



**HAL**  
open science

# La thermalisation des électrons dans une atmosphère stellaire

Loïc Chevallier

► **To cite this version:**

Loïc Chevallier. La thermalisation des électrons dans une atmosphère stellaire. Astrophysique [astro-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2000. Français. NNT: . tel-00006301

**HAL Id: tel-00006301**

**<https://theses.hal.science/tel-00006301>**

Submitted on 8 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée devant  
L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT**  
(arrêté du 30 mars 1992)

spécialité  
**Astrophysique**

présentée et soutenue publiquement le  
**29 septembre 2000**

par  
**Loïc CHEVALLIER**

TITRE

**LA THERMALISATION DES ÉLECTRONS DANS UNE  
ATMOSPHÈRE STELLAIRE**

Directeurs de thèse

Bernard RUTILY et Jacques BERGEAT

Jury composé de

Mr	Joachim OXENIUS	Président
Mme	Nelly PEYRAUD-CUENCA	Rapporteur
Mr	Eduardo SIMONNEAU	Rapporteur
Mr	Mario AHUES	
Mr	Lucio CRIVELLARI	
Mr	Bernard RUTILY	
Mr	Jacques BERGEAT	



## Remerciements

Je souhaite avant tout exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse Bernard Rutily, qui m'a énormément suivi et conseillé tout au long de ce travail. Je remercie aussi mon directeur de thèse Jacques Bergeat pour sa contribution à la réalisation du code de transfert, ainsi qu'Eduardo Simonneau, avec qui les fréquentes entrevues furent primordiales à l'aboutissement de cette thèse.

Mes remerciements vont enfin à mes amis et à ma famille pour leur soutien.



## Résumé

Nous nous intéressons à la cinétique des électrons dans une atmosphère stellaire, modélisée comme une couche plan-parallèle irradiée sur une face. Les électrons sont caractérisés par leur fonction de distribution des vitesses (fdv), que l'on cherche à calculer en même temps que les autres grandeurs de l'atmosphère. Notre principal objectif est de comprendre le mécanisme de thermalisation des électrons, qui tend à rapprocher leur fdv de la fonction de Maxwell-Boltzmann. Cette thermalisation est efficace tant que les collisions élastiques dominent les interactions des électrons avec le milieu ambiant, une hypothèse universellement admise en théorie des atmosphères stellaires.

Notre travail se situe dans la ligne tracée par quelques physiciens des plasmas au début des années 70 : N. Peyraud, J. Oxenius, E.C. Shoub, ... Leurs recherches ont montré le rôle important joué par les processus inélastiques (collisionnels ou radiatifs) dans le régime d'équilibre atteint par les électrons, qui peut s'écarter considérablement de l'équilibre maxwellien aux hautes énergies. De tels écarts modifient fortement le calcul des populations atomiques, car les électrons de haute énergie sont les principaux responsables des transitions collisionnelles subies par les particules lourdes. Les photons assurent les transitions radiatives, mais leur distribution est également affectée par les écarts à l'équilibre maxwellien des électrons et des particules lourdes, ce qui a pour effet d'augmenter ces écarts. C'est donc notre vision complète de l'atmosphère (populations atomiques, mais aussi densité et température électronique, champ radiatif) qui est modifiée par l'existence d'un équilibre non maxwellien des électrons.

Le problème consiste en la résolution couplée de l'équation cinétique des électrons, des équations de l'équilibre statistique et de l'équation de transfert, pour le calcul de la fdv des électrons, des populations atomiques et de l'intensité spécifique du champ radiatif. Nous avons résolu ce problème dans un plasma d'hydrogène pur en prenant en compte les principaux types d'interaction présents dans les atmosphères stellaires. L'équation cinétique des électrons a été résolue en calculant son terme de collision élastique à l'aide d'un modèle BGK longuement justifié dans la thèse. Pour résoudre l'équation de transfert, nous avons utilisé, et surtout développé, les codes de l'équipe *Transfert* du CRAL Observatoire de Lyon.

Les résultats confirment largement les idées avancées il y a une trentaine d'années. Aux arguments physiques d'alors s'ajoutent désormais des arguments numériques fondés sur l'utilisation de codes à la hauteur de ce problème complexe. Notre principale contribution se situe au niveau du terme de collisions élastiques des électrons, qui joue un rôle crucial dans le résultat final, et au niveau du transfert de rayonnement, qui a été mal traité jusqu'à présent. Pour fixer les idées et apprécier l'importance d'un calcul de la fdv électronique, nous comparons trois catégories de modèles d'atmosphères de mêmes paramètres initiaux : les premiers sont en ETL, les seconds sont hors ETL avec électrons thermalisés, et les troisièmes sont hors ETL avec électrons non thermalisés a priori.

Pour conclure, nous envisageons les applications astrophysiques de ce travail, avec une certaine prudence compte tenu du caractère hautement idéalisé du problème résolu.

# Abstract

Our work is concerned with the kinetics of electrons in a stellar atmosphere, modelled as a parallel-plane slab irradiated on one face. Free electrons are characterized by their velocity distribution function : the electron distribution function (edf), which is calculated in addition to other atmospheric thermodynamical quantities. Our main objective is to understand the mechanism leading to the thermalisation of electrons, where the edf tends toward the Maxwell-Boltzmann distribution. It is accepted, in stellar atmospheres theory, that thermalisation of electrons is effective as long as elastic collisions dominate inelastic interactions of electrons with the plasma.

This thesis follows the way opened by some plasma physicists in the early 70s : N. Peyraud, J. Oxenius, E. C. Shoub, etc. Their work proved the important role played by inelastic (collisional or radiative) processes in the equilibrium reached by electrons, whose edf can considerably deviate from the maxwellian equilibrium at high energies. Such deviations strongly modify atomic populations calculus, because high energy electrons are mainly involved in heavy particles collisional transitions. Radiative transitions are involved by photons, whose distribution is also affected by deviations of electron and heavy particles distributions from the maxwellian equilibrium, then increasing those deviations. Then, our usual vision of an atmosphere is completely modified by the existence of a non-maxwellian equilibrium of electrons (atomic populations, but also density and temperature of electrons, or radiative field).

This problem consists in solving some coupled equations : the radiative transfer equation, the statistical equilibrium equations and the kinetic equation of electrons, to calculate the radiative field specific intensity, atomic populations and the edf respectively. This problem was solved in this thesis by using an hydrogen plasma and the main types of interactions found in stellar atmospheres. The kinetic equation of electrons was solved using a BGK model for elastic collisions, this model being extensively detailed in the thesis. To solve the radiative transfer equation, we used, and especially developed, the code from the Transfert team at CRAL Observatoire de Lyon.

Results confirm ideas developed thirty years ago. Physical arguments are now enforced with numerical computations, precise enough to handle the complexity of this problem. Our main contribution consists in modelling elastic collisions of electrons, which plays a very important role in the final result, and by correctly solving the radiative transfer equation, which was not the case until now. To fix ideas about the influence of edf calculation on stellar atmospheres, we compare three categories of models, all with identical initial parameters : first ones are in LTE (local thermodynamic equilibrium), then we compute non-LTE models with thermalised electrons, and we relax the hypothesis of a priori thermalised electrons in a third category.

Finally, astrophysical applications of this work are carefully discussed, considering the highly idealized nature of problems solved in this thesis.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>Notations</b>	<b>13</b>
<b>1 Le modèle</b>	<b>25</b>
1.1 Atmosphères plan-parallèles, statiques et stationnaires . . . . .	25
1.2 Les particules . . . . .	25
1.3 Les collisions envisagées . . . . .	27
1.4 Données atomiques intrinsèques . . . . .	28
<b>2 L'équation de transfert</b>	<b>31</b>
2.1 Rappels . . . . .	31
2.1.1 Cas général . . . . .	31
2.1.2 Cas des atmosphères stellaires plan-parallèles et stationnaires . . . . .	32
2.1.2.1 Conditions aux limites . . . . .	33
2.1.3 Les moments de l'intensité spécifique . . . . .	34
2.2 Expression des coefficients volumiques . . . . .	34
2.2.1 Coefficient d'absorption . . . . .	35
2.2.1.1 Transitions $bb$ . . . . .	35
2.2.1.2 Transitions $bf$ . . . . .	35
2.2.1.3 Transitions $ff$ . . . . .	36
2.2.2 Coefficient d'émission . . . . .	36
2.2.2.1 Transitions $bb$ . . . . .	36
2.2.2.2 Transitions $fb$ . . . . .	37
2.2.2.3 Transitions $ff$ . . . . .	37
2.2.3 Coefficient de diffusion . . . . .	37
2.3 Atmosphères en équilibre thermodynamique local . . . . .	38
2.3.1 Atmosphères thermalisées . . . . .	38
2.3.1.1 Transitions $bb$ . . . . .	38
2.3.1.2 Transitions $bf$ - $fb$ . . . . .	38
2.3.1.3 Transitions $ff$ . . . . .	38
2.3.2 Atmosphères en équilibre thermodynamique local . . . . .	39
<b>3 L'équation cinétique des électrons</b>	<b>41</b>
3.1 Forme générale . . . . .	41
3.2 Termes de collisions élastiques . . . . .	41
3.2.1 Forme générale de Boltzmann . . . . .	42
3.2.2 Forme simplifiée . . . . .	43
3.2.2.1 Les collisions des électrons avec les particules chargées . . . . .	44
3.2.2.1.1 La section efficace différentielle de collision . . . . .	44
3.2.2.1.2 La forme de Fokker-Planck-Landau . . . . .	44
3.2.2.1.3 La forme de Boltzmann avec coupure . . . . .	46
3.2.2.1.4 Conclusion . . . . .	48



3.2.2.2	Les collisions des électrons avec les atomes neutres . . . . .	49
3.2.3	Forme modélisée BGK . . . . .	51
3.3	Termes de collisions inélastiques . . . . .	52
3.3.1	Remarque . . . . .	56
3.4	Termes de collision dûs aux processus radiatifs . . . . .	56
3.4.1	Le processus de photoionisation et son inverse . . . . .	56
3.4.2	Le processus de transition free-free $ff$ . . . . .	58
3.4.2.1	Remarque . . . . .	62
3.4.3	La diffusion Thomson . . . . .	62
3.5	Réorganisation du terme de source . . . . .	63
3.6	Simplification de l'équation . . . . .	64
3.6.1	Terme d'écoulement . . . . .	65
3.6.2	Terme de force . . . . .	65
3.7	Le mécanisme de non thermalisation des électrons . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Les équations de transport des particules lourdes</b>	<b>69</b>
4.1	Forme générale . . . . .	69
4.2	Cas des atmosphères stellaires . . . . .	70
4.3	Les taux de transition . . . . .	71
4.3.1	Les taux collisionnels . . . . .	71
4.3.1.1	Relation avec les taux électroniques . . . . .	72
4.3.1.2	Atmosphère en ETL . . . . .	72
4.3.2	Les taux radiatifs . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Méthode de résolution des équations du problème</b>	<b>75</b>
5.1	Retour sur le modèle. Fermeture des équations . . . . .	75
5.1.1	Introduction . . . . .	75
5.1.2	L'équation de l'équilibre hydrostatique . . . . .	76
5.2	L'équation de transfert . . . . .	77
5.2.1	Introduction de la variable de profondeur optique . . . . .	77
5.2.2	Solution exacte de l'équation de transfert . . . . .	78
5.2.2.1	Moment d'ordre 0 : l'intensité moyenne . . . . .	80
5.2.2.2	Moment d'ordre 1 : le flux radiatif . . . . .	80
5.2.2.3	Moment d'ordre 2 : la pression de radiation . . . . .	81
5.2.3	Les équations couplées à l'équation de transfert . . . . .	81
5.2.3.1	Couplage ET-ECE . . . . .	81
5.2.3.2	Couplage ET-ES . . . . .	82
5.3	L'équation cinétique des électrons . . . . .	82
5.3.1	Méthode de résolution . . . . .	82
5.3.2	L'équation de l'équilibre radiatif (ER) . . . . .	83
5.3.3	Couplage avec l'équation de transfert . . . . .	84
5.4	Les équations de l'équilibre statistique . . . . .	84
5.4.1	Couplage avec l'ET . . . . .	85
5.4.2	Couplage avec l'ECE . . . . .	85
5.5	Résolution de l'équation de transfert couplée aux ES . . . . .	85
5.5.1	Calcul de la fonction source $S_*$ . . . . .	86
5.5.2	L'équation de transfert dans la raie . . . . .	87
5.5.3	Le problème monochromatique associé . . . . .	88
5.6	La méthode de résolution du problème global . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Calculs numériques</b>	<b>91</b>
6.1	Les modèles présentés . . . . .	91
6.1.1	Détermination des paramètres . . . . .	91
6.1.2	Vérification de la condition de plasma cinétique classique . . . . .	91
6.1.3	Vérification des autres conditions . . . . .	93
6.2	Discrétisation des variables . . . . .	93
6.2.1	Les fréquences . . . . .	93
6.2.2	Les vitesses . . . . .	93

6.2.3	Les profondeurs géométriques . . . . .	94
6.2.4	Les profondeurs optiques . . . . .	95
6.3	Les résultats . . . . .	96
6.3.1	Modèles ETL . . . . .	97
6.3.2	Modèles NETL . . . . .	97
6.3.3	Modèles NECM . . . . .	98
6.3.4	Validité de la forme de l'ECE . . . . .	100
6.4	Conclusion . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Applications astrophysiques et conclusion</b>	<b>119</b>
7.1	Extensions possibles de ce travail . . . . .	119
7.1.1	Confirmation des résultats obtenus . . . . .	119
7.1.2	Transfert de rayonnement avec un modèle réaliste de diffusion . . . . .	119
7.1.3	Amélioration des équations cinétiques du problème . . . . .	120
7.1.4	Amélioration de l'équation cinétique des électrons . . . . .	120
7.1.4.1	Équation stationnaire . . . . .	120
7.1.4.2	Le terme d'écoulement et le champ de force extérieur des électrons	120
7.1.4.3	Le modèle BGK pour le terme de collisions élastiques des électrons	121
7.1.4.4	Effets d'anisotropie de la fdv électronique . . . . .	121
7.1.5	Amélioration des équations de l'équilibre statistique . . . . .	121
7.1.5.1	Milieu à deux températures . . . . .	121
7.1.5.2	Effets d'écoulement des atomes . . . . .	122
7.1.5.3	Prise en compte des collisions inélastiques entre atomes . . . . .	122
7.2	Survol de quelques retombées astrophysiques . . . . .	122
7.2.1	La modélisation des milieux dilués non transparents tels que les atmosphères stellaires ou les nuages interstellaires . . . . .	122
7.2.2	Le calcul de la température et/ou de la densité électronique par des techniques spectroscopiques ou des mesures in situ (sondes spatiales dans le cas du soleil) . . . . .	122
7.2.3	L'obtention de conditions aux limites pour l'étude de la région de transition et de la couronne solaire . . . . .	123
7.3	Conclusion . . . . .	123
<b>A</b>	<b>Description des interactions</b>	<b>125</b>
A.1	Processus radiatif bound-bound ( <i>bb</i> ) . . . . .	125
A.1.1	Calcul des coefficients d'Einstein . . . . .	126
A.1.2	Calcul des profils moyens d'absorption et d'émission . . . . .	126
A.2	Processus radiatif bound-free et free-bound ( <i>bf-fb</i> ) . . . . .	127
A.2.1	Transitions <i>bf</i> : section efficace de photoionisation . . . . .	127
A.2.1.1	Expression de la section efficace intégrée de photoionisation de l'atome d'hydrogène . . . . .	128
A.2.2	Transition <i>fb</i> : section efficace de recombinaison radiative . . . . .	128
A.3	Processus radiatif free-free ( <i>ff</i> ) . . . . .	128
A.3.1	Section efficace d'absorption <i>ff</i> . . . . .	128
A.3.1.1	Expression de la section efficace d'absorption <i>ff</i> pour un potentiel purement coulombien . . . . .	129
A.3.2	Section efficace d'émission <i>ff</i> . . . . .	130
A.4	Processus radiatif de diffusion . . . . .	130
A.4.1	Généralités . . . . .	130
A.4.2	Section efficace intégrée de diffusion Thomson des photons . . . . .	130
A.4.3	Section efficace de diffusion Rayleigh sur les atomes d'hydrogène . . . . .	131
A.5	Collisions élastiques . . . . .	132
A.5.1	Généralités. Section efficace différentielle . . . . .	132
A.5.2	Section efficace intégrée . . . . .	133
A.5.3	Collisions élastiques des électrons avec des particules chargées . . . . .	133
A.5.4	Cas des collisions élastiques des électrons avec les atomes . . . . .	135
A.5.4.1	La section efficace différentielle de collision ( <i>sed</i> ) . . . . .	135
A.5.4.2	La section efficace intégrée ( <i>sei</i> ) . . . . .	135

A.5.4.2.1	Formulaire . . . . .	136
A.5.4.2.2	Données . . . . .	136
A.5.4.2.3	Théorie classique . . . . .	137
A.5.4.2.4	Théorie quantique . . . . .	137
A.5.4.2.5	Ajustement des données . . . . .	137
A.6	Collisions inélastiques d'excitation et son inverse . . . . .	139
A.6.1	Section efficace différentielle . . . . .	139
A.6.2	Section efficace intégrée . . . . .	140
A.7	Collisions inélastiques d'ionisation et son inverse . . . . .	140
A.7.1	Généralités . . . . .	140
A.7.2	Expression de la section efficace intégrée sur les directions émergentes . . . . .	142
A.7.3	Calcul de la section efficace intégrée sur les vitesses émergentes . . . . .	143
A.7.4	Section efficace de recombinaison à trois corps . . . . .	144
<b>B</b>	<b>Le modèle BGK pour les collisions élastiques</b>	<b>145</b>
B.1	Introduction . . . . .	145
B.2	Les différentes approches . . . . .	146
B.2.1	L'approche mathématique . . . . .	146
B.2.1.1	L'approche du spectre de l'opérateur de collision . . . . .	147
B.2.1.2	La méthode de l'équivalence des moments . . . . .	149
B.2.1.3	Les autres méthodes . . . . .	150
B.2.2	L'approche phénoménologique . . . . .	151
B.2.3	Conclusion . . . . .	153
B.3	Étude sur la validité du modèle BGK . . . . .	154
B.3.1	Conservation des invariants collisionnels . . . . .	156
B.3.2	Problème stationnaire . . . . .	165
B.3.3	Conclusion . . . . .	167
B.4	Choix des fréquences de collision . . . . .	168
B.4.1	Les collisions des électrons avec les atomes . . . . .	168
B.4.2	Les collisions entre particules chargées . . . . .	169
B.4.2.1	L'approche numérique . . . . .	169
B.4.2.2	L'approche intuitive . . . . .	172
B.4.2.3	L'approche mathématique . . . . .	174
B.4.2.4	Choix de la fréquence . . . . .	176
B.4.3	Conclusion . . . . .	176
B.5	Conclusion . . . . .	177
<b>C</b>	<b>Notes</b>	<b>179</b>
C.1	Grandeurs liées aux atmosphères ETL (équilibre thermodynamique local) . . . . .	179
C.2	Définition et grandeurs d'un plasma cinétique classique . . . . .	180
C.2.1	les collisions élastiques électrons - particules chargées . . . . .	181
C.2.2	Les différents types de plasmas . . . . .	184
C.3	Les fonctions auxiliaires du transfert . . . . .	186
C.3.1	Moments doubles de la fonction de Green . . . . .	186
C.3.2	Les trois premiers moments de l'intensité spécifique . . . . .	187
C.3.3	Notations . . . . .	187
C.3.4	Définition des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $n \geq 0$ . . . . .	187
C.3.5	Définition des fonctions $\Phi_n$ pour $n \geq 0$ . . . . .	188
C.3.6	Définition des fonctions $\gamma_n$ pour $n \geq 0$ . . . . .	189
C.3.6.1	Deux propriétés des fonctions $\gamma_n$ utiles aux calculs numériques . . . . .	190
C.3.6.2	Expression des fonctions $\gamma_n$ sur les plans frontière . . . . .	190
C.3.7	Définition des fonctions $R_n$ pour $n \geq 0$ . . . . .	191
	<b>Table des figures</b>	<b>193</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>197</b>
	<b>Références</b>	<b>199</b>

# Introduction

Il est couramment admis en astrophysique que les électrons sont thermalisés dans les couches superficielles des étoiles, que nous appelons ici atmosphères. Précisons le vocabulaire : les électrons sont *thermalisés* lorsqu'ils ont atteint un état d'équilibre caractérisé par une distribution maxwellienne des vitesses dans l'espace des phases. Quant au terme *atmosphère*, il doit être pris dans un sens très général : nos atmosphères commencent dans les couches profondes des étoiles, où le champ radiatif peut être décrit dans l'approximation de la diffusion, et s'arrêtent sur les couches de température minimale, avant la remontée chromosphérique dont nous ignorons les effets. S'agissant du soleil, ce terme désigne donc les régions supérieures de l'enveloppe et la photosphère.

Le point de vue des astrophysiciens s'appuie sur le fait que les collisions élastiques subies par les électrons, qui tendent à les thermaliser, dominent largement les transitions inélastiques (collisionnelles ou radiatives), qui perturbent leur équilibre maxwellien [12, 14, 69]. En revanche, il est désormais bien connu que les électrons ne sont pas thermalisés dans la chromosphère et la couronne du soleil, modélisées comme des plasmas faiblement collisionnels soumis à un champ de force extérieur intense : voir par exemple Shoub [102] et la thèse récente de F. Leblanc [60].

A la fin des années 60, certains physiciens des plasmas avaient déjà montré à plusieurs reprises l'intérêt de calculer la fonction de distribution des vitesses ( $\mathbf{f}\mathbf{d}\mathbf{v}$ ) des électrons de façon auto-consistante dans un plasma collisionnel soumis à un champ électrique : cf. les articles de N. Peyraud [83] et les références qu'ils contiennent. Ces travaux ont donné naissance à une série d'articles importants sur les perturbations à l'équilibre maxwellien des électrons provoquées par les collisions inélastiques et les pertes radiatives, dans un plasma éventuellement libre de tout champ de force extérieur : voir Biberman, Vorob'ev et Yakubov [7], Peyraud [85, 84], Oxenius [75, 76], Shaw, Mitchner et Kruger [100], Claaßen [35, 36], Oxenius [77], Shoub [101] et Biberman, Vorob'ev et Yakubov [9], dans l'ordre chronologique. Ces études concluent à des écarts importants à la maxwellienne dans la queue des électrons rapides, ce qui peut modifier de façon substantielle le calcul de la densité électronique, de la température électronique et des populations atomiques.

L'alerte est donnée et le problème physiquement bien posé. Malheureusement, les calculs numériques ne suivent pas, la résolution couplée de l'équation de transfert (**ET**), de l'équation cinétique des électrons (**ECE**) et des équations décrivant l'équilibre statistique des atomes (**ES**) étant hors de portée des moyens de calcul de l'époque. De plus la résolution de l'équation de transfert était très difficile, expliquant que les travaux cités ont porté sur des milieux optiquement minces, c'est-à-dire émissifs mais non absorbants, ou sur des milieux optiquement épais mais en traitant mal le transfert. C'était admissible dans les plasmas de laboratoire visés par ces études, mais pas dans les atmosphères stellaires. Malgré cela, les résultats sont magnifiques, car fondés sur des développements analytiques inventifs visant à limiter au mieux la part de calcul de l'ordinateur.

Ces travaux ne sont pourtant pas repris par les astrophysiciens modélisateurs d'atmosphères stellaires, ce qui provient sûrement de la mise à l'écart de la théorie du transfert. Les physiciens à l'origine de ce travail orientent leur recherche vers des milieux ionisés où le transfert est négligé (haute chromosphère, couronne solaire, etc.).

En 1986 paraît l'ouvrage fondamental de Joachim Oxenius : *Kinetic Theory of Particles and Photons*, devenu aujourd'hui une référence incontournable [78]. La question des électrons est de nouveau soulevée (section 6.6), et l'attention du lecteur est attirée sur la nécessité d'aborder le problème dans les milieux optiquement épais :

"In the simplest case of a two-level atom with continuum and assuming complete redistribution, one is faced with a system of coupled equations that comprise the radiative transfer equation, the kinetic equation of the electrons, and the balance equations of the atomic levels. Owing to the great complexity of this problem, the calculations carried

out thus far still use unsatisfactory approximations. At present, non-LTE line transfer with a self-consistent electron distribution function is an unsolved problem.”

Dans le même temps ou peu après, J. Oxenius commence une collaboration sur le sujet avec E. Simonneau, qui est le spécialiste du transfert que l’on sait. Un travail considérable est effectué pour formuler le problème, rechercher les articles importants pour calculer le terme de collisions élastiques des électrons, *etc.* Mais cette collaboration exigeait un travail de longue haleine qui n’a pu être achevé avant le départ à la retraite de J. Oxenius. C’est donc le groupe *Transfert* de l’Observatoire de Lyon qui a hérité de ce dossier important, devenu notre sujet de thèse. Ce travail a été dirigé principalement par B. Rutily et J. Bergeat, mais nous avons bénéficié de façon régulière des conseils et des orientations d’E. Simonneau, qui a pris une part active à nos recherches notamment dans la phase finale. Nous avons aussi eu connaissance des notes manuscrites rédigées par J. Oxenius à la fin des années 80, ce qui a évidemment facilité notre tâche et nous permet d’écrire aujourd’hui que J. Oxenius est aussi à l’origine de ce travail.

Cette thèse comprend 7 chapitres et 3 annexes.

Les chapitres 1 à 4 forment le problème dans une atmosphère stellaire *classique*, c’est-à-dire plan-parallèle, statique et stationnaire, absorbant, émettant et diffusant la lumière de façon isotrope. Ce dernier point n’est possible que si la fdv des électrons est isotrope, ce que nous avons supposé. La composition chimique est idéalisée, puisque notre atmosphère est constituée d’hydrogène pur. Il s’agit en effet de formuler le problème le plus simplement possible et de disposer de sections efficaces faciles à calculer et fiables. Ces sections efficaces sont décrites dans l’annexe A. En dépit de ce contexte limitatif, nous avons tenu à assurer à notre modèle la portée la plus générale possible, en prenant en compte les principaux processus d’interaction rayonnement-matière présents dans les étoiles (y compris les transitions *free-free*), en ne négligeant pas les émissions induites, en utilisant des sections efficaces récentes et précises pour tout le domaine des énergies utilisées, en calculant les taux de transition sans approximation, *etc.* S’agissant des électrons (chapitre 3), le problème central a été le calcul du terme de collisions élastiques de ces particules, qui doit être à la fois simple et réaliste. Nous avons consacré beaucoup de temps à l’examen de la littérature sur le sujet et avons finalement opté pour un modèle Bhatnagar-Gross-Krook (**BGK**) présenté dans l’annexe B.

Le chapitre 5 indique la façon dont nous avons résolu le problème formulé dans les chapitres précédents. Nous avons rajouté deux équations supplémentaires pour fermer le système à résoudre : l’équation de conservation de la charge (**EC**), qui assure la neutralité électrique de l’atmosphère, et l’équation de l’équilibre hydrostatique (**EH**). La clef de notre solution est l’utilisation de codes exacts de résolution de l’équation de transfert. Nous avons trouvé ces codes au sein de l’équipe *Transfert* et les avons développés (voir annexe C.3 pour les détails). L’équation cinétique des électrons est résolue de façon itérative (pour un champ radiatif et des populations données) et les équations de l’équilibre statistique par inversion d’une matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$  pour un modèle atomique à  $N$  niveaux. La solution itérative de l’ensemble des équations converge au bout de 20 itérés en moyenne.

Le chapitre 6 présente les résultats numériques obtenus pour un modèle à température et masse volumique constantes, de valeurs proches de celles de la photosphère solaire. L’atmosphère est optiquement épaisse à toutes les fréquences pour justifier le choix d’un rayonnement incident planckien à la température du milieu. Pour ces conditions, nous avons établi un modèle d’atmosphère en *équilibre thermodynamique local* (**ETL**), puis un modèle hors-ETL, ou non-ETL (**NETL**) avec électrons thermalisés, puis un modèle NETL avec électrons non thermalisés a priori : modèle dit *non équilibre cinétique maxwellien* (**NECM**).

Le chapitre 7 traite des extensions possibles de notre travail et des principales applications astrophysiques envisagées. Ce chapitre est bref car nous avons conscience que le sujet doit encore mûrir avant que nous puissions examiner son incidence sur la modélisation des atmosphères stellaires. Notre thèse ne fait que confirmer les travaux des années 70, avec des outils numériques appropriés. Mais elle repose sur des hypothèses trop irréalistes pour que la question des retombées astrophysiques puisse être valablement abordée ici.

Enfin, l’annexe C regroupe des rappels sur les relations de Saha-Boltzmann décrivant une atmosphère stellaire en ETL, quelques propriétés du plasma considéré dans ce travail, et des développements liés à la résolution exacte de l’équation de transfert.

# Notations

Nous nous baserons sur deux ouvrages utilisés fréquemment dans ce travail : le livre *Physique des plasmas* de J.-L. Delcroix et A. Bers [32], et la monographie *Kinetic theory of particles and photons* de J. Oxenius [78].

Nous utilisons tout d'abord les règles générales suivantes :

- La nature vectorielle des grandeurs est notée comme suit :  $\mathbf{v}$  désigne un vecteur ou un pseudo-vecteur,  $v$  un scalaire ou la norme du vecteur  $v = |\mathbf{v}|$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  un vecteur normalisé à l'unité. Aucune notation ne désigne les tenseurs.
- Les diverses moyennes introduites sont :  $\langle v \rangle$  pour une moyenne d'ensemble, éventuellement indicée  $\langle v \rangle_i$  pour distinguer une moyenne d'une autre sur la même quantité, et  $\bar{v}$  pour une moyenne locale sur une distribution statistique, représentant une grandeur thermodynamique. Par exemple, la moyenne statistique la plus utilisée porte sur la distribution en vitesse  $f_i$  de l'espèce  $i$  :  $\langle v^n \rangle_i = \int f_i(\mathbf{v}) v^n d\mathbf{v}$ .
- Le milieu est un plasma partiellement ionisé et éclairé, caractérisé par des indices :  $i$  ou  $j$  pour les atomes dans leurs différents états d'excitation interne,  $k$  pour les ions dans leurs différents états d'excitation interne,  $+$  pour les protons,  $e$  pour les électrons libres et  $\nu$  pour les photons. Nous utiliserons l'indice  $a$  pour décrire tous les types possibles de l'atmosphère.
- Le système d'unités utilisé dans toutes les formules est le système (**SI**). Nous utiliserons les sigles d'unités suivants : la longueur (L), le temps (T) et la masse (M). Nous essaierons d'exprimer les formules en terme de quantités sans dimension, grâce au rapport des grandeurs sur des constantes adaptées, dans la mesure du possible si cette formulation n'est pas trop lourde par rapport au système (**SI**).
- Les sigles introduits pour la première fois sont entre parenthèses et en gras. Ex : (**fdv**).
- Les équations, figures et tableaux inclus dans le texte sont référencés par leur numéro mis entre parenthèses, précédé par le symbole Fig. pour les figures, Tab. pour les tableaux et éventuellement par le symbole Eq. pour les équations et expressions mathématiques en cas d'ambiguïté (symbole Eqs. si plusieurs équations sont référencées), ce qui donne (1.1) ou (Eq. 1.1.), (Fig. 1.1) et (Tab. 1.1) respectivement.
- les égalités entre expressions sont, outre le signe = d'égalité formelle stricte, les signes  $\approx$  (approximation formelle due à une simplification numérique ou formelle) et  $\sim$  (approximation numérique, ordre de grandeur).

Nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous les abréviations les plus importantes et souvent utilisées dans ce mémoire :

Notation	Explication
$bb$	transition atomique lié-lié (bound-bound)
$bf$	transition atomique lié-libre (bound-free)
EC	équation de conservation de la charge
ECE	équation cinétique des électrons
ES	équations de l'équilibre statistique
ET	équation de transfert
ER	équation de l'équilibre radiatif
EH	équation de l'équilibre hydrostatique (équilibre de pression)
ETL	équilibre thermodynamique local (LTE en anglais)
FPL	Fokker-Planck-Landau (terme de source différentiel de collisions élastiques entre particules chargées)

fdv	fonction de distribution des vitesses (pour toutes les particules). L'équivalent anglais est edf (electron distribution function)
$fb$	transition atomique libre-lié (free-bound)
$ff$	transition atomique libre-libre (free-free)
lpm	libre parcours moyen
$L\alpha$	première raie de Lyman (transition $1 \rightleftharpoons 2$ )
NETL	non-équilibre thermodynamique local
NECM	non-équilibre cinétique maxwellien (électrons non thermalisés)
RCF	redistribution complète en fréquence
sed	section efficace différentielle
sei	section efficace intégrée (intégration de la section efficace différentielle)

Les notations le plus souvent adoptées pour désigner les diverses grandeurs sont rassemblées dans le tableau ci-dessous, où la dernière colonne renvoie à la section (sans parenthèses) ou la formule (entre parenthèses) dans laquelle chaque grandeur est définie :

$(g, h)$	produit scalaire des fonctions $g$ et $h$ sur l'espace de Hilbert des fdv	(B.14)
$a_0$	rayon de Bohr $a_0 = \hbar/\alpha m_e c \sim 0.52917 \times 10^{-10}$ m	(5.61)
$a_1$	coefficient utilisé à la section 5.4	(5.61)
$a_2$	coefficient utilisé à la section 5.4	(5.62)
$a_3$	coefficient utilisé à la section 5.4	(5.63)
$a_4$	coefficient utilisé à la section 5.4	(5.64)
$a_+, a_-$	coefficients utilisé dans la sei de collisions élastiques $e - H$ (approximation de Born, calcul quantique)	(A.79)
$a_i(t)$	coefficients du développement de $h(\mathbf{v}, t)$ sur une base de fonctions propres de l'opérateur $L$ de Boltzmann	(B.8)
$\mathbf{a}_e(z)$	accélération radiative appliquée à un électron par diffusion Thomson	(3.136)
$a_e(z)$	accélération totale appliquée aux électrons dans l'ECE, liée à l'accélération due à la gravité $a_{grav}$ ou à l'accélération radiative $a_{rad}$	6.3.4
$A$	coefficient utilisé dans la sei de collisions élastiques $e - H$ (approximation de Born)	(A.78)
$A(z, v, \nu)$	fonction utilisée dans le terme d'absorption $K_{ff}$ de l'ECE	5.2.3
$A_1$	fonction utilisée dans le terme de source de transitions radiatives $ff$ de l'ECE	(3.109)
$A_2$	fonction utilisée dans le terme de source de transitions radiatives $ff$ de l'ECE	(3.110)
$A_n$	majoration de l'erreur $E_n(t)$	(B.56)
$A_i(t)$	coefficients du développement de l'opérateur approché $L^{(N)}$	(B.19)
$A_{ji}$	coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée d'un photon de fréquence $\nu_{ij}$ par un atome d'hydrogène	(A.6)
$\alpha$	Constante de structure fine $\alpha = q_e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \sim 1/137.039$	(C.15)
$\alpha$	degré d'ionisation $\alpha = n_+/n_0$	(C.16)
$\alpha^*$	degré d'ionisation à l'ETL pour une densité $n_0$ donnée	(C.16)
$\alpha_d$	polarisabilité dipolaire de l'atome d'hydrogène	(A.77)
$\alpha_m$	angle de déviation utilisé lors de collisions élastiques entre particules chargées	(C.17)
$\alpha_T$	coefficient lié au courant électronique	3.6.2
$\alpha_n()$	moment d'ordre $n$ de la fonction auxiliaire du transfert $X$	C.3.4
$\alpha_{ij}$	coefficient utilisé à la section 5.4	(5.60)
$\mathbf{B}$	champ magnétique	3.6.2
$B$	coefficient utilisé dans la sei de collisions élastiques $e - H$ (approximation de Born)	(A.78)
$B(z, v, \nu)$	fonction utilisée dans le terme d'émission $E_{ff}$ de l'ECE	5.2.3

$B(T)$	distribution de Planck intégrée sur la fréquence	(5.25)
$B_\nu(T)$	fonction de Planck à la température $T$	(2.18)
$B_\nu^W(T)$	fonction de Wien à la température $T$	(2.51)
$B_1$	fonction utilisée dans le terme de source de transitions radiatives $ff$ de l'ECE	(3.111)
$B_2$	fonction utilisée dans le terme de source de transitions radiatives $ff$ de l'ECE	(3.112)
$B_p$	constantes utilisées dans le moment maxwellien $M_p$	(B.60)
$B_{ij}$	coefficient d'Einstein pour l'absorption d'un photon de fréquence $\nu_{ij}$ par un atome d'hydrogène	(A.5)
$b_{ij}(z)$	coefficient habituel pour qualifier l'écart des populations atomiques à l'ETL	(C.2)
$b_i(z)$	coefficient habituel pour qualifier l'écart des populations atomiques à l'ETL	(C.6)
$b_0, b_1, b_2$	coefficients utilisés dans le modèle de sei $q_{He}$	(A.76)
$b_i^*(z)$	coefficient pour qualifier l'écart des populations atomiques à l'ETL	(C.13)
$\beta$	constante utilisée uniquement à la section 3.2.2.1.3	3.2.2.1.3
$\beta_n()$	moment d'ordre $n$ de la fonction auxiliaire du transfert $Y$	C.3.4
$\beta_{ij}$	coefficient utilisé à la section 5.4	(5.60)
$c$	célérité de la lumière dans le vide $c = 2.99792 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	
$C$	coefficient utilisé dans la sei de collisions élastiques $e - H$ (approximation de Born)	(A.78)
$C_{ij}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$	distribution quantifiant les collisions inélastiques $i \rightarrow j$ (excitation collisionnelle $i < j$ , désexcitation collisionnelle $i > j$ , ionisation collisionnelle $j = +$ , recombinaison collisionnelle $i = +$ )	(3.52)
$C_{ij}(z)$	taux de transition $i \rightarrow j$ dû à un processus collisionnel	4.3
$\chi$	coefficient d'extinction de l'ET (opacité)	(2.6)
$\chi$	degré d'ionisation $\chi = n_+ / (n_0 - n_+)$	(C.9)
$\chi^*$	degré d'ionisation à l'ETL $\chi^* = n_e^* / (n_0 - n_e^*)$	(C.14)
$\chi_c$	coefficient d'extinction de l'ET (opacité) pour le continuum	(5.73)
$\chi_e$	coefficient d'extinction de l'ECE	(3.145)
$\chi_a$	coefficient d'extinction de l'équation cinétique des particules de l'espèce $a$	ch. 4
$\hat{\chi}_{ij}$	coefficient d'extinction de l'ET pour la raie $i \leftrightarrow j$	(5.71)
$\bar{\chi}_R(Z)$	opacité de Rosseland	(5.24)
$d_e$	distance interparticulaire moyenne (entre électrons) : $d_e = n_e^{-1/3}$	C.2
$\Delta\nu_{ij}(z)$	Largeur Doppler en fréquence, dépendant de la température	(A.11)
$\Delta E$	variation d'énergie utilisée dans l'étude du modèle BGK	B.4.2.2
$\langle \Delta \Psi_i \rangle_M$	moment de l'opérateur approché $L^{(N)}$	(B.20)
$\delta(x)$	distribution de Dirac	3.2.1
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker	B.2.1
$\hat{\delta}(\tau, u)$	distribution utilisée par l'ET	(5.27)
$e$	charge électrique de l'électron $e \sim 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	
$e$	densité d'énergie cinétique totale du gaz	(1.5)
$E$	coefficient d'émission spontanée de l'ET (émissivité), séparé en processus $E_{bb}$ , $E_{bf}$ et $E_{ff}$	ch. 2
$\mathbf{E}$	champ électrique	3.6.2
$E_e$	coefficient d'émission d'électrons dans l'ECE par photoionisation	(3.85)
$E_a$	coefficient d'émission de l'équation cinétique des particules de l'espèce $a$	ch. 4
$E_a$	énergie cinétique moyenne d'une particule de l'espèce $a$	(1.4)
$E_R$	énergie de Rydberg, ionisation de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène $E_R = \alpha^2 m_e c^2 / 2 \sim 13.6 \text{ eV}$	



$E_i$	Energie de liaison de l'atome d'hydrogène à l'état d'énergie $i$ : $E_i = -E_R/i^2$	A.1
$E_m$	énergie liée aux collisions élastiques $e - H$	3.2.2.2
$E_{ij}$	différence d'énergie (positive) entre les états $i < j$ d'un atome : $E_{ij} = E_j - E_i$ . Pour l'atome d'hydrogène, $E_{i+} = E_i$	2.3
$\hat{E}_{ji}$	coefficient d'émission de l'ET, pour la raie $i \leftrightarrow j$	(5.70)
$E_c$	coefficient d'émission de l'ET pour le continuum	(5.67)
$E_n(t)$	erreur relative décrivant la conservation des invariants collisionnels d'ordre $n = 0, 1, 2$ d'un modèle BGK à fréquence de collision variable avec la vitesse	(B.52)
$E_k(\tau)$	fonction exponentielle-intégrale d'ordre $k$	(5.35)
$\tilde{E}_n(t)$	Même quantité que $E_n(t)$ , décrivant la conservation instantanée des invariants collisionnels.	(B.54)
$E'_v$	énergie utilisée dans le processus d'ionisation collisionnelle	A.7.2
$\text{erf}(x)$	fonction d'erreur usuelle	(3.21)
$\varepsilon$	précision utilisée dans l'étude du modèle BGK	B.3.2
$\varepsilon_F$	énergie de Fermi d'un gaz dégénéré d'électrons $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3}$	6.1.2
$\epsilon_0$	permittivité du vide, utilisée sous la forme $1/4\pi\epsilon_0 \approx 10^{-7} c^2$	
$\epsilon$	probabilité de destruction des photons utilisée dans l'ET	(2.13)
$\epsilon_{ji}$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.77)
$\epsilon_{ij}^*$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.83)
$\epsilon'_{ij}$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.84)
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.92)
$\epsilon_p(\tau)$	coefficient utilisé dans les fonction auxiliaires du transfert (annexe C.3)	(C.35)
$\eta_0^\pm(k)$	déphasage de l'onde partielle ( $s$ ) pour les collisions élastiques $e - H$	A.5.4
$\eta_X(), \eta_Y()$	fonctions auxiliaires du transfert	C.3.6
$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$	fonction de distribution simple de l'espèce $a$ , normalisée $f_a = F_a/n_a$ (unités $L^{-3}T^3$ )	ch. 1
$f_a(\mathbf{r}, v, t)$	composante isotrope de la fdv $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ de l'espèce $a$	ch. 1
$\tilde{f}_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$	composante anisotrope de la fdv $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ de l'espèce $a$	ch. 1
$f^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$	fdv d'équilibre générale du modèle BGK	ch. B
$f_{ij}^0(\mathbf{v})$	fdv d'équilibre du modèle BGK décrivant les collisions élastiques $i + j \rightleftharpoons i + j$ dans l'équation cinétique de l'espèce $i$	(B.31)
$f_a^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{r}, \mathbf{v})$	forme de Maxwell-Boltzmann généralisée (anisotrope) pour la fdv de l'espèce $a$ , de vitesse moyenne $\mathbf{u}$ et de température $T$	(1.7)
$f_a^M[T](z, v)$	forme de Maxwell-Boltzmann isotrope pour la fdv de l'espèce $a$ , de température $T$	(1.8)
$f_{ij}$	force d'oscillateur pour la transition radiative $bb$ $i \rightarrow j$	(A.5)
$\tilde{f}_1$	coefficient utilisé dans la diffusion Rayleigh	(A.52)
$\tilde{f}_{int}$	fréquence d'interaction dans un plasma	(C.28)
$f_{pe}$	fréquence de plasma pour les électrons	(C.27)
$f_{p+}$	fréquence de plasma pour les protons	C.2
$\mathbf{F}_r$	flux vectoriel radiatif du rayonnement (différentiel ou intégré)	(2.21, 3.135)
$F_r$	flux scalaire radiatif du rayonnement	(2.22)
$\mathbf{F}_a$	force appliquée aux particules de l'espèce $a$ : $\mathbf{F}_a = m_a \mathbf{g}_a$	(4.3)
$F_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$	fonction de distribution simple de l'espèce $a$ (unités $L^{-6}T^3$ )	ch. 1
$F_{e,elec}$	force appliquée aux électrons par le champ électrique, directement lié à $\mathbf{g}_e$	3.6.2
$F_{e,grav}$	force appliquée aux électrons par le champ de gravitation, directement lié à $\mathbf{g}_e$	3.6.2
$\mathbf{g}, g$	champ de gravitation subi par les particules	ch. 4, (5.10)
$\mathbf{g}, g, \hat{\mathbf{g}}$	vitesse relative	3.2.2.1.1
$\mathbf{g}$	densité de quantité de mouvement totale du gaz	(1.5)

$g(v, t)$	écart relatif de la fdv à la fdv d'équilibre utilisé dans l'étude du modèle BGK	(B.77)
$g()$	fonction auxiliaire du transfert	(C.49)
$\mathbf{g}_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$	accélération subie par les particules de l'espèce $a$ (champ de force extérieur et champ auto-consistant) dans les équations cinétiques, décomposée selon le champ électrique $\mathbf{g}_{a,elec}$ , magnétique $\mathbf{g}_{a,magn}$ , et de gravité $\mathbf{g}_{a,grav}$	3.1
$\mathbf{g}_{ke}, g_{ke}$	vitesse relative entre une particule d'espèce $k$ avec un électrons lors d'une collision élastique, de norme $g_{ke}$	3.2.1
$g_1(u)$	fonction utilisée à la section 3.2.2.1.3	(3.30)
$g_2(u)$	fonction utilisée à la section 3.2.2.1.3	(3.31)
$g_i$	poids statistique (degré de dégénérescence) des états liés de l'atome (hydrogène), du proton ou de l'électron libre : $g_i = 2i^2$ , $g_+ = 1$ , $g_e = 2$ (spin)	A.1
$g_i(\mathbf{v}, t)$	écart relatif de la fdv $f_i$ à la maxwellienne	(B.39)
$g_{bf}$	facteur de Gaunt pour la transition radiative $bf$	A.2.1
$g_{ff}$	facteur de Gaunt pour la transition radiative $ff$	A.3.1
$G_{ei}$	coefficient utilisé dans le terme de source FPL	(3.15)
$G$	constante de gravitation $G \sim 6.67 \times 10^{-11}$ en unités SI	
$G()$	fonction de Green de l'ET	(5.29)
$G_1^{(n)}()$	moment simple d'ordre $n$ par rapport à la deuxième variable $\mu'$ de la fonction de Green	(5.28)
$G^{(n,p)}()$	moment double d'ordre $n$ par rapport à la deuxième variable et d'ordre $p$ par rapport à la quatrième variable de la fonction de Green $G()$ (voir section C.3.1)	(5.32)
$\Gamma_{ei}$	coefficient utilisé dans le terme de source FPL	(3.16)
$\Gamma_i$	coefficient utilisé pour les transitions radiatives $bf$ - $fb$	(C.4)
$\gamma_{ij}$	constante d'amortissement liée à la diffusion Rayleigh	(A.44)
$\gamma$	fréquence caractéristique de l'opérateur approché $L^{(N)}$	(B.19)
$\gamma_n()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.6
$\gamma_{ei}$	coefficient utilisé à la section 3.2.2.1.3	(3.27)
$\gamma'_{ei}$	coefficient utilisé à la section 3.2.2.1.3	(3.32)
$h$	constante de Planck $h \sim 6.625 \times 10^{-34}$ J s	
$h(\mathbf{v})$	distribution montrant la déviation de la fdv à une maxwellienne, dans un traitement linéarisé	B.2.1
$h_e(z, v)$	rapport de la fdv des électrons à sa maxwellienne $h_e = f_e/f_e^M$	5.3.1
$\hbar$	constante dérivée de la constante de Planck $\hbar = h/2\pi$	
$H(z)$	échelle de hauteur de l'atmosphère	3.6
$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)$	intensité spécifique du rayonnement	ch. 2
$I_p(\tau)$	moment d'ordre $p$ par rapport à $\mu$ de l'intensité spécifique du rayonnement $I(\tau, \mu)$	(5.30)
$I_i(\nu)$	fonction utilisée pour décrire la diffusion Rayleigh	(A.43)
$\mathbb{I}$	tenseur diagonal unitaire	(3.15)
$I^+$	intensité de rayonnement entrant par la face interne de l'atmosphère (approximation de la diffusion)	(2.17)
$J$	intensité moyenne du rayonnement	(2.20)
$\bar{J}_{ij}(z)$	intensité moyenne absorbée dans la raie $i \leftrightarrow j$	(4.28)
$\mathbf{j}_e$	densité de courant électrique des électrons	(3.150)
$k$	constante de Boltzmann $k \sim 1.3805 \times 10^{-23}$ J K <sup>-1</sup>	ch. 1
$k()$	inverse de la profondeur de thermalisation, utilisé au chapitre 6	(C.45)
$k$	norme vecteur d'onde de l'électron utilisé par les collisions élastiques $e - H$ : $k = m_e v / \hbar$	A.5.4
$\mathbf{k}$	vecteur normal à l'atmosphère plan-parallèle (selon la coordonnée $z$ ) dirigé vers l'extérieur de l'étoile	3.4.3
$K$	coefficient d'absorption de l'ET, séparé en processus $K_{bb}$ , $K_{bf}$ et $K_{ff}$	ch. 2

$K(\mathbf{v}, \mathbf{w})$	noyau de l'opérateur $L$ de Boltzmann	(B.7)
$K_e$	coefficient d'absorption d'électrons dans l'ECE par recombinaison radiative	(3.86)
$K_1(\nu)$	coefficient utilisé dans la diffusion Rayleigh	(A.52)
$K_a$	coefficient d'absorption de l'équation cinétique des particules de l'espèce $a$	ch. 4
$\hat{K}_{ij}$	coefficient d'absorption de l'ET, pour la raie $i \leftrightarrow j$	(5.70)
$K_c$	coefficient d'absorption de l'ET pour le continuum	(5.66)
$K_\varepsilon$	constante utilisée dans l'étude du modèle BGK	(B.91)
$\kappa$	coefficient d'absorption de l'ET, corrigé de l'émission induite	(2.4)
$\kappa_c$	coefficient d'absorption de l'ET, corrigé de l'émission induite, pour le continuum	(5.72)
$L[h](\mathbf{v})$	opérateur linéarisé de Boltzmann pour les collisions élastiques entre particules identiques	(B.6)
$L_N[h](\mathbf{v})$	première approximation d'ordre $N$ de l'opérateur $L$	(B.15)
$L^{(N)}[h](\mathbf{v})$	deuxième approximation d'ordre $N$ de l'opérateur $L$	(B.19)
$\lambda_D$	longueur de Debye	(A.69)
$\lambda_{De}$	longueur de Debye ne tenant compte que des électrons comme effet d'écran	(C.26)
$\lambda_{D+}$	longueur de Debye tenant compte des électrons et des protons comme effet d'écran	C.2
$\lambda_e$	libre parcours moyen des électrons du fait des collisions élastiques	3.6
$\lambda_e$	longueur d'onde thermique de de Broglie pour les électrons libres	(C.8)
$\lambda_i$	valeurs propres de l'opérateur $L$ de Boltzmann	(B.9)
$\lambda_{ji}(z)$	coefficient utilisé dans les ES et ET	(4.29)
$\lambda_{nl}$	valeurs propres de l'opérateur $L$ de Boltzmann pour les collisions maxwelliennes	(B.13)
$\lambda_R$	longueur d'onde de Rutherford $\lambda_R = c/\nu_R \sim 91.1$ nm	ch. 6
$\ln \Lambda$	logarithme coulombien	(A.75)
$m_a$	masse de l'espèce $a$	ch. 1
$m_e$	masse de l'électron $m_e \sim 9.109 \times 10^{-31}$ kg	ch. 1
$m_p$	masse du proton $m_p \sim 1.673 \times 10^{-27}$ kg, $m_p/m_e \sim 1836$	ch. 1
$m_+$	masse de l'hydrogène ionisé $m_+ \approx m_p$	3.2.2
$m_H$	masse de l'atome d'hydrogène $m_H \approx m_+ + m_e \approx m_p$	ch. 5
$M$	masse	3.6.2
$M_\odot$	masse du soleil $M_\odot \sim 2 \times 10^{30}$ kg	3.6.2
$M_p(u, T)$	moment maxwellien d'ordre $p$	(B.59)
$\mu$	coordonnée angulaire polaire de l'ET $\mu = \cos \theta$	2.1.2
$\mu_i$	masse réduite du système d'un électrons avec une particule de type $i$ : $\mu_i = m_e m_i / (m_e + m_i)$	3.2.2
$\mu_e$	masse réduite de l'électron $\mu_e = m_e / 2$	3.2.2
$\mu_+$	masse réduite du proton $\mu_+ = m_e m_+ / (m_e + m_+) \approx m_e$	3.2.2
$\hat{\mathbf{n}}$	vecteur direction des photons, $d\hat{\mathbf{n}}$ est l'élément d'angle solide autour de $\hat{\mathbf{n}}$	ch. 1
$n_a(\mathbf{r}, t)$	densité numérique de l'espèce $a$ et locale au point $(\mathbf{r}, t)$ , où $a = \{i, j, k, +, e\}$	ch.1
$n_i^S$	densité numérique de Saha de l'espèce $i$ (atomes excités)	(C.7)
$n_e^*$	densité numérique des électrons (et protons) à l'ETL	(C.11)
$n_i^*$	densité numérique de l'espèce $i$ à l'ETL	(C.12)
$n_0(\mathbf{r}, t)$	densité numérique de particules lourdes : $n_0 = n - n_e$	(1.6)
$n_H(\mathbf{r}, t)$	densité numérique d'atomes d'hydrogène : $n_H = \sum_i n_i$	(5.3)
$n(\mathbf{r}, t)$	densité numérique totale de l'atmosphère	(1.5)
$N_p(y)$	fonction associée à la fonction $M_p(u, t)$	(B.61)
$N$	nombre total de types neutres d'atomes de l'atmosphère	ch. 5
$N_D$	nombre de charges dans la sphère de Debye	(C.32)

$\nu$	fréquence des photons	ch. 2
$\nu(v)$	fréquence de collision élastique $e - H$	3.2.2.2
$\nu_1(v)$	fréquence de collision élastique $e - H$	3.2.2.2
$\nu^*(v)$	fréquence de collision élastique $e - H$	3.2.2.2
$\nu_e(v)$	fréquence de collisions élastiques des électrons du modèle BGK dans l'ECE	(3.45)
$\nu_i(\mathbf{v})$	fréquence de collision du modèle BGK pour l'espèce $i$	B.3
$\nu_l(v)$	fréquence de relaxation des anisotropies d'ordre $l$ de la fdv des électrons par collisions élastiques avec les atomes neutres	(B.88)
$\nu_R$	fréquence de Rydberg $\nu_R = E_R/h = \alpha c/4\pi a_0 \sim 3.2898 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$	
$\nu_N$	fréquence caractéristique de l'approximation $L_N$	(B.15)
$\nu_p$	fréquence de plasma	(A.34)
$\nu_\varepsilon(v)$	fréquence de collision liée au temps $t_\varepsilon(v)$ dans l'étude du modèle BGK	(B.91)
$\bar{\nu}$	coefficient utilisé dans la diffusion Rayleigh	(A.52)
$\nu_{ij}$	fréquence centrale de la raie associée à la transition $i \rightleftharpoons j$ pour $i < j$	(A.3)
$\nu_{ij}$	fréquence de collision constante du modèle BGK	(B.30)
$\nu_{i+}$	fréquence d'ionisation de l'état d'énergie $i$ de l'atome d'hydrogène : $\nu_{i+} = \nu_R/i^2$	A.2.1
$\nu_{ek}(v)$	fréquence de collisions élastiques des électrons avec les particules de l'espèce $k$ (détails de $\nu_e$ )	3.2.3
$\nu_{ei}^{(n)}(v)$	choix des expressions utilisées pour modéliser la fréquence de collision $\nu_{ei}(v)$	B.4
$\nu_{ei}^R(v)$	fréquence de collision utilisant la fonction $R(x)$	(B.101)
$\nu_{ei}^S(v)$	fréquence de collision utilisant la fonction $S(x)$	(B.103)
$\nu_{ei}^T(v)$	fréquence de collision utilisant la fonction $T(x)$	(B.105)
$\nu_{ij}^{ISO}(\mathbf{v})$	fréquence d' <i>isotropisation</i> du modèle BGK	(B.36)
$\nu_{ij}^{MAX}(v)$	fréquence de <i>maxwellisation</i> du modèle BGK	(B.36)
$\Omega$	domaine de vitesses utilisé dans l'étude du modèle BGK : $\Omega = [0, v_\infty]$	B.3.2
$\varphi$	angle d'azimuth en coordonnées cylindriques	ch. 1
$\varphi(r)$	potentiel lié aux collisions élastiques	(C.17)
$\varphi_i(\mathbf{v})$	invariants collisionnels	B.2.1
$\varphi_{ij}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$	profil d'absorption atomique	A.1
$\varphi_{ij}(\nu)$	profil de Lorentz lié à la diffusion Rayleigh	(A.49)
$\Phi(x)$	fonction liée aux fréquences de collisions élastiques	(3.48)
$\Phi_{ij}$	profil d'absorption atomique moyenné sur la fdv $f_i$	(A.8)
$\Phi_{ij}^M(z, \nu)$	profil d'absorption atomique moyenné de Milne	(A.10)
$\Phi_n()$	moment d'ordre $n$ de la fonction auxiliaire du transfert $\Phi$ (fonction résolvante)	C.3.5
$\Phi_{\infty, n}()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.6
$\psi_{ji}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$	profil d'émission atomique	A.1
$\Psi_{ji}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$	profil d'émission atomique moyenné sur la fdv $f_j$	(A.9)
$\Psi_{ji}^M(z, \nu)$	profil d'émission atomique moyenné de Milne	(A.10)
$\Psi_i(\mathbf{v})$	base de fonctions propres de l'opérateur $L$ de Boltzmann	(B.8)
$\Psi_{nlm}(\mathbf{v})$	base de fonctions propres de l'opérateur $L$ de Boltzmann pour des collisions maxwelliennes	(B.12)
$p(x)$	fonction utilisée dans l'étude du modèle BGK : $p(x) = y(x)/x = \bar{v}/\bar{v}_0$	B.3.1
$p_{ei}(v)$	paramètre d'impact correspondant à une déviation de $\pi/2$ lors de la collision d'électrons avec une particule chargée électriquement de type $i = \{e, +\}$ selon la section efficace de Rutherford	(C.19)
$\mathbf{p}_a$	quantité de mouvement moyenne de l'espèce $a$ : $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{u}_a$	ch. 1
$\varpi$	albedo de l'atmosphère, utilisé dans l'ET	(2.14)
$\varpi_{ij}^*$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.83)

$\varpi_{ij}$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.92)
$P(z)$	pression totale de l'atmosphère stellaire	(5.5)
$P_c(z)$	pression cinétique de l'atmosphère stellaire	(5.6)
$P_r(z, \nu)$	pression scalaire de radiation	(2.23)
$P_r(z)$	pression scalaire (intégrée sur les fréquences) de radiation	(5.7)
$P_{ij}$	taux de transition moyen $i \rightarrow j$ , utilisés et définis dans l'ES	(4.14)
$P_i$	polarisabilité dipolaire de l'atome d'hydrogène dans l'état d'excitation $i$	(A.46)
$P_l(\mu)$	polynôme de Legendre d'ordre $l$ en la variable angulaire $\mu = \cos \theta$	B.4.1
$\mathcal{P}_{ij}$	fonction utilisée avec l'ET	(5.86)
$q_{ikm,jln}$	notation générale pour les sections efficaces de processus collisionnels	ch. 1
$q_k$	charge électrique d'une particule $k$	(A.39)
$Q$	coefficient utilisés dans le modèle de sei $q_{He}$	(A.80)
$Q_{12}(\nu)$	coefficient utilisé dans la diffusion Rayleigh	(A.55)
$Q_{i+}$	coefficient utilisé dans le modèle de sei d'ionisation collisionnelle	(A.103)
$\mathbf{r}$	vecteur position, décomposé en coordonnées cylindriques $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$	ch. 2
$r_e$	rayon classique de l'électron $r_e = \alpha^2 a_0 \sim 2.818 \times 10^{-15}$ m	
$r_m$	rayon d'approche minimale lors de collisions élastiques entre particules chargées	C.2
$r_L$	rayon de Landau	(C.25)
$r_{ij}$	coefficient utilisé avec l'ET	(5.75)
$R$	rayon	3.6.2
$R(x)$	fonction liée à la relaxation dans un plasma	(3.20)
$R()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.5
$R_{i+}(z, \mathbf{v})$	taux d'émission des électrons par ionisation radiative	(3.87)
$R_{+i}(z, \mathbf{v})$	taux d'absorption des électrons par recombinaison radiative	(3.88)
$R_{ij}(z)$	taux de transition $i \rightarrow j$ dû à un processus radiatif	4.3
$R_{ij}^*$	redistribution des photons en fréquence dans l'ET	(5.88)
$R_\odot$	rayon du soleil $R_\odot \sim 7 \times 10^8$ m	3.6.2
$R_n()$	moment d'ordre $n$ de la fonction auxiliaire du transfert $R$ (noyau résolvant)	C.3.7
$R_{nl}(v)$	base de polynômes de Laguerre-Sonine	(B.12)
$\rho_a(z)$	densité de masse de l'espèce $a$ : $\rho_a = m_a n_a$	(1.4)
$\rho(z)$	masse volumique totale de l'atmosphère (densité de masse)	(1.5)
$\rho_\odot$	densité solaire à la frontière interne de l'atmosphère $\rho_\odot \sim 2.73 \times 10^{-4}$ kg m <sup>-3</sup>	3.6.2
$\text{sg}(x)$	fonction signe $\text{sg}(x) = x/ x $	5.2.2
$\sigma$	coefficient différentiel (ou intégré) de diffusion de l'ET	ch. 2
$\sigma$	constante de Stefan $\sigma \sim 5.67 \times 10^{-8}$ en unités SI	
$\sigma_{ikm,jln}$	notation générale pour les sections efficaces de processus radiatifs	ch. 1
$\sigma_1$	section efficace intégrée de diffusion Rayleigh sur le niveau fondamental de l'atome d'hydrogène	(A.54)
$\sigma_E$	coefficient lié au courant électronique	3.6.2
$\sigma_a$	coefficient (différentiel ou intégré) de diffusion de l'équation cinétique des particules de l'espèce $a$	ch. 4
$\sigma_{el}$	taux (différentiel ou intégré) de collision élastiques de l'ECE, détails de $\Sigma_{el}$	(3.4)
$\sigma_{inel}$	taux (différentiel ou intégré) de collision inélastiques de l'ECE, détails de $\Sigma_{inel}$	(3.49)
$\sigma_{ff}()$	taux (différentiel ou intégré) de transitions radiatives $ff$ de l'ECE, détails de $\Sigma_{ff}$	(3.96)
$\sigma_{ff}$	coefficient utilisé par la section efficace de transitions radiatives $ff$	(A.33)

$\sigma_T()$	taux (différentiel ou intégré) de diffusion Thomson de l'ECE, détails de $\Sigma_T$	(3.126)
$\sigma_T$	coefficient utilisé par la section efficace de diffusion Thomson	(A.40)
$\sigma_{sca}$	taux (différentiel ou intégré) de diffusion des électrons dans l'ECE	(3.142)
$S$	fonction source du champ radiatif utilisée dans l'ET	(2.12)
$S(x)$	fonction liée à la relaxation dans un plasma	(B.104)
$S(v)$	terme de source de l'opérateur $L$ de Boltzmann	(B.7)
$S_*$	fonction source du rayonnement issu directement des sources internes de l'atmosphère	(5.81)
$S_c$	fonction source du champ radiatif de l'ET dans le continu	(5.74)
$S_{ij}^*$	composante thermique de la fonction source du champ radiatif de l'ET	(5.82)
$\Sigma_a$	terme de source de collisions de l'équation cinétique de l'espèce $a$ , noté habituellement $(\delta f_a / \delta t)_a$	4.1
$\Sigma_+(v)$	terme de source de l'ECE décrivant la création d'électrons à la vitesse $v$ par des processus inélastiques ou radiatifs	(3.157)
$\Sigma_-(v)$	terme de source de l'ECE décrivant la destruction d'électrons à la vitesse $v$ par des processus inélastiques ou radiatifs	(3.158)
$\Sigma_a^{BGK}$	terme de source de collisions de l'équation cinétique de l'espèce $a$ (modèle BGK)	ch. B
$\Sigma_e$	terme de source de collisions de l'équation cinétique des électrons, séparé en processus (élastiques, inélastiques, radiatifs, interactions détaillées) : $\Sigma_{el}, \Sigma_{inel}, \Sigma_{rad}, \Sigma_{excit}, \Sigma_{desexc}, \Sigma_{ionis}, \Sigma_{recomb}, \Sigma_{fbf}, \Sigma_{ff}, \Sigma_T, \Sigma_{sca}, \Sigma_{el,e}, \Sigma_{el,+}, \Sigma_{el,H}, \Sigma_{el,i}, \Sigma_{el,i}^>, \Sigma_{el,i}^<, \Sigma_{el,i}^{<M}, \Sigma_{el,H}^{(1)}, \Sigma_{el,H}^{(2)}, \Sigma_{el,k}, etc.$	ch. 3
$\Sigma_{ij}$	terme de source de l'équation cinétique de l'espèce $i$ décrivant les collisions élastiques $i + j \Rightarrow i + j$	ch. B
$\Sigma_{ei}^{BGK}$	terme de source $\Sigma_{ei}$ équivalent par le modèle BGK	(B.49)
$t_m$	temps caractéristique utilisé dans l'étude du modèle BGK (temps de fréquence de collision maximale)	B.3.1
$t_r$	temps de référence utilisé dans l'étude du modèle BGK	B.3.1
$t_p$	temps de plasma	(C.30)
$t_d$	temps diélectrique de plasma	(C.31)
$t_{ei}(v)$	temps d'interaction élastique entre électrons et particules chargées du type $i$ : $t_{ei} = 1/\nu_{ei}$	(6.4)
$t_\varepsilon(v)$	temps d'approche de la fdv à la fdv d'équilibre à la précision relative $\varepsilon$	(B.91)
$\overline{t_{int}}$	temps d'interaction dans un plasma	C.2
$T$	température moyenne du gaz	(1.5)
$T(x)$	fonction liée à la relaxation dans un plasma	B.4.2.2
$T()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.5
$T_{eff}$	température effective de l'étoile	3.6.2
$T_a$	température de l'espèce $a$ (énergie cinétique d'agitation)	(1.4)
$T_0$	paramètre lié au modèle de la fdv tronquée pour le modèle BGK (température)	(B.58)
$T_{ij}$	température de la fdv d'équilibre $f_{ij}^0$ du modèle BGK	(B.31)
$T_R$	température de Rydberg, $T_R = E_R/k \sim 1.58 \times 10^5$ K	(A.69)
$\theta$	angle polaire en coordonnées cylindriques	ch. 1
$\theta_c$	angle de coupure dans les intégrales de Boltzmann pour décrire les interactions entre particules chargées	(C.22)
$\theta_m$	angle de coupure (angle minimum) dans les intégrales de Boltzmann pour décrire les interactions entre particules chargées	A.5.3
$\theta_M$	angle de coupure (angle maximum) dans les intégrales de Boltzmann pour décrire les interactions entre particules chargées	C.2
$\Theta_{i+}(T)$	facteur de Saha-Boltzmann de température $T$	(C.5)
$\theta_{ij}$	coefficient indicateur usuel lié à l'ETL, généralisant $\theta_{i+}$	(C.3)

$\tau$	profondeur optique de l'atmosphère stellaire	(5.16)
$\tau$	temps normalisé utilisé dans l'étude du modèle BGK : $\tau = t/t_r$	B.3.1
$\tau_c$	temps de relaxation de Spitzer	(B.92)
$\tau_C$	profondeur optique pour le continuum de Balmer $\nu = 0.875\nu_R \sim 104.1$ nm	6.2.4
$\tau_L$	profondeur optique pour la raie $L\alpha$ de l'hydrogène $\nu = 0.75\nu_R \sim 121.5$ nm	6.2.4
$\tau_0$	épaisseur optique de l'atmosphère	(5.17)
$\tau_{0C}$	épaisseur optique pour le continuum de Balmer $\nu = 0.875\nu_R \sim 104.1$ nm	6.2.4
$\tau_{0L}$	épaisseur optique pour la raie $L\alpha$ de l'hydrogène $\nu = 0.75\nu_R \sim 121.5$ nm	6.2.4
$\tau_{ee}$	temps d'interaction élastique entre électrons les plus nombreux : $\tau_{ee} = 1/\nu_{ee}(\bar{v}_e)$	(6.4)
$\mathbf{u}$	vitesse massique moyenne du gaz	(1.5)
$\mathbf{u}, u$	vitesse utilisée à la section 3.2.2.1.3	3.2.2.1.3
$u$	paramètre lié au modèle de la fdv tronquée pour le modèle BGK (vitesse de coupure)	(B.58)
$u_0$	coefficient utilisé à la section 3.2.2.1.3	(3.29)
$\mathbf{u}_a$	vitesse moyenne de l'espèce $a$	(1.4)
$\mathbf{u}_{ij}$	vitesse moyenne de la fdv d'équilibre $f_{ij}^0$ du modèle BGK	(B.31)
$\mathbf{v}, v$	vecteur vitesse en coordonnées sphériques $\mathbf{v} = (v, \theta, \varphi)$ , de norme $v =  \mathbf{v} $	ch. 1
$v_i$	vitesse de croisement utilisée dans l'étude du modèle BGK	B.3.1
$v_R$	vitesse de Rutherford $v_R = \zeta_{1+} = \sqrt{2E_R/m_e} = \alpha c$	ch. 6
$v_s$	vitesse utilisée dans le processus d'ionisation collisionnelle	(A.98)
$v_{\min}$	vitesse minimale de la grille de discrétisation en vitesses de la fdv des électrons pour le traitement numérique $v_{\min} = 10\bar{v}_+$	6.2
$v_{\max}$	vitesse maximale de la grille de discrétisation en vitesses de la fdv des électrons pour le traitement numérique $v_{\max} = 2v_R$	6.2
$v_\infty$	vitesse maximale utilisée dans les calculs des moments de la fdv (intégrale sur la vitesse tronquée)	B.3.2
$\bar{v}_a$	vitesse la plus probable des particules de l'espèce $a$ ayant une distribution isotrope maxwellienne à la température $T_a$ : $\bar{v}_a = \sqrt{2kT_a/m_a}$	ch. 1
$\bar{v}_0$	vitesse associée à la pseudo-température $T_0$ : $\bar{v}_0 = \sqrt{2kT_0/m}$	B.3.1
$V(r)$	potentiel lié aux collisions élastiques $e - H$	(A.77)
$W_i(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$	distribution utilisée à la section 3.2.2.1.3, ainsi que les quantités associées $W_i^{ISO}$ et $W_i^{MAX}$	(3.26)
$\xi(\nu)$	degré d'anisotropie du rayonnement pénétrant par la frontière interne (approximation de la diffusion)	(5.22)
$\xi()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.6
$\xi_{i+}(v)$	fréquence d'un photon pouvant éjecter un électron de vitesse $v$ lors d'une ionisation radiative	(A.16)
$\xi_{ff}(v, w)$	fréquence d'un photon absorbé lors d'une transition radiative $ff$ qui augmente la vitesse de l'électron de $v$ à $w$	(A.30)
$\xi_X()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.5
$\xi_Y()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3.5
$X$	abondance relative (en masse) d'hydrogène dans l'atmosphère stellaire	6.1
$X()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3
$x$	paramètre utilisé dans l'étude du modèle BGK : $x = u/\bar{v}$	B.3.1
$x_c$	valeur minimum du paramètre $x \geq x_c$ dans l'étude du modèle BGK	B.3.1
$x_i$	paramètre utilisé dans l'étude du modèle BGK : $y_i(x_i) = 0$	B.3.1
$\tilde{x}_n()$	moment d'ordre $n$ de la valeur superficielle de la fonction $\Phi_n$	C.3.4
$y$	vitesse réduite utilisée dans l'étude du modèle BGK : $y = v/\bar{v}$	B.3.1

$y(x)$	fonction utilisée dans l'étude du modèle BGK : $y(x) = u/\bar{v}_0$	B.3.1
$y_i(x)$	fonction utilisée dans l'étude du modèle BGK : $y_i(x) = v_i/\bar{v}$	B.3.1
$\tilde{y}_n()$	moment d'ordre $n$ de la valeur superficielle de la fonction $\Phi_n$	C.3.4
$Y(x)$	fonction de Heaviside	(2.33)
$Y()$	fonction auxiliaire du transfert	C.3
$Y_l^m(\theta, \varphi)$	base des harmoniques sphériques	(B.12)
$Z$	épaisseur géométrique de l'atmosphère plan-parallèle.	ch. 1
$Z$	charge effective des ions pour les transitions free-free	A.3.1
$z$	coordonnée spatiale de l'atmosphère plan-parallèle, nulle à la surface de l'étoile, s'accroissant en pénétrant dans l'étoile $0 \leq z \leq Z$	ch. 1
$z_\infty$	vitesse normalisée utilisée dans l'étude du modèle BGK : $z_\infty = v_\infty/\bar{v}$	B.3.2
$\zeta_{i+}(\nu)$	vitesse d'un électron, provenant de l'atome d'hydrogène dans l'état excité $i$ , éjecté par un photon de fréquence $\nu$ lors d'une ionisation radiative	(A.14)
$\zeta_{i+}$	vitesse de seuil du processus d'ionisation collisionnelle	(A.91)
$\zeta_{ij}$	vitesse de seuil du processus d'excitation collisionnelle	(A.84)
$\zeta_{ie,je}(v)$	vitesse d'un électron lors de la collision inélastique $i+e \rightleftharpoons j+e$	(A.86)
$\zeta_{ie,+ee}(v, w)$	vitesse émergente d'un des deux électrons lors d'une ionisation collisionnelle	(A.94)
$\zeta_{ff}(v, \nu)$	vitesse émergente d'un électron de vitesse initiale $v$ avant absorption d'un photon de fréquence $\nu$ lors d'une transition radiative $ff$	(A.29)





# Chapitre 1

## Le modèle

### 1.1 Atmosphères plan-parallèles, statiques et stationnaires

Nous considérons une atmosphère stellaire présentant la symétrie plan-parallèle, la coordonnée spatiale dans la direction normale au plan de stratification étant notée  $z$ . Cette coordonnée varie entre 0 (à la surface de l'étoile) et  $Z > 0$  (dans les couches profondes). Rappelons que la symétrie plan-parallèle est justifiée quand on cherche à comprendre les propriétés moyennes, dans chaque plan  $z = \text{cte}$ , d'une atmosphère de rayon de courbure bien plus grand que le libre parcours moyen des photons aux fréquences où l'étoile rayonne.

On suppose également que l'atmosphère est *statique* et *stationnaire* en moyenne. La première hypothèse est valable pour les étoiles dont les couches externes sont stables. Elle exclut tout mouvement macroscopique de matière à grande échelle. La seconde hypothèse est permise lorsque les propriétés macroscopiques de l'atmosphère évoluent sur des durées moyennes bien supérieures aux temps de relaxation des divers types de collisions, ce que nous supposerons (voir la conclusion, section 7.1.4).

### 1.2 Les particules

Nous considérons une atmosphère d'hydrogène pur, afin de simplifier à l'extrême la physique atomique, le calcul des sections efficaces, *etc.* Précisons que les développements des chapitres 2 à 5 ne sont pas spécifiques de ce choix et se généralisent aisément à une composition chimique quelconque.

Notre atmosphère contient donc quatre catégories de particules :

- les photons,
- les électrons libres,
- les protons,
- les atomes d'hydrogène.

Les photons sont supposés non polarisés. Leur distribution dans l'espace, en direction et en fréquence est spécifiée par l'intensité spécifique  $I$  du champ de rayonnement, qui dépend des variables de position  $z$ , de la direction  $\hat{\mathbf{n}}$  et de la fréquence  $\nu$  des photons. Cette fonction est solution de l'équation de transfert écrite au chapitre 2.

La distribution spatiale des électrons libres est spécifiée par leur nombre moyen  $n_e$  par unité de volume (densité numérique), qui dépend de la coordonnée  $z$ . Leur distribution en la vitesse  $\mathbf{v}$  est décrite par leur fdv, que nous noterons  $f_e(\mathbf{v})$ . Nous ne nous intéressons qu'à la composante isotrope de cette fonction, ce qui revient à supposer que la fdv électronique ne dépend que de la norme  $v = |\mathbf{v}|$  de la vitesse électronique. Pour cela, nous séparons la fdv en une composante isotrope et une composante purement anisotrope  $\bar{f}_e$ , cette dernière étant définie par son intégrale *nulle* sur l'angle solide unité :

$$f_e(z, \mathbf{v}) = f_e(z, v) + \bar{f}_e(z, \mathbf{v}). \quad (1.1)$$

Supposer la fdv isotrope revient à poser  $\bar{f}_e = 0$ . Cette hypothèse simplifie considérablement la résolution de l'équation de transfert, de l'équation cinétique des électrons et le calcul des popu-

lations atomiques<sup>1</sup>. La fdv des électrons est normalisée à l'unité, c'est-à-dire vérifie la condition  $\int f_e(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$ . Précisons la notation  $d\mathbf{v}$  : dans un repère cartésien  $(x, y, z)$ , le vecteur  $\mathbf{v}$  est décrit par ses composantes  $(v_x, v_y, v_z)$ , et  $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ . Pour extraire la norme de la vitesse, nous nous placerons systématiquement dans un repère sphérique où le vecteur  $\mathbf{v}$  est décrit par ses composantes  $(v, \theta, \varphi)$ . Alors  $d\mathbf{v} = v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi$ . En introduisant le vecteur normalisé  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v$ , nous définissons la variation élémentaire de ce vecteur par l'angle solide  $d\hat{\mathbf{v}} = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Puisque  $d\mathbf{v} = v^2 dv d\hat{\mathbf{v}}$  et  $\int d\hat{\mathbf{v}} = 4\pi$ , on obtient :

$$\int f_e(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} f_e(z, v) v^2 dv = 1/4\pi \\ \int_{4\pi} \bar{f}_e(z, \mathbf{v}) d\hat{\mathbf{v}} = 0 \end{cases} . \quad (1.2)$$

Pour cette fdv  $f_e$ , nous aurons besoin de définir le moment en la vitesse. La définition générale du moment de la fonction  $g(\mathbf{v})$  quelconque (pas forcément scalaire) est :

$$\langle g(\mathbf{v}) \rangle_e = \int g(\mathbf{v}) f_e(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v} . \quad (1.3)$$

Les moments les plus utilisés sont la densité de masse  $\rho_e$ , la vitesse moyenne  $\mathbf{u}_e$ , la quantité de mouvement moyenne  $\mathbf{p}_e$ , l'énergie cinétique moyenne  $E_e$  et la température  $T_e$ , quantités dépendantes de  $z$  et définies par :

$$\rho_e = \langle m_e n_e \rangle_e = m_e n_e, \quad \mathbf{u}_e = \langle \mathbf{v} \rangle_e, \quad \mathbf{p}_e = m_e \mathbf{u}_e, \quad E_e = \frac{1}{2} m_e \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2 \rangle_e, \quad T_e = \frac{2}{3k} E_e. \quad (1.4)$$

où  $m_e$  est la masse de l'électron et  $k$  est la constante de Boltzmann. Dans ce cas particulier où nous avons séparés la densité électronique  $n_e$  de la fdv  $f_e$ , la définition de la densité de masse est évidente, mais la définition d'un tel moment prendra tout son sens lorsque nous examinerons les propriétés de conservation des moments par les collisions élastiques dans l'équation cinétique des électrons (chapitre 3 et annexe B).

Pour les besoins du chapitre 3 et de l'annexe B, nous étendons ici les notations (Eq. 1.4) à toute espèce  $i$  du gaz en remplaçant  $e$  par  $i$  dans (Eq. 1.4), et nous définissons la densité numérique totale  $n$ , la densité de masse totale  $\rho$ , la densité de quantité de mouvement totale  $\mathbf{g}$ , la vitesse massique moyenne du gaz  $\mathbf{u}$ , la densité d'énergie cinétique totale  $e$ , et la température moyenne du gaz  $T$  [78] :

$$n = \sum_i n_i, \quad \rho = \sum_i \rho_i, \quad \mathbf{g} = \sum_i \rho_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i \mathbf{u}_i, \quad e = \sum_i n_i E_i = \frac{3}{2} n k T, \quad T = \frac{1}{n} \sum_i n_i T_i. \quad (1.5)$$

Nous définissons de plus la densité de particules lourdes  $n_0$  :

$$n_0 = n - n_e . \quad (1.6)$$

En théorie des atmosphères stellaires, il est universellement admis que les électrons sont thermalisés, c'est-à-dire ont une fdv  $f_e^M$  donnée par la formule de Maxwell-Boltzmann, de vitesse moyenne  $\mathbf{u}_e(z)$  et de température  $T_e(z)$ , définis par (1.4), que nous préciserons entre crochets pour définir complètement la fdv lorsque nécessaire :

$$\begin{aligned} f_e^M(z, \mathbf{v}) = f_e^M[\mathbf{u}_e(z), T_e(z)](z, \mathbf{v}) &= \left( \frac{m_e}{2\pi k T_e(z)} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m_e (\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2}{2k T_e(z)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{v}_e^3(z)} \exp\left( -\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2}{\bar{v}_e^2(z)} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

où nous avons introduit la vitesse la plus probable des électrons  $\bar{v}_e(z) = \sqrt{2kT_e(z)/m_e}$ . Dans notre cas de fdv isotrope et de vitesse moyenne nulle (en l'absence de mouvements macroscopiques), la fdv maxwellienne prend la forme :

$$f_e^M(z, v) = f_e^M[T_e(z)](z, v) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{v}_e^3(z)} \exp\left( -\frac{v^2}{\bar{v}_e^2(z)} \right), \quad (1.8)$$

<sup>1</sup>Nous comptons la lever dans les développements consécutifs à cette thèse afin d'explorer les mécanismes possibles d'*anisotropisation* de la distribution des électrons en présence d'un champ radiatif anisotrope ou de gradients de température élevés (cf. la conclusion, section 7.1.4.4).

où cette maxwellienne est normalisée de la même façon que la fdv  $f_e : \int f_e^M(z, v) v^2 dv = 1/4\pi$ .

Cette hypothèse est couramment justifiée par la fréquence élevée des collisions élastiques subies par ces particules. Comme on l'a dit, notre travail vise essentiellement à confirmer ou infirmer cette hypothèse dans les couches superficielles des étoiles. Nous laisserons donc de côté la forme (1.8) et calculerons la fdv des électrons en résolvant une équation cinétique écrite au chapitre 3.

Les particules lourdes sont désignées par le symbole + pour les protons, et par le nombre quantique principal  $i = 1, \dots, N$  pour les atomes d'hydrogène à l'état  $i$ <sup>2</sup>. On introduit la densité numérique des protons  $n_+$  et leur fdv normalisée  $f_+$ , ainsi que leur homologue  $n_i$  et  $f_i$  pour les atomes. On suppose donc qu'un atome est toujours dans un de ses états propres d'énergie, et non dans une superposition d'états, conformément à l'approche semi-classique que nous adoptons [78].

Les fdv des particules lourdes vérifient des équations cinétiques ayant la forme générale des équations de la théorie cinétique des gaz. En fait, la dynamique des collisions mettant en jeu ces particules sera simplifiée de telle sorte qu'elle puisse être décrite statistiquement en terme des seules populations  $n_i$ , ces dernières étant solutions d'équations de transport écrites au chapitre 4.

Nous supposerons que les collisions entre particules matérielles jouent un rôle prédominant dans leur répartition statistique dans l'espace des phases, ce qui est le cas lorsque les équations cinétiques ont des membres de gauche composés de termes séparément négligeables par rapport à leur terme de collisions élastiques. Une telle hypothèse convient aux plasmas collisionnels, c'est-à-dire stationnaires, faiblement hétérogènes et placés dans un champ de force extérieur peu élevé. Nous justifierons quantitativement plus loin cette hypothèse à propos des électrons libres de l'atmosphère solaire (section 3.6).

Toutes ces particules (photons compris) interagissent entre elles au cours de brèves collisions décrites par des sections efficaces supposées connues (*cf.* section 1.4). Les collisions apparaissent dans le terme de source de l'équation de transfert, de l'équation cinétique des électrons et des équations de transport vérifiées par les populations  $n_i$ .

### 1.3 Les collisions envisagées

Nous prendrons en compte les interactions suivantes entre particules :

- les transitions bound-bound (**bb**) d'un atome changeant d'état d'excitation,
- les transitions bound-free (**bf**) et free-bound (**fb**) d'un atome gagnant ou perdant un électron,
- les transitions free-free (**ff**) d'un électron en présence d'une particule lourde,
- la diffusion des photons sur les électrons libres (diffusion Thomson) ou sur les atomes (diffusion Rayleigh)<sup>3</sup>,
- les collisions élastiques (supposées binaires) entre particules matérielles.

Les transitions inélastiques peuvent être collisionnelles ou radiatives. Dans le premier cas, on supposera que le degré d'ionisation de l'atmosphère est suffisant pour que les collisions inélastiques soient dominées par les collisions électrons libres-atomes, de sorte que nous puissions ignorer les collisions entre particules lourdes dans le calcul des taux de collisions inélastiques.

On supposera en outre que les électrons libres sont rapides par rapport aux particules lourdes, cette hypothèse étant justifiée (en moyenne seulement) lorsque ces deux catégories de particules ont des énergies cinétiques comparables. Ce dernier point provient du fait que nous supposons que les électrons et les particules lourdes ont la même température cinétique  $T$ , définie par les relations (Eqs. 1.4, 1.5). L'existence d'une température unique est couramment admise en théorie des atmosphères stellaires, conjointement à l'existence d'une fdv maxwellienne des électrons : voir par exemple Mihalas [69, p. 123]. Nous conserverons cette hypothèse pour explorer les écarts de la fdv à la maxwellienne dans le seul but de simplifier la formulation de notre problème et sa résolution.

L'hypothèse des électrons rapides est également faite dans un but simplificateur, car elle est certainement irréaliste. Elle interdit la détermination de la fdv électronique aux faibles vitesses, inférieures typiquement à la vitesse la plus probable des particules lourdes  $\bar{v}_p = \sqrt{2kT/m_p}$ , où  $m_p$

<sup>2</sup>Dans les applications numériques, nous nous limiterons à 2 niveaux d'énergie et un continuum ( $N = 2$ ). Ce choix entraîne la présence d'une raie de Lyman ( $L\alpha$ ) et 2 continus (Lyman, Balmer).

<sup>3</sup>D'après la formule de Thomson, la section efficace de diffusion des photons sur une charge est inversement proportionnelle au carré de la masse du centre diffuseur. On peut donc ignorer la diffusion des photons sur les protons dans un milieu contenant autant d'électrons que de protons.

est la masse d'un proton. Cette vitesse étant petite par rapport à la vitesse la plus probable des électrons  $\bar{v}_e = \sqrt{2kT/m_e}$ , qui sert de référence pour la fdv, le domaine des vitesses compris entre 0 et  $\bar{v}_p$  est très restreint par rapport au domaine où nous calculons la fdv correctement. De plus, ce domaine est situé près des vitesses nulles, où la fdv a peu d'influence sur la plupart des autres grandeurs rencontrées dans notre problème (coefficients intégrés sur les vitesses, température, *etc.*). Nous verrons au chapitre 6 quelle approximation de la fdv nous retiendrons pour ces très faibles vitesses.

La masse élevée des particules lourdes nous permettra également de les supposer stationnaires dans leurs interactions avec les photons et les électrons libres, les transferts d'impulsion avec ces deux catégories de particules étant négligés. Cette hypothèse et celle des électrons rapides permettent une description statistique des collisions en terme des seules populations  $n_+$  et  $n_i$  (c'est-à-dire sans les fdv).

Les transitions inélastiques radiatives sont les transitions  $bb$  et  $bf$ - $fb$ . Les premières sont à l'origine du processus de *diffusion* des photons dans les raies spectrales, que nous supposons isotrope et avec redistribution complète en fréquence dans le référentiel du laboratoire (**RCF**) : les profils moyens d'absorption et d'émission coïncident. Précisons que cette hypothèse suppose que les profils atomiques coïncident, ainsi que les fdv des atomes à l'état inférieur et supérieur, deux circonstances rarement réalisées simultanément dans des situations hors-ETL typiques [78, p. 169].

La diffusion *vraie* des photons sur les électrons libres et les atomes sera supposée isotrope et monochromatique dans le référentiel du laboratoire. Rappelons que la diffusion Thomson sur les électrons libres est un cas limite de la diffusion Compton, obtenu lorsque l'énergie  $h\nu$  du photon est bien plus faible que l'énergie de l'électron au repos  $m_e c^2$ , une condition largement réalisée dans une atmosphère stellaire. La fonction de phase est dipolaire (c'est-à-dire en  $1 + \cos^2 \theta$ ) et la diffusion des photons est monochromatique dans le référentiel de l'électron, comme la diffusion Rayleigh des photons sur les atomes d'hydrogène. Nous négligeons donc les effets d'anisotropie de ces deux types de diffusion *vraie*, parce qu'ils sont généralement faibles dans les atmosphères stellaires [50, p. 33][113, p. 14]. Nous négligeons également l'effet Doppler en passant du référentiel du centre diffuseur au référentiel du laboratoire, ce qui est justifié en dehors des raies spectrales où l'intensité spécifique du champ radiatif et les sections efficaces d'interaction rayonnement-matière varient lentement avec la fréquence. Ajoutons que la diffusion Rayleigh sur les atomes d'hydrogène est calculée pour des atomes à l'état fondamental seulement.

## 1.4 Données atomiques intrinsèques

Les données atomiques associées aux processus d'interaction décrits à la section 1.3 comprennent :

- les valeurs centrales  $E_i$  des niveaux d'énergie atomiques et les poids statistiques correspondants  $g_i$ ,
- les forces d'oscillateur  $f_{ij}$  associées aux transitions  $bb$  de l'atome d'hydrogène ( $i < j$ ) et les sections efficaces d'absorption  $bf$  et  $ff$ , et d'émission  $fb$  et  $ff$ ,
- les sections efficaces de diffusion des photons sur les électrons (diffusion Thomson) et sur les atomes (diffusion Rayleigh),
- les sections efficaces de collisions entre particules matérielles : collisions élastiques électrons-électrons, électrons-protons et électrons-atomes, collisions inélastiques électrons-atomes (excitation, ionisation collisionnelle et leur inverse : désexcitation collisionnelle, recombinaison à trois corps).

Ces données peuvent être trouvées sur les divers sites de physique atomique mentionnés sur le site web du GRETA (<http://www.obs-nice.fr/stee/transfert/transfert.html>). Celles que nous utiliserons pour les applications numériques de notre travail sont précisées dans l'annexe A de cette thèse.

Le tableau (Tab. 1.1) ci-dessous fixe les notations. La colonne de gauche explicite les distributions décrivant chaque transition, qui contiennent la contrainte d'énergie. Celle qui décrit les collisions élastiques contient également la contrainte d'impulsion. Le passage de ces distributions aux sections efficaces correspondantes est explicité dans l'annexe A. Les sections efficaces intégrées (colonne de droite) ne contiennent plus de distribution de Dirac, car dans cette thèse l'intégration porte toujours sur les directions et les vitesses émergentes.

Nous avons utilisé la lettre  $\sigma$  pour désigner les sections efficaces relatives aux transitions radiatives, et la lettre  $q$  pour celles qui décrivent les processus collisionnels.

Distributions de transition	Sections efficaces intégrées
<i>Transitions radiatives</i>	
photoexcitation et son inverse ( $i < j$ )	
profils atomiques $\varphi_{ij}$ et $\psi_{ji}$	coefficients d'Einstein $B_{ij}$ et $A_{ji}$
photoionisation et son inverse	
$\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e)$	$\sigma_{i+}(\nu) = \int \sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e$
absorption ff et son inverse	
$\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e)$	$\sigma_{ii}(v_e, \nu) = \frac{1}{4\pi} \int \int \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) d\hat{\mathbf{v}}_e d\mathbf{v}'_e$
diffusion	
$\sigma_{k\nu,k\nu}(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}', \nu)$	$\sigma_k(\nu) = \int \sigma_{k\nu,k\nu}(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}', \nu) d\hat{\mathbf{n}}'$
<i>Collisions élastiques</i>	
$q_{ie,ie}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_e)$	$q_{ie}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e) = \int \int q_{ie,ie}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e d\mathbf{v}'_i$
<i>Collisions inélastiques</i>	
excitation et son inverse	
$q_{ie,je}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e)$	$q_{ij}(v_e) = \int q_{ie,je}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e$
ionisation collisionnelle et son inverse	
$q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e)$	$q_{i+}(v_e, v'_e) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int \int q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e d\mathbf{w}'_e$ $q_{i+}(v_e) = \int \int q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) d\mathbf{v}'_e d\mathbf{w}'_e$

TAB. 1.1 – Les sections efficaces des processus radiatifs et collisionnels.



# Chapitre 2

## L'équation de transfert

Le transfert de rayonnement étant au cœur de la dynamique des électrons dans une atmosphère stellaire, nous commençons par écrire l'équation de transfert en utilisant le formalisme cinétique développé par Oxenius [78].

### 2.1 Rappels

#### 2.1.1 Cas général

L'équation de transfert décrit la propagation de l'énergie portée par une radiation de direction  $\hat{\mathbf{n}}$  et de fréquence  $\nu$  le long d'un rayon. Si  $I$  désigne l'intensité spécifique de cette radiation,  $I/c$  et  $I\hat{\mathbf{n}}$  sont la densité (volumique) d'énergie et la densité de flux d'énergie qu'elle transporte. On peut donc écrire, dans le référentiel fixe du laboratoire, l'équation de type *hydrodynamique*

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot [I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t)\hat{\mathbf{n}}] = \text{terme de source des photons } (\hat{\mathbf{n}}, \nu) \text{ au point } (\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

qui traduit localement la *conservation* de l'énergie portée par la radiation considérée [78, 92].

Si on suppose que le milieu interparticulaire est vide de toute matière, la lumière s'y propage en ligne droite à la célérité  $c$ . On a donc  $(\partial/\partial \mathbf{r}) \cdot (I\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial I/\partial \mathbf{r})$  dans le membre de gauche de (2.1).

Le terme de source dans le membre de droite comprend une perte d'énergie par absorption et par diffusion

$$- \left\{ K(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \sigma(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, \hat{\mathbf{n}}', \nu', t) \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}', \nu', t) \right] d\hat{\mathbf{n}}' d\nu' \right\} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \quad (2.2)$$

et un gain par émission et par diffusion

$$+ \left\{ E(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \sigma(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}', \nu', \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \frac{h\nu}{h\nu'} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}', \nu', t) d\hat{\mathbf{n}}' d\nu' \right\} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \right]. \quad (2.3)$$

Ces expressions font apparaître les coefficients volumiques d'interaction rayonnement-matière qu'introduit la théorie du transfert, à savoir :

- le coefficient d'absorption  $K$ , qui caractérise l'aptitude d'une unité de volume de matière à absorber les photons qui l'atteignent. Il a la dimension d'une section efficace par unité de volume ( $\mathbf{L}^{-1}$ ),
- le coefficient d'émission (spontanée)  $E$ , ou émissivité. C'est l'énergie émise par une unité de volume de matière par unité de temps, d'angle solide et d'intervalle de fréquence,
- le coefficient différentiel de diffusion  $\sigma$ , qui permet de calculer l'énergie diffusée dans chaque direction et chaque fréquence par une unité de volume de particules irradiées.

