



**HAL**  
open science

# Sur un modèle de comportement mécanique avec analyse modale de la dissipation intrinsèque : mise en oeuvre et validation numériques

Mohamadou Lamine Dieng

► **To cite this version:**

Mohamadou Lamine Dieng. Sur un modèle de comportement mécanique avec analyse modale de la dissipation intrinsèque : mise en oeuvre et validation numériques. Mécanique [physics.med-ph]. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2002. Français. NNT: . tel-00006360v2

**HAL Id: tel-00006360**

**<https://theses.hal.science/tel-00006360v2>**

Submitted on 1 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Sur un modèle de comportement mécanique avec analyse modale de la dissipation intrinsèque : mise en œuvre et validation numériques

## THÈSE

Soutenue publiquement le 18 Décembre 2002

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**  
(spécialité Mécanique et Energétique )

par

Lamine DIENG

### Composition du jury

<i>Président :</i>	C. Lexcellent	Professeur, Université de Franche-Comté, Besançon
<i>Rapporteurs :</i>	A. Abdul-Latif	Professeur, Université Paris 8, IUT de Tremblay-En-France
	Y. Rémond	Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg
<i>Examineurs :</i>	C. Cunat	Professeur, E.N.S.E.M., Nancy (Directeur de thèse)
	M. Haboussi	Maître de Conférence, I.N.P.L., Nancy
	Y. Meimon	Directeur de Recherche, I.F.P, Rueil-Malmaison

Mis en page avec la classe thloria.



# Sur un modèle de comportement mécanique avec analyse modale de la dissipation intrinsèque : mise en œuvre et validation numériques

## THÈSE

Soutenue publiquement le 18 Décembre 2002

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine  
(spécialité Mécanique et Energétique )

par

Lamine DIENG

### Composition du jury

<i>Président :</i>	C. L'excellent	Professeur, Université de Franche-Comté, Besançon
<i>Rapporteurs :</i>	A. Abdul-Latif	Professeur, Université Paris 8, IUT de Tremblay-En-France
	Y. Rémond	Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg
<i>Examineurs :</i>	C. Cunat	Professeur, E.N.S.E.M., Nancy (Directeur de thèse)
	M. Haboussi	Maître de Conférence, I.N.P.L., Nancy
	Y. Meimon	Directeur de Recherche, I.F.P, Rueil-Malmaison

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

*Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée sous la direction de Monsieur Christian Cunat.*

*Je le remercie vivement de m'avoir formé et guidé durant ces trois années de thèse. C'est grâce à son soutien, son enthousiasme, son optimisme, que j'ai pu mener à bien ce travail. Qu'il reçoive ici tous mes remerciements.*

*Monsieur Mohamed Haboussi a co-encadré ce travail avec un extrême rigueur, je le remercie et je retiendrai sa grande disponibilité surtout pendant les moments de doute et de grandes difficultés.*

*Monsieur Christian Lexcellent m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, qu'il en soit remercié.*

*Je voudrais vivement remercier Monsieur Akrum Abdul-Latif, pour sa grande implication dans ce travail et son regard critique sur mon mémoire en tant que rapporteur. Son expérience dans la modélisation du comportement cyclique des matériaux métalliques m'a beaucoup servi.*

*Mes remerciements vont aussi à Monsieur Yves Rémond pour l'intérêt et la confiance qu'il nous a accordé en acceptant de rapporter ce travail. Son regard de spécialiste dans le domaine numérique, et ses remarques me seront très utiles pour la suite.*

*Je voudrais également remercier Monsieur Yves Meimon, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Je retiendrai la très grande pertinence de ses remarques.*

*Il faudrait inventer un nouveau mot pour remercier "notre" Marie Hélène Zoberman, pour sa disponibilité, sa gentillesse, son humour et j'en passe. Merci Marie ! merci à tous, secrétaires et techniciens du laboratoire.*

*Un grand merci à mes collègues et amis, Kaïs, Yves, Hanane, Nadim, Rachid, et les deux Jean-François.*

