



**HAL**  
open science

## Réflexion et conversion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque

Nicolas Wilkie-Chancellor

► **To cite this version:**

Nicolas Wilkie-Chancellor. Réflexion et conversion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque. Mécanique [physics.med-ph]. Université du Havre, 2003. Français. NNT: . tel-00006282

**HAL Id: tel-00006282**

**<https://theses.hal.science/tel-00006282>**

Submitted on 17 Jun 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Université du Havre  
Faculté des Sciences et techniques*

# **THÈSE**

*Pour obtenir le grade de*

Docteur de l'Université du Havre

Discipline : SCIENCES POUR L'INGENIEUR

Spécialité : ACOUSTIQUE

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Nicolas WILKIE-CHANCELLIER**

le 10 juillet 2003

---

## **Réflexion et conversion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque.**

---

### **JURY**

- MM. M. GAZALET, Professeur à l'Université de Valenciennes, *Rapporteur*  
B. DUBUS, Chargé de Recherche C.N.R.S., I.S.E.N., Lille, *Rapporteur*
- MM. K. VAN DEN ABEELE, Professeur à l'Université Catholique de Louvain (Belgique),  
M. DESCHAMPS, Directeur de Recherche C.N.R.S., L.M.P., Bordeaux,  
G. MAZE, Professeur à l'Université du Havre,  
J. DUCLOS, Professeur à l'Université du Havre,  
A. TINEL, Maître de Conférences à l'Université du Havre,  
H. DUFLO, Maître de Conférences à l'Université du Havre.

---

LABORATOIRE D'ACOUSTIQUE ULTRASONORE ET D'ÉLECTRONIQUE

U.M.R. C.N.R.S. 6068



*Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique (L.A.U.E. – C.N.R.S. UMR 6068) de l'Université du Havre, dirigé par Monsieur le Professeur G. MAZE. Je tiens à le remercier pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail ainsi que pour les moyens qu'il a mis à ma disposition durant ces trois années.*

*Je remercie Messieurs M. GAZALET, Professeur à l'Université de Valenciennes, et B. DUBUS, Chargé de recherche C.N.R.S. à l'I.S.E.N. de Lille, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.*

*Mes remerciements s'adressent également à Messieurs K. VAN DEN ABEELE, Professeur à l'Université Catholique de Louvain (Belgique), et M. DESCHAMPS, Directeur de recherche C.N.R.S. au L.M.P. de Bordeaux, qui ont accepté de juger ce travail.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. DUCLOS qui a dirigé ce travail de recherche en m'apportant son expérience et ses connaissances. Son attention constante m'a aidé à mener à bien mes recherches dans un climat de bonne humeur.*

*Je suis reconnaissant à Messieurs H. DUFLO et A. TINEL, Maîtres de conférences, pour avoir codirigé cette étude. Leurs conseils avisés et l'aide qu'ils m'ont apporté ont été précieux. J'ai eu un réel plaisir à travailler à leurs côtés durant ces années. Un remerciement particulier à H. DUFLO pour sa patience et son dévouement lors de mon apprentissage de l'informatique.*

*Un grand merci à B. MORVAN, Maître de conférences, qui m'a amicalement initié au calcul par éléments finis.*

*J'exprime aussi ma gratitude à l'ensemble des chercheurs et doctorants du L.A.U.E. pour l'ambiance agréable à laquelle chacun a contribué. En particulier à Mademoiselle F. LUPPE, Monsieur P. REMBERT et Monsieur J.-M. CONOIR pour les conseils pertinents qu'ils m'ont donnés.*

*Je remercie Messieurs H. CAHINGT, P. BENARD et F. DUHAMEL pour leur collaboration technique.*

*J'adresse aussi mes sincères remerciements aux professeurs intervenant dans les cours de Licence et Maîtrise de Physique et Applications de l'Université de Havre. Ils ont su me faire découvrir les joies de la physique et plus particulièrement de l'acoustique.*

*Je voudrais remercier Monsieur J.-L. IZBICKI, Professeur, pour son aide très précieuse et efficace, ses conseils et son soutien pour mes futurs projets.*

*Pour finir, j'aimerais remercier une nouvelle fois Monsieur K. VAN DEN ABEELE qui m'accueille dès septembre à l'Université de Louvain, Campus de Courtrai (Belgique) pour un post-doc. Cette opportunité va me permettre de m'aguerrir sur d'autres sujets liés à l'acoustique mais aussi de découvrir le plat pays (et essayer d'apprendre le flamand...).*

---

# **SOMMAIRE**

---

<b>NOTATIONS.....</b>	<b>1</b>
-----------------------	----------

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>3</b>
--------------------------	----------

## - CHAPITRE I -

### Rappels sur la théorie des ondes de Lamb

<b>I.1. Introduction.....</b>	<b>11</b>
-------------------------------	-----------

<b>I.2. Plaque plane dans le vide.....</b>	<b>12</b>
--	-----------

I.2.1. Equations de dispersion.....	12
-------------------------------------	----

I.2.2. Solutions des équations de dispersion.....	17
---	----

I.2.2.1. Solutions réelles : modes de Lamb.....	17
---	----

I.2.2.2. Solutions complexes.....	19
-----------------------------------	----

I.2.2.3. Solutions imaginaires pures.....	20
---	----

I.2.3. Courbes de dispersion.....	21
-----------------------------------	----

I.2.4. Energie transportée par une onde.....	24
--	----

I.2.5. Déplacements absolus.....	26
----------------------------------	----

I.2.6. Vitesses de phase des ondes de Lamb.....	32
---	----

I.2.7. Vitesses d'énergie des ondes de Lamb.....	33
--	----

I.2.8. Longueur d'onde des modes de Lamb.....	34
---	----

<b>I.3. Conclusion.....</b>	<b>35</b>
-----------------------------	-----------

## - CHAPITRE II -

### Expérimentation

<b>II.1. Introduction.....</b>	<b>37</b>
--------------------------------	-----------

<b>II.2. Etude expérimentale.....</b>	<b>38</b>
---------------------------------------	-----------

II.2.1. Génération des ondes.....	38
-----------------------------------	----

II.2.2. Acquisition des signaux.....	41
--------------------------------------	----

II.2.3. Traitement du signal.....	43
-----------------------------------	----

II.2.4. Bilan d'énergie.....	50
------------------------------	----

II.2.5. Correction des bilans d'énergie.....	54
II.2.5.1. Mise en évidence de l'élargissement du faisceau.....	55
II.2.5.2. Coefficient correctif.....	56
II.2.5.3. Bilan d'énergie corrigé : mode de Lamb $A_1$ incident.....	59
II.2.5.4. Bilan d'énergie corrigé : mode de Lamb $S_0$ incident.....	59
<b>II.3. Conclusion.....</b>	<b>60</b>

## - CHAPITRE III -

### Modèle théorique

<b>III.1. Introduction.....</b>	<b>63</b>
<b>III.2. Réflexion à l'extrémité biseautée d'une plaque dans le vide.....</b>	<b>64</b>
III.2.1. Coefficients de pondération.....	65
III.2.2. Coefficients de réflexion en énergie.....	68
III.2.3. Réflexion du mode de Lamb $A_1$ à l'extrémité de la plaque.....	69
III.2.4. Réflexion du mode de Lamb $A_0$ à l'extrémité de la plaque.....	74
III.2.5. Réflexion du mode de Lamb $S_0$ à l'extrémité de la plaque.....	76
<b>III.3. Comparaison théorie-expérience.....</b>	<b>78</b>
<b>III.4. Conclusion.....</b>	<b>80</b>

## - CHAPITRE IV -

### Résolution par la méthode des éléments finis

<b>IV.1. Introduction.....</b>	<b>82</b>
<b>IV.2. Généralités de la méthode de résolution par éléments finis.....</b>	<b>83</b>
IV.2.1. Discrétisation du problème.....	83
IV.2.2. Equations de base.....	84
IV.2.3. Résolution numérique.....	85
<b>IV.3. Cas d'une plaque biseautée dans le vide.....</b>	<b>85</b>
IV.3.1. Maillage et échantillonnage temporel.....	87

IV.3.2. Génération d'un mode de Lamb.....	88
<b>IV.4. Réflexion du mode de Lamb <math>A_1</math> à l'extrémité de la plaque.....</b>	<b>89</b>
<b>IV.5. Comparaison Méthode des Eléments Finis – Modèle théorique.....</b>	<b>93</b>
<b>IV.6. Comparaison des déplacements dans une coupe <math>x_3=cte</math>.....</b>	<b>96</b>
<b>IV.7. Conclusion.....</b>	<b>98</b>

## - CHAPITRE V -

### Validité de la décomposition modale

<b>V.1. Introduction.....</b>	<b>101</b>
<b>V.2. Déplacements dans l'épaisseur de la plaque.....</b>	<b>102</b>
<b>V.3. Recherche de l'énergie dans les coupes. Principe.....</b>	<b>104</b>
<b>V.4. Résultats et comparaisons.....</b>	<b>105</b>
V.4.1. Réflexion du mode $A_1$ sur un bord droit ( $FE=2,7$ MHz.mm).....	105
V.4.2. Réflexion du mode $A_1$ sur un biseau de $70^\circ$ ( $FE=2,5$ MHz.mm).....	107
V.4.3. Réflexion du mode $A_1$ sur un biseau de $70^\circ$ ( $FE=2,7$ MHz.mm).....	108
<i>V.4.3.1. Influence des premiers modes complexes.....</i>	<i>109</i>
<i>V.4.3.2. Prise en compte des modes complexes.....</i>	<i>110</i>
<b>V.5. Conclusion.....</b>	<b>112</b>

## - CHAPITRE VI -

### « Mode de bout »

<b>VI.1. Introduction.....</b>	<b>114</b>
<b>VI.2. Etude en régime permanent sinusoïdal.....</b>	<b>115</b>
VI.2.1. Etude de la convergence des solutions.....	115
VI.2.2. Etude des amplitudes des modes réfléchis.....	117
<i>VI.2.2.1. En fonction du produit <math>FE</math>.....</i>	<i>117</i>



<i>VI.2.2.2. Dans l'épaisseur</i> .....	118
<i>VI.2.2.3. En fonction de l'angle <math>\alpha</math></i> .....	118
<i>VI.2.2.4. En fonction de la position <math>x_1</math></i> .....	125
<b>VI.3. Etude en régime quasi-harmonique</b> .....	<b>126</b>
VI.3.1. Déplacements à l'extrémité pour différents angles de biseau.....	127
VI.3.2. Bilans d'énergie pour différentes valeurs de $\alpha$ .....	129
<b>VI.4. Conclusion</b> .....	<b>130</b>
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>132</b>
<b>REFERENCES</b> .....	<b>137</b>

## - ANNEXE A-

### Coefficient correctif des résultats expérimentaux

<b>A.1. Propagation d'une onde incidente non atténuée</b> .....	<b>143</b>
A.1.1. Représentation spatio-temporelle.....	143
A.1.2. Transformation de Fourier temporelle.....	144
A.1.3. Transformation de Fourier spatiale.....	145
A.1.4. Etude du module de la transformée de Fourier $\Psi$ .....	146
<i>A.1.4.1. Onde non dispersive</i> .....	147
<i>A.1.4.2. Onde dispersive</i> .....	147
<b>A.2. Propagation d'une onde incidente atténuée</b> .....	<b>148</b>
<b>A.3. Propagation d'une onde réfléchie non atténuée</b> .....	<b>149</b>
<b>A.4. Propagation d'une onde réfléchie atténuée</b> .....	<b>152</b>
<b>A.5. Coefficient correctif</b> .....	<b>153</b>

## - ANNEXE B-

<b>Photographies du dispositif expérimental</b>	<b>.....154</b>
---	-----------------

---

## **NOTATIONS**

---

$\underline{a}$  : grandeur complexe.

$\underline{a}^*$  : complexe conjugué de la grandeur  $\underline{a}$ .

$\vec{U}$  : vecteur déplacement.

$\vec{v} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$  : vecteur vitesse.

$V$  : vitesse de phase d'une onde.

$V_e$  : vitesse d'énergie d'une onde.

$\rho$  : masse volumique.

$\lambda$  et  $\mu$  : coefficients de Lamé.

$F$  : fréquence.

$\omega$  : pulsation.

$E$  : épaisseur de la plaque.

$\vec{k}$  : vecteur d'onde.

$\underline{k}_i$  : composante complexe du vecteur d'onde suivant  $Ox_i$ .

$\vec{k}'$  : partie réelle du vecteur d'onde.

$\vec{k}''$  : partie imaginaire du vecteur d'onde.

$\vec{P}$  : vecteur de Poynting.

$\phi$  : puissance transportée par une onde selon sa direction de propagation.

$\underline{\phi}$  : puissance.

$\Lambda$  : longueur d'onde.

Les références sont classées par ordre alphabétique à la fin de cette thèse et sont notées entre crochets (<sup>[1]</sup>) dans le texte. S'il existe plusieurs références du même auteur, un numéro entre parenthèses suit le nom de l'auteur en question.

---

# **INTRODUCTION**

---

Au début du siècle dernier, Lamb présentait les équations de dispersion des ondes se propageant dans une plaque élastique infinie <sup>[Lamb]</sup>. Cette découverte datant de 1917 allait entraîner de très nombreuses applications dans différents domaines comme le contrôle non-destructif de structures par exemple. En hommage à celui qui, le premier, les a mises en évidence, ces ondes sont maintenant appelées « ondes de Lamb ». Depuis, d'autres chercheurs ont repris l'étude de ces ondes particulièrement intéressantes puisqu'elles se propagent sur de grandes distances <sup>[Viktorov]</sup>.

Tout comme les ondes de Rayleigh, les ondes de Lamb ont été utilisées très tôt pour déterminer l'influence de l'homogénéité du matériau sur leur propagation, et ensuite pour rechercher des défauts éventuels dans des structures. Ainsi, dès 1957, Worlton a utilisé deux transducteurs, l'un en émission, l'autre en réception, pour explorer une surface <sup>[Worlton]</sup>. A cette même époque, Sherwood a mis en évidence l'existence d'une infinité de modes propres complexes dans une plaque <sup>[Sherwood]</sup>. Il a souligné aussi l'importance des modes complexes pour constituer une base complète des ondes dans une plaque infinie.

Quelques années plus tard, Gazis et Mindlin ont repris le système d'équations décrivant le mouvement des plaques élastiques et étendu au cas de vibrations axiales symétriques d'un disque circulaire <sup>[Gazis]</sup>. Leurs travaux ont été comparés aux résultats expérimentaux obtenus par Shaw <sup>[Shaw]</sup>. Ils ont aussi porté une attention particulière au « mode de bout » qui peut apparaître, sous certaines conditions, dans une plaque lorsqu'une onde particulière se réfléchit sur un bord droit. C'est à la même époque que Meitzler a observé expérimentalement des ondes « rétropropagatives » et proposé d'étudier leur nature <sup>[Meitzler]</sup>.

En effet, pour certaines ondes guidées, les vitesses de phase et d'énergie ont des signes opposés dans certains domaines de fréquence.

En 1967, Torvik a proposé de considérer les modes propres d'une plaque semi-infinie équivalents à ceux d'une plaque infinie <sup>[Torvik]</sup>. A partir de là, toutes les études de la réflexion d'une onde de Lamb sur un obstacle sont devenues possibles.

Les études de la réflexion d'une onde et de sa conversion en d'autres modes étant alors répandues, Fraser apporta un justificatif supplémentaire aux travaux de Mindlin : il définit une relation d'orthogonalité entre deux modes propres d'une lame <sup>[Fraser]</sup>. De même, Folk et Herczynski développèrent une condition d'orthogonalité permettant de résoudre des problèmes de solides élasto-dynamiques. Cette condition <sup>[Folk]</sup> est ensuite généralisée et utilisée dans la détermination des coefficients d'une somme de modes propres satisfaisant les conditions aux limites d'un solide semi-infini.

Des travaux ultérieurs ont bien entendu utilisé les conditions d'orthogonalité des modes de Lamb pour expliquer la transition entre une plaque et un transducteur <sup>[Moulin]</sup>, ou entre deux plaques soudées <sup>[Prédoi]</sup>.

D'autres résultats <sup>[Gregory]</sup> ont confirmé ces études dans le cas de la réflexion du mode  $S_0$  à l'extrémité d'une plaque. Les auteurs ont développé une méthode de « projection » qui permet de calculer la répartition de l'énergie du mode incident entre les différents modes réfléchis. Cette méthode est opposée à celle proposée par Zhang <sup>[Zhang]</sup>. En effet, celui-ci n'utilise pas l'orthogonalité des modes de Lamb mais emploie une méthode de collocation.

D'autre part, des méthodes de résolution de problèmes par éléments finis ont vu le jour afin de résoudre des problèmes n'ayant pas de solutions analytiques simples. Ces méthodes sont basées sur des approximations des fonctions solutions en sous-domaines. La résolution de problèmes par la méthode des éléments finis est devenue possible grâce à la puissance grandissante des microcalculateurs car les informations à stocker nécessitent une grande capacité mémoire.

Plus récemment, d'importants besoins dans le domaine du contrôle non destructif de structures sont apparus, favorisant la mise en place de nouvelles méthodes. Ainsi, Koshiba a proposé en 1984 d'étudier la propagation d'un mode de Lamb symétrique dans une plaque élastique en combinant une méthode de résolution par éléments finis et une méthode

analytique [Koshiba]. Les calculs sont effectués sur des défauts internes à la plaque. Des problèmes liés aux irrégularités géométriques ainsi qu'aux inhomogénéités des matériaux ont été traités par le même type de méthode hybride [Al-Nassar ; Datta].

D'autre part, Cho et Rose ont mis en œuvre une résolution de problèmes par décomposition en éléments finis de frontières pour étudier la conversion d'une onde de Lamb sur un bord droit [Cho (1)]. La méthode par éléments finis de frontières, appliquée au voisinage de l'obstacle, est combinée à une décomposition modale permettant de connaître tous les modes susceptibles d'exister dans la plaque. Pour relier la décomposition modale au modèle local d'éléments finis, ils utilisent la technique de l'inversion de la matrice généralisée plutôt que de reprendre la propriété d'orthogonalité des modes. Cette méthode a été appliquée à la caractérisation de défauts et les résultats obtenus ont été confirmés par des mesures expérimentales [Cho (2)].

De nos jours, ces méthodes ont été appliquées à différents travaux pour solutionner plusieurs types de problèmes. Ainsi, la réflexion des modes de Lamb  $S_0$  et  $A_0$  a été étudiée sur un défaut rectangulaire dans une plaque isotrope [Lowe (1 ; 2)]. Par ailleurs, l'étude de l'interaction du mode  $S_0$  avec un trou circulaire situé dans l'épaisseur de la plaque a elle aussi été réalisée [Diligent]. Les résultats sont à chaque fois issus de simulation par éléments finis et confirmés par des mesures expérimentales. Dans le même temps, des solutions analytiques ont été développées sur la base d'une superposition modale et les coefficients de réflexion et de transmission ont été calculés [Castaings].

Toutes ces études portent principalement sur la conversion d'un mode de Lamb incident en différents modes réfléchis. Leur mise en place a permis de détecter les défauts de surface et des mesures expérimentales de temps de vol ont aussi pu être mises en œuvre pour localiser ces défauts [Alleyne (1-2) ; Rokhlin ; Cho (2)] (de type fissures ou défauts de soudure). Par exemple, des études ont déjà été menées sur la conversion d'une onde de Lamb à l'extrémité droite d'une plaque [Gregory ; Prédoin], sur une mortaise [Rose] ou encore sur une soudure [Morvan (1)].

Comme nous venons de le rappeler, le phénomène de conversion a fait l'objet de multiples études puisque ses applications dans le domaine de l'évaluation non-destructive sont

nombreuses et précieuses. Cependant, à notre connaissance, il n'a jamais été fait d'étude quantitative des phénomènes de conversion d'une onde de Lamb sur un biseau.

C'est dans ce cadre que se place ce travail de thèse. Nous étudierons la répartition de l'énergie transportée par un mode de Lamb incident entre les différents modes réfléchis après réflexion sur un biseau. Afin de mesurer expérimentalement l'amplitude des vibrations transverses des ondes se propageant dans une plaque biseautée, nous utiliserons une méthode vibrométrique. Comme toutes les méthodes optiques, elle présente l'intérêt de ne pas affecter les ondes. Deux autres méthodes seront mises en œuvre pour avoir une vue complète des phénomènes de réflexion et de conversion : un modèle théorique, ainsi qu'un calcul par la méthode des éléments finis. Des comparaisons seront donc effectuées entre les résultats issus de ces trois méthodes.

Le premier chapitre de cette thèse est destiné à rappeler les résultats les plus importants concernant les ondes de plaque. Le domaine fréquentiel de l'étude est réduit au domaine utile pour les études ultérieures. L'objectif est de rappeler les propriétés des ondes se propageant dans une plaque dépourvue d'atténuation. Par conséquent, les résultats « classiques » sont rappelés concernant les déplacements et les contraintes associés aux ondes, les équations de dispersion, les calculs des vitesses de phase et d'énergie des ondes. Par ailleurs, comme l'objectif de l'étude est l'obtention de bilans quantitatifs des phénomènes de réflexion et de conversions existant lorsque qu'une onde se réfléchit à l'extrémité biseautée de la plaque, il nous faut choisir une grandeur susceptible d'établir la comparaison entre l'onde incidente et les ondes réfléchies. La grandeur permettant des comparaisons quantitatives est la puissance transportée par chaque onde. Cependant la seule grandeur accessible est l'amplitude du déplacement de l'onde. Nous nous sommes donc attachés à rattacher cette puissance transportée à la mesure de l'amplitude en surface. De plus, on a été amené à définir des déplacements « absolus », c'est-à-dire des déplacements dont l'amplitude est ramenée à une puissance connue de l'onde.

Le chapitre II sera consacré à l'étude expérimentale de la réflexion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque. Une onde de Lamb quasi-harmonique est générée par la méthode du coin à l'aide d'un transducteur constitué d'une petite plaque piézo-électrique rectangulaire. Afin de mesurer la composante normale des déplacements associés à l'onde, on utilise un vibromètre. Cette méthode, basée sur l'interférométrie laser, permet de



réaliser des relevés ponctuels à la surface de la plaque. Les ondes générées, ainsi que celles qui sont réfléchies, sont identifiées après un traitement du signal et les puissances transportées par chaque onde sont obtenues à partir des déplacements normaux en surface. Ainsi, un bilan d'énergie peut être réalisé. Comme les bilans d'énergie calculés dans les différentes configurations ne sont pas tout à fait satisfaisants, nous proposerons une explication sur la perte d'énergie constatée ainsi que la correction nécessaire des valeurs mesurées.

Dans le chapitre III, une étude théorique sera menée afin de justifier les bilans d'énergie expérimentaux. Le modèle consiste à décrire les ondes existant dans la section biseautée de la plaque. En effet, nous connaissons les ondes susceptibles d'exister dans la plaque : ce sont les solutions des équations de dispersion <sup>[Torvik]</sup>. Ces ondes peuvent donc être réelles (ondes de Lamb), complexes ou imaginaires pures. Le modèle théorique revient à calculer les coefficients de pondération des différentes ondes par une méthode de collocation apparentée à celle de Zhang. Les coefficients de réflexion en énergie seront alors déterminés et des bilans d'énergie seront effectués.

Le chapitre IV sera consacré à l'étude des phénomènes de réflexion et de conversion d'une onde de Lamb sur un biseau par la méthode de résolution par éléments finis. Cette méthode a fait ses preuves depuis plusieurs années dans le domaine de la caractérisation du comportement vibratoire de structures. Ainsi, nous utiliserons le logiciel ANSYS pour simuler la propagation d'une onde de Lamb dans une plaque biseautée. Quelques rappels seront faits sur la méthode proprement dite et sur les conditions d'utilisation du logiciel afin d'obtenir des résultats acceptables. En effet, la taille des maillages induits par la discrétisation de la structure ainsi que l'échantillonnage temporel implique de gros fichiers. C'est pourquoi les phénomènes seront étudiés dans cette thèse sur un domaine fréquentiel tel que la précision espérée des résultats soit compatible avec le matériel utilisé.

Le cinquième chapitre est destiné à la recherche des énergies transportées par les modes de Lamb réfléchis, l'approche étant cependant un peu différente. En effet, l'obtention de ces énergies sera ici réalisée dans des coupes effectuées dans l'épaisseur de la plaque. Pour cela, la propagation d'une onde de Lamb dans la plaque biseautée sera simulée avec le logiciel ANSYS et les relevés des déplacements seront faits dans différentes sections droites réalisées à différentes distances du biseau. La détermination des énergies réfléchies est basée sur l'identification d'un profil calculé par le logiciel de simulation à une somme de profils

théoriques d'ondes connues. Les coefficients de pondération des profils théoriques sont ensuite reliés aux énergies. Ainsi, on peut connaître l'évolution de la répartition de ces énergies au cours de la propagation des ondes en réflexion. On en déduit une explication : il faut s'éloigner d'une certaine distance du biseau pour observer seulement les ondes de Lamb réfléchies.

Le dernier chapitre de cette thèse sera consacré à l'étude de l'influence d'un biseau sur l'excitation du mode de bout. En effet, lorsque le premier mode de Lamb symétrique est incident sur un bord droit, il existe une gamme de fréquence dans laquelle un « mode de bout » est excité [Auld (2) ; Gazis ; Le Clezio]. En reprenant tout d'abord le modèle théorique décrit au chapitre III, nous étudierons ce phénomène en régime permanent sinusoïdal. Les déplacements des différents modes seront tracés dans l'épaisseur afin de comprendre quels sont les modes prépondérants pour ces fréquences particulières. Ensuite, des simulations par éléments finis seront effectuées en régime quasi-harmonique. Dans les deux cas nous verrons l'influence du biseau sur le comportement du « mode de bout ».

---

# CHAPITRE I

## Rappels sur la théorie des ondes de Lamb

---

### I.1. Introduction

### I.2. Plaque plane dans le vide

I.2.1. Equations de dispersion

I.2.2. Solutions des équations de dispersion

*I.2.2.1. Solutions réelles : modes de Lamb*

*I.2.2.2. Solutions complexes*

*I.2.2.3. Solutions imaginaires pures*

I.2.3. Courbes de dispersion

I.2.4. Energie transportée par une onde

I.2.5. Déplacements absolus

I.2.6. Vitesses de phase des ondes de Lamb

I.2.7. Vitesses d'énergie des ondes de Lamb

I.2.8. Longueur d'onde des modes de Lamb

### I.3. Conclusion

## **I.1. Introduction**

Dans un solide infini, une onde élastique longitudinale ou transversale de volume peut se propager. Si ce solide est limité par une surface libre, l'onde va interagir avec cette frontière. Une réflexion de l'onde de volume va donc se produire et des conversions de modes longitudinaux en modes transversaux apparaîtront, et réciproquement. Dès lors, si le solide possède une surface plane, une onde peut être guidée par la surface du solide semi-infini. Cette onde est l'onde de Rayleigh, connue et utilisée depuis très longtemps.

Dans le cas d'une plaque placée dans le vide, les différentes réflexions sur les deux faces du solide donnent naissance à des ondes guidées. Ces ondes découvertes par Lamb se propagent sans atténuation <sup>[Lamb]</sup> et l'on peut relier directement leurs propriétés à celles du matériau. Ainsi, puisque ces ondes peuvent être altérées par les défauts de la plaque, le contrôle non destructif les a utilisées abondamment dans de nombreuses applications.

Dans ce premier chapitre, nous allons aborder l'étude des ondes guidées se propageant dans une plaque dans le vide. La description des ondes sera faite en terme d'ondes évanescentes <sup>[Poirée]</sup>. Cette partie a donc pour but de rappeler les principales propriétés de ces ondes et de donner un certain nombre de résultats qui s'avéreront utiles au cours des études expérimentales et numériques qui suivront. Ainsi, nous rétablirons les courbes de dispersion des ondes, c'est-à-dire les courbes représentant les vitesses de phase et d'énergie en fonction de la fréquence. Par ailleurs, il est important de noter que, dans ces calculs, les amplitudes des ondes sont arbitraires (définies à un coefficient multiplicatif près) et sont tributaires du dispositif d'excitation choisi. Or comme l'objectif de cette étude est l'obtention d'un bilan énergétique lors de la conversion d'ondes, il nous faut nécessairement relier les amplitudes de ces ondes à la puissance qu'elles transportent. Ainsi, nous sommes amenés à calculer les amplitudes des déplacements absolus correspondant à une puissance donnée par unité de surface.

## I.2. Plaque plane dans le vide

Pour étudier les modes de Lamb dans une plaque plane infinie et isotrope, différents formalismes ont déjà été développés. Après Lamb <sup>[Lamb]</sup>, Viktorov <sup>[Viktorov]</sup> a utilisé la méthode des potentiels pour la recherche des modes propres d'une plaque dans le vide. Pour notre étude, nous avons pris le parti de décrire les modes propres à l'aide des ondes planes inhomogènes <sup>[Duclos]</sup> ce qui nous permettra de détailler par la suite les courbes de dispersion qui relient le nombre d'onde des modes de Lamb à la fréquence temporelle.

### I.2.1. Equations de dispersion

Afin d'établir les courbes de dispersion, il nous faut poser les équations de dispersion à partir du formalisme choisi.

Dans un solide élastique, homogène, isotrope et infini, deux types d'ondes planes peuvent se propager : une onde inhomogène longitudinale (type L) et une onde inhomogène transversale (type T).

L'onde de type L possède un déplacement noté  $\overline{\underline{U}}_L$ , vérifiant les équations suivantes :

$$\Delta \overline{\underline{U}}_L - \frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2 \overline{\underline{U}}_L}{\partial t^2} = 0$$

$$\overline{\text{rot}} \overline{\underline{U}}_L = \vec{0}$$

De même, l'onde de type T a un déplacement noté  $\overline{\underline{U}}_T$ , vérifiant :

$$\Delta \overline{\underline{U}}_T - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 \overline{\underline{U}}_T}{\partial t^2} = 0$$

$$\overline{\text{div}} \overline{\underline{U}}_T = 0$$

Dans ces équations,  $V_L$  et  $V_T$  désignent respectivement les vitesses de phase des ondes homogènes longitudinale et transversale dans le solide infini. Ces vitesses peuvent s'écrire en fonction de la masse volumique  $\rho$  du solide et des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad , \quad V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

Considérons maintenant une plaque plane élastique isotrope, de largeur et de longueur infinies, d'épaisseur  $E$  (Figure I.1), réalisée avec le matériau dont les caractéristiques sont définies précédemment (c'est-à-dire  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ ).

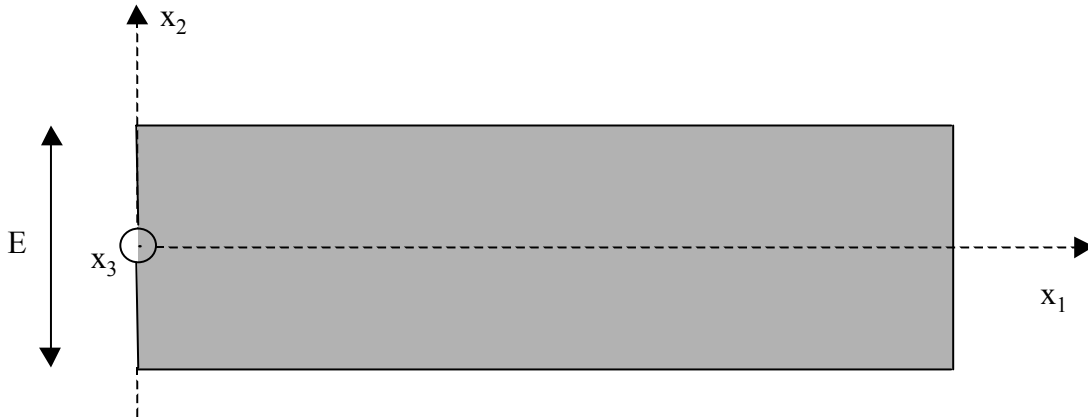


Figure I.1 : Géométrie de plaque.

Dans cette plaque bornée en  $x_2 = \frac{E}{2}$  et en  $x_2 = -\frac{E}{2}$ , 4 ondes peuvent se propager en régime harmonique à la fréquence  $F$  (pulsation  $\omega$ ) : 2 ondes évanescentes de type L, l'une montante et l'autre descendante, ainsi que 2 ondes évanescentes de type T, l'une montante et l'autre descendante, selon les diverses réflexions aux interfaces. Un mode propre de la plaque est donc la résultante de ces 4 ondes.

Les ondes de type L ont un vecteur d'onde  $\underline{\bar{k}}$  de composantes  $\underline{k}_1$  et  $\underline{k}_2$  reliées par la relation :

$$\underline{k}_1^2 + \underline{k}_2^2 = k_L^2 = \frac{\omega^2}{V_L^2} .$$

Soit, pour  $\underline{k}_1 = \underline{k}_{L1}$  donné,  $\underline{k}_2 = \pm \underline{k}_{L2} = \pm \sqrt{k_L^2 - \underline{k}_{L1}^2} .$

Les ondes de type T ont un vecteur d'onde  $\vec{k}$  de composantes  $\underline{k}_1$  et  $\underline{k}_2$  reliées par la relation suivante :

$$\underline{k}_1^2 + \underline{k}_2^2 = k_T^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2}.$$

Soit, pour  $\underline{k}_1 = \underline{k}_{T1}$  :  $\underline{k}_2 = \pm \underline{k}_{T2} = \pm \sqrt{k_T^2 - \underline{k}_{T1}^2}$ .

De plus, les vecteurs d'ondes ont la même projection sur l'interface car les ondes ont une extension infinie selon  $Ox_1$ . Donc :

$$\underline{k}_{L1} = \underline{k}_{T1} = \underline{k}_1.$$

Les modes propres ont donc des déplacements dans la plaque qui résultent de la somme de deux contributions transverses (suivant le signe de  $x_2$ ) et de deux contributions longitudinales. Soit une somme de quatre termes pour décrire une onde harmonique :

$$\underline{u}_i = \sum_{m=1}^4 \underline{U}_{im} \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \quad , \quad (i=1,2).$$

Les composantes des vecteurs d'onde  $\underline{k}_{2m}$  sont indicées de la façon suivante :

$$\underline{k}_{21} = \underline{k}_{L2}$$

$$\underline{k}_{22} = -\underline{k}_{L2}$$

$$\underline{k}_{23} = \underline{k}_{T2}$$

$$\underline{k}_{24} = -\underline{k}_{T2}$$

Posons  $\underline{Q}_m = \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{U}_{1m}}$ .

Pour les ondes de type L ( $m=1,2$ ),  $\overline{\text{rot}} \vec{U}_L = \vec{0}$  entraîne donc :  $\underline{Q}_m = \frac{\underline{k}_{2m}}{\underline{k}_1}$ .

Pour les ondes de type T ( $m=3,4$ ),  $\text{div} \vec{U}_T = 0$  entraîne donc :  $\underline{Q}_m = -\frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_{2m}}$ .

Ainsi, les déplacements  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  prennent la forme :

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = \sum_{m=1}^4 \underline{U}_{1m} \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \\ \underline{u}_2 = \sum_{m=1}^4 \underline{Q}_m \underline{U}_{1m} \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \end{cases}$$

Par ailleurs, les conditions aux limites doivent être vérifiées par les ondes de Lamb sur les deux faces ( $x_2 = \frac{E}{2}$  et  $x_2 = -\frac{E}{2}$ ). Pour une plaque dans le vide, ces conditions ne portent que sur les contraintes  $\underline{T}_{12}$  et  $\underline{T}_{22}$  qui sont nulles à l'interface.

Si  $\underline{u}_{i,j}$  représente la dérivation de la composante  $\underline{u}_i$  par rapport à  $x_j$ , les expressions de ces contraintes  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  et  $T_{22}$  peuvent être précisées :

$$\begin{cases} \underline{T}_{11} = (\lambda + 2\mu) \underline{u}_{1,1} + \lambda \underline{u}_{2,2} \\ \underline{T}_{12} = \mu (\underline{u}_{2,1} + \underline{u}_{1,2}) \\ \underline{T}_{22} = \lambda \underline{u}_{1,1} + (\lambda + 2\mu) \underline{u}_{2,2} \end{cases} \quad (I.1)$$

La contrainte tangentielle s'écrit alors de la manière suivante :

$$\underline{T}_{12} = \mu \sum_{m=1}^4 j \underline{U}_{1m} (\underline{k}_{2m} + \underline{k}_1 \underline{Q}_m) \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)].$$

De même, la contrainte normale est donnée par :

$$\underline{T}_{22} = \sum_{m=1}^4 j \underline{U}_{1m} [\lambda \underline{k}_1 + (\lambda + 2\mu) \underline{k}_{2m} \underline{Q}_m] \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)].$$



Ainsi, l'écriture de la nullité des contraintes à la surface de la plaque conduit à un système linéaire homogène de quatre équations dont les inconnues sont les amplitudes  $\underline{U}_{1m}$ . Ce système peut être divisé en deux sous-systèmes de deux équations décrivant les ondes symétriques et les ondes antisymétriques. L'écriture de la nullité des deux déterminants conduit donc aux équations de dispersion des modes symétriques (I.2) et antisymétriques (I.3) [Auld (1)] :

$$4 \underline{k}_{L2} \underline{k}_{T2} \underline{k}_1^2 \tan\left(\frac{\underline{k}_{L2} E}{2}\right) + (\underline{k}_T^2 - 2 \underline{k}_1^2)^2 \tan\left(\frac{\underline{k}_{T2} E}{2}\right) = 0 \quad (I.2)$$

$$4 \underline{k}_{L2} \underline{k}_{T2} \underline{k}_1^2 \tan\left(\frac{\underline{k}_{T2} E}{2}\right) + (\underline{k}_T^2 - 2 \underline{k}_1^2)^2 \tan\left(\frac{\underline{k}_{L2} E}{2}\right) = 0 \quad (I.3)$$

Nous rappelons que les modes symétriques et antisymétriques sont définis en fonction des symétries des déplacements  $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  par rapport au plan médian de la plaque.

Les déplacements des modes symétriques sont tels que :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(x_2) &= \underline{u}_1(-x_2) \\ \underline{u}_2(x_2) &= -\underline{u}_2(-x_2) \end{aligned}$$

Les déplacements des modes antisymétriques sont du type :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(x_2) &= -\underline{u}_1(-x_2) \\ \underline{u}_2(x_2) &= \underline{u}_2(-x_2) \end{aligned}$$

Les équations de dispersion I.2 et I.3 étant maintenant établies, nous devons les résoudre.

### I.2.2. Solutions des équations de dispersion

Comme cela a été fait dans des études antérieures, nous décomposons le vecteur d'onde  $\vec{k}$ , solution de l'équation de dispersion, en une partie réelle  $\vec{k}'$  et une partie imaginaire  $\vec{k}''$  (soit  $\vec{k} = \vec{k}' + j\vec{k}''$ ). Ce vecteur d'onde est fonction du produit fréquence-épaisseur FE. Le fait que le matériau considéré soit sans atténuation entraîne l'orthogonalité [Poirée] des deux vecteurs  $\vec{k}'$  et  $\vec{k}''$ . L'atténuation de l'onde au cours de sa propagation est liée à la composante  $k_1''$  de la partie imaginaire du vecteur d'onde parce qu'elle introduit un terme d'amplitude en  $\exp(-k_1''x_1)$ ,  $x_1$  étant l'axe de propagation de l'onde (*Figures I.2.*).

Trois types de solutions peuvent donc être envisagés pour la composante  $\underline{k}_1$  d'un mode :

- La solution est réelle : c'est un mode de Lamb.
- La solution est complexe.
- La solution est imaginaire pure.

#### *I.2.2.1. Solutions réelles : modes de Lamb*

Les solutions pour lesquelles il n'y a pas d'atténuation de l'onde suivant l'axe de propagation (soit  $\underline{k}_1'' = 0$ ) sont les ondes de Lamb. Trois configurations différentes peuvent exister suivant la vitesse de phase  $V$  de l'onde. Elles ont un point commun :  $\underline{k}_1$  est réel. A ces trois configurations correspondent les trois figures ci-dessous qui précisent qualitativement les composantes des vecteurs d'onde.

- $V > V_L > V_T$  : Les vecteurs d'ondes des ondes L et T sont réels. Leur projection  $\underline{k}_1$  sur  $Ox_1$  est la même (*Figure I.2.a*).

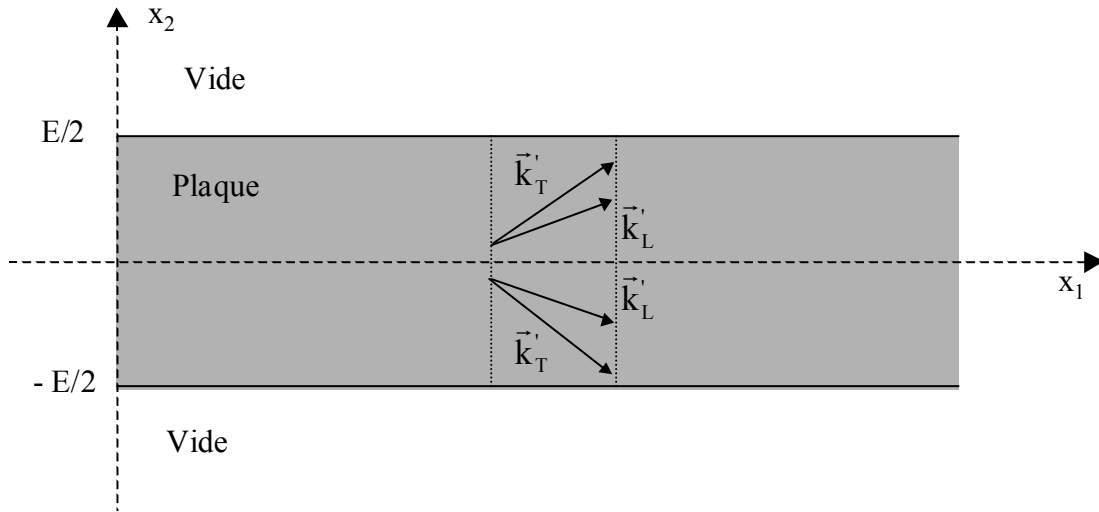


Figure I.2.a. : Vecteurs d'onde des modes de Lamb dans le cas où  $V > V_L > V_T$ .

- $V_L > V > V_T$  : Le vecteur d'onde transversal est toujours réel. Le vecteur d'onde longitudinal est complexe et possède une partie imaginaire dont la projection suivant  $Ox_1$  est nulle (Figure I.2.b.).

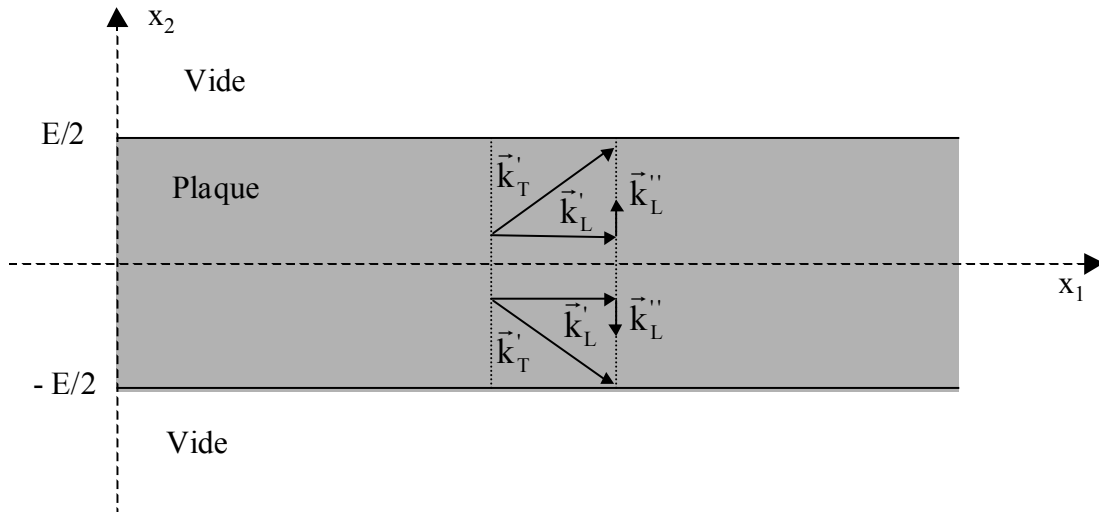


Figure I.2.b. : Vecteurs d'onde des modes de Lamb dans le cas où  $V_L > V > V_T$ .

- $V_L > V_T > V$  : Les vecteurs d'onde des ondes L et T sont tous les deux complexes mais la projection selon  $Ox_1$  de leur partie imaginaire est nulle (Figure I.2.c).

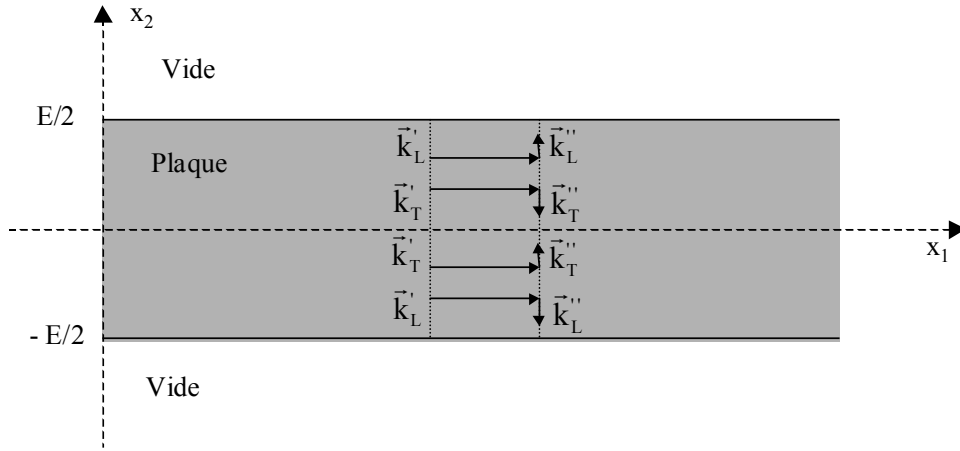


Figure I.2.c : Vecteurs d'onde des modes de Lamb dans le cas où  $V_L > V_T > V$ .

### I.2.2.2. Solutions complexes

Si la solution  $\underline{k}_1$  de l'équation de dispersion est complexe, alors  $\underline{k}_2$  l'est aussi. La partie réelle  $\bar{k}'$  du vecteur d'onde  $\bar{k}$  est donc inclinée par rapport à l'axe de propagation  $Ox_1$  et la partie imaginaire  $\bar{k}''$  lui est perpendiculaire. La figure ci-dessous (Figure I.3.) présente les vecteurs d'ondes correspondants. Comme précédemment ils ont la même projection selon  $Ox_1$  mais celle-ci est complexe :  $\underline{k}_1 = k'_1 + j k''_1$ . Possédant une partie imaginaire  $k''_1$  de son vecteur d'onde non nulle, le mode complexe est atténué selon  $Ox_1$ .

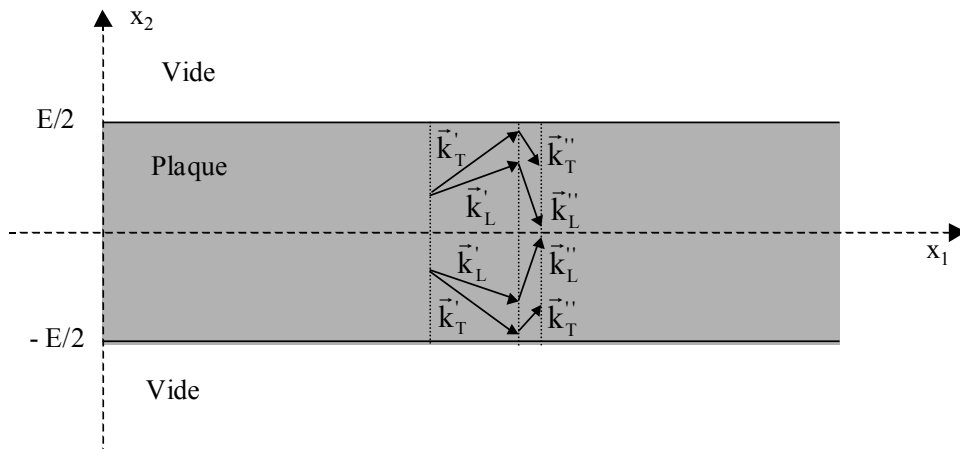


Figure I.3. : Vecteurs d'onde des modes complexes.

*1.2.2.3. Solutions imaginaires pures*

Si la composante  $\underline{k}_1$  du vecteur d'onde solution est imaginaire pure, à savoir  $\underline{k}_1 = jk_1''$ , la composante  $\underline{k}_2$  est obligatoirement réelle. Ce type de solution traduit le fait que l'onde se propage suivant l'axe  $Ox_2$  tout en s'atténuant suivant  $Ox_1$  (Figure I.4).

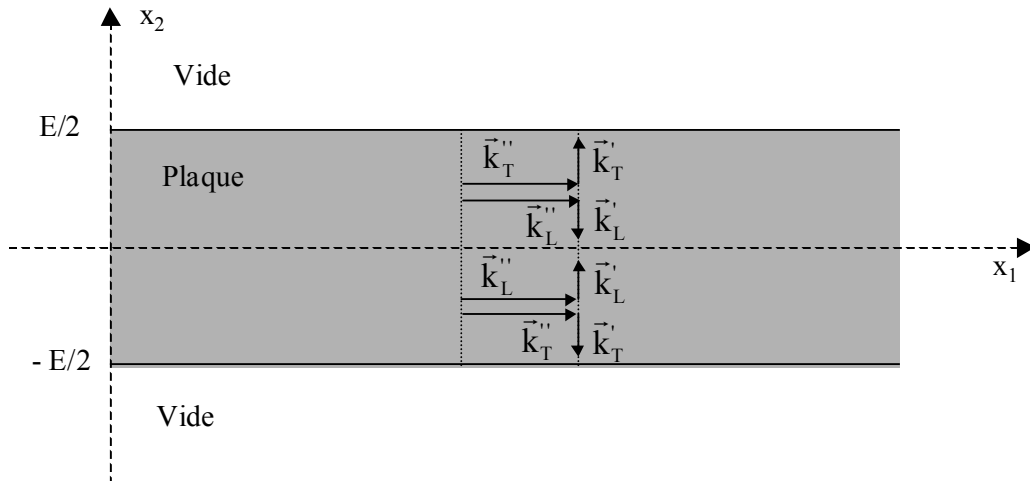


Figure I.4. : Vecteurs d'onde des modes imaginaires purs.

Parmi ces trois types de solutions, notons tout de suite que les modes « complexes » (paragraphe 1.2.2.2 et 1.2.2.3) ne présentent pas d'intérêt pratique si l'on considère une plaque d'extension infinie comme c'est le cas dans ce chapitre. Mais dès que l'on étudie une plaque finie ou semi-infinie présentant une discontinuité (soudure, fissure, bord biseauté, ...), ces modes « complexes » ont localement une importance non négligeable au niveau de l'obstacle et nous serons amenés à en tenir compte dans les chapitres suivants.

L'obtention de ces trois types de solutions permet de tracer les courbes de dispersion.

### I.2.3. Courbes de dispersion

Les résultats que nous allons présenter ont été calculés pour une plaque d'acier inoxydable dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3} \\ V_L = 5850 \text{ m.s}^{-1} \\ V_T = 3150 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

Les solutions symétriques et antisymétriques des équations I.2 et I.3 sont tracées dans l'espace  $(k_1', k_1'', FE)$  (*Figures I.5. et I.6*), FE étant le produit fréquence-épaisseur. Nous avons limité le plan complexe à  $k_1' > 0$  et  $k_1'' > 0$ . Les solutions réelles sont en bleu, les solutions imaginaires en rouge et les solutions complexes en vert.

En analysant ces courbes, on retrouve dans le plan réel  $(FE, k_1')$  les solutions « classiques » que sont les ondes de Lamb propagatives dans une plaque de longueur infinie. A l'exception des ondes  $A_0$  et  $S_0$ , tous les modes ont une asymptote dans ce plan. La valeur du produit FE, quand le nombre d'onde tend vers 0, est appelée « produit fréquence-épaisseur de coupure » (ou « cut-off »). Les modes de Lamb n'existent en général que pour des produits FE supérieurs à la valeur de coupure.

Nous pouvons cependant remarquer un cas particulier. Il s'agit du mode symétrique  $S_1$  (*Figure I.6*) au voisinage de sa fréquence de coupure <sup>[Meitzler]</sup>. En effet, pour des FE inférieurs à la fréquence de coupure (égale à 2,92 MHz.mm), le mode  $S_1$  est de deux natures différentes. Si l'on prend comme point de départ  $k_1' = 0$ , ses vitesses d'énergie et de phase sont d'abord opposées <sup>[Eudeline]</sup> avant d'être de même signe (voir paragraphe I.2.7.). Dans le cas où la vitesse d'énergie du mode est négative, l'onde est appelée « rétropropagative ».

Notons par ailleurs que pour chaque valeur du produit FE, il existe un nombre fini de solutions réelles ainsi qu'une infinité de solutions complexes. Il importe de préciser la numérotation des modes : les modes réels sont numérotés par ordre croissant de leur fréquence de coupure tandis que les modes complexes sont numérotés par ordre croissant de la partie imaginaire  $k_1''$  de leur vecteur d'onde.