On a introduit le facteur correctif habituel pour tenir compte des émissions et des diffusions induites de photons. Le gain de photons par ces deux processus est proportionnel à l'intensité spécifique du rayonnement présent, ce qui permet de le traiter comme une absorption négative. En pratique, seul le gain par émission induite est compté ainsi, car les effets de la diffusion induite sont nuls lorsque



la diffusion est isotrope et monochromatique dans le référentiel du laboratoire, ce que nous avons supposé à la section 1.3.

Moyennant l'introduction :

– du coefficient d'absorption corrigé de l'émission induite

$$\kappa(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) = K(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) - \frac{c^2}{2h\nu^3} E(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t), \quad (2.4)$$

que l'on supposera positif (pas d'effet laser),

– du coefficient de diffusion intégré

$$\sigma(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) = \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \sigma(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, \hat{\mathbf{n}}', \nu', t) d\hat{\mathbf{n}}' d\nu', \quad (2.5)$$

– du coefficient d'extinction (ou opacité)

$$\chi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) = \kappa(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \sigma(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t), \quad (2.6)$$

on obtient l'ET sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) &= -\chi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) + E(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, t) \\ &+ \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \sigma(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}, \nu, \hat{\mathbf{n}}', \nu', t) I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}', \nu', t) d\hat{\mathbf{n}}' d\nu'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sur le plan mathématique, cette équation pose un problème *mixte*, au sens où l'inconnue  $I$ , qui est une fonction de 7 variables (3 d'espace, 2 de direction, 1 de fréquence et 1 de temps), est dérivée par rapport aux coordonnées d'espace-temps et intégrée par rapport aux variables de direction-fréquence.

Le premier point nécessite que l'on précise les conditions aux limites et les conditions initiales du problème, ce que nous ferons dans le cas particulier qui nous intéresse.

### 2.1.2 Cas des atmosphères stellaires plan-parallèles et stationnaires

Dans une atmosphère stellaire présentant les symétries évoquées au chapitre 1, l'ET s'écrit sous une forme simplifiée, que nous allons préciser :

1. Sous l'hypothèse de symétrie plan-parallèle, les coefficients de l'ET ne dépendent pas des coordonnées  $x$  et  $y$  définie dans le plan de stratification mais de la seule coordonnée  $z$  définie dans la direction normale à ce plan. Si les conditions aux limites sont également homogènes sur chaque plan frontière, le champ radiatif, et en particulier son intensité spécifique  $I$ , ne dépend que de la profondeur géométrique  $z$  dans l'atmosphère. On peut donc remplacer  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial I / \partial \mathbf{r})$  par  $-\cos \theta (\partial I / \partial z)$  dans le membre de gauche de (2.7), où  $\theta$  est l'angle du vecteur  $\hat{\mathbf{n}}$  avec le vecteur normal au plan de stratification dirigé vers l'extérieur de l'étoile<sup>1</sup>.

On supposera également que les conditions aux limites de l'atmosphère sont à symétrie axiale d'axe normal au plan de stratification, c'est-à-dire indépendantes de l'angle d'azimut  $\varphi$  autour de cet axe. La diffusion des photons ayant été supposée isotrope, il en résulte que l'intensité spécifique  $I$  est indépendante de l'angle d'azimut. Elle ne dépend donc finalement que des variables  $z$ ,  $\theta$  et  $\nu$ . On posera, conformément à l'usage,  $\mu = \cos \theta$ , de sorte que  $I = I(z, \mu, \nu)$  avec  $z \in [0, Z]$ , où  $Z$  est la profondeur géométrique de l'atmosphère,  $\mu \in [-1, +1]$  et  $\nu > 0$ .

2. Dans une atmosphère statique et stationnaire, les coefficients de l'ET sont indépendants du temps et le terme  $\partial I / \partial t$  disparaît dans le membre de gauche de (2.7). La variable de temps, qui n'est plus transformée, disparaît : le problème devient stationnaire.

Cette simplification est permise lorsqu'on peut négliger le premier terme dans le membre de gauche de l'équation de transfert (2.7) par rapport au premier terme situé dans le membre de droite, c'est-à-dire lorsqu'on peut écrire  $1/c\chi \ll I/|\partial I / \partial t|$ . Interprétant  $1/\chi$  comme un libre parcours moyen des photons, cette condition signifie que le temps de parcours moyen des photons entre deux interactions doit être bien plus petit que les durées sur lesquelles l'état

<sup>1</sup>Le signe - provient du fait que l'axe des  $z$  est orienté positivement en allant vers l'intérieur de l'étoile, ce qui évite l'introduction des  $z$  négatifs.

de la matière évolue de façon significative. Ce temps de parcours moyen est de l'ordre de  $10^{-3}$  s dans l'atmosphère du soleil, qui a une extension de l'ordre de 2500 km dans le visible. L'atmosphère pourra donc être vue comme stationnaire si on s'intéresse à ses propriétés moyennes sur des durées bien supérieures à  $10^{-3}$  s.

3. Enfin, les coefficients volumiques de l'ET sont isotropes dans un milieu contenant une distribution isotrope d'électrons libres, ce que nous avons supposé au chapitre précédent. En effet, l'isotropie de la fdv des électrons entraîne celle des coefficients d'absorption et d'émission  $bf$ ,  $fb$  et  $ff$ , ce que nous vérifierons à la section 2.2. Comme l'absorption et l'émission  $bb$  sont également isotropes lorsque les profils des raies le sont, les coefficients d'absorption et d'émission de l'ET sont isotropes. Le coefficient intégré de diffusion, défini par (2.5), est également isotrope puisque la diffusion *vraie* des photons sur les électrons libres et les atomes a été supposée isotrope.

Moyennant ces simplifications, l'ET prend la forme suivante :

$$-\mu \frac{\partial I}{\partial z}(z, \mu, \nu) = -\chi(z, \nu)I(z, \mu, \nu) + E(z, \nu) + \sigma(z, \nu)J(z, \nu), \quad (2.8)$$

où l'opacité est donnée par

$$\chi(z, \nu) = \kappa(z, \nu) + \sigma(z, \nu), \quad (2.9)$$

avec

$$\kappa(z, \nu) = K(z, \nu) - \frac{c^2}{2h\nu^3}E(z, \nu), \quad (2.10)$$

et où  $J$  désigne l'intensité moyenne du champ radiatif définie par la relation (2.20) plus loin.

En factorisant l'opacité dans le membre de droite de l'ET, on écrit cette dernière sous la forme habituelle

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z}(z, \mu, \nu) = \chi(z, \nu) [I(z, \mu, \nu) - S(z, \nu)], \quad (2.11)$$

qui contient la fonction source  $S$  du champ radiatif

$$S(z, \nu) = \frac{E(z, \nu)}{\chi(z, \nu)} + [1 - \epsilon(z, \nu)]J(z, \nu), \quad (2.12)$$

et la probabilité de destruction des photons

$$\epsilon(z, \nu) = \frac{\kappa(z, \nu)}{\chi(z, \nu)} = \frac{\kappa(z, \nu)}{\kappa(z, \nu) + \sigma(z, \nu)}. \quad (2.13)$$

La fonction source est associée à une variable de profondeur optique  $\tau$  définie localement par  $d\tau = \chi dz$ . Cette variable décrit de façon naturelle l'extinction de la lumière progressant dans un milieu absorbant et diffusant, la fonction source étant un coefficient d'émission par unité de volume optique de matière.

Le paramètre de destruction des photons mesure l'aptitude d'une unité de volume de matière à absorber un rayonnement incident à une fréquence  $\nu$ . C'est un nombre compris entre 0 et 1, les bornes étant exclues dans un milieu à la fois absorbant et diffusant ( $\kappa > 0$  et  $\sigma > 0$ ). Son complément à l'unité est l'albédo  $\varpi$  de l'atmosphère, qui est rarement utilisé en théorie des atmosphères stellaires

$$\varpi(z, \nu) = 1 - \epsilon(z, \nu) = \frac{\sigma(z, \nu)}{\chi(z, \nu)} = \frac{\sigma(z, \nu)}{\kappa(z, \nu) + \sigma(z, \nu)}. \quad (2.14)$$

### 2.1.2.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites de l'intervalle  $[0, Z]$  sont les conditions habituelles de la théorie des atmosphères stellaires : le rayonnement pénétrant par la surface  $z = 0$  est nul et le rayonnement pénétrant par la face interne  $z = Z$  est décrit, aux fréquences où l'étoile rayonne, dans l'approximation de la diffusion. D'où

$$I(0, \mu, \nu) = 0 \quad \text{si } \mu < 0, \quad (2.15)$$

et

$$I(Z, \mu, \nu) = I^+(\mu, \nu) \quad \text{si } \mu > 0, \quad (2.16)$$

avec

$$I^+(\mu, \nu) = B_\nu(T(Z)) + \frac{\mu}{\chi(Z, \nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}(T(Z)) , \quad (2.17)$$

$B_\nu(T)$  étant la fonction de Planck de température  $T$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} . \quad (2.18)$$

L'approximation de la diffusion (2.17, 2.18) ne concerne en principe que le rayonnement pénétrant par la face  $z = Z$ . En fait, elle est encore valable pour le rayonnement qui la quitte, car le champ radiatif est nécessairement faiblement anisotrope loin de la surface de l'étoile (*cf.* [69, p. 50]). On connaît donc le champ radiatif *dans toutes les directions* sur la couche  $z = Z$ , son intensité spécifique étant

$$I(Z, \mu, \nu) = B_\nu(T(Z)) + \frac{\mu}{\chi(Z, \nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}(T(Z)) \quad (-1 \leq \mu \leq +1) . \quad (2.19)$$

### 2.1.3 Les moments de l'intensité spécifique

Les trois premiers moments de l'intensité spécifique, à savoir l'intensité moyenne

$$J(z, \nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) d\mu , \quad (2.20)$$

le flux radiatif, vectoriel

$$\mathbf{F}_r(z, \nu) = \int_{4\pi} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} , \quad (2.21)$$

et scalaire

$$F_r(z, \nu) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) \mu d\mu , \quad (2.22)$$

et la pression de radiation (scalaire)

$$P_r(z, \nu) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) \mu^2 d\mu , \quad (2.23)$$

sont des grandeurs fondamentales pour la modélisation des atmosphères stellaires. Ils vérifient les deux premiers moments de l'ET, obtenus en multipliant cette équation par  $\mu^m$  ( $m = 0$  ou  $1$ ) et en intégrant sur  $\mu$  entre  $-1$  et  $+1$ . Puisque l'opacité  $\chi$  et la fonction source  $S$  sont isotropes, on obtient

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_r}{\partial z}(z, \nu) = \chi(z, \nu) [J(z, \nu) - S(z, \nu)] \quad (2.24)$$

et

$$\frac{\partial P_r}{\partial z}(z, \nu) = \frac{1}{c} \chi(z, \nu) F_r(z, \nu) . \quad (2.25)$$

Sur le plan frontière interne, où l'approximation de la diffusion (2.19) est valable pour tout  $\mu$ , les moments de l'intensité spécifique sont donnés par

$$J(Z, \nu) = B_\nu(T(Z)) , \quad F_r(Z, \nu) = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\chi(Z, \nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}(T(Z)) , \quad P_r(Z, \nu) = \frac{1}{3} \frac{4\pi}{c} B_\nu(T(Z)) . \quad (2.26)$$

## 2.2 Expression des coefficients volumiques

Les coefficients volumiques indépendants sont le coefficient d'absorption  $K$ , le coefficient d'émission  $E$  et le coefficient de diffusion  $\sigma$ . L'opacité  $\chi$  s'en déduit grâce aux relations (2.9, 2.10), et les diverses grandeurs apparues en factorisant l'opacité à l'aide des relations (2.12, 2.13, 2.14). Ces trois coefficients dépendent de la position et de la fréquence : ils sont calculés en sommant les contributions de toutes les transitions capables de créer (au sens algébrique) un photon ayant la fréquence choisie au point considéré.

Le fait d'additionner les contributions individuelles des particules suppose que les effets collectifs dûs aux cohérences de phase du rayonnement ou aux corrélations entre particules sont négligeables. C'est à cette condition seulement que les sections efficaces peuvent être considérées comme additives [30].

## 2.2.1 Coefficient d'absorption

Nous séparons la contribution des processus  $bb$ ,  $bf$  et  $ff$  :

$$K(z, \nu) = K_{bb}(z, \nu) + K_{bf}(z, \nu) + K_{ff}(z, \nu). \quad (2.27)$$

### 2.2.1.1 Transitions $bb$

Le coefficient volumique d'absorption  $bb$  d'un rayonnement incident de direction-fréquence  $(\hat{\mathbf{n}}, \nu)$  s'écrit [9] :

$$K_{bb}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sum_{i < j} n_i(z) \int f_i(z, \mathbf{v}) \sigma_{i\nu, j}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\mathbf{v}, \quad (2.28)$$

où  $\sigma_{i\nu, j}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  est la section efficace d'un atome de vitesse  $\mathbf{v}$  passant de l'état  $i$  à l'état  $j$ . Cette section efficace est exprimée en terme du coefficient d'Einstein  $B_{ij}$  et du profil atomique d'absorption  $\varphi_{ij}$  dans l'annexe A (Eq. A.1). En utilisant le profil moyen d'absorption  $\Phi_{ij}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  (Eq. A.8), prenant la forme  $\Phi_{ij}(z, \nu)$  car supposé ici isotrope, on obtient l'expression classique du coefficient d'absorption  $bb$

$$K_{bb}(z, \nu) = \sum_{i < j} n_i(z) \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} B_{ij} \Phi_{ij}(z, \nu), \quad (2.29)$$

où nous avons confondu  $h\nu$  et  $h\nu_{ij}$  dans le membre de droite,  $\nu_{ij}$  désignant la fréquence centrale de la raie.

Les coefficients d'Einstein  $B_{ij}$  et les profils d'absorption moyens  $\Phi_{ij}$  sont explicités dans l'annexe A (section A.1).

### 2.2.1.2 Transitions $bf$

Le coefficient d'absorption  $bf$  se déduit de la distribution  $\sigma_{i\nu, +e}$  décrivant la transition  $(i, \mathbf{v}) + (\hat{\mathbf{n}}, \nu) \rightarrow (+, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e)$  par la relation [78] :

$$K_{bf}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sum_i n_i(z) \int \int f_i(z, \mathbf{v}) \sigma_{i\nu, +e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}. \quad (2.30)$$

On a remplacé la vitesse relative de l'électron éjecté  $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}$  par sa vitesse absolue  $\mathbf{v}_e$ , ce qui rend possible l'intégration sur la vitesse  $\mathbf{v}$  de l'atome et fait disparaître sa fdv normalisée  $f_i$ . On peut également effectuer l'intégration sur la vitesse de l'électron émergent, ce qui fait apparaître la section efficace intégrée de photoionisation  $\sigma_{i+}(\nu)$ , à cause de (Eq. A.18). Le coefficient d'absorption  $bf$  est alors isotrope et s'écrit

$$K_{bf}(z, \nu) = \sum_i n_i(z) \sigma_{i+}(\nu). \quad (2.31)$$

Lorsque  $i$  désigne un état quelconque de l'atome d'hydrogène, la section efficace intégrée de photoionisation est donnée par la relation (A.19) et l'expression précédente devient

$$K_{bf}(z, \nu) = \sum_i n_i(z) \sigma_{i+} Y(\nu - \nu_{i+}) \left( \frac{\nu_{i+}}{\nu} \right)^3 g_{bf}(i, \nu), \quad (2.32)$$

où  $Y$  est la fonction de Heaviside définie par

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (2.33)$$

et  $\nu_{i+}$  est la fréquence d'ionisation de l'état  $i$  (définie dans la section A.2.1),  $\sigma_{i+}$  le coefficient (A.20) et  $g_{bf}(i, \nu)$  le facteur de Gaunt du processus  $bf$ .

### 2.2.1.3 Transitions $ff$

Le coefficient d'absorption  $ff$  est de nouveau exprimé en terme de la distribution  $\sigma_{ie\nu,ie}$  associée à la transition  $ff$   $(i, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e) + (\hat{\mathbf{n}}, \nu) \rightarrow (i, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}'_e)$  explicitée dans l'annexe A (section A.3.1). Son expression pour des électrons rapides [78] :

$$K_{ff}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sum_{i,+} n_i(z) n_e(z) \int \int \int f_i(z, \mathbf{v}) f_e(z, v_e) v_e \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}'_e d\mathbf{v} \quad (2.34)$$

peut être intégrée sur la vitesse  $\mathbf{v}$  de la particule lourde, ce qui fait disparaître sa fdv  $f_i$ . On peut également effectuer les intégrations sur la direction de l'électron incident lorsque la fdv des électrons est isotrope, et sur la vitesse de l'électron émergent sans restriction. On fait apparaître ainsi la section efficace intégrée d'absorption  $ff$   $\sigma_{ii}(v_e, \nu)$  définie par (A.31). Le coefficient d'absorption  $ff$  devient isotrope et s'écrit

$$K_{ff}(z, \nu) = 4\pi n_e(z) \sum_{i,+} n_i(z) \int_0^{+\infty} f_e(z, v_e) \sigma_{ii}(v_e, \nu) v_e^3 dv_e. \quad (2.35)$$

Dans la présentation faite dans l'annexe A (section A.3), les transitions  $ff$  se font dans un potentiel purement coulombien, provoqué par des ions de charge effective  $Z$ , et la section efficace du processus ne dépend pas de  $i$  mais seulement de  $Z$ . Les transitions  $ff$  induites par les atomes neutres sont négligées (la somme sur les états  $i$  dans (2.35) est nulle). En utilisant l'expression (A.32) de la section efficace intégrée d'absorption  $ff$ , on obtient la composante  $ff$  du coefficient d'absorption sous la forme classique

$$K_{ff}(z, \nu) = 4\pi n_+(z) n_e(z) Y(\nu - \nu_p) \sigma_{ff}(\alpha c)^2 \left(\frac{\nu_R}{\nu}\right)^3 \int_0^{+\infty} f_e(z, v_e) g_{ff}(v_e, \nu) v_e dv_e, \quad (2.36)$$

le coefficient  $\sigma_{ff}$  étant donné par (A.33), la fréquence de plasma  $\nu_p$  par (A.34) et la fréquence de Rydberg  $\nu_R$  définie à la section A.1 et rappelée en début de ce mémoire dans la rubrique regroupant les notations.  $g_{ff}(v_e, \nu)$  désigne le facteur de Gaunt du processus  $ff$ , qui dépend de  $Z$ , ainsi que  $\sigma_{ff}$ .

## 2.2.2 Coefficient d'émission

On sépare de nouveau les processus  $bb$ ,  $fb$  et  $ff$  :

$$E(z, \nu) = E_{bb}(z, \nu) + E_{fb}(z, \nu) + E_{ff}(z, \nu). \quad (2.37)$$

### 2.2.2.1 Transitions $bb$

On a, comme pour une absorption  $bb$ ,

$$E_{bb}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sum_{i<j} n_j(z) \int f_j(z, \mathbf{v}) \sigma_{j,iv}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\mathbf{v}, \quad (2.38)$$

le coefficient d'émission  $bb$   $\sigma_{j,iv}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  étant explicité par la relation (A.2). En remarquant que le profil moyen d'émission coïncide avec le profil moyen d'absorption sous l'hypothèse de RCF des photons dans chaque raie (dans le référentiel du laboratoire), on obtient l'expression classique suivante du coefficient d'émission  $bb$  :

$$E_{bb}(z, \nu) = \sum_{i<j} n_j(z) \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} A_{ji} \Phi_{ij}(z, \nu). \quad (2.39)$$

De nouveau, on a confondu  $h\nu$  et  $h\nu_{ij}$  dans cette expression. Les coefficients d'Einstein  $A_{ji}$  se déduisent des  $B_{ij}$  par la relation de réciprocité (A.6).

### 2.2.2.2 Transitions $fb$

On substitue la relation de réciprocité (A.23) dans l'expression [78] :

$$E_{fb}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sum_i n_+(z) n_e(z) h\nu \int \int f_+(z, \mathbf{v}) f_e(z, v_e) v_e \sigma_{+e, i\nu}(\mathbf{v}_e; \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}, \quad (2.40)$$

et on effectue les deux intégrations vectorielles. Pour une fdv isotrope des électrons, le coefficient d'émission  $fb$  devient isotrope puisqu'il s'écrit

$$E_{fb}(z, \nu) = n_+(z) n_e(z) \frac{2h\nu^3}{c^2} \sum_i \Gamma_i \sigma_{i+}(\nu) f_e(z, \zeta_{i+}(\nu)), \quad (2.41)$$

où  $\zeta_{i+}(\nu)$  est la vitesse d'un électron éjecté par un photon de fréquence  $\nu$  (Eq. A.14) et  $\Gamma_i$  désigne le coefficient (C.4).

Pour un atome d'hydrogène à l'état  $i$ , on peut utiliser l'expression (A.19) de la section efficace de photoionisation, et le résultat précédent devient

$$E_{fb}(z, \nu) = n_+(z) n_e(z) \frac{2h\nu^3}{c^2} \sum_i Y(\nu - \nu_{i+}) \sigma_{i+} \Gamma_i \left( \frac{\nu_{i+}}{\nu} \right)^3 g_{bf}(i, \nu) f_e(z, \zeta_{i+}(\nu)). \quad (2.42)$$

### 2.2.2.3 Transitions $ff$

L'expression du coefficient d'émission  $ff$  selon la distribution de transition  $\sigma_{ie, i\nu}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  est la suivante [78] :

$$E_{ff}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \sum_{i,+} h\nu n_j(z) n_e(z) \int \int \int f_j(z, \mathbf{v}) f_e(z, \mathbf{v}'_e) v'_e \sigma_{ie, i\nu}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}'_e d\mathbf{v}, \quad (2.43)$$

et elle se simplifie en effectuant l'intégration sur  $\mathbf{v}$  et en utilisant la relation de réciprocité (A.36). Lorsque la fdv des électrons est isotrope, les intégrations angulaires peuvent être effectuées, ce qui fait apparaître la section efficace intégrée d'absorption  $ff$  définie par (A.31). Le coefficient d'émission  $ff$  devient isotrope et s'écrit :

$$E_{ff}(z, \nu) = 4\pi n_e(z) \frac{2h\nu^3}{c^2} \sum_{i,+} n_i(z) \int_0^{+\infty} f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) v_e^3 \sigma_{ii}(v_e, \nu) dv_e. \quad (2.44)$$

Rappelons que  $\zeta_{ff}(v_e, \nu)$  est la vitesse émergente d'un électron de vitesse  $v_e$  avant absorption d'un photon de fréquence  $\nu$ , donnée par (A.29).

Si on utilise l'expression (A.32) de la section efficace d'absorption  $ff$ , valable pour un potentiel purement coulombien, le coefficient d'émission  $ff$  devient

$$E_{ff}(z, \nu) = 4\pi n_+(z) n_e(z) Y(\nu - \nu_p) \frac{2h\nu^3}{c^2} \sigma_{ff}(\alpha c)^2 \left( \frac{\nu_R}{\nu} \right)^3 \int_0^{+\infty} f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) g_{ff}(v_e, \nu) v_e dv_e. \quad (2.45)$$

## 2.2.3 Coefficient de diffusion

La diffusion *vraie* des photons étant isotrope et monochromatique dans le référentiel du laboratoire, le coefficient différentiel de diffusion se déduit du coefficient intégré par la relation

$$\sigma(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu, \hat{\mathbf{n}}', \nu') = \frac{1}{4\pi} \sigma(z, \nu) \delta(\nu - \nu'). \quad (2.46)$$

Le coefficient de diffusion intégré décrit la diffusion Thomson des photons sur les électrons libres et la diffusion Rayleigh des photons sur les atomes d'hydrogène à l'état  $1s$ , les atomes excités étant peu nombreux par rapport aux atomes à l'état fondamental. D'où

$$\sigma(z, \nu) = Y\left(\frac{1}{10} \frac{m_e c^2}{h} - \nu\right) n_e(z) \sigma_T + Y(\nu_{12} - \nu) n_1(z) \sigma_1(\nu), \quad (2.47)$$

les sections efficaces de diffusion Thomson et Rayleigh étant explicitées par les relations (A.40) et (A.54). Les fonctions de Heaviside délimitent le domaine de validité en fréquence des deux termes de (Eq. 2.47).

## 2.3 Atmosphères en équilibre thermodynamique local

Nous traitons dans cette section le cas des atmosphères thermalisées, c'est-à-dire dont les électrons libres ont une fdv maxwellienne, et le cas des atmosphères en équilibre thermodynamique local (ETL), c'est-à-dire dont tous les types de particules ont des fdv maxwelliennes de même température et des populations vérifiant les relations d'équilibre de Boltzmann et de Saha.

### 2.3.1 Atmosphères thermalisées

Le remplacement de la fdv des électrons par la formule de Maxwell-Boltzmann (Eq. 1.8) permet d'effectuer des simplifications que nous détaillons par la suite

#### 2.3.1.1 Transitions *bb*

Les coefficients d'absorption et d'émission sont inchangés, puisqu'ils ne dépendent pas de la fdv des électrons.

#### 2.3.1.2 Transitions *bf-fb*

Le coefficient d'absorption *bf* est inchangé. Le coefficient d'émission *fb* (2.41) peut être transformé en remarquant que

$$f_e^M(z, \zeta_{i+}(\nu)) = \Theta_{i+}(T(z)) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT(z)}\right), \quad (2.48)$$

où  $\Theta_{i+}(T(z))$  désigne le facteur de Saha-Boltzmann de température  $T$  défini dans la note C.1 (Eq. C.3) et qui vaut :

$$\Theta_{i+}(T) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_{i+}}{kT}\right). \quad (2.49)$$

Ce coefficient devient alors

$$E_{fb}(z, \nu) = n_+(z) B_\nu^w(T(z)) \sum_i \theta_{i+}(z) \sigma_{i+}(\nu), \quad (2.50)$$

où  $B_\nu^w(T(z))$  est la fonction de Wien de température  $T$

$$B_\nu^w(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT(z)}\right), \quad (2.51)$$

et  $\theta_{i+}(z)$  le coefficient (classique) sans dimension défini dans la note C.1 (Eq. 4.17) et qui vaut :

$$\theta_{i+}(z) = \Gamma_i n_e(z) \Theta_{i+}(T(z)), \quad (2.52)$$

où  $\Gamma_i$  est le coefficient (Eq. C.4) valant :

$$\Gamma_i = \frac{g_i}{g_+ g_e} \left(\frac{h}{m_e}\right)^3. \quad (2.53)$$

Dans le cas d'une atmosphère d'hydrogène :

$$E_{fb}(z, \nu) = n_+(z) B_\nu^w(T(z)) \sum_i \theta_{i+}(z) Y(\nu - \nu_{i+}) \sigma_{i+} \left(\frac{\nu_{i+}}{\nu}\right)^3 g_{bf}(i, \nu). \quad (2.54)$$

#### 2.3.1.3 Transitions *ff*

Le coefficient d'émission *ff* (2.44) se simplifie lorsque la fdv des électrons est maxwellienne, car

$$f_e^M(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) = f_e^M(z, v_e) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT(z)}\right). \quad (2.55)$$

On a donc, par comparaison avec le coefficient d'absorption (2.35),

$$E_{ff}(z, \nu) = K_{ff}(z, \nu) B_\nu^w(T(z)), \quad (2.56)$$

ce qui exprime la loi de Kirchhoff.

### 2.3.2 Atmosphères en équilibre thermodynamique local

Dans une atmosphère en ETL, les microprocessus collisionnels dominent les microprocessus radiatifs et sont localement réversibles, ce qui entraîne que :

1. les profils atomiques d'émission et d'absorption  $bb$  coïncident,
2. les fonctions de distribution particulières sont maxwelliennes pour la même température, qui peut varier faiblement,
3. les densités particulières vérifient localement des relations d'équilibre : loi de Boltzmann sur l'excitation et loi de Saha sur l'ionisation.

Le premier point signifie que, dans une raie formée à l'ETL, il y a redistribution complète en fréquence dans le référentiel de l'atome, et le second point entraîne que cela est encore vraie dans le référentiel du laboratoire.

Nous renvoyons à la note C.1 pour les définitions des coefficients liés à l'ETL et d'écart à l'ETL. L'ETL entraîne la relation de Kirchhoff aussi bien dans une transition  $bb$

$$E_{bb}(z, \nu) = \sum_i n_i(z) \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} B_{ij} \Phi_{ij}(z, \nu) B_{\nu_{ij}}^w(T(z)) \approx K_{bb}(z, \nu) B_\nu^w(T(z)) \quad (\text{ETL}), \quad (2.57)$$

que dans une transition  $fb$

$$E_{fb}(z, \nu) = n_+(z) B_\nu^w(T(z)) \sum_i \frac{n_i(z)}{n_+(z)} \sigma_{i+}(\nu) = K_{bf}(z, \nu) B_\nu^w(T(z)) \quad (\text{ETL}). \quad (2.58)$$

En additionnant les équations (2.57, 2.58, 2.56) membre à membre, on obtient le résultat bien connu

$$E(z, \nu) = K(z, \nu) B_\nu^w(T(z)) \quad (\text{ETL}). \quad (2.59)$$

La définition (2.10) du coefficient d'absorption corrigé de l'émission induite devient à l'ETL

$$\kappa(z, \nu) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT(z)}\right) \right] K(z, \nu) \quad (\text{ETL}), \quad (2.60)$$

ce qui permet d'écrire la relation de Kirchhoff sous la forme équivalente suivante :

$$E(z, \nu) = \kappa(z, \nu) B_\nu(T(z)) \quad (\text{ETL}). \quad (2.61)$$

A l'ETL, l'expression (2.12) de la fonction source se simplifie, puisqu'alors  $E = \kappa B_\nu$  : la composante thermique de la fonction source est proportionnelle à la fonction de Planck, le coefficient de proportionnalité étant  $\epsilon$  d'après (2.13). D'où

$$S(z, \nu) = \epsilon(z, \nu) B_\nu(T(z)) + [1 - \epsilon(z, \nu)] J(z, \nu). \quad (2.62)$$





# Chapitre 3

## L'équation cinétique des électrons

### 3.1 Forme générale

Cette équation a la forme des équations cinétiques de la théorie cinétique des gaz (dilués)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{g}_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \right\} [n_e(\mathbf{r}, t) f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t)] = \Sigma_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t), \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{g}_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t)$  est l'accélération moyenne, en  $(\mathbf{r}, t)$ , d'un électron de vitesse  $\mathbf{v}_e$ , et  $\Sigma_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t)$  est un terme de source décrivant les collisions élastiques, inélastiques et les transitions radiatives des électrons :

$$\Sigma_e = \Sigma_{el} + \Sigma_{inel} + \Sigma_{rad}. \quad (3.2)$$

Le but de ce chapitre est de calculer les trois composantes de ce terme dans une atmosphère stellaire, c'est-à-dire pour les processus décrits à la section 1.3. La référence sur le sujet est la monographie d'Oxenius [78].

Dans une atmosphère stellaire plan-parallèle, statique et stationnaire, la variable de position  $\mathbf{r}$  est remplacée par la variable de profondeur géométrique  $z$ , et la variable de temps disparaît. On suppose donc que les électrons ont atteint une certaine configuration d'équilibre (pas forcément maxwellien) qui nous autorise à ignorer la variation temporelle des grandeurs qui les caractérisent (température, densité, fdv).

Lorsque cet équilibre est atteint, la fdv des électrons vérifie l'équation cinétique suivante :

$$\mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial z} [n_e(z) f_e(z, \mathbf{v}_e)] + n_e(z) \mathbf{g}_e(z, \mathbf{v}_e) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{v}_e) = \Sigma_e(z, \mathbf{v}_e). \quad (3.3)$$

Cette équation est compliquée du fait de la dépendance angulaire du membre de gauche. En fait, nous nous placerons dans un contexte où les termes du membre de gauche, qui sont les principaux responsables de l'anisotropie de la fdv des électrons, sont séparément négligeables par rapport au terme de collisions élastiques situé dans le membre de droite (voir section 3.6). Cela rend admissible l'hypothèse d'isotropie de la fdv des électrons faite ici, qui permettra de simplifier l'écriture du membre de droite de (3.3). Notamment la dépendance spatiale des fdv et de  $\Sigma_e$  ne dépend plus que des paramètres de l'ECE : les densités numériques, les températures, et la dépendance spatiale des fdv autres que celle des électrons. La dépendance en  $z$  de ces paramètres est extérieure à l'ECE, qui est complètement *locale* en  $z$ . Nous pourrions alors omettre la dépendance implicite en  $z$  dans la suite de chapitre, comme cela est fait dans l'annexe B, afin d'alléger les notations, mais nous garderons explicite cette dépendance par homogénéité avec les autres chapitres de ce mémoire.

### 3.2 Termes de collisions élastiques

Dans une atmosphère d'hydrogène pur, les électrons entrent en collision élastique avec d'autres électrons, avec des protons ou avec des atomes neutres. Les deux premiers types de collision présentent l'avantage d'être décrits par des sections efficaces simples, et l'inconvénient d'être à longue portée, au contraire des collisions avec les neutres qui ont des sections efficaces compliquées mais

sont à courte portée. Dans les deux cas, la forme générale du terme de collisions élastiques (Boltzmann) va être modifiée.

Nous décrivons d'abord dans la section 3.2.1 la forme générale du terme de collisions élastiques (forme de Boltzmann intégrale), qui sera simplifiée dans la section 3.2.2 grâce à nos hypothèses de travail, aux formes particulières des sections efficaces, *etc.* Le terme de source aura alors une forme différentielle, mais sera encore trop compliqué pour être traité numériquement sous cette forme. Les collisions élastiques auront une forme différentielle, alors que les collisions inélastiques et interactions radiatives garderont la forme intégrale de Boltzmann. Résoudre une équation intégral-différentielle non linéaire est très difficile numériquement, et nous verrons à la section 3.2.3 la forme simple apportée par le modèle BGK.

### 3.2.1 Forme générale de Boltzmann

D'après la théorie cinétique classique des gaz, la forme usuelle terme de collision élastique des électrons est la forme dite de Boltzmann [29, 27], forme locale dans l'espace et le temps :

$$\Sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) = n_e(z) \left[ -\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}_e) + \int \sigma_{el}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e \right], \quad (3.4)$$

où  $\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e)$  est le taux intégré de collision élastique et  $\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e$  le taux différentiel correspondant, de sorte que

$$\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) = \int \sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e. \quad (3.5)$$

Le coefficient différentiel  $\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e)$  a pour écriture générale, d'après la formule de Boltzmann,

$$\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = \sum_k n_k(z) \int \int f_k(z, \mathbf{v}_k) |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k| q_{ke,ke}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}_k d\mathbf{v}'_k, \quad (3.6)$$

où  $k$  désigne un électron ou n'importe quel type de particule lourde (chargée ou non), et l'expression  $q_{ke,ke}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_e)$  est la distribution de transition élastique contenant les contraintes d'impulsion et d'énergie (Eq. A.62).

Le taux intégré correspondant s'écrit alors, d'après (3.5),

$$\sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) = \sum_k n_k(z) \int f_k(z, \mathbf{v}_k) |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k| q_{ke}(|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k|) d\mathbf{v}_k, \quad (3.7)$$

où  $q_{ke}(|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k|)$  est la section efficace intégrée de collision élastique définie par (A.65).

Le terme intégral de (3.4) peut être calculé en substituant dans le membre de droite de (3.6) la relation (A.62) explicitant la distribution  $q_{ke,ke}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_e)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \int \sigma_{el}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e &= \sum_k n_k(z) \int \int \int f_k(z, \mathbf{v}'_k) f_e(z, \mathbf{v}'_e) g'_{ke} q_{ke,ke}(\mathbf{g}'_{ke}, \mathbf{g}_{ke}) \\ &\quad \times \delta \left( \mathbf{v}_k - \mathbf{v}'_k + \frac{\mu_k}{m_k} (\mathbf{g}_{ke} - \mathbf{g}'_{ke}) \right) \frac{1}{g'^2_{ke}} \delta(g'_{ke} - g_{ke}) d\mathbf{v}_k d\mathbf{v}'_k d\mathbf{v}'_e, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{g}_{ke} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k$  et  $\mathbf{g}'_{ke} = \mathbf{v}'_e - \mathbf{v}'_k$ . De plus  $g_{ke} = |\mathbf{g}_{ke}|$  et  $g'_{ke} = |\mathbf{g}'_{ke}|$ . Effectuons le changement de variable  $\mathbf{v}'_e \rightarrow \mathbf{g}'_{ke} = \mathbf{v}'_e - \mathbf{v}'_k$ , puis intégrons sur  $\mathbf{v}'_k$  en utilisant la contrainte d'impulsion. On obtient

$$\begin{aligned} \int \sigma_{el}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e &= \sum_k n_k(z) \int \int f_k \left( z, \mathbf{v}_k + \frac{\mu_k}{m_k} (\mathbf{g}_{ke} - \mathbf{g}'_{ke}) \right) \\ &\quad \times f_e \left( z, \mathbf{v}_e - \frac{\mu_k}{m_k} (\mathbf{g}_{ke} - \mathbf{g}'_{ke}) \right) q_{ke,ke}(\mathbf{g}'_{ke}, \mathbf{g}_{ke}) \\ &\quad \times \frac{1}{g'^2_{ke}} \delta(g'_{ke} - g_{ke}) d\mathbf{v}_k d\mathbf{g}'_{ke}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

et après l'intégration sur  $g'_{ke}$  :

$$\int \sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e = \sum_k n_k(z) \int \int_{4\pi} f_k \left( z, \mathbf{v}_k + \frac{\mu_k}{m_k} g_{ke} (\hat{\mathbf{g}}_{ke} - \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) \right) \times f_e \left( z, \mathbf{v}_e - \frac{\mu_k}{m_k} g_{ke} (\hat{\mathbf{g}}_{ke} - \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) \right) g_{ke} q_{ke} (g_{ke}, \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) d\mathbf{v}_k d\hat{\mathbf{g}}'_{ke}, \quad (3.10)$$

Insérant ce dernier résultat et l'expression (3.7) du taux intégré dans (3.4), on obtient le coefficient de diffusion élastique des électrons sous la forme finale suivante :

$$\Sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) = n_e(z) \sum_k n_k(z) \int \int_{4\pi} \left\{ f_k \left( z, \mathbf{v}_k + \frac{\mu_k}{m_k} g_{ke} (\hat{\mathbf{g}}_{ke} - \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) \right) \times f_e \left( z, \mathbf{v}_e - \frac{\mu_k}{m_k} g_{ke} (\hat{\mathbf{g}}_{ke} - \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) \right) - f_k(z, \mathbf{v}_k) f_e(z, \mathbf{v}_e) \right\} g_{ke} q_{ke} (g_{ke}, \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) d\mathbf{v}_k d\hat{\mathbf{g}}'_{ke}. \quad (3.11)$$

On vérifie sans difficulté que ce terme de source est nul pour des fdv maxwelliennes des électrons et des particules de type  $k$  (pour une vitesse moyenne et une température identique). La forme (3.11) ainsi définie n'est valable que lorsque l'intégrale ne diverge pas, ce qui est le cas pour la plupart des potentiels d'interaction (centrales, sphères dures, Lennard-Jones, *etc.*) *sauf* pour les interactions coulombiennes, ce qui est le cas des collisions élastiques des électrons avec eux-mêmes ou les ions (protons). Dans ce cas, nous devons exprimer le terme de source de collisions élastiques sous une autre forme, ce que nous faisons dans la section 3.2.2 suivante.

### 3.2.2 Forme simplifiée

Dans une atmosphère d'hydrogène pur, les électrons libres entrent en collision avec eux-mêmes ( $e$ ), avec les protons ( $+$ ) et avec les atomes neutres d'hydrogène ( $H$ ), d'où l'écriture :

$$\frac{1}{n_e(z)} \Sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) = \Sigma_{el,e}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{el,+}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{el,H}(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.12)$$

où nous avons isolé la densité numérique  $n_e$  des termes détaillés des collisions. Nous n'avons pas isolé les autres densités afin de pouvoir comparer les termes les uns par rapport aux autres, et définir correctement la fréquence de collision du modèle BGK (en unités  $s^{-1}$ , voir section 3.2.3).

Pour les deux premiers termes  $\Sigma_{el,e}(z, \mathbf{v}_e)$  et  $\Sigma_{el,+}(z, \mathbf{v}_e)$ , on connaît parfaitement la section efficace différentielle d'interaction, mais l'intégrale figurant dans le terme de source diverge parce que la sed devient infinie pour de petits angles de déviation. Pour empêcher cette intégrale de diverger, la méthode usuelle est de faire une coupure du domaine d'intégration sur les angles, coupure à un angle minimum de déviation noté  $\theta_c$ . Cette coupure est physiquement justifiée par l'effet systématique d'écrantage d'une charge par ses voisins, dit de Debye-Hückel [70]. On admet que la longueur de corrélation entre deux charges dans un plasma *statistique* est la longueur de Debye  $\lambda_D(z)$ . Cette longueur représente le paramètre d'impact maximal de collision élastique entre deux charges. Si le paramètre d'impact est plus grand, les deux charges n'interagissent pas, et il n'y a pas de déviation. C'est cette valeur du paramètre d'impact qui est utilisée en général pour calculer l'angle de coupure. Toutes les grandeurs utilisées par la suite sont amplement détaillées dans la note C.2, et nous donnons l'expression de ces termes de source dans la section 3.2.2.1.

Pour le troisième terme, l'intégrale de la sed ne diverge pas, la forme de Boltzmann est donc valable, mais elle est compliquée. Il est possible de grandement le simplifier, par exemple en le linéarisant, car l'électron entre en collision avec une particule beaucoup plus lourde que lui, ce qui a une incidence forte sur la dynamique des collisions. Des calculs ont été faits par I. B. Bernstein à partir de cette constatation [5], et nous les résumons dans la section 3.2.2.2. De plus, la section efficace est mal connue, et nous avons dû la modéliser à l'aide d'une étude détaillée dans l'annexe A (section A.5.4).

### 3.2.2.1 Les collisions des électrons avec les particules chargées

On peut utiliser deux formes pour le terme de source. La première est la forme intégrale de Boltzmann tenant compte de la coupure du paramètre d'impact. Comme cette intégrale semble être en majeure partie dominée par les collisions lointaines, on a historiquement développé le terme de Boltzmann pour de faibles collisions, *i.e.* de faibles déviations, ce qui donne un terme de source de type Fokker-Planck, mis sous la forme symétrisée de Landau [32, 33, 62]. Nous parlerons alors de la forme de Fokker-Planck-Landau (**FPL**).

#### 3.2.2.1.1 La section efficace différentielle de collision

Dans le cas des collisions entre particules chargées électriquement, la sed est connue depuis longtemps. Le calcul classique donne la formule de Rutherford :

$$q_{ie}(g, \theta) = \left( \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\mu_i g^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (3.13)$$

où  $i$  désigne l'électron ou le proton,  $g$  et  $\theta$  ont la même signification que précédemment,  $\mu_i$  est la masse réduite du système  $e - i$ , *i.e.*  $\mu_e = m_e/2$  et  $\mu_+ = m_e m_+ / (m_e + m_+) \approx m_e$ . On remarquera que la forme exacte de cette section efficace différentielle (au sens de la mécanique quantique), est vraie pour les électrons et les protons seulement. Pour des ions plus compliqués, l'expression (3.13) n'est vraie qu'à grande distance, des effets quantiques complexes entrant en jeu à faible distance. De même, les effets quantiques d'indiscernabilité entrent en jeu lorsque on considère les collisions entre électrons, qui modifient l'expression (3.13) (voir section C.2.1).

#### 3.2.2.1.2 La forme de Fokker-Planck-Landau

Le terme de source s'écrit alors :

$$\Sigma_{el,i}(z, \mathbf{v}_e) = n_i(z) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \cdot \int G_{ei}(z, \mathbf{g}) : \left[ \frac{1}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} - \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'_i} \right] f_e(z, \mathbf{v}_e) f_i(z, \mathbf{v}'_i) d\mathbf{v}'_i, \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}'_i$ ,  $g = |\mathbf{g}|$ , le signe  $:$  représente la contraction de deux tenseurs en un vecteur, et  $G_{ei}$  est un tenseur du deuxième ordre défini, dans ce cas des interactions coulombiennes, par :

$$G_{ei}(z, \mathbf{g}) = \frac{m_e}{2} \frac{1}{4\pi} \Gamma_{ei}(z) \frac{\mathbb{I} - \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}}{g}, \quad (3.15)$$

avec  $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/g$ ,  $\mathbb{I}$  est le tenseur unité, et

$$\Gamma_{ei}(z) = 4\pi \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \ln \Lambda(z), \quad (3.16)$$

où  $\ln \Lambda(z)$  est défini dans la note C.2.  $\Lambda(z)$  est une fonction de  $z$  car elle est définie à partir de la densité et la température électronique, quantités variant avec  $z$ . La dépendance selon  $z$  de cette quantité  $\ln \Lambda(z)$  n'est jamais explicitée dans la littérature astrophysique habituelle des atmosphères stellaires, car le milieu étudié fait varier lentement les grandeurs thermodynamiques sur l'épaisseur de l'atmosphère étudiée (région de la photosphère), et le logarithme népérien *écrase* encore plus cette faible variation. Globalement,  $\ln \Lambda(z)$  peut être considérée comme une constante sur l'épaisseur  $z$  de l'atmosphère, à la précision de 10% près. Nous gardons toutefois la dépendance explicite en  $z$  par homogénéité des notations.

Cette forme (Eq. 3.14) peut être simplifiée en supposant que les fdv des électrons et des protons sont *isotropes*. Le terme de collisions élastiques s'écrit alors (forme équivalente à la référence [68, 88]) :

$$\begin{aligned} \Sigma_{el,i}(z, v) &= n_i(z) \Gamma_{ei}(z) \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ f_e(z, v) \frac{m_e}{m_i} \int_0^v v'^2 f_i(z, v') dv' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{v} \int_0^v v'^4 f_i(z, v') dv' + v^2 \int_v^{+\infty} v' f_i(z, v') dv' \right] \frac{\partial}{\partial v} f_e(z, v) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

On peut réécrire l'équation (3.17) sous sa forme habituelle en supposant que  $f_i$  est la maxwellienne  $f_i^M$  de température  $T_i(z)$  (voir Eq. 1.8) :

$$f_i^M(z, v) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{v}_i^3(z)} \exp\left(-\frac{v^2}{\bar{v}_i^2(z)}\right), \quad (3.18)$$

où nous rappelons que  $\bar{v}_i(z) = \sqrt{2kT_i(z)/m_i}$  est la vitesse la plus probable de l'espèce  $i$ . L'équation (3.17) devient :

$$\Sigma_{el,i}(z, v) = n_i(z)\Gamma_{ei}(z)\frac{m_e}{m_i}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{v^2}{\bar{v}_i^2(z)}R\left(\frac{v}{\bar{v}_i(z)}\right)\left[f_e(z, v) + \frac{kT_i(z)}{m_e v}\frac{\partial}{\partial v}f_e(z, v)\right]\right\}, \quad (3.19)$$

où la fonction  $R(u)$ , définie avec ces notations par Delcroix [32] (bien qu'il y ait un facteur 2 de différence noté à la section B.4.2.2), est rappelée ci-dessous :

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{u^2}\int_0^u x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{u^2}\text{erf}(u) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-u^2}}{u} \end{aligned} \quad (3.20)$$

et  $\text{erf}$  est la fonction d'erreur bien connue :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.21)$$

Nous indiquons le comportement de la fonction  $R(u)$  dans la table (Tab. 3.1) ci-dessous.

$u$	0	$\ll 1$	1	$\gg 1$	$+\infty$
$R(u)$	0	$4u/3\sqrt{\pi}$	0.428	$1/u^2$	0

TAB. 3.1 – Variations de la fonction  $R(u)$ .

Le terme de source (3.17) peut encore être simplifié, *i.e.* linéarisé, pour les deux limites  $v \rightarrow +\infty$  et  $v \rightarrow 0$ . Il sera alors noté, respectivement,  $\Sigma_{el,i}^>(z, v)$  et  $\Sigma_{el,i}^<(z, v)$  :

$$\Sigma_{el,i}^>(z, v) = n_i(z)\Gamma_{ei}(z)\frac{m_e}{m_i}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[f_e(z, v) + \frac{kT_i(z)}{m_e v}\frac{\partial}{\partial v}f_e(z, v)\right], \quad (3.22)$$

et

$$\Sigma_{el,i}^<(z, v) = \frac{1}{3}n_i(z)\Gamma_{ei}(z)\frac{m_e}{m_i}f_i(z, 0)\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^3\left[f_e(z, v) + \frac{kT_i(z)}{m_e v}\frac{\partial}{\partial v}f_e(z, v)\right]\right\}. \quad (3.23)$$

L'équation (3.23) peut être mise sous une forme différente si on prend pour  $f_i(z, 0)$  sa valeur maxwellienne, *i.e.*  $f_i^M(z, 0) = 1/\pi^{3/2}\bar{v}_i^3(z)$ . Pour éviter la confusion, nous la noterons  $\Sigma_{el,i}^{<M}(z, v)$  :

$$\Sigma_{el,i}^{<M}(z, v) = \frac{1}{3\pi^{3/2}}n_i(z)\Gamma_{ei}(z)\frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\bar{v}_i^3(z)}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^3\left[f_e(z, v) + \frac{kT_i(z)}{m_e v}\frac{\partial}{\partial v}f_e(z, v)\right]\right\}. \quad (3.24)$$

Les formes (3.22) et (3.23) résultent du développement asymptotique aux limites des intégrales dans (3.17), c'est à dire que seuls les termes dominants du développement en série des intégrales de  $f_i$  sont gardés. Ces intégrales sont les moments d'ordre (-1), 0 et 2 de  $f_i$ . Quelles que soit la forme de  $f_i$ , les moments 0 et 2 sont bien définis et correspondent à des quantités conservées, mais pour le moment (-1), il faut supposer une forme particulière de  $f_i$  pour le calculer. En général, on prend une forme maxwellienne.

Pour (3.22), l'explication usuelle est de dire qu'on suppose les électrons beaucoup plus rapides que les particules  $i$ , ce qui peut être réaliste lorsque ce sont des protons, mais difficilement pour des électrons. Dans le dernier cas, cette hypothèse est valable lorsqu'on étudie les électrons de la *queue* de la fdv qui collisionnent avec les électrons les plus nombreux : ceux ayant une vitesse *thermique* [78]. Ainsi  $\Sigma_{el,+}^>(z, v)$  sera valable pour des électrons *thermiques* et plus rapides, alors que  $\Sigma_{el,e}^>(z, v)$  ne sera valable qu'à partir d'électrons *suprathermiques*. Le problème de la forme de  $f_i$  pour le calcul du moment d'ordre (-1) ne se pose pas pour (3.22), parce que l'intégrale tend vers zéro pour  $v \rightarrow \infty$ .

Pour (3.23), on a seulement besoin de connaître le moment d'ordre (-1) de  $f_i$ . Nous avons pris sa valeur maxwellienne. Ensuite, il reste  $f_i(z, 0)$  en facteur. A priori, on ne connaît pas sa valeur. Nous avons utilisé sa valeur maxwellienne pour écrire (3.24), mais ce point est beaucoup plus délicat que pour les moments de  $f_i$ . Dans ce cas, on peut supposer que les perturbations à la maxwellienne de la fdv engendrées par les collisions inélastiques s'appliquent au départ et dans la queue de la fdv seulement, de façon à ce que les moments de la fdv soient dominés par le *noyau* de la fdv, qui est maxwellien. Autrement dit, même si les écarts de la fdv à la maxwellienne, par exemple dans la queue, sont importants, les moments de la fdv n'en seront pas affectés, parce qu'il s'agit d'une intégrale sur toutes les vitesses et pondérée par les populations. Mais dans le cas de  $f_i(z, 0)$ , c'est une valeur en un point, et il n'y a *a priori* aucune raison que la fdv soit maxwellienne en ce point (les collisions élastiques sont nulles alors que la recombinaison radiative et la recombinaison collisionnelle ne le sont pas). On peut voir que la forme (3.24) est valable au premier ordre du développement de la fdv autour de la maxwellienne. Ce qui est important est qu'il existe un domaine de solutions pour lequel (3.24) soit valable. Nous garderons la valeur maxwellienne de  $f_i(z, 0)$  pour la discussion qui suit.

On peut vérifier que (3.19) redonne bien (3.22) et (3.24) grâce au tableau (Tab. 3.1) de variations de  $R(u)$ .

Nous finirons cette étude sur la remarque que les collisions élastiques entre électrons et particules lourdes chargées ne sont pas toujours négligeables par rapport aux collisions élastiques entre électrons, comme on pourrait le croire du fait du rapport  $m_e/m_i$ . Les études de physique des plasmas sont principalement intéressées par des vitesses importantes : thermiques ou supra-thermiques. Dans notre étude, la région infra-thermique joue aussi un rôle, à cause des recombinaisons radiatives qui impliquent les électrons de très faible énergie. Nous établissons une comparaison dans le tableau (Tab. 3.2) ci-dessous, qui représente le rapport  $\Sigma_{el,+}(z, v)/\Sigma_{el,e}(z, v)$  pour trois zones. Le cas du proton nous intéresse plus à cause du modèle d'atmosphère traité dans ce travail, et n'incluant que des atomes d'hydrogène, mais le raisonnement est valable pour tous les ions, à la différence près que dans le cas de la comparaison que nous faisons, le rapport  $n_+(z)/n_e(z) = 1$  en vertu de la neutralité électrique locale de notre atmosphère (voir section 5.1). La première et la troisième zone ne posent pas de difficultés car la forme du terme de source pour les électrons ou les protons reste la même. La deuxième zone correspond aux électrons *infrathermiques* qui sont quand-même plus rapides que la plupart des protons. A ce moment là, les termes de source n'ont pas tout à fait la même forme, et nous faisons le rapprochement entre  $\Sigma_{el,i}^{<M}(z, v)$  et  $\Sigma_{el,i}^{>}(z, v)$  en ne considérant dans  $\Sigma_{el,i}^{<M}(z, v)$  que la dérivée de  $v^3$ . La comparaison dans cette zone n'est donc pas très significative, mais elle montre toutefois bien la transition entre la zone 1 et 3 quand  $v$  avoisine les valeurs  $\bar{v}_+(z)$  et  $\bar{v}_e(z)$ .

$v$	0	$\bar{v}_+(z) = \sqrt{\frac{2kT_+(z)}{m_+}}$	$\bar{v}_e(z) = \sqrt{\frac{2kT_e(z)}{m_e}}$	$+\infty$
$\frac{\Sigma_{el,+}(z, v)}{\Sigma_{el,e}(z, v)}$	$\left(\frac{m_+}{m_e}\right)^{1/2}$	$3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{kT_e(z)}{m_e}\right)^{3/2} \frac{m_e}{m_+} \frac{1}{v^3}$		$\frac{m_e}{m_+}$

TAB. 3.2 – Importance des collisions élastiques des électrons avec les protons par rapport à la collision entre eux-mêmes, indiqué par le rapport  $\Sigma_{el,+}(z, v)/\Sigma_{el,e}(z, v)$ . L'étude est selon la vitesse  $v$ , alors nous n'explicitons pas la dépendance en  $z$ , sans importance ici.

On voit qu'en effet les collisions élastiques avec les protons sont négligeables par rapport à celles entre électrons dans la zone 3, *i.e.* pour des électrons *suprathermiques*, mais c'est le contraire qui se passe pour les électrons lents : leurs collisions élastiques sont dominées par les chocs avec les protons.

### 3.2.2.1.3 La forme de Boltzmann avec coupure

Cette forme, pressentie dans les années 60, n'a été étudiée que récemment par E. C. Shoub [103]. La forme de Boltzmann est la somme de deux intégrales qui, prises séparément, divergent très vite à cause de l'interaction coulombienne à grande distance, alors que leur somme reste finie. A

l'époque, cela posait un problème numérique énorme, et le problème demeure de nos jours (erreurs d'arrondi), sans compter que les intégrales sont multiples (5 dimensions). De plus, la plupart des physiciens des plasmas étaient persuadés que les collisions lointaines dominaient les chocs proches. Cette forme intégrale de Boltzmann a alors été mise sous une forme différentielle de Fokker-Planck pour ne tenir compte que des chocs lointains, forme qui permettait de supprimer la divergence, ou plutôt de l'amoinrir, puisque on passait d'une divergence linéaire en le paramètre d'impact en une divergence logarithmique [32].

E. C. Shoub a repris ce problème pour tenter de répondre à la question : quel est le rôle des chocs proches dans l'évolution d'un type de particules vers l'équilibre, soumis à des interactions coulombiennes élastiques avec lui-même et les autres particules du milieu. Il a alors reformulé l'équation de Boltzmann pour réduire le nombre de dimensions de l'intégrale, passant de 5 à 3, voire 1 pour des fdv isotropes, permettant ainsi un traitement numérique. Notons que l'auteur ne s'est pas affranchi de la divergence, mais les ordinateurs de notre époque sont capables de la traiter. De plus, il utilise la section efficace différentielle de Rutherford même lorsque ce sont des collisions entre électrons, alors qu'il devrait utiliser (C.18), qui tient compte des effets de symétrie (indiscernabilité des électrons) puisqu'il traite les chocs proches. Ces effets sont différents des effets collectifs classiques qu'il ne traite pas en connaissance de cause, s'étant assuré qu'ils ne remettaient pas en cause son travail.

En reprenant les notations de l'auteur, nous omettrons la dépendance en  $z$  des quantités comme les fdv et grandeurs thermodynamiques, car cette dépendance n'a aucune influence sur les développements mathématiques qui suivent, et alourdit les notations.

En tenant compte de la collision élastique  $(e, \mathbf{v}) + (i, \mathbf{w}) \rightleftharpoons (e, \mathbf{v}') + (i, \mathbf{w}')$ , il commence par définir une fonction  $W_i(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  qui lui permet d'écrire son terme de source sous la forme

$$\frac{1}{n_i(z)} \Sigma_{el,i}(z, \mathbf{v}) = \int [W_i(\mathbf{v}', \mathbf{v}) f_e(\mathbf{v}') - W_i(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f_e(\mathbf{v})] d\mathbf{v}', \quad (3.25)$$

où

$$W_i(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \frac{\gamma_{ei}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^4} \int_D \frac{f_i(\mathbf{w}')}{|\mathbf{v}' - \mathbf{w}'|} \delta \left[ |\mathbf{v}' - \mathbf{w}'| - \left| \mathbf{v}' - \mathbf{w}' + \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \right| \right] d\mathbf{w}', \quad (3.26)$$

et

$$\gamma_{ei} = 4 \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{1}{m_e^2}, \quad (3.27)$$

et  $D$  est un domaine d'intégration particulier qui dépend de la valeur de  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ . La difficulté réside en le fait de bien définir ce domaine d'intégration, et de supprimer le Dirac dans (Eq. 3.26). Pour cela on change de variable d'intégration, de  $\mathbf{w}'$  à  $\mathbf{g}' = \mathbf{v}' - \mathbf{w}'$ . On obtient alors

$$W_i(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \frac{\gamma_{ei}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^4} \int_D \frac{f_i(\mathbf{v}' - \mathbf{g}')}{g'} \delta[g' - |\mathbf{g}' + 2\mathbf{u}|] dg', \quad (3.28)$$

où  $g' = |\mathbf{g}'|$  et  $\mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}')/\beta$ , de norme  $u = |\mathbf{u}|$  et de vecteur normé  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/u$ , avec  $\beta = 2\mu_i/m_e$  et  $\mu_i$  est la masse réduite du système  $e - i$ . On définit aussi  $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$  dont la norme  $g$  est égale à  $g'$ . Cette transformation permet de mieux apprécier le domaine  $D$ . Il se sépare en deux parties, selon la valeur de  $u$  par rapport à  $u_0$  :

$$u_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\mu_i\lambda_D}. \quad (3.29)$$

Ainsi le domaine  $D$  est partagé en deux parties :

$$\begin{aligned} - u \geq u_0 : & \quad u \leq g \leq +\infty, \\ - u \leq u_0 : & \quad \begin{cases} u \leq g \leq g_1(u) \\ g_2(u) \leq g \leq +\infty \end{cases}, \end{aligned}$$

où

$$g_1(u) = \sqrt{\frac{2u^2}{1 + \sqrt{1 - (u/u_0)^4}}} \quad (3.30)$$



et

$$g_2(u) = \frac{2u_0^2}{g_1(u)}. \quad (3.31)$$

On vérifie bien que  $g_1(u_0) = g_2(u_0)$ , assurant la jonction entre les deux parties de  $D$ .

Le but de cette séparation est de savoir quel domaine d'intégration sur  $g'$  est possible dans (3.28), de façon à savoir si on peut s'affranchir du Dirac, qui a des racines multiples, et qui peut soit fixer  $g'$ , soit un des deux angles  $\theta_{g'}$  ou  $\varphi_{g'}$  qui interviennent dans l'intégration sur  $\mathbf{g}'$  :  $d\mathbf{g}' = g'^2 \sin \theta_{g'} dg' d\theta_{g'} d\varphi_{g'}$ . Le domaine d'intégration  $D$  n'impose des contraintes que sur  $g'$ , pas sur l'angle solide qui décrit toute la sphère unité.

On pourrait continuer et donner des expressions plus détaillées de (3.28). Le Dirac ne peut disparaître dans le cas général, il faut faire des hypothèses sur  $f_i$  pour cela, comme supposer qu'elle est isotrope (le Dirac peut être éliminer par intégration sur un des angles de la vitesse), ou lui donner une forme maxwellienne.

Shoub a fait un calcul pour le cas de la fdv isotrope :  $f_i$  est isotrope (pas forcément  $f_e$ ), ce qui va permettre de simplifier  $W_i(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ , en supprimant le Dirac dans (3.26) par intégration sur l'angle azimutal  $\varphi_{w'}$  de  $\mathbf{w}'$ . Shoub a fait le calcul pour le cas  $u \geq u_0$ , et cela donne :

$$W_i^{ISO}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \frac{\gamma'_{ei}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^5} \int_{w'_{min}}^{+\infty} w' f_i(w') dw', \quad u \geq u_0 \quad (3.32)$$

où  $\gamma'_{ei} = 8\pi(e^2/4\pi\epsilon_0 m_e^2)^2$  et

$$w'_{min} = |(\mathbf{u} + \mathbf{v}') \cdot \hat{\mathbf{u}}|. \quad (3.33)$$

Cette forme (3.32) ne contient plus qu'une intégrale à une dimension. Elle n'est pas isotrope en  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ , mais son anisotropie ne dépend que du produit scalaire  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$ . Si  $f_e$  est isotrope, alors l'intégration sur l'angle azimutal  $\varphi_{v'}$  n'est pas contrainte par (3.32), mais son intégration sur l'angle polaire  $\theta_{v'}$  ne peut peut-être pas être faite analytiquement.

En utilisant une maxwellienne isotrope pour  $f_i$ , donnée par (3.18), dans la formule (3.32), on obtient

$$W_i^{MAX}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = \frac{2}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{v}_i} \frac{\gamma'_{ei}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \exp \left\{ - \left[ \frac{(m_i - m_e)\mathbf{v}' - (m_i + m_e)\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{2m_i \bar{v}_i} \cdot \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \right]^2 \right\}, \quad u \geq u_0. \quad (3.34)$$

Si nous voulons utiliser cette méthode pour nos calculs, voici ce qu'il reste à faire :

- trouver des expressions équivalentes à (3.32) et (3.34) pour le cas  $u < u_0$ . Shoub n'a pas calculé la quantité isotrope et, par des moyens différents, a réussi à calculer la quantité maxwellienne, mais sans en trouver une forme analytique où l'intégrale a disparue.
- Intégrer ces quantités sur l'angle polaire de  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ .

On peut dire que, pour des fdv isotropes,  $f_i$  et  $f_e$ , le calcul du terme de Boltzmann consiste en une intégrale (à une dimension) sur  $v'$  de  $f_e$ , pondérée par une quantité  $W_i(v', v)$  qui est la somme de trois intégrales, chacune étant double *a priori*, et pouvant peut-être devenir simple. Étant donné la puissance de calcul numérique disponible de nos jours, son utilisation dans la résolution d'un problème cinétique n'est plus un problème, alors qu'il l'est encore si on garde le terme original, consistant en une intégrale à 5 dimensions.

### 3.2.2.1.4 Conclusion

Pour le traitement numérique de l'ECE que nous nous proposons de mener, nous devons faire le choix entre des termes de source entièrement différentiels, ou entièrement intégrals, car le traitement numérique d'une équation intégro-différentielle non linéaire de ce type est trop complexe. Comme nous tenons compte aussi des collisions inélastiques, dont la forme est du type Boltzmann, nous ne pouvons pas utiliser de formes différentielles. Le modèle BGK, décrit à la section suivante, permettrait de traiter correctement les collisions élastiques en reproduisant les principales caractéristiques des formes différentielles. Si ce modèle ne tient pas ses promesses, il faudra recourir à la forme de Boltzmann, qui a l'air compliquée mathématiquement mais utilisable numériquement.

### 3.2.2.2 Les collisions des électrons avec les atomes neutres

L'intégrale de la sed ne diverge pas, la forme de Boltzmann est donc valable, mais elle est compliquée. Il est possible de grandement la simplifier, par exemple en la linéarisant, car l'électron entre en collision avec une particule beaucoup plus lourde que lui, ce qui a une incidence forte sur la dynamique des collisions.

Des calculs ont été faits par I. B. Bernstein à partir de cette constatation [5]. On part de la forme de Boltzmann et développe les fonctions de distribution selon les vitesses en utilisant plusieurs hypothèses :

1. les électrons étant bien plus légers que les atomes ( $m_e/m_H \ll 1$ ), on ne garde que le premier ordre du développement des fdv en les vitesses, qui font intervenir le rapport des masses,
2. les électrons ont une température  $T_e(z)$  proche de la température  $T_H(z)$  des atomes, de sorte que  $m_e T_H(z)/m_H T_e(z) \ll 1$ ,
3. la fdv des atomes est isotrope,
4. la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{v} \rangle_H(z)$  des atomes est nulle.

L'hypothèse 2 signifie que  $T_e(z) \approx T_H(z)$ , ce qui doit être vrai avec une grande précision si on veut respecter strictement le même ordre de *petitesse* entre les hypothèses 1 et 2. A ce moment  $|T_e(z) - T_H(z)|/T_e(z) \ll 1$ . Cette différence semble être faible pour les atmosphères ( $< 10^{-3}$  cf. [69]). Or l'hypothèse 2 est toujours valable même pour des différences de température non négligeables,  $T_e(z) \approx 5T_H(z)$  par exemple. Notre calcul sera juste un peu moins précis, mais la *forme* du terme de source sera toujours valable. Bien que présentée ainsi, l'hypothèse 2 n'est pas une condition qui s'appuie strictement sur les températures, mais sur leur signification cinétique : la température d'un type correspond à son énergie cinétique moyenne :  $3kT_e(z) = m_e \langle v^2 \rangle_e(z)$ . La condition 2 est simplement équivalente à  $\bar{v}_e(z) \gg \bar{v}_H(z)$ , le rapport de moyennes étant de l'ordre de  $\sqrt{m_H/m_e} \sim 43$ . Le raisonnement est de se dire que lorsque la condition 2, portant sur les températures cinétiques, est vérifiée, la plupart des électrons sont rapides par rapport aux atomes. Les résultats suivants seront donc valables pour ces électrons seulement, mais pas pour des électrons aussi lents que les atomes, voire plus lents. Si on cherche à calculer la fdv pour toutes les vitesses, ce terme de source approché ne permettra pas de bien décrire l'influence des atomes sur ces électrons *lents*, à moins de postuler que les électrons *lents* soient maxwelliens [78], ce qui entraîne que le terme de source approché de collisions élastiques est nul, comme le terme de source de Boltzmann (3.4). Si on ne veut calculer que les moments de cette fdv, ce terme de source est une bonne approximation parce que le volume de phase de ces électrons *lents* est négligeable par rapport à celui des électrons thermiques (les plus nombreux) et rapides, les électrons lents étant de surcroît peu nombreux par comparaison.

Les hypothèses 3 et 4 ne sont pas discutables dans le cadre de notre modèle qui ne résout que l'équation cinétique des électrons, et pas celle des atomes.

L'expression suivante est valable en supposant que la vitesse moyenne des atomes est nulle. Dans le cas général, elle est donc valable dans le référentiel propre des atomes. Elle est aussi valable dans le référentiel du laboratoire pour notre modèle, car on suppose que les atomes ont une vitesse moyenne nulle (hypothèse 4).

Pour des électrons dont la fdv est *anisotrope*, la forme locale du terme de source des électrons s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma_{el,H}(z, \mathbf{v}_e) &= \int_{4\pi} \nu(z, v_e, \theta) [f_e(z, \mathbf{u}) - f_e(z, \mathbf{v}_e)] d\hat{\mathbf{n}} \\ &+ \frac{kT_H(z)}{m_H} \int_{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial v_e^2} \nu(z, v_e, \theta) [f_e(z, \mathbf{u}) - f_e(z, \mathbf{v}_e)] d\hat{\mathbf{n}} \\ &+ 2 \frac{m_e}{m_H} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \int_{4\pi} \nu(z, v_e, \theta) (\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left[ \mathbf{v}_e f_e(z, \mathbf{u}) + \frac{kT_H(z)}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{u}) \right] d\hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

où  $v_e = |\mathbf{v}_e|$ ,  $\mathbb{I}$  est le tenseur diagonal unitaire,  $\hat{\mathbf{n}}$  est la bissectrice du triangle isocèle formé par les deux vecteurs  $(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$  et  $(\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}'_i)$ ,  $\mathbf{u} = (2\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} - \mathbb{I}) \cdot \mathbf{v}_e$ , de même norme que  $\mathbf{v}_e$  :  $u = v_e$ , et

$$\nu(z, v_e, \theta) = n_H(z) v_e q_{He}(v_e, \theta) \quad (3.36)$$

est la *fréquence* de collision, où l'angle  $\theta$  correspond à la coordonnée polaire du vecteur  $\hat{\mathbf{n}}$  :  $d\hat{\mathbf{n}} = \sin\theta d\theta d\varphi$  et  $n_H(z)$  est la densité numérique d'atomes d'hydrogène (incluant tous les états excités).

C'est une expression encore compliquée qui se simplifie beaucoup pour des électrons dont la fdv est *isotrope* :

$$\Sigma_{el,H}(z, v_e) = \frac{m_e}{m_H} \frac{1}{v_e^2} \frac{\partial}{\partial v_e} \left\{ v_e^3 \nu_1(z, v_e) \left( f_e(z, v_e) + \frac{kT_H(z)}{m_e v_e} \frac{\partial}{\partial v_e} f_e(z, v_e) \right) \right\}, \quad (3.37)$$

où  $\nu_1(z, v_e) = 2\pi \int_0^\pi \nu(z, v_e, \theta) \sin\theta (1 - \cos\theta) d\theta$ .

$\nu_1(z, v)$  s'interprète comme l'inverse du temps moyen de transfert de quantité de mouvement d'un électron d'énergie  $\frac{1}{2}m_e v^2$  (temps de *freinage* de l'électron dû aux collisions avec l'atome). On notera que le problème de calculer  $\nu(z, v, \theta)$  reste entier. Lorsque  $f_e$  n'est pas isotrope, les deux premiers termes de (3.35) ne sont pas nuls. Dans tous les cas, on les suppose beaucoup plus grands que le troisième terme. Cette hypothèse est motivée par le fait que  $m_e/m_H \ll 1$ . Cette hypothèse n'est plus vraie lorsque  $f_e$  n'est que faiblement anisotrope, ce qui est le cas, sous le seul effet des collisions élastiques, lorsque presque toutes les anisotropies ont relaxé vers zéro. On ne tient pas compte de cette *région* qu'on espère courte en temps et faible en éléments perturbateurs (collisions inélastiques) qui auraient tendance à maintenir dans le temps cet état. Alors on peut récrire le terme de source sous la forme où  $\Sigma_{el,H}^{(2)}(z, v_e)$  correspond au cas isotrope (3.37) et

$$\Sigma_{el,H}(z, \mathbf{v}_e) = \Sigma_{el,H}^{(1)}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{el,H}^{(2)}(z, v_e), \quad (3.38)$$

où

$$\Sigma_{el,H}^{(1)}(z, \mathbf{v}_e) = \int_{4\pi} \nu^*(z, v_e, \theta) [f_e(z, \mathbf{u}) - f_e(z, \mathbf{v}_e)] d\hat{\mathbf{n}} \quad (3.39)$$

avec

$$\nu^*(z, v_e, \theta) = \nu(z, v_e, \theta) + \frac{kT_H(z)}{m_H} \frac{\partial^2}{\partial v_e^2} \nu(z, v_e, \theta). \quad (3.40)$$

En utilisant l'hypothèse faite à la section A.5.4.1 sur l'isotropie de la sed,  $\nu^*(z, v_e, \theta)$  ne dépend plus de  $\theta$ . Par analogie avec la définition générale de la sei à partir de la sed, on définit  $\nu^*(z, v_e) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \nu^*(z, v_e, \theta) d\hat{\mathbf{n}}$ . Alors, étant donné que pour  $(\mathbf{v}_e, \theta, \varphi)$  donnés correspond un seul  $\mathbf{u}$ , le jacobien de la transformation de l'angle solide infinitésimal  $d\hat{\mathbf{n}}$  en l'angle solide infinitésimal  $d\hat{\mathbf{u}}$  autour de  $\mathbf{u}$  vaut 1, et puisque nous intégrons sur la sphère unité, il est possible d'écrire :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} f_e(z, \mathbf{u}) d\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} f_e(z, \mathbf{u}) d\hat{\mathbf{u}} = f_e(z, u) = f_e(z, v_e), \quad (3.41)$$

ce qui entraîne

$$\Sigma_{el,H}^{(1)}(z, \mathbf{v}_e) = -\nu^*(z, v_e) [f_e(z, \mathbf{v}_e) - f_e(z, v_e)]. \quad (3.42)$$

On verra plus loin que cette forme ressemble à un modèle BGK.

On peut pousser la simplification un peu plus loin encore à partir de l'équation (3.40) : dans quelle mesure le deuxième terme est-il négligeable par rapport au premier ? Avec notre modèle de sed coupée en trois zones (voir section A.5.4.2.5), on montre que cette assertion est toujours vraie dans les deux premières zones, et seulement dans la troisième zone si la température des atomes satisfait l'inégalité :  $T_H(z) \ll 2.9 \times 10^8$  K, ce qui est largement suffisant pour nos modèles. On notera alors  $\nu_H(z, v_e) = n_H(z) v_e q_{He}(v_e)$  cette fréquence de collision.

Il reste aussi à vérifier pour quelles vitesses des électrons les formes de Bernstein (3.35) et (3.37) sont valables. On sait qu'elle n'est plus valable pour les électrons *lents*, il reste à préciser quantitativement cette lenteur. Le critère de validité est :  $E \gg E_m(z) = \frac{3}{2} \frac{m_e}{m_H} kT_H(z)$ . La table (Tab. 3.3) donne les valeurs de  $E_m$  pour différentes valeurs de la température  $T_H$ .

En commentaire, même pour  $T_H(z)$  très grand, on reste dans la zone 1 de la sei. La forme du terme de source n'est pas simplifiable à partir de Boltzmann dans l'approximation des électrons lents. Ainsi, pour le modèle BGK, la fréquence de collision, qui tend vers zéro selon les travaux de Bernstein, sera changée. En quoi ? On imagine mal une remontée spectaculaire, peu physique. Si c'est une constante, cela ne changera pas grand chose pour l'équilibre : on attend les effets perturbatifs de la recombinaison radiative à des énergies plus importantes. De toute façon,  $f_e$  sera mal traitée numériquement dans cette zone proche de l'origine. Nous utiliserons donc cette expression pour toutes les vitesses.

$T_H(K)$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$E_m(eV)$	$7.10^{-5}$	$7.10^{-4}$	$7.10^{-3}$	$7.10^{-2}$

TAB. 3.3 – Valeurs de  $E_m = \frac{3}{2} \frac{m_e}{m_H} kT_H$  selon  $T_H$ .

L'expression (Eq. 3.37) a une forme de Fokker-Planck-Landau. Les formes (3.35) et (3.37), de même que le raisonnement général, ne sont valables que si on peut s'arrêter au premier ordre du développement des fdv des électrons et des atomes. Cela dépend fortement des dérivées partielles par rapport à la vitesse. La tendance générale de ce terme de collision est d'*isotropiser* et de *maxwelliser* la fdv des électrons, et comme les dérivées partielles d'une maxwellienne ne sont pas trop élevées, cette forme sera acceptable près de l'équilibre. Si la fdv initiale est un Dirac en vitesse (jet monocinétique d'électrons), les dérivées sont infinies et ce développement n'est pas valable. Ainsi, dans un traitement analytique ou numérique, il faut utiliser des électrons déjà un peu *dispersés* afin que leur fdv, utilisée comme condition initiale, ait des variations *douces*.

Pour résumer, nous disposons de trois possibilités pour l'expression de  $\Sigma_{el,H}(z, \mathbf{v}_e)$  :

- la forme (3.11) de Boltzmann, la plus générale,
- les formes (Eqs. 3.35, 3.37), linéaires mais dépendant des dérivées partielles,
- les formes (Eqs. 3.38, 3.37, 3.42) lorsque on suppose la fréquence de collision isotrope.

Nous ne nous permettrons pas d'autres combinaisons, parce qu'il nous semble peu réaliste de traiter les anisotropies avec une sed isotrope.

### 3.2.3 Forme modélisée BGK

Nous modéliserons les termes de collisions élastiques des électrons par un modèle BGK justifié dans l'annexe B. La forme

$$\Sigma_{el,k}(z, v_e) = -\nu_{ek}(z, v_e) [f_e(z, v_e) - f_e^M(z, v_e)] , \quad (3.43)$$

est commune aux électrons, protons et atomes d'hydrogène ( $k = e, +$  ou  $H$ ). Nous pouvons alors l'écrire :

$$\Sigma_{el}(z, v_e) = -\nu_e(z, v_e) [f_e(z, v_e) - f_e^M(z, v_e)] , \quad (3.44)$$

où

$$\nu_e(z, v_e) = \sum_k \nu_{ek}(z, v_e) = \nu_{ee}(z, v_e) + \nu_{e+}(z, v_e) + \nu_{eH}(z, v_e) . \quad (3.45)$$

La fréquence de collision élastiques électrons-atomes est explicitée par l'équation :

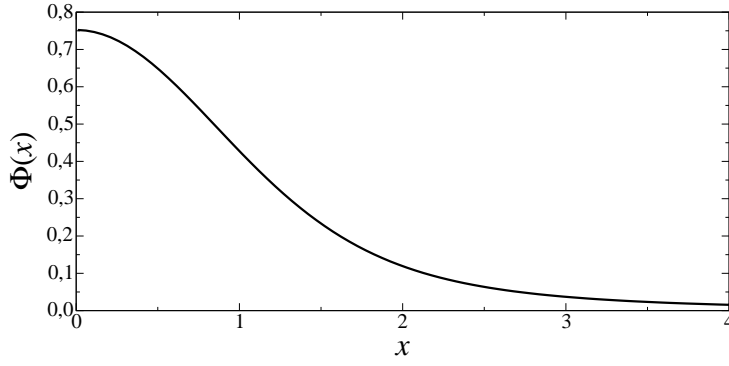
$$\nu_{eH}(z, v_e) = \frac{m_e}{m_H} n_H(z) v_e q_{ie}(v_e) . \quad (3.46)$$

Pour les électrons ou les protons, la fréquence de collision élastique des électrons de vitesse  $v_e$  avec les particules de type  $k = e$  ou  $+$  est (sous une forme faisant apparaître facilement les grandeurs :

$$\begin{aligned} \nu_{ek}(z, v_e) &= n_k(z) \Gamma_{ek}(z) \frac{m_e}{m_k} \frac{1}{\bar{v}_k^3(z)} \Phi\left(\frac{v_e}{\bar{v}_k(z)}\right) \\ &= 4\pi a_0^2 \alpha c n_k(z) \ln \Lambda(z) \frac{m_e}{m_k} \left(\frac{\alpha c}{\bar{v}_k(z)}\right)^3 \Phi\left(\frac{v_e}{\bar{v}_k(z)}\right) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le comportement de la fonction  $\Phi$ , définie par

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} R(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^3} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{x^3} \operatorname{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x^2} , \quad (3.48)$$

FIG. 3.1 – Variations de la fonction  $\Phi(x)$  selon  $x$ .

$x$	$\ll 1$	1	$\gg 1$	$+\infty$
$\Phi(x)$	$4/3 \sqrt{\pi}$	0.428	$1/x^3$	0

TAB. 3.4 – Variations de la fonction  $\Phi(x)$  selon  $x$ .

est représenté dans la figure (Fig. 3.1) et la table (Tab. 3.4) ci-dessous.

Dans cette expression,  $\text{erf}(x)$  est la fonction *erreur* bien connue et  $\ln \Lambda(z)$  est le logarithme coulombien défini dans l'annexe A, formule (A.75).

Nous noterons que l'on néglige habituellement les collisions entre électrons et protons par rapport aux collisions entre électrons, à cause du rapport très faible des masses  $m_e/m_p$  dans (3.47), simplification possible pour de grandes vitesses électroniques  $v_e > \bar{v}_e(z)$  seulement. Dans le cas contraire, le rapport des fréquences de collision  $\nu_{e+}(z, v_e)/\nu_{ee}(z, v_e)$  peut être du même ordre de grandeur, voire beaucoup plus grand que 1 pour des vitesses  $v_e$  très faibles.

### 3.3 Termes de collisions inélastiques

Les collisions inélastiques sont induites par un flux incident d'électrons (supposé isotrope) et ont donc un terme de source de la forme

$$\Sigma_{inel}(z, v_e) = n_e(z) \left[ -\sigma_{inel}(z, v_e) f_e(z, v_e) + \int_D \sigma_{inel}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e \right], \quad (3.49)$$

où  $\sigma_{inel}(z, v_e)$  est le taux de collisions inélastiques des électrons et  $\sigma_{inel}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}'_e$  le taux différentiel du domaine de vitesses incidentes ( $\mathbf{v}'_e, d\mathbf{v}'_e$ ) à la vitesse émergente  $\mathbf{v}_e$ , ce qui entraîne

$$\sigma_{inel}(z, v_e) = \int \sigma_{inel}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e. \quad (3.50)$$

On notera que le domaine d'intégration  $D$  sur  $\mathbf{v}'_e$  dépend de la vitesse émergente  $\mathbf{v}_e$ .

On décomposera le coefficient différentiel de collision inélastique selon toutes les transitions  $i \rightarrow j$  capables de faire passer la vitesse d'un électron de  $\mathbf{v}_e$  à  $\mathbf{v}'_e$ , soit :

$$\sigma_{inel}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = \sum_{i,j} n_i(z) C_{ij}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e). \quad (3.51)$$

La distribution  $C_{ij}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e)$  s'interprète en remarquant que le produit  $C_{ij}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e$  est un taux de transition de  $\mathbf{v}_e$  à  $(\mathbf{v}'_e, d\mathbf{v}'_e)$  par électron et par unité de densité  $n_i$  des particules cibles dans la transition inélastique  $i \rightarrow j$  (dimension  $L^3 T^{-1}$ ).

Le membre de droite de (3.51) comprend les excitations collisionnelles ( $i < j$ ), les désexcitations collisionnelles ( $i > j$ ), les ionisations collisionnelles ( $j = +$ ) et les recombinaisons à trois corps ( $i = +$ ). Seules les distributions  $C_{+j}$  dépendent de  $z$ , car la recombinaison à trois corps fait intervenir trois particules incidentes, une de plus que dans les autres réactions.

La distribution décrivant les excitations collisionnelles et leur inverse s'écrit [78] :

$$C_{ij}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = v_e q_{ie,je}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e), \quad (3.52)$$

où  $q_{ie,je}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e)$  est la distribution explicitée par les relations (A.81) ou (A.82), suivant que la contrainte d'énergie porte sur la vitesse incidente de l'électron ou sur sa vitesse émergente.

La distribution décrivant les ionisations collisionnelles a pour expression [78, 79] :

$$C_{i+}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = v_e \int q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) d\mathbf{w}'_e, \quad (3.53)$$

la distribution  $q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e)$  étant explicitée par (A.95).

Enfin la distribution décrivant les recombinaisons à trois corps s'écrit [78, 79] :

$$C_{+i}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = n_e(z) v_e \int f_e(z, w_e) w_e q_{+ee,ie}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e; \mathbf{v}'_e) d\mathbf{w}_e, \quad (3.54)$$

ou encore, en utilisant la relation de réciprocité (A.108),

$$C_{+i}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = n_e(z) \Gamma_i v'_e \int f_e(z, w_e) w_e q_{ie,+ee}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) d\mathbf{w}_e. \quad (3.55)$$

La décomposition (3.51) entraîne une écriture similaire pour le taux intégré

$$\sigma_{inel}(z, v_e) = \sum_{i,j} n_i(z) C_{ij}(z, v_e). \quad (3.56)$$

avec

$$C_{ij}(z, v_e) = \int C_{ij}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e. \quad (3.57)$$

On obtient, pour les excitations collisionnelles et leur inverse,

$$C_{ij}(v_e) = v_e q_{ij}(v_e), \quad (3.58)$$

pour les ionisations collisionnelles

$$C_{i+}(v_e) = v_e q_{i+}(v_e), \quad (3.59)$$

où les sections efficaces intégrées d'excitation et d'ionisation collisionnelle sont définies dans l'annexe A (sections A.6.2 et A.7.4), et pour les recombinaisons à trois corps

$$C_{+i}(z, v_e) = n_e(z) v_e \int \int f_e(z, w_e) w_e q_{+ee,ie}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e; \mathbf{v}'_e) d\mathbf{w}_e d\mathbf{v}'_e. \quad (3.60)$$

La relation de réciprocité (A.108) permet d'écrire ce coefficient sous la forme

$$C_{+i}(z, v_e) = n_e(z) \Gamma_i \int \int f_e(z, w_e) v'_e q_{ie,+ee}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) d\mathbf{w}_e d\mathbf{v}'_e. \quad (3.61)$$

ou encore, en utilisant l'expression (A.95) de la distribution  $q_{ie,+ee}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e)$  et en effectuant les intégrations sur  $\hat{\mathbf{v}}'_e$  et  $\mathbf{w}_e$

$$C_{+i}(z, v_e) = n_e(z) \Gamma_i \int_{\sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2}}^{+\infty} f_e(z, \zeta_{ie,+ee}(v'_e, v_e)) v_e^3 q_{i+}(v'_e; v_e) dv'_e, \quad (3.62)$$

la vitesse de seuil  $\zeta_{i+}$ , la vitesse émergente  $\zeta_{ie,+ee}(v'_e, v_e)$  et la section efficace intégrée  $q_{i+}(v'_e; v_e)$  étant définies dans l'annexe A, par les équations (A.92), (A.94) et (A.99) respectivement.

Le terme intégral figurant dans le membre de droite de (3.49), dans lequel on substitue la relation (3.51), s'écrit :

$$\int_D \sigma_{inel}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e = \sum_{i,j} n_i(z) \int_D C_{ij}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e. \quad (3.63)$$

Pour une excitation collisionnelle et son inverse, d'après (3.52) et (A.82) :

$$\int_D C_{ij}(\mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e = \frac{v_e^2 \pm \zeta_{ij}^2}{v_e} q_{ij} \left( \sqrt{v_e^2 \pm \zeta_{ij}^2} \right) f_e \left( z, \sqrt{v_e^2 \pm \zeta_{ij}^2} \right), \quad (3.64)$$

le signe + correspondant à une excitation et le signe - à une désexcitation. La section efficace intégrée figurant dans le membre de droite de (3.64) et la vitesse de seuil  $\zeta_{ij}$  ont été explicitées dans l'annexe A (section A.6.1).

Pour une ionisation collisionnelle, d'après (3.53) et (A.95) :

$$\int_D C_{i+}(\mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e = \int_{\sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2}}^{+\infty} f_e(z, v'_e) v_e'^3 q_{i+}(v'_e; v_e) dv'_e, \quad (3.65)$$

la section efficace intégrée d'ionisation collisionnelle étant explicitée dans l'annexe A (section A.7.1).

Pour une recombinaison à trois corps, d'après (3.55) :

$$\int_D C_{+i}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e = n_e(z) \Gamma_i v_e \int \int_D f_e(z, w'_e) f_e(z, v'_e) q_{ie, +ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) d\mathbf{w}'_e d\mathbf{v}'_e, \quad (3.66)$$

l'intégration portant sur le quart de cercle d'équation  $v_e'^2 + w_e'^2 = v_e^2 - \zeta_{i+}^2$ . Utilisant l'expression (A.95) de la distribution  $q_{ie, +ee}$ , on peut encore écrire

$$\int_D C_{+i}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e = n_e(z) \Gamma_i v_e \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}(v_e^2 - \zeta_{i+}^2)}} f_e(z, \zeta_{ie, +ee}(v_e, v'_e)) f_e(z, v'_e) \times v_e'^2 q_{i+}(v_e; v'_e) dv'_e, \quad (3.67)$$

le domaine d'intégration étant justifié dans le commentaire de la relation (A.98).

Rassemblant ces résultats, on décomposera le terme de source des électrons dû aux collisions inélastiques en ses quatre composantes décrivant les excitations collisionnelles, les désexcitations collisionnelles, les ionisations collisionnelles et les recombinaisons à trois corps

$$\Sigma_{inel}(z, v_e) = \Sigma_{excit}(z, v_e) + \Sigma_{desexc}(z, v_e) + \Sigma_{ionis}(z, v_e) + \Sigma_{recomb}(z, v_e), \quad (3.68)$$

avec

$$\Sigma_{excit}(z, v_e) = n_e(z) \sum_{i < j} n_i(z) \frac{1}{v_e} \left\{ -f_e(z, v_e) v_e^2 q_{ij}(v_e) + (v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{ij} \left( \sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) f_e \left( z, \sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) \right\}, \quad (3.69)$$

$$\Sigma_{desexc}(z, v_e) = n_e(z) \sum_{i < j} \frac{g_i}{g_j} n_j(z) \frac{1}{v_e} \left\{ -f_e(z, v_e) (v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{ij} \left( \sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) + v_e^2 q_{ij}(v_e) f_e \left( z, \sqrt{v_e^2 - \zeta_{i+}^2} \right) \right\}, \quad (3.70)$$

$$\Sigma_{ionis}(z, v_e) = n_e(z) \sum_i n_i(z) \left\{ -f_e(z, v_e) v_e^2 q_{i+}(v_e) + \int_0^{+\infty} f_e \left( z, \sqrt{w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) \times w_e (w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{i+} \left( \sqrt{w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2}; v_e \right) dw_e \right\}, \quad (3.71)$$

$$\Sigma_{recomb}(z, v_e) = n_e^2(z) n_+(z) \sum_{i, +} \Gamma_i \left\{ -f_e(z, v_e) \times \int_0^{+\infty} f_e(z, w_e) w_e (w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{i+} \left( \sqrt{w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2}; v_e \right) dw_e + v_e \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}(v_e^2 - \zeta_{i+}^2)} + \infty} f_e \left( z, \sqrt{v_e^2 - v_e'^2 - \zeta_{i+}^2} \right) f_e(z, v'_e) v_e'^2 q_{i+}(v_e; v'_e) dv'_e \right\}. \quad (3.72)$$

On a utilisé la relation de réciprocité (A.87) pour exprimer, dans (3.70), la section efficace intégrée de désexcitation en terme de la section efficace d'excitation. De plus, le terme intégral de (3.71) et le premier terme intégral de (3.72) ont été obtenus en effectuant le changement de variable  $w_e = \zeta_{ie,+e}(v'_e, v_e)$  dans les intégrales de (3.65) et (3.67).

Lorsque la fdv des électrons est maxwellienne, on peut écrire

$$f_e^M \left( z, \sqrt{v_e^2 \pm \zeta_{ij}^2} \right) = f_e^M(z, v_e) \exp \left( \mp \frac{E_{ij}}{kT(z)} \right), \quad (3.73)$$

$$f_e^M \left( z, \sqrt{v_e^2 \pm v_e'^2 \pm \zeta_{i+}^2} \right) = f_e^M(z, v_e) \exp \left( \mp \frac{\frac{1}{2}m_e v_e'^2 + E_{i+}}{kT(z)} \right), \quad (3.74)$$

dans les résultats précédents, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Sigma_{excit}(z, v_e) = n_e(z) f_e^M(z, v_e) \sum_{i < j} n_i(z) \frac{1}{v_e} \left\{ -v_e^2 q_{ij}(v_e) \right. \\ \left. + (v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{ij} \left( \sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) \exp \left( -\frac{E_{ij}}{kT(z)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{desexc}(z, v_e) = n_e(z) f_e^M(z, v_e) \sum_{i < j} \frac{g_i}{g_j} n_j(z) \frac{1}{v_e} \left\{ - (v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{ij} \left( \sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) \right. \\ \left. + v_e^2 q_{ij}(v_e) \exp \left( +\frac{E_{ij}}{kT(z)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ionis}(z, v_e) = n_e(z) f_e^M(z, v_e) \sum_i n_i(z) \left\{ -v_e q_{i+}(v_e) + \int_0^{+\infty} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2}m_e w_e^2 + E_{i+}}{kT(z)} \right) \right. \\ \left. \times w_e (w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{i+} \left( \sqrt{w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2}; v_e \right) dw_e \right\}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{recomb}(z, v_e) = n_e^2(z) n_+(z) f_e^M(z, v_e) \sum_i \Gamma_i \left\{ \Theta_{i+}(T(z)) v_e q_{i+}(v_e) \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} f_e^M(z, w_e) w_e (w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{i+} \left( \sqrt{w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2}; v_e \right) dw_e \right\}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Additionnons les équations (3.75) et (3.76), puis (3.77) et (3.78). On fait apparaître ainsi les coefficients  $b_{ij}(z)$  (définis dans la note C.1) qui renseignent sur les écarts à l'ETL pour tout  $z$ . On obtient les termes de sources suivants des électrons (supposés thermalisés) par excitation / désexcitation et par ionisation / recombinaison à trois corps :

$$\begin{aligned} \Sigma_{excit}(z, v_e) + \Sigma_{desexc}(z, v_e) = n_e(z) f_e^M(z, v_e) \sum_{i < j} n_i(z) \left( 1 - \frac{1}{b_{ij}(z)} \right) \frac{1}{v_e} \left\{ -v_e^2 q_{ij}(v_e) \right. \\ \left. + (v_e^2 + \zeta_{i+}^2) q_{ij} \left( \sqrt{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right) \exp \left( -\frac{E_{ij}}{kT(z)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ionis}(z, v_e) + \Sigma_{recomb}(z, v_e) = n_e(z) f_e^M(z, v_e) \sum_i n_i(z) \left( 1 - \frac{1}{b_{i+}(z)} \right) \left\{ -v_e q_{i+}(v_e) \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2}m_e w_e^2 + E_{i+}}{kT(z)} \right) w_e (w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2) \right. \\ \left. \times q_{i+} \left( \sqrt{w_e^2 + v_e^2 + \zeta_{i+}^2}; v_e \right) dw_e \right\}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ces termes sont nuls à l'ETL ( $b_{ij} = 1$ ), comme il se doit.

