

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

# THÈSE

présentée à  
**UNIVERSITÉ PARIS IX-DAUPHINE**

pour obtenir le titre de  
**DOCTEUR EN SCIENCES**

Spécialité  
Mathématiques appliquées

soutenue par

**Gilles SCARELLA**

le 01 03 2004

Titre

**Etude théorique et numérique  
de la propagation d'ondes en présence  
de contact unilatéral dans un milieu fissuré**

Directeur de thèse: Patrick JOLY

Co-directeurs de thèse: Éliane BÉCACHE

Marius COCOU

Jury

Président :	<b>Alain</b>	<b>LÉGER</b>
Rapporteurs :	<b>Pierre</b>	<b>ALART</b>
	<b>Faker</b>	<b>BEN BELGACEM</b>
Examineurs :	<b>Éliane</b>	<b>BÉCACHE</b>
	<b>Marius</b>	<b>COCOU</b>
	<b>Patrick</b>	<b>JOLY</b>
	<b>Jean-Louis</b>	<b>VAUDESCAL</b>



## Remerciements

Je remercie Patrick Joly pour avoir accepté de diriger cette thèse, de ses conseils, de ses remarques très précises, données au cours de ces trois années de thèse, de son soutien aussi, tout cela même si nous ne supportons pas la même équipe de football!

Merci à Éliane Bécache pour tous les conseils donnés pendant la thèse et les nombreuses relectures.

Merci à Marius Cocou pour avoir encadré la thèse pendant mon séjour à Marseille. Je le remercie également de ses conseils, de sa disponibilité et de son soutien constant tout au long de la thèse.

Merci à Alain Léger pour avoir initié cette thèse et cette collaboration entre l'Inria, E.D.F et le L.M.A. et pour avoir surmonté les différents obstacles administratifs inhérents au contrat. Merci aussi pour son intérêt constant pour le sujet.

Je remercie MM. Pierre Alart et Faker Ben Belgacem d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.

Je remercie Jean-Louis Vaudescal d'avoir figuré parmi le jury de thèse et d'avoir autorisé le financement la thèse.

Je remercie Thierry Fouquet pour tous les conseils qu'il m'a amicalement donnés et aussi pour les résultats issus d'Athena.

Je remercie Jean-Charles Gilbert pour son apport sur la partie optimisation, notamment sur la mise en œuvre de la routine d'optimisation et pour ses explications très précises.

Je salue enfin tous les thésards que j'ai pu côtoyer pendant plus de trois ces années de thèse à l'Inria et au L.M.A. Je les remercie de leur aide toujours bienvenue et des bons moments partagés.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Présentation du problème de contact unilatéral en élastodynamique</b>	<b>13</b>
1.1 Formulation classique en déplacements . . . . .	13
1.2 Formulation classique en déplacements-contraintes . . . . .	16
1.3 Inconvénients des formulations classiques . . . . .	19
<b>2 Analyse mathématique pour un problème viscoélastique de contact unilatéral</b>	<b>21</b>
2.1 État de l'art . . . . .	21
2.2 Paramétrisation d'une fissure . . . . .	22
2.3 Étude d'un problème viscoélastique de contact dans un milieu fissuré . . . . .	25
2.3.1 Formulation classique du problème . . . . .	25
2.3.2 Formulation variationnelle primale . . . . .	26
2.3.2.1 Propriétés de l'opérateur de régularisation . . . . .	26
2.3.2.2 Formulation variationnelle . . . . .	27
2.3.2.3 Formulation variationnelle primale avec décomposition . . . . .	27
2.3.3 Introduction d'un problème pénalisé . . . . .	29
2.3.4 Analyse d'une inéquation d'évolution abstraite . . . . .	30
2.3.5 Existence et unicité de la solution pénalisée . . . . .	40
2.3.6 Existence d'une solution au problème de contact unilatéral . . . . .	41
2.3.6.1 Estimations sur les solutions pénalisées . . . . .	41
2.3.6.2 Passages à la limite . . . . .	43
<b>3 Application de la méthode des domaines fictifs et semi-discrétisation en espace</b>	<b>45</b>
3.1 Principe de la méthode des domaines fictifs . . . . .	45
3.2 Obtention de la formulation en domaines fictifs . . . . .	46
3.3 Condition inf-sup continue . . . . .	49
3.4 Conservation d'énergie . . . . .	51
3.5 Problème semi-discrétisé en espace . . . . .	52
3.5.1 Présentation du schéma . . . . .	52
3.5.1.1 Formulation variationnelle . . . . .	52
3.5.1.2 Formulation matricielle . . . . .	52
3.5.2 Calcul de la solution, existence et unicité . . . . .	53
3.6 Choix des espaces d'approximation . . . . .	55
3.6.1 Espace d'approximation $\mathbf{X}_h$ . . . . .	55
3.6.2 Espace d'approximation $\mathbf{M}_h$ . . . . .	56
3.6.3 Espace d'approximation pour les multiplicateurs . . . . .	57
3.6.4 A propos de la condition inf-sup discrète uniforme . . . . .	58
3.7 Une variante avec amortissement de modes parasites . . . . .	59
3.7.1 Existence de modes parasites . . . . .	59

3.7.2	Une méthode pour amortir les modes parasites . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Discrétisation en temps de la formulation par domaines fictifs</b>	<b>61</b>
4.1	Schéma pour la partie linéaire . . . . .	61
4.2	Un schéma explicite centré . . . . .	63
4.3	Un schéma implicite décentré . . . . .	64
4.3.1	Calcul de la solution, existence et unicité . . . . .	64
4.3.2	Étude de la stabilité . . . . .	64
4.4	Un schéma implicite centré . . . . .	68
4.4.1	Calcul de la solution, existence et unicité . . . . .	68
4.4.2	Les difficultés de l'étude de stabilité . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Aspects numériques</b>	<b>71</b>
5.1	Quelques remarques sur la résolution du problème d'optimisation . . . . .	71
5.1.1	Principe de l'algorithme de résolution QPB . . . . .	72
5.1.2	Exemples et comparaison avec la routine de résolution du logiciel Scilab . . . . .	75
5.2	Sur l'implémentation des matrices de couplage entre la fissure et le maillage régulier . . . . .	78
5.2.1	Cas d'une fissure régulière . . . . .	78
5.2.1.1	Calcul des intégrales . . . . .	78
5.2.1.2	Calcul des intersections . . . . .	80
5.2.2	Approximation de la fissure par des segments . . . . .	80
5.2.3	Éléments circulaires . . . . .	81
5.2.4	Traitement de fissures singulières comportant des angles . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>85</b>
6.1	Étude du cas unidimensionnel . . . . .	85
6.1.1	Obtention de la solution exacte . . . . .	85
6.1.1.1	Mise en équations du problème . . . . .	85
6.1.1.2	Obtention de la solution analytique . . . . .	87
6.1.2	Étude de la solution exacte . . . . .	91
6.1.2.1	Comparaison par rapport à la condition initiale de Neumann pour une condition initiale négative . . . . .	91
6.1.2.2	Cas d'une condition initiale de signe quelconque . . . . .	94
6.1.2.3	A propos de la régularité de la solution . . . . .	96
6.1.3	Comparaison entre solution numérique et solution exacte . . . . .	99
6.1.3.1	Comportement de l'énergie discrète . . . . .	100
6.1.3.2	Tests de convergence . . . . .	101
6.1.3.3	Calcul de la contrainte . . . . .	104
6.2	Tests de validation du code bidimensionnel . . . . .	109
6.2.1	Problème invariant par translation dans une direction . . . . .	109
6.2.1.1	Comparaison des déplacements issus de la solution 2D à ceux du 1D . . . . .	109
6.2.1.2	Instantanés 2D des déplacements . . . . .	111
6.2.1.3	Évaluation numérique de l'ordre des schémas . . . . .	113
6.2.2	Problème à symétrie radiale . . . . .	114
6.2.2.1	Obtention d'une solution de référence . . . . .	114
6.2.2.2	Comparaison entre la solution de référence et la solution issue du problème 2D . . . . .	119
6.2.2.3	Étude numérique de la convergence . . . . .	134
6.3	Tests du code 2D dans des situations générales . . . . .	137

## TABLE DES MATIÈRES

---

6.3.1	Fissure droite parallèle au maillage: comparaison entre la condition de surface libre et celle de contact unilatéral . . . . .	138
6.3.1.1	Exemple d'une source de pression . . . . .	138
6.3.1.2	Exemple d'une source de cisaillement . . . . .	152
6.3.2	Fissure droite parallèle au maillage: comparaison des schémas centré et décentré dans le cas unilatéral . . . . .	160
6.3.2.1	Exemple d'une source de pression . . . . .	160
6.3.2.2	Exemple d'une source de cisaillement . . . . .	164
6.3.3	Comparaison de résultats pour deux positions d'une fissure droite par rapport au maillage . . . . .	165
6.3.3.1	Exemple d'une source de pression . . . . .	165
6.3.3.2	Exemple d'une source de cisaillement . . . . .	170
6.3.4	Fissures comportant un angle . . . . .	175
6.4	Les améliorations de la méthode . . . . .	178
6.4.1	Apport d'un post-traitement . . . . .	178
6.4.2	Apport de l'amortissement . . . . .	182
6.4.3	Sur l'intérêt des éléments circulaires . . . . .	185
6.5	Une expérience plus réaliste de contrôle non destructif . . . . .	188
<b>7</b>	<b>Perspectives</b>	<b>191</b>
7.1	Problème pénalisé . . . . .	191
7.1.1	Formulation en domaines fictifs . . . . .	191
7.1.2	Estimations d'énergie . . . . .	192
7.2	Frottement de Tresca . . . . .	193
7.2.1	Formulation des conditions aux limites en déplacements . . . . .	193
7.2.2	Formulation en déplacements-contraintes-sauts de déplacements . . . . .	193
7.2.3	Inéquation variationnelle équivalente . . . . .	193
7.2.4	Formulation en domaines fictifs . . . . .	195
7.2.5	Estimations d'énergie . . . . .	195
7.3	Frottement de Coulomb . . . . .	196
7.3.1	Formulation des conditions aux limites en déplacements . . . . .	196
7.3.2	Formulation en déplacements-contraintes-sauts de déplacement . . . . .	196
7.3.3	Inéquation variationnelle équivalente . . . . .	197
7.3.4	Formulation en domaines fictifs . . . . .	197
7.3.5	Estimations d'énergie . . . . .	197
7.4	Problème viscoélastique de Kelvin-Voigt . . . . .	198
7.4.1	Problème 1D . . . . .	198
7.4.2	Approximation numérique . . . . .	199
<b>A</b>	<b>Ecriture du schéma sous forme différences finies sans la fissure</b>	<b>207</b>
<b>B</b>	<b>Éléments circulaires sur la fissure</b>	<b>211</b>
B.1	Calculs préliminaires . . . . .	211
B.2	Résultats pour les contributions . . . . .	212
	<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>



# Introduction

## Contexte

Cette thèse est une collaboration entre le Projet Ondes de l'Inria Rocquencourt, le Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille et le Département SINETICS de la Division R&D d'E.D.F. Clamart. Le contrôle non destructif est un thème de recherche important pour la Division R&D d'E.D.F., en particulier pour le Département SINETICS. La sûreté des composants des centrales nucléaires (par exemple les pièces composant les cuves) est une préoccupation majeure d'E.D.F. et de ses collaborateurs (C.E.A.,...). La vérification des installations existantes peut se faire de plusieurs manières. Elle peut d'abord se faire expérimentalement par des mesures directement réalisées sur site mais l'obtention de ces mesures est coûteuse d'un point de vue humain (conditions de sécurité) et matériel. De plus, réaliser des mesures peut être très complexe pour des pièces mécaniques de petite taille ou d'accès lointain et en réaliser un grand nombre (par exemple, pour suffisamment d'angles d'incidence) est parfois impossible. La simulation numérique est alors un outil de vérification pouvant remédier à ces inconvénients. Plus précisément, le besoin actuel en simulation des ingénieurs E.D.F. concerne la diffraction d'ondes élastiques par un ou plusieurs défauts (inclusions, fissures), présents sur une pièce mécanique donnée.

## Cadre de l'étude

Le cadre qui nous intéresse est celui de l'élasticité linéaire en dynamique, en petites déformations. On s'intéresse uniquement au problème direct. Ainsi les simulations effectuées peuvent servir de validation aux mesures expérimentales. On ne recherche pas a priori à détecter la présence d'une fissure, ni à identifier sa forme. On suppose aussi que la géométrie de la fissure ne varie pas au cours du temps. En particulier, on ne tient pas compte de la propagation de la fissure.

Pour les problèmes de diffraction par des fissures, on considère habituellement une condition aux limites de surface libre (voir dans [54]). D'un point de vue mécanique, cela signifie qu'il y a absence d'efforts sur les deux lèvres de la fissure. La fissure correspond donc à une cavité toujours ouverte au cours du temps, sur toute sa longueur. Il semble plus réaliste de supposer que les lèvres de la fissure peuvent se recoller sur la totalité ou une partie de la fissure, pendant un certain intervalle de temps. Cette modélisation est prise en compte en modifiant les conditions aux limites sur la fissure. On considère alors une condition de contact unilatéral, appelée aussi condition de Signorini dans la littérature, au lieu de la condition de surface libre. Supposant cette condition unilatérale, les lèvres de la fissure peuvent partiellement se fermer ou s'ouvrir. Lorsqu'il y a contact, il y a continuité du déplacement normal et pression d'une lèvre de la fissure sur l'autre. Du point de vue mécanique, la prise en compte de conditions de contact unilatéral sur la fissure peut donc sembler plus réaliste. De plus, on peut enrichir le modèle, en considérant du frottement. A partir d'une certaine intensité seuil de la pression, on peut supposer que les lèvres de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre: ce phénomène est modélisé par la loi de frottement de Coulomb. L'objectif de cette thèse est la prise en compte de conditions aux limites de contact unilatéral sur la fissure, d'étudier le problème mathématique correspondant et d'intégrer cette condition aux limites dans la résolution numérique.

La loi de frottement de Coulomb est étudiée dans le chapitre 2 via une régularisation non locale. Cependant, pour les aspects numériques, on s'intéresse uniquement à la condition aux limites de contact unilatéral sans frottement. D'un point de vue mathématique, la prise en compte de conditions de contact unilatéral rend le problème non linéaire et conduit à résoudre une inéquation variationnelle d'évolution.

## Aspects théoriques et difficultés

Il existe peu de résultats d'existence de solution mathématique pour les inéquations variationnelles d'évolution avec condition unilatérale. Les premiers travaux dans [36, 34] ont traité de l'équation des ondes avec contrainte unilatérale, dans un demi-espace et un ouvert borné, respectivement.

Des résultats donnés dans [37, 46] ont été obtenus pour des modèles de contact employant la compliance normale qui est une approximation de la condition de Signorini. La compliance normale autorise une pénétration du corps dans l'obstacle, c'est une méthode souvent utilisée pour montrer des résultats d'existence car elle correspond à une méthode de pénalisation.

Enfin, des résultats d'existence pour des problèmes dynamiques de contact pour des milieux viscoélastiques ont été obtenus dans [29] pour la loi de Signorini avec frottement de Tresca (cela signifie que le frottement est indépendant de la condition de Signorini, ce qui est peu réaliste mécaniquement, mais ce résultat s'applique aussi au cas sans frottement), dans [44] dans le cas unidimensionnel sans frottement mais avec des estimations d'énergie et des résultats de traces précis. Un résultat d'existence a été obtenu dans [10] avec la condition de Signorini et une loi de frottement non local, c'est-à-dire comportant une régularisation.

Pour les problèmes de contact unilatéral, en dynamique, le cadre fonctionnel est bien établi pour les systèmes discrets et s'appuie sur des espaces de mesures pour l'accélération, voir dans [39, 40, 30]. Pour les milieux continus, le cadre variationnel est bien établi pour les cas statique dans [33, 28] et quasi-statique dans [1, 17, 11, 48, 47]. En dynamique, des questions demeurent quant au cadre fonctionnel à utiliser. Dans ce mémoire, on se place dans un cadre fonctionnel assez régulier pour le terme d'accélération. On étudie un problème dynamique de contact avec frottement non local dans un milieu viscoélastique fissuré. Le modèle viscoélastique considéré est celui de Kelvin-Voigt, qui est souvent utilisé pour les milieux solides. Par une méthode de pénalisation, on obtient un résultat d'existence. La question de l'existence d'une solution au problème élastique demeure ouverte à notre connaissance.

## Aspects numériques

Pour la résolution numérique, on utilise la méthode des domaines fictifs. Cette méthode est de plus en plus utilisée pour les problèmes de propagation d'ondes dans [14, 19, 16, 54] ou en mécanique des fluides dans [22, 23]. Dans un travail de thèse récent [54], accompli au sein du projet Ondes, C. Tsogka a étudié et appliqué la méthode des domaines fictifs au problème de l'élastodynamique avec la condition de surface libre sur la fissure. Un des objectifs de cette thèse est d'appliquer la méthode des domaines fictifs à la condition aux limites de contact unilatéral sans frottement, en suivant une démarche semblable à celle de C. Tsogka.

Rappelons que la méthode des domaines fictifs est une méthode de résolution rapide. Son principe est le suivant. Il s'agit en général de poser le problème sur un domaine de géométrie plus simple que le domaine du problème de départ. Pour notre problème, il s'agit d'étendre la solution définie sur le domaine fissuré à un domaine plus simple, qui ne comporte pas de fissure (typiquement rectangulaire en 2D, parallélépipédique en 3D). La méthode nécessite l'utilisation de deux maillages: une grille régulière du rectangle en 2D (ou du parallélépipède en 3D) et un maillage surfacique de la fissure. Les deux maillages communiquent alors par des multiplicateurs de Lagrange définis sur la fissure.

Dans notre cas, on choisit d'utiliser une formulation mixte en contraintes-déplacements pour laquelle on obtient un schéma explicite si on utilise l'élément fini  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$  introduit dans [50, 49]. La formulation est doublement mixte au sens où les inconnues sont non seulement les déplacements et les contraintes mais aussi les multiplicateurs de Lagrange correspondant au saut de déplacement sur la fissure. La non linéarité issue de la prise en compte du contact unilatéral apparaît dans le calcul des multiplicateurs de Lagrange. Il s'agit de résoudre, à chaque pas de temps, un problème d'optimisation quadratique avec contraintes de bornes, alors que, dans le cas de la surface libre, c'est un système linéaire. Dans la littérature, un nombre assez faible d'études traite du cas statique dans [6, 15, 26], et peu d'études existent en dynamique. On peut citer néanmoins les travaux donnés dans [53, 27].

## Plan de la thèse

Le plan de ce mémoire est le suivant. Dans le premier chapitre, on rappelle la formulation classique des équations de l'élastodynamique en présence de contact unilatéral avant de présenter une formulation variationnelle primale ainsi qu'une formulation variationnelle mixte en contraintes et déplacements.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'analyse mathématique d'un problème de contact unilatéral dynamique avec frottement non local dans un matériau viscoélastique fissuré de type Kelvin-Voigt. On présente d'abord la formulation classique en déplacements de ce problème puis la formulation primale équivalente. L'existence d'une solution à ce problème est obtenue en utilisant une méthode de pénalisation. On décrit le problème pénalisé pour lequel on prouve l'existence et l'unicité d'une solution par une approche incrémentale. Des résultats de compacité permettent de prouver que, à une sous-suite près, la solution du problème pénalisé converge faiblement vers une solution du problème unilatéral quand le paramètre de pénalisation tend vers zéro.

Dans le troisième chapitre, la formulation du problème de l'élastodynamique avec condition de contact unilatéral sans frottement par la méthode des domaines fictifs est présentée, ainsi que la justification de son obtention. C'est une formulation doublement mixte en déplacements, contraintes et sauts de déplacement. On précise aussi dans cette partie l'approximation en espace du problème, réalisée à l'aide d'éléments finis mixtes. Les espaces d'approximation sont définis pour le déplacement, les contraintes et les multiplicateurs de Lagrange. De plus, après discrétisation en espace, un problème d'optimisation quadratique doit être résolu au lieu d'un système linéaire.

Dans la quatrième partie, la discrétisation en temps de la formulation en domaines fictifs est présentée. La discrétisation de la partie non linéaire issue du contact unilatéral peut être discrétisée par plusieurs schémas (explicite, implicite, centré, décentré). Ces différents schémas sont présentés et certaines propriétés sont discutées. On prouve la stabilité d'un schéma décentré implicite par des techniques d'énergie. Un schéma centré implicite, dont la stabilité reste à démontrer, a été également implémenté.

Dans le cinquième chapitre, des aspects numériques sont évoqués. A chaque itération en temps, il s'agit de résoudre un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique avec contraintes de bornes. La méthode de résolution du problème d'optimisation quadratique sur une itération est décrite. Elle combine une méthode de gradient avec projection avec pas de Cholesky. D'autres aspects numériques sont expliqués, comme la prise en compte de fissures comportant un angle (fissures en coude, par exemple), ce qui entraîne une discontinuité de la normale et une modification de l'élément fini associé aux multiplicateurs de Lagrange est nécessaire. La prise en compte d'éléments circulaires sur la fissure est également décrite dans le cas de fissures en arcs-de-cercle ou simplement circulaires.

Dans le sixième chapitre, des résultats numériques obtenus par la méthode des domaines fictifs sont montrés. Dans le cas unidimensionnel, des résultats de validation sont présentés et comparés à une solution exacte qui peut être calculée dans cette dimension. Une remarque sur la (non) régularité de la solution est faite. Ensuite, dans le cas bidimensionnel, deux études sont considérées en vue de valider la prise en compte du contact unilatéral dans le code 2D. On considère d'abord le problème de

la propagation des ondes dans un milieu fissuré, comportant une fissure verticale infinie, en présence de contact. Les données sont invariantes dans la direction des ordonnées, en  $y$ . Ce problème peut alors être simulé par une équation 1D. La comparaison entre les résultats issus de la simulation 1D et ceux issus du code 2D permet de valider le code 2D. Un autre exemple est étudié, en vue de valider le code 2D. C'est celui d'une fissure circulaire, avec des données invariantes par symétrie radiale. Ensuite, d'autres exemples numériques sont étudiés: celui d'une fissure finie, d'abord une fissure verticale, puis une fissure diagonale. Pour ces deux cas, une comparaison avec les résultats pour une condition aux limites de surface libre est présentée. Ensuite, un exemple réaliste fourni par E.D.F. est donné. Il consiste d'un capteur situé sur le bord extérieur d'un milieu homogène élastique isotrope pour lequel une contrainte normale est imposée.

Enfin, dans un dernier chapitre, on montre que la méthode des domaines fictifs peut s'appliquer à d'autres problèmes de contact, comme la compliance normale, le frottement de Tresca, voire le frottement de Coulomb. Enfin, un exemple 1D prenant en compte une loi de comportement de Kelvin-Voigt, utilisée pour le problème théorique dans le chapitre 2, avec condition de contact unilatéral en un point est donné. Quand le paramètre de viscosité tend vers zéro, on retrouve la solution du cas élastique.



# Chapitre 1

## Présentation du problème de contact unilatéral en élastodynamique

Dans ce chapitre, on présente les équations du problème, à savoir l'élastodynamique avec une condition aux limites de contact unilatéral sans frottement sur la fissure. On introduit la formulation classique en déplacements et une formulation primale équivalente. Ensuite, on présente une formulation en déplacements-contraintes et la formulation variationnelle équivalente. Enfin, les inconvénients des méthodes classiques qui s'appuient sur ces formulations sont indiqués.

### 1.1 Formulation classique en déplacements

$\Omega$  désigne un ouvert borné, fissuré de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d$  désignant la dimension,  $d = 2$  ou  $3$ .  $\partial\Omega$  désigne sa frontière:  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_F \cup \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}$ . La fissure est désignée par  $\Gamma$ , où l'on impose une condition aux limites de contact unilatéral sans frottement. On considère, dans ce chapitre, que la fissure  $\Gamma$  est initialement fermée et ne comporte pas d'ouverture. Ainsi, en 2D, elle est représentée par une courbe, en 3D, elle est représentée par une surface. Une condition de Dirichlet homogène est imposée, par exemple, sur  $\Gamma_D$ . Dans la suite, on considèrera dans certains cas des forces surfaciques imposées sur  $\Gamma_F$  ( $\text{mes}(\Gamma_F) \geq 0$ ). On suppose que  $\Omega$  se décompose en deux sous-domaines  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  tels que  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ ,  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \bar{\Gamma}_V$ , où  $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$  est une variété régulière,  $\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \bar{\Gamma}_V \cup \Gamma \cup \bar{\Gamma}_D \cup \Gamma_F$ .  $\Gamma_V$  vérifie  $\Gamma_V \subset \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ ,  $\Gamma_V$  prolonge artificiellement la fissure  $\Gamma$  et n'a pas de sens physique.

Pour  $d = 2$ , une représentation de  $\Omega$  est visible sur la figure 1.1.

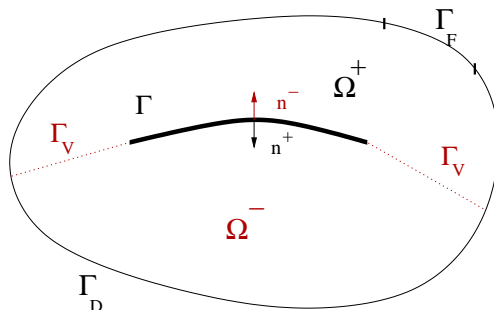


FIG. 1.1 – Une représentation de  $\Omega$  en 2D

Les équations du problème sont les suivantes:

Trouver  $\mathbf{u}$  champ des déplacements, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , tel que

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, & (i) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, & (ii) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } ]0, T[ \times \Gamma_D, & (iii) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{dans } ]0, T[ \times \Gamma_F. & (iv) \end{cases} \quad (1.1)$$

On retrouve, dans la relation (1.1)-(i), l'équation du mouvement, puis la loi de Hooke généralisée dans (1.1)-(ii), ainsi que les conditions aux limites en déplacements dans la relation (1.1)-(iii) et en forces imposées dans (1.1)-(iv).  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  est le tenseur des contraintes qui est relié au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$  où  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = 1/2 (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  par la loi de Hooke, dans la relation (1.1)-(ii). Le terme  $\mathbf{f}$  représente la densité de forces volumiques à laquelle est soumis le milieu.  $\mathbf{F}$  désigne les forces surfaciques imposées sur  $\Gamma_F$ . On suppose également que la densité  $\rho$  vérifie  $\rho = \rho(x)$ ,  $\rho \in L^\infty(\Omega)$ , telle que

$$\exists \rho_-, \rho_+ \text{ tels que } 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < \infty \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Dans la suite, on utilisera la convention d'Einstein des indices répétés. Le tenseur  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{C}_{ijkl})$  représente le tenseur d'élasticité du quatrième ordre vérifiant les propriétés de symétrie et d'ellipticité suivantes,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ijkl} &= \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{klij}, \forall i, j, k, l = 1, \dots, d, \\ \mathcal{C}_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega), \forall i, j, k, l = 1, \dots, d, \\ \exists \alpha_0 > 0 \quad \mathcal{C}_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} &\geq \alpha_0 \tau_{ij} \tau_{ij}, \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \text{ tel que } \tau_{ij} = \tau_{ji}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

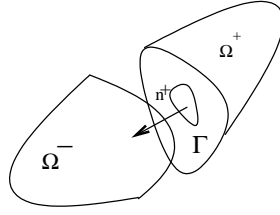
La condition aux limites sur  $\Gamma_D$  a peu d'importance dans la suite de l'étude. On aurait pu aussi considérer d'autres types de conditions. En pratique, on imposera plutôt des conditions aux limites absorbantes. La condition sur  $\Gamma_F$  sera quelquefois utilisée dans les expériences numériques.

Ecrire les conditions de contact unilatéral sur  $\Gamma$  nécessite quelques notations. Comme on peut le voir sur la figure 1.1, il existe deux normales à  $\Gamma$ :  $\mathbf{n}^+$ ,  $\mathbf{n}^-$ , les normales unitaires extérieures à  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , respectivement. Le déplacement étant a priori discontinu sur  $\Gamma$ , on définit deux traces du déplacement sur  $\Gamma$  notées  $\mathbf{u}^+$ , issue de  $\Omega^+$ ,  $\mathbf{u}^-$ , issue de  $\Omega^-$ . De plus,  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{n}^\alpha$  désigne la trace sur  $\Gamma$  issue de  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = +, -$ , du vecteur contrainte associé à  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ . On adopte les notations suivantes pour les quantités définies sur la fissure  $\Gamma$ , où  $\alpha = +, -$ :

$$\begin{cases} u_N^\alpha &= \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha, \quad [u_N] = -u_N^+ - u_N^-, \\ \mathbf{u}_T^\alpha &= \mathbf{u}^\alpha - u_N^\alpha \mathbf{n}^\alpha, \quad [\mathbf{u}_T] = -(\mathbf{u}_T^+ - \mathbf{u}_T^-), \\ \boldsymbol{\sigma}_N^\alpha(\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}_T^\alpha(\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{n}^\alpha - \boldsymbol{\sigma}_N^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{n}^\alpha. \end{cases} \quad (1.3)$$

Les conditions de contact unilatéral (appelées aussi conditions de Signorini), pour le cas sans frottement, au niveau de la fissure s'expriment de la manière suivante pour tout  $t \in ]0, T[$ , en reprenant les notations (1.3):

$$\begin{cases} [u_N] &\geq 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma, & (i) \\ \boldsymbol{\sigma}_N^+(\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma}_N^-(\mathbf{u}) \leq 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma, & (ii) \\ \boldsymbol{\sigma}_N^+(\mathbf{u}) [u_N] &= 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma, & (iii) \\ \boldsymbol{\sigma}_T^+(\mathbf{u}) &= -\boldsymbol{\sigma}_T^-(\mathbf{u}) = \mathbf{0} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma. & (iv) \end{cases} \quad (1.4)$$



$$\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^+ - \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^+ \leq 0, \quad \sigma_N^+ \leq 0, \quad \sigma_N^+ (\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^+ - \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^+) = 0$$

 FIG. 1.2 – Description des conditions de contact unilatéral sur  $\Gamma$  en  $3D$ 

Il est clair par (1.4)-(ii) et (1.4)-(iv) que le vecteur contrainte  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  est continue à travers  $\Gamma$ . En effet, en un point de la fissure, soit les deux lèvres de la fissure se touchent, il y a alors continuité du vecteur contrainte, soit, dans le cas contraire, il y a un saut de déplacement et absence d'efforts, sur chaque lèvre de la fissure. D'un point de vue mécanique, en considérant la décomposition de  $\Omega$  en  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  et  $\mathbf{n}^+$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega^+$ , on ne peut qu'avoir  $(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+ \leq 0$ , pour empêcher l'interpénétration entre  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ .

Pour les contraintes, par définition,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}^+$  constitue l'effort exercé par  $\Omega^-$  sur  $\Omega^+$ . On a la décomposition suivante:  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}^+ = \sigma_N^+ \mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\sigma}_T^+$ . Si on suppose  $\boldsymbol{\sigma}_T^+ = \mathbf{0}$ , alors  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}^+ = \sigma_N^+ \mathbf{n}^+$  et donc l'effort de  $\Omega^-$  sur  $\Omega^+$  est dans la direction de la normale à  $\Omega^+$ . Or l'effort de  $\Omega^-$  sur  $\Omega^+$  est de direction opposée à  $\mathbf{n}^+$  car sinon il y a séparation entre  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , donc les vecteurs  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}^+$  et  $\mathbf{n}^+$  sont colinéaires de sens opposé.

On note  $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}] = \boldsymbol{\sigma}^+(\mathbf{u})\mathbf{n}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-(\mathbf{u})\mathbf{n}^-$ . La relation  $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}] = 0$  est équivalente à  $\sigma_N^+(\mathbf{u}) = \sigma_N^-(\mathbf{u})$  et  $\boldsymbol{\sigma}_T^+(\mathbf{u}) = -\boldsymbol{\sigma}_T^-(\mathbf{u})$ . Dans la suite, à cause de la continuité de  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  sur  $\Gamma$ , les exposants +, - sont omis. On introduit alors  $\sigma_N(\mathbf{u}) = \sigma_N^+(\mathbf{u}) = \sigma_N^-(\mathbf{u})$  et  $\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}_T^+(\mathbf{u}) = -\boldsymbol{\sigma}_T^-(\mathbf{u})$ .

**Remarque 1.1** Il est intéressant de rappeler la signification physique des relations de (1.4).

- La relation (1.4)-(i),  $[u_N] \geq 0$ , exprime le fait que les deux lèvres de la fissure ne peuvent pas s'interpénétrer.
- La relation (1.4)-(ii),  $\sigma_N^+(\mathbf{u}) = \sigma_N^-(\mathbf{u})$ , exprime la continuité des traces normales des contraintes. En cas de contact, il y a pression d'une lèvre de la fissure sur l'autre, d'où le signe négatif de  $\sigma_N^+(\mathbf{u})$ .
- Les relations (1.4)-(i), (1.4)-(ii), (1.4)-(iii),  $[u_N] \geq 0$ ,  $\sigma_N^+(\mathbf{u}) \leq 0$ ,  $\sigma_N^+(\mathbf{u})[u_N] = 0$  expriment une loi de complémentarité. Cette loi vient du fait que:
  - Si  $[u_N] > 0$ , il n'y a pas de contact, alors  $\sigma_N^+(\mathbf{u}) = 0$ .
  - Sinon,  $[u_N] = 0$ , il y a contact et  $\sigma_N^+(\mathbf{u}) \leq 0$ .
- Enfin, la relation (1.4)-(iv),  $\boldsymbol{\sigma}_T^+(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , traduit l'absence de frottement.

Pour compléter le système,  $\mathbf{u}$  doit satisfaire les conditions initiales:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour écrire la formulation faible du problème (1.1)-(1.4), on introduit les espaces fonctionnels  $\mathbf{M}$  et

$\mathbf{V}$  ainsi que la forme bilinéaire  $c$

$$\mathbf{M} = [L^2(\Omega)]^d, \quad \mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D\}, \quad (1.5)$$

$$c : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{C} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx, \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{C}$  est défini en (1.2). On suppose  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{M})$ ,  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$  et  $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{M}$ .

Une formulation primale équivalente à (1.1) est la suivante, pour un temps  $T$  fini:

Trouver  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathbf{M}) \cap C^1([0, T]; [H^{-1/2}(\Omega)]^d)$  tel que  $[u_N] \geq 0$  presque partout sur  $]0, T[ \times \Gamma$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(T), \mathbf{v}(T) - \mathbf{u}(T) \rangle - (\varrho \mathbf{u}_1, \mathbf{v}(0) - \mathbf{u}_0) - \int_0^T (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \, dt + \int_0^T c(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dt \\ \geq \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_F} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, ds, \forall \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathbf{M}), \\ \text{tel que } [v_N] \geq 0 \text{ presque partout sur } ]0, T[ \times \Gamma, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Cette formulation faible découle de la formulation forte donnée dans (1.1)-(1.4). La notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité  $\langle [H^{-1/2}(\Omega)]^d, [H^{1/2}(\Omega)]^d \rangle$ . L'accélération disparaît de la formulation après une intégration par parties. Les formulations présentées dans [10, 29, 34] utilisent également une intégration par parties de l'accélération. Il semble en effet que l'accélération soit peu régulière:  $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \in L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^d)$ , comme cela est rapidement décrit dans [34], par exemple, pour l'équation des ondes scalaire.

Du point de vue théorique, à notre connaissance, il n'y a pas de résultat d'existence mathématique pour ce problème qui reste ouvert. Des résultats d'existence ont été obtenus pour l'équation des ondes scalaire avec condition unilatérale dans un demi-espace et dans un ouvert borné [34, 36], d'autres résultats ont été obtenus, en supposant un comportement viscoélastique de type Kelvin-Voigt [10, 29]. On s'intéresse dans le chapitre 2 à l'analyse mathématique d'un problème viscoélastique de contact unilatéral avec frottement de Coulomb non local. Un bref récapitulatif des résultats existants y est donné.

## 1.2 Formulation classique en déplacements-contraintes

Un des objectifs de ce travail de thèse est de reprendre la démarche suivie dans [4, 54], où une formulation en domaines fictifs du problème de l'élastodynamique avec condition de surface libre sur une fissure avait été étudiée et mise en œuvre. On ne peut pas travailler ici en vitesses-contraintes comme dans [4, 54] car les conditions aux limites de contact unilatéral sont exprimées en déplacements. On adopte ici une formulation en déplacements-contraintes pour les équations de l'élastodynamique dans un milieu  $\Omega$  fissuré, avec conditions de Dirichlet sur les bords. On suppose, pour simplifier,  $\Gamma_F = \emptyset$ . Si on garde la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  comme une des inconnues, le système (1.1) se réécrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} & = \mathbf{f} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathcal{A} \boldsymbol{\sigma} & = \varepsilon(\mathbf{u}) \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} & = \mathbf{0} \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Gamma_D. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$\mathcal{A}$  désigne l'inverse du tenseur d'élasticité  $\mathcal{C}$  défini en (1.2) et possède les mêmes propriétés que  $\mathcal{C}$ .

Les conditions de Signorini sans frottement données par (1.4) s'expriment de la manière suivante au niveau de la fissure, si l'on garde la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  comme inconnue:

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_N] \geq 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \quad (i) \\ \sigma_N \leq 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \quad (ii) \\ \sigma_N [u_N] = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \quad (iii) \\ [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] = \mathbf{0} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \quad (iv) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} = \mathbf{0} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma. \quad (v) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Introduisons maintenant une formulation mixte. Avant d'écrire une formulation faible équivalente à (1.8)-(1.9), on définit d'abord les espaces fonctionnels  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}_\Gamma$  et le convexe  $\widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma$  de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} = \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in [H(\text{div}; \Omega)]^{d^2}; \tau_{ij} = \tau_{ji} \forall i, j = 1, \dots, d \text{ et } [\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}] = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \} \\ \quad = \{ \boldsymbol{\tau}; \tau_{ij} \in L^2(\Omega), (\text{div } \boldsymbol{\tau})_i = \tau_{il,l} \in L^2(\Omega), \tau_{ij} = \tau_{ji}, \forall i, j = 1, \dots, d \text{ et } [\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}] = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \}, \\ \mathbf{X}_\Gamma = \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \boldsymbol{\tau} \mathbf{T} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma \}, \quad \widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma = \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}_\Gamma; \tau_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma \}, \\ \mathcal{G} = H_{00}^{1/2}(\Gamma). \end{array} \right.$$

Comme dans [54], on considère que le saut de déplacement est nul en bout de fissure, ce qui se traduit en posant  $[u_N] \in \mathcal{G}$ . On peut voir [33, 42] pour une étude précise de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ .

Les relations suivantes issues de formules de sauts nous seront utiles.

**Proposition 1.1** *On a la formule des sauts suivante, obtenue par intégration par parties, où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité  $\langle (H_{00}^{1/2}(\Gamma))', H_{00}^{1/2}(\Gamma) \rangle$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_D}$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-1/2}(\Gamma_D)$  et  $H^{1/2}(\Gamma_D)$ , en supposant  $\Omega$  comme sur la figure 1.1.*

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{div } \boldsymbol{\tau} \, dx = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx + \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{v}^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{v}^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D}, \quad (1.10)$$

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d \text{ tel que } [\mathbf{v}] \in [H_{00}^{1/2}(\Gamma)]^d.$$

Ou encore:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{div } \boldsymbol{\tau} \, dx = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx + \langle \tau_N^+, v_N^+ \rangle + \langle \tau_N^-, v_N^- \rangle$$

$$+ \langle \tau_T^+, v_T^+ \rangle + \langle \tau_T^-, v_T^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d. \quad (1.11)$$

### Démonstration

On décompose  $\Omega$  en deux ouverts  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$  comme sur la figure 1.1, de frontière  $\partial\Omega^-, \partial\Omega^+$  respectivement.

On note  $\mathbf{n}^\alpha$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = +, -$ . On a, pour tous  $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}$ ,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{div } \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_{\Omega^-} \mathbf{v} \cdot \text{div } \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_{\Omega^+} \mathbf{v} \cdot \text{div } \boldsymbol{\tau} \, dx,$$

$$= \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{v}^- \rangle_{\partial\Omega^-} - \int_{\Omega^-} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx + \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{v}^+ \rangle_{\partial\Omega^+} - \int_{\Omega^+} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx,$$

$$= \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{v}^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{v}^+ \rangle - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx + \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{v}^+ \rangle_{\Gamma_V} + \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{v}^- \rangle_{\Gamma_V} + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D}.$$

On utilise le fait que  $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$  entraîne  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-$  sur  $\Gamma_V$  et le fait que  $\boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+ = -\boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^-$  sur  $\Gamma_V$ . D'où:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dx = \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{v}^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{v}^+ \rangle - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D}, \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d.$$

En décomposant en parties normale et tangentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dx = & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \langle \boldsymbol{\tau}_T^+, \mathbf{v}_T^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_T^-, \mathbf{v}_T^- \rangle \\ & + \langle \boldsymbol{\tau}_N^+, \mathbf{v}_N^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_N^-, \mathbf{v}_N^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d. \end{aligned}$$

Cette formule ne dépend pas du choix des ouverts  $\Omega^+, \Omega^-$ . ■

Si on considère le domaine  $C$  défini par  $C = \Omega \cup \Gamma$ , on peut redéfinir  $\mathbf{X}$  de la manière suivante:

$$\mathbf{X} = \{ \boldsymbol{\tau} \in [H(\operatorname{div}; C)]^{d^2}; \tau_{ij} = \tau_{ji} \}.$$

L'équivalence entre les deux définitions de  $\mathbf{X}$  découle directement de la proposition 1.1. En effet,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}$  si et seulement si  $\boldsymbol{\tau}$  est symétrique,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{M}$  et  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{M}$ , c'est-à-dire que la fonction  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$  et la distribution associée sont égales, ce qui revient à écrire

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dx = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\tau} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in [\mathcal{D}(C)]^d.$$

On définit les formes bilinéaires suivantes:

$$\begin{aligned} a : \mathbf{X} \times \mathbf{X} &\rightarrow \mathbb{R}, & d : \mathbf{X} \times \mathbf{M} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \, dx = \int_{\Omega} \mathcal{A}_{ijkl} \sigma_{kl} \tau_{ij} \, dx, & d(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dx. \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Proposition 1.2** *Le problème (1.8)-(1.9) est équivalent à l'inéquation variationnelle suivante:*

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) : ]0, T[ \rightarrow \widetilde{\mathbf{X}}_{\Gamma} \times \mathbf{M}$  et

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}) - d(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, & (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) + d(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &\geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \widetilde{\mathbf{X}}_{\Gamma}. & (ii) \end{cases} \quad (1.13)$$

### Démonstration

L'équivalence entre la relation (1.13)-(i) et la relation (1.8)-(i) est évidente.

- On montre d'abord que (1.8)-(1.9) entraîne (1.13).  
En remplaçant  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}$  par  $\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X}$  dans (1.11), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dx = & - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \, dx + \langle \boldsymbol{\tau}_T^+ - \boldsymbol{\sigma}_T^+, \mathbf{u}_T^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_T^- - \boldsymbol{\sigma}_T^-, \mathbf{u}_T^- \rangle \\ & + \langle \boldsymbol{\tau}_N^+ - \boldsymbol{\sigma}_N^+, \mathbf{u}_N^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}_N^- - \boldsymbol{\sigma}_N^-, \mathbf{u}_N^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Comme  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X}_{\Gamma}$  et si on suppose  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}_{\Gamma}$ , on a

$$\langle \boldsymbol{\tau}_T^{\alpha} - \boldsymbol{\sigma}_T^{\alpha}, \mathbf{u}_T^{\alpha} \rangle = 0, \quad \alpha = +, -, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}_{\Gamma}.$$

De plus, si  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  vérifie (1.8), alors  $\mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  dans  $[L^2(\Omega)]^{d^2}$  pour presque tout  $t \in ]0, T[$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_D$  pour presque tout  $t$ ,  $[u_N] = -u_N^+ - u_N^- \geq 0$  dans  $\mathcal{G}$ ,  $\langle \sigma_N^+, [u_N] \rangle = 0$  pour presque tout  $t \in ]0, T[$ , et si  $\boldsymbol{\tau} \in \widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \, dx &= \langle \tau_N^+ - \sigma_N^+, u_N^+ \rangle + \langle \tau_N^- - \sigma_N^-, u_N^- \rangle \\ &= -\langle \tau_N^+ - \sigma_N^+, [u_N] \rangle = -\langle \tau_N^+, [u_N] \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

- Réciproquement, en supposant que (1.13) est vraie, en prenant  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \pm \boldsymbol{\eta}$  avec  $\boldsymbol{\eta}$  tel que  $\eta_{ij} \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} \, dx = 0, \forall \boldsymbol{\eta} \in [C_0^\infty(\Omega)]^{d^2}.$$

Donc  $\mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  au sens des distributions puis dans  $[L^2(\Omega)]^{d^2}$ , pour presque tout  $t$ . D'où  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d$ , pour presque tout  $t \in ]0, T[$ . On a, de plus, par (1.10),

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{u}^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^- - \boldsymbol{\sigma}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{u}^- \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma_D} &\geq 0 \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma, \text{ p.p. } t. \end{aligned}$$

On note  $C = \Omega \cup \Gamma$ , le domaine sans fissure. Tout élément  $\boldsymbol{\delta}$  de  $[H^{-1/2}(\Gamma_D)]^d$  peut être relevé par une fonction  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in [H(\operatorname{div}; C)]^{d^2}$  telle que  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  dans  $[H^{-1/2}(\Gamma)]^d$  et  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{n} = \boldsymbol{\delta}$  dans  $[H^{-1/2}(\Gamma_D)]^d$ .

En prenant  $\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\delta}$  dans  $[H^{-1/2}(\Gamma_D)]^d$  et  $\pm \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}$ , on obtient  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_D$ , pour presque tout  $t$ . Donc,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\tau}^+ \mathbf{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n}^+, \mathbf{u}^+ \rangle + \langle \boldsymbol{\tau}^- \mathbf{n}^- - \boldsymbol{\sigma}^- \mathbf{n}^-, \mathbf{u}^- \rangle &\geq 0, \forall \boldsymbol{\tau} \in \widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma, \\ -\langle \tau_N^+ - \sigma_N^+, [u_N] \rangle &\geq 0, \forall \boldsymbol{\tau} \in \widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma. \end{aligned}$$

En choisissant  $\tau_N^+ = 0$  puis  $\tau_N^+ = 2\sigma_N^+$ , on obtient  $\langle \sigma_N^+, [u_N] \rangle = 0$ . D'où :  $\langle \tau_N^+, [u_N] \rangle \leq 0$ , pour tout  $\boldsymbol{\tau} \in \widetilde{\mathbf{X}}_\Gamma$ , et, par conséquent,  $[u_N] \geq 0$  dans  $\mathcal{G}$ . Finalement, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } ]0, T[ \times [L^2(\Omega)]^{d^2}, \\ [u_N] \geq 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \\ \sigma_N^+ = \sigma_N^- \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_T^+ = -\boldsymbol{\sigma}_T^- \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \text{ car } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X}_\Gamma, \\ \langle \sigma_N^+, [u_N] \rangle = 0 \text{ sur } ]0, T[, \boldsymbol{\sigma}_T^+ = \mathbf{0} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma \text{ car } \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{X}_\Gamma, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma_D. \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Dans [52], une formulation mixte du même type est donnée dans le cas statique. L'étude menée dans [52] se place dans un cadre plus général en vue d'obtenir des estimations d'erreurs précises.

### 1.3 Inconvénients des formulations classiques

La création d'un maillage adapté à la fissure peut être difficile pour une fissure à géométrie complexe dans le cas d'une méthode d'éléments finis classique, par exemple celle issue de la formulation (1.7) ou (1.13). De plus, dans le cas de méthodes de résolution explicites, un maillage correspondant à une configuration géométrique complexe engendre un pas de temps très petit du fait de la condition de stabilité, ce qui augmente le temps de calcul. Enfin, la mise en œuvre du calcul est plus compliquée

pour un maillage utilisé par une méthode d'éléments finis que pour un maillage structuré (du type des différences finies). On veut éviter ces inconvénients. La formulation en domaines fictifs présentée dans la suite consiste en la résolution d'un problème d'optimisation posé uniquement sur la fissure. Cette méthode rassemble plusieurs avantages : sa mise en œuvre est relativement facile, elle permet une bonne prise en compte de fissures à géométrie complexe et la résolution du problème est rapide. Les propriétés de la méthode des domaines fictifs sont précisées dans la section 3.1.



## Chapitre 2

# Analyse mathématique pour un problème viscoélastique de contact unilatéral

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des aspects théoriques. Après avoir fait un descriptif bibliographique sur les problèmes dynamiques de contact, on étudie un problème dynamique de contact unilatéral avec frottement non local pour un corps viscoélastique fissuré, suivant une loi de Kelvin-Voigt. On utilise une méthode variationnelle pour résoudre ce problème. Plus précisément, une méthode de pénalisation est appliquée. On introduit un problème pénalisé qui peut être considéré comme un problème particulier d'une classe de problèmes, pour laquelle on montre l'existence d'une solution par une technique incrémentale. Cette technique a déjà été utilisée dans [21, 46]. Des estimations sont obtenues sur les solutions pénalisées. On utilise, de plus, une décomposition de  $\Omega$  de part et d'autre de la fissure, qui généralise celle utilisée dans le chapitre 1, afin d'appliquer des résultats de compacité. Ces résultats permettent de passer à la limite dans le problème pénalisé et d'obtenir une solution pour le problème unilatéral avec frottement non local.

### 2.1 État de l'art

Il existe peu de résultats dans la littérature qui concernent l'existence de solution à des problèmes dynamiques de contact unilatéral (ou de Signorini). G. Lebeau et M. Schatzman [36] ont obtenu des résultats d'existence et d'unicité pour la solution de l'équation des ondes dans un demi-espace, avec une condition aux limites de contact unilatéral sans frottement. J.U. Kim [34] a montré l'existence d'une solution au même problème dans un domaine borné régulier. J.A.C. Martins et J.T. Oden [37] ont prouvé des résultats d'existence pour des problèmes dynamiques de contact avec une loi de compliance normale. Ils ont d'abord considéré un matériau élastique, sans frottement, puis, ils ont supposé le matériau viscoélastique, soumis à du frottement. J. Jarušek [29] a été le premier à obtenir un résultat d'existence sur des problèmes dynamiques de contact unilatéral avec frottement de Tresca, pour un milieu viscoélastique. Son résultat d'existence est surtout intéressant car il est valable dans le cas sans frottement, étant donné que considérer du frottement de Tresca avec la condition de Signorini est peu réaliste mécaniquement. Ensuite, J. Muñoz-Rivera et R. Racke [41] ont étudié le problème de l'élastodynamique avec symétrie radiale et une condition de contact unilatéral sans frottement. Plus récemment, M. Cocou et J.M. Ricaud [12] ont prouvé des résultats d'existence pour des problèmes dynamiques de contact avec frottement non local, dans des domaines bornés

réguliers, sous des hypothèses sur la vitesse et l'accélération. E. Pratt et J.M. Ricaud [46] ont étudié des problèmes dynamiques de contact avec frottement par des techniques incrémentales, dans un cas particulier de loi de compliance normale. A. Petrov et M. Schatzman [44] ont étudié un problème de contact unilatéral en viscoélasticité avec le modèle de Kelvin-Voigt, dans un demi-espace, dans le cas unidimensionnel. Ils ont utilisé des espaces de mesures pour leur étude. M. Cocou [10] a obtenu un résultat d'existence pour un problème de contact unilatéral dynamique avec frottement non local, pour un matériau viscoélastique de Kelvin-Voigt, sans hypothèse supplémentaire sur la vitesse ou l'accélération. Tous ces résultats considèrent la condition de contact sur une partie du bord du domaine, non pas sur une fissure. On utilise ici la même technique que dans [10] pour obtenir un résultat d'existence pour un matériau fissuré.

Dans un premier temps, on présente une méthode permettant de paramétriser les lèvres d'une fissure comprenant une ouverture. Cette paramétrisation peut être utile lorsqu'on fait correspondre les deux lèvres pour exprimer, par exemple, les conditions de contact unilatéral. Dans une deuxième partie, on introduit un problème de contact pour un milieu viscoélastique fissuré. Des conditions de contact unilatéral avec frottement de Coulomb non local sont prises en compte. L'existence d'une solution au problème est obtenue en utilisant une méthode de pénalisation.

## 2.2 Paramétrisation d'une fissure

Dans ce chapitre, on suppose que la fissure comporte une partie ouverte, c'est-à-dire un "gap" entre ses deux lèvres. On adopte donc une modélisation différente de celle considérée jusqu'ici et de celle qui suivra dans les chapitres à venir. La modélisation présentée dans ce chapitre est plus générale. Néanmoins, elle oblige à utiliser une paramétrisation de la fissure, ce qui est plus compliqué.

Pour exprimer les conditions aux limites de contact unilatéral sur une fissure quelconque comportant une partie ouverte, il est nécessaire de faire correspondre les deux lèvres de la fissure entre elles pour exprimer les conditions de contact sur un même espace. Une possibilité est d'introduire une paramétrisation de la fissure. Cette paramétrisation doit être valable si l'on considère une fissure fermée. D'autre part, cette paramétrisation va conduire à exprimer les conditions aux limites sur la fissure dans un espace de dimension  $d - 1$  si  $d$  est la dimension de l'espace.

On considère la représentation suivante d'une fissure, qui reprend les représentations de Hlaváček, Haslinger, Nečas, Lovíšek [28] et de Boieri, Gastaldi et Kinderlehrer [7], qui avaient étudié la représentation d'une zone de contact entre deux corps et exprimé les conditions de contact unilatéral entre ces deux corps. Dans  $\mathbb{R}^2$ , elle se présente comme sur la figure 2.1.

Un corps viscoélastique fissuré, suivant une loi de comportement de Kelvin-Voigt, occupe initialement le domaine  $\Omega$  avant déformation. On se place sous l'hypothèse des petites déformations. La frontière de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ , est composée de trois parties telles que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_F \cup \bar{\Gamma}$ , où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_F$  sont suffisamment régulières avec  $mes(\Gamma_D) > 0$ . Le corps est soumis à une densité de force volumique  $\mathbf{f}$ , il est fixé sur  $\Gamma_D$ , une force  $\mathbf{F}$  est imposée sur  $\Gamma_F$  et  $\Gamma$  désigne la fissure sur laquelle on considère une condition de contact unilatéral avec frottement.

On suppose, comme sur la figure 2.1, que  $\Gamma$  est composée de deux lèvres,  $\Gamma = \bar{\Gamma}^+ \cup \bar{\Gamma}^-$ ,  $\Gamma^+$  représente la lèvre "supérieure" de la fissure,  $\Gamma^-$  la lèvre "inférieure".

On suppose la décomposition suivante de  $\Omega$ , semblable à celle introduite dans le chapitre 1, pour une fissure fermée:  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ ,  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \bar{\Gamma}_V$ ,  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sont des ouverts disjoints de frontière Lipschitzienne  $\partial\Omega^+$  et  $\partial\Omega^-$  et  $\Gamma_V \subset \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$  est une interface virtuelle entre  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ . On choisit une décomposition de  $\Omega$  en  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  telle que  $mes(\Gamma_D^\alpha) > 0$ , où  $\Gamma_D^\alpha = \Gamma_D \cap \partial\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = +, -$  et on note  $\Gamma^\alpha = \Gamma \cap \partial\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = +, -$ .  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  sont des variétés régulières.

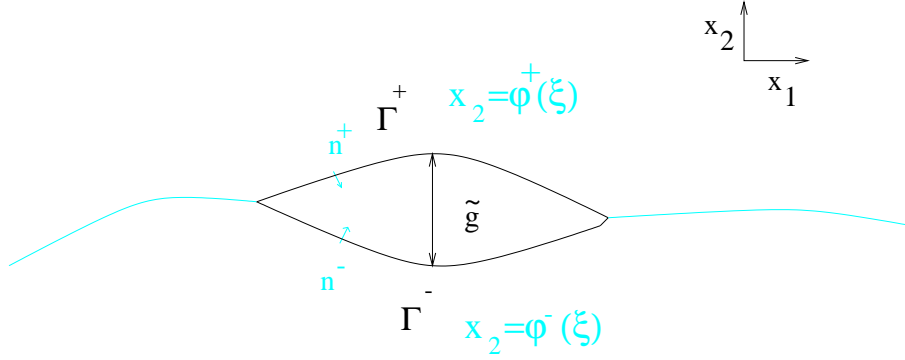


FIG. 2.1 – Représentation d'une fissure paramétrée en 2D

Nous considérons un ouvert  $\Xi$  de  $\mathbb{R}^{d-1}$  ( $d = 2, 3$ ) et on suppose que les deux lèvres de la fissure peuvent être paramétrées par deux applications de classe  $C^1$   $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  définies sur  $\Xi$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\varphi^+(\bar{x}) - \varphi^-(\bar{x}) \geq 0, \forall \bar{x} \in \Xi$ .

On définit  $\Gamma^\alpha$  comme le graphe de  $\varphi^\alpha$  sur  $\Xi$ :  $\Gamma^\alpha = \{ (\bar{x}, \varphi^\alpha(\bar{x})) ; \bar{x} \in \Xi \}$ ,  $\alpha = +, -$ .

On note  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$  la position initiale d'un point matériel quelconque du corps. Le terme  $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$  désigne la position à l'instant  $t$  de la particule initialement en  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  représente le champ des déplacements du point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  défini par  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{y}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}$ .

Soient  $\boldsymbol{\mu}^+ = (\nabla \varphi^+(\xi), -1)$  et  $\boldsymbol{\mu}^- = (\nabla \varphi^-(\xi), 1)$  les directions normales extérieures à  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  respectivement, définies sur  $\Xi$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

On suppose que la région de contact effectif à l'instant  $t$  peut être représentée implicitement par  $h(t, \mathbf{y}) = 0$  avec  $h : ]0, T[ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , pour laquelle on suppose  $\partial h / \partial y_d > 0$ . La condition de non-pénétration, au voisinage d'un point en contact, est donnée par

$$h(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}^+)) \geq 0, \forall \mathbf{x}^+ \in \Gamma^+, \quad h(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}^-)) \leq 0, \forall \mathbf{x}^- \in \Gamma^-. \quad (2.1)$$

La première inéquation signifie qu'une particule initialement sur  $\Gamma^+$  peut être ou ne pas être en contact mais n'interpénètre pas  $\Gamma^-$ .

Comme  $\partial h / \partial y_d > 0$ , alors, conformément au théorème des fonctions implicites, il existe une fonction  $\psi : ]0, T[ \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$h(t, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow y_d = \psi(t, \bar{\mathbf{y}}), \bar{\mathbf{y}} = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.2)$$

En reprenant (2.1), on a

$$\begin{aligned} h(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{x}^+)) \geq 0 &\Leftrightarrow y_d^+ - \psi(t, \bar{\mathbf{y}}^+) \geq 0, \\ \text{avec } \bar{\mathbf{y}}^+ &= (y_1(t, \mathbf{x}^+), \dots, y_{d-1}(t, \mathbf{x}^+)), \bar{\mathbf{y}}^+ = \bar{\mathbf{x}}^+ + \bar{\mathbf{u}}^+, \\ \bar{\mathbf{x}}^+ &= (x_1^+, \dots, x_{d-1}^+), \bar{\mathbf{u}}^+ = (u_1(t, \mathbf{x}^+), \dots, u_{d-1}(t, \mathbf{x}^+)). \end{aligned}$$

On applique le même raisonnement pour  $\Gamma^-$ . On considère l'abscisse  $\xi$  telle que  $\mathbf{x}^+ = (\xi, \varphi^+(\xi))$  et  $\mathbf{x}^- = (\xi, \varphi^-(\xi))$ . On obtient

$$\begin{cases} x_d^+ + u_d^+(t, \mathbf{x}^+) - \psi(t, \xi + \bar{\mathbf{u}}^+) &\geq 0, \\ -x_d^- - u_d^-(t, \mathbf{x}^-) + \psi(t, \xi + \bar{\mathbf{u}}^-) &\geq 0. \end{cases}$$

Les déplacements et leurs dérivées  $\|\mathbf{u}\|$ ,  $\|\partial\mathbf{u}/\partial t\|$ ,  $\|\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2\|$ ,  $\|\nabla\mathbf{u}\|$  sont supposés de faible amplitude (par l'hypothèse des petites perturbations). En retenant seulement les termes linéaires, on obtient

$$\begin{cases} x_d^+ + u_d^+(t, \mathbf{x}^+) - \psi(t, \xi) - \nabla\psi(t, \xi) \cdot \bar{\mathbf{u}}^+ & \geq 0, \\ -x_d^- - u_d^-(t, \mathbf{x}^-) + \psi(t, \xi) + \nabla\psi(t, \xi) \cdot \bar{\mathbf{u}}^- & \geq 0. \end{cases}$$

En additionnant les deux inégalités, on obtient

$$0 \leq \varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi) + u_d^+(t, \xi, \varphi^+(\xi)) - u_d^-(t, \xi, \varphi^-(\xi)) - \nabla\psi(t, \xi) \cdot \bar{\mathbf{u}}^+(\xi, \varphi^+(\xi)) + \nabla\psi(t, \xi) \cdot \bar{\mathbf{u}}^-(\xi, \varphi^-(\xi)).$$

On peut supposer ensuite que les gradients suivants sont approximativement identiques, ce qui signifie que les normales extérieures changent peu au cours de la déformation.

$$\nabla\varphi^+(\xi) \simeq \nabla\psi(t, \xi) \simeq \nabla\varphi^-(\xi). \quad (2.3)$$

De plus, dans la configuration initiale, (2.3) signifie que les gradients sont sensiblement identiques, ce qui veut dire qu'il existe une faible ouverture entre les deux lèvres. Néanmoins, pour les cas où l'ouverture est relativement importante, cette modélisation n'est plus bonne. Il faudrait alors introduire une région, celle où l'ouverture est relativement importante et où les gradients ne sont pas symétriques, où l'on considère des conditions aux limites de type Neumann, c'est-à-dire où les deux lèvres de la fissure ne peuvent entrer en contact, dans le cas d'une ouverture dépassant une valeur seuil. De plus, le fait d'introduire deux types de conditions aux limites sur la fissure peut ne pas être une bonne modélisation, d'un point de vue numérique. Voir dans [9] et dans [25] pour une formulation précise des conditions de contact entre deux solides en grandes déformations.

En tenant compte de (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq & \varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi) + u_d^+(t, \xi, \varphi^+(\xi)) - u_d^-(t, \xi, \varphi^-(\xi)) \\ & - \nabla\varphi^+(\xi) \cdot \bar{\mathbf{u}}^+(\xi, \varphi^+(\xi)) + \nabla\varphi^-(\xi) \cdot \bar{\mathbf{u}}^-(\xi, \varphi^-(\xi)), \end{aligned}$$

ce qui entraîne, par (2.3), si l'on introduit les normales  $\boldsymbol{\mu}^\alpha$ , (voir aussi dans [7])

$$\boldsymbol{\mu}^+(\xi) \cdot \mathbf{u}^+(t, \xi, \varphi^+(\xi)) + \boldsymbol{\mu}^-(\xi) \cdot \mathbf{u}^-(t, \xi, \varphi^-(\xi)) \leq \varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi), \quad \forall \xi \in \Xi. \quad (2.4)$$

On obtient ainsi la condition de contact unilatéral en déplacement exprimée sur l'espace de paramétrisation  $\Xi$ .

On introduit les normales unitaires extérieures à  $\Gamma^\alpha$ ,  $\mathbf{n}^\alpha : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^d$  définies par  $\mathbf{n}^\alpha = \boldsymbol{\mu}^\alpha / \|\boldsymbol{\mu}^\alpha\|$ ,  $\alpha = +, -$ . Ou plus précisément

$$\mathbf{n}^+ = \frac{(\nabla\varphi^+, -1)}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi^+\|^2}}, \quad \mathbf{n}^- = \frac{(\nabla\varphi^-, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi^-\|^2}}.$$

Une formulation équivalente à (2.4) avec  $\mathbf{n}^+$  et  $\mathbf{n}^-$  est la suivante, en utilisant (2.3),

$$\mathbf{n}^+(\xi) \cdot \mathbf{u}^+(t, \xi, \varphi^+(\xi)) + \mathbf{n}^-(\xi) \cdot \mathbf{u}^-(t, \xi, \varphi^-(\xi)) \leq \frac{\varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi)}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi^+\|^2}}, \quad \forall \xi \in \Xi. \quad (2.5)$$

On introduit la notation suivante où  $[\cdot_N]$  désigne l'opérateur

$$[v_N](\xi) = -\mathbf{n}^+(\xi) \cdot \mathbf{v}^+(\xi, \varphi^+(\xi)) - \mathbf{n}^-(\xi) \cdot \mathbf{v}^-(\xi, \varphi^-(\xi)). \quad (2.6)$$

Alors, la condition de contact unilatéral (2.5) s'exprime sous la forme suivante sur  $\Xi$ :

$$[u_N](t, \xi) \geq g, \text{ sur } ]0, T[ \times \Xi \quad \text{avec } g = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi^+\|^2}} \quad \text{et } -\tilde{g}(\xi) = \varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi).$$

La condition de contact unilatéral précédente devient,

$$[u_N] \geq g \text{ presque partout sur } ]0, T[ \times \Xi.$$

On introduit, sur l'espace de paramétrisation  $\Xi$ , pour tout  $\xi \in \Xi$ , les notations suivantes pour les composantes normales et tangentielles d'un champ de déplacement  $\mathbf{v}$  et d'un vecteur des contraintes associé au tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$ , où  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha$  est la trace de  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  issue de  $\Omega^\alpha$ , où  $\alpha = +, -$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\alpha(t, \xi) = \mathbf{u}(t, \xi, \varphi^\alpha(\xi)), \quad u_N^\alpha = u_N^\alpha(t, \xi) = \mathbf{u}^\alpha(t, \xi, \varphi^\alpha(\xi)) \cdot \mathbf{n}^\alpha(\xi), \\ \mathbf{u}_T^\alpha = \mathbf{u}_T^\alpha(t, \xi) = \mathbf{u}^\alpha - u_N^\alpha \mathbf{n}^\alpha, \\ [u_N] = [u_N](t, \xi) = -u_N^+ - u_N^-, \quad [\mathbf{u}_T] = [\mathbf{u}_T](t, \xi) = -\mathbf{u}_T^+ + \mathbf{u}_T^-, \\ \sigma_N^\alpha = \sigma_N^\alpha(t, \xi) = \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}_T^\alpha = \boldsymbol{\sigma}_T^\alpha(t, \xi) = \boldsymbol{\sigma}^\alpha \mathbf{n}^\alpha - \sigma_N^\alpha \mathbf{n}^\alpha. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Dans la suite, on va s'intéresser à un problème dynamique de contact unilatéral avec frottement non local en viscoélasticité. On va introduire un problème approché (pénalisé), comme l'ont fait J.U. Kim [34], J. Muñoz-Rivera et R. Racke [41], M. Cocou et J.M. Ricaud [12], M. Cocou [10] et on va montrer qu'une sous-suite de solutions pénalisées converge faiblement vers une solution du problème de contact unilatéral avec frottement non local.

## 2.3 Étude d'un problème viscoélastique de contact dans un milieu fissuré

On présente un problème dynamique de contact en viscoélasticité. On suppose le matériau fissuré, et on considère, sur la fissure, à la fois une condition de contact unilatéral ainsi qu'une condition de frottement non local. Cette étude est considérée dans [13] où l'on décrit les principales étapes de la démonstration.

### 2.3.1 Formulation classique du problème

Dans ce chapitre, on utilise la notation  $\dot{\mathbf{u}}$  pour la vitesse au lieu de  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  et  $\ddot{\mathbf{u}}$  pour l'accélération au lieu de  $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ . La formulation classique du problème est la suivante.

**Problème  $P_0$ :** Trouver  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  tel que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_1$  dans  $\Omega$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) \text{ sur } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma_D, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F} \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma_F, \\ [u_N] \geq g, \quad \sigma_N^- = \sigma_N^+ \leq 0, \quad \sigma_N^- ([u_N] - g) = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Xi, \\ \boldsymbol{\sigma}_T^+ = -\boldsymbol{\sigma}_T^- \text{ sur } ]0, T[ \times \Xi, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T^+\| \leq \mu |(\mathcal{R} \boldsymbol{\sigma})_N^+| \text{ et } \|\boldsymbol{\sigma}_T^+\| < \mu |(\mathcal{R} \boldsymbol{\sigma})_N^+| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_T] = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T^+\| \leq \mu |(\mathcal{R} \boldsymbol{\sigma})_N^+| \text{ et } \|\boldsymbol{\sigma}_T^+\| = \mu |(\mathcal{R} \boldsymbol{\sigma})_N^+| \Rightarrow \exists \alpha \geq 0, [\dot{\mathbf{u}}_T] = \alpha \boldsymbol{\sigma}_T^+. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Pour simplifier, on note ici  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$  mais la seule variable considérée est le déplacement  $\mathbf{u}$ . On retrouve, dans la première équation, l'équation du mouvement, pour laquelle on considère, dans la suite,  $\rho = 1$ . On trouve ensuite la loi de comportement du matériau, de type Kelvin-Voigt, où  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des tenseurs du quatrième ordre, satisfaisant les propriétés de symétrie et d'ellipticité habituelles (1.2). Les conditions aux limites sur  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_F$  sont données sur la deuxième ligne. Puis les conditions de contact unilatéral sur la fissure sont données. Les relations suivantes correspondent à la loi de frottement de Coulomb. Le terme  $\mu \in L^\infty(\Xi)$  désigne le coefficient de frottement, qui est supposé indépendant du temps.  $\mathcal{R}$  est un terme régularisant, qui va être détaillé ensuite.

### 2.3.2 Formulation variationnelle primale

Introduisons deux espaces de Hilbert  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{V}$  munis respectivement du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et le convexe  $K$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [L^2(\Omega)]^d, \quad \mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_D\}, \\ \mathbf{K} &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}; [v_N] \geq g \text{ p.p. sur } \Xi\}. \end{aligned}$$

On suppose  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{V}$  et  $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0,T; \mathbf{M})$ ,  $\mathbf{F} \in W^{1,\infty}(0,T; [L^2(\Gamma_F)]^d)$ ,  $g \in H_{00}^{1/2}(\Xi)$ ,  $g \leq 0$  p.p. sur  $\Xi$ ,  $\mu \in L^\infty(\Xi)$ ,  $\mu \geq 0$  p.p. sur  $\Xi$ . Le cas particulier  $g = 0$  correspond à une fissure fermée.

La forme  $c$  est une forme bilinéaire déjà définie dans (1.6). On définit sur  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$  la forme bilinéaire suivante, correspondant au tenseur de viscosité:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

On suppose, dans ce chapitre, une régularité plus importante pour les tenseurs  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  que celle du chapitre 1:  $\mathcal{B}_{ijkl}, \mathcal{C}_{ijkl} \in W^{1,\infty}(0,T; \mathbb{R}^d)$ ,  $\forall i, j, k, l = 1, \dots, d$ .

On considère  $\mathbf{L}$  comme un élément de  $W^{1,\infty}(0,T; \mathbf{V})$  tel que

$$\langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

On suppose la condition de compatibilité suivante sur les données initiales.

$$\exists \mathbf{l} \in \mathbf{M}, \quad (\mathbf{l}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{L}(0), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (2.10)$$

#### 2.3.2.1 Propriétés de l'opérateur de régularisation

On définit  $\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow [H^1(\Omega)]^{d^2}$  comme une régularisation linéaire et continue de  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Cette régularisation vérifie la relation suivante:

$$\exists C > 0, \quad \|(\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|_{\mathbf{V}} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{M}} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{M}}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.11)$$

$$\text{et on suppose ici } ((\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1))_N^+ = 0.$$

On utilise la régularisation suivante, donnée une première fois dans [35] et déjà employée dans [10], où  $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\psi \geq 0$ ,  $E : [H^1(\Omega)]^d \rightarrow [H^1(\mathbb{R}^d)]^d$  est une extension de  $\Omega$  sur  $\mathbb{R}^d$  qui préserve la norme de  $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d$  et  $*$  représente le produit de convolution sur  $\mathbb{R}^d$ . On note alors  $(\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  le tenseur obtenu qui vérifie:

$$(\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{C} \nabla E(\mathbf{u}) + \mathcal{B} \nabla E(\mathbf{v})) * \psi.$$

Calculons une composante quelconque de  $(\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

$$((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_{k,l}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{v})_{k,l}(\mathbf{y})) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy.$$

On a la relation suivante:

$$\mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_{k,l}(\mathbf{y})(\mathbf{x}) = (\mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_k(\mathbf{y}))_{,l} - \mathcal{C}_{ijkl,l}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_k(\mathbf{y}).$$

En utilisant la relation précédente pour le tenseur  $\mathcal{C}$  et une relation semblable pour  $\mathcal{B}$ , on obtient

$$\begin{aligned} ((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{ij}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} [(\mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_k(\mathbf{y}) + \mathcal{B}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{v})_k(\mathbf{y}))_{,l} \\ &\quad - (\mathcal{C}_{ijkl,l}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_k(\mathbf{y}) + \mathcal{B}_{ijkl,l}(\mathbf{y})(E\mathbf{v})_k(\mathbf{y}))] \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy, \\ ((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{ij}(\mathbf{x}) &= - \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{C}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_k(\mathbf{y}) + \mathcal{B}_{ijkl}(\mathbf{y})(E\mathbf{v})_k(\mathbf{y})) \psi_{,i}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &\quad + (\mathcal{C}_{ijkl,l}(\mathbf{y})(E\mathbf{u})_k(\mathbf{y}) + \mathcal{B}_{ijkl,l}(\mathbf{y})(E\mathbf{v})_k(\mathbf{y})) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy. \end{aligned}$$

On peut remarquer la linéarité de  $(\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  par rapport à  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . De plus, l'estimation (2.11) est vérifiée car la dérivée en espace de  $(\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  porte sur  $\psi$  et non pas sur  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

### 2.3.2.2 Formulation variationnelle

On introduit l'application  $J$  comme suit:

$$J : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}, J(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Xi} \mu |((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}, \mathbf{v}))_N^+| \|\mathbf{w}_T\| d\xi, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}. \quad (2.12)$$

On peut donner alors une formulation variationnelle de (2.8).

**Problème  $P_1$ :** Trouver  $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}) \cap C^1([0, T]; [H^{-1/2}(\Omega)]^d)$ , tel que  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{K}$  pour tout  $t$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{\mathbf{u}}(T), \mathbf{v}(T) - \mathbf{u}(T) \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}, \mathbf{H}^{1/2}} - (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}(0) - \mathbf{u}_0) \\ + \int_0^T \{ -(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + J(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \} dt \\ \geq \int_0^T \langle \mathbf{L}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle dt + \int_0^T \left\{ -\|\dot{\mathbf{u}}\|_M^2 + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) + J(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) \right\} dt \\ \forall \mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap W^{1,2}(0, T; \mathbf{M}), \mathbf{v}(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p. } t \in ]0, T[. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

On peut prouver que le problème variationnel (2.13) est formellement équivalent au problème (2.8) (voir [17, 33], pour d'autres inéquations variationnelles). Présentons quelques éléments de la démonstration. Il est clair que (2.8) implique (2.13). Réciproquement, en remplaçant dans (2.13)  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{u} \pm \boldsymbol{\varphi}$  où  $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{D}(]0, T[ \times \Omega)]^d$ , on retrouve les équations de (2.8) à l'intérieur de  $\Omega$ . En supposant que  $\mathbf{u}$  est suffisamment régulier et en utilisant les formules de Green, on établit que les conditions aux limites du problème (2.8) sont vérifiées sur  $\Gamma_F$  et  $\Xi$ .

### 2.3.2.3 Formulation variationnelle primale avec décomposition

On utilise ensuite la décomposition de  $\Omega$  entre  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , décrite auparavant. Cette décomposition permet de restreindre l'analyse variationnelle à des domaines plus réguliers que  $\Omega$ , pour lesquels, par exemple, l'inégalité de Korn peut s'appliquer plus facilement. Pour  $\mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^d$ , on pose  $\hat{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}^+, \mathbf{w}^-)$ , où  $\mathbf{w}^\alpha$  est la restriction de  $\mathbf{w}$  sur  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = +, -$ .

Avant d'introduire un nouveau problème posé sur  $\Omega^+ \times \Omega^-$ , on définit plusieurs espaces fonctionnels utilisant la décomposition de  $\Omega$ , avec  $\alpha = +, -$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^\alpha &= [L^2(\Omega^\alpha)]^d, \mathbf{V}^\alpha = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega^\alpha)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_D^\alpha\}, \\ \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}^+ \times \mathbf{M}^-, \hat{\mathbf{V}} = \{\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-) \in \mathbf{V}^+ \times \mathbf{V}^-; \mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- \text{ p.p. sur } \Gamma_V\}. \end{aligned}$$

L'espace  $\hat{\mathbf{M}}$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)_{\hat{\mathbf{M}}}$  et de la norme du produit cartésien  $\|\cdot\|_{\hat{\mathbf{M}}}$ . L'espace  $\hat{\mathbf{V}}$ , qui est un sous-ensemble fermé de  $\mathbf{V}^+ \times \mathbf{V}^-$ , est un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{\mathbf{V}}}$  et de la norme du produit cartésien  $\|\cdot\|_{\hat{\mathbf{V}}}$ . Il existe une bijection entre les espaces  $\mathbf{V}$  et  $\hat{\mathbf{V}}$  (voir dans [24]). Nous avons la proposition suivante:

**Proposition 2.1** *L'application  $\Psi : \mathbf{V} \rightarrow \hat{\mathbf{V}}$ , définie par  $\Psi \mathbf{v} = (\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-)$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , où  $\mathbf{v}^+$  et  $\mathbf{v}^-$  sont les restrictions de  $\mathbf{v}$  sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , est un isomorphisme. La propriété suivante est satisfaite:  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  si et seulement si  $\mathbf{v}^+ \in \mathbf{V}^+$  et  $\mathbf{v}^- \in \mathbf{V}^-$  tel que  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-$  p.p. sur  $\Gamma_V$ .*

### Démonstration

$\Psi$  est bien définie car, pour tout élément  $\mathbf{v}$  de  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-$  p.p sur  $\Gamma_V$ , sinon il ne serait pas dans  $[H^1(\Omega)]^d$ , et  $\Psi$  est linéaire, continue sur  $\mathbf{V}$  et  $\|\Psi \mathbf{v}\|_{\hat{\mathbf{V}}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$ . Ainsi,  $\Psi$  est une isométrie entre  $\mathbf{V}$  et  $\hat{\mathbf{V}}$ .

Ayant  $\mathbf{v}^+$  et  $\mathbf{v}^-$ , l'inverse est défini par  $\mathbf{v}$  tel que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+$  sur  $\Omega^+$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^-$  sur  $\Omega^-$ . Comme  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-$  p.p. sur  $\Gamma_V$ ,  $\mathbf{v}$  appartient à  $[H^1(\Omega)]^d$ . ■

On définit  $\hat{\mathbf{K}} \subset \hat{\mathbf{V}}$  par  $\hat{\mathbf{K}} = \Psi(\mathbf{K}) = \{\Psi \mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ et } [v_N] \geq g \text{ p.p. sur } \Xi\}$ . Ainsi, pour tout  $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{\mathbf{K}}$ , on définit  $[\hat{v}_N] = [v_N]$  et  $[\hat{v}_T] = [v_T]$  où  $\Psi \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}$ . On adopte les notations suivantes pour des espaces de Sobolev et pour des produits de dualité:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s &= [H^s(\Omega^+)]^d \times [H^s(\Omega^-)]^d, \forall s \in \mathbb{R}. \\ \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle_{-s,s} &= \langle \mathbf{u}^+, \mathbf{v}^+ \rangle_{\mathbf{H}^{-s}(\Omega^+), \mathbf{H}^s(\Omega^+)} + \langle \mathbf{u}^-, \mathbf{v}^- \rangle_{\mathbf{H}^{-s}(\Omega^-), \mathbf{H}^s(\Omega^-)}, \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{-s}, \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^s. \end{aligned}$$

On définit ensuite les applications suivantes.

$$\begin{aligned} \hat{b}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b^+(\mathbf{u}^+, \mathbf{v}^+) + b^-(\mathbf{u}^-, \mathbf{v}^-), \\ \text{où } b^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}^\alpha) &= \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\alpha) dx, \forall \mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}^\alpha \in \mathbf{V}^\alpha \times \mathbf{V}^\alpha, \alpha = +, -, \\ \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) &= c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c^+(\mathbf{u}^+, \mathbf{v}^+) + c^-(\mathbf{u}^-, \mathbf{v}^-), \\ \text{où } c^\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}^\alpha) &= \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\alpha) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\alpha) dx, \forall \mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}^\alpha \in \mathbf{V}^\alpha \times \mathbf{V}^\alpha, \alpha = +, -, \\ \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}) &= \int_{\Xi} \mu |((\mathcal{R}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{u}, \mathbf{v}))_N^+| \|\mathbf{w}_T\| d\xi, \\ \langle \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle_{\hat{\mathbf{V}}} &= \langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle, (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{v}})_{\hat{\mathbf{M}}} = (\mathbf{l}, \mathbf{v}) \\ \text{pour tous } \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}} &\in \hat{\mathbf{V}}, \text{ où } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ satisfont } \Psi \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \Psi \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}, \Psi \mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La condition de compatibilité (2.10) peut être réécrite de la manière suivante:

$$\exists \hat{\mathbf{l}} \in \hat{\mathbf{M}}, (\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{v}})_{\hat{\mathbf{M}}} + \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{v}}) + \hat{b}(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{v}}) = \langle \hat{\mathbf{L}}(0), \hat{\mathbf{v}} \rangle_{\hat{\mathbf{V}}}, \forall \hat{\mathbf{v}} \in \hat{\mathbf{V}}. \tag{2.15}$$

On introduit le problème auxiliaire suivant qui utilise la décomposition précédente:



**Problème  $\hat{P}_1$ :** Trouver  $\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) \in W^{1,2}(0,T; \hat{\mathbf{V}}) \cap C^1([0,T], \mathbf{H}^{-1/2})$  tel que  $\hat{\mathbf{u}}(t) \in \hat{\mathbf{K}}$  pour tout  $t \in ]0, T[$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{\mathbf{u}}(T), \hat{\mathbf{v}}(T) - \hat{\mathbf{u}}(T) \rangle_{-1/2, 1/2} - (\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{v}}(0) - \hat{\mathbf{u}}_0)_{\hat{\mathbf{M}}} \\ + \int_0^T \left\{ -(\dot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{v}}})_{\hat{\mathbf{M}}} + \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) + \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{v}}}) + \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{v}}} + \dot{\hat{\mathbf{u}}} - \dot{\hat{\mathbf{u}}}) \right\} dt \\ \geq \int_0^T \langle \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\hat{\mathbf{V}}} dt + \int_0^T \left\{ -\|\dot{\hat{\mathbf{u}}}\|_{\hat{\mathbf{M}}}^2 + \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) + \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}) + \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}) \right\} dt \\ \forall \hat{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \hat{\mathbf{V}}) \cap W^{1,2}(0, T; \hat{\mathbf{M}}), \hat{\mathbf{v}}(t) \in \hat{\mathbf{K}} \text{ p.p. } t \in ]0, T[. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

La proposition suivante indique que les problèmes  $P_1$  et  $\hat{P}_1$  sont équivalents.

**Proposition 2.2** *Sous les hypothèses précédentes, les problèmes  $P_1$  et  $\hat{P}_1$  sont équivalents au sens suivant: si  $\mathbf{u}$  est une solution de  $P_1$ , alors  $\Psi \mathbf{u} = (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)$  est une solution de  $\hat{P}_1$ , où  $\mathbf{u}^+$  et  $\mathbf{u}^-$  sont les restrictions de  $\mathbf{u}$  sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ .*

*Réciproquement, si  $\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)$  est une solution de  $\hat{P}_1$ , alors  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ , avec  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+$  presque partout sur  $\Omega^+$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^-$  presque partout sur  $\Omega^-$ , est une solution de  $P_1$ .*

**Remarque 2.1** *Une solution  $\mathbf{u}$  du problème  $P_1$  ne dépend pas du choix de  $\Gamma_V$  et une solution de  $\hat{P}_1$  vérifie  $\sigma^+ \mathbf{n}^+ = -\sigma^- \mathbf{n}^-$  sur  $\Gamma_V$ .*

Nous allons prouver l'existence d'une solution au problème  $\hat{P}_1$  par une méthode de pénalisation.

### 2.3.3 Introduction d'un problème pénalisé

On considère un problème de contact pénalisé dont une solution vérifie les mêmes équations dans  $\Omega$  et les mêmes conditions aux limites sur  $\Gamma_D, \Gamma_F$  que précédemment. Seules les conditions aux limites de contact sur  $\Gamma$  sont différentes. En comparaison avec le problème de contact unilatéral, une interpénétration des deux lèvres de la fissure est autorisée et un terme de pénalisation apparaît. C'est un problème de compliance normale avec un exposant égal à un, du même type que celui considéré par J.A.C. Martins et J.T. Oden [37]. En notant par  $\mathbf{u}_\varepsilon$  une solution pénalisée, les conditions de contact sont les suivantes, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^+(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) = \sigma_N^-(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} ([u_{\varepsilon N}] - g)_- \text{ sur } \Xi, \text{ où } r_- = \max(0, -r), \\ \sigma_T^+(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) = -\sigma_T^-(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon), \\ \|\sigma_T^+(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon)\| \leq \mu |((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon))_N^+| \text{ et} \\ \|\sigma_T^+(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon)\| < \mu |((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon))_N^+| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon T}] = \mathbf{0}, \\ \|\sigma_T^+(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon)\| = \mu |((\mathcal{R}\sigma)(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon))_N^+| \Rightarrow \exists \alpha \geq 0, [\dot{\mathbf{u}}_{\varepsilon T}] = \alpha \sigma_T^+(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon). \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Pour écrire la formulation variationnelle associée, on définit l'application  $\Phi_\varepsilon : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Xi} ([v_N] - g)_- [w_N] ds, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ .

Une formulation variationnelle équivalente à (2.17) est la suivante:

**Problème  $P_2^\varepsilon$ :** Trouver  $\mathbf{u}_\varepsilon \in W^{1,2}(0,T; \mathbf{V}) \cap W^{2,2}(0,T; \mathbf{M})$  tel que  $\mathbf{u}_\varepsilon(0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(0) = \mathbf{u}_1$  et

$$\begin{cases} (\ddot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + c(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + b(\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) \\ + J(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{w}) - J(\mathbf{u}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon) \geq \langle \mathbf{L}, \mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon \rangle, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \text{ p.p. } t \in ]0, T[. \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour montrer l'existence d'une solution au problème  $P_2^\varepsilon$ , nous allons étudier un problème abstrait.

### 2.3.4 Analyse d'une inéquation d'évolution abstraite

On considère deux espaces de Hilbert  $(H, |\cdot|)$  et  $(V, \|\cdot\|)$  tels que  $V \subset H$ ,  $V$  est dense dans  $H$  et l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte. On note par  $(\cdot, \cdot)$ , respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , le produit scalaire sur  $H$ , respectivement  $V$ . On introduit aussi l'espace  $\mathcal{W}$  et l'ensemble  $\mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= W^{2,2}(0,T; H) \cap W^{1,2}(0,T; V), \\ \mathcal{K} &= \{v \in \mathcal{W}; v(0) = u_0, \dot{v}(0) = u_1\}, \text{ où } u_0 \in V, u_1 \in V. \end{aligned}$$

On suppose que  $a$  et  $b$  sont deux formes bilinéaires, continues, symétriques et coercives sur  $V^2$ . Elles vérifient

$$\begin{aligned} \exists m_a, m_b > 0, a(u, v) \leq m_a \|u\| \|v\|, b(u, v) \leq m_b \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V, \\ \exists A, B > 0, a(v, v) \geq A \|v\|^2, b(v, v) \geq B \|v\|^2, \forall v \in V. \end{aligned}$$

Soit  $\phi : [0, T] \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}$  une application faiblement continue sur  $V$ .

$$\bullet \phi(t, u, v, \cdot) \text{ est sous-additive : } \phi(t, u, v, w_1 + w_2) \leq \phi(t, u, v, w_1) + \phi(t, u, v, w_2), \quad (2.19)$$

$$\bullet \phi(t, u, v, \theta w) = \theta \phi(t, u, v, w), \forall t \in [0, T], \forall u, v, w, w_{1,2} \in V, \forall \theta \geq 0, \quad (2.20)$$

$$\bullet \text{ On suppose aussi } \phi(\cdot, 0, 0, \cdot) = 0, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \bullet \exists \eta_0 > 0, \text{ tel que, } \forall t_{1,2} \in [0, T], \forall u_{1,2}, v_{1,2}, w \in V, \\ |\phi(t_1, u_1, v_1, w) - \phi(t_2, u_2, v_2, w)| \\ \leq \eta_0 (|t_1 - t_2| + |\beta(u_1) - \beta(u_2)| + |v_1 - v_2|) \|w\|, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bullet \exists \eta > 0, \text{ tel que, } \forall t_{1,2} \in [0, T], \forall u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2} \in V, \\ |\phi(t_1, u_1, v_1, w_1) - \phi(t_1, u_1, v_1, w_2) + \phi(t_2, u_2, v_2, w_2) - \phi(t_2, u_2, v_2, w_1)| \\ \leq \eta (|t_1 - t_2| + \|u_1 - u_2\| + |v_1 - v_2|) \|w_1 - w_2\|. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On suppose aussi que  $L \in W^{1,\infty}(0,T; V)$  et on note  $C_L$  la constante de Lipschitz de  $L$ .

On suppose la condition de compatibilité sur les données initiales:

$$\exists l \in H, (l, w) + a(u_0, w) + b(u_1, w) + \phi(0, u_0, u_1, w) = \langle L(0), w \rangle, \forall w \in V. \quad (2.24)$$

On considère le problème suivant.

**Problème  $\mathcal{P}$ :** Trouver  $u \in \mathcal{K}$  tel que, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ ,

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + \phi(t, u(t), \dot{u}(t), v) \\ - \phi(t, u(t), \dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq \langle L(t), v - \dot{u}(t) \rangle \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dans la suite, on utilisera plusieurs fois le théorème de compacité suivant de J. Simon [51].

**Théorème 2.1** Soient  $X$ ,  $U$  et  $Y$  trois espaces de Banach tels que  $X \subset U \subset Y$  avec injection compacte de  $X \rightarrow U$ .

Soit  $\mathcal{F}$  borné de  $L^p(0,T;X)$ , où  $1 \leq p < \infty$ , et  $\partial\mathcal{F}/\partial t = \{\dot{f}; f \in \mathcal{F}\}$  borné dans  $L^1(0,T;Y)$ . Alors  $\mathcal{F}$  est relativement compacte dans  $L^p(0,T;U)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  borné de  $L^\infty(0,T;X)$  et  $\partial\mathcal{F}/\partial t$  borné dans  $L^r(0,T;Y)$ , où  $r > 1$ . Alors  $\mathcal{F}$  est relativement compacte dans  $C([0,T];U)$ .

Pour prouver qu'une solution du problème  $\mathcal{P}$  existe, on utilise une approche incrémentale, du même type que dans [21, 46]. On utilisera les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{T}{n}, \quad t^j = j \Delta t, \quad L^j = L(t^j), \quad d^j = \frac{u^{j+1} - u^{j-1}}{2\Delta t}, \quad \forall 1 \leq j \leq n-1, \\ \delta^j &= \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t}, \quad \gamma^j = \frac{\delta^j - \delta^{j-1}}{\Delta t} = \frac{u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}}{\Delta t^2}, \\ u^0 &= u_0, \quad \delta^0 = u_1, \end{aligned}$$

On a alors

$$u^1 = u_0 + \Delta t u_1, \quad \gamma^1 = \frac{\delta^1 - \delta^0}{\Delta t} = \frac{\frac{u^2 - u^1}{\Delta t} - u_1}{\Delta t}.$$

Nous considérons la suite de problèmes incrémentaux, de  $j = 1$  à  $n-1$ ,

**Problème  $\mathcal{P}_n^{j+1}$**  : Trouver  $u^{j+1} \in V$ , pour  $1 \leq j \leq n-1$ , tel que

$$\begin{aligned} (\gamma^j, w - d^j) + a(u^{j+1}, w - d^j) + b(d^j, w - d^j) + \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, w) \\ - \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^j) \geq \langle L^j, w - d^j \rangle, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Lemme 2.1** Chaque problème  $\mathcal{P}_n^{j+1}$  possède une solution unique  $u^{j+1}$  si  $\Delta t$  est suffisamment petit.

**Démonstration**

Chaque problème  $\mathcal{P}_n^{j+1}$  peut se réécrire de la manière suivante:

Trouver  $u^{j+1} \in V$  tel que

$$\begin{cases} (\frac{u^{j+1}}{\Delta t^2}, w - u^{j+1}) + a(u^{j+1}, w - u^{j+1}) + b(\frac{u^{j+1}}{2\Delta t}, w - u^{j+1}) \\ + \tilde{\phi}_j(u^{j+1}, w) - \tilde{\phi}_j(u^{j+1}, u^{j+1}) \geq \langle \tilde{L}^j, w - u^{j+1} \rangle, \quad \forall w \in V. \end{cases} \quad (2.27)$$

On définit  $\tilde{L}^j \in V'$  pour tout  $j \geq 1$  par  $\langle \tilde{L}^j, w \rangle = (\frac{2u^j - u^{j-1}}{\Delta t^2}, w) + b(\frac{u^{j-1}}{\Delta t^2}, w) + \langle L^j, w \rangle$ ,  $\forall w \in V$ ,

et  $\tilde{\phi}_j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\tilde{\phi}_j(v, w) = \phi(t^j, v, \frac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}, w - u^{j-1})$ .

Pour tout  $v \in V$ ,  $\tilde{\phi}_j(v, \cdot)$  est convexe à cause des propriétés de sous-additivité de  $\phi$  (2.19)-(2.20) et  $\tilde{\phi}_j(v, \cdot)$  est continue sur  $V$  par (2.21) et (2.23). En fait, par (2.21) et (2.23), on obtient que  $\tilde{\phi}_j$  est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_j(v, v_1) - \tilde{\phi}_j(v, v_2)| &= |\phi(t^j, v, \frac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}, v_1 - u^{j-1}) - \phi(t^j, v, \frac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}, v_2 - u^{j-1}) \\ &+ \phi(t^j, 0, 0, v_2 - u^{j-1}) - \phi(t^j, 0, 0, v_1 - u^{j-1})| \leq \eta (||v|| + |\frac{v - u^{j-1}}{2\Delta t}|) ||v_1 - v_2||, \quad \forall v_{1,2} \in V. \end{aligned}$$

Nous avons aussi la propriété suivante sur  $\tilde{\phi}_j$ , issue de (2.23),

$$\begin{aligned} & |\tilde{\phi}_j(u_1, v_1) - \tilde{\phi}_j(u_1, v_2) + \tilde{\phi}_j(u_2, v_2) - \tilde{\phi}_j(u_2, v_1)| \\ & \leq \eta \left(1 + \frac{1}{2\Delta t}\right) \|u_2 - u_1\| \|v_2 - v_1\|, \forall u_{1,2}, v_{1,2} \in V. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons le voir, l'inéquation (2.27) est une inéquation elliptique implicite. Nous savons qu'une solution unique existe si l'inégalité suivante est satisfaite (voir dans [45] par exemple):

$$\eta \left(1 + \frac{1}{2\Delta t}\right) < \frac{1}{\Delta t^2} + A + \frac{B}{2\Delta t}. \quad (2.28)$$

Cette condition est satisfaite dès que  $\Delta t$  est suffisamment petit, par exemple, si  $\Delta t < 4/(\eta - B)$  si  $\eta > A, B$ . ■

**Lemme 2.2** *Sous la condition de compatibilité (2.24) et, éventuellement, une condition sur  $\Delta t$ , le terme  $\gamma^1$  est borné dans  $H$  et le terme  $\Delta t \gamma^1$  est borné dans  $V$ .*

### Démonstration

On remplace  $w$  par  $\delta^0$  dans (2.26) pour  $j = 1$ , on remplace  $w$  par  $d^1 - \delta^0$  dans (2.24). D'où,

$$\begin{aligned} & (\gamma^1, d^1 - \delta^0) + a(u^2 - u_0, d^1 - \delta^0) + b(d^1 - \delta^0, d^1 - \delta^0) \\ & - \phi(t^1, u^2, d^1, \delta^0) + \phi(t^1, u^2, d^1, d^1) - \phi(0, u_0, \delta^0, d^1 - \delta^0) \\ & \leq \langle L^1 - L^0, d^1 - \delta^0 \rangle + (l, d^1 - \delta^0). \end{aligned}$$

On utilise  $\phi(0, u_0, \delta^0, d^1 - \delta^0) = \phi(0, u_0, \delta^0, d^1) - \phi(0, u_0, \delta^0, \delta^0)$ ,  $d^1 - \delta^0 = \frac{\Delta t}{2} \gamma^1$  et  $u^2 = u_0 + 2\Delta t \delta^0 + \Delta t^2 \gamma^1$ .

