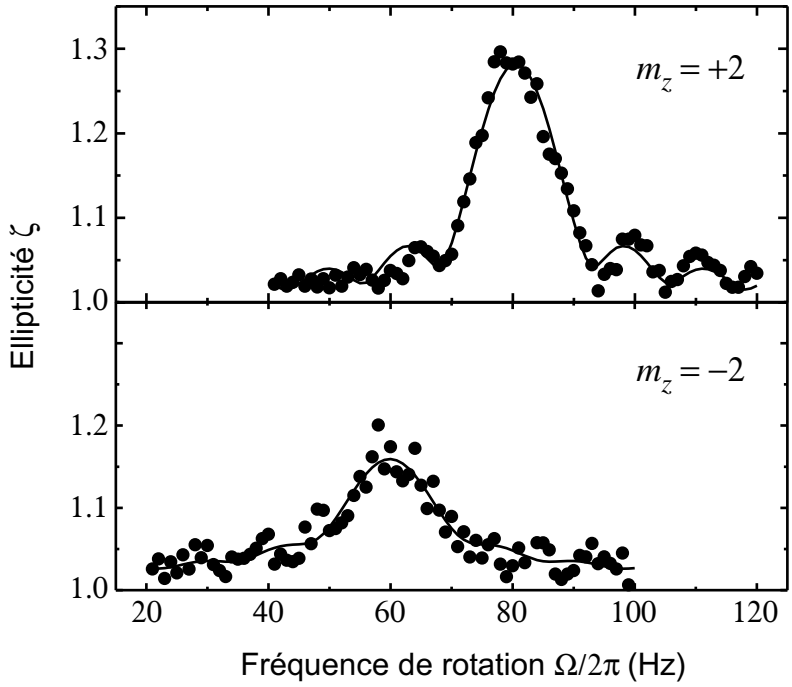


FIGURE 7.7 – Courbes de résonance des modes $m_z = +2$ et $m_z = -2$. Les courbes en trait plein sont des ajustements par la fonction donnée dans le texte (Eq. 7.23).

l'expression suivante pour $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = -iA\frac{e^{-2i\Omega t} - e^{(i\omega+\Gamma)t}}{i(\omega - 2\Omega) + \Gamma}. \tag{7.22}$$

Enfin, cette quantité peut être reliée à la courbe de résonance $\zeta(\Omega)$ par l'expression suivante, valable dans la limite perturbative $\alpha \ll 1$:

$$\zeta(\Omega) = 1 + B|\alpha| = 1 + \zeta_0\sqrt{\frac{1 + e^{-2\Gamma T} - 2e^{-\Gamma T}\cos[(\omega - 2\Omega)T]}{(\omega - 2\Omega)^2 + \Gamma^2}}. \tag{7.23}$$

T représente dans cette expression le temps d'excitation.

7.4.3 Résultats quantitatifs

La fonction $\zeta(\Omega)$ que nous venons de faire apparaître peut être utilisée pour ajuster les courbes de résonance de la figure 7.7. Il s'agit d'un ajustement à seulement trois paramètres libres : l'amplitude totale ζ_0, la fréquence centrale ω et la largeur "naturelle" Γ. Le paramètre T est fixé par les conditions expérimentales et traduit le fait que la fenêtre d'excitation est de taille finie. L'effet de durée finie de la sonde est visible sur les courbes de la figure 7.7 (les courbes d'ajustement y figurent en trait plein) : il apparaît sous la forme de pics latéraux périodiques, analogues aux pics secondaires d'un sinus cardinal. Le modèle rend ainsi très bien compte de l'intégralité de la forme de la résonance. Les valeurs déduites des ces ajustements sont reportées dans le tableau suivant.

Sens de rotation	$\omega_{+2}/2\pi$ [Hz]	$\omega_{-2}/2\pi$ [Hz]	Γ_{+2} [s^{-1}]	Γ_{-2} [s^{-1}]
$+1$	161.0 ± 1.0		24 ± 5	
-1		119.8 ± 1.0		57 ± 10

Les fréquences ω_{+2} et ω_{-2} sont légèrement supérieures à celles trouvées par la première méthode, probablement parce que dans les expériences de résonance la présence de la cuillère durant l'évolution cause une augmentation de la fréquence radiale du piège. L'écart entre les fréquences reste néanmoins du même ordre. Les temps de relaxation sont également comparables aux précédents : en particulier, la caractéristique $\Gamma_{-2} \sim 2\Gamma_{+2}$ se retrouve dans cette dernière expérience, même si les valeurs trouvées sont légèrement supérieures à celles déduites des expériences "percussionnelles". Nous allons maintenant discuter l'origine du résultat $\Gamma_{-2} \sim 2\Gamma_{+2}$.

7.5 Interprétation des résultats

7.5.1 La durée de vie du mode $m_z = -2$ est plus grande que celle du mode $m_z = +2$

Le résultat le plus remarquable de ces deux séries d'expériences est le facteur 2 qui sépare les deux temps de relaxation : le mode quadrupolaire $m_z = -2$ est deux fois plus amorti que le mode $m_z = +2$. Il peut y avoir plusieurs raisons à une telle différence. La première — celle que nous avons évoquée en début de chapitre — repose sur un couplage de type Beliaev entre le mode quadrupolaire $m_z = -2$ et les kelvons. Une autre explication doit néanmoins être étudiée : il s'agit de l'effet d'une rotation éventuelle du nuage thermique. Si celui-ci tourne avec le condensat, les deux modes quadrupolaires n'ont plus aucune raison de s'amortir à la même vitesse. En particulier, le mode $m_z = +2$ tournant dans le même sens que le nuage thermique doit voir sa durée de vie rallongée par rapport au mode contra-propageant $m_z = -2$ qui tourne en sens inverse. Un tel phénomène semble donc pouvoir rendre compte de nos résultats, au moins au premier abord.

7.5.2 Le nuage thermique ne semble pas responsable de cet écart

Deux arguments s'opposent à l'interprétation par une rotation éventuelle du nuage thermique. Le premier repose sur une prédiction théorique de Williams *et al.* [161] : ces auteurs évaluent le taux d'amortissement des modes de surface en présence d'un nuage thermique tournant à la vitesse Ω. Leur formule (20) donne ainsi le taux d'amortissement d'un mode de surface de moment cinétique m :

$$\Gamma_m = \beta \left(1 - \frac{m\Omega}{\omega_m}\right), \tag{7.24}$$

où β est un coefficient que nous n'expliciterons pas. Cette expression montre que si le mode $m_z = -2$ voit son taux d'amortissement augmenter d'un facteur $(1+2\Omega/\omega_{-2})$, le mode $m_z = +2$ voit le sien diminuer d'un facteur semblable. Or nos observations montrent que le premier fait est vérifié (Γ_{-2} augmente d'un facteur 2 lorsqu'un vortex est présent), alors qu'aucune tendance ne semble confirmer le second (Γ_{+2} ne diminue pas de façon significative lorsqu'un vortex est présent). Ainsi, nous n'observons que l'une des deux conséquences d'une éventuelle rotation du nuage thermique, ce qui rend l'hypothèse de cette rotation peu plausible.

Le second argument que nous pouvons avancer contre cette explication est le fait que, dans nos expériences, le nuage thermique ne tourne probablement pas. Le nuage thermique subit en effet deux couples opposés : l'un est dû à la friction avec la fraction condensé. Celle-ci tournant, elle tent à entraîner le nuage thermique dans un mouvement semblable. L'autre est le couple de rappel dû à l'anisotropie statique ($\sim 1\%$) du piège magnétique. Ce couple tend à stopper la rotation. Plusieurs indices permettent d'avancer que le premier couple est faible devant le second : on a ainsi remarqué à plusieurs reprises le faible couplage d'un état à un seul vortex avec le nuage thermique (la grande durée de vie du dernier vortex par rapport aux autres en témoigne — *cf.* chapitre 6). On peut aussi remarquer que le champ de vitesse d'un vortex unique,

étant localisé essentiellement près du centre du nuage, a peu de chance d'entraîner efficacement un nuage thermique localisé aux bords du condensat.

Finalement, la compétition entre les deux couples tourne sans doute en faveur du couple statique, comme nous l'avions vu au chapitre 3 (voir aussi [97]). Avec ce deuxième argument, nous pouvons donc raisonnablement écarter l'explication basée sur une rotation significative du nuage thermique.

7.5.3 Observation directe des kelvons

Afin de confirmer notre première hypothèse — celle des kelvons —, nous avons réalisé un dernier type d'expérience. Le protocole est analogue à celui des expériences de résonance, si ce n'est que l'on fixe la fréquence au centre d'une des courbes de résonance, et que l'on fait varier le temps d'excitation. On obtient ainsi un film de l'excitation résonnante pour chacun des modes. L'information principale que l'on peut tirer de ces séries provient des images transverses. La figure 7.8 montre deux condensats vus de côté, observés après 33 ms d'excitation résonnante — l'un dans le sens $m_z = +2$ et l'autre dans le sens $m_z = -2$; la ligne de vortex y apparaît courbée et en forme de "N", ainsi que nous l'avons déjà montré au chapitre 6. Une caractéristique nouvelle apparaît néanmoins sur l'image de gauche (mode $m_z = -2$). Il s'agit de petites franges verticales localisées au voisinage de la ligne. Cette structure est également visible sur la coupe horizontale du profil, sous la forme d'oscillations. Une transformée de Fourier de cette coupe révèle un pic à $k_0 = 0.70\,\mu\mathrm{m}^{-1}$, de largeur $\Delta k_0 \simeq 0.15\,\mu\mathrm{m}^{-1}$ et dont l'aire est six déviations standard au-dessus du bruit moyen.

La présence de ces franges est décelée de manière reproductible, indifféremment sur des lignes en forme de "N" ou de "U", mais uniquement lorsque c'est le mode $m_z = -2$ qui est excité. Si l'on suppose que l'ensemble du nuage s'est dilaté suivant les lois d'échelles classiques, on peut montrer que la longueur d'onde mesurée correspond approximativement à la valeur attendue pour des kelvons produits à partir du mode $m_z = -2$, compte tenu de la conservation de l'énergie. Il semble donc que ces franges constituent une observation directe ou quasi-directe des modes de Kelvin de la ligne de vortex. Toutefois, il faut noter que ce que nous voyons est une modulation de la densité, alors qu'un mode de Kelvin correspond à une modulation du champ de vitesse. Le temps de vol a permis le passage de l'une à l'autre, par une conversion analogue à celle observée dans les condensats très allongés où des modulations de phase dans le piège donnent lieu après temps de vol à des modulations de densité [162]. Il est également possible que les kelvons se soient rapidement désintégrés vers des modes de phonons de longueur d'onde proche. Cela expliquerait à la fois le fait que la longueur d'onde observée correspond à celle attendue pour les kelvons, mais aussi le fait que l'énergie ne semble pas repasser des kelvons vers le mode quadrupolaire $m_z = -2$.

7.6 Conclusion

Nous avons montré l'existence d'un couplage Beliaev entre des modes d'excitations d'une ligne de vortex unique et un mode de surface contrapropageant. Ce couplage se manifeste par une amplification de l'amortissement de ce mode d'un facteur 2.

Un effet semblable est attendu dans une configuration de réseau optique unidimensionnel [163]. Les modes d'excitation de la ligne ont en outre été invoqués récemment pour rendre compte de certains écarts dans les mesures de moment cinétique [164].

Enfin, on ne peut parler des modes de Kelvin sans mentionner leurs analogues dans les réseaux de vortex, les modes de Tkachenko. Ces modes ont été observés récemment dans le groupe du JILA [138].

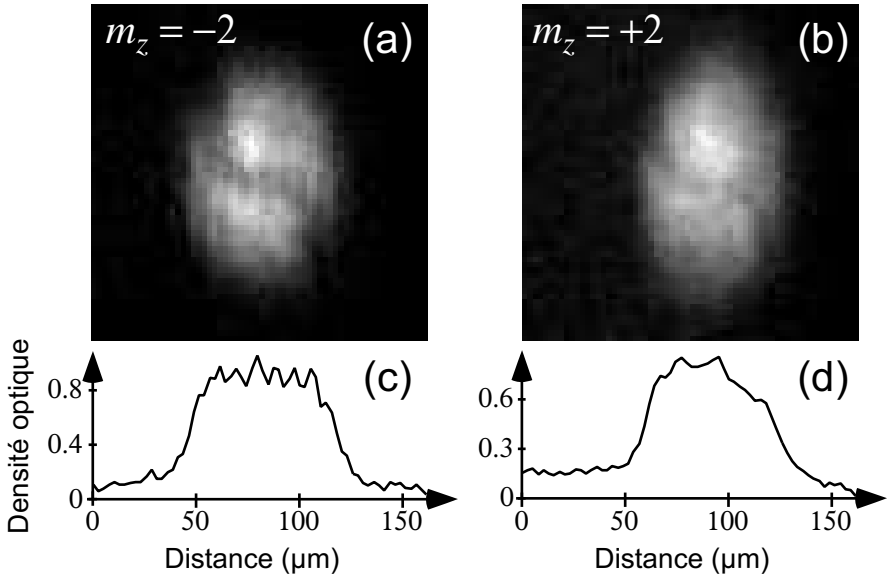


FIGURE 7.8 – Images transverses de condensats après 33 ms d'excitation résonnante des modes : (a) $m_z = -2$, et (b) $m_z = +2$. En bas : profil de densité horizontal moyenné sur 5 pixels au voisinage de la ligne. Sur l'image de gauche, des franges sont visibles au voisinage de la ligne de vortex. Leur présence est confirmée sur le profil de densité, sous la forme d'oscillations.

Quatrième partie

Rotations rapides : vers les régimes corrélés

Sommaire

Introduction **145**

8 Rotations rapides et états corrélés **147**
8.1 Condensats avec de nombreux vortex . . . 147
8.1.1 Augmenter le moment cinétique . . . 147
8.1.2 Approcher la rotation solide avec des vortex . . . 149
8.1.3 Distribution des vortex dans un récipient cylindrique . . . 149
8.1.4 Cristallisation en réseau . . . 151
8.2 De l'oscillateur harmonique à l'effet Hall Quantique . . . 151
8.2.1 Rotation critique et effet Hall . . . 152
8.2.2 Niveaux de Landau pour une particule en rotation . . . 152
8.2.3 Effet Hall quantique entier avec des électrons . . . 153
8.2.4 Effet Hall quantique fractionnaire avec des électrons . . . 155
8.3 Bosons en rotation . . . 155
8.3.1 Formalisme . . . 155
8.3.2 Saturation de la taille des vortex . . . 156
8.3.3 Effet Hall de champ moyen . . . 156
8.3.4 Effet Hall quantique fractionnaire — cas harmonique . . . 158
8.3.5 Effet Hall quantique fractionnaire — cas général . . . 158
8.3.6 Feuille de route pour atteindre le régime fortement corrélé . . . 159
8.4 Conclusion . . . 160

9 Rotation rapide dans un piège hybride **161**
9.1 Introduction d'un terme quartique transverse dans le potentiel . . . 161
9.1.1 Un laser focalisé sur les atomes . . . 161
9.1.2 Potentiel gaussien et termes quartiques . . . 163
9.1.3 Rotation dans un piège hybride harmonique+quartique . . . 164
9.1.4 Effet Hall dans un piège non harmonique . . . 165
9.2 Procédure expérimentale et résultats . . . 165
9.2.1 Mesure de la nouvelle fréquence transverse . . . 165
9.2.2 Excitation en deux temps par la cuillère . . . 168
9.2.3 Rotation critique et sur-critique . . . 169
9.3 Détermination de Ω_{eff} par trois méthodes . . . 169
9.3.1 Détermination de Ω_{eff} par les lois d'échelle . . . 169
9.3.2 Détermination de Ω_{eff} : modes quadrupolaires . . . 172
9.3.3 Détermination de Ω_{eff} : comptage des vortex . . . 174
9.4 Pourquoi les vortex disparaissent : quelques pistes . . . 175
9.4.1 Le nuage thermique . . . 175

9.4.2 Fragmentation du condensat 176
9.4.3 Des lignes de vortex très excitées 177
9.5 Conclusion 177

10 Mode monopolaire transverse d'un condensat en rotation rapide 179
10.1 Observation de l'oscillation monopolaire d'un gaz en rotation rapide 179
10.1.1 Images d'un condensat tournant et oscillant 179
10.1.2 Fréquence de l'oscillation 179
10.1.3 Linéarité — Effet du temps de vol 181
10.2 Interprétation de la fréquence 182
10.2.1 Approche théorique dans la région $\Omega_{\text{eff}} \lesssim 0.9\omega_\perp$ – Cas d'un piège purement quadratique 182
10.2.2 Dans la région $\Omega_{\text{eff}} \sim \omega_\perp$ – Cas d'un piège quadratique+quartique 183
10.3 Structure du mode 184
10.4 Conclusion 185

Introduction

Dans les parties II et III, nous avons rencontré deux grandes classes d'écoulement de rotation pour un condensat de Bose-Einstein : des écoulements irrotationnels, et des écoulements contenant une ligne de vortex unique. Les conditions imposées sur l'écoulement étaient alors très contraignantes : $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ devait s'annuler partout (partie II) ou partout sauf sur une unique ligne (partie III). Les champs de vitesse autorisés étaient ainsi respectivement un écoulement potentiel, ou la somme d'un écoulement potentiel et d'un champ paramétré par une ligne.

Pour acquérir plus de liberté dans la construction des écoulements tournants, on peut envisager de multiplier le nombre de lignes de vortex. L'écoulement viole alors la condition d'irrotationnalité en de nombreux endroits — sur les multiples lignes de vortex —, et la contrainte $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ se relâche progressivement. Cette limite, dite des rotations rapides, se caractérise par des réseaux de vortex ordonnés, appelés réseaux d'Abrikosov. Observés depuis longtemps dans l'hélium superfluide ou dans les supraconducteurs, ces réseaux ont été produits récemment dans les condensats gazeux, avec parfois plusieurs centaines de vortex en leur sein [134].

La limite des rotations rapides est étudiée théoriquement dans le chapitre 8. C'est une limite de grand nombre quantique, et comme telle, elle emporte le système vers un état quasi-classique : le mouvement de rotation solide. La boucle semble bouclée : la rotation quantique d'un superfluide, depuis la rotation irrotationnelle et en passant par les vortex, se raccorde aux rotations classiques. De la même façon qu'un champ magnétique trop fort détruit la phase supraconductrice d'un supraconducteur, une rotation trop forte devrait donc détruire le condensat, et partant transformer un gaz quantique en gaz classique.

En réalité, il n'en est rien. La grande variété des potentiels de piégeages possibles pour un gaz en rotation permet de contrôler la limite des rotations rapides, et d'en changer profondément le caractère. Le potentiel harmonique, ainsi qu'un certain nombre de potentiels proches, sont à cet égard plein de promesses. Il se pourrait en effet que, dans ces potentiels, le système devienne — pour parler crûment —, *encore plus quantique* dans la limite des rotations rapides. Ce régime encore inexploré est l'analogue de celui de l'effet Hall quantique fractionnaire, mais pour des bosons. Nous lui consacrons la seconde partie du chapitre 8, montrant en particulier qu'il correspond à des états à N corps très corrélés.

Nous avons réalisé plusieurs séries d'expériences dans le but d'approcher ce régime. Notre choix de potentiel s'est porté sur une combinaison d'un piège magnétique harmonique et d'un potentiel dipolaire contenant un petit terme d'ordre quatre. La limite des rotations rapides dans ce potentiel fait l'objet du chapitre 9. Bien qu'il ne soit pas encore dans le régime de Hall, le nuage tournant se révèle avoir un comportement original qui n'est pas encore clairement interprété.

Pour le caractériser davantage, nous avons également étudié son mode monopolaire transverse. Sous l'effet combiné de la rotation et l'anharmonicité du potentiel, ce mode, exact analogue de celui que nous étudiions dans le chapitre 2, présente des caractéristiques remarquables. Son étude fait l'objet du dixième et dernier chapitre.

Chapitre 8

Rotations rapides et états corrélés

Ce chapitre essentiellement théorique tente de répondre à deux questions relatives aux rotations rapides : quel est l'état d'un condensat de Bose-Einstein lorsque le moment cinétique par particule devient grand devant $\hbar$? Quel est l'état d'un système de bosons froids quand le moment cinétique par particule devient grand devant $\hbar$?

La première de ces questions se pose naturellement lorsque l'on voit les réseaux de vortex des figures 5.3 et 5.4 : le fait que le condensat choisisse de développer plusieurs vortex au lieu d'un seul de grande charge n'est pas évident a priori. Nous décrivons dans la première partie de ce chapitre un modèle simple qui explique ce comportement. La cristallisation en réseau régulier et ordonné est également abordée.

La seconde question englobe la première, en la reposant dans un contexte plus général et particulièrement stimulant : celui de la physique de l'effet Hall quantique fractionnaire. Un condensat mis en rotation dans un piège harmonique pourrait en effet, d'après de récentes études théoriques, subir une transition de phase vers des états quantiques exotiques connus en physique de l'effet Hall sous le nom d'états de Laughlin (deuxième partie). Nous nous inspirons de ces études dans la troisième partie, et donnons un aperçu des possibilités offertes par les régimes d'effet Hall pour des bosons en rotation.

8.1 Condensats avec de nombreux vortex

Les condensats contenant un vortex de charge unique portent au plus un moment cinétique $\hbar$ par particule. Afin d'augmenter ce nombre, deux voies peuvent être envisagées : augmenter la charge du vortex, ou augmenter le nombre de vortex. Nous allons montrer dans cette section que, conformément à ce qui est visible sur nos images expérimentales, il est généralement plus favorable pour le condensat de suivre la deuxième option et d'intégrer davantage de vortex en son sein.

8.1.1 Augmenter le moment cinétique

Nous considérons le cas général d'un fluide confiné dans un potentiel à symétrie de révolution autour de l'axe z et contenant N particules. Ce fluide possède initialement un moment cinétique total $L_z > 0$. Du fait de la symétrie de révolution, cette quantité est conservée. Afin de rechercher l'état de plus basse énergie, nous pouvons donc minimiser la quantité :

$$F = E - \lambda L_z, \tag{8.1}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Il reste à expliciter l'énergie E. Nous supposerons qu'elle s'écrit comme la somme d'une contribution d'énergie cinétique, et d'une quantité $W(\rho, r)$ qui ne

dépend pas de la vitesse. L'énergie libre F peut donc s'écrire :

$$F = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\rho \left[\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \lambda m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}_z\right] + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\rho W(\rho,\boldsymbol{r}). \tag{8.2}$$

Nous avons regroupé sous la première intégrale le terme d'énergie cinétique et celui du moment cinétique, laissant dans la seconde le terme indépendant du champ de vitesse. Nous supposerons qu'aucune contrainte n'existe sur le champ de vitesse, de sorte que tous les champs $v(\boldsymbol{r})$ ont un sens physique. Afin de chercher le champ de vitesse $\boldsymbol{v}_0$ qui minimise l'énergie, nous devons écrire que δF est nulle quand on remplace $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r})$ par $\boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$:

$$\delta F = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\; m\left[\rho(\boldsymbol{v}_0 - \lambda\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{r})\right]\cdot\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{8.3}$$

Comme on s'autorise tous les $\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ possibles, le terme entre crochets doit s'annuler. Si la densité ρ ne s'annule pas, cela conduit à :

$$\boldsymbol{v}_0 = \lambda\boldsymbol{u}_z\times\boldsymbol{r}. \tag{8.4}$$

En posant $\lambda = \Omega$, on reconnaît le champ de vitesse d'une rotation solide (figure 8.1(a)). La valeur de Ω peut se déduire facilement, en remplaçant $\boldsymbol{v}$ par $\boldsymbol{v}_0$ dans l'expression de L_z et en égalant cette quantité à la valeur fixée de L_z. On trouve :

$$\Omega = \frac{L_z}{Nm\langle r^2\rangle}.$$

La conclusion de ce calcul est finalement la suivante : à moment cinétique fixé, il est plus favorable énergétiquement pour un fluide d'adopter un champ de vitesse de type rotation solide. Cela signifie, en d'autres termes, que la vorticité $\nabla\times\boldsymbol{v}$ se répartit uniformément sur le fluide. On notera que ce résultat ne dépend pas de la forme exacte du potentiel, ni de la présence éventuelle d'interactions de champ moyen.

D'autres équations peuvent être tirées de la minimisation de l'énergie libre 8.1. Si on lui impose d'être stationnaire pour toute variation $\delta\rho$ de la densité, on peut trouver la densité d'équilibre du fluide. Il faut pour cela introduire un multiplicateur de Lagrange μ (le potentiel chimique) qui nous permette d'assurer que le nombre d'atomes reste constant. Le grand potentiel s'écrit donc :

$$\Xi = E - \Omega L_z - \mu N. \tag{8.5}$$

Pour un condensat dans l'approximation de Thomas-Fermi, $W = U(r) + g\rho/2$ de sorte que l'on a [148] :

$$\delta\Xi = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\delta\rho\left[\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \Omega mrv + U(r) + g\rho - \mu\right] = 0. \tag{8.6}$$

Compte tenu de la forme explicite de v, on trouve immédiatement :

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{g}\left(\mu - U(r) + \frac{1}{2}m\Omega^2r^2\right).$$

Ce résultat est l'analogue de la densité usuelle de Thomas-Fermi, mais corrigé d'un terme centrifuge. Dans le cas d'un potentiel transverse harmonique $U = m\omega_\perp r^2/2$, il faut donc remplacer $\omega_\perp^2$ par $\omega_\perp^2 - \Omega^2$ pour trouver l'expression de la densité. Dans certains potentiels, et sous certaines conditions, la densité peut ainsi s'annuler au centre du nuage. Un tel trou peut contenir un grand nombre de quanta de rotation et devenir un vortex géant.