Les développements précédents relatifs aux processus d'ionisation collisionnelle et son inverse généralisent ceux d'Oxenius et Simonneau [79], que l'on retrouve en adoptant la section efficace d'ionisation collisionnelle (A.101).



### 3.3.1 Remarque

L'hypothèse des électrons thermalisés a permis d'écrire, dans le terme de recombinaison à trois corps (3.72) :

$$f_e^M \left( z, \sqrt{v_e^2 - v_e'^2 - \zeta_{i+}^2} \right) f_e^M(z, v_e') = \Theta_{i+}(T(z)) f_e^M(z, v_e), \quad (3.81)$$

ce qui a fait disparaître la non-linéarité en  $f_e$  et conduit au calcul analytique de la deuxième intégrale de (3.72).

Dans le cas général, une approximation telle que

$$f_e \left( z, \sqrt{v_e^2 - v_e'^2 - \zeta_{i+}^2} \right) f_e(z, v_e') \approx \Theta_{i+}(T(z)) f_e(z, v_e) \approx \Theta_{i+}(T(z)) f_e^M(z, v_e) \quad (3.82)$$

dans la deuxième intégrale de (3.72) est fondée lorsque les deux conditions suivantes sont réunies :

1. les recombinaisons à trois corps se font essentiellement à des vitesses proches de la vitesse de seuil :  $\Sigma_{recomb}(z, v_e)$  est négligeable lorsque  $v_e \gg \zeta_{i+}$ ,
2. les électrons de basse vitesse sont thermalisés.

Rappelons que le *cas général* dont il est question ici est celui d'électrons rapides par rapport aux atomes, les formules (Eqs. 3.69, 3.70, 3.71, 3.72) se compliquant substantiellement sans cette hypothèse.

Lorsque les deux conditions précédentes sont réalisées, on peut remplacer la formule (3.72) par la formule (3.78) pour décrire la recombinaison à trois corps d'électrons thermalisés aux faibles vitesses.

## 3.4 Termes de collision dûs aux processus radiatifs

Le terme  $\Sigma_{rad}$  figurant dans le membre de droite de (Eq. 3.2) comprend une composante  $\Sigma_{bfb}$  décrivant la production (ou la perte) d'électrons par photoionisation (ou par recombinaison radiative), une composante  $\Sigma_{ff}$  décrivant la déviation des électrons au cours des transitions  $ff$ , et une composante  $\Sigma_T$  décrivant leur déviation au cours du processus de diffusion Thomson des photons sur les électrons. Le premier processus *crée* (au sens algébrique) des électrons, alors que les deux suivants ne font que les dévier.

D'où

$$\Sigma_{rad}(z, \mathbf{v}_e) = \Sigma_{bfb}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_T(z, \mathbf{v}_e). \quad (3.83)$$

### 3.4.1 Le processus de photoionisation et son inverse

On écrira ce terme de source sous la forme

$$\Sigma_{bfb}(z, \mathbf{v}_e) = E_e(z, \mathbf{v}_e) - n_e(z) K_e(z, \mathbf{v}_e) f_e(z, v_e), \quad (3.84)$$

où  $E_e(z, \mathbf{v}_e)$  est un coefficient d'émission des électrons par photoionisation et  $K_e(z, \mathbf{v}_e)$  un coefficient d'absorption par recombinaison radiative.

Nous ne détaillons pas la définition de ces deux coefficients, qui est calquée sur celle de leur homologue pour les photons (chapitre 2). Ils s'écrivent sous la forme

$$E_e(z, \mathbf{v}_e) = \sum_i n_i(z) R_{i+}(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.85)$$

$$K_e(z, \mathbf{v}_e) = n_+(z) \sum_i R_{+i}(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.86)$$

faisant apparaître toutes les transitions  $i \rightleftharpoons +$  au cours desquelles des électrons de vitesse  $\mathbf{v}_e$  peuvent être créés (au sens algébrique) au point  $z$  par les deux processus considérés.

Le produit  $R_{i+}(z, \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e$  est de dimension  $T^{-1}$  : c'est un taux d'émission des électrons dans le domaine  $(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e + d\mathbf{v}_e)$  par unité de volume et de densité numérique  $n_i$  au point  $z$ . Le coefficient  $R_{i+}$  a pour expression [78] :

$$R_{i+}(z, \mathbf{v}_e) = \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) d\hat{\mathbf{n}} d\nu, \quad (3.87)$$

où  $I$  est l'intensité spécifique du champ incident,  $I/h\nu$  la densité de flux (scalaire) de photons incidents, et  $\sigma_{i\nu,+e}$  la distribution décrivant la collision, donnée par (A.13).

On peut également écrire le taux  $R_{+i}$  décrivant les recombinaisons radiatives ainsi [78] :

$$R_{+i}(z, \mathbf{v}_e) = v_e \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \right] \sigma_{+e,i\nu}(\mathbf{v}_e; \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\hat{\mathbf{n}} d\nu, \quad (3.88)$$

le terme entre crochets prenant en compte les émissions induites de photons.

Les distributions  $\sigma_{i\nu,+e}$  et  $\sigma_{+e,i\nu}$  vérifient la relation de réciprocité (A.21), ce qui permet d'écrire le terme de source des électrons par les processus  $bf$  et  $fb$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Sigma_{bfb}(z, \mathbf{v}_e) = & \sum_i \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ [n_i(z) - \Gamma_i n_+(z) n_e(z) f_e(z, v_e)] \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \right. \\ & \left. - \Gamma_i n_+(z) n_e(z) f_e(z, v_e) \frac{2\nu^2}{c^2} \right\} \sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) d\hat{\mathbf{n}} d\nu. \end{aligned} \quad (3.89)$$

On notera que l'intégration sur la fréquence est triviale, l'expression (A.17) de la distribution  $\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e)$  imposant l'égalité  $\nu = \xi_{i+}(v_e) =$  la fréquence d'un photon pouvant éjecter un électron à la vitesse  $v_e$ , donnée par (A.16). On notera également que le premier terme dans l'accolade est anisotrope si le champ radiatif est anisotrope, à cause de l'anisotropie de la section efficace différentielle de photoionisation. Le deuxième terme, qui décrit la perte des électrons par recombinaison spontanée, peut être calculé analytiquement : l'intégration angulaire fait apparaître la section efficace intégrée de photoionisation, que l'on calcule pour la fréquence  $\nu = \xi_{i+}(v_e)$ . Il vient

$$\begin{aligned} \Sigma_{bfb}(z, \mathbf{v}_e) = & \frac{m_e}{h} \frac{1}{v_e} \sum_i [n_i(z) - \Gamma_i n_+(z) n_e(z) f_e(z, v_e)] \\ & \times \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \sigma_{i+}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_e, \nu) \delta(\nu - \xi_{i+}(v_e)) d\hat{\mathbf{n}} d\nu \\ & - \frac{m_e}{h} \frac{2}{h^2 c^2} \frac{1}{v_e} f_e(z, v_e) \sum_i \Gamma_i n_+(z) n_e(z) \left( E_{i+} + \frac{1}{2} m_e v_e^2 \right) \sigma_{i+} \left( \nu_{i+} + \frac{1}{2} \frac{m_e v_e^2}{h} \right). \end{aligned} \quad (3.90)$$

L'intégrale angulaire figurant dans le membre de droite de l'équation (3.90) peut être calculée analytiquement lorsque la section efficace différentielle de photoionisation est écrite dans l'approximation dipolaire. Nous ne reproduisons pas ce calcul ici, puisque nous avons choisi d'ignorer les facteurs pouvant conduire à une fdv anisotrope des électrons. Lorsque la section efficace de photoionisation est supposée isotrope, on peut écrire dans (3.90) :

$$\int_{4\pi} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \sigma_{i+}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_e, \nu) d\hat{\mathbf{n}} = \sigma_{i+}(\nu) J(z, \nu), \quad (3.91)$$

où  $\sigma_{i+}(\nu)$  est la section efficace intégrée de photoionisation et  $J(z, \nu)$  l'intensité moyenne du champ radiatif.

La fin du calcul est alors immédiate et conduit au terme de source *isotropisé* suivant :

$$\Sigma_{bfb}(z, v_e) = \frac{m_e}{h} \frac{1}{v_e} \frac{1}{h\nu} \sum_i n_i(z) \sigma_{i+}(\nu) \left\{ J(z, \nu) - \Gamma_i n_e(z) f_e(z, v_e) \frac{n_+(z)}{n_i(z)} \left( \frac{2h\nu^3}{c^2} + J(z, \nu) \right) \right\}, \quad (3.92)$$

avec  $\nu = \nu_{i+} + \frac{1}{2h} m_e v_e^2$ .

Lorsque la fdv des électrons est maxwellienne, on peut écrire dans la relation précédente :

$$\Gamma_i n_e(z) f_e^M(z, v_e) = \theta_{i+}(z) \exp \left( -\frac{\frac{1}{2} m_e v_e^2 + E_{i+}}{kT(z)} \right), \quad (3.93)$$

où  $\theta_{i+}$  est le paramètre défini par (C.3). Il en résulte que

$$\Gamma_i n_e(z) f_e^M(z, v_e) \frac{n_+(z)}{n_i(z)} = \frac{1}{b_{i+}(z)} \exp \left( -\frac{h\nu}{kT(z)} \right), \quad (3.94)$$

à cause de la valeur de la fréquence en laquelle le membre de droite de (3.92) doit être calculé. Le coefficient  $b_{i+}$  a été défini dans la note C.1.

D'où lorsque  $f_e = f_e^M$ ,

$$\Sigma_{bfb}(z, v_e) = \frac{m_e}{h} \frac{1}{v_e} \frac{1}{h\nu} \sum_i n_i(z) \sigma_{i+}(\nu) \left\{ J(z, \nu) - \frac{1}{b_{i+}(z)} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT(z)}\right) \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J(z, \nu)\right) \right\}, \quad (3.95)$$

la fréquence  $\nu$  étant toujours égale à  $\nu_{i+} + \frac{1}{2h} m_e v_e^2$ .

Comme dans le cas d'une recombinaison à trois corps, l'approximation  $f_e = f_e^M$  dans (3.92) n'est peut-être pas trop mauvaise si on suppose que les électrons qui se recombinaient sont essentiellement lents, et que les électrons lents sont thermalisés.

A l'ETL, il faut remplacer  $b_{i+}$  par 1, ce qui ne suffit pas pour annuler le terme de source des électrons. Ce terme disparaît à l'équilibre thermodynamique seulement, c'est-à-dire lorsque le champ radiatif est planckien.

### 3.4.2 Le processus de transition free-free $ff$

Les électrons sont déviés au cours d'une transition  $ff$  en présence d'un atome, ce qui peut être vu comme une *diffusion radiative* sur l'atome. Le terme de source dans l'espace des phases s'écrit sous la forme de Boltzmann

$$\Sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e) = n_e(z) \left[ -\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e) f_e(z, v_e) + \int \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e \right], \quad (3.96)$$

où  $\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e)$  est la fréquence de collision  $ff$  des électrons et  $\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e$  le taux différentiel correspondant, ce qui signifie que

$$\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e) = \int \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e. \quad (3.97)$$

Le coefficient  $\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e)$  a pour expression [78] :

$$\begin{aligned} \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) &= v_e Y(v'_e - v_e) \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ie\nu, ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) \right] d\hat{\mathbf{n}} d\nu \quad (3.98) \\ &+ v_e Y(v_e - v'_e) \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ie, ie\nu}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu') \right] \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu') \right) d\hat{\mathbf{n}}' d\nu', \end{aligned}$$

le premier terme étant relatif à une absorption  $ff$  et le second à une émission  $ff$ , spontanée ou induite.

Les deux distributions figurant dans le membre de droite de (3.98) ont été explicitées dans l'annexe A (section A.3). La seconde peut être exprimée en terme de la première à l'aide de la relation de réciprocité (A.35), ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) &= v_e Y(v'_e - v_e) \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ie\nu, ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) \right] d\hat{\mathbf{n}} d\nu \quad (3.99) \\ &+ v'_e Y(v_e - v'_e) \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ie\nu, ie}(\mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu'; \mathbf{v}_e) \right] \\ &\quad \times \frac{2\nu'^2}{c^2} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu') \right) d\hat{\mathbf{n}}' d\nu'. \end{aligned}$$

On notera la complexité de la dépendance angulaire de ce coefficient. A cause de l'anisotropie du champ radiatif, il dépend séparément des directions des vitesses électroniques incidente et émergente, et non de leur angle.

Le coefficient intégré sur la vitesse électronique émergente  $\mathbf{v}'_e$ , défini par (3.97), se calcule en écrivant dans la première intégrale de (3.99)

$$\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) = \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \frac{1}{v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, \nu)] , \quad (3.100)$$

conformément à (A.25), et dans la seconde intégrale de (3.99)

$$\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu'; \mathbf{v}_e) = \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu'; \hat{\mathbf{v}}_e) \frac{1}{v_e v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, -\nu)] , \quad (3.101)$$

ce qui provient de la relation

$$\frac{1}{v_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v'_e, \nu)] = \frac{1}{v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, -\nu)] , \quad (3.102)$$

issue de la contrainte d'énergie (A.27) (avec  $\mathbf{v}_e \leftrightarrow \mathbf{v}'_e$ ). Rappelons que  $\zeta_{ff}(v, \nu)$  représente la vitesse émergente d'un électron de vitesse  $v$  avant absorption d'un photon de fréquence  $\nu$ . La vitesse  $\zeta_{ff}(v, -\nu)$ , que l'on calcule en changeant le signe + en signe - dans le radical de (A.29), représente donc la vitesse incidente d'un électron de vitesse  $v$  après absorption d'un photon de fréquence  $\nu$ . On obtient le taux intégré suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e) &= v_e \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \left[ \sum_i n_i(z) \int_{4\pi} \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e \right] d\hat{\mathbf{n}} d\nu \quad (3.103) \\ &+ \frac{1}{v_e} \int_{4\pi} \int_0^{m_e v_e^2 / 2h} \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \left[ \sum_i n_i(z) \int_{4\pi} \sigma_{ie\nu,ie}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu) \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu'; \hat{\mathbf{v}}_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e \right] \\ &\quad \times \frac{2\nu'^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu') \right] d\hat{\mathbf{n}}' d\nu' . \end{aligned}$$

Le terme intégral figurant dans le membre de droite de (3.96) est calculé en remplaçant le noyau  $\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e)$  par son expression (3.99) (avec  $\mathbf{v}_e \leftrightarrow \mathbf{v}'_e$ ), dans laquelle on substitue la relation (A.26) explicitant la distribution  $\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e)$

$$\begin{aligned} \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) &= \frac{m_e v'_e}{h v_e} Y(v_e - v'_e) \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu')}{h\nu'} \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu'; \hat{\mathbf{v}}_e) \right] \quad (3.104) \\ &\quad \times \delta[\nu' - \xi_{ff}(v'_e, v_e)] d\hat{\mathbf{n}}' d\nu' \\ &+ \frac{m_e v_e}{h v'_e} Y(v'_e - v_e) \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \right] \\ &\quad \times \frac{2\nu^2}{c^2} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \right) \delta[\nu - \xi_{ff}(v_e, v'_e)] d\hat{\mathbf{n}} d\nu , \end{aligned}$$

et en faisant porter la contrainte d'énergie sur la vitesse  $\mathbf{v}'_e$ , qui est la vitesse incidente de l'électron dans la première intégrale de (3.104) et sa vitesse émergente dans la seconde. Pour cela, on doit écrire dans la première intégrale

$$\frac{m_e}{h} \delta[\nu' - \xi_{ff}(v'_e, v_e)] = \frac{1}{v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, -\nu')] , \quad (3.105)$$

et dans la seconde intégrale

$$\frac{m_e}{h} \delta[\nu - \xi_{ff}(v_e, v'_e)] = \frac{1}{v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, \nu)] . \quad (3.106)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ff}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, v'_e) d\mathbf{v}'_e &= \frac{1}{v_e} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu)) \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \right. \\ &\quad \times \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{iev,ie}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu) \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}_e) \right] \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \\ &\quad + f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) v_e^2 \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{iev,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \right] \\ &\quad \left. \times \frac{2\nu^2}{c^2} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \right) \right\} d\hat{\mathbf{v}}'_e d\hat{\mathbf{n}} d\nu. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Substituons cette expression dans le membre de droite de (3.96) et utilisons l'expression (3.103) de  $\sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e)$ . On obtient le terme de source suivant :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e) &= \frac{1}{v_e} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} [A_1(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) - A_2(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu)] \\ &\quad \times \frac{2\nu^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \right] d\hat{\mathbf{v}}'_e d\hat{\mathbf{n}} d\nu \\ &\quad + \frac{1}{v_e} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} [B_1(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) - B_2(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu)] \frac{2\nu^2}{c^2} d\hat{\mathbf{v}}'_e d\hat{\mathbf{n}} d\nu, \end{aligned} \quad (3.108)$$

où on a posé

$$A_1(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = n_e(z) [f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) - f_e(z, v_e)] v_e^2 \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{iev,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \right], \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} A_2(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) &= Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) A_1(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu) \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{v}}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \\ &= n_e(z) Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) [f_e(z, v_e) - f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu))] \\ &\quad \times \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{iev,ie}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu) \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}_e) \right], \end{aligned} \quad (3.110)$$

et

$$B_1(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = n_e(z) f_e(z, v_e) v_e^2 \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{iev,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \right], \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} B_2(z, \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) &= Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) B_1(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu) \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{v}}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \\ &= n_e(z) Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu)) \\ &\quad \times \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{iev,ie}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu) \hat{\mathbf{v}}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}_e) \right]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

La fdv des électrons étant isotrope, l'intégration des coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sur  $\hat{\mathbf{v}}'_e$  est possible et fait apparaître les intégrales  $\int_{4\pi} \sigma_{iev,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e$  et  $\int_{4\pi} \sigma_{iev,ie}(\mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e$ , que l'on a calculées analytiquement dans l'approximation dipolaire. Dans cette présentation, nous nous contenterons du résultat obtenu en prenant la moyenne angulaire (sur  $\hat{\mathbf{v}}_e$ ) des coefficients obtenus, ce qui revient à écrire

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \left\{ \int_{4\pi} \sigma_{iev,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e \right\} d\hat{\mathbf{v}}_e = \sigma_{ii}(v_e, \nu) \quad (3.113)$$

et

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \left\{ \int_{4\pi} \sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e \right\} d\hat{\mathbf{v}}_e = \sigma_{ii}(v'_e, \nu) \quad (3.114)$$

Rappelons que  $\sigma_{ii}(z, v_e)$  est la section efficace intégrée d'absorption  $ff$  définie par (A.31).

On peut alors effectuer l'intégration angulaire sur  $\hat{\mathbf{n}}$  dans (3.108), comme on l'a fait dans le cas  $bf$ - $fb$  à la section précédente. On trouve, pour l'intégrale angulaire contenant  $A_1$  et  $A_2$

$$\int_{4\pi} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \right) d\hat{\mathbf{n}} = 4\pi \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} J(z, \nu) \right). \quad (3.115)$$

Les deux intégrales sur  $\hat{\mathbf{n}}$  contenant  $B_1$  et  $B_2$  valent simplement  $\int_{4\pi} d\hat{\mathbf{n}} = 4\pi$ .

D'où le terme de source des électrons de fdv isotrope, dans l'approximation (3.113, 3.114)

$$\begin{aligned} \Sigma_{ff}(z, v_e) &= \frac{1}{v_e} \int_0^{+\infty} [A_1(z, v_e, \nu) - A_2(z, v_e, \nu)] \frac{2\nu^2}{c^2} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} J(z, \nu) \right) d\nu \\ &\quad + \frac{1}{v_e} \int_0^{+\infty} [B_1(z, v_e, \nu) - B_2(z, v_e, \nu)] \frac{2\nu^2}{c^2} d\nu, \end{aligned} \quad (3.116)$$

avec

$$A_1(z, v_e, \nu) = 4\pi n_e(z) [f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) - f_e(z, v_e)] v_e^2 \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ii}(v_e, \nu) \right], \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} A_2(z, v_e, \nu) &= Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) A_1(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu), \nu) \\ &= 4\pi n_e(z) Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) [f_e(z, v_e) - f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu))] \\ &\quad \times \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ii}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu), \nu) \right], \end{aligned} \quad (3.118)$$

et

$$B_1(z, v_e, \nu) = 4\pi n_e(z) f_e(z, v_e) v_e^2 \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ii}(v_e, \nu) \right], \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} B_2(z, v_e, \nu) &= Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) B_1(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu), \nu) \\ &= 4\pi n_e(z) Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, -\nu)) \\ &\quad \times \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \left[ \sum_i n_i(z) \sigma_{ii}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu), \nu) \right]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Ces équations se simplifient lorsque la fdv des électrons est maxwellienne, la relation (2.55) permettant d'exprimer les coefficients  $A_1$  et  $A_2$  en fonction des coefficients  $B_1$  et  $B_2$  respectivement, par les relations de réciprocité

$$A_1(z, v_e, \nu) = - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{kT(z)} \right) \right] B_1(z, v_e, \nu), \quad (3.121)$$

$$A_2(z, v_e, \nu) = - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{kT(z)} \right) \right] B_2(z, v_e, \nu). \quad (3.122)$$

Le terme de source (3.116) devient alors

$$\Sigma_{ff}(z, v_e) = \frac{1}{v_e} \int_0^{+\infty} [B_1(z, v_e, \nu) - B_2(z, v_e, \nu)] \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{kT(z)} \right) \right] \{ B_\nu(T(z)) - J(z, \nu) \} \frac{d\nu}{h\nu}, \quad (3.123)$$

où  $B_\nu(T(z))$  est la fonction de Planck de température  $T(z)$ . Lorsque  $f_e = f_e^M$ , le terme entre crochets s'écrit encore

$$B_1(z, v_e, \nu) - B_2(z, v_e, \nu) = 4\pi n_e(z) f_e^M(z, v_e) \sum_i n_i(z) \left\{ v_e^2 \sigma_{ii}(v_e, \nu) - Y \left( \frac{1}{2} m_e v_e^2 - h\nu \right) \exp \left( \frac{h\nu}{kT(z)} \right) \zeta_{ff}^2(v_e, -\nu) \sigma_{ii}(\zeta_{ff}(v_e, -\nu), \nu) \right\}. \quad (3.124)$$

Bien sûr, on trouve  $\Sigma_{ff}(z, v_e) = 0$  à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire en remplaçant  $J(z, \nu)$  par la fonction de Planck.

### 3.4.2.1 Remarque

Dans un plasma d'hydrogène pur où l'expression (A.32) de la section efficace d'absorption  $ff$  est valable, on doit écrire

$$\sum_i n_i(z) \sigma_{ii}(v_e, \nu) = n_+(z) Y(\nu - \nu_p) \sigma_{ff} \left( \frac{\alpha c}{v_e} \right)^2 \left( \frac{\nu_R}{\nu} \right)^3 g_{ff}(v_e, \nu) \quad (3.125)$$

dans (3.117, 3.119, 3.124).

Ces développements ont été inspirés par la monographie d'Oxenius [78, section 2.2.4], qu'ils généralisent au cas où le champ radiatif n'est pas isotrope.

### 3.4.3 La diffusion Thomson

Les électrons sont également déviés au cours des diffusions Thomson, à cause des échanges d'impulsion avec les photons, qui ne sont pas négligés.

Le terme de source des électrons par ce processus peut être écrit sous la forme de Boltzmann

$$\Sigma_T(z, \mathbf{v}_e) = n_e(z) \left[ -\sigma_T(z, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}_e) + \int \sigma_T(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e) f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e \right], \quad (3.126)$$

avec

$$\sigma_T(z, \mathbf{v}_e) = \int \sigma_T(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e. \quad (3.127)$$

Le taux différentiel de transition de la vitesse électronique  $\mathbf{v}_e$  à la vitesse  $\mathbf{v}'_e$  après diffusion (spontanée ou induite) des photons s'écrit [78] :

$$\begin{aligned} \sigma_T(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) &= \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \sigma_{e\nu, e\nu}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{n}}', \nu') \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu') \right] d\hat{\mathbf{n}} d\nu d\hat{\mathbf{n}}' d\nu', \end{aligned} \quad (3.128)$$

la distribution associée étant explicitée par la relation (A.38) avec  $k = e$ . D'où

$$\begin{aligned} \sigma_T(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) &= \frac{\sigma_T}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \delta \left( \mathbf{v}_e - \mathbf{v}'_e - \frac{h\nu}{m_e c} (\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}}) \right) \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu) \right] d\hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}}' d\nu, \end{aligned} \quad (3.129)$$

( $\sigma_T$  = section efficace de diffusion Thomson).

Le taux intégré (3.127) a donc pour expression

$$\sigma_T(z, \mathbf{v}_e) = \frac{\sigma_T}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu) \right] d\hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}}' d\nu, \quad (3.130)$$

et le terme de source des électrons dû aux diffusions Thomson s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \Sigma_T(z, \mathbf{v}_e) &= n_e(z) \frac{\sigma_T}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu)}{h\nu} \left[ 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I(z, \hat{\mathbf{n}}', \nu) \right] \\ &\quad \times \left[ f_e \left( z, \mathbf{v}_e + \frac{h\nu}{m_e c} (\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}}) \right) - f_e(z, \mathbf{v}_e) \right] d\hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}}' d\nu, \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ce terme est difficile à évaluer numériquement, à cause de l'intégrale multiple. Nous effectuerons les intégrations angulaires grâce à un développement de Taylor au premier ordre de la fdv des électrons, qui permet d'écrire sous l'intégrale de (3.131) :

$$f_e \left( z, \mathbf{v}_e + \frac{h\nu}{m_e c} (\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}}) \right) - f_e(z, \mathbf{v}_e) \approx \frac{h\nu}{m_e c} (\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.132)$$

l'impulsion des photons étant bien plus faible que celle des électrons (leur rapport est de l'ordre de  $v_e/c$  pour des photons et des électrons thermiques). Le terme de diffusion induite disparaît, et il reste

$$\Sigma_T(z, \mathbf{v}_e) = n_e(z) \frac{\sigma_T}{4\pi m_e c} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \left[ (\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{v}_e) \right] d\hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}}' d\nu, \quad (3.133)$$

soit

$$\Sigma_T(z, \mathbf{v}_e) = -n_e(z) \frac{\sigma_T}{m_e c} \mathbf{F}_r(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.134)$$

après les deux intégrations angulaires et l'introduction du flux vectoriel intégré en fréquence

$$\mathbf{F}_r(z) = \int_0^{+\infty} \mathbf{F}_r(z, \nu) d\nu = \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) \hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} d\nu. \quad (3.135)$$

Le vecteur

$$\mathbf{a}_e(z) = \frac{\sigma_T}{m_e c} \mathbf{F}_r(z) \quad (3.136)$$

est l'accélération radiative appliquée à un électron par suite de ses échanges d'impulsion avec les photons au cours du processus de diffusion Thomson, qui permet d'écrire le terme de source des électrons sous la forme finale suivante :

$$\Sigma_T(z, \mathbf{v}_e) = -n_e(z) \mathbf{a}_e(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{v}_e). \quad (3.137)$$

On notera que ce terme est anisotrope même lorsque la fdv des électrons est isotrope, car alors

$$\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}}(z, v) = \mathbf{k} \frac{\partial f_e}{\partial v}(z, v), \quad (3.138)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur normal à l'atmosphère dirigé vers l'extérieur. On a alors

$$\mathbf{a}_e(z) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}}(z, v) = [\mathbf{a}_e(z) \cdot \mathbf{k}] \frac{\partial f_e}{\partial v}(z, v) = |\mathbf{a}_e(z)| \cos \theta \frac{\partial f_e}{\partial v}(z, v), \quad (3.139)$$

où  $\theta = \text{angle}(\mathbf{v}, \mathbf{k})$ .

### 3.5 Réorganisation du terme de source

La décomposition du terme de source de l'équation cinétique des électrons (ECE) en ses composantes élastique, inélastique et radiative est physiquement claire et bien adaptée aux calculs numériques, ce qui explique que nous conserverons l'écriture (3.2) dans les prochains chapitres.

On peut néanmoins réorganiser ce terme de source pour faire apparaître plus clairement la structure mathématique de l'ECE, qui est celle des équations de la théorie du transport. Il suffit de distinguer, dans  $\Sigma_e$ , trois composantes :

- le terme d'émission des électrons par photoionisation  $E_e$ , donné par (3.85, 3.87),
- le terme d'absorption par recombinaison radiative  $-K_e f_e$ , où le coefficient d'absorption  $K_e$  est donné par (3.86, 3.88),
- le terme de diffusion  $\Sigma_{sca}$  par les collisions élastiques, inélastiques et photoniques ( $ff$ , diffusion Thomson) :

$$\Sigma_{sca} = \Sigma_{el} + \Sigma_{inel} + \Sigma_{ff} + \Sigma_T. \quad (3.140)$$



D'où

$$\Sigma_e(z, \mathbf{v}_e) = E_e(z, \mathbf{v}_e) - n_e(z)K_e(z, \mathbf{v}_e)f_e(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{sca}(z, \mathbf{v}_e). \quad (3.141)$$

Le terme de diffusion s'écrit sous la forme générale de Boltzmann

$$\Sigma_{sca}(z, \mathbf{v}_e) = n_e(z) \left[ -\sigma_{sca}(z, \mathbf{v}_e)f_e(z, \mathbf{v}_e) + \int \sigma_{sca}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e)f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e \right], \quad (3.142)$$

avec

$$\sigma_{sca}(z, \mathbf{v}_e) = \int \sigma_{sca}(z, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e \quad (3.143)$$

et

$$\sigma_{sca} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \sigma_{ff} + \sigma_T. \quad (3.144)$$

Regroupant le coefficient d'absorption et le coefficient de diffusion intégré en un coefficient d'extinction  $\chi_e$  des électrons,

$$\chi_e(z, \mathbf{v}_e) = K_e(z, \mathbf{v}_e) + \sigma_{sca}(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.145)$$

on pourra écrire le membre de droite de l'ECE sous la forme finale suivante :

$$\Sigma_e(z, \mathbf{v}_e) = E_e(z, \mathbf{v}_e) - n_e(z)\chi_e(z, \mathbf{v}_e)f_e(z, \mathbf{v}_e) + n_e(z) \int \sigma_{sca}(z, \mathbf{v}'_e, \mathbf{v}_e)f_e(z, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_e, \quad (3.146)$$

qui est celle des termes de source des équations de la théorie du transport [33]. Le premier terme dans le membre de droite de (3.146) décrit l'émission des électrons par photoionisation, le second terme leur extinction par recombinaison radiative ou par diffusion, et le troisième leur diffusion au cours de collisions élastiques, inélastiques et photoniques.

L'ECE apparaît alors comme une équation intégrodifférentielle en la fdv  $f_e$ . Cette équation est non linéaire car le coefficient de diffusion  $\sigma_{sca}$  dépend explicitement de  $f_e$ . Cette dépendance provient du processus de recombinaison à trois corps et de la diffusion élastique des électrons sur eux-mêmes.

Le couplage de l'ECE avec l'équation de transfert s'effectue explicitement par le processus de photoionisation et son inverse, qui créent des électrons ou les font disparaître, et par les transitions élastiques mettant en jeu des photons (transitions  $ff$ , diffusion), qui les dévient. Un couplage implicite existe également par les populations  $n_i$  des atomes, puisqu'elles dépendent du champ radiatif.

### 3.6 Simplification de l'équation

Il est naturel de faire passer l'accélération radiative dans le membre de gauche de l'ECE, sa contribution venant s'ajouter (vectoriellement) à celle du champ d'accélération extérieur  $\mathbf{g}_e$ . L'ECE (3.3) devient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial z} [n_e(z)f_e(z, \mathbf{v}_e)] + n_e(z) [\mathbf{g}_e(z, \mathbf{v}_e) + \mathbf{a}_e(z)] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} f_e(z, \mathbf{v}_e) &= \Sigma_{el}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{inel}(z, \mathbf{v}_e) \\ &+ \Sigma_{fb}(z, \mathbf{v}_e) + \Sigma_{ff}(z, \mathbf{v}_e). \end{aligned} \quad (3.147)$$

Au chapitre 5 (section 5.3), nous envisagerons la résolution de cette équation privée de son membre de gauche, qui devient isotrope lorsque la fdv des électrons est isotrope

$$\Sigma_{el}(z, v_e) + \Sigma_{inel}(z, v_e) + \Sigma_{fb}(z, v_e) + \Sigma_{ff}(z, v_e) = 0. \quad (3.148)$$

Cette simplification conduit à une ECE locale, c'est-à-dire dans laquelle la variable  $z$  n'est pas transformée.

Le but de cette section est de dégager les circonstances qui permettent une telle approximation.

### 3.6.1 Terme d'écoulement

Le terme d'écoulement de l'ECE vérifie la condition

$$\left| \mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} [n_e(z) f_e(z, \mathbf{v}_e)] \right| \leq |\mathbf{v}_e| \frac{\frac{\partial}{\partial z} [n_e(z) f_e(z, \mathbf{v}_e)]}{n_e(z) f_e(z, \mathbf{v}_e)} n_e(z) f_e(z, \mathbf{v}_e) \approx \frac{|\mathbf{v}_e|}{H(z)} n_e(z) f_e(z, \mathbf{v}_e), \quad (3.149)$$

où  $H(z)$  désigne l'échelle de hauteur pour la densité ou la température électronique, que nous supposons du même ordre de grandeur (elles sont égales dans l'approximation isobare :  $n_e(z)T(z) = \text{cte}$ ).

Le terme de collision élastique des électrons est de l'ordre de  $(n_e \nu_e f_e)(z, v_e)$ , où  $\nu_e(z, v_e)$  est la fréquence de collision élastique à la vitesse considérée. On peut donc négliger le terme d'écoulement de l'ECE par rapport au terme de collision élastique situé dans le membre de droite si  $(v_e/H)n_e f_e \ll n_e \nu_e f_e$ , soit  $\lambda_e = v_e/\nu_e \ll H$  : le libre parcours moyen (**lpm**) des électrons doit être bien plus petit que l'échelle de hauteur de l'atmosphère, à tous les niveaux  $z$  et pour toutes les vitesses électroniques  $v_e$ . Cette condition semble bien remplie dans les couches moyennes de la photosphère solaire, où la fréquence de collision des électrons est de l'ordre de  $10^8 \text{ s}^{-1}$  à la vitesse thermique des électrons (d'où un lpm de l'ordre du cm) et l'échelle de hauteur  $H$  est de l'ordre de 150 km. Nous allons voir, en utilisant le comportement asymptotique des fréquences de collision (section 3.2.3), que ce résultat est encore vrai à toutes les vitesses électroniques.

Pour les électrons de vitesse inférieure à leur vitesse thermique, la fréquence de collision  $e - e$  ou  $e - +$  est constante et à peu près égale à sa valeur à la vitesse thermique  $\bar{v}_e$ , et la fréquence de collision  $e - H$  est plus importante que sa valeur à la vitesse thermique. Comme le terme d'écoulement est proportionnel à la vitesse, donc plus faible que sa valeur à la vitesse thermique, ce terme est bien négligeable par rapport au terme de collisions élastiques.

Pour les électrons de vitesse supérieure à la vitesse thermique  $\bar{v}_e$ , la fréquence de collision  $e - e$  ou  $e - +$  est inversement proportionnelle au cube de la vitesse, alors que la fréquence de collisions  $e-H$  est inversement proportionnelle à la vitesse. Le terme d'écoulement étant toujours proportionnel à la vitesse, il prend de plus en plus d'importance. Nous avons besoin de connaître la fdv des électrons à des vitesses au maximum égales à 2 ou 3 fois la vitesse d'ionisation de l'hydrogène à l'état fondamental, qui correspond à une température de l'ordre de  $15 \times 10^5 \text{ K}$ . Cette vitesse d'ionisation est donc de l'ordre de 5 fois la vitesse thermique de la photosphère solaire ( $T = 6000 \text{ K}$ ). Pour  $v_e = 3 \times 5 \times \bar{v}_e$ , la fréquence de collisions des électrons est au plus divisée par  $15^3$ , donc leur lpm est multiplié par  $15^4 \sim 5 \times 10^4$ . Ce lpm, qui était de l'ordre du cm à la vitesse thermique, est donc de l'ordre de  $5 \times 10^4 \text{ cm} = 0.5 \text{ km}$ , ce qui correspond à 0.3 % de l'échelle de hauteur  $H \sim 150 \text{ km}$ .

### 3.6.2 Terme de force

Dans une atmosphère stellaire, le champ d'accélération extérieur  $\mathbf{g}_e$  est dû à la présence éventuelle d'un champ magnétique ou électrique, et à la gravité à la surface de l'étoile :  $\mathbf{g}_e = \mathbf{g}_{e,magn} + \mathbf{g}_{e,elec} + \mathbf{g}_{e,grav}$ .

- L'accélération magnétique  $\mathbf{g}_{e,magn}$  est proportionnelle à  $\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}$ , donc parallèle au plan de stratification si le vecteur  $\mathbf{B}$  est normal à ce plan, ce qu'impose la symétrie plan-parallèle. Le produit scalaire  $\mathbf{g}_{e,magn} \cdot (\partial f_e / \partial \mathbf{v}_e)$  est donc nul si la fdv des électrons est isotrope (car  $\partial f_e / \partial \mathbf{v}_e$  est perpendiculaire au plan de stratification).
- Le champ électrique  $\mathbf{E}$  est un champ de polarisation provoqué par le déplacement des électrons des régions les plus chaudes de l'atmosphère vers les régions les plus froides. Il est donc lié à l'existence d'un gradient de température et dirigé dans la direction opposée à ce gradient. Le courant conducteur des électrons doit être exactement contrebalancé par un courant inverse dû au champ électrique, de sorte que la densité de courant électrique  $\mathbf{j}_e$  soit nulle [111]. Si on adopte pour cette dernière l'expression de Spitzer et Harm [111, Eq. 25]

$$\mathbf{j}_e(z) = \sigma_E \mathbf{E}(z) + \alpha_T \frac{\partial}{\partial z} T(z), \quad (3.150)$$

qui est valable pour des électrons de basse énergie ou thermiques. On obtient alors

$$\mathbf{E}(z) = -\frac{\alpha_T}{\sigma_E} \frac{\partial T}{\partial z}(z), \quad (3.151)$$

où le rapport  $\alpha_T/\sigma_E$  est indépendant des conditions locales, d'après Ljepojevic et Burgess [64, p. 88] :

$$\frac{\alpha_T}{\sigma_E} \approx 0.703 \frac{4\pi\epsilon_0}{e} k \frac{dT}{dz}, \quad (3.152)$$

qui font référence au Tableau III de Spitzer et Harm [111]. D'où

$$\mathbf{E} \approx -0.703 \frac{4\pi\epsilon_0}{e} k \frac{dT}{dz}. \quad (3.153)$$

- Dans la photosphère solaire, pour une température de 6000K et une échelle de hauteur de la température de 150 km, on obtient un gradient de température de  $T/H \sim 0.04$  degré par mètre, d'où une force électrique  $F_{e,elec} = eE$  de l'ordre de  $4.3 \times 10^{-35}$  N sur chaque électron.
- Le champ d'accélération gravitationnelle  $\mathbf{g}_{e,grav}$  est de l'ordre de  $GM/R^2$ , où  $G$  est la constante de la gravitation ( $6.67 \times 10^{-11}$  unités SI),  $M$  la masse de l'étoile et  $R$  son rayon. Dans le cas du soleil,  $M = M_\odot \sim 2 \times 10^{30}$  kg et  $R = R_\odot \sim 7 \times 10^8$  m, d'où  $F_{e,grav} = m_e g_{e,grav} \sim 2.5 \times 10^{-28}$  N.

L'autre terme figurant dans le terme de force de l'ECE (3.147) provient de l'accélération radiative  $\mathbf{a}_e$  appliquée aux électrons libres par suite des échanges d'impulsion entre électrons et photons au cours du processus de diffusion Thomson. On peut estimer grossièrement cette accélération radiative en remplaçant, dans le membre de droite de sa définition (3.136), le flux intégré  $F_r$  par  $\sigma T_{\text{eff}}^4$ , où  $\sigma$  est la constante de Stefan ( $5.67 \times 10^{-8}$  unités SI) et  $T_{\text{eff}}$  la température effective de l'étoile. La section efficace de diffusion Thomson est constante et vaut  $6.652 \times 10^{-29}$  m<sup>2</sup>. On obtient une force radiative  $F_{e,rad} = m_e |\mathbf{a}_e|$  de l'ordre de  $2 \times 10^{-28}$  N, donc comparable à la force gravitationnelle.

Dans le terme de force de l'ECE figure le gradient de la fdv  $f_e$  par rapport à la vitesse, qui est égal à  $(-m_e v_e / kT) f_e$  pour une fdv maxwellienne des électrons, ce qui fournit une première estimation.

Le terme de force de l'ECE est négligeable devant le terme de collisions élastiques lorsque

$$n_e |\mathbf{g}_e + \mathbf{a}_e| \frac{m_e v_e}{kT} f_e \ll n_e \nu_e f_e, \quad (3.154)$$

où  $\nu_e$  désigne la fréquence de collisions élastiques des électrons à la vitesse considérée. On peut encore écrire, en introduisant le lpm moyen des électrons  $\lambda_e = v_e / \nu_e$  :

$$m_e |\mathbf{g}_e + \mathbf{a}_e| \lambda_e \ll kT, \quad (3.155)$$

ce qui signifie que le travail des forces appliquées aux électrons sur un lpm doit être bien plus faible que leur énergie cinétique moyenne. Dans le cas de la photosphère solaire,  $m_e |\mathbf{g}_e + \mathbf{a}_e| \sim 10^{-28}$  N et, si on prend  $\lambda_e \sim 1$  cm et  $T \sim 10^4$  K, le membre de gauche de (3.155) est de l'ordre de  $10^{-30}$  J, alors que le membre de droite est de l'ordre de  $kT \sim 1.38 \times 10^{-19}$  J.

### 3.7 Le mécanisme de non thermalisation des électrons

L'équation cinétique des électrons, de la forme de Boltzmann intégral-différentielle habituelle, peut être mise sous une forme simple grâce au modèle BGK, à l'expression (Eq. 3.146), et à la simplification de l'ECE (Eq. 3.148) conduisant au membre de gauche nul :

$$f_e(v) = f_e^M(v) + \frac{\Sigma_+(v) - \Sigma_-(v) f_e^M(v)}{\nu_e(v) + \Sigma_-(v)}, \quad (3.156)$$

où nous avons supprimé la dépendance en  $z$  car l'ECE est locale en  $z$  et chacune des quantités de (Eq. 3.156) en dépend.  $\Sigma_+(v)$  décrit tous les processus inélastiques (collisionnels ou radiatifs) capables de créer un électron de vitesse  $v$  :

$$\Sigma_+(v) = \frac{1}{n_e} E_e(v) + \int [\sigma_{inel}(v', v) + \sigma_{ff}(v', v) + \sigma_T(v', v)] f_e(v') dv', \quad (3.157)$$

$\Sigma_-(v)$  représente les processus inverses des précédents, qui détruisent un électron de vitesse  $v$  :

$$\Sigma_-(v) = K_e(v) + \sigma_{inel}(v) + \sigma_{ff}(v) + \sigma_T(v). \quad (3.158)$$

et  $\nu_e(v)$  est la fréquence de collisions élastiques des électrons avec les autres particules (Eq. 3.45).

D'après l'expression (Eq. 3.156), la fdv des électrons est une maxwellienne à laquelle on ajoute une contribution non maxwellienne provenant des processus inélastiques, contribution qui peut être nulle ou non.

Dans les régions où l'atmosphère est en ETL, tous les processus inélastiques respectent le principe de la *balance détaillée*, issu de la micro-réversibilité des transitions quantiques : nous observons autant d'électrons créés à une vitesse  $v$  que d'électrons disparaissant de cette même vitesse. Ainsi le numérateur  $\Sigma_+(v) - \Sigma_-(v)f_e^M(v)$  de l'équation (3.156) est strictement nul, et la fdv des électrons est maxwellienne. Dans les régions hors-ETL, le principe de la balance détaillée n'est plus vérifié, le numérateur de l'équation (3.156) est différent de zéro, et la fdv des électrons n'est plus maxwellienne.

Pour que la fdv des électrons s'écarte sensiblement de la distribution maxwellienne, il faut de plus que le rapport  $\Sigma_+(v)/\nu_e(v)$  ne soit pas négligeable. Les collisions inélastiques doivent être aussi fréquentes que les collisions élastiques. Ce rapport est la plupart du temps négligeable pour des vitesses thermiques  $v = \bar{v}_e$ , et devient important pour de grandes vitesses et un degré d'ionisation faible. Nous avons décrit l'influence d'une situation hors-ETL sur la fdv des électrons. Il existe un deuxième effet, appelé *effet feedback*, très bien expliqué dans la monographie écrite par J. Oxenius [78], qui tend à amplifier l'écart de la fdv des électrons à la maxwellienne. Cet effet indique qu'une fdv maxwellienne des électrons est une distribution instable, et que toute perturbation entraînera un état d'équilibre non maxwellien.



# Chapitre 4

## Les équations de transport des particules lourdes

### 4.1 Forme générale

Dans un milieu hors équilibre, la fdv (normalisée)  $f_i = f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  des particules de type  $i$  vérifie l'équation cinétique (Eq. 3.1) généralisée :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{g}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} [n_i(\mathbf{r}, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] = \Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{g}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  est l'accélération moyenne de la particule, et  $\Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  est le terme de source provenant des collisions.

Dans le référentiel du laboratoire, qui est un référentiel d'inertie, l'accélération  $\mathbf{g}_i$  est le quotient de la force moyenne  $\mathbf{F}_i$  appliquée à la particule par sa masse  $m_i$ , soit

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (4.2)$$

La force  $\mathbf{F}_i$  peut être d'origine gravitationnelle, électrique ou magnétique

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q_i \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (4.3)$$

les champs gravitationnel, électrique et magnétique étant respectivement  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  (unités SI). On a négligé la contribution à la force  $\mathbf{F}_i$  des moments électriques et magnétiques d'ordre supérieur à un. Il résulte de (4.3) que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (4.4)$$

Les trois champs qui entrent dans la définition (4.3) de la force se décomposent en une partie *auto-consistante* et une partie *extérieure*. La première fait intervenir les fonctions de distribution de tous les types de particule en tous les points ( $\rightarrow$  couplages), alors que la seconde est donnée (*cf.* [78, p. 37]).

Le terme de source  $\Sigma_i$  de l'équation (4.1) provient des collisions élastiques, des collisions inélastiques, et des interactions avec les photons (émission, absorption, diffusion). Il a la même forme que le terme de source (3.146) des électrons, soit

$$\Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = E_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - n_i(\mathbf{r}, t) \chi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + n_i(\mathbf{r}, t) \int \sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \mathbf{v}, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}', \quad (4.5)$$

les trois termes dans le membre de droite de (4.5) décrivant l'émission, l'extinction et la diffusion des particules respectivement. L'extinction  $\chi_i$  comprend l'absorption (coefficient  $K_i$ ) et la diffusion (coefficient  $\sigma_i$  intégré)

$$\chi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = K_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (4.6)$$

avec

$$\sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int \sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}'. \quad (4.7)$$

L'équation de transport des particules de type  $i$  est le moment d'ordre 0 de l'équation cinétique (4.1), c'est-à-dire l'équation obtenue par intégration de cette dernière sur  $\mathbf{v}$ .

Le terme  $\int [\partial(n_i f_i)/\partial t] d\mathbf{v}$  est égal à  $\partial n_i/\partial t$ , où  $n_i$  est la densité numérique des particules de type  $i$ , le terme  $\int \mathbf{v} \cdot [\partial(n_i f_i)/\partial \mathbf{r}] d\mathbf{v}$  coïncide avec  $\partial(n_i \mathbf{u}_i)/\partial \mathbf{r}$ , où  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$  est la vitesse moyenne des particules  $i$  (voir section 1.2) et le terme  $\int \mathbf{g}_i \cdot [\partial(n_i f_i)/\partial \mathbf{v}] d\mathbf{v}$  est nul à cause de (4.4).

L'intégration sur  $\mathbf{v}$  du membre de droite de (4.1) fait disparaître les termes de diffusion, à cause de (4.7) et pour des raisons physiques claires. Il reste, dans le membre de droite de (4.5), les termes d'émission et d'absorption intégrés sur  $\mathbf{v}$ .

D'où l'équation de transport des particules de type  $i$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \mathbf{u}_i)(\mathbf{r}, t) = \int E_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} - n_i(\mathbf{r}, t) \int K_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (4.8)$$

## 4.2 Cas des atmosphères stellaires

Dans une atmosphère plan-parallèle statique et stationnaire en moyenne, le terme  $\partial n_i/\partial t$  peut être négligé dans le membre de gauche de l'équation (4.8), ce qui permet de ne plus mentionner la variable de temps. On suppose donc que les temps de relaxation des diverses densités  $n_i$ , c'est-à-dire les durées caractéristiques sur lesquelles elles *relaxent* vers des densités à peu près stationnaires, sont bien plus courts que les durées typiques d'évolution des grandeurs macroscopiques de l'atmosphère. Une estimation de ces temps de relaxation peut être trouvée dans Biberman *et al.* [9, section 4], qui montrent qu'ils sont effectivement très courts.

Le rayon-vecteur  $\mathbf{r}$  peut également être remplacée par la profondeur géométrique  $z$ . L'équation (4.8) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} (n_i \mathbf{u}_i)(z) = \int E_i(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v} - n_i(z) \int K_i(z, \mathbf{v}) f_i(z, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (4.9)$$

Pour expliciter le membre de droite, on remarque que les particules lourdes d'un type donné ne peuvent être créées ou détruites qu'au cours d'une excitation ou d'une ionisation (collisionnelle ou radiative), si on ne prend en compte que les collisions inélastiques énumérées à la section 1.3. Comme les particules lourdes ont été supposées stationnaires (c'est-à-dire de vitesse constante) au cours de leurs collisions inélastiques avec des photons ou des électrons, une particule  $(i, \mathbf{v})$  est créée par transformation d'une particule  $j$  ayant la vitesse  $\mathbf{v}$  avant collision, ou se transforme en une particule  $j$  conservant la vitesse  $\mathbf{v}$  après collision. D'où

$$E_i(z, \mathbf{v}) = \sum_{j \neq i} n_j(z) f_j(z, \mathbf{v}) P_{ji}(z), \quad (4.10)$$

et

$$K_i(z, \mathbf{v}) = \sum_{j \neq i} P_{ij}(z), \quad (4.11)$$

où les  $P_{ij}(z)$  désignent les taux de transition moyens de l'état  $i$  à l'état  $j$ , c'est-à-dire les probabilités que les transitions aient lieu dans l'unité de temps au point  $z$ . Dans les expressions précédentes, la somme sur  $j$  porte sur tous les états liés d'un même atome ( $j \neq i$ ) et sur le continuum ( $j = +$ ).

Après avoir effectué les intégrations sur  $\mathbf{v}$  dans son membre de droite, l'équation (4.9) s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial z} (n_i \mathbf{u}_i)(z) = \sum_{j \neq i} n_j(z) P_{ji}(z) - n_i(z) \sum_{j \neq i} P_{ij}(z). \quad (4.12)$$

Lorsqu'on peut négliger les termes d'écoulement situés dans le membre de gauche, ce que nous ferons dans la suite, ces équations deviennent les équations de l'équilibre statistique

$$\sum_{j \neq i} n_j(z) P_{ji}(z) = n_i(z) \sum_{j \neq i} P_{ij}(z). \quad (4.13)$$

Elles signifient que chaque type de particule n'est créé nulle part en moyenne dans un milieu stationnaire et statique (en moyenne également). Ces équations (4.13) sont linéairement dépendantes : on obtient  $0 = 0$  en sommant ces équations sur  $i$ . Cette propriété implique que la densité de particules lourdes  $n_0$  (Eq. 1.6) est à tout moment conservée par ces équations.

### 4.3 Les taux de transition

Séparant les processus collisionnels des processus radiatifs, on écrira

$$P_{ij}(z) = C_{ij}(z) + R_{ij}(z). \quad (4.14)$$

#### 4.3.1 Les taux collisionnels

Les taux d'excitation ou de désexcitation par l'impact d'électrons rapides ont pour expression [69, 78] :

$$C_{ij}(z) = 4\pi n_e(z) \int_0^{+\infty} f_e(z, v_e) q_{ij}(v_e) v_e^3 dv_e, \quad (4.15)$$

où  $q_{ij}(v_e)$  désigne la section efficace intégrée de la collision. Son expression pour les états liés de l'atome d'hydrogène est donnée dans l'annexe A ( Eq. A.89). Le domaine d'intégration est  $] \zeta_{ij}, +\infty[$  si  $i < j$ , et  $]0, +\infty[$  sinon.

Lorsque la fdv des électrons est maxwellienne, la relation de réciprocité (A.87) entre sections efficaces et le fait que

$$f_e^M(z, \zeta_{ie,je}(v_e)) = f_e^M(z, v_e) \exp\left(\frac{E_{ij}}{kT(z)}\right), \quad (4.16)$$

où la vitesse  $\zeta_{ie,je}(v_e)$  est définie par (A.86), entraînent la relation de réciprocité suivante entre taux :

$$C_{ji}(z) = \theta_{ij}(z) C_{ij}(z), \quad (4.17)$$

le facteur de Boltzmann  $\theta_{ij}(z)$  ayant été défini en (C.3).

Ces relations sont valables pour  $i$  et  $j$  quelconques.

Les taux d'ionisation collisionnelle et de recombinaison à trois corps en présence d'électrons rapides sont les suivants :

$$C_{i+}(z) = n_e(z) \int \int \int f_e(z, v_e) v_e q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) d\mathbf{v}_e d\mathbf{v}'_e d\mathbf{w}'_e, \quad (4.18)$$

et

$$C_{+i}(z) = n_e^2(z) \int \int \int f_e(z, v_e) f_e(z, w_e) v_e w_e q_{+ee,ie}(\mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e; \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}_e d\mathbf{w}_e d\mathbf{v}'_e. \quad (4.19)$$

La première expression (4.18) fait apparaître la section efficace intégrée d'ionisation collisionnelle

$$C_{i+}(z) = 4\pi n_e(z) \int_{\zeta_{i+}}^{+\infty} f_e(z, v_e) q_{i+}(v_e) v_e^3 dv_e, \quad (4.20)$$

et la seconde (4.19) peut être transformée grâce à la relation de réciprocité (A.108)

$$C_{+i}(z) = \Gamma_i n_e^2(z) \int \int \int f_e(z, v_e) f_e(z, w_e) v'_e q_{ie,+ee}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \mathbf{w}_e) d\mathbf{v}'_e d\mathbf{v}_e d\mathbf{w}_e. \quad (4.21)$$

Cette expression se simplifie car la fdv des électrons est isotrope : elle fait apparaître la section efficace intégrée sur les deux vitesses émergentes, définie par (A.99). On a alors

$$C_{+i}(z) = 4\pi \Gamma_i n_e^2(z) \int_{\zeta_{i+}}^{+\infty} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}(v_e'^2 - \zeta_{i+}^2)}} f_e(z, v_e) f_e(z, \zeta_{ie,+ee}(v'_e, v_e)) v_e^2 v_e'^3 q_{i+}(v'_e; v_e) dv'_e dv_e. \quad (4.22)$$

Pour une fdv maxwellienne des électrons, la relation (3.74) montre que

$$C_{+i}(z) = \theta_{i+}(z) C_{i+}(z). \quad (4.23)$$

le coefficient  $\theta_{i+}$  étant défini par (C.3).

Cette relation n'est vraie qu'en présence d'électrons à la fois thermalisés et rapides lorsque on ne fait pas d'hypothèses sur la fdv des atomes, hypothèses peut-être contradictoires si des écarts importants à la distribution de Maxwell sont attendus aux grandes vitesses électroniques. Dans ces conditions, on peut penser que les électrons qui ionisent sont rapides mais non thermalisés, et ceux qui se recombinent sont non rapides et thermalisés.



### 4.3.1.1 Relation avec les taux électroniques

Les collisions inélastiques envisagées étant nécessairement accompagnées de la diffusion d'un électron sur une particule lourde, on a la relation

$$C_{ij}(z) = n_e(z) \int f_e(z, v_e) C_{ij}(z, \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e, \quad (4.24)$$

valable pour tout  $i \neq j$ . Le coefficient intégré de diffusion inélastique des électrons est défini par (3.58) pour  $i$  et  $j \neq +$ , par (3.59) pour  $j = +$ , et par (3.60, 3.61, 3.62) pour  $i = +$ . Dans les deux premiers cas, il est indépendant de  $z$ .

### 4.3.1.2 Atmosphère en ETL

A l'ETL, il y a micro-réversibilité des processus collisionnels, d'où

$$n_i(z) C_{ij}(z) = n_j(z) C_{ji}(z) \quad (\text{ETL}), \quad (4.25)$$

conformément à (Eqs. 4.17, 4.23, C.1, C.2).

### 4.3.2 Les taux radiatifs

Les taux radiatifs  $R_{ij}$  vérifient, pour une transition  $bb$  entre deux niveaux  $i < j$  [69, 78] :

$$R_{ij}(z) = B_{ij} \bar{J}_{ij}(z), \quad (4.26)$$

et

$$R_{ji}(z) = A_{ji} (1 + \lambda_{ji}(z)), \quad (4.27)$$

les nouvelles fonctions introduites étant l'intensité moyenne du rayonnement absorbé dans la raie

$$\bar{J}_{ij}(z) = \int_0^{+\infty} J(z, \nu) \Phi_{ij}(z, \nu) d\nu, \quad (4.28)$$

et le coefficient sans dimension

$$\lambda_{ji}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{c^2}{2h\nu^3} J(z, \nu) \Phi_{ij}(z, \nu) d\nu \approx \frac{c^2}{2h\nu_{ij}^3} \bar{J}_{ij}(z), \quad (4.29)$$

qui renseigne sur l'importance du rayonnement émis de façon stimulée.

On a utilisé le fait que les profils moyens étaient isotropes et coïncidaient (RCF).

La relation (4.27) est souvent écrite sous la forme

$$R_{ji}(z) = A_{ji} + B_{ji} \bar{J}_{ij}(z), \quad (4.30)$$

faisant intervenir le coefficient d'Einstein pour l'émission induite

$$B_{ji} = \frac{c^2}{2h\nu_{ij}^3} A_{ji}. \quad (4.31)$$

Dans le cas d'une transition avec le continu, les taux  $R_{i+}$  et  $R_{+i}$  sont donnés par [69, 78] :

$$R_{i+}(z) = 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{J(z, \nu)}{h\nu} \sigma_{i+}(\nu) d\nu, \quad (4.32)$$

et

$$R_{+i}(z) = 4\pi \Gamma_i n_e(z) \int_0^{+\infty} f_e(z, \zeta_{i+}(\nu)) \sigma_{i+}(\nu) \frac{c^2}{2\nu^2} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} J(z, \nu) \right) d\nu, \quad (4.33)$$

où  $J(z, \nu)$  est l'intensité moyenne du champ radiatif et  $\sigma_{i+}(\nu)$  la section efficace de photoionisation. La relation (2.48) montre que, pour  $f_e = f_e^M$  :

$$R_{+i}(z) = 4\pi \theta_{i+}(z) \int_0^{+\infty} \sigma_{i+}(\nu) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT(z)}\right) \frac{c^2}{2\nu^2} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} J(z, \nu) \right) d\nu, \quad (4.34)$$

le coefficient  $\theta_{i+}$  étant défini par (C.3).

Il est facile de voir que

$$R_{i+}(z) = \int R_{i+}(z, \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e, \quad (4.35)$$

et

$$R_{+i}(z) = n_e(z) \int f_e(z, v_e) R_{+i}(z, \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e, \quad (4.36)$$

ce qui est physiquement clair. Les taux d'éjection  $R_{i+}(z, \mathbf{v}_e)$  et de capture  $R_{+i}(z, \mathbf{v}_e)$  des électrons ont été définis en (3.87) et (3.88) respectivement. La relation de réciprocité (A.21) permet d'exprimer le second en terme du premier

$$R_{+i}(z, \mathbf{v}_e) = \Gamma_i \left[ R_{i+}(z, \mathbf{v}_e) + \frac{2m_e}{hc^2} \frac{1}{v_e} \left( \nu_{i+} + \frac{m_e v_e^2}{2h} \right)^2 \sigma_{i+} \left( \nu_{i+} + \frac{m_e v_e^2}{2h} \right) \right], \quad (4.37)$$

ce qui ramène le calcul de  $R_{+i}(z)$  à celui de  $R_{i+}(z, \mathbf{v}_e)$  :

$$\begin{aligned} R_{+i}(z) = & \Gamma_i \left[ n_e(z) \int f_e(z, v_e) R_{i+}(z, \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e \right. \\ & \left. + 8\pi \frac{m_e}{hc^2} n_e(z) \int_0^{+\infty} f_e(z, v_e) v_e \left( \nu_{i+} + \frac{m_e v_e^2}{2h} \right)^2 \sigma_{i+} \left( \nu_{i+} + \frac{m_e v_e^2}{2h} \right) dv_e \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$



# Chapitre 5

## Méthode de résolution des équations du problème

### 5.1 Retour sur le modèle. Fermeture des équations

#### 5.1.1 Introduction

Nous résolvons le problème suivant : une atmosphère stellaire de symétrie plan-parallèle est éclairée sur une face par un rayonnement incident connu, l'autre face donnant sur le vide inter-stellaire. Elle est constituée d'atomes d'hydrogène dans leurs  $N$  premiers états liés, de protons, d'électrons libres et de photons. Son degré d'ionisation est a priori quelconque : il fait partie des grandeurs à calculer. Les interactions entre particules (photons compris) sont celles de la section 1.3, les sections efficaces correspondantes étant explicitées dans l'annexe A.

L'épaisseur géométrique  $Z$  de l'atmosphère est choisie suffisamment grande pour que le rayonnement incident sur la face interne puisse être écrit dans l'approximation de la diffusion : les relations (2.19) et (2.26) sont donc valables sur la couche  $Z$ .

Toutes les particules matérielles sont censées avoir, en chaque point, la même énergie cinétique moyenne, qui définit la température de l'atmosphère au point considéré. C'est cette température  $T$  qui apparaît dans les conditions aux limites (2.19, 2.26), et dans la maxwellienne figurant dans le terme de collisions élastiques des électrons (modèle BGK) : Eqs. (3.12, 3.43). Le but des modèles que nous construisons au chapitre 6 est d'étudier l'influence sur la fdv des électrons de l'effet de fuite des photons par la surface de l'atmosphère. Pour mettre en évidence cet effet, nous étudions un modèle d'atmosphère de température  $T$  et de densité de particules lourdes  $n_0$  constantes dans toute l'atmosphère, et données.

Les inconnues du problème sont l'intensité spécifique  $I$  du champ radiatif, la fdv des électrons  $f_e$ , les populations atomiques  $n_i$ , la densité de protons  $n_+$  et la densité électronique  $n_e$ . Les équations sont l'équation de transfert, l'équation cinétique des électrons, et les  $N$  équations de l'équilibre statistique<sup>1</sup>. Nous avons donc  $N + 4$  inconnues pour  $N + 2$  équations : il manque 2 équations pour fermer le système. Ces équations sont :

1. la condition de neutralité électrique locale de l'atmosphère

$$n_e(z) = n_+(z), \quad (5.1)$$

2. le fait qu'aucune particule n'est créée ou détruite par les collisions étudiées  $dn_0/dt = 0$ , entraînant la condition  $n_0(z) = cte$  :

$$n_+(z) = n_0(z) - n_H(z), \quad (5.2)$$

où  $n_H$  est la densité numérique d'états neutres (pour l'hydrogène seulement dans notre cas) :

$$n_H(z) = \sum_{i=1}^N n_i(z). \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Il y a en fait  $N + 1$  équations de l'équilibre statistique :  $N$  pour les états liés de l'atome d'hydrogène et une pour les protons. Mais cette dernière se déduit des  $N$  précédentes par addition. Il y a donc bien  $N$  équations indépendantes.

### 5.1.2 L'équation de l'équilibre hydrostatique

Les atmosphères d'étoiles statiques sont en équilibre hydrostatique, ce qui entraîne que les forces de pression sont équilibrées par les forces gravitationnelles en tout point de l'atmosphère. Cette condition permet de calculer la densité totale de particules dans l'atmosphère. Comme nous étudions un modèle d'atmosphère à densité de particules lourdes  $n_0$  constante, nous ne résoudrons pas cette équation, mais nous en donnons une forme simple qui pourra être utilisée pour des calculs futurs. Cette condition s'écrit

$$\frac{d}{dz}P(z) = \rho(z)g(z), \quad (5.4)$$

où  $P$  désigne la pression totale du gaz,  $\rho$  la masse volumique et  $g$  l'accélération gravitationnelle.

La pression totale  $P$  comprend la pression cinétique  $P_c$  et la pression de radiation  $P_r$

$$P(z) = P_c(z) + P_r(z) \quad (5.5)$$

en négligeant la pression microturbulente. La pression cinétique  $P_c$  peut être calculée à l'aide de la relation des gaz parfaits, car les atmosphères stellaires sont des milieux très dilués assimilables à des plasmas cinétiques classiques. D'où

$$P_c(z) = n(z)kT(z), \quad (5.6)$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $n$  la densité particulaire totale définie par (Eq. 1.5).

La pression de radiation  $P_r$  est obtenue en intégrant (2.23) sur la fréquence  $\nu$ , ce qui donne

$$P_r(z) = \int_0^{+\infty} P_r(z, \nu) d\nu = \frac{2\pi}{c} \int_0^{+\infty} \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) \mu^2 d\nu d\mu. \quad (5.7)$$

La masse volumique  $\rho$  (Eq. 5.4) est définie par (Eq. 1.5) et se déduit des densités  $n_0$  ou  $n_i$  par la relation

$$\rho(z) = \sum_{i=1}^N m_i n_i(z) + m_+ n_+(z) + m_e n_e(z) \approx m_H n_0(z), \quad (5.8)$$

où  $m_H$  est la masse d'un atome d'hydrogène, constante pour tout état excité (on néglige l'énergie de liaison).

Enfin, l'accélération gravitationnelle  $g$  est donnée au niveau  $z$  par

$$g(z) = G \frac{M(R+z)}{(R+z)^2}, \quad (5.9)$$

où  $G$  est la constante de la gravitation universelle et  $M(r)$  la masse de la sphère de rayon  $r = R+z$ . Dans une atmosphère d'extension géométrique négligeable par rapport au rayon de l'étoile et de masse négligeable par rapport à la masse de l'étoile, on peut remplacer  $z$  par 0 dans (5.9), qui devient

$$g(z) = g = G \frac{M}{R^2}, \quad (5.10)$$

où  $M$  et  $R$  sont la masse et le rayon de l'étoile ( $g$  = accélération gravitationnelle à la surface de l'étoile).

L'intégration de l'équation de l'équilibre hydrostatique (5.4) donne, compte tenu de (5.10)

$$P(z) = P(Z) - g \int_z^Z \rho(z') dz', \quad (5.11)$$

où  $P(Z)$  désigne la pression sur la face interne  $z = Z$ , qui est donnée. On peut réécrire cette équation pour mettre en évidence l'inconnue  $n_0(z)$  :

$$n_0(z) = \frac{T(Z)}{T(z)} [n_0(Z) + n_e(Z)] - n_e(z) + \frac{1}{kT(z)} [P_r(Z) - P_r(z)] - \frac{gm_H}{kT(z)} \int_z^Z n_0(z') dz'. \quad (5.12)$$

Un ordre de grandeur de la pression radiative est donné par l'approximation d'Eddington  $P_r \approx \frac{4\sigma}{3c} T_{\text{eff}}^4$  [113]. Lorsque la pression de radiation est négligeable par rapport à la pression cinétique, ce qui peut être écrit sous la forme :

$$\frac{P_r}{P_c} \approx \frac{4\sigma}{3kc} \frac{T^3}{n_0} \ll 1, \quad (5.13)$$

l'équation (Eq. 5.12) peut être simplifiée :

$$n_0(z) = \frac{T(Z)}{T(z)} [n_0(Z) + n_e(Z)] - n_e(z) - \frac{gm_H}{kT(z)} \int_z^Z n_0(z') dz'. \quad (5.14)$$

Cette équation (5.14) est une équation intégrale linéaire à une variable pour la fonction inconnue  $n_0$ . On peut la résoudre soit en décomposant la fonction  $n_0$  sur une base de fonctions orthogonales, soit par itération, soit de proche en proche en partant de la couche  $Z$ .

## 5.2 L'équation de transfert

Dans une atmosphère plan-parallèle statique et stationnaire, l'équation de transfert s'écrit sous la forme (2.8)-(2.13), les conditions aux limites étant données par (2.15)-(2.18).

### 5.2.1 Introduction de la variable de profondeur optique

La variable de profondeur optique est définie par la relation

$$d\tau = \chi(z, \nu) dz. \quad (5.15)$$

qui entraîne

$$\tau(z, \nu) = \int_0^z \chi(z', \nu) dz', \quad (5.16)$$

Puisque  $\chi(z, \nu) > 0$  pour tout  $z$ , l'application  $\tau$  est une bijection continue strictement croissante de l'intervalle  $[0, Z[$  sur son image  $]0, \tau_0]$ , où

$$\tau_0(\nu) = \int_0^Z \chi(z', \nu) dz' > 0 \quad (5.17)$$

est l'épaisseur optique de l'atmosphère à la fréquence  $\nu$ .

On pourra donc remplacer la variable de profondeur géométrique  $z$  par la variable de profondeur optique  $\tau(z, \nu)$  dans l'équation de transfert (2.11), qui devient après division par  $\chi(z, \nu)$ , et compte-tenu de (5.15)

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau}(\tau, \mu, \nu) = I(\tau, \mu, \nu) - S(\tau, \nu), \quad (5.18)$$

où la fonction source  $S$  a une composante décrivant le rayonnement direct des sources internes  $S_* = E/\chi$  et une composante décrivant le rayonnement diffusé sur la couche  $\tau$ , soit

$$S(\tau, \nu) = S_*(\tau, \nu) + [1 - \epsilon(\tau, \nu)] J(\tau, \nu). \quad (5.19)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$I(0, \mu, \nu) = 0 \quad \text{si } \mu < 0, \quad (5.20)$$

et

$$I(\tau_0, \mu, \nu) = B_\nu(T(Z)) [1 + \xi(\nu)\mu] \quad (-1 \leq \mu \leq +1). \quad (5.21)$$

La seconde condition, tirée de (Eq. 2.19), contient le coefficient sans dimension

$$\xi(\nu) = \frac{1}{\chi(Z, \nu)} \frac{1}{B_\nu(T(Z))} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}(T(Z)) = \frac{1}{B_\nu(T(Z))} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau}(T(Z)) > 0, \quad (5.22)$$

qui mesure le degré d'anisotropie du rayonnement pénétrant par la face  $z = Z$  ( $\xi = 0$  pour un rayonnement isotrope). Ce paramètre se déduit de la donnée de la température interne  $T(Z)$  et de la température effective  $T_{\text{eff}}$  de l'étoile par la relation

$$\xi(\nu) = \frac{3}{16} \frac{\bar{\chi}_R(Z)}{\chi(Z, \nu)} \frac{h\nu/kT(Z)}{1 - \exp(-h\nu/kT(Z))} \left( \frac{T_{\text{eff}}}{T(Z)} \right)^4, \quad (5.23)$$

où  $\bar{\chi}_R(Z)$  désigne l'opacité moyenne de Rosseland au point  $Z$ , dont nous rappelons la définition

$$\frac{1}{\bar{\chi}_R(Z)} = \frac{\int_0^{+\infty} [\partial B_\nu / \partial T](T(Z)) / \chi(Z, \nu) d\nu}{\int_0^{+\infty} [\partial B_\nu / \partial T](T(Z)) d\nu} = \frac{\pi}{4\sigma [T(Z)]^3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\chi(Z, \nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}(T(Z)) d\nu \quad (5.24)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan et le dénominateur du premier membre de droite de (5.24) est simplifié dans le deuxième membre de droite en utilisant le résultat :

$$B(T) = \int_0^{+\infty} B_\nu(T) d\nu = \frac{1}{\pi} \sigma T^4. \quad (5.25)$$

La relation (5.22) n'est vraie que si l'atmosphère est en équilibre radiatif, ce que nous supposons. Le flux intégré sur la couche  $Z$ , qui se déduit immédiatement de la deuxième relation (2.26), est alors conservé dans l'atmosphère et vaut  $T_{\text{eff}}^4$ , ce qui détermine le gradient de température sur la couche  $Z$  et permet de déduire (5.22) de (5.21).

### 5.2.2 Solution exacte de l'équation de transfert

Nous avons choisi de résoudre le problème (5.18)-(5.21) pour un paramètre de destruction des photons  $\epsilon$  spatialement constant, ce qui permet d'utiliser les solutions exactes développées par le groupe *Transfert* du CRAL aussi bien dans le continu que dans les raies si elles sont supposées grises. La solution de l'ET peut alors être évaluée numériquement avec précision, car l'essentiel du calcul a été effectué analytiquement. Un algorithme *précis* pour résoudre l'ET est indispensable à la convergence rapide de la solution itérative du problème que nous nous posons.

Notre choix s'appuie également sur l'idée que la solution de l'ET ne dépend peut-être pas de façon critique de la variation spatiale de  $\epsilon$ , ce qui ressort de l'analyse d'Athay [1, p. 48]. Il convient pourtant d'être prudent sur ce dernier point, car le paramètre  $\epsilon$  joue un rôle crucial dans la résolution de l'ET. Nous avons donc l'intention de faire des calculs tenant compte de la variation spatiale de ce paramètre : *cf.* la conclusion, section 7.1.2.

Nous décrivons donc le champ radiatif sur une couche  $\tau$  en considérant que l'atmosphère a, sur la totalité de son étendue, un paramètre  $\epsilon$  constant égal à sa valeur sur la couche  $\tau$ . Cela n'empêche pas, bien sûr,  $\epsilon$  de varier d'une couche à l'autre.

Dans ces conditions, l'unique solution du problème (5.18)-(5.21) s'écrit sous la forme [91, 93, 94] :

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) &= B_\nu(T(Z)) \left\{ Y(\mu) \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}\right) (1 + \xi\mu) + 2\pi \left[ G_1^{(1)} + \xi G_2^{(2)} \right] (\tau_0, \tau, \mu) \right\} \\ &\quad + \int_0^{\tau_0} \left[ \hat{\delta}(\tau' - \tau, \mu) + 2\pi G_1^{(0)}(\tau', \tau, \mu) \right] S_*(\tau') d\tau', \end{aligned} \quad (5.26)$$

où  $Y$  est la fonction de Heaviside définie par (2.33) et  $\hat{\delta}$  désigne la fonction

$$\hat{\delta}(\tau, \mu) = \text{sg}(\tau) Y(\tau\mu) \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right), \quad (5.27)$$

définie pour  $\tau$  et  $\mu \neq 0$  ( $\text{sg}$  est la fonction signe  $\text{sg}(x) = x/|x|$ ). Pour alléger les notations, nous n'explicitons plus la dépendance par rapport à la fréquence, car la fréquence n'est pas transformée dans le problème (5.18)-(5.21).

$G_1^{(n)}(\tau', \tau, \mu)$  est le moment d'ordre  $n$ , par rapport à la deuxième variable  $\mu'$ , de la fonction de Green du champ diffus  $G(\tau', \mu', \tau, \mu)$ , soit

$$G_1^{(n)}(\tau', \tau, \mu) = \int_{-1}^{+1} G(\tau', \mu', \tau, \mu) \mu'^n d\mu' \quad (n = 0, 1 \text{ ou } 2). \quad (5.28)$$

La fonction de Green  $G(\tau', \mu', \tau, \mu)$  dont il est question ici se déduit aisément de la fonction de Green  $G(a, b, \tau', u', \tau, u)$  introduite et calculée dans [94] : il suffit de remplacer, dans cette dernière, l'albédo  $a$  par  $1 - \epsilon(\tau)$ , l'épaisseur optique  $b$  par  $\tau_0$ ,  $u'$  par  $-\mu'$  et  $u$  par  $-\mu^2$ . On a donc

$$G(\tau', \mu', \tau, \mu) = G(1 - \epsilon(\tau), \tau_0, \tau', -\mu', \tau, -\mu), \quad (5.29)$$

<sup>2</sup>Ces changements de signe  $u = -\mu$  et  $u' = -\mu'$  proviennent du fait que les atmosphères stellaires sont orientées positivement vers l'extérieur des étoiles, contrairement à la convention adoptée dans [91, 93, 94], qui est celle de la plupart des physiciens du transfert.

et nous renvoyons à [94] pour des détails sur la fonction de Green.

Le premier terme dans le membre de droite de (5.26) décrit le champ (direct + diffus) issu du rayonnement incident sur la face  $\tau = \tau_0$ , et le deuxième terme le rayonnement (direct + diffus) issu des sources thermiques internes.

En pratique, nous n'aurons pas besoin de calculer la fonction de Green, mais seulement ses moments par rapport aux variables angulaires, beaucoup plus faciles à évaluer numériquement. Les moments par rapport à la variable  $\mu'$  figurent déjà dans l'intensité spécifique. Les moments par rapport à  $\mu$  apparaissent en calculant les moments de l'intensité spécifique

$$I_p(\tau) = \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \mu^p d\mu \quad (p \geq 0), \quad (5.30)$$

qui sont les seuls à nous intéresser dans la suite. En principe, la modélisation d'une atmosphère stellaire fait intervenir les moments d'ordre  $p = 0, 1$  ou  $2$ , qui définissent l'intensité moyenne, le flux radiatif et la pression de radiation (Eqs. 2.20, 2.22, 2.23) respectivement :

$$J(\tau) = \frac{1}{2} I_0(\tau), \quad F_r(\tau) = 2\pi I_1(\tau), \quad P_r(\tau) = \frac{2\pi}{c} I_2(\tau). \quad (5.31)$$

En fait, seule l'intensité moyenne interviendra dans notre problème, compte tenu des hypothèses générales de la thèse. Introduisons les moments doubles suivants :

$$G^{(n,p)}(\tau', \tau) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\tau', \mu', \tau, \mu) \mu'^n \mu^p d\mu' d\mu, \quad (5.32)$$

avec  $n$  ou  $p = 0, 1$  ou  $2$ , et substituons l'expression (5.26) de l'intensité spécifique dans (5.30). En remarquant que

$$\int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau}{\mu}\right) \mu^k d\mu = E_{k+2}(\tau_0 - \tau), \quad (5.33)$$

et

$$\int_{-1}^1 \hat{\delta}(\tau' - \tau, \mu) \mu^k d\mu = [\text{sg}(\tau' - \tau)]^k E_{k+1}(|\tau' - \tau|), \quad (5.34)$$

où  $E_k(\tau)$  désigne la fonction exponentielle-intégrale d'ordre  $k \geq 0$

$$E_k(\tau) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \mu^{k-2} d\mu \quad (k \geq 0), \quad (5.35)$$

on obtient l'expression suivante des moments de l'intensité spécifique

$$\begin{aligned} I_p(\tau) &= B_\nu [T(\tau_0)] \left\{ E_{p+2}(\tau_0 - \tau) + \xi E_{p+3}(\tau_0 - \tau) + 2\pi \left[ G^{(1,p)} + \xi G^{(2,p)} \right] (\tau_0, \tau) \right\} \\ &+ \int_0^{\tau_0} \left\{ [\text{sg}(\tau' - \tau)]^p E_{p+1}(|\tau' - \tau|) + 2\pi G^{(0,p)}(\tau', \tau) \right\} S_*(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (5.36)$$

On notera que ces moments sont beaucoup plus faciles à évaluer numériquement que l'intensité elle-même, à cause de l'effet régularisant de l'intégration angulaire sur  $\mu$ , que l'on peut effectuer de façon exacte.

Le calcul des moments doubles de la fonction de Green est un exercice compliqué, sur lequel nous passerons dans cette thèse. Ce calcul nécessite une bonne connaissance des fonctions auxiliaires exprimant la solution de l'équation de transfert dans un milieu plan-parallèle. Les expressions obtenues sont données dans l'annexe C.3. Ces formules sont ensuite insérées dans (5.36), ce qui fait disparaître les termes décrivant le champ direct issu des sources (externes et internes). Cela provient du fait que la fonction de Green du champ diffus a été calculée comme la différence de la fonction de Green du champ total et de celle du champ direct.

Nous donnons directement les expressions obtenues en faisant  $p = 0, 1$  et  $2$  dans la formule générale, ce qui donne l'intensité moyenne, le flux radiatif et la pression de radiation d'après (5.31). Les formules obtenues sont valables en tout point  $\tau$  de l'atmosphère, y compris sur les plans frontière. Mais elles se simplifient sur ces deux plans, à cause des propriétés des fonctions auxiliaires précisées dans l'annexe C.3. Nous donnons pour les trois moments les expressions générales et leurs versions simplifiées sur les deux plans-frontière, ces dernières fournissant d'excellents tests numériques pour les formules donnant le champ intérieur.



### 5.2.2.1 Moment d'ordre 0 : l'intensité moyenne

Sur une couche  $\tau$  quelconque

$$\begin{aligned}
J(\tau) = & B_\nu(T(Z)) \frac{1}{1-\epsilon(\tau)} \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \alpha_0(\tau) \right] [\Phi_1 + \xi \Phi_2](\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) \right. \\
& - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \beta_0(\tau) [\Phi_1 - \xi \Phi_2](\tau, \epsilon(\tau)) \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \xi [\alpha_1(\tau) \Phi_1(\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) + \beta_1(\tau) \Phi_1(\tau, \epsilon(\tau))] \right\} \\
& + \frac{1}{1-\epsilon(\tau)} \int_0^{\tau_0} R_0(\tau', \tau, \epsilon(\tau)) S_*(\tau') d\tau', \tag{5.37}
\end{aligned}$$

et sur les plans-frontière

$$J(0) = \frac{1}{1-\epsilon(0)} \left\{ \frac{1-\epsilon(0)}{2} [\beta_0(0) + \xi \beta_1(0)] B_\nu(T(Z)) + \int_0^{\tau_0} \Phi_0(\tau', \epsilon(0)) S_*(\tau') d\tau' \right\}, \tag{5.38}$$

$$J(\tau_0) = \frac{1}{1-\epsilon(\tau_0)} \left\{ \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} [\alpha_0(\tau_0) + \xi \alpha_1(\tau_0)] B_\nu(T(Z)) + \int_0^{\tau_0} \Phi_0(\tau_0 - \tau', \epsilon(\tau_0)) S_*(\tau') d\tau' \right\}. \tag{5.39}$$

### 5.2.2.2 Moment d'ordre 1 : le flux radiatif

$$\begin{aligned}
F_r(\tau) = & 4\pi B_\nu(T(Z)) \frac{\epsilon(\tau)}{1-\epsilon(\tau)} \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \alpha_0(\tau) \right] [\Phi_2 + \xi \Phi_3](\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) \right. \\
& + \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \beta_0(\tau) [\Phi_2 - \xi \Phi_3](\tau, \epsilon(\tau)) \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \xi [\alpha_1(\tau) \Phi_2(\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) - \beta_1(\tau) \Phi_2(\tau, \epsilon(\tau))] \right\} \\
& - 4\pi \frac{\epsilon(\tau)}{1-\epsilon(\tau)} \int_0^{\tau_0} R_1(\tau', \tau, \epsilon(\tau)) S_*(\tau') d\tau', \tag{5.40}
\end{aligned}$$

et sur les plans-frontière

$$\begin{aligned}
F_r(0) = & 2\pi B_\nu(T(Z)) \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \alpha_0(0) \right] [\beta_1(0) + \xi \beta_2(0)] + \frac{1-\epsilon(0)}{2} \beta_0(0) [\alpha_1(0) + \xi \alpha_2(0)] \right\} \\
& + \frac{4\pi}{1-\epsilon(0)} \int_0^{\tau_0} \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \alpha_0(0) \right] \Phi_1(\tau', \epsilon(0)) \right. \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \beta_0(0) \Phi_1(\tau_0 - \tau', \epsilon(0)) \right\} S_*(\tau') d\tau', \tag{5.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_r(\tau_0) = & 2\pi B_\nu(T(Z)) \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \alpha_0(\tau_0) \right] [\alpha_1(\tau_0) + \xi \alpha_2(\tau_0)] \right. \\
& \left. + \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \beta_0(\tau_0) [\beta_1(\tau_0) + \xi \beta_2(\tau_0)] \right\} \\
& - \frac{4\pi}{1-\epsilon(\tau_0)} \int_0^{\tau_0} \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \alpha_0(\tau_0) \right] \Phi_1(\tau_0 - \tau', \epsilon(\tau_0)) \right. \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \beta_0(\tau_0) \Phi_1(\tau', \epsilon(\tau_0)) \right\} S_*(\tau') d\tau'. \tag{5.42}
\end{aligned}$$

### 5.2.2.3 Moment d'ordre 2 : la pression de radiation

$$\begin{aligned}
P_r(\tau) = & \frac{4\pi}{c} B_\nu(T(Z)) \frac{\epsilon(\tau)}{1-\epsilon(\tau)} \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \alpha_0(\tau) \right] [\Phi_3 + \xi \Phi_4](\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) \right. \\
& - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \beta_0(\tau) [\Phi_3 - \xi \Phi_4](\tau, \epsilon(\tau)) \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(\tau)}{2} \xi [\alpha_1(\tau) \Phi_3(\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) + \beta_1(\tau) \Phi_3(\tau, \epsilon(\tau))] \right\} \\
& + \frac{4\pi}{c} \frac{\epsilon(\tau)}{1-\epsilon(\tau)} \int_0^{\tau_0} R_2(\tau', \tau, \epsilon(\tau)) S_*(\tau') d\tau', \tag{5.43}
\end{aligned}$$

et sur les plans-frontière

$$\begin{aligned}
P_r(0) = & \frac{2\pi}{c} B_\nu(T(Z)) \left\{ \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \alpha_0(0) \right] [\beta_2(0) + \xi \beta_3(0)] + \frac{1-\epsilon(0)}{2} \beta_0(0) [\alpha_2(0) + \xi \alpha_3(0)] \right. \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \xi [\alpha_1(0) \beta_2(0) - \beta_1(0) \alpha_2(0)] \right\} \\
& - \frac{4\pi}{c} \frac{1}{1-\epsilon(0)} \int_0^{\tau_0} \left\{ \frac{1-\epsilon(0)}{2} \alpha_1(0) \Phi_1(\tau', \epsilon(0)) + \frac{1-\epsilon(0)}{2} \beta_1(0) \Phi_1(\tau_0 - \tau', \epsilon(0)) \right. \\
& - \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \alpha_0(0) \right] \Phi_2(\tau', \epsilon(0)) \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(0)}{2} \beta_0(0) \Phi_2(\tau_0 - \tau', \epsilon(0)) \right\} S_*(\tau') d\tau', \tag{5.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_r(\tau_0) = & \frac{2\pi}{c} B_\nu(T(Z)) \left\{ \frac{2}{3} - \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \alpha_0(\tau_0) \right] [\alpha_2(\tau_0) - \xi \alpha_3(\tau_0)] \right. \\
& - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \beta_0(\tau_0) [\beta_2(\tau_0) - \xi \beta_3(\tau_0)] \\
& \left. + \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \xi [\alpha_1(\tau_0) \alpha_2(\tau_0) - \beta_1(\tau_0) \beta_2(\tau_0)] \right\} \\
& - \frac{4\pi}{c} \frac{1}{1-\epsilon(\tau_0)} \int_0^{\tau_0} \left\{ \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \alpha_1(\tau_0) \Phi_1(\tau_0 - \tau', \epsilon(\tau_0)) + \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \beta_1(\tau_0) \Phi_1(\tau', \epsilon(\tau_0)) \right. \\
& - \left[ 1 - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \alpha_0(\tau_0) \right] \Phi_2(\tau_0 - \tau', \epsilon(\tau_0)) \\
& \left. - \frac{1-\epsilon(\tau_0)}{2} \beta_0(\tau_0) \Phi_2(\tau', \epsilon(\tau_0)) \right\} S_*(\tau') d\tau', \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Ces formules contiennent les moments  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  des fonctions  $X$  et  $Y$  (dites parfois de Chandrasekhar), qui sont des fonctions auxiliaires classiques de la théorie du transfert dans les milieux plan-parallèles finis [28, 91]. Leur mode de calcul est précisé dans l'annexe C.3. Ces coefficients dépendent de  $\epsilon = \epsilon(\tau)$ , d'où leur dépendance par rapport à  $\tau$ .

On trouve également dans les relations (5.37)-(5.45) les fonctions auxiliaires  $\Phi_n$  et  $R_n$ , qui généralisent pour  $n \geq 1$  deux fonctions également classiques des milieux plan-parallèles : la fonction résolvante  $\Phi$ , dite de Sobolev, et le noyau résolvant  $R$  [109, 91]. On a en effet  $\Phi_0 = \Phi$  et  $R_0 = R$ , la définition et le mode de calcul des  $\Phi_n$  et  $R_n$  pour  $n$  positif quelconque étant précisés dans l'annexe C.3. Ces fonctions dépendent de la variable  $\tau$  de façon explicite, mais aussi implicite via le paramètre  $\epsilon(\tau)$ . D'où la notation  $\Phi_n(\tau, \epsilon(\tau))$  et  $R_n(\tau', \tau, \epsilon(\tau))$ .

Les formules (5.37)-(5.45) sont celles que nous utiliserons pour nos calculs de transfert du chapitre 6.

## 5.2.3 Les équations couplées à l'équation de transfert

### 5.2.3.1 Couplage ET-ECE

Ce couplage apparaît dans la dépendance des coefficients volumiques de l'ET avec la fdv des électrons. De manière précise :

- le coefficient d'émission  $fb$  est proportionnel à la fdv des électrons calculée pour la vitesse d'un électron capable d'émettre un photon de fréquence  $\nu$  en se recombinant :

$$E_{fb}(z, \nu) = \sum_i^N C_i(z, \nu) f_e(z, \zeta_{i+}(\nu)) , \quad (5.46)$$

- les coefficients d'absorption et d'émission  $ff$  sont de la forme

$$K_{ff}(z, \nu) = \int_0^{+\infty} A(z, v_e, \nu) f_e(z, v_e) dv_e , \quad (5.47)$$

$$E_{ff}(z, \nu) = \int_0^{+\infty} B(z, v_e, \nu) f_e(z, \zeta_{ff}(v_e, \nu)) dv_e . \quad (5.48)$$

Il en résulte que l'opacité  $\chi$ , la fonction source  $S_*$  et le paramètre de destruction des photons  $\epsilon$  dépendent de la fdv des électrons, ainsi que la variable de profondeur optique  $\tau$ , étroitement liée à la variable de profondeur géométrique  $z$ .

### 5.2.3.2 Couplage ET-ES

Les populations  $n_i$  apparaissent dans les coefficients d'absorption et d'émission de l'ET, ainsi que dans la composante Rayleigh du coefficient de diffusion.

## 5.3 L'équation cinétique des électrons

### 5.3.1 Méthode de résolution

A partir de l'expression (Eq. 3.156), nous détaillons la dépendance (entre crochets) de chacun des termes selon  $f_e$  et  $n_e$ , c'est à dire selon la fdv  $F_e = n_e f_e$  solution de l'ECE, alors que  $f_e$  est solution de l'ECE conjointement à la condition de normalisation (1.2) de  $f_e$  si la densité électronique  $n_e$  est donnée. Alors :

$$F_e(z, v) = n_e(z) f_e(z, v) = \frac{\nu_e(v) n_e(z) f_e^M(z, v) + \Sigma_+[n_e f_e](z, v)}{\nu_e(v) + \Sigma_-[n_e f_e](z, v)} . \quad (5.49)$$

Dans (Eq. 5.49), nous avons regroupé les termes de façon à ne pas créer d'erreurs d'arrondi par différence de termes positifs, comme il y aurait pu en avoir dans (Eq. 3.156). La dépendance de  $\Sigma_-$  selon  $F_e$  vient du processus  $ff$ , et la dépendance de  $\Sigma_+$  selon  $F_e$  provient de la plupart des termes, cette dépendance étant linéaire excepté pour le processus de recombinaison collisionnelle. Nous avons affaire à une équation non-linéaire en  $F_e$ , qui peut difficilement être résolue avec les algorithmes numériques habituels (équation de Volterra ou de Fredholm en linéarisant l'équation), car ces procédés font appel à des développements sur une base de fonctions la plupart du temps polynômiales (Legendre, Chebychev) qui ne convient pas ici à cause de la forte variation de valeurs de la fdv (qui tend rapidement vers zéro avec la vitesse). Nous allons donc résoudre cette équation par itération :

$$F_e^{(n+1)}(z, v) = \frac{\nu_e(v) n_e^{(n)}(z) f_e^M[T^{(n)}(z)](z, v) + \Sigma_+[n_e^{(n)} f_e^{(n)}](z, v)}{\nu_e(v) + \Sigma_-[n_e^{(n)} f_e^{(n)}](z, v)} , \quad (5.50)$$

où  $F_e^{(n)}(z, v) = n_e^{(n)}(z) f_e^{(n)}(z, v)$  est la fdv calculée à l'itéré  $n$ . De plus  $T^{(n)}$  est la température cinétique de la fdv  $f_e^{(n)}$ . Après avoir calculé l'itéré  $n+1$  par (Eq. 5.50), nous déduisons de  $F_e^{(n+1)}$  une nouvelle densité  $n_e^{(n+1)}$  qui nous permet de calculer  $f_e^{(n+1)}$ , et une nouvelle température  $T^{(n+1)}$  qui seront injectées dans (Eq. 5.50) pour calculer l'itéré suivant, jusqu'à convergence des quantités  $n_e^{(n)}$ ,  $T_e^{(n)}$  et  $f_e^{(n)}$  à une valeur relative donnée  $\varepsilon$ , que nous avons fixée à  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Cette convergence est définie par l'écart relatif d'un itéré à l'autre. Nous stoppons l'itération à l'itéré  $n+1$  si :

$$\forall(z, v), \left| \frac{F_e^{(n+1)}(z, v)}{F_e^{(n)}(z, v)} - 1 \right| \leq \varepsilon . \quad (5.51)$$

Nous avons vérifié que lorsque la fdv converge d'un itéré à l'autre avec un écart relatif donné, elle est solution de l'ECE avec la même précision. Cette vérification est importante, car notre critère de convergence pourrait ne pas être significatif en cas de convergence lente de la fdv vers la solution de l'ECE. En pratique, ce critère (Eq. 5.51) est atteint au bout d'un vingtaine d'itérés.

Dans ce processus numérique, il est nécessaire de développer la fdv, qui peut être polynomiale après transformation pour interpoler une fonction variant peu avec la vitesse. Cette fonction  $h(v)$  est définie par :

$$f_e(v) = f_e^M(v) e^{h_e(v)}. \quad (5.52)$$

Nous ne pouvons pas écrire (Eq. 5.49) en fonction de  $h_e(v)$  seulement. Cette fonction est introduite ici uniquement dans le but de stabiliser et de simplifier la résolution numérique. Parmi le choix possible de base de polynômes pour interpoler  $h_e(v)$ , nous avons choisi après essais une base qui ne présentait pas d'oscillations, afin d'éviter les amplifications dues au caractère non linéaire de cette équation. L'interpolation trapézoïdale est trop grossière, alors nous avons choisi des polynômes de Hermite, dont l'avantage est d'être monotones entre deux noeuds successifs de l'interpolation.