On obtient, grâce à (2.23),

$$\begin{aligned} |\gamma^1|^2 + \frac{\Delta t}{2} B \|\gamma^1\|^2 + \Delta t^2 A \|\gamma^1\|^2 & \leq (\eta + C_L) \Delta t \|\gamma^1\| + 2\Delta t (\eta + m_a) \|\delta^0\| \|\gamma^1\| \\ & \quad + \eta \Delta t^2 \|\gamma^1\|^2 + \frac{\eta}{2} \Delta t |\gamma^1| \|\gamma^1\| + |l| |\gamma^1|. \end{aligned}$$

On emploie l'inégalité de Young avec des constantes  $c_{1,2,3,4} > 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} (1 - c_1 \frac{\eta^2}{4} - c_2) |\gamma^1|^2 + A \Delta t^2 \|\gamma^1\|^2 + \Delta t \left( \frac{B}{2} - \Delta t (c_3 + c_4 + \eta + \frac{1}{4c_1}) \right) \|\gamma^1\|^2 \\ \leq \frac{(\eta + C_L)^2}{4c_3} + \frac{(\eta + m_a)^2}{c_4} \|\delta^0\|^2 + \frac{|l|^2}{4c_2}. \end{aligned}$$

On doit alors choisir  $c_{3,4} > 0$  et  $c_1, c_2$  tels que

$$1 - c_1 \frac{\eta^2}{4} - c_2 > 0 \Rightarrow 0 < c_1 < \frac{4}{\eta^2}, \quad 0 < c_2 < 1.$$

Si  $\Delta t$  satisfait  $\left(\frac{B}{2} - \Delta t (c_3 + c_4 + \eta + \frac{1}{4c_1})\right) > 0$ , ce qui entraîne  $\Delta t < \frac{B}{2\eta}$ , et (2.28),  $\gamma_1$  et  $\Delta t \gamma_1$  sont bornés indépendamment de  $\Delta t$  dans  $H$  et  $V$ , respectivement. ■

On peut remarquer que, par le lemme 2.2, les termes  $d^1$  et  $\delta^1$  sont bornés dans  $V$  indépendamment de  $\Delta t$  car  $d^1 = \delta^0 + (\Delta t/2) \gamma^1$  et  $\delta^1 = \delta^0 + \Delta t \gamma^1$ , si  $\Delta t$  est suffisamment petit.

**Lemme 2.3** *Les termes  $\gamma^i$  sont bornés dans  $H$ ,  $\delta^i$  sont bornés dans  $V$  pour  $2 \leq i \leq n - 1$ , si  $\Delta t$  est suffisamment petit.*

### Démonstration

En remplaçant  $w$  par  $d^{j+1}$  dans (2.26) écrit pour  $j$ , on obtient

$$\begin{aligned} & (\gamma^j, d^{j+1} - d^j) + a(u^{j+1}, d^{j+1} - d^j) + b(d^j, d^{j+1} - d^j) \\ & + \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^{j+1}) - \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^j) \geq \langle L^j, d^{j+1} - d^j \rangle. \end{aligned}$$

En remplaçant  $w$  par  $d^j$  dans (2.26) écrit pour  $j + 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} & (\gamma^{j+1}, d^j - d^{j+1}) + a(u^{j+2}, d^j - d^{j+1}) + b(d^{j+1}, d^j - d^{j+1}) \\ & + \phi(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^j) - \phi(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1}) \geq \langle L^{j+1}, d^j - d^{j+1} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut déduire en ajoutant ces deux inégalités, sachant que  $2(d^{j+1} - d^j) = \delta^{j+1} - \delta^{j-1}$ ,

$$\begin{aligned} & (\gamma^{j+1} - \gamma^j, d^{j+1} - d^j) + \frac{\Delta t}{2} a(\delta^{j+1}, \delta^{j+1} - \delta^{j-1}) + b(d^{j+1} - d^j, d^{j+1} - d^j) \\ & - \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^{j+1}) + \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^j) - \phi(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^j) \\ & + \phi(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1}) \leq \langle L^{j+1} - L^j, d^{j+1} - d^j \rangle. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse précédente sur  $\phi$  donnée dans (2.23) et comme  $d^{j+1} - d^j = (\Delta t/2)(\gamma^j + \gamma^{j+1})$ ,  $2(d^{j+1} - d^j) = \delta^{j+1} - \delta^{j-1}$ , on a

$$\begin{aligned} & |\phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^{j+1}) - \phi(t^j, u^{j+1}, d^j, d^j) + \phi(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^j) - \phi(t^{j+1}, u^{j+2}, d^{j+1}, d^{j+1})| \\ & \leq \frac{\Delta t^2}{2} \eta \left( 1 + \|\delta^{j+1}\| + \frac{|\gamma^{j+1} + \gamma^j|}{2} \right) \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|. \end{aligned}$$

On utilise le fait que  $L$  est Lipschitz continue. On obtient

$$\begin{aligned} & (\gamma^{j+1} - \gamma^j, \gamma^{j+1} + \gamma^j) + a(\delta^{j+1}, \delta^{j+1} - \delta^{j-1}) + \frac{\Delta t}{2} b(\gamma^{j+1} + \gamma^j, \gamma^{j+1} + \gamma^j) \\ & \leq (C_L + \eta) \Delta t \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\| + \eta \Delta t \left( \|\delta^{j+1}\| + \frac{|\gamma^{j+1} + \gamma^j|}{2} \right) \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|. \end{aligned}$$

On emploie l'inégalité de Young avec  $k_{2,3,4} > 0$  quelconques

$$\begin{aligned} \eta \frac{\Delta t}{2} |\gamma^{j+1} + \gamma^j| \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\| & \leq \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_2} |\gamma^{j+1} + \gamma^j|^2 + k_2 \Delta t \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|^2, \\ \eta \Delta t \|\delta^{j+1}\| \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\| & \leq \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_3} \|\delta^{j+1}\|^2 + k_3 \Delta t \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|^2, \\ (\eta + C_L) \Delta t \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\| & \leq \frac{(\eta + C_L)^2}{4k_4} \Delta t + k_4 \Delta t \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|^2. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & |\gamma^{j+1}|^2 - |\gamma^j|^2 + a(\delta^{j+1}, \delta^{j+1} - \delta^{j-1}) + \Delta t \left( \frac{B}{2} - k_2 - k_3 - k_4 \right) \|\gamma^{j+1} + \gamma^j\|^2 \\ & \leq \frac{\Delta t}{4k_4} (C_L + \eta)^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_3} \|\delta^{j+1}\|^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_2} |\gamma^j + \gamma^{j+1}|^2. \end{aligned}$$

On somme de  $j = 1$  à  $i - 1$  et on utilise la relation

$$\sum_{j=1}^{i-1} a(\delta^{j+1}, \delta^{j+1} - \delta^{j-1}) \geq \frac{1}{2} [a(\delta^i, \delta^i) + a(\delta^{i-1}, \delta^{i-1}) - a(\delta^1, \delta^1) - a(\delta^0, \delta^0)].$$

La coercivité de  $a$  donne alors

$$\begin{aligned} & |\gamma^i|^2 + \frac{A}{2} \|\delta^i\|^2 + \frac{A}{2} \|\delta^{i-1}\|^2 + \Delta t \left( \frac{B}{2} - k_2 - k_3 - k_4 \right) \sum_{j=1}^{i-1} \|\gamma^j + \gamma^{j+1}\|^2 \\ & \leq \frac{T}{4k_4} (C_L + \eta)^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_3} \sum_{j=1}^{i-1} \|\delta^{j+1}\|^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_2} \sum_{j=1}^{i-1} |\gamma^j + \gamma^{j+1}|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} a(\delta^0, \delta^0) + \frac{1}{2} a(\delta^1, \delta^1) + |\gamma^1|^2. \end{aligned}$$

En utilisant  $\sum_{j=1}^{i-1} |\gamma^{j+1} + \gamma^j|^2 \leq (2 + 2k_1 + \frac{1}{2k_1}) \sum_{j=2}^{i-1} |\gamma^j|^2 + (1 + 2k_1) |\gamma^1|^2 + (1 + \frac{1}{2k_1}) |\gamma^i|^2$ ,  $\forall k_1 > 0$  et

en choisissant  $k_{2,3,4} > 0$  tels que  $(\frac{B}{2} - k_2 - k_3 - k_4) > 0$ , (ainsi  $k_{2,3,4} < \frac{B}{2}$ ) on obtient

$$\begin{aligned} & \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2k_1}\right) \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_2}\right) |\gamma^i|^2 + \left(\frac{A}{2} - \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_3}\right) \|\delta^i\|^2 \leq \frac{T}{4k_4} (C_L + \eta)^2 + \frac{\eta^2 \Delta t}{4k_3} \sum_{j=2}^{i-1} \|\delta^j\|^2 \\ & \quad + \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_2} \left(2 + 2k_1 + \frac{1}{2k_1}\right) \sum_{j=2}^{i-1} |\gamma^j|^2 + \left(1 + \frac{\eta^2 \Delta t}{16k_2} (1 + 2k_1)\right) |\gamma^1|^2 + \frac{1}{2} a(\delta^0, \delta^0) + \frac{1}{2} a(\delta^1, \delta^1). \end{aligned}$$

Par le lemme 2.2, qui donne que  $\gamma^1$  et  $d^1$  sont bornés dans  $H$  et  $V$ , respectivement, sous une condition sur  $\Delta t$ , et si  $\Delta t$  satisfait  $\Delta t < (16k_2) \left(1 + (1/2k_1)\right) \eta^2)^{-1} < 8B/\eta^2$  et  $\Delta t < (2Ak_3)/\eta^2 < AB/\eta^2$ , on peut appliquer le lemme de Gronwall discret (voir par exemple [21]) pour obtenir des estimations sur  $\delta^i$ , et  $\gamma^i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , ce qui assure que  $\delta^i$  (et aussi  $d^i$ ,  $u^i$ ) sont bornés dans  $V$  et  $\gamma^i$  est borné dans  $H$ . ■

Définissons plusieurs suites, pour  $j \geq 1$ , sur les intervalles  $[0, t^1]$  et  $]t^j, t^{j+1}[$

$$\begin{cases} u_n(t) = u^1, & t \in [0, t^1], \\ \bar{u}_n(t) = \frac{3u^0 - u^1}{2} + t\delta^0, & t \in [0, t^1], \\ \tilde{u}_n(t) = \frac{3u^0 - u^1}{2} + t\delta^0, & t \in [0, t^1]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n(t) = u^{j+1}, & t \in ]t^j, t^{j+1}[ \\ \bar{u}_n(t) = \frac{u^{j-1} + u^j}{2} + (t - t^j) d^j, & t \in ]t^j, t^{j+1}[ \\ \tilde{u}_n(t) = \frac{u^{j-1} + u^j}{2} + (t - t^j) \delta^{j-1} + \frac{(t - t^j)^2}{2} \gamma^j, & t \in ]t^j, t^{j+1}[. \end{cases}$$

D'une manière différente de celle utilisée dans [46], on a choisi des approximations internes de  $u$ . On a  $u_n \in L^2(0, T; V)$ ,  $\bar{u}_n \in W^{1,2}(0, T; V)$ ,  $\tilde{u}_n \in W^{2,2}(0, T; H)$ . En effet, les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t_j^+) &= \bar{u}_n(t_j^-) = \frac{u^{j-1} + u^j}{2}, \\ \tilde{u}_n(t_j^+) &= \tilde{u}_n(t_j^-) = \frac{u^{j-1} + u^j}{2}, \\ \frac{d}{dt} \tilde{u}_n(t_j^+) &= \frac{d}{dt} \tilde{u}_n(t_j^-) = \delta^{j-1}, \end{aligned}$$

La suite de problèmes  $\mathcal{P}_{n+1}^j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , est équivalente au problème suivant:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( (\ddot{\tilde{u}}_n, w - \dot{\tilde{u}}_n) + a(u_n, w - \dot{\tilde{u}}_n) + b(\dot{\tilde{u}}_n, w - \dot{\tilde{u}}_n) + \phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, w) \right. \\ & \left. - \phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) \right) dt \geq \int_0^T \langle L_n, w - \dot{\tilde{u}}_n \rangle dt, \forall w \in L^2(0, T; V). \end{aligned} \quad (2.29)$$

On note  $\phi_n(t, u, v, w) = \phi(t^j, u, v, w)$ ,  $L_n(t) = L^j$  pour tout  $t \in ]t^j, t^{j+1}]$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $\phi_n(t, u, v, w) = \phi(0, u, v, w)$ ,  $L_n(t) = L^0$  pour tout  $t \in [0, t^1]$ , pour tous  $u, v, w \in V$ .

En utilisant les estimations données dans les lemmes 2.2, 2.3, il existe  $u$ ,  $\bar{u}$ ,  $\tilde{u}$  tels que, à une sous-suite près,  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $L^2(0, T; V)$ ,  $\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u}$  dans  $W^{1,2}(0, T; V)$  et  $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$  dans  $W^{2,2}(0, T; H)$  quand  $\Delta t$  tend vers 0. Nous montrons maintenant que ces limites sont égales.

**Lemme 2.4** *On obtient les relations suivantes:*

$$\begin{aligned} & \lim_n \|\bar{u}_n - u_n\|_{L^2(0, T; V)} = 0 \quad (i), \\ & \lim_n \|\bar{u}_n - \tilde{u}_n\|_{L^2(0, T; V)} = 0 \quad (ii), \\ & \lim_n \|\dot{\tilde{u}}_n - \tilde{\dot{u}}_n\|_{L^2(0, T; H)} = 0 \quad (iii). \end{aligned} \quad (2.30)$$

**Démonstration**

Considérons  $\Phi \in L^2(0, T; V)$ .

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle \bar{u}_n - u_n, \Phi \rangle dt \right| = \left| \int_0^{t^1} \langle \bar{u}_n - u_n, \Phi \rangle dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle \bar{u}_n - u_n, \Phi \rangle dt \right| \\ & = \left| \int_0^{t^1} \langle (t - 3\frac{\Delta t}{2}) \delta^0, \Phi \rangle dt + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle \frac{u^i + u^{i-1} - 2u^{i+1}}{2} + (t - t^i) d^i, \Phi \rangle dt \right| \\ & = \left| \int_0^{t^1} \langle (t - 3\frac{\Delta t}{2}) \delta^0, \Phi \rangle dt + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle -\frac{\Delta t}{2} \delta^i - \Delta t d^i + (t - t^i) d^i, \Phi \rangle dt \right| \\ & \leq 3\frac{\Delta t}{2} \|\delta^0\| \int_0^{t^1} \|\Phi(t)\| dt + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t \left( \frac{\|\delta^i\|}{2} + 2\|d^i\| \right) \int_{t^i}^{t^{i+1}} \|\Phi(t)\| dt, \\ & \leq \frac{5}{2} c \Delta t \int_0^T \|\Phi(t)\| dt \leq \frac{5}{2} c \Delta t \sqrt{T} \|\Phi\|_{L^2(0, T; V)}. \end{aligned}$$

On désigne par  $c$  une constante telle que  $\max(\|\delta^i\|) \leq c$ , pour tout  $i \leq n-1$ . Ainsi, on obtient  $(\bar{u}_n - u_n, \Phi)_{L^2(0, T; V)} \rightarrow 0$ ,  $\forall \Phi \in L^2(0, T; V)$ . D'où la relation (2.30)-(i).

On a ensuite

$$\left| \int_0^T \langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle dt \right| = \left| \int_0^{t^1} \langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle dt \right|.$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle dt = \left| \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle (t - t^i)(d^i - \delta^{i-1}) - \frac{(t - t^i)^2}{2} \gamma^i, \Phi \rangle dt \right|, \\ & = \left| \int_{t^i}^{t^{i+1}} \langle (t - t^i) \frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{2} - \frac{(t - t^i)^2}{2} \gamma^i, \Phi \rangle dt \right| \leq \Delta t (\|\delta^i\| + \|\delta^{i-1}\|) \int_{t^i}^{t^{i+1}} \|\Phi(t)\| dt. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle dt \right| &\leq \int_0^{t^1} |\langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle| dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} |\langle \bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi \rangle| dt \\ &\leq 2c \Delta t \int_0^T \|\Phi(t)\| dt \leq 2c \Delta t \sqrt{T} \|\Phi\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(\bar{u}_n - \tilde{u}_n, \Phi)_{L^2(0,T;V)} \rightarrow 0, \forall \Phi \in L^2(0,T;V)$ . D'où la relation (2.30)-(ii).

Considérons  $\Phi \in L^2(0,T;H)$ .

$$\left| \int_0^T (\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi) dt \right| = \left| \int_0^{t^1} (\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} (\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi) dt \right|.$$

On obtient, pour l'intégrale sur  $]t^i, t^{i+1}]$ ,  $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} \int_{t^i}^{t^{i+1}} (\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi) dt &= \left| \int_{t^i}^{t^{i+1}} ((d^i - \delta^{i-1}) - (t - t^i)\gamma^i, \Phi) dt \right|, \\ &= \left| \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left( \frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{2} - (t - t^i)\gamma^i, \Phi \right) dt \right| \leq \Delta t \frac{3}{2} |\gamma^i| \int_{t^i}^{t^{i+1}} |\Phi(t)| dt. \end{aligned}$$

On obtient, en notant  $c_1$  tel que  $\max |\gamma^i| \leq c_1$ , pour tout  $i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi) dt \right| &\leq \int_0^{t^1} |(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi)| dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} |(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi)| dt \\ &\leq \frac{3}{2} c_1 \Delta t \int_0^T |\Phi(t)| dt \leq \frac{3}{2} c_1 \Delta t \sqrt{T} \|\Phi\|_{L^2(0,T;H)}, \end{aligned}$$

Ainsi,  $(\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n, \Phi)_{L^2(0,T;H)} \rightarrow 0, \forall \Phi \in L^2(0,T;H)$ . D'où la relation (2.30)-(iii). ■

Par conséquent, les limites  $u, \bar{u}$  et  $\tilde{u}$  sont égales dans  $W^{1,2}(0,T;V) \cap W^{2,2}(0,T;H)$ .

On a  $u_n(0) = u_0 + \Delta t u_1$ ,  $\bar{u}_n(0) = \tilde{u}_n(0) = u_0 - (\Delta t/2) u_1$ ,  $\dot{\bar{u}}_n(0) = \dot{\tilde{u}}_n(0) = u_1$  ce qui entraîne que  $u$  satisfait les conditions initiales. Comme  $(\bar{u}_n(t))_n \subset W^{1,2}(0,T;V)$  et  $(\tilde{u}_n(t))_n \subset W^{1,2}(0,T;V) \cap W^{2,2}(0,T;H)$ , on obtient, par un procédé diagonal, semblable à celui considéré dans [12, 46] que, à une sous-suite près,

$$\bar{u}_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ dans } V, \tilde{u}_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ dans } V, \dot{\tilde{u}}_n(t) \rightharpoonup \dot{u}(t) \text{ dans } H, \forall t \in [0,T]. \quad (2.31)$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^T (\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\tilde{u}}_n(t)) dt &= \int_0^{t^1} (\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\tilde{u}}_n(t)) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t (\gamma^i, d^i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\delta^i - \delta^{i-1}, \delta^i + \delta^{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (|\delta^i|^2 - |\delta^{i-1}|^2) = \frac{1}{2} (|\delta^{n-1}|^2 - |\delta^0|^2). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int_0^T (\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\tilde{u}}_n(t)) dt = \frac{1}{2} (|\dot{\tilde{u}}_n(T)|^2 - |\dot{\tilde{u}}_n(0)|^2).$$



Comme  $(\dot{\tilde{u}}_n(t))_n$  converge faiblement vers  $\dot{u}(t)$  dans  $H$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , par (2.31), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\ddot{\tilde{u}}_n(t), \dot{\tilde{u}}_n(t)) dt \geq \frac{1}{2} |\dot{u}(T)|^2 - \frac{1}{2} |u_1|^2 = \int_0^T (\ddot{u}(t), \dot{u}(t)) dt.$$

On a la relation suivante pour la forme bilinéaire  $a$

$$\begin{aligned} \int_0^T a(u_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt &= \int_0^{t^1} a(u_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} a(u_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt \\ &= \Delta t a(u^1, \delta^0) + \Delta t \sum_{i=1}^{n-1} a(u^{i+1}, \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2\Delta t}) \\ &\geq \Delta t a(u^1, \delta^0) + \frac{1}{4} a(u^n, u^n) + \frac{1}{4} a(u^{n-1}, u^{n-1}) - \frac{1}{4} a(u^1, u^1) - \frac{1}{4} a(u^0, u^0) \\ &\geq \frac{1}{2} a(u^n, u^n) - \frac{1}{2} a(u_0, u_0) - \frac{\Delta t}{2} (a(u^n, \delta^{n-1}) - a(u_0, \delta^0)) + \frac{\Delta t^2}{4} (a(\delta^{n-1}, \delta^{n-1}) + 3a(\delta^0, \delta^0)). \end{aligned}$$

On obtient, en utilisant (2.31), comme  $u_n(T) = u^n$ ,

$$\liminf \int_0^T a(u_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt \geq \frac{1}{2} a(u(T), u(T)) - \frac{1}{2} a(u_0, u_0) = \int_0^T a(u, \dot{u}) dt.$$

En utilisant la semicontinuité faible de  $b$ , on obtient aussi

$$\liminf \int_0^T b(\dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt \geq \int_0^T b(\dot{u}, \dot{u}) dt.$$

**Lemme 2.5** *L'inégalité suivante est vérifiée:*

$$\liminf \int_0^T \phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt \geq \int_0^T \phi(t, u, \dot{u}, \dot{u}) dt.$$

### Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \int_0^T |\phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| dt &= \int_0^{t^1} |\phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t^i}^{t^{i+1}} |\phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| dt. \end{aligned}$$

Sur un intervalle  $]t^i, t^{i+1}]$ , on a, comme  $\phi(\dots, 0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} &|\phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| = |\phi(t^i, u^{i+1}, d^i, d^i) - \phi(t^i, u^{i+1}, d^i, 0) \\ &\quad + \phi(t, \frac{u^i + u^{i-1}}{2} + (t - t^i) \delta^{i-1} + \frac{(t - t^i)^2}{2} \gamma^i, \delta^{i-1} + (t - t^i) \gamma^i, 0) \\ &\quad - \phi(t, \frac{u^i + u^{i-1}}{2} + (t - t^i) \delta^{i-1} + \frac{(t - t^i)^2}{2} \gamma^i, \delta^{i-1} + (t - t^i) \gamma^i, d^i)| \\ &\leq \eta (|t - t^i| + \left| \frac{u^{i+1} - u^i}{2} + \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2} - (t - t^i) \delta^{i-1} - \frac{(t - t^i)^2}{2} \gamma^i \right| \\ &\quad + |d^i - \delta^{i-1} - (t - t^i) \gamma^i|) \|d^i\| \\ &\leq \eta \Delta t (1 + \|\delta^i\| + \|d^i\| + \frac{3}{2} \|\delta^{i-1}\| + \frac{3}{2} |\delta^i| + \frac{3}{2} |\delta^{i-1}|) \|d^i\| \leq \eta \Delta t c (\frac{13}{2} c + 1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $1 \leq i \leq n-1$ , on a

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} |\phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| dt \leq \eta \Delta t^2 c \left( \frac{13}{2} c + 1 \right).$$

On utilise le même argument sur l'intervalle  $[0, t^1]$ .

$$\int_0^{t^1} |\phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| dt \leq \eta \Delta t^2 \|\delta^0\| \left( \frac{3}{2} \|\delta^0\| + 1 \right).$$

Ainsi,

$$\int_0^T |\phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n)| dt \leq \eta \Delta t T c \left( \frac{13}{2} c + 1 \right).$$

On peut montrer que  $\int_0^T \phi(t, u, v, \cdot) dt$  est séquentiellement faiblement semi-continue sur  $L^2(0, T; V)$ .

Comme  $(\bar{u}_n)_n$  converge faiblement vers  $u$  dans  $W^{1,2}(0, T; V)$  et  $(\dot{\bar{u}}_n)_n$  converge faiblement vers  $\dot{u}$  dans  $W^{1,2}(0, T; H)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \liminf \int_0^T \phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n) dt &\geq \lim \int_0^T \left( \phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, \dot{\bar{u}}_n) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) \right) dt \\ &\quad + \liminf \int_0^T \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) dt \\ &\geq \liminf \int_0^T \left( \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, \dot{\tilde{u}}_n) - \phi(t, u, \dot{u}, \dot{\tilde{u}}_n) \right) dt + \liminf \int_0^T \phi(t, u, \dot{u}, \dot{\tilde{u}}_n) dt \\ &= \liminf \int_0^T \phi(t, u, \dot{u}, \dot{\tilde{u}}_n) dt \geq \int_0^T \phi(t, u, \dot{u}, \dot{u}) dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Lemme 2.6** *La relation suivante est vérifiée:*

$$\lim \int_0^T \phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v) dt = \int_0^T \phi(t, u, \dot{u}, v) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

**Démonstration**

On a, sur  $]t^i, t^{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} |\phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v)| &= |\phi(t^i, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v) - \phi(t^i, u_n, \dot{\bar{u}}_n, 0) \\ &\quad + \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, 0) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v)| \leq \eta (|t - t^i| + \|u_n - \tilde{u}_n\| + |\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n|) \|v\|, \quad \forall v \in L^2(0, T; V). \end{aligned}$$

On obtient en intégrant sur  $]0, T[$

$$\begin{aligned} \int_0^T |\phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v)| dt &\leq \\ \eta \Delta t \int_0^T \|v\| dt + \int_0^T (\|u_n - \tilde{u}_n\| + |\dot{\bar{u}}_n - \dot{\tilde{u}}_n|) \|v\| dt. \end{aligned}$$

On utilise le lemme 2.4. On obtient

$$\lim \int_0^T |\phi_n(t, u_n, \dot{\bar{u}}_n, v) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v)| dt = 0, \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

Ensuite, on utilise la relation (2.22).

$$\int_0^T |\phi(t, u, \dot{u}, v) - \phi(t, \tilde{u}_n, \dot{\tilde{u}}_n, v)| dt \leq \eta_0 \int_0^T (|\dot{u} - \dot{\tilde{u}}_n| + |\beta(u) - \beta(\tilde{u}_n)|) \|v\| dt, \forall v \in L^2(0, T; V).$$

On applique le théorème 2.1 avec  $\mathcal{F} = (\dot{\tilde{u}}_n)_n$ ,  $X = V$ ,  $U = H$ ,  $Y = H$ ,  $p = 2$ . On sait que  $(\tilde{u}_n)_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; V)$  et  $(\ddot{\tilde{u}}_n)_n$  est bornée dans  $L^2(0, T; H)$ . Donc, par le théorème 2.1, à une sous-suite près, on déduit que  $(\dot{\tilde{u}}_n)_n$  converge fortement vers  $\dot{u}$  dans  $L^2(0, T; H)$ . On a vu auparavant, que, à une sous-suite près,  $(\tilde{u}_n(t))_n$  converge faiblement vers  $u(t)$  dans  $V$ , pour tout  $t \in [0, T]$ . Comme  $\beta$  est faiblement continue sur  $V$ ,  $(\beta(\tilde{u}_n(t)))_n$  converge vers  $\beta(u)$  pour tout  $t \in [0, T]$ . On obtient donc

$$\lim \int_0^T \phi_n(t, u_n, \dot{\tilde{u}}_n, v) dt = \int_0^T \phi(t, u, \dot{u}, v) dt, \forall v \in L^2(0, T; V). \quad \blacksquare$$

On prouve le résultat d'unicité suivant pour le problème  $\mathcal{P}$ .

**Lemme 2.7** *Le problème  $\mathcal{P}$  a, au plus, une solution.*

**Démonstration**

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions de (2.25). En remplaçant dans (2.25) la fonction test  $v$  par  $\dot{u}_2$ , puis par  $\dot{u}_1$  et en utilisant (2.23), on a

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + a(u_2 - u_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + b(\dot{u}_2 - \dot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ & \leq \phi(t, u_1, \dot{u}_1, \dot{u}_1) - \phi(t, u_1, \dot{u}_1, \dot{u}_2) + \phi(t, u_2, \dot{u}_2, \dot{u}_2) - \phi(t, u_2, \dot{u}_2, \dot{u}_1) \\ & \leq \eta (\|u_2 - u_1\| + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|) \|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\|. \end{aligned}$$

On intègre entre 0 et  $t$ . Comme les solutions  $u_1$  et  $u_2$  ont les mêmes conditions initiales  $u_2(0) = u_1(0)$ ,  $\dot{u}_2(0) = \dot{u}_1(0)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2 + \frac{1}{2} a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) + \int_0^t b(\dot{u}_2 - \dot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) ds \\ & \leq \eta \int_0^t (\|u_2 - u_1\| \|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\| + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1| \|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\|) ds. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young avec une constante appropriée et on utilise la coercivité de  $a$  et  $b$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2 + \frac{A}{2} \|u_2 - u_1\|^2 + \frac{B}{2} \int_0^t \|\dot{u}_2 - \dot{u}_1\|^2 ds \\ & \leq \frac{\eta^2}{8} \int_0^t (\|u_2 - u_1\|^2 + |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|^2) ds. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on conclut que  $u_1 = u_2$  et le problème (2.25) a, au plus, une solution.  $\blacksquare$

**Théorème 2.2** *Sous les hypothèses sur  $u_0, u_1, L$ , (2.19)-(2.23) et la condition de compatibilité (2.24), il existe une solution unique du problème  $\mathcal{P}$ .*

**Démonstration**

On peut passer à la limite sur les termes linéaires dans (2.29). En utilisant les lemmes 2.5 et 2.6, on obtient que  $u$  est une solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} & \int_0^T ((\ddot{u}, w - \dot{u}) + a(u, w - \dot{u}) + b(\dot{u}, w - \dot{u}) + \phi(t, u, \dot{u}, w) - \phi(t, u, \dot{u}, \dot{u})) dt \\ & \geq \int_0^T \langle L, w - \dot{u} \rangle dt, \forall w \in L^2(0, T; V), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (2.32)$$

On peut prouver par le théorème de Lebesgue que, si  $u$  est une solution de (2.32), c'est une solution du problème  $\mathcal{P}$ , donné dans (2.25). Réciproquement, si  $u$  est une solution du problème  $\mathcal{P}$ , c'est une solution de (2.32). De plus, le résultat d'unicité vient du lemme 2.7.  $\blacksquare$

**Remarque 2.2** *Comme on va le voir dans la suite, ce cadre abstrait s'applique au frottement de Coulomb non local. Cependant, il ne peut pas s'appliquer au frottement de Tresca, à cause des hypothèses sur  $\phi$  qui ne sont alors pas vérifiées ( $\phi(\cdot, 0, 0, \cdot) = 0$ ). Pour le problème de Tresca, il faut utiliser le résultat montré dans [12].*

### 2.3.5 Existence et unicité de la solution pénalisée

On considère ici un problème auxiliaire pénalisé, équivalent au problème  $P_2^\varepsilon$ , correspondant à la décomposition précédente de  $\Omega$ . L'application  $\hat{\Phi}_\varepsilon$  est définie sur  $\hat{V} \times \hat{V}$  et  $\hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{v}, \hat{w}) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  pour tous  $\hat{v}, \hat{w} \in \hat{V}$  tels que  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  satisfont  $\Psi \mathbf{v} = \hat{v}$ ,  $\Psi \mathbf{w} = \hat{w}$ .

**Problème  $\hat{P}_2^\varepsilon$ :** Trouver  $\hat{u}_\varepsilon = (\mathbf{u}_\varepsilon^+, \mathbf{u}_\varepsilon^-) \in W^{1,2}(0, T; \hat{V}) \cap W^{2,2}(0, T; \hat{M})$  tel que  $\hat{u}_\varepsilon(0) = \hat{u}_0$ ,  $\dot{\hat{u}}_\varepsilon(0) = \hat{u}_1$ ,

$$\begin{cases} (\ddot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon)_{\hat{M}} + \hat{c}(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon) + \hat{b}(\dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon) + \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon) \\ + \hat{J}(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \hat{w}) - \hat{J}(\hat{u}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{u}}_\varepsilon) \geq \langle \hat{L}, \hat{w} - \dot{\hat{u}}_\varepsilon \rangle_{\hat{V}}, \quad \forall \hat{w} \in \hat{V}, \text{ p.p. } t \in ]0, T[. \end{cases} \quad (2.33)$$

Les problèmes  $P_2^\varepsilon$  et  $\hat{P}_2^\varepsilon$  sont équivalents de la manière suivante:

Si  $\mathbf{u}_\varepsilon$  est une solution de  $P_2^\varepsilon$ , alors  $\hat{u}_\varepsilon = (\mathbf{u}_\varepsilon^+, \mathbf{u}_\varepsilon^-)$  est une solution de  $\hat{P}_2^\varepsilon$ , où  $\mathbf{u}_\varepsilon^+$  et  $\mathbf{u}_\varepsilon^-$  sont les restrictions de  $\mathbf{u}_\varepsilon$  sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ .

Réciproquement, si  $\hat{u}_\varepsilon = (\mathbf{u}_\varepsilon^+, \mathbf{u}_\varepsilon^-)$  est une solution de  $\hat{P}_2^\varepsilon$ , alors  $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{V}$ , avec  $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_\varepsilon^+$  presque partout sur  $\Omega^+$  et  $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_\varepsilon^-$  presque partout sur  $\Omega^-$ , est une solution de  $P_2^\varepsilon$ .

**Théorème 2.3** *Sous les mêmes hypothèses que la partie 2.3.4, il existe une solution unique  $\hat{u}_\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \hat{V}) \cap W^{2,2}(0, T; \hat{M})$  au problème  $\hat{P}_2^\varepsilon$ .*

#### Démonstration

La preuve est une conséquence immédiate des résultats obtenus au paragraphe 2.3.4. On applique le théorème 2.2 à  $H = \hat{M}$ ,  $V = \hat{V}$ ,  $u_0 = \hat{u}_0$ ,  $u_1 = \hat{u}_1$ ,  $a = \hat{c}$ ,  $b = \hat{b}$ ,  $L = \hat{L}$ ,  $\phi$  défini par  $\phi(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{u}, \hat{w}) + \hat{J}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ ,  $\forall \hat{u}, \hat{v}, \hat{w} \in \hat{V}$ .  $\hat{c}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{J}$  sont donnés par (2.14). On applique le théorème 2.2 à  $\hat{M}$ ,  $\hat{V}$ , qui sont définis au paragraphe 2.3.2. Les formes  $\hat{b}$  et  $\hat{c}$  sont coercives par l'inégalité de Korn, car la frontière de  $\Omega^\alpha$  est Lipschitzienne et  $\text{mes}(\Gamma_D^\alpha) > 0$ , pour  $\alpha = +, -$ . On a alors:  $\exists B^\alpha, C^\alpha > 0$ ,  $b^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq B^\alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}^\alpha}^2$ ,  $c^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C^\alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}^\alpha}^2$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^\alpha$ ,  $\alpha = +, -$  et on obtient

$$\begin{cases} \hat{b}(\hat{v}, \hat{v}) \geq \hat{B} \|\hat{v}\|_{\hat{V}}^2, \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}, \quad \text{où } \hat{B} = \min(B^+, B^-), \\ \hat{c}(\hat{v}, \hat{v}) \geq \hat{C} \|\hat{v}\|_{\hat{V}}^2, \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}, \quad \text{où } \hat{C} = \min(C^+, C^-). \end{cases} \quad (2.34)$$

Pour tout  $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathbf{V}}$ , l'application  $\hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \cdot)$ , définie sur  $\hat{\mathbf{V}}$ , est linéaire et l'application  $\hat{J}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \cdot)$  est une semi-norme sur  $\hat{\mathbf{V}}$  qui entraîne que  $\phi$  satisfait les conditions (2.19) et (2.20). On pose ensuite

$$\beta : \hat{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbb{R} : \quad \beta(\hat{\mathbf{v}}) = \|([\hat{v}_N] - g)_-\|_{L^2(\Xi)} + \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\hat{\mathcal{M}}}.$$

Ici,  $\beta$  est faiblement continu sur  $\hat{\mathbf{V}}$  puisqu'il comprend un terme de compliance défini sur  $\Xi$  ainsi que la norme sur  $\hat{\mathcal{M}}$  qui vient de la régularisation  $\mathcal{R}$  et de la relation (2.11). On a aussi la relation suivante pour  $\hat{\Phi}_\varepsilon$ , comme l'application  $v \rightarrow (v - g)_-$  est Lipschitz continue,

$$\begin{aligned} \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad & |\hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{v}})| \leq \eta_\varepsilon \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{w}}\|_{\hat{\mathbf{V}}} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{\hat{\mathbf{V}}}, \forall \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}} \in \hat{\mathbf{V}}, \\ |\hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{w}}_1) - \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{w}}_2) + \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{w}}_2) - \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{w}}_1)| &= |\hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{w}}_1 - \hat{\mathbf{w}}_2) - \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{w}}_1 - \hat{\mathbf{w}}_2)| \\ &\leq \eta_\varepsilon \|\hat{\mathbf{u}}_1 - \hat{\mathbf{u}}_2\|_{\hat{\mathbf{V}}} \|\hat{\mathbf{w}}_2 - \hat{\mathbf{w}}_1\|_{\hat{\mathbf{V}}}, \forall \hat{\mathbf{u}}_{1,2}, \hat{\mathbf{w}}_{1,2} \in \hat{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'estimation suivante est vérifiée pour  $\hat{J}$ , par la propriété de  $\mathcal{R}$  donnée dans (2.11),

$$\begin{aligned} \exists \eta_1 > 0, \quad & |\hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{w}}_1) - \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{w}}_2) + \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{w}}_2) - \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{w}}_1)| \\ &\leq \eta_1 (\|\hat{\mathbf{u}}_2 - \hat{\mathbf{u}}_1\|_{\hat{\mathcal{M}}} + \|\hat{\mathbf{v}}_2 - \hat{\mathbf{v}}_1\|_{\hat{\mathcal{M}}}) \|\hat{\mathbf{w}}_2 - \hat{\mathbf{w}}_1\|_{\hat{\mathbf{V}}}, \forall \hat{\mathbf{u}}_{1,2}, \hat{\mathbf{v}}_{1,2}, \hat{\mathbf{w}}_{1,2} \in \hat{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

L'application  $\phi$  satisfait (2.21) et (2.22). Les propriétés (2.35) et (2.36) de  $\hat{\Phi}_\varepsilon$  et  $\hat{J}$  permettent de vérifier la propriété (2.23) pour  $\phi$ . La condition de compatibilité (2.15) entraîne (2.24). Ainsi, le problème  $\hat{P}_2^\varepsilon$  possède une solution unique  $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; \hat{\mathbf{V}}) \cap W^{2,2}(0, T; \hat{\mathcal{M}})$ . ■

### 2.3.6 Existence d'une solution au problème de contact unilatéral

Nous montrons dans ce paragraphe l'existence d'une solution au problème de contact unilatéral. Dans un premier temps, nous avons besoin d'obtenir des estimations sur les solutions pénalisées du problème  $\hat{P}_2^\varepsilon$ .

**Théorème 2.4** *Il existe une solution au problème (2.13).*

#### Démonstration

On commence par obtenir des estimations sur les solutions pénalisées.

#### 2.3.6.1 Estimations sur les solutions pénalisées

On utilise plusieurs estimations sur la solution  $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon$  de (2.18), pour passer à la limite et obtenir une solution de (2.13).

On remplace  $\hat{\mathbf{w}}$  par 0 dans (2.33). On obtient, après intégration entre 0 et  $t$ , où  $t \in ]0, T[$ ,

$$\int_0^t (\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon)_{\hat{\mathcal{M}}} ds + \int_0^t \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) ds + \int_0^t \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) ds + \int_0^t \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) ds \leq \int_0^t \langle \hat{\mathbf{L}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon \rangle_{\hat{\mathbf{V}}} ds.$$

Comme  $\hat{c}$  est une forme bilinéaire symétrique,  $g$  est indépendant du temps et  $\hat{\mathbf{u}}_0 \in \hat{\mathcal{K}}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(t)\|_{\hat{\mathcal{M}}}^2 + \frac{1}{2} \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) + \int_0^t \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) ds + \frac{1}{2\varepsilon} \|([\hat{u}_{\varepsilon N}(t)] - g)_-\|_{L^2(\Xi)}^2 \\ & \leq \int_0^t \langle \hat{\mathbf{L}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon \rangle_{\hat{\mathbf{V}}} ds + \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{u}}_1\|_{\hat{\mathcal{M}}}^2 + \frac{1}{2} \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0). \end{aligned}$$

A l'aide des inégalités de Korn et de Young, on en déduit les estimations suivantes sur  $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon$ , obtenues avec  $M > 0$  indépendant de  $\varepsilon$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon\|_{\hat{\mathbf{M}}} \leq M \text{ (i)}, \|\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{\hat{\mathbf{V}}} \leq M \text{ p.p. } t \in ]0, T[ \text{ (ii)}, \\ \|([\hat{\mathbf{u}}_{\varepsilon N}] - g)_-\|_{L^2(\Xi)} \leq M\sqrt{\varepsilon} \text{ p.p. } t \in ]0, T[ \text{ (iii)}, \int_0^T \|\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon\|_{\hat{\mathbf{V}}}^2 ds \leq M \text{ (iv)}. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

En utilisant (2.33), on obtient, pour tout  $\hat{\varphi} \in L^2(0, T; [H_0^1(\Omega^+)]^d \times [H_0^1(\Omega^-)]^d)$ ,

$$\int_0^T (\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \hat{\varphi})_{\hat{\mathbf{M}}} dt + \int_0^T \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\varphi}) dt + \int_0^T \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \hat{\varphi}) dt = \int_0^T (\hat{\mathbf{f}}, \hat{\varphi})_{\hat{\mathbf{M}}} dx, \quad \forall \hat{\varphi}. \quad (2.38)$$

Ainsi,  $\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon^+$  (respectivement  $\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon^-$ ) est borné indépendamment de  $\varepsilon$  dans  $L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega^+)]^d)$  (respectivement  $L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega^-)]^d)$ ).

Pour tout  $\hat{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \hat{\mathbf{V}}) \cap W^{1,2}(0, T; \hat{\mathbf{M}})$  tel que  $\hat{\mathbf{v}}(t) \in \hat{\mathbf{K}}$  pour presque tout  $t \in ]0, T[$ , on choisit dans (2.33)  $\hat{\mathbf{w}} = \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon + \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon$ . On intègre ensuite par rapport à  $t \in ]0, T[$  pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\hat{\mathbf{M}}} dt + \int_0^T \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) dt + \int_0^T \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) dt + \int_0^T \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) dt \\ + \int_0^T \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon + \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) dt - \int_0^T \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) dt \geq \int_0^T \langle \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rangle_{\hat{\mathbf{V}}} dt, \\ \forall \hat{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \hat{\mathbf{V}}), \dot{\hat{\mathbf{v}}} \in L^2(0, T; \hat{\mathbf{M}}), \hat{\mathbf{v}}(t) \in \hat{\mathbf{K}}, \text{ p.p. } t \in ]0, T[, \\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(0) = \hat{\mathbf{u}}_0, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(0) = \hat{\mathbf{u}}_1. \end{array} \right.$$

Par un argument de monotonie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \hat{\Phi}_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) dt &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Xi ([\hat{\mathbf{u}}_{\varepsilon N}] - g)_- ([\hat{\mathbf{v}}_N] - g) ds dt \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Xi ([\hat{\mathbf{u}}_{\varepsilon N}] - g)_- ([\hat{\mathbf{u}}_{\varepsilon N}] - g) ds dt \leq 0 \\ \forall \hat{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \hat{\mathbf{V}}), \dot{\hat{\mathbf{v}}} \in L^2(0, T; \hat{\mathbf{M}}), \hat{\mathbf{v}}(t) \in \hat{\mathbf{K}}, \text{ pour presque tout } t. \end{aligned}$$

Par intégration par parties du terme d'accélération et en utilisant l'argument de monotonie précédent, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(T), \hat{\mathbf{v}}(T) - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(T))_{\hat{\mathbf{M}}} - (\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{v}}(0) - \hat{\mathbf{u}}_0)_{\hat{\mathbf{M}}} \\ + \int_0^T \left\{ -(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{v}}})_{\hat{\mathbf{M}}} + \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}}) + \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{v}}) + \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon + \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right\} dt \\ \geq \int_0^T \langle \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rangle_{\hat{\mathbf{V}}} dt + \int_0^T \left\{ -\|\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon\|_{\hat{\mathbf{M}}}^2 + \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) + \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) + \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) \right\} dt \\ \forall \hat{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \hat{\mathbf{V}}), \dot{\hat{\mathbf{v}}} \in L^2(0, T; \hat{\mathbf{M}}), \hat{\mathbf{v}}(t) \in \hat{\mathbf{K}}, \text{ p.p. } t \in ]0, T[, \\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(0) = \hat{\mathbf{u}}_0, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(0) = \hat{\mathbf{u}}_1. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

On effectue ensuite plusieurs passages à la limite.

### 2.3.6.2 Passages à la limite

Par (2.37) et l'estimation précédente sur l'accélération, sachant que  $\hat{\mathbf{V}}$  est un sous-espace fermé de  $\mathbf{V}^+ \times \mathbf{V}^-$ , il existe  $\hat{\mathbf{u}}$  tel que, à une sous-suite près,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon &\rightharpoonup \hat{\mathbf{u}} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0,T; \hat{\mathbf{V}}), \\ \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon &\rightharpoonup \dot{\hat{\mathbf{u}}} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0,T; \hat{\mathbf{M}}), \text{ faible dans } L^2(0,T; \hat{\mathbf{V}}), \\ \ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon &\rightharpoonup \ddot{\hat{\mathbf{u}}} \text{ faible dans } L^2(0,T; \mathbf{H}^{-1}).\end{aligned}\tag{2.40}$$

Par (2.40), nous pouvons passer à la limite dans (2.39) pour les termes linéaires. C'est plus difficile pour les termes non linéaires, pour lesquels nous utilisons le théorème 2.1 de J. Simon [51].

Comme  $\partial\Omega^\alpha$  est Lipschitz continu, les injections de  $\mathbf{V}^\alpha$  dans  $\mathbf{M}^\alpha$ , de  $\mathbf{V}^\alpha$  dans  $[H^{1/2}(\Omega^\alpha)]^d$ , de  $\mathbf{M}^\alpha$  dans  $[H^{-1/2}(\Omega^\alpha)]^d$  sont compactes,  $\alpha = +, -$ . On peut alors appliquer le théorème 2.1 avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= (\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon)_\varepsilon, X = \hat{\mathbf{V}}, U = \hat{\mathbf{M}}, Y = \mathbf{H}^{-1}, p = 2, \\ \mathcal{F} &= (\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)_\varepsilon, X = \hat{\mathbf{V}}, U = \mathbf{H}^{1/2}, Y = \hat{\mathbf{M}}, r = 2, \\ \mathcal{F} &= (\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon)_\varepsilon, X = \hat{\mathbf{M}}, U = \mathbf{H}^{-1/2}, Y = \mathbf{H}^{-1}, r = 2.\end{aligned}$$

A une sous-suite près, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon &\rightarrow \dot{\hat{\mathbf{u}}} \text{ in } L^2(0,T; \hat{\mathbf{M}}), \quad \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightarrow \hat{\mathbf{u}} \text{ in } C([0,T]; \mathbf{H}^{1/2}), \\ \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon &\rightarrow \dot{\hat{\mathbf{u}}} \text{ in } C([0,T]; \mathbf{H}^{-1/2}).\end{aligned}$$

D'où,

$$\langle \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(T), \hat{\mathbf{v}}(T) - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(T) \rangle_{\hat{\mathbf{M}}} \rightarrow \langle \dot{\hat{\mathbf{u}}}(T), \hat{\mathbf{v}}(T) - \hat{\mathbf{u}}(T) \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

La fonctionnelle  $\mathbf{v} \mapsto \int_0^T \hat{c}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) dt$  est convexe et continue alors elle est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur  $L^2(0,T; \hat{\mathbf{V}})$ , ce qui entraîne

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon) dt \geq \int_0^T \hat{c}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) dt.$$

On a vu auparavant dans (2.37) que  $(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)_\varepsilon$  est bornée dans  $W^{1,2}(0,T; \hat{\mathbf{V}})$ . Comme  $W^{1,2}(0,T; \hat{\mathbf{V}}) \subset C([0,T]; \hat{\mathbf{V}})$ , on en déduit que  $(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(t))_\varepsilon$  est borné dans  $\hat{\mathbf{V}}$ , indépendamment de  $\varepsilon$ , pour tout  $t \in [0,T]$ . En utilisant un procédé diagonal comme dans [12, 10], on peut extraire une sous-suite encore notée par  $(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)_\varepsilon$ , telle que

$$\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) \rightharpoonup \hat{\mathbf{u}}(t) \text{ faible dans } \hat{\mathbf{V}}, \forall t \in [0,T].\tag{2.41}$$

Comme  $\hat{\mathbf{v}} \mapsto \hat{b}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})$  est convexe et continue sur  $\hat{\mathbf{V}} \times \hat{\mathbf{V}}$ ,  $\hat{b}$  est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement sur  $\hat{\mathbf{V}} \times \hat{\mathbf{V}}$ . Ainsi, comme  $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon(T) \rightharpoonup \hat{\mathbf{u}}(T)$  faible dans  $\hat{\mathbf{V}}$ , on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon) dt &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(T), \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon(T)) - \frac{1}{2} \hat{b}(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}(T), \dot{\hat{\mathbf{u}}}(T)) - \frac{1}{2} \hat{b}(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_0) = \int_0^T \hat{b}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}) dt.\end{aligned}$$

En utilisant (2.37), il résulte que  $([\hat{u}_{\varepsilon N}](t))_\varepsilon$  est bornée dans  $H^{1/2}(\Xi)$  indépendamment de  $\varepsilon$ , pour presque tout  $t \in [0,T]$ . On obtient alors, à une sous-suite près,  $[\hat{u}_{\varepsilon N}](t) \rightarrow [\hat{u}_N](t)$  dans  $L^2(\Xi), \forall t \in [0,T]$ . Par l'estimation (2.37)-(iii), on obtient

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|([\hat{u}_{\varepsilon N}] - g)_-\|_{L^2(\Xi)} = \|([\hat{u}_N] - g)_-\|_{L^2(\Xi)}, \forall t \in [0,T].$$

D'où  $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathbf{K}}$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Pour passer à la limite dans le terme de frottement, on applique le théorème 2.1 aux suites  $\mathcal{F} = (\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\varepsilon)_\varepsilon$  et  $\mathcal{F} = (\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)_\varepsilon$ , où  $X = \hat{\mathbf{V}}$ ,  $U = \mathbf{H}^{1-\delta}$ , avec  $1/2 > \delta > 0$ ,  $Y = \mathbf{H}^{-1}$ ,  $p = 2$  de telle sorte que

$$\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightarrow \hat{\mathbf{u}} \text{ in } W^{1,2}(0, T; \mathbf{H}^{1-\delta}), \delta > 0.$$

Comme l'opérateur trace de  $[H^{1-\delta}(\Omega^\alpha)]^d$  dans  $[L^2(\partial\Omega^\alpha)]^d$  est compact pour  $1/2 > \delta > 0$ , l'application  $[\cdot]_T$  définie de  $\mathbf{H}^{1-\delta}$  dans  $[L^2(\Xi)]^d$  est compacte, ce qui entraîne

$$[\hat{\mathbf{u}}_{\varepsilon T}] \rightarrow [\hat{\mathbf{u}}_T] \text{ dans } W^{1,2}(0, T; [L^2(\Xi)]^d).$$

Par les arguments précédents et la propriété (2.11), on peut passer à la lim inf dans (2.39) pour obtenir (2.16). L'utilisation d'une loi de frottement non local facilite le passage à la limite. Ainsi,  $\mathbf{u}$  défini par  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+$  sur  $\Omega^+$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^-$  sur  $\Omega^-$  est une solution de (2.13). ■

L'existence d'une solution au cas purement élastique (i.e. avec  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ) dans un domaine non symétrique demeure un problème ouvert à notre connaissance, même sans frottement.

Dans le cas d'un matériau de Kelvin-Voigt, le terme de viscosité apporte une régularité supplémentaire sur la vitesse qui permet d'utiliser des résultats de compacité classiques. Pour étudier le problème élastique, il manque une estimation sur la vitesse dans  $L^2(0, T; \mathbf{V})$ . On peut imposer cette condition et travailler dans un borné. La preuve de l'existence d'une solution dans un ensemble borné n'est pas directe. Elle peut s'inspirer de celle utilisée dans [12].

Physiquement, imposer une borne sur la vitesse n'est pas surprenant. Ce qui peut étonner, c'est la présence d'une borne pour l'accélération dans  $L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^d)$ . En effet, pour les systèmes discrets, pour un point matériel situé près d'un obstacle, il peut apparaître un saut de vitesses entre l'instant précédant le contact et celui suivant le contact. L'accélération n'est pas régulière alors. C'est l'intérêt d'utiliser des mesures différentielles comme l'ont fait J.J. Moreau, M. Jean [39, 40, 30]. Pour les milieux continus, à notre connaissance, il n'existe pas de travaux ayant utilisé des mesures différentielles, excepté celui de A. Petrov et M. Schatzman [44], dans le cas unidimensionnel.



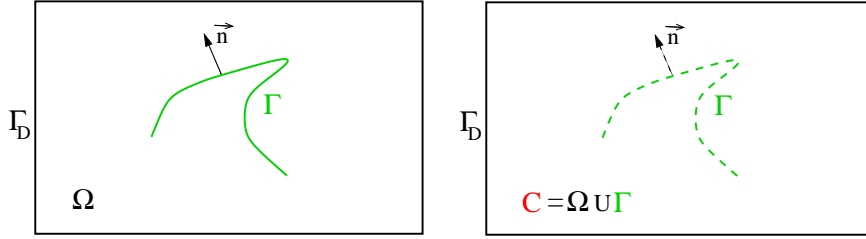
## Chapitre 3

# Application de la méthode des domaines fictifs et semi-discrétisation en espace

Dans ce chapitre, on rappelle dans un premier temps le principe de la méthode des domaines fictifs. C'est une méthode qui a été utilisée dans plusieurs applications (voir des exemples dans [4, 14, 16, 19, 32]). Les propriétés de cette méthode sont décrites ici, à savoir sa facilité d'implémentation par rapport à d'autres méthodes (éléments finis, équations intégrales), sa rapidité, sa robustesse. Après avoir insisté sur les avantages de cette méthode, l'obtention de la formulation en domaines fictifs du problème dynamique de contact unilatéral défini en (1.8)-(1.9) est expliquée. Pour pouvoir appliquer cette méthode avec les conditions aux limites de contact unilatéral, on utilise une formulation mixte en déplacements-contraintes. La non linéarité du problème est reportée sur le calcul de multiplicateurs de Lagrange, définis sur la fissure  $\Gamma$ . Nous verrons que, pour des questions de convergence de la méthode des domaines fictifs, on utilise l'élément fini introduit dans [50, 49], modifié par rapport à l'élément présenté dans [5, 54], pour approcher les contraintes et les déplacements. Cet élément semble assurer, en particulier, la convergence d'un point de vue numérique de la méthode des domaines fictifs pour la condition aux limites linéaire (surface libre) et pour la condition de contact unilatéral. De manière classique, la convergence de la méthode est assurée numériquement par une condition de compatibilité entre le pas d'espace du maillage de la fissure et celui de la grille régulière. De plus, sous réserve de la vérification d'une condition inf-sup discrète uniforme, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution au problème unilatéral semi-discrétisé en espace.

### 3.1 Principe de la méthode des domaines fictifs

Cette méthode numérique efficace a été utilisée avec succès pour des problèmes stationnaires, voir par exemple dans [22], et plus récemment pour des problèmes d'ondes dans [4, 14, 16, 19, 32]. Elle est bien adaptée aux problèmes contenant des conditions aux limites naturelles, c'est-à-dire des conditions aux limites de type Dirichlet. Elle nécessite la prise en compte de façon faible les conditions aux limites par l'intermédiaire d'un ou plusieurs multiplicateurs de Lagrange et conduit à une résolution numérique rapide. La méthode des domaines fictifs a été étudiée et mise en œuvre dans [4, 54], dans le cas où une condition de surface libre est considérée sur la fissure, pour le problème de l'élastodynamique. Nous allons voir qu'elle s'applique aussi à la condition aux limites de contact unilatéral.


 FIG. 3.1 – Différences entre  $\Omega$  et  $C$ 

Rappelons le principe général de la méthode. Comme le montre la figure 3.1, on introduit un domaine  $C$  tel que  $C = \Omega \cup \Gamma$  et on suppose que  $C$  a une forme géométrique simple, c'est-à-dire rectangulaire en 2D, parallélépipédique en 3D. On note également  $\partial C = \Gamma_D$  le bord de  $C$ .

Le problème initial est posé dans  $\Omega = C \setminus \Gamma$ . Le principe de la méthode des domaines fictifs consiste à étendre la solution du problème initial à tout  $C$ . Les conditions aux limites sont alors prises en compte de façon faible par des multiplicateurs de Lagrange définis sur  $\Gamma$ .

Pour la discrétisation, on utilise deux maillages, représentés sur la figure 3.2 pour le cas bidimensionnel. On approche les inconnues volumiques (définies sur  $C$ ) sur un maillage régulier de  $C$ , constitué d'éléments carrés de côté  $h$ , ce qui correspond typiquement à une grille régulière utilisée par les méthodes de différences finies. Cela facilite l'implémentation du calcul et permet d'avoir des données structurées. Les inconnues surfaciques (multiplicateurs de Lagrange) sont calculées sur un maillage de la fissure  $\Gamma$ , de pas  $H = \max_j H_j$ ,  $H_j$  représentant la taille du  $j^{\text{ème}}$  élément de la fissure. Un maillage de la fissure garantit une bonne prise en compte de sa géométrie, aussi complexe soit-elle. En résumé, on obtient un schéma de type différences finies, tout en prenant en compte de façon précise la géométrie de la fissure.

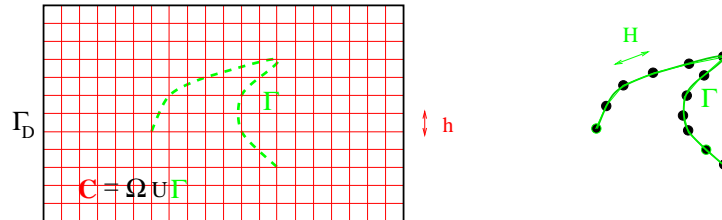


FIG. 3.2 – Maillage du domaine régulier et maillage de la fissure

Le principal inconvénient de la méthode est son relatif manque de précision: la méthode des domaines fictifs est d'ordre un (voir dans [31]). C'est le prix à payer pour la simplicité et la souplesse qu'elle fournit.

### 3.2 Obtention de la formulation en domaines fictifs

On présente ici la formulation en domaines fictifs du problème de contact unilatéral en élastodynamique, cette formulation a été utilisée dans [3].

Le domaine  $C$  ayant été introduit, on peut redéfinir  $\mathbf{X}$  de la manière suivante:

$$\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\tau} \in [H(\text{div}; C)]^{d^2}; \tau_{ij} = \tau_{ji}\}.$$

Par cette définition,  $\mathbf{X}$  est clairement un espace indépendant de la géométrie de la fissure.

Les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $d(\cdot, \cdot)$  sont définies par (1.12) en remplaçant  $\Omega$  par  $C$ . On introduit

également les formes bilinéaires suivantes:

$$\begin{aligned} b_T : \mathbf{X} \times \mathbf{L}_T &\rightarrow \mathbb{R}, & b_T(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}_T) &= \langle \boldsymbol{\tau}_T, \boldsymbol{\mu}_T \rangle_{L'_T, \mathbf{L}_T}, \\ b_N : \mathbf{X} \times H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{R}, & b_N(\boldsymbol{\tau}, \mu_N) &= \langle \boldsymbol{\tau}_N, \mu_N \rangle_{\mathcal{G}', \mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

De plus, on définit le convexe  $L_N^+$  et l'espace  $\mathbf{L}_T$  de la manière suivante:

$$\begin{cases} \mathcal{G} &= H_{00}^{1/2}(\Gamma), \\ L_N^+ &= H_{00+}^{1/2}(\Gamma) = \{\mu_N \in \mathcal{G}; \mu_N \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}, \\ \mathbf{L}_T &= [H_{00T}^{1/2}(\Gamma)]^2 = \{\boldsymbol{\mu}_T \in \mathcal{G}^d; \boldsymbol{\mu}_T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}. \end{cases}$$

La formulation en domaines fictifs équivalente au problème (1.8)-(1.9) est la suivante:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times \mathbf{L}_T \times L_N^+$  tels que

$$\begin{cases} \left( \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right) - d(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, & (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + d(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + b_T(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_T) + b_N(\boldsymbol{\tau}, \lambda_N) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, & (ii) \\ b_T(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}_T) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu}_T \in \mathbf{L}_T, & (iii) \\ b_N(\boldsymbol{\sigma}, \mu_N - \lambda_N) &\leq 0, \quad \forall \mu_N \in L_N^+. & (iv) \end{cases} \quad (3.2)$$

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 3.1** *Les problèmes (1.8)-(1.9) et (3.2) sont équivalents au sens suivant:*

- Soit  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  une solution suffisamment régulière du problème (1.8)-(1.9), alors si on pose  $(\lambda_N, \boldsymbol{\lambda}_T) = ([u_N], [\mathbf{u}_T])$ , on a, pour tout instant  $t$ ,  $\lambda_N \in L_N^+$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_T \in \mathbf{L}_T$  et  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, (\boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N))$  est solution du problème (3.2).
- Soit  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, (\boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N))$  une solution suffisamment régulière de (3.2), alors  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  est une solution du problème (1.8)-(1.9).

### Démonstration

• Soit  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  une solution, que nous supposons suffisamment régulière, de la formulation mixte classique (1.8)-(1.9). Pour presque tout temps  $t$ , en utilisant une formule d'intégration par parties donnée dans (1.11), on obtient aisément les relations suivantes considérées au sens des distributions, où  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  sont les distributions associées à  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  dans  $C$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) = \varepsilon(\mathbf{u}) + ([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})_{sym} \delta_\Gamma = \varepsilon(\mathbf{u}) + (([u_N] \mathbf{n} + [\mathbf{u}_T]) \otimes \mathbf{n})_{sym} \delta_\Gamma \text{ dans } [\mathcal{D}'(C)]^{d^2}, \\ \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] \delta_\Gamma = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \text{ dans } [\mathcal{D}'(C)]^d. \end{cases}$$

La notation  $\boldsymbol{\tau}_{sym}$  représente la partie symétrique du tenseur  $\boldsymbol{\tau}$ :  $\boldsymbol{\tau}_{sym} = 1/2 (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^t)$ . Dans la deuxième identité, le terme de saut disparaît par la continuité de la contrainte normale à travers  $\Gamma$ , qui figure parmi les conditions aux limites, en (1.9)-(iv). Le nouveau problème posé dans  $C$  s'écrit, si l'on note  $\lambda_N = [u_N]$  et  $\boldsymbol{\lambda}_T = [\mathbf{u}_T]$ ,

$$\varrho \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f} \text{ dans } [\mathcal{D}'(C)]^d, \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) = -((\lambda_N \mathbf{n} + \boldsymbol{\lambda}_T) \otimes \mathbf{n})_{sym} \delta_\Gamma \text{ dans } [\mathcal{D}'(C)]^{d^2}. \quad (3.4)$$

En multipliant la relation (3.3) par  $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$  et la relation (3.4) par  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}$  puis en intégrant sur  $C$  (par abus de langage, compte tenu de la présence de mesures de Dirac), on obtient

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \mathbf{v})_C - (\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{v})_C = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_C, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, \\ (\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}) + (\tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}) = -\langle \tau_N, \lambda_N \rangle_\Gamma - \langle \boldsymbol{\tau}_T, \boldsymbol{\lambda}_T \rangle_\Gamma, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}. \end{cases}$$

La relation (1.9)-(iv), c'est-à-dire l'absence de frottement, est prise en compte en multipliant cette relation par  $\boldsymbol{\mu}_T \in \mathbf{L}_T$  et en intégrant sur  $\Gamma$ . On obtient alors  $\langle \boldsymbol{\sigma}_T, \boldsymbol{\mu}_T \rangle_\Gamma = 0, \forall \boldsymbol{\mu}_T \in \mathbf{L}_T$ .

Les relations (1.9)-(i) et (1.9)-(ii), à savoir les conditions aux limites de contact, se réécrivent de la manière suivante, en utilisant la définition de  $\lambda_N$ ,

$$\lambda_N \geq 0, \tag{3.5}$$

$$\sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N \lambda_N = 0. \tag{3.6}$$

La condition (3.5) de non interpénétration des deux lèvres de la fissure entre elles est prise en compte directement dans l'espace  $L_N^+$ , en choisissant  $\lambda_N \in L_N^+$ .

Quant à la relation de complémentarité (3.5)-(3.6), on montre aisément qu'elle est équivalente à l'inéquation variationnelle

$$\lambda_N \in L_N^+, \quad \langle \sigma_N, \mu_N - \lambda_N \rangle_\Gamma \leq 0, \quad \forall \mu_N \in L_N^+. \tag{3.7}$$

En effet, il est clair que (3.6) implique

$$\begin{cases} \langle \sigma_N, \mu_N \rangle_\Gamma \leq 0, \forall \mu_N \in L_N^+, \\ \langle \sigma_N, \lambda_N \rangle_\Gamma = 0. \end{cases}$$

On en déduit (3.7) par différence. Réciproquement, supposons (3.7) vérifiée, alors, si nous choisissons  $\mu_N = \lambda_N + \nu_N, \nu_N \geq 0$ , nous obtenons

$$\langle \sigma_N, \nu_N \rangle_\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_N \geq 0 \Rightarrow \sigma_N \leq 0.$$

En choisissant  $\mu_N = 0$ , nous obtenons  $\langle \sigma_N, \lambda_N \rangle_\Gamma \geq 0 \Rightarrow \langle \sigma_N, \lambda_N \rangle_\Gamma = 0$ . On a donc (3.5)-(3.6).

- Soit  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N)$  une solution de la formulation en domaines fictifs (3.2).

La relation (3.2)-(i) est clairement équivalente à la relation (1.8)-(i).

En choisissant, dans la relation (3.2)-(ii),  $\boldsymbol{\tau}$  infiniment différentiable, à support compact dans  $\Omega$ , on obtient la relation (1.8)-(ii) au sens des distributions et des fonctions.

En utilisant ensuite la formule de Green et un choix approprié de fonctions tests s'annulant uniquement sur  $\Gamma$ , on obtient  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_D$ , soit (1.8)-(iii).

On introduit ensuite la forme  $\tilde{b}$  définie comme suit:

$$\tilde{b} : \mathbf{X} \times \mathcal{G} \times \mathbf{L}_T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{b}(\boldsymbol{\tau}; \mu_N, \boldsymbol{\mu}_T) = b_N(\boldsymbol{\tau}, \mu_N) + b_T(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}_T). \tag{3.8}$$

On définit les opérateurs  $\tilde{B}, B_N, B_T$

$$\begin{aligned} \tilde{B} : \quad \mathbf{X} &\rightarrow (\mathcal{G} \times \mathbf{L}_T)', & \tilde{B} \boldsymbol{\tau} &= \tilde{b}(\boldsymbol{\tau}, \dots), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \\ B_N : \quad \mathbf{X} &\rightarrow \mathcal{G}', & B_N \boldsymbol{\tau} &= b_N(\boldsymbol{\tau}, \cdot), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, \\ B_T : \quad \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{L}'_T, & B_T \boldsymbol{\tau} &= b_T(\boldsymbol{\tau}, \cdot), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Comme l'indique dans la suite le lemme 3.1, la forme  $\tilde{b}$  vérifie la condition inf-sup continue (3.11). Par conséquent, le résultat général rappelé par la proposition 3.1 nous permet d'obtenir  $\text{Ker } \tilde{B}^t = \{0\}$ , donc,  $\text{Ker } B_N^t = \{0\}$ ,  $\text{Ker } B_T^t = \{0\}$ . Nous en déduisons alors que  $\lambda_N = [u_N]$ ,  $\lambda_T = [u_T]$ .

Pour l'absence de frottement sur  $\Gamma$ , la relation (3.2)-(iii) est équivalente à (1.9)-(iii).

Pour la condition de contact, la relation (3.2)-(iv) est identique à (3.7). Or, nous venons de montrer que l'inéquation (3.7) est équivalente à (3.5)-(3.6).

Enfin, comme  $\sigma \in \mathbf{X} = \{\tau \in [H(\text{div}; C)]^{d^2}; \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$ , il est clair que  $[\sigma \mathbf{n}] = \mathbf{0}$  à travers  $\Gamma$  pour tout instant  $t$ . ■

**Remarque 3.1** *Les problèmes (1.13) et (3.2) sont équivalents car ils sont formellement équivalents au même problème: le problème (1.8)-(1.9). L'équivalence entre (1.13) et (1.8)-(1.9) a été démontrée dans la proposition 1.2 et le théorème 3.1 établit le résultat d'équivalence entre (3.2) et (1.8)-(1.9). Néanmoins, la question de l'existence de solutions à (1.13), (3.2), demeure ouverte. La formulation (1.13) est aussi équivalente à la formulation primale (1.7). L'existence d'une solution à la formulation mixte (3.2) dépend donc de l'existence d'une solution au problème primal en déplacements (1.7). Or, cette question n'est pas résolue.*

Par rapport au problème (1.13), la non linéarité apparaît seulement dans la relation (3.2)-(iv). D'un point de vue numérique, cela signifie que le problème d'optimisation à résoudre est uniquement posé sur la fissure. Il est donc de taille relativement petite, égale au nombre de degrés de liberté sur la fissure.

**Remarque 3.2** *On peut exprimer différemment les relations (3.2)-(iii) et (3.2)-(iv). On peut exprimer la condition de contact unilatéral et l'absence de frottement sans utiliser la décomposition en parties normale et tangentielle. On montre alors que (1.9)-(v)-(3.5)-(3.6) est équivalent à l'inéquation suivante dans laquelle on considère  $\lambda = \lambda_N \mathbf{n} + \lambda_T$  et l'ensemble  $\mathcal{C} = \{\mu \in \mathcal{G}^d, \mu_N \geq 0\}$ :*

$$\lambda \in \mathcal{C}, \langle \sigma \mathbf{n}, \mu - \lambda \rangle_\Gamma \leq 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{C}. \quad (3.9)$$

En effet,  $\langle \sigma \mathbf{n}, \mu - \lambda \rangle_\Gamma = \langle \sigma_T, \mu_T - \lambda_T \rangle_\Gamma + \langle \sigma_N, \mu_N - \lambda_N \rangle_\Gamma, \forall \sigma \in \mathbf{X}, \forall \mu, \lambda \in \mathcal{G}^d$ .

Supposons (1.9)-(v)-(3.5)-(3.6) vérifiées, on obtient  $\langle \sigma \mathbf{n}, \mu - \lambda \rangle_\Gamma = \langle \sigma_N, \mu_N - \lambda_N \rangle \leq 0$ , ce qui correspond à (1.9)-(v)-(3.7).

Réciproquement, supposons (3.9) vérifiée, en choisissant  $\mu_N = \lambda_N$  et  $\mu_T \in \mathbf{L}_T$  quelconque, on obtient  $\langle \sigma_T, \mu_T \rangle = 0$ , pour tout  $\mu_T \in \mathbf{L}_T$ , soit (1.9)-(v). Ensuite, en choisissant  $\mu_T = \lambda_T \in \mathbf{L}_T$ , on obtient  $\langle \sigma_N, \mu_N - \lambda_N \rangle \leq 0, \forall \mu_N \in L_N^+$ , c'est-à-dire la relation (3.7) équivalente à (3.5)-(3.6).

### 3.3 Condition inf-sup continue

On commence par rappeler le résultat abstrait suivant de Fortin-Brezzi, utilisé dans [54].

Soit  $l$  une forme bilinéaire continue définie sur  $X \times Y$  où  $X, Y$  sont deux espaces de Hilbert.

On introduit les deux opérateurs  $L$  et  $L^t$  naturellement associés à  $l(x,y)$ .

$$\begin{aligned} L &: X \rightarrow Y' \\ x &\mapsto Lx = l(x, \cdot) \text{ dans } Y'. \\ L^t &: Y \rightarrow X' \\ y &\mapsto L^t y = l(\cdot, y) \text{ dans } X', \end{aligned}$$

où  $L^t$  désigne l'application transposée. On a alors le théorème suivant:

**Proposition 3.1** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- $\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \frac{l(x,y)}{\|x\|_X \|y\|_Y} \geq k$ ,
- $L$  est surjectif,
- $\text{Ker } L^t = \{0\}$  et  $\text{Im } L$  fermée dans  $Y'$ .

En utilisant la forme  $\tilde{b}$  définie en (3.8), la formulation (3.2) s'écrit alors de manière équivalente

Trouver  $(\sigma, \mathbf{u}, (\lambda_T, \lambda_N)) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times (\mathbf{L}_T \times L_N^+)$  tels que

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}) - d(\sigma, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, \\ a(\sigma, \tau) + d(\tau, \mathbf{u}) + \tilde{b}(\tau; \lambda_N, \lambda_T) &= 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{X}, \\ \tilde{b}(\sigma; \mu_N - \lambda_N, \mu_T - \lambda_T) &\leq 0, \quad \forall \mu_N \in L_N^+, \forall \mu_T \in \mathbf{L}_T. \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous allons appliquer la proposition 3.1 à la forme  $\tilde{b}$ . Pour cela, il s'agit de montrer que  $\tilde{b}$  vérifie une condition inf-sup continue.

**Lemme 3.1** *La forme  $\tilde{b}$  vérifie la condition inf-sup continue suivante:*

$$\exists k > 0, \quad \inf_{(\mu_N, \mu_T) \in \mathcal{G} \times \mathbf{L}_T} \sup_{\tau \in \mathbf{X}} \frac{\tilde{b}(\tau; \mu_N, \mu_T)}{\|\tau\|_X \|(\mu_N, \mu_T)\|_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}^d}} \geq k. \quad (3.11)$$

### Démonstration

La preuve est assez classique, elle est donnée dans [54], sans la décomposition en parties normale et tangentielle. On utilise la décomposition de  $\Omega$  présentée dans le chapitre 1 et visible sur la figure 1.1. On considère le problème suivant:

Trouver  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) \in [H^1(\Omega^+)]^d \times [H^1(\Omega^-)]^d$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_D$  tel que

$$\begin{cases} \text{div } \sigma(\mathbf{u}^+) = 0, & \text{dans } \Omega^+, & \text{div } \sigma(\mathbf{u}^-) = 0, & \text{dans } \Omega^- \\ \mathbf{u}^+ = \lambda_N \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma, & \sigma(\mathbf{u}^-) \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u}^+) \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega^- \cap \partial\Omega^+, \\ \mathbf{u}^+ = \mathbf{0}, & \text{sur } \partial\Omega^+ \setminus \bar{\Gamma}, & \mathbf{u}^- = 0, & \text{sur } \Gamma_D \cap \partial\Omega^-. \end{cases}$$

On pose  $\tau = \sigma(\mathbf{u}^+)$  sur  $\Omega^+$  et  $\tau = \sigma(\mathbf{u}^-)$  sur  $\Omega^-$ . On a bien  $\tau \in \mathbf{X}$  et de plus

$$\begin{aligned} b_N(\tau, \lambda_N) &= \int_{\Gamma} \sigma_N(\mathbf{u}^+) \lambda_N ds = \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{u}^+) \mathbf{n}^+ \cdot \lambda_N \mathbf{n}^+ ds \\ &= \int_{\Omega^+} \text{div } \sigma(\mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{u}^+ dx + \int_{\Omega^+} \sigma(\mathbf{u}^+) : \varepsilon(\mathbf{u}^+) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_{\Omega^+} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^+) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^+) dx = \int_{\Omega^+} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^+) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^+) dx \geq \alpha \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^+)\|_{L^2(\Omega^+)}^2.$$

Par l'inégalité de Korn sur  $\Omega^+$ ,  $\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^+)\|_{L^2(\Omega^+)}$  est une norme équivalente à  $\|\mathbf{u}^+\|_{H^1(\Omega^+)}$  car  $\mathbf{u}^+ \in [H^1(\Omega^+)]^d$  et la trace de  $\mathbf{u}^+$  s'annule sur  $\partial\Omega^+ \setminus \bar{\Gamma}$ , qui est une partie de  $\partial\Omega^+$  de mesure non nulle.

Par la continuité de l'opérateur trace défini de  $H^1(\Omega^+)$  dans  $H^{1/2}(\partial\Omega^+)$ , on obtient

$$\exists C > 0, \quad b_N(\boldsymbol{\tau}, \lambda_N) \geq C \|\lambda_N\|_{\mathcal{G}}^2.$$

De plus, on peut démontrer que l'application, qui à  $\lambda_N$  associe  $\boldsymbol{\tau}$ , est continue de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathbf{X}$ . On obtient donc

$$\exists C > 0, \quad b_N(\boldsymbol{\tau}, \lambda_N) \geq C \|\lambda_N\|_{\mathcal{G}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{X}}.$$

En appliquant le même raisonnement pour la composante tangentielle  $\boldsymbol{\lambda}_T$ , on obtient (3.11). ■

Par la proposition 3.1, on obtient que la condition inf-sup (3.11) entraîne  $\text{Ker } \tilde{B}^t = \{0\}$ . Comme la relation (3.2)-(ii) conduit à l'égalité  $\tilde{b}(\boldsymbol{\tau}; \lambda_N, \boldsymbol{\lambda}_T) = \tilde{b}(\boldsymbol{\tau}; [u_N], [\mathbf{u}_T])$  pour tout  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}$ , on peut en déduire alors  $\lambda_N = [u_N]$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_T = [\mathbf{u}_T]$ .

### 3.4 Conservation d'énergie

L'énergie  $\mathcal{E}$  associée à une solution de (3.2) est donnée par la relation suivante.

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} \left( \varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right). \quad (3.12)$$

**Théorème 3.2** *Si la solution du problème (3.2) est suffisamment régulière, l'égalité suivante est satisfaite, à tout instant  $t$ ,*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \left( \mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) ds. \quad (3.13)$$

*En particulier, en l'absence de source extérieure, l'énergie  $\mathcal{E}$  se conserve.*

#### Démonstration

L'énergie  $\mathcal{E}$  est obtenue formellement à partir de (3.2). Pour cela, on suppose que  $\partial \mathbf{u} / \partial t \in \mathbf{M}$ . On remplace la fonction test  $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$  par  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  dans la relation (3.2)-(i). On suppose que  $\partial \lambda_N / \partial t \in \mathcal{G}$ ,  $\partial \boldsymbol{\lambda}_T / \partial t \in \mathbf{L}_T$ . On dérive la relation (3.2)-(ii) par rapport au temps, et on choisit comme fonction test  $\boldsymbol{\sigma}$ . Après addition, il vient

$$\left( \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + a\left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma} \right) + b_N\left( \boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t} \right) = \left( \mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right).$$

Il s'agit d'estimer la quantité  $b_N\left( \boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t} \right)$ .

Pour cela, on sait que  $b_N(\boldsymbol{\sigma}, \lambda_N) = 0$  pour presque tout temps  $t$ . En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient

$$b_N\left( \boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t} \right) = -b_N\left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \lambda_N \right) \text{ pour presque tout temps } t.$$

Comme, sur  $\Gamma$ , pour presque tout temps  $t$ , on a, soit  $\sigma_N = 0$ , soit  $\lambda_N = 0$ , on en déduit

$$b_N\left( \boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t} \right) = 0 \text{ pour presque tout } t \in ]0, T[.$$

On obtient alors  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})$ . L'énergie vérifie alors

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) ds. \quad \blacksquare$$

Formellement, l'énergie continue est constante si l'on impose seulement des conditions initiales. Cette énergie est identique au cas sans fissure et au cas où une condition aux limites de surface libre est considérée sur la fissure (voir dans [54] pour une énergie formulée en vitesses-contraintes).

Pour les applications numériques, nous chercherons des schémas numériques pour lesquels l'énergie discrète de la solution, en l'absence de source extérieure, est constante ou subit une faible dissipation, par analogie à l'énergie continue.

## 3.5 Problème semi-discrétisé en espace

Dans cette section, on présente la semi-discrétisation en espace de la formulation (3.2) du problème de l'élastodynamique avec contact unilatéral sans frottement. On décrit les espaces d'approximation qui sont utilisés.

### 3.5.1 Présentation du schéma

#### 3.5.1.1 Formulation variationnelle

On introduit des approximations internes de  $\mathbf{M}$  et de  $\mathbf{X}$  notées  $\mathbf{M}_h$  et  $\mathbf{X}_h$ , telles que  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{M}_h \subset \mathbf{M}$ , où  $\mathbf{X}_h$  et  $\mathbf{M}_h$  sont de dimension finie. On considère également des approximations internes de  $\mathcal{G}$ ,  $L_N^+$  et  $\mathbf{L}_T$  notées  $\mathcal{G}_H$ ,  $L_{NH}^+$ ,  $\mathbf{L}_{TH}$  qui vérifient  $\mathcal{G}_H \subset \mathcal{G}$ ,  $L_{NH}^+ \subset L_N^+$  et  $\mathbf{L}_{TH} \subset \mathbf{L}_T$ .  $\mathcal{G}_H$ ,  $L_{NH}^+$ ,  $\mathbf{L}_{TH}$  sont aussi de dimension finie. Un choix d'espaces d'approximation sera proposé dans la section 3.6.

Le problème approché associé à (3.2) est le suivant:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_{TH}, \lambda_{NH}) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h \times \mathbf{L}_{TH} \times L_{NH}^+$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left( \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \mathbf{v}_h \right) - d(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{M}_h, \quad (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + d(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) + b_T(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\lambda}_{TH}) + b_N(\boldsymbol{\tau}_h, \lambda_{NH}) & = 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h, \quad (ii) \\ b_T(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\mu}_{TH}) & = 0, \forall \boldsymbol{\mu}_{TH} \in \mathbf{L}_{TH}, \quad (iii) \\ b_N(\boldsymbol{\sigma}_h, \mu_{NH} - \lambda_{NH}) & \leq 0, \forall \mu_{NH} \in L_{NH}^+. \quad (iv) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

#### 3.5.1.2 Formulation matricielle

On désigne par  $(\mathbf{v}_j)_j$  les fonctions de base de  $\mathbf{M}_h$ ,  $(\boldsymbol{\tau}_j)_j$  celles de  $\mathbf{X}_h$ ,  $(\boldsymbol{\mu}_T^i)_i$  les fonctions de base de  $\mathbf{L}_{TH}$ ,  $(\mu_N^i)_i$  les fonctions de base de  $L_{NH}^+$ . On décompose les inconnues  $\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_{TH}, \lambda_{NH}$  comme suit:

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \sum_{j=1}^{N_\Sigma} \Sigma_j \boldsymbol{\tau}_j, \quad \mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{N_u} U_j \mathbf{v}_j, \quad \boldsymbol{\lambda}_{TH} = \sum_{j=1}^{N_{L_T}} \Lambda_T^j \boldsymbol{\mu}_T^j, \quad \lambda_{NH} = \sum_{j=1}^{N_G} \Lambda_N^j \mu_N^j.$$

$\Sigma = (\Sigma_j), U = (U_j), \Lambda_T = (\Lambda_T^j), \Lambda_N = (\Lambda_N^j)$  sont les composantes de  $\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_{TH}, \lambda_{NH}$  sur les bases respectives de  $\mathbf{X}_h, \mathbf{M}_h, \mathbf{L}_{TH}, L_{NH}^+$ . En conséquence, le problème semi-discrétisé en espace, écrit sous



forme matricielle, est le suivant:

Trouver  $(\Sigma, U, \Lambda_T, \Lambda_N) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_\Sigma} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_{L_T}} \times \mathbb{R}_+^{N_G}$  tel que

$$\begin{cases} M_v \frac{d^2 U}{dt^2} - D \Sigma & = & F, & (i) \\ M_\sigma \Sigma + D^* U + B_T^* \Lambda_T + B_N^* \Lambda_N & = & 0, & (ii) \\ B_T \Sigma & = & 0, & (iii) \\ (B_N \Sigma, \mu_N - \Lambda_N) \leq 0, \forall \mu_N \in \mathbb{R}_+^{N_G}. & & & (iv) \end{cases} \quad (3.15)$$

Les matrices sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} (M_v)_{ij} &= (\varrho \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i), \quad D_{ij} = d(\boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{v}_i), \quad (M_\sigma)_{ij} = a(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_i), \\ (B_T)_{ij} &= b_T(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\mu}_T^i), \quad (B_N)_{ij} = b_N(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\mu}_N^i), \quad F_i = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

L'opérateur  $D$  correspond à une divergence discrète,  $D^*$  peut être interprété comme une discrétisation de l'opérateur  $-\varepsilon(\mathbf{u})$ . Les opérateurs  $B_N$  et  $B_T$  peuvent être vus respectivement comme des versions discrètes des opérateurs de trace normale et de trace tangentielle sur  $\Gamma$ .

**Remarque 3.3** *L'inégalité (3.15)-(iv) peut être réinterprétée comme une projection du type*

$$\Lambda_N = \Pi(\Lambda_N + B_N \Sigma) \quad (3.16)$$

où  $\Pi$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}_+^{N_G}$ .

**Remarque 3.4** *Dans le cas linéaire (cas de la surface libre), cette relation devient*

$$(B_N \Sigma, \mu_N - \Lambda_N) = 0, \quad \forall \mu_N \in \mathbb{R}^{N_G},$$

ce qui est équivalent à résoudre un système linéaire.

### 3.5.2 Calcul de la solution, existence et unicité

Dans un premier temps, on considère le problème abstrait suivant, où  $Q$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , symétrique définie positive,  $\mathcal{K}$  est un convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  un élément quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

Trouver  $\Lambda \in \mathcal{K}$  tel que

$$(Q\Lambda + \mathcal{F}, \mu - \Lambda) \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{K}. \quad (3.17)$$

Ce problème n'est rien d'autre que la condition d'optimalité du problème d'optimisation quadratique suivant:

$$\Lambda \in \mathcal{K}, \quad J(\Lambda) = \min_{\mu \in \mathcal{K}} J(\mu), \quad J(\mu) = \frac{1}{2}(Q\mu, \mu) + (\mathcal{F}, \mu).$$

$J$  est une fonctionnelle strictement convexe car  $Q$  est symétrique définie positive et  $\mathcal{K}$  est un ensemble convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Par un résultat classique, on en déduit que le problème (3.17) admet une solution unique  $\Lambda \in \mathcal{K}$ . Nous avons également le résultat suivant dans lequel on définit l'application  $\mathcal{L}$  qui, à  $\mathcal{F}$ , associe  $\Lambda$  solution de (3.17).

**Lemme 3.2** *Supposons que la matrice  $Q$  du problème (3.17) est symétrique définie positive. Alors l'application  $\mathcal{L}$  qui, à  $\mathcal{F}$ , associe  $\Lambda$  solution de (3.17), est Lipschitzienne.*

**Démonstration**

En effet, soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  les solutions de (3.17) associées à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . On a alors

$$(Q\Lambda_1 + \mathcal{F}_1, \mu - \Lambda_1) \geq 0, \quad (Q\Lambda_2 + \mathcal{F}_2, \mu - \Lambda_2) \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{K}.$$

En choisissant successivement  $\mu = \Lambda_2$  et  $\mu = \Lambda_1$ , on obtient

$$(Q\Lambda_1 + \mathcal{F}_1, \Lambda_2 - \Lambda_1) \geq 0, \quad (Q\Lambda_2 + \mathcal{F}_2, \Lambda_1 - \Lambda_2) \geq 0.$$

D'où, par addition,

$$(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, \Lambda_2 - \Lambda_1) \geq (Q(\Lambda_2 - \Lambda_1), \Lambda_2 - \Lambda_1).$$

On utilise Cauchy-Schwarz et si  $Q$  est symétrique définie positive, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $(Q\Lambda, \Lambda) \geq \alpha \|\Lambda\|^2$  pour tout  $\Lambda$ . On obtient alors

$$\|\Lambda_1 - \Lambda_2\| = \|\mathcal{L}(\mathcal{F}_1) - \mathcal{L}(\mathcal{F}_2)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2\|. \quad \blacksquare$$

Nous revenons ensuite au problème (3.15). On élimine tout d'abord  $\Sigma$  en utilisant la relation (3.15)-(ii) et on réécrit (3.15)-(iii) et (3.15)-(iv) en remplaçant  $\Sigma$  par son expression en fonction de  $U$  et  $\Lambda$ . On doit alors résoudre le problème suivant en  $\Lambda = (\Lambda_T, \Lambda_N)^t$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_{\mathcal{L}T}} \times \mathbb{R}_+^{N_{\mathcal{G}}} = \mathcal{K} \\ (Q\Lambda(t) + \mathcal{F}(t), \mu - \Lambda(t)) \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{K}. \end{cases} \quad (3.18)$$

On définit

$$Q = \begin{pmatrix} B_T M_\sigma^{-1} B_T^* & B_T M_\sigma^{-1} B_N^* \\ B_N M_\sigma^{-1} B_T^* & B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathcal{F} = F(U) = (B_T M_\sigma^{-1} D^* U, B_N M_\sigma^{-1} D^* U)^t. \quad (3.19)$$

On remarque que (3.18) est identique au problème (3.17), mise à part la dépendance par rapport à la variable temporelle. Le problème (3.18) est donc équivalent au problème de minimisation quadratique suivant:

$$J_t(\Lambda(t)) = \min_{\mu \in \mathcal{K}} J_t(\mu) = \frac{1}{2} (Q\mu, \mu) + (\mathcal{F}(t), \mu).$$

Il faut vérifier si la matrice  $Q$  définie en (3.19) est symétrique définie positive, c'est-à-dire si le problème est bien posé. Comme dans le cas continu, le caractère bien posé du problème (3.15) est assuré si une condition inf-sup est respectée. Cette condition inf-sup discrète s'écrit, où  $k_h$  est une constante pouvant dépendre du pas de maillage  $h$ ,

$$\exists k_h > 0, \quad \inf_{(\mu_{NH}, \mu_{TH}) \in \mathcal{G}_H \times \mathcal{L}_{TH}} \sup_{\tau_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\tilde{b}(\tau_h; \mu_{NH}, \mu_{TH})}{\|\tau_h\|_{\mathbf{X}_h} \|(\mu_{NH}, \mu_{TH})\|_{\mathcal{G}_H \times \mathcal{G}_H^d}} \geq k_h. \quad (3.20)$$

Sans la condition (3.20), la matrice  $Q$  est symétrique, positive. Si la condition (3.20) est respectée, alors la matrice  $Q$  donnée dans (3.19) est définie (car  $\text{Ker } \tilde{B}^* = \{0\}$ ) et donc symétrique définie positive.

**Proposition 3.2** *Si la condition (3.20) est vérifiée, alors il existe une solution unique  $(\Sigma, U, \Lambda_T, \Lambda_N)$  de (3.15), définie pour tout temps  $t$ .*

## Démonstration

Le problème (3.18) permet de définir  $\Lambda$  comme une fonction de  $U$ . On étudie plus précisément cette application. On note comme précédemment l'application  $\mathcal{L}$  qui, à  $\mathcal{F}$ , associe  $\Lambda$  solution de (3.18). On remarque que l'on peut définir  $\Lambda$  comme une fonction de  $U$  par l'intermédiaire de  $\tilde{\mathcal{L}}$ , définie de la manière suivante:  $\Lambda = \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}(F(U)) = \tilde{\mathcal{L}}(U)$ . Si l'on suppose que (3.20) est vraie, en conséquence du lemme 3.2, l'application  $\tilde{\mathcal{L}}$  est Lipschitzienne car  $\mathcal{L}$  est Lipschitzienne et le second membre  $\mathcal{F} = F(U)$  dépend linéairement de  $U$ . Nous allons ensuite reformuler un problème équivalent au problème (3.15), dans lequel nous allons éliminer les inconnues  $\Sigma$  et  $\Lambda = (\Lambda_T, \Lambda_N)^t$ . Cette élimination a seulement un intérêt théorique, en pratique on conservera les inconnues  $\Sigma$  et  $\Lambda$ . On obtient alors en réécrivant (3.15)-(ii), à l'aide de  $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{\mathcal{L}}_T, \tilde{\mathcal{L}}_N)$ .

$$M_\sigma \Sigma + D^*U + B_T^* \tilde{\mathcal{L}}_T(U) + B_N^* \tilde{\mathcal{L}}_N(U) = 0. \quad (3.21)$$

En éliminant la variable  $\Sigma$  dans (3.15)-(i), on obtient le problème suivant en  $U$ :

$$M_v \frac{d^2 U}{dt^2} + DM_\sigma^{-1} D^*U + DM_\sigma^{-1} B_T^* \tilde{\mathcal{L}}_T(U) + DM_\sigma^{-1} B_N^* \tilde{\mathcal{L}}_N(U) = F.$$

On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour calculer  $U$  car  $U$  peut s'écrire comme la solution d'une équation différentielle du premier ordre  $dY/dt = G(t, Y)$  où  $Y = (U, dU/dt)$  et  $G$  est Lipschitzienne par rapport à  $Y$ , car  $\tilde{\mathcal{L}}$  est Lipschitzienne. Il existe alors une solution unique  $U(t)$  définie globalement.

A tout instant  $t$ ,  $\Sigma(t)$  est déterminée de manière unique par (3.21).

$$\Sigma = -M_\sigma^{-1} D^*U - M_\sigma^{-1} B_T^* \tilde{\mathcal{L}}_T(U) - M_\sigma^{-1} B_N^* \tilde{\mathcal{L}}_N(U).$$

Concernant  $\Lambda(t)$ , si la condition (3.20) est vérifiée, la matrice  $Q$  est symétrique définie positive. On en déduit aisément alors que le problème (3.18) admet une solution unique  $\Lambda(t) = (\Lambda_T(t), \Lambda_N(t))$ , pour tout instant  $t$ . ■

**Remarque 3.5** Dans le cas linéaire (cas de la surface libre), le problème d'optimisation serait

$$\text{Trouver } \Lambda(t) \in \mathcal{K}' = \mathbb{R}^{N_{LT}} \times \mathbb{R}^{N_G} \text{ tel que } J_t(\Lambda(t)) = \min_{\mu \in \mathcal{K}'} J_t(\mu) = \frac{1}{2}(Q\mu, \mu) + (\mathcal{F}(t), \mu).$$

## 3.6 Choix des espaces d'approximation

Le choix des espaces d'approximation est motivé par le souci d'obtenir un schéma "le plus explicite" possible. Cette requête est liée à la possibilité de faire de la condensation de masse, c'est-à-dire pouvoir approcher les matrices  $M_v$  et  $M_\sigma$ , utilisées dans (3.15), par des matrices diagonales ou diagonales par blocs. Par ailleurs, l'inversion de la matrice  $M_\sigma$  intervient également dans la construction de la matrice  $Q$ .