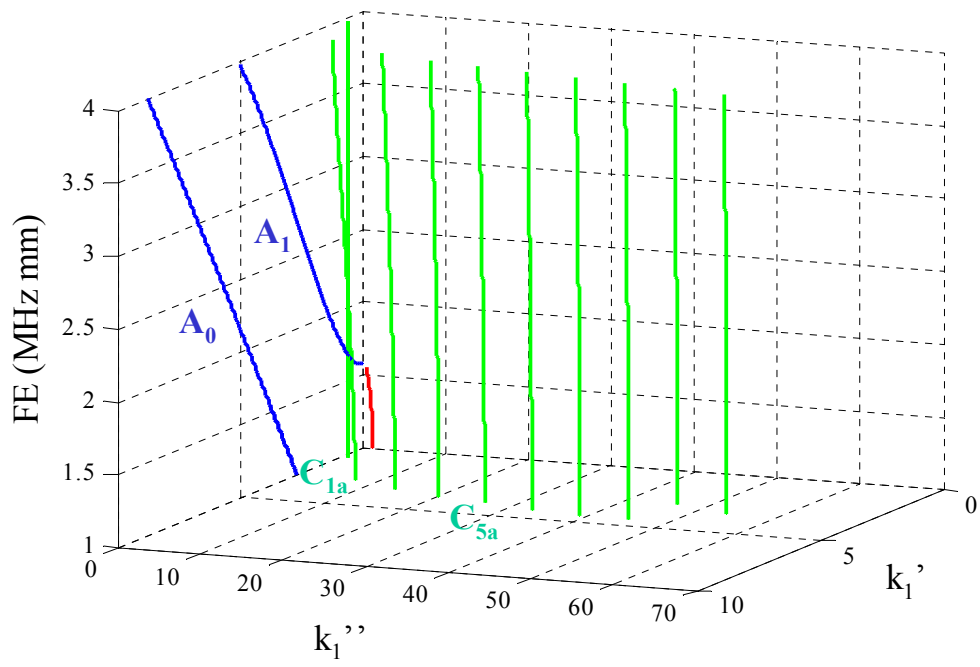


Figure I.5. : Courbes de dispersion des modes antisymétriques d'une plaque d'acier d'épaisseur 2 mm

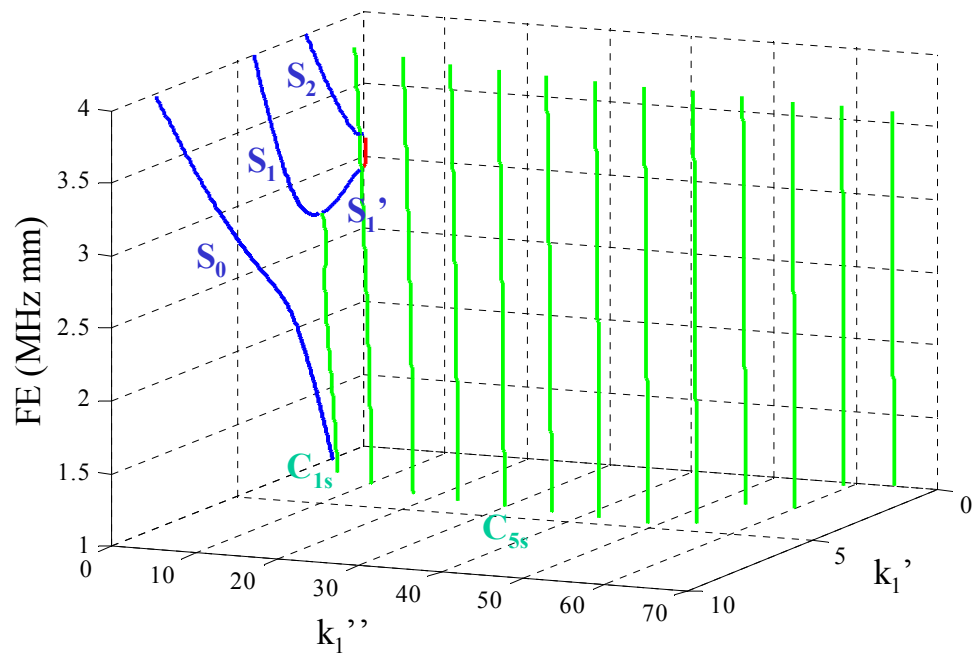


Figure I.6. : Courbes de dispersion des modes symétriques d'une plaque d'acier d'épaisseur 2 mm



I.2.4. Energie transportée par une onde

Afin de réaliser un bilan quantitatif de la conversion des ondes de Lamb, il nous faut déterminer l'énergie transportée par une onde.

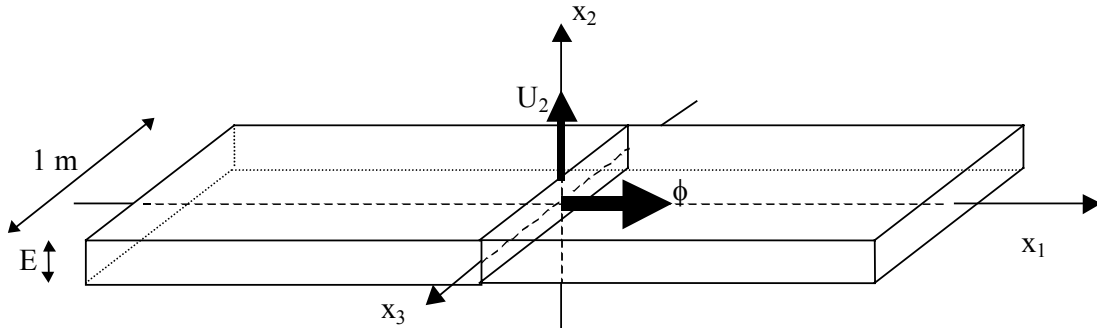


Figure I.7. : Flux du vecteur de Poynting à travers une section droite de la plaque.

L'énergie moyenne  $\underline{\phi}$  transportée par une onde selon sa direction de propagation  $Ox_1$  (Figure I.7) s'identifie au flux du vecteur de Poynting  $\underline{\bar{P}}$  à travers une section droite de la plaque limitée à 1 mètre de largeur (selon  $Ox_3$ ) :

$$\underline{\phi} = \int_{-\frac{E}{2}}^{\frac{E}{2}} \int_0^1 \underline{P}_1 dx_2 dx_3 \quad (I.4)$$

$$\text{avec :} \quad \underline{P}_1 = -\frac{1}{2} \underline{v}_j^* T_{j1} = -\frac{1}{2} \underline{v}_1^* T_{11} - \frac{1}{2} \underline{v}_2^* T_{21}$$

où les composantes de la vitesse sont notées  $\underline{v}_i = \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} = -j \omega \underline{u}_i$ .

Afin de déterminer le flux du vecteur de Poynting, les contraintes  $T_{11}$  et  $T_{21}$  doivent être utilisées. Nous les rappelons donc :

$$\begin{aligned} \underline{T}_{11} &= \sum_{m=1}^4 j \underline{U}_{1m} [(\lambda + 2\mu) \underline{k}_1 + \lambda \underline{k}_{2m} \underline{Q}_m] \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \\ \underline{T}_{21} &= \mu \sum_{m=1}^4 j \underline{U}_{1m} (\underline{k}_{2m} + \underline{k}_1 \underline{Q}_m) \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \end{aligned}$$

Des déplacements  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$ , on en déduit aisément les vitesses  $\underline{v}_1$  et  $\underline{v}_2$  :

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= -j\omega \sum_{m=1}^4 \underline{U}_{1m} \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \\ \text{et } \underline{v}_2 &= -j\omega \sum_{m=1}^4 \underline{U}_{1m} \underline{Q}_m \exp[j(\underline{k}_1 x_1 + \underline{k}_{2m} x_2 - \omega t)] \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (I.4) les contraintes et les vitesses par leurs expressions en fonction des amplitudes des déplacements, le vecteur de Poynting peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{P}_1 &= \frac{\omega}{2} \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \underline{U}_{1n}^* \underline{U}_{1m} [\underline{k}_1 (\lambda + 2\mu) + \lambda \underline{k}_{2m} \underline{Q}_m + \underline{Q}_n^* \mu (\underline{k}_{2m} + \underline{k}_1 \underline{Q}_m)] \times \\ &\quad \times \exp[j(\underline{k}_{2m} - \underline{k}_{2n}^*) x_2] \exp[j(\underline{k}_1 - \underline{k}_1^*) x_1] \end{aligned}$$

Après transformation de  $\lambda$  et  $\mu$  en fonction des vitesses et intégration selon  $x_2$ , le flux s'exprime par :

$$\begin{aligned} \underline{\phi} &= \rho \frac{\omega}{2} E \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \underline{U}_{1n}^* \underline{U}_{1m} \exp(-2 \underline{k}_1'' x_1) \left[ \underline{k}_1 (V_L^2 + \underline{Q}_m \underline{Q}_n^* V_T^2) + \right. \\ &\quad \left. + \underline{k}_{2m} (\underline{Q}_m (V_L^2 - 2V_T^2) + \underline{Q}_n^* V_T^2) \right] \frac{\sin \left[ (\underline{k}_{2m} - \underline{k}_{2n}^*) \frac{E}{2} \right]}{(\underline{k}_{2m} - \underline{k}_{2n}^*) \frac{E}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, la partie réelle de  $\underline{\phi}$ , notée  $\phi$ , représente l'énergie moyenne transportée par une onde à travers la section choisie.

### I.2.5. Déplacements absolus

L'énergie véhiculée par une onde étant maintenant connue, nous pouvons l'utiliser pour déterminer des « déplacements absolus ».

En effet, les amplitudes des ondes calculées précédemment sont toutes connues à un coefficient multiplicatif près. Mais afin de pouvoir réaliser des comparaisons entre les déplacements des différents modes de Lamb, il nous faut définir des déplacements que nous appelons « absolus ».

Ce déplacement absolu, noté  $\underline{U}$ , est défini arbitrairement comme étant le déplacement d'une onde transportant une puissance égale à 1 Watt à travers une section droite de plaque d'épaisseur  $E$  et de largeur 1 mètre. Cela équivaut donc à diviser le déplacement réel par la racine carrée du flux de vecteur de Poynting à travers la section de la plaque (voir le paragraphe I.2.4). Ces déplacements absolus ont donc pour expression :

$$\underline{U}_i = \frac{u_i}{\sqrt{\Phi}} .$$

Les déplacements absolus normaux ( $\underline{U}_2$ ) et tangentiels ( $\underline{U}_1$ ) des cinq premières ondes de Lamb, à savoir les modes  $A_0$  (*Figure I.8.*),  $S_0$  (*Figure I.9.*),  $A_1$  (*Figure I.10.*),  $S_1$  et  $S_2$  (*Figure I.11.*), sont tracés dans l'épaisseur de la plaque (entre  $-\frac{E}{2}$  et  $\frac{E}{2}$ ) sur une période temporelle (entre 0 et  $T$ ). En effet, ce sont ces cinq modes de Lamb que nous utiliserons dans les chapitres suivants. Ces déplacements ont été représentés pour différentes valeurs du produit fréquence-épaisseur  $FE$ . Cette visualisation est bien utile pour connaître la « structure » de l'onde et l'évolution de celle-ci en fonction de la fréquence. En effet, lors de l'utilisation des modes de Lamb en vue d'une évaluation non destructive d'un matériau, le choix du mode à générer dépend du type de défaut que l'on veut mettre en évidence mais aussi de sa localisation (défaut de surface ou défaut interne).

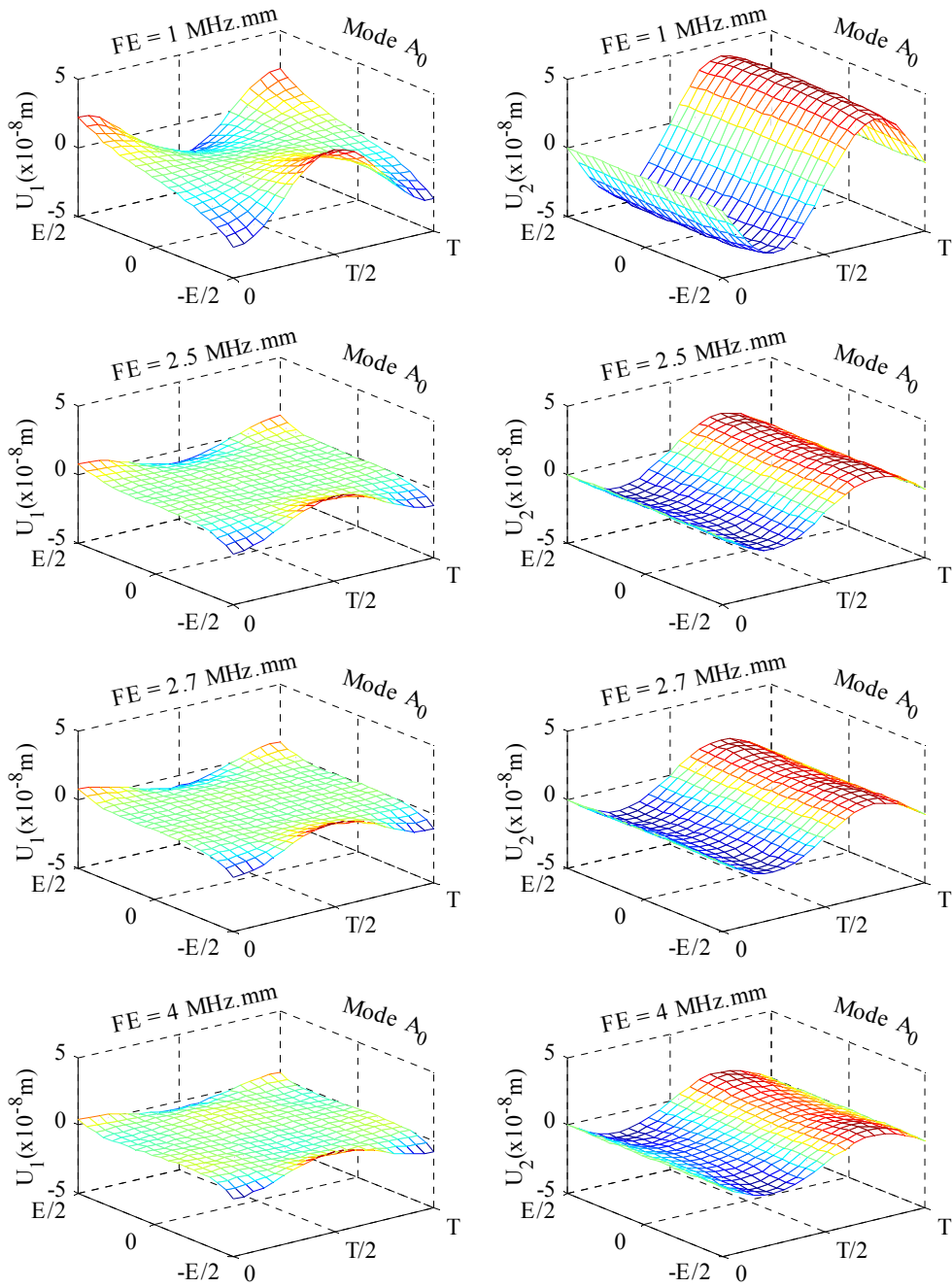


Figure I.8. : Profils des déplacements tangentiels ( $U_1$ ) et normaux ( $U_2$ ) du mode  $A_0$ .

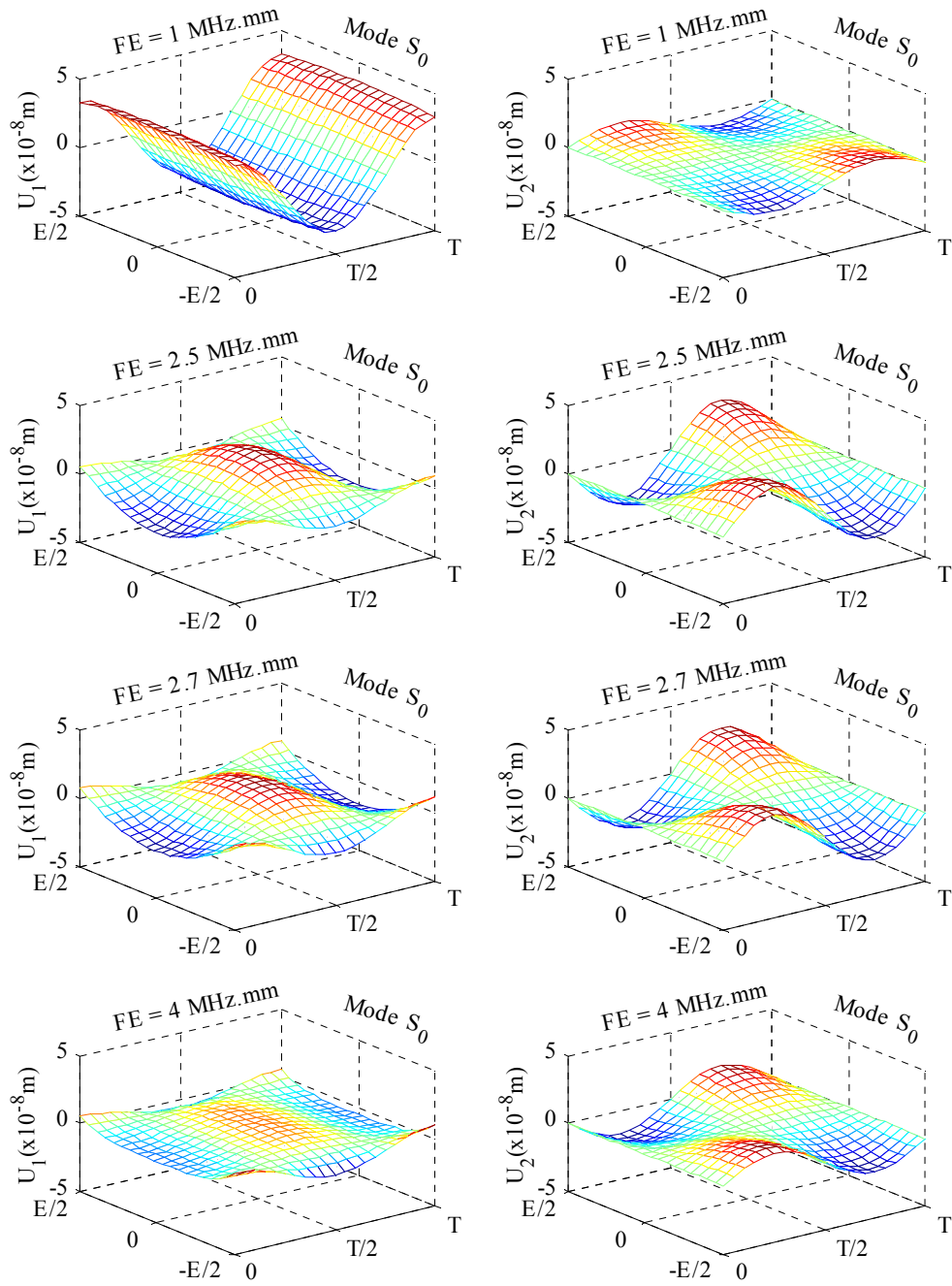


Figure I.9. : Profils des déplacements tangentiels ( $U_1$ ) et normaux ( $U_2$ ) du mode  $S_0$ .

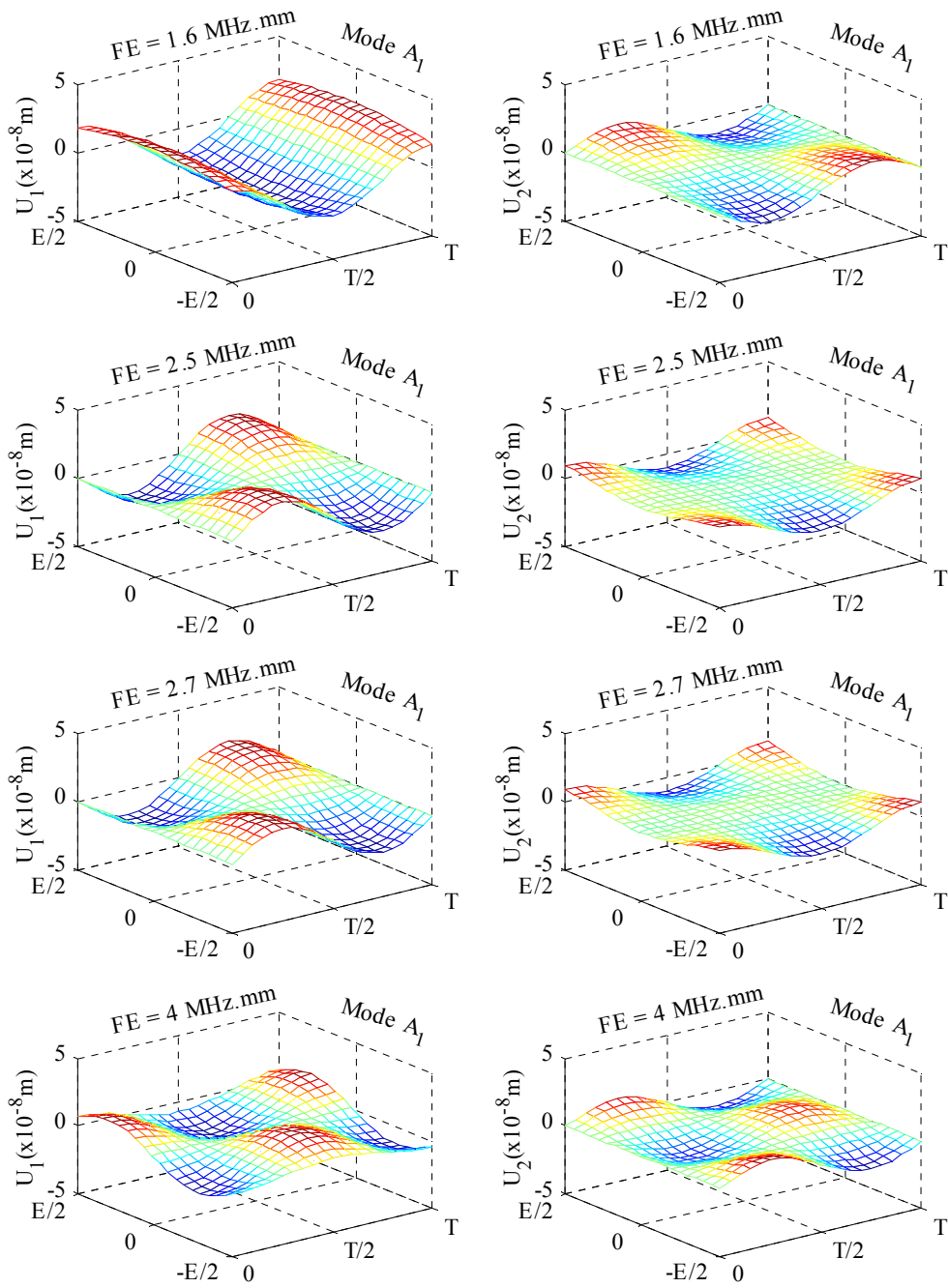


Figure I.10. : Profils des déplacements tangentiels ( $U_1$ ) et normaux ( $U_2$ ) du mode  $A_1$  .

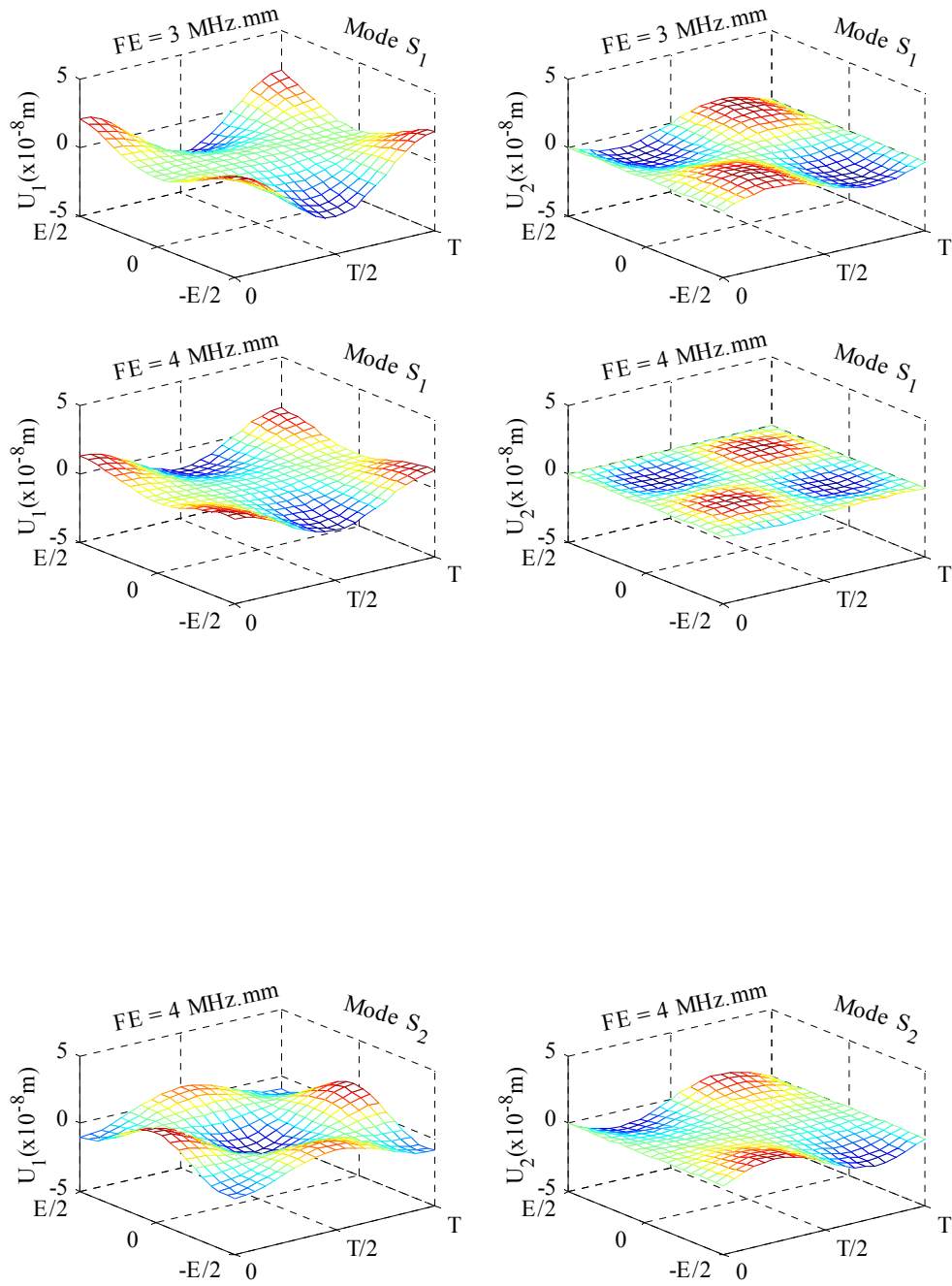


Figure I.11. : Profils des déplacements tangentiels ( $U_1$ ) et normaux ( $U_2$ ) des modes  $S_1$  et  $S_2$ .

Par la suite, des relevés expérimentaux seront réalisés en utilisant un vibromètre laser qui permet de mesurer les déplacements normaux en surface. Il est indispensable d'avoir une connaissance des modes susceptibles d'être détectés. Cela facilitera l'interprétation des mesures quant à la possibilité qu'un mode de Lamb se propage dans la plaque. De plus, pour la réalisation de bilans quantitatifs, il faudra relier ces amplitudes de déplacements à l'énergie transportée par l'onde.

En vue de ces mesures expérimentales futures, on établit un lien simple entre le module des déplacements normaux à la surface de la plaque et la racine carrée du flux de vecteur de Poynting, c'est le coefficient  $\zeta$  :

$$\zeta = \frac{\left| \underline{u}_2 \left( x_2 = \pm \frac{E}{2} \right) \right|}{\sqrt{\Phi}}$$

La grandeur  $\zeta$  est tracée *Figure I.12.* en fonction du produit FE. Sur cette représentation, il est évident que chaque mode possède une ou plusieurs zones fréquentielles pour lesquelles la vibration en surface est trop faible pour que ce mode soit détecté (mis à part les modes A<sub>0</sub> et S<sub>0</sub>) et ce, quelle que soit la sensibilité du vibromètre laser utilisé.

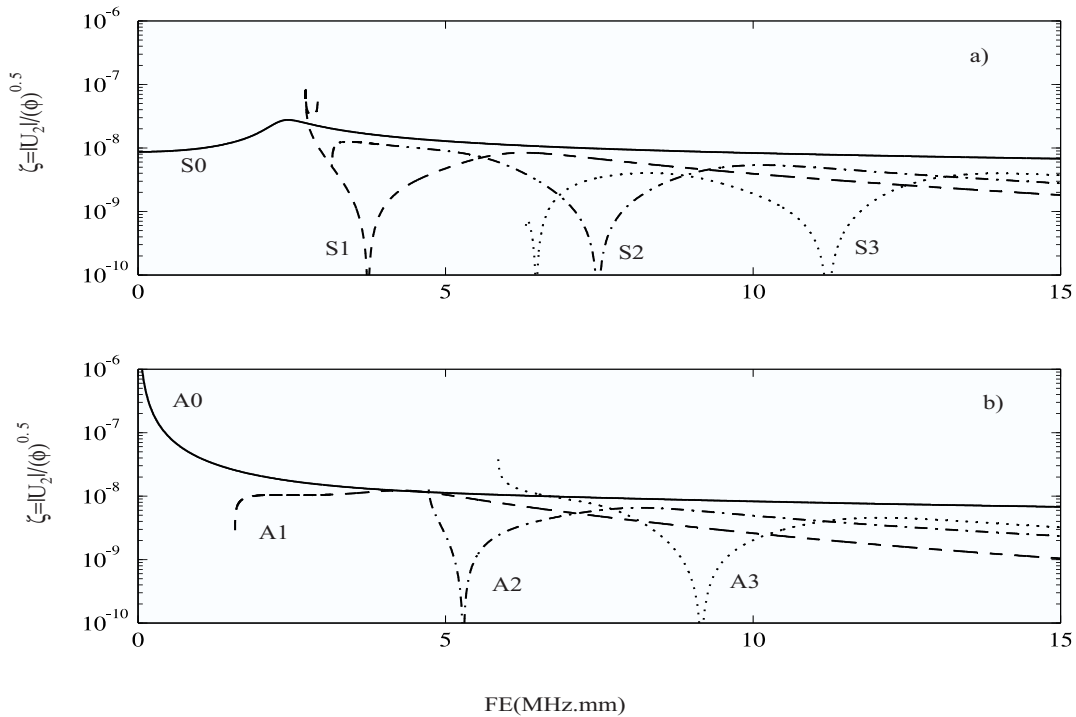


Figure I.12. : Coefficient  $\zeta$  reliant l'amplitude des déplacements normaux en surface ( $U_2$ ) au flux  $\Phi$  du vecteur de Poynting pour une plaque d'acier inoxydable.



Ainsi, pour un mode de Lamb donné, le relevé expérimental de l'amplitude du déplacements en surface à l'aide d'un interféromètre laser fournit son flux d'énergie.

Afin de compléter la caractérisation des ondes de Lamb, établissons leurs vitesses de phase et d'énergie, ainsi que leurs longueurs d'onde.

### I.2.6. Vitesses de phase des ondes de Lamb

La vitesse de phase des ondes de Lamb suivant la direction  $Ox_1$  est donnée par :

$$V = \frac{\omega}{k_1} .$$

Les vitesses de phase des premiers modes de Lamb sont tracées sur la *Figure I.13.* en fonction de FE. La connaissance des vitesses de phase sera utile lors de la reconnaissance des différentes ondes en présence dans la plaque sur des images présentant les évolutions spatio-temporelles des déplacements normaux (voir les chapitres suivants).

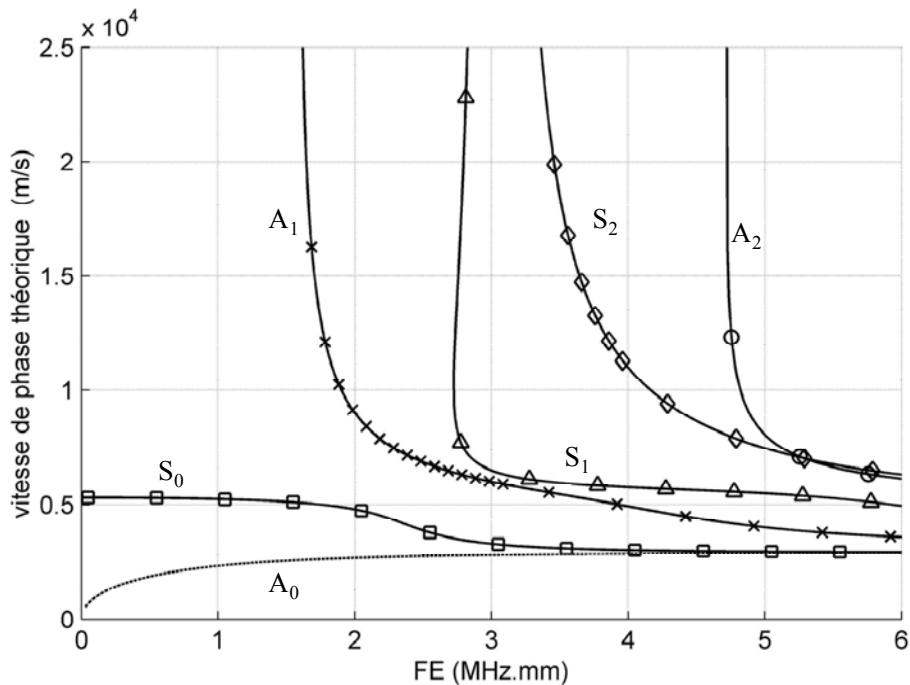


Figure I.13. : Vitesses de phase des ondes de Lamb dans la plaque d'acier inoxydable.

I.2.7. Vitesses d'énergie des ondes de Lamb

La vitesse d'énergie des ondes de Lamb s'obtient en égalant le flux du vecteur de Poynting  $\vec{P}$  à travers une section de la plaque pendant  $\Delta t$  et l'énergie, de densité  $\varepsilon_1$ , contenue dans un volume de dimensions  $(Ve \Delta t, E, 1)^{[Auld(1)]}$ . Ce qui conduit à l'expression :

$$V_e = \frac{\int_{-\frac{E}{2}}^{\frac{E}{2}} \int_0^1 P_1(x_2) dx_2 dx_3}{\int_{-\frac{E}{2}}^{\frac{E}{2}} \int_0^1 \varepsilon_1(x_2) dx_2 dx_3} .$$

Les vitesses d'énergie des premiers modes de Lamb sont tracées sur la *Figure I.14.* en fonction de FE.

Les valeurs sont aussi celles de la vitesse de groupe  $V_G = \frac{\partial \omega}{\partial k_1}$

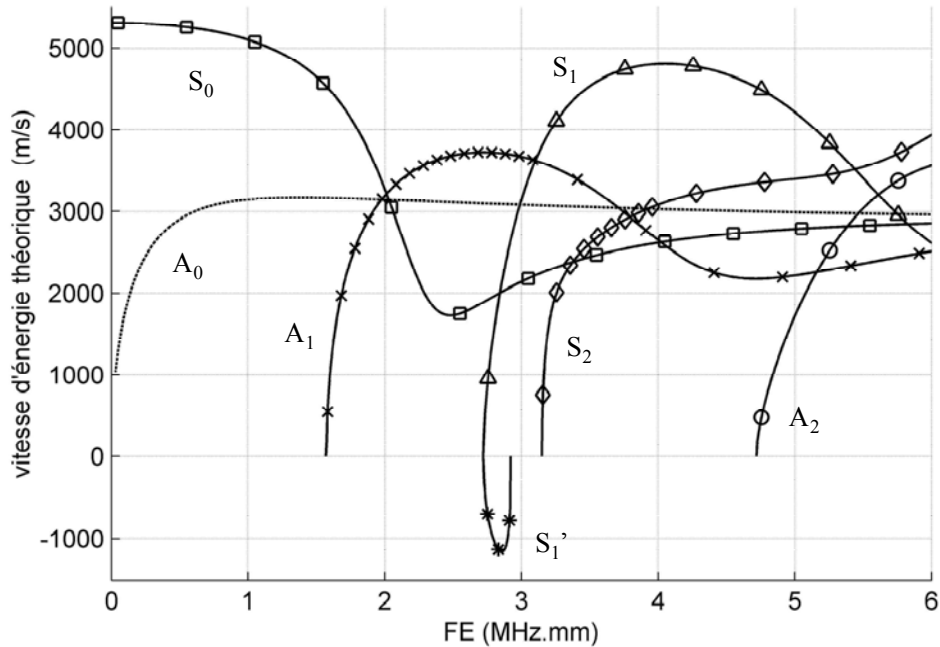


Figure I.14. : Vitesses d'énergie des ondes de Lamb dans la plaque d'acier inoxydable.

I.2.8. Longueur d'onde des modes de Lamb

La connaissance de la longueur d'onde sera essentielle dans deux cas bien différents que nous serons amenés à rencontrer par la suite. En effet, lors de la génération expérimentale d'un mode de Lamb par la méthode du coin (Chapitre II), il est important de connaître la longueur d'onde du mode que l'on veut générer afin d'adapter l'angle du sabot. D'autre part, dans le Chapitre IV traitant de la simulation de la propagation d'un mode de Lamb par la méthode des éléments finis, il nous faudra réaliser un maillage de la structure suffisamment fin devant les longueurs d'onde.

La longueur d'onde d'un mode de Lamb est donnée par :  $\Lambda = \frac{2\pi}{k_1}$ .

Les rapports  $\frac{\Lambda}{E}$  des premiers modes de Lamb sont tracés sur la *Figure I.15.* en fonction de FE.

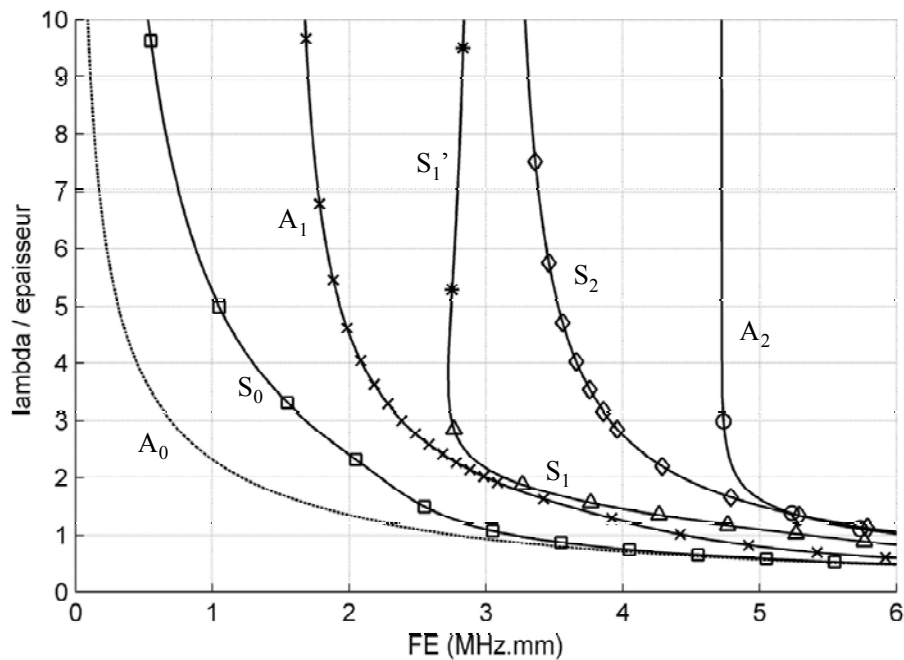


Figure I.15. : Longueurs d'onde des modes de Lamb dans la plaque d'acier inoxydable.

### **I.3. Conclusion**

Quelques rappels théoriques ont été donnés dans ce premier chapitre. Ils sont nécessaires pour l'étude des ondes guidées dans une plaque et pour réaliser une description modale de la réflexion d'une onde donnée. En effet, la connaissance des caractéristiques théoriques de ces ondes permettra de mieux appréhender les résultats expérimentaux ou numériques que nous obtiendrons par la suite. Les courbes obtenues pourront dans certains cas être comparées directement aux résultats expérimentaux et aux simulations. Des grandeurs telles que les déplacements des modes dans la plaque vont être utilisées lors de la simulation de la propagation d'une onde de Lamb par la méthode des éléments finis. Enfin, la connaissance de l'énergie transportée par un mode de Lamb permettra de réaliser des bilans d'énergie.

---

# CHAPITRE II

## Expérimentation

---

### II.1. Introduction

### II.2. Etude expérimentale

II.2.1. Génération des ondes

II.2.2. Acquisition des signaux

II.2.3. Traitement du signal

II.2.4. Bilan d'énergie

II.2.5. Correction des bilans d'énergie

*II.2.5.1. Mise en évidence de l'élargissement du faisceau*

*II.2.5.2. Coefficient correctif*

*II.2.5.3. Bilan d'énergie corrigé : mode de Lamb  $A_1$  incident*

*II.2.5.4. Bilan d'énergie corrigé : mode de Lamb  $S_0$  incident*

### II.3. Conclusion

## **II.1. Introduction**

Un certain nombre d'études expérimentales ont déjà été réalisées concernant la réflexion et les conversions de modes de Lamb à l'extrémité droite d'une plaque, que celle-ci soit immergée [Ech-Cherif El-Kettani] ou non. Par exemple, Zhang et al. [Zhang] ont utilisé une technique de visualisation basée sur le principe de la photoélasticité dynamique afin d'observer les conversions de modes à l'extrémité d'une plaque de verre. Des méthodes de détection optique ont aussi vu le jour [Royer ; Monchalin] et ont ainsi permis des études plus locales. En effet, une étude expérimentale quantitative des phénomènes de conversion a été rendue possible grâce à l'utilisation d'un vibromètre laser. Cet outil permet d'effectuer localement des mesures avec une bonne précision. Plus récemment, Morvan [Morvan] a déterminé expérimentalement l'énergie transportée par une onde de Lamb dans une plaque.

Dans ce chapitre, nous allons étudier expérimentalement la réflexion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque et réaliser un bilan énergétique. A notre connaissance, la conversion des modes de Lamb après réflexion sur un biseau n'a jamais été étudié expérimentalement et quantitativement en fonction de l'angle de celui-ci.

Pour réaliser cette étude, l'onde incidente est générée par un transducteur acoustique de contact. Ce transducteur particulier est constitué d'une pastille piézo-électrique rectangulaire solidaire d'un sabot en plexiglass. L'ensemble convertit une onde de volume en onde de Lamb. En revanche, l'utilisation de ce même type de transducteurs est inadaptée pour relever des informations concernant les modes réfléchis sans les perturber. La méthode de mesure optique, donc sans contact, permet d'effectuer un relevé ponctuel de mesures absolues et autorise ainsi la réalisation d'une étude à la fois qualitative et quantitative.

## II.2. Etude expérimentale

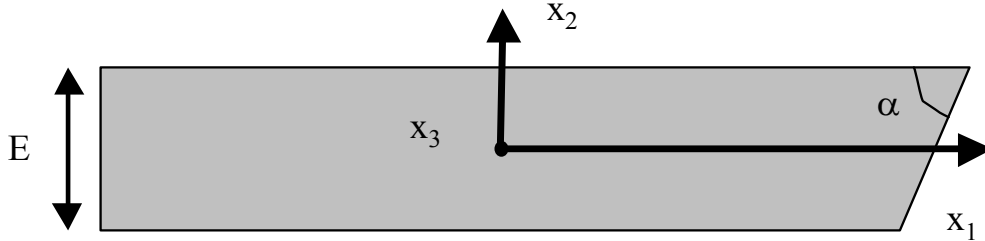


Figure II.1. : Géométrie de la plaque.

L'étude expérimentale est réalisée sur des plaques en acier inoxydable biseautées à des angles  $\alpha$  variant de  $70^\circ$  à  $90^\circ$  par pas de  $5^\circ$  (Figure II.1.). Ces plaques sont de longueur  $L=300$  mm, de largeur  $l=150$  mm et d'épaisseur  $E=2$  mm. La masse volumique du matériau est notée  $\rho$  et sa valeur est égale à  $7800 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les vitesses des ondes longitudinales et transversales dans ce matériau sont respectivement  $V_L=5850 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_T=3150 \text{ m.s}^{-1}$ . La fréquence des ondes est notée  $F$ .

### II.2.1. Génération des ondes

Le dispositif expérimental permettant la génération des ondes et l'acquisition des signaux temporels est décrit sur la Figure II.2. Des photographies du dispositif expérimental sont données dans l'Annexe B.

Un générateur délivre un train de sinusoïdes de 20 périodes temporelles à un transducteur émetteur. De ce fait, l'étude expérimentale est considérée en régime quasi-harmonique.

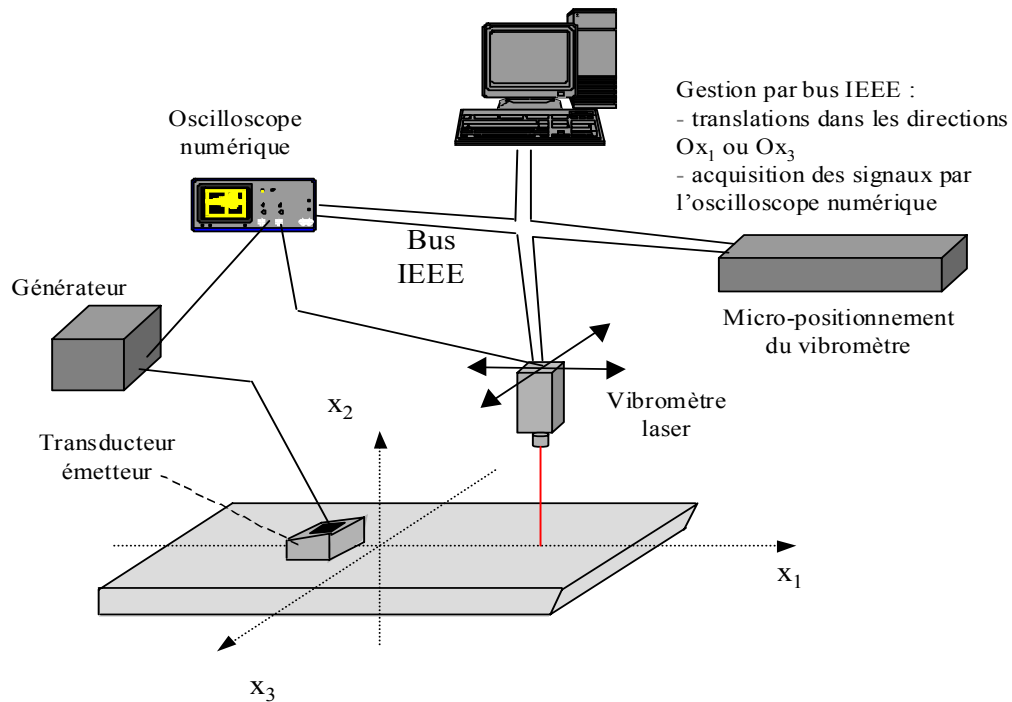


Figure II.2. : Dispositif expérimental.

L'onde de Lamb est générée par la méthode du coin solide <sup>[Viktorov]</sup>.

Le transducteur est une petite plaque piézo-électrique rectangulaire (25×35 mm) vibrant en mode piston et montée sur un sabot en plexiglass (ou coin). Cette plaque piézo-électrique convertit le signal électrique envoyé par le générateur en un signal ultrasonore avec un fort rendement dans un faible domaine fréquentiel. Le sabot en plexiglass est tel que le faisceau incident a une largeur de 35 mm.

La sélection du mode généré est théoriquement permise par le choix de l'angle d'incidence  $\theta$  (Figure III.3), suivant une relation issue de la loi de Snell-Descartes :

$$\theta = \arcsin\left(\frac{V_s}{V_L}\right)$$

où  $V_L$  est la vitesse de phase de l'onde de Lamb souhaitée (longueur d'onde  $\Lambda_L$ ), obtenue grâce aux courbes de dispersion et  $V_s$  est la vitesse de phase des ondes longitudinales (longueur d'onde  $\Lambda_s$ ) dans le matériau constituant le sabot.



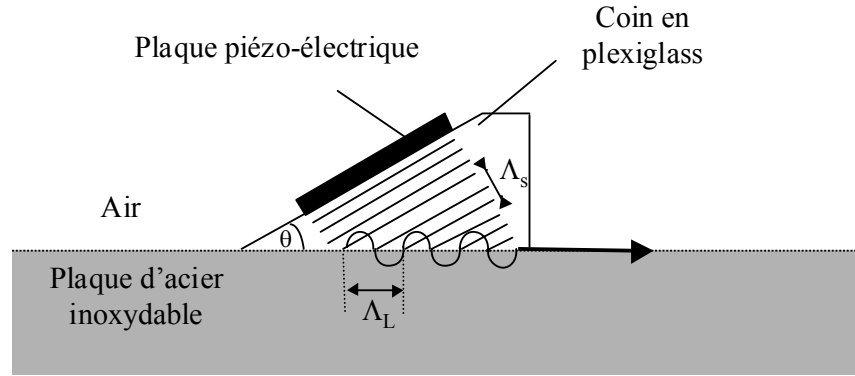


Figure III.3 : Génération de l'onde par la méthode du coin.

Le choix de l'épaisseur de la plaque piézo-électrique dépend de la fréquence  $F$  du train de sinusoides que l'on veut générer. Par exemple, pour la génération du mode de Lamb  $A_1$  à un produit fréquence-épaisseur  $FE$  égal à  $2,5 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$ , nous utilisons une plaque piézo-électrique d'épaisseur  $1,5 \text{ mm}$  et l'inclinaison du faisceau incident est de  $\theta=24^\circ$  par rapport à la normale à la surface de la plaque. L'onde plane générée par ce transducteur possède un front d'onde d'environ  $15 \text{ mm}$  de large. Il est à noter que l'emploi d'un gel entre le sabot et la plaque améliore considérablement le couplage acoustique, c'est-à-dire la transmission des ondes ultrasonores du sabot vers la plaque d'acier. La réalisation de ce type de transducteur a été effectuée afin d'avoir une génération d'ondes les plus planes possible et ainsi de limiter la divergence du faisceau incident. Par conséquent, la décroissance de l'amplitude de l'onde incidente au cours de sa propagation devrait être moindre que dans le cas de l'utilisation de transducteurs de section circulaire. En effet, une étude expérimentale antérieure <sup>[Morvan]</sup> a montré que l'amplitude de l'onde incidente décroît fortement lorsque celle-ci est générée par des transducteurs circulaires conventionnels ( $0,5$  pouce de diamètre).

En réception, nous n'utilisons pas un transducteur de contact mais un vibromètre laser He-Ne (Polytec OFV 303). Celui-ci mesure par interférométrie laser les déplacements normaux ( $U_2$ ) à la surface de la plaque et les convertit en signaux électriques. Le signal temporel est visualisé sur un oscilloscope numérique (Lecroy 9430). Ce signal est ensuite transmis à un ordinateur par bus IEEE et est mémorisé. Le vibromètre laser est monté sur

deux translations orthogonales qui permettent un balayage complet de la surface de la plaque. Notons que l'ensemble de l'acquisition est automatisé, l'ordinateur pilotant à la fois l'oscilloscope et les translations du vibromètre.

### II.2.2. Acquisition des signaux

La mesure du déplacement  $U_2$  normal à la surface de la plaque d'acier inoxydable est réalisée, au milieu du faisceau généré, le long d'une ligne parallèle à la direction de propagation ( $Ox_1$ ) des ondes de Lamb. Le sabot est placé à 10 cm de l'extrémité biseautée de la plaque et les déplacements sont relevés sur les 5 derniers centimètres avant le biseau (*Figure II.4*). Le vibromètre balaye donc 50 mm par pas de 0.2 mm, soit 250 relevés au total. A chaque position spatiale, un signal temporel de 200  $\mu s$  est acquis sur 20000 points par l'oscilloscope numérique. Afin d'éliminer le bruit parasite de ce signal, l'oscilloscope effectue un moyennage sur 4096 relevés successifs.

Ce type d'exploration et de relevé prend environ 7 heures.

