HAL
open science

Contribution à la caractérisation mécanique de matériaux poro-visco-élastiques en vibro-acoustique

Luc Jaouen

To cite this version:

Luc Jaouen. Contribution à la caractérisation mécanique de matériaux poro-visco-élastiques en vibro-acoustique. Mécanique [physics.med-ph]. Migration - université en cours d'affectation, 2003. Français. NNT : . tel-00005973v1

HAL Id: tel-00005973

https://theses.hal.science/tel-00005973v1

Submitted on 27 Apr 2004 (v1), last revised 21 Jun 2004 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE SHERBROOKE
Faculté de Génie
Département de Génie Mécanique

Contribution à la caractérisation mécanique de matériaux poro-visco-élastiques en vibro-acoustique

Thèse présentée en vue d'obtenir le
grade de docteur ès sciences (Ph.D).

Specialité: génie mécanique

Luc Jaouen

Sherbrooke (Québec), CANADA

Décembre 2003

Académie de Nantes
ÉCOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE
Le Mans, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : ACOUSTIQUE

Présentée par

Luc Jaouen
pour obtenir le titre de Docteur d'Université

CONTRIBUTION À LA CARACTÉRISATION MÉCANIQUE DE MATÉRIAUX PORO-VISCO-ÉLASTIQUES EN VIBRO-ACOUSTIQUE

Soutenue le 18 décembre 2003 devant le jury composé de :

Walter Lauriks	Pr, Université de Louvain (Belgique), rapporteur
Raymond Panneton	Pr, Université de Sherbrooke (Qc, Canada), rapporteur
Xavier Olny	MCF, Ecole Nat. des Travaux Publics de l'Etat, rapporteur
Noureddine Atalla	Pr, Université de Sherbrooke (Qc, Canada), co-directeur
Bruno Brouard	MCF, Université du Maine, co-directeur

Contribution à la caractérisation mécanique de matériaux poro-visco-élastiques en vibro-acoustique

Résumé :

Ce travail présente deux méthodes expérimentales de caractérisation des propriétés élastiques et d'amortissement de matériaux poreux acoustiques en régime dynamique. Les modules d'Young ou de cisaillement ainsi que les coefficients d'amortissement de mousses polymères ou matériaux fibreux sont estimés dans leurs conditions usuelles d'utilisation, i.e. en flexion ou cisaillement et dans des gammes de température et de fréquence habituellement rencontrées dans les industries du bâtiment ou des transports. La théorie de Biot-Johnson-Champoux-Allard est utilisée pour décrire le comportement de ces matériaux poro-visco-élastiques modélisés comme des systèmes diphasiques constitués d'une phase solide et d'une phase fluide, l'air, couplées dans le temps et l'espace.

La première méthode est dérivée de celle de la poutre d'Oberst : un déplacement transverse est imposé au centre d'une poutre en conditions limites libre-libre. Un calcul par éléments finis hiérarchiques et un algorithme non-linéaire d'inversion sont utilisés afin d'estimer les paramètres inconnus des matériaux et de déterminer leurs évolutions en fonction de la fréquence et de la température.

La seconde méthode est basée sur l'étude des vibrations d'une plaque multicouche en flexion. Un code numérique hiérarchique simplifié est utilisé conjointement au précédent algorithme d'inversion dans le même but de caractérisation des matériaux poro-visco-élastiques.

Des applications à quelques matériaux, visco-élastiques légers ou mousses aux propriétés très différentes, ont permis de vérifier la pertinence de ces méthodes face à celles déjà existantes et d'en fixer les limitations.

Mots clefs :

Matériaux poreux, Modèle de Biot, Caractérisation, Paramètres élastiques, Vibro-acoustique, Méthode des Eléments Finis.

Contribution to the mechanical characterization of poro-visco-elastic materials in vibro-acoustics

Abstract :

This work presents two experimental methods for the characterization of elastic and damping properties of acoustic porous materials in dynamic regime. Young's or shear moduli and structural damping coefficients of polymer foams or fibrous materials are estimated in practical conditions, i.e. in bending or shear vibrations for temperature and frequency ranges existing in buildings construction or in the transport industries. The Biot-Johnson-Champoux-Allard theory is used to describe the poro-visco-elastic behaviour of these materials, modeled as biphasic systems constituted of a solid phase and a fluid one, the air, coupled in time and space.

The first method derive from the Oberst's beam one : a transverse displacement is imposed at the center of a free-free beam. A hierarchical finite element calculus and a non-linear inversion algorithm are used to estimate the material unknown parameters and to determine their evolutions in frequency and temperature.

The second method is based on bending vibrations of a multi-layered plate. A simplified numerical calculus is jointly used with the previous inversion algorithm for the same purpose of elastic and damping characterization of poro-visco-elastic materials.

Applications to light visco-elastic materials or various foams allow to check the relevance of these two methods compared to the existing ones and fix their limitations.

Keywords :

Porous media, Biot's model, Characterization, Elastic parameters, Vibroacoustics, Finite Element Method.

Table des matières

Remerciements **iii**

Notations **v**

Introduction **1**

1 Propriétés des polymères et de leurs mousses **5**

1.1 Structure moléculaire 5

1.2 Structure macromoléculaire 6

1.3 Comportement mécanique 6

1.4 Domaines d'états 8

1.5 Formation des mousses 9

2 Méthodes et modèles existants, applications **13**

2.1 Méthodes expérimentales 13

2.1.1 Méthodes quasi-statiques 14

2.1.2 Méthodes dynamiques 21

2.2 Modèles structuraux 23

2.3 Synthèse des méthodes et modèles existants 28

2.4 Méthodes proposées 30

3 Description des matériaux poro-visco-élastiques **33**

3.1 Modèle de Biot-Allard généralisé 33

3.1.1 Hypothèses générales 33

3.1.2 Paramètres acoustiques 35

3.1.3 Equations fondamentales 35

3.1.4 Effets visqueux 38

3.1.5 Effets thermiques 39

3.2 Formulation mixte déplacement-pression 39

3.2.1 Equations en déplacement-pression 39

3.2.2 Formulation intégrale faible 42

3.2.3 Puissances dissipées 43

4 Caractérisation élastique : cas de poutres **45**
4.1 Avant propos sur la méthode d'Oberst 45
4.2 Méthode expérimentale proposée 46
4.3 Précisions sur la méthode 62
4.3.1 Pot vibrant 62
4.3.2 Système d'attache 62
4.3.3 Accéléromètre 62
4.3.4 Epaisseur du matériau test 62
4.3.5 Collage du matériau à la poutre 63
4.3.6 Chambre en température 64
4.4 Précisions sur la technique numérique 64
4.4.1 Justification de l'utilisation de la Méthode des Eléments Finis . . . 64
4.4.2 Les éléments poreux 65
4.5 Exemples de caractérisation de matériaux poreux 66
4.6 Vérification de l'unicité des résultats d'inversion 71
4.7 Synthèse 71

5 Caractérisation élastique : cas de plaques **73**
5.1 Méthode 73
5.1.1 Présentation 73
5.1.2 Précisions sur la méthode 94
5.1.3 Précisions sur l'interpolation trigonométrique 94
5.1.4 Notes sur κ^2 98
5.1.5 Effet de l'adhésif 99
5.2 Application à la caractérisation de mousses 101
5.3 Précision sur l'inversion 105
5.4 Synthèse 106

Conclusion **109**

A Diffusion multiple appliquée aux matériaux poreux **111**

B Cas des poutres : calcul de la FRF **131**

Remerciements

Je tiens à remercier mes directeurs Noureddine Atalla, Bruno Brouard et Sohbi Sahraoui pour leurs présences discrètes et la liberté qu'ils m'ont laissée dans ce travail. Je remercie également Walter Lauriks, Xavier Olny et Raymond Panneton qui ont accepté de juger ce travail.

Je remercie aussi chaleureusement Christian Clavet, Benoit Couture et Eric Egon pour leurs conseils avisés sur toute question expérimentale ainsi que Nicolas Dauchez, Lazhar Benyahia, Franck Paris, Maël Chorlaix, Ludovic Carrere, Julien Letourneur et plus particulièrement Dominic Pilon, Christian Langlois, Manuel Etchessahar, Vincent Tournat et Mickael Deverge qui par leurs conseils ou collaborations ont mis un peu d'eux-mêmes dans ce travail.

Je témoigne également toute ma reconnaissance à Florent Calvayrac de l'Université du Maine ainsi que toute l'équipe du Centre de Calcul Scientifique de l'Université de Sherbrooke, notamment Michel Barrette et Patrick Vachon pour la mise à disposition de leurs moyens informatiques. Merci également à Langis Morin à Sherbrooke, Stéphane Gérard et Patrick Delage au Mans pour avoir assuré un déroulement parfait de la visio-conférence du 18 décembre 2003.

Je remercie également les ministères québécois et français des relations internationales pour leur soutien financier.

Enfin, je remercie mes parents, Michèle et Bernard, ainsi que Hélène pour leurs soutiens de tous les jours.

Notations

Grandeurs	Dimension	Description
”	m	1” désigne le pouce, 25.4×10^{-3} m
$*$		désigne une quantité complexe
$\sim$		désigne une quantité dépendante de la fréquence
α		tortuosité dynamique
α_∞		limite haute fréquence de la tortuosité dynamique
α_{ij}		fonction d'essai
δ_{ij}		symbole de Kronecker : 1 si $i = j$, 0 sinon
ε^s		tenseur des déformations de la phase solide
ϕ		porosité fluide
ϕ_s		porosité solide : $\phi_s + \phi = 1$
γ		rapport des chaleurs spécifiques de l'air
		valeur : 1.4 à 18°C sous 1 atmosphère
κ ou κ^2		facteur correcteur en cisaillement de Mindlin
λ	m	longueur d'onde
Λ	m	longueur caractéristique visqueuse
Λ'	m	longueur caractéristique thermique
ν		coefficient de Poisson
ω	s^{-1}	pulsation
$\widetilde{\rho}$	$kg.m^{-3}$	masse volumique dynamique du milieu poreux
ρ_0	$kg.m^{-3}$	masse volumique de l'air au repos
ρ_1	$kg.m^{-3}$	masse volumique de la phase solide
ρ_2	$kg.m^{-3}$	masse volumique de la phase fluide
ρ_s	$kg.m^{-3}$	masse volumique du matériau constituant le squelette
σ	$N.s.m^{-4}$	résistivité au passage de l'air
σ^f	$N.m^{-2}$	tenseur des contraintes de la phase fluide
σ^s	$N.m^{-2}$	tenseur des contraintes de la phase solide
$\hat{\sigma}^s$	$N.m^{-2}$	tenseur des contraintes de la phase solide *in vacuo*
σ^t	$N.m^{-2}$	tenseur des contraintes totales
μ	$N.s.m^{-2}$	viscosité de l'air
		valeur : 1.84 à 18°C sous 1 atmosphère

Grandeurs	Dimension	Description
$\widetilde{A}$	N.m^{-2}	coefficient élastique de Biot
		identifié au coefficient λ de Lamé
$\widetilde{b}$	N.s.m^{-4}	coefficient correcteur visqueux
B^2		nombre de Prandtl
		valeur : 0.71 à 18°C sous 1 atmosphère
E, E_i	N.m^{-2}	module d'élasticité (ou d'Young) dans la direction i
f	s^{-1}	fréquence
G	N.m^{-2}	module de cisaillement
$\widetilde{G}$		facteur correcteur visqueux
$\widetilde{G}'$		facteur correcteur thermique
I	m^4	moment quadratique de section pour une poutre
$\widetilde{K}_e$	N.m^{-2}	module de compression dynamique complexe de la phase fluide
N	N.m^{-2}	coefficient élastique de Biot
		identifié au module de cisaillement G ou μ
p	N.m^{-2}	surpression acoustique
		par rapport à la pression atmosphérique P_0
P	N.m^{-2}	coefficient élastique de Biot
P_0	Pa (N.m^{-2})	pression atmosphérique
$\widetilde{Q}$	N.m^{-2}	coefficient élastique de Biot
$\widetilde{R}$	N.m^{-2}	coefficient élastique de Biot
$\underline{u}$	m	déplacements macroscopiques moyens de la phase solide
$\underline{U}$	m	déplacements macroscopiques moyens de la phase fluide

Sigles	Description
CTTM	Centre de Transfert de Technologie du Mans
DDL	Degré De Liberté (*cf* DOF)
DOF	Degree Of Freedom
FRF	Frequency Response Fonction
	ou Fonction de Réponse en Fréquence
GAUS	Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke
LAUM	Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine
	(UMR CNRS 6613)
TMM	Transfert Matrix Method
	ou Méthode des Matrices de Transfert

La convention anglo-saxonne est utilisée pour l'écriture des nombres : le point (.) marque la décimale.

Introduction

La recherche pétrolifère ou sismique ou encore la nécessité d'insonorisation du monde industriel actuel, sans cesse soumis à de nouvelles normes acoustiques plus strictes, sont une partie des domaines qui nourrissent l'intérêt pour les matériaux poreux.

Ces matériaux sont constitués sous leur forme la plus simple, de deux phases, une phase solide appelée squelette et une phase fluide, l'air en acoustique (*cf* fig. 1). Parmi la diversité des matériaux poreux, on peut citer : les matériaux fibreux (tissus, laines minérales...), les mousses (naturelles ou synthétiques), les agglomérats granulaires (sable, revêtement routier...), les végétaux (paille, gazon...). Ces matériaux sont le siège d'interactions fortes entre leurs constituants conduisant à des phénomènes d'atténuation ou d'absorption importants.

En vibro-acoustique, les matériaux poreux se trouvent ainsi très répandus dans des applications industrielles, comme en particulier ceux de l'automobile, de l'aéronautique ou du bâtiment, sous la forme de mousses ou fibreux, avec pour but l'isolation phonique ou l'atténuation des vibrations de structures.

La prédiction du comportement vibratoire et acoustique de tels milieux diphasiques n'est pas encore totalement maîtrisée. De nombreux modèles comportementaux sont fondés sur des lois empiriques comme le modèle de Delany et Bazley [**?**] utilisé pour estimer l'impédance de surface d'une laine de verre, ou sont restreints à des matériaux poreux dont le squelette est indéformable.

Dans le cas de matériaux à squelettes déformables, alors appelés matériaux poro-élastiques ou poro-visco-élastiques[1], des modèles théoriques plus complets, prenant en compte le mouvement des deux phases en faisant intervenir des paramètres caractéristiques du squelette et du fluide, sont nécessaires. Parmi ces modèles [**?**, **?**, **?**], on trouve ceux basés sur les travaux de Maurice Anthony Biot et adaptés à des domaines tels que la géologie, le médical, l'acoustique.

La caractérisation des matériaux poro-visco-élastiques, en vibro-acoustique, est habituellement séparée en deux étapes : la caractérisation des propriétés élastiques, relative à la phase solide du matériau, et la caractérisation acoustique relative à la phase fluide

[1] Par la suite, on distinguera les matériaux poreux dont le squelette présente un comportement mécanique simplement élastique dans les conditions normales d'utilisation (ex. : mousses métalliques) des poreux pour lesquels le squelette présente un comportement mécanique visco-élastique (ex. : mousses polymères)

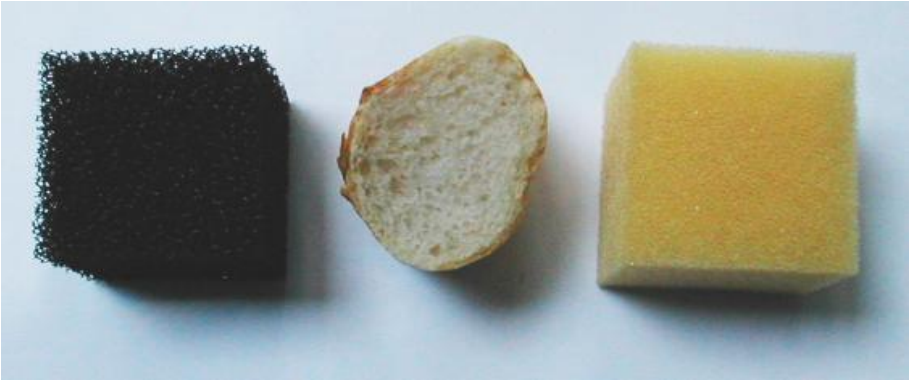

Fig. 1: Photo d'un morceau de pain entouré de deux échantillons cubiques de mousses de polyuréthanne. Les diamètres des pores (lieu de la phase fluide) de chaque matériaux varient. La grande majorité des pores est inter-connectée.

et à ses interactions avec la phase solide. La connaissance des propriétés élastiques (ou plus globalement mécaniques) des matériaux poreux est indispensable pour décrire et analyser les vibrations du squelette, dont l'importance est notable aux basses fréquences.

Les quelques méthodes de caractérisation des modules d'Young et de cisaillement, coefficients de Poisson et d'amortissement structural des poreux sont essentiellement issues des travaux de caractérisation élastique des métaux [**?**]. Leurs applications aux cas des polymères et de leurs mousses apparaît dans les années 1960 avec l'utilisation de ces plastiques comme emballages [**?**, **?**, **?**]. Ces méthodes de caractérisation, souvent quasi-statiques, qui ont pu évoluer au fil des années [**?**, **?**, **?**], souffrent néanmoins d'hypothèses comportementales souvent non vérifiées en ce qui concernent les matériaux poro-visco-élastiques. Les configurations d'utilisation et d'applications de matériaux poreux devenant plus particulières et spécifiques dans l'industrie, une caractérisation de plus en plus fine, sortant du cadre des hypothèses faites jusqu'à présent, est indispensable.

Ce mémoire regroupe un ensemble cohérent de mes études réalisées, dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre le GAUS et le LAUM, ces trois dernières années, dont l'objectif principal de recherche est le développement de méthodes d'estimation des paramètres élastiques de matériaux poro-visco-élastiques acoustiques (mousses de polyuréthanne, mousses de mélamine...) en fonction de la fréquence et de la température.

Pour réaliser cet objectif, une synthèse des techniques existantes avant ce travail (méthodes expérimentales ou modèles structuraux) de caractérisation est présentée au chapitre 2. L'application d'une partie de ces techniques à la caractérisation d'une mousse de mélamine est prétexte à discussion des avantages et limitations de chacune de ces approches, notamment de la modélisation comportementale des poreux.

Un bref rappel de la théorie de Biot-Allard généralisée et de sa formulation $\{\underline{u}, p\}$ (déplacement, pression) est donné au chapitre 3, une attention particulière est donnée

aux phénomènes de dissipation introduits par les matériaux poreux.

Au chapitre 4, une première méthode expérimentale est mise en oeuvre. Le choix est fait de caractériser les matériaux poreux dans des conditions et configurations proches de celles rencontrées en pratique, *ie*, dans des cas de multicouches en flexion ou cisaillement. Le cas de poutres métalliques traitées par une couche poreuse est retenu. L'estimation paramétrique est réalisée par méthode inverse à l'aide d'un code d'éléments finis poro-élastiques tri-dimensionnel.

La lourdeur des moyens numériques nécessaires à l'estimation paramètrique pour cette première méthode et la plus grande utilisation de géométries 2-D en pratique, nous amène, au chapitre 5, à la réalisation d'un code numérique, de prédiction du comportement vibro-acoustique, dédié au problème plaque + poreux. L'identification des mécanismes de dissipations ajoutées par les matériaux poreux dans cette dernière configuration présente alors un objectif secondaire d'importance pour optimiser le modèle simplifié.

Des applications à des mousses de propriétés très différentes ainsi que des comparaisons avec les techniques de caractérisation existantes permettent de conclure et d'illustrer les limitations des deux méthodes proposées dans ce mémoire.

Chapitre 1

Propriétés des polymères et de leurs mousses

Les matériaux polymères (ou plastiques) sont des enchaînements macromoléculaires organiques de motifs (ou monomères) simples. La nature chimique des monomères constituants les macromolécules, leur nombre et leur arrangement procurent aux polymères des propriétés élastiques ou visco-élastiques particulières. L'étude du comportement mécanique de ces matériaux a donné lieu à de nombreux ouvrages de référence tels que ceux de J. D. Ferry [**?**] et R. D. Corsaro *et al.* [**?**].

Les mousses utilisées en acoustique ayant, pour un grand nombre, un squelette d'origine polymère, les méthodes de caractérisation élastique des matériaux poreux découlent naturellement des travaux sur les polymères.

Ce chapitre présente succinctement la nature et les propriétés élastiques de polymères couramment rencontrés comme squelette de mousses avant de décrire le processus de formation des mousses à partir de ces polymères. Les notions introduites ici seront utiles à l'interprétation des résultats des chapitres 2, 4 et 5.

1.1 Structure moléculaire

La figure 1.1 présente les formules chimiques de deux polymères répandus dans le domaine des mousses synthétiques : le polyéthylène et le polyuréthanne. Des résines peuvent également être utilisées, comme la mélamine.

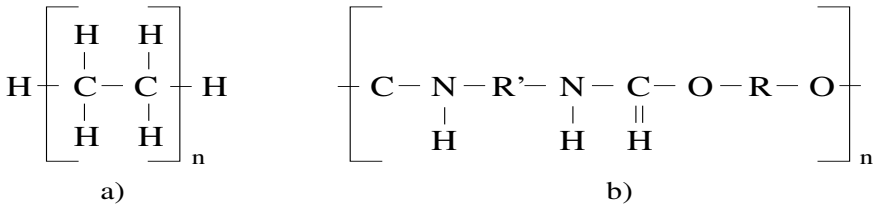

Fig. 1.1: Formules chimiques de deux polymères courants : a) polyéthylène et b) polyuréthanne. R et R' désignent des groupes d'atomes fonctionnels. Le nombre de monomères, ou motifs élémentaires n, est souvent supérieur à 1000.

Le comportement mécanique des polymères est influencé par la nature des groupes chimiques mis en jeu mais également par leurs caractéristiques physiques telles que la masse volumique et l'encombrement spatial par exemple [**?**].

1.2 Structure macromoléculaire

L'association de monomères dans une macromolécule est due principalement à des forces de cohésion chimiques. En complément de ces liaisons chimiques, des liaisons physiques peuvent intervenir pour maintenir l'assemblage. Ces forces de cohésion physiques peuvent être détruites, de façon réversible, sous l'effet de la chaleur, d'un solvant ou d'une sollicitation mécanique, le matériau conserve toutefois sa nature. La scission d'une liaison chimique, plus résistante, possède en revanche un caractère irréversible et modifie la nature du matériau. Le nombre de monomères formant une macromolécule est généralement très important et le fait d'ajouter ou de retirer un monomère ne modifie pas de façon significative les propriétés du matériau polymère résultant.

La figure 1.2 présente différents arrangements de monomères en une macromolécule. Ces arrangements ont une importance sur les propriétés macroscopiques du matériau. Pour les matériaux réticulés, plus le niveau de désordre des monomères est élevé, plus il sera difficile de dénouer ces chaînes et donc plus la rigidité du polymère sera importante.

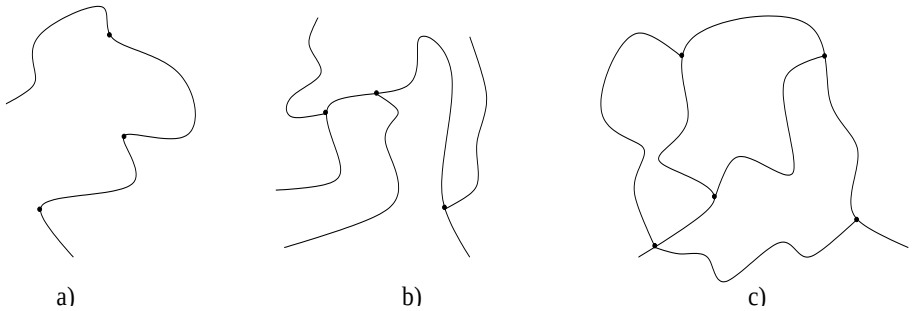

Fig. 1.2: Représentation schématique de différents arrangements de monomères en une macromolécule : a) linéaire, b) ramifiée et c) réticulée

1.3 Comportement mécanique

Les matériaux polymères possèdent généralement un comportement mécanique du type visco-élastique. Leur réponse, à une contrainte constante σ_0 pendant un temps t_0, est une combinaison entre un comportement élastique (instantané et réversible) et un comportement visqueux (fonction du temps et irréversible).

Le domaine visco-élastique linéaire définit le domaine pour lequel le comportement mécanique du matériau peut se construire comme une combinaison linéaire des modèles comportementaux simples (*cf* fig. 1.3).

Dans ce domaine visco-élastique linéaire, la loi comportementale du matériau est réécrite comme une loi de Hooke appliquée à des grandeurs complexes (contrainte, déformation et module) et dépendantes du temps ou de la fréquence :

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega)\varepsilon^*(\omega) \tag{1.1}$$

où E^* est le module d'Young complexe issu de la transformée de Fourier de la fonction de relaxation, le symbole * désignant une quantité complexe. La partie réelle E' de ce module d'Young représente la partie élastique alors que la partie imaginaire E'' représente la partie visqueuse. Dans le cas d'une excitation harmonique, les notations suivantes sont souvent utilisées :

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + jE''(\omega) = E'(\omega)(1 + j\eta(\omega)) \tag{1.2}$$

$$\text{avec} \quad \eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \tag{1.3}$$

où $\eta(\omega)$ est défini comme le coefficient d'amortissement structural.

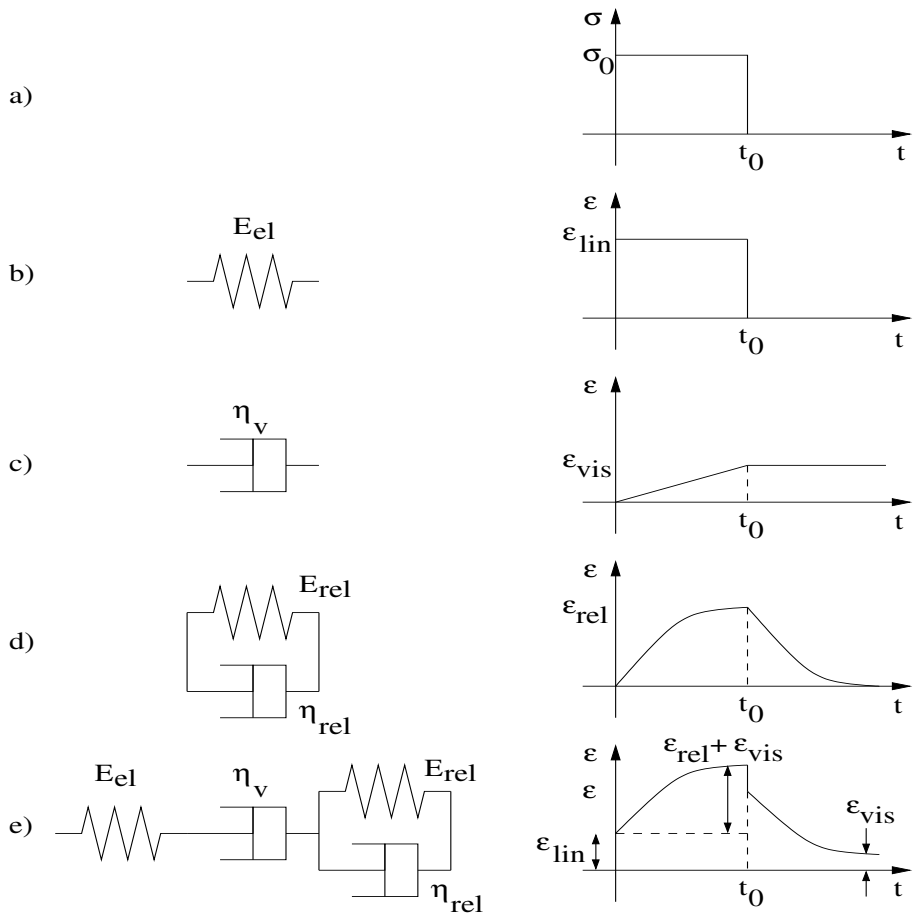

Fig. 1.3: Description du comportement mécanique de plastiques soumis à une contrainte constante (a). Un modèle à quatre paramètres (e) peut-être construit comme une combinaison linéaire des modèles élastique (b), visqueux (c) et de relaxation (d).

Le domaine de visco-élasticité linéaire du matériau dépend de nombreux paramètres tels que la température, l'amplitude et la fréquence des contraintes ou déformations, ou encore la vitesse du chargement. De plus, le comportement mécanique d'un même

matériau évolue suivant les domaines d'états que possède ce matériau.

1.4 Domaines d'états

La figure 1.4 présente schématiquement l'évolution, en fonction de la température, de la partie réelle d'un module élastique et du coefficient d'amortissement structural η qui lui est associé. Les deux pics sur la courbe du coefficient d'amortissement traduisent des transitions, ou relaxations, associées à des possibilités de mouvements moléculaires.

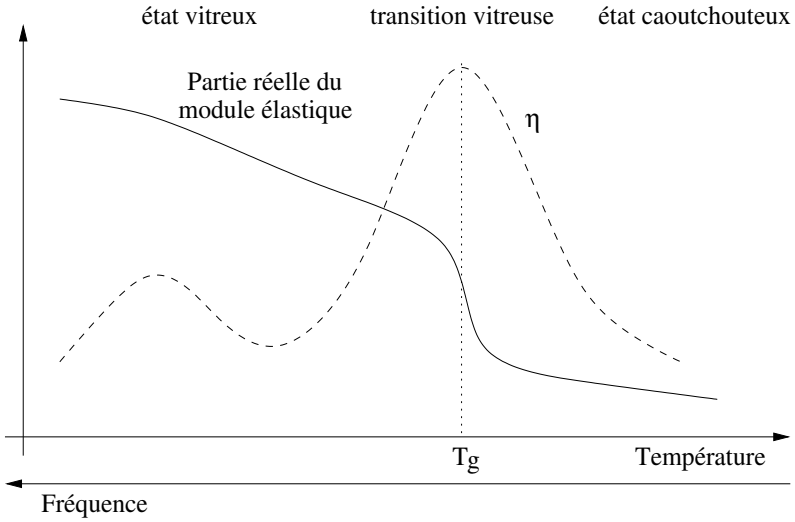

Fig. 1.4: Représentation schématique de l'évolution de la partie réelle d'un module élastique et du coefficient d'amortissement η associé pour un matériau polymère en fonction de la température ou de la fréquence.

La transition α est la première transition qui apparaît en abaissant la température. Elle donne un pic plus important que les autres transitions. Le maximum du pic de cette transition α indique la température de transition vitreuse T_g. A une température inférieure à la température de transition vitreuse, le matériau est dans un état vitreux, solide et rigide. Il présente un comportement fragile, semblable au verre, et possède des modules d'élasticité élevés. Au contraire, à l'état caoutchouteux, le polymère est ductile, de la même manière qu'un caoutchouc. Des polymères utilisés pour la formation des mousses acoustiques, tels que les polyuréthannes, possèdent des températures de transition vitreuse T_g proche de la température ambiante.

Les transition β, γ, δ peuvent être observées lorsque la température continue de diminuer. Elles donnent des pics de moindres amplitudes car elles sont relatives à des mouvements de petits groupements moléculaires spécifiques.

Entre ces transitions d'état, les propriétés des matériaux varient peu.

Une équivalence entre température et fréquence peut être observée pour certains matériaux. En 1941, H. Leaderman constate que le comportement d'un matériau visco-élastique à une température élevée pour des temps de sollicitation courts est équivalent à celui du même matériau à une température plus basse et pour des temps plus longs. Ce principe d'équivalence fréquence-température, ou temps-température, est schématisé sur les axes d'abscisses de la figure 1.4. Son application aux matériaux poreux est à considérer avec prudence, peu d'expériences ayant été menées jusqu'à présent. Ce sujet sera discuté tout au long des prochains chapitres.

1.5 Formation des mousses

La formation des mousses est généralement un processus physico-chimique complexe dans lequel de nombreuses variables permettent de contrôler le produit final. Seuls quelques aspects du moussage sont présentés ici. Des ouvrages plus complets [**?**, **?**, **?**] détaillent cette opération pour différents types de matériaux (mousses polymères, mousses métalliques).

La plupart des mousses polymères sont le résultat d'une génération puis d'une expansion de bulles dans un polymère sous forme liquide. Lors d'une première étape, les bulles sont dispersées dans le liquide (fig. 1.5a). Dans une deuxième étape, le processus d'expansion rejette le liquide dans des confinements faisant généralement apparaître une structure polygonale (fig. 1.5b). Sous l'effet de forces d'interaction ou gravitationnelle et de propriétés du liquide, telles que sa viscosité par exemple, les membranes entre les cellules possèdent des sections de Plateau - sections triangulaires dans l'espace de Lobatchevsky - pour lesquelles la somme des angles du triangle est inférieure à 180°. A ce stade, la mousse possède une faible masse volumique et est à cellules, ou pores, fermées. Finalement, les membranes entre les cellules peuvent être perforées lors d'un traitement chimique ou mécanique supplémentaire (fig. 1.5c et 1.6).

La taille, la distribution et l'ouverture des pores sont des paramètres du moussage qui influencent autant les propriétés acoustiques que mécaniques de la mousse.

Une anisotropie des mousses est souvent mise en évidence expérimentalement. Le processus de moussage en est une des causes : la direction de croissance de la mousse dans le creuset doit être à priori considérée comme une direction particulière du matériau final (fig. 1.7). De plus, la concentration plus élevée de polymère liquide dans le fond du creuset au début du moussage peut également provoquer une hétérogénéité de la mousse. Melon *et al.* [**?**] discutent de ces phénomènes en étudiant le cas d'une mousse de polyuréthanne orthotropique, proche de l'isotropie transverse.

La découpe des mousses en vue de leur utilisation provoque également des inhomo-

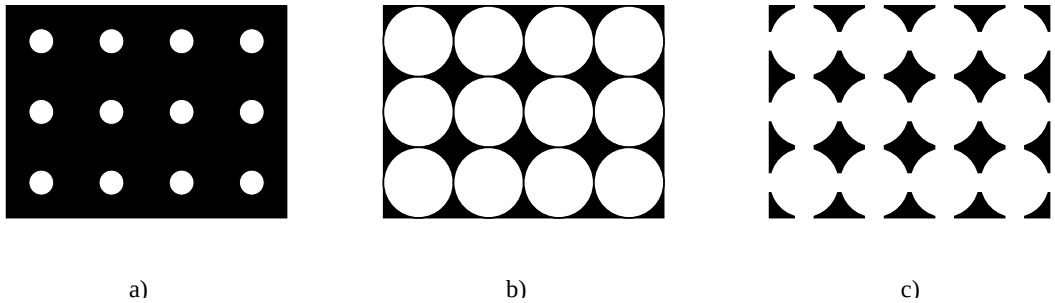

Fig. 1.5: Représentations schématiques des étapes du moussage d'après [**?**]. a) génération de bulles b) expansion des bulles c) connexion entre bulles.

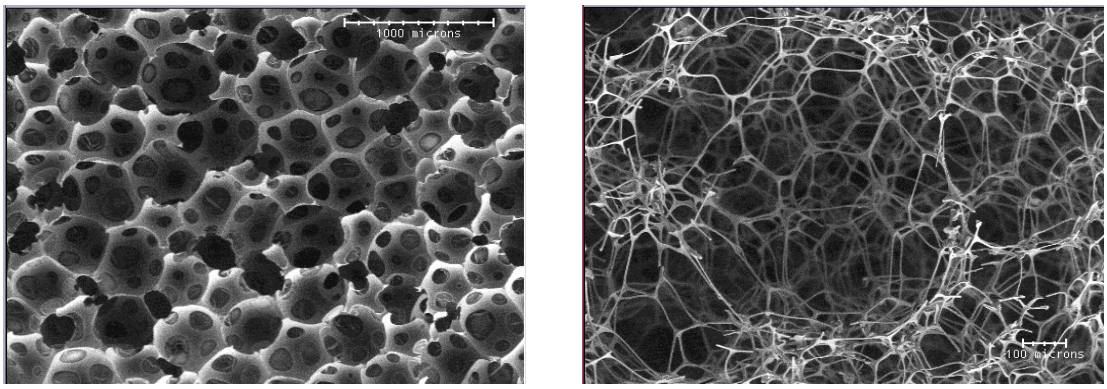

Fig. 1.6: Photographies au microscope à balayage électronique des structures microscopiques de deux mousses. Sur gauche : une mousse de polyuréthanne identifiée J, à pores ouverts, possèdant une masse volumique élevée : 57.20 kg.m^{-3}. Sur droite : une mousse de mélamine identifiée M, à pores ouverts, possèdant une masse volumique faible : 8.35 kg.m^{-3}. Photos : Franck Paris, (CTTM).

généités de surface : de petites poutres du squelette non reliées entre elles apparaissent à la surface (*cf* fig. 1.6). L'influence sur le comportement de la mousse de ces poutres, parfois appelées "cheveux", sont exposées au chapitre suivant[1].

La figure 1.8 illustre le comportement mécanique en compression puis traction d'une mousse de mélamine, identifiée M, à 24°C. Ces mesures ont été effectuées par Mickael Deverge du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine.

Trois zones comportementales sont distinguées.

1. La zone d'élasticité linéaire est caractérisée par la flexion des poutres polymères dont est constitué le squelette du matériau. Cette zone débute après l'écrasement des cheveux de la mousse. Les mesures à venir, dans les chapitres 2, 4 et 5 sont réalisées dans cette zone comportementale.
2. La deuxième zone est marquée par le flambement des poutres du squelette. Elle

[1] *cf* discussion relative à la figure 2.5.

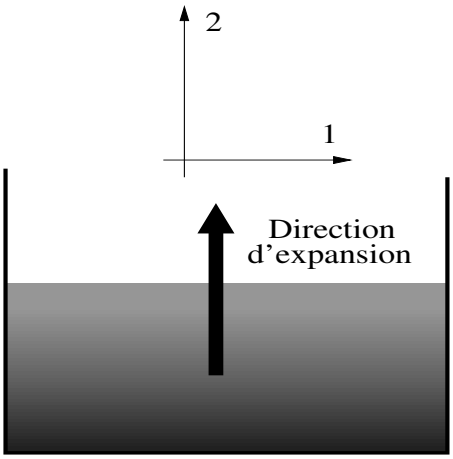

Fig. 1.7: Représentation schématique de l'étape d'expansion lors de la formation d'une mousse. La direction privilégiée d'expansion peut-être responsable d'une anisotropie du matériau poreux final.

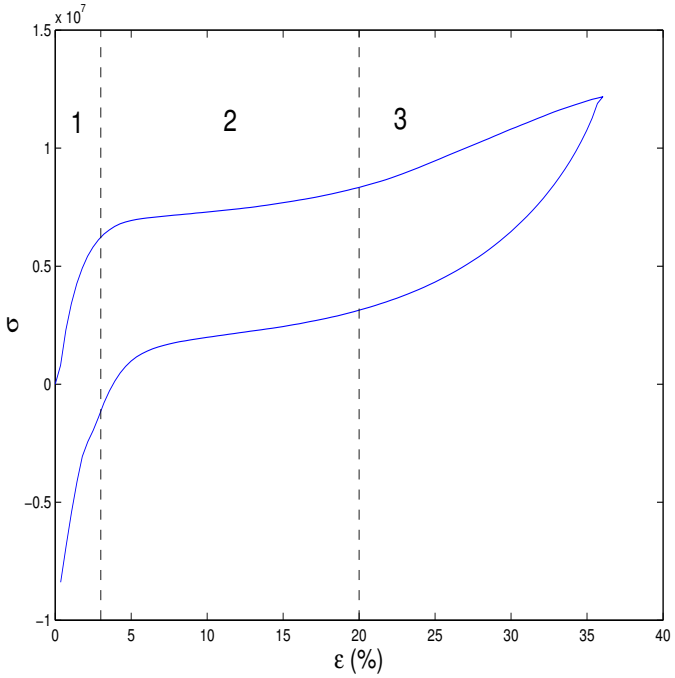

Fig. 1.8: Contrainte (σ) vs. déformation (ε) à 24°C pour un taux de déformation constant et relaxation. Identification des 3 zones comportementales pour la mousse de mélamine M.

s'étend, pour la mélamine, entre 5 et 20% de déformation.

3. Enfin, la densification des poutres flambées constitue la troisième et dernière zone.

Chapitre 2

Méthodes et modèles existants, applications

Contrairement à la caractérisation acoustique, relative à la phase fluide d'un matériau poreux, la caractérisation élastique, associée à sa phase solide (squelette), est un sujet peu documenté dans la littérature. La grande utilisation, dans les cas d'études acoustiques classiques, de modèles dits de fluides équivalents ne nécessitant pas de connaître les caractéristiques élastiques du squelette d'un matériau est une des raisons à ce peu de documentation.

Ce chapitre présente les méthodes expérimentales de caractérisation élastiques des matériaux poreux existantes avant ce travail, largement inspirées des méthodes de caractérisation des polymères. Les intérêts de chacune ainsi que leur limite sont illustrés, pour la plupart des applications, par la caractérisation d'une mousse de mélamine identifiée M. Les mesures reportées ont été réalisées sous pression atmosphérique et dans des conditions de température et d'humidité normales sauf mention contraire.

Les principaux modèles structuraux qui ont ouvert une voie de caractérisation alternative en tenant compte de la micro-géométrie des matériaux poreux sont également présentés dans une seconde section.

La synthèse des différentes méthodes existantes présentée en fin de chapitre oriente le lecteur vers les choix qui nous ont motivés à développer les méthodes de caractérisation présentées aux chapitres 4 et 5.

2.1 Méthodes expérimentales

La caractérisation des matériaux visco-élastiques a fait l'objet de nombreuses recherches [**?**, **?**, **?**]. Ces recherches, essentiellement portées sur la caractérisation de l'amortissement structural de tels matériaux, ont donnés lieu au dépôt de normes nationales ou internationales ([**?**, **?**]...) et à la commercialisation d'appareils devenus standards.

Les méthodes expérimentales existantes peuvent être réparties en deux groupes : les méthodes quasi-statiques, non résonantes, pour lesquelles les effets inertiels sont négligés et les méthodes dynamiques, résonantes.

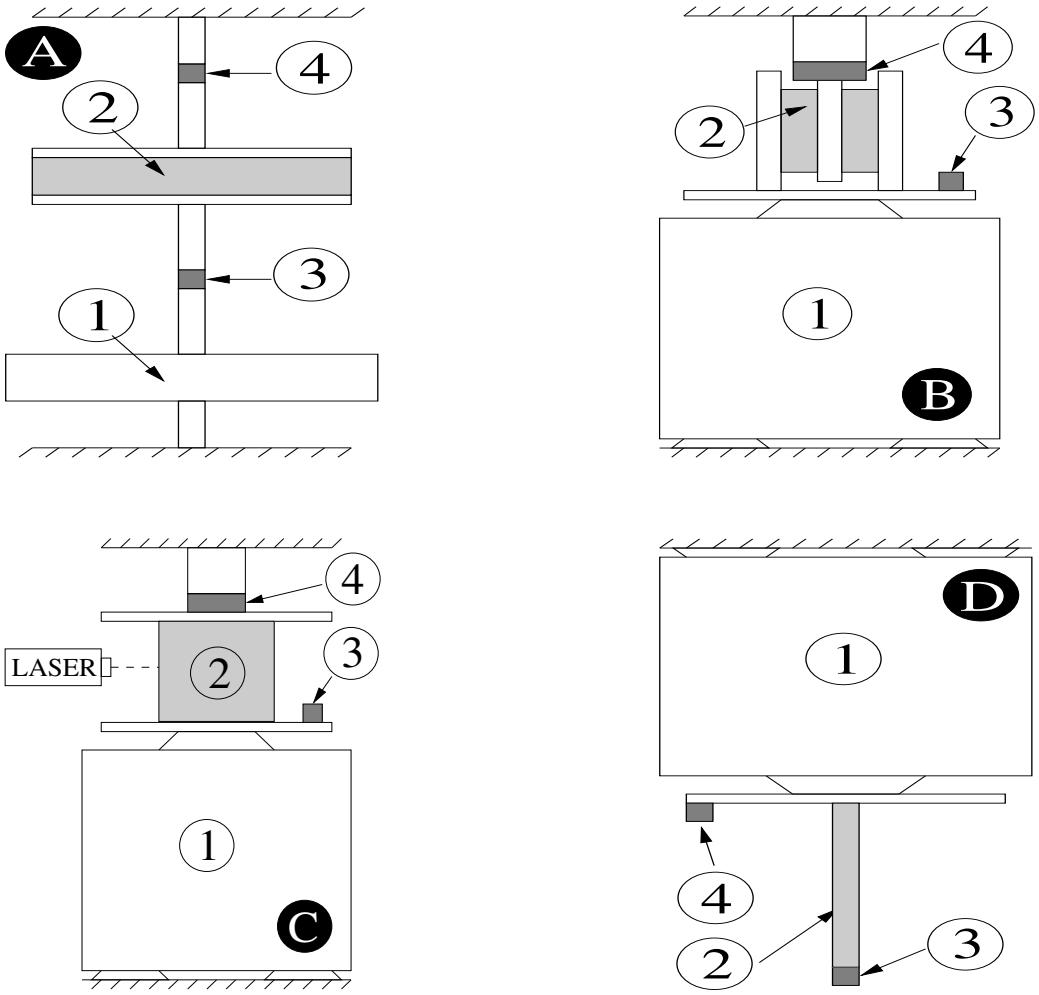

Fig. 2.1: Représentations schématiques de montages expérimentaux pour la caractérisation élastique de matériaux poreux suivant différents types de chargement et différentes géométries des échantillons. Chargement A : en torsion, B : en cisaillement, C : en compression et D : en traction-compression. 1 : pot vibrant ou moteur, 2 : échantillon de matériau, 3 et 4 : accéléromètres ou capteurs de force/capteurs de couple.