Au premier itéré au point  $z$ , il est nécessaire de fournir la valeur de la température  $T(z)$  et la densité des électrons  $n_e(z)$ . La fdv initiale est une maxwellienne à cette température. En principe, l'ECE est censée fournir les inconnues  $n_e$  et  $T$ , qui sont des moments de la fdv  $F_e$ . En pratique, nous observons que le terme de collisions élastiques domine la variation de ces paramètres, qui varient ainsi très peu d'un itéré à l'autre. Ainsi, l'ECE est capable de nous fournir la température  $T$ . Par contre, l'ECE ne doit pas fournir la densité des électrons  $n_e$ , car cette grandeur est donnée par l'EC  $n_e = n_+$ . Afin de rendre ces 2 équations compatibles, nous pourrions inclure l'EC dans l'ECE afin d'éliminer  $n_e$  de l'ECE (remplacée par  $n_+$  dans le processus de recombinaison collisionnelle), et l'ECE fournirait  $f_e$  au lieu de  $F_e$ . Comme l'ECE et l'EC ne sont pas forcément compatibles au point de fournir une solution mathématique commune, et que l'ECE est non linéaire en  $n_e$ , nous préférons résoudre l'ECE pour  $F_e$ , puis renormaliser la fdv afin que sa densité soit la densité initiale. Afin de faire converger l'ECE vers sa solution, nous laissons  $n_e^{(n)}$  et  $T^{(n)}$  évoluer (lentement) d'un itéré à l'autre, puis nous renormalisons la fdv  $f_e$  à l'arrêt des itérés. Si l'itération est stoppée à l'itéré  $N$ , alors la renormalisation est :

$$f_e(v) = f_e^M[T](v) e^{h_e(v)} = \frac{1}{n_e^{(N)}} F_e^{(N)}(v) = f_e^M[T^{(N)}](v) e^{h_e^{(N)}(v)}, \quad (5.53)$$

impliquant  $T = T^{(N)}$  et  $h_e(v) = h_e^{(N)}(v)$ . Nous vérifierons lors des calculs que la température varie peu au cours de l'itération, de façon à ce que ce calcul de la fdv soit cohérent avec le modèle d'atmosphère à température donnée que nous avons choisi de résoudre.

### 5.3.2 L'équation de l'équilibre radiatif (ER)

La température de l'atmosphère stellaire est usuellement déterminée en résolvant l'équation de l'équilibre radiatif

$$\int_0^{+\infty} \kappa(z, \nu) J(z, \nu) d\nu = \int_0^{+\infty} E(z, \nu) d\nu, \quad (5.54)$$

qui exprime l'égalité des énergies absorbées et émises par chaque unité de volume de matière. Cette équation traduit la conservation de l'énergie quand on se place du point de vue du champ de rayonnement, supposé être le seul à transporter de l'énergie (conduction et convection négligeables) [69].

Nous rappelons le lien entre cette équation (Eq. 5.54) et les équations cinétiques. L'équation d'énergie pour chaque type  $p$  de particule matérielle a la forme

$$\int_0^{+\infty} \Sigma_p(z, v) \frac{1}{2} m_p v^2 4\pi v^2 dv = 0, \quad (5.55)$$

où  $\Sigma_p(z, v)$  désigne le terme de source de l'équation cinétique du type  $p$  (dont le membre de gauche est supposé nul). Ces deux façons de traduire la conservation de l'énergie sont équivalentes, car la somme des équations (5.54) et (5.55) (pour  $p =$  atomes, protons et électrons) donne  $0 = 0$  [78]. L'équation (5.55) montre que les termes de collision élastiques des équations cinétiques ont une contribution nulle à l'ER.

Nous étudions dans ce mémoire un modèle d'atmosphère à température donnée et constante, alors nous ne tiendrons pas compte de cette équation.

### 5.3.3 Couplage avec l'équation de transfert

Le champ radiatif apparaît dans les termes  $\Sigma_{bfb}$  et  $\Sigma_{ff}$ , sous la forme de l'intensité moyenne  $J$ .

## 5.4 Les équations de l'équilibre statistique

Les équations de l'équilibre statistique

$$\sum_{j \neq i} n_j(z) P_{ji}(z) = n_i(z) \sum_{j \neq i} P_{ij}(z), \quad (5.56)$$

sont linéairement dépendantes : on obtient  $0 = 0$  en sommant ces équations sur  $i$ . Le déterminant des coefficients est donc nul, ce qui assure l'existence d'une solution non triviale au système (homogène). Pour résoudre ce système, il faut lui rajouter *deux* équations supplémentaires. En effet, si  $N$  désigne le nombre d'états liés de l'atome d'hydrogène, le système contient  $N + 1$  équations, dont  $N$  sont linéairement indépendantes, et  $N + 2$  inconnues ( $n_i$ ,  $n_+$  et  $n_e$ ). Les deux équations supplémentaires ont été écrites à la section 5.1 : ce sont l'équation de conservation de la charge électrique :  $n_e = n_+$  et la condition de conservation dans le temps de la densité de particules lourdes  $n_0$ .

La masse volumique ou la densité de particules lourdes sont des invariants collisionnels, contrairement à la densité particulaire totale  $n = n_0 + n_e$ , qui n'est pas conservée par le processus d'ionisation et son inverse. C'est donc  $\rho$  ou  $n_0$ , et non la densité totale  $n$ , qui nous servira de donnée additionnelle pour résoudre les équations de l'équilibre statistique à chaque étape de la solution itérative de notre problème.

Le système (Eq. 5.56) est un système linéaire en les densités des particules lourdes  $n_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) et  $n_+$ , et non linéaire en la densité des électrons  $n_e$ , cachée dans les coefficients  $P_{ij}(z)$ . La non-linéarité en  $n_e$  provient du processus de recombinaison collisionnelle. A cause de cette non-linéarité en une des inconnues, nous résolvons ce système d'équations par itération : nous profitons de la propriété de linéarité de ce système des  $N + 1$  équations (Eqs. 5.56, 5.2) qui permettent de connaître facilement les densités  $\{n_i, n_+\}$  pour une valeur  $n_e$  donnée, puis nous déterminons une nouvelle valeur de  $n_e = n_+$  par l'équation (Eq. 5.1) de conservation de la charge (EC), et nous recommençons un nouvel itéré en résolvant le système linéaire avec cette nouvelle valeur de  $n_e$ , jusqu'à convergence du système  $\{n_i, n_+, n_e\}$ . Le critère de convergence est du même type que le critère d'arrêt des itérés pour l'ECE (Eq. 5.51). Nous garderons la même valeur de  $\varepsilon$  et la convergence portera sur la densité électronique  $n_e$ , les autres densités ayant convergé lorsque le critère sur  $n_e$  est satisfait.

Nous écrivons par la suite quelques considérations sur ce système d'équations. Les équations de l'équilibre statistique permettent de calculer le rapport des populations  $n_i$  et  $n_j$  de deux états (discrets ou continus) de l'atome d'hydrogène. Elles s'écrivent en effet, pour le type  $i$

$$n_i \sum_{k \neq i} P_{ik} = \sum_{k \neq i} n_k P_{ki} = \sum_{k \neq i, j} n_k P_{ki} + n_j P_{ji}, \quad (5.57)$$

et pour le type  $j$

$$n_j \sum_{k \neq j} P_{jk} = \sum_{k \neq j} n_k P_{kj} = n_i P_{ij} + \sum_{k \neq i, j} n_k P_{kj}, \quad (5.58)$$

système en  $n_i, n_j$  qui conduit au rapport  $n_j/n_i$  suivant [69] :

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{\beta_{ij} C_{ij} + R_{ij}}{\alpha_{ij} C_{ji} + R_{ji}}, \quad (5.59)$$

avec

$$\alpha_{ij} = \frac{a_4 + a_2 a_3}{a_2 + a_4}, \quad \beta_{ij} = \frac{a_2 + a_1 a_4}{a_2 + a_4}, \quad (5.60)$$

et

$$a_1 = 1 + \frac{1}{C_{ij}} \sum_{k \neq i, j} P_{ik}, \quad (5.61)$$

$$a_2 = \sum_{k \neq i, j} n_k P_{ki}, \quad (5.62)$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{C_{ji}} \sum_{k \neq i, j} P_{jk}, \quad (5.63)$$

$$a_4 = \sum_{k \neq i, j} n_k P_{kj}. \quad (5.64)$$

Les coefficients  $a_1$  à  $a_4$  décrivent les processus peuplant (au sens algébrique) les niveaux  $i$  et  $j$  à partir des niveaux (discrets ou continus)  $k \neq i, j$ .

A l'ETL, les processus collisionnels dominent les processus radiatifs et on peut remplacer les  $P_{kl}$  par des  $C_{kl}$  dans (5.61)-(5.64). La relation (4.25), valable pour toutes les transitions  $k \rightleftharpoons l$ , montre alors que  $a_4(a_1 - 1) = a_2(a_3 - 1)$ , d'où  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ . Si on suppose que les atomes n'ont qu'un ou deux niveaux d'énergie (sans continuum),  $a_1 = a_3 = 1$ , et  $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 1$ .

On a donc obtenu les valeurs particulières suivantes :

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad (\text{ETL}), \quad \alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad (N = 1, N = 2 \text{ sans continu}). \quad (5.65)$$

### 5.4.1 Couplage avec l'ET

Voir les taux radiatifs  $R_{ij}$  dans le cas  $bb$  (Eqs. 4.26-4.29) et  $bf$ - $fb$  (Eqs. 4.32, 4.33).

### 5.4.2 Couplage avec l'ECE

Voir les taux collisionnels  $C_{ij}$  dans le cas  $bb$  (Eq. 4.15) et dans le cas  $bf$ - $fb$  (Eqs. 4.20-4.22).

## 5.5 Résolution de l'équation de transfert couplée aux ES

La résolution itérative de ce système d'équations ne paraît pas poser de difficulté majeure lorsqu'on résout l'ET dans un domaine de fréquence où l'opacité varie lentement (dans le *continu*), mais la convergence est très lente dans le cas contraire, c'est-à-dire dans une raie spectrale. Il faut alors contraindre l'ET par les équations de l'équilibre statistique, une procédure bien connue que nous allons rappeler.

On suppose que l'opacité est dominée par la contribution d'une transition  $bb$  particulière  $i \rightleftharpoons j$  avec  $i < j$ . Pour faire apparaître la contribution de cette transition aux coefficients volumiques de l'ET, on écrit ces derniers sous la forme

$$K(z, \nu) = \hat{K}_{ij}(z) \Phi_{ij}(z, \nu) + K_c(z, \nu), \quad (5.66)$$

$$E(z, \nu) = \hat{E}_{ji}(z) \Phi_{ij}(z, \nu) + E_c(z, \nu), \quad (5.67)$$

$$\kappa(z, \nu) = \hat{\chi}_{ij}(z) \Phi_{ij}(z, \nu) + \kappa_c(z, \nu), \quad (5.68)$$

$$\chi(z, \nu) = \hat{\chi}_{ij}(z) \Phi_{ij}(z, \nu) + \chi_c(z, \nu), \quad (5.69)$$

les coefficients d'absorption et d'émission dans la transition résultant de (2.29) et (2.39)

$$\hat{K}_{ij}(z) = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} B_{ij} n_i(z), \quad \hat{E}_{ji}(z) = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} A_{ji} n_j(z) \quad (5.70)$$

et l'opacité de (2.9, 2.10)

$$\hat{\chi}_{ij}(z) = \left[ 1 - \frac{c^2}{2h\nu_{ij}^3} \frac{\hat{E}_{ji}(z)}{\hat{K}_{ij}(z)} \right] \hat{K}_{ij}(z). \quad (5.71)$$

Les termes affectés de l'indice  $c$  dans le membre de droite des relations (5.66)-(5.69) représentent la contribution du *continu*, c'est-à-dire celle de toutes les transitions possibles ( $bb$ ,  $bf$ - $fb$ ,  $ff$ ), sauf

$i \rightleftharpoons j$ . Les deux derniers coefficients s'expriment en terme des deux premiers par les relations suivantes :

$$\kappa_c(z, \nu) = K_c(z, \nu) - \frac{c^2}{2h\nu^3} E_c(z, \nu), \quad (5.72)$$

$$\chi_c(z, \nu) = \kappa_c(z, \nu) + \sigma(z, \nu), \quad (5.73)$$

étant entendu que le coefficient de diffusion *vraie*  $\sigma$  ne comprend que la composante Thomson lorsque  $i = 1$  et  $j = 2$  (car la diffusion Rayleigh sur les atomes d'hydrogène au niveau fondamental coïncide avec la diffusion dans la raie lorsque  $\nu \rightarrow \nu_{12}$ ).

En outre, on introduit la fonction source dans le continu

$$S_c(z, \nu) = \frac{E_c(z, \nu)}{\chi_c(z, \nu)}, \quad (5.74)$$

et le rapport  $r_{ij}$  de l'opacité dans le continu à l'opacité dans la transition (parfois noté  $\beta$ )

$$r_{ij}(z, \nu) = \frac{\chi_c(z, \nu)}{\hat{\chi}_{ij}(z)}, \quad (5.75)$$

qui permet d'écrire la relation (5.69) sous la forme

$$\chi(z, \nu) = \hat{\chi}_{ij}(z) [\Phi_{ij}(z, \nu) + r_{ij}(z, \nu)]. \quad (5.76)$$

Les notations étant fixées, le calcul de la fonction source  $S_*$  peut s'effectuer en partant de sa définition  $S_* = E/\chi$ .

### 5.5.1 Calcul de la fonction source $S_*$

Le rapport  $E/\chi$  fait apparaître le rapport  $\hat{E}_{ji}/\hat{\chi}_{ij}$  dans la transition, donc le rapport des populations  $n_i$  et  $n_j$  d'après (5.70). Ce dernier a été calculé à la section 5.4. En introduisant le rapport  $\epsilon_{ji}$  des taux de transitions collisionnelles et radiatives spontanées

$$\epsilon_{ji}(z) = \frac{C_{ji}(z)}{A_{ji}}, \quad (5.77)$$

il vient d'après (5.59), (4.17) et (C.3)

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{\beta_{ij}\epsilon_{ji}B_{\nu_{ij}}^w + \bar{J}_{ij}}{\alpha_{ij}C_{ji} + A_{ji}(1 + \lambda_{ji})} B_{ij}, \quad (5.78)$$

donc

$$\frac{\hat{E}_{ji}}{\hat{K}_{ij}} = \frac{A_{ji} n_j}{B_{ij} n_i} = \frac{\beta_{ij}\epsilon_{ji} + \bar{J}_{ij}/B_{\nu_{ij}}^w}{\alpha_{ij}\epsilon_{ji} + 1 + \lambda_{ji}} B_{\nu_{ij}}^w, \quad (5.79)$$

où  $B_{\nu_{ij}}^w$  est la fonction de Wien à la fréquence centrale de la raie.

En utilisant la relation de réciprocité entre les coefficients  $A_{ji}$  et  $B_{ij}$  et la définition (C.2, C.3) du paramètre  $b_{ij}$ , on obtient ce dernier sous la forme

$$\frac{1}{b_{ij}} = \theta_{ij} \frac{n_j}{n_i} = \frac{\beta_{ij}\epsilon_{ji} + \bar{J}_{ij}/B_{\nu_{ij}}^w}{\alpha_{ij}\epsilon_{ji} + 1 + \lambda_{ji}}. \quad (5.80)$$

Le premier terme au numérateur de (5.80) décrit l'émission thermique des atomes, c'est-à-dire le rayonnement qu'ils émettent par désexcitation après avoir été excités par un processus collisionnel. Le deuxième terme décrit le rayonnement émis au cours d'une désexcitation suivant une excitation radiative.

A l'ETL, les processus collisionnels dominent les processus radiatifs et  $\epsilon_{ji} \gg 1$ . Comme par ailleurs  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ , la relation (5.80) redonne bien (C.1), soit  $b_{ij} = 1$ .

La fin du calcul de la fonction source  $S_*$  est sans difficulté : nous nous contenterons d'en donner le résultat. On remplace  $E$  et  $\chi$  par leur expression (5.67) et (5.76) dans la relation  $S_* = E/\chi$ , et on utilise (5.71) et (5.79). Il vient

$$S_*(z, \nu) = S_{ij}^*(z, \nu) + [1 - \epsilon_{ij}^*(z)] \frac{\Phi_{ij}(z, \nu)}{\Phi_{ij}(z, \nu) + r_{ij}(z, \nu)} \int_0^{+\infty} \Phi_{ij}(z, \nu') J(z, \nu') d\nu', \quad (5.81)$$

où  $S_{ij}^*$  désigne la composante *thermique* de la fonction source

$$S_{ij}^*(z, \nu) = \frac{\Phi_{ij}(z, \nu) \epsilon_{ij}^*(z) \mathcal{P}_{ij}(z) + r_{ij}(z, \nu) S_c(z, \nu)}{\Phi_{ij}(z, \nu) + r_{ij}(z, \nu)}. \quad (5.82)$$

Le premier terme dans le membre de droite de (5.81) décrit l'émission spontanée d'atomes excités par des processus collisionnels, et le deuxième terme l'émission d'atomes excités par des processus radiatifs.

Les fonctions inconnues qui apparaissent dans ces expressions sont la probabilité de destruction (collisionnelle) des photons dans la raie  $\epsilon_{ij}^*$  et la fonction  $\mathcal{P}_{ij}$  décrivant l'émission thermique des atomes.

Le premier coefficient est bien connu, ainsi que son rôle d'indicateur d'écart à l'ETL :  $\epsilon_{ij}^* \ll 1$  loin de l'ETL et  $\epsilon_{ij}^* \rightarrow 1$  à l'ETL. Son expression est la suivante :

$$\epsilon_{ij}^*(z) = 1 - \varpi_{ij}^*(z) = \frac{\epsilon'_{ij}(z)}{1 + \epsilon'_{ij}(z)}, \quad (5.83)$$

avec

$$\epsilon'_{ij}(z) = \left\{ \frac{\alpha_{ij}(z)}{\beta_{ij}(z)} - \exp\left(-\frac{h\nu_{ij}}{kT(z)}\right) \right\} \beta_{ij}(z) \epsilon_{ji}(z). \quad (5.84)$$

Ce paramètre est de l'ordre de grandeur de  $\epsilon_{ji}$  et peut donc prendre des valeurs quelconques suivant l'importance relative des transitions collisionnelles et radiatives spontanées dans l'atmosphère, d'où son rôle d'indicateur d'écart à l'ETL ( $\epsilon'_{ij} \rightarrow +\infty$  lorsque les processus collisionnels dominent, et  $\epsilon'_{ij} \rightarrow 0$  dans le cas contraire), qui entraîne celui de  $\epsilon_{ji}^*$  déjà mentionné. Ce dernier coefficient, couramment noté  $\epsilon$  en théorie de la formation des raies spectrales, à un complément à l'unité  $\varpi_{ij}^* = 1 - \epsilon_{ij}^*$  qui s'interprète comme un albédo, c'est-à-dire un coefficient renseignant sur le pouvoir *diffusant* de l'atmosphère dans la transition  $i \rightleftharpoons j$ . Typiquement,  $\epsilon_{ij}^* \leq 10^{-4}$  et  $\varpi_{ij}^* \geq 0.9999$  dans une raie forte.

À l'ETL,  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$  et

$$\epsilon'_{ij}(z) = \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ij}}{kT(z)}\right) \right\} \beta_{ij}(z) \epsilon_{ji}(z) \quad (\text{ETL}). \quad (5.85)$$

L'autre fonction  $\mathcal{P}_{ij}$  figurant dans (5.82) a pour expression

$$\mathcal{P}_{ij}(z) = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{\alpha_{ij}(z)}{\beta_{ij}(z)} \exp(h\nu_{ij}/kT(z)) - 1}. \quad (5.86)$$

On retrouve la fonction de Planck (à la fréquence centrale de la raie) pour un modèle d'atome à deux niveaux liés sans continu ( $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 1$ ) ou à l'ETL ( $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ ).

### 5.5.2 L'équation de transfert dans la raie

On l'obtient en substituant l'expression (5.81) de la fonction source  $S_* = E/\chi$  dans l'ET (2.11, 2.12), qui devient

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z}(z, \mu, \nu) = \chi(z, \nu) \left[ I(z, \mu, \nu) - S_{ij}^*(z, \nu) - \int_0^{+\infty} R_{ij}^*(z, \nu', \nu) J(z, \nu') d\nu' \right], \quad (5.87)$$

où  $S_{ij}^*$  est donné par (5.82) et  $R_{ij}^*$  décrit la redistribution des photons en fréquence :

$$R_{ij}^*(z, \nu', \nu) = [1 - \epsilon_{ij}^*(z)] \frac{\Phi_{ij}(z, \nu') \Phi_{ij}(z, \nu)}{\Phi_{ij}(z, \nu) + r_{ij}(z, \nu)} + [1 - \epsilon(z, \nu)] \delta(\nu' - \nu). \quad (5.88)$$

Cette fonction, qui n'est pas une fonction de redistribution au sens habituel (elle n'est pas normalisée), comprend une composante *diffusion dans la transition* et une composante *diffusion vraie* généralement négligeable par rapport à la première.

Les conditions aux limites sont (2.15)-(2.17).



### 5.5.3 Le problème monochromatique associé

Nous ferons au chapitre suivant l'hypothèse des raies grises, qui consiste à adopter le profil rectangulaire de Milne décrit dans l'annexe A (section A.1.2). Avec ce profil, dont nous rappelons la définition

$$\Phi_{ij}^M(z, \nu) = \frac{1}{\Delta\nu_{ij}(z)} \times \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu - \nu_{ij}| < \frac{1}{2}\Delta\nu_{ij}(z) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (5.89)$$

où  $\Delta\nu_{ij}(z)$  est la largeur Doppler de la raie en  $z$ , la redistribution en fréquence des photons est équiprobable à toutes les fréquences, ce qui entraîne que le champ radiatif est indépendant de la fréquence dans la raie (si on néglige la variation avec la fréquence des sections efficaces des processus continus sur la largeur de la raie). Nous allons voir que cette circonstance simplifie considérablement l'écriture de l'ET (5.87), puisqu'elle retrouve la forme mathématique des équations modélisant la diffusion *monochromatique* des photons.

L'intensité spécifique étant indépendante de la fréquence dans le domaine  $(\nu_{ij} - \Delta\nu_{ij}/2, \nu_{ij} + \Delta\nu_{ij}/2)$ , on peut écrire l'ET dans ce domaine en se plaçant à la fréquence centrale  $\nu = \nu_{ij}$ , et remplacer  $J(z, \nu')$  par  $J(z, \nu_{ij})$  dans l'intégrale figurant dans (5.87). Cette dernière devient alors, d'après (5.88)

$$\int_0^{+\infty} R_{ij}^*(z, \nu', \nu_{ij}) J(z, \nu') d\nu' = [1 - \epsilon_{ij}^*(z)] \frac{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij})}{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij}) + r_{ij}(z, \nu_{ij})} + 1 - \epsilon(z, \nu_{ij}). \quad (5.90)$$

Or, il résulte de (2.13) et (5.76) que

$$1 - \epsilon(z, \nu_{ij}) = \frac{\sigma(z, \nu_{ij})}{\chi(z, \nu_{ij})} = \frac{\sigma(z, \nu_{ij})/\hat{\chi}_{ij}(z)}{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij}) + r_{ij}(z, \nu_{ij})}. \quad (5.91)$$

Le membre de droite de (5.90) peut donc s'écrire sous la forme  $1 - \tilde{\epsilon}_{ij}(z)$ , avec

$$\tilde{\epsilon}_{ij}(z) = 1 - \varpi_{ij}(z) = \frac{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij})\epsilon_{ij}^*(z) + \kappa_c(z, \nu_{ij})/\hat{\chi}_{ij}(z)}{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij}) + \chi_c(z, \nu_{ij})/\hat{\chi}_{ij}(z)}. \quad (5.92)$$

Ce paramètre de destruction des photons est bien strictement compris entre 0 et 1 car  $0 < \epsilon_{ij}^* < 1$  et  $0 < \kappa_c < \chi_c$ . De plus, il est très proche de  $\epsilon_{ij}^*$  dans les raies où  $\kappa_c < \chi_c \ll \hat{\chi}_{ij}$  (coefficient  $r_{ij}$  petit).

Pour un paramètre défini ainsi, l'équation de transfert à la fréquence centrale de la raie a la même forme mathématique que dans le continu

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z}(z, \mu, \nu_{ij}) = \chi(z, \nu_{ij}) [I(z, \mu, \nu_{ij}) - S_{ij}^*(z, \nu_{ij}) - (1 - \tilde{\epsilon}_{ij}(z)) J(z, \nu_{ij})], \quad (5.93)$$

sa fonction source thermique  $S_{ij}^*$  étant obtenue en remplaçant  $\nu$  par  $\nu_{ij}$  dans (5.82), qui devient

$$S_{ij}^*(z, \nu_{ij}) = \frac{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij})\epsilon_{ij}^*(z)\mathcal{P}_{ij}(z) + E_c(z, \nu_{ij})/\hat{\chi}_{ij}(z)}{\Phi_{ij}^M(z, \nu_{ij}) + \chi_c(z, \nu_{ij})/\hat{\chi}_{ij}(z)}, \quad (5.94)$$

où  $\epsilon_{ij}^*(z)$  est donné par (5.83, 5.84) et  $\mathcal{P}_{ij}(z)$  par (5.86).

On retrouve bien la forme de l'ET (2.11, 2.12), ou la forme (5.18, 5.19) en introduisant l'échelle de profondeur optique (5.16), soit

$$\tau(z, \nu_{ij}) = \int_0^z \chi(z', \nu_{ij}) dz' = \int_0^z \hat{\chi}_{ij}(z') [\Phi_{ij}^M(z', \nu_{ij}) + r_{ij}(z', \nu_{ij})] dz'. \quad (5.95)$$

Les conditions aux limites sont (5.20)-(5.23) avec  $\nu = \nu_{ij}$ .

La solution vue à la section 5.2.2 s'applique lorsqu'on néglige la variation, avec la profondeur optique, du paramètre de destruction des photons  $\tilde{\epsilon}_{ij}$ , ce que nous ferons au chapitre 6 suivant.

## 5.6 La méthode de résolution du problème global

La présente description est limitée au cas où la masse volumique et la température sont constantes, qui est le cas traité au chapitre suivant. Lorsque  $\rho$  et  $T$  sont constants, nous devons résoudre l'équation de transfert, les équations de l'équilibre statistique et l'équation cinétique des électrons de façon itérative. Les équations de l'équilibre statistique sont complétées par la condition de neutralité électrique de l'atmosphère  $n_+ = n_e$  et par l'équation de conservation de la densité de particules lourdes  $n_0$ .

Les données sont, outre  $\rho$  et  $T$ , la profondeur géométrique  $Z$  de l'atmosphère, qui est choisie de telle sorte que le rayonnement pénétrant par la couche  $z = Z$  soit planckien de température  $T$ .

L'itération, représentée par la figure (Fig. 5.1), se déroule de la façon suivante :

1. (CI) conditions initiales. Les populations sont calculées à l'équilibre de Boltzmann-Saha, avec les contraintes  $n_+ = n_e$  et  $\sum n_i + n_+ = n_0$  (voir Eqs. C.7, C.11). La fdv des électrons est maxwellienne de température  $T$ .
2. Définition d'une échelle de profondeur optique pour des populations données et une fdv des électrons donnée.
3. (ET) résolution de l'équation de transfert pour l'échelle de profondeur optique définie à l'étape 2, des populations données et une fdv des électrons donnée : relations (5.37, 5.38, 5.39) avec  $\xi = 0$  (champ incident planckien).
4. (ES+EC) résolution des équations de l'équilibre statistique et des contraintes traduisant la conservation de la charge et de la densité des particules lourdes, pour un champ radiatif et une fdv des électrons donnés. Ce système d'équations étant non linéaire en  $n_e$ , on résout le système linéaire (ES) des inconnues  $\{n_i, n_+\}$  pour une densité  $n_e$  donnée, puis on calcule une nouvelle valeur de  $n_e$  par l'équation de conservation de la charge (EC), et on itère entre (ES) et (EC) jusqu'à convergence du système  $\{n_i, n_+, n_e\}$  (voir section 5.4 pour les détails).
5. (ECE) résolution itérative de l'équation cinétique des électrons pour un champ radiatif et des densités données. La fdv des électrons résultant de ce calcul permet de déduire une température cinétique différente a priori de la température constante de notre modèle. On observe néanmoins que cette température s'écarte très peu de la température imposée à la fin de l'itération (variation relative inférieure à  $10^{-3}$ ), ainsi notre modèle *conserve* la température<sup>3</sup>.
6. Retour à l'étape 2 et fin de l'itération lorsque la variation relative de toutes les inconnues est inférieure à  $10^{-3}$  entre deux itérés successifs, pour toutes les valeurs possibles des variables. On obtient ce résultat typiquement après 20-30 itérés.

---

<sup>3</sup>Imposer l'invariance de la température doit être vu comme une étape nécessaire à la résolution *numérique* de notre problème, qui devient fortement instable en présence d'un gradient de température. Mais nous avons conscience que forcer une telle condition est difficile à justifier physiquement.

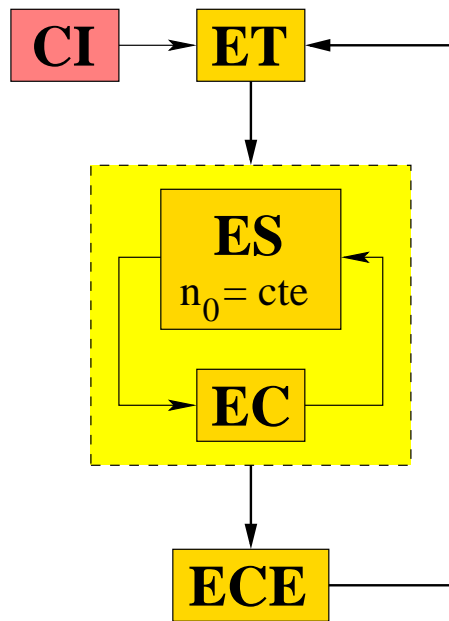


FIG. 5.1 – Schéma de la résolution du modèle d'atmosphère par itération.

# Chapitre 6

## Calculs numériques

### 6.1 Les modèles présentés

Les calculs numériques de ce chapitre portent sur une atmosphère d'hydrogène pur, de température  $T$  et de masse volumique  $\rho$  constantes pour tout le milieu. Ces paramètres sont ceux de la photosphère du soleil. Le modèle d'atome d'hydrogène ne contient que les deux premiers niveaux en énergie complètement dégénérés, ce modèle étant le plus simple pour décrire les effets d'une raie de transition et de l'ionisation. Notre milieu sera éclairé par un rayonnement de Planck de température  $T$ , pénétrant l'atmosphère par sa *frontière interne*, l'autre plan-frontière étant appelé *frontière externe*.

Nous présenterons trois catégories de modèles : en équilibre thermodynamique local (ETL), hors équilibre thermodynamique local avec électrons thermalisés (NETL), et hors équilibre cinétique maxwellien des électrons (NECM).

#### 6.1.1 Détermination des paramètres

On utilise les valeurs de  $\rho$  et  $T$  de la couche  $h = 0$  du modèle d'atmosphère solaire de Stix [112, p. 145] :  $\rho_{\odot} = 2.73 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$ , cette masse volumique étant donnée pour la composition chimique du soleil, et  $T = 6420 \text{ K}$ . L'abondance relative (en masse) de l'atmosphère solaire étant  $X = 0.727$ , la masse d'hydrogène par unité de volume est  $\rho = \rho_{\odot} X = 1.99 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$  : nous choisirons cette valeur comme masse volumique de notre atmosphère d'hydrogène pur. Cette dernière a donc la densité d'hydrogène et la température de la surface du soleil.

La densité de particules lourdes  $n_0$ , définie par la relation (Eq. 1.6), vaut alors  $1.19 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$  ( $m_{\text{H}} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).

Enfin, l'épaisseur géométrique  $Z$  de l'atmosphère est choisie de telle sorte que l'épaisseur optique  $\tau_0(\nu)$  soit supérieure à 100 pour toutes les fréquences de la grille utilisée, un critère qui nous a été suggéré par E. Simonneau pour garantir un milieu optiquement épais à toutes les fréquences ( $Z = 2.0 \times 10^{10} \text{ m}$ ).

Le tableau (Tab. 6.1) ci-dessous contient les valeurs des populations et du degré d'ionisation à l'ETL.

$n_0$	$n$	$n_1$	$n_2$	$n_e = n_+$	$\chi = n_+ / (n_0 - n_+)$	$\alpha = n_+ / n_0$
$1.2 \times 10^{23}$	$1.2 \times 10^{23}$	$1.2 \times 10^{23}$	$4.8 \times 10^{15}$	$5.7 \times 10^{19}$	$4.7 \times 10^{-4}$	$4.7 \times 10^{-4}$

TAB. 6.1 – Populations (en  $\text{m}^{-3}$ ) et degré d'ionisation à l'ETL.

#### 6.1.2 Vérification de la condition de plasma cinétique classique

Nous allons vérifier que le modèle décrit dans cette partie est bien un plasma cinétique classique, hypothèse nécessaire au traitement que nous avons fait des collisions élastiques des électrons avec

les autres particules chargées (voir la note C.2 sur les interactions coulombiennes). Nous rappelons qu'un plasma peut-être classé comme *cinétique classique* lorsque [32] :

$$r_L \ll d_e \ll \lambda_D, \quad (6.1)$$

où  $r_L$  est la longueur de Landau,  $d_e$  est la distance interparticulaire moyenne des électrons, et  $\lambda_D$  est la longueur d'écran de Debye (pour les électrons ici  $\lambda_D = \lambda_{De}$ ). La condition  $r_L \ll d_e$  montre que les corrélations sont peu importantes : l'énergie de liaison de plasma est faible devant son énergie d'agitation thermique, le plasma se rapproche d'un gaz parfait. La condition  $d_e \ll \lambda_D$  indique qu'il y a suffisamment d'électrons dans la sphère de Debye pour que l'effet d'écrantage ait lieu, et que la description des interactions coulombiennes par un terme de collisions de Boltzmann est plus approprié que par un champ de force de Vlasov.

En utilisant les valeurs définies à la section 6.1.1, et en remarquant dès à présent que la densité des électrons, variant dans l'atmosphère, est à toute profondeur inférieure à la valeur ETL (voir section 6.3.2), nous obtenons :

$$r_L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{kT} \sim 2.6 \times 10^{-9} \text{ m}, \quad d_e = n_e^{-1/3} \lesssim 2.6 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{e^2 n_e}} \gtrsim 2.6 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (6.2)$$

La condition (Eq. 6.1) est assez bien vérifiée. Nous représentons graphiquement ce résultat sur la figure (Fig. 6.1), sur laquelle apparaissent les différentes régions de classification d'un plasma.

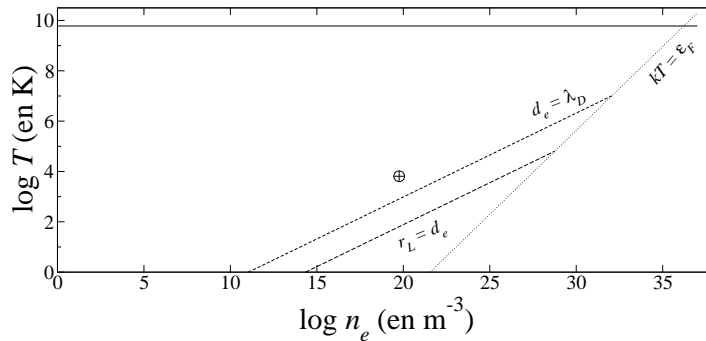


FIG. 6.1 – Diagramme de classification des plasmas (SI)[32]. Nous avons délimité les régions par des droites ( $x = \log n_e$ ,  $y = \log T$ ), la limite  $r_L = d_e$  :  $y - x/3 + 4.78 = 0$ , la limite  $d_e = \lambda_D$  :  $y - x/3 + 3.68 = 0$ , la limite de dégénérescence quantique  $kT = \epsilon_F$ , où  $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3}$  est l'énergie de Fermi d'un gaz d'électrons dégénéré :  $y - 2x/3 + 14.37 = 0$ , et la limite  $kT = m_e c^2$  du domaine d'application de la mécanique classique non relativiste :  $y = 9.78$ . Notre modèle, représenté par le symbole  $\oplus$ , correspond à  $x \leq 19.76$  et  $y = 3.81$ .

Nous allons aussi tester la validité de la forme FPL pour le terme de collisions élastiques, par rapport aux termes de Vlasov ou de Balescu-Lennard (voir note C.2). Avec les données  $n_e$  et  $T$  de ce modèle, nous avons les temps caractéristiques :

$$t_p \sim 2.4 \times 10^{-12} \text{ s}, \quad t_d \sim 1.3 \times 10^{-9} \text{ s}, \quad \Lambda \sim 560. \quad (6.3)$$

Le temps caractéristique de collision élastique peut être écrit (Eq. 3.47) :

$$t_{ei}(v) = \frac{1}{\nu_{ei}(v)} = \tau_{ee} \frac{v}{\bar{v}_e} \frac{R(1)}{R(v/\bar{v}_e)}, \quad \tau_{ee} = t_{ee}(\bar{v}_e) \simeq 5.4 \times 10^5 \frac{T^{3/2}}{n_e} \frac{1}{\ln \Lambda} \sim 7.6 \times 10^{-10} \text{ s}. \quad (6.4)$$

Nous voyons que les collisions entre électrons les plus nombreux (vitesse  $\bar{v}_e$ ) est correctement décrite par le terme FPL, mais nous sommes très près de la validité de la forme de Balescu-Lennard. Pour les collisions entre électrons et protons,  $t_{e+}(\bar{v}_e) \sim 6.0 \times 10^{-7} \text{ s}$ , et la forme de FPL n'est plus strictement valable. Comme le temps  $t_{ei}(v)$  croît avec le cube de la vitesse, les électrons rapides devraient aussi être décrits par la forme de Balescu-Lennard. Cette forme est compliquée, et nous supposons que la forme habituelle de FPL est une bonne approximation pour la description de ces interactions.

### 6.1.3 Vérification des autres conditions

Nous examinons la validité des hypothèses faites au chapitre 5 permettant de simplifier le modèle mathématique d'atmosphère.

1. Nous avons vu que cette atmosphère était un plasma cinétique classique.
2. Le degré d'ionisation ETL (intérieur de l'atmosphère) est  $\chi \sim 4.7 \times 10^{-4} \ll 1$ . Nous verrons dans les calculs hors-ETL que le degré d'ionisation est partout inférieur à sa valeur à l'ETL.
3. La pression de radiation est bien négligeable par rapport à la pression cinétique. En effet (voir Eq. 5.13) :

$$\frac{P_r}{P_c} \approx \frac{4\sigma}{3kc} \frac{T^3}{n_0} \sim 4.0 \times 10^{-5} \ll 1. \quad (6.5)$$

4. Le rayonnement entrant par la surface interne de l'atmosphère est planckien à la température  $T$ , grâce à la grande valeur de l'épaisseur optique à toute fréquence  $\tau_0(\nu) \geq 100$ .

## 6.2 Discrétisation des variables

Pour traiter le problème numérique, il est nécessaire d'utiliser des grandeurs sans dimension. Nous utiliserons certaines grandeurs définies dans le chapitre sur les notations, telles la fréquence de Rydberg  $\nu_R = E_R/h = 3.29 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , la longueur d'onde associée  $\lambda_R = c/\nu_R = 91.1 \text{ nm}$ , la vitesse électronique de seuil pour l'ionisation de l'atome d'hydrogène à l'état fondamental  $v_R = \zeta_{1+} = \sqrt{2E_R/m_e} = \alpha c$ , où  $\alpha$  est la constante de structure fine.

Nous détaillons ci-dessous la discrétisation utilisée en fréquence, en vitesse, en profondeur géométrique et en profondeur optique.

### 6.2.1 Les fréquences

Nous choisissons un domaine de fréquences suffisamment large pour couvrir toutes les transitions  $bb$  et  $bf$ , et qui permette de bien représenter toutes les grandeurs radiatives issues de l'intégration sur les fréquences.

L'intensité moyenne du rayonnement varie brusquement autour des fréquences d'ionisation et dans les raies. Nous avons choisi notre grille de fréquences de façon à encadrer de très près ces fréquences de transition. Entre ces fréquences, toutes les grandeurs liées au rayonnement varient lentement, et on peut se contenter de définir un petit nombre de fréquences entre lesquelles on interpolera.

Nous aurons également besoin de connaître l'intensité moyenne du rayonnement à des fréquences inférieures à la fréquence minimale de la grille ou supérieures à la fréquence maximale. Dans notre problème numérique, nous avons choisi de discrétiser le rapport de l'intensité moyenne sur la distribution de Planck pour la température locale. Ce choix permet plus de liberté quant à la méthode d'extrapolation, puisque l'intensité moyenne se comportera en zéro et à l'infini comme la distribution de Planck. Nous extrapolerons en choisissant notre rapport de fonctions constant à l'extérieur de la grille en fréquences, ces constantes étant déterminées par continuité avec les points extrêmes de la grille.

Pour un atome à deux niveaux, les trois fréquences importantes sont celles des transitions  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $1 \rightleftharpoons +$  et  $2 \rightleftharpoons +$  :  $\nu_{12} = 0.75 \nu_R$ ,  $\nu_{1+} = \nu_R$ ,  $\nu_{2+} = 0.25 \nu_R$ . Nous avons choisi au moins 5 points en fréquence entre ces transitions, cela nous fait 22 points en tout. La grille est détaillée dans le tableau (Tab. 6.2) ci-dessous.

### 6.2.2 Les vitesses

Nous choisissons une grille de points régulièrement espacés entre les vitesses extrêmes.

Le choix de la valeur maximale ne pose pas de difficulté : il suffit qu'elle soit supérieure à la vitesse d'ionisation de l'état fondamental  $v_R$ , région appelée la queue de la fdv. Nous choisissons  $v_{\max} = 2v_R$ , valeur satisfaisante pour décrire cette région pour laquelle les études passées montrent une forte déplétion du nombre d'électrons. Ce choix garantit une erreur inférieure au millièmè dans l'intégration de la fdv des électrons sur les vitesses de 0 à  $v_{\max}$  par rapport à l'intégration de 0 à  $+\infty$ , pour le calcul de la température cinétique comme pour celui des taux de transition.

	$\nu/\nu_R$	$\nu$ (en $s^{-1}$ )	$\lambda$ (en nm)	$E = h\nu$ (en eV)
1	0.001	3.29(+12)	91.1(+3)	1.36(-2)
2	0.0425	1.40(+14)	2143.5	0.58
3	0.0840	2.67(+14)	1084.5	1.14
4	0.1255	4.13(+14)	725.9	1.71
5	0.1670	5.49(+14)	545.5	2.27
6	0.2085	6.86(+14)	436.9	2.84
7	0.2499975	8.23(+14)	364.4	3.40
8	0.25	8.23(+14)	364.4	3.40
9	0.3750	1.23(+15)	242.9	5.10
10	0.5000	1.65(+15)	182.2	6.80
11	0.6250	2.06(+15)	145.8	8.50
12	0.7499987	2.47(+15)	121.5	10.2
13	0.75	2.47(+15)	121.5	10.2
14	0.87500	2.88(+15)	104.1	11.9
15	0.99999	3.29(+15)	91.1	13.6
16	1.0	3.29(+15)	91.1	13.6
17	1.5	4.94(+15)	60.7	20.4
18	2.0	6.58(+15)	45.6	27.2
19	2.5	8.23(+15)	36.4	34.0
20	3.0	9.87(+15)	30.4	40.8
21	3.5	1.15(+16)	26.0	47.6
22	4.0	1.32(+16)	22.8	54.4

TAB. 6.2 – Grille de 22 points en fréquence utilisée dans le code. Les nombres à 5 chiffres significatifs dans la première colonne sont des approximations de la valeur réelle, alors que la précision des autres nombres est la double précision machine (16 chiffres), sauf pour la fréquence  $\nu/\nu_R = 0.7499987$  qui est aussi une approximation à 7 chiffres de la valeur réelle, car cette valeur arrondie à 5 chiffres aurait été confondue avec la valeur exacte de la fréquence centrale de la raie (point suivant à  $\nu/\nu_R = 0.75$ ). Pour la deuxième colonne, 1.5(+5) signifie  $1.5 \times 10^5$ . Les fréquences des transitions  $1 \rightleftharpoons 2$ ,  $1 \rightleftharpoons +$  et  $2 \rightleftharpoons +$  sont à  $\nu/\nu_R = 0.75$ , 1 et 0.25 respectivement.

Le choix de la vitesse minimale de la grille est plus compliqué. Nous ne pouvons pas choisir  $v_{\min} = 0$  car l'hypothèse des électrons rapides utilisée dans cette thèse nous l'interdit. L'équation cinétique des électrons, telle que formulée ici, n'est pas valable pour des vitesses inférieures aux vitesses des atomes d'hydrogène ou des protons. Rappelons que la vitesse la plus probable de l'espèce  $k$  est  $\bar{v}_k = \sqrt{2kT/m_k}$  (voir la rubrique regroupant les notations en début de mémoire). Nous avons donc choisi une vitesse minimale bien plus grande que la vitesse thermique des atomes ou des protons (quasiment égales). Un rapport d'un ordre de grandeur nous semble suffisant.

Dans notre formulation numérique, nous calculons aux noeuds de la grille non pas la fdv des électrons, mais son rapport à la fdv de Maxwell pour la température locale. Nous extrapolerons ce rapport en dehors du domaine de vitesses de la grille de la même façon que pour les fréquences, le rapport étant choisi constant par continuité. Le domaine de vitesses  $[0, v_{\min}]$  est très petit, car la vitesse thermique des particules lourdes est petite par rapport à la vitesse thermique des électrons, elle-même petite par rapport à la vitesse d'ionisation du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène. En outre cette région influence très peu le calcul des intégrales mettant en jeu la fdv des électrons, car cette dernière est multipliée par une grandeur proportionnelle à la vitesse le plus souvent. Nous espérons donc que le manque d'information sur cette région ne pénalise pas les calculs numériques, ce qui sera vraisemblablement le cas si la fdv ne diverge pas en 0, divergence qui nous semblerait peu physique.

Le détail de la grille se trouve dans le tableau (Tab. 6.3) ci-dessous.

### 6.2.3 Les profondeurs géométriques

Nous choisissons une grille logarithmique au voisinage de la frontière externe de l'atmosphère ( $z/Z \leq 0.1$ ), région où les diverses grandeurs varient rapidement à cause de la fuite des photons,

$v/v_R$	$v/\bar{v}_+$	$v/\bar{v}_e$	$E = \frac{1}{2}m_e v^2$ (en eV)	$v/v_R$	$v/\bar{v}_+$	$v/\bar{v}_e$	$E = \frac{1}{2}m_e v^2$ (en eV)
0.047	10.0	0.2	0.03	1.05	223.4	5.1	15.0
0.10	21.3	0.5	0.14	1.10	234.0	5.4	16.5
0.15	31.9	0.7	0.31	1.15	244.7	5.6	18.0
0.20	42.6	1.0	0.54	1.20	255.3	5.9	19.6
0.25	53.2	1.2	0.85	1.25	266.0	6.1	21.3
0.30	63.8	1.5	1.22	1.30	276.6	6.4	23.0
0.35	74.5	1.7	1.67	1.35	287.2	6.6	24.8
0.40	85.1	2.0	2.18	1.40	297.9	6.9	26.7
0.45	95.7	2.2	2.75	1.45	308.5	7.1	28.6
0.50	106.4	2.4	3.40	1.50	319.1	7.3	30.6
0.55	117.0	2.7	4.11	1.55	329.8	7.6	32.7
0.60	127.7	2.9	4.90	1.60	340.4	7.8	34.8
0.65	138.3	3.2	5.75	1.65	351.1	8.1	37.0
0.70	148.9	3.4	6.66	1.70	361.7	8.3	39.3
0.75	159.6	3.7	7.65	1.75	372.3	8.6	41.7
0.80	170.2	3.9	8.70	1.80	383.0	8.8	44.1
0.85	180.9	4.2	9.83	1.85	393.6	9.1	46.5
0.90	191.5	4.4	11.0	1.90	404.3	9.3	49.1
0.95	202.1	4.6	12.3	1.95	414.9	9.5	51.7
1.00	212.8	4.9	13.6	2.00	425.5	9.8	54.4

TAB. 6.3 – Grille de 40 points en vitesse utilisée dans le code. Pour la température  $T = 6420$  K, on obtient  $\bar{v}_+/v_R = 4.7 \times 10^{-3}$  et  $\bar{v}_+/\bar{v}_e = 2.3 \times 10^{-2}$ , où  $\bar{v}_+$  et  $\bar{v}_e$  sont les vitesses les plus probables des protons et des électrons. Les vitesses associées aux transitions  $1 \rightleftharpoons 2+$ ,  $1 \rightleftharpoons 2$  et  $2 \rightleftharpoons +$  sont à  $v/v_R = 1$ , 0.87 et 0.5 respectivement.

et une grille linéaire à l'intérieur de l'atmosphère, c'est-à-dire pour  $z/Z$  compris entre 0.1 et 1.

Dans ces modèles optiquement épais, la grille en  $z$  (et donc en profondeur optique  $\tau(z, \nu)$ ) doit être choisie de façon à ce que les points les plus proches de la frontière externe aient une profondeur optique plus petite que  $1.0 \times 10^{-3}$  à toutes les fréquences, un critère qui nous a été suggéré par E. Simonneau.

Pour satisfaire ces deux conditions (milieu optiquement épais sur la frontière interne et optiquement mince à la frontière externe) avec les paramètres physiques adoptés à la section 6.1, nous avons choisi le deuxième point de la grille à  $z/Z = 1.0 \times 10^{-20}$  à cause de la raie  $L\alpha$  très opaque, le premier point correspondant à la frontière externe  $z/Z = 0$ .

La grille choisie contient 30 points :

- la frontière externe  $z/Z = 0$ ,
- 20 points répartis sur une échelle logarithmique de  $1.0 \times 10^{-20}$  à 0.1,
- 9 points répartis linéairement de 0.2 à 1.

## 6.2.4 Les profondeurs optiques

Pour résoudre l'ET, nous devons définir une bonne échelle de profondeur optique  $\tau$ . Avant tout calcul des populations, notre modèle est caractérisé par des populations constantes, impliquant que la profondeur optique est proportionnelle à la profondeur géométrique. L'échelle définie à partir de la grille géométrique choisie à la section 6.2.3 précédente correspond au modèle ETL étudié plus loin. Le tableau (Tab. 6.4) ci-dessous regroupe les valeurs des épaisseurs optiques  $\tau_0(\nu) = \tau(Z, \nu)$  correspondantes à la valeur  $Z = 2.0 \times 10^{10}$  m, pour chaque point de la grille en fréquences définie plus haut. On vérifie bien que  $\tau_0(\nu) > 100$ . L'épaisseur optique la plus grande est bien sûr celle de la raie  $L\alpha$ , et elle vaut  $\sim 3.09 \times 10^{16}$ . Donc le premier point près de la frontière externe, c'est-à-dire  $z/Z = 1.0 \times 10^{-20}$ , a une profondeur optique valant  $\sim 3.0 \times 10^{-4}$ , ce qui répond bien au second critère énoncé plus haut.

Pour les autres modèles (NETL et NECM), cette échelle de profondeur optique variera par suite de la variation des populations principalement, et il sera nécessaire de vérifier la validité de ces 2 critères énoncés aux sections 6.1.1 et 6.2.3 (épaisseur optique importante, profondeur optique



faible pour le premier point de la grille le plus proche de la surface).

Dans les figures de ce chapitre, nous utiliserons à la fois une échelle géométrique (en  $z/Z$ ) et une échelle de profondeur optique. Une première échelle de profondeur optique concerne la raie  $L\alpha$ , pour laquelle la profondeur optique sera notée  $\tau_L$  ( $L$  pour *line*) et l'épaisseur optique sera notée  $\tau_{0L} = \tau_0(\nu = 0.75\nu_R)$ . Une deuxième échelle concerne la fréquence  $\nu = 0.875\nu_R$  représentative du continu de Balmer voisin de la raie  $L\alpha$ , pour laquelle la profondeur optique sera notée  $\tau_C$  ( $C$  pour *continuum*) et l'épaisseur optique sera notée  $\tau_{0C} = \tau_0(\nu = 0.875\nu_R)$ .

$\nu/\nu_R$	$\tau_0(\nu)$
0.001	3.46(+7)
0.0425	8.02(+3)
0.0840	1.43(+3)
0.1255	5.16(+2)
0.1670	2.67(+2)
0.2085	1.74(+2)
0.2499975	1.33(+2)
0.25	1.30(+5)
0.3750	4.16(+4)
0.5000	1.83(+4)
0.6250	9.61(+3)
0.7499987	5.68(+3)
0.75	3.09(+16)
0.8750	3.65(+3)
0.99999	2.49(+3)
1.0	1.50(+12)
1.5	4.96(+11)
2.0	2.21(+11)
2.5	1.16(+11)
3.0	6.84(+10)
3.5	4.34(+10)
4.0	2.92(+10)

TAB. 6.4 – Grille des épaisseurs optiques utilisées dans le modèle, correspondant à une épaisseur géométrique  $Z = 2.0 \times 10^{10}$  m.

### 6.3 Les résultats

Nous allons établir les résultats des calculs relatifs aux modèles ETL, NETL et NECM, avec rayonnement incident sur la frontière interne de l'atmosphère.

Nous montrons dans la figure (Fig. 6.3, p. 102) une courbe d'opacité  $\chi(\nu)$  à l'ETL, en détaillant l'influence de chacun des processus radiatifs. La figure (Fig. 6.4, p. 103) représente les variations de l'albédo  $\varpi(\nu)$  avec la fréquence, quantité qui est fondamentale pour la résolution de l'équation de transfert.

Ces deux courbes, la première tenant compte de la diffusion Rayleigh et la deuxième négligeant ce processus, ont été calculées à l'ETL. Sur cette figure, nous pouvons voir que la diffusion Rayleigh a une influence importante dans la région  $0.25 \leq \nu/\nu_R \leq 0.75$ , en faisant tendre l'albédo vers 1. Le pic prononcé à la fréquence de la raie  $L\alpha$  montre que l'albédo est très proche de 1. Pour les autres fréquences, on voit que l'albédo peut prendre des valeurs très proches de 0. Pour préciser, la valeur maximale de l'albédo est  $\sim 0.9996$  alors que la valeur minimale est  $\sim 5.0 \times 10^{-11}$ . Nous devons donc résoudre l'équation de transfert pour toute la gamme possible des albédos.

Les modèles traités par la suite ont été établis en négligeant la diffusion Rayleigh partout, parce que la diffusion Rayleigh se confond avec les processus radiatifs  $bb$  aux fréquences de transition (Fig. 6.3, 6.4). Il est alors nécessaire de couper ce processus de diffusion à une fréquence *que nous ne savons pas choisir*.

### 6.3.1 Modèles ETL

Dans ces modèles, la seule quantité qui nous intéresse est l'intensité moyenne du rayonnement, puisque les populations et la fdv des électrons sont connues.

L'intensité moyenne comprend deux composantes, qui décrivent la contribution des sources externes (rayonnement de Planck incident sur le plan  $z = Z$ ) et internes (émission thermique du gaz). La figure (Fig. 6.5, p. 103) permet de comparer ces deux composantes au voisinage de la frontière interne, pour la fréquence de la raie  $L\alpha$ , ainsi que pour une fréquence du continu.

Dans la raie  $L\alpha$ , le rayonnement issu des sources externes est dominant au voisinage immédiat de la frontière interne, mais chute très vite pour devenir négligeable par rapport à la composante thermique dans la quasi-totalité de l'atmosphère.

Dans le continu, les deux composantes sont quasiment égales, ou en tout cas du même ordre de grandeur (cela ne se voit pas sur la figure mais nous avons vérifié ce point pour les autres fréquences), et la contribution des sources extérieures chute beaucoup moins vite que dans la raie lorsque on se rapproche de la frontière externe (à cause de l'opacité élevée de la raie par rapport au continu).

Dans tous les cas, la composante extérieure est négligeable sur la presque totalité de l'atmosphère, et le rayonnement observé au voisinage de la frontière externe est purement thermique.

Bien que cela n'apparaisse pas sur la figure, à cause de l'échelle, nous avons vérifié que l'intensité moyenne provenant de la composante thermique était bien symétrique par rapport au milieu de l'atmosphère, puisque les deux frontières jouent le même rôle vis-à-vis du rayonnement interne.

Les figures (Fig. 6.6, p. 104) et (Fig. 6.7, p. 105) montrent l'intensité moyenne du rayonnement en fonction de la fréquence, à différentes profondeurs géométriques. La largeur Doppler de la raie  $L\alpha$  vaut  $\Delta\nu_{12}/\nu_R \sim 2.58 \times 10^{-5}$  : elle est trop faible pour qu'on puisse la distinguer sur la figure.

La figure (Fig. 6.8, p. 106) représente l'intensité moyenne du rayonnement en fonction de la profondeur géométrique ou de la profondeur optique pour différentes fréquences représentatives de la grille et pour un rayonnement de Planck incident sur la frontière interne. Comme les populations sont constantes sur toute l'atmosphère, l'opacité est elle-même constante, et la profondeur optique est simplement proportionnelle à la profondeur géométrique.

On vérifie, sur la courbe représentant l'intensité moyenne en fonction de la profondeur optique  $\tau$ , que l'intensité moyenne chute à la profondeur de thermalisation de l'atmosphère, égale à  $1/k$  avec  $k$  donné par (C.45). Dans le continu, l'albédo est plus petit que  $\sim 0.56$  et  $k(0.56) \sim 0.93$ , l'intensité moyenne chute donc pour des valeurs de  $\tau$  proches de l'unité, ce qui est observé. Dans la raie, l'albédo vaut 0.9996 et  $k(0.9996) \sim 3.46 \times 10^{-2} \sim 1/29$ , ce qui correspond bien à la valeur  $\tau \sim 30$  mesurée.

### 6.3.2 Modèles NETL

Nous établissons dans les figures (Fig. 6.9, p. 107) et (Fig. 6.10, p. 108) deux abaques de correspondance entre  $z$  et  $\tau$ , qui ne sont plus des quantités proportionnelles l'une par rapport à l'autre puisque les populations ne sont plus constantes. L'atmosphère stellaire est hors-ETL pour une région géométrique de taille faible par rapport à l'épaisseur géométrique de l'atmosphère en ETL. La conséquence est que l'épaisseur optique NETL  $\tau_0$  est la même que la profondeur géométrique ETL donnée dans la table (Tab. 6.4), avec une très bonne approximation. Pour rendre les abaques lisibles, nous avons représenté uniquement les régions en fréquences : la raie  $L\alpha$   $\nu/\nu_R = 0.75$ , le continu  $\nu/\nu_R \in [10^{-3}, 0.2499]$ , le continu de Balmer  $\nu/\nu_R \in [0.25, 0.9999]$  pour lequel nous avons rajouté la fréquence  $\nu/\nu_R \sim 0.618$ , et le continu de Lyman  $\nu/\nu_R \in [1, 4]$ .

La figure (Fig. 6.11, p. 108) montre les écarts à l'ETL des populations et du degré d'ionisation. Bien sûr les écarts augmentent lorsque on se rapproche de la frontière externe de l'atmosphère.

Les figures (Fig. 6.12, p. 109), (Fig. 6.13, p. 110) et (Fig. 6.14, p. 111) représentent l'intensité moyenne sur le domaine de fréquences  $\nu/\nu_R \in [0, 4]$  et  $\nu/\nu_R \in [0, 1.1]$ , et sont équivalentes aux figures (Fig. 6.6, p. 104) et (Fig. 6.7, p. 105) du cas ETL. Bien entendu les courbes montrent un certain nombre de différences, la plus flagrante consistant en la valeur de l'intensité moyenne pour le continu à la frontière externe, qui était à peu près la moitié de la distribution de Planck dans le cas ETL, et présente dans ce cas NETL plus de disparités, puisque les valeurs du rapport intensité moyenne/distribution de Planck varient de 0.22 à 0.65 pour le continu. La raie  $L\alpha$  ne semble pas affectée par le changement de modèle.

La figure (Fig. 6.15, p. 112) est l'homologue de la figure (Fig. 6.8, p. 106) du modèle ETL. La comparaison en profondeur géométrique  $z$  des courbes ETL et NETL montre que les intensités moyennes se ressemblent jusqu'à la chute proche de la frontière externe. Dans le cas ETL, la chute est monotone pour atteindre une valeur minimale à la frontière externe. Dans le cas NETL, on observe une remontée de l'intensité moyenne lorsque on s'approche de la frontière externe pour certaines fréquences, ce qui provient de la variation des populations au voisinage de la frontière externe. On voit aussi que la chute de l'intensité moyenne dans le continu de Lyman se passe en deux étapes : la première a lieu pour des profondeurs optiques très élevées, de l'ordre de  $10^8$ , pour former un plateau qui chute une deuxième fois plus près de la frontière externe, pour une valeur proche de 1 de la profondeur optique. La comparaison des modèles ETL et NETL en profondeur optique  $\tau$  montre que la raie  $L\alpha$  n'est pas affectée par le changement de modèle. L'intensité moyenne chute bien dans le continu pour des valeurs semblables  $\tau \sim 1$ , même si on a l'impression visuelle que la région de chute est plus large en profondeur optique pour le modèle NETL par rapport au modèle ETL, impression due aux valeurs différentes à la frontière externe de l'intensité moyenne selon les fréquences. La première exception a été décrite plus haut, concernant le continu de Lyman qui présente une première chute à des profondeurs optiques élevées. La deuxième exception concerne les basses énergies pour lesquelles la chute a lieu pour  $\tau \sim 10$ . La comparaison des figures (Fig. 6.6, p. 104) et (Fig. 6.12, p. 109) montre bien que l'intensité moyenne se comporte de façon très différente pour ce continu entre le modèle ETL et le modèle NETL.

On voit tout l'intérêt de résoudre de façon précise l'équation de transfert pour des profondeurs optiques très faibles. Si on ne calcule l'intensité moyenne que pour des valeurs de la profondeur optique  $\tau \geq 10^{-3}$  typiquement, nous observerons bien la chute à  $\tau \sim 1$  et la formation d'un plateau dont le prolongement par continuité aura une valeur différente de la valeur calculée à la frontière externe. Cette remarque justifie le fait qu'il soit nécessaire de calculer l'intensité moyenne pour des profondeurs optiques très faibles.

### 6.3.3 Modèles NECM

Nous avons représenté la fdv des électrons  $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$  (normalisée à la distribution maxwellienne de température  $T$ ) sur les figures (Fig. 6.16, p. 113), (Fig. 6.17, p. 114) et (Fig. 6.18, p. 115).

Nous commençons l'étude de la fdv des électrons en vitesse, à la frontière externe de l'atmosphère. La fdv n'est pas maxwellienne pour des vitesses typiquement plus grandes que  $0.85 v_R$ , ce qui correspond à une énergie  $\approx 0.7225 E_R \sim 9.83 \text{ eV}$ . À partir de cette vitesse, la fdv chute rapidement pour se stabiliser à  $v/v_R \sim 1.25$ , la fdv formant un plateau. Pour des vitesses encore supérieures, la fdv chute à nouveau et forme un nouveau plateau, moins prononcé que le premier. Nous ne sommes pas allés assez loin en vitesse pour voir si un troisième plateau se forme. Cette forme *en plateaux* a été très bien expliquée dans les travaux des années 70 sur le traitement de l'équation cinétique des électrons. Nous résumons ci-dessous ce raisonnement.

Les premières méthodes pour résoudre l'équation cinétique des électrons étaient basées sur une simplification possible du terme de source de collisions inélastiques, à savoir le fait que le seuil en énergie nécessaire pour amorcer la collision permet de séparer le domaine des vitesses en intervalles, la solution de l'équation cinétique des électrons sur un intervalle devenant facile à trouver si on connaît la fdv sur l'intervalle précédent ou l'intervalle suivant, car on a ainsi pu linéariser l'équation. On résout donc l'ECE de proche en proche. C'est ce phénomène qui permet d'expliquer que si un premier plateau se forme, un autre suivra car il reproduira qualitativement le comportement de la fdv sur l'intervalle en vitesse précédent, celui du premier plateau. Cette linéarisation ne prévoit pas la remontée non négligeable de la fdv observée sur notre figure (Fig. 6.16, p. 113) avant d'atteindre le plateau, remontée peut-être due à une erreur numérique, vérification qui reste à faire par rapport aux solutions analytiques. Ces résultats ont été établis à partir d'une équation plus compliquée que celle qui mène aux développements analytiques des années 70, rendant la comparaison de nos résultats avec ceux des travaux antérieurs délicate.

Néanmoins, nous pouvons essayer de comparer la valeur du premier plateau avec celle théorique donnée par Shoub [101], qui a lui aussi résolu l'équation cinétique des électrons. Ce dernier prévoit une valeur du plateau égale à  $b_2/b_1 \sim 1.5 \times 10^{-2}$  en prenant les valeurs du modèle NETL. Nous verrons plus bas que la fdv non maxwellienne des électrons a très peu d'effet sur les populations dans ce modèle, et nous pouvons utiliser cette valeur pour notre vérification. Nous donnons deux valeurs de la fdv normalisée, lues à la frontière externe de l'atmosphère sur la figure (Fig. 6.18, p. 115), pour

le sommet de la bosse/plateau  $v/v_R = 1.25$  et pour le minimum local de la fdv avant la formation de la bosse, à  $v/v_R = 1$ , correspondant approximativement à la valeur extrapolée du plateau si la bosse ne s'était pas formée. Nous obtenons les valeurs  $\sim 7 \times 10^{-2}$  et  $\sim 4 \times 10^{-2}$  respectivement, valeurs supérieures à la valeur prédite par Shoub jusqu'à une demi-ordre de grandeur.

Il est nécessaire de mener à bien des comparaisons plus précises de notre solution numérique avec les solutions analytiques déjà établies. La comparaison sur ce modèle permet d'établir un accord sur le fait que la fdv des électrons est dépeuplée dans la queue et forme une série de plateaux. Le premier plateau montre une remontée non négligeable en forme de bosse, situation non prévue par les travaux antérieurs, et il s'agit de savoir si cette remontée est due :

- à une erreur numérique,
- à une différence dans la formulation de l'équation cinétique des électrons (modèle BGK au lieu de la forme de Landau pour décrire les collisions élastiques),
- aux processus collisionnels différents utilisés pour résoudre le problème,
- à la différence de traitement du transfert,
- à la procédure itérative de résolution du problème couplé.

La courbe (Fig. 6.18, p. 115) montre la variation spatiale de la fdv des électrons pour différentes vitesses. La fdv est d'autant moins maxwellienne dans la queue que l'on s'approche de la frontière externe de l'atmosphère. A la frontière externe la fdv des électrons est plus petite que la maxwellienne d'au moins deux ordres de grandeur.

Les figures (Fig. 6.19, p. 116) et (Fig. 6.20, p. 117) permettent de comparer les effets de la fdv des électrons sur l'intensité moyenne du rayonnement (Fig. 6.19, p. 116) ainsi que sur les coefficients  $b_1(z)$  et  $b_2(z)$  (Fig. 6.20, p. 117). Sur la figure (Fig. 6.19, p. 116), les deux courbes de l'intensité moyenne du rayonnement ne se séparent nettement que pour  $\nu/\nu_R \geq 2$ . Ce résultat est intéressant si on observe le rayonnement sortant à ces fréquences : l'influence de la fdv des électrons est grande, jusqu'à 50 %. Par contre les intégrales en fréquence sur le rayonnement seront très peu, voire pas du tout, influencées par la fdv des électrons dans ce modèle.

La figure (Fig. 6.20, p. 117) montre une légère influence de la fdv des électrons sur la valeur superficielle de  $b_2(z)$ , qui est ainsi majorée jusqu'à 6 % à la frontière externe.

Le tableau (Tab. 6.5, p. 99) permet la comparaison des taux de transition utilisés dans les équations de l'équilibre statistique, à la frontière externe de l'atmosphère. Nous voyons que les seuls taux sensibles à la fdv des électrons sont le taux d'excitation collisionnelle  $C_{12}$ , le taux d'ionisation collisionnelle  $C_{1+}$ , ainsi que le taux de photoexcitation  $R_{12}$  dans une moindre mesure.

Processus	NETL	NECM	différence relative (%)
$C_{12}$	6.941(-19)	6.451(-20)	90.6
$C_{1+}$	5.222(-22)	1.550(-23)	97.0
$C_{2+}$	7.516(-13)	7.469(-13)	0.6
$C_{21}$	1.747(-11)	1.736(-11)	0.6
$C_{+1}$	3.667(-19)	3.622(-19)	1.2
$C_{+2}$	2.097(-17)	2.071(-17)	1.2
$R_{12}$	7.689(-17)	8.092(-17)	5.0
$R_{1+}$	6.660(-20)	6.619(-20)	0.3
$R_{2+}$	1.566(-12)	1.550(-12)	1.0
$R_{21}$	1.429(-07)	1.429(-07)	0.0
$R_{+1}$	2.827(-16)	2.809(-16)	0.6
$R_{+2}$	1.323(-16)	1.315(-16)	0.6
$J(\nu_{12})/B_{\nu_{12}}(T)$	1.354(-2)	1.425(-2)	5.2

TAB. 6.5 – comparaison des taux de transition (sans unités) à la frontière externe de l'atmosphère ( $z = 0$ ).

L'effet de la queue non maxwellienne de la fdv des électrons est très important sur les taux collisionnels, comme cela était à prévoir. Par contre, l'influence, bien que relativement faible, sur le taux d'excitation radiative entraîne que la fdv majore de 5 %, par le biais des populations, la valeur de l'intensité du rayonnement dans la raie (Fig. 6.19, p. 116). Nous avons rajouté au tableau (Tab. 6.5, p. 99) une ligne donnant le rapport de l'intensité moyenne à la fonction de Planck dans

la raie  $L\alpha$ .

A la lecture des valeurs de ces taux de transition, on peut remarquer que les processus radiatifs dominant largement les processus collisionnels, notamment les taux  $R_{12}$  et  $R_{21}$  qui dominent les autres car on est à la frontière externe. On ne peut toutefois pas en déduire que le processus de photoexcitation et son inverse sont en balance détaillée, puisque  $b_2/b_1 \neq 1$ .

### 6.3.4 Validité de la forme de l'ECE

Nous vérifions dans cette section la validité de l'hypothèse selon laquelle le membre de gauche de l'ECE est nul. Cette hypothèse a été testée à la section 3.6 pour le cas ETL. Ayant calculé un modèle NECM, l'hypothèse concernant les gradients de la fdv selon la vitesse doit être validée de nouveau, surtout après avoir remarqué les forts gradients en la vitesse de la fdv pour  $0.85 \lesssim v/v_R \lesssim 0.9$  (Fig. 6.16, p. 113).

Nous comparons le terme de force de l'ECE à son terme de collisions élastiques BGK :

$$a_e(z) \frac{\partial}{\partial v} f_e(z, v) = -\nu_e(v) f_e(z, v) + \dots, \quad (6.6)$$

où  $a_e(z)$  est l'accélération totale appliquée aux électrons, dont les composantes sont dûes à la gravité et l'accélération radiative (nous avons vu à la section 3.6 que l'accélération magnétique était nulle à cause de la symétrie du problème, et sans gradient de température dans un plasma électriquement neutre, le champ électrique est nul, et dans l'atmosphère solaire négligeable par rapport aux effets de la gravité) :

$$a_e = a_{grav} + a_{rad}, \quad (6.7)$$

et  $\nu_e(v)$  est la fréquence de collisions élastiques des électrons avec eux-mêmes, les protons ou les atomes d'hydrogène :

$$\nu_e(v) = \nu_{ee}(v) + \nu_{e+}(v) + \nu_{eH}(v). \quad (6.8)$$

Les fréquences de collision proviennent du modèle BGK, et leurs expressions proviennent de la section 3.2.3. Nous rappelons les valeurs des accélérations :

$$a_{grav} = G \frac{M_\odot}{R_\odot^2} \sim 2.7 \times 10^2 \text{ kg m}^{-2}, \quad a_{rad} \approx \frac{\sigma_T}{m_e c} \sigma T^4 \sim 2.3 \times 10^1 \text{ kg m}^{-2}. \quad (6.9)$$

Dans le modèle NECM, nous avons calculé non pas  $f_e$  mais le rapport  $h_e(v) = f_e(v)/f_e^M(v)$ . Ainsi nous devons comparer le terme de force de l'ECE :

$$a_e \left( \frac{m_e v}{kT} + \frac{1}{h_e(v)} \frac{\partial}{\partial v} h_e(v) \right) \quad (6.10)$$

à la fréquence de collision  $\nu_e(v)$ . Nous avons représenté sur la figure (Fig. 6.2, p. 101) les différentes fréquences de collision et les 2 termes issus de (Eq. 6.10) pour toutes les vitesses des électrons, à la surface  $z = 0$  de l'atmosphère, lieu favorisant le plus le terme de force, car la densité des électrons  $n_e \sim 6 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$  y est la plus faible, et les gradients de la fdv en la vitesse y sont les plus forts. Le premier terme de (6.10) correspond au terme de force à l'ETL, dont nous avons déjà donné une valeur approchée à la section 3.6. Le deuxième terme de (6.10) correspond à l'écart de la fdv à la maxwellienne.

Sur la figure (Fig. 6.2, p. 101), il apparaît clairement que le terme de force est toujours négligeable par rapport au terme de collision élastique, validant l'hypothèse faite à la section 3.6. Sur cette figure, nous remarquons que les gradients de vitesse ne sont pas très importants, en tout cas ne dépassent pas le gradient ETL. La fonction  $\partial h_e / \partial v$  a été obtenue grossièrement à partir de la discrétisation de  $h_e(v)$  par différences finies. Le gradient ETL nous informe alors de l'ordre de grandeur du terme de force pour toute profondeur de l'atmosphère. Comme la densité des électrons augmente avec la profondeur, les fréquences de collisions sont minimales à la surface, et si le terme de force est négligeable à la surface, il l'est aussi à toute profondeur de l'atmosphère. Nous avons tabulé quelques valeurs du rapport entre le terme de force et la fréquence de collision dans la table (Tab. 6.6, p. 101).

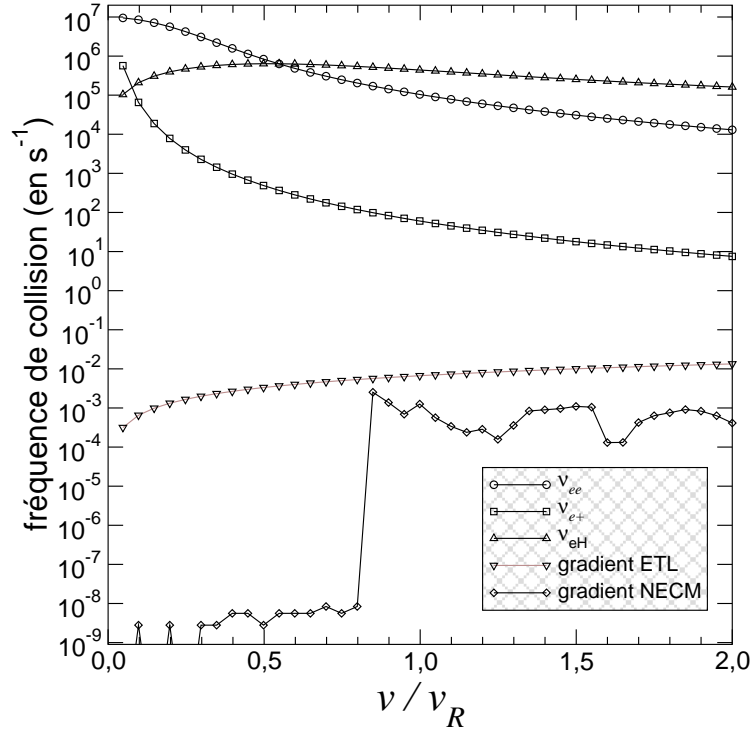


FIG. 6.2 – Comparaison du terme de force de l'ECE aux fréquences de collision élastiques, selon la vitesse, à la surface de l'atmosphère  $z = 0$ . Nous avons représenté les 3 fréquences de collision  $\nu_{ee}(v)$  (cercles),  $\nu_{e+}(v)$  (carrés),  $\nu_{eH}(v)$  (triangles pointant vers le haut), ainsi que le terme de force (Eq. 6.10), séparé en la première composante ETL (triangles pointant vers le bas), et la deuxième composante NECM (losanges).

$v$	$\bar{v}_e$	$2v_R$
$\frac{a_e}{\nu_e(v)} \frac{m_e v}{kT}$	$10^{-10}$	$10^{-7}$
$\frac{a_e}{\nu_e(v)} \frac{1}{h_e(v)} \frac{\partial}{\partial v} h_e(v)$	$10^{-16}$	$10^{-8}$

TAB. 6.6 – Comparaison du terme de force de l'ECE au terme de collision élastique.

## 6.4 Conclusion

Le modèle étudié est caractérisé par :

- un rayonnement extérieur de Planck incident sur la frontière interne, qui n'a que très peu d'influence sur l'atmosphère, puisque ce rayonnement est éteint bien avant d'avoir atteint la moitié de l'atmosphère,
- le fait que l'atmosphère n'est hors-ETL que relativement près de la frontière externe,
- la réponse immédiate des électrons aux effets NETL dès que l'atmosphère est hors-ETL, la fdv des électrons commence à s'écarter d'une distribution maxwellienne dans la queue des électrons rapides, jusqu'à atteindre des écarts importants à la frontière externe.

Ces éléments sont *spécifiques* du choix du modèle étudié (notamment le fait que l'atmosphère soit isotherme), de la valeur retenue pour  $T$  et  $\rho$ , et surtout du choix d'une épaisseur géométrique très élevée pour que l'atmosphère soit optiquement épaisse à toutes les fréquences. C'est principalement ce dernier point qui explique le fait que les populations soient peu sensibles à la forme de la fdv des électrons dans la queue : *cf.* Shoub [101], qui conseille de se placer dans un milieu d'épaisseur optique dans la raie inférieure à 200, pour avoir un *retour* significatif sur les populations, donc sur le champ radiatif. Dans nos modèles, cette épaisseur optique vaut  $3.09 \times 10^{16}$ .

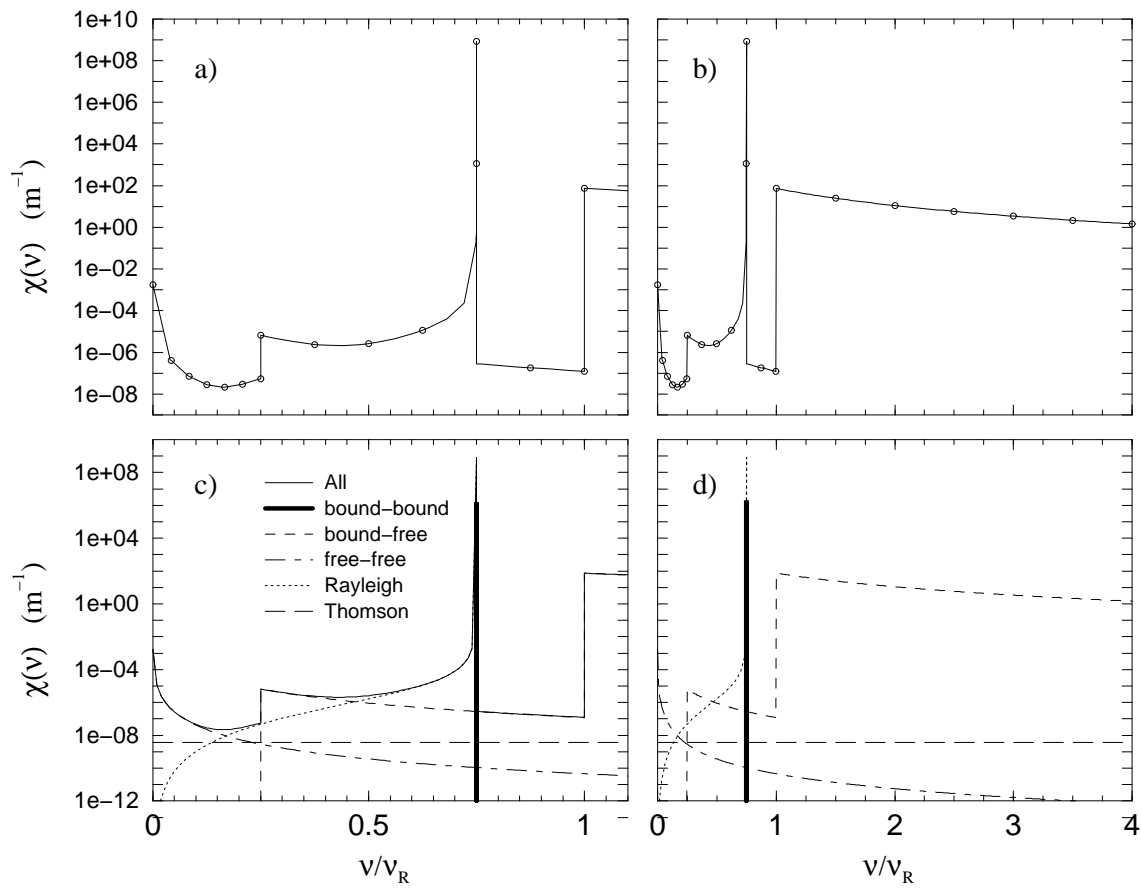


FIG. 6.3 – (Modèle ETL) Opacité  $\chi(\nu)$  (en  $\text{m}^{-1}$ ) en fonction de la fréquence normalisée  $\nu/\nu_R$  (indépendante de la profondeur géométrique). Sur les figures a) et b) les cercles correspondent à la grille utilisée, et il a été nécessaire d'utiliser plus de fréquences pour tracer la courbe pleine. Sur les figures c) et d) sont détaillés les processus radiatifs : bound-bound (raie  $L\alpha$ ), bound-free, free-free, diffusion Thomson et diffusion Rayleigh non coupée en fréquence.

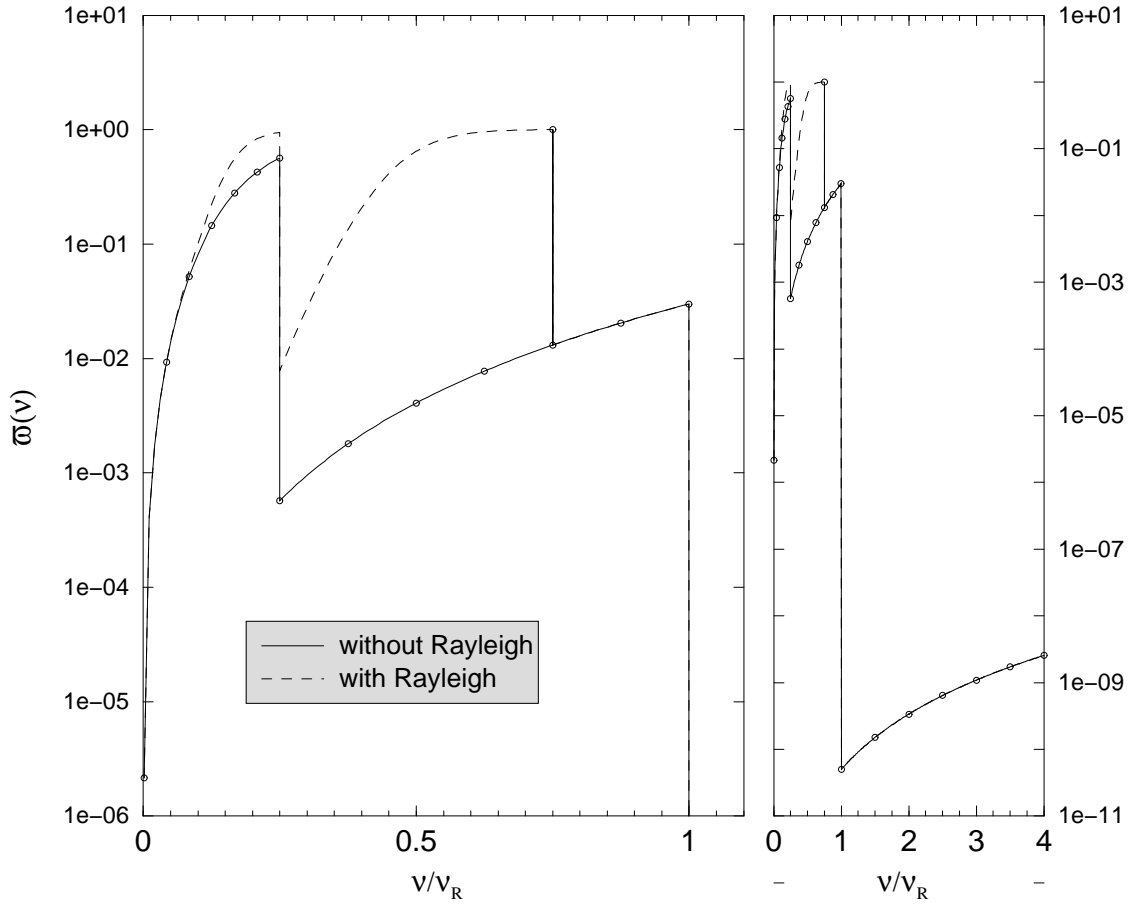


FIG. 6.4 – (Modèle ETL) Albédo  $\varpi(\nu)$  en fonction de la fréquence normalisée  $\nu/\nu_R$  (indépendant de la profondeur géométrique). Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. L'albédo représenté dans la raie  $L\alpha$  est  $\varpi_{12}$  (Eq. 5.92).

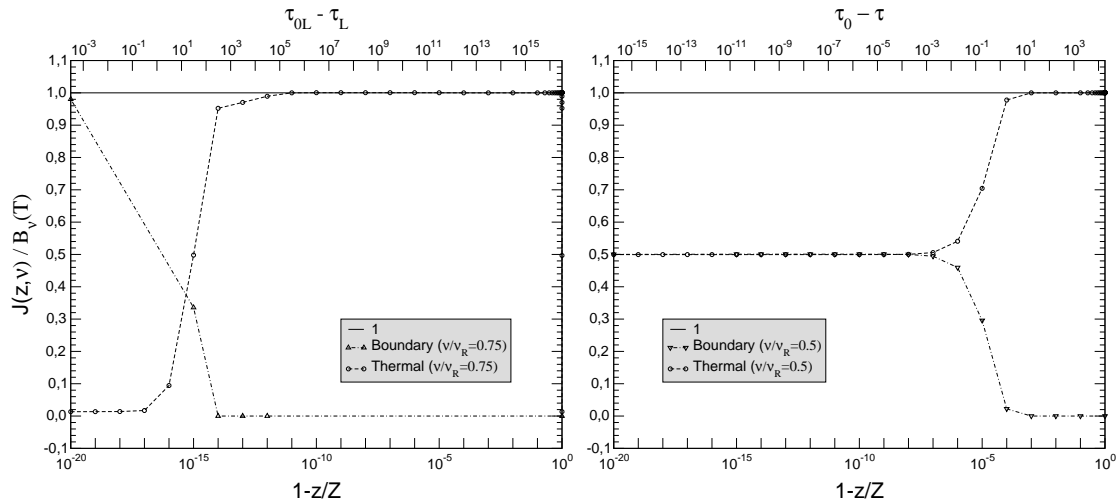


FIG. 6.5 – (Modèle ETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) montrant les deux composantes du rayonnement près de la frontière interne, en fonction de la profondeur géométrique  $1 - z/Z$ , ou de la profondeur optique  $\tau_0 - \tau$ . La figure de gauche correspond à la raie  $L\alpha$ , pour laquelle l'épaisseur optique est  $\tau_{0L} \sim 3.09 \times 10^{16}$  et la profondeur optique  $\tau_L$ . La figure de droite représente  $\nu/\nu_R = 0.5$  (continu de Balmer) pour laquelle l'épaisseur optique est  $\tau_0 \sim 1.83 \times 10^4$ .



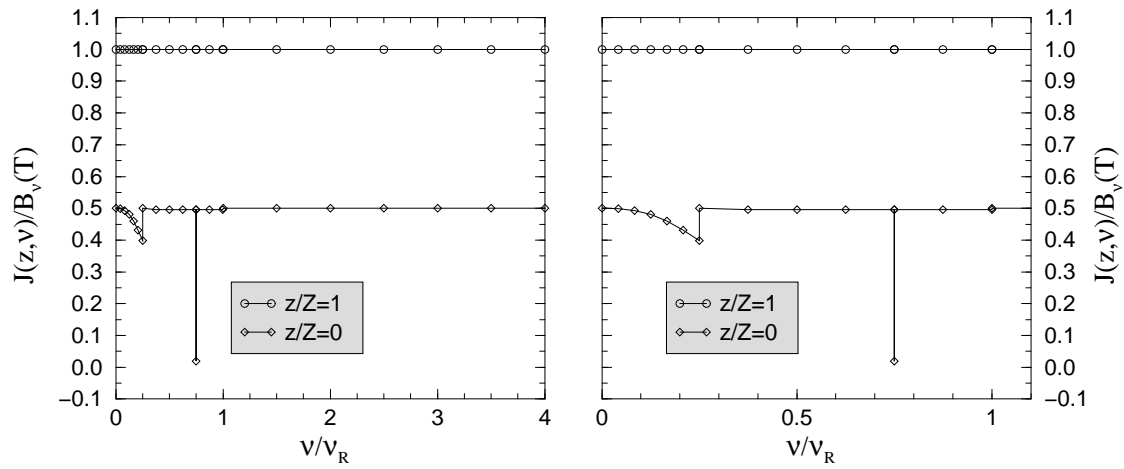


FIG. 6.6 – (Modèle ETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille.

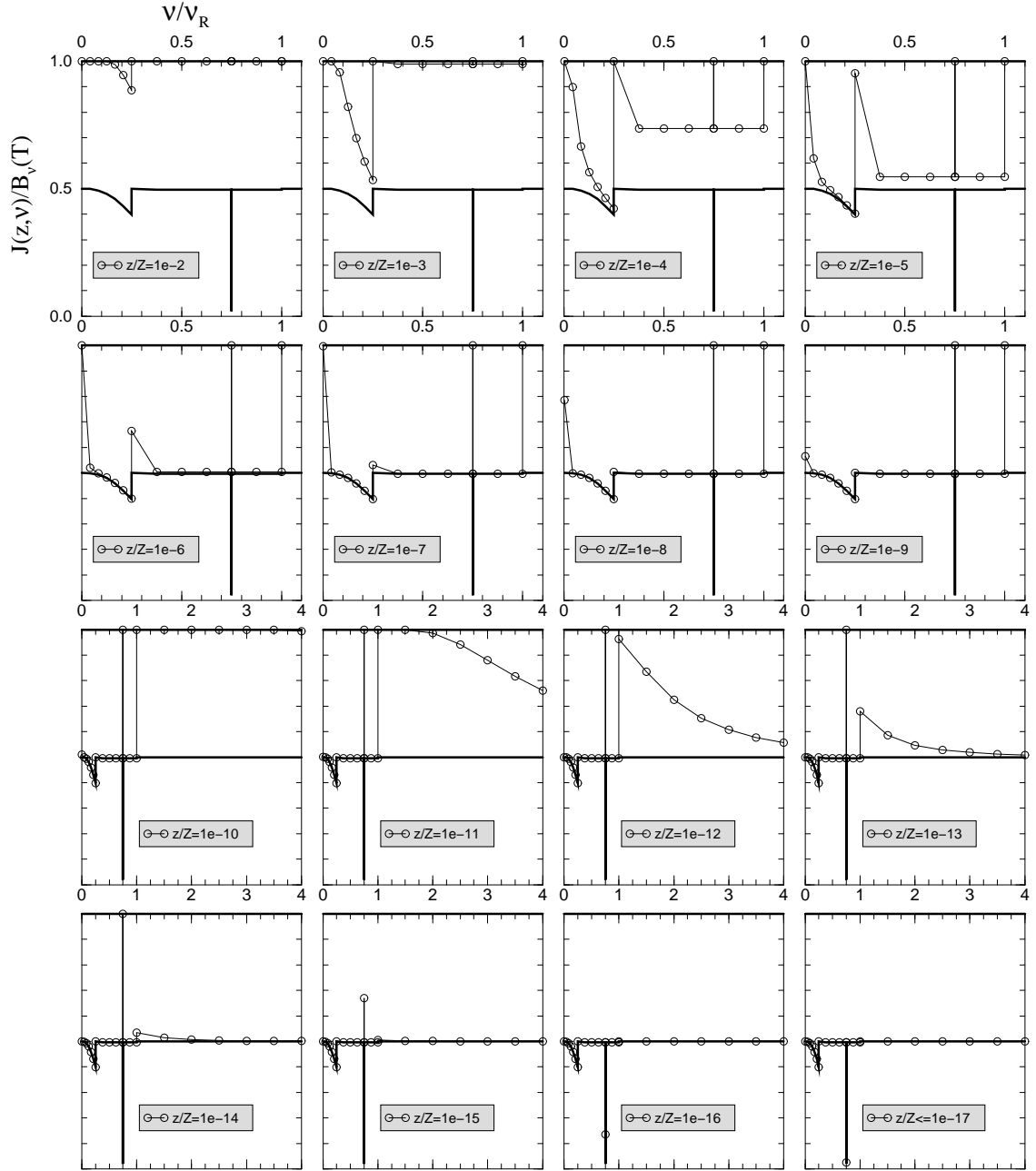


FIG. 6.7 – (Modèle ETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. Le trait gras reproduit la courbe en surface ( $z = 0$ ) de la figure (Fig. 6.6, p. 104). Ces courbes correspondent aux profondeurs géométriques de la grille, pour  $z/Z \leq 10^{-2}$ . Pour  $z/Z \geq 10^{-1}$  ou  $z/Z \leq 10^{-17}$ , les courbes sont confondues avec celles des cas  $z/Z = 1$  et  $z/Z = 0$  respectivement.