*Enfin, j'adresse une pensée particulière à mes "cocos" Virginie & Soukeye, qui ont su m'apporter tout l'amour nécessaire à un épanouissement total.*

*Merci aux parents et à toute ma famille restée au pays.*



*Je dédie cette thèse  
à mon Frère  
Ousmane.  
Paix à son âme!*





# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>1</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>5</b>

<b>Nomenclature</b>
---------------------

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
------------------------------	----------

---

---

<b>Partie I Formalisme D.N.L.R. et équations constitutives</b>	<b>11</b>
--	-----------

---

---

<b>Chapitre 1</b>
-------------------

<b>Equations constitutives du modèle D.N.L.R.</b>
---

1.1	Introduction . . . . .	14
1.2	Potentiel thermodynamique et équations constitutives . . . . .	16
1.3	Cadre fixé par la TPI linéaire . . . . .	18
1.3.1	Hypothèse de linéarité thermodynamique . . . . .	18
1.3.2	Hypothèse de linéarité cinétique . . . . .	18
1.3.3	Découplage des processus (modes) . . . . .	19
1.4	Modélisation des temps de relaxation . . . . .	19
1.4.1	Temps de relaxation initial au voisinage de l'équilibre . . . . .	19
1.4.2	Introduction des non linéarités : Extensions hors du cadre linéaire .	20
1.4.3	Dépendance en température des temps de relaxation . . . . .	22
1.4.4	Distribution des temps de relaxation . . . . .	22

1.5	Lois d'évolution du modèle . . . . .	24
1.5.1	Influence des paramètres . . . . .	27
1.5.2	Un exemple de formulation non linéaire à deux spectres . . . . .	31
1.5.3	Formulation intégrale . . . . .	33
1.6	Conclusion . . . . .	34

**Chapitre 2**

**Comportements cycliques qualitatifs des modèles fondés sur l'approche D.N.L.R.**

2.1	Introduction . . . . .	38
2.2	Sollicitations cycliques à déformation imposée . . . . .	40
2.2.1	Comportement sous sollicitations cycliques uniaxiales . . . . .	41
2.2.2	Comportement sous sollicitations cycliques multiaxiales . . . . .	47
2.3	Sollicitations cycliques à contrainte imposée . . . . .	51
2.3.1	Aptitude du modèle à décrire le phénomène de rochet . . . . .	51
2.3.2	Rochet uniaxial . . . . .	53
2.3.3	Rochet multiaxial . . . . .	55
2.4	Conclusion . . . . .	73

---



---

**Partie II Mise en œuvre et validation numériques**

---



---

**75**

**Chapitre 3**

**Intégration et validation du modèle D.N.L.R. dans un code d'éléments finis.**

3.1	Introduction . . . . .	78
3.2	Généralités sur la méthode des éléments finis (E.F.) . . . . .	78
3.2.1	Formulation du problème (forme intégrale) . . . . .	78
3.2.2	Technique des éléments finis . . . . .	80
3.3	Algorithme simplifié d'une analyse de contraintes par éléments finis . . . . .	85
3.4	Intégration du modèle D.N.L.R. dans le code E.F. . . . .	86
3.5	Description de l'algorithme . . . . .	86
3.5.1	Calcul de la contrainte relaxée . . . . .	87

3.5.2	Calcul des temps de relaxation . . . . .	87
3.5.3	Calcul de la première approximation de la contrainte . . . . .	87
3.5.4	Calcul de la contrainte anélastique . . . . .	87
3.5.5	Calcul de la déformation anélastique : Technique d'accélération du temps de calcul . . . . .	87
3.5.6	Calcul de la contrainte totale . . . . .	89
3.6	Validation du modèle par éléments finis . . . . .	89
3.6.1	Choix de l'élément . . . . .	89
3.6.2	Essai de traction monotone . . . . .	90
3.6.3	Essais de traction-cisaillement de type papillon et trèfle - Validation VEF / Expérience . . . . .	91
3.7	Conclusion . . . . .	96