2.1.1 Méthodes quasi-statiques

La figure 2.1A présente le schéma d'un montage dans le cas d'une étude en torsion. Un échantillon cylindrique est contraint entre deux plateaux parallèles. Un des plateaux est fixe tandis que le second est soumis à une rotation harmonique d'un angle δ par rapport à son axe. La mesure de la contrainte imposée et de l'angle de rotation entre les deux plateaux permet une estimation directe du module de cisaillement complexe G^* de l'échantillon.

Les figures 2.2 et 2.3 présentent les résultats en torsion obtenus pour la mousse de mélamine M (*cf* fig. 2.4) à l'aide d'un banc RDA II de marque Rhemotrics Scientific/TA Instruments. Ces mesures ont été effectuées par Lazhar Benyahia du Laboratoire des Polymères, Colloïdes et Interfaces de l'Université du Maine.

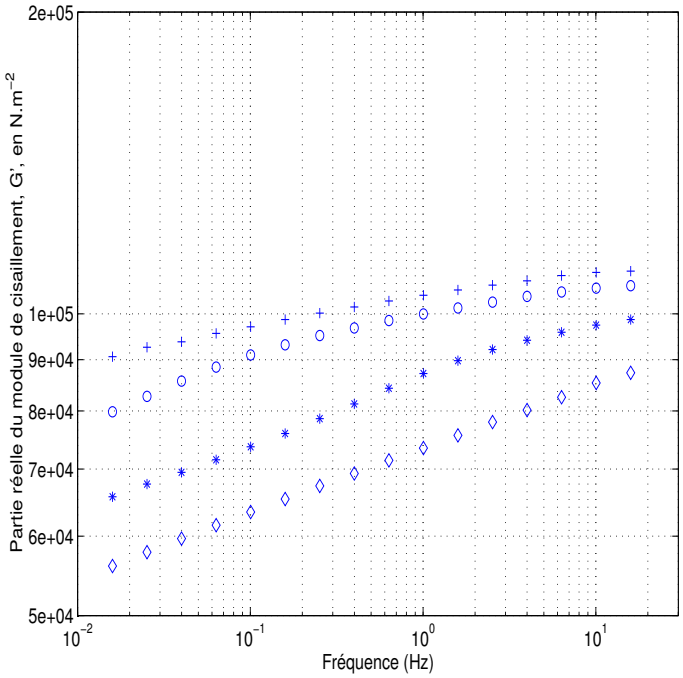

Fig. 2.2: Evolution en fréquence de la partie réelle du module de cisaillement G_{23}' pour la mousse de mélamine M à différentes températures. + : 0^oC, o : 10^oC, $\star$: 24^oC, $\diamond$: 40^oC

Sur ces figures, on observe une transition d'état entre les fréquences 0.01 et 10 Hz à 24^oC : la partie réelle du module de cisaillement, G', croît de façon nette alors que le coefficient d'amortissement structural, η, passe par un maximum local. Cette transition est également observable, de manière moins nette, pour les autres températures. En l'absence d'information supplémentaire, aucune conclusion n'est possible sur la nature exacte de cette transition. Cependant cet exemple confirme que les paramètres élastiques de certaines mousses évoluent de façon marquée dans les conditions normales de température et de pression.

Rigoureusement, en tenant compte des remarques du chapitre précédent sur l'orthotropie courante des mousses et de l'orientation de la mousse choisie sur l'échantillon cubique figure 2.4, le module de cisaillement caractérisé doit être noté G_{23} et le coefficient d'amortissement : η_{23}.

Le montage expérimental en cisaillement exposé à la figure 2.1B est proche du montage précédent. Il n'est, ici, ni présenté ni illustré ici de résultats expérimentaux, le lecteur pourra toutefois se référer au travail de M. Etchessahar [**?**] qui en donne une application à une mousse polymère.

La figure 2.1C présente le montage en compression mis en oeuvre pour les mousses

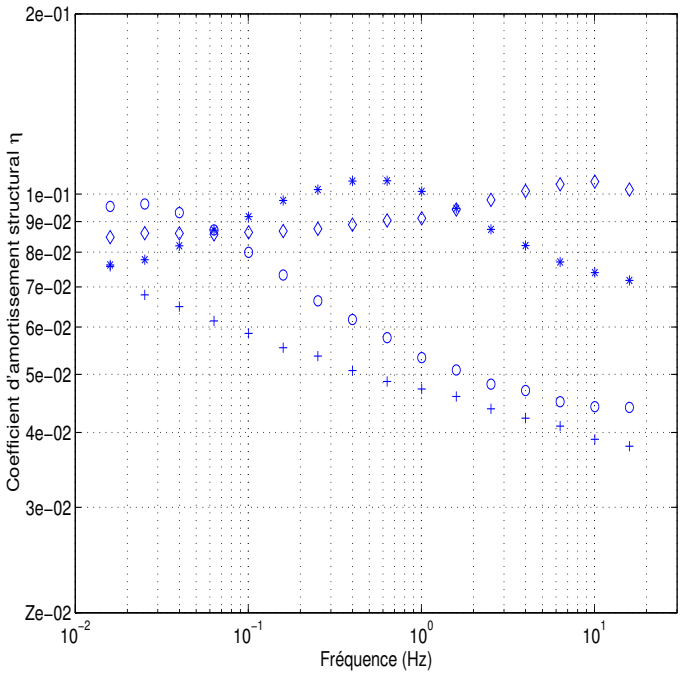

Fig. 2.3: Evolution en fréquence du coefficient d'amortissement structural η_{23} par la mesure en torsion pour la mousse de mélamine M à différentes températures. + : 0^oC, o : 10^oC, $\star$: 24^oC, $\diamond$: 40^oC

Fig. 2.4: Echantillons de la mousse de mélamine M testés dans ce chapitre. Ces échantillons proviennent d'un même volume ($200 \times 100 \times 76$ mm^3) de mousse.

par Mariez et Sahraoui [**?**] en 1996 d'après les travaux de Sim et Kim [**?**] sur les matériaux visco-élastiques. Cette méthode permet une caractérisation quasi-statique du module d'Young, du coefficient de Poisson et coefficient d'amortissement structural pour des matériaux poro-visco-élastiques isotropes. Un échantillon cubique du matériau à ca-

ractériser est placé entre deux plans parallèles, l'un étant excité d'un mouvement vertical par un pot vibrant sur une gamme de 1 à 100 Hz, l'autre restant fixe (des feuilles de papier de verre évitent tout glissement de l'échantillon lors de la mesure). Dans une première étape, une mesure du rapport entre le déplacement imposé dans la direction de compression et un déplacement induit par l'effet Poisson dans une direction perpendiculaire à l'aide d'un vibromètre permet de mesurer le coefficient de Poisson en question. Dans une seconde étape, les estimations du module d'Young et du coefficient d'amortissement structural sont obtenues à l'aide d'une méthode inverse faisant intervenir un calcul par éléments finis solides afin de tenir compte de la déformation tridimensionnelle de l'échantillon. L'incertitude après inversion est estimée[1] à 10% pour le module d'Young mais peut être supérieure pour le coefficient d'amortissement structural.

Une tentative de généralisation à des cas de matériaux orthotropes fut présentée en 1997 par Mariez *et al.* [**?**, **?**], en changeant les faces du cube soumises à la compression, trois mesures de coefficients de Poisson et trois estimations de modules d'Young et coefficients d'amortissement peuvent être effectuées sur un même échantillon. L'inversion étant toutefois faite à partir d'un modèle isotrope, les résultats doivent être pris avec prudence en ce qui concerne ces derniers paramètres.

Plus récemment, une nouvelle approche de l'inversion par éléments finis a été décrite par Langlois *et al.* [**?**] permettant des mesures sur des géométries cylindriques variées. L'information sur la symétrie du matériau n'est cependant plus accessible par cette méthode. Les deux coefficients, de Poisson et d'amortissement, ainsi que le module d'Young sont estimés en une seule étape.

Pour chaque méthode présentée ci-dessus, une recherche de la zone d'élasticité linéaire est requise avant chaque mesure (*cf* §1.5). La déformation imposée aux échantillons est donc de la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d \sin(\omega t) \tag{2.1}$$

où ε_s représente une déformation statique et ε_d l'amplitude de la déformation dynamique.

La figure 2.5 présente la recherche de la zone d'élasticité linéaire à 18°C, liée à la prédéformation ε_s, pour la face identifiée 3 de l'échantillon cubique de mousse de mélamine M (*cf* fig. 2.4). L'amplitude de la déformation dynamique est fixée à 0.02 % à la suite des recommandations de T. Pritz et M. Etchessahar [**?**, **?**] qui ont étudié plus en détail l'influence de la déformation ε sur le comportement mécanique des mousses ou matériaux fibreux.

Les mesures permettant l'estimation des modules d'Young complexes précédents ont été réalisées avec une déformation statique de l'ordre de 2% correspondant à un écrasement de 0.8 mm. Cet écrasement est également celui constaté dans le cas des essais en torsion à la même température. Expérimentalement, on note que l'écrasement à imposer dépend de la nature du matériau mais également des inhomogénéités de coupe en surface

[1] De façon expérimentale, sur la base de plusieurs essais et pour différents matériaux

des mousses (*cf* §1.5).

La précontrainte de l'échantillon permet également d'éviter la perte de contact entre l'échantillon et les plateaux du montage lors de l'excitation. En revanche, elle ne doit pas être trop importante pour ne pas provoquer le flambage des poutres du squelette lors des phases de compression dynamique.

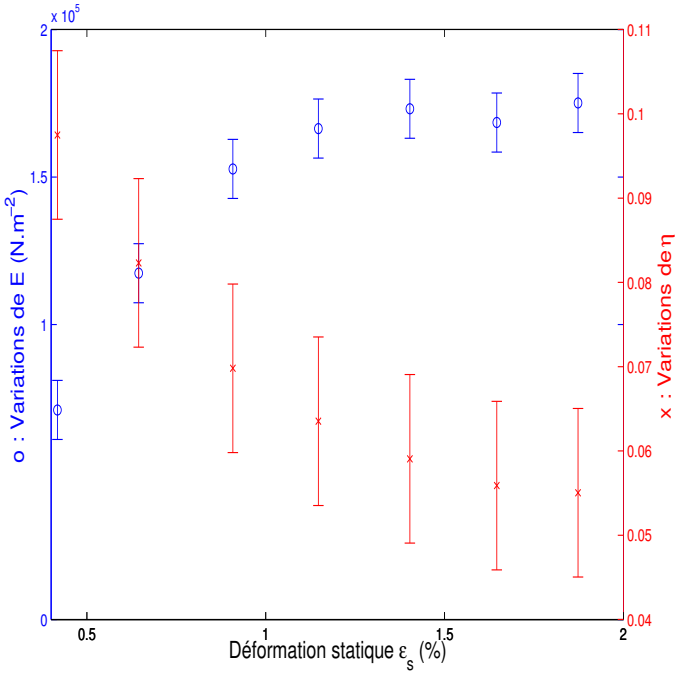

Fig. 2.5: Recherche de la déformation statique (ε_s) impliquant une zone d'élasticité linéaire de la mousse de mélamine M pour la face 3 (*cf* fig. 2.4). Méthode Mariez *et al.* [**?**, **?**], à 18°C

Une étude un peu plus approfondie sur cette question de la recherche de la zone d'élasticité linéaire pour les poreux à été réalisée par M. Etchessahar [**?**, **?**]. Cet auteur montre, de plus, que dans le cas de matériaux fibreux, la zone d'élasticité linéaire existe rarement.

Les figures 2.6, 2.7 et 2.8 montrent les mesures du coefficient de Poisson ν_{13} et les estimations des modules d'Young et coefficients d'amortissement suivant les trois axes 1, 2 et 3 pour le cube de mousse M en utilisant la méthode de Mariez *et al.* [**?**, **?**]. Ces mesures sont obtenues après recherche de la zone d'élasticité linéaire pour chacune des faces du cube. Elles ont été effectuées à 18°C.

On observe, sur les figures 2.7 et 2.8, un comportement proche de l'orthotrope de révolution d'axe perpendiculaire à la face 2 pour cette mousse. De plus, les modules et les coefficients d'amortissement semblent suivre une même évolution en fréquence pour les trois faces sur cette gamme fréquentielle. On observe effectivement pour le coefficient de Poisson ν_{13} (fig. 2.6) un coefficient de Poisson de partie réelle (Re) quasi-constante à

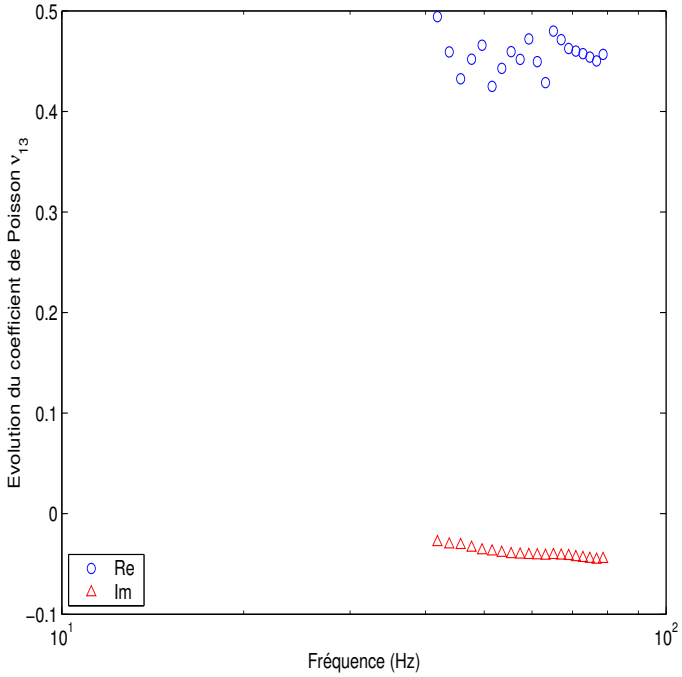

Fig. 2.6: Mesures du coefficient de Poisson ν_{13} pour la mousse de mélamine M par la méthode MARIEZ *et al.* [**?**, **?**], à 18°C

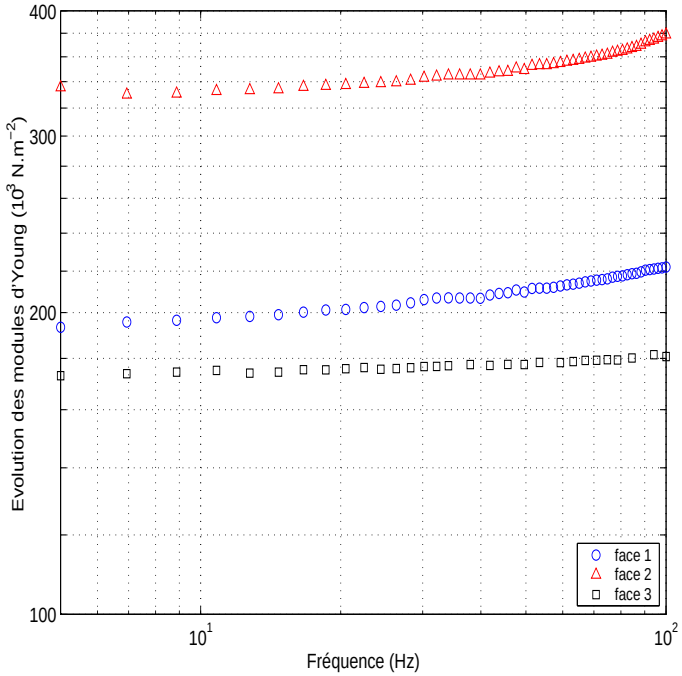

Fig. 2.7: Evaluation des modules d'Young E_1, E_2 et E_3 pour la mousse de mélamine M par la méthode MARIEZ *et al.* [**?**, **?**], à 18°C

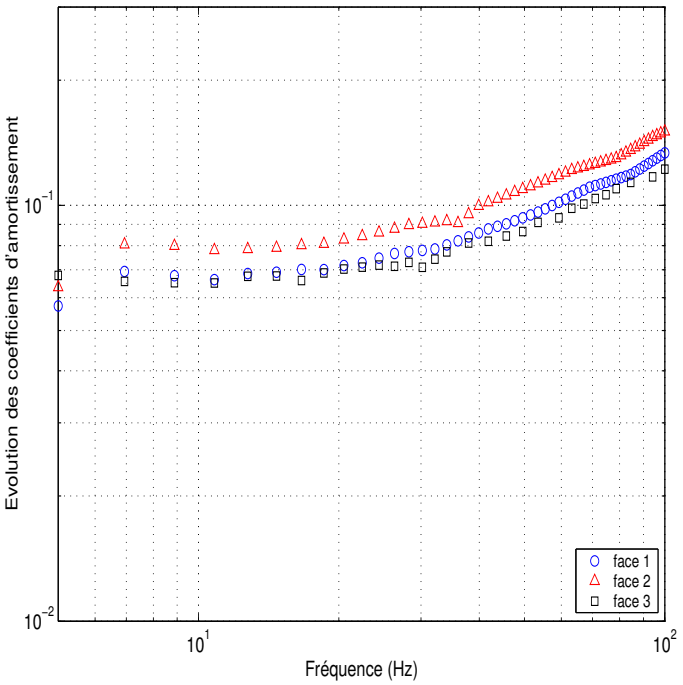

Fig. 2.8: Evaluation des coefficients d'amortissement structuraux η_1, η_2 et η_3 pour la mousse de mélamine M par la méthode Mariez *et al.* [**?**, **?**], à 18°C

0.45 et de partie imaginaire (Im) proche de zéro pour la gamme utile du signal, soit ici 40 à 80 Hz.

Une très légère croissance des modules d'Young est observable jusqu'à 60 Hz. Au delà, les mesures doivent être prises avec beaucoup de prudence. Comme les méthodes en cisaillement et en torsion présentées jusqu'ici, cette méthode en compression néglige les effets inertiels ou tout autre effet de couplage entre les phases solide et fluide des mousses, leurs natures diphasiques n'étant pas prises en compte. Ces méthodes sont par conséquent limitées à de très basses fréquences généralement inférieures à quelques dizaines de Hertz [**?**].

Pour comparaison, la méthode décrite par Langlois *et al.* [**?**] appliquée à la mousse de mélamine M donne, à 30 Hz, pour 21°C et sous pression atmosphérique normale, une estimation du module d'Young de 160 000 N.m^{-2}, un coefficient de Poisson de 0.44 et enfin un coefficient d'amortissement de 0.06. Les origines des disparités de résultats entre les méthodes proposées sont essentiellement liées aux différences de températures entre les essais, aux incertitudes de mesures, à l'anisotropie du matériau constatée par les mesures précédentes et enfin aux couplages entre les phases du matériau au dessus de quelques dizaines de Hertz. L'inhomogénéité de la mousse est une cause peu probable ici, les échantillons ayant été découpés dans un même volume restreint de la mousse (*cf* fig. 2.4).

2.1.2 Méthodes dynamiques

Dans le but de déterminer sur une plus large gamme fréquentielle les propriétés élastiques de mousses, sans recourir au principe de superposition temps-température [**?**, **?**], des méthodes dynamiques ont été expérimentées.

T. Pritz décrit, en 1979 et en 1982, un protocole expérimental [**?**] qu'il utilise pour différents types de matériaux décomposés en classes : fibreux [**?**] et mousses polymères [**?**].

Cette méthode expérimentale (fig. 2.1D) repose sur l'étude des vibrations longitudinales d'un échantillon de matériau sous forme de poutre[2]. Une extrémité de la poutre est fixée à un pot vibrant excité entre les fréquences 100 et 3 000 Hz, l'autre extrémité est soumise à la charge d'une masse.

De par la géométrie choisie, la caractérisation du module d'Young complexe dans la direction de coupe du cylindre est possible, les effets liés au(x) coefficient(s) de Poisson étant négligeables. L'influence du couplage fluide-structure au sein du matériau est également négligé dans la réponse ce qui, on l'a vu, est sujet à discussion [**?**, **?**]. Cette méthode est donc limitée aux matériaux dont les résistances au passage de l'air[3], σ, sont faibles.

La figure 2.9 présente la comparaison entre la mesure, sur la mousse de mélamine d'une méthode proche de celle présentée par T. Pritz, et un modèle de poutre mince solide dont les paramètres module d'Young E et coefficient d'amortissement structural η ont été recalés pour le premier mode résonant. Les valeurs pour les deux premières résonances de ces paramètres recalés sont à 25° : (165 000 N.m^{-2}, 0.048) à 188 Hz et (169 200 N.m^{-2}, 0.050) à 576 Hz. Ces valeurs sont à comparer avec celles obtenues en compression, suivant la direction 3, pour une température de 18° et sur une gamme de 1 à 60 Hz.

En utilisant une méthode similaire, A. Sfaoui [**?**], en 1995, est un des premiers à présenter l'évolution des parties réelle et imaginaire du module d'Young d'une mousse de polyuréthanne sur une très large gamme fréquentielle. En faisant usage du principe de superposition temps-température (*cf* §1.4) pour des mesures en traction-compression réalisées entre 10^2 et 2.10^3 Hz et pour des températures comprises entre -15°C et +20°C, A. Sfaoui en déduit le comportement du module d'Young complexe sur une gamme fréquentielle allant de 10^2 à 10^{11} Hz pour une température de 20°C.

Les méthodes présentées jusqu'à maintenant, quasi-statiques ou dynamiques, ne prenaient pas en compte la nature diphasique des matériaux poreux. Ce n'est que tout récemment, parallèlement au présent travail, que des méthodes prenant en compte cette nature particulière sont apparues.

[2] La longueur de l'échantillon est généralement autour de 200 mm
[3] *cf* chapitre 3

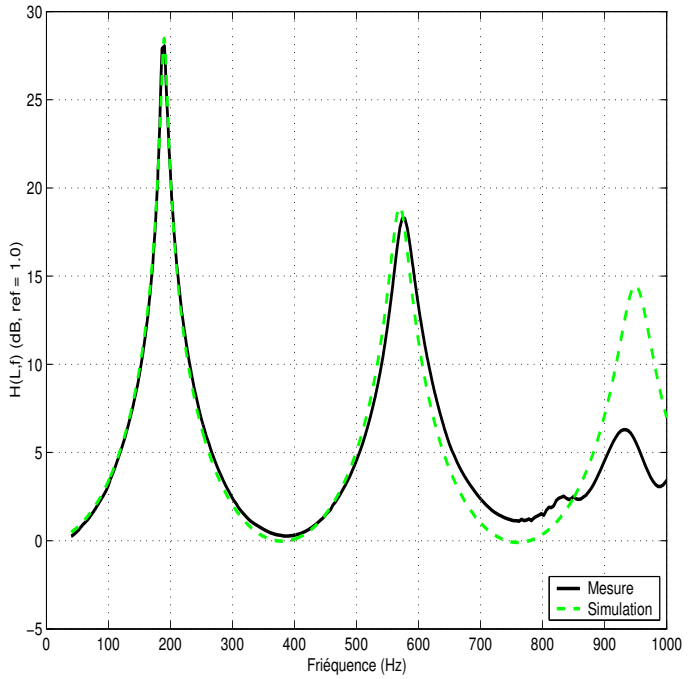

Fig. 2.9: Comparaison entre mesure et simulation d'une méthode dérivée de celle présentée par T. Pritz en 1994 [**?**] pour la caractérisation du module d'Young et du coefficient d'amortissement de la mousse de mélamine M à 25°C. Un mauvais alignement de l'échantillon, de résistivité moyenne et donc peu indiqué pour cette expérimentation, est responsable de l'écrasement de la troisième résonance.

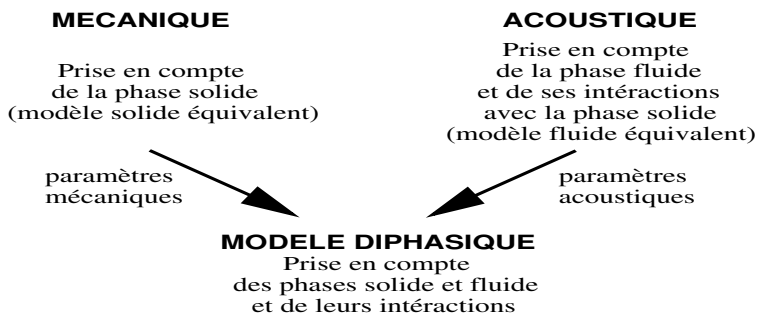

Fig. 2.10: Construction d'un modèle comportemental poro-visco-élastique diphasique à partir de modèles mécanique et acoustique.

M. Etchessahar [**?**] propose une méthode reposant sur l'étude de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque de matériau poreux excitée en flexion par une force ponctuelle. Cette méthode possède la particularité de modéliser le matériau poreux en utilisant la formulation mixte en déplacement-pression ($\{\underline{u}, p\}$) du modèle de Biot-Johnson-Champoux-Allard[4]. La plaque poreuse est ainsi représentée par une phase solide

[4] *cf* chapitre 3

dont le mouvement est décrit par la théorie des plaques minces couplée à une phase fluide dont le comportement est déduit des seules conditions limites du problème en pression.

Les applications expérimentales de cette méthode ont montrées qu'elle est de mise en oeuvre difficile : les conditions limites d'appui simple ou d'encastrement de la plaque poreuse et surtout son excitation ponctuelle demandent une grande rigueur expérimentale. Elle est de plus limitée à des matériaux ayant une masse volumique élevée et une résistance au passage de l'air[3] faible, la configuration et les dimensions utilisées soulevant le problème de l'influence du chargement fluide sur la réponse en flexion de la plaque poreuse.

Des méthodes de caractérisation élastique basées sur une excitation acoustique sont également explorées. L'une d'elles, décrite par décrite par V. Gareton [**?**], consiste à placer un échantillon d'environ 1×1 m^2 de matériau poreux en sandwich entre deux plaques de plus grandes rigidités. L'une des plaques est fixe, la seconde soumise au champ acoustique d'un haut parleur. Le mouvement de cette dernière plaque permet une excitation mécanique du poreux. La mesure de l'absorption acoustique induite par le système et une inversion à partir d'un calcul par matrices de transfert (TMM) permettent d'estimer le module d'Young et le coefficient d'amortissement du matériau supposé isotrope. L'inconvénient majeur de cette méthode dans la pratique est de nécessiter un échantillon de matériau de grandes dimensions pour s'approcher des hypothèses de calcul de la TMM. En revanche, tout comme la méthode de M. Etchessahar, les tailles des échantillons permettent un moyennage des quantités mesurées par rapport à une éventuelle hétérogénéité des paramètres estimés.

2.2 Modèles structuraux

Les modèles structuraux constituent une autre voie de recherche concernant la caractérisation mécanique des mousses. Ils tentent d'établir une correspondance entre la loi de comportement mécanique du squelette à l'échelle macroscopique et la loi de comportement du matériau constituant ce squelette à l'échelle microscopique. Les matériaux poreux y sont représentés comme des réseaux de cellules élémentaires élastiques. Le comportement mécanique du réseau est dépendant de celui d'une cellule. Le fluide saturant et les différents couplages fluide-structure ne sont pas pris en compte.

La diversité des modèles structuraux reposent sur les différentes hypothèses possibles concernant la géométrie de la cellule élémentaire et son mécanisme de déformation. Deux principales conditions sont cependant à l'origine de chaque modèle structural : la cellule doit être la plus représentative de la micro-géométrie du squelette (géométrie globale, poutres, sections... - *cf* fig. 2.11) et cette cellule élémentaire doit pouvoir paver l'espace tridimensionnel.

Le modèle de Gent et Thomas [**?**, **?**], datant de la fin des années 1950, est basé sur

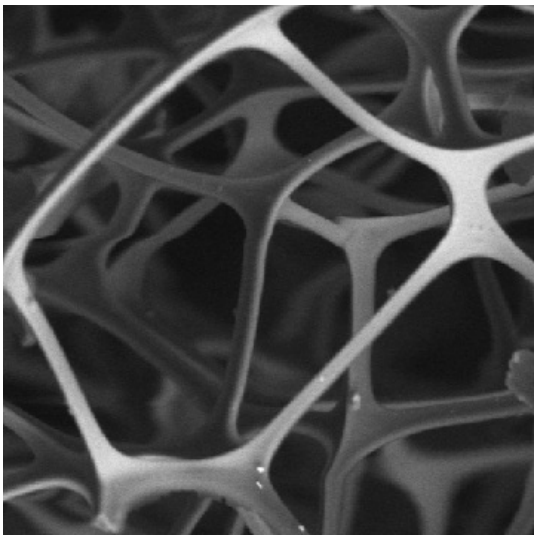

Fig. 2.11: Photographie au microscope à balayage électronique de la structure microscopique de la mousse de mélamine M (*cf* fig. 2.4). Cette mousse présente une symétrie hexagonale et des membranes à section de Plateau (*cf* §1.5). La largeur de l'image représente environ 50 micromètres. Photo : CTTM.

une cellule élémentaire cubique, constituée de fines poutres rectangulaires de longueur L et de section t^2. Cette cellule simple, représentée en figure 2.12, est soumise à un chargement axial de traction-compression (matérialisé par les forces F).

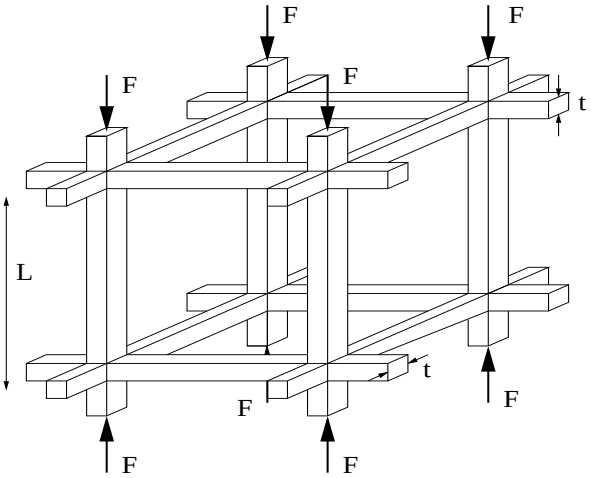

Fig. 2.12: Cellule élémentaire de Gent et Thomas [**?**, **?**].

Pour de faibles déformations, le module d'Young de la cellule (ou macroscopique), E, est trouvé proportionnel au module d'Young du matériau constituant la structure

(ou microscopique) E_s :

$$E = E_s \frac{\beta^2}{1+\beta} \tag{2.2}$$

$$\text{avec} \quad \beta = \frac{t}{L} \tag{2.3}$$

β est un paramètre représentatif de la densité de la structure et mesurable. En introduisant le paramètre porosité solide ϕ_s, complément du paramètre porosité fluide ϕ, on obtient la relation :

$$\phi_s = \frac{3\beta^2 + \beta^3}{(1+\beta)^3} \tag{2.4}$$

et sous l'hypothèse de matériaux à faibles densités (ou forte porosité), $\phi_s < 0.1$ ou $t \ll L$, Gent et Thomas écrivent une relation simple pour le module d'Young E :

$$E \simeq E_s \frac{\phi_s}{3} \qquad \text{avec} \qquad \phi_s = \left(3 - 2\frac{t}{L}\right)\left(\frac{t}{L}\right)^2 \tag{2.5}$$

Cette approche, partant d'une cellule très peu représentative de la micro-géométrie du squelette, ne permet pas de définir le coefficient de Poisson et donc le tenseur d'élasticité du squelette. Cependant, elle permet de rendre compte de la relation linéaire entre les modules d'Young macroscopique et microscopique et la fraction volumique, caractéristique de structures chargées axialement.

Quelques années plus tard, W. L. Ko [**?**] présente deux nouveaux modèles plus représentatifs de la micro-géométrie des mousses courantes. Le premier modèle s'appuie sur une cellule élémentaire hexagonale formée de poutres à section triangulaire, le second sur une cellule cubique face centrée. Ko fait apparaître que les résultats dépendent, entre autre, du choix de la cellule élémentaire. Il retrouve, par ailleurs le résultat de Gent et Thomas sur la proportionnalité à la porosité solide du module macroscopique pour un chargement en traction-compression et calcule, pour une déformation de flexion, une proportionnalité au carré de la porosité solide de ce même module macroscopique.

Gibson et Ashby [**?**], en 1982, confortent les précédents travaux de Ko ainsi que ceux de Menges et Knipschild [**?**] concernant les résultats en flexion. Ils mettent en évidence que le principal mécanisme de déformation des cellules élémentaires de structures à deux dimensions, en nid d'abeille, est la flexion.

Leurs résultats, sur une cellule élémentaire cubique à poutres de section rectangulaire et dont les jonctions entre cellules se situent sur le milieu de chaque poutre, permettent de constituer le tenseur d'élasticité d'une mousse isotrope. Le module d'Young macroscopique E et le module de cisaillement macroscopique G s'expriment en fonction du module d'Young du matériau microscopique E_s comme :

$$E = C_1 E_s \phi_s^2 \tag{2.6}$$

$$G = C_2 E_s \phi_s^2 \tag{2.7}$$

C_1 et C_2 étant des constantes déterminées empiriquement à partir de mesures sur différentes mousses de faibles densités : $C_1 = 1.0$ et $C_2 = 3/8$. Ces relations permettent, dans le cas d'une mousse isotrope, de définir le coefficient de Poisson ν comme une nouvelle constante :

$$\nu = \frac{C_1}{2C_2} - 1 \tag{2.8}$$

dont la valeur est 0.3 .

En 1988, Warren et Kraynik [**?**] reprennent les conclusions établies par leurs prédécesseurs et définissent un modèle original à cellule élémentaire tétrahèdrique régulière (fig. 2.13).

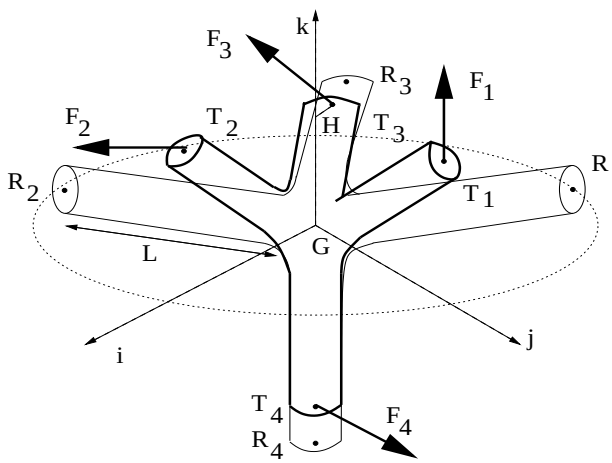

Fig. 2.13: Cellule élémentaire de Warren et Kraynik [**?**] en traits clairs. Cellule élémentaire de Sahraoui *et al.* [**?**] en traits gras.

Le module d'Young et le coefficient de Poisson macroscopiques sont calculés à partir de la moyenne spatiale de la contrainte microscopique agissant sur la cellule :

$$E = \frac{11N + 4M}{2\sqrt{3}(10N^2 + 31NM + 4M^2)} \tag{2.9}$$

$$\nu = \frac{(N - M)(5N + 4M)}{10N^2 + 3NM + 4M^2} \tag{2.10}$$

où M et N sont, respectivement, les compliances axiale et de flexion définies par :

$$M = \frac{L}{E_s A} \qquad \text{et} \qquad N = \frac{L^3}{3E_s I} \tag{2.11}$$

et où les paramètres A et I représentent l'aire et le moment quadratique de section de la poutre. Les relations (2.9) et (2.10) s'expriment en fonction de la fraction volumique solide ϕ_s comme :

$$\phi_s = \frac{A}{2\sqrt{3}L^3} \tag{2.12}$$

Pour un matériau de faible densité et dont la section des poutres est assimilable à une section de Plateau, on obtient pour expression du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$E \simeq 1.53 E_s \phi_s^2 \tag{2.13}$$

$$\nu \simeq 0.50 - 2.29\phi_s + 8.73\phi_s^2 \tag{2.14}$$

Ces résultats sont conformes aux précédents en ce qui concerne le module d'Young. En revanche, le coefficient de Poisson est trouvé dépendant de la porosité solide, donc de la géométrie de la mousse, contrairement aux résultats de Gibson et Ashby.

Les modèles présentés jusqu'à maintenant font l'hypothèse d'une isotropie du matériau poreux bien que les différents auteurs soient conscients de l'anisotropie de la plupart des mousses (*cf* §1.5) et de la conséquence de cette anisotropie sur la pertinence de leurs résultats.

Le premier modèle tenant compte d'une anisotropie dans les mousses cellulaires est dû à Kanakkanatt [**?**] en 1973. En 1988 Huber et Gibson [**?**] adaptent les travaux de Gibson et Ashby à des matériaux isotropes transverses en définissant une direction privilégiée à leur cellule élémentaire. Ce modèle permet l'estimation des modules d'Young longitudinal E_L et transverse E_T, des modules de cisaillement G_{LT} et G_{TT}, mais s'avère inadapté au calcul des coefficients de Poisson ν_{LT} ou ν_{TT}.

Récemment, Sahraoui *et al.* [**?**], ont adapté le modèle de Warren et Kraynik à un matériau orthotrope de révolution. La cellule élémentaire est alors choisie tétrahèdrique non régulière. Deux nouveaux paramètres, α et β, sont nécessaires pour caractériser la longueur des demis-poutres et l'angle de déformation du tétrahèdre (*cf* fig. 2.13).

$$GT_4 = \alpha GR_4 \qquad \text{et} \qquad HT_i = \beta HR_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.15}$$

Les modules élastiques et les coefficients de Poisson macroscopiques sont calculés à partir de la moyenne spatiale de la contrainte microscopique agissant sur la cellule. Pour un matériau de faible densité et dont la section des poutres est assimilable à une section de Plateau, les cinq constantes élastiques E_L, E_T, G_{LT}, ν_{LT} et ν_{TT} ont pour expression :

$$E_L \simeq 2.09 E_s (\phi_s/D)^2 \tag{2.16}$$

$$E_T \simeq 1.72 E_s (\phi_s/D)^2 \tag{2.17}$$

$$G_{LT} \simeq 0.39 E_s (\phi_s/D)^2 \tag{2.18}$$

$$\nu_{LT} \simeq 0.50 - 3.13(\phi_s/D) + 15.22(\phi_s/D)^2 \tag{2.19}$$

$$\nu_{TT} \simeq 10/17 - 4.86(\phi_s/D) + 11.64(\phi_s/D)^2 \tag{2.20}$$

$$\text{avec} \quad \phi_s = \frac{A}{2\sqrt{3}L^3} D(\alpha, \beta) \tag{2.21}$$

$$\text{et} \quad D(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \sqrt{1 + 8\beta^2})(3\alpha - 2)}{\alpha^3 \beta^2 (3\alpha + 1)} \tag{2.22}$$

Une application de ces relations à la mousse de mélamine M dont la porosité solide est 0.01 et que l'on supposera ici isotrope transverse, nous donne :

$$\frac{E_L}{E_T} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{E_2}{E_3} \simeq 1.2 \tag{2.23}$$

$$\nu_{TT} = \nu_{13} \simeq 0.49 \tag{2.24}$$

Pour rappel, les valeurs mesurées par la méthode en compression de Mariez *et al.* [**?**, **?**] à 18^oC, entre 1 et 100 Hz, sont :

$$\frac{E_2}{E_3} \simeq 1.6 \tag{2.25}$$

$$\nu_{13} \simeq 0.45 \tag{2.26}$$

Il est intéressant de noter que les valeurs calculées par ce dernier modèle se trouvent dans les mêmes ordres de grandeur que les valeurs mesurées à 18^oC en basses fréquences, fournissant ainsi une première estimation de quantités relatives aux paramètres élastiques de la mousse de mélamine M. Ces résultats ne peuvent, en revanche, être généralisés à d'autres températures ou à d'autres gammes fréquentielles.

2.3 Synthèse des méthodes et modèles existants

Les enseignements qui ressortent des méthodes de caractérisation, dont des applications à une mousse de mélamine ont été présentées tout au long de ce chapitre, sont regroupées ci dessous.

- Les mousses sont souvent anisotropes, orthotropes de révolution, de par le processus de moussage.
- Les modules d'Young complexes ont généralement une dépendance en fréquence marquée dans les conditions normales de température et de pression.
- En première approximation, les coefficients de Poisson peuvent être considérés indépendants de la fréquence pour des mesures sur des gammes fréquentielles très peu étendues [**?**, **?**]. Ce dernier point est très discutable en dehors de mesures dans des gammes de fréquence restreintes comme le fait remarquer T. Pritz [**?**].
- M. Etchessahar [**?**, **?**] montre que les effets dynamiques et surtout de couplage fluide-structure prennent de l'importance dès les basses fréquences sur la caracté-

risation mécanique des poreux[5]. L'utilisation d'un modèle comportemental diphasique pour une identification paramétriques par inversion, permet de s'affranchir de cette difficulté.

- L'utilisation du principe de superposition temps-température (TTS) doit être limitée dans le cas des mousses. En effet, comme le montre la figure 2.14, les méthodes, même les plus éprouvées, ne permettent pas d'obtenir de bons résultats en appliquant ce principe pour l'ensemble des poreux. Une des raisons évidentes, dans le cas de la méthode de torsion, est la non prise en compte de la nature diphasique des poreux dans l'estimation de leurs propriétés mécaniques. Des caractérisations sur les bandes fréquentielles d'intérêt à température donnée doivent être privilégiées par rapport à l'utilisation du TTS.

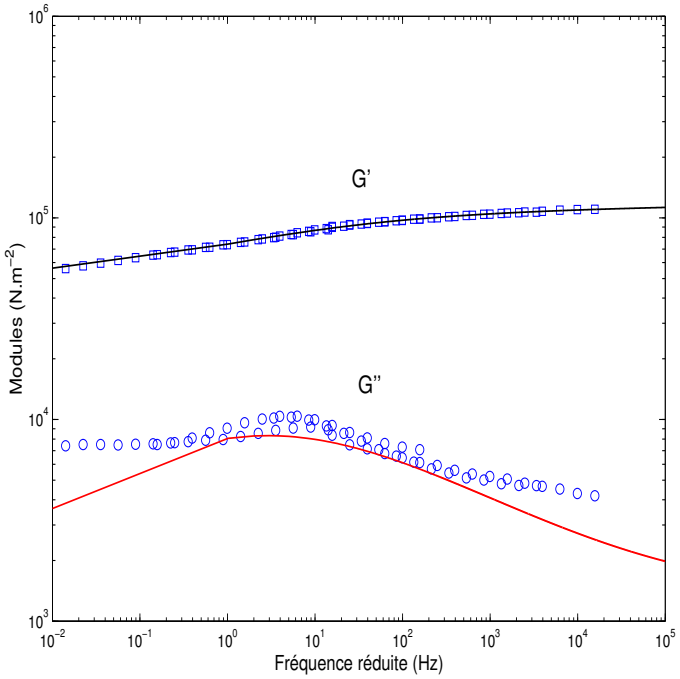

Fig. 2.14: Application du principe de superposition temps-température aux mesures en torsion sur la mousse de mélamine M (*cf* fig. 2.2 et 2.3). Les estimations des modules sont données à 24°C, les coefficients de recalage [**?**, **?**] ont été déterminés par glissement des courbes de la partie réelle du module de cisaillement : G'. Pour cette partie réelle, la courbe correspond au modèle à dérivée fractionnaire de Zener à 5 paramètres [**?**] recalé avec les paramètres suivants : $G_0 = 49\ 300$ N.m^{-2}, $d = 2.16$, $\alpha = 0.350$, $\beta = 0.338$ et $\tau = 0.084$. Sur la partie imaginaire G", la courbe est obtenue en utilisant les relations locales de Kramers-Kronig d'après la courbe de dispersion de G'.