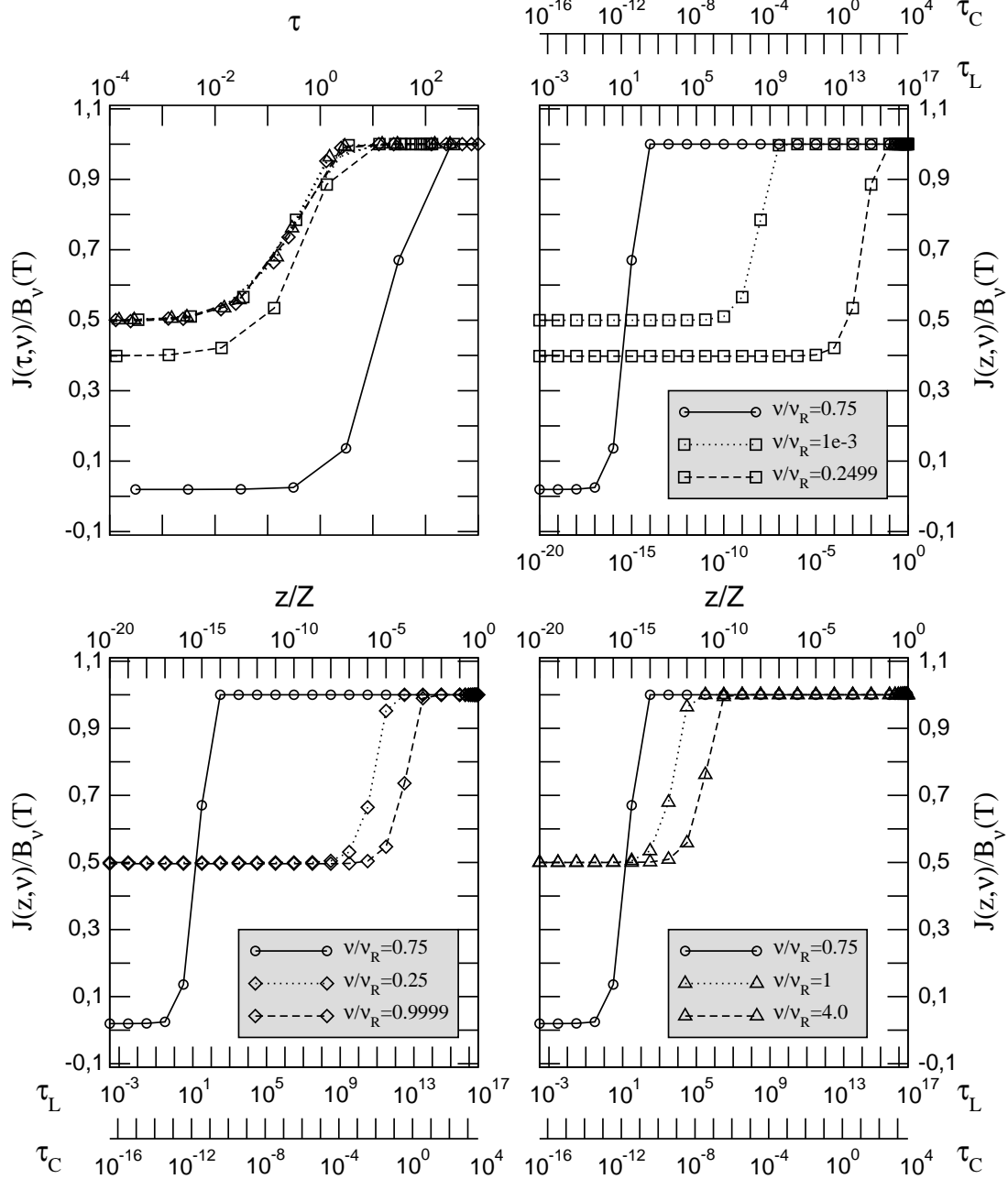


FIG. 6.8 – (Modèle ETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction soit de la profondeur géométrique normalisée  $z/Z$ , soit des profondeurs optiques  $\tau_C$  et  $\tau_L$  (voir section 6.2.4). La figure en haut à gauche représente les courbes pour toutes les fréquences en fonction de la profondeur optique  $\tau$  associée à chacune des fréquences. L'échelle en profondeur optique est restreinte au voisinage de la région où l'intensité moyenne chute.

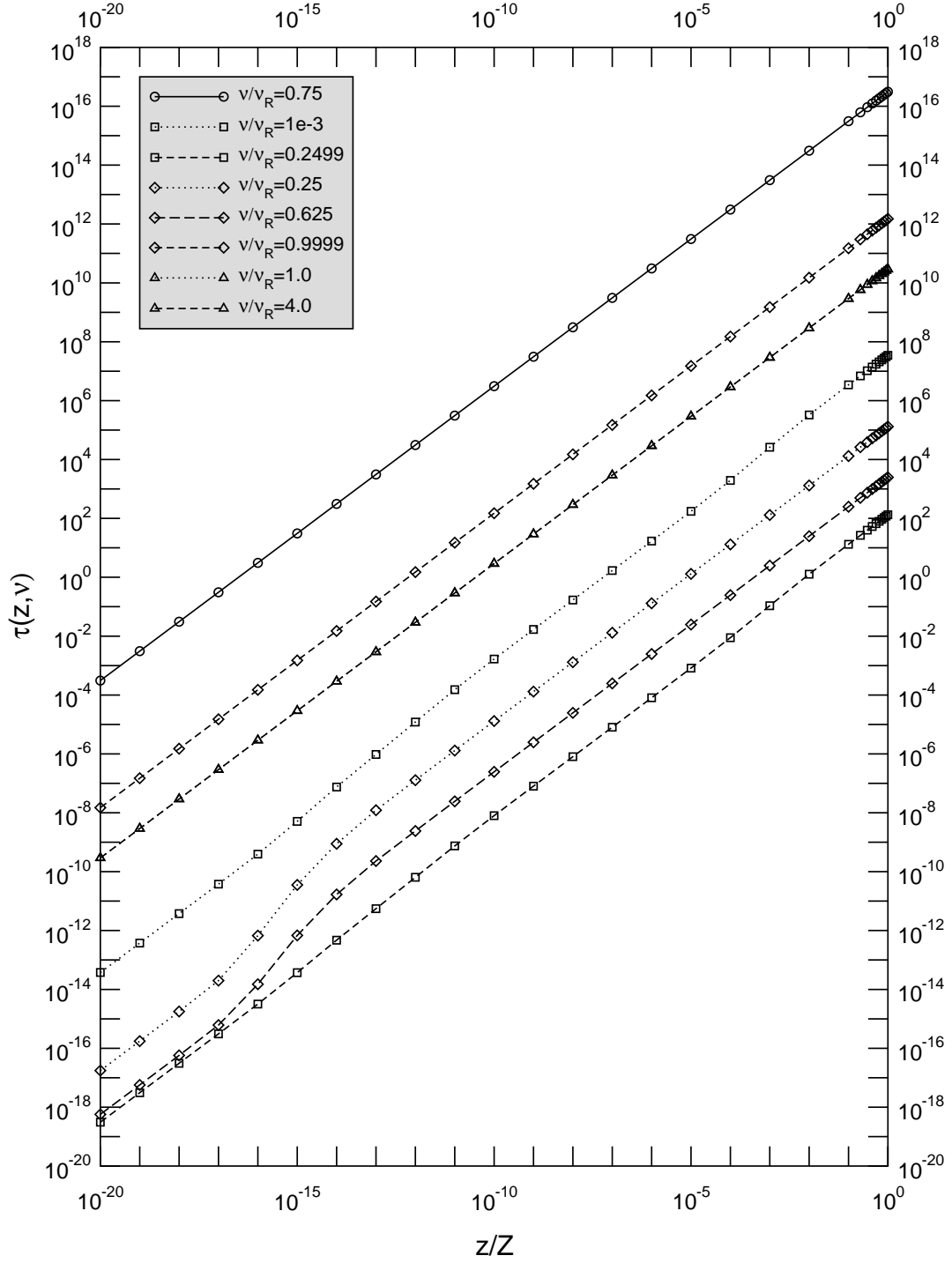


FIG. 6.9 – (Modèle NETL) Abaque de correspondance entre la profondeur géométrique  $z$  et la profondeur optique  $\tau$ .

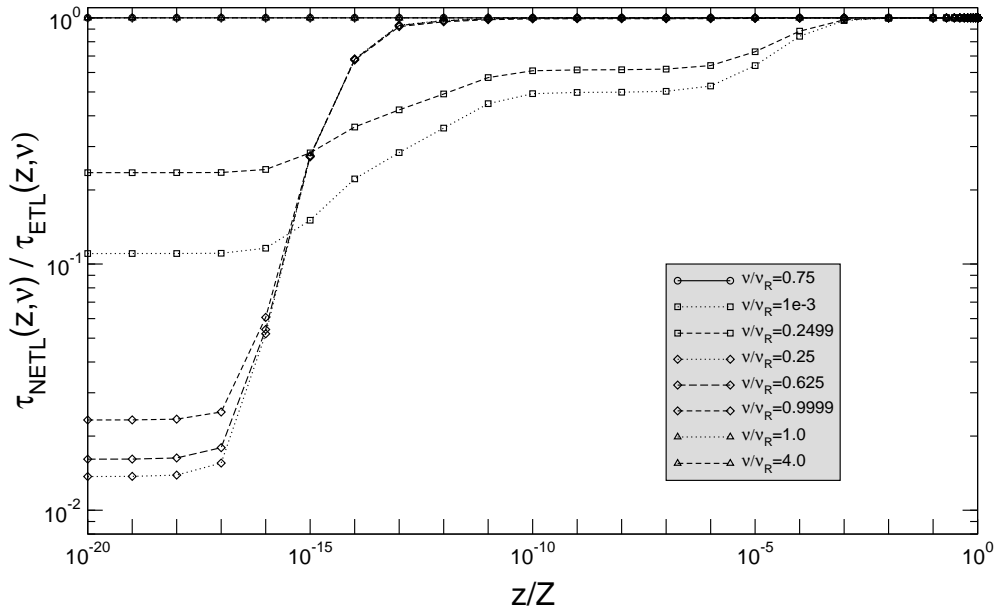


FIG. 6.10 – (Modèle NETL) Abaque de correspondance entre la profondeur géométrique  $z$  et la profondeur optique  $\tau$ . Les courbes représentent le rapport  $\tau_{NETL}(z, \nu) / \tau_{ETL}(z, \nu) = Z\tau(z, \nu) / z\tau_0(\nu)$ . Il permet de mieux distinguer les écarts à l'ETL que sur la figure (Fig. 6.9).

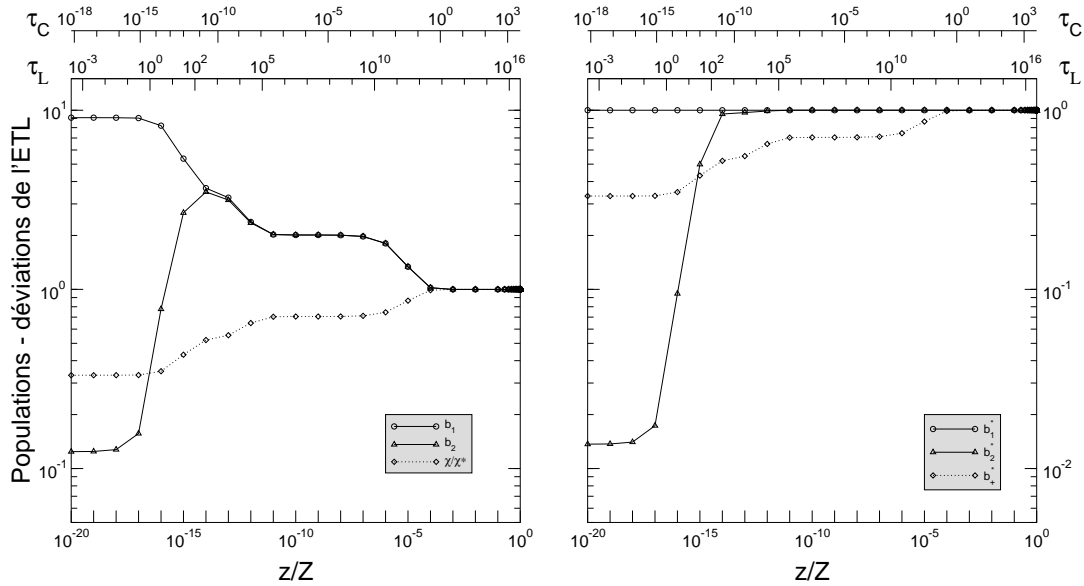


FIG. 6.11 – (Modèle NETL) Écarts à l'ETL des populations et du degré d'ionisation.  $b_1$ ,  $b_2$  et  $\chi$  ont la définition habituelle utilisée en physique des plasmas. Le degré d'ionisation est normalisé à sa valeur à l'ETL, notée  $\chi^*$ . Nous avons représenté sur la deuxième figure des quantités équivalentes  $b_1^*$ ,  $b_2^*$  et  $b_+^*$  (voir la note C.1 pour les définitions).

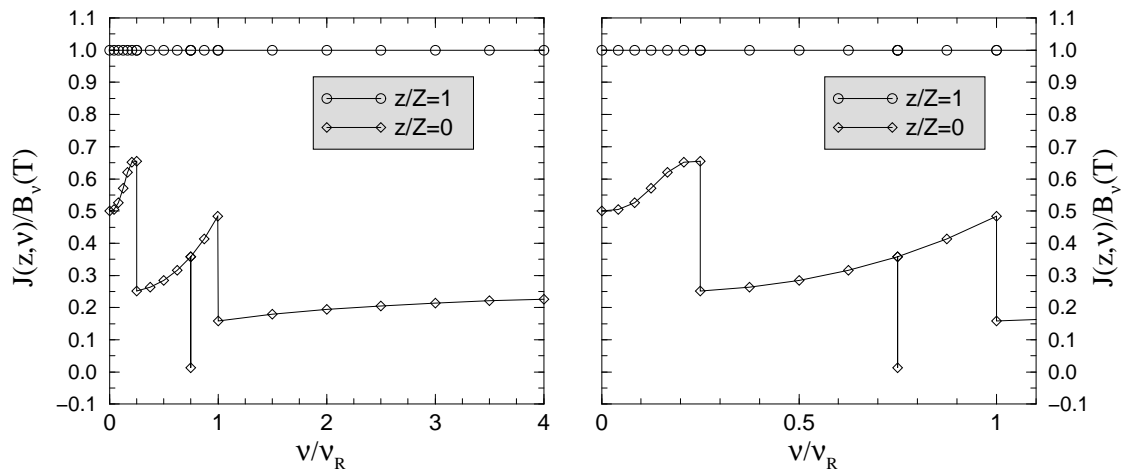


FIG. 6.12 – (Modèle NETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille.

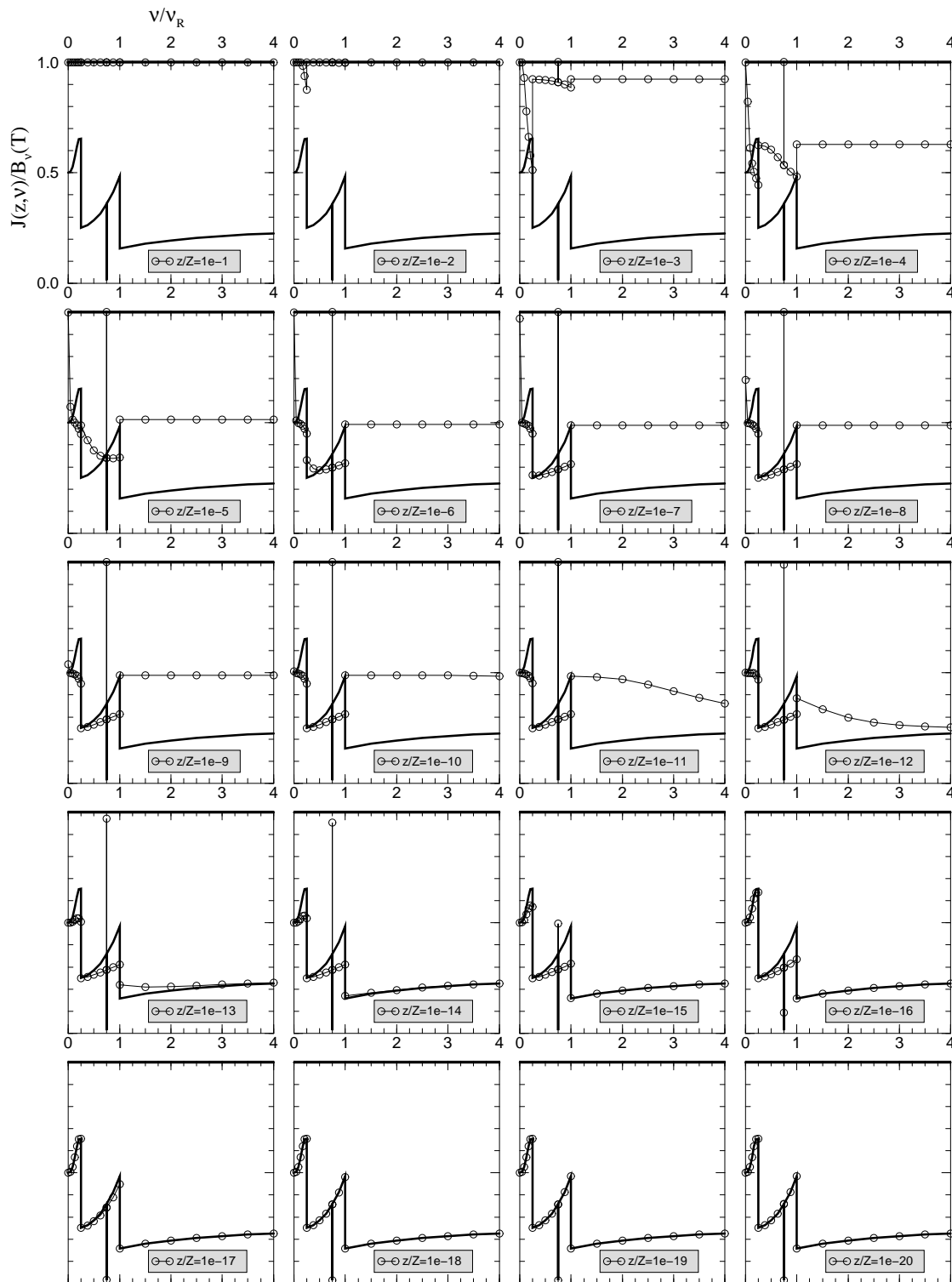


FIG. 6.13 – (Modèle NETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. Le trait gras reproduit la courbe en surface ( $z = 0$ ) de la figure (Fig. 6.12, p. 109). Ces courbes correspondent aux profondeurs géométriques de la grille, pour  $z/Z \leq 10^{-1}$ . Pour  $z/Z \geq 10^{-1}$  ou  $z/Z \leq 10^{-20}$  les courbes sont confondues avec celles des cas  $z/Z = 1$  et  $z = 0$ .

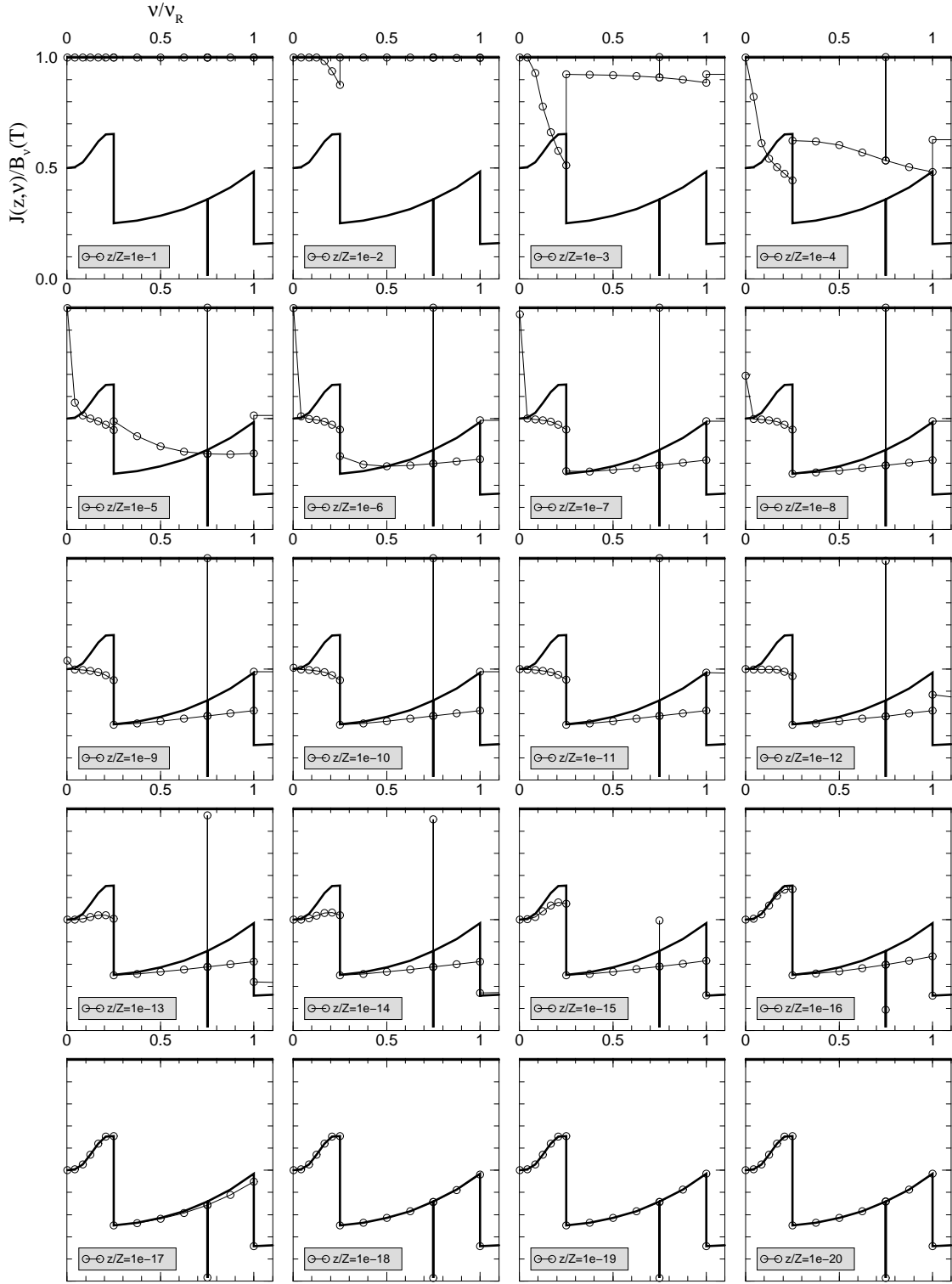


FIG. 6.14 – (Modèle NETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. Le trait gras reproduit la courbe en surface ( $z = 0$ ) de la figure (Fig. 6.12, p. 109). Ces courbes correspondent aux profondeurs géométriques de la grille, pour  $z/Z \leq 10^{-1}$ . Pour  $z/Z \geq 10^{-1}$  ou  $z/Z \leq 10^{-20}$  les courbes sont confondues avec celles des cas  $z/Z = 1$  et  $z = 0$ . Le domaine des fréquences est limité à  $\nu/\nu_R \leq 1.1$  pour les détails à faible fréquence peu visibles dans la figure (Fig. 6.13, p. 110).



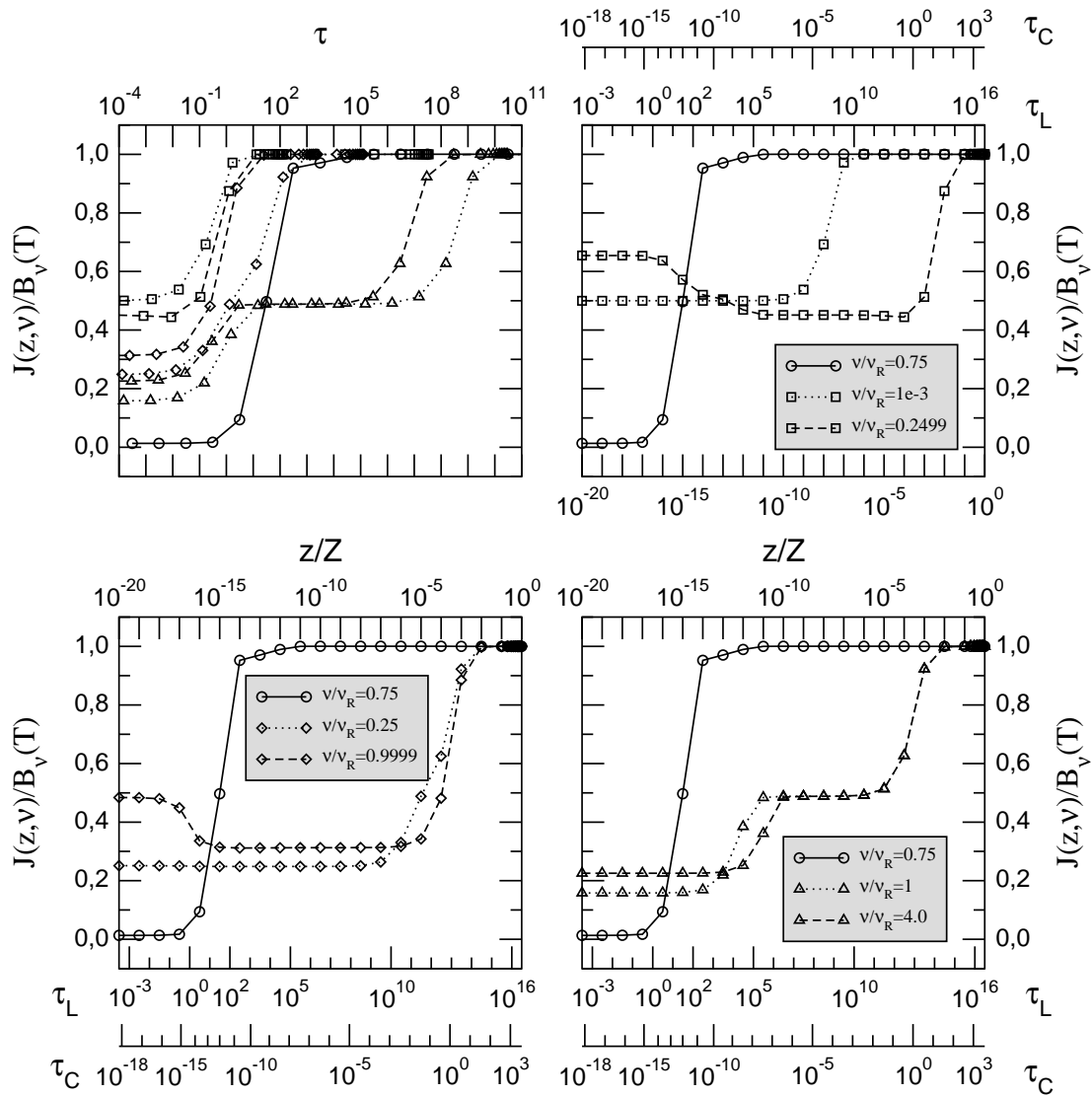


FIG. 6.15 – (Modèle NETL) Intensité moyenne  $J(z, \nu)/B_\nu(T)$  (normalisée à la fonction de Planck) en fonction soit de la profondeur géométrique normalisée  $z/Z$ , soit des profondeurs optiques  $\tau_C$  et  $\tau_L$  (voir section 6.2.4). La figure en haut à gauche représente les courbes pour toutes les fréquences en fonction de la profondeur optique  $\tau$  associée à chacune des fréquences. L'échelle en profondeur optique est restreinte au voisinage de la région où l'intensité moyenne chute.

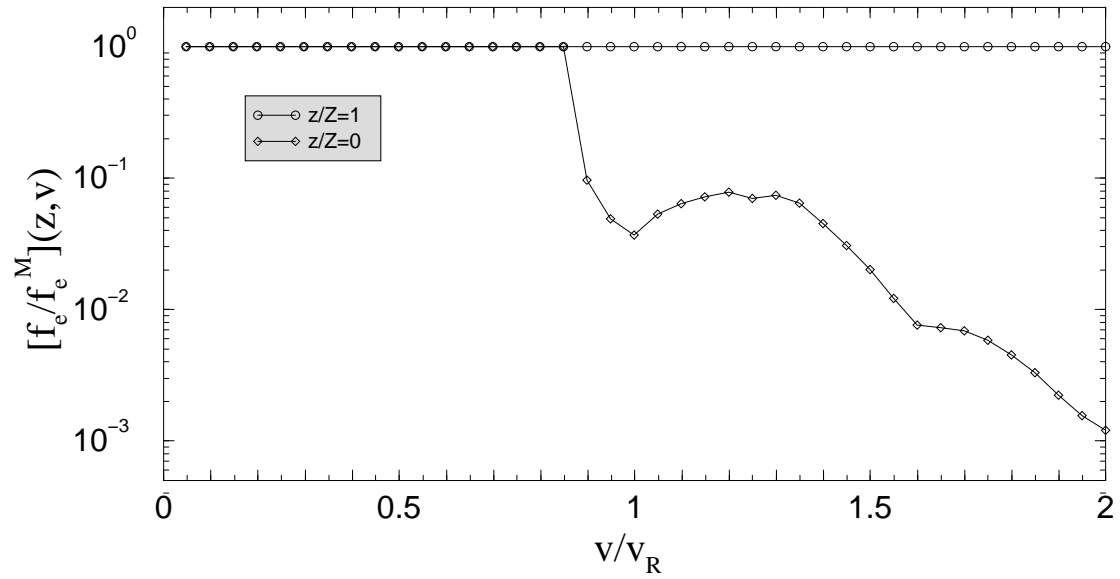


FIG. 6.16 – (modèle NECM) Fdv des électrons  $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$  (normalisée à la maxwellienne de température  $T$ ) en fonction de la vitesse  $v$ , à la frontière interne  $z/Z = 1$  et à la frontière externe de l'atmosphère  $z/Z = 0$ .

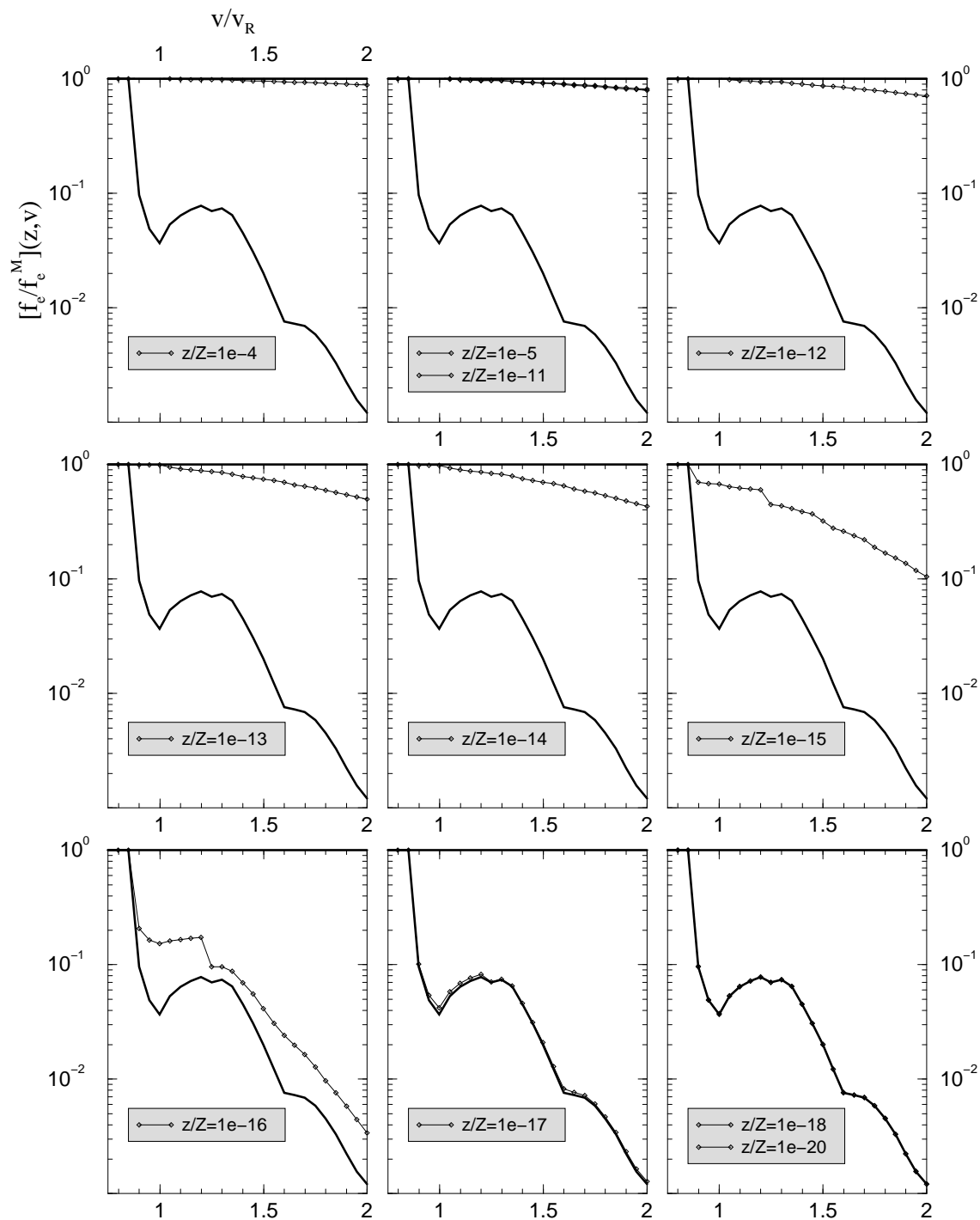


FIG. 6.17 – (modèle NECM) Fdv des électrons  $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$  (normalisée à la maxwellienne de température  $T$ ) en fonction de la vitesse  $v$  pour toutes les profondeurs géométriques de la grille. La courbe en gras reproduit la courbe superficielle de la figure (Fig. 6.16, p. 113). Les courbes tracées pour  $10^{-3} \leq z/Z \leq 1$  ou  $0 \leq z/Z \leq 10^{-18}$  coïncident avec les courbes  $z/Z = 1$  et  $z = 0$  respectivement.

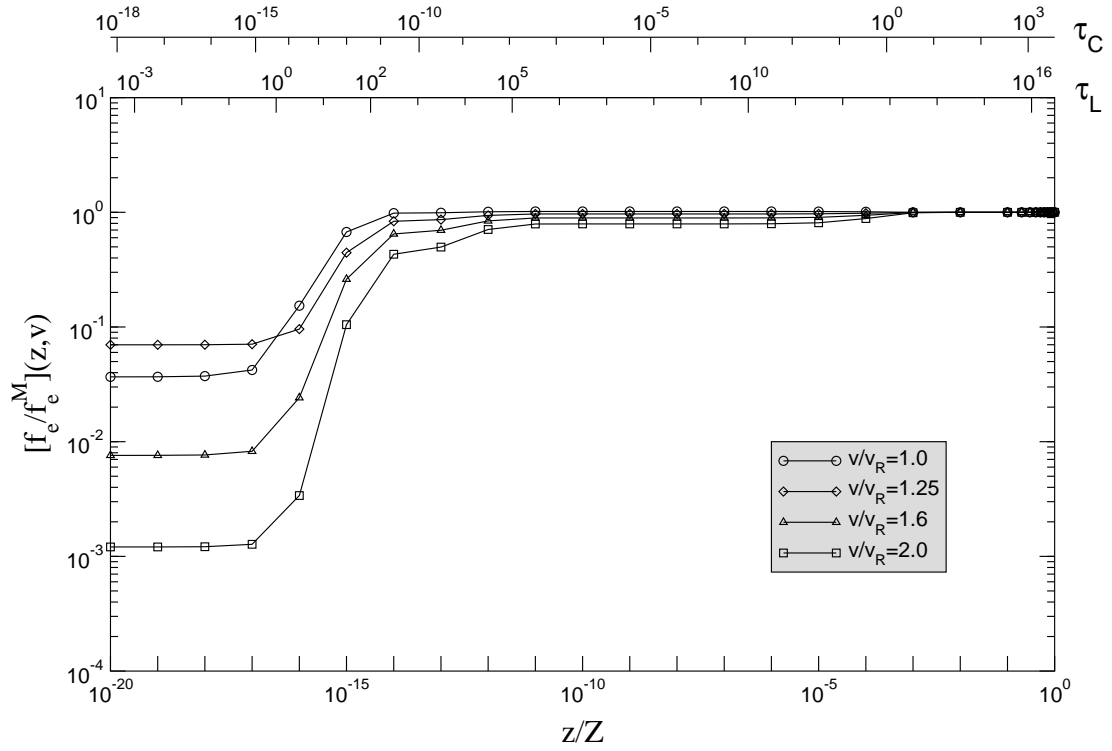


FIG. 6.18 – (modèle NECM) Fdv des électrons  $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$  (normalisée à la maxwellienne de température  $T$ ) en fonction de la profondeur géométrique  $z$  pour quelques vitesses électroniques supérieures à  $v_R$ .

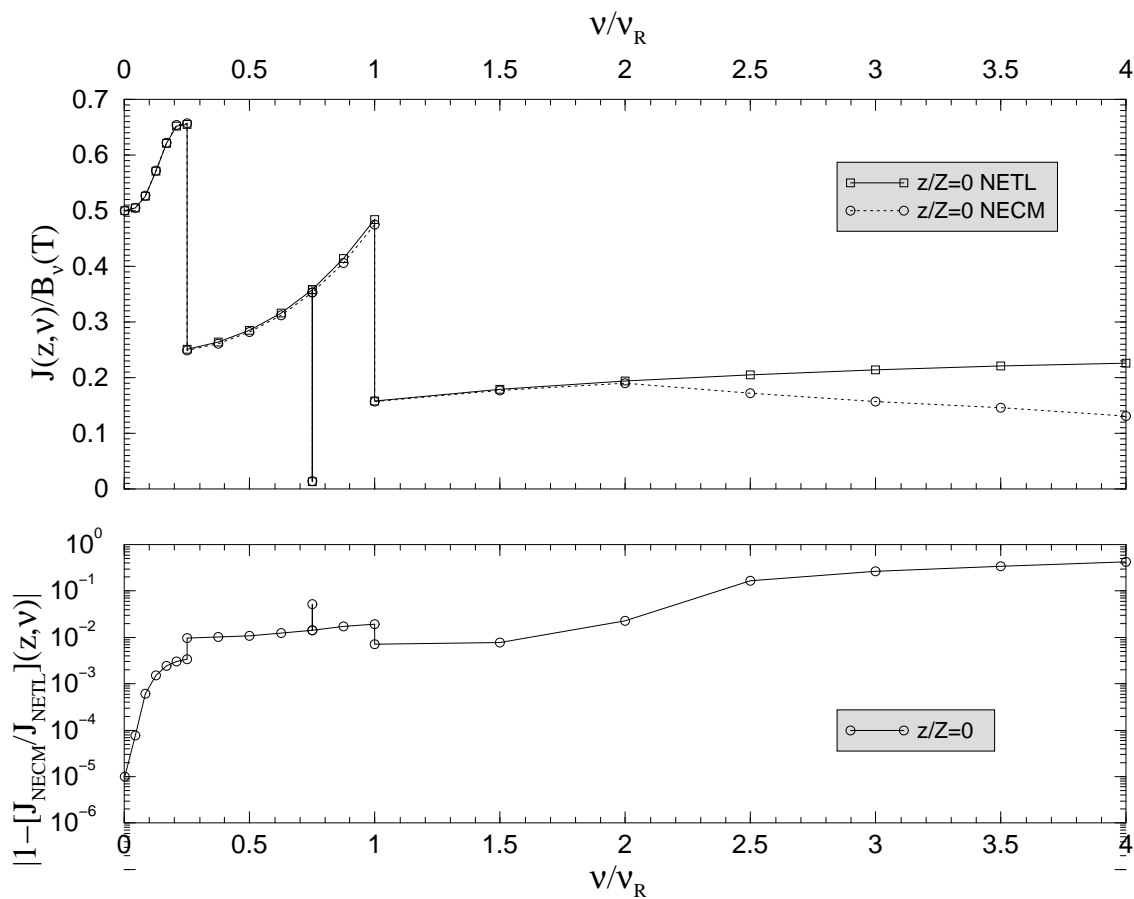


FIG. 6.19 – (Modèle NECM) Effet des électrons non maxwelliens sur l'intensité moyenne du rayonnement. La figure du haut montre les intensités moyennes pour le cas NETL et NECM, et la courbe du bas montre les écarts relatifs entre les deux courbes du haut.

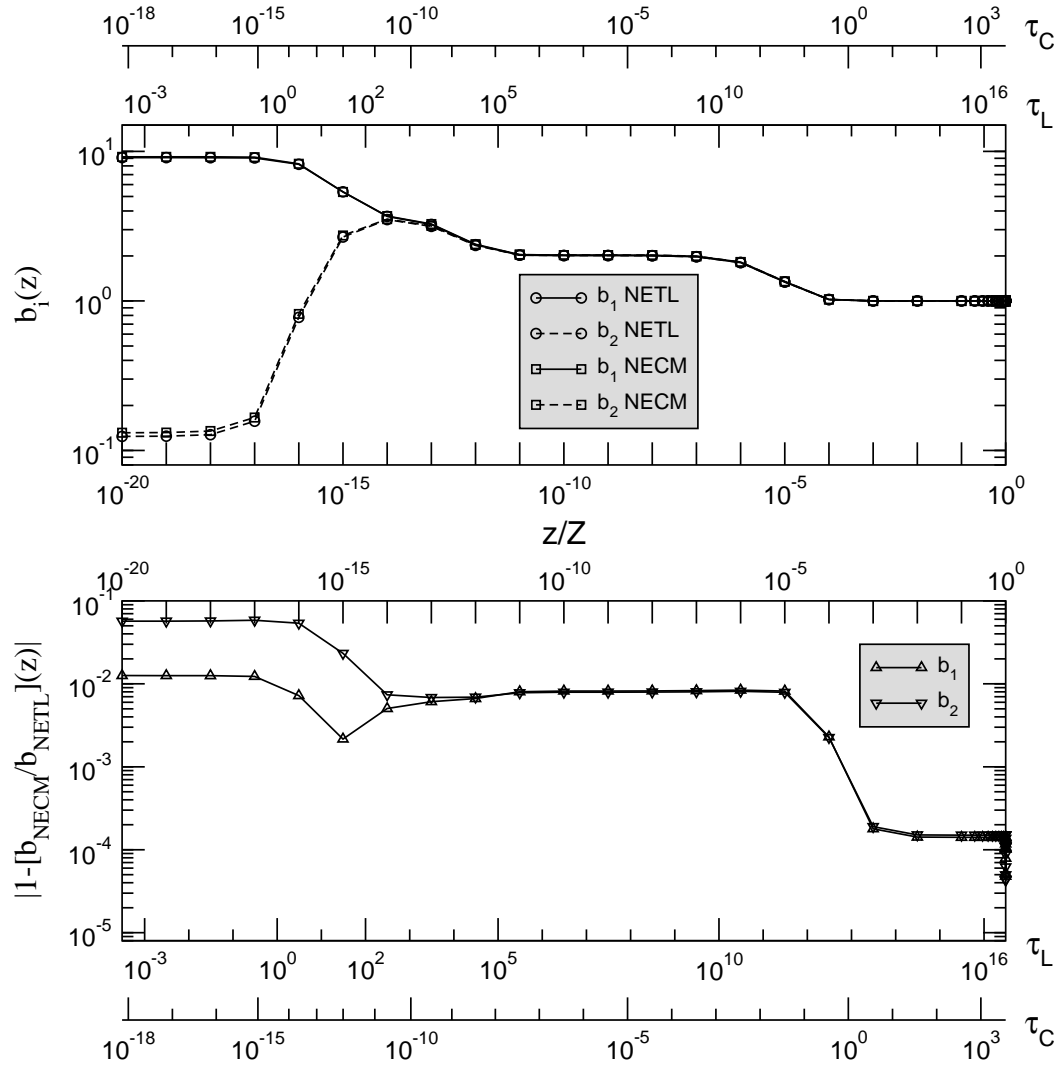


FIG. 6.20 – (Modèle NECM) Effet des électrons non maxwelliens sur les écarts des populations à l'ETL  $b_1(z)$  et  $b_2(z)$ . La figure du haut montre les écarts à l'ETL pour le cas NETL et NECM, et la courbe du bas montre les écarts relatifs entre les courbes du haut.



# Chapitre 7

## Applications astrophysiques et conclusion

### 7.1 Extensions possibles de ce travail

Les extensions possibles de ce travail sont nombreuses. Nous allons résumer celles qui nous paraissent les plus importantes dans notre vision actuelle des priorités.

#### 7.1.1 Confirmation des résultats obtenus

Les calculs numériques présentés au chapitre 6 peuvent être qualifiés de difficiles. Nous avons constaté, comme il fallait s’y attendre, de fortes instabilités dans la résolution itérative d’un système globalement non linéaire, comprenant deux équations cinétiques couplées.

Le transfert de rayonnement est certainement au cœur des difficultés rencontrées dans ce problème. Nous avons utilisé, amélioré et surtout complété les codes de l’équipe *Transfert* du CRAL, spécialisée dans la résolution exacte de l’équation de transfert. Une nouvelle génération de codes a été réalisée, non seulement pour les besoins de notre thèse, mais aussi en vue de leur utilisation par la communauté des astrophysiciens désireux de disposer de codes de référence (*cf.* le site internet du groupe <http://www-obs.univ-lyon1.fr/transfert/>).

Étant donné la difficulté des calculs numériques du chapitre 6, et bien que nous ayons toutes les raisons d’être confiants dans les résultats obtenus, nous croyons utile de refaire ces calculs en utilisant des codes de transfert différents des nôtres. Nous pensons aux codes ALI utilisés couramment pour la modélisation des atmosphères [80], aux techniques développées par L. Crivellari et E. Simonneau [105], et aussi aux codes en cours de réalisation par l’équipe d’Analyse Numérique de l’Université Jean Monnet de Saint-Etienne (M. Ahues, A. Largillier, G. Panasenکو, O. Titaud), qui collabore depuis deux ans avec le groupe *Transfert*.

#### 7.1.2 Transfert de rayonnement avec un modèle réaliste de diffusion

La confrontation de nos résultats avec ceux provenant d’autres codes de transfert doit permettre non seulement de confirmer nos calculs, mais aussi de tester ces codes sur un cas idéalisé : celui où les raies spectrales sont grises et le paramètre de destruction des photons est spatialement constant. Une fois testés et optimisés, les codes numériques peuvent résoudre notre problème avec un profil réaliste de raie et un paramètre de destruction variable. Cette généralisation nous paraît importante, car il est possible qu’elle modifie de façon substantielle les résultats du chapitre 6, selon nous dans le sens d’une aggravation des écarts constatés avec la maxwellienne. S’agissant du profil, cela provient du fait que la profondeur de thermalisation des photons dans une raie est *augmentée* lorsque la raie a des ailes, à cause de la fuite des photons par les ailes.

Cette thèse doit donc être vue comme une sorte de tremplin vers une solution entièrement numérique du problème abordé, dans un contexte plus réaliste que le nôtre.



### 7.1.3 Amélioration des équations cinétiques du problème

Nous n'avons en fait qu'une équation cinétique, celle des électrons, car nous avons pu remplacer les équations cinétiques des particules lourdes par leur moment d'ordre 0 sous l'hypothèse des électrons rapides par rapport aux particules lourdes (*cf.* le commentaire de l'équation 2.30). Un traitement rigoureux de la dynamique des collisions électrons-neutres dans un problème comme le nôtre nous paraît hors de portée des moyens de calcul actuels. On aura une idée du type de difficulté qui se présente lorsqu'on cherche à calculer la fdv des électrons conjointement à celle des atomes excités par exemple, en lisant l'article pionnier de Biberman, Vorob'ev, et Yakubov [7], qui traite ce cas précis.

### 7.1.4 Amélioration de l'équation cinétique des électrons

Nous avons résolu cette équation sous les quatre hypothèses suivantes :

1. l'équation est stationnaire,
2. les termes d'écoulement et de champ de force extérieur peuvent être négligés,
3. le terme de collisions élastiques est bien représenté par un modèle BGK,
4. il est permis de ne s'intéresser qu'à la composante isotrope de la solution.

Il convient de revenir sur ces quatre hypothèses, qui ont été adoptées essentiellement pour les simplifications mathématiques qu'elles entraînent, plutôt qu'à partir de considérations physiques les validant. Dans ce paragraphe et dans le suivant qui concerne les particules lourdes, nous ne pouvons que renvoyer à la littérature levant certaines des hypothèses précédentes, nous réservant une étude plus approfondie de cette littérature dans une phase ultérieure à ce travail. D'une manière générale, il est difficile de se faire une idée de l'influence des effets négligés, car le problème que nous avons traité est fortement couplé et globalement non linéaire. Il semble cependant que les termes négligés dans le membre de gauche des équations cinétiques ont plutôt tendance à *augmenter* les écarts à l'équilibre maxwellien des électrons.

#### 7.1.4.1 Équation stationnaire

L'écriture d'une équation stationnaire est permise lorsque le temps de relaxation des collisions élastiques électrons-électrons est bien plus court que les échelles de temps typiques de l'atmosphère. Dans la chromosphère solaire, ces échelles sont de l'ordre de la minute : c'est, par exemple, la durée moyenne d'ascension des spicules (*cf.* [2, p. 114]). Or un calcul de Shoub [102, p. 342] montre que les temps de relaxation collisionnels ne dépassent pas la seconde dans la région de transition chromosphère-couronne du soleil, même dans la queue des électrons très rapides.

#### 7.1.4.2 Le terme d'écoulement et le champ de force extérieur des électrons

Nous avons vérifié à la section 3.6 qu'il n'était pas absurde de négliger ces deux termes par rapport au terme de collision élastique des électrons dans les conditions physiques de la photosphère solaire. Ce calcul d'ordre de grandeur sur un cas particulier n'a évidemment aucun caractère universel, et la simplification qu'il entraîne doit être justifiée beaucoup plus soigneusement que nous l'avons fait dans les applications (*cf.* Claaßen [35, 36, pp 1875-1876] ou Oxenius [77, pp 738 et 742]).

A cause des deux simplifications en question, les applications ne peuvent concerner que les milieux faiblement hétérogènes (d'échelle de hauteur bien plus grande que le lpm des électrons) plongés dans un champ de force extérieur également faible (c'est-à-dire dont le travail sur une distance de l'ordre du lpm des électrons est petit devant l'énergie cinétique moyenne des électrons).

Lorsque cela n'est pas le cas, on doit résoudre l'ECE avec un membre de gauche non nul, ce qui entraîne le caractère non local de la fdv des électrons : la forme de cette dernière sur une couche dépend des propriétés globales de l'atmosphère. Des migrations d'électrons des régions les plus chaudes aux régions les plus froides se produisent en présence d'un gradient élevé de température, ainsi que des mouvements inverses dus au champ électrique. Ce problème a été examiné, entre autres, par Gurevich et Istomin [46], Shoub [102], Ljepojevic et Burgess [64], et appliqué à la région de transition chromosphère-couronne de l'atmosphère solaire dans les deux derniers articles. Des écarts importants à la maxwellienne ont été obtenus dans la queue des électrons rapides

( $v_e \geq 3\bar{v}_e$ ), à cause des déplacement d'électrons des régions chaudes vers les régions froides<sup>1</sup>. Une forte anisotropie de la fdv électronique a également été constatée.

Il serait utile de généraliser ces travaux en complétant le terme de collision de l'ECE (collisions inélastiques et photoniques) et en résolvant cette équation conjointement à l'équation de transfert et aux équations cinétiques des particules lourdes.

#### 7.1.4.3 Le modèle BGK pour le terme de collisions élastiques des électrons

Voir l'annexe B. Nous devons notamment préciser quelle forme de collisions élastiques est valable avant de la modéliser par un terme BGK. Nous avons vu à la note C.2 et à la section 6.1.2 que la description des collisions élastiques par une forme de Balescu-Lennard semblait plus appropriée que la forme habituelle FPL, selon les calculs classiques de classification des plasmas.

#### 7.1.4.4 Effets d'anisotropie de la fdv électronique

Une fdv anisotrope des électrons peut être obtenue dans deux situations au moins :

1. en ne négligeant pas les termes d'écoulement et de champ de force extérieur dans le membre de gauche de l'ECE (*cf.* la section 7.1.5),
2. en présence d'un champ radiatif intense lui-même fortement anisotrope.

Nous nous sommes intéressés au deuxième point en écrivant les coefficients de l'équation de transfert pour une fdv anisotrope des électrons. Cet exercice ne pose pas de difficulté majeure lorsque les sections efficaces différentielles d'absorption  $bf$  et  $ff$  sont écrites dans l'approximation dipolaire. Disposant d'une copie des codes élaborés par G. Massacrier et K. El-Murr (CRAL, ENS) pour calculer les paramètres d'asymétrie présents dans ces coefficients, nous pouvons décrire l'effet *anisotropisant* d'un champ radiatif anisotrope sur les électrons [65, 34].

La modélisation BGK du terme de collisions élastiques des électrons pour une fdv anisotrope est à faire. La difficulté sur laquelle nous avons buté dans notre formulation du problème anisotrope se situe au niveau de l'écriture du terme de collisions inélastiques des électrons. Ce terme fait intervenir les sections efficaces *différentielles* d'excitation et d'ionisation collisionnelles électrons-atomes qui, à notre connaissance, n'existent pas dans la littérature, même pour l'hydrogène. Il est difficile d'expérimenter en laboratoire avec de l'hydrogène monoatomique, ce qui explique la rareté des données expérimentales concernant ce gaz. Quant aux calculs théoriques de ces sections efficaces, ils sont inextricables et partent d'hypothèses inacceptables pour notre problème.

Sans disposer de sections efficaces différentielles suffisamment précises, nous avons renoncé à poursuivre nos investigations dans cette voie.

### 7.1.5 Amélioration des équations de l'équilibre statistique

Les taux des transitions collisionnelles ont été calculés sous les hypothèses suivantes :

1. les particules lourdes ont la même température cinétique que les électrons libres,
2. les effets d'écoulement des atomes sont négligeables,
3. les effets des collisions inélastiques entre atomes sont négligeables.

#### 7.1.5.1 Milieu à deux températures

D'une manière générale, l'hypothèse d'une température unique est mal adaptée à la description d'un plasma hors équilibre thermodynamique. Il faudrait au moins supposer l'existence a priori de deux températures cinétiques, l'une pour les électrons et l'autre pour les particules lourdes (voir N. Peyraud [85, 84] et l'article de revue de Biberman *et al.* [9]).

Il serait également intéressant d'étudier les écarts à la maxwellienne induits par les collisions *élastiques* électrons-atomes lorsque leur température diffère [9].

---

<sup>1</sup>La fréquence de collision des électrons décroît rapidement quand leur vitesse augmente (comportement en  $v_e^{-3}$ ), donc ils sont faiblement couplés au plasma : ces électrons peuvent se déplacer presque librement des régions chaudes vers les régions froides.

### 7.1.5.2 Effets d'écoulement des atomes

La prise en compte de ces effets nécessite également une approche cinétique : *cf.* les travaux de Borsenberger, Oxenius et Simonneau [16, 17, 18] (pour une fdv maxwellienne des électrons).

### 7.1.5.3 Prise en compte des collisions inélastiques entre atomes

Nous les avons négligées, mais elles jouent un rôle important dans les atmosphères froides pauvres en électrons. Le problème majeur est au niveau de la dynamique : au cours d'une collision entre atomes, les particules incidentes ont des vitesses comparables, et une approche cinétique est nécessaire [78, annexe E]. Une autre difficulté est l'absence de sections efficaces fiables décrivant ce type de collision.

Ce problème a été abordé entre autres par Shoub [101], Park [81], Biberman *et al.* [8, 9], entre autres, qui ont montré que les collisions entre atomes deviennent importantes dans un plasma de degré d'ionisation faible (à partir de  $6 \times 10^{-4}$  dans l'exemple traité par Biberman *et al.* [9, p. 428]) et/ou d'épaisseur optique faible dans la raie  $L\alpha$  (de l'ordre de 200 dans le problème abordé par Shoub [101, p. 288]). Le travail de Shoub a mis en évidence un intéressant phénomène de *feedback* entre le calcul des populations et celui de la fdv des électrons, pouvant entraîner une baisse importante du degré d'ionisation par rapport aux conditions initiales, ce qui est une source d'instabilités numériques si les collisions inélastiques entre atomes ne sont pas prises en compte.

## 7.2 Survol de quelques retombées astrophysiques

Étant donné le caractère hautement idéalisé du problème résolu au chapitre 6, il est certainement prématuré d'aborder dès à présent la question des applications astrophysiques. Tout au plus pouvons nous indiquer les principales directions prises dans la littérature sur le sujet, qui nous serviront de guide dans la phase d'approfondissement numérique de notre thèse.

Notre travail est caractérisé par le fait que nous résolvons le problème global des milieux irradiés partiellement ionisés, l'ECE étant résolue en négligeant les trois termes situés dans son membre de gauche (dérivée temporelle, gradient spatial, champ de force). Nous détaillons ci-dessous trois types d'applications astrophysiques à ce type de travail.

### 7.2.1 La modélisation des milieux dilués non transparents tels que les atmosphères stellaires ou les nuages interstellaires

L'écart à la maxwellienne de la fdv des électrons libres modifie les taux de transition entre les états liés des atomes des différentes espèces chimiques présentes, donc aussi les populations de ces niveaux et les grandeurs thermodynamiques caractéristiques du milieu (degré d'ionisation, densité, *etc.*) et du champ radiatif (intensité, flux, *etc.*). C'est donc la modélisation globale d'objets tels que les atmosphères stellaires qui peut être remise en cause par des écarts importants de la fdv des électrons à la maxwellienne [102, section IV a,b,c]. Nous avons remarqué l'article de Salzmann et Lee [96] qui permet de se faire une idée, à l'aide d'arguments physiques et numériques simples, de l'impact de ces écarts sur les populations atomiques.

Nous comptons étendre le champ d'application du code ayant permis les calculs numériques du chapitre 6 en l'appliquant à des atmosphères stellaires de température  $T$ , de densité de particules lourdes  $n_0$  et de profondeur géométrique  $Z$  variées. Dans un deuxième temps, nous comptons l'appliquer à des atmosphères stellaires présentant de faibles gradients de température et de densité  $n_0$ , la température étant déterminée de façon auto-consistante et la densité à l'aide de l'équation de l'équilibre hydrostatique.

Le but de ces extensions est d'estimer l'importance des effets de non thermalisation des électrons dans des atmosphères d'étoiles occupant des positions diverses dans le diagramme HR.

### 7.2.2 Le calcul de la température et/ou de la densité électronique par des techniques spectroscopiques ou des mesures in situ (sondes spatiales dans le cas du soleil)

Les calculs classiques utilisent des taux de transition déduits d'une fdv maxwellienne des électrons, donc différents de ceux que l'on obtient en prenant une fdv réaliste. Les conséquences sur

les estimations de la température et/ou de la densité électronique par *inversion* des données observationnelles peuvent être très importantes [90, 102, 74, 86, 37].

### 7.2.3 L'obtention de conditions aux limites pour l'étude de la région de transition et de la couronne solaire

La modélisation des couches les plus externes de l'atmosphère solaire nécessite un calcul auto-consistant de la fdv des électrons libres, car il est désormais bien admis que la queue des électrons rapides est surpeuplée par rapport à la maxwellienne [60]. L'ECE doit être résolue en prenant en compte des effets négligés dans cette thèse : gradients importants de la densité et de la température électronique, prise en compte du champ de force extérieur (issu notamment du champ électrique et du champ magnétique), effets d'anisotropie, *etc.* [46, 102, 64, 63, 97, 98].

Cette modélisation doit néanmoins partir de conditions aux limites *ad hoc* dans la région concernée, que l'on peut situer dans la photosphère ou la basse chromosphère. Nous pensons que notre travail peut éclairer le choix de ces conditions aux limites. Nous avons remarqué les travaux de Scudder [97, 98], qui tendent à montrer qu'un excès d'électrons rapides à la base de la région de transition suffit à expliquer le chauffage de la couronne solaire, sans aucun apport extérieur d'énergie. La citation ci-dessous provient de [97, p. 349] :

“The present explanation replaces the enigma of the coronal temperature inversion with the new question : ”Can formation of a suprathermal tail on the velocity distribution of electrons and ions be preempted in the high chromosphere/low transition region where the hydrogen convective zone power is dissipated or reflected and the plasma is nearly fully ionised?” The preliminary answer given in this paper is that since the *H* theorem cannot be brought to bear in this regime, the non-Maxwellian distribution implied by the suprathermal tail is more likely than not. The subsequent velocity filtration of this distribution as a boundary condition for the fully ionized evolution of the overlying layers is then a natural explanation of the coronal temperature inversion.”

## 7.3 Conclusion

Nous avons été surpris par la difficulté du problème abordé dans cette thèse. Nous avons rencontré de grosses difficultés au niveau numérique, à cause du transfert. Cela explique que le chapitre 6 ne soit pas à la hauteur des ambitions des chapitres 1 à 5 : le problème effectivement résolu est bien plus simple que le problème formulé ! Mais la solution est probablement correcte.

Le problème que nous avons résolu n'est pas nouveau, et le résultat obtenu va dans le sens des travaux des physiciens des années 70. Nous confirmons donc l'existence du *problème des électrons* dans une atmosphère stellaire et avons la conviction qu'il est aujourd'hui possible de le traiter correctement. Le principal objectif de cette thèse est, finalement, d'établir ces deux points.

D'où les très nombreux projets, mentionnés à la section 7.1, qui se justifient par l'importance des retombées astrophysiques, présentées à la section 7.2. Parmi elles, la question du chauffage de la couronne solaire nous paraît évidemment primordiale.



# Annexe A

## Description des interactions

Nous regroupons dans cette annexe les données nécessaires à la description statistique des collisions entre particules, photons compris. Nous nous plaçons dans une atmosphère d'hydrogène pur partiellement ionisé, contenant donc quatre catégories de particules : les photons, les électrons, les protons et les atomes d'hydrogène. Les interactions intéressantes sont celles qui mettent en jeu les photons (transitions radiatives) ou les électrons (collisions électroniques). Les premières comprennent les transitions bound-bound (*bb*), bound-free (*bf-fb*) et free-free (*ff*), ainsi que la diffusion des photons sur les particules matérielles. Les collisions électroniques peuvent être élastiques, et dans ce cas elles sont supposées binaires, ou inélastiques. Les premières sont les collisions électrons-électrons, électrons-protons et électrons-atomes. Les collisions inélastiques sont l'excitation et l'ionisation par l'impact d'électrons (supposés rapides par rapport aux particules lourdes) et leur inverse : désexcitation collisionnelle et recombinaison à trois corps.

Puisque nous ne nous intéressons qu'à la composante isotrope de la fdv des électrons, les processus mettant en jeu ces particules pourront être décrits par des sections efficaces intégrées sur les directions des vitesses électroniques émergentes, ce qui est une simplification.

Les unités sont celles du système (SI). Les constantes utilisées dans ce chapitre sont regroupées dans le chapitre sur les notations.

### A.1 Processus radiatif bound-bound (*bb*)

La section efficace d'absorption *bb* et le coefficient d'émission spontanée *bb* d'un atome d'hydrogène de vitesse  $\mathbf{v}$  sont écrits dans le référentiel du laboratoire sous la forme habituelle

$$\sigma_{i\nu,j}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} B_{ij} \varphi_{ij}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu), \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{j,i\nu}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \frac{h\nu_{ij}}{4\pi} A_{ji} \psi_{ji}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu), \quad (\text{A.2})$$

la définition des coefficients d'Einstein  $B_{ij}$ ,  $A_{ji}$  et des profils atomiques  $\varphi_{ij}$  et  $\psi_{ji}$  étant classique [78]. La fréquence  $\nu_{ij}$  :

$$\nu_{ij} = \frac{1}{h}(E_j - E_i) = \nu_R \left( \frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2} \right) \quad i < j, \quad (\text{A.3})$$

est la fréquence centrale de la raie associée à la transition  $i \rightleftharpoons j$  pour  $i < j$  et  $\nu_R = E_R/h$  est la fréquence de Rydberg associée à l'énergie de Rydberg  $E_R$ . Rappelons que  $I(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) B_{ij}$  est le taux des transitions  $i \rightarrow j$  par absorption d'un photon (indépendamment de sa direction-fréquence) et  $\frac{1}{4\pi} \varphi_{ij}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\hat{\mathbf{n}} d\nu$  la probabilité que la direction-fréquence du photon absorbé appartienne au domaine  $(\hat{\mathbf{n}}, d\hat{\mathbf{n}}) \times (\nu, d\nu)$ , sachant qu'une absorption a eu lieu. Les coefficients  $A_{ji}$  sont les taux des transitions  $j \rightarrow i$  par émission spontanée d'un photon (indépendamment de sa direction-fréquence) et  $\frac{1}{4\pi} \psi_{ji}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\hat{\mathbf{n}} d\nu$  la probabilité que la direction-fréquence du photon émis appartienne au domaine  $(\hat{\mathbf{n}}, d\hat{\mathbf{n}}) \times (\nu, d\nu)$ , sachant qu'une émission a eu lieu.

Comme c'est l'usage en astrophysique, les coefficients  $B_{ij}$  sont rapportés à l'unité d'intensité spécifique du rayonnement incident, et valent donc  $c/4\pi$  fois les coefficients rapportés à l'unité

de densité d'énergie, que l'on trouve également dans la littérature. Les coefficients  $B_{ij}$  sont donc exprimés en unités  $\text{J}^{-1}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ , les coefficients  $A_{ji}$  en unités  $\text{s}^{-1}$ . Rappelons que les coefficients d'Einstein sont moyennés sur la structure fine des niveaux  $i$  et  $j$  (cf. [51, annexe I]).

Les profils atomiques sont de dimension T et vérifient la condition de normalisation

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \varphi_{ij}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\hat{\mathbf{n}}d\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^{+\infty} \psi_{ji}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\hat{\mathbf{n}}d\nu = 1, \quad (\text{A.4})$$

issue de leur interprétation probabiliste.

### A.1.1 Calcul des coefficients d'Einstein

Les coefficients  $B_{ij}$ , lorsque ils sont calculés dans l'approximation dipolaire, se déduisent des forces d'oscillateur  $f_{ij}$  fournies par les bases de données atomiques. La relation de passage des  $f_{ij}$  aux  $B_{ij}$  est

$$B_{ij} = \frac{4\pi^2 \alpha^2 a_0 c}{h\nu_{ij}} f_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

Les forces d'oscillateur de l'atome d'hydrogène, moyennées sur les nombres quantiques azimutaux  $l$ , sont tabulées dans Rybicki & Lightman [95] ou Sobelman [107]. Les valeurs retenues pour les six transitions possibles entre les quatre premiers niveaux sont regroupées dans la table (Tab. A.1).

$f_{ij} (i < j)$	1	2	3
2	0.4162		
3	0.07910	0.6408	
4	0.02899	0.1193	0.8420

TAB. A.1 – Forces d'oscillateur pour l'atome d'hydrogène  $f_{ij}$  pour  $i < j$ .

Les coefficients  $A_{ji}$  se déduisent des  $B_{ij}$  par la relation de réciprocité suivante :

$$\frac{A_{ji}}{B_{ij}} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_j}, \quad (\text{A.6})$$

dans laquelle les  $g_i$  et  $g_j$  sont les poids statistiques des niveaux  $i$  et  $j$  (voir le chapitre sur les notations). On peut aussi les calculer directement à partir des forces d'oscillateurs en utilisant la relation

$$A_{ji} = \frac{8\pi^2}{c} \alpha^2 a_0 \nu_{ij}^2 \frac{g_i}{g_j} f_{ij}. \quad (\text{A.7})$$

### A.1.2 Calcul des profils moyens d'absorption et d'émission

Le calcul des profils d'absorption et d'émission moyens, définis par

$$\Phi_{ij}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \int f_i(z, \mathbf{v}) \varphi_{ij}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\mathbf{v}, \quad (\text{A.8})$$

$$\Psi_{ji}(z, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \int f_j(z, \mathbf{v}) \psi_{ji}(z, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}, \nu) d\mathbf{v}, \quad (\text{A.9})$$

est d'une grande complexité pour une transition  $bb$  d'un modèle réaliste d'atome. La difficulté vient à la fois du calcul des profils atomiques et de la détermination des fdv particulières [73]. Dans cette thèse où le détail de la forme des raies spectrales n'est pas l'élément essentiel, nous avons choisi le profil le plus simple, qui est le profil rectangulaire de Milne. Dans ce modèle, les raies sont grises, c'est-à-dire à une seule fréquence, leur largeur provenant de l'effet Doppler. Les profils moyens d'absorption et d'émission sont alors donnés par la relation

$$\Phi_{ij}^{\text{M}}(z, \nu) = \Psi_{ji}^{\text{M}}(z, \nu) = \frac{1}{\Delta\nu_{ij}(z)} \times \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu - \nu_{ij}| < \frac{1}{2}\Delta\nu_{ij}(z) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{A.10})$$

où la largeur Doppler  $\Delta\nu_{ij}(z)$  s'exprime en fonction de la masse  $m_H$  des atomes d'hydrogène et de leur température  $T$  par

$$\Delta\nu_{ij}(z) = \frac{\nu_{ij}}{c} \sqrt{\frac{2kT(z)}{m_H}}. \quad (\text{A.11})$$

Le profil de Milne est certes irréaliste, mais il offre la possibilité d'utiliser un modèle d'atome à plusieurs niveaux sans avoir à introduire les complications numériques inhérentes à la redistribution en fréquence des photons dans les raies. On obtient ainsi une équation de transfert *monochromatique* dans chaque raie, ce qui permet d'appliquer dans chaque raie nos codes de résolution exacte de cette équation (*cf.* la section 5.5.3).

## A.2 Processus radiatif bound-free et free-bound (*bf-fb*)

### A.2.1 Transitions *bf* : section efficace de photoionisation

La transition  $(i, \mathbf{v}) + (\hat{\mathbf{n}}, \nu) \rightarrow (+, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e)$  est décrite en supposant que l'atome est stationnaire et lent par rapport à l'électron éjecté. Elle est caractérisée par une distribution  $\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e)$  s'écrivant comme le produit d'une section efficace différentielle  $\sigma_{i+}(\theta, \nu)$ , de dimension  $L^2$ , par une distribution exprimant la contrainte d'énergie

$$h(\nu - \nu_{i+}) = \frac{1}{2} m_e v_e^2 \quad (\nu > \nu_{i+}), \quad (\text{A.12})$$

où  $\nu_{i+} = \nu_R/i^2$  est la fréquence d'ionisation de l'état d'énergie  $i$  de l'atome d'hydrogène, et  $\nu_R$  est la fréquence de Rydberg.

Lorsque cette dernière porte sur la vitesse de l'électron éjecté, on obtient l'écriture

$$\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) = \sigma_{i+}(\theta, \nu) \frac{1}{v_e^2} \delta[v_e - \zeta_{i+}(\nu)], \quad (\text{A.13})$$

la division par  $v_e^2$  provenant de l'égalité  $\sigma_{i\nu,+e} d\mathbf{v}_e = \sigma_{i+} d\hat{\mathbf{v}}_e$  et du fait que  $d\mathbf{v}_e = d\hat{\mathbf{v}}_e v_e^2 dv_e$ .  $\zeta_{i+}(\nu)$  est la vitesse d'un électron éjecté par un photon de fréquence  $\nu$ , soit

$$\zeta_{i+}(\nu) = \sqrt{\frac{2h}{m_e}(\nu - \nu_{i+})} \quad (\nu > \nu_{i+}). \quad (\text{A.14})$$

On remarquera que la section efficace différentielle ne dépend que de l'angle  $\theta$  des vecteurs  $\hat{\mathbf{n}}$  et  $\hat{\mathbf{v}}_e$  en l'absence de polarisation du rayonnement incident et de l'atome. L'autre variable est la fréquence du photon incident dans le référentiel de l'atome, qui est confondue dans l'équation (A.13) avec sa fréquence  $\nu$  dans le référentiel du laboratoire. En effet, la section efficace différentielle de photoionisation varie lentement avec la fréquence, et on peut la calculer en négligeant l'effet Doppler.

Il est également utile, lorsqu'on s'intéresse à la dynamique des électrons, de faire porter la contrainte d'énergie sur la fréquence du photon absorbé. Puisque, d'après (A.12),

$$\frac{1}{v_e^2} \delta[v_e - \zeta_{i+}(\nu)] = \frac{m_e}{h} \frac{1}{v_e} \delta[\nu - \xi_{i+}(v_e)], \quad (\text{A.15})$$

où  $\xi_{i+}(v_e)$  est la fréquence d'un photon capable d'éjecter un électron à la vitesse  $v_e$

$$\xi_{i+}(v_e) = \nu_{i+} + \frac{1}{h} \frac{1}{2} m_e v_e^2, \quad (\text{A.16})$$

on peut encore écrire la distribution  $\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e)$  sous la forme

$$\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) = \frac{m_e}{h} \frac{1}{v_e} \sigma_{i+}(\theta, \nu) \delta[\nu - \xi_{i+}(v_e)]. \quad (\text{A.17})$$



### A.2.1.1 Expression de la section efficace intégrée de photoionisation de l'atome d'hydrogène

Cette section efficace se déduit de la distribution de transition par une intégration sur la vitesse de l'électron éjecté, soit

$$\sigma_{i+}(\nu) = \int \sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e) d\mathbf{v}_e = \int_{4\pi} \sigma_{i+}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_e, \nu) d\hat{\mathbf{v}}_e = 2\pi \int_0^\pi \sigma_{i+}(\theta, \nu) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.18})$$

Son expression pour un atome d'hydrogène à l'état  $i$  est la suivante [108] :

$$\sigma_{i+}(\nu) = \sigma_{i+} Y(\nu - \nu_{i+}) \left( \frac{\nu_{i+}}{\nu} \right)^3 g_{bf}(i, \nu), \quad (\text{A.19})$$

où  $g_{bf}(i, \nu)$  est le facteur de Gaunt (moyenné sur le nombre quantique  $l$ ) et  $\sigma_{i+}$  la valeur de la section efficace au seuil d'ionisation pour un facteur de Gaunt égal à 1, soit

$$\sigma_{i+} = \frac{64\pi}{3\sqrt{3}} \alpha a_0^2 i \approx 7.907 \times 10^{-22} i \text{ m}^2. \quad (\text{A.20})$$

La présence de la fonction de Heaviside  $Y$ , définie par (Eq. 2.33), dans le membre de droite de (A.19) indique que l'absorption n'a lieu que si la fréquence du photon incident est supérieure à la fréquence d'ionisation  $\nu_{i+}$ .

La valeur du facteur de Gaunt  $g_{bf}(i, \nu)$  est proche de 1 à la fréquence d'ionisation  $\nu_{i+}$ , augmente jusqu'à un maximum qui ne dépasse pas 1.1, puis décroît vers 0 dans le domaine des rayons X. Ce coefficient a été tabulé avec précision par Karzas & Latter [52] et Massacrier [65]. Nous avons utilisé le programme de Massacrier [65] pour nos calculs numériques.

### A.2.2 Transition $fb$ : section efficace de recombinaison radiative

La transition inverse de la précédente  $(+, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e) \rightarrow (i, \mathbf{v}) + (\hat{\mathbf{n}}, \nu)$  est décrite par une distribution  $\sigma_{+e,i\nu}(\mathbf{v}_e; \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  reliée à la distribution  $\sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e)$  par la relation de réciprocité [78]

$$v_e \sigma_{+e,i\nu}(\mathbf{v}_e; \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \Gamma_i \frac{2\nu^2}{c^2} \sigma_{i\nu,+e}(\hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}_e), \quad (\text{A.21})$$

dans laquelle  $v_e$  et  $\nu$  vérifient l'équation d'énergie (A.12).  $\Gamma_i$  désigne le coefficient (de dimension  $L^6 T^{-3}$ ) défini dans la note C.1 (Eq. C.4) et vaut :

$$\Gamma_i = \frac{g_i}{g_+ g_e} \left( \frac{h}{m_e} \right)^3. \quad (\text{A.22})$$

On peut donc exprimer la distribution décrivant une recombinaison radiative en terme de la section efficace différentielle de photoionisation introduite précédemment :

$$\sigma_{+e,i\nu}(\mathbf{v}_e; \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \Gamma_i \frac{2\nu^2}{c^2} \sigma_{i+}(\theta, \nu) \frac{1}{v_e^3} \delta[v_e - \zeta_{i+}(\nu)], \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_{+e,i\nu}(\mathbf{v}_e; \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \Gamma_i \frac{m_e}{h} \frac{1}{v_e} \frac{2\nu^2}{c^2} \sigma_{i+}(\theta, \nu) \delta[\nu - \xi_{i+}(v_e)]. \quad (\text{A.24})$$

## A.3 Processus radiatif free-free ( $ff$ )

### A.3.1 Section efficace d'absorption $ff$

La transition  $(i, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e) + (\hat{\mathbf{n}}, \nu) \rightarrow (i, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}'_e)$  est décrite en supposant de nouveau la particule lourde stationnaire et lente par rapport à l'électron. Elle est caractérisée par une distribution  $\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e)$  s'écrivant sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes (Eqs. 128, 129) :

$$\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) = \sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \frac{1}{v_e'^2} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, \nu)], \quad (\text{A.25})$$

$$\sigma_{ie\nu,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e) = \frac{m_e}{h} \frac{1}{v'_e} \sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \delta[\nu - \xi_{ff}(v_e, v'_e)] \quad (v_e < v'_e), \quad (\text{A.26})$$

obtenues en faisant porter la contrainte d'énergie

$$\frac{1}{2} m_e v_e'^2 - \frac{1}{2} m_e v_e^2 = h\nu \quad (\text{A.27})$$

sur la vitesse émergente de l'électron ou sur la fréquence du photon absorbé. Cette contrainte entraîne en effet la relation

$$\frac{1}{v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, \nu)] = \frac{m_e}{h} \delta[\nu - \xi_{ff}(v_e, v'_e)], \quad (\text{A.28})$$

qui fait intervenir la vitesse émergente  $\zeta_{ff}(v, \nu)$  d'un électron de vitesse  $v$  avant absorption d'un photon de fréquence  $\nu$

$$\zeta_{ff}(v, \nu) = \sqrt{v^2 + 2 \frac{h\nu}{m_e}}, \quad (\text{A.29})$$

et la fréquence  $\xi_{ff}(v, v')$  d'un photon absorbé par un électron dont la vitesse augmente de  $v$  à  $v'$

$$\xi_{ff}(v, v') = \frac{1}{2} \frac{m_e}{h} (v^2 - v'^2) \quad (v > v'). \quad (\text{A.30})$$

Dans le membre de droite des expressions (Eqs. A.25, A.26),  $\sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e)$  désigne la section efficace différentielle d'absorption  $ff$ , de dimension  $L^4T$ . En l'absence de polarisation du photon incident, elle dépend de trois directions : celles du photon incident, celle de l'électron incident, et celle de l'électron émergent. A cause de l'invariance par rotation du système atome-électron-photon dans son ensemble, elle ne dépend en fait que des angles de ces trois directions. Son intégrale sur deux quelconques de ces trois angles est indépendante du choix de ces angles, et le résultat est isotrope, c'est-à-dire indépendant de la direction par rapport à laquelle les deux angles sont définis. Si on l'intègre sur une seule des trois directions dont elle dépend, le résultat ne dépend que de l'angle des deux directions restantes. Comme dans le cas d'une absorption  $bf$ , nous avons négligé l'effet Doppler pour le calcul de la section efficace d'absorption  $ff$ , car cette dernière varie lentement avec la fréquence.

### A.3.1.1 Expression de la section efficace d'absorption $ff$ pour un potentiel purement coulombien

Sous l'hypothèse d'isotropie de la fdv électronique, la section efficace utile est moyennée sur la direction de la vitesse électronique incidente et intégrée sur la direction de la vitesse émergente

$$\sigma_{ii}(v_e, \nu) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) d\hat{\mathbf{v}}_e d\hat{\mathbf{v}}'_e. \quad (\text{A.31})$$

Le calcul analytique de cette section efficace, de dimension  $L^4T$ , est possible lorsqu'on suppose que les électrons se déplacent dans un potentiel purement coulombien provoqué par des ions de charge effective  $Z$  [52, 49, 34]. Cette hypothèse paraît raisonnable dans nombre de problèmes de la physique des plasmas ou de l'astrophysique [52]. Le résultat est écrit dans [34] sous la forme

$$\sigma_{ii}(v_e, \nu) = \sigma_{ff} Y(\nu - \nu_p) \left( \frac{\alpha c}{v_e} \right)^2 \left( \frac{\nu_R}{\nu} \right)^3 g_{ff}(v_e, \nu), \quad (\text{A.32})$$

où  $g_{ff}(v_e, \nu)$  est le facteur de Gaunt du processus  $ff$  et  $\sigma_{ff}$  la valeur de la section efficace pour  $v_e$  et  $\nu$  vérifiant  $\frac{1}{2} m_e v_e^2 = h\nu = h\nu_R$  (d'où  $v_e = \alpha c$ ) et pour un facteur de Gaunt égal à 1, soit

$$\sigma_{ff} = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} Z^2 \frac{\alpha a_0^4}{\nu_R} \approx 1.057 \times 10^{-57} Z^2 \text{ m}^4 \text{ s}. \quad (\text{A.33})$$

Les coefficients  $\sigma_{ff}$  et  $g_{ff}$  dépendent de la charge effective  $Z$ , ce qui n'apparaît pas dans les notations. Nous négligerons les transitions  $ff$  induites par les atomes neutres d'hydrogène, pour ne conserver que celles qui mettent en jeu les protons. Nous choisirons un nombre de charge effectif compris entre 0 et 1 pour traduire les effets d'écran des électrons libres sur les protons.

On remarquera également que la section efficace précédente est rapportée à l'unité de *flux* d'électrons incidents, ce qui explique sa dépendance en  $1/v_e^2$  au lieu de celle en  $1/v_e$  fréquemment rencontrée dans la littérature.

Enfin nous avons ajouté la condition  $\nu > \nu_p$ , où  $\nu_p = \nu_p(z)$  est la fréquence de plasma en  $z$

$$\nu_p(z) = \frac{\alpha c}{2\pi} \sqrt{4\pi a_0 n_e(z)}, \quad (\text{A.34})$$

pour empêcher la divergence de la section efficace lorsque la fréquence tend vers 0, une pratique courante en physique des plasmas<sup>1</sup>.

Nous avons utilisé le programme de El-Murr et Massacrier [34] pour calculer le facteur de Gaunt du processus *ff*.

### A.3.2 Section efficace d'émission *ff*

La distribution  $\sigma_{ie,iev}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  décrivant une émission *ff* est reliée à son homologue pour l'absorption par la relation de réciprocité [78]

$$v'_e \sigma_{ie,iev}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \frac{2\nu^2}{c^2} v_e \sigma_{ie,ie}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_e), \quad (\text{A.35})$$

dans laquelle les vitesses électroniques vérifient la contrainte d'énergie (A.27).

On déduit donc des relations (Eqs. A.25, A.26) la double écriture

$$\sigma_{ie,iev}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \frac{2\nu^2}{c^2} \sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \frac{v_e}{v_e'^3} \delta[v'_e - \zeta_{ff}(v_e, \nu)], \quad (\text{A.36})$$

$$\sigma_{ie,iev}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu) = \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{m_e}{h} \frac{v_e}{v_e'^2} \sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e) \delta[\nu - \xi_{ff}(v_e, v'_e)] \quad (v_e < v'_e), \quad (\text{A.37})$$

reliant la distribution  $\sigma_{ie,iev}(\mathbf{v}'_e; \mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu)$  à  $\sigma_{ii}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \hat{\mathbf{v}}'_e)$ , la section efficace différentielle d'absorption *ff*.

## A.4 Processus radiatif de diffusion

### A.4.1 Généralités

La distribution décrivant la diffusion élastique d'un photon sur une particule de type  $k : (k, \mathbf{v}_k) + (\hat{\mathbf{n}}, \nu) \rightarrow (k, \mathbf{v}'_k) + (\hat{\mathbf{n}}', \nu')$  s'exprime simplement par

$$\sigma_{k\nu, k\nu}(\mathbf{v}_k, \hat{\mathbf{n}}, \nu; \mathbf{v}'_k, \hat{\mathbf{n}}', \nu') = \frac{1}{4\pi} \sigma_k(\nu) \delta\left[\mathbf{v}'_k - \mathbf{v}_k + \frac{h\nu}{m_k c} (\hat{\mathbf{n}}' - \hat{\mathbf{n}})\right] \delta(\nu' - \nu), \quad (\text{A.38})$$

lorsqu'on suppose que la diffusion est isotrope et monochromatique dans le référentiel du laboratoire.  $\sigma_k(\nu)$  désigne la section efficace intégrée de diffusion, de dimension  $L^2$ , que nous allons expliciter pour  $k = e$  (diffusion Thomson) et pour  $k = 1$  (diffusion Rayleigh sur des atomes d'hydrogène à l'état fondamental).

### A.4.2 Section efficace intégrée de diffusion Thomson des photons

La section efficace intégrée de diffusion des photons sur une charge libre  $k$  est donnée par la formule de Compton. La diffusion Compton devient la diffusion Thomson aux basses énergies, c'est-à-dire lorsque la condition  $h\nu \ll m_e c^2 \ll m_k c^2$  est réalisée. Pour un photon thermique d'énergie  $h\nu = 2kT$ , cette condition est réalisée dès que  $T \ll 3 \times 10^9$  K, ce qui est toujours le cas dans une atmosphère stellaire.

La formule de Thomson

$$\sigma_k(\nu) = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q_k^2}{4\pi\epsilon_0 m_k c^2} \right)^2, \quad (\text{A.39})$$

<sup>1</sup>En fait, l'additivité des processus individuels d'absorption et d'émission *ff* des électrons suppose l'absence d'effets collectifs de rayonnement de ces derniers, ce qui nécessite que la fréquence du rayonnement absorbé ou émis soit *bien supérieure* à la fréquence de plasma  $\nu_p$  (remarque extraite de [78, p. 32]).

dans laquelle  $m_k$  et  $q_k$  sont la masse et la charge du centre diffuseur, montre que la section efficace est indépendante de la fréquence et inversement proportionnelle au carré de la masse du centre diffuseur. Il est donc permis de négliger la diffusion des photons sur les protons en présence de densités égales de protons et d'électrons dans une atmosphère électriquement neutre.

La section efficace de diffusion Thomson des photons sur les électrons sera écrite sous la forme

$$\sigma_e(\nu) = \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \sim 6.652 \times 10^{-29} \text{ m}^2. \quad (\text{A.40})$$

où  $r_e$  est le rayon classique de l'électron

$$r_e = \alpha^2 a_0 \sim 2.818 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (\text{A.41})$$

### A.4.3 Section efficace de diffusion Rayleigh sur les atomes d'hydrogène

La section efficace intégrée de diffusion des photons sur un atome d'hydrogène à l'état  $i$  a pour expression [99]

$$\sigma_i(\nu) = \sigma_T \nu^4 |I_i(\nu)|^2, \quad (\text{A.42})$$

avec

$$I_i(\nu) = \sum_{j \neq i} \frac{f_{ij}}{\nu_{ij}^2 - \nu^2 + 2i\gamma_{ij}\nu}. \quad (\text{A.43})$$

$f_{ij}$  désigne la force d'oscillateur d'absorption pour  $i < j$  et le produit  $-(g_j/g_i)f_{ji}$  pour  $i > j$ . La constante d'amortissement  $\gamma_{ij}$  vaut

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{6} \alpha^3 \frac{\nu_{ij}^2}{\nu_R} f_{ij}, \quad (\text{A.44})$$

et elle est beaucoup plus petite que  $\nu_{ij}$  car  $\nu_{ij} \leq \nu_R$ ,  $f_{ij} \leq 1$  et  $\alpha \ll 1$ . On retrouve le modèle classique de Lorentz en faisant  $f_{ij} = 1$  dans (A.43) et (A.44). Rappelons que les  $f_{ij}$  vérifient la règle de sommation de Thomas-Reiche-Kuhn

$$\forall i, \quad \sum_j f_{ij} = 1, \quad (\text{A.45})$$

la somme portant sur tous les niveaux, y compris le continu.

La section efficace précédente présente les caractéristiques suivantes :

1. en  $\nu = 0$ ,  $I_i(0)$  vaut  $P_i/4\nu_R^2$ , où la polarisabilité dipolaire de l'état  $i$  est donnée par

$$P_i = 4 \sum_{j \neq i} \left( \frac{\nu_R}{\nu_{ij}} \right)^2 f_{ij}. \quad (\text{A.46})$$

2. Pour  $\nu \approx \nu_{ij}$ , la somme dans (A.43) est dominée par son terme d'ordre  $j$ , et on peut remplacer  $\nu_{ij}^2 - \nu^2$  par  $2\nu_{ij}(\nu_{ij} - \nu)$  dans ce dernier, ce qui donne

$$I_i(\nu) = \frac{f_{ij}}{2\nu_{ij}} \frac{1}{\nu_{ij} - \nu + i\gamma_{ij}}, \quad (\text{A.47})$$

donc

$$|I_i(\nu)|^2 = \frac{\pi}{\gamma_{ij}} \frac{f_{ij}^2}{4\nu_{ij}^2} \varphi_{ij}(\nu), \quad (\text{A.48})$$

où  $\varphi_{ij}(\nu)$  est le profil de Lorentz

$$\varphi_{ij}(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{ij}}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + \gamma_{ij}^2}. \quad (\text{A.49})$$

Il vient, en utilisant les expressions (A.40) et (A.41) de la section efficace de diffusion Thomson

$$\sigma_i(\nu) = \pi \alpha^2 a_0 c f_{ij} \varphi_{ij}(\nu), \quad (\text{A.50})$$

et on retrouve la section efficace d'absorption  $bb$  (A.1) (avec un profil de Lorentz) en utilisant l'expression (A.5) de  $B_{ij}$ .

3. Enfin lorsque  $\nu \rightarrow +\infty$ ,  $I_i(\nu) \approx -\sum_j f_{ij}/\nu^2 = -1/\nu^2$  à cause de (A.45), et  $\sigma_i(\nu) \rightarrow \sigma_T$  comme il se doit.

La section efficace de diffusion Rayleigh de l'atome d'hydrogène sera calculée pour l'état  $1s$  seulement ( $i = 1$  dans (A.42) et (A.43)) et son domaine de définition est l'intervalle  $[0, \nu_{12}]$ , ce qui entraîne la condition  $\nu \leq \nu_{1j}$ , vérifiée  $\forall j \geq 2$ . On peut alors écrire [99]

$$I_1(\nu) = \sum_{j \geq 2} \frac{f_{1j}}{\nu_{1j}^2 - \nu^2 + 2i\gamma_{1j}\nu} = \frac{f_{12}}{\nu_{12}^2 - \nu^2 + 2i\gamma_{12}\nu} + K_1(\nu), \quad (\text{A.51})$$

avec

$$K_1(\nu) \approx \sum_{j \geq 3} \frac{f_{1j}}{\nu_{1j}^2 - \nu^2} \approx \frac{\bar{f}_1}{\bar{\nu}^2 - \nu^2} \quad (\nu \leq \nu_{12}), \quad (\text{A.52})$$

le choix de  $\bar{f}_1$  et de  $\bar{\nu}$  étant précisé à la fin de cette section. Ce choix doit être tel que l'on retrouve la polarisabilité dipolaire de H( $1s$ ) pour  $\nu = 0$ , d'où la condition

$$P_1 = 4\nu_R^2 \left( \frac{f_{12}}{\nu_{12}^2} + \frac{\bar{f}_1}{\bar{\nu}^2} \right), \quad (\text{A.53})$$

qui ne suffit pas à elle seule à déterminer les deux paramètres  $\bar{f}_1$  et  $\bar{\nu}$ , mais assure la cohérence de ce choix.

En substituant (A.52) dans (A.51), le résultat dans (A.42) et en utilisant l'expression (A.49) du profil de Lorentz, on obtient la section efficace de diffusion Rayleigh sur H( $1s$ ) sous la forme [99]

$$\sigma_1(\nu) = 4\pi^2 \alpha a_0^2 \nu_R \varphi_{12}(\nu) Q_{12}(\nu) [f_{12} + 2(\nu_{12}^2 - \nu^2)K_1(\nu)] + \sigma_T \nu^4 K_1^2(\nu) \quad (\nu \leq \nu_{12}), \quad (\text{A.54})$$

où

$$Q_{12}(\nu) = \left( \frac{2\nu^2}{\nu_{12}(\nu + \nu_{12})} \right)^2. \quad (\text{A.55})$$

Cette dernière fonction se comporte comme  $4(\nu/\nu_{12})^4$  lorsque  $\nu \ll \nu_{12}$  et elle tend vers 1 lorsque  $\nu \rightarrow \nu_{12}$ .

La relation (A.54) est valable pour  $\nu \in [0, \nu_{12}]$  et elle a le comportement attendu lorsque la fréquence tend vers les extrémités de l'intervalle  $[0, \nu_{12}]$ . En effet :

1. si  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\varphi_{12}(\nu) \rightarrow \varphi_{12}(0) \approx \gamma_{12}/\pi\nu_{12}^2$  car  $\gamma_{12} \ll \nu_{12}$ . De plus  $K_1(\nu) \rightarrow K_1(0) \approx P_1/4\nu_R^2 - f_{12}/\nu_{12}^2$  en utilisant les relations (A.52) et (A.53). D'où

$$\sigma_1(\nu) \approx \sigma_T \nu^4 \left( K_1(0) + \frac{f_{12}}{\nu_{12}^2} \right)^2 \approx \sigma_T \nu^4 \left( \frac{P_1}{4\nu_R^2} \right)^2, \quad (\text{A.56})$$

2. si  $\nu \rightarrow \nu_{12}$ , on peut négliger le second terme par rapport au premier dans le membre de droite de (A.51), donc dans celui de (A.54), qui devient

$$\sigma_1(\nu) \approx 4\pi^2 \alpha a_0^2 \nu_R \varphi_{12}(\nu) f_{12}.$$

On retrouve bien (A.1), compte tenu de (A.5).

Les constantes figurant dans l'expression (A.54) de la section efficace de diffusion Rayleigh (voir [99, appendice A2]), sont :  $P_1 = 4.5$ ,  $\nu_{12} = 0.75 \nu_R$ ,  $f_{12} = 0.4162$ ,  $\bar{\nu} = 1.016 \nu_R$ , et  $\bar{f}_1 = 0.3975$ .

## A.5 Collisions élastiques

### A.5.1 Généralités. Section efficace différentielle

Au cours de la collision élastique  $(k, \mathbf{v}_k) + (e, \mathbf{v}_e) \rightarrow (k, \mathbf{v}'_k) + (e, \mathbf{v}'_e)$ , où  $k$  désigne n'importe quel type de particule y compris les électrons, les contraintes d'impulsion et d'énergie s'écrivent

$$m_k \mathbf{v}_k + m_e \mathbf{v}_e = m_k \mathbf{v}'_k + m_e \mathbf{v}'_e, \quad (\text{A.57})$$

$$m_k v_k^2 + m_e v_e^2 = m_k v_k'^2 + m_e v_e'^2. \quad (\text{A.58})$$

Introduisons les vitesses relatives avant et après collision respectivement :  $\mathbf{g}_{ke} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_k$  et  $\mathbf{g}'_{ke} = \mathbf{v}'_e - \mathbf{v}'_k$ , qui sont invariantes en passant du référentiel du laboratoire au référentiel du centre de masse des deux particules.

La contrainte d'impulsion permet de calculer la vitesse de la *cible*  $k$  après la collision en terme de sa vitesse initiale et des vitesses relatives  $\mathbf{g}_{ke}$  et  $\mathbf{g}'_{ke}$

$$\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_k - \frac{\mu_k}{m_k} (\mathbf{g}'_{ke} - \mathbf{g}_{ke}), \quad (\text{A.59})$$

où  $\mu_k$  est la masse réduite de la paire  $\{k, e\}$

$$\mu_k = \frac{m_k m_e}{m_k + m_e}. \quad (\text{A.60})$$

La contrainte d'énergie entraîne l'invariance des modules des vitesses relatives avant et après collision :

$$g'_{ke} = g_{ke}. \quad (\text{A.61})$$

La distribution décrivant la transition s'écrit donc sous la forme

$$q_{ke,ke}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_e) = q_{ke}(\mathbf{g}_{ke}, \mathbf{g}'_{ke}) \delta \left[ \mathbf{v}'_k - \mathbf{v}_k + \frac{\mu_k}{m_k} (\mathbf{g}'_{ke} - \mathbf{g}_{ke}) \right] \frac{1}{g_{ke}^2} \delta(g'_{ke} - g_{ke}). \quad (\text{A.62})$$

Le coefficient  $q_{ke}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  figurant dans le membre de droite est la section efficace différentielle de collision élastique des électrons avec les particules de l'espèce  $k$ , de dimension  $L^2$ . Cette section efficace est celle que l'on calcule dans le référentiel du centre de masse des deux particules, d'où sa dépendance par rapport aux vitesses relatives  $\mathbf{g}_{ke}$  et  $\mathbf{g}'_{ke}$ . Pour les raisons de symétrie habituelles, on a en fait

$$q_{ke}(\mathbf{g}_{ke}, \mathbf{g}'_{ke}) = q_{ke}(g_{ke}, \hat{\mathbf{g}}'_{ke}) = q_{ke}(g_{ke}, \theta), \quad (\text{A.63})$$

où  $\theta = \text{angle}(\hat{\mathbf{g}}_{ke}, \hat{\mathbf{g}}'_{ke})$  est l'angle de la diffusion dans le référentiel du centre de masse. Rappelons l'expression de cet angle,

$$\theta = 2 \arcsin \left( \frac{m_e}{2\mu_k} \frac{|\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_e|}{g_{ke}} \right) = 2 \arcsin \left( \frac{m_k}{2\mu_k} \frac{|\mathbf{v}'_k - \mathbf{v}_k|}{g_{ke}} \right), \quad (\text{A.64})$$

qui montre qu'il ne dépend que de trois des quatre vecteurs vitesses  $\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_e$  à cause de la contrainte d'impulsion (A.57).