8.1.2 Approcher la rotation solide avec des vortex

L'écoulement de rotation solide n'est pas une solution envisageable dans le cas d'un condensat, du fait de la contrainte $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$. Il constitue cependant une limite vers laquelle on peut essayer de faire tendre l'écoulement du condensat. Feynman a ainsi suggéré qu'il était possible de répartir des vortex de charge unité sur toute la surface du superfluide [68] (figure 8.1(b)). Dans la limite où les vortex sont nombreux et proches les uns des autres, on peut envisager de faire une moyenne à gros grain pour le champ de vitesse, sur des échelles de longueur plus grandes que la séparation entre deux vortex. Cela revient à remplacer la vorticité ponctuelle des vortex par une vorticité diffuse et uniforme. Le champ de vitesse est, à ce degré d'approximation, un champ de rotation solide $v = \Omega R$ que l'on calcule avec le théorème de Stockes-Ampère appliqué à un contour circulaire de rayon R. La circulation du champ de vitesse le long d'un contour étant égale au quantum de circulation h/m multiplié par le nombre de vortex N_v qu'il contient, on a :

$$2\pi R(\Omega R) = N_v \frac{h}{m} = (\pi R^2 n_v)\frac{h}{m}. \tag{8.7}$$

On a introduit la densité surfacique de vortex n_v. On en déduit le lien entre vitesse de rotation et densité surfacique de vortex :

$$\Omega = \frac{h n_v}{2m}. \tag{8.8}$$

Enfin, si le condensat porte un moment cinétique $\hbar m_z$ par particule, il est possible de trouver une relation entre N_v et m_z. On écrit pour cela :

$$L_z = \hbar m_z = \frac{\int d^3\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) m\Omega r^2}{\int d^3\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})} = m\Omega\langle r^2\rangle.$$

En calculant explicitement $\langle r^2\rangle$ pour une densité ρ donnée, et compte-tenu de la relation 8.8, on peut obtenir l'équation suivante :

$$N_v = \kappa\, m_z, \tag{8.9}$$

où κ est un coefficient numérique qui dépend de la géométrie considérée. On a regroupé dans le tableau suivant quelques valeurs pour des géométries courantes :

Géométrie	$\rho(r,z)$	κ
Boîte cylindrique	ρ_0	2
Piège harmonique transverse — cylindre selon z	$\rho_0(1-\frac{r^2}{R_\perp^2})$	3
Piège harmonique dans les trois directions	$\rho_0(1-\frac{r^2}{R_\perp^2}-\frac{z^2}{R_z^2})$	$\frac{7}{2}$

Dans le dernier cas, le nombre de vortex est évalué dans le plan $z = 0$ où le condensat a une extension radiale maximale.

8.1.3 Distribution des vortex dans un récipient cylindrique

A partir d'arguments qualitatifs, nous venons de montrer qu'un condensat portant un grand moment cinétique doit contenir N_v vortex de charge unité pour minimiser son énergie. Nous proposons dans cette partie une analyse quantitative de ce résultat, en calculant explicitement l'énergie de deux configurations de vorticité : la première consiste à faire porter le moment cinétique par un unique vortex placé au centre du condensat. La seconde correspond à de multiples vortex de charge unité répartis uniformément sur la surface du condensat. Pour simplifier les calculs, nous traitons le cas d'un condensat homogène piégé dans une boîte cylindrique. Nous supposons que $L_z = \hbar m_z$, et que m_z est un entier grand[1] devant 1.

[1] Dans le cas où m_z n'est pas grand devant un, il n'est plus possible de faire de moyenne à gros grain pour le champ de vitesse et les vortex doivent être considérés individuellement [165].

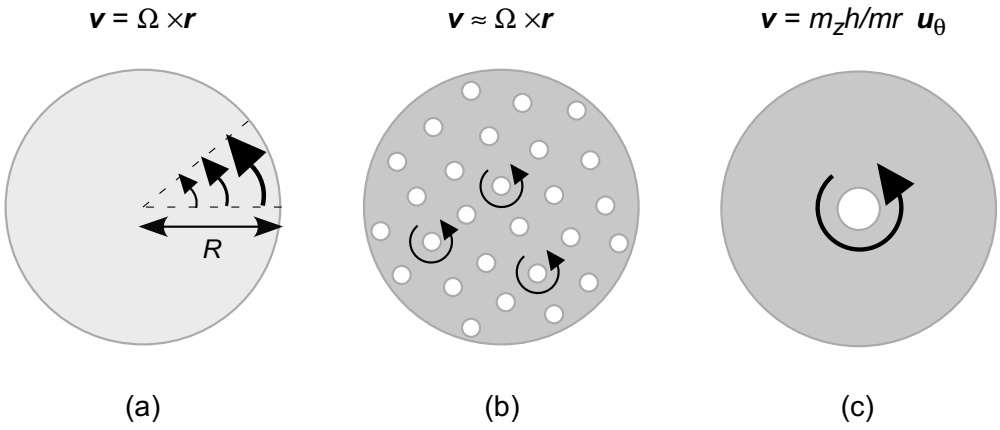


FIGURE 8.1 – Différentes configurations de vorticité : (a) Vorticité uniforme (champ de rotation solide). Ce champ de vitesse minimise l'énergie à L_z fixé, mais il n'est pas acceptable dans les condensats où $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ doit s'annuler partout où $\rho \neq 0$. (b) Vorticité répartie sur un grand nombre de vortex de charge unité, eux-mêmes distribués uniformément en surface. Cette configuration est très proche en énergie de la configuration (a). (c) Vorticité entièrement contenue dans un vortex central. Cette configuration, étant lointaine de la configuration optimale, est très instable.

La première configuration correspond un seul vortex de charge m_z au centre du nuage. Le moment cinétique associé correspond à $\hbar m_z$ et l'énergie cinétique par particule est égale à (Eq. 5.6) :

$$E_1 = \frac{m_z^2 \hbar^2}{mR^2} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right). \tag{8.10}$$

La seconde configuration envisagée consiste à introduire N_v vortex de charge unité dans le condensat. Nous prenons ces vortex juste en quantité suffisante pour que le moment cinétique prenne la bonne valeur $L_z = m_z\hbar$. D'après l'équation 8.9, $N_v = 2m_z$. Appelant $\boldsymbol{v}_i$ le champ de vitesse du vortex i, l'énergie cinétique totale s'écrit :

$$E_{N_v} = \frac{1}{2} m \int \rho \left(\sum_i \boldsymbol{v}_i\right)^2 .$$

En développant le carré, il apparaît N_v termes carrés correspondant à l'énergie des N_v vortex pris séparément, ainsi que $N_v(N_v - 1)$ termes croisés correspondant à l'interaction de ces vortex entre eux. Plutôt que d'analyser tous ces termes et d'en évaluer le poids, nous pouvons récrire le champ de vitesse total du fluide comme celui d'un mouvement de rotation solide $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ auquel on ajoute localement la contribution du vortex le plus proche :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}) + \sum_i \delta\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{r}).$$

Chaque champ de vitesse $\delta\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{r})$ est la correction locale du champ de vitesse de rotation solide près du vortex i. Il est donc nul partout sauf sur un voisinage du vortex i de taille la distance moyenne entre vortex. Reprenons maintenant le calcul de l'énergie cinétique :

$$E_{N_v} = \frac{1}{2} m \int \rho \left(\boldsymbol{v}_0 + \sum_i \delta\boldsymbol{v}_i\right)^2 \simeq \frac{1}{4} m\Omega R^2 + N_v \frac{\hbar^2}{mR^2} \ln\left(\frac{a}{\xi}\right).$$

Les termes croisés $\delta\boldsymbol{v}_i \cdot \delta\boldsymbol{v}_j$ sont nuls pour $i \neq j$, car les champs $\delta\boldsymbol{v}_i$ sont localisés et ne se recouvrent pas. Il en va de même des termes croisés $\boldsymbol{v}_0 \cdot \delta\boldsymbol{v}_i$. Chaque $\delta\boldsymbol{v}_i^2$ apporte en énergie une

contribution égale à celle d'un vortex de charge unité dans une surface de taille d^2, $d \sim R/\sqrt{m_z}$ étant l'ordre de grandeur de la distance entre vortex. Finalement on remarque que le premier terme de cette équation correspond à l'énergie cinétique par particule $E_\Omega = m\Omega R^2/4$ d'un fluide homogène en rotation solide. On peut donc évaluer l'écart d'énergie relatif de chacune des deux configurations envisagée avec l'état de rotation solide :

$$\Delta\tilde{E}_1 = \frac{E_1 - E_\Omega}{E_\Omega} = \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) - 1. \tag{8.11}$$

$$\Delta\tilde{E}_{N_v} = \frac{E_{N_v} - E_\Omega}{E_\Omega} = \frac{2}{m_z}\ln\left(\frac{R}{\sqrt{m_z}\xi}\right). \tag{8.12}$$

Pour des paramètres courants ($R \gg \xi$), la seconde configuration a une énergie beaucoup plus proche de la configuration "optimale" dans laquelle la vorticité est uniforme. Ceci confirme l'analyse qualitative selon laquelle il est favorable de "mimer" le champ de vitesse d'un solide.

Ce modèle simple convient pour un superfluide comme l'hélium-II, contenu dans un récipient[2]. Pour qu'il puisse s'appliquer aux condensats piégés dans des potentiels harmoniques, il faut lui apporter quelques modifications. En effet, un condensat qui tourne dans un piège harmonique n'est pas contraint de garder son volume initial : sous l'effet des forces d'inertie, il peut s'étendre dans les directions radiales et changer de forme. En conséquence, la densité ρ et le rayon maximum dépendent du champ de vitesse. Cela complique la comparaison des deux configurations précédentes, puisqu'il faut maintenant inclure les variations de l'énergie potentielle de piégeage et de l'énergie de champ moyen. Nous admettrons que les résultats de ce paragraphe ne sont pas affectés, dans leur généralité, par ces modifications.

8.1.4 Cristallisation en réseau

Nous n'avons pas encore précisé l'arrangement précis des vortex dans le condensat. Pour réaliser une distribution uniforme, plusieurs configurations sont en effet envisageables, d'un liquide désordonné de vortex à un réseau régulier pavant le plan. Tkachenko a montré en 1966 que parmi les réseaux plans, le réseau triangulaire est celui de plus basse énergie [166]. C'est ce réseau que l'on retrouve dans la plupart des images expérimentales, lorsqu'un temps suffisamment long a été laissé au condensat pour relaxer : la figure 8.2 en témoigne. Lorsque le nombre de vortex est inférieur à ∼20, des effets de bords se font sentir et un écart significatif au réseau triangulaire peut être observé. Les structures respectant le mieux la symétrie du système semblent être plus stables : on observe ainsi fréquemment des structures à 7 ou 19 vortex, correspondant à un vortex central et une ou deux couronnes hexagonales (voir figure). Enfin, dans les phases intermédiaires de la séquence de nucléation, des réseaux particulièrement désordonnés — voire des liquides de vortex — peuvent être observés. Ces réseaux relaxent généralement vers un réseau ordonné après quelques centaines de millisecondes. Les forces de friction jouent un rôle essentiel dans ce processus de cristallisation, comme l'ont confirmé de nombreuses études numériques [118, 121].

On notera pour finir qu'un réseau de vortex est un objet dynamique. Ses modes, appelés modes Tkachenko, sont connus théoriquement depuis presque quarante ans [113, 167]. Ils sont la généralisation à l'ensemble du réseau des modes de Kelvin d'une ligne de vortex. Ils ont été observés récemment par l'équipe du JILA [138, 168].

8.2 De l'oscillateur harmonique à l'effet Hall Quantique

Un condensat en rotation rapide dans un piège harmonique présente une propriété remarquable : celle de rentrer dans un régime d'effet Hall quantique lorsque $\Omega \to \omega_\perp$. A ce jour, cette

[2] Il devrait en toute rigueur prendre en compte la déformation de la surface libre.

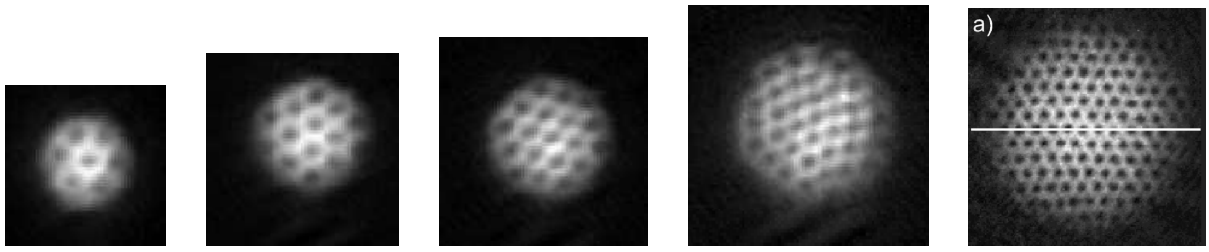


FIGURE 8.2 – Arrangement des vortex en réseaux d'Abrikosov. On a indiqué sous chaque image le nombre de vortex. La dernière image a été obtenue au JILA [136] et montre un réseau contenant plus de 100 vortex.

limite n'a pu être étudiée que théoriquement. Elle constitue néanmoins un objectif passionnant pour les expériences de rotation, qui a motivé les études que nous présentons dans les chapitres suivants.

8.2.1 Rotation critique et effet Hall

La limite $\Omega \to \omega_\perp$ est simple à interpréter d'un point de vue classique. Dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$, la force centrifuge $-m\Omega^2 r_\perp \boldsymbol{u}_r$ compense exactement la force transverse $m\omega_\perp^2 r_\perp \boldsymbol{u}_z$ lorsque $\Omega = \omega_\perp$. Il ne reste alors, en plus du confinement axial, que la force de Coriolis $-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$. Cette force est mathématiquement analogue à la force de Lorentz $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ que subit une particule chargée dans un champ magnétique, moyennant la correspondance $2m\boldsymbol{\Omega} \leftrightarrow q\boldsymbol{B}$.

Cette analogie tient également dans le formalisme quantique. En effet, le hamiltonien dans le référentiel tournant se déduit du hamiltonien initial par la transformation :

$$H_\Omega = H_0 - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}_z. \tag{8.13}$$

On en déduit :

$$H_\Omega = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p},$$

d'où finalement :

$$H_\Omega = \frac{[\boldsymbol{p} - m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})]^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2.$$

Lorsque $\Omega = \omega_\perp$, le dernier terme et la partie transverse du potentiel se compensent. Faisant la même correspondance que dans l'approche classique, nous retrouvons le hamiltonien d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

8.2.2 Niveaux de Landau pour une particule en rotation

Une particule chargée dans un champ magnétique a un spectre remarquable, constitué de niveaux très fortement dégénérés, les niveaux de Landau [169]. Nous allons montrer comment ces niveaux apparaissent pour une particule en rotation à $\omega_\perp$ dans un piège harmonique.

Nous partons pour cela des niveaux de l'oscillateur harmonique à deux dimensions (le mouvement est supposé gelé dans la direction axiale z). Les mouvements dans les deux directions x et y peuvent être étudiées séparément comme ceux de deux oscillateurs harmoniques indépendants et de même fréquence $\omega_\perp$. Les niveaux d'énergie sont donc donnés par :

$$E(n_x, n_y) = \hbar\omega_\perp(n_x + n_y + 1),$$

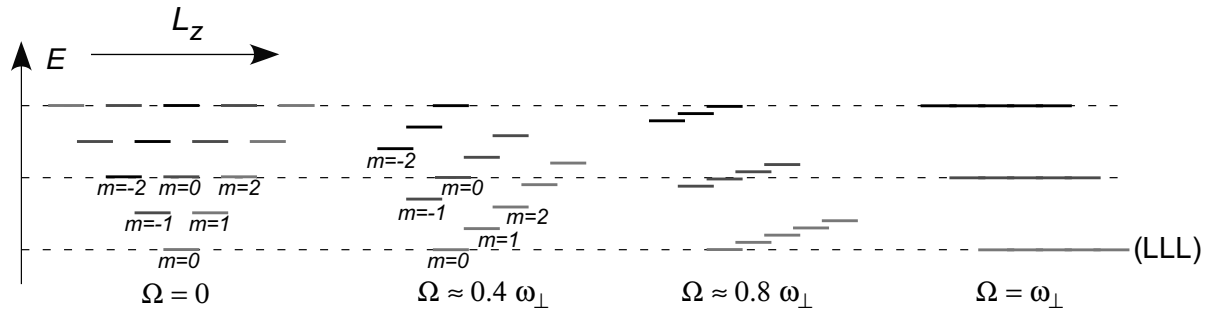


FIGURE 8.3 – Construction des niveaux de Landau pour une particule unique. Lorsque la fréquence de rotation Ω augmente, les niveaux s'organisent en lignes parallèles. Pour $\Omega = \omega_\perp$, on reconnaît la structure en niveaux de Landau, avec pour fondamental dégénéré le niveau de Landau le plus bas (LLL).

et les fonctions d'onde par :

$$|n_x, n_y\rangle = A\, P_{n_x}(x)\, Q_{n_y}(y)\, e^{-(x^2+y^2)/2a_{\rm oh}^2},$$

où P_{n_x} et Q_{n_y} sont des polynômes de degrés respectifs n_x et n_y. Tous les niveaux $|n_x, n_y\rangle$ tels que $n_x + n_y = n$ sont dégénérés. Il peut donc être commode de changer de base de fonctions propres et définir les fonctions $|n, m\rangle$: $n = n_x + n_y$ repère l'énergie $E(n, m) = \hbar\omega_\perp(n + 1)$ de l'état et m repère son moment cinétique. m peut varier de $-n$ à n, $n + m$ devant rester pair[3].

Le passage au référentiel tournant se fait par la transformation 8.13, de sorte que :

$$E(n, m, \Omega) = \hbar\omega_\perp(n + 1) - \hbar\Omega m. \tag{8.14}$$

Chaque niveau est déplacé par la rotation d'une quantité proportionnelle à son moment cinétique m. La figure 8.3 montre comment évolue la forme du spectre lorsque Ω augmente. Pour $\Omega = \omega_\perp$, on peut écrire tout simplement :

$$E(n, m, \Omega = \omega_\perp) = \hbar\omega_\perp(n - m + 1). \tag{8.15}$$

Les états $|n, m = n\rangle$ ont tous la même énergie $\hbar\omega_\perp$ dans cette limite et forment un niveau de multiplicité infinie. m variant par écarts pairs, on peut ensuite considérer l'ensemble des états $|n, n-2\rangle$, qui ont tous la même énergie $3\hbar\omega_\perp$ et qui forment une seconde multiplicité infinie. On peut continuer encore et construire une infinité de niveaux infiniment dégénérés, séparés entre eux par une énergie $2\hbar\omega_\perp$. Ces niveaux sont l'équivalent des niveaux de Landau d'une particule chargée dans un champ magnétique. Le niveau le plus bas est le célèbre "Lowest Landau Level" (LLL).

8.2.3 Effet Hall quantique entier avec des électrons

Disons un mot pour commencer de l'effet Hall quantique entier dans les semiconducteurs. N électrons (en faible nombre) sont confinés dans un échantillon de surface S qui est très mince selon la direction perpendiculaire z. Un champ B est appliqué normalement à l'échantillon. Les états à une particule sont ainsi les analogues des niveaux de Landau discutés précédemment.

[3]Lorsque $m = n$, la fonction d'onde $|n, m\rangle$ est proportionnelle à $(x+iy)^m\, e^{-(x^2+y^2)/2a_{\rm oh}^2}$. Le niveau de Landau le plus bas ne comporte que des fonctions de ce type, et présente donc la particularité de ne jamais faire apparaître la variable conjuguée $(x - iy)$ dans le préfacteur de l'exponentielle : l'espace de Hilbert du niveau de Landau le plus bas est considérablement restreint.

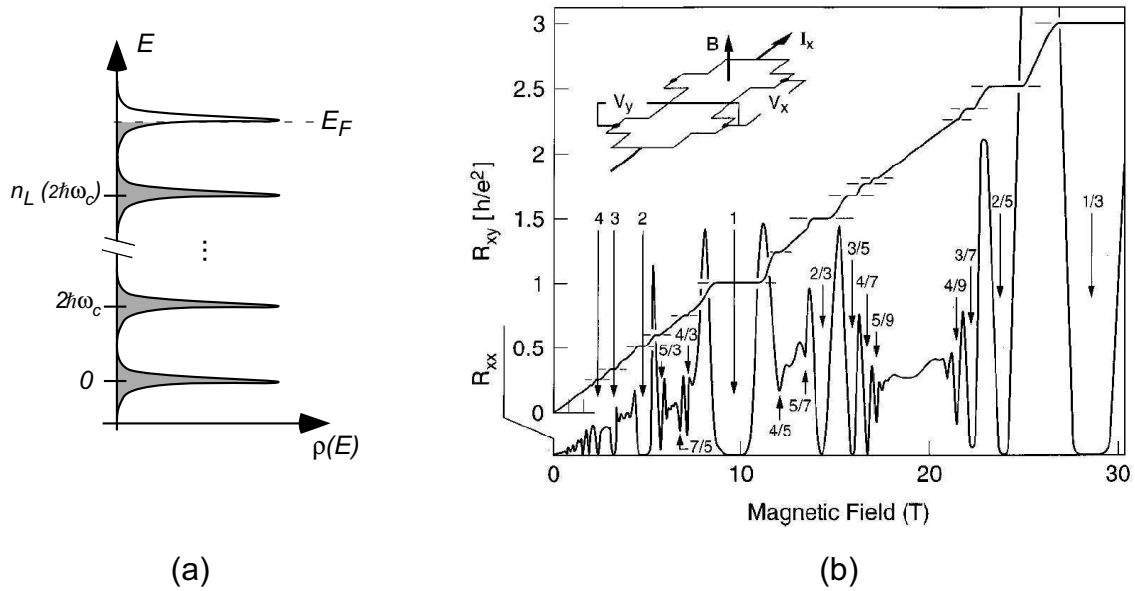


FIGURE 8.4 – Effet Hall quantique entier. (a) Niveaux de Landau. Lorsque qu'un des niveaux de Landau est rempli, les propriétés de transport sont notablement modifiées. (b) Résistance de Hall R_{XY} et magnétorésistance R_{XX} d'un gaz d'électrons bidimensionnel (figure tirée de [172]). Les plateaux de R_{XY} pour ν entiers sont ceux de l'effet Hall quantique entier. Les autres sont ceux de l'effet Hall quantique fractionnaire.

La densité d'états est constituée de pics séparés par une énergie $2\hbar\omega_c$. Le nombre d'états par pic (*ie.* par niveau de Landau) n'est pas infini : les différents états occupent en effet des orbites cyclotrons de plus en plus grandes et finissent par atteindre les bords de l'échantillon. On montre que le nombre d'états par niveau de Landau est égal au nombre de quanta de flux traversant l'échantillon [170] :

$$N_\phi = \frac{SB}{h/e},$$

où l'on reconnaît le quantum de flux h/e. Enfin, les imperfections de bord de l'échantillon élargissent ces pics.

A basse température, la distribution des électrons est gouvernée par le principe d'exclusion de Pauli. A champ B donné, les électrons occupent complètement n_L niveaux de Landau, et occupent partiellement le niveau $n_L + 1$. Lorsque le champ B est augmenté, le nombre d'états par niveau augmente de sorte que le niveau $n_L + 1$ se vide 8.4(a). Pour une valeur précise de B, la mer de Fermi remplit exactement les n_L premiers niveaux. Cette situation se reproduit pour toutes les valeurs de B correspondant à $N = n_L N_\phi$. Il est courant d'introduire un facteur de remplissage :

$$\nu = \frac{N}{N_\phi} \propto \frac{1}{B} \tag{8.16}$$

La situation de remplissage exact de n_L niveaux de Landau se produit donc pour les valeurs entières de ν. De tels états ont des propriétés de transport remarquables [170, 171]. Ils sont à l'origine des célèbres courbes de résistance en fonction de B où apparaissent des plateaux pour des valeurs entières de ν (plateaux 4, 3, 2 et 1 de la figure 8.4(b)). Cet effet Hall *entier* découle directement de la statistique fermionique des électrons.

8.2.4 Effet Hall quantique fractionnaire avec des électrons

Une physique complètement différente émerge autour du niveau de Landau le plus bas, lorsque $\nu \sim 1$. Sur la figure 8.4(b), des plateaux sont observés pour des valeurs fractionnaires de ν : 2/3, 2/5, 1/3, etc... Pour expliquer ces plateaux, Laughlin a eu l'intuition d'une nouvelle famille de fonctions d'onde, comme celle-ci décrivant l'état $\nu = 1/3$:

$$\Psi(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^3 e^{-\sum |z_i|^2/4l^2}.$$

Les z_i sont les coordonnées complexes $x_i + iy_i$ repérant la particule i, et l est la longueur magnétique $(\hbar/eB)^{1/2}$. La puissance 3 correspond à l'inverse du facteur de remplissage $\nu = 1/3$. Cette fonction d'onde décrit un état très particulier du système de N électrons : c'est un état incompressible[4], très fortement corrélé, et dont les excitations ont des propriétés statistiques surprenantes [173]. Il existe en réalité toute une famille de tels états, qui peuvent être dérivés les uns des autres par des théories de fermions composites (voir [172] et ainsi que les références contenues dans ce papier). En particulier, les valeurs $\nu = p/(2p \pm 1)$ correspondent à des états incompressibles particulièrement visibles dans les expériences.

Il est important de remarquer que ce deuxième effet Hall quantique, dit *fractionnaire*, n'a rien de "fondamentalement fermionique". La nature fermionique des particules y joue un rôle mineur (déterminant seulement la nature des fractions de ν). Et contrairement au premier effet Hall, cet effet émerge du comportement collectif du gaz d'électrons, plutôt que des propriétés de transport individuelles des électrons à la surface de la mer de Fermi. L'analogie que nous avons faite entre les électrons dans un champ B et des bosons en rotation ouvre donc de nombreuses perspectives, comme l'existence d'un état de Laughlin pour des bosons en rotation [174]. Nous allons discuter brièvement de ces perspectives dans ce qui suit.