[5] Sur ce point, il faut noter que les méthodes en cisaillement ou torsion, n'incluant pas de changement de volume, les effets de couplages entre phases ont une influence différente de celle pour les méthodes en traction-compression.

Les modèles structuraux appliqués aux mousses polymères établissent, quant à eux, les résultats suivants :

- le ou les coefficients de Poisson d'une mousse sont réels et ne dépendent que de la géométrie des cellules élémentaires,
- les modules de rigidité (d'Young, de flexion, de cisaillement...) doivent, par conséquent, suivre la même dépendance en fréquence et en température. Cette dépendance doit également être celle du module d'Young du polymère constituant la structure d'après la linéarité des relations de la section 2.2.

Les modèles structuraux aboutissent à des conclusions sur le comportement des mousses qui sont à prendre avec réserve puisque parfois en contradiction avec les observations expérimentales pour des mousses polymères. Ils ne semblent, en conséquence, pas indiqués pour l'étude des mousses plastiques, sous leurs formes actuelles.

D'autre part, leur application aux mousses polymères est confronté au fait que l'étape de moussage (§1.5) peut provoquer une transformation du polymère originel par insertion de molécules, résidus de réactions chimiques, dans les chaînes polymériques. Ainsi les propriétés du polymère originel peuvent être éloignées de celles du polymère constituant effectivement le squelette du poreux.

Dans le cas des mousses polymères, l'avenir des modèles structuraux se trouvent peut-être dans la reconstruction numérique [**?**, **?**], nouvelle approche micro-structurale récente qui connaît un essor important ces dernières années. Son coût en moyens technique et informatique est toutefois très important voire dissuasif.

2.4 Méthodes proposées

On se propose de mettre au point une technique proche de celles décrites par Brouard et al. [**?**], M. Etchessahar [**?**] ou I. Sow [**?**] (dans le cas des matériaux visco-élastiques) dont l'avantage est de caractériser un matériau dans une configuration souvent rencontrée en pratique : en bicouche ou sandwich et travaillant en flexion ou cisaillement.

Le dispositif expérimental retenu consiste en un support métallique aux propriétés élastiques connues tel qu'une poutre ou une plaque d'aluminium. Ce support est traité sur une face par le matériau poreux à caractériser et est excité en flexion par une force ponctuelle. Ce type de montage a déjà été largement éprouvé et est de mise en oeuvre relativement simple. Il présente, de plus, l'avantage de contourner les difficultés rencontrées par M. Etchessahar quant à l'excitation mécanique du matériau poreux.

Une caractérisation par méthode inverse réalisée sur des mesures de Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF), définies comme un rapport de la vitesse transversale du support métallique sur l'amplitude de la force injectée, permettrait alors d'estimer les paramètres du matériau poreux. Cette méthode d'inversion doit reposer sur un modèle comportemental du matériau visco-poro-élastique issu de la théorie de Biot afin de consi-

dérer au mieux les phénomènes de dissipations visqueuse et thermique. L'utilisation d'un calcul analytique, ou d'un calcul par éléments finis hiérarchiques (*cf* S. Rigobert [**?**], C. Langlois [**?**]), le cas échéant, s'impose pour une convergence rapide des résultats associée à un temps de calcul raisonnable.

La modélisation, rigoureuse, des conditions limites expérimentales, notamment l'impédance de rayonnement du poreux, ainsi que la prise en compte, si son influence s'avère marquante, de la condition de collage entre le support et le matériau poreux dans les équations, sont également des points à étudier.

Chapitre 3

Description des matériaux poro-visco-élastiques

Ce chapitre présente le modèle comportemental de Biot-Johnson-Champoux-Allard ou Biot-Allard généralisé [**?**, **?**]. Ce modèle est largement répandu en acoustique pour la description des matériaux poreux à squelettes déformables. Il inclut les modélisations des effets visqueux et thermiques introduites respectivement par Johnson *et al.* [**?**] et Champoux *et al.* [**?**].

Dans une seconde partie, la formulation mixte en déplacement-pression ($\{\underline{u}, p\}$), associée au modèle de Biot-Allard généralisé, est présentée.

3.1 Modèle de Biot-Allard généralisé

Cette section introduit les équations fondamentales de la théorie de Biot-Allard généralisée. Une attention particulière est donnée aux mécanismes de dissipations visqueuse et thermique dont les importances seront discutées au cours des chapitres 4 et 5.

3.1.1 Hypothèses générales

En plus des hypothèses de comportement sur la phase solide (*cf* chapitre 1), le modèle comportemental des matériaux poreux, qui sera décrit en section suivante, repose sur de nouvelles hypothèses pour tenir compte de leurs natures diphasiques.

3.1.1.1 Milieux continus et dimensions du problème

La première hypothèse exige que les pores soient inter-connectés et de tailles suffisamment importantes de sorte, qu'à l'échelle microscopique, les deux phases solide et fluide d'un matériau puissent être considérées, chacune, comme des milieux continus. Dans le cas où un matériau possède des pores fermés, l'influence du fluide que contient ces derniers est prise en compte dans les caractéristiques mécaniques du squelette.

Le fluide saturant la phase solide doit être peu visqueux de sorte qu'aucune contrainte en cisaillement n'y apparaisse. De même, la taille des pores ne doit pas être très petite devant les longueurs d'onde λ mises en jeu, les effets de viscosité seraient alors trop importants pour permettre un écoulement dans le milieu [**?**].

Les longueurs des ondes mises en jeu dans le matériau doivent être grandes devant la taille des pores (*cf* fig. 3.1) de façon à négliger les effets de dimensions finies tels que la diffusion (*cf* annexe A) ou la dispersion spatiale et considérer le fluide comme étant

incompressible à l'échelle des pores. Ce dernier point ne signifie pas, cependant, que la densité du fluide soit constante.

Pour le domaine de l'acoustique audible, ces hypothèses reviennent à se limiter à des matériaux dont la taille des pores est comprise entre 10 μm et quelques centimètres.

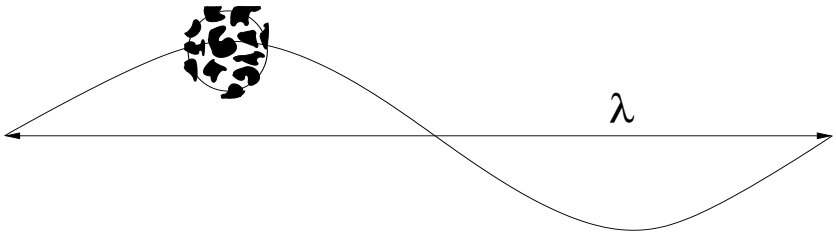

Fig. 3.1: Hypothèse de grandes longueurs d'onde, λ, devant les dimensions représentatives du milieu poreux.

3.1.1.2 Volume d'homogénéisation

Les matériaux poreux possèdent une micro-géométrie complexe et hétérogène (*cf* section 1.5 et fig. 1.6) rendant difficile toute approche microscopique [**?**, **?**]. Cependant, les paramètres géométriques du milieu poreux peuvent généralement être définis de manière statistique par l'intermédiaire d'un volume d'homogénéisation : le plus petit volume de matériau pour lequel la moyenne des paramètres définis à l'échelle microscopique est considérée stationnaire. La technique mathématique de l'homogénéisation dépassant le cadre du présent travail, le lecteur intéressé pourra se référer à ces quelques publications sur le sujet [**?**, **?**].

La figure 3.2 représente la recherche du volume d'homogénéisation dans le cas ou le paramètre est la porosité du matériau.

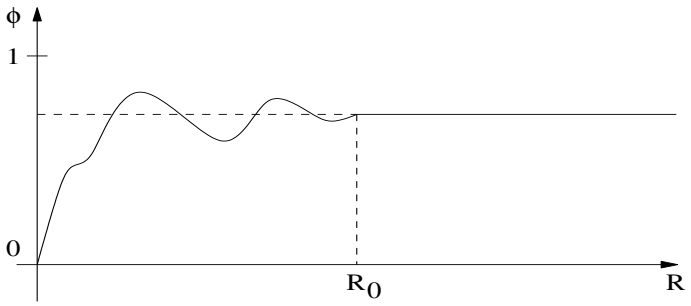

Fig. 3.2: Représentation schématique de la recherche du Volume Elémentaire Représentatif (VER) de la porosité ϕ d'un matériau poreux. Ce volume est défini en un point d'observation $\vec{r}$ par la sphère de rayon R_0 centrée en $\vec{r}$.

Considérons une sphère définie dans le volume du matériau à étudier de rayon R et centrée en $\vec{r}$. Lorsque le rayon R augmente, la valeur $\phi(\vec{r}, R)$ tend vers la constante $< \phi >$, valeur moyenne de ϕ dans le poreux. Pour une valeur critique R_0 de R, les

irrégularités du matériau se compensent. Le volume de la sphère de rayon R_0 centrée en $\vec{r}$ est nommé Volume Elementaire Représentatif (VER) de la porosité. Pour un milieu homogène, la valeur moyenne $< \phi >$ est indépendante du point d'observation défini par $\vec{r}$.

Dans le cas où différents paramètres caractéristiques du matériau n'ont pas les mêmes volumes d'homogénéisation, le volume minimal représentant le milieu est choisi comme le plus grand de ces volumes d'homogénéisation.

3.1.2 Paramètres acoustiques

Le modèle comportemental de Biot-Johnson-Champoux-Allard requiert cinq paramètres pour décrire le comportement acoustique d'un matériau poreux en plus des paramètres mécaniques. Des descriptions plus complètes de ces paramètres, dits acoustiques, sont données dans de nombreux ouvrages (*cf* [**?**, **?**, **?**, **?**]...).

1. ϕ : porosité.
   ϕ désigne la porosité fluide ouverte : c'est le rapport du volume occupé par la phase fluide continue sur le volume total du matériau. La valeur de la porosité varie donc entre 0 et 1. Dans le cas de mousses polymères ou fibreux acoustiques, sa valeur est souvent comprise entre 0.90 et 0.99.
2. σ : résistivité au passage de l'air [N.s.m^{-4}].
   C'est la résistance qu'offre un matériau poreux, de section et de longueur unitaires, à un écoulement quasi-statique. La résistivité caractérise les effets visqueux entre les deux phases du matériau à basses fréquences.
3. α_∞ : limite haute fréquence de la tortuosité.
   La tortuosité traduit le fait qu'une onde se propageant dans une des phases du matériau suit un chemin tortueux pour contourner l'autre phase du matériau. La tortuosité possède une valeur supérieure ou égale à 1. Elle est égale à l'unité lorsque le milieu possède des pores cylindriques parallèles à la direction de propagation de l'onde.
4. Λ : longueur caractéristique visqueuse [m].
   Cette grandeur qui a la dimension d'une longueur est liée à la taille des "inter-pores" (*cf* fig. 3.3). C'est un indicateur des effets visqueux aux hautes fréquences.
5. Λ' : longueur caractéristique thermique [m].
   Equivalent thermique de la longueur caractéristique visqueuse [**?**]. La longueur caractéristique thermique est un indicateur de la taille des pores, lieux privilégiés des échanges thermiques.

3.1.3 Equations fondamentales

En 1956, M.A. Biot [**?**, **?**] publie une loi de comportement pour les matériaux poro-élastiques, construite sur les bases de la mécanique des milieux continus et tenant compte

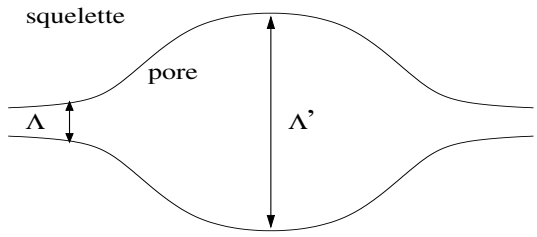

Fig. 3.3: Représentations schématiques des longueurs caractéristiques visqueuse Λ et thermique Λ'.

de l'interaction entre les deux phases, solide et fluide, qui les constituent. Ces relations ont, par la suite, été adaptées au domaine de l'acoustique par différents auteurs tels que Johnson *et al.* [**?**], Depollier *et al.* [**?**] Champoux *et al.* [**?**], J.-F. Allard [**?**]

3.1.3.1 Relations contraintes-déformations

Les relations contraintes-déformations pour les deux phases solide et fluide d'un milieu poro-élastique s'écrivent [**?**] :

$$\sigma_{ij}^{s}(\underline{u},\underline{U}) = (\widetilde{A}u_{i,i} + \widetilde{Q}U_{i,i})\delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij}^{s} \tag{3.1a}$$

$$\sigma_{ij}^{f} = -\phi p\delta_{ij} = (\widetilde{Q}u_{i,i} + \widetilde{R}U_{i,i})\delta_{ij} \tag{3.1b}$$

où $\underline{u}$ et $\underline{U}$ représentent respectivement les déplacements macroscopiques des phases solide et fluide. ε_{ij}^{s} exprime les composantes du tenseur des déformations macroscopiques associées à la phase solide, σ_{ij}^{s} et σ_{ij}^{f}, celles du tenseur des contraintes de la phase solide et de la phase fluide respectivement. δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Les coefficients élastiques dynamiques complexes peuvent s'exprimer, en supposant que le module de compressibilité du poreux soit faible comparé au module de compressibilité du matériau dont est constitué le squelette du poreux - ce qui est vérifié pour la majorité des mousses en acoutisque - comme ([**?**]) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \frac{(1-\phi)^2}{\phi}\widetilde{K}_e + 2N\frac{\nu}{(1-2\nu)} \\
\widetilde{Q} &= (1-\phi)\widetilde{K}_e \\
\widetilde{R} &= \phi\widetilde{K}_e
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$\widetilde{A}$	s'identifie au premier coefficient de Lamé λ dans la théorie de l'élasticité.
$\widetilde{Q}$	exprime le couplage existant entre les déformations de la phase solide et celles de la phase fluide.
$\widetilde{R}$	peut être interprété comme le module de compression du fluide occupant une fraction ϕ du volume du milieu poreux.
$\widetilde{K}_e$	est le module de compressibilité équivalent de la phase fluide (donc de l'air) tenant compte de la dissipation due aux échanges thermiques entre les deux phases. Son expression est détaillée en section 3.1.5.

Ces coefficients sont complexes et dépendants de la fréquence. Cette dépendance est marquée par le sigle *tilde* ($\widetilde{\ }$).

N	correspond au deuxième coefficient de Lamé μ en élasticité (ou de module de cisaillement G). Il est complexe, mais supposé réel et indépendant de la fréquence à l'origine des travaux de M.A. Biot.
ν et η_s	sont respectivement le coefficient de Poisson macroscopique et le coefficient d'amortissement structural de la matrice du milieu poro-élastique. Ils sont supposés réels et constants en fréquence à l'origine.

La nature de ces derniers paramètres N, ν et η_s fera l'objet de discussions dans les prochains chapitres.

3.1.3.2 Equations du mouvement

Les équations en mouvement harmonique pour les deux phases du matériau poreux s'écrivent :

$$\sigma^s_{ij,j}(\underline{u},\underline{U}) = -\omega^2(\tilde{\rho}_{11}u_i + \tilde{\rho}_{12}U_i) \tag{3.3a}$$

$$-\phi p_{,i} = -\omega^2(\tilde{\rho}_{12}u_i + \tilde{\rho}_{22}U_i) \tag{3.3b}$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{11} &= \rho_{11} + \frac{\tilde{b}}{j\omega} \\ \tilde{\rho}_{12} &= \rho_{12} - \frac{\tilde{b}}{j\omega} \\ \tilde{\rho}_{22} &= \rho_{22} + \frac{\tilde{b}}{j\omega} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les termes définis en (3.4) sont homogènes à des masses volumiques. Ces grandeurs tiennent compte des effets d'inertie, via les termes ρ_{ij}, et sont corrigés des effets visqueux par un coefficient complexe $\tilde{b}$ dont l'expression est détaillée à la section suivante.

Les termes ρ_{ij} sont définis comme :

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \rho_1 - \rho_{12} \\ \rho_{12} &= -\phi\rho_0(\alpha_\infty - 1) \\ \rho_{22} &= \phi\rho_0 - \rho_{12} \\ \rho_1 &= (1-\phi)\rho_s \end{aligned} \tag{3.5}$$

ρ_0 représente la masse volumique de l'air, ρ_1 celle de la phase solide et ρ_s celle du matériau constituant la phase solide. ρ_{11} et ρ_{22} sont respectivement les masses volumiques apparentes des phases solide et fluide corrigées d'un facteur de couplage massique ρ_{12} entre les deux phases du matériau. α_∞, la tortuosité géométrique du réseau poreux, étant supérieure ou égale à 1, ρ_{12} est toujours négative. Son influence sur les termes ρ_{11} et ρ_{22} est donc un effet de masse ajoutée liée à la géométrie macroscopique du matériau.

3.1.4 Effets visqueux

Les effets visqueux sont pris en compte par le coefficient $\tilde{b}$, qui intervient dans l'expression des masses volumiques dynamiques complexes (eq. 3.4). Ce coefficient d'amortissement visqueux est complexe et dépendant de la fréquence. Son expression générale est reliée à la porosité et à la résistance statique à l'écoulement :

$$\tilde{b} = \phi^2\sigma\widetilde{G} \tag{3.6}$$

où $\widetilde{G}$ est un facteur correcteur de la viscosité traduisant le fait que l'écoulement dans les pores s'éloigne d'un écoulement de Poiseuille lorsque la pulsation ω augmente (*cf* fig. 3.4). Johnson *et al.* [**?**] en proposent la forme suivante :

$$\widetilde{G} = \sqrt{1 + j\frac{4\alpha_\infty^2\mu\rho_0\omega}{\sigma^2\Lambda^2\phi^2}} \tag{3.7}$$

μ représentant la viscosité de l'air (dont la valeur à 18 degrés Celsius sous une pression de 1 atmosphère est de 1.84 Poiseuille ou N.s.m^{-2}).

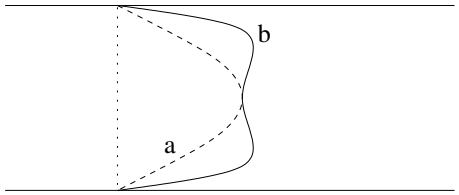

Fig. 3.4: Représentations schématiques des profils de vitesse particulaire dans un tube cylindrique. a) basse fréquence et b) haute fréquence.

3.1.5 Effets thermiques

Les mécanismes de dissipation reliés aux effets thermiques ont été introduits par Champoux et Allard [**?**] de façon similaire aux mécanismes de dissipation visqueux.

Les mécanismes de dissipation thermique sont considérés indépendants des effets visqueux et pris en compte par le module de compression dynamique complexe $\widetilde{K}_e$. Cette dissipation thermique est le résultat des échanges thermiques entre l'onde acoustique se propageant dans la phase fluide et la matrice solide du matériaux poreux.

L'expression de $\widetilde{K}_e$ est donnée par l'équation (3.8).

$$\widetilde{K}_e = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1)\left[1 + \dfrac{8\mu}{j\Lambda'^2 B^2 \omega \rho_0}\widetilde{G}'\right]^{-1}} \tag{3.8}$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, P_0 est la pression atmosphérique et B^2 est le nombre de Prandtl, rapport de la viscosité cinématique sur la diffusivité thermique (à 18° C et sous 1 atm, $\gamma = 1.4$ et $B^2 = 0.71$). $\widetilde{G}'$ est le facteur correcteur thermique :

$$\widetilde{G}' = \sqrt{1 + j\frac{\Lambda'^2 B^2 \rho_0 \omega}{16\mu}} \tag{3.9}$$

Ce paramètre est l'équivalent thermique du facteur visqueux $\widetilde{G}$ qui a été introduit à la section précédente.

3.2 Formulation mixte déplacement-pression

Jusqu'à présent, le modèle comportemental de Biot-Johnson-Champoux-Allard a été décrit en utilisant les déplacements des phases solide ($\underline{u}$) et fluide ($\underline{U}$). Cette formulation du modèle dite déplacement-déplacement $\{\underline{u}, \underline{U}\}$ fait intervenir 6 variables pour un espace à 3 dimensions : 3 pour la phase solide et 3 pour la phase fluide.

Une formulation mixte, ne faisant intervenir que 4 variables d'espace, a été développée par Atalla *et al.* [**?**]. Cette formulation utilise pour la description de la phase fluide, la surpression acoustique p dans les pores (*cf* fig. 3.5). Elle est nommée formulation déplacement-pression : $\{\underline{u}, p\}$.

3.2.1 Equations en déplacement-pression

3.2.1.1 Phase solide

Dans un premier temps, on développe l'équation du mouvement reliée à la phase solide. L'équation (3.3b) permet d'exprimer le déplacement moyen de la phase fluide $\underline{U}$ en fonction de la pression p dans les pores et du déplacement moyen $\underline{u}$ de la phase solide.

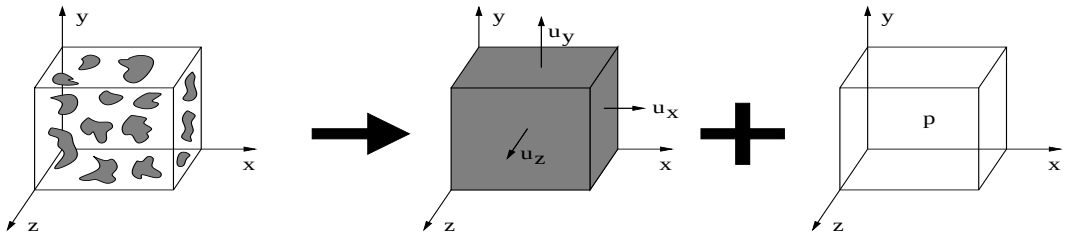

Fig. 3.5: Représentation d'un matériau poreux diphasique d'après la formulation mixte déplacement-pression ou $\{\underline{u}, p\}$.

Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$U_i = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i. \tag{3.10}$$

On substitue cette expression dans l'équation d'équilibre dynamique reliée à la phase solide (3.3a), pour obtenir :

$$\sigma^s_{ij,j}(\underline{u}, \underline{U}) = -\omega^2 \left(\tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) u_i - \tilde{\rho}_{12} \frac{\phi}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i}, \tag{3.11}$$

qui devient :

$$\sigma^s_{ij,j}(\underline{u}, \underline{U}) + \omega^2 \tilde{\rho}_s u_i + \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} = 0, \tag{3.12}$$

avec :

$$\tilde{\rho}_s = \tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}}. \tag{3.13}$$

$\tilde{\rho}_s$ est la masse volumique fictive de la phase solide. L'équation (3.12) s'exprime bien en fonction du déplacement moyen $\underline{u}$ de la phase solide et de la pression p dans les pores. Cependant, on remarque que le terme $\sigma^s_{ij,j}(\underline{u}, \underline{U})$, faisant intervenir le tenseur des contraintes de la phase solide, est toujours dépendant de la variable $\underline{U}$. Afin d'éliminer cette variable de l'équation (3.12), on utilise les relations contraintes-déformations présentées au chapitre précédent. En isolant le terme $U_{i,i}$ de la relation (3.1b) et en multipliant le résultat par $\widetilde{Q}/\widetilde{R}$, on obtient :

$$\widetilde{Q} U_{i,i} = \frac{-\phi \widetilde{Q}}{\widetilde{R}} p - \frac{\widetilde{Q}^2}{\widetilde{R}} u_{i,i} \tag{3.14}$$

On introduit cette nouvelle expression dans la relation contraintes-déformations pour la phase solide donnée en (3.1a) de façon à éliminer la dépendance du tenseur des contraintes du squelette solide en $\underline{U}$. On obtient ainsi :

$$\sigma^s_{ij}(\underline{u}, \underline{U}) = \left(\widetilde{A} - \frac{\widetilde{Q}^2}{\widetilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N \varepsilon^s_{ij} - \phi \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}} p \delta_{ij} \tag{3.15}$$

On définit ensuite le tenseur des contraintes réduit $\hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u})$:

$$\hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u}) = \left(\widetilde{A} - \frac{\widetilde{Q}^2}{\widetilde{R}}\right) u_{i,i}\delta_{ij} + 2N\varepsilon^s_{ij} \tag{3.16}$$

Ce nouveau tenseur s'interprète physiquement comme étant le tenseur des contraintes agissant sur la phase solide *in vacuo*. Ce sont les contraintes qui agiraient sur le squelette solide seul si le fluide dans les pores était "remplacé" par du vide. En substituant cette relation dans l'équation (3.15), on obtient :

$$\sigma^s_{ij}(\underline{u}, \underline{U}) = \hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u}) - \phi\frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}} p\delta_{ij} \tag{3.17}$$

En utilisant les expressions de $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{R}$, données en (3.2), il est facile de s'apercevoir que $\phi\widetilde{Q}/\widetilde{R}$ peut se simplifier en $(1-\phi)$, ce qui permet de réécrire l'équation (3.17) de la façon suivante :

$$\sigma^s_{ij}(\underline{u}, \underline{U}) = \hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u}) - (1-\phi)p\delta_{ij} \tag{3.18}$$

Le tenseur des contraintes agissant sur la phase solide du milieu poreux s'exprime alors comme la somme du tenseur des contraintes réduit $\hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u})$ et des contraintes fluides agissant sur un volume $(1-\phi)$. On peut ensuite introduire cette expression dans (3.12) pour obtenir l'équation du mouvement de la phase solide en fonction de $\underline{u}$ et p :

$$\hat{\sigma}^s_{ij,j}(\underline{u}) + \omega^2\tilde{\rho}_s u_i + \tilde{\gamma}p_{,i} = 0 \tag{3.19}$$

avec :

$$\tilde{\gamma} = \phi\left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right). \tag{3.20}$$

$\tilde{\gamma}$ est un coefficient de couplage volumique. L'équation (3.19) ainsi obtenue est l'équation d'équilibre dynamique associée à la phase solide du matériau poro-élastique. Elle a la forme de l'équation de l'élastodynamique classique, $\tilde{\gamma}p_{,i}$ représentant un terme de charge fluide appliquée sur la phase solide.

3.2.1.2 Phase fluide

Dans un second temps, on développe l'équation du mouvement reliée à la phase fluide.

La divergence de l'équation (3.10) donne :

$$U_{i,i} = \frac{\phi}{\omega^2\tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_{i,i} \tag{3.21}$$

En combinant cette expression avec la relation (3.3b), on obtient l'équation du mou-

vement de la phase fluide en fonction des variables $\underline{u}$ et p :

$$\phi p_{,ii} - \omega^2 \left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{22} \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}} \right) u_{i,i} + \omega^2 \tilde{\rho}_{22} \frac{\phi}{\widetilde{R}} p = 0 \tag{3.22}$$

En multipliant cette relation par $1/\phi$ et en utilisant l'expression de $\tilde{\gamma}$ donnée en (3.20), on obtient :

$$p_{,ii} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\widetilde{R}} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0. \tag{3.23}$$

qui se réécrit, en la multipliant par $\phi^2/(\omega^2 \tilde{\rho}_{22})$:

$$\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p = \tilde{\gamma} u_{i,i} \tag{3.24}$$

Cette dernière relation peut être alors vue comme l'équation de Helmholtz modifiée par un terme source $\tilde{\gamma} u_{i,i}$ relié à la dilatation harmonique de la phase solide.

3.2.2 Formulation intégrale faible

Les équations du mouvement en déplacement-pression développées dans la section précédente nous permettent de construire la formulation variationnelle du problème poro-élastique exprimée en terme du déplacement moyen de la phase solide et de la pression dans les pores. Elles s'écrivent en régime harmonique :

$$\hat{\sigma}^s_{ij,j}(\underline{u}) + \omega^2 \tilde{\rho}_s u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0, \tag{3.25}$$

$$\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p - \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0 \tag{3.26}$$

Soit δu_i et δp_i des variations admissibles du champ de déplacement de la phase solide et du champ de pression de la phase fluide du milieu poro-élastique. On multiplie respectivement les relations 3.25 et 3.26 par δu_i et δp, puis on intègre sur le domaine poreux Ω^m pour obtenir la formulation intégrale forte de Galerkin associée au milieu poreux :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_m} \left(\hat{\sigma}^s_{ij,j}(\underline{u}) + \omega^2 \tilde{\rho}_s u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} \right) \delta u_i d\Omega = 0 \\ &\int_{\Omega^m} \left(\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p - \tilde{\gamma} u_{i,i} \right) \delta p d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

En appliquant la deuxième formule de Green aux intégrales précédentes et en tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes réduit $\hat{\sigma}^s_{ij}$ de la phase solide, on obtient les formulations intégrales faibles de Galerkin pour les deux phases du milieu poro-

élastique :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^m} \hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u})\varepsilon^s_{ij}(\delta\underline{u})d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega^m} \widetilde{\rho}_s u_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega^m} \widetilde{\gamma} p_{,i} \delta u_i d\Omega \\ - \int_{\partial\Omega^m} \hat{\sigma}^s_{ij}(u) n^p_j \delta u_i dS = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^m} \left[\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i}\delta p_{,i} - \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p\delta p\right] d\Omega - \int_{\Omega^m} \widetilde{\gamma} u_i \delta p_{,i} d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega^m} \left[\widetilde{\gamma} u_i n^p_i - \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} n^p_i\right] \delta p dS = 0\end{aligned} \tag{3.29}$$

Les deux équations (3.28) et (3.29) définissent la formulation mixte en déplacement-pression introduite par Atalla *et al.* [**?**]. Cette formulation est utilisée pour des problèmes de couplages poro-élastique - acoustique. Dans les cas de couplages poro-élastiques - élastiques, une autre formulation, dite modifiée, découlant de la dernière est préférée. Cette formulation modifiée s'exprime en fonction des déplacements moyens des phases solide $\underline{u}$ et fluide $\underline{U}$ et de la surpression p dans les pores [**?**] :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^m} \hat{\sigma}^s_{ij}(\underline{u})\varepsilon^s_{ij}(\delta\underline{u})d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega^m} \widetilde{\rho}_s u_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega^m} \left[\widetilde{\gamma} + \phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right)\right] p\delta u_{i,i} d\Omega \\ - \int_{\partial\Omega^m} \sigma^t_{ij}(u) n^p_j \delta u_i dS = 0\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^m} \left[\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i}\delta p_{,i} - \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p\delta p\right] d\Omega - \int_{\Omega^m} \left[\widetilde{\gamma} + \phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right)\right] \delta p_{,i} u_i d\Omega \\ - \int_{\partial\Omega^m} \phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right) u_{,i} \delta p d\Omega - \int_{\partial\Omega^m} \phi(U_n - u_n)\delta p dS = 0\end{aligned} \tag{3.31}$$

A ce système d'équations, un jeu de conditions limites doit être appliqué afin de résoudre tous les cas pratiques. C'est ce jeu qui impose la formulation la plus adéquate à utiliser par la simplification de termes dans les équations sur les phases solide et fluide.

3.2.3 Puissances dissipées

Des résultats précédents, il est possible d'écrire les expressions des puissances dissipées par les différents mécanismes entrant en jeu dans un matériau poro-élastique.

- Puissance dissipée par effets structuraux.

La moyenne temporelle de la puissance dissipée par les effets structuraux est donnée par :

$$\Pi^s_{diss} = \frac{1}{2}\, Im\left(\omega \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\underline{u}) d\Omega\right) \tag{3.32}$$

- Puissance dissipée par effets visqueux.

La moyenne temporelle de la puissance dissipée par les effets visqueux est donnée par :

$$\Pi^v_{diss} = \frac{1}{2}\, Im\left[-\omega^3 \int_{\Omega^m} \widetilde{\rho}\underline{u}.\underline{u}^* d\Omega + \int_{\Omega^m} \frac{\phi^2}{\omega\widetilde{\rho}_{22}} \underline{\nabla} p.(\underline{\nabla} p)^* d\Omega - 2\omega \frac{\phi^2 \rho_0}{\widetilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega^m} Re\left(\underline{\nabla} p.\underline{u}^*\right) d\Omega\right] \tag{3.33}$$

En faisant l'approximation que le rapport $\widetilde{Q}/\widetilde{R}$ est purement réel, on obtient :

$$Im\left[\frac{\phi^2\rho_0}{\widetilde{\rho}_{22}}\right] = Im\left[\widetilde{\gamma} + \phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right)\right] \simeq Im[\widetilde{\gamma}] \tag{3.34}$$

et une approximation de la puissance dissipée par effets visqueux est :

$$\Pi^v_{diss} \simeq \frac{1}{2}\, Im\left[-\omega^3 \int_{\Omega^m} \widetilde{\rho}\underline{u}.\underline{u}^* d\Omega + \int_{\Omega^m} \frac{\phi^2}{\omega\widetilde{\rho}_{22}} \underline{\nabla} p.(\underline{\nabla} p)^* d\Omega - 2\omega\widetilde{\gamma} \int_{\Omega^m} Re\left(\underline{\nabla} p.\underline{u}^*\right) d\Omega\right] \tag{3.35}$$

- Puissance dissipée par effets thermiques.

La moyenne temporelle de la puissance dissipée par les effets thermiques s'écrit :

$$\Pi^t_{diss} = \frac{1}{2}\, Im\left[\omega\phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right) \int_{\Omega^m} 2\, Re(\underline{\nabla} p.\underline{u}^*) d\Omega - \omega \int_{\Omega^m} \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p.p^* d\Omega\right] \tag{3.36}$$

En faisant la même approximation que précédemment sur la valeur de $\widetilde{Q}/\widetilde{R}$, la puissance dissipée par effets thermiques est approximée par la relation :

$$\Pi^t_{diss} \simeq \frac{1}{2}\, Im\left[-\omega \int_{\Omega^m} \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p.p^* d\Omega\right] \tag{3.37}$$

Le calcul de ces puissances dissipées permettra, dans les chapitres suivants (notamment le chapitre 5), d'interpréter les fortes dissipations introduites par les matériaux poreux acoustiques et de les relier à des phénomènes physiques précis.

Chapitre 4

Caractérisation élastique : cas de poutres

Ce chapitre présente une méthode dérivée de celle dite de la poutre d'Oberst, ou poutre de conditions limites encastrée-libre en flexion, appliquée à la caractérisation élastique des matériaux poro-visco-élastiques. Il constitue une première étude réalisée en tenant compte des remarques faites en synthèse du chapitre 2, notamment de la nécessité de modélisation des poreux comme des matériaux biphasiques et plus précisément poro-visco-élastiques.

La méthode originelle d'Oberst est brièvement exposée avant de détailler la méthode proposée : sa mise en oeuvre expérimentale, ses applications à un matériau visco-élastique puis deux matériaux poro-visco-élastiques ainsi que les difficultés de modélisation rencontrées dans le cas de matériaux de fortes épaisseurs.

4.1 Avant propos sur la méthode d'Oberst

La méthode dite de la poutre d'Oberst, qui a fait l'objet d'une norme [**?**], est très répandue en industrie ou en laboratoire pour la caractérisation des modules d'Young ou de cisaillement ainsi que des coefficients d'amortissement structural de matériaux purement visco-élastiques.

Les modules d'Young ou de cisaillement sont déterminés séparément, dépendamment de la configuration de mesure utilisée par cette méthode résonante.

- En configuration bicouche (*cf* fig. 4.1a), un échantillon du matériau amortissant à caractériser est collé à une poutre de support métallique aux propriétés mécaniques connues. Le module d'Young dans la direction de l'axe de la poutre est déduit de la réponse en fréquence du système bicouche soumis à des vibrations de flexion.

- En configuration tricouche, une couche métallique de contrainte, identique à la poutre de contrainte et de propriétés parfaitement connues, est collée au matériau amortissant. Les contraintes en cisaillement sont alors privilégiées. La réponse en fréquence du système tricouche à des vibrations de flexion permet de déduire le module de cisaillement du matériau dans le plan de cette flexion (*cf* fig. 4.1b).

Une configuration monocouche du matériau à caractériser existe mais ne sera pas

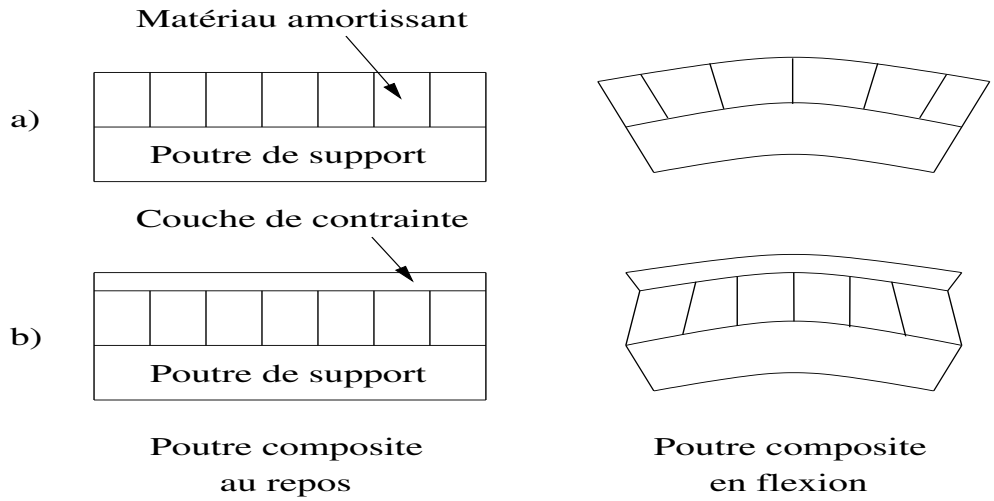

Fig. 4.1: Représentations schématiques des déformées de poutres composites cas a, le matériau amortissant travaille essentiellement en flexion (le cisaillement peut être négligé aux basses fréquences) et cas b, il travaille avant tout en cisaillement. Les épaisseurs relatives des couches ne sont pas respectées et ont été exagérées.

abordé pour le cas des matériaux poreux.

4.2 Méthode expérimentale proposée

La méthode proposée s'inspire largement d'une variation sur le thème de la poutre d'Oberst amorcée au GAUS par Jean-Luc Wojtowicki et Raymond Panneton. Sa mise en oeuvre expérimentale est présentée dans les pages suivantes sous la forme d'un article soumis à Review of Scientific Instruments. Le calcul analytique de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) utilisée dans l'article est reporté à l'annexe B. L'application de cette méthode au cas des matériaux poreux est décrite en section 4.5.

A NEW APPROACH FOR THE MEASUREMENT OF DAMPING PROPERTIES OF MATERIALS USING THE OBERST BEAM

Jean-Luc Wojtowicki
Henkel Surface Technologies, Automotive Division, Acoustic Center,
82 Avenue du 85e de ligne, 58203 Cosne sur Loire, France

Luc Jaouen
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613,
72085 Le Mans Cedex, France

Raymond Panneton
Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec, J1K 2R1, Canada

Abstract

The Oberst method is widely used for the measurement of the mechanical properties of viscoelastic or damping materials. The application of this method, as described in the ASTM E756 standard, gives good results as long as the experimental set-up does not interfere with the system under test. The main difficulty is to avoid adding damping and mass to the beam owing to the excitation and response measurement. In this paper, a method is proposed to skirt those problems. The classical cantilever Oberst beam is replaced by a double sized free-free beam excited in its center. The analysis is based on a frequency response function measured between the imposed velocity at the center (measured with an accelerometer) and an arbitrary point on the beam (measured with a laser vibrometer). The composite beam (base beam + material) properties are first extracted from the measurement by an optimization algorithm. Young's modulus and structural damping coefficient of the material under test can be deduced using classical formulations of the ASTM E756 standard for typical materials or using a finite element model for more complex cases. An application to a thick and soft viscoelastic material is presented, the results are shown to be consistent with Kramers-Kronig relations.

1 Introduction

The "Oberst beam" is a classical method for the characterization of damping materials based on a multilayer cantilever beam (base beam + one or two layers of other materials). As the base beam is made of a rigid and lightly damped material (steel, aluminum), the most critical aspect of this method is to properly excite the beam without adding weight or damping. So, exciting the beam with a shaker is not recommended because of the added mass (moving mass, stinger misalignment, force transducer). Alternative solutions are suggested in the ASTM E576 standard [1]. An electro-magnetic non-contacting transducer (tachometer pick-up, for example) can provide a good excitation but it is limited to ferro-magnetic materials. As aluminum is widely used for the base beam, a small piece of magnetic material must be glued to achieve specimen excitation.

This method creates two other problems. The first one is the difficulty to properly measure the excitation force. If there is no contact, the injected force must be evaluated by the measurement of the voltage or current applied to the pick-up, without knowing what is really proportional to the applied force. Moreover, this system is linear for small amplitudes. As the measurement is made near resonances of the structure, it is not obvious that the hypothesis of linearity is respected. The second problem is the fact that the small piece of ferro-magnetic glued to the structure is another source of uncertainty (added damping due to the gluing, mass of the added piece).

The measurement of the response of the beam is usually made using an accelerometer. Even if the problem of added damping and mass is much less critical because small and light accelerometers are available, it is preferable to avoid this solution for the same reasons as above. A straightforward solution is to use a laser vibrometer, which can accurately measure dynamic velocities with no contact. However, this equipment is much more expensive than a simple accelerometer.

Another problem can occur because of the clamped condition of the beam, see figure 1. The clamping is simulated by an increase of the thickness of the beam (the root). This root is wedged into a heavy and stiff clamping system. Usually this system is satisfactory but problem can occur in the case of misalignment, insufficient clamping force and bad machining of the root.

The objective of this study is to develop an alternative method to the one proposed in the ASTM E756 standard [1], in order to avoid experimental uncertainties and increase the precision of the measurement.

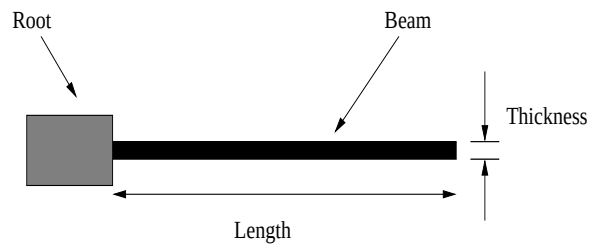

Figure 1: Cantilever beam used in the Oberst method.

2 Principle

A cantilever beam has the same dynamical behavior than a free-free beam of twice the length excited in its center by a normal imposed displacement Y_0, see figure 2. In this case, only the even modes of the free-free beam will be excited, and its modal behavior will be similar to a clamped beam since the slope and the relative displacement to the imposed motion are null at this point.

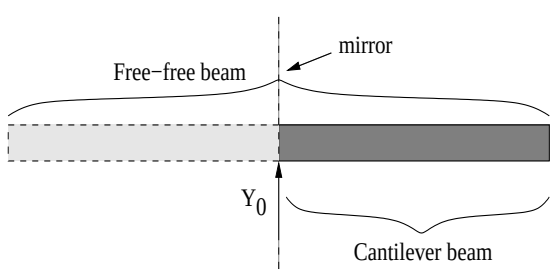

Figure 2: Similarity between a free-free beam excited in its center and a cantilever beam excited by its base.

An experimental set-up for the free-free beam excited in its center is proposed in figure 3. The beam under test (with or without damping material) is simply screwed in its center to an electro-dynamic shaker by mean of a threaded rod. In practice this is easy to set up; however care must be taken on the precision of the location of the center to avoid an unbalanced system.