Pour l'approximation de  $\mathbf{X} \times \mathbf{M}$  (des variables contraintes et déplacements), nous utilisons ici l'élément fini  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$ , introduit dans [50, 49]. Cet élément fini est modifié par rapport à l'élément  $Q_1^{div} - Q_0$  présenté dans [5, 54]. L'élément fini présenté dans [5, 54] permet de faire de la condensation de masse et il est adapté à la résolution d'un problème mixte sans fissure.

### 3.6.1 Espace d'approximation $\mathbf{X}_h$

Pour le problème présent, les contraintes sont approchées par la même famille de fonctions  $Q_1$  que dans [5]. Plus précisément, l'espace d'approximation  $\mathbf{X}_h$  est défini de la manière suivante, où  $\mathcal{T}_h$

désigne un maillage de  $C$ ,  $K$  est un élément quelconque de ce maillage.

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbf{X} / \forall K \in \mathcal{T}_h, \boldsymbol{\sigma}_h|_K \in (Q_1(K))^{d^2} \right\}.$$

La contrainte approchée  $\boldsymbol{\sigma}_h$  est symétrique et possède les continuités de  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ . Dans le cas bidimensionnel,  $\sigma_{xx}$  est continu dans la direction horizontale ( $x$ ),  $\sigma_{yy}$  est continu dans la direction verticale ( $y$ ),  $\sigma_{xy}$  est continu dans les deux directions horizontale et verticale, ( $x, y$ ). De plus,  $\sigma_{xx}$  possède deux degrés de liberté dans la direction verticale (appelés dans la suite  $\sigma_{xx}^h$  et  $\sigma_{xx}^b$  pour “haut” et “bas”), donc, en un sommet donné,  $\sigma_{xx}$  n’est pas continu en  $y$ . De même,  $\sigma_{yy}$  possède deux degrés de liberté dans la direction horizontale (appelés dans la suite  $\sigma_{yy}^d$  et  $\sigma_{yy}^g$  pour “droite” et “gauche”) et n’est pas continu en  $x$ . Les continuités des contraintes sont représentées sur la figure 3.3. Dans le cas bidimensionnel, il y a donc cinq degrés de liberté associés aux contraintes, par sommet. Dans le cas tridimensionnel, cela devient plus compliqué. Il y a dix-huit degrés de liberté associés aux contraintes, par sommet.

### 3.6.2 Espace d'approximation $M_h$

Nous utilisons l’élément fini  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$ , c’est-à-dire que la variable déplacement est approchée par une fonction discontinue et  $\mathcal{P}_1$  par élément. Plus précisément, l’espace d’approximation pour  $\mathbf{u}$  est le suivant:

$$\mathbf{M}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in (\mathcal{P}_1^{disc}(K))^d \right\}.$$

Le déplacement étant cherché dans un sous-espace de  $[L^2(\Omega)]^d$ , n’importe quel choix d’éléments finis discontinus conduit automatiquement à une matrice diagonale par blocs, la matrice  $M_v$  est donc diagonale. Cet élément donne toujours un schéma explicite par rapport aux variables volumiques, de même que l’élément  $Q_1^{div} - Q_0$  de [5], et semble assurer numériquement la convergence de la méthode des domaines fictifs pour le cas de la conditions aux limites de surface libre sur la fissure (voir dans [50, 49]). Plus précisément, l’espace  $\mathcal{P}_1^{disc}$  se décompose en deux sous-espaces:  $\mathcal{P}_1^{disc} = Q_0 + Q_0^\perp$  où  $Q_0^\perp$  désigne l’espace orthogonal à  $Q_0$ . Les degrés de liberté associés à  $Q_0^\perp$  assurent la convergence de la méthode des domaines fictifs. Par exemple, dans le cas bidimensionnel, sur le carré de référence  $[0,1] \times [0,1]$ , les fonctions de base associées à la première composante du déplacement sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les fonctions de base associées à la deuxième composante du déplacement sont

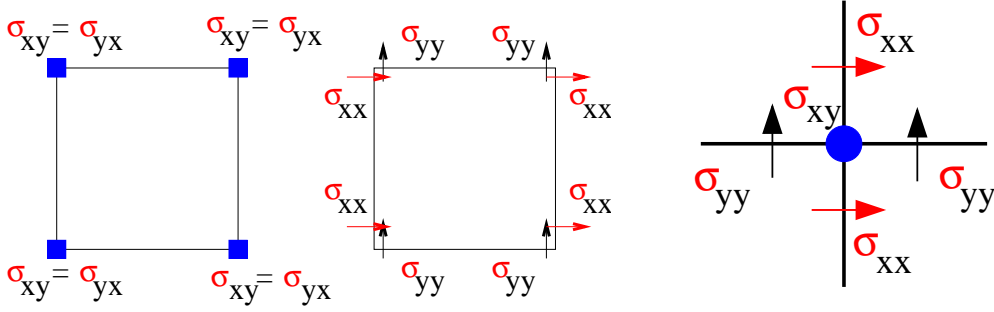
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y - 1 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que les degrés de liberté associés à  $Q_0^\perp$  sont de moyenne nulle. Sur l’exemple, ce sont ceux associés aux fonctions de base  $2x - 1$  et  $2y - 1$ .

En l’absence de fissure, le choix de  $\mathbf{M}_h$  nous permet de définir un problème équivalent au problème (3.14) formulé uniquement en contraintes. Pour le cas linéaire (voir dans [50, 49] pour une formulation en vitesses-contraintes), la formulation variationnelle approchée est

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$  tels que

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \mathbf{v}_h) - d(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{M}_h, \\ a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + d(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) = 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h. \end{cases} \quad (3.22)$$


 FIG. 3.3 – Continuités des contraintes pour l'élément  $Q_1^{div}$ 

$\mathbf{U}$   
 $y$   $\mathbf{U}_x$

$$U_x = (u_x, u_{x,x}, u_{x,y})^t$$

$$U_y = (u_y, u_{y,x}, u_{y,y})^t$$

 FIG. 3.4 – Approximation de  $\mathbf{u}$  par l'élément  $\mathcal{P}_1^{disc}$ 

En dérivant la deuxième équation de (3.22) deux fois par rapport au temps et en choisissant  $\mathbf{v}_h = 1/\rho \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h$ , ce qui est possible puisque  $\operatorname{div} \mathbf{X}_h \subset \mathbf{M}_h$  par le choix précédent des espaces d'approximation, on obtient le problème suivant:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h$  tels que

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h \right) - (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h) = \left( \mathbf{f}, \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h \right), \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h, \\ a \left( \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}_h}{\partial t^2}, \boldsymbol{\tau}_h \right) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h, \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}) = 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h. \end{cases}$$

On obtient par soustraction le problème suivant:

Trouver  $\boldsymbol{\sigma}_h : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X}_h$  tels que

$$a \left( \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}_h}{\partial t^2}, \boldsymbol{\tau}_h \right) + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h) = - \left( \mathbf{f}, \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h \right), \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h.$$

Le choix des espaces d'approximation nous permet de nous dispenser de satisfaire une condition inf-sup entre les variables contraintes et déplacements. Lorsque l'on considère la présence d'une fissure, en conservant ce choix des espaces d'approximation, seule la condition inf-sup sur la fissure va jouer un rôle.

### 3.6.3 Espace d'approximation pour les multiplicateurs

Les multiplicateurs sont approchés par l'élément  $\mathcal{P}_1^c$ , composé des fonctions  $\mathcal{P}_1$  par morceaux et continues. Notons par  $\mathcal{T}_H$  le maillage de la fissure  $\Gamma$ , et  $S$  un élément de  $\mathcal{T}_H$ , l'espace d'approximation  $\mathcal{G}_H$  est défini de la manière suivante:

$$\mathcal{G}_H = \{ \mu_H \in C^0(\Gamma) / \forall S \in \mathcal{T}_H, \mu_H|_S \in \mathcal{P}_1(S) \}.$$

L'espace d'approximation  $L_{NH}$  est alors

$$L_{NH}^+ = \{ \mu_{NH} \in L_N^+ / \forall S \in \mathcal{T}_H, \mu_{NH}|_S \in \mathcal{P}_1(S) \}.$$

Cela signifie que les degrés de liberté associés à  $\lambda_N$  doivent être positifs.

De son côté, l'espace d'approximation  $L_{TH}$  est

$$L_{TH} = \left\{ \boldsymbol{\mu}_{TH} \in \mathbf{L}_T / \forall S \in \mathcal{T}_H, \boldsymbol{\mu}_{TH}|_S \in (\mathcal{P}_1(S))^d \right\}.$$

On présente, sur la figure 3.5, un exemple de maillage de fissure. La fissure est paramétrisée par un abscisse curviligne.

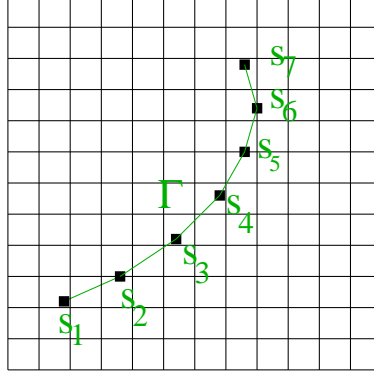


FIG. 3.5 – Représentation du maillage de la fissure

Dans le cas de fissures de classe  $C^1$ , la tangente et la normale sont continues. Cela justifie le fait que  $\lambda_N$  et  $\boldsymbol{\lambda}_T$  peuvent être approchés par des fonctions continues. Dans le cas de fissures singulières comportant un angle, nous devons modifier les espaces d'approximation des multiplicateurs. Cette modification est expliquée dans la section 6.3.4.

### 3.6.4 A propos de la condition inf-sup discrète uniforme

Rappelons que le couplage entre le maillage régulier de  $C$  et le maillage de la fissure se fait par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange et des termes  $b_N$  et  $b_T$ , définis en (3.1). On a vu auparavant que le problème semi-discrétisé (3.15) est bien posé si la condition (3.20) est vérifiée sur la forme  $\tilde{b}$  qui regroupe  $b_N$  et  $b_T$ . On sait, dans le cas linéaire, c'est-à-dire d'une condition de surface libre sur la fissure, qu'il est nécessaire d'avoir une condition inf-sup discrète uniforme, c'est-à-dire que la constante  $k_h$  de (3.20) est indépendante de  $h$ , pour assurer la convergence de la solution semi-discrète. Cette condition s'écrit,  $k$  désignant une constante indépendante du pas de maillage  $H$ ,

$$\exists k > 0, \inf_{(\mu_{NH}, \boldsymbol{\mu}_{TH}) \in \mathcal{G}_H \times L_{TH}} \sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{\tilde{b}(\boldsymbol{\tau}_h; \mu_{NH}, \boldsymbol{\mu}_{TH})}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{X}_h} \|(\mu_{NH}, \boldsymbol{\mu}_{TH})\|_{\mathcal{G}_H \times \mathcal{G}_H^d}} \geq k. \quad (3.23)$$

Il a été montré, dans d'autres applications de la méthode des domaines fictifs, dans [2, 20, 32], que la condition inf-sup discrète uniforme est bien satisfaite dès lors que les pas de maillages  $H$  et  $h$  vérifient une condition de compatibilité du type:  $H/h \geq c$ , où  $c > 0$ .

Revenons sur le cas linéaire (condition de surface libre). Par notre choix précédent d'espaces d'approximation, le problème peut se réécrire de la manière suivante:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\lambda}_{TH}, \lambda_{NH}) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X}_h \times L_{TH} \times \mathcal{G}_H$  tels que

$$\begin{cases} a\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}_h}{\partial t^2}, \boldsymbol{\tau}_h\right) + \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h\right) + \tilde{b}\left(\boldsymbol{\tau}_h; \frac{\partial^2 \lambda_{NH}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}_{TH}}{\partial t^2}\right) & = -\left(\mathbf{f}, \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_h\right), \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h, \\ \tilde{b}(\boldsymbol{\sigma}_h; \mu_{NH}, \boldsymbol{\mu}_{TH}) & = 0, \forall \mu_{NH} \in \mathcal{G}_H, \forall \boldsymbol{\mu}_{TH} \in L_{TH}. \end{cases}$$

Ce type de problèmes est étudié dans [31], dans un cadre abstrait. Il est montré notamment que, si la forme, qui correspond à  $\tilde{b}$ , vérifie la condition inf-sup discrète uniforme, alors le problème est bien posé et la convergence est vérifiée.

Dans le cas élastique, la question de l'obtention de la condition (3.23) demeure ouverte, à notre connaissance. Par conséquent, du point de vue théorique, la convergence n'est pas prouvée ni pour la condition aux limites de surface libre, ni pour la condition de contact unilatéral. Pour le problème qui nous intéresse (3.15), la condition de compatibilité entre les pas des deux maillages, qui entraîne la condition (3.23), garantit l'inversibilité de  $Q$  et permet ainsi d'avoir un problème bien posé. Numériquement, il est constaté que la condition  $H \geq 1.5h$  est suffisante pour obtenir l'inversibilité de la matrice  $Q$  (donc d'avoir un problème bien posé) pour le choix de l'élément fini  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc} - \mathcal{P}_1^c \times \mathcal{P}_1^c$ . Quant à la question de la convergence de la solution, ce problème est ouvert pour les inéquations variationnelles.

### 3.7 Une variante avec amortissement de modes parasites

#### 3.7.1 Existence de modes parasites

Des expériences numériques montrent qu'avec l'élément  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$ , cité précédemment, l'interaction d'une onde avec la fissure est susceptible d'engendrer des modes parasites (des oscillations apparaissent). Plus précisément, l'espace  $\mathcal{P}_1^{disc}$  se décompose en deux sous-espaces:  $\mathcal{P}_1^{disc} = Q_0 + Q_0^\perp$  où  $Q_0^\perp$  désigne l'espace orthogonal à  $Q_0$ . L'espace d'approximation  $\mathbf{M}_h$  pour le déplacement se décompose alors de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_h &= \mathbf{M}_h^0 + \mathbf{M}_h^\perp, \\ \text{avec } \mathbf{M}_h^0 &= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in (Q_0(K))^d \right\}, \\ \mathbf{M}_h^\perp &= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{M} / \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in (Q_0^\perp(K))^d \right\}. \end{aligned}$$

Sur la figure 3.4, les degrés de liberté associés aux déplacements sont représentés par des flèches, dans les deux directions. Les degrés de liberté associés à  $Q_0^\perp$  assurent la convergence de la méthode des domaines fictifs. Il a été constaté, dans [50], que c'est la présence de ces degrés de liberté qui produit des oscillations lors de l'interaction avec certaines fissures. Il est proposé dans [49] une méthode pour éliminer ces oscillations: il s'agit de prendre en compte de l'amortissement uniquement sur les degrés de liberté associés à  $Q_0^\perp$ . Nous appliquons ici cette méthode.

#### 3.7.2 Une méthode pour amortir les modes parasites

Dans ce qui suit,  $\beta$  représente le terme d'amortissement et on désigne par  $M_v^\perp$  la matrice égale à  $M_v$  pour les indices correspondant à  $Q_0^\perp$ , nulle pour les indices correspondant à  $Q_0$ . Plus précisément, dans le cas bidimensionnel, dans chaque élément du maillage régulier, il y a deux fonctions de base  $Q_0$  et quatre fonctions de base  $Q_0^\perp$ . De plus, dans le cas bidimensionnel, si  $N$  désigne le nombre d'éléments du maillage régulier, la base de  $\mathbf{M}_h$  se décompose en deux sous-familles de fonctions:  $(w_i)_i$ ,  $i = 1, 2N$ , c'est-à-dire les fonctions de base de  $\mathbf{M}_h^0$ , et  $(w_j^\perp)_j$ ,  $j = 2N + 1, 6N$ , les fonctions de base de  $\mathbf{M}_h^\perp$ . On définit alors  $M_v^\perp$  par  $(M_v^\perp)_{ij} = 0$  si  $1 \leq i, j \leq 2N$ . On a  $(M_v^0)_{ij} = (\varrho w_i, w_j)$ ,  $(M_v^{1\perp})_{ij} = (\varrho w_i^\perp, w_j^\perp)$  et aussi

$$M_v = \begin{pmatrix} M_v^0 & 0 \\ 0 & M_v^{1\perp} \end{pmatrix}, \quad M_v^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_v^{1\perp} \end{pmatrix}.$$

Introduisons l'opérateur  $P_h^\perp$  qui représente l'opérateur de projection orthogonale  $L^2$ , défini sur  $\mathbf{M}_h$  à valeurs dans  $\mathbf{M}_h^\perp$ . Pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{M}_h$ , on note  $P_h^\perp \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h^\perp$  où  $\mathbf{v}_h^\perp \in \mathbf{M}_h^\perp$  par la décomposition de

$\mathbf{M}_h$ . Une formulation variationnelle du problème comprenant le terme d'amortissement est la suivante:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^0 + \mathbf{u}_h^\perp, \boldsymbol{\lambda}_{TH}, \lambda_{NH}) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h \times \mathcal{G}_H \times \mathbf{L}_{TH}$  tels que

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2}, \mathbf{v}_h) + \beta (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}_h^\perp}{\partial t}, \mathbf{v}_h) - d(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{M}_h, \\ a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + d(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) + \tilde{b}(\boldsymbol{\tau}_h; \lambda_{NH}, \boldsymbol{\lambda}_{TH}) &= 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h, \\ \tilde{b}(\boldsymbol{\sigma}_h; \mu_{NH}, \boldsymbol{\mu}_{TH}) &= 0, \forall \mu_{NH} \in \mathcal{G}_H, \forall \boldsymbol{\mu}_{TH} \in \mathbf{L}_{TH}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Le problème semi-discrétisé, avec terme d'amortissement, écrit sous forme matricielle est le suivant:

Trouver  $(\Sigma, U, \Lambda_T, \Lambda_N) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N_\Sigma} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_{LT}} \times \mathbb{R}_+^{N_G}$  tel que

$$\begin{cases} M_v \frac{d^2 U}{dt^2} + \beta M_v^\perp \frac{dU}{dt} - D\Sigma = F, & (i) \\ M_\sigma \Sigma + D^* U + B_T^* \Lambda_T + B_N^* \Lambda_N = 0, & (ii) \\ B_T \Sigma = 0, & (iii) \\ (B_N \Sigma, \mu_N - \Lambda_N) \leq 0, \forall \mu_N \in \mathbb{R}_+^{N_G} & (iv). \end{cases} \quad (3.25)$$

Ce problème est résolu pour certaines expériences numériques, pour lesquelles les modes parasites sont nettement visibles (voir les exemples de la partie 6.3.3, en particulier fig. 6.91). L'effet des modes parasites est plus ou moins marqué selon la position de la fissure, les conditions initiales et la source extérieure considérées.

L'énergie de la solution semi-discrétisée en espace est décroissante. Par analogie au problème (3.2), cette énergie est définie par

$$\mathcal{E}_h(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) + \frac{1}{2} (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}).$$

On a la variation d'énergie suivante:

$$\frac{d\mathcal{E}_h}{dt} = (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}) - \beta (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}_h^\perp}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}_h^\perp}{\partial t}).$$

En l'absence de source extérieure, l'énergie  $\mathcal{E}_h$  décroît.



## Chapitre 4

# Discrétisation en temps de la formulation par domaines fictifs

Dans ce chapitre, on décrit la discrétisation en temps du problème (3.15). Dans un premier temps, on discrétise les équations linéaires du système de manière classique. Puis, on s'intéresse particulièrement à la discrétisation en temps de la partie non linéaire, correspondant à la condition de contact unilatéral. Pour le problème non linéaire posé sur la fissure, plusieurs schémas de résolution sont présentés: un schéma explicite centré, un schéma décentré implicite et un schéma centré implicite. On étudie la stabilité de ces schémas. En particulier, on prouve que le schéma décentré est stable en démontrant la décroissance d'une énergie discrète.

### 4.1 Schéma pour la partie linéaire

Dans un premier temps, on s'intéresse à la discrétisation temporelle des trois équations linéaires du système (3.15). Celles-ci correspondent à l'équation du mouvement, à la loi de comportement, à l'absence de frottement.

On note par  $\Delta t$  le pas de temps. On désigne par  $\boldsymbol{\sigma}^n, \mathbf{u}^n, \boldsymbol{\lambda}_T^n, \lambda_N^n$  des approximations de  $\boldsymbol{\sigma}_h(t^n), \mathbf{u}_h(t^n), \boldsymbol{\lambda}_{TH}(t^n), \lambda_{NH}(t^n)$ . On note  $\Sigma^n, U^n, \Lambda_T^n, \Lambda_N^n$  les vecteurs des degrés de liberté associés.

On utilise un schéma saute-mouton classique pour l'accélération, les autres termes sont considérés à l'instant  $n$ , de manière à obtenir un schéma centré à l'instant  $n$ . Le problème discrétisé en temps et en espace, écrit sous forme vectorielle, est le suivant:

Trouver  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1}, \Lambda_T^{n+1}, \Lambda_N^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Sigma} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_{LT}} \times \mathbb{R}_+^{N_g}$  tels que

$$\begin{cases} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - D\Sigma^n & = F^n, & (i) \\ M_\sigma \Sigma^{n+1} + D^*U^{n+1} + B_T^* \Lambda_T^{n+1} + B_N^* \Lambda_N^{n+1} & = 0, & (ii) \\ B_T \Sigma^{n+1} & = 0. & (iii) \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce schéma n'est autre que la formulation matricielle des équations variationnelles suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varrho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t^2}, \mathbf{v}_h) - d(\boldsymbol{\sigma}^n, \mathbf{v}_h) = 0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{M}_h \quad (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \boldsymbol{\tau}_h) + d(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}^{n+1}) + b_T(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\lambda}_T^{n+1}) + b_N(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\lambda}_N^{n+1}) = 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h \quad (ii) \\ b_T(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \boldsymbol{\mu}_{TH}) = 0, \forall \boldsymbol{\mu}_{TH} \in \mathbf{L}_{TH} \quad (iii). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Nous n'avons pas encore écrit la discrétisation de la partie non linéaire, correspondant à (3.14)-(iv) et (3.15)-(iv). Cette discrétisation est détaillée plus tard.

En l'absence de fissure (i.e.  $\Lambda_N^n = \Lambda_T^n = 0$  pour tout instant  $n$ ), le schéma (4.1)-(i)-(ii) est un schéma de type différences finies. La présentation de ce schéma est donnée dans l'annexe A, dans le cas d'un milieu élastique, homogène et isotrope. Dans le cas général, en présence d'une fissure, la prise en compte de la fissure se fait par l'intermédiaire des multiplicateurs  $\Lambda_N^n$ ,  $\Lambda_T^n$  et des matrices  $B_N$  et  $B_T$ .

Le problème discrétisé associé à la semi-discrétisation en espace (3.25) comprenant le terme d'amortissement, donnée dans la section 3.7, est le suivant (voir dans [49]):

Trouver  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1}, \Lambda_T^{n+1}, \Lambda_N^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Sigma} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_{LT}} \times \mathbb{R}_+^{N_G}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + \beta M_v^\perp \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} - D\Sigma^n = F^n, \quad (i) \\ M_\sigma \Sigma^{n+1} + D^*U^{n+1} + B_T^* \Lambda_T^{n+1} + B_N^* \Lambda_N^{n+1} = 0, \quad (ii) \\ B_T \Sigma^{n+1} = 0. \quad (iii) \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Les étapes de la résolution sont les mêmes avec ou sans amortissement. Par souci de simplicité, on les détaille seulement dans le cas sans amortissement.

Supposons connues les valeurs de  $\Sigma^n$ ,  $U^n$ ,  $\Lambda^n = (\Lambda_T^n, \Lambda_N^n)$  à l'instant  $n$  et aux instants antérieurs, les inconnues à l'instant  $n+1$  sont les valeurs des contraintes, du déplacement et du saut de déplacement:  $\Sigma^{n+1}$ ,  $U^{n+1}$ ,  $\Lambda^{n+1}$ . Si  $\Lambda^{n+1}$  était connu, il suffirait d'inverser les matrices  $M_v$  et  $M_\sigma$  dans les relations (4.1)-(i) et (4.1)-(ii) pour calculer  $U^{n+1}$  et  $\Sigma^{n+1}$ . Cela donnerait un calcul explicite de  $U^{n+1}$  et  $\Sigma^{n+1}$ . Plus précisément,

- La relation (4.1)-(i) donne  $U^{n+1}$  par

$$U^{n+1} = 2U^n - U^{n-1} + \Delta t^2 M_v^{-1} F^n + \Delta t^2 M_v^{-1} D\Sigma^n.$$

- Une fois connu  $\Lambda^{n+1}$ , le calcul de  $\Sigma^{n+1}$  est donné directement par (4.1)-(ii). Il s'agit d'inverser la matrice  $M_\sigma$  diagonale par blocs. Dans le cas 2D,  $M_\sigma$  est diagonale par blocs de taille 5 par 5.

$$\Sigma^{n+1} = -M_\sigma^{-1} (D^*U^{n+1} + B_T^* \Lambda_T^{n+1} + B_N^* \Lambda_N^{n+1}).$$

- Si  $\Lambda^{n+1}$  était connu, (4.1)-(ii) nous donnerait comment calculer  $\Sigma^{n+1}$ . Il s'agit d'inverser la matrice  $M_\sigma$ . Cependant, comme  $\Lambda^{n+1}$  est inconnu, il faut donc calculer  $\Lambda^{n+1}$  avant  $\Sigma^{n+1}$ . La relation (4.1)-(ii) permet l'élimination de  $\Sigma^{n+1}$  en fonction de  $U^{n+1}$  et de  $\Lambda^{n+1}$ . L'élimination de  $\Sigma^{n+1}$  est nécessaire, car elle permet d'obtenir deux relations sur  $\Lambda^{n+1}$ . Ces relations sont données par (4.1)-(iii) et par la discrétisation en temps de (3.15)-(iv) et ne dépendent que de  $U^{n+1}$ , quantité connue, donnée par (4.1)-(i). La manière dont on calcule  $\Lambda^{n+1}$ , en particulier

$\Lambda_N^{n+1}$ , dépend du schéma utilisé pour la partie non linéaire issue de la présence du contact unilatéral, donnée par (3.15)-(iv). Plusieurs schémas de calcul de  $\Lambda_N^{n+1}$  sont décrits dans la suite. Chaque schéma proposé conduit à un calcul différent de  $\Lambda^{n+1}$ .

Dans les deux cas (avec ou sans amortissement), la difficulté est de discrétiser la partie non linéaire, qui permet le calcul de  $\Lambda^{n+1}$ , c'est-à-dire la relation (3.15)-(iv) ou encore (3.16). On propose trois schémas pour cela:

- Un schéma explicite mais qu'on démontre instable.
- Un schéma implicite décentré stable et d'ordre un.
- Un schéma implicite centré d'ordre deux et dont la stabilité reste à démontrer.

## 4.2 Un schéma explicite centré

Une première idée naturelle pour approcher (3.16) est de chercher un schéma à la fois explicite et centré. Il est intéressant a priori d'utiliser un schéma explicite car la résolution est simple et rapide. C'est ainsi que nous avons d'abord envisagé l'approximation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_N^{n+1} + \Lambda_N^{n-1}}{2} &= \Pi(\Lambda_N^n + B_N \Sigma^n) \\ \Leftrightarrow \left( B_N \Sigma^n + \Lambda_N^n - \frac{\Lambda_N^{n+1} + \Lambda_N^{n-1}}{2}, \mu_N - \frac{\Lambda_N^{n+1} + \Lambda_N^{n-1}}{2} \right) &\leq 0, \forall \mu_N \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\Pi$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}_+^{N_g}$ , déjà utilisée dans (3.16). Malheureusement, le schéma proposé ici est inconditionnellement instable. On peut le démontrer dans le cas linéaire. En effet, dans ce cas,  $\Pi = Id$  et le schéma devient

$$\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\Lambda_N^{n+1} - 2\Lambda_N^n + \Lambda_N^{n-1}}{\Delta t^2} - B_N \Sigma^n = 0.$$

En éliminant  $\Sigma^n$ , ceci se réécrit

$$\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\Lambda_N^{n+1} - 2\Lambda_N^n + \Lambda_N^{n-1}}{\Delta t^2} + B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \Lambda_N^n = f(\Lambda_N^n, U^n),$$

où  $f$  est fonction de  $\Lambda_N^n, U^n$ . Ce schéma ressemble à un schéma pour l'approximation d'un oscillateur harmonique. La condition de stabilité est du type

$$\frac{\Delta t^2}{4} \left\| \frac{2}{\Delta t^2} B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \right\| < Cte \iff \|B_N M_\sigma^{-1} B_N^*\| < Cte,$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme de la plus grande valeur propre.

La norme de l'opérateur  $B_N M_\sigma^{-1} B_N^*$  est non bornée car  $B_N M_\sigma^{-1} B_N^*$  est la discrétisation d'un opérateur de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . En effet,  $B_N$  est la discrétisation d'un opérateur de  $H(\text{div}; C)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ , donc  $B_N^*$  est la discrétisation d'un opérateur de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H(\text{div}; C)'$ . En identifiant  $H(\text{div}; C)$  avec son dual, on obtient que  $B_N M_\sigma^{-1} B_N^*$  est la discrétisation d'un opérateur de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Sa norme doit donc être proportionnelle à  $1/H$ .

Cela devient plus clair dans le cas unidimensionnel car on peut calculer explicitement  $B_N M_\sigma^{-1} B_N^*$  qui est un nombre. On obtient alors, où  $a$  est la position du point de fissure,  $h$  le pas d'espace du maillage et  $I$  représente la partie entière de  $a/h$ ,

$$B_N M_\sigma^{-1} B_N^* = -\frac{1}{2h} \left( \left(-\frac{a}{h} + I + 1\right)^2 + \left(\frac{a}{h} - I\right)^2 \right).$$

Donc,  $|B_N M_\sigma^{-1} B_N^*| \simeq 1/h$  où  $h$  représente le pas d'espace. Ce résultat d'instabilité est confirmé par des expériences numériques 1D et 2D également.

### 4.3 Un schéma implicite décentré

Guidés par une identité d'énergie, nous avons pu établir un schéma stable en approchant (3.16) par

$$\begin{aligned} \Lambda_N^{n+1} &= \Pi(\Lambda_N^{n+1} + B_N \frac{\Sigma^n + \Sigma^{n+1}}{2}), \\ \Leftrightarrow \left( B_N \frac{\Sigma^n + \Sigma^{n+1}}{2}, \mu_N - \Lambda_N^{n+1} \right) &\leq 0, \quad \forall \mu_N \in \mathbb{R}_+^{N_G}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

implicite seulement par rapport à  $\Lambda_N$ . Rappelons que  $\Pi$  est défini en (3.16).

En utilisant la forme bilinéaire  $b_N$ , le schéma (4.5) s'écrit également

$$\sigma^{n+1} \in \mathbf{X}_h, \lambda_N^{n+1} \in L_{NH}^+, b_N \left( \frac{\sigma^n + \sigma^{n+1}}{2}, \mu_{NH} - \lambda_N^{n+1} \right) \leq 0, \quad \forall \mu_{NH} \in L_{NH}^+. \quad (4.6)$$

#### 4.3.1 Calcul de la solution, existence et unicité

Ayant remplacé la contrainte  $\Sigma^{n+1}$  par son expression en fonction de  $\Lambda_N^{n+1}, \Lambda_T^{n+1}, U^{n+1}$  dans (4.5), on obtient le problème suivant:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \Lambda^{n+1} \in \mathbb{R}^{N_{LT}} \times \mathbb{R}_+^{N_G} &= \mathcal{K}, \\ (Q\Lambda^{n+1} + \mathcal{F}^{n+1}, \mu - \Lambda^{n+1}) &\geq 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ce problème est équivalent au problème de minimisation suivant:

$$J(\Lambda^{n+1}) \leq J(\mu) = \frac{1}{2}(Q\mu, \mu) + (\mathcal{F}^{n+1}, \mu), \quad \forall \mu \in \mathcal{K},$$

avec, pour ce schéma, la matrice  $Q$  définie en (3.19) et

$$\mathcal{F}^{n+1} = (B_T M_\sigma^{-1} D^* U^{n+1}, B_N (M_\sigma^{-1} D^* U^{n+1} - \Sigma^n))^t.$$

La relation (4.1)-(ii) donne  $\Sigma^{n+1}$  défini par

$$\Sigma^{n+1} = -M_\sigma^{-1} (D^* U^{n+1} + B_T^* \Lambda_T^{n+1} + B_N^* \Lambda_N^{n+1}).$$

**Proposition 4.1** *Sous la condition inf-sup (3.23), il existe une solution unique  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1}, \Lambda_T^{n+1}, \Lambda_N^{n+1})$  du problème (4.1)-(4.5).*

#### Démonstration

La démonstration est immédiate. (4.1)-(i) donne directement l'expression de  $U^{n+1}$ ; sous la condition (3.23), le problème (4.7) admet une unique solution  $\Lambda^{n+1} = (\Lambda_T^{n+1}, \Lambda_N^{n+1})$ , (4.1)-(ii) montre que  $\Sigma^{n+1}$  est solution d'un système linéaire. ■

#### 4.3.2 Étude de la stabilité

On étudie la stabilité du schéma (4.1)-(4.5) en introduisant une énergie discrète. Rappelons que l'énergie continue  $\mathcal{E}(t)$  est définie dans la section 3.4 de la manière suivante:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\sigma, \sigma) + \frac{1}{2} \left( \varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right).$$

On considère ici un équivalent discret de  $\mathcal{E}$ :

$$E^n = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\sigma}^n) + \frac{1}{2}\left(\varrho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t}\right).$$

On a le théorème suivant.

**Théorème 4.1** *Le schéma implicite décentré (4.5) est stable sous la condition de stabilité suivante:*

$$\frac{\Delta t^2}{4} \|D^* D\| \leq 1, \text{ avec } \|D^* D\| = \sup_{\Sigma} \frac{(M_v^{-1} D \Sigma, D \Sigma)}{(M_{\sigma} \Sigma, \Sigma)}. \quad (4.8)$$

### Démonstration

Le théorème résulte des lemmes 4.2 et 4.3. ■

On montre d'abord le lemme suivant.

**Lemme 4.1** *La condition de stabilité (4.8) est équivalente à la condition suivante:*

$$\frac{\Delta t}{2} \|D\| \leq 1, \text{ avec } \|D\| = \sup_{\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{u}_h \in \mathbf{M}_h} \frac{d(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)}{a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)^{1/2} (\varrho \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)^{1/2}}. \quad (4.9)$$

### Démonstration

• On a  $\|D\|^2 \geq \|D^* D\|$ . En effet, sous la forme matricielle, en considérant  $U = M_v^{-1} D \Sigma$ , on obtient

$$(M_v^{-1} D \Sigma, D \Sigma) = (U, D \Sigma) \leq \|D\| (M_v U, U)^{1/2} (M_{\sigma} \Sigma, \Sigma)^{1/2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } (M_v U, U) &= (D \Sigma, U) \leq \|D\| (M_v U, U)^{1/2} (M_{\sigma} \Sigma, \Sigma)^{1/2}, \\ (M_v U, U)^{1/2} &\leq \|D\| (M_{\sigma} \Sigma, \Sigma)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où:  $(M_v^{-1} D \Sigma, D \Sigma) \leq \|D\|^2 (M_{\sigma} \Sigma, \Sigma)$ .

Ainsi,  $\|D^* D\| \leq \|D\|^2$ .

• On a  $\|D\| \leq \|D^* D\|^{1/2}$ .

En effet,  $(D \Sigma, U) = (M_v^{-1/2} D \Sigma, M_v^{1/2} U) \leq (M_v^{-1} D \Sigma, D \Sigma)^{1/2} (M_v U, U)^{1/2}$ .

Ainsi,  $\|D^* D\|^{1/2} \leq \|D\|$ . ■

**Lemme 4.2** *La quantité*

$$E^n = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\sigma}^n) + \frac{1}{2}\left(\varrho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t}\right). \quad (4.10)$$

*est une énergie, i.e. une forme quadratique positive, sous la condition de stabilité (4.8).*

### Démonstration

Cette démonstration est très classique mais on rappelle quand même la preuve. Il n'est pas difficile de voir que l'énergie discrète donnée par (4.10) se réécrit de la manière suivante, avec  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire euclidien :

$$E^n = \frac{1}{2}(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n) + \frac{1}{2}(M_v \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t}).$$

Or, par la formule du parallélogramme on obtient

$$\begin{aligned} (M_v \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t}) &= \frac{1}{4} \left( M_v \left( \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} \right), \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( M_v \left( \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} \right), \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît le terme d'accélération. On utilise alors la relation (4.1)-(i) dans laquelle on suppose que le terme source s'annule pour tout temps. On obtient alors

$$(M_v \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t}) = \frac{1}{4} \left( M_v \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{\Delta t}, \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{\Delta t^2}{4} (M_v^{-1} D\Sigma^n, D\Sigma^n).$$

On obtient

$$E^n = \frac{1}{8}(M_v \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{\Delta t}, \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{\Delta t}) + \frac{1}{2}(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n) - \frac{\Delta t^2}{8}(M_v^{-1} D\Sigma^n, D\Sigma^n).$$

On a

$$\frac{1}{2}(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n) - \frac{\Delta t^2}{8}(M_v^{-1} D\Sigma^n, D\Sigma^n) = \frac{1}{2}(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n) \left[ 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{(M_v^{-1} D\Sigma^n, D\Sigma^n)}{(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n)} \right].$$

Nous déduisons

$$E^n = \frac{1}{2} \left( (M_v \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t}) + (M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n) \left[ 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{(M_v^{-1} D\Sigma^n, D\Sigma^n)}{(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n)} \right] \right).$$

Sous la condition de stabilité (4.8), on obtient que  $E^n$  définit bien une énergie. ■

**Lemme 4.3** *Pour le problème (4.2), la différence d'énergie discrète entre deux instants est donnée par la relation suivante :*

$$E^{n+1} - E^n = \Delta t b_N \left( \frac{\sigma^{n+1} + \sigma^n}{2}, \frac{\lambda_N^n - \lambda_N^{n+1}}{\Delta t} \right). \quad (4.11)$$

*En particulier, pour le schéma (4.2)-(4.6), cette différence est négative et l'énergie discrète du schéma est décroissante.*

### Démonstration

On considère le problème (4.2). Pour simplifier, nous allons considérer le terme source nul pour tout temps. La relation (4.2)-(i), considérée aux temps  $n$  et  $n+1$ , donne alors, après addition,

$$\left( \varrho \frac{\mathbf{u}^{n+2} - \mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) - d(\sigma^n + \sigma^{n+1}, \mathbf{v}_h) = 0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{M}_h.$$

En choisissant comme fonction test  $\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \in \mathbf{M}_h$ , on obtient

$$\begin{aligned} \left( \varrho \frac{\mathbf{u}^{n+2} - \mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) - \left( \varrho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \\ - d(\boldsymbol{\sigma}^n + \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La relation (4.2)-(ii) considérée aux temps  $n$  et  $n+1$  donne, après soustraction,

$$a(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\tau}_h) + d(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + b_N(\boldsymbol{\tau}_h, \lambda_N^{n+1} - \lambda_N^n) + b_T(\boldsymbol{\tau}_h, \lambda_T^{n+1} - \lambda_T^n) = 0, \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{X}_h.$$

En choisissant comme fonction test  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n \in \mathbf{X}_h$ , on obtient

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) - a(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\sigma}^n) + d(\boldsymbol{\sigma}^n + \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \\ + b_N(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_N^{n+1} - \lambda_N^n) + b_T(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_T^{n+1} - \lambda_T^n) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Après addition de (4.12) et (4.13),

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) - a(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\sigma}^n) + \left( \varrho \frac{\mathbf{u}^{n+2} - \mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) - \left( \varrho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} \right) \\ = -b_N(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_N^{n+1} - \lambda_N^n) - b_T(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_T^{n+1} - \lambda_T^n). \end{aligned}$$

Or, (4.2)-(iii), considérée aux instants  $n$  et  $n+1$ , en choisissant  $\boldsymbol{\mu}_{TH} = \lambda_T^{n+1} - \lambda_T^n$ , donne

$$b_T(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_T^{n+1} - \lambda_T^n) = 0.$$

Par construction du schéma décentré implicite (4.5), en choisissant  $\mu_N = \lambda_N^n \in L_{NH}^+$ , on obtient

$$b_N(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_N^n - \lambda_N^{n+1}) \leq 0.$$

La décroissance d'énergie est la suivante:

$$E^{n+1} - E^n = \frac{1}{2} b_N(\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n, \lambda_N^n - \lambda_N^{n+1}).$$

On obtient, sous une autre forme,

$$E^{n+1} - E^n = \Delta t b_N \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^n}{2}, \frac{\lambda_N^n - \lambda_N^{n+1}}{\Delta t} \right) \leq 0. \quad \blacksquare$$

**Remarque 4.1** *La condition de stabilité (4.8) est la même condition qu'en l'absence de fissure, c'est-à-dire qu'elle n'est pas modifiée par la méthode des domaines fictifs. Ceci est une propriété extrêmement intéressante de la méthode car cela permet de contrôler le pas de temps  $\Delta t$  uniquement en fonction du pas d'espace  $h$  du maillage uniforme.*

**Remarque 4.2** *Dans le cas d'un milieu homogène isotrope, ce qui correspond au schéma aux différences finies présenté dans l'annexe A, la condition de stabilité (4.8) devient (voir dans [54])*

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{V_p}.$$

## 4.4 Un schéma implicite centré

Le schéma implicite décentré proposé dans la section précédente est stable mais d'ordre un, car il est décentré. Nous avons cherché à améliorer l'ordre du schéma en approchant (3.15)-(iv) de façon centrée comme suit:

$$\begin{aligned}\Lambda_N^{n+1} &= \Pi(\Lambda_N^{n+1} + B_N \Sigma^{n+1}), \\ \Leftrightarrow (B_N \Sigma^{n+1}, \mu_N - \Lambda_N^{n+1}) &\leq 0, \forall \mu_N \in \mathbb{R}_+^{Ng}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

En utilisant la forme bilinéaire  $b_N$ , le schéma (4.14) se réécrit

$$\sigma^{n+1} \in \mathbf{X}_h, \lambda_N^{n+1} \in L_{NH}^+, b_N(\sigma^{n+1}, \mu_{NH} - \lambda_N^{n+1}) \leq 0, \forall \mu_{NH} \in L_{NH}^+.$$

Le schéma (4.1)-(4.14) est d'ordre deux. Le schéma (4.14) n'influence pas l'ordre du schéma (4.1).

### 4.4.1 Calcul de la solution, existence et unicité

Ayant remplacé la contrainte  $\Sigma^{n+1}$  par son expression en fonction de  $\Lambda_N^{n+1}, \Lambda_T^{n+1}, U^{n+1}$  dans (4.14), on obtient

$$\begin{aligned}\text{Trouver } \Lambda^{n+1} \in \mathbb{R}^{NL_T} \times \mathbb{R}_+^{Ng} &= \mathcal{K}, \\ (Q\Lambda^{n+1} + \mathcal{F}^{n+1}, \mu - \Lambda^{n+1}) &\geq 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{K}, \\ \Leftrightarrow J(\Lambda^{n+1}) \leq J(\mu) &= \frac{1}{2}(Q\mu, \mu) + (\mathcal{F}^{n+1}, \mu), \quad \forall \mu \in \mathcal{K},\end{aligned}\tag{4.15}$$

avec, pour ce schéma, la matrice  $Q$  définie en (3.19) et

$$\mathcal{F}^{n+1} = (B_T M_\sigma^{-1} D^* U^{n+1}, B_N M_\sigma^{-1} D^* U^{n+1})^t.$$

La relation (4.1)-(ii) donne  $\Sigma^{n+1}$  défini par

$$\Sigma^{n+1} = -M_\sigma^{-1}(D^* U^{n+1} + B_T^* \Lambda_T^{n+1} + B_N^* \Lambda_N^{n+1}).$$

**Proposition 4.2** *Sous la condition inf-sup (3.23), il existe une solution unique  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1}, \Lambda_T^{n+1}, \Lambda_N^{n+1})$  au problème (4.1)-(4.14).*

#### Démonstration

La démonstration est immédiate. (4.1)-(i) donne directement l'expression de  $U^{n+1}$ ; sous la condition (3.23), le problème (4.15) admet une unique solution  $\Lambda^{n+1} = (\Lambda_T^{n+1}, \Lambda_N^{n+1})$  et (4.1)-(ii) montre que  $\Sigma^{n+1}$  est solution d'un système linéaire. ■

### 4.4.2 Les difficultés de l'étude de stabilité

La différence d'énergie donnée dans (4.11) est valable, en l'absence de frottement, quel que soit le schéma considéré pour le multiplicateur. Pour le schéma centré implicite considéré ici, elle peut même se simplifier de la manière suivante, sous son écriture matricielle

$$E^{n+1} - E^n = \Delta t (B_N \frac{\Sigma^n + \Sigma^{n+1}}{2}, \frac{\Lambda_N^n - \Lambda_N^{n+1}}{\Delta t}) = \frac{1}{2} [(B_N \Sigma^{n+1}, \Lambda_N^n) - (B_N \Sigma^n, \Lambda_N^{n+1})].$$



Il suffit de prendre  $\mu_N = 0$  et  $\mu_N = 2\Lambda_N^{n+1}$  dans l'inégalité donnée par (4.14) pour obtenir cette différence d'énergie.

De plus, on a la relation suivante, en considérant, dans (4.14),  $\mu_N = (\Lambda_N^n - \Lambda_N^{n+1})_+$ , où  $(\mu_+)_i = \max(0, \mu_i)$ , à l'instant  $n$  et  $\mu_N = (\Lambda_N^{n+1} - \Lambda_N^n)_+$  à l'instant  $n + 1$ .

$$E^{n+1} - E^n = \sum_{i \mid (\Lambda_N^n)_i > (\Lambda_N^{n+1})_i} (B_N \Sigma^{n+1})_i (\Lambda_N^n)_i - \sum_{i \mid (\Lambda_N^{n+1})_i > (\Lambda_N^n)_i} (B_N \Sigma^n)_i (\Lambda_N^{n+1})_i.$$

On sait que  $(B_N \Sigma^n)_i (\Lambda_N^{n+1})_i \leq 0$  et  $(B_N \Sigma^{n+1})_i (\Lambda_N^n)_i \leq 0$  mais cela ne donne pas d'indication supplémentaire sur le signe de  $E^{n+1} - E^n$ .

Les nœuds où l'on passe de l'état de contact à l'état de décollement (absence de contact) contribuent à faire augmenter l'énergie tandis que ceux qui passent de l'état de décollement à l'état de contact contribuent à la diminution de l'énergie. Nous avons effectivement constaté numériquement sur quelques expériences que la différence d'énergie n'a pas de signe constant, même si l'énergie est relativement constante. Finalement, nous n'avons pas pu montrer la stabilité de ce schéma. Cependant, les résultats numériques semblent l'indiquer sous la condition de stabilité (4.8).

Numériquement, que ce soit par le schéma décentré implicite (décrit en (4.5)) ou par le schéma centré implicite (décrit en (4.14)), l'énergie discrète est quasiment constante au cours du temps.



# Chapitre 5

## Aspects numériques

Dans cette partie, on traite de quelques aspects numériques liés à la résolution du problème de contact unilatéral dynamique. On présente d'abord l'algorithme de résolution utilisé pour le problème de minimisation quadratique. D'autres points plus spécifiques sont abordés ensuite. On décrit les calculs à effectuer, dans le cas 2D, permettant la construction des matrices de couplage entre la fissure et le maillage régulier. On rappelle ces calculs dans le cas où la fissure est approchée par des segments. On présente aussi la prise en compte d'éléments curvilignes sur la fissure, mis en œuvre, en pratique, pour les fissures circulaires ou en arcs-de-cercle. Enfin, on traite le cas de fissures singulières comportant un angle. On introduit une modification des espaces d'approximation des multiplicateurs, choisis précédemment en 3.6.3, de manière à prendre en compte les discontinuités de la normale.

### 5.1 Quelques remarques sur la résolution du problème d'optimisation

Les problèmes (4.7),(4.15) sont du type

$$\text{Trouver } v \geq lb \text{ tel que, } \min_{v \geq lb} J(v) = \frac{1}{2} (Av, v) + (b, v). \quad (5.1)$$

On suppose que  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , symétrique et définie positive,  $b$  et  $lb$  sont des vecteurs quelconques de  $\mathbb{R}^n$ . L'inégalité  $v \geq lb$ , où  $v$  et  $lb$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , signifie  $v_i \geq lb_i$ , pour tout  $i = 1, n$ . Le problème (5.1) est un problème d'optimisation quadratique avec contraintes de bornes. En fait, il s'agit de projeter  $-A^{-1}b$  sur le convexe  $\mathcal{K} = \{v \in \mathbb{R}^n; v \geq lb\}$  pour la métrique associée à  $A$ : en effet, le problème (5.1) peut se réécrire de la manière suivante:

$$\text{Trouver } v \in \mathcal{K} \text{ tel que, } \min_{v \in \mathcal{K}} \frac{1}{2} \|v + A^{-1}b\|_A^2 \quad \text{où } \|w\|_A^2 = (Aw, w).$$

**Remarque 5.1** *Il est plus compliqué et plus coûteux en temps de calcul de résoudre le problème d'optimisation associé à (3.9) que le problème associé à (3.7). Dans le cas 2D, par exemple, les inconnues du problème (3.9) sont  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Rappelons que, pour cette formulation, pour tout instant  $t$ ,  $\lambda \in \mathcal{C}$  où le convexe  $\mathcal{C}$  est défini par  $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 / \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 \geq 0\}$  où  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^t$  est la normale à la fissure. Les contraintes du problème d'optimisation issu de la formulation (3.9) sont donc des contraintes linéaires, à cause de la prise en compte de la partie normale. Le problème d'optimisation associé à (3.7) est un problème avec simples contraintes de bornes alors que celui associé à (3.9) comporte des contraintes linéaires, du type  $Ax \leq b$ . Pour le calcul des multiplicateurs, nous*

avons préféré choisir la formulation en  $(\lambda_N, \lambda_T)$ , correspondant à (3.7), plutôt que la formulation en  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , correspondant à (3.9).

### 5.1.1 Principe de l'algorithme de résolution QPB

Nous avons utilisé un algorithme de résolution du problème (5.1) combinant une méthode de gradient avec projection et une méthode d'activation de contraintes (voir [43] pour une présentation de la méthode des contraintes actives). Des factorisations de Cholesky sont utilisées pour la minimisation, pour la résolution de systèmes linéaires, lorsque les contraintes sont fixées. Ces factorisations de Cholesky sont mises à jour lors de l'activation ou la désactivation de contraintes. On appellera, dans la suite, l'algorithme de résolution QPB (Quadratic Programming with Bounds) (il s'agit du code N2QP1 de la librairie MODULOPT de l'Inria). Les étapes de la résolution sont décrites dans l'algorithme 1. Elles sont expliquées dans ce qui suit.

Le principe de l'algorithme est de minimiser  $J$  sur des chemins obtenus par projection sur  $\mathcal{K}$  d'une demi-droite issue du point courant  $v_k$ , le long de laquelle  $J$  décroît. A chaque minimum local trouvé sur un chemin, on redéfinit une nouvelle direction de descente et un nouveau chemin. L'algorithme s'arrête quand un minimum satisfait les conditions d'optimalité, à une précision numérique  $\varepsilon_{abs}$  près. On constate en particulier que l'algorithme trouve la solution du problème en un nombre fini d'étapes.

A chaque étape, la direction de descente  $d_k$  peut être calculée de deux manières, soit comme la direction opposée au gradient (comme pour la méthode du gradient avec projection), soit par une direction de Cholesky-Newton sur la face active. La face active, à l'itération  $k$ , est l'ensemble des points de  $\mathcal{K}$ , qui possèdent les mêmes contraintes actives (ou saturées) que le point courant  $v_k$ . La présence d'itérations de gradient avec projection est utile pour déterminer rapidement l'ensemble des contraintes actives que possède la solution (voir [38] comme référence qui établit cette propriété). Mais le gradient avec projection est une méthode de résolution qui converge lentement. La présence d'itérations de Cholesky-Newton permet d'accélérer la convergence de l'algorithme car une itération de Cholesky-Newton donne directement le minimum de la fonctionnelle sur la face activée.

Pour chacun des choix de direction, on recherche un minimum local de  $J$  sur une ligne brisée issue du point courant  $v_k$ . Ce minimum local définit le point  $v_{k+1}$  de la manière suivante:

$$v_{k+1} = P_{\mathcal{K}}(v_k + \alpha_k d_k), \text{ avec } \alpha_k \geq 0, \text{ et } P_{\mathcal{K}} \text{ représente la projection sur } \mathcal{K}. \quad (5.2)$$

La projection est nécessaire car, sinon, le point suivant  $v_{k+1}$  peut sortir du convexe  $\mathcal{K}$ . C'est la projection de la direction  $d_k$  sur  $\mathcal{K}$  qui engendre une ligne brisée (voir figure 5.1).

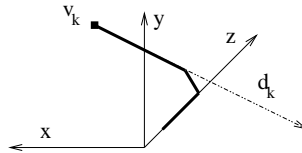


FIG. 5.1 – Projection de la direction de descente  $d_k$  sur le convexe  $\mathcal{K}$

La direction  $d_k$  est réactualisée à chaque itération  $k$ .

#### Calcul des pas $\alpha_k$

Le pas  $\alpha_k$  est déterminé comme le premier minimum local de la fonctionnelle

$$\alpha \mapsto J(P_{\mathcal{K}}(v_k + \alpha d_k)).$$

Une fois  $\alpha_k$  connu, on peut calculer  $v_{k+1}$  par (5.2).

### Étape du gradient avec projection

Cette étape est réalisée si le booléen `do_gpstep` est égal à “true” (voir tableau de l’algorithme 1), c’est-à-dire si on a trouvé le minimum sur la face activée et si ce minimum n’active pas de nouvelles contraintes. Dans ce cas, la direction de descente est  $d_k = -g_k$ , où  $g_k = Av_k + b$ . Les étapes de gradient avec projection sont nécessaires car le gradient avec projection permet d’identifier les contraintes actives de la solution.

### Étape de Cholesky-Newton

Cette étape est réalisée si le booléen `do_gpstep` est égal à “false”, c’est-à-dire si le nombre de pas consécutifs de gradient avec projection est égal à 5 ou bien si le nombre de contraintes activées et désactivées est nul (c’est-à-dire si le gradient avec projection avance peu). On limite le nombre de pas consécutifs de gradient avec projection car le gradient avec projection converge lentement et un pas de Cholesky-Newton permet d’accélérer la convergence. Dans cette étape, la direction de descente est différente de celle de l’étape du gradient avec projection. Pour la déterminer, on la calcule comme la solution du problème de minimisation suivant, où les indices  $k$  sont provisoirement omis,  $v$  désigne le point courant ( $v \in \mathcal{K}$ ) et  $\mathcal{A}$  représente les indices des contraintes actives de  $v$ .

$$\text{Trouver } d \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \min_{d_{\mathcal{A}}=0} J(v + d) \text{ où } v_{\mathcal{A}} = lb_{\mathcal{A}}. \quad (5.3)$$

Les indices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{I}$  désignent respectivement les indices correspondant aux contraintes actives (ou saturées), aux contraintes inactives, du point courant  $v$ . Il est connu que la condition d’optimalité du problème (5.3) est donnée par

$$\begin{aligned} (Ad)_{\mathcal{I}} + (Av + b)_{\mathcal{I}} &= 0, \\ (Ad)_{\mathcal{I}} + g_{\mathcal{I}} &= 0 \text{ où } g = Av + b. \end{aligned}$$

On décompose la matrice  $A$  en sous-matrices en utilisant la symétrie de  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & A_{\mathcal{A}\mathcal{I}} \\ A_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & A_{\mathcal{I}\mathcal{I}} \end{pmatrix}$$

La condition d’optimalité de (5.3) se réécrit donc:

$$A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}d_{\mathcal{I}} + g_{\mathcal{I}} = 0, d_{\mathcal{A}} = 0.$$

On constate que le pas  $\alpha_k$  calculé pour la direction de descente de Cholesky-Newton vaut 1, c’est-à-dire que le minimum calculé sur le chemin est toujours le minimum sur la face active. Plus précisément, au lieu de calculer la direction de descente  $d$ , cela revient à chercher un nouveau point  $\tilde{v}$  tel que

$$\text{Trouver } \tilde{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \min_{\tilde{v}_{\mathcal{A}}=lb_{\mathcal{A}}} J(\tilde{v}) \text{ où } v_{\mathcal{A}} = lb_{\mathcal{A}}.$$

Mais il peut y avoir plusieurs étapes de Cholesky-Newton consécutives. C’est le cas si le minimum trouvé lors de la première itération de Cholesky active une nouvelle contrainte. Dans ce cas, il y aura au moins deux itérations de Cholesky-Newton consécutives.

**algorithme 1** Algorithme de résolution

---

```

1:  $v_0$  point initial admissible (i.e.  $v_0 \geq lb$ )
2: Initialisation à l'itération  $k = 0$ :  $g_0 = Av_0 + b$ 
3: do_gpstep=true, do_gpstep_old=false
4: while Norme du gradient des indices non saturés  $> \varepsilon_{abs}$  do
5:   Calcul du nombre d'étapes consécutives de Cholesky-Newton
6:   if do_gpstep=true then
7:     if do_gpstep_old=false then
8:        $n_{cons\_gpstep} = 0$ 
9:     else
10:       $n_{cons\_gpstep} = n_{cons\_gpstep} + 1$ 
11:    end if
12:  end if
13:  do_gpstep_old=do_gpstep
14:  Choix de la direction de descente selon la valeur de do_gpstep
15:  if do_gpstep=true then
16:    Choix de la direction de descente  $d_k = -g_k$  (pas du gradient avec projection)
17:  else
18:    Choix de la direction de descente  $d_k =$  pas de Cholesky-Newton
19:  end if
20:  Calcul du premier minimum local de  $J$  sur la ligne brisée  $\alpha \rightarrow P_{\mathcal{K}}(v_k + \alpha d_k)$ . On en déduit  $\alpha_k$ .
  Mise à jour du gradient, des indices saturés et non saturés, de  $n_{désactivées}$  et  $n_{activées}$ .
   $n_{désactivées}$  = nombre de contraintes désactivées entre l'itération  $k$  et  $k + 1$ 
    = nb de contraintes actives (ou saturées) en  $k$ , inactives (ou non saturées) en  $k + 1$ ,
   $n_{activées}$  = nombre de contraintes activées entre l'itération  $k$  et  $k + 1$ .
  On pose  $v_{k+1} = P_{\mathcal{K}}(v_k + \alpha_k d_k)$ .
21:  Test des contraintes activées et désactivées pour choisir l'étape suivante.
22:  if do_gpstep=true then
23:    if  $n_{désactivées} + n_{activées} = 0$  ou  $n_{cons\_gpstep} = 5$  then
24:      do_gpstep=false
25:    end if
26:  else
27:    if  $n_{activées} = 0$  then
28:      do_gpstep=true
29:    end if
30:  end if
31:   $k = k + 1$ 
32: end while

```

---

### 5.1.2 Exemples et comparaison avec la routine de résolution du logiciel Scilab

Le problème d'optimisation quadratique (5.1) est assez classique. Il existe quelques routines de résolution de ce type de problème, mais très peu d'entre elles sont d'accès libre. On peut consulter [8, 55] qui présente la méthode des points intérieurs, qui peut être considérée comme une méthode de résolution concurrente de QPB. Dans ce paragraphe, on compare la routine QPB avec la méthode de résolution du logiciel Scilab. La routine issue de Scilab utilise une méthode d'activation de contraintes. En fait, la routine issue de Scilab est une routine générale, qui peut aussi résoudre des problèmes avec contraintes linéaires quelconques, pour des matrices pouvant être semi-définies positives et mêmes indéfinies. Toutefois, elle ne tire pas avantage de la structure simple des contraintes de bornes de (5.1), comme cela apparaîtra dans les résultats. En particulier, l'approche utilisée n'a pas d'étapes de projection. On compare, sur le tableau 5.2, les temps de calcul CPU entre les deux méthodes sur des exemples de matrices pleines comprenant, en général, des données aléatoires. La comparaison est faite pour différentes tailles de problèmes. Pour une même taille de problème, il peut y avoir plusieurs exemples différents.

Taille du pb	Scilab 1 (contraintes de bornes)	Scilab 2 (contraintes linéaires)	QPB	Erreur relative QPB / Scilab 1
8	0.00999999978	0.00999999978	$< 10^{-16}$	$1.5 \cdot 10^{-17}$
114	0.08999999999	0.100000005	0.00999999978	$7.8 \cdot 10^{-16}$
200	0.499999993	0.539999977	0.00999999978	$4.9 \cdot 10^{-13}$
200	0.869999975	0.949999943	0.0600000024	$4.2 \cdot 10^{-11}$
470	12.6199998	13.0599996	0.109999994	$2.1 \cdot 10^{-16}$
1000	77.670003	81.5500033	1.05000004	$1.8 \cdot 10^{-10}$
1000	74.4500025	78.5100006	1.06	$6.3 \cdot 10^{-9}$
1000	53.3100011	56.8999991	3.57999988	$3.0 \cdot 10^{-10}$
1000	128.379999	134.880007	5.83000014	$5.9 \cdot 10^{-12}$
1000	97.3999982	101.300001	11.0200004	$1.2 \cdot 10^{-13}$
1382	241.240004	245.339998	17.9299992	$1.3 \cdot 10^{-11}$

FIG. 5.2 – Comparaison du temps de calcul entre Scilab - QPB

La colonne "erreur relative" représente l'erreur relative entre la solution calculée par QPB et celle issue de Scilab. Elle ne nous sert qu'à vérifier que les deux programmes ont bien calculé la même solution. Les solutions obtenues par Scilab sont identiques, que ce soit avec contraintes de bornes ou avec contraintes linéaires. La routine de QPB est nettement plus rapide dans tous les cas. On remarque que la routine Scilab est légèrement plus rapide pour un calcul avec contraintes de bornes  $x \geq lb$  que pour un calcul sans contrainte de bornes, mais avec une contrainte linéaire du type  $Cx \geq d$ . De plus, la routine Scilab est plus rapide lorsqu'un point initial est donné.

Sur les figures 5.4 et 5.5, on présente une comparaison du temps de résolution CPU des deux routines pour une matrice correspondant au type de problèmes que nous cherchons à résoudre (issu de la simulation de la prise en compte de conditions aux limites de contact unilatéral sur la fissure) donné en fonction du nombre de variables du problème. Cet exemple correspond au calcul du saut de déplacement sur une fissure droite diagonale, en présence de contact unilatéral, en un instant donné, identique pour chaque discrétisation. Un exemple semblable est présenté dans la section 6.3.3. Le rapport entre les deux pas de maillage  $H/h$  est constant : il vaut  $H/h = 1.1$ , c'est-à-dire que pour 100 éléments sur la fissure (la taille du problème d'optimisation est  $n = 198$ ), on considère  $n_i = n_j = 250$  points pour le maillage volumique. Les résultats de la comparaison apparaissent dans le tableau 5.3.

	Nb de variables	Scilab Contraintes de bornes	QPB	Erreur relative entre les 2 solutions
	18	$< 10^{-16}$	$< 10^{-16}$	$1.5 \cdot 10^{-15}$ (%)
	38	0.00999999791	$< 10^{-16}$	$2.3 \cdot 10^{-15}$ (%)
	98	0.0599999987	0.0099999978	$1.5 \cdot 10^{-15}$ (%)
	198	0.479999989	0.019999996	$2.5 \cdot 10^{-15}$ (%)
	398	4.64000005	0.059999968	$2.1 \cdot 10^{-15}$ (%)
	798	48.2900015	0.34000002	$2.8 \cdot 10^{-15}$ (%)
	958	84.7100012	0.55999961	$2.8 \cdot 10^{-15}$ (%)

FIG. 5.3 – Comparaison Scilab- QPB sur une itération du problème physique

On peut voir que la résolution est nettement plus rapide en utilisant QPB que Scilab. Sur la figure 5.5, on peut calculer la pente des courbes montrant le temps CPU en fonction du nombre de degrés de liberté sur la fissure. On obtient  $\simeq 3.2$  pour Scilab et  $\simeq 1.8$  pour QPB.

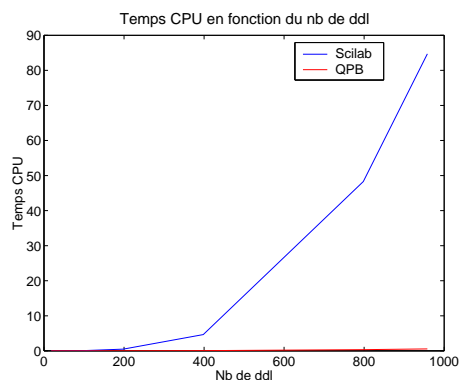


FIG. 5.4 – Comparaison entre Scilab et QPB. Echelle linéaire pour le temps CPU

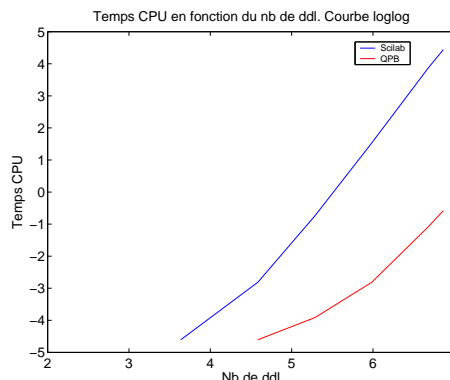


FIG. 5.5 – Comparaison entre Scilab et QPB. Courbe loglog

Sur la figure 5.7, on présente une comparaison du temps de calcul entre la routine de résolution Scilab et QPB, pour une simulation numérique entière. L'exemple considéré est celui d'une fissure diagonale pour laquelle on considère une condition de contact unilatéral sans frottement (pour un exemple semblable, voir 6.3.3). On impose une condition initiale donnée sur le domaine. La comparaison est faite désormais en unités de temps réel et non plus en temps CPU. Le rapport entre le pas  $H$  de la fissure et le pas  $h$  du maillage régulier est constant et vaut 1.1. Les données sont les mêmes que celles du tableau 5.6,  $n_i$  représente le nombre d'inconnues du maillage régulier,  $n$  représente le nombre de degrés de liberté sur la fissure.

En conclusion, la routine de résolution QPB est plus rapide que celle de Scilab, qui peut résoudre d'autres problèmes mais qui ne semble pas être efficace pour des problèmes du type (5.1). On a constaté également que QPB est plus robuste, car la routine de Scilab donne des résultats erronés si les données contiennent des valeurs petites, de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-16}$ . La routine QPB est plus robuste si les variables d'arrêt sont convenablement fixées.

**Remarque 5.2** La méthode de résolution de QPB peut résoudre les problèmes de complémentarité (classiques en mécanique du contact) dont la matrice est symétrique définie positive. Par contre, elle n'est pas adaptée aux problèmes de complémentarité dont la matrice est symétrique, semi-définie positive.



n	$n_i$	Nb d'itér. en temps	Temps Scilab (sec)	Temps QPB (sec)
10	25	44	2.480000	12.63900
20	50	89	4.630000	28.76800
50	125	221	33.40000	83.88900
100	250	443	297.3050	267.0660
200	500	885	3685.687	1397.698
400	1000	1771	54298.64	10940.82
480	1200	2125	120058.4	18919.00

FIG. 5.6 – *Tableau comparant les temps de résolution Scilab - QPB. Exemple d'une fissure diagonale*

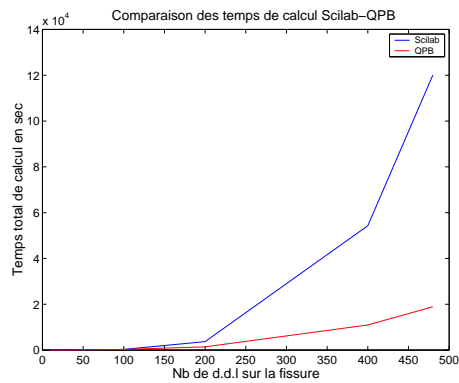


FIG. 5.7 – *Comparaison entre Scilab et QPB. Echelle linéaire pour le temps en secondes.*

## 5.2 Sur l'implémentation des matrices de couplage entre la fissure et le maillage régulier

On décrit dans cette section comment calculer les matrices de couplage entre la fissure et le maillage régulier. L'un des intérêts de la méthode des domaines fictifs est que l'on peut approcher la géométrie de la fissure par des éléments de forme quelconque, pas seulement rectilignes par morceaux. Cela n'a pas de conséquence sur la condition de stabilité, car celle-ci est indépendante de la présence de la fissure et donc de sa forme. De plus, la prise en compte d'éléments curvilignes est relativement aisée car elle intervient uniquement sur le maillage de la fissure. On n'a pas besoin de considérer des éléments du maillage volumique à bords courbes, ce qui est lourd à mettre en œuvre, comme c'est le cas pour la méthode des éléments finis.

On rappelle dans un premier les calculs d'intégrales à effectuer pour une fissure régulière paramétrée par une abscisse curviligne quelconque. On revient ensuite au cas de fissures régulières approchées par des éléments rectilignes, ce cas a déjà été considéré dans [54]. On présente enfin un apport nouveau, à savoir l'implémentation d'éléments circulaires pour des fissures circulaires ou en arcs-de-cercle.

### 5.2.1 Cas d'une fissure régulière

#### 5.2.1.1 Calcul des intégrales

Pour notre problème, la prise en compte de la fissure se fait par l'intermédiaire des formes  $b_N$  et  $b_T$  définies en (3.1). Ces formes sont définies par des intégrales sur  $\Gamma$  et correspondent aux traces normale et tangentielle du tenseur des contraintes. Ainsi, pour un tenseur  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}$  assez régulier, on a

$$b_N(\boldsymbol{\tau}, \mu_N) = \int_{\Gamma} \tau_N \mu_N ds = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \mu_N ds, \quad (5.4)$$

$$b_T(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\mu}_T) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}_T \cdot \boldsymbol{\mu}_T ds. \quad (5.5)$$

Dans le cas bidimensionnel, on a

$$\begin{aligned} \tau_N &= \tau_{11} n_1^2 + 2 \tau_{12} n_1 n_2 + \tau_{22} n_2^2 \text{ et } \mathbf{n} = (n_1, n_2)^t, \\ \boldsymbol{\tau}_T &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_T \mathbf{t}, \text{ où } \bar{\boldsymbol{\tau}}_T = \tau_{11} n_1 n_2 + \tau_{12} (n_2^2 - n_1^2) - \tau_{22} n_2 n_1 \text{ et } \mathbf{t} = (n_2, -n_1)^t. \end{aligned}$$

Les calculs qui suivent sont faits en supposant que le multiplicateur est choisi dans l'espace  $\mathcal{P}_1^c$ , de plus, nous avons choisi d'approcher les contraintes par des éléments  $Q_1^{div}$  (voir la partie 3.6.1). Pour définir la fonction de base d'une composante du tenseur  $\boldsymbol{\tau}$ , considérée au point  $(i, j)$  (où  $x_i = i h_x$  et  $y_j = j h_y$ , pour tous  $i, j$ ), nous introduisons les fonctions suivantes:

$$\tau_{ij}^1(x, y) = \frac{1}{h_x h_y} (x - x_{i-1}) (y - y_{j-1}) \quad \text{si } (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 0 \text{ ailleurs,}$$

$$\tau_{ij}^2(x, y) = \frac{1}{h_x h_y} (x_{i+1} - x) (y - y_{j-1}) \quad \text{si } (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 0 \text{ ailleurs,}$$

$$\tau_{ij}^3(x, y) = \frac{1}{h_x h_y} (x_{i+1} - x) (y_{j+1} - y) \quad \text{si } (x, y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad 0 \text{ ailleurs,}$$

$$\tau_{ij}^4(x, y) = \frac{1}{h_x h_y} (x - x_{i-1}) (y_{j+1} - y) \quad \text{si } (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}], \quad 0 \text{ ailleurs.}$$

Les fonctions de base au nœud  $(i, j)$  de  $\sigma_{xx}^h, \sigma_{xx}^b, \sigma_{yy}^d, \sigma_{yy}^h, \sigma_{xy}$  sont définies à l'aide de  $\tau_{ij}^1, \tau_{ij}^2, \tau_{ij}^3, \tau_{ij}^4$ .

Nous avons choisi des éléments  $\mathcal{P}_1^c$  pour les multiplicateurs de Lagrange. La fonction de base pour le degré de liberté  $l$  de la fissure est très classique, c'est la fonction "chapeau" définie comme suit:

$$\mu_l(s) = \begin{cases} \frac{s_{l+1} - s}{|s_{l+1} - s_l|} & \text{si } s_l \leq s \leq s_{l+1}, \\ \frac{s - s_{l-1}}{|s_l - s_{l-1}|} & \text{si } s_{l-1} \leq s \leq s_l, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où  $s$  désigne l'abscisse curviligne le long de la fissure. En pratique, le calcul des intégrales (5.4) et (5.5) se fait par éléments de la fissure, c'est-à-dire que, pour un élément de la fissure, on calcule (5.4) et (5.5) sur cet élément pour les fonctions de base des nœuds de l'élément. Comme les multiplicateurs  $\lambda_N, \lambda_T$ , sont approchés par des fonctions  $\mathcal{P}_1^c$ , on considère, sur l'élément, une partie "amont" (fonction de base  $s$ ) et une partie "aval" (fonction de base  $1 - s$ ), (voir fig.5.8).

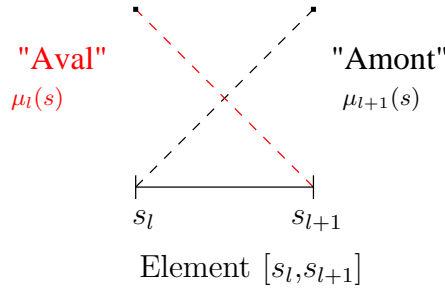


FIG. 5.8 – Fonctions de base pour le multiplicateur sur un élément de la fissure

Il s'agit donc de calculer, pour l'élément  $[s_l, s_{l+1}]$ , une intégrale "amont" (contribution à la fonction de base  $\mu_{l+1}$ ) et une intégrale "aval" (contribution à la fonction de base  $\mu_l$ ). Pour cela, on a besoin d'une paramétrisation  $(x(s), y(s))$  de la fissure, le long de chaque élément. On suppose, pour se placer dans le cas général, que la fissure est une courbe paramétrée quelconque. Ainsi, la fissure  $\Gamma$  est définie par

$$\Gamma = \{ (x(s), y(s)), s \geq 0 \}.$$

On a vu que les normales apparaissent dans le calcul de (5.4) et (5.5). Dans le cas général, elles dépendent de l'abscisse  $s$ . Elles sont définies par

$$n_1(s) = -\frac{y'(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}, \quad n_2(s) = \frac{x'(s)}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}.$$

Pour calculer (5.4) et (5.5), on a besoin, par exemple, des quantités suivantes.

$$I = \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ij}^k(x(s), y(s)) s n_1^2(s) ds, \quad k = 1, 4, \quad (5.6)$$

$$J = \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ij}^k(x(s), y(s)) (h_{l+1} - s) n_1^2(s) ds, \quad k = 1, 4. \quad (5.7)$$

$s_1$  et  $s_2$  représentent les abscisses des intersections de la fissure avec le maillage régulier et  $h_{l+1} = s_{l+1} - s_l$ .

Si la fissure est paramétrée par une courbe spline, par exemple, on peut calculer relativement simplement les intégrales  $I$  et  $J$ . Mais la difficulté est le calcul des intersections entre la fissure et le maillage régulier.

### 5.2.1.2 Calcul des intersections

Le calcul des intégrales nécessite d'abord le calcul des intersections entre la fissure et le maillage régulier. Cela conduit à faire un sous-découpage du maillage de la fissure: il existe plusieurs sous-éléments à l'intérieur de chaque élément de la fissure. Dans le cas d'une paramétrisation quelconque de la fissure, le calcul des intersections entre la fissure et le maillage régulier est compliqué. Pour certaines paramétrisations simples (éléments rectilignes ou circulaires), il peut se faire de manière exacte.

## 5.2.2 Approximation de la fissure par des segments

On considère ici une approximation linéaire par morceaux de la fissure, c'est-à-dire que la fissure est approchée par des segments. Les calculs et la mise en œuvre ont déjà été faits dans [54]. En pratique, approcher la forme de la fissure par des éléments rectilignes est plus facile à mettre en œuvre car le calcul des intégrales est plus simple ainsi que le calcul des intersections de la fissure avec le maillage régulier. Dans le cas des éléments rectilignes, on utilise la paramétrisation suivante de la fissure

$$x(s) = x_1 + sn_2, \quad y(s) = y_1 - sn_1.$$

$(x_1, y_1)$  représente le premier sommet de l'élément de la fissure.  $n_1, n_2$  sont les composantes du vecteur normal à l'élément de fissure. Dans le cas des éléments rectilignes, elles sont constantes par élément et n'interviennent pas dans le calcul des intégrales.

### Un exemple

On considère la situation montrée sur la figure 5.9.

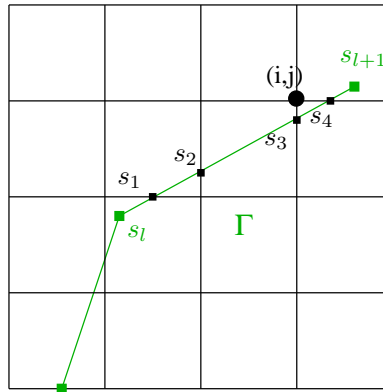


FIG. 5.9 – Exemple d'une fissure intersectant le maillage régulier

On s'intéresse au nœud  $(x_i, y_j)$ . La contribution entre la fonction de base du nœud  $s_{l+1}$  et la fonction de base de la contrainte  $\sigma_{xy}$  du nœud  $(x_i, y_j)$  est donnée par

$$I = \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_2}^{s_3} \tau_{ij}^1(x(s), y(s)) s ds + \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_3}^{s_4} \tau_{ij}^2(x(s), y(s)) s ds + \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_4}^{s_{l+1}} \tau_{ij}^3(x(s), y(s)) s ds.$$

La contribution portant sur  $s_l$  et la fonction de base de la contrainte  $\sigma_{xy}$  du nœud  $(x_i, y_j)$  vérifie:

$$J = \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_2}^{s_3} \tau_{ij}^1(x(s), y(s)) (h_{l+1} - s) ds + \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_3}^{s_4} \tau_{ij}^2(x(s), y(s)) (h_{l+1} - s) ds + \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_4}^{s_{l+1}} \tau_{ij}^3(x(s), y(s)) (h_{l+1} - s) ds.$$

Il ne s'agit que des contributions issues de l'élément  $[s_l, s_{l+1}]$  pour le nœud  $(i, j)$ . Il ne faut pas oublier les contributions de l'élément  $[s_{l+1}, s_{l+2}]$ . On montre ensuite un exemple de calcul d'intégrales.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_2}^{s_3} \tau_{ij}^1(x(s), y(s)) s ds = \frac{1}{h_{l+1} h_x h_y} \int_{s_2}^{s_3} (x(s) - x_{i+1}) (y(s) - y_{j+1}) s ds \\ &= \frac{1}{h_{l+1} h_x h_y} \left[ -\frac{1}{4} n_2 n_1 (s_3^4 - s_2^4) + \frac{1}{3} (-x_1 - x_{i+1}) n_1 + n_2 (y_1 - y_{j+1}) (s_3^3 - s_2^3) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (x_1 - x_{i+1}) (y_1 - y_{j+1}) (s_3^2 - s_2^2) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{l+1}} \int_{s_2}^{s_3} \tau_{ij}^1(x(s), y(s)) (h_{l+1} - s) ds = \frac{1}{h_{l+1} h_x h_y} \int_{s_2}^{s_3} (x(s) - x_{i+1}) (y(s) - y_{j+1}) (h_{l+1} - s) ds \\ &= \frac{1}{h_{l+1} h_x h_y} \left[ \frac{1}{4} n_1 n_2 (s_3^4 - s_2^4) + \frac{1}{3} (n_1 (x_1 - x_{i+1}) - n_2 (y_1 - y_{j+1}) - n_1 n_2 h_{l+1}) (s_3^3 - s_2^3) \right. \\ & - \frac{1}{2} (n_1 h_{l+1} (x_1 - x_{i+1}) - n_2 h_{l+1} (y_1 - y_{j+1}) + (x_1 - x_{i+1}) (y_1 - y_{j+1})) (s_3^2 - s_2^2) \\ & \left. + h_{l+1} (x_1 - x_{i+1}) (y_1 - y_{j+1}) (s_3 - s_2) \right]. \end{aligned}$$

### 5.2.3 Éléments circulaires

On présente ici la mise en œuvre d'éléments circulaires pour approcher des fissures en arcs-de-cercle, dans le cas bidimensionnel. Cela permet d'améliorer la prise en compte de la géométrie de la fissure par rapport à l'utilisation d'éléments rectilignes par morceaux.

Si on suppose que la fissure est un arc-de-cercle ou un cercle, donc que la fissure est une partie d'un cercle, on doit modifier la paramétrisation de la fissure, comme suit.

$$x(s) = x_c + R \cos \alpha \cos s - R \sin \alpha \sin s, \quad y(s) = y_c + R \sin \alpha \cos s + R \cos \alpha \sin s.$$

$(x_c, y_c)$  représente le centre du cercle sur lequel se trouve la fissure.  $R$  est le rayon du cercle. On définit  $\alpha$  de la manière suivante:  $R \cos \alpha = x_1 - x_c$ ,  $R \sin \alpha = y_1 - y_c$ .  $\alpha$  représente l'angle entre le repère orthonormé et le repère local dont l'origine est le premier point de l'élément de la fissure.  $(x_1, y_1)$  désigne les coordonnées du premier point de l'élément. On suppose toujours que l'on considère un élément  $\mathcal{P}_1^c$  pour le multiplicateur. Les normales dépendent de  $s$  désormais, il faut alors les inclure dans le calcul de l'intégrale. On calcule les intégrales données dans (5.6) et (5.7), où  $s_1$  et  $s_2$  sont les abscisses des points d'intersection d'un élément de la fissure avec le support de  $\tau_{ij}^k$ . Les composantes de la normale sont alors:

$$n_1(s) = -\cos \alpha \cos s + \sin \alpha \sin s, \quad n_2(s) = -\sin \alpha \cos s - \cos \alpha \sin s.$$

Cela donne à faire plusieurs calculs d'intégrales du type suivant:

$$\int_{s_1}^{s_2} s^\beta \cos^\gamma s \sin^\delta s ds, \quad \text{avec, } \beta = 0, 1, \gamma = 0 \text{ à } 4, \delta = 0 \text{ à } 4. \text{ Ce calcul est détaillé dans l'annexe B.}$$

Encore une fois, la difficulté principale vient du calcul de l'intersection de la fissure avec les éléments du maillage régulier. Dans le cas d'éléments circulaires, ce calcul se fait analytiquement, à l'aide de formules trigonométriques.

On présente une mise en œuvre des éléments circulaires dans le chapitre 6, pour le cas d'une fissure circulaire, sur les figures 6.108 et 6.109.

### 5.2.4 Traitement de fissures singulières comportant des angles

Les approximations des espaces  $\mathcal{G}_H$  et  $\mathbf{L}_{\mathbf{T}H}$  que nous avons proposées sont valables lorsque la fissure  $\Gamma$  est une portion de courbe régulière. Si l'on considère des fissures comportant un angle, il faut alors modifier l'espace d'approximation des multiplicateurs. On décrit ici comment modifier l'élément fini choisi de manière à prendre en compte la discontinuité de la normale.

Dans le cas d'une fissure comportant un (ou plusieurs) angle(s), le saut du déplacement normal ne peut être approché par une fonction continue. Comme on peut le voir sur la figure 5.10, la normale n'est pas continue au point  $P_j$ . Considérer une inconnue  $\lambda_N$  continue en  $P_j$  n'est donc pas approprié. L'objectif est d'introduire dans les espaces d'approximation des multiplicateurs les discontinuités qui assurent la continuité de  $\lambda_1, \lambda_2$  (rappelons que  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^t = \lambda_N \mathbf{n} + \boldsymbol{\lambda}_T$ ).

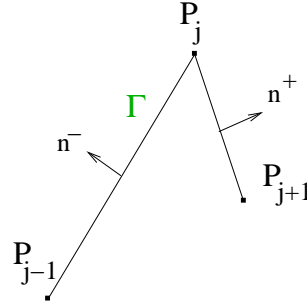


FIG. 5.10 – Exemple de fissure avec une discontinuité de la normale

Dans le cas d'une fissure avec normale continue, les fonctions de base locales associées respectivement à  $(\lambda_N, \lambda_T)$  sont,  $s$  désignant l'abscisse curviligne sur la fissure,

$$\begin{pmatrix} \mu_j(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j(s) \end{pmatrix}.$$

On note

$$\mu_j(s) = \begin{cases} \mu^+(s) = \frac{h_{j+1} - (s - s_j)}{h_{j+1}} & \text{si } s_j \leq s \leq s_{j+1}, h_{j+1} = s_{j+1} - s_j, \\ \mu^-(s) = \frac{s - s_{j-1}}{h_j} & \text{si } s_{j-1} \leq s \leq s_j, h_j = s_j - s_{j-1}. \end{cases}$$

On cherche une nouvelle base qui permette de prendre en compte la discontinuité de la normale sur la fissure. On conserve des polynômes  $\mathcal{P}_1$  sur chaque morceau. Dans la nouvelle base,  $(\lambda_N, \lambda_T)$  s'exprime sous la forme suivante, où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux scalaires quelconques,

$$\begin{pmatrix} \lambda_N(s) \\ \lambda_T(s) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mu_N^1(s) \\ \mu_T^1(s) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mu_N^2(s) \\ \mu_T^2(s) \end{pmatrix}.$$

On introduit les fonctions discontinues suivantes

$$\mu_N^1(s) = \begin{cases} \alpha_N^- \mu^-(s) & \text{sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ \alpha_N^+ \mu^+(s) & \text{sur } ]s_j, s_{j+1}] \end{cases}, \quad \mu_N^2(s) = \begin{cases} \beta_N^- \mu^-(s) & \text{sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ \beta_N^+ \mu^+(s) & \text{sur } ]s_j, s_{j+1}] \end{cases}$$

$$\mu_T^1(s) = \begin{cases} \alpha_T^- \mu^-(s) & \text{sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ \alpha_T^+ \mu^+(s) & \text{sur } ]s_j, s_{j+1}] \end{cases}, \quad \mu_T^2(s) = \begin{cases} \beta_T^- \mu^-(s) & \text{sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ \beta_T^+ \mu^+(s) & \text{sur } ]s_j, s_{j+1}] \end{cases}$$

$\alpha_N^-, \alpha_N^+, \alpha_T^-, \alpha_T^+, \beta_N^-, \beta_N^+, \beta_T^-, \beta_T^+$  sont des inconnues. Il faudra vérifier que:

$$\begin{pmatrix} \alpha_N^- & \beta_N^- \\ \alpha_T^- & \beta_T^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_N^+ & \beta_N^+ \\ \alpha_T^+ & \beta_T^+ \end{pmatrix}$$

sont deux matrices inversibles pour les valeurs de  $\alpha_N^-, \alpha_N^+, \alpha_T^-, \alpha_T^+, \beta_N^-, \beta_N^+, \beta_T^-, \beta_T^+$  déterminées.

On cherche à obtenir la continuité des deux composantes du saut de déplacement, au point de discontinuité des normales, c'est-à-dire obtenir l'égalité suivante:

$$\lambda_N n^- + \lambda_T t^- = \lambda_N n^+ + \lambda_T t^+. \quad (5.8)$$

$$\text{On note: } \mathbf{n}^+ = \begin{pmatrix} n_1^+ \\ n_2^+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}^+ = \begin{pmatrix} n_2^+ \\ -n_1^+ \end{pmatrix}.$$

L'égalité (5.8) entraîne les relations suivantes, obtenues en considérant les limites à gauche et à droite de  $\lambda_N$  et  $\lambda_T$  au point de discontinuité de la normale:

$$\begin{cases} \lambda_N^- = \lambda_1 \alpha_N^- + \lambda_2 \beta_N^-, & \lambda_T^- = \lambda_1 \alpha_T^- + \lambda_2 \beta_T^-, \\ \lambda_N^+ = \lambda_1 \alpha_N^+ + \lambda_2 \beta_N^+, & \lambda_T^+ = \lambda_1 \alpha_T^+ + \lambda_2 \beta_T^+, \\ (\lambda_1 \alpha_N^- + \lambda_2 \beta_N^-) n_1^- + (\lambda_1 \alpha_T^- + \lambda_2 \beta_T^-) n_2^- = (\lambda_1 \alpha_N^+ + \lambda_2 \beta_N^+) n_1^+ + (\lambda_1 \alpha_T^+ + \lambda_2 \beta_T^+) n_2^+, \\ (\lambda_1 \alpha_N^- + \lambda_2 \beta_N^-) n_2^- - (\lambda_1 \alpha_T^- + \lambda_2 \beta_T^-) n_1^- = (\lambda_1 \alpha_N^+ + \lambda_2 \beta_N^+) n_2^+ - (\lambda_1 \alpha_T^+ + \lambda_2 \beta_T^+) n_1^+. \end{cases} \quad (5.9)$$

On obtient alors les relations suivantes, pour  $\lambda_1, \lambda_2$  quelconques,

$$\begin{cases} \lambda_1 [\alpha_N^- n_1^- + \alpha_T^- n_2^- - \alpha_N^+ n_1^+ - \alpha_T^+ n_2^+] + \lambda_2 [\beta_N^- n_1^- + \beta_T^- n_2^- - \beta_N^+ n_1^+ - \beta_T^+ n_2^+] = 0, \\ \lambda_1 [\alpha_N^- n_2^- - \alpha_T^- n_1^- - \alpha_N^+ n_2^+ + \alpha_T^+ n_1^+] + \lambda_2 [\beta_N^- n_2^- - \beta_T^- n_1^- - \beta_N^+ n_2^+ + \beta_T^+ n_1^+] = 0. \end{cases}$$

Cela se traduit par les égalités suivantes,

$$\begin{cases} \alpha_N^- n_1^- + \alpha_T^- n_2^- = \alpha_N^+ n_1^+ + \alpha_T^+ n_2^+, & \beta_N^- n_1^- + \beta_T^- n_2^- = \beta_N^+ n_1^+ + \beta_T^+ n_2^+, \\ \alpha_N^- n_2^- - \alpha_T^- n_1^- = \alpha_N^+ n_2^+ - \alpha_T^+ n_1^+, & \beta_N^- n_2^- - \beta_T^- n_1^- = \beta_N^+ n_2^+ - \beta_T^+ n_1^+. \end{cases} \quad \text{et}$$

On obtient, sous une forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} n_1^- & n_2^- \\ n_2^- & -n_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_N^- \\ \alpha_T^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^+ & n_2^+ \\ n_2^+ & -n_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_N^+ \\ \alpha_T^+ \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où: } \begin{pmatrix} n_1^+ & n_2^+ \\ n_2^+ & -n_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^- & n_2^- \\ n_2^- & -n_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_N^- \\ \alpha_T^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_N^+ \\ \alpha_T^+ \end{pmatrix}.$$

On note  $\cos \varphi = \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{n}^+ = n_1^+ n_1^- + n_2^+ n_2^-$ ,  $\sin \varphi = -n_1^- n_2^+ + n_2^- n_1^+$ . On obtient pour  $\alpha_N^+, \alpha_T^+, \beta_N^-, \beta_T^-$ .

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_N^- \\ \alpha_T^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_N^+ \\ \alpha_T^+ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_N^+ \\ \beta_T^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_N^- \\ \beta_T^- \end{pmatrix}.$$

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  désignent les deux degrés de liberté associés aux nouvelles fonctions de base, on obtient pour (5.9), après élimination de  $\alpha_N^+, \alpha_T^+, \beta_N^-, \beta_T^-$ ,

$$\begin{cases} \lambda_N^- = \lambda_1 \alpha_N^- + \lambda_2 (\cos \varphi \beta_N^+ - \sin \varphi \beta_T^+), & \lambda_N^+ = \lambda_1 (\cos \varphi \alpha_N^- + \sin \varphi \alpha_T^-) + \lambda_2 \beta_N^+, \\ \lambda_T^- = \lambda_1 \alpha_T^- + \lambda_2 (\sin \varphi \beta_N^+ + \cos \varphi \beta_T^+), & \lambda_T^+ = \lambda_1 (-\sin \varphi \alpha_N^- + \cos \varphi \alpha_T^-) + \lambda_2 \beta_T^+. \end{cases}$$

On veut que les degrés de liberté  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondent respectivement à  $\lambda_N^-$  et  $\lambda_N^+$  pour faciliter la résolution du problème d'optimisation et conserver un problème de minimisation avec contraintes de bornes et non pas avec contraintes linéaires générales. Il faut alors prendre  $\alpha_N^-, \alpha_T^-, \beta_N^+, \beta_T^+$  comme suit, en supposant que  $\varphi \neq 0$ , ou  $\pi$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_N^- &= 1, \beta_N^+ = 1. \\ \cos \varphi \beta_N^+ - \sin \varphi \beta_T^+ &= 0 \Leftrightarrow \beta_T^+ = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \\ \cos \varphi \alpha_N^- + \sin \varphi \alpha_T^- &= 0 \Leftrightarrow \alpha_T^- = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

On aura alors

$$\alpha_N^+ = 0, \alpha_T^+ = -\frac{1}{\sin \varphi}, \beta_N^- = 0, \beta_T^- = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Le degré de liberté associé à  $\lambda_1$  correspond à  $\lambda_N^-$ , celui associé à  $\lambda_2$  correspond à  $\lambda_N^+$ . L'inconvénient est que  $\lambda_T^-$  et  $\lambda_T^+$  sont une combinaison linéaire de  $\lambda_N^-$  et  $\lambda_N^+$ . Les nouvelles fonctions de base locales sont alors

$$\begin{aligned} \mu_N^1(s) &= \begin{cases} \mu^-(s) \text{ sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ 0 \text{ sur } ]s_j, s_{j+1}] \end{cases} & \mu_T^1(s) &= \begin{cases} -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \mu^-(s) \text{ sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ -\frac{1}{\sin \varphi} \mu^+(s) \text{ sur } ]s_j, s_{j+1}] \end{cases} \\ \mu_N^2(s) &= \begin{cases} 0 \text{ sur } [s_{j-1}, s_j[, \\ \mu^+(s) \text{ sur } [s_j, s_{j+1}[ \end{cases} & \mu_T^2(s) &= \begin{cases} \frac{1}{\sin \varphi} \mu^-(s) \text{ sur } ]s_{j-1}, s_j], \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \mu^+(s) \text{ sur } [s_j, s_{j+1}[ \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc, sur l'élément  $]P_{j-1}, P_j[$  de la fissure, on obtient

$$\begin{pmatrix} \lambda_N(s) \\ \lambda_T(s) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mu^-(s) \\ -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \mu^-(s) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \varphi} \mu^-(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu^-(s) \\ (-\lambda_1 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\lambda_2}{\sin \varphi}) \mu^-(s) \end{pmatrix}.$$

Sur l'élément  $]P_j, P_{j+1}[$  de la fissure, on obtient

$$\begin{pmatrix} \lambda_N(s) \\ \lambda_T(s) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sin \varphi} \mu^+(s) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mu^+(s) \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \mu^+(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \mu^+(s) \\ (-\frac{\lambda_1}{\sin \varphi} + \lambda_2 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}) \mu^+(s) \end{pmatrix}.$$

On obtient des vecteurs linéairement indépendants pour  $\varphi \neq 0$  ou  $\pi$ . La continuité du saut de déplacement est bien vérifiée au point de discontinuité de la normale.

Un exemple numérique utilisant cette méthode sera présenté dans la section 6.3.4.

