



Résolution rapide d'équations intégrales pour un problème d'antennes par des méthodes d'ondelettes

Cyril Safa

► To cite this version:

Cyril Safa. Résolution rapide d'équations intégrales pour un problème d'antennes par des méthodes d'ondelettes. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2001. Français. NNT: . tel-00006317

HAL Id: tel-00006317

<https://theses.hal.science/tel-00006317>

Submitted on 24 Jun 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

*présentée devant l'université de RENNES I
le 26 septembre 2001,*

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

CYRIL SAFA

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale Mathématiques, Informatique, Signal,
Électronique et Télécommunications

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

**RÉSOLUTION RAPIDE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES POUR UN
PROBLÈME D'ANTENNES PAR DES MÉTHODES D'ONDELETTES.**

COMPOSITION DU JURY:

Professeur A. COHEN	Rapporteur	Université P. et M. Curie, Paris,
Professeur M. COSTABEL	Directeur de thèse	Université Rennes I,
Professeur M. DAUGE	Examineur	Université Rennes I,
Professeur M. DRISSI	Examineur	INSA Rennes,
Professeur C. SCHWAB	Rapporteur	ETH Zürich.

Table des matières

1	Introduction.	2
1.1	Origine du problème et objectifs de la thèse.	3
1.1.1	Origine du problème.	3
1.1.2	Les ondelettes pour la résolution d'équations intégrales.	4
1.1.3	Les ondelettes pour le problème de Maxwell: deux thèses, deux visions.	5
1.1.4	Résultats et comparaisons.	5
1.2	Réduction du problème.	7
1.2.1	Modélisation du problème initial.	7
1.2.2	Equations intégrales.	9
1.2.3	Réduction du problème, objectifs.	10
1.2.4	Structure du document.	12
2	Opérateurs sur une surface Γ régulière.	13
2.1	Généralités topologiques.	13
2.2	Gradient surfacique.	15
2.3	Divergence surfacique.	16
2.4	Rotationnels	17
2.5	Laplacien surfacique.	18
2.6	Potentiel de simple couche.	18
3	Equation intégrale pour le problème de Maxwell.	20
3.1	Le problème de Maxwell.	20
3.2	L'équation intégrale.	21
3.3	Espaces	26
3.3.1	Espace des solutions.	26
3.3.2	L'espace dual $\hat{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$	29
3.4	Décomposition de l'équation intégrale.	32
4	Résolution numérique.	37
4.1	Espaces de multirésolution et éléments finis classiques.	37
4.2	Méthode de Galerkin dans $\mathcal{X}$	44
4.3	Le système modifié: perturbation et changement de variables.	55
4.3.1	Le système perturbé.	55
4.3.2	Laplacien discret.	62
4.3.3	Traitement des constantes: le système augmenté.	65

5	Ondelettes.	76
5.1	Multirésolution sur un élément de référence.	77
5.2	Ondelettes sur la surface.	78
5.2.1	Géométrie, bases nodales de multirésolution.	78
5.2.2	Ondelettes.	80
5.2.3	Stabilité.	81
5.2.4	Moments nuls.	83
5.3	Résolution du problème perturbé.	88
5.3.1	Estimation d'erreur pour la méthode perturbée.	89
5.3.2	Préconditionnements.	92
5.3.3	Décroissance des coefficients, moments nuls.	96
5.3.4	Seuillage.	97
5.4	Résolution du problème compressé, estimations d'erreurs, convergence.	98
5.4.1	Choix de la matrice de seuillage.	99
5.4.2	Stabilité.	101
5.4.3	Estimation d'erreur.	103
6	Cas d'une plaque ouverte.	107
6.1	Géométrie et topologies.	107
6.2	Opérateurs	114
6.3	Potentiel de simple couche.	116
6.4	Equation intégrale.	117
7	Espaces.	119
7.1	Espaces des solutions.	119
7.2	Espace image.	128
7.2.1	Définition, caractérisations.	128
7.2.2	Décomposition de Hodge.	130
7.2.3	Encore une caractérisation de $\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$	134
7.2.4	Projecteurs.	137
7.3	Décomposition de l'équation intégrale.	137
8	Résolution numérique.	140
8.1	Espaces discrets: géométrie.	140
8.2	Ondelettes.	142
8.2.1	Cas sans conditions au bord.	143
8.2.2	Stabilité.	143

8.2.3	Cas avec condition «nulle» au bord.	146
8.2.4	Moments nuls.	151
8.3	Méthode de Galerkin pour la résolution de l'équation intégrale.	156
8.4	Le système modifié: perturbation et changement de variables.	160
8.4.1	Le système perturbé	160
8.4.2	Laplacien discret.	166
8.4.3	Traitement des constantes: le système augmenté.	169
8.5	Estimations d'erreurs pour la méthode perturbée.	175
8.6	Préconditionnement.	180
8.7	Seuillage.	184
8.8	Stabilité, estimation d'erreur, convergence.	188
8.8.1	Les estimations par blocs.	188
8.8.2	Stabilité, taux de convergence.	197

1 Introduction.

Le sujet de cette thèse est la résolution du problème de diffraction par un obstacle (ou écran, *screen* en Anglais) métallique d'une onde électromagnétique en régime harmonique. Il a fait l'objet de nombreuses recherches et les méthodes de résolution numérique sont multiples: on peut modéliser le problème en dimension trois et appliquer des schémas numériques à l'aide des éléments finis de J. C. NÉDÉLEC [36], [37], cf. P. MONK [35], R. HIPTMAIR [26], ou bien on peut se ramener à un problème bidimensionnel par le biais d'*équations intégrales*. Un large éventail des méthodes intégrales est donné dans COLTON-KRESS [9].

Le choix des méthodes intégrales, dans la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) avec conditions aux limites en général, est historiquement assez ancien, et a connu un essor très dynamique suite aux travaux de W. WENDLAND [49], et de ses élèves. Deux points cruciaux sont au cœur de ces méthodes:

1. la coercivité de l'opérateur intégral dans les espaces d'énergie (inégalités de Gårding, forte ellipticité), qui est la propriété clef permettant l'usage des méthodes de Galerkin pour la résolution numérique du problème,
2. les estimations a priori sur une échelle d'indices de Sobolev, qui prédisent de la vitesse de convergence d'une méthode de Galerkin utilisée. Ces estimations sont étroitement liées aux structures algébrique et géométrique du problème en question: régularité des coefficients de l'opérateur initial, régularité du second membre, régularité de la frontière sur laquelle on impose les conditions aux limites.

L'intérêt majeur des méthodes intégrales est le fait que l'on se ramène à discrétiser un objet 2D plutôt que 3D. L'inconvénient est la forme de la matrice que l'on récupère, par exemple, avec une méthode de Galerkin: en général, elle est *pleine*.

Pour le problème de Maxwell, si l'on reste dans le cadre des résolutions par des méthodes intégrales, de nombreuses idées ont été proposées: citons A. BENDALI [3], utilisant les éléments finis de RAVIART-THOMAS [42], R. MacCAMY & E. STEPHAN ainsi que M. COSTABEL & E. STEPHAN [14] ramenant le problème à un opérateur fortement elliptique. Les deux types de méthodes ont été testés dans la pratique; on consultera la thèse de K. MAATOUK [32] pour la seconde méthode.

Depuis maintenant plus de dix ans, afin d'accélérer les résolutions d'EDP avec conditions aux limites par des méthodes intégrales, l'idée d'utiliser une base d'*ondelettes* (dont l'auteur est Y. MEYER, cf. [34]) dans une analyse multi-échelle a fait son chemin; un grand nombre de travaux enthousiastes ont été (et sont encore) conduits pour divers types d'opérateurs intégraux. Citons SCHNEIDER [44] et DAHMEN [16] qui ont étudié la question dans un cadre théorique général, l'équipe associée à W. DAHMEN [17], ainsi que l'article de coauteurs DAHMEN-STEVENSON [19] et COHEN-DAHMEN-DEVORE [8], l'équipe associée à C. SCHWAB [40], [41], et les articles d' A. RATHSFELD [22].

En ce qui concerne la résolution du problème de Maxwell par des équations intégrales, il n'y a pas eu, à ce jour, de méthodes numériques utilisant les ondelettes. On peut esquisser quelques raisons à ce fait: d'abord il y a le choix de l'opérateur intégral, et des espaces fonctionnels associés. Par exemple, dans cette thèse, l'opérateur considéré **n'est pas coercif** sur son espace naturel, et cette singularité exclut l'utilisation d'une méthode de Galerkin quelconque. Ensuite, il y a le choix de la construction des ondelettes, et même pour des espaces fonctionnels «classiques» (espaces de Sobolev), il n'y a pas (encore?) de construction «universelle». Cependant, il y a bien deux approches qui se retrouvent: la première idée se rapproche, dans son principe, des éléments finis de RAVIART-THOMAS, et consiste à construire des ondelettes «spéciales» (dans $H(\text{div})$); cette idée a été abordée (séparément) par K. URBAN [48] dans ses articles, et, numériquement, par R. LOISON [31] dans sa thèse. La deuxième idée serait de modifier l'opérateur intégral de départ pour obtenir un opérateur intégral sur des espaces fonctionnels «classiques» ($H^s \dots$). Cette idée très séduisante, dans la perspective d'utiliser des méthodes liées aux éléments finis classiques, nécessite quelques précautions; en particulier, il faut s'assurer que les problèmes énoncés sont toujours équivalents, sous peine d'implanter une méthode qui converge vers une mauvaise solution. C'est cette dernière approche qui a été choisie pour fil directeur dans cette thèse.

1.1 Origine du problème et objectifs de la thèse.

1.1.1 Origine du problème.

Le problème concret est le rayonnement d'une structure physique illuminée par un champ sinusoïdal incident. Cette structure est composée d'un diélectrique sur lequel on a posé une plaque métallique d'épaisseur négligeable

devant la longueur d'onde du champ incident. L'étude de l'objet rayonnant était le sujet de la thèse de S. BÉLINE [2] à l'INSA de Rennes, et ce fut le point de départ de deux thèses simultanées à Rennes: celle de R. LOISON [31] à l'INSA de Rennes, et la présente thèse.

Dans la thèse de S. BÉLINE, et comme nous le verrons dans le paragraphe 3 pour les équations intégrales surfaciques, le problème était ramené à la résolution numérique d'équations intégrales mixtes, bidimensionnelles et tridimensionnelles, l'inconnue étant le courant de polarisation qui apparaît du fait de la présence du diélectrique (courant «volumique») et de la métallisation (courant «surfacique»). La méthode utilisée («méthode des moments») consistait en la décomposition du courant induit suivant une base multi-échelle constituée de polynômes de degré 1 par morceaux. Comme souligné dans cette thèse, l'inconvénient majeur d'une telle méthode était le caractère plein de la matrice discrète obtenue, qui rendait l'inversion (et donc le calcul du champ diffracté) couteuse en temps.

Des calculs numériques ont été menés avec succès pour le problème d'antenne simple, et confirmèrent la difficulté de passer à des structures plus complexes comme les *réseaux d'antennes*, ce qui intéressait aussi les industriels.

Les pistes envisagées pour réduire le temps de calcul étaient fondées sur les caractères symétriques d'une structure particulière, mais elles n'offraient qu'une réduction partielle sans permettre une méthode générale peu onéreuse applicable à tout type de structure.

1.1.2 Les ondelettes pour la résolution d'équations intégrales.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'utilisation de bases d'ondelettes dans la résolution numérique d'équations intégrales permet dans de nombreux cas de réduire de manière significative le temps de calcul des solutions. Le principe est le suivant: en développant les vecteurs en jeu suivant une base d'ondelettes à supports finis, la matrice du problème discrétisé est constituée de coefficients petits par rapport à sa diagonale. En négligeant ces petits coefficients dans la matrice discrète, suivant un critère déterminé (*seuillage*), on obtient une matrice creuse avec peu de coefficients non nuls, plus rapidement inversible.

L'idée de départ du projet de thèse à l'INSA était d'utiliser ces méthodes de résolution par ondelettes avec pour base de travail la thèse de S. Béline, afin de réduire les temps de calculs et finalement d'essayer de résoudre les problèmes de réseaux d'antennes.

On peut dire que les résultats dans la thèse de R. LOISON ont confirmé les espérances: en substance, les résolutions par ondelettes permettent des calculs qui s'avéraient totalement exclus par la «méthode des moments classiques» décrite dans la thèse de S. Béline, et la méthode par ondelettes proposée a été appliquée à des réseaux d'antennes.

1.1.3 Les ondelettes pour le problème de Maxwell: deux thèses, deux visions.

Les deux thèses commencées en septembre 1997 à Rennes avaient pour objectif de mettre en évidence une technique de résolution du problème de Maxwell par le biais d'équations intégrales, en utilisant des méthodes d'ondelettes. Si le point de départ et les objectifs étaient comparables, les motivations étaient bien distinctes: d'un côté, pour la thèse de R. LOISON, en collaboration avec le CNES et Alcatel à Toulouse, il s'agissait d'obtenir des résultats convaincants et un code implémenté fonctionnel rapidement; cela imposait une étude pratique plutôt que théorique. D'un autre côté, pour la thèse présentée ici, l'accent était porté sur les résultats théoriques: étude de l'opérateur intégral, estimations d'erreurs, critères de compressions, etc....

Il ne s'agissait en aucun cas de faire deux thèses concurrentielles, mais plutôt deux thèses *complémentaires*; l'idée était la suivante: les résultats théoriques pouvaient aider à l'implémentation d'un code, et à l'analyse des résultats (taux de convergence, taux de compression,...) tandis que les résultats numériques pouvaient confirmer les résultats théoriques obtenus.

Dans les deux cas, il ne s'agissait pas non plus de construire des ondelettes «nouvelles» associées à ce problème particulier, mais plutôt de voir comment on pouvait utiliser les ondelettes que l'on trouve dans la littérature pour notre problème.

Les nombreux échanges entre les deux groupes de travail furent enrichissants d'un point de vue professionnel, la similarité des travaux permettant de connecter la théorie à la pratique.

1.1.4 Résultats et comparaisons.

Les deux thèses ont suivi leurs chemins et ont abouti, pour l'une (R. LOISON), à de bons résultats, un code informatique fonctionnel, et une méthode permettant l'étude de structures complexes qui étaient difficiles ou impossibles à traiter auparavant, et de l'autre, la présente thèse, à des ré-

sultats théoriques cherchés (et démontrés), qui confirment en partie certains résultats pratiques: les taux de compression, trouvés par R. LOISON donnent des matrices, après seuillage, contenant $N \log N$ éléments non nuls, à constantes près, où N désigne la taille de la matrice relative au problème discrétisé. La complexité algorithmique suit aussi cette courbe. En conséquence, *les méthodes d'ondelettes fonctionnent et fonctionnent bien pour la résolution d'équations intégrales pour le problème de Maxwell*. D'ailleurs, le fait de trouver des résultats similaires en théorie et en pratique est à la fois rassurant et encourageant.

En ce qui concerne les méthodes proposées dans les deux thèses, elles sont à la fois similaires et différentes: similaires dans leurs élaborations, équations intégrales, fonctions de base (fonctions d'échelle), seuillage, sont identiques; différentes dans leurs mises en œuvre (structures géométriques, constructions des ondelettes, critères a priori).

On peut toutefois comparer les complexités des deux méthodes, leurs avantages et inconvénients.

- Le gros avantage de la méthode présentée par R. LOISON est la simplicité des ondelettes utilisées. L'«inconvenient», outre l'absence de certitude sur la validité mathématique de la méthode proposée, inhérente aux objectifs fixés cités plus haut, est la structure des métallisations imposées: planes et à caractères rectangulaires, afin d'utiliser de la manière la plus simple possible des ondelettes construites par produit tensoriel.

Les résultats numériques obtenus sont convaincants, et permettent d'envisager la résolution de systèmes physiques complexes avec un grand nombre d'inconnues.

- L'avantage de la méthode proposée ici est bien son caractère «intrinsèque», en utilisant une triangulation de la surface par des triangles «courbes», ce qui est bien plus souple pour toute discrétisation, et permet de traiter réellement tout type de métallisation. En outre, on n'utilise des ondelettes construites à partir d'éléments finis *continus* uniquement, en passant à des méthodes non conformes, et un nombre de moments nuls minimal. Ceci est à comparer avec des méthodes conformes qui exigeraient des éléments finis C^1 , donc des fonctions de bases plus lourdes, et avec des méthodes exigeant un nombre de moments nuls élevé (2 voire 3), qui donnent des ondelettes à très grands supports, et pratiquement difficiles à mettre en œuvre. De ce point de vue, les deux thèses ont en

commun d'utiliser les outils d'approximation les plus simples possibles. L'inconvénient, outre l'absence de tests numériques, inhérente aux objectifs fixés plus haut, est la lourdeur des ondelettes utilisées, comparées à celles de R. LOISON: sur un maillage et une structure quelconques, et ceci est un phénomène connu, on devrait ne voir le bénéfice d'une telle méthode qu'en allant vers des systèmes à grands nombres d'inconnues. Les résultats obtenus pour la compression, et donc la complexité algorithmique, sont conformes aux tests numériques effectués par R. LOISON.

1.2 Réduction du problème.

1.2.1 Modélisation du problème initial.

Pour cette section, on pourra se référer à COLTON-KRESS [9], HAZARD-LENOIR [25].

Le problème initial est donc le rayonnement d'une structure diélectrique finie sur laquelle on a posé une plaque métallique d'épaisseur négligeable devant la longueur d'onde incidente. On cherche à calculer le champ diffracté en fréquence, c'est-à-dire en régime harmonique. Le diélectrique est modélisé par une partie ouverte relativement compacte et connexe Ω de $\mathbb{R}^3$, et la plaque métallique est une partie Γ ouverte et simplement connexe de la frontière $\partial\Omega$. On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est C^∞ par morceaux, et on note $\mathbf{n}$ la normale extérieur de $\partial\Omega$.

Les caractéristiques électromagnétiques du diélectrique sont les données de sa permittivité ε_1 et de sa perméabilité μ_1 . En dehors de Ω , on suppose que la perméabilité et la permittivité sont celles du vide, notées respectivement μ_0 et ε_0 . Les équations de Maxwell s'écrivent, en régime harmonique et au sens des distributions dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma}$:

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = \perp i\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

où ε (resp. μ) vaut ε_1 dans Ω (resp. μ_1), et ε_0 en dehors (resp. μ_0). Le champ $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ représente la somme des champs incident $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ et diffracté $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$. On cherche donc à calculer le champ diffracté.

On impose deux conditions physiques aux limites.

1. L'une sur la plaque, celle des conducteurs parfaits, donnant l'annulation

de la composante tangentielle du champ total:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

2. L'autre est la condition de décroissance du champ diffracté à l'infini, appelée condition de radiation de Silver-Müller, cf. [9], et 3.

On impose aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ d'être dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, et leurs rotationnels d'être dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma})$ ainsi que dans $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ et dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$. Ceci n'implique nullement que les rotationnels sont dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ tout entier.

En revanche, *compte tenu de la condition d'annulation de la composante tangentielle du champ électrique sur Γ* , on obtient

$$\mathbf{E} \in H_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$$

avec

$$H_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) := \{\mathbf{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \mid \mathbf{rot} \mathbf{U} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)\}.$$

Comme conséquence de l'écriture des équations de Maxwell au sens distributionnel sur $\mathbb{R}^3$, on obtient les relations de saut au travers de la surface $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}, \\ [\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}, \\ [\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En première approximation, on posera

$$\mu_1 = \mu_0.$$

Ceci correspond à une réalité physique, la permittivité étant la caractéristique la plus sensible au changement de milieux. En conséquence, on obtient les

relations de saut suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\
\mathbf{n} \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\
[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\
[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}, \\
[\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}, \\
[\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,
\end{aligned}$$

1.2.2 Equations intégrales.

Réécrivant les équations de Maxwell au sens distributionnel sur $\mathbb{R}^3$ tout entier, on obtient:

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = \perp i\omega\varepsilon\mathbf{E} \perp + [\mathbf{H} \times \mathbf{n}]\delta_\Gamma. \end{cases}$$

En éliminant $\mathbf{H}$, sachant que μ est constante sur $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \varepsilon\mu\omega^2\mathbf{E} \perp i\omega\mu[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]\delta_\Gamma.$$

Ce qui s'écrit, en posant $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$,

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = k^2\mathbf{E} + \mathbf{j}_c\delta_\Gamma.$$

On posera aussi

$$k_i^2 := \varepsilon_i\mu\omega^2, \quad i = 0, 1,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} \perp k_0^2\mathbf{E} = \mathbf{j}_d + \mathbf{j}_c,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_c &= \perp i\omega\mu[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]\delta_\Gamma \\ \mathbf{j}_d &= (k^2 \perp k_0^2)\mathbf{E} \end{aligned}$$

et on posera

$$\mathbf{j} := \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_d.$$

En notant

$$G_0(x \perp y) := \frac{e^{ik_0|x \perp y|}}{|x \perp y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

le noyau de Green associé à l'opérateur de Helmholtz $\Delta \perp k_0^2$, et en posant

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= G_0 \star \mathbf{j}, \\ \Phi &:= \operatorname{div} \mathbf{A}, \end{aligned}$$

on trouve la formule de représentation du champ diffracté

$$\mathbf{E}^d = \perp \frac{1}{k_0^2} \nabla \Phi \perp \mathbf{A}.$$

Les physiciens appellent $\mathbf{A}$ le potentiel vectoriel, et Φ le potentiel scalaire. On en déduit un système d'équations intégrales mixte (volumique et surfacique) en écrivant la condition de nullité du champ total sur la plaque métallique, et l'écriture du champ incident à l'intérieur du diélectrique:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i &= \frac{1}{k_0^2} \mathbf{n} \times \nabla \Phi + \mathbf{n} \times \mathbf{A} \quad \text{sur } \Gamma, \text{ condition électrique,} \\ \mathbf{E}^i &= (k^2 \perp k_0^2)^{\perp 1} \mathbf{j}_d + \frac{1}{k_0^2} \nabla \Phi + \mathbf{A} \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

les inconnues étant $\mathbf{j}_d$ et $\mathbf{j}_c$.

1.2.3 Réduction du problème, objectifs.

Comme nous l'avons vu, le problème physique se ramène à la résolution de deux équations intégrales, contenant des intégrales volumiques et surfaciques. Cependant, l'étude qui va suivre ne portera que sur la partie surfacique, c'est-à-dire le problème **sans le diélectrique**. En effet, le problème peut aussi se ramener totalement à des intégrales surfaciques, en séparant par exemple le problème intérieur et extérieur, et en utilisant une représentation indirecte, avec des conditions aux bords fixés. On renvoie, pour plus de détails, à COLTON-KRESS [9]. Essentiellement, on retrouvera d'ailleurs le

même opérateur intégral que pour le problème sans diélectrique. La partie «singulière» du problème est donc bien l'étude de la diffraction d'un champ par un écran métallique. De nombreuses études ont été menées dans ce sens, on renvoie à [46], et les ses références citées.

On notera que l'opérateur intégral obtenu n'est pas coercif dans l'espace naturel de résolution, ce qui exclut l'usage d'une méthode de Galerkin quelconque. Nous verrons dans le document pourquoi.

Précisément, dans [46], les problèmes de diffraction par un écran métallique ont été traités, et la résolution utilisait des éléments finis bidimensionnels classiques. On obtenait les taux de convergence suivants, pour la plaque ouverte:

$$\|\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_h\| = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2} \pm \varepsilon}),$$

où h désignait le pas de résolution, et ε était un réel arbitraire strictement compris entre 0 et $1/2$. La norme utilisée ici est la norme d'énergie. On avait les mêmes résultats dans [29], [43], avec des méthodes tridimensionnelles utilisant les éléments finis de Nédélec. Comme nous l'avons vu, en appliquant une méthode de Galerkin sur les équations intégrales, on obtient une matrice pleine, ce qui ralentit de manière considérable le temps de calcul. On sait que les méthodes d'ondelettes pourraient avoir pour effet de réduire ce nombre d'éléments non nuls par une condition de seuil sans trop détruire le taux de convergence. Les questions auxquelles nous répondons dans cette thèse sont les suivantes:

1. Des méthodes d'ondelettes sont-elles applicables à l'opérateur intégral vu précédemment? Si oui, mettre en évidence une base d'ondelette adaptée, et, de préférence, construite à partir d'éléments finis 2D classiques. Cela contient aussi les méthodes de seuillage.
2. Les taux de convergence, comparés à [46] sont-ils conservés? Autrement dit, un travail sur les estimations d'énergie est indispensable.
3. Peut-on dégager une méthode de résolution «intrinsèque», par rapport à la géométrie de l'écran (surface fermée, plaque ouverte...)? Cette question est en étroit rapport avec les estimations d'énergie et les singularités de la solution.

Les réponses que l'on trouvera seront d'ailleurs positives.

Encore une fois, l'accent est mis sur la particularité de la résolution. Il ne

faudrait pas perdre de vue que tout cela est sujet à des restrictions importantes pour la mise en œuvre pratique. En ce qui concerne le calcul effectif des éléments de la matrice, pour l'*intégration numérique*, on pourra se référer à [44], [22]; pour le stockage de données, et la manipulation des coefficients, on pourra se référer à [19], [18], [40]. Tous ces caractères sont assez clairs dans l'état actuel de la bibliographie à ce propos.

1.2.4 Structure du document.

Le document se présente en deux grandes parties:

1. on étudie le problème de diffraction dans le cas particulier où la plaque métallique est fermée, compacte, régulière et simplement connexe. Le mécanisme de résolution est fondé sur la décomposition de Hodge et sur la réécriture du problème en quatre variables scalaires. On applique ensuite des méthodes de résolution par ondelettes sur la matrice 4×4 par blocs obtenue.
2. La structure de résolution étant ainsi établie sur le cadre régulier, on l'adapte sur le cas où la plaque est une partie polygonale et simplement connexe de la surface précédente (cas de la *plaque ouverte*). C'est le cas le plus intéressant dans la pratique. De nombreux problèmes techniques surviennent alors, l'adaptation n'étant pas aussi triviale que cela: espaces, décomposition(s) de Hodge, et méthode(s) de seuillage pour la matrice discrète diffèrent parfois singulièrement de la première partie. On se bornera, dans cette deuxième partie à détailler les points qui diffèrent de la première, car, encore une fois, le schéma général de résolution est identique.

La méthode de résolution présentée (via les décompositions de Hodge) ainsi que la forme de la matrice discrète obtenue est à rapprocher du tout récent article de A. BUFFA, M. COSTABEL et C. SCHWAB [6], qui ont travaillé, avec d'autres motivations, sur la résolution du problème de Maxwell pour un écran métallique de forme polyédrique.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, on commence par un bref aperçu de la géométrie du problème considéré dans la première partie.

2 Opérateurs sur une surface Γ régulière.

Pour cette section, on se réfère aux ouvrages d'HÖRMANDER [27], CHEN-ZHOU [7], LIONS-MAGENES [30] et DAUTRAY-LIONS [21] pour les espaces fonctionnels et les opérateurs sur ces espaces.

2.1 Généralités topologiques.

Une surface $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ est de classe C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, il existe $\eta > 0$, $D_{\mathbf{x}}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ contenant un point $\sigma_{\mathbf{x}}$ et $\gamma_{\mathbf{x}}$ une application bijective de $D_{\mathbf{x}}$ vers $B(\mathbf{x}, \eta) \cap \Gamma$, de classe C^k telle que $\gamma_{\mathbf{x}}(\sigma_{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$, et telle que son gradient soit de rang 2 en tout point. Le bord d'un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ est une surface *fermée*, et en particulier, une surface fermée est compacte. On se fixe dans la suite une surface fermée de classe C^∞ , *simplement connexe*.

On se donne un recouvrement fini d'ouverts relatifs (M_α) et de bord C^∞ , simplement connexes, et une partition de l'unité (χ_α) relative à ce recouvrement, avec des notations évidentes. On se donne alors une famille de domaines $D_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, et une famille $(\mathbf{x}_\alpha)_\alpha$ d'applications de D_α dans M_α , de classe C^∞ , bijectives. Chaque $\mathbf{x}_\alpha$ est appelée *carte locale*.

La variable générique de D_α sera dénommée $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)^T$; un point de la surface sera noté indifféremment $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{x}(\sigma) = (x_1(\sigma), \dots, x_3(\sigma))^T$.

Le plan tangent s'écrit $T_{\mathbf{x}_0} = Vect\{\partial_1^\sigma \mathbf{x}(\sigma_0), \partial_2^\sigma \mathbf{x}(\sigma_0)\}$ en un point $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\sigma_0) \in M_{\alpha_0}$ de la surface, avec $\partial_j^\sigma \mathbf{x} = \partial \mathbf{x} / \partial \sigma_j$. On définit le tenseur fondamental par $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, $g_{ij} := (\partial_i^\sigma \mathbf{x}, \partial_j^\sigma \mathbf{x})$ en un point σ , $(,)$ désignant le produit euclidien dans $\mathbb{R}^3$. Son inverse est noté $G^{\perp 1} = (g^{ij})$.

$$g := \det G = |\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}|^2 > 0, \quad (2.1.1)$$

$|\cdot|$ étant la norme euclidienne, $\times$ le produit vectoriel, sur $\mathbb{R}^3$. L'élément de surface s'écrit $ds = \sqrt{g} d\sigma$.

La normale est définie en tout point par $\mathbf{n}(\mathbf{x}(\sigma)) = g^{\perp 1/2} \partial_1^\sigma \mathbf{x} \times \partial_2^\sigma \mathbf{x}$.

Une distribution (scalaire) u sur Γ peut être écrite comme $u = \sum_\alpha u_\alpha$, avec $u_\alpha = \chi_\alpha u$, distribution à support dans $\overline{M_\alpha}$; par abus, on notera aussi $u_\alpha \equiv u_\alpha \circ \mathbf{x}_\alpha$, qui désignera aussi, comme fonction sur $\mathbb{R}^2$, son prolongement par 0 en dehors de D_α . On définit alors les espaces de Sobolev de manière classique

([7], [27]) sur Γ par:

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R} \\ u \in H^s(\Gamma) \iff \forall \alpha, u_\alpha \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

avec pour norme

$$\begin{aligned} \|u\|_s^2 &= \sum_{\alpha} \|u_\alpha\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

où $\widehat{u}_\alpha$ désigne la transformée de Fourier de u .

REMARQUES. Cette définition est spécifique aux surfaces fermées, dans le sens où l'on garde la $(L^2 \perp)$ dualité $(H^s, H^{\perp s})$. Dans le cas d'une surface ouverte, si on la suppose partie d'une autre surface M , i.e., $\overline{\Gamma} \subset M$, on peut définir deux types d'espaces de Sobolev distincts sur Γ , à partir d'un recouvrement de M : on commence par définir $H^s(M)$ de la même manière, et:

$$H^s(\Gamma) := \{u|_{\Gamma}; u \in H^s(M)\},$$

avec pour norme

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \inf \{ \|v\|_{H^s(M)}; v|_{\Gamma} = u \},$$

et

$$\widetilde{H}^s(\Gamma) := \{u \in H^s(M) \mid \text{Supp}(u) \subset \overline{\Gamma}\},$$

ce dernier espace étant muni de la norme induite. La dualité se retrouve cette fois ci entre H^s et $\widetilde{H}^{\perp s}$. En particulier, revenant au cas de la surface fermée, on peut définir $H^s(M_\alpha)$, qui est à distinguer de $\widetilde{H}^s(M_\alpha)$. On a l'inclusion-injection (pour $s \geq 0$):

$$\widetilde{H}^s(M_\alpha) \subset H^s(M_\alpha).$$

En outre, si on se donne une fonction $u \in H^s(\Gamma)$, alors

$$u|_{M_\alpha} \in H^s(M_\alpha).$$

On remarquera enfin qu'en changeant de partition, ou de recouvrement, on obtient des normes équivalentes.

2.2 Gradient surfacique.

Comme Γ est de classe C^2 , on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $\sigma \in D_\alpha$, $\sigma' \in D_{\alpha'}$, $|\sigma_3| < \delta$, $|\sigma'_3| < \delta$, $\mathbf{x}(\sigma) + \sigma_3 \mathbf{n}(\sigma) \neq \mathbf{x}(\sigma') + \sigma'_3 \mathbf{n}(\sigma')$. L'ensemble

$$\mathcal{V}_\delta(\Gamma) := \cup_\alpha \{ \mathbf{x}(\sigma) + \sigma_3 \mathbf{n}(\sigma); \boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \dots, \sigma_3) \in D_\alpha \times]-\delta, \delta[\} \quad (2.2.1)$$

définit un voisinage de Γ .

On note $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3)^T$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et

$$\mathbf{e}^\sigma = (\mathbf{e}_1^\sigma, \dots, \mathbf{e}_3^\sigma)^T = (\partial_1^\sigma \mathbf{x}, \partial_2^\sigma \mathbf{x}, \mathbf{n})^T \quad (2.2.2)$$

la base locale sur Γ .

On prolonge toute fonction scalaire $\varphi \in C^0(\Gamma)$ à $\mathcal{V}_\delta$ en $\check{\varphi}$ de manière continue par:

$$\forall \alpha, \forall \mathbf{x}(\sigma) \in M_\alpha, \check{\varphi}(\mathbf{x}(\sigma) + \sigma_3 \mathbf{n}(\sigma)) = \varphi(\mathbf{x}(\sigma)). \quad (2.2.3)$$

et sur $\mathcal{V}_\delta$,

$$\partial_i^{\mathbf{x}} \check{\varphi} = \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial x_i} \quad \partial^{\mathbf{x}} \check{\varphi} = (\partial_j^{\mathbf{x}} \check{\varphi})^T \quad (2.2.4)$$

$$\partial_i^\sigma \check{\varphi} = \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \sigma_i} \quad \partial^\sigma \check{\varphi} = (\partial_j^\sigma \check{\varphi})^T \quad (2.2.5)$$

Le gradient de $\check{\varphi}$, s'écrit $\nabla \check{\varphi} = \sum_i \partial_i^{\mathbf{x}} \check{\varphi} \mathbf{e}_i$.

Définition 2.2.1 *Le gradient surfacique $\nabla_\Gamma \varphi$ d'une fonction $\varphi \in C^1(\Gamma)$ est défini sur Γ par:*

$$\nabla_\Gamma \varphi(\mathbf{x}(\sigma)) := \mathbf{n}(\sigma) \times (\nabla \check{\varphi}(\mathbf{x}(\sigma)) \times \mathbf{n}(\sigma)). \quad (2.2.6)$$

Notons

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = (f_{ij}(\boldsymbol{\sigma})) = \begin{pmatrix} (\partial_1^\sigma \mathbf{x} + \sigma_3 \partial_1^\sigma \mathbf{n})^T \\ (\partial_2^\sigma \mathbf{x} + \sigma_3 \partial_2^\sigma \mathbf{n})^T \\ \mathbf{n}^T \end{pmatrix}. \quad (2.2.7)$$

alors $\det F(\sigma, 0) = \sqrt{g}$ et pour $|\sigma_3| < \delta$, $\det F > 0$. On notera $F^{\perp 1}(\boldsymbol{\sigma}) = (f^{ij}(\boldsymbol{\sigma}))$. On a la formule de changement de repère:

$$\mathbf{e} = F^{\perp 1}(\sigma, 0) \mathbf{e}^\sigma \quad (2.2.8)$$

et

$$\partial^{\mathbf{x}} \check{\varphi} = F^{\perp 1}(\sigma, 0) \partial^{\sigma} \check{\varphi}. \quad (2.2.9)$$

Et par un calcul direct,

$$\nabla_{\Gamma} \varphi = \sum_{j,k=1}^2 (\partial_j^{\sigma} \varphi) g^{jk} \mathbf{e}_k^{\sigma}. \quad (2.2.10)$$

ou encore

$$\nabla_{\Gamma} \varphi = \sum_{j=1}^2 (G^{\perp 1} \partial^{\sigma} \varphi)_j \mathbf{e}_j^{\sigma}, \quad (2.2.11)$$

en notant

$$\partial^{\sigma} \varphi = (\partial_1^{\sigma} \varphi, \partial_2^{\sigma} \varphi)^T. \quad (2.2.12)$$

2.3 Divergence surfacique.

Définition 2.3.1 Pour $\mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Gamma)^3$, la distribution $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}$ définie par

$$\forall \varphi \in C^{\infty}(\Gamma), \langle \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}, \varphi \rangle := \perp \langle \mathbf{u}, \nabla_{\Gamma} \varphi \rangle \quad (2.3.1)$$

est appelée divergence surfacique.

Pour $\mathbf{u} \in L^2(\Gamma)^3$, $\langle \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}, \varphi \rangle = \perp \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \overline{\nabla_{\Gamma} \varphi} \, ds$. On remarquera que $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} = \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{u} \perp (\mathbf{u}, \mathbf{n})\mathbf{n})$.

Le lemme suivant donne la divergence surfacique en coordonnées locales:

Lemme 2.3.1 Si $\mathbf{u} \in C^1(\Gamma)^3$, $\mathbf{u}_{\alpha} := \chi_{\alpha} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ tangentiel, i.e. $(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0$ sur Γ ; en posant $\mathbf{u}_{\alpha} = \sum_j u_j^{\alpha} \mathbf{e}_j^{\sigma}$,

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \partial_k^{\sigma} (\sqrt{g} u_k^{\alpha}). \quad (2.3.2)$$

Le lien avec la divergence 3D est donné par le

Lemme 2.3.2 Soit $\mathbf{u}_{\alpha} \in C_0^1(M_{\alpha})$, tangentiel, et

$$\mathbf{U}_{\alpha}(\mathbf{x}(\sigma) + \sigma_3 \mathbf{n}(\sigma)) := \mathbf{u}_{\alpha}(\sigma), \quad \sigma \in D_{\alpha}, \quad |\sigma_3| < \delta, \quad (2.3.3)$$

alors

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}_{\alpha} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{U}_{\alpha}|_{\Gamma} \quad (2.3.4)$$

2.4 Rotationnels

Définition 2.4.1 Soit $\mathbf{u} \in C^1(\Gamma)^3$ un champ tangentiel, et $\mathbf{U}$ son prolongement sur $\mathcal{V}_\delta(\Gamma)$ par (2.3.3). On pose alors

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} := (\mathbf{rot} \mathbf{U}|_\Gamma, \mathbf{n}) \quad (2.4.1)$$

rot_Γ sera appelé rotationnel scalaire.

Le rotationnel scalaire a deux expressions simples en coordonnées locales:

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} ((\partial_1^\sigma \mathbf{u}, \mathbf{e}_2^\sigma) \perp (\partial_2^\sigma \mathbf{u}, \mathbf{e}_1^\sigma)), \quad (2.4.2)$$

et

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_1^\sigma (G\mathbf{u}^\sigma)_2 \perp \partial_2^\sigma (G\mathbf{u}^\sigma)_1) \quad (2.4.3)$$

avec $\mathbf{u}^\sigma = (u_1^\sigma, u_2^\sigma)$, $\mathbf{u} = \sum_j u_j^\sigma \mathbf{e}_j^\sigma$.

Comme pour la divergence surfacique, le rotationnel vectoriel admet un opérateur adjoint vectoriel:

Définition 2.4.2 Pour un champ scalaire φ , on pose

$$\forall \mathbf{u} \in C^\infty(\Gamma), \langle \mathbf{rot}_\Gamma \varphi, \mathbf{u} \rangle := \langle \varphi, \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \rangle. \quad (2.4.4)$$

$\mathbf{rot}_\Gamma$ est appelé rotationnel vectoriel.

En coordonnées locales, il s'écrit:

$$\mathbf{rot}_\Gamma \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} ((\partial_2^\sigma \varphi) \mathbf{e}_1^\sigma \perp (\partial_1^\sigma \varphi) \mathbf{e}_2^\sigma) \quad (2.4.5)$$

Ces opérateurs sont liés au gradient et à la divergence par le

Lemme 2.4.1 Soit $\mathbf{u}$ un champ tangentiel, et φ scalaire, alors:

1.

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \text{div}_\Gamma (\mathbf{u} \times \mathbf{n}), \quad \nabla_\Gamma \varphi = \mathbf{n} \times \mathbf{rot}_\Gamma \varphi. \quad (2.4.6)$$

2.

$$\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0, \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma = 0. \quad (2.4.7)$$

2.5 Laplacien surfacique.

On définit le laplacien surfacique par $\Delta_\Gamma := \operatorname{div}_\Gamma \nabla_\Gamma$. Par le dernier lemme, $\perp \Delta_\Gamma = \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma$, et:

$$\forall u, v \in H^1(\Gamma), \langle \perp \Delta_\Gamma u, v \rangle = \int_\Gamma (\nabla_\Gamma u, \nabla_\Gamma v) ds = \int_\Gamma (\mathbf{rot}_\Gamma u, \mathbf{rot}_\Gamma v) ds. \quad (2.5.1)$$

Proposition 2.5.1 *L'opérateur $\perp \Delta_\Gamma$ est un isomorphisme de*

$$H_*^1(\Gamma) = \{u \in H^1(\Gamma) \mid \int_\Gamma u \, ds = 0\} \quad (2.5.2)$$

dans

$$H_*^{\perp 1}(\Gamma) = \{u \in H^{\perp 1}(\Gamma) \mid \langle u, 1 \rangle_{\perp 1,1} = 0\}. \quad (2.5.3)$$

Il induit un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $+2$ et $\perp \Delta_\Gamma^{\perp 1} H_*^{\perp 1/2}(\Gamma) \subset H^{3/2}(\Gamma)$.

2.6 Potentiel de simple couche.

Définition 2.6.1 *On se fixe un réel k ; on définit l'opérateur $V \equiv V(k)$ (pour la fréquence k) par*

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in L^2(\Gamma), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ (V\varphi)(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \frac{e^{ik|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Par la même formule (2.6.1), on peut définir l'opérateur V agissant sur des fonctions φ à valeurs dans $\mathbb{C}^3$. L'opérateur V sera appelé potentiel de simple couche (scalaire ou vectoriel).

Le noyau

$$G(x, y) := \frac{e^{ik|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|}$$

est appelé noyau de Green.

On rappelle (cf. [7]) que G est une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz

$$\Delta(\Delta + k^2)\varphi = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^3$$

et que V est un opérateur d'ordre ± 1 sur la surface Γ ; plus précisément, il a la propriété fondamentale suivante:

Théorème 2.6.1 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'opérateur $V_0 \equiv V(0)$ défini par*

$$V_0\varphi(x) := \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \varphi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}). \quad (2.6.2)$$

est un isomorphisme de $H^s(\Gamma)$ vers $H^{s+1}(\Gamma)$ et vérifie

$$\langle V_0\varphi, \varphi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, H^{-\frac{1}{2}}} \geq C \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2. \quad (2.6.3)$$

où C est une constante ne dépendant que de la surface Γ . Autrement dit, V_0 est un opérateur défini positif (ou coercif) de $H^{\frac{1}{2}}$ dans $H^{\frac{1}{2}}$, et induit un opérateur de Fredholm de $H^s(\Gamma)$ vers $H^{s+1}(\Gamma)$. Enfin, $V \perp V_0$ induit un opérateur compact de $H^s(\Gamma)$ vers $H^{s+1}(\Gamma)$.

Attention: ce dernier théorème n'est valable que pour des surfaces fermées régulières, en ce qui concerne la partie «Fredholm» pour des indices de Sobolev quelconques. Le résultat reste vrai si la surface est le bord d'un polyèdre (cf. [14] s'appuyant sur des résultats de [23]), et même pour des surfaces lipschitziennes, voir [45], si on se borne aux indices s tels que $|s + \frac{1}{2}| < 1$. Ces résultats avancés seront repris dans le traitement des plaques ouvertes; dans le cas des surfaces régulières, le théorème entre dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés, et pour une preuve complète, on se reportera à [7].

Enfin, (cf. [7], [9]) le potentiel de simple couche est lié à la divergence $3D$ par le

Lemme 2.6.1 *Pour un champ tangentiel $\mathbf{u}$,*

$$\operatorname{div} V\mathbf{u} = V(\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}) \quad \text{sur } \mathbb{R}^3. \quad (2.6.4)$$

3 Equation intégrale pour le problème de Maxwell.

Pour ce paragraphe, on se réfèrera à COLTON-KRESS [9], CHEN-ZHOU[7].

3.1 Le problème de Maxwell.

On va décrire brièvement le problème physique que l'on souhaite résoudre. On suppose que Γ est un écran métallique, sur lequel on jette une onde électromagnétique, dite *incidente*, $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$, et on souhaite calculer le champ total $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ régnant en dehors de Γ .

L'onde incidente étant supposée connue, il suffit de calculer l'onde *diffractée* $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ qu'induit la surface métallique.

On note Ω le domaine intérieur à Γ , et $\Omega^c = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Le problème en régime harmonique est modélisé par le système

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = \perp i\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega^c \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \quad (3.1.2)$$

et on suppose que ces équations sont vérifiées aussi par le champ incident, mais sur tout $\mathbb{R}^3$. Ici, ε désigne la permittivité du milieu Ω^c , et μ sa perméabilité, et on suppose que ces quantités sont constantes; on travaille aussi à fréquence ω fixe. Deux conditions aux limites sont imposés aux champs:

1. la condition (physique) signifiant que Γ est un métal parfait, modélisée par l'annulation de la partie tangentielle du champ électrique sur Γ :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.1.3)$$

2. et une condition à l'infini pour le champ diffracté, dite *condition de Silver-Müller*, cf. [9]: si

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{\|\mathbf{g}\|=1} |(\mathbf{rot} \mathbf{E}^s(\rho\mathbf{g})) \times \mathbf{g} \\ + \rho\mathbf{g} \operatorname{div} \mathbf{E}^s(\rho\mathbf{g}) \perp ik\rho\mathbf{E}^s(\rho\mathbf{g})| = 0. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Les équations (3.1.1) avec ces deux conditions aux limites forment le problème de Maxwell *extérieur*.

La condition électrique (3.1.3) jointe aux équations

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = \perp i\omega\varepsilon\mathbf{E} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1.6)$$

forment le problème de Maxwell *intérieur*.

Ce qui nous intéresse se passe à l'extérieur de Γ , et pour des raisons d'unicité, on impose à la valeur k de *ne pas être une fréquence de résonance*, autrement dit, que *le problème intérieur n'admet que la solution triviale*¹. La raison de cette hypothèse est que l'on souhaite élargir la résolution de ces équations à des surfaces ouvertes (variétés «à bord»), où ne subsiste plus ce distinguo entre intérieur et extérieur. De ce fait, en regardant le problème comme posé sur $\mathbb{R}^3$, on a imposé

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.7)$$

3.2 L'équation intégrale.

Encore une fois, on s'est fixé un cadre bien spécifique pour résoudre le problème de Maxwell extérieur (en particulier, on évite les fréquences de résonances). Ce cadre permet une résolution par **une** équation intégrale qui est «naturelle» pour deux raisons: d'abord elle découle de manière linéaire des hypothèses faites, et, d'autre part, en l'absence de domaine intérieur (pour des surfaces ouvertes), il n'y en a pas d'autre. Dans le cas qui nous concerne, d'autres approches existent, pour obtenir d'autres équations intégrales; on se référera à [9].

Posons

$$\mathbf{u} := \perp[\mathbf{H} \times \mathbf{n}] \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.2.1)$$

défini par la formule de Green

$$\perp \langle \mathbf{u}, \Phi \rangle_{\Gamma} = \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \overline{\Phi} \perp \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \overline{\Phi}) dx$$

1. Ou encore que k^2 n'est pas dans le spectre de l'opérateur surfacique $-\Delta_{\Gamma}$

pour toutes fonctions Φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$. Cela définit une distribution $\mathbf{u}\delta_\Gamma$ à support sur Γ . Comme

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

les équations de Maxwell s'écrivent au sens des distributions sur $\mathbb{R}^3$ comme

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \tag{3.2.2}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \perp i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{u}\delta_\Gamma \tag{3.2.3}$$

En éliminant $\mathbf{H}$ entre ces deux équations, on obtient

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = k^2\mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{u}\delta_\Gamma. \tag{3.2.4}$$

De l'égalité (d'opérateur dans $\mathbb{R}^3$)

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} = \perp\Delta + \nabla \operatorname{div},$$

on déduit

$$\perp(\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E}) = \perp\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{u}\delta_\Gamma.$$

En prenant à présent la divergence dans (3.2.3),

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u}\delta_\Gamma),$$

d'où

$$\perp(\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E}) = \perp\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla \operatorname{div}(\mathbf{u}\delta_\Gamma) + i\omega\mu\mathbf{u}\delta_\Gamma.$$

Mais l'onde incidente vérifie les équations de Maxwell homogènes dans tout $\mathbb{R}^3$, et

$$\perp(\Delta\mathbf{E}^i + k^2\mathbf{E}^i) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

on peut donc écrire

$$\perp(\Delta\mathbf{E}^s + k^2\mathbf{E}^s) = \perp\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla \operatorname{div}(\mathbf{u}\delta_\Gamma) + i\omega\mu\mathbf{u}\delta_\Gamma.$$

Par une convolution avec le noyau de Green, et comme $\mathbf{E}^s$ vérifie la condition de radiation de Silver-Müller (3.1.5) à l'infini,

$$\perp i\omega\varepsilon\mathbf{E}^s = \nabla \operatorname{div}(V\mathbf{u}) + k^2 V\mathbf{u};$$

enfin, du lemme 2.6.1, on obtient la *formule de représentation*

$$\perp i\omega\varepsilon\mathbf{E}^s = \nabla(V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}) + k^2 V\mathbf{u}. \quad (3.2.5)$$

Pour obtenir une équation intégrale permettant de trouver $\mathbf{u}$, et donc le champ diffracté par cette formule de représentation, on prend la trace tangentielle sur Γ des deux membres de l'équation (3.2.5). On détaille ici les relations de saut liées à l'opérateur V .

On reprend le voisinage $\mathcal{V}_\delta(\Gamma)$ défini pour $\delta > 0$ suffisamment petit par

$$\mathcal{V}_\delta(\Gamma) := \{\mathbf{x} + \sigma_3 \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Gamma, |\sigma_3| < \delta\}$$

et on définit un voisinage *extérieur* par

$$\mathcal{V}_\delta^+(\Gamma) := \mathcal{V}_\delta(\Gamma) \cap \Omega^c$$

ainsi qu'un voisinage *intérieur* par

$$\mathcal{V}_\delta^\perp(\Gamma) := \mathcal{V}_\delta(\Gamma) \cap \Omega$$

Pour $\varphi \in H^1(\mathcal{V}_\delta^\pm(\Gamma))$, on note

$$\varphi^\pm(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

les traces de par et d'autre de la surface, et les *traces tangentielles* $\pi^\pm \Phi$ seront définies, pour tout champ vectoriel Φ , par

$$\pi^\pm \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times (\Phi^\pm(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})).$$

On sait qu'alors (cf. [7], [9]) l'opérateur de simple couche est continu à travers la surface:

$$V\varphi^+ = V\varphi^\perp =: V\varphi \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.2.6)$$

et que son gradient admet un saut suivant la normale de Γ :

$$(\nabla V\varphi)^\perp(\mathbf{x}) = (\nabla V\varphi)^+(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma;$$

en particulier, on peut bien en définir la trace tangentielle, qui n'est autre que son gradient surfacique:

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma} V\varphi &= \pi^{\perp}(\nabla V\varphi) \\ &= \pi^+(\nabla V\varphi) \quad \text{sur } \Gamma.\end{aligned}$$

Pour toute fonction vectorielle Φ , on notera

$$V_{\Gamma}\Phi := \pi^{\pm}V\Phi \quad \text{sur } \Gamma.$$

En prenant, comme annoncé, les traces tangentielles dans la formule de représentation (3.2.5), on obtient

$$\perp i\varepsilon\omega\pi^{\pm}\mathbf{E}^s = \nabla_{\Gamma} V \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} + k^2 V_{\Gamma} \mathbf{u}.$$

La condition aux limites

$$\pi^{\pm}\mathbf{E} = \pi^{\pm}\mathbf{E}^i + \pi^{\pm}\mathbf{E}^s = 0$$

nous donne finalement, $\mathbf{E}^i$ étant continu,

$$\boxed{i\varepsilon\omega\mathbf{E}^i = \nabla_{\Gamma} V \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} + k^2 V_{\Gamma} \mathbf{u},} \quad (3.2.7)$$

qui est appelée *équation intégrale du champ électrique*.

Réciproquement, à présent, on se donne un champ $\mathbf{u}$ **tangentiel** sur Γ solution de l'équation intégrale (3.2.7) et on souhaite savoir si le champ $\mathbf{E}^s$ défini par la formule de représentation (3.2.5) est bien solution de notre problème de Maxwell d'origine. Notons tout d'abord qu'il suffit de vérifier que $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$ est solution du problème de Maxwell extérieur avec la condition aux limite (3.1.7) des métaux parfaits, car alors $\mathbf{E}^s$ serait analytique en dehors de Γ et vérifierait *de facto* la condition de radiation de Silver-Müller, car le potentiel de simple couche vérifie la condition de radiation de Sommerfeld, cf. [9].

$\mathbf{E}^s$ est donc *défini* par

$$\perp i\varepsilon\omega\mathbf{E}^s = \nabla(V \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}) + k^2 V \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma},$$

et on pose $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$.

En prenant les traces tangentielles dans la formule de représentation, et

d'après l'équation intégrale (3.2.7), on a immédiatement la condition aux limites $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$.

On pose à présent

$$\mathbf{H}^s := \mathbf{rot} V\mathbf{u} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \quad (3.2.8)$$

Ici, les formules de saut s'écrivent ([7], [9]):

$$(\mathbf{rot} V\Phi)^\perp = (\mathbf{rot} V\Phi)^+ + \mathbf{n} \times \Phi \quad (3.2.9)$$

pour tout champ vectoriel Φ . Donc, en prenant les traces tangentielles dans (3.2.8),

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}^s \times \mathbf{n}] &= ((\mathbf{H}^s)^+ \perp (\mathbf{H}^s)^\perp) \times \mathbf{n} \\ &= \perp(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} \\ &= \perp \mathbf{u} \end{aligned}$$

car $\mathbf{u}$ est tangentiel. On retrouve l'égalité qu'on a imposé pour obtenir l'équation intégrale.

D'autre part, de la définition de $\mathbf{E}^s$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s &= \perp i\varepsilon\omega k^{\perp 2} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s \\ &= (i\omega\mu)^{\perp 1} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s \end{aligned}$$

ce qui nous donne une des deux équations de Maxwell. Pour obtenir l'autre, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{H}^s &= \mathbf{rot} \mathbf{rot} V\mathbf{u} \\ &= (\perp\Delta + \nabla \operatorname{div})V\mathbf{u} \\ &= k^2 V\mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} V\mathbf{u} \\ &= \perp i\omega\varepsilon \mathbf{E}^s, \end{aligned}$$

toutes ces égalités étant entendues dans Ω ou dans Ω^c . De ce qui précède, on a aussi

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}^s = \perp i\omega\varepsilon \mathbf{E}^s \perp \mathbf{u}\delta_\Gamma \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Le champ $\mathbf{E}$ vérifie bien les équations de Maxwell, et donc vérifie de problème de Maxwell intérieur homogène (et $\mathbf{E} = 0$ de nos hypothèses) ainsi que le problème extérieur, avec la condition de radiation de Silver-Müller à l'infini pour $\mathbf{E}^s$, ce qu'il fallait prouver.

L'équation intégrale (3.2.7) résout donc le problème physique dans le «modèle» mathématique que l'on s'est fixé. On doit à présent spécifier le cadre de la résolution de cette équation, c'est-à-dire l'espace dans lequel on va chercher l'inconnue $\mathbf{u}$.

3.3 Espaces

Pour ce paragraphe, on se réfère à PAQUET [39], COSTABEL [11], COSTABEL-DAUGE [12], LEVILLAIN [29], BUFFA, P. CIARLET [4], [5].

3.3.1 Espace des solutions.

Tout d'abord, pour le problème extérieur, les champs électrique et magnétique sont tout naturellement dans l'espace

$$H_{loc}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega^c}) := \{\Phi \in L_{loc}^2(\overline{\Omega^c}) \mid \mathbf{rot} \Phi \in L_{loc}^2(\overline{\Omega^c})\}.$$

L'inconnue $\mathbf{u}$ de notre équation intégrale est comme on l'a vu le saut de la composante tangentielle du champ magnétique. D'une part, on a donc naturellement

$$\mathbf{u} \in H^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$

et comme

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} &= \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \\ &= \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{H} \\ &= \perp i\omega\varepsilon(\mathbf{E}, \mathbf{n}) \end{aligned}$$

on a aussi

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Enfin, $\mathbf{u}$ est *tangentiel*, et on peut définir un espace naturel pour $\mathbf{u}$:

Définition 3.3.1

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{u} \in H^{\pm 1/2}(\Gamma)^3 \mid \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\pm 1/2}(\Gamma), (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0\} \quad (3.3.1)$$

avec pour norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}}^2 := \|\mathbf{u}\|_{\perp 1/2}^2 + \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{\perp 1/2}^2. \quad (3.3.2)$$

Remarque: On adopte une notation symbolique pour cet espace, mais dans [29], $\mathcal{X}$ est noté $TH^{\pm\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$, et dans [4], [5], il est noté $H_{\operatorname{div}_\Gamma}^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En réalité, dans la suite, on va travailler essentiellement sur des sous-espaces, qui

n'ont pas de notations précises.

La solution cherchée, étant tangentielle, possède essentiellement deux inconnues scalaires. On souhaite ramener l'équation intégrale à un système 2×2 en inconnues scalaires, et pour cela, on utilisera la *décomposition de Hodge* des éléments de $\mathcal{X} = TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma)$. Finalement, on veut travailler sur des espaces de Sobolev classiques; l'idée est de pouvoir utiliser des éléments finis standard pour la résolution numérique, et même d'utiliser des décompositions en ondelettes pour pouvoir résoudre de manière rapide le système obtenu.

Théorème 3.3.1 (Décomposition de Hodge sur $\mathcal{X}$)

On rappelle que

$$H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma) = \{\varphi \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma) \mid \langle \varphi, 1 \rangle_{\perp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0\}$$

On pose

$$\mathcal{X}^1 := \{\mathbf{u} \in \mathcal{X} \mid \text{div}_\Gamma \mathbf{u} = 0\} \quad (3.3.3)$$

$$\mathcal{X}^2 := \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (3.3.4)$$

Alors

$$\mathcal{X}^1 = \mathbf{rot}_\Gamma H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (3.3.5)$$

et

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \oplus \mathcal{X}^2. \quad (3.3.6)$$

De plus,

1. $\mathcal{X}^k$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{X}$, pour $k = 1, 2$,
2. la norme induite de $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ est une norme équivalente à la norme d'énergie induite $\|\cdot\|_\mathcal{X}$ sur $\mathcal{X}^1$, et on écrira

$$\|\mathbf{u}\|_\mathcal{X} \sim \|\mathbf{u}\|_{\perp 1/2}, \quad (\mathbf{u} \in \mathcal{X}^1). \quad (3.3.7)$$

3. L'application $\mathbf{u} \mapsto \|\text{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}}$ est une norme sur $\mathcal{X}^2$ équivalente à la norme d'énergie induite $\|\cdot\|_\mathcal{X}$ sur $\mathcal{X}^2$

Preuve: On pourra se référer à [5], [39] pour la preuve.

$\mathcal{X}^1 = \mathbf{rot}_\Gamma H^{\frac{1}{2}}$ car Γ est simplement connexe.