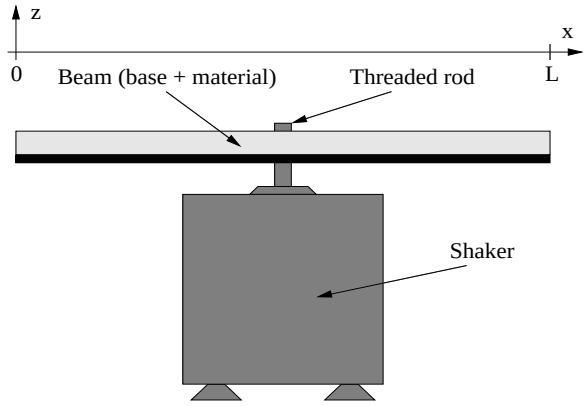

Figure 3: Proposed experimental set-up: a composite beam excited in its center by a normal imposed displacement.

3 Theoretical background

3.1 Beam equation: compact model

The bending vibrations of a beam are described by:

$$Y(x,\omega) = C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x) + F\cos(\beta x) + G\sin(\beta x) \tag{1}$$

with

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \tag{2}$$

where C, D, F and G are four unknown coefficients determined from boundary conditions, A is the cross-section area, ω the pulsation, ρ the mass density of the beam, E the elastic modulus (or Young's modulus) and I the second moment of area of the beam cross section.

For the free-free beam problem shown in Fig. 2, the following four boundary conditions are used:

$$EI\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \text{ and } x = L, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \text{ and } x = L, \tag{4}$$

where L is the length of the beam.

These equations represent the bending moment and the shear force at both extremities of the beam respectively. Conditions at $x = 0$ lead to a simplification of Eq. (1): $C = F$ and $D = G$.

The imposed displacement Y_0 along the normal axis at the center point gives the

following cinematic constraints to be applied on Eq. (1):

$$Y(L/2) = Y_0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial Y(L/2)}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Finally, if H is the ratio of the dynamic response of the beam divided by the imposed motion, Eqs. (1) to (6) yield to:

$$\begin{aligned} H(x,\omega) &= \frac{1}{2} \frac{\cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)}{1+\cosh(\beta L/2)\cos(\beta L/2)}[\cosh(\beta x)+\cos(\beta x)] \\ &+\frac{1}{2} \frac{\sinh(\beta L/2)-\sin(\beta L/2)}{1+\cosh(\beta L/2)\cos(\beta L/2)}[\sinh(\beta x)+\sin(\beta x)]. \end{aligned} \tag{7}$$

In this equation, the natural frequency equation for a clamped-free beam of length $L/2$ is found in the denominator. This confirms the validity of the principle of the method explained in section 2, in which the free-free beam excited in its center is similar to the Oberst beam.

It must be noted that the same model is used for both the bare beam and the composite beam. In the second case, the beam is seen as a homogenous equivalent beam. The objective is to determine de product $E \times I$ of the beam under test where E is the complex equivalent Young's modulus:

$$E = E'(1 + j\eta) \tag{8}$$

with

E' : Real part of the Young's modulus,
η : Structural damping coefficient (real value).

I is the equivalent second moment of area. The extraction of the material mechanical properties is made in a second step. Equation (7) is the "compact" model of the beam, because there is no need to make a modal decomposition, all the information is included in this single equation.

3.2 Validation of the model

The model has been validated using two beams. The first one is a 400.00 mm long (L) aluminum beam of 19.97 mm wide (w) and 1.58 mm thick (H_1). The real part of its Young's modulus E_1 is 70.0 GPa and its structural damping coefficient η_1 is 0.0007. These values have been taken constant for preliminary validation purposes. The results are given in Fig. 4 for a measurement point at the tip $x = 0$ of the beam. The agreement between the model's prediction and the measurement is good. The modal peaks are well located, the measured and calculated levels are close. The measured curve is

obtained using the set-up depicted in Fig. 3. Experimental set-up will be discussed in detail at section 4.

The frequency response function (FRF) between the middle point where the beam is excited and the tip of the beam tends towards 1 (0 dB) between two modes, the two points are vibrating in phase with the same amplitude. Near a mode, the response point reaches high amplitudes controlled by the damping. The frequencies of the modes could be predicted using the classical formulation for a cantilever beam. Conversely, those FRFs can be used directly to calculate the mechanical properties of materials using the ASTM E756 standard for example.

The second example (figure 5) is the result of the measurement on the same beam with an unknown double sided adhesive of thickness $H_2 = 0.13$ mm. The Young's modulus has been adjusted, for the first mode, to obtain an equivalent complex modulus E allowing a good fitting of the calculated curve with the measured one for the first resonance. The fact that the real part of the Young's modulus and the damping coefficient of the composite beam are not constant cannot be clearly seen on this scale although it can be verified. This example shows that the compact model can also be used for composite beams. In the following, the results will not be presented on such a wide frequency band. They will concentrate on each mode separately, in order to obtain at least one value for the damping and Young's modulus for each mode.

The advantage of this method is to calculate the properties of the composite beam using several data points and the real analytical formulation for the curve fitting. The ASTM E756 standard uses the values of the modal frequencies (read at the peaks) and damping (measured with an n dB bandwidth method). The modal frequency is equal to the peak frequency as long as the damping is light, in the case of high damping, the natural frequency should be corrected. Secondly, the n dB bandwidth method is a quick way to evaluate the damping and, actually, is not very precise. A curve fitting method is preferable. However, usual curve-fitting algorithms are based on trial functions, which are not the real function. The second objective of this work is to improve the precision of the determination of materials properties using a function which depicts the real physical problem: Eq. (7).

3.3 Calculation of material properties

In the following, the approach is the same as the ASTM E756 standard, the calculation of material properties are based on the same models. The only difference is that the ASTM E756 standard separates the Young's modulus (real number) to the damping (real number) and makes two calculations. In this study, all the moduli are complex numbers.

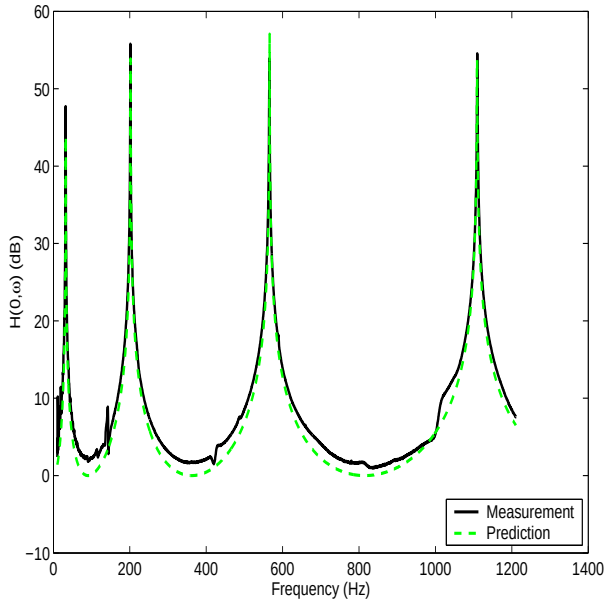

Figure 4: Validation of the compact model, bare aluminum beam ($L = 400$ mm, $w = 19.97$ mm, $H_1 = 1.58$ mm, $T = 21^o$ C).

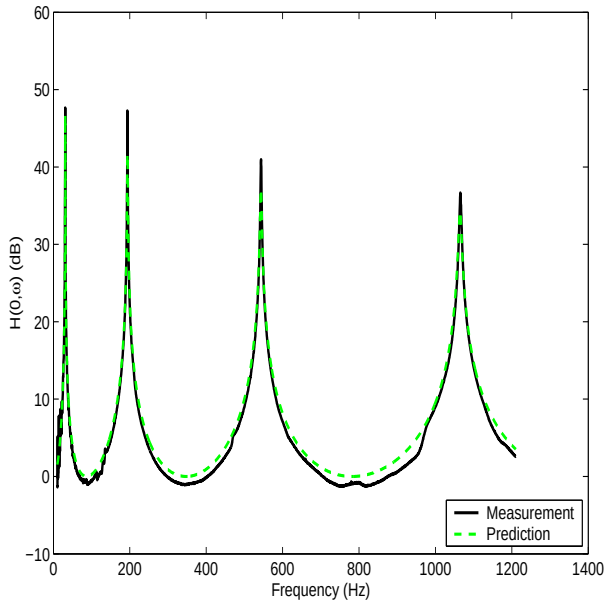

Figure 5: Validation of the compact model, aluminum beam with an unknown adhesive layer $L = 400$ mm, $w = 19.97$ mm, $H_1 = 1.58$ mm, $H_2 = 0.13$ mm, $T = 21^o$ C).

3.3.1 Extensional damping

When the damping material is unconstrained (glued on one or two faces of the base beam), the treatment is called extensional damping. As one of the faces of the material is free, the added rigidity is due to the bending. The determination of the materials properties is based on the Ross, Ungar and Kerwin [2, 3] model for a multi-layer structure. The referred model allows to calculate the flexural rigidity $E \times I$ of a multi-layer beam or plate using the properties of the different layers (density, thickness, length, Young's or shear modulus). The following equations give the equivalent flexural rigidity for a single sided damped beam and a double sided damped beam, respectively:

$$EI = E_1 I_1 \left(1 + eh^3 + 3(1+h)^2 \frac{eh}{1+eh}\right), \tag{9}$$

$$EI = 2E_2 I_2 + E_1 I_1. \tag{10}$$

with

e : Young's modulus ratio E_2/E_1,
h : Thickness ratio H_2/H_1,
E_1 : Young's modulus of the base beam (N.m^{-2}),
I_1 : Second moment of area of the base beam cross section (m^4),
H_1 : Thickness of the base beam (m),
E_2 : Young's modulus of the tested material (N.m^{-2}),
I_2 : Second moment of area of the tested material cross section (m^4),
H_2 : Thickness of the tested material (m).

The calculation of the Young's modulus of the material E_2 using Eq. (9) leads to the resolution of an equation of the second order (two complex roots). But only the root with the positive real and imaginary part is the physical solution.

3.3.2 Shear damping

When the material is constrained between the base beam and a rigid layer, the composite beam has a slightly higher flexural rigidity due to the shear deformation of the sandwiched material, which is much higher than the bending deformation alone. Equation (11) [3] gives the flexural rigidity for a composite beam with a shear damping treatment assuming that the base beam and the rigid constraining layer are similar.

$$EI = \frac{E_1 I_1}{6} + E_1 H_1 \left(H_1 + H_2\right)^2 \frac{G_2}{E_1 H_1 H_2 \beta^2 + 2G_2} \tag{11}$$

with G_2: Complex shear modulus of the tested material (N.m^{-2}).

The second term of Eq. (11) is due to the flexural rigidity of the sandwiched material. For soft material, this term can be neglected for the first modes. However, it is interesting to note that the shear deformation energy decreases as the frequency

increases due to the division by the squared modal constant.

The complex Young modulus (or shear modulus) can be extracted from Eqs. (9) to (11) when the composite flexural rigidity $E \times I$ has been previously determined by the curve fitting of Eq. (7) with experimental measurements for each frequency band containing one vibration mode. It must be noted that expressions (9) to (11) depend on assumptions detailed in [1, 3].

4 Application

Estimations of the Young's modulus and the structural damping coefficient of a polyvinyl chloride based viscoelastic material are presented as an application of the proposed experimental set-up. This material of density 1260 kg.m^{-3} will be named material R in the following.

4.1 Preparation of experiments

4.1.1 Selection of test configuration

The first step is to select the most appropriate beam configuration for the test. If the material under test is rigid enough to be measured alone, this is the best way to proceed. If not, it is suggested to start with the sandwich composite beam for softer materials like thin elastic materials. For heavier or more rigid materials (damping sheets), the single side beam can be tried, but the base beam should be as thin as possible and should never be thicker than the material under test. Globally, the ASTM E756 recommendations must be followed.

From static obervations, the one side configuration is chosen for material R.

4.1.2 Gluing

The gluing of the material under test is another source of error. Some materials are self-adhesive, and in some cases the glue is not strong enough to insure a good contact between the two surfaces. In the case of slipping, the imposed deformation from the base beam to the material can lead to a slight underestimation of the properties of the material. Thin double sided adhesives can be used but great care must be taken as the adhesive layer's presence can affect the results. Particulary, it must be kept to a minimum thickness as recommended in the ASTM E756 standard.

To insure that the gluing of material R is sufficient, the double sided adhesive presented in section 3.2 is used. Preliminary tests have shown that the adhesive layer modify the response of the beam (See Fig. 5 compared to Fig. 4). A first inversion, using the method described in section 3.3.1, is thus realized to estimate an equiva-

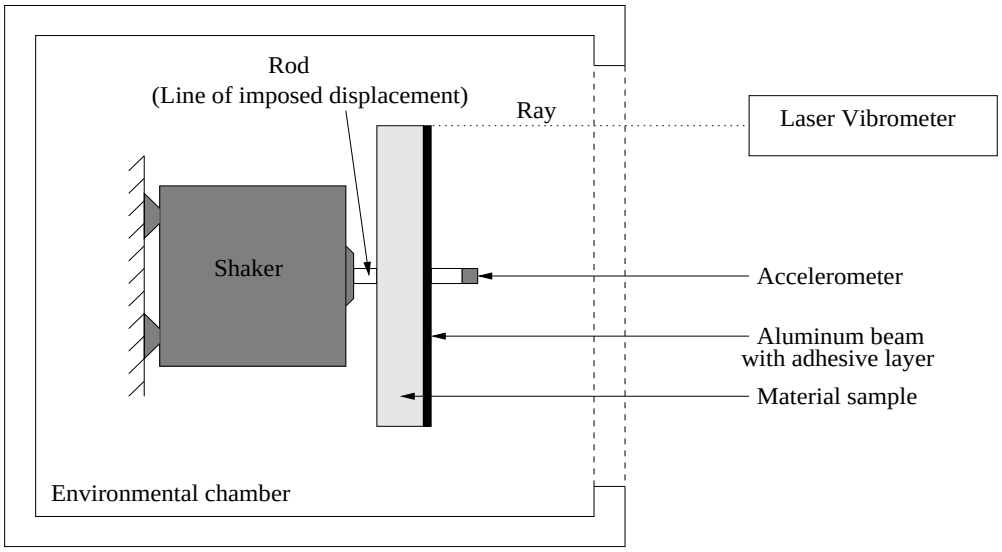

Figure 6: Experimental set-up.

lent Young's modulus and structural damping coefficient for the aluminum beam with adhesive layer.

4.2 Experimental set-up

The experimental set-up is shown in figure 6. The damping layer is glued to the aluminum beam with a thin double sided adhesive. An electrodynamic shaker driven by a white noise signal excites the multilayer in its center through a line displacement. The tip motion is measured with a laser vibrometer and the center motion using an accelerometer. To obtain displacements, one time integration and a double time integration are performed on the laser vibrometer signal, and on the accelerometer signal, respectively.

Note that the rod's diameter must be minimum to support the accelerometer and impose the local displacement.

Measurements have been realized between 980 to 1000 mbar of static pressure with 10 to 20 % of relative humidity.

4.3 Results

Figure 7 presents 6 FRF measurements obtained for material R at temperatures from 30°C to 5°C. On this figure, the frequency and temperature dependence of the material's stiffness and its structural damping is clear. The viscoelastic material stiffness decreases with temperature.

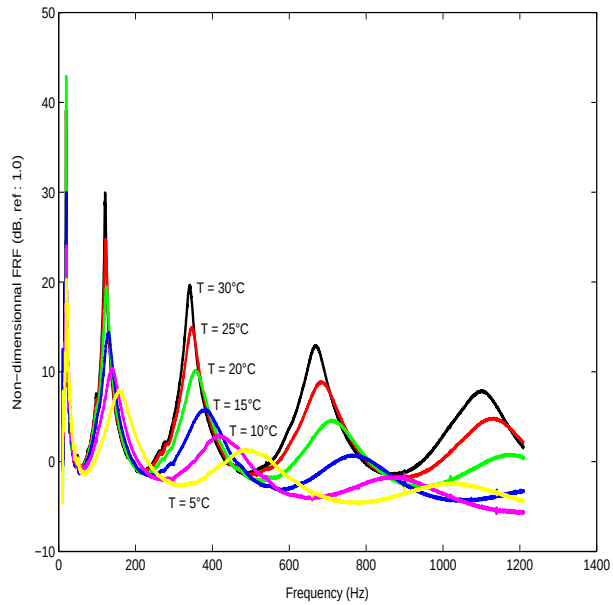

Figure 7: Measured frequency responses for a one side configuration beam with viscoelastic material R as function of frequency and temperature.

The thickness of the material sample is 6.35 mm (1/4"). The classical analysis for thin beams described in section 3.3 or in the ASTM E756 [1] standard is not relevant for such a thickness. Consequently, a hierarchical 3-Dimensional finite element software [4] is used in the inversion to model the material R perfectly bonded onto the equivalent beam defined at section 3.2. A quasistatic measure [6] of material R Poisson ratio ν_{xz} reveals an elastic anisotropy : 0.11. Although this value is not usual, it will be used in the 3-D simulation and assumed to be real and constant in the frequency range of interest and in temperature. This latter assumption can be challengeable [5].

The rigidity of the previous base beam, with a double sided adhesive layer, is compared to the added rigidity due to the material R under test. These comparisons at various frequencies and temperatures allow to characterize material R elastic properties.

Figure 8 shows the variation of the real part of the Young's modulus, in the x-direction, with frequency and temperature for material R: E'_3. These results are obtained from measurements of figure 7 and the use of a Levenberg-Maquardt inversion algorithm [7, 8]. The figure confirms the earlier observations : the material's modulus decreases significantly with temperature.

The variation of structural damping η_3 with frequency and temperature, for this viscoelastic material, is shown in figure 9. A material's state transition, which will be more clearly highlighted in Fig. 11 of section 4.4, can be observed.

In these two series of results, Fig. (8) and Fig. (9), the first mode results have been ignored because of high sensibility of this mode to boundary conditions. The same

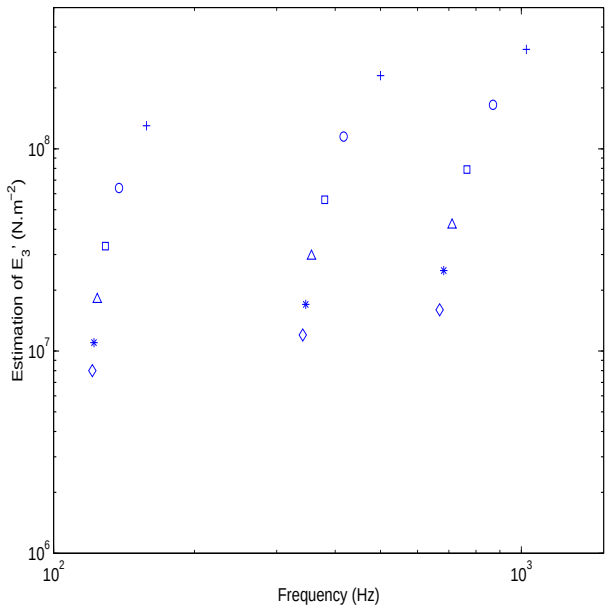

Figure 8: Variation of the real part of Young's modulus E'_3 with frequency and temperature for viscoelastic material R. +: 5°C, o: 10°C, □: 15°C, △: 20°C, ⋆: 25°C, ⋄: 30°C. Measurements points for each temperature are linked for the sake of legibility, not to suggest a linear evolution between these points.

coefficients of variation as in the ASTM E756 standard applied on the precisions of these results, ie. 10% to 20%.

4.4 Validation

The consistency of measurement data for material R are discussed looking at figures 10 and 11. These figures show results of the Time-Temperature Superposition (TTS) principle application for material R [9, 10].

A curve fitting for the real part of Young's modulus, E'_3, using the fractional Zener model [11] with parameters $M_0 = 3.98\ 10^6$ N.m^{-2}, $c = 202$, $\alpha = 0.553$ and $\tau = 1.82\ 10^{-6}$s is done on figure 10.

On figure 11, measurements of the structural damping coefficient η_3 are compared with the theoretical calculation using the local K-K relations from dispersion of the Young's modulus [11]. The value of α greater than 0.5 and the low accuracy of structural damping coefficient measurements can explain the underestimation of the theoretical calculus [11].

Acknowledgement

The authors would like to thank Christian Langlois for his precious help on the numerical calculus.

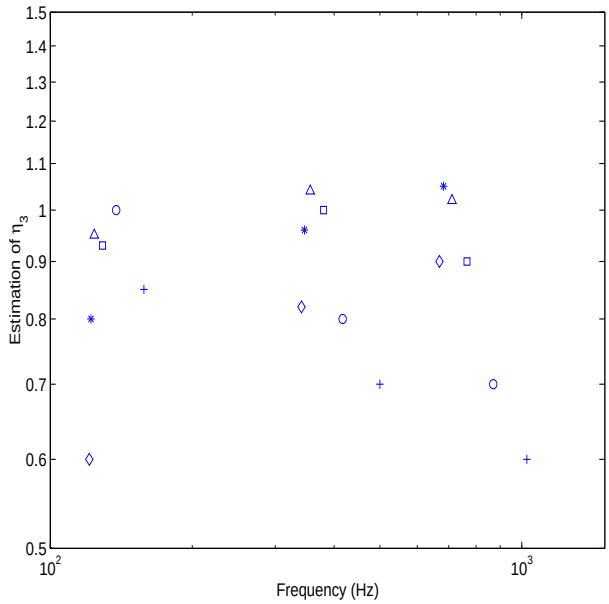

Figure 9: Variation of the structural danping coefficient η_3 with frequency and temperature for viscoelastic material R. +: 5^oC, o: 10^oC, □: 15^oC, △: 20^oC, ⋆: 25^oC, ⋄: 30^oC. Measurements points for each temperature are linked for the sake of legibility, not to suggest a linear evolution between these points.

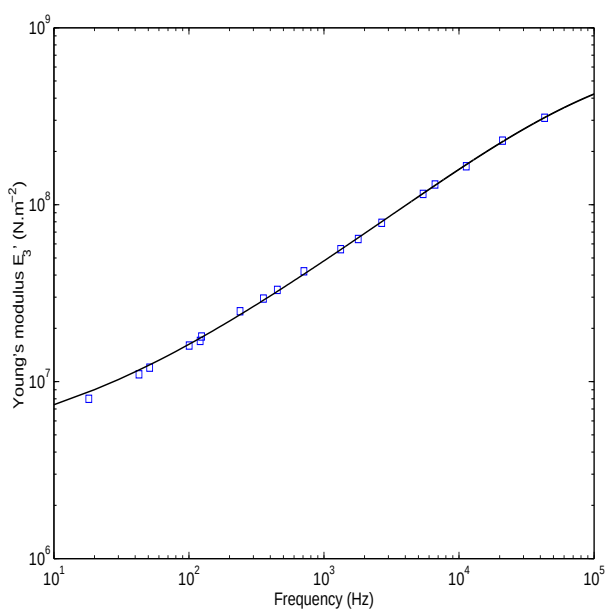

Figure 10: TTS application: master curve of the real part of Young's modulus (E_3') real part at a reference temperature of 20^oC for material R. □: measurements, —: curve fitting of the fractional Zener model [11].

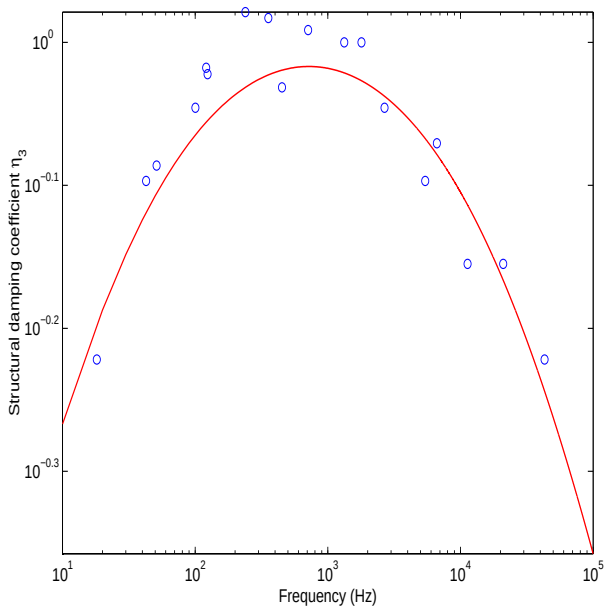

Figure 11: TTS application : master curve of the structural damping coefficient η_3 at a reference temperature of 20^oC for material R. ∘: measurements, —: calculation using the local K-K relations from dispersion of the Young's modulus.

References

[1] ASTM E756-98, Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials, American Society for Testing and Materials, 1998.

[2] Ross, R., Ungar E.E., Kerwin E.M., Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate, Structural Damping, Proceedings of ASME, New York, 1959.

[3] Nashif A.D., Jones D.I.G., Henderson J.P., Vibration Damping, John Wiley & Sons, 1985.

[4] Langlois C., Modelling vibro-acoustic problems with finite elements, Master's thesis, Sherbrooke university (Qc), Canada, 2003

[5] Pritz T., Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials, Applied Acoustics, 60, 279-292, 2000.

[6] Langlois C., Panneton R., Atalla N., Polynomial relations for quasi-static mechanical characterization of isotropic poroelastic materials, J. of the Acoustical Society of America, 110(6), 2001.

[7] Levenberg K., A method for the solution of certain non-linear problems in least-squares, Quarterly of Applied Mathematics, 2(2), 164-168, 1944.

[8] Marquardt D.W., An algorithm for least squares estimation of non linear parameters, SIAM J., 11, 431-441, 1963.

[9] Ferry J.D., Viscoelastic properties of polymers, John Willey and Sons, 1961.

[10] Corsaro R.D., Sperling L.H., Sound and vibration damping with polymers, American Chem. Soc., 1990.

[11] Pritz T., Verification of local Kramers-Kronig relations for complex modulus by means of fractional derivative model, J. of Sound and Vibration, 228(5), 1145-1165, 1999.

4.3 Précisions sur la méthode

Cette section regroupe une série de remarques utiles à l'expérimentateur sur chacun des éléments ou points délicats du montage présenté dans les pages précédentes. Globalement, l'ensemble des recommandations formulées dans la norme ASTM E756 [**?**] doivent être respectées.

4.3.1 Pot vibrant

Le pot vibrant utilisé dans le montage doit être capable de supporter la charge de la poutre, du matériau étudié et de l'accéléromètre sans que le poids de ceux-ci n'influence trop sur la zone linéaire d'excitation du pot. Lors des essais, un pot vibrant Brüel et Kjær 4809 a été choisi.

La gamme en température pour l'utilisation de ce type de pot est de 5°C à 40°C. C'est l'instrument limitant pour l'étude en température, il a été isolé thermiquement pour approcher sa limite inférieure. Le choix d'un pot vibrant plus petit mais moins limité en température, tel que le modèle B&K 4810, n'a pas été retenu en raison du poids des poutres utilisées. L'utilisation d'un tel pot vibrant n'est cependant pas à écarter puisqu'il permettrait des mesures sur une gamme de température beaucoup plus étendue, sans toutefois atteindre les larges possibilités que permettent un système habituel avec excitateur et capteur magnétiques.

4.3.2 Système d'attache

Ce système de maintien possède l'inconvénient de ne pas être aussi ponctuel qu'attendu, mais il permet d'avoir un système rapide et simple d'utilisation, ce que l'on doit garder comme objectif pour conserver un avantage technique sur la méthode de la poutre d'Oberst traditionnelle [**?**].

Une tige filetée d'environ 1.5 pouce (soit environ 35 mm) de longueur, de filet 6-40 (3.05 mm de diamètre), permet de maintenir la poutre et le matériau qui lui est collé (*cf* fig. 4.2). Un point de colle sur la tige est recommandé pour maintenir correctement la poutre - qui ne possède pas ou peu de filet - sur la tige.

4.3.3 Accéléromètre

L'accéléromètre est positionné sur la vis du coté opposé au pot vibrant. Etant sur la vis l'accéléromètre est ainsi dans l'axe du pot vibrant. Le modèle utilisé lors des essais était de type PCB UB353B18.

4.3.4 Epaisseur du matériau test

Le choix de l'épaisseur du matériau à étudier est un point délicat : pour des épaisseurs identiques, plus l'échantillon de matériau est souple, moins son influence sur les

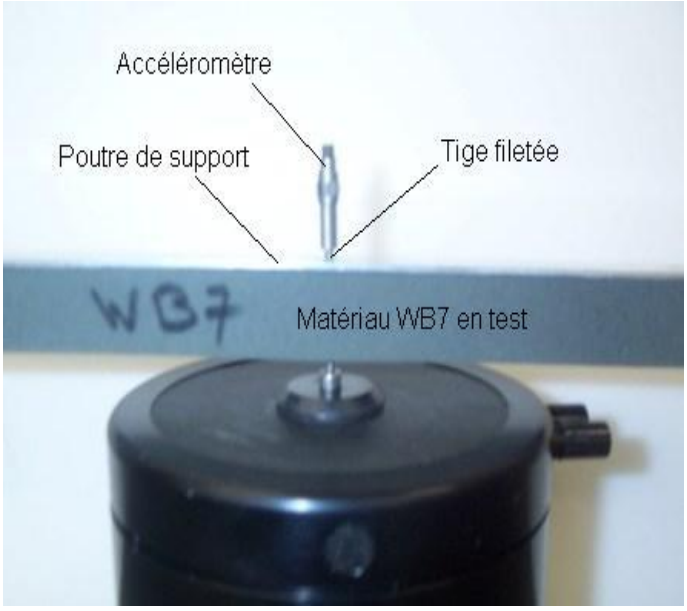

Fig. 4.2: Photo du système d'attache pour la poutre du GAUS. La mousse identifiée WB7 est collée à une poutre d'aluminium de 1.58 mm d'épaisseur par l'intermédiaire d'un scotch double face. Le pot vibrant et l'accéléromètre sont situés chacun à une extrémité de la tige filtée traversant le multicouche.

vibrations de la poutre de support est observable. La caractérisation du matériau n'en est que plus difficile ou incertaine.

Les tests réalisés ont été faits avec des épaisseurs d'un quart de pouce (6.35 mm) pour les matériaux de modules d'Young d'environ 10 MPa en statique. Pour les matériaux de modules d'Young inférieurs, une épaisseur d'un pouce (25.4 mm) est recommandée (une épaisseur du matériau plus importante imposerait une longueur de la tige filetée plus grande et le risque de la voir se déformer statiquement sous le poids du multicouche).

Aucune étude n'a été réalisée avec des échantillons plus épais qu'un pouce. Si le cas devait être réalisé pour cause de grande souplesse du matériau, l'expérimentateur devrait de plus s'assurer que l'hypothèse de petites déformations est respectée lors des vibrations du multicouche.

4.3.5 Collage du matériau à la poutre

Le collage du matériau à la poutre requiert les mêmes attentions que celles décrites dans la norme ASTM E756 [**?**]. Le collage a été principalement réalisé avec un scotch double face de 0.13 mm d'épaisseur. Il est important de recaler les propriétés de la poutre de base à partir des mesures de la poutre avec scotch lors de l'identification des paramètres mécaniques d'un matériau (*cf* article précédent).

La question du collage est également discuté dans le cas des plaques + matériaux au paragraphe 5.1.5.

4.3.6 Chambre en température

Deux thermocouples ainsi que deux sondes d'humidité ont été positionnés dans la chambre afin de contrôler l'homogénéité des conditions en température et humidité. Par ailleurs, lorsque le taux d'humidité relative est faible, il devient difficile de contrôler la température. Les deux sondes sont alors le seul moyen de vérifier l'état effectif de la chambre.

Entre chaque test, un délai de 45 minutes à une heure d'attente a été respecté pour que l'état du système en température, pression et humidité se stabilise dans la chambre et dans le matériaux.

Le système de soufflerie doit être coupé lors des quelques secondes que prend la mesure d'une FRF afin de n'avoir qu'une source de mouvement de la poutre : celle provenant du pot vibrant.

4.4 Précisions sur la technique numérique

Parallèlement aux travaux de caractérisation présentés ici, C. Langlois, étudiant au GAUS, a développé un nouvel outil numérique de prédiction pour la vibro-acoustique des matériaux poreux nommé SuperNova [**?**]. Les résultats numériques présentés tout au long de ce chapitre sont le fruit d'une étroite collaboration avec cet étudiant.

Cette section présente quelques précisions importantes concernant l'utilisation de la Méthode des Elements Finis par l'intermédiaire de SuperNova en application à la caractérisation élastique des matériaux visco ou poro-visco-élastiques.

4.4.1 Justification de l'utilisation de la Méthode des Eléments Finis

Des modèles analytiques, tels que les matrices de transfert (TMM), sont disponibles pour décrire le comportement de matériaux poro-visco-élastiques ou de multicouches composés de matériaux élastiques, poro-visco-élastiques et acoustiques. Ils reposent cependant sur des hypothèses restrictives telles que l'infinité des dimensions latérales pour les structures étudiées. L'utilisation de tels modèles est donc limitée aux hautes fréquences où l'influence des conditions limites sur le comportement vibro-acoustique du système est de moindre importance.

Le comportement modal de la réponse de ces matériaux en basses fréquences ainsi que la complexité éventuelle de leurs géométries conduit à l'utilisation de modèles mathématiques dédiés [**?**], dans les cas les plus simples, ou à l'utilisation de méthodes numériques de type éléments finis. Cette dernière solution est choisie dans le cas présent, afin de tenir compte, au mieux, du fort amortissement ajouté par le matériau lorsque la densité de modes[1] pour ce dernier augmente.

[1] Modes en dehors de ceux de flexion, *ie* modes de torsion, de traction-compression...

Deux types d'éléments finis sont essentiellement utilisés : les éléments finis linéaires et les éléments finis hiérarchiques [**?**]. Le choix d'utilisation du type d'éléments pour le traitement d'un problème dépend de la nature de ce dernier. De façon générale :

- les éléments linéaires doivent être utilisés lorsqu'il y a des variations abruptes des champs de variables, dues à une discontinuité géométrique par exemple,
- les éléments hiérarchiques sont efficaces pour approximer des variations lentes du champ de variables.

Dans le cas présent d'un matériau amortissant collé à une poutre métallique, les éléments hiérarchiques sont recommandés. Ils permettent, de plus, de s'affranchir de problèmes de verrouillage numérique de façon simple [**?**] et le raffinement des solutions lorsque la fréquence augmente se fait naturellement, en augmentant les ordres d'approximation.

Les poutres de base (ou de support) et éventuellement de contrainte sont modélisées par des éléments solides (tri-dimensionnels). Aucune hypothèse ou aucun artefact[2] pour décrire le comportement vibratoire des poutres métalliques n'est ainsi émis. Szabo et Babuska [**?**] recommandent l'utilisation de ces éléments pour modéliser tout type de poutre ou plaque : mince ou épaisse. Cette remarque apparaît, de façon moins marquée, chez R. H. MacNeal [**?**].

4.4.2 Les éléments poreux

La modélisation numérique des matériaux poreux est un sujet récent, émergeant avec les nouvelles capacités en matière informatique.

En 1996, R. Panneton [**?**] présente une implémentation numérique linéaire de la théorie de Biot. Les limitations majeures d'utilisation de ce code numérique sont la taille des matrices utilisées par des problèmes à 6 Degrés De Liberté (DDL) par noeud (3 pour la phase solide et 3 pour la phase fluide) et la lente convergence des éléments linéaires poreux [**?**].

En 2001, S. Rigobert [**?**] réalise, la première implémentation d'éléments poreux hiérarchiques. L'originalité du travail de Rigobert est également de construire les calculs sur les formulations mixtes classique [**?**, **?**] et modifiée [**?**] (cf section 3.2). Une réduction du nombre de Degrés De Liberté et donc de la taille des matrices du système est réalisée lors du passage de 6 à 4 DDL par noeud.

Il est important de noter que selon le milieu avec lequel les formulations mixtes classique ou modifiée se couplent, des intégrales de couplage peuvent être nécessaires. Bien que ces intégrales ne rajoutent pas de degrés de libertés supplémentaires au système, elles augmentent le temps de résolution. Dans le cas d'un milieu élastique couplé à un milieu poro-visco-élastique, la formulation modifiée est préférée. Le couplage se fait alors sans intégration supplémentaire.

[2] *cf* Notes sur le facteur κ^2 §5.1.4

Les résultats de Rigobert confirment également le gain de performance des éléments hiérarchiques sur les éléments linéaires pour la modélisation des milieux poro-visco-élastiques : une nouvelle réduction de la taille des matrices et donc de leurs temps de résolution ainsi qu'une convergence accrue des résultats est observée. Ces résultats concernant l'utilisation des éléments hiérarchiques pour la modélisation de matériaux poreux sont retrouvés dans les travaux de D. Pilon [**?**].

Une formulation à 3 DDL [**?**] restreinte aux très basses fréquences a été étudiée récemment. Une relation entre les 4 variables de la formulation mixte $\{\underline{u}, \mathrm{p}\}$ s'établissant en négligeant le terme laplacien de l'équation 3.24 et permettant de limiter les inconnues aux déplacements de la phase solide $\underline{u}$. Cette formulation "solide équivalent" n'est cependant pas adaptée aux problèmes qui nous intéressent ici car trop limitée en fréquence.

Durant l'année 2002, C. Langlois [**?**] développe un nouvel outil de prédiction en se basant notamment sur les résultats de Rigobert : SuperNova. Pouvant traiter des géométries quelconques, ce code possède, de plus, deux nouveaux avantages concernant la réduction des temps de calculs :

- La quadrature vectorielle [**?**] est utilisée pour réduire le temps d'intégration numérique des matrices.
- La résolution matricielle est parallélisée afin de répartir les calculs, et donc leurs temps de résolution, sur plusieurs micro-processeurs.

L'application de la méthode inverse décrite dans l'article précédent est réalisée à partir de SuperNova. La figure 4.3 présente les déformées des trois premiers modes de la poutre en configuration bicouche. Ces représentations, extraites de MSC/Nastran®, ont été obtenues lors de comparaisons de calculs avec SuperNova pour toute fin de validation dans le cas de bicouches purement visco-élastiques. D'autres comparaisons ont été effectuées pour la configuration tricouche avec MSC/Nastran® ou pour des applications aux matériaux poreux avec MNS/Nova®.

4.5 Exemples de caractérisation de matériaux poreux

Une démarche équivalente à celle présentée en section 4 de l'article précédent a été appliquée aux cas de matériaux poreux en suivant les remarques des sections 4.4.1 et 4.4.2.

Deux mousses différentes ont été testées : la mousse de mélamine M, déjà présentée dans le deuxième chapitre et une mousse de polyuréthanne identifiée WB2. Les propriétés élastiques quasi-statiques mesurées par la méthode [**?**] et les propriétés acoustiques déterminées de la méthode [**?**] sont données en table 4.1. Ces valeurs ont été obtenues sous conditions normales de pression et d'humidité, à 21°C. La longueur des poutres est de 400 mm, leur largeur 19.97 mm. L'épaisseur des poutres d'aluminium de support ou de contrainte est de 1.58 mm, Celle des échantillons de matériaux de 25.4 mm.

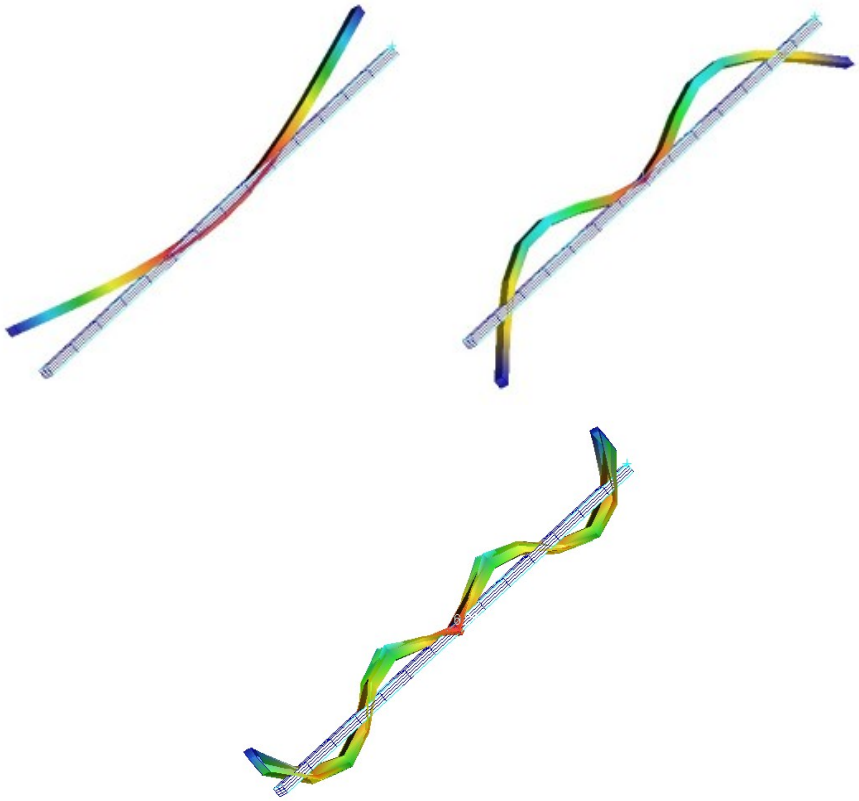

Fig. 4.3: Déformées des trois premiers modes de la poutre en configuration bicouche. Ces déformées sont celles d'une poutre encastrée-libre en flexion avec une symétrie par rapport à la section du centre de la poutre qui contient le lieu d'excitation. Représentations extraites de MSC/Nastran®.

Matériau	E	ν	ρ_1	η
	N.m^{-2}		kg.m^{-3}	
M	160 000	0.44	8.35	0.060
WB2	549 000	0.23	48.33	0.128

Matériau	ϕ	σ	α_∞	Λ	Λ'
		N.s.m^{-4}		10^{-6}m	10^{-6}m
M	0.99	12 600	1.0	78	192
WB2	0.90	237 000	2.3	120	164

Tab. 4.1: Propriétés élastiques quasi-statiques et acoustiques des matériaux M et WB2 mesurées à 21°C. Ces valeurs sont déduites des méthodes de Langlois *et al.* [**?**] et Y. Atalla [**?**]

Les maillages utilisés pour les deux codes de calculs utilisés sont regroupés dans la table 4.2.

Les temps de calcul reportés sont donnés pour un processeur Pentium® III cadencé à 1 GHz, sur la base de 200 inversions matricielles (ou points en fréquence). Ces temps

Code	maillage (nb éléments)	ordres d'interpolation	DDL	temps de résolution
Nova	$50 \times 4 \times 8$	1	$\sim 2\ 500$	~ 6 heures
SuperNova	$10 \times 2 \times 4$	5	$\sim 1\ 000$	~ 45 min

Tab. 4.2: Tableaux des ressources utilisées pour la modélisation d'une poutre tricouche par interpolation linéaire (Nova) ou hiérarchique polynomiale (SuperNova).

peuvent cependant être réduits dans le cas de calculs parallèles. Des simulations ont notamment pu être effectuées en 5 minutes sur la grappe de 8 processeurs Pentium® IV 2 GHz de l'Université de Sherbrooke et en 3 minutes sur la grappe de calcul de 16 processeurs Pentium® III 600 MHz de l'Université du Maine. Il est important de noter qu'à ce jour, la résolution matricielle directe dans le cas de matériaux poreux (en formulations $\{\underline{u},\underline{U}\}$ ou $\{\underline{u},p\}$) est la méthode la plus aboutie. Aucune méthode itérative fiable n'est connue de l'auteur, en revanche, des travaux basés sur des techniques de synthèse modale sont en cours (*cf* Dazel *et al.* [**?**, **?**]).

La première application présentée est réalisée en configuration bicouche avec la mousse WB2. Seuls les résultats d'inversion, obtenus par l'algorithme de Levenberg-Marquardt détaillé au paragraphe 5.3, sont reportés en figures 4.4 et 4.5, l'allure des courbes expérimentales - pour lesquelles des essais de répétabilité ont été effectués - ayant déjà été observée dans l'exemple précédent du matériau visco-élastique (*cf* Figure 7 de l'article).