**Remarque 5.3** *La méthode présentée dans 5.2.4 n'est pas utilisée en pratique quand on approche des fissures régulières par des segments. En effet, bien que les normales de la fissure approchée soient discontinues, la fissure est régulière et sa normale ne comporte pas de discontinuités. De plus, plus le maillage de la fissure est fin, plus les sauts de normale seront petits.*



# Chapitre 6

## Résultats numériques

Dans ce chapitre, on présente les résultats numériques issus de la formulation en domaines fictifs. On montre d'abord des résultats de validation. Le premier exemple traite du cas unidimensionnel: ce cas revient à considérer, dans le cas 2D, une fissure rectiligne infinie (dans la direction des ordonnées, par exemple) et des données invariantes dans cette direction. Ce problème se ramène à un problème 1D pour lequel on considère une ligne comme domaine et la fissure est assimilée à un point. Pour cet exemple, on donne une formule explicite de la solution par un calcul semblable à celui utilisé dans [36]. On peut comparer alors les résultats numériques à la solution exacte. La validation du code 2D se fait sur un autre exemple: celui d'une fissure circulaire fermée, pour laquelle on considère des données invariantes par rotation. Le problème étudié est donc un problème à symétrie radiale qui peut être modélisé par une équation 1D. On compare alors les résultats issus de la modélisation 1D à ceux issus du code 2D. Ensuite, d'autres exemples sont donnés pour le cas d'une fissure droite finie parallèle au maillage et d'une fissure inclinée par rapport au maillage. Enfin, un exemple plus réaliste en contrôle non destructif est considéré.

### 6.1 Étude du cas unidimensionnel

Dans cette partie, on montre qu'un problème 2D avec condition unilatérale, comportant une fissure rectiligne infinie dans une direction et des données invariantes dans cette direction, peut se ramener à un problème 1D avec condition unilatérale. Le problème 1D de contact unilatéral, lorsque la condition unilatérale se trouve au bord du domaine, revient à trouver le déplacement d'une corde vibrante en contact avec un obstacle. Il a été étudié par G. Lebeau et M. Schatzman [36] dans un demi-espace. Nous considérons ici un problème 1D avec la condition unilatérale au niveau d'un point intérieur du domaine (que l'on appellera point de fissure). Dans cette partie, on détaille l'obtention d'une solution exacte, dans le cas 1D, pour la condition unilatérale en un point intérieur. On montre ensuite une comparaison entre la solution numérique obtenue pour la condition de Neumann sur la fissure et la solution de la condition unilatérale calculée explicitement. On présente également des résultats numériques pour la condition unilatérale à l'intérieur du domaine, comparés à la solution exacte.

#### 6.1.1 Obtention de la solution exacte

##### 6.1.1.1 Mise en équations du problème

On considère un milieu élastique isotrope 2D, qui comporte, en  $x = a$ , une fissure verticale infinie. On impose dans ce milieu des données (conditions initiales, source extérieure) invariantes dans

la direction des ordonnées  $y$ . Les équations de l'élastodynamique en présence de contact unilatéral peuvent alors se simplifier. On les rappelle, dans un premier temps, dans le cas général, pour lequel on ne considère pas de source extérieure. Pour un milieu élastique isotrope, la loi de Hooke, explicitée par (1.1)-(ii), donne alors les relations suivantes pour les contraintes, dans lesquelles  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé du matériau,  $u_x$  représente la première composante du déplacement  $\mathbf{u}$ ,  $u_y$  la deuxième.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}.\end{aligned}$$

On suppose, pour simplifier, que les coefficients  $\mu$  et  $\lambda$  sont indépendants de la variable d'espace  $x$ . On obtient, pour la divergence,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

On obtient alors les équations de l'élastodynamique, exprimées avec les déplacements (voir (1.1)-(i))

$$\varrho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) - (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.1)$$

$$\varrho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) - (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.2)$$

Nous considérons, par hypothèse, que le problème est invariant dans la direction des ordonnées  $y$ . On peut donc éliminer dans (6.1)-(6.2) les dérivées par rapport à la variable  $y$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}\varrho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= 0, \\ \varrho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &= 0.\end{aligned}$$

On considère une fissure droite verticale infinie, située en  $x = a$ . On pose comme normale à la fissure, le vecteur  $\mathbf{n} = (-1, 0)^t$ . La contrainte normale et les quantités permettant d'exprimer la condition de contact unilatéral sur la fissure sont définies de la manière suivante:

$$\begin{aligned}[u_N] &= u_x(a^+) - u_x(a^-), \quad \sigma_N = \sigma_{xx} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} \\ -\sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ -\mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les conditions aux limites de contact unilatéral sur la fissure (données par (1.4)) se réécrivent donc, en utilisant la notation  $[u_x] = [u_N]$ .

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] &= 0, \quad [u_x] \geq 0, \quad [u_x] \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} \leq 0, \\ \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] &= 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

$u_x$  est solution du problème suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad 0 \leq t \leq T \\ [u_x](a, t) = u_x(a^+, t) - u_x(a^-, t) &\geq 0, \quad -\frac{\partial u_x}{\partial x}(a, t) \geq 0, \\ [u_x](a, t) \frac{\partial u_x}{\partial x}(a, t) &= 0, \quad \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \right](a, t) = 0, \\ u_x(0) = u_{0x}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial t}(0) &= u_{1x}.\end{aligned}$$

$u_y$  est solution du problème suivant:

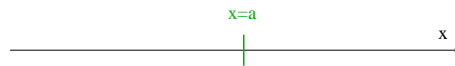
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &= 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad 0 \leq t \leq T \\ \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} \right](a, t) &= 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x}(a, t) = 0, \\ u_y(0) &= u_{0y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t}(0) = u_{1y}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'absence de frottement sur la fissure entraîne que  $u_y$  est solution de l'équation des ondes avec une condition de Neumann, en  $x = a$ .

On obtient donc que  $u_x$  et  $u_y$  sont respectivement solutions de l'équation des ondes et ne dépendent que de la variable d'espace  $x$  et du temps  $t$ , pour une vitesse  $\sqrt{(2\mu + \lambda)/\varrho}$  et  $\sqrt{\mu/\varrho}$ . Dans la suite, nous allons donc considérer l'équation des ondes 1D avec condition unilatérale sur un point intérieur, pour laquelle  $u_x$  est solution.

### 6.1.1.2 Obtention de la solution analytique

La démarche employée par G. Lebeau et M. Schatzman dans [36], pour une condition unilatérale au bord du domaine dans un demi-espace, peut être adaptée pour une condition unilatérale en un point intérieur du domaine. Le problème considéré est formulé sur la ligne réelle, la fissure est située en un point  $a \in \mathbb{R}$ .



La formulation classique du problème est la suivante.

Trouver  $u = u(x, t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1, \\ [u](a, t) = u(a^+, t) - u(a^-, t) \geq 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) \geq 0, \\ [u](a, t) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right](a, t) = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Le terme  $c$  désigne la vitesse de l'onde ( $c > 0$ ). On utilise la technique de G. Lebeau et M. Schatzman pour calculer la solution exacte. On réduit le problème en le posant sur la frontière  $x = a$ .  $u$  se décompose de la manière suivante  $u = u^i + u^d$  où  $u^i$  est l'onde incidente (connue) (dans tout l'espace), solution du problème suivant:

Trouver  $u^i = u^i(x, t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u^i(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u^i}{\partial t}(x, 0) = u_1, \end{cases} \quad (6.4)$$

et  $u^d$  est l'onde diffractée, solution du problème suivant:

Trouver  $u^d = u^d(x,t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^d}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u^d}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{a\}, & 0 \leq t \leq T, \\ u^d(0) = \frac{\partial u^d}{\partial t}(0) = 0, \\ [u^d](a,t) = g(t), \quad \left[\frac{\partial u^d}{\partial x}\right](a,t) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Nous pouvons maintenant formuler un problème dont  $g(t) = [u](a,t)$  devient l'inconnue. En effet, dès qu'on connaît  $g$ , on connaît  $u^d$  par résolution du problème (6.5). Pour définir le problème dont  $g$  doit être solution, introduisons, pour tout  $g, v_g$  comme la solution du problème suivant:

Trouver  $v_g = v_g(x,t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_g}{\partial x^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{a\}, & 0 \leq t \leq T, \\ v_g(0) = \frac{\partial v_g}{\partial t}(0) = 0, \\ [v_g](a,t) = g(t), \quad \left[\frac{\partial v_g}{\partial x}\right](a,t) = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Nous définissons ensuite l'opérateur linéaire suivant:

$$A : g \rightarrow Ag = -\frac{\partial v_g}{\partial x}(a,.). \quad (6.7)$$

On pose aussi  $\varphi(t) = (\partial u^i / \partial x)(a,t)$ . Le lemme suivant est vérifié.

**Lemme 6.1** *Si  $u$  est solution de (6.3), alors, en posant  $g(t) = [u^d](a,t)$  avec  $u^d = u - u^i$ , où  $u^i$  est la solution de (6.4),  $g$  est solution du problème (6.8)*

$$\begin{cases} g \geq 0 \text{ (i)}, \quad Ag - \varphi \geq 0 \text{ (ii)}, \\ g(Ag - \varphi) = 0 \text{ (iii)}, \end{cases} \quad (6.8)$$

*Réciproquement, si  $g$  est solution de (6.8), alors  $u = u^i + v_g$  est solution de (6.3), où  $u^i$  est la solution de (6.4).*

### Démonstration

Supposons que  $u$  est solution de (6.3). En posant  $g = [u(a)]$ , on obtient, par construction, que  $u^d$  satisfait  $u^d = v_g$ . De plus, on a

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(a,.) = -\frac{\partial u^i}{\partial x}(a,.) - \frac{\partial u^d}{\partial x}(a,.) = -\varphi - \frac{\partial u^d}{\partial x}(a,.) = -\varphi + Ag.$$

Donc,  $g$  satisfait les relations (6.8).

Réciproquement, si  $g$  satisfait (6.8) et si on définit  $u^d$  tel que  $u^d = v_g$ , on obtient  $[u^d(a)] = g$  et donc  $[u(a)] = g \geq 0$  avec  $u = u^i + u^d$ . De plus,

$$Ag = -\frac{\partial u^d}{\partial x}(a,.) = -\frac{\partial u}{\partial x}(a,.) + \frac{\partial u^i}{\partial x}(a,.) = -\frac{\partial u}{\partial x}(a,.) + \varphi.$$

On en déduit alors

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(a,.) \geq 0 \text{ et } -\frac{\partial u}{\partial x}(a,.) [u](a,.) = 0.$$

Ainsi,  $u$  est solution de (6.3). ■

Dans le lemme suivant, on explicite  $v_g$ , où  $g$  est quelconque.

**Lemme 6.2** *La solution  $v_g$  de (6.6) est donnée par la relation suivante:*

$$\begin{cases} v_g(x,t) = 0, \text{ si } t \leq \frac{|x-a|}{c}, \\ v_g(x,t) = \frac{1}{2}g\left(t + \frac{a-x}{c}\right), \text{ si } x \geq a \text{ et } ct + a - x \geq 0, \\ v_g(x,t) = -\frac{1}{2}g\left(t + \frac{x-a}{c}\right), \text{ si } x \leq a \text{ et } ct + x - a \geq 0. \end{cases}$$

### Démonstration

Comme la solution de (6.6) est unique, il suffit de montrer que la fonction  $v_g$  proposée est bien solution de (6.6).

- Pour  $t = 0$ , on a clairement  $v_g(x,0) = 0$  et  $(\partial v_g / \partial t)(x,0) = 0$ .
- Ensuite, on peut vérifier que  $v_g$  est solution de l'équation des ondes dans  $(\mathbb{R} - \{a\}) \times ]0, T[$ .
- Pour tout  $t \in ]0, T[$ ,  $[v_g](a,t) = g(t)$ .
- On a, de plus,  $\frac{\partial v_g}{\partial x}(a^+,t) = -\frac{1}{2c}g'(t^-)$  et  $\frac{\partial v_g}{\partial x}(a^-,t) = -\frac{1}{2c}g'(t^-)$ ,  $\forall t \in ]0, T[$ . On a bien  $[\frac{\partial v_g}{\partial x}(a,t)] = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . ■

Dans le lemme suivant, on explicite l'opérateur  $A$ .

**Lemme 6.3** *On a  $Ag = \frac{1}{2c}g'$ .*

### Démonstration

Soit  $v_g$  la solution de (6.6). Le lemme 6.2 nous donne l'expression explicite de  $v_g$ . On en déduit alors  $A$

$$(Ag)(t) = -\frac{\partial v_g}{\partial x}(a,t) = \frac{1}{2c}g'(t) \text{ donc } Ag = \frac{1}{2c}g'. \quad \blacksquare$$

Connaissant l'opérateur  $A$  par le lemme 6.3, le lemme 6.1 nous dit que  $g$  est solution de l'inéquation différentielle suivante.

Trouver  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} g \geq 0 \quad (i), \quad g' - 2c\varphi \geq 0 \quad (ii), \\ g(g' - 2c\varphi) = 0 \quad (iii), \quad g(0) = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

On a alors le lemme suivant.

**Lemme 6.4** *Le problème (6.9) admet une solution unique.*

### Démonstration

Supposons que  $g_1$  et  $g_2$  soient deux solutions de (6.9), on obtient alors

$$\begin{aligned} g_1 &\geq 0, g_1' - 2c\varphi \geq 0, \\ g_2 &\geq 0, g_2' - 2c\varphi \geq 0. \end{aligned}$$

Une multiplication croisée nous donne

$$g_1(g_2' - 2c\varphi) \geq 0, \quad g_2(g_1' - 2c\varphi) \geq 0.$$

En utilisant (6.9)-(iii), il vient

$$g_1(g_2' - g_1') \geq 0, \quad g_2(g_1' - g_2') \geq 0.$$

D'où, en additionnant,

$$g_1(g_2' - g_1') - g_2(g_2' - g_1') \geq 0 \Rightarrow -(g_2 - g_1)(g_2' - g_1') \geq 0.$$

$$\text{Donc, } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g_2 - g_1)^2 \leq 0.$$

Comme  $(g_2 - g_1)(0) = 0$ , on a  $g_2 = g_1, \forall t \geq 0$ . Et on obtient l'unicité. ■

G. Lebeau et M. Schatzman [36] proposent la solution suivante de (6.9):

$$g(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \Phi^-(s) + \Phi(t) \text{ avec } \Phi(t) = 2c \int_0^t \varphi(s) ds \text{ et } \Phi^- = \max(-\Phi, 0). \quad (6.10)$$

Faisons un commentaire sur la formule (6.10) qui donne la solution de (6.9). A première vue, on aurait envie de proposer la partie positive de  $\Phi$ ,  $g(t) = \max(0, \Phi(t))$ , comme une solution de (6.9). Dans ce cas,  $g \geq 0$  et là où  $\Phi \geq 0$ , on a  $g' = 2c\varphi$ , ce que doit vérifier la solution de (6.9).

Le problème est quand  $\Phi \leq 0$  et  $\varphi \geq 0$ . Choisir la partie positive de  $\Phi$  comme solution n'est pas un bon choix car  $g = 0$  mais  $g' = 0 \leq 2c\varphi$ , sur cette région. Donc, la partie positive de  $\Phi$  n'est pas solution de (6.9). On présente sur la figure 6.1 une comparaison entre  $\Phi$  et la solution  $g$  de (6.9), donnée par (6.10), pour un exemple caractéristique.

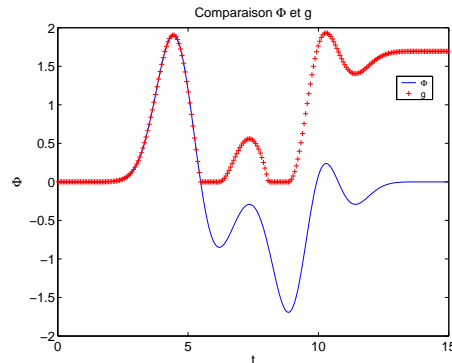


FIG. 6.1 – Solution de l'inéquation différentielle (6.9)

On peut voir sur la figure 6.1 que, là où  $g \geq 0$ , on a bien  $g' = 2c\varphi$  et là où  $g = 0$ , on a  $\varphi \leq 0$ .

Pour en revenir au calcul de  $u$ , la partie diffractée est donnée explicitement par le lemme 6.2. Pour la partie incidente,  $u^i$ , solution de (6.4), est donnée par la formule de d'Alembert:

$$\begin{cases} u^i(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds \\ + \frac{1}{2c} \int_0^t ds \int_{|y-s| < c(t-s)} f(y,s) dy. \end{cases} \quad (6.11)$$

On peut calculer ensuite  $\varphi$  et  $\Phi$  dans le cas général

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\partial u^i}{\partial x}(a,t) = \frac{1}{2}(u'_0(a+ct) + u'_0(a-ct)) + \frac{1}{2c}(u_1(a+ct) - u_1(a-ct)), \\ \Phi(t) &= 2c \int_0^t \varphi(s) ds = u_0(a+ct) - u_0(a-ct) + \int_0^t (u_1(a+cs) - u_1(a-cs)) ds. \end{aligned}$$

### 6.1.2 Étude de la solution exacte

Pour une condition initiale positive sans source extérieure ni vitesse initiale, la conditions aux limites unilatérale et la condition de Neumann donnent la même solution. Nous avons vérifié que les résultats numériques obtenus sont identiques à ceux correspondant à la condition de Neumann. Ils ne sont pas présentés ici.

#### 6.1.2.1 Comparaison par rapport à la condition initiale de Neumann pour une condition initiale négative

Sur les figures 6.2, 6.3, on observe une comparaison entre la condition aux limites de Neumann sur la fissure et la solution explicite du problème unilatéral, en plusieurs instants, entre  $t = 0$  et  $t = 9$ . On impose le déplacement initial suivant sur le segment  $[0,15]$ , donné par

$$u_0(x) = -\exp(x - 7.5)^2.$$

On suppose de plus  $u_1 = 0$ ,  $f = 0$ ,  $c = 1$ .

On considère le segment  $[0,15]$ , sur lequel la fissure est située en  $a = 2.51$ . Il est plus intéressant de considérer une condition initiale négative qu'une condition initiale positive car l'on observe des différences entre les deux solutions. On peut voir que les résultats sont identiques jusqu'à l'instant  $t = 3$ . Pour la condition de Neumann, un saut de déplacement apparaît en  $x = a$ , peu après  $t = 3$ , au moment où  $\partial u / \partial x$  est non nul à droite de  $x = a$ . Il n'y a pas de saut de déplacement pour la condition unilatérale, car  $\partial u / \partial x$  est négative en  $x = a$ . Après cet instant, les deux résultats sont différents. Pour la condition unilatérale, le saut de déplacement apparaît en  $x = a$  quand  $\partial u / \partial x$  devient positive en ce point. Cela se passe peu après l'instant  $t = 5$ . On peut remarquer de plus, pour la condition unilatérale, que le déplacement dans la région  $[0,a]$  est non nul à partir de  $t = 3.5$ , alors qu'il reste nul dans cette région pour la condition de Neumann. De plus, le déplacement est constant dans la région  $[0,a]$ , peu après  $t = 7$  et le saut de déplacement en  $x = a$  est constant au cours du temps, à partir de cet instant.

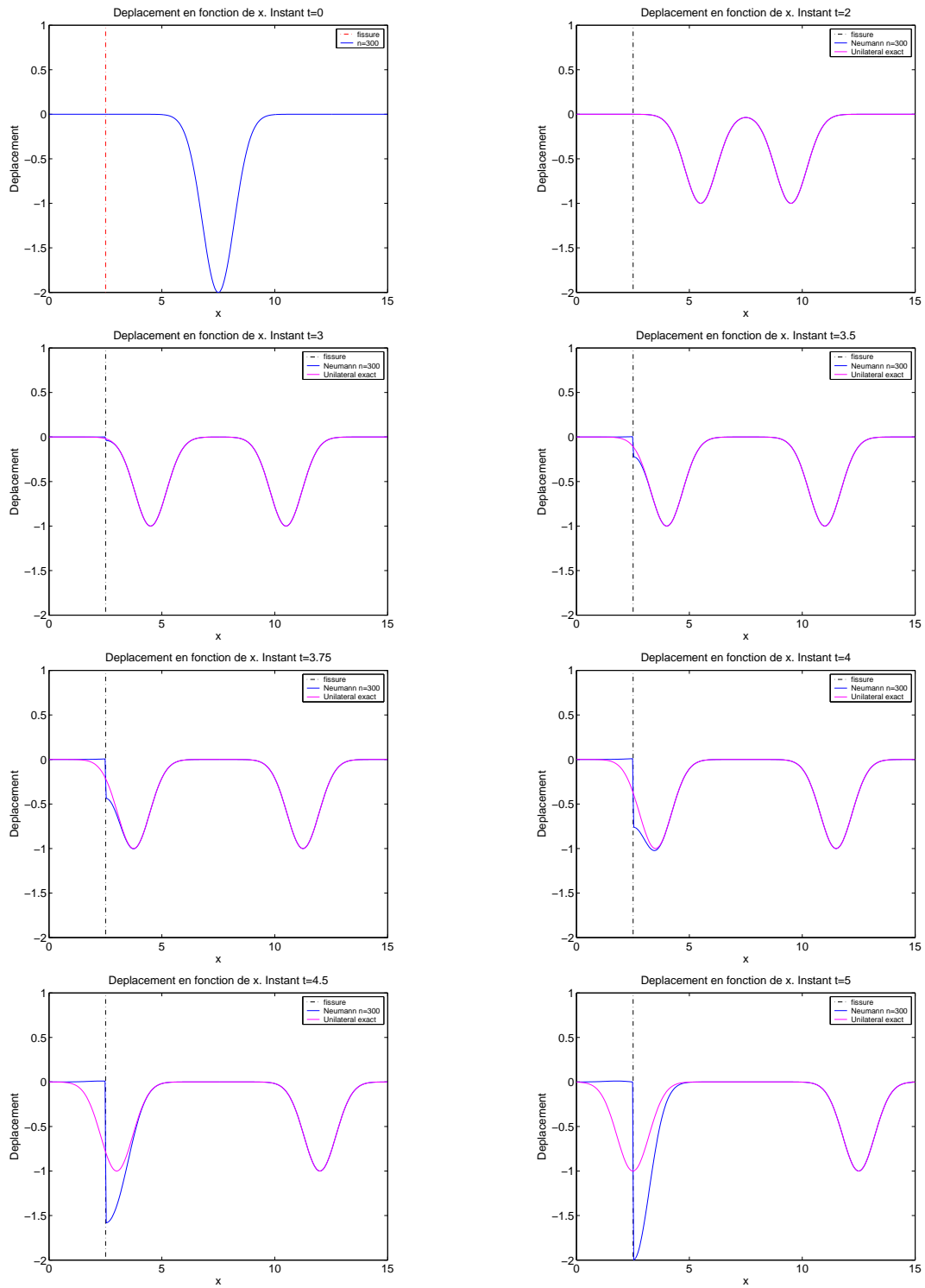


FIG. 6.2 – Déplacements. Comparaison Neumann et unilatéral. Instants  $t = 0$  à 5



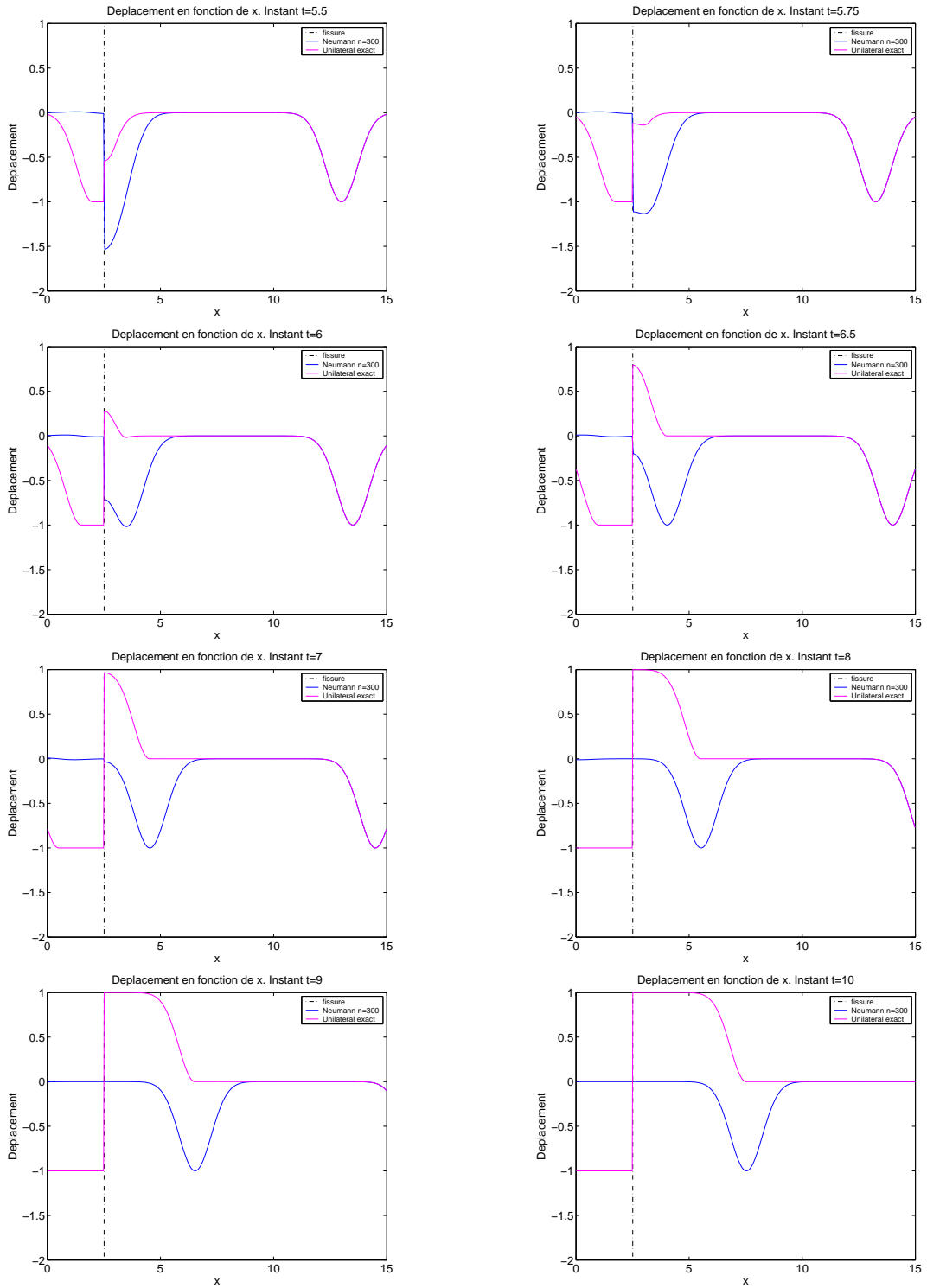


FIG. 6.3 – Déplacements. Comparaison Neumann et unilatéral. Instants  $t = 5.5$  à 10

### 6.1.2.2 Cas d'une condition initiale de signe quelconque

On présente une comparaison entre la solution explicite calculée par la méthode présentée dans la section 6.1.1. On impose, pour cet exemple, le déplacement initial suivant sur le segment  $[0,15]$ , qui correspond à une condition initiale de signe quelconque,

$$u_0(x) = -\exp(-(x-9)^2) + 2\exp(-(x-7.5)^2). \quad (6.12)$$

On suppose de plus  $u_1 = 0$ ,  $f = 0$ ,  $c = 1$ .

La fissure est située en  $a = 2.51$ .

Sur les figures 6.4, 6.5, 6.6, on observe la solution exacte pour le déplacement  $u$  calculé en plusieurs instants, entre  $t = 0$  et  $t = 15$ ,

Le contact disparaît à partir de  $t = 3$ , il y a à nouveau contact à partir de  $t \simeq 6$ , il n'y a plus de contact après  $t = 6.8$ . On peut remarquer de plus que le déplacement dans la région  $[0,a]$  est non nul à partir de  $t = 7$ , alors qu'il resterait nul dans cette région pour la condition de Neumann. De plus, le déplacement est constant dans la région  $[0,a]$ , à partir de  $t = 10$ .

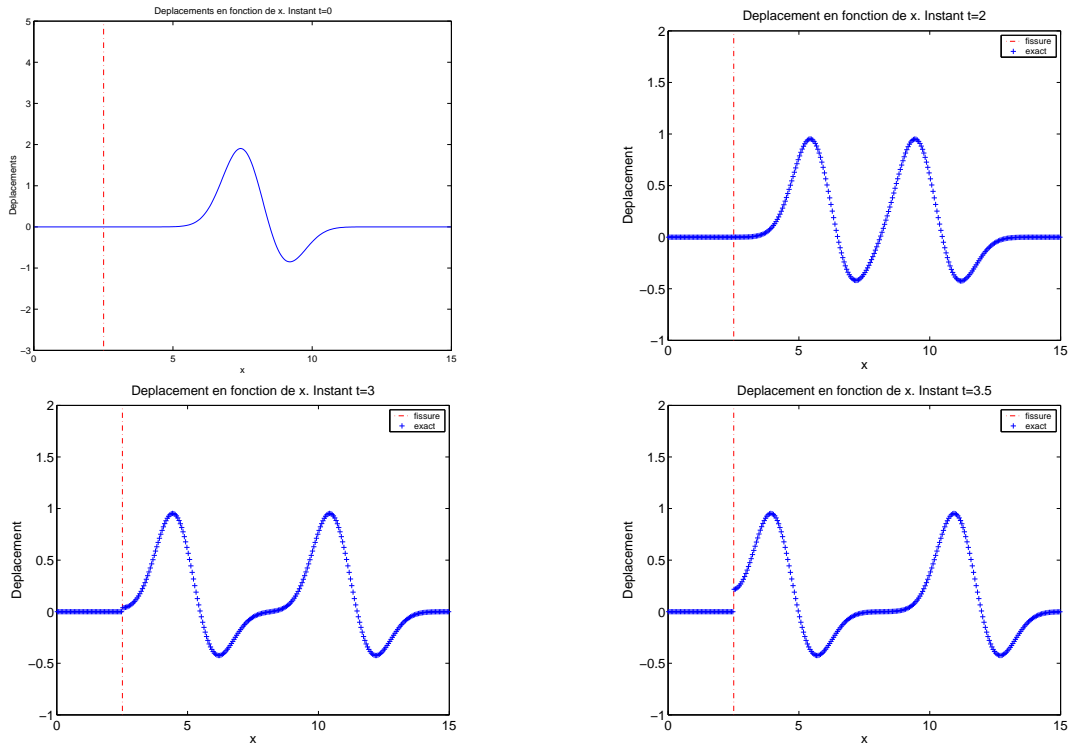


FIG. 6.4 – Déplacements. Schéma centré implicite. Instants  $t = 0$  à 3.5

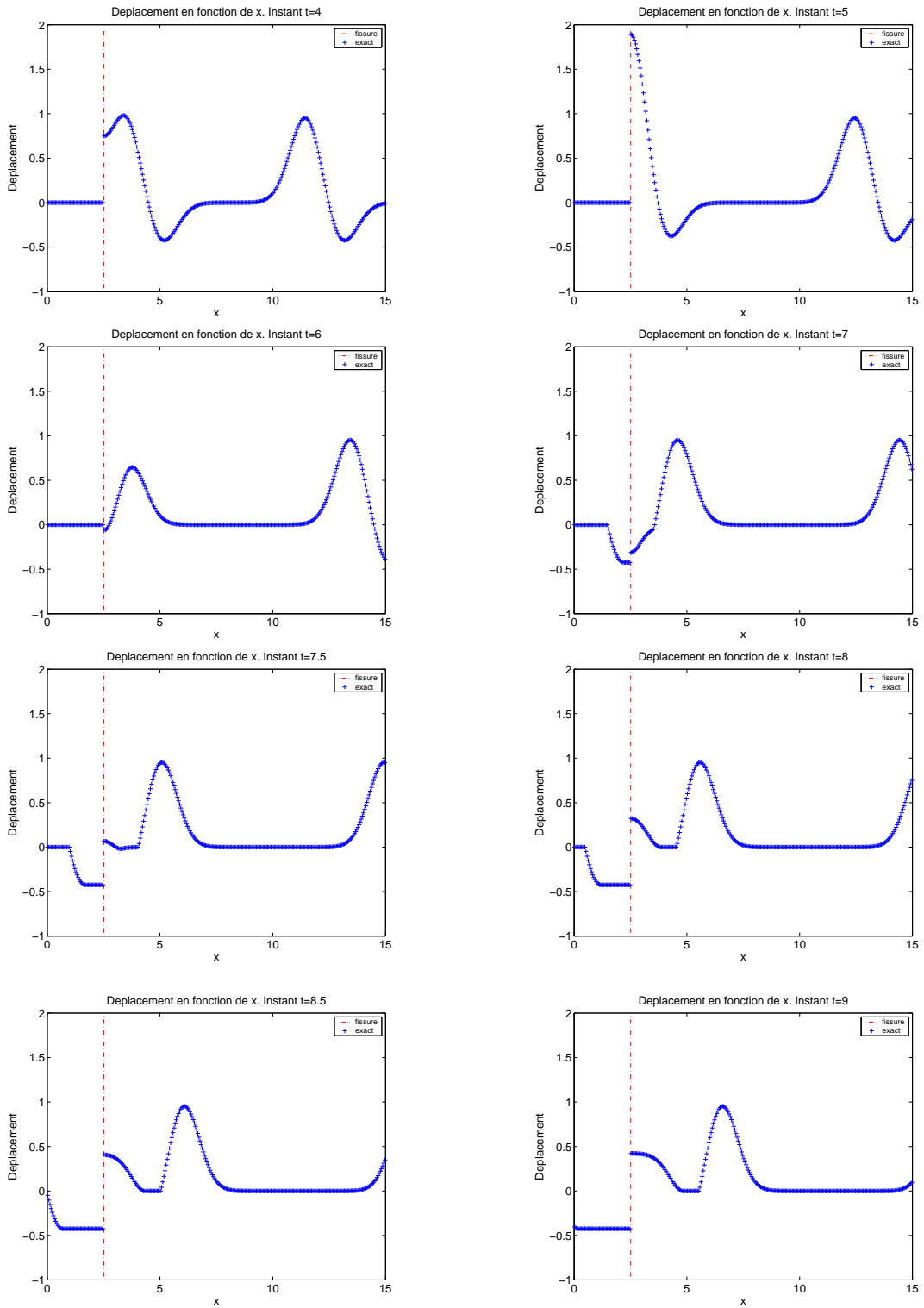


FIG. 6.5 – Déplacements. Schéma centré implicite. Instants  $t = 4$  à  $9$

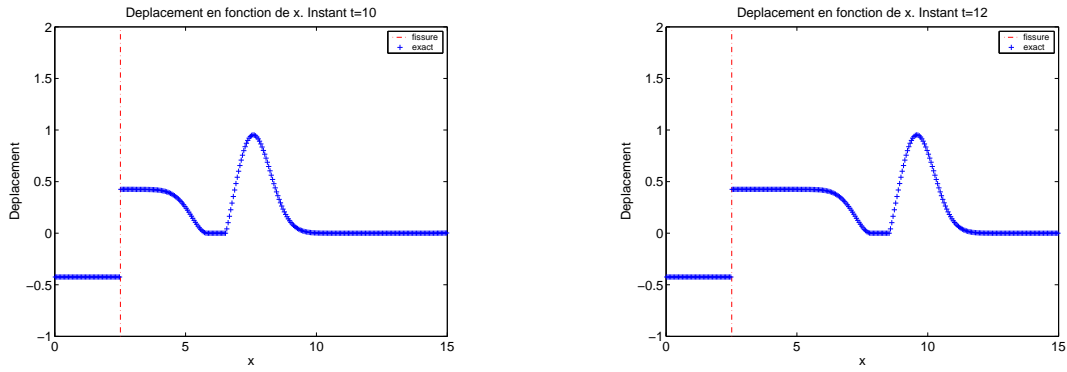


FIG. 6.6 – Déplacements. Schéma centré implicite. Instants  $t = 10$  à  $12$

### 6.1.2.3 A propos de la régularité de la solution

Comme on peut le voir sur les figures 6.4, 6.6, pour l'exemple de la condition initiale (6.12), le déplacement est continu sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  mais il ne semble pas dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ . On étudie ici la vitesse et la contrainte sur l'exemple de la condition initiale de signe quelconque (6.12).

### Évolution de la vitesse au cours du temps pour la condition de Neumann

On considère sur les figures 6.7, 6.8, la vitesse, obtenue en dérivant le déplacement par rapport au temps, qui est connu explicitement, pour la condition de Neumann.

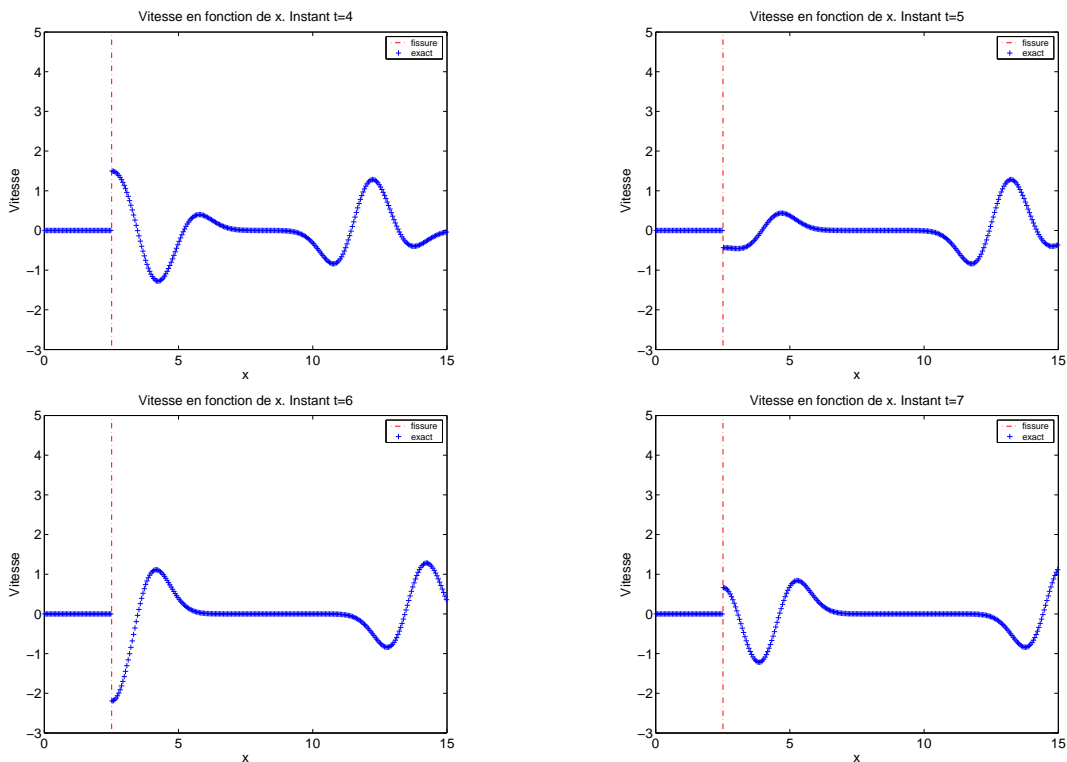


FIG. 6.7 – Vitesse en fonction de  $x$ . Solution exacte. Instants  $t = 4$  à  $7$

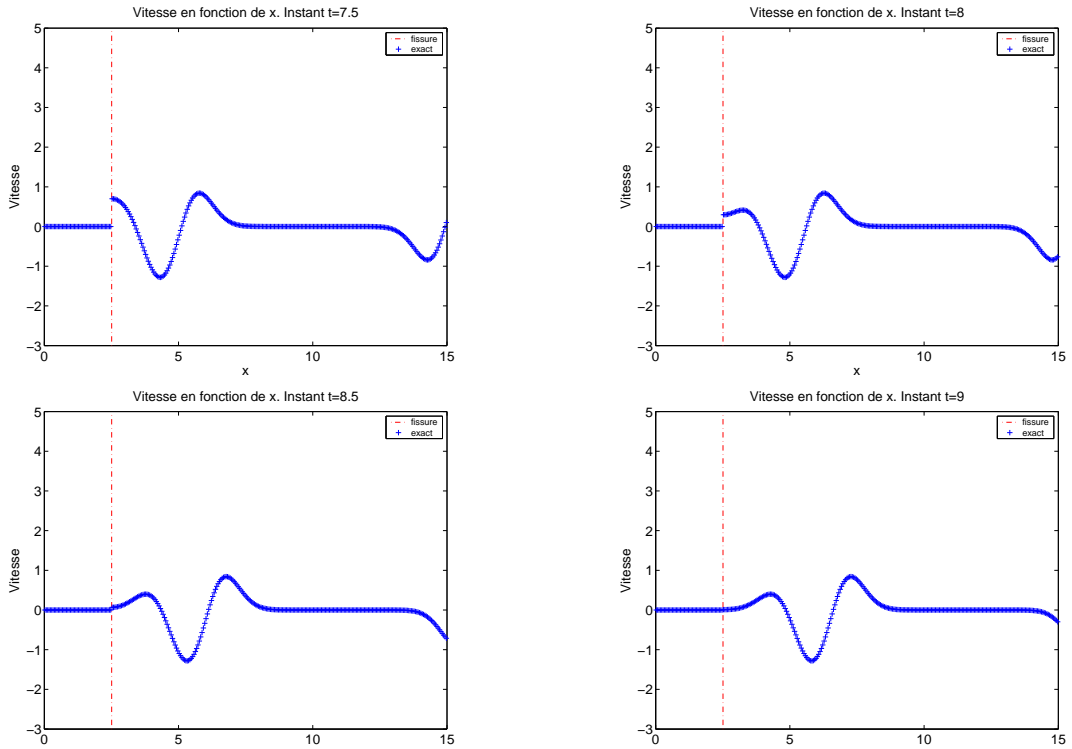


FIG. 6.8 – *Vitesse en fonction de  $x$ . Solution exacte. Instants  $t = 7.5$  à 9*

## Évolution de la vitesse au cours du temps pour la condition unilatérale

On considère sur les figures 6.9, 6.10, la vitesse, obtenue en dérivant le déplacement par rapport au temps, qui est connu explicitement.

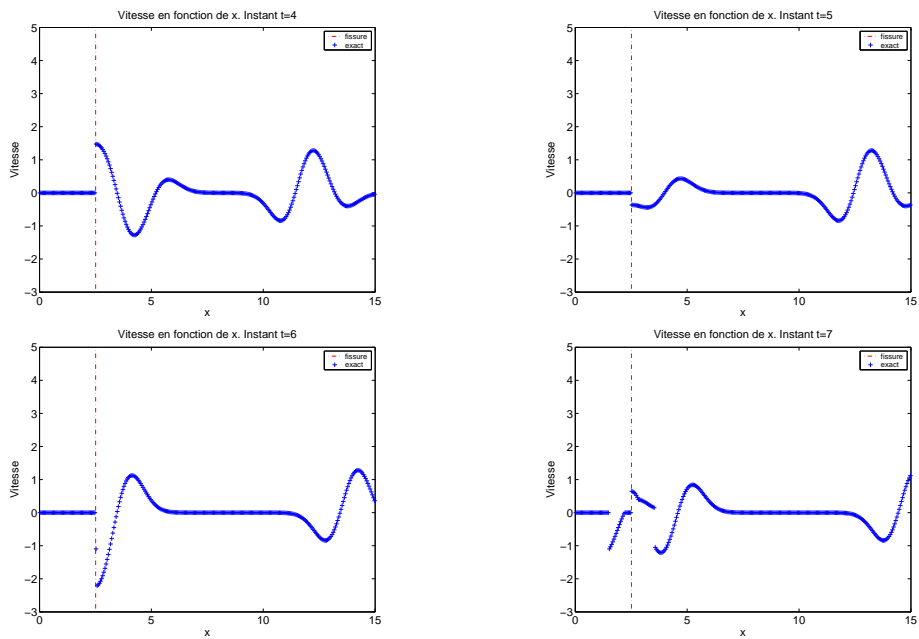


FIG. 6.9 – *Vitesse en fonction de  $x$ . Solution exacte. Instants  $t = 4$  à 7*

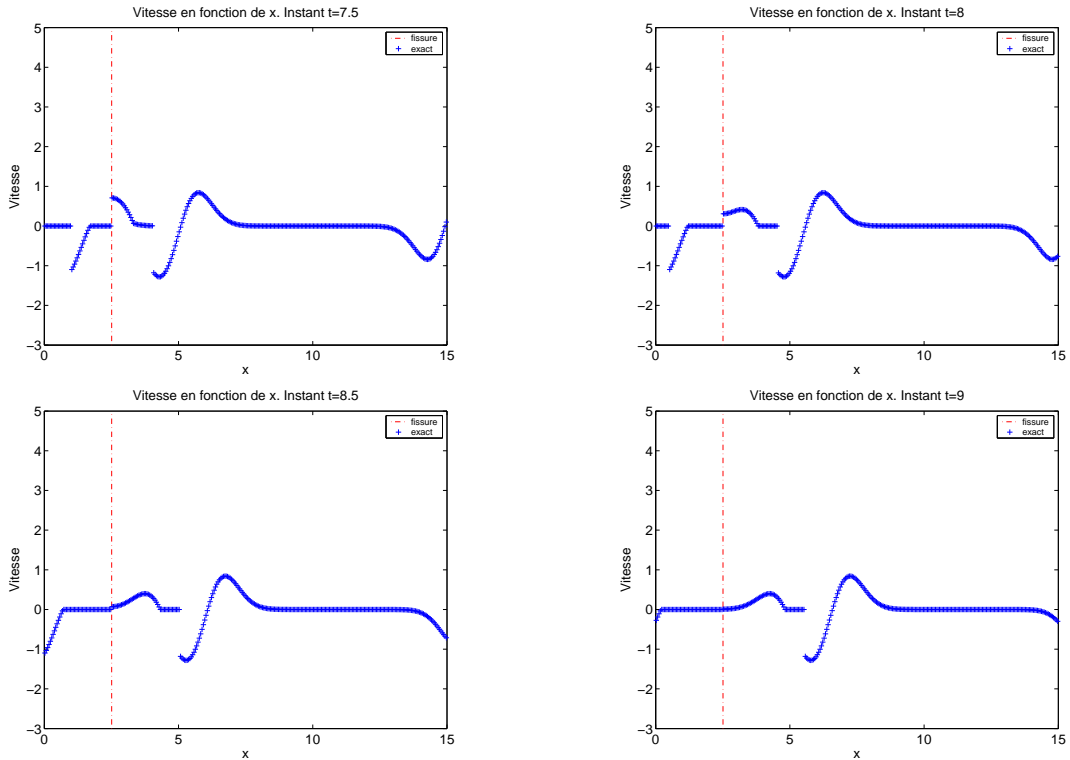


FIG. 6.10 – Vitesse en fonction de  $x$ . Solution exacte. Instants  $t = 7.5$  à  $9$

On peut voir que la vitesse n'est pas continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ , à partir de  $t \geq 4$ . Par exemple, en  $t = 7$ , elle est discontinue en  $x = 1.5$ , au point de fissure  $x = 2.51$ , ainsi qu'en  $x = 3.5$ . Néanmoins, on peut voir que les vitesses pour les deux conditions aux limites sont relativement proches. Pour la condition de surface libre, la vitesse est toujours nulle dans la région  $x \leq a$ , tandis qu'il peut y avoir des instants où celle-ci n'est pas nulle pour la condition unilatérale. De plus, la vitesse dans le cas unilatéral comporte des points de discontinuité qui n'apparaissent pas pour la condition de Neumann.

**(Non) régularité de la contrainte**

On s'intéresse ensuite à la contrainte, c'est-à-dire à la dérivée du déplacement par rapport à la variable d'espace.

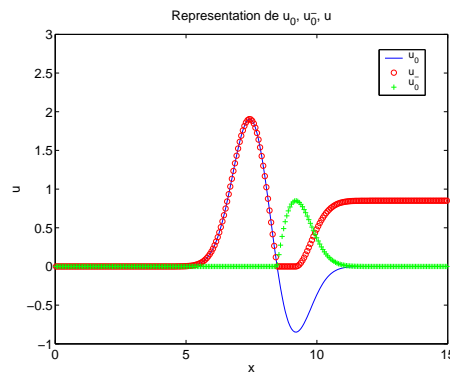


FIG. 6.11 – Régularité de la solution

Faisons une remarque sur la régularité de la solution du problème unilatéral pour la condition initiale donnée en (6.12).

La figure 6.11 présente une comparaison entre la condition initiale  $u_0$  (en bleu, trait plein), sa partie négative  $u_0^- = \max(-u_0, 0)$  (en vert, représentée par des +), et  $u = g(t)$ , donnée par (6.10), pour le cas  $\Phi = u_0$ , ( $u$  est en rouge, représentée par des o). La condition initiale montrée sur la figure 6.11 est celle définie en (6.12) et utilisée dans la section 6.1.3 pour obtenir les résultats numériques. On voit bien, sur cette figure, que, pour cette condition initiale, on obtient une dérivée en espace du déplacement, donc une contrainte, qui n'est plus continue en espace, en  $x \simeq 8.5$ . Alors,  $\sigma$  n'est pas dans  $H^1(\mathbb{R})$ , ni même dans  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ , car les discontinuités de première espèce ne sont pas dans  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Pour le déplacement, on en déduit que  $u \notin H^{3/2}(\Omega)$ . Cette régularité semble contredire le résultat obtenu par G. Lebeau et M. Schatzman [36].

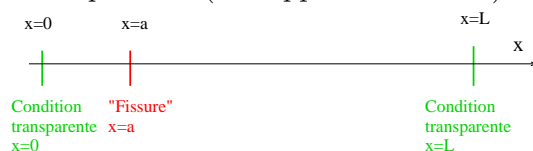
### Lien avec la formulation en domaines fictifs (3.2)

La solution du problème unilatéral ne vérifie donc pas  $\sigma \in [H(\text{div}; C)]^{d^2}$ . Or, nous avons justement choisi  $\sigma \in \mathbf{X} = \{\tau \in [H(\text{div}; C)]^{d^2}; \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$  dans la formulation en domaines fictifs (3.2). Nous avons choisi une régularité trop importante pour  $\sigma$ , en quelque sorte un choix non conforme. Néanmoins, nous avons constaté, par les expériences numériques de validation, que l'approximation numérique employée converge vers la solution, pour le déplacement et les multiplicateurs. Nous avons constaté l'apparition d'oscillations sur les contraintes, qui demeurent en raffinant le maillage. Ces oscillations disparaissent si l'on fait un post-traitement en temps ou en espace.

### 6.1.3 Comparaison entre solution numérique et solution exacte

On présente les résultats numériques correspondant au problème présenté dans la section 6.1.1, pour l'exemple de la condition initiale (6.12), pour laquelle nous avons montré la solution exacte.

On simule un domaine infini en se ramenant à un domaine borné  $\Omega = ]0, L[$  aux frontières duquel on introduit des conditions transparentes (on suppose  $0 < a < L$ ).



Les équations du problème 1D, correspondant à la formulation (1.8) du cas général pour une dimension  $d$  quelconque, sont données dans (6.13). Seuls les paramètres  $c$  et  $\rho$  sont considérés dans le cas unidimensionnel. Le tenseur  $\mathcal{A}$  n'apparaît pas pour ce problème.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \sigma = c^2 \rho \frac{\partial u}{\partial x} & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ [u(a)] \geq 0, \sigma(a) \leq 0, \sigma(a) [u(a)] = 0 & \text{dans } ]0, T[, \\ [\sigma(a)] = 0, & \text{dans } ]0, T[, \\ u(0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

On impose les conditions transparentes suivantes en 0 et L pour simuler la ligne réelle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(0) - c \frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(L) + c \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

On utilise la même formulation en domaines fictifs que celle donnée dans le cas général en (3.2), sauf le terme  $b_T$  qui disparaît dans le cas unidimensionnel. On utilise également les mêmes schémas de discrétisations que dans le cas général, (3.15), (4.1), sauf la matrice  $B_T$  qui disparaît. Dans le cas unidimensionnel, le multiplicateur est un nombre. Le problème d'optimisation posé sur la fissure se résout alors de manière exacte. En effet, sa forme est la suivante:

$$\text{Trouver } x \geq 0, \quad \min_{x \geq 0} \frac{1}{2} a x^2 + b x, \text{ où } a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

La solution  $\bar{x}$  est donnée par  $\bar{x} = \max(0, -b/a)$ .

### 6.1.3.1 Comportement de l'énergie discrète

#### Comparaison des schémas centré et décentré

L'énergie discrète du schéma a été définie en (4.10). On s'intéresse ici à la différence d'énergie entre deux instants, plus particulièrement pour le schéma centré implicite (4.14). Sur la figure 6.12, on compare l'énergie calculée par les deux schémas, pour l'exemple 1D considéré dans le paragraphe 6.1.3, pour la condition initiale de signe quelconque (6.12). On voit bien que l'énergie discrète est décroissante pour le schéma décentré, tandis qu'elle n'est pas décroissante pour le schéma centré (en rouge). Néanmoins, les deux énergies sont très proches, car leur différence est de l'ordre de 0.01%. De plus, elles sont toutes deux relativement constantes. Il a été observé, sur d'autres exemples (dans le cas 2D également), que l'énergie discrète du schéma centré implicite est de variation quelconque.

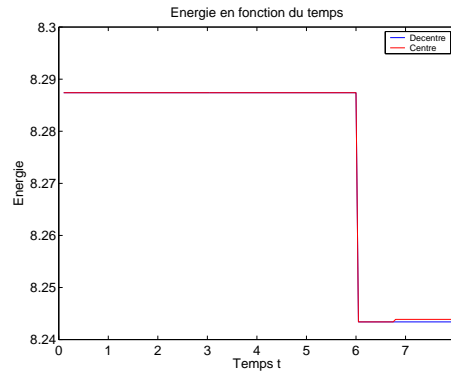


FIG. 6.12 – *Comparaison de l'énergie discrète entre schémas centré et décentré*

#### Cas du schéma centré implicite

Pour ce schéma, on obtient, comme différence d'énergie,

$$E^{n+1} - E^n = (B_N \frac{\Sigma^{n+1} + \Sigma^n}{2}, \lambda_N^n - \lambda_N^{n+1}) = \frac{1}{2} [(B_N \Sigma^{n+1}, \lambda_N^n) - (B_N \Sigma^n, \lambda_N^{n+1})].$$

Cette différence n'a pas de signe à première vue. Cependant, on peut déterminer le signe de la différence d'énergie discrète entre deux instants,  $\Delta E^n = E^{n+1} - E^n$ , en distinguant quatre cas, donnés dans le tableau suivant:



	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
Instant n	$\lambda_N^n = 0$	$\lambda_N^n > 0$	$\lambda_N^n = 0$	$\lambda_N^n > 0$
Instant n+1	$\lambda_N^{n+1} = 0$	$\lambda_N^{n+1} = 0$	$\lambda_N^{n+1} > 0$	$\lambda_N^{n+1} > 0$
$\Delta E^n = E^{n+1} - E^n$	0	$(B_N \Sigma^{n+1}, \lambda_N^n) \leq 0$	$-(B_N \Sigma^n, \lambda_N^{n+1}) \geq 0$	0

Pour l'exemple considéré, on voit que l'énergie discrète décroît à l'instant  $t = 6$ , car l'on est dans le deuxième cas du tableau. En  $t = 6.75$ , l'énergie discrète augmente dans le cas du schéma centré implicite car l'on se trouve dans le troisième cas du tableau. Pour que l'énergie augmente, il faut avoir le troisième cas souvent, c'est-à-dire passer du contact au décollement. Or, si l'on est dans le troisième cas, le cas suivant est, soit le deuxième, soit le quatrième. Pour que l'énergie augmente, il est alors nécessaire de passer par le deuxième cas.

Si l'état de contact demeure inchangé au bout d'un certain temps, par exemple contact permanent ou décollement permanent, alors on se trouve dans un cas (soit le premier ou le quatrième) où l'énergie reste constante et donc bornée. Le cas où l'énergie pourrait exploser est celui où il y aurait "contact" un instant sur deux et décollement (c'est-à-dire absence de contact) aux autres instants.

### 6.1.3.2 Tests de convergence

On étudie ensuite la convergence des deux schémas, décentré et centré, en raffinant le maillage. On observe les déplacements calculés, pour trois discrétisations différentes,  $\Delta t = h_x = 0.1, 0.05, 0.025$ , comparés à la solution exacte. La figure 6.13 indique la position du point  $a$  par rapport au maillage régulier, pour l'expérience considérée ici. Le point  $a$  n'est pas sur un sommet du maillage régulier, il n'est pas non plus au milieu d'un élément du maillage régulier.

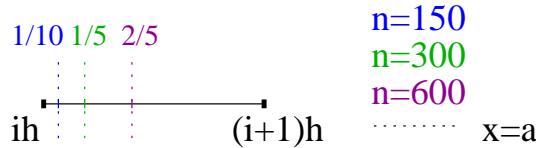


FIG. 6.13 – Position du point de fissure par rapport au maillage régulier pour les discrétisations étudiées

Les tests de convergence, effectués d'abord sur le schéma centré implicite, sont présentés sur la figure 6.14. Les tests de convergence pour le schéma décentré implicite sont présentés sur la figure 6.15. On voit que, pour les deux schémas, plus le maillage est fin, plus les solutions s'approchent de la solution exacte. On peut aussi remarquer que davantage d'oscillations apparaissent dans le cas du schéma implicite décentré, aux instants  $t = 7, 8$ . On remarque également que les résultats donnés par les deux schémas sont quasiment identiques, même si le schéma décentré implicite engendre davantage d'oscillations que le schéma centré implicite, pour les instants  $t = 7, 8$ , ( $n = 150, 300$ ).

On présente ensuite sur la figure 6.16 un test de convergence sur le multiplicateur. On peut voir que le multiplicateur converge pour les deux schémas. Les deux schémas donnent des résultats très semblables.

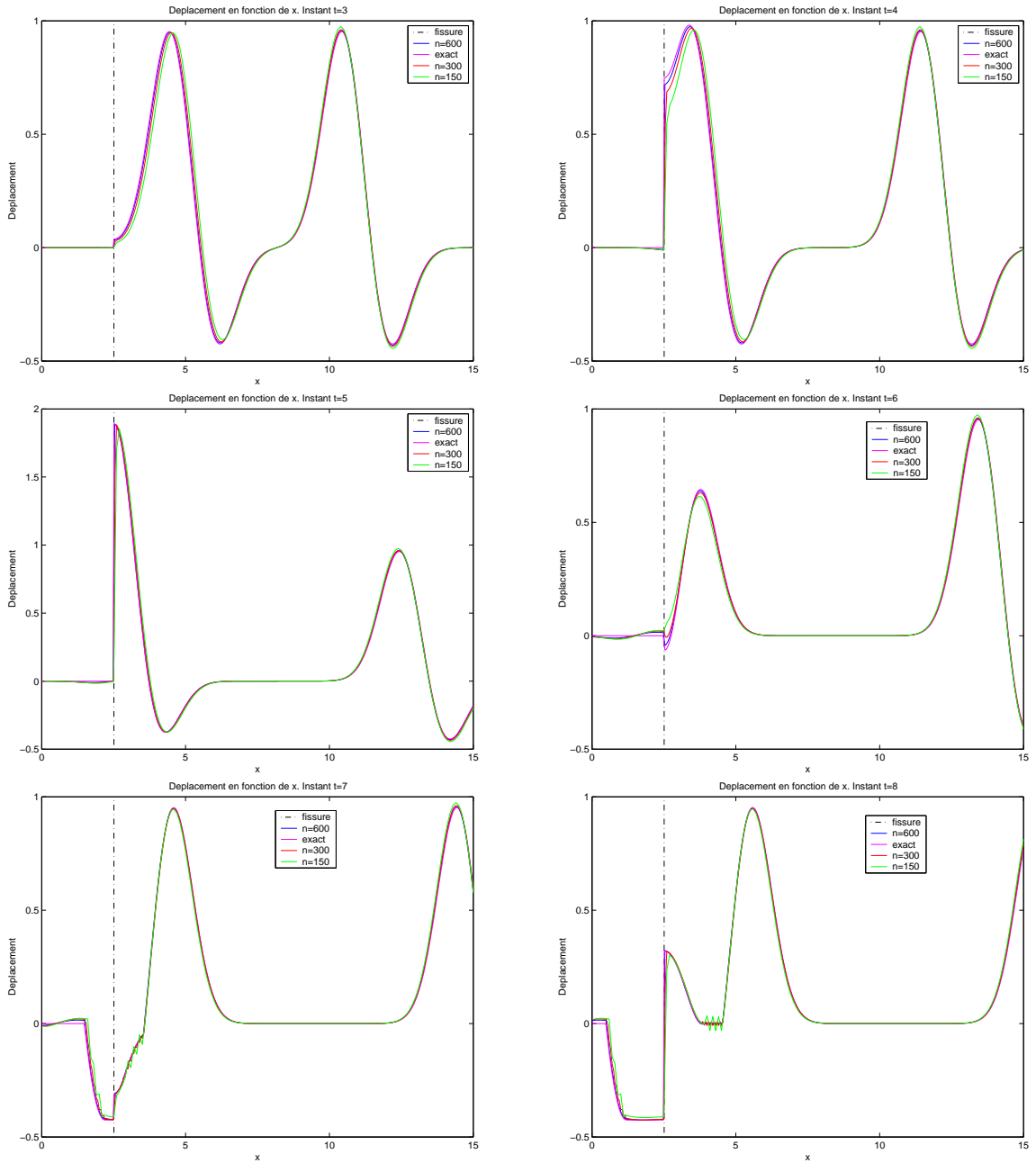


FIG. 6.14 – Tests de convergence sur les déplacements. Schéma centré implicite

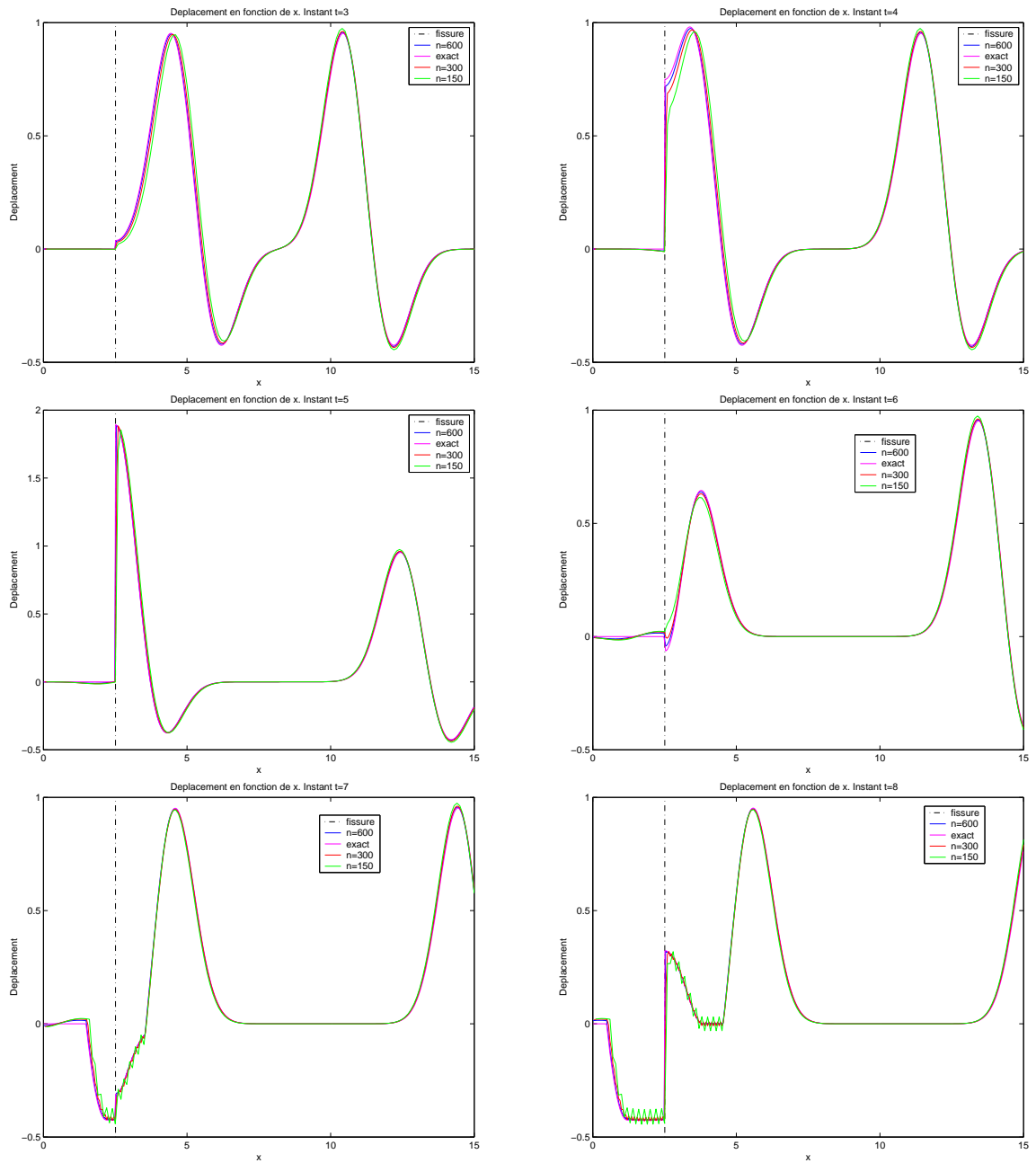


FIG. 6.15 – Tests de convergence sur les déplacements. Schéma décentré implicite

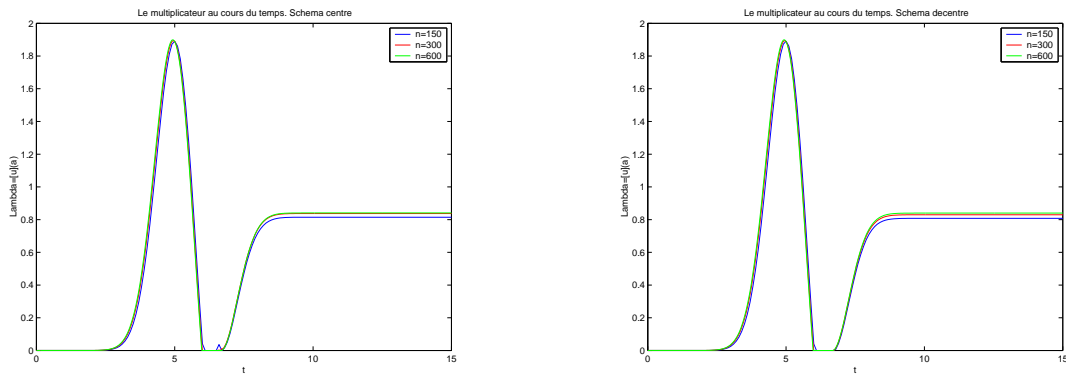


FIG. 6.16 – Tests de convergence sur le multiplicateur. Comparaison schémas centré et décentré

### 6.1.3.3 Calcul de la contrainte

#### Résultats pour les deux schémas

On observe sur la figure 6.17 les contraintes, calculées par le schéma décentré explicite. Sur la figure 6.18, sont représentées les contraintes issues du schéma décentré implicite. Pour ces deux figures, on considère le segment  $[0,15]$  avec  $n_i = 300$  points de discrétisation en espace. Le pas d'espace est  $h_x = 0.05$ , le pas de temps est  $\Delta t = h_x = 0.05$ . On considère la condition initiale (6.12). On voit apparaître des oscillations, à partir de l'instant  $t = 7$ . Ces oscillations sont liées à des points où le déplacement est continu mais n'est pas dérivable (ce point n'est pas le point de fissure). Le schéma décentré implicite produit plus d'oscillations que le schéma centré implicite. Ces oscillations ne semblent pas être des instabilités car elles sont bornées et elles persistent au cours du temps.

#### Proposition de post-traitement

Par un post-traitement qui attribue à la contrainte en un nœud la moyenne des contraintes des deux nœuds voisins, les oscillations disparaissent pour les deux schémas, comme on peut le voir sur la figure 6.19. On obtient quasiment les mêmes résultats pour les deux schémas, après post-traitement. On montre, sur la figure 6.20, la contrainte après un post-traitement en temps, qui consiste à prendre la moyenne sur deux instants consécutifs. Ce post-traitement est aussi efficace que le post-traitement en espace et il est plus intéressant car généralisable pour les dimensions 2 et 3.

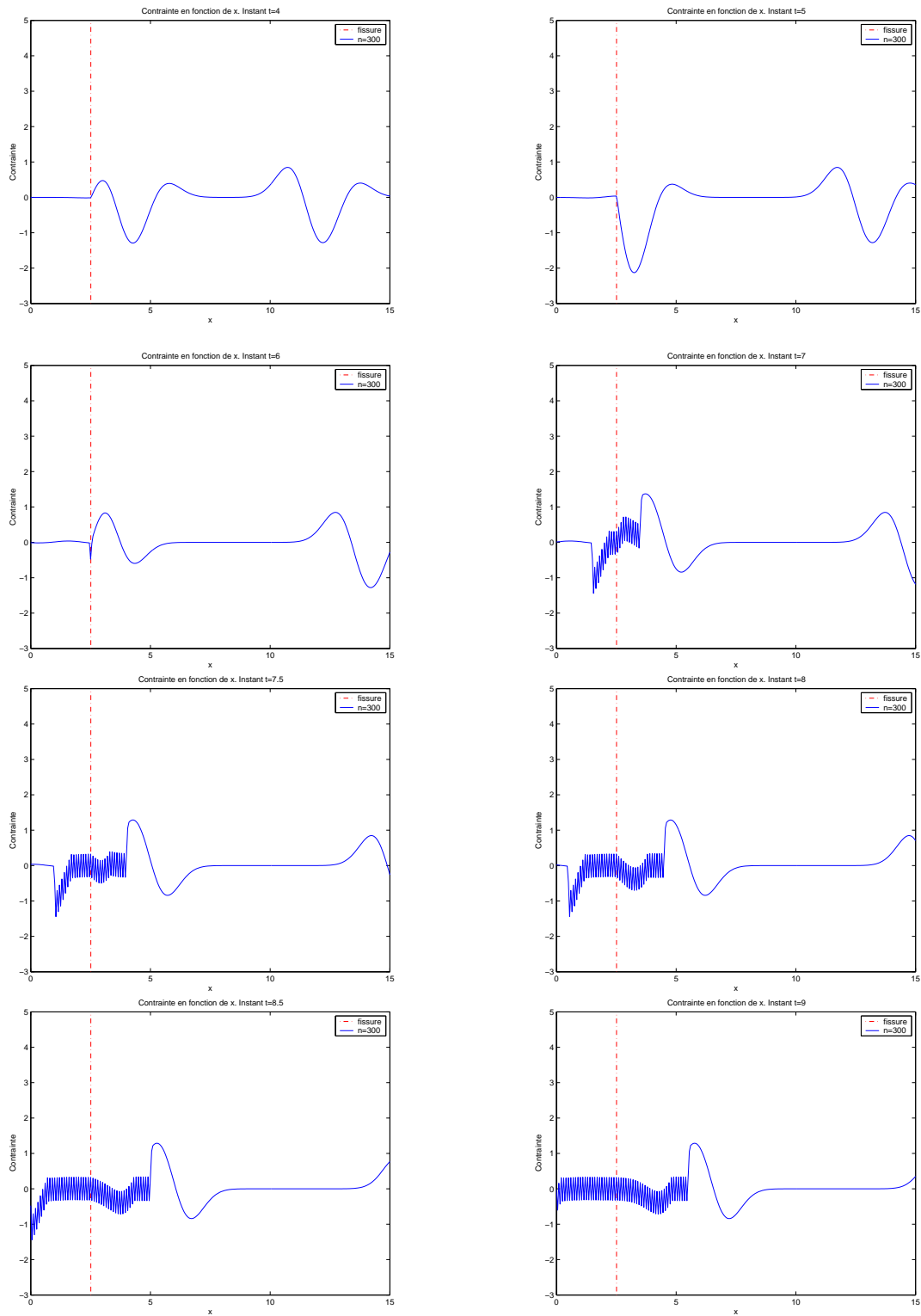


FIG. 6.17 – Contrainte 1D en fonction de  $x$ . Schéma décentré implicite. Instants  $t = 4$  à  $9$

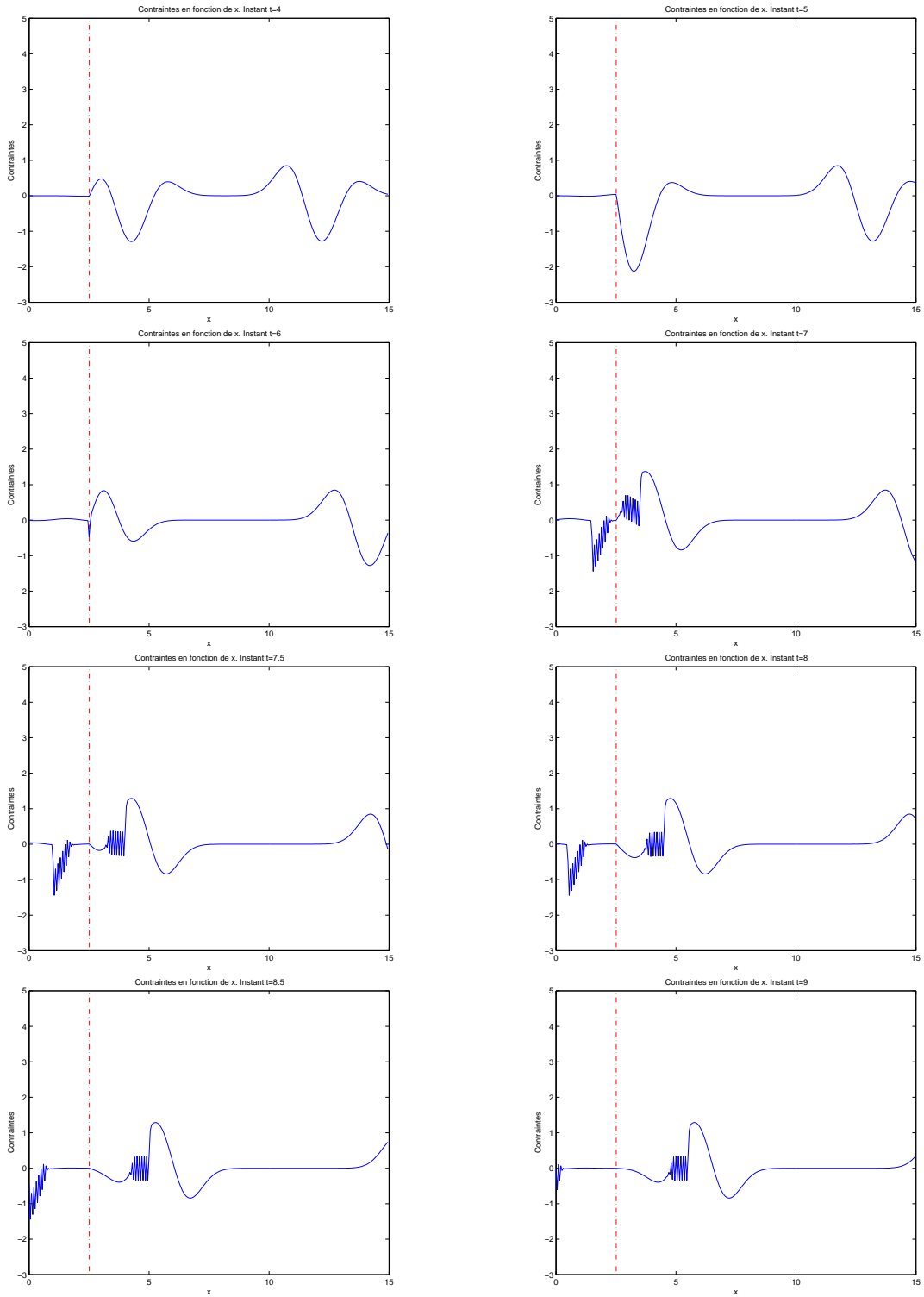


FIG. 6.18 – Contrainte 1D en fonction de  $x$ . Schéma centré implicite. Instants  $t = 4$  à 9

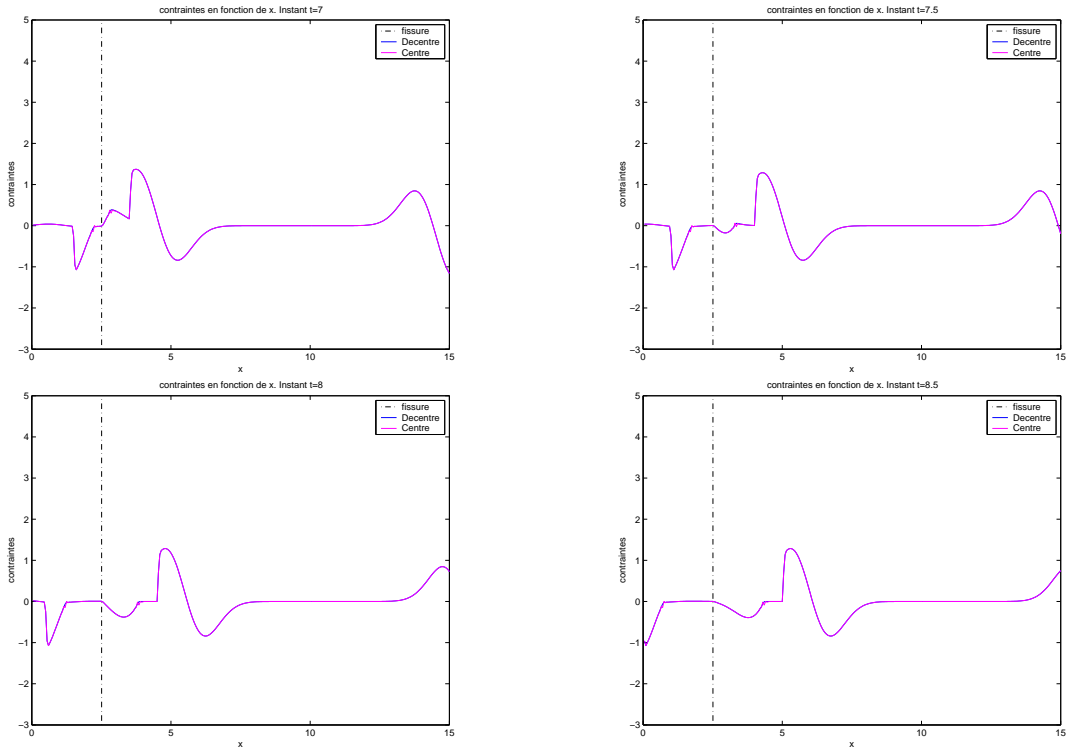


FIG. 6.19 – Contrainte en fonction de  $x$  après post-traitement en espace. Schémas centré et décentré. Instants  $t = 7$  à  $8.5$

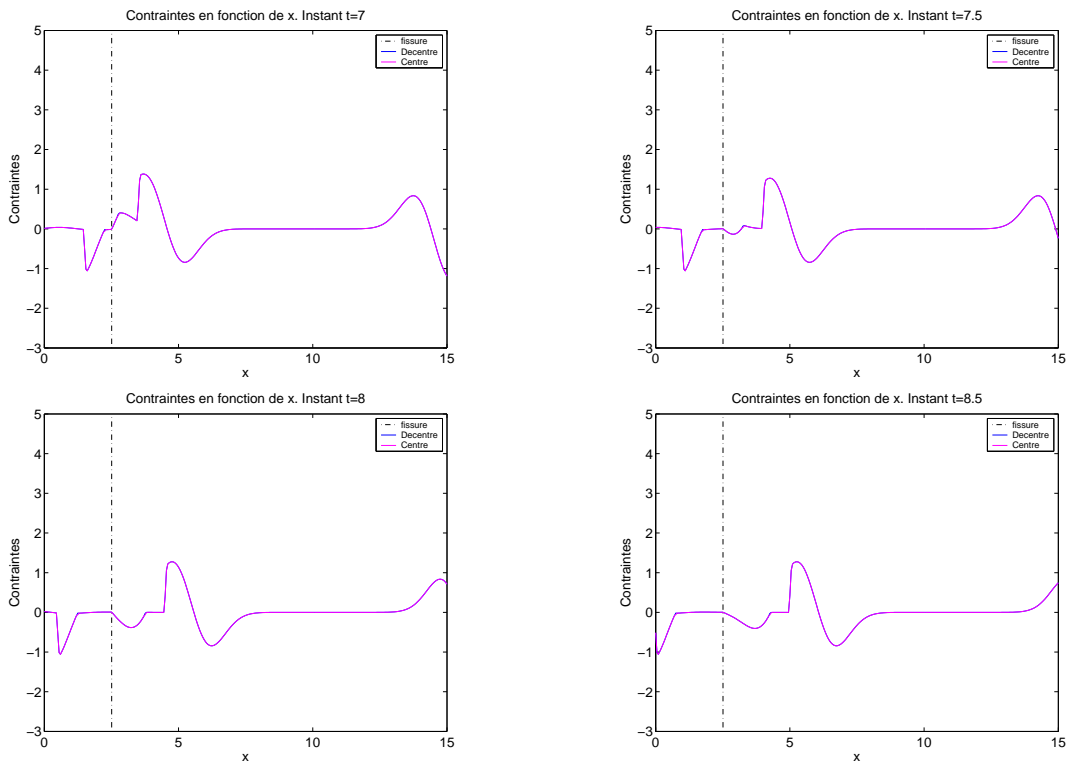


FIG. 6.20 – Contrainte en fonction de  $x$  après post-traitement en temps. Schémas centré et décentré. Instants  $t = 7$  à  $8.5$

Influence de la position du point de fissure par rapport au maillage

Comme nous avons vu sur la figure 6.13, le point de fissure ne coïncide pas avec un nœud du maillage régulier, dans les résultats montrés auparavant. Il semble que si l'on déplace le point de fissure, les résultats sont différents, en particulier pour la contrainte.

La figure 6.21 montre la contrainte calculée pour les deux schémas, pour la même expérience que précédemment, sauf que  $a = 2.5$ , c'est-à-dire que le point de fissure est confondu avec un nœud du maillage régulier. Pour ce cas, on voit davantage d'oscillations pour la contrainte que dans le cas où le point de fissure est décalé. Les oscillations sont davantage visibles que sur les figures 6.17 et 6.18. Ces oscillations sont éliminées si l'on fait le post-traitement en temps. La figure 6.22 montre la contrainte calculée pour les deux schémas, pour la même expérience que précédemment, sauf que  $a = 2.525$ , c'est-à-dire que le point de fissure est au milieu d'un élément du maillage régulier. Pour ce cas, les oscillations disparaissent.

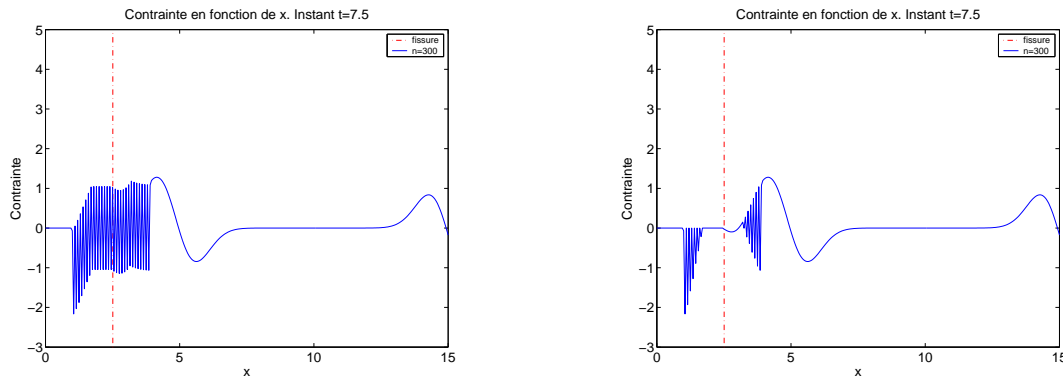


FIG. 6.21 – Contrainte schéma décentré (gauche) et centré. Le point de fissure est un nœud.  $a=2.50$

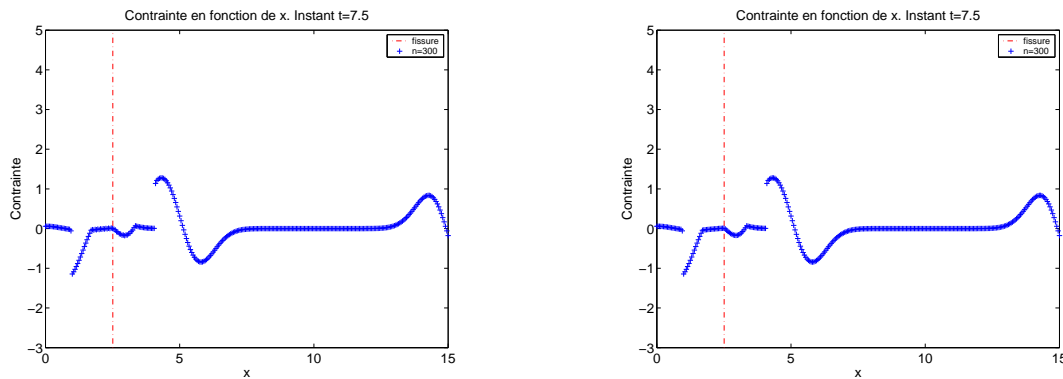


FIG. 6.22 – Contrainte schéma décentré (gauche) et centré. Point de fissure au milieu d'un élément.  $a=2.525$

Il semble un peu paradoxal que les résultats obtenus pour une fissure coïncidant avec le maillage régulier sont moins bons que ceux obtenus pour une fissure qui n'est pas située sur le maillage régulier. Je n'ai pas d'explication à ce phénomène. Mais, si le point de fissure se trouve au milieu d'un élément du maillage régulier, les oscillations disparaissent pour le schéma centré implicite et sont de faible amplitude pour le schéma décentré implicite. La position du point de fissure n'a pas d'influence sur les déplacements.



## 6.2 Tests de validation du code bidimensionnel

Dans cette section, on étudie des exemples de validation du code 2D. On se ramène à deux exemples de référence correspondant chacun à un problème 1D. Le premier cas est un problème 2D invariant dans la direction des ordonnées  $y$ , le deuxième cas est un problème à symétrie radiale. Dans le cas de la symétrie radiale, on peut représenter la solution du problème par la solution d'une équation 1D dont la résolution numérique est assez simple. On obtient alors une solution 1D quasi-exacte, qui servira dans les comparaisons.

### 6.2.1 Problème invariant par translation dans une direction

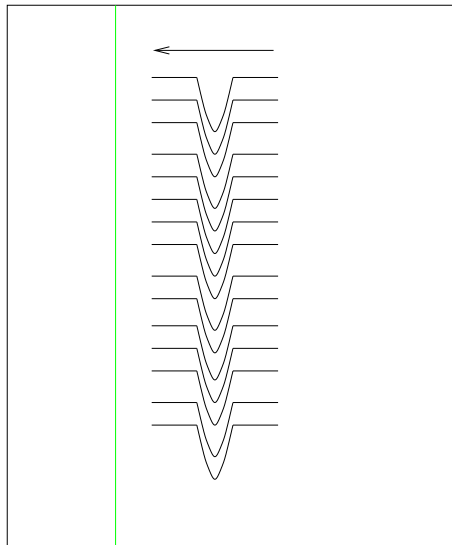


FIG. 6.23 – Géométrie de l'exemple: invariance en  $y$

On considère une fissure invariante dans la direction des ordonnées  $y$  et une condition initiale invariante en  $y$ . La configuration du problème est visible sur la figure 6.23. Ce problème se ramène au problème unidimensionnel étudié dans la section 6.1. Le domaine considéré est un carré de côtés  $[0,15] \times [0,15]$ . Le milieu considéré est un milieu élastique isotrope homogène de densité  $\varrho = 1$ , dont les coefficients de Lamé sont donnés par  $\mu = 0.3$ ,  $\lambda = 0.4$ . La loi de comportement du milieu est  $\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{Id}$ . La vitesse des ondes de pression vaut  $V_p = 1$ , la vitesse des ondes de cisaillement vaut  $V_s = \sqrt{0.3}$ .

Pour la discrétisation, on considère  $n_i = n_j = 300$  points de discrétisation en espace. Le pas d'espace sur le maillage régulier est  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas d'espace sur le maillage de la fissure est  $H = 0.075$ , le pas de temps est  $\Delta t = 0.05$ . La fissure est située en  $a = 2.51$ . On impose la condition initiale suivante:

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{pmatrix} -\exp(-(x-9)^2) + 2\exp(-(x-7.5)^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

#### 6.2.1.1 Comparaison des déplacements issus de la solution 2D à ceux du 1D

La solution exacte de ce problème peut être calculée par la méthode donnée en 6.1.1. Pour la simulation numérique, on impose des conditions PML (ou couches absorbantes parfaitement

adaptées) sur les bords droit et gauche et des conditions périodiques sur les bords haut et bas. Plus précisément, on impose, à chaque itération en temps,  $\sigma(:,nj+1) = \sigma(:,1)$ . Les conditions PML (Perfectly Matched Layers) permettent de simuler un domaine non borné.

Sur les figures 6.24, 6.25, on observe les instantanés du déplacement en fonction de  $x$ , à l'ordonnée milieu du domaine  $y = 7.5$ , entre les instants  $t = 2.1$  et 9. On représente le déplacement calculé par le code 2D (courbe bleue) et le déplacement exact (courbe rose). Le schéma implicite décentré est utilisé ici. On voit que les résultats numériques coïncident assez bien par rapport à la solution exacte. Le saut de déplacement est bien pris en compte. On peut cependant remarquer que les courbes diffèrent légèrement à  $t = 6$ ,  $t = 6.9$  et que des oscillations apparaissent pour  $t \geq 7.5$ . Celles-ci sont dues à l'utilisation du schéma décentré implicite.

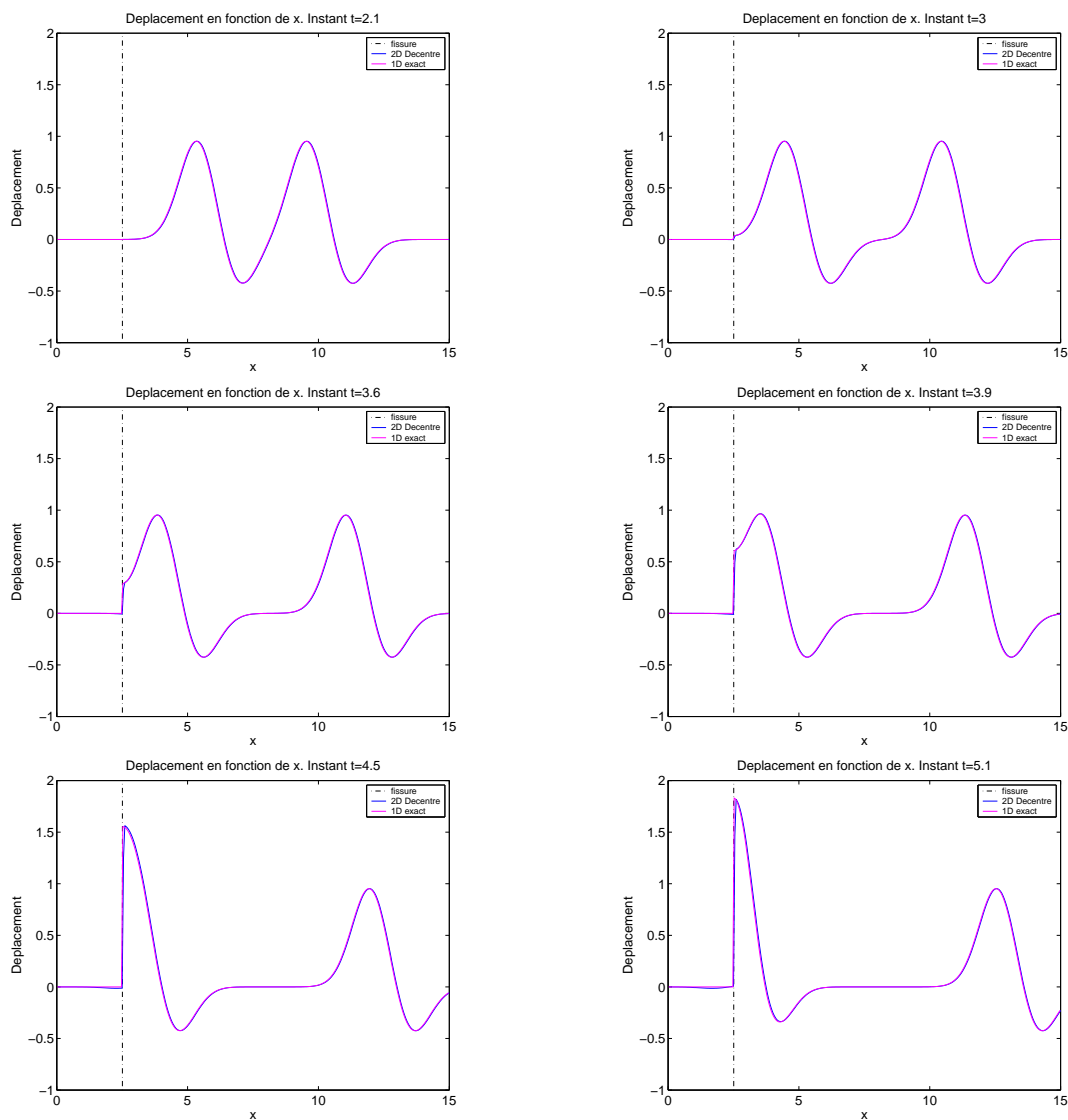


FIG. 6.24 – Déplacements. Problème invariant dans une direction. Comparaison à la solution exacte. Instants  $t = 2.1$  à 5.1

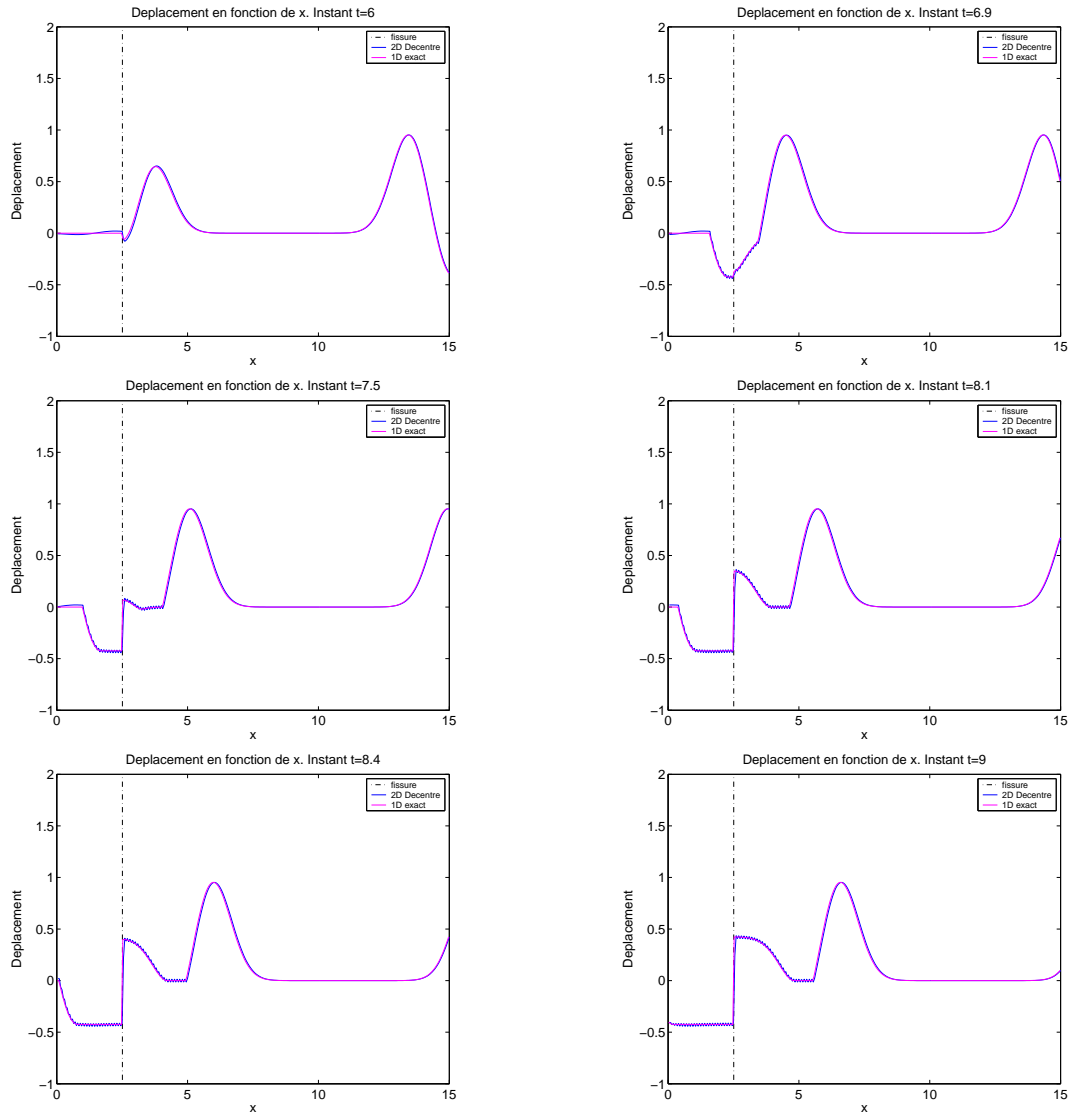


FIG. 6.25 – Déplacements. Problème invariant dans une direction. Comparaison à la solution exacte. Instants  $t = 6$  à  $9$

### 6.2.1.2 Instantanés 2D des déplacements

On observe ensuite les instantanés 2D sur la figure 6.26. Les résultats montrés sur cette figure ont été obtenus pour un domaine de taille plus grand en abscisse que celui donné auparavant, pour éviter des réflexions dues aux coins. Il semble pour cet exemple que les PML ne remplissent pas assez bien leur fonction absorbante au niveau des coins du domaine. C'est pour cela que les résultats sont donnés pour un domaine plus grand. D'autre part, il y a une bonne prise en compte des extrémités de la fissure, qui se trouvent aux bords du domaine de calcul.