Soit donc $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$. Soit $\zeta \in H_*^1$ (à moyenne nulle) solution de

$$\Delta_\Gamma \zeta = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u},$$

et $\mathbf{p} = \nabla_\Gamma \zeta$. On a bien entendu $\mathbf{p} \in \mathcal{X}^2$, et

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \perp \mathbf{p} \in \mathcal{X}$$

de plus,

$$\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{u} \perp \mathbf{p}) = 0,$$

et donc $\mathbf{q} \in \mathcal{X}^1$: on a $\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 = \mathcal{X}$, et la somme est directe car si $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^1 \cap \mathcal{X}^2$, alors $\mathbf{u} = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2$ et $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} = 0$ donne $\lambda^2 = 0$.

Restent les équivalences de normes. La première (3.3.7) est triviale, quand à la seconde, si $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^2$, $\mathbf{u} = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2$, alors $\lambda^2 = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}$, et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}} &\leq C \|\Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2\|_{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2\|_1 \\ &\leq C \|\lambda^2\|_{\perp 1} \\ &\leq C \|\lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

où C désigne une constante (générique), et donc

$$\|\lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \leq C \|\lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}}.$$

□

Remarque: dans l'écriture $\mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1$, $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^1$, λ^1 est défini à une constante additive près, de sorte que, si l'on impose $\lambda^1 \in H_*^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire à moyenne nulle, on a

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \sim \|\lambda^1\|_{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.8)$$

La décomposition de Hodge permet un résultat de densité:

Lemme 3.3.1

$C^\infty(\Gamma)^3 \cap \mathcal{X}$ est partout dense dans $\mathcal{X}$.

Preuve : On se fixe $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ que l'on écrit comme

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2,$$

avec $\lambda^1 \in H_*^{\frac{1}{2}}$, $\lambda^2 \in H_*^{\perp \frac{1}{2}}$. On peut alors trouver $\lambda_0^1 \in C^\infty(\Gamma)$ et $\lambda_0^2 \in C^\infty(\Gamma)$ tels que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \lambda_0^2 &= 0 \\ \|\lambda_0^1 \pm \lambda^1\|_{\frac{1}{2}} &< \varepsilon, \quad \|\lambda_0^2 \pm \lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

On définit alors $\mathbf{u}_0 := \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_0^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_0^2$. Alors, $\mathbf{u}_0 \in C^\infty(\Gamma) \cap \mathcal{X}$ et, avec les équivalences de normes précédentes,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \pm \mathbf{u}_0\|_{\mathcal{X}} &\leq C(\|\mathbf{rot}_\Gamma(\lambda^1 \pm \lambda_0^1)\|_{\perp \frac{1}{2}} + \|\lambda^2 \pm \lambda_0^2\|_{\perp \frac{1}{2}}) \\ &\leq C2\varepsilon, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

3.3.2 L'espace dual $\hat{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$

Dans cette section, on caractérise le dual de $\mathcal{X} = TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma)$ pour le produit scalaire L^2 sur la surface. Tout cela est bien connu ([39]), et même généralisé à des surfaces polyédriques ([5]).

Définition 3.3.2

$$\hat{\mathcal{X}} := \left\{ \mathbf{u} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \mid \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma), (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0 \right\} \quad (3.3.9)$$

avec pour norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\hat{\mathcal{X}}}^2 := \|\mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}}^2 + \|\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}}^2. \quad (3.3.10)$$

Remarques:

- cet espace est souvent noté $TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma)$, ou $H_{\text{rot}_\Gamma}^{\perp \frac{1}{2}}$, cf. [29], [4], [5]. Ici, on garde notre notation symbolique.

- On montrera dans la suite que cet espace est (anti-)dual à l'espace $\mathcal{X}$, ce qui est assez remarquable, étant donnée la nature des distributions qui interviennent (toutes sont quand même dans $H^{\perp \frac{1}{2}}$!).
- Ceci est d'autant plus remarquable que l'espace $\widehat{\mathcal{X}}$ est déduit de $\mathcal{X}$ par une «rotation», compte tenu de la relation (2.4.6).

Cette dernière remarque nous permet d'écrire une *décomposition de Hodge* sur $\widehat{\mathcal{X}}$, calquée sur le théorème 3.3.1:

Théorème 3.3.2 (Décomposition de Hodge sur $\widehat{\mathcal{X}}$)

On pose

$$\widehat{\mathcal{X}}^2 := \{\mathbf{u} \in \widehat{\mathcal{X}} \mid \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = 0\} \quad (3.3.11)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}^1 := \text{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (3.3.12)$$

Alors

$$\widehat{\mathcal{X}}^2 = \nabla_\Gamma H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (3.3.13)$$

et

$$\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{X}}^1 \oplus \widehat{\mathcal{X}}^2. \quad (3.3.14)$$

De plus,

1. $\widehat{\mathcal{X}}^k$ est un sous-espace fermé de $\widehat{\mathcal{X}}$, pour $k = 1, 2$,
2. la norme induite de $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ est une norme équivalente à la norme d'énergie induite $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{X}}}$ sur $\widehat{\mathcal{X}}^2$, et on écrira

$$\|\mathbf{u}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} \sim \|\mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}}, \quad (\mathbf{u} \in \widehat{\mathcal{X}}^2). \quad (3.3.15)$$

3. L'application $\mathbf{u} \rightarrow \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}}$ est une norme sur $\widehat{\mathcal{X}}^1$ équivalente à la norme d'énergie induite $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{X}}}$ sur $\widehat{\mathcal{X}}^1$

Remarque: ici encore, si $\widehat{\mathbf{u}} \in \widehat{\mathcal{X}}^2$, $\mathbf{u} = \nabla_\Gamma \widehat{\lambda}^2$, et $\widehat{\lambda}^2$ est défini à une constante près. En imposant $\widehat{\lambda}^2 \in H_*^{\frac{1}{2}}$, on a

$$\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} \sim \|\widehat{\lambda}^2\|_{\frac{1}{2}} \quad (3.3.16)$$

Comme pour $\widehat{\mathcal{X}}$, on a le résultat de densité

Lemme 3.3.2

$C^\infty(\Gamma)^3 \cap \widehat{\mathcal{X}}$ est partout dense dans $\widehat{\mathcal{X}}$.

La relation de dualité, dans un sens que l'on va préciser, entre $\mathcal{X} = TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma)$ et $\widehat{\mathcal{X}} = TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma)$ est une conséquence des deux décompositions de Hodge sur $\mathcal{X}$ et $\widehat{\mathcal{X}}$:

Théorème 3.3.3

Pour

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \text{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \overset{\perp 1}{\Delta}_\Gamma \lambda^2 \in \mathcal{X} \\ \lambda^1 &\in H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma), \lambda^2 \in H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \widehat{\mathbf{u}} &= \text{rot}_\Gamma \overset{\perp 1}{\Delta}_\Gamma \widehat{\lambda}^1 + \nabla_\Gamma \widehat{\lambda}^2 \in \widehat{\mathcal{X}} \\ \widehat{\lambda}^1 &\in H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma), \widehat{\lambda}^2 \in H_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma), \end{aligned}$$

le crochet

$$\langle \mathbf{u}, \widehat{\mathbf{u}} \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}} := \perp \langle \lambda^1, \widehat{\lambda}^1 \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} \perp \langle \lambda^2, \widehat{\lambda}^2 \rangle_{\perp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (3.3.17)$$

est un crochet de dualité entre $\mathcal{X}$ et $\widehat{\mathcal{X}}$. Lorsque $\mathbf{u}$ et $\widehat{\mathbf{u}}$ sont dans $L^2(\Gamma)$, il est confondu avec le produit scalaire L^2 , et dans ce sens, $\widehat{\mathcal{X}}$ est le dual de $\mathcal{X}$ avec pour espace pivot

$$L_T^2(\Gamma)^3 := \{\mathbf{v} \in L^2(\Gamma) \mid (\mathbf{v}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\}.$$

En particulier, $\widehat{\mathcal{X}}^1$ est le dual de $\mathcal{X}^1$, et $\widehat{\mathcal{X}}^2$ est le dual de $\mathcal{X}^2$.

Preuve: Le fait que ce soit un crochet de dualité est une conséquence immédiate des théorèmes de décompositions de Hodge. On note simplement que l'on a imposé des conditions de moyennes nulles sur les éléments dans $H^{\perp \frac{1}{2}}$ pour avoir directement une forme sesquilinéaire continue.

Si $\mathbf{u}$ et $\widehat{\mathbf{u}}$ sont dans L^2 , on a $\lambda^1 \in H^1$ et $\widehat{\lambda}^2 \in H^1$, de sorte que l'on peut écrire dans un sens classique

$$\langle \text{rot}_\Gamma \lambda^1, \nabla_\Gamma \widehat{\lambda}^2 \rangle_{L^2} = 0,$$

et on a toujours

$$\langle \nabla_{\Gamma} \overset{\perp 1}{\Delta}_{\Gamma} \lambda^2, \mathbf{rot}_{\Gamma} \overset{\perp 1}{\Delta}_{\Gamma} \hat{\lambda}^1 \rangle_{L^2} = 0.$$

De sorte que, finalement,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{L^2} &= \langle \mathbf{rot}_{\Gamma} \lambda^1, \mathbf{rot}_{\Gamma} \overset{\perp 1}{\Delta}_{\Gamma} \hat{\lambda}^1 \rangle_{L^2} \\ &\quad + \langle \nabla_{\Gamma} \overset{\perp 1}{\Delta}_{\Gamma} \lambda^2, \nabla_{\Gamma} \hat{\lambda}^2 \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on trouve bien

$$\langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{L^2} = \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}}.$$

□

Enfin, les projecteurs naturels de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{X}^k$, et de $\hat{\mathcal{X}}$ sur $\hat{\mathcal{X}}^k$ ont des relations de dualité:

Proposition 3.3.1 *On note P^1 le projecteur $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^1$, parallèle à $\mathcal{X}^2$, $\hat{P}^1$ le projecteur $\hat{\mathcal{X}} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^1$, parallèle à $\hat{\mathcal{X}}^2$, et*

$$P^2 = 1 \perp P^1, \quad \hat{P}^2 = 1 \perp \hat{P}^1.$$

Alors les projecteurs P^k , $\hat{P}^k$, $k = 1, 2$, sont continus, et

$$\forall (\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}}, \quad \langle P^k \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}} = \langle \mathbf{u}, \hat{P}^k \hat{\mathbf{u}} \rangle_{\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}}. \quad (3.3.18)$$

Preuve: Les projecteurs sont continus car les sous-espaces en jeu sont fermés. La relation (3.3.18) est une conséquence directe des théorèmes de décomposition de Hodge et du théorème 3.3.3.

□

3.4 Décomposition de l'équation intégrale.

Dans toute la suite, on notera indifféremment l'espace $\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 \equiv \mathcal{X}^1 \times \mathcal{X}^2$, et on fait de même pour $\hat{\mathcal{X}}$

On revient à l'équation intégrale (3.2.7); elle fait intervenir l'opérateur

$$L = \nabla_{\Gamma} V \operatorname{div}_{\Gamma} + k^2 V_{\Gamma}. \quad (3.4.1)$$

On rappelle que V_Γ est la composante tangentielle de l'opérateur de simple couche vectoriel. La première chose à vérifier est que L envoie $\mathcal{X}$ dans $\widehat{\mathcal{X}}$: en effet, pour $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$,

$$- V_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ car } \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ et il est tangentiel, donc}$$

$$V_\Gamma \mathbf{u} \in \widehat{\mathcal{X}} = TH^{\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma).$$

$$- V \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ car } \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \text{ Comme } \text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0,$$

$$\nabla_\Gamma V \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in \widehat{\mathcal{X}}^2 \subset \widehat{\mathcal{X}}.$$

Donc L est un opérateur de $\mathcal{X}$ dans $\widehat{\mathcal{X}}$. D'autre part, pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X}$, par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle L\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} &= \perp \langle V \text{div}_\Gamma \mathbf{u}, \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} + k^2 \langle V_\Gamma \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} \\ &= \perp \langle V \text{div}_\Gamma \mathbf{u}, \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} + k^2 \langle V\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

car $\mathbf{v}$ est tangentiel, et de la continuité de l'opérateur de simple couche,

Proposition 3.4.1 *L est un opérateur continu de $\mathcal{X}$ dans $\widehat{\mathcal{X}}$.*

L'équation intégrale issue du problème de Maxwell extérieur a pour second membre la composante tangentielle de l'onde incidente, qui est supposée aussi régulière que souhaitée, autrement dit, on est ramené à résoudre en l'inconnue $\mathbf{u}$ et en la donnée $\mathbf{f}$

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f} \in C^\infty(\Gamma) \cap \widehat{\mathcal{X}} \subset \widehat{\mathcal{X}} \quad (3.4.2)$$

De ce qui précède, cette équation admet une formulation (faible) *variationnelle*:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \\ \perp \langle V \text{div}_\Gamma \mathbf{u}, \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} + k^2 \langle V\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \perp \frac{1}{2}} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Comme mentionné précédemment, on exclut les fréquences de résonance, c'est-à-dire que l'on suppose vérifiée l'

Hypothèse 1 *L est injectif*

Un élément $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ se décomposera en $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^k \in \mathcal{X}^k$; on adoptera la même notation pour les éléments de $\widehat{\mathcal{X}}$.

Pour $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$, on écrit

$$L\mathbf{u} = \begin{pmatrix} L^1\mathbf{u} \\ L^2\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 L^{11}\mathbf{u}^1 + k^2 L^{12}\mathbf{u}^2 \\ k^2 L^{21}\mathbf{u}^1 \perp L^{22}\mathbf{u}^2 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

avec

$$L^{ij} : \mathcal{X}^j \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}^i \quad (3.4.5)$$

$$\langle L^{11}\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle V\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \rangle \quad (3.4.6)$$

$$\langle L^{12}\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^1 \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle V\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^1 \rangle \quad (3.4.7)$$

$$\langle L^{21}\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2 \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle V\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2 \rangle \quad (3.4.8)$$

$$\langle L^{22}\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle V(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}^2), \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}^2 \rangle \perp k^2 \langle V\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \rangle \quad (3.4.9)$$

On écrira aussi, plus brièvement

$$L = \begin{pmatrix} k^2 L^{11} & k^2 L^{12} \\ k^2 L^{21} & \perp L^{22} \end{pmatrix}.$$

L'intérêt de cette écriture se lit dans la proposition suivante:

Proposition 3.4.2 *On suppose $k \neq 0$. Alors*

- les opérateurs L^{12} et L^{21} sont compacts,
- les opérateurs L^{11} et L^{22} sont de Fredholm.

Preuve: On commence par les termes non diagonaux, et on montre d'abord la compacité de L^{12} :

le plus simple est de se ramener à des variables scalaires, d'utiliser les propriétés du potentiel de simple couche et les équivalences de normes du théorème 3.3.1.

Pour L^{12} , donc, on se donne une suite $(\mathbf{u}_n^2) \subset \mathcal{X}^2$, bornée dans $\mathcal{X}$. De la décomposition de Hodge, $\mathbf{u}_n^2 = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_n^2$, et des équivalences de normes, (λ_n^2) est bornée dans $H^{\perp \frac{1}{2}}$. On peut donc en extraire une suite convergente dans $H^{\perp 1}$, et, quitte à prendre une sous-suite, $(\mathbf{u}_n^2)$ converge dans L^2 (continuité de l'opérateur $\nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1}$), et donc converge dans $H^{\perp \frac{1}{2}}$. De la continuité de l'opérateur de simple couche de $H^{\perp \frac{1}{2}}$ dans $H^{\frac{1}{2}}$, pour tout $\mathbf{v}^1 \in \mathcal{X}^1$,

$$\begin{aligned} |\langle L^{12}(\mathbf{u}_n^2 \perp \mathbf{u}_p^2), \mathbf{v}^1 \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}}| &\leq C \|\mathbf{u}_n^2 \perp \mathbf{u}_p^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^1\|_{\perp \frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\mathbf{u}_n^2 \perp \mathbf{u}_p^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^1\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

$(L^{12}\mathbf{u}_n^2)$ est donc une suite de Cauchy dans $\widehat{\mathcal{X}}^1$, ce qu'il fallait démontrer. Pour L^{21} , on peut par exemple raisonner par symétrie en faisant le même travail que ci-dessus sur son adjoint.

Montrons que L^{11} est Fredholm: on sait que l'opérateur de simple couche V vectoriel est un opérateur de Fredholm de $H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$, qui s'écrit $V = D + K$ avec

$$\begin{aligned} D : H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), && \text{bijectif,} \\ \langle Du, u \rangle_{L^2} &\geq C \|u\|_{\perp\frac{1}{2}}^2 && (\text{fortement coercif}) \\ K : H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), && \text{compact.} \end{aligned}$$

En particulier,

$$\langle D \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 \rangle_{L^2} \geq C \|\mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1\|_{\perp\frac{1}{2}}^2.$$

De l'équivalence de normes sur $\mathcal{X}^1$, on a

$$\langle D\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1 \rangle_{L^2} \geq C \|\mathbf{u}^1\|_{\mathcal{X}}^2$$

de sorte que D induit un opérateur

$$D^{11} : \mathcal{X}^1 \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}^1 \quad \text{coercif}$$

tandis que $K = V \perp D$ induit un opérateur compact $K_{11} := L^{11} \perp D^{11}$, ce qu'il fallait démontrer. On a une preuve similaire pour L^{22} , ce qui achève la preuve.

□

Corollaire 3.4.1 *Sous l'hypothèse 1, L est un isomorphisme de $\mathcal{X}$ vers $\widehat{\mathcal{X}}$.*

Preuve: De la proposition précédente, L se décompose matriciellement comme

$$L = \begin{pmatrix} D^{11} & 0 \\ 0 & \perp D^{22} \end{pmatrix} + K$$

où D^{kk} est un opérateur coercif de $\mathcal{X}^k$ vers $\widehat{\mathcal{X}}^k$, et où K est compact. L est donc un opérateur de Fredholm injectif.

□

Remarques:

- On a **supposé L injectif**, encore une fois. En particulier, on a nécessairement $k \neq 0$, car dans le cas contraire, on aurait $\mathcal{X}^1 \subset \mathcal{Ker}L$, et on n'aurait même plus L de Fredholm (puisque $\mathcal{X}^1$ est de dimension infinie).
- Si L est bien un opérateur de Fredholm, $D = \text{diag}(D^{11}, \perp D^{22})$ **n'est pas coercif dans $\mathcal{X}$** , ce qui exclut l'utilisation d'une méthode de Galerkin «quelconque» dans $\mathcal{X}$. Cependant, si les éléments (d'une méthode) vérifient la décomposition de Hodge, alors elle va converger, et c'est l'objet du paragraphe suivant.

4 Résolution numérique.

Avant de définir une méthode de Galerkin adéquate sur $\mathcal{X}$, on rappelle que notre objectif est de se ramener à une méthode de Galerkin sur des espaces de Sobolev classiques ($H^s \dots$). En réalité, les espaces discrets vont être définis directement à partir des éléments finis usuels.

On commence donc à définir le cadre général dans lequel on va travailler.

4.1 Espaces de multirésolution et éléments finis classiques.

Dans ce paragraphe, on rappelle des résultats connus sur les éléments finis: inégalités directes, inverses, et une caractérisation des normes de Sobolev. L'analyse qui suit sera souvent évoquée dans les constructions des ondelettes pour le cas des surfaces fermées et pour le cas des plaques ouvertes.

On pourra se référer à DAHMEN-STEVENSON [19] ainsi qu'aux références citées dans l'article. On suppose donnée une suite $(\Lambda_J) \subset (L^2(\Gamma))^{\mathbb{N}}$ telle que:

- les Λ_J sont de dimension finie;
- ils sont emboîtés:

$$\Lambda_J \subset \Lambda_{J+1}, \quad (4.1.1)$$

- leur réunion est dense pour une échelle d'indices de Sobolev; plus précisément, il existe un réel $\gamma' \geq 1.5$ tel que

$$\overline{\cup_J \Lambda_J}^{H^s} = H^s(\Gamma), \quad |s| < \gamma'. \quad (4.1.2)$$

- *Inégalité directe ou de Jackson*: il existe deux réels $\gamma \geq 2$, $\gamma > \gamma'$ et $\rho > 1$ tels que

$$\begin{aligned} \forall s \quad 0 \leq s \leq \gamma, \quad \exists C > 0 \quad \forall u \in H^s(\Gamma) \\ \inf_{u_J \in \Lambda_J} \|u - u_J\|_0 \leq C \rho^{\perp s J} \|u\|_s \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

- *Inégalité inverse ou de Bernstein*: ($\gamma' < \gamma$)

$$\begin{aligned} \forall s \quad 0 \leq s < \gamma' \quad \exists C > 0 \quad \forall u_J \in \Lambda_J \\ \|u_J\|_s \leq C \rho^{s J} \|u_J\|_0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Remarques:

Les hypothèses faites sur les Λ_J sont les hypothèses standard des éléments finis, cf. BABUŠKA-AZIZ [1].

On peut prendre $\gamma = 2$ et $\gamma' = 1.5$ (hypothèse minimale) pour des éléments continus formés de polynômes de degré 1 «par morceaux» dans un sens que l'on précisera plus loin, suivant une triangulation *quasi-uniforme* de pas $\rho^{\perp j}$ au niveau j .

Définition 4.1.1 *On notera Π_J le projecteur orthogonal de L^2 sur Λ_J , et $\Pi_{\perp 1} := 0$.*

L'objet de cette section est de démontrer l'équivalence de normes suivante: pour tout s , $|s| < \gamma'$, et tout $u \in H^s(\Gamma)$,

$$\|u\|_s \sim \sum_{j \geq 0} \rho^{2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_0.$$

On suivra le plan donné dans [19].

Lemme 4.1.1 *Pour tout s , $0 \leq s \leq \gamma$, et tout $u \in H^s(\Gamma)$*

$$\|(1 \perp \Pi_J)u\|_0 \lesssim \rho^{\perp s J} \|u\|_s$$

Preuve: Pour tout $u_J \in \Lambda_J$,

$$\begin{aligned} \|(1 \perp \Pi_J)u\|_0 &\leq \|u \perp u_J\|_0 + \|\Pi_J(u \perp u_J)\|_0 \\ &\leq 2\|u \perp u_J\|_0 \end{aligned}$$

On passe à l'infimum et on conclut grâce à l'inégalité directe.

□

Lemme 4.1.2 *Soit $s \in]0, \gamma]$, et $u_j \in (\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})\Lambda_J$; alors*

$$\|u_j\|_{\perp s} \lesssim \rho^{\perp s j} \|u_j\|_0. \quad (4.1.5)$$

Preuve: C'est une estimation directe pour des normes négatives. On écrit

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{\perp s} &= \sup_{v \in H^s(\Gamma)} \frac{(u_j, v)_0}{\|v\|_s} \\ &\leq \|u_j\|_0 \sup_{v \in H^s(\Gamma)} \frac{\|(\Pi_j \perp \Pi_{j\perp 1})v\|_0}{\|v\|_s} \\ &\leq \|u_j\|_0 \sup_{v \in H^s(\Gamma)} \frac{\|(1 \perp \Pi_{j\perp 1})v\|_0}{\|v\|_s} \end{aligned}$$

et grâce au lemme précédent, on a le résultat.

□

Proposition 4.1.1 *Soit $u_J \in \Lambda_J$ et $\perp\gamma < s < \gamma'$. Alors il existe une constante C qui ne dépend que de s telle que*

$$\|u_J\|_s^2 \leq C \sum_{j=0}^J \rho^{2sJ} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j\perp 1})u_J\|_0^2. \quad (4.1.6)$$

Preuve: On se fixe $\varepsilon > 0$ tel que $s \pm \varepsilon \in]\perp\gamma, \gamma'[$.

$$\begin{aligned} \|u_J\|_s^2 &= \sum_{k,l} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u_J, (\Pi_l \perp \Pi_{l\perp 1})u_J\|_s \\ &\lesssim \sum_k \sum_{l \geq k} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u_J\|_{s+\varepsilon} \|(\Pi_l \perp \Pi_{l\perp 1})u_J\|_{s-\varepsilon} \end{aligned}$$

Grâce au lemme précédent,

$$\begin{aligned} \|u_J\|_s^2 &\lesssim \sum_k \sum_{l \geq k} \rho^{\perp\varepsilon(l \perp k)} \rho^{sk} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u_J\|_0 \rho^{sl} \|(\Pi_l \perp \Pi_{l\perp 1})u_J\|_0 \\ &\lesssim \sum_{k,l} \rho^{\perp\varepsilon|l \perp k|} \rho^{sk} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u_J\|_0 \rho^{sl} \|(\Pi_l \perp \Pi_{l\perp 1})u_J\|_0 \\ &\lesssim \sum_k \rho^{2sk} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u_J\|_0^2. \end{aligned}$$

□

Définition 4.1.2 On définit $\mathfrak{H}^s$ comme l'ensemble des suites $(v_j)_{j \geq 0}$ telles que $v_j \in (\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})L^2$, et telles que

$$\|(v_j)\|_{\mathfrak{H}^s}^2 := \sum_j \rho^{2sj} \|v_j\|_0^2 < \infty. \quad (4.1.7)$$

$\mathfrak{H}^s$ est alors un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$[(v_j), (w_j)]_s := \sum_j \rho^{2sj} (v_j, w_j)_0. \quad (4.1.8)$$

Lemme 4.1.3 Soit $\perp \gamma \leq s \leq \gamma'$ Si $(v_j) \in \mathfrak{H}^s$ alors $\left(\sum_{j=0}^J v_j\right)_J$ converge dans $H^s(\Gamma)$ et

$$\left\| \sum_{j \geq 0} v_j \right\|_s^2 \lesssim \sum_{j \geq 0} \rho^{2sj} \|v_j\|_0^2.$$

Autrement dit, l'application

$$\begin{aligned} \Phi_s : \quad \mathfrak{H}^s &\rightarrow H^s(\Gamma) \\ (v_j) &\mapsto \sum_j v_j \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

est (linéaire) continue.

Preuve : On utilise le critère de Cauchy avec la proposition précédente.

□

Dans la suite, on prendra pour norme L^2 la norme de $\mathfrak{H}^0$ équivalente à la norme usuelle, ce qui nous permet d'identifier L^2 et $\mathfrak{H}^0$, via l'isométrie Φ_0 . Pour cet espace pivot, H^s est le dual de $H^{\perp s}$, tandis que $\mathfrak{H}^s$ est le dual de $\mathfrak{H}^{\perp s}$. On a alors le

Lemme 4.1.4 Pour $0 < s < \gamma'$, $u \in H^s(\Gamma)$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1} u)\|_0^2 \lesssim \|u\|_s^2. \quad (4.1.10)$$

Preuve : Soit $\mathbf{v} := (v_j) \in \mathfrak{H}^{\perp s}$; du lemme précédent, $\Phi_{\perp s} \mathbf{v} \in H^{\perp s}$ (on remarquera que $\perp s > \perp \gamma$, car $\gamma' \leq \gamma$), et

$$\begin{aligned} (u, \Phi_{\perp s} \mathbf{v})_0 &= \sum_j (u, v_j)_0 \\ &= \sum_j ((\Pi_j \perp \Pi_{j\perp 1})u, v_j)_0 \\ &= [\Phi_{\perp s}^* u, \mathbf{v}]_0 \end{aligned}$$

où $\Phi_{\perp s}^*$ désigne l'opérateur adjoint de $\Phi_{\perp s}$; il est donc défini par $(\Phi_{\perp s}^* u)_j := (\Pi_j \perp \Pi_{j\perp 1})u$. Le résultat n'est rien d'autre que la continuité de cet opérateur. $\square$

Corollaire 4.1.1 *Pour tout $s, |s| \in]0, \gamma'[,$ il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall j \geq 0, \forall u \in H^s(\Gamma), \|\Pi_j u\|_s \leq C \|u\|_s.$$

Preuve : On commence par le faire pour $s > 0$:

$$\begin{aligned} \|\Pi_j u\|_s^2 &\lesssim \sum_{k \leq j} \rho^{2sk} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})\Pi_j u\|_0^2 \\ &\lesssim \sum_{k \leq j} \rho^{2sk} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u\|_0^2 \\ &\lesssim \sum_{k \geq 0} \rho^{2sk} \|(\Pi_k \perp \Pi_{k\perp 1})u\|_0^2 \\ &\lesssim \|u\|_s^2. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $0 < s < \gamma'$, on remarque que

$$\begin{aligned} \|\Pi_j u\|_{\perp s} &= \sup_{v \in H^s(\Gamma)} \frac{|(u, \Pi_j v)_0|}{\|v\|_s} \\ &\lesssim \|u\|_{\perp s} \sup_{v \in H^s(\Gamma)} \frac{\|\Pi_j v\|_s}{\|v\|_s} \\ &\lesssim \|u\|_{\perp s}. \end{aligned}$$

Ces dernières inégalités étant vraies pour $u \in L^2$, elles permettent de prolonger l'opérateur Π_j (de manière unique) sur $H^{\perp s}$ en obtenant une suite d'opérateurs uniformément bornés, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Grâce au dernier lemme, et en reprenant la démonstration du lemme 4.1.4, on montre que l'inégalité (4.1.10) est vraie pour $\perp\gamma' < s < 0$. Reste un dernier lemme avant de conclure sur une équivalence de normes :

Lemme 4.1.5 *Soit s un réel, $|s| < \gamma'$. Alors, pour tout $u \in H^s(\Gamma)$,*

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|u \perp \sum_{j=0}^J (\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_s = \lim_{J \rightarrow \infty} \|u \perp \Pi_J u\|_s = 0. \quad (4.1.11)$$

Preuve : Comme $\cup_{j \geq 0} \Lambda_j$ est dense dans H^s , pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $J_0 > 0$ et $u_{J_0} \in \Lambda_{J_0}$ tels que $\|u \perp u_{J_0}\|_s < \varepsilon$. Pour $J \geq J_0$, on a donc

$$\|u \perp \Pi_J u\|_s \leq \varepsilon + \|\Pi_J(u \perp u_{J_0})\|_s \lesssim 2\varepsilon,$$

car (Π_J) est uniformément bornée de H^s dans lui-même.

□

On peut alors énoncer le théorème d'équivalence de normes suivant (Cf. [19]):

Théorème 4.1.1 *Pour $\perp\gamma' < s < \gamma'$, et pour tout $u \in H^s(\Gamma)$,*

$$\|u\|_s^2 \sim \sum_{j \geq 0} \rho^{2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_0^2. \quad (4.1.12)$$

En guise de corollaire, on peut généraliser les inégalités directes et inverses de la manière suivante:

Corollaire 4.1.2 *1. Pour tout réel s , $\perp\gamma \leq s < \gamma'$ et tout t , $s \leq t \leq \gamma$, $\perp\gamma' < t$, il existe une constante C telle que, pour tout $J > 0$, et tout $u \in H^t(\Gamma)$,*

$$\|(1 \perp \Pi_J)u\|_s \leq C \rho^{\perp(t \perp s)} \|u\|_t. \quad (4.1.13)$$

2. Pour tous réels s, t , $\perp\gamma' < s \leq t < \gamma'$, il existe une constante C telle que, pour tout $J > 0$ et tout $u_J \in \Lambda_J$,

$$\|u_J\|_t \leq C \rho^{(t \perp s)} \|u_J\|_s. \quad (4.1.14)$$

Preuve : On commence par l'inégalité de Bernstein (4.1.14):

$$\begin{aligned}
\|u_J\|_t^2 &\lesssim \sum_{j \leq J} \rho^{2tj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u_J\|_0^2 \\
&\lesssim \sum_{j \leq J} \rho^{2sj} \rho^{2(t \perp s)j} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u_J\|_0^2 \\
&\lesssim \rho^{2(t \perp s)J} \sum_{j \leq J} \rho^{2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u_J\|_0^2 \\
&\lesssim \rho^{2(t \perp s)J} \|u_J\|_s^2
\end{aligned}$$

Pour l'inégalité de Jackson (4.1.13), on élimine le cas $s = t$ qui traduit la continuité uniforme de (Π_J) , ainsi que le cas $s = 0$, qui est donné par hypothèse.

On commence donc par le cas $s > 0$. Pour $u \in H^t$, $(1 \perp \Pi_J)u = \sum_{j > J} u_j$ dans H^s , avec $u_j = (\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u$, comme nous l'avons déjà vu, et

$$\|(1 \perp \Pi_J)u\|_s^2 \lesssim \sum_{j > J} \rho^{2sj} \|u_j\|_0^2$$

Or

$$\|u_j\|_0 \leq \|(1 \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_0 \lesssim \rho^{\perp t(j \perp 1)} \|u\|_t$$

d'où

$$\|(1 \perp \Pi_J)u\|_s^2 \lesssim \|u\|_t^2 \sum_{j > J} \rho^{2(s \perp t)j}$$

et comme $t > s$, on obtient bien (4.1.13).

Si à présent $s \in]\perp \gamma, 0[$, et $t \geq 0$, on remarque que

$$\|(1 \perp \Pi_J)u\|_s \lesssim \|(1 \perp \Pi_J)u\|_0 \sup_{v \in H^{-s}} \frac{\|(1 \perp \Pi_J)v\|_0}{\|v\|_{\perp s}}.$$

et l'inégalité directe (4.1.3) permet de conclure (4.1.13).

Reste le cas où $\perp \gamma \leq s < 0$, et $\perp \gamma' < t < 0$, qui est déduit du cas $s > 0$ par

$$\|(1 \perp \Pi_J)u\|_s \lesssim \|u\|_t \sup_{v \in H^{-s}} \frac{\|(1 \perp \Pi_J)v\|_{\perp t}}{\|v\|_{\perp s}}$$

en remarquant que $0 < \perp t < \gamma'$, $\perp s \leq \gamma$.

□

4.2 Méthode de Galerkin dans $\mathcal{X}$

A présent, on est en mesure de définir une méthode de Galerkin sur $\mathcal{X}$ qui est adaptée à notre problème. On rappellera simplement que les espaces discrets doivent vérifier une décomposition de Hodge «discrète» pour que la méthode converge. Le plus simple est finalement de définir directement les espaces discrets pour chacun des espaces $\mathcal{X}^k$, $k = 1, 2$ correspondant à la décomposition de Hodge dans $\mathcal{X}$.

On garde nos espaces de multirésolution $(\Lambda_J)_J$ du paragraphe, et on met l'accent sur le fait que l'on a choisi $\gamma \geq 2$ et $\gamma' \geq 1.5$, de sorte que le théorème 4.1.1 a pour application:

$$\begin{aligned} \forall s, |s| < 1.5, \exists C > 0, \forall u \in H^s, \\ \|u\|_s^2 \sim \sum_{j \geq 0} \rho^{2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j+1})u\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Définition 4.2.1 *Les espaces discrets seront définis par:*

$$\mathcal{X}_J^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \Lambda_J^* \quad \widehat{\mathcal{X}}_J^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \Lambda_J^* \quad (4.2.2)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_J^2 = \nabla_\Gamma \Lambda_J^* \quad \mathcal{X}_J^2 = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \Lambda_J^*. \quad (4.2.3)$$

avec

$$\Lambda_J^* := \left\{ u_J \in \Lambda_J \mid \int_\Gamma u_J ds = 0. \right\} \quad (4.2.4)$$

Tous ces espaces seront de même dimension δ_J . Il est aisé d'observer que $\widehat{\mathcal{X}}_J^k$ est le dual de $\mathcal{X}_J^k$ pour la topologie $\langle \widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X} \rangle$. On notera alors

$$(\mathcal{X}_J^k)^0 := \{ \mathbf{u}' \in \widehat{\mathcal{X}}^k \mid \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}_J^k, \langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = 0, \quad (4.2.5)$$

$$(\widehat{\mathcal{X}}_J^k)^0 := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{X}^k \mid \forall \mathbf{v}' \in \widehat{\mathcal{X}}_J^k, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}} = 0. \quad (4.2.6)$$

les espaces polaires correspondants.

Lemme 4.2.1 *Pour $k = 1, 2$,*

1.

$$\mathcal{X}_J^k \subset \mathcal{X}_{J+1}^k \quad \overline{\cup_J \mathcal{X}_J^k}^{\mathcal{X}^k} = \mathcal{X}^k \quad (4.2.7)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_J^k \subset \widehat{\mathcal{X}}_{J+1}^k \quad \overline{\cup_J \widehat{\mathcal{X}}_J^k}^{\widehat{\mathcal{X}}^k} = \widehat{\mathcal{X}}^k \quad (4.2.8)$$

2.

$$\mathcal{X}_J^k \oplus (\widehat{\mathcal{X}}_J^k)^0 = \mathcal{X}^k \quad (4.2.9)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_J^k \oplus (\mathcal{X}_J^k)^0 = \widehat{\mathcal{X}}^k \quad (4.2.10)$$

Preuve : Les inclusions (4.2.7), (4.2.8) viennent du fait que les Λ_J sont emboîtés. Montrons (4.2.9) pour $k = 1$: si $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_J^1 \cap (\widehat{\mathcal{X}}_J^1)^0$, alors $\mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J$ avec $\lambda_J \in \Lambda_J^*$, et

$$\forall \mu_J \in \Lambda_J^*, \langle \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J, \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J \rangle = 0.$$

En prenant $\mu_J = \lambda_J$ on trouve tout de suite $\lambda_J = 0$.

La somme entre $\mathcal{X}_J^1$ et $(\widehat{\mathcal{X}}_J^1)^0$ est directe, et $\dim \mathcal{X}_J^1 = \text{codim}(\widehat{\mathcal{X}}_J^1)^0$, d'où le résultat. Les autres preuves sont rigoureusement similaires.

□

Avant d'aller plus loin, on a besoin de quelques propriétés topologiques sur les espaces Λ_J^* .

Définition 4.2.2 On définit, pour $s \geq 0$:

$$H_*^s(\Gamma) := \left\{ u \in H^s(\Gamma) \mid \int_\Gamma u \, ds = 0. \right\}$$

On note $L_*^2 = H_*^0$, et $H_*^{\perp s}$ le L_*^2 -dual de H_*^s . On rappelle que

$$H_*^{\perp s}(\Gamma) := \{ u \in H^{\perp s} \mid \langle u, 1 \rangle_{\perp s, s} = 0 \}$$

Enfin, on note $\widetilde{\Pi}_J$ le projecteur L^2 orthogonal de L_*^2 sur Λ_J^* , avec $\widetilde{\Pi}_{\perp 1} = 0$.

Proposition 4.2.1 Pour tout $s \in [0, \gamma[$, il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda \in H_*^s(\Gamma)$, et tout $J \geq 0$,

$$\|\lambda \perp \widetilde{\Pi}_J \lambda\|_0 \leq C \rho^{\perp s J} \|\lambda\|_s. \quad (4.2.11)$$

C'est la proposition fondamentale qui va nous permettre d'avoir, pour la famille $(\widetilde{\Pi}_j)_j$ un comportement analogue à $(\Pi_j)_j$.

Preuve: On se fixe φ dans Λ_0 tel que $\int_{\Gamma} \varphi = 1$. On remarque alors que pour tout $J \geq 0$,

$$\Lambda_J = \Lambda_J^* \oplus \mathbb{C}\varphi.$$

Soit donc $\lambda \in H_*^s$, et posons

$$\xi_J := \int_{\Gamma} \Pi_J \lambda \, ds.$$

Alors

$$\Pi_J \lambda = \lambda_J^* + \xi_J \varphi,$$

avec

$$\lambda_J^* \in \Lambda_J^*.$$

D'après la définition de Π_J ,

$$\begin{aligned} \forall \mu_J^* \in \Lambda_J^*, \\ \langle \lambda \perp \Pi_J \lambda, \mu_J^* \rangle_0 = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall \mu_J^* \in \Lambda_J^*, \\ \langle \lambda \perp \lambda_J^*, \mu_J^* \rangle_0 = \xi_J \langle \varphi, \mu_J^* \rangle. \end{aligned}$$

Mais de la définition de $\tilde{\Pi}_J$,

$$\begin{aligned} \forall \mu_J^* \in \Lambda_J^*, \\ \langle \lambda \perp \tilde{\Pi}_J \lambda, \mu_J^* \rangle_0 = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall \mu_J^* \in \Lambda_J^*, \\ \langle \tilde{\Pi}_J \lambda \perp \lambda_J^*, \mu_J^* \rangle_0 = \xi_J \langle \varphi, \mu_J^* \rangle. \end{aligned}$$

En choisissant $\mu_J^* = \tilde{\Pi}_J \lambda \perp \lambda_J^*$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\tilde{\Pi}_J \lambda \perp \lambda_J^*\|_0 \leq |\xi_J| \|\varphi\|_0.$$

Mais, comme $\int_\Gamma \lambda = 0$,

$$\begin{aligned} |\xi_J| &= \left| \int_\Gamma (\lambda \perp \Pi_J \lambda) \, ds \right| \\ &\leq C_1 \|\lambda \perp \Pi_J \lambda\|_0 \end{aligned}$$

où C_1^2 est le volume de Γ . Donc finalement

$$\|\tilde{\Pi}_J \lambda \perp \lambda_J^*\|_0 \leq C_2 \|(1 \perp \Pi_J) \lambda\|_0.$$

D'autre part,

$$\lambda_J^* \perp \lambda = \perp \xi_J \varphi \perp (1 \perp \Pi_J) \lambda$$

donc on a aussi $\|\lambda \perp \lambda_J^*\|_0 \leq C_3 \|(1 \perp \Pi_J) \lambda\|_0$, et on conclut grâce à l'inégalité triangulaire, et à l'inégalité directe.

□

On en déduit un corollaire immédiat:

Corollaire 4.2.1 *Pour tout s, t , $0 \leq s < \gamma'$ et $s \leq t \leq \gamma$, il existe une constante C telle que, pour tout $J \geq 0$, et tout $\lambda \in H_*^t(\Gamma)$,*

$$\|\lambda \perp \tilde{\Pi}_J \lambda\|_s \leq C \rho^{\perp(t \perp s)J} \|\lambda\|_t.$$

Preuve: On écrit

$$\begin{aligned} \|\lambda \perp \tilde{\Pi}_J \lambda\|_s &\lesssim \|\lambda \perp \Pi_J \lambda\|_s + \|\Pi_J \lambda \perp \tilde{\Pi}_J \lambda\|_s \\ &\lesssim \rho^{\perp(t \perp s)J} \|\lambda\|_t + \rho^{sJ} \|\Pi_J(\lambda \perp \tilde{\Pi}_J \lambda)\|_0 \\ &\lesssim \rho^{\perp(t \perp s)J} \|\lambda\|_t + \rho^{sJ} \|\lambda \perp \tilde{\Pi}_J \lambda\|_0, \end{aligned}$$

et on conclut avec la proposition précédente.

□

En particulier, les projecteurs $\widetilde{\Pi}_J$ sont uniformément bornés en tant qu'opérateurs de H_*^s dans lui même, pour $0 \leq s < \gamma'$. Comme pour Π_J , on peut prolonger $\widetilde{\Pi}_J$ par continuité sur $H_*^{\perp s}$ en gardant les propriétés d'orthogonalité et d'uniforme continuité. On a un autre corollaire concernant les normes négatives:

Corollaire 4.2.2 *Pour tout $s, \perp\gamma \leq s \leq 0$, et tout $t \geq s, \perp\gamma' < t \leq \gamma$, il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda \in H_*^t(\Gamma)$,*

$$\|\lambda \perp \widetilde{\Pi}_J \lambda\|_s \leq C \rho^{\perp(t \perp s)J} \|\lambda\|_t. \quad (4.2.12)$$

Preuve: On commence avec $t \geq 0$ en écrivant

$$\begin{aligned} \|\lambda \perp \widetilde{\Pi}_J \lambda\|_{H_*^s} &= \sup_{\mu \in H_*^{-s}} \frac{\langle (1 \perp \widetilde{\Pi}_J) \lambda, (1 \perp \widetilde{\Pi}_J) \mu \rangle}{\|\mu\|_{\perp s}} \\ &\lesssim \|1 \perp \widetilde{\Pi}_J \lambda\|_0 \sup_{\mu \in H_*^{-s}} \frac{\|(1 \perp \widetilde{\Pi}_J) \mu\|_0}{\|\mu\|_{\perp s}} \\ &\lesssim \rho^{\perp t J} \|\lambda\|_t \rho^{s J}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $t < 0$,

$$\begin{aligned} \|\lambda \perp \widetilde{\Pi}_J \lambda\|_{H_*^s} &\sup_{\mu \in H_*^{-s}} \frac{\langle \lambda, (1 \perp \widetilde{\Pi}_J) \mu \rangle}{\|\mu\|_{\perp s}} \\ &\lesssim \|\lambda\|_t \sup_{\mu \in H_*^{-s}} \frac{\|(1 \perp \widetilde{\Pi}_J) \mu\|_{\perp t}}{\|\mu\|_{\perp s}} \\ &\lesssim \|\lambda\|_t \rho^{\perp(s \perp t)J}. \end{aligned}$$

□

Enfin on montre exactement comme pour les projecteurs Π_J les deux résultats suivant:

Lemme 4.2.2 *Pour tout $s, |s| < \gamma'$ et pour tout $\lambda \in H_*^s$,*

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda \perp \widetilde{\Pi}_J \lambda\|_s = 0. \quad (4.2.13)$$

Théorème 4.2.1 *Pour tout $s, |s| < \gamma'$, et tout $\lambda \in H_*^s$*

$$\|\lambda\|_s^2 \sim \sum_{j \geq 0} \rho^{2js} \|(\widetilde{\Pi}_j \perp \widetilde{\Pi}_{j \perp 1}) \lambda\|_0^2. \quad (4.2.14)$$

A présent on peut énoncer un résultat concernant les projections sur $\mathcal{X}_J^k$ et $\widehat{\mathcal{X}}_J^k$:

Proposition 4.2.2 *On peut définir les projecteurs $P_J^k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k)$ et $\widehat{P}_J^k \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{X}}^k)$ tels que*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m P_J^k &= \mathcal{X}_J^k, & \mathcal{K}er P_J^k &= (\widehat{\mathcal{X}}_J^k)^0, \\ \mathcal{I}m \widehat{P}_J^k &= \widehat{\mathcal{X}}_J^k & \mathcal{K}er \widehat{P}_J^k &= (\mathcal{X}_J^k)^0 \end{aligned}$$

De plus ces projecteurs sont uniformément bornés, i.e.

$$\sup_{J \geq 0} \|P_J^k\|_{\mathcal{X}^k \leftarrow \mathcal{X}^k} < \infty \quad \sup_{J \geq 0} \|\widehat{P}_J^k\|_{\widehat{\mathcal{X}}^k \leftarrow \widehat{\mathcal{X}}^k} < \infty. \quad (4.2.15)$$

et vérifient

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{X}^k, \forall \mathbf{u}' \in \widehat{\mathcal{X}}^k, \langle P_J^k \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}} = \langle \mathbf{u}, \widehat{P}_J^k \mathbf{u}' \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}}, \quad (4.2.16)$$

$$P_J^k P_{J+1}^k = P_J^k, \quad \widehat{P}_J^k \widehat{P}_{J+1}^k = \widehat{P}_J^k, \quad (4.2.17)$$

$$\forall \mathbf{u}^j \in \mathcal{X}^k, \lim_{J \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^j \perp P_J^k \mathbf{u}^j\|_{\mathcal{X}^k} = 0, \quad (4.2.18)$$

$$\forall \widehat{\mathbf{u}}^j \in \widehat{\mathcal{X}}^k, \lim_{J \rightarrow \infty} \|\widehat{\mathbf{u}}^j \perp \widehat{P}_J^k \widehat{\mathbf{u}}^j\|_{\widehat{\mathcal{X}}^k} = 0. \quad (4.2.19)$$

Preuve: Les projecteurs sont continus car les espaces $\mathcal{X}_J^k$, (resp. $\widehat{\mathcal{X}}_J^k$) et $(\widehat{\mathcal{X}}_J^k)^0$ (resp. $(\mathcal{X}_J^k)^0$) sont fermés.

Montrons tout d'abord (4.2.18) pour $k = 1$. On se donne donc $\mathbf{u}^1 \in \mathcal{X}^1$ et on pose $\mathbf{u}^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1$, $\mathbf{u}_J^1 := P_J^1 \mathbf{u}^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1$. λ_J^1 est l'unique élément de Λ_J^* satisfaisant

$$\forall \widehat{\lambda}_J^1 \in \Lambda_J^* \quad \langle \mathbf{rot}_\Gamma(\lambda^1 \perp \lambda_J^1), \mathbf{rot}_\Gamma \overset{\perp 1}{\Delta}_\Gamma \widehat{\lambda}_J^1 \rangle = 0.$$

Donc

$$\forall \widehat{\lambda}_J^1 \in \Lambda_J^* \quad \langle \lambda^1 \perp \lambda_J^1, \widehat{\lambda}_J^1 \rangle = 0.$$

c'est-à-dire $\lambda_J^1 = \widetilde{\Pi}_J \lambda^1$. Du lemme 4.2.2,

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda^1 \perp \lambda_J^1\|_{\frac{1}{2}} = 0.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^1 \perp \mathbf{u}_J^1\|_{\mathcal{X}^1} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. (4.2.18) pour $k = 2$ ainsi que (4.2.19) se font de manière rigoureusement identique.

On en déduit donc (4.2.15) par le théorème de Banach, ou directement en remarquant, par exemple, $P_J^1 \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\Pi}_J \lambda^1$, et les relations analogues pour P^2 , et $\hat{P}^k$.

Les relations (4.2.17) se montre encore grâce à cette relation liant P^k et $\tilde{\Pi}_J$. Enfin, si $\mathbf{u} \in \mathcal{X}^1$ et $\mathbf{v} \in \hat{\mathcal{X}}^1$, $\mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1$, $\mathbf{v} = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \hat{\lambda}^1$, alors

$$\begin{aligned} \langle P_J^1 \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{X}, \mathcal{X}'} &= \langle \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\Pi}_J \lambda^1, \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \hat{\lambda}^1 \rangle_{L^2} \\ &= \perp \langle \tilde{\Pi}_J \lambda^1, \hat{\lambda}^1 \rangle_{L^2} \\ &= \perp \langle \lambda^1, \tilde{\Pi}_J \hat{\lambda}^1 \rangle_{L^2} \\ &= \langle \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \tilde{\Pi}_J \hat{\lambda}^1 \rangle_{L^2} \\ &= \langle \mathbf{u}, \hat{P}_J^1 \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Et on fait de même pour les autres relations de (4.2.17), ce qui achève la preuve de la proposition. □

Corollaire 4.2.3 *Soit $K : \mathcal{X}^k \rightarrow \mathcal{X}^k$, et $K' : \hat{\mathcal{X}}^k \rightarrow \hat{\mathcal{X}}^k$ deux opérateurs compacts. Alors*

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|(Id \perp P_J^k)K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^k)} = 0 \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \|(Id \perp \hat{P}_J^k)K'\|_{\mathcal{L}(\hat{\mathcal{X}}^k)} = 0 \quad (4.2.20)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|K(Id \perp P_J^k)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^k)} = 0 \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \|K'(Id \perp \hat{P}_J^k)\|_{\mathcal{L}(\hat{\mathcal{X}}^k)} = 0. \quad (4.2.21)$$

Preuve : Pour les deux premières assertions, montrons par exemple que $\lim_{J \rightarrow \infty} \|(Id \perp P_J^k)K\| = 0$: comme K est compact, si $B_{\mathcal{X}}(0, 1)$ désigne la boule unité dans $\mathcal{X}$, on peut trouver $(\mathbf{u}_j)_j$ dans $\overline{KB_{\mathcal{X}}(0, 1)}$, telle que

$$\|\mathbf{u}_j \perp P_j \mathbf{u}_j\|_{\mathcal{X}} = \|(Id \perp P_j^k)K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}.$$

On va montrer que toute suite extraite de $(\|(Id \perp P_j^k)K\|)$ converge vers 0. Pour alléger les notations, on suppose que $(\|(Id \perp P_j^k)K\|)$ converge, puis

on extrait de $(\mathbf{u}_j)$ une suite convergente (puisque ses éléments sont dans un compact), et gardant toujours les mêmes notations, on pose $\mathbf{u} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}_j$. Alors

$$\|\mathbf{u}_j \perp P_j^k \mathbf{u}_j\| \leq \|P_j^k(\mathbf{u}_j \perp \mathbf{u})\| + \|P_j^k \mathbf{u} \perp \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_j\|,$$

et comme $(P_j^k)_j$ est uniformément bornée,

$$\|\mathbf{u}_j \perp P_j^k \mathbf{u}_j\| \leq C\|\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_j\| + \|P_j^k \mathbf{u} \perp \mathbf{u}\|.$$

Comme le terme de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque j tend vers l'infini, compte tenu de la définition de $\mathbf{u}_j$, on obtient bien

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|(Id \perp P_j^k)K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = 0.$$

On fait le même raisonnement pour les projecteurs duaux, et on termine la preuve du corollaire en remarquant

$$\|K(Id \perp P_j^k)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = \|(Id \perp \widehat{P}_j^k)\widehat{K}\|_{\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{X}})}$$

où $\widehat{K}$ désigne l'opérateur dual de K .

□

On note $P_J : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_J = \mathcal{X}_J^1 + \mathcal{X}_J^2$, $P_J \mathbf{u} = \sum_j P_j^k \mathbf{u}^j$, pour $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 \in \mathcal{X}$.

On fait de même pour $\widehat{P}_J$.

On rappelle que l'opérateur intégral L peut être défini par $L\mathbf{u} = (L^1 \mathbf{u}, L^2 \mathbf{u})^T$, avec $L^k : \mathcal{X} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}^k$. On note alors :

$$L_J^k = \widehat{P}_J^k L_k P_J : \mathcal{X}_J \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_J^k \quad (4.2.22)$$

$$L_J^{kl} = \widehat{P}_J^k L_k P_J^l : \mathcal{X}_J^l \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_J^k \quad (4.2.23)$$

et

$$L_J \mathbf{u} = (L_J^1 \mathbf{u}, L_J^2 \mathbf{u})^T : \mathcal{X}_J \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_J. \quad (4.2.24)$$

Proposition 4.2.3 *Il existe une constante $C_0 > 0$ et $J_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $J \geq J_0$,*

$$\inf_{\mathbf{u}_J \in \mathcal{X}_J \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_J \in \mathcal{X}_J \setminus \{0\}} \frac{|< L_J \mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J >|}{\|\mathbf{u}_J\|_{\mathcal{X}} \|\mathbf{v}_J\|_{\mathcal{X}}} \geq C_0. \quad (4.2.25)$$

Preuve : Pour un opérateur $A : \mathcal{X} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$, on note A^* l'opérateur de $\mathcal{X} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$ tel que $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}}$, et pour un opérateur $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, on note $\widehat{T}$ l'opérateur de $\widehat{\mathcal{X}} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$ tel que $\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v}' \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}} = \langle \mathbf{u}, \widehat{T}\mathbf{v}' \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}}$. Soit R l'opérateur de $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ vérifiant $R\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 \perp \mathbf{u}^2$; $R^2 = Id$, et $\widehat{R}\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{u}}^1 \perp \widehat{\mathbf{u}}^2$. On sait que $L = DR + K$, avec $K : \mathcal{X} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$ compact,

$$D = \begin{pmatrix} D^{11} & 0 \\ 0 & D^{22} \end{pmatrix}$$

et $D^{jj} : \mathcal{X}^k \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}^k$ fortement elliptique; on remarquera que $D = \widehat{R}D^*R$. L étant un isomorphisme, $LR = (D + KR)$ (ainsi que son adjoint $(D^* + \widehat{R}K^*)$) en est un également. Pour $\mathbf{u}$ dans $\mathcal{X}$, on a

$$\langle L\mathbf{u}, R\mathbf{u} \perp (L^*)^{\perp 1} K^* R\mathbf{u} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle D\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}}.$$

Prenons $\mathbf{u}_J \in \mathcal{X}_J$, et $\mathbf{v}_J = R\mathbf{u}_J \perp P_J(L^*)^{\perp 1} K^* R\mathbf{u}_J$. De l'égalité précédente,

$$\langle L\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} = \langle D\mathbf{u}_J, \mathbf{u}_J \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} + \langle \widehat{R}KL^{\perp 1}(1 \perp \widehat{P}_J)L\mathbf{u}_J, \mathbf{u}_J \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}},$$

d'où

$$| \langle L\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} | \geq (C \perp \varepsilon_J) \|\mathbf{u}_J\|^2,$$

où $C > 0$ est une constante (forte ellipticité de D), et $\varepsilon_J = \|\widehat{R}KL^{\perp 1}(1 \perp \widehat{P}_J)L\|_{\widehat{\mathcal{X}} \leftarrow \mathcal{X}}$. Comme K est compact, et $(1 \perp P_J)$ converge simplement (en tout point) vers 0, $\widehat{R}KL^{\perp 1}(1 \perp \widehat{P}_J)$ converge en norme d'opérateurs vers 0. Donc, on peut choisir J_0 (indépendant de $\mathbf{u}_J$) tel que $\varepsilon_J < C/2$ pour $J \geq J_0$. En gardant la notation générique C pour les constantes, pour $J \geq J_0$,

$$| \langle L\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} | \geq C \|\mathbf{u}_J\|^2$$

et comme (P_J) est uniformément bornée,

$$\|\mathbf{v}_J\| \leq C \|\mathbf{u}_J\|,$$

d'où

$$| \langle L\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} | \geq C \|\mathbf{u}_J\| \|\mathbf{v}_J\| > 0$$

et

$$\sup_{\mathbf{v}_J \in \mathcal{X}_J \setminus \{0\}} \frac{| \langle L\mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J \rangle_{\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}} |}{\|\mathbf{v}_J\|} \geq C \|\mathbf{u}_J\|$$

et ce, pour tout $\mathbf{u}_J$ dans $\mathcal{X}_J$.

□

Corollaire 4.2.4 1. Pour $J \geq J_0$, L_J est un isomorphisme de $\mathcal{X}_J$ vers $\hat{\mathcal{X}}_J$.

2. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $J \geq J_0$, si $\mathbf{u}_J$ est la solution de

$$L_J \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_J := (\hat{P}_J^1 \mathbf{f}, \hat{P}_J^2 \mathbf{f}), \quad (4.2.26)$$

et si $\mathbf{u}$ est la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dans $\mathcal{X}$, alors

$$\|\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_J\|_{\mathcal{X}} \leq C(\|\mathbf{f} \perp \mathbf{f}_J\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}}). \quad (4.2.27)$$

En particulier, $(\mathbf{u}_J)$ converge vers la solution cherchée $\mathbf{u}$ en norme d'énergie.

Preuve: Pour la première partie de la preuve, on a, grâce à la proposition précédente, pour tout $\mathbf{u}_J \in \mathcal{X}_J$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_J\|_{\mathcal{X}} &\lesssim \|L_J \mathbf{u}_J\|_{\hat{\mathcal{X}}} \lesssim \|\hat{P}_J L\mathbf{u}_J\|_{\hat{\mathcal{X}}} \\ &\lesssim \|L\mathbf{u}_J\|_{\hat{\mathcal{X}}} \\ &\lesssim \|\mathbf{u}_J\|_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

avec des constantes indépendantes de J .