Une seule direction, pour la mesure en régime dynamique, a été testée. Par ailleurs, la mesure quasi-statique ayant été réalisée par la méthode de Langlois *et al.* [**?**], aucune information sur la symétrie du matériau n'est connue. Le matériau sera supposé isotrope. Les valeurs du module d'Young E sont déduites de la rigidité en flexion D, qui est rigoureusement la grandeur à laquelle l'expérimentation permet d'accéder si l'on tient compte d'une éventuelle anisotropie du matériau. Dans le cas d'un matériau isotrope, la relation entre ces deux modules complexes est :

$$D^* = E^* \frac{h^3}{12(1-(\nu^*)^2)} \tag{4.1}$$

où h est l'épaisseur du matériau et ν son coefficient de Poisson. Pour rappel, ν est supposé réel et constant sur la gamme fréquentielle de mesure. Il est donc, ici, considéré comme une donnée du problème et pris égal à sa valeur quasi-statique donnée en table 4.1.

La première observation concerne l'évolution du module d'Young. Sa dépendance en fréquence et en température est clairement observable sur la figure 4.4 et concorde avec les propriétés des matières plastiques énoncées au premier chapitre : la valeur du module

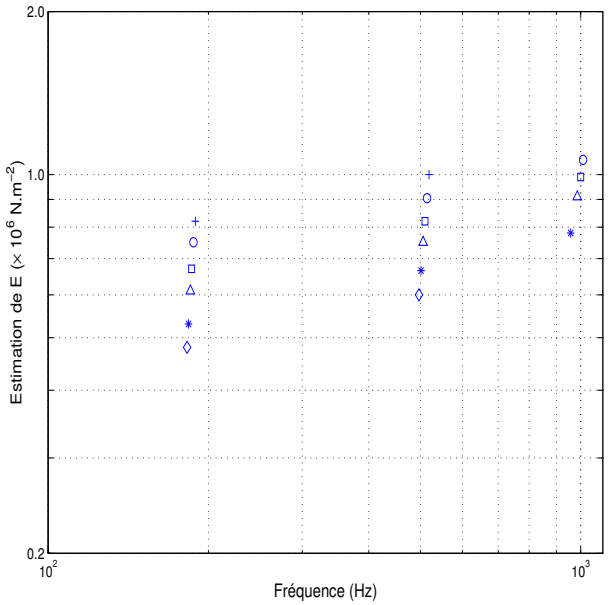

Fig. 4.4: Estimations de la variation, en fréquence et en température, du module d'Young E pour la mousse WB2 obtenues en configuration bicouche. $+$: 5^oC, o : 10^oC, $\square$: 15^oC, $\triangle$: 20^oC, $\star$: 25^oC, $\diamond$: 30^oC. Deux points de valeurs aberrantes ne sont pas reportés sur ce graphique.

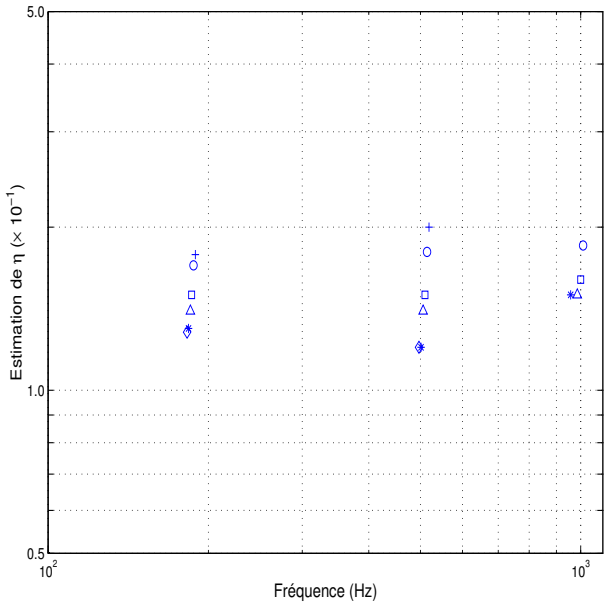

Fig. 4.5: Estimations de la variation, en fréquence et en température, du coefficient d'amortissement structural η pour la mousse WB2 obtenues en configuration bicouche. $+$: 5^oC, o : 10^oC, $\square$: 15^oC, $\triangle$: 20^oC, $\star$: 25^oC, $\diamond$: 30^oC. Deux points de valeurs aberrantes ne sont pas reportés sur ce graphique.

augmente à mesure que la fréquence s'élève ou que la température baisse.

Une extrapolation à plus basses fréquences des valeurs obtenues à 20°C par la présente méthode semble s'approcher de la valeur quasi-statique de 560 000 N.m^{-2}, mesurée vers 30 Hz et à 21°C (*cf* table 4.1). Il faut noter de plus que la valeur quasi-statique est soumise à une incertitude de 10% et que l'incertitude des valeurs pour la méthode proposée dans ce chapitre est également estimée, de façon expérimentale, à 10%.

Un essai d'application du principe de superposition temps-température nécessiterait d'avantage de mesures sur des gammes de température ou de fréquence plus élargies. En effet, les coefficients a_{T/T_0} (*cf* [**?**, **?**]) sont trop faibles pour élargir de façon notable la bande fréquentielle utile à une température donnée pour ce matériau WB2.

En ce qui concerne le coefficient d'amortissement structural, les valeurs relevées à la figure 4.5 se trouvent comprises dans l'intervalle [0.1 0.2] qui comprend également la valeur quasi-statique donnée en table 4.1. Une lecture attentive des résultats permet de plus d'observer une augmentation du coefficient avec les fréquences croissantes ou les températures décroissantes.

La seconde application, pour la mousse de mélamine M est réalisée en configuration tricouche. La faible rigidité, constatée par les mesures quasi-statiques de cette mousse de mélamine dicte ce choix[3]. Les estimations du module d'Young et du coefficients structural d'amortissement sont reportées aux figures 4.6 et 4.7.

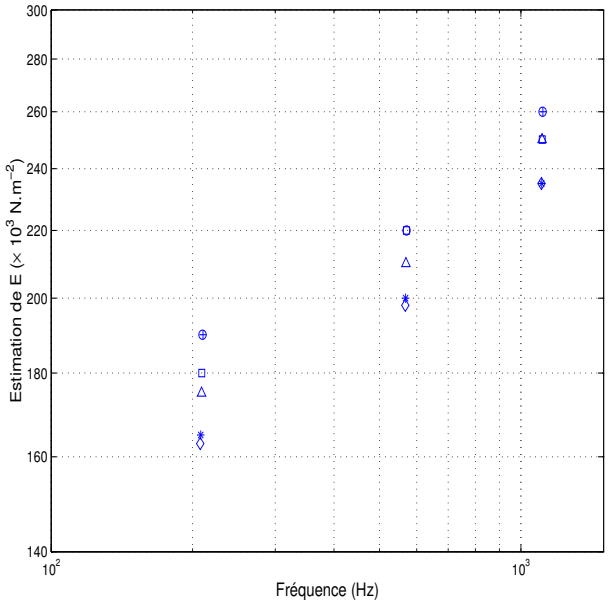

Fig. 4.6: Estimations de la variation, en fréquence et en température, du module d'Young E_3 pour la mousse de mélamine M obtenues en configuration tricouche. + : 5°C, o : 10°C, □ : 15°C, △ : 20°C, ⋆ : 25°C, ⋄ : 30°C

[3] *cf* section 4.1.1 de l'article précédent ou norme ASTM E756[**?**].

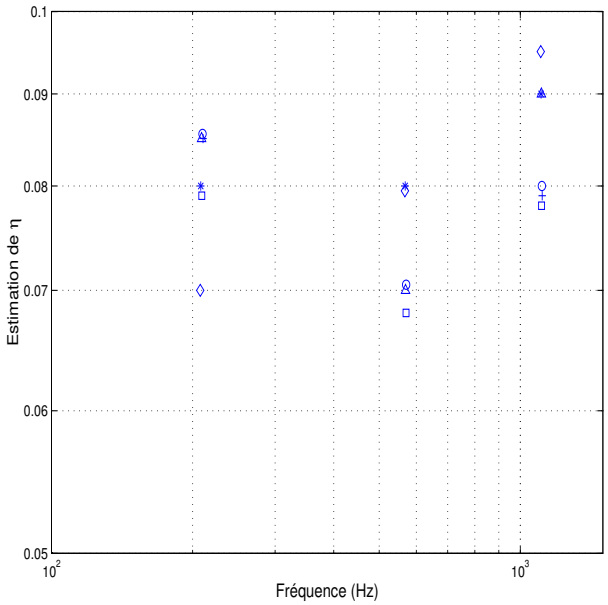

Fig. 4.7: Estimations de la variation, en fréquence et en température, du coefficient d'amortissement structural η pour la mousse de mélamine M obtenues en configuration tricouche. $+$: 5^oC, o : 10^oC, $\square$: 15^oC, $\triangle$: 20^oC, $\star$: 25^oC, $\diamond$: 30^oC. Un point de valeur aberrante n'est pas reporté sur ce graphique.

Les mêmes observations que pour la mousse WB2, concernant le module d'Young, peuvent être faites.

- La dépendance fréquentielle s'accorde avec les résultats présentés sur les matériaux visco-élastiques.
- La cohérence des résultats avec les précédents, obtenus en quasi-statique (fig. 2.7 et 2.8), est observée : la direction de découpe de la poutre testée ici correspond à la face 3 du cube figure 2.4.

4.6 Vérification de l'unicité des résultats d'inversion

L'erreur, au sens des moindres carrés, entre la mesure et la simulation numérique du cas poutre + mousse de mélamine M, en configuration sandwich à 30^oC, est représentée à la figure 4.8 pour le deuxième mode de vibration du système.

Des représentations semblables de minima locaux sont obtenues pour les autres modes permettant de conclure à l'unicité des solutions dans le processus d'inversion sur les deux paramètres que sont le module d'Young E et le coefficient d'amortissement structural η.

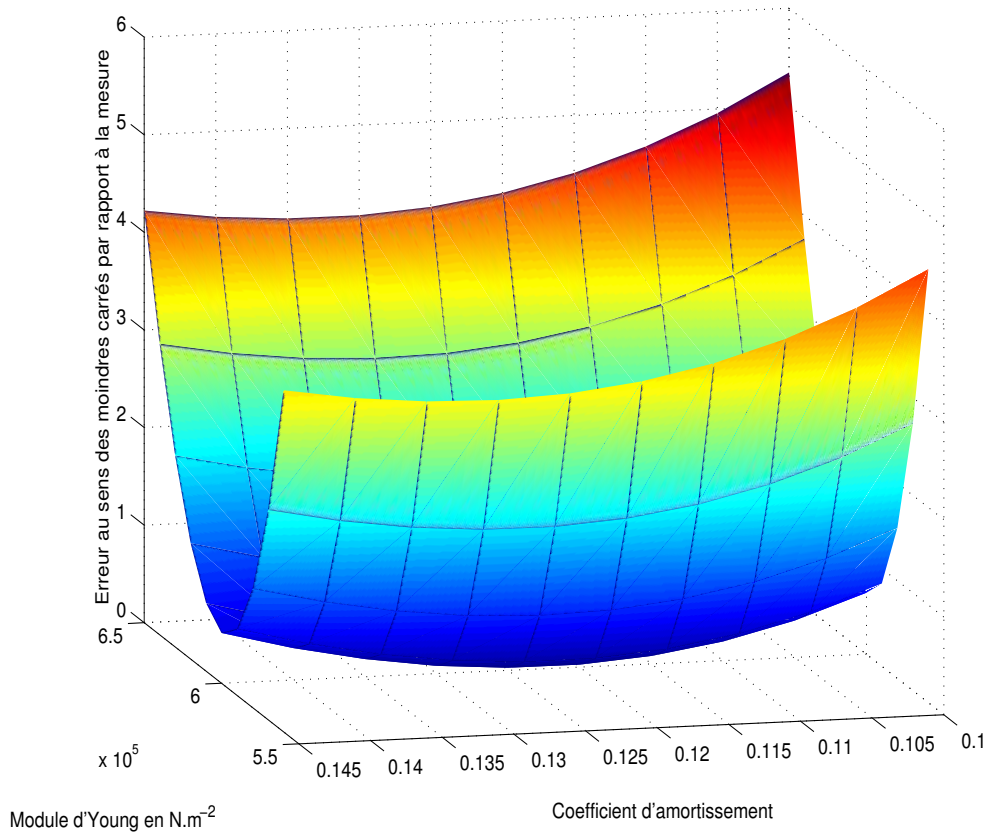

Fig. 4.8: Erreur, au sens des moindres carrés, entre la mesure et la simulation du cas poutre + mousse de mélamine M pour la seconde résonance de la mesure à 30^oC. L'erreur minimale est obtenue pour le couple $\{E, \eta\} = \{10^5 \text{ N.m}^{-2}, 0.120\}$.

4.7 Synthèse

la méthode proposée dans ce chapitre a été utilisée avec succès sur des matériaux visco-élastiques souples ou matériaux poro-visco-élastiques de propriétés élastiques et amortissantes différentes. Ces résultats encourageants montrent la faisabilité d'une telle méthode. Ils méritent, bien sûr, d'être étendus à une plus large gamme de matériaux, ce qui est réalisé en ce moment avec la dizaine d'autres échantillons testés au GAUS fin 2002.

Une nouvelle confirmation est faite, au regard des nettes différences de temps de calcul et des nombres de degrés de liberté mis en jeu, que les éléments hiérarchiques sont plus appropriés que les éléments linéaires dans le traitement de multicouches comprenant des matériaux poreux.

En attendant une résolution modale ou itérative fiables des problèmes poro-visco-élastiques, de façon générale, seuls des moyens de calculs partagés permettent d'obtenir des temps relativement raisonnables concernant la résolution du problème inverse présenté.

Le chapitre suivant apporte une solution alternative à cette nécessité de ressources

informatiques importantes par l'usage d'un code numérique simplifié, dédié au problème bicouche et donc soumis à de plus fortes limitations que les éléments finis traditionnels.

Chapitre 5

Caractérisation élastique : cas de plaques

Ce chapitre est une extension du précédent problème pour un espace à deux dimensions. Cette étude concernant les plaques en flexion présente l'avantage d'utiliser une géométrie 2-D, plus répandue en pratique, dans le traitement vibro-acoustique sous la forme de planchers, plafonds ou parois de bâtiments ou de véhicules. Une plus large moyenne, sur la surface de l'échantillon, par rapport à l'hétérogénéité éventuelle des propriétés du matériau est également obtenue dans ces configurations 2-D.

La flexion est toujours le mode de vibration imposé. Elle pose cependant, de façon plus marquée, la question du rayonnement acoustique en raison des importantes surfaces d'interface air-poreux.

Tenant compte des enseignements acquis lors de l'essai de poutre en flexion, une modélisation simplifiée du système bicouche 2-D en vibration est proposée afin de limiter les ressources numériques indispensables au traitement du problème inverse.

Ce chapitre est, comme le précédent, découpé en deux parties. La première partie présente la modélisation du système bicouche : une plaque métallique traitée par un matériau poreux acoustique. Des modèles pour l'étude des vibrations de flexion de tels bicouches ou de simples plaques poreuses ont été auparavant établis dans le cadre d'études souvent purement acoustiques [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**]. La présente modélisation est orientée sur l'approche vibratoire du problème.

La seconde partie présente deux applications de la méthode inverse d'identification paramétrique à la mousse de mélamine M et à la mousse de polyuréthanne J (dont la figure 1.6 présente la micro-structure).

5.1 Méthode

5.1.1 Présentation

Cette section expose les premières parties de la méthode de caractérisation : la mise en oeuvre expérimentale et la modélisation simplifiée du système bicouche métal-poreux en flexion aux basses fréquences *ie* en dessous du premier mode de vibration dans l'épaisseur du matériau poreux. Elle est présentée sous la forme de la seconde révision d'un article accepté pour publication dans le Journal of Sound and Vibration.

A SIMPLIFIED NUMERICAL MODEL FOR A PLATE BACKED BY A THIN FOAM LAYER IN THE LOW FREQUENCY RANGE

Luc Jaouen and Bruno Brouard
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613,
72085 Le Mans Cedex, France

Noureddine Atalla and Christian Langlois
Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec, J1K 2R1, Canada

Abstract

This paper presents a simplified numerical model based on a hierarchical trigonometric functions set to predict the low frequency vibration behaviour of a plate backed by a thin foam layer. The base metal plate is excited in bending vibrations with a point load and can have various boundary conditions. The poro-elastic layer is modeled using the mixed displacement-pressure formulation of the Biot-Allard's theory. The base plate and the solid phase of the porous medium are described as an equivalent visco-elastic plate. The poro-elastic's fluid phase is coupled with the equivalent plate displacements.

Comparisons with complete 3-Dimensional poro-elastic finite element solutions and experimental data are presented to define a domain of validation for the proposed simplified model.

1 Introduction

Multilayered structures including poro-elastic materials, like polymer foams, are widely used for sound absorption and vibration damping in buildings construction and in the transport industries. For a quick analysis of some vibro-acoustic or transmission phenomena, a simple prediction involving a metal plate backed by a poro-elastic material can be used.

Prediction of the vibroacoustic behaviour of poro-elastic materials can be done using the Biot-Allard's theory [1, 2]. This theory describes the poro-elastic material as two phases coupled in time and space. The poro-elastic material is described with five geometrical parameters: the porosity ϕ, the flow resistivity σ, the tortuosity α_∞, the viscous characteristic length Λ, the thermal characteristic length Λ' and the mechanical parameters of the skeleton and the saturating fluid's properties.

Evaluation of the performance of finite size multilayered structures involving porous media is usually done with complete 3-Dimensional poro-elastic finite element models which lead to significant computation time and memory usage. However, some practical configurations can be more easily described by using assumptions about the porous material behavior.

Investigating the dissipation mechanisms in a thin foam layer bonded onto a simply supported aluminium plate, Dauchez et al. [3] found that structural damping of the solid phase is the major dissipative mechanism occurring within the material for stiff foams at low frequencies. Consequently, neglecting the material's fluid phase, these authors proposed to use an equivalent visco-elastic plate model for the very first modes. This model, which does not include any viscous dissipation in the porous medium is almost suitable for low resistivity materials. Rigobert [4] tried to extend this work to the case of highly resistive foams and fibrous materials, for which the viscous dissipation cannot be neglected any longer. In this new model, a detailed 3-Dimensional finite element based solution of the problem is required to determine a modified structural damping coefficient of the equivalent plate accounting for structural and viscous dissipation occurring in the porous layer. Although the method gives good results, it has no advantage over a complete calculation.

Etchessahar et al. [5] have recently presented a model based on the displacement-pressure formulation of the Biot-Allard theory [6] to simulate bending vibrations of thin simply-supported or clamped stand-alone poro-elastic plates. This model's advantage is a rigorous description of the poro-elastic medium with its two phases and interactions between these phases. Experiments have shown that this model is relevant to predict the first resonances of high density porous materials. The experimental realization is however difficult to set up for a wide variety of materials.

In this paper, we introduce a new model, build on Dauchez et al. [3] and Etchessahar et al. [5] conclusions, to simulate the vibration behavior of an elastic

plate backed by an isotropic polymeric foam (Fig. 1). The porous layer is described by the mixed displacement-pressure formulation of the Biot-Allard theory [6]. The base plate and the porous solid phase are modeled as an equivalent visco-elastic plate and assumed admissible functions are used to describe the fluid phase pressure. The Rayleigh-Ritz method using a trigonometric functions set [7] is employed to solve the variational equations of motion. Thus, various boundary conditions can be applied to the base plate: simply-supported, clamped or free edges.

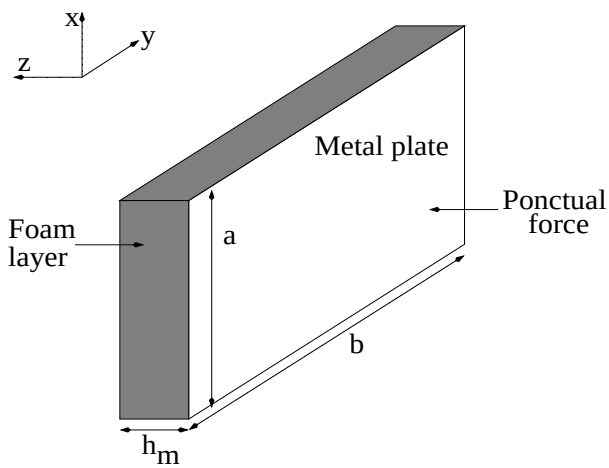

Figure 1: Metal plate under concentrated load and backed by a foam.

2 Theoretical background

This section presents the Biot-Allard's theory [1, 2] and puts the emphasis on the dissipation mechanisms before introducing the variational formulation for a plate-porous system in bending vibrations.

In the following, the $\tilde{}$ symbol denote frequency dependent quantities.

This section presents the mixed displacement-pressure formulation of the Biot-Allard's theory [6, 1, 2] with corrections for viscous and thermal dissipative effects introduced by Johnson et al. [8] and Champoux et al. [9] respectively. Each dissipation mechanism is briefly discussed before introducing the variational formulation for a plate-porous system in bending vibrations.

In the following, $\tilde{}$ symbol denotes a frequency dependent quantity.

2.1 The Biot-Allard's poroelastic model

Assuming a harmonic time dependence of the form $e^{+j\omega t}$, the coupled volumetric equations of equilibrium between the porous two phases as functions of the solid phase

displacement field $\underline{u}$ and the fluid phase pore pressure p is ([6]):

$$\text{div } \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s(\underline{u}) + \omega^2 \widetilde{\rho} \underline{u} = -\widetilde{\gamma} \underline{\nabla} p \tag{1}$$

$$\Delta p + \omega^2 \frac{\widetilde{\rho}_{22}}{\widetilde{R}} p = \omega^2 \widetilde{\gamma} \frac{\widetilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \text{div } \underline{u} \tag{2}$$

In the above equations, $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s$ is the stress tensor of the material's solid phase in vacuum. $\widetilde{\rho}$ is the dynamic effective density of the porous material defined as:

$$\widetilde{\rho}(\omega) = \widetilde{\rho}_{11} - \frac{\widetilde{\rho}_{12}^2}{\widetilde{\rho}_{22}} \tag{3}$$

where $\widetilde{\rho}_{12}$, $\widetilde{\rho}_{11}$ and $\widetilde{\rho}_{22}$ are complex dynamic densities considering viscous effects:

$$\widetilde{\rho}_{12}(\omega) = \rho_{12} - \frac{\widetilde{b}}{j\omega} \tag{4}$$

$$\widetilde{\rho}_{11}(\omega) = \rho_{11} + \frac{\widetilde{b}}{j\omega} \tag{5}$$

$$\widetilde{\rho}_{22}(\omega) = \rho_{22} + \frac{\widetilde{b}}{j\omega} \tag{6}$$

with

$$\rho_{12} = -\phi\rho_0(\alpha_\infty - 1) \tag{7}$$

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12} \tag{8}$$

$$\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} \tag{9}$$

$$\widetilde{b}(\omega) = \phi^2 \sigma \widetilde{G}(\omega) \tag{10}$$

$$j = \sqrt{-1} \tag{11}$$

ρ_1 and ρ_2 are the solid and fluid phase densities described as functions of the medium's porosity ϕ, the density of the material which constitutes the skeleton ρ_s and the fluid density ρ_0 (1.23 kg.m^{-3} at 18°C under 1.013 $\times$ 10^5 Pa):

$$\rho_1 = (1-\phi)\rho_s \tag{12}$$

$$\rho_2 = \phi\rho_0 \tag{13}$$

$\widetilde{b}$ is a complex and frequency dependent viscous damping coefficient, function of a viscosity correction factor $\widetilde{G}$ representing the fact that the pore flow departs from a Poiseuille's flow when the angular frequency ω increases. The expression of $\widetilde{G}$ according to the Johnson et al. model [8] is:

$$\widetilde{G}(\omega) = \sqrt{1 + j\frac{4\alpha_\infty^2 \mu \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}} \tag{14}$$

where μ is the viscosity of air (1.84 N.s.m^{-2} at 18°C under 1.013 $\times$ 10^5 Pa).

$\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{R}$, introduced in equations (1) and (2), and $\widetilde{Q}$ are frequency dependent terms which can be written as ([10]):

$$\widetilde{\gamma}(\omega) = \frac{\rho_0}{\widetilde{\rho}_{22}}\phi^2 - 1 \tag{15}$$

$$\widetilde{R}(\omega) = \phi\widetilde{K}_e(\omega) \tag{16}$$

$$\text{and} \quad \widetilde{Q}(\omega) = (1-\phi)\widetilde{K}_e(\omega) \tag{17}$$

$$\text{with} \quad \widetilde{K}_e(\omega) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma-1)\left[1 + \frac{8\mu}{j\Lambda'^2 B^2 \omega \rho_0}\widetilde{G}'\right]^{-1}} \tag{18}$$

$\widetilde{K}_e$ is the air bulk modulus accounting for thermal dissipation between the two porous phases [2]. Note that these expressions assume that the bulk modulus of the foam is small compared to the bulk modulus of the material from which the skeleton is made; which is valid for the majority of foams used in acoustics. P_0 is the atmospheric pressure, γ the ratio of specific heats (its value is 1.4 for air at 18°C under 1.013×10^5 Pa), B^2 is the Prandtl number ($B^2 = 0.71$ at 18°C under 1.013×10^5 Pa) and finally $\widetilde{G}'$ is a thermal correction factor [9] similar to $\widetilde{G}$ introduced earlier:

$$\widetilde{G}' = \sqrt{1 + j\frac{\Lambda'^2 B^2 \rho_0 \omega}{16\mu}} \tag{19}$$

The right hand side members in both equations (1) and (2) can be regarded as source terms. They couple the two phases dynamic responses. Setting these source terms to zero leads to an elastodynamic equation of the material in vacuum and a classical equivalent fluid (rigid skeleton [2]) equation respectively.

2.2 Dissipation mechanisms

Among the three dissipation mechanisms occurring within a porous layer: structural, viscous and thermal, the latter has been found negligible at low frequencies for typical polymeric foams of various thicknesses in plate-foam configurations [11]. Thus, no particular focus on thermal dissipation is done in this work.

2.2.1 Structural damping

Structural damping will be included in the present model using the complex modulus convention for each of the two layers:

$$\widetilde{E}^*(\omega) = \widetilde{E}(\omega)\big[1 + j\widetilde{\eta}(\omega)\big] \tag{20}$$

In the above equation, * denotes a complex variable.

The structural damping $\widetilde{\eta}$ can also be used to account for various dissipation phenomena such as the acoustic radiation and losses through the boundaries. However, these two dissipation mechanisms are neglected here (i.e. light fluid and lossless boundaries assumptions).

2.2.2 Viscous dissipation

For stiff polymer foams, structural damping is the major dissipative phenomenon at low frequencies [3]. As a consequence, it is assumed that the two layers system can be described as an equivalent viscous plate, the added viscous dissipation will be included in the present model using the foam's effective density $\widetilde{\rho}$ [1, 2] and assuming an admissible variation for the fluid phase pressure based on the boundary conditions at the plate-porous and porous-air interfaces.

2.2.3 Dissipated powers

Expressions of the dissipated powers which will be used to interpret the results are given in this section where Ω^m denotes the porous material volume and Im the imaginary part of a complex quantity. A definition of the power dissipated by structural effects inside the porous medium is:

$$\Pi^s_{diss} = \frac{1}{2}\, Im\left(\omega \int_{\Omega^m} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^s(\underline{u}) d\Omega\right) \tag{21}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}^s$ is the solid phase strain tensor.

Approximations of the powers dissipated by viscous and thermal effects when the ratio $\widetilde{Q}/\widetilde{R}$ can be considered real are respectively:

$$\Pi^v_{diss} = \frac{1}{2}\, Im\left[-\omega^3 \int_{\Omega^m} \widetilde{\rho}\underline{u}.\underline{u}^* d\Omega + \int_{\Omega^m} \frac{\phi^2}{\omega\widetilde{\rho}_{22}} \underline{\nabla} p.(\underline{\nabla} p)^* d\Omega - 2\omega\widetilde{\gamma} \int_{\Omega^m} Re\left(\underline{\nabla} p.\underline{u}^*\right) d\Omega\right] \tag{22}$$

$$\Pi^t_{diss} = \frac{1}{2}\, Im\left[-\omega \int_{\Omega^m} \frac{\phi^2}{\widetilde{R}} p.p^* d\Omega\right] \tag{23}$$

2.3 Variational formulation

In the following, the variational formulation for an elastic plate backed by a poro-elastic layer is described. The base plate is excited by a transverse point load of amplitude f_0 at position (x_0, y_0). The porous material is supposed to be perfectly bonded onto the plate.

2.3.1 Weak integral formulation

Below, superscripts p, m, s and f denote respectively a plate variable, a global porous variable, a material's solid or fluid phase related variable. Subscript n denotes a displacement normal to the plate plane. Ω^p, Ω^m and $\delta\Omega^p \cap \delta\Omega^m$ denote respectively the plate volume, the porous material volume and the plate-porous interface. $\underline{\underline{\varepsilon}}^i$ and $\underline{\underline{\sigma}}^i$ are strain and stress tensor of layer i.

Let δu and δp be, respectively, admissible variations of the solid phase displacements field $\underline{u}$ and the fluid phase pressure p. $\underline{U}^f$ is the displacement vector of the material's

fluid phase. Assuming a harmonic time dependence of the form $e^{+j\omega t}$, the weak $(\underline{u}, p)$ integral formulation of the Biot's theory [12, 1] is:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{\Omega^p} \underline{\underline{\sigma}}^p : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^p d\Omega - \rho^p\omega^2 \int_{\Omega^p} \underline{u}^p.\delta\underline{u}^p d\Omega}_{\text{plate domain}} + \underbrace{\int_{\Omega^m} \hat{\underline{\underline{\sigma}}}^s : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^s d\Omega - \widetilde{\rho}\omega^2 \int_{\Omega^m} \underline{u}^s.\delta\underline{u}^s d\Omega}_{\text{porous material's solid phase}} \\
&\qquad + \underbrace{\int_{\Omega^m} \left[\frac{\phi^2}{\omega^2\widetilde{\rho}_{22}}\underline{\nabla}p.\underline{\nabla}\delta p - \frac{\phi^2}{\widetilde{R}}p\delta p\right] d\Omega}_{\text{porous material's fluid phase}} \\
&\underbrace{-\int_{\Omega^m} \left[\widetilde{\gamma} + \phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right)\right] \delta(\underline{\nabla}p.\underline{u}^s) d\Omega - \phi\left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\right) \int_{\Omega^m} \delta(p.\mathrm{div}(\underline{u}^s)) d\Omega}_{\text{coupling terms between the porous material's two phases}} \\
&\qquad - \int_{\delta\Omega^p \cap \delta\Omega^m} (\underline{\underline{\sigma}}^p.\underline{n}^p).\delta\underline{u}^p dS - \int_{\delta\Omega^p \cap \delta\Omega^m} (\underline{\underline{\sigma}}^m.\underline{n}^m).\delta\underline{u}^s dS \\
&\qquad - \int_{\delta\Omega^p \cap \delta\Omega^m} \phi(U_n^f - u_n^s)\delta p dS = \int_{\delta\Omega^p} f_i \delta u_i dS
\end{aligned} \tag{24}$$

The relations to be satisfied at the interface between the elastic base plate and the porous medium are [12]:

$$\underline{\underline{\sigma}}^p.\underline{n}^p = -\underline{\underline{\sigma}}^m.\underline{n}^m \tag{25}$$

$$\underline{u}^p = \underline{u}^m \tag{26}$$

$$U_n^f - u_n^s = 0 \tag{27}$$

where $\underline{n}^p$ and $\underline{n}^m$ denote the exterior normals to the plate or the material domain.

The condition (25) ensures the continuity of the normal stresses (using the choosen mixed variational formulation, all the other associated boundary terms cancel out [12]). The second condition ensures the continuity of the displacement vectors between the two layers. And finally, the third equation (27) ensures the continuity of the relative mass flux vector across the boundary. These conditions represent a perfect bond between the porous layer's solid phase and the plate and an impervious condition for the pore pressure at the plate-porous interface.

2.3.2 Displacement fields

The classical elastic thin plate theory [13] is used to describe the base plate displacement field. The neutral plan of the two layer system can be fixed to the mid plan of the plate, if a metal plate is considered, regardless of the difference in Young's moduli order between the plate and the foam. Thus for the plate we can write:

$$u_p(x, y, z, t) = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{28}$$

$$v_p(x, y, z, t) = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{29}$$

$$w_p(x, y, z, t) = w(x, y, t) \tag{30}$$

where u and v are the first order approximation of the plate's in-plane displacements and t denotes time.

The displacement field of the porous layer solid phase exhibits both bending and shear (cf Fig. 2); the transverse displacement w is supposed to be the same for the two layers:

$$u_m(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial x} - \left(z - \frac{h_p}{2}\right)\psi_x(x,y,t) \quad (31)$$

$$v_m(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial y} - \left(z - \frac{h_p}{2}\right)\psi_y(x,y,t) \quad (32)$$

$$w_m(x,y,z,t) = w(x,y,t) \quad (33)$$

where ψ_x and ψ_y are the deviation angles due to shear strain.

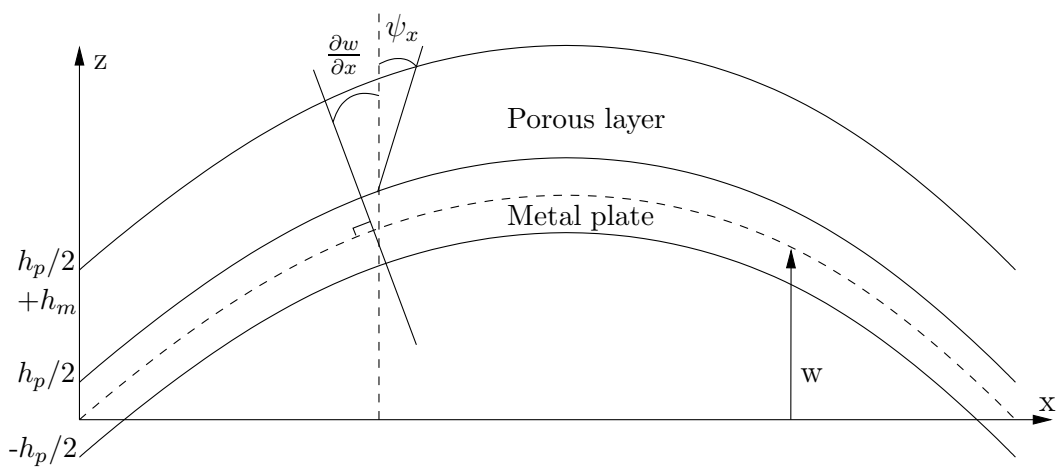

Figure 2: Schema of the plate and material displacements.

2.3.3 Application of Hamilton's principle

The plate and the material's solid phase are supposed to be isotropic, homogeneous, rectangular of dimensions $a \times b$ and of uniform thicknesses h_p and h_m ($h_p, h_m << (a,b)$). Thus, using Hamilton's principle, the third and fourth integrals of equation (24) become

(see [3] for a detailed similar calculus):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\Bigg\{ & D_2\Big[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu_m\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\nu_m)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\Big] \\
& +D_3\Big[\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)^2+2\nu_m\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{1-\nu_m}{2}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)^2\Big] \\
& +2D_4\Big[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)+\nu_m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right) \\
& +(1-\nu_m)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)\Big] \\
& +D_5\Big[\psi_x^2+\psi_y^2\Big]\Bigg\}dxdy \\
-\frac{1}{2}\widetilde{\rho}\omega^2\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{z_1}^{z_2}\Bigg(& w^2+\left\{z\frac{\partial w}{\partial x}+\left(z-\frac{h_p}{2}\right)\psi_x\right\}^2 \\
& +\left\{z\frac{\partial w}{\partial y}+\left(z-\frac{h_p}{2}\right)\psi_y\right\}^2\Bigg)dxdydz
\end{aligned} \tag{34}$$

where the D_i denote the following integrals:

$$D_2 = \frac{E_m}{1-\nu_m^2}\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz \tag{35}$$

$$D_3 = \frac{E_m}{1-\nu_m^2}\int_{z_1}^{z_2}\left(z-\frac{h_p}{2}\right)^2 dz \tag{36}$$

$$D_4 = \frac{E_m}{1-\nu_m^2}\int_{z_1}^{z_2} z\left(z-\frac{h_p}{2}\right) dz \tag{37}$$

$$D_5 = \frac{\kappa^2 E_m}{2(1+\nu_m)}\int_{z_1}^{z_2} dz \tag{38}$$

E_m and ν_m are the Young's modulus and Poisson ratio of the porous medium, $z_1 = \frac{h_p}{2}$, $z_2 = \frac{h_p}{2} + h_m$ and κ^2 is the Mindlin's correction factor [14] taken as 5/6.

The first two integrals of equation (24) have the same form, one might only change the integration domain and rigidities to fit the first layer's boundaries.

The integral related to the material's fluid phase is:

$$\frac{1}{2}\frac{\phi^2}{\omega^2\widetilde{\rho}_{22}}\int_{\Omega^m}\Big[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2\Big]d\Omega-\frac{1}{2}\frac{\phi^2}{\widetilde{R}}\int_{\Omega^m}p^2 d\Omega \tag{39}$$

and the coupling terms can be written:

$$(\widetilde{\gamma}+1)\int_{\Omega^m}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\left(z\frac{\partial w}{\partial x}+(z-\frac{h_p}{2})\psi_x\right)+\frac{\partial p}{\partial y}\left(z\frac{\partial w}{\partial y}+(z-\frac{h_p}{2})\psi_y\right)-\frac{\partial p}{\partial z}w\right]d\Omega \tag{40}$$

$$\int_{\Omega^m} p\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (z - \frac{h_p}{2})\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (z - \frac{h_p}{2})\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) d\Omega \tag{41}$$

noting that, from (18) and (16), $\phi\widetilde{Q}/\widetilde{R} = (1-\phi)$.

Finally, the three last integrals of (24) vanish because of boundary conditions at the plate-porous interface (see Eqs. (25), (26) and (27)).

3 Numerical implementation

3.1 Rayleigh-Ritz approximation

The Rayleigh-Ritz discretization method is used to solve the problem for classical boundary conditions on the base plate. The solid displacements are discretized as:

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{Mw}\sum_{n=1}^{Nw} qw_{mn}(t)\alpha_m(\xi)\alpha_n(\eta) \tag{42}$$

$$\psi_x(x,y,t) = \sum_{m=1}^{Mx}\sum_{n=1}^{Nx} qx_{mn}(t)\frac{d\alpha_m}{d\xi}(\xi)\alpha_n(\eta) \tag{43}$$

$$\psi_y(x,y,t) = \sum_{m=1}^{My}\sum_{n=1}^{Ny} qy_{mn}(t)\alpha_m(\xi)\frac{d\alpha_n}{d\eta}(\eta) \tag{44}$$

where qw_{mn}, qx_{mn}, qy_{mn} are the unknown coefficients; ξ and η are dimensionless space variables: $\xi = 2x/a - 1$, $\eta = 2y/b - 1$. The trial functions α are described in section 3.2.

The acoustic pressure of the fluid phase is constructed from the expression of the transverse displacement w:

$$p(x,y,z,t) = \sum_{m=1}^{Mw}\sum_{n=1}^{Nw}\sum_{r=1}^{Rp} qp_{mnr}(t)\alpha_m(\xi)\alpha_n(\eta)p_r(z) \tag{45}$$

with

$$p_r(z) = \sum_{r=1}^{Rp}\cos\frac{r\pi(z - h_p/2)}{2h_m}\ ,\ r \text{ odd} \tag{46}$$

Note that the used trial functions for the pressure are admissible in the sense that they satisfy the boundary conditions at $z = h_p/2$ and $z = h_p/2 + h_m$: the derivative of the acoustic pressure is fixed to zero at the plate-porous interface (impervious condition), while the pressure is supposed to be zero at the porous-air interface (no fluid loading is implemented).

3.2 Functions set

The functions set of Beslin et al. [7] is used. This functions set, built from trigonometric functions, is a simple and easy way to handle various boundary conditions

with both numerical stability and efficiency compared to other sets such as polynomials. The order of a $\alpha_m(\xi)$ function is not related to a power of ξ but to the number of oscillations of the trigonometric function. The functions are indefinitely derivable and only a low and constant number of basic operations is required to integrate matrices with no particular care of roundoff error.

The functions are of the form:

$$\alpha_m(\xi) = sin(a_m\xi + b_m)sin(c_m\xi + d_m) \tag{47}$$

with coefficients a_m, b_m, c_m and d_m defined in table 1.

Order m	Coefficient a_m	Coefficient b_m	Coefficient c_m	Coefficient d_m
1	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
2	$\pi/4$	$3\pi/4$	$-\pi/2$	$-3\pi/2$
3	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/4$	$-3\pi/4$
4	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/2$	$-3\pi/2$
$m > 4$	$(m-4)\pi/2$	$(m-4)\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$

Table 1: Coefficients a_m, b_m, c_m and d_m of the functions set.

The selection of the basis functions used to describe w allows for fixing various boundary conditions for the base plate:

- free : functions of order m equal or greater than 1 are used ($m \geq 1$).
- simply supported : $m = 2, 4$ and $m \geq 5$.
- clamped : $m \geq 5$.

The whole functions set is used to approximate angles ψ_x and ψ_y to ensure a free rotation of the second layer.

Using this trigonometric set of functions, equations (34), (39), (40) and (41) are written in terms of the unknown coefficients qw_{mn}, qx_{mn}, qy_{mn}. Once solved, the classical vibro-acoustic indicators of the problem are computed: quadratic velocity in the plate, quadratic velocity and pressure in the porous layer, dissipated powers in the two layers system [4].

4 Experiments

To validate the model, comparisons with complete 3-Dimensional poro-elastic finite element models and experimental data are presented below for various configurations.

Two complete models are used: MNS/Nova [6, 12] involving linear elements and SuperNova [15] a hierarchical and parallel version of the first one. Both have been extensively validated. Results from these models are quite the same for each simulation so they will indifferently be referenced as "Complete model" in the figures.

4.1 Experimental set-up and numerical considerations

The experimental set-up is shown in Figure 3. The porous layer is glued to an aluminium plate with a light spray specific glue or a thin double sided adhesive. To ensure that the observed vibration modification is due to the added material, several tests have been done. These measurements show that the adhesive layer's presence can affect the results. In particular, it must be kept to a minimum thickness. Air gap must also be avoided.

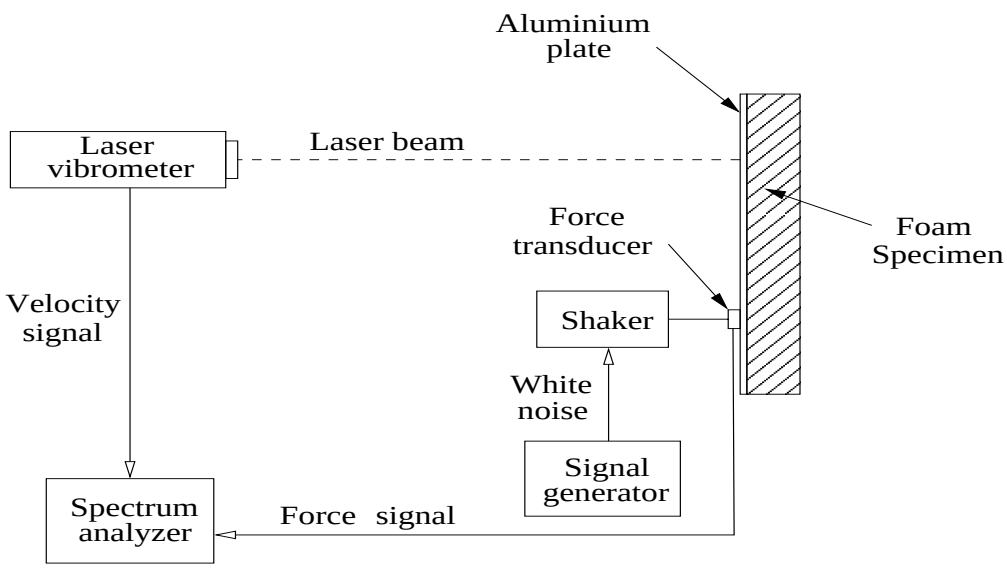

Figure 3: Schema of the experimental set-up.