<p><b>Chapitre 4</b> <b>Etude comparative : D.N.L.R. et N.L.K</b></p>
---

4.1	Introduction . . . . .	100
4.2	Présentation du modèle N.L.K. . . . .	100
4.2.1	Formulation élastoplastique . . . . .	100
4.3	Intégration du modèle N.L.K dans le code E.F. . . . .	102
4.3.1	Description de l'algorithme d'intégration . . . . .	103
4.4	Etude comparative . . . . .	107
4.4.1	Validation sur un essai de traction : VER/VEF . . . . .	108
4.4.2	Essai de validation sous chargements cycliques non proportion- nels : VEF/Expérience . . . . .	110
4.5	Application : Etude du comportement d'une plaque trouée . . . . .	112
4.6	Modélisation qualitative des surfaces de charge. . . . .	116
4.6.1	Cas d'un matériau isotrope . . . . .	117
4.6.2	Cas d'un matériau orthotrope . . . . .	119
4.6.3	Critère de Hill . . . . .	121
4.7	Réflexion sur l'état relaxé . . . . .	122
4.8	Identification . . . . .	126
4.9	Conclusion . . . . .	128

<p><b>Chapitre 5</b> <b>Application de la M.A.G.I.T. au modèle D.N.L.R.</b></p>	<b>131</b>
---	------------

5.1	Introduction . . . . .	132
-----	------------------------	-----

5.2	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	132
5.3	Méthode à grand incrément de temps . . . . .	134
5.3.1	Definitions et principes . . . . .	134
5.3.2	Construction de l'algorithme . . . . .	135
5.3.3	Étape locale . . . . .	136
5.3.4	Étape globale . . . . .	136
5.3.5	Convergence de l'algorithme . . . . .	137
5.3.6	Choix des Opérateurs de projection . . . . .	138
5.4	Application de la M.A.G.I.T. au D.N.L.R. . . . .	139
5.5	Conclusion . . . . .	146

---

---

## Conclusion et perspectives

---

---

<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>149</b>
-----------------------------------	------------

---

---

## Annexes 153

---

---

<b>Annexe A</b>
<b>Rappels de thermodynamique des processus irréversibles classique</b>

A.1	Premier principe de la thermodynamique . . . . .	156
A.2	Second principe de la thermodynamique . . . . .	158
A.3	Variables observables et variables internes en formulation classique . . . . .	159
A.4	Variables associées - Lois d'état en formulation classique . . . . .	159
A.5	Potentiel de dissipation - Lois complémentaires . . . . .	161

---

**Annexe B****Modèles de comportement phénoménologiques**

B.1	Modèle BCG de Burllet & Cailletaud (1987) . . . . .	166
B.2	Modèle OW de Ohno et Wang (1993) . . . . .	167
B.3	Modèle TANA de Tanaka (1994) . . . . .	167

---

---

<b>Références bibliographiques</b>	<b>171</b>
------------------------------------	------------

---

---

<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>
----------------------	------------