Pour la deuxième assertion, on écrit, pour $J \geq J_0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \perp \mathbf{f}_J &= L\mathbf{u} \perp L_J \mathbf{u}_J \\ &= L(1 \perp P_J)\mathbf{u} + LP_J \mathbf{u} \perp L_J \mathbf{u}_J \\ &= L(1 \perp P_J)\mathbf{u} + (1 \perp \hat{P}_J)LP_J \mathbf{u} + \hat{P}_J LP_J \mathbf{u} \perp L_J \mathbf{u}_J, \end{aligned}$$

d'où, en notant par C les constantes génériques,

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{f} \perp \mathbf{f}_J \|_{\hat{\mathcal{X}}} + \| L(1 \perp P_J) \mathbf{u} \|_{\hat{\mathcal{X}}} + \| (1 \perp \hat{P}_J) L P_J \mathbf{u} \|_{\hat{\mathcal{X}}} \\
& \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}} \frac{\langle L P_J \mathbf{u} \perp L_J \mathbf{u}_J, P_J \mathbf{v} \rangle}{\| \mathbf{v} \|_{\mathcal{X}}} \\
& \geq \sup_{\mathbf{v}_J \in \mathcal{X}_J} \frac{\langle L_J (P_J \mathbf{u} \perp \mathbf{u}_J), \mathbf{v}_J \rangle}{\| \mathbf{v}_J \|_{\mathcal{X}}} \\
& \geq C \| P_J \mathbf{u} \perp \mathbf{u}_J \|_{\mathcal{X}}
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

la dernière inégalité étant donnée par la condition inf-sup (4.2.25). En écrivant

$$(1 \perp \hat{P}_J) L P_J \mathbf{u} = (1 \perp \hat{P}_J) \mathbf{f} + (1 \perp \hat{P}_J) L (P_J \mathbf{u} \perp \mathbf{u}),$$

puis en utilisant la continuité de L et le fait que les projecteurs $\hat{P}_J$ sont uniformément bornés, on tire de (4.2.28) le résultat.

□

On remarquera que cette estimation fait intervenir la continuité de L , le fait que les projecteurs P_J sont uniformément bornés et la condition inf-sup (4.2.25), et rien d'autre. Elle est donc aussi valable pour des surfaces moins régulières, en faisant attention aux espaces en jeu, et, en particulier, en définissant correctement la décomposition de Hodge. Sur ce point, pour des surfaces fermées, on se réfère à [4]. Bien sûr, disons sur un polyèdre, la solution cherchée admet des singularités aux sommets et aux arêtes de la surface, [10], [12]. Le corollaire dit que l'erreur entre la solution cherchée et la solution «Galerkin» est majorée non seulement par un terme d'erreur du second membre ($\| (1 \perp \hat{P}_J') \mathbf{f} \|$), mais aussi par un terme de «régularité» ($\| (1 \perp P_J) \mathbf{u} \|$). Même si (dans notre cas) le second membre de l'équation intégrale est régulier, le taux de convergence de la méthode est limité par le comportement singulier de la solution $\mathbf{u}$. Pour regarder ces singularités, et donc pour savoir dans quel espace de Sobolev la solution vit, on se réfère à [10], [12]. Le comportement de $\mathbf{u}$ étant, dans ce cas, similaire au cas de la plaque «ouverte» qui sera traité plus loin, nous n'irons pas dans cette direction ici.

On notera tout de même que pour le cas qui nous concerne (surfaces régulières fermées), comme le second membre est de classe C^∞ la solution cherchée est aussi régulière.

Le corollaire dit en substance que l'on peut appliquer la méthode de Galerkin pour approcher $\mathbf{u}$. Cependant, tout cela reste théorique, puisque les éléments de $\mathcal{X}_J^2$, comprenant $\Delta_\Gamma^{\perp 1}$, ne sont pas calculables. L'objet du paragraphe suivant sera de modifier le système en introduisant un opérateur discret $\Delta_J^{\perp 1}$. L'idée est de séparer les composantes (rotationnel+gradient) pour obtenir un système résoluble numériquement dans des espaces d'éléments finis classiques.

4.3 Le système modifié: perturbation et changement de variables.

4.3.1 Le système perturbé.

On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_J &= (\Lambda_J, \|\cdot\|_{\frac{1}{2}}) \times (\Lambda_J, \|\cdot\|_{\perp \frac{1}{2}}) & \mathcal{Y} &= H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp \frac{1}{2}} \\ \mathcal{Y}_J^* &= (\Lambda_J^*, \|\cdot\|_{1/2}) \times (\Lambda_J^*, \|\cdot\|_{\perp 1/2}) & \mathcal{Y}^* &= H_*^{\frac{1}{2}} \times H_*^{\perp \frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

et on définit les espaces continus duaux:

$$\hat{\mathcal{Y}} := H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{\mathcal{Y}}^* := H_*^{\perp \frac{1}{2}} \times H_*^{\frac{1}{2}}$$

L_J induit (par un changement de variables) un opérateur bijectif (pour $J \geq J_0$) $\tilde{L}_J : \mathcal{Y}_J^* \rightarrow \hat{\mathcal{Y}}_J^*$, où $\hat{\mathcal{Y}}_J^*$ est le L^2 -dual de $\mathcal{Y}_J^*$.

$$\tilde{L}_J = \begin{pmatrix} k^2 \tilde{L}_J^{11} & k^2 \tilde{L}_J^{12} \\ k^2 \tilde{L}_J^{21} & \perp \tilde{L}_J^{22} \end{pmatrix}$$

et pour tout $\lambda_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$, et tout $\mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{L}_J^{11} \lambda_J^1, \mu_J^1 \rangle &= \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \\ \langle \tilde{L}_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle &= \langle V \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \\ \langle \tilde{L}_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle &= \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ \langle \tilde{L}_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle &= \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ &\quad + \langle \perp k^2 \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle\end{aligned}$$

Grâce à nouveau aux équivalences de normes sur $\mathcal{X}$ (cf. théorème 3.3.1), on a la

Proposition 4.3.1 *Il existe deux constantes J_0 et $C > 0$ telles que, pour $J \geq J_0$,*

$$\inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{L}_J \lambda_J, \mu_J \rangle}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J}} \geq C \quad (4.3.1)$$

et on a un corollaire analogue au corollaire 4.2.4, mais ici, on exploite la forme des espaces discrets:

Corollaire 4.3.1 *Si $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}}$ et si $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$, et si (décompositions de Hodge)*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \hat{\lambda}^1 + \nabla_\Gamma \hat{\lambda}^2 & \hat{\lambda} &:= (\hat{\lambda}^1, \hat{\lambda}^2) \in \hat{\mathcal{Y}}^*, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2, & \lambda &:= (\lambda^1, \lambda^2) \in \mathcal{Y}^*, \end{aligned}$$

alors

$$\hat{P}_J \mathbf{f} = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \tilde{\Pi}_J \hat{\lambda}^1 + \nabla_\Gamma \tilde{\Pi}_J \hat{\lambda}^2 \quad (4.3.2)$$

$$P_J \mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\Pi}_J \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \tilde{\Pi}_J \lambda^2, \quad (4.3.3)$$

où $\tilde{\Pi}_J$ est le projecteur L_*^2 orthogonal sur Λ_J .

De plus, si $\mathbf{u}$ est la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$, et si $\lambda_J \in \mathcal{Y}_J$ est la solution de

$$\begin{aligned} \forall \mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*, \\ \langle \tilde{L} \lambda_J, \mu_J \rangle &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ &= \perp \langle \hat{\lambda}^1, \mu_J^1 \rangle + \perp \langle \hat{\lambda}^2, \mu_J^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

alors il existe une constante C indépendante de J telle que

$$\begin{aligned} &\|\lambda^1 \perp \lambda_J^1\|_{\frac{1}{2}} + \|\lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \\ &\leq C(\|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \hat{\lambda}^1\|_{\perp \frac{1}{2}} + \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \hat{\lambda}^2\|_{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \lambda^1\|_{\frac{1}{2}} + \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

C'est exactement le résultat du corollaire 4.2.4 avec en plus la relation liant P_J et $\tilde{\Pi}_J$ vue dans la proposition 4.2.2.

Pour pouvoir calculer les éléments issus de l'inverse du laplacien, on va *perturber* le système discret et introduire deux variables auxiliaires, relatives aux laplaciens. La perturbation va nous amener à changer les espaces de résolution, et on quitte donc le cadre de résolution dans $\mathcal{X}$. En fait, on passe d'une méthode de résolution *conforme* à une méthode de résolution *non conforme* comme on le verra par la suite.

Définition 4.3.1 On note Q_J la projection de H_*^1 sur Λ_J^* orthogonale pour le produit scalaire $\langle \lambda, \mu \rangle_* = \langle \nabla_\Gamma \lambda, \nabla_\Gamma \mu \rangle_{L^2(\Gamma)}$. On note aussi $\Delta_J^{\perp 1} := Q_J(\Delta_\Gamma^{\perp 1}|_{\Lambda_J^*})$.

Lemme 4.3.1 Pour tout J , et tout $\mu_J \in \Lambda_J^*$, $\zeta_J := \Delta_J^{\perp 1} \mu_J$ est la solution du problème variationnel (discret)

$$\forall \zeta'_J \in \Lambda_J^*, \int_\Gamma \nabla_\Gamma \zeta_J \overline{\nabla_\Gamma \zeta'_J} ds = \perp \int_\Gamma \mu_J \overline{\zeta'_J} ds. \quad (4.3.6)$$

De plus, Q_J est autoadjoint, uniformément borné dans $\mathcal{L}(H_*^1)$, et

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda \perp Q_J \lambda\|_{H_*^1} = 0$$

pour tout $\lambda \in H_*^1$.

On peut à présent modifier le système issu de la méthode de Galerkin comme suit.

Définition 4.3.2 On définit l'opérateur $\tilde{T}_J$ sur $\mathcal{Y}_J^*$ par:

$$\tilde{T}_J = \begin{pmatrix} k^2 \tilde{T}_J^{11} & k^2 \tilde{T}_J^{12} \\ k^2 \tilde{T}_J^{21} & \perp \tilde{T}_J^{22} \end{pmatrix} \quad (4.3.7)$$

avec

$$\tilde{T}_J^{11} = \tilde{L}_J^{11} \quad (4.3.8)$$

et pour tout $\lambda_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$, et tout $\mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$,

$$\langle \tilde{T}_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle = \langle V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \quad (4.3.9)$$

$$\langle \tilde{T}_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle = \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle. \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle = & \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ & \perp k^2 \langle V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

On peut l'écrire aussi comme perturbation de $\tilde{L}_J$:

$$\tilde{T}_J = \tilde{L}_J \perp R_J \quad (4.3.12)$$

avec

$$R_J = \begin{pmatrix} 0 & k^2 R_J^{12} \\ k^2 R_J^{21} & k^2 R_J^{22} \end{pmatrix} \quad (4.3.13)$$

$$\langle R_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle = \langle V \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \quad (4.3.14)$$

$$\langle R_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle = \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^2, \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle, \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} \langle R_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle &= \langle V \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ &\quad + \langle V \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ &= \langle V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ &\quad + \langle V \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Proposition 4.3.2 *Il existe deux constantes C et $J_1 \geq J_0$ tel que pour tout $J \geq J_1$,*

$$\inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{T}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J}} \geq C. \quad (4.3.17)$$

Preuve :

$$\inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{L}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J}} \leq \inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{T}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J}} + \sup_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle R_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J}}.$$

D'autre part,

$$|\langle R_J \lambda_J, \mu_J \rangle| \leq |\langle R_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle| + |\langle R_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle| + |\langle R_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle|.$$

soit

$$|\langle R_J \lambda_J, \mu_J \rangle| \leq C \varepsilon_J \|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J},$$

avec C constant, et

$$\varepsilon_J = \|(1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1}\|_{H^1 \leftarrow H^{-\frac{1}{2}}}.$$

L'injection $H^{\perp \frac{1}{2}} \hookrightarrow H^{\perp 1}$ étant compacte, $\lim_{J \rightarrow \infty} \varepsilon_J = 0$, et donc finalement

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|R_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J^* \leftarrow \mathcal{Y}_J^*} = 0 \quad (4.3.18)$$

On en tire, avec (4.2.25),

$$\inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{T}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J}} \geq 2C_0 \perp \varepsilon_J.$$

Il reste à choisir J_1 tel que $|\varepsilon_J| < C_0$ pour tout $J \geq J_1$.

□

Si $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}} \cap L^2(\Gamma)$, on note $\tilde{f}_J = (\tilde{f}_J^1, \tilde{f}_J^2)$ l'élément de $\hat{\mathcal{Y}}_J^*$ vérifiant

$$\langle \tilde{f}_J^1, \mu_J^1 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle \quad (4.3.19)$$

$$\langle \tilde{f}_J^2, \mu_J^2 \rangle = \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \quad (4.3.20)$$

et $\tilde{F}_J = (\tilde{F}_J^1, \tilde{F}_J^2)$ l'élément de $\hat{\mathcal{Y}}_J^*$ vérifiant

$$\langle \tilde{F}_J^1, \mu_J^1 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \quad (4.3.21)$$

$$\langle \tilde{F}_J^2, \mu_J^2 \rangle = \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \quad (4.3.22)$$

En particulier, $\tilde{f}_J^1 = \tilde{F}_J^1$.

Nous avons donc deux problèmes résolubles pour J suffisamment grand:

$$\tilde{L}\lambda_J = \tilde{f}_J$$

$$\tilde{T}\theta_J = \tilde{F}_J$$

On rappelle que le premier problème n'est autre que la méthode de Galerkin choisie pour la résolution de l'équation intégrale de départ, ou, plus sobrement, si

$$\mathbf{u}_J = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 + \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \lambda_J^2,$$

alors

$$L_J \mathbf{u}_J = \hat{P}_J \mathbf{f}.$$

Du corollaire 4.2.4, on a une estimation de l'erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_J\|$, entre la solution de l'équation intégrale et la solution «Galerkin», en fonction (de la régularité) du second membre et (de la régularité) de la solution $\mathbf{u}$. Il nous reste donc à estimer l'erreur commise en résolvant le système perturbé.

Théorème 4.3.1 *Soit $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}} \cap L^2(\Gamma)$. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$. On note*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$$

$$\mathbf{u}^1 := \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \quad \mathbf{u}^2 = \nabla_\Gamma \Delta^{\perp 1} \lambda^2$$

la décomposition de Hodge de $\mathbf{u}$.

Pour $J \geq J_1$, soit $\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^$ la solution de*

$$\forall \mu_J \in \mathcal{Y}_J^*, \langle \tilde{L}_J \lambda_J, \mu_J \rangle = \langle \tilde{f}_J, \mu_J \rangle, \quad (4.3.23)$$

et $\theta_J \in \mathcal{Y}_J^$ la solution de*

$$\forall \mu_J \in \mathcal{Y}_J^*, \langle \tilde{T}_J \theta_J, \mu_J \rangle = \langle \tilde{F}_J, \mu_J \rangle. \quad (4.3.24)$$

Si

$$\varepsilon_J := \|(1 \perp Q_J)\Delta_\Gamma^{\perp 1}\|_{H^1 \leftarrow H^{-\frac{1}{2}}} \quad (4.3.25)$$

alors on a l'estimation

$$\|\theta_J \perp \lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}) \varepsilon_J. \quad (4.3.26)$$

La suite (ε_J) tend vers 0 lorsque J tend vers l'infini, et

$$\forall k = 1, 2, \lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda_J^k \perp \theta_J^k\|_{H^{\frac{3}{2}-k}} = 0 \quad (4.3.27)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \mathbf{rot}_\Gamma \theta_J^1 = \mathbf{u}^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 \quad \text{dans } H^{\perp \frac{1}{2}} \quad (4.3.28)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \theta_J^2 = \mathbf{div}_\Gamma \mathbf{u} \quad \text{dans } H^{\perp \frac{1}{2}} \quad (4.3.29)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \theta_J^2 = \mathbf{u}^2 = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2 \quad \text{dans } L^2 \quad (4.3.30)$$

Preuve: Tout d'abord on remarquera que la suite $(\|\theta_J\|_{\mathcal{Y}_J})$ est bornée, car il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que:

$$C_1 \|\theta_J\|_{\mathcal{Y}_J} \leq \|\tilde{T}_J \theta_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J} \leq C_2 (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}).$$

Comme on l'a vu (4.3.18), la suite (ε_J) tend vers 0, et

$$\|R_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J \leftarrow \mathcal{Y}_J} \leq C \varepsilon_J.$$

De l'équation précédente, il existe une constante C telle que:

$$\|R_J \theta_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2} + \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}}) \varepsilon_J.$$

On en tire

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_J \theta_J \perp \tilde{L}_J \lambda_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J} &= \|\tilde{L}_J(\theta_J \perp \lambda_J) + R_J \theta_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J} \\ &\geq C(\|\theta_J \perp \lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J} + (\|\mathbf{f}\|_{L^2} + \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}}) \varepsilon_J), \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_J \theta_J \perp \tilde{L}_J \lambda_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J} &= \|F_J \perp f_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J} \\ &= \sup\{|\langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma(1 \perp Q_J)\Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle| \mid \mu_J^2 \in \Lambda_J^*, \|\mu_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} = 1\} \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2} \varepsilon_J. \end{aligned}$$

d'où

$$\|\theta_J \perp \lambda_J\|_{Y_J} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}) \varepsilon_J.$$

Le reste est déduit du corollaire 4.2.4.

□

Remarques: il est nécessaire ici de supposer $\mathbf{f} \in L^2$, pour obtenir un second membre continu dans les espaces ad hoc. C'est un phénomène général: les méthodes perturbée (ou non conformes) s'appuient sur une donnée plus «régulière» que le problème initial l'impose. Mais il est à souligner que la condition nécessaire ici est très faible.

En outre, on a bien à faire à une méthode *non conforme*: la solution «discrete»

$$\mathbf{u}_J = \mathbf{rot}_\Gamma \theta_J^1 + \nabla_\Gamma Q_J \overset{\perp}{\Delta}_\Gamma \theta_J^2$$

n'est pas dans $\mathcal{X} = TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma)$. Mais on a une convergence dans l'espace variationnel pour la composante à divergence nulle, et une convergence L^2 pour l'autre composante. Cette dernière convergence est plus «forte» si l'on plonge la solution dans $H^{\perp\frac{1}{2}}$, mais ce plongement n'est pas bijectif, et dans ce sens, on a une convergence en norme plus «faible» (la norme $H^{\perp\frac{1}{2}}$ n'est pas une norme équivalente à la norme sur $\mathcal{X}$ pour l'espace $\mathcal{X}^2$ à rotationnels nuls).

Le théorème nous donne un renseignement supplémentaire non négligeable avec la relation de convergence

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \theta_J^2 = \lambda^2.$$

Du point de vue physique, λ^2 désigne la densité de charge sur la surface Γ , que l'on approche, cette fois-ci en «norme d'énergie» par θ^2 : la méthode permet non seulement le calcul du courant surfacique, mais aussi le calcul de la densité de charge sur la surface.

4.3.2 Laplacien discret.

La perturbation du système va nous permettre de résoudre un système discret de manière plus directe, en ce sens que l'on s'affranchit des termes faisant intervenir l'inverse du laplacien dans la méthode de Galerkin initiale.

En réalité, on se ramène à une méthode de Galerkin sur un espace un peu plus gros contenant des laplaciens.

On rappelle que, pour $\mu_J^2 \in \Lambda_J^*$,

$$\Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 := Q_J \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2.$$

et que $\zeta_J = \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2$ est la solution du problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \zeta_J \in \Lambda_J^* \text{ tel que } \forall \varphi_J \in \Lambda_J, \\ & \int_\Gamma (\nabla_\Gamma \zeta_J) \overline{\nabla_\Gamma \varphi_J} ds = \perp \int_\Gamma \mu_J^2 \overline{\varphi_J} ds. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

On écrira $\langle \perp \Delta_J \zeta, \varphi \rangle_{L^2} := \langle \nabla_\Gamma \zeta, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{L^2}$ pour ζ, φ dans Λ_J .

Suivant l'écriture du problème perturbé, on introduit la variable

$$\zeta_J := \Delta_J^{\perp 1} \lambda_J^2. \quad (4.3.32)$$

Revenons au système discret (perturbé); on cherche $\lambda_J \in (\Lambda_J^*)^2$ tel que, pour tout $\mu_J \in (\Lambda_J^*)^2$:

$$\begin{aligned} & k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle + k^2 \langle V \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \\ & + k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & \perp \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle + k^2 \langle V \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & = \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle + \langle \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Prenant $\mu_J^1 = 0$,

$$\begin{aligned} & \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ & + k^2 \langle \operatorname{div}_\Gamma V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & + k^2 \langle \operatorname{div}_\Gamma V \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \lambda_J^2, \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & = \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{f}, \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Posons, introduisant une nouvelle variable, en remarquant que $\Delta_J^{\perp 1} \lambda_J^2 = \zeta_J$,

$$\begin{aligned} \Delta_\Gamma \tilde{\eta}_J & := k^2 \operatorname{div}_\Gamma V_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 \\ & + k^2 \operatorname{div}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \zeta_J \\ & \perp \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

et

$$\eta_J = Q_J \tilde{\eta}_J \quad (4.3.36)$$

on notera que $\Delta_\Gamma \tilde{\eta}_J \in H^{\perp 1}$ car on a supposé $\mathbf{f}$ dans L^2 , et que η_J est solution du problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \eta_J \in \Lambda_J^* \text{ tel que} \\ & \forall \varphi_J \in \Lambda_J^*, \\ & \int_\Gamma \nabla_\Gamma \eta_J \overline{\nabla_\Gamma \varphi_J} ds = \perp < k^2 \operatorname{div}_\Gamma V_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \varphi_J > \\ & \quad \perp < k^2 \operatorname{div}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \zeta_J, \varphi_J > \\ & \quad + < \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{f}, \varphi_J > . \end{aligned}$$

En remplaçant (4.3.35) dans (4.3.34),

$$< \Delta \tilde{\eta}_J, \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 > + < V \lambda_J^2, \mu_J^2 > = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \perp < \Delta \tilde{\eta}_J, \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 > &= < \nabla_\Gamma \tilde{\eta}_J, \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 > \\ &= < \nabla_\Gamma Q_J \tilde{\eta}_J, \nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} \mu_J^2 > \\ &= \perp < \eta_J, \mu_J^2 > \end{aligned}$$

D'où

$$< \eta_J, \mu_J^2 > + < V \lambda_J^2, \mu_J^2 > = 0; \quad (4.3.37)$$

ce sera l'équation relative à λ_J^2 . Enfin, en prenant $\mu_J^2 = 0$ dans (4.3.33), on obtient

$$k^2 \operatorname{rot}_\Gamma V_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 + k^2 \operatorname{rot}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \lambda_J^1 = \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f} \quad (4.3.38)$$

Réciproquement, une solution $(\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J)^T$ des équations (4.3.32), (4.3.35), (4.3.38), (4.3.37) est solution de (4.3.33).

On note alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_J &:= \mathcal{Y}_J \times (\Lambda_J, \|\cdot\|_1)^2, \\ \mathcal{Z}_J^* &:= \mathcal{Y}_J^* \times (\Lambda_J^*, \|\cdot\|_1)^2, \end{aligned}$$

et $\widehat{\mathcal{Z}}_J, \widehat{\mathcal{Z}}_J^*$ les espaces duaux correspondant.

Le problème discret se résume à:

trouver $Z_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J)$ dans $\mathcal{Z}_J^*$ tel que pour tout Z'_J dans $\mathcal{Z}_J$,

$$\langle \mathcal{A}_J Z_J, Z'_J \rangle_{L^2} = \mathcal{F}(Z'_J) \quad (4.3.39)$$

avec

$$\mathcal{A}_J := \begin{pmatrix} k^2 T_J^{11} & 0 & W_J & 0 \\ 0 & k^2 T_J^{22} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \perp \Delta_J & 0 \\ W'_J & 0 & W_J^0 & \perp \Delta_J \end{pmatrix} \quad (4.3.40)$$

$$W_J = k^2 \operatorname{rot}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \quad (4.3.41)$$

$$W'_J = k^2 \operatorname{div}_\Gamma V_\Gamma \operatorname{rot}_\Gamma \quad (4.3.42)$$

$$W_J^0 = k^2 \operatorname{div}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \quad (4.3.43)$$

et si

$$Z'_J = (\mu_J^1, \mu_J^2, \zeta'_J, \eta'_J)^T, \quad (4.3.44)$$

$$\mathcal{F}(Z'_J) = \langle \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle + \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \eta'_J \rangle \quad (4.3.45)$$

Les opérateurs W_J, W'_J et W_J^0 sont des opérateurs **compacts** de $\mathcal{Z}_J$ dans son dual, car ils font intervenir l'injection compacte de H^1 dans $H^{\frac{1}{2}}$ ou son adjoint.

On notera A_J la matrice de $\mathcal{A}_J$ relative à une base (pour distinguer matrices et opérateurs).

4.3.3 Traitement des constantes: le système augmenté.

Jusqu'alors on travaillait sur l'espace Λ_J^* qui est assez contraignant d'un point de vue numérique. Plutôt que de concevoir des ondelettes spécifiques, on va modifier la matrice A_J par une méthode connue pour obtenir un système rigoureusement équivalent, mais résoluble cette fois dans $\mathcal{Z}_J$ tout entier. En particulier, le système discret final doit imposer des inconnues *nécessairement* à moyennes nulles.

On commence par noter que le problème perturbé (matrice A_J) est en fait une méthode de Galerkin sur un problème en la variable

$$Z \in \mathcal{Z}^* := \mathcal{Y}^* \times H_*^1 \times H_*^1; \quad \mathcal{Y}^* := H_*^{\frac{1}{2}} \times H_*^{\frac{1}{2}}.$$

défini par:

$$\mathcal{L}Z = F$$

avec, pour tout $Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta)^T \in \mathcal{Z}$, et tout $Z' = (\mu^1, \mu^2, \zeta', \eta')^T \in \mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle := & k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \mathbf{rot}_\Gamma \mu^1 \rangle_{L^2} + k^2 \langle V \nabla_\Gamma \zeta, \mathbf{rot}_\Gamma \mu^1 \rangle_{L^2} \\ & + \langle V \lambda^2, \mu^2 \rangle_{L^2} + \langle \eta, \mu^2 \rangle_{L^2} \\ & + \langle \lambda^2, \zeta' \rangle_{L^2} + \langle \nabla_\Gamma \zeta, \nabla_\Gamma \zeta' \rangle_{L^2} \\ & \perp k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2} \\ & \perp k^2 \langle V \nabla_\Gamma, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2} + \langle \nabla_\Gamma \eta, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

et le second membre est donné par

$$\langle F, Z' \rangle := \langle \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu^1 \rangle_{L^2} \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2}. \quad (4.3.47)$$

$\mathcal{L}$ est bien défini sur $\mathcal{Z}$ tout entier, avec

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Y} \times H^1 \times H^1; \quad \mathcal{Y} := H^{\frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}.$$

On note

$$\widehat{\mathcal{Z}} := H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp 1} \times H^{\perp 1}$$

le L^2 -dual de $\mathcal{Z}$. Alors on a le

Lemme 4.3.2

Modulo un opérateur compact, $\mathcal{L}$ est fortement coercif, donc un opérateur de Fredholm de $\mathcal{Z}$ vers son L^2 -dual $\widehat{\mathcal{Z}}$; de plus

$$Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta)^T \in \mathcal{Ker} \mathcal{L} \iff \begin{cases} \lambda^1 \in \mathbb{C}, \\ \lambda^2 = 0, \\ \zeta \in \mathbb{C} \\ \eta = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{Im} \mathcal{L} = H_*^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp 1} \times H_*^{\perp 1}$$

Preuve : Le fait que ce soit un opérateur de Fredholm n'est rien d'autre que ce que l'on a fait dans la section précédente.

En ce qui concerne le noyau, fixons un élément $Z \in \mathcal{Ker} \mathcal{L}$. En prenant pour fonction test $Z' = (0, 0, 1, 0)^T$, on trouve

$$\langle \lambda^2, 1 \rangle_{L^2} = 0.$$

Ensuite, pour toutes les fonctions-tests $Z' = (\mu^1, \mu^2, \zeta', \eta')^T$ vérifiant $\langle Z', 1 \rangle = 0$ (valeurs moyennes nulles), on a

$$\langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle = \langle \mathcal{L}\tilde{Z}, Z' \rangle$$

avec $\tilde{Z} = Z \perp \langle Z, 1 \rangle$ (on retranche aux composantes de Z les valeurs moyennes). Enfin, on choisit les μ^2, ζ' dans les fonctions-tests telles que

$$\zeta' = \Delta_{\Gamma}^{\perp 1} \mu^2.$$

Grâce à cette relation «duale», en notant $\tilde{Z} = (\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta})^T$ et en remplaçant

$$\begin{array}{ll} \tilde{\eta} & \text{par } \perp \Delta_{\Gamma}^{\perp 1} \left(\operatorname{div}_{\Gamma} V(\operatorname{rot}_{\Gamma} \tilde{\lambda}^1 + \nabla_{\Gamma} \tilde{\zeta}) \right) \\ \tilde{\zeta} & \text{par } \Delta_{\Gamma}^{\perp 1} \tilde{\lambda}^2 \end{array}$$

on obtient finalement $L\mathbf{u} = 0$ dans $\mathcal{X}'$ avec $\mathbf{u} = \mathbf{rot}_{\Gamma} \tilde{\lambda}^1 + \nabla_{\Gamma} \Delta_{\Gamma}^{\perp 1} \tilde{\lambda}^2$, L étant notre opérateur intégral initial. Des hypothèses faites sur cet opérateur (injectivité), on tire

$$\tilde{\lambda}^1 = 0, \quad \tilde{\lambda}^2 = 0,$$

et donc

$$\tilde{\zeta} = 0, \quad \tilde{\eta} = 0.$$

Par conséquent, λ^1 , ζ et η sont des constantes. Enfin, reprenant l'équation générale ($\mathcal{L}Z = 0$), elle se résume à

$$\langle \eta, \mu^2 \rangle_{L^2} = 0$$

pour tout $\mu^2 \in H^{\perp \frac{1}{2}}$, et donc $\eta = 0$.

En ce qui concerne l'image de $\mathcal{L}$, elle est de codimension 2 (puisque le noyau est de dimension 2), et est trivialement incluse dans

$$H_*^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp 1} \times H_*^{\perp 1}$$

car la première composante image est un rotationnel scalaire, et la dernière est une divergence; l'inclusion mentionnée est donc une égalité, et ceci termine la preuve du lemme. □

$\mathcal{L}$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{Z}/\text{Ker}\mathcal{L}$ sur $\text{Im}\mathcal{L}$. On peut ramener l'opérateur à un isomorphisme entre $\mathcal{Z}$ et son dual en introduisant deux variables scalaires, et en imposant

$$\langle \lambda^1, 1 \rangle = 0, \quad \langle \zeta, 1 \rangle = 0.$$

On aurait un opérateur sur lequel on pourrait appliquer le schéma de Galerkin. Cependant, dans ce schéma, on n'aurait pas l'assurance que *toutes* les inconnues soient à moyennes nulles, et on perdrait le bénéfice des estimations d'erreurs précédentes. On doit donc rajouter quatre variables scalaires pour obtenir un schéma de Galerkin équivalent au précédent.

Lemme 4.3.3 *On pose $\Omega = \mathcal{Z} \times \mathbb{C}^4$, et, avec les notations précédentes, pour*

$$\begin{aligned} U &= (Z, \underline{\alpha})^T \in \Omega, \quad Z = (\lambda^1, \dots, \lambda^4) \quad \underline{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4, \\ U' &= (Z', \underline{\alpha}')^T \in \Omega, \quad Z' = (\mu^1, \dots, \mu^4), \quad \underline{\alpha}' := (\alpha'_1, \dots, \alpha'_4) \in \mathbb{C}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}U, U' \rangle &:= \langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle \\ &+ \sum_{k=1}^4 \langle \lambda^k, \alpha'_k \rangle_{L^2} \\ &+ \sum_{k=1}^4 \langle \alpha_k, \mu^k \rangle_{L^2} \end{aligned} \tag{4.3.48}$$

Alors, modulo un opérateur compact, $\mathcal{M}$ est fortement coercif de Ω dans son dual

$$\widehat{\Omega} := \widehat{\mathcal{Z}} \times \mathbb{C}^4,$$

munis du crochet de dualité

$$\text{pour } V = (F, \underline{\beta}) \in \widehat{\Omega}, U = (Z, \underline{\alpha}) \in \Omega,$$

$$\langle V, U \rangle_{\widehat{\Omega}, \Omega} := \langle F, Z \rangle_{\widehat{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z}} + \sum_{k=1}^4 \beta_k \overline{\alpha_k}.$$

De plus, toujours sous l'hypothèse que l'opérateur intégral L de départ est injectif, $\mathcal{M}$ est injectif de Ω dans $\widehat{\Omega}$, et donc est un isomorphisme entre ces deux espaces.

Preuve :

Remarque: pour des raisons évidentes de symétries, on a renommé ici les variables.

$\mathcal{M}$ diffère de $\mathcal{L}$ de la somme de huit opérateurs trivialement compacts.

• Injection: si $\mathcal{M}U = 0$, $U = (Z, \underline{\alpha})$, en prenant pour fonctions test des $U' = (Z', \underline{\alpha}')$ tels que $Z' = 0$, on obtient de suite que les éléments dans Z sont à moyenne nulle. Ensuite, en prenant des fonctions tests U' telles que les éléments dans Z' sont à moyennes nulles, $Z \in \mathcal{Z}^*$ vérifie

$$\forall Z' \in \mathcal{Z}^*, \quad \langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle = 0$$

Par construction, $\mathbf{u}_0 := \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2$ est dans $\mathcal{X}$ et vérifie $L\mathbf{u}_0 = 0$. On en déduit, de l'injectivité de L ,

$$\lambda^2 = 0, \quad \text{et } \lambda^1 = 0 \quad \text{car à moyenne nulle.}$$

λ^3 est à moyenne nulle et vérifie $\Delta_\Gamma \lambda^3 = 0$, donc $\lambda^3 = 0$, et le même argument donne aussi $\lambda^4 = 0$. Il reste que

$$\sum_{k=1}^4 \langle \alpha_k, \mu^k \rangle = 0$$

pour tout quadruplet $(\mu^1, \dots, \mu^4)$, et donc $\underline{\alpha} \equiv 0$.

• Surjection: bien qu'acquise (l'opérateur $\mathcal{M}$ est un opérateur de fredholm injectif), on cherche la forme des solutions: on se fixe

$$\Phi := (F, \underline{\beta}) \in \widehat{\Omega},$$

$$F = (f_1 \dots f_4) \in \mathcal{Z} \quad \underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_4) \in \mathbb{C}^4.$$

et on pose

$$\begin{aligned}\Psi &:= (G, \underline{0}_{\mathbb{C}^4}) \in \Omega, \\ G &= (g_1, \dots, g_4) := (f_1 \perp \langle f_1, 1 \rangle, f_2, f_3, f_4 \perp \langle f_4, 1 \rangle) \in \widehat{\mathcal{Z}}.\end{aligned}$$

Comme g_1 et g_4 sont à moyennes nulles,

$$G \in \mathcal{Im} \mathcal{L}$$

et donc on peut trouver $Z_0 = (\lambda_0^1, \dots, \lambda_0^4) \in \mathcal{Z}$ tel que

$$\mathcal{L}Z_0 = G,$$

avec pour degrés de libertés les moyennes de λ_0^1 et de λ_0^3 . On peut alors poser

$$\langle \lambda_0^1, 1 \rangle = \beta_1, \quad \langle \lambda_0^3, 1 \rangle = \beta_3$$

qui détermine de manière unique Z_0 . Enfin, on pose

$$\begin{aligned}\alpha_1^0 &= \langle f_1, 1 \rangle, \quad \alpha_4^0 = \langle f_4, 1 \rangle, \quad \alpha_2^0 = \alpha_3^0 = 0, \\ \underline{\alpha}^0 &:= (\alpha_1^0, \dots, \alpha_4^0) \in \mathbb{C}^4, \\ U_0 &:= (Z_0, \underline{\alpha}^0) \in \Omega.\end{aligned}$$

L'idée est de comparer la solution U de $\mathcal{M}U = \Phi$ avec U_0 . Pour tout $U' = (Z', \underline{\alpha}') \in \Omega$, avec $Z' = (\mu^i)_i$, $\underline{\alpha}' = (\alpha_i)_i$, on a, par les définitions de $\mathcal{M}$ et de U_0 ,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}U_0, U' \rangle &= \langle \mathcal{L}Z_0, Z' \rangle + \sum_{i=1}^4 \langle \alpha_i^0, \mu_0^i \rangle + \sum_{i=1}^4 \langle \lambda_i^0, \alpha'_i \rangle \\ &= \langle G, Z' \rangle + \langle \alpha_1^0, \mu_0^1 \rangle + \langle \alpha_4^0, \mu_0^4 \rangle \\ &\quad + \langle \beta_1, \alpha'_1 \rangle + \langle \beta_3, \alpha'_3 \rangle \\ &\quad + \langle \lambda_2^0, \alpha'_2 \rangle + \langle \lambda_4^0, \alpha'_4 \rangle \\ &= \langle F, Z \rangle + \langle \beta_1, \alpha'_1 \rangle + \langle \beta_3, \alpha'_3 \rangle \\ &\quad + \langle \lambda_2^0, \alpha'_2 \rangle + \langle \lambda_4^0, \alpha'_4 \rangle.\end{aligned}$$

Si U est solution de $\mathcal{M}U = \Phi$, alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}(U \perp U_0), U' \rangle &= \beta_2 \overline{\alpha'_2} + \beta_4 \overline{\alpha'_4} \\ &\quad \perp \langle \lambda_0^2, 1 \rangle \overline{\alpha'_2} \perp \langle \lambda_0^4, 1 \rangle \overline{\alpha'_4} \\ &= \beta'_2 \overline{\alpha'_2} + \beta'_4 \overline{\alpha'_4}.\end{aligned}$$

On est donc ramenés à la résolution de

$$\begin{aligned}\mathcal{M}U_1 &= \Theta \\ U_1 &:= (Z_1, \underline{\alpha}_1) \in \Omega, \quad Z_1 := (\lambda_1^1, \dots, \lambda_1^4) \\ \Theta &:= (0_{\hat{\mathcal{Z}}}, \underline{\beta}') \\ \underline{\beta}' &:= (0, \beta'_2, 0, \beta'_4) \in \mathbb{C}^4.\end{aligned}$$

U_1 vérifie donc

$$\begin{aligned}\beta_2 \overline{\alpha'_2} + \beta_4 \overline{\alpha'_4} &= \langle \mathcal{L}Z_1, Z' \rangle + \sum_{i=1}^4 \langle \alpha_i^1, \mu^i \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^4 \langle \lambda_1^i, \alpha'_i \rangle.\end{aligned}$$

On choisit d'abord pour fonctions tests des U' tels que $\underline{\alpha}' \equiv 0$.
En prenant $\mu^1, \dots, \mu^4$ constantes, on trouve de suite

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 &= \langle V\lambda_1^2, 1 \rangle + \langle \lambda^4, 1 \rangle \\ \alpha_3 &= \langle \lambda_1^2, 1 \rangle.\end{aligned}$$

Puis, on pose $\tilde{Z}_1 := Z_1 \perp \langle Z_1, 1 \rangle$ (on retranche à chaque composante sa valeur moyenne); on a donc, de ce qui précède

$$\langle \mathcal{L}\tilde{Z}_1, Z' \rangle = 0$$

et ce, pour tout $Z' \in \mathcal{Z}$; en conséquence,

$$\tilde{Z}_1 = (\tilde{\lambda}_1^1, \dots, \tilde{\lambda}_1^4) \in \mathcal{Ker} \mathcal{L},$$

d'où

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1^2 &= \tilde{\lambda}_1^4 = 0 \\ \tilde{\lambda}_1^1, \tilde{\lambda}_1^3 &\in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Donc les composantes de Z_1 sont des constantes.

On prend à présent des fonctions tests telles que $Z' = 0$ pour trouver finalement

$$\begin{aligned}\lambda_1^1 &= \lambda_1^3 = 0, \\ \lambda_1^2 &= \frac{1}{|\Gamma|} \beta_2', \\ \lambda_1^4 &= \frac{1}{|\Gamma|} \beta_4',\end{aligned}$$

où

$$|\Gamma| := \int_{\Gamma} ds$$

est le «volume» de Γ . Finalement, notre solution U_1 s'écrit

$$Z_1 = (0, c\beta_2', 0, c\beta_4') \quad (4.3.49)$$

$$\underline{\alpha}_1 = (0, c\beta_2' < V1, 1 > + \beta_4', \beta_2', 0). \quad (4.3.50)$$

avec $c = |\Gamma|^{\perp 1}$. En conclusion, notre solution U de $\mathcal{M}U = \Phi$ s'écrit

$$\begin{aligned}U &= U_0 + U_1 \\ U_0 &= (Z_0, \underline{\alpha}^0)\end{aligned} \quad (4.3.51)$$

Z_0 est solution de $\mathcal{L}Z_0 = G$ avec

$$\begin{aligned}G &= (f_1 \perp < f_1, 1 >, f_2, f_3, f_4 \perp < f_4, 1 >), \\ \underline{\alpha}_0 &= (< f_1, 1 >, 0, 0, < f_4, 1 >) \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

et $U_1 = (Z_1, \underline{\alpha}_1)$ est donné par (4.3.49) et (4.3.50), avec

$$\beta_2' = \beta_2 \perp < \lambda_0^2, 1 > \quad (4.3.53)$$

$$\beta_4' = \beta_4 \perp < \lambda_0^4, 1 > . \quad (4.3.54)$$

□

Avec cette dernière preuve, on a montré le

Lemme 4.3.4 Soit $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}} = H^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ tel que $\mathbf{f} \in L^2(\Gamma)$, et

$$F = (\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, 0, 0, \text{div}_\Gamma \mathbf{f}) \in \widehat{\mathcal{Z}} \quad \Phi = (F, 0_{\mathbb{C}^4}) \in \widehat{\Omega},$$

où

$$\widehat{\mathcal{Z}} = H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times H^1 \times H^1$$

est le dual de

$$\mathcal{Z} = H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\perp 1} \times H^{\perp 1}$$

et où $\widehat{\Omega} = \widehat{\mathcal{Z}} \times \mathbb{C}^4$ est le dual de

$$\Omega = \mathcal{Z} \times \mathbb{C}^4$$

Alors la solution $U = (Z, \underline{\alpha}) \in \Omega$ de $\mathcal{M}U = \Phi$ vérifie:

$$\underline{\alpha} \equiv 0$$

$$Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta) \in \mathcal{Z}^* = H_*^{\frac{1}{2}} \times H_*^{\perp \frac{1}{2}} \times H_*^1 \times H_*^1$$

$$\mathbf{u} = \text{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \zeta \text{ est solution de } L\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \mathcal{X}.$$

Cela signifie (la réciproque étant aussi vraie) que résoudre $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$ est équivalent à résoudre $\mathcal{M}U = F$ avec un second membre bien choisi et une condition (minimale) sur $\mathbf{f}$.

En faisant une méthode de Galerkin pour l'opérateur $\mathcal{M}$, on obtient le résultat cherché (élimination des constantes); en ce sens, on pose, pour espaces de discrétisation

$$\Omega_J := \Lambda_J^4 \times \mathbb{C}^4.$$

et on notera $\widehat{\Omega}_J$ le L^2 dual de Ω_J . $\mathcal{M}$ étant inversible et se décomposant comme somme d'un opérateur fortement coercif et d'un opérateur compact de Ω dans son dual, on a la

Proposition 4.3.3 Il existe $J_0 > 0$ et une constante C_0 tels que, pour $J \geq J_0$,

$$\inf_{U_J \in \Omega_J \setminus \{0\}} \sup_{U'_J \in \Omega_J \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{M}U_J, U'_J \rangle}{\|U_J\|_\Omega \|U'_J\|_\Omega} \geq C_0,$$

$\mathcal{M}$ induit donc un opérateur $\mathcal{M}_J$ de Ω_J dans son dual, bijectif pour J suffisamment grand.

De plus, si $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}} \cap L^2(\Gamma)$, et si, pour J suffisamment grand, U_J est solution de

$$\mathcal{M}U_J = F_J \in \widehat{\Omega}, \quad (4.3.55)$$

avec, pour tout $U'_J = (Z'_J, \underline{\alpha}') \in \Omega$, $Z'_J = (\mu_J^1, \mu_J^2, \zeta'_J, \eta'_J) \in \widehat{\mathcal{Z}}$,

$$\langle F_J, U'_J \rangle = \langle \text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \eta'_J \rangle,$$

alors, en notant

$$\begin{aligned} U_J &= (Z_J, \underline{\alpha}_J), \\ Z_J &= (\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J), \end{aligned}$$

les éléments de Z_J sont à moyennes nulles, et

$$\theta_J := (\lambda_J^1, \lambda_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$$

est solution du problème perturbé discret (cf. théorème 4.3.1)

$$\widetilde{T}_J \theta_J = \widetilde{F}_J.$$

Preuve : La condition inf-sup est une conséquence du fait que $\mathcal{M}$ est fortement coercif, modulo un opérateur compact (voir la preuve de la proposition 4.2.3). Le lien avec le problème perturbé se lit facilement en prenant pour fonctions tests, dans un premier temps, des éléments du type $(0_{\mathcal{Z}}, \underline{\alpha}')$ pour avoir des moyennes nulles, puis en prenant des fonctions tests à moyennes nulles, Z_J est solution de

$$\langle \mathcal{L}Z_J, Z'_J \rangle = 0, \quad (Z'_J \in \mathcal{Z}_J^*).$$

□

La matrice B_J obtenue (en représentant $\mathcal{M}_J$ suivant des bases) est la matrice A_J (représentation de $\mathcal{A}_J$ de la section précédente) augmentée de quatre lignes et de quatre colonnes.

Plus précisément, en anticipant un peu, si l'on se donne une base $(\psi_\tau)_\tau$ de Λ_J , la matrice B_J associée à $\mathcal{M}_J$ va s'écrire par blocs

$$B_J := \begin{pmatrix} A_J & Y_J \\ Y_J^* & 0 \end{pmatrix}$$

A_J est une matrice carrée de taille $4\sharp\Lambda_J$, qui sera explicitée par la suite, tandis que la matrice Y_J (resp. Y_J^*) est de taille $4\sharp\Lambda_J \times 4$ (quatre colonnes, resp. Y_J^* est de taille $4 \times 4\sharp\Lambda_J$), définie par blocs (de taille $\sharp\Lambda_J$) par

$$\begin{aligned} Y_J &= \text{Diag}((1, \Psi), \dots (1, \Psi)), \\ Y_J^* &= \text{Diag}((\Psi, 1), \dots (\Psi, 1)), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} (1, \Psi) &= (< 1, \psi_\tau >_{L^2})^T && \text{(matrice colonne),} \\ (\Psi, 1) &= (< \psi_\tau, 1 >_{L^2}) && \text{(matrice ligne).} \end{aligned}$$

5 Ondelettes.

A présent, on est ramené à résoudre un système linéaire issu d'une méthode de Galerkin sur des espaces de Sobolev classiques. Comme toujours dans le cas des équations intégrales, la matrice du système est pleine, i.e. le nombre de coefficients non nuls se comporte comme N^2 , N étant la taille de la matrice carrée. Afin de réduire le nombre de coefficients non nuls à un $\mathcal{O}(N \log N)$, on utilise pour base de Λ_J une base d'ondelettes issue d'éléments finis classiques (cf. [44], [17], [19], [47], [40]). Les ondelettes doivent «remplir» des espaces de Sobolev avec un intervalle d'exposants assez large pour le problème qui nous concerne ($[\frac{1}{2}, 1]$) simplement pour pouvoir développer la solution suivant cette base et garder la topologie initiale. Ensuite, elles doivent vérifier une condition de **moments nuls**, rendant un grand nombre de coefficients petits. Enfin, on souhaiterait qu'elles soient de **support petit** et qu'elles aient, pour des raisons techniques, des propriétés d'orthogonalité. Jusqu'à présent, lorsque l'on regarde la littérature, ces deux derniers points semblent délicats à concilier avec la condition des moments nuls et le fait qu'elles doivent remplir l'espace H^1 par exemple (et donc être continues, puisque l'on part ici d'éléments finis classiques). Une approche intéressante, que l'on reprend ici se trouve dans [19], et permet la construction d'ondelettes vérifiant presque toutes les propriétés voulues, mis à part l'orthogonalité. Nous verrons que ces ondelettes sont cependant orthogonales pour un produit scalaire L^2 «par morceaux», ce qui a une importance, au moins d'un point de vue théorique.

L'autre difficulté dans le cadre qui nous concerne est la présence d'un opérateur d'ordre ± 1 du point de vue continu (opérateur de simple couche). Beaucoup de travaux se sont engagés dans le traitement de ce type d'opérateurs; citons [44], [16], pour la théorie générale, où, pour obtenir un taux de compression optimal ($\mathcal{O}(N)$), une condition sur les ondelettes tests est imposée, [41] pour le cas bidimensionnel, [22] pour le cas tridimensionnel, en relation avec les travaux de R. Stevenson [47].

Dans ce paragraphe, on va préciser la construction de Λ_J , les normes en jeu et les propriétés souhaitées des ondelettes. On pourra se référer à [18] pour une étude générale des constructions d'ondelettes sur des variétés.

5.1 Multirésolution sur un élément de référence.

On note $T = T_1^0$ le triangle dans $\mathbb{R}^2$ de sommets $s_1 = (1, 0)$, $s_2 = (0, 1)$, $s_3 = (0, 0)$, m_k le milieu du côté opposé au sommet s_k .

Le triangle T_1^0 est relatif au niveau de résolution 0 (indice du haut). Les triangles T_l^{j+1} , $l = 4k \pm 3, \dots, 4k$ sont déduits de T_k^j en joignant les points milieux de T_k^j , et construits par récurrence.

On note, pour tout entier $j \geq 0$, $\Delta_j^T := \overline{T} \cap (2^{\perp j} \mathbb{Z})^2$, que l'on appellera *nœuds* de l'élément de référence T .

On notera

$$\nabla_0^T := \Delta_0^T, \quad \nabla_{j+1}^T := \Delta_{j+1}^T \setminus \Delta_j^T \quad j \geq 0. \quad (5.1.1)$$

Enfin, on note

$$\Lambda_J^T := \left\{ u \in C(\overline{T}) \mid u|_{T_l^J} \in \mathbb{P}_1; \ l = 1, \dots, 4^J \right\}, \quad J \geq 0. \quad (5.1.2)$$

L'objet de ce paragraphe est de définir une base de multirésolution dans $H^s(T)$. On commence par définir une base nodale de Λ_j de la manière suivante: on quadrille le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier avec les droites $\sigma_1 = k$, $\sigma_2 = k$, $\sigma_1 + \sigma_2 = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ce quadrillage définit une famille de triangles $\mathcal{T}$ dont les éléments sont des images de T par des isométries. On peut alors définir une et une seule fonction scalaire Φ telle que sa restriction à tout élément de $\mathcal{T}$ soit un polynôme de degré 1, et telle que $\Phi(0) = 1$ et $\Phi(\tau) = 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{Z}^2$, $\tau \neq 0$.

Ensuite on pose

$$\Phi_\tau^j(x) := \Phi(2^j(x \perp \tau)), \quad x \in \mathbb{R}^2, \ \tau \in (2^{\perp j} \mathbb{Z})^2. \quad (5.1.3)$$

et enfin on définit la base nodale de Λ_j par

$$\tilde{\varphi}_\tau^j := c(\varphi_\tau^j) \Phi_\tau^j|_T, \quad \tau \in \Delta_j^T. \quad (5.1.4)$$

où $c(\varphi_\tau^j)$ est choisi tel que

$$\|\tilde{\varphi}_\tau^j\|_{L^2(T)} = 1. \quad (5.1.5)$$

Des calculs directs donnent

$$c(\varphi_\tau^j) = \begin{cases} 2^{j+\frac{1}{2}} & \text{si } \tau \in T \\ \sqrt{3}2^{j+1} & \text{si } \tau \in \{s_1, s_2, s_3\} \\ 2^{j+1} & \text{si } \tau \in \partial T \setminus \{s_1, s_2, s_3\} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

La famille $(\tilde{\varphi}_\tau^j)_{\tau \in \Delta_j^T}$ est une base nodale de Λ_j .

Pour les ondelettes, on suit la construction de [19]. On définit d'abord une famille $(\tilde{\theta}_\tau^{j+1})_{\tau \in \Delta_j^T}$ d'éléments de Λ_{j+1}^T , duale de $(\tilde{\varphi}_\tau^j)$, i.e.

$$\forall (\tau, \sigma) \in (\Delta_j^T)^2 \quad (\tilde{\varphi}_\tau^j, \tilde{\theta}_\sigma^{j+1})_{L^2(T)} = c\delta_{\tau,\sigma}. \quad (5.1.7)$$

où c désigne une «vraie» constante. On commence par définir $\tilde{\theta}_\tau^1$ pour $\tau \in \Delta_0^T$, comme

$$\tilde{\theta}_\tau^1 := c(\tilde{\theta}_\tau^1)(\gamma_\tau^1 \tilde{\varphi}_\tau^1 \perp \omega_\tau^0 \tilde{\varphi}_\tau^0).$$

On détermine γ_τ^1 et ω_τ^0 tels que $(\tilde{\theta}_\tau^1, \tilde{\varphi}_\sigma^0)_{L^2(T)} = 0$ pour $\sigma \neq \tau$ (ceci donne une équation seulement, par symétrie), puis en imposant $(\tilde{\theta}_\tau^1, \tilde{\varphi}_\tau^0)_{L^2(T)} = c(\tilde{\theta}_\tau^1)$. Puis, on peut imposer $\|\tilde{\theta}_\tau^1\|_{L^2(T)} = 1$, ce qui fixe $c(\tilde{\theta}_\tau^1)$. Des calculs directs donnent

$$\tilde{\theta}_\tau^1 := \frac{1}{3\sqrt{3}}(4\sqrt{2}\tilde{\varphi}_\tau^1 \perp \tilde{\varphi}_\tau^0). \quad (5.1.8)$$

Ensuite, on peut poser, pour $j > 0$,

$$\tilde{\theta}_\tau^{j+1} := \frac{1}{3\tilde{N}_\tau\sqrt{3}}(4\sqrt{2}\tilde{\varphi}_\tau^{j+1} \perp \tilde{\varphi}_\tau^j). \quad (5.1.9)$$

avec $\tilde{N}_\tau = 1$ si τ est un sommet de T , $\tilde{N}_\tau = 3$ si τ est sur une arête de T , $\tilde{N}_\tau = 6$ si τ est dans T . Il appert que pour tout $\tau, \sigma \in \Delta_j^T$,

$$(\tilde{\theta}_\tau^{j+1}, \tilde{\varphi}_\sigma^j)_{L^2(T)} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\delta_{\tau\sigma} \quad (5.1.10)$$

De plus, $\|\tilde{\theta}_\tau^{j+1}\|_{L^2(T)} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}_\tau}}$. La famille $(\tilde{\theta}_\sigma^{j+1})_{\sigma \in \Delta_j^T}$ doit être vue comme une famille duale de $(\tilde{\varphi}_\sigma^j)_{\sigma \in \Delta_j^T}$ pour le produit $L^2(T)$.

5.2 Ondelettes sur la surface.

5.2.1 Géométrie, bases nodales de multirésolution.

Dans cette section, on va définir les ondelettes sur la surface Γ . On utilisera deux produits scalaires sur $L^2(\Gamma)$; le premier, naturel, est induit par

la résolution du problème général. En particulier, si l'on souhaite garder les propriétés de dualité pour les opérateurs de surface, sans faire apparaître des distributions vivant sur les arêtes, on est obligé de garder ce produit scalaire, et de travailler avec.

Par contre, pour la définition des ondelettes, il est bien plus commode de travailler avec un produit scalaire défini «par morceaux», que l'on ramène à un triangle de référence.

On suppose donc qu'il existe une famille (κ_i) d'applications $\overline{T} \rightarrow \overline{\Gamma}_i$ de classe C^∞ (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$), bijectives, et telles que les gradients $D\kappa_i$ aient pour images des espaces de dimension 2 en tous points. On peut définir une norme H^s «par morceaux» avec :

$$\|u\|_{PH^s}^2 := \sum_{i=1}^N \|u \circ \kappa_i\|_{H^s(T_i)}^2, \quad (5.2.1)$$

ainsi que les produits scalaires $(.,.)_s$ associés. On prendra bien garde à distinguer ici, en particulier, le produit $(.,.)_0$ et le produit scalaire naturel $\langle ., . \rangle_{L^2(\Gamma)}$, bien qu'ils définissent des topologies équivalentes.

Comme pour le cas de l'élément de référence, on veut alors définir des niveaux de résolutions par des familles de triangulation $\{\Gamma_{i,k}^j, i = 1..N, k = 1..4^j\}$ indexées par j par

$$\Gamma_{i,k}^j := \kappa_i(T_k^j), \quad (5.2.2)$$

et définir ensuite les nœuds de ces triangulations par

$$\Delta_j^\Gamma := \cup_i \kappa_i(\Delta_j^T). \quad (5.2.3)$$

Pour que (5.2.2) définisse bien une triangulation, et pour que (5.2.3) soit consistant (pour les nœuds sur les bords des Γ_i) on fera l'hypothèse suivante: pour tout $i, l \in \{1, ..N\}$, tout $s, s' \in \Delta_0^\Gamma$, sommets de la triangulation initiale, *sur un même triangle* Γ_{i_0} , et tout réel $t \in [0, 1]$,

$$\kappa_i(t\kappa_i^{\perp 1}(s) + (1 \perp t)\kappa_i^{\perp 1}(s')) = \kappa_l(t\kappa_l^{\perp 1}(s) + (1 \perp t)\kappa_l^{\perp 1}(s')). \quad (5.2.4)$$

En termes plus intuitifs, la famille (κ_i) «conserve les barycentres». Dès lors, (5.2.2) définit bien une triangulation, et (5.2.3) est consistant dans le sens où, par exemple au niveau 1, le milieu de chaque arête de T est envoyé en un «milieu» d'une arête de $\cup_i \Gamma_i$. L'hypothèse faite sur les (κ_i) est assez

raisonnable, au moins si on veut travailler avec des éléments continus de Lagrange, et, de plus, en pratique, elle n'est pas difficile à concevoir. Sous ces hypothèses, si on définit deux fonctions u_i et u_l sur T , dont l'une est déduite de l'autre par une permutation des coordonnées barycentriques (sur T), i.e. si $u_i = u_l \circ A_{il}$, alors en définissant f sur $\Gamma_i \cup \Gamma_l$ par $f|_{\Gamma_i} = u_i \circ \kappa_i^{\perp 1}$ et $f|_{\Gamma_l} = u_l \circ \kappa_l^{\perp 1}$, f est continue sur $\overline{\Gamma_i \cup \Gamma_l}$. A présent, on peut définir les espaces de multirésolution,

$$\Lambda_j := \left\{ u \in C(\Gamma) \mid u \circ \kappa_i|_{T_k^j} \in \mathbb{P}_1; i = 1..N, k = 1..4^j \right\} \quad (5.2.5)$$

ainsi qu'une base nodale (*fonctions d'échelles*),

$$\varphi_\tau^j|_{\Gamma_i} := \begin{cases} \tilde{\varphi}_{\kappa_i^{-1}(\tau)}^j \circ \kappa_i^{\perp 1}, & \text{si } \tau \in \kappa_i(\overline{T}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \tau \in \Delta_j^\Gamma. \quad (5.2.6)$$

On construit de la même manière une base duale (θ_σ^{j+1}) pour le produit $(.,.)_0$ par

$$\theta_\tau^{j+1}|_{\Gamma_i} := \begin{cases} \tilde{\theta}_{\kappa_i^{-1}(\tau)}^{j+1} \circ \kappa_i^{\perp 1}, & \text{si } \tau \in \kappa_i(\overline{T}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \tau \in \Delta_j^\Gamma. \quad (5.2.7)$$

Autrement dit, on a, pour $\sigma, \sigma' \in \Delta_j^\Gamma$,

$$(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_{\sigma'}^j)_0 = N_\sigma \delta_{\sigma\sigma'} \quad (5.2.8)$$

où N_σ ne dépend que de la position du nœud σ (sommet, arête ou intérieur à un triangle de la triangulation initiale), en particulier, cette constante ne dépend pas du niveau de résolution j .