An electrodynamic shaker driven by a white noise signal excite the aluminium plate by a point force. The input force is measured by means of a force transducer. The transverse velocity of the plate is measured by a light accelerometer and integrated over time for thick plates (3.175 mm) or measured by a laser vibrometer for thinner plates (1.2 mm). The force and velocity signals are collected through a spectrum analyzer to calculate Frequency Response Functions (FRF) or estimate the mean quadratic velocity of the plate. Measurements have been done at 20^oC, under 980 to 1000 mbar of static pressure with 15 to 20 % of relative humidity.

Simulations were done using the following plan meshes to obtain convergences: 15 by 17 elements for the complete linear model, 2 by 2 elements with 6 orders per elements for the complete hierarchical model and one element with 14 orders of interpolation for

the proposed simplified model. In the thickness of the poro-elastic media, 7 elements were used for the complete linear model, 1 element with order 8 for the complete hierarchical one and 1 element with order 2 for the simplified model's fluid phase (cf. Eq. (46)).

As previously mentioned, the material's moduli and structural damping are frequency dependent. Their quasistatic properties, measured following the method described by Langlois et al. [16], are used in the simulations. This will explain the rising differences between experimental and numerical data with increasing frequency.

The dimensions of the aluminium plates used and quasistatic properties of the two rather different foams tested are given in tables 2 and 3.

plate	length mm	width mm	thickness mm
1	350	220	1.2
2	420	480	3.175

Table 2: Dimensions of the base aluminium plates.

Material	E N.m^{-2}	ν	ρ_1 kg.m^{-3}	η
Aluminium	70.10^9	0.33	2740.00	0.001
Foam B	845 000	0.30	31.16	0.100
Foam M	160 000	0.44	8.35	0.060

Material	ϕ	σ N.s.m^{-4}	α_∞	Λ 10^{-6}m	Λ' 10^{-6}m
Aluminium	-	-	-	-	-
Foam B	0.96	32 000	1.7	90	165
Foam M	0.99	12 600	1.0	78	192

Table 3: Properties of aluminium and foams.

4.2 Results

Figure 4 presents the numerical results for a 1.2 mm simply supported aluminium plate treated by 20 mm of the polyurethane foam B.

The contributions to the dissipated power of the different mechanisms are shown in figure 5. The results confirm earlier assumptions for this stiff foam:

- thermal dissipation is negligible in the low frequency range,
- the foam structural damping is the major dissipative phenomenon within the porous layer at low frequencies (it is maximum at the system resonances).

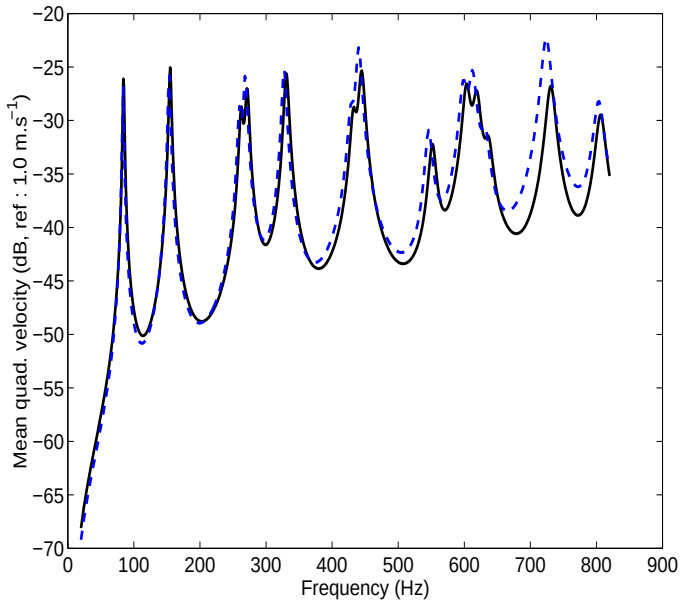

Figure 4: Mean quadratic velocity of a 1.2 mm simply supported aluminium plate backed with 20 mm of foam B. ——: Simplified model, - - -: Complete model.

- viscous dissipation remains weak in the frequency range of interest.

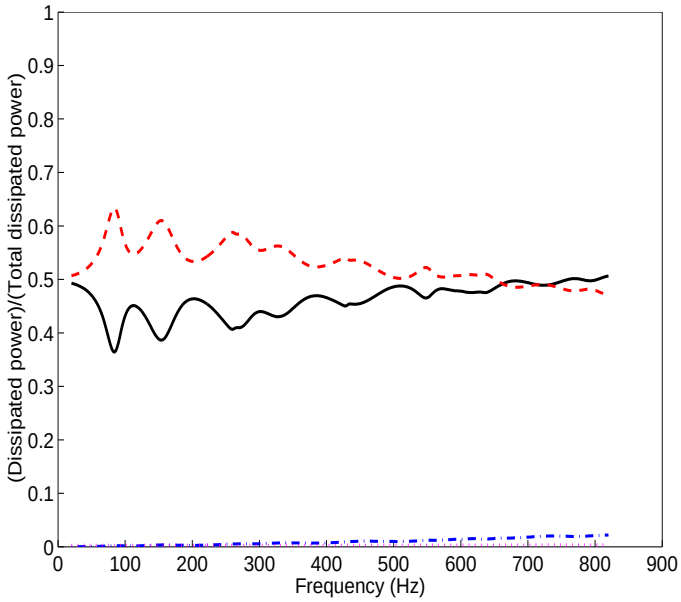

Figure 5: Dissipation mechanisms distribution for a 1.2 mm simply supported aluminium plate treated with 20 mm of foam B. Thermal dissipation is too close to zero to be seen clearly on this scale. ——: Structural damping (plate), - - -: Structural damping (foam), -.-.-: Viscous effects, ...: Thermal effects.

Figures 6 and 7 show comparisons for a thicker plate (3.175 mm or 1/8 inch) with clamped or free boundary conditions. Good agreements are found between the complete 3-D and the simplified model calculations for these three different cases in the whole frequency range.

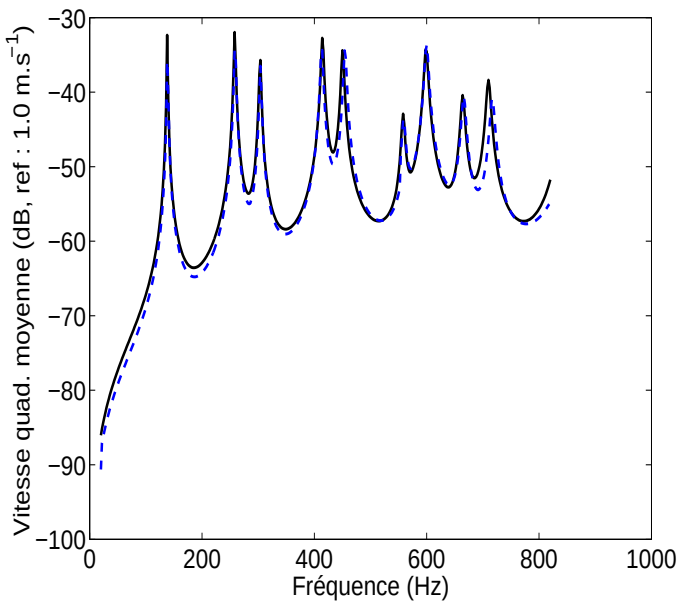

Figure 6: Mean quadratic velocity of a 3.175 mm (1/8") clamped aluminium plate backed with 20 mm of foam B. ——: Simplified model, - - -: Complete model.

Comparisons between models and experimentations can be done with a few number of FRF. Figure 8 shows an estimation of the mean quadratic velocity for a 3.175 mm aluminium plate with 25.4 mm (1 inch) of the soft melamine foam M using an average of 6 FRF. The point force is at coordinates (390 mm; 120 mm), measurements points are reported in table 4. A good agreement is again found between measurements and the simplified model although the material is supposed to be isotropic and its elastic parameters are considered constant in frequency.

4.3 Limitations of the model

To illustrate the limitations of the proposed model, figure 9 shows the results for an 3.175 mm aluminium plate treated by 76.2 mm (3 inches) of the M foam. Below 350 Hz the numerical results agree well in frequency and amplitude. Above 350 Hz the damping is underestimated.

This frequency corresponds to the first quarter wavelength frequency resonance of the frame [2]. Above 350 Hz, the constant transverse displacement assumption over the multilayer thickness is no more valid, thus fixing an upper frequency limit to the proposed simplified model (one should keep in mind that the purpose of this work is to

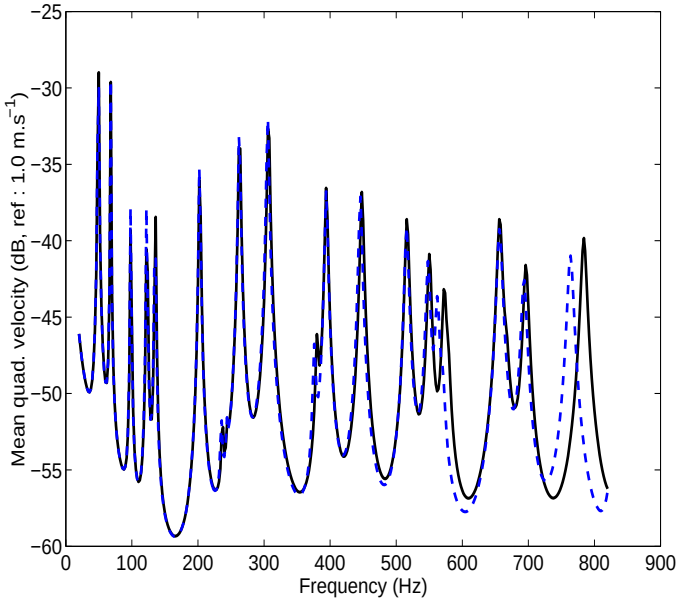

Figure 7: Mean quadratic velocity of a 3.175 mm free aluminium plate backed with 20 mm of foam B. ——: Simplified model, - - -: Complete model.

point	coordinates mm
1	(90; 90)
2	(90; 270)
3	(210; 120)
4	(210; 330)
5	(330; 210)
6	(330; 390)

Table 4: FRF measurement points for figure 8

reduce computation time for plate-porous configuration systems, not to test efficiency of high dissipative porous materials). A complete 3-Dimensional poro-elastic finite element model is required to well calculate the material's solid phase displacements and the viscous dissipation associated to the new relative displacements of the foam's two phases (cf Fig. 10).

In the previous cases, the first quarter wavelength frequency resonances occur beyond the upper limit of the experimental frequency.

4.4 Performances

Due to slow convergence of linear poro-elastic elements, accurate prediction requires about 5000 Degrees Of Freedom (DOF) for a complete classical linear finite element

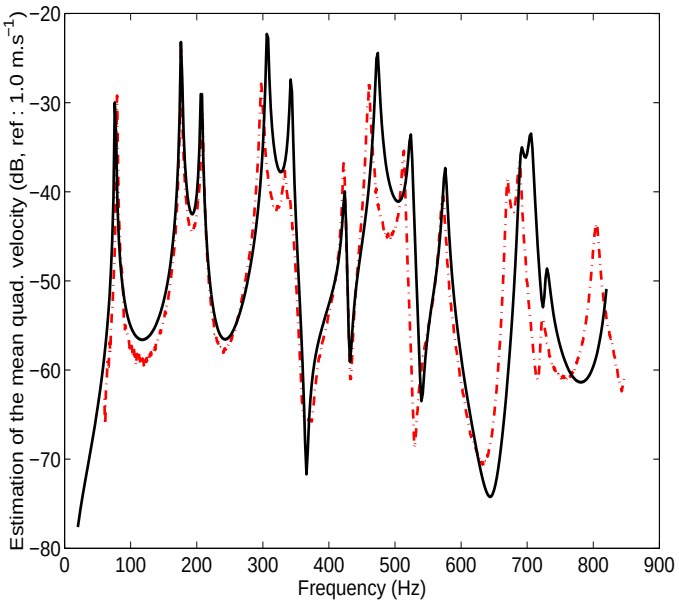

Figure 8: Mean quadratic velocity of a 3.175 mm simply supported aluminium plate backed with 25.4 mm (1") of foam M. ——: Simplified model simulation, -.-.- : Measurements.

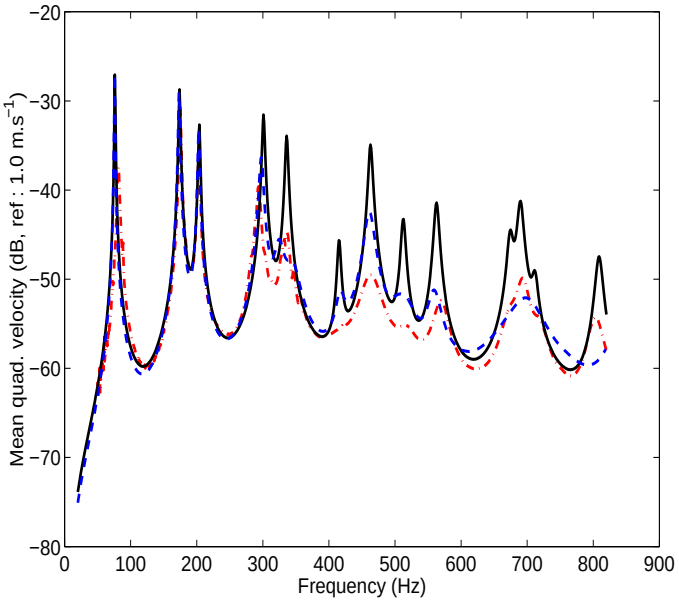

Figure 9: Mean quadratic velocity of a 3.175 mm simply supported aluminium plate backed by 76.2 mm (3") of foam M. ——: Simplified model, - - -: Complete model, -.-.-: Measurements.

code. This number of DOF falls to 2000 using a complete hierarchical finite element model and reduces ever further to 600 for the proposed simplified method. However,

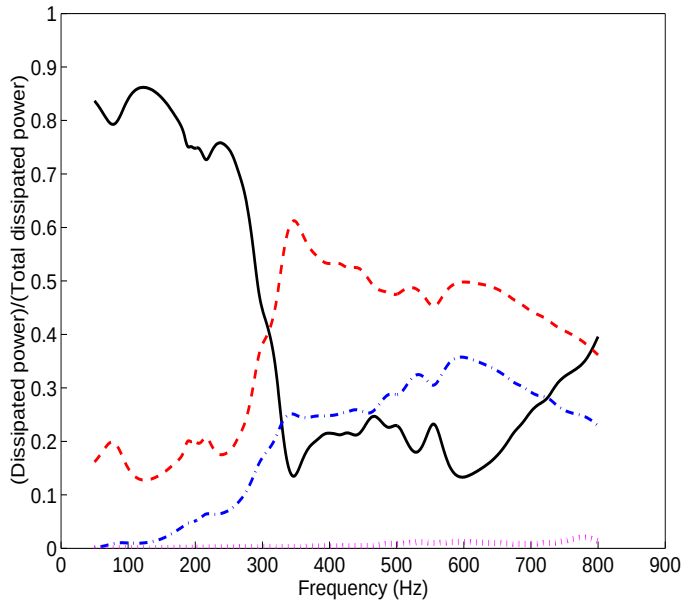

Figure 10: Dissipation mechanisms distribution for a 3.175 mm simply supported aluminium plate treated with 76.2 mm of foam M. ——: Structural damping (plate), - - -: Structural damping (foam), -.-.-: Viscous effects, ...: Thermal effects.

it must be noted that the numerical codes do not use the same plate models: the 3-D linear finite element model uses membrane displacements and Kirchhoff quadrangle element with bubbles functions and static condensation [17]. The 3-D hierarchical code uses Mindlin assumption with MSC/Probe [18] functions set.

Noting that the matrices terms are frequency dependent, the numerical problem cannot be solve easily by a modal approach [19]. A direct solver is thus used to obtain the results for 800 frequency points. In term of time usage on a 1 GHz 80686 CPU, the complete linear model calculation time is about 20 hours, the hierarchical model and simplified model ones are about 1 hour and 2 minutes respectively (for a simple plate problem, calculation times are: 2 hours and 30 minutes, 10 minutes and 20 seconds).

5 Conclusions

The proposed simplified model to simulate the vibration behaviour of an elastic plate backed by a polymeric foam has been numerically and experimentally validated for two rather different foams (a stiff and a soft one) and various boundary conditions.

This model is relevant when the thickness of the porous material allows to verify the constant transverse displacement over the multilayer assumption. Consequently it cannot be used to predict the mechanical behavior of high thickness foams bonded onto metal plates beyond the first quarter wavelength frequency resonance. However the model serves its purpose by reducing the computation time and memory usage

for plate-porous configurations and offers an efficient tool to quickly characterize the mechanical properties of thin foam samples in a low frequency band by an inverse method.

A point worth mentioning is the fact that the poro-elastic layer is modeled as an isotropic material although this is not the case for most of the foams. Nevertheless an acceptable correlation is found between simulations and experimental data. An extension to anisotropic foams would be an interesting complement to the present study.

Acknowledgments

The authors are grateful to Manuel Etchessahar and Nicolas Dauchez for their friendly supports and the French and Quebecer Ministères Des Relations Internationales for their financial assistance.

References

[1] M. A. Biot 1956 *Journal of the Acoustical Society of America* **28**, 168-191. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-satured porous solid. I. Low frequency range. II. Higher frequency range.

[2] J.F. Allard 1993 *Propagation of sound in porous media: modeling sound absorbing materials*. London: Chapman and Hall.

[3] N. Dauchez, S. Sahraoui and N. Atalla 2003 *Journal of Sound and Vibration* **265**, 437-449. Dissipation mechanisms in a porous layer bonded onto a plate.

[4] S. Rigobert 2001 *PhD Thesis, University of Sherbrooke(Qc), Canada and INSA de Lyon, France*. Modélisation par élément finis des systèmes élasto-poro-acoustiques couplés.

[5] M. Etchessahar, S. Sahraoui and B. Brouard 2001 *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris - series IIB - Mechanics* **329**, 615-620. Bending vibrations of a rectangular poroelastic plate.

[6] N. Atalla, R. Panneton and P. Debergue 1998 *Journal of the Acoustical Society of America* **104**, 1444-1452. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials.

[7] O. Beslin and J. Nicolas 1997 *Journal of Sound and Vibrations* **202**, 633-655. A Hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions.

[8] D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen 1987 *Journal of Fluid Mechanics* **176**, 379-402. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media.

[9] Y. Champoux and J.-F. Allard 1991 *Journal of Applied Physics* **70**, 1975-1979. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media.

[10] C. Depollier, J.-F. Allard and W. Lauriks 1988 *Journal of the Acoustical Society of America* **84**, 2277-2279. Biot theory and stress-strain equations in porous sound absorbing materials.

[11] P. Lemarinier 1997 *PhD Thesis, Université du Maine, Le Mans, France.* Propagation du son à basses fréquences audibles (30-5 000 Hz) dans les mousses et une laine de verre saturée d'air.

[12] N. Atalla, M. A. Hamdi and R. Panneton 2001 *Journal of the Acoustical Society of America* **109**, 3065-3068. Enhanced weak formulation for the mixed ($\underline{u}$,p) poroelastic equations.

[13] A. E. H. Love 1888 *Philosophical trans. of the Royal Society (London)* **A**, 491-549. On the small free vibrations and deformations of elastic shells.

[14] R. D. Mindlin 1951 *Journal of Applied Mechanics* **18**, 31-38. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.

[15] C. Langlois 2003 *Master's thesis, University of Sherbrooke(Qc), Canada.* Modelling vibro-acoustic problems with finite elements.

[16] C. Langlois, R. Panneton and N. Atalla 2001 *Journal of the Acoustical Society of America* **110**. Polynomial relations for quasi-static mechanical characterization of isotropic poroelastic materials.

[17] R. J. Guyan 1965 *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics* **3**, 380. Reduction of stiffness and mass matrices.

[18] R. H. MacNeal 1993 *Finite elements : their design and performance.* M. Dekker.

[19] O. Dazel, F. Sgard, C.-H. Lamarque and N. Atalla 2002 *Journal of Sound and Vibration* **253**, 421-445. An extension of complex modes for the resolution of finite-element poroelastic problems.

5.1.2 Précisions sur la méthode

Pour la plaque d'aluminium de 1/8" (3.175 mm) en condition limite de simple support (*cf* article précédent), les expériences ont été réalisées avec un pot vibrant Brüel et Kjær 4809 associé à un capteur de force BK 8200. Deux accéléromètres PCB U35B18 permettent de parcourir un maillage de 56 points, d'en recueillir les fonctions de transfert (définies ici comme le rapport entre la vitesse de la plaque en un point et la force d'excitation) et d'en déduire une estimation de la vitesse quadratique moyenne de cette plaque après intégration par un analyseur Brüel et Kjær 3550 (*cf* figures 5.1 et 5.2).

Sur les plaques plus minces (1.2 mm d'épaisseur), les accéléromètres ont été remplacés par un vibro-mètre laser Polytec OFV-302. Le pot vibrant a également été changé pour un Brüel et Kjær 4810. Un analyseur SRS Stanford collectait les signaux.

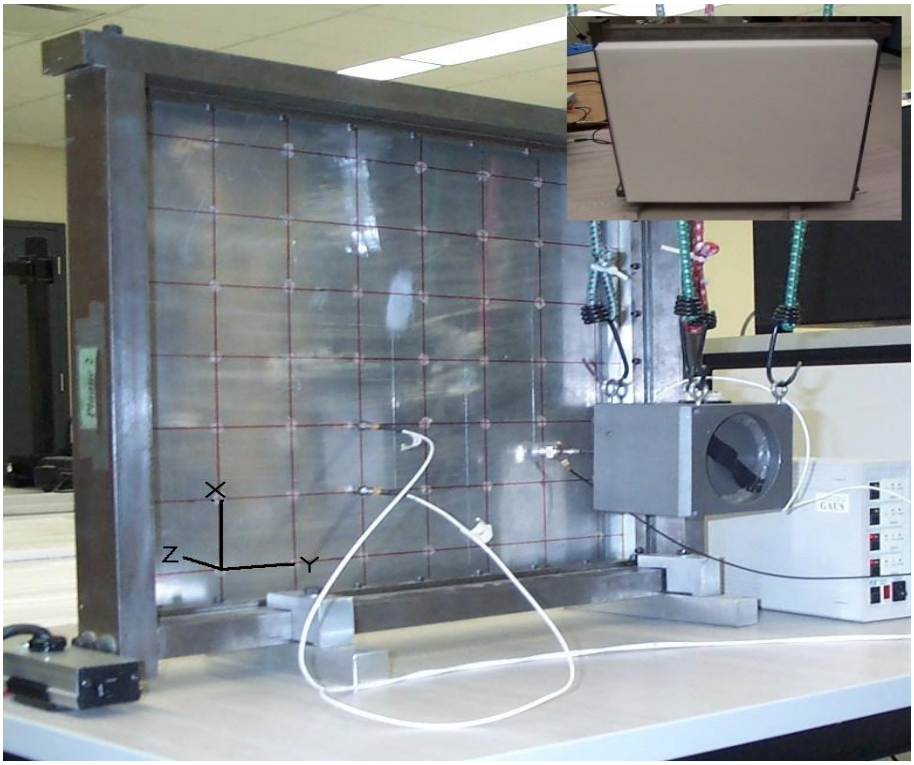

Fig. 5.1: Photo du montage pour la plaque d'aluminium simplement supportée (3.175 mm). Le matériau poro-visco-élastique éventuellement collé à la plaque se trouve sur la face avant, cachée, par le cadre de la plaque. En médaillon la face avant de la plaque est traitée par une couche d'une pouce (25.4 mm) de mousse de mélamine M.

5.1.3 Précisions sur l'interpolation trigonométrique

L'objectif principal de la modélisation numérique simplifiée du cas plaque + poreux présentée dans ce chapitre est de limiter la taille des matrices mises en jeu et donc leur temps de résolution.

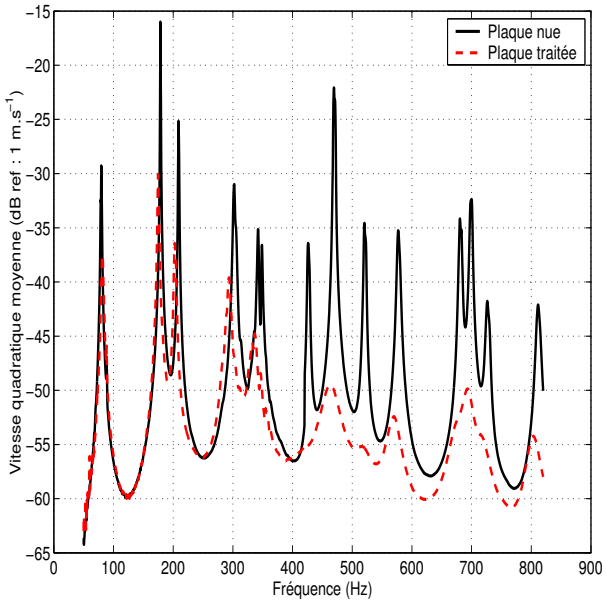

Fig. 5.2: Comparaison de mesures de vitesses quadratiques moyennes. — : plaque d'aluminium nue, −− : plaque d'aluminium traitée par 76.2 mm (3") de la mousse de mélamine M. Les effets de masse et d'amortissement de la mousse sont nettement observés sur la réponse de la plaque métallique.

Une implémentation hiérarchique classique du modèle plaque mince de Love-Kirchhoff [**?**, **?**, **?**, **?**] présente la difficulté d'imposer une continuité C^1 du champ des variables. Une solution intéressante permettant de résoudre cet impératif de continuité C^1 a été réalisée au GAUS par O. Beslin *et al.* [**?**] puis M. Barrette [**?**]. Cette approche consiste à remplacer les fonctions d'interpolation polynomiales par des fonctions trigonométriques. La présentation de ces fonctions est donnée dans l'article précédent (*cf* table 1) ainsi qu'à la figure 5.1.3.

Les résultats qui suivent détaillent les matrices intermédiaires du calcul numérique présenté dans l'article. Dans le cas général, les équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K^w - \omega^2 M^w & C^{w|qx} & C^{w|qy} & C^{w|p} \\ C^{qx|w} & K^{qx} - \omega^2 M^{qx} & C^{qx|qy} & C^{qx|p} \\ C^{qy|w} & C^{qy|qx} & K^{qy} - \omega^2 M^{qy} & C^{qy|p} \\ C^{p|w} & C^{p|qx} & C^{p|qy} & L^p/\omega^2 - N^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ qx \\ qy \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

où K et L sont des matrices de raideur, M et N des matrices de masse. Les matrices C traduisent les couplages entre les degrés de liberté de la plaque métallique et des phases solide et fluide du matériau poro-visco-élastique. F est le vecteur des forces imposées sur la plaque métallique. Les coefficients de chacune de ces matrices sont définis comme

(les couplages entre variables dans les matrices masses ont été négligés) :

$$\begin{aligned}
K^{w}_{ijmn} &= 4abD_1\left[I^{22}_{im}I^{00}_{jn}/a^4 + I^{00}_{im}I^{22}_{jn}/b^4 + \nu_p\left(I^{02}_{mi}I^{02}_{jn} + I^{02}_{im}I^{02}_{nj}\right)/(a^2b^2) + 2(1-\nu_p)I^{11}_{im}I^{11}_{jn}/(a^2b^2)\right] \\
&+ 4abD_2\left[I^{22}_{im}I^{00}_{jn}/a^4 + I^{00}_{im}I^{22}_{jn}/b^4 + \nu_m\left(I^{02}_{mi}I^{02}_{jn} + I^{02}_{im}I^{02}_{nj}\right)/(a^2b^2) + 2(1-\nu_m)I^{11}_{im}I^{11}_{jn}/(a^2b^2)\right] \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

$$M^{w}_{ijmn} = (\rho^p h_p + \widetilde{\rho} h_m)\frac{ab}{4}I^{00}_{im}I^{00}_{jn} + ab\rho^p\frac{h_p^3}{12}\left(I^{11}_{im}I^{00}_{jn}/a^2 + I^{00}_{im}I^{11}_{jn}/b^2\right) \qquad (5.3)$$

$$K^{qx}_{ijmn} = D_5\frac{b}{a}I^{11}_{im}I^{00}_{jn} + D_3\frac{4b}{a^3}I^{22}_{im}I^{00}_{jn} + D_3\frac{(1-\nu_m)}{2}\frac{4}{ab}I^{11}_{im}I^{11}_{jn} \qquad (5.4)$$

$$M^{qx}_{ijmn} = \widetilde{\rho}\int_{z1}^{z2}\left(z - \frac{h_p}{2}\right)^2 dz \times \frac{b}{a}I^{11}_{im}I^{00}_{jn} \qquad (5.5)$$

$$K^{qy}_{ijmn} = D_5\frac{a}{b}I^{00}_{im}I^{11}_{jn} + D_3\frac{4a}{b^3}I^{00}_{im}I^{22}_{jn} + D_3\frac{(1-\nu_m)}{2}\frac{4}{ab}I^{11}_{im}I^{11}_{jn} \qquad (5.6)$$

$$M^{qy}_{ijmn} = \widetilde{\rho}\int_{z1}^{z2}\left(z - \frac{h_p}{2}\right)^2 dz \times \frac{a}{b}I^{00}_{im}I^{11}_{jn} \qquad (5.7)$$

$$L^{p}_{ijkmnr} = \frac{\phi^2}{\widetilde{\rho}_{22}}ab\left[I^{11}_{im}I^{00}_{jn}J^{00}_{kr}/a^2 + I^{00}_{im}I^{11}_{jn}J^{00}_{kr}/b^2 + I^{00}_{im}I^{00}_{jn}J^{11}_{kr}/4\right] \qquad (5.8)$$

$$N^{p}_{ijkmnr} = \frac{\phi^2}{\widetilde{R}}\frac{ab}{4}I^{00}_{im}I^{00}_{jn}J^{00}_{kr} \qquad (5.9)$$

$$C^{w|qx}_{ijmn} = 2D_4\frac{4b}{a^3}I^{22}_{mi}I^{00}_{nj} + \nu_m D_4\frac{4}{ab}\left(I^{02}_{mi}I^{20}_{nj} + I^{20}_{mi}I^{02}_{nj}\right) + 2(1-\nu_m)D_4\frac{4}{ab}I^{11}_{mi}I^{11}_{nj} \qquad (5.10)$$

$$C^{w|qy}_{ijmn} = 2D_4\frac{4a}{b^3}I^{00}_{mi}I^{22}_{nj} + \nu_m D_4\frac{4}{ab}\left(I^{02}_{mi}I^{20}_{nj} + I^{20}_{mi}I^{02}_{nj}\right) + 2(1-\nu_m)D_4\frac{4}{ab}I^{11}_{mi}I^{11}_{nj} \qquad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
C^{w|p}_{ijnmr} &= (\widetilde{\gamma}+1)ab\left(I^{11}_{im}I^{00}_{jn}H^0_r/a^2 + I^{00}_{im}I^{11}_{jn}H^0_r/b^2 - I^{00}_{im}I^{00}_{jn}G^1_r/4\right) \\
&+ \frac{b}{2a}\left(I^{20}_{im}I^{00}_{jn} + I^{02}_{im}I^{00}_{jn}\right)H^0_r + \frac{a}{2b}\left(I^{00}_{im}I^{20}_{jn} + I^{00}_{im}I^{02}_{jn}\right)H^0_r \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

$$C^{qx|qy}_{ijmn} = \nu_m D_3\frac{4}{ab}\left(I^{02}_{mi}I^{20}_{nj} + I^{20}_{mi}I^{02}_{jn}\right) + (1-\nu_m)D_3\left(I^{11}_{im}I^{11}_{nj}\right) \qquad (5.13)$$

$$C^{qx|p}_{ijmnr} = (\widetilde{\gamma}+1)\frac{b}{a}I^{11}_{im}I^{00}_{jn}\left(H^0_r - \frac{h_p}{2}G^0_r\right) + \frac{b}{2a}\left(I^{20}_{im}I^{00}_{jn} + I^{02}_{im}I^{00}_{jn}\right)\left(H^0_r - \frac{h_p}{2}G^0_r\right) \qquad (5.14)$$

$$C^{qy|p}_{ijmnr} = (\widetilde{\gamma}+1)\frac{a}{b}I^{00}_{im}I^{11}_{jn}\left(H^0_r - \frac{h_p}{2}G^0_r\right) + \frac{a}{2b}\left(I^{00}_{im}I^{20}_{jn} + I^{00}_{im}I^{02}_{jn}\right)\left(H^0_r - \frac{h_p}{2}G^0_r\right) \qquad (5.15)$$

$$(5.16)$$

Les coefficients appartenant au triangle inférieur de la matrice globale ne sont pas reportés. La matrice globale étant symétrique, on a par exemple :

$$C^{qx|w}_{ijmn} = \left(C^{w|qx}_{ijmn}\right)^T \qquad (5.17)$$

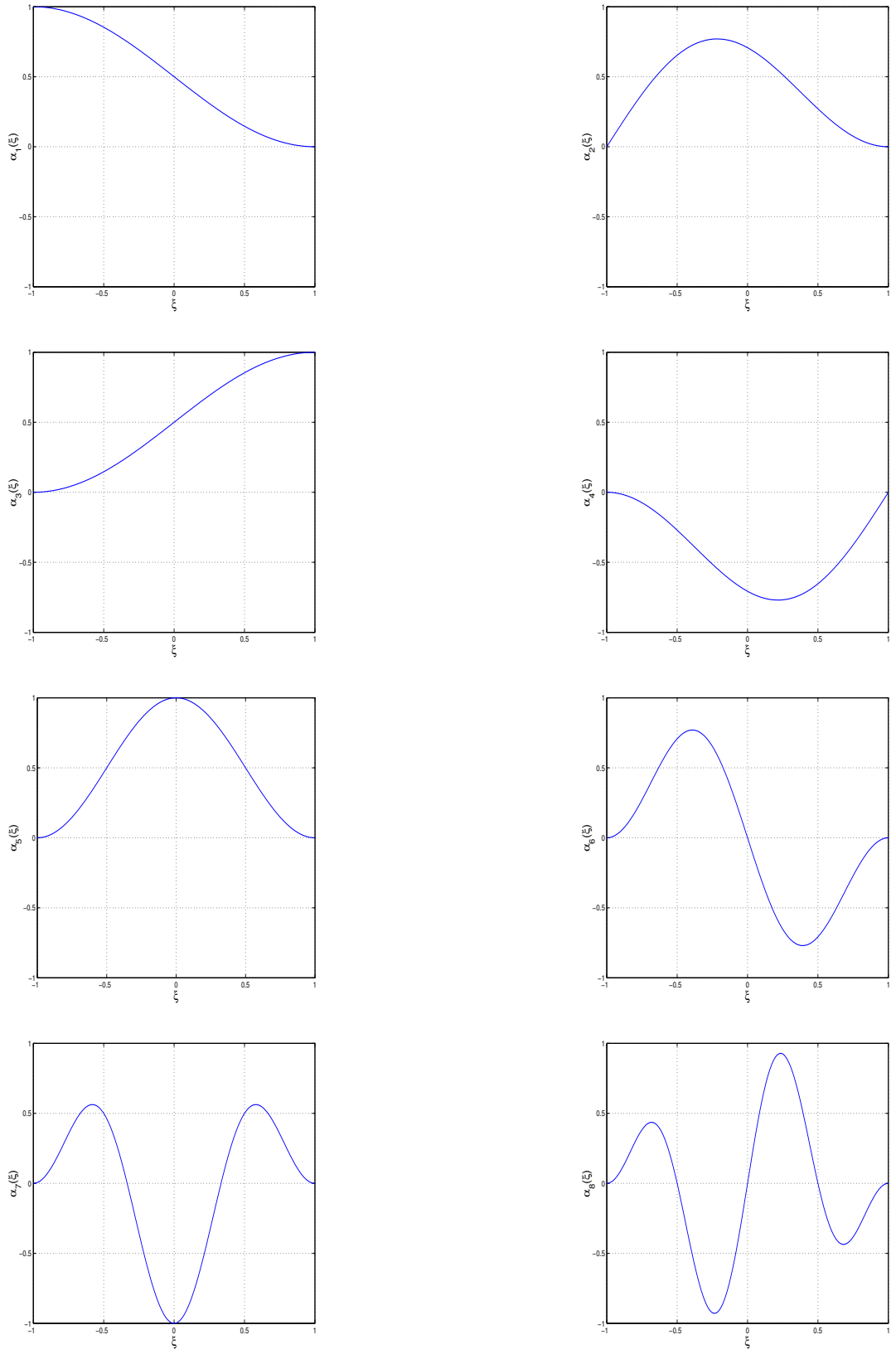

Fig. 5.3: 8 premières fonctions trigonométriques d'interpolation.

Les intégrales $I_{im}^{\gamma\beta}$, H_r^γ et J_r^γ sont définies par :

$$I_{im}^{\gamma\beta} = \int_0^1 \frac{\partial^\gamma}{\partial\zeta^\gamma}\alpha_i(\zeta)\frac{\partial^\beta}{\partial\zeta^\beta}\alpha_m(\zeta)\ d\zeta \tag{5.18}$$

$$J_{im}^{\gamma\beta} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}\Big(p_r(z)\Big)_i\ \frac{\partial^\beta}{\partial z^\beta}\Big(p_r(z)\Big)_m\ dz \tag{5.19}$$

$$G_r^\gamma = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}p_r(z)\ dz \tag{5.20}$$

$$H_r^\gamma = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}p_r(z)\ z\ dz \tag{5.21}$$

Lors de simulations, les termes d'inertie de rotation M^{qx} et M^{qy} peuvent être négligés dans la mesure ou le domaine de validation du code est fixé, en haute fréquence, par la première résonance en quart d'onde du matériau poreux. Cette simplification permet également un gain de temps à l'intégration du problème matriciel.

5.1.4 Notes sur κ^2

κ^2 (où κ suivant les auteurs), qui apparaît dans les termes K_{ijmn}^{qx} et K_{ijmn}^{qy} est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement σ_{zx} et σ_{zy} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de R. D. Mindlin [**?**] en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres.

Mindlin trouve ce facteur dépendant du coefficient de Poisson ν et variant de 0.76 pour $\nu = 0$ à 0.91 pour $\nu = 0.5$ dans le cas d'un matériau isotrope. En suivant cette observation et en choisissant κ^2 de façon à égaler la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement d'une plaque isotrope, infinie déterminée par l'exacte théorie de l'élasticité et la théorie de Mindlin, on peut montrer que le facteur κ^2 est solution d'une équation polynomiale d'ordre 3 [**?**] telle que :

$$\kappa^2 = 0.86 \qquad \text{si} \qquad \nu = 0.300 \qquad \text{et} \qquad \kappa^2 = \pi^2/12 \qquad \text{si} \qquad \nu = 0.176 \tag{5.22}$$

W. H. Wittrick en 1987 [**?**] propose une approximation de κ^2 dans le cas d'une plaque simplement supportée :

$$\kappa^2 = \frac{5}{(6-\nu)} \tag{5.23}$$

On peut noter qu'en comparant les résultats de Mindlin et Reissner [**?**], qui suppose une variation parabolique de la distribution des contraintes de cisaillement, on obtient pour expression de κ^2 : 5/6.

A ce jour, la facteur κ^2, lorsqu'il est utilisé, est toujours sujet à discussion. L'ensemble des auteurs s'accordent cependant pour juger de son influence sur les résultats (*cf* Y.Y.Yu[**?**] ou J.-M. Berthelot [**?**] qui donne quelques exemples de calcul du facteur κ^2).

D'autres théories ne nécessitant pas de facteur de correction ont été proposées, notamment par J. N. Reddy [**?**] qui utilise une interpolation polynomiale du troisième ordre pour la déformation en cisaillement. Ces théories d'ordres supérieurs impliquent cependant une mise en oeuvre difficile par rapport au faible gain de précision sur les résultats. Cette dernière remarque explique qu'elles n'aient pas été retenues dans la présente modélisation du matériau poreux.

5.1.5 Effet de l'adhésif

L'effet de la couche adhésive liant le matériau à la plaque métallique sur le comportement vibratoire et acoustique du système n'est souvent pas abordé dans les précédents travaux. Lorsque le problème est soulevé, le côté acoustique est généralement le seul discuté. Quelques expérimentations ont cependant été réalisées sur l'efficacité du traitement vibro-acoustique lorsque le matériau est collé à son support métallique ou lorsque qu'une lame d'air est présente entre le matériau et la plaque [**?**, **?**]. Quant à l'adhésif, il est recommandé de le prendre de la plus petite épaisseur possible pour en limiter son influence et le négliger lors du traitement des données [**?**][1].

Cette section, qui ne se veut pas exhaustive sur le sujet du collage, présente les résultats d'une brève étude concernant l'influence du mode de collage du matériau à la plaque sur le comportement vibratoire de cette dernière.

La figure 5.4 présente des résultats obtenus sur la plaque métallique de 3.175 mm d'épaisseur, en simple support. La réponse vibratoire de cette plaque est successivement mesurée, sans aucune couche adhésive, avec une couche de scotch double face d'une épaisseur de 0.13 mm et un système à velcro d'environ 5 mm d'épaisseur. Le scotch et le velcro ne recouvrent pas totalement la surface de la plaque : ils sont placés sur le pourtour de la plaque.

Les différentes réponses de la plaque sont proches. Cependant, en observant plus précisément les courbes, on remarque que les effets de la couche adhésives sont perceptibles. Ces effets, de masse et d'amortissement, sur la réponse vibratoire de la plaque deviennent de moins en moins négligeables à mesure que la fréquence augmente. Ils sont également légèrement moins importants pour le scotch que le velcro.

Dans un soucis de limitation des erreurs sur les résultats de caractérisation (notamment un biais sur les estimations), il semble indispensable que l'inversion soit faite en tenant compte du module de rigidité "apparent" de la plaque de base, que nous définissons comme le module de rigidité du système plaque + adhésif (*cf* l'application dans le

[1] *cf* également section 4 de l'article du chapitre 4

premier article concernant le cas d'une poutre).

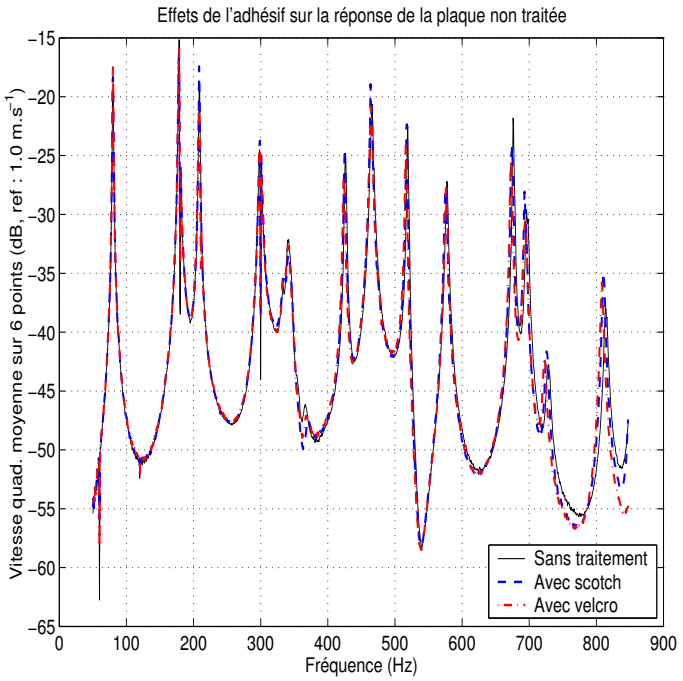

Fig. 5.4: Comparaison des réponses de la plaque d'aluminium de 3.175mm, non traitée par un matériau amortissant, pour deux couches adhésives différentes : un scotch double face et un système à velcro recouvrant chacun partiellement la surface de la plaque.