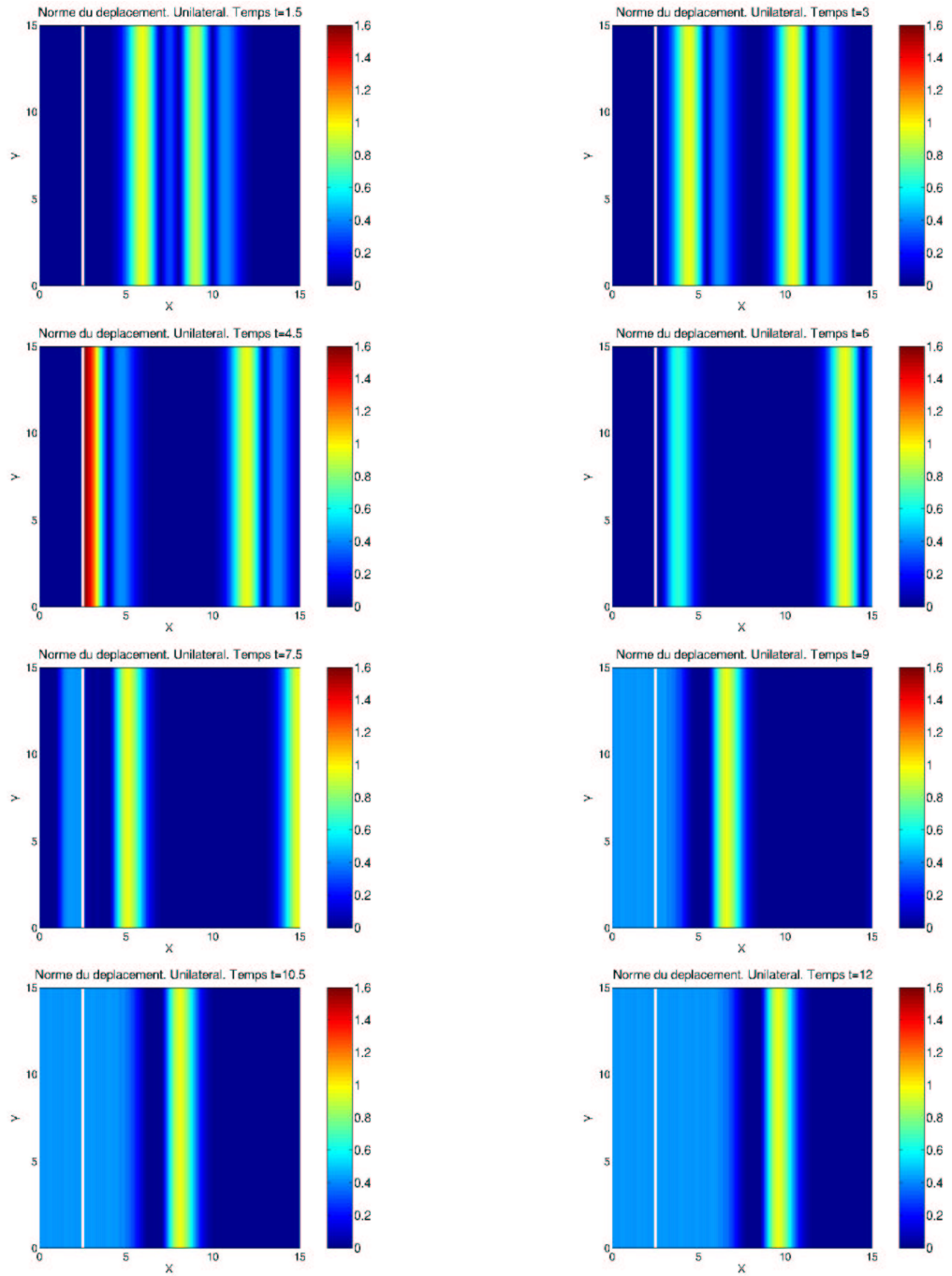


FIG. 6.26 – Instantanés 2D de la norme du déplacement. Problème invariant. Instants  $t = 1.5$  à 12

### 6.2.1.3 Évaluation numérique de l'ordre des schémas

On veut comparer ici la précision des schémas centré implicite et décentré implicite. On considère les mêmes données que précédemment. Pour les calculs qui suivent, la fissure est désormais située en  $x = 3.9$ . Par ce choix, dans les simulations numériques considérées, les points du maillage de la fissure coïncident exactement pour les abscisses avec ceux du maillage volumique et le rapport entre le pas de maillage de la fissure et celui du maillage régulier vaut  $H/h = 1.5$ . On considère des couches PML sur les bords droit et gauche, en vue de simuler un domaine non borné et on impose des conditions aux limites périodiques sur les bords haut et bas.

Sur la figure 6.27, on présente la norme  $L^2(0,T;L^2(\Omega))$  de l'erreur relative sur le déplacement entre la solution calculée et une solution de référence 1D en fonction du pas d'espace. On compare des courbes 1D, c'est-à-dire que, pour les résultats 2D, le déplacement est pris sur l'ordonnée milieu  $y = 7.5$ . On peut alors voir l'erreur décroître linéairement en fonction du pas d'espace, pour les schémas centré et décentré. La pente de la droite est de l'ordre de 3. L'ordre de convergence des deux schémas semble identique. On sait que, comme le maillage de la fissure coïncide avec celui du volume, l'ordre de convergence de la méthode des domaines fictifs est deux.

Enfin, sur la figure 6.28, on présente l'erreur  $L^\infty(0,T)$  sur le multiplicateur en fonction du pas d'espace, pour les deux schémas considérés. On peut voir que l'erreur relative décroît avec le pas d'espace, de manière relativement linéaire. La convergence semble différente entre les deux schémas.

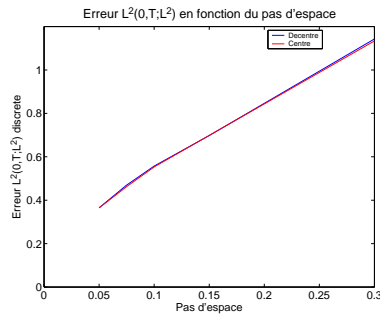


FIG. 6.27 – Norme  $L^2(0,T;L^2(\Omega))$  de l'erreur relative sur le déplacement

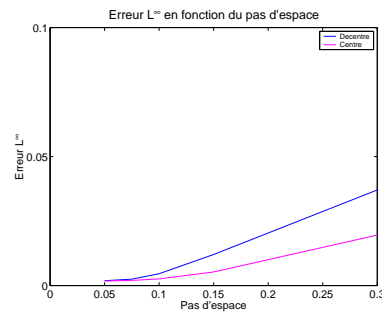


FIG. 6.28 – Norme  $L^\infty(0,T)$  de l'erreur relative sur le multiplicateur

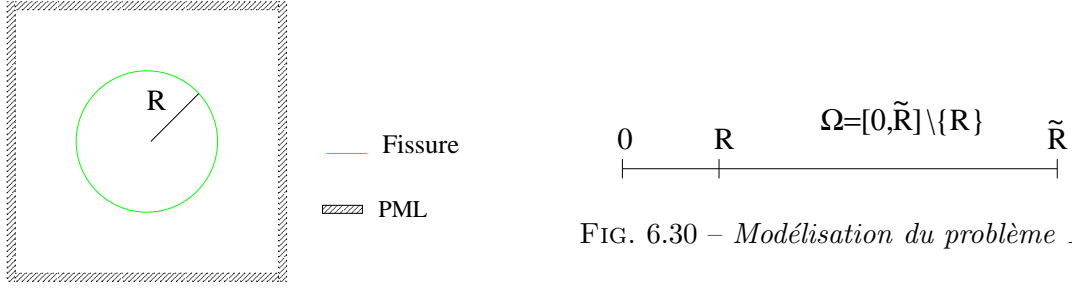


FIG. 6.29 – Modélisation du problème 2D

## 6.2.2 Problème à symétrie radiale

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés pour le cas d'une fissure circulaire, avec différentes conditions initiales et sources extérieures. Il est intéressant d'employer la méthode des domaines fictifs sur de tels exemples, par rapport aux méthodes classiques d'éléments finis, qui comportent la difficulté de créer un maillage adapté, qui doit suivre le contour circulaire de la fissure. Les exemples présentés permettent également une nouvelle validation de la méthode des domaines fictifs.

### 6.2.2.1 Obtention d'une solution de référence

#### Mise en équations du problème

On considère une fissure fermée circulaire de rayon  $R$  dans un matériau élastique homogène isotrope. On considère, soit des données initiales, soit une source extérieure, à support à l'intérieur de la fissure, invariantes par rotation. Le problème simulé en 2D se présente comme sur la figure 6.29.

En coordonnées cylindriques 2D  $(r, \theta)$ , ce problème devient un problème 1D et la variable associée au rayon est la seule variable spatiale. En effet, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  en 2D, la divergence s'écrit

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_r &= \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}), \\ (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})_\theta &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta}. \end{aligned}$$

De son côté, le tenseur des déformations vérifie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(u) &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\theta}(u) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}(u) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}. \end{aligned}$$

On considère ici un problème avec symétrie radiale, c'est-à-dire que les données du problème sont invariantes par rotation. La solution du problème est donc elle aussi invariante par rotation. Cette hypothèse entraîne que la solution du problème ne dépend pas de  $\theta$ . Cela permet d'éliminer les dérivées par rapport à  $\theta$ . Pour simplifier, dans la suite, on note par  $u$  la composante radiale du déplacement. Sous l'hypothèse de symétrie radiale, et si le milieu est homogène isotrope, le système de l'élastodynamique avec condition aux limites sur la fissure de surface libre ou de contact unilatéral peut se découpler.

- Condition aux limites de surface libre

Pour la condition aux limites de surface libre sur la fissure, on obtient les équations suivantes, où les

coefficients de Lamé du matériau sont notés  $\mu$  et  $\lambda$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} = f_r \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \quad (i) \\ \sigma_{rr} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r}, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \quad (ii) \\ \sigma_{\theta\theta} = (2\mu + \lambda) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r}, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \quad (iii) \\ \sigma_{rr} = 0 \text{ en } r = R \text{ dans } ]0, T[, \quad (iv) \\ u = 0 \text{ en } r = \tilde{R} \text{ dans } ]0, T[, \quad (v) \end{array} \right. \quad (6.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = f_\theta, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (i) \\ \sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (ii) \\ \sigma_{r\theta} = 0 \text{ en } r = R \text{ dans } ]0, T[, \quad (iii) \\ u_\theta = 0 \text{ en } r = \tilde{R} \text{ dans } ]0, T[, \quad (iv) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

où  $u$  désigne la composante radiale du déplacement,  $u_\theta$  la composante en  $\theta$ .  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$  sont les composantes de  $\sigma$ .

On s'intéresse uniquement au problème (6.15) que l'on résout par une formulation mixte en  $(u, \sigma_{rr})$ . Ce problème est un problème 1D posé dans le domaine  $[0, \tilde{R}]$  et la fissure se trouve à l'abscisse  $r = R$ ,  $R < \tilde{R}$  (voir figure 6.30). On impose une condition de Dirichlet homogène en  $\tilde{R}$  et on suppose que  $\tilde{R}$  est grand, de telle sorte que les ondes réfléchies par la condition de Dirichlet n'ont pas d'influence sur les résultats. Après élimination de  $\sigma_{\theta\theta}$ , le problème (6.15) est encore équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\sigma_{rr}}{r} \right) + \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \frac{u}{r^2} = f_r \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{1}{2\mu + \lambda} \sigma_{rr} + \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} = 0, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \sigma_{rr} = 0 \text{ en } r = R, \text{ dans } ]0, T[, \\ u = 0 \text{ en } r = \tilde{R} \text{ dans } ]0, T[. \end{array} \right. \quad (6.17)$$

- Condition de contact unilatéral sans frottement

Pour la condition aux limites de contact unilatéral sans frottement, les équations dans le domaine sont identiques au cas surface libre, seule la condition aux limites sur la fissure  $\Gamma$  est modifiée. En coordonnées cylindriques, la condition de contact unilatéral s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \leq 0, [u] \geq 0, \sigma_{rr}[u] = 0, \text{ en } r = R, \quad (i) \\ \sigma_{r\theta} = 0, \text{ en } r = R \quad (ii). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Remarquons que l'absence de frottement sur la fissure entraîne la relation (6.18)-(ii). La formulation variationnelle avec contact unilatéral est la suivante:

Trouver  $(\sigma, u, \Lambda) : ]0, T[ \rightarrow H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^+$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v)_{rdr} - (\frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}, v)_{rdr} + (\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \frac{u}{r^2}, v)_{rdr} = (f_r, v)_{rdr}, \forall v \in L^2(\Omega), \\ (\frac{1}{2\mu + \lambda} \sigma_{rr}, \tau_{rr})_{rdr} + (\frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\tau_{rr}}{r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}, u)_{rdr} + \Lambda R \tau_{rr}(R) = 0, \forall \tau_{rr} \in H^1(\Omega), \\ R \sigma_{rr}(R)(\mu - \Lambda) \leq 0, \forall \mu \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right.$$

### Résolution numérique 1D

- Condition de surface libre

On utilise la méthode des domaines fictifs pour résoudre ce problème 1D en vue de fournir une comparaison avec le code 2D. Une formulation variationnelle mixte en déplacements-contraintes associée à (6.17) est la suivante, où  $\Lambda = [u(R)]$ ,

Trouver  $(\sigma_{rr}, u, \Lambda) : ]0, T[ \rightarrow H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v)_{rdr} - (\frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}, v)_{rdr} + (\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \frac{u}{r^2}, v)_{rdr} = (f_r, v)_{rdr}, \forall v \in L^2(\Omega), \\ (\frac{1}{2\mu + \lambda} \sigma_{rr}, \tau_{rr})_{rdr} + (\frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\tau_{rr}}{r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}, u)_{rdr} + \Lambda R \tau_{rr}(R) = 0, \forall \tau_{rr} \in H^1(\Omega), \\ R \sigma_{rr}(R) \mu = 0, \forall \mu. \end{array} \right.$$

La notation  $(\cdot, \cdot)_{rdr}$  représente le produit scalaire dans  $L^2(rdr)$ , c'est-à-dire, que pour tout  $(u, v) \in L^2(rdr)$ , on a

$$(u, v)_{rdr} = \int_{\Omega} u v r dr.$$

On choisit l'élément fini  $\mathcal{P}_0$  pour approcher  $u$  et l'élément  $\mathcal{P}_1^c$  pour approcher  $\sigma_{rr}$ .  $\Lambda$  est un scalaire. L'énergie continue du système est

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} (\varrho \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})_{rdr} + \frac{1}{2} (\frac{1}{2\mu + \lambda} \sigma, \sigma)_{rdr} + \frac{1}{2} (\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \frac{u}{r^2}, u)_{rdr}.$$

Pour la discrétisation en temps associée à (6.19), on utilise le schéma suivant.

Trouver  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1}, \Lambda^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_{\Sigma}} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - D \Sigma_{rr}^n + B U^n = F^n, \\ M_{\sigma} \Sigma_{rr}^n + D^* U^n + B_{\Gamma}^* \Lambda^n = 0, \\ B_{\Gamma} \Sigma_{rr}^n = 0. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Par analogie, on conserve des notations identiques à celles utilisées dans (4.1) mais les matrices  $M_v, D, M_{\sigma}, B_{\Gamma}$  sont des matrices différentes de celles utilisées auparavant. Soient  $(v_j)_j$  sont les fonctions de base de l'espace approchant  $L^2(\Omega)$ ,  $(\tau_j)_j$  celles de l'espace approchant  $H^1(\Omega)$ . Les matrices introduites sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} (M_v)_{ij} &= (\varrho v_j, v_i)_{rdr}, \quad D_{ij} = (\frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{\tau_j}{r} + \frac{\partial \tau_j}{\partial r}, v_i)_{rdr}, \\ (M_{\sigma})_{ij} &= (\frac{1}{2\mu + \lambda} \tau_j, \tau_i)_{rdr}, \quad B_{ij} = (\frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \frac{v_j}{r^2}, v_i)_{rdr}, \quad (B_{\Gamma})_i = R \tau_i(R), \quad F_i = (f_r, v_i)_{rdr}. \end{aligned}$$



On utilise la condensation de masse pour obtenir la matrice  $M_\sigma$  diagonale.

- Condition de contact unilatéral sans frottement

L'obtention de la formulation en domaines fictifs du problème unilatéral ressemble à celle présentée avant, excepté la condition unilatérale. Elle n'est pas reprise ici et on s'intéresse directement à la discrétisation temporelle du schéma numérique. On considère le schéma décentré suivant:

Trouver  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1}, \Lambda^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_\Sigma} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{cases} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - D\Sigma_{rr}^n + BU^n = F^n, \\ M_\sigma \Sigma_{rr}^n + D^*U^n + B_\Gamma^* \Lambda^n = 0, \\ B_\Gamma \frac{\Sigma_{rr}^n + \Sigma_{rr}^{n-1}}{2} (\mu - \Lambda^n) \leq 0, \forall \mu \geq 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

On obtient alors un problème d'optimisation quadratique 1D qui se résout analytiquement.

### Résultats numériques

Le problème 1D est simulé sur le segment  $[0, \tilde{R}]$ . On considère jusqu'à  $n = 10000$  points de discrétisation spatiale. Le pas d'espace est  $h_x = 0.005$ , donc  $\tilde{R} = 50$ , le pas de temps est  $\Delta t = 0.004$ . On impose la condition initiale suivante:

$$\vec{u}_0(r) = \vec{r} \exp(-r^2). \quad (6.21)$$

Le support de cette condition initiale est montré sur la figure 6.31. On suppose  $u_1 = 0$ ,  $f_r = 0$ . On considère une condition de Dirichlet homogène sur le bord pour la simulation 1D. On présente, sur la figure 6.32, les résultats obtenus pour ce problème de référence sous la forme d'instantanés 2D, pour les deux conditions aux limites. On peut voir que les résultats sont très différents. Une partie de l'onde est transmise dans le cas unilatéral, alors que l'onde est réfléchiée en totalité dans le cas de la surface libre.

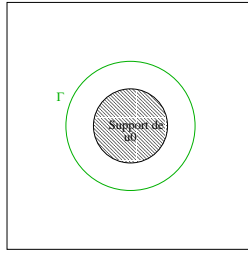


FIG. 6.31 – Support de la condition initiale

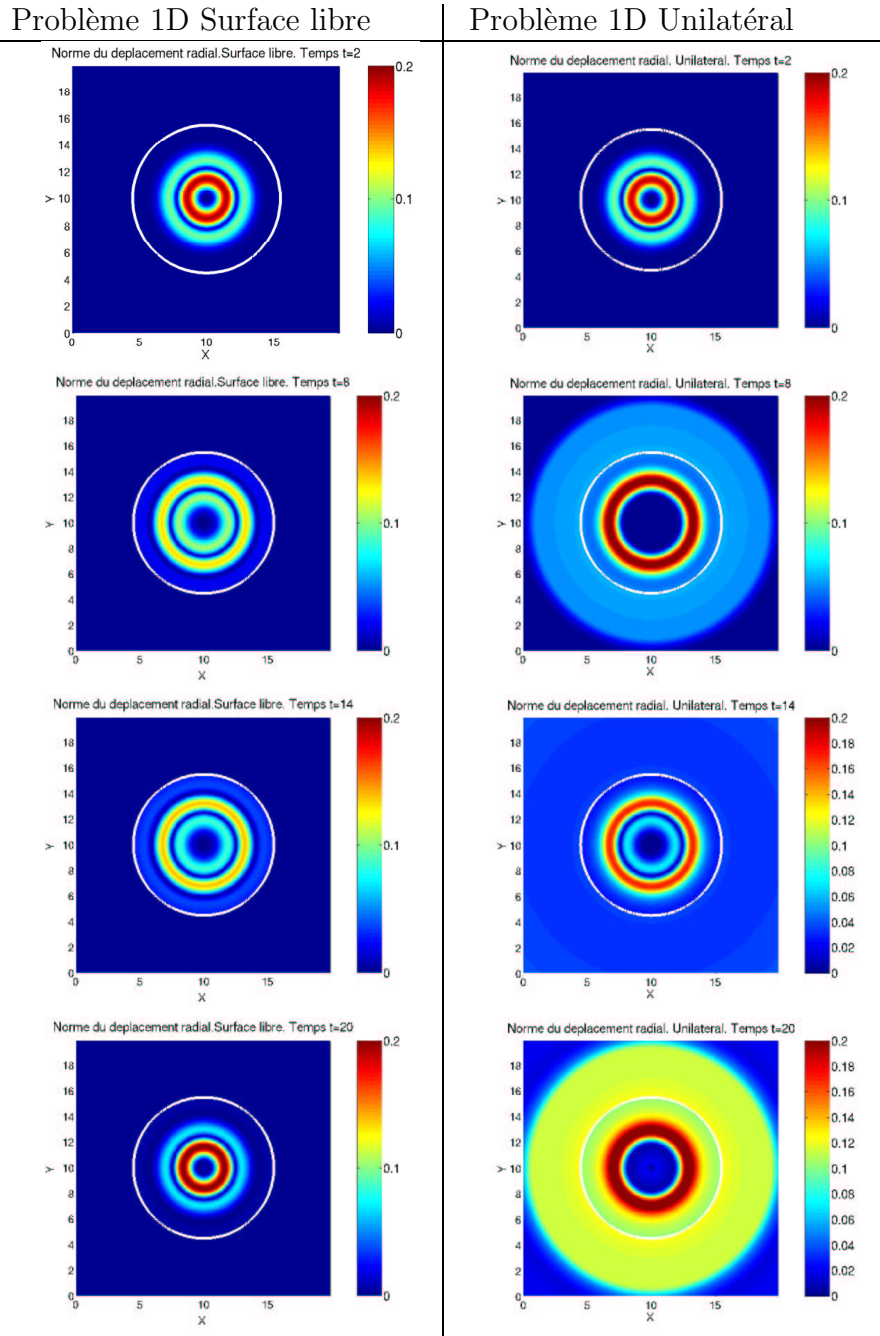


FIG. 6.32 – Comparaison de la norme du déplacement radial. Surface libre (à gauche) et unilatéral. Instants  $t = 2$  à 20

### 6.2.2.2 Comparaison entre la solution de référence et la solution issue du problème 2D

#### Condition aux limites de surface libre

On compare les résultats donnés par les deux simulations dans le cas d'une condition de surface libre, en vue de valider le code 2D correspondant à la méthode des domaines fictifs.

Pour la simulation 2D, on considère un domaine carré  $[0,20] \times [0,20]$ . Le milieu considéré est un milieu élastique homogène isotrope de densité  $\rho = 1$ , dont les coefficients de Lamé sont  $\mu = 0.3$ ,  $\lambda = 0.4$ . La vitesse des ondes de pression vaut  $V_p = 1$ , la vitesse des ondes de cisaillement vaut  $V_s = \sqrt{0.3}$ .

Pour la discrétisation, on considère  $n_i = n_j = 400$  points de discrétisation en espace. Le pas d'espace sur le maillage régulier est  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas d'espace sur le maillage de la fissure est  $H = 0.0864$ . On considère, pour les résultats présentés dans cette partie, des éléments rectilignes pour approcher la fissure. La prise en compte d'éléments circulaires est présentée dans la partie 6.4.3. Le pas de temps est  $\Delta t = 0.05$ . Le temps total de l'étude est  $t_t = 29.94$ . La fissure est un cercle de rayon  $R = 5.5$  centré en  $(10,10)$ . Le nombre de degrés de liberté sur la fissure est  $n_f = 400$ .

Comme précédemment, le problème 1D est simulé sur le segment  $[0, \tilde{R}]$ . On considère jusqu'à  $n = 10000$  points de discrétisation spatiale. Le pas d'espace est  $h_x = 0.005$ , donc  $\tilde{R} = 50$ , le pas de temps est  $\Delta t = 0.004$ .

On impose la même condition initiale que celle donnée par (6.21), écrite sous une autre forme,

$$\mathbf{u}_0(x,y) = \vec{r} g(|\vec{r}|), \quad g(s) = \exp(-s^2), \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix},$$

$$\text{ce qui donne } \mathbf{u}_0(x,y) = \exp(-((x - x_S)^2 + (y - y_S)^2)) \begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

On considère ici  $x_S = y_S = 10$ . On suppose  $u_1 = 0$ ,  $f_r = 0$ .

On compare, sur la figure 6.34, la norme du déplacement calculée par la simulation 2D, à droite, à celle calculée par la simulation 1D, à gauche, sur plusieurs instants ( $t = 2$  à  $20$ ). Les résultats se ressemblent. L'utilisation de l'élément fini  $(Q_1^{\text{div}} - \mathcal{P}_1^{\text{disc}})$  dans le code 2D permet une bonne prise en compte de la fissure.

On compare ensuite, sur la figure 6.38, le saut de déplacement normal sur la fissure au cours du temps, entre les deux simulations. Pour la simulation 2D, le saut de déplacement est considéré pour le point  $(15.5,10)$ . On voit que les deux résultats coïncident assez bien.

On compare aussi, sur la figure 6.36, le déplacement radial calculé par le code 2D au déplacement radial calculé par le code 1D, en deux points donnés du domaine situés en  $r = 4.5$ ,  $5.45$ . Ces points sont visibles sur la figure 6.33.

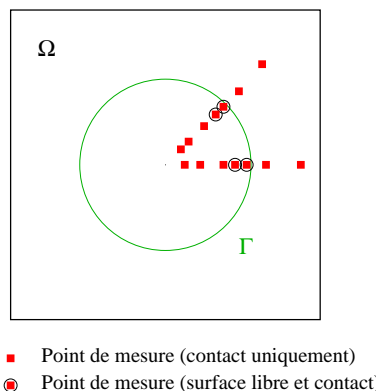


FIG. 6.33 – Disposition des points de calcul du déplacement

La comparaison est satisfaisante pour  $r = 4.5$ . Pour  $r = 5.45$ , c'est-à-dire en un point proche de la fissure, on voit des petites différences entre les deux solutions. Il semble qu'en un point proche de la fissure, la solution calculée est un peu moins bonne.

On observe ensuite sur la figure 6.35, uniquement pour le code 2D, la composante normale du saut de déplacement en fonction des abscisses de la fissure, en plusieurs instants. A cause de la symétrie radiale, cette composante devrait être constante. En fait, le saut de déplacement normal est relativement constant en espace, même si on voit clairement des oscillations. Puis, on examine, sur la figure 6.37, la composante tangentielle du saut de déplacement sur la fissure. Elle devrait être nulle, car le problème est à symétrie radiale. Or, la composante tangentielle du multiplicateur n'est pas tout à fait nulle. Des oscillations apparaissent autour de 0.

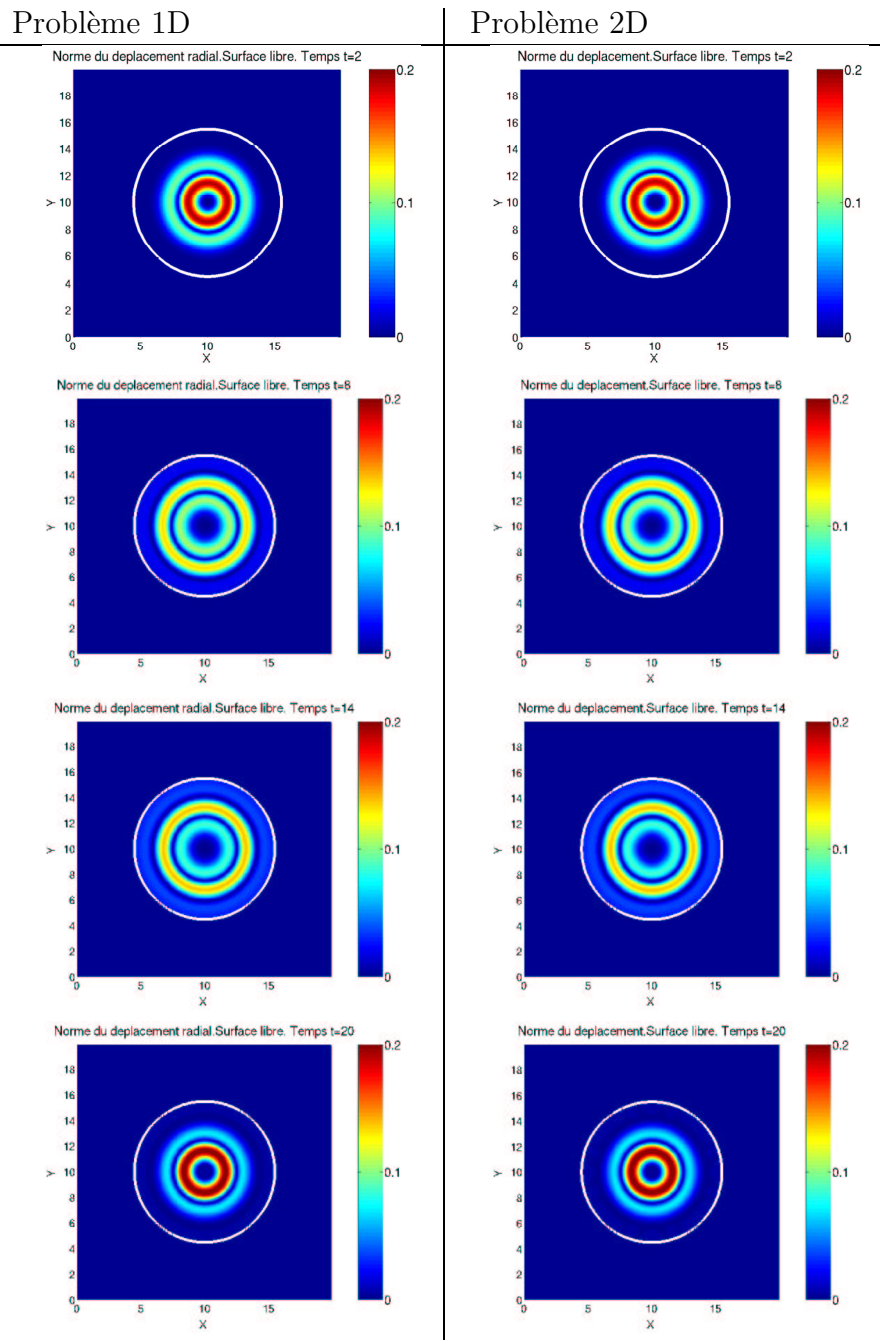


FIG. 6.34 – Instantanés 2D de la norme du déplacement radial. Surface libre. Instants  $t = 2$  à 20

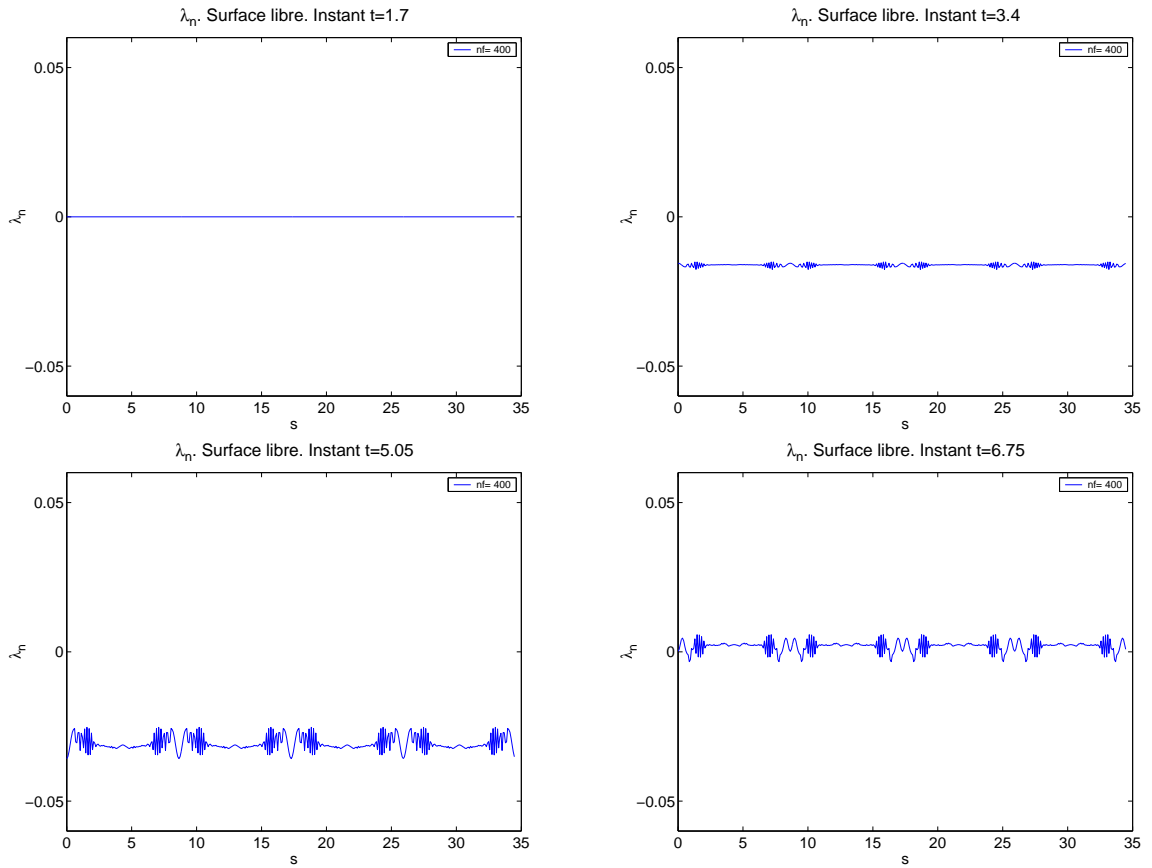


FIG. 6.35 – Instantanés du saut de déplacement normal. Surface libre. Instants  $t = 1.7$  à  $6.75$

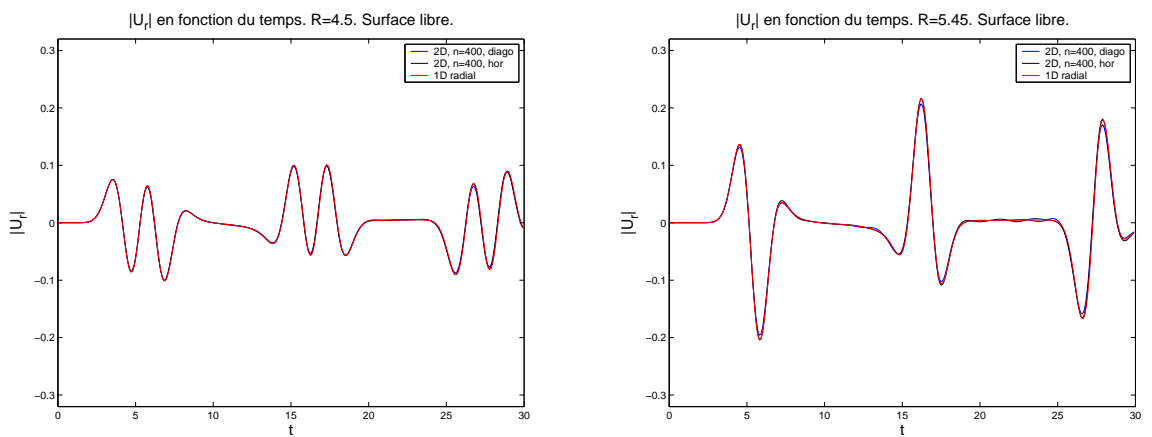


FIG. 6.36 – Comparaison du déplacement radial au cours du temps, en  $r=4.5$  et  $r=5.45$

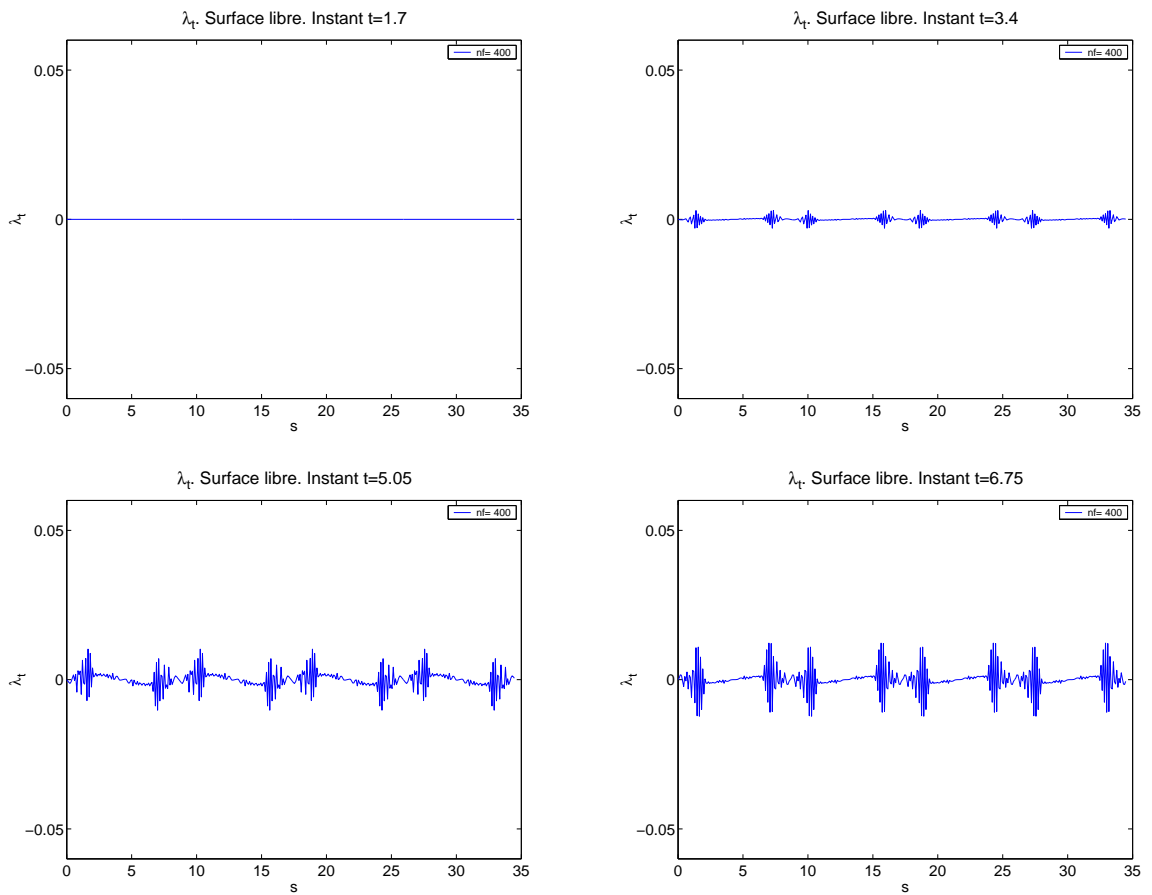


FIG. 6.37 – Instantanés du saut de déplacement tangential. Surface libre. Instants  $t = 1.7$  à 6.75

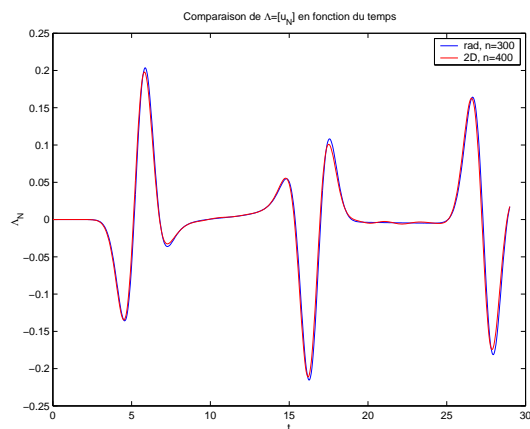


FIG. 6.38 – Saut de déplacement normal au cours du temps. Surface libre

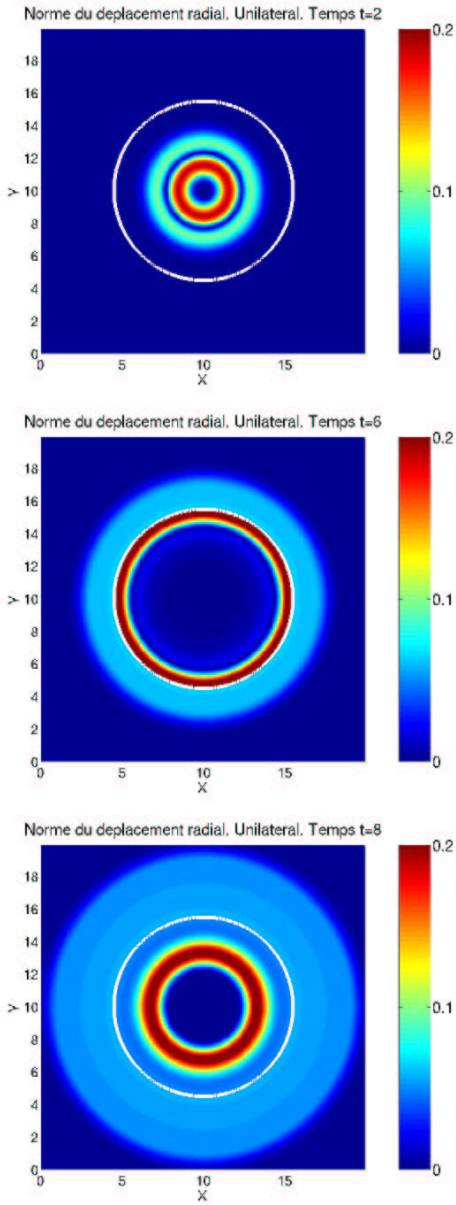
### Contact unilatéral pour une condition initiale positive

Dans cette partie, la condition de contact unilatéral sans frottement est prise en compte au niveau de la fissure. On effectue la même comparaison que dans le cas d'une condition de surface libre, pour la condition initiale donnée en (6.22). On compare les résultats issus de la simulation 1D avec ceux issus de la simulation 2D, dans le but de valider la prise en compte des conditions aux limites de contact unilatéral par le code 2D. Le schéma décentré implicite (4.5) a été utilisé pour la résolution numérique. Le choix du schéma centré implicite (4.14) donne des résultats quasiment identiques, en ce qui concerne le déplacement.

Les résultats montrés sur les figures 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, qui comparent la norme du déplacement calculée par la simulation 2D à celle calculée par la simulation 1D, sont satisfaisants mais des différences apparaissent entre les résultats des deux simulations. Aux instants  $t = 18, 26, 28$ , les résultats 2D semblent montrer de l'anisotropie et de la dispersion numérique, particulièrement à l'intérieur de la fissure. Ce phénomène concerne une partie de l'onde d'amplitude faible. De plus, en  $t = 8, 10, 18, 26, 28$  par exemple, on voit des différences entre le 1D et le 2D, dans ce qui passe après la fissure, dans les directions horizontale et verticale. Les résultats se détériorent dans le temps. Il a été pensé dans un premier temps que les différences étaient peut-être dues à des oscillations parasites causées par le maillage polygonal de la fissure circulaire, pour la simulation 2D. Toutefois l'utilisation d'éléments circulaires sur la fissure donne le même type de résultats (voir partie 6.4.3). Il semble intéressant alors de raffiner le maillage, afin d'étudier le comportement de la solution. Les différences entre les résultats 1D et 2D diminuent lorsqu'on raffine le maillage 2D et le maillage de la fissure. Cette étude est faite dans la suite, dans le paragraphe "Tests de convergence". De plus, on peut voir que le déplacement de l'onde qui passe à travers la fissure reste constant en espace.



Problème 1D



Problème 2D

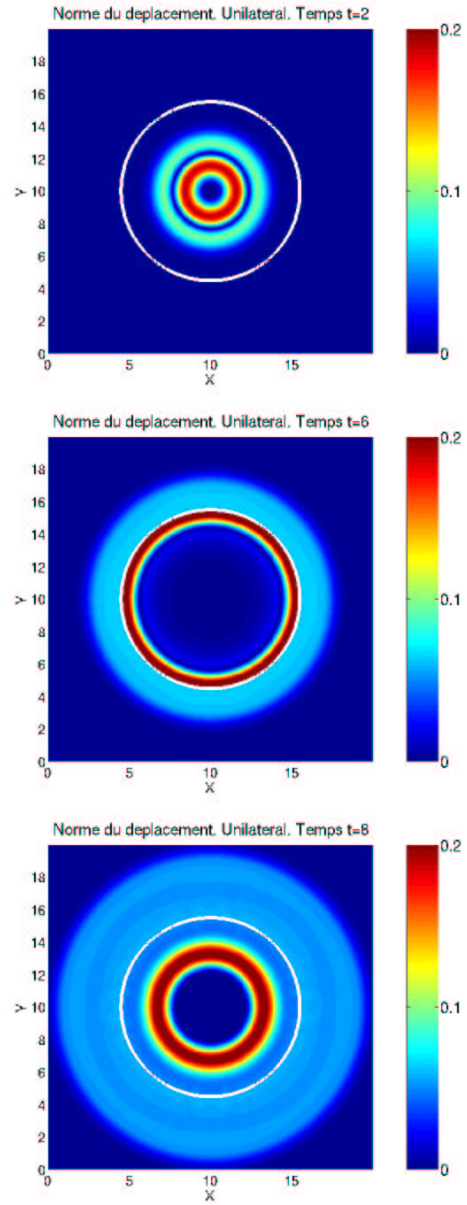
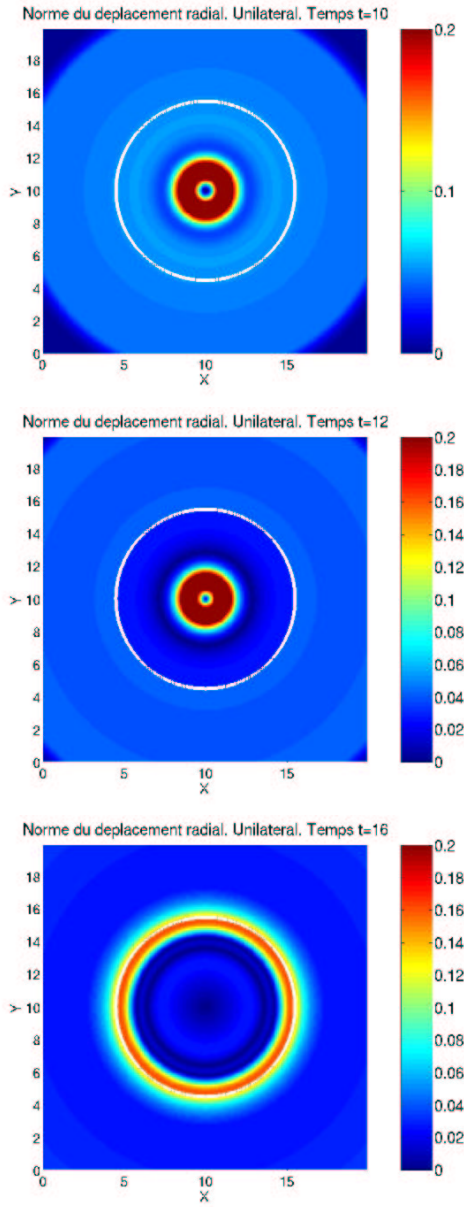


FIG. 6.39 – Instantanés 2D de la norme du déplacement radial. Unilatéral. Instants  $t = 2$  à 8

Problème 1D



Problème 2D

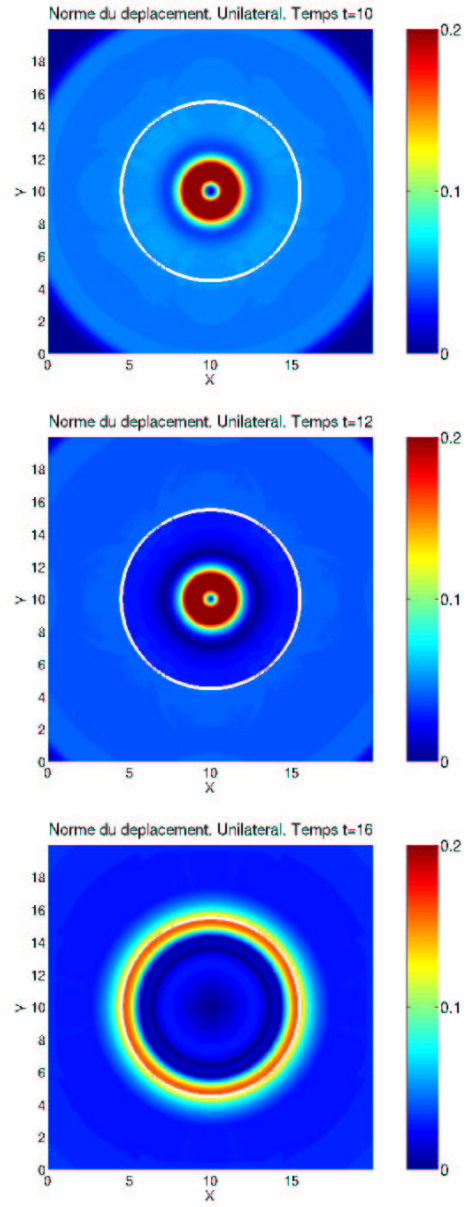


FIG. 6.40 – Instantanés 2D de la norme du déplacement radial. Unilatéral. Instants  $t = 10$  à 16

Problème 1D

Problème 2D

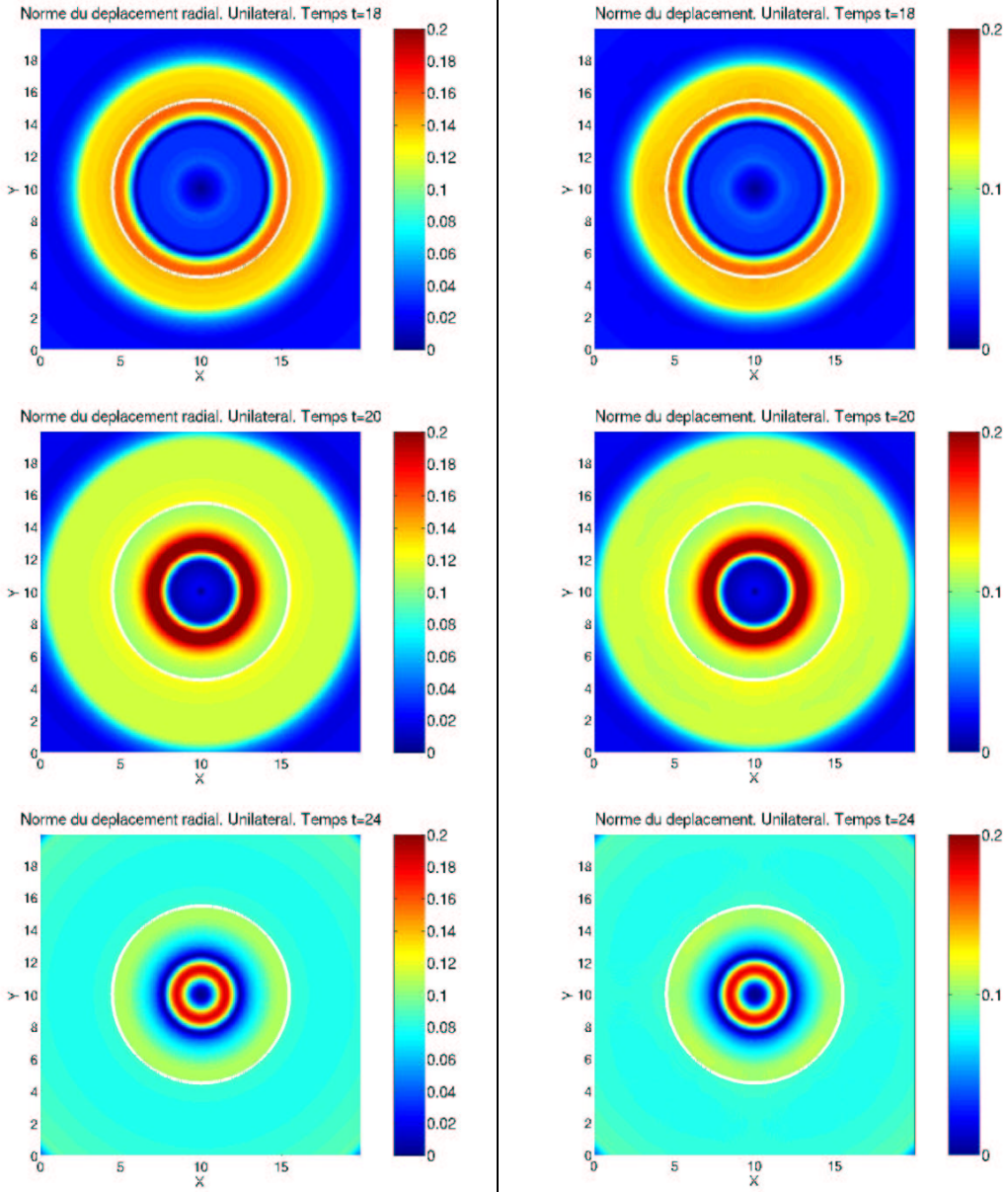
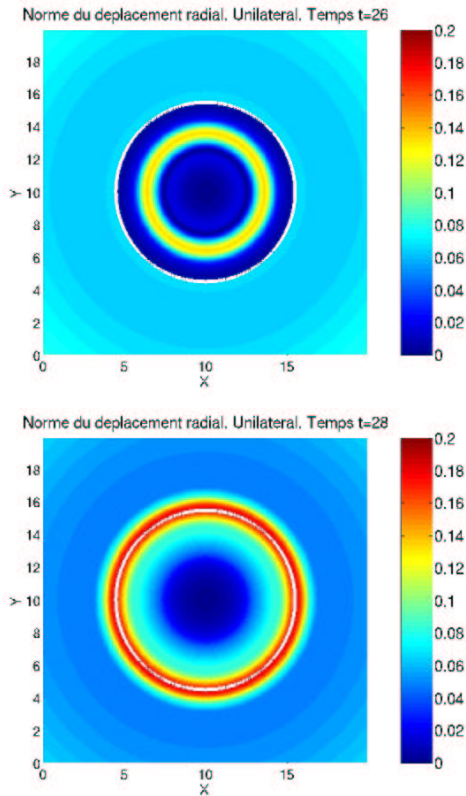
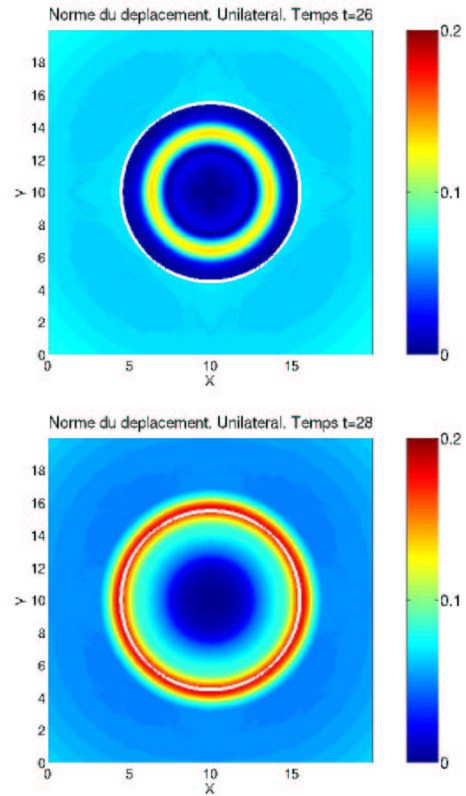


FIG. 6.41 – Instantanés 2D de la norme du déplacement radial. Unilatéral. Instants  $t = 18$  à 24

Problème 1D



Problème 2D


 FIG. 6.42 – Instantanés 2D de la norme du déplacement radial. Unilatéral. Instants  $t = 26$  à 28

On observe ensuite, sur la figure 6.43, le saut de déplacement normal au cours du temps et on le compare au saut de déplacement dans le cas linéaire. Les deux résultats diffèrent considérablement. Le multiplicateur  $\lambda_N$  reste positif dans le cas unilatéral, alors qu'il change de signe dans le cas de la surface libre. C'est cette variable qui montre la non-interpénétration des deux lèvres de la fissure entre elles, dans le cas unilatéral.

On compare, sur la figure 6.44, le multiplicateur calculé dans le cas 1D, avec le multiplicateur calculé dans le cas 2D, en un point donné de la fissure. En dépit d'une petite différence, la comparaison est assez bonne.

On compare, sur les figures 6.45, 6.46, le déplacement radial au cours du temps obtenu par la simulation 1D à celui obtenu par la simulation 2D, en plusieurs points de l'espace. Pour les résultats 2D, à  $r$  donné, on observe les valeurs du déplacement en deux points de l'espace, l'un dans la direction diagonale, l'autre dans la direction horizontale. Ces points sont précisés sur la figure 6.33. Par exemple, pour  $r = 1.25$ , le déplacement calculé par le code 2D est donné au point  $(10 + 1.25/\sqrt{2}, 10 + 1.25/\sqrt{2})$  dans la direction diagonale et il est considéré au point  $(11.25, 10)$  dans la direction horizontale. Les résultats sont satisfaisants. Toutefois, plus on s'approche de la fissure, plus des différences sont visibles entre les résultats 1D et 2D. C'est le cas pour  $r = 5.45$ , dans la direction diagonale. On peut voir aussi que, pour  $r = 6.65, 9.03$ , deux points situés hors de la fissure, les résultats se ressemblent.

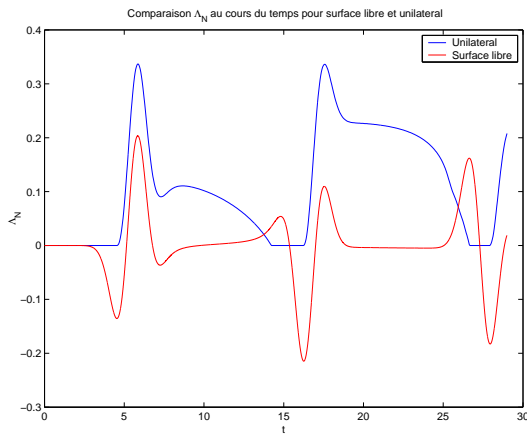


FIG. 6.43 – Comparaison du saut de déplacement normal pour les deux conditions aux limites

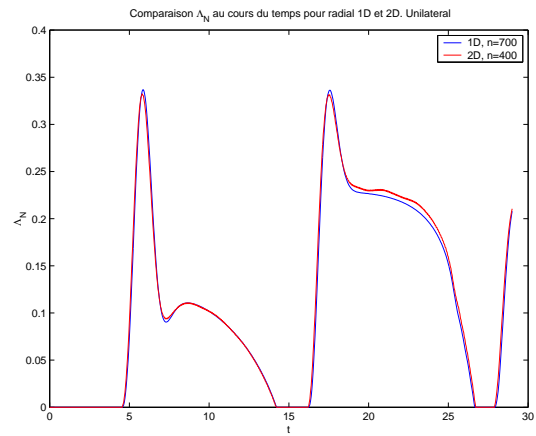


FIG. 6.44 – Saut de déplacement normal au cours du temps. Unilatéral

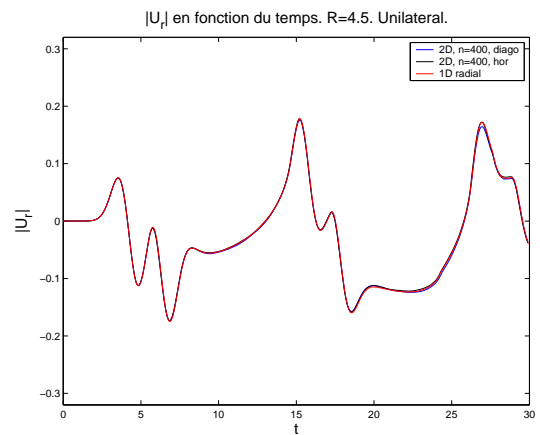
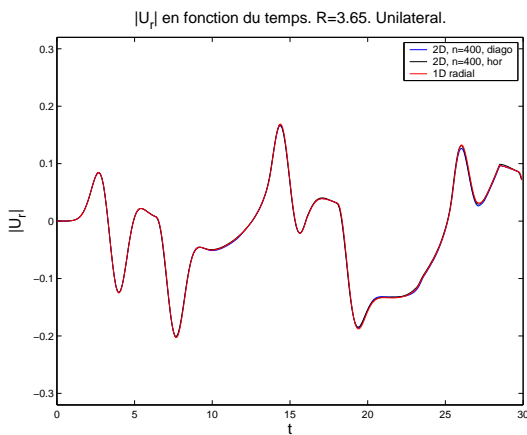
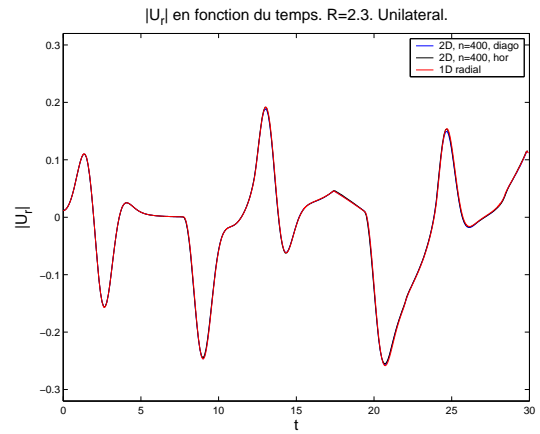
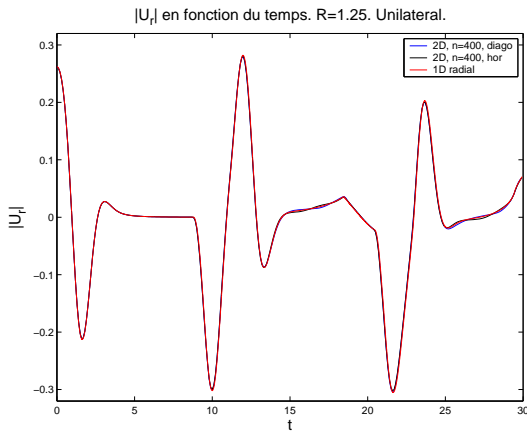


FIG. 6.45 – Déplacement radial au cours du temps, condition initiale positive. Points  $r = 1.25$  à  $4.5$

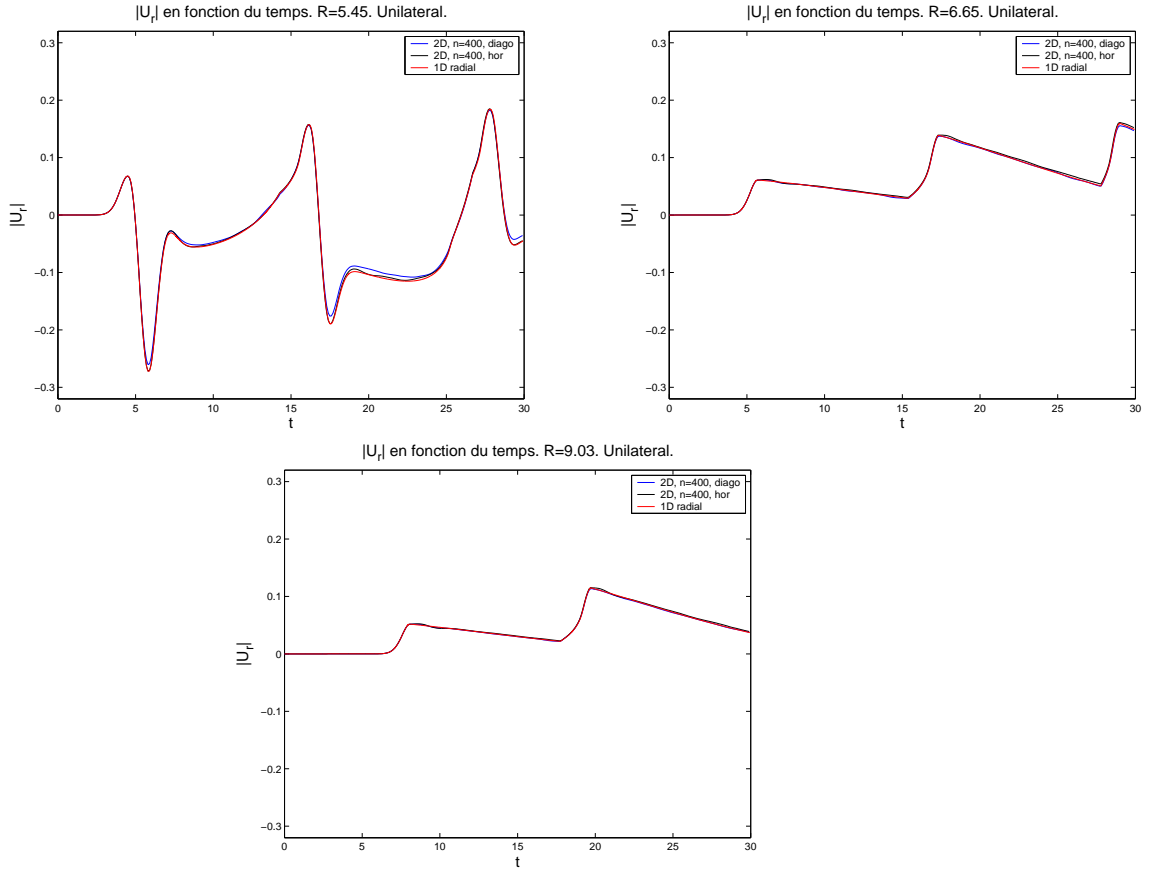


FIG. 6.46 – Déplacement radial au cours du temps, condition initiale positive. Points  $r = 5.45$  à  $9.03$

Dans la suite, d'autres résultats comparatifs sont montrés, avec une nouvelle condition initiale et une source extérieure.

### Contact unilatéral pour une condition initiale négative

Dans ce paragraphe, la condition initiale considérée est

$$\mathbf{u}_0(x,y) = -\vec{r} g(|\vec{r}|),$$

$$\text{où on note } \vec{r} = \begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix}, \quad g(s) = \exp(-s^2),$$

$$\text{ce qui donne } \mathbf{u}_0(x,y) = -\exp(-(x - x_S)^2 - (y - y_S)^2) \begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix}.$$

Le support de la condition initiale est montré à la figure 6.31. On considère  $x_S = y_S = 10$ . On a aussi  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{f} = \mathbf{0}$ . On examine ensuite sur la figure 6.47 le multiplicateur  $\lambda_N$  au cours du temps calculé par les deux simulations. La comparaison est satisfaisante. On observe cependant une différence entre les instants 22 et 30.

Pour cette condition initiale négative, on observe, sur les figures 6.48, 6.49, la comparaison du déplacement radial dans les cas 1D et 2D, en plusieurs points de l'espace, au cours du temps, dans les deux directions diagonale et horizontale. Les résultats se superposent assez bien. Néanmoins, on observe des petites différences pour  $r = 5.45$ . On peut voir qu'au niveau de l'onde transmise, aux points  $r = 6.65$  et  $r = 9.03$ , les résultats 1D et 2D se ressemblent assez bien.



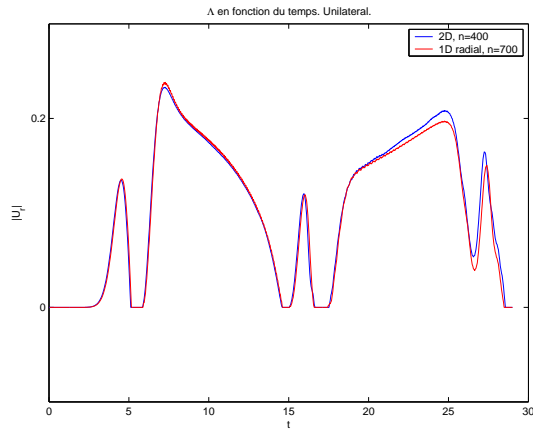


FIG. 6.47 – Saut de déplacement normal au cours du temps. C.I. négative. Unilatéral

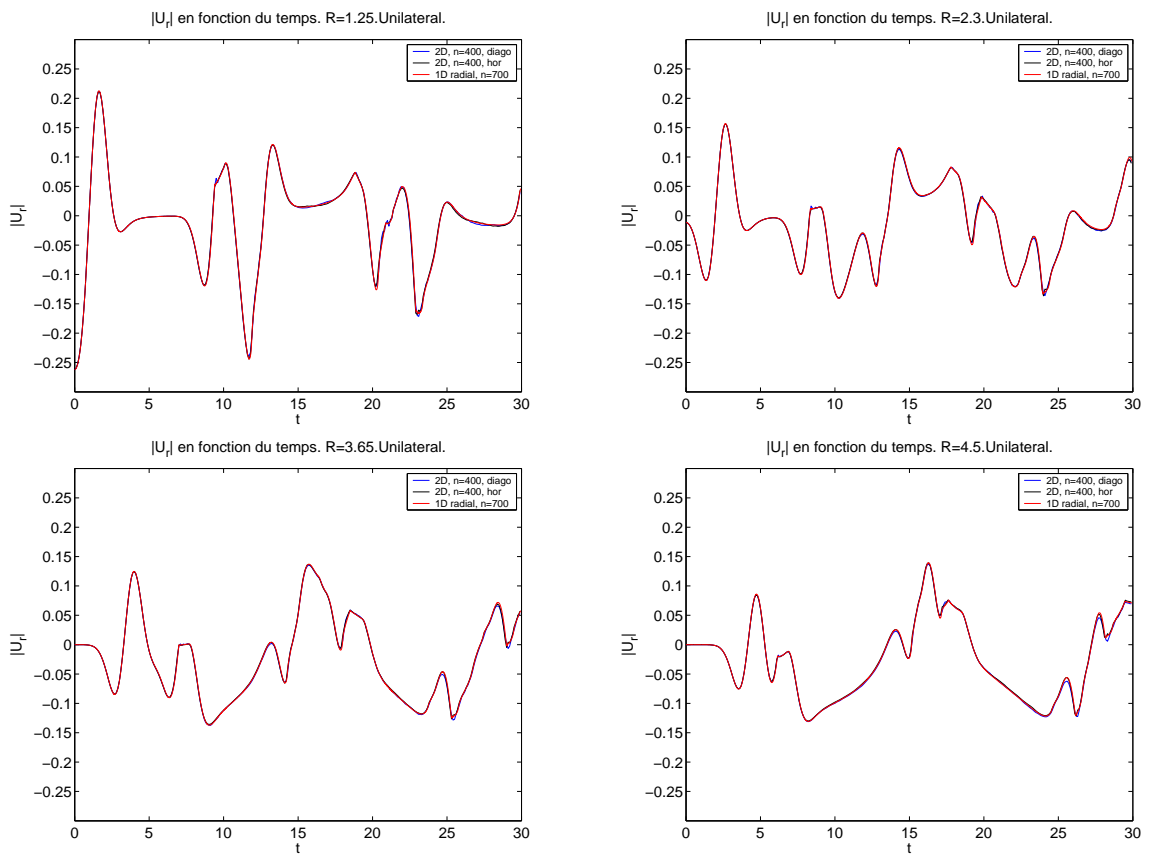
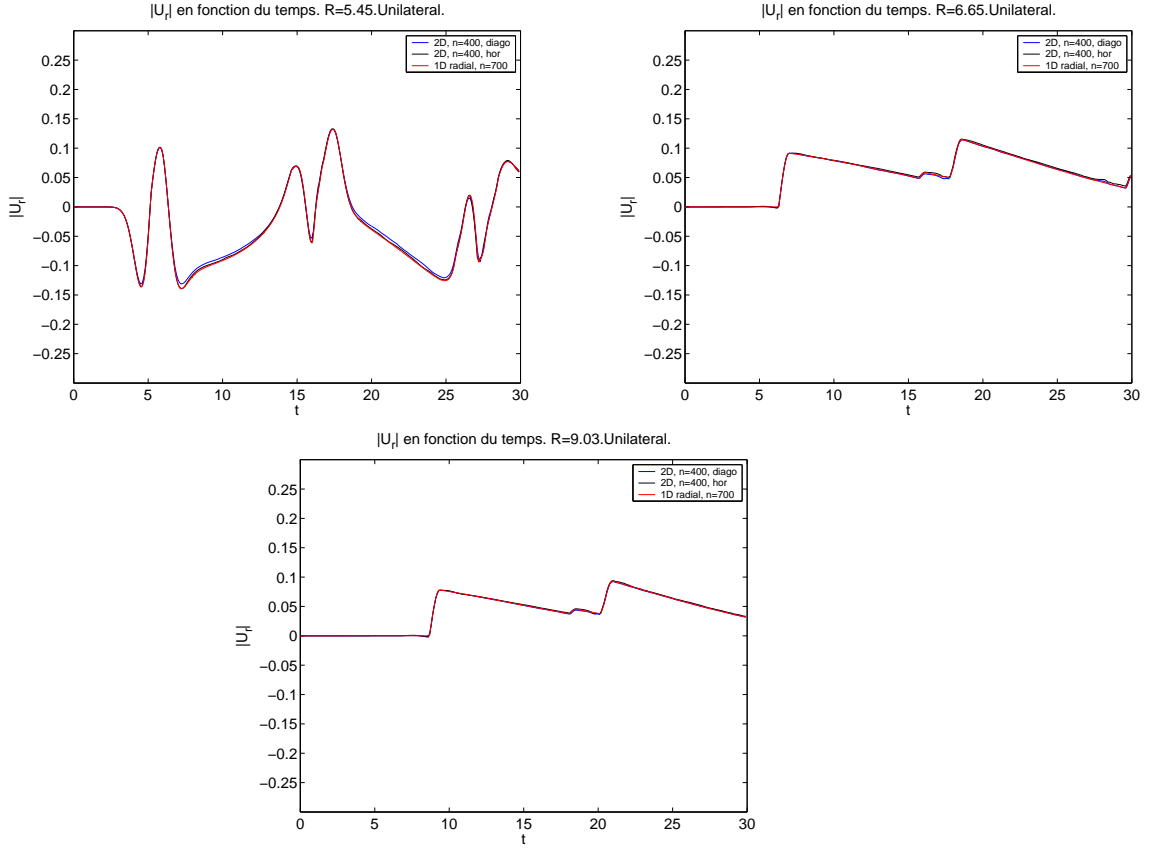


FIG. 6.48 – Déplacement radial, condition initiale négative. Points  $r = 1.25$  à  $4.5$


 FIG. 6.49 – Déplacement radial, condition initiale négative. Points  $r = 5.45$  à  $9.03$ 

### Contact unilatéral pour une source extérieure

On impose une source extérieure définie par

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = F(t) \vec{g}(\vec{r}) \text{ avec,} \quad (6.23)$$

$$F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 \exp(-\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2) (1 - 2\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 2t_0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \left(1 - \frac{|\vec{r}|^2}{a^2}\right)^3 1_a(|\vec{r}|) \text{ où } 1_a(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ et } \vec{r} = \begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix}.$$

On compare, sur les figures 6.51, 6.52, le déplacement radial calculé par le code 2D aux résultats de la simulation 1D, dans les deux directions horizontale et diagonale. On suppose que le nombre de points par longueur d'onde vaut 28. On considère ici  $n_i = n_j = 400$  éléments,  $h_x = h_y = 0.05$ , une fréquence  $f_0 = \sqrt{0.3}/28h_x = 0.3912$ , un rayon  $a = 2$ ,  $t_0 = 1/f_0$ . Le support de la source extérieure est donc le cercle centré en  $(10,10)$  de rayon 2. Il est montré sur la figure 6.50.

Les résultats se superposent assez bien, sauf pour  $r = 5.45, 6.65, 9.03$ , où l'on voit des petites différences. On constate que le déplacement calculé dans la direction horizontale approche mieux le déplacement 1D en  $r = 5.45$ , alors qu'il l'approche moins bien en  $r = 6.65, 9.03$ .



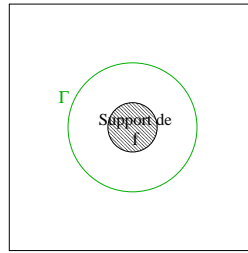


FIG. 6.50 – Support de la source extérieure

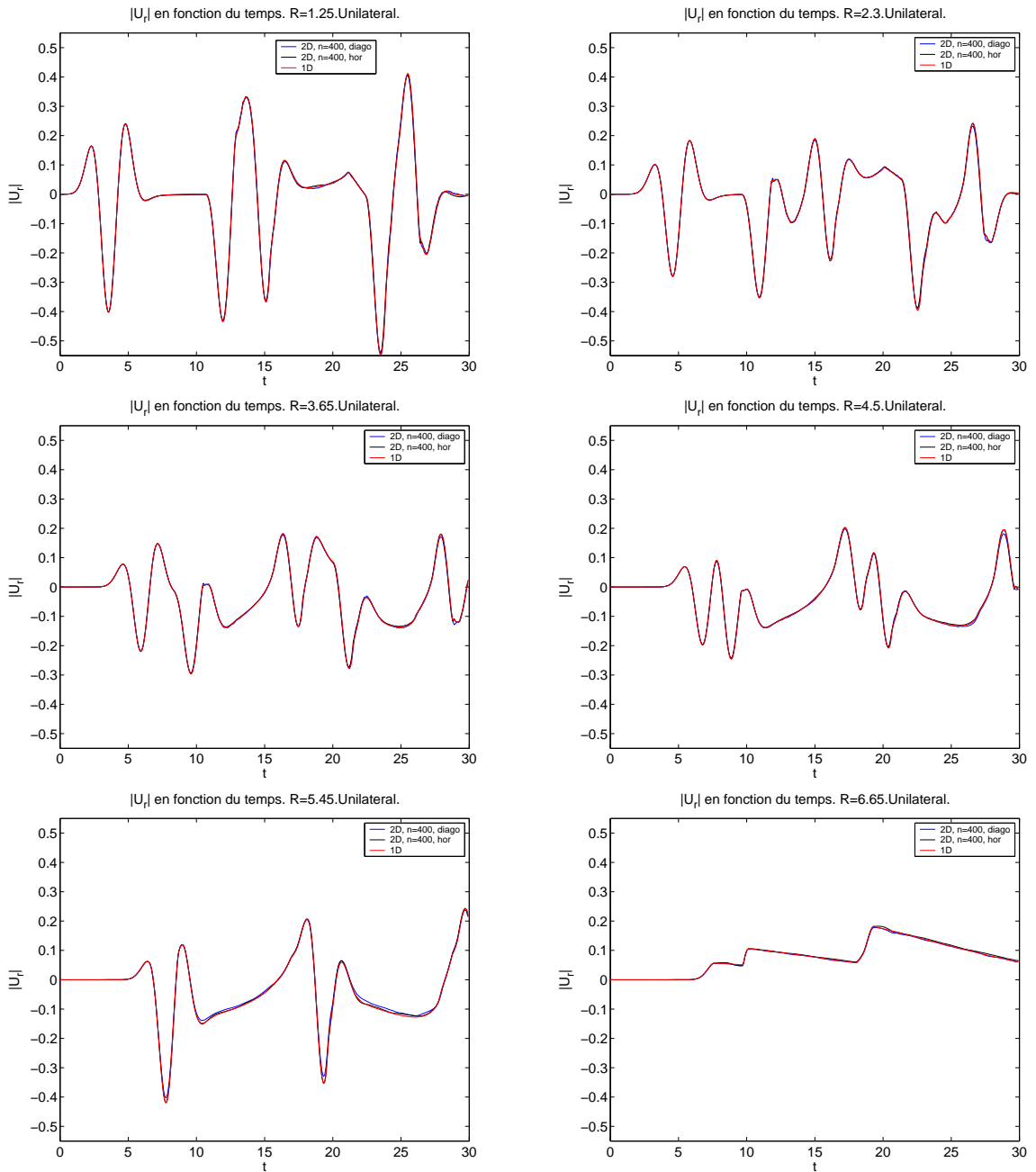
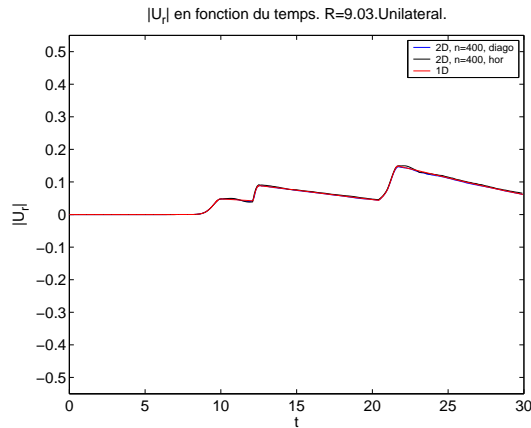


FIG. 6.51 – Déplacement radial, source extérieure. Points  $r = 1.25$  à  $6.65$


 FIG. 6.52 – Déplacement radial, source extérieure. Point  $r = 9.03$ 

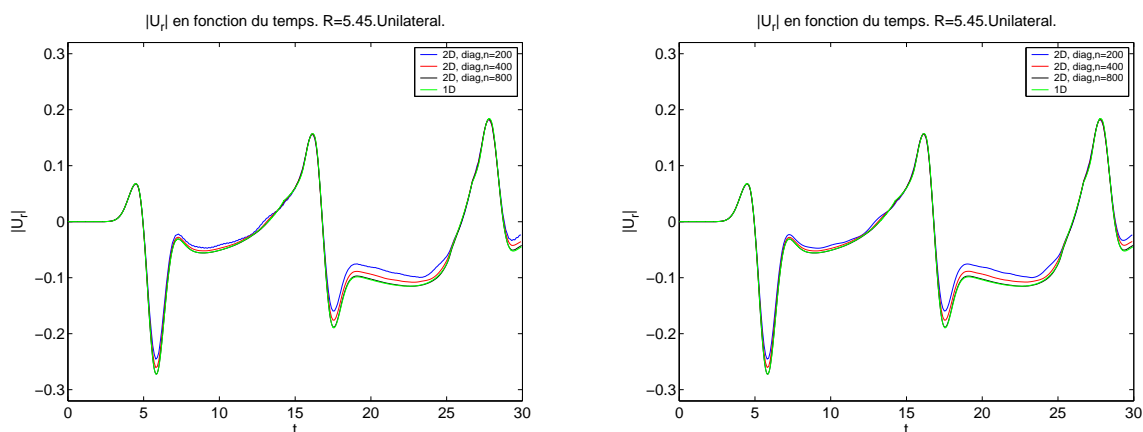
### 6.2.2.3 Étude numérique de la convergence

Dans cette partie, on présente des tests numériques de convergence de la méthode. Cela peut être intéressant, car, comme on l'a vu sur les figures 6.46 et 6.51, on observe quelques différences entre la solution de référence et la solution issue du code 2D, près de la fissure.

#### Tests de convergence

- Condition initiale positive

Étudions la convergence du problème 2D par rapport à la solution quasi-exacte donnée par le problème 1D. On raffine à la fois le maillage régulier et le maillage de la fissure. Les résultats 2D sont considérés ici pour les directions diagonale et horizontale. On présente, sur les figures 6.53, 6.54, le déplacement radial au point  $r = 5.45$  dans les directions diagonale (deux graphes haut) et horizontale, pour plusieurs discrétisations. Le résultat a été obtenu pour les deux schémas centré (à droite), décentré (à gauche). On voit, qu'en raffinant le maillage, les différences entre les deux simulations diminuent. On peut voir que, dans la direction diagonale, la convergence est plus lente que dans la direction horizontale. De plus, on ne voit pas de différence entre schéma implicite centré et schéma implicite décentré.


 FIG. 6.53 – Tests de convergence du déplacement radial, condition initiale positive, point  $r = 5.45$ . Direction diagonale. Schéma implicite décentré (gauche) et implicite centré

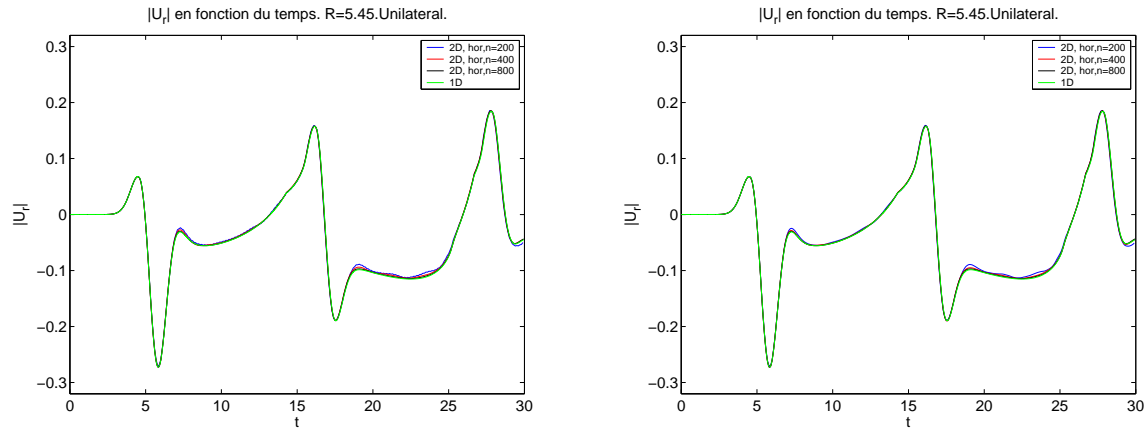


FIG. 6.54 – Tests de convergence du déplacement radial, condition initiale positive, point  $r = 5.45$ . Direction horizontale. Schéma implicite décentré (gauche) et implicite centré

• Source extérieure

Comme il existe quelques différences entre résultats 1D et 2D au point  $r = 5.45$  sur la figure 6.51, il est intéressant de raffiner le maillage pour tester la convergence en ce point. On raffine à la fois le maillage régulier et le maillage de la fissure. Sur la figure 6.55, on considère successivement 14, 28, 56 points par longueur d’onde. On voit que, plus on raffine le maillage, plus les différences diminuent, dans les deux directions. Remarquons que des oscillations apparaissent dans la direction horizontale en  $r = 5.45$ , pour  $n_i = 200$ . Ces oscillations disparaissent en raffinant le maillage. Elles disparaissent aussi si on utilise le schéma centré implicite. De plus, on peut voir, comme pour le cas de la condition initiale positive, que la solution converge plus lentement dans la direction diagonale que dans la direction horizontale.

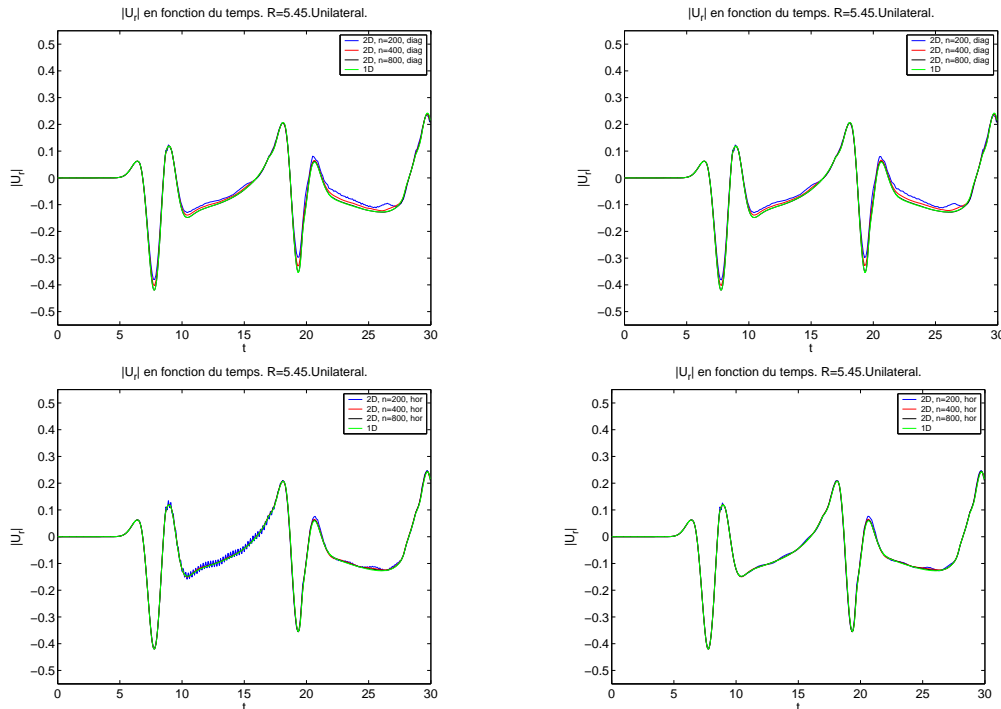


FIG. 6.55 – Tests de convergence du déplacement radial, source extérieure, point  $r = 5.45$ . En haut, direction diagonale. Schéma implicite décentré (gauche) et implicite centré

## Évaluation numérique de l'ordre des schémas

- Schéma décentré implicite

On étudie l'ordre de ce schéma par des tests numériques. On considère, à nouveau, l'exemple de la condition initiale positive, présenté auparavant. On étudie alors l'erreur relative entre la solution calculée par le code 2D avec le schéma décentré implicite et la solution quasi exacte, pour différentes simulations correspondant à des valeurs de  $n_i = n_j$  de 100 à 800.

Sur la figure 6.56, on représente l'erreur relative  $L^\infty(0,T)$  du schéma décentré implicite en plusieurs points de l'espace donnés, situés dans la direction diagonale. La figure 6.57 représente l'erreur relative  $L^\infty(0,T)$  dans la direction horizontale.

Sur toutes ces figures, on peut voir que le calcul converge car plus le pas de discrétisation diminue, plus l'erreur relative diminue. Dans les deux directions et pour les deux normes, la convergence semble linéaire, donc d'ordre un, sauf pour le point  $r = 5.45$ , point très proche de la fissure, où elle est différente des autres points et ne semble pas tout à fait linéaire.

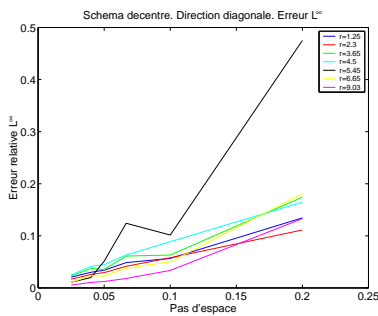


FIG. 6.56 – Norme  $L^\infty(0,T)$  de l'erreur relative Direction diagonale. Décentré

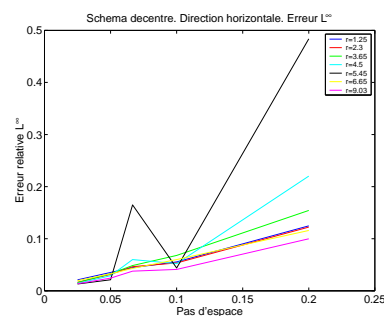


FIG. 6.57 – Norme  $L^\infty(0,T)$  de l'erreur relative Direction horizontale. Décentré

- Schéma centré implicite

On étudie l'ordre de ce schéma par des tests numériques, de la même manière que le schéma décentré implicite. On étudie alors l'erreur relative entre la solution calculée par le code 2D avec le schéma centré implicite et la solution quasi exacte, pour différentes simulations correspondant à des valeurs de  $n_i = n_j$  de 100 à 800.

Sur la figure 6.58, on représente l'erreur relative  $L^\infty(0,T)$ , du schéma centré implicite en plusieurs points donnés de l'espace, situés dans la direction diagonale. La figure 6.59 représente l'erreur relative  $L^\infty(0,T)$ , dans la direction horizontale. Sur toutes ces courbes, la convergence semble d'ordre un.

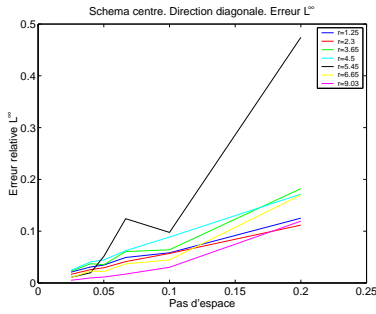


FIG. 6.58 – Norme  $L^\infty(0,T)$  de l'erreur relative Direction diagonale. Centré

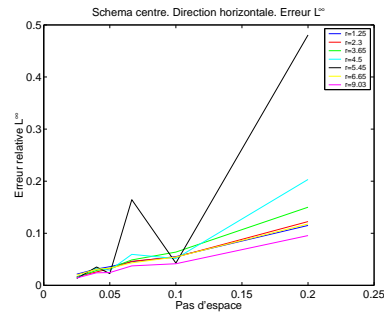


FIG. 6.59 – Norme  $L^\infty(0,T)$  de l'erreur relative Direction horizontale. Centré

La figure 6.60 compare l'erreur relative  $L^\infty(0,T)$  sur le multiplicateur des schémas centré et décentré, dans les deux directions horizontale et diagonale. L'erreur semble décroître à l'ordre un. La convergence du schéma centré semble un peu meilleure que celle du schéma décentré.

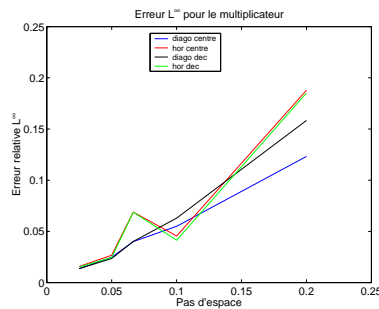


FIG. 6.60 – Norme  $L^\infty(0,T)$  de l'erreur relative Erreur sur le multiplicateur

L'ordre de convergence semble être un, quel que soit le schéma utilisé, centré ou décentré. En fait, il semble que c'est l'erreur due à la méthode des domaines fictifs qui l'emporte. Pour le multiplicateur, la convergence semble aussi linéaire, que le schéma soit centré ou décentré.

## 6.3 Tests du code 2D dans des situations générales

On présente, dans cette section, des exemples issus du code 2D, pour des cas plus complexes que ceux étudiés auparavant. Par une situation complexe, nous considérons des expériences pour lesquelles nous n'avons pas de solution explicite (comme par exemple pour le cas de la fissure droite infinie, considérée dans le paragraphe 6.2.1), ni de solution de référence 1D, que l'on peut facilement calculer (voir le paragraphe 6.2.2). On considère comme situation complexe d'abord le cas d'une fissure droite finie, parallèle au maillage, puis le cas d'une fissure droite inclinée par rapport au maillage (c'est l'exemple d'une fissure diagonale). Enfin, des résultats sont montrés pour des fissures singulières comportant un angle. Pour ce type de fissures, les éléments considérés sur le multiplicateur ont été modifiés, comme cela est décrit dans la section 5.2.4.