5.2.2 Ondelettes.

A présent, nous pouvons définir les ondelettes sur l'idée de W. Dahmen & R. Stevenson [19]. Quelques précautions et précisions seront toutefois de mises.

On définit donc les ondelettes par

$$\psi_\tau := \varphi_\tau^0, \quad \text{pour } \tau \in \Delta_0^\Gamma, \quad (5.2.9)$$

$$\psi_\tau := \varphi_\tau^{j+1} \perp \sum_{\sigma \in \Delta_j^\Gamma} \frac{(\varphi_\tau^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0}{(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0} \theta_\sigma^{j+1}, \quad \text{pour } \tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma. \quad (5.2.10)$$

Par définition, les ondelettes sont construites avec le produit scalaire $(.,.)_0$, de sorte que, si

$$\Xi_j := Vect\{\psi_\tau; \tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma\}, \quad (5.2.11)$$

alors Ξ_{j+1} est l'orthogonal de Λ_j dans Λ_{j+1} pour le produit scalaire $(.,.)_0$. C'est sensiblement la même construction que dans [19], on verra par la suite pourquoi.

5.2.3 Stabilité.

Dans ce paragraphe, il s'agit de prouver que le choix fait pour les ondelettes donnent une base de Riesz $H^s(\Gamma)$ -stable, soit de prouver (ici):

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j} c_\tau \psi_\tau \right\|_{H^s(\Gamma)}^2 \sim \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j} 2^{2sj} |c_\tau|^2.$$

On montrera que la stabilité est valable pour $|s| \leq 1$, ce qui est crucial pour la résolution de notre problème. Le schéma est le suivant: on montre d'abord la L^2 -stabilité, puis la H^1 -stabilité, et on déduit la stabilité sur H^s par un argument d'interpolation, ou de dualité pour $|s| \leq 1$.

Proposition 5.2.1 *La famille*

$$(\psi_\tau)_{\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma} \cup (\theta_\sigma^{j+1})_{\sigma \in \Delta_j^\Gamma}$$

est une famille L^2 -stable de Λ_{j+1} , et la famille

$$(\psi_\tau)_{\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma}$$

est une famille L^2 -stable de $\Xi_{j+1} = \Lambda_{j+1} \cap \Lambda_j^{\perp_0}$, où $\perp_0$ désigne l'orthogonalité pour le produit scalaire $(.,.)_0$.

Preuve: La preuve est essentiellement donnée dans [19]. On la rapelle ici: on sait que la famille $\{\varphi_\sigma^{j+1}; \sigma \in \Delta_{j+1}^\Gamma\}$ est L^2 -stable dans Λ_{j+1} . Comme θ_σ^{j+1} est combinaison linéaire à coefficients constants de φ_σ^{j+1} et de ϕ_σ^j , et grâce à l'équation de raffinement, on en déduit que la famille

$$\{\theta_\sigma^{j+1}; \sigma \in \Delta_j^\Gamma\} \cup \{\varphi_\tau^{j+1}; \tau \in \nabla_j^\Gamma\}$$

est une famille $L^2 \perp$ stable de Λ_{j+1} . On définit ensuite une matrice de taille $\sharp\Delta_j^\Gamma \times \sharp\nabla_{j+1}^\Gamma$ par

$$(B_j)_{\sigma\tau} := \frac{(\varphi_\tau^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0 \|\theta_\sigma^{j+1}\|_0}{(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0 \|\varphi_\tau^{j+1}\|_0}$$

Pour toutes familles scalaires $\mathbf{c} = (c_\tau)_{\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma}$ et $\mathbf{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in \Delta_j^\Gamma}$, on a

$$\begin{aligned} (B_j \mathbf{c}, \mathbf{d})_{\ell^2(\Delta_j^\Gamma)} &= \left(\sum_{\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma} c_\tau \frac{\varphi_\tau^{j+1}}{\|\varphi_\tau^{j+1}\|_0}, \sum_{\sigma \in \Delta_{j+1}^\Gamma} d_\sigma \frac{\|\theta_\sigma^{j+1}\|_0 \varphi_\sigma^j}{(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0} \right)_0 \\ &\lesssim \|\mathbf{c}\|_{\ell^2(\nabla_{j+1}^\Gamma)} \|\mathbf{d}\|_{\ell^2(\Delta_j^\Gamma)} \end{aligned}$$

car $(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0 \sim \|\theta_\sigma^{j+1}\|_0 \|\varphi_\sigma^j\|_0$. On en déduit que B_j est uniformément borné, et donc que $\|\psi_\tau\|_0 \sim \|\varphi_\tau^{j+1}\|_0 \sim 1$. Si à présent on choisit une combinaison linéaire

$$\lambda = \sum_{\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma} c_\tau \psi_\tau + \sum_{\sigma \in \Delta_{j+1}^\Gamma} d_\sigma \theta_\sigma^{j+1}$$

on a

$$\lambda = \sum_{\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma} c'_\tau \varphi_\tau^{j+1} + \sum_{\sigma \in \Delta_{j+1}^\Gamma} d'_\sigma \theta_\sigma^{j+1}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{d}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B_j & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Comme B_j est uniformément borné, et du fait que la famille $\{\varphi_\tau^{j+1}\} \cup \{\theta_\sigma^{j+1}\}$ est L^2 -stable, on déduit que la famille $\{\psi_\tau\} \cup \{\theta_\sigma^{j+1}\}$ est une base L^2 -stable de Λ_{j+1} . Enfin, par construction, $\{\psi_\tau; \tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma\}$ est une base de Ξ_{j+1} , ce qui achève la preuve. $\square$

On montre à présent que la famille $\{\psi_\tau\}$ est H^1 -stable. Pour cela, on invoque les inégalités directes et inverses sur la surface: pour tout s , il existe une constante C telle que, pour tout $u \in H^s(\Gamma)$, et tout $j \geq 0$,

$$\inf_{p_j \in \Lambda_j} \|u \perp p_j\|_0 \leq C 2^{\perp s j} \|u\|_{H^s(\Gamma)} \quad (\text{Jackson}), \quad (5.2.12)$$

$$\forall p_j \in \Lambda_j \quad \|p_j\|_{H^s(\Gamma)} \leq C 2^{s j} \|p_j\|_0. \quad (\text{Bernstein}). \quad (5.2.13)$$

Pour le cas qui nous concerne, i.e. des surfaces régulières, ces inégalités sont vraies pour $0 \leq s < 1.5$.

Pour des surfaces moins régulières une attention particulière sera à porter sur ces inégalités, et sur l'équivalence de normes qui en découle; on pourra se référer à [15].

En utilisant les mêmes arguments que pour le paragraphe 4.1, on obtient

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 \sim \sum_j 2^{2j} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_0^2 \quad (5.2.14)$$

où Π_j désigne ici le projecteur sur Λ_j , orthogonal pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_0$. De l'orthogonalité des ondelettes,

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j} c_\tau \psi_\tau \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 \sim \sum_{j \geq 0} 2^{2j} \left\| \sum_{\tau \in \nabla_j} c_\tau \psi_\tau \right\|_0^2,$$

Enfin, de la proposition précédente,

$$\left\| \sum_{\tau \in \Delta_j} c_\tau \varphi_\tau \right\|_0^2 \sim \sum_{\tau \in \Delta_j} |c_\tau|^2,$$

et le fait que la transformation en ondelettes est donnée par un opérateur borné dans ℓ^2 , on obtient

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j} c_\tau \psi_\tau \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 \sim \sum_{j \geq 0} 2^{2j} \sum_{\tau \in \nabla_j} |c_\tau|^2, \quad (5.2.15)$$

ce qui désigne la H^1 -stabilité de notre base. On déduit la H^s -stabilité par interpolation et dualité pour $|s| \leq 1$, soit le théorème suivant:

Théorème 5.2.1 *Pour tout réel s , $|s| \leq 1$, et toute famille de réels $\{c_\tau; \tau \in \cup_j \nabla_j\}$,*

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j} c_\tau \psi_\tau \right\|_{H^s(\Gamma)}^2 \sim \sum_{j \geq 0} 2^{2sj} \sum_{\tau \in \nabla_j} |c_\tau|^2, \quad (5.2.16)$$

5.2.4 Moments nuls.

Ici, on établit un résultat crucial pour la résolution numérique, qui montrera la décroissance des coefficients de la matrice de discrétisation, et donc permettra d'effectuer un seuillage pour une résolution optimale.

Bien que l'on ait choisi des polynômes de degré 1 par morceaux pour la construction des ondelettes, on va établir les résultats concernant les moments nuls et les décroissances des coefficients pour un choix de polynôme général (de degré d par morceaux).

Proposition 5.2.2 *Soit $v \in C(\Gamma)$ une fonction scalaire continue, telle que*

$$v \circ \kappa_i \in C^\infty(\overline{T}). \quad (5.2.17)$$

On suppose qu'il existe un entier $d > 0$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{P}_d(T), p = \sum_{\tau' \in \Delta_0^T} p(\tau') \delta_{\tau'}^0. \quad (5.2.18)$$

où δ_τ^0 est l'élément de $\Lambda_0(T)$ valant 1 au nœud τ et zéro aux autres nœuds de Δ_0^T . Alors il existe une constante $C(\kappa, \Gamma, d)$ telle que, pour tout $j \geq 0$, et tout $\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma$,

$$|(v, \psi_\tau)_0| \leq C(\kappa, \Gamma, d) 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma)}, \quad (5.2.19)$$

avec

$$\|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma)} := \max_i \max_{x \in T} \max_{|\alpha| \leq d+1} |D^\alpha(v \circ \kappa_i)(x)|. \quad (5.2.20)$$

En ce sens, on dira que la famille d'ondelettes (ψ_τ) admet $d + 1$ moments nuls.

Cette estimation est typique lorsque l'on se place dans le plan, et d'ailleurs on suit la même preuve: les ondelettes sont orthogonales aux polynômes de degré inférieur à d , on développe la fonction v en série de Taylor autour d'un point bien choisi à l'ordre d avec reste intégral, et on évalue le reste.

Preuve: On se fixe $j \geq 0$ et $\tau \in \nabla_{j+1}^\Gamma$. On définit l'opérateur d'interpolation I_j au niveau j par

$$I_j v := \sum_{\tau' \in \Delta_j^\Gamma} v(\tau') \delta_{\tau'}^j \quad (5.2.21)$$

où δ_τ^j est l'élément de $\Lambda_j(\Gamma)$ valant 1 au nœud τ et zéro aux autres nœuds de Δ_j^Γ . De l'orthogonalité des ondelettes,

$$(v, \psi_\tau)_0 = (v \perp I_j v, \psi_\tau)_0.$$

On note $S_i := \kappa_i^{\perp 1}(\text{supp } \psi_\tau)$, $v_i := v \circ \kappa_i$, et $\widehat{I}_j$ l'opérateur d'interpolation sur l'élément de référence T . Comme v est continu, on a $I_j v|_{\Gamma_i} \circ \kappa_i = \widehat{I}_j v_i$. De sorte que, puisque $\|\psi_\tau\|_0 \lesssim 1$

$$|(v, \psi_\tau)_0|^2 \lesssim \sum_i \|v_i \perp \widehat{I}_j v_i\|_{L^2(T \cap S_i)}^2.$$

On se place sur un élément de la triangulation $T_i^{j,k}$; v_i est restreint à $v_i^{j,k}$, $\widehat{I}_j v_i$ est restreint à l'interpolant de $v_i^{j,k}$ au niveau zéro modulo une homothétie. On développe alors $v_i^{j,k}$ en série de Taylor avec reste intégral à l'ordre d autour d'un point de $T_i^{j,k} \cap S_i$, pour obtenir finalement l'estimation

$$\forall x \in T_i^{j,k}, |v_i(x) \perp \widehat{I}_j v_i(x)| \lesssim 2^{\perp j(d+1)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}}.$$

On intègre en x , pour obtenir

$$\|v_i \perp \widehat{I}_j v_i\|_{L^2(T_i^{j,k} \cap S_i)}^2 \lesssim 2^{\perp 2j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}}^2.$$

Comme S_i est de diamètre équivalent à $2^{\perp j}$ et que les triangles $T_i^{j,k}$ sont aussi de diamètre équivalent à $2^{\perp j}$, le nombre de triangles coupant S_i est uniformément borné (par rapport à j). En sommant sur ces triangles, on obtient l'estimation cherchée.

□

Le corollaire important qui nous intéresse est

Corollaire 5.2.1 *On note $g_i := \det((\partial_l \kappa_i, \partial_m \kappa_i)_{\mathbb{R}^3})$ le jacobien relatif à κ_i , et $g := \sum_i 1_{\Gamma_i} g_i \circ \kappa_i^{\perp 1}$. On rappelle que g est supposée C^∞ par morceaux. Alors, sous les hypothèses de la proposition 5.2.2, si de plus g est continu, on a l'estimation*

$$|(v, \psi_\tau)_{L^2(\Gamma)}| \lesssim 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma)} \quad (5.2.22)$$

Preuve: Comme

$$(v, \psi_\tau)_{L^2(\Gamma)} = (g^{\frac{1}{2}} v, \psi_\tau)_0$$

et des hypothèses faites, on peut inclure $\sqrt{g}$ dans v pour avoir une première estimation grâce à la proposition précédente, puis borner $\|g^{\frac{1}{2}} v\|_{PW^{\infty, d+1}}$ par $\|v\|_{PW^{\infty, d+1}}$.

□

Ce qui nous intéresse plus encore est la décroissance des coefficients de la matrice de Galerkin:

Corollaire 5.2.2 *Soit $r \in \mathbb{Z}$ un entier et $H(x, y)$ une fonction de classe C^∞ sur un voisinage (dans $\mathbb{R}^3$) de $\Gamma \times \Gamma$ privé de sa diagonale $x = y$, et vérifiant*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta H(x, y)| \leq \frac{C(\Gamma, \alpha, \beta)}{|x - y|^{2+r+|\alpha|+|\beta|}}, \quad x \neq y. \quad (5.2.23)$$

Pour tout entier $j > 0$, resp. $j' > 0$, et tout $\tau \in \nabla_j$, resp. $\tau' \in \nabla_{j'}$, sous les hypothèses du corollaire 5.2.1, si $\delta_{\tau, \tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \psi_{\tau'}) > 0$, alors

$$|(H\psi_\tau, \psi_{\tau'})_{L^2(\Gamma)}| \lesssim 2^{\perp(d+2)(j+j')} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(2d+4+r)}. \quad (5.2.24)$$

Preuve. Le fait que les supports soient disjoints donnent un sens à l'intégrale dans 5.2.24. Afin de coller à l'analyse des opérateurs sur une surface, on suppose qu'il existe deux familles de recouvrements (M_i) et $(\widetilde{M}_i)$ et on suppose qu'elles sont formées de triangles de notre triangulation de départ (niveau 0), et telles que $M_i \subset \subset \widetilde{M}_i$. Si tel n'est pas le cas, il suffit de raffiner la triangulation de départ de manière suffisamment fine, en coupant par exemple les triangles en quatre. Chaque triangle Γ_i est l'image de T par κ_i . Compte tenu des hypothèses faites sur ces représentations, on peut trouver un domaine $D_i \subset \mathbb{R}^2$ composé de triangles T_l^i isométriques à T , et une «carte» $\widehat{\kappa}_i : D_i \rightarrow \widetilde{M}_i$ telle que $\widehat{\kappa}_i(D_i) = \widetilde{M}_i$, et la restriction de $\widehat{\kappa}_i$ à l'un des triangles $T_l^i \subset D_i$ est la composée de κ_l avec une transformation affine, et a pour image un triangle $\Gamma_l \subset \widetilde{M}_i$. En d'autres termes, on peut recoller les représentations sur un domaine de $\mathbb{R}^2$. On n'obtient pas tout à fait une carte, car l'application $\widehat{\kappa}_i$, si elle est bien bijective, n'est que continue (mais régulière par morceaux).

On introduit aussi les partitions de l'unité relatives à ces recouvrements, à savoir deux familles de fonctions scalaires $(\chi_i)_i$ et $(\widetilde{\chi}_i)_i$ vérifiant:

$$\begin{aligned} \sum_i \chi_i &= \sum_i \widetilde{\chi}_i = 1, \quad \chi_i, \widetilde{\chi}_i \geq 0 \\ \text{Supp } \chi_i &\subset M_i, \quad \text{Supp } \widetilde{\chi}_i \subset \widetilde{M}_i \\ \widetilde{\chi}_i|_{M_i} &= 1. \end{aligned}$$

de sorte que

$$\chi_i \widetilde{\chi}_j = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

Alors

$$\begin{aligned} (H\psi_\tau, \psi_{\tau'})_{L^2(\Gamma)} &= \sum_i \int_{\widetilde{M}_i \times \widetilde{M}_i} H_i^1(x, y) \psi_\tau(x) \psi_{\tau'}(y) ds(x) ds(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma \times \Gamma} H^0(x, y) \psi_\tau(x) \psi_{\tau'}(y) ds(x) ds(y), \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

avec

$$\begin{aligned} H^0(x, y) &= \sum_{i \neq j} \chi_i(x) \widetilde{\chi}_j(y) H(x, y), \quad \in C^\infty(\Gamma \times \Gamma), \\ H_i^1(x, y) &= \chi_i(x) \widetilde{\chi}_i(y) H(x, y). \end{aligned}$$

Du corollaire précédent, comme H^0 en vérifie les hypothèses,

$$\left| \int_{\Gamma \times \Gamma} H^0(x, y) \psi_\tau(x) \psi_{\tau'}(y) ds(x) ds(y) \right| \lesssim 2^{\perp(d+2)(j+j')},$$

et comme on travaille sur des domaines bornés, $1 \lesssim \delta_{\tau\tau'}^{\perp(2d+4+r)}$. Il reste à évaluer la somme dans (5.2.25). On fixe donc $i = 1, \dots, N$, et on note $\widetilde{\mathcal{I}}_i$ l'ensemble des éléments $l \in \{1, \dots, N\}$ tels que $\Gamma_l \subset \widetilde{M}_i$. On note enfin, pour $k, l \in \widetilde{\mathcal{I}}_i$,

$$I_{k,l}^i = \int_{\Gamma_k} ds(x) \int_{\Gamma_l} H_i^1(x, y) \psi_\tau(x) \psi_{\tau'}(y) ds(y).$$

l'objet étant d'estimer $\sum_i \sum_{k,l \in \widetilde{\mathcal{I}}_i} I_{k,l}^i$.

On réécrit l'intégrale double à l'aide des coordonnées locales comme

$$I_{k,l}^i = \int_{T_k \cap \widehat{\kappa}_i^{-1}(\text{Supp } \psi_\tau)} d\sigma \int_{T_l \cap \widehat{\kappa}_i^{-1}(\text{Supp } \psi_{\tau'})} H_i^2(\sigma, v) (\psi_\tau \circ \widehat{\kappa}_i)(\sigma) (\psi_{\tau'} \circ \widehat{\kappa}_i)(v) dv.$$

Des hypothèses faites sur H , on a

$$|D_\sigma^\alpha D_v^\beta H_i^2(\sigma, v)| \leq \frac{C(|\alpha|, |\beta|, \widehat{\kappa})}{|\widehat{\kappa}_i(\sigma) \perp \widehat{\kappa}_i(v)|^{2+r+|\alpha|+|\beta|}}.$$

On remarquera que la fonction

$$\Phi(\sigma, v) := \frac{|\widehat{\kappa}_i(\sigma) \perp \widehat{\kappa}_i(v)|}{|\sigma \perp v|} \in C^\infty(\overline{T}_k \times \overline{T}_l)$$

et que $\Phi(\sigma, v) > 0$. De sorte que l'estimation précédente devient

$$|D_\sigma^\alpha D_v^\beta H_i^2(\sigma, v)| \leq \frac{C(|\alpha|, |\beta|, \widehat{\kappa})}{|\sigma \perp v|^{2+r+|\alpha|+|\beta|}}.$$

Comme pour la proposition 5.2.2, on développe H_i^2 en série de Taylor avec reste intégral autour d'un point $\sigma_k^i \in T_k \cap \widehat{\kappa}_i^{\perp 1}(\text{Supp } \psi_\tau)$ pour la première variable, et autour d'un point $v_l^i \in T_l \cap \widehat{\kappa}_i^{\perp 1}(\text{Supp } \psi_{\tau'})$ pour la deuxième variable, le tout à l'ordre d et on suit la démonstration du corollaire précédent pour obtenir la bonne estimation.

□

Dans toute la suite, on supposera que les hypothèses du corollaire 5.2.1 sont vérifiées

Quelques remarques sur ce paragraphe:

- Dans le corollaire précédent, comme on l'a déjà dit, l'entier d est bien évidemment égal à 1. On a conservé cependant une notation générique car la démonstration reste valable si on choisit pour base des polynômes de degré supérieur.
- Par rapport à [19], on a choisi une orthogonalité par rapport au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_0$. Dans l'article de W. Dahmen et R. Stevenson, g était imposée constante par morceaux, ce qui permettait une orthogonalité par rapport au (vrai) produit scalaire $L^2(\Gamma)$. Mais le cadre choisi ici semble un peu plus général.
- En revanche, on doit imposer la continuité de g (jacobienne) sur Γ pour obtenir la décroissance des coefficients de la matrice de Galerkin (on passe dans la démonstration du produit scalaire «par morceaux» au produit scalaire usuel).

5.3 Résolution du problème perturbé.

On rappelle que

$$TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) = \{\mathbf{f} \in L^2(\Gamma)^3 \mid \text{rot}_\Gamma \mathbf{f} \in L^2(\Gamma), (\mathbf{f}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\}.$$

On revient sur la résolution de notre équation intégrale. On rappelle que l'équation intégrale au niveau continu s'écrit

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}} = TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{X} = TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$$

On a perturbé une méthode de Galerkin pour se ramener à la résolution d'un système discret

$$\widetilde{T}_J \lambda_J = \widetilde{F}_J.$$

En ce qui concerne la régularité de notre solution $\mathbf{u}$, comme on travaille sur une surface régulière, si on suppose notre second membre $\mathbf{f} \in TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$, la solution $\mathbf{u}$ est dans $TH(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ avec

$$TH(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Gamma)^3 \mid \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in L^2(\Gamma), (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\}$$

Cette régularité peut se voir en considérant le problème continu (équivalent au problème initial dans le cas où le second membre est dans L^2)

$$\mathcal{L}Z = F \in \widehat{\mathcal{Z}} = H_*^{\perp\frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp 1} \times H_*^{\perp 1}$$

avec

$$Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta)^T \in H_*^{\perp\frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times H_*^1 \times H^1,$$

et

$$F = (\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, 0, 0, \text{div}_\Gamma \mathbf{f})^T, \quad \mathbf{u} = \text{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \zeta.$$

On a de suite $\lambda^2 = \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in L^2$, puis $\lambda^1 \in H^1$, des propriétés de l'opérateur de simple couche sur une surface régulière.

On attire l'attention sur le fait que ce résultat n'est plus valable lorsque Γ est une plaque ouverte...

5.3.1 Estimation d'erreur pour la méthode perturbée.

Théorème 5.3.1 *Avec les notations précédentes, soit $\mathbf{f} \in TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \subset \widehat{\mathcal{X}}$, $\mathbf{u}$ la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$ et λ_J la solution de $\widetilde{T}_J \lambda_J = \widetilde{F}_J$, pour J suffisamment grand. On pose*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2, & \mathbf{u}_i &\in \mathcal{X}^i, \\ \widetilde{\mathbf{u}}_J^1 &:= \text{rot}_\Gamma \lambda_J^1 \\ \widetilde{\mathbf{u}}_J^2 &:= \nabla_\Gamma Q_J \overset{\perp 1}{\Delta}_\Gamma \lambda_J^2 \\ \widetilde{\mathbf{u}}_J &:= \widetilde{\mathbf{u}}_J^1 + \widetilde{\mathbf{u}}_J^2. \end{aligned}$$

Alors il existe une constante C indépendante de $\mathbf{f}$ telle que, pour tout J suffisamment grand,

$$\|\mathbf{u}^1 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\mathcal{X}} \leq C 2^{\perp \frac{J}{2}} (\|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}_\Gamma)}), \quad (5.3.1)$$

$$\|\text{div}_\Gamma \mathbf{u} \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \leq C 2^{\perp \frac{J}{2}} (\|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}_\Gamma)}), \quad (5.3.2)$$

$$\|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^2\|_{L^2(\Gamma)} \leq C 2^{\perp J} (\|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}_\Gamma)}). \quad (5.3.3)$$

Avant de démontrer ce théorème, on va prouver un lemme concernant l'erreur due à la perturbation R_J :

Lemme 5.3.1 *Avec les notations du théorème 4.3.1, il existe une constante C telle que, pour tout $J > 0$,*

$$\|(1 \perp Q_J) \Delta_\Gamma^{\perp 1}\|_{1 \leftarrow \perp \frac{1}{2}} \leq C 2^{\perp \frac{J}{2}} \quad (5.3.4)$$

Preuve: En choisissant $\lambda^2 \in H_*^{\perp \frac{1}{2}}$ et en posant $p = \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2$, de la régularité elliptique de l'opérateur Δ_Γ , $\|p\|_{\frac{3}{2}} \sim \|\lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}}$.

Il nous suffit donc de prouver:

$$\|(1 \perp Q_J)p\|_1 \lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|p\|_{\frac{3}{2}}$$

Or, pour tout q dans H_*^1 ,

$$\|(1 \perp Q_J)q\|_1 \lesssim \|q\|_1$$

En notant toujours $\tilde{\Pi}_J : L^2 \rightarrow \Lambda_J^*$ le projecteur L^2 -orthogonal, en prenant $q = (1 \perp \tilde{\Pi}_J)p \in H_*^1$, et en remarquant que $(1 \perp Q_J)(1 \perp \tilde{\Pi}_J) = (1 \perp Q_J)$, on obtient

$$\|(1 \perp Q_J)p\|_1 \lesssim \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J)p\|_1$$

et on conclut avec l'inégalité directe.

□

Preuve du théorème 5.3.1 D'après le corollaire 4.2.4, le théorème 4.3.1 et l'équivalence de normes sur $\mathcal{X}$ (théorème 3.3.1), avec l'inégalité triangulaire, on a les estimations

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^1 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\mathcal{X}} &\lesssim \|(1 \perp \hat{P}_J)\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \\ &\quad + \varepsilon_J (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} &\lesssim \|(1 \perp \widehat{P}_J)\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} + \|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \\ &\quad + \varepsilon_J(\|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}) \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

soit, grâce au lemme précédent, pour la première estimation (5.3.5)

$$\|\mathbf{u}^1 \perp \widetilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|(1 \perp \widehat{P}_J)\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} + \|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} + 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)}.$$

Or,

$$\|\mathbf{f} \perp \widehat{P}_J \mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} \leq (1 + \|\widehat{P}_J\|_{\widehat{\mathcal{X}} \leftarrow \widehat{\mathcal{X}}}) \inf_{\widehat{\mathbf{u}}_J \in \widehat{\mathcal{X}}_J} \|\mathbf{f} \perp \widehat{\mathbf{u}}_J\|_{\widehat{\mathcal{X}}}$$

Comme $(\widehat{P}_J)$ est uniformément borné, de la définition de la norme de $\widehat{\mathcal{X}}$, en posant $\mathbf{f} = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \widehat{\lambda}^1 + \nabla_\Gamma \widehat{\lambda}^2$:

$$\begin{aligned} \|(1 \perp \widehat{P}_J)\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} &\lesssim \inf_{(\widehat{\mu}_J^1, \widehat{\mu}_J^2) \in \Lambda_J \times \Lambda_J} \left(\|\widehat{\lambda}^1 \perp \widehat{\mu}_J^1\|_{\perp \frac{1}{2}} + \|\widehat{\lambda}^2 \perp \widehat{\mu}_J^2\|_{\frac{1}{2}} \right) \\ &\lesssim \inf_{\mu_J \in \Lambda_J} \|\widehat{\lambda}^1 \perp \mu_J\|_{\perp \frac{1}{2}} + \inf_{\mu_J \in \Lambda_J} \|\widehat{\lambda}^2 \perp \mu_J\|_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ayant supposé $\mathbf{f} \in H(\operatorname{rot}_\Gamma)$, $\widehat{\lambda}^1 \in L^2$ et $\widehat{\lambda}^2 \in H_*^1$, avec $\|\widehat{\lambda}^1\|_0 \lesssim \|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)}$ et $\|\widehat{\lambda}^2\|_1 \lesssim \|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)}$. De l'inégalité directe (Jackson), on tire finalement:

$$\|(1 \perp \widehat{P}_J)\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}} \lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)}$$

On montre de la même façon

$$\|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}_\Gamma)}$$

et donc on a bien

$$\|\mathbf{u}^1 \perp \widetilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\mathcal{X}} \lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} (\|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}_\Gamma)}).$$

De la même manière, de l'estimation (5.3.6), on a

$$\|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} (\|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}_\Gamma)}).$$

Enfin, si on écrit $\mathbf{u}^2 = \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \lambda^2$, avec $\lambda^2 = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^2\|_{L^2} &\leq \|\nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} (1 \perp \tilde{\Pi}_J) \lambda^2\|_{L^2} \\ &\quad + \|\nabla_\Gamma \Delta_J^{\perp 1} (\widetilde{\Pi}_J \lambda^2 \perp \lambda_J^2)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\perp 1} \\ &\quad + \varepsilon_J \|\widetilde{\Pi}_J \lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}}, \\ &\lesssim \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\perp 1} \\ &\quad + 2^{\perp \frac{J}{2}} \|(1 \perp \tilde{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \\ &\quad + 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De l'inégalité directe et des estimations précédentes, on obtient

$$\|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^2\|_{L^2} \lesssim 2^{\perp J} (\|\mathbf{f}\|_{H(\operatorname{rot}_\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}_\Gamma)}),$$

ce qui achève la preuve. □

5.3.2 Préconditionnements.

On introduit la famille de matrices diagonales

$$D_s := \operatorname{Diag}(2^{s|\tau|})$$

de taille $\sharp \Lambda_J$, où s est un réel, et $|\tau|$ désigne le niveau de résolution associé au nœud τ .

D'après le théorème 5.2.1, si $\mathbf{u} = \sum_\tau c_\tau \psi_\tau \in H^s$, pour $|s| \leq 1$, et si $\mathbf{c} := (c_\tau)_\tau$, alors

$$\|\mathbf{u}\|_s \sim \|D_s \mathbf{c}\|_{\ell^2}.$$

Pour tout réel s , on notera

$$\mathbb{D}_s := \operatorname{Diag}(D_{s+1}, D_s, D_1, D_1, I_4) \tag{5.3.7}$$

$$\widehat{\mathbb{D}}_s := \operatorname{Diag}(D_s, D_{s+1}, D_{\perp 1}, D_{\perp 1}, I_4) \tag{5.3.8}$$

de tailles égales à $4\sharp\Lambda_J + 4$, I_4 désignant la matrice carrée identité de dimension quatre.

On rappelle que l'on considère une méthode de Galerkin pour le problème

$$\mathcal{M}U = F, \quad \mathcal{M} : \Omega \rightarrow \widehat{\Omega}$$

avec pour inconnue

$$\begin{aligned} U &= (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta, \underline{\alpha})^T \\ &\in \Omega := H^{\frac{1}{2}} \times H^{\perp\frac{1}{2}} \times H^1 \times H^1 \times \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

et pour second membre

$$F = (\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, 0, 0, \text{div}_\Gamma \mathbf{f}, 0_{\mathbb{C}^4})^T$$

c'est-à-dire, au niveau discret, on pose

$$\Omega_J := (\Lambda_J)^4 \times \mathbb{C}^4$$

et on cherche $U_J \in \Omega_J$ tel que, pour tout $V_J \in \Omega_J$,

$$\langle \mathcal{M}U_J, V_J \rangle = \langle F, V_J \rangle. \quad (5.3.9)$$

On a montré (cf. proposition 4.3.3) que cette dernière équation admet une solution unique U_J , pourvu que J soit suffisamment grand. En outre, on a aussi prouvé (même proposition) que, si l'on pose

$$\tilde{\mathbf{u}}_J := \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 + \nabla_\Gamma \zeta_J$$

alors $\lambda_J := (\lambda_J^1, \lambda_J^2)$ est la solution du problème perturbé

$$\tilde{T}_J \lambda_J = \tilde{F}_J$$

et si $\mathbf{u}$ est solution de l'équation intégrale de départ, avec la décomposition

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &:= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 \\ \mathbf{u}_2 &:= \nabla_\Gamma \overset{\perp 1}{\Delta}_\Gamma \lambda^2 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

et si le second membre $\mathbf{f} \in H(\text{rot}_\Gamma)$, alors on a les estimations (cf. théorème 5.3.1)

$$\begin{aligned}\|\lambda^1 \perp \lambda_J^1\|_{\frac{1}{2}} &\lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} (\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}_\Gamma)} + \|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)}), \\ \|\lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} &\lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} (\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}_\Gamma)} + \|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)}), \\ \|\mathbf{u}_2 \perp \nabla_\Gamma \zeta_J\|_{L^2} &\lesssim 2^{\perp J} (\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}_\Gamma)} + \|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)}).\end{aligned}$$

On ramène l'opérateur $\mathcal{M}$ à un opérateur de ℓ^2 dans lui-même à l'aide à nouveau de l'équivalence des normes suivant la base d'ondelettes. Précisons le procédé: on veut résoudre l'équation en U_J au niveau discret

$$\forall V_J \in \Omega_J \quad \langle \mathcal{M}_J U_J, V_J \rangle = \langle F_J, V_J \rangle. \quad (5.3.10)$$

On décompose les composantes (par blocs) de tout élément $V_J \in \Omega_J$ suivant la base (ψ_τ) de Λ_J :

$$V_J = \left(\sum_{\tau'} (\mathbf{d}_{\tau'}^1 \psi_{\tau'}, \mathbf{d}_{\tau'}^2 \psi_{\tau'}, \mathbf{d}_{\tau'}^3 \psi_{\tau'}, \mathbf{d}_{\tau'}^4 \psi_{\tau'}) , \underline{\alpha}' \right)^T$$

et on pose

$$\mathbf{d} := (\mathbf{d}^k)_{1 \leq k \leq 4}, \quad \tilde{\mathbf{d}} := (\mathbf{d}, \underline{\alpha}').$$

vecteur colonne de longueur $4\sharp \Lambda_J$ (resp. $4\sharp \Lambda_J + 4$). On fait de même pour la solution U_J :

$$\begin{aligned}U_J &= \left(\sum_{\tau'} ((\mathbf{c}_\tau^1 \psi_\tau, \mathbf{c}_\tau^2 \psi_\tau, \mathbf{c}_\tau^3 \psi_\tau, \mathbf{c}_\tau^4 \psi_\tau) , \underline{\alpha}) \right)^T \\ \mathbf{c} &:= (\mathbf{c}^k)_{1 \leq k \leq 4} \\ \tilde{\mathbf{c}} &:= (\mathbf{c}, \underline{\alpha}).\end{aligned}$$

Le système discret (5.3.10) devient

$$\langle B_J \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}} \rangle = \langle \mathbf{F}_J, \tilde{\mathbf{d}} \rangle$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &:= ((\mathbf{F}_1, 0, 0, \mathbf{F}_4), 0_{\mathbb{C}^4}) \\ (\mathbf{F}_1)_{\tau'} &= \langle \text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \psi_{\tau'} \rangle, \\ (\mathbf{F}_4)_{\tau'} &= \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} \rangle.\end{aligned}$$

avec pour matrice B_J la matrice déjà vue précédemment:

$$B_J := \begin{pmatrix} A_J & Y_J \\ Y_J^* & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} Y_J &= \text{Diag}((1, \Psi), \dots (1, \Psi)), & (\text{en quatre blocs}) \\ Y_J^* &= \text{Diag}((\Psi, 1), \dots (\Psi, 1)), & \text{idem} \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} (1, \Psi) &= (< 1, \psi_\tau >_{L^2})^T & (\text{matrice colonne}), \\ (\Psi, 1) &= (< \psi_\tau, 1 >_{L^2}) & (\text{matrice ligne}). \end{aligned}$$

et où la matrice A_J est définie par

$$\begin{aligned} A_J &:= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \\ A_{11,(\tau',\tau)} &:= k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \psi_\tau, \mathbf{rot}_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2} \\ A_{22,(\tau',\tau)} &:= < V \psi_\tau, \psi_{\tau'} >_{L^2} \\ A_{33,(\tau',\tau)} &= A_{44,(\tau',\tau)} := < \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2} \\ A_{24,(\tau',\tau)} &= A_{32,(\tau',\tau)} := < \psi_\tau, \psi'_{\tau'} >_{L^2} \\ A_{41,(\tau',\tau)} &:= \perp k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2} \\ A_{43,(\tau',\tau)} &:= \perp k^2 < V \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2} . \end{aligned}$$

et la matrice $\tilde{B}_J$ la matrice préconditionnée relative à B_J ; elle est définie par

$$\tilde{B}_J := \hat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}} B_J \mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}^{\perp 1}, \quad (5.3.11)$$

on obtient un opérateur $\tilde{B}_J : l^2 \rightarrow l^2$ de conditionnement borné, cf.[17]. Plus explicitement:

$$\tilde{B}_J = \begin{pmatrix} \tilde{A}_J & \tilde{Y}_J \\ \tilde{Y}_J^* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.12)$$

avec

$$\tilde{A}_J = \begin{pmatrix} D_{\perp \frac{1}{2}} A_{11} D_{\perp \frac{1}{2}} & 0 & D_{\perp \frac{1}{2}} A_{13} D_{\perp 1} & 0 \\ 0 & D_{\frac{1}{2}} A_{22} D_{\frac{1}{2}} & 0 & D_{\frac{1}{2}} A_{24} D_{\perp 1} \\ 0 & D_{\perp 1} A_{32} D_{\frac{1}{2}} & \perp D_{\perp 1} A_{33} D_{\perp 1} & 0 \\ D_{\perp 1} A_{41} D_{\perp \frac{1}{2}} & 0 & D_{\perp 1} A_{43} D_{\perp 1} & \perp D_{\perp 1} A_{44} D_{\perp 1} \end{pmatrix} \quad (5.3.13)$$

On notera (encore) Z_J la solution de $AZ_J = F_J$, avec $Z_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J)$.

5.3.3 Décroissance des coefficients, moments nuls.

Ici, on utilise les résultats obtenus dans la section précédente, en particulier, on applique le corollaire 5.2.2.

Proposition 5.3.1 *Avec les notations du paragraphe précédent, soit M est une des cinq matrices A_{22} , A_{11} , A_{13} , A_{41} , A_{43} , $\tau, \tau' \in \Delta_J$, $j := |\tau| > 0$, $j' := |\tau'| > 0$. On note $\delta_{\tau, \tau'} := \text{dist}(\text{Supp}(\psi_\tau), \text{Supp}(\psi_{\tau'}))$ et r l'ordre de l'opérateur correspondant au choix de M , i.e. $r = \perp 1$ pour le choix $M = A_{22}$ et $r = +1$ pour les autres. Si $\delta_{\tau, \tau'} > 0$, alors*

$$|M_{\tau, \tau'}| \lesssim 2^{\perp(d+2)(|\tau|+|\tau'|)} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(2d+4+r)} \quad (5.3.14)$$

Si M est l'une des deux matrices A_{33} , A_{24} , alors, toujours avec $\delta_{\tau, \tau'} > 0$, $M_{\tau, \tau'} = 0$

Preuve: La deuxième étant triviale, la première est une application directe du corollaire 5.2.2.

En effet, considérons par exemple le bloc A_{22} . La fonction H pour laquelle on applique le corollaire 5.2.2 est définie par

$$H(x, y) = \frac{e^{ik|x \perp y|}}{4\pi|x \perp y|},$$

$k = \varepsilon\mu\omega^2$ étant ici la fréquence de l'onde incidente. Les dérivées successives de H s'écriront

$$D_x^\alpha D_y^\beta H(x, y) = \frac{P_{\alpha, \beta}(x, y)}{|x \perp y|^{1+|\alpha|+|\beta|}},$$

pour tout $|\alpha|, |\beta| \leq d+1$, $P_{\alpha,\beta}$ désignant une fonction continue sur la surface, en ses deux variables. Comme la surface considérée est *bornée*, on obtient finalement

$$|D_x^\alpha D_y^\beta H(x, y)| \leq \frac{C}{|x \perp y|^{2+r+|\alpha|+|\beta|}},$$

avec $r = \perp 1$, ce qu'il fallait démontrer. Les estimations pour les autres blocs sont similaires.

□

Remarques:

1. le rôle de la fréquence k ici n'est pas apparent, pour les raisons suivantes: l'ordre de dérivation est majoré par $d+1$ pour chacune des deux variables, les puissances de k sont donc limitées; en outre, nous cherchons à établir des estimations a priori et des taux de convergences *asymptotiques*, de sorte que le rôle de k se réduit à une constante intégrée dans les $P_{\alpha,\beta}$.
2. Bien évidemment, le caractère borné de la surface est essentiel ici, sans quoi nous n'aurions plus une estimation du type de celle donnée dans le corollaire 5.2.2.

5.3.4 Seuillage.

On introduit une stratégie de troncature par la donnée d'une matrice $(\varepsilon_{jj'})_{1 \leq j, j' \leq J}$ et en définissant une matrice dite *compressée* B_J^c par blocs par:

$$B_J^c = \begin{pmatrix} A_J^c & Y_J \\ Y_J^* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3.15)$$

avec

$$A_J^c := \begin{pmatrix} A_{11}^c & 0 & A_{13}^c & 0 \\ 0 & A_{22}^c & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41}^c & 0 & A_{43}^c & A_{44} \end{pmatrix} \quad (5.3.16)$$

On remarquera que l'on ne modifie que la matrice A_J dans B_J , et que les matrices M relatives aux opérateurs d'ordre ± 1 dans A_J . Le seuillage est défini par

$$M_{\tau, \tau'}^c := \begin{cases} M_{\tau, \tau'} & \text{si } \delta_{\tau, \tau'} \leq \varepsilon_{jj'} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\delta_{\tau, \tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \psi_{\tau'}).$$

et ou M est une matrice correspondant à un opérateur d'ordre ± 1 .

5.4 Résolution du problème compressé, estimations d'erreurs, convergence.

A ce stade, il existe dans la littérature de nombreuses publications traitant de la compression de matrices issues de méthodes de Galerkin pour divers opérateurs; citons [44], [16], [8], [40], [22]. La plupart d'entre elles se fondent sur une estimation des coefficients dépendant de la régularité des ondelettes en jeu, et du nombre de leurs moments nuls. Dans [44], la compression laissait $\mathcal{O}(N)$ éléments non nuls dans la matrice, N étant la taille de la matrice, sous la condition

$$d^* \geq d \perp r$$

où $d^* + 1$ est le nombre de moments nuls des ondelettes, d le degré des polynômes utilisés, et r l'ordre de l'opérateur considéré. En particulier, pour des opérateurs d'ordre négatifs, et pour des éléments P_1 par exemples, on devait avoir au moins trois moments nuls.

D'une part, nous avons choisi la démarche proposée dans [22], en donnant une matrice de seuillage permettant de réduire le nombre d'éléments non nuls à $N(\log N)^\nu$ dans l'idée d'utiliser des algorithmes itératifs pour résoudre le système compressé sans détruire le taux de convergence, à un facteur logarithmique près.

D'autre part, dans [44], le propos était de fournir une méthode avec des taux de convergences optimaux, c'est-à-dire, pour le cas qui nous intéresse, d'exhiber des estimations a priori faisant intervenir la norme H^3 de la solution exacte du problème. Bien que, dans le cas que l'on traite dans ce paragraphe

(surfaces régulières), notre solution a essentiellement la même régularité que le second membre, et donc, en principe, elle est aussi régulière que souhaitée, notre propos est toutefois de se fixer un cadre raisonnable qui puisse se transposer naturellement dans le cas des surfaces à bords. Or, dans ce cas que l'on va traiter dans le paragraphe 6, la solution exacte a une régularité limitée par la géométrie du problème, et n'est même pas dans L^2 . Pour ces raisons, on se limitera à exhiber dans ce qui suit des estimations d'erreur ne faisant apparaître qu'au plus la norme L^2 de la solution. Plus concrètement, on cherchera à établir une méthode de compression de matrice donnant lieu à une solution approchée $\tilde{\mathbf{u}}_J^c$, et on cherchera à estimer l'erreur commise comme

$$\|\mathbf{u} \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^c\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{div})} \leq C 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\mathbf{u}\|_{TH(\text{div})},$$

ce qui constituera, en un sens, une convergence optimale dans le cas des plaques ouvertes².

Tout d'abord on choisit la matrice de seuillage de sorte que l'on ait un nombre $\mathcal{O}(J^\nu 2^{2J})$ d'éléments non nuls dans la matrice compressée. Ensuite, on montrera que cette matrice compressée a le même conditionnement que la matrice initiale, et enfin on estimera l'erreur en norme d'énergie qu'introduit la compression.

5.4.1 Choix de la matrice de seuillage.

Lemme 5.4.1 *En prenant*

$$\varepsilon_{jj'} := K \max(2^{aJ \perp b(j+j')}, 2^{\perp j}, 2^{\perp j'}), \quad (5.4.1)$$

où les paramètres $a, b, K > 0$ sont choisis tels que

$$a + 2(1 \perp b)_+ \leq 1, \quad K > 1 \quad (5.4.2)$$

le nombre d'éléments non nuls de la matrice A^c est en $\mathcal{O}(J2^{2J})$.

Preuve : Pour les blocs correspondant aux laplaciens et aux matrices de masse (opérateur identité), il n'y a pas de seuillage mais le coefficient en (τ, τ') est nul dès que $\delta_{\tau, \tau'} > 0$. Dans tous les cas, il s'agit d'évaluer, pour τ' fixé, et $\alpha \geq 0$:

$$N(\alpha, j, \tau') := \#\{\tau \in \nabla_j \mid \delta_{\tau, \tau'} \leq \alpha\}.$$

2. Dans le sens où la majoration que l'on obtiendra sera évaluée avec la norme $TH^{-\varepsilon}(\text{div})$, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et non la norme $TH(\text{div})$.

Posons

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha, j, \tau') &:= \{\tau \in \nabla_j \mid \delta_{\tau, \tau'} \leq \alpha\}, \\ E_\beta(\alpha, j, \tau') &:= \{x \in \Gamma \mid d(x, \text{Supp}(\psi'_\tau)) \leq \alpha + c_1 2^{\perp j} + \beta\}\end{aligned}$$

avec $\beta > 0$, c_0, c_1, c'_0, c'_1 tels que

$$\begin{aligned}c_0 2^{\perp j} &\leq \text{diam}(\text{Supp} \psi_\tau) \leq c_1 2^{\perp j} \\ c'_0 2^{\perp j} &\leq \text{diam}(\Gamma_i^{k, j}) \leq c'_1 2^{\perp j}\end{aligned}$$

Ainsi $\tau \in \Delta(\alpha, j, \tau')$ implique $\tau \in E_\beta$. On en déduit

$$N(\alpha, j, \tau') \leq \sharp E_\beta \cap \nabla_j.$$

en notant à présent $N_T(i, \alpha, \beta, j, \tau')$ le nombre de triangles coupant $\kappa_i^{\perp 1}(E_\beta \cap M_i)$, on obtient

$$\sharp E(\alpha, \beta, j, \tau') \cap \nabla_j \leq 3N_0 \sup_i N_T(i, \alpha, \beta, j, \tau').$$

Enfin on a l'estimation

$$N_T(i, \alpha, \beta, j, \tau') \leq \pi \frac{(\text{diam}(\kappa_i^{\perp 1}(E_\beta \cap M_i)) + \sup_{i,k} \text{diam}(T_i^{j,k}))^2}{(\inf_{i,k} \text{diam}(T_i^{j,k}))^2}.$$

On obtient compte tenu des hypothèses faites,

$$\begin{aligned}\text{diam}(\kappa_i^{\perp 1}(E_\beta \cap M_i)) &\lesssim (\alpha + \beta + c_1(2^{\perp j} + 2^{\perp j'})), \\ \sup_{i,k} \text{diam}(T_i^{j,k}) &\lesssim c'_1 2^{\perp j}, \\ \inf_{i,k} \text{diam}(T_i^{j,k}) &\gtrsim c'_0 2^{\perp j}.\end{aligned}$$

D'où finalement

$$N(\alpha, j, \tau') \leq C 2^{2j} (\alpha + \beta + 2^{\perp j} + 2^{\perp j'})^2,$$

C étant une constante indépendante de β . Passant à la limite $\beta = 0$, on a une estimation du nombre d'éléments non nuls dans A^c en prenant $\alpha = 0$

pour les blocs correspondant aux laplaciens et aux matrices de masse (N_B), et $\alpha = \varepsilon_{j,j'}$ pour les autres (N_M):

$$N_B \lesssim \sum_{j,j'=0}^J (2^{\perp j} + 2^{\perp j'})^2 2^{2j} 2^{2j'} \lesssim J 2^{2J} \quad (5.4.3)$$

$$N_M \lesssim \sum_{j,j'=0}^J \varepsilon_{j,j'}^2 2^{2j} 2^{2j'}. \quad (5.4.4)$$

Par un calcul direct,

$$N_M \lesssim J(2^{2J} + 2^{2(a+2(1\perp b)_+)J}),$$

ce qui achève la démonstration. □

5.4.2 Stabilité.

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer que la matrice $\widehat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}} B_j^c \mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}^{\perp 1}$ est bien conditionnée. Pour cela on utilisera le lemme de Schur:

Lemme 5.4.2 (de Schur) *Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice carrée, $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille de réels strictements positifs. S'il existe une constante C telle que*

$$\forall j, \sum_i |m_{ij}| x_i \leq C x_j$$

et

$$\forall i, \sum_j |m_{ij}| x_j \leq C x_i$$

alors $\|M\|_2 \leq C$.

Proposition 5.4.1 *Soit M un bloc de A_J correspondant à un opérateur d'ordre r , $|r| = 1$, on pose $\widehat{d} := 2d + 2 + r$, et on fait le choix des paramètres a, b tels que $2b = a + 1$. Soit k, k' deux réels, $k, k' < \perp d \perp 1 + b\widehat{d}$. Alors il existe une constante C indépendante de J telle que*

$$\|D_{\perp k}(M \perp M^c)D_{\perp k'}\|_{0 \leftarrow 0} \leq CK^{\perp \widehat{d}} 2^{(\perp k \perp k' + r)J}. \quad (5.4.5)$$

Preuve : Des choix de k, k' , on peut choisir un réel γ tel que

$$\begin{aligned} b\widehat{d} \perp d \perp 2 \perp k &> \gamma > d + k' \perp b\widehat{d} \\ b\widehat{d} \perp d \perp 2 \perp k' &> \gamma > d + k \perp b\widehat{d}. \end{aligned}$$

De la section précédente,

$$|m_{\tau, \tau'}| \leq 2^{\perp(d+2)j} 2^{\perp(d+2)j'} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(\widehat{d}+2)}. \quad (5.4.6)$$

On utilise alors le lemme de Schur avec $x_\tau := 2^{\gamma j}$ (j étant le niveau de résolution associé à τ), il s'agit donc d'évaluer $\sup_\tau 2^{\perp\gamma j} \sum_{\tau'} 2^{\perp(kj+k'j')} |m_{\tau, \tau'}| x_{\tau'}$, et la même chose sur les colonnes. On fera la preuve avec l'estimation sur les lignes.

On a

$$\begin{aligned} 2^{\perp\gamma j} \sum_{\tau'} 2^{\perp(kj+k'j')} |m_{\tau, \tau'}| x_{\tau'} \\ \lesssim 2^{\perp(d+2+k+\gamma)j} \sum_{j'} 2^{\perp(d+k'+2\perp\gamma)j'} \sum_{\tau', \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(\widehat{d}+2)}. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

En comparant la somme à une intégrale dans $\mathbb{R}^2$, cf. [44]

$$\sum_{\tau', \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(\widehat{d}+2)} \lesssim 2^{2j'} \int_{|x| \geq \varepsilon_{jj'}} |x|^{\perp(\widehat{d}+2)} dx \lesssim 2^{2j'} \varepsilon_{jj'}^{\perp\widehat{d}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 2^{\perp\gamma j} \sum_{\tau'} 2^{\perp(kj+k'j')} |m_{\tau, \tau'}| x_{\tau'} &\lesssim 2^{\perp(d+2+k+\gamma)j} \sum_{j'} 2^{\perp(d+k' \perp \gamma)j'} \varepsilon_{jj'}^{\perp\widehat{d}} \\ &\lesssim K^{\perp\widehat{d}} 2^{\perp a \widehat{d} J} 2^{\perp(d+2+k+\gamma \perp b\widehat{d})j} \sum_{j'} 2^{\perp(d+k' \perp \gamma \perp b\widehat{d})j'} \end{aligned}$$

Du choix de γ , et du fait que $2b \perp a = 1$,

$$2^{\perp\gamma j} \sum_{\tau'} 2^{\perp(kj+k'j')} |m_{\tau, \tau'}| x_{\tau'} \lesssim K^{\perp\widehat{d}} 2^{\widehat{d}J} 2^{\perp(2d+2+k+k')J} \lesssim K^{\perp\widehat{d}} 2^{\perp(k+k' \perp r)J}. \quad (5.4.8)$$

On a le même raisonnement sur les colonnes (en inversant les rôles de k et k'), et le lemme de Schur termine la preuve. $\square$

Pour pouvoir choisir $k = k' = r/2$, il faut imposer $b > 1/2$, ce qui est toujours vérifié avec la condition $a + 2(1 \pm b)_+ \leq 1$. Par conséquent on a la

Proposition 5.4.2 *Il existe une constante K_0 telle que, pour tout $K \geq K_0$ dans la définition (5.4.1), tout $0 < a \leq 1$, $2b = 1 + a$, la condition (5.4.2) est vérifiée et la matrice $\widehat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}} B_{\perp \frac{1}{2}}^c \mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}^{\perp 1}$ est bien conditionnée.*

5.4.3 Estimation d'erreur.

Pour obtenir des estimations d'erreurs, il nous faut des propriétés de régularité de l'opérateur continu $\mathcal{M}$, ou de $\mathcal{L}$:

Proposition 5.4.3 *Soit $s \geq 0$. Alors $\mathcal{L}$ induit un isomorphisme de*

$$\Omega_*^s := H_*^{\frac{1}{2}+s} \times H^{\perp \frac{1}{2}+s} \times H_*^1 \times H^1$$

dans

$$\widehat{\Omega}_*^s := H^{\perp \frac{1}{2}+s} \times H_*^{\frac{1}{2}+s} \times H^{\perp 1} \times H_*^{\perp 1}$$

Preuve. pour $s = 0$, on a notre opérateur de départ. Il est bien défini sur Ω_*^s à valeur dans $\widehat{\Omega}_*^s$. Si $s > 0$, il s'écrit à un opérateur compact près,

$$\begin{pmatrix} & * \\ D & \\ 0 & \end{pmatrix} + K$$

avec $D = \text{diag}(D^{11}, \dots, D^{44})$, bijectif de Ω_*^s dans $\widehat{\Omega}_*^s$ (l'opérateur de simple couche est de Fredholm de H^t dans H^{t+1}), et

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \perp k^2 \text{div}_{\Gamma} V \mathbf{rot}_{\Gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \perp k^2 \text{div}_{\Gamma} V \nabla_{\Gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $s > \perp \frac{1}{2}$, l'opérateur K est compact de Ω_*^s dans $\widehat{\Omega}_*^s$, donc $\mathcal{L}$ induit un opérateur de Fredholm de Ω_*^s dans $\widehat{\Omega}_*^s$. Il est injectif, car injectif sur Ω_*^0 , et donc c'est un isomorphisme.

□

En guise de corollaire, (prenant la valeur $s = \frac{1}{2}$ dans la proposition précédente)

Corollaire 5.4.1 *Pour J suffisamment grand,*

$$\widehat{\mathbb{D}}_0 B_J \mathbb{D}_0^{\perp 1}$$

*est un isomorphisme de $\ell^2(\Delta_J)$ dans lui-même.
Plus précisément,*

$$\forall V_J, \quad \|\mathbb{D}_0 V_J\|_0 \lesssim \|\widehat{\mathbb{D}}_0 B_J V_J\|_0 \quad (5.4.9)$$

Dès lors on peut obtenir une estimation de la méthode compressée:

Proposition 5.4.4 *On suppose que $1 \geq b > \frac{2}{3}$, $a = 2b \perp 1$, $d = 1$. Alors*

$$\|\widehat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}}(B_J \perp B_J^c) \mathbb{D}_0^{\perp 1}\|_{0 \leftarrow 0} \lesssim 2^{\perp \frac{1}{2}}. \quad (5.4.10)$$

et si

$$B_J Z_J = F_J \quad (5.4.11)$$

$$B_J^c Z_J^c = F_J \quad (5.4.12)$$

alors

$$\|\mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}(Z_J \perp Z_J^c)\|_0 \lesssim 2^{\perp \frac{1}{2}} \|\widehat{\mathbb{D}}_0 F_J\|_0 \quad (5.4.13)$$

Preuve. Pour la première assertion, on utilise la proposition 5.4.1, qui impose $1 < \perp 2 + 5b$ pour les opérateurs d'ordre $+1$ et $0 < \perp 2 + 3b$ pour l'opérateur d'ordre -1 , et les deux conditions sont vérifiées.