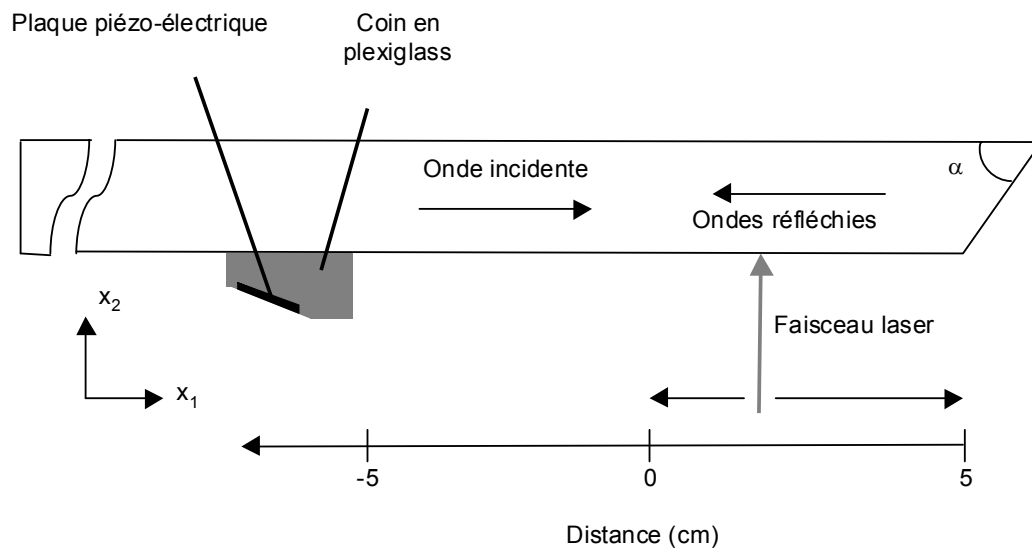
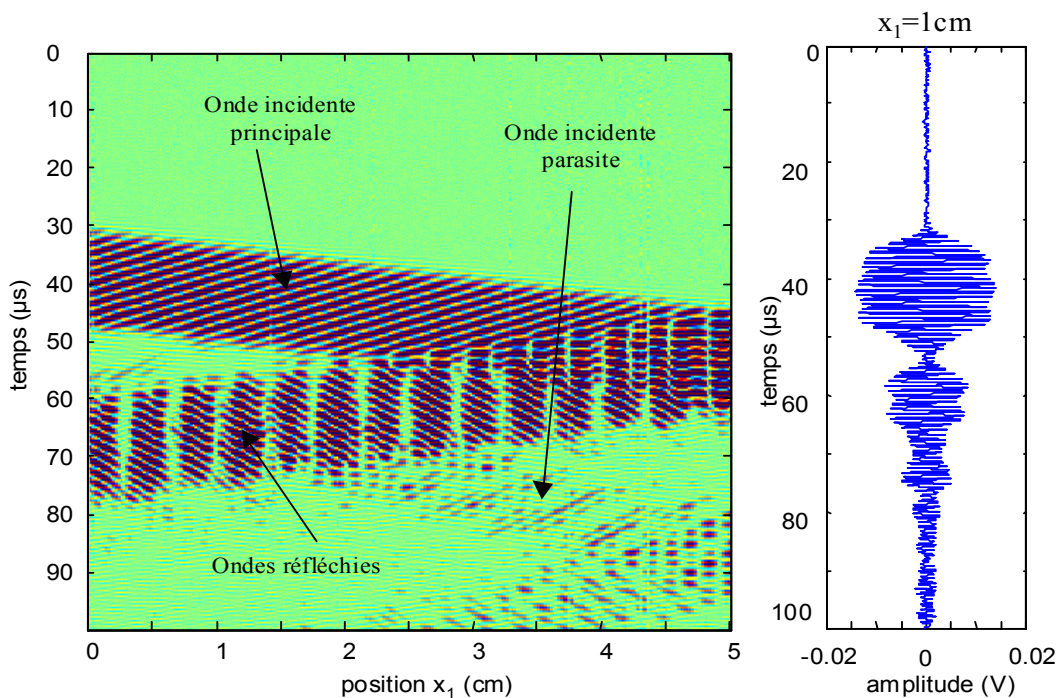


Figure II.4. : Géométrie de l'acquisition des signaux.

En regroupant les signaux acquis à chaque position  $x_1$ , on obtient une figure en trois dimensions (ou B-scan) décrivant l'évolution spatio-temporelle des déplacements normaux  $U_2$  en surface. La *Figure II.5.* présente le signal  $s(x_1, t)$  correspondant aux déplacements normaux en surface du mode de Lamb  $A_1$  se propageant à  $FE=2,5$  MHz.mm dans une plaque d'acier inoxydable biseautée à un angle  $\alpha$  de  $75^\circ$ .

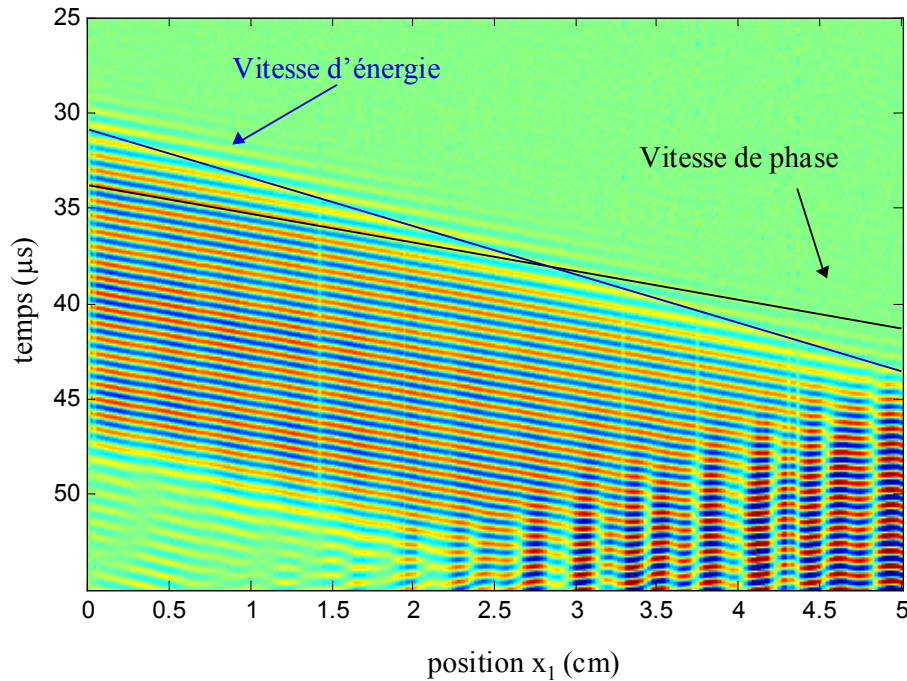
Une coupe de cette image, réalisée à  $x_1=1$  cm, montre que le signal en sortie du vibromètre a une amplitude inférieure à 0,02 V. Cette amplitude correspond à un déplacement de 1 nm d'après les courbes d'étalonnage du vibromètre. Sur cette représentation, l'onde incidente apparaît clairement. En réflexion, les battements d'amplitude sont le signe de l'existence de plusieurs modes réfléchis. Nous pouvons donc dire, dans un premier temps, que le mode incident a été converti en plusieurs autres modes de Lamb à l'extrémité biseautée de la plaque. On observe également des traces de modes secondaires, incidents et réfléchis. Il nous faut maintenant identifier tous les modes présents dans la plaque afin de déterminer les taux de conversion.



*Figure II.5. : Image spatio-temporelle des déplacements normaux.*

*Mode  $A_1$  incident,  $FE=2,5$  MHz.mm,  $\alpha = 75^\circ$ .*

Sur la figure II.5., l'échantillonnage intrinsèque à l'imprimante ne nous permet pas de vérifier la vitesse de phase de l'onde générée. C'est pourquoi on compare les vitesses de phase et d'énergie de l'onde incidente sur un agrandissement de l'image spatio-temporelle précédente (*Figure II.6*). La vitesse de phase est l'orientation  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  des stries et la vitesse d'énergie est le  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  du faisceau.



*Figure II.6. : Visualisation expérimentale des vitesses de phase et d'énergie de l'onde incidente : mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ .*

### II.2.3. Traitement du signal

Sur la représentation du signal  $s(x_1, t)$  (*Figure II.5.*), il est assez difficile d'identifier les modes de Lamb qui coexistent dans la plaque. Ces ondes n'ont pas des vitesses suffisamment différentes et ne peuvent donc pas être séparées sur les distances de propagation envisagées. De plus, et c'est le cas dans l'exemple choisi, il se peut qu'une autre onde incidente soit générée dans la plaque avec une amplitude beaucoup plus faible que l'onde réellement désirée. Cette deuxième onde incidente est une conséquence des multiples réflexions des ondes dans le sabot de plexiglass.

L'objectif de l'étude est de déterminer la valeur moyenne de l'amplitude de chaque onde (incidente et réfléchies) et d'en déduire un bilan énergétique.

Pour réaliser l'étude quantitative des conversions de modes de Lamb, il faut isoler une seule onde et les modes réfléchis qui lui sont associés. Du fait de la présence de modes supplémentaires, nous allons être amenés à effectuer un traitement particulier sur le signal  $s(x_1, t)$ .

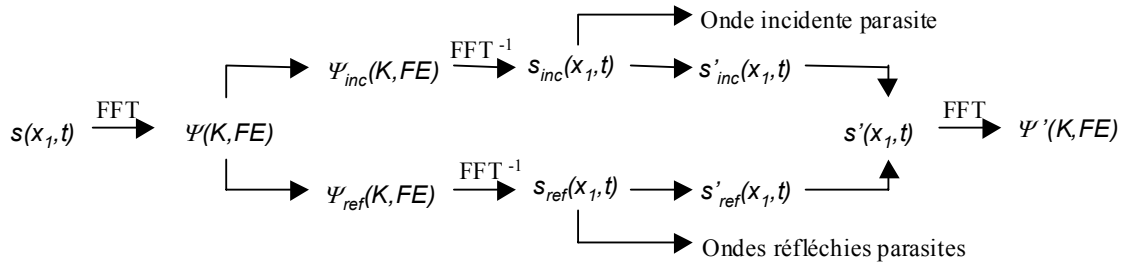


Figure II.7. : Traitement effectué sur le signal  $s(x_1, t)$  afin d'éliminer les ondes parasites.

Ce traitement, résumé sur la *Figure II.7*, consiste à représenter les ondes de Lamb dans l'espace position - temps  $(x_1, t)$  et dans son espace dual  $(k_1, FE)$  vecteur d'onde – produit FE. Pour effectuer cela, nous faisons subir au signal temporel initial  $s(x_1, t)$  deux transformées de Fourier successives, temporelle puis spatiale [Martinez (1); Alleyne (3)]. Pour chaque position  $x_1$ , on met en œuvre une transformée de Fourier temporelle du signal  $s(x_1, t)$  donnant le signal  $\chi(x_1, FE)$ . Une seconde transformée de Fourier est appliquée, pour chaque valeur du produit FE, à ce signal. Ainsi, le signal est situé dans l'espace dual, aussi appelé « espace tout-fréquence ». Le signal résultant des deux transformées de Fourier successives, noté  $\psi(k_1, FE)$ , s'exprime en fonction du nombre d'onde  $k_1$  et du produit FE.

Le module  $|\psi(k_1, FE)|$  peut donc être représenté en niveau de gris (*Figure II.8.*) en fonction de  $k_1$  et de FE. Les courbes de dispersion théoriques des ondes de Lamb ont été superposées à cette figure afin d'identifier les différents modes présents dans la plaque.

Considérant que nous sommes en régime d'excitation quasi-harmonique (génération de l'onde incidente par un train de 20 sinusoïdes), il est normal d'observer un élargissement fréquentiel ainsi que des lobes secondaires (voir Annexe A). Grâce à cette figure, nous pouvons assurer que la deuxième onde incidente qui parasite l'onde incidente principale est le mode  $S_0$ .

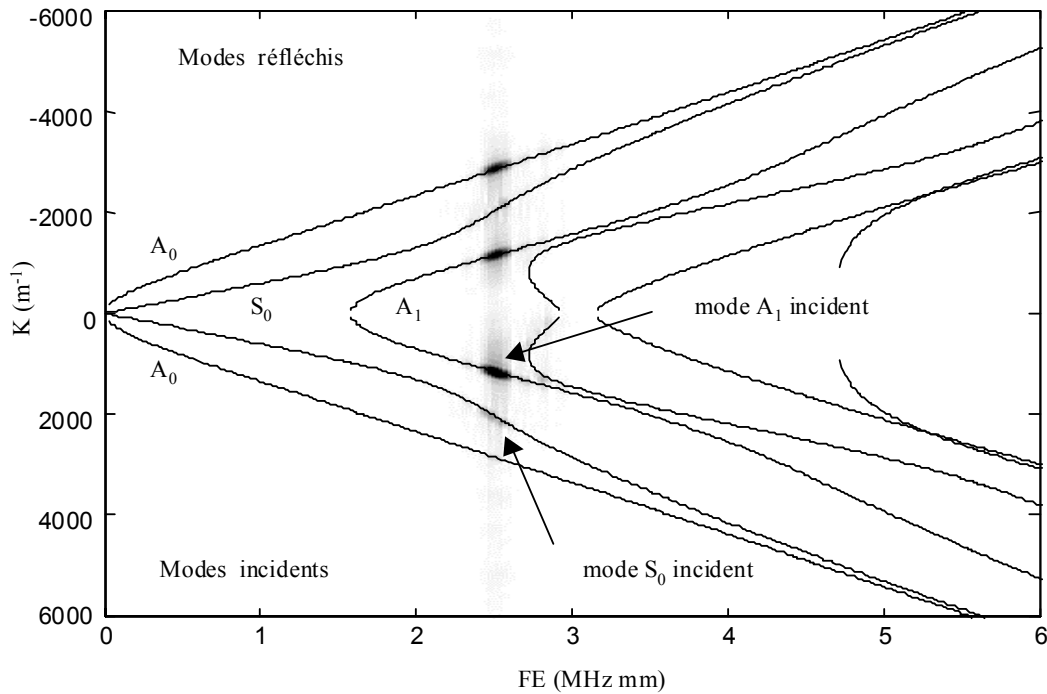


Figure II.8. : Représentation « tout-fréquence » du signal ( $|\psi(k_1, FE)|$ )

Il est maintenant possible de décomposer le signal  $\psi(k_1, FE)$  en deux signaux distincts  $\psi_{inc}(k_1 > 0, FE)$  et  $\psi_{ref}(k_1 < 0, FE)$  représentant respectivement les ondes incidentes et réfléchies dans l'espace dual  $(k_1, FE)$ . Au moyen de deux transformées de Fourier inverses, nous pouvons visualiser les signaux  $s_{inc}(x_1, t)$  et  $s_{ref}(x_1, t)$  rendant compte respectivement des évolutions spatio-temporelles de toutes les ondes incidentes ainsi que tous les modes réfléchis présents dans la plaque. Ces signaux sont représentés sur les Figures II.9. et II.10.



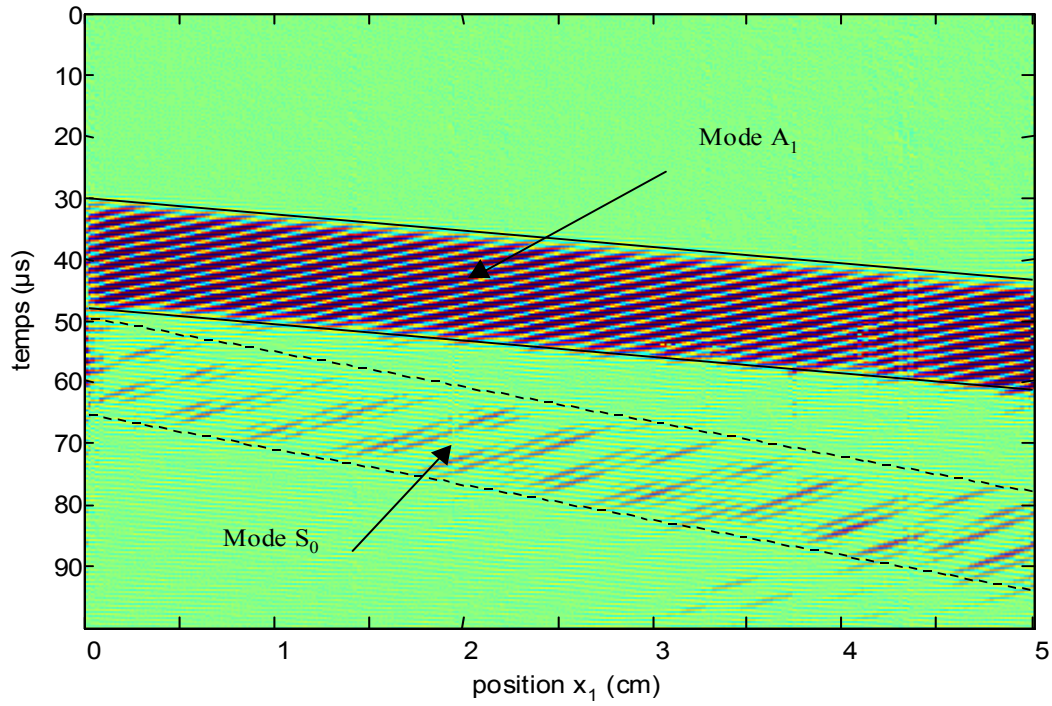


Figure II.9. : Image spatio-temporelle du signal  $s_{inc}(x_1, t)$ .

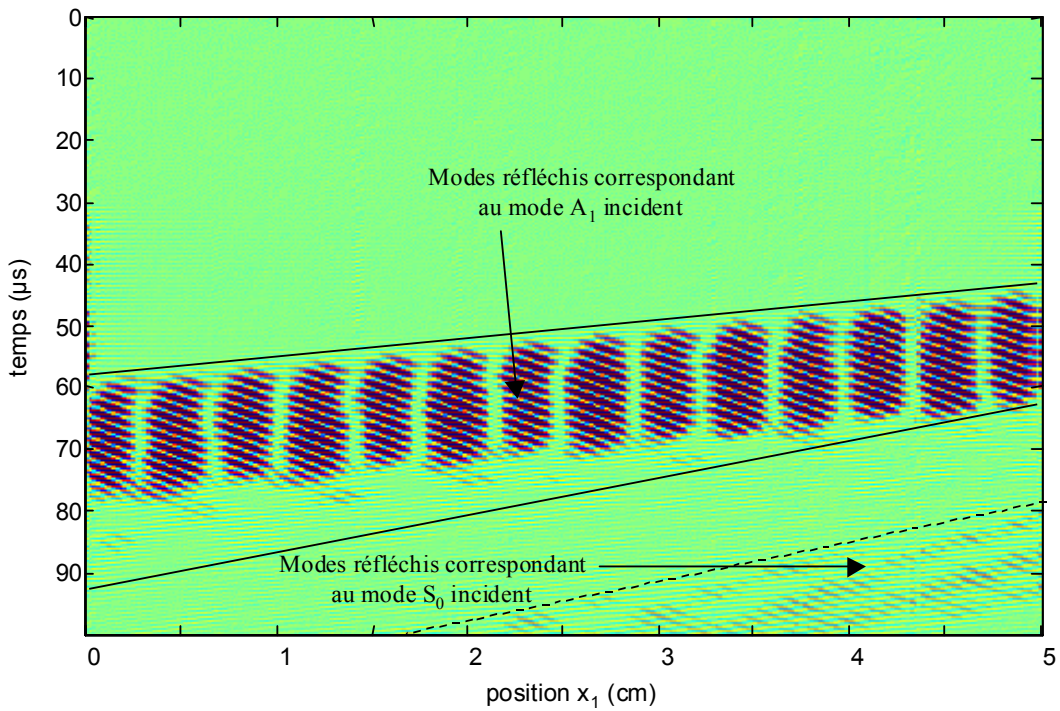


Figure II.10. : Image spatio-temporelle du signal  $s_{ref}(x_1, t)$ .

Sur ces figures (*II.9.* et *II.10.*), les différents faisceaux incidents, de même que les faisceaux réfléchis peuvent être identifiés. En effet, les vitesses d'énergie des modes de Lamb sont connues. Nous avons donc reporté sur la *Figure II.9.* les vitesses d'énergie des modes de Lamb incidents  $A_1$  (en trait plein) et  $S_0$  (en pointillés). De même, sur la *Figure II.10.*, le faisceau réfléchi correspondant au mode incident  $A_1$  (en trait plein) peut être séparé du faisceau réfléchi correspondant au mode  $S_0$  (en pointillés).

Cependant, cette identification doit être faite avec précaution puisque chaque cas est particulier. Dans le signal sélectionné (mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5$  MHz.mm), l'étude précédente (*Figure II.8.*) nous permet de savoir que trois modes de Lamb existent :  $A_0$ ,  $S_0$  et  $A_1$ . Le signal réfléchi correspondant à l'onde incidente principale (l'onde  $A_1$ ) est donc le signal compris entre la vitesse d'énergie la plus rapide (mode  $A_1$ ) et la vitesse d'énergie la plus lente (mode  $S_0$ ). Ainsi, les faisceaux incident et réfléchi parasites (c'est-à-dire ceux correspondants à l'onde incidente  $S_0$  non désirée) peuvent être éliminés au moyen d'une fenêtre spatio-temporelle.

En conséquence, les signaux incident  $s'_{inc}(x_1, t)$  et réfléchi  $s'_{ref}(x_1, t)$  sont maintenant isolés et un nouveau signal spatio-temporel  $s'(x_1, t)$  est obtenu (*Figure II.11.*). Ce signal ne comprend que le mode de Lamb  $A_1$  incident et les modes réfléchis correspondants.

Il est très important de remarquer que les tailles des signaux  $s(x_1, t)$  et  $s'(x_1, t)$  sont identiques. De fait, le traitement de signal que subit  $s(x_1, t)$  n'induit pas de perte d'information, les tailles des transformées de Fourier successives étant les mêmes à chaque étape. Cela est vérifié sur la *Figure II.12.* sur laquelle sont tracées en fonction du temps successivement les coupes à  $x_1=1$  cm du signal total  $s(x_1, t)$ , du signal  $s_{inc}(x_1, t)$  représentant les ondes incidentes, du signal  $s'_{inc}(x_1, t)$  représentant le mode  $A_1$  incident seul et du signal  $s'_{ref}(x_1, t)$  représentant les ondes réfléchies correspondant au mode incident  $A_1$ .

On voit tout l'intérêt de la méthode en se plaçant à  $x_1=4$  cm (*Figure II.13.*). En ce point, il y a chevauchement des modes incidents et réfléchis et nous arrivons à séparer les modes incidents des modes réfléchis correspondants.



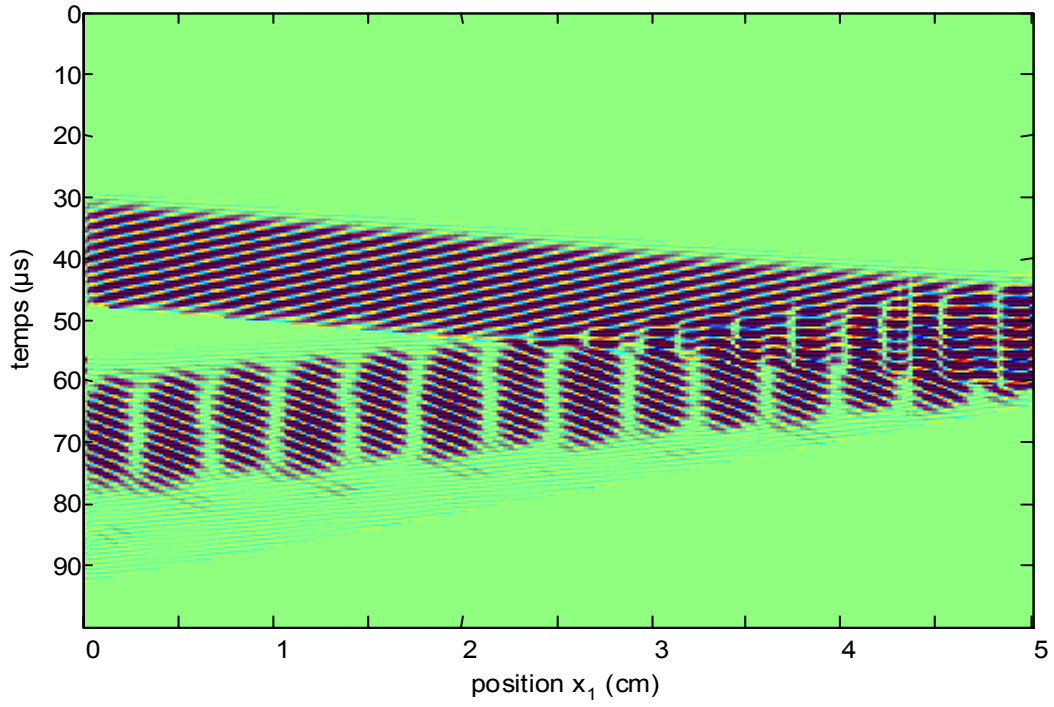


Figure II.11. : Image spatio-temporelle du signal  $s'(x_1, t)$ .

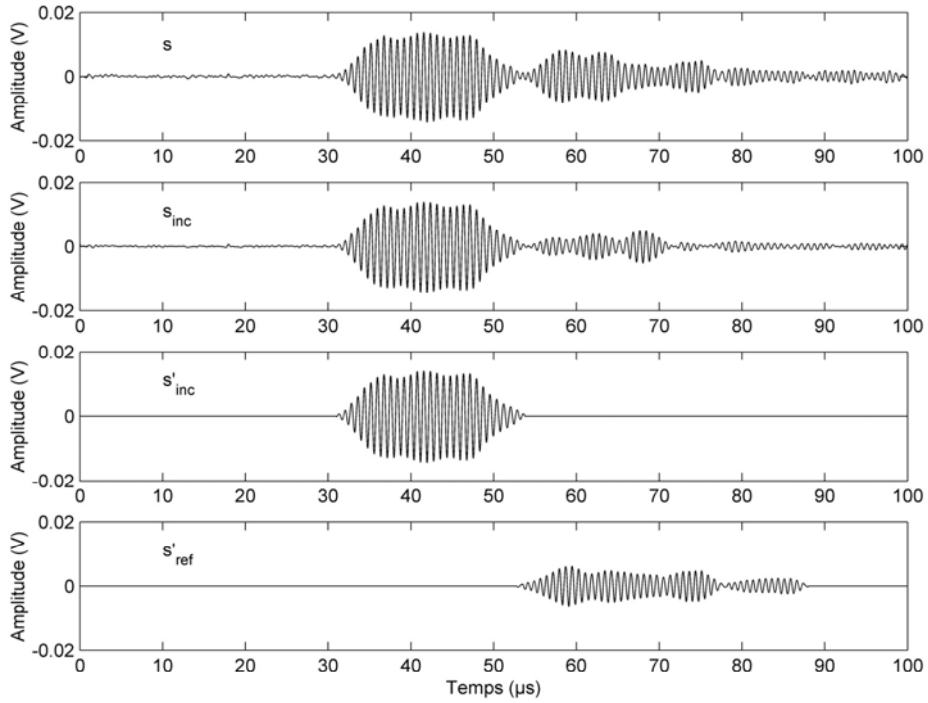


Figure II.12. : Signaux temporels de  $s(x_1, t)$ ,  $s_{inc}(x_1, t)$ ,  $s'_{inc}(x_1, t)$  et  $s'_{ref}(x_1, t)$  à  $x_1 = 1$  cm.

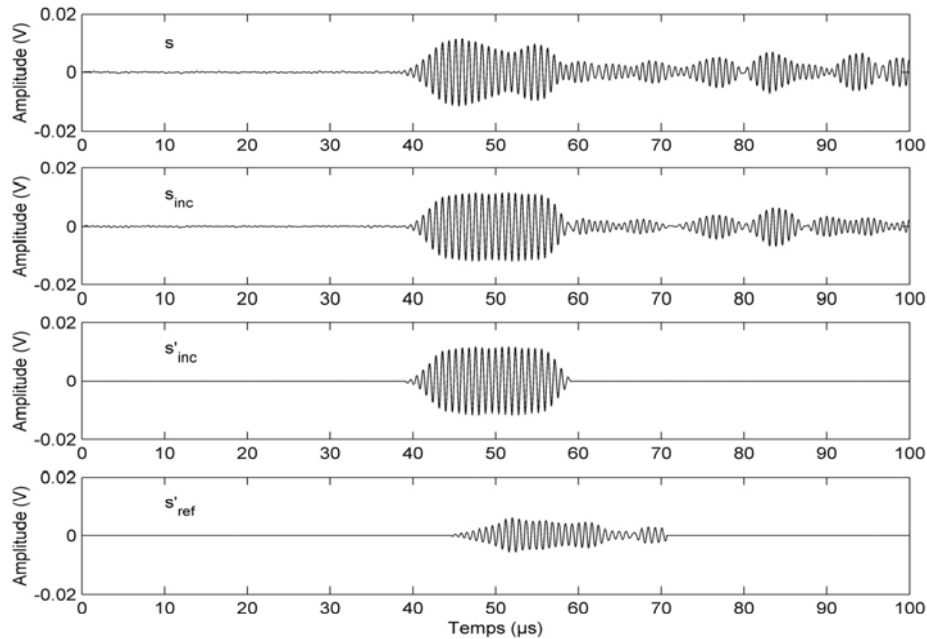


Figure II.13. : Signaux temporels de  $s(x_l, t)$ ,  $s_{inc}(x_l, t)$ ,  $s'_{inc}(x_l, t)$  et  $s'_{ref}(x_l, t)$  à  $x_l=4$  cm.

Afin de connaître la répartition de l'énergie du mode de Lamb  $A_1$  incident entre les différents modes de Lamb réfléchis, il nous faut connaître les amplitudes de chaque onde présentes dans la plaque d'acier inoxydable. Pour ce faire, les modes sont représentés dans l'espace dual  $(k_1, FE)$  au moyen de deux transformées de Fourier successives. Le module du signal  $\psi'(k_1, FE)$  correspondant est tracé *Figure II.14*. Les fenêtres  $(x_l, t)$  de calcul des transformées de Fourier appliquées aux signaux incident et réfléchis ont la même taille. De plus, nous verrons dans le dernier chapitre de cette thèse que les ondes de Lamb réfléchies ont besoin d'une certaine distance de propagation afin d'être isolées. Donc, afin d'être sûr que les ondes réfléchies considérées dans les fenêtres de calcul sont les seuls modes de Lamb, le signal proche du biseau n'est jamais pris en compte (environ 1 cm).

Sur la *Figure II.14*, nous vérifions que le mode incident est bien le mode de Lamb  $A_1$ . En réflexion, le mode  $A_1$  est présent de même que les modes de Lamb convertis  $A_0$  et  $S_0$ .

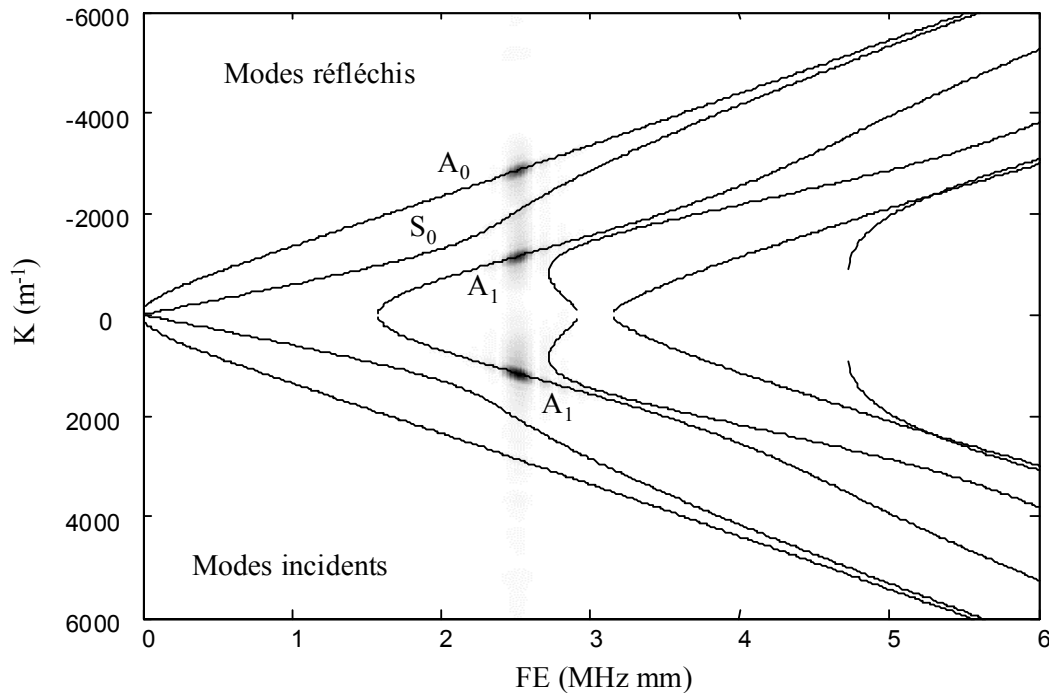


Figure II.14. : Représentation « tout-fréquence » du signal ( $|\psi'(k_1, FE)|$ )

#### II.2.4. Bilan d'énergie

La dernière étape du traitement consiste à déterminer la répartition d'énergie de l'onde incidente entre les ondes réfléchies. Ainsi, une coupe de la *Figure II.14* à  $FE=2,5$  MHz.mm permet de visualiser les amplitudes relatives des modes en fonction de  $k_1$ . La *Figure II.15* représente ces amplitudes après qu'une dérivée d'abscisse curviligne ait été réalisée afin de mieux isoler les pics d'amplitude et ainsi faire ressortir des pics de faibles amplitudes <sup>[Derible]</sup>.

Théoriquement, l'amplitude du déplacement normal en surface est proportionnel au maximum du module  $|\psi'(k_1, FE)|$  (cf Annexe A). On admet pour l'instant que les ondes de Lamb ne sont pas atténuées au cours de leur propagation et que la largeur des pics à mi-hauteur est constante quel que soit le mode. La lecture des amplitudes des modes devient donc possible tant que les pics ne sont pas trop proches : la valeur de pic est directement proportionnelle à l'amplitude de l'onde et le coefficient de proportionnalité est le même pour tous les modes.

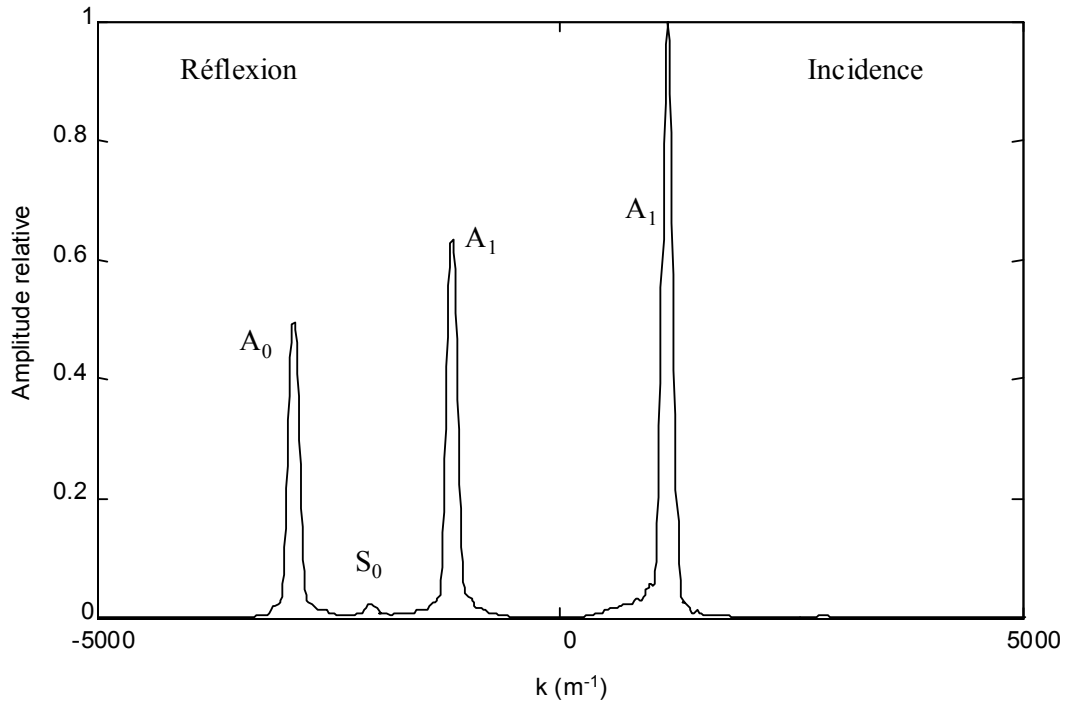


Figure II.15. : Coupe de la représentation « tout-fréquence » à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$

Sur cette représentation, nous relevons l'amplitude  $A^{\text{inc}}$  du mode incident et les amplitudes  $A_m^{\text{ref}}$  des modes réfléchis. Le coefficient théorique  $\zeta$ , reliant l'amplitude du déplacement  $U_2$  en surface au flux de vecteur de Poynting  $\Phi$  (vu au chapitre précédent), est utilisé afin d'obtenir le pourcentage d'énergie transportée par chaque onde.

$$\text{L'énergie de l'onde incidente est : } \phi^{\text{inc}} = \left( \frac{A^{\text{inc}}}{\zeta^{\text{inc}}} \right)^2 .$$

$$\text{L'énergie de l'onde incidente est : } \phi_m^{\text{ref}} = \left( \frac{A_m^{\text{ref}}}{\zeta_m^{\text{ref}}} \right)^2 .$$

Ces énergies doivent vérifier théoriquement la conservation de l'énergie :

$$\phi^{\text{inc}} = \sum_m \phi_m^{\text{ref}} .$$

De cette manière, un bilan d'énergie peut être effectué en calculant les coefficients d'énergie  $R_m$  à l'extrémité biseautée de la plaque :

$$R_m = \frac{\phi_m^{\text{ref}}}{\phi^{\text{inc}}}$$

Dans le cas présenté ici (mode incident  $A_1$ ,  $FE=2,5$  MHz.mm,  $\alpha=75^\circ$ ), il n'existe que trois ondes de Lamb ( $A_1$ ,  $A_0$  et  $S_0$ ). Les valeurs des énergies de ces ondes (*Tableau II.1.*) sont exprimées en pourcentages de l'énergie incidente (ligne 2) et en pourcentages de l'énergie réfléchie (ligne 3).

<b>Mode réfléchi</b>	<b><math>A_1</math></b>	<b><math>A_0</math></b>	<b><math>S_0</math></b>	<b>Total</b>
<b>% d'énergie incidente</b>	69 %	19 %	0,5 %	88,5 %
<b>% d'énergie réfléchie</b>	78 %	21,4%	0,6 %	100 %

*Tableau II.1. : Energie transportée par chaque mode issu de la conversion du mode  $A_1$  sur un biseau d'angle  $\alpha=75^\circ$  à  $FE=2,5$  MHz.mm.*

Différentes expérimentations ont été réalisées pour des angles de biseau allant de  $70^\circ$  à  $85^\circ$  par pas de  $5^\circ$ . De plus, nous avons effectué ces études pour deux modes incidents différents, à savoir les modes de Lamb  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm et  $S_0$  à  $FE=2,6$  MHz.mm.

Si nous faisons la somme des énergies transportées par chaque onde réfléchie, nous remarquons que la conservation de l'énergie n'est pas tout à fait respectée lors de la réflexion du mode incident sur le biseau. Par exemple, la somme de ces énergies est comprise entre 80 et 90% dans le cas où le mode  $A_1$  est incident selon  $Ox_1$ . Mais si nous exprimons les énergies réfléchies par rapport au total réfléchi, nous obtenons des pourcentages beaucoup plus proches des valeurs théoriques (Chapitre III). Ceci signifie que toutes les ondes sont affectées de la même manière. Toutefois le bilan brut, même s'il reste incorrect, est meilleur que ceux obtenus (environ 50%) avec des transducteurs conventionnels. Il nous faut donc expliquer la perte d'énergie à la réflexion.

Les résultats sont rassemblés sur les *Figures II.16.* et *II.17.* pour quatre valeurs de  $\alpha$ .

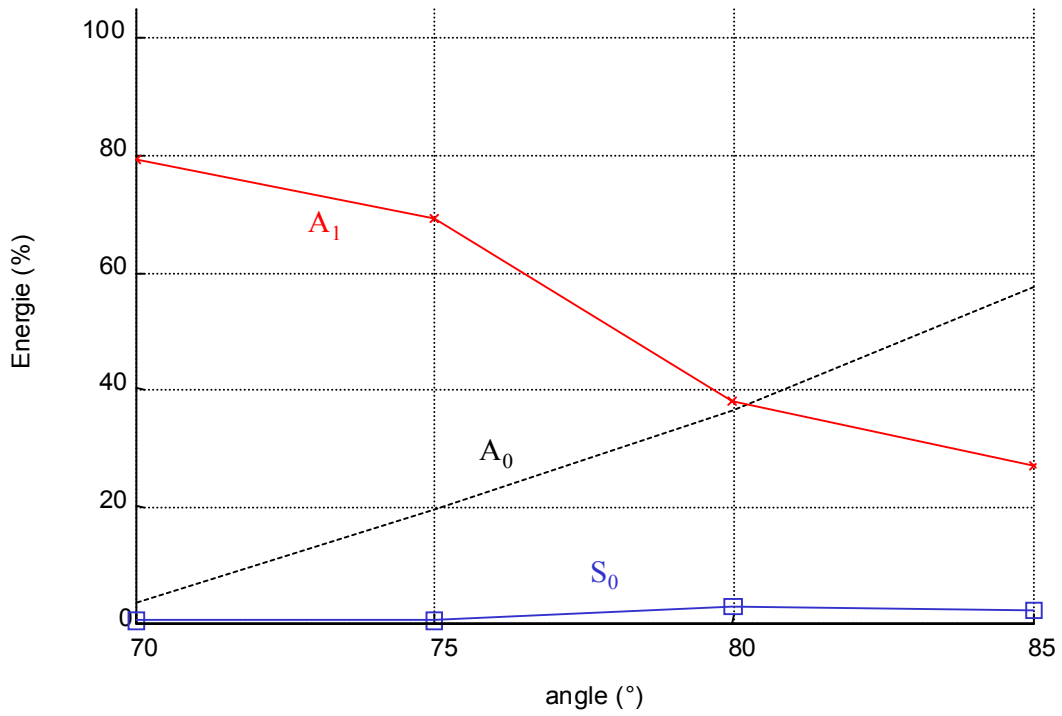


Figure II.16. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité d'une plaque d'acier biseautée à un angle  $\alpha$ . Onde incidente  $A_1$  à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ .

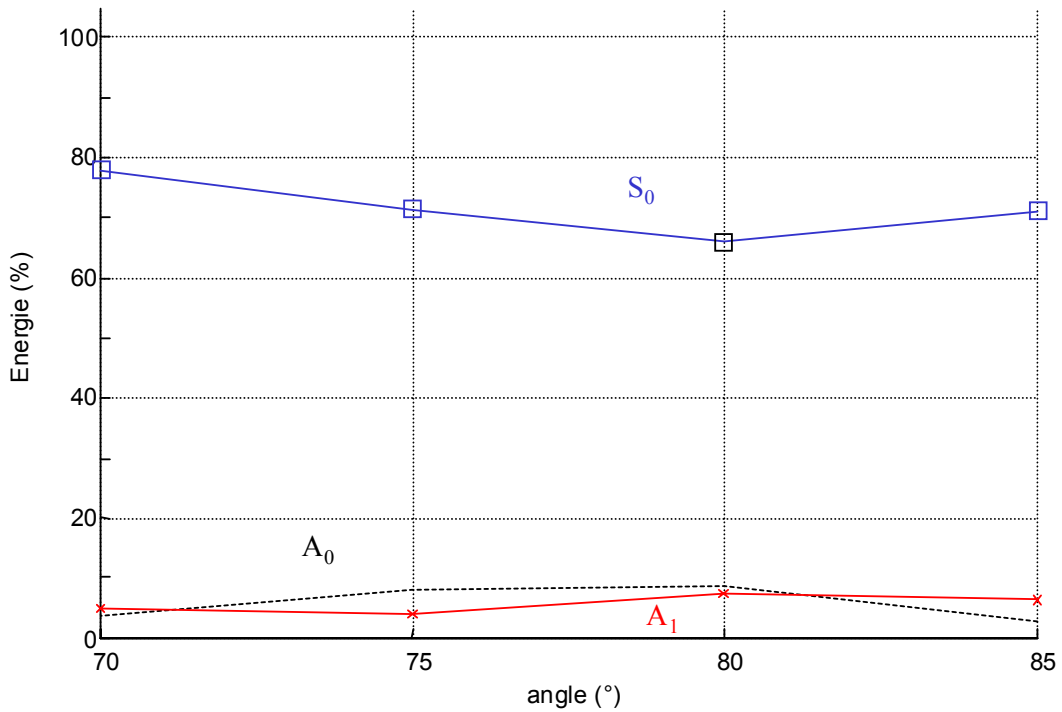


Figure II.17. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité d'une plaque d'acier biseautée à un angle  $\alpha$ . Onde incidente  $S_0$  à  $FE=2,6 \text{ MHz.mm}$ .

Une remarque doit être apportée sur la fréquence d'excitation du mode de Lamb  $S_0$ . Les plaques piézo-électriques qui ont servi de transducteurs de génération des ondes étaient supposées avoir un fonctionnement optimal à  $FE=2,5$  MHz.mm d'après les spécifications fournies par le constructeur. Si la plaque (de dimensions  $25 \times 35 \times 1,5$  mm) servant à la génération du mode  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm a été conforme à nos vœux, celle utilisée pour générer l'onde  $S_0$  (de dimensions  $25 \times 35 \times 1$  mm) s'est révélée avoir un comportement optimal à  $FE=2,6$  MHz.mm. Les expérimentations avec le mode incident  $S_0$  ont donc été effectuées à ce produit fréquence-épaisseur.

### II.2.5. Correction des bilans d'énergie

Parmi les explications que l'on peut donner à la non conservation de l'énergie, la plus évidente est la divergence du faisceau de l'onde générée par le transducteur. En effet, même si les fronts d'ondes du mode incident sont assez larges, les ondes de Lamb n'ont pas une largeur constante dans la plaque. Ceci est dû aux dimensions forcément limitées de la plaque piézo-électrique servant à la génération de l'onde mais aussi de celles du sabot en plexiglass. Lors de la réflexion de l'onde incidente sur l'extrémité biseautée de la plaque, cette divergence géométrique du faisceau incident est transmise au faisceau réfléchi. Dans le traitement effectué sur chaque onde, la valeur de l'amplitude obtenue est une moyenne sur la distance de mesure de l'onde. Or, par définition, le coefficient de réflexion exact fait intervenir la valeur des amplitudes des ondes incidente et réfléchies au niveau de l'obstacle. Il est donc clair qu'il faut corriger les coefficients obtenus à partir de la valeur moyenne de l'amplitude. Cette correction ne peut qu'augmenter les énergies des ondes réfléchies.

D'autres explications peuvent sans doute être trouvées dans les phénomènes d'atténuation propres au matériau constituant la plaque que l'on étudie (acier inoxydable) même si cela ne semble pas être très important aux fréquences utilisées. A ceux-ci peuvent encore s'ajouter les imprécisions de calculs des amplitudes des ondes que nous effectuons après plusieurs transformées de Fourier. Enfin, pour les produits fréquence-épaisseur auxquels l'étude expérimentale a été réalisée, plusieurs modes réfléchis existent dans la plaque biseautée. Le fait que les pics relatifs à amplitude de ces modes dans le plan  $(k,FE)$  soient parfois relativement proches les uns des autres peut induire une certaine imprécision sur les valeurs des pics proprement dit.

### II.2.5.1. Mise en évidence de l'élargissement du faisceau

Afin de vérifier qu'il y a un réel élargissement des faisceaux incident et réfléchis au cours de la propagation de l'onde dans la plaque, nous effectuons des relevés temporels des déplacements normaux en surface à la plaque transversalement au sens de propagation de l'onde. En raison des limitations géométriques du dispositif expérimental, les relevés ont été faits sur la moitié supérieure du faisceau à 8 cm du biseau lorsque le mode de Lamb  $A_1$  se propage dans une plaque biseautée à  $\alpha=75^\circ$ .

Pour cette exploration transverse, nous utilisons le dispositif expérimental décrit au paragraphe II.2.1. et nous générons un train de 20 sinusoïdes à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ . Ainsi, seul le mode  $A_1$  est généré. Sur la Figure II.18, nous avons reporté les signaux temporels obtenus.

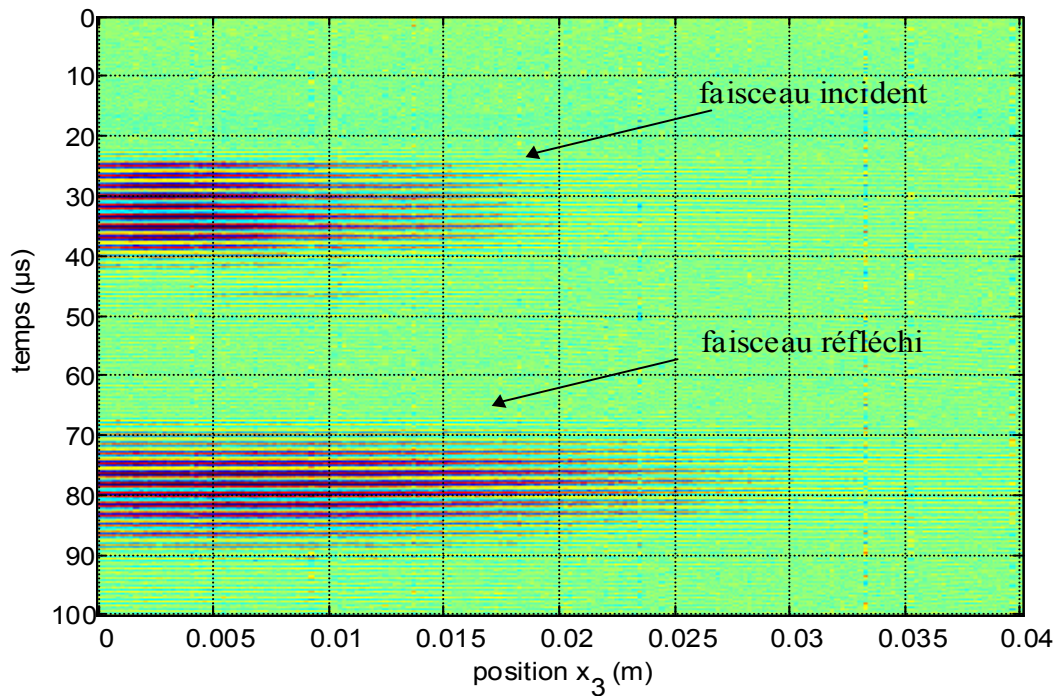


Figure II.18 : Image spatio-temporelle des déplacements normaux. Mise en évidence de l'élargissement du faisceau. Mode  $A_1$  incident,  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=75^\circ$ .



Sur cette figure, nous voyons clairement que le faisceau réfléchi est plus large que le faisceau incident mais les deux ondes peuvent être considérées comme planes lorsque  $x_3$  est petit ( $|x_3| \leq 7$  mm).

### II.2.5.2. Coefficient correctif

La divergence du faisceau étant manifeste, l'atténuation effective de l'amplitude de l'onde durant sa propagation doit être déterminée. Pour ce faire, nous effectuons une transformée de Fourier temporelle sur le signal incident de la figure II.11. afin de représenter les ondes dans le plan  $(x_1, FE)$ . Puis, une transformée de Fourier à fenêtre glissante est réalisée sur la coupe du signal précédent à  $FE=2,5$  MHz.mm. La taille de la fenêtre que l'on fait glisser sur le signal est de 50 points pour un total de 500 points.

Ainsi, nous pouvons connaître l'amplitude de l'onde en fonction de la distance parcourue (Figure II.19).

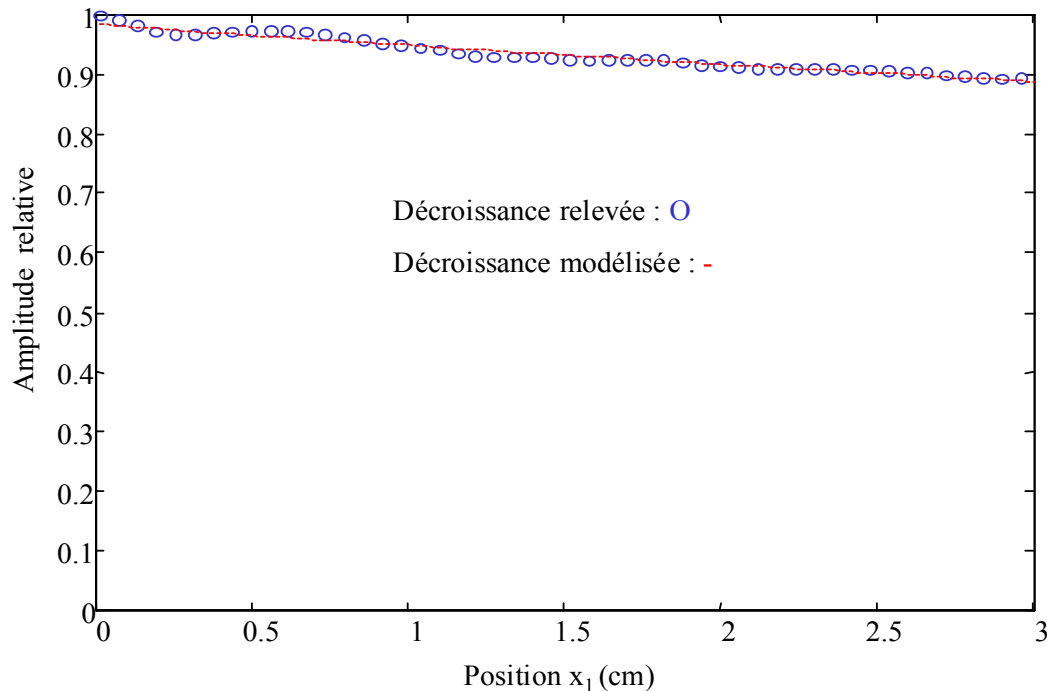


Figure II.19. : Amplitude de l'onde  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm.