Lorsque l'on rajoute la couche de matériau poreux au système plaque + couche adhésive, la présence de l'adhésif se fait nettement plus remarquable. La figure 5.5 regroupe les résultats pour les plaques précédentes auxquelles 76.2 mm (3 pouces) de la mousse de mélamine M ont été ajoutés.

Les positions des résonances des systèmes multicouches sont proches. En revanche, le traitement partiel par le velcro, d'épaisseur 5 mm environ, crée une cavité fermée d'air entre la plaque et le poreux. Un découplage partiel est alors observable entre le mouvement de la plaque et celui de la couche poreuse. Ce qui se traduit par une faible efficacité du matériau poreux à la réduction vibratoire de la plaque. En effet, les résultats précédents (§5.1.1) indiquent, qu'en basses fréquences, les mécanismes de dissipation prépondérants dans le poreux sont l'amortissement structural et la dissipation visqueuse. L'amortissement structural est lié au déplacement de la phase solide du matériau alors que la dissipation visqueuse est proportionnelle au mouvement relatif entre les phases solide et fluide (*cf* §3.2.3). Or, dans le cas du velcro, réparti sur le pourtour de la plaque en simple support, le déplacement de la phase solide du matériau est faible voire nul. L'excitation étant mécanique, le déplacement relatif entre les deux phases solide et fluide en est donc diminué tout comme l'amortissement des vibrations de la plaque métallique.

Pour clore cette aparté, on retiendra que la vaste problématique du collage, jusqu'ici trop peu considérée, mériterait une plus large étude, notamment concernant l'influence de différents collages ou motifs de collage sur la vibration de chaque mode.

Dans la suite des travaux, le scotch double face possédant une influence moindre sur le comportement de la plaque seule et n'introduisant pas de lame d'air entre la plaque et le matériau sera préféré si la nature du matériau le permet. Par ailleurs, l'avantage du côté non destructif du collage par scotch contrairement à de nombreuses colles sera apprécié.

5.2 Application à la caractérisation de mousses

Deux applications de la méthode précédente à la caractérisation des module d'Young et coefficient d'amortissement structuraux de mousses sont présentées dans cette section.

Les matériaux testés sont la mousse de mélamine M et la mousse de polyuréthanne J dont les propriétés sont regroupées dans la table 5.1.

Les figures 5.6 et 5.7 présentent les résultats d'inversion sur la mousse de mélamine (25.4 mm) pour laquelle la plaque d'aluminium de 3.175 mm était en appuis simples (*cf* figure 8 du précédent article). Ces estimations ne sont données qu'à 23°C, aucune étude particulière en température n'ayant été effectuée ici, limitant le jugement sur la pertinence de la méthode aux 4 premières résonances du système bicouche. La mise

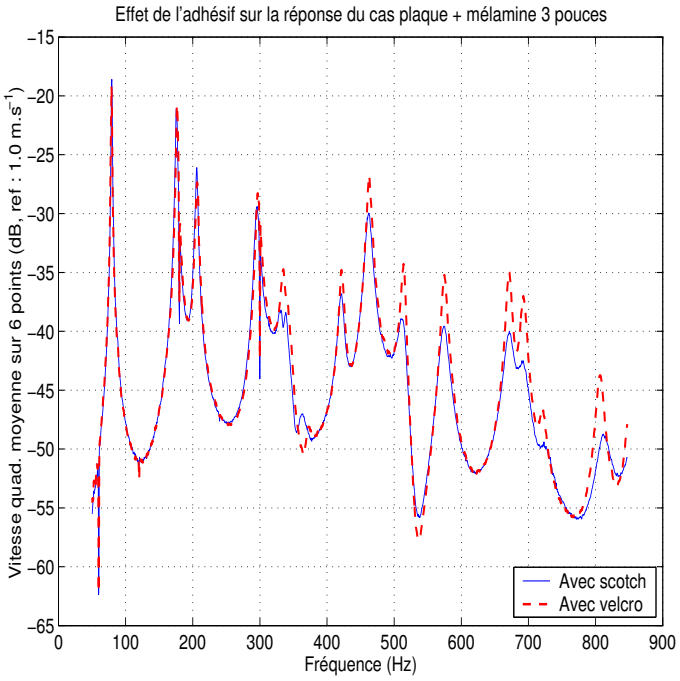

Fig. 5.5: Comparaison des réponses pour les configurations des plaques de la figure 5.4 traitées par 76.2 mm (3") de la mousse de mélamine M.

Matériau	E N.m^{-2}	ν	ρ_1 kg.m^{-3}	η
M	160 000	0.44	8.35	0.060
J	190 000	0.30	57.20	0.050

Matériau	ϕ	σ N.s.m^{-4}	α_∞	Λ 10^{-6}m	Λ' 10^{-6}m
M	0.99	12 600	1.0	78	192
J	0.90	26 600	1.3	82	236

Tab. 5.1: Propriétés élastiques quasi-statiques et acoustiques des matériaux M et J mesurées à 24°C. Ces valeurs sont déduites des méthodes de Langlois *et al.* [**?**], et Y. Atalla [**?**]

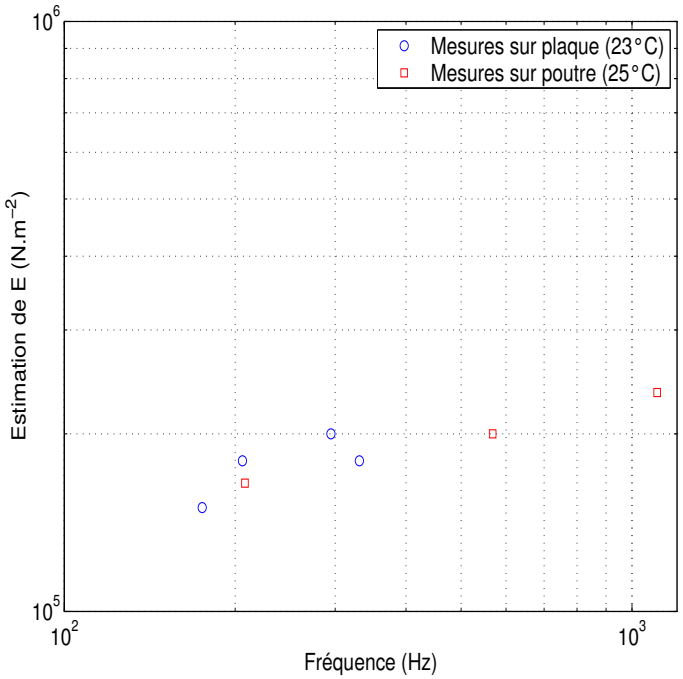

Fig. 5.6: Estimations du module d'Young E pour la mousse de mélamine M obtenue à 23°C et comparaison avec les mesures à 25°C sur la poutre en configuration tricouche (*cf* §4.5). Les valeurs du module d'Young obtenues sont une fonction des modules d'Young dans les directions 1 et 3 (*cf* chapitre 2).

en place d'une telle étude en température ne présenterait cependant aucune difficulté supplémentaire par rapport au cas des poutres détaillé au chapitre 4.

Les résultats concernant le module d'Young sont cohérents avec les précédentes estimations quasi-statiques, autour de 100 Hz, ou dynamiques. Il faut toutefois noter que la mousse est considérée isotrope. Pour cette inversion, la valeur du module d'Young obtenue est donc une fonction des modules d'Young dans les directions 1 et 3 si on se réfère à l'orientation choisie sur l'échantillon cubique de la figure 2.4.

A la figure 5.7, bien que les incertitudes des estimations ne sont pas reportées, on

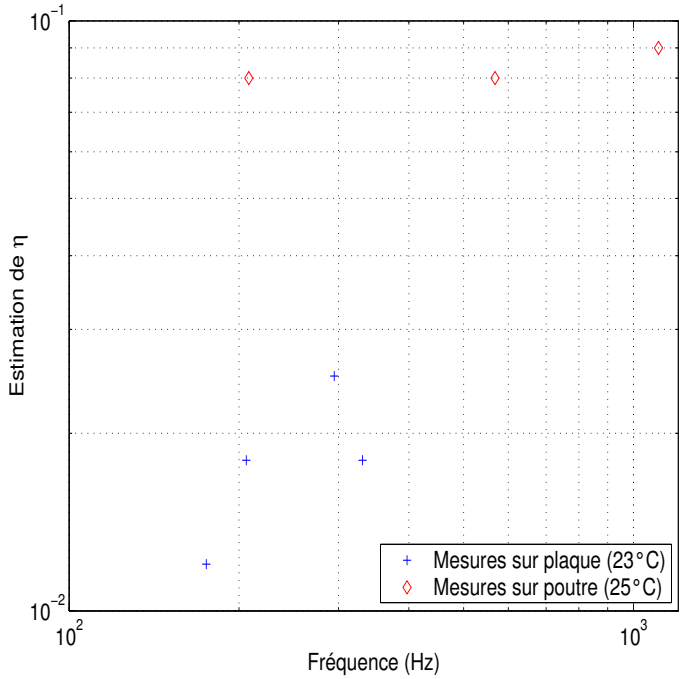

Fig. 5.7: Estimations du coefficient d'amortissement structural η pour la mousse de mélamine M obtenue à 23°C comparaison avec les mesures à 25°C sur la poutre en configuration tricouche (*cf* §4.5) Les valeurs du coefficient d'amortissement obtenues sont une fonction des coefficients dans les directions 1 et 3 (*cf* orientation figure 2.4).

note un biais sur l'estimation du coefficient d'amortissement structural de la mousse par rapport aux résultats déjà obtenus dans les chapitres 2 et 4. Aucune origine précise de cette sous-estimation de l'amortissement structural n'a été identifiée jusqu'à maintenant. On note toutefois que les températures pour lesquelles les tests ont été réalisés diffèrent de deux degrés centigrades et que l'amortissement structural de la mousse de mélamine M connaît de fortes variations dans cette zone de températures (*cf* mesures en torsion au chapitre 2).

Les résultats concernant la mousse J, plus dense et de résistivité au passage de l'air nettement supérieure[2] à la mousse de mélamine M, sont regroupés dans les figures 5.8 à 5.10 (une photo de la structure microscopique de cette mousse est présentée à la figure 1.6 - image de gauche).

La figure 5.8 présente des estimations expérimentale et numérique de la vitesse quadratique moyenne de la plaque d'aluminium traitée par 20 mm de la mousse de polyuréthanne J. Des conditions limites d'encastrement sont imposées sur la plaque métallique de 1.2 mm d'épaisseur par un cadre d'acier. L'inversion des paramètres élastiques est limitée, à la température d'essai de 20°C, au deuxième et troisième résonances : la pre-

[2]L'importance aux basses fréquences (10 - 1 000 Hz) de la résistivité est présentée dans la deuxième section de l'article précédent

mière résonance étant encore trop influencée par la condition libre du cadre de la plaque. Sur cette figure 5.8, les propriétés élastiques de la mousse sont recalées dans le modèle numérique sur la troisième résonance.

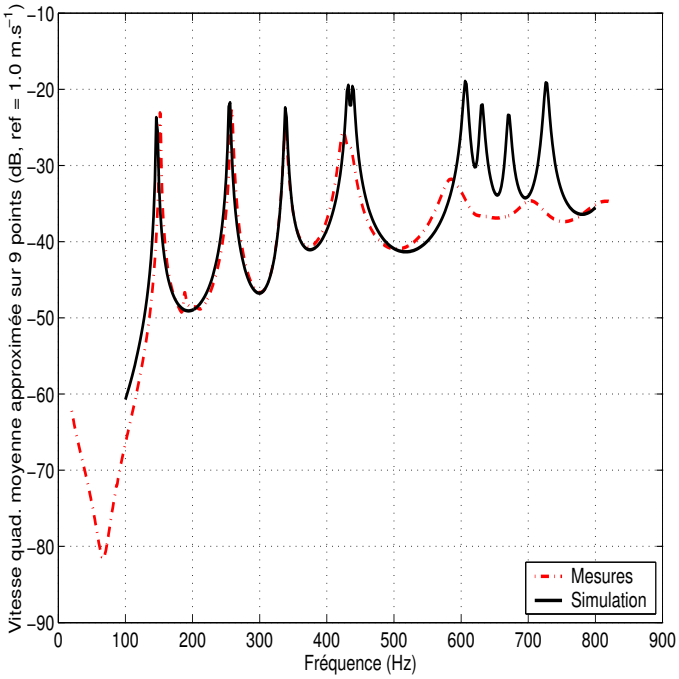

Fig. 5.8: Comparaisons entre mesures et simulation pour la mousse de polyuréthanne J (20 mm), en configuration plaque aluminium de base (1.2 mm) encastrée et à 20°C.

Les figures 5.9 et 5.10 superposent les résultats d'inversion obtenus dans la configuration plaque + poreux et ceux d'une mesure quasi-statique (méthode Mariez *et al.* [**?**, **?**]) sur la même mousse à 22°C.

Les résultats entre les deux méthodes s'accordent, d'autant plus, si l'on considère les incertitudes de mesure de 10% (qui ne sont pas représentées sur les graphiques pour une question de lisibilité).

Les résultats concernant ces deux mousses montrent la possibilité qu'offre une modélisation simplifiée, dans certaines conditions, pour l'estimation des propriétés élastiques des mousses.

Une étude en température, en plaçant le système plaque + poreux dans une chambre en température, de la même façon que ce qui a été réalisé pour les poutres (chapitre 4), ne présenterait aucune difficulté supplémentaire et permettrait d'augmenter le nombre de données pour juger de la pertinence du calcul simplifié.

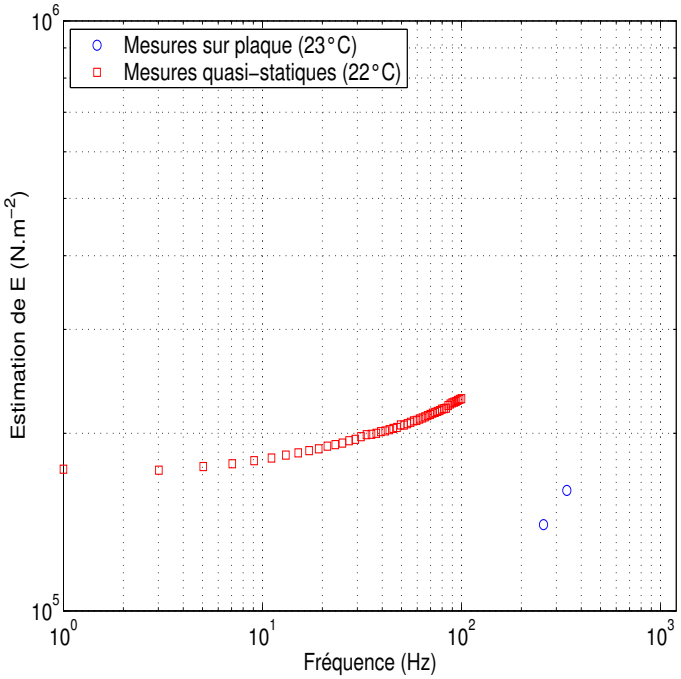

Fig. 5.9: Estimations du module d'Young E pour la mousse de polyuréthanne J à 20^oC, comparaison avec les mesures quasi-statiques de la méthode Mariez *et al.* [**?**, **?**] obtenues à 22^oC.

5.3 Précision sur l'inversion

La méthode d'inversion utilisée a été présentée par K. Levenberg puis modifiée par D. W. Marquardt [**?**, **?**, **?**]. Elle combine les avantages des méthodes de Cauchy (ou méthode du gradient) [**?**] et de Newton [**?**].

Au début de la recherche, l'algorithme de Levenberg-Marquardt s'apparente à celui de Cauchy permettant une approche rapide vers le point optimum d'inversion. La méthode prend alors les caractéristiques de celle de Newton pour converger vers la solution.

L'indicateur vibro-acoustique choisi pour cette optimisation non-linéaire, a été, comme dans le cas des poutres : la vitesse quadratique moyenne ou son estimation sur un nombre réduit de FRF, pour sa nature mécanique et sa facilité de mesure.

Les premières identifications des paramètres module d'Young et coefficient structural d'amortissement fournies à l'algorithme de Levenberg-Marquardt sont les valeurs quasi-statiques obtenues des méthodes de Langlois *et al.* [**?**] ou Mariez *et al.* [**?**] (*cf* table 5.1).

L'influence des incertitudes d'estimation des paramètres acoustiques (porosité, résistivité...), sur la précision des estimations des paramètres élastiques (module d'Young et coefficient d'amortissement) n'a pas été étudiée ici.

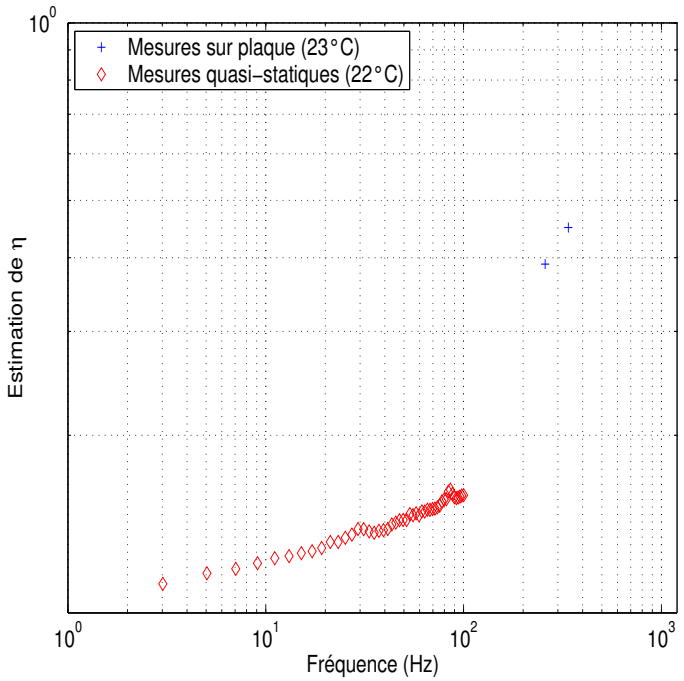

Fig. 5.10: Estimations du coefficient d'amortissement structural η pour la mousse de polyuréthanne J obtenue à 20°C, comparaison avec les mesures quasi-statiques de la méthode Mariez *et al.* [**?**, **?**] obtenues à 22°C.

Dans les premières mesures réalisées, un faible décalage en niveaux des courbes mesurée et simulée est parfois observé. Ce décalage, attribué à une calibration trop peu précise des capteurs de mesure, implique une intervention extérieure de l'expérimentateur de façon à permettre à l'algorithme d'inversion de converger vers la solution du problème. Une calibration des capteurs, deux à deux, en module et en phase, a permis de s'affranchir de ce désagrément.

Afin de vérifier l'unicité des résultats, une démarche identique à celle présentée dans le cas des poutres, section 4.6, a été réalisée. Le problème d'identification paramétrique par inversion à une ou deux dimensions ne présentant pas de différences et les conclusions de cette étude étant sans ambiguïté, aucun nouveau résultat n'est reporté ici.

5.4 Synthèse

La méthode de caractérisation par plaque multicouche décrite dans ce chapitre a été appliquée à deux mousses de natures différentes (masse volumique, résistivité au passage de l'air) et pour des configurations différentes (plaque métallique de support en condition d'appuis simples ou encastrée).

Le modèle d'éléments finis hiérarchiques trigonométriques simple permet d'obtenir des résultats probants, rapidement. Sa limite d'utilisation est fixée à la fréquence de

première résonance en quart d'onde de la mousse invalidant l'hypothèse de déflexion constante sur l'épaisseur du bicouche. Ce modèle est donc dédié à la seule caractérisation du matériau poreux, en aucun cas à la simulation de forts amortissements apparaissant généralement au-delà de cette fréquence limite.

La modélisation isotrope des deux mousses présentées ici, dont la symétrie est en réalité proche de l'orthotropie de révolution[3], nous permet d'obtenir des résultats cohérents avec les méthodes quasi-statiques ainsi qu'avec la méthode décrite au chapitre 4. Une extension à des matériaux poreux orthotropes de ce modèle ainsi qu'une application à une plus large gamme de matériaux serait cependant souhaitable dans le but de généraliser ses résultats obtenus, jusqu'à présent, sur un petit nombre de matériaux.

[3] *cf* §1.5 et chapitre 2

Conclusion

L'objet de ce travail était le développement de méthodes de caractérisation des propriétés élastiques et amortissantes de matériaux poreux acoustiques.

Les méthodes existantes, classées en deux catégories : les méthodes quasi-statiques, non résonantes, d'une part et les méthodes dynamiques, résonantes, d'autre part, ont été présentées dans l'état de l'art au chapitre 2. Un exemple de leurs applications à une mousse de mélamine nous a permis d'illustrer les limites de ces méthodes ainsi que d'importants résultats concernant le comportement mécaniques des matériaux poreux en acoustique.

- Les méthodes quasi-statiques ne prennent généralement pas en compte la nature biphasique des matériaux poreux et donc, par voie de conséquence, le couplage entre les deux phases solide et fluide bien que M. Etchessahar *et al.* [**?**, **?**] aient mis en évidence son influence pour des fréquences de quelques dizaines de Hertz. Ces méthodes doivent donc être réservées à de très faibles fréquences (inférieur à 10 ou 20 Hz). De plus, l'utilisation du principe de superposition temps-température, lorsqu'il est appliqué aux mesures quasi-statiques, doit être considéré avec précaution, aucune information concernant l'influence de la phase fluide du poreux n'étant prise en compte (*cf* synthèse du chapitre 2).
- Les méthodes dynamiques, quant à elles, considèrent pour la plupart la nature particulière des poreux. Elles sont, en revanche, confrontées à la difficulté de modélisation de ces matériaux.

L'état de l'art fait également référence aux techniques alternatives de caractérisation mécanique des poreux, notamment la reconstruction numérique, qui comme les modèles structuraux se fonde sur la micro-géométrie du matériau pour en déduire ces propriétés. En revanche, la reconstruction numérique, nécessite des moyens de calculs encore trop importants pour espérer gagner un essor sur les méthodes combinées d'homogénéisation et d'éléments finis.

Les deux méthodes présentées aux chapitres 4 et 5 reposent sur l'étude de multicouches en flexion. Les avantages de ces configurations multicouches sont d'être proches des conditions pratiques d'utilisation en industrie et d'offrir un moyennage quant à l'éventuelle hétérogénéité spatiale des matériaux. Elles présentent également moins de difficultés dans leurs mises en oeuvres expérimentales notamment concernant l'excitation (*cf* travaux de M. Etchessahar [**?**]). Leur inconvénient est, en revanche, d'introduire

des conditions limites qui ne sont pas parfaitement connues comme à l'interface support métallique-poreux, avec le collage dont il est discuté au paragraphe 5.1.5.

Dans le cadre de géométries de type poutre, chapitre 4, l'estimation des paramètres : modules d'Young et coefficients d'amortissement, est réalisée par méthode inverse. Cette méthode inverse utilisant la Méthode des Eléments Finis (3-D) s'avère être la plus importante limitation à la réalisation d'une méthode de caractérisation simple et rapide. Les résultats obtenus permettent cependant d'élargir la gamme fréquentielle de caractérisation par rapport aux méthodes quasi-statiques. Une étude en température a également été menée dans ces cas de poutres.

Dans le cadre de géométries de type plaque, chapitre 5, un code numérique simplifié, dédié aux seuls cas de plaques métalliques traitées par une couche poreuse est présenté pour s'affranchir de la difficulté rencontrée avec les poutres. Cette simplification impose cependant une limitation plus forte du modèle par rapport aux codes numériques tri-dimensionnels : au delà de la fréquence de la première résonance dans l'épaisseur du matériau en test, ce modèle simplifié n'est plus valide. Les résultats obtenus pour deux matériaux différents permettent toutefois de valider cette approche. Aucune étude en température n'est réalisée dans ce cas précis, elle ne présenterait cependant pas de difficulté supplémentaire par rapport aux cas des poutres.

Aucune de ces nouvelles méthodes dynamiques ou des méthodes quasi-statiques n'est a privilégier. La caractérisation des propriétés élastiques et amortissantes des matériaux poreux doit passer par une combinaison judicieuse des techniques existantes au regard de la nature de l'échantillon à étudier.

De façon générale, il est important de noter qu'une grande prudence est requise quant aux problèmes à 2 ou 3 dimensions, les coefficients de Poisson de matériaux poreux n'étant généralement pas réels et indépendants de la fréquence comme le laisse entendre une mauvaise interprétation de résultats précédents [**?**, **?**, **?**, **?**].

Par ailleurs, une des priorités des méthodes de caractérisation mécanique est le traitement systématique des poreux comme matériaux orthotropes. Trop peu de données existant quant à la prise en compte de cette symétrie pour les mousses ou les fibreux dont l'origine est présentée au chapitre 1. Il s'agit, en particulier, d'une des perspectives à apporter au modèle de plaque multicouche.

Les interrogations concernant l'évolution des propriétés élastiques par rapport au vieillissement des matériaux (notamment lors des essais de répétabilité des mesures) ainsi que la question des interfaces métal-poreux et poreux-air, dont il est rapidement fait état dans ce travail, sont également à préciser dans les travaux futurs.

Annexe A

Diffusion multiple appliquée aux matériaux poreux

Cette annexe présente un travail réalisé en collaboration avec Vincent Tournat, Vincent Pagneux et Denis Lafarge présentant un modèle pour l'étude acoustique de matériaux poreux avec diffuseurs rigides ou fluides. Ce travail montre également les limites du modèle de Biot-Allard généralisé (*cf* chapitre 3) en hautes fréquences, où l'effet de diffusion par la structure squelettique des poreux n'est plus négligeable. Une proposition d'extension du modèle de Biot-Allard pour ces hautes fréquences est présentée.

L'annexe se trouve sous la forme d'un article qui sera prochainement soumis au Physical Review E.

Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media

V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, and L. Jaouen
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine,
UMR-CNRS 6613, Université du Maine,
Av. Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France.
(Dated: February 23, 2004)

Abstract

Porous media like air-saturated polymer foams with open cells, have a non-trivial frequency-dependent absorption that arises due to viscous and thermal effects at the scale of the rigid frame microstructure. In order to produce multiple scattering at ultrasonic frequencies, meso-scale scatterers are introduced in the porous medium host. The effective wavenumber of such a multi-scale medium should take into account the peculiar absorption at the micro-scale and the multiple scattering at the meso-scale to describe precisely the propagation of a coherent acoustic wave. For this purpose, a simple model is developed. First, an Equivalent Fluid Model, derived from an homogenization method, is used to describe the acoustic propagation in the host porous medium itself. Second, the scattering by the inclusions is described with a multiple scattering approximation (Independent Scattering Approximation). This simple model allows to obtain the total effective wavenumber of the porous medium with meso-scale scatterers. After some validating results on the multiple scattering by an array of rigid cylinders in air, experiments on the multiple scattering by rigid cylinders embedded in a porous medium are presented and compared to the developed simple model. Incidentally, it appears that for the host medium itself, the equivalent fluid model is not capable to describe the high-frequency behavior whilst a multiple scattering approach with (thin) viscous and thermal boundary layers around the scatterers is accurate in the whole frequency range.

PACS numbers: 43.20.Fn, 43.20.+g, 43.35.+d

The multiple scattering of classical waves in inhomogeneous media has been extensively studied these past 50 years [1–7]. For elastic waves, weakly dissipative host media for scatterers are often used: water, solid plates [8–10]. However, in the case of host media like porous absorbing materials implying a strong dissipation, the non-trivial frequency dependent absorption that arises in such media has to be taken into account to describe the acoustic wave propagation. For acoustic porous materials, at long wavelength λ, i.e. when the latter is much larger than the characteristic dimension of the microstructure (the microscopic scale), the propagation is well described by the homogenized theory of porous materials [11–20], which is analogous in some respects to the theory of electromagnetic wave propagation in dielectric materials [21]. If we introduce scatterers with a mesoscopic scale much larger than the microscopic scale in the porous medium, the propagation can be described by a multi-scale approach; the multiple scattering by the scatterers at the mesoscale can be described by a multiple scattering approximation and takes place in a homogenized porous absorbing medium described by the above mentioned homogenized theory of porous materials. This regime, where dissipation and scattering take place, has not been extensively studied. Paradoxically, this latter is of real interest due to the numerous opportunities to meet such a problem e.g. in biological ultrasonics [22], in seismics [23].

In this paper, we want to investigate the effective medium properties when both multiple scattering and absorption effects are present. Concerning multiple scattering, several effective medium approximations have been proposed in the literature [5]. Since our experiments are concerned with sparse distributions of scatterers, we have chosen the so-called independent scattering approximation (ISA) [24], theoretically valid for low densities of randomly located scatterers. This approximation only requires the scattering amplitude of one scatterer in the forward direction and the density of scatterers in the medium. Concerning the absorption, it is taken into account by considering viscous and thermal effects at the microscopic scale.

In the first part, we present results from experiments at ultrasonic frequencies in a random array of rigid cylinders placed parallel in air. In this case, viscous and thermal effects occur mainly in the boundary layers at the cylinder surface. When these effects are taken into account in the ISA, it yields a modified ISA (ISAβ) with a small correction to the effective wave-number. Measurements of the coherent wave attenuation and velocity are compared to the theory. This validates the chosen multiple scattering approximation for a filling ratio up to 0.1 and for wavelengths ranging from 40 to 4 cylinder radius.

In the second part, the random array of rigid parallel cylinders is embedded in a porous material - an air-saturated polyurethane foam with open cells and low flow resistivity. According to the homogenized theory, as long as the wavelength is large compared to the characteristic micro-scale, this latter material can be considered as an equivalent fluid possessing non-trivial frequency dependent absorption. Then, the effect of the rigid cylinders on the coherent wave propagation can be taken into account

using the ISA with the equivalent fluid as the host medium. Comparisons of this simple multi-scale approach with measurements for two different filling ratios of rigid cylinders are done. Results show that the presence of scatterers has a significant effect on both the attenuation and phase velocity of the coherent wave. For the highest frequencies, as confirmed by the experimental results, the equivalent fluid idealization of the host porous medium is no longer completely valid and additional scattering effects by the microstructure manifest themselves. It appears that these effects may be taken into account in the present multi-scale description, by modeling the host medium with an ad hoc utilization of ISAβ. The resulting description enables to accurately match the experimental data in the whole frequency range, taking into account both aspects of absorption and scattering.

I. PRELIMINARY EXPERIMENTS AND MULTIPLE SCATTERING APPROXIMATION ANALYSIS

A quantity that is of interest for the propagation of an acoustic wave in a multiple scattering medium is the configurationally averaged Green's function, related to the propagation of the coherent amplitude [5]. This function can be written as:

$$\langle G\rangle(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{k_0^2(\omega) - k^2 - \Sigma(\omega,\vec{k})} \ , \tag{1}$$

where $\langle\ldots\rangle$ denotes the configurational average, k_0 is the uniform-medium wavenumber, ω the angular frequency, $\vec{k}$ the wave vector, and $\Sigma(\omega,\vec{k})$ is the self energy.

The self energy $\Sigma(\omega,\vec{k})$ that arises because of the local deviations of the medium wavenumber from the uniform-medium value k_0, contains information about the multiple scattering. In particular, if in a regime, the self energy has no $\vec{k}$ dependence, it becomes possible to define an effective medium, seen as a homogeneous medium by the coherent amplitude [5]. Owing to (1), the propagation of the coherent amplitude is described by an effective wave number k_e such that:

$$k_e^2 = k_0^2 - \Sigma(\omega) \tag{2}$$

and the problem is reduced to determining the complex self energy.

The independent scattering approximation assumes that there is no correlation between the scatterers [6]. In this approximation, the self-energy, quantity which is used to renormalize the effective wave number of the multiple scattering medium, is expressed by [24]:

$$\Sigma(\omega) = n\langle\vec{k}_0|t|\vec{k}_0\rangle \ , \tag{3}$$

where n is the density of scatterers in the medium, and $\langle \vec{k}_0 | t | \vec{k}_0 \rangle$ the term of forward scattering of the t-matrix for a single scatterer. In this section, we consider a random array of rigid cylinders placed parallel in the air and we apply the above theory. The governing equation of the host medium (air) is the Helmholtz equation and two different boundary conditions on the cylinder are considered in the model: i) Neumann boundary condition without absorption ii) impedance boundary condition with absorption.

In the case of a plane wave incident on a 2D cylindrical scatterer at rest, the acoustic pressure can be written:

$$p(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2-\delta_{m0})[J_m(k_0 r) + D_m H_m(k_0 r)] \cos(m\theta) \ , \tag{4}$$

where D_m are the scattering coefficients. Expressing the self-energy $\Sigma(\omega)$ in terms of the scattering coefficients D_m, it yields [25]:

$$\Sigma(\omega) = 4ni \sum_{m=0}^{\infty} (2-\delta_{m0}) D_m \ . \tag{5}$$

Without absorption, the classical Neumann boundary conditions for rigid scatterers are used, and the scattering coefficients are given by:

$$D_m = -\frac{J'_m(k_0 R)}{H'_m(k_0 R)} \ , \tag{6}$$

where R is the cylinder radius, J'_m and H'_m the first derivatives of the cylindrical Bessel and Hankel functions.

With absorption, the equivalent surface admittance can be used to take into account the viscous and thermal effects which occur in the boundary layers and are generally neglected out. New scattering coefficients D_m including these effects are obtained as follows. In the case of a plane wave incident on a motionless flat surface of large heat capacity, the equivalent surface admittance β relates the pressure and the normal derivative of the pressure by $-i\beta k_0 p = \partial p / \partial n$ and has the following form [25] (convention $e^{-i\omega t}$) :

$$\beta = \frac{1-i}{2} k_0 \left[(\gamma - 1)\delta_h + (1 - \frac{k_{0\perp}^2}{k_0^2})\delta_v \right] \ , \tag{7}$$

where γ is the air specific heat ratio, δ_h the thermal boundary layer thickness, δ_v the viscous boundary layer thickness, $k_{0\perp}$ the normal component of the air wave vector. Assuming that the scatterer is cylindrical, rigid and of large heat capacity, an expression for the admittance β_m seen by a component m of the field in Eq.(5), can be obtained by identifying in Eq.(7) the normal wavenumber $k_{0\perp}$ with the radial wavenumber k_r. Since $k_r^2 = k_0^2 - m^2/r^2$, the following admittance is obtained:

$$\beta_m = \frac{1-i}{2} k_0 \left[(\gamma - 1)\delta_h + \frac{m^2}{k_0^2 R^2}\delta_v \right] \ . \tag{8}$$

The condition to use this admittance β_m is that the surface should appear locally flat, i.e. δ_h and $\delta_v \ll R$. Applying the mixed boundary conditions at $r = R$,

$$-i\beta_m k_0 p_m = \frac{\partial p_m}{\partial r} \ , \tag{9}$$

it is possible to determine the scattering coefficients:

$$D_m = -\frac{J'_m(k_0R) + i\beta_m J_m(k_0R)}{H'_m(k_0R) + i\beta_m H_m(k_0R)} \ . \tag{10}$$

The use of these new coefficients in the previous ISA formula Eq.(5) takes into account the viscous and thermal losses at the boundaries of the scatterers. In the following, ISAβ will denote this modified ISA.

Using (5) and (2), the effective wave number k_e can be explicitly evaluated. Eventually, the phase velocity v of the coherent wave is,

$$v = \frac{\omega}{Re(k_e)} \ , \tag{11}$$

and the transmission coefficient A by a slab of thickness L, neglecting the reflexions at the slab interfaces is:

$$A = e^{-Im(k_e)L} \ . \tag{12}$$

A. Long wavelength limit

The physical consistency of the present multiple scattering approach ISAβ may be checked in a non trivial manner in the long-wavelength limit $k_0R \to 0$, by comparison with the known high-frequency limit of the homogenized method, described in Appendix A and denoted as the equivalent fluid model (EFM) [20].

On the one hand, when the wavelength becomes very large compared to the cylinder radius, Rayleigh scattering occurs (monopole and dipole radiation). The self-energy summation (5) may be limited to $m = 0, 1$, and the Bessel and Hankel functions in Eq.(10) may be developed using known expansions. To the leading order in k_0R the result is,

$$k_e^2 = k_0^2 \left\{ 1 + f \left[1 + (1+i) \left(\frac{2\delta_v}{R} + (\gamma - 1)\frac{\delta_h}{R} \right) \right] \right\} \ , \tag{13}$$

where the filling ratio $f = n\pi R^2$ is defined as the specific volume of solid cylinders.

On the other hand, the EFM description may be applied to the same problem, assuming that the wavelength is much larger than a "coarse graining" characteristic cell size, which smoothes out the microstructure. Then assuming in addition that the frequency may be taken sufficiently high, so that the boundary layers appear locally plane ($\delta_v, \delta_h \ll R$), the EFM results can be expanded in powers of the viscous and thermal skin depths and an exact asymptotic expansion can be written for k_e^2:

$$k_e^2 = k_0^2 \ \alpha_\infty \left[1 + (1+i) \left(\frac{\delta_v}{\Lambda} + (\gamma - 1)\frac{\delta_h}{\Lambda'} \right) \right] \ , \tag{14}$$

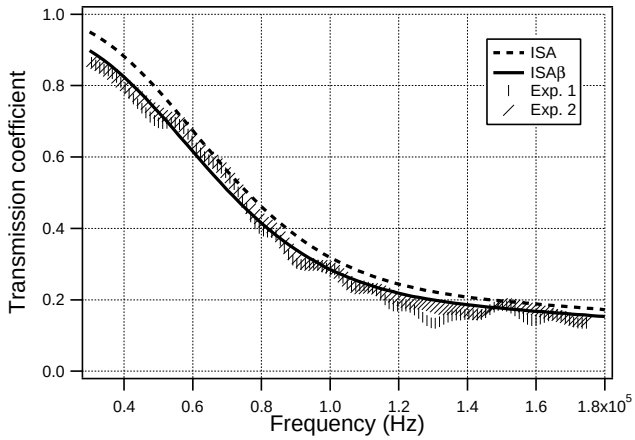

FIG. 1: Transmission coefficient of the coherent amplitude through the slab of thickness $2cm$, composed of parallel rigid cylinders of radius $0.4mm$ with a filling ratio of $f \simeq 0.1$. Experimental curves (Exp1. and Exp2.) are obtained with two different couples of transducers.

where α_∞, Λ, and Λ' are three independent geometrical parameters, described in the Appendix A. To compare this result with that of the ISAβ, Eq. (13), we note that the latter is thought to be exact only in a corresponding dilute limit. This is because the effect of the correlations between the scatterers, not included in the ISAβ, will affect the higher order terms that cannot be discarded when the concentration increases. For our check of consistency, a dilute approximation is thus to be introduced in Eq. (14). For dilute arrays of parallel cylinders and a propagation normal to the cylinders, the following are exact results, to the first order in the filling ratio f [26]:

$$\alpha_\infty = 1 + f, \qquad \frac{1}{\Lambda} = \frac{2f}{R}, \qquad \frac{1}{\Lambda'} = \frac{f}{R} \ . \tag{15}$$

Thus, it is verified that, to the first order in volume fraction f, the low frequency limit of the multiple scattering approach (ISAβ) and the high frequency limit of the homogenization approach (EFM) are the same.

B. Experiments

The sample consists of random arrangements of parallel rigid cylinders embedded in air. The cylinder radius is $0.4mm$ and the filling ratio is $f \simeq 0.1$. For the ultrasonic excitation and detection, the same wide bandwidth (20kHz-200kHz) transducers are used. The signal to noise ratio is improved by repetitive averaging of the detected signals using a digital oscilloscope. A rough estimation of the separations between cylinders is about $2mm$, which is not small compared to the wavelength $(17 - 1.7mm)$. Thus, it is known a priori that the long wavelength theory (EFM) will not be capable to describe the propagation.

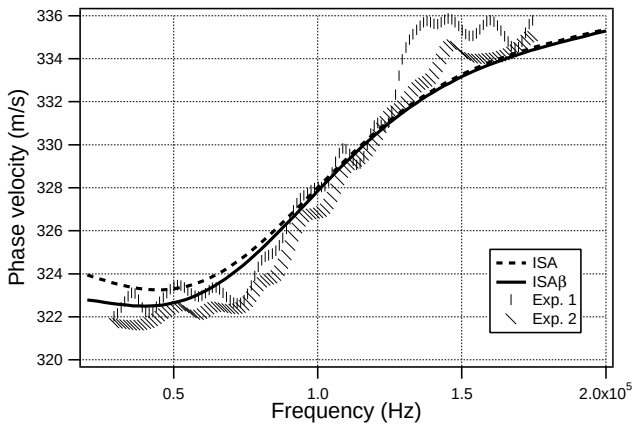

FIG. 2: Phase velocity of the coherent amplitude in the slab composed of parallel rigid cylinders of radius $0.4mm$ with a filling ratio of $f \simeq 0.1$. Experimental curves (Exp1. and Exp2.) are obtained with two different couples of transducers.

An interesting quantity to plot is the transmission coefficient of the coherent amplitude through the slab sample (see Eq.(12)). The coherent acoustic amplitude, which propagates in the sample as in an effective homogeneous medium, is obtained experimentally by averaging the transmitted pulse over 40 positions of the sample [8]. Notice also that the diameter of the transducer ($4cm$) is not small compared to the wavelengths ($17 - 1.7mm$), and this corresponds to an additional averaging. However, it remains a part of incoherent field in the averaged signal, which causes fluctuations in the results of the experimental transmission coefficient and the phase velocity. As the discontinuity of impedance at the sample surfaces has a very weak effect on the transmitted coherent amplitude for this filling ratio, the back propagating waves in and out the sample are neglected. The transmission coefficient is then supposed to be the attenuation of the coherent amplitude over the thickness of the sample [20]. In Fig.1, the experimental transmission coefficient is plotted versus frequency, from $30kHz$ to $180kHz$, and compared to the estimation of the ISA and the ISAβ. Notice that the ratio $\delta_{h,v}/R$ varies in this frequency range from 1/25 to 1/80, thus ensuring the validity of the relation (8).

For both the transmission coefficient and the phase velocity of the coherent amplitude, plotted in Fig.2, the ISA and the ISAβ fit the experimental data. The correction included in the ISAβ which takes into account the effect of the viscous and thermal boundary layers is too weak compared to the noise of the experimental data to allow direct validation. However a slight improvement is observed in the low frequency range for both transmission coefficient and phase velocity measurements.

The lower values obtained by the ISAβ are due to the viscous and thermal losses. As can be expected, the difference between the two models is more important in the low frequencies because of the larger extent of the viscous and thermal boundary layers. We note that the satisfactory agreement between experimental data and ISAβ justifies the use of the independent scattering approximation, up to filling ratios on the order

of $f = 0.1$. The ISA will be used next in the similar problems with an equivalent fluid porous medium replacing the air, and different kind of scatterers.

II. MULTIPLE SCATTERING IN POROUS ABSORBING MEDIA

In this section, the problem of the propagation of acoustic waves in a multiple scattering and absorbing porous medium is treated (see Fig.7). We consider a host fluid material A - generally an equivalent fluid porous material - in which scatterers B - fluid, equivalent fluid, or rigid - have been immersed randomly and with a low density (less than 10 % of the total volume typically).

First, the different cases are treated analytically by the multiscale approach, with scatterers given by parallel cylinders (2D problem) or spheres (3D problem). Second, experimental results for the attenuation and velocity of a coherent wave in slabs of rigid cylinders placed parallel in a polymer foam are presented and compared to the developed multiscale approach.

A. Multiple scattering description

According to the equivalent fluid model, the long-wavelength sound propagation in a rigid frame porous material is formally the same as in a fluid with complex, frequency-dependent, density $\rho(\omega)$ and bulk modulus $K(\omega)$. The precise definition and modeling of these effective quantities is recalled in Appendix A. From the effective density and bulk modulus, it is possible to determine the equivalent fluid wavenumber $k(\omega) = \omega/\sqrt{K(\omega)/\rho(\omega)}$ and characteristic impedance $Z(\omega) = \sqrt{\rho(\omega)K(\omega)}$.