8.3 Bosons en rotation

Depuis quelques années, une intense activité théorique s'est développée autour de la question suivante [175–183] : est-il possible d'observer avec des bosons en rotation des phases quantiques originales, proches des états de l'effet Hall quantique fractionnaire ? Nous allons discuter de cette possibilité, en passant en revue les différents phénomènes qui se produisent lorsqu'un condensat contenant un réseau de vortex est accéléré vers des vitesses de rotation de plus en plus grandes.

8.3.1 Formalisme

Pour commencer notre analyse d'un système bidimensionnel de bosons en rotation, nous allons écrire quelques relations dans le régime de champ moyen. Le piège considéré est un piège harmonique dans les trois directions, à symétrie de révolution dans le plan xy et dont la fréquence ω_z est très grande de sorte que le mouvement selon z est gelé. Il faut pour cela que le potentiel chimique soit inférieur à $\hbar\omega_z$. Cherchant à décrire le système par une fonction d'onde de type champ moyen, on peut écrire :

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \phi(x, y)\chi(z), \qquad \text{avec} \qquad \chi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} a_z}}\, e^{-z^2/2a_z^2}.$$

Ici, $a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$ est la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique selon z. En introduisant cette forme dans l'équation de Gross-Pitaevskii, il est immédiat de montrer que ϕ

[4] Cette notion a un sens précis en physique de la matière condensée : il implique que les excitations ont un gap d'énergie pour tout vecteur d'onde k.

vérifie :

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + U_\perp\phi + g_{2D}|\phi|^2\phi.$$

La nouvelle constante de couplage g_{2D} vaut g/l_z, avec $l_z = \sqrt{2\pi}a_z$. Cette équation est une simple équation de Gross-Pitaevskii à deux dimensions. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, le potentiel chimique s'écrit :

$$\mu = 2\hbar\omega_\perp\left(\frac{Na}{l_z}\right)^{1/2},$$

et fait apparaître le paramètre Na/l_z caractérisant le régime de Thomas-Fermi à deux dimensions. On remarque qu'à deux dimensions ce paramètre est indépendant de $\omega_\perp$, de sorte que si l'on est dans le régime de Thomas-Fermi, la décompression du piège (et donc la rotation) ne peuvent en faire sortir — du moins tant que l'approximation de champ moyen reste valable.

L'effet de la rotation à Ω est d'introduire des vortex et de modifier $\omega_\perp$ qui devient :

$$\omega_\perp \to \omega_\perp/\gamma \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega^2/\omega_\perp^2}}.$$

L'objectif de ce qui suit est de mettre en évidence les différents phénomènes qui apparaissent lorsque Ω passe de 0 à $\omega_\perp$, ou de manière équivalente lorsque γ pase de 1 à l'infini.

8.3.2 Saturation de la taille des vortex

On pose $a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$. Dans les conditions précédentes, la taille d'un vortex est donnée par :

$$\xi = \frac{\sqrt{\gamma}a_{\text{oh}}}{2}\left(\frac{Na}{l_z}\right)^{-1/4},$$

et la distance entre deux vortex vaut :

$$d_v = \sqrt{\pi}a_{\text{oh}}(1-1/\gamma^2)^{1/4}.$$

La taille d'un vortex (ξ) augmente avec la vitesse de rotation, alors que la distance entre vortex (d_v) sature rapidement lorsque $\gamma \to 1$. Pour des fréquences de rotation assez grandes, ces deux grandeurs peuvent devenir proches. Cela se produit pour :

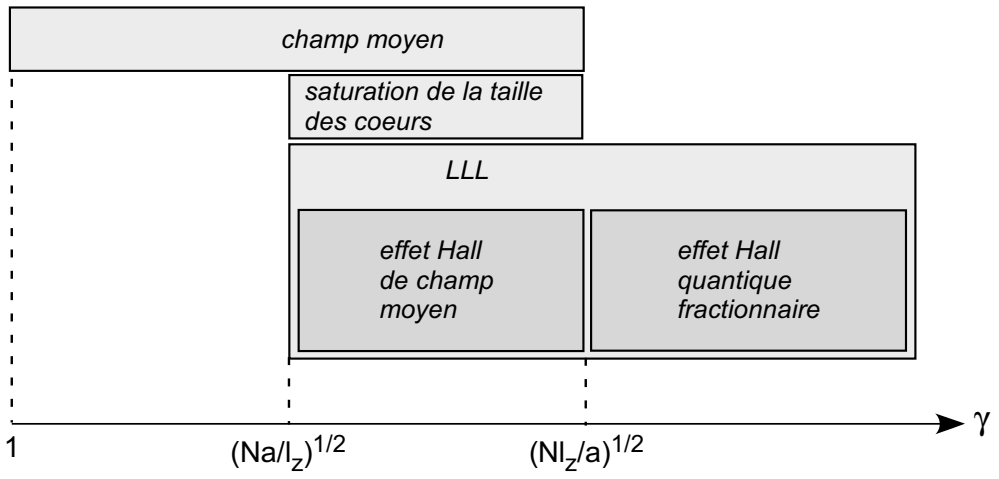
$$\gamma \sim \left(\frac{Na}{l_z}\right)^{1/2}.$$

Ce modèle simple suggère que la taille des vortex devient alors plus grande que la distance qui les sépare les uns des autres. Il est possible de montrer que cela ne se produit pas en réalité et que la taille des vortex sature à une valeur de l'ordre de d_v lorsque γ devient très grand [184]. Cette saturation est le premier phénomène rencontré lors de l'augmentation de Ω (figure 8.5(a)).

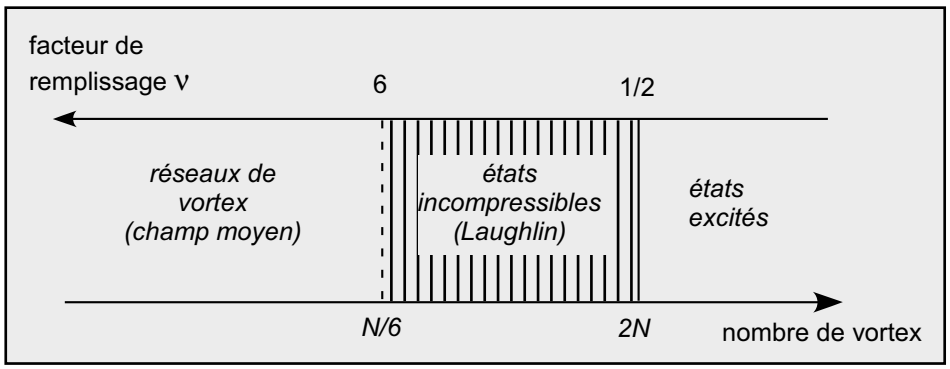
8.3.3 Effet Hall de champ moyen

Dans le cadre de l'approximation de champ moyen, il est possible d'atteindre des vitesses de rotation suffisantes pour que le système soit restreint au niveau de Landau le plus bas. Toutes les particules sont dans le niveau de Landau le plus bas (LLL) lorsque $\mu < 2\hbar\omega_\perp$, c'est à dire lorsque :

$$\gamma \sim \left(\frac{Na}{l_z}\right)^{1/2}.$$



(a) cas harmonique



(b) cas général

FIGURE 8.5 – Diagramme de phase d'un système de N bosons en rotation. (a) Cas harmonique : lorsque le paramètre γ augmente, la taille des cœurs atteint une valeur de saturation, et le système est complètement contenu dans le niveau de Landau le plus bas (LLL). Dans le régime du LLL, on distingue l'effet Hall de champ moyen et l'effet Hall quantique fractionnaire, dans lequel l'état du système est fortement corrélé. (b) Physique dans le LLL dans le cas général. Le paramètre pertinent est le facteur de remplissage $\nu = N/N_v$. Lorsque le facteur de remplissage ν diminue et atteint $\sim$6, le réseau de vortex fond et laisse place à une série d'états sans vortex, dont certains sont incompressibles. Pour des facteurs de remplissage $\nu < 1/2$, l'état du système devrait être un état de Laughlin $\nu = 1/2$ multiplié par un polynôme (état excité).

Cette limite est atteinte en même temps que la saturation de la taille de cœurs de vortex (figure 8.5(a)). Dans ce régime, le condensat reste décrit par une fonction d'onde de champ moyen, et entre dans une région appelée "effet Hall de champ moyen". Sa dynamique est particulièrement simple, puisque les seuls états accessibles sont ceux du LLL [185]. Un seul nombre quantique suffit à repérer ces états, ce qui implique que la dynamique est en réalité unidimensionnelle, bien que le système soit physiquement bidimensionnel.

Ce régime encore inconnu est devenu récemment accessible aux expériences [47], et son exploration reste à faire. Quelques études théoriques ont abordé ce sujet : dans [186] il a été suggéré que le profil de densité devient gaussien dans le régime d'effet Hall de champ moyen, mais ce résultat a été contredit depuis [187]. Une analyse des modes dans ce régime a également été proposée dans [188].

8.3.4 Effet Hall quantique fractionnaire — cas harmonique

La dernière étape de notre raisonnement s'inspire de l'effet Hall quantique fractionnaire. Pour passer des électrons dans un champ B aux bosons en rotation, il convient tout d'abord d'identifier la grandeur qui joue le rôle du facteur de remplissage ν. Le nombre de particules reste ce qu'il est, et le nombre de quanta de flux devient tout simplement le nombre de vortex N_v, de sorte que l'on a :

$$\nu = \frac{N}{N_v}. \tag{8.17}$$

On notera une différence importante entre les bosons et les fermions : lorsque $\nu \geq 1$ pour des fermions, le principe de Pauli implique que les fermions quittent le niveau de Landau le plus bas (ils entrent alors dans le régime d'effet Hall quantique entier). Pour les bosons, rien de tel ne se produit, et il est possible d'avoir des facteurs de remplissage $\nu \geq 1$ tout en conservant toutes les particules dans le niveau de Landau le plus bas. Dans la plupart des articles théoriques, les auteurs supposent ainsi que les bosons sont tous dans le "LLL". Les états qu'ils étudient pour $\nu \geq 1$ sont spécifiques aux bosons.

Les états incompressibles de type Laughlin apparaissent lorsque $\nu \sim 1$. Le nombre de vortex vaut simplement dans notre modèle :

$$N_v = n_v \pi R^2 = \sqrt{\gamma^2 - 1} \left(\frac{Na}{l_z} \right)^{1/2},$$

de sorte qu'en égalant le facteur de remplissage à 1 on trouve :

$$\gamma \sim \left(\frac{N l_z}{a} \right)^{1/2}.$$

Cette transition se produit après les deux précédentes tant que $l_z \gg a$, ce qui revient à dire que les collisions gardent un caractère tridimensionnel malgré le fort confinement axial. Compte tenu de $a = 5\,\mathrm{nm}$ pour nos atomes, cette condition sera vraisemblablement toujours vérifiée.

Cette dernière région que nous venons de distinguer est celle de l'effet Hall quantique fractionnaire (figure 8.5(a)). Afin d'en discuter les propriétés, nous allons nous placer dans un cadre plus général, où la forme harmonique du piège n'apparaît plus.

8.3.5 Effet Hall quantique fractionnaire — cas général

Pour $\nu = 1/2$, on peut écrire la fonction de Laughlin suivante :

$$\Psi_{1/2}(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 e^{-\sum |z_i|^2 / 4l^2}. \tag{8.18}$$

L'exposant $2 = 1/\nu$ assure que cette fonction est bien symétrique dans l'échange de deux particules i et j. Dans le cas de bosons interagissant par un potentiel $\delta(r)$, on peut montrer [175,176] que $\Psi_{1/2}$ est un état propre exact du hamiltonien à N-corps limité au niveau de Landau le plus bas.

Dans le cas où $\nu > 1/2$, aucune solution analytique exacte n'est connue. Des diagonalisations exactes dans le niveau de Landau le plus bas ont été réalisés numériquement pour 5 à 20 particules [176,177,179,181,182]. Deux régions peuvent être distinguées (figure 8.5(b)) :

- $\nu \gtrsim 6-8$: dans cette région, les bosons sont dans un état condensé, et le système contient de nombreux vortex. C'est cette région que nous avons désignée sous le nom d'effet Hall de champ moyen.
- $1/2 < \nu \lesssim 6-8$: les diagonalisations exactes conduisent à de nombreux états incompressibles. Ces états et leurs excitations forment un ensemble d'états exotiques, très intriqués, et aux propriétés statistiques remarquables.

La transition entre les deux premières régions, réalisant le passage d'un état de type Hartree-Fock (condensat) à un état incompressible de Laughlin, est un enjeu théorique et expérimental particulièrement intéressant. Sinova, Hanna et MacDonald [178] ont étudié les fluctuations quantiques des positions des vortex lorsque ν diminue. Ils ont montré que pour $\nu \sim 8$ le réseau de vortex fond du fait de ces fluctuations. C'est l'incertitude sur la position de chaque vortex qui provoque la fonte du réseau. Partant à l'opposé de la phase incompressible, Cooper, Wilkin et Gunn [177] ont montré numériquement que les gaps caractérisant les états incompressibles disparaissent pour $\nu \sim 6$. Ils interprètent cet effet comme une brisure spontanée de la symétrie de translation (leur système est plan avec conditions aux limites périodiques) due à l'apparition d'un réseau de vortex. De ces deux prédictions, basées sur des analyses très différentes, semble se dégager un consensus sur une valeur de $\nu \sim 6-8$ vers laquelle doit se produire la fonte du réseau. On notera enfin que les différentes phases pourraient coexister dans différentes régions du nuage [189].

Dans le cas $\nu < 1/2$, les états attendus peuvent être obtenus à partir de la fonction d'onde de Laughlin $\Psi_{1/2}$ par simple multiplication par un polynôme. Les plus proches de $\nu = 1/2$ sont les excitations de la fonction d'onde de Laughlin. Ces états ne sont pas incompressibles[5].

8.3.6 Feuille de route pour atteindre le régime fortement corrélé

En ce début d'année 2004, le régime d'effet Hall quantique fractionnaire n'a toujours pas été observé sur des systèmes bosoniques gazeux. Les expériences que nous avons réalisées dans un piège quadratique+quartique (chapitres 9 et 10), comme celles du groupe du JILA [47], ne sont qu'un premier pas vers ces systèmes, mais sont prometteuses. L'équipe du JILA a par exemple réussi à obtenir des nuages dont le potentiel chimique est inférieur à $2\hbar\omega_\perp$, se plaçant ainsi dans le LLL. Les stratégies actuelles semblent néanmoins inadaptées pour remplir l'ensemble des conditions requises pour atteindre le régime corrélé :

- **Être à deux dimensions** : il faut que la direction z ne joue aucun rôle, autrement dit que le mouvement selon z soit gelé. Cela sera d'autant plus facile à réaliser que le confinement selon z sera important. Cette condition est presque vérifiée dans les expériences du JILA.
- **Être dans le niveau de Landau le plus bas** : il faut pour cela que la température et l'énergie de champ moyen $g\rho$ soient inférieures à $2\hbar\omega_\perp$. Cela a été réalisé au JILA et dans notre groupe (voir chapitre 9).

[5] Les cristaux de Wigner attendus dans les systèmes fermioniques dans la limite diluée $\nu \to 0$ tirent leur origine des interactions à longue portée entre électrons [190]. Les interactions ponctuelles entre nos bosons ne permettent pas l'existence de tels états.

– **Tourner vite** : le nombre de vortex est fonction croissante du moment cinétique, de sorte que plus on tourne vite, plus ν diminue. Le facteur de remplissage doit se rapprocher de 10 pour que l'on puisse espérer voir la fonte du réseau et entrer dans le régime corrélé. Les facteurs de remplissages actuellement obtenus, de l'ordre de 10^4, sont donc beaucoup trop grands.

Une des configurations envisagées pour remplir ces conditions consiste à placer les atomes dans une onde stationnaire très désaccordée et superposée au piège magnétique dans la direction z. Si l'intensité de l'onde est suffisante, le taux d'effet tunnel entre deux tranches adjacentes devient faible et l'on dispose d'un empilement de condensats quasi-bidimensionnels. Ces condensats seraient susceptibles de tous tourner autour d'un axe commun, dans des conditions telles que tous ou certains d'entre eux pourraient entrer dans le régime de Hall.

8.4 Conclusion

Le régime des rotations rapides se caractérise, de manière générale, par des réseaux de vortex. Ces réseaux sont la meilleure imitation d'une rotation solide que le condensat puisse produire sans perdre son caractère cohérent. Ce qu'ils deviennent quand le moment cinétique augmente et tend vers l'infini reste une question ouverte, intimement associée à la nature du confinement. Le cas d'un confinement harmonique est fascinant, car il permet une analogie étroite et fructueuse avec l'effet Hall quantique fractionnaire. De nouveaux états quantiques pourraient être produits, états profondément corrélés et aux propriétés statistiques remarquables. Les conditions requises pour atteindre ce régime, si elles semblent contraignantes, ne sont pas insurmontables.

Alors que les condensats se dirigent vers les régimes d'effet Hall quantique fractionnaire, on peut également penser aux fermions froids qui sont de mieux en mieux maîtrisés expérimentalement. Leur mise en rotation dans un piège harmonique ouvrirait la voie à la physique de l'effet Hall quantique à la fois entier ou fractionnaire.

Chapitre 9

Rotation rapide dans un piège hybride

La limite des rotations rapides, associée à la physique de l'effet Hall, est un objectif particulièrement attrayant. Plusieurs méthodes sont envisagées pour l'atteindre. Nous présentons l'une d'entre elles dans ce chapitre, qui a pour le moment donné des résultats encourageants [9], même si le régime d'effet Hall n'a vraisemblablement pas encore été atteint. Une autre méthode a été développée au JILA [47].

La méthode développée sur notre montage a été motivée par plusieurs constats. Le premier est celui de l'anisotropie statique de notre piège qui risque d'enlever à la limite $\Omega \to \omega_\perp$ toute sa singularité. Le second a trait à notre méthode particulière de mise en rotation : la cuillère ne peut être branchée avec une fréquence proche de $\omega_\perp$ sans que le mode dipolaire ne soit fortement excité [4]. Pour ces raisons, nous avons décidé de modifier le potentiel transverse du piège par l'ajout d'un faisceau laser très désaccordé le long de l'axe z. Le potentiel hybride résultant de la superposition du piège magnétique et du laser contient, en première approximation, un terme quadratique et un terme quartique dans le plan transverse.

Le chapitre s'ouvre sur une présentation du piège hybride et sur un certain nombre de prédictions théoriques dans ce type de piège. Nous présentons ensuite une série d'expériences où la rotation critique $\Omega = \omega_\perp$ a été atteinte et même dépassée dans un tel piège. L'interprétation des images — et en particulier la détermination de la fréquence de rotation effective Ω_{eff} — font l'objet de la partie suivante, où sont détaillées trois méthodes d'analyse. Une des méthodes donne des résultats notablement différents des autres, du fait d'un déficit en vortex visibles. Nous donnons en fin de chapitre plusieurs pistes d'interprétation de cet écart.

9.1 Introduction d'un terme quartique transverse dans le potentiel

9.1.1 Un laser focalisé sur les atomes

Nous superposons au piège magnétique un faisceau laser très désaccordé vers le bleu de la transition du rubidium. Ce laser est un laser YAG doublé en fréquence, de puissance nominale de 2 Watt[1]. Sa longueur d'onde est $\lambda_v = 532\,\text{nm}$.

Afin d'obtenir un faisceau dont la structure spatiale est propre, nous couplons le faisceau de sortie du laser dans une fibre optique monomode (figure 9.1). Une lentille de collimation (L_1) est placée à 75 millimètres de la sortie de la fibre. Le faisceau obtenu est donc très large. Il est focalisé ensuite sur les atomes, le long de l'axe z, par une lentille (L_2) de focale 400 millimètres. La taille du col du faisceau au niveau des atomes est de $\sim 20\,\mu$m, la longueur de Rayleigh de 2 millimètres. La taille axiale d'un condensat ne dépassant jamais 100 micromètres, nous considérerons que le faisceau a une structure invariante selon z au niveau du condensat.

[1] Il s'agit du modèle Verdi de la marque Coherent.

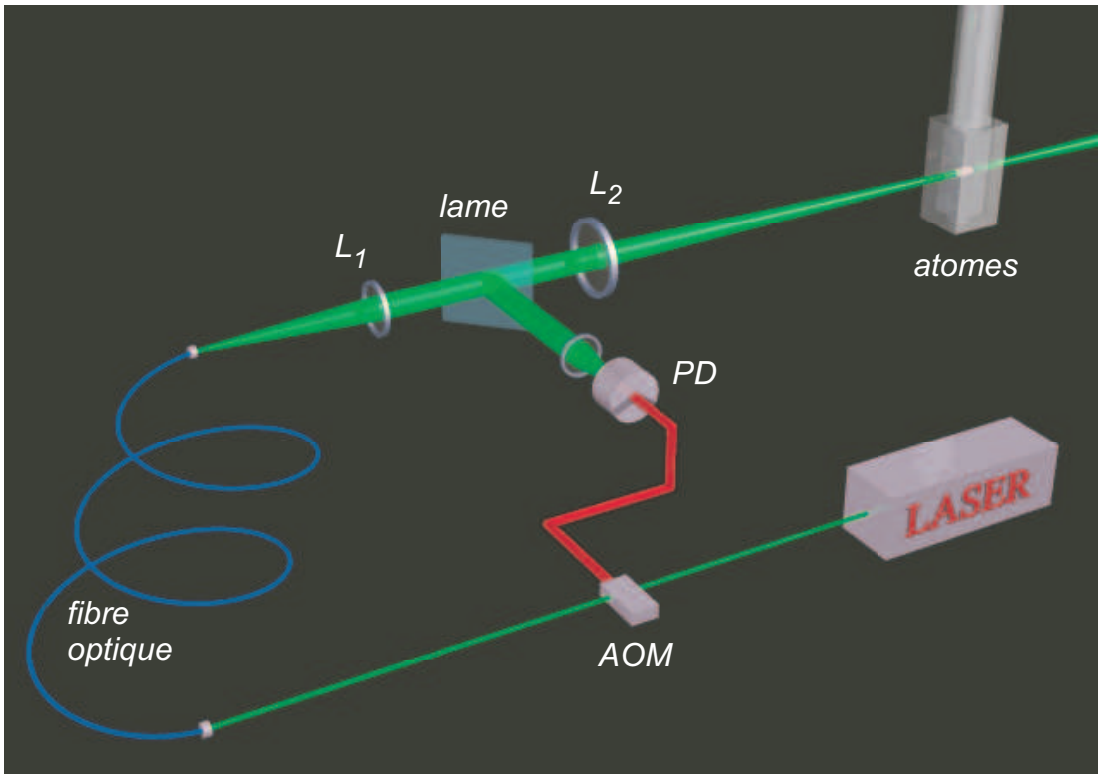


FIGURE 9.1 – Schéma du montage. Le laser vert est filtré par une fibre optique et stabilisé en puissance par rétroaction sur un modulateur acousto-optique (AOM).

Bien que la fibre soit à maintien de polarisation, nous avons relevé d'importantes fluctuations de la puissance du faisceau dirigé sur les atomes. Ces fluctuations sont dues à des fluctuations de polarisation en sortie de fibre optique qui se transforment en fluctuations d'intensité après passage dans des éléments polarisants. Pour diminuer cet effet, nous avons mis en place un système de rétroaction (figure 9.1) : la puissance du faisceau dirigé sur les atomes est mesurée et ramenée à une valeur de consigne par rétroaction sur un modulateur acousto-optique placé en amont de la fibre optique. En outre, la traversée d'éléments optiques inclinés par rapport à l'axe optique (non indiqués sur la figure) nous a conduit à ajouter une lame inclinée ajustable sur la dernière portion du trajet du faisceau.

Enfin, une procédure de centrage inspirée de celle de la cuillère [32] a été mise en place pour positionner le faisceau précisément dans le plan transverse : après un positionnement approximatif, le laser est utilisé pour exciter les modes dipolaires et monopolaires du condensat. Suivant la direction prise par le mouvement d'oscillation, il est possible de déduire la position transverse relative du faisceau par rapport au nuage. On agit alors sur des vis de positionnement micrométrique de la dernière lentille (L_2) afin de rapprocher le faisceau, puis on refait une séquence de condensation-excitation afin de jauger la qualité du nouveau centrage. Après plusieurs ajustements, on parvient à centrer le faisceau laser sur le centre du piège magnétique à quelques dixièmes de microns près. Cette opération, qui prend de 15 à 30 minutes, doit être renouvelée avant chaque série d'expériences, soit deux à trois fois par jour.

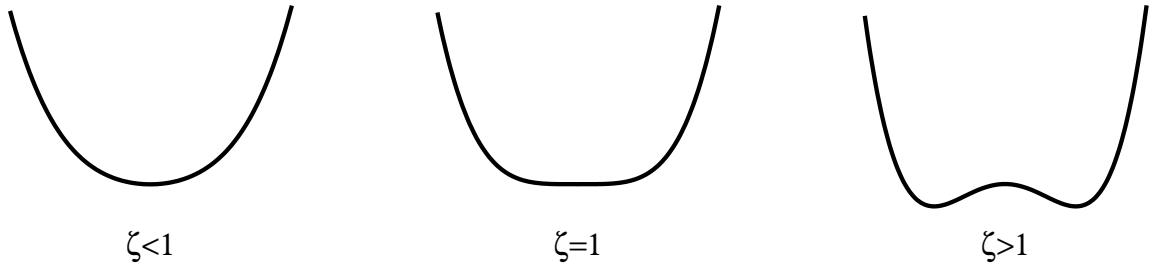


FIGURE 9.2 – Allure du potentiel radial suivant la valeur de ζ. Le potentiel est purement quartique pour $\zeta = 1$.