# Table des figures

1.1	Variation du col d'activation . . . . .	21
1.2	Distribution initiale des temps de relaxation . . . . .	23
1.3	Influence du Module non relaxé $E^u$ . . . . .	29
1.4	Influence du Module relaxé $E^r$ . . . . .	29
1.5	Influence du Paramètre de non linéarité $K_\sigma$ . . . . .	30
1.6	Influence du paramètre d'énergie d'activation maximale $\Delta F^{r+,max}$ . . . . .	30
1.7	Distribution initiale des temps de relaxation des spectres $I$ et $II$ sur 6 décades et 50 modes . . . . .	32
1.8	Formulation intégrale . . . . .	34
2.1	Durcissement - Augmentation progressive de la contrainte . . . . .	41
2.2	Adoucissement - Diminution progressive de la contrainte . . . . .	42
2.3	Effet d'adoucissement cyclique et de mémoire sous séquence de chargements à différentes amplitudes [Tanaka et al (1985)] . . . . .	42
2.4	$a_w$ <b>positif</b> - Durcissement . . . . .	44
2.5	$a_w$ <b>néгатif</b> - Adoucissement . . . . .	44
2.6	$b_w=0$ - pas de cycle stabilisé . . . . .	45
2.7	Effet mémoire - Simulation version I du modèle . . . . .	46
2.8	Effet mémoire - Simulation version II du modèle . . . . .	46
2.9	Trajets de chargement : $\epsilon_{11}$ en abscisse et $\epsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$ en ordonnée . . . . .	48
2.10	Résultats expérimentaux - Evolution de $\sigma_{Max}^{EQV}$ en fonction de la déformation plastique cumulée ( [Pilvin (1990)], [Ferney (1994)] ) . . . . .	49
2.11	Réponse d'un modèle Micromécanique - Evolution de $\sigma_{Max}^{EQV}$ en fonction de la déformation plastique cumulée ([Abdul-Latif et al(2) (1998)]) . . . . .	49
2.12	Réponse D.N.L.R. version I - Evolution de $\sigma_{Max}^{EQV}$ en fonction du nombre de cycle . . . . .	50
2.13	Réponse D.N.L.R.II - Evolution de $\sigma_{Max}^{EQV}$ en fonction du nombre de cycle (2 spectres et un état relaxé réversible) . . . . .	51
2.14	Phénomènes d'accommodation (a), de rochet (b) . . . . .	52
2.15	Contrainte symétrique ( $\bar{\sigma} = 0MPa$ ) . . . . .	53
2.16	Contrainte non symétrique ( $\bar{\sigma} = 100MPa$ ) . . . . .	54
2.17	Contrainte non symétrique ( $\bar{\sigma} = 20MPa$ ) . . . . .	54
2.18	Influence de la contrainte moyenne . . . . .	55
2.19	Trajet 1 - Description du chargement ( $\sigma_{11}, \epsilon_{12}$ ) . . . . .	56
2.20	Trajet 1 - résultats obtenus par Basuroychowdhury et al (1998) comparés à l'étude expérimentale de Shiratori et al (1979). . . . .	57