### A.5.2 Section efficace intégrée

L'intégrale de la distribution (A.62) sur les vitesses émergentes se calcule grâce au changement de variable  $\mathbf{v}'_e \rightarrow \mathbf{g}'_{ke} = \mathbf{v}'_e - \mathbf{v}'_k$ , puis en effectuant l'intégration triviale sur  $\mathbf{v}'_k$ . On obtient

$$\int \int q_{ke,ke}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}'_e) d\mathbf{v}'_k d\mathbf{v}'_e = q_{ke}(g_{ke}), \quad (\text{A.65})$$

la section efficace intégrée de diffusion électron-particule  $k$  étant définie par

$$q_{ke}(v) = 2\pi \int_0^\pi q_{ke}(v, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.66})$$

### A.5.3 Collisions élastiques des électrons avec des particules chargées

La section efficace différentielle de collisions élastiques entre électrons ou des électrons avec des protons est donnée par la formule de Rutherford (3.13), transformée avec des grandeurs adaptées :

$$q_{ke}(v, \theta) = a_0^2 \left( \frac{m_e}{2\mu_k} \right)^2 \left( \frac{\alpha c}{v} \right)^4 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (\text{A.67})$$

l'angle de diffusion  $\theta$  vérifiant (A.64). La première de ces égalités permet d'écrire dans (A.62)

$$q_{ke}(\mathbf{g}_{ke}, \mathbf{g}'_{ke}) = a_0^2 \left( \frac{2\mu_k}{m_e} \right)^2 \left( \frac{\alpha c}{|\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_e|} \right)^4. \quad (\text{A.68})$$

Notons que l'expression (A.67) n'est valable que pour des angles  $\theta$  faibles lorsque  $k = e$ , à cause de l'effet de symétrie quantique (indiscernabilité des électrons en interaction) décrit dans la note C.2, et explicité par la formule (C.18). Nous nous plaçons toujours dans le cas des angles de déviation faibles. L'expression (A.67) de la section efficace différentielle montre que la section efficace intégrée correspondante diverge, à cause des collisions lointaines de faibles déviations. Pour éliminer cette divergence, la méthode habituelle est de faire une coupure du domaine d'intégration de (A.66) à un angle de déviation minimum  $\theta_m$  (voir [32] et la note C.2). Cette coupure est justifiée par l'effet de Debye-Hückel d'écrantage d'une charge électrique par ses voisines de charge opposée, dans un plasma électriquement neutre. Par cet effet, deux charges électriques n'interagissent presque plus au delà de la longueur de Debye  $\lambda_D$  (en fait  $\lambda_{De}$  voir la note C.2) définie par

$$\lambda_D(z) = \sqrt{a_0^2 \frac{1}{8\pi} \frac{T(z)}{T_R} \frac{1}{n_e(z) a_0^3}}. \quad (\text{A.69})$$

Dans un plasma cinétique classique, la longueur de Debye est beaucoup plus grande que les paramètres d'impact critique des collisions électrons-électrons et électrons-protons ( $k = e$  ou  $k = +$ )

$$p_{ek}(v) = a_0 \frac{m_e}{\mu_k} \left( \frac{\alpha c}{v} \right)^2, \quad (\text{A.70})$$

qui est la valeur du paramètre d'impact donnant lieu à une déviation égale à  $90^\circ$ . L'angle de déviation minimum  $\theta_m$ , exprimé en radians dans le référentiel du centre de masse, est alors égal à  $2p_{ek}/\lambda_D$ .

La section efficace de Rutherford (Eq. 133), intégrée de cette façon, est indépendante de la vitesse mais dépend de la position, puisqu'elle s'écrit sous la forme

$$q_{ke}(z) = \pi \lambda_D^2(z), \quad (\text{A.71})$$

que l'on rencontre dans le modèle des sphères dures.

Dans le cas de collisions coulombiennes, la section efficace (A.71) a peu d'intérêt physique. En effet, le terme de source collisionnel des électrons se présente, dans la formule de Boltzmann, comme la différence de deux intégrales de même signe. Pour des déviations très faibles des électrons, cette différence diverge beaucoup moins vite que chaque intégrale prise séparément. L'ordre de grandeur de chaque intégrale est la section efficace intégrée (A.71), alors que l'ordre de grandeur de la différence est donné par la section efficace de transfert de quantité de mouvement [32] :

$$Q_{ke}(v) = 2\pi \int_0^\pi q_{ke}(v, \theta) (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.72})$$

Cette dernière section efficace se calcule en effectuant la coupure angulaire à  $\theta_m$ , ce qui donne

$$Q_{ke}(z, v) = 4\pi p_{ke}^2(v) \ln \left( \frac{\lambda_D(z)}{p_{ek}(v)} \right). \quad (\text{A.73})$$

Par la suite, il sera utile de simplifier  $Q_{ke}(z, v)$  en remarquant que les variations du logarithme avec la vitesse sont faibles en comparaison des variations induites par le paramètre d'impact. On pourra donc calculer ce logarithme pour la vitesse la plus probable  $\bar{v}_e$  des électrons (définie par  $\bar{v}_e = \sqrt{2kT/m_e}$ ). On obtient

$$Q_{ke}(z, v) = 4\pi p_{ek}^2(v) \ln \Lambda(z), \quad (\text{A.74})$$

où  $\ln \Lambda(z)$  désigne le logarithme coulombien au point  $z$

$$\ln \Lambda(z) = \ln \left( \frac{\lambda_D(z)}{p_{ee}(\bar{v}_e(z))} \right) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1}{8\pi} \frac{1}{n_e a_0^3} \left( \frac{T(z)}{T_R} \right)^3 \right]. \quad (\text{A.75})$$

Le logarithme coulombien associé aux collisions électrons-protons est différent de celui des collisions électrons-électrons, mais cette différence est faible (à cause du logarithme) et on utilisera une expression unique du logarithme coulombien pour les deux types de collision.

Pour finir, ni l'expression (A.71) ou (A.74) de la section efficace intégrée ne seront utilisées dans le terme de collisions élastiques, à cause de la forme différentielle FPL plutôt qu'intégrale de Boltzmann utilisée, voire le modèle BGK. Cette discussion a permis d'entrevoir la difficulté posée par le traitement mathématique des interactions coulombiennes dans l'équation cinétique des électrons. Nous renvoyons à la section 3.2 pour une description plus détaillée des collisions élastiques (forme et section efficace).

## A.5.4 Cas des collisions élastiques des électrons avec les atomes

### A.5.4.1 La section efficace différentielle de collision (sed)

Dans les premiers calculs classiques de la sed, l'interaction à grande distance entre un électron et un atome d'hydrogène est du type dipôle induit [32], ce qui donne un potentiel  $\varphi(r) = -\alpha_d e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^4$ , fonction de la distance relative  $r$  entre les deux types,  $\alpha_d$  étant la polarisabilité dipolaire de l'atome d'hydrogène. C'est ce potentiel que l'on utilise avec la formule (C.17) pour en déduire la sed. Dans l'approximation des petits angles [61], il existe une formule analytique qui indique que la sed n'est pas isotrope (elle est piquée vers l'avant) est qu'elle est proportionnelle à l'inverse de la vitesse relative de l'électron avec l'atome. Expérimentalement, la sed est bien piquée vers l'avant, mais la dépendance en la vitesse relative et l'angle de déviation est compliquée [48, 116, 117, 104]. Les calculs théoriques sont quantiques (ondes partielles, potentiel optique, approximation pseudo-state, *etc.*) et il n'existe pas de formule analytique simple pour la sed  $q_{He}(g, \theta)$  [39, 21, 66]. Les expériences de mesure sont récentes parce qu'il est très difficile de produire de l'hydrogène atomique. On dispose de tables assez précises pour un large domaine de vitesses et d'angles, mais l'ajustement de ces courbes est difficile parce que la sed dépend de deux variables. Nous montrons dans la figure (Fig. A.1) ci-dessous deux exemples typiques de cette sed.

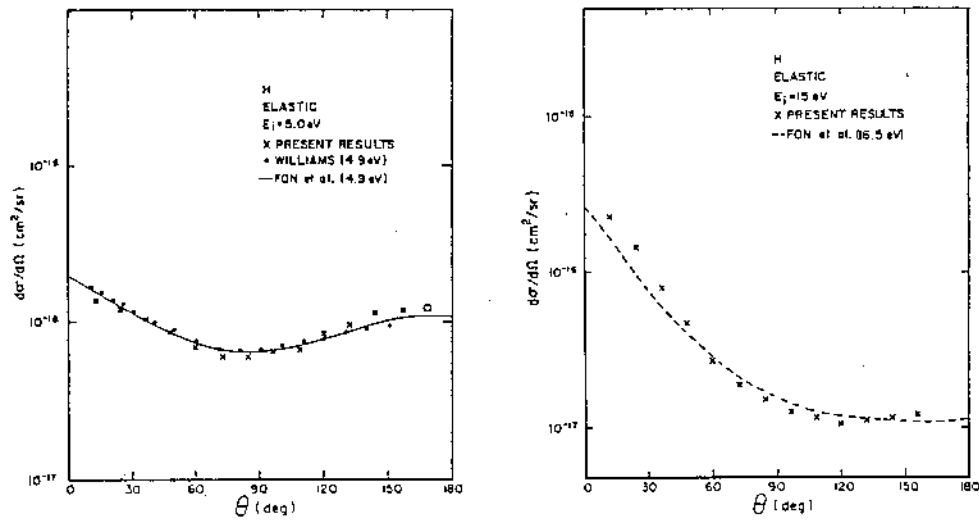


FIG. A.1 – Sections efficaces différentielles de collision électron-atomes neutres expérimentales. Elle sont issues de Shyn *et al.* [104]. La figure de gauche est typique pour les énergies  $E < 10$  eV, et la figure de droite est typique des énergies  $E > 10$  eV.

Par la suite, nous serons éventuellement amenés à supposer que l'isotropie de la sed est une approximation acceptable lorsque elle est utilisée dans les intégrales angulaires de ce mémoire, approximation dont nous discutons la validité à la section B.4.1, et que nous avons faite dans l'annexe A. Dans ce cas  $q_{He}(g, \theta) = q_{He}(g) / 4\pi$ , où  $q_{He}(g)$  est la section efficace intégrée (sei) en question.

### A.5.4.2 La section efficace intégrée (sei)

Il n'existe pas d'expression analytique simple de la section efficace intégrée de collisions élastiques électrons-atomes sur une gamme suffisamment large de vitesses incidentes. La théorie est quantique, et fait appel à des développements en série. Par contre, cette sei est facile à modéliser, ce que nous avons fait ne trouvant pas d'ajustement dans la littérature. Nous résumons ci-dessous le résultat que nous utiliserons, et plus loin les détails des calculs et ajustements qui ont permis d'y parvenir.



**A.5.4.2.1 Formulaire** Nous avons établi un modèle fondé sur l'approximation de Born (potentiel statique)

$$q_{He}(v_e) = \pi a_0^2 b_0 \frac{1 + b_1 x^2 + b_2 x^4}{(1 + x^2)^3} \quad \left( x = \frac{v_e}{\alpha c} \right), \quad (\text{A.76})$$

donnée en fonction de la vitesse réduite  $x = v_e/\alpha c$  pour simplifier les notations. L'approximation de Born correspond aux valeurs des paramètres  $b_0 = 4$ ,  $b_1 = 3/2$ , et  $b_2 = 7/12$ . Cette approximation est peu précise aux faibles énergies, mais reproduit correctement les données aux grandes énergies.

Nous avons conservé la forme analytique de l'approximation de Born et avons ajusté les paramètres  $b_0$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  aux données théoriques et expérimentales publiées [24, 39, 54, 21, 23, 104, 22]. Nous avons obtenu un bon accord (mieux que 10%) pour de nouvelles valeurs ajustées  $b_0 = 25$ ,  $b_1 = 0.5$ , et  $b_2 = 0.1$ . Bien sûr, les données dont nous sommes partis sont entachées d'erreurs, la précision des mesures étant parfois estimée à 15% (cf. [24, 104]). Notre formule donne, pour une vitesse électronique nulle,  $q_{He}(0) = 25\pi a_0^2$ . Cette valeur semble compatible avec les résultats expérimentaux.

Cette section efficace ne dépend pas de l'état d'excitation de l'atome, parce que basée sur des mesures expérimentales ne distinguant pas les différents états d'énergie. Les calculs et les résultats expérimentaux sont valables surtout pour l'état fondamental, et ils seront étendus dans cette thèse à tous les états liés de l'atome d'hydrogène.

**A.5.4.2.2 Données** Parmi les données récentes de sections efficaces de collisions élastiques entre électrons et atomes d'hydrogène, expérimentales et théoriques, nous avons choisi 9 références différentes [116, 117, 24, 39, 54, 21, 23, 104, 22]. Toutes les données dépendent de l'énergie  $E$  de l'électron incident (dans le référentiel de la particule cible qu'est l'atome d'hydrogène), mais sont habituellement tabulées en fonction de la norme  $k$  du vecteur d'onde de l'électron, définie comme  $E = m_e v^2/2 = (\hbar k)^2/2m_e$ , où  $m_e$  est la masse de l'électron et  $v$  sa vitesse.  $k$  est souvent normalisé à l'inverse du rayon atomique de Bohr  $a_0$  de façon à ce que la valeur  $k = 1$  corresponde à l'énergie  $E = E_R$  et à la vitesse  $v = \alpha c$ , où  $E_R$  est l'énergie de Rydberg et  $\alpha$  est la constante de structure fine. De même, en utilisant la convention habituelle, les valeurs des sections efficaces sont normalisées à la valeur  $\pi a_0^2$ . Alors  $k$  remplacera la vitesse  $v$ , pour la sei notamment. On écrit  $q_{He}(k) = q_{He}(v)$ . On notera que nous n'utilisons pas la définition standard de l'énergie, qui vaut 2 Rydbergs pour  $k = 1$ .

Toutes les données permettent de tabuler la section efficace intégrée sur un domaine  $0.09 < (ka_0)^2 < 50$ , ce qui correspond à un domaine d'énergie  $1.22 < E < 680$  ( $E$  en eV) :

- données expérimentales pour  $0.37 < (ka_0)^2 < 2.21$ ,  
fournies par Shyn *et al.* [104],
- données théoriques pour  $0.90 < (ka_0)^2 < 2.25$ ,  
fournies par Callaway *et al.* [24],  
en utilisant une méthode variationnelle pour les premiers moments cinétiques, et une méthode pseudo-state pour les autres,
- données théoriques pour  $2.21 < (ka_0)^2 < 50.00$ ,  
fournies par Kingston *et al.* [54],  
en utilisant la méthode DWSBA (Distorted Wave Second Born Approximation),
- données théoriques pour  $0.09 < (ka_0)^2 < 14.71$ ,  
fournies par Fon *et al.* [39],  
en utilisant une méthode pseudo-state ( $1s - 2\bar{p}$ ),
- données théoriques pour  $0.91 < (ka_0)^2 < 7.35$ ,  
fournies par Callaway *et al.* [23],  
en utilisant une méthode close-coupling à six états avec un potentiel optique,
- données théoriques pour  $1.05 < (ka_0)^2 < 7.35$ ,  
fournies par Callaway *et al.* [22],  
en utilisant une méthode pseudo-state,
- données théoriques pour  $0.91 < (ka_0)^2 < 7.35$ ,  
fournies par Callaway *et al.* [21],  
en utilisant une méthode close-coupling avec un potentiel optique matriciel.

Nous n'avons pas utilisé les données expérimentales de Williams [116, 117], citées très souvent par comparaison avec les méthodes théoriques, car nous disposons de données expérimentales plus

récentes, bien que couvrant un domaine plus faible en énergie, mais aussi parce que les données de Williams ne concernent que la section efficace différentielle, et ne couvrent pas le domaine angulaire complet de 0 à  $\pi$ .

**A.5.4.2.3 Théorie classique** Elle permet de calculer la section efficace différentielle en séparant les variables de vitesse et d'angle, en utilisant le potentiel habituel de polarisation  $V(r) \propto -1/r^4$  décrit dans la section suivante. On obtient une expression exacte de la fonction des vitesses : la section efficace intégrée est inversement proportionnelle à la vitesse, pour toutes les vitesses possibles de zéro à l'infini. Elle diverge donc en zéro.

Ce résultat a, entre autres, été utilisé par Oxenius [76], et mentionné par Delcroix [32].

**A.5.4.2.4 Théorie quantique** On utilise habituellement la méthode des déphasages pour calculer les sections efficaces (décomposition de la fonction d'onde des électrons en ondes partielles de moment cinétique bien défini). Cette méthode ne permet généralement pas d'obtenir une expression simple des sections efficaces, parce qu'il est nécessaire de sommer toutes les ondes partielles. Bien qu'un nombre fini d'entre elles soient suffisantes en réalité, ce nombre reste grand.

On peut avoir recours à l'approximation de Born, valable seulement pour les hautes énergies, typiquement supérieures à 100 eV pour la collision étudiée. Ce calcul nécessite de connaître le potentiel  $V(r)$  créé par l'atome sur l'électron à une distance  $r$ . Il semble approprié d'utiliser le potentiel de polarisation dipolaire

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha_d}{r^4} \quad \alpha_d \approx 4.5a_0^3. \quad (\text{A.77})$$

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'expression analytique de la section efficace dans l'approximation de Born pour ce potentiel de polarisation. Par contre nous avons trouvé le calcul exact fait en supposant l'atome dans l'état fondamental ( $1s$ ), non polarisé par l'électron (potentiel statique), qui s'écrit [59, 72] :

$$q_{He}(k) = \pi a_0^2 \frac{A + B(ka_0)^2 + C(ka_0)^4}{(1 + (ka_0)^2)^3} \quad (\text{A.78})$$

où  $A = 4$ ,  $B = 6$  et  $C = 7/3$ .

Cette section efficace est finie en zéro, et vaut  $q_{He}(0) = 4\pi a_0^2$ . Cette valeur n'est sans doute pas correcte car l'approximation de Born n'est précise que pour les grandes énergies.

On peut avoir une idée assez précise du comportement des sections efficaces à très basse énergie en utilisant le développement de la *portée effective* qui permet notamment de connaître la valeur  $q_{He}(0)$  à partir de la valeur en zéro du déphasage de la première onde partielle ( $s$ ). En tenant compte des effets d'échange entre l'électron incident et l'électron atomique, la section efficace intégrée pour une vitesse nulle s'écrit :

$$q_{He}(0) = \pi a_0^2 \left( \frac{1}{4} a_+^2 + \frac{3}{4} a_-^2 \right) \quad (\text{A.79})$$

où  $a_+$  et  $a_-$  sont les longueurs de diffusion de l'état singulet (symétrique, spin nul) et de l'état triplet (anti-symétrique, spin égal à 1) respectivement. En utilisant la théorie des orbitales polarisées [114], on trouve  $a_+ \sim 5.8$  et  $a_- \sim 1.9$ , alors  $q_{He}(0) \sim 44.5\pi a_0^2$ .

**A.5.4.2.5 Ajustement des données** Après avoir tracé les données concernant la section efficace intégrée, il apparaît que :

1. la section efficace croît très vite lorsque on se rapproche de zéro, mais semble être finie,
2. elle a l'air strictement décroissante et tend vers zéro à l'infini,
3. on peut décomposer le domaine des énergies en trois parties, et décrire chaque partie par un ajustement de la forme

$$q_{He}(k) = \pi a_0^2 \frac{Q}{(ka_0)^n} \quad (\text{A.80})$$

où  $Q$  et  $n$  sont les paramètres à ajuster :

- (a) région des faibles énergies :  $0 < (ka_0)^2 < 0.5$ ,  
l'ajustement indique que la section efficace est proportionnelle à l'inverse de la vitesse, bien qu'elle semble finie en zéro (la première valeur donnée est  $k^2 = 0.09$ ). On retrouve le comportement prédit par la théorie classique. Nous comparons dans la table (Tab. A.2) ci-dessous les valeurs de la constante de proportionnalité  $Q$  donnée par l'ajustement avec celles utilisées par les auteurs cités à la section A.5.4.2.3.

	Ajustement	Oxenius [76]	Delcroix [32]
$Q$	7.2	6.5	8.3

TAB. A.2 – valeurs du coefficient  $Q$  (Eq. A.80) pour la région des faibles énergies.

- (b) région des énergies moyennes :  $0.5 < (ka_0)^2 < 10$ ,  
l'ajustement donne le résultat  $n = 2.25$  et  $n = 2.5$  comme valables, avec  $Q = 5$  pour ces deux valeurs de  $n$ . L'ajustement pour  $n = 2$  est plus mauvais que celui pour  $n = 2.5$ , valeur que nous retiendrons pour décrire ce comportement.
- (c) région des hautes énergies :  $10 < (ka_0)^2 < 50$ ,  
l'ajustement est acceptable pour ( $n = 2.16$ ,  $Q = 3.5$ ) ou ( $n = 2$ ,  $Q = 2.6$ ). La valeur  $n = 2$  permet de retrouver le comportement de l'approximation de Born.

Après avoir tracé la section efficace dans l'approximation de Born d'après la formule (A.78), la comparaison avec les données montre que cette approximation est valable dans la région des hautes énergies, ce que nous attendions, et sous-estime la valeur en zéro, tout en suivant *qualitativement* la courbe de données. Nous avons pensé que la forme (A.78) était bien adaptée pour décrire les données, à condition que les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  soient ajustés convenablement. Pour cela, on a besoin de connaître la valeur de la section efficace en zéro. Nous utiliserons le développement de la portée effective décrit plus haut, en utilisant la formule (A.79). Nous avons déjà indiqué à la section A.5.4.2.4 certaines valeurs des longueurs de diffusion  $a_+$  et  $a_-$  dont nous avons besoin. Comme les auteurs des données théoriques fournissent aussi les déphasages en général, et que la formule pour déterminer la longueur de diffusion à partir du déphasage  $\eta_0^\pm(k)$  de l'onde partielle ( $s$ ) est :  $k \cot [\eta_0^\pm(k)] = 1/a_\pm + 0(k)$ , un ajustement linéaire en  $k$  a été obtenu à partir de ces données [39, 114, 24]. La plupart des points aux très basses énergies provenant de Temkin *et al.* [114], l'accord entre les valeurs de ces derniers auteurs et celles obtenues par l'ajustement est très bon, comme le montre la table (Tab. A.3) ci-dessous.

	Ajustement	Temkin <i>et al.</i> [114]
$a_+$	5.56	5.8
$a_-$	1.86	1.9
$q_{He}(0)/\pi a_0^2$	41.3	44.5

TAB. A.3 – valeurs des coefficients  $a_+$  et  $a_-$  (Eq. A.79).

Après avoir essayé plusieurs ajustements sur les données, on constate que le modèle (A.78) est capable de très bien les reproduire, tout en permettant une marge importante dans le choix de la valeur de la section efficace (normalisée à  $\pi a_0^2$ ) en zéro, entre 15 et 45 à peu près. Il nous semble que les sections efficaces expérimentales tendent vers une limite moins grande que celle donnée par la théorie, et nous avons utilisé une valeur médiane égale à 25, correspondant mieux à l'expérience. La table (Tab. A.4) ci-dessous regroupe les valeurs des paramètres  $A$ ,  $B$  et  $C$  obtenues par l'ajustement, ainsi que celles calculées par l'approximation de Born statique.

	Ajustement	Born
$A$	25.5	4
$B$	13.3	6
$C$	2.5	7/3

TAB. A.4 – valeurs des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  (Eq. A.78).

On pourrait être surpris de la différence (faible) entre les valeurs obtenues par ajustement de  $C$  et  $Q$  (pour  $n = 2$  dans la région des hautes énergies). Cette différence vient du fait que les formules (A.78) et (A.80) ont servi à calculer ces paramètres pour une valeur finie de  $k$ , à savoir celle de la dernière donnée :  $(ka_0)^2 = 50$ .

Avec cette forme (A.78) et ces valeurs ajustées de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , nous obtenons un accord meilleur que 10% avec toutes les données, ce qui semble satisfaisant. Il est possible d'obtenir le même accord en jouant sur les valeurs de  $A$  dans la fourchette  $15 < A < 45$  donnée plus haut, alors il reste une incertitude sur cette valeur, qui reste néanmoins toujours du même ordre de grandeur. Nous avons tenté d'autres ajustements sur la base de formes plus simples, le critère étant que la section efficace soit inversement proportionnelle au carré de la vitesse à grande énergie, et finie en zéro, sans obtenir un accord aussi bon que celui donné par (A.78).

Sur la figure (Fig. A.2) ci-dessous sont tracées toutes les données, la courbe correspondant à l'approximation de Born (1s statique), ainsi que l'ajustement, encadré à  $\pm 10\%$ , pour différentes régions des énergies.

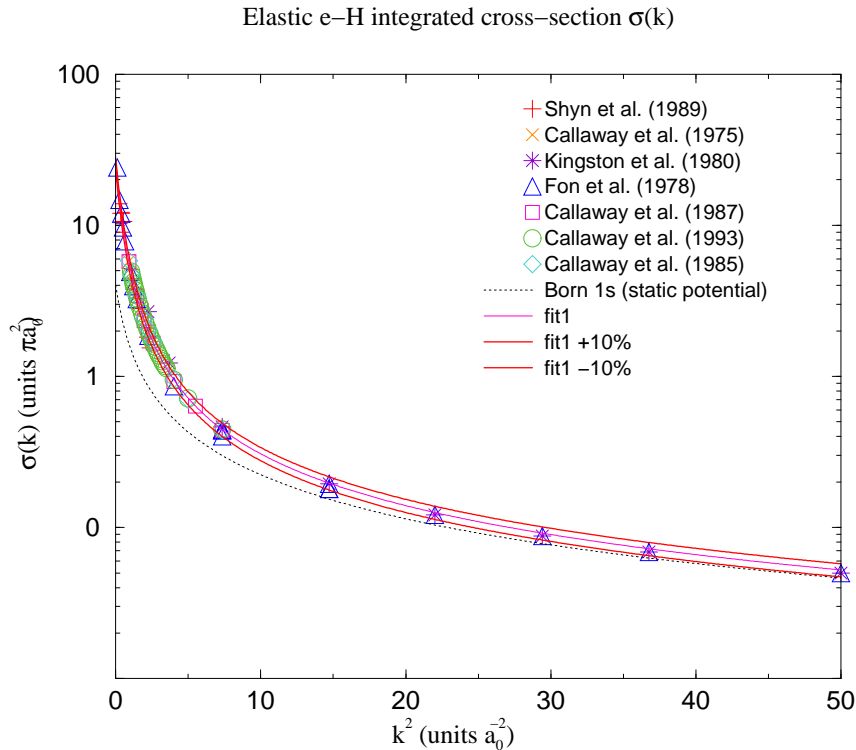


FIG. A.2 – Section efficace intégrée de collision électron-atomes neutres.

## A.6 Collisions inélastiques d'excitation et son inverse

### A.6.1 Section efficace différentielle

La distribution associée à la collision  $(i, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e) \rightarrow (j, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}'_e)$  peut prendre l'une ou l'autre des deux formes équivalentes (Eqs. A.81, A.82) :

$$q_{ie,je}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = q_{ij}(v_e, \hat{\mathbf{v}}'_e) \frac{1}{v_e'^2} \delta(v'_e - \zeta_{ie,je}(v_e)) , \quad (\text{A.81})$$

$$q_{ie,je}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}'_e) = q_{ij}(\mathbf{v}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e) \frac{1}{v_e v'_e} \delta(v_e - \zeta_{je,ie}(v'_e)) , \quad (\text{A.82})$$

suisant que la contrainte d'énergie porte sur la vitesse incidente de l'électron ou sur sa vitesse émergente. Rappelons que l'on néglige les transferts de quantité de mouvement entre les électrons (supposés rapides) et les atomes.

La condition d'énergie s'écrit en effet, pour des électrons rapides

$$v_e^2 - v_e'^2 = \zeta_{ij}^2, \quad (\text{A.83})$$

la vitesse de seuil  $\zeta_{ij}$  du processus d'excitation vérifiant, pour  $i < j$

$$\frac{1}{2}m_e \zeta_{ij}^2 = E_{ij}. \quad (\text{A.84})$$

La condition (A.83) entraîne l'égalité

$$\frac{1}{v_e'} \delta(v_e' - \zeta_{ie,je}(v_e)) = \frac{1}{v_e} \delta(v_e - \zeta_{je,ie}(v_e')), \quad (\text{A.85})$$

avec

$$\zeta_{ie,je}(v) = \begin{cases} \sqrt{v^2 - \zeta_{ij}^2} & \text{si } i < j \\ \sqrt{v^2 + \zeta_{ij}^2} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad \zeta_{ji} = \zeta_{ij}, \quad (\text{A.86})$$

ce qui justifie la double écriture (A.81) et (A.82).

La section efficace figurant dans le membre de droite des équations (A.81) et (A.82) est la section efficace différentielle d'excitation ( $i < j$ ) ou de désexcitation ( $i > j$ ) associée à la transition  $i \rightarrow j$  (dimension  $L^2$ ). Les deux sections efficaces vérifient la relation de réciprocité suivante [78] :

$$g_i v_e^2 q_{ij}(v_e, \theta) = g_j v_e'^2 q_{ji}(v_e', \theta), \quad (\text{A.87})$$

écrite pour  $i < j$ ,  $\theta = \text{angle}(\hat{\mathbf{v}}_e, \hat{\mathbf{v}}_e')$  et  $v_e^2 - v_e'^2 = \zeta_{ij}^2$ .

## A.6.2 Section efficace intégrée

Elle est définie par

$$q_{ij}(v_e) = \int q_{ie,je}(\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e') d\mathbf{v}_e' = \int q_{ij}(v_e, \hat{\mathbf{v}}_e') d\hat{\mathbf{v}}_e' = 2\pi \int_0^\pi q_{ij}(v_e, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.88})$$

Nous utilisons une formule semi-empirique donnée dans [108, p. 120, Eq. 5.1.48], utilisant l'approximation de Born-Bethe (approximation dipolaire). Après conversion des énergies en vitesses, on obtient, pour une excitation ( $i < j$ )

$$q_{ij}(v_e) = Y(v_e - \zeta_{ij}) 8\pi a_0^2 \frac{i^4 j^4}{(j^2 - i^2)^2} f_{ij} \left( \frac{\zeta_{ij}}{v_e} \right)^2 \ln \left( \frac{v_e}{\zeta_{ij}} \right), \quad (\text{A.89})$$

où  $f_{ij}$  est la force d'oscillateur et  $\zeta_{ij}$  la vitesse de seuil définie par (A.84).

La formule précédente a le bon comportement au seuil d'excitation ( $\propto E - E_{ij}$ ) et aux grandes énergies incidentes ( $\propto \ln E/E$ ), mais elle surestime d'un facteur 1.5 à 2 la section efficace au voisinage de son maximum, près du seuil d'excitation.

## A.7 Collisions inélastiques d'ionisation et son inverse

### A.7.1 Généralités

On suppose que les ionisations collisionnelles par des électrons rapides ( $i, \mathbf{v}$ ) + ( $e, \mathbf{v}_e$ )  $\rightarrow$  ( $+, \mathbf{v}$ ) + ( $e, \mathbf{v}_e'$ ) + ( $e, \mathbf{w}_e'$ ) laissent la vitesse de la particule lourde inchangée. Elles sont alors décrites statistiquement par une distribution  $q_{ie,ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}_e', \mathbf{w}_e')$ , qui est le produit d'une section efficace différentielle par une distribution de Dirac exprimant la conservation de l'énergie

$$v_e^2 - \zeta_{i+}^2 = v_e'^2 + w_e'^2. \quad (\text{A.90})$$

On a introduit la vitesse de seuil  $\zeta_{i+}$  du processus d'ionisation, qui vérifie la condition

$$\frac{1}{2}m_e \zeta_{i+}^2 = E_{i+}, \quad (\text{A.91})$$

soit

$$\zeta_{i+} = \frac{\alpha c}{i}. \quad (\text{A.92})$$

La contrainte d'énergie permet de calculer l'une des vitesses émergentes, par exemple  $w'_e$ , en fonction de l'autre vitesse émergente et de la vitesse incidente  $v_e$  :

$$w'_e = \zeta_{ie,+ee}(v_e, v'_e), \quad (\text{A.93})$$

où

$$\zeta_{ie,+ee}(v, w) = \sqrt{v^2 - w^2 - \zeta_{i+}^2}. \quad (\text{A.94})$$

En faisant entrer la contrainte d'énergie dans la distribution  $q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e)$ , on obtient cette dernière sous la forme

$$q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) = q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e) \frac{1}{w'_e} \delta[w'_e - \zeta_{ie,+ee}(v_e, v'_e)], \quad (\text{A.95})$$

définissant la section efficace différentielle de la collision  $q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e)$ . Cette section efficace permet de dénombrer les collisions mettant en jeu un électron incident de vitesse  $\mathbf{v}_e$  et deux électrons émergents dont l'un a la vitesse  $\mathbf{v}'_e$  et l'autre la direction  $\hat{\mathbf{w}}'_e$  (les deux électrons émergents sont indiscernables). Elle est de dimension  $\text{L}^{-1}\text{T}^3$  car la section efficace intégrée associée, définie par (A.104) plus loin, est de dimension  $\text{L}^2$  conformément au concept de section efficace.

La symétrie de la distribution  $q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e)$  vis à vis des vitesses émergentes  $\mathbf{v}'_e$  et  $\mathbf{w}'_e$ , et le fait que

$$\frac{1}{w'_e} \delta[w'_e - \zeta_{ie,+ee}(v_e, v'_e)] = \frac{1}{v'_e} \delta[v'_e - \zeta_{ie,+ee}(v_e, w'_e)], \quad (\text{A.96})$$

montrent que la section efficace correspondante vérifie la relation

$$v'_e q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e) = w'_e q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{w}'_e, \hat{\mathbf{v}}'_e), \quad (\text{A.97})$$

les vitesses  $v'_e$  et  $w'_e$  étant contraintes par l'équation (A.90).

Pour des électrons et des particules lourdes non polarisés, la section efficace d'ionisation collisionnelle dépend :

1. de la vitesse  $v_e$  de l'électron incident,
2. de l'une des vitesses émergentes  $v'_e$ ,
3. de trois angles polaires spécifiant la direction des électrons émergents par rapport à celle de l'électron incident : angles d'inclinaison par rapport à la direction incidente  $\hat{\mathbf{v}}_e$  et différence des azimuts repérés par rapport au plan de diffusion  $(\hat{\mathbf{v}}_e, \hat{\mathbf{v}}'_e)$ .

C'est à cause de l'invariance rotationnelle globale du système atome-électron-électron que la section efficace ne dépend que des angles des trois directions électroniques. Les propriétés de ses intégrales sur un ou deux de ces angles sont identiques à celles de la section efficace différentielle d'absorption  $ff$  mentionnées dans le texte à la suite de l'équation (A.30).

La contrainte d'énergie (A.90) nécessite que les conditions  $v_e > \zeta_{i+}$  et  $v'_e < \sqrt{v_e^2 - \zeta_{i+}^2}$  soient réalisées. Les domaines de variation des vitesses  $v_e$  et  $v'_e$  sont donc les intervalles  $]\zeta_{i+}, +\infty[$  et  $]0, \sqrt{2}v_s[$  respectivement, la vitesse  $v_s$  étant définie par

$$v_s = v_s(v_e) = \sqrt{\frac{v_e^2 - \zeta_{i+}^2}{2}}. \quad (\text{A.98})$$

L'introduction de cette vitesse est justifiée par la remarque suivante : lorsque la vitesse  $v'_e$  de l'un des deux électrons émergents décrit l'intervalle  $]0, v_s[$ , celle  $w'_e$  de l'autre électron décrit l'intervalle  $]0, \sqrt{2}v_s[$ , et vice-versa (Fig. A.3). Toutes les vitesses émergentes possibles sont donc atteintes en faisant varier  $v'_e$  non pas sur l'intervalle  $]0, \sqrt{2}v_s[$  tout en entier, mais soit dans l'intervalle  $]0, v_s[$ , soit dans l'intervalle  $[v_s, \sqrt{2}v_s[$ .

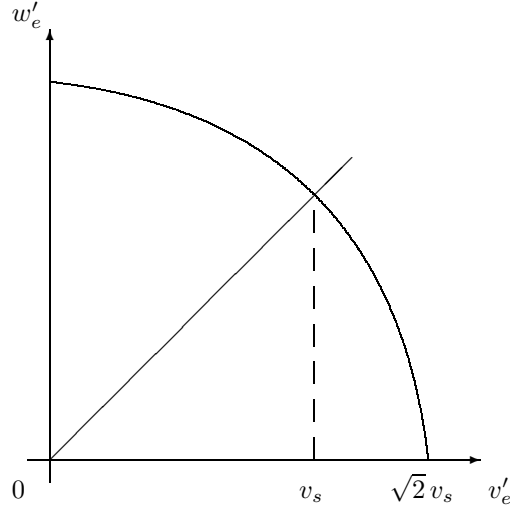


FIG. A.3 – Représentation des valeurs possibles des vitesses  $(v'_e, w'_e)$ , liées par la contrainte (A.90), symbolisée par le quart de cercle de rayon  $\sqrt{2}v_s = \sqrt{v_e^2 - \zeta_{i+}^2}$ . Toutes les vitesses émergentes possibles sont atteintes en faisant varier  $v'_e$  sur  $]0, v_s]$ .

### A.7.2 Expression de la section efficace intégrée sur les directions émergentes

Cette section efficace se déduit de la section efficace différentielle par une double intégration angulaire sur les directions émergentes

$$q_{i+}(v_e; v'_e) = \int_{4\pi} \int_{4\pi} q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e d\hat{\mathbf{w}}'_e. \quad (\text{A.99})$$

Elle vérifie donc, d'après (A.97), la relation

$$v'_e q_{i+}(v_e; v'_e) = w'_e q_{i+}(v_e; w'_e), \quad (\text{A.100})$$

les vitesses  $v'_e$  et  $w'_e$  satisfaisant la contrainte d'énergie (A.83).

Cette section efficace a été calculée de façon approchée par Oxenius et Simonneau [79] en supposant que toutes les énergies possibles des électrons émergents sont équiprobables. Cette hypothèse a le mérite de conduire à une expression simple, qui s'applique à n'importe quel type d'atome, ne faisant intervenir que la section efficace intégrée d'ionisation collisionnelle, beaucoup plus facile à calculer que la section efficace différentielle. Elle est néanmoins peu réaliste, notamment lorsqu'on suppose que les particules lourdes sont stationnaires au cours de la collision. En effet, les transferts d'impulsion entre électrons et particules lourdes sont importants lorsque les électrons émergents ont des énergies cinétiques voisines, et faibles dans le cas contraire (*cf.* [58, p. 2402]). On ne peut donc négliger les transferts d'impulsion qu'en supposant que les électrons émergents ont une forte probabilité d'avoir des énergies très différentes.

Le calcul d'Oxenius et Simonneau peut être résumé de la façon suivante : en définissant l'énergie cinétique d'un électron émergent  $E'_v = \frac{1}{2}m_e v_e'^2$ , le coefficient  $q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e) d\hat{\mathbf{v}}'_e d\hat{\mathbf{w}}'_e$  est proportionnel à la probabilité  $W(E'_v) dE'_v$  qu'un électron émergent ait une énergie comprise dans l'intervalle  $(E'_v, E'_v + dE'_v)$ , la densité de probabilité  $W(E'_v)$  étant indépendante de  $E'_v$  sous l'hypothèse d'équiprobabilité des énergies émergentes. Comme  $d\mathbf{v}'_e \propto v_e'^2 dv'_e$  et  $dE'_v \propto v'_e dv'_e$ , il en résulte que le produit  $v'_e q_{i+}(v_e; v'_e)$  est constant, c'est-à-dire indépendant de  $v'_e$ . La valeur de la constante résulte de la relation (A.105), qui montre qu'elle vaut  $4q_{i+}(v_e)/(v_e^2 - \zeta_{i+}^2)$ . D'où

$$q_{i+}(v_e; v'_e) = \frac{4}{v_e'(v_e^2 - \zeta_{i+}^2)} q_{i+}(v_e). \quad (\text{A.101})$$

Ce coefficient est bien de dimension  $L^{-1}T^3$ . Le calcul de la section efficace intégrée  $q_{i+}(v_e)$  est effectué à la section A.7.3.

Pour nos calculs, nous n'avons pas utilisé le résultat précédent, mais une expression semi-empirique donnée par Kim et Rudd [53] dans leur modèle BEB. Leur résultat, exprimé en terme des vitesses électroniques, est le suivant :

$$q_{i+}(v_e; v'_e) = 8\pi a_0^2 i^4 \frac{\zeta_{i+}^4}{v'_e v_e^2 + 2\zeta_{i+}^2} \left\{ 2Q_{i+} \zeta_{i+}^2 \ln \left( \frac{v_e}{\zeta_{i+}} \right) \left[ \frac{1}{(v_e'^2 + \zeta_{i+}^2)^3} + \frac{1}{(v_e^2 - v_e'^2)^3} \right] \right. \\ \left. + (2 - Q_{i+}) \left[ \frac{1}{(v_e'^2 + \zeta_{i+}^2)^2} + \frac{1}{(v_e^2 - v_e'^2)^2} \right] - \frac{2 - Q_{i+}}{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \left[ \frac{1}{v_e'^2 + \zeta_{i+}^2} + \frac{1}{v_e^2 - v_e'^2} \right] \right\}, \quad (\text{A.102})$$

où  $\zeta_{i+}$  est la vitesse de seuil définie par (Eqs. A.91, A.92), et le coefficient  $Q_{i+}$  vaut

$$Q_{i+} \sim \begin{cases} 0.5668 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i > 1 \end{cases}. \quad (\text{A.103})$$

Cette section efficace (A.102) vérifie bien la condition (A.100). Rappelons que  $v_e > \zeta_{i+}$  et  $v'_e < \sqrt{v_e^2 - \zeta_{i+}^2} < v_e$ .

Selon leur auteur, cette formule reproduit les données expérimentales avec une précision de l'ordre de 10 % pour toutes les vitesses incidentes et émergentes.

### A.7.3 Calcul de la section efficace intégrée sur les vitesses émergentes

Cette section efficace, de dimension  $L^2$ , est définie par

$$q_{i+}(v_e) = \int \int_D q_{ie,+e}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e) dv'_e d\mathbf{w}'_e, \quad (\text{A.104})$$

le domaine d'intégration  $D$  étant délimité par la contrainte d'énergie  $v_e'^2 + w_e'^2 = v_e^2 - \zeta_{i+}^2$ . En utilisant la relation (A.100), on obtient

$$q_{i+}(v_e) = \int_0^{v_s(v_e)} q_{i+}(v_e; v'_e) v_e'^2 dv'_e = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}v_s(v_e)} q_{i+}(v_e; v'_e) v_e'^2 dv'_e. \quad (\text{A.105})$$

Le calcul le plus simple traite l'ionisation comme une collision binaire entre l'électron incident et l'électron lié de l'atome, en ignorant la présence du noyau. On obtient la formule de Thomson

$$q_{i+}(v_e) = Y(v_e - \zeta_{i+}) 4\pi a_0^2 i^4 \frac{\zeta_{i+}^2}{v_e^2} \left( 1 - \frac{\zeta_{i+}^2}{v_e^2} \right). \quad (\text{A.106})$$

Les données expérimentales relatives à l'état fondamental ( $i = 1$ ) montrent que cette formule surestime la section efficace d'un facteur 5 près du seuil d'ionisation, et qu'elle la sous estime dès que  $E > 3E_{1+}$  [82, p. 71]. Elle ne peut donc être utilisée que pour des calculs d'ordre de grandeur. On notera cependant qu'elle a un comportement proche du comportement correct aux faibles énergies incidentes  $E = \frac{1}{2}m_e v_e^2$ , où la condition  $E \approx E_{1+}$  entraîne au premier ordre  $q_{1+}(E) \propto E - E_{1+}$ , alors que la relation précise de Wannier prévoit  $q_{1+}(E) \propto (E - E_{1+})^m$  avec  $m \sim 1.127$  pour l'hydrogène [20]. Aux hautes énergies, la formule de Thomson indique un comportement  $q_{1+}(E) \propto 1/E$ , alors que le comportement correct prédit par la Mécanique Quantique est  $q_{1+}(E) \propto \ln E/E$ .

Pour des calculs nécessitant des valeurs précises de la section efficace intégrée, il faut introduire un facteur correctif dans la formule de Thomson [82, 4] ou utiliser une représentation analytique contenant des paramètres ajustés à des données expérimentales ou théoriques.

Nous avons suivi cette dernière voie en utilisant la représentation analytique déduite par Kim et Rudd [53] de l'intégration de leur section efficace (A.102). Le résultat est :

$$q_{i+}(v_e) = Y(v_e - \zeta_{i+}) 4\pi a_0^2 i^4 \frac{\zeta_{i+}^2}{v_e^2 + 2\zeta_{i+}^2} \left\{ Q_{i+}^2 \ln \left( \frac{v_e}{\zeta_{i+}} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\zeta_{i+}}{v_e} \right)^4 \right] \right. \\ \left. + (2 - Q_{i+}) \left[ 1 - \left( \frac{\zeta_{i+}}{v_e} \right)^4 - 2 \ln \left( \frac{v_e}{\zeta_{i+}} \right) \frac{\zeta_{i+}^2}{v_e^2 + \zeta_{i+}^2} \right] \right\}, \quad (\text{A.107})$$

Cette formule a le bon comportement, mentionné plus haut, au seuil d'ionisation et aux grandes énergies. De plus elle est précise au voisinage du pic de la section efficace, contrairement à l'approximation de Born. Sa précision par rapport aux données expérimentales est estimée à 10% pour toutes les vitesses électroniques incidentes.



#### A.7.4 Section efficace de recombinaison à trois corps

La distribution  $q_{+ee,ie}(\mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e; \mathbf{v}_e)$  décrivant la recombinaison à trois corps  $(+, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}'_e) + (e, \mathbf{w}'_e) \rightarrow (i, \mathbf{v}) + (e, \mathbf{v}_e)$  vérifie la relation de réciprocité [78]

$$v'_e w'_e q_{+ee,ie}(\mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e; \mathbf{v}_e) = \Gamma_i v_e q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e), \quad (\text{A.108})$$

où  $\Gamma_i$  est donné par (C.4) et les vitesses électroniques satisfont la contrainte d'énergie (A.90).

En remplaçant  $q_{ie,+ee}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e)$  par son expression (A.95) et en utilisant la relation (A.97), on obtient les relations suivantes entre la distribution de recombinaison à trois corps et la section efficace différentielle  $q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e)$  calculée précédemment :

$$q_{+ee,ie}(\mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e; \mathbf{v}_e) = \Gamma_i q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e) \frac{v_e}{v'_e w'^3_e} \delta [w'_e - \zeta_{ie,+ee}(v_e, v'_e)], \quad (\text{A.109})$$

$$q_{+ee,ie}(\mathbf{v}'_e, \mathbf{w}'_e; \mathbf{v}_e) = \Gamma_i q_{i+}(\mathbf{v}_e; \mathbf{v}'_e, \hat{\mathbf{w}}'_e) \frac{v_e}{v'^3_e w'_e} \delta [v'_e - \zeta_{ie,+ee}(v_e, w'_e)]. \quad (\text{A.110})$$

# Annexe B

## Le modèle BGK pour les collisions élastiques

### B.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 3, traitant de l'équation cinétique des électrons *stationnaire*, toute la complexité des termes de l'ECE décrivant les collisions élastiques des électrons avec eux-mêmes ou les autres particules de l'atmosphère. Dans cette annexe, nous justifions la validité de l'utilisation d'un modèle BGK pour décrire ces collisions. Les équations cinétiques des particules matérielles étant locales en la position  $\mathbf{r}$ , nous ne précisons pas la dépendance spatiale dans ce chapitre.

La première tentative sérieuse de formulation d'un modèle simple de collision élastique date de 1954 [6, 115]. Ce modèle BGK devait permettre de simplifier le terme de collision de Boltzmann, beaucoup trop compliqué pour les calculs analytiques ou numériques. L'idée à la base de sa construction est de ne retenir comme critère de validité du modèle que les qualités propres à la forme de Boltzmann, originalement pour un gaz monoatomique. Pour une mixture de gaz à  $N$  espèces, chaque espèce  $1 \leq i \leq N$  étant décrite par la fdv  $f_i$ , ces propriétés sont décrites ci-dessous [78, 27, 62].

1. La fdv  $f_i$ , distribution statistique positive, reste positive en évoluant dans le temps.
2. La densité de masse de chaque espèce  $\rho_i$  (donc la densité totale  $\rho$  aussi), la quantité de mouvement totale  $\mathbf{g}$  et l'énergie cinétique totale  $e$  sont instantanément conservées (leur variation dans le temps est nulle). On les appelle *invariants collisionnels*, et ils ont été définis au chapitre 1 (Eqs. 1.4, 1.5).
3. Chaque fdv  $f_i$  évolue irréversiblement dans le temps de la fdv vers une maxwellienne de vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  et température  $T$  unique (les quantités conservées). Ce résultat provient du théorème H de Boltzmann, qui prend la forme :

$$\sum_i n_i \int \ln f_i(\mathbf{v}) \sum_j \Sigma_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \leq 0, \quad (\text{B.1})$$

où  $\Sigma_{ij}(\mathbf{v})$  est le terme de collisions élastiques  $i + j \rightleftharpoons i + j$  de l'équation cinétique de l'espèce  $i$ , et la somme sur  $i$  et  $j$  porte sur toutes les types présents. L'inégalité (B.1) devient une égalité si et seulement si chaque fdv atteint l'équilibre  $f_i(\mathbf{v}) = f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})$ , où  $\mathbf{u}$  et  $T$  sont la vitesse massique moyenne du gaz et la température moyenne du gaz respectivement (Eq. 1.5). Dans ce cas, non seulement le terme de collisions élastiques de chaque équation cinétique est nul :  $\forall i, \sum_j \Sigma_{ij}(\mathbf{v}) = 0$ , mais chaque terme de collision est nul :  $\forall (i, j), \Sigma_{ij}(\mathbf{v}) = 0$ .

D'autres critères de validité peuvent être retenus, comme l'exigence que ce modèle redonne le comportement bien connu de certains moments de la fdv dans les équations hydrodynamiques du transport. On peut aussi avoir des exigences sur la relaxation vers l'équilibre de la fdv, plutôt que de ses moments, comme la relaxation en un temps donné, *etc.*

La signification physique intuitive de la forme BGK renvoie à l'idée de temps de relaxation, à savoir que  $f_e(\mathbf{v}, t)$  relaxe vers sa distribution d'équilibre, dans ce cas  $f_e^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})$ , en un temps

inverse de la fréquence de collision  $\nu_e(\mathbf{v})$ . Nous montrons dans les sections suivantes la validité du modèle BGK suivant :

$$\Sigma_e(\mathbf{v}, t) = \Sigma_e^{BGK}(\mathbf{v}, t) = -\nu_e(\mathbf{v}) [f_e(\mathbf{v}, t) - f_e^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})] , \quad (\text{B.2})$$

où la fréquence de collision  $\nu_e(\mathbf{v})$  sera calculée pour notre problème d'atmosphère stellaire dans laquelle les fdv sont isotropes en la vitesse, de vitesse moyenne nulle et de température identique. Alors :

$$\nu_e(v) = \sum_i \nu_{ei}(v) , \quad (\text{B.3})$$

où  $\nu_{ei}(v)$  est la fréquence de collision  $e + i \rightleftharpoons e + i$ , et sera calculée dans la section B.4 par comparaison avec les termes de collisions non modélisés.

Nous explicitons dans ce chapitre les différentes approches qui ont été utilisées pour déterminer la forme du modèle BGK depuis 1954 (section B.2). Ces travaux n'ont pas réellement traité le problème que nous nous posons dans ce mémoire, à savoir une mixture de gaz à fréquences de collision dépendant de la vitesse, mais permettent de se familiariser avec les différents aspects du modèle BGK. Nous étudions à la section B.3 la validité du modèle BGK pour notre problème : nous vérifierons que le modèle BGK satisfait les 3 propriétés énoncées ci-dessus, puis nous menons une étude détaillée sur l'expression de la fréquence de collision  $\nu_e(\mathbf{v})$  adaptée à notre problème (section B.4).

## B.2 Les différentes approches

Le modèle BGK a été formulé à l'origine dans le cas d'un gaz à une seule espèce, c'est-à-dire que les atomes du gaz ne subissent que des collisions élastiques avec eux-mêmes [6, 115]. Les fondations de ce modèle et les développements qui en découlent ont très longtemps été basés sur un temps de relaxation identique pour toutes les vitesses, ce qui n'est rigoureusement vrai que pour des molécules maxwelliennes, c'est-à-dire interagissant avec une loi de force centrale en  $1/r^5$ . C'est un cas particulier parmi tous les potentiels d'interaction possibles, car c'est le seul permettant une réponse analytique complète au problème. Le traitement par le modèle BGK d'une fréquence de collision dépendant de la vitesse, bien que possible, est compliqué. Dans le cas général, le modèle BGK est écrit sous la forme :

$$\Sigma^{BGK}(\mathbf{v}, t) = -\nu(\mathbf{v}) [f(\mathbf{v}, t) - f^0(\mathbf{v}, t)] , \quad (\text{B.4})$$

où  $f^0(\mathbf{v}, t)$  est une distribution, maxwellienne ou non, déterminée par les propriétés que l'on veut faire respecter au modèle BGK (stricte conservation des invariants collisionnels malgré une fréquence de collision  $\nu(\mathbf{v})$  dépendant de la vitesse, utilisation dans les équations de transport plutôt que dans les équations cinétiques, *etc.*).

A partir de ce modèle BGK, de cette idée intuitive de relaxation vers l'équilibre, il fallait comparer les grandeurs et les comportements issus du modèle à ceux issus du terme de Boltzmann, pour définir le domaine de validité du modèle, ce que nous appelons l'approche mathématique du modèle, puis continuer le travail intuitif de départ pour étendre le modèle à un gaz contenant plusieurs espèces de particules et des temps de relaxation non constants, ce que nous appelons l'approche phénoménologique du modèle.

### B.2.1 L'approche mathématique

Dans le cas le plus courant où  $f^0(\mathbf{v}, t)$  est une maxwellienne de vitesse moyenne et température à déterminer, l'expression (B.4) est fortement non linéaire en la fdv, beaucoup plus que le terme de Boltzmann, parce que  $f^0(\mathbf{v}, t)$  est une exponentielle des moments de  $f(\mathbf{v}, t)$ . On peut alors se demander en quoi ce modèle est utile :

- sous sa forme non linéaire, on comprend bien ce qu'il se passe physiquement lors de l'évolution dans le temps,
- pour la résolution analytique, la forme des solutions peut être simplifiée,
- pour la résolution numérique, sa forme se prête bien aux méthodes d'itération ou de discrétisation dans l'espace des phases, entraînant un gain appréciable en temps de calcul,

- il simplifie énormément la forme des équations de transport, si on cherche à traiter le problème hydrodynamique plutôt que le problème cinétique,
- sous sa forme linéaire, il est plus simple que le terme de Boltzmann linéarisé, avantage certain pour la résolution analytique ou numérique du problème.

Le moyen le plus simple d'obtenir des informations sur le terme de Boltzmann est de le simplifier par le développement de la fdv en série d'un petit paramètre. Pour un gaz de grande densité, c'est le développement de Chapman-Enskog qui mène, en exprimant les équations de transport des moments à partir des équations cinétiques, aux équations d'Euler et de Navier-Stokes du fluide. Ces équations sont bien vérifiées expérimentalement et le modèle BGK devrait permettre de les retrouver asymptotiquement. L'autre limite est le régime moléculaire, où la densité est tellement faible qu'on développe la fdv en série de l'inverse du libre parcours moyen. Le modèle BGK devrait lui aussi redonner les bonnes équations. Cette comparaison a été faite et on retrouve bien les bonnes équations, même si dans le cas du régime de fluide, le modèle BGK fournit un mauvais nombre de Prandtl et ne permet pas de mettre en évidence le phénomène de thermo-diffusion. Cela montre les limites du modèle. Malgré cela, son bon comportement asymptotique joue en sa faveur. Pour le régime intermédiaire, celui qui nous intéresse, on linéarise la fdv au premier ordre :  $f = f^0(1 + h)$  où  $h \ll 1$  pour toutes les vitesses. Selon Cercignani [27],  $h$  n'est pas obligé d'être négligeable pour toutes les vitesses, il suffit que son intégrale sur les vitesses pondérée par  $f^0$  soit négligeable par rapport à l'intégrale de  $f^0$ , qui est la distribution à l'équilibre, c'est-à-dire la maxwellienne. La comparaison du terme de source de Boltzmann linéarisé et du terme BGK linéarisé devrait non seulement permettre de déterminer tous les paramètres libres du modèle, comme sa fréquence de collision, mais aussi délimiter son domaine de validité. On peut utiliser deux approches à partir de cette linéarisation : l'approche du spectre de l'opérateur de collision [44], et la méthode de l'équivalence des moments [67].

Nous détaillons la première approche, car elle a été utilisée en premier par les auteurs du modèle BGK. La deuxième est plus puissante et plus simple, et nous en parlerons brièvement parce que pour notre modèle, elle conduit aux mêmes conclusions que la première. Nous décrirons dans une troisième partie la *zoologie* des autres méthodes qui ont été développées.

### B.2.1.1 L'approche du spectre de l'opérateur de collision

L'équation de Boltzmann (Eqs. 3.1, 3.11) pour la collision d'un type de particule avec lui-même :  $\mathbf{v} + \mathbf{w} \rightleftharpoons \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ , linéarisée et appliquée à  $h$ , a la forme :

$$\frac{D}{Dt}h(\mathbf{v}) = L[h](\mathbf{v}) , \quad (\text{B.5})$$

où  $D/Dt$  est la dérivée totale par rapport au temps, incluant le terme de force, et  $L[h]$  est un opérateur agissant sur la fonction  $h$  :

$$L[h](\mathbf{v}) = 2\pi \int [h(\mathbf{v}') + h(\mathbf{w}') - h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{w})] f_0(\mathbf{w}) g \sigma(g, \theta) \sin \theta d\theta d\mathbf{w} , \quad (\text{B.6})$$

où  $\sigma$  est la section efficace différentielle de collision élastique entre des particules du même type et  $g = |\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |\mathbf{v}' - \mathbf{w}'|$ . C'est une écriture formelle.

Pour tout potentiel d'interaction central, l'opérateur de collision linéaire  $L$  peut se mettre sous la forme d'un noyau intégral  $K$  et d'un terme de source  $S$  [29, 27] :

$$L[h](\mathbf{v}) = -S(v)h(\mathbf{v}) - \int K(\mathbf{v}, \mathbf{w})h(\mathbf{w})d\mathbf{w} . \quad (\text{B.7})$$

Pour aller plus loin, il est d'usage de développer  $h(\mathbf{v})$  sur une base de polynômes, chaque coefficient de ce développement étant déterminé par les moments de la fdv. Le problème de ce traitement est qu'en pratique on ne peut garder qu'un nombre limité de polynômes dans le développement. Il faut donc bien choisir sa base en fonction du problème physique que l'on a à traiter.

Une base très pratique est donnée par l'étude des valeurs et fonctions propres de l'opérateur de collision  $L$ , *i.e.* par la connaissance de son spectre. Si l'ensemble des fonctions propres de cet opérateur forme une base pour l'espace des fdv qui nous intéressent, on peut développer  $h(\mathbf{v})$  sur cette base. Le moment de chaque fonction propre va relaxer vers le moment à l'équilibre selon

une exponentielle décroissante dont le temps caractéristique sera simplement l'inverse de la valeur propre associée à la fonction propre.

Pour mieux comprendre cette propriété, nous l'établirons sur un exemple idéalisé. Supposons que le spectre de  $L$  soit discret, de valeurs propres  $\lambda_i$  et de fonctions propres associées  $\Psi_i$  ne dépendant que de la vitesse  $\mathbf{v}$ , telles que l'ensemble de ces fonctions propres  $\{\Psi_i\}$  forme une base de l'espace des fdv. Le développement de  $h$  sur cette base peut s'écrire :

$$h(\mathbf{v}, t) = \sum_i a_i(t) \Psi_i(\mathbf{v}), \quad (\text{B.8})$$

et (B.5) s'écrit, si on ne garde que la dérivée partielle par rapport au temps pour simplifier le membre de gauche,

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{v}, t) = \sum_i \lambda_i a_i(t) \Psi_i(\mathbf{v}). \quad (\text{B.9})$$

Ces deux équations entraînent

$$h(\mathbf{v}, t) = \sum_i a_i(0) e^{\lambda_i t} \Psi_i(\mathbf{v}). \quad (\text{B.10})$$

Pour la forme (B.7) de  $L$ , c'est à dire pour toutes les lois de force centrales, les valeurs propres sont négatives ou nulle. Les coefficients du développement liés à une valeur propre strictement négative décroissent de façon exponentielle dans le temps :

$$a_i(t) = a_i(0) e^{\lambda_i t}, \quad (\text{B.11})$$

et ceux liés à une valeur propre nulle n'évoluent pas dans le temps. Ce sont les invariants collisionnels que sont la densité, la vitesse moyenne et la température cinétique (ou pression isotrope). Si la base  $\{\Psi_i\}$  est constituée des moments habituels de la fdv (tenseur de pression anisotrope, flux de chaleur, *etc.*), la connaissance des valeurs propres permet *directement* de savoir comment relaxent ces moments vers l'équilibre.

Cette étude du spectre de l'opérateur de collision est compliquée en général, sauf pour des molécules maxwelliennes. Dans ce dernier cas, il est entièrement et analytiquement connu. Les fonctions propres, notés  $\Psi_{nlm}(\mathbf{v})$  ont la forme :

$$\Psi_{nlm}(\mathbf{v}) = R_{nl}(v) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{B.12})$$

où  $R_{nl}(v)$ , uniquement radial et d'ordre  $(2n + l)$  en  $v$ , correspond à un polynôme de Laguerre-Sonine, et  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  est l'harmonique sphérique habituelle avec  $-l \leq m \leq l$ , d'arguments les angles spécifiant l'orientation de  $\mathbf{v}$  en coordonnées sphériques. Les valeurs propres, notées  $\lambda_{nl}$  ne dépendent que des deux premiers indices  $n$  et  $l$ , c'est-à-dire qu'elles sont  $(2l + 1)$  fois dégénérées puisqu'à chaque valeur de  $l$  sont associées  $(2l + 1)$  harmoniques sphériques en  $m$ . De plus, ces valeurs propres sont toutes discrètes, négatives ou nulles. Elles ne sont nulles que pour les trois valeurs d'indice  $\{00, 01, 10\}$ . Cela fait donc cinq vecteurs propres conservés, qui correspondent naturellement à la masse, la vitesse moyenne (vecteur) et la température.

Comme ces polynômes forment une base de l'espace des fdv et que l'opérateur de collision est linéaire, on peut écrire, en insérant une relation de fermeture entre  $L$  et  $h$  [27] :

$$L[h] = \sum_{nlm} L \Psi_{nlm}(\Psi_{nlm}, h) = \sum_{nlm} \lambda_{nl} \Psi_{nlm}(\Psi_{nlm}, h), \quad (\text{B.13})$$

où  $(,)$  est le produit scalaire sur l'espace de Hilbert des fonctions de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$(g, h) = \int f_0(\mathbf{v}) g(\mathbf{v}) h(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (\text{B.14})$$

Pour obtenir un modèle de collision quelconque (pas forcément BGK), il suffit de tronquer le développement (B.13) : on garde les polynômes (*i.e.* les moments) qui nous intéressent pour décrire correctement les phénomènes physiques étudiés dans notre problème, et on associe aux autres polynômes une valeur *propre* unique négative  $-\nu_N$  ( $\nu_N > 0$ ), considérée comme un paramètre

libre. Les polynômes que l'on *garde* ont des indices appartenant à un ensemble  $N$ . Cela donne un opérateur de collision *modélisé*  $L_N$  :

$$L_N[h] = \sum_{nlm \in N} \lambda_{nl} \Psi_{nlm}(\Psi_{nlm}, h) - \nu_N \sum_{nlm \notin N} \Psi_{nlm}(\Psi_{nlm}, h), \quad (\text{B.15})$$

ou encore

$$L_N[h] = \sum_{nlm \in N} (\lambda_{nl} + \nu_N) \Psi_{nlm}(\Psi_{nlm}, h) - \nu_N h, \quad (\text{B.16})$$

puisque  $h = \sum_{nlm} \Psi_{nlm}(\Psi_{nlm}, h)$ . Pour  $N = \{000, 01(-1), 010, 011, 100\}$ , on trouve le modèle BGK linéarisé, sa fréquence de collision étant égale à  $\nu_N$ . Malheureusement,  $\nu_N$  est un paramètre libre, qu'on peut certes choisir égal à une valeur propre quelconque, permettant ainsi au modèle BGK de bien décrire l'évolution du moment lui correspondant. Ainsi les auteurs du modèle avaient choisi  $\lambda_N = \lambda_{02}$  de façon à ce que le modèle décrive bien le moment d'ordre 2 qu'est le tenseur de pression anisotrope, mais il ne décrit pas bien le moment d'ordre 3 décrivant le flux de chaleur. C'est pour cela qu'on trouve un mauvais nombre de Prandtl. On aurait pu choisir une valeur complètement différente, ce paramètre n'est soumis à aucune contrainte directe. On voit que ce modèle BGK fait le minimum : il se contente, sous sa forme linéarisée, de conserver les quantités invariantes et de faire relaxer les moments de la fdv de la même façon.

Par la suite, les efforts se sont portés sur l'extension de ces résultats au cas d'un gaz à plusieurs espèces, toujours avec cette approche du spectre de l'opérateur de collision linéaire pour des molécules maxwelliennes, puis à d'autres potentiels d'interaction [45, 106, 38, 15]. Pour d'autres potentiels que celui de Maxwell, les calculs sont plus compliqués parce qu'on ne connaît pas exactement le spectre de l'opérateur. De plus, il n'est pas si facile que cela de *remonter* au terme non linéaire qui nous intéresse.

Le problème avec les opérateurs de collision associés à des interactions non maxwelliennes, c'est que leur spectre possède une composante continue.  $L$  peut alors se mettre sous la forme  $L = K - \nu(\mathbf{v})\mathbb{I}$ , où  $\mathbb{I}$  est le tenseur diagonal unitaire, et l'opérateur modélisé s'écrit alors :

$$L_N[h](\mathbf{v}) = \nu(\mathbf{v}) \sum_{i \in N} \varphi_i(\mathbf{v}) (\nu(\mathbf{v}) \varphi_i, h) - \nu(\mathbf{v}) h(\mathbf{v}). \quad (\text{B.17})$$

Lorsque  $N$  représente le modèle BGK, les fonctions propres  $\varphi_i$  sont les invariants collisionnels, notés  $\Psi_i$ , avec la normalisation  $(\Psi_i, \nu(\mathbf{v}) \Psi_j) = \delta_{ij}$ . L'équation (B.17) est la forme linéaire du terme de source (B.2), mais la densité, la vitesse moyenne et la température de la maxwellienne  $\Phi$  sont maintenant des grandeurs fictives, car la condition de conservation des cinq invariants collisionnels  $\Psi_i$  s'écrit :

$$\int \nu(\mathbf{v}) \Psi_i(\mathbf{v}) \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int \nu(\mathbf{v}) \Psi_i(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (\text{B.18})$$

On voit bien que lorsque  $\nu$  est une constante, les paramètres de la maxwellienne sont bien les paramètres physiques attachés à  $f$ , qui ne varient pas dans le temps. Dans un problème numérique général d'évolution temporelle, ces 5 paramètres fictifs doivent être recalculés à chaque étape d'évolution de  $f$ . De plus, on ne connaît pas *a priori*  $\nu(\mathbf{v})$ , parce que cette fréquence n'est plus l'inverse du temps de relaxation, qu'on sait assez bien calculer. Elle pourrait être approchée pour certains cas particuliers.

### B.2.1.2 La méthode de l'équivalence des moments

Cette méthode utilise aussi la linéarisation du terme de collisions de Boltzmann  $f \approx f^0(1 + h)$ , et l'approximation tronquée de l'opérateur de collision  $L^{(N)}$ . Dans le cas général,  $L^{(N)}$  est différent de  $L_N$ , voilà pourquoi il est noté différemment.

$$L^{(N)}[h](\mathbf{v}, t) = \sum_{i \leq N} A_i(t) \Psi_i(\mathbf{v}) - \gamma h(\mathbf{v}, t). \quad (\text{B.19})$$

Ici, l'entier  $N$  limite les valeurs de l'indice  $i$  décrivant les fonctions de la base  $\Psi_i$ . Ces fonctions peuvent être les fonctions propres de l'opérateur de collision pour les particules soumises à une interaction de maxwell, comme des polynômes plus simples. Le but de cette méthode est de trouver une expression pour les  $A_i$  qui permette au modèle de bien décrire l'évolution de tous les moments

de  $f$  ayant un ordre en  $\mathbf{v}$  inférieur ou égal à  $N$ . Dans la littérature, l'ordre le plus élevé pour écrire les équations de transport du gaz est l'ordre 3. Cette méthode va permettre de construire des modèles bien plus compliqués que celui de BGK.  $\gamma$  est une *constante* en la vitesse.

Pour connaître  $A_i$ , il suffit de comparer le moment de l'opérateur de collision modélisé  $L^{(N)}$  qui lui correspond, défini par

$$\langle \Delta \Psi_i \rangle_M = \int \Psi_i(\mathbf{v}) f^0(\mathbf{v}) L^{(N)}[h](\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (\text{B.20})$$

Ce moment doit coïncider avec celui calculé à partir du terme de Boltzmann entier, linéarisé et approché en tronquant à l'ordre  $N$  le développement de  $h$  sur la base  $\{\Psi_i\}$  :

$$h(\mathbf{v}, t) = \sum_{i \leq N} a_i(t) \Psi_i(\mathbf{v}), \quad (\text{B.21})$$

où les coefficients  $a_i$  sont fortement liés aux moments de  $h$ .

L'astuce est que les moments calculés par cette dernière méthode supportent n'importe quelle forme d'interaction [19], mais le fait d'avoir construit un modèle de l'opérateur de collision avec  $\gamma$  constant est douteux pour les interactions qui ont des temps de relaxation clairement dépendant de la vitesse. De plus la méthode de l'équivalence des moments ne permet pas de déterminer  $\gamma$ , qui reste un paramètre libre qu'on peut bien sûr choisir afin de bien décrire un moment de plus qu'en choisissant une valeur non propre.

Cette méthode est aussi généralisable aux mélanges gazeux. Elle est physiquement équivalente à la méthode du spectre de l'opérateur de collision, mais beaucoup plus simple à mettre en oeuvre. Elle peut aussi modéliser les collisions inélastiques binaires, comme l'excitation collisionnelle, mais pas l'ionisation collisionnelle qui nous intéresse dans notre modèle atomique.

Pour résumer, les conclusions des deux méthodes décrites plus haut ne s'appliquent qu'au modèle BGK linéarisé. Elles ne permettent pas de déterminer la fréquence de collision cherchée, mais indiquent seulement les conséquences du choix fait sur la description physique du système.

Ce qui nous intéresse, c'est l'utilisation du modèle BGK non linéarisé, qui s'interprète physiquement autrement que son approximation linéaire, donnée par les méthodes étudiées jusqu'à présent. Des essais, que nous allons détailler à présent, ont été faits pour retrouver le modèle BGK non linéaire à partir du terme de Boltzmann non linéaire, à l'aide d'approximations sur la forme de la fdv et sur la dynamique des collisions.

### B.2.1.3 Les autres méthodes

La première tentative, à notre connaissance, part de la constatation qu'après une collision élastique, une espèce de particule est plus près de l'équilibre qu'avant la collision [62]. On suppose qu'il atteint en fait l'équilibre. Comme toutes les particules de ce type ne collisionnent pas en même temps, il faut plusieurs collisions pour que l'ensemble des particules de ce type atteigne l'équilibre statistique, ce qui définit heureusement un temps de relaxation bien plus grand que le temps moyen entre deux collisions. En partant du terme de Boltzmann (3.11) et en notant  $d\mu = 2\pi g q_{ie}(g, \theta) \sin \theta d\theta d\mathbf{v}_i$  pour simplifier l'écriture, on écrit

$$\int f_e(\mathbf{v}'_e) f_i(\mathbf{v}'_i) d\mu \approx \int f_e^M(\mathbf{v}'_e) f_i^M(\mathbf{v}'_i) d\mu = \int f_e^M(\mathbf{v}_e) f_i^M(\mathbf{v}_i) d\mu, \quad (\text{B.22})$$

puisque  $f^M$  est la distribution maxwellienne à l'équilibre,

$$\int [f_e^M(\mathbf{v}'_e) f_i^M(\mathbf{v}'_i) - f_e^M(\mathbf{v}_e) f_i^M(\mathbf{v}_i)] d\mu = 0. \quad (\text{B.23})$$

Comme les moments invariants de  $f$  sont les mêmes que ceux de  $f^M$ , il suffit d'écrire que tous les moments de  $f$  peuvent, avec une bonne approximation, être calculés à l'aide de  $f^M$ , *i.e.*

$$\int f_i(\mathbf{v}_i) d\mu \approx \int f_i^M(\mathbf{v}_i) d\mu. \quad (\text{B.24})$$

On obtient finalement un terme de source  $\Sigma_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  qui a la forme du modèle BGK :

$$\Sigma_e(\mathbf{v}_e) = -\nu(v_e)[f_e(\mathbf{v}_e) - f_e^M(v_e)], \quad (\text{B.25})$$

avec  $v_e = |\mathbf{v}_e|$  et

$$\nu(v_e) = 2\pi \int_0^\pi \int f_i^M(\mathbf{v}_i) |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| q_{ie}(|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i|, \theta) \sin \theta d\theta d\mathbf{v}_i . \quad (\text{B.26})$$

On peut faire un rapprochement *intuitif* entre (B.25) et (3.11), par le facteur multiplicateur (B.26) de  $f_e(\mathbf{v}_e)$ , qui a la dimension d'une fréquence. Le terme de source (B.25) ne respecte clairement pas la loi de conservation des invariants collisionnels. De plus, cette vision de l'équilibre atteint *immédiatement* après une collision fait intervenir le concept de persistance des vitesses [29, 13] : plus la particule *test* est déviée lors d'un choc, plus vite elle perd le *souvenir* de sa trajectoire antérieure, et plus vite la distribution statistique associée à son espèce s'équilibre en direction (*isotropisation*) et en énergie (*maxwellisation*). Ainsi pour des chocs violents où la persistance des vitesses est faible, comme la collision du type *sphère dure* d'une particule légère sur une lourde, la forme (B.25) pourrait être valable. Par contre, elle ne convient pas aux déviations faibles entre particules chargées.

La deuxième tentative [32, 11], semble plus acceptable, mais elle ne décrit que les collisions des particules légères que sont les électrons sur les particules neutres lourdes que sont les atomes :  $\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_H \rightarrow \mathbf{v}'_e + \mathbf{v}'_H$ . On suppose que le gaz, dont les processus d'interaction sont dominés par les collisions élastiques, est si peu ionisé que les électrons et les ions ne collisionnent qu'avec les atomes neutres, et que les atomes ne collisionnent qu'avec eux-mêmes, très souvent grâce à leur densité élevée, de façon à être équilibrés. C'est le gaz de Lorentz. De plus, on suppose que la persistance des vitesses pour les électrons est nulle, c'est-à-dire que les électrons n'échangent pas d'énergie avec les atomes, ils n'échangent que de la quantité de mouvement, ce qui fait dévier fortement les électrons lors d'une collision, mais ne change pas l'énergie cinétique des atomes à cause de leur masse très importante vis-à-vis de celle des électrons. De plus, on suppose que les électrons sont beaucoup plus rapides que les atomes. Alors  $\mathbf{v}_H \approx \mathbf{v}'_H$  et  $|\mathbf{v}_e| \approx |\mathbf{v}'_e| \approx g$  dans le terme de source (3.11) des électrons qui devient, avec  $v_e = |\mathbf{v}_e|$  :

$$\Sigma_{el,H}(\mathbf{v}_e) = n_H v_e \int [f_e(\mathbf{v}'_e) - f_e(\mathbf{v}_e)] q_{He}(v_e, \theta) d\mathbf{v}'_e . \quad (\text{B.27})$$

Ensuite, on développe  $f_e$  sur une base de fonctions sphériques, dont le premier terme est la partie isotrope de la fdv  $f_e(v_e, t) = (1/4\pi) \int f_e(\mathbf{v}_e, t) d\hat{\mathbf{v}}_e$ , et les autres décrivent l'anisotropie, à divers degrés, de la distribution. En se limitant à la première anisotropie, l'équation (B.27) se met sous une forme BGK :

$$\Sigma_{el,H}(\mathbf{v}_e) = -\nu_{eH}(v_e) [f_e(\mathbf{v}_e) - f_e(v_e)] , \quad (\text{B.28})$$

avec

$$\nu_{eH}(v_e) = 2\pi n_H v_e \int_0^\pi q_{He}(v_e, \theta) (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta . \quad (\text{B.29})$$

Ce terme décrit la relaxation de la première anisotropie vers une distribution isotrope. Pour tenir compte de toutes les anisotropies, ou plus d'une en tout cas, on peut prendre une fréquence de collision moyenne. Elles sont à peu près toutes du même ordre de grandeur, et ont toutes exactement le même comportement vis-à-vis de la vitesse, alors on peut se contenter de cette expression pour décrire la relaxation de  $f_e(\mathbf{v}_e, t)$  vers sa forme isotrope  $f_e(v_e, t)$ . Cela semble une méthode fiable, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Des tentatives ont été faites pour construire d'autres modèles, qui ne soient pas du type BGK, par exemple un modèle non linéaire, inspiré du modèle BGK mais de forme plus compliquée que celle évoquée jusque ici, ayant pour but de mieux décrire l'évolution des moments de la fdv [57], ou encore un modèle de type Fokker-Planck, s'appuyant sur le fait que le modèle BGK semble beaucoup moins précis lorsque la persistance des vitesses est forte, ou lorsque les dérivées par rapport à la vitesse de la fdv sont importantes [43].

## B.2.2 L'approche phénoménologique

Les travaux réalisés dans cet esprit ont conduit à étendre le modèle BGK à un gaz constitué de  $N$  types de particules, pour des fréquences de collision constantes [6, 45, 71, 47, 42]. La forme intuitive ainsi choisie fut validée par l'approche mathématique. Ce modèle est caractérisé par plusieurs paramètres, pour lesquels il faut trouver des expressions, ou tout du moins des relations



de passage de l'un à l'autre. Certaines relations doivent traduire la conservation des invariants collisionnels, et certaines symétries du terme de source de Boltzmann. Cela ne suffit pas en général pour connaître tous les paramètres. On a donc besoin de comparer certains résultats aux résultats que l'on obtiendrait avec le terme de Boltzmann complet. Les résultats ainsi obtenus s'appuient sur l'interaction de Maxwell, et peuvent, dans certaines conditions, être étendus à d'autres potentiels. Le terme de source local de l'espèce  $i$  s'écrit :

$$\Sigma_i(\mathbf{v}) = -n_i \sum_{j=1}^N \nu_{ij} [f_i(\mathbf{v}) - f_{ij}^0(\mathbf{v})], \quad (\text{B.30})$$

avec

$$f_{ij}^0(\mathbf{v}) = \left( \frac{m_i}{2\pi k T_{ij}} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{-m_i(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{ij})^2}{2k T_{ij}} \right] \quad (\text{B.31})$$

$$1 = \int f_i(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (\text{B.32})$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{ii} = \int \mathbf{v} f_i(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (\text{B.33})$$

$$T_i = T_{ii} = \frac{m_i}{3k} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_{ii})^2 f_i(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (\text{B.34})$$

La détermination des autres paramètres s'appuie sur la conservation, lors de la collision  $i + j \Rightarrow i + j$ , de la quantité de mouvement *totale* et de l'énergie cinétique *totale*. Les collisions étant toutes binaires, les raisonnements suivants s'appliquent à tous les couples  $\{i, j\}$  possibles parmi les  $N$  types présents, comme si le gaz n'avait que deux types de particules différents. La conservation de la quantité de mouvement totale permet d'avoir une relation entre  $\mathbf{u}_{ij}$ ,  $\mathbf{u}_{ji}$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{u}_j$ ,  $\nu_{ij}$  et  $\nu_{ji}$ . La conservation de l'énergie cinétique totale permet d'obtenir une relation entre  $T_{ij}$ ,  $T_{ji}$ ,  $T_i$ ,  $T_j$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{u}_j$ ,  $\nu_{ij}$  et  $\nu_{ji}$ . Pour aller plus loin, il faut comparer ce modèle à certaines propriétés obtenues à partir du terme de source de Boltzmann. On utilise alors le potentiel d'interaction de Maxwell, mais ce résultat peut s'étendre à tous les potentiels à force centrale si on remplace, dans les intégrales du terme de Boltzmann, les fdv par leur maxwellienne d'équilibre. Dans certains cas, cette hypothèse est tout à fait valable. Alors on compare l'expression de la relaxation des vitesses moyennes l'une vers l'autre  $\partial(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)/\partial t$  avec celle donnée par le terme de Boltzmann. On fait de même pour la relaxation des températures l'une vers l'autre  $\partial(T_i - T_j)/\partial t$ . Cela permet de pouvoir exprimer séparément tous les moments *mixtes* en fonction des moments pour chaque espèce, et des fréquences de collision mixtes. Cela donne de plus une relation entre  $\nu_{ij}$  et  $\nu_{ji}$ . Malgré cela, on voit que les fréquences de collision sont toujours des paramètres libres. Il faut essayer de les déterminer en tenant compte de la *physique* du système. On sait par exemple que la relaxation des distributions dans un gaz à deux espèces dont l'une est beaucoup plus lourde que l'autre, se passe en trois phases [40] :

- l'espèce la plus légère  $i$  relaxe d'abord vers une maxwellienne caractérisée par  $(\mathbf{u}_i, T_i)$ ,
- l'espèce la plus lourde  $j$  relaxe ensuite vers une maxwellienne caractérisée par  $(\mathbf{u}_j, T_j)$ ,
- les vitesses moyennes et les températures relaxent l'une vers l'autre.

Les temps caractéristiques de ces phases sont :

$$1 : \sqrt{\frac{m_j}{m_i}} : \frac{m_j}{m_i}, \quad (\text{B.35})$$

ce qui permet d'obtenir des relations entre les quatre fréquences de collision  $\nu_{ij}$ . D'autres arguments, développés plus loin, permettent de trouver ces fréquences de collision. Grâce à cela, tous les paramètres du modèle BGK pour les mélanges gazeux seront déterminés.

Les méthodes décrites jusqu'ici ne sont valables que pour des fréquences de collision *constantes*. Dans ce cas, la fdv des électrons évolue dans le temps vers la distribution maxwellienne des vitesses définie dans le modèle, dont les paramètres sont la densité, la vitesse moyenne et l'énergie cinétique moyenne des électrons, quantités invariantes lors de collisions élastiques. Dans ces conditions, si on connaît le temps de relaxation d'une fdv quelconque donnée vers la maxwellienne d'équilibre, la

fréquence de collision du modèle BGK est simplement l'inverse du temps de relaxation. Pour les interactions coulombiennes, la fréquence de collision dépend *a priori* de la vitesse. Dans un problème d'évolution dans le temps, si on veut que le modèle BGK conserve les invariants collisionnels, alors les paramètres de la maxwellienne définie dans le modèle ne correspondent plus à la densité, la vitesse moyenne et l'énergie cinétique moyenne des électrons. Ce sont des paramètres fictifs, qu'il est nécessaire de recalculer à chaque itéré dans le temps. Le calcul des temps de relaxation s'appuie sur la résolution du problème d'évolution temporelle sous le seul effet des collisions élastiques décrites par un terme de FPL. Bien que le calcul des temps de relaxation dépendants de la vitesse se trouve couramment dans les livres de physique des plasmas, on ne peut plus écrire que la fréquence de collision du modèle soit l'inverse du temps de relaxation. Il nous semble possible de trouver une expression de la fréquence de collision en fonction du temps de relaxation, bien que ce soit nettement plus compliqué dans ces conditions. Cette fréquence doit être recalculée à chaque itéré dans le temps, et tous les paramètres du modèle BGK sont alors déterminés.

Seulement nous résolvons un problème stationnaire. Dans ce cas, la maxwellienne du modèle BGK ne peut qu'être la maxwellienne d'équilibre. Imaginons le premier itéré si ce n'est pas le cas : la fdv devient une maxwellienne *fictive*, qui va permettre de calculer les paramètres de la maxwellienne du modèle BGK pour l'itéré suivant. Ce calcul ne change pas la distribution, et on a déjà atteint la fdv d'équilibre au bout du premier itéré, ce qui montre que la maxwellienne du modèle BGK pour le premier itéré ne peut être que la maxwellienne d'équilibre. Sachant cela, on ne peut toujours pas écrire que la fréquence de collision du modèle est l'inverse du temps de relaxation, parce qu'il n'existe pas de temps de relaxation dans un problème stationnaire. Le seul lien apparent entre le problème d'évolution temporelle et le problème stationnaire est la ressemblance mathématique des termes de collision élastique : le terme de Fokker-Planck est le même dans les deux problèmes. Seulement le modèle BGK n'est pas le même d'un problème à l'autre puisque la maxwellienne définie dans ce modèle n'est pas la même si on résout un problème d'évolution temporelle ou un problème stationnaire. Il existe sans doute d'autres *liens* qui permettraient d'exprimer la fréquence de collision du modèle BGK dans le problème stationnaire à partir du temps de relaxation dans ce problème d'évolution temporelle. En d'autres termes, la fréquence de collision du modèle BGK dans un problème stationnaire se comprend plus comme une *force*, qui permet de comparer l'importance d'un terme de collision par rapport à un autre, un terme de source décrivant les collisions inélastiques par exemple.

Nous avons fait une étude numérique, détaillée à la section B.3, qui permet de réconcilier l'approche stationnaire et l'approche d'évolution dans le temps, avec une très bonne approximation, ce qui détermine la fréquence de collision.

### B.2.3 Conclusion

Dans un traitement des collisions élastiques par un modèle BGK, nous avons vu que la forme *usuelle* du modèle BGK est caractérisée par la maxwellienne d'équilibre. La relaxation vers l'équilibre se passe en deux étapes qualitativement : une relaxation d'une distribution initiale anisotrope vers sa composante isotrope, et une relaxation de cette distribution isotrope vers la maxwellienne. On aimerait pouvoir *affiner* le modèle BGK en écrivant pour le terme de source  $\Sigma_{ij}(\mathbf{v})$ , d'après des notes appartenant à J. Oxenius :

$$\Sigma_{ij}(\mathbf{v}) = -\nu_{ij}^{ISO}(\mathbf{v})[f_i(\mathbf{v}) - f_i(v)] - \nu_{ij}^{MAX}(v)[f_i(v) - f_{ij}^0(v)], \quad (\text{B.36})$$

où  $f_i(v)$  est la partie isotrope de  $f_i(\mathbf{v})$ ,  $\nu_{ij}^{ISO}$  est la fréquence de collision décrivant *l'isotropisation* de la fdv, et  $\nu_{ij}^{MAX}$  est la fréquence de collision décrivant la *maxwellisation* de la fdv isotrope. On a vu les problèmes posés par des fréquences non constantes. Malgré cela, cette forme semble *a priori* valable dans les deux cas extrêmes : celui de fréquences de collision très différentes (collisions électrons-atomes) et celui de fréquences de collision égales (collisions entre particules chargées). N'oublions pas que ce raisonnement est approché. Ce qui nous intéresse est le bon ordre de grandeur et l'évolution qualitative en la vitesse des grandeurs.

Nous résumons les conclusions des études menées sur ce modèle, et décrites la plupart dans cette section B.2 :

- la première étude [6, 44] consistait en la comparaison de la forme de Boltzmann et de la forme BGK, pour un potentiel d'interaction particulier : l'interaction maxwellienne, qui résulte en

un modèle BGK à fréquence de relaxation constante. Pour cela, les auteurs ont linéarisé ces deux formes (Boltzmann et BGK). Les auteurs montraient alors que les deux premiers critères étaient remplis, le modèle BGK étant valable pour le problème temporel du transport si on étudiait l'évolution du moment correspondant à la valeur de la fréquence de collision choisie (spectre de l'opérateur de collision). La relaxation de ce moment vers l'équilibre serait alors bien décrite, mais les autres moments, qui relaxent avec une fréquence qui leur est propre, seraient forcés de relaxer avec la fréquence unique choisie. Leur relaxation serait alors mal décrite. Pour le problème stationnaire, ce qui est important est la valeur du terme de source pour une fdv donnée. Le modèle BGK linéarisé est une troncature du terme de source original linéarisé, et aucune étude n'a été faite sur la validité de cette troncature.

- La deuxième étude [45, 106, 38, 15, 19, 67] avait pour but d'utiliser d'autres interactions que l'interaction maxwellienne. Cela menait, pour une part, à l'utilisation de fréquences de collision constantes dans le modèle non-linéaire, qui étaient déterminées par le critère de *bonne* relaxation de certains moments, au dépit des autres. Les conclusions sur la validité du modèle BGK étaient donc les mêmes que celles de la première étude : ce modèle est valable pour l'étude de l'évolution de certains moments de la fdv dans les équations non-linéaires temporelles du transport. Cette étude a aussi été étendue aux gaz à plusieurs espèces (équations couplées).
- La troisième étude [27] consiste en l'étude du spectre de l'opérateur de collision de la forme de Boltzmann linéarisée, pour n'importe quel type d'interaction. On y montre qu'en général la fréquence de collision du modèle BGK dépend de la vitesse. Si on utilise cette fréquence de collision dans le modèle BGK non-linéaire, on a un gros problème pour déterminer, par des arguments physiques, cette fréquence de collision, ainsi que les paramètres de la fdv à l'équilibre  $f^0$ . Sous cette forme, le modèle BGK n'est pas exploitable.

Les analyses faites dans cette dernière étude, et dans le livre en général qui traite de l'équation de Boltzmann, sont assez profondes et mènent à des développements mathématiques très poussés, qui, nous semble-t-il, ne nous sont d'aucune utilité pour le problème que nous nous proposons de résoudre. Ce problème est l'étude cinétique stationnaire du modèle BGK non-linéaire, pour une fréquence de collision dépendant de la vitesse, déterminée non pas par comparaison avec la forme de Boltzmann, mais par comparaison avec la forme de FPL, qui a été faite à la section B.2. D'après les conclusions données ci-dessus de la troisième étude, ce modèle BGK serait inexploitable. La difficulté, nous le rappelons, vient du fait que les caractéristiques de la maxwellienne d'équilibre associée au modèle ne sont plus exactement les invariants collisionnels de la fdv, ceci afin que les collisions élastiques conservent ces invariants dans un problème d'évolution temporelle, alors qu'ils doivent être ces invariants dans un problème stationnaire. Nous traitons ici, et par la suite, du seul cas de la collision élastique de particules de la même espèce.

Nous présentons à la section suivante une étude originale de la validité du modèle BGK, aussi bien pour le problème temporel que stationnaire.

### B.3 Étude sur la validité du modèle BGK

Nous allons montrer dans cette section que le modèle BGK (B.2), généralisé à toutes les espèces  $i$  de notre atmosphère selon (B.37) :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_i(\mathbf{v}, t) = \Sigma_i^{BGK}(\mathbf{v}, t) = -\nu_i(\mathbf{v}) [f_i(\mathbf{v}, t) - f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})] , \quad (\text{B.37})$$

satisfait les propriétés du terme de collisions élastiques de Boltzmann, énoncées en début de chapitre et rappelées ci-dessous.

1. La fdv  $f_i$ , distribution statistique positive, reste positive en évoluant dans le temps.
2. La densité de masse de chaque espèce  $\rho_i$  (donc la densité totale  $\rho$  aussi), la quantité de mouvement totale  $\mathbf{g}$  et l'énergie cinétique totale  $e$  sont instantanément conservées (leur variation dans le temps est nulle). On les appelle *invariants collisionnels*, et ils ont été définis au chapitre 1 (Eqs. 1.4, 1.5).
3. Chaque fdv  $f_i$  évolue irréversiblement dans le temps de la fdv vers une maxwellienne de vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  et température  $T$  unique (les quantités conservées). Ce résultat provient

du théorème H de Boltzmann, qui prend la forme :

$$\sum_i n_i \int \ln f_i(\mathbf{v}) \sum_j \Sigma_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \leq 0, \quad (\text{B.38})$$

où  $\Sigma_{ij}(\mathbf{v})$  est le terme de collisions élastiques  $i + j \rightleftharpoons i + j$  de l'équation cinétique de l'espèce  $i$ , et la somme sur  $i$  et  $j$  porte sur toutes les types présents. L'inégalité (B.38) devient une égalité si et seulement si chaque fdv atteint l'équilibre  $f_i(\mathbf{v}) = f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})$ , où  $\mathbf{u}$  et  $T$  sont la vitesse massique moyenne du gaz et la température moyenne du gaz respectivement (Eq. 1.5). Dans ce cas, non seulement le terme de collisions élastiques de chaque équation cinétique est nul :  $\forall i, \sum_j \Sigma_{ij}(\mathbf{v}) = 0$ , mais chaque terme de collision est nul :  $\forall(i, j), \Sigma_{ij}(\mathbf{v}) = 0$ .

L'approche originale que nous allons présenter consiste à se rendre compte que dans la mesure où les invariants existent, ils définissent une maxwellienne pour une partie non négligeable de l'espace des phases (le *bulk*). Cette partie étant conservée (en supposant que les collisions inélastiques ne la perturbent pas trop), elle participe en majorité à la valeur des invariants, et même si la queue par exemple n'est pas maxwellienne, même largement, elle n'influence que très peu les invariants. Ce dernier point dépend bien entendu de la forme de la fréquence de collision, mais nous verrons plus loin qu'elle est plutôt favorable.

La conséquence est que les paramètres de la maxwellienne du modèle ne sont plus *fictifs* : ce sont ceux de la fdv initiale, et la fréquence de collision est bien calculable à partir de l'inverse du temps de relaxation. Mais les invariants collisionnels ne sont plus strictement conservés.