9.1.2 Potentiel gaussien et termes quartiques

Le faisceau laser vert, à l'image de la cuillère, est utilisé pour modifier le potentiel de piégeage des atomes. Son action est celle d'un potentiel dipolaire de la forme :

$$W(r,\theta,z) = U_0 e^{-2r^2/w_0^2}. \tag{9.1}$$

On a noté U_0 la hauteur du potentiel au centre du faisceau, et w_0 la taille du col du faisceau au niveau des atomes.

Plusieurs régimes peuvent être envisagés, suivant la vitesse de rotation des atomes et leur propension à explorer des régions éloignées du centre. Nous serons dans toute la suite dans des situations telles que les vitesses de rotation sont suffisamment faibles pour que le rapport $R_\perp/w_0$ reste nettement inférieur à 1. On peut donc développer la gaussienne en puissances de r/w_0 :

$$W(r,\theta,z) = U_0\left(1 - \frac{2r^2}{w_0^2} + \frac{2r^4}{w_0^4}\right). \tag{9.2}$$

Nous noterons dans la suite $\omega_\perp^{(0)}$ la fréquence du piège magnétique seul. L'effet du terme quadratique de W revient à diminuer la fréquence transverse du piège, qui devient égale à :

$$\omega_\perp = \omega_\perp^{(0)}\sqrt{1-\zeta}, \qquad \text{avec} \qquad \zeta = \frac{4U_0}{w_0^2}\frac{1}{m(\omega_\perp^{(0)})^2}. \tag{9.3}$$

En tenant compte du terme quartique, le potentiel transverse devient :

$$U(r) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + \frac{1}{4}kr^4, \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{8U_0}{w_0^4}. \tag{9.4}$$

Suivant les valeurs de ζ, le potentiel peut prendre plusieurs allures (figure 9.2) :

- Cas où $\zeta < 1$: la fréquence de la partie harmonique du potentiel reste réelle. Les deux termes transverses du potentiel sont confinants.
- Cas où $\zeta = 1$: la partie harmonique du potentiel transverse disparaît et le confinement n'est plus assuré que par le terme quartique.
- Cas où $\zeta > 1$: la fréquence de la partie harmonique du piège est imaginaire. Le terme quadratique est expulsant, alors que le terme quartique est confinant. Le potentiel transverse résultant de leur somme admet un minimum sur un anneau de rayon constant.

La plupart de nos expériences ont été menées avec $\zeta \sim 0.25$. Cela signifie que nous sommes dans le régime où le confinement est essentiellement de nature harmonique.

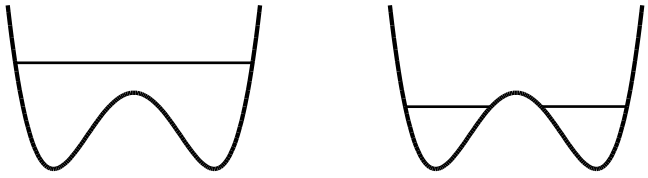


FIGURE 9.3 – Potentiel transverse pour une faible valeur de ζ (inférieure à 1), quand le système tourne rapidement. On a figuré par des lignes horizontales le niveau du potentiel chimique. Lorsque Ω dépasse $\omega_\perp$ (figure de gauche), la densité du condensat n'est plus maximale en $r = 0$. Lorsque Ω dépasse une valeur $\omega_c > \omega_\perp$, le potentiel chimique devient négatif et un trou de densité nulle apparaît au centre du condensat.

9.1.3 Rotation dans un piège hybride harmonique+quartique

Le potentiel 9.4 est plus raide qu'un potentiel purement harmonique, et pour cette raison il reste confinant quelle que soit la fréquence de rotation. Des fréquences de rotations plus grandes que $\omega_\perp$ peuvent donc être atteintes.

Lorsque l'on passe dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω, il convient de retrancher à ce potentiel un terme centrifuge $m\Omega^2 r^2/2$ (*cf.* début du chapitre 8). La figure 9.3 montre l'allure du potentiel qui en résulte, lorsque la fréquence de rotation dépasse la fréquence du terme harmonique. Le confinement est assuré par le terme quartique, mais le terme harmonique expulse les atomes du centre. Si le potentiel chimique est suffisamment bas, un condensat peut ainsi se creuser en son centre et adopter une géométrie non simplement connexe. Là où la densité n'est pas nulle, on peut montrer, comme nous l'avons fait au chapitre 8, que le condensat a intérêt d'un point de vue énergétique, à répartir sa vorticité de manière uniforme. Mais chaque vortex placé dans une région de densité non nulle représente un coût énergétique, alors qu'il ne coûte aucune énergie s'il est placé au centre. Il y a donc compétition entre deux effets, et sous certaines conditions, il est possible qu'il soit plus favorable de placer toute la vorticité au centre, sous la forme d'un vortex géant [191].

Une étude dans le régime de Thomas-Fermi a été réalisée par Fetter, développant une analogie entre l'annulation du potentiel chimique à $\Omega = \omega_c$ et la disparition de la phase supraconductrice lorsque le champ magnétique atteint H_{c2} [192]. Kavoulakis et Baym proposent un diagramme, en fonction d'un paramètre d'interactions et de la vitesse de rotation, faisant apparaître trois phases : une où le condensat contient un réseau de vortex de charge unité, une où ce réseau présente un trou en son centre, et une où un vortex géant est présent au centre [193]. La dynamique de la nucléation dans un tel piège a également été étudiée numériquement par Kasamatsu, Tsubota et Ueda [191] et par Aftalion et Danaila [194]. D'autres travaux ont portés sur des pièges raides [189], ou encore en lois de puissances r^n [195].

On peut retenir de ces études théoriques que le régime de rotation rapide dans des pièges raides pourrait conduire à des vortex multiplement chargés au centre du condensat [196]. Les vitesses de rotation nécessaires pour observer de telles structures dépendent de la forme exacte du potentiel mais sont généralement largement supérieures à $\omega_\perp$, ce qui nous a empêché pour le moment de les observer.

9.1.4 Effet Hall dans un piège non harmonique

Un autre régime va attirer notre attention dans le piège hybride : celui de la rotation critique $\Omega = \omega_\perp$. La plupart de nos expériences ont été menées avec $\zeta \sim 0.25$. Cela signifie que nous sommes dans le régime où le confinement est essentiellement de nature harmonique. Il est intéressant de calculer la structure du niveau de Landau le plus bas pour une particule unique dans un potentiel de ce type.

La projection du moment cinétique selon z reste un bon nombre quantique puisque le piège est à symétrie de révolution. Ce nombre noté l repère les états dans un niveau de Landau. Si l'on s'intéresse au niveau de Landau le plus bas, il est clair que chaque état correspond, parmi tous les états l, à celui d'énergie la plus basse. Un moyen de rechercher ces états ϕ_l consiste donc à chercher le fondamental du hamiltonien suivant :

$$H_l = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) - l\hbar\Omega.$$

Ce hamiltonien porte sur le seul degré de liberté radial. Il est d'usage d'introduire $u_l(r) = r\phi_l(r)$. Les fonctions u_l sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$H_l\, u_l = E_l^{(0)} u_l \qquad \text{avec} \qquad H_l = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r) - l\hbar\Omega.$$

On reconnaît pour la fonction u_l une équation de Schrödinger stationnaire. La figure 9.4(a) montre l'allure de l'énergie potentielle effective (incluant le terme centrifuge) : pour $l \neq 0$ elle présente un minimum pour un rayon r non nul. Un calcul approché de l'énergie du fondamental peut être conduit pour chaque H_l en ajoutant à l'énergie du minimum d'énergie potentielle effective l'énergie de point zéro d'un oscillateur harmonique de même courbure. Le résultat d'un tel calcul est reporté sur la figure 9.4(b) pour $\Omega \sim \omega_\perp$: au lieu du niveau de Landau presque plat que l'on a dans un piège harmonique pur lorsque la fréquence de rotation est égale à la fréquence de piégeage, on trouve des états dont l'énergie varie significativement avec l. Ce résultat tient à la présence du terme quartique qui seul subsiste dans le référentiel tournant (le terme quadratique est compensé par le terme centrifuge) : lorsque le rayon de l'orbite augmente, ce terme devient de plus en plus important et décale vers le haut l'énergie des états du LLL.

La présence du terme quartique est donc a priori nuisible pour l'étude de la physique dans le niveau de Landau le plus bas, puisqu'elle le déforme. Néanmoins, on peut noter sur la figure 9.4(b) qu'entre 50 et 100 états sont situés dans la gamme d'énergie $[0, 2\hbar\omega_\perp]$. Le terme quartique joue donc le rôle d'une boîte qui limite le nombre d'états dans le niveau de Landau le plus bas, mais qui ne doit pas changer la physique du système. En particulier, le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire est théoriquement accessible dans ce type de potentiel — à condition d'avoir un nombre de particules suffisamment faible.

9.2 Procédure expérimentale et résultats

9.2.1 Mesure de la nouvelle fréquence transverse

La mesure de la fréquence transverse $\omega_\perp$ du piège est nécessaire pour évaluer la force du potentiel lumineux appliqué, et pour caractériser le nouveau piège. Elle est réalisée pour plusieurs puissances laser P, la taille du faisceau étant fixée. La méthode est identique à celle que nous utilisions dans un piège harmonique pur : le mode dipolaire est excité par un allumage bref d'une cuillère statique et décentrée, puis son évolution temporelle est suivie. On en déduit la fréquence des oscillations ω_{osc}. Pour un piège harmonique, ω_{osc} est égale à $\omega_\perp$ et l'on identifie les deux. Si l'on néglige le terme quartique du potentiel 9.4, on peut donc directement tester la loi 9.3 qui donne la dépendance de la fréquence du piège en fonction de la puissance laser (figure 9.5(a)).

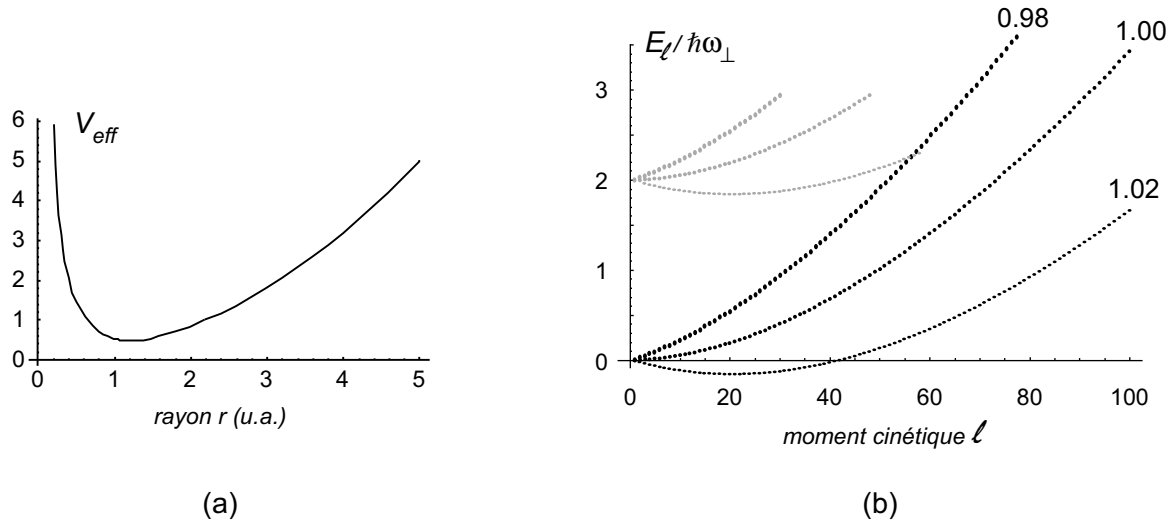


FIGURE 9.4 – Calcul des niveaux de Landau dans le potentiel hybride. (a) Forme du potentiel effectif contenant le terme centrifuge. (b) Niveau de Landau le plus bas pour $\zeta = 0.2$ et $w_0 = 20\,\mu$m. On a représenté l'énergie des niveaux en fonction du moment cinétique l pour trois valeurs de $\Omega/\omega_\perp$: 0.98, 1.00 et 1.02. En gris figurent les premiers états du niveau de Landau supérieur. Entre 50 et 100 états du LLL ont une énergie inférieure à $2\hbar\omega_\perp$.

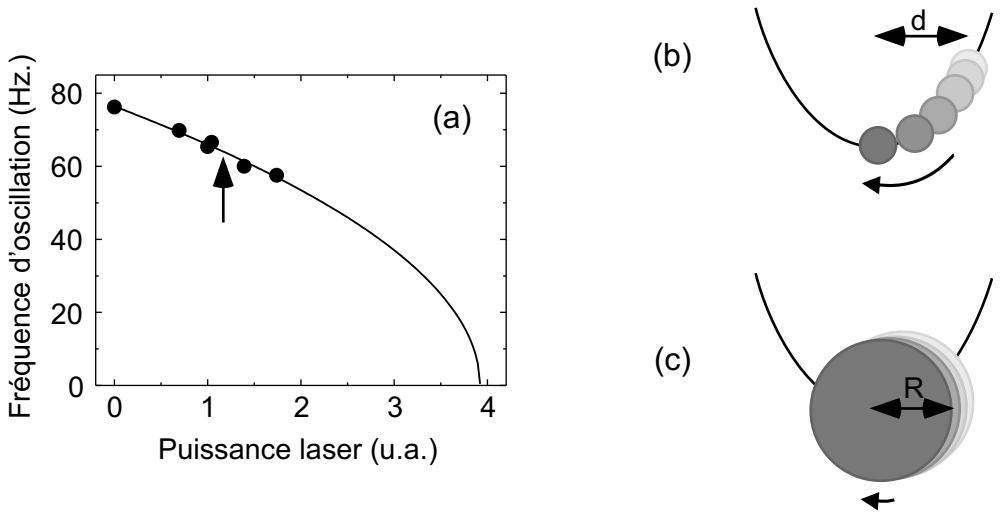


FIGURE 9.5 – Mode dipolaire dans le piège hybride. (a) La fréquence du piège diminue avec la puissance laser sur la plage de puissance étudiée. Une flèche indique le régime où se sont déroulées les expériences de rotation rapide. (b) Le terme quartique du potentiel modifie la fréquence d'oscillation pour de grandes amplitudes d'oscillation. (c) Le terme quartique du potentiel modifie aussi la fréquence d'oscillation du fait de la taille finie du nuage, même pour de petites amplitudes.

Du fait de l'anharmonicité du piège, nous devons raffiner notre traitement. Dans un piège anharmonique et pour une particule unique, la fréquence des petites oscillations autour d'une position d'équilibre est donnée par la courbure (partie harmonique) du potentiel en ce point. Néanmoins pour des oscillations de plus grande amplitude d, il faut inclure des corrections dues au terme non harmonique du potentiel :

$$\omega_{\mathrm{osc}} - \omega_\perp = \frac{3}{8}\frac{kd^2}{m\omega_\perp}. \tag{9.5}$$

Cet effet non linéaire peut apparaître dans l'oscillation d'un condensat dont le mouvement a une grande amplitude (figure 9.5(b)). Nous nous sommes assurés qu'il n'affectait pas nos mesures : dans la gamme d'amplitudes étudiées (de $3\,\mu$m à $0.8\,\mu$m), nous n'avons observé aucune variation de la fréquence des oscillations[2].

Mais un autre effet non linéaire doit être pris en compte dans le cas d'un condensat. Ce dernier, du fait de sa taille finie, explore en effet des régions du potentiel éloignées du minimum, même lors de petites oscillations (figure 9.5(c)). Il en résulte une correction pour la fréquence d'oscillation qui ne disparaît que dans la limite de très petits condensats. Le calcul de cette correction peut être fait perturbativement à partir des équations hydrodynamiques. Partant d'une distribution d'équilibre ρ_{eq} à laquelle on ajoute un mode quelconque $\delta\rho\exp(-i\omega t)$, on sait (*cf.* chapitre 3 — équation 3.9) que $\delta\rho$ et ω vérifient l'équation suivante :

$$m\omega^2\delta\rho + g\nabla\left[\rho_{\mathrm{eq}}(\nabla\delta\rho)\right] = 0. \tag{9.6}$$

La densité d'équilibre ρ_{eq} peut aussi s'écrire :

$$g\rho_{\mathrm{eq}} = \mu - U(r).$$

Le développement perturbatif se fait par rapport à $U = U_0 + U_1$, où le premier terme est la partie harmonique du potentiel et où U_1 est la partie quartique. On écrit pour cela $\mu = \mu_0 + \mu_1$ et $\omega_{\mathrm{osc}}^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2$. La structure du mode change également, de sorte que l'on a : $\delta\rho = \delta\rho_0 + \delta\rho_1$. L'équation 9.6 devient :

$$-m\omega_0^2\delta\rho_1 - m\omega_1^2\delta\rho_0 = \nabla\left[(\mu_0 - U_0)\nabla\delta\rho_1\right] + \nabla\left[(\mu_1 - U_1)\nabla\delta\rho_0\right].$$

En multipliant de chaque côté par $\delta\rho_0^*$ et en intégrant sur tout l'espace, on constate que les premiers termes de chaque membre s'annulent. On en déduit la valeur de la correction de fréquence ω_1^2 :

$$m\omega_1^2 = \frac{\int \delta\rho_0^*\nabla\left[U_1(\nabla\delta\rho_0)\right]}{\int|\delta\rho_0|^2}. \tag{9.7}$$

Appliquant cette formule au mode dipolaire $\delta\rho_0 = Ax$, nous obtenons :

$$\frac{\omega_{\mathrm{dip}} - \omega_\perp}{\omega_\perp} = \frac{2}{7}\frac{kR^2}{m\omega_\perp^2}. \tag{9.8}$$

Cette correction dépend de la force k du terme quartique. Nos expériences de rotation ont été réalisées dans un piège magnétique dont la fréquence transverse vaut initialement $\omega_\perp^{(0)}/2\pi = 75.5\,$Hz. La puissance laser a été fixée à une valeur telle que $\zeta \sim 0.25$, soit $k = 2.6(3)\times10^{-11}\,$J/m^4. Nous avons ainsi mesuré une fréquence transverse d'oscillation $\omega_{\mathrm{osc}}/2\pi = 65.6\,$Hz. Connaissant le rayon moyen des condensats lors de cette mesure ($6.5\,\mu$m), on peut évaluer à l'aide de la formule 9.8 la différence entre cette mesure et la valeur exacte de $\omega_\perp$. On trouve ainsi $\omega_\perp/2\pi = 64.8\,$Hz. C'est dans ces conditions qu'on été réalisées les expériences décrites dans la suite de ce chapitre.

[2] Dans cette gamme et pour des paramètres courants ($\zeta = 0.25$), les corrections attendues d'après la formule 9.5 sont inférieures à 0.5 %.

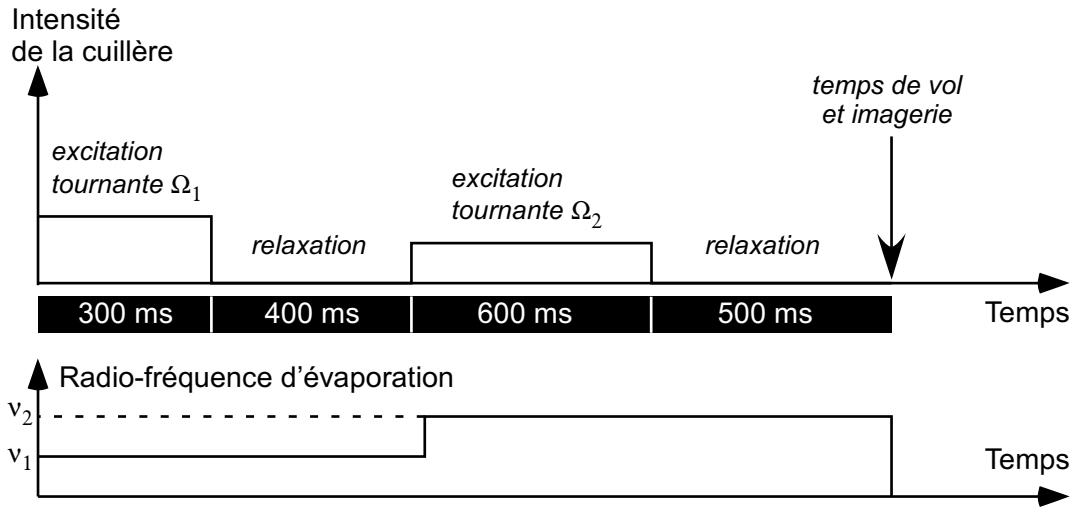


FIGURE 9.6 – Sequence expérimentale pour l'étude des régimes de rotation rapide. Le laser vert est maintenu pendant toute la séquence à une puissance constante. Le condensat subit deux excitations par la cuillère à des fréquences de rotation différentes, séparées par une période de relaxation. La radio-fréquence d'évaporation est remontée durant la deuxième phase à une valeur ν_2 plus élevée. Sans cela, le nuage finirait, en tournant de plus en plus vite, par atteindre la surface d'évaporation.

9.2.2 Excitation en deux temps par la cuillère

Afin de transmettre au nuage le plus possible de moment cinétique, nous avons mis au point une technique de nucléation en deux temps, plus efficace qu'une excitation unique. Le principe de la séquence expérimentale est illustré sur la figure 9.6 : après une première période de nucléation suivie d'une période d'évolution libre, nous appliquons une seconde fois une cuillère tournante, puis laissons à nouveau le condensat relaxer librement[3]. Durant la première phase de rotation, la fréquence de la cuillère est fixée à la valeur de $\Omega_1 = 2\pi \times 51\,\mathrm{Hz}$, valeur légèrement supérieure à $\omega_\perp/\sqrt{2} \simeq 2\pi \times 46\,\mathrm{Hz}$. Nous excitons ainsi largement le mode quadrupolaire, ce qui introduit un grand moment cinétique dans le nuage. Après la première phase de relaxation nous obtenons un condensat rond, contenant un réseau ordonné de 15 à 20 vortex. Ce nouveau système porte déjà un moment cinétique de 5-7$\hbar$ par particule. Du fait de ce moment cinétique, la fréquence du mode quadrupolaire $m_z = +2$ est décalée vers $2\omega_\perp$. Dans la seconde phase d'excitation, on peut donc choisir des fréquences de rotation plus élevées, exciter à nouveau le mode quadrupolaire, et augmenter ainsi à nouveau le moment cinétique. Le condensat devenant plus étendu radialement, nous remontons au début de la deuxième phase la hauteur du couteau radio-fréquence qui détermine la température de l'échantillon (figure 9.6) : la nouvelle valeur $\nu_2 = 24\,\mathrm{kHz}$ est de $10\,\mathrm{kHz}$ supérieure à la valeur initiale $\nu_1 = 14\,\mathrm{kHz}$.

Avant de décrire dans la section suivante les résultats obtenus par cette méthode, nous devons insister sur le fait que notre méthode de double nucléation permet d'injecter du moment cinétique au système, mais qu'elle ne détermine pas *a priori* la fréquence de rotation du système après relaxation : nous injectons à deux reprises une quantité plus ou moins contrôlée de moment cinétique, et laissons le système trouver lui-même quelle vitesse de rotation lui convient. Une autre méthode consisterait, après la première phase nucléation/relaxation, à accompagner le condensat vers des vitesses de rotation plus grandes de manière adiabatique. On peut ainsi

[3]L'ensemble de ces étapes n'est pas spécifique au piège hybride quadratique+quartique, et peut être utilisé avec les mêmes résultats dans un piège harmonique.

imaginer brancher un piège tournant et très faiblement anisotrope, puis en accélérer doucement la rotation jusqu'à la valeur finale souhaitée. Une telle méthode fixerait non pas le moment cinétique mais la vitesse de rotation du condensat, et cette valeur serait connue précisément puisqu'imposée de l'extérieur. Néanmoins il s'est avéré impossible en pratique de réaliser un tel suivi adiabatique : soit le condensat reste insensible à l'accélération de la rotation, soit, quand l'anisotropie ϵ est suffisamment élevée, le mode quadrupolaire est largement excité. Dans ce dernier cas, l'état du condensat n'est pas un état de vorticité uniforme — son moment cinétique est partagé entre le mode quadrupolaire et le réseau de vortex initial —, et ne peut donc être associé à une vitesse de rotation. Il relaxe ultérieurement vers un autre état, contenant éventuellement plus de vortex, mais dont la vitesse de rotation n'est pas bien connue.

Ainsi, il s'est avéré impossible d'augmenter adiabatiquement la vitesse de rotation du condensat en préservant un champ de vitesse à vorticité uniforme et une forme quasi-ronde. Une raison peut être avancée pour expliquer ce fait : la nucléation des vortex, comme nous l'avons déjà mentionné (chapitre 5), peut impliquer une barrière énergétique. Il est donc peut-être optimiste de supposer que les vortex rentrent et sortent librement du condensat afin que ce dernier ajuste sa vitesse à celle d'une excitation extérieure.