### 6.3.1 Fissure droite parallèle au maillage: comparaison entre la condition de surface libre et celle de contact unilatéral

On étudie désormais le cas d'une fissure verticale dans un milieu élastique homogène isotrope. Dans cette partie, on ne cherche pas à valider le code 2D, mais on donne des illustrations numériques.

On considère ici un domaine carré de côtés  $[0,20] \times [0,20]$ . La densité du milieu est  $\rho = 9000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le tenseur d'élasticité est

$$\mathbf{C} = 10^{11} \begin{pmatrix} 1.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \text{ Pa.}$$

Il est clair que le milieu est isotrope. On en déduit la valeur des coefficients de Lamé:  $\mu = 0.6 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\lambda = 0.4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ . La vitesse des ondes de pression est donc  $V_p = 4.2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$  et la vitesse des ondes de cisaillement est  $V_s = 2.6 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ .

Pour la discrétisation, on considère  $n_i = n_j = 400$  points en espace. Le pas d'espace sur le maillage est  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas d'espace sur le maillage de la fissure est  $H = 0.08$ , le pas de temps est  $\Delta t = 1.19 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . Le calcul est effectué jusqu'au temps  $t_t = 25.992 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . La fissure est une droite verticale issue du point  $(12.25, 4.08)$  jusqu'au point  $(12.25, 15.92)$ . Elle est discrétisée par  $n_f = 157$  points. La figure 6.61 précise la position de la fissure par rapport au maillage. La fissure coïncide avec le maillage, excepté les deux premiers points.

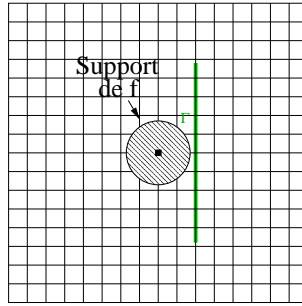


FIG. 6.61 – *Principe de l'expérience*

On considère des couches PML sur tous les côtés d'épaisseur  $10 h_x$ , de manière à simuler un domaine non borné. On impose une source extérieure centrée en  $(10,10)$ . On considèrera d'abord le cas d'une source de pression puis d'une source de cisaillement.

#### 6.3.1.1 Exemple d'une source de pression

On considère d'abord le cas d'une source de pression du même type que (6.23).

$$\mathbf{f}(t,x) = F(t) \vec{g}(\vec{r}) \text{ avec,}$$

$$F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 \exp(-\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2) (1 - 2\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 2t_0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \left(1 - \frac{|\vec{r}|^2}{a^2}\right)^3 1_a(|\vec{r}|) \text{ où } 1_a(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ et } \vec{r} = \begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix}.$$

On suppose ici  $a = 2$  et le nombre de points par longueur d'onde est 40. La fréquence  $f_0$  est définie par  $f_0 = V_p/40h_x$  et on a  $t_0 = 1/f_0$ . Donc, ici  $f_0 = 2100 \text{ Hz}$ . On suppose que les conditions initiales sont nulles:  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ .

Instantanés 2D représentant la norme du déplacement

On compare les conditions de surface libre et de contact unilatéral dans le cas d'une fissure droite. On examine d'abord, sur les figures 6.62, 6.63, 6.64, les instantanés 2D de la norme du déplacement. Dans le cas unilatéral, le déplacement est calculé par le schéma centré implicite (4.14). Comme dans les exemples précédents du problème invariant par translation et de la fissure circulaire, on peut voir qu'une partie du déplacement est transmise dans le cas unilatéral. Il est surprenant d'observer que, dans le cas unilatéral, la norme du déplacement réfléchi par la fissure est plus importante que celle du cas surface libre, alors que, dans le cas unilatéral, une partie de l'onde passe à travers la fissure. Cela est visible aux instants  $t = 1.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $1.7 \cdot 10^{-3}$ . On peut remarquer aussi, dans le cas unilatéral, que l'onde transmise est relativement constante en espace, on peut voir cela à partir de  $t = 1.3 \cdot 10^{-3}$ .

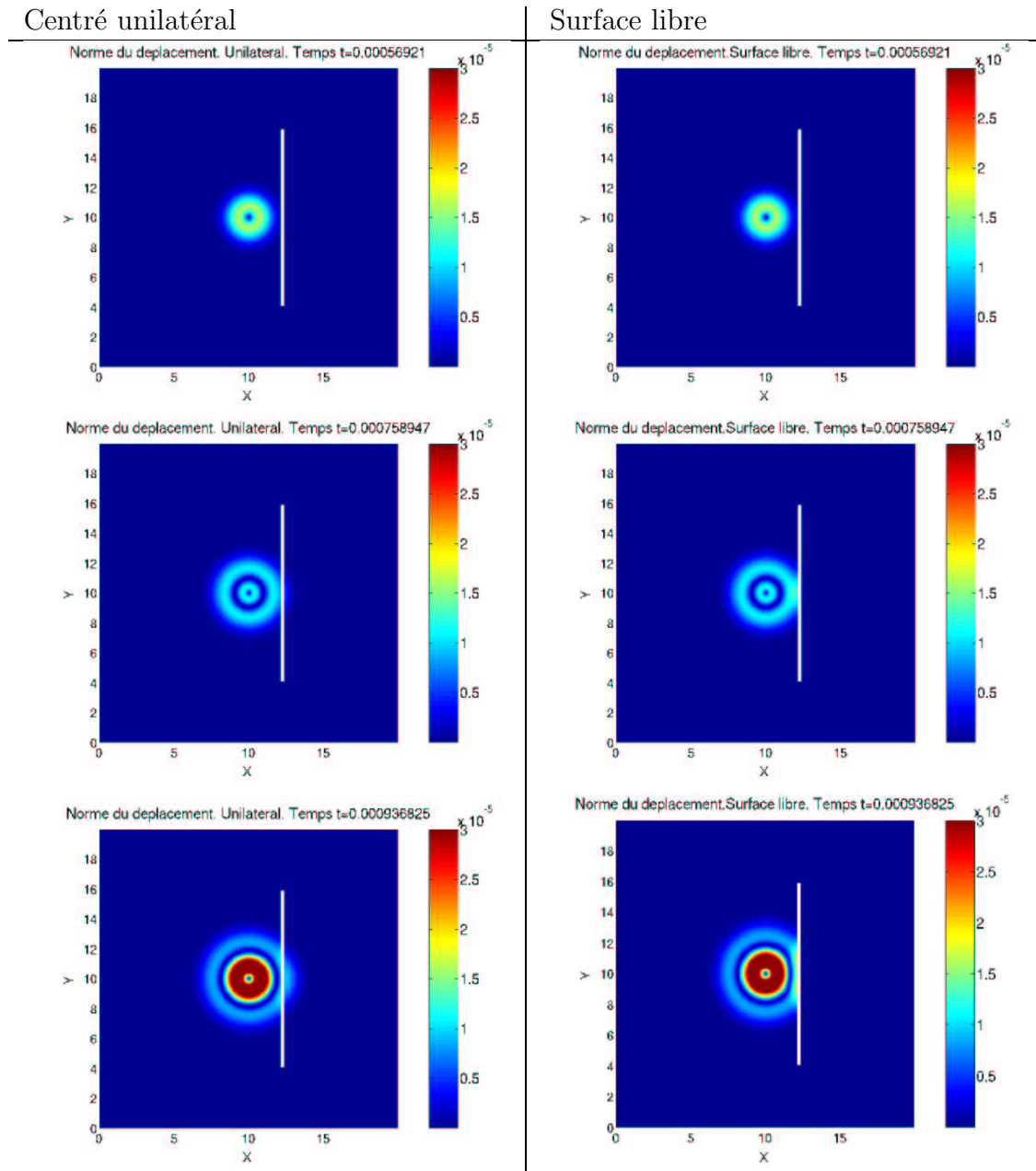


FIG. 6.62 – Comparaison de la norme du déplacement. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 0.5 \cdot 10^{-3}$  à  $0.9 \cdot 10^{-3}$

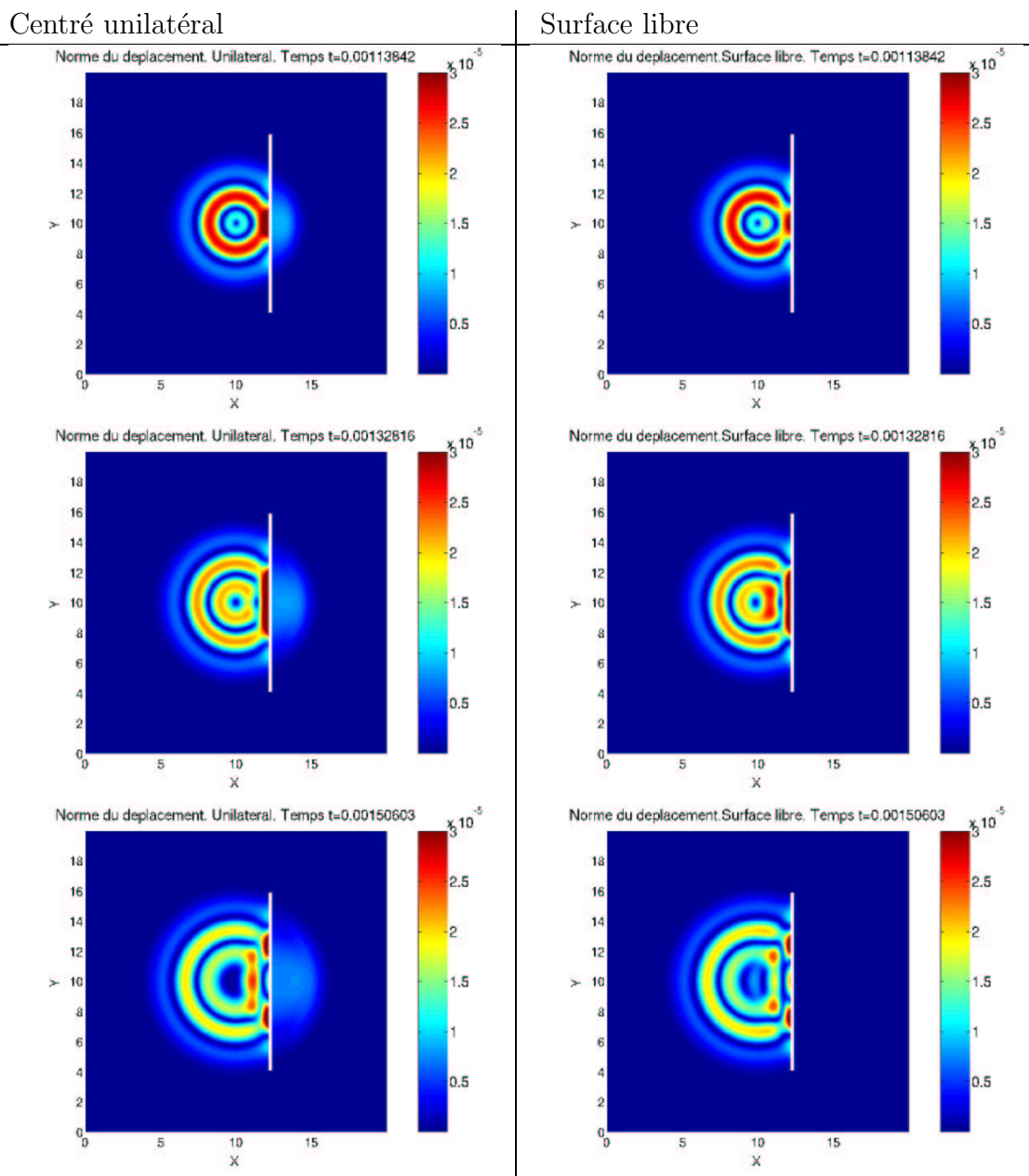


FIG. 6.63 – Comparaison de la norme du déplacement. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.1 \cdot 10^{-3}$  à  $1.5 \cdot 10^{-3}$



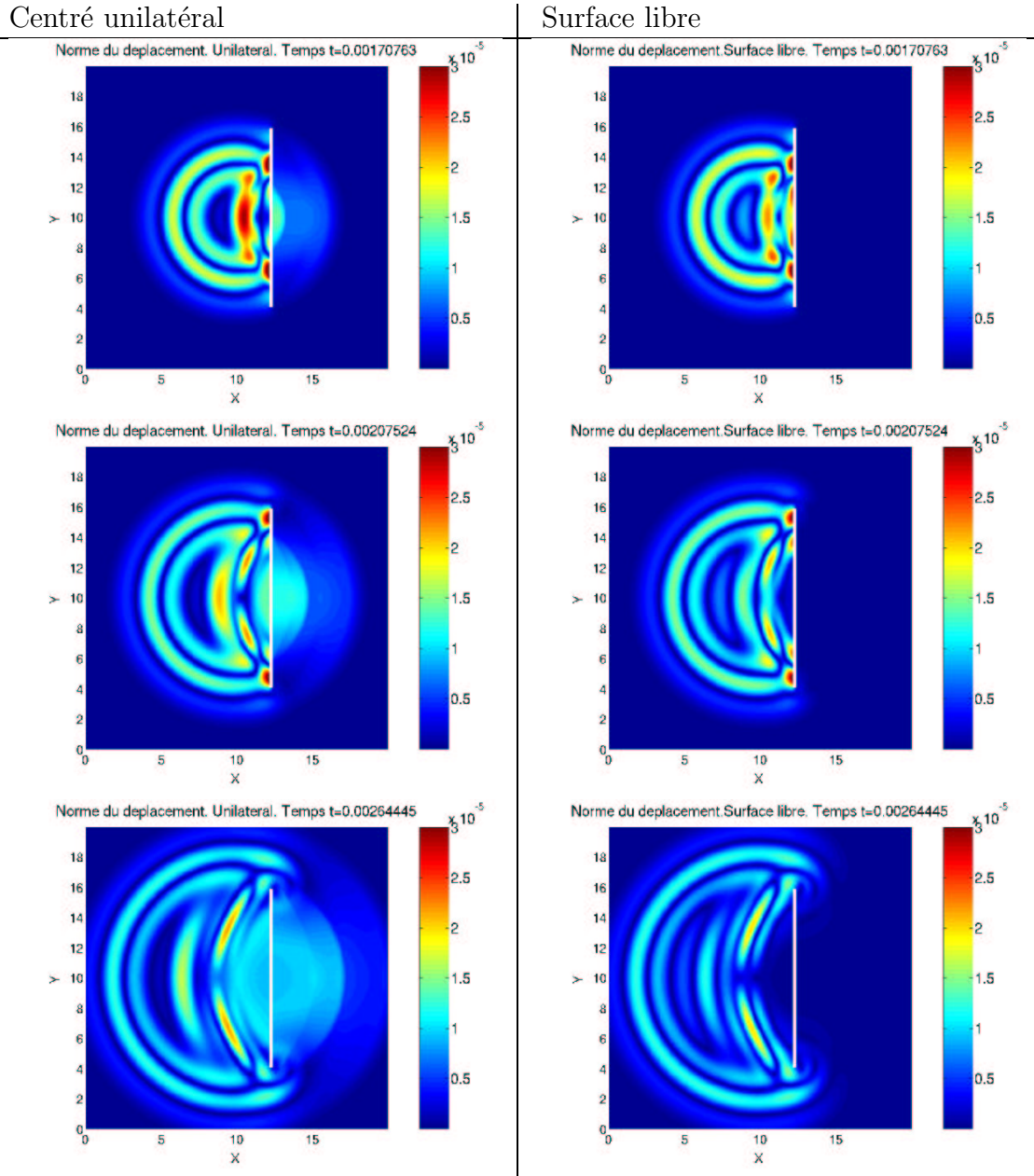


FIG. 6.64 – Comparaison de la norme du déplacement. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

### **Instantanés 2D représentant la norme de la vitesse**

Sur la figure 6.65, on compare la norme de la vitesse entre la condition de contact unilatéral et la condition de surface libre. Comme la vitesse n'est pas une inconnue de notre problème, on représente la vitesse discrète. Pour la condition de contact unilatéral, le schéma centré implicite est utilisé. On peut voir que, pour la source extérieure choisie, des oscillations apparaissent sur la vitesse aux instants  $t = 2.0 \cdot 10^{-3}, 2.6 \cdot 10^{-3}$  dans la direction orthogonale à la fissure passant par le centre de la fissure, alors qu'il n'y a pas d'oscillations dans le cas surface libre. On peut voir que, dans le cas unilatéral, seule une partie de l'onde est passée à travers la fissure. Il semble que, pour cet exemple, ce soit essentiellement une partie de l'onde de pression qui est transmise, comme nous allons le voir plus tard. La norme du déplacement qui est transmis par la fissure est relativement constante mais non nulle dans le cas unilatéral. Lorsque l'on fait afficher la norme de la vitesse, de la divergence ou du rotationnel, il semble que la partie constante disparaît.

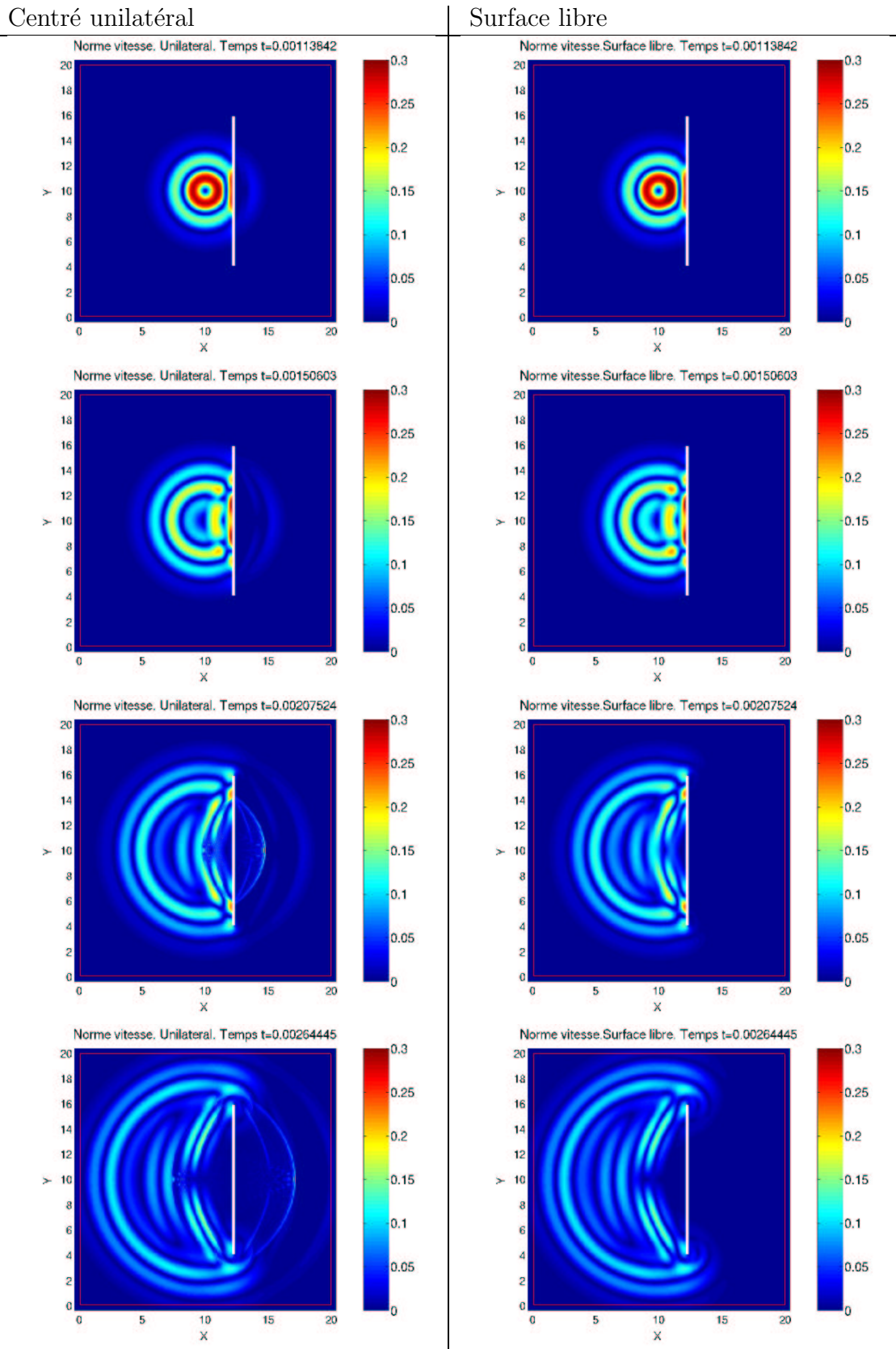


FIG. 6.65 – Comparaison de la norme de la vitesse. Contact unilatéral (à gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.1 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

### Instantanés 2D représentant la norme de la divergence

Sur la figure 6.66, on présente une comparaison entre les deux conditions aux limites pour la norme de la divergence. La norme de la divergence caractérise la présence des ondes de pression. On peut voir, sur les trois instants choisis, qu'une partie de l'onde de pression est transmise dans le cas unilatéral, alors que cette partie est réfléchiée dans le cas surface libre. Excepté cette partie transmise, on observe, pour les deux conditions, les mêmes réflexions.

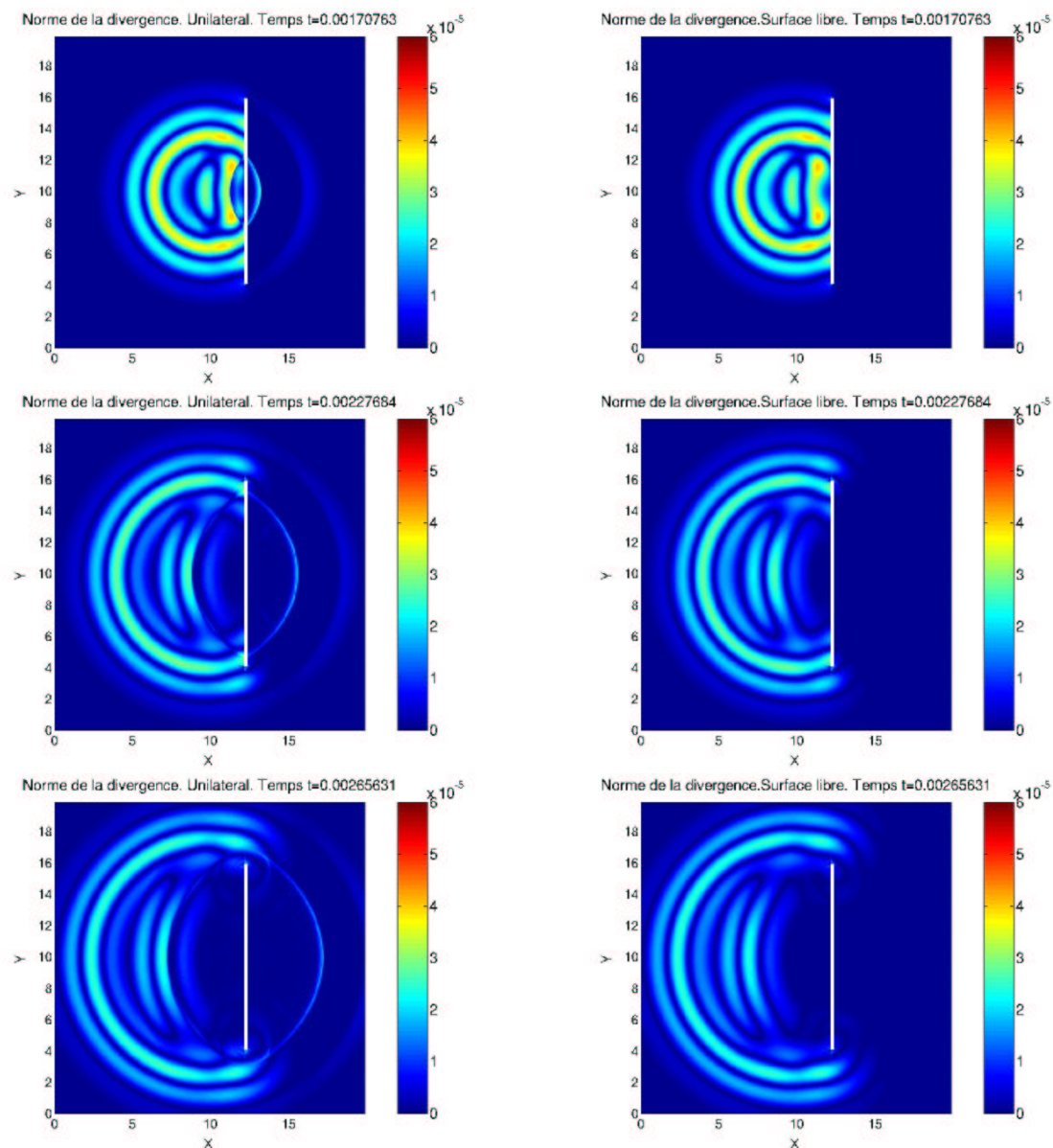


FIG. 6.66 – Comparaison de la norme de la divergence. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 2.7 \cdot 10^{-3}$

Instantanés 2D représentant le rotationnel

Sur la figure 6.67, on compare le rotationnel entre la condition de surface libre et celle de contact unilatéral. Le rotationnel caractérise la présence des ondes de cisaillement. On peut voir, sur les trois instants choisis, qu’une onde de cisaillement est transmise dans le cas unilatéral, alors qu’elle est réfléchiée dans le cas surface libre. Une onde circulaire apparaît sur chaque pointe de fissure, pour les deux conditions. Cette onde se propage vers le centre de la fissure. On peut voir que cette onde est relativement semblable selon les deux conditions aux limites.

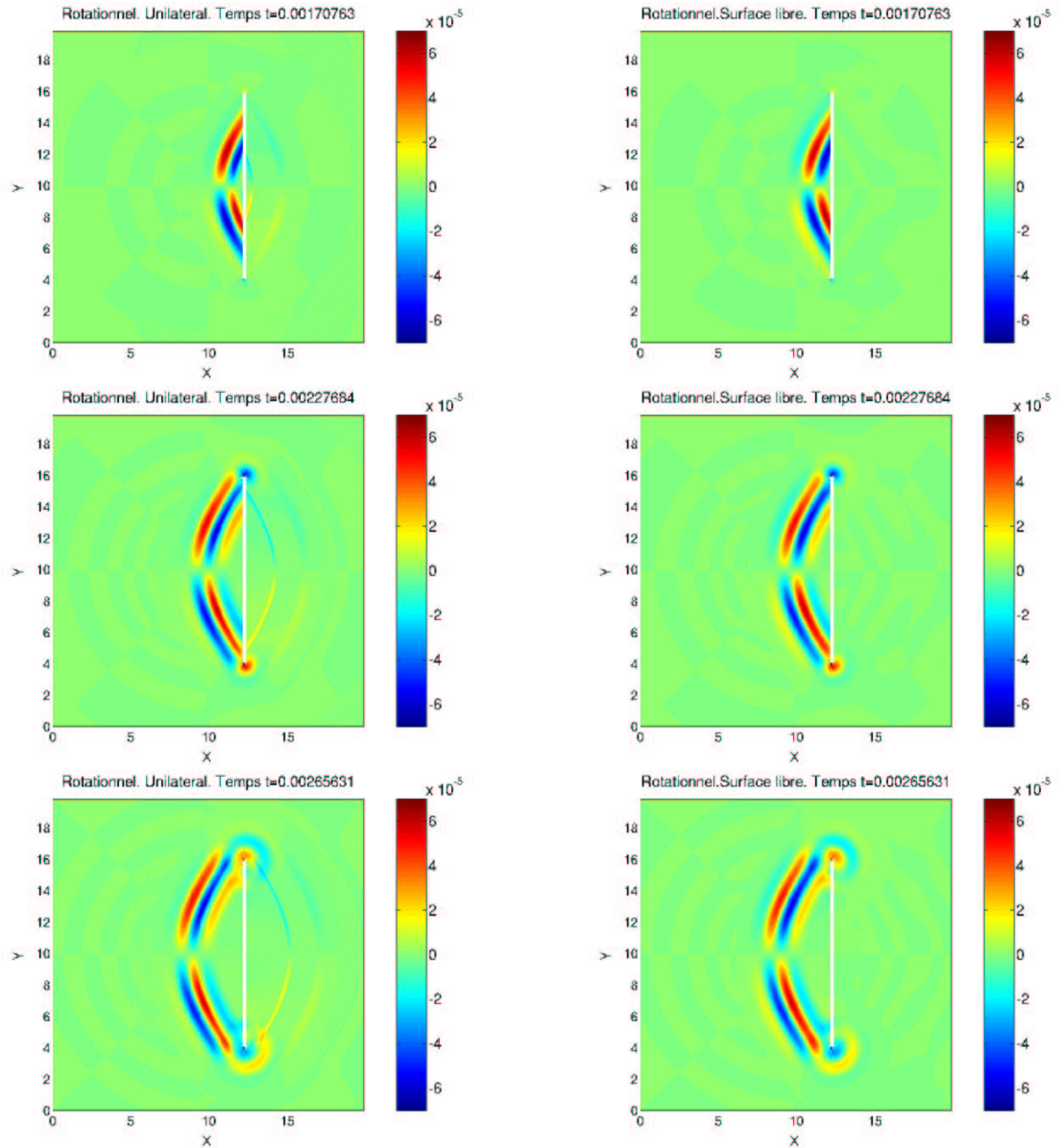


FIG. 6.67 – Comparaison du rotationnel. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 2.7 \cdot 10^{-3}$



Instantanés 2D représentant la contrainte  $\sigma_N$

Sur la figure 6.68, on montre une comparaison entre la contrainte  $\sigma_N = \sigma_{xx}$  calculée pour la condition de contact unilatéral (après un post-traitement qui sera expliqué plus tard) et celle calculée pour la condition de surface libre. De plus, si on compare les contraintes selon les conditions aux limites, on peut voir qu'il existe relativement peu de différences entre contact unilatéral et surface libre. Les réflexions sont relativement identiques, mais une partie de l'onde est transmise dans le cas unilatéral.

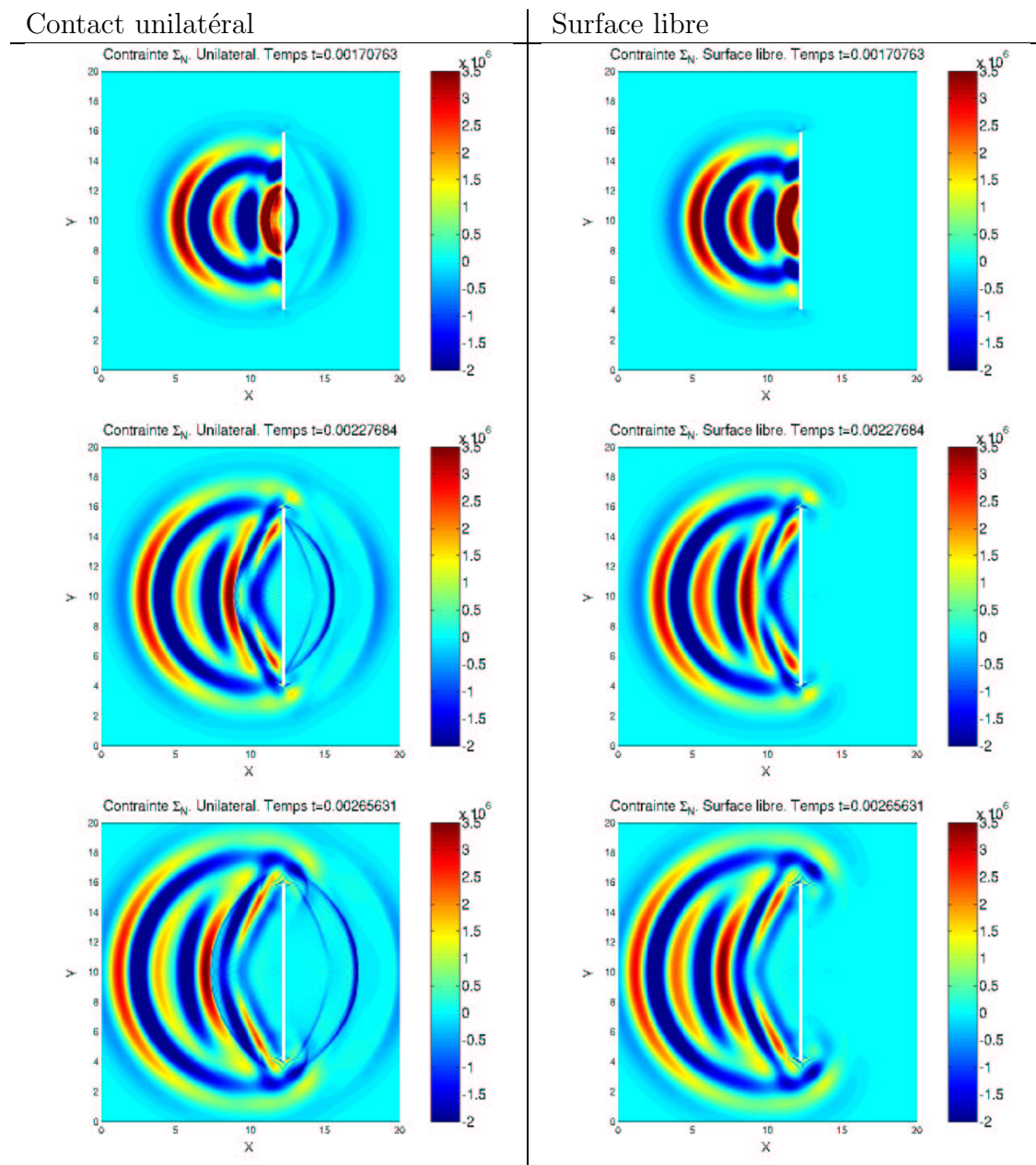


FIG. 6.68 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (après post-traitement). Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.7 \cdot 10^{-3}$

### Transmission d'énergie

Pour mieux comprendre pourquoi le déplacement réfléchi a une amplitude plus importante que dans le cas surface libre (voir figs.6.63, 6.64), sans pour autant en donner une explication définitive, on observe, sur la figure 6.69, la comparaison entre l'énergie discrète réfléchie par la fissure et l'énergie discrète transmise par la fissure, pour des données identiques au problème présenté dans la section 6.3.1, avec contact unilatéral, mais pour une fissure quasi infinie (pour simplifier, car cela permet de mieux identifier ce qui est transmis par la fissure). L'énergie transmise a une amplitude faible, de l'ordre de 4% de la valeur de l'énergie totale. Dans le cas surface libre, l'énergie transmise est nulle. Le cas considéré ici est celui d'une source extérieure ( $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ ), il est normal que l'énergie discrète ne soit pas constante.

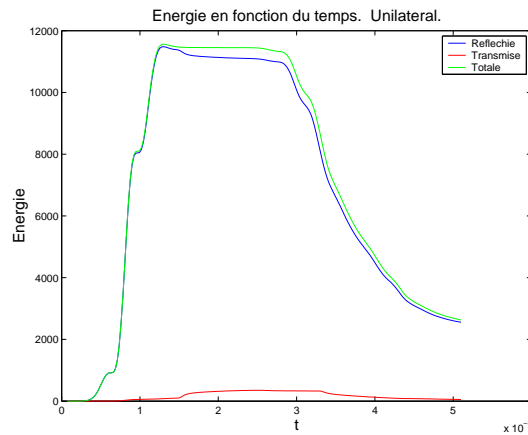


FIG. 6.69 – *Comparaison énergie réfléchie et énergie transmise par la fissure*

Évolution des multiplicateurs au cours du temps

On observe ensuite sur les figures 6.70, 6.71, les composantes normale et tangentielle du multiplicateur, calculées pour la condition de contact unilatéral comparées à celles du cas surface libre. On observe une bonne symétrie pour les deux multiplicateurs: le multiplicateur  $\lambda_N$  est symétrique par rapport au milieu de la fissure, alors que  $\lambda_T$  est antisymétrique.  $\lambda_N$  est positif (courbe bleue), dans le cas unilatéral. Le multiplicateur  $\lambda_T$  est identique pour les deux conditions aux limites. On voit apparaître quelques oscillations au centre de la fissure pour  $\lambda_T$  (pour  $t \geq 2.10^{-3}$ ). L'allure des courbes  $\lambda_N$  et  $\lambda_T$  aux extrémités de la fissure est surprenante aux instants  $t \geq 1.66.10^{-3}$  et semble peu réaliste (surtout pour  $\lambda_T$ ). Le nombre de points sur la fissure est peut-être insuffisant.

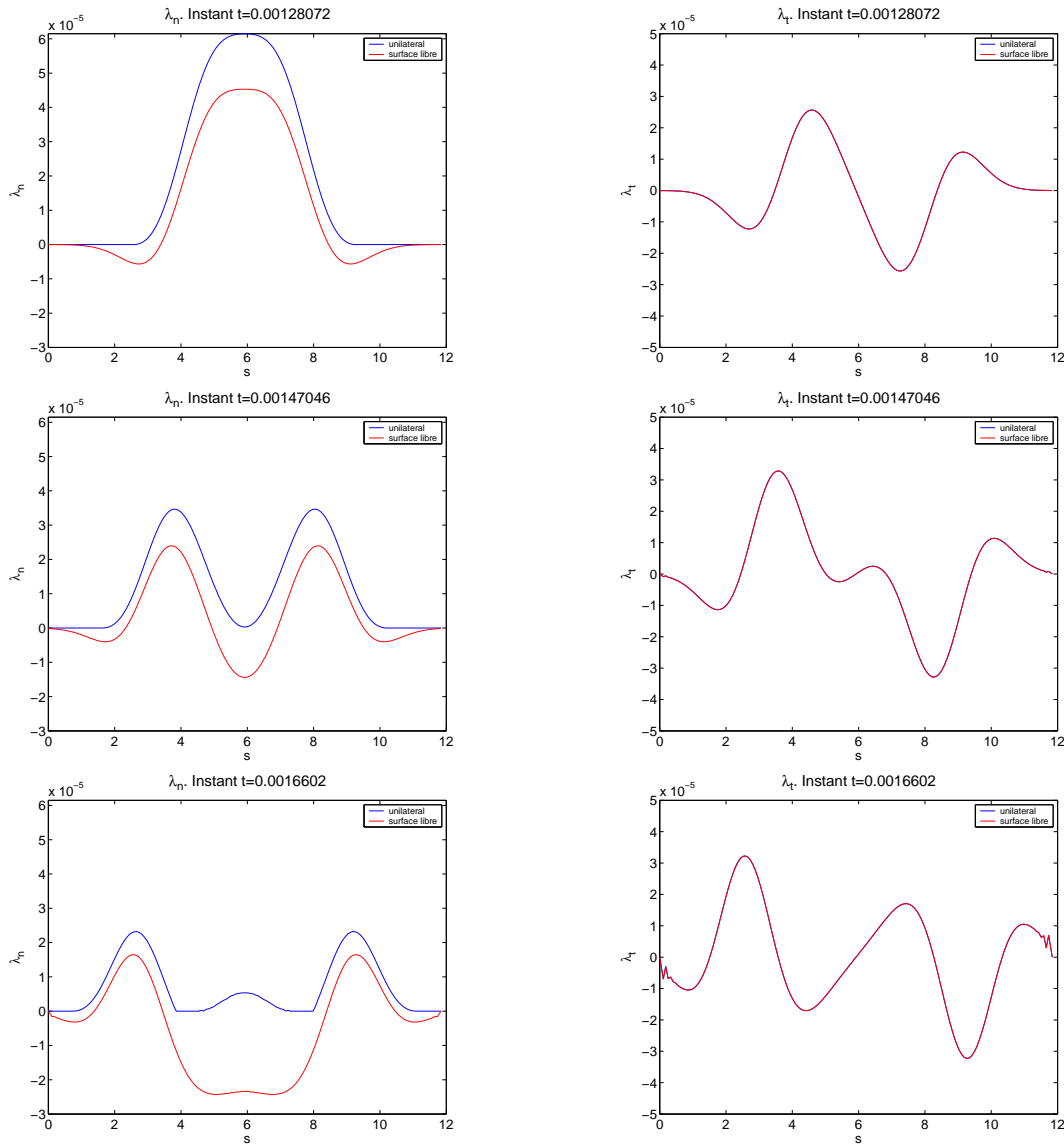


FIG. 6.70 – Comparaison des multiplicateurs  $\lambda_N$  (à gauche) et  $\lambda_T$ . Fissure droite. Instants  $t = 1.2 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$



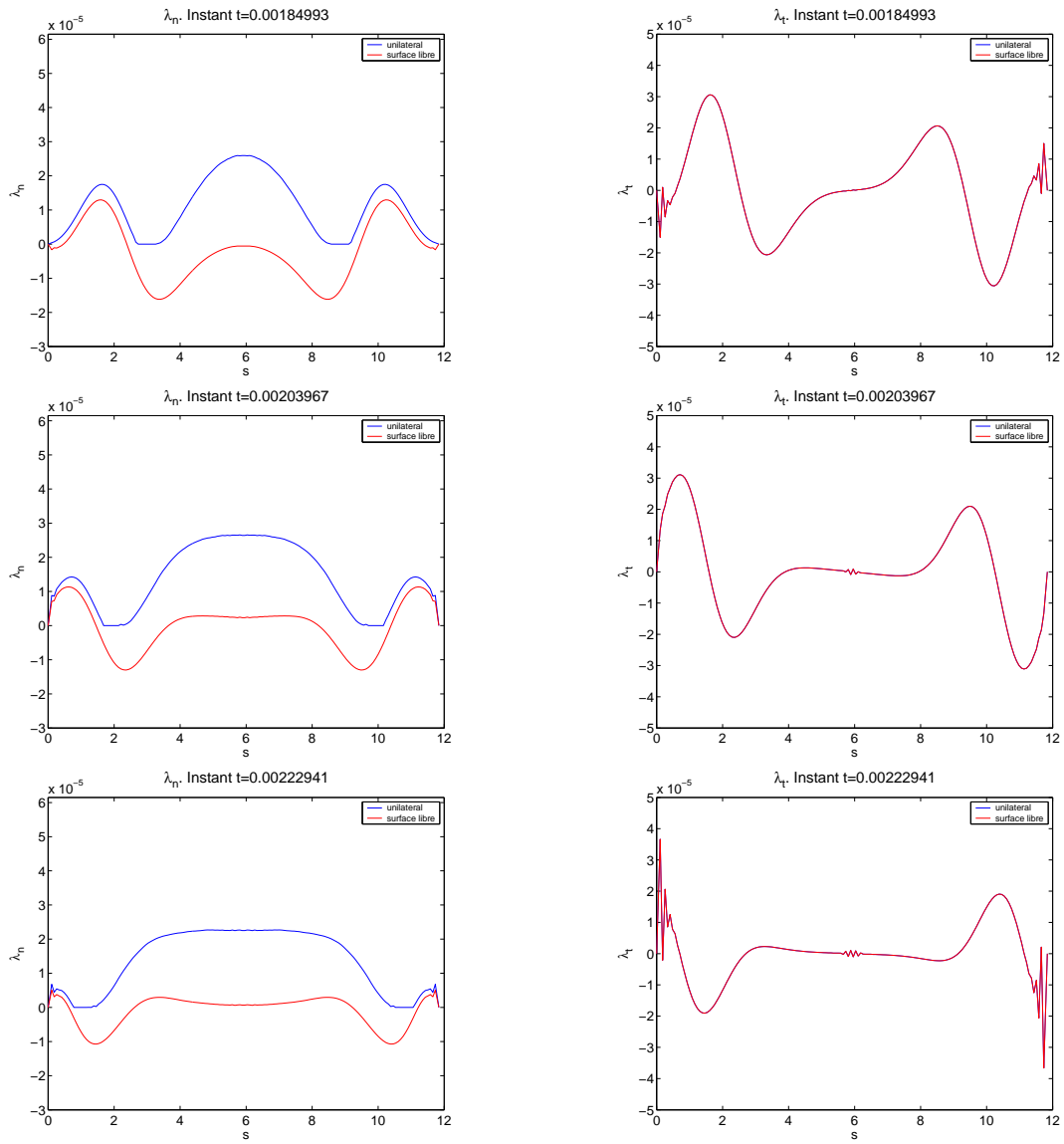


FIG. 6.71 – Comparaison des multiplicateurs  $\lambda_N$  (à gauche) et  $\lambda_T$ . Fissure droite. Instants  $t = 1.8 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 2.2 \cdot 10^{-3}$

### Tests de convergence pour les multiplicateurs

On observe ensuite un test de convergence sur les multiplicateurs, sur les figures 6.72, 6.73. On raffine à la fois le maillage de la fissure et le maillage du carré. On observe d'abord  $\lambda_N$  puis  $\lambda_T$ . Pour  $n_f = 77$  ( $n_f$ =nombre de points intérieurs de la fissure),  $\lambda_N$  et  $\lambda_T$  n'ont pas convergé. Les tests de convergence montrent que  $\lambda_N$  a convergé pour  $n_f = 156$ . Pour  $\lambda_T$ , on peut voir que les oscillations situées au milieu de la fissure ont disparu (pour  $n_f = 314$ ). Plus on raffine, plus  $\lambda_T$  s'approche de 0 aux extrémités de la fissure. Néanmoins, le comportement de  $\lambda_T$  en bouts de fissure demeure surprenant à cause de la présence d'oscillations.

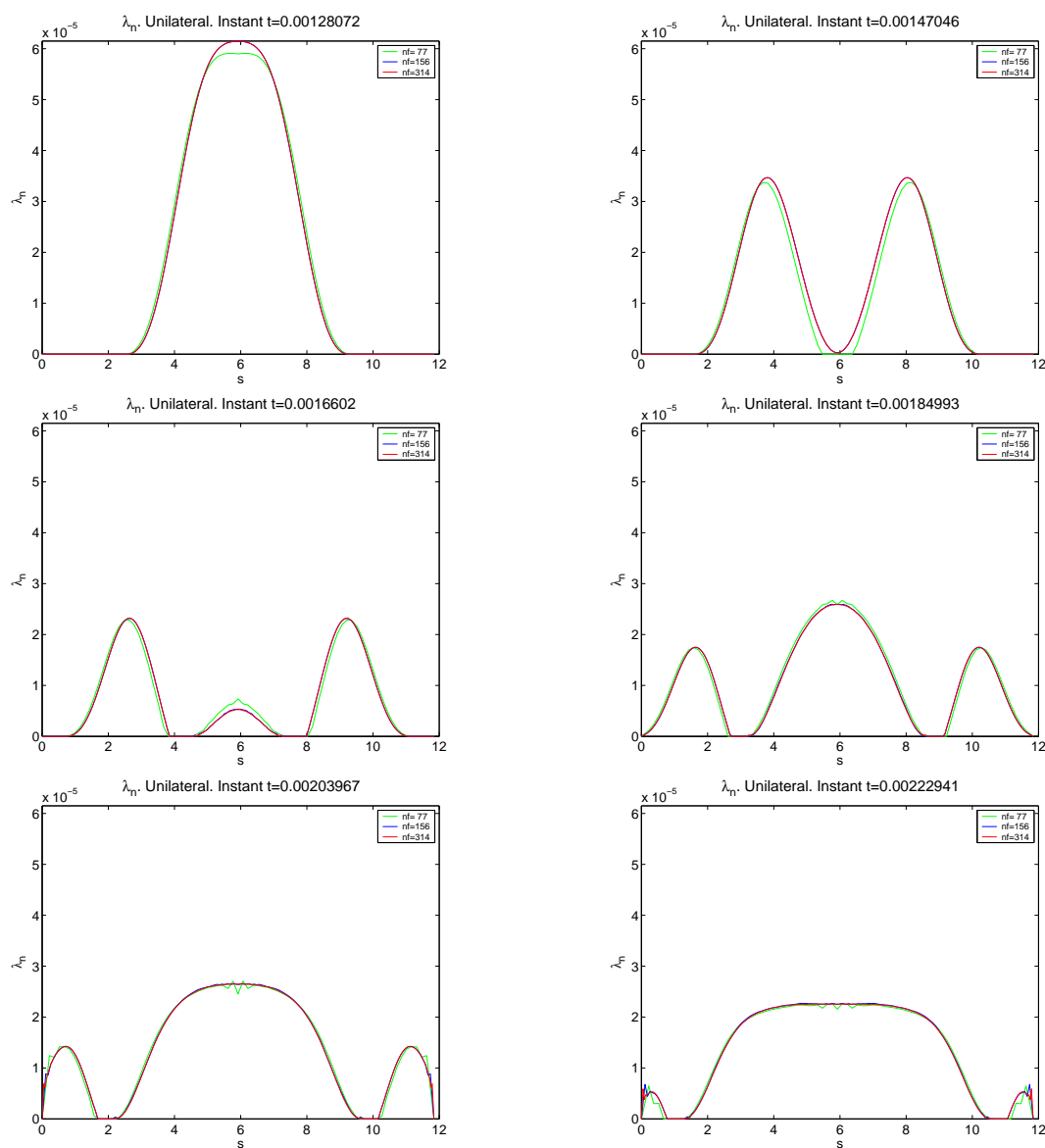


FIG. 6.72 – Tests de convergence pour  $\lambda_N$ . Cas unilatéral. Fissure droite. Instants  $t = 1.2 \cdot 10^{-3}$  à  $2.2 \cdot 10^{-3}$

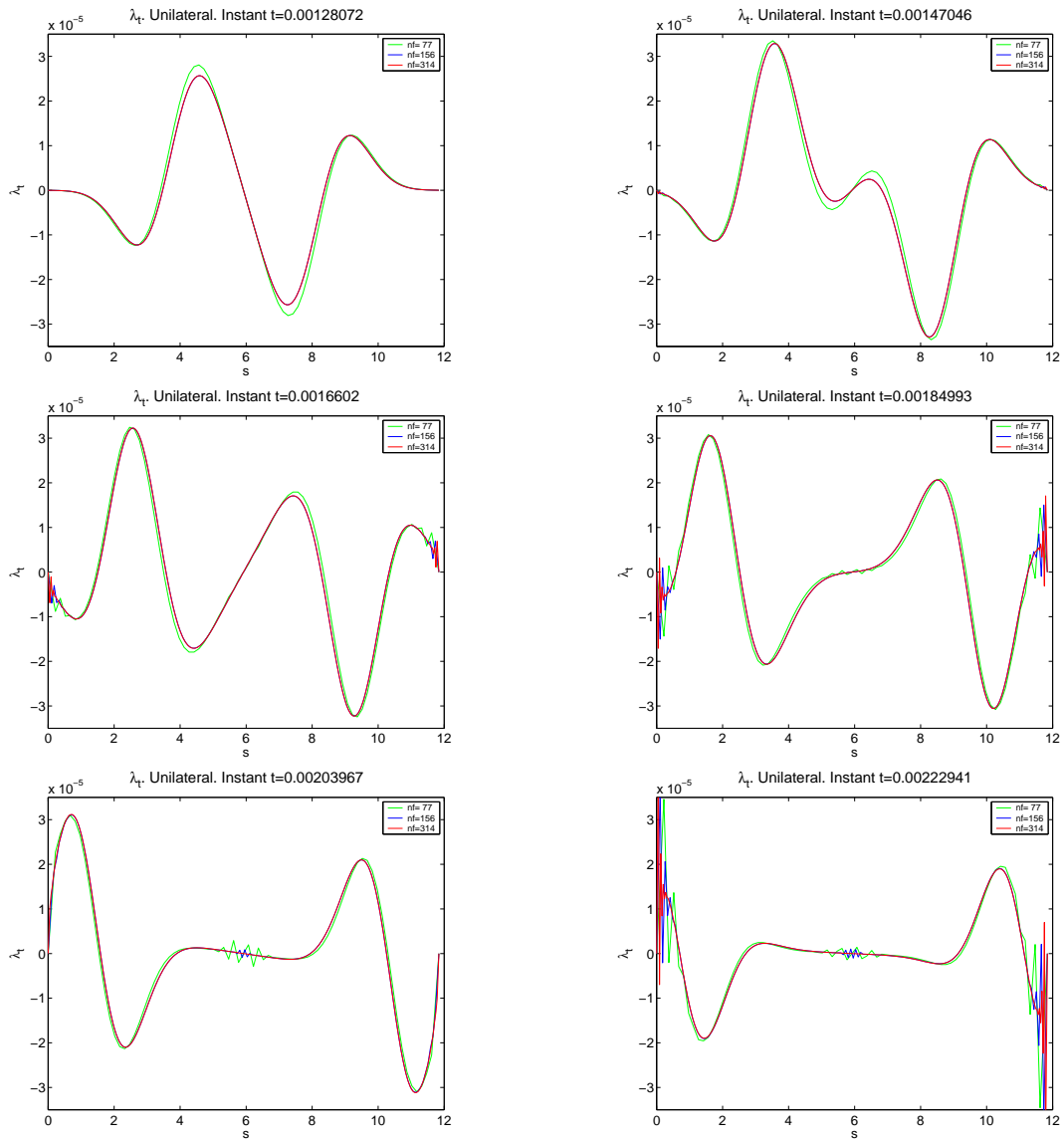


FIG. 6.73 – Tests de convergence pour  $\lambda_T$ . Cas surface libre et unilatéral. Fissure droite. Instants  $t = 1.2 \cdot 10^{-3}$  à  $2.2 \cdot 10^{-3}$

### 6.3.1.2 Exemple d'une source de cisaillement

On impose une source extérieure centrée en (10,10) du même type que (6.23). On considère ici le cas d'une source de cisaillement.

$$\mathbf{f}(t,x) = F(t) \vec{g}(\vec{r}) \text{ avec,} \tag{6.24}$$

$$F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 \exp(-\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2) (1 - 2\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2), & \text{si } 0 \leq t \leq 2t_0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}^\perp}{|\vec{r}^\perp|} \left(1 - \frac{|\vec{r}^\perp|^2}{a^2}\right)^3 1_a(|\vec{r}^\perp|) \text{ où } 1_a(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ et } \vec{r}^\perp = \begin{pmatrix} y - y_S \\ -(x - x_S) \end{pmatrix}.$$

On suppose ici  $a = 2$  et le nombre de points par longueur d'onde est 40. La fréquence  $f_0$  est définie par  $f_0 = V_p/40h_x$  et on a  $t_0 = 1/f_0$ . Donc, on a ici  $f_0 = 2100 \text{ Hz}$ . On suppose que les conditions initiales sont nulles:  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ .

On montre sur les figures 6.74, 6.75, une comparaison entre la condition aux limites de surface libre et celle de contact unilatéral. Les remarques citées pour l'exemple de la source de pression demeurent valables ici. Une partie du déplacement est transmise dans le cas unilatéral. D'autre part, on peut remarquer que la solution du problème unilatéral n'est plus symétrique pour l'exemple considéré ici, alors qu'elle l'est pour la condition de surface libre. La solution du problème unilatéral est symétrique pour l'exemple de la source de pression (voir figs 6.62, 6.63, 6.64). Pour la condition unilatérale, l'onde est d'abord transmise au niveau de la partie supérieure de la fissure. Ensuite, la transmission a aussi lieu sur la partie inférieure.

Instantanés 2D représentant la norme du déplacement

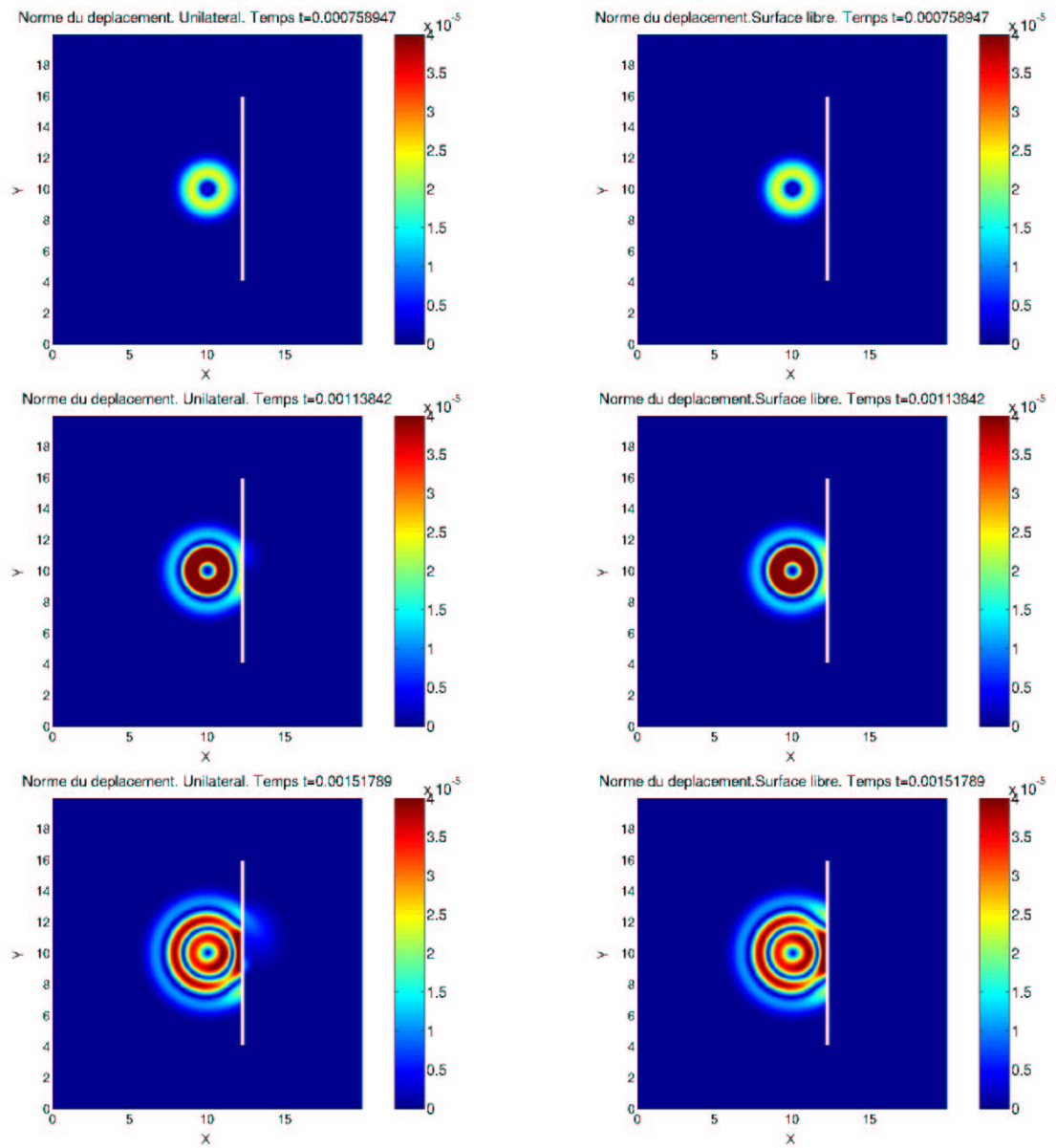


FIG. 6.74 – Comparaison de la norme du déplacement. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 0.7 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 1.5 \cdot 10^{-3}$

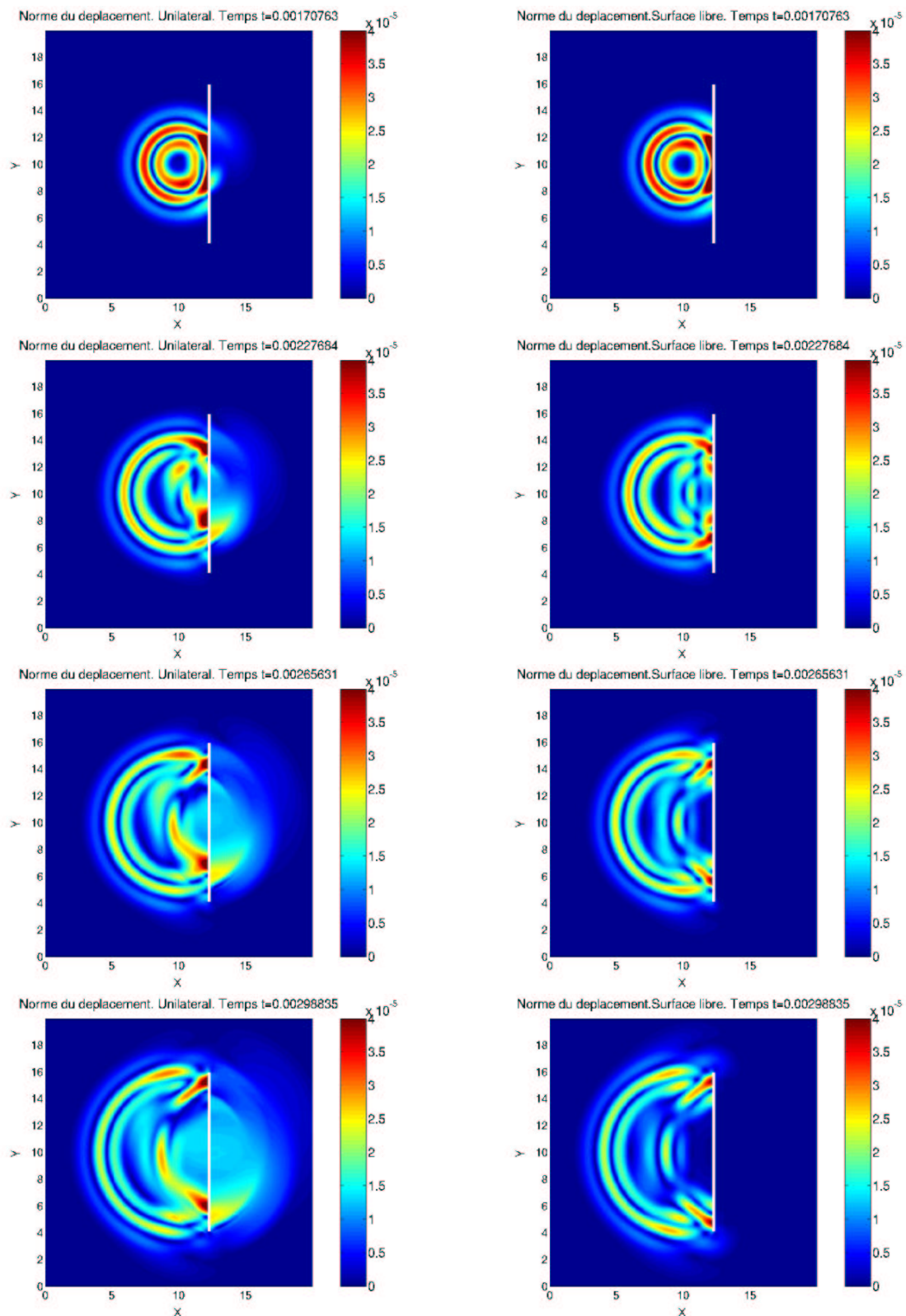


FIG. 6.75 – Comparaison de la norme du déplacement. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 3.0 \cdot 10^{-3}$

Instantanés 2D représentant la norme de la divergence

Sur la figure 6.76, on présente une comparaison entre les deux conditions aux limites pour la norme de la divergence. La norme de la divergence caractérise la présence des ondes de pression. On peut voir, en  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}, 2.2 \cdot 10^{-3}, 2.6 \cdot 10^{-3}$ , qu'une partie de l'onde de pression est transmise dans le cas unilatéral, alors que cette partie est réfléchiée dans le cas surface libre. Excepté cette partie transmise, on observe, pour les deux conditions, les mêmes réflexions.

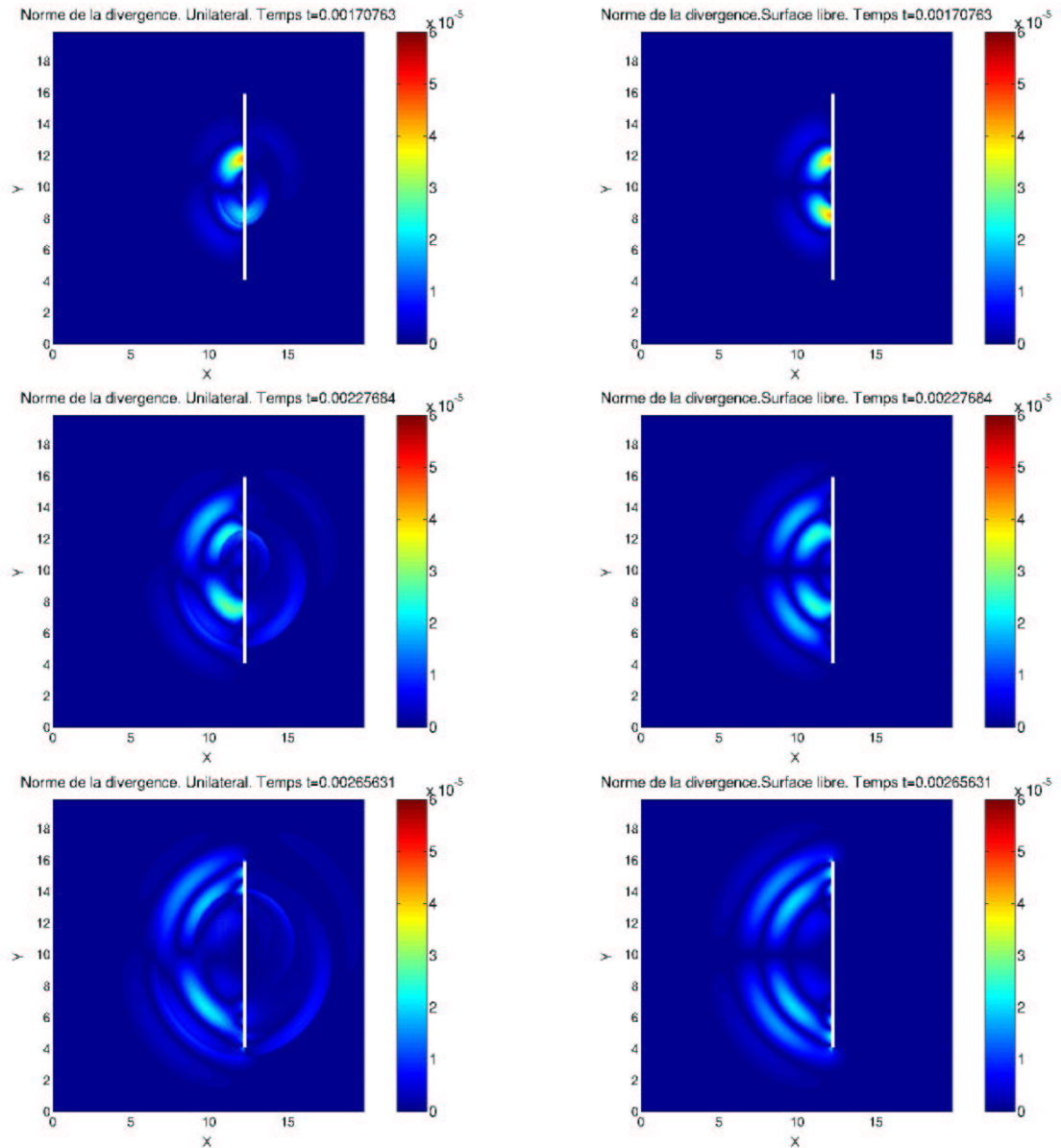


FIG. 6.76 – Comparaison de la norme de la divergence. Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.7 \cdot 10^{-3}$

### Instantanés 2D représentant le rotationnel

Sur la figure 6.77, on compare le rotationnel entre la condition de surface libre et celle de contact unilatéral. Le rotationnel caractérise la présence des ondes de cisaillement. On peut voir, en  $t = 2.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $2.6 \cdot 10^{-3}$ , qu'une partie de l'onde de cisaillement est transmise dans le cas unilatéral, alors qu'elle n'apparaît pas dans le cas surface libre.

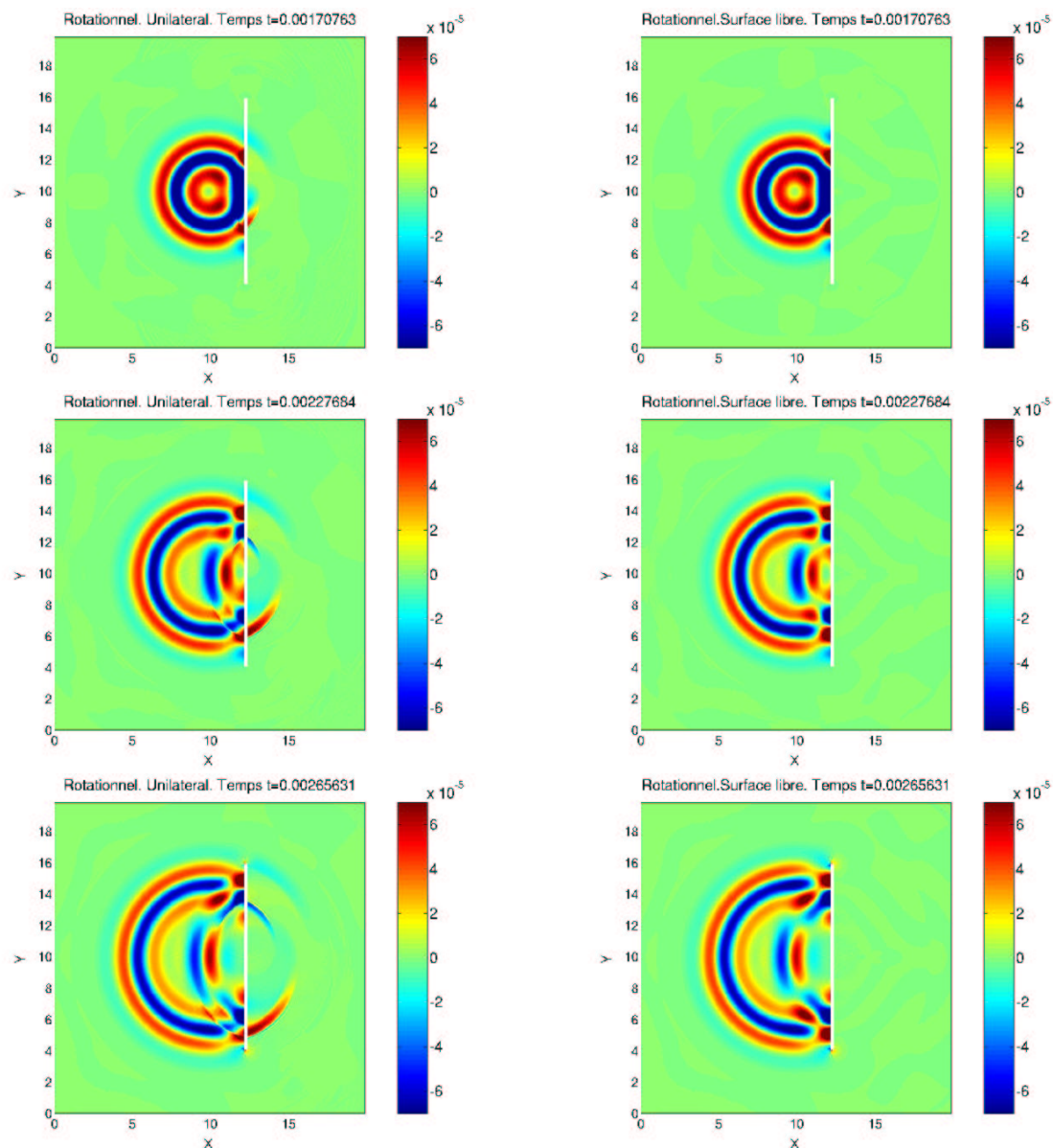


FIG. 6.77 – Comparaison du rotationnel. Contact unilatéral (gauche) et surface libre (droite). Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.7 \cdot 10^{-3}$



Instantanés 2D représentant la contrainte  $\sigma_N$

Sur la figure 6.78, on montre une comparaison entre la contrainte  $\sigma_N = \sigma_{xx}$  calculée pour la condition de contact unilatéral (après un post-traitement qui sera expliqué plus tard) et celle calculée pour la condition de surface libre. On peut voir qu'il existe relativement peu de différences entre contact unilatéral et surface libre. Les réflexions sont relativement les mêmes, mais une partie de l'onde est transmise pour la condition unilatérale. De plus, on remarque une perte de symétrie de la solution du problème unilatéral, ce qui n'est pas le cas pour l'exemple de la source de pression (voir fig. 6.68).

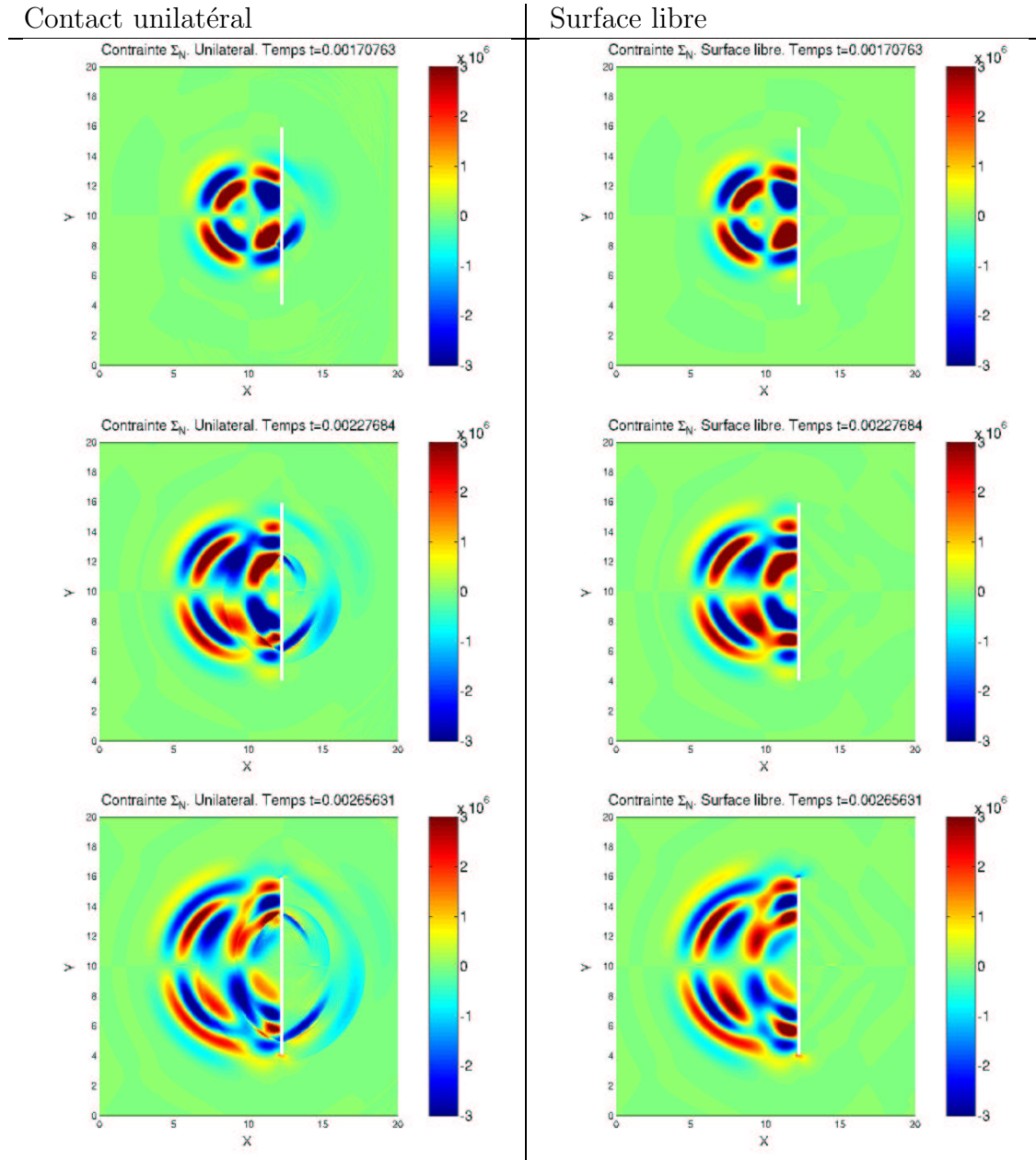


FIG. 6.78 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (après post-traitement). Contact unilatéral (gauche) et surface libre. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.7 \cdot 10^{-3}$

Évolution des multiplicateurs au cours du temps

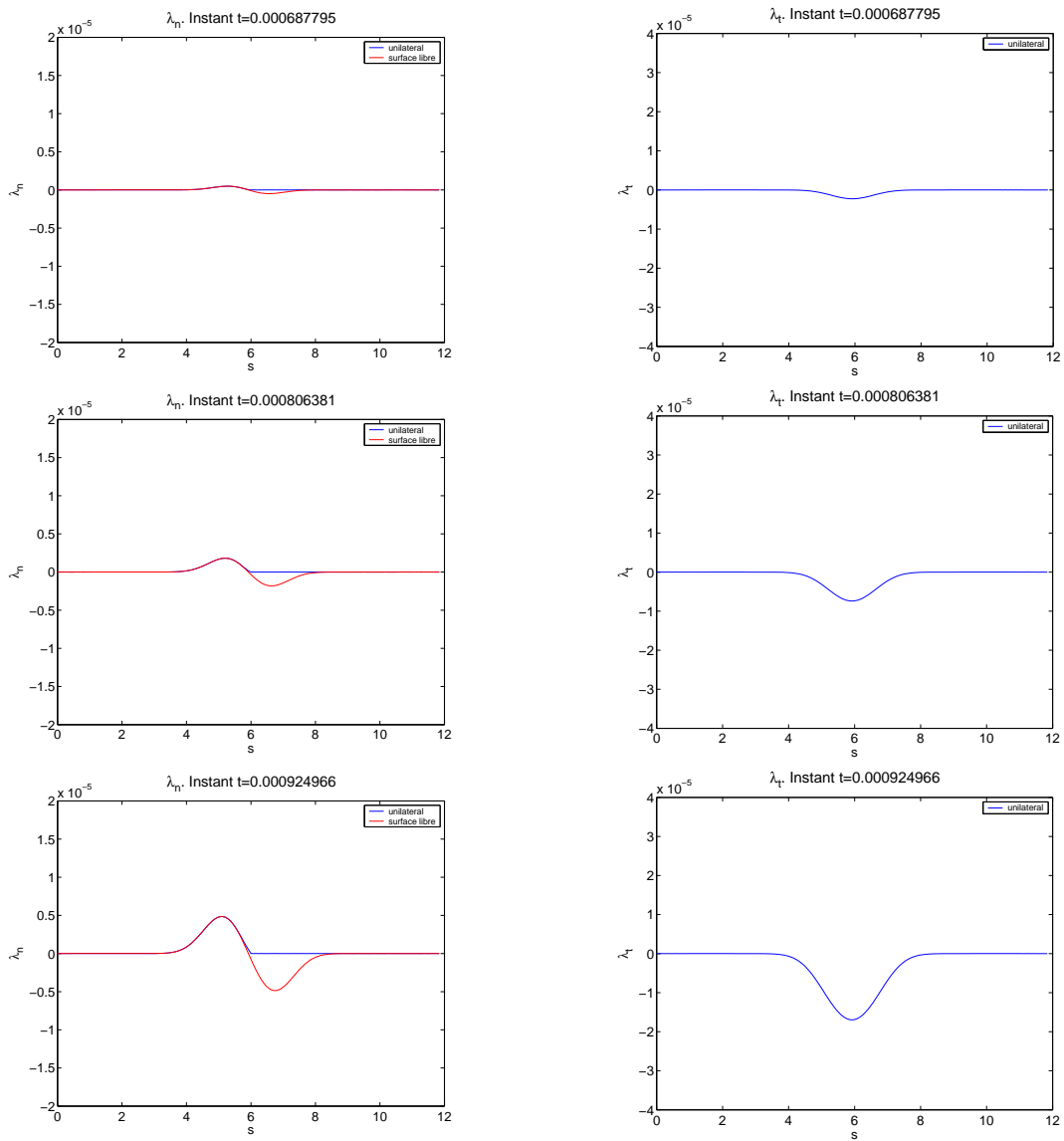


FIG. 6.79 – Comparaison des multiplicateurs  $\lambda_N$  (à gauche) et  $\lambda_T$ . Fissure droite. Instants  $t = 0.710^{-3}$  à  $0.910^{-3}$

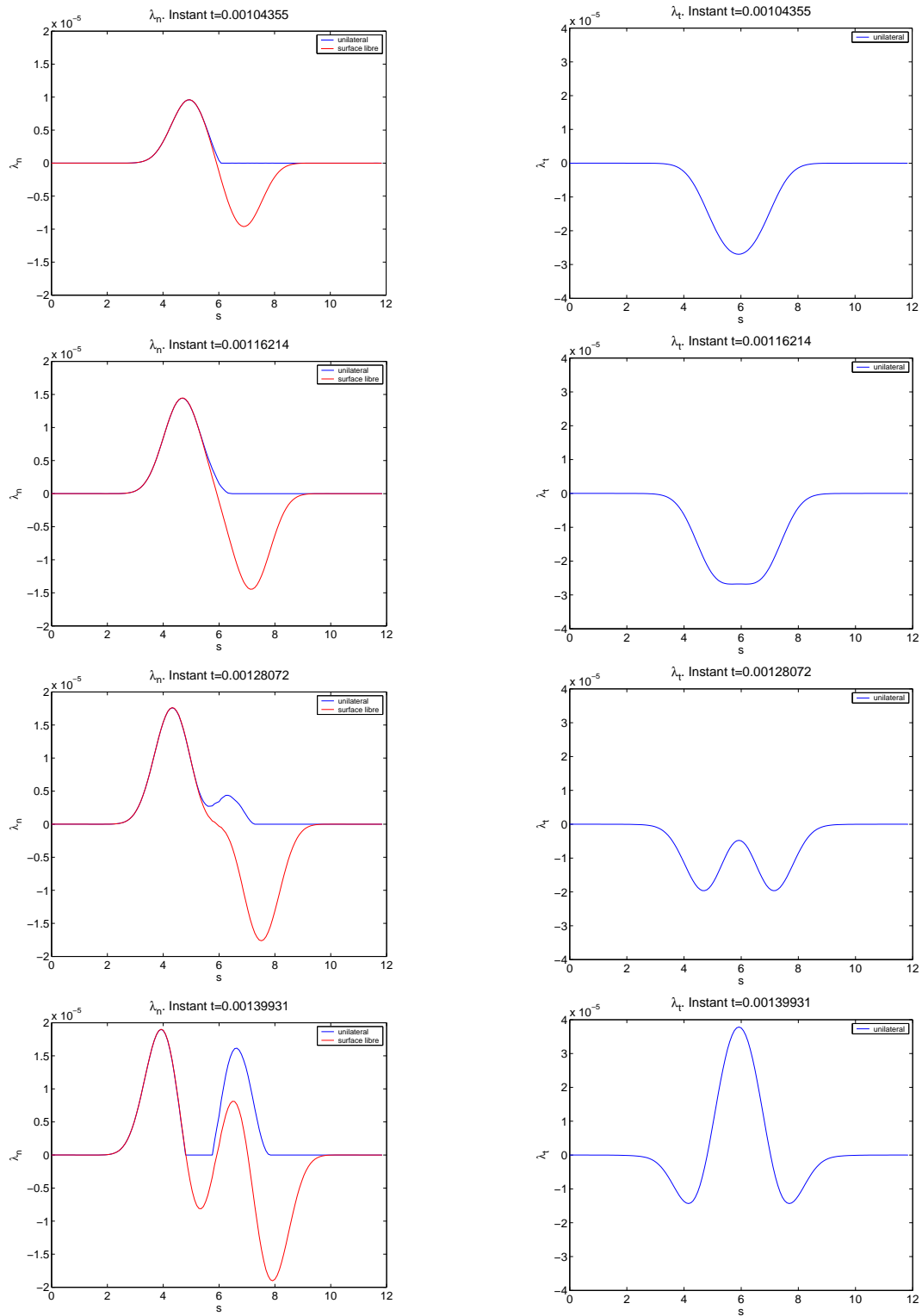


FIG. 6.80 – Comparaison des multiplicateurs  $\lambda_N$  (à gauche) et  $\lambda_T$ . Fissure droite. Instants  $t = 1.0 \cdot 10^{-3}$  à  $1.4 \cdot 10^{-3}$

### 6.3.2 Fissure droite parallèle au maillage: comparaison des schémas centré et décentré dans le cas unilatéral

Dans cette partie, on compare les schémas de résolution pour le problème unilatéral, c'est-à-dire le schéma centré (4.14) et le schéma décentré (4.5). Selon le schéma choisi, les résultats ne sont pas identiques. Pour le déplacement, les deux schémas donnent des résultats très semblables. Les deux schémas ne provoquent pas d'oscillations pour le déplacement (ou très peu visibles sur les instantanés 2D). Par contre, on observe des différences entre les deux schémas pour les contraintes (aussi pour la vitesse discrète).

#### 6.3.2.1 Exemple d'une source de pression

##### Instantanés 2D de la vitesse

La figure 6.81 présente une comparaison des vitesses calculées par le schéma centré implicite et le schéma décentré implicite, pour la condition de contact unilatéral. Le schéma centré implicite semble donner moins d'oscillations dans la direction orthogonale à la fissure, passant par le centre de la fissure que le schéma décentré implicite, comme cela est visible.

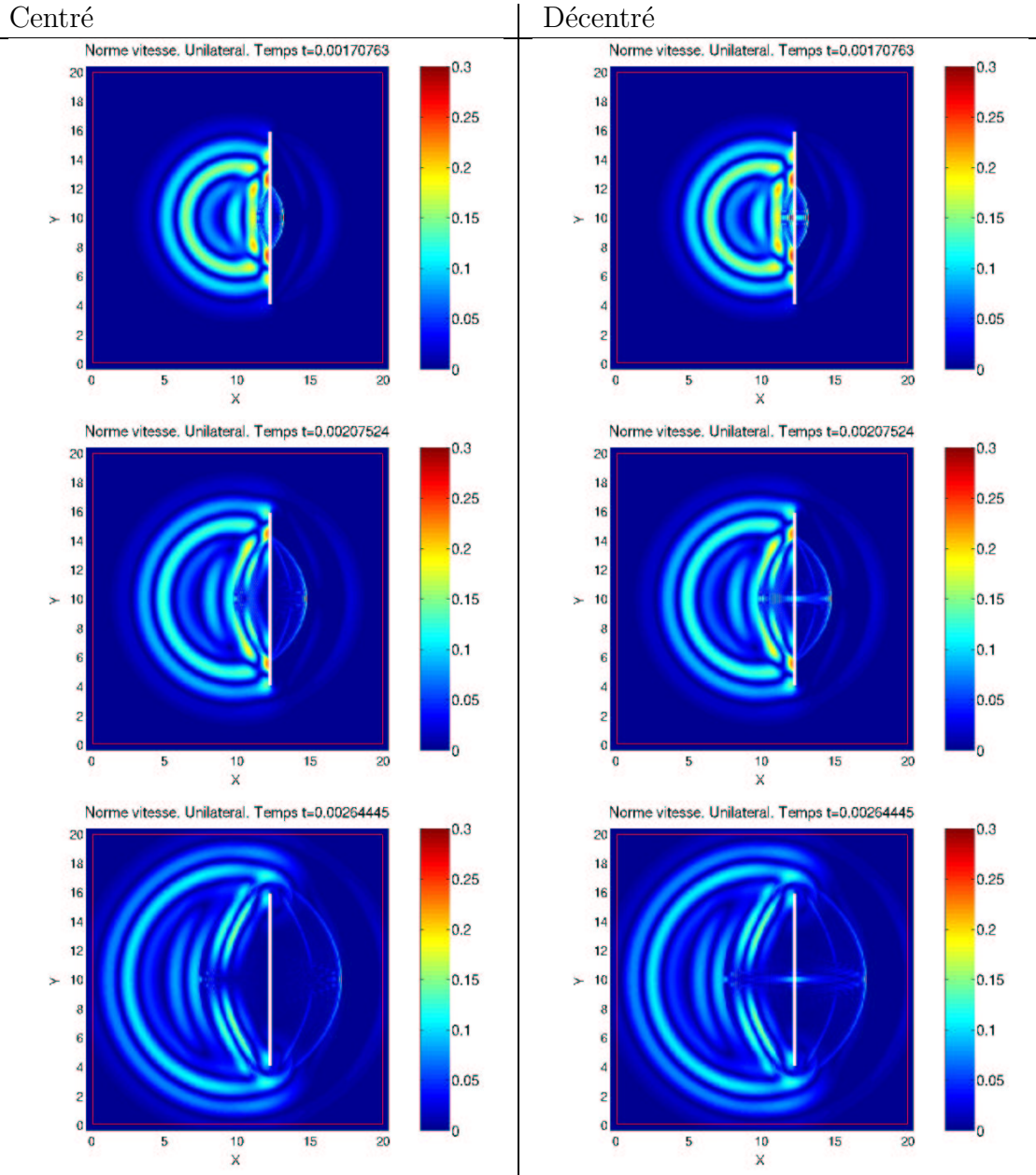


FIG. 6.81 – Comparaison de la norme de la vitesse. Schémas implicite centré (gauche) et décentré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

Instantanés 2D comparant la contrainte  $\sigma_N$

Sur la figure 6.82, on montre une comparaison pour la contrainte  $\sigma_N = \sigma_{xx}$ , calculée pour la condition de contact unilatéral, entre le schéma centré implicite et le schéma décentré implicite. De même que la vitesse (fig.6.81), on observe que des oscillations apparaissent pour la contrainte  $\sigma_N$  dans le cas unilatéral, pour les deux schémas, alors qu'elles n'apparaissent pas pour la condition de surface libre. Ces oscillations sont plus marquées pour le schéma décentré que pour le schéma centré. Elles se situent sur une direction orthogonale à la fissure, qui passe par le milieu de la fissure. On observe également quelques oscillations au niveau des pointes de la fissure. Il existe un moyen d'éliminer ces oscillations (voir la partie 6.4.1).

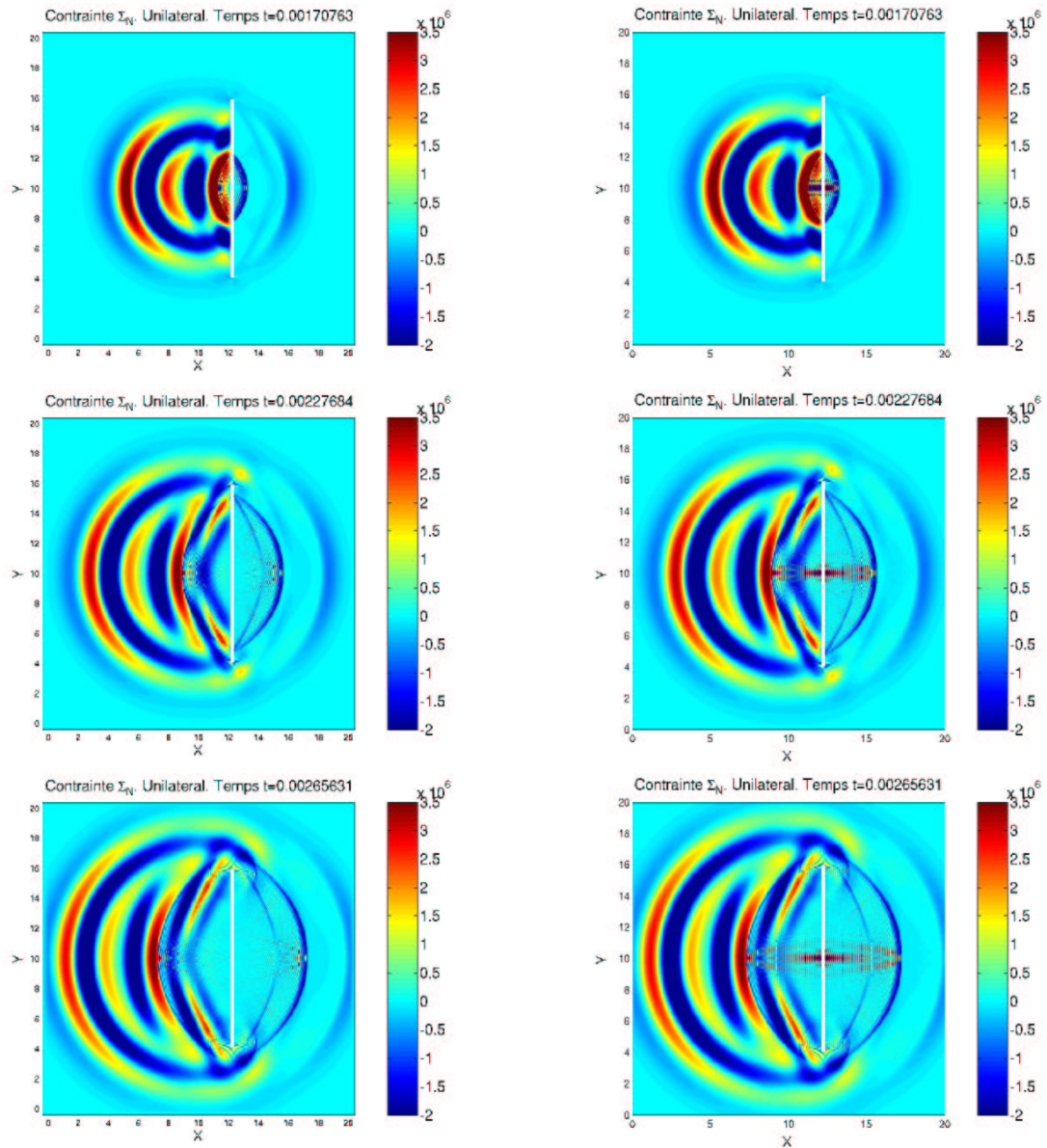


FIG. 6.82 – Comparaison de  $\sigma_N$ . Schéma centré (gauche) et décentré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

Courbes 1D montrant la contrainte  $\sigma_N$

Sur la figure 6.83, on présente une comparaison du calcul des contraintes  $\sigma_{xx}^h$  entre le schéma centré et le schéma décentré. La contrainte est calculée sur une ligne horizontale, située à l'ordonnée milieu  $y = 10$ ; elle part du point  $(0,10)$  au point  $(20,10)$  et le calcul est fait en trois instants. La fissure est située à l'abscisse  $x = 12.25$ . Comme sur les instantanés 2D (fig.6.82), on peut voir que le schéma centré implicite produit moins d'oscillations que le décentré implicite.