Avec cette forme (B.37), qui est une équation différentielle du premier ordre linéaire en la fdv, nous pouvons prouver les propriétés 1 et 3. Pour nous y aider, nous définissons la fonction  $g_i(\mathbf{v}, t)$  :

$$g_i(\mathbf{v}, t) = \frac{f_i(\mathbf{v}, t) - f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})}{f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})}, \quad (\text{B.39})$$

qui décrit l'écart relatif de la fdv à la maxwellienne d'équilibre. Alors l'équation (B.37) peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} g_i(\mathbf{v}, t) = -\nu_i(\mathbf{v}) g_i(\mathbf{v}, t), \quad (\text{B.40})$$

dont la solution unique est, à partir d'une condition initiale  $t = 0$  :

$$g_i(\mathbf{v}, t) = g_i(\mathbf{v}, 0) e^{-\nu_i(\mathbf{v})t}. \quad (\text{B.41})$$

Comme la fdv initiale  $f_i(\mathbf{v}, 0)$  et la maxwellienne d'équilibre  $f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})$  ont la même normalisation à 1, il existe au moins une vitesse  $\mathbf{v}_1$  pour laquelle  $g_i(\mathbf{v}_1, 0) < 0$ . Pour cette vitesse, si la fréquence de collision  $\nu_i(\mathbf{v}_1)$  est négative, alors l'équation (B.41) montre  $g_i(\mathbf{v}_1, t \rightarrow +\infty) \rightarrow -\infty$ . Ceci implique que  $f_i(\mathbf{v}_1, t)$  va devenir négatif à un moment donné, ce qui est interdit par la propriété 1. Donc la fréquence de collision  $\nu_i(\mathbf{v})$  est positive (ou nulle) pour toutes les vitesses, ce qui montre que la propriété 2 est vérifiée par le modèle BGK. En effet l'irréversibilité de l'évolution de la fdv vers la fdv d'équilibre peut être mise sous la forme mathématique, locale en la vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial t} |g_i(\mathbf{v}, t)| \leq 0. \quad (\text{B.42})$$

Alors la solution de (B.37) est :

$$f_i(\mathbf{v}, t) = [f_i(\mathbf{v}, 0) - f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})] e^{-\nu_i(\mathbf{v})t} + f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v}). \quad (\text{B.43})$$

La première et troisième propriété étant démontrées, il nous reste à vérifier la deuxième propriété : vérifier si ce modèle BGK conserve *bien* les invariants collisionnels.

Pour la densité de masse, nous devons satisfaire la relation :

$$\int \Sigma_i(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int \nu_i(\mathbf{v}) [f_i(\mathbf{v}, t) - f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})] d\mathbf{v} = 0. \quad (\text{B.44})$$

Le résultat (B.44) est strictement vérifié si la fréquence de collision  $\nu_i(\mathbf{v})$  ne dépend pas de la vitesse. Dans le cas contraire, qui nous intéresse ici, nous démontrons à la section B.3.1, que si cet

invariant n'est pas strictement conservé, il l'est avec une très grande précision suffisante pour nos calculs d'atmosphère stellaire. Par contre, nous ne démontrons ceci que dans notre cadre de travail  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u} = 0$  et  $T_i = T$  (espèce  $i$  de vitesse moyenne nulle et de même température).

Pour la quantité de mouvement totale, nous devons satisfaire la relation :

$$\sum_i \int m_i \mathbf{v} \Sigma_i(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \sum_i \int m_i \mathbf{v} \nu_i(\mathbf{v}) [f_i(\mathbf{v}, t) - f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})] d\mathbf{v} = 0. \quad (\text{B.45})$$

Si la fréquence de collision  $\nu_i(\mathbf{v})$  ne dépend pas de la vitesse, La relation (B.45) peut être simplifiée :

$$\sum_i m_i \nu_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{B.46})$$

ce qui est vrai si  $\nu_i$  ne dépend pas de  $i$ , ce qui est peu probable puisque  $\nu_i$  dépend de toutes les densités, ou si la vitesse moyenne de chaque espèce  $i$  est identique (pas forcément nulle). Dans le cas qui nous intéresse les fdv  $f_i$  sont isotropes en la vitesse, et ont une vitesse moyenne nulle, donc la fréquence de collision ne dépend que de la norme de la vitesse  $\nu_i(v)$ , et la relation (B.45) est strictement vérifiée car les intégrales sont toutes nulles.

Pour l'énergie cinétique totale, nous devons satisfaire la relation :

$$\sum_i \int m_i v^2 \Sigma_i(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \sum_i \int m_i v^2 \nu_i(\mathbf{v}) [f_i(\mathbf{v}, t) - f_i^M[\mathbf{u}, T](\mathbf{v})] d\mathbf{v} = 0. \quad (\text{B.47})$$

Si la fréquence de collision  $\nu_i(\mathbf{v})$  ne dépend pas de la vitesse, La relation (B.47) peut être simplifiée :

$$\sum_i \nu_i (T_i - T) = 0, \quad (\text{B.48})$$

ce qui est vrai si  $\nu_i$  ne dépend pas de  $i$ , ce qui est peu probable puisque  $\nu_i$  dépend de toutes les densités, ou si la température chaque espèce  $i$  est identique. Dans le cas qui nous intéresse nous démontrons à la section B.3.1, que si cet invariant n'est pas strictement conservé, il l'est avec une très grande précision, suffisante pour nos calculs d'atmosphère stellaire. Par contre, nous ne démontrons ceci que dans notre cadre de travail  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u} = 0$  et  $T_i = T$  (espèce  $i$  de vitesse moyenne nulle et de même température).

Pour résumer, nous avons démontré les propriétés 1 et 3, et la propriété 2 de conservation des invariants est satisfaite avec une grande précision, dans notre cadre de travail de fdv isotropes en la vitesse, de vitesse moyenne nulle, et de température identique. Dans ce cas bien précis, les remarques écrites à la fin de l'énoncé de la propriété 3 permettent d'écrire, pour la fdv des électrons dans notre cas, que le terme de collisions élastiques des électrons avec d'autres particules fait tendre la fdv des électrons de température  $T$  vers une maxwellienne de température  $T$ . Comme ceci est le comportement du modèle BGK décrit ici, nous pourrons alors associer un modèle BGK à chacun de ces termes de collision, au lieu d'en associer un à leur somme. Ceci nous permettra de calculer la fréquence de collision. Nous pouvons écrire :

$$\Sigma_{ei}(v) \approx \Sigma_{ei}^{BGK}(v) = -\nu_{ei}(v) [f_e(v) - f_e^M[T](v)], \quad (\text{B.49})$$

et

$$\Sigma_e(v) = \sum_i \Sigma_{ei}(v) \approx \Sigma_e^{BGK}(v) = -\nu_e(v) [f_e(v) - f_e^M[T](v)], \quad (\text{B.50})$$

où

$$\nu_e(v) = \sum_i \nu_{ei}(v). \quad (\text{B.51})$$

### B.3.1 Conservation des invariants collisionnels

On va maintenant expliciter les moments d'ordre  $n$  de  $f(v, t)$  :  $\langle v^n \rangle(t) = 4\pi \int_0^{+\infty} f(v, t) v^{n+2} dv$ , afin de définir une grandeur  $E_n(t)$  qui est l'erreur relative sur la conservation des invariants d'ordre  $n$ . Il est possible de la définir par deux façons différentes. Une première définition consiste en la différence de ces moments entre l'instant initial et l'instant  $t$  :

$$E_n(t) = \frac{\langle v^n \rangle(t) - \langle v^n \rangle(0)}{\langle v^n \rangle(0)}. \quad (\text{B.52})$$

L'expression (B.52) devient, grâce à la formule (B.43) :

$$E_n(t) = \frac{\int_0^{+\infty} [f(v, 0) - f^0(v)] v^{n+2} e^{-\nu(v)t} dv}{\int_0^{+\infty} v^{n+2} f^0(v) dv}. \quad (\text{B.53})$$

On peut déjà faire quelques remarques sur (B.53) :

1. Toute l'information sur la fréquence de collision se trouve dans l'exponentielle où le temps apparaît, et  $\nu(v)$  étant positive, et le temps  $t$  aussi, cette exponentielle est bien sûr positive, et majorée par 1 pour toutes les vitesses et tous les temps,
2. sous cette forme, on ne peut déduire la valeur de l'erreur  $E_n(t)$  que pour deux moments précis :
  - (a) le temps initial  $t = 0$ , pour lequel l'exponentielle est nulle, ce qui implique que l'erreur est nulle pour les deux moments conservés (d'ordre 0 et 2) parce que  $f^0(v)$  a été construite à partir de  $f(v, 0)$  dans ce but, les autres moments étant quelconques,
  - (b) la limite  $t \rightarrow +\infty$ , pour laquelle l'exponentielle tend vers zéro, et l'erreur des moments à tout ordre tend elle aussi vers zéro, ce qui semble normal car  $f(v, +\infty) = f^0(v)$ ,
3. on vérifie bien que les moments d'ordre 0 et 2 sont bien conservés *pour tout temps* si la fréquence de collision ne dépend pas de la vitesse, l'exponentielle sortant alors de l'intégrale, intégrale qui est nulle pour ces deux moments.

Une autre définition consiste à apprécier la différence instantanée de ces moments, qui est nulle avec le terme de Boltzmann. Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(t) \propto \frac{d}{dt} \langle v^n \rangle(t) &= \frac{\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} [f(v, 0) - f^0(v)] v^{n+2} e^{-\nu(v)t} dv}{\int_0^{+\infty} \nu(v) v^{n+2} f^0(v) dv} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \nu(v) [f(v, 0) - f^0(v)] v^{n+2} e^{-\nu(v)t} dv}{\int_0^{+\infty} \nu(v) v^{n+2} f^0(v) dv}. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Cette définition (B.54), bien que décrivant l'argument habituel de conservation des invariants, n'est pas satisfaisant pour notre étude, car nous désirons savoir à quel point ces moments ne sont pas conservés par rapport à leur valeur initiale ou finale ( $t \rightarrow +\infty$ ), et non leur variation d'un instant à l'autre. De plus, l'introduction de la fréquence de collision  $\nu(v)$  dans les intégrales rendrait les conclusions de cette étude fortement dépendante de cette fréquence, alors que la forme (B.52), que nous garderons par la suite, peut s'affranchir de cette dépendance.

En dehors des deux valeurs particulières du temps données au deuxième point, on ne peut faire aucun calcul analytique sur (B.53), à cause de la dépendance en la vitesse très compliquée de l'exponentielle. Néanmoins, la remarque soulevée au premier point, va nous permettre de majorer l'erreur, en majorant sa valeur absolue, quelle que soit la forme de la fréquence de collision. En effet, la remarque faite au premier point entraîne :

$$|E_n(t)| = \frac{\int_0^{+\infty} |f(v, 0) - f^0(v)| v^{n+2} e^{-\nu(v)t} dv}{\int_0^{+\infty} v^{n+2} f^0(v) dv} \quad (\text{B.55})$$

$$\leq \frac{\int_0^{+\infty} |f(v, 0) - f^0(v)| v^{n+2} dv}{\int_0^{+\infty} v^{n+2} f^0(v) dv} = A_n. \quad (\text{B.56})$$

La définition de la grandeur  $A_n$  faite dans l'inéquation (B.56) peut, dans certains cas, se mettre sous une forme analytique simple, qui facilite le calcul numérique. Mais sa principale qualité est de ne plus dépendre de la fréquence de collision, seulement de la fdv initiale  $f(v, 0)$ , ce qui est un test plus convaincant de la validité du modèle BKG, si on arrive à bien contraindre  $A_n$  à des petites valeurs. On y perd par contre en précision, parce que la fréquence de collision pourrait très bien diminuer l'erreur de plusieurs ordres de grandeur par rapport à la valeur donnée par  $A_n$ .

Cela étant donné, nous poursuivons notre étude en explicitant la forme analytique de  $A_n$  pour une forme de  $f(v, 0)$  donnée, qui aura un paramètre libre, nous dresserons un tableau de valeurs de

ces erreurs, et comparerons, pour finir, l'influence de la fréquence de collision choisie sur l'erreur vraie.

Au vu des chapitres précédents et des travaux passés, nous allons utiliser pour notre étude une forme particulière de la fdv  $f(v, 0)$ , *i. e.* une maxwellienne tronquée dans la queue, la troncature étant un paramètre libre allant de 0 à l'infini. Le choix de cette forme vient des travaux antérieurs de Shaw *et al.* [100], Shoub [101] et Oxenius [75, 76], qui ont résolu ce problème de thermalisation des électrons dans des cas simplifiés, non radiatifs, et qui montraient que les collisions inélastiques rendaient la fdv des électrons non maxwellienne dans la queue seulement, en abaissant la valeur (toujours positive). Les travaux antérieurs, ainsi que notre propre travail, ont montré que la queue de la fdv des électrons était dépeuplée à partir du premier seuil d'excitation collisionnelle ou radiative.

Dans notre travail, qui traite des effets radiatifs, il est légitime de croire que le *départ* de la fdv (région des faibles vitesses) va lui aussi être modifié. On pourrait par exemple tronquer la maxwellienne aussi à gauche, introduisant un nouveau paramètre libre, mais aucun travail n'a jamais été fait là-dessus, et nous ne savons pas du tout comment se comporte la fdv : les valeurs aux faibles vitesses peuvent aussi bien être plus faibles que la valeur maxwellienne, que plus fortes. Il serait imprudent d'utiliser un schéma de troncature alors que nous ne connaissons pas du tout le comportement de la fdv, alors nous garderons la valeur maxwellienne dans cette région.

Alors  $f^0$  est la maxwellienne de vitesse moyenne nulle, et de température  $T$ . Nous définissons comme auparavant une grandeur liée à la température :  $\bar{v} = \sqrt{2kT/m}$ , où  $m$  est la masse de l'espèce en question. Cela donne :

$$f^0(v) = f^M[T](v) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{v}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{\bar{v}^2}\right), \quad (\text{B.57})$$

et  $f(v, 0)$  est la fdv tronquée, satisfaisant la même normalisation  $\int_0^{+\infty} v^2 f(v, 0) dv = 1/4\pi$  que  $f^M$  :

$$f(v, 0) = \begin{cases} f^M[T_0](v)/4\pi \int_0^u v^2 f^M[T_0] dv & 0 < v < u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{B.58})$$

où  $u$  est le paramètre de coupure et  $T_0$  est un paramètre, différent de la température  $T$ , permettant que les fdv  $f(v, 0)$  et  $f^M$  aient la même température (moment d'ordre 2 en la vitesse).  $T_0$  dépend aussi de  $T$  et  $u$ .

Nous définissons maintenant le moment *maxwellien* d'ordre  $p$  comme :

$$M_p(u, T) = 4\pi \int_0^u v^{p+2} f^M[T](v) dv \quad (\text{B.59})$$

$$= \bar{v}^p B_p N_p\left(\frac{u}{\bar{v}}\right), \quad (\text{B.60})$$

où la fonction  $N_p(y)$ , normalisée afin que  $N_p(+\infty) = 1$ , vaut

$$N_p(y) = \frac{\int_0^y x^{p+2} e^{-x^2} dx}{\int_0^{+\infty} x^{p+2} e^{-x^2} dx}, \quad (\text{B.61})$$

et les coefficients  $B_p$  valent, pour les cas  $p = 0, 2$  qui seront les seuls utilisés par la suite :

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{3}{2}. \quad (\text{B.62})$$

Les fonctions  $N_0$  et  $N_2$  seront largement utilisées par la suite. Pour calculer leur valeur numérique, nous les exprimerons ci-dessous en fonction de la fonction d'erreur *erf*, tabulée un peu partout (Eqs. B.63 et B.64). Cette étude sera numérique pour la plupart, mais nous pourrons calculer analytiquement les régions asymptotiques. Pour cela, nous écrivons les développements de  $N_0(y)$  et  $N_2(y)$  au voisinage de  $y = 0$  et à la limite asymptotique  $y \rightarrow +\infty$ , réalisés avec le logiciel de calcul symbolique MuPaD.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0(y) = \text{erf}(y) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} y e^{-y^2} \\ N_0(y) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} y^3 - \frac{4}{5\sqrt{\pi}} y^5 + \frac{2}{7\sqrt{\pi}} y^7 + 0(y^9) \\ N_0(y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \left[ 2y + 2\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{y^5} + 0\left(\frac{1}{y^7}\right) \right] \\ N_0(+\infty) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{B.63})$$

et

$$\begin{cases} N_2(y) = \operatorname{erf}(y) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}y \left(1 + \frac{2}{3}y^2\right) e^{-y^2} \\ N_2(y) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}}y^5 - \frac{8}{21\sqrt{\pi}}y^7 + 0(y^9) \\ N_2(y) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}e^{-y^2} \left[2y^3 + 3y + \frac{3}{2}\frac{1}{y} - \frac{3}{4}\frac{1}{y^3} + \frac{9}{8}\frac{1}{y^5} + 0\left(\frac{1}{y^7}\right)\right] \\ N_2(+\infty) = 1 \end{cases} \quad (\text{B.64})$$

Pour que le modèle soit complètement déterminé, il ne nous reste plus qu'à exprimer  $T_0$  en fonction de  $u$  et  $T$ . Ensuite nous pourrions estimer  $E_n(t)$  ou  $A_n$  pour  $n = 0, 2$  et certaines valeurs de  $u$  et  $T$ . Pour cela, nous écrivons que les moments d'ordre 0 et 2 des fdv  $f(v, 0)$  et  $f^0[T](v)$  sont égaux. Comme  $f(v, 0)$  a été définie comme normalisée à l'unité, comme  $f^0[T](v)$ , l'égalité du moment d'ordre 0 pour ces deux fdv est automatiquement vérifiée. L'égalité du moment d'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{M_2(u, T_0)}{M_0(u, T_0)} = M_2(u = +\infty, T) = \frac{3}{2}\bar{v}^2, \quad (\text{B.65})$$

ou

$$\frac{N_2(u/\bar{v}_0)}{N_0(u/\bar{v}_0)} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}_0^2}, \quad (\text{B.66})$$

avec  $\bar{v}_0 = \sqrt{2kT_0/m}$  est la vitesse associée à la température  $T_0$  que l'on cherche à déterminer. En introduisant la quantité connue  $x = u/\bar{v}$  et l'inconnue  $y(x) = u/\bar{v}_0$ , nous pouvons transformer l'équation (B.66) en :

$$\frac{1}{x^2}y^2(x) = \frac{N_2(y(x))}{N_0(y(x))}, \quad (\text{B.67})$$

qui est une équation implicite en l'inconnue  $y(x)$ .

Nous devons tout d'abord vérifier le domaine de validité en  $x$  de l'équation (B.67). Nous voyons que cette équation a une solution triviale, toujours valable :  $y(x) = 0$ , qui ne nous intéresse pas car elle signifie que  $T_0 = +\infty$ . La figure (Fig. B.1) présente toutes les caractéristiques de cette solution. Sur cette figure, nous remarquons que pour une valeur  $x \leq x_c$ , où  $1 < x_c < 2$ ,  $y(x) = 0$  est la seule solution de l'équation (B.67). Pour ces valeurs trop faibles de  $u$  par rapport à  $T$ , notre étude ne peut être menée plus loin car  $T_0$  a une valeur infinie. Pour  $x > x_c$ , il existe aussi une solution non nulle pour  $y(x)$ , qui nous intéresse. De plus, nous voyons pour  $x = 3$  que  $y(3) \approx 3$ . Puisque le membre de droite de (B.67) tend vers 1 par valeur inférieure lorsque  $y \rightarrow +\infty$ , nous obtenons facilement la limite à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y(x)/x] = 1$ . La fonction  $y(x)$  semble être monotone, donc  $y(x) < x$  pour tout  $x$ . Etant donnés ces résultats préliminaires, nous définissons une autre inconnue du problème :  $p(x) = y(x)/x = \bar{v}/\bar{v}_0$ . Ainsi l'équation (B.67) est mise sous la forme :

$$N_2(xp(x)) - p^2(x)N_0(xp(x)) = 0. \quad (\text{B.68})$$

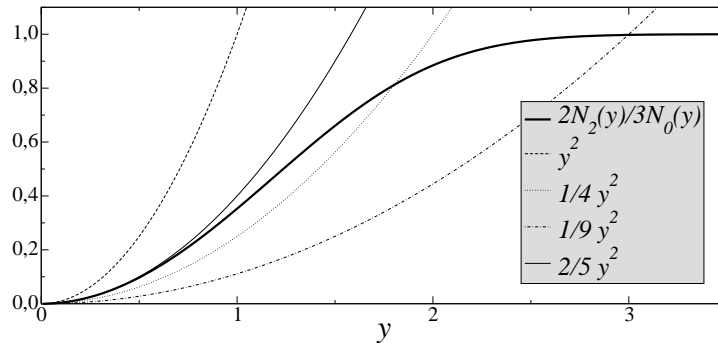


FIG. B.1 – Etude des solutions de l'équation (B.67). Toutes les courbes sont tracées en fonction de  $y$ . La courbe en trait gras représente le membre de droite de l'équation. Les autres courbes représentent le membre de gauche de l'équation, pour certaines valeurs du paramètre  $x = 1, \sqrt{5/2}, 2, 3$ . L'intersection de ces courbes nous renseigne sur l'existence d'une valeur  $y(x)$  non nulle.

A partir des développements de Taylor des fonctions  $N_0$  et  $N_2$  au voisinage de zéro (Eqs. B.63 et B.64), nous allons déterminer la valeur du paramètre  $x_c$ , ainsi que l'expression de  $p(x)$  au voisinage



de  $x_c$ . En faisant un développement de Taylor de (B.68) à l'ordre 7 en  $x$ , nous obtenons la solution non nulle  $p(x)$  :

$$p(x) \approx \frac{\sqrt{7}}{x} \sqrt{\frac{2x^2 - 5}{10x^3 - 21}} . \quad (\text{B.69})$$

Cette équation (B.69) nous permet d'obtenir  $x_c = \sqrt{5/2} \sim 1.581$ .

Grâce au développement asymptotique des fonctions  $N_0$  et  $N_2$  au voisinage de l'infini (Eqs. B.63 et B.64), nous obtenons la limite asymptotique de la fonction  $p(x)$ , calculée en utilisant  $p(x) = 1$  le plus possible dans l'équation (B.68). Nous obtenons ainsi :

$$p(x) \approx 1 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x^3 e^{-x^2} . \quad (\text{B.70})$$

Pour  $x > x_c$ , nous résolvons l'équation (B.68) de manière implicite, par l'utilisation de la routine NAG C05ADF, l'inconnue devant être explicitement bornée par un encadrement qui exclut 0 et inclut 1. Nous avons choisi  $10^{-3} \leq p(x) \leq 1.1$ . Les expressions (Eqs. B.69, B.70) sont des vérifications de la précision du calcul numérique. On obtient la figure (Fig. B.2).

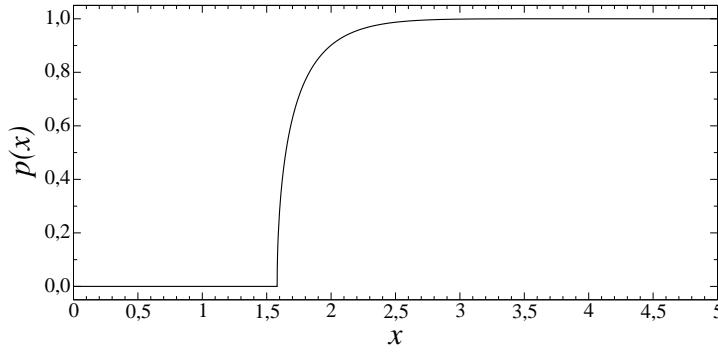


FIG. B.2 – Rapport des vitesses  $p(x) = \bar{v}/\bar{v}_0$  pour  $x$  variant de 0 à 5.

La valeur est nulle pour  $x \leq x_c = \sqrt{5/2} \sim 1.581$ , puis remonte brusquement pour atteindre la valeur 1.

Pour avoir une expression analytique de (B.56), il est nécessaire de supprimer la valeur absolue présente dans l'intégrand, c'est à dire déterminer les intervalles pour lesquels  $f(v, 0) - f^0(v)$  est soit positive, soit négative. Pour  $v \geq u$ , cette quantité est négative parce que  $f(v, 0)$  est nulle. Pour les autres vitesses  $v < u$ , il faut trouver les *points d'inversion*, i.e. les vitesses  $v_i$  pour lesquelles  $f(v_i, 0) = f^0(v_i)$ . En unités réduites  $y_i = v_i/\bar{v}$ , cela revient à résoudre :

$$\frac{N_0(xp(x))}{p^3(x)} = \exp \{ y_i^2(x) [1 - p^2(x)] \} . \quad (\text{B.71})$$

En utilisant le logarithme népérien dans (B.71), on trouve une solution *unique* pour  $x$  donné, tracée sur la figure (Fig. B.3) :

$$y_i(x) = \sqrt{\frac{1}{1 - p^2(x)} \ln \left( \frac{N_0(xp(x))}{p^3(x)} \right)} . \quad (\text{B.72})$$

Bien sûr, cette expression (B.72) ne sera exploitée que pour des valeurs convenables  $x \geq x_c$ . Nous calculerons numériquement toutes les valeurs pour  $x > x_c$ , mais pour connaître la valeur  $y_i(x_c)$ , il est nécessaire d'utiliser le développement de Taylor de  $N_0(x)$  au voisinage de 0, car  $p(x_c) = 0$ . Cela donne :

$$\forall x \leq x_c, y_i(x) = \sqrt{\ln \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^3 \right)} . \quad (\text{B.73})$$

Nous remarquons que (B.73) est une égalité exacte, car  $p(x \leq x_c) = 0$  strictement, et que  $y_i(x)$  est encore définie pour des valeurs  $x_i \leq x < x_c$ , pour lesquelles notre problème perd son sens

physique (température  $T_0$  infinie). Nous avons défini  $x_i$  telle que  $y_i(x_i) = 0$  :

$$x_i = \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{1/3} \sim 1.100. \quad (\text{B.74})$$

Nous trouvons la valeur en  $x = x_c$  :

$$y_i(x_c) = \sqrt{\ln \left( \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x_c^3 \right)} = \sqrt{\ln \left( \frac{10}{3} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \right)} \sim 1.044. \quad (\text{B.75})$$

Comme précédemment, il est possible de trouver une expression asymptotique de  $y_i(x)$ , en utilisant (B.63) et (B.70) dans (B.72) :

$$y_i(x) \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} \right), \quad (\text{B.76})$$

ainsi  $y_i(x \rightarrow +\infty) = \sqrt{3/2} \sim 1.225$ .

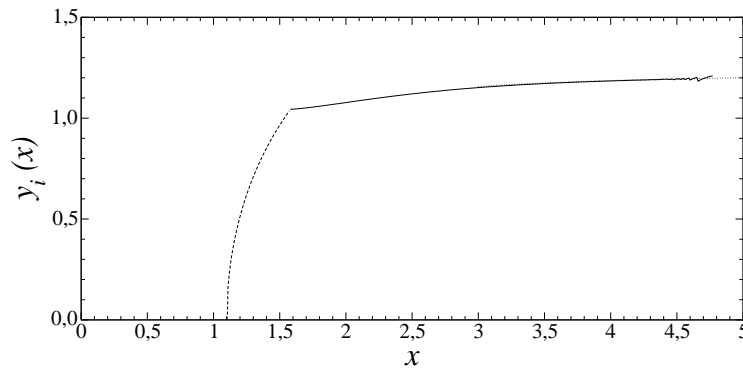


FIG. B.3 – Tracé des points d'inversion  $y_i(x)$  en fonction de  $x$ . La courbe en trait plein est résultat de l'évaluation numérique de l'équation (B.72), qui montre quelques fluctuations dues aux erreurs d'arrondi au voisinage de  $x \sim 4.7$ , la courbe pointillée est le prolongement asymptotique (B.76) pour  $3 < x < 5$ , et la courbe en traits pointillés représente (B.73).

Maintenant que l'on connaît le point d'inversion  $y_i(x)$ , nous allons pouvoir établir le signe de  $f(v, 0) - f^0(v)$  à toutes les vitesses, de façon à calculer analytiquement la quantité  $A_n$  (Eq. B.56). Pour cela, nous traçons sur la figure (Fig. B.4), en unités réduites  $y = v/\bar{v}$ , cette quantité  $g(v)$  normalisée, définie à l'aide de la fonction  $g(v, t)$  :

$$g(v, t) = \frac{f(v, t) - f^0(v)}{f^0(v)}. \quad (\text{B.77})$$

Nous avons  $g(v) \equiv g(v, 0)$ , dont l'expression (B.78) est :

$$g(v) = g(y\bar{v}) = \frac{p^3(x)}{N_0(xp(x))} e^{y^2(1-p^2(x))}. \quad (\text{B.78})$$

Nous avons choisi  $x = 2$  pour l'exemple de la figure, car c'est une valeur qui nous permet de bien voir l'évolution de  $g(v)$ . Cette fonction est négative pour  $y < y_i(x)$ , nulle pour  $y = y_i(x)$  comme convenu par définition, puis positive pour  $y_i(x) < y < x$ . Elle vaut -1 pour  $y \geq x$ , puisque  $f(v \geq u, 0) = 0$ . Ce comportement reste qualitativement le même pour tout  $x \geq x_c$ . Lorsque  $x$  augmente, l'inversion  $y_i(x)$  se décale légèrement vers la droite, et surtout les extrema de  $g(v)$  pour  $0 < v < u$  se rapprochent très vite de 0. Dès  $x = 3$ , nous n'aurions pas pu discerner graphiquement la courbe  $g(v)$  de la valeur nulle.

On va maintenant donner les expressions analytiques de  $A_n(x)$  (nous avons mis une dépendance en  $x$ , qui n'apparaissait pas dans (B.56), parce que  $A_n$  dépend de  $f(v, 0)$ , dont le seul paramètre libre dans notre modèle est  $x$ ).

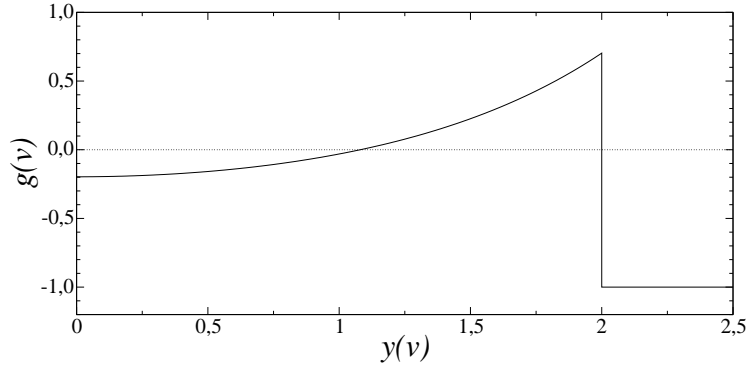


FIG. B.4 – Tracé de  $g(v)$  en fonction de la variable réduite  $y = v/\bar{v}$  pour  $x \sim 2$ .  $g(v)$  est négative en dessous de  $y = y_i(x)$ , puis positive jusqu'à  $y = x$ , et négative au delà.

En utilisant (B.56), la valeur absolue de l'intégrand peut être résolue en séparant le domaine de vitesses  $v \in [0, +\infty[$  en trois domaines  $v \in [0, v_i[ \cup [v_i, u[ \cup [u, +\infty[$ . On obtient alors :

$$A_n(x) = \frac{4\pi}{M_n(+\infty, T)} \left\{ - \int_0^{v_i} [f(v, 0) - f^0(v)] v^{n+2} dv + \int_{v_i}^u [f(v, 0) - f^0(v)] v^{n+2} dv + \int_u^{+\infty} f^0(v) v^{n+2} dv \right\}, \quad (\text{B.79})$$

qui se transforme, grâce aux unités réduites définies précédemment  $x = u/\bar{v}$ ,  $p(x) = \bar{v}/\bar{v}_0$  et  $y_i(x) = v_i/\bar{v}$ , et en utilisant (Eqs. B.59, B.61) :

$$A_n(x) = 1 + 2N_n(y_i(x)) - 2N_n(x) + \frac{1}{p^n(x)N_0(xp(x))} [N_n(xp(x)) - 2N_n(y_i(x)p(x))]. \quad (\text{B.80})$$

Cette expression (B.80) peut être écrite plus simplement dans les cas  $n = 0, 2$  (les seuls qui nous intéressent), grâce à la relation (B.68). Nous écrivons ci-dessous les expressions  $A_0(x)$  et  $A_2(x)$ , ainsi que leur développement de Taylor pour  $x \gg 1$ .

$$\begin{cases} A_0(x) = 2 \left( 1 + N_0(y_i(x)) - N_0(x) - \frac{N_0(y_i(x)p(x))}{N_0(xp(x))} \right) \\ A_0(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left[ \left[ 1 - N_0\left(\sqrt{3/2}\right) \right] x + 0\left(\frac{1}{x}\right) \right] \end{cases}, \quad (\text{B.81})$$

et

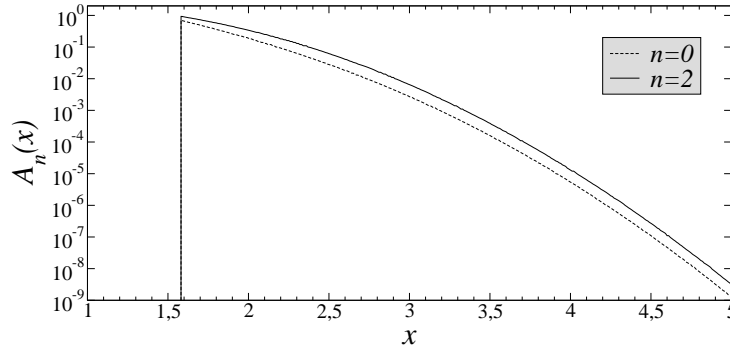
$$\begin{cases} A_2(x) = 2 \left( 1 + N_2(y_i(x)) - N_2(x) - \frac{N_2(y_i(x)p(x))}{N_2(xp(x))} \right) \\ A_2(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left[ \left[ 1 - N_2\left(\sqrt{3/2}\right) \right] x^3 + 0(x) \right] \end{cases}. \quad (\text{B.82})$$

Pour utiliser les développements de Taylor des équations (B.81, B.82), nous précisons les valeurs  $N_0\left(\sqrt{3/2}\right) \sim 0.61$  et  $N_2\left(\sqrt{3/2}\right) \sim 0.30$ . Comme on s'y attend,  $A_0(x \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$  et  $A_2(x \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ , puisque le modèle BGK a été conçu pour cela. Nous avons tracé ces fonctions sur la figure (Fig. B.5).

Nous dressons ci-dessous un tableau de valeurs de  $x$  pour quelques erreurs  $A_0(x)$  et  $A_2(x)$  (Tab. B.1).

Dans notre modèle d'atmosphère contenant de l'hydrogène pur, le seuil d'énergie est dû à l'excitation du niveau fondamental vers le deuxième niveau, et vaut est à peu près 10 eV. Nous étudions des atmosphères froides, dont la température effective est typiquement 10000 K. Ces paramètres correspondent à  $x \sim 2.8$ , l'erreur relative maximale sur la conservation des invariants collisionnels étant  $A_2(2.8) < 2.0 \times 10^{-2}$ , valeur suffisamment faible pour nos calculs du chapitre 6.

Nous allons maintenant montrer l'influence de la fréquence de collision sur l'erreur produite au cours du temps, en traçant  $E_0(t, u)$  et  $E_2(t, u)$  pour quelques valeurs de  $u$ .

FIG. B.5 – Tracé de  $A_0(x)$  (courbe en pointillés) et de  $A_2(x)$  (courbe pleine) pour  $x_c \leq x \leq 5$ .

erreur (%)	$A_0(x)$		$A_2(x)$	
	$x$	$x^2$	$x$	$x^2$
$10^{-1}$	2.18	4.75	2.37	5.62
$10^{-2}$	2.73	7.45	2.91	8.47
$10^{-3}$	3.18	10.11	3.34	11.16
$10^{-4}$	3.57	12.74	3.71	13.76
$10^{-5}$	3.91	15.29	4.04	16.32
$10^{-6}$	4.22	17.81	4.34	18.84
$10^{-7}$	4.51	20.34	4.62	21.34
$10^{-8}$	4.78	22.85	4.88	23.81

TAB. B.1 – Tableau des valeurs de  $x$  correspondant à quelques valeurs de  $A_0(x)$  et  $A_2(x)$ .

En utilisant (B.53), en unités réduites  $\tau = t/t_r$ ,  $x = u/\bar{v}$ ,  $y = v/\bar{v}$ , on obtient :

$$E_0(\tau, x) = \frac{p^3(x)}{N_0(xp(x))} \int_0^x y^2 e^{-y^2 p^2(x)} e^{-\tilde{\nu}(y)\tau} dy - \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y^2} e^{-\tilde{\nu}(y)\tau} dy \quad (\text{B.83})$$

et

$$E_2(\tau, x) = \frac{2}{3} \left\{ \frac{p^3(x)}{N_0(xp(x))} \int_0^x y^4 e^{-y^2 p^2(x)} e^{-\tilde{\nu}(y)\tau} dy - \int_0^{+\infty} y^4 e^{-y^2} e^{-\tilde{\nu}(y)\tau} dy \right\}, \quad (\text{B.84})$$

où  $\tau = t/t_r$  est l'unité normalisée de temps, dont la référence  $t_r$  est déterminée plus loin, et  $\tilde{\nu}(y) = \nu(v)t_r$  est la fréquence de collision normalisée. Nous avons bien sûr  $\tilde{\nu}(y)\tau = \nu(v)t$ .

D'après l'étude sur la détermination des fréquences de collision (section B.4), nous choisissons  $\nu(v)$  d'après (B.123), c'est à dire :

$$\nu(v) = K \frac{\bar{v}}{v} R\left(\frac{v}{\bar{v}}\right) = K \frac{R(y)}{y}, \quad (\text{B.85})$$

où  $K$  est une constante dont la valeur n'a pas d'importance pour la suite, et  $R$  est la fonction définie par (B.102). Comme chaque courbe tracée l'est pour une vitesse donnée, le facteur multiplicatif dans (B.85) est une constante, qui va juste modifier l'échelle des temps  $t_r$  de notre graphe, sans changer le résultat physique qu'il montre. Pour traiter notre problème d'évolution dans le temps, il nous faut normaliser le temps  $t$ , le comparer à un temps de référence  $t_r$ . En regardant les variations de  $\nu(v)$ , on se rend compte de l'existence de deux temps :

- le premier temps est immédiat, il correspond à la fréquence maximale :  $t_m = 1/\nu(0) = 3\sqrt{\pi}/4K \simeq 1.3/K$ ,
- le deuxième est historique, c'est le temps de Spitzer :  $\tau_c = 1/\nu(\bar{v}) \simeq 2.3/K$ .

On voit que ces deux temps sont très proches l'un de l'autre, puisque  $t_m \simeq 0.6 \tau_c$ . Nous choisissons  $t_m$  comme temps de référence pour des raisons d'expressions analytiques. Alors  $t_r = t_m$ , entraînant  $\tau = t/t_m$  et  $\tilde{\nu}(y) = t_m \nu(y\bar{v})$ , ou encore

$$\tilde{\nu}(y) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{R(y)}{y}. \quad (\text{B.86})$$

On trace alors  $E_0(\tau, x)/A_0(x)$  et  $E_2(\tau, x)/A_2(x)$ , respectivement sur les figures (Fig. B.6) et (Fig. B.7) ci-dessous, pour lesquelles on se rend compte que la majoration de  $E_n$  par  $A_n$  est bien respectée, au moins avec un ordre de grandeur. Cette différence dépend bien sûr de l'accord entre la fdv initiale  $f(v, 0)$  et la fréquence de collision  $\nu(v)$ .

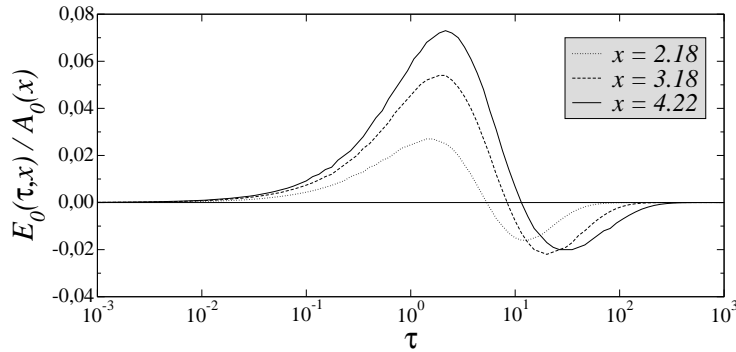


FIG. B.6 – Tracé de  $E_0(\tau, x)/A_0(x)$  pour  $10^{-3} \leq \tau \leq 10^3$ , en échelle semi-logarithmique, pour trois valeurs différentes de  $x$  :  $x \sim 2.18$  (courbe en pointillés) avec  $A_0(2.18) \sim 1.0 \times 10^{-6}$ ,  $x \sim 3.18$  (courbe en traits-tirés) avec  $A_0(3.18) \sim 1.0 \times 10^{-3}$ , et  $x \sim 4.22$  (courbe en traits pleins) avec  $A_0(4.22) \sim 1.0 \times 10^{-6}$ .

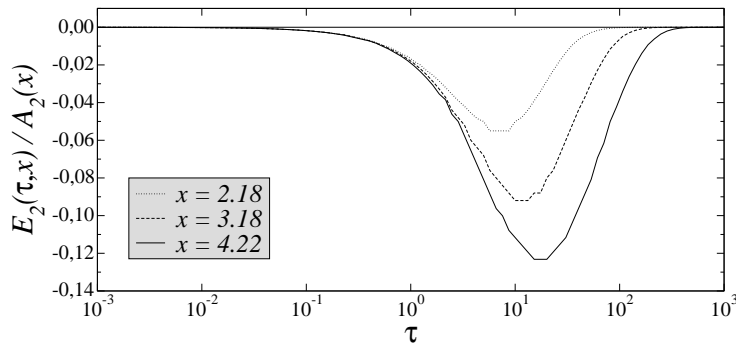


FIG. B.7 – Tracé de  $E_2(\tau, x)/A_2(x)$  pour  $10^{-3} \leq \tau \leq 10^3$ , en échelle semi-logarithmique, pour trois valeurs différentes de  $x$  :  $x \sim 2.18$  (courbe en pointillés) avec  $A_0(2.18) \sim 2.0 \times 10^{-6}$ ,  $x \sim 3.18$  (courbe en traits-tirés) avec  $A_0(3.18) \sim 2.5 \times 10^{-3}$ , et  $x \sim 4.22$  (courbe en traits pleins) avec  $A_0(4.22) \sim 2.6 \times 10^{-6}$ .

Par la suite, nous aurons le choix entre la détermination de  $A_n$ , qui ne dépend pas de la fréquence  $\nu(v)$ , ou directement de  $E_n$  selon la fréquence. Le premier choix a pour inconvénient de surestimer l'erreur réelle, parfois de façon non négligeable. Il a pour avantages certains de ne pas dépendre de la fréquence de collision, et de donner une estimation de l'erreur de conservation facilement. Il est difficile, numériquement, d'apprécier l'erreur maximale  $E_n$ , car aucune expression analytique n'est disponible.

Dans notre modèle d'atmosphère contenant de l'hydrogène pur, ce seuil en énergie est à peu près 10 eV. Nous allons exprimer notre paramètre de troncature relativement à la vitesse la plus probable  $x = u/\bar{v}$ . Nous étudions des atmosphères froides, dont la température effective est typiquement 10000 K. Alors  $x > 2.8$ . Nous avons vu que notre étude est valable pour  $x > x_c \sim 1.58$ , ce qui nous permettrait de l'utiliser pour des milieux dont la température peut atteindre 30000 K, ce qui est amplement suffisant.

Pour conclure, nous avons trouvé une expression de l'erreur maximale commise sur la conservation des invariants collisionnels. Cette erreur, qui ne dépend que de la fdv initiale  $f(v, 0)$ , a pu être ramenée à des valeurs très petites, avec un modèle de fdv initiale : la maxwellienne tronquée à droite. Pour les atmosphères que nous avons étudié au chapitre 6 (hydrogène pur, premier seuil d'excitation pour l'énergie  $\sim 10$  eV, température inférieure à 10000 K), nous obtenons une erreur

relative sur la conservation des invariants collisionnels inférieure à  $10^{-2}$ , selon une première estimation qui ne tient pas compte de la forme de la fréquence de collision. Les calculs effectués dans ce mémoire ne nécessitent pas une précision plus importante, et la validité du modèle BGK est alors établie. Cette erreur serait vraisemblablement inférieure à  $10^{-3}$  d'après les calculs plus fins menés dans la deuxième partie de cette section : l'erreur réelle est inférieure d'au moins un ordre de grandeur à la première estimation faite. Ce résultat est satisfaisant, et montre que le modèle BGK, avec fréquence de collision non constante, est un bon modèle pour la conservation des invariants, remplissant le premier critère proposé.

Ce qui nous intéresse reste le problème stationnaire, dont nous allons maintenant discuter.

### B.3.2 Problème stationnaire

En examinant la forme du modèle BGK, celui-ci est un modèle parfait des termes de sources de collision habituels, puisque la fdv tend vers la maxwellienne d'équilibre.

Bien sûr, le problème stationnaire des atmosphères stellaires n'a d'intérêt que si les particules sont soumises à la fois aux collisions élastiques et aux collisions inélastiques, dans le cas où le membre de gauche de l'équation cinétique est nul (pas de convection et champ de force extérieur nul). Dans notre cas, nous ne pouvons déterminer la fréquence de collision du modèle que par ressemblance mathématique de la forme FPL et la forme BGK. Une autre possibilité de trouver cette fréquence tient en la constatation suivante : le problème stationnaire n'est finalement que le problème temporel pris à partir d'un temps *suffisamment long* pour que la fdv évolue assez *lentement* dans le temps pour négliger la dérivée de la fdv par rapport au temps dans l'équation cinétique. Cette évolution lente dans le temps est difficile à quantifier, car on ne connaît pas la dérivée temporelle de la fdv, mais tout ceci est équivalent au fait que la fdv soit *assez proche* de la fdv d'équilibre. En effet, étant donné le théorème H d'évolution irréversible dans le temps vers l'équilibre, si la fdv est proche de l'équilibre, son évolution dans le temps vers cet équilibre sera lent. On arrête alors l'évolution dans le temps à partir d'un temps  $\tau$ , et le problème stationnaire permet d'écrire que la fdv, pour des temps supérieurs à  $\tau$ , est la fdv d'équilibre. Dans les 2 cas, l'étude des fréquences de collision menée à la section B.4 conclut au même choix de la fréquence de collision, étude basée sur le problème temporel mais qui s'adapte ainsi au problème stationnaire.

Toute la difficulté du problème stationnaire est de déterminer ce temps  $\tau$ . Notre premier critère, pour que le modèle BGK soit valable dans le problème stationnaire, va être de définir  $\tau$  comme un *temps de relaxation global*, pour lequel  $f(v, t)$  a approché  $f^0(v)$  à la précision  $\varepsilon$  que l'on désire, et pour tout le domaine  $\Omega$  des vitesses utilisées dans le calcul numérique. Autrement dit,

$$\forall v \in \Omega, |g(v, \tau)| \leq \varepsilon. \quad (\text{B.87})$$

L'estimation de ce temps  $\tau$  se fait en trois étapes :

- définir la précision  $\varepsilon$ ,
- définir le domaine des vitesses  $\Omega$ ,
- définir  $f(v, 0)$  si on utilise la formule (B.97) pour déterminer la fréquence de collision  $\nu(v)$ , parce que  $g(v, t)$  en dépend.

La précision  $\varepsilon$  va dépendre de la précision demandée pour la détermination de la fdv. On peut estimer *grosso-modo* que si  $f^{BGK}(v)$  est la solution approchée de  $f(v)$ , alors  $|f^{BGK}(v) - f(v)| \leq \varepsilon f(v)$ . Le domaine des vitesses  $\Omega$  dépend lui aussi de la précision du calcul. Analytiquement, on a des intégrales sur les vitesses de 0 à  $+\infty$ . Numériquement, la borne supérieure ne peut plus être  $+\infty$ , mais  $v_\infty$ . Alors  $\Omega = [0, v_\infty]$ . Pour déterminer cette borne supérieure, on peut par exemple exiger que l'erreur commise sur la valeur de l'intégrale soit inférieure à  $\varepsilon$ . Pour illustrer cela, prenons l'exemple d'une intégrale sur une fdv maxwellienne de vitesse la plus probable  $\bar{v}$ . Alors l'erreur commise, en unités réduites  $z_\infty = v_\infty/\bar{v}$ , est  $E(z_\infty) = 1 - \text{erf}(z_\infty)$ . Nous avons calculé dans la table (Tab. B.2) quelques valeurs de cette erreur.

Nous travaillerons avec  $z_\infty \leq 10$  (le seuil inélastique pour une atmosphère à 10000 K vaut  $z \sim 3.7$ ). Alors la précision demandée sur les intégrales ne sera vraisemblablement pas une contrainte.

Dans un problème stationnaire, on ne connaît pas du tout l'état initial. Pour une atmosphère, déjà en équilibre, ce peut être un *jet* de particules qui va perturber notre milieu et le faire évoluer. Si on ne connaît pas la forme de cette perturbation, on ne peut rien dire. C'est pourquoi nous avons essayé de déterminer une fréquence de collision *universelle*. Surpassant cette difficulté, nous nous placerons dans le cas optimiste  $g(v, 0) = 1$ .

$z$	$E(z) = 1 - \text{erf}(z)$
1	0.16
2	$4.7 \times 10^{-3}$
5	$1.5 \times 10^{-12}$
10	$2.1 \times 10^{-45}$

TAB. B.2 – Estimation de l’erreur relative faite sur les moments d’une fdv maxwellienne, lorsque l’intégrale porte sur un domaine numérique fini  $[0, z]$ .

Nous pouvons maintenant essayer de donner une valeur à ce temps  $\tau$ . Comme notre fréquence décroît rapidement avec la vitesse ( $\nu(z) \propto 1/z^3$ ), nous sommes sûrs que si  $\tau \geq 1/\nu_\varepsilon(z_\infty)$ , alors le critère (Eq. B.87) sera respecté. Alors  $\tau = t_\varepsilon(1) z_\infty^3$ . Pour la précision  $\varepsilon = 10^{-2}$ , nous avons trouvé  $t_\varepsilon(1) \sim 10^{-6}$  s, et en choisissant  $z_\infty = 10$ , on obtient  $\tau \sim 10^{-3}$  s. Ce temps  $\tau$  est négligeable par rapport à tout temps d’évolution macroscopique dans une atmosphère stellaire, alors on pourra toujours traiter le problème stationnaire dans une atmosphère stellaire.

On remarquera qu’il sera possible de substantiellement améliorer la détermination de l’erreur maximale commise sur la conservation des invariants car, en ce temps  $\tau$ ,  $\forall v \in \Omega$ ,  $\exp[-\nu(v)\tau] \leq \varepsilon$ , expression à utiliser dans (B.53) pour avoir une nouvelle erreur  $A'_n = \varepsilon A_n$ , d’après la définition (B.56).

Nous avons calculé le temps  $\tau$  à l’aide de considérations uniquement basées sur les collisions élastiques. Le problème cinétique qu’on se pose inclut des effets inélastiques, ce qui a pour conséquences que :

- le temps  $\tau$  doit être calculé en tenant compte de toutes les termes de l’équation cinétique. Ce qui a été fait pour les collisions élastiques pourrait être généralisé aux collisions inélastiques, *i.e.* construire un modèle BGK pour chaque terme. Même si cela était possible, les études manquent à ce sujet pour pouvoir chiffrer leur contribution. En pratique, nous sommes incapables de déterminer quantitativement un temps de stationnarité cinétique pour le problème inélastique que traité. Les études qui ont été faites portent sur la résolution des équations de transport temporelles pour un ensemble de moments de la fdv. On peut en déduire des temps de relaxation. Ces temps sont très souvent négligeable par rapport aux temps macroscopiques caractéristiques, validant l’approche stationnaire comme étant toujours valable, qu’elle soit hydrodynamique ou cinétique.
- Même si  $\tau$  pouvait être déterminé, et qu’il soit possible de traiter le problème cinétique stationnaire, on sait, et c’est ce qu’on cherche, que les termes inélastiques vont induire de forts écarts à l’ETL. Alors, pour certains domaines de vitesses de  $\Omega$ , la condition (B.87) de validité du modèle BGK pour le terme de collisions élastiques, ne sera pas réalisée, et on ne peut plus rien dire sur l’écart numérique entre le terme de source FPL et le terme de source BGK. Comme le problème posé est non-linéaire, la conséquence pourrait être grave sur la détermination de la fdv : la fdv issue du modèle BGK pourrait être très différente de celle correspondant au problème physique posé, issu de termes de source de FPL ou de Boltzmann.
- Un autre problème vient de la détermination des paramètres du modèle BGK. Comme on ne connaît pas la fdv initiale (à temps nul), on ne connaît pas les paramètres de la maxwellienne du modèle. Avec les collisions inélastiques, la densité et la température de la fdv vont changer, mais les paramètres de la maxwellienne vont-ils changer ? Pour répondre à cela, il suffit de regarder l’équation cinétique FPL à un temps quelconque  $t$ . En laissant évoluer la fdv dans le temps sous le seul effet des collisions élastiques, elle va évoluer vers une maxwellienne de paramètres ceux de la fdv au temps  $t$ . Dans le problème temporel complet (élastique et inélastique), la maxwellienne d’équilibre du problème élastique a donc ses paramètres qui varient avec le temps. Cette caractéristique reste vraie dans le problème stationnaire. La fdv *initiale* est  $f_n$ , la fdv résultat de l’itéré  $n$  du problème couplé. C’est elle qu’on va utiliser pour calculer la maxwellienne du modèle BGK pour l’itéré  $n + 1$ . Seulement, la fdv résultant de cet itéré ne va pas avoir la même densité et même température que celles de la maxwellienne du modèle. Si l’écart est important, cela pourrait poser un problème de convergence : elle pourrait être ralentie. Il faut alors itérer la résolution de l’équation cinétique, en changeant à chaque itéré les paramètres de la maxwellienne. Quoi qu’il en soit, on peut se demander si la convergence d’une équation qui change de forme entre deux itérés est bien établie. Avec le terme FPL ou Boltzmann, la forme reste la même. Pour le problème du transport, cela

pourrait avoir une influence sur la validité du modèle BGK, si l'écart à l'ETL s'étendait sur un grand domaine de vitesses.

### B.3.3 Conclusion

Nous avons vu que le modèle BGK, adapté au problème des atmosphères stellaires que nous nous posons (modélisation de la fdv des électrons *tronquée* dans la queue), respectait les 3 critères fixés en introduction de cette section B.3. La conservation des invariants collisionnels est typiquement inférieure à 1%, ce qui est acceptable pour les calculs de notre modèle d'atmosphère.

Bien que nos atmosphères stellaires soient stationnaires, nous avons mené une étude détaillée du problème temporel, c'est à dire l'évolution dans le temps de la fdv avec collisions élastiques seulement, en comparant les résultats obtenus avec un terme de source FPL [68, 88], avec ceux donnés par le modèle BGK. On ne connaît pas réellement comment  $f(v, t)$  évolue vers l'équilibre en utilisant l'équation de Boltzmann ou de FPL. Il est difficile de faire une comparaison avec le modèle BGK, pour lequel  $f(v, t)$  est connue analytiquement à tout temps. On sait qu'à  $t = 0$  et  $t = +\infty$ , les fdv provenant des deux termes de source sont égales. Nous avons construit la fréquence de collision du modèle BGK afin de retrouver cette ressemblance des fdv pour un temps  $t = t_\varepsilon(v)$ . Entre ces valeurs du temps, le modèle BGK implique que  $f(v, t)$  tend vers l'équilibre exponentiellement avec le temps. On peut penser que la décroissance exponentielle est une loi suffisamment générale, pour que FPL ou Boltzmann se comportent ainsi, mais ce n'est pas convaincant. De plus, on sait qu'à partir de  $t_\varepsilon(v)$ , la fdv est dans une région bien définie autour de la maxwellienne d'équilibre, que ce soit celle du modèle ou celle de FPL, et c'est un argument fort en faveur de la validité du modèle. Par contre, on ne sait pas si FPL garde la *mémoire* de l'état initial après un temps assez long, alors que BGK la garde. Le modèle BGK semble mal décrire  $f(v, t)$  aux temps courts, mais bien circonscrire sa valeur pour des temps suffisamment longs. Nous ne nous sommes pas persuadés de façon vraiment convaincante que la fréquence de collision était *universelle*, au sens où elle ne dépend pas de l'état initial. Le fait est qu'elle en dépend, mais la validité du modèle aussi. Nous pouvons alors dire que ce modèle, avec la fréquence que l'on a choisie, sera valable pour certains états initiaux seulement. Il n'y a pas, ou presque pas de critères généraux qui permettent de classer les *bonnes* fdv initiales d'une part, et les *mauvaises* d'autre part. Ce genre de modèle n'a d'intérêt que si l'on veut traiter un problème temporel qui inclut d'autres effets que les effets élastiques purs, parce qu'on sait très bien traiter numériquement le cas élastique pur à partir des équations FPL ou Boltzmann. La bonne démarche pour vérifier la validité du modèle BGK est de se poser un problème cinétique temporel complexe, inélastique, et de choisir une fdv initiale. On résout alors le problème élastique avec FPL ou Boltzmann, pour cet état initial, à une précision  $\varepsilon$  donnée, on en déduit  $\nu_\varepsilon(v)$ , qui sera utilisée pour connaître  $\nu(v)$ . Il faudra alors vérifier le critère de conservation des invariants. Si ce critère est satisfait, il faudra encore vérifier que la fdv se trouve dans la région *proche* à la précision  $\varepsilon$  de la maxwellienne d'équilibre pour des temps supérieurs à  $t_\varepsilon(v)$ . Ce point dépend de la formule qu'on a utilisé pour exprimer  $\nu(v)$  à partir de  $\nu_\varepsilon(v)$ . Si on utilise la formule (B.97), il faut vérifier l'influence de l'état initial sur le critère (B.99). Si on utilise la formule (B.96), on sait que le modèle BGK sera valable pour cet état initial à partir du temps  $t_\varepsilon(v)$ . On pourra alors traiter le problème initial en utilisant le modèle BGK à la place du terme de collisions élastiques. Comme les termes de collision inélastiques vont modifier la densité et la température de la fdv, il faudra les recalculer entre deux itérations successives dans le temps, pour injecter leur valeur dans la maxwellienne. Moyennant quoi, si la solution finale de ce problème reste proche de la maxwellienne, à la précision initiale  $\varepsilon$ , on pourra garantir que cette solution est proche de celle qu'on aurait trouvée avec FPL ou Boltzmann. Si l'écart à la maxwellienne devient important, on ne peut plus rien dire. La solution finale peut être une mauvaise comme une bonne solution. Pour statuer sur la validité du modèle BGK dans le problème temporel, il faudrait comparer les formes mathématiques de FPL et BGK par l'étude du spectre de l'opérateur de collision. On peut déjà voir que la relaxation de tel ou tel moment va dépendre de l'intégrale de la fréquence de collision pondérée par ce moment, sur les vitesses. Chaque moment va donc avoir une fréquence de relaxation différente, par comparaison avec le modèle BGK à fréquence de collision constante qui décrivait parfaitement bien la relaxation d'un moment particulier, mais qui décrivait mal tous les autres. Dans notre cas, la relaxation de chaque moment sera à peu près mal décrite, la nuance tenant dans le *à peu près*. Sans étude de spectre, on ne peut aller plus loin, mais le modèle BGK pourrait se révéler un bon modèle pour ce type de problèmes.

Pour le problème stationnaire, la seule difficulté consiste en la détermination de la fréquence



de collision. Cette difficulté est levée par les arguments de la section B.3.2, et nous calculons dans la section B.4 suivante ces fréquences de collision, valables pour le problème temporel comme pour le problème stationnaire.

## B.4 Choix des fréquences de collision

Le but de cette section est d'apporter un regard sur la façon dont, en général, une fdv initiale quelconque approche sa maxwellienne d'équilibre sous l'effet des collisions élastiques. Le but pratique étant de déterminer des fréquences de relaxation pour le modèle BGK.

L'étude de ces temps se sépare en deux classes différentes :

- les collisions fortes de particules légères avec des particules lourdes : ce sera pour nous les collisions des électrons avec les atomes, éventuellement des électrons avec les ions si on ne s'occupe que des chocs proches,
- les collisions faibles entre particules chargées, déterminées par la forme FPL.

### B.4.1 Les collisions des électrons avec les atomes

En utilisant le modèle imparfait du gaz de Lorentz [32], on peut déterminer des temps de relaxation pour les différentes anisotropies, et un temps de relaxation de la distribution isotrope vers une maxwellienne de température égale à celle des atomes. Ce dernier point marque la différence entre ce modèle *imparfait* et le modèle *parfait* du gaz de Lorentz décrit plus haut, pour lequel il n'y avait aucun échange d'énergie entre les électrons et les atomes, impliquant que la partie isotrope de la fdv des électrons n'évoluait pas vers une maxwellienne d'équilibre. La fréquence de relaxation des anisotropies d'ordre  $l$  s'écrit :

$$\nu_l(v) = 2\pi n_H v \int_0^\pi [1 - P_l(\cos \theta)] q_{He}(v, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (\text{B.88})$$

où  $P^l$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $l$ . Soit on se limite aux premières anisotropies pour avoir une valeur *universelle* de la fréquence de relaxation, soit on suppose que la section efficace différentielle est isotrope, et les fréquences de relaxation ne dépendent plus du degré d'anisotropie :

$$\forall l, \quad \nu_l(v) = n_H v q_{He}(v). \quad (\text{B.89})$$

Bien sûr la sed n'est pas isotrope (voir la section A.5.4). Pour la gamme d'énergie, qui nous intéresse, des électrons 1–10 eV, la sed fait un *creux*. Le rôle des extrémités est atténué par le terme  $\sin \theta$  dans (B.88), alors si ce creux a la même valeur pour toutes les vitesses dans cette gamme, l'approximation de la sed isotrope n'est pas trop mauvaise. Ce n'est pas le cas, la valeur du creux dépend de la vitesse. Cette dépendance est prise en compte pour le calcul de la sed intégrée (sei). Le calcul de la section efficace totale de transfert de quantité de mvt a été faite. Elle correspond à la fréquence de collision de première anisotropie ( $l = 1$ ), et elle rejoint la sei autour de 5 eV, alors qu'on ne sait rien sur elle en dessous, et elle se stabilise à une valeur à peu près deux fois moindre que la sed intégrée pour les grandes vitesses, suivant à peu près la même décroissance que la sed intégrée. Il risque d'en être de même pour les autres anisotropies. En conséquence, on ne va pas pouvoir trouver de fréquence de collision *universelle* pour toutes les anisotropies. Nous prendrons comme modèle les fréquences de collision de toutes les anisotropies égales à la première (ce qui revient à supposer que la sed est isotrope), qui sera elle-même égale à la sei  $\nu_0(v)$ .

Pour tenter de justifier cette hypothèse, examinons la formule (B.88). On remarque que la caractéristique de l'anisotropie vient du  $P_l(\cos \theta)$ , et que le 1 correspond à la sed intégrée. Comme on intègre sur  $0 \leq \theta \leq \pi$ , on a  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ . En utilisant la relation de récurrence connue sur les polynômes de Legendre, l'expression connue des deux premiers polynômes (d'ordre 0 et 1), et la relation d'orthogonalité qui stipule que l'intégrale de tout polynôme d'ordre  $l > 0$  sur  $[-1, 1]$  est nulle, on peut en déduire les deux résultats suivants :

- tout polynôme est borné aux valeurs  $[-1, 1]$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ ,
- tout polynôme d'ordre  $l > 0$  change de signe au moins une fois sur ce même intervalle.

Le premier résultat permet de voir que toute fréquence de collision d'anisotropie  $l$ , à chaque vitesse, est bornée entre 0 et au plus deux fois la valeur équivalente à la sei. Le deuxième résultat

permet de voir que cet *écart* à la sei est moindre qu'en considérant les bornes possibles, puisque le fait que le polynôme change de signe sur le domaine d'intégration atténue les effets de l'anisotropie.

Mettons en pratique ce raisonnement pour la première anisotropie pour laquelle  $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ . Nous faisons référence à la figure (Fig. A.1).

Pour des énergies cinétiques inférieures typiquement à 5 eV, la sed fait un *creux* au milieu et les extrémités ont à peu près la même valeur. La valeur pour  $\pi$  est légèrement plus faible que pour 0, et le tout est à peu près symétrique par rapport à  $\pi/2$ . Alors la contribution de l'anisotropie va devenir petite par rapport à 1, et légèrement inférieure, ce qu'on observe bien pour 5 eV, et nous en déduisons que ce comportement va rester le même pour des énergies inférieures.

Pour des énergies cinétiques supérieures à 5 eV, la sed décroît très vite jusqu'à  $\pi/2$ , puis reste à peu près constante jusqu'à  $\pi$ , avec une valeur comprise entre un et deux ordres de grandeur par rapport à la valeur en 0. On comprend que la contribution de  $\cos\theta$  va atténuer l'intégration de 0 à  $\pi/2$ , alors qu'il va augmenter, légèrement toutefois, de  $\pi/2$  à  $\pi$ . Cela donne globalement une atténuation d'un facteur à peu près deux par rapport à la sei, ce qu'on trouve aussi.

Sur cet exemple, on voit que non seulement la fréquence de collision d'anisotropie d'ordre 1 ne dépasse pas la sed intégrée, mais encore qu'elle ne *chute* pas de façon dramatique : on a au plus un facteur 2.

Pour les autres anisotropies, étant donné que  $P_l(1) = 1$ , on peut s'attendre au même comportement. Il pourrait y avoir dépassement, mais pas de chute spectaculaire malgré tout. C'est pour cela qu'il nous semble commettre au pire une erreur de  $\pm 100\%$  sur toutes les fréquences de collision des anisotropies en supposant dans (B.88) que la sed est isotrope. Dans l'état actuel de notre travail, et sachant que finalement c'est le comportement selon la vitesse qui est important, cela nous semble satisfaisant.

Pour la relaxation de la partie isotrope, les études assez complexes faites sur le spectre de l'opérateur de collision associé à ce phénomène, de type Fokker-Planck, montrent que la fréquence de relaxation de la partie isotrope a le même comportement que  $(m_e/m_H)\nu_1(v)$ , c'est à dire  $(m_e/m_H)\nu_0(v)$  dans notre approximation.

## B.4.2 Les collisions entre particules chargées

Tout le problème de déterminer la fréquence de collision du modèle BGK vient de savoir quels critères on retient : ce modèle doit-il être le plus fidèle possible aux équations originelles (Boltzmann, Fokker-Planck-Landau, équations linéarisées), utiliser une définition faisant appel au *sens* physique, ou reprendre les résultats de calcul numérique sur l'approche à l'équilibre d'une fdv initiale vers la maxwellienne attendue ?

La façon dont on essaye de deviner cette fréquence va nous permettre d'obtenir des expressions qui seront différentes, bien que comportant des éléments communs. Cela va nous mener à trois approches différentes :

- l'approche numérique,
- l'approche intuitive,
- l'approche mathématique.

Ce n'est qu'après avoir détaillé toutes ces approches, et en ayant cerné leur domaine de validité, que l'on pourra essayer de décider quelle expression on peut utiliser pour la fréquence de collision.

### B.4.2.1 L'approche numérique

Nous nous basons sur les travaux de Rosenbluth *et al.* [68, 88], qui ont résolu numériquement l'équation temporelle de Fokker-Planck-Landau non-linéaire pour des électrons collisionnant avec eux-mêmes par le biais de l'interaction coulombienne. Pour la région des faibles vitesses (le *départ* de la fdv  $v \ll \bar{v}_e$ ) et moyennes vitesses (la *bosse* de la fdv  $v \approx \bar{v}_e$ ), les auteurs ont choisi une fdv initiale gaussienne (Dirac élargi) centrée sur la vitesse la plus probable  $\bar{v}_e$  de température  $T_e$  ( $\bar{v}_e = \sqrt{2kT_e/m_e}$ ) :

$$f(v, 0) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{v}_e^3} \exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_e^2} (v - \bar{v}_e)^2\right). \quad (\text{B.90})$$

Pour la région des hautes vitesses (la *queue* de la fdv  $v \gg \bar{v}_e$ ), leur modélisation de la distribution initiale en onde de diffusion correspond à  $f(v, 0) = 0$ . Les calculs permettent de suivre l'évolution

de la fdv en fixant le temps d'atteinte de l'équilibre maxwellien lorsque l'écart est de *quelques* % (ils ont bien définis cette maxwellienne grâce à la densité et la température de la gaussienne initiale). Il faut remarquer que les équations utilisées sont à une dimension, et ne traitent que la relaxation de la partie isotrope de la fdv des électrons. Les équations pour la partie non isotrope sont très compliquées. Cette étude va nous permettre de trouver une expression simple du temps de relaxation à toutes les vitesses  $t_\varepsilon(v)$  pour lequel la fdv des électrons a atteint l'équilibre à une précision relative  $\varepsilon$  près.

Nous établirons ensuite l'expression de la fréquence de collision  $\nu(v)$  associée au modèle BGK, à partir de  $t_\varepsilon(v)$  et d'autres considérations, en la rendant la plus *universelle* possible (indépendante de  $\varepsilon$  et de la fdv initiale).

Les calculs menés par les auteurs cités ci-dessus ont permis d'établir les résultats suivants :

1. le temps de relaxation à la vitesse la plus probable  $\bar{v}_e$  est connu,
2. elle indique le comportement dans la *queue* : en modélisant la queue de la fdv comme une onde de diffusion vers les grandes vitesses, les auteurs trouvent que le temps de relaxation à la vitesse  $v$  est proportionnel à  $v^3$ , résultat valable pour des vitesses nettement plus grandes que la vitesse la plus probable,
3. elle montre que la partie de la fdv comprise entre la vitesse nulle et la vitesse la plus probable, région définie comme le *départ* de la fdv, atteint l'équilibre plus vite que la queue, moins vite que la vitesse la plus probable, de façon à peu près constante pour les faibles vitesses.

L'étude numérique ayant abouti à des temps de relaxation pour différentes vitesses, on peut essayer de lui associer une forme continue. On a déjà défini la fonction  $R$  par l'équation (3.20), et la forme  $R(v/\bar{v}_e)/v$ , à une constante multiplicative près, semble bien convenir aux fréquences de relaxation de cette étude (simplement l'inverse du temps  $t_\varepsilon(v)$ ). Le comportement dans la queue est correct, la fréquence à vitesses faibles est constante, mais la fréquence à faible vitesse est plus grande que la fréquence à la vitesse la plus probable, d'un rapport  $\sim 1.76$ . Etant donné le caractère approché de notre travail, nous utiliserons néanmoins cette forme, ce qui favorise les collisions élastiques dans une comparaison élastique/inélastique.

On définit donc une première fréquence de collision entre électrons :

$$\nu_\varepsilon(v) = \frac{1}{t_\varepsilon(v)} = K_\varepsilon \frac{R(v/\bar{v}_e)}{v}, \quad (\text{B.91})$$

où  $K_\varepsilon$  est une constante que nous allons calculer.

Dans l'article de Rosenbluth *et al.* [68, 88], la seule valeur du temps de relaxation que les auteurs donnent pour être celui d'atteinte à un équilibre est celui correspondant à la vitesse la plus probable : il vaut  $0.73\tau_c$ , où  $\tau_c$  est le temps de *self-relaxation* de Spitzer, défini par :

$$\tau_c \approx \frac{(3/2)^{3/2}}{0.714} \frac{m_e^2 \bar{v}_e^3}{8\pi n_e \ln \Lambda} \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2. \quad (\text{B.92})$$

On trouve alors  $K_\varepsilon$  par la relation

$$\nu_\varepsilon(\bar{v}_e) \approx \frac{1}{0.73\tau_c}, \quad (\text{B.93})$$

ce qui permet d'écrire en définitive :

$$\nu_\varepsilon(v) \approx 2.5n_e \Gamma_{ee} \frac{1}{\bar{v}_e^2} \frac{R(v/\bar{v}_e)}{v}. \quad (\text{B.94})$$

Remarquons que cette valeur donnée de  $0.73\tau_c$  est une approximation qui dépend de la précision demandée sur l'atteinte à l'équilibre. C'est un bon ordre de grandeur qui indique que le temps de relaxation est proche du temps de Spitzer. On peut toujours poser que le temps *réel* de relaxation est une constante proche de 1 multipliée par  $\tau_c$ , alors la constante 2.5 avancée dans (B.94) ne doit pas être considérée comme exacte. On pourrait très bien prendre 1 ou 0.5. De plus, l'étude par les mêmes auteurs du comportement asymptotique des temps de relaxation donne une valeur 3 pour cette constante.

En conclusion, il faut voir  $R$  comme une fonction qui *raccorde* assez bien les trois régions de l'espace des phases, qu'elle respecte qualitativement chaque région, mais que chaque région demande une constante différente (et proches l'une de l'autre) dans la formule (B.94) :  $1.76 \times 2.5 \sim 4.4$  pour les vitesses très inférieures à la vitesse la plus probable  $\bar{v}_e$ ,  $2.5$  pour la région des vitesses voisines de  $\bar{v}_e$ , et  $3$  pour les vitesses bien supérieures à  $\bar{v}_e$ . Nous avons choisi d'utiliser la constante donnée par la vitesse  $\bar{v}_e$  parce que c'est la mieux connue numériquement, la région des faibles vitesses n'étant pas tabulée et la région des hautes vitesses ayant donné lieu à un traitement analytique modélisé. Ce choix a aussi pour but de rejoindre les résultats bien connus, car  $\bar{v}_e$  est aussi la vitesse à laquelle on fait référence pour décrire l'ordre de grandeur des collisions élastiques.

Nous allons maintenant déterminer l'expression de  $\nu(v)$  en fonction de  $t_\varepsilon(v)$ ,  $f(v, 0)$  et  $\varepsilon$ , et définir dans quelle mesure cette fréquence de collision est *universelle*, *i.e.* ne dépend pas de  $f(v, 0)$  et  $\varepsilon$ .

Nous définissons l'expression du temps de relaxation dépendant de la vitesse  $t_\varepsilon(v)$ , définie comme le temps pour lequel la fdv approche la maxwellienne d'équilibre à une précision relative  $\varepsilon$  donnée, beaucoup plus petite que 1. Pour préciser ce *rapprochement*, nous utilisons la fonction  $g(v, t)$  décrivant l'écart à l'équilibre (B.77). Alors le critère concernant  $t_\varepsilon(v)$  s'écrit :

$$|g(v, t_\varepsilon(v))| \leq \varepsilon. \quad (\text{B.95})$$

L'inégalité présente dans (B.95) est rendue nécessaire par le fait que  $g(v, 0)$  peut être nulle ou plus petite en valeur absolue que  $\varepsilon$ . Grâce à la définition (B.91), le critère (B.95) permet de donner une expression de la fréquence de collision du modèle :

$$\nu(v) \geq \nu_\varepsilon(v) [\ln |g(v, 0)| - \ln \varepsilon]. \quad (\text{B.96})$$

Nous avons vu à la section B.3 que la fréquence de collision  $\nu(v)$  doit être positive ou nulle. Ceci nous aidera à lever l'indétermination due à l'inégalité dans (B.96). Nous essaierons de remplacer cette inégalité par une égalité lorsque possible, c'est à dire pour  $|g(v, 0)| > \varepsilon$ . L'étude de la relaxation sur laquelle nous nous appuyons montre bien que  $t_\varepsilon(v)$  est une forme *continue* de  $v$ . La formulation utilisée par les auteurs étant celle de FPL, c'est à dire différentielle, on comprend bien qu'il ne suffise pas, qu'à un temps  $t$  donné,  $g(v, t) = 0$  pour que  $\partial f(v, t)/\partial t$  soit nul : même si la fdv atteint l'équilibre en un point dans un temps fini, elle va s'en écarter pour s'en rapprocher asymptotiquement (en un temps infini). Ainsi, pour toutes les régions où  $|g(v, 0)| \leq \varepsilon$ , la donnée de  $t_\varepsilon(v)$  n'est pas pertinente. On remarquera que les auteurs n'ont jamais donné de valeurs pour cette région. La seule chose importante, que nous n'avons pas démontré avec la forme FPL, est que l'inégalité (B.95) reste valable pour des temps supérieurs à  $t_\varepsilon(v)$ .

Même avec une valeur définie de  $\nu_\varepsilon(v)$  dans la région où  $|g(v, 0)| \leq \varepsilon$ , la formule (B.96) ne nous étant plus utile, on ne peut plus trouver d'expression à  $\nu(v)$ . Une possibilité serait de faire un *recollement par continuité* de cette région particulière, avec celle, majoritaire, où l'égalité dans la formule (B.96) est toujours valable. Moyennant quoi, soit il y aura évolution irréversible vers l'équilibre, soit il n'y aura pas d'évolution du tout, mais il ne pourra pas y avoir d'évolution irréversible vers un *non-équilibre*.

Pour être cohérents avec les auteurs, nous fixons la valeur  $\varepsilon = 10^{-2}$ , qui donne  $-\ln \varepsilon \sim 4.60$ .

Dans la *queue*,  $g(v, 0) = 1$ , donc  $\ln |g(v, 0)| = 0$  :

$$\nu(v) = -\nu_\varepsilon(v) \ln \varepsilon. \quad (\text{B.97})$$

Cette formule (B.97) est simple et a l'avantage de ne pas dépendre de  $f(v, 0)$ .

Pour le *départ* et la *bosse*, correspondant à des valeurs  $0 \leq y \leq 1$ , où  $y = v/\bar{v}_e$  est la vitesse réduite, on peut écrire :

$$g(y, 0) = e^{2y-1} - 1. \quad (\text{B.98})$$

On voit que  $g(y, 0)$  est nul pour  $y = 1/2$ , et la région à *problèmes*, correspondant à  $|g(y, 0)| \leq \varepsilon$ , a été estimée numériquement à  $|y| \leq 0.5 + 0.64\varepsilon$ , qui est un domaine très petit pour la valeur  $\varepsilon = 10^{-2}$  utilisée. Comme  $g(y, 0)$  est monotone, il suffit de calculer ses valeurs en  $y = 0$  et  $y = 1$ . On calcule facilement  $g(0, 0) = e^{-1} - 1 \sim -0.63$ , alors  $\ln |g(0, 0)| \sim -0.46$ , et  $g(1, 0) = e - 1 \sim 1.71$ , alors  $\ln |g(1, 0)| \sim 0.54$ . Dans ce cas, en excluant la région  $|g(y, 0)| \leq \varepsilon$ , il y a au moins un ordre

de grandeur entre  $\ln |g(y, 0)|$  et  $-\ln \varepsilon$ . Alors la formule (B.97) est encore une bonne détermination de  $\nu(v)$ .

En appliquant (B.97) à tout le domaine de vitesses, on obtient la relation générale :

$$g(v, t_\varepsilon(v)) = \varepsilon g(v, 0). \quad (\text{B.99})$$

On peut voir que, sur tout le domaine des vitesses  $0 \leq v < +\infty$ ,  $-0.63 \leq g(v, 0) \leq 1.71$ . Alors, bien que la précision ait été fixée à 1%,  $g(v, t_\varepsilon(v))$  ne dépasse pas 2%, ce qui est tout à fait acceptable, et nous permet de garder la formule (B.97) comme référence pour la suite.

On peut maintenant se poser la question de l'universalité de cette fréquence  $\nu(v)$ , déterminée par la formule (B.97). La comparaison de notre modèle avec les travaux de Rosenbluth *et al.* [68, 88] est difficile pour tout temps, car nous souhaitons établir la ressemblance la plus forte possible entre FPL et BGK au temps  $t_\varepsilon(v)$ , mais nous ne savons pas ce qui se passe sur l'intervalle  $t \in ]0, t_\varepsilon(v)[$ , ce qui n'est pas très important dans le cas de l'étude du problème stationnaire, et nous ne savons pas de quelle façon la forme FPL fait tendre la fdv vers l'équilibre pour  $t > t_\varepsilon(v)$ , alors que nous connaissons la solution (Eq. B.43) donnée par le modèle BGK : une décroissance exponentielle.

Puisque une seule étude a été menée, à  $\varepsilon$  fixé, on ne peut pas statuer sur la question de savoir si  $\nu(v)$  dépend oui ou non de  $\varepsilon$ . D'après la formule (B.97), si  $\varepsilon$  décroît, le temps de relaxation  $t_\varepsilon(v)$  croît, donc  $\nu_\varepsilon(v)$  décroît, mais  $-\ln \varepsilon$  croît. Si la croissance de  $-\ln \varepsilon$  compense la décroissance de  $\nu_\varepsilon(v)$ , alors  $\nu(v)$  ne sera pas affectée par  $\varepsilon$ . Pour répondre à cette question, il faudrait faire une étude numérique sérieuse. Néanmoins, il nous semble peu *physique* que le *pouvoir* des collisions élastiques à maxwelliser la fdv dépende de la précision. Cela signifierait que la forme du modèle BGK pourrait dépendre de la précision, alors que la forme non modélisée, de Boltzmann ou de FPL, n'en dépend pas. Étant optimistes, nous supposons par la suite que  $\nu(v)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , ce qui nous permettra d'utiliser le modèle BGK avec n'importe quelle précision.

Pour savoir si  $\nu(v)$  dépend de  $f(v, 0)$ , nous allons utiliser la formule (B.99), et essayer différentes formes de  $f(v, 0)$  pour calculer  $g(v, 0)$ . Si cette quantité, en valeur absolue, reste inférieure à une valeur proche de l'unité, disons jusqu'à un demi ordre de grandeur, alors on pourra dire que l'égalité (B.95) sera assez bien définie pour garantir la validité du modèle BGK.

1. En reprenant le modèle de la maxwellienne tronquée (voir section B.3.1), le calcul de  $g(y, 0)$  correspond à la formule (B.78), et les valeurs ont été tracées sur la figure (Fig. B.4) pour  $x = 2$ . On voit sur la figure que  $|g(v, 0)| < 1$  pour la région des faibles et moyennes vitesses. Alors (B.99) est une bonne formule dans ce cas. On peut dire en fait que cette formule est valable en général dans cette région parce que la maxwellienne  $f^0(v)$  a des valeurs proches de l'unité.
2. Si on utilise la gaussienne centrée sur la vitesse la plus probable, cette fois-ci dans la queue, nous voyons que  $g(y, 0)$  tend vers l'infini avec  $y$  : (B.99) n'est pas une bonne formule dans ce cas. Dans cette région, cette formule ne marchera que si  $f(y, 0)$  reste très proche de  $f^0(y)$  lorsque il lui est supérieur, infiniment proche en fait, parce que  $f^0(y)$  tend très vite vers zéro. Sinon,  $f(y, 0)$  peut être aussi éloignée de  $f^0(y)$  que l'on veut s'il lui est inférieur, ce qui est le cas de la fdv  $f(v, t) < f^0(v)$  calculée par les auteurs à l'origine du travail sur la non-thermalisation des électrons dans les atmosphères stellaires, cités en introduction de ce mémoire.

En conclusion, on ne peut pas affirmer que l'expression de  $\nu(v)$  donnée par la formule (B.97) soit universelle. Mais on ne peut pas non plus le dire de la formule (B.96), qui est beaucoup plus compliquée. Nous choisirons la formule la plus simple (B.97) qui, combinée à (B.94) et pour la valeur  $\varepsilon = 10^{-2}$ , donne finalement :

$$\nu_{ee}^{(1)}(v) \approx 11.5 n_e \Gamma_{ee} \frac{1}{\bar{v}_e^2} \frac{R(v/\bar{v}_e)}{v}. \quad (\text{B.100})$$

### B.4.2.2 L'approche intuitive

Le calcul classique des fréquences de collision, très bien expliqué dans Delcroix *et al.* [32] et Binney *et al.* [10], revient à savoir comment un faisceau monocinétique d'électrons est perturbé dans le temps quand il collisionne avec un gaz de particules  $i$  dont les fdv sont maxwelliennes. On calcule principalement trois quantités, toutes liées à la moyenne statistique de la variation de vitesse du faisceau :

- la perte de vitesse du faisceau le long de la ligne de visée, équivalent à un temps de freinage, lié à la *persistance des vitesses* et aux corrélations, dont la fréquence sera notée  $\nu_{ei}^R(v)$ ,
- la dispersion du faisceau perpendiculairement à la ligne de visée, correspondant à la diffusion du faisceau, c'est à dire à l'*isotropisation*, dont la fréquence sera notée  $\nu_{ei}^S(v)$ ,
- la dispersion du faisceau le long de la ligne de visée, correspondant à l'échange d'énergie entre le faisceau et le fond maxwellien, c'est à dire à la *maxwellisation* du faisceau, dont la fréquence sera notée  $\nu_{ei}^T(v)$ .

On remarquera que cette approche permettrait de connaître la fréquence de relaxation des anisotropies.

La signification physique de ces trois fréquences est expliquée dans Spitzer [110] et Montgomery et Tidman [70], bien que le rôle de  $\nu_{ei}^R(v)$  par rapport à  $\nu_{ei}^T(v)$  dans la maxwellisation du faisceau n'y soit pas expliqué très clairement.

Nous donnons ci-dessous les expressions complètes de ces trois fréquences de collision :

- la fréquence  $\nu_{ei}^R(v)$  est donnée par :

$$\nu_{ei}^R(v) = n_i \Gamma_{ei} \frac{1}{\bar{v}_i^2} \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{R(v/\bar{v}_i)}{v}, \quad (\text{B.101})$$

où  $\bar{v}_i = \sqrt{2kT_i/m_i}$  est la vitesse la plus probable de l'espèce  $i$ ,  $\Gamma_{ei}$  est défini par (Eq. 3.16), et  $R(u)$ , que nous rappelons, est définie par (Eq. 3.20) :

$$R(u) = \frac{1}{u^2} \text{erf}(u) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-u^2}}{u}, \quad (\text{B.102})$$

- la fréquence  $\nu_{ei}^S(v)$  est donnée par :

$$\nu_{ei}^S(v) = n_i \Gamma_{ei} \frac{1}{\bar{v}_i} \frac{S(v/\bar{v}_i)}{v^2}, \quad (\text{B.103})$$

avec

$$S(u) = \frac{1}{u^3} (2u^2 - 1) \text{erf}(u) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-u^2}}{u^2}, \quad (\text{B.104})$$

- la fréquence  $\nu_{ei}^T(v)$  est donnée par :

$$\nu_{ei}^T(v) = n_i \Gamma_{ei} \frac{T(v/\bar{v}_i)}{v^3}, \quad (\text{B.105})$$

où  $T(u) = R(u)$ .

On remarquera que les fonctions  $R$ ,  $S$  et  $T$  définies ici sont présentes dans la monographie de Delcroix *et al.* [32], mais leur valeur est différente : nos fonctions diffèrent d'un facteur 2, et notre fonction  $T$  est très différente de celle introduite par les auteurs. Notre définition de ces fonctions est basée sur une comparaison des ouvrages de Spitzer [110], Montgomery et Tidman [70], et Binney *et al.* [10].

Les variations des fonctions de  $R$  et  $S$  (nous pouvons exclure  $T$  puisqu'il est équivalent à  $R$ ) sont résumées dans la table (Tab. B.3).

$u$	0	$\ll 1$	1	$\gg 1$	$+\infty$
$R(u)$	0	$4u/3\sqrt{\pi}$	0.428	$1/u^2$	0
$S(u)$	$8/3\sqrt{\pi}$	$8(5 - u^2)/15\sqrt{\pi}$	1.258	$2/u$	0

TAB. B.3 – Fonctions utilisées dans les fréquences de collision du modèle BGK.

Pour calculer la fréquence de maxwellisation, c'est à dire d'échange d'énergie, nous nous appuierons sur un raisonnement tenu par Spitzer [110]. Selon lui, la fréquence d'échange d'énergie

correspondrait à la moyenne statistique du carré de la variation d'énergie  $\Delta E$  en une déviation élémentaire, où  $E = m_e v^2/2$  est l'énergie cinétique de l'électron *moyen* appartenant au faisceau. Selon l'approche de Binney *et al.* [10], comme  $\Delta E$  varie en général dans un seul sens (perte d'énergie ou gain d'énergie), sa moyenne statistique n'est pas nulle, et on peut la prendre pour calculer la fréquence qui nous intéresse. Il y a une grande différence entre ces deux approches. Nous définirons donc deux nouvelles fréquences :  $\nu_{ei}^{(2)} = \langle \Delta E \rangle / E$  (celle de Binney *et al.*) et  $\nu_{ei}^{(3)} = \langle (\Delta E)^2 \rangle / E^2$  (celle de Spitzer). Dans tous les cas, il faut avoir une expression de  $\Delta E$ .

Définissons  $\Delta v_{\parallel}$  et  $\Delta v_{\perp}$  tels que, dans un repère orthonormé  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  donné,  $\hat{\mathbf{z}}$  étant la direction de  $\mathbf{v}$  avant déviation,  $\Delta \mathbf{v} = \Delta v_{\parallel} \hat{\mathbf{z}} + \Delta v_{\perp x} \hat{\mathbf{x}} + \Delta v_{\perp y} \hat{\mathbf{y}}$ , avec  $\Delta v_{\perp} = \sqrt{\Delta v_{\perp x}^2 + \Delta v_{\perp y}^2}$ . Il est alors facile de montrer que :

$$\frac{\Delta E}{E} = 2 \frac{\Delta v_{\parallel}}{v} + \frac{(\Delta v_{\parallel})^2}{v^2} + \frac{(\Delta v_{\perp})^2}{v^2}, \quad (\text{B.106})$$

et

$$\frac{(\Delta E)^2}{E^2} = 4 \frac{(\Delta v_{\parallel})^2}{v^2} + \dots \quad (\text{B.107})$$

Alors,

$$\nu_{ei}^{(2)}(v) = -2\nu_{ei}^R(v) + \nu_{ei}^T(v) + \nu_{ei}^S(v) \quad (\text{B.108})$$

$$= 2n_i \Gamma_{ei} \frac{1}{v^3} \frac{v}{\bar{v}_i} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{\bar{v}_i^2}\right) - \frac{m_e}{m_i} \frac{v}{\bar{v}_i} R\left(\frac{v}{\bar{v}_i}\right) \right\} \quad (\text{B.109})$$

$$\xrightarrow{v \rightarrow +\infty} -2 \left(\frac{v}{\bar{v}_e}\right)^2 \nu_{ei}^S(v) \quad (\text{B.110})$$

Avec l'approche de Spitzer, le premier terme étant dominant selon lui, on trouve :

$$\nu_{ei}^{(3)}(v) = 4\nu_{ei}^T(v). \quad (\text{B.111})$$

Notons que la formule (B.111) est basée sur l'hypothèse que les  $\Delta v_i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$ , censés être petits par rapport à  $v$ , sont tous du même ordre de grandeur. Dans ce cas, cela entraînerait bien  $\Delta v_{\perp}^2 \approx \Delta v_{\parallel}^2 \ll v \Delta v_{\parallel}$ . Nous montrons ci-dessous que cette hypothèse n'est pas vérifiée pour toutes les vitesses, par l'étude du rapport  $\nu_{ei}^T(v)/\nu_{ei}^R(v)$  :

$$\frac{\nu_{ei}^T(v)}{\nu_{ei}^R(v)} = \frac{m_i}{m_e + m_i} \left(\frac{\bar{v}_i}{v}\right)^2 = \alpha_{ei} \left(\frac{\bar{v}_i}{v}\right)^2 \quad (\text{B.112})$$

où  $\alpha_{ee} = 1/2$  et  $\alpha_{e+} = 1$ .

On remarque que pour les grandes vitesses, c'est  $\nu_{ei}^R(v)$  qui l'emporte, confirmant l'hypothèse de Spitzer, mais c'est le contraire pour les faibles vitesses, les deux étant à peu près égales à la vitesse  $\bar{v}_i$ . Les mêmes résultats s'appliquent pour  $\nu_{ei}^S(v)$ . Ainsi l'expression (B.111) ne nous semble pas décrire correctement la quantité statistique  $\langle (\Delta E)^2 \rangle / E^2$  que nous cherchons à calculer.

### B.4.2.3 L'approche mathématique

Cette approche consiste à faire des rapprochements entre les différentes équations utilisées pour décrire les collisions élastiques et le modèle BGK, pour en tirer des expressions *possibles* de fréquences de collision. Nous utiliserons la forme de Fokker-Planck-Landau, la forme de Boltzmann et la forme de Boltzmann linéarisée, celle qui a permis de construire historiquement le modèle BGK.

#### 1. La forme de Fokker-Planck-Landau

Nous utiliserons la forme (Eq. 3.19) pour la comparaison. Pour cela on va considérer comme fréquence de collision le facteur de  $f_e(v)$ . C'est le seul point en commun entre la forme FPL et le modèle BGK. Nous décrivons ci-dessous les deux façons d'exprimer la fréquence à partir de là : soit utiliser le facteur de  $f_e(v)$ , raisonnement habituel lié à la forme intégrale de Boltzmann (point a), ou on peut essayer de *deviner* cette fréquence (point b).

- (a) la façon la plus simple est de simplement exprimer la fréquence comme étant le facteur de  $f_e(v)$ , ce qui fait appel à une dérivée :

$$\begin{aligned}
\nu_{ei}^{(4)}(v) &= \frac{m_e}{m_i} n_i \Gamma_{ei} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{v^2}{\bar{v}_i^2} R \left( \frac{v}{\bar{v}_i} \right) \right] & (B.113) \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_i \Gamma_{ei} \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\bar{v}_i^3} \exp \left( -\frac{v^2}{\bar{v}_i^2} \right) \\
&= \left( \frac{v}{\bar{v}_e} \right)^2 \left\{ \nu_{ei}^S(v) + \nu_{ei}^T(v) - 2 \frac{m_i}{m_e + m_i} \nu_{ei}^R(v) \right\} \\
&= \frac{m_e}{m_i} \frac{m_i}{m_e + m_i} \nu_{ei}^R(v) + \left( \frac{v}{\bar{v}_e} \right)^2 \left\{ \nu_{ei}^S(v) - 2 \left( \frac{v}{\bar{v}_i} \right)^2 \nu_{ei}^T(v) \right\}
\end{aligned}$$

où on a transformé  $\exp(-v^2/w_i^2)$  en des combinaisons (non uniques) de  $R$ ,  $S$  et  $T$  pour trouver les deux dernières formules ci-dessus.

- (b) Pour deviner la fréquence, nous revenons sur le raisonnement utilisé dans le cas des collisions électrons-neutres, où le terme de source isotrope est donné par l'équation (Eq. 3.37), ce qui donne avec notre approche ci-dessus une certaine fréquence de collision. Nous avons choisi la fréquence égale à  $(m_e/m_H)\nu_1(v)$ . Nous récapitulons ci-dessous les possibilités et choix faits pour la fréquence de maxwellisation  $\nu_{eH}^{MAX}(v)$  :

$$\nu_{eH}^{MAX}(v) = \frac{m_e}{m_H} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [v^3 \nu_1(v)] \quad (B.114)$$

$$= \frac{m_e}{m_H} \nu_1(v) \quad (B.115)$$

Cela donne l'idée d'appliquer une *recette* pour trouver la bonne fréquence de collision à partir d'une forme de FPL : *on isole le facteur de  $f_e(v)$ , puis on remplace  $\partial/\partial v$  par  $1/v$* . Cette méthode n'est basée sur aucun raisonnement, c'est juste une astuce dont le résultat sera à prendre avec précautions.