2.21	Trajet 1 - résultats obtenus avec la version I D.N.L.R. (1 spectre et état relaxé réversible) . . . . .	58
2.22	Trajet 1 - résultats obtenus avec la version I-bis D.N.L.R. (1 spectre et état relaxé irréversible) . . . . .	58
2.23	Essai de fluage avec les versions I ( $\sigma^r$ réversible) et I-bis ( $\sigma^r$ irréversible) du modèle . . . . .	59
2.24	Trajet 2 - contrainte normale $\sigma_{11}(MPa)$ et déformation de cisaillement $\epsilon_{12}(*10^{-3})$ imposées . . . . .	60
2.25	Trajet 2 - contrainte normale - déformation de cisaillement ( $\sigma_{11}(MPa) - \epsilon_{12}$ ) imposées . . . . .	60
2.26	Réponse N.L.K. trajet2A : sens 1 contrainte moyenne nulle . . . . .	61
2.27	Réponse N.L.K. trajet2B : sens 1 contrainte moyenne non nulle . . . . .	62
2.28	Réponse N.L.K. trajet2C : sens 2 contrainte moyenne non nulle . . . . .	62
2.29	Réponse N.L.K. trajet 2A et trajet2C . . . . .	63
2.30	Réponse N.L.K. trajet2C : contrainte moyenne non nulle . . . . .	63
2.31	D.N.L.R. version I-bis trajet2A : sens 1 et contrainte moyenne nulle . . . . .	64
2.32	D.N.L.R. version I-bis trajet2B : sens 1 et contrainte moyenne non nulle . . . . .	64
2.33	D.N.L.R. version I-bis trajet2C : sens 2 et contrainte moyenne non nulle . . . . .	65
2.34	D.N.L.R. version I-bis trajet2A : sens 1 et contrainte moyenne nulle . . . . .	65
2.35	D.N.L.R. version I-bis trajet2B : sens 1 et contrainte moyenne non nulle . . . . .	66
2.36	D.N.L.R. version I-bis trajet2C : sens 2 et contrainte moyenne non nulle . . . . .	66
2.37	Version I-bis : évolution de $\epsilon_{11}$ en fonction de $\epsilon_{12}$ . . . . .	67
2.38	D.N.L.R. version I-bis : Evolution de la déformation équivalente maximale en fonction du nombre de cycles . . . . .	68
2.39	Description du trajet papillon . . . . .	69
2.40	Etude comparative des modèles NLK (a), BCG (b), OW (c), TANA (d), OW-TANA (e) par Portier et al (2000) . . . . .	70
2.41	Comparaison entre la simulation du modèle à 400 grains proposé par Abdul-Latif (b) (2002) et l'expérience - en trait continu la simulation des deux sens et en trait discontinu l'expérience . . . . .	71
2.42	Version I du modèle D.N.L.R. (1 spectre et un état relaxé réversible) . . . . .	72
2.43	Version I-bis du modèle D.N.L.R. . . . .	72
2.44	Version II du modèle D.N.L.R. . . . .	73
3.1	Modélisation des efforts et des conditions aux limites . . . . .	79
3.2	Discretisation 2D par des éléments finis . . . . .	81
3.3	Organigramme du schéma de résolution numérique par éléments finis. . . . .	85
3.4	Validation du modèle sur un essai de traction . . . . .	91
3.5	Description de l'élément de volume et de sa déformée . . . . .	92
3.6	Validation E.F. du modèle D.N.L.R. : Sollicitation "Papillon" . . . . .	94
3.7	Evolution de l'écart entre l'expérience et la simulation pour le chargement papillon - traction et cisaillement . . . . .	95
3.8	Validation E.F. du modèle D.N.L.R. : Sollicitation "Trèfle" . . . . .	96
4.1	Définition graphique de X et de R $\left( \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ . . . . .	101
4.2	Validation du modèle N.L.K . . . . .	107

4.3	Evolution de la variable d'érouissage cinématique $X$ en traction monotone . .	109
4.4	Etude comparative sur une courbe de traction monotone. D.N.L.R. - modèle à l'état relaxé linéaire. N.L.K. - modèle à 2 centres et érouissages cinématiques non linéaires . . . . .	110
4.5	Traction . . . . .	111
4.6	Cisaillement . . . . .	111
4.7	Plaque trouée . . . . .	112
4.8	Quart de plaque : Maillage et conditions aux limites . . . . .	113
4.9	Evolutions des champs de déformation et de contrainte au voisinage du trou (point A) . . . . .	114
4.10	Evolution la contrainte $\sigma_{22}$ en fonction de la déformation $\epsilon_{22}$ point B . . . . .	115
4.11	Evolution la contrainte $\sigma_{22}$ en fonction de la déformation $\epsilon_{22}$ point C . . . . .	115
4.12	Evolutions de la déformation et de la contrainte équivalente le long des axes $X_1, X_2,$ et $X_3$ . . . . .	116
4.13	Surface de charge initiale du modèle D.N.L.R. . . . .	118
4.14	Influence de $K_\sigma$ sur la surface de charge initiale. . . . .	119
4.15	Modélisation de surface de charge : isotrope et orthotrope avec la version I du D.N.L.R. . . . .	121
4.16	Chargement monotone : Evolution de $\sigma_{11}$ et de $\sigma_{11}^r$ en fonction de la déformation totale . . . . .	123
4.17	Chargement cyclique : Evolution de $\sigma_{11}$ et de $\sigma_{11}^r$ en fonction de la déformation totale . . . . .	124
4.18	D.N.L.R. modifié : Evolution de la contrainte relaxée (Adoucissement) . . . . .	125
4.19	Résultats de simulations avec les modèles D.N.L.R.modifié et N.L.K. . . . .	128
5.1	Algorithme de Newton . . . . .	133
5.2	Représentation graphique de efforts appliqués sur un solide $\mathbb{S}$ . . . . .	135
5.3	Schématisation de la M.A.G.I.T - $S$ domaine des champs statiquement admissible - $\hat{S}$ domaines des champs compatibles avec la loi de comportement - $S^*$ solution du problème . . . . .	136
5.4	Schéma de la M.A.G.I.T version 1 . . . . .	140
5.5	Première itération de la version 1 de la M.A.G.I.T. . . . .	142
5.6	Deuxième itération de la version 1 de la M.A.G.I.T. . . . .	142
5.7	Troisième itération de la version 1 de la M.A.G.I.T. . . . .	143
5.8	Schéma de la M.A.G.I.T version 2 . . . . .	144
5.9	Version 2 : itération 1, 2 et 3 . . . . .	145
5.10	Evolution du temps de calcul en fonction des cycles . . . . .	146