Pour la deuxième assertion, on utilise un argument de perturbation: on écrit $V_J := \mathbb{D}_0 Z_J$, $V_J^c := \mathbb{D}_0 Z_J^c$, et:

$$V_J = (\mathbb{D}_0 B_J^{\perp 1} (B_J^c \perp B_J) \mathbb{D}_0^{\perp 1} + I) V_J^c$$

On utilise l'hypothèse $\|\mathbb{D}_0 B_J^{\perp 1} \widehat{\mathbb{D}}_0^{\perp 1}\|_{0 \leftarrow 0} \lesssim 1$ et la proposition 5.4.1 pour aboutir à

$$\|\mathbb{D}_0 B_J^{\perp 1} (B_J^c \perp B_J) \mathbb{D}_0^{\perp 1}\|_{0 \leftarrow 0} \lesssim K^{\perp(2d+3)} \lesssim K^{\perp 5}$$

En notant $M := \perp \mathbb{D}_0 B_J^{\perp 1} (B_J^c \perp B_J) \mathbb{D}_0^{\perp 1}$, et pour K suffisamment grand, on peut écrire $V_J = (I \perp M) V_J^c$ et donc

$$V_J^c = V_J + \sum_{k \geq 1} M^k V_J$$

puis on déduit $\|V_J^c\|_0 \lesssim \|V_J\|_0$, soit

$$\|\mathbb{D}_0 Z_J^c\|_0 \lesssim \|\mathbb{D}_0 Z_J\|_0$$

Enfin, on revient à l'équation

$$B_J(Z_J \perp Z_J^c) = (B_J^c \perp B_J) Z_J^c$$

Que l'on réécrit comme

$$\tilde{B}_J(\mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}(Z_J \perp Z_J^c)) = \hat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}}(B_J^c \perp B_J) \mathbb{D}_0^{\perp 1}(\mathbb{D}_0 Z_J^c)$$

De la stabilité de $\tilde{B}_J$, et de ce qui précède,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}(Z_J \perp Z_J^c)\|_0 &\lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\mathbb{D}_0 Z_J^c\|_0 \\ &\lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\mathbb{D}_0 Z_J\|_0 \\ &\lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|\hat{\mathbb{D}}_0 F_J\|_0. \end{aligned}$$

□

Comme $\|\hat{\mathbb{D}}_0 F_J\|_0 \lesssim \|\mathbf{f}\|_{H(\text{rot}_\Gamma)}$, grâce au théorème 5.3.1, on a finalement le

Théorème 5.4.1 *Si les conditions $1 \geq b > \frac{2}{3}$ et $2b = a + 1$ sont vérifiées, et si*

$$Z_J^c = (\lambda_J^{1,c}, \lambda_J^{2,c}, \zeta_J^c, \eta_J^c)^T$$

est solution du problème compressé (pour J suffisamment grand)

$$B_J^c Z_J^c = F_J$$

On pose

$$\tilde{\mathbf{u}}_J^{1,c} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^{1,c}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_J^{2,c} = \nabla_\Gamma \zeta_J^c$$

et

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2, \quad \mathbf{u}^i \in \mathcal{X}^i,$$

la solution de l'équation intégrale initiale $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$, avec

$$\mathbf{f} \in TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \subset \hat{\mathcal{X}}$$

alors, il existe une constante C telle que,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^1 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^{1,c}\|_{\mathcal{X}} &\leq C2^{\perp \frac{J}{2}}(\|\mathbf{u}\|_{TH(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} + \|\mathbf{f}\|_{TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}) \\ \|\text{div}_\Gamma \mathbf{u}^2 \perp \lambda_J^{2,c}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq C2^{\perp \frac{J}{2}}(\|\mathbf{u}\|_{TH(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} + \|\mathbf{f}\|_{TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}) \\ \|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^{2,c}\|_{L^2(\Gamma)} &\leq C2^{\perp J}(\|\mathbf{u}\|_{TH(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} + \|\mathbf{f}\|_{TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{TH(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} &= \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)} + \|\text{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)} \\ \|\mathbf{f}\|_{TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)} &= \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Gamma)} + \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Remarques.

- Le choix $2/3 < b \leq 1$, $a = 2b \perp 1$ garantit un nombre d'éléments dans la matrice compressée en $\mathcal{O}(J2^{2J})$. Attention: il est bien important ici qu'avec le choix $a = 2b \perp 1$, on puisse prendre $b \leq 1$, à cause de la condition $a + 2(1 \perp b)_+ \leq 1$!
- En ce qui concerne le choix d'ondelettes, on s'est fondé sur les travaux de [19]. Mais **toutes les bases vérifiant l'équivalence des normes classique** pour l'intervalle $[\perp 1, 1]$ conviendrait en principe; ce qu'il faut garder est **la propriété «locale» des ondelettes**, en particulier, le support en $\mathcal{O}(2^{\perp j})$, et surtout, il faut préserver **la condition de «moments nuls»**. Il faut bien sûr utiliser les ondelettes les plus simples possibles, et on pense évidemment aux travaux d'A. Rathsfeld [22], et de R. Stevenson [47]. Dans ces articles, malheureusement, on n'a pas (encore?) toutes les hypothèses souhaitées.

6 Cas d'une plaque ouverte.

Dans ce paragraphe, on va étudier la diffraction d'une partie d'une surface régulière, toujours par le biais d'équations intégrales. Essentiellement, avec quelques précautions topologiques, on aura à résoudre la même équation intégrale vue précédemment. On va montrer que les schémas numériques fonctionnent encore dans ce cas, avec quelques modifications dans la mise en œuvre, et, surtout, une différence (significative) pour les taux de convergence, car si dans le cas des surfaces régulières, la solution de l'équation intégrale admet principalement la même régularité que la donnée du second membre, ce n'est plus le cas lorsque l'on est sur des variétés à bords (même si le bord est régulier).

En ce qui concerne la résolution par ondelettes, deux différences significatives apparaissent avec le cas des surfaces régulières fermées. D'abord il y a deux types d'ondelettes correspondant aux deux types d'espaces de Sobolev (d'exposants positifs) qui interviennent: H^s (sans condition au bord) et $\tilde{H}^s$ (condition «nulle» au bord). Si les constructions sont analogues, et analogues au cas des surfaces régulières, il n'y a pas d'inclusion triviale, par exemple d'un sous-espace d'ondelettes avec condition nulle au bord dans un sous-espace d'ondelettes sans condition au bord de même niveau de résolution. La deuxième différence significative réside dans la méthode de *compression* et dans les estimations des normes de matrices: on introduira *deux* types de seuillages, l'un pour les éléments d'ondelettes «loins» du bord et l'autre attaché aux éléments «proches» du bord. Avec les deux types de seuils, on est capable d'estimer les normes de matrices (dans des espaces appropriés) à l'aide d'un paramètre α . En comparant les estimations avec le cas des surfaces régulières, on s'aperçoit que les ondelettes «proches» du bord font apparaître, en plus de la décroissance en $K^{\perp(2d+2+r)}$ pour le préconditionnement par exemple, des facteurs exponentiellement décroissants en fonction de ce paramètre α (essentiellement). C'est-à-dire que, finalement, le comportement est quasi-identique au cas des surfaces régulières.

6.1 Géométrie et topologies.

On garde notre surface fermée régulière Γ , et on considère une partie ouverte $\Gamma_0 \subset \Gamma$, supposée simplement connexe, de bord $\partial\Gamma$ *polygonal*, c'est-à-dire que $\partial\Gamma$ est une courbe *fermée* définie comme l'image d'une fonction

$\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ de classe C^∞ par morceaux, avec $\gamma(0) = \gamma(1)$, qui admet en ses points singuliers $\{t_k\}$ des dérivées à gauche et à droite à tout ordre, et telle que les dérivées premières à gauche $\gamma'(t_k^-)$ et à droite $\gamma'(t_k^+)$ en ces points forment dans la plan tangent à $\gamma(t_k)$ un angle non nul et non plat. On suppose en outre que Γ_0 est localement d'un seul côté de la courbe γ .

L'exemple-type serait (pour Γ_0) l'intérieur d'un polygône en dimension 2.

On définit le vecteur tangent (à la courbe $\partial\Gamma_0$) $\tau(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x} = \gamma(t)$ (sauf en les points de discontinuité) par

$$\tau(\mathbf{x}) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t)$$

et on oriente la courbe $\partial\Gamma_0$ de telle sorte que, pour $\mathbf{x} \in \partial\Gamma_0$ sauf les points anguleux,

$$\nu(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \tau(\mathbf{x})$$

soit dirigée vers l'extérieur de Γ_0 . ν sera appelée normale extérieure.

On définit alors deux types d'espaces de Sobolev sur Γ_0 , d'abord $H^s(\Gamma_0)$ par restriction:

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R} \\ u \in H^s(\Gamma_0) &\iff \exists v \in H^s(\Gamma), \quad v|_{\Gamma_0} = u, \end{aligned}$$

la restriction étant entendue au sens distributionnel (essentiellement pour le cas $s < 0$). La norme sur $H^s(\Gamma_0)$ est définie comme

$$\|u\|_{H^s(\Gamma_0)} := \inf \left\{ \|v\|_{H^s(\Gamma)}; v \in H^s(\Gamma), v|_{\Gamma_0} = u \right\}.$$

L'espace dual de $H^s(\Gamma_0)$, avec $L^2(\Gamma_0)$ pour espace pivot, est aussi un espace de Sobolev noté $\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0)$. Nous allons donner dans ce qui suit des propriétés et caractérisations bien connues sur ces espaces de Sobolev. Comme ils jouent un rôle particulièrement important, et que les notations utilisées ne sont pas toujours identiques à d'autres ouvrages (par exemple [30]), il paraît nécessaire d'en détailler les preuves.

Pour les résultats sur ces espaces, on se référera à HÖRMANDER [27], ESKIN [23], et LIONS-MAGENES [30]. Dans ce dernier ouvrage, les notations sont sensiblement différentes et interfèrent avec les notations présentées ici. Les correspondances entre les deux notations sont les suivantes (sur Γ_0): pour $s \geq 0$, les espaces notés H^s (et H_0^s , que l'on verra un peu plus loin) dans

[30] sont les mêmes ici. Les espaces $H^{\perp s}$ sont, dans [30], les anti-duaux des espaces H_0^s ; ils coïncident avec les espaces $\tilde{H}^{\perp s}$, sauf si s est un demi-entier (entier $+\frac{1}{2}$); l'espace $\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}$ est noté $H_{00}^{\perp \frac{1}{2}}$ dans [30]. Enfin, les espaces H_0^s et $\tilde{H}^s$ coïncident, sauf si s est un demi-entier; l'espace $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}$ est noté $H_{00}^{\frac{1}{2}}$ dans [30].

Les espaces d'exposant $\pm\frac{1}{2}$ sont fondamentaux dans notre résolution, et ce sont précisément les cas «pathologiques» dans [30].

Lemme 6.1.1 *On note $C^\infty(\overline{\Gamma_0})$ l'espace des restrictions à Γ_0 des éléments de $C^\infty(\Gamma)$, et $\mathcal{D}(\Gamma_0) = C_0^\infty(\Gamma_0)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ dans Γ_0 , à support (compact) dans l'ouvert Γ_0 . Alors*

- $C^\infty(\overline{\Gamma_0})$ est partout dense dans $H^s(\Gamma_0)$,
- $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est partout dense dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$.

Preuve : Pour la première assertion, on se donne $u \in H^s(\Gamma_0)$ et v un prolongement, i.e. $v \in H^s(\Gamma)$ et $v|_{\Gamma_0} = u$. Comme $C^\infty(\Gamma)$ est dense dans $H^s(\Gamma)$, on peut trouver $v_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma)$ tel que $\|v - v_\varepsilon\|_{H^s(\Gamma)} \leq \varepsilon$. Il reste à poser $u_\varepsilon := v_\varepsilon|_{\Gamma_0}$, et, avec la définition de la norme sur $H^s(\Gamma_0)$, on obtient le résultat.

Pour la deuxième assertion, on remarquera d'abord que $H^s(\Gamma_0)$ est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Gamma_0)$. Par définition de la dualité $H^s \perp \tilde{H}^{\perp s}$, $C_0^\infty(\Gamma_0) \subset \tilde{H}^s(\Gamma_0)$, et si $u \in H^s(\Gamma_0)$ est tel que $\langle u, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_0)$, on tire $u = 0$ au sens des distributions dans Γ_0 , et donc $u = 0$ dans $H^s(\Gamma_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

□

$\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0)$ est caractérisé par la

Proposition 6.1.1 *Pour tout s , l'espace $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ est isométrique à l'espace*

$$\{\check{u} \in H^s(\Gamma) \mid \text{Supp } \check{u} \subset \overline{\Gamma_0}\} \quad (6.1.1)$$

muni de la norme H^s induite; l'isométrie est induite par la relation

$$\begin{aligned} \langle \check{u}, \varphi \rangle &:= \langle u, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^s(\Gamma_0), H^{-s}(\Gamma_0)} \\ u &\in \tilde{H}^s(\Gamma_0), \quad \check{u} \in H^s(\Gamma), \quad \varphi \in C^\infty(\Gamma). \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

La distribution $\check{u}$ sera dite prolongement par zéro de u en dehors de $\overline{\Gamma_0}$.

Preuve : On se réfèrera à [30], [23].

Pour être plus précis, il s'agit de montrer, partant d'un élément $u \in \tilde{H}^s(\Gamma)$, que la relation (6.1.2) définit une distribution $\tilde{u}$ dans $H^s(\Gamma)$, à support dans $\overline{\Gamma_0}$, et de norme $\|\tilde{u}\|_s = \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}$. Et réciproquement, partant d'une distribution $\tilde{u} \in H^s(\Gamma_0)$, (6.1.2) définit bien une fonctionnelle $u \in \tilde{H}^s(\Gamma_0)$. Nous noterons provisoirement, pour tout réel s ,

$$H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0}) := \{v \in H^s(\Gamma) \mid \text{Supp } v \subset \overline{\Gamma_0}\}.$$

Il s'agit donc de prouver que $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ est isométrique à $H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$.

On commence par le cas $s \geq 0$, et on commence par prouver que $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$.

On note $H_+^s(\Gamma_0)$: l'espace des restrictions des éléments de $H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$ à Γ_0 , muni de la norme $\|u\|_{H_+^s} := \|\tilde{u}\|_{H^s(\Gamma_0)}$, si $\tilde{u}|_{\Gamma_0} = u$. $H_+^s(\Gamma_0)$ est alors un sous-espace de $L^2(\Gamma_0)$ dense pour la topologie L^2 . En outre, on a $\tilde{H}^s(\Gamma_0) \subset H_+^s(\Gamma_0)$ et l'injection est continue. En effet, si $u \in \tilde{H}^s(\Gamma_0)$, et $\tilde{u}$ est son prolongement par zéro en dehors de Γ_0 , on a $\tilde{u}|_{\Gamma_0} = u$, et, pour tout $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, \varphi \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle u, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{L^2(\Gamma_0)}, \\ &\leq \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} \|\varphi|_{\Gamma_0}\|_{H^{-s}(\Gamma_0)} \\ &\leq \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} \|\varphi\|_{H^{-s}(\Gamma)} \end{aligned}$$

et donc $\tilde{u} \in H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$, avec

$$\|\tilde{u}\|_{H^s(\Gamma)} \leq \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}.$$

L'espace L^2 -dual de H_+^s sera noté $H_+^{\perp s}$ et on a

$$H_+^{\perp s}(\Gamma_0) \subset H^{\perp s}(\Gamma_0)$$

avec injection continue. A présent, si $v \in H_+^{\perp s}(\Gamma_0)$ est telle que $\langle v, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_0)$, alors, comme $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$, $v = 0$ dans $H^{\perp s}(\Gamma_0)$, donc $v = 0$ dans $H_+^{\perp s}(\Gamma_0)$, ce qui signifie que $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $H_+^s(\Gamma_0)$, et, en conséquence, $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$, ce que l'on cherchait. A présent, considérons, *toujours pour* $s \geq 0$ l'application *restriction*

$$\begin{aligned} r_s : H^s(\Gamma) &\rightarrow H^s(\Gamma_0) \\ u &\mapsto u|_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

Par définition de $H^s(\Gamma_0)$, r_s est continue, surjective, et induit une isométrie $\bar{r}_s$ entre $H^s(\Gamma)/\mathcal{K}er(r_s)$ et $H^s(\Gamma_0)$. Mais

$$\mathcal{K}er(r_s) = H^s(\Gamma, \Gamma \setminus \Gamma_0);$$

par transposition, $\tilde{H}^{\perp s}$ est isométrique au dual de $H^s(\Gamma)/\mathcal{K}er(r_s)$, c'est-à-dire

$$\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0) \cong \{u \in H^{\perp s}(\Gamma) \mid \forall v \in H^s(\Gamma, \Gamma \setminus \Gamma_0), \langle u, v \rangle_{H^{-s}(\Gamma), H^s(\Gamma)} = 0\}.$$

Comme $C_0^\infty(\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0})$ est partout dense dans $H^s(\Gamma, \Gamma \setminus \Gamma_0)$ ($s \geq 0$),

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0) &\cong \{u \in H^{\perp s}(\Gamma) \mid \forall v \in C_0^\infty(\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}), \langle u, v \rangle_{H^{-s}(\Gamma), H^s(\Gamma)} = 0\}, \\ &\cong H^{\perp s}(\Gamma, \overline{\Gamma_0}). \end{aligned}$$

En conséquence, $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $H^{\perp s}(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$ pour $s \geq 0$, et donc $C_0^\infty(\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0})$ est dense dans $H^{\perp s}(\Gamma, \Gamma \setminus \Gamma_0)$, on peut reprendre la même analyse avec $r_{\perp s}$ pour obtenir

$$\tilde{H}^s(\Gamma_0) \cong H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0}),$$

pour $s \geq 0$.

Enfin, la relation (6.1.2) n'est autre que la définition de $\bar{r}_s$.

□

Dans la suite, on identifie $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ à $H^s(\Gamma, \overline{\Gamma_0})$.

On aura besoin (dans le paragraphe 8) d'une caractérisation des espaces H^s et $\tilde{H}^s$ (pour $s \geq 0$) de l'«intérieur», qui permettra une manipulation plus simple des normes en jeu; on se réfère à P. GRISVARD [24] pour les propriétés énoncées non démontrées qui suivent.

Définition 6.1.1 Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de bord lipschitzien, et s un réel quelconque. On note $H^s(\Omega)$ l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui sont des restrictions à Ω d'éléments de $H^s(\mathbb{R}^2)$. On définit $\tilde{H}^s(\Omega)$ comme le dual de $H^{\perp s}(\Omega)$ avec $L^2(\Omega)$ pour espace pivot. Enfin, on note $H_0^s(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

On prendra soin à distinguer H_0^s de $\tilde{H}^s$. Comme pour le cas des surfaces fermées, $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$, et $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\tilde{H}^s(\Omega)$, et $\tilde{H}^s(\Omega)$ est isométrique à l'ensemble des éléments de $H^s(\mathbb{R}^2)$ dont le support est dans $\overline{\Omega}$, muni de sa topologie naturelle.

Proposition 6.1.2 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de bord lipschitzien, et $s \geq 0$, $s = m + \sigma$, m entier et $0 \leq \sigma < 1$. Alors*

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \begin{aligned} &\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega), \\ &\forall \alpha, |\alpha| \leq m \quad \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) \perp D^\alpha u(y)|^2}{|x \perp y|^{2+2\sigma}} dx dy < \infty. \end{aligned}\}$$

et la norme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2} + \left(\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) \perp D^\alpha u(y)|^2}{|x \perp y|^{2+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme quotient sur $H^s(\Omega)$.

Si $\rho(x)$ désigne la distance de x au bord de Ω ,

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \{u \in H_0^s(\Omega) \mid \rho^{\perp \sigma} D^\alpha u \in L^2(\Omega); |\alpha| = m\}$$

et

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} \sim \|u\|_{H^s(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|\rho^{\perp \sigma} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par cartes locales, cf. GRISVARD [24], on prouve le

Lemme 6.1.2 *Pour tout entier $m \geq 0$ tout $u \in \tilde{H}^m(\Gamma_0)$, $\rho^{\perp m} u \in L^2(\Gamma_0)$, et l'application $u \mapsto \rho^{\perp m} u$ est linéaire continue de $\tilde{H}^m(\Gamma_0)$ dans $L^2(\Gamma_0)$.*

Si on note, pour s réel positif, $L_{\rho^{-s}}^2(\Omega)$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions u telles que $\rho^{\perp s} u \in L^2(\Omega)$, l'espace $L_{\rho^{-s}}^2(\Omega)$ est le domaine de l'opérateur $T_{\perp s}$ de multiplication par $\rho^{\perp s}$ non-borné dans $L^2(\Omega)$. Pour $\theta \in [0, 1]$, par interpolation, cf. LIONS-MAGENES [30],

$$[L_{\rho^{-s}}^2, L^2]_\theta := D(T_{\perp s}^\theta) = \text{domaine de } T_{\perp s}^\theta$$

Mais comme $T_{\perp s}^\theta = T_{\perp s\theta}$,

$$[L_{\rho^{-s}}^2, L^2]_\theta = L_{\rho^{-s\theta}}^2.$$

Ceci étant dit, en posant, pour $s \geq 0$

$$\tilde{H}_s(\Omega) := H^s(\Omega) \cap L_{\rho^{-s}}^2(\Omega),$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\tilde{H}_s} := \|u\|_{H^s} + \|\rho^{\perp s} u\|_{L^2},$$

grâce au lemme précédent, l'application identité est un isomorphisme entre $\tilde{H}^m$ et $\tilde{H}_m$, pour tout entier $m \geq 0$. Par interpolation,

$$\tilde{H}^{m\theta} = [\tilde{H}^m, L^2]_\theta \cong [\tilde{H}_m, L^2]_\theta.$$

Comme

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_m, L^2]_\theta &= [H^m \cap L_{\rho^{-m}}^2, L^2]_\theta \\ &= [H^m, L^2]_\theta \cap [L_{\rho^{-m}}^2, L^2]_\theta \\ &= H^{m\theta} \cap L_{\rho^{-m\theta}}^2, \\ &= \tilde{H}_{m\theta} \end{aligned}$$

on en déduit une autre caractérisation des éléments de $\tilde{H}^s$ pour $s \geq 0$:

Proposition 6.1.3 *Pour $s \geq 0$, $\tilde{H}^s(\Omega) \cong \tilde{H}_s(\Omega)$ et donc*

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} \sim \|u\|_{H^s(\Omega)} + \|\rho^{\perp s} u\|_{L^2(\Omega)} \quad (u \in \tilde{H}^s(\Omega)).$$

On peut alors définir les espaces H^s et $\tilde{H}^s$ sur la surface Γ_0 par cartes locales: on se donne un ensemble de domaines réguliers $(\Omega_i)_{0 \leq i \leq N} \subset \mathbb{R}^2$, un recouvrement d'ouverts réguliers $(\Theta_i)_{k \leq i \leq N}$ du bord de Γ_0 et un ensemble d'ouverts réguliers $\Theta_j \subset \subset \Gamma_0$, $j = 0, \dots, k-1$ tels que $(\Theta_i)_{0 \leq i \leq N}$ constitue un recouvrement d'ouverts de Γ_0 , et tels qu'il existe une famille d'applications (cartes locales) $\kappa_i : \Omega_i \rightarrow \Theta_i$, $i = 0, \dots, N$, de classe C^∞ , bijectives, et dont la dérivée (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$) soit de rang 2 en tout point. Le bord de Γ_0 est envoyé par $\kappa_i^{\perp 1}$ en une courbe (lipschitzienne) dans Ω_i et on posera $\Omega_i^0 := \Omega_i \cap \kappa_i^{\perp 1}(\Theta_i \cap \Gamma_0)$, qui est un ouvert de bord lipschitzien (et

même régulier par morceaux). On se donne une partition de l'unité (θ_i) relative au recouvrement (Θ_i) et, pour toute fonction (ou distribution) u définie sur Γ_0 , on écrit

$$u = \sum_{i=1}^N \theta_i u$$

et on pose $\check{u}_i := \theta_i u \circ \kappa_i$. Alors (cf. LIONS-MAGENES [30], GRISVARD [24]):

$$\begin{aligned} u \in H^s(\Gamma_0) &\iff \forall i = 1, \dots, N, \quad \check{u}_i \in H^s(\Omega_i^0) \\ \|u\|_{H^s(\Gamma_0)} &\sim \sum_i \|\check{u}_i\|_{H^s(\Omega_i^0)} \\ u \in \tilde{H}^s(\Gamma_0) &\iff \forall i = 1, \dots, N, \quad \check{u}_i \in \tilde{H}^s(\Omega_i^0) \\ \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} &\sim \sum_i \|\check{u}_i\|_{\tilde{H}^s(\Omega_i^0)} \end{aligned}$$

Les équivalences des normes dépendent bien sûr du choix des cartes, des ouverts, ou de la partition de l'unité.

On déduit alors, avec la proposition 6.1.3, et en notant (encore) $\rho(\mathbf{x})$ la distance de $\mathbf{x}$ au bord $\partial\Gamma_0$:

Proposition 6.1.4 *Pour $s \geq 0$,*

$$\tilde{H}^s(\Gamma_0) = \{u \in H^s(\Gamma_0) \mid \rho^{\perp s} u \in L^2(\Gamma_0)\}$$

6.2 Opérateurs

La surface Γ_0 hérite de toutes les définitions géométriques faites sur Γ (élément de surface, plan tangent...)

En ce qui concerne les *opérateurs*, les opérateurs d'ordre 1 $\nabla_\Gamma, \operatorname{div}_\Gamma, \operatorname{rot}_\Gamma, \mathbf{rot}_\Gamma$ s'étendent de manière naturelle en des opérateurs continus de $H^s(\Gamma_0)$ dans $H^{s\pm 1}(\Gamma_0)$ par

$$\nabla_\Gamma(u|_{\Gamma_0}) := (\nabla_\Gamma u)|_{\Gamma_0} \quad u \in H^s(\Gamma)$$

et des définitions analogues pour les autres opérateurs. On peut aussi considérer ces opérateurs sur $\tilde{H}^s(\Gamma_0) \subset \mathcal{D}'(\Gamma)$ qui donnent des opérateurs continus de $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ dans $\tilde{H}^{s\pm 1}(\Gamma_0)$. On gardera la même notation pour les deux types d'opérateurs (en spécifiant, le cas échéant, où on se place).

En ce qui concerne le *laplacien*, il existe encore deux versions mais cette fois bien distinctes:

Définition 6.2.1 *On définit l'opérateur*

$$\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}} : \tilde{H}^1(\Gamma_0) \rightarrow H^{\perp 1}(\Gamma_0)$$

par

$$\begin{aligned} \forall p, q \in \tilde{H}^1(\Gamma_0), \\ \langle \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}} p, q \rangle_{H^{-1}(\Gamma_0), \tilde{H}^1(\Gamma_0)} := \perp \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma} p \overline{\nabla_{\Gamma} q} \, ds. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

L'opérateur $\perp \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}$ est un opérateur fortement coercif, et bijectif de $\tilde{H}^1(\Gamma_0)$ dans son dual. Il est associé au problème de Dirichlet

$$\Delta_{\Gamma} p = f \in H^{\perp 1}(\Gamma_0), \quad p|_{\partial\Gamma_0} = 0.$$

On définit l'opérateur

$$\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}} : H^1(\Gamma_0) \rightarrow \tilde{H}^{\perp 1}(\Gamma_0)$$

par

$$\begin{aligned} \forall p, q \in H^1(\Gamma_0), \\ \langle \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}} p, q \rangle_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma_0), H^1(\Gamma_0)} := \perp \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma} p \overline{\nabla_{\Gamma} q} \, ds. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

$\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}$ est un opérateur de Fredholm; son noyau est l'ensemble des fonctions constantes sur Γ_0 (de dimension 1) et son image est

$$\tilde{H}_*^{\perp 1}(\Gamma_0) := \{u \in \tilde{H}^{\perp 1}(\Gamma_0) \mid \langle u, 1 \rangle_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma_0), H^1(\Gamma_0)} = 0\}.$$

Il est associé au problème de Neumann

$$\Delta_{\Gamma} p = f \in L^2(\Gamma_0), \quad \int_{\Gamma_0} f = 0 \quad \partial_{\nu} p|_{\partial\Gamma_0} = 0,$$

où ν désigne la normale «extérieure» à Γ_0 .

Remarque: La dérivée normale $\partial_\nu p$ n'est bien définie que si le second membre est suffisamment régulier. Par exemple, elle n'est pas définie (ou nulle au sens vu précédemment) si l'on prend $f = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_0} \mathbf{C}$, où $\mathbf{C}$ est une constante vectorielle, qui est une distribution dans $\tilde{H}^{\perp 1}(\Gamma_0)$, nulle à l'intérieur de Γ_0 . On sait (cf. [24] pour des bords polygonaux) que les solutions du laplacien avec second membre dans L^2 , dans un domaine polygonal avec condition de Dirichlet homogène sont dans $H^{1+\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon}$, où ω est le plus grand angle du polygone considéré, et $\varepsilon > 0$ arbitraire. De nos hypothèses, comme $1 + \frac{\pi}{\omega} > \frac{3}{2}$ et par densité,

Proposition 6.2.1 *L'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}$ est un isomorphisme de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0) \cap \tilde{H}^1(\Gamma_0)$ muni de la topologie induite de $H^{\frac{3}{2}}$, vers $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$.*

En particulier,

$$\|p\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)} \lesssim \|\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}} p\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}.$$

On a un résultat analogue pour le problème de Neumann :

Proposition 6.2.2 *L'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}$ est un isomorphisme de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)/\mathbb{C}$ muni de la topologie induite de $H^{\frac{3}{2}}$, vers $\tilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, où*

$$\tilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0) := \{f \in \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0) \mid \langle f, 1 \rangle = 0\}.$$

6.3 Potentiel de simple couche.

Définition 6.3.1 *On définit l'opérateur de simple couche $V \equiv V(k)$ comme dans le cas des surfaces régulières par*

$$V\varphi(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_0} \frac{e^{ik|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|} \varphi(\mathbf{y}) \, ds(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad \varphi \in L^2(\Gamma_0),$$

et on note V_0 l'opérateur associé à la fréquence 0:

$$V_0\varphi(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|} \, ds(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad \varphi \in L^2(\Gamma_0).$$

L'opérateur V sur une plaque ouverte possède des propriétés similaires au cas des surfaces fermées, avec des espaces convenables:

Théorème 6.3.1 *L'opérateur V_0 induit un opérateur linéaire continu, surjectif et fortement coercif de $\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$.*

Pour tout ε réel, $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$, V_0 induit aussi un opérateur de Fredholm de $\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_0)$ dans $H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_0)$, et $V \perp V_0$ induit un opérateur compact entre ces mêmes espaces.

Remarques importantes sur ce théorème.

Le théorème 6.3.1 a été démontré par SCHNEIDER [45] pour le cas des surfaces à bords *lipschitziens*, l'article étant en relation avec celui d'ESKIN [23]. Comme on va le voir dans la suite, cette propriété de régularité du potentiel de simple couche va permettre de trouver le comportement de la solution de l'équation intégrale au voisinage du bord. On trouvera que, pour un second membre dans $H(\text{rot}_\Gamma)$, la solution $\mathbf{u}$ est dans $\tilde{H}^{\perp \varepsilon}(\text{div}_\Gamma)$, i.e. $\mathbf{u} \in \tilde{H}^{\perp \varepsilon}$, $\text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in \tilde{H}^{\perp \varepsilon}$, ε étant un réel strictement positif arbitraire. Ce résultat s'obtient aussi par l'analyse des opérateurs elliptiques via les espaces à poids et la transformation de Mellin [28], [20]. Pour l'opérateur de Maxwell, on consultera COSTABEL-DAUGE [12].

On garde encore un lien avec la divergence 3D par

Lemme 6.3.1 *Si $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Gamma_0)^3$ est tangentiel, i.e. $(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0$, alors*

$$\text{div } V\mathbf{u} = V(\text{div}_\Gamma \mathbf{u}) \quad \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Gamma_0}.$$

6.4 Equation intégrale.

L'analyse faite dans le cas des surfaces régulières se transpose directement dans le cas de la plaque ouverte; on va en rappeler brièvement les points clefs. Pour les détails, on revoie à la section 3.2.

On part des équations de Maxwell qui s'écrivent de manière distributionnelle sur $\mathbb{R}^3$ comme

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \perp i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{u}\delta_\Gamma \end{aligned}$$

où $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$, est le champ électrique total, $\mathbf{E}^i$ le champ incident (connu, et régulier), $\mathbf{E}^s$ le champ diffracté (cherché), $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^i$, $\mathbf{H}^s$ les champs magnétiques correspondants, et, finalement, $\mathbf{u} = \perp[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]_{\Gamma_0} = \perp[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]_\Gamma$ l'inconnue surfacique correspondant à la densité de courant sur la plaque. $\text{div}_\Gamma \mathbf{u}$ correspond

à la densité de charge sur la plaque.

En imposant une condition de radiation à l'infini (Silver-Müller), le champ électrique diffracté se représente comme

$$\perp i\omega\varepsilon\mathbf{E}^s = \nabla(V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}) + k^2 V \mathbf{u}$$

en dehors de la plaque. En imposant la condition des conducteurs parfaits sur la plaque ($\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$), et avec les conditions de sauts, on est ramené à résoudre l'équation intégrale

$$\boxed{i\varepsilon\omega\mathbf{E}^i = \nabla_\Gamma V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} + k^2 V_\Gamma \mathbf{u},}$$

sur la surface Γ_0 .

Il est à noter ici qu'il n'y pas pas de condition d'injectivité imposée à l'opérateur intégrale (car il n'y a plus de problème «intérieur»), et, de facto, l'opérateur intégral est injectif.

7 Espaces.

7.1 Espaces des solutions.

On rappelle que dans le cas des surfaces régulières, la solution de l'équation intégrale se trouvait dans

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Gamma) := \left\{ \mathbf{u} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \mid \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma) \right. \\ \left. (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0 \right\}.$$

La solution cherchée dans le cas des plaques ouvertes sera dans un *sous-espace*:

Définition 7.1.1

$$\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0) := \left\{ \mathbf{u} \in \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3 \mid \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0) \right. \\ \left. (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0 \right\}. \quad (7.1.1)$$

Définition alternative:

$$\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0) := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{X}(\Gamma) \mid \operatorname{Supp} \mathbf{u} \subset \overline{\Gamma_0} \} \quad (7.1.2)$$

avec pour norme la norme induite de $\mathcal{X}(\Gamma)$

Remarques:

1. On donne une alternative dans la définition de $\mathcal{X}(\Gamma_0)$ pour éviter toute confusion. Encore une fois, il faut observer $\mathcal{X}(\Gamma_0)$ comme un *sous-espace* de $\mathcal{X}(\Gamma)$; en particulier, dans la définition 7.1.1, on considère des distributions sur Γ tout entier.

Précisons ce point: dans la définition 7.1.1, les distributions considérées sont dans $\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, c'est-à-dire, comme rappelé dans la section précédente, ce sont des distributions dans $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)$ dont le support est inclus dans $\overline{\Gamma_0}$. En prenant la divergence surfacique de telles distributions, on tombe naturellement dans $H^{\perp \frac{3}{2}}(\Gamma)$. Ce qu'impose la définition 7.1.1 est que cette divergence, se trouve dans $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)$, ou encore dans $\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, puisque cette divergence est naturellement nulle en dehors de $\overline{\Gamma_0}$.

De ce point de vue, la deuxième définition 7.1.2 est bien évidemment équivalente à 7.1.1: une distribution de $\mathcal{X}(\Gamma)$ de support inclus dans $\overline{\Gamma_0}$

a une divergence dans $H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tout entier, et, en plus, son support est dans $\overline{\Gamma_0}$, ce qui signifie que cette divergence est aussi dans $\tilde{H}^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. Il est bien commode, dans la situation présente, de voir l'espace d'énergie comme des distributions sur Γ tout entier, comme on le fait d'ailleurs naturellement pour les objets de $\tilde{H}(\Gamma_0)$. Cependant, ce n'est pas l'unique point de vue possible. On peut voir les éléments de $\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ comme des distributions sur Γ_0 uniquement MAIS qui sont soumises à une contrainte de bord, disant essentiellement que la composante normale s'annule sur le bord de Γ_0 . Cette condition de bord est totalement incluse dans la définition 7.1.1 en considérant des fonctions H^1 par exemple. Etendre ce deuxième point de vue à des distributions dans $\tilde{H}^{\perp\frac{1}{2}}$ est toutefois piégeux, les traces n'étant alors pas bien définies. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre les plus grandes précautions pour s'assurer de la validité de l'écriture des traces sur le bord de Γ_0 , ce qui était un des propos dans [4]. Toutefois, l'alternative des définitions données ici pour l'espace d'énergie est très pratique et reste très visuelle, en gardant bien en tête que l'on a à faire à des distributions sur Γ tout entier.

2. $(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3}$ définit une distribution sur Γ par

$$\langle (\mathbf{u}, \mathbf{n}), \varphi \rangle := \langle \mathbf{u}, \varphi \mathbf{n} \rangle .$$

On a un résultat de densité assez naturel:

Proposition 7.1.1 *L'espace*

$$TC_0^\infty(\Gamma_0) := \{\mathbf{u} \in C^\infty(\Gamma)^3 \mid \text{Supp } \mathbf{u} \subset \Gamma_0, (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0\}$$

est partout dense dans $\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

Preuve: $TC_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $T\tilde{H}^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, espace des distributions dans $\tilde{H}^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3$ tangentielles c'est-à-dire telles que $(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0$ et l'opérateur div_Γ est continu dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

□

Pour pouvoir décomposer l'équation intégrale, il nous faut, sur $\tilde{\mathcal{X}}$, un substitut à la décomposition de Hodge sur $\mathcal{X}$. Avant cela, on énonce un lemme qui

sera utile pour les équivalences de normes qui suivent, et pour une (nouvelle) caractérisation de l'espace dual $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

Lemme 7.1.1 *Pour $0 \leq s \leq 1$, la norme*

$$H^s(\Gamma_0) \ni p \mapsto \|p\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla_\Gamma p\|_{H^{s-1}(\Gamma_0)}$$

est une norme équivalente à la norme usuelle sur $H^s(\Gamma_0)$, et

$$\|p\|_{H_*^s(\Gamma_0)} \sim \|\nabla_\Gamma p\|_{H^{s-1}(\Gamma_0)}$$

avec

$$H_*^s(\Gamma_0) := \{p \in H^s(\Gamma_0) \mid \int_{\Gamma_0} p \, ds = 0\}.$$

En outre, pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$,

$$\|p\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} \sim \|\nabla_\Gamma p\|_{\tilde{H}^{s-1}(\Gamma_0)}$$

Preuve: Notons, pour $p \in H^s(\Gamma_0)$, $0 < s < 1$, (le lemme est trivial pour $s = 0, 1$)

$$|||p|||_s := \|p\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|p\|_{H^{s-1}(\Gamma_0)}.$$

Comme $|||p|||_s \lesssim \|p\|_{H^s(\Gamma_0)}$, pour montrer l'équivalence des normes, il suffit de prouver que $(H^s(\Gamma_0), |||\cdot|||_s)$ est complet. Soit donc une suite $(p_n) \subset H^s$ de Cauchy pour la norme $|||\cdot|||_s$. Alors (p_n) converge vers p dans $L^2(\Gamma_0)$, et $(\nabla_\Gamma p_n)$ converge vers $\mathbf{q}$ dans $H^{s+1}(\Gamma_0)^3$. Mais comme $\nabla_\Gamma p_n$ converge vers $\nabla_\Gamma p$ dans $H^{\perp 1}(\Gamma_0)^3$, on déduit $\nabla_\Gamma p = \mathbf{q}$ au sens des distributions, donc $\nabla_\Gamma p \in H^{s+1}(\Gamma_0)$. Il reste donc à prouver que $p \in H^s$: par cartes locales on est ramené au cas où $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$, et où Γ_0 est soit un cône, soit le demi plan, soit $\mathbb{R}^2$ tout entier. On commencera par montrer que, si $p \in L^2(\Gamma_0)$ et si $\nabla p \in H^{s+1}(\Gamma_0)$, alors $p \in H^s(\Gamma_0)$ pour les cas $\Gamma_0 = \mathbb{R}^2$ et $\Gamma_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Le cas d'un cône quelconque (d'ouverture $\omega \in]0, 2\pi[$, $\omega \neq \pi$) s'en déduira.

Cas du plan: ici $\Gamma_0 = \mathbb{R}^2$. Par transformation de Fourier, les hypothèses donnent

$$\widehat{p} \in L^2, \quad \frac{\widehat{p}}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}} \xi \in L^2.$$

Comme, pour (tout) $s \leq 1$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \leq 1 + |\xi|(1 + |\xi|^2)^{\frac{1-s}{2}}$$

on obtient finalement $p \in H^s(\Gamma_0)$.

Cas du demi-plan: ici, $\Gamma_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; on se donne $p \in L^2(\Gamma_0)$ tel que $\nabla_\Gamma p \in H^{s+1}(\Gamma_0)$, $0 < s < 1$, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\varphi \in \tilde{H}^1(\Gamma_0) = H_0^1(\Gamma_0)$,

$$\left| \int_{\Gamma_0} p \overline{\partial_i \varphi(x)} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{\tilde{H}^{s+1}(\Gamma_0)}.$$

On pose trois opérateurs

$$\begin{aligned} r : L^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^2(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto \psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + 3\varphi(\perp x_1, x_2) + 4\varphi(\perp 2x_1, x_2). \\ r_1 : L^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^2(\Gamma_0) \\ \varphi &\mapsto \psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + 3\varphi(\perp x_1, x_2) + 2\varphi(\perp 2x_1, x_2). \\ \pi : L^2(\Gamma_0) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \\ f &\mapsto g(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & x_1 > 0, \\ 3f(\perp x_1, x_2) + 2f(\perp \frac{1}{2}x_1, x_2) & x_1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

r et r_1 sont des opérateurs de restriction continus de $L^2(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\Gamma_0)$, et aussi de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $H_0^1(\Gamma_0)$. Par interpolation, ce sont des opérateurs de restriction continus de $H^s(\mathbb{R}^2)$ dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$, pour $0 \leq s \leq 1$. De plus, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} r(\partial_1 \varphi) &= \partial_1 r_1 \varphi, \\ r(\partial_2 \varphi) &= \partial_2 r \varphi. \end{aligned}$$

π est un opérateur de prolongement de $L^2(\Gamma_0)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, et aussi de $H^1(\Gamma_0)$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. En effet, si $f \in H^1(\Gamma_0)$, et si $g = \pi f$, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
\langle g, \partial_1 \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f(x) \overline{\partial_1 \varphi(x)} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}} (3f(\perp x_1, x_2) \perp 2f(\perp \frac{1}{2}x_1, x_2)) \overline{\partial_1 \varphi(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f(x) \overline{\partial_1 \varphi(x)} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (3f(x_1, x_2) \perp 2f(\frac{1}{2}x_1, x_2)) \overline{(\partial_1 \varphi)(\perp x_1, x_2)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f(x) \overline{r(\partial_1 \varphi)(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} f(x) \overline{\partial_1(r_1 \varphi)(x)} dx
\end{aligned}$$

De la continuité de r_1 , et de f , après intégration par parties,

$$|\langle g, \partial_1 \varphi \rangle| \lesssim \|f\|_{H^1(\Gamma_0)} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_0)}.$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
|\langle g, \partial_2 \varphi \rangle| &= |\langle f, \partial_2(r\varphi) \rangle| \\
&\lesssim \|f\|_{H^1(\Gamma_0)} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_0)}.
\end{aligned}$$

En conséquence, par interpolation, π est un opérateur de prolongement continu de $H^s(\Gamma_0)$ dans $H^s(\mathbb{R}^2)$, et, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
\langle \pi f, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \langle f, r\varphi \rangle_{L^2(\Gamma_0)}, \\
\langle \pi f, \partial_1 \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \langle f, \partial_1(r_1 \varphi) \rangle_{L^2(\Gamma_0)}, \\
\langle \pi f, \partial_2 \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \langle f, \partial_2(r\varphi) \rangle_{L^2(\Gamma_0)}.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le lemme, on pose $q = \pi p \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme $\nabla p \in H^{s+1}(\Gamma_0)$, de la continuité des opérateurs r et r_1 , il existe une constante C telle que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, et tout $i = 1, 2$,

$$|\langle q, \partial_i \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^{1-s}(\mathbb{R}^2)}.$$

On en déduit $q \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla q \in H^{s+1}(\mathbb{R}^2)$, et donc (voir cas du plan), $q \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Comme $q|_{\Gamma_0} = p$, $p \in H^s(\Gamma_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

Cas du cône: par un changement de variables approprié, on est ramené aux cas où l'ouverture ω du cône est soit $\pi/2$, soit $3\pi/2$, c'est-à-dire $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} | \arg z \in]0, \pi/2[\text{ ou } \Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} | \arg z \in]0, 3\pi/2[$.

Pour le cas $\omega = \pi/2$, on utilise l'opérateur de prolongement π vu précédemment sur le demi-plan supérieur ($x_2 > 0$), ce qui nous donne un opérateur π_+ : si $p \in L^2(\Gamma_0)$ et $\nabla p \in H^{s+1}(\Gamma_0)$, et si $q = \pi_+ p$, alors $q \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ et $\nabla q \in H^{s+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$; du cas du demi-plan, $q \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ et, finalement, $p \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

Pour le cas $\omega = 3\pi/2$, c'est-à-dire $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} | \arg z \in]0, 3\pi/2[$, on note

$$\begin{aligned} Q_+ &:= \{(x_1, x_2) | \quad x_1 > 0, x_2 > 0\} \\ Q_\perp &:= \{(x_1, x_2) | \quad x_1 < 0, x_2 < 0\} \\ \Gamma_V &:= \{(x_1, x_2) | \quad x_1 < 0\} \\ \Gamma_H &:= \{(x_1, x_2) | \quad x_2 > 0\} \end{aligned}$$

En particulier, $\overline{\Gamma_0} = \overline{\Gamma_V \cup Q_+} = \overline{\Gamma_H \cup Q_\perp}$.

On se donne donc $p \in L^2(\Gamma_0)$ tel que $\nabla p \in H^{s+1}(\Gamma_0)$, avec $0 < s < 1$. On note

$$q := p|_{\Gamma_H}$$

Comme $q \in L^2(\Gamma_H)$ et $\nabla q \in H^{s+1}(\Gamma_H)$, du cas du demi-plan, $q \in H^s(\Gamma_H)$; on peut donc prolonger q en $\tilde{q} \in H^s(\Gamma_0)$ (et même dans $H^s(\mathbb{R}^2)$). On pose alors

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= p \perp \tilde{q} \\ f &:= \tilde{f}|_{\Gamma_V} \end{aligned}$$

Comme $f \in L^2(\Gamma_V)$ et $\nabla f \in H^{s+1}(\Gamma_V)$, on a encore

$$f \in H^s(\Gamma_V).$$

On pose enfin

$$\begin{aligned} \Pi_V : \quad L^2(\Gamma_0) &\rightarrow L^2(\Gamma_V) \\ \varphi(x_1, x_2) &\mapsto \begin{cases} \varphi(x_1, x_2) & x_1, x_2 < 0 \\ \varphi(x_1, x_2) + \varphi(\perp x_1, x_2) & x_1 < 0 \quad x_2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Π_V est clairement un opérateur continu de $L^2(\Gamma_0)$ dans $L^2(\Gamma_V)$, et son L^2 adjoint s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi_V^* : L^2(\Gamma_V) &\rightarrow L^2(\Gamma_0) \\ \psi(x_1, x_2) &\mapsto \begin{cases} \psi(x_1, x_2) & x_1 < 0 \\ \psi(\perp x_1, x_2) & x_1 > 0 \end{cases} \quad x_2 > 0 \end{aligned}$$

Π_V^* est alors continu de $H^1(\Gamma_V)$ dans $H^1(\Gamma_0)$ (puisque les traces sont identiques de part et d'autre de la demi-droite $x_1 = 0, x_2 > 0$), en conséquence, Π_V se prolonge en un opérateur continu de $\tilde{H}^{\perp 1}(\Gamma_0)$ dans $\tilde{H}^{\perp 1}(\Gamma_V)$, et, par interpolation, en un opérateur continu de $\tilde{H}^{\perp t}(\Gamma_0)$ dans $\tilde{H}^{\perp t}(\Gamma_V)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

A présent, pour $\Phi \in C_0^\infty(\Gamma_0)$,

$$\langle \tilde{f}, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma_0)} = \langle f, \Pi_V \Phi \rangle_{L^2(\Gamma_V)}$$

car $\tilde{f} = 0$ sur Γ_H et $\Pi_V|_{Q_-} = Id$, d'où

$$|\langle \tilde{f}, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma_0)}| \leq \|f\|_{H^s(\Gamma_V)} \|\Pi_V \Phi\|_{\tilde{H}^{-s}(\Gamma_V)}$$

et, de la continuité de l'opérateur Π_V ,

$$|\langle \tilde{f}, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma_0)}| \lesssim \|f\|_{H^s(\Gamma_V)} \|\Phi\|_{\tilde{H}^{-s}(\Gamma_0)}$$

ce qui signifie $\tilde{f} \in H^s(\Gamma_0)$. Comme $p = \tilde{f} + \tilde{q}$ et $\tilde{q} \in H^s(\Gamma_0)$ par construction, on a bien $p \in H^s(\Gamma_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

En conclusion, les normes $\|\cdot\|_s$ et $\|\cdot\|_{H^s}$ sont équivalentes sur $H^s(\Gamma_0)$, donc l'opérateur ∇_Γ est fermé de $H^s(\Gamma_0)$ dans $H^{s+1}(\Gamma_0)$, et de noyau les constantes. On obtient donc finalement

$$\|p\|_{H_*^s(\Gamma_0)} \sim \|\nabla_\Gamma p\|_{H^{s-1}(\Gamma_0)}.$$

En ce qui concerne les espaces $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$, le noyau de l'opérateur ∇_Γ est réduit à zéro pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, et donc on a une version de l'inégalité de Poincaré

$$\|p\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} \sim \|\nabla_\Gamma p\|_{\tilde{H}^{s-1}(\Gamma_0)} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1.$$

□

Théorème 7.1.1 (Décomposition de Hodge sur $\tilde{\mathcal{X}}$)

Pour tout $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, il existe un et un seul $p \in (H^1(\Gamma_0)/\mathbb{C})$ et un et un seul $q \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ tels que

$$\mathbf{u} = (\nabla_{\Gamma} p) \mathbf{1}_{\Gamma_0} + \mathbf{rot}_{\Gamma} q.$$

où $\mathbf{1}_{\Gamma_0}$ est la fonction caractéristique de Γ_0 .

p est solution du problème de Neumann

$$\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}} p = \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}. \quad (7.1.3)$$

Si

$$\tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) := \mathbf{rot}_{\Gamma} \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \quad (7.1.4)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) := \nabla_{\Gamma} \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0), \quad (7.1.5)$$

alors

1.

$$\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0) = \tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) \oplus \tilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0),$$

2. $\tilde{\mathcal{X}}^k(\Gamma_0)$ est un sous-espace fermé de $\tilde{\mathcal{X}}$,

3. la norme induite de $(\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}})^3$ est une norme équivalente à la norme induite de $\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ sur $\tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$, et on écrira

$$\|\mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}} \sim \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} \quad \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0), \quad (7.1.6)$$

4. l'application $\mathbf{u} \mapsto \|\text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}\|_{\perp \frac{1}{2}}$ est une norme sur $\tilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$ équivalente à la norme d'énergie induite $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)}$ sur $\tilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$.

Preuve : Cette décomposition est également donnée dans [5].

Soit donc $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$. $\text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in \tilde{H}_*^{\perp 1}(\Gamma_0)$ car $\mathbf{u}$ est à support dans $\overline{\Gamma_0}$. Il existe bien un seul $p \in H^1(\Gamma_0)$ à une constante près tel que

$$\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}} p = \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}.$$

La fonction $\mathbf{u}_2 := \nabla_\Gamma p$ est dans $L^2(\Gamma_0)$, et on la prolonge par zéro en dehors de Γ_0 pour obtenir encore $\mathbf{u}_2 \in L^2(\Gamma)$. Comme $L^2(\Gamma)$ s'injecte dans $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a aussi $\mathbf{u}_2 \in \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$. De la décomposition de Hodge sur $\mathcal{X}(\Gamma)$, on peut écrire

$$\mathbf{u}_1 := \mathbf{u} \perp \mathbf{u}_2 = \mathbf{rot}_\Gamma q_1 + \nabla_\Gamma \zeta,$$

avec $q_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\zeta \in H^1(\Gamma)$. Mais pour tout $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle \mathbf{u}, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \perp \langle \mathbf{u}_2, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \perp \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \varphi|_{\Gamma_0} \rangle_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma_0), H^1(\Gamma_0)} + \int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma p \overline{\nabla_\Gamma \varphi} \, ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

par définition de p . D'où $\Delta_\Gamma \zeta = 0$ dans $H^{\perp 1}(\Gamma)$, et donc ζ est constant sur Γ . Il reste

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{rot}_\Gamma q_1.$$

Comme $\mathbf{u}_1$ est à support dans $\overline{\Gamma_0}$, q_1 est constant sur chaque composante connexe de $\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$. Or on a supposé Γ_0 simplement connexe, ce qui impose $\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$ connexe, et donc q_1 est une constante $q_0 \in \mathbb{C}$ en dehors de $\overline{\Gamma_0}$. En posant $q := q_1 \perp q_0$ on a $q \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, et $\mathbf{u}_1 = \mathbf{rot}_\Gamma q$. Pour l'unicité, s'il existait une autre fonction $q_2 \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}$ telle que $\mathbf{rot}_\Gamma q_2 = \mathbf{u}_1$, alors on aurait $q_2 \perp q = 0$ dans Γ_0 et dans $\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$ au sens L^2 , et donc $q_2 = q$. Regardons à présent la décomposition en sous-espaces directs: il est clair que $\tilde{\mathcal{X}}^k(\Gamma_0)$ est fermé, pour $k = 1, 2$, et que, de ce qui précède,

$$\tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) + \tilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) = \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0).$$

Si on prend un élément $\mathbf{u}$ dans l'intersection, il s'écrit

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma q = \nabla_\Gamma \overset{\perp 1}{\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}.$$

En en prenant la divergence, on trouve de suite $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} = 0$, et $\mathbf{u} = 0$.

Il reste à prouver les équivalences de normes: c'est la même preuve que dans le cas des surfaces fermées, en utilisant le lemme 7.1.1.

□

7.2 Espace image.

On rappelle que dans le cas des surfaces fermées, l'espace image de $\mathcal{X}(\Gamma) = TH^{\perp\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ était

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma) &= TH^{\perp\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) \\ &= \{\mathbf{f} \in H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \quad \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f} \in H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (\mathbf{f}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\} \\ &= \mathcal{X}(\Gamma) \times \mathbf{n}.\end{aligned}$$

En particulier, l'espace image (qui était aussi le L^2 -dual de l'espace des solutions) était déduit de l'espace des solutions $\mathcal{X}$ par une rotation (troisième égalité de la dernière équation). Dans le cas des surfaces ouvertes (variétés à bord), *cette propriété ne subsiste plus.*

L'espace $\widetilde{\mathcal{X}}$ a été construit comme l'espace de Sobolev $\widetilde{H}^s$, contenant des distributions sur Γ à support dans $\overline{\Gamma_0}$.

Pour son espace $L^2 \perp$ dual, on peut s'attendre à une définition analogue à celle de l'espace H^s , c'est à dire par restriction à Γ_0 de distributions sur la surface Γ , et c'est exactement par ce point de vue que l'on débute.

Cependant, toujours par analogie avec les surfaces fermées, on peut considérer l'espace distributionnel

$$TH^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0) := \{\mathbf{f} \in H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3, \quad \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f} \in H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \quad (\mathbf{f}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\},$$

muni de sa norme naturelle. Fort heureusement, on montrera que cet espace coïncide avec l'espace (anti-)dual $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ de $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ (avec des normes équivalentes).

7.2.1 Définition, caractérisations.

Définition 7.2.1 *On pose*

$$\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) := \{\mathbf{f}|_{\Gamma_0}; \mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)\} \subset \mathcal{D}'(\Gamma_0)^3. \quad (7.2.1)$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} := \inf\{\|\mathbf{g}\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)}; \mathbf{g} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma), \mathbf{g}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}\} \quad (7.2.2)$$

L'objectif, dans ce paragraphe, est de montrer que $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est le L^2 -dual de $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, et d'exhiber une décomposition de Hodge sur $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$. On commencera

par des caractérisations de l'espace $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.
On pose, pour tout domaine $O \subset \Gamma$,

$$\widetilde{\mathcal{X}}(O) := \{\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma) \mid \text{Supp } \mathbf{f} \subset \overline{O}\}$$

alors, comme $\widetilde{\widetilde{\mathcal{X}}}(O) = \widetilde{\mathcal{X}}(O) \times \mathbf{n}$, on a le

Lemme 7.2.1 *$TC_0^\infty(O)$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{X}}(O)$ pour la topologie induite de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)$.*

On se doit de distinguer $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ de $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$. Cependant, la norme sur $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est une norme quotient, et plus précisément:

Proposition 7.2.1 *L'espace $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est isométrique à l'espace*

$$\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)/\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma \setminus \Gamma_0)$$

muni de sa topologie quotient. En particulier, $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est un espace de Banach réflexif.

L'espace dual de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est isométrique à $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, et l'espace dual de $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est isométrique à $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

Ici, les espaces duaux sont munis de leurs normes duales.

Preuve: C'est essentiellement la même preuve que pour les espaces de Sobolev définis par restrictions: l'application

$$\begin{array}{ccc} R: \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma) & \rightarrow & \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}|_{\Gamma_0} \end{array}$$

est linéaire, continue surjective, de noyau $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)/\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma \setminus \Gamma_0)$, et on a les mêmes topologies pour les espaces de départ et d'arrivée.

En considérant la transposée de l'application R , le dual de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est isométrique au dual de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)/\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma \setminus \Gamma_0)$, qui est isométrique à l'espace polaire de $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma \setminus \Gamma_0)$:

$$(\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0))' \cong \{\mathbf{u} \in \mathcal{X}(\Gamma) \mid \forall \mathbf{f} \in \widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma \setminus \Gamma_0), \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{X}}} = 0\}$$

Comme $TC_0^\infty(\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0})$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma \setminus \Gamma_0)$, on en déduit le résultat.

□

Les isométries se lisent ainsi: pour tout $\varphi \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)'$, il existe un et un seul $\mathbf{u} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ tel que, pour tout $\mathbf{f}_0 \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$,

$$\varphi(\mathbf{f}_0) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma), \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)}$$

où $\mathbf{f}$ est un prolongement *quelconque* de $\mathbf{f}_0$ dans $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)$ (c'est la définition de la transposée de R).

7.2.2 Décomposition de Hodge.

On va donner de suite le pendant du théorème 3.3.2, «dual» du théorème 7.1.1 dans un sens que l'on précise aussi immédiatement.

Théorème 7.2.1 (Décomposition de Hodge sur $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$)

Pour tout $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, il existe un et un seul $\widehat{q} \in \widetilde{H}^1(\Gamma_0)$ et un et un seul $\widehat{p} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ tels que

$$\mathbf{f} = \nabla_{\Gamma} \widehat{p} + \mathbf{rot}_{\Gamma} \widehat{q}. \quad (7.2.3)$$

$\widehat{q}$ est solution du problème de Dirichlet

$$\perp \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}} \widehat{q} = \mathbf{rot}_{\Gamma} \mathbf{f}. \quad (7.2.4)$$

Si

$$\widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) := \mathbf{rot}_{\Gamma} \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0) \quad (7.2.5)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) := \nabla_{\Gamma} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \quad (7.2.6)$$

alors

1.

$$\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) = \widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) \oplus \widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0),$$

2. $\widehat{\mathcal{X}}^k(\Gamma_0)$ est un sous-espace fermé de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, pour $k = 1, 2$

3. la norme induite de $(H^{\perp \frac{1}{2}})^3$ est une norme équivalente à la norme induite de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ sur $\widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$, et on écrira

$$\|\mathbf{f}\|_{\perp \frac{1}{2}} \sim \|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} \quad \mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0), \quad (7.2.7)$$

4. l'application $\mathbf{f} \mapsto \|\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{\perp \frac{1}{2}}$ est une norme sur $\widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ équivalente à la norme d'énergie induite $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)}$ sur $\widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$.