En appliquant cette *recette* aux collisions entre particules chargées, on obtient deux formulations de la fréquence de collision :

$$\nu_{ei}^{(5)}(v) = n_i \Gamma_{ei} \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{v \bar{v}_i^2} R \left( \frac{v}{\bar{v}_i} \right) \quad (B.116)$$

$$= \frac{m_e}{m_i} \frac{m_i}{m_e + m_i} \nu_{ei}^R(v) \quad (B.117)$$

$$= \left( \frac{v}{\bar{v}_e} \right)^2 \nu_{ei}^T(v) \quad (B.118)$$

Le choix de (B.116) comme fréquence de collision du modèle BGK a été déterminé en partant de la forme (3.19), qui est valable seulement pour des vitesses électroniques élevées si nous ne supposons pas que la fdv de la particule cible est maxwellienne. Nous allons discuter de la validité de cette approximation.

Pour  $k = +$ , cette approximation est bonne pour des électrons de vitesse  $v_e \gg \bar{v}_+(z)$ , ce qui correspond à l'hypothèse des électrons rapides utilisée dans ce travail. Pour  $k = e$ , l'approximation n'est valable maintenant que pour  $v_e \gg \bar{v}_e(z)$ , ce qui restreint bien plus le domaine des vitesses. On peut néanmoins penser que la fréquence de collision (3.47) sera toujours valable pour des vitesses plus faibles, car cela a été montré par une expérience numérique sur un cas particulier [89].

## 2. La forme de Boltzmann

En utilisant les expressions de Shoub [103], qui a une forme qui tient compte de la coupure à la longueur de Debye mais qui tient compte correctement des collisions proches, on peut faire le même rapprochement avec le facteur de  $f_e(v)$ , qui est une forme de Boltzmann linéaire parce que les types  $i$  sont supposées avoir une distribution maxwellienne des vitesses. Dans son travail, on a une décomposition naturelle de l'intégrale en deux parties : une qui décrit les collisions proches, de paramètre d'impact compris entre 0 et  $p_{ei}(g)$  (paramètre d'impact pour



une déviation de  $\pi/2$  défini dans la note C.2), et l'autre qui décrit les collisions lointaines, de paramètre d'impact compris entre  $p_{ei}(g)$  et la longueur de Debye  $\lambda_D$ . On va alors trouver deux fréquences de collision dont il faut prendre la somme. La méthode pour déterminer ces fréquences n'est pas la même. Pour la première, correspondant aux chocs proches, on peut utiliser le facteur de  $f_e(v)$ , ce qui donne quelque chose de compliqué. Pour la deuxième, Shoub met cette forme de Boltzmann sous une forme de Fokker-Planck-Landau pour éviter la divergence coulombienne, et c'est à partir de cette forme qu'on doit trouver notre fréquence. Il a fait la comparaison entre sa forme FPL et la forme FPL habituelle où on néglige les collisions proches et intègre le paramètre d'impact de 0 à  $\lambda_D$ , et l'auteur trouve que le rapport de sa fréquence de collision avec la fréquence de collision habituelle est :  $(1 - \ln 2 / \ln \Lambda) / 2$ .

Dans l'article, Shoub calcule la fréquence de collision totale. Il suffirait donc de lui soustraire la fréquence FPL que l'on connaît pour trouver la fréquence liée aux collisions proches. Malheureusement, le terme de source de collisions proches a lui aussi une divergence qui le sépare en un terme de type Boltzmann, dont la fréquence sera pertinente, et un terme de type FPL, qu'on ne peut comparer à rien de connu par ailleurs. Le seul résultat qu'on peut tirer du travail de Shoub est de voir que sa fréquence pour les collisions faibles est à peu près la moitié (pour  $\ln \Lambda \gg 1$ ) de celle calculée avec la forme FPL habituelle. Cette expression reste compliquée et non exploitable dans ce travail. Nous avons mentionné l'étude de Shoub à titre indicatif (section 3.2.2.1.3), qui pourra être utilisée ultérieurement à ce mémoire.

### 3. La forme de Boltzmann linéarisée

En se référant au chapitre sur l'approche mathématique du modèle BGK, la méthode utilisée est de linéariser  $f = f^M(1 + h)$  de façon à obtenir un terme de source de la forme (B.7) et, sous réserve que le modèle BGK redonne bien le bon opérateur  $K$ , la seule fréquence possible sera  $S(v)$ , que l'on connaît avec l'étude faite précédemment. Les résultats de cette étude sont trop peu avancés pour être exploités ici.

#### B.4.2.4 Choix de la fréquence

Nous avons *a priori* 8 candidats pour notre fréquence de maxwellisation :  $\nu_{ee}^{(1)}(v)$ ,  $\nu_{ei}^R(v)$ ,  $\nu_{ei}^S(v)$ ,  $\nu_{ei}^T(v)$ ,  $\nu_{ei}^{(2)}(v)$ ,  $\nu_{ei}^{(3)}(v)$ ,  $\nu_{ei}^{(4)}(v)$  et  $\nu_{ei}^{(5)}(v)$ . Nous disposons de deux critères forts pour les choisir :

1. le comportement doit essayer de respecter le seul résultat numérique dont on dispose, à savoir celui de Rosenbluth *et al.* [68, 88], c'est à dire avoir au moins un comportement asymptotique en  $1/v^3$ ,
2. on a fait le rapport plus haut des termes de source électron-électron avec électron-proton à partir de la forme de FPL (Eqs. 3.22, 3.23, 3.24), et cela donne des rapports, dans la région des vitesses faibles et dans la région asymptotique, qui doivent être vérifiés.

Après vérification, seule  $\nu_{ei}^{(5)}(v)$  remplit parfaitement ces deux critères, à une constante multiplicative proche de 1 près entre toutes les formes trouvées. C'est donc elle que nous choisirons pour qualifier la maxwellisation de notre fdv. De plus, bien que l'étude n'est pas été faite ici, nous l'utiliserons encore pour qualifier l'isotropisation de notre fdv. Ainsi,

$$\nu_{ei}^{ISO}(v) = \nu_{ei}^{MAX}(v) = \alpha n_i \Gamma_{ei} \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{v \bar{v}_i^2} R \left( \frac{v}{\bar{v}_i} \right), \quad (\text{B.119})$$

où  $\alpha$  peut prendre plusieurs valeurs, pour être en accord avec les autres expressions : 2, 2.49, 5/2, 3 ou simplement 1. Il faut aussi tenir compte du facteur  $-\ln \varepsilon \sim 4.6$  (voir la section B.4.2.1). Nous choisirons donc  $\alpha \sim 11.5$ .

### B.4.3 Conclusion

Nous récapitulons ici les différentes fréquences de relaxation que nous avons pu choisir. Nous noterons  $\nu^{ISO}$  la fréquence d'isotropisation et  $\nu^{MAX}$  la fréquence de maxwellisation, de façon à pouvoir écrire, suivant le désir exprimé dans l'équation (B.36),

$$\Sigma_{ei}(\mathbf{v}) = -\nu_e^{ISO}(v) [f_e(\mathbf{v}) - f_e(v)] - \nu_e^{MAX}(v) [f_e(v) - f_e^M(v)], \quad (\text{B.120})$$

les fréquences calculées ne s'appliquant d'ailleurs qu'au cas d'espèces de particules ayant une vitesse moyenne nulle.

On a alors :

$$\nu_{eH}^{ISO}(v) = n_H v q_{He}(v) \quad (\text{B.121})$$

$$\nu_{eH}^{MAX}(v) = \frac{m_e}{m_H} \nu_{eH}^{ISO}(v) \quad (\text{B.122})$$

$$\nu_{ei}^{ISO}(v) \approx 11.5 n_i \Gamma_{ei} \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{v \bar{v}_i^2} R \left( \frac{v}{\bar{v}_i} \right) \quad (\text{B.123})$$

$$\nu_{ei}^{MAX}(v) = \nu_{ei}^{ISO}(v) \quad (\text{B.124})$$

où  $i = e, +$ .

## B.5 Conclusion

Des études récentes sur l'équation de Boltzmann [27] et sur l'équation de Fokker-Planck-Landau [87] ont été faites. Ces études, très poussées mathématiquement, font référence au modèle BGK, ou à d'autres, en discutant de son intérêt. Les théorèmes qui y sont exposés ne nous ont été d'aucune utilité pour vérifier la validité du modèle, d'où l'étude du présent chapitre.

Dans ce chapitre, nous avons montré que le modèle BGK tel que nous l'avons défini était capable de conserver les invariants collisionnels avec une précision très bonne, faisait tendre la fdv dans le temps vers la bonne solution, pouvait, à partir d'un certain temps, être localement assez proche de la fdv par FPL, à une précision contrôlée. Cela joue en faveur de sa validité pour le problème temporel élastique, cinétique ou hydrodynamique, pour des temps longs.

Lorsque le problème n'est plus purement élastique, c'est à dire que les écarts à l'ETL peuvent être forts, en tous temps, alors nous n'avons pu prouver que le modèle BGK était valable. En fait, il semble qu'il pourrait être valable encore pour le problème hydrodynamique, mais pas pour le problème cinétique. Cette conclusion s'applique aussi pour le problème stationnaire.

Quoi qu'il en soit, il reste le meilleur modèle cinétique qu'on puisse construire. Il est linéaire, les paramètres de la maxwellienne sont faciles à déterminer, et nous avons trouvé une expression de la fréquence de collision qui est la meilleure qui soit pour traiter le problème cinétique temporel ou stationnaire. Nous noterons juste que cette fréquence de collision est la meilleure à même d'imiter le terme de source FPL, mais pas forcément celui de Boltzmann. Même s'il ne donnera pas un résultat quantitatif très précis, il respecte les *caractéristiques* du terme de collisions élastiques FPL ou Boltzmann, et c'est ce qui est le plus important. La fdv qu'il décrit a la même *continuité* que celle donnée par FPL ou Boltzmann. En ce sens, le modèle BGK va quantitativement respecter la force de rappel vers la maxwellienne des collisions élastiques vis-à-vis des inélastiques, en donnant un bon ordre de grandeur de l'importance de l'un par rapport à l'autre. Si le vrai problème montre un écart à l'ETL, le modèle BGK saura le mettre en évidence. Cet attribut peut valider son utilisation dans le problème stationnaire que nous nous sommes posés.



# Annexe C

## Notes

### C.1 Grandeurs liées aux atmosphères ETL (équilibre thermodynamique local)

Nous traitons dans cette note le cas des atmosphères en équilibre thermodynamique local (ETL), c'est-à-dire dont tous les types de particules ont des fdv maxwelliennes de même température et des populations vérifiant les relations d'équilibre de Boltzmann et de Saha. Nous définissons les grandeurs habituelles liées aux populations en ETL, et les indicateurs bien connus d'écart à l'ETL.

Dans une atmosphère en ETL, les microprocessus collisionnels dominent les microprocessus radiatifs et sont localement réversibles, ce qui entraîne que :

1. les profils atomiques d'émission et d'absorption *bb* coïncident,
2. les fonctions de distribution particulières sont maxwelliennes pour la même température, qui peut varier faiblement,
3. les densités particulières vérifient localement des relations d'équilibre : loi de Boltzmann sur l'excitation et loi de Saha sur l'ionisation.

Le premier point signifie que, dans une raie formée à l'ETL, il y a redistribution complète en fréquence dans le référentiel de l'atome (RCF), et le second point entraîne que cela est encore vrai dans le référentiel du laboratoire.

Les relations de Boltzmann et de Saha seront écrites sous la forme unique suivante :

$$b_{ij}(z) = 1 \quad (\text{ETL}), \quad (\text{C.1})$$

où

$$b_{ij}(z) = \frac{n_i(z)}{n_j(z)} \frac{1}{\theta_{ij}(z)}, \quad (\text{C.2})$$

et  $\theta_{ij}(z)$  est l'indicateur d'ETL bien connu :

$$\theta_{ij}(z) = \begin{cases} (g_i/g_j) \exp[E_{ij}/kT(z)] & \text{si } i < j \quad (bb) \\ \Gamma_i n_e(z) \Theta_{i+}(T(z)) & \text{si } j = + \quad (bf) \end{cases}, \quad (\text{C.3})$$

où nous avons introduit le coefficient  $\Gamma_i$  :

$$\Gamma_i = \frac{g_i}{g_+ g_e} \left( \frac{h}{m_e} \right)^3, \quad (\text{C.4})$$

et le facteur de Saha-Boltzmann  $\Theta_{i+}(T(z))$  de température  $T$  :

$$\Theta_{i+}(T) = \left( \frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{E_{i+}}{kT} \right). \quad (\text{C.5})$$

Nous introduisons ici un autre indicateur d'écart à l'ETL  $b_i$  utilisé dans la littérature [78], basé sur la densité réelle d'électrons  $n_e$ , et de la densité réelle d'ions  $n_+ = n_e$  pour cette atmosphère :

$$b_i(z) = \frac{n_i(z)}{n_i^S(z)}, \quad (\text{C.6})$$

où  $n_i^S$  est la densité de Saha pour l'espèce  $i$

$$n_i^S(z) = n_+(z)\theta_{i+}(z) = n_e^2(z) \frac{g_i}{g_e g_+} \lambda_e^3(z) \exp\left(\frac{E_{i+}}{kT(z)}\right), \quad (\text{C.7})$$

et  $\lambda_e(z)$  est la longueur d'onde thermique de de Broglie pour les électrons libres

$$\lambda_e(z) = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e kT(z)}}. \quad (\text{C.8})$$

Nous avons bien entendu  $b_i = b_{i+}$ . Nous introduisons aussi le degré d'ionisation habituel  $\chi$  :

$$\chi = \frac{n_+}{n_H}. \quad (\text{C.9})$$

où  $n_H = \sum_i n_i$  est la densité d'atomes d'hydrogène. Nous utilisons aussi au chapitre 6 des grandeurs un peu différentes, basées sur la densité de particules lourdes  $n_0 = n_H + n_+ = \sum_i n_i + n_+$  plutôt que sur la densité électronique  $n_e$ . En supposant  $n_+ = n_e$ , nous définissons les densités des populations par  $n_i^*$ , qui satisfont les équilibres de Boltzmann et de Saha, et nous pouvons calculer la densité  $n_e^*$  par la relation :

$$n_0 = \sum_i n_i^* + n_+^* = \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}(T) n_e^{*2} + n_e^*, \quad (\text{C.10})$$

dont la solution (positive) est :

$$n_e^* = \frac{\sqrt{1 + 4n_0 \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}} - 1}{2 \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}}. \quad (\text{C.11})$$

Alors nous définissons les populations  $n_i^*$  par la relation de Saha pour  $n_e^*$  :

$$n_i^* = \Gamma_i \Theta_{i+} n_e^{*2} = \Gamma_i \Theta_{i+} \frac{\sqrt{1 + 4n_0 \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}} - 1}{2 \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}}, \quad (\text{C.12})$$

et l'indicateur à l'ETL  $b_i^*$  par :

$$b_i^*(z) = \frac{n_i(z)}{n_i^*(z)}. \quad (\text{C.13})$$

Le degré d'ionisation à l'ETL  $\chi^*$  est :

$$\chi^* = \frac{n_e^*}{n_0 - n_e^*}. \quad (\text{C.14})$$

Ces degrés d'ionisation  $\chi$  et  $\chi^*$  sont infinis lorsque le gaz est complètement ionisé. Nous rappelons une autre définition habituelle du degré d'ionisation  $\alpha$ , valant 1 lorsque le gaz est complètement ionisé :

$$\alpha = \frac{n_+}{n_0}, \quad (\text{C.15})$$

et sa valeur à l'ETL est  $\alpha^*$  :

$$\alpha^* = \frac{n_e^*}{n_0} = \frac{1}{n_0} \frac{\sqrt{1 + 4n_0 \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}} - 1}{2 \sum_i \Gamma_i \Theta_{i+}}. \quad (\text{C.16})$$

## C.2 Définition et grandeurs d'un plasma cinétique classique

Le but de cette note est d'introduire les grandeurs habituelles caractérisant le *plasma cinétique classique* de notre atmosphère stellaire, et utilisées abondamment dans ce mémoire aux sections décrivant les collisions élastiques coulombiennes entre les électrons et les autres particules chargées du plasma. Les notations proviennent principalement de la monographie *Physique des Plasmas*, par J.-L. Delcroix et A. Bers [32].

Nous rappellerons tout d'abord les définitions des grandeurs de ce plasma, leur influence sur la section efficace de collision élastique, et nous justifierons le choix fait dans ce mémoire de certaines grandeurs par rapport à d'autres. Ensuite nous décrirons l'influence des interactions coulombiennes sur le choix de la forme mathématique du terme de collisions élastiques dans l'équation cinétique des électrons : forme de Boltzmann ou forme de Fokker-Planck-Landau (**FPL**).

### C.2.1 les collisions élastiques électrons - particules chargées

La figure (Fig. C.1) ci-dessous représente la collision élastique  $(i, \mathbf{v}_i) + (e, \mathbf{v}_e) \rightarrow (i, \mathbf{v}'_i) + (e, \mathbf{v}'_e)$  dans le référentiel du centre de masse  $G$  et pour un potentiel à force centrale. Les variables de la section efficace différentielle sont l'angle de déviation  $\theta$  et la norme du vecteur vitesse relative, où  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{g}' = \mathbf{v}'_e - \mathbf{v}'_i$ . Les autres variables ( $p, r_m, \alpha_m$ ) sont habituelles.

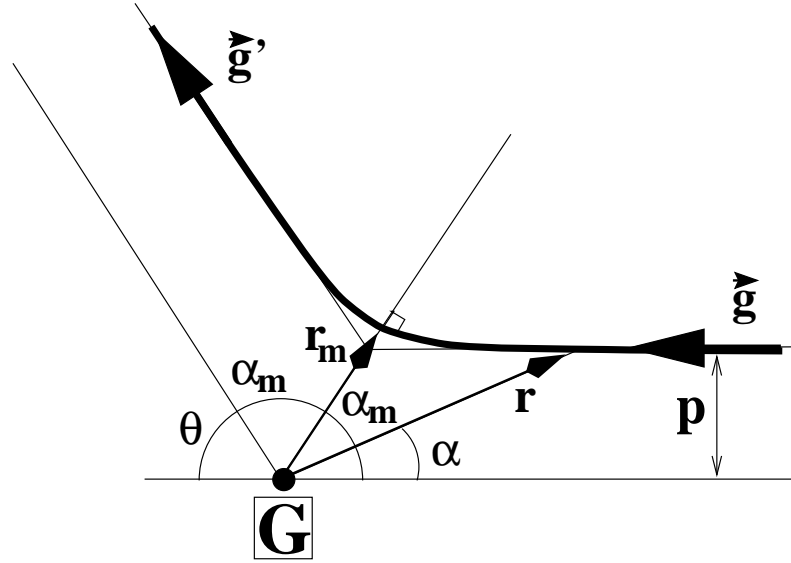


FIG. C.1 – Représentation de la collision élastique, dans le référentiel du centre de masse.

La formule (C.17) détaille la relation entre le potentiel d'interaction  $\varphi(r)$  et les variables  $p, g, \theta, r_m$  et  $\alpha_m$  :

$$\alpha_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{p dr}{r^2 \left(1 - \frac{2\varphi(r)}{\mu_i g^2} - \frac{p^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{C.17})$$

où  $\mu_i = m_e m_i / (m_i + m_e)$ .

A partir de la relation  $\theta = \pi - 2\alpha_m$  et de la relation classique pour déterminer la section efficace différentielle :  $p dp = q_{ie,ie}(g, \theta) \sin \theta d\theta$ , on retrouve par exemple la formule de Rutherford (Eq. 3.13). C'est à partir de cette formule que le terme de FPL est calculé. On peut déjà noter qu'elle ne tient pas compte du potentiel *réaliste* de Debye-Hückel (une expression relativement simple a été trouvée grâce à la mécanique quantique, sans équivalent classique), ni des effets quantiques importants de symétrie entre particules indiscernables comme la collision entre deux électrons libres.

Lorsque cet effet quantique de symétrie est pris en compte, la section efficace différentielle *entre électrons* a une forme notablement plus compliquée [32] :

$$q_{ee,ee}(g, \theta) = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\mu_i g^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \cos \left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar g} \ln [\tan^2(\theta/2)] \right] \right\} \quad (\text{C.18})$$

On voit bien que pour les faibles déviations  $\theta \ll 1$ , les deux derniers termes entre accolades dans (Eq. C.18) sont négligeables par rapport au premier terme, et on retrouve la formule de Rutherford (Eq. 3.13), dont l'utilisation est bien justifiée dans le terme de FPL. Par contre, l'utilisation d'un terme de Boltzmann pour les fortes déviations doit utiliser (Eq. C.18) au lieu de (Eq. 3.13). Les raisonnements développés par la suite sont valables pour ces deux sections efficaces.

Pour un potentiel coulombien agissant entre deux types de particules  $e$  et  $i$  ayant la même charge en valeur absolue, et nous n'étudierons que ce cas dans cette note, entre en jeu un paramètre

important : le paramètre d'impact critique  $p_{ei}$  (souvent noté  $p_0$ ) :

$$p_{ei}(g) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu_i g^2}, \quad (\text{C.19})$$

qui représente la distance à laquelle il faudrait placer les deux charges l'une de l'autre pour que leur énergie potentielle soit égale à deux fois l'énergie cinétique initiale de la particule relative. C'est aussi la valeur du paramètre d'impact qui entraîne une déviation  $\theta$  de  $\pi/2$ . On la note  $p_{ei}$  à cause de la dépendance en  $\mu_i$ , bien que la différence soit faible :

$$p_{e+} = \frac{1}{2} p_{ee}. \quad (\text{C.20})$$

Avec ces notations,

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{p_{ei}}{\sqrt{p_{ei}^2 + p^2}}. \quad (\text{C.21})$$

On peut alors facilement calculer l'angle  $\theta_c$  pour lequel la distance minimale d'approche est la longueur de Debye. Cette distance serait normalement  $r_m$ , mais on choisit  $p$ , parce que la différence n'est pas très importante et que cela permet d'obtenir l'expression simple suivante, valable pour un plasma cinétique classique ( $p_{ei} \ll \lambda_D$ ) :

$$\theta_c \approx 2p_{ei}/\lambda_D. \quad (\text{C.22})$$

Dans les intégrations menant au terme de FPL, on retrouve la quantité

$$\Lambda = \lambda_D/p_{ei}, \quad (\text{C.23})$$

où plutôt le *logarithme coulombien*  $\ln \Lambda$ . Cette quantité apparaît lors de l'intégration sur l'angle de déviation  $\theta$  du terme de collisions élastiques. En effet, on a l'intégrale :

$$\int_{\theta_m}^{\theta_M} \frac{d(\sin(\theta/2))}{\sin(\theta/2)} = \ln[\sin(\theta_M/2)] - \ln[\sin(\theta_m/2)]. \quad (\text{C.24})$$

Les bornes d'intégration sont  $\theta_m$  et  $\theta_M$ . Pour la forme de Landau, on ne doit prendre en compte que les faibles déviations, c'est à dire qu'en terme de paramètre d'impact, quelques  $r_L < p < \infty$ . Pour un plasma cinétique classique, la borne inférieure du paramètre d'impact pourrait être  $d_e$ . On voit qu'on ne peut pas prendre une valeur infinie pour la borne supérieure du paramètre d'impact, parce que l'intégrale (C.24) diverge alors. On fait une coupure du paramètre d'impact à la longueur de Debye  $\lambda_D$ , qui est grande dans un plasma cinétique classique par rapport à  $d_e$  et  $r_L$ . Cela permet de négliger le premier terme dans (C.24) qui définit  $\ln \Lambda$  avec la formule (C.23). Lorsque le plasma n'est plus aussi *classique*, c'est à dire que  $\lambda_D$  n'est plus aussi grande par rapport aux autres valeurs du plasma, la simplification dans (C.24) n'est plus valable. On pose alors  $\theta_M = \pi$  (paramètre d'impact nul). Les intégrations jusqu'à  $\pi$  permettent d'obtenir une forme élégante qui a le mérite de passer outre la difficulté posée par la séparation entre un choc proche (fort) et une déviation faible. Néanmoins, l'erreur ainsi commise par rapport au terme de source réel calculé en ne tenant compte que des déviations faibles, est typiquement de l'ordre de  $1/\ln \Lambda \sim 10\%$  [40, 41], ce qui n'est pas énorme. Bien sûr, l'erreur *typique* avancée ici dépend fortement du type de plasma que l'on étudie, et les plasmas peu chauds et peu denses peuvent induire des erreurs de l'ordre de 30%.

Une première remarque consiste à voir que (Eq. C.23) n'est pas valable pour toutes les particules entrant en interaction, puisque  $p_0$  est inversement proportionnel au carré de la vitesse relative, qui varie de 0 à l'infini en principe. Pour des vitesses relatives proches de zéro, (Eq. C.23) doit être sérieusement remise en question.

La deuxième remarque consiste en le fait que les intégrales sur  $\mathbf{v}'_e$  dans le terme de Landau possèdent une dépendance en  $\ln \Lambda$ , quantité qui varie peu avec  $g$  mais qui est très compliquée à intégrer, au point qu'une forme analytique du terme de Landau ne serait pas concevable. L'idéal serait d'extraire cette dépendance logarithmique de l'intégrale, en prenant une valeur *moyenne* par exemple. Ce raisonnement est approché, alors quelle valeur prendre ?

On peut définir trois grandeurs *moyennes* faisant intervenir la vitesse, l'énergie et la température cinétique  $T$  :

- la moyenne du carré de la vitesse  $\langle \mathbf{v}^2 \rangle = 3kT/m$ ,

- la vitesse moyenne  $\langle |\mathbf{v}| \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$ ,
- la vitesse la plus probable  $\bar{v} = \sqrt{2kT/m}$ .

La première définit la température cinétique de façon générale. Les deux autres ne sont définies que pour une distribution maxwellienne des vitesses à la température  $T$ . La vitesse la plus probable correspond à la vitesse pour laquelle la densité de probabilité  $\rho(v) = v^2 f^M(v, t)$  est maximale.

Nous avons noté dans la littérature des choix différents des grandeurs liées à la vitesse définies plus haut, que nous pouvons séparer *grosso modo* en deux catégories : l'utilisation de l'énergie cinétique moyenne ( $M$ ), ou l'utilisation de la vitesse la plus probable ( $P$ ). Dans tous les cas, le problème est énormément simplifié car toutes les espèces du milieu sont supposées avoir la même température cinétique  $T$ , les électrons sont bien plus rapides que les espèces lourdes, et seul le paramètre d'impact critique *moyen* pour l'interaction entre électrons et espèces lourdes est considéré, de façon à remplacer  $g$  par  $|\mathbf{v}_e|$ , parce que les grandeurs *moyennes* décrites plus haut ne s'appliquent bien sûr qu'à une seule espèce. Rien ne permet *a priori* de sélectionner un choix plutôt qu'un autre, et nous n'avons trouvé aucune explication dans la littérature.

Nous allons tout d'abord expliciter les différences entre ces deux approches ( $M$  et  $P$ ), puis tenter de les justifier.

Dans les deux cas, le paramètre d'impact critique  $p_{ei}$  est défini par le rayon de Landau :

$$r_L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 kT_e}, \quad (\text{C.25})$$

où  $T_e$  est la température cinétique des électrons. Pour ( $P$ ),  $p_{ee} \rightarrow r_L/2$  et pour ( $M$ ),  $p_{ee} \rightarrow r_L/3$ . Ensuite se pose la question du choix de la bonne longueur de Debye. Il en existe deux pour notre problème :  $\lambda_{De}$  et  $\lambda_{D+}$ . Chacune est précisément définie comme la longueur typique de corrélation, *typique* car on a vu que le potentiel écranté de Debye-Hückel n'atteint jamais la valeur nulle, ce qui fait que deux charges situées à une distance infinie l'une de l'autre, ou tout du moins plus grande que la longueur de Debye définie par ce potentiel, se *voient* toujours. Ces deux charges interagissent donc toujours. Si on suit la définition, elles ne seront en fait corrélées que si cette interaction change leur mouvement. Le calcul approché de ces deux longueurs de Debye est fait depuis longtemps. La première suppose que le plasma est électriquement neutre, et que seuls les électrons participent à l'effet d'écran sur une charge quelconque. La deuxième inclut l'effet des protons pour l'écrantage.  $\lambda_{D+} = \lambda_{De}/\sqrt{2}$ , et

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{e^2 n_e}}. \quad (\text{C.26})$$

L'utilisation de telle longueur de Debye ou telle autre est déterminée par la comparaison des durées typiques des processus physiques que l'on décrit (équilibre statistique, collisions, propagation d'ondes électro-magnétiques, etc) et des temps caractéristiques liés à ces longueurs [31]. Chaque temps est défini comme l'inverse de la *fréquence de plasma*  $f_{pi}$  considérée, dont le calcul se trouve facilement dans la littérature. Ces fréquences de plasma sont les fréquences d'oscillation de plasma engendrées par des perturbations de densité de charge :  $f_{p+} = (m_e/m_+)^{1/2} f_{pe}$  où

$$f_{pe} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}. \quad (\text{C.27})$$

Pour l'étude des propriétés statistiques à l'équilibre, le temps caractéristique du processus observé est très grand, infini en théorie, et on doit utiliser  $\lambda_{D+}$ , mais pour les collisions, le temps caractéristique est le temps typique que met une particule test pour traverser la sphère de Debye entourant la charge avec laquelle elle interagit. Ce temps devrait être, en prenant une valeur maximale, le temps d'interaction  $t_{int} = \lambda_{De}/g$ . On utilise souvent une grandeur moyenne en utilisant la vitesse la plus probable :  $\overline{t_{int}} = \lambda_{De} \sqrt{m_e/2kT_e}$ . On définit alors la fréquence d'interaction comme l'inverse du temps d'interaction. On voit que

$$\overline{f_{int}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} f_{pe} \gg f_{p+}. \quad (\text{C.28})$$

Pour les collisions, c'est à dire dans les équations cinétiques, la longueur de Debye à utiliser est  $\lambda_D = \lambda_{De}$ . On notera une fois de plus que le vrai temps défini par  $t_{int}$  est inversement proportionnel à la vitesse, donc la longueur de Debye pour les électrons lents, dont la fréquence d'interaction est



petite, devrait être  $\lambda_{D+}$ . Considérant une fois de plus le caractère approximatif de la forme de Landau, nous garderons  $\lambda_D = \lambda_{De}$  pour tous les particules à toutes les vitesses, sachant que la forme la plus juste, et malheureusement la plus compliquée, est celle de Boltzmann.

Dans la littérature, on trouve la même formule pour  $\Lambda$ , à un facteur multiplicatif près :  $\Lambda/\pi n_e \lambda_D^3$  peut prendre les valeurs 4, 8 et 24. Pour notre part, nous choisirons la valeur 8, qui correspond à l'approche (P) ( $p_{ei} = p_{e+} = r_L/2$  négligeant le facteur 2 entre les collisions  $e-e$  et  $e-+$  dans le logarithme) et à  $\lambda_D = \lambda_{De}$ . Grâce à la relation :  $4\pi n_e r_L \lambda_{De}^2 = 1$ , on obtient le résultat suivant :

$$\Lambda = 8\pi n_e \lambda_{De}^3 \propto \frac{T_e^{3/2}}{n_e^{1/2}}. \quad (\text{C.29})$$

L'erreur commise sur  $\ln \Lambda$  entre le choix (M) ou (P) est  $\ln(1.5)/\ln \Lambda \sim 3 - 10\%$ , ce qui est typiquement la marge d'erreur qu'on se donne pour cette forme FPL.

## C.2.2 Les différents types de plasmas

Plusieurs grandeurs statistiques caractérisent les plasmas :

- la longueur de Landau  $r_L$ ,
- la distance inter-particulaire moyenne  $d_e = n_e^{-1/3}$ ,
- la longueur d'écrantage de Debye  $\lambda_D$ .

La figure (Fig. C.2) ci-dessous met en évidence la complexité de l'interaction coulombienne écrantée. Nous nous intéressons volontairement à un plasma cinétique classique pour lequel  $r_L \ll d_e \ll \lambda_D$ .

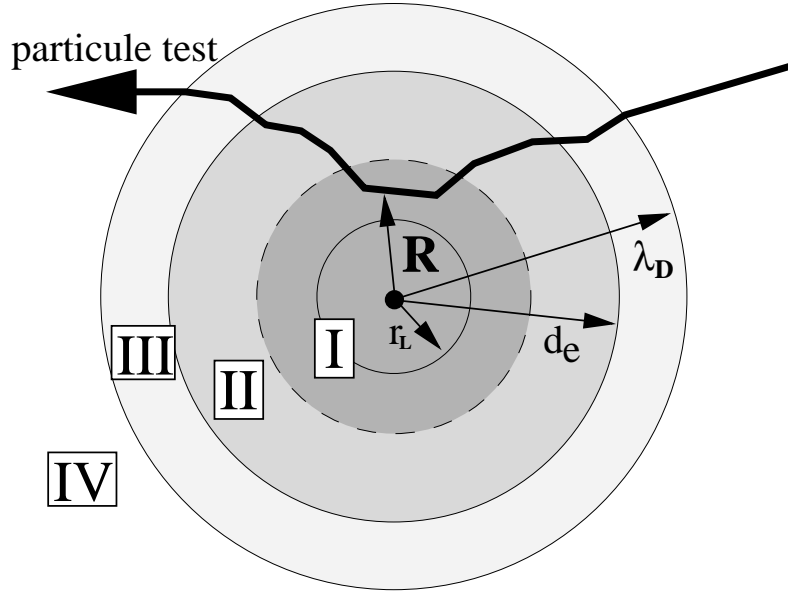


FIG. C.2 – Représentation de la déviation d'une particule *test* par une charge écrantée, placée au centre de la figure, lors d'interactions coulombiennes dans un plasma cinétique classique.

Le processus de collision d'un électron *test* sur les autres particules du gaz se décompose en plusieurs zones, selon la distance  $R$  à tout instant entre la particule test, et la particule écrantée :

**I** :  $0 < R < \text{quelques } r_L$  : collisions binaires proches, terme de Boltzmann,

**II** :  $\text{quelques } r_L < R < d_e$  : collisions binaires lointaines, terme de Fokker-Planck-Landau (FPL),

**III** :  $d_e < R < \lambda_D$  : collisions multiples lointaines, terme de FPL,

**IV** :  $\lambda_D < R < +\infty$  : pas de collisions, les interactions avec la particule test sont décrites par le terme de force microscopique de Vlasov.

La forme de Boltzmann est forcément valable dans la zone I, et aussi dans la zone II puisque l'interaction y est décrite par la forme de FPL, qui est une forme de Boltzmann dont l'expression intégrale est devenue différentielle en utilisant l'hypothèse de déviations faibles par collisions (développement de Taylor de la fdv).

Par contre, la conclusion de la zone III, à savoir qu'une collision *multiple* lointaine peut être décrite par le terme de FPL qui, rappelons-le, s'appuie sur le terme de Boltzmann spécifique des collisions *binaires*, mérite une explication. Dans ce cas, on ne peut plus utiliser les formes *classiques* de la théorie cinétique des gaz qui décrivent l'évolution de la fdv à un corps. Les charges sont corrélées, il faut donc étudier l'évolution des fdv à *plusieurs corps*. Des calculs ont montré que l'effet statistique de cet ensemble aléatoire de petites déviations simultanées était le même que celui d'une suite aléatoire de collisions binaires décrites par la forme de FPL [32, 70]. Autrement dit, les petites déviations multiples et les petites déviations binaires sont physiquement très différentes, mais conduisent à la même forme mathématique du terme de collision.

Pour la zone IV, l'interaction se fait suivant le potentiel de Debye-Hückel, qui décroît tellement vite (exponentiellement) qu'on néglige son influence à partir de la longueur de Debye.

Pour les régions II à IV, il est possible d'éviter une coupure à la longueur de Debye, en employant la forme de Balescu-Lennard [3, 32, 62], qui inclut directement un potentiel d'interaction écranté, les intégrales angulaires devenant finies sans coupure.

Suite à une discussion avec Nelly Peyraud-Cuenca (Observatoire de Nice) et les références [32, 62], la distinction entre les 3 formes pour décrire les interactions lointaines : Vlasov, Fokker-Planck-Landau et Balescu-Lennard, dépend de la comparaison entre les temps caractéristiques du plasma et le temps d'interaction coulombienne des électrons avec les autres particules chargées de type  $i$ , noté  $t_{ei}(v)$ . Ce temps est le temps caractéristique de variation de la fdv des électrons lors de collisions élastiques. Nous avons défini avec le modèle BGK (Eq. 3.47) la fréquence de collision  $\nu_{ei}(v)$ , alors  $t_{ei}(v) = 1/\nu_{ei}(v)$ . Si  $t_{ei} < t_p$ , où  $t_p$  est le *temps de plasma*, les collisions élastiques doivent être décrites par le terme de force de Vlasov. Si  $t_{ei} > t_d$ , où  $t_d$  est le *temps diélectrique*, les collisions élastiques doivent être décrites par la forme de Balescu-Lennard. Entre ces deux temps  $t_p$  et  $t_d$ , les collisions élastiques lointaines sont décrites par la forme de Fokker-Planck-Landau. Nous définissons ci-dessous ces temps caractéristiques :

$$t_p = \sqrt{\frac{m_e \epsilon_0}{e^2 n_e}} \approx 1.8 \times 10^{-2} \frac{1}{\sqrt{n_e}} \quad (\text{SI}), \quad (\text{C.30})$$

et

$$t_d = \Lambda t_p \approx 7.4 \times 10^4 \frac{T^{3/2}}{n_e} \quad (\text{SI}), \quad (\text{C.31})$$

où  $\Lambda$  est le paramètre de plasma défini par (Eq. C.29). La forme de Balescu-Lennard est compliquée. Elle n'a pas été étudiée dans ce mémoire, et nous nous placerons dans l'hypothèse que la forme FPL est valable pour notre atmosphère, ou du moins est une bonne approximation.

On a alors six possibilités pour notre terme de collisions élastiques :

1. Boltzmann pour  $0 < R < \lambda_D$  avec un potentiel coulombien,
2. Boltzmann pour  $0 < R < +\infty$  avec un potentiel écranté de Debye-Hückel,
3. Boltzmann pour  $0 < R < \text{quelques } r_L$  +FPL pour  $0 < R < \lambda_D$ ,
4. Boltzmann pour  $0 < R < \text{quelques } r_L$  + Fokker-Planck pour  $\text{quelques } r_L < R < \lambda_D$ ,
5. FPL pour  $0 < R < \lambda_D$ ,
6. Fokker-Planck pour  $\text{quelques } r_L < R < \lambda_D$ .

La première possibilité vient du fait que le terme de FPL, qui est adapté aux interactions coulombiennes, est un terme de Boltzmann transformé. Le potentiel d'interaction est compliqué, on sait juste qu'il a la forme de Debye-Hückel assez loin du centre, typiquement à partir de la longueur de Debye, et doit être coulombien très près du centre, typiquement en dessous de la distance inter-particulaire moyenne, voire en dessous du rayon de Landau. Entre le rayon de Landau et la longueur de Debye, des calculs ont été faits pour montrer que la différence de traitement conduit à des erreurs faibles, c'est à dire négligeables compte tenu du caractère approché de notre méthode [32, 41].

La deuxième possibilité semble meilleure quant à la description physique de l'interaction que la première. On y perd par contre en simplicité parce que les sed pour le potentiel de Debye-Hückel sont compliquées. Et que devient la force microscopique de Vlasov ?

La troisième possibilité est celle qui donne les expressions mathématiques les plus simples, bien qu'il y ait un flou sur la définition de *quelques*  $r_L$ , et qu'on surestime le terme de FPL de  $\sim 10\%$  par rapport à la sixième possibilité.

La quatrième possibilité garde le flou mentionné précédemment, a l'avantage de ne pas comporter de surestimation, mais le terme de Fokker-Planck, défini par la méthode habituelle de dérivation d'une forme de Boltzmann pour des petites déviations mais en ne tenant compte que des déviations faibles pour définir le domaine d'intégration sur les angles, a une expression beaucoup plus compliquée que le terme de FPL.

La cinquième possibilité est celle couramment rencontrée pour décrire les collisions élastiques entre charges, et mérite donc d'être mentionnée à ce titre.

La sixième possibilité rejoint la première. Elle représente le mieux le processus physique, mais reste floue dans sa définition et compliquée dans sa forme.

La plupart des physiciens et astrophysiciens utilisent la cinquième possibilité, persuadés que le terme de FPL l'emporte de loin sur le terme de Boltzmann, et aussi pour ne garder qu'une seule forme, le traitement mathématique et numérique de la forme de Boltzmann étant très différent de celui de la forme de FPL.

Notons que les travaux de T. Koga concluent qu'il est nécessaire de garder le terme de Boltzmann [55, 56]. Il semble avoir prouvé que dans les atmosphères stellaires typiques le terme de Boltzmann est justement du même ordre de grandeur que le terme FPL, le critère étant qu'il y ait suffisamment de charges  $N_D$  dans la sphère de Debye, mais pas trop ( $\sim 100$ ), où

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_{De}^3 n_e = \frac{2}{3}\Lambda = \frac{1}{3}\frac{\lambda_{De}}{r_L}. \quad (\text{C.32})$$

Les raisons sont compliquées, elles font appel à la hiérarchie BBGKY et à la forme des équations cinétiques qu'il en déduit. Si on utilise la forme de Boltzmann pour les collisions entre électrons, il faut tenir compte des effets quantiques de symétrie (voir section C.2.1).

On peut aussi se référer à l'étude très complète menée par Shoub [103], qui compare l'importance des collisions fortes par rapport aux collisions faibles, et montre que dans certains cas, typiquement hors-ETL, les collisions fortes l'emportent. Nous avons détaillé son point de vue à la section 3.2.2.1.3.

Il ne faut pas perdre de vue que ce qui nous intéresse est le temps que va mettre la fdv des électrons pour s'équilibrer vers une distribution maxwellienne. On ne s'intéresse pas à l'évolution de cette distribution dans le temps, alors la forme du terme de source n'est pas très importante. Ainsi on peut utiliser toutes les possibilités étudiées plus haut, ou utiliser un modèle phénoménologique de collisions comme celui de BGK (décrit dans l'annexe B). De plus, l'équation cinétique des électrons fait intervenir les collisions élastiques avec les atomes neutres, qui sont décrites par un terme de Boltzmann. Nous avons donc obligatoirement les deux formes mathématiques à traiter dans la même équation, et le fait d'utiliser la première possibilité ne représente pas vraiment un handicap de plus.

Connaissant les travaux de Shoub [103], il serait intéressant de comparer le modèle BGK aux différentes *combinaisons* de formes issues des six possibilités décrites plus haut.

## C.3 Les fonctions auxiliaires du transfert

Le but de cette section est d'explicitier :

- les moments doubles de la fonction de Green, qui figurent dans la relation (Eq. 5.36), en terme de fonctions auxiliaires à définir,
- les fonctions auxiliaires figurant dans les expressions (Eqs. 5.37-5.45) des trois premiers moments de l'intensité spécifique.

### C.3.1 Moments doubles de la fonction de Green

Ces moments sont définis par (Eq. 5.32). Nous donnons ci-dessous leur expression, sans le détail des calculs.

1. pour  $\tau' = \tau_0$  et  $n = 1$  ou  $2$ ,  $p = 0, 1$  ou  $2$  :

$$G^{(n,p)}(\tau_0, \tau) = -\frac{1}{2\pi} E_{n+p+1}(\tau_0 - \tau) + \frac{1}{\pi} \epsilon_p(\tau) \sum_{q=0}^{n-1} \left\{ \left[ \delta_{q0} - \frac{1 - \epsilon(\tau)}{2} \alpha_q(\tau) \right] \Phi_{n+p-q}(\tau_0 - \tau, \epsilon(\tau)) - (-1)^{n+p-q} \beta_q(\tau) \Phi_{n+p-q}(\tau, \epsilon(\tau)) \right\}, \quad (\text{C.33})$$

où  $\delta_{q0}$  est le symbole de Kronecker, nul pour  $q \neq 0$  et égal à 1 pour  $q = 0$ ,

2. pour  $\tau' \neq \tau$  et  $n = 0, p = 0, 1$  ou  $2$  :

$$G^{(n,p)}(\tau', \tau) = -\frac{1}{2\pi} [\text{sg}(\tau' - \tau)]^p E_{p+1}(|\tau' - \tau|) + \frac{1}{\pi} \epsilon_p(\tau) \gamma_p(\tau', \tau, \epsilon(\tau)). \quad (\text{C.34})$$

où  $\text{sg}(x)$  vaut -1 si  $x < 0$  et 1 si  $x > 0$ .

Dans ces deux formules,  $E_k$  est la fonction exponentielle-intégrale d'ordre  $k \geq 1$ , définie par (Eq. 5.35), et  $\epsilon_p(\tau)$  désigne le coefficient

$$\epsilon_p(\tau) = \begin{cases} 1/(1 - \epsilon(\tau)) & \text{si } p = 0 \\ \epsilon(\tau)/(1 - \epsilon(\tau)) & \text{si } p = 1 \text{ ou } 2 \end{cases}, \quad (\text{C.35})$$

Les deux moments précédents font apparaître les coefficients  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et les fonctions auxiliaires  $\Phi_n$  et  $\gamma_n$  définies plus loin aux sections C.3.4, C.3.5 et C.3.6.

### C.3.2 Les trois premiers moments de l'intensité spécifique

Leurs expressions (Eqs. 5.37-5.45) contiennent, outre les coefficients  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et les fonctions  $\Phi_n$  (sections C.3.4 et C.3.5), les fonctions  $R_n$  définies à la section C.3.7.

### C.3.3 Notations

Nous allons exprimer les coefficients  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et les fonctions  $\Phi_n$ ,  $\gamma_n$  et  $R_n$  en terme de fonctions auxiliaires en partie classiques en théorie du transfert, en partie introduites pour la première fois dans [91]. Pour avoir des notations homogènes et faciliter le renvoi à [91], nous utilisons dans cette annexe les notations de cette référence, où l'albédo  $1 - \epsilon(\tau)$  est noté  $a$  et l'épaisseur optique de l'atmosphère  $\tau_0$  est noté  $b$ . D'où

$$a = 1 - \epsilon(\tau), \quad b = \tau_0, \quad (\text{C.36})$$

et les relations de passage de nos notations à celles de [91] sont les suivantes :

$$\alpha_n(\tau) = \alpha_n(a, b), \quad \beta_n(\tau) = \beta_n(a, b), \quad (\text{C.37})$$

$$\Phi_n(\tau, \epsilon(\tau)) = \Phi_n(a, b, \tau), \quad \gamma_n(\tau', \tau, \epsilon(\tau)) = \gamma_n(a, b, \tau', \tau), \quad R_n(\tau', \tau, \epsilon(\tau)) = R_n(a, b, \tau', \tau). \quad (\text{C.38})$$

La dépendance par rapport à  $\tau$  dans les membres de droite de (C.37) est contenue dans l'albédo  $a = 1 - \epsilon(\tau)$ .

### C.3.4 Définition des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ pour $n \geq 0$

Ces coefficients sont les moments d'ordre  $n$  des fonctions classiques  $X$  et  $Y$ , dites parfois de Chandrasekhar :

$$\alpha_n(\tau) = \alpha_n(a, b) = \int_0^1 X(a, b, \mu) \mu^n d\mu, \quad \beta_n(\tau) = \beta_n(a, b) = \int_0^1 Y(a, b, \mu) \mu^n d\mu. \quad (\text{C.39})$$

Ces fonctions sont étudiées en détail dans la célèbre monographie de Chandrasekhar [28]. Une synthèse récente et des algorithmes de calcul peuvent être trouvés dans [91, sections 7.3.1 et 8.4]. Pour calculer les moments  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  pour  $n \geq 0$ , nous n'avons pas utilisé leur définition (Eq. C.39),

car les fonctions  $X$  et  $Y$  sont difficiles à calculer et, de plus, la fonction  $X$  a une dérivée infinie en  $\mu = 0$ . Il est beaucoup plus simple de déduire ces moments des valeurs superficielles des fonctions  $\Phi_n$  introduites à la section C.3.5, en calculant d'abord les coefficients  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$  ( $n \geq 0$ ) suivants :

$$\tilde{x}_n(a, b) = \delta_{n0} + (-1)^n \Phi_{n+1}(a, b, 0), \quad \tilde{y}_n(a, b) = \Phi_{n+1}(a, b, b), \quad (\text{C.40})$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker défini à la section C.3.1.

Les  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  se déduisent des  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{y}_n$  par les relations

$$\alpha_n(a, b) = \frac{2}{a} \delta_{n0} - \frac{2}{a} \tilde{x}_n(a, b) + 2 \sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2p+1} \tilde{x}_{n-2p}(a, b), \quad (\text{C.41})$$

$$\beta_n(a, b) = \frac{2}{a} \tilde{y}_n(a, b) - 2 \sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2p+1} \tilde{y}_{n-2p}(a, b), \quad (\text{C.42})$$

données ici sans preuve. Dans la borne supérieure de la somme sur  $p$ ,  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

### C.3.5 Définition des fonctions $\Phi_n$ pour $n \geq 0$

Pour tout  $n \geq 0$  et tout  $\tau \in [0, \tau_0]$  (0 exclu lorsque  $n = 0$ )

$$\begin{aligned} \Phi_n(\tau, \epsilon(\tau)) = \Phi_n(a, b, \tau) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{T(a, 1/z)} \left\{ [1 - \xi_X(a, b, -1/z)] \exp(\tau z) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n \xi_Y(a, b, -1/z) \exp((b - \tau)z) \right\} \frac{dz}{(-z)^n}, \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

l'intégrale étant calculée dans le plan complexe le long de la droite  $\text{Re}(z) = c$ , avec  $-k < c < 0$ .  $k = k(a)$  désigne l'unique racine comprise entre 0 et 1 de l'équation caractéristique  $T(a, 1/z) = 0$ , où pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$

$$T(a, z) = 1 - \frac{a}{2} z \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{v+z}, \quad (\text{C.44})$$

l'intégrale étant une valeur principale de Cauchy lorsque  $-1 < z < 1$ . L'équation  $T(a, 1/z) = 0$  a été résolue de façon exacte dans les années soixante [25, 26]. Sa racine  $k(a)$  comprise entre 0 et 1 est donnée par

$$k(a) = \sqrt{1-a} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \arctan \left[ \frac{\pi(a/2)u}{T(a, u)} \right] \frac{du}{u} \right\}, \quad (\text{C.45})$$

où  $\arctan$  n'est pas la détermination principale de l'arctangente mais celle qui prend ses valeurs sur  $[0, \pi]$  lorsque l'argument décrit  $\mathbb{R}$ . Ce choix garantit la continuité de la fonction  $u \rightarrow \arctan[\pi(a/2)u/T(a, u)]$  au point  $u \in ]0, 1[$  où  $T(a, u)$  s'annule.

Les fonctions  $\xi_X$  et  $\xi_Y$ , qui figurent dans l'intégrale de (Eq. C.43), sont classiques (fonctions de Sobouti). Elles sont définies à partir des fonctions  $X$  et  $Y$  par les relations

$$\xi_X(a, b, z) = \frac{a}{2} z \int_0^1 X(a, b, v) \frac{dv}{v+z}, \quad \xi_Y(a, b, z) = \frac{a}{2} z \int_0^1 Y(a, b, v) \frac{dv}{v+z}, \quad (\text{C.46})$$

qui ont un sens sur  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$  à condition de calculer les intégrales au sens de la valeur principale lorsque  $z \in ]-1, 0[$ . En fait, on peut calculer ces fonctions de façon plus directe, de la même manière que les moments des fonctions  $X$  et  $Y$  peuvent se calculer sans utiliser leur définition (C.39) : cf. [91, sections 7.3.1 et 8.4] pour des détails<sup>1</sup>.

Pour l'évaluation numérique des fonctions  $\Phi_n$ , l'intégrale figurant dans le membre de droite de (C.43) doit être transformée par la méthode des résidus appliquée au contour de la figure (Fig. C.3) ci-contre, tiré de [91, p. 247]. La coupure sur  $] -\infty, -1[$  provient du caractère multiforme du logarithme complexe présent dans la définition (C.44) de  $T(a, z)$ .

<sup>1</sup>Notre fonction  $\xi_X$  coïncide avec la fonction  $1 - \xi_X$  de [91].

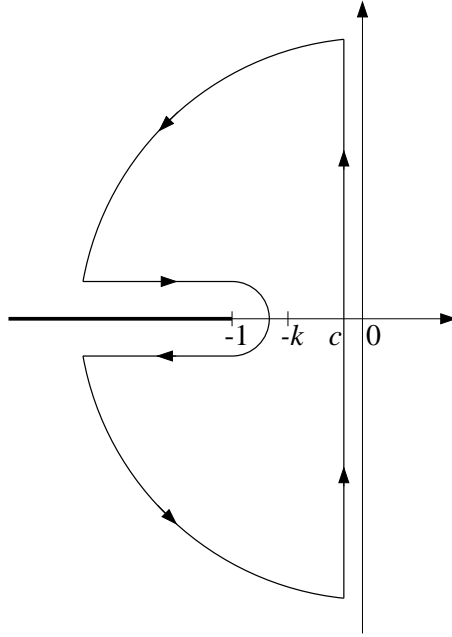


FIG. C.3 – Contour dans le plan complexe pour calculer les fonctions auxiliaires des milieux parallèles.

Le résultat, valable pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $\tau \in [0, \tau_0]$  non simultanément nuls, est le suivant :

$$\begin{aligned} \Phi_n(a, b, \tau) = & \frac{1}{k^{n-1}} R(a, k) \left\{ [1 - \xi_X(a, b, 1/k)] \exp(-\tau k) \right. \\ & \left. + (-1)^{n-1} \xi_Y(a, b, 1/k) \exp(-(b - \tau)k) \right\} \\ & + \frac{a}{2} \int_0^1 g(a, v) \left\{ [1 - \xi_X(a, b, v)] \exp(-\tau/v) \right. \\ & \left. + (-1)^{n-1} \xi_Y(a, b, v) \exp(-(b - \tau)/v) \right\} v^{n-1} dv, \quad (\text{C.47}) \end{aligned}$$

où on a posé

$$R(a, k) = \frac{1 - k^2}{k^2 + a - 1} \quad (\text{C.48})$$

et

$$g(a, v) = \frac{1}{(T(a, v))^2 + (\pi a v / 2)^2}. \quad (\text{C.49})$$

Pour alléger les notations, nous n'avons explicité toutes les dépendances par rapport à la variable de profondeur optique. Ainsi  $k$  dépend de l'albédo  $a$ , donc de  $\tau$  puisque  $a = 1 - \epsilon(\tau)$ . De même pour les autres grandeurs dépendant de l'albédo :  $R(a, k)$ ,  $g(a, v)$ , *etc.*

Les fonctions  $\Phi_n$  généralisent la fonction  $\Phi$  de Sobolev, puisqu'elles redonnent cette dernière à l'ordre 0 :  $\Phi_0 = \Phi$  [109, 91].

### C.3.6 Définition des fonctions $\gamma_n$ pour $n \geq 0$

Ces fonctions dépendent de deux variables d'espace  $\tau'$  et  $\tau$ , et bien sûr de  $\epsilon$ , d'où la notation  $\gamma_n(\tau', \tau, \epsilon(\tau))$ . Elles sont définies pour  $n \geq 0$  et  $\tau', \tau \in [0, \tau_0]$  par

$$\begin{aligned} \gamma_n(\tau', \tau, \epsilon(\tau)) = \gamma_n(a, b, \tau', \tau) = & \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \frac{1}{T(a, 1/z)} - 1 \right] \left\{ \xi(a, b, \tau', -1/z) \exp(\tau z) \right. \\ & \left. + (-1)^n \xi(a, b, b - \tau', -1/z) \exp((b - \tau)z) \right\} \frac{dz}{(-z)^n}. \quad (\text{C.50}) \end{aligned}$$

L'intégrale est de nouveau calculée le long de la droite  $\text{Re}(z) = c$  avec  $-k < c < 0$ , ce qui montre que l'expression (C.50) n'a de sens, pour  $n = 0$ , que pour  $\tau' \neq \tau$ , et pour  $n \geq 1$  pour  $\tau'$  et  $\tau$  non simultanément égaux à 0 ou  $\tau_0$ .

La fonction  $\xi$  figurant sous l'intégrale se déduit des fonctions  $\eta_X$  et  $\eta_Y$  suivantes :

$$\eta_X(a, b, \tau z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} X(a, b, 1/z') \exp(\tau z') \frac{dz'}{1+z'z}, \quad (\text{C.51})$$

$$\eta_Y(a, b, \tau z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(a, b, 1/z') \exp(\tau z') \frac{dz'}{1+z'z}, \quad (\text{C.52})$$

par la relation

$$\xi(a, b\tau, z) = Y[-\text{Re}(z)] \exp(\tau/z) + z[1 - \xi_X(a, b, z)] \eta_X(a, b, \tau, -z) + z\xi_Y(a, b, z) \eta_Y(a, b, \tau - z). \quad (\text{C.53})$$

Elle se déduit donc, par une relation algébrique simple, des fonctions  $\xi_X$ ,  $\xi_Y$ ,  $\eta_X$  et  $\eta_Y$  étudiées en détail et tabulées dans [91]. La fonction  $\xi$  généralise les fonctions  $\xi_X$  et  $\xi_Y$  puisqu'elle coïncide avec elles sur les plans frontières

$$\xi(a, b, 0, z) = \xi_X(a, b, z), \quad \xi(a, b, b, z) = \xi_Y(a, b, z). \quad (\text{C.54})$$

Pour l'évaluation numérique des fonctions  $\gamma_n$ , il faut transformer l'intégrale figurant dans (C.50) par la méthode des résidus appliquée au contour de la figure (Fig. C.3). On obtient

$$\begin{aligned} \gamma_n(a, b, \tau', \tau) &= \frac{1}{k^{n-1}} R(a, k) \left\{ \xi(a, b, \tau', 1/k) \exp(-\tau k) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \xi(a, b, b - \tau', 1/k) \exp(-(b - \tau)k) \right\} \\ &\quad + \frac{a}{2} \int_0^1 g(a, v) \left\{ \xi(a, b, \tau', v) \exp(-\tau/v) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \xi(a, b, b - \tau', v) \exp(-(b - \tau)/v) \right\} v^{n-1} dv. \quad (\text{C.55}) \end{aligned}$$

Rappelons que  $k$ ,  $R(a, k)$  et  $g(a, v)$  sont définis par (C.45), (C.48) et (C.49) respectivement.

### C.3.6.1 Deux propriétés des fonctions $\gamma_n$ utiles aux calculs numériques

Il est facile de voir, à partir de la définition (C.50) de  $\gamma_n$ , que ces fonctions vérifient

$$\gamma_n(a, b, \tau', \tau) = (-1)^n \gamma_n(a, b, b - \tau', b - \tau). \quad (\text{C.56})$$

Par contre, il est plus difficile d'établir la relation

$$\begin{aligned} \gamma_n(a, b, \tau', \tau) - (-1)^n \gamma_n(a, b, \tau, \tau') &= - \sum_{p=1}^n (-1)^p \left[ \Phi_{n-p+1}(a, b, \tau) \Phi_p(a, b, \tau') \right. \\ &\quad \left. - \Phi_p(a, b, \tau) \Phi_{n-p+1}(a, b, b - \tau') \right], \quad (\text{C.57}) \end{aligned}$$

admise ici sans preuve. On convient, comme c'est l'usage, que la somme sur  $p$  est nulle lorsque sa borne supérieure est strictement inférieure à sa borne inférieure, c'est-à-dire ici pour  $n = 0$ . La fonction  $\gamma_n$  n'est donc symétrique par rapport aux variables  $\tau'$  et  $\tau$  que pour  $n = 0$ .

### C.3.6.2 Expression des fonctions $\gamma_n$ sur les plans frontière

Le calcul des fonctions  $\gamma_n$  est largement simplifié sur les plans frontière, puisqu'il nécessite la seule connaissance des fonctions  $\Phi_n$  introduites à la section C.3.5 et de leur homologue  $\Phi_{\infty, n}$  des espaces infinis. On a en effet :

1. pour  $\tau' = 0$  ou  $b$ ,

$$\gamma_n(a, b, 0, \tau) = \Phi_{\infty, n}(a, \tau) - \Phi_n(a, b, \tau) \quad (\tau > 0), \quad (\text{C.58})$$

$$\gamma_n(a, b, b, \tau) = (-1)^n [\Phi_{\infty, n}(a, b - \tau) - \Phi_n(a, b, b - \tau)] \quad (\tau < b), \quad (\text{C.59})$$

2. pour  $\tau = 0$  ou  $b$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_n(a, b, \tau', 0) = (-1)^n \left\{ \Phi_{\infty, n}(a, \tau') - \sum_{p=1}^n \left[ \tilde{x}_{n-p}(a, b) \Phi_p(a, b, \tau') \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^p \tilde{y}_{n-p}(a, b) \Phi_p(a, b, b - \tau') \right] \right\} \quad (\tau' > 0), \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

$$\begin{aligned} \gamma_n(a, b, \tau', b) = \Phi_{\infty, n}(a, b - \tau') - \sum_{p=1}^n \left[ \tilde{x}_{n-p}(a, b) \Phi_p(a, b, b - \tau') \right. \\ \left. + (-1)^p \tilde{y}_{n-p}(a, b) \Phi_p(a, b, \tau') \right] \quad (\tau' < b). \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Les fonctions  $\Phi_{\infty, n}$  des milieux infinis, qui figurent dans ces expressions, s'écrivent pour  $n \geq 0$

$$\Phi_{\infty, n}(a, \tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \frac{1}{T(a, 1/z)} - 1 \right] \exp(\tau z) \frac{dz}{(-z)^n}, \quad (\text{C.62})$$

où  $c \in ]-k, 0[$  si  $\tau \geq 0$ . Pour l'évaluation numérique de ces fonctions, on transforme l'intégrale par la méthode des résidus ce qui donne, pour  $n \geq 0$  et  $\tau \geq 0$  non simultanément nuls

$$\Phi_{\infty, n}(a, \tau) = \frac{1}{k^{n-1}} R(a, k) \exp(-k\tau) + \frac{a}{2} \int_0^1 g(a, v) \exp(-\tau/v) v^{n-1} dv. \quad (\text{C.63})$$

De nouveau,  $\Phi_{\infty, 0} = \Phi_{\infty}$  : fonction résolvante classique des milieux infinis [109, 91].

Les relations (Eqs. C.58-C.61) sont celles qui nous ont permis de calculer l'intensité moyenne, le flux radiatif et la pression de radiation sur les plans frontières (Eqs. 5.38, 5.39, 5.41, 5.42, 5.44, 5.45).

### C.3.7 Définition des fonctions $R_n$ pour $n \geq 0$

Ces fonctions se déduisent immédiatement des fonctions  $\Phi_{\infty, n}$  et  $\gamma_n$  déjà introduites puisque leur définition est, pour  $n \geq 0$  et  $\tau' \neq \tau$  :

$$R_n(a, b, \tau', \tau) = [\text{sg}(\tau - \tau')]^n \Phi_{\infty, n}(a, |\tau - \tau'|) - \gamma_n(a, b, \tau', \tau), \quad (\text{C.64})$$

où  $\text{sg}$  est la fonction signe ( $= \pm 1$  suivant le signe de l'argument). Pour  $n = 0$ , on retrouve le noyau résolvant classique, qui est bien symétrique par rapport à  $\tau'$  et  $\tau$  puisque  $\gamma_0$  l'est [109, 91].





# Table des figures

3.1	Variations de la fonction $\Phi(x)$ selon $x$ . . . . .	52
5.1	Schéma de la résolution du modèle d'atmosphère par itération. . . . .	90
6.1	Diagramme de classification des plasmas ( <b>SI</b> ) [32]. Nous avons délimité les régions par des droites ( $x = \log n_e$ , $y = \log T$ ), la limite $r_L = d_e : y - x/3 + 4.78 = 0$ , la limite $d_e = \lambda_D : y - x/3 + 3.68 = 0$ , la limite de dégénérescence quantique $kT = \varepsilon_F$ , où $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n_e)^{2/3}$ est l'énergie de Fermi d'un gaz d'électrons dégénéré : $y - 2x/3 + 14.37 = 0$ , et la limite $kT = m_e c^2$ du domaine d'application de la mécanique classique non relativiste : $y = 9.78$ . Notre modèle, représenté par le symbole $\oplus$ , correspond à $x \leq 19.76$ et $y = 3.81$ . . . . .	92
6.2	Comparaison du terme de force de l'ECE aux fréquences de collision élastiques, selon la vitesse, à la surface de l'atmosphère $z = 0$ . Nous avons représenté les 3 fréquences de collision $\nu_{ee}(v)$ (cercles), $\nu_{e+}(v)$ (carrés), $\nu_{eH}(v)$ (triangles pointant vers le haut), ainsi que le terme de force (Eq. 6.10), séparé en la première composante ETL (triangles pointant vers le bas), et la deuxième composante NECM (losanges). . . . .	101
6.3	(Modèle ETL) Opacité $\chi(\nu)$ (en $m^{-1}$ ) en fonction de la fréquence normalisée $\nu/\nu_R$ (indépendante de la profondeur géométrique). Sur les figures a) et b) les cercles correspondent à la grille utilisée, et il a été nécessaire d'utiliser plus de fréquences pour tracer la courbe pleine. Sur les figures c) et d) sont détaillés les processus radiatifs : bound-bound (raie $L\alpha$ ), bound-free, free-free, diffusion Thomson et diffusion Rayleigh non coupée en fréquence. . . . .	102
6.4	(Modèle ETL) Albédo $\varpi(\nu)$ en fonction de la fréquence normalisée $\nu/\nu_R$ (indépendante de la profondeur géométrique). Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. L'albédo représenté dans la raie $L\alpha$ est $\varpi_{12}$ (Eq. 5.92). . . . .	103
6.5	(Modèle ETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) montrant les deux composantes du rayonnement près de la frontière interne, en fonction de la profondeur géométrique $1 - z/Z$ , ou de la profondeur optique $\tau_0 - \tau$ . La figure de gauche correspond à la raie $L\alpha$ , pour laquelle l'épaisseur optique est $\tau_{0L} \sim 3.09 \times 10^{16}$ et la profondeur optique $\tau_L$ . La figure de droite représente $\nu/\nu_R = 0.5$ (continu de Balmer) pour laquelle l'épaisseur optique est $\tau_0 \sim 1.83 \times 10^4$ . . . . .	103
6.6	(Modèle ETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. . . . .	104
6.7	(Modèle ETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. Le trait gras reproduit la courbe en surface ( $z = 0$ ) de la figure (Fig. 6.6, p. 104). Ces courbes correspondent aux profondeurs géométriques de la grille, pour $z/Z \leq 10^{-2}$ . Pour $z/Z \geq 10^{-1}$ ou $z/Z \leq 10^{-17}$ , les courbes sont confondues avec celles des cas $z/Z = 1$ et $z/Z = 0$ respectivement. . . . .	105

6.8	(Modèle ETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction soit de la profondeur géométrique normalisée $z/Z$ , soit des profondeurs optiques $\tau_C$ et $\tau_L$ (voir section 6.2.4). La figure en haut à gauche représente les courbes pour toutes les fréquences en fonction de la profondeur optique $\tau$ associée à chacune des fréquences. L'échelle en profondeur optique est restreinte au voisinage de la région où l'intensité moyenne chute. . . . .	106
6.9	(Modèle NETL) Abaque de correspondance entre la profondeur géométrique $z$ et la profondeur optique $\tau$ . . . . .	107
6.10	(Modèle NETL) Abaque de correspondance entre la profondeur géométrique $z$ et la profondeur optique $\tau$ . Les courbes représentent le rapport $\tau_{\text{NETL}}(z, \nu)/\tau_{\text{ETL}}(z, \nu) = Z\tau(z, \nu)/z\tau_0(\nu)$ . Il permet de mieux distinguer les écarts à l'ETL que sur la figure (Fig. 6.9). . . . .	108
6.11	(Modèle NETL) Écarts à l'ETL des populations et du degré d'ionisation. $b_1$ , $b_2$ et $\chi$ ont la définition habituelle utilisée en physique des plasmas. Le degré d'ionisation est normalisé à sa valeur à l'ETL, notée $\chi^*$ . Nous avons représenté sur la deuxième figure des quantités équivalentes $b_1^*$ , $b_2^*$ et $b_+^*$ (voir la note C.1 pour les définitions). . . . .	108
6.12	(Modèle NETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. . . . .	109
6.13	(Modèle NETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. Le trait gras reproduit la courbe en surface ( $z = 0$ ) de la figure (Fig. 6.12, p. 109). Ces courbes correspondent aux profondeurs géométriques de la grille, pour $z/Z \leq 10^{-1}$ . Pour $z/Z \geq 10^{-1}$ ou $z/Z \leq 10^{-20}$ les courbes sont confondues avec celles des cas $z/Z = 1$ et $z = 0$ . . . . .	110
6.14	(Modèle NETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction de la fréquence et en présence d'un rayonnement incident de Planck à la frontière interne. Les cercles correspondent aux fréquences de la grille. Le trait gras reproduit la courbe en surface ( $z = 0$ ) de la figure (Fig. 6.12, p. 109). Ces courbes correspondent aux profondeurs géométriques de la grille, pour $z/Z \leq 10^{-1}$ . Pour $z/Z \geq 10^{-1}$ ou $z/Z \leq 10^{-20}$ les courbes sont confondues avec celles des cas $z/Z = 1$ et $z = 0$ . Le domaine des fréquences est limité à $\nu/\nu_R \leq 1.1$ pour les détails à faible fréquence peu visibles dans la figure (Fig. 6.13, p. 110). . . . .	111
6.15	(Modèle NETL) Intensité moyenne $J(z, \nu)/B_\nu(T)$ (normalisée à la fonction de Planck) en fonction soit de la profondeur géométrique normalisée $z/Z$ , soit des profondeurs optiques $\tau_C$ et $\tau_L$ (voir section 6.2.4). La figure en haut à gauche représente les courbes pour toutes les fréquences en fonction de la profondeur optique $\tau$ associée à chacune des fréquences. L'échelle en profondeur optique est restreinte au voisinage de la région où l'intensité moyenne chute. . . . .	112
6.16	(modèle NECM) Fdv des électrons $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$ (normalisée à la maxwellienne de température $T$ ) en fonction de la vitesse $v$ , à la frontière interne $z/Z = 1$ et à la frontière externe de l'atmosphère $z/Z = 0$ . . . . .	113
6.17	(modèle NECM) Fdv des électrons $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$ (normalisée à la maxwellienne de température $T$ ) en fonction de la vitesse $v$ pour toutes les profondeurs géométriques de la grille. La courbe en gras reproduit la courbe superficielle de la figure (Fig. 6.16, p. 113). Les courbes tracées pour $10^{-3} \leq z/Z \leq 1$ ou $0 \leq z/Z \leq 10^{-18}$ coïncident avec les courbes $z/Z = 1$ et $z = 0$ respectivement. . . . .	114
6.18	(modèle NECM) Fdv des électrons $f_e(z, v)/f_e^M(z, v)$ (normalisée à la maxwellienne de température $T$ ) en fonction de la profondeur géométrique $z$ pour quelques vitesses électroniques supérieures à $v_R$ . . . . .	115
6.19	(Modèle NECM) Effet des électrons non maxwelliens sur l'intensité moyenne du rayonnement. La figure du haut montre les intensités moyennes pour le cas NETL et NECM, et la courbe du bas montre les écarts relatifs entre les deux courbes du haut. . . . .	116

6.20	(Modèle NECM) Effet des électrons non maxwelliens sur les écarts des populations à l'ETL $b_1(z)$ et $b_2(z)$ . La figure du haut montre les écarts à l'ETL pour le cas NETL et NECM, et la courbe du bas montre les écarts relatifs entre les courbes du haut.	117
A.1	Sections efficaces différentielles de collision électron-atomes neutres expérimentales.	135
A.2	Section efficace intégrée de collision électron-atomes neutres.	139
A.3	Représentation des valeurs possibles des vitesses $(v'_e, w'_e)$ , liées par la contrainte (A.90), symbolisée par le quart de cercle de rayon $\sqrt{2}v_s = \sqrt{v_e^2 - \zeta_{i+}^2}$ . Toutes les vitesses émergentes possibles sont atteintes en faisant varier $v'_e$ sur $]0, v_s]$ .	142
B.1	Etude des solutions de l'équation (B.67). Toutes les courbes sont tracées en fonction de $y$ . La courbe en trait gras représente le membre de droite de l'équation. Les autres courbes représentent le membre de gauche de l'équation, pour certaines valeurs du paramètre $x = 1, \sqrt{5/2}, 2, 3$ . L'intersection de ces courbes nous renseigne sur l'existence d'une valeur $y(x)$ non nulle.	159
B.2	Rapport des vitesses $p(x) = \bar{v}/\bar{v}_0$ pour $x$ variant de 0 à 5.	160
B.3	Tracé des points d'inversion $y_i(x)$ en fonction de $x$ . La courbe en trait plein est résultat de l'évaluation numérique de l'équation (B.72), qui montre quelques fluctuations dues aux erreurs d'arrondi au voisinage de $x \sim 4.7$ , la courbe pointillée est le prolongement asymptotique (B.76) pour $3 < x < 5$ , et la courbe en traits pointillés représente (B.73).	161
B.4	Tracé de $g(v)$ en fonction de la variable réduite $y = v/\bar{v}$ pour $x \sim 2$ . $g(v)$ est négative en dessous de $y = y_i(x)$ , puis positive jusqu'à $y = x$ , et négative au delà.	162
B.5	Tracé de $A_0(x)$ (courbe en pointillés) et de $A_2(x)$ (courbe pleine) pour $x_c \leq x \leq 5$ .	163
B.6	Tracé de $E_0(\tau, x)/A_0(x)$ pour $10^{-3} \leq \tau \leq 10^3$ , en échelle semi-logarithmique, pour trois valeurs différentes de $x$ : $x \sim 2.18$ (courbe en pointillés) avec $A_0(2.18) \sim 1.0 \times 10^{-6}$ , $x \sim 3.18$ (courbe en traits-tirés) avec $A_0(3.18) \sim 1.0 \times 10^{-3}$ , et $x \sim 4.22$ (courbe en traits pleins) avec $A_0(4.22) \sim 1.0 \times 10^{-6}$ .	164
B.7	Tracé de $E_2(\tau, x)/A_2(x)$ pour $10^{-3} \leq \tau \leq 10^3$ , en échelle semi-logarithmique, pour trois valeurs différentes de $x$ : $x \sim 2.18$ (courbe en pointillés) avec $A_0(2.18) \sim 2.0 \times 10^{-6}$ , $x \sim 3.18$ (courbe en traits-tirés) avec $A_0(3.18) \sim 2.5 \times 10^{-3}$ , et $x \sim 4.22$ (courbe en traits pleins) avec $A_0(4.22) \sim 2.6 \times 10^{-6}$ .	164
C.1	Représentation de la collision élastique, dans le référentiel du centre de masse.	181
C.2	Représentation de la déviation d'une particule <i>test</i> par une charge écrantée, placée au centre de la figure, lors d'interactions coulombiennes dans un plasma cinétique classique.	184
C.3	Contour dans le plan complexe pour calculer les fonctions auxiliaires des milieux plan-parallèles.	189



# Liste des tableaux

1.1	Les sections efficaces des processus radiatifs et collisionnels. . . . .	29
3.1	Variations de la fonction $R(u)$ . . . . .	45
3.2	Importance des collisions élastiques des électrons avec les protons par rapport à la collision entre eux-mêmes, indiqué par le rapport $\Sigma_{el,+}(z, v)/\Sigma_{el,e}(z, v)$ . L'étude est selon la vitesse $v$ , alors nous n'explicitons pas la dépendance en $z$ , sans importance ici. . . . .	46
3.3	Valeurs de $E_m = \frac{3}{2} \frac{m_e}{m_H} kT_H$ selon $T_H$ . . . . .	51
3.4	Variations de la fonction $\Phi(x)$ selon $x$ . . . . .	52
6.1	Populations (en $m^{-3}$ ) et degré d'ionisation à l'ETL. . . . .	91
6.2	Grille de 22 points en fréquence utilisée dans le code. Les nombres à 5 chiffres significatifs dans la première colonne sont des approximations de la valeur réelle, alors que la précision des autres nombres est la double précision machine (16 chiffres), sauf pour la fréquence $\nu/\nu_R = 0.7499987$ qui est aussi une approximation à 7 chiffres de la valeur réelle, car cette valeur arrondie à 5 chiffres aurait été confondue avec la valeur exacte de la fréquence centrale de la raie (point suivant à $\nu/\nu_R = 0.75$ ). Pour la deuxième colonne, $1.5(+5)$ signifie $1.5 \times 10^5$ . Les fréquences des transitions $1 \rightleftharpoons 2$ , $1 \rightleftharpoons +$ et $2 \rightleftharpoons +$ sont à $\nu/\nu_R = 0.75$ , 1 et 0.25 respectivement. . . . .	94
6.3	Grille de 40 points en vitesse utilisée dans le code. Pour la température $T = 6420$ K, on obtient $\bar{v}_+/v_R = 4.7 \times 10^{-3}$ et $\bar{v}_+/\bar{v}_e = 2.3 \times 10^{-2}$ , où $\bar{v}_+$ et $\bar{v}_e$ sont les vitesses les plus probables des protons et des électrons. Les vitesses associées aux transitions $1 \rightleftharpoons 2+$ , $1 \rightleftharpoons 2$ et $2 \rightleftharpoons +$ sont à $v/v_R = 1$ , 0.87 et 0.5 respectivement. . . . .	95
6.4	Grille des épaisseurs optiques utilisées dans le modèle, correspondant à une épaisseur géométrique $Z = 2.0 \times 10^{10}$ m. . . . .	96
6.5	comparaison des taux de transition (sans unités) à la frontière externe de l'atmosphère ( $z = 0$ ). . . . .	99
6.6	Comparaison du terme de force de l'ECE au terme de collision élastique. . . . .	101
A.1	Forces d'oscillateur pour l'atome d'hydrogène $f_{ij}$ pour $i < j$ . . . . .	126
A.2	valeurs du coefficient $Q$ (Eq. A.80) pour la région des faibles énergies. . . . .	138
A.3	valeurs des coefficients $a_+$ et $a_-$ (Eq. A.79). . . . .	138
A.4	valeurs des coefficients $A$ , $B$ et $C$ (Eq. A.78). . . . .	138
B.1	Tableau des valeurs de $x$ correspondant à quelques valeurs de $A_0(x)$ et $A_2(x)$ . . .	163
B.2	Estimation de l'erreur relative faite sur les moments d'une fdv maxwellienne, lorsque l'intégrale porte sur un domaine numérique fini $[0, z]$ . . . . .	166
B.3	Fonctions utilisées dans les fréquences de collision du modèle BGK. . . . .	173



# Bibliographie

- [1] R. G. Athay. *Radiation transport in spectral lines*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1972.
- [2] R. G. Athay. *The Solar Chromosphere and Corona : Quiet Sun*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1976.
- [3] R. Balescu. *Statistical mechanics of charged particles*. Interscience Publishers, 1963.
- [4] O. Bely and H. Van Regemorter. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 8 :329–368.
- [5] I. B. Bernstein. volume 3, pages 127–156. Interscience Publishers, New York, 1969.
- [6] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. *Phys. Rev.*, 94(3) :511–525, 1954.
- [7] L. M. Biberman, V. S. Vorob'ev, and I. T. Yakubov. *High Temp. (USSR)*, 6 :359–368, 1968.
- [8] L. M. Biberman, V. S. Vorob'ev, and I. T. Yakubov. *Sov. Phys. Usp.*, 15(4) :375–394, 1973.
- [9] L. M. Biberman, V. S. Vorob'ev, and I. T. Yakubov. *Sov. Phys. Usp.*, 22(6) :411–432, 1979.
- [10] J. Binney and S. Tremaine. chapter 7.1, 8.3, 8.A. Princeton University Press, 1994.
- [11] J. A. Bittencourt. Pergamon Press, 1988.
- [12] D. Bohm and L. H. Aller. *ApJ*, 105(1) :1–20, 1947.
- [13] D. Bohm and E. P. Gross. *Phys. Rev.*, 75(12) :1864–1876, 1949.
- [14] K. H. Böhm. In J. L. Greenstein, editor, *Stellar Atmospheres*. University of Chicago Press, 1960.
- [15] C. D. Boley and S. Yip. *Phys. Fluids*, 15(8) :1424–1433, 1972.
- [16] J. Borsenberger, J. Oxenius, and E. Simonneau. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 35(4) :303–328, 1986.
- [17] J. Borsenberger, J. Oxenius, and E. Simonneau. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 37 :331–357, 1987.
- [18] J. Borsenberger, J. Oxenius, and E. Simonneau. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 38 :427–426, 1987.
- [19] J. M. Burgers. Academic Press, New York, 1969.
- [20] F. W. Byron and C. J. Joachain. *Physics Reports*, 179 :211–272, 1989.
- [21] J. Callaway and D. H. Oza. *Phys. Review A*, 32(5) :2628–2636, 1985.
- [22] J. Callaway and K. Unnikrishnan. *Phys. Review A*, 48(6) :4292–4298, 1993.
- [23] J. Callaway, K. Unnikrishnan, and D. H. Oza. *Phys. Review A*, 36(6) :2576–2584, 1987.
- [24] J. Callaway and J. F. Williams. *Phys. Review A*, 12(6) :2312–2318, 1975.
- [25] J. L. Carlstedt and T. W. Mullikin. *ApJ Supp.*, 12(113) :449–465, 1966.
- [26] K. M. Case and P. F. Zweifel. *Linear transport theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1967.
- [27] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [28] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Oxford University Press, London, 2nd edition, 1960.
- [29] S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge University Press, 3rd edition, 1995.



- [30] L. Chevallier. *Les théories du transfert*. stage de dea, DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin, Ecole doctorale de Physique fondamentale de Lyon, Université Joseph Fourier de Grenoble, 1995.
- [31] J.-L. Delcroix. *Physique des plasmas*, volume 1. Dunod, Paris, 1963.
- [32] J.-L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas*, volume 1-2. Savoirs Actuels, InterEditions/CNRS Editions, Paris, 1994.
- [33] J. J. Duderstadt and W. R. Martin. *Transport theory*. John Wiley and sons, New York, 1979.
- [34] K. El-Murr and G. Massacrier. *Journal of Physics B*, 31 :4303–4316, 1998.
- [35] H. A. Claaßen. *Z. Naturforsch.*, 28(12) :1875–1884, 1973.
- [36] H. A. Claaßen. *Z. Naturforsch.*, 30 :451–460, 1975.
- [37] R. Esser and R. J. Edgar. *ApJ Lett.*, 532 :L71–L74, 2000.
- [38] J. H. Ferziger. *Phys. Fluids*, 8(3) :426–431, 1965.
- [39] W. C. Fon, P. G. Burke, and A. E. Kingston. *J. Phys. B*, 11(3) :521–530, 1978.
- [40] H. Grad. Proceedings of the first international symposium, pages 100–138. Pergamon Press, 1960.
- [41] H. Grad. Proceedings of the fifth international conference on plasma dynamics, pages 1630–1649, 1961.
- [42] J. M. Greene. *Phys. Fluids*, 16(11) :2022–2023, 1973.
- [43] E. P. Gross. *Phys. Rev.*, 158(1) :146–153, 1967.
- [44] E. P. Gross and E. A. Jackson. *Phys. Fluids*, 2(4) :432–441, 1959.
- [45] E. P. Gross and M. Krook. *Phys. Rev.*, 102(3) :593–604, 1956.
- [46] A. V. Gurevich and Y. N. Istomin. *Soviet Phys. JETP*, 50 :470–475, 1979.
- [47] B. B. Hamel. *Phys. Fluids*, 8(3) :418–425, 1965.
- [48] J. B. Hasted. Butterworths advanced physics series, London, 1964.
- [49] D. G. Hummer. *ApJ*, 327 :477–484, 1988.
- [50] V. V. Ivanov. *Radiative transfer and the spectra of celestial bodies*. Nauka, Moscow, traduction révisée : *Transfer of radiation in spectral lines*, national bureau of standards special publication 385, u. s. government printing office, washington, dc, 1973 edition, 1969.
- [51] S. A. Kaplan and S. B. Pikelner. *The Interstellar Medium*. Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1970.
- [52] W. J. Karzas and R. Latter. *Astrophys. Suppl. Series*, 6(55) :167–212, 1961.
- [53] Y.-K. Kim and M. E. Rudd. *Phys. Rev. A*, 50 :3954–3967, 1994.
- [54] A. E. Kingston and H. R. J. Walters. *J. Phys. B*, 13 :4633–4662, 1980.
- [55] T. Koga. *Phys. Fluids*, 5(6) :705–711, 1962.
- [56] T. Koga. volume 1 of *Proceedings of the third international symposium on rarefied gas dynamics*, pages 75–93. Academic Press, 1963.
- [57] M. Krook. *J. Fluid Mech.*, 6 :523–541, 1959.
- [58] A. Lahmam-Bennani. *J. Phys. B*, 24 :2401–2442, 1991.
- [59] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique. III. Mécanique quantique*. Mir, Moscou, second edition, 1967.
- [60] F. Leblanc. *Modèle multimoments multi-espèces généralisé pour l'expansion des vents astrophysiques*. PhD thesis, Université Paris 11, 1998. dir. J. Solomon.
- [61] M. Lemou. *Etude mathématique et Résolution Numérique de l'équation de Fokker-Planck-Landau en physique des plasmas*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1996. dir. P. Degond.
- [62] R. L. Liboff. *Kinetic theory. Classical, quantum and relativistic descriptions*. Wiley-Interscience, 1998.
- [63] N. N. Ljepojevic. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 44(1) :203–208, 1990.
- [64] N. N. Ljepojevic and A. Burgess. *Proc. R. Soc. London A*, 428 :71–111, 1990.

- [65] G. Massacrier. *A&A*, 309 :979–990, 1996.
- [66] I. McCarthy and E. Weigol. *Electron-Atom Collisions*. Cambridge University Press, UK, 1995.
- [67] F. J. McCormack. *Phys. Fluids*, 16(12) :2095–2105, 1973.
- [68] W. M. McDonald, M. N. Rosenbluth, and W. Chuck. *Phys. Rev.*, 107(2) :350–353, 1957.
- [69] D. Mihalas. *Stellar atmospheres*. W. H. Freeman and Company, USA, 2nd edition, 1978.
- [70] D. C. Montgomery and D. A. Tidman. *Plasma kinetic theory*. McGraw-Hill, 1964.
- [71] T. F. Morse. *Phys. Fluids*, 7(12) :2012–2013, 1964.
- [72] N. F. Mott and H. S. W. Massey. *The theory of atomic collisions*. Clarendon Press, Oxford, 3rd edition, 1965.
- [73] S. P. Owocki and R. C. Canfield. *ApJ*, 300 :420–427, 1986.
- [74] S. P. Owocki and J. D. Scudder. *ApJ*, 270 :758–768, 1983.
- [75] J. Oxenius. *Z. Naturforsch.*, 25(1) :101–105, 1970.
- [76] J. Oxenius. *Z. Naturforsch.*, 25(8/9) :1302–1310, 1970.
- [77] J. Oxenius. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14 :731–743, 1974.
- [78] J. Oxenius. *Kinetic theory of particles and photons*, volume 20 of *Springer series in Electrophysics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [79] J. Oxenius and E. Simonneau. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 4(3) :351–359, 1990.
- [80] F. Paletou. Transfert de rayonnement : méthodes “\*ali”. In Ph. Stee, editor, *Forum du GRETA “Transfert de rayonnement en Astrophysique”, 17-19 mai 1999*, Observatoire de la Côte d’Azur, Nice, 2000.
- [81] C. Park. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 12 :323–370, 1972.
- [82] C. Pecker-Wimel. *Introduction à la spectroscopie des plasmas*. Gordon and Breach, 1967.
- [83] N. Peyraud. *Le journal de Physique*, 29 :201–211,747–758,997–1004, 1968.
- [84] N. Peyraud. *Le Journal de Physique*, 31 :565–580, 1970.
- [85] N. Peyraud and J. Peyraud. *Le Journal de Physique*, 30 :773–788, 1969.
- [86] D. J. Pinfield, F. P. Keenan, M. Mathiokadis, K. J. H. Phillips, W. Curdt, and K. Wilhelm. *ApJ*, 527 :1000–1008, 1999.
- [87] H. Risken. *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications*. Springer series in synergetics. Springer-Verlag, 1996.
- [88] M. N. Rosenbluth, W. M. McDonald, and D. L. Judd. *Phys. Rev.*, 107(1) :1–6, 1957.
- [89] N. Rostoker and M. N. Rosenbluth. *Phys. Fluids*, 3(1) :1–14, 1960.
- [90] R. Roussel-Dupré. *Sol. Phys.*, 68 :243,265, 1980.
- [91] B. Rutily. *Solutions exactes de l’équation de transfert et applications astrophysiques*. thèse d’état, Université Claude Bernard-Lyon 1, 1992.
- [92] B. Rutily. Introduction à la théorie du transfert radiatif de l’énergie. In Ph. Stee, editor, *Forum du GRETA “Transfert de rayonnement en Astrophysique”, 17-19 Mai 1999*, Observatoire de la Côte d’Azur, Nice, 2000.
- [93] B. Rutily and J. Bergeat. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 51 :823–847, 1994.
- [94] B. Rutily and J. Bergeat. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 52 :857–885, 1994.
- [95] G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative processes in Astrophysics*. John Wiley & sons, New York, 1979.
- [96] D. Salzmann and Y. T. Lee. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 54 :339–344, 1995.
- [97] J. D. Scudder. *ApJ*, 398 :299–318,319–349, 1992.
- [98] J. D. Scudder. *ApJ*, 427 :446–452, 1994.
- [99] M. J. Seaton, Yu Yan, D. Mihalas, and Anil K. Pradhan. *MNRAS*, 266 :805–828, 1994.
- [100] J. F. Shaw, M. Mitchner, and C. H. Kruger. *Phys. Fluids*, 13(2) :325–338,339–345, 1970.
- [101] E. C. Shoub. *ApJ*, 34 :259–275,277–294, 1977.

- [102] E. C. Shoub. *ApJ*, 266 :339–369, 1983.
- [103] E. C. Shoub. *ApJ*, 389 :558–589, 1992.
- [104] T. W. Shyn and S. Y. Cho. *Phys. Review A*, 40(3) :1315–1320, 1989.
- [105] E. Simonneau and L. Crivellari. Some iterative methods for radiative transfer problems. In Ph. Stee, editor, *Forum du GRETA "Transfert de rayonnement en Astrophysique", 17-19 mai 1999*, Observatoire de la Côte d'Azur, Nice, 2000.
- [106] L. Sirovich. *Phys. Fluids*, 5(8) :908–918, 1962.
- [107] I. I. Sobelman. *Atomic Spectra and Radiative Transitions*, volume 1 of *Springer Series in Chemical Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [108] I. I. Sobelman, L. A. Vainshtein, and E. A. Yakubov. *Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines*, volume 7 of *Springer Series in Chemical Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [109] V. V. Sobolev. *A treatise on Radiative Transfer*. D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, revised edition, 1963.
- [110] L. Spitzer. *Physics of fully ionised gases*. Interscience Publishers, New York, 1956.
- [111] L. Spitzer and R. Härm. *Phys. Rev.*, 89(5) :977–981, 03 1953.
- [112] M. Stix. *The Sun*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [113] T. L. Swihart. *Radiation transfer and stellar atmospheres*. Packart Publishing House, Tucson, Arizona, 1981.
- [114] A. Temkin and J. C. Lamkin. *Physical Review*, 121(3) :788–798, 1961.
- [115] P. Welander. *Ark. Fys.*, 7(44) :507–553, 1954.
- [116] J. F. Williams. *J. Phys. B*, 8(10) :1683–1692, 1975.
- [117] J. F. Williams. *J. Phys. B*, 8(13) :2191–2199, 1975.



## Résumé

Cette thèse présente une étude théorique d'un modèle d'atmosphère stellaire, modélisée comme une couche plan-parallèle irradiée sur une face, avec des électrons non thermalisés a priori. Les électrons sont caractérisés par leur fonction de distribution des vitesses (fdv), que l'on cherche à calculer en même temps que les autres grandeurs de l'atmosphère. Notre principal objectif est de comprendre le mécanisme de thermalisation des électrons, qui tend à rapprocher leur fdv de la fonction de Maxwell-Boltzmann lorsque les collisions élastiques dominent les interactions inélastiques des électrons avec le milieu ambiant, une hypothèse universellement admise en théorie des atmosphères stellaires. Les processus inélastiques (collisionnels ou radiatifs) perturbent cet équilibre, et la fdv des électrons peut s'écarter considérablement de l'équilibre maxwellien aux hautes énergies. De tels écarts modifient fortement les populations atomiques et le champ radiatif. Les calculs numériques consistent en la comparaison de trois modèles d'atmosphères : en équilibre thermodynamique local (ETL), hors ETL avec électrons thermalisés, et hors ETL avec électrons non thermalisés a priori. Nous avons résolu ce problème dans un plasma d'hydrogène pur en prenant en compte les principaux types d'interaction présents dans les atmosphères stellaires. L'équation cinétique des électrons a été résolue en calculant son terme de collision élastique à l'aide d'un modèle BGK longuement justifié dans la thèse. Notre principale contribution se situe au niveau du transfert de rayonnement. Nous avons utilisé, et surtout développé, les codes de l'équipe "Transfert" de l'Observatoire de Lyon. Les calculs montrent que la fdv des électrons s'écartera considérablement d'une maxwellienne dans la région hors ETL de l'atmosphère stellaire. Pour conclure, nous envisageons quelques extensions possibles de ce travail et certaines applications astrophysiques.

## Mots-clés

Théorie cinétique des gaz, plasmas, transfert radiatif, thermalisation des électrons, étoiles : atmosphères, soleil : photosphère.

## Title

Thermalisation of electrons in a stellar atmosphere

## Abstract

In this thesis we draw a theoretical study of a stellar atmosphere, modelled as a parallel-plane slab irradiated on one face, where free electrons are not thermalised. Free electrons are characterized by their velocity distribution function : the electron distribution function (edf), which is calculated in addition to other atmospheric thermodynamical quantities. Our main objective is to understand the mechanism leading to the thermalisation of electrons, where the edf tends toward the Maxwell-Boltzmann distribution as long as elastic collisions dominate inelastic interactions of electrons with the plasma. This hypothesis is always accepted, in stellar atmospheres theory. Inelastic (collisional or radiative) processes disturb this equilibrium, and the edf can considerably deviate from the maxwellian equilibrium at high energies. Such deviations strongly modify atomic populations and the radiative field. Numerical computations consist in the comparison between three stellar atmosphere models : in local thermodynamic equilibrium (LTE), non-LTE models with thermalised electrons, and we relax the hypothesis of a priori thermalised electrons. This problem was solved in this thesis by using an hydrogen plasma and the main types of interactions found in stellar atmospheres. The kinetic equation of electrons was solved using a BGK model for elastic collisions, this model being extensively detailed in the thesis. Our main contribution consists in correctly solving the radiative transfer equation. We used, and especially developed, the code from the Transfert team at CRAL Observatoire de Lyon. We show that the edf considerably deviate from a maxwellian distribution over all non-LTE part in the stellar atmosphere. Finally, some extensions and astrophysical applications of this work are discussed.

## Keywords

Kinetic theory of gases, plasmas, radiative transfer, electron thermalisation, stars : atmospheres, sun : photosphere.