9.2.3 Rotation critique et sur-critique

Nous avons réalisé plusieurs séries d'expériences avec des valeurs différentes pour la seconde fréquence d'excitation Ω_2. La figure 9.7 montre une série d'images longitudinales, obtenues avec des fréquences d'excitation de plus en plus élevées, les dernières dépassant largement la fréquence $\omega_\perp$ du piège. Pour les fréquences de rotation $\Omega/2\pi \lesssim 58\,\text{Hz}$, l'excitation est loin de la fréquence de résonance quadrupolaire, et la seconde phase est quasiment sans effet sur le condensat. Pour des fréquences plus élevées, la taille du nuage augmente significativement, ainsi que la densité surfacique des vortex. Des condensats contenant jusqu'à une cinquantaine de vortex ont pu ainsi être obtenus (images $\Omega/2\pi = 63$ et $64\,\text{Hz}$). Lorsque la fréquence d'excitation Ω_2 atteint et dépasse la fréquence de piégeage $\omega_\perp \simeq 2\pi \times 65\,\text{Hz}$, le condensat devient très large mais reste confiné. Cela tient à la présence du terme quartique dans le potentiel : une telle excitation dans un piège purement harmonique aurait excité violemment le mode dipolaire. On remarque également sur certaines images que la densité se creuse au centre (images $\Omega/2\pi = 66$ et $67\,\text{Hz}$) ; nous y reviendrons. Enfin, pour des fréquences d'excitation dépassant $68\,\text{Hz}$, le condensat semble à la fois chaud et faiblement tournant ; dans ces conditions, il apparaît fréquemment entouré d'un gros halo qui est probablement un nuage thermique.

Ces images soulèvent de nombreuses questions. La première d'entre elle est simple à énoncer : nous connaissons la vitesse de rotation à laquelle a été excité le condensat, mais quelle est sa vitesse de rotation après les $600\,\text{ms}$ d'attente ? La connaissance de cette vitesse, notée Ω_{eff} dans la suite, est indispensable pour pouvoir interpréter les données. C'est pourquoi nous proposons dans la suite de ce chapitre trois déterminations indépendantes de Ω_{eff} : la première par l'analyse du profil de densité, la deuxième par une mesure précise des fréquences des modes quadrupolaires, et la dernière par un comptage des vortex présents dans le condensat. La confrontation de ces trois méthodes soulèvera de nouvelles questions qui font l'objet de la fin du chapitre.

9.3 Détermination de Ω_{eff} par trois méthodes

9.3.1 Détermination de Ω_{eff} par les lois d'échelle

Du fait des forces centrifuges, un condensat en rotation a une taille transverse qui augmente avec la vitesse de rotation. Notre première méthode consiste à quantifier ce phénomène, afin de déduire Ω_{eff} de la taille des condensats [197].

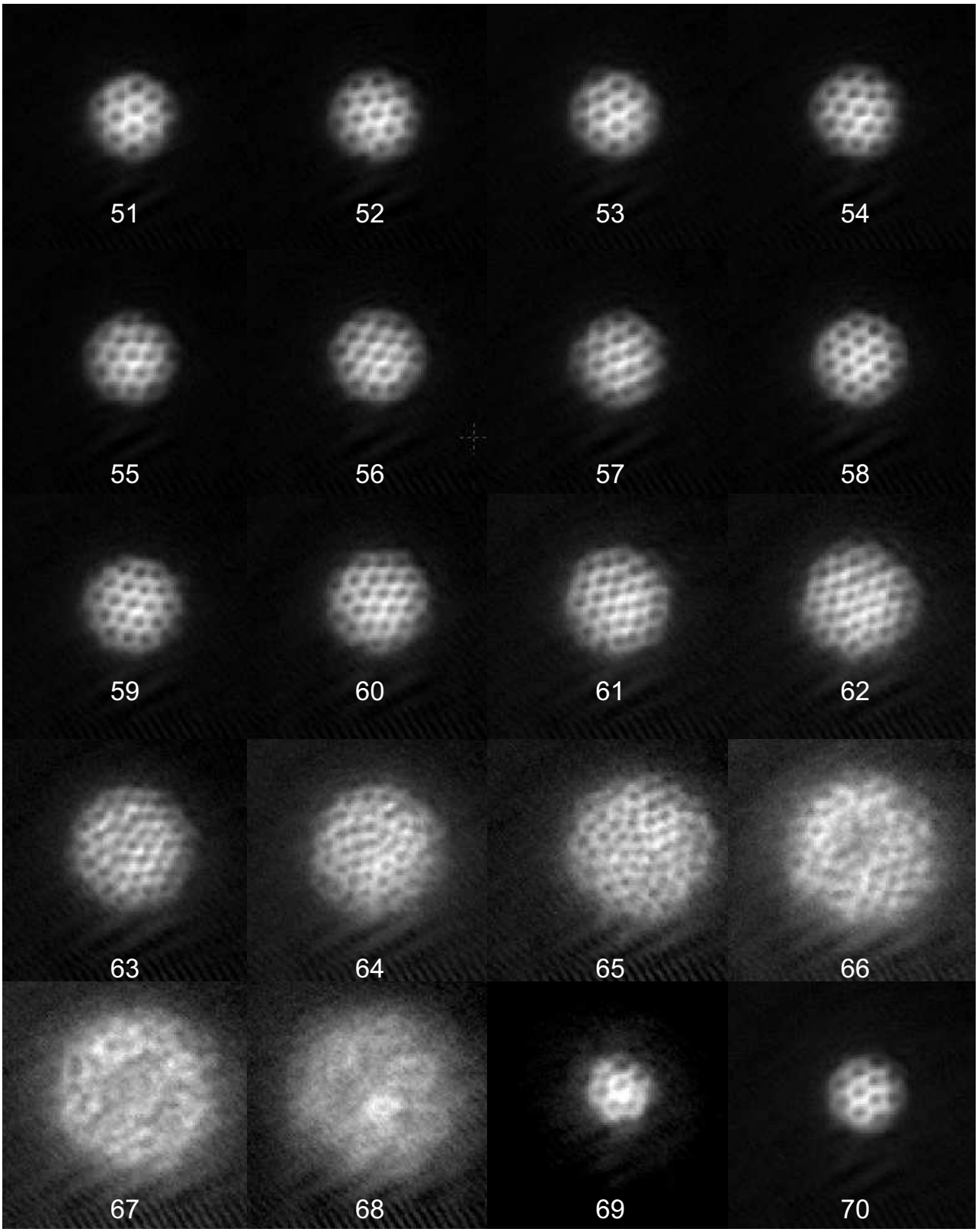


FIGURE 9.7 – Images longitudinales d'un condensat en rotation rapide dans le potentiel hybride quadratique+quartique. Le chiffre figurant sous chaque image indique la seconde fréquence de rotation de la séquence (figure 9.6). La taille croissante des condensats jusqu'à $\Omega/2\pi$ =68 Hz témoigne de la rotation de plus en plus rapide des échantillons. Le trou de densité visible au centre des images 66 et 67 est une signature de $\Omega_{\text{eff}} > \omega_{\perp}$.

Forme d'équilibre d'un nuage en rotation

Un condensat contenant un réseau régulier de vortex peut être décrit en première approximation comme un fluide dont la vorticité est uniformément répartie sur la surface (*cf.* chapitre 8). Dans cette description, le champ de vitesse est celui d'un solide en rotation à la vitesse Ω_{eff}. Cela signifie que le condensat est au repos dans un référentiel tournant à la vitesse Ω_{eff}, référentiel dans lequel on doit ajouter un potentiel centrifuge au potentiel piégeant U. En supposant que le condensat reste dans le régime de Thomas-Fermi, on peut écrire pour la densité :

$$\rho = \frac{1}{g}\left[\mu - U(r) + \frac{1}{2}m\Omega_{\text{eff}}^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2\right]. \tag{9.9}$$

Dans le cas où le potentiel transverse U est purement harmonique, la densité d'atomes est toujours une parabole inversée, mais la fréquence $\omega_\perp$ doit être remplacée par $\sqrt{\omega_\perp^2 - \Omega_{\text{eff}}^2}$. Le rayon transverse $R_\perp(\Omega_{\text{eff}})$ peut alors être comparé, à nombre d'atomes fixé, à celui $R_\perp(0)$ d'un condensat au repos :

$$R_\perp(\Omega_{\text{eff}}) = R_\perp(0)\frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\omega_\perp^2}\right)^{3/10}}. \tag{9.10}$$

Temps de vol d'un condensat en rotation — cas harmonique

Restons encore un peu dans le cas d'un piège purement harmonique. Les images que nous prenons sont toujours faites après un temps de vol. Il faut donc connaître le comportement du condensat entre le moment où il est lâché et celui où il est photographié. Pour un condensat qui ne tourne pas, ce comportement est donné par les lois d'échelles 1.27. Pour un condensat en rotation il est possible d'étendre ces lois d'échelles. On pose pour cela : $R_\perp(t) = R_\perp(0)\lambda_\perp(t)$ et $R_z(t) = R_z(0)\lambda_z(t)$. Pour la vitesse, nous supposons une évolution qui est la superposition d'une dilatation et d'une rotation :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = A(t)\boldsymbol{r} + B(t)\boldsymbol{z} + C(t)\boldsymbol{\Omega}_{\text{eff}} \times \boldsymbol{r},$$

le dernier terme étant spécifique aux condensats en rotation. A, B et C peuvent être reliés simplement aux λ_i. Pour C, on a :

$$C(t) = \frac{1}{\lambda_\perp^2}.$$

Cette équation traduit la conservation du moment cinétique. Finalement, les équations vérifiées par les λ_i sont :

$$\ddot{\lambda}_\perp = \frac{\omega_\perp^2 - \Omega_{\text{eff}}^2}{\lambda_\perp^3 \lambda_z} + \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\lambda_\perp^3}, \tag{9.11}$$

$$\ddot{\lambda}_z = \frac{\omega_z^2}{\lambda_\perp^2 \lambda_z^2}. \tag{9.12}$$

On remarque que pour $\lambda_z \sim 1$, ces équations sont identiques à celles décrivant l'évolution d'un condensat initialement au repos. Or dans le cas d'un condensat allongé l'égalité $\lambda_z \sim 1$ reste presque toujours vraie ; on pourra donc considérer que les facteurs d'expansions ne dépendent pas du fait que le condensat tourne ou non.

Temps de vol d'un condensat en rotation — cas général

Notre piège contient un terme quartique, ce qui rend *a priori* invalide le traitement précédent par les lois d'échelle. Néanmoins, et faute d'un modèle plus quantitatif dans ce cas général, nous

supposerons que le temps de vol n'est pas affecté pas la présence de ce terme quartique. Le terme quartique n'apparaît, dans cette approximation, que dans la forme initiale du nuage donnée par l'équation 9.9. Nous mesurons la densité optique après temps de vol, qui est proportionnelle à la densité intégrée selon z (équation 1.4). Dans les coordonnées après temps de vol r', on a :

$$do(r') = \sigma \int \mathrm{d}z \rho(r') = \frac{\sigma\sqrt{2m}}{3\pi\hbar^2 a\omega_z \lambda_\perp^2} \left(\mu - \alpha r'^2 - \beta r'^4\right)^{3/2}, \tag{9.13}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{2} m(\omega_\perp^2 - \Omega_{\text{eff}}^2)\frac{1}{\lambda_\perp^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{k}{4}\frac{1}{\lambda_\perp^4}.$$

Le lien entre μ et le nombre d'atomes a été explicité par Fetter [192]. Nous l'avons utilisé pour vérifier que le nombre d'atomes était approximativement constant sur l'ensemble des images étudiées.

Ajustement des données et première estimation de Ω_{eff}

Nous avons ajusté les images de la figure 9.7 par la fonction 9.13 en maintenant β fixé à sa valeur théorique. La figure 9.8(a) montre le profil de densité pour $\Omega_2/2\pi = 66\,\text{Hz}$ ainsi que la fonction d'ajustement. L'accord est bon partout sauf au niveau de la bordure du condensat. Il est possible que cet écart soit dû à notre traitement un peu simpliste du temps de vol. Il pourrait aussi s'agir d'une composante thermique.

En ajustant de la sorte toutes les images de la figure 9.7 ainsi que plusieurs autres séries identiques, il est possible de déduire les valeurs de μ, $R_\perp^2$ et surtout Ω_{eff} (voir figure 9.8(b-d)). L'enseignement principal de ces courbes est le fait que Ω_{eff} est pratiquement égal à Ω_2 jusqu'à $\Omega_2/2\pi = 68\,\text{Hz}$. Cela tient en particulier pour des fréquences de rotation Ω_2 supérieures à la fréquence du piège $\omega_\perp \simeq 2\pi \times 65\,\text{Hz}$. Dans cette gamme de fréquence, α devient négatif ; ceci est lié l'apparition d'une légère dépression au centre du profil de densité, visible sur deux images de la figure 9.7 ($\Omega_2/2\pi = 66 - 67\,\text{Hz}$), ainsi que sur le profil de la figure 9.8(a). Si l'on parvenait à augmenter encore la vitesse de rotation, ce trou pourrait devenir un véritable trou de densité nulle, voire un des vortex géants décrits dans [193]. Il faudrait pour cela atteindre un point pour lequel μ s'annule. D'après la courbe 9.8(d), cela devrait se produire un peu au-delà de 70 Hz. Nous avons fait quelques tentatives visant à atteindre ce régime ; elles n'ont pas été concluantes, se soldant soit par un nuage très chaud et peut-être tournant, soit par un condensat faiblement tournant. Il est possible que la seconde fréquence d'excitation lors de ces expériences ait été trop grande par rapport à la fréquence de résonance du mode quadrupolaire.

9.3.2 Détermination de Ω_{eff} : modes quadrupolaires

Rappelons que les fréquences des modes quadrupolaires vérifient les deux égalités suivantes dans un piège harmonique (*cf.* chapitre 6) :

$$\omega_{+2}^2 + \omega_{-2}^2 = 4\omega_\perp^2, \tag{9.14}$$

$$\omega_{+2} - \omega_{-2} = \frac{2\langle L_z\rangle}{m\langle r^2\rangle}. \tag{9.15}$$

Dans le cas d'un piège hybride quadratique+quartique, seule la seconde reste valable[4]. La première équation prend une forme plus générale que nous n'expliciterons pas[5].

[4] Elle est valable dans tout type de piège, car elle implique des commutateurs de $(x \pm iy)^2$ avec H, commutateurs qui ne dépendent pas du potentiel [20].

[5] Cette relation implique des commutateurs de $[(x \pm iy)^2, H]$ avec H qui dépendent de la forme du potentiel.

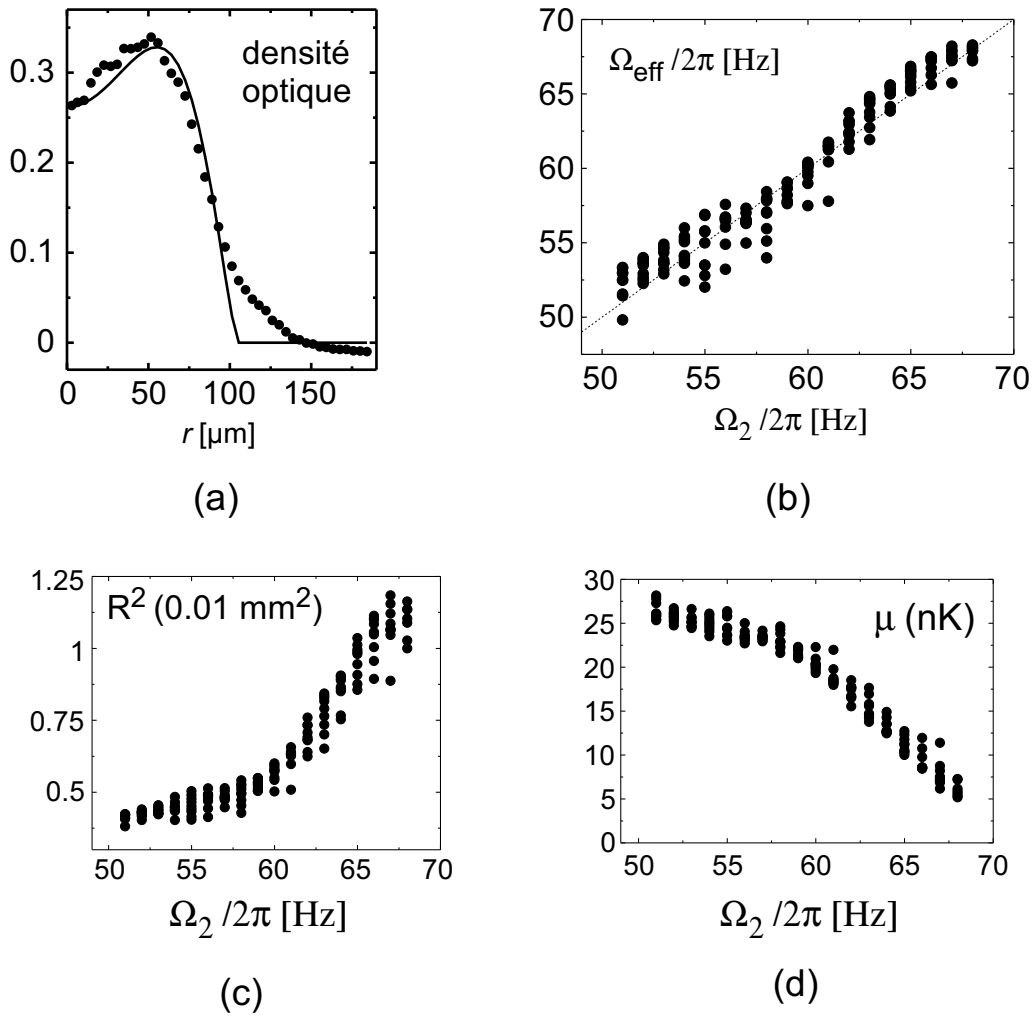


FIGURE 9.8 – Résultat de l'ajustement des images de la figure 9.7 par la fonction 9.13. (a) Coupe radiale (moyennée sur l'angle) de l'image $\Omega_2/2\pi = 66\,\text{Hz}$. En trait plein est figuré l'ajustement. (b) Valeur de Ω_{eff} obtenue par l'ajustement en fonction de la fréquence de la seconde excitation Ω_2. (c-d) Variations de $R_\perp^2$ et μ en fonction de Ω_2. Pour les figures (b-d), chaque point correspond à un cycle expérimental. 9 passages ont été effectués, ce qui correspond à 9 points par valeur de Ω_2.

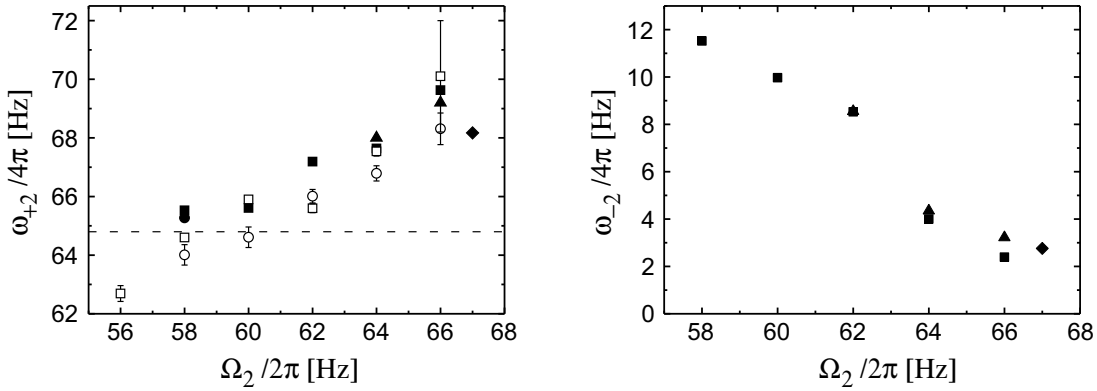


FIGURE 9.9 – Fréquence des modes quadrupolaires en fonction de la fréquence de la seconde excitation Ω_2. A gauche : fréquence du mode copropageant $m_z = +2$. Les symboles pleins représentent les données obtenues par la méthode "percussionnelle", les symboles creux celles obtenues par excitation résonnante. A droite : fréquence du mode quadrupolaire contrapropageant $m_z = -2$. Les données sont obtenues par la seule méthode "percussionnelle".

Dans le cas d'un condensat tournant "presque comme un solide", avec une fréquence de rotation Ω_{eff}, on a $L_z = \Omega_{\text{eff}} m\langle r^2\rangle$. La seconde équation se simplifie donc pour donner :

$$\omega_{+2} - \omega_{-2} = 2\Omega_{\text{eff}}. \tag{9.16}$$

La mesure des fréquences quadrupolaires donne donc accès à la vitesse de rotation Ω_{eff}. Afin d'obtenir les mesures les plus précises possibles, nous avons reproduit les deux types d'expériences du chapitre 7 : une excitation percussionnelle de la superposition des deux modes, et une excitation résonnante du mode $m_z = +2$ (la fréquence du mode $m_z = -2$ est trop faible pour être mesurée par une excitation résonnante). Les séries d'images ont été analysées avec les fonctions d'ajustement décrites dans le chapitre 7. Les résultats pour les fréquences ω_{+2} et ω_{-2} sont reportés sur la figure 9.9 : la première augmente avec Ω_2 alors que la seconde diminue. On notera que ω_{+2} dépasse nettement la valeur $2\omega_\perp$ qui serait sa borne supérieure en l'absence du terme quartique. Cela provient du fait que la règle de somme 9.14 n'est plus valable.

Les deux courbes de la figure 9.9 permettent, par une simple soustraction, d'obtenir une estimation de Ω_{eff}. Celle-ci a été reportée sur la figure 9.10, figure qui résume également les autres déterminations de Ω_{eff}. On constate que les mesures de Ω_{eff} par ajustement des profils et celles que nous venons de décrire (modes quadrupolaires) sont très proches les unes des autres. Toutes deux confirment un fait qui n'était pas évident du tout étant donné la séquence expérimentale : le nuage après relaxation tourne approximativement à la vitesse Ω_2 de la dernière excitation.

9.3.3 Détermination de Ω_{eff} : comptage des vortex

Une dernière méthode a été utilisée pour estimer Ω_{eff}. On sait en effet que dans le cas d'un condensat contenant un réseau de vortex, la vitesse de rotation Ω_{eff} est reliée à la densité surfacique de vortex n_v par la relation :

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{n_v h}{2m}. \tag{9.17}$$

Cette relation est valable pour un condensat piégé. Mais durant le temps de vol, le réseau de vortex est dilaté. Nous supposerons que le réseau de vortex est dilaté par le même facteur $\lambda_\perp$

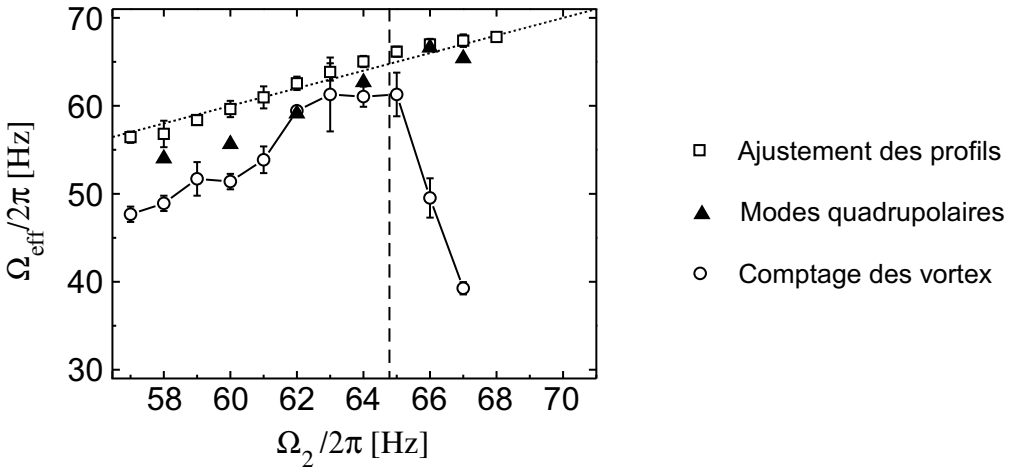


FIGURE 9.10 – Récapitulation des différentes déterminations de Ω_{eff}. La droite verticale (tirets) figure la fréquence critique $\omega_\perp/2\pi$. La droite en pointillés a pour équation $\Omega_{\text{eff}} = \Omega_2$.

que les dimensions transverses du condensat. Il suffit donc d'évaluer la densité de vortex sur les images de la figure 9.7, puis de multiplier cette densité par le facteur $\lambda_\perp^2$ pour connaître Ω_{eff}. La figure 9.10 reporte les résultats obtenus par cette méthode, en fonction de la fréquence Ω_2 de la seconde excitation.

Comparée aux autres méthodes de mesure de Ω_{eff}, cette dernière évaluation apparaît notablement différente. Nous distinguerons deux régions. Dans la première, définie par $\Omega_2/2\pi < 66\,\text{Hz}$, la mesure par comptage des vortex est nettement inférieure aux deux autres, mais elle en suit la tendance globale. L'écart observé pourrait être dû au temps de vol, durant lequel rien ne garantit que le réseau et le nuage se dilatent d'un même facteur. Dans la seconde région $\Omega_2/2\pi \geq 66\,\text{Hz}$, l'écart observé est beaucoup plus grand, et la tendance générale des deux premières mesures n'est pas suivie par la troisième : alors que le nuage semble, d'après sa taille et le comportement des modes quadrupolaires, tourner très rapidement, le nombre de vortex diminue significativement. Ce fait est d'ailleurs directement visible sur les images 66 et 67 de la figure 9.7 : le nuage est très gros, mais les vortex qu'il contient sont à la fois peu visibles et peu nombreux.

Il y a donc un déficit de vortex dans les condensats qui tournent à des vitesses proches (et mêmes supérieures) de $\omega_\perp$. L'interprétation de ce déficit fait l'objet de la fin de ce chapitre.

9.4 Pourquoi les vortex disparaissent : quelques pistes

9.4.1 Le nuage thermique

Le brouillage du réseau de vortex pourrait s'expliquer par la présence d'une fraction thermique significative. Les cœurs des vortex seraient ainsi remplis d'atomes non condensés, ce qui nous empêcherait de les voir nettement. Pour vérifier cette hypothèse, il faut évaluer la température du condensat.