# Liste des tableaux

1.1	Paramètres du modèle version I . . . . .	27
1.2	Matrices de Tisza (isotrope) . . . . .	32
1.3	Paramètres cinétiques du modèle Version II . . . . .	33
2.1	Tableau récapitulatif des différentes versions construites sur la base de l'ap- proche D.N.L.R. . . . .	39
2.2	Paramètres de la version I du modèle D.N.L.R. . . . .	40
2.3	Paramètres de la version I-bis du modèle D.N.L.R. . . . .	40
2.4	Paramètres de la version II du modèle D.N.L.R. . . . .	40
3.1	Algorithme de la technique d'accélération du temps de calcul . . . . .	88
3.2	Paramètres du modèle version I . . . . .	90
3.3	Définition des chargements Papillon et trèfle . . . . .	92
3.4	Paramètres du modèle D.N.L.R. identifiés par [Toussaint (1997)] . . . . .	93
4.1	Tableau récapitulatif des modèles D.N.L.R. et N.L.K. retenus pour la comparaison	108
4.2	Paramètres du modèle D.N.L.R. version I (1 spectre et état relaxé réversible et linéaire et $a_w = 0$ et $b_w = 0$ ) . . . . .	108
4.3	Paramètres du modèle N.L.K. à deux centres (écrouissage cinématique non li- néaire) . . . . .	109
4.4	Détails du temps de calcul des modèles D.N.L.R. et N.L.K. . . . .	113
4.5	Paramètres du modèle D.N.L.R. modifié (9 coefficients) . . . . .	126
4.6	Paramètres du modèle N.L.K. (11 coefficients) . . . . .	126
4.7	Tableau récapitulatif des modèles D.N.L.R. modifié et N.L.K. . . . .	127



# Nomenclature

## Notations associées à une grandeur $y$

$y_e$	Grandeur $y$ échangée avec l'extérieur
$y_i$	Production interne de la variable $y$
$y^j$	Grandeur associée au processus (mode) $j$
$\dot{y}$	Dérivée temporelle de la variable $y$
$\ddot{x}$	Dérivée seconde temporelle de la variable $y$
$y^u$	Grandeur à l'état instantané
$y^r$	Grandeur à l'état relaxée
$y^d$	Part dissipative de la grandeur $y$
$y^p$	Part plastique de la grandeur $y$
$y^{an}$	Part anélastique de la grandeur $y$
$\bar{y}$	Vecteur de variables dissipatives (variables internes)
$\underline{y}$	Vecteur de variables d'état (observables)
$\overline{\bar{y}}$	Matrice de couplage entre variables observables
$\overline{\underline{y}}$	Matrice de couplage entre variables d'état et variables dissipatives
$\underline{\underline{y}}$	Matrice de couplage entre variables d'état

## Lettres latines

$a(t, T)$	Facteur de glissement dépendant du temps et de la température
$\underline{a}$	Matrice de couplage entre variables d'état
$\overline{A^j}$	Affinité ou Force thermodynamique de non équilibre du mode $j$
$\overline{A}$	Vecteur affinité
$B$	Constante de normalisation associée aux poids
$\overline{\underline{b}}$	Matrice de couplage entre les variables d'états et les variables de dissipation
$E$	Module d'Young
$E^u$	Module instantané
$E^r$	Module relaxé
$E_c$	Énergie cinétique
$E_p$	Énergie potentiel