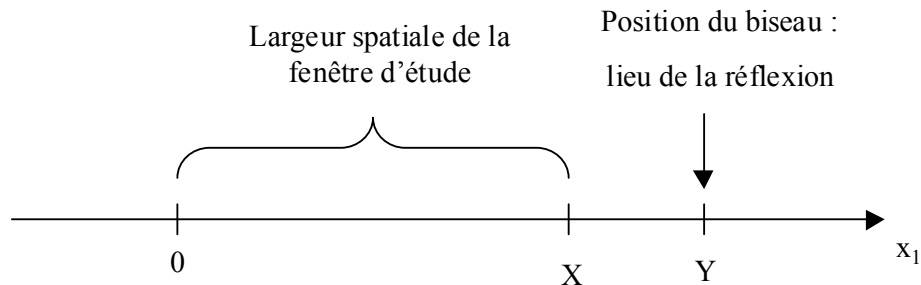
(O : valeurs mesurées, -- : régression par la fonction  $y = 0,3569(x + 0,1314)^{-\frac{1}{2}}$ ).

Cette amplitude n'est pas constante. Nous avons tenté plusieurs formules de régression. Celle qui donne le meilleur résultat est telle que l'amplitude décroisse suivant une loi en  $K(x_1 + a)^{-\frac{1}{2}}$ . Ce type de décroissance a déjà été relevé lors de la génération d'une onde de Lamb par des transducteurs conventionnels possédant un disque circulaire <sup>[Morvan]</sup>.

La correction s'effectue de la façon suivante. Dans l'Annexe A, nous comparons les calculs (transformations de Fourier) réalisés sur les signaux expérimentaux (dits « atténués ») et sur les signaux théoriques (dits « non atténués »).

Les conditions de calcul sont telles que :

- X est la largeur spatiale de la fenêtre utilisée pour l'étude (*Figure II.20*).
- K et a sont les paramètres définissant l'amplitude de l'onde incidente.
- Y est la position du biseau.



*Figure II.20.*

Dans ces conditions, le rapport entre le maximum de l'amplitude (dans le domaine conjugué (K,FE)) d'une onde incidente atténuée et celui de l'onde non atténuée est :

$$\left| \frac{\Psi_{\text{onde atténuée}}^{\text{inc}}}{\Psi_{\text{onde non atténuée}}^{\text{inc}}} \right| = \frac{2 K \left[ (X - a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right]}{X}$$

Dans le cas des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée de la plaque, en considérant que les ondes réfléchies s'atténuent de la même manière que l'onde incidente, on peut alors écrire (cf Annexe A) :

$$\left| \frac{\Psi_{\text{onde atténuée}}^{\text{ref}}}{\Psi_{\text{onde non atténuée}}^{\text{ref}}} \right| = \frac{2 K \left[ (2Y - X + a)^{\frac{1}{2}} - (2Y + a)^{\frac{1}{2}} \right]}{X}$$

Et donc, au final, le coefficient  $r$  en amplitude est :

$$r = \left| \frac{\Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{ref}}(-k_i, \omega_0)}{\Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{inc}}(k_0, \omega_0)} \right| = \left| \frac{\Psi_{\text{atténuée}}^{\text{ref}}(-k_i, \omega_0)}{\Psi_{\text{atténuée}}^{\text{inc}}(k_0, \omega_0)} \right| \frac{(X + a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(2Y - X + a)^{\frac{1}{2}} - (2Y + a)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi, pour connaître le module du coefficient de réflexion en amplitude corrigé, il suffit de multiplier le rapport des amplitudes moyennes des ondes incidente et réfléchies par le coefficient  $\gamma$  suivant :

$$\gamma = \frac{(X + a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(2Y - X + a)^{\frac{1}{2}} - (2Y + a)^{\frac{1}{2}}}$$

Bien entendu, on admet que ce coefficient est le même pour tous les modes présents dans l'étude.

Les bilans d'énergie donnés précédemment sont alors corrigés pour donner le coefficient de réflexion en énergie suivant :

$$R_i^{\text{corrigé}} = R_i^{\text{brut}} \gamma^2$$

### II.2.5.3. Bilan d'énergie corrigé dans le cas du mode de Lamb $A_1$ incident

Le coefficient  $\gamma$  calculé dans le cas où le mode de Lamb  $A_1$  est incident est égal à 1,085. On le considère indépendant de  $\alpha$ .

La répartition de l'énergie incidente entre les modes réfléchis après correction est donnée figure II.21.

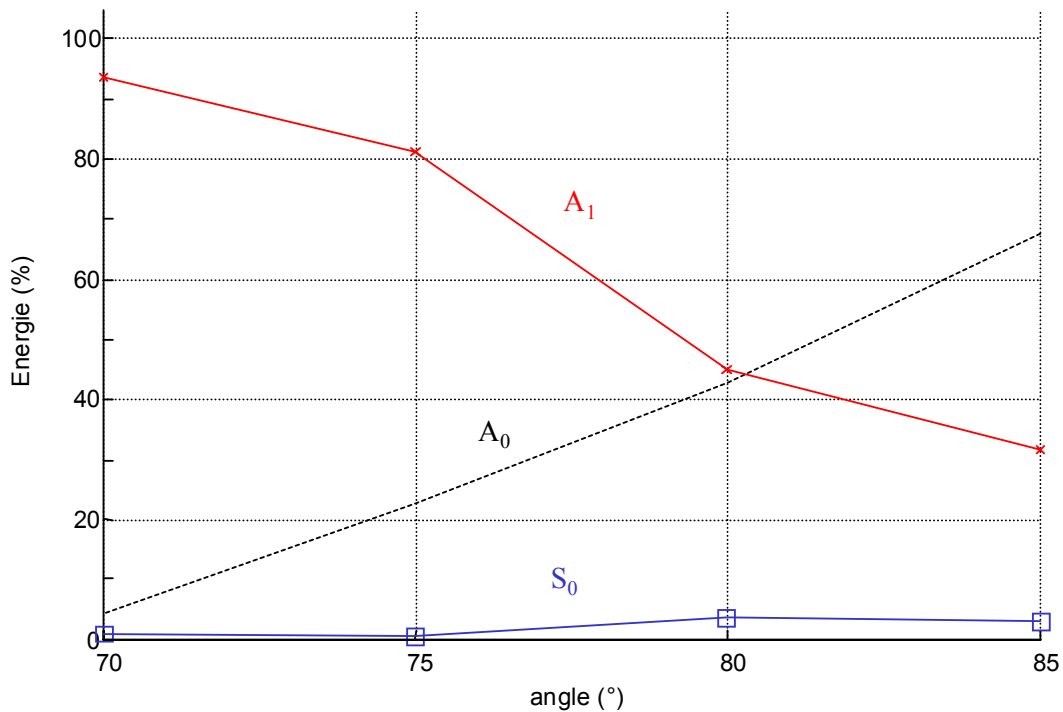


Figure II.21. : Bilan d'énergies corrigé. Onde incidente  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm.

### II.2.5.4. Bilan d'énergie corrigé dans le cas du mode de Lamb $S_0$ incident.

Dans le cas où le mode de Lamb  $S_0$  est incident, le coefficient  $\gamma$  calculé est égal à 1,087.

Le bilan d'énergie corrigé dans le cas du mode de Lamb  $S_0$  incident dans la plaque biseautée est fourni figure II.22.

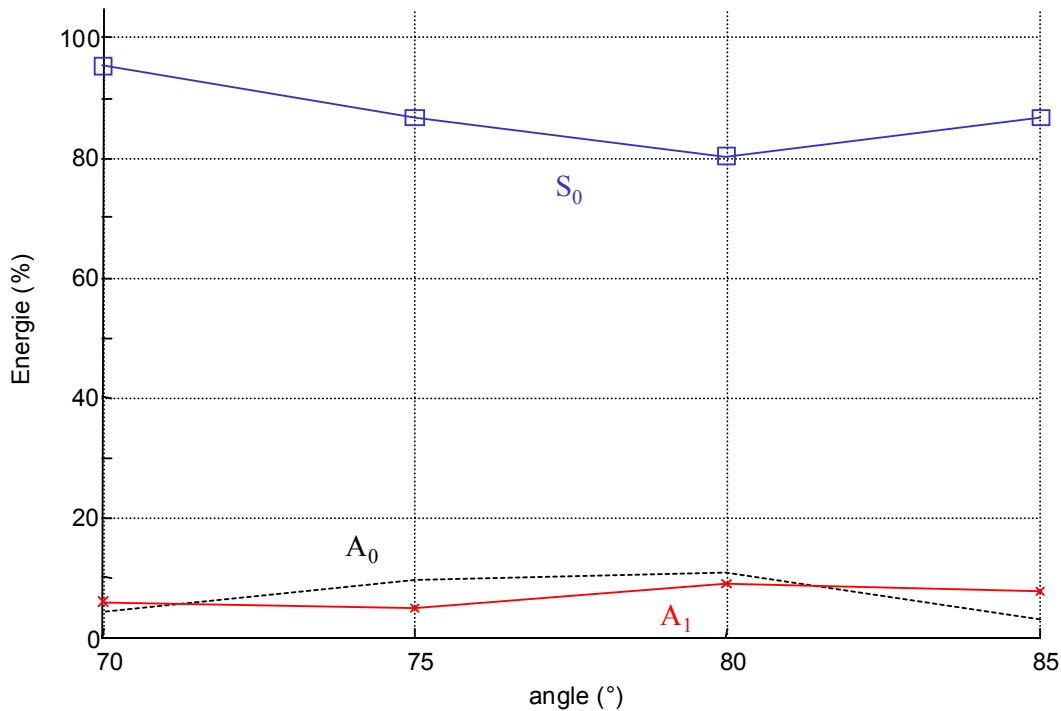


Figure II.22. : Bilan d'énergie corrigé. Onde incidente  $S_0$  à  $FE=2,6 \text{ MHz.mm}$ .

Après ces corrections, les bilans d'énergie sont maintenant compris entre 95 et 104%, ce qui constitue des résultats satisfaisants car le bilan est vérifié à  $\pm 5 \%$  près.

### II.3. Conclusion

Dans ce chapitre, une étude expérimentale a été présentée. Des transducteurs ont été construits avec des plaques piézo-électriques rectangulaires et des sabots en plexiglass afin de générer des ondes dont le front d'onde est quasiment plan. Les relevés ont été effectués avec un vibromètre laser, ce qui permet des mesures très ponctuelles.

Les méthodes d'analyse mises en œuvre ont permis l'identification des ondes qui ont été réfléchies lorsqu'un mode de Lamb est incident dans une plaque biseautée. Connaissant les modes de Lamb réfléchis dans la plaque, une étude quantitative a été réalisée afin de connaître la répartition de l'énergie transportée par l'onde incidente entre les différentes modes réfléchis. Cela a été possible grâce à la relation liant la composante normale du déplacement de l'onde en surface à l'énergie véhiculée par celle-ci. Des bilans d'énergie ont

donc été faits pour deux modes de Lamb incidents ( $A_1$  et  $S_0$ ) pour des plaques ayant des angles de biseau allant de  $70^\circ$  à  $85^\circ$  par pas de  $5^\circ$ .

Même si l'onde générée par les transducteurs est presque plane, une légère divergence du faisceau persiste et son atténuation est faible. Ceci implique que l'on ne retrouve pas totalement l'énergie incidente dans les énergies transportées par les modes réfléchis. Afin de rectifier ces bilans d'énergie, une correction est calculée pour tenir compte de cette divergence des faisceaux. Ainsi, les résultats quantitatifs expérimentaux sont tout à fait satisfaisants puisqu'ils sont vérifiés à 5% près.

Il faut maintenant confronter ces résultats expérimentaux à un modèle théorique afin de vérifier que la répartition d'énergie trouvée par cette méthode est correcte.

---

# CHAPITRE III

## Modèle théorique

---

### III.1. Introduction

### III.2. Réflexion à l'extrémité biseautée d'une plaque dans le vide

III.2.1. Coefficients de pondération

III.2.2. Coefficients de réflexion en énergie

III.2.3. Réflexion du mode de Lamb  $A_1$  à l'extrémité de la plaque

III.2.4. Réflexion du mode de Lamb  $A_0$  à l'extrémité de la plaque

III.2.5. Réflexion du mode de Lamb  $S_0$  à l'extrémité de la plaque

### III.3. Comparaison théorie-expérience

### III.4. Conclusion

### **III.1. Introduction**

Les ondes de Lamb sont couramment utilisées pour l'évaluation non destructive de structures planes. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre I, les ondes de Lamb ont comme principal intérêt de ne pas s'atténuer au cours de leur propagation dans une plaque placée dans le vide, et de s'atténuer très peu dans l'air. C'est donc tout naturellement qu'elles sont utilisées pour la détection de défauts, moyennant quelques précautions <sup>[Alleyne (2)]</sup>.

Dans la pratique, les dimensions des structures sont finies. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, des études ont été consacrées à la réflexion d'une onde de Lamb à l'extrémité libre d'une plaque (angle de biseau  $\alpha=90^\circ$ ).

Afin de comprendre et d'expliquer théoriquement ce phénomène de conversion, Torvik <sup>[Torvik]</sup> a proposé d'admettre que les ondes qui se propagent dans une plaque limitée peuvent se décrire de la même manière que celles se propageant dans une plaque infinie. Ainsi, on peut vérifier la nullité des contraintes à l'extrémité libre de la plaque en additionnant les contributions de l'onde incidente à celles des ondes réfléchies ainsi que d'une infinité d'ondes complexes non-propagatives. Nous verrons qu'il faut prendre en compte un grand nombre d'ondes en réflexion pour assurer cette nullité des contraintes <sup>[Shen]</sup>. Cette méthode a été appliquée au mode de Lamb incident  $S_0$  à des fréquences inférieures à la fréquence de coupure du mode symétrique  $S_4$ . Ainsi, il est vérifié que seules des ondes symétriques sont réfléchies dans ce cas (il s'agit des modes  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ ) car aucun changement de symétrie de mode ne peut apparaître à la réflexion. Plus récemment, cette méthode a été utilisée pour étudier la réflexion d'une onde de Lamb à l'extrémité libre d'une plaque <sup>[Prédoï]</sup> mais aussi à la jonction de deux plaques soudées bout à bout.

Nous utiliserons les résultats de ces travaux dans ce chapitre dont le but est de confirmer les résultats expérimentaux acquis au chapitre précédent. Cependant, nous ne nous bornerons pas à comparer seulement les bilans d'énergie issus de l'expérimentation à ceux obtenus avec ce modèle théorique mais nous nous attacherons à réaliser une étude aussi complète que possible des conversions de modes qui apparaissent lors de la réflexion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque. Ainsi, nous étudierons dans ce chapitre la réflexion de trois modes de Lamb, à savoir les modes  $A_0$ ,  $S_0$  et  $A_1$ , successivement incidents dans une plaque dont l'extrémité est biseautée par un angle  $\alpha$  allant de  $70^\circ$  à  $85^\circ$  par pas de  $5^\circ$ . Nous donnerons aussi des résultats calculés pour une plaque d'extrémité droite ( $\alpha=90^\circ$ ) afin de les comparer avec des études déjà menées <sup>[Rose]</sup>.



### III.2. Réflexion à l'extrémité biseautée d'une plaque dans le vide

L'étude de la conversion d'une onde de Lamb à l'extrémité droite d'une plaque a été initiée par Torvik (1967). La méthode consiste à supposer une onde de Lamb se propageant dans une plaque semi-infinie dont l'extrémité droite est libre <sup>[Torvik]</sup>. Cette onde se réfléchit sur cet obstacle et se convertit en d'autres modes de Lamb. Nous allons étendre la théorie de Torvik au cas d'une plaque biseautée.

Ainsi, on considère une onde de Lamb incidente dans une plaque biseautée (*Figure III.1.*) et réfléchi sur le biseau en donnant naissance à plusieurs modes ayant les deux types de symétries (modes symétriques et antisymétriques). En effet, la dissymétrie de l'obstacle sur lequel l'onde incidente se réfléchit entraîne la possible existence de modes de symétrie différente de celle du mode incident. La plaque étant dans le vide, l'intégralité de l'énergie de l'onde de Lamb incidente est réfléchi sur le bord biseauté puisque aucune énergie ne peut s'échapper de la plaque.

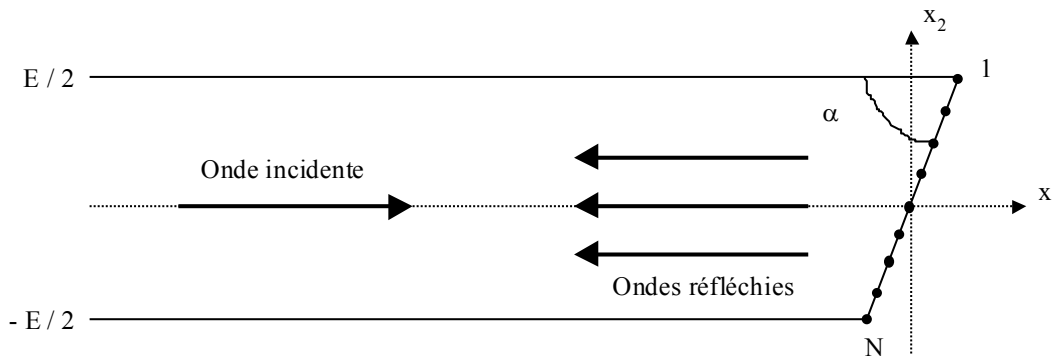


Figure III.1. : Géométrie du problème.

Nous rappelons que, dans une plaque d'épaisseur  $E$ , les modes susceptibles d'être convertis à l'extrémité de la plaque sont les modes propres de cette plaque (Chapitre I). Des modes complexes, imaginaires purs et réels (modes de Lamb) peuvent donc coexister à la fréquence  $F$  selon que la composante (suivant  $Ox_1$ )  $\underline{k}_1 = k'_1 + jk''_1$  du vecteur d'onde du mode est complexe, imaginaire pure ou réelle. Pour un produit  $FE$  donné, on peut trouver un nombre fini de solutions réelles des équations de dispersion mais aussi une infinité de solutions complexes. Dans le cas d'une plaque semi-infinie, des modes complexes peuvent

exister au voisinage de l'extrémité de la plaque, leur amplitude étant exponentiellement décroissante à partir de cette extrémité.

En résumé, à l'extrémité biseautée de la plaque, il existe :

- Une onde de Lamb incidente :  $\varphi_{\text{inc}}(x_2) \exp\left[j(k'_1 x_1 - \omega t)\right]$ .
- Des ondes de Lamb réfléchies :  $\varphi_{\text{ref}}(x_2) \exp\left[j(-k'_1 x_1 - \omega t)\right]$ .
- Des modes imaginaires purs :  $\varphi_{\text{ref}}(x_2) \exp(k''_1 x_1) \exp(-j \omega t)$ .
- Des modes complexes :  $\varphi_{\text{ref}}(x_2) \exp(k''_1 x_1) \exp\left[j(-k'_1 x_1 - \omega t)\right]$ .

Pour déterminer les coefficients de réflexion en énergie qui nous serviront à calculer les bilans d'énergie théoriques, nous devons établir des coefficients de pondération.

### III.2.1. Coefficients de pondération

Il faut rappeler que le programme décrivant chaque mode, à un produit FE particulier, fournit la composante  $\underline{k}_1$  du vecteur d'onde selon  $Ox_1$ , les vitesses de phase et d'énergie du mode considéré ainsi que les valeurs relatives des composantes  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$  des déplacements en tout point de la plaque. Dans le chapitre I, nous avons exprimé les valeurs des contraintes  $\underline{T}_{11}$ ,  $\underline{T}_{21}$  et  $\underline{T}_{22}$ , ainsi que le flux du vecteur de Poynting associé, intimement liés au déplacement  $\underline{U}_1$  choisi.

Les conditions aux limites, exprimées sur le bord biseauté de la plaque, sont telles que les composantes  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  de la force mécanique  $\underline{\vec{F}}$  résultant des ondes de Lamb sur la section biseautée sont nulles. Ces composantes dépendent des contraintes  $\underline{T}_{11}$ ,  $\underline{T}_{21}$  et  $\underline{T}_{22}$ , de l'angle du biseau et des composantes  $n_1$  et  $n_2$  de la normale  $\vec{n}$  à la surface par :

$$\begin{cases} \underline{F}_1 = \underline{T}_{11} n_1 + \underline{T}_{12} n_2 = \underline{T}_{11} \sin(\alpha) - \underline{T}_{12} \cos(\alpha) = 0 \\ \underline{F}_2 = \underline{T}_{21} n_1 + \underline{T}_{22} n_2 = \underline{T}_{21} \sin(\alpha) - \underline{T}_{22} \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Pour exprimer les conditions aux limites à l'extrémité biseautée de la plaque, un nombre infini de modes réfléchis doit être utilisé puisque les modes propres de la plaque constituent une base complète des ondes dans la plaque [Sherwood]. En effet, si nous n'utilisons que les modes de Lamb en réflexion (modes réels), il est aisé de comprendre que la nullité de toutes les contraintes ne peut être vérifiée. Donc, nous prenons en compte, en plus des modes de Lamb, les premiers modes complexes, c'est-à-dire les modes complexes dont la partie imaginaire  $k_1''$  est la plus petite, c'est-à-dire ayant de l'importance sur une plus grande distance  $x_1$ .

Afin de déterminer les amplitudes des ondes, nous utilisons une méthode de collocation, ce qui évite de faire appel à l'orthogonalité des modes propres.

Les déplacements, et donc les contraintes, de la  $m^{\text{ème}}$  onde réfléchie sont pondérés par le coefficient  $r_m$  et ceux de l'onde incidente par 1. Les contraintes  $\underline{T}_{11}^{\text{inc}}$ ,  $\underline{T}_{12}^{\text{inc}}$ ,  $\underline{T}_{21}^{\text{inc}}$  et  $\underline{T}_{22}^{\text{inc}}$  de l'onde incidente sont ainsi calculées numériquement en  $N$  points uniformément répartis sur le bord biseauté de la plaque (*Figure III.1.*).  $M$  modes résultent de l'interaction avec le biseau et les contraintes de ces modes sont calculées de la même manière aux  $N$  points :  $\underline{r}_m \underline{T}_{11}^m$ ,  $\underline{r}_m \underline{T}_{12}^m$ ,  $\underline{r}_m \underline{T}_{21}^m$  et  $\underline{r}_m \underline{T}_{22}^m$ .

On note que les  $\underline{r}_m$  ne sont pas des coefficients de réflexion mais simplement des coefficients de pondération et n'ont donc pas de sens physique. Seuls les coefficients de réflexion en énergie ont un sens : ils seront notés  $R_m$ .

La nullité des contraintes peut être écrite  $N$  fois à l'extrémité biseautée :

$$\begin{cases} \underline{F}_1^{\text{inc}}(i) + \sum_{m=1}^M \underline{r}_m \underline{F}_1^m(i) = 0 \\ \underline{F}_2^{\text{inc}}(i) + \sum_{m=1}^M \underline{r}_m \underline{F}_2^m(i) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec :  $1 \leq i \leq N$ .

De ce fait, nous disposons d'un système de  $2N$  équations à  $M$  inconnues ( $N$  équations pour  $\underline{F}_1$  et  $N$  pour  $\underline{F}_2$ ). Nous ne sommes pas obligés de prendre autant d'équations que d'inconnues puisque la méthode utilisée trouve au mieux les solutions (au sens des moindres carrés). Dans notre cas, nous aurons beaucoup plus d'équations que d'inconnues.

Le système défini précédemment peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_1^{\text{inc}}(1) \\ \underline{F}_2^{\text{inc}}(1) \\ \underline{F}_1^{\text{inc}}(2) \\ \underline{F}_2^{\text{inc}}(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{F}_1^{\text{inc}}(N) \\ \underline{F}_2^{\text{inc}}(N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{F}_1^1(1) & \underline{F}_1^2(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{F}_1^M(1) \\ \underline{F}_2^1(1) & \underline{F}_2^2(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{F}_2^M(1) \\ \underline{F}_1^1(2) & \underline{F}_1^2(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{F}_1^M(2) \\ \underline{F}_2^1(2) & \underline{F}_2^2(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{F}_2^M(2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{F}_1^1(N) & \underline{F}_1^2(N) & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{F}_1^M(N) \\ \underline{F}_2^1(N) & \underline{F}_2^2(N) & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{F}_2^M(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{r}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Si les matrices  $F$  et  $r$  sont des vecteurs colonnes de dimension respectives ( $2N \times 1$ ) et ( $M \times 1$ ), la matrice  $A$  contenant les  $2N \times M$  contraintes des modes réfléchis, le système ci-dessus peut être condensé sous la forme matricielle suivante :

$$F + A r = 0.$$

Puisque nous venons de voir que les nombres  $N$  et  $M$  sont différents, la matrice  $A$  n'est pas carrée. Ainsi, nous devons définir la matrice  $A^T$ , transposée de  $A$ .

La relation précédente se met sous la forme :

$$A^T F + A^T A r = 0$$

Et ainsi, le vecteur  $r$  contenant les coefficients de pondération  $\underline{r}_m$  peut être trouvé de manière immédiate :

$$r = -(A^T A)^{-1} A^T F.$$

Les coefficients de pondération  $\underline{r}_m$  ont été calculés en prenant en compte les  $M$  premiers modes réfléchis existant pour un produit fréquence-épaisseur considéré. Il est maintenant possible de relier ces coefficients  $\underline{r}_m$  aux coefficients de réflexion en énergie  $R_m$ .

### III.2.2. Coefficients de réflexion en énergie

Les coefficients de réflexion en énergie s'obtiennent à partir des coefficients de pondération  $\underline{r}_m$  appliqués aux flux d'énergie  $\phi_{inc}$  et  $\phi_m$  de l'onde incidente et de la  $m^{\text{ème}}$  onde de Lamb réfléchie (pris en valeur absolue). Donc  $P_{inc}$  et  $P_m$  sont respectivement les flux du vecteur de Poynting de l'onde incidente et de la  $m^{\text{ème}}$  onde réfléchie, ce qui revient à écrire  $P_{inc} = \phi_{inc}$  et  $P_m = \underline{r}_m \underline{r}_m^* \phi_m$  (où  $\underline{r}_m^*$  est le complexe conjugué de  $\underline{r}_m$ ), le coefficient de réflexion en énergie  $R_m$  est défini par :

$$R_m = \frac{P_m}{P_{inc}} = \underline{r}_m \underline{r}_m^* \frac{\phi_m}{\phi_{inc}}$$

Le bilan d'énergie à l'extrémité biseautée de la plaque s'écrit donc :

$$P_{inc} = \sum_{m=1}^{M_L} P_m$$

et, par conséquent :

$$\sum_{m=1}^{M_L} R_m = 1$$

où  $M_L$  est le nombre de modes de Lamb dans les  $M$  modes pris en compte dans le calcul des  $\underline{r}_m$ . En effet, la sommation porte nécessairement sur les modes réels (modes de Lamb) puisque les modes complexes ne transportent pas d'énergie.

Afin de vérifier cette égalité avec une précision satisfaisante, nous devons trouver un nombre  $M$  de modes à prendre en compte dans le calcul pour que les coefficients de réflexion en énergie  $R_m$  convergent vers une solution stable. Notons que le nombre  $M_L$  de modes de Lamb varie entre 2 et 5 dans le domaine fréquentiel que nous allons étudier.

### III.2.3. Réflexion du mode de Lamb $A_1$ à l'extrémité de la plaque

La méthode décrite ci-dessus a été utilisée pour des plaques en acier inoxydable ( $c_L=5850 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $c_T=3150 \text{ m.s}^{-1}$ ). Bien que cette méthode puisse être étendue à un domaine fréquentiel plus large, l'étude a été limitée aux produits fréquence-épaisseur FE compris entre 1 et 4 MHz.mm. En effet, puisque l'extrémité de la plaque est biseautée, les deux types d'ondes (symétriques et antisymétriques) sont réfléchis. Dans le domaine choisi, un nombre limité d'ondes de Lamb est susceptible d'exister dans la plaque, à savoir les modes  $A_0$ ,  $S_0$ ,  $A_1$ ,  $S_1$  et  $S_2$ . Monter plus haut en fréquence ferait intervenir un trop grand nombre de modes et, même si cela reste possible à faire, compliquerait considérablement les études ultérieures qui vont être menées (voir le chapitre IV traitant de la Méthode des éléments finis).

Rappelons que le comportement du mode  $S_1$  est particulier : quand le produit FE est inclus entre 2,72 et 2,92 MHz.mm, ce mode possède deux vitesses de phase correspondant à une vitesse d'énergie positive ou négative. Le mode  $S_1$  dont la vitesse d'énergie est négative est noté  $S_1'$  (sa vitesse de phase possède une asymptote à  $FE=2,92 \text{ MHz.mm}$ ).

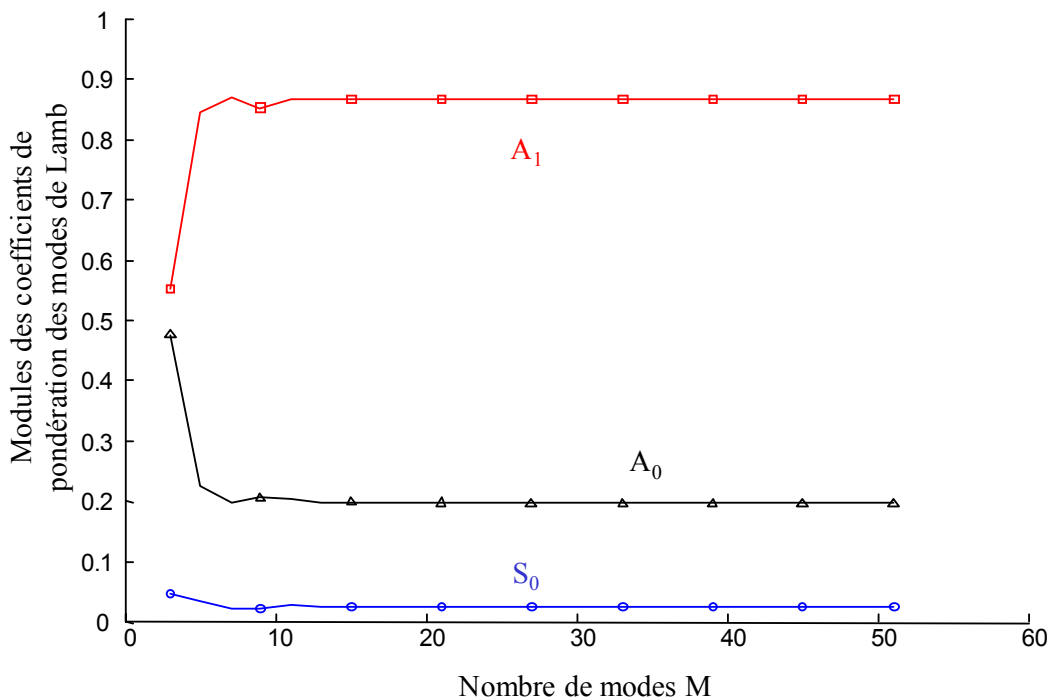


Figure III.2. : Evolution des modules des coefficients de pondération en fonction du nombre de modes  $M$  (mode  $A_1$  incident,  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=75^\circ$ )

Le système (III.1) est résolu en  $N=800$  points (maximum) régulièrement répartis dans la section biseautée de la plaque. Le nombre  $M$  de modes à prendre en compte dans le calcul n'est pas imposé comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent. Nous avons fait varier ce nombre de modes (*Figure III.2.*) et noté que les solutions convergent quand  $M$  est supérieur à 20. Les résultats présentés dans la suite ont été obtenus pour  $M=45$  modes, assurant la convergence pour tous les angles  $\alpha$  choisis. Ces 45 modes réfléchis qui entrent dans le calcul sont les 45 premiers modes réels, complexes et imaginaires purs.

Détaillons le calcul dans le cas de l'onde  $A_1$  incidente à  $FE=2,5$  MHz.mm sur un biseau de  $75^\circ$ . Sur la *Figure III.3.* les nombres d'onde de ces modes (à la fois symétriques et antisymétriques) ont été tracés dans le plan complexe ( $k'_1, k''_1$ ) pour un produit fréquence-épaisseur égal à 2,5 MHz.mm. Seuls les modes dont la partie imaginaire  $k''_1$  est positive sont pris en compte. En effet, ces modes sont amortis lorsqu'ils se propagent vers les  $x_1 < 0$ , alors que les autres modes ( $k''_1 < 0$ ) n'ont pas de signification physique puisqu'ils auraient une croissance exponentielle pour  $x_1 < 0$ . Pour  $FE=2,5$  MHz.mm, les modes réels sont les modes de Lamb  $S_0$ ,  $A_0$  et  $A_1$ . Ces ondes transportent de l'énergie selon  $Ox_1$ . On peut noter qu'à cette fréquence aucun mode imaginaire pur n'apparaît. Les modes complexes se répartissent en modes « incidents » ( $k'_1 < 0$ ) et « réfléchis » ( $k'_1 > 0$ ). L'ensemble des ondes présentes est sensé décrire la diffraction dans le biseau.

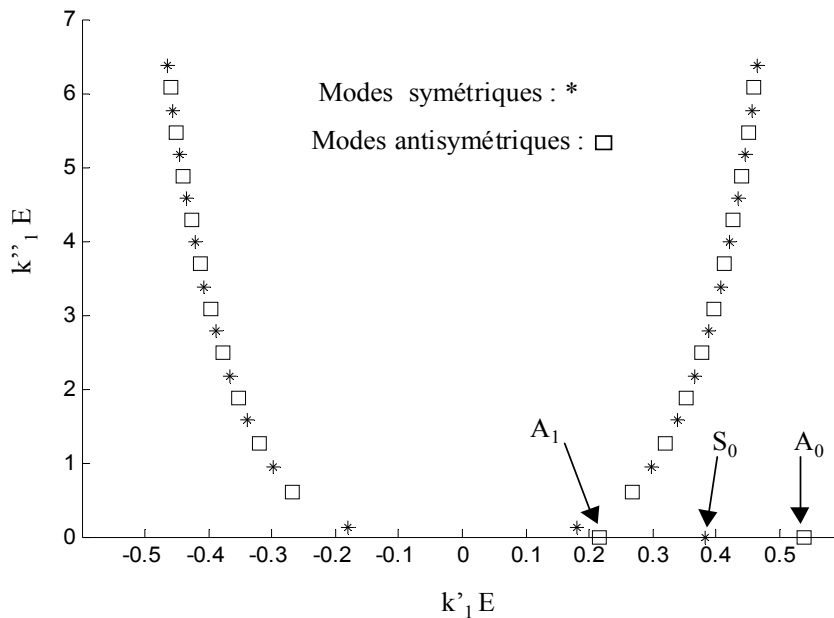
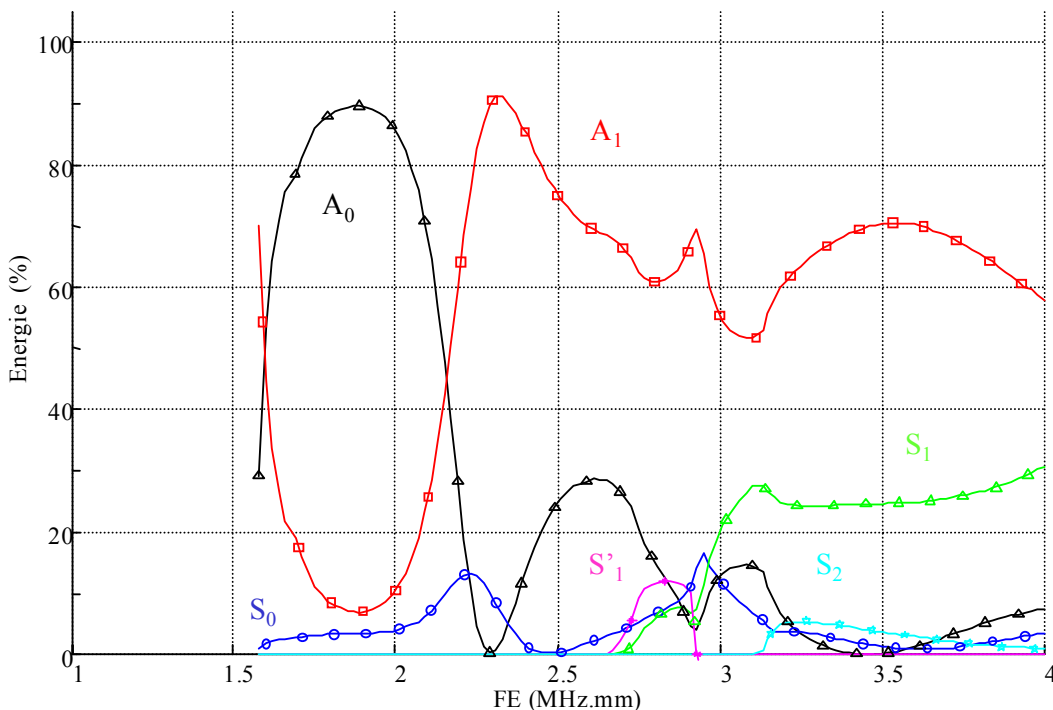


Figure III.3. : Représentations des modes propres dans le plan complexe.

$FE=2,5$  MHz.mm.

La répartition d'énergie du mode  $A_1$  entre les différents modes réfléchis a été calculée avec un pas fréquentiel  $\Delta FE$  de 0,01 MHz.mm, ceci pour chaque angle  $\alpha$  choisi. Les énergies des modes réfléchis ont été tracées sur la *Figure III.4.* en fonction du produit FE pour un angle de biseau  $\alpha$  égal à  $75^\circ$ . L'étude a commencé dès l'existence du mode  $A_1$ , c'est-à-dire pour FE supérieur à 1,6 MHz.mm, et fournit 240 points.

Sur cette figure, nous pouvons remarquer que les zones de variations brutales des énergies coïncident avec les fréquences de coupures des ondes de Lamb. Pour indication, la fréquence de coupure du mode  $S_1$  est  $FE=2,72$  MHz.mm, celle du mode  $S_2$  est  $FE=3,15$  MHz.mm. Notons que pour des produits FE compris entre 2,72 MHz.mm et 2,92 MHz.mm le mode  $S'_1$  est présent avec une énergie non négligeable. Il est possible de constater que, même si l'énergie est restée principalement sous forme de mode antisymétrique (possédant la symétrie du mode incident), il y a une réelle conversion de l'énergie sous forme de modes de Lamb symétriques, en particulier pour FE supérieur à 3 MHz.mm.



*Figure III.4. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction du produit FE. Onde incidente  $A_1$  et  $\alpha=75^\circ$ .*



La vérification de la conservation de l'énergie entraîne que la somme des énergies des modes réfléchis doit être égale à celle du mode incident, à savoir 1. Pour chaque valeur du produit fréquence-épaisseur, l'erreur  $\varepsilon$  calculée est toujours inférieure à 0,1 % :

$$\varepsilon = \left| 1 - \sum_m R_m \right| \leq 0,1\%$$

Comme le principe de conservation de l'énergie est vérifié à 0,1% près, la méthode de calcul théorique est validée. Dans les autres résultats présentés dans la suite, l'erreur sera toujours de cet ordre.

L'étude a été effectuée pour l'angle  $\alpha$  égal à  $90^\circ$  (plaque normale) afin de vérifier que l'on retrouve bien des résultats connus <sup>[Rose ; Cho (2)]</sup> (Figure III.5.).

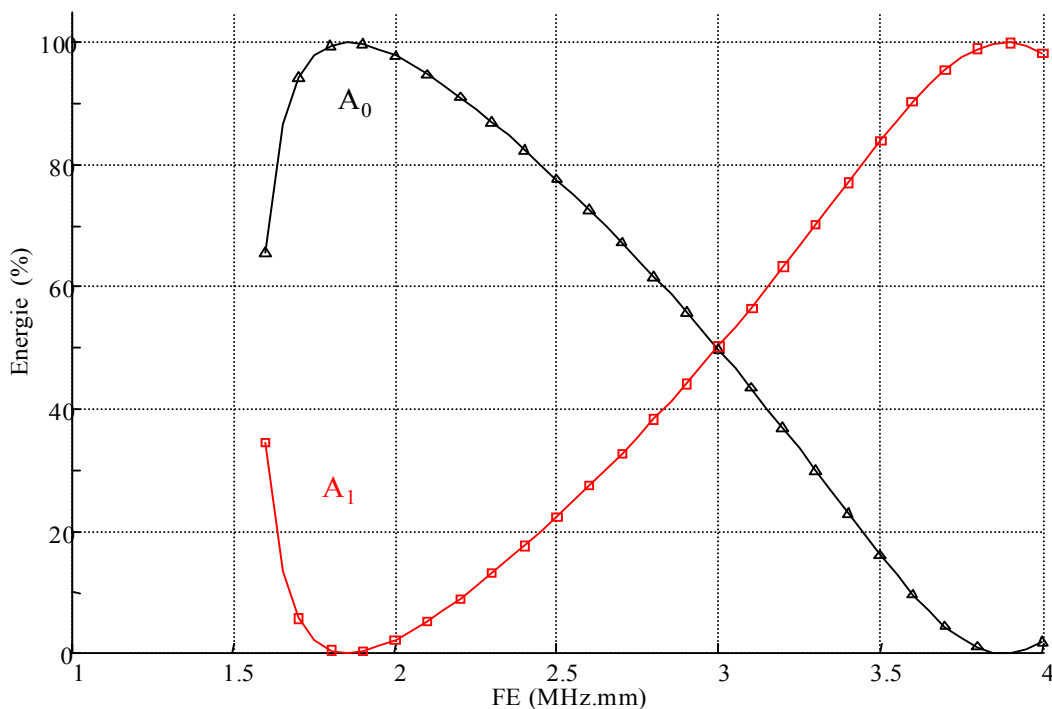
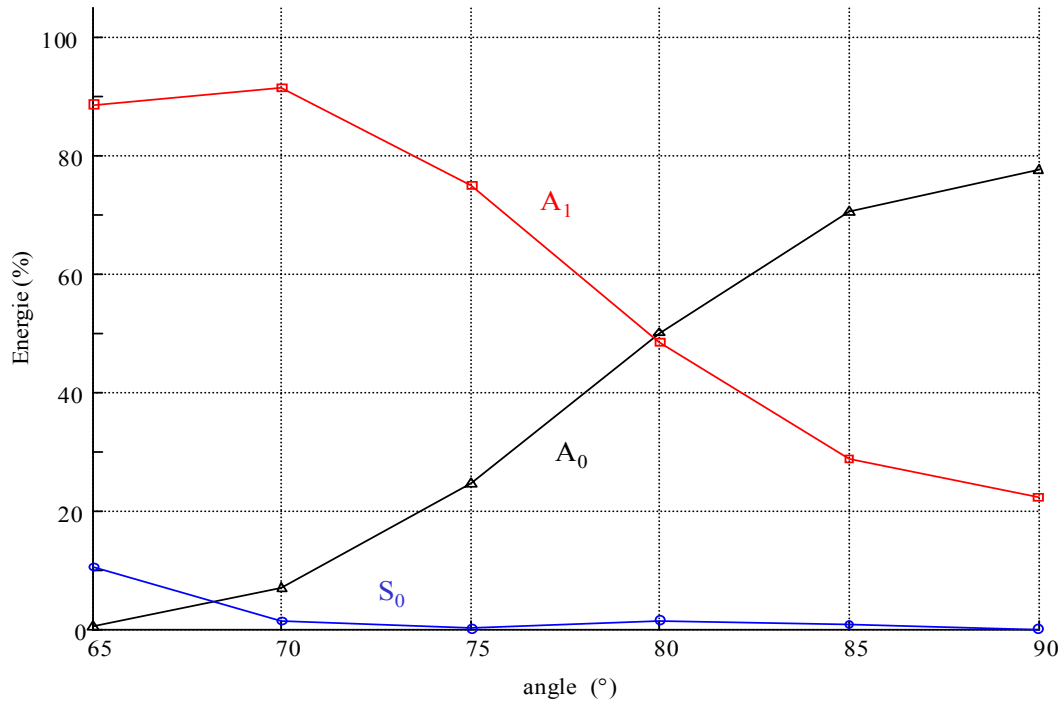


Figure III.5. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction du produit FE. Onde incidente  $A_1$  et  $\alpha=90^\circ$ .

L'étude a été réalisée pour d'autres angles de biseau [Wilkie-Chancellor (1-2)], mais aussi pour un produit FE fixé en faisant varier l'angle  $\alpha$  du biseau. Les variations de la répartition de l'énergie du mode  $A_1$  entre les différents modes réfléchis sont tracées sur la *Figure III.6.* pour FE=2,5 MHz.mm.



*Figure III.6. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction de l'angle  $\alpha$ . Onde incidente  $A_1$  et FE=2,5 MHz.mm. (6 valeurs calculées)*

La méthode théorique a été testée sur des angles de biseau plus petits ( $\alpha < 70^\circ$ ). Si le résultat présenté ci-dessus est encore valable pour ce produit FE précis, la convergence des coefficients de pondération vers une solution unique devient critique. Aussi, cette méthode semble trouver ses limites lorsque le biseau devient pointu.

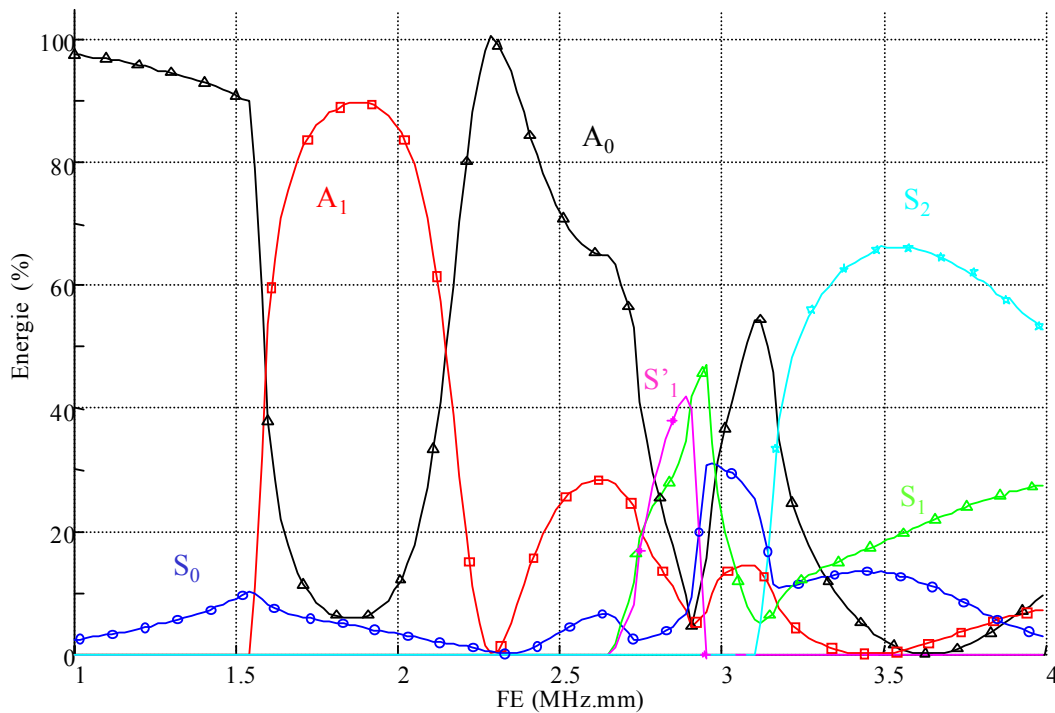
Appliquons maintenant ce modèle théorique au cas du mode de Lamb  $A_0$  incident.

### III.2.4. Réflexion du mode de Lamb $A_0$ à l'extrémité de la plaque

La réflexion du mode  $A_0$  est étudiée pour des produits fréquence-épaisseur compris entre 1 et 4 MHz.mm. La répartition de l'énergie de ce mode entre les différents modes réfléchis a été tracée sur la *Figure III.7.* en fonction de FE pour un angle particulier ( $\alpha=75^\circ$ ).

Quelques similitudes peuvent être remarquées entre ces courbes et celles obtenues pour le mode  $A_1$  incident (*Figure III.4.*). En effet, pour des FE situés en dessous de la fréquence de coupure des modes  $S_1$  et  $S'_1$ , le rôle des modes  $A_1$  et  $A_0$  est inversé : lorsque le mode  $A_1$  est presque intégralement converti en  $A_0$  ( $1,7 < FE < 2,1$  MHz.mm) (*Figure III.4.*), le mode  $A_0$  l'est tout autant en mode  $A_1$  (*Figure III.7.*).

A partir de la fréquence de coupure du mode  $S_2$ , L'énergie incidente du mode  $A_0$  se retrouve principalement convertie en modes symétriques ( $S_1$  et  $S_2$ ). Il y a donc un changement radical de comportement par rapport à des produits FE plus petits.



*Figure III.7. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction du produit FE. Onde incidente  $A_0$  et  $\alpha=75^\circ$ .*

A titre comparatif, l'évolution des énergies des ondes réfléchies en fonction du produit FE est donnée pour un angle  $\alpha$  égal à  $90^\circ$  (Figure III.8.). Dans ce cas, les modes de Lamb  $A_0$  et  $A_1$  sont les seuls possibles et la réciprocité entre ces deux ondes est bien vérifiée dans tous le domaine.

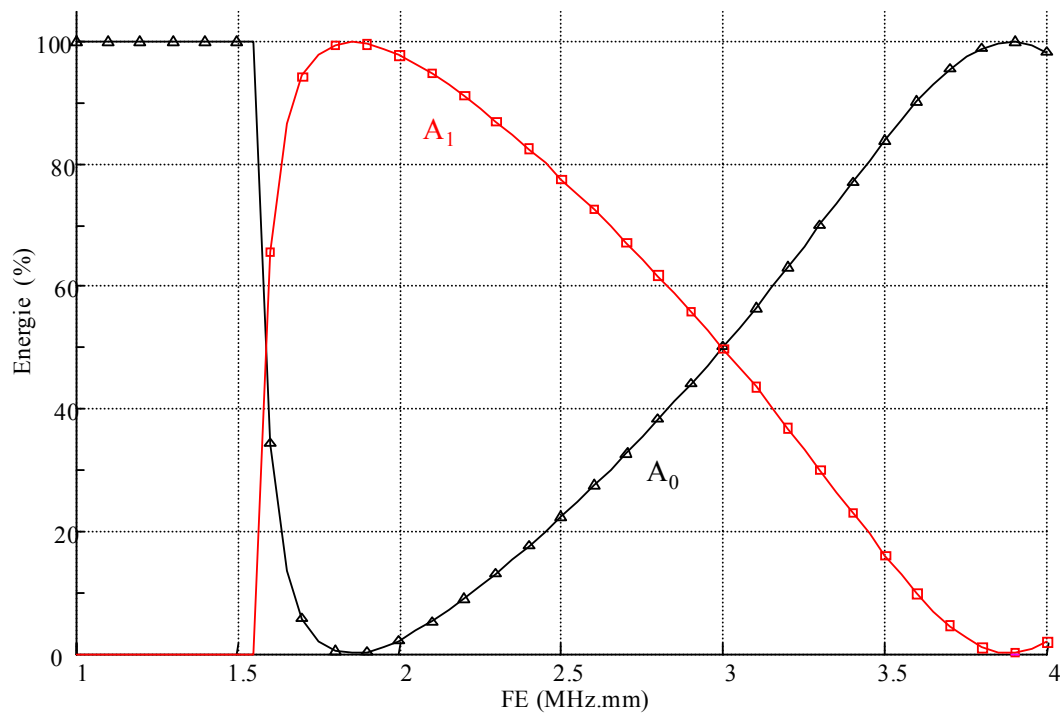


Figure III.8. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction de FE.  
Onde incidente  $A_0$  et  $\alpha=90^\circ$ .

De la même manière que pour le mode  $A_1$ , la répartition du mode  $A_0$  a été tracée en fonction de l'angle  $\alpha$  du biseau pour un produit FE fixé (FE=2,5 MHz.mm). Ces résultats sont résumés sur la Figure III.9.