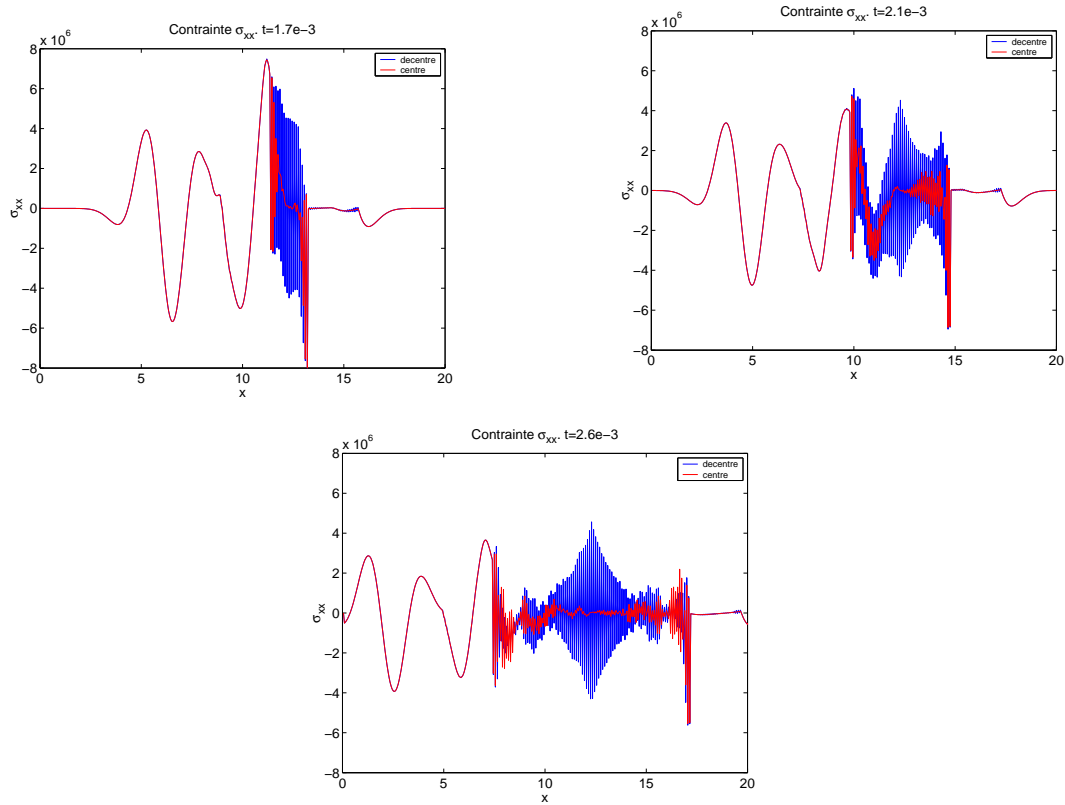


FIG. 6.83 – Comparaison centré unilatéral - décentré. Contrainte  $\sigma_{xx}^h$



### 6.3.2.2 Exemple d'une source de cisaillement

#### Instantanés 2D comparant la contrainte $\sigma_N$

Sur la figure 6.84, on montre une comparaison pour la contrainte  $\sigma_N = \sigma_{xx}$ , calculée pour la condition de contact unilatéral, entre le schéma centré implicite et le schéma décentré implicite. On observe que des oscillations apparaissent pour  $\sigma_N$  dans le cas unilatéral, pour les deux schémas, alors qu'elles n'apparaissent pas pour la condition de surface libre. Ces oscillations sont plus marquées pour le schéma décentré que pour le schéma centré. Elles sont assez nettement visibles sur les deux schémas.

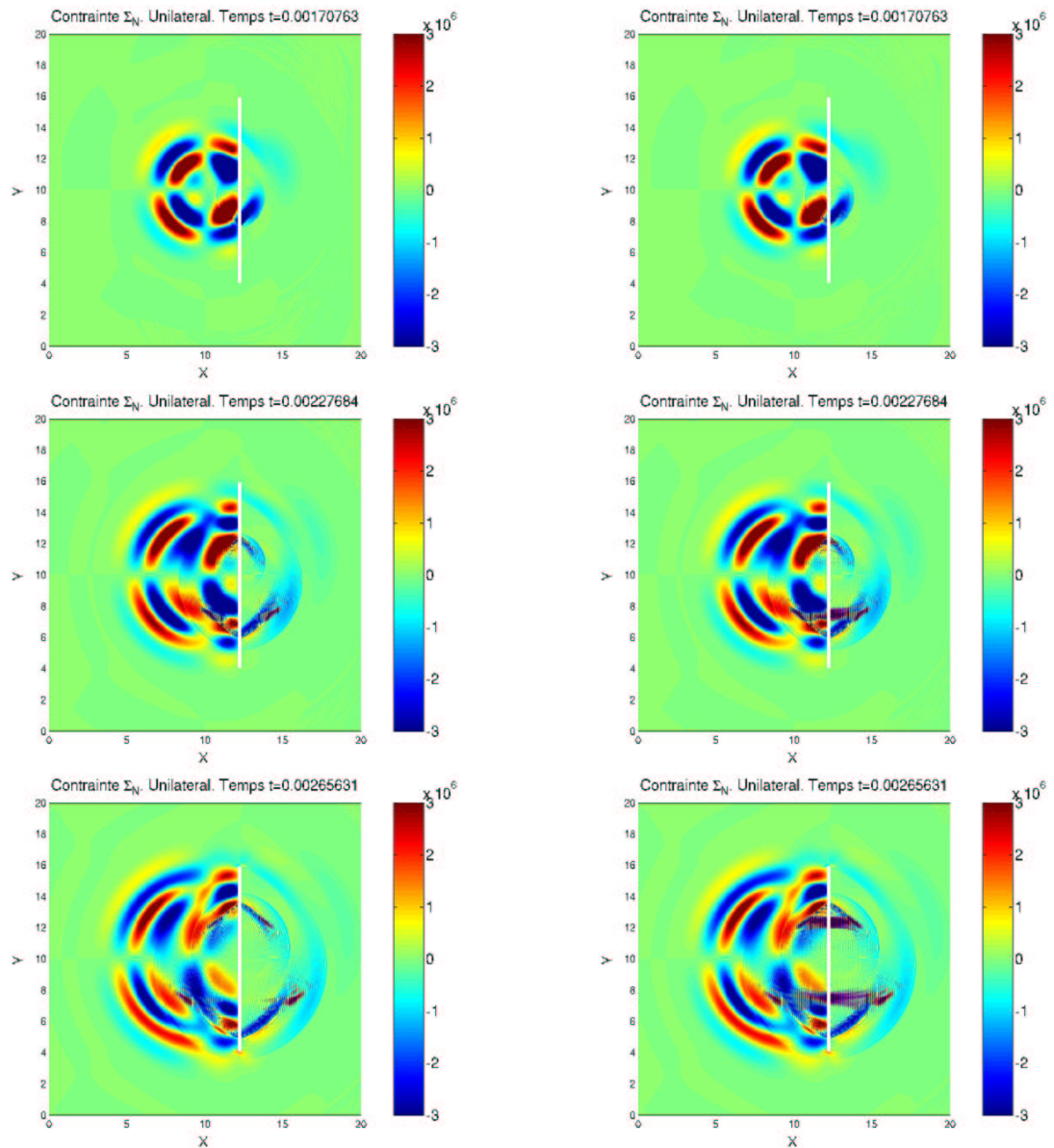


FIG. 6.84 – Comparaison de  $\sigma_N$ . Schéma centré (gauche) et décentré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$



### 6.3.3 Comparaison de résultats pour deux positions d'une fissure droite par rapport au maillage

On fait ici une comparaison entre deux configurations de fissure. On compare les résultats obtenus pour le cas d'une fissure droite finie montrés en 6.3.1 à ceux obtenus pour une fissure droite inclinée par rapport au maillage. Cette comparaison est faite pour les mêmes données dans les deux configurations. La fissure inclinée est une droite diagonale issue du point  $(7.41, 4.22)$ , allant au point  $(15.78, 12.60)$ . La source étant à symétrie radiale et le milieu étant homogène et isotrope, on doit obtenir les mêmes résultats, à une rotation près. Sur la figure 6.85, on observe la position de la fissure par rapport au maillage. On voit également le support de la source extérieure considérée.

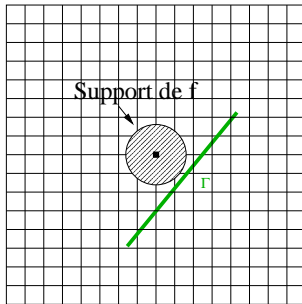


FIG. 6.85 – Principe de l'expérience

■ Point d'observation sismogramme

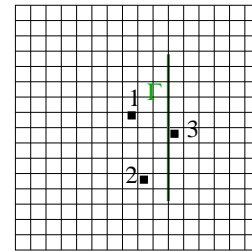


FIG. 6.86 – Disposition des points d'observation pour le sismogramme

La figure 6.86 indique les points d'observation servant pour les sismogrammes présentés sur les figures 6.88 et 6.93.

#### 6.3.3.1 Exemple d'une source de pression

##### Instantanés 2D représentant la norme du déplacement

Sur la figure 6.87, on compare la norme du déplacement, calculée pour les deux expériences, pour le schéma centré implicite. On ne représente que les résultats obtenus par le schéma centré implicite. Les résultats obtenus pour le schéma décentré implicite sont quasiment identiques en ce qui concerne le déplacement. On peut voir que quelques oscillations apparaissent le long de la fissure, pour le cas diagonal. Il y a de petites différences pour l'onde transmise, mais les résultats se ressemblent assez nettement.

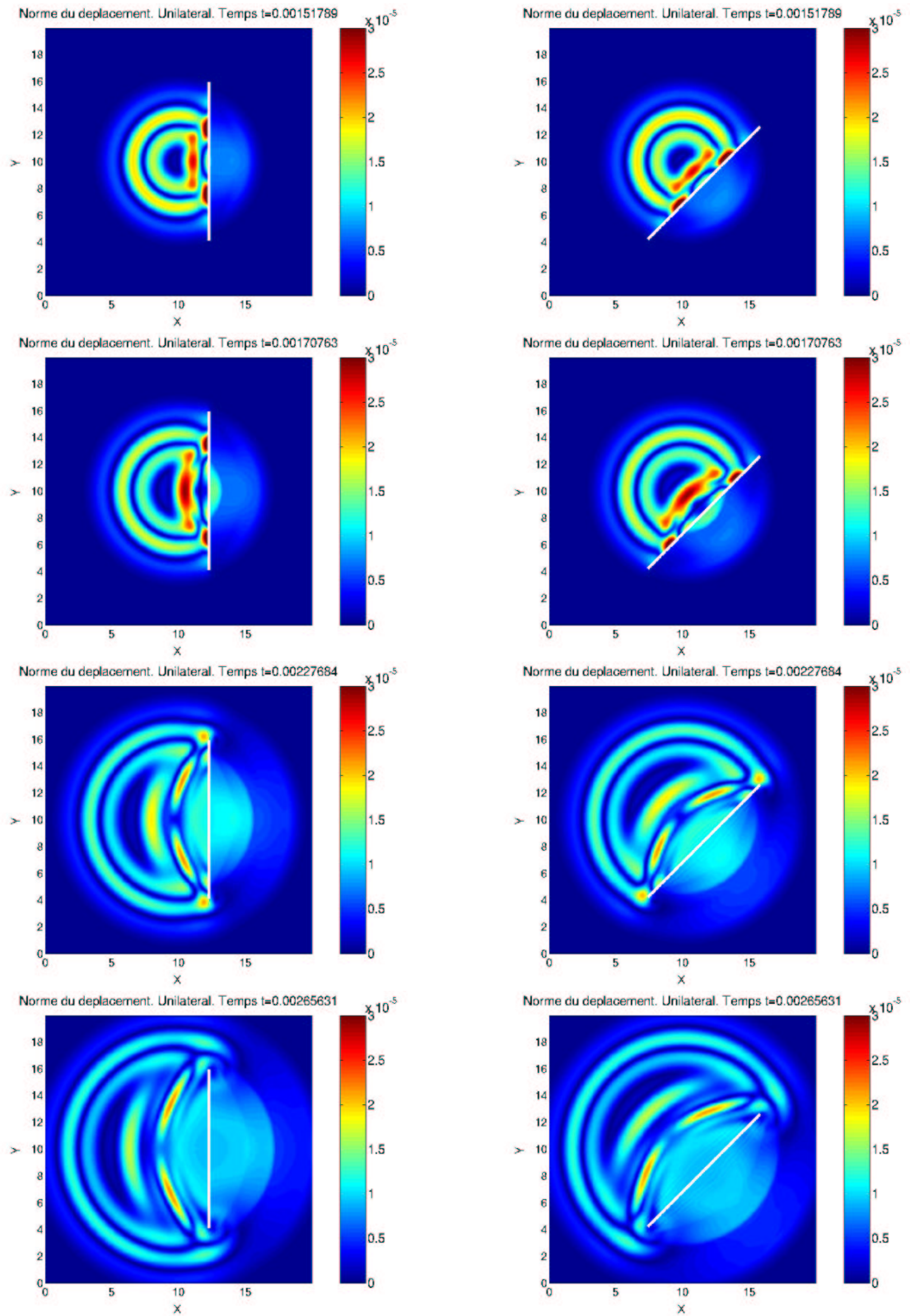


FIG. 6.87 – Comparaison de la norme du déplacement. Schéma centré. Instants  $t = 1.5 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 2.6 \cdot 10^{-3}$

Courbes 1D représentant le déplacement

Sur la figure 6.88, on présente le déplacement normal et tangentiel au cours du temps en trois points de l'espace, montrés sur la figure 6.86, pour les deux positions de fissure. Les résultats sont semblables pour les deux positions.

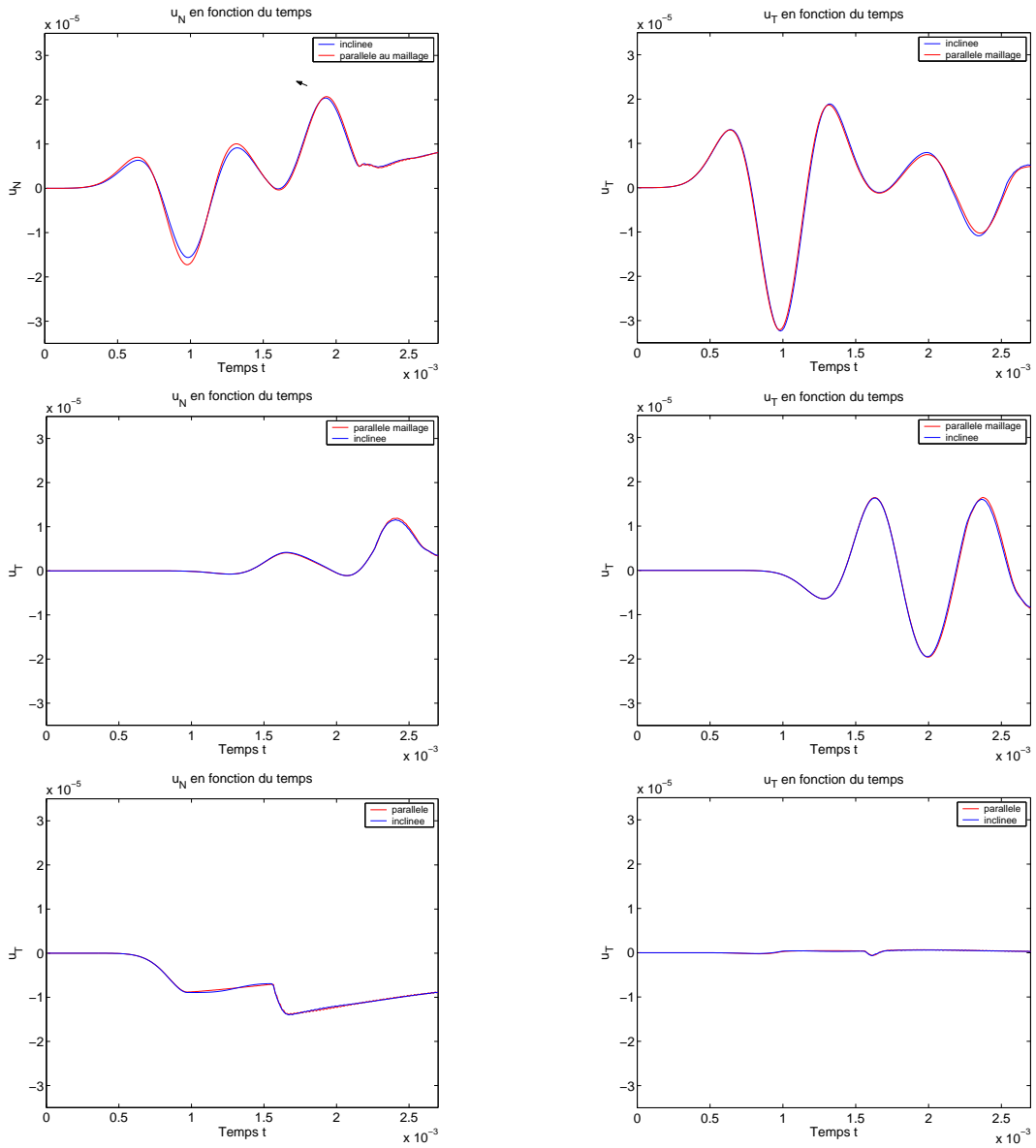


FIG. 6.88 – Déplacements en fonction du temps, normal (gauche) et tangentiel. Points (9.5,11), (10.5,6.1) et (12.6,9.5)

**Instantanés 2D représentant la contrainte  $\sigma_N$**

Sur la figure 6.89, on compare la contrainte normale  $\sigma_N = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$  calculée pour les deux expériences par le schéma centré implicite. On voit des oscillations pour le cas de la fissure verticale, dans une direction perpendiculaire au centre de la fissure, dans les parties transmise et réfléchiée. Ces oscillations n'apparaissent pas pour la fissure diagonale. Pour la fissure diagonale, on observe quelques petites oscillations de faible amplitude (difficilement visibles) localisées le long de la fissure. Sans la présence de ces oscillations, les résultats se ressemblent.

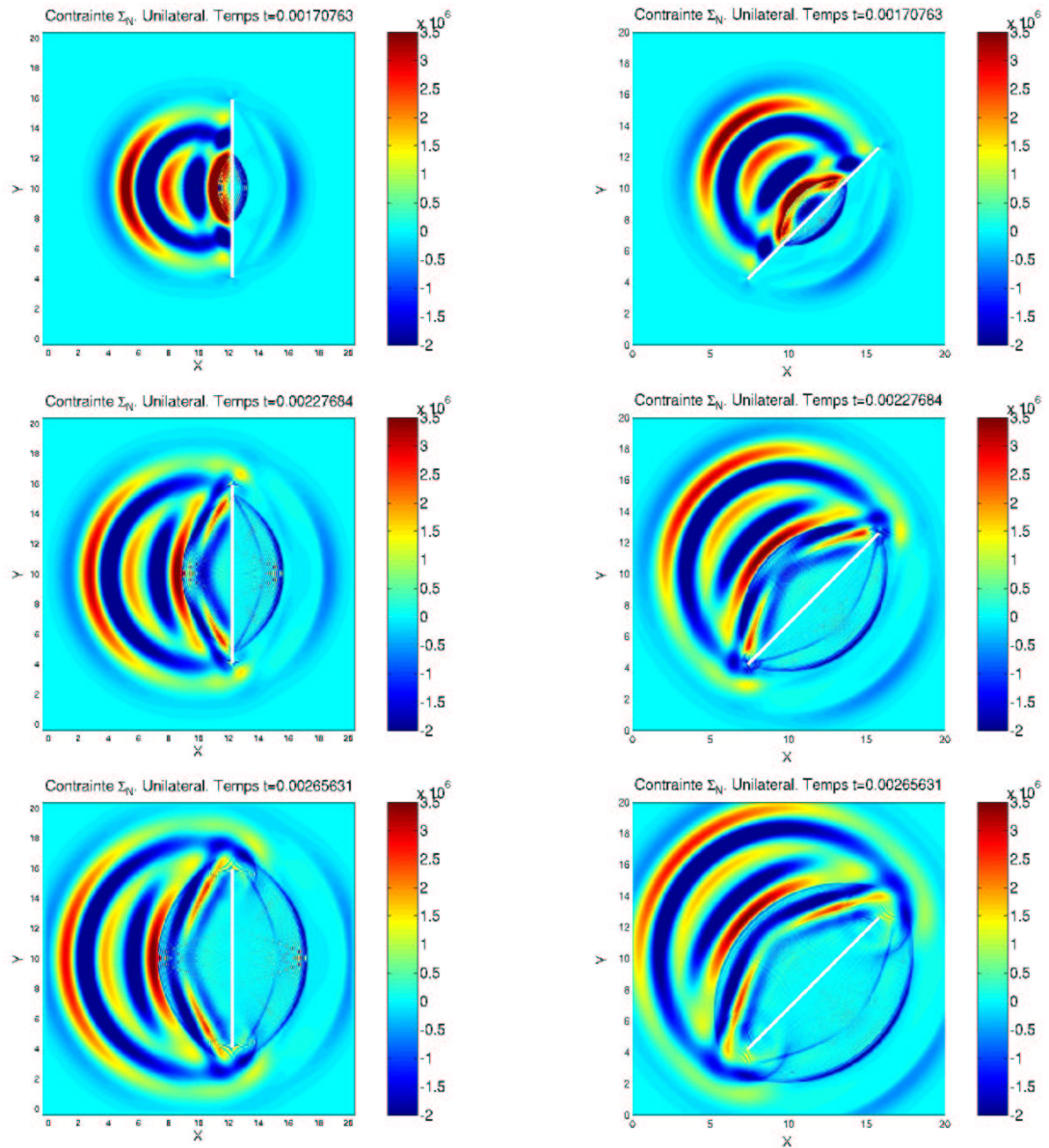


FIG. 6.89 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_N$ . Schéma centré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

Sur la figure 6.90, on compare la contrainte normale calculée pour les deux expériences par le schéma décentré implicite. Comme pour le schéma centré implicite, on voit des oscillations pour le cas de la fissure verticale, dans une direction perpendiculaire au centre de la fissure et ces oscillations sont plus nettes pour le schéma décentré que pour le schéma centré. Ces oscillations n'apparaissent pas pour la fissure diagonale. On observe quelques petites oscillations de faible amplitude (difficilement visibles) pour la fissure diagonale, localisées le long de la fissure. Sans la présence de ces oscillations, les résultats se ressemblent.

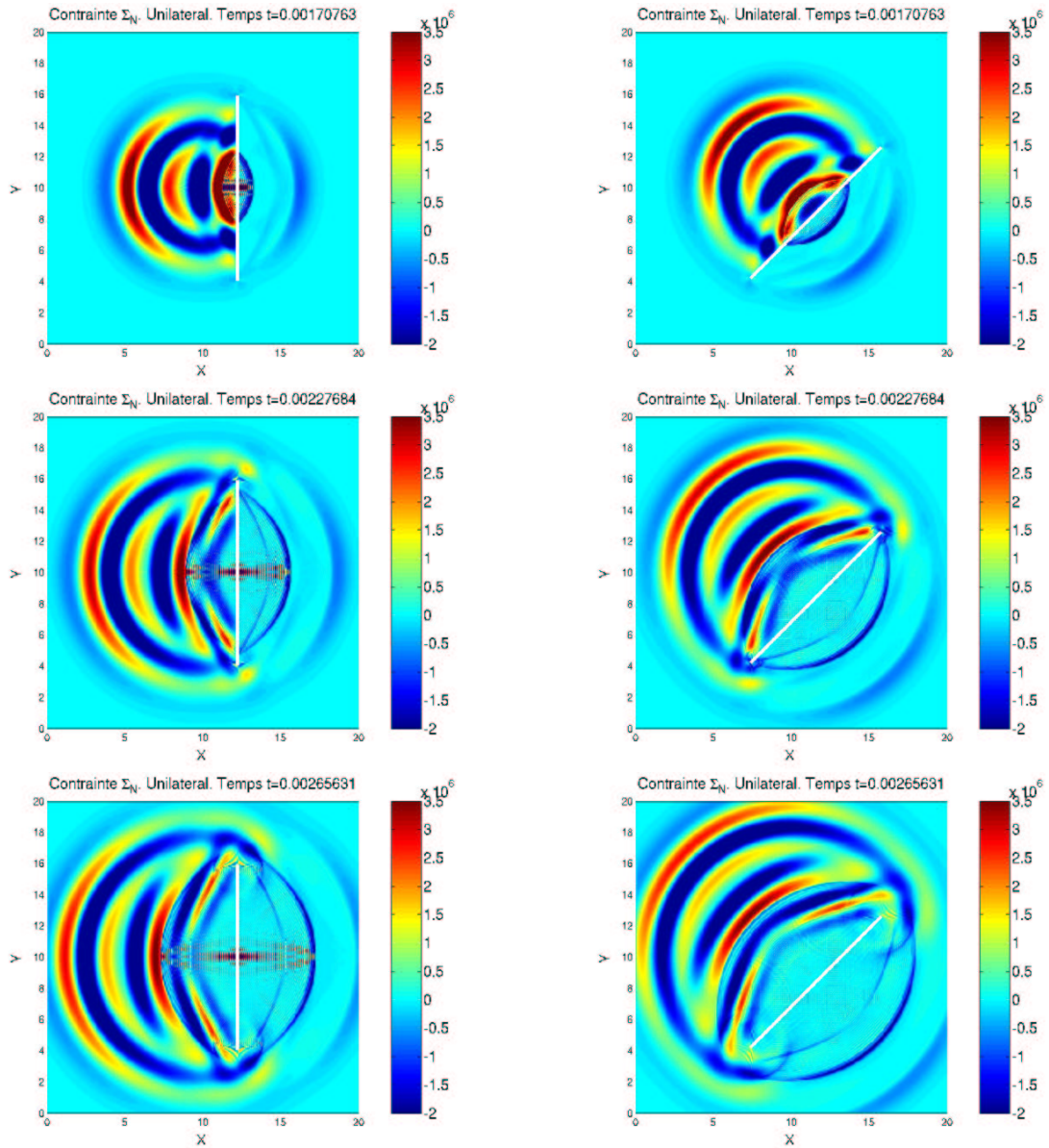


FIG. 6.90 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_N$ . Schéma décentré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$



Pour la fissure inclinée par rapport au maillage, on observe, sur la figure 6.91, les instantanés 2D de la contrainte  $\sigma_{xx}^h$  en trois instants, pour les schémas décentré et centré. Les contraintes présentent des oscillations assez marquées situées le long de la fissure et aux points de la fissure et semblent identiques pour les deux schémas. Il semble que ces oscillations sont liées à la position de la fissure par rapport au maillage. Ces oscillations sont liées aux modes parasites introduits par l'élément  $\mathcal{P}_1^{disc}$  (voir section 3.7). On verra en 6.4.2 qu'introduire de l'amortissement sur les modes parasites permet d'éliminer ces oscillations (figs. 6.105, 6.107).

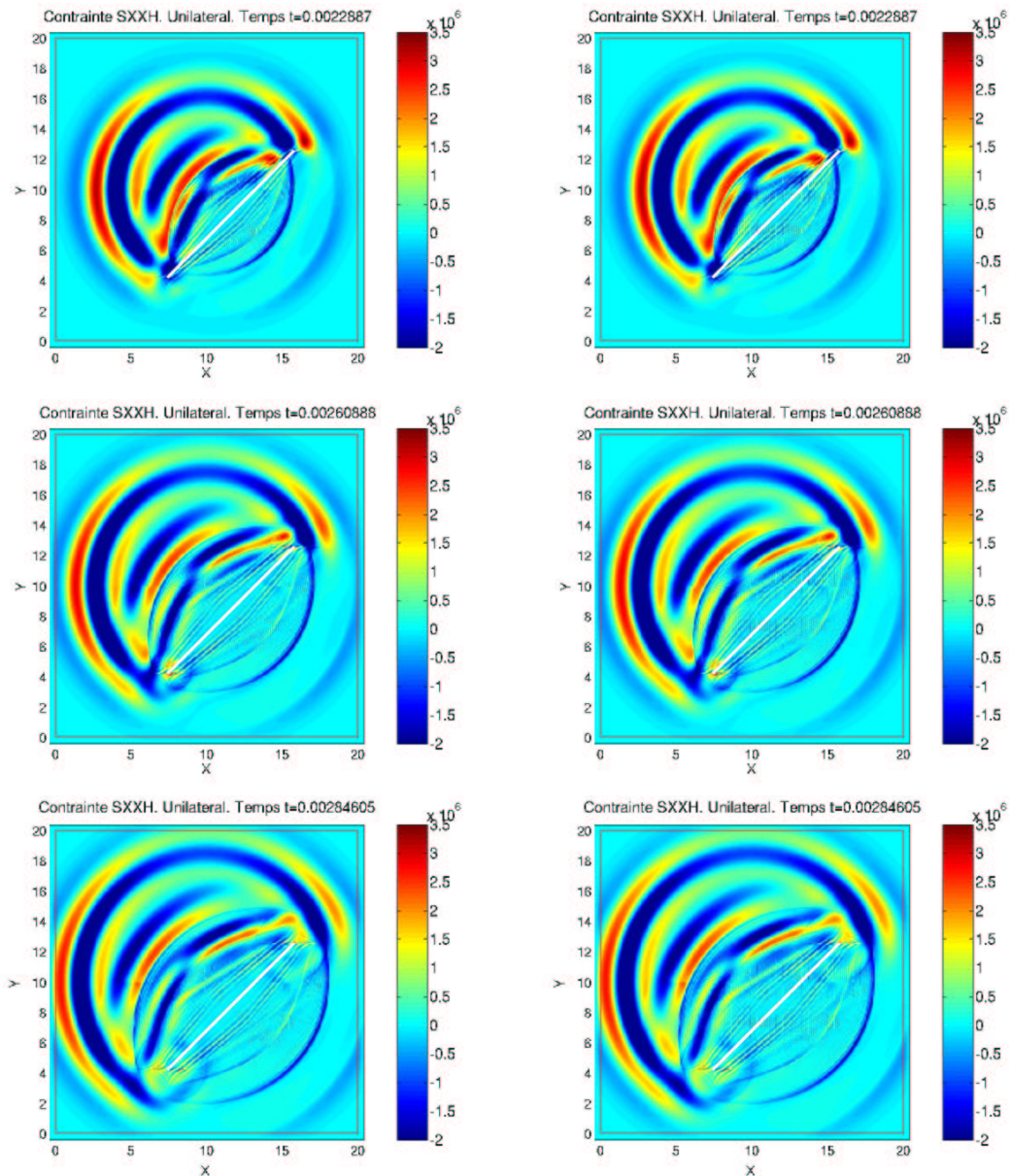


FIG. 6.91 – *Comparaison de  $\sigma_{xx}$ . Schémas centré (gauche) et décentré. Instants  $t = 2.2 \cdot 10^{-3}$  à  $2.8 \cdot 10^{-3}$*

**6.3.3.2 Exemple d'une source de cisaillement**

On considère ensuite la source de cisaillement donnée par (6.24).

**Instantanés 2D représentant la norme du déplacement**

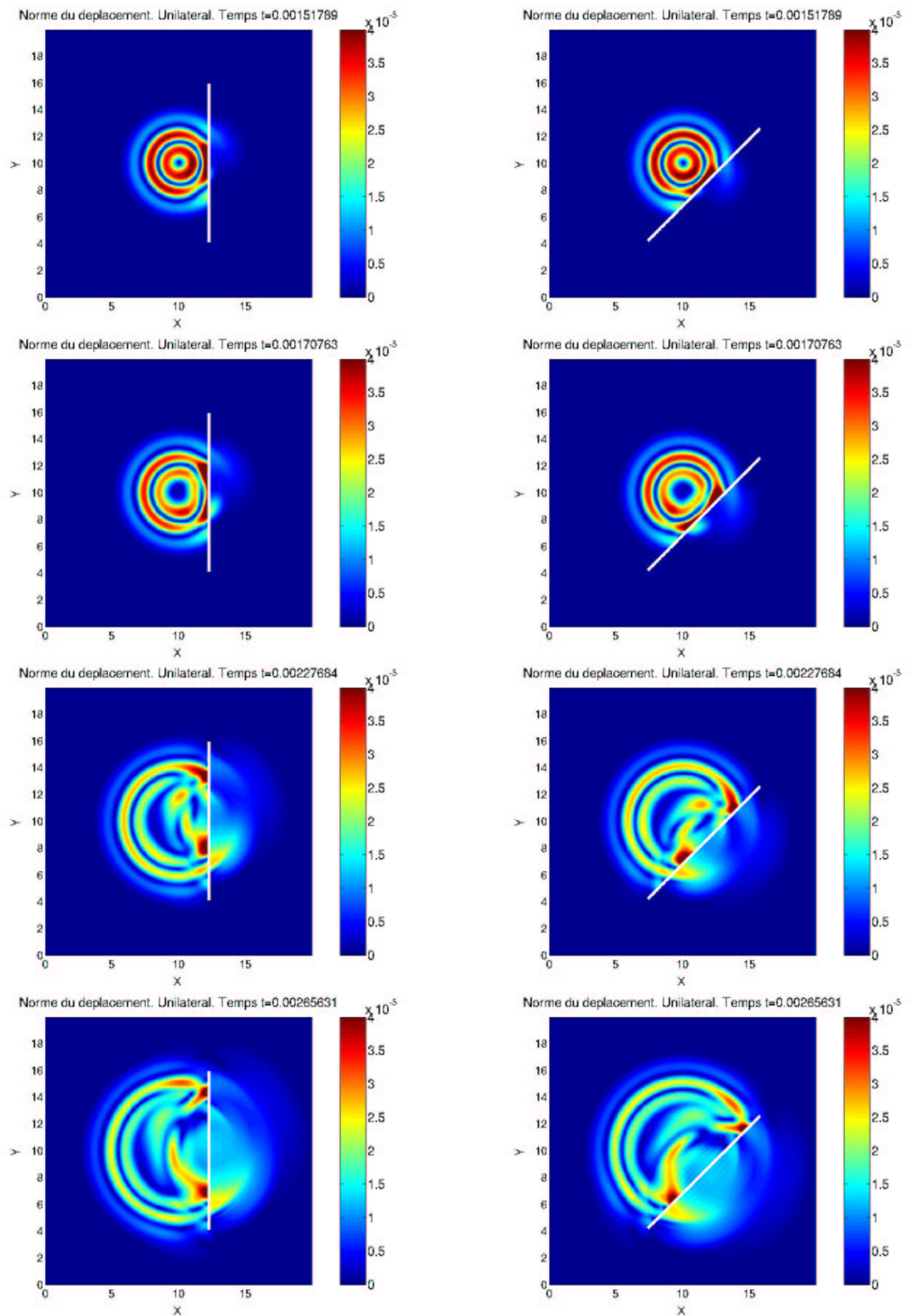


FIG. 6.92 – Comparaison de la norme du déplacement. Schéma centré. Instants  $t = 1.5 \cdot 10^{-3}$  à  $2.7 \cdot 10^{-3}$

**Courbes 1D représentant le déplacement**

Sur la figure 6.93, on présente le déplacement normal et tangentiel au cours du temps en trois points de l'espace, montrés sur la figure 6.86, pour les deux positions de fissure. Les résultats sont semblables pour les deux positions.

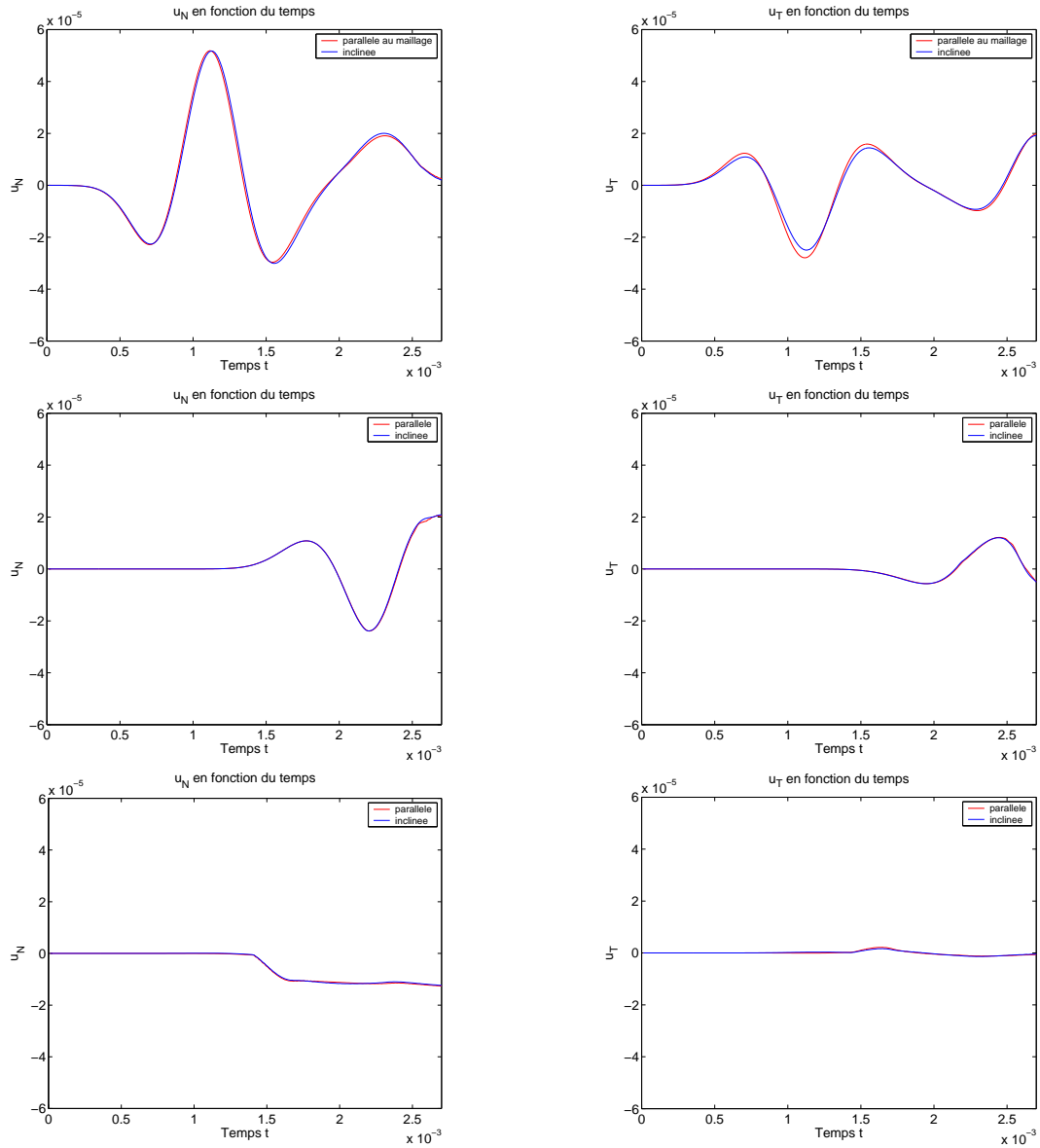


FIG. 6.93 – Déplacements en fonction du temps, normal (gauche) et tangentiel. Points (9.5,11), (10.5,6.1) et (12.6,9.5)



Instantanés 2D représentant la contrainte  $\sigma_N$

Sur la figure 6.94, on compare la contrainte normale  $\sigma_N = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$  calculée pour les deux expériences par le schéma décentré implicite. On voit des oscillations pour le cas de la fissure verticale, dans les parties transmise et réfléchie. Ces oscillations n'apparaissent pas pour la fissure diagonale. Sans la présence de ces oscillations, les résultats se ressemblent.

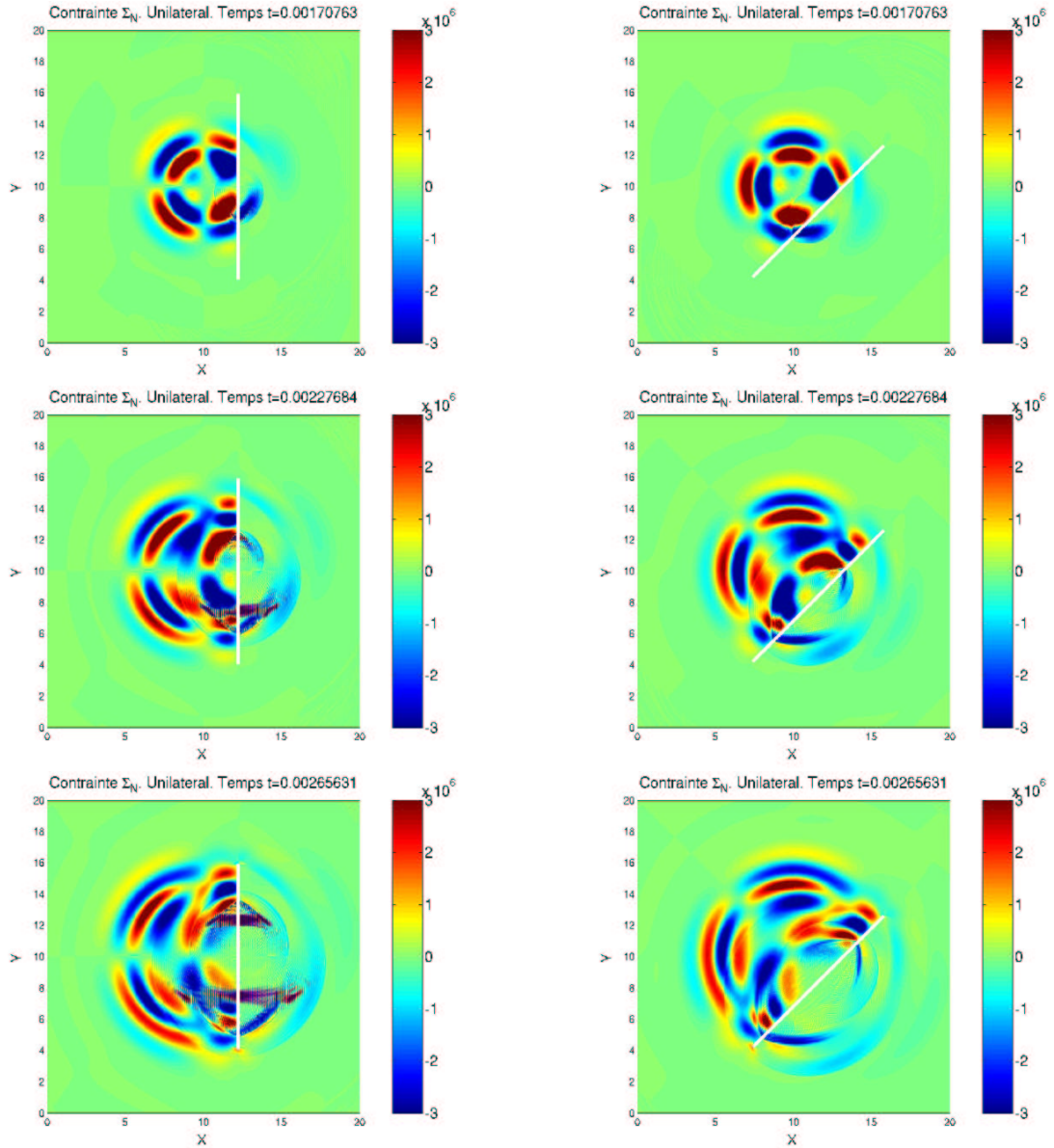


FIG. 6.94 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_N$ . Schéma décentré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

## Comparaison de résultats pour deux positions d'une fissure droite par rapport au maillage

Sur la figure 6.95, on compare la contrainte normale calculée pour les deux expériences par le schéma centré implicite. Comme pour le schéma décentré implicite, on voit des oscillations pour le cas de la fissure verticale et ces oscillations sont plus visibles pour le schéma décentré que pour le schéma centré. Ces oscillations n'apparaissent pas pour la fissure diagonale.

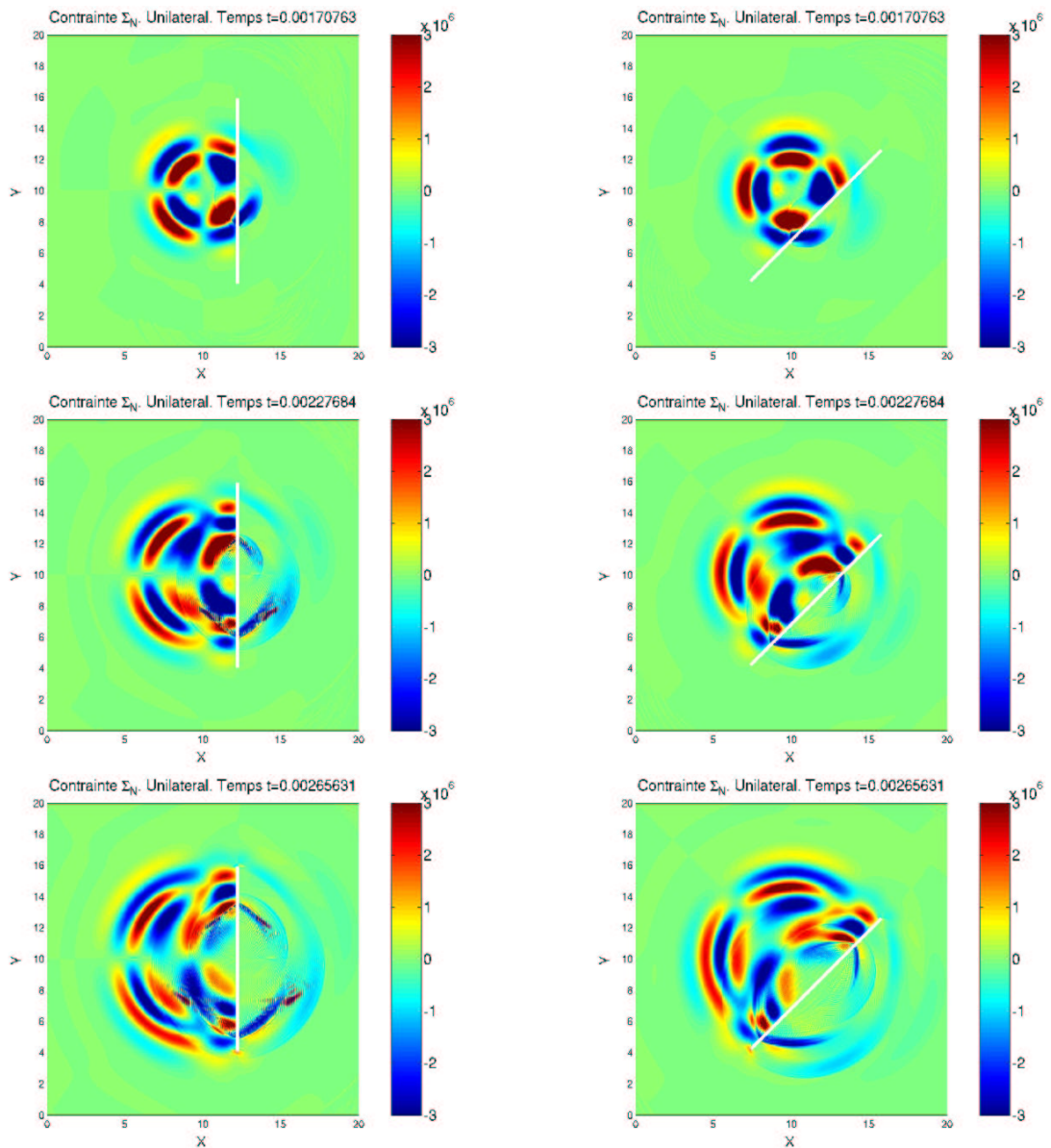


FIG. 6.95 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_N$ . Schéma centré. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

### 6.3.4 Fissures comportant un angle

On présente, sur un exemple, la mise en œuvre de la méthode expliquée dans la section 5.2.4 pour le traitement des fissures comportant un angle. C’est l’exemple d’une fissure en “V” dans un milieu homogène isotrope. Le principe de l’expérience est visible sur la figure 6.96.

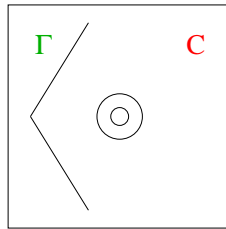


FIG. 6.96 – Exemple de fissure nécessitant un nouvel espace d’approximation pour  $\lambda_N, \lambda_T$

Le domaine est de taille  $20 \times 20$ , la fissure est une ligne brisée comportant un seul angle. Elle est composée d’une droite partant du point  $(7.54, 1.71)$  jusqu’au point  $(2.51, 10)$ . De ce dernier point, elle va jusqu’au point  $(7.54, 18.30)$ . Quant aux caractéristiques du matériau, la densité  $\rho$  vaut 1,  $\mu = 0.3$ ,  $\lambda = 0.4$ . On considère sur la grille  $n_i = n_j = 400$  points de discrétisation, le pas d’espace du maillage régulier vaut  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas de temps  $dt = 0.05$ . La fissure comporte  $n_f = 193$  points de discrétisation et le pas d’espace sur la fissure vaut  $H = 0.1$ . On utilise le schéma décentré implicite dans les résultats.

Sur la figure 6.97, on compare, dans le cas d’une source extérieure de type dérivée seconde de gaussienne, émise depuis le centre du domaine, le multiplicateur  $\lambda_N$  calculé par les deux modélisations, une imposant la continuité de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  visible en bleu, l’autre imposant la continuité de  $(\lambda_N, \lambda_T)$  visible en rouge. Les résultats se ressemblent dans les deux cas. Cependant, on peut voir une différence en  $t = 11.55$  entre les deux modélisations, au point milieu de la fissure, en  $s \simeq 10$ , là où est l’angle.

Sur la figure 6.98, on compare  $\lambda_T$  entre les deux modélisations. Là encore, les résultats se ressemblent. La discontinuité sur les sauts de déplacement due à la discontinuité de la normale est visible même si on suppose  $\lambda_T$  continu, comme on peut voir en  $t = 10.2$ ,  $t = 11.55$ . Cependant, on peut voir une différence en  $t = 12.9$ , en  $s \simeq 10$ , où  $\lambda_T$  est continu dans un cas et comporte une discontinuité dans l’autre.

Sur les figures 6.99, 6.100, on compare les première et deuxième composantes du saut de déplacement. Les résultats se ressemblent dans les deux cas. On observe nettement que, en  $t = 10.2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne sont pas continus quand on impose la continuité sur  $\lambda_N$  et  $\lambda_T$ . On voit alors une différence située au nœud où la fissure comporte un angle, en  $s \simeq 10$ , par rapport à la modélisation qui impose la continuité de  $\lambda_1$ . De plus, en  $t = 11.55$ ,  $\lambda_2$  n’est pas continu si  $(\lambda_N, \lambda_T)$  sont continus, il l’est si le couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  est continu. Il est étonnant de voir qu’en  $t = 12.9$ ,  $\lambda_2$  ne semble pas continu là où la fissure fait un angle, dans les deux modélisations. En conclusion, ce changement d’espace d’approximation pour les multiplicateurs  $(\lambda_N, \lambda_T)$  modifie très peu les résultats.

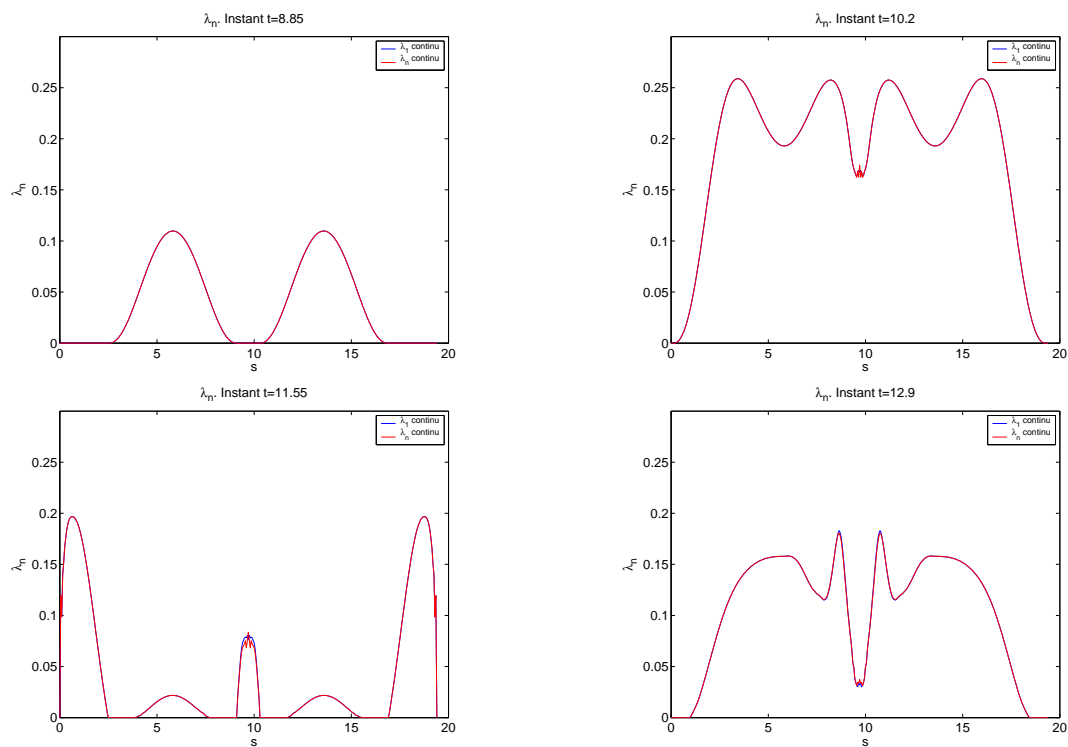


FIG. 6.97 – Comparaison de  $\lambda_N$  si  $(\lambda_1, \lambda_2)$  continu (bleu), si  $(\lambda_N, \lambda_T)$  continu (rouge)

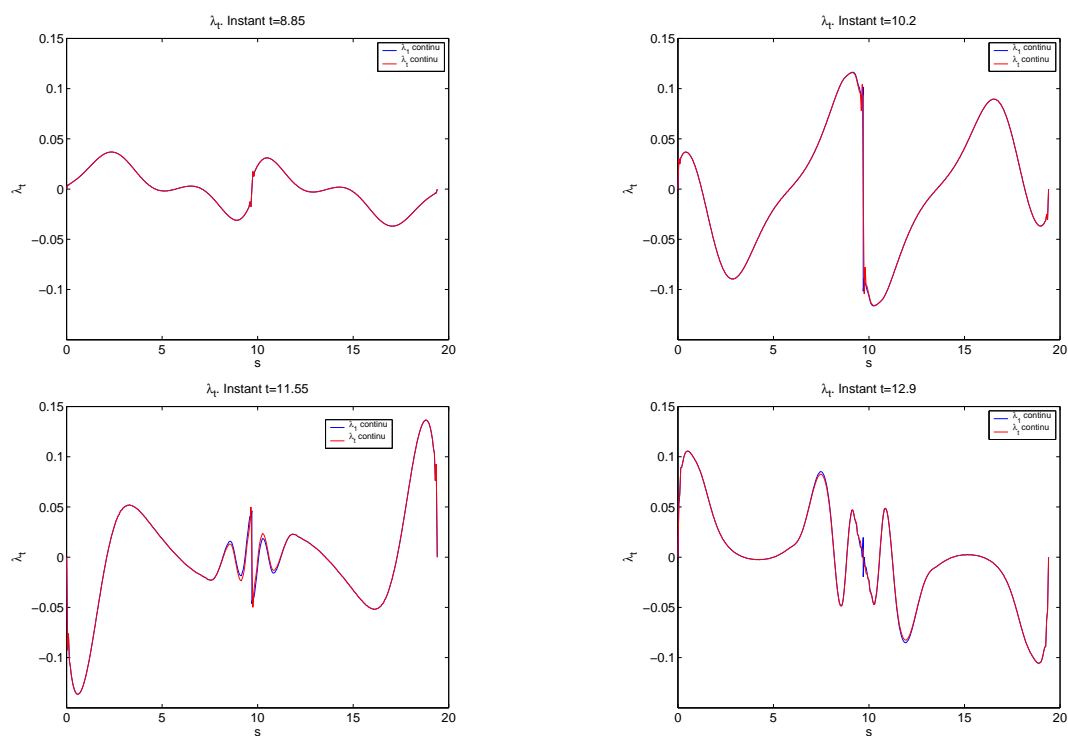


FIG. 6.98 – Comparaison de  $\lambda_T$  si  $(\lambda_1, \lambda_2)$  continu (bleu), si  $(\lambda_N, \lambda_T)$  continu (rouge)

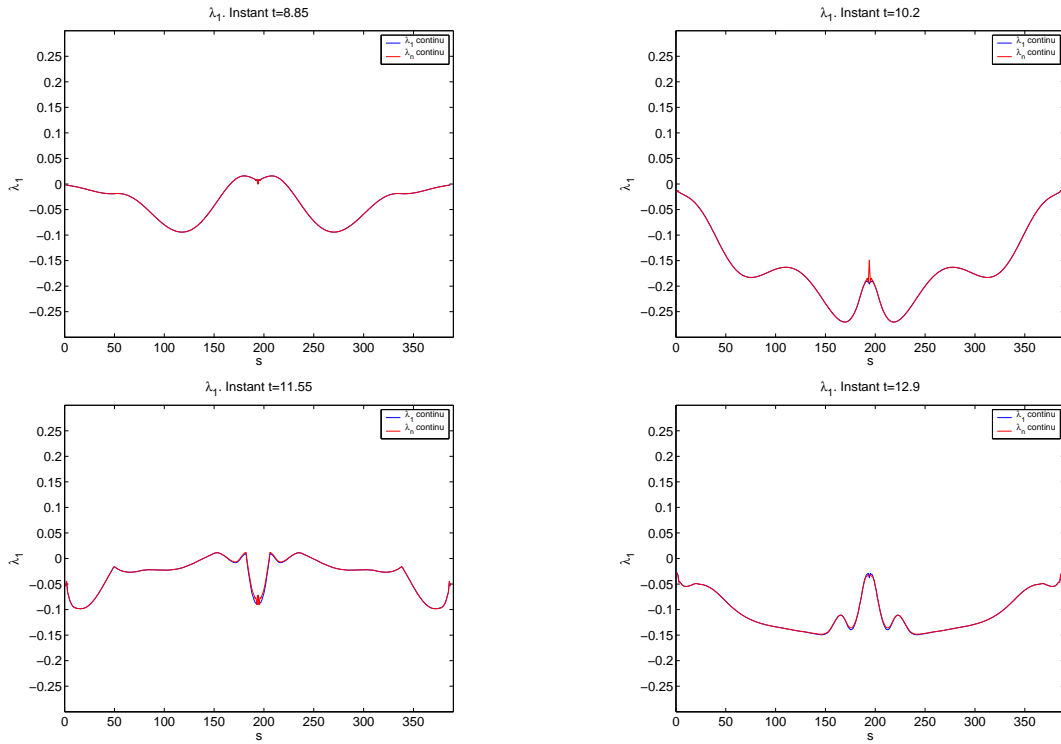


FIG. 6.99 – Comparaison de  $\lambda_1$  si  $(\lambda_1, \lambda_2)$  continu (bleu) ou  $(\lambda_N, \lambda_T)$  continu (rouge)

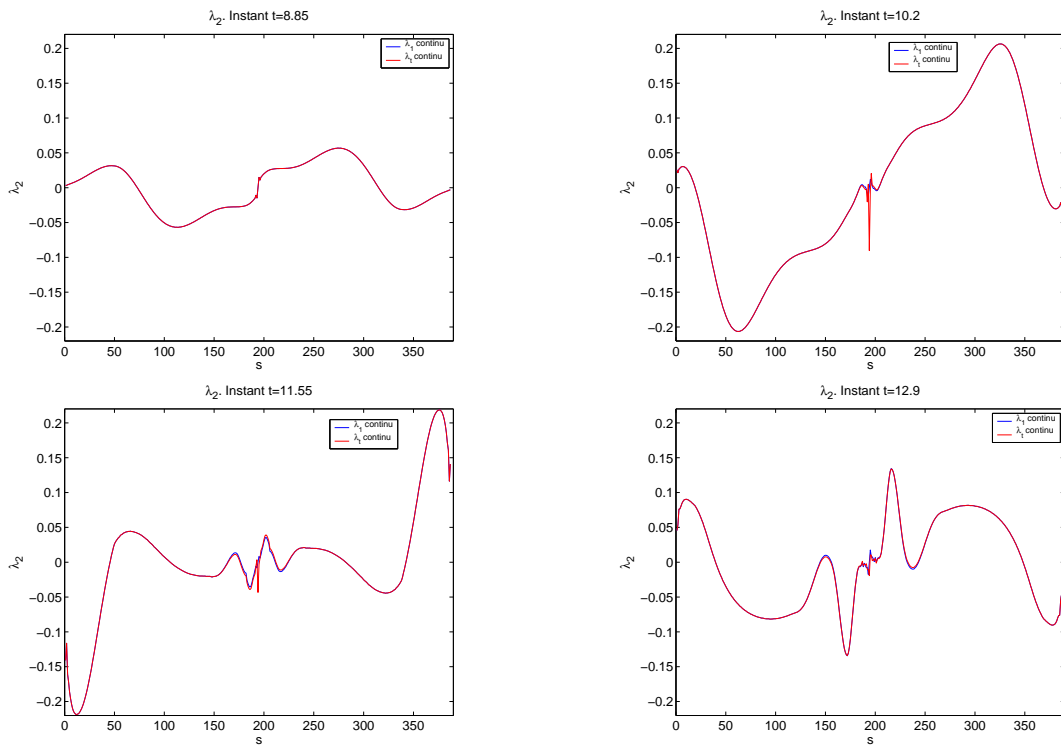


FIG. 6.100 – Comparaison de  $\lambda_2$  si  $(\lambda_1, \lambda_2)$  continu (bleu) ou  $(\lambda_N, \lambda_T)$  continu (rouge)

## 6.4 Les améliorations de la méthode

### 6.4.1 Apport d'un post-traitement

Dans le cas unidimensionnel (section 6.1), nous avons constaté qu'un post-traitement permet d'éliminer les oscillations parasites visibles sur les contraintes (fig.6.20). Nous avons remarqué, dans la partie 6.3.2, la présence d'oscillations sur les contraintes (figures 6.82, 6.84) pour les deux schémas. On étudie si une démarche semblable au cas 1D est possible à mettre en œuvre dans le cas 2D pour les contraintes. Nous allons utiliser un post-traitement en temps, qui consiste à faire la moyenne des contraintes obtenues en deux instants successifs.

#### Exemple d'une source de pression

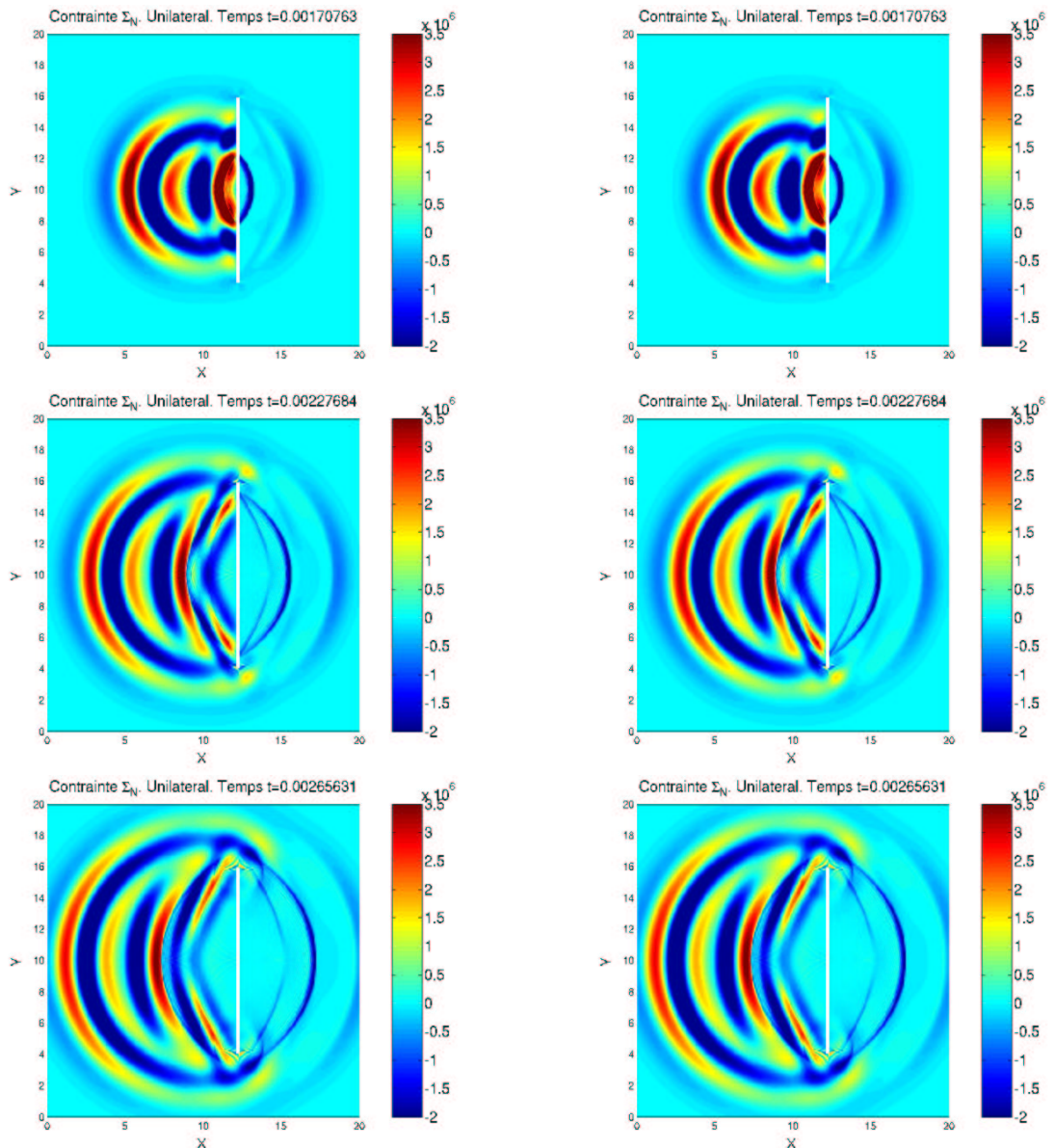


FIG. 6.101 – Comparaison de  $\sigma_N$ . Schéma centré (gauche) et décentré après post-traitement. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $t = 2.6 \cdot 10^{-3}$

On s'intéresse à l'exemple précédent de la source de pression. La figure 6.101 présente les instantanés obtenus pour la contrainte  $\sigma_N$  après post-traitement en temps. Les oscillations qui étaient visibles sur une direction orthogonale à la fissure, qui passait par son centre, (voir figure 6.82) ont quasiment disparu.

Sur la figure 6.102, on présente la contrainte  $\sigma_{xx}^h$  après post-traitement, sur une ligne horizontale issue du point (0,10) allant au point (20,10).

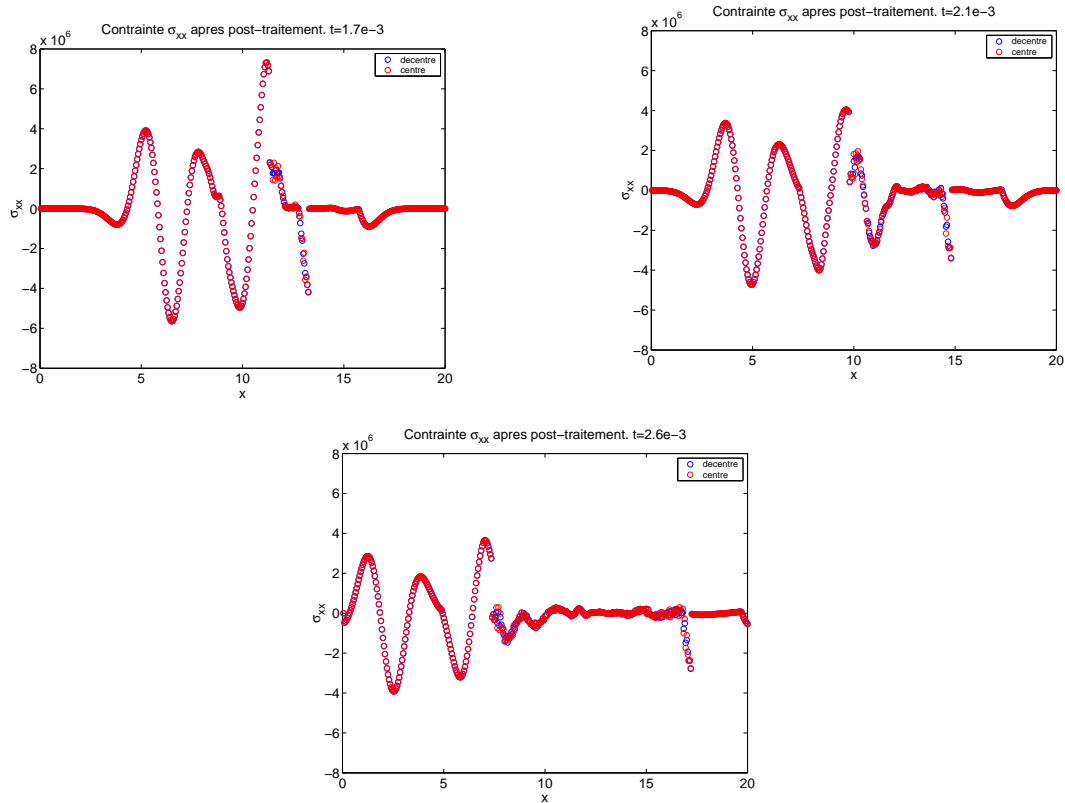


FIG. 6.102 – Comparaison centré unilatéral - décentré avec post-traitement en temps. Contrainte  $\sigma_{xx}^h$



Sur la figure 6.103, on présente la contrainte  $\sigma_N$  pour les schémas centré et décentré implicites, après le post-traitement déjà évoqué auparavant. On peut voir que les petites oscillations visibles pour le cas diagonal disparaissent. Le post-traitement est intéressant pour les deux schémas.

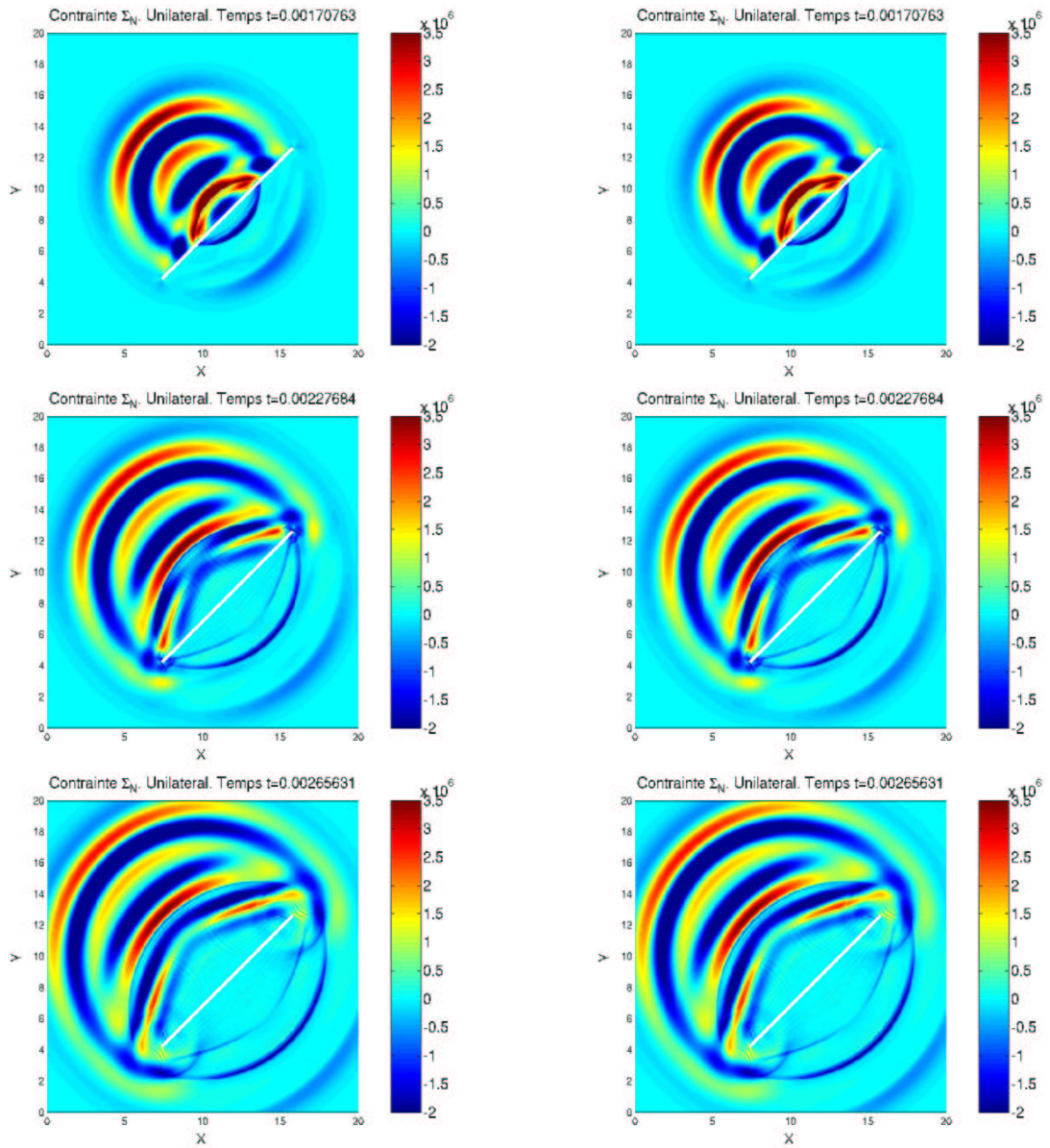


FIG. 6.103 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_N$ . Schémas centré (gauche) et décentré avec post-traitement. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$



Exemple d'une source de cisaillement

On s'intéresse à l'exemple précédent de la source de cisaillement. La figure 6.104 présente les instantanés obtenus pour la contrainte  $\sigma_N$  après post-traitement en temps. Les oscillations qui étaient nettement visibles sur la figure 6.84 ont quasiment disparu en totalité.

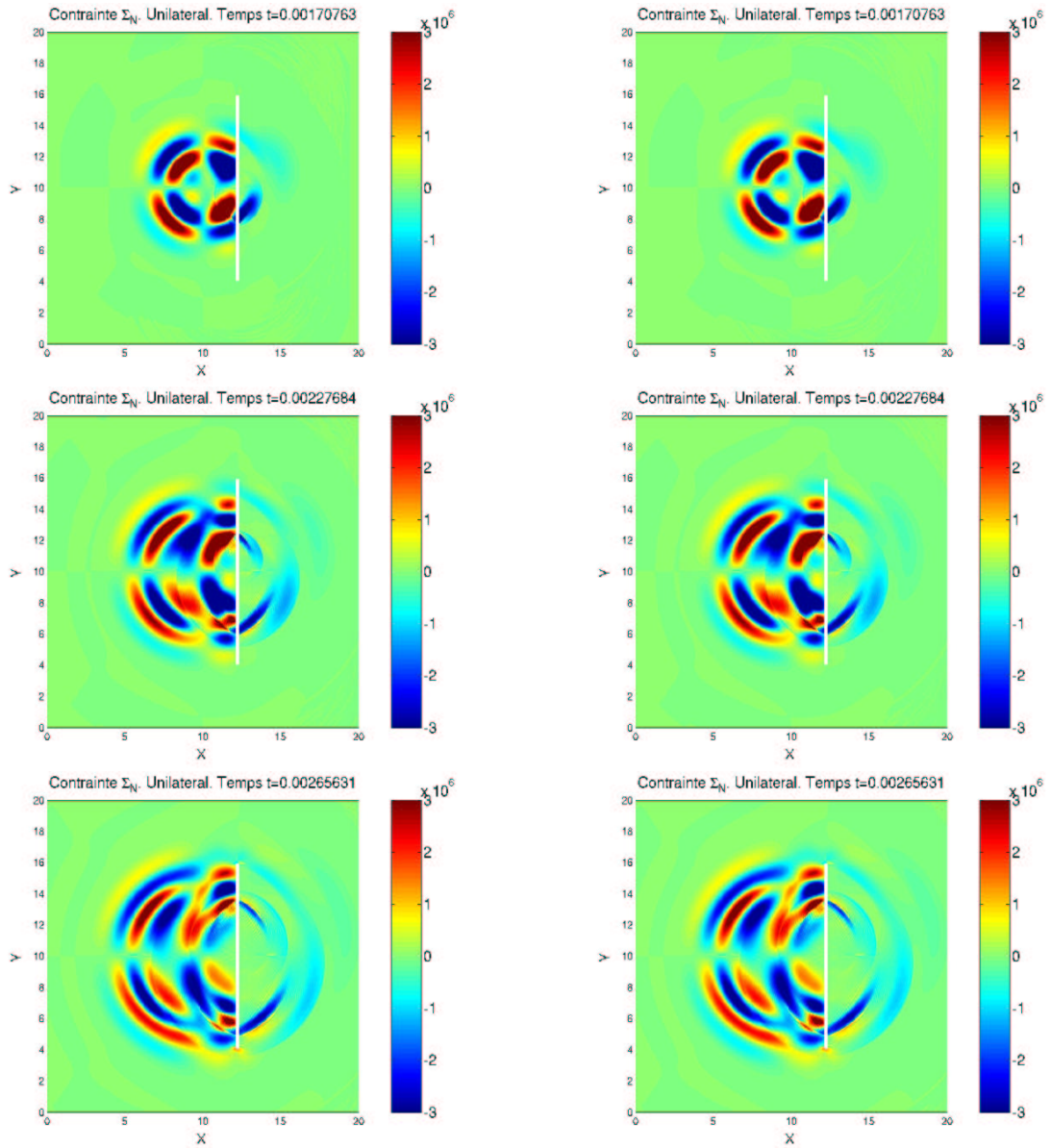


FIG. 6.104 – Comparaison de  $\sigma_N$ . Schéma centré (gauche) et décentré après post-traitement. Instants  $t = 1.7 \cdot 10^{-3}$  à  $2.6 \cdot 10^{-3}$

### 6.4.2 Apport de l'amortissement

Sur la figure 6.105, on observe les instantanés 2D de la contrainte  $\sigma_{xx}^h$ , pour les schémas décentré et centré, calculés aux mêmes instants que fig. 6.91. Pour ce problème, on a considéré de l'amortissement pour éliminer des oscillations parasites, comme cela a été étudié et mis en œuvre dans [49] et décrit dans la section 3.7. On a choisi ici  $\beta = \rho = 9000$ . On observe qu'une bonne partie des oscillations le long de la fissure et en pointes de fissure a disparu. Malgré cela, il subsiste quelques oscillations dans la direction horizontale, davantage visibles sur le schéma décentré que sur le schéma centré.

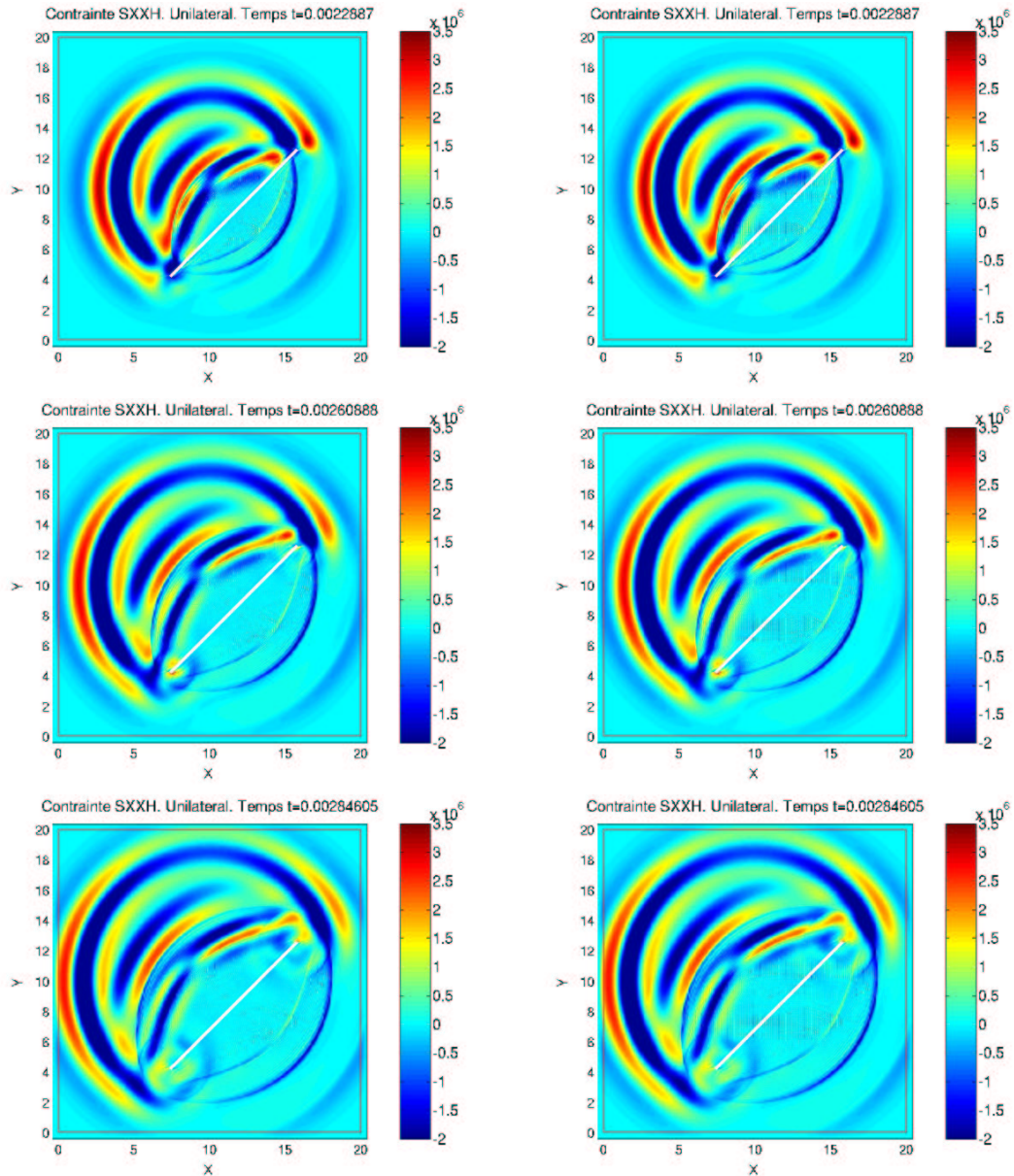


FIG. 6.105 – Comparaison de la contrainte  $\sigma_{xx}^h$ . Schémas centré (gauche) et décentré avec amortissement. Instants  $t = 2.2 \cdot 10^{-3}$  à  $2.8 \cdot 10^{-3}$

On observe ensuite, sur la figure 6.106, la contrainte  $\sigma_{xx}^h$  calculée sur une ligne 1D, de direction diagonale, perpendiculaire à la fissure. Cette droite est issue du point (0,20) jusqu'au point (20,0), la fissure est située à l'abscisse 17.32. On représente, sur la gauche, la contrainte  $\sigma_{xx}^h$  calculée par les schémas centré et décentré. Le schéma décentré présente davantage d'oscillations que le schéma centré. On montre, sur la droite, les contraintes après post-traitement, post-traitement identique à celui utilisé pour la fissure verticale (fig.6.102). Cette fois-ci, le post-traitement n'élimine que quelques oscillations, il paraît donc moins efficace sur cet exemple que sur l'exemple précédent.

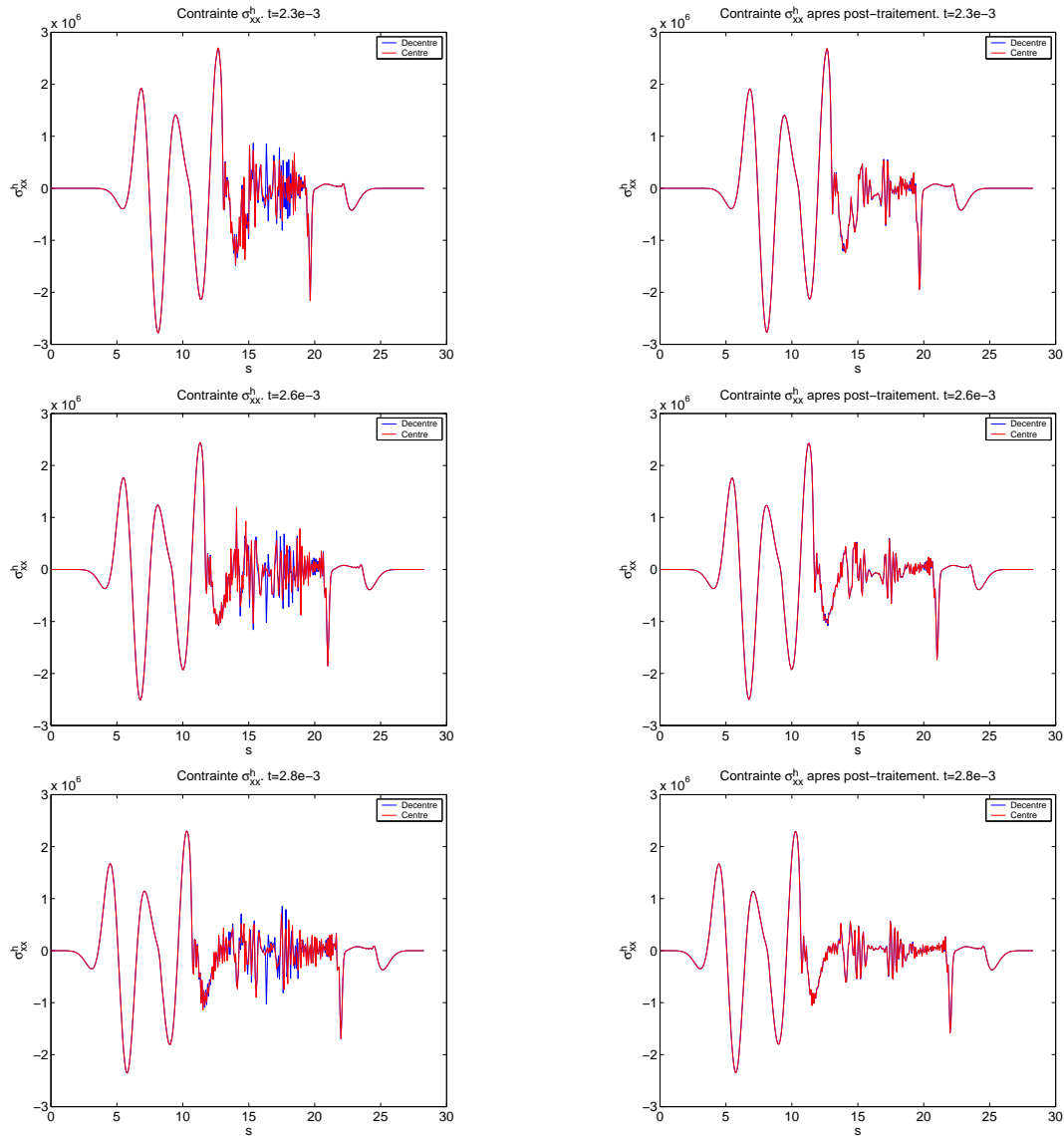


FIG. 6.106 – Comparaison des schémas centré-décentré sans post-traitement (gauche), avec post-traitement en temps (droite). Fissure diagonale. Contrainte  $\sigma_{xx}^h$

Sur la figure 6.107, on observe la contrainte  $\sigma_{xx}^h$  calculée sur la direction diagonale 1D, identique à celle utilisée fig. 6.106. On peut voir que, pour cet exemple, le post-traitement élimine la plupart des oscillations qui n'ont pas été amorties. D'une manière générale, le post-traitement en temps améliore les résultats, à condition d'introduire de l'amortissement sur les modes parasites du déplacement, pour les configurations de fissure qui le nécessitent.

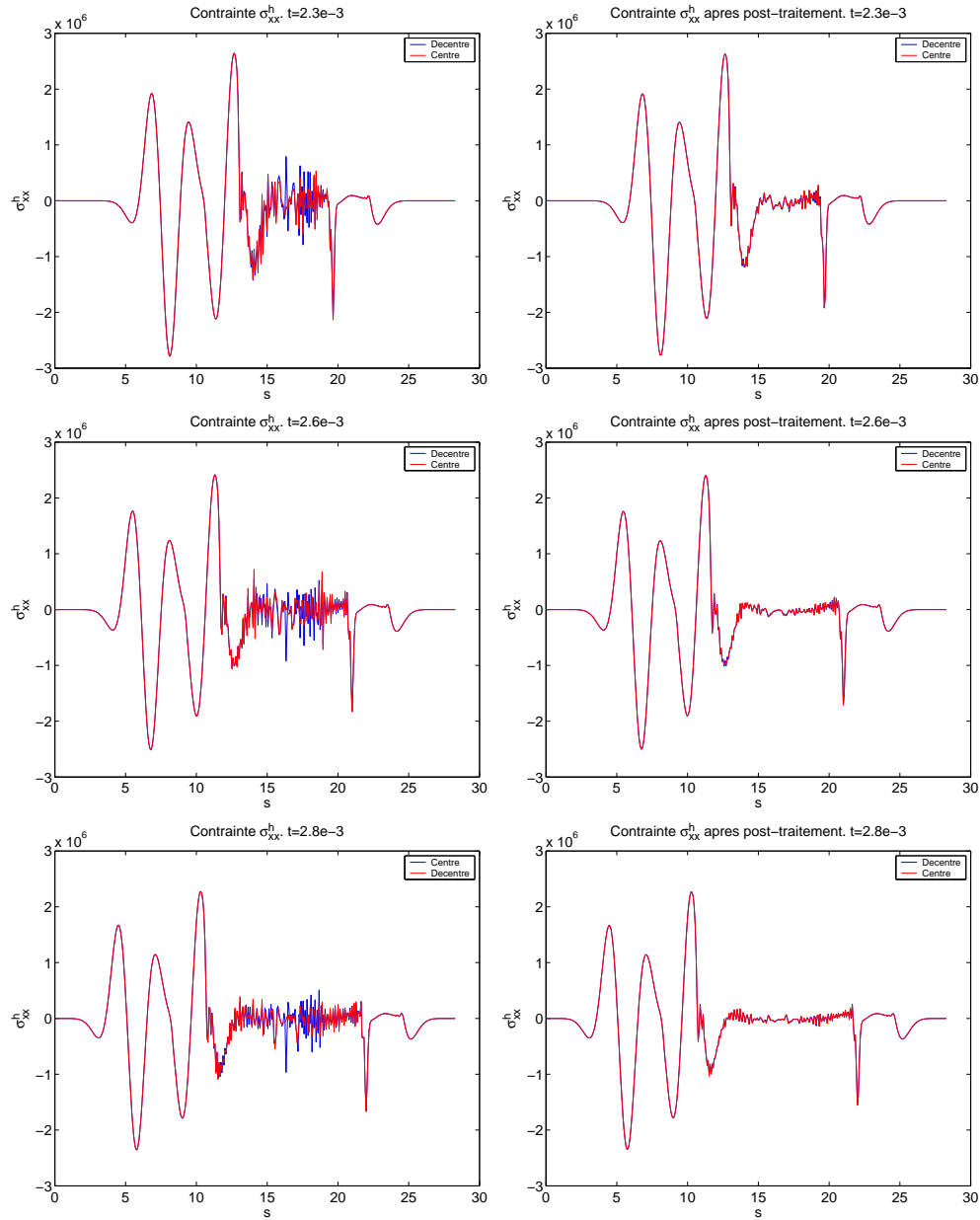


FIG. 6.107 – Comparaison des schémas centré-décentré avec amortissement sans post-traitement (gauche), avec post-traitement en temps (droite). Fissure diagonale. Contrainte  $\sigma_{xx}^h$

### 6.4.3 Sur l'intérêt des éléments circulaires

Sur les figures 6.108 et 6.109, on présente une comparaison entre éléments circulaires et éléments rectilignes pour approcher la fissure circulaire étudiée sur les figures précédentes. L'implémentation d'éléments circulaires a été expliquée dans la section 5.2.3. On montre ici les applications.

Pour le premier exemple (fig. 6.108), pour la discrétisation, on considère toujours  $n_i = n_j = 400$  points de discrétisation en espace. Le pas d'espace sur le maillage régulier est  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas d'espace sur le maillage de la fissure est  $H = 1.078$ , le pas de temps est  $\Delta t = 0.05$ . La fissure est un cercle de rayon  $R = 5.5$  centré en  $(10,10)$ . Le nombre de degrés de liberté sur la fissure est  $n_f = 32$  pour les deux types d'éléments. L'utilisation d'éléments circulaires (à gauche) donne de meilleurs résultats. Des oscillations apparaissent au niveau de la fissure pour les éléments rectilignes, essentiellement pour l'onde transmise.

Pour le deuxième exemple (fig.6.109), pour la discrétisation, on considère  $n_i = n_j = 400$  points de discrétisation en espace. Le pas d'espace sur le maillage régulier est  $h_x = h_y = 0.05$ , le pas d'espace sur le maillage de la fissure est  $H = 0.0864$ , le pas de temps est  $\Delta t = 0.05$ . La fissure est encore un cercle de rayon  $R = 5.5$  centré en  $(10,10)$ . Le nombre de degrés de liberté sur la fissure est  $n_f = 400$  pour les deux types d'éléments. Cette fois-ci, les résultats sont semblables pour les deux types d'éléments et on ne voit quasiment pas de différence. Il semble que les éléments circulaires donnent les mêmes résultats que les éléments rectilignes, si l'on a considéré un nombre de points assez grand sur la fissure. Cependant, pour un petit nombre d'éléments sur la fissure, il est plus intéressant d'utiliser des éléments circulaires que des éléments rectilignes, comme on a pu le voir sur la figure 6.108.