$\Delta E^+$	Énergie d'activation
$\Delta y$	Variation de la variable $y$
$f$	Surface de charge, Fonction potentiel
$F$	Potentiel d'énergie libre
$\Delta F_j^+$	Énergie libre d'activation du processus $j$
$\Delta(\Delta F_j^+)$	Écart énergétique associé à l'énergie libre d'activation du processus $j$
$g$	Potentiel enthalpie libre
$\overline{g}$	Matrice de couplage entre variables dissipatives
$h$	Constante de Planck
$k_B$	Constante de Boltzmann
$K_\beta$	Constante de non-linéarité coopérative associée à la variable $\beta$
$\overline{L}$	Matrice phénoménologique d'Onsager
$\underline{n}$	Vecteur constituant chimique
$N$	Nombre de processus (ou modes)
$p_0^j$	Poids du processus $j$
$p^{j+}$	Probabilité d'atteindre la position énergétique du col $j$
$Q$	Taux de chaleur reçue par le système
$R$	Constante des gaz parfaits
$S$	Matrice des souplesse
$s$	Entropie
$\Delta_i s$	Production d'entropie
$T$	Température
$U, u$	énergie interne, énergie interne spécifique
$\overline{z}$	Variables internes

### Lettres grecs

$\underline{\beta}$	Vecteur variable observable (ou variable de sortie)
$\underline{\epsilon}$	Vecteur déformation
$\underline{\gamma}$	Vecteur variable de commande (ou variable d'entrée)
$\mu$	Module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\nu^j$	Fréquence de saut pour le processus $j$
$\Omega$	Domaine d'un solide $S$
$\Phi$	Potentiel de dissipation
$\Phi^*$	Transformée de Legendre de $\Phi$
$\Psi$	Potentiel thermodynamique,
$\sigma$	Contrainte
$\tau^j$	Temps de relaxation associé au processus $j$
$\tau_{max}$	Temps de relaxation maximal

# Introduction générale

Une des disciplines de la mécanique des solides déformables est l'étude de lois de comportement des matériaux. Cette discipline s'intéresse plus précisément à l'évolution de la distribution du champ de contrainte en fonction de la distribution du champ de déformation. En élasticité linéaire, la loi de comportement se résume en une relation de proportionnalité (loi de Hooke) entre la matrice représentative du tenseur des contraintes et celle des déformations. En plasticité, viscoplasticité, et élastoplasticité cette relation devient fortement non linéaire. Historiquement, deux grandes voies d'études principales se sont dégagées pour élaborer des modèles de comportement de ces différents matériaux : les mécaniciens ont surtout tenté d'établir des lois phénoménologiques performantes (Boltzmann, Chaboche, Schapery, Valanis,...) et plus récemment, certains d'entre eux se sont orientés vers la prise en compte de la réalité microstructurale du matériau, avec les modèles micro-mécaniques (Kröner, Zaoui, Berveiller, Cailletaud,...). La plupart des succès marquants ont été obtenus sur les matériaux polycristallins pour lesquels les mécanismes de déformation sont bien établis par la communauté des physiciens. Une nouvelle voie est développée depuis les années 90 dans le groupe de mécanique du solide du LEMTA (Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée). Elle repose sur la thermodynamique de la relaxation des milieux continus associée aux concepts de la physique statistique et en particulier à la théorie des fluctuations et à la cinétique de l'état transitoire activé. Cette nouvelle approche est baptisée par Cunat (1985), (1988) & (2001) D.N.L.R. (Distribution of Non Linear Relaxation).