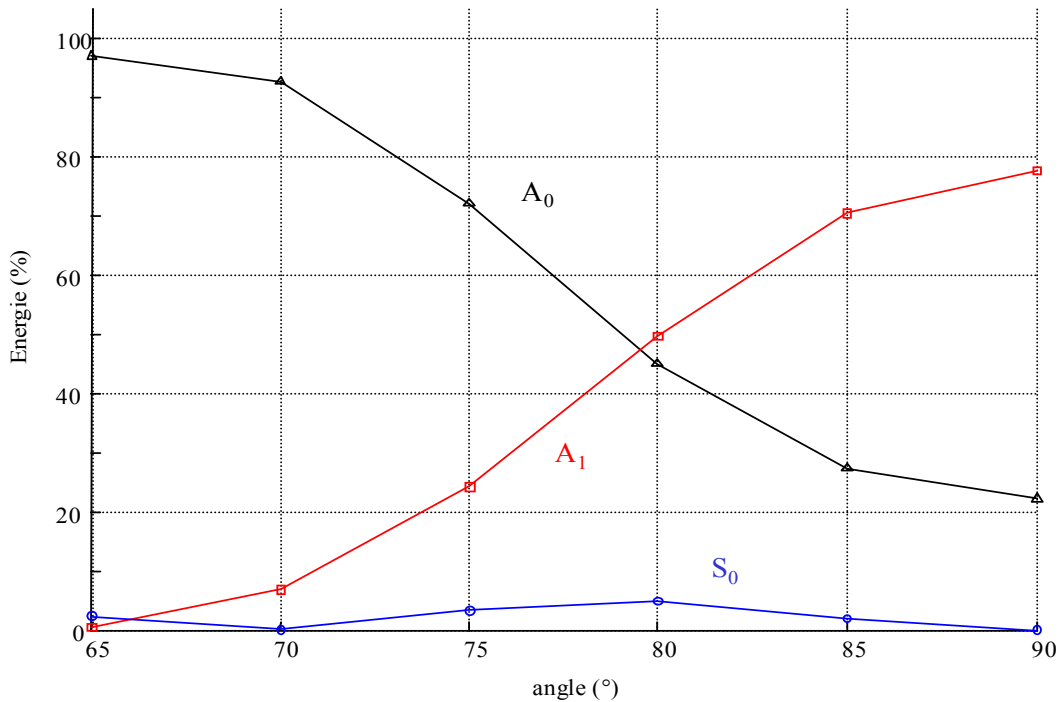


Figure III.9. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction de l'angle  $\alpha$ .  
Onde incidente  $A_0$  et  $FE=2,5$  MHz.mm. (6 valeurs calculées)

### III.2.5. Réflexion du mode de Lamb $S_0$ à l'extrémité de la plaque

Etudions dans un troisième temps le cas du mode  $S_0$  incident. La répartition de l'énergie de ce mode entre les différents modes réfléchis est tracée en fonction du produit FE pour les deux angles choisis ci-dessus, à savoir  $75^\circ$  et  $90^\circ$  (Figures III.10. et III.11.).

Pour des produits fréquence-épaisseur inférieurs à la fréquence de coupure des modes  $S_1$  et  $S'_1$ , le mode  $S_0$  est pratiquement réfléchi en lui-même car il n'existe pas d'autre mode symétrique dans ce domaine fréquentiel. Notons que, même pour  $\alpha=75^\circ$  (Figure III.10.), l'énergie incidente est principalement réfléchi sous forme des modes symétriques, c'est-à-dire sous forme de modes possédant la même symétrie que le mode incident, alors que dans les mêmes conditions, pour le mode  $A_0$  incident à  $FE > 3$  MHz.mm, il y a un changement de symétrie (Figure III.7.).

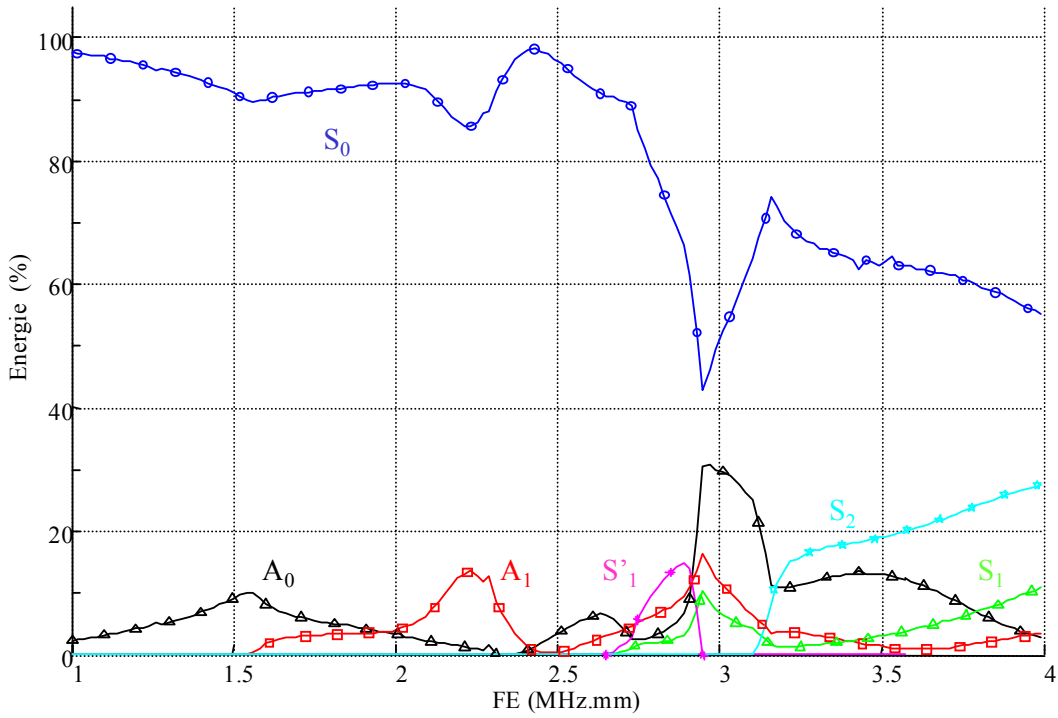


Figure III.10. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction de FE.  
Onde incidente  $S_0$  et  $\alpha=75^\circ$ .

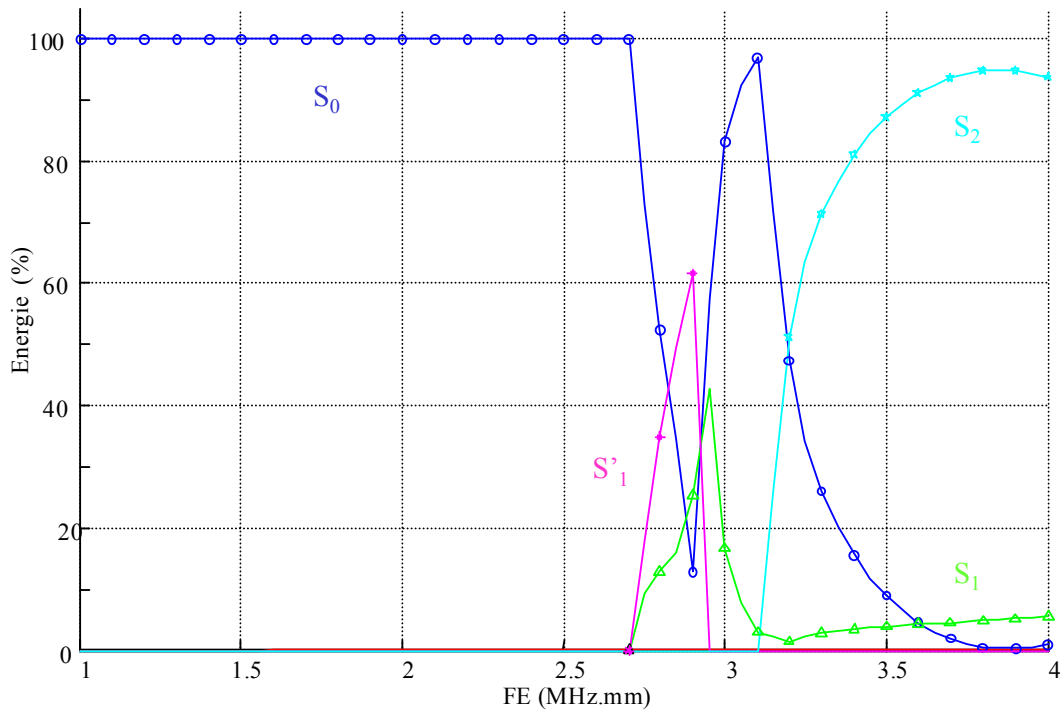


Figure III.11. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction de FE.  
Onde incidente  $S_0$  et  $\alpha=90^\circ$ .

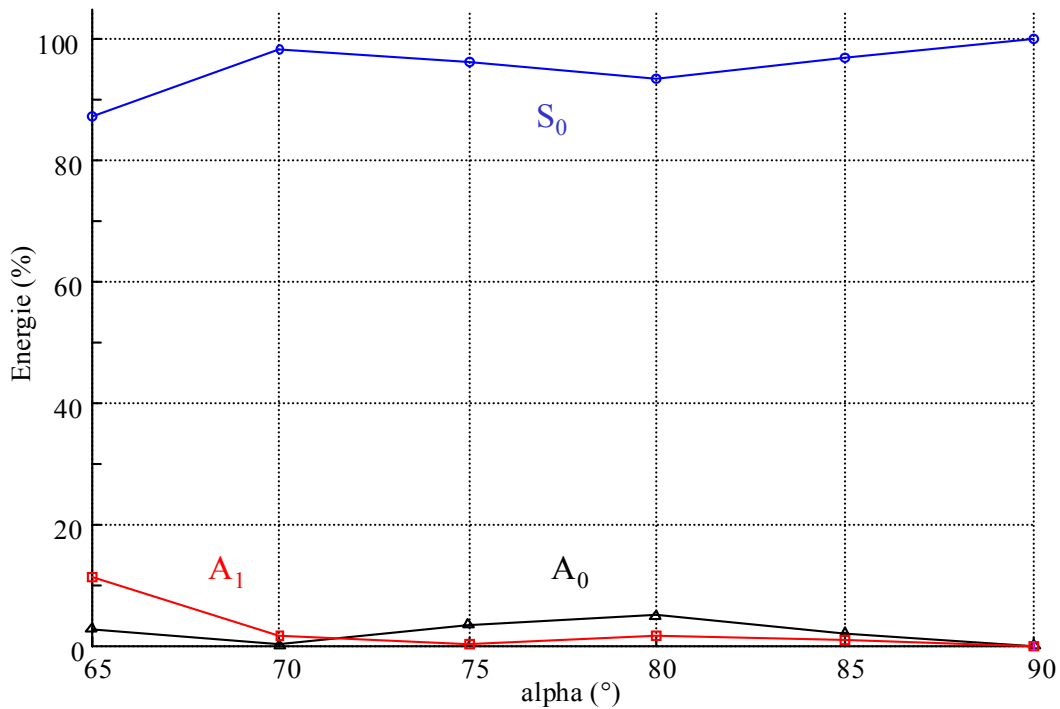


Figure III.12. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité biseautée en fonction de l'angle  $\alpha$ .  
Onde incidente  $S_0$  et  $FE=2,5$  MHz.mm. (6 valeurs calculées)

Des calculs utilisant la méthode théorique donnant la répartition de l'énergie du mode  $S_0$  entre les différents modes de Lamb réfléchis ont été faits, pour plusieurs angles  $\alpha$  dans le domaine fréquentiel compris entre 1 et 4 MHz.mm.

L'évolution des énergies des ondes réfléchies peut être tracée en fonction de l'angle  $\alpha$  pour  $FE=2,5$  MHz.mm (Figure III.12.).

Une comparaison peut donc être effectuée entre les bilans d'énergie théoriques et les résultats expérimentaux obtenus au Chapitre II.

### III.3. Comparaison théorie-expérience

Les bilans d'énergies calculés avec la méthode théorique ont été comparés aux résultats expérimentaux (corrigés) dans les deux cas vus au chapitre précédent, à savoir les modes de Lamb  $A_1$  et  $S_0$  incidents respectivement à  $FE=2,5$  et  $2,6$  MHz.mm dans des plaques biseautées à des angles  $\alpha$  compris entre  $70$  et  $85^\circ$  (Figures III.13. et III.14.).

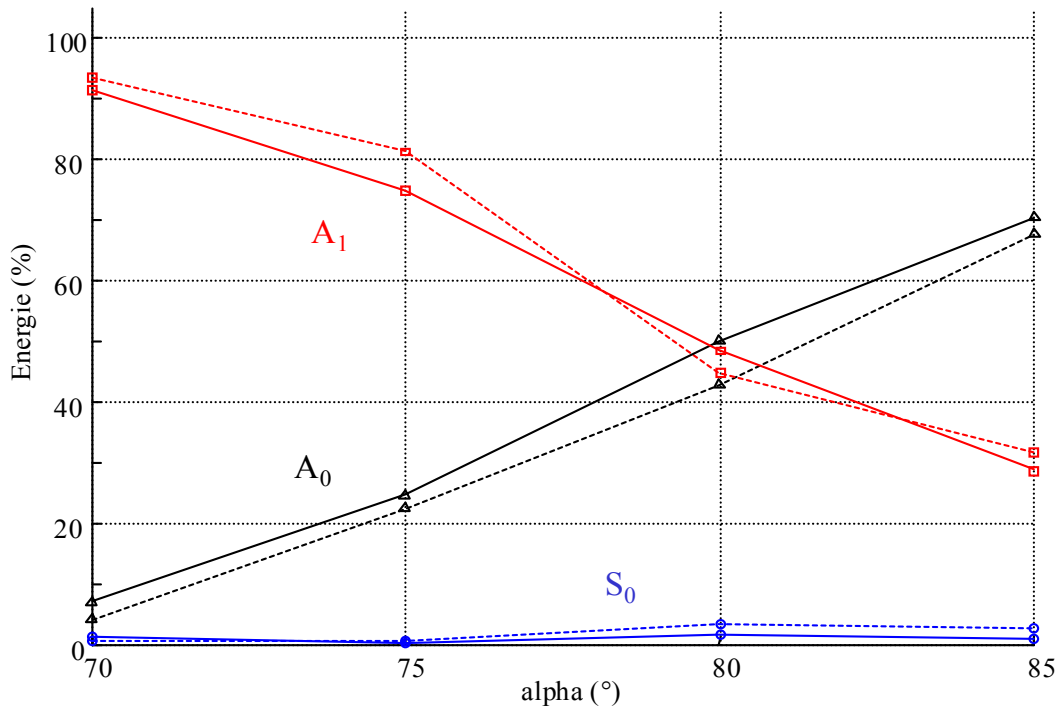


Figure III.13. : Comparaison théorie-expérience. Onde incidente  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm.  
4 valeurs calculées (trait plein : théorie, trait pointillé : expérimentation)

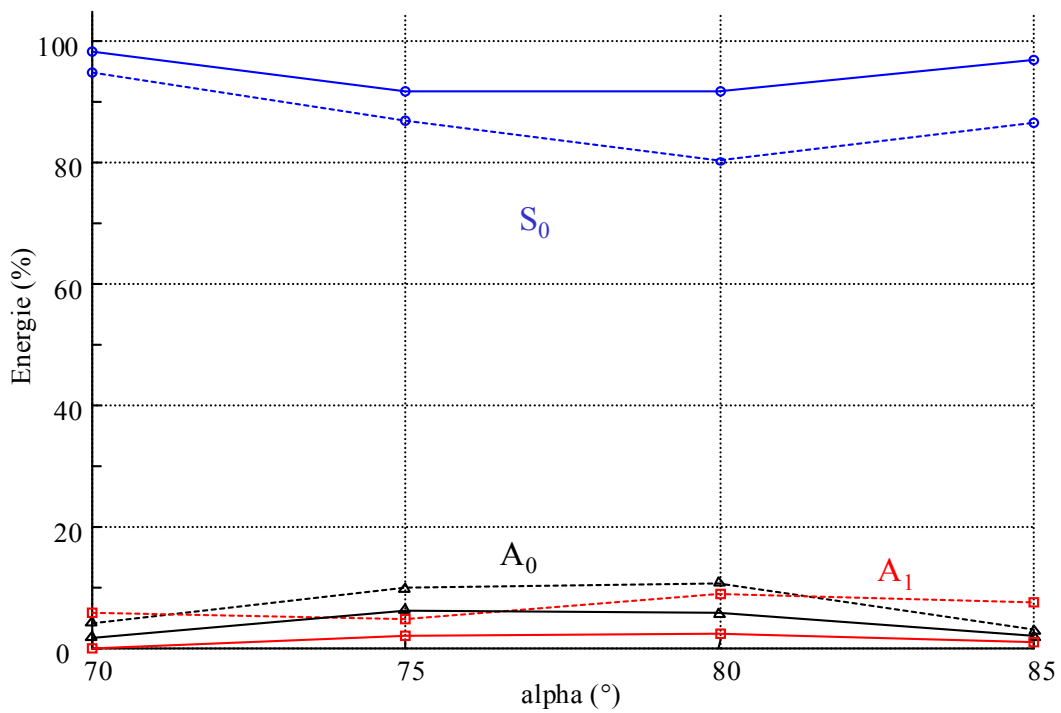


Figure III.14. : Comparaison théorie-expérience. Onde incidente  $S_0$  à  $FE=2,6$  MHz.mm.  
4 valeurs calculées (trait plein : théorie, trait pointillé : expérimentation)



On peut remarquer qu'il y a un bon accord entre les courbes données par le modèle théorique et celles trouvées précédemment par l'étude expérimentale.

Ainsi, nous confirmons a posteriori la correction décrite au chapitre précédent sur les bilans d'énergie obtenus expérimentalement. Le fait de prendre une atténuation identique pour chaque mode est donc confirmé. Cela signifie que, pour une expérience donnée, les énergies des modes déterminées à partir des résultats expérimentaux (exprimées en pourcentage de l'énergie réfléchie) se répartissent conformément à la théorie : seule l'atténuation explique le manque d'énergie obtenue avec les bilans expérimentaux bruts (avant correction).

### **III.4. Conclusion**

Ce chapitre, présentant un modèle théorique de la réflexion d'une onde de Lamb à l'extrémité biseautée d'une plaque, a permis de confirmer les résultats expérimentaux obtenus au chapitre précédent.

Ce modèle théorique est basé sur une méthode de collocation visant à annuler les contraintes sur le biseau (la plaque étant placée dans le vide). Des calculs ont été effectués pour plusieurs modes de Lamb incidents dans la plaque ( $A_0$ ,  $S_0$  et  $A_1$ ) pour des produits fréquence-épaisseur compris entre  $FE=1$  et  $FE=4\text{MHz.mm}$ .

Les bilans d'énergie obtenus par ce modèle pour un mode se réfléchissant sur une extrémité droite ( $\alpha=90^\circ$ ) ont permis de retrouver des résultats connus grâce aux études menées antérieurement.

Quelques légères différences persistent tout de même entre les résultats théoriques et expérimentaux, c'est pourquoi une troisième étude va être mise en œuvre pour confirmer définitivement ce modèle théorique. La méthode que nous allons utiliser est la méthode de résolution par éléments finis dont les résultats pourront être comparés à la théorie en tout point de la plaque (pas seulement en surface).

---

# CHAPITRE IV

## Résolution par la méthode des éléments finis

---

### IV.1. Introduction

### IV.2. Généralités sur la méthode de résolution par éléments finis

IV.2.1. Discrétisation du problème

IV.2.2. Equations de base

IV.2.3. Résolution numérique

### IV.3. Cas d'une plaque biseautée dans le vide

IV.3.1. Maillage et échantillonnage temporel

IV.3.2. Génération d'un mode de Lamb

### IV.4. Réflexion du mode de Lamb $A_1$ à l'extrémité de la plaque

### IV.5. Comparaison Méthode des Eléments Finis – Modèle théorique

### IV.6. Comparaison des déplacements dans une coupe $x_3=cte$

### IV.7. Conclusion

### **IV.1. Introduction**

Pour résoudre des problèmes n'ayant pas de solution analytique simple, on peut utiliser une méthode de calcul par éléments finis (qu'ils soient « de frontière » <sup>[Koshiba]</sup> ou non). Cette méthode consiste à réaliser des approximations des fonctions solutions par sous-domaines (ou « éléments »). Un problème défini pour un milieu continu peut donc être ainsi discrétisé. Par conséquent, le calcul est réduit à la détermination des solutions en des points particuliers de la structure discrétisée, appelés « nœuds ».

Dans cette optique, nous avons utilisé un logiciel de résolution numérique par la méthode des éléments finis. Ce type de logiciel est particulièrement adapté pour mettre en œuvre des études concernant les problèmes d'élasticité linéaires, qu'ils soient statiques ou dynamiques, tels que la propagation d'une onde mécanique dans une structure.

Le logiciel ANSYS utilisé pour cette étude permet d'effectuer plusieurs sortes d'analyses. Tout d'abord, l'analyse modale peut ainsi être mise en œuvre pour la détermination des modes propres d'une structure. D'autre part, si la structure est soumise à un régime permanent sinusoïdal (de pulsation  $\omega$ ), l'analyse effectuée est harmonique. Cependant ce régime ne donne pas d'information concernant l'aspect temporel des phénomènes, ce qui est primordial dans les problèmes de conversion de modes sur un obstacle. Ce type d'analyse (harmonique) a fait ses preuves pour caractériser le comportement vibratoire de structure tel qu'un transducteur piézo-électrique par exemple <sup>[Moulin]</sup>. Dans notre cas, nous devons effectuer une étude avec la méthode d'analyse transitoire, c'est-à-dire une étude des systèmes non-stationnaires en fonction du temps.

Dans ce chapitre, nous rappellerons tout d'abord les principes généraux de la méthode de résolution par éléments finis. Ensuite, nous expliquerons la technique utilisée pour simuler les ondes de Lamb se propageant dans une plaque dans le vide. Les déplacements normaux en surface seront relevés puis traités afin d'identifier les modes présents dans la plaque. Avec la même technique que celle utilisée l'étude expérimentale (chapitre II), des bilans d'énergie seront calculés. Une comparaison sera effectuée entre ces résultats numériques et ceux obtenus par la méthode théorique développée au chapitre précédent.

## IV.2. Généralités sur la méthode de résolution par éléments finis

Les aspects généraux de la méthode par éléments finis sont : la discrétisation d'un problème continu, l'élaboration des équations de base servant à la résolution du problème discret et, enfin, la résolution du problème proprement dit.

### IV.2.1. Discrétisation du problème

Considérons le cas le plus général possible, à savoir un solide de volume  $V$  limité par une surface  $S$ . La discrétisation <sup>[Battoz]</sup> consiste à « découper » le volume  $V$  en éléments de volume  $V^e$  (Figure IV.1.) tels que :

$$V = \sum V^e$$

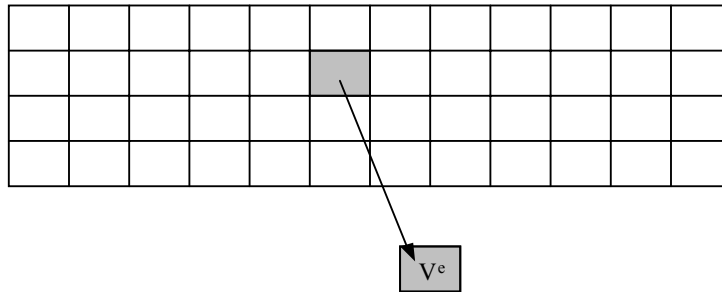


Figure IV.1. : Discrétisation spatiale d'une structure simple

La position de chaque point  $\{x\}$  en coordonnées paramétriques, donc dépendantes de la géométrie de l'élément, est reliée aux coordonnées  $\{x_n\}$  des nœuds définissant le volume  $V^e$  par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation paramétriques notées  $[N]$ .

La relation liant  $\{x\}$  à  $\{x_n\}$  est notée :

$$\{x\} = [N] \{x_n\}$$

De la même manière, nous pouvons déduire les déplacements  $\{u\}$  en tout points de l'élément  $V^e$  tels que :

$$\{u\} = [N] \{u_n\}$$

où  $\{u_n\}$  est le vecteur déplacement nodal.

Ainsi, le problème continu devient un problème discret puisqu'il est réduit à la détermination des variables nodales.

#### IV.2.2. Equation de base

L'expression sous forme intégrale du principe des travaux virtuels traduit l'équilibre du solide soumis à l'action de forces de volume, notées  $f_v$ , et de forces de surface, notées  $f_s$ . Un champ de grandeurs virtuelles (déplacements  $u^*$  et déformations  $\varepsilon^*$ ) est défini de telle sorte qu'une variation d'énergie interne soit compensée par une variation identique du travail des forces extérieures appliquées au solide.

Ce principe des travaux virtuels peut être appliqué à un élément particulier du solide élastique <sup>[Zienkiewicz ; Batoz]</sup>. Ensuite, pour réaliser l'équilibre total du modèle et prendre en compte les différentes conditions aux limites de la structure, il faut réunir les contributions des différents éléments. Ainsi, on introduit les grandeurs globales définissant l'ensemble des déplacements nodaux  $\{U\}$  de la structure soumise à l'ensemble des forces  $\{F\}$ . Le matériau sera considéré dans la suite comme parfait, c'est-à-dire sans atténuation propre.

Par conséquent, après la discrétisation spatiale d'une structure en éléments, le mouvement d'un système non-stationnaire s'écrit sous la forme :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (\text{IV.1.})$$

où:  $\{U\}$  est le vecteur déplacement

$\{\ddot{U}\}$  est le vecteur accélération

$\{F\}$  est le vecteur force

$[M]$  est la matrice de masse

$[K]$  est la matrice de rigidité

### IV.2.3. Résolution numérique

Le problème revient maintenant à chercher  $\{U\}$ , à différents instants  $t$ , vérifiant la relation IV.1 décrite ci-dessus. La résolution numérique, d'après la documentation fournie avec le logiciel ANSYS, utilise une discrétisation temporelle :

$$\begin{aligned}\{\dot{u}_{n+1}\} &= \{\dot{u}_n\} + \left[ (1-\delta)\{\ddot{u}_n\} + \delta\{\ddot{u}_{n+1}\} \right] \Delta t \\ \{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \{\dot{u}_n\} \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - a \right) \{\ddot{u}_n\} + a\{\ddot{u}_{n+1}\} \right] \Delta t^2\end{aligned}$$

où :  $a$  et  $\delta$  sont les paramètres d'intégration de Newmark <sup>[Doc. ANSYS]</sup>

$\Delta t$  est le pas temporel utilisé pour la résolution numérique.

Dans l'étude que nous allons mener, seul le pas temporel  $\Delta t$  est ajusté. Les paramètres  $a$  et  $\delta$  sont laissés égaux à ceux proposés par le logiciel, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a = 0,25251 \\ \delta = 0,50500 \end{cases}$$

Le principe de la méthode des éléments finis étant posé, appliquons celle-ci au cas d'une plaque biseautée.

### IV.3. Cas d'une plaque biseautée dans le vide

La plaque biseautée que nous allons étudier est isotrope. Une modélisation bidimensionnelle ( $Ox_1x_2$ ) de cette structure est tout à fait suffisante en vue de la description de la propagation d'une onde de Lamb si celle-ci est indépendante de  $x_3$  (*Figure IV.2*). En effet, la propagation de ce type d'onde n'est pas associée à des contraintes ou à des déplacements selon la troisième direction ( $Ox_3$ ).

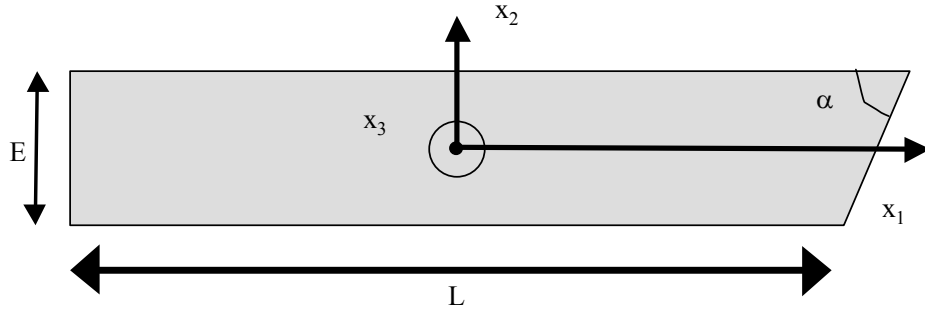


Figure IV.2. : Description spatiale de la plaque biseautée

Pour la suite de l'étude, il est très important de maîtriser la génération du mode de Lamb qui va être incident dans la plaque. En effet, comme nous l'avons vu au cours du deuxième chapitre de cette thèse concernant l'étude expérimentale, il est nécessaire de générer un mode « pur » afin de réaliser une étude quantitative des phénomènes. Ce que l'on entend par « mode pur » est le fait qu'il n'y ait qu'un mode incident présent dans la plaque pour une fréquence donnée.

Les plaques que nous allons étudier sont en acier inoxydable dont les caractéristiques utilisées par ANSYS sont données dans le tableau IV.1. Bien entendu, celles-ci ont été déduites de celles utilisées lors de l'étude théorique, à savoir :  $V_L=5850 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_T=3150 \text{ m.s}^{-1}$ . Les plaques simulées sont longues de 40 mm et épaisses de 2 mm.

Masse Volumique $\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	7800
Module d'Young E ( $\text{kg.m}^{-2}$ )	$2,0043 \cdot 10^{11}$
Coefficient de Poisson $\nu$	0,29

Tableau IV.1. : Caractéristiques de l'acier inoxydable.

### IV.3.1. Maillage et échantillonnage temporel

En vue de l'analyse transitoire par éléments finis que nous nous allons effectuer, deux grandeurs très importantes doivent être paramétrées : le pas temporel utilisé pour la résolution numérique et la taille des éléments composant le maillage spatial de la structure à étudier.

Il est important qu'il y ait au moins 20 éléments par longueur d'onde pour réaliser l'étude d'un phénomène ondulatoire. Pour que cette condition soit vérifiée pour la plus petite longueur d'onde des modes excités, il faut prendre  $\Delta x = 0,1$  mm. Nous pouvons noter que, pour les fréquences étudiées, les déplacements associés aux modes de Lamb n'ont que peu d'oscillations dans l'épaisseur. Ainsi, pour les plaques de dimensions  $40 \times 2$  mm, un maillage de  $400 \times 20$  nœuds est réalisé (sauf dans le biseau où le maillage est triangulaire et plus fin).

Le pas temporel doit donc être tel que  $\Delta t = \frac{\Delta x}{V}$ , où  $V$  est la plus faible des vitesses de phase des ondes en présence dans la plaque.

Afin de confirmer le pas temporel nécessaire pour notre étude, le critère d'optimisation choisi est la bonne concordance entre les courbes de dispersion des ondes de Lamb obtenues par la décomposition en éléments finis et celles vues dans les chapitres précédents. Des études antérieures <sup>[Wilkie-Chancellor (3) ; Morvan]</sup> ont permis de voir que les résultats sont très satisfaisants en prenant  $\Delta t = \frac{T}{48}$ , où  $T = \frac{1}{F}$  est la période temporelle du signal harmonique. Nous prendrons donc ce pas temporel dans la suite de l'étude.

De plus, le calcul par éléments finis exige de limiter au maximum la taille des maillages pour gagner de l'espace mémoire ainsi que du temps de calcul (*Tableau IV.2*). Par conséquent, la réduction de la distance d'établissement du mode incident est primordiale.

Nombre de nœuds composant le maillage	8000
Nombre de pas temporels	900
Taille du fichier résultat	8 Go
Temps de calcul	24 heures

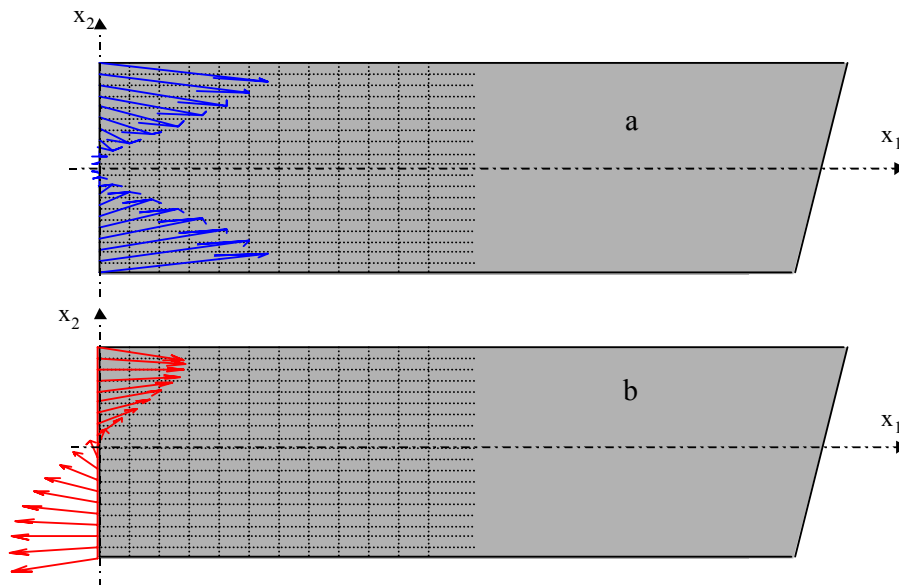
*Tableau IV.2. : Informations sur les calculs réalisés avec le logiciel ANSYS.*



IV.3.2. Génération d'un mode de Lamb

Afin de se rapprocher des conditions expérimentales d'excitation d'un mode de Lamb, la génération peut se faire en simulant une onde plane incidente faisant un angle  $\theta$  par rapport à la normale à la surface de la plaque. Cette méthode présente toutefois l'inconvénient d'être compliquée car les réflexions internes de l'onde incidente dans le coin solide en plexiglass peuvent entraîner la création de modes incidents parasites (voir le Chapitre II). De plus, cette méthode, si proche soit-elle de la réalité expérimentale, a l'inconvénient de nécessiter une longueur de plaque importante pour l'établissement du mode.

Pour générer le mode de Lamb dans la plaque, nous utilisons les grandeurs calculées théoriquement dans le premier chapitre. Les déplacements relatifs de chaque mode de Lamb sont connus en n'importe quel point dans une section droite de la plaque. Nous imposons les composantes normale ( $U_1$ ) et tangentielle ( $U_2$ ) des déplacements de l'onde de Lamb à la première extrémité de la plaque (*Figure IV.3.*).



*Figure IV.3. : Profil de déplacements imposé à la première extrémité de la plaque en vue de la génération du mode de Lamb ( $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ ) : mode  $A_1$  (a), mode  $S_0$  (b).*

Pour obtenir un régime quasi-harmonique, 30 périodes temporelles sont appliquées, les déplacements  $U_1$  et  $U_2$  variant sinusoïdalement en quadrature de phase l'un par rapport à l'autre. Par exemple, dans le cas du mode de Lamb  $A_1$  généré à  $FE=2,7$  MHz.mm, les déplacements imposés à la première extrémité de la plaque sont les suivants :

$$\begin{cases} U_1(x_1 = 0, x_2, t) = U_1^{\text{init}}(x_1 = 0, x_2, t = 0) \sin(\omega t) \\ U_2(x_1 = 0, x_2, t) = U_2^{\text{init}}(x_1 = 0, x_2, t = 0) \cos(\omega t) \end{cases}$$

où  $U_1^{\text{init}}$  et  $U_2^{\text{init}}$  sont les profils des déplacements tangentiels et normaux initiaux calculés pour  $t=0$ .

Comme les déplacements imposés sont ceux d'une onde se propageant dans le sens des  $x_1$  croissants, la distance d'établissement du mode incident est infime.

Mettons en œuvre la méthode dans le cas de l'onde  $A_1$ .

#### **IV.4. Réflexion du mode de Lamb $A_1$ à l'extrémité de la plaque**

Le mode de Lamb  $A_1$  est généré dans la plaque d'acier inoxydable par la méthode décrite dans le paragraphe précédent.

A chaque pas temporel  $\Delta t$ , les déplacements normaux des nœuds positionnés sur la surface de la plaque sont calculés et mémorisés dans l'ordinateur. Nous pouvons donc représenter l'évolution spatio-temporelle de ces déplacements normaux, en surface, lorsque le mode de Lamb  $A_1$  est incident à  $FE=2,5$  MHz.mm et ensuite est réfléchi sur un biseau d'angle  $\alpha=75^\circ$  (*Figure IV.4.*). Sur cette figure, nous constatons que l'onde incidente se propage dans la plaque. Cependant, nous sommes gênés pour visualiser les ondes réfléchies par les multiples réflexions des modes de Lamb aux deux extrémités de la plaque (le biseau et la première extrémité droite de la plaque).

Grâce au traitement qui a été explicité dans le Chapitre II, nous pouvons séparer les ondes allant dans le sens « incident » ( $x_1$  croissant) des ondes se propageant dans le sens opposé ( $x_1$  décroissant). Après cette séparation, le mode  $A_1$  incident, ainsi que les modes de Lamb correspondants à sa réflexion sur le biseau, peuvent être isolés. L'image spatio-temporelle de ce signal épuré est donnée figure IV.5.

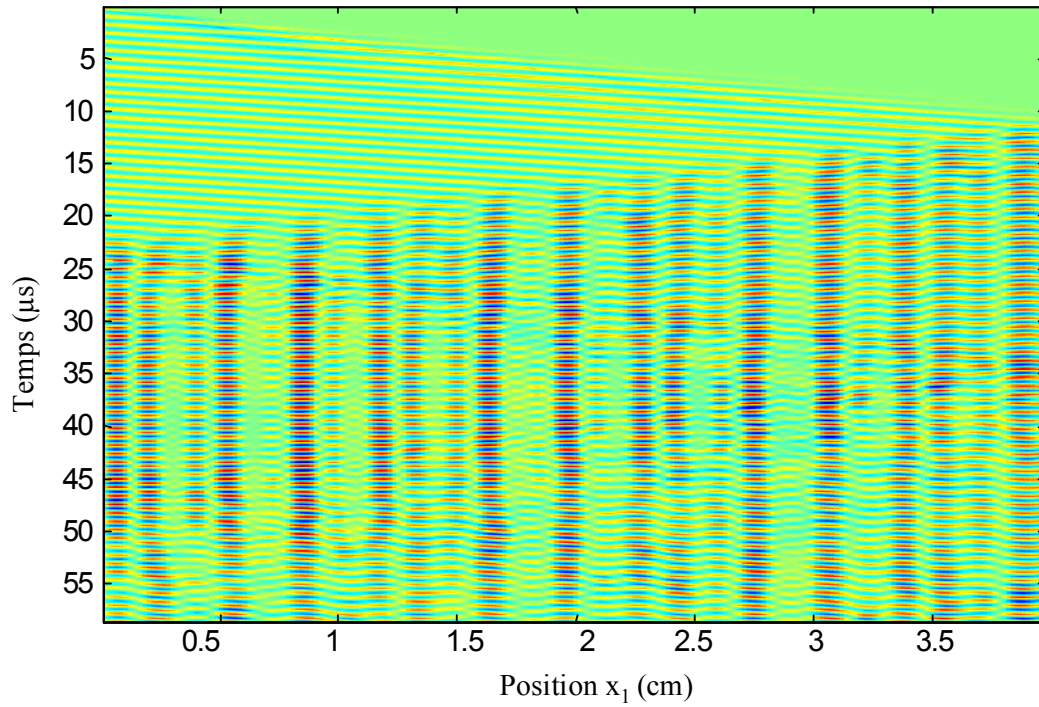


Figure IV.4. : Evolution spatio-temporelle des déplacements  $U_2$  en surface.  
Mode  $A_1$  incident,  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=75^\circ$ .

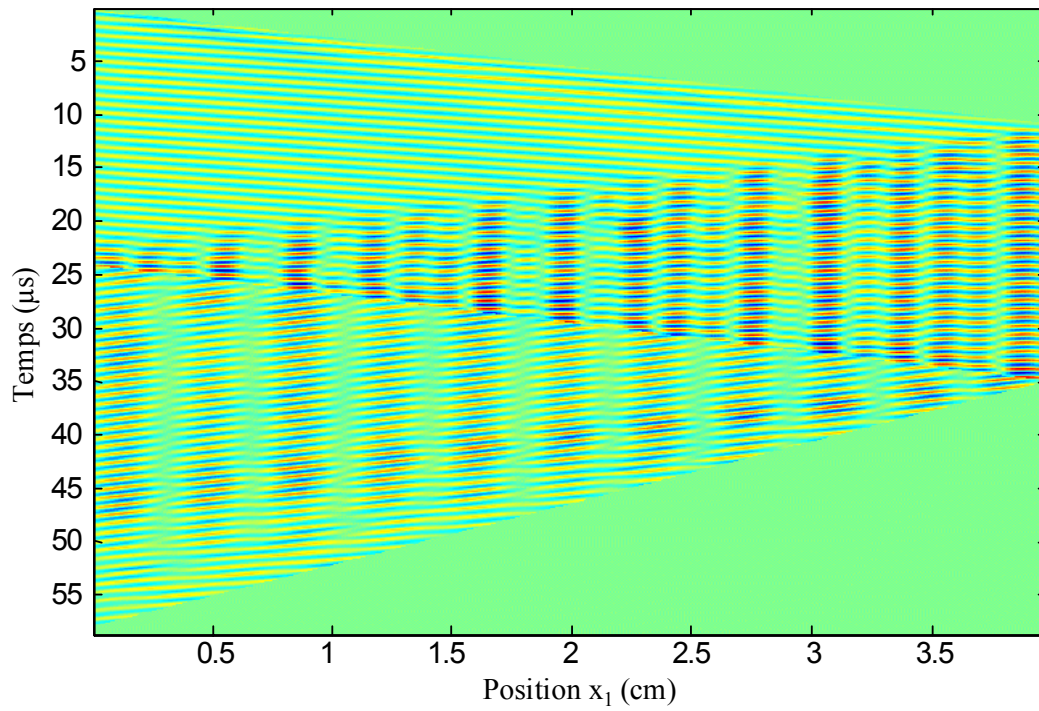


Figure IV.5. : Evolution spatio-temporelle des déplacements  $U_2$  en surface après  
séparation et isolation des modes. Mode  $A_1$  incident,  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=75^\circ$ .

De la même manière que dans le chapitre II, nous représentons les modes de Lamb dans l'espace  $(K, FE)$ , dual de l'espace  $(x_1, t)$ , afin de déterminer les amplitudes des différentes ondes présentes dans la plaque. Ceci est effectué au moyen de deux transformées de Fourier successives (temporelle puis spatiale). Cette représentation « tout-fréquence » est donnée figure IV.6.

La coupe de cette image au produit  $FE$  de génération de l'onde, à savoir  $2,5 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$  dans notre cas, permet de connaître les amplitudes relatives des différents modes de Lamb présents dans la plaque en réflexion (Figure IV.7.).

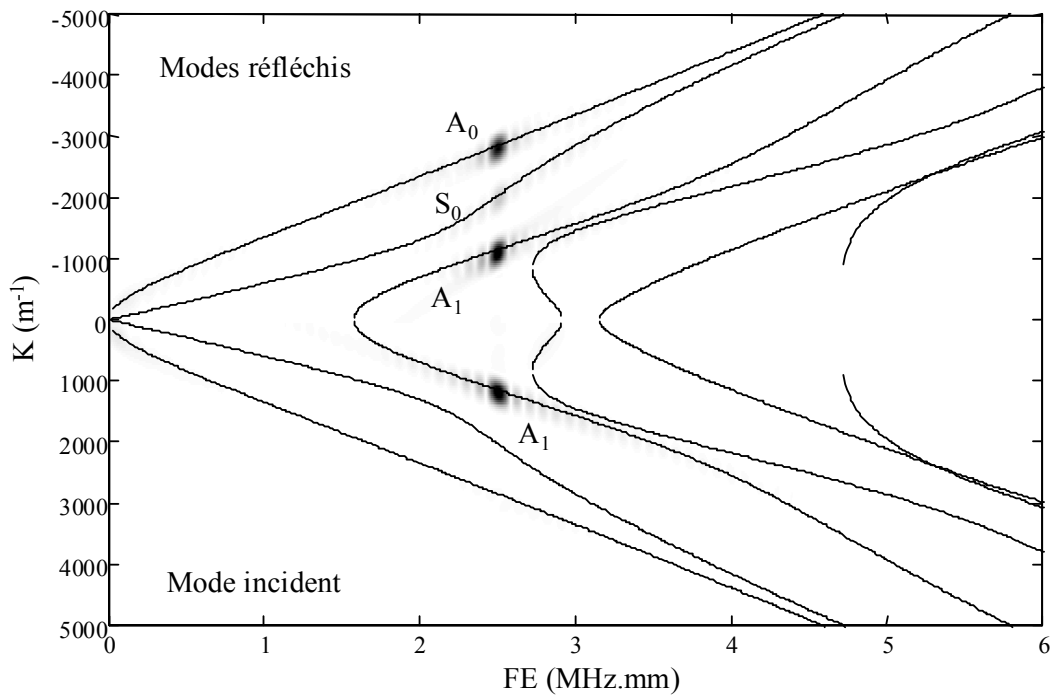


Figure IV.6. : Représentation « tout-fréquence ».

Mode  $A_1$  incident,  $FE=2,5 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$ ,  $\alpha=75^\circ$ .

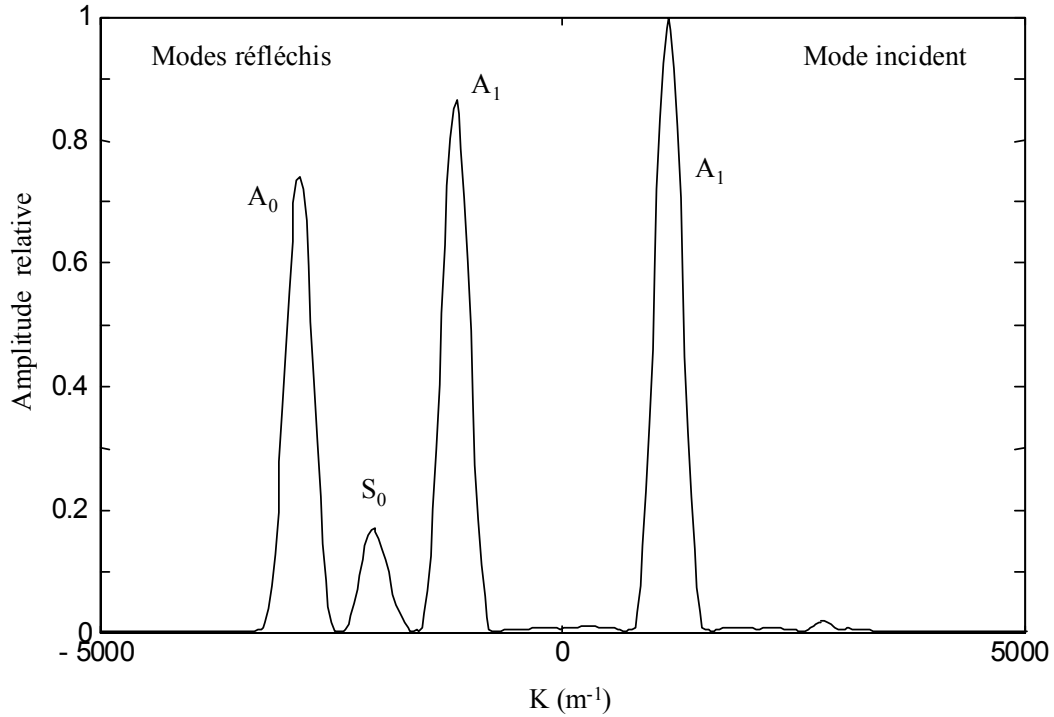


Figure IV.7. : Coupe de la représentation « tout-fréquence » à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ .

Sur cette représentation, nous relevons l'amplitude  $A^{\text{inc}}$  du mode incident et les amplitudes  $A_m^{\text{ref}}$  des modes réfléchis (voir chapitre II).

Rappelons ici que le coefficient théorique  $\zeta$ , reliant l'amplitude du déplacement normal  $U_2$  en surface au flux  $\Phi$  du vecteur de Poynting (vu au Chapitre I), est utilisé afin d'obtenir le pourcentage d'énergie transportée par chaque onde.

L'énergie de l'onde incidente et de la  $m^{\text{ième}}$  onde réfléchie sont alors données par les relations :

$$\phi^{\text{inc}} = \left( \frac{A^{\text{inc}}}{\zeta^{\text{inc}}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \phi_m^{\text{ref}} = \left( \frac{A_m^{\text{ref}}}{\zeta_m^{\text{ref}}} \right)^2$$

Le bilan d'énergie calculé permet de dire que l'énergie du mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$  dans une plaque biseautée à  $\alpha=75^\circ$  se retrouve à 78,1% dans le mode de Lamb réfléchi  $A_1$  alors que les contributions des modes de Lamb  $A_0$  et  $S_0$  sont portées respectivement à 21,4 % et 0,45%.

Bien entendu, ce type d'étude a été mené pour d'autres plaques biseautées. Les résultats obtenus pour 4 valeurs de l'angle  $\alpha$  sont reportés sur la figure IV.8.

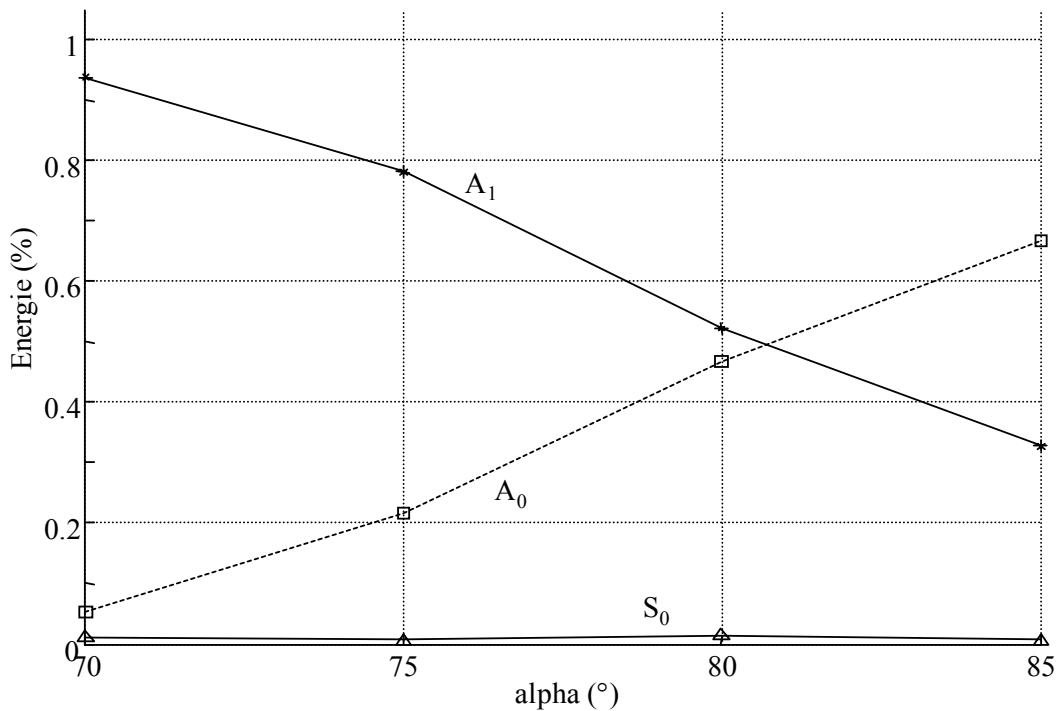


Figure IV.8. : Energies des ondes réfléchies à l'extrémité d'une plaque d'acier biseautée en fonction de l'angle  $\alpha$ . Onde incidente  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm.

#### IV.5. Comparaison Méthode des éléments finis – Modèle théorique

Nous pouvons maintenant comparer les résultats obtenus par la méthode de résolution par éléments finis à ceux donnés par la méthode théorique décrite dans le chapitre III.

La figure IV.9. regroupe les bilans d'énergie obtenus par les deux méthodes pour la réflexion du mode de Lamb  $A_1$  à  $FE=2,5$  MHz.mm sur un biseau d'angle  $\alpha=75^\circ$ .

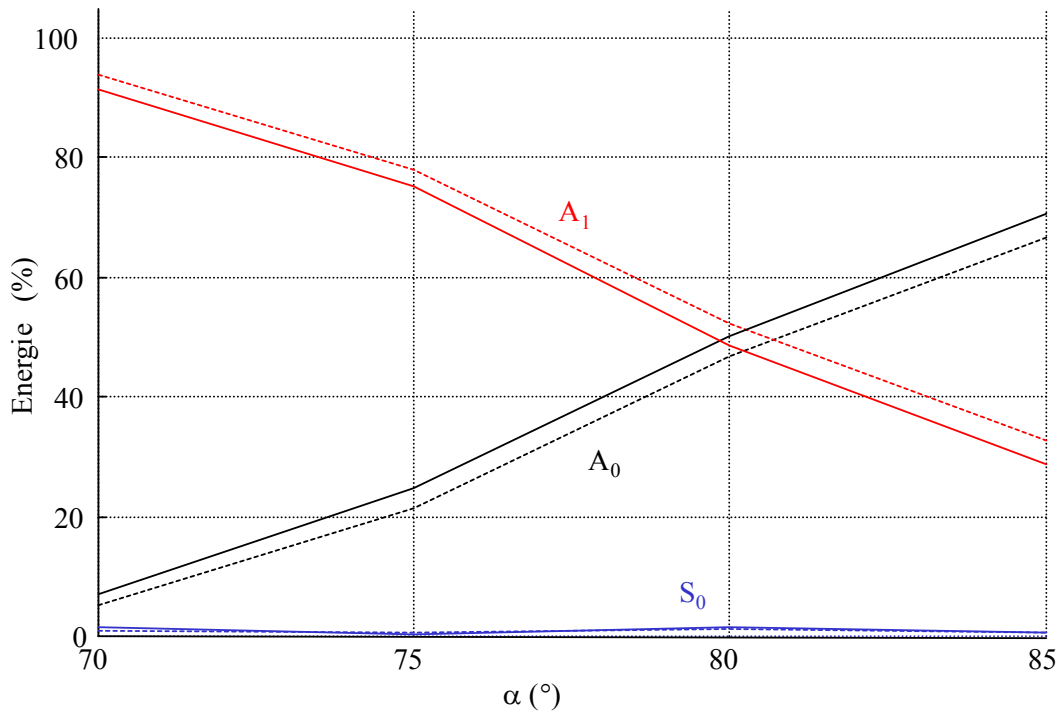


Figure IV.9. : Comparaison Théorie (trait plein) – Eléments finis (trait pointillé).  
Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5$  MHz.mm.

Il est clair que l'étude du problème par la méthode des éléments finis confirme les résultats théoriques obtenus précédemment même si un léger écart persiste.