Si on note $L_T^2(\Gamma_0)$ l'ensemble des éléments L^2 tangentiels,

Théorème 7.2.2 (Dualité $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0) \perp \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$)

Le crochet

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} &:= \perp \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \widehat{p} \rangle_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ &\quad + \langle q, \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f} \rangle_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ \mathbf{u} &= \nabla_\Gamma p + \operatorname{rot}_\Gamma q, \quad p \in H^1(\Gamma_0), \quad q \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \\ \mathbf{f} &= \nabla_\Gamma \widehat{p} + \operatorname{rot}_\Gamma \widehat{q}, \quad \widehat{p} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \quad \widehat{q} \in \widetilde{H}^1(\Gamma_0), \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

est un crochet de dualité entre $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ et $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$; de plus, si $\mathbf{u} \in L^2(\Gamma_0)$ et si $\mathbf{f} \in L^2(\Gamma_0)$, alors ce crochet est confondu avec le produit scalaire naturel sur L^2 , et dans ce sens, on dira que $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ est (le L^2 -)dual de $\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ avec $L_T^2(\Gamma_0)$ pour espace pivot.

En outre, pour $k = 1, 2$, $\widehat{\mathcal{X}}^k(\Gamma_0)$ est le L^2 -dual de $\widetilde{\mathcal{X}}^k(\Gamma_0)$, en considérant les crochets induits.

Pour alléger les notations, on notera aussi

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{L^2} := \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{\widetilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)}.$$

Les preuves des théorèmes 7.2.1 et 7.2.2 vont être mêlées, et faites en plusieurs étapes (ou lemmes); en réalité, on commencera par établir le dernier théorème. C'est pourquoi ils ont été énoncés en avance, par soucis de synthèse et de clarté.

On commence par deux lemmes concernant les fins des deux théorèmes.

Lemme 7.2.2 $\widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$ est un sous-espace fermé de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$; la norme induite de $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3$ est équivalente à la norme d'énergie induite, et c'est le L^2 -dual de $\widetilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$ pour le crochet

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{f}_2 \rangle &= \perp \langle \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}_2, \widehat{p} \rangle_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ \mathbf{u}_2 &\in \widetilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) \quad \mathbf{f}_2 = \nabla_\Gamma \widehat{p} \in \widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) \end{aligned}$$

Par L^2 -dual, on entend ici la dualité avec $\nabla_\Gamma H_*^1(\Gamma_0)$ (à moyenne nulle) pour espace pivot, muni la norme $\|\nabla_\Gamma p\|_{L^2(\Gamma_0)}$ pour $p \in H_*^1(\Gamma_0)$.

Preuve: Si $\widehat{p} \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ (à moyenne nulle sur Γ_0), alors, du lemme 7.1.1, $\|\widehat{p}\|_{H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \sim \|\nabla_\Gamma \widehat{p}\|_{H^{-\frac{1}{2}}}$, et tout prolongement de $\widehat{p}$ (dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$) a son gradient dans $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)$; en conséquence, $\widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$ est un sous-espace fermé de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ et les équivalences de normes sur $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)$ donnent l'équivalence de normes cherchée sur $\widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$.

Si $\mathbf{u}_2 = \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2$, prolongé par 0 en dehors de Γ_0 , avec $\lambda_2 \in \widetilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}$, alors $\lambda^2 = \text{div}_\Gamma \mathbf{u}_2$ et pour tout $\widehat{p} \in C^\infty(\overline{\Gamma_0})$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_2 \overline{\nabla_\Gamma \widehat{p}} \, ds &= \int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2 \overline{\nabla_\Gamma \widehat{p}} \, ds \\ &= \perp < \text{div}_\Gamma \mathbf{u}_2, \widehat{p} >_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}, \end{aligned}$$

par définition même de l'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}$. On conclut grâce à la densité de $C^\infty(\overline{\Gamma_0})$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$.

□

Lemme 7.2.3 $\widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ est un sous-espace fermé de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$; la norme

$$\mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q} \mapsto \|\widehat{q}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}$$

est équivalente à la norme d'énergie induite, et c'est le L^2 -dual de $\widetilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ pour le crochet

$$\begin{aligned} < \mathbf{u}_1, \mathbf{f}_1 > = \perp < q, \widehat{q} >_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \cdot \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{rot}_\Gamma q \in \widetilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q} \in \widehat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0). \end{aligned}$$

Par L^2 -dual, on entend ici la dualité avec $\mathbf{rot}_\Gamma \widetilde{H}^1$ pour espace pivot, muni la norme $\|\mathbf{rot}_\Gamma p\|_{L^2(\Gamma_0)}$ pour $p \in \widetilde{H}^1$.

Preuve: la preuve est un peu plus délicate que pour le lemme précédent. Soit $\mathbf{f}_1 = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q}$ avec $\widehat{q} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. $\mathbf{f}_1 \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ car, de la proposition 6.2.1, $\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)$. Donc on peut trouver un prolongement $\lambda \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ tel que $\lambda|_{\Gamma_0} = \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q}$; si $\mathbf{f} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda$, alors $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)$, et $\mathbf{f}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}_1$.

$\widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ est bien un sous-espace de $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

Montrons directement

$$\|\mathbf{f}_1\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} \sim \|\widehat{q}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}.$$

Par définition de l'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}$, on a $\widehat{q} = \text{rot}_\Gamma(\mathbf{f}_1)$ dans $\mathcal{D}'(\Gamma_0)$ et donc

$$\begin{aligned} \|\widehat{q}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} &= \|\text{rot}_\Gamma(\mathbf{f}_1)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ &= \inf\{\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}; \quad \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \varphi|_{\Gamma_0} = \text{rot}_\Gamma(\mathbf{f}_1|_{\Gamma_0})\} \\ &\leq \inf\{\|\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}; \quad \mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma), \quad \mathbf{f}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}_1\} \\ &\leq \inf\{(\|\mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} + \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}); \quad \mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma), \quad \mathbf{f}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}_1\} \\ &\leq \|\mathbf{f}_1\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

Montrons l'inégalité «inverse»:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_1\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} &= \inf_{\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)} \{\|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)}; \mathbf{f}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}_1\} \\ &\leq \inf_{\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)} \{\|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma)}; \mathbf{f}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}_1, \text{div}_\Gamma \mathbf{f} = 0\} \\ &\leq \inf_{\zeta \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \{\|\mathbf{rot}_\Gamma \zeta\|_{\perp \frac{1}{2}} + \|\Delta_\Gamma \zeta\|_{\perp \frac{1}{2}}; \zeta|_{\Gamma_0} = \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q}\} \\ &\lesssim \inf_{\zeta \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \{\|\zeta\|_{\frac{3}{2}}; \zeta|_{\Gamma_0} = \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q}\} \\ &\lesssim \|\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)}, \end{aligned}$$

et, du lemme 6.2.1,

$$\|\mathbf{f}_1\|_{\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} \lesssim \|\widehat{q}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}$$

En conséquence, $\|\mathbf{f}_1\| \sim \|\widehat{q}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}$. On en déduit aisément que $\widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ est fermé dans $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

Par définition de l'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}$, et par densité, pour tout $q \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$,

$$\langle \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{q}, \mathbf{rot}_\Gamma q \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}} = \perp \langle \widehat{q}, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}}$$

et le dual de $\widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ est $\mathbf{rot}_\Gamma \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ avec $\mathbf{rot}_\Gamma \widetilde{H}^1$ pour espace pivot.

□

Preuve du théorème 7.2.1: avec la proposition 7.2.1

$$\tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) + \tilde{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) = \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0) = \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)'$$

donc, des deux précédents lemmes,

$$\hat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) \oplus \hat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0) = \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0).$$

le reste est donné dans les deux lemmes précédents.

□

Preuve du théorème 7.2.2: il nous reste à montrer que, si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{f}$ sont dans L^2 , alors le crochet est confondu avec le produit scalaire L^2 . Par un argument de densité,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} &= \langle \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \text{div}_\Gamma \mathbf{u}, \nabla_\Gamma \hat{p} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \\ &\quad \perp \langle \mathbf{rot}_\Gamma q, \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \mathbf{f} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{u}$ et $\mathbf{f}$ sont dans L^2 , $q \in \tilde{H}^1$ et $\hat{p} \in H^1$, d'où

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} \\ &= \int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \cdot \overline{\nabla_\Gamma \hat{p}} \, ds \\ &\quad \perp \int_{\Gamma_0} \mathbf{rot}_\Gamma q \cdot \overline{\mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \mathbf{f}} \, ds \\ &= \int_{\Gamma_0} (\nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \text{div}_\Gamma \mathbf{u} + \mathbf{rot}_\Gamma q) \cdot \overline{(\nabla_\Gamma \hat{p} \perp \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \mathbf{f})} \, ds \\ &= \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{f}} \, ds. \end{aligned}$$

□

7.2.3 Encore une caractérisation de $\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

Par analogie avec le cas des surfaces régulières, on peut introduire l'espace distributionnel

$$TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) := \{\mathbf{f} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3 \mid \text{rot}_\Gamma \mathbf{f} \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0), (\mathbf{f}, \mathbf{n}) = 0\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)}^2 := \|\mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}^2 + \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}^2, \quad (7.2.9)$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Si $\mathbf{f} \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)$, comme $(\text{rot}_\Gamma \mathbf{f})|_{\Gamma_0} = \text{rot}_\Gamma(\mathbf{f}|_{\Gamma_0})$, pour toutes distributions sur Γ , on a évidemment $\widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) \subset TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)$. L'objet de cette section est de prouver que ces deux espaces coïncident.

Posons

$$TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0) := \{\mathbf{f} \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) \mid \text{rot}_\Gamma \mathbf{f} = 0\}.$$

Pour $\mathbf{f}_0 \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)$, on peut trouver $\psi \in H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que $\psi|_{\Gamma_0} = \text{rot}_\Gamma \mathbf{f}_0$ dans $\mathcal{D}'(\Gamma_0)$. Posant $\mathbf{f}_1 := \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \psi$ dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$, on a $\mathbf{f}_1 \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donc $\mathbf{f}_1 \in \widehat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$. De plus, $\text{rot}_\Gamma(\mathbf{f}_1 \perp \mathbf{f}_0)|_{\Gamma_0} = 0$, et donc $(\mathbf{f}_1|_{\Gamma_0} \perp \mathbf{f}_0) \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)$. Dans la suite, nous allons identifier le dual de $TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)$. On remarque d'abord que les normes $\|\cdot\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)}$ et $\|\cdot\|_{H^{-\frac{1}{2}}}$ coïncident sur $TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)$, et en font un sous-espace fermé de $TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)$ et de $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3$ respectivement, et, en particulier, c'est un espace réflexif. Identifions son L^2 -dual, en tant que sous-espace de $H^{\perp \frac{1}{2}}$: si $\varphi \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)'$ est un élément du dual, alors, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger en une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ continue sur $H^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3$, et donc il existe un élément $\tilde{\Phi} \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3$ tel que

$$\forall \mathbf{f} \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0) \quad \varphi(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{f}, \tilde{\Phi} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}. \quad (7.2.10)$$

En outre, on peut toujours choisir $\tilde{\Phi}$ tangentiel. On obtient donc $\tilde{\Phi} \in \mathcal{X}(\Gamma_0)$, et en utilisant sa décomposition de Hodge, $\tilde{\Phi} = \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda + \mathbf{rot}_\Gamma q$ avec $\lambda \in \tilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ (à moyenne nulle) et $q \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. On peut déjà montrer que $\nabla_\Gamma H^1(\Gamma_0)$ est dense dans $TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)$: en effet, si $\varphi(\nabla_\Gamma \zeta) = 0$ pour tout $\zeta \in H^1(\Gamma_0)$, alors, pour tout $\zeta \in H^1(\Gamma_0)$, comme $\langle \nabla_\Gamma \zeta, \mathbf{rot}_\Gamma q \rangle_{L^2} = 0$,

$$\int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma \zeta \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda \, ds = 0$$

et, par définition de l'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}$, on trouve $\lambda = 0$.

On a donc la situation suivante:

$$\nabla_\Gamma H_*^1(\Gamma_0) \subset \widehat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) \subset TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0),$$

avec inclusions denses. En passant aux duaux avec $\nabla_\Gamma H_*^1(\Gamma_0)$ pour espace pivot,

$$TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)' \subset \tilde{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) \subset \nabla_\Gamma H_*^1(\Gamma_0),$$

et $TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)'$ est exactement l'ensemble des éléments $p \in H_*^1(\Gamma_0)$ tels qu'il existe une constante C vérifiant, pour tout $\zeta \in H_*^1(\Gamma_0)$,

$$\langle \nabla_\Gamma p, \nabla_\Gamma \zeta \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \leq C \|\nabla_\Gamma \zeta\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}.$$

Utilisant le lemme 7.1.1 avec $s = \frac{1}{2}$, pour $\lambda \in \tilde{H}_*^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ fixé, et pour tout $\zeta \in H_*^1(\Gamma_0)$,

$$\begin{aligned} |\langle \nabla_\Gamma \zeta, \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda \rangle_{L^2}| &= |\langle \zeta, \lambda \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}}| \\ &\leq \|\lambda\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \|\zeta\|_{H_*^{\frac{1}{2}}} \\ &\lesssim \|\nabla_\Gamma \zeta\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Donc $\tilde{\mathcal{X}}^1 \subset TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0)'$ et, finalement,

$$TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma 0, \Gamma_0) = \hat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0) = \{\nabla_\Gamma p; p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\}.$$

En conséquence, on a finalement

$$TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) = \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0).$$

En définitive, on a le

Théorème 7.2.3 *L'espace*

$$\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) = \{\mathbf{f}|_{\Gamma_0}; \mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}}(\Gamma) = TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)\}$$

est confondu avec l'espace distributionnel

$$TH^{\perp\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) := \{\mathbf{f} \in H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \text{rot}_\Gamma \mathbf{f} \in H^{\perp\frac{1}{2}}(\Gamma_0), (\mathbf{f}, \mathbf{n}) = 0\}.$$

De plus, la norme

$$\mathbf{f} \mapsto \|\mathbf{f}\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)} := \|\mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} + \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}$$

est une norme équivalente à la norme quotient sur $\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$

Preuve : il nous reste, de ce qui précède, à montrer l'équivalence des normes; mais on a deux normes sur un même espace qui en font un espace de Banach; il nous suffit donc de prouver que ces deux normes sont comparables. Or si $\mathbf{f} \in TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) = \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, il existe un prolongement $\tilde{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{X}}(\Gamma)$, et $(\text{rot}_\Gamma \tilde{\mathbf{f}})|_{\Gamma_0} = \text{rot}_\Gamma \mathbf{f}$, donc, pour tout prolongement $\tilde{\mathbf{f}}$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)} &\leq \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\perp \frac{1}{2}} + \|\text{rot}_\Gamma \tilde{\mathbf{f}}\|_{\perp \frac{1}{2}} \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{\hat{\mathcal{X}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\|\mathbf{f}\|_{TH^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0)} \leq \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)}$$

□

7.2.4 Projecteurs.

Proposition 7.2.2 *On note P^1 le projecteur de $\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ sur $\tilde{\mathcal{X}}^1(\overline{\Gamma_0})$ parallèle à $\tilde{\mathcal{X}}^2(\overline{\Gamma_0})$, et $\hat{P}^1$ le projecteur de $\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$ sur $\hat{\mathcal{X}}^1(\Gamma_0)$ parallèle à $\hat{\mathcal{X}}^2(\Gamma_0)$. On note $P^2 := 1 \perp P^1$ et $\hat{P}^2 := 1 \perp \hat{P}^1$. Alors tous ces projecteurs sont continus et, pour tout $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, tout $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, et pour $k = 1, 2$,*

$$\langle P^k \mathbf{u}, \mathbf{f} \rangle_{\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)} = \langle \mathbf{u}, \hat{P}^k \mathbf{f} \rangle_{\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)}.$$

Preuve : c'est une simple conséquence des théorèmes de décompositions de Hodge et de la dualité $\tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$.

□

7.3 Décomposition de l'équation intégrale.

Cette section est calquée sur le paragraphe 3.4. On s'y référera pour les preuves ou les détails qui sont éludés ici; encore une fois, on ne détaillera que les différences significatives de l'analyse sur la plaque ouverte sur l'analyse faite sur les surfaces régulières.

Dans toute la suite, sans confusion possible, on notera

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}} &:= \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0), & \hat{\mathcal{X}} &:= \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \tilde{\mathcal{X}}^1 + \tilde{\mathcal{X}}^2 \equiv \tilde{\mathcal{X}}^1 \times \tilde{\mathcal{X}}^2, \\ \hat{\mathcal{X}} &= \hat{\mathcal{X}}^1 + \hat{\mathcal{X}}^2 \equiv \hat{\mathcal{X}}^1 \times \hat{\mathcal{X}}^2, \end{aligned}$$

avec les écritures associées évidentes pour les sous-espaces. On précisera, le cas échéant, le lieu de travail (Γ ou Γ_0).

On revient à notre équation intégrale: elle fait intervenir l'opérateur

$$L = \nabla_\Gamma V \operatorname{div}_\Gamma + k^2 V_\Gamma. \quad (7.3.1)$$

On vérifie que $L\tilde{\mathcal{X}} \subset \hat{\mathcal{X}}$: en effet, si $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, alors $V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et $V_\Gamma \mathbf{u} \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On a donc immédiatement

$$(V_\Gamma \mathbf{u})|_{\Gamma_0} \in \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0),$$

et comme $\nabla_\Gamma V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}$ est à rotationnel nul,

$$(\nabla_\Gamma V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u})|_{\Gamma_0} = \nabla_\Gamma((V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u})|_{\Gamma_0}) \in \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0).$$

D'autre part, par définition de la dualité $\hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0) \perp \tilde{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$, si $\mathbf{v} \in TC_0^\infty(\Gamma_0)$, alors

$$\begin{aligned} & \langle L\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\hat{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}} \\ &= \langle \nabla_\Gamma V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + k^2 \langle V\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \\ &= \perp \langle V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + k^2 \langle V\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ &= \perp \langle V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} + k^2 \langle V\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

Par densité, on déduit, pour tout $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{X}}$,

$$\begin{aligned} & \langle L\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\hat{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{X}}} \\ &= \perp \langle V \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ & \quad + k^2 \langle V\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

De la continuité de l'opérateur de simple couche, on déduit la continuité de l'opérateur L de $\tilde{\mathcal{X}}$ dans $\hat{\mathcal{X}}$. Enfin, on souhaite résoudre $L\mathbf{u} = \mathbf{f} \in TC^\infty(\overline{\Gamma_0}) \subset \hat{\mathcal{X}}(\Gamma_0)$. La formule (7.3.2) donne une formulation variationnelle adaptée à nos décompositions de Hodge, comme pour le cas des surfaces régulières.

La solution $\mathbf{u}$ se décompose en $\mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$ avec $\mathbf{u}^k \in \tilde{\mathcal{X}}^k$, et on écrit matriciellement

$$L\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k^2 L^{11} & k^2 L^{12} \\ k^2 L^{21} & \perp L^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \end{pmatrix} \quad (7.3.3)$$

avec pour $i, j = 1, 2, i + j < 4$,

$$\begin{aligned} \langle L^{ij} \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^j \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} &= \langle V \mathbf{u}^i, \mathbf{v}^j \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \\ \langle L^{22} \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \rangle_{L^2} &= \langle V \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}, \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}, \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \perp k^2 \langle V \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \rangle_{L^2} . \end{aligned}$$

En mettant les «tildes» aux bons endroits, la

Proposition 7.3.1 *On suppose $k \neq 0$. Alors*

- les opérateurs L^{12} et L^{21} sont compacts,
- les opérateurs L^{11} et L^{22} sont, modulo un opérateur compact, fortement coercifs de $\tilde{\mathcal{X}}^i$ dans son dual $\hat{\mathcal{X}}^i$, pour, respectivement, $i = 1$ et $i = 2$.

se démontre exactement comme la proposition 3.4.2 du cas des surfaces régulières, en utilisant les propriétés du potentiel de simple couche. En corollaire, si $k \neq 0$, L est un opérateur de Fredholm injectif, donc c'est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{X}}$ dans son dual $\hat{\mathcal{X}}$.

Remarque: L (tel qu'il est décomposé) n'est pas coercif (à un opérateur compact près), puisqu'il se décompose essentiellement en un opérateur diagonal d'une partie définie positive, et de l'autre, définie négative.

8 Résolution numérique.

En comparaison avec le cas de la surface régulière, on devra discrétiser deux types d'éléments: typiquement, ceux dans $H^1(\Gamma_0)$ sans conditions aux bords, et ceux dans $\tilde{H}^1(\Gamma_0)$, avec une condition de Dirichlet homogène au bord. Les espaces intermédiaires seront «approchés» par interpolation, et les espaces aux exposants négatifs, par dualité. Encore une fois, il y a deux types d'espaces de Sobolev, et on s'attend donc à obtenir deux types d'ondelettes sur la plaque.

Attention: si dans l'analyse multi-échelle, on a une inclusion assez triviale de l'espace avec condition «nulle» au bord dans l'espace, de même niveau de résolution, sans condition au bord, il n'en n'est pas de même pour les espaces d'ondelettes. Autrement dit, on aura la situation suivante: les *fonctions d'échelle* pour les espaces avec condition nulle au bord *seront des fonctions d'échelle* pour les espaces sans condition au bord *de même niveau de résolution*; en revanche, les *ondelettes* pour les espaces avec condition nulle au bord *ne seront pas, en général, des ondelettes* pour les espaces sans condition au bord. En général, lorsque l'on développe une ondelette avec condition nulle au bord suivant la base d'ondelettes sans condition au bord (ce qui est toujours possible, vu l'inclusion liant les espaces de multirésolution correspondants), on peut obtenir des coefficients non nuls sur tous les niveaux de résolution.

8.1 Espaces discrets: géométrie.

On rappelle que l'on a supposé Γ_0 à bord polygonal; le bord est donc décrit par une courbe continue fermée $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$, C^∞ par morceaux; les points singuliers de γ seront appelés coins de Γ_0 .

On considère une triangulation initiale $\Gamma_{i,1}^0$, $i = 1, \dots, N$, telle que les coins de Γ_0 soient des sommets de la triangulation. On se donne un élément de référence T dans le plan (simplexe), décrit par les équations $x_i > 0$, $i = 1, 2$; $x_1 + x_2 < 1$, et on suppose qu'il existe une famille d'applications $(\hat{\kappa}_i) : \bar{T} \rightarrow \Gamma_{i,1}^0$, C^∞ en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, bijectives, et telles que les gradients $D\hat{\kappa}_i$ aient pour image des espaces de dimension 2 en tous points. On peut définir ainsi des espaces de Sobolev par morceaux notés $PH^s(\Gamma_0)$ ou plus brièvement

PH^s par

$$u \in PH^s(\Gamma_0) \iff u|_{\Gamma_{i,1}^0} \in H^s(\Gamma_{i,1}^0) \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$\|u\|_{PH^s}^2 = \sum_{i=1}^N \|u \circ \widehat{\kappa}_i\|_{H^s(T)}^2.$$

En particulier, on définit un produit scalaire «par morceaux»

$$(u, v)_0 := \sum_i (u \circ \widehat{\kappa}_i, v \circ \widehat{\kappa}_i)_{L^2(T)}.$$

qui définit une topologie équivalente à la topologie naturelle L^2 sur Γ_0 .

On reprend l'analyse du paragraphe 5 pour les définitions et les propriétés imposées aux maillages. On définit des niveaux de résolution $\Gamma_{i,k}^j$ par

$$\Gamma_{i,k}^j = \kappa_i(T_k^j)$$

où (T_k^j) définit le maillage de T au niveau j , obtenu, d'un niveau à l'autre, en coupant chaque triangle en quatre par les milieux des arêtes. Les nœuds de la triangulation sur la surface sont donnés par

$$\Delta_j^{\Gamma_0} := \cup_i \widehat{\kappa}_i(\Delta_j^T).$$

où Δ_j^T désigne les nœuds du maillage de T au niveau j .

Pour des raisons de compatibilité, on impose aux représentations $\widehat{\kappa}_i$ de vérifier

$$\widehat{\kappa}_i(t\widehat{\kappa}_i^{\perp 1}(s) + (1 \perp t)\widehat{\kappa}_i^{\perp 1}(s')) = \widehat{\kappa}_l(t\widehat{\kappa}_l^{\perp 1}(s) + (1 \perp t)\widehat{\kappa}_l^{\perp 1}(s'))$$

et ce, pour tout $t \in [0, 1]$, $i, l = 1, \dots, N$; s, s' étant des sommets de la triangulation sur un même triangle $\Gamma_{i_0,1}^0$. Cela signifie que les représentations «conservent» les barycentres et que, par exemple, le milieu d'une arête de la triangulation de T au niveau j est envoyé en un «milieu» d'une arête de la triangulation de la surface au même niveau de résolution.

On peut à présent définir les espaces de multirésolution

$$\Lambda_j(\Gamma_0) := \left\{ u \in C(\Gamma) \mid u \circ \kappa_i|_{T_k^j} \in \mathbb{P}_1; i = 1..N, k = 1..4^j \right\}. \quad (8.1.1)$$

Comme le bord de Γ_0 est polygonal, on peut toujours supposer donnée une triangulation sur la surface Γ tout entière compatible avec la triangulation sur

Γ_0 , dans le sens où la triangulation sur Γ_0 est une partie de la triangulation sur Γ , et on peut aussi supposer que la triangulation sur Γ vérifie les hypothèses géométriques faites dans le paragraphe 5.2.1, de sorte que l'on a à notre disposition une échelle de multirésolution $(\Lambda_j(\Gamma))_j$ sur Γ tout entier, et

$$\Lambda_j(\Gamma_0) = \{\varphi|_{\Gamma_0}; \varphi \in \Lambda_j(\Gamma)\}. \quad (8.1.2)$$

On muni $\Lambda_j(\Gamma_0)$ d'une base nodale (*fonctions d'échelle*),

$$\varphi_\tau^j|_{\Gamma_{i,1}^0} := \begin{cases} \tilde{\varphi}_{\kappa_i^{-1}(\tau)}^j \circ \kappa_i^{\perp 1}, & \text{si } \tau \in \kappa_i(\overline{T}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \tau \in \Delta_j^{\Gamma_0}. \quad (8.1.3)$$

Ces fonctions d'échelle sont continues sur la surface Γ_0 , et on supposera qu'elles sont normalisées en norme $\|\cdot\|_0$. On construit de la même manière une base duale (θ_σ^{j+1}) pour le produit $(\cdot, \cdot)_0$ par

$$\theta_\tau^{j+1}|_{\Gamma_{i,1}^0} := \begin{cases} \tilde{\theta}_{\kappa_i^{-1}(\tau)}^{j+1} \circ \kappa_i^{\perp 1}, & \text{si } \tau \in \kappa_i(\overline{T}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \tau \in \Delta_j^{\Gamma_0}. \quad (8.1.4)$$

Autrement dit, on a, pour $\sigma, \sigma' \in \Delta_j^{\Gamma_0}$,

$$(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_{\sigma'}^j)_0 = N_\sigma \delta_{\sigma\sigma'} \quad (8.1.5)$$

où N_σ est une constante qui ne dépend que de la position du nœud: nœud intérieur, sur le bord, coin, et nombre d'arêtes arrivant sur le nœud...En particulier, il ne dépend pas du niveau de résolution j .

Pour les définitions des $\tilde{\varphi}_\tau^j$ et $\tilde{\theta}_\tau^{j+1}$ sur le triangle T , on renvoie au paragraphe 5.2.1.

8.2 Ondelettes.

On distinguera l'analyse multi-échelle pour les espaces $H^s(\Gamma_0)$ pour $s > 0$ (et pour leurs espaces duaux $\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0)$) de l'analyse multi-échelle pour les espaces $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ pour $s > 0$. Dans le premier cas, on parlera d'espaces sans condition au bord, et dans le deuxième, d'espace avec condition de Dirichlet homogène, ou plus brièvement «nulle», au bord.

8.2.1 Cas sans conditions au bord.

On définit les ondelettes (au niveau $j + 1$) dans l'orthogonal de $\Lambda_j(\Gamma_0)$ relativement au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_0$ par morceaux:

$$\psi_\tau := \varphi_\tau^0, \quad \text{pour } \tau \in \Delta_0^{\Gamma_0}, \quad (8.2.1)$$

$$\psi_\tau := \varphi_\tau^{j+1} \perp \sum_{\sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0}} \frac{(\varphi_\tau^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0}{(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0} \theta_\sigma^{j+1}, \quad \text{pour } \tau \in \nabla_{j+1}^{\Gamma_0} := \Delta_{j+1}^{\Gamma_0} \setminus \Delta_j^{\Gamma_0}. \quad (8.2.2)$$

Si on note

$$\Xi_j := \text{Vect}\{\psi_\tau; \tau \in \nabla_j^{\Gamma_0}\}$$

alors Ξ_{j+1} est l'orthogonal de $\Lambda_j(\Gamma_0)$ dans $\Lambda_{j+1}(\Gamma_0)$ pour le produit $(\cdot, \cdot)_0$ sur Γ_0 .

8.2.2 Stabilité.

En ce qui concerne l'approximation des éléments $H^s(\Gamma_0)$ et les éléments $\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0)$, pour $0 \leq s \leq 1$, elle est directement déduite de l'analyse des ondelettes sur la surface Γ toute entière. Plus précisément, les estimations directes et inverses sont encore vraies pour le cas de la plaque ouverte:

Proposition 8.2.1 *Pour tout $0 \leq s \leq 2$, et tout $0 \leq t < \frac{3}{2}$, il existe deux constantes C_s et C_t , qui ne dépendent respectivement que de s et de t , telles que, pour tout $u \in H^s(\Gamma_0)$, et tout $j \in \mathbb{N}$,*

inégalité directe (Jackson):

$$\inf_{p_j \in \Lambda_j(\Gamma_0)} \|u \perp p_j\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq C_s 2^{\perp s j} \|u\|_{H^s(\Gamma_0)}, \quad (8.2.3)$$

inégalité inverse (Bernstein):

$$\forall p_j \in \Lambda_j(\Gamma_0), \quad \|p_j\|_{H^t(\Gamma_j)} \leq C_t 2^{t j} \|p_j\|_{L^2(\Gamma_0)}. \quad (8.2.4)$$

Preuve:

Inégalité directe: soit $\tilde{u}$ un prolongement de u dans $H^s(\Gamma)$, et soit $\tilde{p}_j$ le projecteur $L^2(\Gamma)$ -orthogonal de $\tilde{u}$ sur $\Lambda_j(\Gamma)$. De (8.1.2), si $p_j := \tilde{p}_j|_{\Gamma_0}$, $p_j \in \Lambda_j(\Gamma_0)$. On a alors

$$\begin{aligned} \|u \perp p_j\|_{L^2(\Gamma_0)} &\leq \|\tilde{u} \perp \tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C_s 2^{\perp j s} \|\tilde{u}\|_{H^s(\Gamma)}. \end{aligned}$$

D'où le résultat, en passant à l'infimum (à gauche puis à droite).

Inégalité inverse: Comme on l'a supposé, la triangulation (à tous niveaux de résolution) de Γ_0 est une partie de la triangulation de Γ tout entier. On se donne un élément $p_j \in \Lambda_j(\Gamma_0)$ et on le prolonge en un élément $\tilde{p}_j \in \Lambda_j(\Gamma)$ tel que $\tilde{p}_j$ s'annule en tous les nœuds dans $\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$ de la triangulation sur Γ . Par définition de la norme $H^s(\Gamma_0)$,

$$\|p_j\|_{H^t(\Gamma_0)} \leq \|\tilde{p}_j\|_{H^t(\Gamma)}$$

et de l'inégalité inverse sur Γ tout entier,

$$\|p_j\|_{H^t(\Gamma_0)} \leq C_t 2^{tj} \|\tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (8.2.5)$$

Or, sur chaque triangle Γ_k^j dans $\Gamma \setminus \Gamma_0$ de la triangulation sur Γ au niveau j , de la règle du trapèze, et comme le volume de Γ_k^j est en $(2^{\perp 2j})$,

$$\|\tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma_k^j)}^2 \leq C 2^{\perp 2j} \sum_{\sigma \in S(\Gamma_k^j)} |\tilde{p}_j(\sigma)|^2,$$

où $S(\Gamma_k^j)$ désigne les «sommets» (nœuds) de Γ_k^j et la constante C ne dépend que de la représentation $\hat{\kappa}$ passant des triangles courbes à un triangle de référence. On obtient donc

$$\|\tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma \setminus \Gamma_0)}^2 \leq C \sum_{\tau \in \Delta_j^{\Gamma_0} \cap \partial \Gamma_0} 2^{\perp 2j} N_j(\tau) |p_j(\tau)|^2,$$

où $N_j(\tau)$ est deux fois le nombre de triangles extérieurs à Γ_0 ayant τ pour sommet. De la construction de notre triangulation, ce nombre est (uniformément) borné (par rapport à j); en outre, en reprenant la règle du trapèze avec des triangles intérieurs à Γ_0 cette fois,

$$\sum_{\tau \in \Delta_j^{\Gamma_0} \cap \partial \Gamma_0} 2^{\perp 2j} |p_j(\tau)|^2 \leq C \|p_j\|_{L^2(\Gamma_0)}^2,$$

où C désigne encore une constante ne dépendant que de la géométrie de la surface, donc

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \|p_j\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + \|\tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma \setminus \Gamma_0)}^2 \\ &\leq C \|p_j\|_{L^2(\Gamma_0)}^2. \end{aligned}$$

De (8.2.5), on déduit notre inégalité inverse.

□

Avant d'utiliser l'analyse du paragraphe (4.1), il nous faut le

Lemme 8.2.1 $\cup_{j \geq 0} \Lambda_j(\Gamma_0)$ est partout dense dans $H^s(\Gamma_0)$, pour $0 \leq s < \frac{3}{2}$

Preuve : en effet, si $u \in H^s(\Gamma_0)$, et $\tilde{u}$ est un prolongement de u à $H^s(\Gamma)$, pour $\varepsilon > 0$, comme $\cup_{j \geq 0} \Lambda_j(\Gamma)$ est partout dense dans $H^s(\Gamma)$, on peut trouver $j \geq 0$ et $\tilde{p}_j \in \Lambda_j(\Gamma)$ tels que

$$\|\tilde{u} \perp \tilde{p}_j\|_{H^s(\Gamma)} \leq \varepsilon.$$

Reste à poser $p_j := \tilde{p}_j|_{\Gamma_0} \in \Lambda_j(\Gamma_0)$, pour obtenir

$$\|u \perp p_j\|_{H^s(\Gamma_0)} \leq \|\tilde{u} \perp \tilde{p}_j\|_{H^s(\Gamma)} \leq \varepsilon.$$

□

On peut dès lors utiliser l'analyse du paragraphe (4.1) avec pour projecteur le projecteur orthogonal pour le produit $(.,.)_0$ sur $L^2(\Gamma_0)$ pour obtenir le

Théorème 8.2.1 La famille $(\psi_\tau)_\tau$ est une base de Riesz dans $H^s(\Gamma_0)$ et dans $\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0)$ pour tout $0 \leq s \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0}} c_\tau \psi_\tau \right\|_{H^s(\Gamma_0)}^2 &\sim \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0}} 2^{2sj} |c_\tau|^2, \\ \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0}} c_\tau \psi_\tau \right\|_{\tilde{H}^{-s}(\Gamma_0)}^2 &\sim \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0}} 2^{\perp 2sj} |c_\tau|^2. \end{aligned}$$

Si Π_J est le projecteur $L^2(\Gamma_0)$ -orthogonal pour le produit $(.,.)_0$, sur Λ_J , alors c'est un opérateur continu de $H^s(\Gamma_0)$ dans lui-même, et induit un opérateur continu de $\tilde{H}^{\perp s}(\Gamma_0)$ dans lui-même, et, en notant $\Pi_{\perp 1} = 0$,

$$\|u\|_{\tilde{H}^{-s}(\Gamma_0)}^2 \sim \sum_{j=0} 2^{\perp 2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_0^2 \quad (8.2.6)$$

$$\|u\|_{H^s(\Gamma_0)}^2 \sim \sum_{j=0} 2^{2sj} \|(\Pi_j \perp \Pi_{j \perp 1})u\|_0^2 \quad (8.2.7)$$

8.2.3 Cas avec condition «nulle» au bord.

On va devoir construire des espaces de multirésolution pour les espaces $\tilde{H}^s$ avec $s > 0$, qui ne peuvent être les $\Lambda_j(\Gamma_0)$; par exemple, les éléments de $\tilde{H}^1$ doivent s'annuler au bord. Pour cela, il est commode d'utiliser une caractérisation des éléments de $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ (voir [24] et la proposition 6.1.3): pour $s \geq 0$, on note $H_0^s(\Gamma_0)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Gamma_0)$ dans $H^s(\Gamma_0)$, et si $s \geq 0$,

$$\tilde{H}^s(\Gamma_0) = \{u \in H^s(\Gamma_0) \mid \rho^{\perp s} u \in L^2(\Gamma_0)\} \subset H_0^s(\Gamma_0).$$

où $\rho(\mathbf{x})$ désigne la distance de $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ au bord $\partial\Gamma_0$. De plus, la norme

$$\|u\|_{H^s(\Gamma_0)} + \|\rho^{\perp s} u\|_{L^2(\Gamma_0)}$$

est équivalente à la norme $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$. On prendra garde à distinguer $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ et $H_0^s(\Gamma_0)$, mais comme on peut le lire sur cette proposition, ces deux espaces coïncident si l'exposant est entier³. On pose alors pour espaces de multirésolution

$$\tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0) := \{\varphi \in \Lambda_j(\Gamma_0) \mid \varphi|_{\partial\Gamma_0} = 0\}.$$

Lemme 8.2.2 *Si $0 \leq s < \frac{3}{2}$, pour tout $j \geq 0$, $\tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0) \subset \tilde{H}^s(\Gamma_0)$, et $\cup_{j \geq 0} \tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0)$ est dense dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$*

Preuve: les éléments $\varphi_j \in \tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0)$ vérifient $\varphi(\mathbf{x}) \lesssim \rho(\mathbf{x})$ et donc sont dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ pour tout $0 \leq s \leq 1$. En outre, la fonction $\rho^{\perp \sigma}$ est dans $L^2(\Gamma_0)$ pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, et le gradient de φ_j est dans $L^\infty(\Gamma_0)$, donc on a bien $\varphi_j \in \tilde{H}^s(\Gamma_0)$ pour $0 \leq s < \frac{3}{2}$.

Pour montrer le résultat de densité, il suffit de prouver que $C_0^\infty(\Gamma_0) \subset \overline{\cup_{j \geq 0} \tilde{\Lambda}_j}$, l'adhérence prise en norme $\tilde{H}^s$, puisque $C_0^\infty(\Gamma_0)$ est dense dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$. Soit donc $u \in C_0^\infty(\Gamma_0)$, et fixons $\varepsilon > 0$. Pour j_0 assez grand, on peut trouver dans la triangulation de Γ_0 une réunion K_{j_0} de triangles contenant le support de u et dont l'adhérence est dans l'ouvert Γ_0 .

Pour $k \geq j_0$, on note p_k la restriction à Γ_0 du projeté $L^2(\Gamma)$ -orthogonal sur $\Lambda_k(\Gamma_0)$ d'un prolongement (quelconque) de u sur Γ ; $p_k \in \Lambda_k(\Gamma_0)$ (sans conditions au bord) et on a déjà vu que, pour $s \leq t \leq 2$,

$$\|u \perp p_k\|_{H^s(\Gamma_0)} \lesssim 2^{\perp(t \perp s)k} \|u\|_{H^t(\Gamma_0)}.$$

3. En fait, ils coïncident tout le temps sauf si l'exposant est un demi-entier (entier + $\frac{1}{2}$)

On modifie alors p_k en q_k en annulant les valeurs sur les nœuds en dehors de K_{j_0} . La différence $(p_k \perp q_k)$ est nulle sauf sur $\Gamma_0 \setminus K_{j_0}$.

On écrit alors, avec les inégalités directes et inverses, en se fixant $t > s$, $t \leq 2$,

$$\begin{aligned} \|u \perp q_k\|_{H^s(\Gamma_0)} &\lesssim \|u \perp p_k\|_{H^s(\Gamma_0)} + \|p_k \perp q_k\|_{H^s(\Gamma_0)} \\ &\lesssim 2^{\perp(t \perp s)k} \|u\|_{H^t(\Gamma_0)} + 2^{sk} \|p_k \perp q_k\|_{L^2(\Gamma_0)}, \\ &\lesssim 2^{\perp(t \perp s)k} \|u\|_{H^t(\Gamma_0)} + 2^{sk} \|p_k \perp q_k\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_{j_0})}, \end{aligned}$$

De la règle du trapèze, et comme u est nul sur $\Gamma_0 \setminus K_{j_0}$,

$$\begin{aligned} \|u \perp q_k\|_{H^s(\Gamma_0)} &\lesssim 2^{\perp(t \perp s)k} \|u\|_{H^t(\Gamma_0)} + 2^{sk} \|p_k\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_{j_0})}, \\ &\lesssim 2^{\perp(t \perp s)k} \|u\|_{H^t(\Gamma_0)} + 2^{sk} \|p_k \perp u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_{j_0})}, \end{aligned}$$

Enfin, on utilise l'inégalité directe pour obtenir finalement

$$\|u \perp q_k\|_{H^s(\Gamma_0)} \lesssim 2^{\perp(t \perp s)k} \|u\|_{H^t(\Gamma_0)}.$$

En conséquence,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u \perp q_k\|_{H^s(\Gamma_0)}$$

D'autre part, si $\rho(\mathbf{x})$ désigne la distance de $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ au bord de Γ_0 , comme $d(K_{j_0}, \partial\Gamma_0) > 0$ et q_k est nul sur tous les nœuds en dehors de K_{j_0} , pour k assez grand, on a

$$\|\rho^{\perp s}(u \perp q_k)\|_{L^2(\Gamma_0)} \lesssim \rho_0^{\perp s} \|(u \perp q_k)\|_{L^2(\Gamma_0)}$$

où $\rho_0 = \frac{1}{2}d(K_{j_0}, \partial\Gamma_0)$. Donc on a aussi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\rho^{\perp s}(u \perp q_k)\|_{L^2(\Gamma_0)}$$

et donc, de ce qui précède,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u \perp q_k\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Il reste à établir les inégalités directes et inverses pour obtenir une équivalence de normes sur les espaces $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ avec $s > 0$ et sur les espaces duaux.

Proposition 8.2.2 *Pour tout $0 \leq s \leq 2$, et tout $0 \leq t < \frac{3}{2}$, il existe deux constantes C_s et C_t , qui ne dépendent respectivement que de s et de t , telles que, pour tout $u \in \tilde{H}^s(\Gamma_0)$, et tout $j \in \mathbb{N}$,*

inégalité directe (Jackson):

$$\inf_{p_j \in \tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0)} \|u \perp p_j\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq C_s 2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}, \quad (8.2.8)$$

inégalité directe (Bernstein):

$$\forall p_j \in \tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0), \quad \|p_j\|_{\tilde{H}^t(\Gamma_j)} \leq C_t 2^{tj} \|p_j\|_{L^2(\Gamma_0)}. \quad (8.2.9)$$

Preuve: l'inégalité inverse est immédiatement déduite de l'inégalité inverse sur Γ tout entier, après prolongement par zéro.

Reste l'inégalité directe: pour j suffisamment grand, on peut trouver deux compacts $K_j^1 \subset K_j^2$ formés de triangles fermés de la triangulation au niveau j , tels que

- la distance entre les deux bords $d(\partial K_j^1, \partial K_j^2)$ soit strictement positive, c'est-à-dire que $K_j^2 \setminus K_j^1$ est connexe et formée de triangles de la triangulation au niveau j ,
- $d(\partial K_j^2, \partial \Gamma_0) > 0$, c'est-à-dire que $\Gamma_0 \setminus K_j^2$ est connexe et est formée de triangles de la triangulation au niveau j .
- $d(K_j^1, \partial \Gamma_0) \leq C 2^{\perp j}$

où C est une constante indépendante de j (triangulation quasi-uniforme).

Soit donc $u \in \tilde{H}^s(\Gamma_0)$. On choisit $\tilde{u}_j \in H^s(\Gamma)$ un prolongement quelconque de $u|_{K_j^2}$ sur Γ ; on pose $\tilde{p}_j$ le projeté $L^2(\Gamma)$ -orthogonal de $\tilde{u}_j$, et on pose $p_j := \tilde{p}_j|_{K_j^2}$. On a déjà vu (inégalité directe pour les éléments sans conditions au bord) que

$$\begin{aligned} \|u \perp p_j\|_{L^2(K_j^2)} &\leq \|\tilde{u}_j \perp \tilde{p}_j\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C_s 2^{\perp s j} \|\tilde{u}_j\|_{H^s(\Gamma)}, \end{aligned}$$

où C_s est une constante indépendante de j et de u . Ceci étant vrai pour tous les prolongement possibles de $u|_{K_j^2}$, on en déduit

$$\|u \perp p_j\|_{L^2(K_j^2)} \leq C_s 2^{\perp s j} \|u\|_{H^s(K_j^2)} \leq C_s 2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}.$$

On prolonge à présent p_j sur Γ_0 par $q_j \in \tilde{\Lambda}_j$ de manière continue en imposant $q_j(\tau) = 0$ pour tous les nœuds $\tau \in \overline{\Gamma_0} \setminus K_j^2$. On a toujours

$$\|u \perp q_j\|_{L^2(K_j^2)} \leq C_s 2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}. \quad (8.2.10)$$

D'autre part, de la règle du trapèze, et par construction des compacts K_j^i ,

$$\begin{aligned} \|q_j\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^2)} &\leq C \|q_j\|_{L^2(K_j^2 \setminus K_j^1)} \\ &\leq C (\|q_j \perp u\|_{L^2(K_j^2 \setminus K_j^1)} + \|u\|_{L^2(K_j^2 \setminus K_j^1)}) \\ &\leq C (\|q_j \perp u\|_{L^2(K_j^2)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)}) \\ &\leq C (2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)}) \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

où C est une constante indépendante de j et de u . Comme $\|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^2)} \leq \|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)}$, de (8.2.10) et de (8.2.11), on déduit, avec l'inégalité triangulaire

$$\|u \perp q_j\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq C (2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)})$$

Enfin, désignant toujours par ρ la distance au bord,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)} &\leq \|\rho^s \rho^{\perp s} u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)} \\ &\leq \|\rho^s\|_{L^\infty(\Gamma_0 \setminus K_j^1)} \|\rho^{\perp s} u\|_{L^2(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

Comme $\rho \leq Cd(K_j^1, \partial\Gamma_0) \leq C2^{\perp j}$, et de la continuité de l'application $u \mapsto \rho^{\perp s} u$ de $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ dans $L^2(\Gamma_0)$,

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus K_j^1)} \leq C 2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}. \quad (8.2.12)$$

On conclut donc

$$\inf_{q_j \in \tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0)} \|u \perp q_j\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq \|u \perp q_j\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq C 2^{\perp s j} \|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On pose alors $\tilde{\Delta}_j^{\Gamma_0}$ l'ensemble $\Delta_j^{\Gamma_0}$ privé des nœuds sur le bord de Γ_0 , et $\tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0} := \tilde{\Delta}_{j+1}^{\Gamma_0} \setminus \tilde{\Delta}_j^{\Gamma_0}$. Sur $\tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0)$, on a une base nodale $(\varphi_\tau^j)_{\tau \in \tilde{\Delta}_j^{\Gamma_0}}$, de Riesz

pour L^2 , et sa base duale $(\theta_\tau^j)_{\tau \in \tilde{\Delta}_j^{\Gamma_0}}$, dans $\tilde{\Lambda}_{j+1}(\Gamma_0)$. Les ondelettes seront définies comme pour le cas sans conditions au bord, soit

$$\tilde{\psi}_\tau := \varphi_\tau^0, \quad \text{pour } \tau \in \tilde{\Delta}_0^{\Gamma_0}, \quad (8.2.13)$$

$$\tilde{\psi}_\tau := \varphi_\tau^{j+1} \perp \sum_{\sigma \in \tilde{\Delta}_j^{\Gamma_0}} \frac{(\varphi_\tau^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0}{(\theta_\sigma^{j+1}, \varphi_\sigma^j)_0} \theta_\sigma^{j+1}, \quad \text{pour } \tau \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0} := \tilde{\Delta}_{j+1}^{\Gamma_0} \setminus \tilde{\Delta}_j^{\Gamma_0}. \quad (8.2.14)$$

Si on note

$$\tilde{\Xi}_j := \text{Vect}\{\tilde{\psi}_\tau; \tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0}\}$$

alors $\tilde{\Xi}_{j+1}$ est l'orthogonal de $\tilde{\Lambda}_j(\Gamma_0)$ dans $\tilde{\Lambda}_{j+1}(\Gamma_0)$ pour le produit $(.,.)_0$ sur Γ_0 . De l'analyse du paragraphe 4.1,

Théorème 8.2.2 *La famille $(\tilde{\psi}_\tau)_\tau$ est une base de Riesz dans $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ et dans $H^{\perp s}(\Gamma_0)$ pour tout $0 \leq s \leq 1$:*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0}} c_\tau \tilde{\psi}_\tau \right\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}^2 &\sim \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0}} 2^{2sj} |c_\tau|^2, \\ \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0}} c_\tau \tilde{\psi}_\tau \right\|_{H^{-s}(\Gamma_0)}^2 &\sim \sum_{j \geq 0} \sum_{\tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0}} 2^{\perp 2sj} |c_\tau|^2. \end{aligned}$$

Si Π_j^0 est le projecteur $L^2(\Gamma_0)$ -orthogonal pour le produit $(.,.)_0$, sur $\tilde{\Lambda}_j$, alors c'est un opérateur continu de $\tilde{H}^s(\Gamma_0)$ dans lui-même, et induit un opérateur continu de $H^{\perp s}(\Gamma_0)$ dans lui-même, et, en notant $\Pi_{\perp 1}^0 = 0$,

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma_0)}^2 \sim \sum_{j=0} 2^{2sj} \|(\Pi_j^0 \perp \Pi_{j\perp 1}^0)u\|_0^2 \quad (8.2.15)$$

$$\|u\|_{H^{-s}(\Gamma_0)}^2 \sim \sum_{j=0} 2^{\perp 2sj} \|(\Pi_j^0 \perp \Pi_{j\perp 1}^0)u\|_0^2 \quad (8.2.16)$$

8.2.4 Moments nuls.

Ici, on énonce les propriétés cruciales pour la résolution numérique de l'équation intégrale, qui permettront de montrer la décroissance des coefficients de la matrice de discrétisation que l'on verra plus loin. Bien que l'on ait deux types d'espaces discrets (et deux types d'ondelettes), les preuves des énoncés qui suivent sont très similaires, voire identiques, aux preuves de la section 5.2.4. Elles seront donc réduites aux différences que l'on pourra rencontrer par rapport à celles correspondant aux énoncés de la section précitée. Nous attirons l'attention sur les différences qui résident dans les énoncés eux-mêmes, en particulier concernant les estimations qui vont suivre.

Notation: on notera $\tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0,+}$ l'ensemble des nœuds de la résolution au niveau $j+1$ tels que les supports des ondelettes avec condition nulle au bord $\psi_\tau \in \tilde{\Xi}_{j+1}^{\Gamma_0}$ ne rencontrent aucun support de fonctions d'échelle du bord $\varphi_\sigma^j \in \Lambda_j(\Gamma_0)$, $\sigma \in \partial\Gamma_0$. Comme $\text{Supp } \varphi_\sigma^j$ a un diamètre en $\mathcal{O}(2^{\perp j})$, cela revient à imposer la condition

$$\tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0,+} \iff d(\text{Supp } \tilde{\psi}_\tau, \partial\Gamma_0) > c_+ 2^{\perp j}, \quad (8.2.17)$$

où c_+ est une constante indépendante du niveau de résolution j , et ne dépend que de la géométrie de la surface, et de la nature des triangulations (triangulation quasi-uniforme).

On sépare ainsi les ondelettes «proches» du bord de Γ_0 et les ondelettes «loins» du bord (celles associées aux nœuds dans $\tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0,+}$). Il nous sera utile d'évaluer le nombre d'ondelettes proches du bord:

Lemme 8.2.3 *Le cardinal de $\tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0} \setminus \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0,+}$ est en $\mathcal{O}(2^j)$.*

Preuve: la «couronne» $\{\mathbf{x} \in \Gamma_0 \mid d(\mathbf{x}, \partial\Gamma_0) \leq c_+ 2^{\perp j} \}$ où c_+ est comme dans (8.2.17) est de volume en $\mathcal{O}(2^{\perp j})$, tandis que le support de ψ_τ est de *diamètre* en $\mathcal{O}(2^{\perp j})$. En outre, si on se fixe une ondelette $\tilde{\psi}_\tau$, le nombre d'ondelettes $\tilde{\psi}_{\tau'}$ dont le support rencontre celui de $\tilde{\psi}_\tau$ est uniformément borné (par rapport à j , le niveau de résolution).

□

Les ondelettes ψ_τ et $\tilde{\psi}_\tau$ ont des propriétés d'«orthogonalité» par rapport aux polynômes, dans un sens proche de la proposition 5.2.2. Comme pour cette dernière proposition, on énonce les résultats d'«orthogonalité» ou de *décroissance* qui suivent dans un cadre général, faisant apparaître le degré d des

polynômes choisis pour la multirésolution (et, ce qui paraît plus intéressant, son rôle dans les estimations). On insiste sur le fait que l'on a choisi, dans la construction du paragraphe précédent, des polynômes de degré 1 (par morceaux), et donc $d = 1$.

On note

$$\tilde{\delta}_\sigma^j, \quad \sigma \in \Delta_j^T,$$

la base nodale de $\Lambda_j(T)$ vérifiant

$$\tilde{\delta}_\sigma^j(\sigma') = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \sigma' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 8.2.3 *Soit $v \in C(\overline{\Gamma_0})$ une fonction scalaire continue, telle que*

$$v \circ \kappa_i \in C^\infty(\overline{T}). \quad (8.2.18)$$

On suppose qu'il existe un entier positif d tel que

$$\forall p \in \mathbb{P}_d(T), p = \sum_{\tau' \in \Delta_0^T} p(\tau') \tilde{\delta}_{\tau'}^0, \quad (8.2.19)$$

ou, plus sobrement, que l'analyse de multirésolution «reproduit» les polynômes de degré d .

Alors il existe une constante $C(\kappa, \Gamma_0, d)$ telle que, pour tout $j \geq 0$, et tout $\tau \in \nabla_{j+1}^{\Gamma_0}$,

$$|(v, \psi_\tau)_0| \leq C(\kappa, \Gamma_0, d) 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma_0)}, \quad (8.2.20)$$

avec

$$\|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma_0)} := \max_i \max_{x \in T} \max_{|\alpha| \leq d+1} |D^\alpha(v \circ \kappa_i)(x)|. \quad (8.2.21)$$

En ce sens, on dira que la famille d'ondelettes (ψ_τ) admet $d + 1$ moments nuls.

Preuve: en tout point similaire à la preuve de la proposition 5.2.2.

□

Ce qui diffère dans ce paragraphe est le comportement des ondelettes avec la condition nulle au bord :

Proposition 8.2.4 *Sous les hypothèses de la proposition précédente 8.2.3, il existe une constante $C(\kappa, \Gamma_0, d)$ telle que, pour tout $j \geq 0$, et tout $\tau \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0}$,*

$$\left| (v, \tilde{\psi}_\tau)_0 \right| \leq C(\kappa, \Gamma_0, d) (2^{\perp j} \|v\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)} + 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^\infty, d+1(\Gamma_0)}), \quad (8.2.22)$$

Si $\tau \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0, +}$ (ou si $v|_{\Gamma_0} = 0$), alors

$$\left| (v, \tilde{\psi}_\tau)_0 \right| \leq C(\kappa, \Gamma_0, d) 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^\infty, d+1(\Gamma_0)} \quad (8.2.23)$$

En ce sens, on dira que la famille d'ondelettes $(\tilde{\psi}_\tau)$ admet $d+1$ moments nuls **intérieurs**.

Preuve : On note

$$\delta_\sigma^j, \quad \sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0},$$

la base nodale de $\Lambda_j(\Gamma_0)$ vérifiant

$$\delta_\sigma^j(\sigma') = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \sigma' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$I_j v := \sum_{\sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0}} v(\sigma) \delta_\sigma^j$$

définissant l'opérateur d'interpolation I_j . De la propriété d'orthogonalité des ondelettes, pour tout $\sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0}$,

$$(\delta_\sigma^j, \tilde{\psi}_\tau)_0 = 0 \quad \sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0}, \sigma \notin \partial\Gamma_0.$$

de sorte que

$$(v, \tilde{\psi}_\tau)_0 = \sum_{\sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0} \cap \partial\Gamma_0} v(\sigma) (\delta_\sigma^j, \tilde{\psi}_\tau)_0 + \sum_{\sigma \in \tilde{\Delta}_j(\Gamma_0)} (v \perp I_j v, \tilde{\psi}_\tau)_0. \quad (8.2.24)$$

On a, cf. proposition 5.2.2,

$$|(v \perp I_j v, \tilde{\psi}_\tau)_0| \lesssim \|v \perp I_j v\|_{L^2(\Gamma_0 \cap \text{Supp } \psi_\tau)} \lesssim 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^\infty, d+1}. \quad (8.2.25)$$

D'autre part, pour tout $\sigma \in \Delta_j(\Gamma_0) \cap \partial\Gamma_0$, en notant $\rho(\mathbf{x})$ la distance de $\mathbf{x}$ au bord de Γ_0 ,

$$\begin{aligned} |(\delta_\sigma^j, \tilde{\psi}_\tau)_0| &\lesssim (\rho \delta_\sigma^j, \rho^{\perp 1} \tilde{\psi}_\tau)_0 \\ &\lesssim \|\rho \delta_\sigma^j\|_{L^2} \|\rho^{\perp 1} \tilde{\psi}_\tau\|_{L^2(\Gamma_0)} \\ &\lesssim \|\rho\|_{L^2(\text{Supp } \delta_\sigma^j)} \|\tilde{\psi}_\tau\|_{\tilde{H}^1(\Gamma_0)} \\ &\lesssim 2^{\perp 2j} \cdot 2^j \|\tilde{\psi}_\tau\|_{L^2} \\ &\lesssim 2^{\perp j}, \end{aligned}$$

les deux dernières inégalités étant données par l'inégalité inverse et la normalisation choisie pour les ondelettes. Donc

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\sigma \in \Delta_j(\Gamma_0) \cap \partial\Gamma_0} v(\sigma) (\delta_\sigma^j, \tilde{\psi}_\tau)_0 \right| \\ &\lesssim 2^{\perp j} \|v\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)} \#\{\sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0} \mid \text{Supp } \delta_\sigma^j \cap \text{Supp } \tilde{\psi}_\tau \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

et, comme le nombre d'éléments de la base nodale dont le support rencontre celui de $\tilde{\psi}_\tau$ est uniformément borné (par rapport à j),

$$\left| \sum_{\sigma \in \Delta_j(\Gamma_0) \cap \partial\Gamma_0} v(\sigma) (\delta_\sigma^j, \tilde{\psi}_\tau)_0 \right| \lesssim 2^{\perp j} \|v\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)}. \quad (8.2.26)$$

De (8.2.24), avec (8.2.25) et (8.2.26), on obtient la majoration cherchée

$$\left| (v, \tilde{\psi}_\tau)_0 \right| \leq C(\kappa, \Gamma_0, d) (2^{\perp j} \|v\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)} + 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^\infty, d+1}(\Gamma_0)).$$

Si $\tau \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0, +}$, ou si v est nulle au bord, alors

$$\sum_{\sigma \in \Delta_j^{\Gamma_0} \cap \partial\Gamma_0} v(\sigma) (\delta_\sigma^j, \tilde{\psi}_\tau)_0 = 0,$$

et donc le terme en $2^{\perp j}$ dans l'estimation précédente disparaît.