Eléments circulaires

Eléments rectilignes

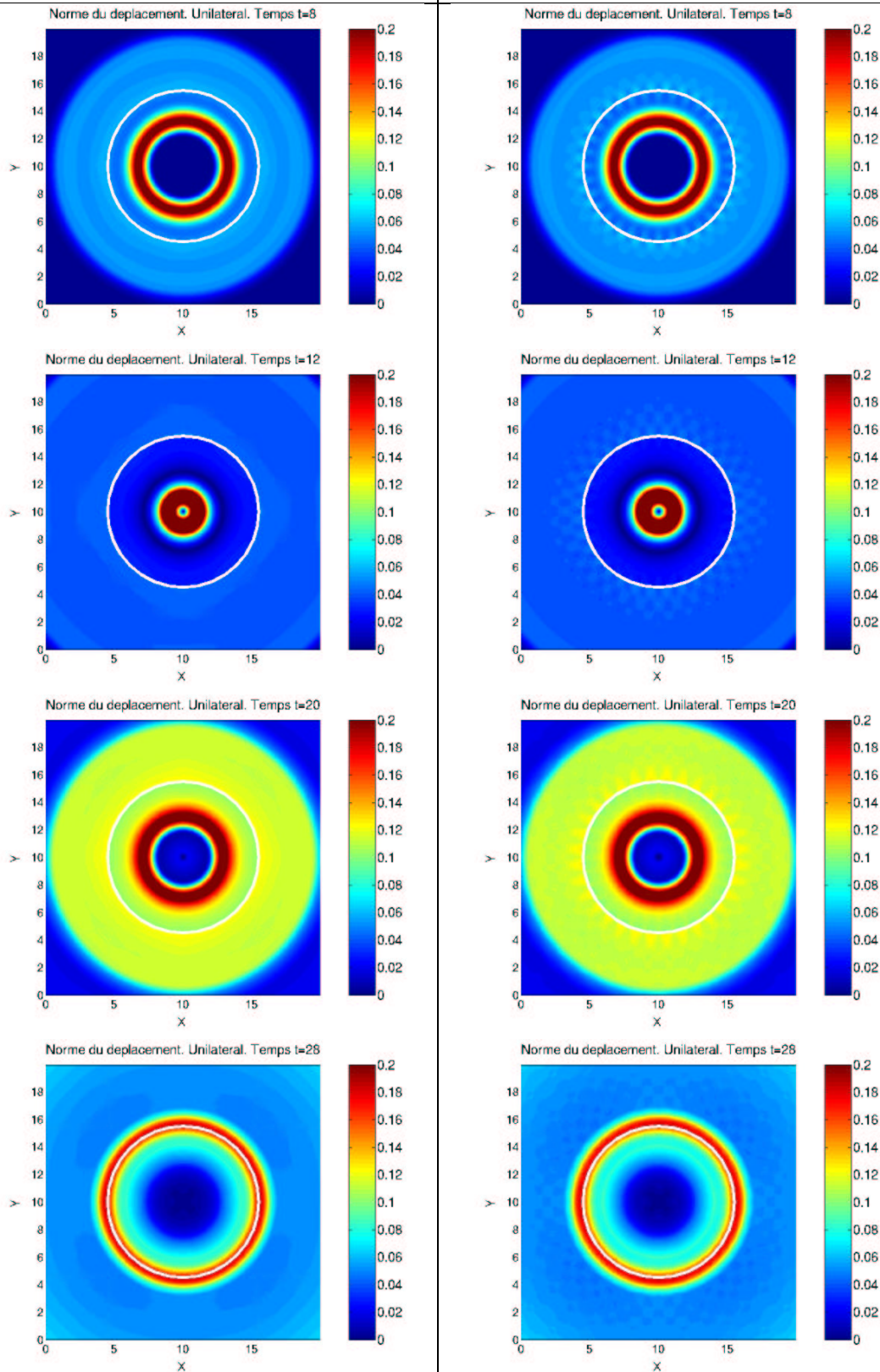


FIG. 6.108 – Comparaison entre éléments circulaires (gauche) et éléments rectilignes (droite). 32 éléments



Eléments circulaires

Eléments rectilignes

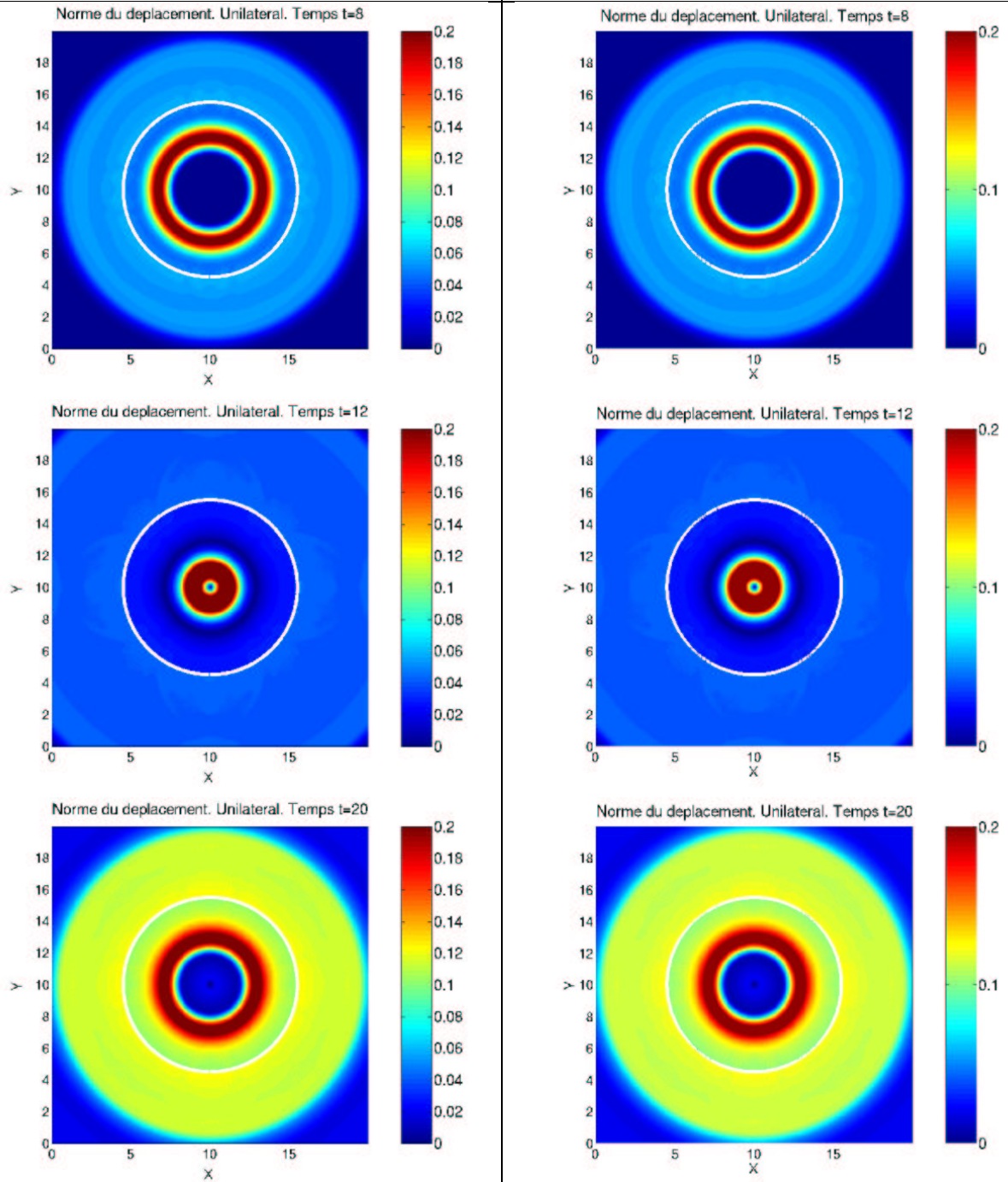


FIG. 6.109 – Comparaison entre éléments circulaires (gauche) et éléments rectilignes (droite)

## 6.5 Une expérience plus réaliste de contrôle non destructif

Dans cette partie, on présente les résultats pour un exemple plus réaliste. Les résultats ont été obtenus au sein de la Division Recherche et Développement d'E.D.F. Clamart, Département SINE-TICS. La méthode de résolution présentée dans ce rapport a été intégrée au code Athena d'E.D.F., qui simule la diffraction d'ondes élastiques pour des matériaux fissurés. On présente sur la figure 6.110 le principe de l'expérience. Un capteur est situé sur le bord haut de la pièce. Le capteur joue le rôle d'émetteur et de récepteur: il envoie le signal et le reçoit. Pour avoir des résultats significatifs, il faut considérer plusieurs positions initiales du capteur sur le bord haut. Pour chaque position initiale du capteur, on enregistre le retour reçu. On présente l'exemple "L60", cela signifie que l'on émet une onde de pression "L" à une incidence de 60 degrés. La fissure est une fissure verticale située dans le coin bas-droit. On suppose une condition de surface libre sur le bord bas.

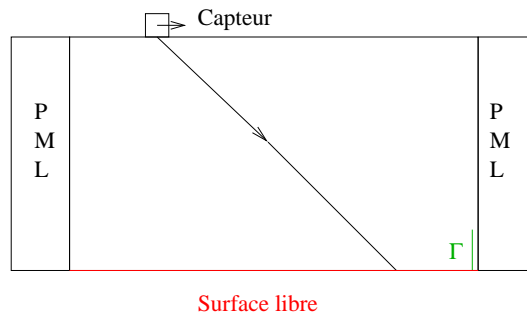


FIG. 6.110 – Principe de l'expérience

Les dimensions du problème sont les suivantes: on considère un domaine de taille  $0.06m \times 0.03m$ . La fissure est située en  $x = 0.059m$  et a une hauteur de  $5mm$ . La fréquence de la source est  $f = 2\text{ Mhz}$ . Le matériau est homogène et isotrope, de densité  $\rho = 7700\text{ kg.m}^{-3}$ , de vitesse  $V_p = 5900\text{ m.s}^{-1}$ ,  $V_s = 3230\text{ m.s}^{-1}$ .

On présente sur la figure 6.111 des instantanés de la norme du déplacement. La source est émise depuis le bord "haut" de la pièce. On voit l'onde se propager jusqu'à la fissure. A l'instant  $t = 16.9 \cdot 10^{-6}$ , on observe l'interaction de l'onde avec la fissure: on peut voir qu'une partie de l'onde est transmise à travers la fissure, et une autre partie est réfléchiée. Sur les instantanés suivants, on distingue nettement l'onde réfléchiée par la fissure.



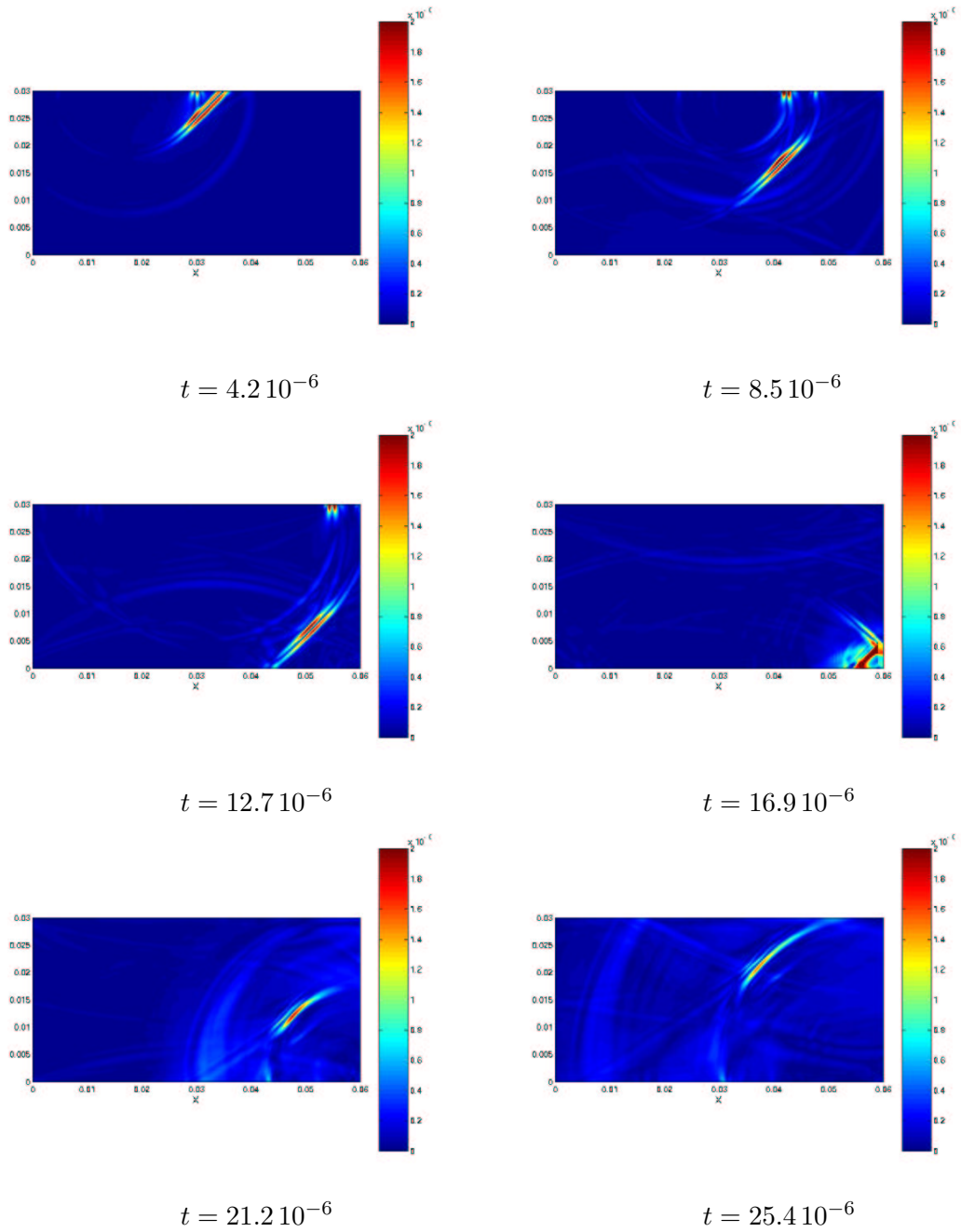


FIG. 6.111 – Instantanés 2D de la norme du déplacement

## 6.5 Une expérience plus réaliste de contrôle non destructif

On va souvent utiliser dans la suite les termes d'Ascan et Bscan. Un Ascan correspond à un sismogramme. Il correspond à l'évolution du déplacement reçue par le capteur, pour une position initiale donnée. Le Bscan regroupe l'ensemble des Ascans, pour les différentes positions initiales du capteur.

On présente sur la figure 6.112 le Bscan des vitesses obtenu pour le cas surface libre, pour l'exemple "L60". La figure 6.113 présente le Bscan des vitesses correspondant à l'exemple contact unilatéral. En abscisses, figurent les positions successives du capteur, en ordonnées, figurent les itérations en temps. Pour obtenir ces figures, il a donc fallu exécuter une quarantaine de simulations numériques, à chaque simulation correspond une position initiale du capteur.

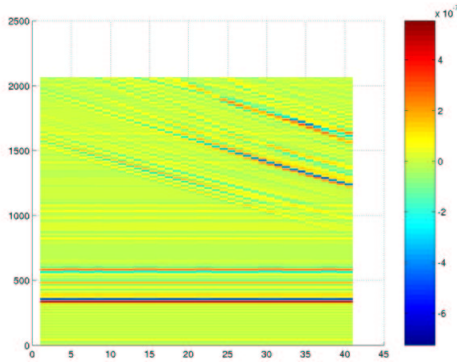


FIG. 6.112 - *BSCAN de la vitesse.*  
*Expérience L60. Cas surface libre*

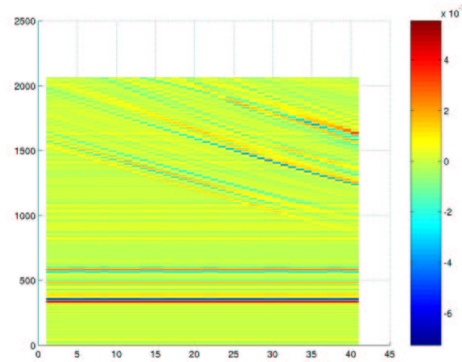


FIG. 6.113 - *BSCAN de la vitesse.*  
*Expérience L60. Cas contact unilatéral*

On peut voir que les deux Bscans sont très ressemblants. Le Bscan correspondant à la condition unilatérale a une amplitude légèrement inférieure à celui correspondant à la condition de surface libre. Si l'on avait observé les Bscans en déplacements, on aurait vu beaucoup plus de différences. Cela signifie que les résultats en déplacements comportent un mode constant. En dérivant, ce mode disparaît. De plus, au vu des Bscans en vitesse, l'intérêt de prendre en compte des conditions aux limites de contact unilatéral par rapport à celles de surface libre semble peu visible.

# Chapitre 7

## Perspectives

Dans ce chapitre, on présente quelques perspectives et de nouveaux problèmes. Une première perspective est de prendre en compte sur la fissure d'autres conditions aux limites de contact. Un premier exemple est le problème de pénalisation (appelé aussi compliance normale). Ces conditions aux limites sont très souvent employées pour des problèmes théoriques mais aussi pour des problèmes numériques. Un autre exemple est le problème avec conditions aux limites de frottement de Tresca, avec contact bilatéral, exemple classique de problèmes de contact. Un dernier exemple correspond au problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Dans cette partie, on propose les formulations en domaines fictifs correspondantes, du même type que (3.2). Une autre perspective est la prise en compte d'une loi viscoélastique de Kelvin-Voigt, déjà utilisée dans le chapitre 2. On présente ici une méthode de résolution du problème avec contact unilatéral, sans frottement, dans le cas unidimensionnel seulement.

### 7.1 Problème pénalisé

De nombreux problèmes de mécanique du contact utilisent des conditions aux limites de type compliance normale (voir dans [37]). Ces conditions aux limites ont été vues une première fois dans le chapitre 2, pour obtenir l'existence d'une solution d'un problème de contact unilatéral avec frottement non local par une méthode de pénalisation. De plus, mécaniquement, utiliser de telles conditions aux limites signifie que l'on autorise le corps à pénétrer l'obstacle, dans le cas du contact unilatéral entre un corps et un obstacle. Ce phénomène de pénétration est compensé par le fait que la contrainte normale du corps (réaction), sur la surface de contact, a une norme tendant vers l'infini.

On note  $\Phi(v) = \max(0, -v)$  pour tout scalaire  $v$ . Les conditions aux limites sur la fissure sont les suivantes, en considérant toujours l'absence de frottement:

$$\sigma_N(\mathbf{u}) = -C_N \Phi([u_N])^{m_N}, \quad \sigma_T(\mathbf{u}) = 0. \quad (7.1)$$

$C_N$  est un réel positif quelconque,  $m_N$  est un entier supérieur ou égal à 1.

#### 7.1.1 Formulation en domaines fictifs

Ce type de conditions aux limites peut être traité par une formulation en domaines fictifs, semblable à (3.2).

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times \mathbf{L}_T \times \mathcal{G}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}) - d(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, & (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + d(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + b_N(\boldsymbol{\tau}, \lambda_N) + b_T(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_T) & = 0, \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, & (ii) \\ b_N(\boldsymbol{\sigma}, \mu_N) & = -C_N (\Phi(\lambda_N))^{m_N}, \forall \mu_N \in \mathcal{G}, & (iii) \\ b_T(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}_T) & = 0, \forall \boldsymbol{\mu}_T \in \mathbf{L}_T. & (iv) \end{array} \right. \quad (7.2)$$

L'équivalence entre la formulation (7.2) et le problème de l'élastodynamique comprenant la condition aux limites (7.1) est immédiate, si et seulement si  $\boldsymbol{\lambda}_T = [\mathbf{u}_T]$  et  $\lambda_N = [u_N]$ .

### 7.1.2 Estimations d'énergie

**Proposition 7.1** *Si la solution du problème (7.2) est suffisamment régulière, l'énergie continue  $\mathcal{E}$  est donnée par la relation suivante.*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) + \frac{C_N}{m_N + 1} (\Phi(\lambda_N))^{m_N + 1}.$$

De plus, elle satisfait, à tout instant  $t$ , la relation suivante:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) ds.$$

#### Démonstration

L'énergie continue est obtenue à partir de (7.2). Pour cela, on suppose que  $\partial \mathbf{u} / \partial t \in \mathbf{M}$ . On remplace la fonction test  $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$  par  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  dans (7.2)-(i).

$$(\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) - d(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) = (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}).$$

On suppose que  $\partial \lambda_N / \partial t \in \mathcal{G}$ ,  $\partial \boldsymbol{\lambda}_T / \partial t \in \mathbf{L}_T$ . On dérive la relation (7.2)-(ii) par rapport au temps, et on choisit comme fonction test  $\boldsymbol{\sigma}$ . On utilise ensuite (7.2)-(iii).

$$\begin{aligned} a(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma}) + d(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) + b_N(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t}) + b_T(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) & = 0, \\ a(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma}) + d(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) - C_N (\Phi(\lambda_N))^{m_N} \frac{\partial \lambda_N}{\partial t} + b_T(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) & = 0. \end{aligned}$$

On a, pour presque tout  $t > 0$ , où  $v$  est une fonction suffisamment régulière définie sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$\frac{d}{dt} (\Phi(v(t)))^m = -m \Phi(v(t))^{m-1} v'(t), \forall m \in \mathbb{N}.$$

Comme le terme lié au frottement s'annule, on obtient, par addition,

$$\begin{aligned} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) + a(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma}) - C_N (\Phi(\lambda_N))^{m_N} \frac{\partial \lambda_N}{\partial t} & = (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{C_N}{m_N + 1} \frac{d}{dt} (\Phi(\lambda_N))^{m_N + 1} & = (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{C_N}{m_N + 1} \frac{d}{dt} (\Phi(\lambda_N))^{m_N + 1} = (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}). \quad \blacksquare$$

En pratique, on choisit souvent  $m_N = 1$  et  $C_N = 1/\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  petit.

La résolution numérique associée à ce problème est difficile. Si l'on cherche un schéma centré, on est amené à résoudre un problème non linéaire. Il semble plus aisé de considérer un schéma décentré qui contient le terme pénalisé exprimé à l'instant  $n - 1$ . On a alors à résoudre seulement un système linéaire.

## 7.2 Frottement de Tresca

Le problème de frottement de Tresca a été souvent étudié dans la littérature, car il s'agit d'un exemple relativement simple. Par exemple, il a été utilisé dans [46, 33, 28]. Néanmoins, cette condition modélise un phénomène peu réaliste mécaniquement mais souvent utilisé numériquement. Dans un premier temps, je présente les conditions aux limites en déplacements.

### 7.2.1 Formulation des conditions aux limites en déplacements

On désigne par  $g$  le seuil de frottement de Tresca. Ce seuil est défini sur  $\Gamma$  et il dépend du temps. Par souci de simplicité, on suppose  $g \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma))$  et  $g \geq 0$ . Les conditions aux limites en déplacements s'écrivent, où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne d'un vecteur,

$$\begin{aligned} [u_N] &= 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \\ \|\sigma_T(\mathbf{u})\| &= \|\sigma_T^+(\mathbf{u})\| \leq g \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma \text{ et } \begin{cases} \|\sigma_T(\mathbf{u})\| < g \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}_T^+}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}_T^-}{\partial t} = \mathbf{0}, \\ \|\sigma_T(\mathbf{u})\| = g \Rightarrow \exists \alpha \geq 0, \frac{\partial \mathbf{u}_T^+}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}_T^-}{\partial t} = -\alpha \sigma_T(\mathbf{u}). \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Rappelons que, par convention, on a défini  $[v_T] = -(v_T^+ - v_T^-)$  pour tout  $v \in [H^1(\Omega)]^d$ .

Ainsi la relation  $\exists \alpha \geq 0, \frac{\partial \mathbf{u}_T^+}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}_T^-}{\partial t} = -\alpha \sigma_T(\mathbf{u})$  s'écrit  $\exists \alpha \geq 0, \frac{\partial [u_T]}{\partial t} = \alpha \sigma_T(\mathbf{u})$ .

### 7.2.2 Formulation en déplacements-contraintes-sauts de déplacements

Notre but est de proposer une formulation en domaines fictifs du problème avec frottement de Tresca. On présente ici les conditions aux limites équivalentes à (7.3) formulées avec les variables  $(\sigma, \mathbf{u}, \lambda_T)$ . Rappelons que  $\lambda_N = [u_N]$  et  $\lambda_T = [u_T]$ . Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{aligned} \lambda_N &= 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma, \\ \|\sigma_T\| &\leq g \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma \text{ et } \begin{cases} \|\sigma_T\| < g \Rightarrow \frac{\partial \lambda_T}{\partial t} = \mathbf{0}, \\ \|\sigma_T\| = g \Rightarrow \exists \alpha \geq 0, \frac{\partial \lambda_T}{\partial t} = \alpha \sigma_T. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

### 7.2.3 Inéquation variationnelle équivalente

Nous avons besoin de prendre en compte sous forme faible la condition aux limites (7.4). Il existe une inéquation variationnelle qui est formellement équivalente à la condition (7.4). Cette inéquation est donnée dans le lemme suivant:

**Lemme 7.1** *Les conditions aux limites (7.4) sont équivalentes à  $\lambda_N = 0$  et à l'inéquation variationnelle suivante:*

$$\int_{\Gamma} g \left( \|\mu_T\| - \left\| \frac{\partial \lambda_T}{\partial t} \right\| \right) - \sigma_T \cdot \left( \mu_T - \frac{\partial \lambda_T}{\partial t} \right) ds \geq 0, \forall \mu_T \in \mathbf{L}_T. \quad (7.5)$$

**Démonstration**

On suppose que les conditions aux limites (7.4) sont vérifiées. On considère la partition suivante de  $\Gamma$ , en un instant  $t$  donné,

$$\Gamma = \{s \in \Gamma, \|\sigma_{\mathbf{T}}(s)\| < g(s,t)\} \cup \{s \in \Gamma, \|\sigma_{\mathbf{T}}(s)\| = g(s,t)\} = \Gamma_S \cup \Gamma_E.$$

En utilisant cette partition, on obtient, en un instant  $t$  donné,

$$\int_{\Gamma} \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds = \int_{\Gamma_S} \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds + \int_{\Gamma_E} \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds, \forall \mu_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}.$$

Selon (7.4), on a  $\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_S$ . D'où

$$\int_{\Gamma_S} \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds = \int_{\Gamma_S} \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \mu_{\mathbf{T}} ds.$$

Or, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\Gamma_S} g \|\mu_{\mathbf{T}}\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \mu_{\mathbf{T}} ds \geq 0, \forall \mu_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}. \quad (7.6)$$

Sur  $\Gamma_E$ , on a  $\|\sigma_{\mathbf{T}}\| = g$ . Selon (7.4), il existe  $\alpha \geq 0$ ,  $\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} = \alpha \sigma_{\mathbf{T}}$ . Donc,

$$\int_{\Gamma_E} \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} ds = \alpha \int_{\Gamma} \|\sigma_{\mathbf{T}}\|^2 ds, \text{ d'où } \int_{\Gamma_E} g \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} ds = 0.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\Gamma_E} g \|\mu_{\mathbf{T}}\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \mu_{\mathbf{T}} ds \geq 0, \forall \mu_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}.$$

D'où

$$\int_{\Gamma_E} g (\|\mu_{\mathbf{T}}\| - \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\|) - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds \geq 0, \forall \mu_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}. \quad (7.7)$$

En additionnant (7.6) et (7.7), on obtient, pour tout  $\mu_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}$ .

$$\int_{\Gamma_S} g (\|\mu_{\mathbf{T}}\| - \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\|) - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds + \int_{\Gamma_E} g (\|\mu_{\mathbf{T}}\| - \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\|) - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds \geq 0.$$

D'où (7.5).

Réciproquement, supposons que (7.5) est vérifiée. On a, pour tout  $\mu_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}$ ,

$$\int_{\Gamma} g (\|\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\|) - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds \geq \int_{\Gamma} g (\|\mu_{\mathbf{T}}\| - \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\|) - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot (\mu_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) ds \geq 0.$$

D'où  $\|\sigma_{\mathbf{T}}\| \leq g$ , presque partout sur  $\Gamma$ . De plus, en choisissant  $\mu_{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$  (respectivement  $\mu_{\mathbf{T}} = 2 \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}$ ), on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} g \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} ds & \geq 0, \\ \int_{\Gamma} -g \|\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\| + \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} ds & \geq 0. \end{cases}$$

D'où

$$\int_{\Gamma} g \left\| \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} \right\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} ds = 0.$$

Comme  $g \left\| \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} \right\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} \geq 0$  sur  $\Gamma$ , on en déduit  $g \left\| \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} \right\| - \sigma_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} = 0$  presque partout sur  $\Gamma$ .

Rappelons l'équivalence suivante, pour tous éléments  $a, b$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $c > 0$ ,

$$c \|a\| = b \cdot a \text{ avec } \|b\| \leq c \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } \|b\| = c, \exists \alpha \geq 0, a = \alpha b \\ \text{Si } \|b\| < c, \text{ alors } a = 0. \end{cases}$$

On en déduit  $\|\sigma_{\mathbf{T}}\| = g$ , et  $\exists \alpha \geq 0$ ,  $\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} = \alpha \sigma_{\mathbf{T}}$  ou bien  $\|\sigma_{\mathbf{T}}\| < g$ , et  $\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t} = 0$ . D'où (7.4). ■

### 7.2.4 Formulation en domaines fictifs

On introduit la fonctionnelle suivante:

$$j_0 : \mathcal{G}^d \rightarrow \mathbb{R}, j_0(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\Gamma} g \|\boldsymbol{\mu}\| ds.$$

La formulation en domaines fictifs formellement équivalente au problème (7.3) est la suivante:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \lambda_{\mathbf{T}}) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times \mathbf{L}_{\mathbf{T}}$  tels que

$$\begin{cases} \left( \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v} \right) - d(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, & (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + d(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + b_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\tau}, \lambda_{\mathbf{T}}) & = 0, \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, & (ii) \\ b_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{T}} - \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) - j_0(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{T}}) + j_0(\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}) & \leq 0, \forall \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{T}} \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}. & (iii) \end{cases} \quad (7.8)$$

### 7.2.5 Estimations d'énergie

**Proposition 7.2** *Si la solution du problème (7.8) est suffisamment régulière, l'énergie continue  $\mathcal{E}$  est donnée par la relation suivante.*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} \left( \varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right).$$

De plus, elle satisfait, à tout instant  $t$ , la relation suivante:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) - \int_0^t j_0\left(\frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\right) ds + \int_0^t \left(\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) ds.$$

#### Démonstration

L'énergie continue de la solution  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \lambda_{\mathbf{T}})$  du problème (7.8) est

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} \left( \varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right).$$

Cette énergie est obtenue à partir de (7.8). Pour cela, on suppose que  $\partial \mathbf{u} / \partial t \in \mathbf{M}$ . On remplace la fonction test  $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$  par  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  dans (7.8)-(i). On suppose que  $\partial \lambda_{\mathbf{T}} / \partial t \in \mathbf{L}_{\mathbf{T}}$ . On dérive la relation (7.8)-(ii) par rapport au temps, et on choisit comme fonction test  $\boldsymbol{\sigma}$ . Après addition, il vient

$$\left( \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + a\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma}\right) + b_{\mathbf{T}}\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_{\mathbf{T}}}{\partial t}\right) = \left(\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right).$$

En prenant  $\boldsymbol{\mu}_T = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\mu}_T = 2(\partial\boldsymbol{\lambda}_T/\partial t)$  dans la relation (7.8)-(iii), on obtient

$$b_T(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) = j_0(\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) \geq 0.$$

Il découle

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{f}, \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}) - j_0(\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}).$$

L'énergie vérifie alors

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) - \int_0^t j_0(\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) ds + \int_0^t (\mathbf{f}, \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}) ds. \quad \blacksquare$$

L'énergie continue est décroissante si l'on n'impose pas de source extérieure ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ) mais seulement des conditions initiales.

## 7.3 Frottement de Coulomb

Le frottement de Coulomb étant le plus réaliste comme type de frottement, on va s'intéresser à celui-ci. Au niveau théorique, il n'y a pas de résultats d'existence en élastodynamique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb. Un résultat d'existence mathématique est prouvé dans ce mémoire (voir la partie 2.3.6) pour un matériau viscoélastique de type Kelvin-Voigt, et le frottement est supposé non local, c'est-à-dire qu'une régularisation du tenseur des contraintes est supposée.

### 7.3.1 Formulation des conditions aux limites en déplacements

On considère une loi de frottement locale, c'est-à-dire sans régularisation, au contraire de la partie 2.3.6.  $\mu$  désigne le coefficient de frottement de Coulomb, on le suppose positif ou nul, indépendant du temps et  $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ .

Les conditions aux limites de frottement de Coulomb sur  $\Gamma$  s'expriment de la manière suivante, avec  $\mathbf{u}$  le déplacement et  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne,

$$\|\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{u})\| \leq -\mu \sigma_N(\mathbf{u}) \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma \text{ et } \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{u})\| < -\mu \sigma_N(\mathbf{u}) \Rightarrow \frac{\partial[\mathbf{u}_T]}{\partial t} = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{u})\| = -\mu \sigma_N(\mathbf{u}) \Rightarrow \exists \alpha \geq 0, \frac{\partial[\mathbf{u}_T]}{\partial t} = \alpha \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (7.9)$$

### 7.3.2 Formulation en déplacements-contraintes-sauts de déplacement

Comme pour le problème de Tresca, il est nécessaire d'écrire les conditions aux limites en introduisant les variables  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N$ , en vue de l'obtention de la formulation en domaines fictifs.

La condition de Signorini est identique à celle formulée dans (1.9). Désormais, la trace tangentielle de la contrainte n'est plus nulle mais obéit à la loi de Coulomb. Les conditions aux limites de frottement de Coulomb sur  $\Gamma$  s'expriment alors de la manière suivante, où les inconnues sont  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N$ .

$$\|\boldsymbol{\sigma}_T\| \leq -\mu \sigma_N \text{ sur } ]0, T[ \times \Gamma \text{ et } \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_T\| < -\mu \sigma_N \Rightarrow \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t} = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_T\| = -\mu \sigma_N \Rightarrow \exists \alpha \geq 0, \frac{\partial\boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t} = \alpha \boldsymbol{\sigma}_T. \end{cases} \quad (7.10)$$



### 7.3.3 Inéquation variationnelle équivalente

Nous avons besoin de prendre en compte sous forme faible la condition aux limites (7.10). Il existe une inéquation variationnelle qui est formellement équivalente à la condition (7.10). Cette inéquation est donnée dans le lemme suivant:

**Lemme 7.2** *Les conditions aux limites (7.10) sont équivalentes à l'inéquation variationnelle suivante:*

$$\int_{\Gamma} -\mu |\sigma_N| (\|\boldsymbol{\mu}_T\| - \|\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}\|) - \boldsymbol{\sigma}_T \cdot (\boldsymbol{\mu}_T - \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) ds \geq 0, \forall \boldsymbol{\mu}_T \in \mathbf{L}_T. \quad (7.11)$$

#### Démonstration

La démonstration est strictement identique à la preuve du lemme 7.1, qui traite de la condition aux limites avec frottement de Tresca. Il s'agit seulement de remplacer  $g$  par  $-\mu \sigma_N$ . ■

### 7.3.4 Formulation en domaines fictifs

On introduit la fonctionnelle suivante à valeurs dans  $\mathbb{R}$ :

$$j_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{L}_T \rightarrow \mathbb{R}, \quad j_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}_T) = - \int_{\Gamma} \mu \sigma_N \|\boldsymbol{\mu}_T\| ds.$$

On propose la formulation suivante en domaines fictifs du problème de l'élastodynamique en présence de contact unilatéral et de frottement de Coulomb sur la fissure:

Trouver  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times \mathbf{L}_T \times L_N^+$  tels que

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}) - d(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{M}, & (i) \\ a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + d(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) + b_T(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_T) + b_N(\boldsymbol{\tau}, \lambda_N) & = 0, \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{X}, & (ii) \\ b_N(\boldsymbol{\sigma}, \mu_N - \lambda_N) & \leq 0, \forall \mu_N \in L_N^+, & (iii) \\ b_T(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}_T - \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) - j_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}_T) + j_1(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) & \leq 0, \forall \boldsymbol{\mu}_T \in \mathbf{L}_T. & (iv) \end{cases} \quad (7.12)$$

### 7.3.5 Estimations d'énergie

**Proposition 7.3** *Si la solution du problème (7.12) est suffisamment régulière, l'énergie continue  $\mathcal{E}$  est donnée par la relation suivante.*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}).$$

De plus, elle satisfait, à tout instant  $t$ , la relation suivante:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) - \int_0^t j_1(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_T}{\partial t}) ds + \int_0^t (\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) ds.$$

#### Démonstration

L'énergie continue de la solution  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_T, \lambda_N)$  du problème (7.12) est

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} (\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}).$$

Cette énergie est obtenue à partir de (7.12). Pour cela, on suppose que  $\partial \mathbf{u}/\partial t \in \mathbf{M}$ . On remplace la fonction test  $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$  par  $\partial \mathbf{u}/\partial t$  dans (7.12)-(i). On suppose que  $\partial \lambda_N/\partial t \in \mathcal{G}$  et  $\partial \lambda_T/\partial t \in \mathbf{L}_T$ . On dérive (7.12)-(ii) par rapport au temps, et on choisit comme fonction test  $\boldsymbol{\sigma}$ . Après addition, il vient

$$\left(\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) + a\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}, \boldsymbol{\sigma}\right) + b_N\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t}\right) + b_T\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_T}{\partial t}\right) = \left(\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right).$$

Or, il est clair que  $b_N\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_N}{\partial t}\right) = 0$  par le même argument que celui utilisé dans le paragraphe 3.4. De plus, en prenant  $\boldsymbol{\mu}_T = \mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\mu}_T = 2(\partial \lambda_T/\partial t)$  dans (7.8)-(iii), il vient alors

$$b_T\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_T}{\partial t}\right) = j_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_T}{\partial t}\right) \geq 0.$$

$$\text{On obtient donc } \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \left(\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) - j_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_T}{\partial t}\right).$$

L'énergie vérifie alors

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) - \int_0^t j_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \frac{\partial \lambda_T}{\partial t}\right) ds + \int_0^t \left(\mathbf{f}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) ds. \quad \blacksquare$$

L'énergie continue est décroissante si l'on n'impose pas de source extérieure ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ) mais seulement des conditions initiales.

## 7.4 Problème viscoélastique de Kelvin-Voigt

Dans cette partie, on cherche à approcher numériquement le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt, présenté auparavant et utilisé dans le chapitre 2 pour obtenir un résultat d'existence avec contact unilatéral et frottement non local. Les seuls résultats numériques présentés le sont dans le cas unidimensionnel. Une perspective de travail est de passer aux dimensions supérieures. On rappelle les équations du problème, sans préciser dans un premier temps la condition de Signorini sur la fissure.

$$\begin{cases} \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) & = \mathbf{f} & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) & = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} & = \mathbf{0} & \text{dans } ]0, T[ \times \Gamma_D. \end{cases} \quad (7.13)$$

Les tenseurs  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  vérifient les propriétés de symétrie et d'ellipticité habituelles (voir (1.2)). On s'intéresse à obtenir un schéma numérique adapté à cette loi de comportement.

### 7.4.1 Problème 1D

On considère la formulation mixte suivante en contraintes-déplacements dans laquelle on introduit les coefficients réels  $\mu > 0$  et  $\varepsilon \geq 0$ .

$$\begin{cases} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma & = f & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \sigma & = \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u & = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Gamma_D. \end{cases} \quad (7.14)$$

La formulation variationnelle mixte équivalente est la suivante:  
 Trouver  $(\sigma, u) : ]0, T[ \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{M}$  et

$$\begin{cases} (\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v) - d(\sigma, v) & = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{M}, \\ a(\sigma, \tau) + d(\tau, u) + \epsilon d(\tau, \frac{\partial u}{\partial t}) & = 0 \quad \forall \tau \in \mathbf{X}. \end{cases} \quad (7.15)$$

On pose  $a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \sigma \cdot \tau \, dx$  et  $d$  est défini comme dans (1.12).

#### 7.4.2 Approximation numérique

Un schéma simulant ce type de loi de comportement est soit implicite, soit explicite avec une condition de stabilité du type  $\Delta t/h^2 \leq C$ . Le schéma centré (7.16) décrit dans la suite est inconditionnellement instable en 1D, cela a été démontré dans [18] et a été vérifié par des essais numériques en 1D.

Trouver  $(\Sigma^{n+1}, U^{n+1})$  tels que

$$\begin{cases} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - D\Sigma^n & = F^n, \\ M_\sigma \frac{\Sigma^{n+1} + \Sigma^n}{2} + D^* \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + \epsilon D^* \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} & = 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Le schéma implicite centré qui a été utilisé est le suivant:

Trouver  $(\Sigma^{n+1/2}, U^{n+1})$  tels que

$$\begin{cases} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - D \frac{\Sigma^{n+1/2} + \Sigma^{n-1/2}}{2} & = F^n, \\ M_\sigma \Sigma^{n+1/2} + D^* \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + \epsilon D^* \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} & = 0. \end{cases}$$

On note  $K = D M_\sigma^{-1} D^*$ . Le schéma s'écrit, avec une formulation en déplacements,

$$M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + K \frac{U^{n+1} + 2U^n + U^{n-1}}{4} + \epsilon K \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = F^n.$$

Ce qui donne à résoudre, à chaque pas de temps,

$$\left[ \frac{M_v}{\Delta t^2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t} \right) K \right] U^{n+1} = \left[ 2 \frac{M_v}{\Delta t^2} - \frac{1}{2} K \right] U^n - \left[ \frac{M_v}{\Delta t^2} + \left( \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2\Delta t} \right) K \right] U^{n-1}.$$

Si  $K$  est symétrique définie positive,  $\frac{M_v}{\Delta t^2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t} \right) K$  est symétrique définie positive, pour tout  $\epsilon > 0$ . A chaque itération en temps, on doit résoudre un système linéaire.

Dans le cas unidimensionnel,  $K$  étant tridiagonale,  $\frac{M_v}{\Delta t^2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t} \right) K$  est aussi tridiagonale. Cela peut permettre de faire le calcul plus rapidement que par les méthodes classiques de Cholesky.

#### Condition de surface libre

On considère la présence d'une fissure (i.e. un point en 1D). On suppose d'abord une condition de surface libre. Il faut prendre en compte la relation suivante:

$$\sigma(a) = 0 \text{ sur } ]0, T[.$$

Après discrétisation en espace et en temps, il faut rajouter l'équation suivante:

$$B_N \Sigma^{n+1/2} = 0.$$

Si on rajoute le multiplicateur  $\lambda = [u]$  sur la fissure, on propose le schéma suivant:

Trouver  $(\Sigma^{n+1/2}, U^{n+1}, \Lambda^{n+1})$  tels que

$$\begin{cases} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} - D \frac{\Sigma^{n+1/2} + \Sigma^{n-1/2}}{2} = F^n, \\ M_\sigma \Sigma^{n+1/2} + D^* \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + \epsilon D^* \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + B_N^* \frac{\Lambda^{n+1} + \Lambda^n}{2} + \epsilon B_N^* \frac{\Lambda^{n+1} - \Lambda^n}{\Delta t} = 0. \end{cases}$$

Ce schéma s'écrit, avec une formulation seulement en déplacements,

$$\begin{cases} M_v \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + K \frac{U^{n+1} + 2U^n + U^{n-1}}{4} + \epsilon K \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} \\ + DM_\sigma^{-1} B_N^* \frac{\Lambda^{n+1} + 2\Lambda^n + \Lambda^{n-1}}{4} + \epsilon DM_\sigma^{-1} B_N^* \frac{\Lambda^{n+1} - \Lambda^{n-1}}{2\Delta t} = F^n, \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \Lambda^{n+1} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) B_N M_\sigma^{-1} D^* U^{n+1} \\ = \left(-\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \Lambda^n - \left(-\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) B_N M_\sigma^{-1} D^* U^n. \end{cases}$$

Il faut donc résoudre, à chaque pas de temps, le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{M_v}{\Delta t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right)K\right) & DM_\sigma^{-1} B_N^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) \\ B_N M_\sigma^{-1} D^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) & B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1^{n+1} \\ \mathcal{F}_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

On a, de plus,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1^{n+1} \\ \mathcal{F}_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{2M_v}{\Delta t^2} - \frac{1}{2}K\right]U^n - \left[\frac{M_v}{\Delta t^2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right)\right]U^{n-1} + F^n - \frac{1}{2}DM_\sigma^{-1}B_N^*\Lambda_N^n \\ -DM_\sigma^{-1}B_N^*\Lambda_N^{n-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) \\ \left(-\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right)B_N M_\sigma^{-1}B_N^*\Lambda_N^n - \left(-\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right)B_N M_\sigma^{-1}D^*U^n \end{pmatrix}.$$

### Condition de contact unilatéral

Pour le problème de contact unilatéral, on considère un schéma centré implicite, comme dans le cas élastique. On suppose ensuite une condition de contact unilatéral sur la fissure. Il faut prendre en compte la relation suivante:

$$(\sigma(a), \mu - [u(a)]) \leq 0, \quad \forall \mu \geq 0, \text{ sur } ]0, T[.$$

Après discrétisation en espace et en temps, la discrétisation totale de la partie non linéaire s'écrit

$$(B_N \Sigma^{n+1/2}, \mu - \Lambda^{n+1}) \leq 0, \quad \forall \mu \geq 0.$$

On doit alors résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{M_v}{\Delta t^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right)K\right) & DM_\sigma^{-1} B_N^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) \\ B_N M_\sigma^{-1} D^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) & B_N M_\sigma^{-1} B_N^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2\Delta t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 - U^{n+1} \\ \mu_2 - \Lambda^{n+1} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1^{n+1} \\ \mathcal{F}_2^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 - U^{n+1} \\ \mu_2 - \Lambda^{n+1} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall \mu = (\mu_1, \mu_2), \mu_1 \in \mathbb{R}^{N_u}, \mu_2 \geq 0.$$

$(U^{n+1}, \Lambda^{n+1})$  sont solutions d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes de borne. Dans le cas 1D, cela donne à résoudre un problème d'optimisation de taille très grosse en  $O(n^2)$ , ce qui entraîne une durée de calcul très longue. Il n'est pas envisageable d'appliquer au cas bidimensionnel un tel algorithme.

Sur les figures 7.1, 7.2, on présente les résultats issus de cette discrétisation. On montre ainsi la norme du déplacement calculée en plusieurs instants, entre  $t = 0$  et  $t = 12$ . On impose la condition initiale  $u_0(x) = 2 \exp(-(x - 7.5)^2) - \exp(-(x - 9)^2)$ . On suppose  $u_1 = 0, f = 0, \mu = 1, \varepsilon = 1$ . Le problème est posé sur le segment  $[0, 15]$ , la fissure est située en  $a = 2.51$ . Les résultats sont présentés pour  $n = 1800, h = 0.015, dt = 0.0045$ . Le calcul est fait sur un domaine élargi de telle sorte qu'il n'y a pas de réflexion due aux bords.

On peut voir qu'une discontinuité du saut de déplacement est visible dès l'instant  $t = 1.8$ . Cette discontinuité disparaît ensuite, il y a à nouveau contact, aux environs de l'instant  $t = 11.475$ . Sur la figure 7.3, on représente l'évolution de la norme du déplacement sur une échelle plus petite, à partir de l'instant  $t = 9$ . On peut voir qu'à partir de  $t = 11.475$ , il y a contact et l'onde est transmise (pour une faible valeur) après la fissure, c'est-à-dire pour  $x \leq 2.51$ .

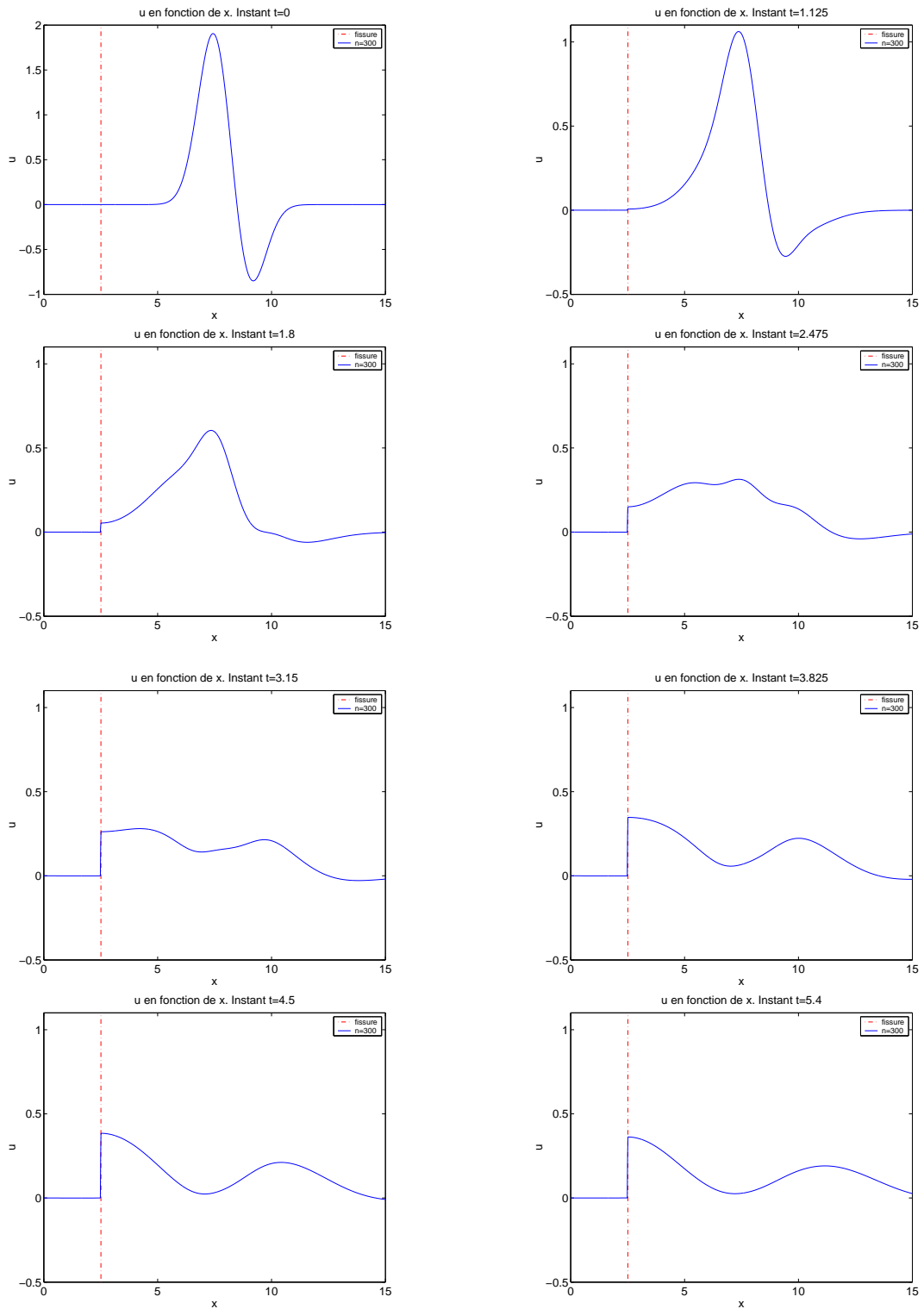


FIG. 7.1 – Déplacements. Schéma centré implicite. Instants  $t = 0$  à 5.4

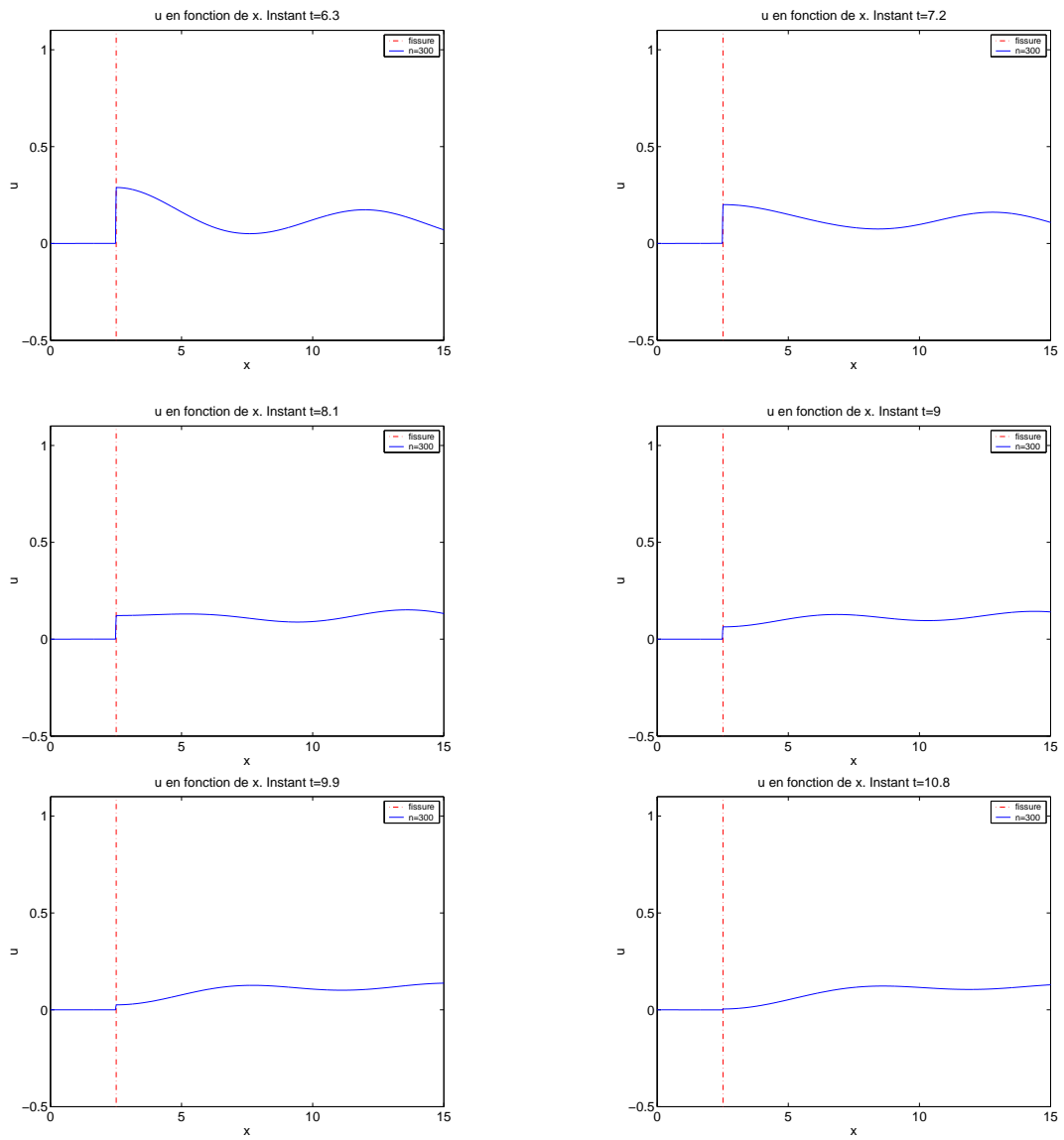


FIG. 7.2 – Déplacements. Schéma décentré implicite. Instants  $t = 6.3$  à  $10.8$

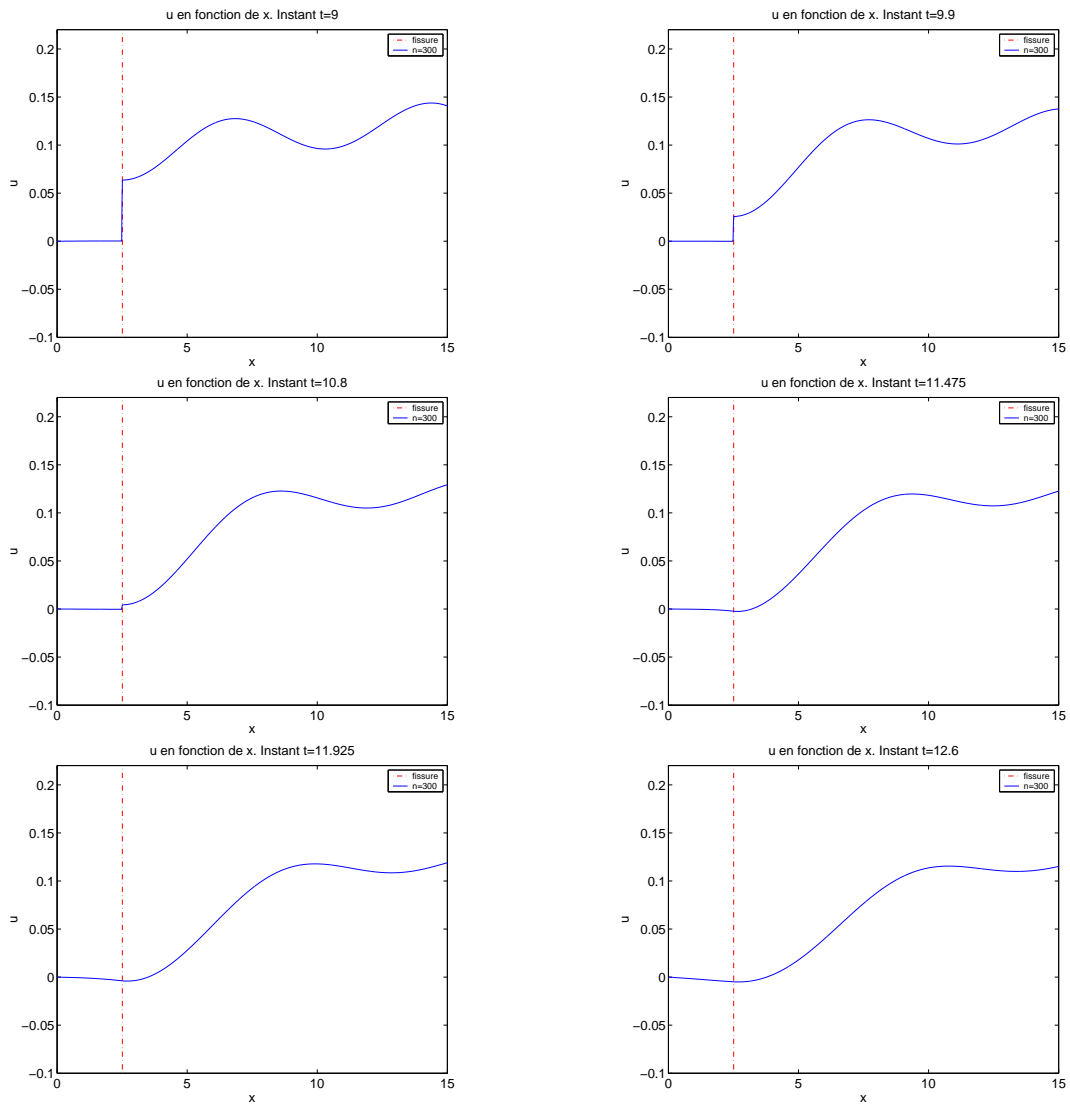


FIG. 7.3 – Déplacements. Schéma décentré implicite. Instants  $t = 9$  à 12.6



Sur la figure 7.4, on présente les résultats pour une valeur de  $\varepsilon = 0.01$ . Pour une faible valeur de  $\varepsilon$ , la loi de comportement de Kelvin-Voigt doit être proche de l'élasticité linéaire. C'est ce qu'on retrouve sur les résultats. On voit que les résultats ressemblent à ceux obtenus pour le cas élastique donnés sur les figures 6.4, 6.5, dans le paragraphe 6.1.2.

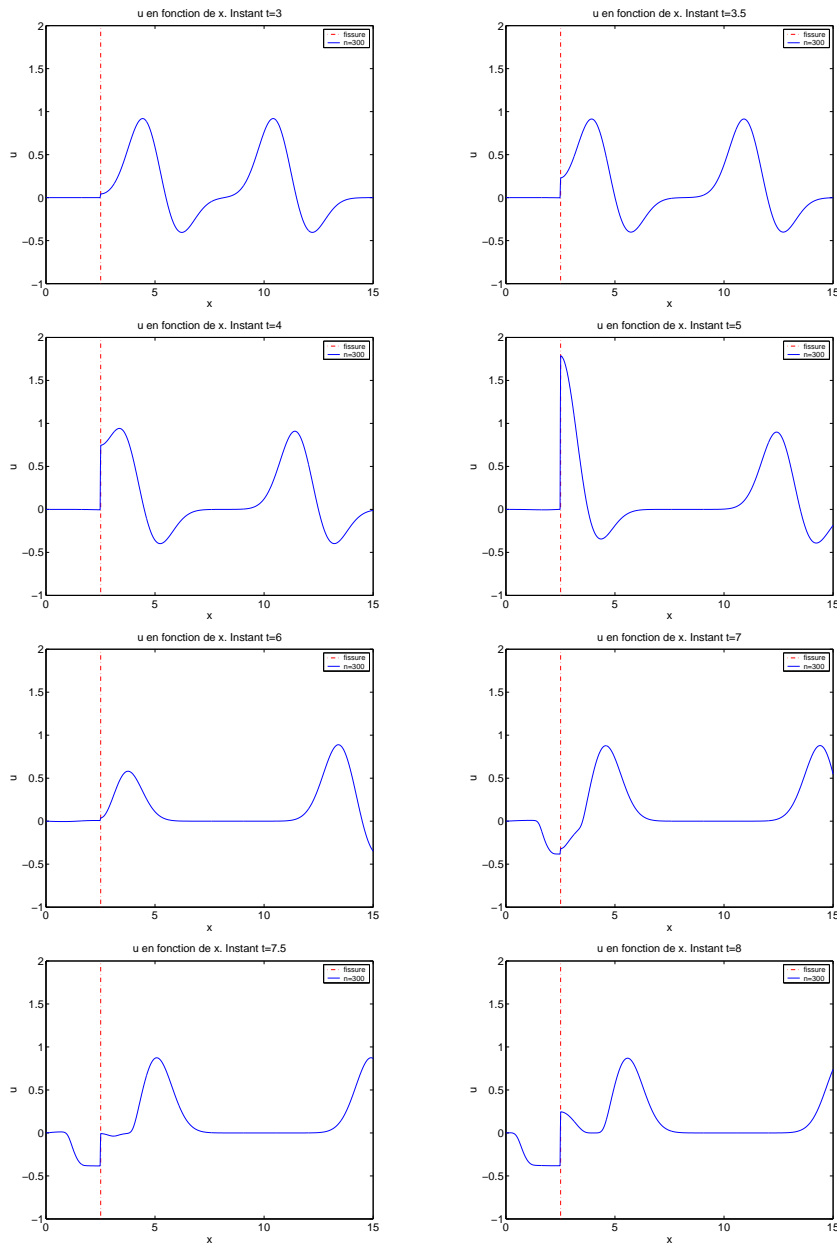


FIG. 7.4 – Déplacements. Schéma décentré implicite. Instants  $t = 3$  à 8



## Annexe A

# Écriture du schéma sous forme différences finies sans la fissure

On présente ici le schéma numérique 2D dans le cas d'un matériau isotrope. Ce schéma en déplacements-contraintes reprend le schéma de résolution de l'élastodynamique présenté dans [50] pour le système vitesses-contraintes.

Pour les déplacements, on note  $(u \ w)^t$  les degrés de liberté associés à l'élément  $Q_0$ ,  $(du_1 \ dw_1)^t$  les degrés de liberté associés à l'élément  $\mathcal{P}_1^{disc}$  pour la fonction de base  $2x - 1$ ,  $(du_2 \ dw_2)^t$  les degrés de liberté associés à l'élément  $\mathcal{P}_1^{disc}$  pour la fonction de base  $2y - 1$ .

Pour les contraintes, il existe cinq degrés de liberté en un nœud du maillage. Ces degrés de liberté sont notés:  $(\sigma_{xx}^h \ \sigma_{xx}^b \ \sigma_{yy}^d \ \sigma_{yy}^g \ \sigma_{xy})^t$ .

Soit  $(i,j)$  un nœud du maillage régulier,  $1 \leq i \leq n_i$ ,  $1 \leq j \leq n_j$ .

On note par  $i_1 \Leftrightarrow i + 1/2$ ,  $j_1 \Leftrightarrow j + 1/2$ .

Pour les contraintes, l'indice temporel  $n$  est omis, par souci de simplicité.  $\Delta t$  représente le pas de

temps,  $h_x$  et  $h_y$  représentent les pas d'espace en abscisses et ordonnées.

$$\begin{aligned}
u_{i_1, j_1}^{n+1} &= 2u_{i_1, j_1}^n - u_{i_1, j_1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho_{i_1, j_1}} \left( \frac{\sigma_{xx}^{h, i+1, j} - \sigma_{xx}^{h, i, j}}{2h_x} + \frac{\sigma_{xx}^{b, i+1, j+1} - \sigma_{xx}^{b, i, j+1}}{2h_x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_{xy}^{i, j+1} - \sigma_{xy}^{i, j}}{2h_y} + \frac{\sigma_{xy}^{i+1, j+1} - \sigma_{xy}^{i+1, j}}{2h_y} \right), \\
w_{i_1, j_1}^{n+1} &= 2w_{i_1, j_1}^n - w_{i_1, j_1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho_{i_1, j_1}} \left( \frac{\sigma_{xy}^{i+1, j} - \sigma_{xy}^{i, j}}{2h_x} + \frac{\sigma_{xy}^{i+1, j+1} - \sigma_{xy}^{i, j+1}}{2h_x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_{yy}^{d, i, j+1} - \sigma_{yy}^{d, i, j}}{2h_y} + \frac{\sigma_{yy}^{g, i+1, j+1} - \sigma_{yy}^{g, i+1, j}}{2h_y} \right), \\
du_{1, i_1, j_1}^{n+1} &= 2du_{1, i_1, j_1}^n - du_{1, i_1, j_1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho_{i_1, j_1}} \left( \frac{\sigma_{xy}^{i+1, j+1} - \sigma_{xy}^{i+1, j}}{2h_y} - \frac{\sigma_{xy}^{i, j+1} - \sigma_{xy}^{i, j}}{2h_y} \right), \\
du_{2, i_1, j_1}^{n+1} &= 2du_{2, i_1, j_1}^n - du_{2, i_1, j_1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho_{i_1, j_1}} \left( \frac{\sigma_{xx}^{b, i+1, j+1} - \sigma_{xx}^{b, i, j+1}}{2h_x} - \frac{\sigma_{xx}^{h, i+1, j} - \sigma_{xx}^{h, i, j}}{2h_x} \right), \\
dw_{1, i_1, j_1}^{n+1} &= 2dw_{1, i_1, j_1}^n - dw_{1, i_1, j_1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho_{i_1, j_1}} \left( \frac{\sigma_{yy}^{g, i+1, j+1} - \sigma_{yy}^{g, i+1, j}}{2h_y} - \frac{\sigma_{yy}^{d, i, j+1} - \sigma_{yy}^{d, i, j}}{2h_y} \right), \\
dw_{2, i_1, j_1}^{n+1} &= 2dw_{2, i_1, j_1}^n - dw_{2, i_1, j_1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho_{i_1, j_1}} \left( \frac{\sigma_{xy}^{i+1, j+1} - \sigma_{xy}^{i, j+1}}{2h_x} - \frac{\sigma_{xy}^{i+1, j} - \sigma_{xy}^{i, j}}{2h_x} \right).
\end{aligned}$$

On introduit les notations  $a = (V_p^2 + 2V_s^2)^2 - 8V_s^4$ ,  $b = (V_p^2 - 2V_s^2)V_p^2$ ,  $c = (V_p^2 - 2V_s^2)^2$ . Les indices temporels sont omis, car toutes les quantités sont considérées au même instant  $n$ .

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{h, i, j} &= \frac{\rho_{i_1, j_1}}{V_p^2} \left( a \frac{u_{i_1, j_1} - u_{i_1-1, j_1}}{2h_x} - \frac{a}{3} \frac{du_{2, i_1, j_1} - du_{2, i_1-1, j_1}}{2h_x} + c \frac{u_{i_1, j_1-1} - u_{i_1-1, j_1-1}}{2h_x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{c}{3} \frac{du_{2, i_1, j_1-1} - du_{2, i_1-1, j_1-1}}{2h_x} + b \frac{w_{i_1, j_1} - w_{i_1, j_1-1}}{2h_y} - \frac{b}{3} \frac{dw_{1, i_1, j_1} - dw_{1, i_1, j_1-1}}{2h_y} \right. \\
&\quad \left. + b \frac{w_{i_1-1, j_1} - w_{i_1-1, j_1-1}}{2h_y} + \frac{b}{3} \frac{dw_{1, i_1-1, j_1} - dw_{1, i_1-1, j_1-1}}{2h_y} \right), \\
\sigma_{xx}^{b, i, j} &= \frac{\rho_{i_1, j_1}}{V_p^2} \left( c \frac{u_{i_1, j_1} - u_{i_1-1, j_1}}{2h_x} - \frac{c}{3} \frac{du_{2, i_1, j_1} - du_{2, i_1-1, j_1}}{2h_x} + a \frac{u_{i_1, j_1-1} - u_{i_1-1, j_1-1}}{2h_x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{3} \frac{du_{2, i_1, j_1-1} - du_{2, i_1-1, j_1-1}}{2h_x} + b \frac{w_{i_1, j_1} - w_{i_1, j_1-1}}{2h_y} - \frac{b}{3} \frac{dw_{1, i_1, j_1} - dw_{1, i_1, j_1-1}}{2h_y} \right. \\
&\quad \left. + b \frac{w_{i_1-1, j_1} - w_{i_1-1, j_1-1}}{2h_y} + \frac{b}{3} \frac{dw_{1, i_1-1, j_1} - dw_{1, i_1-1, j_1-1}}{2h_y} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^{d,i,j} &= \frac{\rho_{i_1,j_1}}{V_p^2} \left( b \frac{u_{i_1,j_1} - u_{i_1-1,j_1}}{2h_x} - \frac{b}{3} \frac{du_{2,i_1,j_1} - du_{2,i_1-1,j_1}}{2h_x} + b \frac{u_{i_1,j_1-1} - u_{i_1-1,j_1-1}}{2h_x} \right. \\
 &+ \frac{b}{3} \frac{du_{2,i_1,j_1-1} - du_{2,i_1-1,j_1-1}}{2h_x} + a \frac{w_{i_1,j_1} - w_{i_1,j_1-1}}{2h_y} - \frac{a}{3} \frac{dw_{1,i_1,j_1} - dw_{1,i_1,j_1-1}}{2h_y} \\
 &\left. + c \frac{w_{i_1-1,j_1} - w_{i_1-1,j_1-1}}{2h_y} + \frac{c}{3} \frac{dw_{1,i_1-1,j_1} - dw_{1,i_1-1,j_1-1}}{2h_y} \right), \\
 \sigma_{yy}^{g,i,j} &= \frac{\rho_{i_1,j_1}}{V_p^2} \left( b \frac{u_{i_1,j_1} - u_{i_1-1,j_1}}{2h_x} - \frac{b}{3} \frac{du_{2,i_1,j_1} - du_{2,i_1-1,j_1}}{2h_x} + b \frac{u_{i_1,j_1-1} - u_{i_1-1,j_1-1}}{2h_x} \right. \\
 &+ \frac{b}{3} \frac{du_{2,i_1,j_1-1} - du_{2,i_1-1,j_1-1}}{2h_x} + c \frac{w_{i_1,j_1} - w_{i_1,j_1-1}}{2h_y} - \frac{c}{3} \frac{dw_{1,i_1,j_1} - dw_{1,i_1,j_1-1}}{2h_y} \\
 &\left. + a \frac{w_{i_1-1,j_1} - w_{i_1-1,j_1-1}}{2h_y} + \frac{a}{3} \frac{dw_{1,i_1-1,j_1} - dw_{1,i_1-1,j_1-1}}{2h_y} \right), \\
 \sigma_{xy}^{i,j} &= \rho_{i_1,j_1} V_s^2 \left( \frac{w_{i_1,j_1} - w_{i_1-1,j_1}}{2h_x} + \frac{w_{i_1,j_1-1} - w_{i_1-1,j_1-1}}{2h_x} + \frac{u_{i_1,j_1} - u_{i_1,j_1-1}}{2h_y} \right. \\
 &+ \frac{u_{i_1-1,j_1} - u_{i_1-1,j_1-1}}{2h_y} + \frac{1}{3} \left( \frac{du_{1,i_1-1,j_1} - du_{1,i_1-1,j_1-1}}{2h_y} - \frac{du_{1,i_1,j_1} - du_{1,i_1,j_1-1}}{2h_y} \right) \\
 &\left. - \frac{1}{3} \left( \frac{dw_{2,i_1,j_1} - dw_{2,i_1-1,j_1}}{2h_x} - \frac{dw_{2,i_1,j_1-1} - dw_{2,i_1-1,j_1-1}}{2h_x} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Pour prendre en compte la fissure, il faut rajouter les contributions des multiplicateurs exprimées par l'intermédiaire des matrices  $B_N$  et  $B_T$ . La relation (4.1)-(ii) précise cette contribution.



## Annexe B

# Eléments circulaires sur la fissure

### B.1 Calculs préliminaires

On présente un calcul d'intégrales intervenant pour la prise en compte d'éléments circulaires:

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos^4(s) ds = \frac{3}{16} (s_2^2 - s_1^2) + \frac{1}{128} (4 s_2 \sin(4 s_2) + \cos(4 s_2) - 4 s_1 \sin(4 s_1) - \cos(4 s_1)) \\ &\quad + \frac{1}{8} (2 s_2 \sin(2 s_2) + \cos(2 s_2) - 2 s_1 \sin(2 s_1) - \cos(2 s_1)) \\ p_2 &= \int_{s_1}^{s_2} s \sin^4(s) ds = \frac{3}{16} (s_2^2 - s_1^2) + \frac{1}{128} (4 s_2 \sin(4 s_2) + \cos(4 s_2) - 4 s_1 \sin(4 s_1) - \cos(4 s_1)) \\ &\quad - \frac{1}{8} (2 s_2 \sin(2 s_2) + \cos(2 s_2) - 2 s_1 \sin(2 s_1) - \cos(2 s_1)) \\ p_3 &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos^3(s) \sin(s) ds = \frac{1}{16} (\sin(2 s_2) - 2 s_2 \cos(2 s_2) - \sin(2 s_1) + 2 s_1 \cos(2 s_1)) \\ &\quad + \frac{1}{128} (\sin(4 s_2) - 4 s_2 \cos(4 s_2) - \sin(4 s_1) + 4 s_1 \cos(4 s_1)) \\ p_4 &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos(s) \sin^3(s) ds = \frac{1}{16} (\sin(2 s_2) - 2 s_2 \cos(2 s_2) - \sin(2 s_1) + 2 s_1 \cos(2 s_1)) \\ &\quad - \frac{1}{128} (\sin(4 s_2) - 4 s_2 \cos(4 s_2) - \sin(4 s_1) + 4 s_1 \cos(4 s_1)) \\ p_5 &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos^2(s) \sin^2(s) ds = \frac{1}{16} (s_2^2 - s_1^2) - \frac{1}{128} (4 s_2 \sin(4 s_2) \\ &\quad + \cos(4 s_2) - 4 s_1 \sin(4 s_1) - \cos(4 s_1)) \\ p_6 &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos^3(s) ds = \frac{3}{4} (s_2 \sin(s_2) + \cos(s_2) - s_1 \sin(s_1) - \cos(s_1)) \\ &\quad + \frac{1}{36} (3 s_2 \sin(3 s_2) + \cos(3 s_2) - 3 s_1 \sin(3 s_1) - \cos(3 s_1)) \\ p_7 &= \int_{s_1}^{s_2} s \sin^3(s) ds = \frac{3}{4} (\sin(s_2) - s_2 \cos(s_2) - \sin(s_1) + s_1 \cos(s_1)) \\ &\quad - \frac{1}{36} (\sin(3 s_2) - 3 s_2 \cos(3 s_2) - \sin(3 s_1) + 3 s_1 \cos(3 s_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_8 &= \int_{s_1}^{s_2} s \sin^2(s) \cos(s) ds = \frac{1}{4} (s_2 \sin(s_2) + \cos(s_2) - s_1 \sin(s_1) - \cos(s_1)) \\
 &\quad - \frac{1}{36} (3 s_2 \sin(3 s_2) + \cos(3 s_2) - 3 s_1 \sin(3 s_1) - \cos(3 s_1)) \\
 p_9 &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos^2(s) \sin(s) ds = \frac{1}{36} (\sin(3 s_2) - 3 s_2 \cos(3 s_2) - \sin(3 s_1)) \\
 &\quad + 3 s_1 \cos(3 s_1) + \frac{1}{4} (\sin(s_2) - s_2 \cos(s_2) - \sin(s_1) + s_1 \cos(s_1)) \\
 p_{10} &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos^2(s) ds = \frac{1}{4} (s_2^2 - s_1^2) + \frac{1}{8} (2 s_2 \sin(2 s_2) + \cos(2 s_2) - 2 s_1 \sin(2 s_1) - \cos(2 s_1)) \\
 p_{11} &= \int_{s_1}^{s_2} s \sin^2(s) ds = \frac{1}{4} (s_2^2 - s_1^2) - \frac{1}{8} (2 s_2 \sin(2 s_2) + \cos(2 s_2) - 2 s_1 \sin(2 s_1) - \cos(2 s_1)) \\
 p_{12} &= \int_{s_1}^{s_2} s \cos(s) \sin(s) ds = \frac{1}{8} (\sin(2 s_2) - 2 s_2 \cos(2 s_2) - \sin(2 s_1) + 2 s_1 \cos(2 s_1)) \\
 \\
 q_1 &= \int_{s_1}^{s_2} \cos^4(s) ds = \frac{3}{8} (s_2 - s_1) + \frac{1}{32} (\sin(4 s_2) - \sin(4 s_1)) + \frac{1}{4} (\sin(2 s_2) - \sin(2 s_1)) \\
 q_2 &= \int_{s_1}^{s_2} \sin^4(s) ds = \frac{3}{8} (s_2 - s_1) + \frac{1}{32} (\sin(4 s_2) - \sin(4 s_1)) - \frac{1}{4} (\sin(2 s_2) - \sin(2 s_1)) \\
 q_3 &= \int_{s_1}^{s_2} \cos^3(s) \sin(s) ds = -\frac{1}{8} (\cos(2 s_2) - \cos(2 s_1)) - \frac{1}{32} (\cos(4 s_2) - \cos(4 s_1)) \\
 \\
 q_4 &= \int_{s_1}^{s_2} \cos(s) \sin^3(s) ds = -\frac{1}{8} (\cos(2 s_2) - \cos(2 s_1)) + \frac{1}{32} (\cos(4 s_2) - \cos(4 s_1)) \\
 q_5 &= \int_{s_1}^{s_2} \cos^2(s) \sin^2(s) ds = \frac{1}{8} (s_2 - s_1) - \frac{1}{32} (\sin(4 s_2) - \sin(4 s_1)) \\
 q_6 &= \int_{s_1}^{s_2} \cos^3(s) ds = \frac{3}{4} (\sin(s_2) - \sin(s_1)) + \frac{1}{12} (\sin(3 s_2) - \sin(3 s_1)) \\
 q_7 &= \int_{s_1}^{s_2} \sin^3(s) ds = -\frac{3}{4} (\cos(s_2) - \cos(s_1)) + \frac{1}{12} (\cos(3 s_2) - \cos(3 s_1)) \\
 \\
 q_8 &= \int_{s_1}^{s_2} \sin^2(s) \cos(s) ds = \frac{1}{4} (\sin(s_2) - \sin(s_1)) - \frac{1}{12} (\sin(3 s_2) - \sin(3 s_1)) \\
 q_9 &= \int_{s_1}^{s_2} \cos^2(s) \sin(s) ds = -\frac{1}{12} (\cos(3 s_2) - \cos(3 s_1)) - \frac{1}{4} (\cos(s_2) - \cos(s_1)) \\
 q_{10} &= \int_{s_1}^{s_2} \cos^2(s) ds = \frac{1}{2} (s_2 - s_1) + \frac{1}{4} (\sin(2 s_2) - \sin(2 s_1)) \\
 q_{11} &= \int_{s_1}^{s_2} \sin^2(s) ds = \frac{1}{2} (s_2 - s_1) - \frac{1}{4} (\sin(2 s_2) - \sin(2 s_1)) \\
 q_{12} &= \int_{s_1}^{s_2} \cos(s) \sin(s) ds = -\frac{1}{4} (\cos(2 s_2) - \cos(2 s_1))
 \end{aligned}$$

## B.2 Résultats pour les contributions

Les contributions sont données dans cette section. On utilise les notations suivantes:

$$\delta = x_1 - x_c, \beta = -(y_1 - y_c), \gamma = x_c - x_{i+1}, \lambda = y_c - y_{j+1}.$$



On rappelle que  $(x_1, y_1)$  sont les coordonnées du premier point de l'élément de fissure étudié. Comme les multiplicateurs  $\lambda_N, \lambda_T$  sont approchés par des fonctions  $\mathcal{P}_1$ , on considère une partie "amont" (fonction de base  $x$ ) et une partie "aval" (fonction de base  $1 - x$ ), (voir fig.5.8).

Pour la contribution de  $\sigma_{11}$  par rapport à la partie normale et pour la contribution de  $\sigma_{12}$  par rapport à la partie tangentielle (en partie), la contribution "amont" au point  $(i + 1, j + 1)$  est donnée par:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x h_y h_f} \int_{s_1}^{s_2} (x(s) - x_i) (y(s) - y_j) s n_1^2(s) ds \\ = & \frac{1}{R^2 h_x h_y h_f} [(-\delta^3 \beta) p_1 + \delta \beta^3 p_2 + (\delta^4 - 3\delta^2 \beta^2) p_3 + (3\delta^2 \beta^2 - \beta^4) p_4 + 3(\delta^3 \beta - \beta^3 \delta) p_5 \\ & + \delta^2(\delta \lambda - \beta \gamma) p_6 + \beta^2(\beta \lambda + \delta \gamma) p_7 + (\beta^2(\delta \lambda - \beta \gamma) + 2\delta \beta(\beta \lambda + \delta \gamma)) p_8 \\ & + (2\delta \beta(\delta \lambda - \beta \gamma) + \delta^2(\beta \lambda + \delta \gamma)) p_9 + \lambda \gamma \delta^2 p_{10} + \beta^2 \lambda \gamma p_{11} + 2\delta \lambda \beta \gamma p_{12}] \end{aligned}$$

Pour la contribution de  $\sigma_{11}$  par rapport à la partie normale et pour la contribution de  $\sigma_{12}$  par rapport à la partie tangentielle (en partie), la contribution "aval" au point  $(i + 1, j + 1)$  est donnée par:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x h_y h_f} \int_{s_1}^{s_2} (x(s) - x_i) (y(s) - y_j) (h_f - s) n_1^2(s) ds \\ = & \frac{1}{R^2 h_x h_y h_f} [(-\delta^3 \beta)(q_1 - p_1) + \delta \beta^3 (q_2 - p_2) + (\delta^4 - 3\delta^2 \beta^2) (q_3 - p_3) \\ & + (3\delta^2 \beta^2 - \beta^4) (q_4 - p_4) + 3(\delta^3 \beta - \beta^3 \delta)(q_5 - p_5) + \delta^2(\delta \lambda - \beta \gamma) (q_6 - p_6) + \beta^2(\beta \lambda + \delta \gamma) (q_7 - p_7) \\ & + (\beta^2(\delta \lambda - \beta \gamma) + 2\delta \beta(\beta \lambda + \delta \gamma)) (q_8 - p_8) + (2\delta \beta(\delta \lambda - \beta \gamma) + \delta^2(\beta \lambda + \delta \gamma))(q_9 - p_9) \\ & + \lambda \gamma \delta^2 (q_{10} - p_{10}) + \beta^2 \lambda \gamma (q_{11} - p_{11}) + 2\delta \lambda \beta \gamma (q_{12} - p_{12})] \end{aligned}$$

Pour la contribution de  $\sigma_{12}$  par rapport à la partie normale et pour la contribution de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  par rapport à la partie tangentielle, la contribution "amont" au point  $(i + 1, j + 1)$  est donnée par:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x h_y h_f} \int_{s_1}^{s_2} (x(s) - x_i) (y(s) - y_j) s n_1(s) n_2(s) ds \\ = & \frac{1}{R^2 h_x h_y h_f} [(\delta^2 \beta^2) p_1 + \delta^2 \beta^2 p_2 - 2\delta \beta(\delta^2 - \beta^2) p_3 + 2\delta \beta(\delta^2 - \beta^2) p_4 + ((\delta^2 - \beta^2)^2 - 2\delta^2 \beta^2) p_5 \\ & - \beta \delta(\delta \lambda - \beta \gamma) p_6 + \delta \beta(\beta \lambda + \delta \gamma) p_7 + (\delta \beta(\delta \lambda - \beta \gamma) + (\beta \lambda + \delta \gamma)(\delta^2 - \beta^2)) p_8 \\ & + ((\delta^2 - \beta^2)(\delta \lambda - \beta \gamma) - (\beta \lambda + \delta \gamma) \delta \beta) p_9 - \delta \lambda \beta \gamma p_{10} + \delta \beta \lambda \gamma p_{11} + \lambda \gamma(\delta^2 - \beta^2) p_{12}] \end{aligned}$$

Pour la contribution de  $\sigma_{12}$  par rapport à la partie normale et pour la contribution de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  par rapport à la partie tangentielle, la contribution "aval" au point  $(i + 1, j + 1)$  est donnée par:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x h_y h_f} \int_{s_1}^{s_2} (x(s) - x_i) (y(s) - y_j) (h_f - s) n_1(s) n_2(s) ds \\ = & \frac{1}{R^2 h_f h_x h_y} [(\delta^2 \beta^2) (q_1 - p_1) + \delta^2 \beta^2 (q_2 - p_2) - 2\delta \beta(\delta^2 - \beta^2) (q_3 - p_3) \\ & + 2\delta \beta(\delta^2 - \beta^2) (q_4 - p_4) + ((\delta^2 - \beta^2)^2 - 2\delta^2 \beta^2) (q_5 - p_5) - \beta \delta(\delta \lambda - \beta \gamma) (q_6 - p_6) \\ & + \delta \beta(\beta \lambda + \delta \gamma) (q_7 - p_7) + (\delta \beta(\delta \lambda - \beta \gamma) + (\beta \lambda + \delta \gamma)(\delta^2 - \beta^2)) (q_8 - p_8) + ((\delta^2 - \beta^2)(\delta \lambda - \beta \gamma) \\ & - (\beta \lambda + \delta \gamma) \delta \beta) (q_9 - p_9) - \delta \lambda \beta \gamma (q_{10} - p_{10}) + \delta \beta \lambda \gamma (q_{11} - p_{11}) + \lambda \gamma(\delta^2 - \beta^2) (q_{12} - p_{12})] \end{aligned}$$

Pour la contribution de  $\sigma_{22}$  par rapport à la partie normale et pour la contribution de  $\sigma_{12}$  par rapport à la partie tangentielle (en partie), la contribution “amont” au point  $(i + 1, j + 1)$  est donnée par:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h_x h_y h_f} \int_{s_1}^{s_2} (x(s) - x_i) (y(s) - y_j) s n_2^2(s) ds \\
 = & \frac{1}{R^2 h_x h_y h_f} [ -(\delta \beta^3) p_1 + \delta^3 \beta p_2 + \beta^2 (3\delta^2 - \beta^2) p_3 + \delta^2 (\delta^2 - 3\beta^2) p_4 + 3\delta \beta (\beta^2 - \delta^2) p_5 \\
 & + \beta^2 (\delta \lambda - \beta \gamma) p_6 + \delta^2 (\beta \lambda + \delta \gamma) p_7 + (\delta^2 (\delta \lambda - \beta \gamma) - (\beta \lambda + \delta \gamma) 2\delta \beta) p_8 \\
 & + (-2\delta \beta (\delta \lambda - \beta \gamma) + (\beta \lambda + \delta \gamma) \beta^2) p_9 + \lambda \gamma \beta^2 p_{10} + \delta^2 \lambda \gamma p_{11} - 2\lambda \gamma \delta \beta p_{12} ]
 \end{aligned}$$

Pour la contribution de  $\sigma_{22}$  par rapport à la partie normale et pour la contribution de  $\sigma_{12}$  par rapport à la partie tangentielle (en partie), la contribution “aval” au point  $(i + 1, j + 1)$  est donnée par:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h_x h_y h_f} \int_{s_1}^{s_2} (x(s) - x_i) (y(s) - y_j) (h_f - s) n_2^2(s) ds \\
 = & \frac{1}{R^2 h_x h_y h_f} [ -(\delta \beta^3) (q_1 - p_1) + \delta^3 \beta (q_2 - p_2) + \beta^2 (3\delta^2 - \beta^2) (q_3 - p_3) \\
 & + \delta^2 (\delta^2 - 3\beta^2) (q_4 - p_4) + 3\delta \beta (\beta^2 - \delta^2) (q_5 - p_5) + \beta^2 (\delta \lambda - \beta \gamma) (q_6 - p_6) + \delta^2 (\beta \lambda + \delta \gamma) (q_7 - p_7) \\
 & + (\delta^2 (\delta \lambda - \beta \gamma) - 2\delta \beta (\beta \lambda + \delta \gamma)) (q_8 - p_8) + (-2\delta \beta (\delta \lambda - \beta \gamma) \\
 & + (\beta \lambda + \delta \gamma) \beta^2) (q_9 - p_9) + \lambda \gamma \beta^2 (q_{10} - p_{10}) + \delta^2 \lambda \gamma (q_{11} - p_{11}) - 2\lambda \gamma \delta \beta (q_{12} - p_{12}) ]
 \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] L.E. ANDERSSON. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.*, 42(2):169–202, 2000.
- [2] I. BABUŠKA. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.
- [3] E. BÉCACHE, P. JOLY et G. SCARELLA. A fictitious domain method for a unilateral contact problem. Dans *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 431–436, 2003.
- [4] E. BÉCACHE, P. JOLY et C. TSOGKA. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2-D elastic wave propagation. *J. Comput. Acoust.*, 9(3):1175–1201, 2001.
- [5] E. BÉCACHE, P. JOLY et C. TSOGKA. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(6):2109–2132, 2002.
- [6] F. BEN BELGACEM. Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(4):1085–1100, 2000.
- [7] P. BOIERI, F. GASTALDI et D. KINDERLEHRER. Existence, uniqueness, and regularity results for the two-body contact problem. *Appl. Math. Optim.*, 15(3):251–277, 1987.
- [8] J.F. BONNANS, J.C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C.A. SAGASTIZÁBAL. *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] A.S. BRETELLE. *Formulation et résolution des problèmes de contact avec frottement et adhérence en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 1999.
- [10] M. COCOU. Existence of solutions of a dynamic Signorini’s problem with nonlocal friction in viscoelasticity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 53:1099–1109, 2002.
- [11] M. COCOU, E. PRATT et M. RAOUS. Formulation and approximation of quasistatic frictional contact. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 34(7):783–798, 1996.
- [12] M. COCOU et J.M RICAUD. Analysis of a class of implicit evolution inequalities associated to viscoelastic dynamic contact problems with friction. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 38(14):1535–1552, 2000.
- [13] M. COCOU et G. SCARELLA. Existence of a solution to a dynamic unilateral contact problem for a cracked viscoelastic body. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(4):341–346, 2004.
- [14] F. COLLINO, P. JOLY et F. MILLOT. Fictitious domain method for unsteady problems: application to electromagnetic scattering. *J. Comput. Phys.*, 138(2):907–938, 1997.
- [15] P. COOREVITS, P. HILD, K. LHALOUANI et T. SASSI. Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies. *Math. Comp.*, 71(237):1–25, 2002.
- [16] G. DERVEAUX. *Modélisation numérique de la guitare acoustique*. Thèse de doctorat, Université Paris IX, 2002.
- [17] G. DUVAUT et J.L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [18] A. EZZIANI. Modélisation mathématique et numérique de la propagation d’ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires. Thèse en cours.

- [19] S. GARCÈS. *Une méthode de domaines fictifs pour la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles*. Thèse de doctorat, ENSAE (Toulouse), 1997.
- [20] V. GIRAULT et R. GLOWINSKI. Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(3):487–514, 1995.
- [21] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS et R. TRÉMOLIÈRES. *Analyse numérique des inéquations variationnelles*. Dunod, Paris, 1976.
- [22] R. GLOWINSKI, T.W. PAN et J. PÉRIAUX. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 111(3-4):283–304, 1994.
- [23] R. GLOWINSKI, T.W. PAN et J. PÉRIAUX. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 112(1-4):133–148, 1994.
- [24] P. GRISVARD. *Elliptic problems in non smooth domains*. Masson Springer Verlag, Paris, 1992.
- [25] Q.C. HE, J.J. TELEGA et A. CURNIER. Unilateral contact of two solids subject to large deformations: formulation and existence results. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 452:2691–2717, 1996.
- [26] P. HILD et P. LABORDE. Quadratic finite element methods for unilateral contact problems. *Appl. Numer. Math.*, 41(3):401–421, 2002.
- [27] S. HIROSE. 2-D Scattering by a crack with contact-boundary conditions. *Wave Motion*, 19(1):37–49, 1994.
- [28] P. HLAVÁČEK, J. HASLINGER, J. NEČAS et J. LOVIŠEK. *Solution of variational inequalities in mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [29] J. JARUŠEK. Dynamic contact problems with given friction for viscoelastic bodies. *Czechoslovak Math. J.*, 46(121)(3):475–487, 1996.
- [30] M. JEAN. The non-smooth contact dynamics method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177:235–257, 1999.
- [31] P. JOLY. Variational Methods for Time-Dependent Wave Propagation Problems in “Topics in Computational Wave Propagation”. Dans *Direct and Inverse Problems*. Springer, 2003.
- [32] P. JOLY et L. RHAOUTI. Domaines fictifs, éléments finis  $H(\text{div})$  et condition de Neumann: le problème de la condition inf-sup. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 328(12):1225–1230, 1999.
- [33] N. KIKUCHI et J.T. ODEN. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [34] J.U. KIM. A boundary thin obstacle problem for a wave equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 14(8-9):1011–1026, 1989.
- [35] K. L. KUTTLER et M. SHILLOR. Dynamic bilateral contact with discontinuous friction coefficient. *Nonlinear Anal., Theory Methods*, 45(3):309–327, 2001.
- [36] G. LEBEAU et M. SCHATZMAN. A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary. *J. Differential Equations*, 53:309–361, 1984.
- [37] J.A.C. MARTINS et J.T. ODEN. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Nonlinear Anal., Theory Methods*, 11(3):407–428, 1987.
- [38] J.J. MORÉ et G. TORALDO. Algorithms for bound constrained quadratic programming problems. *Numer. Math.*, 55(4):377–400, 1989.
- [39] J.J. MOREAU. Nonsmooth mechanics and applications. CISM Courses and Lectures. Springer-Verlag, Vienna, 1988.
- [40] J.J. MOREAU. Topics in nonsmooth mechanics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.
- [41] J. MUÑOZ-RIVERA et R. RACKE. Multidimensional contact problems in thermoelasticity. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(4):1307–1337, 1998.

- [42] C. NAEJUS. *Sur les formulations des problèmes de contact avec frottement de Coulomb*. Thèse de doctorat, Université Poitiers, 1995.
- [43] J. NOCEDAL et S.J. WRIGHT. *Numerical optimization*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [44] A. PETROV et M. SCHATZMAN. One-dimensional viscoelastodynamics with Signorini boundary conditions. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(11):983–988, 2002.
- [45] A. RADOSLOVESCU CĂPĂȚÎNĂ et M. COCOU. Internal approximation of quasi-variational inequalities. *Numer. Math.*, 59(4):385–398, 1991.
- [46] J.M. RICAUD et E. PRATT. Analysis of a time discretization for an implicit variational inequality modelling dynamic contact problems with friction. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(7):491–511, 2001.
- [47] R. ROCCA et M. COCOU. Existence and approximation of a solution to quasistatic Signorini problem with local friction. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 39(11):1233–1255, 2001.
- [48] R. ROCCA et M. COCOU. Numerical analysis of quasi-static unilateral contact problems with local friction. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(4):1324–1342, 2001.
- [49] J. RODRÍGUEZ GARCÍA. Raffinement de maillage local spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique. Thèse en cours.
- [50] J. RODRÍGUEZ GARCÍA. Rapport de contrat E.D.F. 2003.
- [51] J. SIMON. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Ann. Mat. Pura Applic.*, 146:65–96, 1987.
- [52] L. SLIMANE, A. BENDALI et P. LABORDE. Mixed formulations for a class of variational inequalities. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 332(1):87–92, 2002.
- [53] G. E. STAVROULAKIS, H. ANTES et P. PANAGIATOPOULOS. Transient elastodynamics around cracks including contact and friction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177(3-4):427–440, 1999.
- [54] C. TSOGKA. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés*. Thèse de doctorat, Université Paris IX, 1999.
- [55] S.J. WRIGHT. *Primal-dual interior-point methods*. SIAM, Philadelphia, 1997.



## Résumé

La diffraction d'ondes élastiques par une fissure dans un matériau est un problème majeur en contrôle non destructif. Une modélisation réaliste consiste à prendre en compte une condition de contact unilatéral sur la fissure. Dans cette thèse, on étudie des problèmes dynamiques de contact unilatéral dans des milieux fissurés. Au niveau théorique, on présente un résultat d'existence pour un milieu viscoélastique de Kelvin-Voigt fissuré, pour lequel on considère une condition de contact unilatéral avec frottement non local (régularisé). Ce résultat est obtenu en utilisant une méthode de pénalisation et des propriétés de compacité. L'étude numérique porte sur le problème de l'élastodynamique avec contact unilatéral sans frottement, qui reste un problème ouvert sur le plan mathématique. Pour le résoudre, on utilise la méthode des domaines fictifs. On propose pour cela une formulation du problème en contraintes-déplacements-multiplicateurs de Lagrange. Un élément fini  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc} - \mathcal{P}_1^c$  est utilisé pour la discrétisation en espace et permet d'obtenir un schéma explicite en temps, par condensation de masse. Plusieurs schémas de discrétisation en temps sont présentés: un schéma implicite décentré dont on démontre la stabilité, un schéma implicite centré qui apparaît stable au vu des expériences numériques. Des résultats de validation sont présentés ainsi que des résultats concernant des applications plus réalistes.

## Mots-clés

Contact unilatéral, fissure, frottement non local, modèle de Kelvin-Voigt, élastodynamique, domaines fictifs.

## Abstract

The diffraction of elastic waves by a crack is a serious issue in nondestructive testing. A realistic model consists in taking into account unilateral contact conditions on the crack. In this thesis, we focus on dynamic unilateral contact problems for cracked bodies. We first consider a cracked viscoelastic body with Kelvin-Voigt model, for which we have unilateral contact boundary conditions with nonlocal friction. We derive an existence result by using a penalty method and compactness results. Numerical results deal with the elastodynamic problem with unilateral contact condition without friction. To solve it, we use the fictitious domain method where the unknowns are stresses, displacements and Lagrange multipliers. A finite element  $Q_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc} - \mathcal{P}_1^c$  is used for space discretization which allows to obtain a time explicit scheme by mass lumping. Several time discretization schemes are described: an off-centered implicit scheme is proved to be stable and a centered implicit scheme appears to be stable through the numerical results. Results of validation and results dealing with more realistic applications are given.

## Keywords

Unilateral contact, crack, nonlocal friction, Kelvin-Voigt model, elastodynamics, fictitious domain method.