La radio-fréquence d'évaporation fixe la distance au centre ($\sim 20\mu$m) où le potentiel est tronqué. Sur les images transverses de la figure 9.11, nous constatons que l'ellipticité transverse du nuage augmente avec la vitesse de rotation. Cela implique qu'une grande partie du nuage — celle qui est visible sur ces images —, tourne autour de l'axe z à la vitesse mesurée Ω_{eff}. La hauteur de l'évaporation doit donc être calculée par rapport à la hauteur du potentiel *dans le référentiel tournant*. Comme l'illustre la figure 9.11, le nuage est donc d'autant plus froid qu'il tourne vite. On peut ainsi estimer que pour $\Omega_{\text{eff}}/2\pi = 67\,\text{Hz}$, la hauteur de l'évaporation

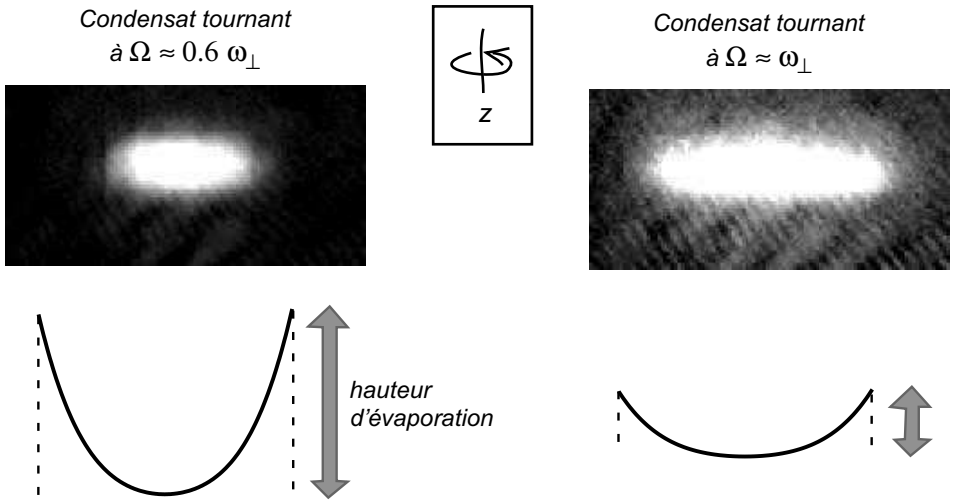


FIGURE 9.11 – Evaluation de la température du nuage. La hauteur d'évaporation dépend de Ω : le nuage est d'autant plus froid qu'il tourne vite.

n'excède pas 32 nK. Avec un paramètre d'évaporation η de l'ordre de 2 à 5, on en déduit que le nuage est à une température T de l'ordre de $5-15$ nK. Cette faible température est confirmée par les faibles taux d'amortissement mesurés sur les modes quadrupolaires ($\sim 20\,\mathrm{s}^{-1}$).

Le premier enseignement que nous pouvons tirer de cette évaluation de T est que la température du nuage tournant est très en dessous de la température critique de condensation de Bose-Einstein. Nous mesurons en effet une densité de 3×10^3 atomes par cm^3. Dans le référentiel tournant à $\Omega_{\mathrm{eff}}/2\pi \sim 67$ Hz, une telle densité correspond à une température critique de 180 nK. Si toutes les particules tournent, le nuage thermique doit donc être très peu peuplé, et ne saurait expliquer le brouillage observé. Toutefois, ils n'est pas exclu qu'une faible partie des atomes thermiques, non décelée sur les images transverses, ait été stoppée par l'anisotropie statique du piège magnétique. Cette fraction-ci, ne tournant pas, peut avoir une température bien supérieure à la fourchette de $5-15$ nK. Ces atomes chauds pourraient affecter la visibilité des vortex. Pour tester cette hypothèse, une analyse quantitative des images transverses est nécessaire. La prise en compte du temps de vol est un élément crucial pour cette analyse, et reste à faire.

La seconde conclusion que l'on peut tirer de la fourchette de température du gaz en rotation nous rapproche de la physique de l'effet Hall. En effet, $2\hbar\omega_\perp \sim k_B \times 6.3$ nK, ce qui implique que les atomes sont pratiquement dans le niveau de Landau le plus bas[6].

9.4.2 Fragmentation du condensat

On peut avoir la tentation d'interpréter la disparition des vortex comme un changement d'état du condensat. Dans la limite des rotations rapides, c'est bien une fonte du réseau de vortex qui est attendue (*cf.* chapitre 8), et cette fonte est un candidat potentiel pour expliquer ce que nous voyons. Cela suppose que les atomes sont dans un état corrélé distinct d'un condensat de Bose-Einstein, ce dernier correspondant à un état de Hartree-Fock. Ce phénomène se produit lorsque, plusieurs niveaux d'énergie à une particule devenant très proches du fondamental (figure 9.4), le condensat se fragmente en plusieurs composantes. On entend par là que les atomes occupent par exemple un état $|N_1, N_2, 0, \ldots, 0\rangle$ dans lequel plusieurs niveaux sont macroscopiquement occupés. Un tel état n'est plus à proprement parler un condensat, et

[6] L'équipe du JILA a réussi, par des méthodes différentes, à produire un nuage tel que $\mu/2\hbar\omega_\perp = 0.6$, mettant ainsi l'ensemble des atomes dans le LLL [47].

partant la notion de phase comme celle de vortex deviennent impropres. Cela pourrait expliquer le brouillage observé. Néanmoins, la plupart des prédictions théoriques pour la fonte du réseau se situent pour des facteurs de remplissage $\nu = N/N_v$ proches de 6 ou 10 [177, 178], alors que nous avons environ 3×10^5 atomes pour guère plus de 50 vortex, soit $\nu = 10^4$. Un facteur 10^3 nous sépare donc du régime où est attendue la fonte du réseau de vortex.

D'autres phénomènes d'un même genre peuvent être envisagés : une explication du brouillage des vortex a ainsi été avancée par Akkermans et Ghosh [198]. Ces auteurs suggèrent qu'atomes et vortex s'apparient pour former des bosons composites[7].

9.4.3 Des lignes de vortex très excitées

Un dernier type d'hypothèse peut être envisagé pour expliquer la disparition des vortex dans les régimes de rotation rapide. Notre système est un système tridimensionnel, dans lequel les lignes de vortex sont capables de se tordre (c'est même parfois leur état de plus basse énergie — *cf.* chapitre 6) ou d'onduler sous l'effet d'excitations (ce sont les kelvons — *cf.* chapitre 7). Les vortex que nous voyons peu ou pas du tout pourraient ainsi être des vortex très excités, peu visibles sur la densité intégrée selon z.

Il est également envisageable que le réseau de vortex lui-même devienne instable et désordonné. Dans des conditions un peu différentes des notres[8], l'équipe d'Eric Cornell au JILA a observé une diminution importante de la visibilité du réseau de vortex lorsque le mode quadrupolaire $m_z = -2$ est excité par une anisotropie statique de 4% [136]. Notre anisotropie statique est nettement plus faible que 4% : nous mesurons en effet des fréquences transverses d'oscillation de $\omega_x/2\pi = 65.1\,\mathrm{Hz}$ et $\omega_y/2\pi = 64.6\,\mathrm{Hz}$ (soit une anisotropie de l'ordre de 1%). Néanmoins un tel effet reste envisageable, en particulier si le réseau devient fragile dans la région critique.

Les deux hypothèses que nous venons d'avancer s'appuient sur le fait que le réseau de vortex, pour une raison qui reste à éclaircir, devient particulièrement sensible aux perturbations extérieures dans la région $\Omega_{\mathrm{eff}} \sim \omega_\perp$. Dans des simulations numériques récentes, Amandine Aftalion et Ionut Danaila ont observé un phénomène qui confirme l'hypothèse d'un réseau devenant instable : en cherchant l'état fondamental par minimisation de l'énergie et dans des conditions très proches de nos conditions expérimentales, ils ont constaté que le temps de calcul nécessaire devenait particulièrement long autour de $\Omega_{\mathrm{eff}} \sim \omega_\perp$ [199]. Cette observation suggère que des modes de basse énergie existent dans ce régime, ce qui pourrait expliquer l'instabilité du réseau.

9.5 Conclusion

Nous avons étudié le régime de rotation rapide dans un piège hybride contenant un faible terme quartique positif. La limite de la rotation critique $\Omega = \omega_\perp$ a ainsi pu être atteinte et sensiblement dépassée. La mesure de la vitesse de rotation, basée sur trois méthodes distinctes, a permis de montrer que les nuages tournant à $\Omega \gtrsim \omega_\perp$ contiennent trop peu de vortex par rapport à la valeur attendue. Parmi les explications proposées, la plus plausible est celle selon laquelle les lignes de vortex sont toujours présentes, mais brouillées ou emmêlées, de sorte que leur visibilité est réduite.

Ces expériences constituent un premier pas vers les régimes d'effet Hall quantique fractionnaire. Plusieurs des conditions requises ont en effet été atteintes : le potentiel chimique, abaissé à des valeurs inférieures à 10 nK par la rotation, est de l'ordre de l'écart entre niveaux de Landau ($\sim 6\,\mathrm{nK}$). De plus, la vitesse de rotation, grâce au terme quartique, a pu être amenée dans la région $\Omega \sim \omega_\perp$ intéressante pour la physique de l'effet Hall.

[7] Les fermions composites constituent un outil théorique bien connu dans la physique de l'effet Hall quantique (voir références dans [198]).

[8] Le piège est presque rond ($\omega_\perp \sim \omega_z$) et leur nuage tourne à $0.95\,\omega_\perp$.

Pour espérer atteindre le régime fortement corrélé, il faut encore rendre le gaz bidimensionnel (c'est-à-dire amener $\hbar\omega_z$ au-dessus de μ alors que pour le moment on a $\hbar\omega_z \sim 0.5\,\mathrm{nK}$) ; il faut également faire diminuer le facteur de remplissage (actuellement situé autour de 10^4, soit 10^3 fois trop grand pour voir la fonte du réseau de vortex). Une onde stationnaire superposée à notre piège selon la direction z pourrait améliorer ces deux dernières conditions et permettre d'approcher significativement le régime de l'effet Hall. Des expériences allant dans ce sens sont en cours dans notre équipe.

Chapitre 10

Mode monopolaire transverse d'un condensat en rotation rapide

Afin de mieux caractériser le gaz tournant produit dans le potentiel magnétique+laser, il peut être instructif d'étudier ses modes de basse énergie. Les modes quadrupolaires ont été utilisés dans le chapitre précédent pour déterminer la fréquence de rotation du nuage. Nous décrivons ici l'étude du mode monopolaire de ce même nuage tournant [10]. Ce mode est l'exact analogue de celui qui a fait l'objet, pour un condensat au repos, du chapitre 2. Nous allons montrer que son comportement est significativement affecté par la rotation et par la présence du terme quartique dans le potentiel.

Le chapitre s'ouvre sur les principaux résultats expérimentaux obtenus sur ce mode. La dépendance de la fréquence du mode en fonction de la fréquence de rotation est analysée dans la deuxième partie. La dernière partie est consacrée à la structure originale du mode.

10.1 Observation de l'oscillation monopolaire d'un gaz en rotation rapide

10.1.1 Images d'un condensat tournant et oscillant

Le mode monopolaire est excité après la séquence de double nucléation/relaxation décrite dans le chapitre 9. Pour cela, l'intensité I du laser vert est soudainement modifiée pour une valeur I' à laquelle elle est maintenue pendant un temps τ_0 de l'ordre de 2 ms. Elle est ensuite ramenée à sa valeur initiale I et le gaz est laissé libre d'évoluer pendant un temps ajustable t. Le nuage est ensuite soumis à l'habituelle séquence temps de vol/imagerie (figure 10.1). Cette séquence expérimentale permet de suivre l'évolution du mode monopolaire en faisant varier t. La figure 10.2 montre quatre séries d'images obtenues pour quatre valeurs différentes de la seconde fréquence de rotation $\Omega_2/2\pi$ (62, 64, 66 et 68 Hz). Compte-tenu des résultats du chapitre 9, nous identifierons dans la suite la vitesse de rotation de la seconde excitation Ω_2 et la vitesse de rotation effective du condensat Ω_{eff}.

10.1.2 Fréquence de l'oscillation

Les oscillations de la quantité $A(t) = R_x^2 + R_y^2$ peuvent, comme au chapitre 2, être ajustées par une fonction sinusoïdale[1]. Sa fréquence comme fonction de Ω_2 est reportée sur la figure 10.3.

[1] Si la mesure précise de cette quantité peut poser problème dans certaines séries d'expériences (lorsque le condensat adopte une structure creusée ou bimodale), son oscillation subsiste toujours et permet de déterminer une fréquence.

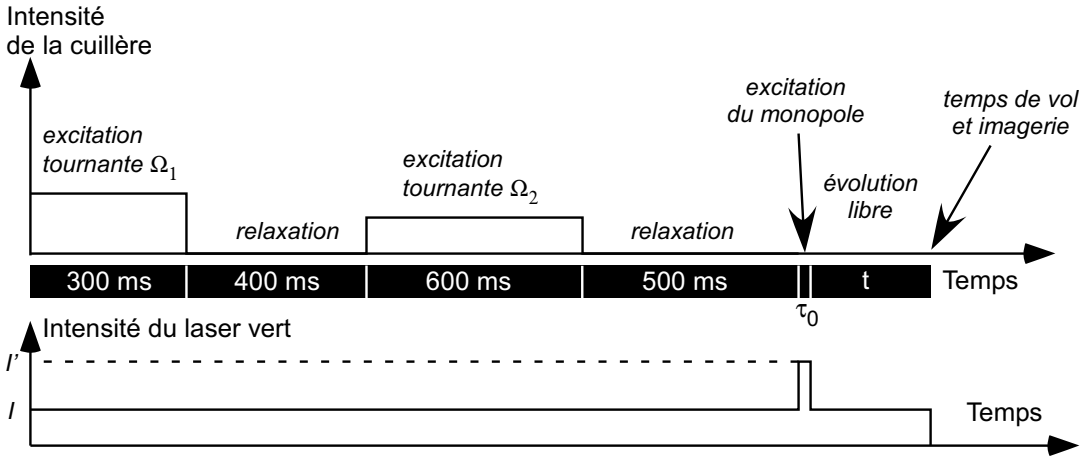


FIGURE 10.1 – Séquence expérimentale pour l'étude du mode monopolaire d'un gaz en rotation rapide. Deux phases de nucléation/relaxation conduisent à un gaz en rotation rapide. Le mode monopolaire est ensuite excité par un changement brutal et temporaire ($\tau_0 = 2\,\mathrm{ms}$) de l'intensité I du faisceau laser vert. Puis on laisse le nuage évoluer librement pendant un temps t dans le piège quadratique+quartique, avec une intensité laser I égale à celle que l'on avait initialement.

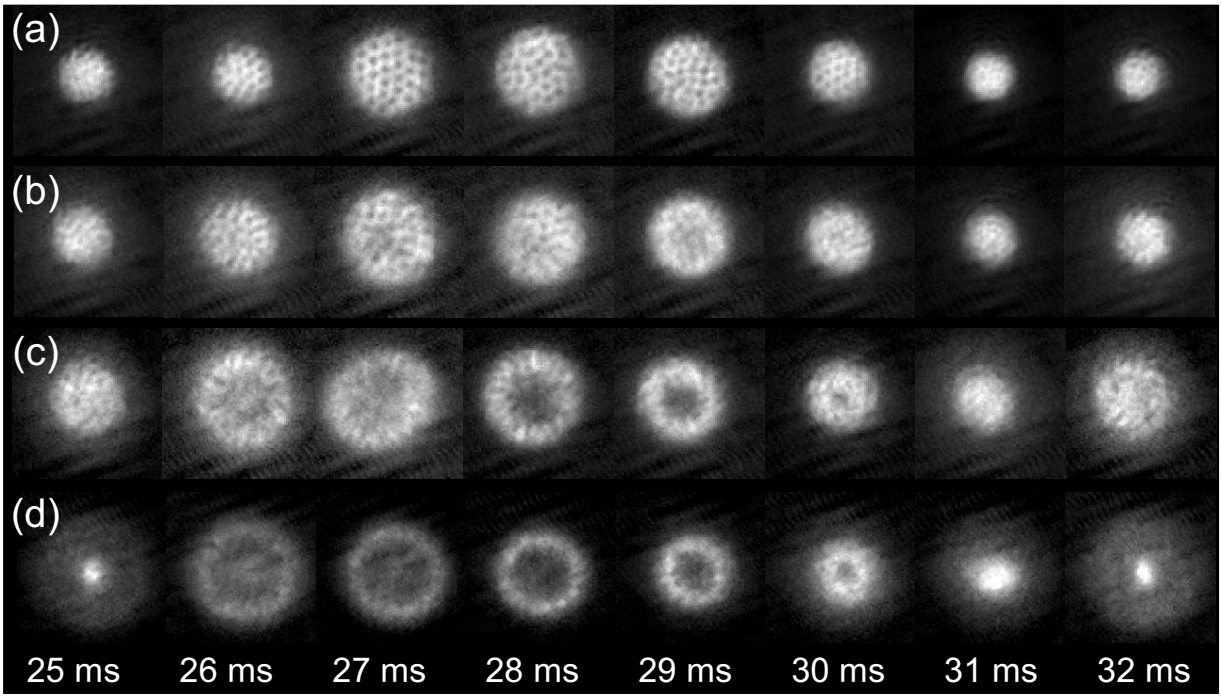


FIGURE 10.2 – Images du nuage lors de l'oscillation monopolaire pour différentes fréquences Ω_2 : (a) $\Omega_2/2\pi = 62\,\mathrm{Hz}$, (b) $\Omega_2/2\pi = 64\,\mathrm{Hz}$, (c) $\Omega_2/2\pi = 66\,\mathrm{Hz}$ et (d) $\Omega_2/2\pi = 68\,\mathrm{Hz}$. Le temps t d'évolution libre après excitation est indiqué en bas de chaque colonne. Chaque série d'images couvre approximativement une période d'oscillation.

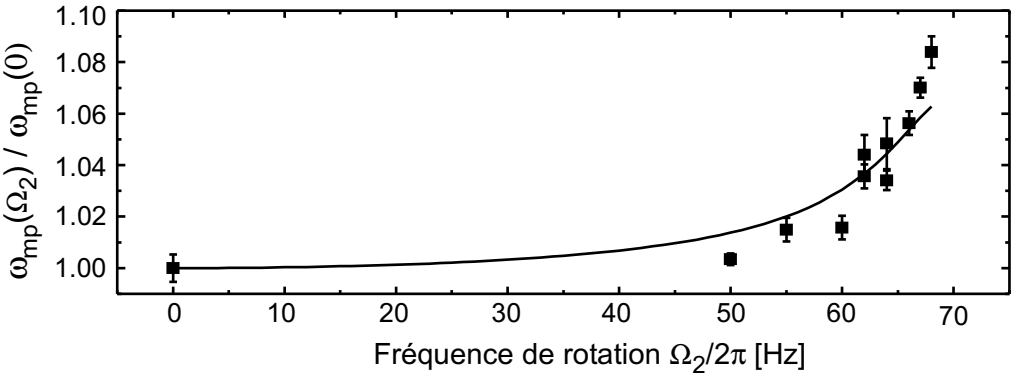


FIGURE 10.3 – Variation de la fréquence du monopôle $\omega_{\rm mp}$ en fonction de la fréquence de rotation Ω_2. La courbe en trait plein résulte du traitement théorique présenté dans le texte.

On a normalisé la fréquence mesurée $\omega_{\rm mp}(\Omega_2)$ par sa valeur à rotation nulle $\omega_{\rm mp}(0)$. On peut distinguer trois régions :

- $\Omega_2/\omega_\perp \sim 0$: c'est la région qui avait été étudiée dans le chapitre 2, si l'on met le terme quartique à part. On mesure en réalité $\omega_{\rm mp}/2\pi = 130.6\,{\rm Hz}$, valeur qui est proche de $2\omega_\perp/2\pi = 129.6\,{\rm Hz}$. Le terme quartique joue donc un faible rôle dans la dynamique du mode à rotation nulle[2].
- $\Omega_2/\omega_\perp \lesssim 0.9$: la fréquence du monopôle reste approximativement constante et égale à sa valeur à rotation nulle.
- $\Omega_2/\omega_\perp \sim 1$: $\omega_{\rm mp}$ augmente brutalement lorsqu'on atteint la région de rotation critique. Un écart de plus de 8% est observé par rapport à la fréquence du mode à rotation nulle.

Nous proposons une interprétation de ces tendances dans la deuxième partie de ce chapitre.

10.1.3 Linéarité — Effet du temps de vol

Deux effets potentiels peuvent compliquer l'interprétation des données : la non-linéarité en fonction de l'excitation et le comportement durant le temps de vol. Le premier a été testé en faisant varier la force de l'excitation, proportionnelle à l'intensité du laser I. Des excitations allant de $0 \times I$ (variation négative de I — le piège est plus raide durant l'excitation) à $4 \times I$ (variation positive de I — le piège est plus mou durant l'excitation) ont été réalisées pour $\Omega_2/2\pi = 66\,{\rm Hz}$. Aucun effet systématique n'a pu être observé sur la fréquence mesurée. Dans notre domaine d'amplitudes d'excitation, nous considérons donc que la fréquence ne dépend pas de l'amplitude[3].

Passons maintenant à l'effet du temps de vol. Pour interpréter certaines données, en particulier la structure du mode, il est nécessaire de connaître la phase du mode. Le temps de vol, s'il ne peut affecter la fréquence du phénomène étudié, peut en changer la phase. En effet, le mode monopolaire est une excitation en vitesse et en position des atomes du condensat. Le temps de vol d'un tel nuage ne consiste pas forcément en une simple dilatation. Nous avons donc fait

[2] Ceci a été confirmé par un traitement perturbatif pour un condensat cylindrique, en partant de l'équation 9.7. On montre ainsi que

$$\frac{\omega_{\rm mp} - 2\omega_\perp}{2\omega_\perp} = \frac{3}{8}\frac{kR^2}{m\omega_\perp^2}.$$

Cette correction ($\sim 1.7\%$) est de l'ordre de la déviation mesurée.

[3] Cette linéarité concerne l'amplitude du mouvement et n'implique pas que l'effet du terme en r^4 ne se fait pas sentir : des effets de taille finie du condensat peuvent jouer (*cf.* section suivante).

varier le temps de vol de 6 ms à 18 ms. Le résultat principal de cette étude est que toutes les courbes d'oscillation de R^2 obtenues présentent la même phase à l'origine. On peut donc, dans la suite, raisonner sur les courbes obtenues après temps de vol comme si elles représentaient la taille du condensat dans le piège.

10.2 Interprétation de la fréquence

Cette partie est consacrée à l'interprétation de la courbe 10.3 donnant la fréquence du mode quadrupolaire en fonction de la fréquence de rotation. Le traitement que nous proposons porte sur un condensat cylindrique.

10.2.1 Approche théorique dans la région $\Omega_{\rm eff} \lesssim 0.9\omega_\perp$ – Cas d'un piège purement quadratique

Nous commençons notre analyse par le cas d'un piège purement quadratique. Nous supposons le condensat en rotation à une fréquence $\Omega_{\rm eff}$. Les équations hydrodynamiques peuvent être écrites pour un champ de vitesse rotationnel [200] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}) \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}((U+g\rho)/m + v^2/2) + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\ . \tag{10.2}$$

On peut développer ces équations autour des solutions stationnaires en écrivant :

$$\rho = \rho_{\rm eq} + \delta\rho\, e^{i\omega t},$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega_{\rm eff}}\times\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{v}\, e^{i\omega t}.$$

En se limitant aux modes $m_z = 0$ sans dépendance angulaire[4], on montre que :

$$i\omega\delta\rho + \boldsymbol{\nabla}(\rho_{\rm eq}\delta\boldsymbol{v}) = 0$$
$$i\omega\delta\boldsymbol{v} + \frac{g}{m}\boldsymbol{\nabla}(\delta\rho) + 2\boldsymbol{\Omega_{\rm eff}}\times\delta\boldsymbol{v} = 0.$$

On peut alors éliminer $\delta\boldsymbol{v}$ et montrer que $\delta\rho$ satisfait à l'équation suivante :

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_{\rm eq}\,\boldsymbol{\nabla}[\delta\rho]) = \frac{m}{g}\,(\omega^2 - 4\Omega_{\rm eff}^2)\,[\delta\rho]\ . \tag{10.3}$$

Cette équation est très proche de l'équation 3.9 rencontrée dans le troisième chapitre et qui caractérise les modes d'un condensat cylindrique au repos. Ses solutions peuvent être recherchées sous la forme de polynômes $\delta\rho = P(r^2)$ de degré $2n$ en r. Les fréquences de ces modes vérifient :

$$\omega_n^2 = 4\Omega_{\rm eff}^2 + 2n(n+1)(\omega_\perp^2 - \Omega_{\rm eff}^2). \tag{10.4}$$

On en retiendra deux propriétés majeures :

– **Le mode monopolaire $n = 1$ a une fréquence $\omega_{\rm mp} = 2\omega_\perp$ indépendante de la vitesse de rotation $\Omega_{\rm eff}$.** Ceci peut paraître surprenant quand on sait que le condensat s'équilibre dans un référentiel tournant à $\Omega_{\rm eff}$; la fréquence de rappel effective, qui détermine sa forme, inclut un terme centrifuge et vaut :

$$\omega(\Omega_{\rm eff}) = \omega_\perp\sqrt{1 - \frac{\Omega_{\rm eff}^2}{\omega_\perp^2}}.$$

[4] Il est possible de raisonner de manière plus générale, mais les calculs deviennent nettement plus complexes par cette méthode. Il est plus commode dans le cas général de raisonner à partir des équations hydrodynamiques dans le référentiel tournant [32, 201].