□

Des propositions 8.2.3 et 8.2.4, on tire deux corollaires (voir les corollaires 5.2.1 et 5.2.2)

Corollaire 8.2.1 *On note $g_i := \det((\partial_l \kappa_i, \partial_m \kappa_i)_{\mathbb{R}^3})$ le jacobien relatif à κ_i , et $g := \sum_i 1_{\Gamma_i} g_i \circ \kappa_i^{\perp 1}$. On rappelle que g est supposée C^∞ par morceaux. Si g est continu, alors, sous les hypothèses de la proposition 8.2.3, pour tout j , si $\tau \in \nabla_{j+1}^{\Gamma_0}$,*

$$\langle v, \psi_\tau \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \lesssim 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma_0)};$$

si $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0}$,

$$\langle v, \tilde{\psi}_\tau \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \lesssim 2^{\perp j} \|v\|_{L^\infty(\partial\Gamma_0)} + 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma_0)},$$

et, enfin, si $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0, +}$, (ou si $v|_{\partial\Gamma_0} = 0$),

$$\langle v, \tilde{\psi}_\tau \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \lesssim 2^{\perp j(d+2)} \|v\|_{PW^{\infty, d+1}(\Gamma_0)}.$$

Le deuxième corollaire est relatif à l'estimation des coefficients de la matrice issue de la méthode perturbée:

Corollaire 8.2.2 *Soit $r \in \mathbb{Z}$ un entier et $H(x, y)$ une fonction de classe C^∞ sur un voisinage (dans $\mathbb{R}^3$) de $\Gamma \times \Gamma$ (ici, on se place sur la surface fermée toute entière) privé de sa diagonale $x = y$, et vérifiant*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta H(x, y)| \leq \frac{C(\Gamma, \alpha, \beta)}{|x \perp y|^{2+r+|\alpha|+|\beta|}}, \quad x \neq y. \quad (8.2.27)$$

On se donne deux entiers $j > 0$ et $j' > 0$, et on suppose l'hypothèse du corollaire 8.2.1 vérifiée (continuité du Jacobien). Alors on a les estimations suivantes:

– si $\tau \in \nabla_{j+1}^{\Gamma_0}$, $\tau' \in \nabla_{j'+1}^{\Gamma_0}$, et si $\delta_{\tau, \tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \psi_{\tau'}) > 0$, alors

$$|\langle H\psi_\tau, \psi_{\tau'} \rangle_{L^2(\Gamma_0)}| \lesssim 2^{\perp (d+2)(j+j')} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp (2d+4+r)}. \quad (8.2.28)$$

– Si $\tau \in \nabla_{j+1}^{\Gamma_0}$, $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j'+1}^{\Gamma_0}$, et si $\delta_{\tau, \tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tau'}) > 0$, alors

$$\begin{aligned} |\langle H\psi_\tau, \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2(\Gamma_0)}| \\ \lesssim 2^{\perp (d+2)j} 2^{\perp j'} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp (d+3+r)} (1 + 2^{\perp (d+1)j'} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp (d+1)}). \end{aligned} \quad (8.2.29)$$

Si, en outre, $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j'+1}^{\Gamma_0, +}$,

$$|\langle H\psi_\tau, \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2(\Gamma_0)}| \lesssim 2^{\perp (d+2)(j+j')} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp (2d+4+r)}. \quad (8.2.30)$$

– Si $\tau \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0}$, $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0}$, et si $\delta_{\tau,\tau'} := d(\text{Supp } \tilde{\psi}_\tau, \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tau'}) > 0$, alors

$$\begin{aligned} & | \langle H \tilde{\psi}_\tau, \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | \\ & \lesssim 2^{\perp(j+j')} \delta_{\tau,\tau'}^{\perp(2+r)} (1 + (2^{\perp(d+1)j} + 2^{\perp(d+1)j'}) \delta_{\tau,\tau'}^{\perp(d+1)} \\ & \quad + 2^{\perp(d+1)(j+j')} \delta_{\tau,\tau'}^{\perp(2d+2)}). \end{aligned} \quad (8.2.31)$$

Si, en outre, $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j'+1}^{\Gamma_0,+}$,

$$\begin{aligned} & | \langle H \tilde{\psi}_\tau, \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | \\ & \lesssim 2^{\perp j} 2^{\perp(d+2)j'} \delta_{\tau,\tau'}^{\perp(d+3+r)} (1 + 2^{\perp(d+1)j} \delta_{\tau,\tau'}^{\perp(d+1)}); \end{aligned} \quad (8.2.32)$$

et si, enfin, $\tau \in \tilde{\nabla}_{j+1}^{\Gamma_0,+}$ et $\tau' \in \tilde{\nabla}_{j'+1}^{\Gamma_0,+}$, alors

$$| \langle H \tilde{\psi}_\tau, \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | \lesssim 2^{\perp(d+2)(j+j')} \delta_{\tau,\tau'}^{\perp(2d+4+r)}. \quad (8.2.33)$$

Dans toute la suite, on supposera l'hypothèse du corollaire 8.2.1 (continuité du jacobien) vérifiée. Ce paragraphe (et le suivant) est très proche du paragraphe 4.2 (et du paragraphe suivant), et on s'y réfèrera pour les détails des démonstrations des énoncés; en réalité, seules les définitions des espaces discrets changent, et on adapte de manière linéaire la situation vue dans le cas des surfaces fermées (cf. section 4.2).

8.3 Méthode de Galerkin pour la résolution de l'équation intégrale.

Définition 8.3.1 Les espaces discrets seront définis par:

$$\tilde{\mathcal{X}}_J^1 := \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\Lambda}_J(\Gamma_0) \quad \hat{\mathcal{X}}_J^1 := \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \tilde{\Lambda}_J(\Gamma_0) \quad (8.3.1)$$

$$\hat{\mathcal{X}}_J^2 = \nabla_\Gamma \Lambda_J^*(\Gamma_0) \quad \tilde{\mathcal{X}}_J^2 := \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \Lambda_J^*(\Gamma_0). \quad (8.3.2)$$

avec

$$\Lambda_J^*(\Gamma_0) := \left\{ u_J \in \Lambda_J(\Gamma_0) \mid \int_{\Gamma_0} u_J \, ds = 0. \right\}. \quad (8.3.3)$$

On remarquera que, pour $k = 1, 2$, $\tilde{\mathcal{X}}_J^k$ et $\hat{\mathcal{X}}_J^k$ sont de même dimension, qu'ils sont duaux pour le produit scalaire $L^2(\Gamma_0)$ et, si $(\tilde{\mathcal{X}}_J^k)^0$ et $(\hat{\mathcal{X}}_J^k)^0$ désignent les espaces polaires correspondant (pour la dualité L^2), on a

Lemme 8.3.1 *Pour $k = 1, 2$,*

1.

$$\tilde{\mathcal{X}}_J^k \subset \tilde{\mathcal{X}}_{J+1}^k \quad \overline{\cup_J \tilde{\mathcal{X}}_J^k}^{\tilde{\mathcal{X}}^k} = \tilde{\mathcal{X}}^k \quad (8.3.4)$$

$$\hat{\mathcal{X}}_J^k \subset \hat{\mathcal{X}}_{J+1}^k \quad \overline{\cup_J \hat{\mathcal{X}}_J^k}^{\hat{\mathcal{X}}^k} = \hat{\mathcal{X}}^k \quad (8.3.5)$$

2.

$$\tilde{\mathcal{X}}_J^k \oplus (\hat{\mathcal{X}}_J^k)^0 = \mathcal{X}^k \quad (8.3.6)$$

$$\hat{\mathcal{X}}_J^k \oplus (\tilde{\mathcal{X}}_J^k)^0 = \hat{\mathcal{X}}^k \quad (8.3.7)$$

Preuve: similaire au cas des surfaces fermées.

□

Remarque: $\tilde{\mathcal{X}}_J^1$ et $\hat{\mathcal{X}}_J^2$ ne sont pas de même dimension, mais tous deux ont une dimension en $\mathcal{O}(2^{2J})$.

On travaille encore sur des espaces à moyennes nulles:

Définition 8.3.2 *on définit, pour $s \geq 0$,*

$$H_*^s(\Gamma_0) := \left\{ u \in H^s(\Gamma_0) \mid \int_{\Gamma} u \, ds = 0. \right\}$$

On note $L_*^2 = H_*^0$, et $\tilde{H}_*^{\perp s}(\Gamma_0)$ le L_*^2 -dual de $H_*^s(\Gamma_0)$. On rappelle que

$$\tilde{H}_*^{\perp s}(\Gamma) := \left\{ u \in \tilde{H}^{\perp s} \mid \langle u, 1 \rangle = 0 \right\}$$

Enfin, on note $\check{\Pi}_J$ le projecteur L^2 orthogonal de L_*^2 sur Λ_J^* , avec $\check{\Pi}_{\perp 1} = 0$.

Comme pour le cas des surfaces fermées, on a le

Lemme 8.3.2 *Pour tout $s \in [0, \frac{3}{2}]$, il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda \in H_*^s(\Gamma_0)$, et tout $J \geq 0$,*

$$\|\lambda \perp \check{\Pi}_J \lambda\|_0 \leq C 2^{\perp s J} \|\lambda\|_{H_*^s(\Gamma_0)}$$

duquel on déduit le

Corollaire 8.3.1 *Pour tout s , $0 \leq s < \frac{3}{2}$, et tout $t \geq s$, $t \leq 2$, il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda \in H^t(\Gamma_0)$, et tout $J \geq 0$,*

$$\|\lambda \perp \check{\Pi}_J \lambda\|_{H_*^s(\Gamma_0)} \leq C 2^{\perp(t \perp s)J} \|\lambda\|_{H_*^t(\Gamma_0)},$$

puis le

Théorème 8.3.1 *Pour tout s , $0 \leq s < \frac{3}{2}$, pour tout $\lambda \in H_*^s(\Gamma_0)$, et tout $\mu \in \tilde{H}_*^{\perp s}(\Gamma_0)$*

$$\|\lambda\|_{H_*^s}^2 \sim \sum_{j \geq 0} 2^{2js} \|(\check{\Pi}_j \perp \check{\Pi}_{j+1})\lambda\|_0^2 \quad (8.3.8)$$

$$\|\lambda\|_{\tilde{H}_*^{-s}}^2 \sim \sum_{j \geq 0} 2^{\perp 2js} \|(\check{\Pi}_j \perp \check{\Pi}_{j+1})\lambda\|_0^2. \quad (8.3.9)$$

On peut alors énoncer un résultat concernant les projections sur $\tilde{\mathcal{X}}_J^k$ et sur $\hat{\mathcal{X}}_J^k$ (à comparer avec la proposition 4.2.2):

Proposition 8.3.1 *On peut définir les projecteurs $P_J^k \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{X}}^k)$ et $\hat{P}_J^k \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{X}}^k)$ tels que*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m P_J^k &= \tilde{\mathcal{X}}_J^k, & \mathcal{K}er P_J^k &= (\hat{\mathcal{X}}_J^k)^0, \\ \mathcal{I}m \hat{P}_J^k &= \hat{\mathcal{X}}_J^k, & \mathcal{K}er \hat{P}_J^k &= (\tilde{\mathcal{X}}_J^k)^0 \end{aligned}$$

De plus ces projecteurs sont uniformément bornés, i.e.

$$\sup_{J \geq 0} \|P_J^k\|_{\tilde{\mathcal{X}}^k \leftarrow \tilde{\mathcal{X}}^k} < \infty \quad \sup_{J \geq 0} \|\hat{P}_J^k\|_{\hat{\mathcal{X}}^k \leftarrow \hat{\mathcal{X}}^k} < \infty. \quad (8.3.10)$$

$\hat{P}_J^k$ est l'opérateur adjoint de P_J^k , $\hat{P}_J^k$ (resp. P_{J+1}^k) commute avec $\hat{P}_{J+1}^k$ (resp. P_J^k), et ces projecteurs convergent simplement (ponctuellement) vers l'identité:

$$\forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}^k, \forall \mathbf{u}' \in \hat{\mathcal{X}}^k, \langle P_J^k \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle_{\tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}} = \langle \mathbf{u}, \hat{P}_J^k \mathbf{u}' \rangle_{\tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}}, \quad (8.3.11)$$

$$P_J^k P_{J+1}^k = P_J^k, \quad \hat{P}_J^k \hat{P}_{J+1}^k = \hat{P}_J^k, \quad (8.3.12)$$

$$\forall \mathbf{u}^k \in \tilde{\mathcal{X}}^k, \lim_{J \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^k \perp P_J^k \mathbf{u}^k\|_{\tilde{\mathcal{X}}^k} = 0, \quad (8.3.13)$$

$$\forall \hat{\mathbf{u}}^k \in \hat{\mathcal{X}}^k, \lim_{J \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{u}}^k \perp \hat{P}_J^k \hat{\mathbf{u}}^k\|_{\hat{\mathcal{X}}^k} = 0. \quad (8.3.14)$$

Preuve : identique à la preuve de la proposition 4.2.2, avec les relations

$$\begin{aligned} P_J^1 \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 &= \mathbf{rot}_\Gamma \Pi_J^0 \lambda^1 & \widehat{P}_J^1 \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \widehat{\lambda}^1 &= \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \Pi_J^0 \widehat{\lambda}^1 \\ P_J^2 \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2 &= \nabla_\Gamma \check{\Pi}_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2 & \widehat{P}_J^2 \nabla_\Gamma \widehat{\lambda}^2 &= \nabla_\Gamma \check{\Pi}_J \widehat{\lambda}^2 \end{aligned}$$

pour $\lambda^1 \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}$, $\lambda^2 \in \widetilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}$, $\widehat{\lambda}^1 \in H^{\perp \frac{1}{2}}$, $\widehat{\lambda}^2 \in H_*^{\frac{1}{2}}$.

□

On déduit le même corollaire que celui de la proposition 4.2.2:

Corollaire 8.3.2 *Soit $K : \widetilde{\mathcal{X}}^k \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}^k$, et $K' : \widehat{\mathcal{X}}^k \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}^k$ deux opérateurs compacts. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow \infty} \|(Id \perp P_J^k)K\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{X}}^k)} &= 0 & \lim_{J \rightarrow \infty} \|(Id \perp \widehat{P}_J^k)K'\|_{\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{X}}^k)} &= 0 \\ \lim_{J \rightarrow \infty} \|K(Id \perp P_J^k)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{X}}^k)} &= 0 & \lim_{J \rightarrow \infty} \|K'(Id \perp \widehat{P}_J^k)\|_{\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{X}}^k)} &= 0. \end{aligned}$$

On note $P_J : \widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}_J = \widetilde{\mathcal{X}}_J^1 + \widetilde{\mathcal{X}}_J^2$, $P_J \mathbf{u} = \sum_j P_J^k \mathbf{u}^j$, pour $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 \in \widetilde{\mathcal{X}}$.

On fait de même pour $\widehat{P}_J$.

On rappelle que l'opérateur intégral L peut être défini par $L\mathbf{u} = (L^1\mathbf{u}, L^2\mathbf{u})^T$, avec $L^j : \widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}^k$. On note alors:

$$L_J^k = \widehat{P}_J^k L_k P_J : \widetilde{\mathcal{X}}_J \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_J^k \quad (8.3.15)$$

$$L_J^{kl} = \widehat{P}_J^k L_k P_J^l : \widetilde{\mathcal{X}}_J^l \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_J^k \quad (8.3.16)$$

et

$$L_J \mathbf{u} = (L_J^1 \mathbf{u}, L_J^2 \mathbf{u})^T : \widetilde{\mathcal{X}}_J \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_J. \quad (8.3.17)$$

on a la même condition «inf-sup» que dans la proposition 4.2.3

Proposition 8.3.2 *Il existe une constante $C_0 > 0$ et $J_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $J \geq J_0$,*

$$\inf_{\mathbf{u}_J \in \widetilde{\mathcal{X}}_J \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v}_J \in \widetilde{\mathcal{X}}_J \setminus \{0\}} \frac{|\langle L_J \mathbf{u}_J, \mathbf{v}_J \rangle|}{\|\mathbf{u}_J\|_{\widetilde{\mathcal{X}}} \|\mathbf{v}_J\|_{\widehat{\mathcal{X}}}} \geq C_0, \quad (8.3.18)$$

et son corollaire

Corollaire 8.3.3 1. Pour $J \geq J_0$, L_J est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{X}}_J$ vers $\hat{\mathcal{X}}_J$.

2. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $J \geq J_0$, si $\mathbf{u}_J$ est la solution de

$$L_J \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_J := (\hat{P}_J^1 \mathbf{f}, \hat{P}_J^2 \mathbf{f}), \quad (8.3.19)$$

et si $\mathbf{u}$ est la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$ dans $\tilde{\mathcal{X}}$, alors

$$\|\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_J\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \leq C(\|\mathbf{f} \perp \mathbf{f}_J\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}}). \quad (8.3.20)$$

En particulier, $(\mathbf{u}_J)$ converge vers la solution cherchée $\mathbf{u}$ en norme d'énergie.

Ici, même avec un second membre régulier, la solution de l'équation intégrale admet des singularités, et le terme de «régularité» $\|(1 \perp P_J)\mathbf{u}\|$ va pénaliser la méthode de Galerkin, réduisant sa convergence en $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ où $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ est un réel arbitraire, et h le pas de subdivision ($\mathcal{O}(2^{\perp J})$).

Toujours suivant l'analyse du cas des surfaces fermées, on va modifier la méthode de Galerkin conforme en une méthode non conforme qui aura l'avantage de pouvoir s'implémenter et d'utiliser l'analyse des éléments finis classiques (et des ondelettes sur des espaces de Sobolev classiques).

8.4 Le système modifié: perturbation et changement de variables.

8.4.1 Le système perturbé

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_J^* &= (\tilde{\Lambda}_J, \|\cdot\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}}) \times (\Lambda_J^*, \|\cdot\|_{H^{-\frac{1}{2}}}) \\ \mathcal{Y}^* &= \tilde{H}^{\frac{1}{2}} \times \tilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}. \\ \hat{\mathcal{Y}}^* &:= H^{\perp \frac{1}{2}} \times H_*^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

L_J induit un opérateur bijectif (pour J assez grand) $\tilde{L}_J : \mathcal{Y}_J^* \rightarrow \hat{\mathcal{Y}}_J^*$, où $\hat{\mathcal{Y}}_J^*$ est le L^2 -dual de $\mathcal{Y}_J^*$.

$$\tilde{L}_J = \begin{pmatrix} k^2 \tilde{L}_J^{11} & k^2 \tilde{L}_J^{12} \\ k^2 \tilde{L}_J^{21} & \perp \tilde{L}_J^{22} \end{pmatrix}$$

et pour tout $\lambda_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$, et tout $\mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}_J^{11} \lambda_J^1, \mu_J^1 \rangle &= \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \\ \langle \tilde{L}_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle &= \langle V \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \\ \langle \tilde{L}_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle &= \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ \langle \tilde{L}_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle &= \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ &\quad \perp k^2 \langle V \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \end{aligned}$$

Grâce à nouveau aux équivalences de normes sur $\tilde{\mathcal{X}}$ (cf. théorème 7.1.1), on a la

Proposition 8.4.1 *Il existe deux constantes J_0 et $C > 0$ telles que, pour $J \geq J_0$,*

$$\inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{\langle \tilde{L}_J \lambda_J, \mu_J \rangle}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J^*} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J^*}} \geq C \quad (8.4.1)$$

et on a un corollaire analogue au corollaire 8.3.3, mais ici, on exploite la forme des espaces discrets:

Corollaire 8.4.1 *Si $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}}$ et si $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}$, et si (décompositions de Hodge)*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \hat{\lambda}^1 + \nabla_\Gamma \hat{\lambda}^2 \quad \hat{\lambda} := (\hat{\lambda}^1, \hat{\lambda}^2) \in \hat{\mathcal{Y}}^*, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2, \quad \lambda := (\lambda^1, \lambda^2) \in \mathcal{Y}^*, \end{aligned}$$

alors

$$\hat{P}_J \mathbf{f} = \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \Pi_J^0 \hat{\lambda}^1 + \nabla_\Gamma \check{\Pi}_J \hat{\lambda}^2 \quad (8.4.2)$$

$$P_J \mathbf{u} = \mathbf{rot}_\Gamma \Pi_J^0 \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \check{\Pi}_J \lambda^2, \quad (8.4.3)$$

où $\check{\Pi}_J$ est le projecteur L^2_* orthogonal sur Λ_J^* , et Π_J^0 est le projecteur L^2 -orthogonal sur $\tilde{\Lambda}_J$.

De plus, si $\mathbf{u}$ est la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$, et si $\lambda_J \in \mathcal{Y}_J$ est la solution de

$$\begin{aligned} \forall \mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*, \\ \langle \tilde{L}\lambda_J, \mu_J \rangle &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 + \nabla_\Gamma \Delta_\Gamma^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ &= \perp \langle \hat{\lambda}^1, \mu_J^1 \rangle \perp \langle \hat{\lambda}^2, \mu_J^2 \rangle \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

alors il existe une constante C indépendante de J telle que

$$\begin{aligned} \|\lambda^1 \perp \lambda_J^1\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}} + \|\lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \\ \leq C(\|(1 \perp \Pi_J^0)\hat{\lambda}^1\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|(1 \perp \check{\Pi}_J)\hat{\lambda}^2\|_{H_*^{\frac{1}{2}}}) \\ + \|(1 \perp \Pi_J^0)\lambda^1\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}} + \|(1 \perp \check{\Pi}_J)\lambda^2\|_{\tilde{H}_*^{-\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

C'est exactement le résultat du corollaire 8.3.3 avec les relations liant P_J , $\hat{P}_J$, $\check{\Pi}_J$ et Π_J^0 vues dans la proposition 8.3.1.

Pour pouvoir calculer les éléments issus de l'inverse du laplacien (Neumann), on va *perturber* le système discret et introduire deux variables auxiliaires, relatives aux laplaciens. La perturbation va nous amener à changer les espaces de résolution, et on quitte donc le cadre de résolution dans $\mathcal{X}$. En fait, on passe d'une méthode de résolution *conforme* à une méthode de résolution *non conforme* comme on le verra par la suite.

Définition 8.4.1 On note Q_J la projection de $H_*^1(\Gamma_0)$ sur $\Lambda_J^*(\Gamma_0)$ orthogonale pour le produit scalaire $\langle \lambda, \mu \rangle_* = \langle \nabla_\Gamma \lambda, \nabla_\Gamma \mu \rangle_{L^2(\Gamma_0)}$. On note aussi $\Delta_{J,\text{Neu}}^{\perp 1} := Q_J(\Delta_{\Gamma_0,\text{Neu}}^{\perp 1}|_{\Lambda_J^*})$.

Lemme 8.4.1 Pour tout J , et tout $\mu_J \in \Lambda_J^*$, $\zeta_J := \Delta_{J,\text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J$ est la solution du problème variationnel (discret)

$$\forall \zeta'_J \in \Lambda_J^*, \int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma \zeta_J \overline{\nabla_\Gamma \zeta'_J} ds = \int_{\Gamma_0} \mu_J \overline{\zeta'_J} ds. \quad (8.4.6)$$

De plus, Q_J est autoadjoint, uniformément borné dans $\mathcal{L}(H_*^1)$, et

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda \perp Q_J \lambda\|_{H_*^1} = 0$$

pour tout $\lambda \in H_*^1$.

Définition 8.4.2 On définit l'opérateur $\tilde{T}_J$ sur $\mathcal{Y}_J^*$ par:

$$\tilde{T}_J = \begin{pmatrix} k^2 \tilde{T}_J^{11} & k^2 \tilde{T}_J^{12} \\ k^2 \tilde{T}_J^{21} & \perp \tilde{T}_J^{22} \end{pmatrix} \quad (8.4.7)$$

avec

$$\tilde{T}_J^{11} = \tilde{L}_J^{11} \quad (8.4.8)$$

et pour tout $\lambda_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$, et tout $\mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$,

$$\langle \tilde{T}_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle = \langle V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \quad (8.4.9)$$

$$\langle \tilde{T}_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle = \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle. \quad (8.4.10)$$

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{T}_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ &= \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ & \quad \perp k^2 \langle V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

On peut l'écrire aussi comme perturbation de $\tilde{L}_J$:

$$\tilde{T}_J = \tilde{L}_J \perp R_J \quad (8.4.12)$$

avec

$$R_J = \begin{pmatrix} 0 & k^2 R_J^{12} \\ k^2 R_J^{21} & k^2 R_J^{22} \end{pmatrix} \quad (8.4.13)$$

$$\langle R_J^{12} \lambda_J^2, \mu_J^1 \rangle = \langle V \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \quad (8.4.14)$$

$$\langle R_J^{21} \lambda_J^1, \mu_J^2 \rangle = \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle, \quad (8.4.15)$$

$$\begin{aligned} & \langle R_J^{22} \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle \\ &= \langle V \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & \quad + \langle V \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \end{aligned} \quad (8.4.16)$$

$$\begin{aligned} &= \langle V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & \quad + \langle V \nabla_\Gamma (1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle. \end{aligned}$$

Proposition 8.4.2 *Il existe deux constantes C et J_1 tel que pour tout $J \geq J_1$,*

$$\inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{T}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J^*} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J^*}} \geq C. \quad (8.4.17)$$

Preuve : Comme pour montrer la condition inf-sup (4.3.17), on obtient

$$\begin{aligned} & \inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{L}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J^*} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J^*}} \\ & \leq \inf_{\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \sup_{\mu_J \in \mathcal{Y}_J^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle \tilde{T}_J \lambda_J, \mu_J \rangle|}{\|\lambda_J\|_{\mathcal{Y}_J^*} \|\mu_J\|_{\mathcal{Y}_J^*}} + \varepsilon_J \end{aligned}$$

avec

$$\|R_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J^* \leftarrow \mathcal{Y}_J^*} \lesssim \varepsilon_J$$

et

$$\varepsilon_J = \|(1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1}\|_{H_*^1 \leftarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}}$$

L'injection $\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}} \hookrightarrow \tilde{H}^{\perp 1}$ étant compacte,

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \varepsilon_J = 0, \quad \lim_{J \rightarrow \infty} \|R_J\|_{\hat{\mathcal{Y}}_J^* \leftarrow \mathcal{Y}_J^*} = 0$$

La condition inf-sup sur $\tilde{T}_J$ est alors déduite de la condition inf-sup sur $\tilde{L}_J$, en prenant $J_1 \geq J_0$ suffisamment grand.

□

Si $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}} \cap L^2(\Gamma_0)$, on note $\tilde{f}_J = (\tilde{f}_J^1, \tilde{f}_J^2)$ l'élément de $\hat{\mathcal{Y}}_J^*$ vérifiant, pour tout $\mu_J = (\mu_J^1, \mu_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$

$$\langle \tilde{f}_J^1, \mu_J^1 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle \quad (8.4.18)$$

$$\langle \tilde{f}_J^2, \mu_J^2 \rangle = \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \quad (8.4.19)$$

et $\tilde{F}_J = (\tilde{F}_J^1, \tilde{F}_J^2)$ l'élément de $\hat{\mathcal{Y}}_J^*$ vérifiant

$$\langle \tilde{F}_J^1, \mu_J^1 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 \rangle \quad (8.4.20)$$

$$\langle \tilde{F}_J^2, \mu_J^2 \rangle = \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \quad (8.4.21)$$

En particulier, $\tilde{f}_J^1 = \tilde{F}_J^1$.

Nous avons donc deux problèmes résolubles pour J suffisamment grand:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_J \lambda_J &= \tilde{f}_J \\ \tilde{T}_J \theta_J &= \tilde{F}_J\end{aligned}$$

On rappelle que le premier problème n'est autre que la méthode de Galerkin choisie pour la résolution de l'équation intégrale de départ, ou, plus sobrement, si

$$\mathbf{u}_J = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 + \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2,$$

alors

$$L_J \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_J.$$

Du corollaire 8.3.3, on a une estimation de l'erreur $\|\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_J\|$, entre la solution de l'équation intégrale et la solution «Galerkin», en fonction (de la régularité) du second membre et (de la régularité) de la solution $\mathbf{u}$. Il nous reste donc à estimer l'erreur commise en résolvant le système perturbé.

Théorème 8.4.1 *Soit $\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}} \cap L^2(\Gamma_0)$. Soit $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}$ la solution de $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$. On note*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 \\ &= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2\end{aligned}$$

*la décomposition de Hodge relative à $\mathbf{u}$, avec $\mathbf{u}^k \in \tilde{\mathcal{X}}^k$, $k = 1, 2$.
Pour $J \geq J_1$, soit $\lambda_J \in \mathcal{Y}_J^*$ la solution de*

$$\forall \mu_J \in \mathcal{Y}_J^*, \langle \tilde{L}_J \lambda_J, \mu_J \rangle = \langle \tilde{f}_J, \mu_J \rangle, \quad (8.4.22)$$

et $\theta_J \in \mathcal{Y}_J^$ la solution de*

$$\forall \mu_J \in \mathcal{Y}_J^*, \langle \tilde{T}_J \theta_J, \mu_J \rangle = \langle \tilde{F}_J, \mu_J \rangle. \quad (8.4.23)$$

Si

$$\varepsilon_J := \|(1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1}\|_{H_{*}^1 \leftarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \quad (8.4.24)$$

alors on a l'estimation

$$\|\theta_J \perp \lambda_J\|_{Y_J} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{\hat{X}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}) \varepsilon_J. \quad (8.4.25)$$

La suite (ε_J) tend vers 0 lorsque J tend vers l'infini, et

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda_J^1 \perp \theta_J^1\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (8.4.26)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|\lambda_J^2 \perp \theta_J^2\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} = 0 \quad (8.4.27)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \mathbf{rot}_\Gamma \theta_J^1 = \mathbf{u}^1 = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 \quad \text{dans } \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}} \quad (8.4.28)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \theta_J^2 = \mathbf{div}_\Gamma \mathbf{u} \quad \text{dans } \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}} \quad (8.4.29)$$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \theta_J^2 = \mathbf{u}^2 = \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2 \quad \text{dans } L^2 \quad (8.4.30)$$

Preuve: en tout point similaire à la preuve du théorème 4.3.1

□

Remarques: encore une fois, il est nécessaire ici de supposer $\mathbf{f} \in L^2$, pour obtenir un second membre continu dans les espaces ad hoc. En outre, on a à faire à une méthode *non conforme*: la solution «discrete»

$$\mathbf{u}_J = \mathbf{rot}_\Gamma \theta_J^1 + \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \theta_J^2$$

n'est pas dans $\tilde{\mathcal{X}} = T\tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma)$. La relation de convergence

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \theta_J^2 = \lambda^2.$$

montre que la méthode donne une approximation de la densité de charge qui vit sur la plaque, et cette fois, on a une convergence en norme d'énergie.

8.4.2 Laplacien discret.

On va ramener le problème perturbé à une méthode de Galerkin sur un espace à quatre variables scalaires. On rappelle que, pour tout $\mu_J^2 \in \Lambda_J^*$,

$$\zeta_J := Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 = \Delta_{J, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2$$

est solution du problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \zeta_J \in \Lambda_J^* \text{ tel que } \forall \varphi_J \in \Lambda_J, \\ & \int_{\Gamma_0} (\nabla_\Gamma \zeta_J) \overline{\nabla_\Gamma \varphi_J} ds = \perp \int_{\Gamma_0} \mu_J^2 \overline{\varphi_J} ds. \end{aligned}$$

Suivant l'écriture du problème perturbé, on introduit la variable

$$\zeta_J := Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2. \quad (8.4.31)$$

Revenons au système discret (perturbé); on cherche $\lambda_J \in (\mathcal{Y}_J^*)$ tel que, pour tout $\mu_J \in (\mathcal{Y}_J^*)$:

$$\begin{aligned} & k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \mathbf{rot} \mu_J^1 > + k^2 < V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \mathbf{rot}_\Gamma \mu_J^1 > \\ & + k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 > \\ & \perp < V \lambda_J^2, \mu_J^2 > + k^2 < V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 > \\ & = < \mathbf{f}, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 > + < \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 > . \end{aligned} \quad (8.4.32)$$

Prenant $\mu_J^1 = 0$,

$$\begin{aligned} & k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 > \\ & \perp < V \lambda_J^2, \mu_J^2 > + k^2 < V \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 > \\ & = < \mathbf{f}, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 > . \end{aligned}$$

Posons, en remarquant que $\zeta_J = Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2$, et toujours en supposant $\mathbf{f} \in L^2(\Gamma_0)$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}} \tilde{\eta}_J := & k^2 \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_0} V_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 \\ & + k^2 \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_0} V_\Gamma \nabla_\Gamma \zeta_J \\ & \perp \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_0} \mathbf{f} \end{aligned} \quad (8.4.33)$$

et

$$\eta_J = Q_J \tilde{\eta}_J. \quad (8.4.34)$$

On notera que $\tilde{\eta}_J$ est bien définie, car pour toute fonction $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_0)$,

$$\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{1}_{\Gamma_0}\mathbf{g}) \in \tilde{H}_*^{\perp 1}(\Gamma_0).$$

Ainsi, $\tilde{\eta}_J$ est solution du problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \tilde{\eta}_J \in H_*^1 \text{ tel que} \\ & \forall \varphi \in H_*^1, \\ & \int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma \tilde{\eta}_J \overline{\nabla_\Gamma \varphi} \, ds = \langle k^2 V \operatorname{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \\ & \quad + \langle k^2 V \nabla_\Gamma \zeta_J, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \\ & \quad \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \varphi \rangle_{L^2(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

et que $\eta_J = Q_J \tilde{\eta}_J$ est solution du problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \eta_J \in \Lambda_J^* \text{ tel que} \\ & \forall \varphi_J \in \Lambda_J^*, \\ & \int_\Gamma \nabla_\Gamma \eta_J \overline{\nabla_\Gamma \varphi_J} \, ds = \langle k^2 V \operatorname{rot}_\Gamma \lambda_J^1, \nabla_\Gamma \varphi_J \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \\ & \quad + \langle k^2 V \nabla_\Gamma \zeta_J, \nabla_\Gamma \varphi_J \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \\ & \quad \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \varphi_J \rangle_{L^2(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \perp \langle \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}} \tilde{\eta}_J, Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & = \langle \nabla_\Gamma \tilde{\eta}_J, \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & = \langle \nabla_\Gamma Q_J \tilde{\eta}_J, \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu_J^2 \rangle \\ & = \perp \langle \eta_J, \mu_J^2 \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$\langle \eta_J, \mu_J^2 \rangle + \langle V \lambda_J^2, \mu_J^2 \rangle = 0; \quad (8.4.35)$$

et ce sera l'équation relative à λ_J^2 . Enfin, en prenant $\mu_J^2 = 0$ dans (8.4.32), on obtient

$$k^2 \operatorname{rot}_\Gamma V_\Gamma \operatorname{rot}_\Gamma \lambda_J^1 + k^2 \operatorname{rot}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \lambda_J^1 = \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f}. \quad (8.4.36)$$

Réciproquement, une solution $(\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J)^T$ des équations (8.4.31), (8.4.33), (8.4.36), (8.4.35) est solution de (8.4.32).

On note alors

$$\mathcal{Z}_J^* := \mathcal{Y}_J^* \times (\Lambda_J^*, \|\cdot\|_1)^2, \quad (8.4.37)$$

et $\widehat{\mathcal{Z}}_J^*$ l'espace L^2 -dual correspondant. Le problème discret est équivalent au problème:

Trouver $Z_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J)$ dans $\mathcal{Z}_J^$ tel que pour tout Z'_J dans $\mathcal{Z}_J^*$,*

$$\langle \mathcal{A}_J Z_J, Z'_J \rangle_{L^2(\Gamma_0)} = \mathcal{F}(Z'_J)$$

avec

$$\mathcal{A}_J := \begin{pmatrix} k^2 T_J^{11} & 0 & W_J & 0 \\ 0 & k^2 T_J^{22} & 0 & Id \\ 0 & Id & \perp \Delta_{J, \text{Neu}} & 0 \\ W'_J & 0 & W_J^0 & \perp \Delta_{J, \text{Neu}} \end{pmatrix} \quad (8.4.38)$$

$$W_J = k^2 \operatorname{rot}_\Gamma V_\Gamma \nabla_\Gamma \quad (8.4.39)$$

$$W'_J = k^2 \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_0} V_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \quad (8.4.40)$$

$$W_J^0 = k^2 \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{1}_{\Gamma_0} V_\Gamma \nabla_\Gamma \quad (8.4.41)$$

et si

$$Z'_J = (\mu_J^1, \mu_J^2, \zeta'_J, \eta'_J)^T, \quad (8.4.42)$$

$$\mathcal{F}(Z'_J) = \langle \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \eta'_J \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \quad (8.4.43)$$

Les opérateurs W_J, W'_J et W_J^0 sont des opérateurs de $\mathcal{Z}_J$ dans son dual.

On notera A_J la matrice de $\mathcal{A}_J$ relative à une base (pour distinguer matrices et opérateurs).

8.4.3 Traitement des constantes: le système augmenté.

Jusqu'alors, on travaille sur l'espace

$$\mathcal{Z}_J^* = \widetilde{\Lambda}_J \times (\Lambda_J^*)^3$$

qui est assez contraignant, faisant apparaître des éléments de moyennes nulles. Comme pour le cas des surfaces régulières sans bord, on modifie le système pour obtenir un problème équivalent d'inconnue dans

$$\mathcal{Z}_J = \tilde{\Lambda}_J \times (\Lambda_J)^3$$

On commence par remarquer que le problème perturbé avec changement de variables (matrice A_J) est une méthode de Galerkin pour un problème en la variable

$$Z \in \mathcal{Z}^* := \mathcal{Y}^* \times H_*^1 \times H_*^1; \quad \mathcal{Y}^* := \tilde{H}^{\frac{1}{2}} \times \tilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}.$$

défini par:

$$\mathcal{L}Z = F$$

avec, pour tout $Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta)^T \in \mathcal{Z}^*$, et tout $Z' = (\mu^1, \mu^2, \zeta', \eta')^T \in \mathcal{Z}^*$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle := & k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \mathbf{rot}_\Gamma \mu^1 \rangle_{L^2} \\ & + k^2 \langle V \nabla_\Gamma \zeta, \mathbf{rot}_\Gamma \mu^1 \rangle_{L^2} \\ & + \langle V \lambda^2, \mu^2 \rangle_{L^2} + \langle \eta, \mu^2 \rangle_{L^2} \\ & + \langle \lambda^2, \zeta' \rangle_{L^2} + \langle \nabla_\Gamma \zeta, \nabla_\Gamma \zeta' \rangle_{L^2} \\ & \perp k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2} \\ & \perp k^2 \langle V \nabla_\Gamma \zeta, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2} + \langle \nabla_\Gamma \eta, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (8.4.44)$$

et le second membre est donné par

$$\langle F, Z' \rangle := \langle \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu^1 \rangle_{L^2} \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \eta' \rangle_{L^2}. \quad (8.4.45)$$

$\mathcal{L}$ est bien défini sur $\mathcal{Z}$ tout entier, avec

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Y} \times H^1 \times H^1; \quad \mathcal{Y} := \tilde{H}^{\frac{1}{2}} \times \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}.$$

On note

$$\hat{\mathcal{Z}} := H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times \tilde{H}^{\perp 1} \times \tilde{H}^{\perp 1}$$

le L^2 -dual de $\mathcal{Z}$. Alors on a le

Lemme 8.4.2

Modulo un opérateur compact, $\mathcal{L}$ est fortement coercif, donc un opérateur de

Fredholm de $\mathcal{Z}$ vers son L^2 -dual $\widehat{\mathcal{Z}}$; de plus

$$Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta)^T \in \text{Ker } \mathcal{L} \iff \begin{cases} \lambda^1 = 0, \\ \lambda^2 = 0, \\ \zeta \in \mathbb{C} \\ \eta = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{Im} \mathcal{L} = H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times \widetilde{H}^{\perp 1} \times \widetilde{H}_*^{\perp 1}$$

Preuve: Le fait que ce soit un opérateur de Fredholm vient (essentiellement) du théorème 6.3.1. En ce qui concerne le noyau, si $Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta)^T \in \text{Ker } \mathcal{L}$, en prenant pour fonction test $Z' = (0, 0, 1, 0)^T$, on trouve

$$\langle \lambda^2, 1 \rangle_{L^2} = 0$$

donc $\lambda^2 \in \widetilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}$. Ensuite, en prenant $Z' = (\mu^1, \mu^2, \zeta', \eta')^T$ tel que μ^2 , ζ' et η' soient à moyenne nulle, on a

$$\langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle = \langle \mathcal{L}\widetilde{Z}, Z' \rangle$$

avec

$$\widetilde{Z} = Z \perp (0, 0, \int_{\Gamma_0} \zeta, \int_{\Gamma_0} \eta)^T$$

Enfin, en choisissant μ^2 et ζ' telles que

$$\zeta' = \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \mu^2$$

ce qui est toujours possible car on a choisi μ^2 à moyenne nulle, on obtient

$$L\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = \text{rot}_{\Gamma} \lambda^1 + \nabla_{\Gamma} \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2$$

où L est notre opérateur intégral de départ. En conséquence, de l'injectivité de L , $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$ et η et ζ sont des constantes. Revenant à l'équation $\mathcal{L}Z = 0$, elle se résume à

$$\langle \eta, \mu^2 \rangle = 0 \quad (\forall \mu^2 \in \widetilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}),$$

et donc $\eta = 0$. On a donc

$$\mathcal{Ker}\mathcal{L} = \mathbb{C}(0, 0, 1, 0)^T.$$

En ce qui concerne l'image, elle est de codimension 1 et est clairement incluse dans

$$H^{\perp \frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \times \tilde{H}^{\perp 1} \times \tilde{H}_*^{\perp 1}$$

et donc cette inclusion est une égalité.

□

$\mathcal{L}$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{Z}/\mathcal{Ker}\mathcal{L}$ sur $\mathcal{Im}\mathcal{L}$. On ramène l'opérateur à un isomorphisme entre $\mathcal{Z} \times \mathbb{C}^3$ en rajoutant trois lignes et trois colonnes, gardant l'équivalence avec le problème perturbé:

Lemme 8.4.3 *On pose $\Omega = \mathcal{Z} \times \mathbb{C}^3$, avec*

$$\mathcal{Z} = \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0),$$

et, avec les notations précédentes, pour

$$\begin{aligned} U &= (Z, \underline{\alpha})^T \in \Omega, & Z &= (\lambda^1, \dots, \lambda^4) & \underline{\alpha} &:= (\alpha_2, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{C}^3, \\ U' &= (Z', \underline{\alpha}')^T \in \Omega, & Z' &= (\mu^1, \dots, \mu^4), & \underline{\alpha}' &:= (\alpha'_2, \dots, \alpha'_4) \in \mathbb{C}^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}U, U' \rangle &:= \langle \mathcal{L}Z, Z' \rangle \\ &+ \sum_{k=2}^4 \langle \lambda^k, \alpha'_k \rangle_{L^2} \\ &+ \sum_{k=2}^4 \langle \alpha_k, \mu^k \rangle_{L^2} \end{aligned} \tag{8.4.46}$$

Alors, modulo un opérateur compact, $\mathcal{M}$ est fortement coercif de Ω dans son dual

$$\hat{\Omega} := \hat{\mathcal{Z}} \times \mathbb{C}^3,$$

munis du crochet de dualité

$$\begin{aligned} \text{pour } V &= (F, \underline{\beta}) \in \hat{\Omega}, \quad U = (Z, \underline{\alpha}) \in \Omega, \\ \langle V, U \rangle_{\hat{\Omega}, \Omega} &:= \langle F, Z \rangle_{\hat{\mathcal{Z}}} + \sum_{k=2}^4 \beta_k \overline{\alpha_k}. \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{M}$ est un isomorphisme entre ces deux espaces.

Preuve: identique à la preuve du lemme 4.3.3 en remplaçant le laplacien surfacique par $\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}$.

□

En guise de corollaire, on a le

Lemme 8.4.4 *Soit $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}} = TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) \cap L^2(\Gamma_0)$, et*

$$F = (\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, 0, 0, \text{div}_\Gamma(\mathbf{1}_{\Gamma_0} \mathbf{f})) \in \widehat{\mathcal{Z}} \quad \Phi = (F, 0_{\mathbb{C}^3}) \in \widehat{\Omega}.$$

Alors la solution $U = (Z, \underline{\alpha}) \in \Omega$ de $\mathcal{M}U = \Phi$ vérifie:

$$\underline{\alpha} \equiv 0$$

$$Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta) \in \mathcal{Z}^* = \widetilde{H}^{\frac{1}{2}} \times \widetilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}} \times H_*^1 \times H_*^1$$

$$\mathbf{u} = \text{rot}_\Gamma \lambda^1 + \nabla_\Gamma \zeta \text{ est solution de } L\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \widetilde{\mathcal{X}}.$$

Cela signifie (la réciproque étant aussi vraie) que résoudre $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$ est équivalent à résoudre $\mathcal{M}U = F$ avec un second membre bien choisi et une condition (minimale) sur $\mathbf{f}$.

En faisant une méthode de Galerkin pour l'opérateur $\mathcal{M}$, on obtient le résultat cherché (élimination des constantes): on pose

$$\Omega_J := \widetilde{\Lambda}_J \times \Lambda_J^3 \times \mathbb{C}^3.$$

alors

Proposition 8.4.3 *Il existe $J_0 > 0$ et une constante C_0 tels que, pour $J \geq J_0$,*

$$\inf_{U_J \in \Omega_J \setminus \{0\}} \sup_{U'_J \in \Omega_J \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{M}U_J, U'_J \rangle}{\|U_J\|_\Omega \|U'_J\|_\Omega} \geq C_0,$$

$\mathcal{M}$ induit donc un opérateur $\mathcal{M}_J$ de Ω_J dans son dual, bijectif pour J suffisamment grand.

De plus, si $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}} \cap L^2(\Gamma_0)$, et si, pour J suffisamment grand, U_J est solution de

$$\mathcal{M}U_J = F_J \in \widehat{\Omega}, \tag{8.4.47}$$

avec, pour tout $U'_J = (Z'_J, \underline{\alpha}') \in \Omega$, $Z'_J = (\mu_J^1, \mu_J^2, \zeta'_J, \eta'_J) \in \widehat{\mathcal{Z}}$,

$$\langle F_J, U'_J \rangle = \langle \text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \mu_J^1 \rangle \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \eta'_J \rangle,$$

alors, en notant

$$\begin{aligned} U_J &= (Z_J, \underline{\alpha}_J), \\ Z_J &= (\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J), \end{aligned}$$

$\lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J$ sont à moyennes nulles, et

$$\theta_J := (\lambda_J^1, \lambda_J^2) \in \mathcal{Y}_J^*$$

est solution du problème perturbé discret (cf. théorème 8.4.1)

$$\tilde{T}_J \theta_J = \tilde{F}_J.$$

Preuve : La condition inf-sup est une conséquence du fait que $\mathcal{M}$ est fortement coercif, modulo un opérateur compact (voir la preuve de la proposition 4.2.3). Le lien avec le problème perturbé se lit facilement en prenant pour fonctions tests, dans un premier temps, des éléments du type $(0_{\mathcal{Z}}, \underline{\alpha}')$ pour avoir des moyennes nulles, puis en prenant des fonctions tests à moyennes nulles, Z_J est solution de

$$\langle \mathcal{L} Z_J, Z'_J \rangle = 0, \quad (Z'_J \in \mathcal{Z}^*).$$

□

La matrice B_J obtenue en représentant $\mathcal{M}_J$ suivant les bases d'ondelettes (ψ_τ) et $(\tilde{\psi}_\tau)$ est la matrice A_J (représentation de $\mathcal{A}_J$ de la section précédente) augmentée de trois lignes et de trois colonnes: elle s'écrit par blocs

$$B_J := \begin{pmatrix} A_J & Y_J \\ Y_J^* & 0 \end{pmatrix}$$

A_J est une matrice carrée de taille $\sharp \tilde{\Lambda}_J \times 3 \sharp \Lambda_J$, tandis que la matrice Y_J (resp. Y_J^*) contient $\sharp \tilde{\Lambda}_J \times 3 \sharp \Lambda_J$ lignes et trois colonnes (resp. Y_J^* a trois lignes et $\sharp \Lambda_J \times 3 \sharp \Lambda_J$ colonnes), définie par blocs par

$$\begin{aligned} Y_J &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\tilde{\Lambda}_J \times 3} \\ \mathbf{D}_J \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}_J &:= \text{Diag}((1, \Psi), (1, \Psi), (1, \Psi)), \\ Y_J^* &= (\mathbf{0}_{3 \times \tilde{\Lambda}_J} \quad \mathbf{D}_J^*) \\ \mathbf{D}_J^* &= \text{Diag}((\Psi, 1), (\Psi, 1), (\Psi, 1)), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} (1, \Psi) &= (< 1, \psi_\tau >_{L^2(\Gamma_0)})^T && \text{(matrice colonne de taille } \sharp\Lambda_J), \\ (\Psi, 1) &= (< \psi_\tau, 1 >_{L^2(\Gamma_0)}) && \text{(matrice ligne de taille } \sharp\Lambda_J), \end{aligned}$$

$\mathbf{0}_{\tilde{\Lambda}_J \times 3}$ la matrice nulle à trois colonnes et $\sharp\tilde{\Lambda}_J$ lignes, et $\mathbf{0}_{3 \times \tilde{\Lambda}_J}$ sa matrice transposée. La matrice A_J est définie par blocs

$$A_J := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{11,(\tau',\tau)} &:= k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_\tau, \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_{\tau'} >_{L^2(\Gamma_0)} \\ A_{22,(\tau',\tau)} &:= < V \psi_\tau, \psi_{\tau'} >_{L^2(\Gamma_0)} \\ A_{33,(\tau',\tau)} &= A_{44,(\tau',\tau)} := < \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2(\Gamma_0)} \\ A_{24,(\tau',\tau)} &= A_{32,(\tau',\tau)} := < \psi_\tau, \psi_{\tau'} >_{L^2(\Gamma_0)} \\ A_{41,(\tau',\tau)} &:= \perp k^2 < V \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2(\Gamma_0)} \\ A_{43,(\tau',\tau)} &:= \perp k^2 < V \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} >_{L^2(\Gamma_0)}. \end{aligned}$$

8.5 Estimations d'erreurs pour la méthode perturbée.

On est dans ce paragraphe au cœur de la méthode présentée ici, à savoir la résolution des équations intégrales pour le problème de Maxwell par des méthodes utilisant des ondelettes.

On a déjà exhibé cette méthode pour le cas des surfaces fermées régulières. La structure générale de ce paragraphe va suivre celle du paragraphe 5.3.1, et on va montrer que, dans les estimations finales du moins, les différences apparaissant entre le cas de la section 5.3.1 et le cas (ici) des plaques ouvertes ne proviennent en définitive que de la nature du problème, c'est-à-dire, en réalité, que de la géométrie de la surface métallique.

En effet, dans le cas des surfaces régulières fermées, on sait que la solution de l'équation intégrale a «autant» de régularité que le second membre (onde incidente). Dans le cas des plaques ouvertes, des singularités apparaissent du fait de la géométrie du problème (cf. [12]); les estimations a priori étant liées à

la régularité de la solution, on ne peut pas espérer mieux qu'une convergence (ici) en $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, où h est le pas de subdivision pour, disons, une méthode de discrétisation, cf. [46]. Et c'est précisément ce que l'on obtiendra.

En ce sens, on aura in fine des taux de convergence optimaux.

En ce qui concerne la mise en œuvre, dans notre cas des plaques ouvertes, les différences (avec la section 5.3.1) sont résumées en deux points:

- la nature des espaces, et le comportement des opérateurs. Ces deux notions sont intimement liées, encore une fois, à la nature de la surface. Pour le comportement des opérateurs, on retrouve (essentiellement) le comportement de l'opérateur de simple couche, et les remarques faites plus haut. En ce qui concerne les espaces, on retrouve évidemment, dans le cas discret, deux familles d'ondelettes liées aux deux familles d'espaces de Sobolev sous-jacents (avec ou sans condition au bord). Dans les coefficients de la matrice, on trouvera des éléments faisant intervenir ces deux types d'ondelettes, et des précautions seront de mises pour exhiber une (bonne) décroissance de ces éléments (lorsque le niveau de résolution monte).
- Le seuillage. On comprend bien, avec les espaces en jeu, que l'on doit prendre des précautions lorsque l'on manipule des objets (ou fonctions) «proches» du bord, puisque c'est là que les choses se passent, en quelque sorte. Le seuillage choisi exprime très bien ce phénomène: dans la matrice à compresser, on regarde différemment les éléments contenant des ondelettes proches du bord (quelle que soit la condition au bord) et les éléments ne contenant que des ondelettes «loins» du bord. Pour ces dernières, on applique la stratégie de troncature vue dans la section 5.3.1 (rien n'est «différent» loin du bord...). En revanche, les autres éléments doivent être traités autrement (voire même pas du tout: on les garde) et on applique une stratégie de troncature «spécifique»...

Définition 8.5.1 *On introduit les familles d'espaces, pour tout s réel,*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}}_s &:= TH^s(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) \\ &:= \{\mathbf{f} \in H^s(\Gamma_0)^3 \mid \text{rot}_\Gamma \mathbf{f} \in H^s(\Gamma_0), (\mathbf{f}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\}\end{aligned}\tag{8.5.1}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{X}}_s &:= \widetilde{TH}^s(\text{div}_\Gamma, \Gamma_0) \\ &:= \{\mathbf{u} \in \widetilde{H}^s(\Gamma_0)^3 \mid \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in \widetilde{H}^s(\Gamma_0), (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\}\end{aligned}\tag{8.5.2}$$

Suivant la preuve du théorème 7.2.3, on observera que

$$\widehat{\mathcal{X}}_{\perp s} = \{\mathbf{f}|_{\Gamma_0}; \mathbf{f} \in H^{\perp s}(\Gamma)^3, \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{f} \in H^{\perp s}(\Gamma), (\mathbf{f}, \mathbf{n})_{\mathbb{R}^3} = 0\}, \quad -1 \leq s \leq 0,$$

avec des normes équivalentes. En particulier, $\widetilde{\mathcal{X}}_{\perp \frac{1}{2}} = \widetilde{\mathcal{X}}$, et $\widehat{\mathcal{X}}_{\perp \frac{1}{2}} = \widehat{\mathcal{X}}$. On rappelle que la résolution de l'équation intégrale

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

est équivalente à la résolution de l'équation

$$\mathcal{L}Z = F$$

où

$$Z = (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta) \in \Omega = \widetilde{H}^{\frac{1}{2}} \times \widetilde{H}^{\perp \frac{1}{2}} \times H_*^1 \times H^1$$

avec la condition $\mathbf{f} \in L^2(\Gamma_0)$, $\mathcal{L}$ est donné par (8.4.44) et le second membre F est donné par (8.4.45). La solution $\mathbf{u}$ de l'équation intégrale initiale est donnée par

$$\mathbf{u} = \text{rot}_{\Gamma} \lambda^1 + \nabla_{\Gamma} \zeta.$$

Le théorème 6.3.1 sur la régularité du potentiel de simple couche permet un résultat de régularité sur la solution $\mathbf{u}$ de l'équation intégrale:

Proposition 8.5.1 *Soit $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}_0 = TH^0(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma_0)$, alors la solution $\mathbf{u}$ de l'équation intégrale $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$ est dans $\widetilde{\mathcal{X}}_{\perp \varepsilon}$ pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, c'est à dire*

$$\mathbf{u} \in \widetilde{H}^{\perp \varepsilon}(\Gamma_0), \quad \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in \widetilde{H}^{\perp \varepsilon}(\Gamma_0), \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Preuve: on pose, pour $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \Omega^{\varepsilon} &:= \widetilde{H}^{1\perp \varepsilon} \times \widetilde{H}^{\perp \varepsilon} \times H_*^1 \times H^1 \\ \widehat{\Omega}^{\varepsilon} &:= H^{\perp \varepsilon} \times H^{1\perp \varepsilon} \times \widetilde{H}^{\perp 1} \times \widetilde{H}_*^{\perp 1} \end{aligned}$$

regarde l'opérateur $\mathcal{L}$ comme opérateur de Ω^{ε} dans $\widehat{\Omega}^{\varepsilon}$. Du théorème 6.3.1, et de la forme de l'opérateur $\mathcal{L}$ (voir la proposition 5.4.3), $\mathcal{L}$ est un opérateur de Fredholm de Ω^{ε} vers $\widehat{\Omega}^{\varepsilon}$, injectif, car il l'est pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, c'est donc un isomorphisme. On en déduit $\lambda^2 = \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in \widetilde{H}^{\perp \varepsilon}$, et $\text{rot}_{\Gamma} \lambda^1 \in \widetilde{H}^{\perp \varepsilon}$, et comme $\nabla_{\Gamma} \zeta \in L^2 \subset \widetilde{H}^{\perp \varepsilon}$, on a finalement $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathcal{X}}_{\perp \varepsilon}$.

□

On rappelle enfin que la méthode perturbée (si on impose $\mathbf{f} \in L^2$) est finalement une méthode de Galerkin sur l'opérateur $\mathcal{L}$. Comme pour le cas des surfaces régulières, cf. théorème 5.3.1, on utilise le théorème 8.4.1 et le corollaire 8.4.1 pour trouver les estimations a priori optimales. Pour énoncer le théorème analogue au théorème 5.3.1, on aura besoin du

Lemme 8.5.1 *Avec les notations du théorème 8.4.1, il existe une constante C telle que, pour tout $J > 0$,*

$$\varepsilon_J := \|(1 \perp Q_J) \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1}\|_{H_*^1 \leftarrow \tilde{H}_*^{-\frac{1}{2}}} \leq C 2^{\perp \frac{J}{2}}.$$

Preuve : de la régularité de l'opérateur $\Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1}$, cf. proposition 6.2.2, si on se donne $\lambda^2 \in \tilde{H}_*^{\perp \frac{1}{2}}$ et si on pose $p = \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2$, il nous suffit de montrer

$$\|(1 \perp Q_J)p\|_{H_*^1} \lesssim 2^{\perp \frac{J}{2}} \|p\|_{H_*^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour tout $q \in H_*^1$,

$$\|(1 \perp Q_J)q\|_{H_*^1} \lesssim \|q\|_{H_*^1}$$

et, en reprenant le projecteur orthogonal $\check{\Pi}_J$ de H_*^1 dans Λ_J^* , on a $(1 \perp Q_J)(1 \perp \check{\Pi}_J) = (1 \perp Q_J)$, et donc

$$\|(1 \perp Q_J)p\|_{H_*^1} \lesssim \|(1 \perp \check{\Pi}_J)p\|_{H_*^1}$$

et on conclut grâce à l'inégalité directe.