La réflexion du mode de Lamb  $A_1$  a été également simulée à d'autres produits FE ( $FE=2$  et  $2,7$  MHz.mm). La propagation du mode de Lamb  $S_0$  a aussi été étudiée pour le produit fréquence-épaisseur  $FE=2,7$  MHz.mm.

Dans chacun de ces cas, les résultats théoriques et ceux issus de la simulation par éléments finis sont comparés (Figures IV.10-11-12) et il s'avère que l'accord entre les bilans d'énergie obtenus par les deux méthodes est bon. On peut penser que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont entachés d'une certaine imprécision. Nous ne pouvons pas, avec un matériel informatique standard, augmenter les pas de calcul (spatial et temporel) conduisant à des temps de calculs prohibitifs.

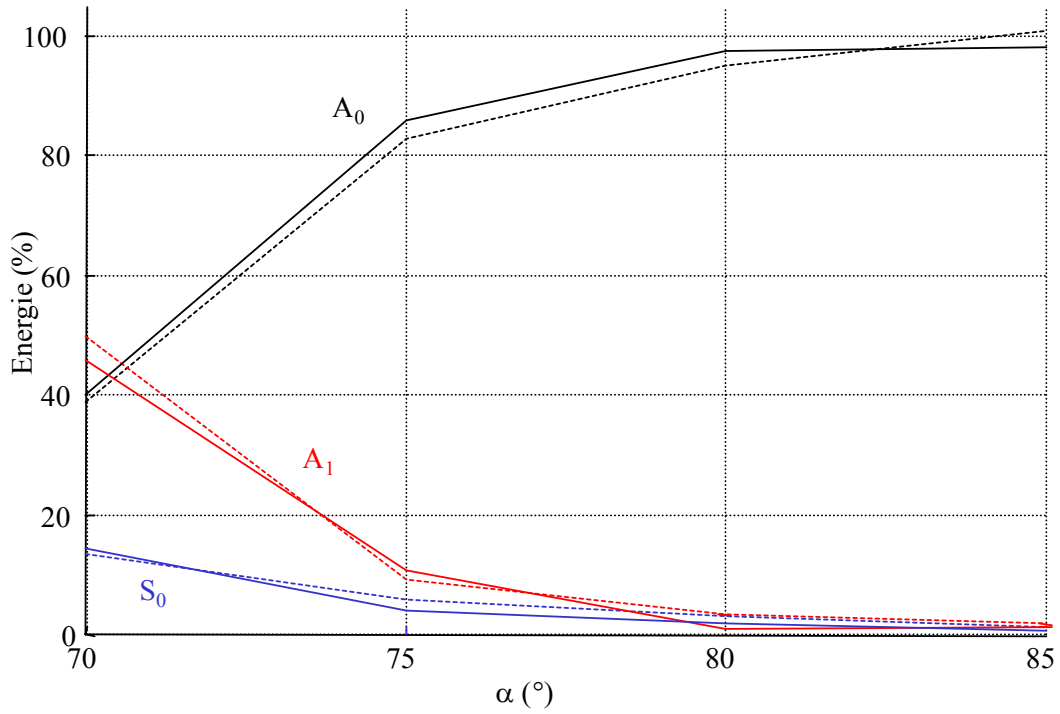


Figure IV.10. : Comparaison Théorie (trait plein) – Eléments finis (trait pointillé).  
Mode  $A_1$  incident à  $FE=2 \text{ MHz.mm}$ .

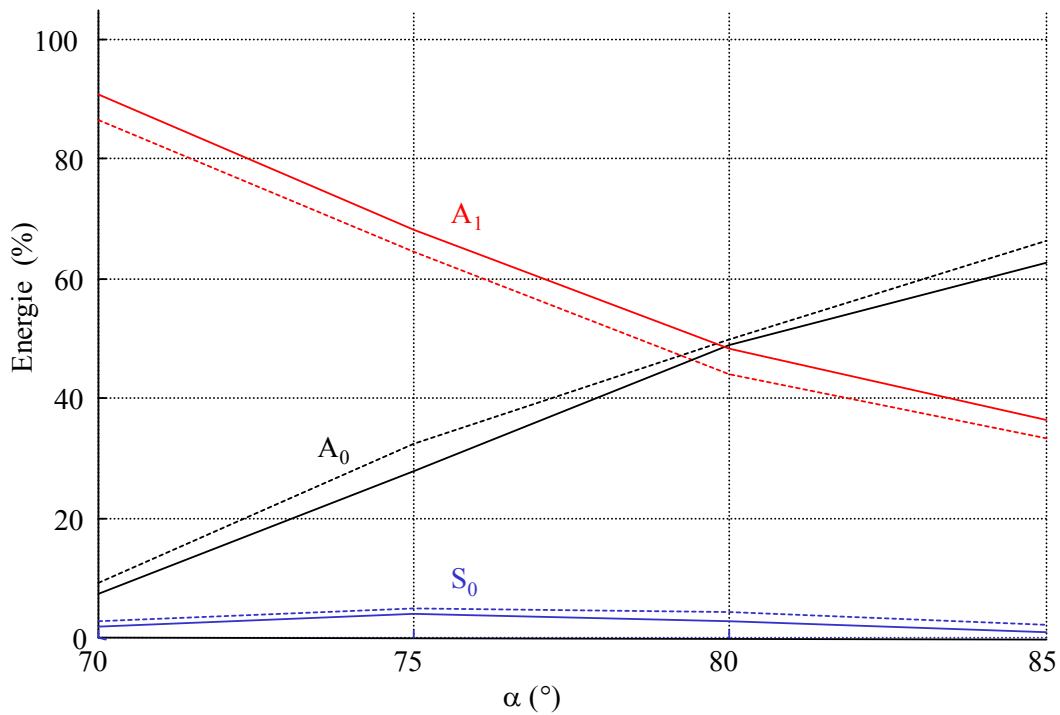


Figure IV.11. : Comparaison Théorie (trait plein) – Eléments finis (trait pointillé).  
Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ .



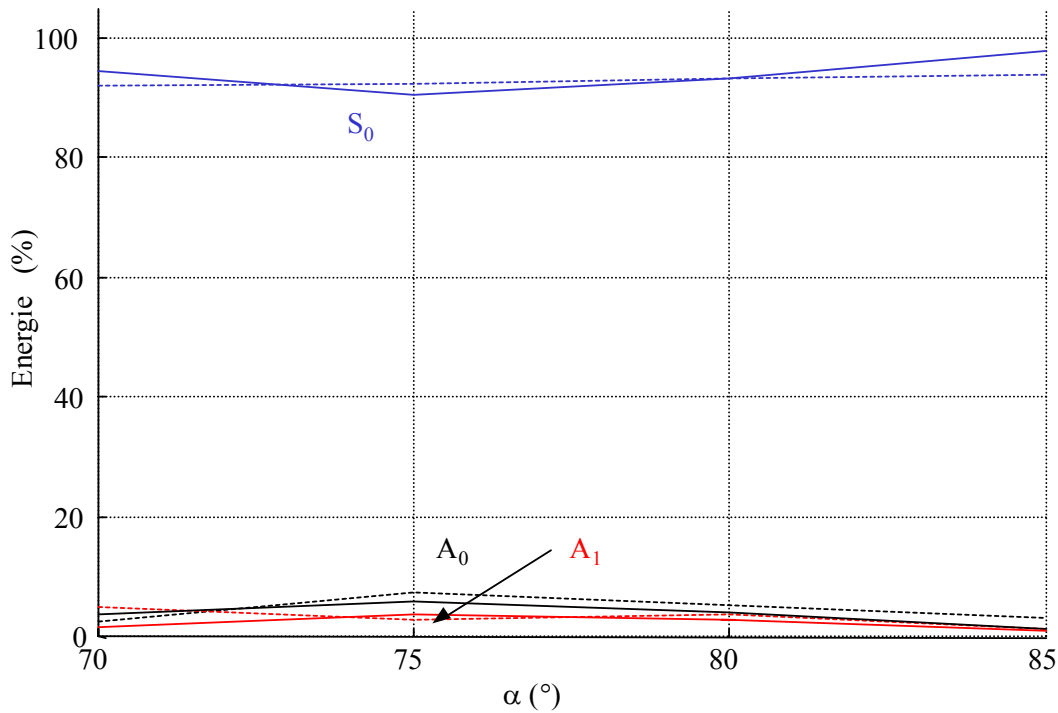


Figure IV.12. : Comparaison Théorie (trait plein) – Eléments finis (trait pointillé).

Mode  $S_0$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ .

On a pu confirmer la méthode théorique en comparant ces bilans d'énergie à ceux réalisés par la simulation par éléments finis. Un autre type de comparaison peut maintenant être mis en œuvre, à savoir la visualisation des déplacements dans la plaque biseautée.

#### IV.6. Comparaison des déplacements dans une coupe $x_3=\text{cte}$

La méthode de résolution par éléments finis fournit également, à chaque instant, le champ de déplacement dans la plaque. Nous pouvons envisager la comparaison qualitative des images calculées théoriquement <sup>[Li ; Hayashi]</sup>.

Le modèle théorique donne les coefficients de pondération en amplitude des ondes présentes dans la plaque. Donc, en reprenant ces coefficients et en les attribuant aux profils de déplacements correspondants, nous pouvons reconstituer théoriquement les déplacements dans la plaque.

Le cas du mode de Lamb  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$  dans une plaque biseautée à  $\alpha=70^\circ$  est traité.

On calcule les déplacements incidents en sommant l'onde incidente et les modes complexes incidents :

$$\underline{U}_i^{\text{total}} = \underline{U}_i^{A_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \underline{r}_m \underline{U}_i^m$$

où :  $\underline{U}_i^{\text{total}}$  est le déplacement incident théorique total.

$\underline{U}_i^{A_1}$  et  $\underline{U}_i^m$  sont respectivement les déplacements incidents théoriques du mode de Lamb  $A_1$  et des modes complexes.

La figure IV.13. regroupe les déplacements ( $U_1$  et  $U_2$ ) des modes incidents théoriques (a) et issus de la simulation par éléments finis (b). Dans ce cas, la visualisation est obtenue à l'instant où l'onde incidente atteint l'extrémité biseautée.

Sur la figure ci-dessous, nous vérifions une fois de plus la qualité de la génération du mode incident dans la plaque grâce à la comparaison des différentes images obtenues au même instant.

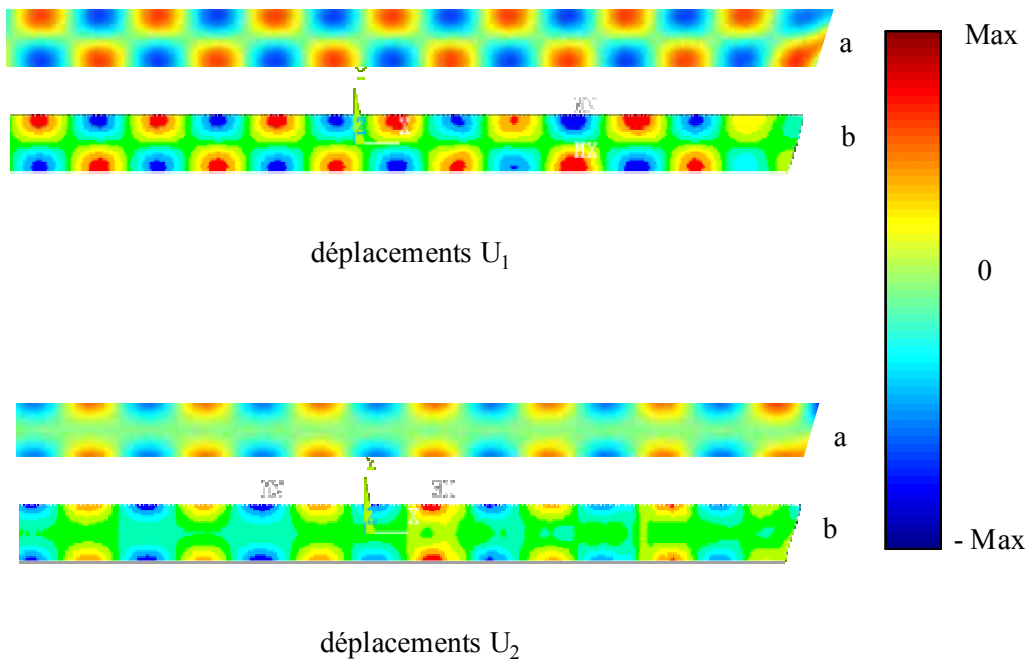


Figure IV.13. : Comparaison du champ de déplacements incidents dans la plaque.  
 Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ : Théorie (a), Eléments finis (b).

On calcule les déplacements résultants des modes réfléchis (ondes de Lamb et modes complexes) :

$$\underline{U}_i^{\text{total}} = \underline{r}_{A_1} \underline{U}_i^{A_1} + \underline{r}_{S_0} \underline{U}_i^{S_0} + \underline{r}_{A_0} \underline{U}_i^{A_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \underline{r}_m \underline{U}_i^m$$

où :  $\underline{U}_i^{\text{total}}$  est le déplacement réfléchi théorique total.

$\underline{U}_i^{A_1}$ ,  $\underline{U}_i^{S_0}$ ,  $\underline{U}_i^{A_0}$  et  $\underline{U}_i^m$  sont respectivement les déplacements réfléchis théoriques des modes de Lamb  $A_1$ ,  $S_0$  et  $A_0$  ainsi que des modes complexes.

Le champ de déplacement résultant des modes réfléchis est reporté sur la figure IV.14. Sur cette figure, nous noterons une bonne concordance entre les maxima et les minima d'amplitude des deux images.

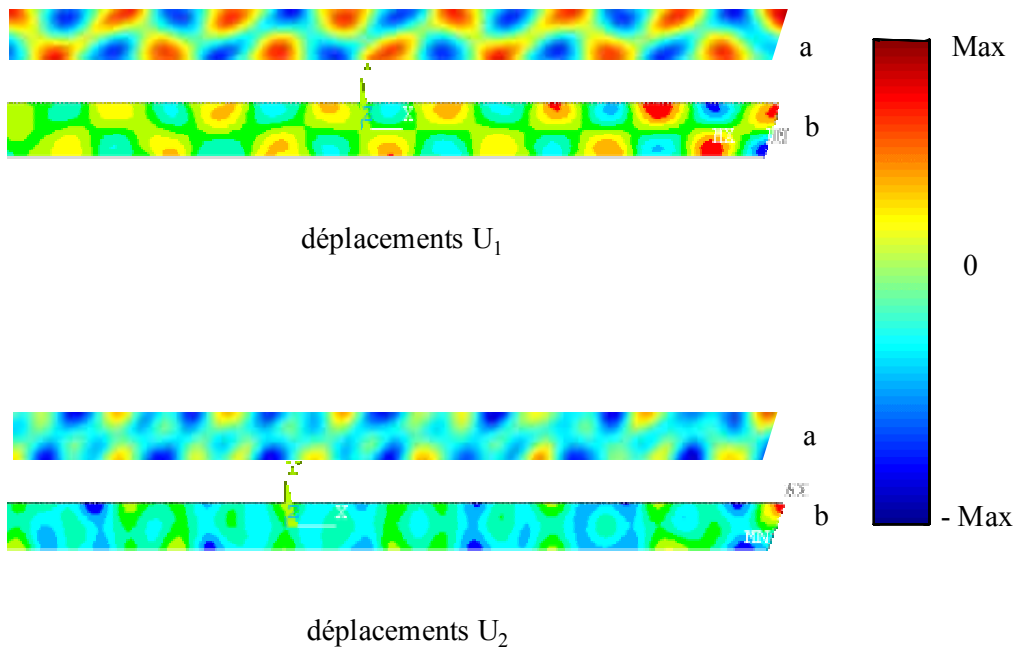


Figure IV.14. : Comparaison du champ de déplacements réfléchis dans la plaque.

Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ : Théorie (a), Eléments finis (b).

#### **IV.7. Conclusion**

Nous avons montré dans ce chapitre que la méthode de résolution par décomposition en éléments finis peut être utilisée pour l'étude de la propagation d'une onde guidée dans une plaque. La technique de génération d'un mode de Lamb a fait ses preuves et s'avère particulièrement adaptée à ce problème où les dimensions des structures étudiées sont limitées.

Grâce aux déplacements normaux calculés à la surface de la plaque par le logiciel ANSYS, nous avons déterminé les amplitudes des modes de Lamb incident et puis nous les avons reliées aux énergies correspondantes, ce qui a permis d'établir la répartition de l'énergie véhiculée par le mode de Lamb incident entre les différents modes de Lamb réfléchis.

Les bilans d'énergie obtenus par cette méthode ont été comparés aux résultats théoriques. Les données issues de la simulation par éléments finis confirment l'étude théorique menée dans le chapitre III.

Cette comparaison est très globale. Nous avons proposé une comparaison plus fine entre les deux méthodes : la représentation imagée des déplacements dans une coupe de la plaque à un instant donné. Celle-ci montre que le calcul théorique rend bien compte de l'interaction des ondes avec le biseau.

---

# CHAPITRE V

## Validité de la décomposition modale

---

### V.1. Introduction

### V.2. Déplacements dans l'épaisseur de la plaque

### V.3. Recherche de l'énergie dans les coupes. Principe

### V.4. Résultats et comparaisons

V.4.1. Réflexion du mode  $A_1$  sur un bord droit (FE=2,7 MHz.mm)

V.4.2. Réflexion du mode  $A_1$  sur un biseau de  $70^\circ$  (FE=2,5 MHz.mm)

V.4.3. Réflexion du mode  $A_1$  sur un biseau de  $70^\circ$  (FE=2.7 MHz.mm)

*V.4.3.1. Influence des premiers modes complexes*

*V.4.3.2. Prise en compte des modes complexes*

### V.5. Conclusion

### **V.1. Introduction**

Rappelons que l'essentiel des études menées dans les chapitres précédents a été fait sur des résultats acquis à la surface de la plaque. Les ondes de Lamb sont alors visualisées en fonction du temps et de la distance de propagation (représentation  $(x_1, t)$ ). Les mesures ainsi réalisées ne donnent donc qu'une vue globale des phénomènes de réflexion et de conversion d'un mode de Lamb à l'extrémité biseautée de la plaque. Seules les observations du chapitre précédent (paragraphe IV.6.) précisent, qualitativement, le champs de déplacements.

On peut penser que la représentation transversale donnera une vue plus locale de ces phénomènes pour comprendre leur évolution au cours de leur propagation en réflexion. C'est pourquoi, dans ce chapitre, une étude de l'intérieur de la plaque est mise en œuvre, c'est-à-dire dans des coupes réalisées selon l'épaisseur de celle-ci. En recherchant les modes de Lamb dans des sections de plaque, nous avons accès à des informations différentes de celles obtenues précédemment. En particulier, on peut déceler la présence d'ondes non observables en surface.

Pour cela, l'étude de la propagation d'un mode de Lamb est simulée avec le logiciel ANSYS et les relevés des déplacements sont effectués non plus à la surface de la plaque mais dans des coupes situées à plusieurs distances du biseau. Un bilan d'énergie est réalisé dans chaque coupe. L'ensemble des bilans d'énergie obtenus peuvent être comparées aux bilans théoriques pour plusieurs angles de biseau ainsi que pour des produits fréquence-épaisseur différents.

## **V.2. Déplacements dans l'épaisseur de la plaque**

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les calculs réalisés avec la méthode de résolution par éléments finis donnent les mêmes résultats que ceux obtenus avec le modèle théorique décrit dans le Chapitre III.

Dans le cas de la méthode par éléments finis, l'amplitude attribuée à un mode de Lamb particulier est en fait une valeur moyenne calculée sur la fenêtre  $(x_1, t)$  de traitement alors que le calcul théorique fournit l'amplitude constante du mode de Lamb n'importe où dans la plaque biseautée. Nous sommes donc amenés à chercher les énergies transportées par les modes de Lamb à partir des déplacements relevés dans des coupes de la plaque biseautée (suivant  $Ox_2$ ) afin de vérifier que les résultats sont identiques.

Pour ce faire, après avoir simulé la propagation d'une onde de Lamb quasi-harmonique dans la plaque comme cela a été expliqué dans le chapitre IV, nous relevons les déplacements normaux et tangentiels ( $U_2$  et  $U_1$ ) dans différentes sections droites de la plaque. Ces coupes sont localisées de 4 à 30 mm du biseau, en s'éloignant de celui-ci par pas de 2 mm. Ainsi, les évolutions temporelles des déplacements dans l'épaisseur de la plaque sont connues.

Des exemples de ces évolutions temporelles sont donnés figures V.1 et V.2 pour des relevés effectués dans une section placée à 20 mm du biseau dans le cas où le mode de Lamb  $A_1$  est incident à  $FE=2,7$  MHz.mm dans une plaque biseautée à  $\alpha=70^\circ$ .

Les études précédentes nous ont permis de savoir quels sont les modes réfléchis en présence dans la plaque biseautée. Connaissant les vitesses d'énergie théoriques de ces ondes, nous pouvons identifier sur ces figures (V.1. et V.2.) les faisceaux incident et réfléchi ainsi que les différents temps de passage des modes de Lamb réfléchis. Ceci est important car, pour la recherche de la répartition de l'énergie incidente, il faut être certain de prendre en compte tous les modes de Lamb réfléchis.

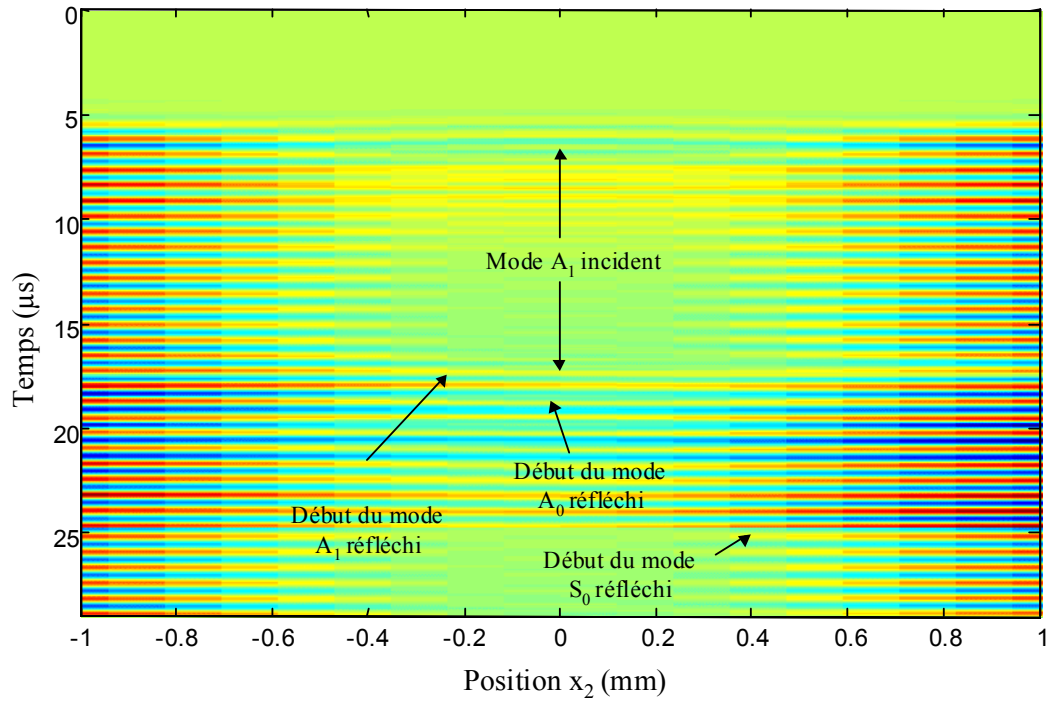


Figure V.1. : Evolution spatio-temporelle des déplacements  $U_2$ .  
 Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ . Relevé à 20 mm du biseau.

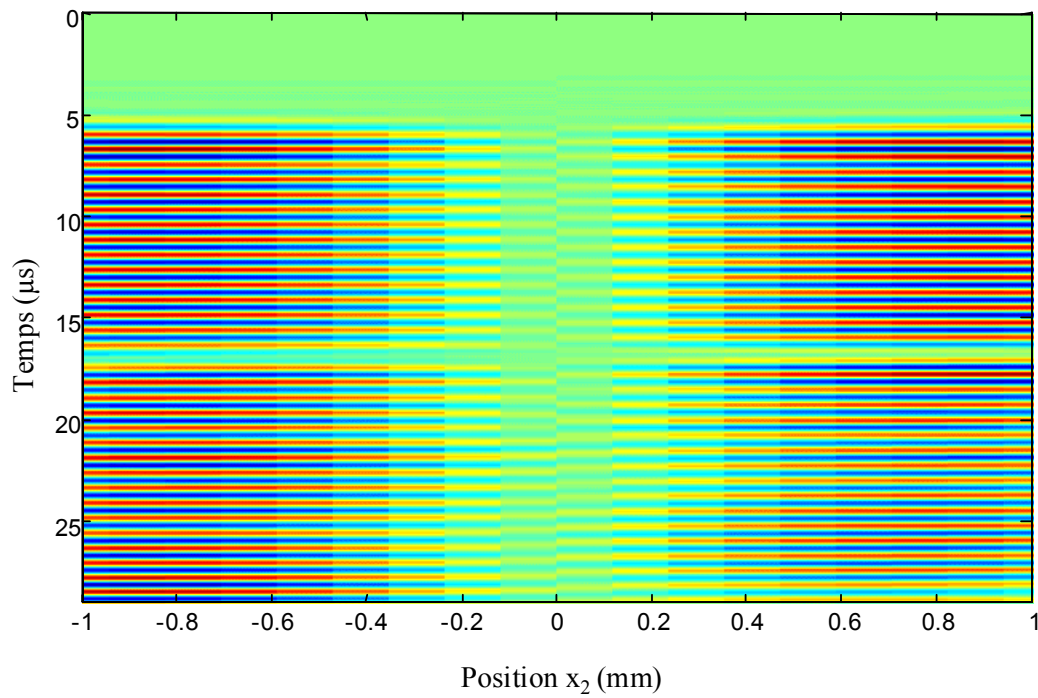


Figure V.2. : Evolution spatio-temporelle des déplacements  $U_1$ .  
 Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ . Relevé à 20 mm du biseau.



Maintenant que les profils des déplacements normaux et tangentiels sont connus grâce à la méthode de résolution par éléments finis, nous pouvons rechercher la répartition de l'énergie incidente proprement dit.

### V.3. Recherche de l'énergie dans les coupes. Principe

La recherche des énergies transportées par les modes de Lamb réfléchis est basée sur une recherche de profils de déplacements.

Nous avons calculé théoriquement les profils des déplacements des modes réfléchis (Figure V.3) : il s'agit de déplacements « absolus ». Il est maintenant possible de trouver la proportion de chaque profil théorique présent dans le résultat donné par la méthode des éléments finis dans les sections de la plaque biseautée.

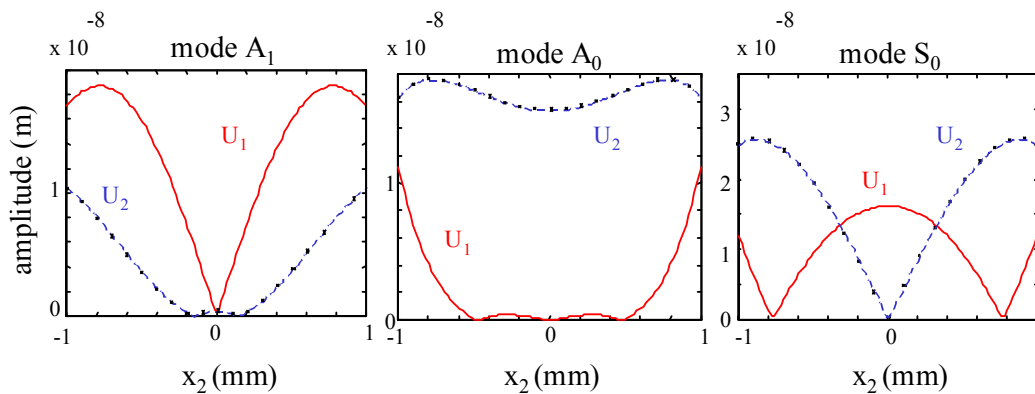


Figure V.3. : Profils théoriques des modules d'amplitudes des modes de Lamb.  
( $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ )

Cependant, les déplacements fournis par le logiciel ANSYS sont des valeurs réelles. Or, le calcul théorique est effectué en notation complexe. Il nous faut donc trouver les grandeurs complexes dont la partie réelle est le signal obtenu par la simulation. Pour ce faire, on réalise une transformée de Fourier du signal temporel des déplacements à  $x_2$  constant. Cette transformée de Fourier donne le module  $U_{\max}$  ainsi que le déphasage  $\varphi$  du signal à  $t=0$ . Nous pouvons maintenant reconstruire le déplacement :

$$\underline{U} = U_{\max} \exp(j\varphi)$$

La recherche des profils de déplacements peut est mise en œuvre avec toutes les grandeurs complexes.

En effet, si les déplacements fournis par l'étude par éléments finis sont notés  $\underline{U}_i^{\text{FEM}}$  ( $i$  étant égal à 1 ou 2) et les profils des déplacements théoriques des modes de Lamb  $A_0$ ,  $S_0$  et  $A_1$  sont respectivement  $\underline{U}_i^{A_0}$ ,  $\underline{U}_i^{S_0}$  et  $\underline{U}_i^{A_1}$ , le problème d'identification revient à trouver les coefficients de pondération  $\underline{r}_1$ ,  $\underline{r}_2$  et  $\underline{r}_3$  tels que l'équation complexe suivante soit vérifiée :

$$\underline{U}_i^{\text{FEM}}(x_2) = \underline{r}_1 \underline{U}_i^{A_1}(x_2) + \underline{r}_2 \underline{U}_i^{S_0}(x_2) + \underline{r}_3 \underline{U}_i^{A_0}(x_2) \quad (\text{V.1.})$$

Les coefficients  $\underline{r}_m$  sont calculés avec la même méthode de collocation que celle expliquée lors de l'étude théorique menée au chapitre III de cette thèse.

Une fois que les coefficients de pondération moyens sont connus, l'énergie transportée par chaque mode réfléchi est calculée avec la relation :

$$P_i = \underline{r}_i \underline{r}_i^*$$

puisque l'onde véhicule 1W lorsque  $|\underline{r}_i| = 1$ .

Les énergies des différentes ondes réfléchies par le biseau sont calculées de cette manière dans différentes sections droites de la plaque et comparées aux résultats donnés par la méthode théorique.

#### **V.4. Résultats et comparaisons**

Pour tester valablement la méthode, il faut utiliser un signal dans lequel existent tous les modes de Lamb possibles dans la plaque biseautée.

##### **V.4.1. Réflexion du mode $A_1$ sur un bord droit (FE=2,7 MHz.mm)**

La figure V.4. regroupe les résultats obtenus pour la recherche des énergies transportées par les modes réfléchis dans le cas où le mode de Lamb  $A_1$  est incident à FE=2,7

MHz.mm dans une plaque d'extrémité droite ( $\alpha=90^\circ$ ). Sur cette figure, les valeurs théoriques des énergies réfléchies fournies par le modèle du chapitre III sont rappelées (courbes en pointillées) afin de vérifier s'il y a bien concordance entre les deux types de résultats.

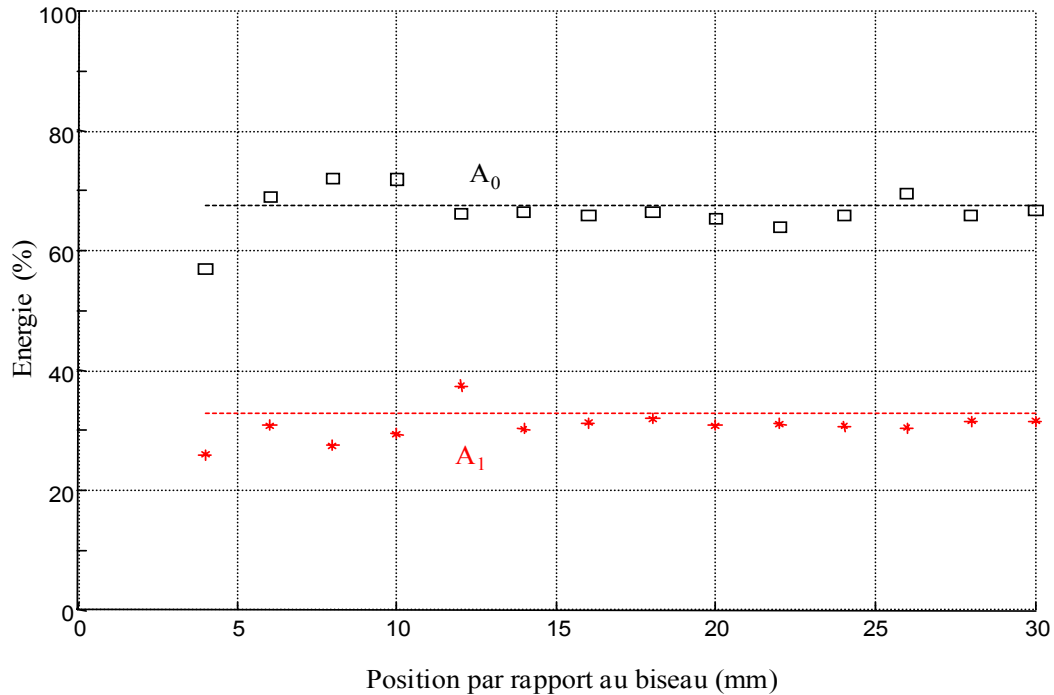


Figure V.4. : Bilans d'énergie réalisés dans différentes coupes de la plaque.

Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7$  MHz.mm,  $\alpha=90^\circ$ .

Nous pouvons remarquer que les résultats obtenus dans les coupes convergent vers les valeurs théoriques malgré quelques variations. Ces résultats, ainsi que d'autres études menées dans d'autres cas, montrent que la méthode utilisée pour la recherche des amplitudes des ondes réfléchies comporte une incertitude absolue de l'ordre de 4 points pour les énergies.

Connaissant l'erreur de la méthode, on peut dire que les énergies des modes de Lamb réfléchis ainsi trouvées sont en bon accord avec les valeurs obtenues théoriquement.

Réciproquement, les ondes présentes dans les coupes à partir de 5 mm du biseau sont bien des ondes de Lamb.

V.4.2. Réflexion du mode  $A_1$  sur un biseau de  $70^\circ$  ( $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ )

Par ailleurs, un autre cas a été étudié : le mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$  dans une plaque biseautée à  $\alpha=70^\circ$ . L'évolution des énergies des modes réfléchis est reportée Figure V.5.

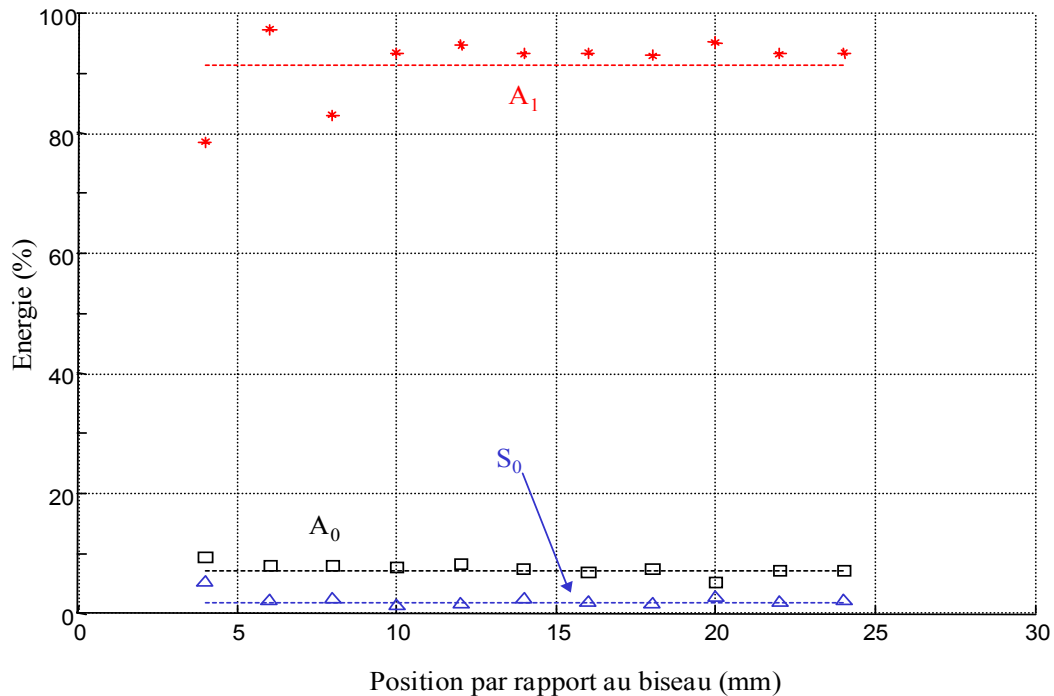


Figure V.5. : Bilans d'énergie réalisés dans différentes coupes de la plaque.  
Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,5 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ .

Les valeurs des énergies trouvées convergent vers les valeurs théoriques connues.

Dans les deux cas que nous venons de traiter, les résultats obtenus sont bons. Cependant, il peut exister des configurations (suivant l'angle  $\alpha$  et le produit  $FE$ ) pour lesquelles il faut faire preuve de délicatesse dans la recherche de la proportion des profils de déplacements théoriques dans l'épaisseur. La réflexion du mode de Lamb  $A_1$  sur un biseau de  $70^\circ$  à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$  est un de ces cas.

V.4.3. Réflexion du mode  $A_1$  sur un biseau de  $70^\circ$  ( $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ )

La même étude a donc été réalisée lors de la propagation de ce mode dans une plaque biseautée par un angle  $\alpha$  égal à  $70^\circ$  pour  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$  (Figure V.6.).

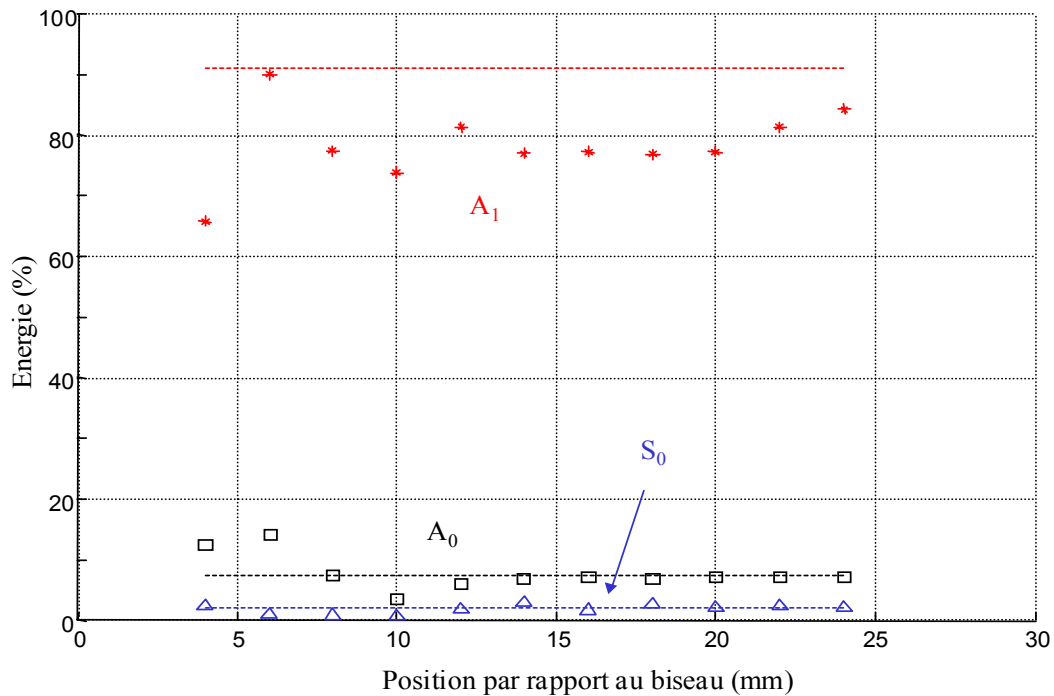


Figure V.6. : Bilans d'énergie réalisés dans différentes coupes de la plaque.

Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ .

Dans ce cas, les valeurs des énergies convergent mais un désaccord apparaît entre l'énergie théorique du mode de Lamb  $A_1$  réfléchi et l'énergie de ce mode trouvée dans les coupes. Il est cependant possible d'expliquer ce désaccord en regardant les modes existants dans la plaque à ce produit fréquence-épaisseur. Pour cela, il faut admettre que les seules ondes de Lamb sont insuffisantes pour exprimer les déplacements dans les coupes.

### V.4.3.1. Influence des premiers modes complexes

A ce produit fréquence-épaisseur précis ( $FE=2,7$  MHz.mm), les composantes  $\underline{k}_1$  des premiers modes en présence dans la plaque sont les suivantes :

- Mode de Lamb  $A_0$  :  $\underline{k}_1 = 3051,12 \text{ m}^{-1}$
- Mode de Lamb  $S_0$  :  $\underline{k}_1 = 2382,58 \text{ m}^{-1}$
- Mode de Lamb  $A_1$  :  $\underline{k}_1 = 1315,24 \text{ m}^{-1}$
- Première paire de modes complexes (type S) :  $\underline{k}_1 = \pm 853,54 + j 206,06 \text{ m}^{-1}$
- Première paire de modes complexes (type A) :  $\underline{k}_1 = \pm 1418,87 + j 3043,56 \text{ m}^{-1}$

Si on trace l'évolution de l'amplitude des deux premiers modes complexes à partir du biseau, on peut voir que l'amplitude du premier mode S décroît assez lentement avec la distance par rapport au biseau (*Figure V.7*).

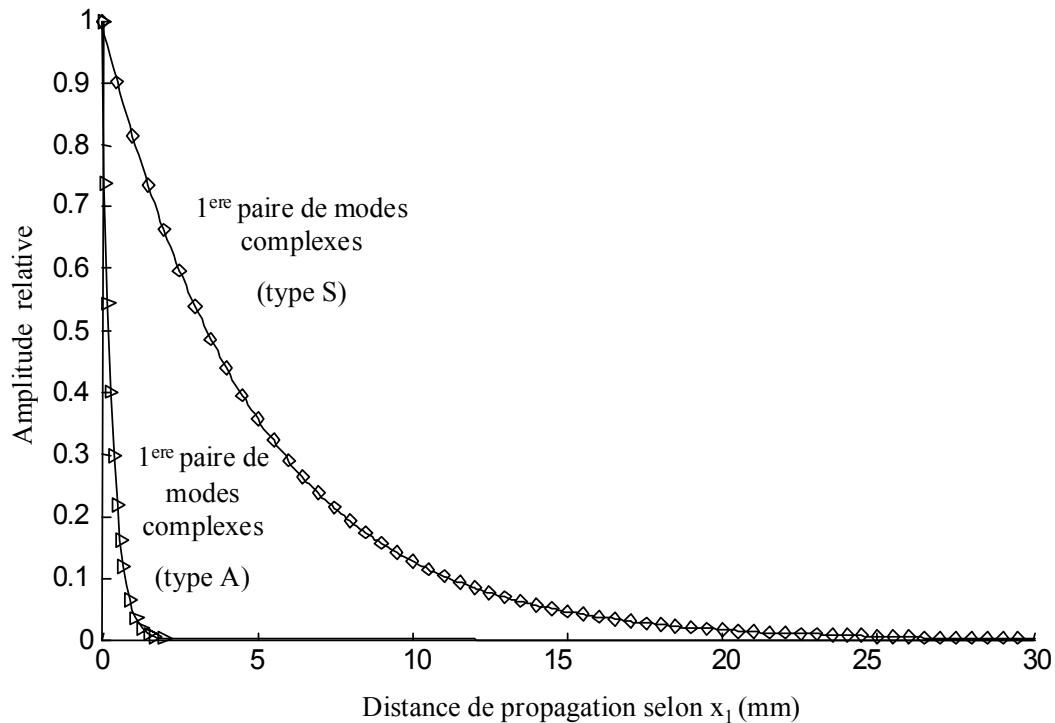


Figure V.7. : Décroissance de l'amplitude des deux premiers modes complexes.

$FE=2,7$  MHz.mm.

Le premier mode S peut donc interférer assez fortement avec les modes de Lamb dans la recherche des amplitudes des modes que nous effectuons à des distances de quelques millimètres. Comme ce mode est un mode de type symétrique, il n'est donc excité que pour des angles de biseau différents de  $90^\circ$  puisque le mode de Lamb incident est de type antisymétrique et n'intervenait pas dans le cas du paragraphe V.4.1. (mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).

Les autres modes complexes ont tous des parties imaginaires  $k''$  supérieures et ont seulement de l'influence auprès du biseau. Ceci explique les résultats non satisfaisants dans cette zone.

C'est pourquoi les résultats obtenus sont meilleurs dans le cas de la réflexion du mode de Lamb sur une extrémité droite par rapport à ceux fournis par l'étude de la réflexion par un biseau de  $70^\circ$ .

#### *V.4.3.2. Prise en compte des modes complexes*

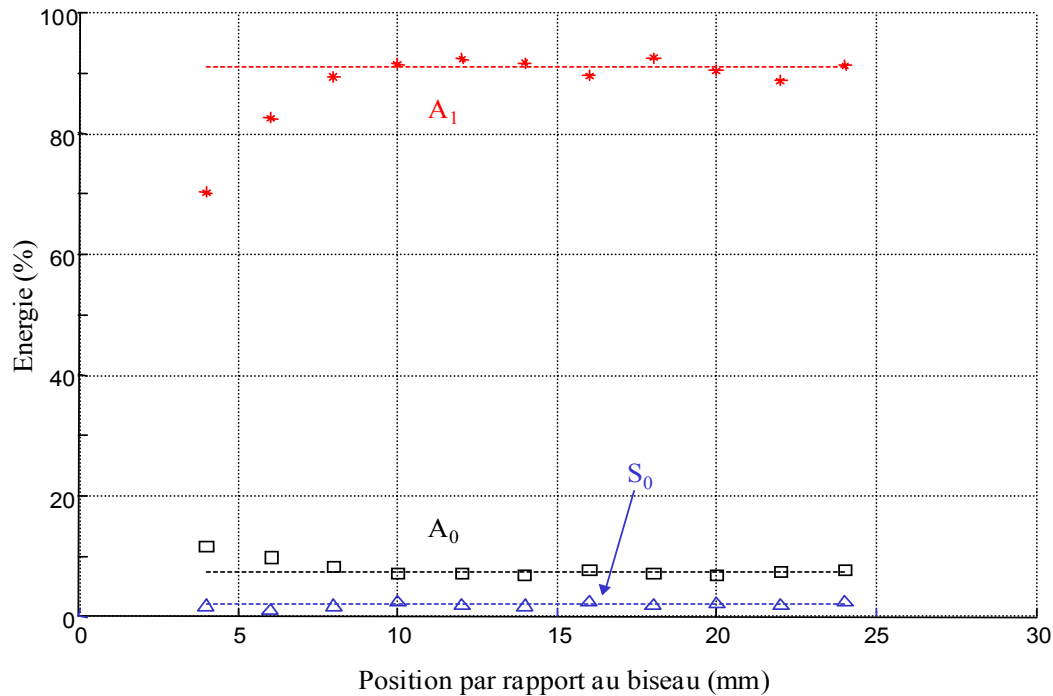
Ainsi, afin de vérifier que le désaccord existant entre les valeurs théoriques et celles obtenues par recherche dans les coupes de la plaque n'est dû qu'à ce mode complexe, nous avons réalisé la même étude que précédemment mais en prenant en compte cette fois-ci dans le calcul des coefficients de la première paire de modes complexes S et en négligeant la première paire de complexe A.

Par conséquent, l'équation V.1. à résoudre devient :

$$\underline{U}_i^{\text{FEM}}(x_2) = \underline{r}_1 \underline{U}_i^{A_1}(x_2) + \underline{r}_2 \underline{U}_i^{S_0}(x_2) + \underline{r}_3 \underline{U}_i^{A_0}(x_2) + \underline{r}_4 \underline{U}_i^{C_1}(x_2) + \underline{r}_5 \underline{U}_i^{C_2}(x_2)$$

où:  $\underline{U}_i^{C_1}$  et  $\underline{U}_i^{C_2}$  sont les profils de déplacements de la première paire de modes complexes symétriques (« positif » ( $\underline{k}'_1 > 0$ ), ou « négatif » ( $\underline{k}'_1 < 0$ )).

Après calcul des coefficients  $r_m$  dans ce cas, nous pouvons retracer l'évolution de la répartition de l'énergie en fonction de la distance de propagation par rapport au biseau (*Figure V.8.*). Bien entendu, seuls les coefficients attribués aux modes de Lamb sont pris en compte pour le calcul des énergies transportées.



*Figure V.8. : Bilans d'énergie réalisés dans différentes coupes de la plaque avec prise en compte des premiers modes complexes. Mode  $A_1$  incident à  $FE=2,7 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=70^\circ$ .*

Sur cette nouvelle figure, nous voyons clairement que les valeurs des énergies transportées par les modes de Lamb réfléchis convergent vers les valeurs obtenues par la méthode théorique. Ceci prouve que les modes complexes existant au niveau du biseau modifient les amplitudes des modes de Lamb réfléchis (en particulier le mode  $A_1$  dans notre cas).

Nous pouvons noter que, dans tous les cas que nous venons de traiter, les valeurs des énergies des modes de Lamb réfléchis se stabilisent autour des valeurs théoriques après une distance de propagation en réflexion de 10mm. Ce résultat peut être mis en relation avec les indications de Lowe <sup>[Lowe (3)]</sup> selon lesquelles la distance nécessaire pour que les modes non-



propagatifs soient totalement atténués est égale à 5 fois l'épaisseur de la plaque. Cette épaisseur est de 2 mm dans notre cas.

### **V.5. Conclusion**

Nous avons vu dans ce chapitre que des bilans d'énergie peuvent être calculés à partir des déplacements relevés dans l'épaisseur de la plaque. Des bilans ont été faits à plusieurs distances du biseau pour deux valeurs d'angle différentes. Ces résultats donnent des informations plus locales que celles obtenues avec les bilans effectués sur les déplacements en surface. Des comparaisons ont été réalisées avec les valeurs théoriques des énergies transportées par les modes de Lamb réfléchis calculées au chapitre III. Nous avons pu noter la bonne concordance qui existe entre les résultats obtenus par les différentes méthodes.

Les énergies transportées par les ondes de Lamb réfléchies ont été comparées, en une position  $x_1$  donnée, aux valeurs théoriques qui en sont bien les valeurs moyennes. Ce résultat est obtenu à condition de prendre en compte, dans l'identification des déplacements, tous les modes importants : ondes de Lamb et modes complexes. Dans la plupart des cas, seuls les modes de Lamb suffisent à une distance de quelques millimètres. Au voisinage du biseau, il est clair que la prise en compte de nombreux modes complexes est indispensable.

---

# CHAPITRE VI

## « Mode de bout »

---

### **VI.1. Introduction**

### **VI.2. Etude en régime permanent sinusoïdal**

VI.2.1. Etude de la convergence des solutions

VI.2.2. Etude des amplitudes des modes réfléchis

*VI.2.2.1. En fonction du produit FE*

*VI.2.2.2. Dans l'épaisseur*

*VI.2.2.3. En fonction de l'angle  $\alpha$*

*VI.2.2.4. En fonction de la position  $x_1$*

### **VI.3. Etude en régime quasi-harmonique**

VI.3.1. Déplacements à l'extrémité pour différents angles de biseau

VI.3.2. Bilans d'énergie pour différentes valeurs de  $\alpha$

### **VI.4. Conclusion**

### **VI.1. Introduction**

Comme nous venons de le voir dans le chapitre précédent, il existe des produits fréquence-épaisseur pour lesquels les premiers modes complexes ont une atténuation très lente suivant la direction de propagation des ondes. De même, si le mode de Lamb incident sur le biseau est un mode de type symétrique, il existe une gamme de fréquence dans laquelle une particularité voit le jour : la génération du « mode de bout ».

Ce phénomène a été constaté depuis de nombreuses années <sup>[Torvik ; Gazis]</sup> sur divers matériaux. Il s'explique par la présence de modes complexes importants à l'extrémité de la plaque. Nous verrons que ce phénomène existe dans l'acier inoxydable lorsque le mode de Lamb  $S_0$  est réfléchi sur un bord droit pour un produit FE voisin de 2,3 MHz.mm.

Dans un premier temps, nous allons étudier ce phénomène en nous plaçant en régime permanent, c'est-à-dire en reprenant le modèle théorique utilisé au chapitre III. La difficulté de trouver une solution stable à la décomposition modale est une des causes nous ayant amenés à regarder de plus près ce phénomène. Puis, nous tracerons les profils des déplacements dans l'épaisseur afin de vérifier l'influence des modes complexes.

Une étude sera ensuite menée en régime quasi-harmonique. Pour ce faire, des simulations par la méthode des éléments finis sont réalisés à la fréquence d'excitation du mode de bout et des bilans d'énergie sont effectués afin de mettre en évidence qu'une partie de l'énergie incidente est stockée à l'extrémité de la plaque.

Enfin, on fera une étude de l'influence de l'angle du biseau sur la génération du mode de bout.