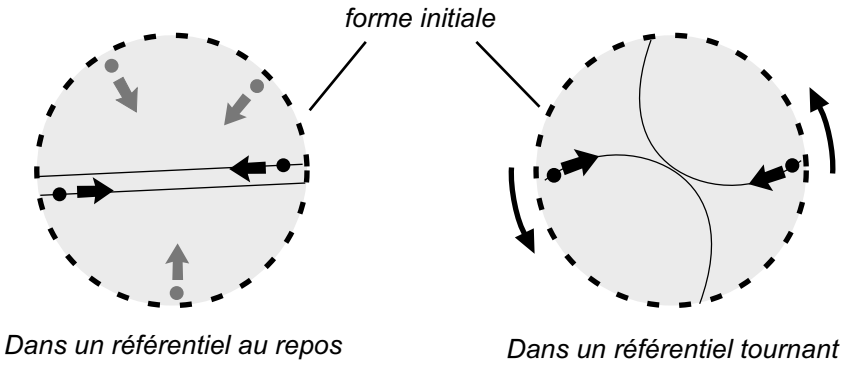


FIGURE 10.4 – L'intuition selon laquelle la rotation diminue a fréquence du monopôle comme elle diminue la fréquence apparente du piège est fausse. Sur la figure de gauche : monopôle dans un gaz parfait. Une oscillation correspond à une interversion de deux particules diamétralement opposées. C'est pourquoi $\omega_{\rm mp} = 2\omega_\perp$. Sur la figure de droite : monopôle dans un gaz parfait tournant : les trajectoires sont courbées par la force de Coriolis. Il n'est pas possible de remplacer $\omega_\perp$ par sa valeur effective pour calculer la fréquence du monopôle.

Tout semble donc se passer comme si le condensat voyait un piège plus mou, et l'on pourrait être tenté de croire que la fréquence du mode monopolaire doit être renormalisée de la même façon. Ce serait négliger la force de Coriolis : l'action de celle-ci change la trajectoire des particules de telle manière que la fréquence d'oscillation du monopôle reste égale à $2\omega_\perp$. La figure 10.4 propose une image de cet effet pour un gaz parfait : dans le référentiel du laboratoire, le mode monopolaire correspond à une demi-oscillation du mode dipolaire au cours de laquelle deux particules intervertissent leur positions. La fréquence du monopôle est donc double de celle du piège. Dans le référentiel tournant, les trajectoires sont courbées, et il n'est pas possible de remplacer simplement la fréquence du piège par la fréquence effective vue par les atomes. Ceci explique pourquoi l'intuition d'une fréquence monopolaire diminuée par la rotation est fausse.

– **Tous les modes purement radiaux sont dégénérés dans la limite $\Omega_{\rm eff} \to \omega_\perp$.** La formule 10.4 devient en effet $\omega_n = 2\omega_\perp$ pour tout n lorsque $\Omega_{\rm eff} = \omega_\perp$. Cette dégénérescence peut rappeler celle qui est présente à l'intérieur des niveaux de Landau. Elle est pourtant différente, car elle porte sur des états excités d'un système macroscopique, alors que celle des niveaux de Landau porte sur les états d'énergie d'une particule unique. La dégénérescence des modes d'excitation dans notre système pourrait avoir des conséquences intéressantes sur sa réponse linéaire.

Le premier de ces résultats permet d'expliquer le comportement de la courbe 10.3 dans la deuxième région, dans laquelle l'effet du terme quartique du potentiel ne se fait pas encore sentir. La théorie prévoit alors que la fréquence du mode monopolaire est constante et égale à sa valeur sans rotation, ce que nous vérifions bien expérimentalement.

10.2.2 Dans la région $\Omega_{\rm eff} \sim \omega_\perp$ – Cas d'un piège quadratique+quartique

Dans la région $\Omega_{\rm eff} \sim \omega_\perp$, la taille du nuage devient grande et il n'est plus possible de négliger le terme quartique. Peu de modifications sont à apporter au traitement précédent. L'équation 10.3 est toujours valable. En posant $x = r/R$, où $R = (4\mu/k)^{1/4}$ on peut expliciter $\rho_{\rm eq}$ de la manière suivante :

$$\rho_{\rm eq} = \mu(1 - \epsilon x^2 - x^4) \qquad \text{avec} \qquad \epsilon = \frac{mR^2}{2\mu}(\omega_\perp^2 - \Omega_{\rm eff}^2)\ . \tag{10.5}$$

L'équation 10.3 devient alors :

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x(1-\epsilon x^2-x^4)\,\frac{d[\delta\rho]}{dx}\right)=\frac{m}{g}\,(\omega^2-4\Omega_{\text{eff}}^2)\,[\delta\rho]. \tag{10.6}$$

Trouver les modes propres revient à diagonaliser l'opérateur qui agit sur $\delta\rho$ dans le membre de gauche. Nous nous intéressons exclusivement au mode de plus basse énergie, de sorte qu'il nous faut trouver la plus basse valeur propre $\Lambda(\epsilon)$ de l'opérateur. Cela a été fait numériquement par Frédéric Chevy à l'aide d'une méthode variationnelle basée sur des solutions polynômiales. Pour de faibles fréquences de rotation ($\epsilon \gg 1$), on montre que $\Lambda(\epsilon)$ tend vers 8ϵ, ce qui redonne le résultat $\omega_{\text{mp}} = 2\omega_\perp$. A la rotation critique $\Omega_{\text{eff}} = \omega_\perp$, on trouve $\Lambda(\epsilon) \simeq 11.5$. On a reporté sur la figure 10.3 la fréquence du mode monopolaire déduite de ce traitement (trait plein). Cette courbe reste proche de $\omega_{\text{mp}}(0)$ pour des fréquences de rotation largement inférieures à $\omega_\perp$. Vers $\Omega_{\text{eff}} \sim \omega_\perp$, la fréquence théorique augmente sensiblement, et rend compte de manière plutôt satisfaisante des données expérimentales. Le désaccord observé pourrait provenir du fait que le traitement théorique considère un condensat cylindrique alors que dans la réalité il est de longueur finie et confiné selon z.

10.3 Structure du mode

La structure du mode monopolaire d'un condensat tournant dépend de la vitesse de rotation :

- $\Omega_{\text{eff}} < \omega_\perp$: le nuage et le réseau sont dilatés et contractés périodiquement et en phase. La forme du nuage reste la même au cours de l'évolution. La série d'images de la figure 10.2(a) prise pour $\Omega_2/2\pi = 62\,\text{Hz}$ est représentative de ce comportement.
- $\Omega_{\text{eff}} \sim \omega_\perp$: à partir de $\Omega_2/2\pi = 64\,\text{Hz}$, le comportement du nuage devient significativement différent. Les images de la figure 10.2(b) (64 Hz) révèlent l'apparition périodique d'un léger trou de densité au centre du nuage. Sur les images prises à 66 Hz, cet effet est nettement plus visible : le nuage à 25 ms n'est pas creusé, alors que sur les quatre ou cinq images suivantes, il apparaît avec un large trou puis un trou plus petit. Sur certaines images, la densité est même pratiquement nulle au centre du nuage. Enfin, les dernières images du cycle ne présentent pas de trou de densité. Pour expliquer ce phénomène, on peut remarquer que pour des fréquences de rotation proches de $\omega_\perp$, le profil de densité d'équilibre est approximativement donné par :

  $$\rho_{\text{eq}}(r) = \rho(0)(1-\alpha r^4).$$

  Or l'excitation $\delta\rho$ est proportionnelle à r^2 et change de signe durant une période. Ce terme est dominant au centre du nuage devant r^4, de sorte que suivant son signe, la courbure du profil est positive ou négative. Cela permet d'expliquer l'apparition périodique d'un trou de densité correspondant à une courbure négative du profil de densité.
- $\Omega_{\text{eff}}/2\pi = 68\,\text{Hz}$: le comportement du mode monopolaire devient asymétrique. Il s'apparente à des ondes de densité rentrantes (figure 10.2(d)), naissant au bord du nuage et progressant vers son centre. Durant chaque période d'oscillation monopolaire, une onde est créée, puis se dirige vers le centre où elle finit en un pic étroit. Le phénomène se reproduit sur plusieurs périodes consécutives, comme le montre la figure 10.5. Son interprétation n'est pas encore claire. On peut envisager que plusieurs modes $m_z = 0$ sont excités en même temps, avec des phases différentes. Comme ils oscillent presque tous à la même fréquence lorsque $\Omega_{\text{eff}} = \omega_\perp$ (équation 10.4), il est possible que la combinaison linéaire de plusieurs d'entre eux conduise à une structure d'ondes rentrantes périodiques.

  Le fait que seules des ondes rentrantes soient observées est surprenant. Nous avons ainsi cherché à exciter le mode monopolaire avec un signe opposé. Au lieu de multiplier I par

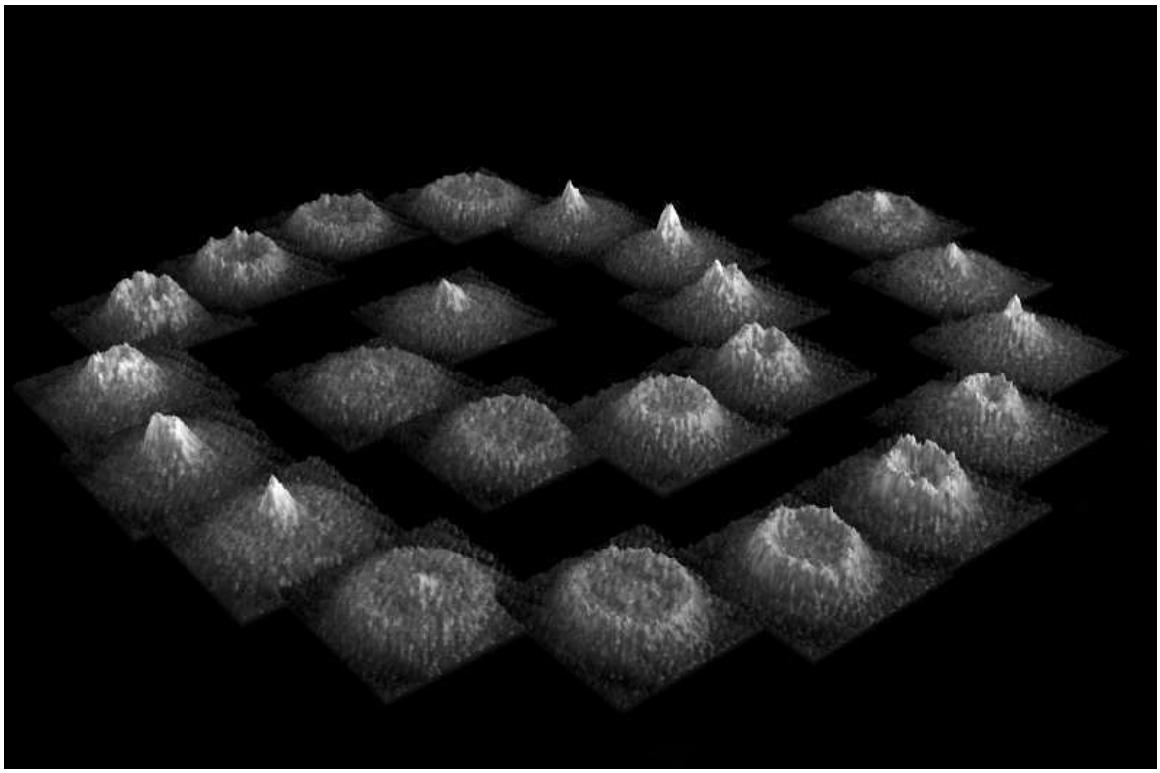


FIGURE 10.5 – Oscillation monopolaire d'un condensat en rotation pour $\Omega_2/2\pi = 68\,\mathrm{Hz}$. L'altitude des images tridimensionnelles est proportionnelle à la densité optique. La séquence temporelle (de 18 ms à 40 ms après l'excitation) a été étalée le long d'une spirale et en partant du centre. L'intervalle de temps séparant deux images est d'une milliseconde.

4 pendant l'excitation, nous l'avons simplement annulé, dans l'espoir de voir des ondes sortantes. Mais rien de tel n'a pu être observé : l'oscillation monopolaire ressemble dans ces conditions à celle de la figure 10.2(c). On notera toutefois que la structure en onde rentrante n'a été observée nettement que sur quelques unes des expériences réalisées autour de 68 Hz. Le phénomène opposé pourrait nous avoir échappé.

10.4 Conclusion

Nous avons caractérisé le mode monopolaire d'un condensat en rotation : fréquence et structure ont été étudiés en fonction de la vitesse de rotation. Ces mesures pourraient nous aider à caractériser davantage l'état du gaz en rotation, en particulier dans la région $\Omega_{\mathrm{eff}} = \omega_\perp$ où il n'est pas complètement clair que les atomes sont dans un état condensé. De ce point de vue, il est très important de noter que ces mesures ont été réalisées dans un piège anharmonique. En effet, si l'on suit l'argument développé par Pitaevskii et Rosch (*cf.* chapitre 2 et [73]), on peut montrer que dans un piège harmonique, avec des interactions ponctuelles et *quelque soit l'état du système à N-corps*, la fréquence du mode monopolaire transverse est égale à $2\omega_\perp$ (géométrie bidimensionnelle). Il semble donc vain de rechercher une signature d'un changement d'état par une variation éventuelle de la fréquence du mode monopolaire.

Néanmoins, l'argument de Pitaevskii et Rosch ne tient plus dans un piège anharmonique comme celui que nous avons mis en place. Et de fait, nous avons mesuré un écart à la prédiction $\omega_{\mathrm{mp}} = 2\omega_\perp$. La question théorique qui reste à élucider est de savoir si la nature de cet écart peut

permettre de discriminer entre un état condensé et un état plus exotique, fragmenté ou de Hall.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce manuscrit un certain nombre de résultats expérimentaux relatifs à la rotation d'un condensat de Bose-Einstein. Du fait des propriétés de superfluidité et de cohérence du condensat, le champ de vitesse doit satisfaire à la condition d'irrotationnalité $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ partout où la densité ne s'annule pas. Cette contrainte est à l'origine de l'existence des vortex quantifiés, qui par leur nombre caractérisent la nature de l'écoulement. Ainsi, sur un même montage, et par de petits changements de séquence expérimentale, plusieurs classes de comportement ont pu être observées.

Nous avons d'abord mis en évidence des écoulements irrotationnels (partie II), dans lesquels aucun vortex n'est présent. Le moment cinétique est entièrement contenu dans les excitations de surface excitées par la cuillère, et peut atteindre des valeurs significativement grandes dans la limite non-linéaire. Ces modes sont l'unique moyen expérimental que nous avons utilisé pour initier un mouvement de rotation. Ils peuvent, sous certaines conditions, devenir instables et permettre l'introduction de courtes échelles de longueur à la surface du condensat. Les vortex naissent de cette turbulence et peuvent ensuite s'organiser au sein du condensat (chapitre 5).

Les écoulements impliquant un unique vortex ont été décrits dans la partie III. Le vortex consiste en une ligne courbe traversant le condensat, et où la condition $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ est violée. Sauf dans le cas rare où il est centré et aligné sur l'axe de symétrie du condensat, le vortex brise la symétrie de rotation. En particulier, nous avons montré qu'il adopte une forme courbée proche d'un "U" ou d'un "N". Le moment cinétique du nuage étant lentement dissipé, il a été possible de suivre l'évolution de cette forme dans le temps, durant l'expulsion de la ligne de vortex. Un mécanisme en deux temps est apparu : la ligne de vortex diminue d'abord sa longueur en se courbant davantage avant de s'éloigner de l'axe de symétrie du condensat. Pour la première fois, à notre connaissance, il a ainsi été possible d'observer la dynamique dissipative d'une unique ligne de vortex dans un superfluide. Un autre aspect de la dynamique d'une ligne de vortex a également été étudié : il s'agit des modes d'ondulation (modes de Kelvin). Ces modes se couplent sélectivement à l'un des modes quadrupolaires. Deux études, l'une en temps et l'autre en fréquence, ont montré une différence entre l'amortissement des deux modes quadrupolaires. L'apparition de petites franges sur la ligne de vortex dans l'un des cas a permis d'attribuer cette différence aux modes de Kelvin.

Un dernier type d'écoulement a attiré notre attention : il s'agit des écoulements de rotation rapide, obtenus lorsque le nombre de vortex devient grand. On peut en effet montrer qu'il est plus favorable énergétiquement de répartir la vorticité $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ sur plusieurs vortex de charge unité que sur un vortex unique de charge multiple. Au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de vortex, l'écoulement devient moins contraint et commence à ressembler à celui d'un solide en rotation : $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \mathrm{Cte}$. Compte-tenu de récentes propositions théoriques (vortex géants, régime de Hall) et de certaines contraintes expérimentales (anisotropie statique, nature de l'excitation), nous avons fait le choix, pour étudier cette limite, de superposer un faisceau laser très désaccordé à notre piège magnétique. Dans ce piège hybride, la rotation du nuage peut être poussée dans des régions proches — et même au-delà — de la rotation critique $\Omega = \omega_\perp$. Les nuages obtenus s'étalent largement, témoignant d'une importante force centrifuge. Néanmoins, pour les vitesses

de rotation les plus rapides observées, le nombre de vortex était insuffisant pour rendre compte de la vorticité moyenne attendue. Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer cet effet. L'explication que nous avons retenue — les vortex sont courbés et emmêlés de sorte qu'on ne les voit pas ou peu — reste à confirmer. Les modes de ces nuages tournant rapidement, monopôle et quadrupôle, ont été étudiés et pourraient servir de test aux diverses interprétations [202].

Ces grands types d'écoulements ont été décrits dans ce manuscrit par nombre croissant de vortex. Incidemment, il se trouve que leur succession comme sujets d'études a été approximativement la même, sur notre expérience comme ailleurs. En 1999-2000, on s'intéressait aux vortex et surtout aux moyens de les produire. Les modes de surface, moyen principal de mettre les condensats en rotation, ont ainsi été largement étudiés. Sur notre montage expérimental, ils ont été les déclencheurs de la rotation : c'est par eux que le moment cinétique entre dans le nuage, c'est par eux aussi que les courtes longueurs d'ondes — et donc les vortex — apparaissent en surface. Ils ne sont pas pour autant le seul et unique moyen d'inclure des vortex ou du moment cinétique dans un condensat : songeons aux expériences du JILA [62] ou du MIT [132], où la phase du vortex est imprimée directement par des techniques d'optique quantique, ou encore à la méthode d'"evaporative spin up" développée au JILA [98] et consistant à traverser la transition de condensation avec un nuage déjà tournant. Cette dernière méthode, faisant apparaître les vortex en même temps que la phase superfluide, n'est pas soumise à la contrainte $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = 0$ ou à la nécessité de faire apparaître les vortex au bord. L'excitation de modes de surfaces n'est donc pas un passage obligé des expériences de rotation. D'autres méthodes existent, et d'autres encore pourraient voir le jour [203].

Ces premières années d'étude des vortex dans les condensats gazeux ont aussi permis d'identifier la dynamique d'un vortex isolé. Les expériences de précession d'un vortex (JILA) ou de dynamique d'un vortex unique dans un piège presque rond (JILA) ont précédé les résultats de notre troisième partie. Ajoutant à ces contributions les nombreuses publications théoriques consacrées au sujet, on peut dire aujourd'hui que la dynamique d'un vortex unique dans un condensat gazeux semble bien comprise. Une question importante reste cependant. Cette question existe depuis bien longtemps, commune aux vortex des superfluides comme à ceux des supraconducteurs, et n'a toujours pas trouvé de réponse complète : il s'agit de la force transverse agissant sur un vortex. Cette force, mentionnée dans le chapitre 5, doit-elle inclure ou non un terme dû au nuage thermique ou à la phase normale ? Quelle est son intensité ? Ces questions font toujours débat. Les vortex dans les condensats gazeux n'ont pas encore apporté de données déterminantes sur le sujet ; mais la maîtrise que l'on a aujourd'hui de ces vortex, associée à la possibilité (unique) de les isoler, pourraient ouvrir la voie à des expériences précises et originales qui renouvelleraient ce débat.

Plus récemment, enfin, une tendance nette s'est dégagée en faveur des condensats contenant beaucoup de vortex. D'abord théorique, cette activité s'est inspirée, comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 8, de la physique de l'effet Hall quantique fractionnaire. La limite des rotations rapides dans un piège harmonique pourrait en effet conduire à des gaz quantiques nouveaux, très corrélés, et aux propriétés statistiques curieuses. Notre groupe a pris le parti d'orienter ses recherches dans cette direction. Les résultats de la partie IV de ce manuscrit témoignent à la fois de la jeunesse de ce domaine, mais aussi des nombreuses possibilités ouvertes. L'état des connaissances sur le sujet est en pleine progression, et les stratégies expérimentales qui pourraient conduire à l'observation d'états de Laughlin commencent à être mieux définies : l'utilisation d'une onde stationnaire ainsi que le contrôle de la longueur de diffusion semblent ainsi des étapes indispensables, qui font l'objet de recherches dans notre groupe comme au JILA. Des méthodes de diagnostic ont déjà été développées : au JILA, ce sont les modes de Tkachenko du réseau de vortex qui ont été étudiés [138], dans notre groupe, les modes de surface monopolaire et quadrupolaire [10]. L'enjeu de ces recherches est de taille, puisqu'une nouvelle transition de phase quantique pourrait être observée dans les gaz froids, transition inspirée de la physique

de la matière condensée et jamais observée encore avec des bosons.

Enfin, le régime des rotations rapides a un autre champ d'application. Dans des potentiels raides, on pourrait ainsi observer des états où un condensat en rotation rapide, sous l'effet de la force centrifuge, se creuse en son centre jusqu'à laisser place à un vortex géant et multiplement chargé. Un tel anneau de vorticité pourrait servir de base à l'étude de l'effet Sagnac avec des atomes, en vue éventuellement du développement d'un gyromètre à atomes.

Bibliographie

Bibliographie

[1] K. W. Madison, F. Chevy, V. Bretin, and J. Dalibard, Stationary States of a Rotating Bose-Einstein Condensate : Routes to Vortex Nucleation, Phys. Rev. Lett. **86**, 4443 (2001).

[2] F. Chevy, K. Madison, V. Bretin, and J. Dalibard, Interferometric detection of a single vortex in a dilute Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **64**, 031601(R) (2001).

[3] F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K. Madison, and J. Dalibard, The transverse breathing mode of an elongated Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **88**, 250402 (2002).

[4] P. Rosenbusch, D. Petrov, S. Sinha, F. Chevy, V. Bretin, Y. Castin, G. Shlyapnikov, and J. Dalibard, Critical rotation of a harmonically trapped Bose gas, Phys. Rev. Lett. **88**, 250403 (2002).

[5] P. Rosenbusch, V. Bretin, and J. Dalibard, Dynamics of a single vortex line in a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **89**, 200403 (2002).

[6] M. Cozzini, S. Stringari, V. Bretin, P. Rosenbusch, and J. Dalibard, Scissors mode of a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **67**, 021602(R) (2003).

[7] V. Bretin, P. Rosenbusch, and J. Dalibard, Dynamics of a single vortex line in a Bose-Einstein condensate, J. Phys. B **5**, S23 (2003).

[8] V. Bretin, P. Rosenbusch, F. Chevy, G. V. Shlyapnikov, and J. Dalibard, Quadrupole oscillation of a single-vortex Bose-Einstein condensate : evidence for Kelvin modes, Phys. Rev. Lett. **90**, 100403 (2003).

[9] V. Bretin, S. Stock, Y. Seurin, and J. Dalibard, Fast rotation of an ultra-cold Bose gas, Phys. Rev. Lett. **92**, 050403 (2004).

[10] S. Stock, V. Bretin, F. Chevy, and J. Dalibard, Shape oscillations of a rapidly rotating Bose-Einstein condensate, Eur. Phys. Lett. **65**, 594 (2004).

[11] J. D. Miller, R. A. Cline, and D. J. Heinzen, Photo-association spectrum of ultra-cold Rb atoms, Phys. Rev. Lett. **71**, 2204 (1993).

[12] H. Marion, F. P. D. Santos, M. Abgrall, S. Zhang, Y. Sortais, S. Bize, I. Maksimovic, D. Calonico, J. Grünert, C. Mandache, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, A. Clairon, and C. Salomon, Search for variations of fondamental constants using atomic fountain clocks, Phys. Rev. Lett. **90**, 150801 (2003).

[13] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, and J. Dalibard, Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate, Appl. Phys. B **69**, 257–61 (1999).

[14] J. Cubizolles, T. Bourdel, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, Production of long-lived ultracold Li_2 molecules from a Fermi gas, Phys. Rev. Lett. **91**, 240401 (2003).

[15] S. Dürr, T. Voltz, A. Marte, and G. Rempe, Observation of molecules produced from a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **92**, 020406 (2004).

[16] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas, Nature **426**, 537 (2003).

[17] C. A. Regal and D. S. Jin, Measurement of Positive and Negative Scattering Lengths in a Fermi Gas of Atoms, Phys. Rev. Lett. **90**, 230404 (2003).

[18] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, Science **269**, 198 (1995).

[19] M. Greiner, O. Mandel, T. Hänsch, and I. Bloch, Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate, Nature **419**, 51 (2002).

[20] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[21] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Observation of interference between two Bose condensates, Science **275**, 637–641 (1997).

[22] Y. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenbregt, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, Diffraction of a released Bose–Einstein condensate by a pulsed standing light wave, Phys. Rev. Lett. **83**, 284 (1999).

[23] J. F. Allen and A. D. Misener, Flow of liquid helium II, Nature **141**, 75 (1938).

[24] F. London, The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy, Nature **141**, 643 (1938).