□

Théorème 8.5.1 *Avec les notations du théorème 8.4.1, soit*

$$\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}}_0 = TH(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0) \subset \hat{\mathcal{X}} = TH^{\perp \frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_0),$$

et soit $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_{\perp \frac{1}{2}}$ la solution de l'équation intégrale

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Soit, pour J suffisamment grand, $\lambda_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2)$ la solution du problème perturbé (cf. théorème 8.4.1)

$$\tilde{T}_J \lambda_J = \tilde{F}_J.$$

On pose

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2, & \mathbf{u}_i &\in \tilde{\mathcal{X}}^i, \\ \tilde{\mathbf{u}}_J^1 &:= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_J^2 &:= \nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda_J^2 \\ \tilde{\mathbf{u}}_J &:= \mathbf{u}_J^1 + \mathbf{u}_J^2.\end{aligned}$$

Alors il existe deux constantes C et J_0 telles que, pour tout $J \geq J_0$ et tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$\|\mathbf{u}^1 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \leq C 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \varepsilon)J} (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} + \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}}), \quad (8.5.3)$$

$$\|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \leq C 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \varepsilon)J} (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} + \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}}), \quad (8.5.4)$$

$$\|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^2\|_{L^2(\Gamma)} \leq C 2^{\perp(1 \perp \varepsilon)J} (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} + \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}}), \quad (8.5.5)$$

avec

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} &:= \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{L^2(\Gamma_0)}, \\ \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} &:= \|\mathbf{u}\|_{\tilde{H}^{-\varepsilon}} + \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{\tilde{H}^{-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Preuve : on utilise les décompositions de Hodge pour écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^1 &= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1, & \mathbf{u}^2 &= \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2 \\ \mathbf{f}^1 &= \nabla_\Gamma \hat{\lambda}^2 & \mathbf{f}^2 &= \mathbf{rot}_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Dir}}^{\perp 1} \hat{\lambda}^1 \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}^1 + \mathbf{f}^2.\end{aligned}$$

D'après le corollaire 8.4.1 et le théorème 8.4.1, on a les estimations

$$\begin{aligned}& \|\mathbf{u}^1 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\tilde{\mathcal{X}}} \\ & \lesssim \|(1 \perp \Pi_J^0) \hat{\lambda}^1\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|(1 \perp \check{\Pi}_J) \hat{\lambda}^2\|_{H_*^{\frac{1}{2}}} \\ & \quad + \|(1 \perp \Pi_J^0) \lambda^1\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}} + \|(1 \perp \check{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\tilde{H}_*^{-\frac{1}{2}}} \\ & \quad + \varepsilon_J (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2})\end{aligned} \quad (8.5.6)$$

et

$$\begin{aligned}& \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \perp \lambda_J^2\|_{\perp \frac{1}{2}} \\ & \lesssim \|(1 \perp \Pi_J^0) \hat{\lambda}^1\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \|(1 \perp \check{\Pi}_J) \hat{\lambda}^2\|_{H_*^{\frac{1}{2}}} \\ & \quad + \varepsilon_J (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2}).\end{aligned} \quad (8.5.7)$$

Grâce au lemme précédent et aux inégalités directes, sachant que la solution $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{X}}_{\perp\epsilon}$, on obtient les deux estimations

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^1 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^1\|_{\tilde{\mathcal{X}}} &\leq C 2^{\perp(\frac{1}{2}\perp\epsilon)J} (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} + \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\epsilon}}), \\ \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \perp \lambda_J^2\|_{\perp\frac{1}{2}} &\leq C 2^{\perp(\frac{1}{2}\perp\epsilon)J} (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} + \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\epsilon}}).\end{aligned}$$

Il reste à prouver l'estimation relative à $\mathbf{u}^2$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^2\|_{L^2} &\leq \|\nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} (1 \perp \check{\Pi}_J) \lambda^2\|_{L^2} \\ &\quad + \|\nabla_\Gamma Q_J \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} (\check{\Pi}_J \lambda^2 \perp \lambda_J^2)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|(1 \perp \check{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\tilde{H}^{-1}} \\ &\quad + \epsilon_J \|\check{\Pi}_J \lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}}, \\ &\lesssim \|(1 \perp \check{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\tilde{H}^{-1}} \\ &\quad + 2^{\perp\frac{J}{2}} \|(1 \perp \check{\Pi}_J) \lambda^2\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} \\ &\quad + 2^{\perp\frac{J}{2}} \|\lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Puis, de l'inégalité directe, et des estimations précédentes,

$$\|\mathbf{u}^2 \perp \tilde{\mathbf{u}}_J^2\|_{L^2} \lesssim 2^{\perp(1\perp\epsilon)J} (\|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} + \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\epsilon}}),$$

ce qui achève la preuve. □

8.6 Préconditionnement.

On introduit deux familles de matrices diagonales

$$\begin{aligned}D_s &:= \operatorname{Diag}(2^{s|\tau|})_{\tau \in \Delta_J^{\Gamma_0}} \\ \tilde{D}_s &:= \operatorname{Diag}(2^{s|\tau|})_{\tau \in \tilde{\Delta}_J^{\Gamma_0}}.\end{aligned}$$

où $|\tau|$ désigne le niveau de résolution associé à τ ($\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0}$). Pour tout réel s on notera

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_s &:= \operatorname{Diag}(\tilde{D}_{s+1}, D_s, D_1, D_1, I_3) \\ \hat{\mathbb{D}}_s &:= \operatorname{Diag}(\tilde{D}_s, D_{s+1}, D_{\perp 1}, D_{\perp 1}, I_3)\end{aligned}$$

de dimensions égales à $\sharp\tilde{\Lambda}_J + 3\sharp\Lambda_J + 3$, I_3 désignant la matrice unité de dimension 3.

On rappelle que l'on considère une méthode de Galerkin pour le problème

$$\mathcal{M}U = F, \quad \mathcal{M} : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$$

avec pour inconnue

$$\begin{aligned} U &= (\lambda^1, \lambda^2, \zeta, \eta, \underline{\alpha})^T \\ &\in \Omega := \tilde{H}^{\frac{1}{2}} \times \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}} \times H^1 \times H^1 \times \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

et pour second membre

$$F = (\text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, 0, 0, \text{div}_\Gamma(\mathbf{1}_{\Gamma_0} \mathbf{f}), 0_{\mathbb{C}^3})^T$$

c'est-à-dire, au niveau discret, on pose

$$\Omega_J := \tilde{\Lambda}_J \times (\Lambda_J)^3 \times \mathbb{C}^3$$

et on cherche $U_J \in \Omega_J$ tel que, pour tout $V_J \in \Omega_J$,

$$\langle \mathcal{M}U_J, V_J \rangle = \langle F, V_J \rangle. \quad (8.6.1)$$

On a montré que cette dernière équation admet une solution unique U_J , pourvu que J soit suffisamment grand. En outre, on a aussi prouvé que, si l'on pose

$$\tilde{\mathbf{u}}_J := \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^1 + \nabla_\Gamma \zeta_J$$

alors $\lambda_J := (\lambda_J^1, \lambda_J^2)$ est la solution du problème perturbé

$$\tilde{T}_J \lambda_J = \tilde{F}_J$$

et si $\mathbf{u}$ est solution de l'équation intégrale de départ, avec la décomposition

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &:= \mathbf{rot}_\Gamma \lambda^1 \\ \mathbf{u}_2 &:= \nabla_\Gamma \Delta_{\Gamma_0, \text{Neu}}^{\perp 1} \lambda^2 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

et si le second membre $\mathbf{f} \in \widehat{\mathcal{X}}_0 = TH^0(\text{rot}_\Gamma)$, alors on a les estimations (cf. théorème 8.5.1)

$$\begin{aligned}\|\lambda^1 \perp \lambda_J^1\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}} &\lesssim 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \varepsilon)J} (\|\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} + \|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}_0}), \\ \|\lambda^2 \perp \lambda_J^2\|_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}} &\lesssim 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \varepsilon)J} (\|\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} + \|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}_0}), \\ \|\mathbf{u}_2 \perp \nabla_\Gamma \zeta_J\|_{L^2} &\lesssim 2^{\perp(1 \perp \varepsilon)J} (\|\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} + \|\mathbf{f}\|_{\widehat{\mathcal{X}}_0}),\end{aligned}$$

où $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ est arbitraire.

On ramène l'opérateur $\mathcal{M}$ à un opérateur de ℓ^2 dans lui-même à l'aide à nouveau de l'équivalence des normes suivant la base d'ondelettes: on résout l'équation en U_J au niveau discret

$$\forall V_J \in \Omega_J \quad \langle \mathcal{M}_J U_J, V_J \rangle = \langle F_J, V_J \rangle \quad (8.6.2)$$

en décomposant les composantes (par blocs) de tout élément $V_J \in \Omega_J$ suivant les bases $(\widetilde{\psi}_\tau)$ de $\widetilde{\Lambda}_J$ et (ψ_τ) de Λ_J :

$$V_J = \left(\sum_{\tau'} \left(\mathbf{d}_{\tau'}^1 \widetilde{\psi}_{\tau'}, \mathbf{d}_{\tau'}^2 \psi_{\tau'}, \mathbf{d}_{\tau'}^3 \psi_{\tau'}, \mathbf{d}_{\tau'}^4 \psi_{\tau'} \right), \underline{\alpha}' \right)^T$$

et on pose

$$\mathbf{d} := (\mathbf{d}^k)_{1 \leq k \leq 4}, \quad \widetilde{\mathbf{d}} := (\mathbf{d}, \underline{\alpha}').$$

vecteur colonne de longueur $\sharp \widetilde{\Lambda}_J + 3\sharp \Lambda_J$ (resp. $\sharp \widetilde{\Lambda}_J + 3\sharp \Lambda_J + 3$). On fait de même pour la solution U_J :

$$\begin{aligned}U_J &= \left(\sum_{\tau'} \left((\mathbf{c}_\tau^1 \widetilde{\psi}_\tau, \mathbf{c}_\tau^2 \psi_\tau, \mathbf{c}_\tau^3 \psi_\tau, \mathbf{c}_\tau^4 \psi_\tau) \right), \underline{\alpha} \right)^T \\ \mathbf{c} &:= (\mathbf{c}^k)_{1 \leq k \leq 4} \\ \widetilde{\mathbf{c}} &:= (\mathbf{c}, \underline{\alpha}).\end{aligned}$$

Le système discret (8.6.2) devient

$$\langle B_J \widetilde{\mathbf{c}}, \widetilde{\mathbf{d}} \rangle = \langle \mathbf{F}_J, \widetilde{\mathbf{d}} \rangle$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &:= ((\mathbf{F}_1, 0, 0, \mathbf{F}_4), 0_{\mathbb{C}^8}) \\ (\mathbf{F}_1)_{\tau'} &= \langle \text{rot}_\Gamma \mathbf{f}, \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle, \\ (\mathbf{F}_4)_{\tau'} &= \perp \langle \mathbf{f}, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} \rangle.\end{aligned}$$

et pour matrice B_J la matrice déjà vue précédemment:

$$\begin{aligned}B_J &:= \begin{pmatrix} A_J & Y_J \\ Y_J^* & 0 \end{pmatrix} \\ A_J &:= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \\ A_{11,(\tau',\tau)} &:= k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_\tau, \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2} \\ A_{22,(\tau',\tau)} &:= \langle V \psi_\tau, \psi_{\tau'} \rangle_{L^2} \\ A_{33,(\tau',\tau)} = A_{44,(\tau',\tau)} &:= \langle \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} \rangle_{L^2} \\ A_{24,(\tau',\tau)} = A_{32,(\tau',\tau)} &:= \langle \psi_\tau, \psi'_{\tau'} \rangle_{L^2} \\ A_{13,(\tau',\tau)} &:= k^2 \langle V \nabla_\Gamma \psi_\tau, \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_{\tau'} \rangle_{L^2} \\ A_{41,(\tau',\tau)} &:= \perp k^2 \langle V \mathbf{rot}_\Gamma \tilde{\psi}_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} \rangle_{L^2} \\ A_{43,(\tau',\tau)} &:= \perp k^2 \langle V \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} \rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

La matrice $\tilde{B}_J$ préconditionnée relative à B_J est définie par

$$\tilde{B}_J := \hat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}} B_J \mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}^{\perp 1}, \quad (8.6.3)$$

on obtient un opérateur $\tilde{B}_J : l^2 \rightarrow l^2$ de conditionnement borné, cf.[17]. Plus explicitement:

$$\tilde{B}_J = \begin{pmatrix} \tilde{A}_J & \tilde{Y}_J \\ \tilde{Y}_J^* & 0 \end{pmatrix} \quad (8.6.4)$$

avec

$$\tilde{A}_J = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{\perp \frac{1}{2}} A_{11} \tilde{D}_{\perp \frac{1}{2}} & 0 & \tilde{D}_{\perp \frac{1}{2}} A_{13} D_{\perp 1} & 0 \\ 0 & D_{\frac{1}{2}} A_{22} D_{\frac{1}{2}} & 0 & D_{\frac{1}{2}} A_{24} D_{\perp 1} \\ 0 & D_{\perp 1} A_{32} D_{\frac{1}{2}} & \perp D_{\perp 1} A_{33} D_{\perp 1} & 0 \\ D_{\perp 1} A_{41} \tilde{D}_{\perp \frac{1}{2}} & 0 & D_{\perp 1} A_{43} D_{\perp 1} & \perp D_{\perp 1} A_{44} D_{\perp 1} \end{pmatrix} \quad (8.6.5)$$

On notera (encore) Z_J la solution de $A Z_J = F_J$, avec $Z_J = (\lambda_J^1, \lambda_J^2, \zeta_J, \eta_J)$.

8.7 Seuillage.

On introduit une stratégie de troncature en définissant une matrice dite *compressée* B_J^c par blocs par :

$$B_J^c = \begin{pmatrix} A_J^c & Y_J \\ Y_J^* & 0 \end{pmatrix} \quad (8.7.1)$$

avec

$$A_J^c := \begin{pmatrix} A_{11}^c & 0 & A_{13}^c & 0 \\ 0 & A_{22}^c & 0 & A_{24}^c \\ 0 & A_{32}^c & A_{33}^c & 0 \\ A_{41}^c & 0 & A_{43}^c & A_{44}^c \end{pmatrix} \quad (8.7.2)$$

La matrice B_J^c sera déduite de la matrice B_J en posant à zéro les coefficients trop petits *a priori*. On remarquera que l'on ne modifie que la matrice A_J dans B_J , et que les matrices M relatives aux opérateurs d'ordre ± 1 dans A_J .

Notations:

On notera

$$\nabla_j^{\Gamma_0, +} := \{\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0} \mid \psi_\tau|_{\partial\Gamma_0} = 0\}. \quad (8.7.3)$$

Cet ensemble est à distinguer de l'ensemble $\tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0, +}$ vu précédemment.

On notera également

$$\begin{aligned} \nabla_j^{\Gamma_0, \perp} &:= \nabla_j^{\Gamma_0} \setminus \nabla_j^{\Gamma_0, +} \\ \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0, \perp} &:= \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0} \setminus \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0, +} \end{aligned}$$

Pour j fixé, on a les estimation des cardinaux (voir le lemme 8.2.3):

$$\begin{aligned} \#\nabla_j^{\Gamma_0, \perp} &= \mathcal{O}(2^j) \\ \#\tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0, \perp} &= \mathcal{O}(2^j) \end{aligned}$$

Le seuillage est défini par la donnée de **deux matrices de seuil** $\varepsilon_{jj'}$ et $\varepsilon_{jj'}^*$:

$$\varepsilon_{jj'} := K \max\{2^{\perp j}, 2^{\perp j'}, 2^{aJ \perp b(j+j')}\} \quad (8.7.4)$$

$$\varepsilon_{jj'}^* := K \max\{2^{\perp j}, 2^{\perp j'}, 2^{aJ \perp b_j \perp b^* j'}\} \quad (8.7.5)$$

où les paramètres $a, b, b^* > 0$, $K > 1$ seront déterminés dans la suite.
La **compression** est définie comme suit:

- Pour la matrice A_{22} , relative à l'opérateur d'ordre $\perp 1$, on pose

$$\delta_{\tau, \tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \psi_{\tau'})$$

alors

$$A_{22,(\tau, \tau')}^c := 0 \quad \text{si } \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}$$

$$A_{22,(\tau, \tau')} \quad \text{sinon.}$$

- Pour la matrice A_{43} , en posant

$$\delta_{\tau, \tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \psi_{\tau'})$$

$$A_{43,(\tau, \tau')}^c := 0 \quad \text{si } (\delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}) \text{ et } \left(\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, +} \text{ et } \tau' \in \nabla_{\tau'}^{\Gamma_0, +} \right)$$

$$0 \quad \text{si } (\delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*) \text{ et } \left(\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, +} \text{ et } \tau' \in \nabla_{\tau'}^{\Gamma_0, \perp} \right)$$

$$0 \quad \text{si } (\delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*) \text{ et } \left(\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, \perp} \text{ et } \tau' \in \nabla_{\tau'}^{\Gamma_0, +} \right)$$

$$A_{43,(\tau, \tau')} \quad \text{sinon.}$$

Cette définition se distingue des cas des surfaces fermées. Elle mérite quelques commentaires: le principe est toujours le même mais ici, on a affaire à un problème singulier: les coefficients s'écrivent

$$\langle V \nabla_\Gamma \psi_\tau, \nabla_\Gamma \psi_{\tau'} \rangle_{L^2};$$

pour des éléments nuls sur le bord de Γ_0 , on peut faire une intégration par parties et utiliser les propriétés des moments nuls pour les ondes. Par contre, pour les éléments *non nuls* sur le bord, l'intégration par parties donne un élément de bord qui n'a pas d'estimation analogue à celle relative aux moments nuls (ou une estimation beaucoup plus faible, comme on le verra).

En revanche, le fait que le nombre d'éléments de bord soit (relativement au nombre d'inconnues) petit, ainsi que la condition de compression (matrice $\varepsilon_{jj'}$) vont rendre à ces restrictions un rôle mineur: en réalité,

pour parler trivialement, tout va se passer comme si elles n'existaient pas.

On attire l'attention sur la définition du seuillage, et en particulier sur la place de la matrice $\varepsilon_{jj'}^*$, ainsi que sur ses indices (jj' ou $j'j$).

Pour les autres matrices, la compression se fait de la même manière.

- Pour la matrice A_{13} , en posant

$$\delta_{\tau,\tau'} := d(\text{Supp } \tilde{\psi}_\tau, \text{Supp } \psi_{\tau'})$$

$$\begin{aligned} A_{13,(\tau,\tau')}^c &:= 0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}) \text{ et } \left(\tau \in \tilde{\nabla}_{|\tau|}^{\Gamma_0,+} \text{ et } \tau' \in \nabla_{\tau'}^{\Gamma_0,+} \right) \\ &0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*) \text{ et } \left(\tau \in \tilde{\nabla}_{|\tau|}^{\Gamma_0,+} \text{ et } \tau' \in \nabla_{\tau'}^{\Gamma_0,\perp} \right) \\ &0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{j'j}^*) \text{ et } \left(\tau \in \tilde{\nabla}_{|\tau|}^{\Gamma_0,\perp} \text{ et } \tau' \in \nabla_{\tau'}^{\Gamma_0,+} \right) \\ &A_{13,(\tau,\tau')} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

- Pour la matrice A_{41} , en posant

$$\delta_{\tau,\tau'} := d(\text{Supp } \psi_\tau, \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tau'})$$

$$\begin{aligned} A_{41,(\tau,\tau')}^c &:= 0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}) \text{ et } \left(\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0,+} \text{ et } \tau' \in \tilde{\nabla}_{\tau'}^{\Gamma_0,+} \right) \\ &0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*) \text{ et } \left(\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0,+} \text{ et } \tau' \in \tilde{\nabla}_{\tau'}^{\Gamma_0,\perp} \right) \\ &0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{j'j}^*) \text{ et } \left(\tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0,\perp} \text{ et } \tau' \in \tilde{\nabla}_{\tau'}^{\Gamma_0,+} \right) \\ &A_{41,(\tau,\tau')} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

- Pour la matrice A_{11} , en posant

$$\delta_{\tau,\tau'} := d(\text{Supp } \tilde{\psi}_\tau, \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tau'})$$

$$\begin{aligned} A_{11,(\tau,\tau')}^c &:= 0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}) \text{ et } \left(\tau \in \tilde{\nabla}_{|\tau|}^{\Gamma_0,+} \text{ et } \tau' \in \tilde{\nabla}_{\tau'}^{\Gamma_0,+} \right) \\ &0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*) \text{ et } \left(\tau \in \tilde{\nabla}_{|\tau|}^{\Gamma_0,+} \text{ et } \tau' \in \tilde{\nabla}_{\tau'}^{\Gamma_0,\perp} \right) \\ &0 && \text{si } (\delta_{\tau,\tau'} \geq \varepsilon_{j'j}^*) \text{ et } \left(\tau \in \tilde{\nabla}_{|\tau|}^{\Gamma_0,\perp} \text{ et } \tau' \in \tilde{\nabla}_{\tau'}^{\Gamma_0,+} \right) \\ &A_{11,(\tau,\tau')} && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On remarquera que dans tous les cas, on garde les ondelettes qui sont «proches» du bord, lorsqu'elles sont en «dualité» avec des ondelettes proches du bord. Cela rejoint le phénomène classique de l'analyse par ondelettes: elles «reconnaissent» les singularités (ici au bord de Γ_0).

Tout d'abord on choisit la matrice de seuillage de sorte que l'on ait un nombre $\mathcal{O}(J^\nu 2^{2J})$ d'éléments non nuls dans la matrice compressée. Ensuite, on montrera que cette matrice compressée a le même conditionnement que la matrice initiale, et enfin on estimera l'erreur en norme d'énergie qu'introduit la compression.

Lemme 8.7.1 *En faisant le choix des paramètres a, b, b^*, K suivant*

$$K > 1, \quad 0 < a \leq 1 \quad (8.7.6)$$

$$2b = a + 1 \quad (8.7.7)$$

$$b^* = \frac{1}{2} + a \perp b = b \perp \frac{1}{2} \quad (8.7.8)$$

le nombre d'éléments non nuls de la matrice A^c est en $\mathcal{O}(J^2 2^{2J})$.

Preuve: C'est presque la même que pour la preuve du lemme 5.4.1. On fera la preuve pour A_{43} : les éléments $A_{43, \tau, \tau'}$ que l'on garde vérifient l'une des quatre propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, \perp} \text{ et } \tau' \in \nabla_{|\tau'|}^{\Gamma_0, \perp}. \\ \tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, \perp} \text{ et } \tau' \in \nabla_{|\tau'|}^{\Gamma_0, +} \text{ et } \delta_{\tau, \tau'} \leq \varepsilon_{j'j}^*. \\ \tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, +} \text{ et } \tau' \in \nabla_{|\tau'|}^{\Gamma_0, \perp} \text{ et } \delta_{\tau, \tau'} \leq \varepsilon_{jj'}^*. \\ \tau \in \nabla_{|\tau|}^{\Gamma_0, +} \text{ et } \tau' \in \nabla_{|\tau'|}^{\Gamma_0, +} \text{ et } \delta_{\tau, \tau'} \leq \varepsilon_{jj'}. \end{aligned}$$

Pour la première condition, comme $\#\nabla_j^{\Gamma_0, \perp}$ est en $\mathcal{O}(2^j)$, elle donne un nombre d'éléments non nuls majoré par

$$C \sum_{j, j' \leq J} 2^{j+j'} \leq C 2^{2J}$$

Pour la deuxième condition, sur chaque ligne $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, \perp}$, pour j' donné, les éléments $\tau' \in \nabla_{|j'|}^{\Gamma_0, +}$ vérifiant $\delta_{\tau, \tau'} \leq \varepsilon_{j'j}^*$ sont en nombre majoré par

$$C 2^{2j'} (\varepsilon_{j'j}^*)^2$$

donc, en remarquant que le cardinal de $\nabla_j^{\Gamma_0, \perp}$ est en $\mathcal{O}(2^j)$, les éléments vérifiant la deuxième condition sont en nombre majoré par (à une constante multiplicative près)

$$\begin{aligned} \sum_{j, j' \leq J} 2^j 2^{2j'} (\varepsilon_{j'j}^*)^2 &\lesssim J 2^{2J} + K^2 2^{2aJ} \sum_{j \leq J} 2^{(1 \perp 2b^*)j} \sum_{j' \leq J} 2^{2(1 \perp b)j'} \\ &\lesssim J 2^{2J} + K^2 J^2 2^{2J(a + (1 \perp b)_+ + \frac{1}{2}(1 \perp 2b^*)_+)} \end{aligned}$$

La condition du nombre d'éléments en $\mathcal{O}(J^2 2^{2J})$ impose

$$a + (1 \perp b)_+ + \frac{1}{2}(1 \perp 2b^*)_+ \leq 1$$

condition réalisée par le choix des paramètres fait.

Pour la troisième condition, on retrouve la condition précédente en raisonnant sur les colonnes.

Enfin, pour la dernière condition, on rejoint le cas traité pour les surfaces fermées, où l'on a la condition

$$a + 2(1 \perp b)_+ \leq 1$$

qui est à nouveau réalisée pour le choix des paramètres fait.

On fait le même raisonnement sur les autres éléments de matrices.

□

Dans toute la suite, on suppose les choix (8.7.6), (8.7.7), (8.7.8) faits.

8.8 Stabilité, estimation d'erreur, convergence.

En ce qui concerne la **stabilité** de la méthode, elle demande une attention compte tenu du fait que l'on a deux types d'ondelettes qui interviennent.

8.8.1 Les estimations par blocs.

On aura besoin d'une estimation assez simple des coefficients faisant intervenir des ondelettes proches du bord:

Lemme 8.8.1 *Soit $\mathbf{v} \in L^2(\Gamma_0)^3$ telle que $\mathbf{v} \circ \kappa_i \in C^0(\overline{T})$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Pour tout entier $j \geq 0$, si*

$$\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, \perp}, \quad \tilde{\tau} \in \tilde{\nabla}_j^{\Gamma_0, \perp}$$

et si $\mathbf{D}$ est l'un des opérateurs $\nabla_\Gamma, \mathbf{rot}_\Gamma$, alors

$$\begin{aligned} | \langle \mathbf{v}, \mathbf{D}\psi_\tau \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | &\lesssim \|\mathbf{v}\|_{PW^\infty(\Gamma_0)} \\ | \langle \mathbf{v}, \mathbf{D}\tilde{\psi}_{\tilde{\tau}} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | &\lesssim \|\mathbf{v}\|_{PW^\infty(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

avec

$$\|\mathbf{v}\|_{PW^\infty(\Gamma_0)} = \sup_i \sup_{x \in T} |\mathbf{v} \circ \kappa_i(x)|.$$

Preuve : on écrit simplement, à l'aide des équivalences de normes

$$\begin{aligned} &| \langle \mathbf{v}, \mathbf{D}\psi_\tau \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | + | \langle \mathbf{v}, \mathbf{D}\tilde{\psi}_{\tilde{\tau}} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} | \\ &\lesssim \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_0 \cap (\text{Supp } \psi_\tau \cup \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}))} (\|\mathbf{D}\psi_\tau\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\mathbf{D}\tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}\|_{L^2(\Gamma_0)}) \\ &\lesssim \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_0 \cap (\text{Supp } \psi_\tau \cup \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}))} (\|\psi_\tau\|_{H^1(\Gamma_0)} + \|\tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}\|_{\tilde{H}^1(\Gamma_0)}) \\ &\lesssim 2^j \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_0 \cap (\text{Supp } \psi_\tau \cup \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}))} \end{aligned}$$

Comme $\text{Supp } \psi_\tau$ et $\text{Supp } \tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}$ ont des diamètres en $\mathcal{O}(2^{\perp j})$, en se ramenant à l'élément de référence T ,

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_0 \cap (\text{Supp } \psi_\tau \cup \text{Supp } \tilde{\psi}_{\tilde{\tau}}))} \lesssim 2^{\perp j} \|\mathbf{v}\|_{PW^\infty},$$

d'où le résultat. □

On est à présent prêt pour énoncer une proposition analogue à la proposition 5.4.1 du cas des surfaces fermées.

Proposition 8.8.1

On se fixe un paramètre

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}. \tag{8.8.1}$$

- Si M est l'un des blocs $A_{11}, A_{13}, A_{41}, A_{43}$ correspondant à un opérateur d'ordre $r = +1$, et si k, k' sont deux réels vérifiant

$$\begin{aligned} k, k' < \perp \frac{d}{2} + \frac{(b + \alpha)}{2}(d + r) \\ + \frac{1}{2} \min\{b^*(d + r), \perp d \perp 2 + (b + \alpha)(d + 1 + r)\} \end{aligned} \quad (8.8.2)$$

alors il existe une constante C indépendante de J telle que

$$\begin{aligned} \|D_{\perp k}(M \perp M^c)D_{\perp k'}\|_{0 \leftarrow 0} \\ \leq C 2^{(\perp k \perp k' + r)J} (K^{\perp(r+2d+2)} \\ + K^{\perp(d+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2}\perp\alpha)J(d+r)} + K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2}\perp\alpha)J(d+r+1)}). \end{aligned} \quad (8.8.3)$$

- Si M est le bloc A_{22} correspondant à l'opérateur d'ordre $r = \perp 1$, et si k, k' sont deux réels vérifiant

$$k, k' < \perp d \perp 1 + b(2d + 2 + r) \quad (8.8.4)$$

alors il existe une constante C indépendante de J telle que

$$\|D_{\perp k}(M \perp M^c)D_{\perp k'}\|_{0 \leftarrow 0} \leq C K^{\perp(r+2d+2)} 2^{(\perp k \perp k' + r)J}. \quad (8.8.5)$$

Preuve :

- Pour l'estimation concernant le bloc A_{22} , on renvoie à la preuve de la proposition 5.4.1.
- Pour la première assertion, on fera la preuve pour le bloc $M = (m_{\tau, \tau'}) = A_{43} \perp A_{43}^c$; les autres blocs ayant une analyse rigoureusement similaire. Ce bloc est relatif à un opérateur d'ordre $r = +1$ et ses coefficients s'écrivent

$$\int_{\Gamma_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\Gamma} \psi_{\tau}(\mathbf{x}) \nabla_{\Gamma} \psi_{\tau'}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}),$$

où G est le noyau de Green

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|}}{4\pi |\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|}.$$

On utilise le lemme de Schur avec les coefficients $x_\tau = 2^{|\tau|}$ pour estimer $\|D_k M D_{k'}\|_{0 \leftarrow 0}$, c'est-à-dire qu'il faut estimer, en posant $j = |\tau|$, le niveau de résolution associé à τ

$$\sup_{\tau} \sum_{j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0}} 2^{\perp j(k+\gamma)} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma)} |m_{\tau, \tau'}|$$

et la même chose sur les colonnes. De la symétrie de la matrice, il nous suffit de faire le travail sur les lignes. On posera

$$E(\tau) := \sum_{j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0}} 2^{\perp j(k+\gamma)} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma)} |m_{\tau, \tau'}|$$

On traite les deux cas $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, +}$ et $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, \perp}$ séparément.

Premier cas: $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, +}$.

Les éléments $m_{\tau\tau'} \neq 0$ du fait de la compression vérifient l'une des deux conditions

$$\begin{aligned} \tau' &\in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, +}, & \delta_{\tau, \tau'} &\geq \varepsilon_{jj'} \\ \tau' &\in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, \perp}, & \delta_{\tau, \tau'} &\geq \varepsilon_{jj'}^* \end{aligned}$$

On pose donc

$$\begin{aligned} E_1(\tau) &:= \sum_{j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, +}, \delta_{\tau\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}} 2^{\perp j(k+\gamma)} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma)} |m_{\tau, \tau'}| \\ E_2(\tau) &:= \sum_{j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, \perp}, \delta_{\tau\tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*} 2^{\perp j(k+\gamma)} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma)} |m_{\tau, \tau'}| \end{aligned}$$

de sorte que

$$E(\tau) = E_1(\tau) + E_2(\tau).$$

•• Estimation pour $E_1(\tau)$.

Après intégration par parties, on a, pour tout $\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, +}$,

$$m_{\tau, \tau'} = \int_{\Gamma_0} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_\tau(\mathbf{x}) \psi_{\tau'}(\mathbf{y})$$

avec

$$|D_{\mathbf{x}}^{\beta} D_{\mathbf{y}}^{\beta'} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \lesssim |\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|^{\perp(2+r+|\beta|+|\beta'|)}. \quad (r = +1)$$

Du corollaire 8.2.2, (moments nuls)

$$|m_{\tau, \tau'}| \lesssim 2^{\perp(d+2)j} 2^{\perp(d+2)j'} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(2d+4+r)}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E_1(\tau) &\lesssim \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j(k+\gamma+d+2)} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma)} \\ &\quad \cdot 2^{\perp 2j'} \sum_{\tau', \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(2d+4+r)} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 2^{\perp 2j'} \sum_{\tau', \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(2d+4+r)} &\lesssim \int_{x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq \varepsilon_{jj'}} |x|^{\perp(2d+4+r)} dx \\ &\lesssim \varepsilon_{jj'}^{\perp(2d+2+r)}. \end{aligned}$$

D'où

$$E_1(\tau) \lesssim \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j(k+\gamma+d+2)} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma)} \varepsilon_{jj'}^{\perp(2d+2+r)}$$

puis, en majorant $\varepsilon_{jj'}^{\perp 1}$ par $K^{\perp 1} 2^{\perp aJ} 2^{b(j+j')}$:

$$\begin{aligned} E(\tau) &\lesssim K^{\perp(2+2d+r)} 2^{\perp aJ(2d+2+r)} 2^{\perp j(k+\gamma+d+2 \perp b(2d+2+r))} \\ &\quad \cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma \perp b(2d+2+r))}. \end{aligned}$$

On suppose

$$k' + d \perp b(2d + 2 + r) < \gamma < \perp k \perp d \perp 2 + b(2d + 2 + r) \quad (8.8.6)$$

Alors

$$\begin{aligned} E_1(\tau) &\lesssim K^{\perp(2+2d+r)} 2^{\perp aJ(2d+2+r)} \\ &\quad 2^{\perp J(k+\gamma+d+2 \perp b(2d+2+r))} 2^{\perp J(k'+d \perp \gamma \perp b(2d+2+r))} \end{aligned}$$

c'est à dire, comme $2b \perp a = 1$,

$$E_1(\tau) \lesssim K^{\perp(2+d+r)} 2^{\perp J(k+k' \perp r)}.$$

•• Estimation de $E_2(\tau)$.

Après intégration par parties, pour $\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, +}$,

$$m_{\tau, \tau'} = \int_{\Gamma_0} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_{\tau}(\mathbf{x}) \nabla_{\Gamma} \psi_{\tau'}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}),$$

où $\mathbf{H}$ vérifie

$$|D_{\mathbf{x}}^{\beta} D_{\mathbf{y}}^{\beta} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \lesssim |\mathbf{x} \perp \mathbf{y}|^{\perp(1+r+|\beta|+|\beta'|)} \quad (r = +1)$$

On utilise l'estimation au bord pour la partie avec $\nabla_{\Gamma} \psi_{\tau'}$ (lemme 8.8.1) et la propriété des moments nuls (corollaire 8.2.2) pour l'autre partie: on obtient

$$|m_{\tau, \tau'}| \lesssim 2^{\perp j(d+2)} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(d+2+r)}.$$

d'où

$$E_2(\tau) \lesssim 2^{\perp j(k+2+d+\gamma)} \cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma)} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, -}, \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(d+2+r)}$$

Or, cf. [22]

$$\begin{aligned} 2^{\perp j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, -}, \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(d+2+r)} &\leq C \int_{x \in \partial \Gamma_0, |x \perp P_0| \geq \varepsilon_{jj'}^*} |x \perp P_0|^{\perp(d+2+r)} dl(x) \\ &\leq C(\varepsilon_{jj'}^*)^{\perp(d+1+r)} \end{aligned} \tag{8.8.7}$$

où P_0 est un point quelconque du support de ψ_{τ} , et C une constante qui ne dépend que de la géométrie de la surface, et du caractère local des ondelettes. En effet, on peut découper le bord de Γ_0 en morceaux ∂_k de longueur $c2^{\perp j'}$, le nombre d'ondelettes $\psi_{\tau'}$ dont le support rencontre un de ces morceaux est uniformément borné, et, en choisissant un point quelconque P_0 dans le support de ψ_{τ} , comme $\varepsilon_{jj'}^* \geq \max(2^{\perp j'}, 2^{\perp j})$, et comme $\delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{jj'}^*$,

$$\delta_{\tau, \tau'}^{\perp(d+2+r)} \leq C|x \perp P_0|^{\perp(d+2+r)}$$

pour tout $x \in \partial_k$ et tout τ' tel que le support de $\psi_{\tau'}$ rencontre ∂_k , C étant une constante qui ne dépend pas de P_0 . On intègre le long du chemin ∂_k et on somme sur les τ' tels que $\psi_{\tau'}$ rencontre ∂_k (en nombre uniformément borné). Ensuite on somme les intégrales curvilignes pour obtenir (8.8.7).

On en déduit

$$E_2(\tau) \lesssim 2^{\perp j(k+d+2+\gamma)} \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k \perp \gamma \perp 1)} (\varepsilon_{jj'}^*)^{\perp(d+1+r)}.$$

En majorant $(\varepsilon_{jj'}^*)^{\perp 1}$ par $K^{\perp 1} 2^{\perp a J} 2^{bj} 2^{b^* j'}$,

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &\lesssim K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp a J(d+1+r)} 2^{\perp j(k+d+2+\gamma \perp b(d+1+r))} \\ &\quad \cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma \perp 1 \perp b^*(d+1+r))}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &\lesssim K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp a J(d+1+r)} \\ &\quad \cdot 2^{\perp j(k+d+2+\gamma \perp (b+\alpha)(d+1+r))} \\ &\quad \cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k' \perp \gamma \perp 1 \perp b^*(d+1+r))}. \end{aligned}$$

On suppose que

$$k' \perp 1 \perp b^*(d+1+r) < \gamma < \perp k \perp d \perp 2 + (b+\alpha)(d+1+r). \quad (8.8.8)$$

Alors

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &\lesssim K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp a J(d+1+r)} \\ &\quad \cdot 2^{\perp J(k+d+2+\gamma \perp (b+\alpha)(d+1+r))} 2^{\perp J(k' \perp \gamma \perp 1 \perp b^*(d+1+r))}, \\ &\lesssim K^{\perp(d+1+r)} 2^{(b+b^* \perp a)J(d+1+r)} 2^{\alpha J(d+1+r)} \\ &\quad \cdot 2^{\perp J(k+k'+d+1)}. \end{aligned}$$

Comme $b + b^* \perp a = \frac{1}{2} = 1 \perp \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &\lesssim K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+1+r)} \\ &\quad \cdot 2^{J(d+1+r)} 2^{\perp J(k+k'+d+1)}, \\ &\lesssim K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+1+r)} 2^{\perp J(k+k' \perp r)}. \end{aligned}$$

En conclusion, pour le cas $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, +}$, si γ vérifie les deux conditions (8.8.6) et (8.8.8), alors

$$E(\tau) \lesssim 2^{\perp J(k+k' \perp r)} (K^{\perp(2d+2+r)} + K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp J(\frac{1}{2} \perp \alpha)}).$$

Deuxième cas: $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, \perp}$.

Les coefficients de M non nuls par seuillage s'écrivent

$$m_{\tau, \tau'} = \int_{\Gamma_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\Gamma} \psi_{\tau}(\mathbf{x}) \nabla_{\Gamma} \psi_{\tau'}(\mathbf{y}) ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}),$$

avec $\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, +}$, et $\delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{j'j}^*$. On est dans un cas similaire au cas de $E_2(\tau)$ vu précédemment: on intègre par parties suivant la variable $\mathbf{y}$, on utilise la propriété des moments nuls pour l'ondelette $\psi_{\tau'}$ et une estimation directe pour l'autre; on obtient

$$\begin{aligned} E(\tau) &\lesssim 2^{\perp j(k+\gamma)} \\ &\cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma)} 2^{\perp 2j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, -}, \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{j'j}^*} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(d+2+r)} \end{aligned}$$

De la même manière que dans l'estimation de $E_1(\tau)$ dans le cas précédent, **comme** $r = +1$

$$2^{\perp 2j'} \sum_{\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, -}, \delta_{\tau, \tau'} \geq \varepsilon_{j'j}^*} \delta_{\tau, \tau'}^{\perp(d+2+r)} \lesssim (\varepsilon_{j'j}^*)^{\perp(d+r)}.$$

La propriété $r = +1$ est fondamentale ici.

On en déduit

$$\begin{aligned} E(\tau) &\lesssim 2^{\perp j(k+\gamma)} \\ &\cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma)} (\varepsilon_{j'j}^*)^{\perp(d+r)} \end{aligned}$$

On majore $(\varepsilon_{j'j}^*)^{\perp 1}$ par $K^{\perp 1} 2^{\perp aJ} 2^{b^*J} 2^{bj'}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} E(\tau) &\lesssim K^{\perp(d+r)} 2^{\perp aJ(d+r)} 2^{\perp j(k+\gamma \perp b^*(d+r))} \\ &\cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma \perp b(d+r))} \end{aligned}$$

On fait intervenir le paramètre α en écrivant ($\alpha > 0$)

$$E(\tau) \lesssim K^{\perp(d+r)} 2^{\perp a J(d+r)} 2^{\perp j(k+\gamma \perp b^*(d+r))} \\ \cdot \sum_{j' \leq J} 2^{\perp j'(k'+d \perp \gamma \perp (b+\alpha)(d+r))}.$$

On impose la condition

$$k' + d \perp (b + \alpha)(d + r) < \gamma < \perp k + b^*(d + r), \quad (8.8.9)$$

pour obtenir

$$E(\tau) \lesssim K^{\perp(d+r)} 2^{\perp a J(d+r)} 2^{\perp J(k+\gamma \perp b^*(d+r))} \\ \cdot 2^{\perp J(k'+d \perp \gamma \perp (b+\alpha)(d+r))}, \\ \lesssim K^{\perp(d+r)} 2^{(b+b^* \perp a)J(d+r)} 2^{\alpha J(d+r)} 2^{\perp(k+k'+d)J}.$$

Avec la relation $b + b^* \perp a = \frac{1}{2} = 1 \perp \frac{1}{2}$, on trouve finalement

$$E(\tau) \lesssim K^{\perp(d+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+r)} 2^{\perp(k+k' \perp r)J}.$$

Dans les deux cas $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, \pm}$, on a montré finalement

$$E(\tau) \lesssim 2^{\perp(k+k' \perp r)J} (K^{\perp(2d+2+r)} \\ + K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+r+1)} \\ + K^{\perp(d+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+r)}).$$

Reste que l'on a supposé (8.8.6), (8.8.8), (8.8.9) pour la majoration de $E(\tau)$, et ces trois inégalités sont équivalentes à la condition (pour l'existence de γ):

$$k' + d \perp (b + \alpha)(d + r) < \perp k + \min\{b^*(d + r), \perp(d + 2) + (b + \alpha)(d + 1 + r)\}$$

Comme on fait aussi le même travail sur les colonnes, la condition de l'existence de γ , qui doit être le même pour les lignes et les colonnes devient

$$k, k' < \perp \frac{d}{2} + \frac{(b + \alpha)}{2}(d + r) \\ + \frac{1}{2} \min\{b^*(d + r), \perp(d + 2) + (b + \alpha)(d + 1 + r)\}.$$

pour que l'on ait finalement

$$\begin{aligned} \|D_{\perp k} M D_{\perp k'}\|_{0 \leftarrow 0} &\lesssim 2^{\perp J(k+k' \perp r)} (K^{\perp(2d+2+r)} \\ &\quad + K^{\perp(d+1+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+r+1)} \\ &\quad + K^{\perp(d+r)} 2^{\perp(\frac{1}{2} \perp \alpha)J(d+r)}). \end{aligned}$$

Les estimations relatives aux autres opérateurs d'ordre $+1$ se montrent de la même manière.

□

Quelques remarques: dans cette proposition, on traite de la même manière les ondelettes proches du bord avec ou sans conditions au bord. C'est-à-dire, pour les coefficients du type

$$< G \mathbf{rot}_{\Gamma} \tilde{\psi}_{\tau}, \mathbf{rot}_{\Gamma} \tilde{\psi}_{\tau'} >$$

par exemple, avec $\tau \in \nabla_j^{\Gamma_0, +}$, et $\tau' \in \nabla_{j'}^{\Gamma_0, \perp}$ on ne fait pas *deux* intégrations par parties, mais une seule (celle attachée à $\tilde{\psi}_{\tau}$). Bien que l'on puisse le faire, donnant des contraintes plus fortes sur les paramètres k et k' , et *in fine* des conditions plus fortes sur les paramètres a et α , le gain réside essentiellement en deux point: d'abord, on a des facteurs plus petits devant $2^{\perp J(k+k' \perp r)}$ (en dehors du terme $K^{\perp(2d+2+r)}$), mais du type $2^{\perp J(\frac{1}{2} \perp \alpha)}$, ce qui n'apporte pas grand chose, puisque le terme dominant reste $K^{\perp(2d+2+r)}$. Ensuite, on évite d'utiliser la condition $r = +1$ comme *sine qua non*, c'est-à-dire que l'on pourrait prendre $r = \perp 1$ pour ces types de majorations dans le cas où l'on traite des ondelettes avec condition nulle au bord. Là encore, cela semble inconsistant dans le cas qui nous intéresse (où on a toujours $r = +1$), et pour chercher des exemples où cela pourrait être utile, il faut partir avec un noyau relatif à un opérateur d'ordre $\perp 3$...

8.8.2 Stabilité, taux de convergence.

Comme pour la proposition 5.4.3 et son corollaire, l'opérateur continu $\mathcal{L}$ a des propriétés de régularité limitées par celles du potentiel de simple couche: $\mathcal{L}$ induit un opérateur de Fredholm de

$$\tilde{H}^{\frac{1}{2}+s} \times \tilde{H}^{\perp \frac{1}{2}+s} \times H_{*}^1 \times H^1$$

dans

$$H^{\perp \frac{1}{2}+s} \times H^{\frac{1}{2}+s} \times \widetilde{H}^{\perp 1} \times \widetilde{H}_*^{\perp 1}$$

pourvu que

$$0 \leq s < \frac{1}{2}.$$

On en déduit

Proposition 8.8.2 *Pour $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > 0$, et pour J suffisamment grand,*

$$\widehat{\mathbb{D}}_{\perp \varepsilon} B_J \mathbb{D}_{\perp \varepsilon}^{\perp 1}$$

est inversible et bien conditionnée.

Pour la stabilité de la méthode compressée, on doit estimer

$$\|\widehat{\mathbb{D}}_{\perp \frac{1}{2}}(B_J \perp B_J^c) \mathbb{D}_{\perp \frac{1}{2}}^{\perp 1}\|_{0 \leftarrow 0}$$

et pour les taux de convergence, on doit estimer

$$\|\widehat{\mathbb{D}}_{\perp \varepsilon}(B_J \perp B_J^c) \mathbb{D}_{\perp \varepsilon}^{\perp 1}\|_{0 \leftarrow 0}$$

ce qui donne les valeurs maximales $\bar{k}$ pour k, k' :

$$\begin{aligned} \bar{k} &= 1 && \text{pour les opérateurs d'ordre } +1, \\ \bar{k} &= 0 && \text{pour l'opérateur d'ordre } \perp 1. \end{aligned}$$

En définitive, on a les conditions

– pour les opérateurs d'ordre $+1$:

$$2 < \min\{\perp d + (b + b^* + \alpha)(d + 1), \perp 2d \perp 2 + (b + \alpha)(2d + 3)\},$$

– et pour l'opérateur d'ordre $\perp 1$:

$$0 < \perp d \perp 2 + b(2d + 3).$$

ce qui donne les conditions

$$\max\left\{\frac{2d+1}{2d+3}, \frac{d+2}{2d+2} \pm \alpha, \frac{2d+5}{2d+3} \pm 2\alpha\right\} < a \leq 1 \quad (8.8.10)$$

et

$$\frac{1}{2d+3} < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (8.8.11)$$

Pour le cas qui nous intéresse $d = 1$, on obtient les conditions

$$\begin{aligned} 1 \geq a &> \frac{3}{5} + 2\left(\frac{2}{5} \pm \alpha\right) \quad \text{si} \quad \frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{2}{5}, \\ 1 \geq a &> \frac{3}{5} \quad \text{si} \quad \frac{2}{5} \leq \alpha < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a donc, finalement, les taux de convergence optimaux suivant:

Théorème 8.8.1 *Si les conditions 8.8.10 et 8.8.11 sont vérifiées, et si*

$$Z_J^c = (\lambda_J^{1,c}, \lambda_J^{2,c}, \zeta_J^c, \eta_J^c)^T$$

est solution du problème compressé (pour J suffisamment grand)

$$B_J^c Z_J^c = F_J$$

On pose

$$\tilde{\mathbf{u}}_J^{1,c} = \mathbf{rot}_\Gamma \lambda_J^{1,c}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_J^{2,c} = \nabla_\Gamma \zeta_J^c$$

et

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2, \quad \mathbf{u}^i \in \tilde{\mathcal{X}}^i,$$

la solution de l'équation intégrale initiale $L\mathbf{u} = \mathbf{f}$, avec

$$\mathbf{f} \in \hat{\mathcal{X}}_0 = TH^0(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma_0) \subset \hat{\mathcal{X}}$$

alors, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante C_ε telle que,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^1 \pm \tilde{\mathbf{u}}_J^{1,c}\|_{\tilde{\mathcal{X}}} &\leq C_\varepsilon 2^{\pm(\frac{1}{2} \pm \varepsilon)J} (\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} + \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0}) \\ \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}^2 \pm \lambda_J^{2,c}\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}} &\leq C_\varepsilon 2^{\pm(\frac{1}{2} \pm \varepsilon)J} (\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} + \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0}) \\ \|\mathbf{u}^2 \pm \tilde{\mathbf{u}}_J^{2,c}\|_{L^2} &\leq C_\varepsilon 2^{\pm(1 \pm \varepsilon)J} (\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} + \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathcal{X}}_{-\varepsilon}} &= \|\mathbf{u}\|_{\tilde{H}^{-\varepsilon}(\Gamma_0)} + \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}\|_{\tilde{H}^{-\varepsilon}(\Gamma_0)} \\ \|\mathbf{f}\|_{\hat{\mathcal{X}}_0} &= \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{f}\|_{L^2(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

Preuve : elle est calquée sur la proposition 5.4.4 et sur le théorème 5.4.1.

□

Références

- [1] I. Babuška, A. Aziz, *Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method*, The mathematical foundation of the finite element method with applications to the partial differential equations, ed. A. K. Aziz, New-York, Academic Press, 1972.
- [2] S. Béline, *La technique des équations intégrales volumiques*, thèse de l'INSA-Rennes, 1996.
- [3] A. Bendali, *Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method*, I & II, Math. Comp. **43**, no. 167, 1984.
- [4] A. Buffa, P. Ciarlet, *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, Math. Meth. Appl. Sciences, **24**, pp. 9-30.
- [5] A. Buffa, P. Ciarlet, *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part II: Hodge decompositions on the boundary of a Lipschitz polyhedra and applications*, Math. Meth. Appl. Sciences, **24**, pp. 31-48.
- [6] A. Buffa, M. Costabel, C. Schwab, *Boundary element methods for Maxwell equations on non-smooth domains*, Rep. **2000-01**, Seminar für Angewandte Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 2001.
- [7] G. Chen, J. Zhou, *Boundary element methods*, Acad. Press, New-York, 1992.
- [8] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore, *Adaptative wavelet methods for elliptic operator equations: convergence rates*, Math. Comp. **70**, no. 233, 2000. pp. 27-75.
- [9] D. Colton, R. Kress, *Integral equation methods in scattering theory*, Pure & applied Mathematics, J. Wiley ed., New-York, 1983.
- [10] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results*. SIAM-JMA, **19**, no. 3, 1988.
- [11] M. Costabel, *Principles of boundary element methods*, Finite elements in physics (Lausanne 1986), North-Holland, Amsterdam, New-York, 1987.

- [12] M. Costabel, M. Dauge, *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains*, Arch. Ration. Mech. Anal., **151**, no. 3, 2000. pp. 221-276.
- [13] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise, *Singularities of Maxwell interface problems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **33**, no. 3, 1999. pp. 627-649.
- [14] M. Costabel, E. Stephan, *Strongly elliptic boundary integral equations for electromagnetic transmission problems*, Proceedings in the Royal Soc. of Edinburgh, **109 A**, no. 3-4, 1988.
- [15] W. Dahmen, *Stability of multiscale transformations*, J. Fourier Anal. Appl., **4**, 1996.
- [16] W. Dahmen, *Wavelet and multiscale methods for operator equations*, Acta Numerica **6**, Cambridge University Press, 1997, pp. 55-228. MR **98m**:65102.
- [17] W. Dahmen, S. Prössdorf, R. Schneider *Multiscale methods for pseudo-differential equations on smooth manifolds*, Proceedings of the international conference on wavelets, theory, algorithms, and applications, C. K. Chui, L. Montefusco, L. Puccio eds, Acad. Press, 1994, pp. 385-424.
- [18] W. Dahmen, R. Schneider, *Wavelet on manifolds I. Construction and domain decomposition*, SIAM, J. Math. Anal., **31**, no. 1, 1999. pp. 184-230.
- [19] W. Dahmen, R. Stevenson, *Element-by-element construction of wavelets satisfying stability and moment conditions*, SIAM, J. Numer. Anal., **37**, no. 1, 1999. pp. 319-352.
- [20] M. Dauge, *Elliptic boundary value problems in corner domains- Smoothness and asymptotics of solutions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1341**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [21] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, vol. 1, Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [22] S. Ehrich, A. Rathsfeld, *Piecewise linear wavelet collocation on triangular grids, approximation of the boundary manifolds and quadrature*, preprint no. **434**, Weierstrass institute, Berlin, 1998.

- [23] G. Eskin, *Boundary problems for elliptic pseudodifferential operators*, translations of mathematical monographs , **52** (providence R.I.: American Mathematical Society, 1981).
- [24] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Mathematics, **21**, Pitman, Boston, 1985.
- [25] C. Hazard, M. Lenoir, *On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations*. SIAM J. Math. Anal., **27**, nov. 1996.
- [26] R. Hiptmair, *Multigrid methods for Maxwell's equations*, SIAM, J. Numer. Anal., **36**, 1999, no. 1. pp. 204-225.
- [27] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [28] V. Kondrat'ev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. **16**, 227-313, 1967.
- [29] V. Levillain, *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1991.
- [30] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications* vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [31] R. Loison, *Utilisation de l'analyse multirésolution dans la méthode des moments. Application à la modélisation de réseaux d'antennes imprimées*. Thèse de l'INSA-Rennes, 2000.
- [32] K. Maatouk, *Méthodes numériques en électromagnétisme tridimensionnel: comparaisons de méthodes intégrales*, Thèse de l'Université Rennes 1, 1998.
- [33] R. MacCamy, E. Stephan, *A boundary element method for an exterior problem for three-dimensional Maxwell's equations*, Appl. Anal., **16**, 1983.
- [34] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, Paris, 1990.

- [35] P. Monk, *A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations*, Numer. Math., **63**, 1992.
- [36] J.-C. Nédélec, *Mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$* , Numer. Math., **35**, 1980.
- [37] J.-C. Nédélec, *A new family of mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$* , Numer. Math., **50**, 1986.
- [38] S. Nicaise, *Polygonal interface problems*, Methoden und Verfahren des Mathematischen Physik, **39**, Verlag P.D. Lang, Frankfurt-am-Main, 1993.
- [39] L. Paquet, *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell*, Annales de la faculté des sciences, Toulouse, France, 1982.
- [40] T. v. Petersdorff, C. Schwab, *Fully discrete multiscale Galerkin BEM*, Academic press, San Diego, 1997.
- [41] T. v. Petersdorff, C. Schwab, *Wavelet approximations for first kind boundary integral equations on polygons*, Numer. Math., **74** 1996.
- [42] P. Raviart, J.-M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, Lec. Notes in Math., **606**, Springer Verlag, New-York, 1997
- [43] T. Sayah, *Méthodes des potentiels retardés pour les milieux hétérogènes*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1998.
- [44] R. Schneider, *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysis-basierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme*, Habilitationsschrift, Technische Hochschule, Darmstadt, 1995.
- [45] R. Schneider, *Reduction of order for pseudodifferential operators on Lipschitz domains*, Comm. in PDE, **16**, 1991.
- [46] E. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems screen and transmission problems in $\mathbf{R}^3$* , Habilitationsschrift, Darmstadt, 1984.
- [47] R. Stevenson, *Stable three-point wavelet bases on general meshes*, Numer. Math. **80**, 1998.

- [48] K. Urban, *Wavelet bases in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$* , à paraître dans Math. Comp.
- [49] W. Wendland, G. Hsiao, *A finite element method for some integral equations of the first kind*, J. Math. Anal. Appl., **58**, 1977.

Résumé.

Les méthodes intégrales pour résoudre des EDP, et en particulier le système de Maxwell, sont bien connues depuis environ vingt ans. Après discrétisation par éléments finis, un système linéaire plein apparaît, ce qui rend toute implémentation numérique difficile voire impossible. Pour les opérateurs d'ordre positif, quelques travaux ont été menés avec succès pour rendre creuse la matrice du système discret. Quelques difficultés restaient pour le problème de Maxwell: espace(s) d'énergie, présence d'un opérateur d'ordre négatif, et donc choix des ondelettes pour la résolution. Dans cette thèse, je donne une méthode pour ramener le système de Maxwell, issu d'un problème de diffraction en régime harmonique, à une étude sur des espaces de Sobolev classiques définis sur une surface, en utilisant des décompositions de Hodge. Je donne aussi une méthode de compression pourvu que les ondelettes vérifient certaines conditions (moments nuls, stabilité). La méthode de compression donnée fonctionne même avec des ondelettes formées à partir de polynômes de degré un, malgré la présence d'un opérateur d'ordre négatif, sans perturber des taux de convergence optimaux. L'analyse a été faite sur une surface fermée (sans bord) régulière simplement connexe, puis sur une partie à bord polygonal d'une telle surface (plaque ouverte). Les espaces fonctionnels et la compression de matrice, bien plus compliqués dans ce dernier cas, ont été étudiés en détail.

Abstract.

Integral equations methods for solving PDEs, and in particular Maxwell's equations system, are now well known for about twenty years. After discretization by finite elements, a dense linear system arises, which is unfortunate for any numerical implementation. For positive order operators, some successful works have been led to reduce the discrete linear system to a sparse one. Some difficulties remained for Maxwell's system: energy space(s), presence of a negative order operator, and thus, choice of wavelets. In this thesis, I give a method to bring Maxwell's scattering problem back to classical Sobolev spaces on a manifold using Hodge decompositions. I also give a way to compress the discrete problem provided wavelets satisfy some properties (moment conditions, stability). The compression works even with wavelets based on piecewise linear finite elements, despite the presence of a negative order operator, and does not affect optimal convergence rates. The analysis has been done on a closed simply connected regular manifold as well as on a part of such manifolds, with a polygonal boundary (open surface). Functional spaces and wavelet compression, much more complicated in the latter case, are studied in detail.

Mots clefs: Equations de Maxwell, équations intégrales, espaces de Sobolev, éléments finis, ondelettes.