## VI.2. Etude en régime permanent sinusoïdal

Nous rappelons ici que le modèle théorique décrit dans le chapitre III est basé sur la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \underline{E}_1^{\text{inc}}(i) + \sum_{m=1}^M \underline{r}_m \underline{E}_1^m(i) = 0 \\ \underline{E}_2^{\text{inc}}(i) + \sum_{m=1}^M \underline{r}_m \underline{E}_2^m(i) = 0 \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N$$

où : N est le nombre de points utilisés pour la discrétisation de l'extrémité.

M est le nombre de modes pris en compte en plus de l'onde incidente.

### VI.2.1. Etude de la convergence des solutions

Tous les calculs menés jusqu'à présent ont été faits pour M=45 modes. En effet, une étude (chapitre III) a montré que la convergence des solutions  $\underline{r}_m$  est bonne pour M>20 et que le bilan d'énergie est vérifié à mieux que 0,1% lorsque M=45. Cependant, dans le cas du mode de Lamb  $S_0$  incident sur un bord droit pour un produit FE proche de 2,3 MHz.mm, ce nombre M=45 ne suffit plus.

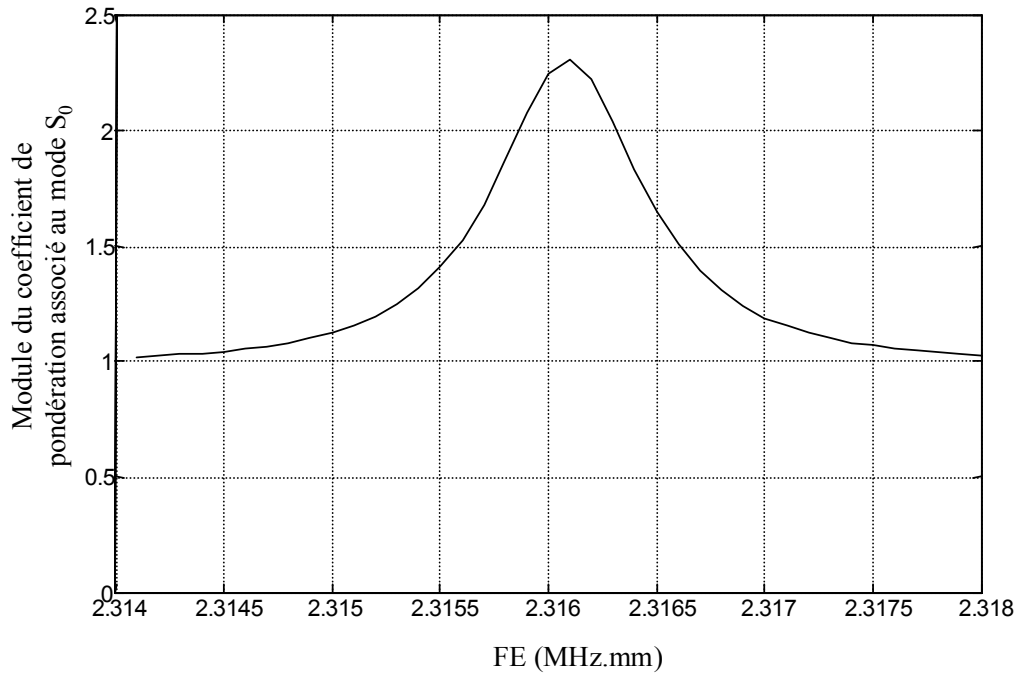


Figure VI.1. : Evolution du module de  $\underline{r}_{S_0}$  en fonction de FE (M=45 modes,  $\alpha=90^\circ$ ).

En effet, dans cette gamme de fréquences, le mode  $S_0$  est le seul mode de Lamb symétrique. Comme  $\alpha=90^\circ$ , les modes de Lamb antisymétriques  $A_0$  et  $A_1$  n'existent pas en réflexion. Par conséquent, le coefficient  $\underline{r}_{S_0}$  associé au mode réfléchi  $S_0$  doit être tel que :  $|\underline{r}_{S_0}|=1$ . Or, dans cette gamme de fréquence et pour  $M=45$  modes, on a  $|\underline{r}_{S_0}|\geq 1$  (Figure VI.1.).

Ce résultat n'est pas observable sur la Figure III.10 parce que les valeurs de FE les plus proches, prises en compte dans ce calcul, sont  $FE=2,30$  et  $2,35$  MHz.mm.

Nous avons donc été amenés à étudier à nouveau la convergence de la solution en fonction de  $M$ . L'évolution du module de  $\underline{r}_{S_0}$  est tracé en fonction du nombre de modes  $M$  sur la figure VI.2 pour  $FE=2,316$  MHz.mm. La figure VI.3. donne les résultats obtenus pour la convergence du coefficient  $\underline{r}_{C_{1s}}$  associé à la première paire de modes complexes symétriques  $C_{1s}$  (Figure I.6.)

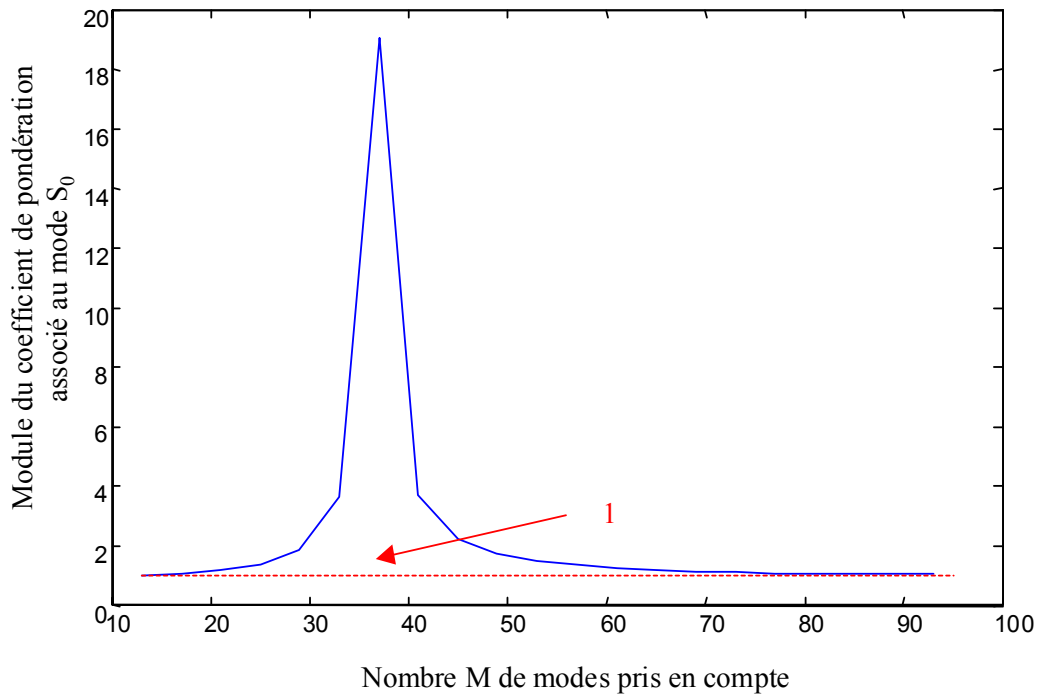


Figure VI.2. : Evolution du module de  $\underline{r}_{S_0}$  en fonction du nombre de modes  $M$  ( $FE=2,316$  MHz.mm,  $\alpha=90^\circ$ ).

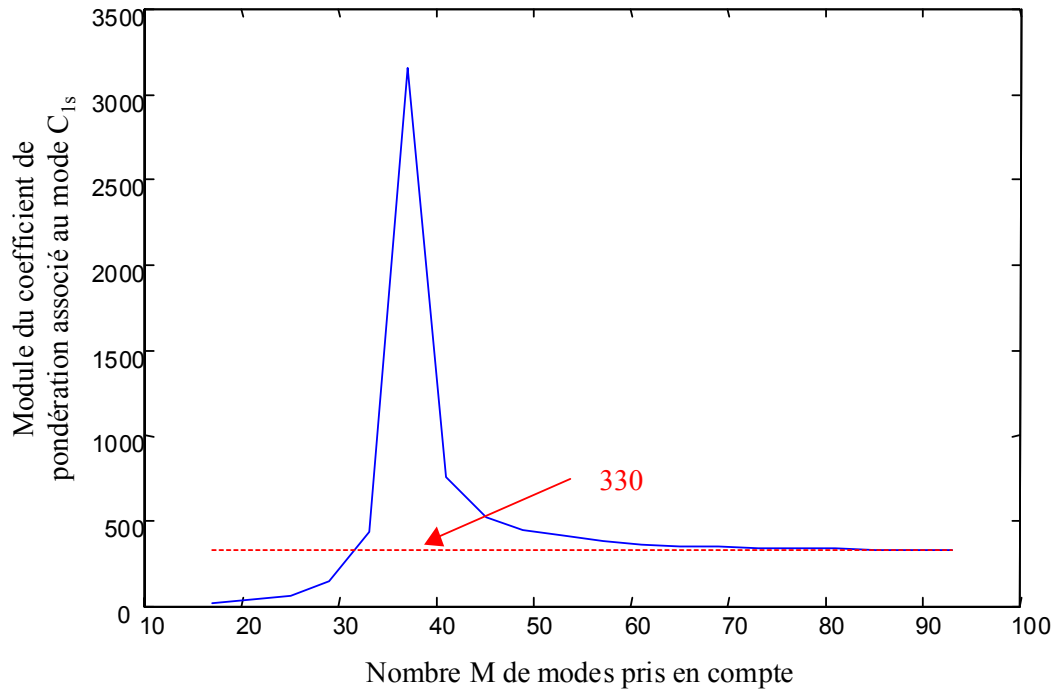


Figure VI.3. : Evolution du module de  $\underline{r}_{C_{1s}}$  en fonction du nombre de modes  $M$   
 ( $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).

Sur ces figures (VI.2. et VI.3.), nous voyons qu'il faut prendre  $M > 70$  pour que la convergence de la solution soit bonne. Dans la suite nous prendrons  $M=80$  modes. Dans ces conditions, le bilan réalisé pour  $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$  fournit bien 100% d'onde  $S_0$  réfléchi.

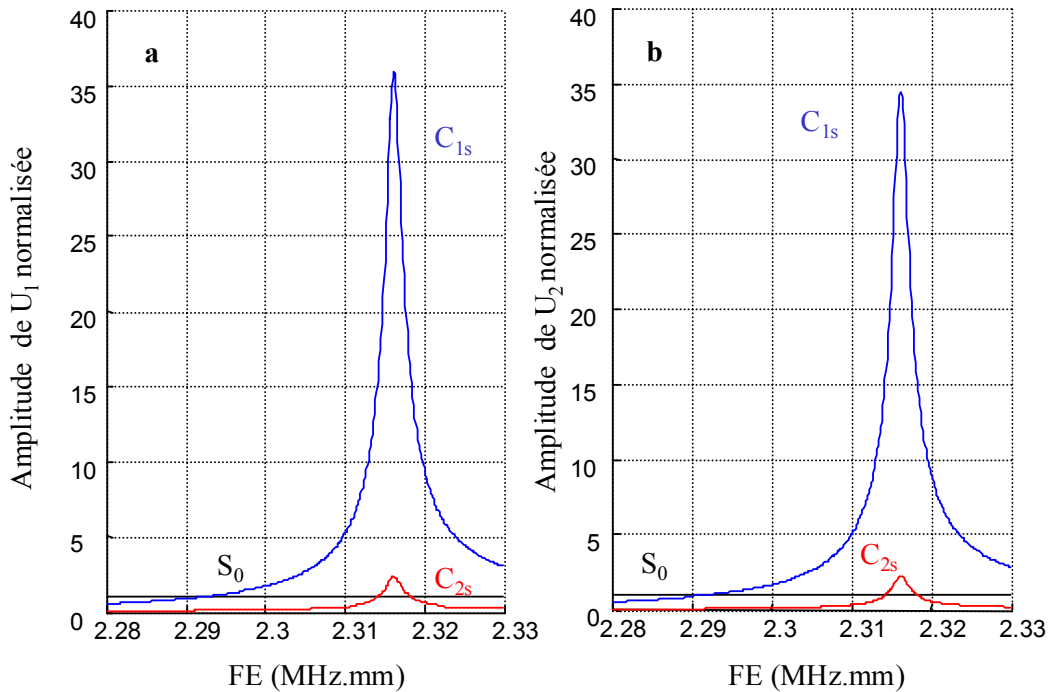
### VI.2.2. Etude des amplitudes des modes réfléchis

L'étude des amplitudes de modes réfléchis a été faite tout d'abord en fonction du produit fréquence-épaisseur. Ensuite, pour une valeur de  $FE$  donnée, cette étude est réalisée dans l'épaisseur de la plaque, en fonction de l'angle  $\alpha$  et de la position  $x_1$ .

#### VI.2.2.1. En fonction de $FE$

La génération du mode de bout est la conséquence de l'augmentation de l'amplitude de la première paire de modes complexes (de type S) <sup>[Gazis ; Le Clezio]</sup>. Nous notons pour chaque onde l'amplitude maximale obtenue dans l'épaisseur de la plaque. Nous avons donc tracé

l'évolution de ces maxima du mode de Lamb  $S_0$  ainsi que des premiers modes complexes symétriques en fonction du produit FE (*Figure VI.4.*) en normalisant les composantes  $U_1$  et  $U_2$  des modes réfléchis par les composantes respectives du mode  $S_0$ . Dans la suite, les déplacements seront normés de la même façon. Les modes complexes antisymétriques sont obligatoirement nuls.



*Figure VI.4. : Maxima des amplitudes  $U_1$  (a) et  $U_2$  (b) des modes réfléchis en fonction de FE ( $\alpha=90^\circ$ ).*

Cette figure met en évidence l'augmentation considérable des amplitudes des modes complexes  $C_{1s}$  et  $C_{2s}$  par rapport à l'amplitude du mode de Lamb  $S_0$ . La fréquence centrale de ce phénomène est  $FE=2,316$  MHz.mm. On constate que d'autres modes ont une amplitude appréciable.

#### VI.2.2.2. Dans l'épaisseur

Maintenant que nous connaissons la fréquence centrale de génération du mode de bout, nous pouvons tracer, suivant l'épaisseur de la plaque, les profils des déplacements  $U_1$  et  $U_2$  des différents modes réfléchis. Tous les résultats sont reportés sur les figures VI.5. et VI.6..

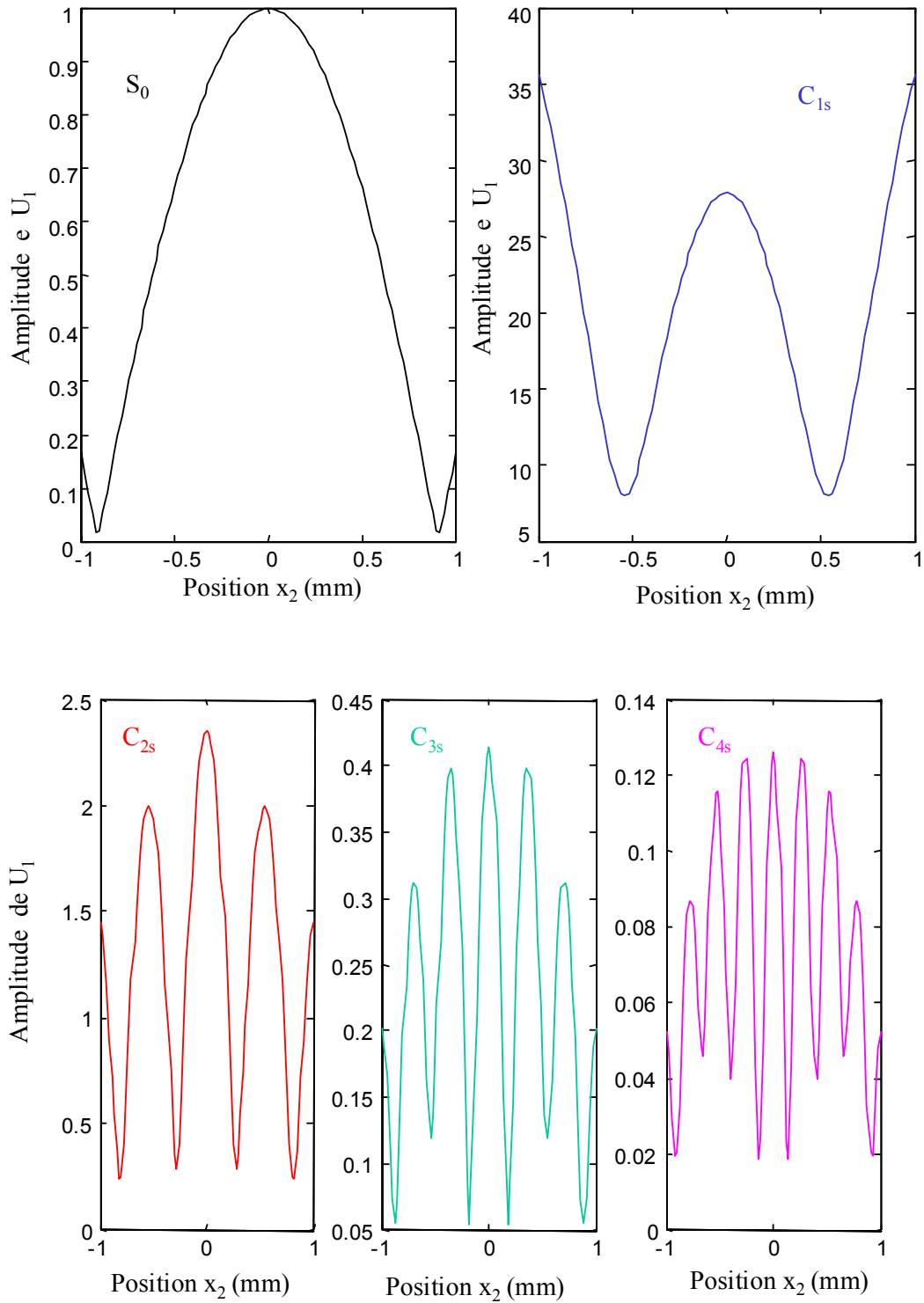


Figure VI.5. : Amplitudes des déplacements  $U_1$  normalisés dans l'épaisseur pour les modes

$S_0$ ,  $C_{1s}$ ,  $C_{2s}$ ,  $C_{3s}$  et  $C_{4s}$  ( $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).



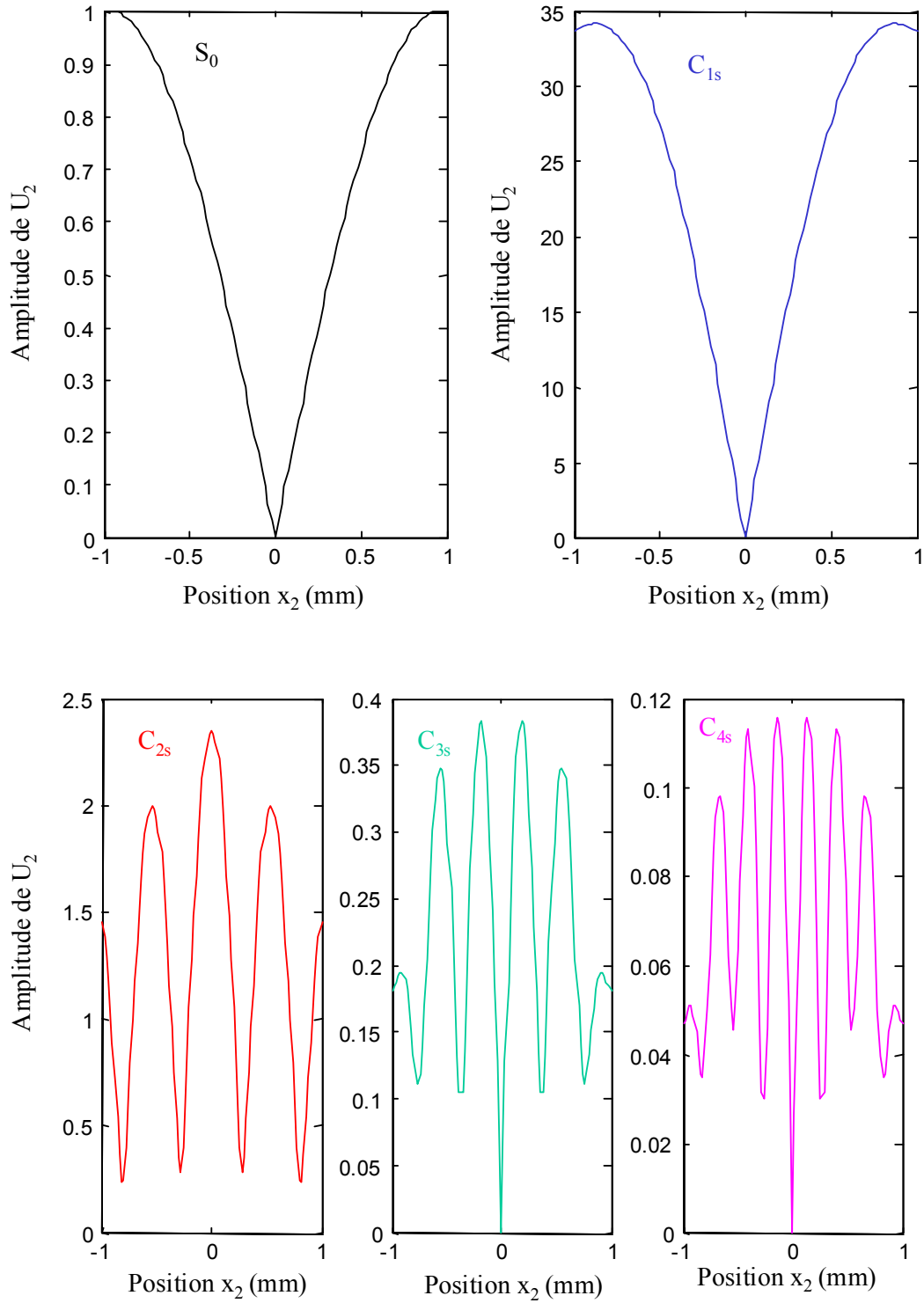


Figure VI.6. : Amplitudes des déplacements  $U_2$  normalisés dans l'épaisseur pour les modes

$S_0$ ,  $C_{1s}$ ,  $C_{2s}$ ,  $C_{3s}$  et  $C_{4s}$  ( $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).

On peut remarquer sur ces deux figures (VI.5. et VI.6.) que les amplitudes  $U_1$  et  $U_2$  du premier mode complexe  $C_{1s}$  sont très supérieures à celles du mode  $S_0$ . Les amplitudes des modes complexes d'ordre supérieur sont plus petites sans pour cela être négligeables. Notons aussi la forme des profils de déplacements  $U_2$  de  $S_0$  et  $C_{1s}$  : hormis leur amplitude, les profils sont proches.

VI.2.2.3. En fonction de l'angle  $\alpha$

En calculant le module des déplacements  $U_1$  et  $U_2$  associés au mode complexe  $C_{1s}$  en fonction du produit fréquence-épaisseur, pour différentes valeurs de l'angle  $\alpha$ , nous pouvons voir qu'il existe une petite variation de la fréquence centrale de la résonance (Figure VI.7.). Notons que lorsque l'angle du biseau diminue, l'amplitude des déplacements de ce mode s'atténue très fortement : le phénomène est donc de moins en moins marqué.

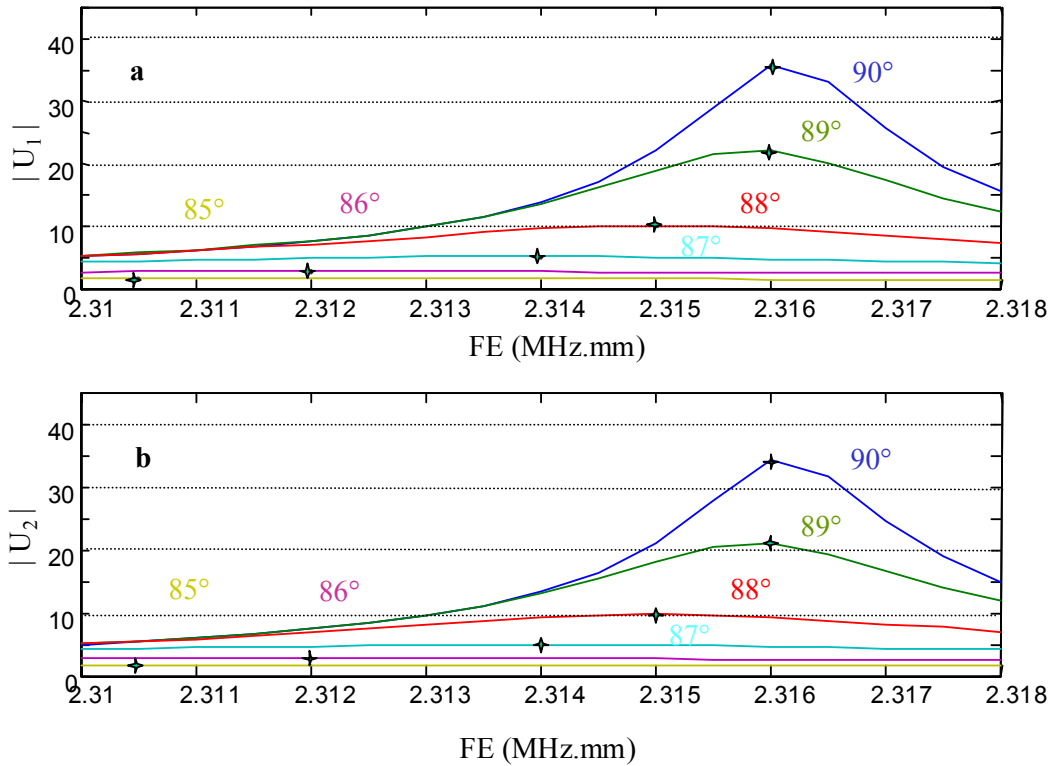


Figure VI.7. : Maximum de l'amplitude de  $U_1$  (a) et de  $U_2$  (b) du premier mode complexe  $C_{1s}$  en fonction de FE et de l'angle  $\alpha$  (mode  $S_0$  incident).

De plus, nous pouvons tracer les modules des déplacements  $U_1$  et  $U_2$  dans l'épaisseur en fonction de l'angle  $\alpha$ . Les résultats sont regroupés dans les figures VI.8. et VI.9.

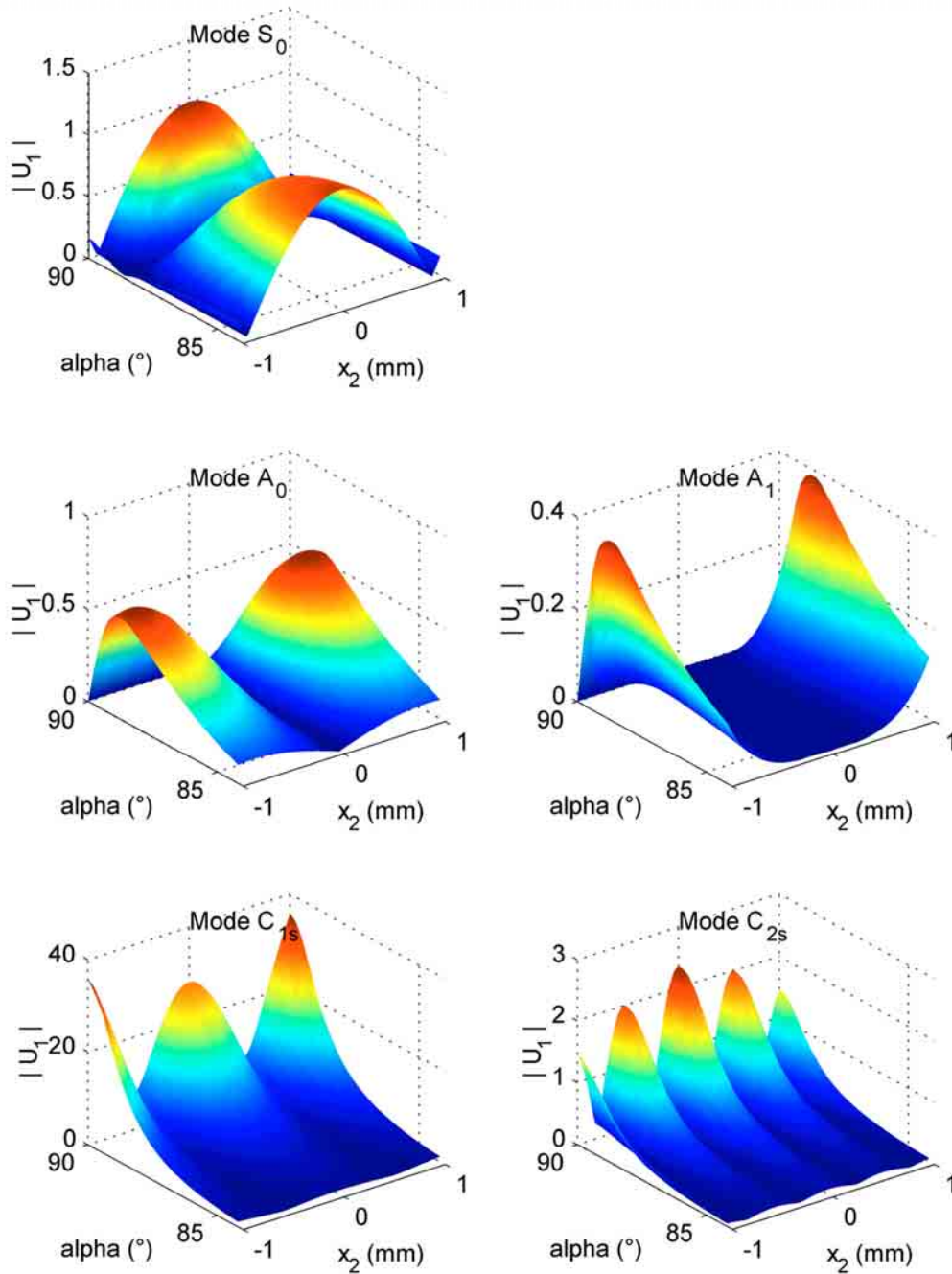


Figure VI.8. : Amplitude de  $U_1$  dans l'épaisseur en fonction de  $\alpha$  ( $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ).

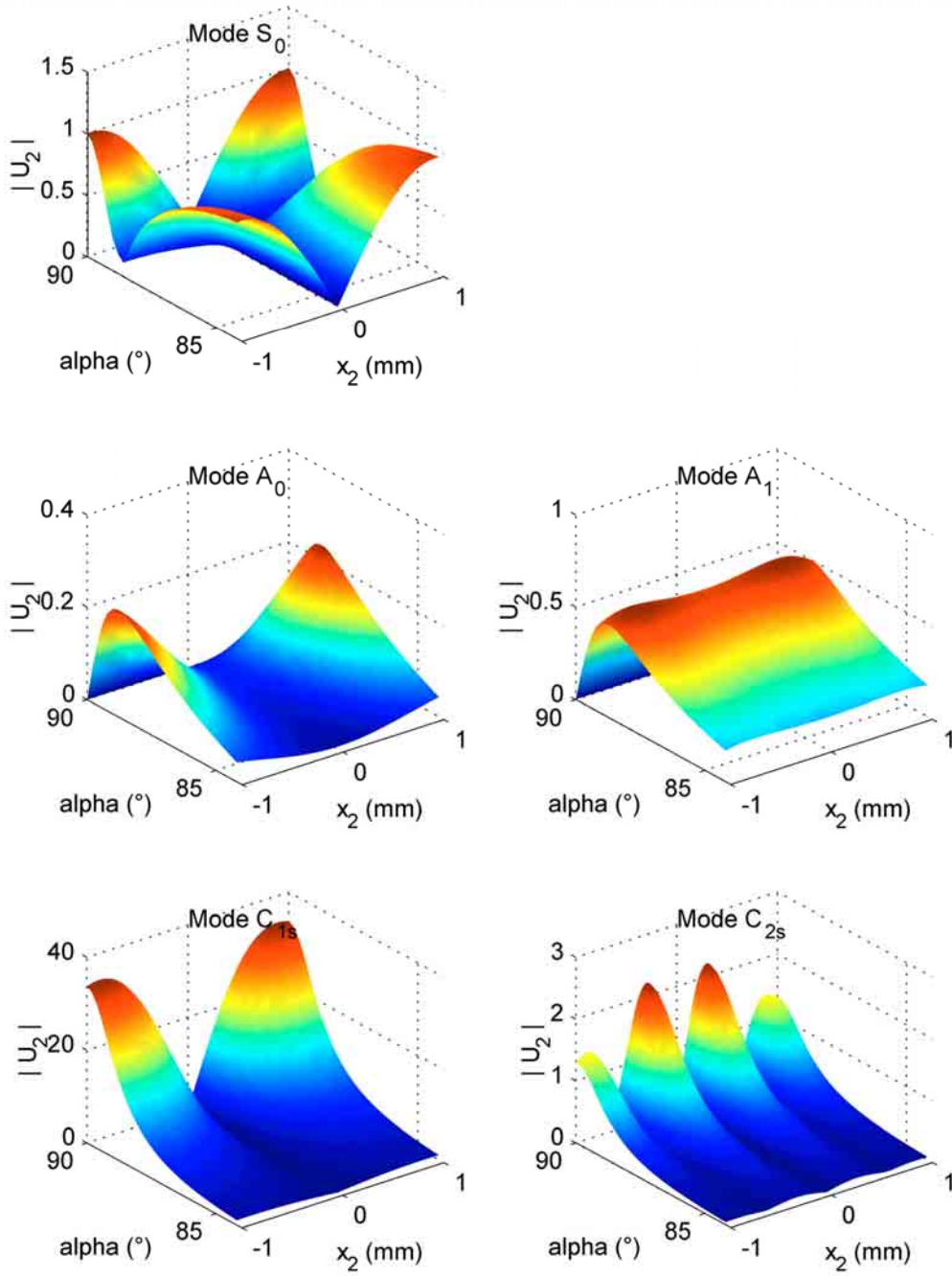


Figure VI.9. : Amplitude de  $U_2$  dans l'épaisseur en fonction de  $\alpha$  ( $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ )

Nous pouvons remarquer que les amplitudes des déplacements des modes réfléchis  $A_1$  et  $A_0$  croissent très rapidement dès que le biseau est un peu différent de  $90^\circ$  et passent par un maximum pour  $\alpha=88,8^\circ$ . Le comportement du mode  $S_0$  est à l'opposé : ses amplitudes de déplacement diminuent très fortement avant de redevenir comparables à celles obtenues sur un bord droit. Notons aussi que les modes complexes  $C_{1s}$  et  $C_{2s}$  décroissent fortement avec l'angle du biseau.

Des bilans d'énergie ont pu être réalisés en fonction de l'angle et du produit FE. Les résultats sont regroupés sur la figure VI.10.

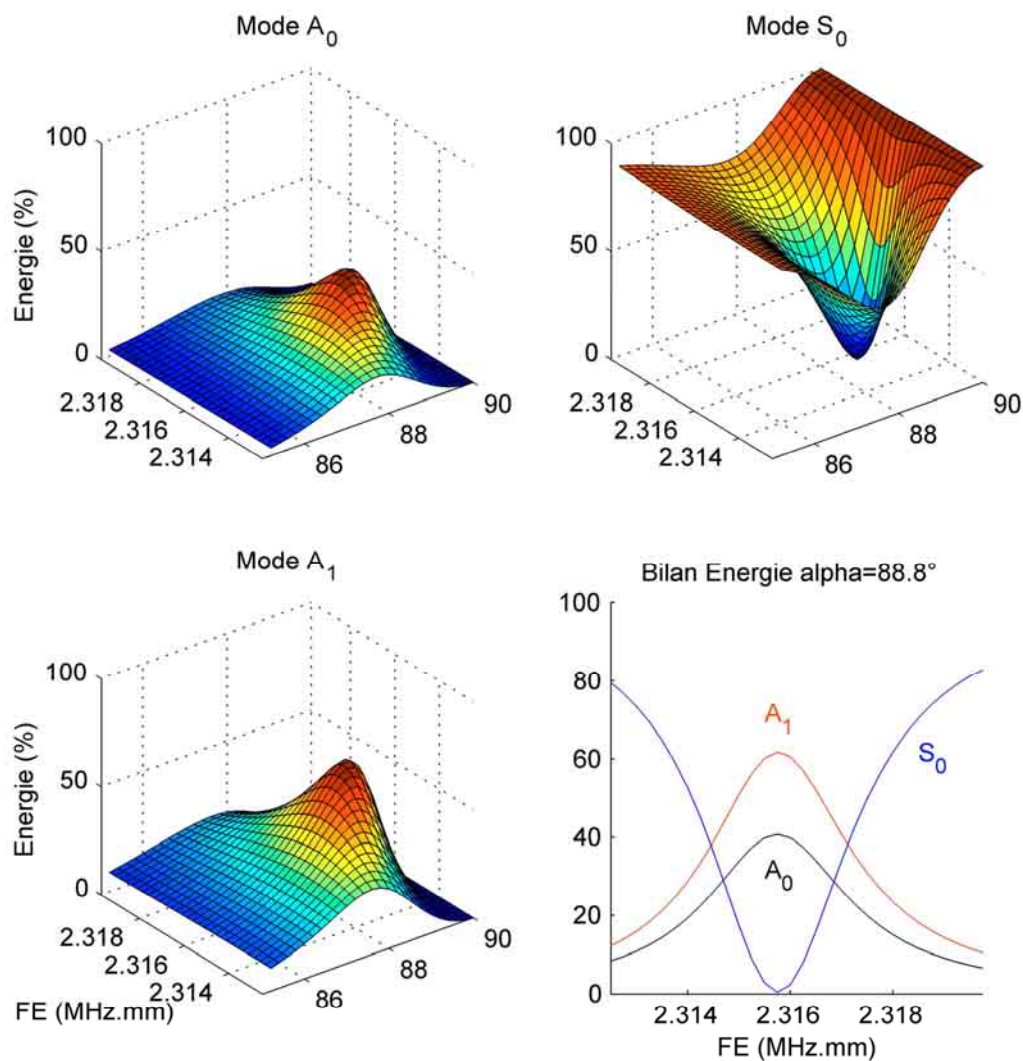


Figure VI.10. : Bilan d'énergie en fonction de FE et de  $\alpha$  (mode  $S_0$  incident)

#### VI.2.2.4. En fonction de la position $x_1$

De manière à voir la distance au bout de laquelle le phénomène d'excitation du « mode de bout » peut être décelée, nous traçons l'évolution du module du champ de déplacements  $U_2$  total en surface en fonction de la distance de propagation  $x_1$  (Figure VI.11.).

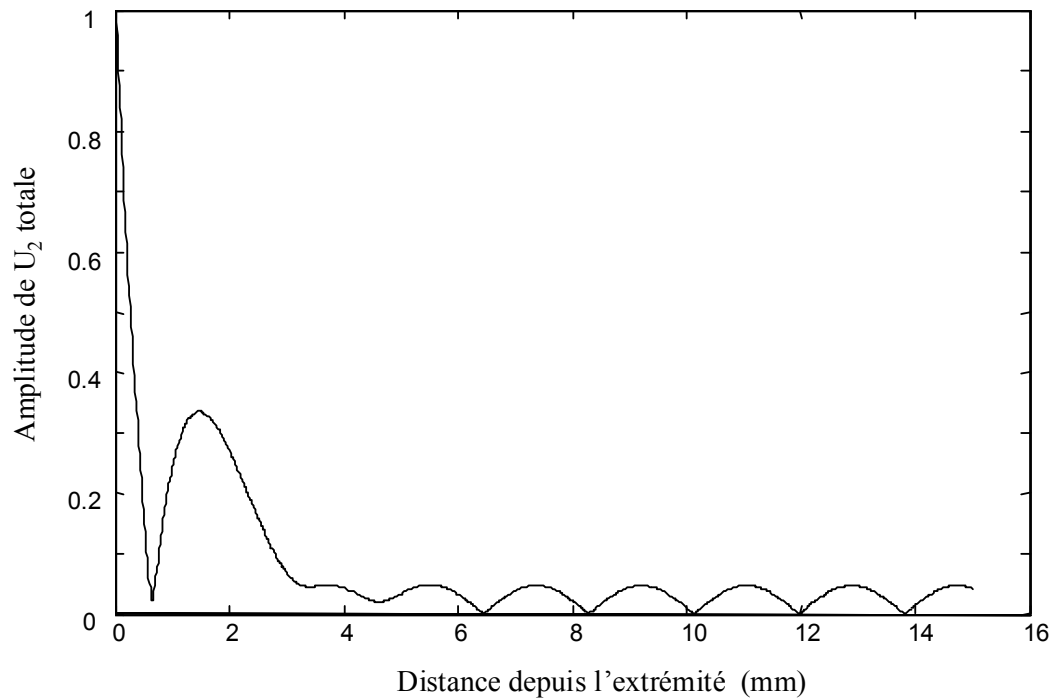


Figure VI.11. : Evolution de l'amplitude de  $U_2$  totale en surface en fonction de la distance à l'extrémité de la plaque (mode  $S_0$  incident,  $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).

Notons qu'il faut se placer au moins à 6 mm pour observer les ondes stationnaires attendues.

Sur cette figure, nous retrouvons des indications données, dans des conditions différentes, dans des études passées <sup>[Le Clézio]</sup>. Même si la plaque et le mode d'obtention de cette courbe sont différents, les résultats sont tout à fait comparables.

### V.3. Etude en régime quasi-harmonique

Energétiquement, la réflexion de l'onde harmonique  $S_0$  à  $FE=2,316$  MHz.mm se traduit par 100% d'onde  $S_0$ . De ce point de vue, la résonance de bout est indécélable. Elle doit se manifester autrement en régime non harmonique (impulsionnel ou quasi-harmonique).

Pour cette étude, nous utilisons le logiciel de résolution par éléments finis ANSYS afin de simuler la propagation d'un mode de Lamb de la même manière que dans le chapitre IV. La plaque modélisée est identique aux précédentes, à savoir  $40 \times 2$  mm (maillée par  $400 \times 20$  nœuds).

Pour mettre en évidence le « mode de bout », nous imposons les profils des déplacements  $U_1$  et  $U_2$  théoriques associés au mode de Lamb  $S_0$ . Un train de 20 périodes temporelles sinusoïdales fenêtré par une fonction de Hanning est imposé. La fréquence d'excitation est égale à 1,158 MHz afin de générer l'onde  $S_0$  au produit fréquence-épaisseur le plus proche possible de  $FE=2,316$  MHz.mm. Les déplacements  $U_2$  normaux à la surface de la plaque sont relevés. La figure VI.12. donne l'évolution spatio-temporelle des déplacements  $U_2$  lorsque le mode  $S_0$  se réfléchit sur un bord droit.

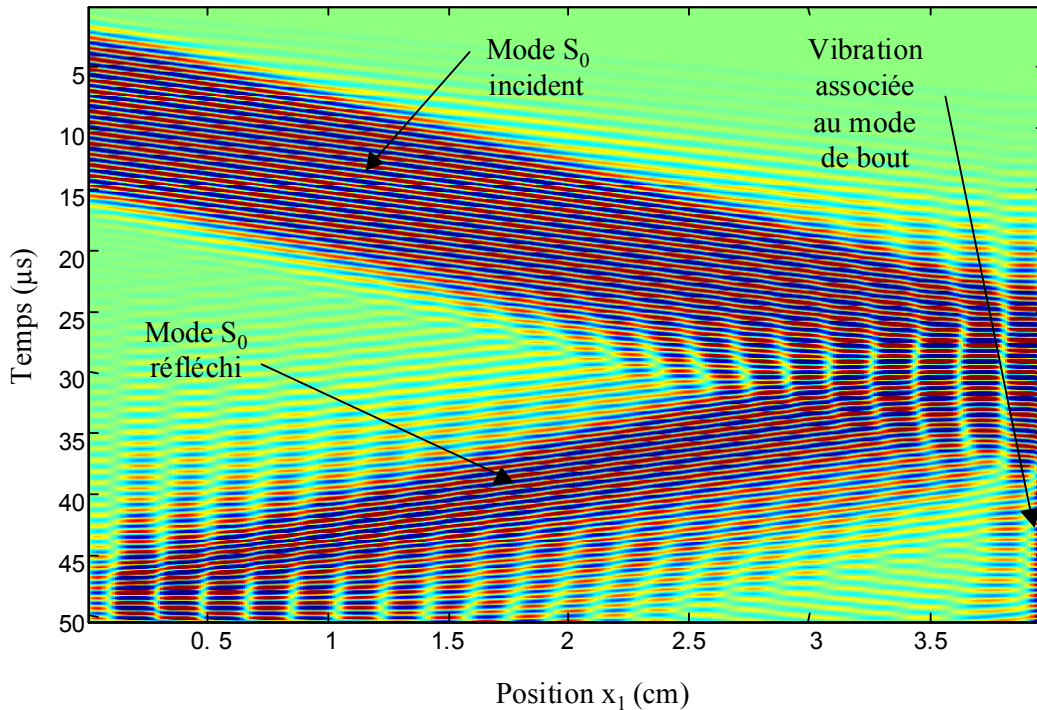


Figure VI.12. : Evolution spatio-temporelle des déplacements  $U_2$  en surface  
(Mode  $S_0$  incident,  $\alpha=90^\circ$ ,  $FE=2,316$  MHz.mm)

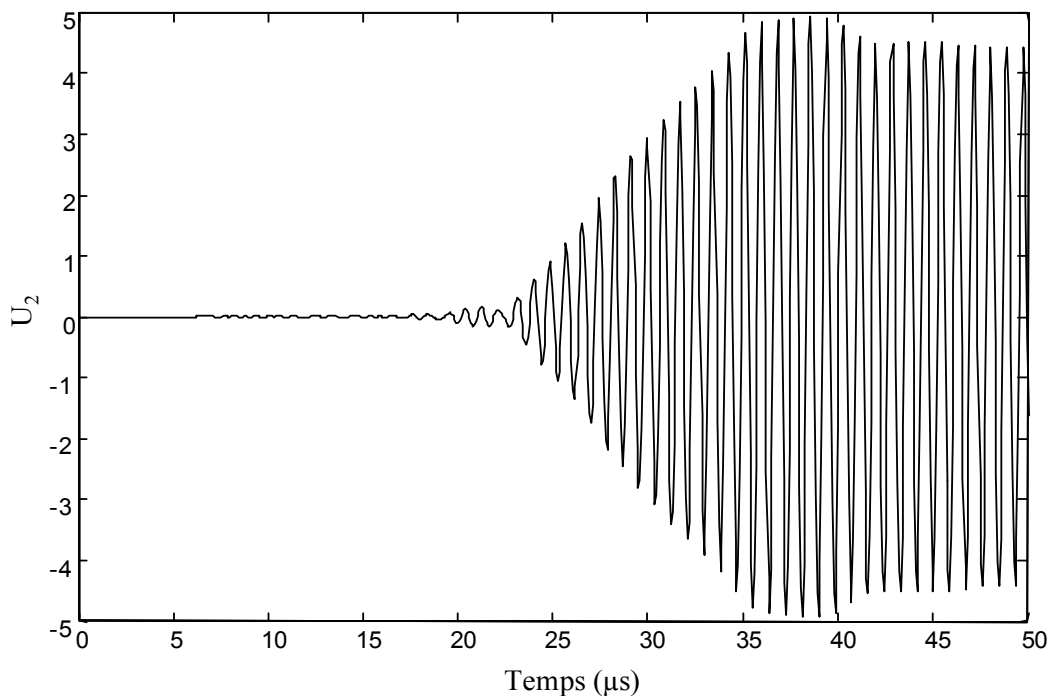


Sur cette figure, nous voyons clairement le mode de Lamb arriver au bout de la plaque et s'y réfléchir. A l'extrémité de la plaque, une vibration persiste après réflexion de  $S_0$ . C'est cette vibration que l'on appelle « mode de bout ». Il y a donc de l'énergie stockée à l'extrémité de la plaque. Cette énergie a été prélevée à l'énergie de l'onde  $S_0$  incidente.

### V.3.1. Déplacements à l'extrémité pour différents angles de biseau

De la figure précédente, nous pouvons retirer l'évolution temporelle des déplacements normaux en tout point de la surface, et plus particulièrement à l'extrémité de la plaque (*Figure VI.13.*). Nous visualisons l'amplitude de la vibration restant localisée dans le bout de la plaque.

Sur cette figure, nous visualisons l'onde incidente interférant avec l'onde réfléchi et, après 40  $\mu\text{s}$ , la vibration localisée en bout de plaque.



*Figure VI.13. : Evolution temporelle des déplacements  $U_2$  à l'extrémité de la plaque ( $S_0$  incident,  $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).*



La figure VI.14. présente l'évolution temporelle de  $U_2$  en surface pour  $x_1=1\text{cm}$  (c'est-à-dire à 3 cm du biseau). Nous séparons les ondes incidente et réfléchie (affectée par une réflexion parasite sur la première extrémité de la plaque).

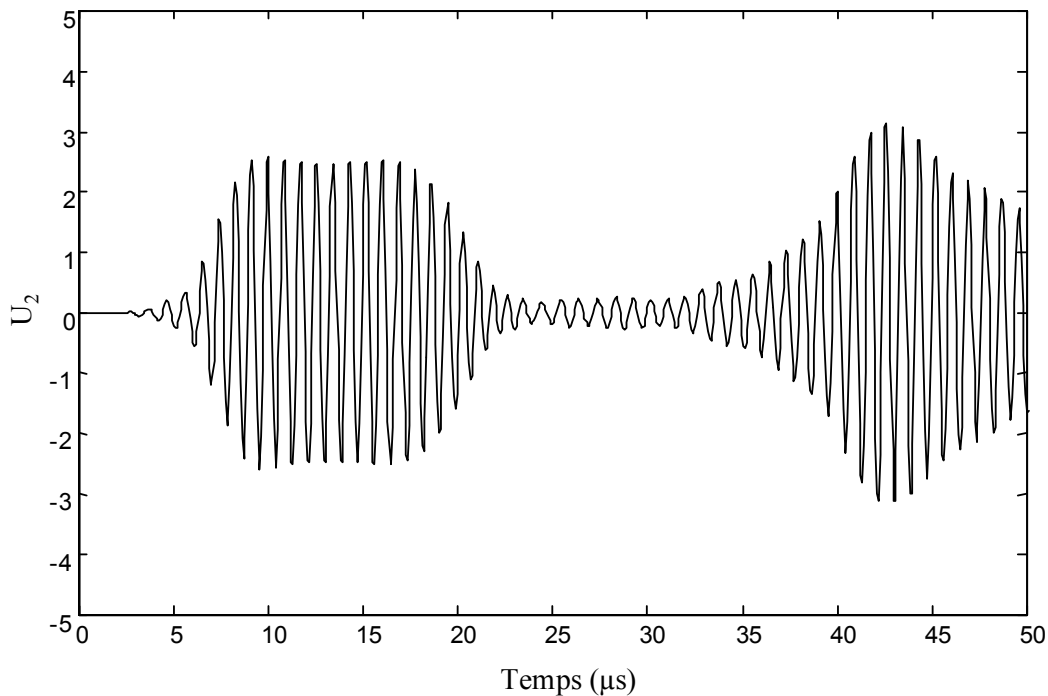


Figure VI.14. : Evolution temporelle des déplacements  $U_2$  à  $x_1=1\text{ cm}$   
 ( $S_0$  incident,  $FE=2,316\text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=90^\circ$ ).

La comparaison des deux figures montre que, à l'extrémité, un régime permanent tend à s'installer, conduisant à une amplitude du « mode de bout » 34 fois supérieure à celle de l'onde incidente. Le nombre de périodes étant limité à 20, cette situation n'est pas atteinte.

Le même type de relevé a été fait au bout de la plaque pour des angles de biseau différents de  $90^\circ$ , à savoir  $85^\circ$  et  $80^\circ$ . Les deux évolutions temporelles des déplacements normaux issues des résultats obtenus par la méthode des éléments finis dans ces deux cas sont résumés sur la figure VI.15.

Il est évident sur cette représentation que l'importance du « mode de bout » s'amenuise au fur et à mesure que l'angle  $\alpha$  s'éloigne de  $90^\circ$ . Pour  $\alpha=85^\circ$ , on constate à l'extrémité de la plaque une réflexion de l'onde  $S_0$  se superposant avec l'onde réfléchie. La résonance du « mode de bout » est très faible et quasi inexistant pour  $\alpha=80^\circ$ .