In the following, subscripts A, B will be used to distinguish the quantities related to the host and scatterer materials A, B. The expression of the scattering coefficients Eq.(6), now need to be generalized by taking into account the propagation in material B and the appropriate boundary conditions at the interface between material A and B. As discussed in Appendix A, the usual continuity conditions of pressure and normal velocity still apply, with appropriate definition of the "macroscopic" pressure and velocity. Thus, in the 2D problem, the scattering coefficients are given by (see Appendix B) :

$$D_m = -\frac{\frac{Z_A}{Z_B} J_m(k_A R) J'_m(k_B R) - J'_m(k_A R) J_m(k_B R)}{H'_m(k_A R) J_m(k_B R) - \frac{Z_A}{Z_B} H_m(k_A R) J'_m(k_B R)} \ . \tag{16}$$

In the 3D problem, the scattering coefficients are (see Appendix B) :

$$d_m = -\frac{\frac{Z_A}{Z_B} j_m(k_A R) j'_m(k_B R) - j'_m(k_A R) j_m(k_B R)}{h'_m(k_A R) j_m(k_B R) - \frac{Z_A}{Z_B} h_m(k_A R) j'_m(k_B R)} \ . \tag{17}$$

Then considering a medium with a random distribution of scatterers the self energy

is, in the frame of the independent scattering approximation [5, 24],

$$\Sigma_{2D}(\omega) = 4ni \sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{m0}) D_m \tag{18}$$

and

$$\Sigma_{3D}(\omega) = \frac{4\pi ni}{k_A} \sum_{m=0}^{+\infty} (2m+1) d_m \ . \tag{19}$$

Using (18) and (19), the effective wave number of the multiple scattering and absorbing medium is then determined in the 2D or 3D case as,

$$k_e = \left[k_A^2 - \Sigma_{2D}(\omega)\right]^{1/2} \tag{20}$$

or

$$k_e = \left[k_A^2 - \Sigma_{3D}(\omega)\right]^{1/2} \ . \tag{21}$$

These results can be directly applied to different problems : fluid scatterers (like holes filled with air) in a porous medium, porous scatterers in a fluid medium, and porous scatterers in a different porous matrix. For the case of rigid scatterers embedded in a porous medium, one must consider that the characteristic impedance ratio Z_A/Z_B vanishes and use the simplified expressions (B9) and (B10) of the scattering coefficients.

B. Experiments

Without resonant scattering, strongest effects of the multiple scattering in a porous medium are obtained with rigid scatterers due to the "infinite" impedance mismatch between the scatterers and the matrix host material. Besides, resonant scattering is difficult to achieve due to the low quality factor of porous absorbing media. For these reasons, rigid scatterers have been chosen.

1. Samples and experimental setup

Samples are polymer foam slabs of $5cm$ thickness in which full metallic cylinders ($1.6mm$ in diameter) have been embedded randomly but in a parallel manner. Values of the characteristic parameters of the polymer foam taking place in the EFM (see Appendix A) are collected in Tab.I. These parameters have been obtained by other physical or low-frequency acoustical methods and slightly optimized numerically (in the range of their uncertainties) to ensure the best fit with experiments. Two different samples are used (denoted by sample 1 and sample 2) corresponding to two different filling ratios of scatterers, $f_1 \simeq 0.052$ and $f_2 \simeq 0.024$ respectively, or equivalently to the following scatterers densities $n_1 \simeq 26000m^{-2}$ and $n_2 \simeq 12000m^{-2}$.

α_∞	ϕ	Λ (μm)	Λ' (μm)	k_0 (m^2)	k'_0 (m^2)
1.053	0.98	450	1000	1.88 10^{-8}	4 10^{-8}

TABLE I: Polymer foam parameters used for the computation of the equivalent fluid model.

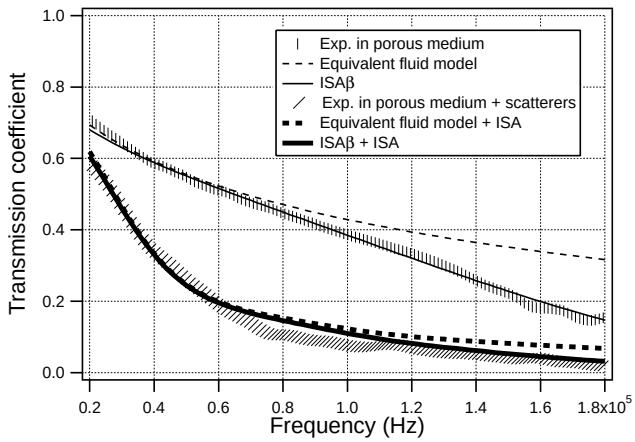

FIG. 3: Transmission coefficient of the sample 1 made of a porous material where parallel rigid cylinders of radius $R = 0.8mm$ have been included with the filling ratio $f \simeq 0.052$.

The experimental setup is identical to the one of section I B. However, the additional spatial averaging, by translating laterally the samples, has not been to be performed. A reference signal associated to the acoustic propagation between the ultrasonic emitter and receiver ($\sim 20cm$) in the air only is firstly registered. Then, the same signal is sent to a slab made of the porous material without the scatterers, placed between the transducers. The received signal spectrum is used to determine the velocity dispersion curve and the transmission coefficient of the slab. Finally, the sample slab made of the porous material with the embedded rigid cylinders is substituted to the previous sample. The associated velocity dispersion and transmission curves are thus obtained.

2. *Experimental results and additional modelling*

The transmission coefficient and velocity dispersion curve for the sample 1 ($f_1 \simeq 0.052$) are plotted in Fig.3 and Fig.4. There exists a strong influence of the scatterers on both phase velocity and transmission coefficient. It is especially the case in the low-frequency part for the velocity plots and in the intermediate frequencies for the transmission coefficient. At low-frequency, the four plotted models which are to be next detailed fit correctly the experiments.

Due to the ultrasonic transducers low efficiency under $20kHz$ and above $180kHz$, experimental data outside the range $20 - 180kHz$ are noisy.

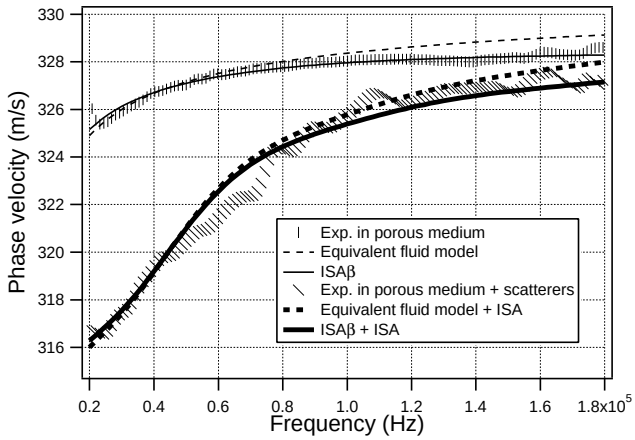

FIG. 4: Phase velocity of the coherent amplitude in the sample 1 made of a porous material where parallel rigid cylinders of radius $R = 0.8mm$ have been included with the filling ratio $f \simeq 0.052$.

The dashed thin line corresponds to the equivalent fluid model (EFM) applied to the only porous material, using the parameters of Tab.I and formulae Eq.(A4) and Eq.(A5) to determine the equivalent wavenumber. It is obvious that for frequencies higher than $\sim 100kHz$, this model does not describe correctly the propagation in the porous material, the transmission coefficient being over estimated. Indeed, at these frequencies, the acoustic wavelength ($\sim 3mm$ and less) becomes comparable to the characteristic size of the micro-structure, i.e. the size of the pores $1-2mm$. It is known a priori that the EFM will not be capable to describe this regime where scattering by the micro-structure of the porous material itself takes place.

For the low frequency part of the frequency band ($20 \rightarrow 100kHz$) where scattering by the porous material itself does not play an important role, the immersion of the cylindrical rigid scatterers strongly decrease both the transmission and the phase velocity of the coherent wave in the medium (Fig.3 and Fig.4). This behavior is well described by the analytical approach developed in this paper for rigid parallel cylinders in a porous medium, i.e. with the help of Eq.(18), Eq.(20) (where the host medium A is the EFM medium of Table I) and Eq. (B9), for $R = 0.4mm$ and $n_1 = 26000m^{-2}$ (it is important to notice that R and n_1 are directly measured quantities and were not adjusted). This approach is plotted in dashed thick lines and is denoted by the EFM+ISA theory.

The same analysis can be done for the experiments performed with the sample 2 ($f_2 \simeq 0.025$) that are plotted in Fig.5 and Fig.6. The filling ratio f_2 of sample 2 being less than the filling ratio f_1 of sample 1, the effect of multiple scattering by the rigid cylinders has a weaker effect on the transmission by the slab and on the phase velocity. Once again, due to the scattering by the porous material micro-structure itself, the EFM does not fit correctly the experimental curves in the high frequency part of the

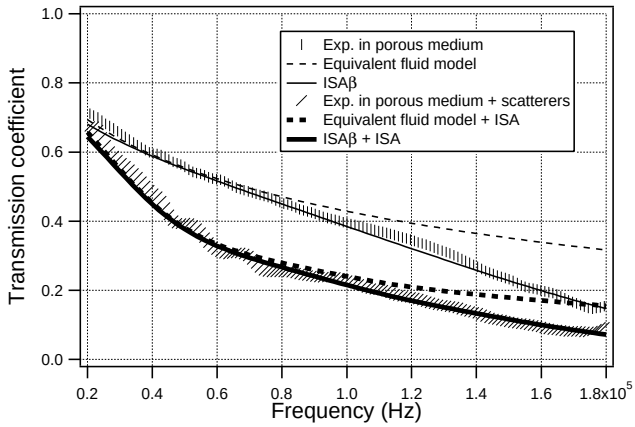

FIG. 5: Transmission coefficient of the sample 2 made of a porous material where parallel rigid cylinders of radius $R = 0.8mm$ have been included with the filling ratio $f \simeq 0.024$.

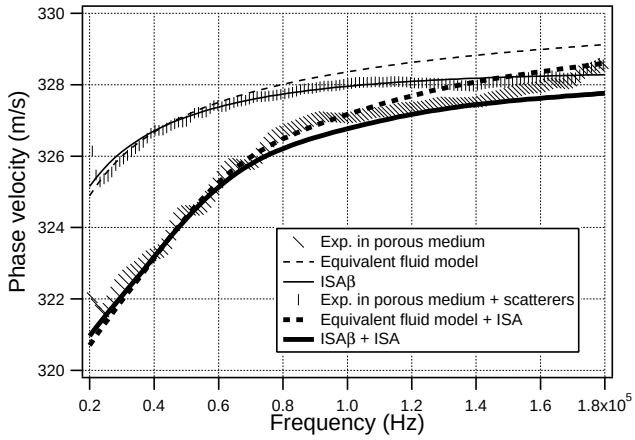

FIG. 6: Phase velocity of the coherent amplitude in the sample 2 made of a porous material where parallel rigid cylinders of radius $R = 0.8mm$ have been included with the filling ratio $f \simeq 0.024$.

band. In the low frequency part of the band, the associated EFM+ISA theory (with $n_2 \simeq 12000m^{-2}$) fits perfectly the experimental deviations from the values of the porous medium due to the presence of the rigid cylinders.

In order to take into account the scattering that occurs in the porous medium itself above approximately $100kHz$, it appears that an ad hoc utilization of ISAβ is possible.

Exact computation of ISAβ can be achieved when scatterers are identical and with well defined shapes. However, in the case of polyurethane foams, scatterers are not easily identified, and it is complicated to know a priori their characteristic size and density. We have found that it is possible to obtain with the ISAβ the effective wavenumber of such media, by searching two equivalent parameters for its real part, a scatterer radius R and a scatterer density n, and two other equivalent parameters for its imaginary part,

a scatterer radius R' and a scatterer density n'. The difference that can occur between R and R' or n and n' is a consequence of the real geometry of the microstructure which does not strictly corresponds to the simple picture of dilute arrays of parallel cylinders. In the case of open cell reticulated porous foams, the cylinders are replaced by the ribs or struts of the foam skeleton. While the condition of small filling ratio is respected, the struts, which are connected in a polyedral 3D arrangement, have thus different orientations, finite length, and are moreover characterized by almost triangular cross sections.

A minimisation method between experiments and ISAβ theory has been applied for the real part of the polymer foam wavenumber, and gives $R \simeq 6.0\ 10^{-5}\ m$ and $n \simeq 5.3\ 10^{6}\ m^{-2}$. We obtain $R' \simeq 7.3\ 10^{-5}\ m$ and $n' \simeq 4.2\ 10^{6}\ m^{-2}$ for the minimization of the wavenumber imaginary part.

This ISAβ, applied to the porous medium itself, is plotted in Figs.3, 4, 5 and 6 in continuous thin line. Agreement between experiments and ISAβ is observed for the whole frequency range. Then it is possible to substitute this new effective wavenumber as the matrix wavenumber in the ISA, in order to describe the scattering by the additional mesoscale scatterers. Especially for the transmission coefficient of the sample 2 in Fig.5, this last modification improves greatly the matching between theory and experiments at high frequencies, when scattering from both the porous medium itself and from the imbedded rigid cylinders is strong.

III. CONCLUSIONS

Modeling of multiple scattering of acoustic waves in porous media, including absorption, is performed in two different problems. In the first one (section I), the microstructure of the medium is made of scatterers with well defined shapes (parallel rigid cylinders). The absorption is included in the ISA through a concept of equivalent surface admittance to take into account viscous and thermal effects. Associated experiment is performed and agrees well with the ISA.

In the second problem (section II), the micro-structure of the porous medium is complicated and cannot be described easily with a multiple scattering approximation. The EFM is used to describe the acoustic propagation in the host material and the ISA to take into account the multiple scattering by the included mesoscale scatterers (EFM+ISA model). Experiments have been performed with a porous medium (a polymer foam) in which rigid parallel cylinders have been immersed randomly. In the frequency range $20 - 100kHz$, the developed model agrees well with the experiments. Above $\sim 100kHz$, scattering by the micro-structure of the host porous material itself influences the acoustic propagation. This effect is taken into account by an ad hoc utilization of ISAβ where two equivalent radii and two equivalent densities can be found. The obtained host wavenumber allows to describe precisely the propagation (including scattering and absorption) in the porous medium itself in the whole

frequency range of the experiment. Finally, this wavenumber is substituted into the description of the acoustic propagation through the medium with additional mesoscale scatterers (ISAβ+ISA), which also improves the agreement with experiments in the whole frequency band $20 - 180kHz$.

Using this approach, it is possible to account at the same time for the strong dissipation at the microscopic scale and for the multiple scattering at the mesoscopic scale. The complete homogenized theory approach for both micro- and meso-scales is only a particular case of the developed approach, corresponding to a limited frequency band which is both "low frequency" in the sense of scattering effects (wavelength much greater than the characteristic micro and meso scales) and "high frequency" in the sense of dissipation effects (small viscous and thermal boundary layer thickness at the microscale).

---

[1] L. L. Foldy, Phys. Rev. **67**, 107-119 (1945).

[2] M. Lax, Rev. Mod. Phys. **23**, 287-310 (1951).

[3] P. C. Waterman, R. Truell, J. Math. Phys. **2** 4, 512-537 (1960).

[4] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, (Oxford University Press, Oxford), 1997.

[5] P. Sheng, *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*, (Academic Press, New-York), 1995.

[6] L. Tsang, J.A. Kong, and K.H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves, Vol. 1:Theory and Applications*, (Wiley Interscience), 2000.

[7] U. Frisch, *Wave propagation in random media*, (Academic Press, New-York), 1968.

[8] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink, Phys. Rev. E **64**, 036605 (2001).

[9] J. H. Page, Ping Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, Xiaodun Jing, and D. A. Weitz, Science **271**, 634-637 (1996).

[10] R. Weaver, J. Acoust. Soc. Am. **100**(4), 2684 (1996).

[11] M. A. Biot, J. Acoust. Soc. Am. **28**, 168-191 (1956).

[12] M. A. Biot, J. Acoust. Soc. Am. **28**, 168-191 (1956).

[13] M. A. Biot, J. Appl. Phys. **33**, 1482-1498 (1962).

[14] R. Burridge and J. B. Keller, Acoust. Soc. Am. **70** (4), 1140-1146 (1981).

[15] D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, J. of Fluid Mech. **176**, 379-402 (1987).

[16] P. Sheng, Phys. Rev. B **41**, 4507-4512 (1990).

[17] S. R. Pride, A. F. Gangi and F. D. Morgan, J. Acoust. Soc. Am. **92** (6), 3278-3290 (1992).

[18] S. R. Pride, F. D. Morgan, and A. F. Gangi, Phys. Rev. B **47**, 4964-4975 (1993).

[19] D. Lafarge, P. Lemarinier, J.-F. Allard and V. Tarnow, J. Acoust. Soc. Am. **102** 4, 1995-2006 (1997).

[20] J.F. Allard, *Propagation of sound in porous media : modeling sound absorbing materials*, (London, Chapman and Hall), 1993.

[21] L. D. Landau, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of continuous media*, (Pergamon Press, Oxford), 2nd edition 1984.

[22] F. Luppé, J.-M. Conoir, and H. Franklin, J. Acoust. Soc. Am. **111** 6, 2573-2582 (2002).

[23] J. G. Berryman, J. Acoust. Soc. Am. **91** 2, 551-571 (1992).
[24] A. Lagendijk and B. A. Van Tiggelen, Phys. Rep. **270**, 143 (1996).
[25] P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical acoustics*, (Princeton University Press), 1987.
[26] By definition [29], the length Λ' is given by $\frac{2}{\Lambda'} = \frac{S_p}{V_p}$ where V_p and S_p are respectively the fluid (or pore) volume and the surface of contact between solid and fluid (or pore surface). Per unit total volume, $S_p = n2\pi R = 2f/R$ and $V_p = 1 - n\pi R^2 \simeq 1$, hence the expression given for Λ'. The expression for Λ then expresses the relation $\Lambda = \Lambda'/2$, a result which can be shown to be valid for dilute arrays of parallel cylinders (see e.g. [20], Appendix 5.E). The same relation may serve to derive the given α_∞ expression. Varying the filling ratio f by means of a uniform growth of the solid phase, we may write in the first order in f, $\alpha_\infty = 1 + \frac{d\alpha_\infty}{df}\Big|_f f$. Then using a particular "uniform growth" relation [28] Eq. (3), the derivative is found to be $\frac{\Lambda'}{\Lambda} - 1$, hence the result. (Notice that there is missing a minus sign in [28] Eq. (3)).
[27] D. L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, J. of Fluid Mech. **176**, 379-402 (1987).
[28] D. L. Johnson, J. Koplik, L. M. Schwartz, Phys. Rev. Lett. **57** (20), 2564-2567 (1986).
[29] Y. Champoux and J.-F. Allard, J. Appl. Phys. **70**, 1975-1979 (1991)

APPENDIX A: THE EQUIVALENT FLUID MODEL FOR ACOUSTIC PROPAGATION IN POROUS MEDIA

Let L be a typical averaging length of the micro-structure of a rigid frame, air-saturated, porous material, such that this material appears homogeneous (and isotropic) at this scale L. When considering (in the framework of linear acoustics) wavelength verifying the long wavelength condition $\lambda \gg L$, it can be shown by spatial averaging methods, that an effective wavenumber appears, such that:

$$k_e^2 = k_0^2 \frac{\rho_e/\rho_0}{K_e/K_a} \ , \tag{A1}$$

where ρ_e is a complex effective density of the air determined by inertial and viscous interactions, and K_e is a complex effective bulk modulus of air determined by thermal exchanges (K_a is the adiabatic bulk modulus). Indeed, it can be shown that in harmonic regime $e^{-i\omega t}$, the two first order macroscopic linear equations for wave propagation are :

$$-i\omega\rho_e(\omega)\vec{v} \ = \ -\vec{\nabla}p \ , \tag{A2}$$

$$-i\omega\frac{1}{K_e(\omega)}p \ = \ -\vec{\nabla}.\vec{v} \ , \tag{A3}$$

where $\vec{v}$ and p are the macroscopic velocity and pressure obtained by microscopically averaging the corresponding fields in the fluid. Equation (A2) is an effective Euler equation, which takes into account the inertial and viscous interactions between solid and fluid. Equation (A3) is an effective equation of state which takes into account the thermal exchanges between solid and fluid. At the open boundary between the equivalent fluid material and the air, the continuity of the normal stress and normal flow will apply. The two continuity conditions reduce to the usual *pressure and normal velocity continuity conditions*, provided the macroscopic variables are conveniently defined :

the pressure is defined as an "*air phase average*" and the velocity is defined as a "*total volume average*" ($= \phi \times$ "*air phase average*", where ϕ is the porosity).

Simple and relatively accurate scaling functions describe the frequency dependence of ρ_e and K_e, knowing a finite set of geometrical parameters (ϕ, α_∞, k_0, Λ, k_0', Λ') associated with the porous space. These functions have, in the general case, the following forms [19, 28]

$$\rho_e(\omega) = \frac{\rho_0 \alpha_\infty}{\phi}\left(1 - \frac{1}{ix}\sqrt{1 - \frac{M}{2}ix}\right) , \tag{A4}$$

$$K_e(\omega) = \frac{K_a}{\phi}\left[\gamma - (\gamma - 1)\left(1 - \frac{1}{ix'}\sqrt{1 - \frac{M}{2}ix'}\right)^{-1}\right]^{-1} , \tag{A5}$$

with the following notations,

$$M = \frac{8k_0\alpha_\infty}{\phi\Lambda^2} \qquad M' = \frac{8k_0'\alpha_\infty}{\phi\Lambda'^2}$$

$$x = \frac{\omega\alpha_\infty\rho_0 k_0}{\eta\phi} \qquad x' = \frac{\omega\rho_0 k_0' Pr}{\eta\phi} .$$

Here, ϕ is the porosity (ratio of the fluid volume to the total volume), α_∞ is the Johnson Koplik & Dashen tortuosity factor [27], k_0, not to be confused with the air wavenumber, is Darcy's viscous permeability, Λ is the Johnson Koplik & Schwartz pore size parameter [28], k_0' is the Lafarge et al. thermal permeability [19] and Λ' is the Champoux & Allard pore size parameter [29]. Thermodynamic properties of the saturating fluid -air- are given by : ρ_0 the ambient density, K_a the adiabatic bulk modulus, γ the specific heat ratio, η the dynamic viscosity, and Pr the Prandtl number. In acoustics, it is customary to use the air flow resistivity $\sigma = \eta/k_0$, in place of the permeability. This parameter is directly measurable by means of d.c. air flow resistance measurements.

APPENDIX B: DERIVATION OF THE SCATTERING COEFFICIENTS FOR POROUS SCATTERERS IN POROUS MEDIA

In order to derive the scattering coefficients of simple shape scatterers, it is convenient to express the acoustic pressure field in the appropriate coordinate system, cylindrical for the 2D problem of cylindrical scatterers, and spherical for the 3D problem of spherical scatterers. As in Section II A, we denote by corresponding subscripts A, B, the quantities related to the host and scatterer materials.

1. 2D problem of cylindrical scatterers

The acoustic pressure field outside the scatterer is written as a function of the distance r to the scatterer's center and the angle θ between the incident plane wave

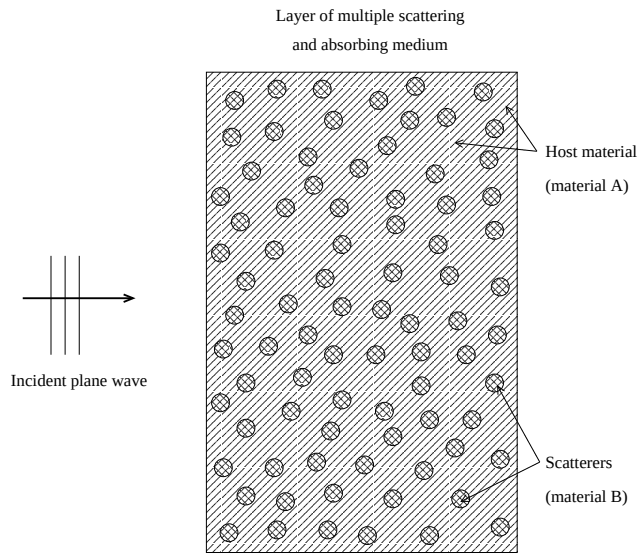

FIG. 7: Problem under consideration.

direction and the observation direction:

$$p_A(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} i^m (2-\delta_{m0}) \times [J_m(k_A r) + D_m H_m(k_A r)] \cos(m\theta) \ , \tag{B1}$$

where δ_{m0} is the Kronecker symbol, k_A the wavenumber of the matrix material, J_m and H_m the cylindrical Bessel and Hankel functions of the first kind, and D_m the scattering coefficients. The first term in brackets corresponds to the decomposition of the incident plane wave $e^{i\vec{k}_A.\vec{r}}$, and the second to the scattered amplitude.

Inside the scatterer, the acoustic pressure field is a sum of Bessel functions of the first kind J_m with the associated amplitudes B_m:

$$p_B(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} i^m B_m (2-\delta_{m0}) J_m(k_B r) \cos(m\theta) \ . \tag{B2}$$

The first boundary condition at the matrix-scatterer interface $r = R$ is the stress (or the acoustic pressure) continuity:

$$p_A(R) = p_B(R) \ . \tag{B3}$$

The second boundary condition at $r = R$ is the normal flux continuity $(v_A)_r = (v_B)_r$, which gives, owing to the Euler relation applied to porous media (see Eq.(A2)) :

$$\frac{1}{\rho_A(\omega)} \frac{\partial p_A}{\partial r}(R) = \frac{1}{\rho_B(\omega)} \frac{\partial p_B}{\partial r}(R) \ . \tag{B4}$$

In order to find the scattering coefficients D_m, the expression of the acoustic pressure field Eq.(B1) and Eq.(B2) are substituted in the two boundary conditions Eq.(B3) and Eq.(B4). Due to the orthogonality of the $\cos(m\theta)$, the latter conditions apply separately to the different components m and yield :

$$D_m = \frac{\frac{Z_A}{Z_B} J_m(k_A R) J'_m(k_B R) - J'_m(k_A R) J_m(k_B R)}{H'_m(k_A R) J_m(k_B R) - \frac{Z_A}{Z_B} H_m(k_A R) J'_m(k_B R)} \ . \tag{B5}$$

2. 3D problem of spherical scatterers

In the case of spherical embedded scatterers, the analytical development is similar. The acoustic pressure field outside and inside the scatterer is written in the spherical coordinate system:

$$\begin{aligned} p_A(r,\theta) &= \sum_{m=0}^{+\infty} i^m (2m+1) \\ &\times \left[j_m(k_A r) + d_m h_m(k_A r) \right] P_m(\cos\theta) \ , \end{aligned} \tag{B6}$$

$$p_B(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} i^m b_m j_m(k_B r) P_m(\cos\theta) \ , \tag{B7}$$

where j_m and h_m are the spherical Bessel and Hankel functions of the first kind, and P_m the Legendre polynomials of the first kind.

With the help of the boundary conditions Eq.(B3) and Eq.(B4), the scattering coefficients in the 3D case are derived:

$$d_m = \frac{\frac{Z_A}{Z_B} j_m(k_A R) j'_m(k_B R) - j'_m(k_A R) j_m(k_B R)}{h'_m(k_A R) j_m(k_B R) - \frac{Z_A}{Z_B} h_m(k_A R) j'_m(k_B R)} \ . \tag{B8}$$

In the special case of rigid scatterers, the ratio $\frac{Z_A}{Z_B}$ is set to zero and the expressions (B5) and (B8) reduce to

$$D_m = -\frac{J'_m(k_A R)}{H'_m(k_A R)} \ , \tag{B9}$$

$$d_m = -\frac{j'_m(k_A R)}{h'_m(k_A R)} \ . \tag{B10}$$

Annexe B

Cas des poutres : calcul de la FRF

Le développement menant à l'expression de la Fonction de Réponse en Fréquence $H(x,\omega)$ donnée à l'équation (7) de l'article du chapitre 4 est présenté ici.

D'après la théorie des poutres minces en flexion [**?**, **?**], Le déplacement transversal $Y(x,\omega)$ s'exprime comme :

$$Y(x,\omega) = C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x) + F\cos(\beta x) + G\sin(\beta x) \tag{B.1}$$

où

$$\beta^4(\omega) = \frac{\rho A\omega^2}{EI} \tag{B.2}$$

et où C, D, F et G sont des constantes.

Les conditions limites aux extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la poutre sont :

$$EI\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{à} \quad x = 0 \text{ et } x = L, \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(EI\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\Big) = 0 \quad \text{à} \quad x = 0 \text{ et } x = L, \tag{B.4}$$

or les dérivées spatiales de $Y(x,\omega)$ s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \beta^2 C\cosh(\beta x) + \beta^2 D\sinh(\beta x) - \beta^2 F\cos(\beta x) - \beta^2 G\sin(\beta x) \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = \beta^3 C\sinh(\beta x) + \beta^3 D\cosh(\beta x) + \beta^3 F\sin(\beta x) - \beta^3 G\cos(\beta x) \tag{B.6}$$

Les conditions limites en $x = 0$ imposent donc que :

$$\beta^2(C - F) = 0 \tag{B.7}$$

$$\beta^2(D - G) = 0 \tag{B.8}$$

soit

$$C = F \tag{B.9}$$

$$D = G \tag{B.10}$$

La condition sur la dérivée de $Y(x,\omega)$ imposée au centre de la poutre permet d'écrire, en

utilisant les résultats précedents :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y(L/2,\omega)}{\partial x} &= C\left[\sinh\left(\beta\frac{L}{2}\right)-\sin\left(\beta\frac{L}{2}\right)\right] && \text{(B.11)}\\
&\quad +D\left[\cosh\left(\beta\frac{L}{2}\right)+\cos\left(\beta\frac{L}{2}\right)\right] && \text{(B.12)}\\
&= 0 && \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

$$D = -C\underbrace{\frac{\sinh\left(\beta\frac{L}{2}\right)-\sin\left(\beta\frac{L}{2}\right)}{\cosh\left(\beta\frac{L}{2}\right)+\cos\left(\beta\frac{L}{2}\right)}}_{\sigma} \tag{B.14}$$

Il s'agit du résultat typique obtenu dans le cas d'une poutre encastrée-libre de longueur $L/2$.

$$\begin{aligned}
H(x,\omega) &= \frac{Y(x,\omega)}{Y(L/2,\omega)} && \text{(B.15)}\\
&= \frac{\cosh(\beta x)+\cos(\beta x)-\sigma\left[\sinh(\beta x)+\sin(\beta x)\right]}{\cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)-\sigma\left[\sinh(\beta L/2)+\sin(\beta L/2)\right]} && \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

Le dénominateur d peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
d &= \cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)\\
&\quad -\frac{\sinh(\beta L/2)-\sin(\beta L/2)}{\cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)}\Big[\sinh(\beta L/2)+\sin(\beta L/2)\Big] && \text{(B.17)}\\
d &= \frac{\Big[\cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)\Big]^2-\Big[\sinh^2(\beta L/2)-\sin^2(\beta L/2)\Big]}{\cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)} && \text{(B.18)}
\end{aligned}$$

En faisant usage des identités :

$$\begin{aligned}
\cos^2 a+\sin^2 a &= 1 && \text{(B.19)}\\
\text{et}\qquad \cosh^2 a-\sinh^2 a &= 1 && \text{(B.20)}
\end{aligned}$$

dans B.18, l'expression de $H(x,\omega)$ présentée est obtenue. Notamment, en $x=0$, on a :

$$H(0,\omega)=\frac{\cosh(\beta L/2)+\cos(\beta L/2)}{1+\cosh(\beta L/2)\cos(\beta L/2)} \tag{B.21}$$

Bibliographie

[AEF+02] M. F. Ashby, A. Evans, N. A. Fleck, L. J. Gibson, J. W. Hutchinson, et H. N. G. Wadley. *Metal Foams : a design guide*. Butterworth Heinemann, 2002.

[AHP01] N. Atalla, M. A. Hamdi, et R. Panneton. Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 109(6) :3065–3068, 2001.

[AJQ90] P. M. Adler, C. G. Jacquin, et J. A. Quiblier. Flow in simulated porous media. *Int. J. of Multiphase Flow*, 16, 1990.

[All93] J.-F. Allard. *Propagation of sound in porous media. Modeling sound absorbing materials*. Elsevier applied sciences, 1993.

[APD98] N. Atalla, R. Panneton, et P. Debergue. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 104(3) :1444–1452, 1998.

[AST61] ASTM. E273-61, Shear test in flatwise plane of flat sandwitch constructions or sandwitch cores, 1961. American Society for Testing and Materials.

[AST98] ASTM. E756-98, Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials, 1998. American Society for Testing and Materials.

[Ata02] Y. Atalla. *Caractérisation inverse des propriétés acoustiques de matériaux poreux*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 2002.

[Bab75] I. Babuska. *Homogenization and its applications*. Press-Synopade, 1975.

[Bar00] M. Barrette. Analyse vibroacoustique de la plaque raidie avec les éléments finis hiérarchiques trigonométriques. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, Février 2000.

[Ber99] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures, 3e édition*. Technique & Documentation, 1999.

[BES00] B. Brouard, M. Etchessahar, et S. Sahraoui. Détermination expérimentale du module de rigidité en flexion d'une plaque de poreux aux basses fréquences. In *Canadian acoustics*, volume 28, pages 78–79, 2000.

[Bio56a] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 28(2) :168–178, 1956.

[Bio56b] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. higher frequency range. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 28(2) :179–191, 1956.

[BLP78] A. Bensoussan, J. L. Lions, et G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, Amsterdam, 1978.

[BN97] O. Beslin et J. Nicolas. A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *J. of Sound and Vibration*, 202(5) :633–655, 1997.

[Bol97] J. S. Bolton. Elastic porous materials for sound absorption and transmission control. *Journal of the Society of Automotive Engineers*, pages 77–91, 1997.

[CA91] Y. Champoux et J.-F. Allard. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *J. Appl. Phys.*, 70 :1975–1979, 1991.

[Cou91] O. Coussy. *Mécanique des milieux poreux*. Ed. Technip, 1991.

[CS90] R. D. Corsaro et L. H. Sperling. *Sound and vibration damping with polymers*. American Chem. Soc., 1990.

[DAL88] C. Depollier, J.-F. Allard, et W. Lauriks. Biot theory and stress-strain equations in porous sound absorbing materials. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 84 :2277–2279, 1988.

[Dau99] Nicolas Dauchez. *Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université du Maine/Université de Sherbrooke, Avril 1999.

[DB70] M. E. Delany et E. N. Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3 :105–116, 1970.

[DES02] N. Dauchez, M. Etchessahar, et S. Sahraoui. On measurement of mechanical properties of sound absorbing materials. 2nd Biot conference on poromechanics, August 2002.

[DPA99] Patricia Debergue, Raymond Panneton, et Noureddine Atalla. Boundary conditions for the weak formulation of the mixed *(u,p)* poroelasticity problem. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 106(5) :2383–2390, 1999.

[DSA01] N. Dauchez, S. Sahraoui, et N. Attala. Convergence of poroelastic finite elements based on Biot displacement fomulation. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 109(1) :33–40, 2001.

[DSL03] O. Dazel, F. Sgard, et C.-H. Lamarque. Application of generalized complex modes to the calculation of the forced response of three-dimensional poroelastic materials. *J. of Sound and Vibration*, 2003. A paraître.

[DSLA02] O. Dazel, F. Sgard, C.-H. Lamarque, et N. Atalla. An extension of complex modes for the resolution of finite-element poroelastic problems. *J. of Sound and Vibration*, 253 :421–445, 2002.

[DSO02] O. Danilov, F. Sgard, et X. Olny. Oberst beam as a tool for complex young's modulus measurement of porous materials. Forum Acousticum - Sevilla, 2002.

[EM00] G. W. Ehrenstein et F. Montagne. *Matériaux polymères : structure, propriétés et applications*. Hermes, 2000.

[Etc02] Manuel Etchessahar. *Caractérisation mécanique en basses fréquences des matériaux acoustiques*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Juin 2002.

[Fel00] Zine E. A. Fellah. *Contribution à l'étude de la propagation des onds acoustiques dans les matériaux poreux : approche temporelle*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Décembre 2000.

[Fer61] J. D. Ferry. *Viscoelastic properties of polymers*. John Willey and Sons, 1961.

[GA88] L. J. Gibson et M. F. Ashby. *Cellular solids : structure and properties*. Pergamon Press, Oxford, 1988.

[Gar03] Vincent Gareton. *Caractérisation acoustique des matériaux poreux*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2003.

[GT59] A. N. Gent et A. G. Thomas. The deformation of foamed elastic materials. *J. Appl. Polymer Science*, 1(1) :107–113, 1959.

[GT63] A. N. Gent et A. G. Thomas. Mechanics of foamed elastic materials. *Rubber Chem. Tech.*, 36 :597–610, 1963.

[Gua02] J.-L. Guayder. *Vibrations des milieux continus*. Hermes, 2002.

[HC94] N. C. Hilyard et A. Cunningham. *Low density cellular platics, physical basis of behaviour*. Chapman and Hall, 1994.

[HG88] A. T. Huber et L. J. Gibson. Anistropy of foams. *J. Materials science*, 23 :3031–3040, 1988.

[Hin94] H. E. Hinnant. A fast method of numerical quadrature for p-version finite elements matrices. *Int. J. for numerical methods in engineering*, 37 :3723–3750, 1994.

[HS01] K.V. Horoshenkov et K. Sakagami. A method to calculate the acoustic response of a thin, baffled, simply supported poroelastic plate. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 110 :904–917, 2001.

[Jao03] L. Jaouen. *Vibrations des milieux discrets et continus*. En ligne sur http ://www.univ-lemans.fr/∼r940020/, 2003.

[JKD87] D. L. Johnson, J. Koplik, et R. Dashen. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *J. Fluid Mech.*, 176 :379–402, 1987.

[Kan73] S. V. Kanakkanatt. Mechanical anisotropy of open-cell foams. *J. of Cellular Plastics*, 9 :50–53, 1973.

[Kir68] G. Kirchhoff. Uber des einfluss der warmeleitung in einem gase auf die shallbewegung. *Annalen der Physik and Chemie*, 134 :177–193, 1868.

[Ko65] W. L. Ko. Deformations of foamed elastomers. *J. of Cellular Plastics*, 1 :45–50, 1965.

[Lan03] C. Langlois. Modélisation des problèmes vibroacoustiques de basses fréquences par éléments finis. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, 2003.

[Lev44] K. Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least-squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2) :164–168, 1944.

[LHC01] P. Leclaire, K.V. Horoshenkov, et A. Cummings. Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid. *J. of Sound and Vibration*, 247 :1–18, 2001.

[LHSH01] P. Leclaire, K.V. Horoshenkov, M.J. Swift, et D.C. Hothersall. The vibrational response of a clamped rectangular porous plate. *J. of Sound and Vibration*, 247 :19–31, 2001.

[Lov88] A. E. H. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society (London)*, série A(17) :491–549, 1888.

[LPA01] C. Langlois, R. Panneton, et N. Atalla. Polynomial relations for quasi-static mechanical characterisation of isotropic poroelastic materials. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 110(6), 2001.

[LWXK98] K. M. Liew, C. M. Wang, Y. Xiang, et S. Kitipornchai. *Vibrations of Mindlin plates, programming the p-version Ritz method*. Elsevier, 1998.

[Mac94] R. H. MacNeal. *Finite elements : their design and performance*. Marcel Dekker, 1994.

[Mar63] D. W. Marquardt. An algorithm for least squares estimation of non linear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11 :431–441, 1963.

[Min51] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :31–38, 1951.

[MK75] G. Menges et F. Knipschild. Estimation of mechanical properties for rigid polyurethane foams. *Polymer Engineering. and Sci.*, 15(8) :623–627, 1975.

[MMAS98] M. Melon, M. Mariez, C. Ayrault, et S. Sahraoui. Acoustical and mechanical characterization of anisotropic open-cell foams. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 104 :2622–2627, 1998.

[MS96] E. Mariez et S. Sahraoui. Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for Biot model. In *Internoise*, 1996.

[MS97] E. Mariez et S. Sahraoui. Measurement of mechanical anisotropic properties of acoustic foams for the Biot model. In *Internoise*, 1997.

[NJH85] A. D. Nashif, D. I. Jones, et J. P. Henderson. *Vibration damping.* John Willey and Sons, 1985.

[Oln99] Xavier Olny. *Absorption acoustique des milieux poreux à simple et double porosité. Modélisation et validation expérimentale.* Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Décembre 1999.

[Pan96] Raymond Panneton. *Modélisation numérique 3D par éléments finis des milieux poroélastiques.* Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, Août 1996.

[Perrs] Camille Perrot. *Détermination du comportement acoustique d'une mousse d'aluminium à partir de sa microstructure.* Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke/INSA de Lyon, en cours.

[Pil01] D. Pilon. Influence des conditions limites sur la mesure d'absorption au guide à ondes stationnaires. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, 2001.

[PP02] D. Pilon et R. Panneton. An equivalent solid (u) formulation for porous materials. 143rd meeting of the Acoustical Society of America, 2002.

[Pri82] T. Pritz. Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials : rod-like specimen. *J. of Sound and Vibration*, 81(3) :359–376, 1982.

[Pri86] T. Pritz. Frequency dependence of frame dynamic characteristics of mineral and glass wool materials. *J. of Sound and Vibration*, 106(1) :161–169, 1986.

[Pri94] T. Pritz. Dynamic Young's modulus and loss factor of plastic foams for impact sound isolation. *J. of Sound and Vibration*, 178(3) :315–322, 1994.

[Pri00] T. Pritz. Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials. *Applied acoustics*, 60 :279–292, 2000.

[Pri03] T. Pritz. Five parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *J. of Sound and Vibration*, 28(5) :935–952, 2003.

[Rao96] S. S. Rao. *Engineering optimization, Theory and pratice, 3e édition.* John Wiley and Sons, 1996.

[Red84] J. N. Reddy. *Energy and variational methods in applied mechanics.* John Willey and Sons, 1984.

[Rei45] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. of Appl. Mech.*, 12 :A69–A77, 1945.

[Rig01] S. Rigobert. *Modélisation par éléments finis des systèmes élasto-poro-acoustiques couplés : éléments hiérarchiques, maillages incompatibles, modèles simplifiés.* Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke/INSA de Lyon, Mai 2001.

[SB91] B. Szabo et I. Babuska. *Finite element analysis.* John Wiley and Sons, 1991.

[Sfa95] A. Sfaoui. On the viscoelasticity of the polyurethane foam. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 97 :1046–1052, 1995.

[SHL+00] M.J. Swift, K.V. Horoshenkov, P. Leclaire, D.C. Hothersall, K. Fujiwara, et H. Torihama. On the effect of the bending vibration on the acoustic properties of thin poroelastic plates. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 107 :1786–1789, 2000.

[SK90] S. Sim et K-.J. Kim. A method to determine the complex modulus and Poisson's ratio of viscoelastic materials from FEM applications. *J. of Sound and Vibration*, 141(1) :71–82, 1990.

[SME01] S. Sahraoui, E. Mariez, et M. Etchessahar. Linear elastic properties of anisotropic open-cell foams. *J. of the Acoustic Soc. of America*, 110 :635–637, 2001.

[Sow03] I. Sow. *Contribution aux méthodes de caractérisation des matériaux viscoélastiques.* Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 2003.

[Tab92] L.A. Taber. A theory for transverse deflection of poroelastic plates. *J. of Applied Mechanics*, 59 :628–634, 1992.

[TB94] D.D Theodorakopoulous et D.E. Beskos. Flexural vibrations of poroelastic plates. *Acta Mechanica*, 103 :191–203, 1994.

[Wit87] W. H. Wittrick. Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on mindlin's plate theory. *J. of Applied Mechanics*, 23 :441–464, 1987.

[WK88] W. E. Warren et A. M. Kraynik. The linear elastic properties of open-cell foams. *J. Applied Mechanics*, 55 :341–346, 1988.

[Yu95] Y. Y. Yu. *Vibrations of elastic plates.* Springer, 1995.