[25] S. Balibar, Looking back at superfluid helium, cond-mat/0303561 (2003).

[26] A. J. Leggett, Superfluidity, Rev. Mod. Phys. **71**, S318 (1999).

[27] R. J. Donnelly, *Quantized vortices in helium II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[28] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, McGraw-Hill, 1996.

[29] D. R. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, IOP Publishing Ltd., New York, 1990.

[30] O. Avenel, P. Hakonen, and E. Varoquaux, Detection of the rotation of the Earth with a superfluid gyrometer, Phys. Rev. Lett. **78**, 3602 (1997).

[31] D. Koelle, R. Kleiner, F. Ludwig, E. Dantsker, and J. Clarke, High-transition-temperature superconducting quantum interference devices, Rev. Mod. Phys. **71**, 631 (1999).

[32] F. Chevy, *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*, thèse de doctorat, Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'Ecole normale supérieure (disponible sur le serveur http ://tel.ccsd.cnrs.fr), 2001.

[33] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969–3973 (1995).

[34] C. Cohen-Tannoudji, Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif, 1996-1997, Cours du Collège de France, disponible sur `http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html`.

[35] C. Cohen-Tannoudji, Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra-froids, 1997-1998, Cours du Collège de France, disponible sur `http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html`.

[36] C. Cohen-Tannoudji, Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra-froids (effet des interactions), 1998-1999, Cours du Collège de France, disponible sur `http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html`.

[37] C. Cohen-Tannoudji, Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra-froids (propriétés de cohérence), 1999-2000, Cours du Collège de France, disponible sur `http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html`.

[38] C. Cohen-Tannoudji, Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra-froids (réponse d'un condensat à divers types d'excitation), 2000-2001, Cours du Collège de France, disponible sur `http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html`.

[39] C. Cohen-Tannoudji, Condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultra-froids (rotation et modes propres), 2001-2002, Cours du Collège de France, disponible sur `http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/index.html`.

[40] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[41] D. Guéry-Odelin, *Dynamique collisionnelle des gaz d'alcalins lourds : du refroidissement évaporatif à la condensation de Bose-Einstein*, thèse de doctorat, Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'Ecole normale supérieure (disponible sur le serveur http ://tel.ccsd.cnrs.fr), 1998.

[42] S. Chu, The manipulation of neutral particles, Rev. Mod. Phys. **70**, 685 (1998).

[43] C. N. Cohen-Tannoudji, Manipulating atoms with photons, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).

[44] W. D. Phillips, Laser cooling and trapping of neutral atoms, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).

[45] W. Wohlleben, F. Chevy, K. W. Madison, and J. Dalibard, An atom faucet, Eur. Phys. J. D **15**, 237–244 (2001).

[46] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023 (1989).

[47] V. Schweikhard, I. Coddington, P. Engels, V. P. Mogendorff, and E. A. Cornell, Rapidly rotating Bose-Einstein condensates in and near the Lowest Landau Level, Phys. Rev. Lett. **92**, 040404 (2004).

[48] E. Hodby, S. A. Hopkins, G. Hechenblaikner, N. L. Smith, and C. J. Foot, The experimental observation of a superfluid gyroscope in a dilute Bose condensed gas, Phys. Rev. Lett. **91**, 090403 (2003).

[49] H. F. Hess, Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).

[50] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms, Science **298**, 2179 (2002).

[51] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a ^{6}Li Fermi gas, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).

[52] D. Guéry-Odelin, Mean-field effects in a trapped gas, Phys. Rev. A **66**, 033613 (2002).

[53] Y. Castin and R. Dum, Bose-Einstein condensation in time dependent traps, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315–5319 (1996).

[54] Y. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Bose-Einstein condensation in trapped atomic gases, Phys. Rev. Lett. **76**, 2670–2673 (1996).

[55] P. Storey and M. Olshanii, Closed class of hydrodynamical solutions for the collective excitations of a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **62**, 33604 (2000).

[56] P. Öhberg, E. L. Surkov, I. Tittonen, S. Stenholm, M. Wilkens, and G. V. Shlyapnikov, Low-energy excitation of a trapped Bose-condensed gas, Phys. Rev. A **56**, R3346 (1997).

[57] S. Stringari, Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360–2363 (1996).

[58] N. N. Bogoliubov, On the theory of superfluidity, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).

[59] S. T. Beliaev, Sov. Phys. JETP **34**, 323 (1958).

[60] P. Kapitza, Viscosity of liquid helium below the λ-point, Nature **141**, 74 (1938).

[61] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, Observation of Superfluid Flow in a Bose-Einstein Condensed Gas, Phys. Rev. Lett. **85**, 2228–2231 (2000).

[62] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Vortices in a Bose-Einstein Condensate, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).

[63] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **84**, 806–809 (2000).

[64] C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, J. M. Vogels, K. Xu, and W. Ketterle, Vortex nucleation in a stirred Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **87**, 210402 (2001).

[65] E. Hodby, G. Hechenblaikner, S. A. Hopkins, O. M. Maragò, and C. J. Foot, Vortex nucleation in Bose-Einstein condensates in an oblate, purely magnetic potential, Phys. Rev. Lett. **88**, 010405 (2002).

[66] D. Guéry-Odelin and S. Stringari, Scissors mode and superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas, Phys. Rev. Lett. **83**, 4452 (1999).

[67] O. M. Maragò, S. A. Hopkins, J. Arlt, E. Hodby, G. Hechenblaikner, and C. J. Foot, Observation of the Scissors Mode and Evidence for Superfluidity of a Trapped Bose-Einstein Condensed Gas, Phys. Rev. Lett. **84**, 256–259 (2000).

[68] R. P. Feynman, Progress in Low Temperature Physics, volume 1, page 17, North-Holland, Amsterdam, 1955.

[69] M. Guilleumas and L. P. Pitaevskii, Landau damping of transverse quadrupole oscillations of an elongated Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **67**, 053607 (2003).

[70] B. Jackson and E. Zaremba, Accidental suppression of Landau damping of the transverse breathing mode in elongated Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **89**, 150402 (2002).

[71] Y. Kagan and L. A. Maksimov, The nonlinear damping of Bose-Einstein condensate oscillations at ultra-low temperatures, preprint cond-mat/0212377.

[72] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer-Verlag, New-York, 1988.

[73] L. P. Pitaevskii and A. Rosch, Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions, Phys. Rev. A **55**, R853 (1997).

[74] M. Guilleumas and L. P. Pitaevskii, Temperature-induced resonnances and Landau damping of collective modes in Bose-Einstein condensed gases in spherical traps, Phys. Rev. A **61**, 013602 (1999).

[75] M. Rusch and K. Burnett, Mean-field theory for excitations of trapped Bose-condensates at finite temperatures, Phys. Rev. A **59**, 3851 (1999).

[76] U. A. Khawaja and H. Stoof, The transverse breathing mode of an elongated Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **62**, 053602 (2000).

[77] S. Giorgini, Collisionless dynamics of dilute Bose gases : role of quantum and thermal fluctuations, Phys. Rev. A **61**, 063615 (2000).

[78] L. Teidl, A. Csordás, R. Graham, and P. Szépfalusy, Shifts and widths of collective excitations in trapped Bose gases determined by the dielectric formalism, Phys. Rev. A **61**, 043606 (2000).

[79] S. Morgan, A gapless theory of Bose-Einstein condensation in dilute gases at finite temperature, J. Phys. B **33**, 3847 (2000).

[80] Y. Kagan and L. A. Maksimov, The damping of the Bose-condensate oscillations in a trap at zero temperature, Phys. Rev. A **64**, 013606 (2001).

[81] J. E. Williams and A. Griffin, Damping of condensate collective modes due to equilibration with the noncondensate, Phys. Rev. A **63**, 023612 (2001).

[82] J. E. Williams and A. Griffin, Damped Bogoliubov excitations of a condensate interacting with a static thermal cloud, Phys. Rev. A **64**, 013606 (2001).

[83] B. Jackson and E. Zaremba, Phys. Rev. Lett. **87**, 100404 (2001).

[84] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Temperature-Dependent Damping and Frequency Shifts in Collective Excitations of a Dilute Bose-Einstein Condensate, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (1997).

[85] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, and W. Ketterle, Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **81**, 500–503 (1998).

[86] O. Maragò, G. Hechenblaikner, E. Hodby, and C. J. Foot, Temperature dependence and frequency shifts of the scissors mode of a trapped Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **86**, 3938 (2001).

[87] D. Guéry-Odelin, F. Zambelli, J. Dalibard, and S. Stringari, Collective oscillations of a classical gas confined in harmonic traps, Phys. Rev. A **60**, 4851 (1999).

[88] E. Zaremba, T. Nikuni, and A. Griffin, J. Low Temp. Phys. **116**, 277 (1999).

[89] Y. Castin and L. Pricoupenko, communication privée.

[90] E. Hodby, O. M. Maragò, G. Hechenblaikner, and C. J. Foot, Experimental Observation of Beliaev Coupling in a Bose-Einstein Condensate, Phys. Rev. Lett. **86**, 2196 (2001).

[91] S. Stringari, Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps, Phys. Rev. A **58**, 2385 (1998).

[92] Y. Kagan and L. A. Maksimov, Relaxation of the Bose-condensate oscillations in the mesoscopic system at $T = 0$, cond-mat/0312642 .

[93] P. O. Fedichev, U. R. Fischer, and A. Recati, Zero-temperature damping of Bose-Einstein condensate oscillations by vortex-antivortex pair creation, Phys. Rev. A **68**, 011602(R) (2003).

[94] A. Recati, F. Zambelli, and S. Stringari, Overcritical rotation of a trapped Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **86**, 377 (2001).

[95] L. S. Brown and G. Gabrielse, Rev. Mod. Phys. **58**, 233 (1986).

[96] V. Bretin, Etude de la fraction thermique dans les expériences de tourbillons quantiques sur les condensats de Bose-Einstein, mémoire de DEA, DEA de Physique Quantique, 2000.

[97] D. Guéry-Odelin, Spinning up and down a Boltzmann gas, Phys. Rev. A **62**, 033607 (2000).

[98] P. C. Haljan, I. Coddington, P. Engels, and E. A. Cornell, Driving Bose-Einstein condensate vorticity with a rotating normal cloud, Phys. Rev. Lett. **87**, 210403 (2001).

[99] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mécanique*, Editions Mir, Moscou, 1982.

[100] M. Edwards, C. W. Clark, P. Pedri, L. Pitaevksii, and S. Stringari, Consequence of superfluidity on the expansion of a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **88**, 070405 (2002).

[101] G. Hechenblaikner, E. Hodby, S. A. Hopkins, O. M. Maragò, and C. J. Foot, Direct observation of irrotationnal flow and evidence for superfluidity in a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **88**, 070406 (2002).

[102] S. Sinha and Y. Castin, Dynamical instability of a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **87**, 190402 (2001).

[103] W. F. Vinen, The detection of a single quantum of circulation in liquid helium II, Proc. Roy. Soc. **A260**, 218.

[104] E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon, and R. E. Packard, Observation of Stationary Vortex Arrays in Rotating Superfluid Helium, Phys. Rev. Lett. **43**, 214 (1979).

[105] P. G. Saffman, *Vortex dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[106] S. Inouye, S. Gupta, T. Rosenband, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, T. L. Gustavson, A. E. Leanhardt, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Observation of vortex phase singularities in Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **87**, 080402 (2001).

[107] A. J. Leggett, Bose-Einstein condensation in the alkali gases, Rev. Mod. Phys. **73**, 333 (2001).

[108] A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, Vortices in a trapped dilute Bose-Einstein condensate, J. Phys. : Condens. Matter **13**, R135 (2001).

[109] D. J. Thouless, P. Ao, and Q. Niu, Transverse force on a quantized vortex in a superfluid, Phys. Rev. Lett. **76**, 3758 (1996).

[110] E. B. Sonin, Magnus force in superfluids and superconductors, Phys. Rev. B **55**, 485 (1997).

[111] S. V. Iordanskii, On the mutual friction between the normal and the superfluid components in a rotating Bose gas, Ann. Phys. (NY) **29**, 335 (1964).

[112] C. Wexler, Magnus and Iordanskii forces in superfluids, Phys. Rev. Lett. **79**, 1321 (1997).

[113] G. Baym and E. Chandler, The hydrodynamics of rotating superfluids. I. Zero-temperature, nondissipative theory., J. Low Temp. Phys. **50**, 57 (1983).

[114] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Clarendon Press, Oxford, England, 1961.

[115] B. Damski and K. Sacha, Changes of the topological charges of vortices, J. Phys. A **36**, 2339 (2003).

[116] F. Chevy, K. Madison, and J. Dalibard, Measurement of the angular momentum of a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **85**, 2223 (2000).

[117] I. Bialynicki-Birula, Z. Bialinicki-Birula, and C. Śliwa, Motion of vortex lines in quantum mechanics, Phys. Rev. A **61**, 032110 (2000).

[118] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Nonlinear dynamics of the vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **67**, 033610 (2003).

[119] F. Dalfovo and S. Stringari, Shape deformations and angular-momentum transfer in trapped Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A **63**, 011601 (2001).

[120] D. L. Feder, A. A. Svidzinsky, A. L. Fetter, and C. W. Clark, Anomalous Modes Drive Vortex Dynamics in Confined Bose-Einstein Condensates, Phys. Rev. Lett. **86**, 564 (2001).

[121] C. Lobo, A. Sinatra, and Y. Castin, Vortex lattice formation in Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **92**, 020403 (2004).

[122] G. Baym and C. J. Pethick, Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas, Phys. Rev. Lett. **76**, 6–9 (1996).

[123] F. Dalfovo and S. Stringari, Bosons in anisotropic traps : Ground state and vortices, Phys. Rev. A **53**, 2477–85 (1996).

[124] Y. Castin and R. Dum, Bose-Einstein condensates with vortices in rotating traps, Eur. Phys. J. D **7**, 399–412 (1999).

[125] D. L. Feder, C. W. Clark, and B. I. Schneider, Vortex Stability of Interacting Bose-Einstein Condensates Confined in Anisotropic Harmonic Traps, Phys. Rev. Lett. **82**, 4956 (1999).

[126] M. Krämer, L. Pitaevskii, S. Stringari, and F. Zambelli, Vortex nucleation and quadrupole deformation or a rotating Bose-Einstein condensate, Lasers Physics **12**, 113 (2002).

[127] E. Lundh and P. Ao, Hydrodynamic approach to vortex lifetimes in trapped Bose condensates, Phys. Rev. A **61**, 063612 (2000).

[128] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Vortex precession in Bose-Einstein condensate : observation with filled and empty cores, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).

[129] P. O. Fedichev and G. V. Shlyapnikov, Dissipative dynamics of a vortex state in a trapped Bose-condensed gas, Phys. Rev. A .

[130] J. E. Williams and M. J. Holland, Preparing topological states of a Bose–Einstein condensate, Nature **401**, 568 (1999).

[131] P. C. Haljan, B. P. Anderson, I. Coddington, and E. A. Cornell, Use of surface wave spectroscopy to characterize tilt modes of a vortex in a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **86**, 2922 (2001).

[132] A. E. Leanhardt, A. Görlitz, A. P. Chikkatur, D. Kielpinski, Y. Shin, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Imprinting vortices in a Bose-Einstein condensate using topological phases, Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002).

[133] A. E. Leanhardt, Y. Shin, D. Kielpinski, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Coreless vortex formation in a spinor Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **90**, 140403 (2003).

[134] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates, Science **292**, 476–479 (2001).

[135] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, and W. Ketterle, Formation and decay of vortex lattices in Bose-Einstein condensates at finite temperatures, Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002).

[136] P. Engels, I. Coddington, P. C. Haljan, and E. A. Cornell, Nonequilibrium effects of anisotropic compression applied to vortex lattices in Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **89**, 100403 (2002).

[137] P. Engels, I. Coddington, P. C. Haljan, V. Schweikhard, and E. A. Cornell, Observation of long-lived vortex agregates in rapidly rotating Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **90**, 170405 (2003).

[138] I. Coddington, P. C. Haljan, V. Schweikhard, and E. A. Cornell, Observation of Tkachenko oscillations in rapidly rotating Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **91**, 100402 (2003).

[139] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, Watching dark solitons decay into vortex rings in a Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **86**, 2926 (2001).

[140] L. Onsager, Nuovo cimento **6, supplément 2**, 249 (1949).

[141] E. J. Yarmchuk and R. E. Packard, Photographic Studies of Quantized Vortex Lines, J. Low Temp. Phys. **46**, 479 (1982).

[142] S. K. Nemirovskii and W. Fiszdon, Chaotic quantized vortices and hydrodynamic processes in superfluid helium, Rev. Mod. Phys. **67**, 37 (1995).

[143] N. G. Berloff, Interactions of vortices and finite amplitude sound waves in a condensate and their role in the decay of superfluid turbulence, cond-mat/0401070 (2004).

[144] H. Träuble and U. Essmann, Vortex lattices in superconductors, Phys. Lett. **24A**, 526 (1967).

[145] R. Blaauwgeers, V. B. Eltsvo, M. Krusius, J. Ruohio, and R. Schanen, Quantized vorticity in superfluid ^{3}He-A : structure and dynamics, cond-mat/0009397 (2000).

[146] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems, J. Phys. C : Solid State Physics **6**, 1181–1203 (1973).

[147] P. Minnhagen, The two-dimensional Coulomb gas, vortex unbinding and superfluid-superconducting films, Rev. Mod. Phys. **59**, 1001–1066 (1987).

[148] P. O. Fedichev and A. E. Muryshev, Equilibrium properties and dissipative dynamics of vortex arrays in trapped Bose-condensed gases, Phys. Rev. A **68**, 061601(R) (2002).

[149] O. N. Zhuravlev, A. E. Muryshev, and P. O. Fedichev, Dissipative dynamics of vortex arrays in anisotropic traps, Phys. Rev. A **64**, 053601 (2001).

[150] A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, Dynamics of a vortex in a trapped Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **62**, 063617 (2000).

[151] J. J. García-Ripoll and V. M. Pérez-García, Nucleation of bended vortices in Bose-Einstein condensates in elongated traps, Phys. Rev. A **63**, 041603 (2001).

[152] J. J. García-Ripoll and V. M. Pérez-García, Vortex bending and tightly packed vortex lattices in Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A **64**, 053611 (2001).

[153] M. Modugno, L. Pricoupenko, and Y. Castin, Bose-Einstein condensates with a bent vortex in rotating traps, Eur. Phys. J. D **22**, 235–257 (2003).

[154] A. Aftalion and T. Riviere, Vortex energy and vortex bending for a rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **64**, 043611 (2001).

[155] A. Aftalion and R. L. Jerrard, On the shape of vortices for a rotating Bose Einstein condensate, (2002).

[156] F. Zambelli and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **81**, 1754 (1998).

[157] W. Thomson, Vibrations of a columnar vortex, Philos. Mag. **10**, 155–168 (1880).

[158] R. A. Ashton and W. I. Glaberson, Vortex waves in superfluid ^{4}He, Phys. Rev. Lett. **42**, 1062 (1979).

[159] R. I. Epstein and G. Baym, Vortex drag and the spin-up time scale for pulsar glitches, Astrophys. J. **387**, 276 (1992).

[160] T. Mizushima, M. Ichioda, and K. Machida, Beliaev damping and Kelvin mode spectroscopy of a Bose-Einstein condensate in the presence of a vortex line, Phys. Rev. Lett. **90**, 180401 (2003).

[161] J. E. Williams, E. Zaremba, B. Jackson, T. Nikuni, and A. Griffin, Dynamical instability of a condensate induced by a rotating thermal gas, Phys. Rev. Lett. **88**, 070401 (2002).

[162] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, K. Stengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein, Observation of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001).

[163] J.-P. Martikainen and H. T. C. Stoof, Quantum fluctuations of a vortex in an optical lattice, Phys. Rev. Lett. **91**, 240403 (2003).

[164] J.-M. Tang, Structure of excited vortices with higher angular momentum in Bose-Einstein condensates, (2003), cond-mat/0309487.

[165] G. B. Hess, Angular momentum of superfluid Helium in a rotating cylinder, Phys. Rev. **161**, 189 (1967).

[166] V. K. Tkachenko, On Vortex Lattices, Sov. Phys. JETP **22**, 1282 (1966), Zh. Eksp. Teor. Fiz 49, p. 1875 (1965).

[167] V. K. Tkachenko, Stability of Vortex Lattices, Sov. Phys. JETP **23**, 1049 (1966), Zh. Eksp. Teor. Fiz. 50, p. 1573 (1966).

[168] G. Baym, Tkachenko modes of vortex lattices in rapidly rotating Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **91**, 110402 (2003).

[169] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mécanique quantique*, Editions Mir, Moscou, 1975.

[170] D. R. Yennie, Integral quantum Hall effect for nonspecialists, Rev. Mod. Phys **59**, 781 (1987).

[171] K. von Klitzing, The quantized Hall effect, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986).

[172] H. L. Stormer, D. C. Tsui, and A. C. Gossard, The fractional quantum Hall effect, Rev. Mod. Phys. **71**, S298 (1999).

[173] R. B. Laughlin, Nobel lecture : fractional quantization, Rev. Mod. Phys. **71**, 863 (1999).

[174] Z.-B. Chen, B. Zhao, and Y.-D. Zhang, Quantum Hall effect in a rotating Bose-Einstein condensate : an atomic twin of the electronic brother ?, cond-mat/0211187 (2002).

[175] N. K. Wilkin and J. M. F. Gunn, Condensation of composite bosons in a rotating BEC, Phys. Rev. Lett. **84**, 6 (2000).

[176] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, and P. Zoller, $\frac{1}{2}$-anyons in small atomic Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **87**, 010402 (2001).

[177] N. R. Cooper, N. K. Wilkin, and J. M. F. Gunn, Quantum phases of vortices in rotating Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **87**, 120405 (2001).

[178] J. Sinova, C. B. Hanna, and A. H. MacDonald, Quantum melting and absence of Bose-Einstein condensation in two-dimensional vortex matter, Phys. Rev. Lett. **89**, 030403 (2002).

[179] B. Paredes, P. Zoller, and J. I. Cirac, Fermionizing a small gas of ultracold bosons, Phys. Rev. A **66**, 033609 (2002).

[180] J. Sinova, C. B. Hanna, and A. H. MacDonald, Measuring the condensate fraction of rapidly rotating trapped boson systems : off-diagonal order from the density profile, Phys. Rev. Lett. **90**, 120401 (2003).

[181] N. Regnault and T. Jolicoeur, Quantum Hall fractions in rotating Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. Lett. **91**, 030402 (2003).

[182] N. Regnault and T. Jolicoeur, Quantum Hall fractions for spinless bosons, cond-mat/0312248 (2003).

[183] T. Nakajima and M. Ueda, Energy gaps and roton structure above the $\nu = \frac{1}{2}$ Laughlin state of a rotating dilute Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. Lett. **91**, 140401 (2003).

[184] U. R. Fischer and G. Baym, Vortex states of rapidly dilute rotating Bose condensed gases, Phys. Rev. Lett. **90**, 140402 (2003).

[185] N. Read and N. R. Cooper, Free expansion of lowest Landau level states of trapped atoms : a wavefunction microscope, cond-mat/0306378 (2003).

[186] T.-L. Ho, Bose-Einstein condensates with large number of vortices, Phys. Rev. Lett. **87**, 060403 (2001).

[187] G. Baym and C. J. Pethick, Vortex core structure and global properties of rapidly rotating Bose-Einstein condensates, cond-mat/0308325 .

[188] L. O. Baksmaty, S. J. Woo, S. Choi, and N. P. Bigelow, Vortex lattices : from the hydrodynamic to the quantum hall regime, cond-mat/0310567 .

[189] U. R. Fischer, P. O. Fedichev, and A. Recati, Vortex liquids and vortex quantum Hall states in trapped rotating Bose gases, cond-mat/0212419 (2002).

[190] K. Yang, F. D. M. Haldane, and E. H. Rezayi, Wigner cristals in the lowest Landau level at low-filling factors, Phys. Rev. B **64**, 081301 (2001).

[191] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **66**, 053606 (2002).

[192] A. L. Fetter, Rotating vortex lattice in a Bose-Einstein condensate trapped in combined quadratic and quartic radials potentials, Phys. Rev. A **64**, 063608 (2001).

[193] G. M. Kavoulakis and G. Baym, Rapidly rotating Bose-Einstein condensates in anharmonic traps, New Journal of Physics **5**, 51.1–51.11 (2003).

[194] A. Aftalion and I. Danaila, Giant vortices in combined harmonic and quartic traps, cond-mat/0309668 (2003).

[195] E. Lundh, Multiply quantized vortices in trapped Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A **65**, 043604 (2002).

[196] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and E. Lundh, Phases of a rotating Bose-Einstein condensate with anharmonic confinement, cond-mat/0401292 (2004).

[197] Y. Seurin, Condensats de Bose-Einstein en rotation rapide, mémoire de DEA, Rapport de stage d'option scientifique, Ecole Polytechnique, 2003.

[198] E. Akkermans and S. Ghosh, Composite bosons description of rapidly rotating Bose-Einstein condensates, cond-mat/0307418 (2003).

[199] A. Aftalion and I. Danaila, communication privée, (2003).

[200] M. Cozzini and S. Stringari, Macroscopic dynamics of a Bose-Einstein condensate containing a vortex lattice, Phys. Rev. A **67**, 041602 (2003).

[201] F. Chevy and S. Stringari, Kelvin modes of a fast rotating Bose-Einstein condensate, Phys. Rev. A **68**, 053601 (2003).

[202] M. A. Cazalilla, Surface modes of ultra-cold atomic clouds with very large number of vortices, Phys. Rev. A **67**, 033613 (2003).

[203] H. Saito and M. Ueda, Adiabatic vortex nucleation by Bragg Reflection in a Bose-Einstein condensate, cond-mat/0401228 (2004).