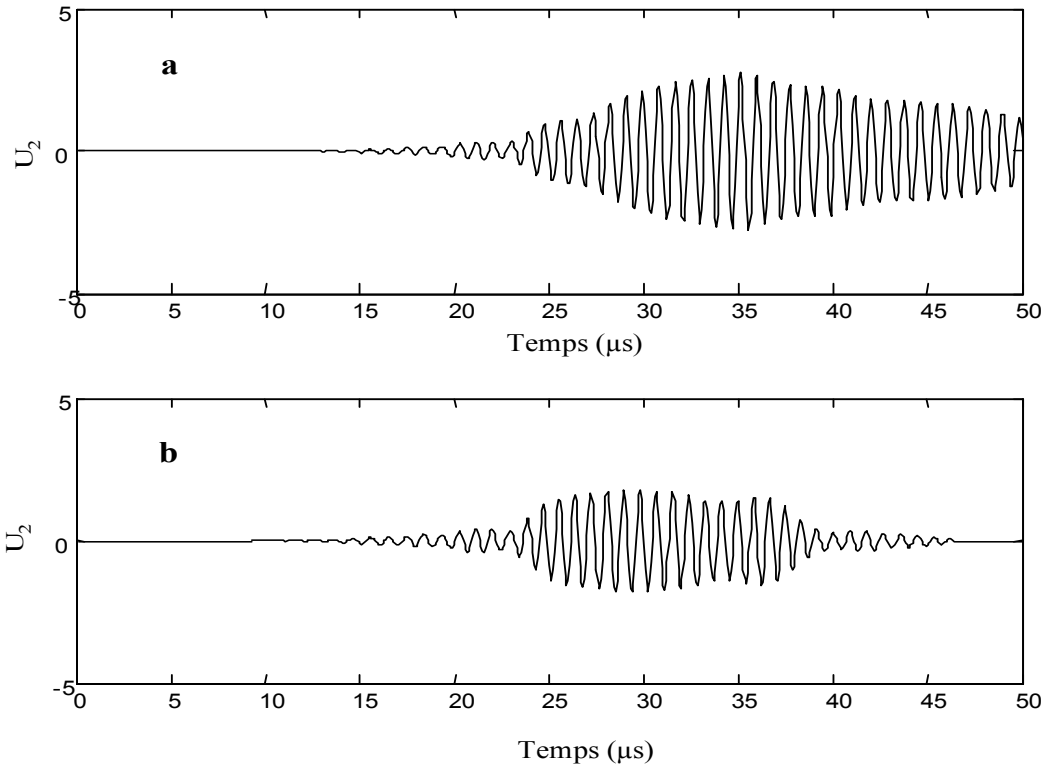


Figure VI.15. : Evolution temporelle des déplacements  $U_2$  à l'extrémité de la plaque ( $S_0$  incident,  $FE=2,316 \text{ MHz.mm}$ ,  $\alpha=85^\circ$  (a) et  $80^\circ$  (b)).

### V.3.2. Bilans d'énergie pour différentes valeurs de $\alpha$

Dans les trois cas présentés ci-dessus, nous avons réalisé des bilans d'énergie afin de connaître la proportion d'énergie restant stockée à l'extrémité de la plaque dans le « mode de bout ».

En effet, nous avons vu au cours de cette thèse que la méthode mise en œuvre permet de retrouver pratiquement l'intégralité de l'énergie incidente dans les énergies transportées par les modes de Lamb réfléchis.

Si le bilan d'énergie n'atteint pas 100%, le manque d'énergie sera associée au « mode de bout ». Nous calculons les énergies des ondes réfléchies en utilisant deux domaines rectangulaires identiques dans le plan  $(x_1, t)$ .

Les énergies réfléchies sont reportées dans le tableau VI.1. ci-dessous.

	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=85^\circ$	$\alpha=80^\circ$
Energie du mode $S_0$ (%)	84,3	92	97
Energie du mode $A_0$ (%)	0	3	2
Energie du mode $A_1$ (%)	0	1	1
Energie totale (%)	84,3	96	100
<b>Energie du mode de bout (%)</b>	<b>15,7</b>	<b>4</b>	<b>0</b>

*Tableau VI.1. : Energies associées aux modes réfléchis et au mode de bout en fonction de l'angle  $\alpha$  (mode  $S_0$  incident,  $FE=2,316$  MHz.mm).*

Ces résultats prouvent bien la décroissance de l'influence du « mode de bout » lorsque l'angle du biseau diminue. Bien entendu, les résultats ne sont pas absolus : ils dépendent du nombre de périodes du train de sinusoïdes.

#### **V.4. Conclusion**

Le phénomène particulier qu'est l'excitation du « mode de bout » a été étudié dans ce chapitre à l'extrémité biseautée d'une plaque. Cette étude a été réalisée en régime permanent sinusoïdal en reprenant le modèle théorique développé au chapitre III. Nous avons montré qu'à la fréquence  $FE=2,316$  MHz.mm, pour  $S_0$  incident sur un bord droit, il existe une forte résonance à l'extrémité de la plaque causée par le couple de modes complexes  $C_{1s}$ . L'amplitude de la vibration est environ 35 fois celle de l'onde incidente  $S_0$ . La valeur des déplacements normaux  $U_2$  en surface se trouve altérée sur environ 6 mm à partir de l'extrémité de la plaque.

Lorsque l'angle du biseau diminue, le phénomène résonnant disparaît rapidement (il est très faible pour  $\alpha=85^\circ$ ). On observe des variations fortes des ondes réfléchies dans ce domaine angulaire. L'onde réfléchie  $S_0$  devient très faible pour  $\alpha=88,8^\circ$ .

Dans un second temps, l'utilisation du logiciel ANSYS a permis de visualiser la vibration associée au « mode de bout » à l'extrémité biseautée de la plaque et de confirmer son atténuation rapide lorsque l'angle  $\alpha$  s'éloigne de  $90^\circ$ . Grâce à cette seconde étude, des bilans d'énergie ont été réalisés afin de quantifier l'énergie bloquée dans l'épaisseur à l'extrémité de la plaque.

---

## **CONCLUSION**

---

Nous avons étudié dans cette thèse la propagation d'ondes de Lamb sur une plaque plane située dans l'air et biseautée à son extrémité où ces ondes sont réfléchies.

La conversion des modes a déjà été étudiée par le passé sur des extrémités droites et a montré l'existence de divers modes de Lamb réfléchis. Nous avons étendu cette étude au cas d'une extrémité biseautée et nous avons traité le problème quantitativement en utilisant la notion de bilan d'énergie.

La première étude présentée a été consacrée à l'obtention de mesures expérimentales permettant d'appréhender les phénomènes de conversion mais aussi de les interpréter. Nous avons amélioré les réalisations anciennes en utilisant un dispositif de génération plus adapté à la représentation 2D du problème, envisagée dans cette étude. Ce travail expérimental est basé sur une méthode de vibrométrie laser qui autorise des mesures très ponctuelles et d'une grande précision. Les déplacements normaux en surface à la plaque sont alors relevés le long de la propagation des ondes guidées. Ces mesures brutes sont ensuite analysées par des méthodes de traitement de signal mettant principalement en œuvre des transformées de Fourier. Ainsi, les ondes de Lamb sont représentées successivement dans deux espaces de Fourier, à savoir l'espace temps-position  $(x_1, t)$  et l'espace « tout-fréquence »  $(K, FE)$ . L'isolement des seuls modes de Lamb utiles, incident et réfléchis, dans les deux espaces permet une identification claire des modes en présence dans la plaque biseautée. Le coefficient reliant les amplitudes des déplacements normaux de chaque onde au flux d'énergie correspondant nous a permis de calculer l'énergie transportée par chaque mode de Lamb réfléchi. Par conséquent, des bilans d'énergie ont été effectués. Une correction a été faite afin de tenir compte de l'élargissement du faisceau ultrasonore. Du fait que ce phénomène est minimisé par le dispositif de génération, la correction proposée est efficace et conduit à des bilans satisfaisants à  $\pm 5\%$ .

D'autre part, un modèle théorique a été déterminé pour étudier le phénomène. Ce modèle est en fait une extension des indications de Torvik au cas d'une plaque semi-infinie

limitée par un biseau. L'onde incidente donne, en réflexion, tous les modes possibles dans une plaque infinie, réels ou complexes. Certains de ces modes sont d'ailleurs des modes incidents. La décomposition modale réalisée permet de traiter le problème de diffraction par l'extrémité. Pour obtenir l'amplitude de chaque onde présente, il suffit d'exprimer l'annulation des contraintes. Le bilan d'énergie s'en déduit. Ce type de calcul a été fait dans le cas des ondes de Lamb incidentes  $A_0$ ,  $S_0$  et  $A_1$ , sur un domaine fréquentiel limité entre  $FE=1$  et  $4 \text{ MHz.mm}$ . Une comparaison des résultats théoriques a été effectuée avec les résultats expérimentaux précédents : il y a une bonne concordance entre les résultats issus des deux études.

La comparaison théorie-expérience présentée ci-dessus n'est possible qu'en surface de la plaque, où certains modes ont parfois de faibles amplitudes. Pour valider complètement le calcul théorique, nous avons utilisé une méthode numérique de résolution par décomposition en éléments finis. Afin de réaliser ce travail, un logiciel d'éléments finis, nommé ANSYS, a été utilisé. Après un bref rappel du principe de la méthode des éléments finis, nous nous sommes attachés à expliquer la méthode employée pour simuler la génération d'un mode de Lamb dans la structure plane discrétisée. Afin de réaliser une étude similaire à l'expérimentation, les déplacements normaux sont relevés aux nœuds situés à la surface de la plaque biseautée. Ainsi, l'évolution spatio-temporelle de ces déplacements est connue. Utilisant les mêmes traitements que ceux utilisés lors de l'expérimentation, nous pouvons identifier les modes de Lamb en présence et relier leurs amplitudes de déplacements normaux en surface à l'énergie qu'ils transportent. Des bilans d'énergies sont de nouveau réalisés et comparés avec les résultats obtenus théoriquement. Une très bonne concordance existe entre les résultats issus des deux méthodes. Toutefois, pour des raisons pratiques, la méthode des éléments finis n'a pas pu donner des résultats plus précis que notre calcul théorique. Nous estimons que l'absence de divergences entre les résultats confirme le calcul théorique.

Par ailleurs, un autre type d'étude a été mis en œuvre. En effet, les études précédentes basées sur le traitement de tout le faisceau incident ou réfléchi donne en fait une vue globale des phénomènes. Par exemple, les amplitudes des modes de Lamb sont des valeurs moyennes calculées sur une certaine distance de propagation des ondes. Nous avons voulu avoir une vue plus locale des phénomènes et, pour ce faire, les déplacements ont été relevés dans différentes coupes de la plaque (réalisées selon l'épaisseur) après que la propagation des ondes ait été simulée par le logiciel d'éléments finis. Dans ces profils de déplacements, les profils théoriques des modes de Lamb ont été recherchés. Les coefficients de pondération de chaque

profil théorique sont ensuite reliés à l'énergie transportée par le mode de Lamb correspondant. Ainsi, l'évolution de la répartition de l'énergie incidente entre les modes de Lamb réfléchis peut être connue en fonction de la distance de propagation. A de grandes distances de l'extrémité biseautée, la répartition des énergies des ondes de Lamb est celle obtenues précédemment. Au voisinage du biseau, les modes complexes doivent être pris en compte dans l'identification pour que le bilan soit le même.

Une étude du « mode de bout » a été entreprise dans le dernier chapitre. Notre modèle théorique permet de le prendre en compte et d'en donner une description claire. Nous avons étudié la résonance « de bout » causée par l'onde incidente  $S_0$  et avons retrouvé l'essentiel de ses propriétés. On peut imaginer que des phénomènes analogues puissent exister dans des situations semblables. Nous nous sommes intéressés à l'évolution de cette résonance lorsque l'angle du biseau n'est plus  $90^\circ$  : elle disparaît rapidement accompagnée par un comportement surprenant des modes réfléchis (variations dépendant fortement de  $\alpha$ ).

Nous avons montré, en utilisant la simulation par éléments finis, que l'extrémité de la plaque stocke une partie de l'énergie apportée par un train de sinusoïdes. Comme le régime permanent sinusoïdal n'est jamais atteint, l'amplitude de la vibration en bout n'est jamais celle prévue.

Nous retenons essentiellement de cette étude que la décomposition modale est bien vérifiée et adaptée au traitement des réflexions. Les phénomènes de diffraction dans le biseau sont bien modélisés. Il pourrait en être de même pour tout défaut présent dans la plaque.

Ceci constitue la perspective la plus importante après ce travail. L'interaction des ondes de Lamb ou SH avec des défauts peut être entreprise en utilisant une décomposition modale.



---

**REFERENCES**  
**BIBLIOGRAPHIQUES**

---

**[Alleyne (1)]**

D. N. Alleyne, P. Cawley. "Optimisation of Lamb wave inspection techniques", NDT&E Intern.. (1992), Vol 25, Number 1, pp. 11-22.

**[Alleyne (2)]**

D. N. Alleyne, P. Cawley. "The interaction of Lamb waves with defects" IEEE Trans Ultrasonics, Ferroelectri Freq Control (1992), 39, pp. 381-397.

**[Alleyne (3)]**

D. Alleyne and P. Cawley, "A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals". J. Acoust. Soc. Am. (1991), 89(3), pp 1159-1168.

**[Al-Nassar]**

Y. N. Al-Nassar, S. K. Datta, A. H. Shah, "Scattering of Lamb waves by a normal rectangular strip weldment", Ultrasonics, 1991, Vol. 29, pp.125-132.

**[Auld (1)]**

B. A. Auld, " Acoustic fields and waves in solids ",Krieger Publishing Compagny, Malabar, Florida, Second Edition, 1990.

**[Auld (2)]**

B. A. Auld and E. M. Tsao. "A variational Analysis of Edge Resonance in a semi-infinite Plate". IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics (1977). Vol. SU-24, NO. 5, pp 317-326.

**[Batoz]**

J.L. Batoz, G. Dhatt. " Modélisation des structures par éléments finis .Volume 1. Solides élastiques. ". Hermes.

**[Castaings]**

M. Castaings, E. Le Clezio and B. Hosten, "Modal decomposition method for modeling the interaction of Lamb waves with cracks", J. Acoust. Soc. Am. (2002), 112(6), pp 2567-2582.

**[Cho (1)]**

Y. Cho and J.L. Rose. "A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves". J.Acoust. Soc. Am. (1996), 99(4), pp 2097-2109.

**[Cho (2)]**

Y. Cho, D. D. Hongerholt and J. L. Rose. "Lamb Wave Scattering analysis for reflector characterization". IEEE Trans Ultrasonics, Ferroelectri Freq Control (1997), 44(1), pp. 44-52

**[Datta]**

S. K. Datta, Y. Al-Nassar, "Lamb wave scattering by a surface-breaking crack in a plate", Review of progress in Quantitative NDE, eds by D.O. Thompson and D.E Chimenti, American Institute of Physics, New-York, Vol. 10A, 1991, pp. 97-104.

**[Derible]**

S. Derible, "Caractérisation complète des résonances acoustiques par une nouvelle méthode fondée sur le diagramme d'Argand", Thèse, Université du Havre (1995).

**[Diligent]**

O. Diligent, T. Grahn, A. Boström, P. Cawley and M.J.S. Lowe, "The low-frequency reflection and scattering of the  $S_0$  Lamb mode from a circular through-thickness hole in a plate : Finite Element, analytical and experimental studies", *J. Acoust. Soc. Am* (2002), 112(6), pp. 2589-2601.

**[Doc. ANSYS]**

Documentation fournie avec le logiciel ANSYS.

**[Duclos]**

J. Duclos, O. Lenoir, J. M. Conoir, J. L. Izbicki. "Description des ondes de Lamb en termes d'ondes évanescentes et de résonances". *Colloques C1, suppl. J. Phys.III* (2), pp. 691-694 (1992).

**[Ech-Cherif El-Kettani]**

M. Ech-Cherif El-Kettani, P. Pareige, F. Luppé, and J. Ripoche. "Experimental study of the conversion of Lamb waves at the end of an immersed plate", *Acustica* 82, pp. 251-259 (1996).

**[Eudeline]**

Y. Eudeline, H. Duflo, J. Duclos, " Experimental study of Lamb waves having a negative energy velocity in a thin plate immersed in liquid ", *J. Acoust. Soc. Am.* 99(4), Pt.2 (1996).

**[Folk]**

R. Folk, A. Herczynski, "Solutions of elastodynamic slab problems using a new orthogonality condition", *J. Acoust. Soc. Am.* 80 (4), 1986, pp. 1103-1110.

**[Fraser]**

W. B. Fraser, "Orthogonality relation for the Rayleigh-Lamb modes of vibration of a plate", *J. Acoust. Soc. Am.* 59 (1), 1976, pp. 215-216.

**[Gazis]**

D.C. Gazis, R.D. Mindlin, "Extensional vibrations and waves in a plate circular disk and a semi-infinite plate", *Journal of applied mechanics*, 1960, pp. 541-547.

**[Gregory]**

R.D. Gregory and I. Gladwell. "The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate". *Journal of Elasticity* (1983),13, pp. 185-206.

**[Hayashi]**

T. Hayashi, S. Endoh, "Calculation and visualization of Lamb wave motion", *Ultrasonics* (2000), 38, pp. 770-773.

**[Jia]**

X. Jia, "Modal analysis of Lamb wave generation in elastic plates by liquid wedge transducers", *J. Acoust. Soc. Am.* (1997), 101 (2), pp. 834-842.

**[Koshiba]**

M. Koshiba, S. Karakida, M. Suzuki, "Finite-element analysis of Lamb wave scattering in an elastic plate waveguide", IEEE Transactions on sonics and ultrasonics, 1984, Vol SU-31, pp. 18-24.

**[Lamb]**

H. Lamb, "On waves in an elastic plate", Proceedings of the Royal Society, A93, 1917, pp. 114-128.

**[Le Clezio]**

E. Le Clezio, M.V. Predoi, M. Castaings, B. Hosten, M. Rouseau, " Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode ", Ultrasonics (2003), Vol. 41, pp. 25-40.

**[Li]**

H.U. Li, K. Neghishi, "Visualization of Lamb mode patterns in glass plate", Ultrasonics (1994), Vol.32 (4), pp. 243-248.

**[Lowe (1)]**

M.J.S. Lowe and O. Diligent, "Low-frequency reflection characteristics of the  $S_0$  Lamb wave from a rectangular notch in a plate", J. Acoust. Soc. Am (2002), 111(1), pp. 64-74.

**[Lowe (2)]**

M.J.S. Lowe, P. Cawley, J.-Y. Kao and O. Diligent, "Low-frequency reflection characteristics of the fundamental antisymmetric Lamb wave  $A_0$  from a rectangular notch in a plate", J. Acoust. Soc. Am (2002), 112(6), pp. 2612-2622.

**[Lowe (3)]**

M. Lowe and O. Diligent, "Reflection of a fundamental Lamb modes from the ends of plates", Review of progress in Quantitative NDE, eds by D.O. Thompson and D.E Chimenti, American Institute of Physics, New-York, Vol. 20, 2001, pp. 89-96.

**[Martinez (1)]**

L. Martinez, "Nouvelles méthodes d'identification d'ondes de surface. Etude de l'onde A sur une cible courbe", Thèse, Université du Havre (1998).

**[Martinez (2)]**

L. Martinez, J. Duclos, A. Tinel. "Aspects of damped surface wave in the Fourier Diamond spaces. New Surface Wave Analysis Methods (S.W.A.M.).", 16<sup>th</sup> International Congress on Acoustics and 135<sup>th</sup> Meeting Acoustical Society of America, Seattle; Washington, U.S.A., 20-26 June 1998, proceedings, 1359-1360.

**[Meeker]**

T.R. Meeker and A.H. Meitzler, "Guided wave propagation in elongated cylinders and plates", in Physical Acoustics, W.P. Mason Ed., Academic Press Inc., New-York, 1964, vol 1.

**[Meitzler]**

A.Meitzler. "Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates". J.Acoust. Soc. Am. (1965), 38, pp.835-842.

**[Monchalin]**

J.P. Monchalin, "Optical detection of ultrasound". IEEE Trans Ultrasonics, Ferroelectri Freq Control (1986), 33, pp. 485-499

**[Morvan (1)]**

B. Morvan, " Conversion des ondes de Lamb et de l'onde A sur une structure " en T ". Application au contrôle non destructif.", Thèse, Université du Havre, 2000.

**[Morvan (2)]**

B. Morvan, N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel and J. Duclos, "Lamb wave reflection at the free edge of a plate", J.Acoust. Soc. Am. (2003), 113 (3), pp. 1417-1425.

**[Moulin]**

E. Moulin, "Contribution à l'étude de la génération d'ondes de Lamb par transducteurs piézoélectriques intégrés. Application à la modélisation de matériaux sensibles." Thèse, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis. (1999).

**[Pagneux]**

V. Pagneux and A. Maurel, "Determination of a Lamb mode eigenvalues", J. Acoust. Soc. Am (2001), 110(3), Pt. 1, pp. 1307-1314.

**[Poirée]**

B. Poirée, "Les ondes évanescents dans les fluides parfaits et les solides élastiques." J. Acoustique 2, pp. 205-216 (1989).

**[Predoï]**

M.M.V.Predoï, "Contribution au contrôle non destructif par ultrasons de structures planes. Aspects théoriques et expérimentaux." Thèse, Université de Paris 6 (1998).

**[Rokhlin]**

S.I. Rokhlin, " Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer ", J. Acoust. Soc. Am (1982), 67(4), pp. 1157-1165.

**[Rose]**

J. L. Rose, "Ultrasonic Waves in Solid Media", Cambridge University Press, 1999.

**[Royer]**

D. Royer. "Génération et détection optiques d'ondes élastiques". Techniques de l'ingénieur, traité d'électronique. Edition périodique E 4415.

**[Shaw]**

E.A.G. Shaw, "On the resonant vibrations of thick barium titanate disks", J. Acoust. Soc. Am. (1956), 28, pp. 38-50.

**[Schumacher]**

N.A. Schumacher, C.P. Burger and P.H. Gien, "A laser-based investigation of higher-order modes in transient Lamb waves", J. Acoust. Soc. Am. (1993), 93(5), pp. 2981-2984.

**[Shen]**

J.Z. Shen, S.Y. Zhang and C.F. Ying. "The reflection of the Lamb wave in a semi-infinite plate", Chinese J. Acoustics (1990), Vol 9, pp. 27-35.

**[Sherwood]**

J.W.C. Sherwood, "Propagation in an infinite elastic plate", J. Acoust. Soc. Am (1958), 30(10), pp. 979-984.

**[Torvik]**

P.J. Torvik. "Reflection of wave trains in semi infinite plates", J. Acoust. Soc. Am. (1967), 99(4), pp. 346-353.

**[Victorov]**

Victorov, "Rayleigh and Lamb Waves", Plenum Press, New York, 1967.

**[Wilkie-Chancellier (1)]**

N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, J. Duclos, "Lamb wave conversion at the bevelled edge of a plate", 17<sup>th</sup> International Congress on Acoustics, Rome, 2-7 Septembre 2001, Actes sur CD-ROM.

**[Wilkie-Chancellier (2)]**

N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, J. Duclos, "Theoretical study of Lamb wave conversion at the edge a different angles bevelled plates", Forum Acusticum, Seville, 17-21 Septembre 2002, Actes sur CD-ROM

**[Wilkie-Chancellier (3)]**

N. Wilkie-Chancellier, "Simulation par éléments finis de la propagation d'ondes de Lamb dans des structures planes semi-infinies", Rapport de D.E.A., Université du Havre, juillet 2000.

**[Worlton]**

Worlton, D.C. "Ultrasonic testing with Lamb waves" Non destr Test 15 (1957), pp. 218-222

**[Zhang]**

S.Y. Zhang, J.Z. Shen, and C.F. Ying. "The reflection of the Lamb wave by a free plate edge: visualization and theory". Mat. Eval. (1988), 46, pp 638-641.

**[Zienkiewicz]**

O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. " La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires". Afnor technique.

---

# Annexe A

## Coefficient correctif des résultats expérimentaux

---

### **A.1. Propagation d'une onde incidente non atténuée**

A.1.1. Représentation spatio-temporelle

A.1.2. Transformation de Fourier temporelle

A.1.3. Transformation de Fourier spatiale

A.1.4. Etude du module de la transformée de Fourier  $\Psi$

*A.1.4.1. Onde non dispersive*

*A.1.4.2. Onde dispersive*

### **A.2. Propagation d'une onde incidente atténuée**

### **A.3. Propagation d'une onde réfléchie non atténuée**

### **A.4. Propagation d'une onde réfléchie atténuée**

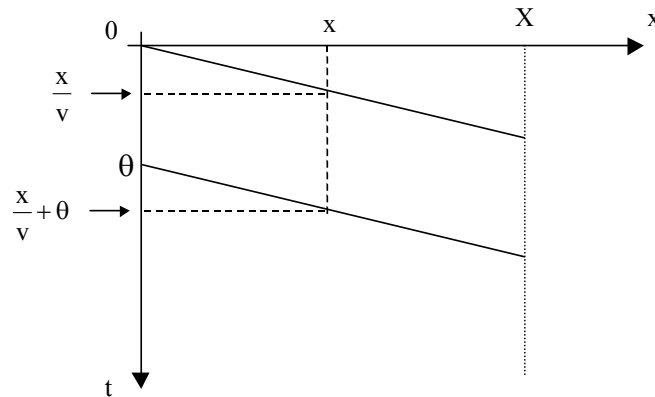
### **A.5. Coefficient correctif**

Le but de cette annexe est de refaire analytiquement les calculs que nous faisons subir aux signaux représentant l'évolution spatio-temporelle des ondes de Lamb lors des différents traitements afin de déterminer le coefficient correctif à utiliser pour tenir compte de l'élargissement des faisceaux d'ondes expérimentaux. Le traitement des signaux mis en œuvre dans cette thèse est basé sur des transformées de Fourier successives, spatiale puis temporelle. En plus, les calculs justifient un certain nombre de propriétés utilisées dans les chapitres précédents. Par contre, la description des ondes dispersives n'est pas exacte. La limitation spatio-temporelle du faisceau que nous imposons n'est pas vérifiée dans un cas général.

## **A.1. Propagation d'une onde incidente non atténuée**

### A.1.1. Représentation spatio-temporelle

Considérons une onde, quasi-harmonique d'amplitude 1, se propageant dans le sens des  $x_1$  croissants dont le faisceau incident est représenté sur la figure A.1.



*Figure A.1. : Représentation spatio-temporelle de l'onde incidente*

Les caractéristiques du signal sont : fréquence  $F_0$ , pulsation  $\omega_0$ , vecteur d'onde  $k_0 = \frac{\omega}{v_{ph}}$  et durée  $\theta$ . Les vitesses de phase et de groupe sont respectivement  $v_{ph}$  et  $v$ .

La fenêtre de pondération est donc rectangulaire. L'onde se propage sur la distance  $X$ .

L'expression de l'onde harmonique de durée  $\theta$  est alors :



$$s(x, t) = \left[ u\left(t - \frac{x}{v}\right) - u\left(t - \frac{x}{v} - \theta\right) \right] \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)]$$

On réalise successivement deux transformées de Fourier du signal, selon  $t$  et selon  $x$ .

### A.1.2. Transformation de Fourier temporelle

La transformée de Fourier temporelle du signal  $s(x, t)$  est notée :

$$S(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, t) \exp(-j\omega t) dt$$

On note  $t_1 = \frac{x}{v}$  et  $t_2 = \frac{x}{v} + \theta$ , donc  $t_1 + t_2 = \frac{2x}{v} + \theta$ .

Il vient donc aisément :

$$S(x, \omega) = \int_{t_1}^{t_2} \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)] \exp(-j\omega t) dt$$

$$S(x, \omega) = \exp(-j k_0 x) \int_{t_1}^{t_2} \exp[j(\omega_0 - \omega) t] dt$$

Nous rappelons le résultat de l'intégrale que nous serons amenés à calculer plusieurs fois :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \exp(j a x) dx &= \frac{\exp(j a x)}{j a} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{\exp(j a x_2) - \exp(j a x_1)}{j a} \\ &= \frac{2}{a} \exp\left[j \frac{a}{2}(x_1 + x_2)\right] \sin\left(\frac{a}{2}(x_2 - x_1)\right) \end{aligned}$$

$$d'où : \quad \int_{x_1}^{x_2} \exp(j a x) dx = (x_2 - x_1) \exp\left[j \frac{a}{2}(x_2 + x_1)\right] \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{2}(x_2 - x_1)\right)$$

Utilisant le résultat de l'intégrale obtenu ci-dessus, on peut écrire :

$$S(x, \omega) = (t_2 - t_1) \exp(-j k_0 x) \exp \left[ j \frac{\omega_0 - \omega}{2} (t_1 + t_2) \right] \frac{\sin \left( \frac{\omega_0 - \omega}{2} (t_1 - t_2) \right)}{\frac{\omega_0 - \omega}{2} (t_1 - t_2)}$$

$$\text{D'où : } S(x, \omega) = \theta \exp(-j k_0 x) \exp \left[ j (\omega_0 - \omega) \left( t_1 + \frac{\theta}{2} \right) \right] \text{sinc} \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2} \right]$$

La valeur particulière de  $S(x, \omega)$  pour  $\omega = \omega_0$  est :

$$S(x, \omega_0) = \theta \exp(-j k_0 x)$$

Et donc, la valeur du module de  $S(x, \omega)$  calculé en  $\omega = \omega_0$  est la suivante :

$$|S(x, \omega_0)| = \theta$$

### A.1.3. Transformation de Fourier spatiale

La transformée de Fourier spatiale du signal  $S(x, \omega)$  est donnée par la relation :

$$\Psi(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, \omega) \exp(j k x) dx$$

Si la fonction  $f(\theta)$  est définie par

$$f(\theta) = \theta \exp \left[ j (\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2} \right] \text{sinc} \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2} \right]$$

alors,  $\Psi(k, \omega)$  peut se mettre sous la forme :

$$\Psi(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \exp(-j k_0 x) \exp \left( j (\omega_0 - \omega) \frac{x}{v} \right) \exp(j k x) dx$$

La fenêtre de calcul étant bornée spatialement entre O et X, l'intégrale précédente s'exprime par :

$$\Psi(k, \omega) = \int_0^x f(\theta) \exp \left[ j \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) x \right] dx$$

$$\Psi(k, \omega) = f(\theta) X \exp \left[ j \frac{X}{2} \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \right] \operatorname{sinc} \left( \frac{X}{2} \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \right)$$

En détaillant, il vient :

$$\begin{aligned} \Psi(k, \omega) = \theta X \exp \left( j \frac{\theta}{2} \left( \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \right) \exp \left[ j \frac{X}{2} \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \right] & \times \\ \times \operatorname{sinc} \left( \frac{\theta}{2} (\omega_0 - \omega) \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{X}{2} \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \right) & \end{aligned}$$

Le signal  $\Psi(k, \omega)$  étant ainsi obtenu, nous pouvons calculer son module.

#### A.1.4. Etude du module de la transformée de Fourier $\Psi$

Le module du signal  $\Psi(k, \omega)$  est :

$$|\Psi| = X \theta \left| \operatorname{sinc} \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2} \right] \right| \left| \operatorname{sinc} \left[ \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \frac{X}{2} \right] \right|$$

Les maxima de  $|\Psi|$  sont donc donnés par :

$$\begin{cases} (\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2} = p \pi \\ \left( k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} \right) \frac{X}{2} = q \pi \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} \omega_0 - \omega = \frac{2p \pi}{\theta} \\ k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} = \frac{2q \pi}{X} \end{cases}$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs.

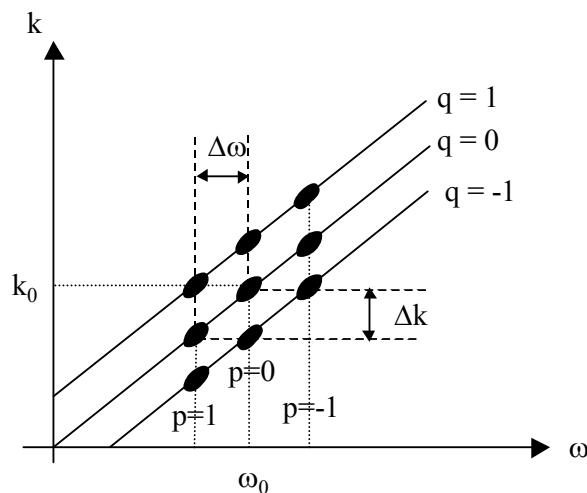
La représentation de  $|\Psi|$  dans l'espace  $(k, \omega)$  est donc une succession de « taches » causées par les fonction sinc.

Le maximum principal ( $p=0, q=0$ ) correspondant à  $\omega = \omega_0$  et  $k = k_0$  et est égal à :

$$|\Psi(k_0, \omega_0)| = X \theta$$

### A.1.4.1. Onde non dispersive

Cas où  $v$  est la vitesse de phase et de groupe et  $\omega_0 = k_0 v$ .

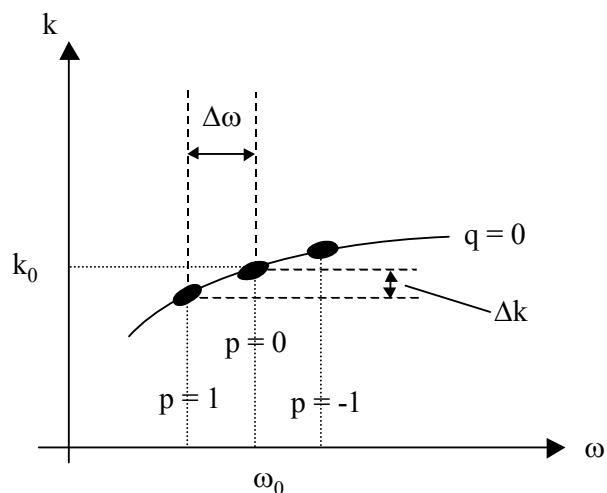


Donc le fait que  $k - k_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{v} = 0$  implique que les maxima  $q=0$  sont sur la droite

$k = \frac{\omega}{v}$ . De plus, les distances entre les pics successifs sont :  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\theta}$  et  $\Delta k = \frac{2\pi}{X}$  si  $q = \text{cte}$ .

On peut ainsi vérifier que la vitesse de groupe est bien :  $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{X}{\theta} = v$ .

### A.1.4.2. Onde dispersive



Les résultats numériques sont les mêmes que précédemment. Les pics de  $|\Psi|$  ne sont plus sur une droite mais sur une courbe.

Si  $q=\text{cte}$  ( $q=0$ ), les maxima sont pour  $\omega = \omega_0 + \frac{2p\pi}{\theta}$ . Ainsi,  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\theta}$ . Et donc :

$$\Delta k - \frac{\Delta\omega}{v} = 0$$

Et, puisque le rapport des espacements entre pics est toujours la vitesse de groupe ( $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v = v_G$ ), il est clair qu'il s'agit de la courbe de dispersion  $\omega(k)$ .

## **A.2. Propagation d'une onde incidente atténuée**

Comme nous l'avons vu dans le chapitre II de cette thèse, la décroissance de l'onde due à la divergence du faisceau est en  $K(x+a)^{-\frac{1}{2}}$ . Nous prendrons donc une onde atténuée par cette loi dans nos calculs.

L'onde harmonique atténuée est alors :  $s(x, t) = \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)] K(x+a)^{-\frac{1}{2}}$

L'onde est transformée une première fois en :

$$S(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, t) \exp(-j\omega t) dt$$

donc :  $S(x, \omega) = \exp(-j k_0 x) K(x+a)^{-\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \exp[j(\omega_0 - \omega)t] dt$

Si  $\omega = \omega_0$ , on peut écrire :

$$S(x, \omega_0) = \exp(-j k_0 x) K(x+a)^{-\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} dt = \exp(-j k_0 x) K(x+a)^{-\frac{1}{2}} (t_2 - t_1)$$

d'où :

$$S(x, \omega_0) = \exp(-j k_0 x) K(x+a)^{-\frac{1}{2}} \theta$$

En effectuant la deuxième transformée de Fourier (spatiale), on trouve :

$$\Psi(k, \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, \omega_0) \exp(jkx) dx$$

Si  $k = k_0$ , l'intégrale précédente se met sous la forme :

$$\Psi(k_0, \omega_0) = \theta K \int_0^x (x+a)^{-\frac{1}{2}} dx = \theta K \left[ 2(x+a)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x$$

Le module de  $\Psi$ , calculé en  $\omega = \omega_0$  et en  $k = k_0$ , est donc le suivant:

$$|\Psi(k_0, \omega_0)| = 2 \theta K \left[ (X+a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right]$$

d'où le rapport entre les modules  $|\Psi|$  de l'onde atténuée sur l'onde non atténuée :

$$\left| \frac{\Psi_{\text{onde atténuée}}}{\Psi_{\text{onde non atténuée}}} \right| = \frac{2 K \left[ (X-a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right]}{X}$$

Ce rapport étant calculé pour l'onde incidente, il nous faut maintenant l'obtenir pour l'onde réfléchie.

### **A.3. Propagation d'une onde réfléchie non atténuée**

La représentation spatio-temporelle des faisceaux d'une onde incidente (vitesse  $v$ ) et d'une onde réfléchie (vitesse  $v'$ ) est donnée Figure A.2. L'extrémité de la plaque est en  $x=Y$ .

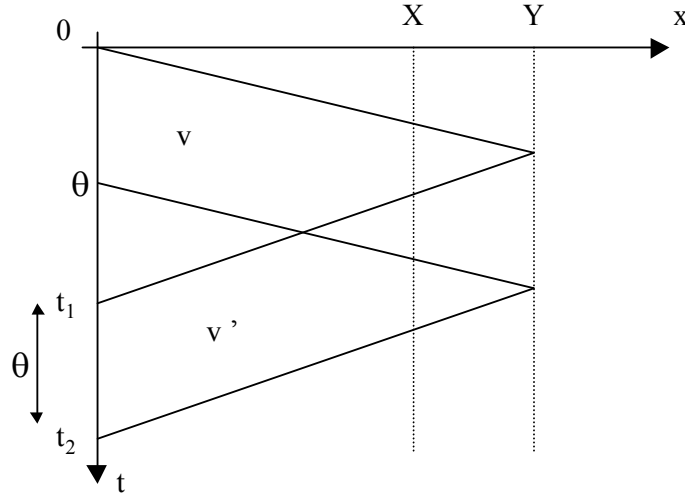


Figure A.2. : Représentation spatio-temporelle des ondes incidente et réfléchie.

Description des ondes de vecteurs d'ondes respectifs  $k_0$  et  $-k_r$  :

$$\text{Onde incidente : } s(x, t) = \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)]$$

$$\text{Onde incidente en } x=Y : s(Y, t) = \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y)]$$

$$\text{Onde réfléchie en } x=Y : s(Y, t) = \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y)] r \exp(j\varphi)$$

$$\text{Onde réfléchie : } s(x, t) = r \exp(j\varphi) \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y - k_r (Y - x))]$$

si  $\underline{r} = r \exp(j\varphi)$  est le coefficient de réflexion.

$$\text{Fenêtre temporelle : } \theta = t_2 - t_1 \text{ avec } t_1 = \frac{Y}{v} + \frac{Y-x}{v'}$$

Ainsi, la transformée de Fourier temporelle est :

$$S(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{t_1}^{t_2} r \exp(j\varphi) \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y - k_r (Y - x))] \exp(-j\omega t) dt$$

$$S(x, \omega) = r \exp(j\varphi) \exp[-j(k_0 Y + k_r (Y - x))] \theta \exp\left[j(\omega_0 - \omega) \frac{t_1 + t_2}{2}\right] \text{sinc}\left[(\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2}\right]$$

$$S(x, \omega) = r \exp(j\phi) \exp[-j(k_0 Y + k_r (Y - x))] \theta \times \\ \times \exp\left[j(\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2}\right] \exp\left[j(\omega_0 - \omega) \left(\frac{Y}{v} + \frac{Y - x}{v'}\right)\right] \text{sinc}\left[(\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2}\right]$$

Pour  $\omega = \omega_0$ , on a :

$$S(x, \omega_0) = r \theta \exp(j\phi) \exp(-j k_0 Y) \exp(j k_r (x - Y))$$

et donc en module :

$$|S(x, \omega_0)| = r \theta$$

La transformée de Fourier selon  $x$  à  $\omega$  constante :

$$\Psi(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, \omega) \exp(j k x) dx$$

En posant :

$$K = r \exp(j\phi) \exp[-j(k_0 Y + k_r Y)] \theta \times \\ \times \exp\left[j(\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2}\right] \exp\left[j(\omega_0 - \omega) \left(\frac{Y}{v} + \frac{Y - x}{v'}\right)\right] \text{sinc}\left[(\omega_0 - \omega) \frac{\theta}{2}\right]$$

On peut écrire :

$$\Psi(k, \omega) = K \int_0^x \exp(j k_r x) \exp\left[-j(\omega_0 - \omega) \frac{x}{v'}\right] \exp(j k x) dx$$

Ainsi, pour  $k = -k_r$  et  $\omega = \omega_0$ , il vient :

$$\Psi(-k_r, \omega_0) = r \exp(j\phi) \exp(-j k_0 Y) \exp(-j k_r Y) \theta X$$

D'où, en module :

$$|\Psi(-k_r, \omega_0)| = r \theta X$$



#### A.4. Propagation d'une onde réfléchie atténuée

Considérons maintenant une onde atténuée qui se réfléchit sur le biseau placé en  $x=Y$ .

On décrit successivement :

$$\text{L'onde incidente en } x=Y : s(Y, t) = \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y)] K (Y + a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{L'onde réfléchie en } x=Y : s(Y, t) = r \exp(j\varphi) \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y)] K (Y + a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{L'onde réfléchie : } s(x, t) = r \exp(j\varphi) \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y - k_r (Y - x))] K (2Y - x + a)^{-\frac{1}{2}}$$

Les transformées de Fourier successives amènent au même type de solution que précédemment, à savoir :

$$S(x, \omega_0) = r \exp(j\varphi) \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y - k_r (Y - x))] K (2Y - x + a)^{-\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$S(x, \omega_0) = r \theta \exp(j\varphi) \exp[j(\omega_0 t - k_0 Y - k_r (Y - x))] K (2Y - x + a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(-k_r, \omega_0) = r \theta \exp(j\varphi) \exp(-jk_0 Y) \exp(-jk_r Y) K \int_0^x (2Y - x + a)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\Psi(-k_r, \omega_0) = 2 r \theta \exp(j\varphi) \exp(-jk_0 Y) \exp(-jk_r Y) K \left[ (2Y - X + a)^{\frac{1}{2}} - (2Y + a)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$|\Psi(-k_r, \omega_0)| = 2 r \theta K \left[ (2Y - X + a)^{\frac{1}{2}} - (2Y + a)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{Et donc : } \left| \frac{\Psi_{\text{atténuée}}^{\text{ref}}(-k_r, \omega_0)}{\Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{ref}}(-k_r, \omega_0)} \right| = \frac{2 K \left[ (2Y - X + a)^{\frac{1}{2}} - (2Y + a)^{\frac{1}{2}} \right]}{X}$$

### A.5. Coefficient correctif

Le calcul numérique effectué (chapitre II) fournit le rapport entre  $\Psi_{\text{atténuée}}^{\text{ref}}$  et  $\Psi_{\text{atténuée}}^{\text{inc}}$  alors que la valeur souhaitée  $r$  est le rapport entre  $\Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{ref}}$  et  $\Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{inc}}$ .

Le coefficient de réflexion  $r$  est donné par la relation :

$$r = \frac{\left| \Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{ref}}(-k_i, \omega_0) \right|}{\left| \Psi_{\text{non atténuée}}^{\text{inc}}(k_0, \omega_0) \right|} = \frac{r \theta X}{\theta X} = \frac{\left| \Psi_{\text{atténuée}}^{\text{ref}}(-k_i, \omega_0) \right|}{\left| \Psi_{\text{atténuée}}^{\text{inc}}(k_0, \omega_0) \right|} \frac{(X+a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(2Y-X+a)^{\frac{1}{2}} - (2Y+a)^{\frac{1}{2}}}$$

Ainsi, pour connaître le rapport des transformées de Fourier des ondes non atténuées, il suffit de multiplier celui des ondes atténuées par le coefficient  $\gamma$  suivant :

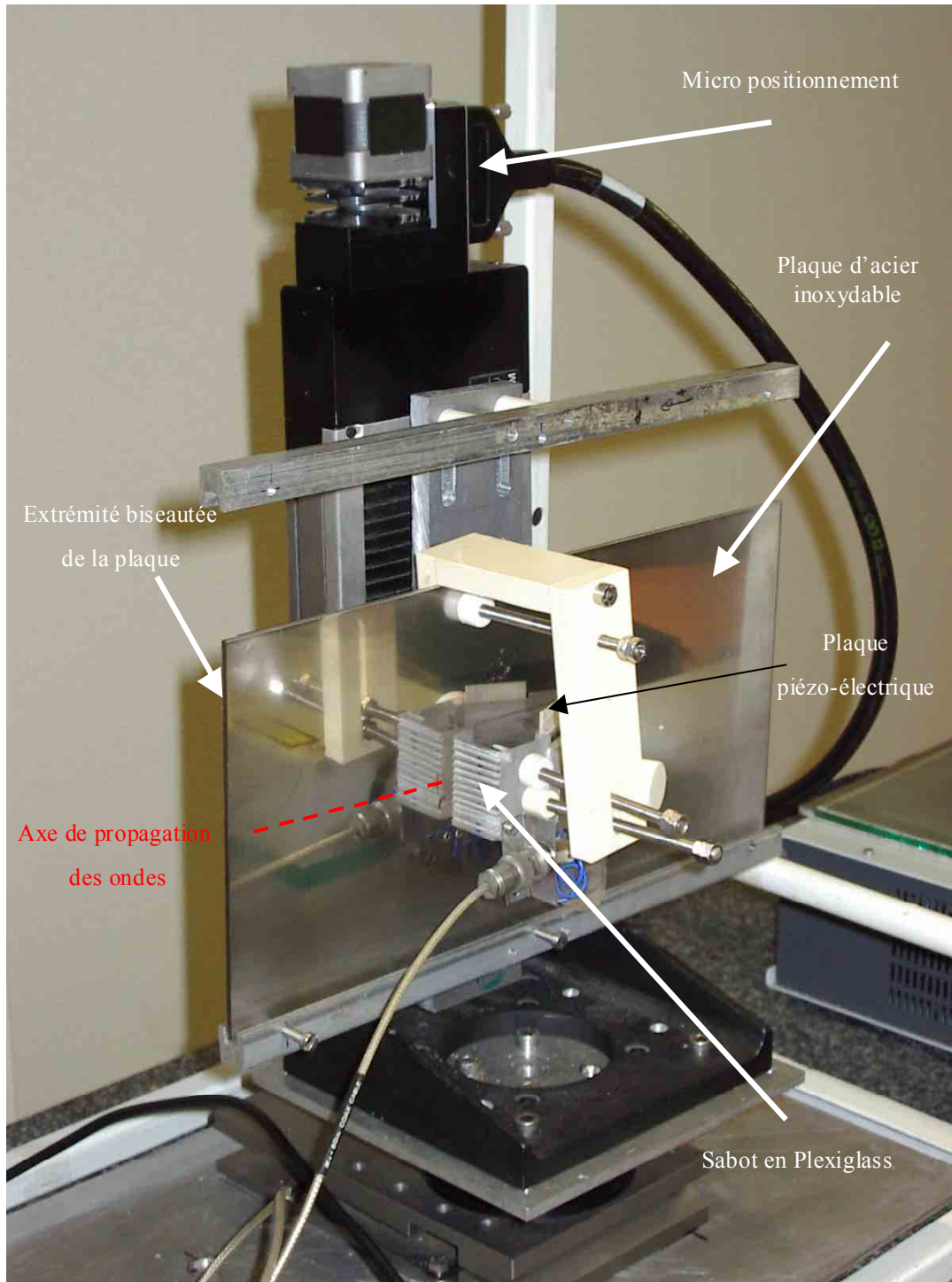
$$\gamma = \frac{(X+a)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{(2Y-X+a)^{\frac{1}{2}} - (2Y+a)^{\frac{1}{2}}}$$

---

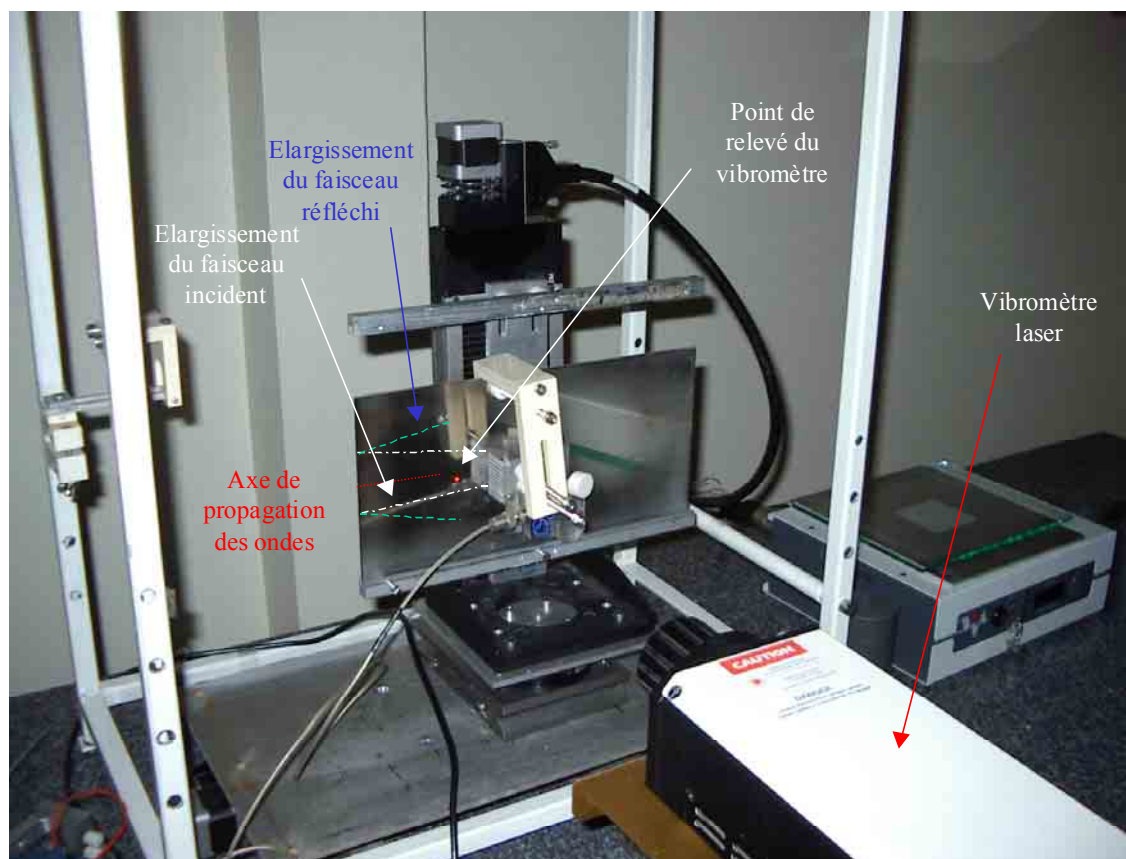
## **Annexe B**

### **Photographies du dispositif expérimental**

---



*Photographie 1*



Photographie 2



## Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de l'interaction d'ondes de Lamb avec un biseau. L'objectif est d'identifier les différents modes propagatifs issus de la conversion de l'onde incidente sur l'extrémité biseautée d'une plaque et d'évaluer l'énergie transportée par chaque mode. Dans un premier temps, cette étude est réalisée expérimentalement sur une plaque d'acier inoxydable. Les bilans d'énergie sont déduits des mesures des déplacements en surface par interférométrie laser. Ils sont corrigés pour tenir compte de la diffraction des ondes ultrasonores. Un modèle théorique, basé sur une décomposition modale, est ensuite mis en œuvre afin de justifier les résultats précédents. Le calcul des coefficients de réflexion en énergie a été mené dans le cas des modes de Lamb  $A_0$ ,  $S_0$  et  $A_1$  incidents sur des extrémités biseautées de 65 à 90° pour un produit fréquence-épaisseur FE variant de 1 à 4 MHz.mm. Les bilans quantitatifs obtenus par cette méthode valident les résultats expérimentaux. Le calcul théorique met en évidence l'importance des « modes complexes » existant dans la plaque. Une simulation par éléments finis a montré leur influence sur les réflexions et a permis d'évaluer à quelle distance du biseau les modes de Lamb se propagent seuls. Enfin, une étude est effectuée pour décrire l'influence d'un biseau sur le comportement du « mode de bout », phénomène particulier pouvant se produire à l'extrémité d'une plaque dans une gamme fréquentielle étroite lorsque le mode de Lamb  $S_0$  est incident.

## Reflection and conversion of a Lamb wave at a bevelled end of a plate

This study deals with the Lamb wave interaction on a bevel. The aim is to identify the different reflected modes which exist when a wave is incident on the bevelled end of a plate and to evaluate the respective energy of each mode. In a first time, the study is experimentally realised on a stainless steel plate. Energy balances are performed from the displacement measurements on the surface by laser interferometry. They are corrected to take into account wave diffraction. A theoretical model, based on a modal decomposition, is also done in order to justify the previous results. Computations of the energy reflection coefficients have been realised when the  $A_0$ ,  $S_0$  and  $A_1$  Lamb modes are incident on plate ends bevelled from 65 to 90°, for a frequency-thickness product included between 1 and 4 MHz mm. The quantitative balances obtained by this method agree with the experimental results. The theoretical computation reveals the importance of “complex modes” at the plate extremity. A finite element simulation confirms their effect on the reflections and allows to evaluate the distance from the bevel where the reflected Lamb waves are alone. Finally, a study is done to know the influence of a bevel on the “edge mode” behaviour - the “edge mode” is a particular phenomenon which appears in a narrow frequency band when the  $S_0$  Lamb mode is incident.

**Discipline :** Sciences pour l'ingénieur. **Spécialité :** Acoustique.

**Mots clés:** Acoustique ultrasonore, Ondes de Lamb, Décomposition modale, Plaque biseautée, Conversion de mode, Méthode des éléments finis, Mesures Vibrométriques.

Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique  
(LAUE CNRS – UMR 6068)  
Université du Havre  
Place Robert Schuman, BP 4006  
76610 - Le Havre, France