C'est une approche spectrale de la dissipation. Elle s'appuie sur la généralisation de la relation fondamentale de GIBBS pour les systèmes hors équilibre. Notre objectif est tout d'abord d'évaluer qualitativement les aptitudes et les faiblesses du modèle à simuler surtout le comportement cyclique des matériaux, puis valider l'intégration des lois de comportement issues de cette approche dans un code de calcul par éléments finis, ensuite situer les performances numériques du modèle, comparées à d'autres modèles existants dans la littérature et enfin utiliser la méthode à grand incrément de temps introduite par Ladevèze, pour intégrer les équations constitutives du modèle.

La validation du modèle passe nécessairement par l'intégration des équations constitutives dans le code. Pour réaliser ce travail nous disposons d'un logiciel de simulation numérique (Msc.Marc/Mentat) permettant de reproduire la géométrie des éprouvettes et leur discrétisation, d'effectuer les calculs par E.F. et de visualiser les résultats. Ce travail s'articule autour de 5 chapitres.

Le premier chapitre rappelle succinctement le formalisme D.N.L.R. et les lois d'évolutions qui en découlent. Nous admettons que le comportement local au sein d'un volume élémentaire



représentatif (VER) peut être totalement décrit par un potentiel thermodynamique dépendant uniquement de variables "observables", et des variables internes. A partir de ce potentiel, Cunat a pu élaborer un formalisme qui prend sa source dans la thermodynamique des phénomènes irréversibles et qui aboutit à un modèle qui permet la description de tous les comportements physiques (mécanique, magnétisme, chimie, thermique,...) et de leurs couplages respectifs. Nous relatons dans ce chapitre les différentes étapes et hypothèses nous menant à l'élaboration du modèle de comportement mécanique.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement qualitatif cyclique du modèle. En d'autres termes, le modèle D.N.L.R., est-il capable de reproduire certains phénomènes physiques dus aux chargements cycliques à contraintes et déformations imposées, tels que les phénomènes de rochet, d'adoucissement, de durcissement, de mémoire, et de surécrouissage ? La réponse à cette question se trouve en partie dans ce chapitre.

Nous faisons, dans le chapitre 3, l'inventaire des possibilités qu'offre le modèle associé à la méthode des éléments finis à simuler des comportement non linéaires de type plastique, viscoplastique et élastoplastique et présentons les résultats de validation du modèle à travers des essais réalisés sur un élément (3D) soumis à des chargements cycliques non proportionnels. La comparaison avec des résultats expérimentaux et des simulations numériques obtenues pour d'autres modélisations permet d'évaluer la pertinence du modèle notamment en terme de temps de calcul.

Dans le quatrième chapitre nous menons une étude comparative entre le modèle D.N.L.R., basé sur la théorie des fluctuations et l'analyse modale de la dissipation et le modèle phénoménologique d'écrouissage non linéaire N.L.K. (Non Linear Kinematics) qui prend en compte la dissipation au travers du concept de surfaces de charges liées à la notion de normalité de manière à respecter "in fine" la positivité de la production d'entropie. Cette étude a permis de faire un parallèle entre ces deux modèles et de dresser un bilan des équivalences de ces deux derniers. Nous nous sommes enfin inspirés de la variable d'écrouissage cinématique du modèle N.L.K. pour modéliser la contrainte relaxée du modèle D.N.L.R. qui d'après nos réflexions pourrait jouer le rôle d'écrouissage cinématique.

L'objet du dernier chapitre est d'utiliser une autre technique d'intégration numérique : la Méthode A Grand Incrément de Temps (MAGIT ou LATIN) développé par Ladevèze (1984) pour résoudre l'ensemble des équations constitutives du modèle. Le but recherché est d'améliorer les performances numériques en terme de temps de calcul.

Nous terminons cette présentation par une conclusion qui rappelle l'ensemble des résultats obtenus dans ce travail. Des perspectives sont également proposées à plus ou moins long terme.

**Première partie**

**Formalisme D.N.L.R. et équations  
constitutives**



# Chapitre 1

## Equations constitutives du modèle D.N.L.R.

**Résumé :** Le formalisme baptisé **D.N.L.R.** (Distribution of Non Linear Relaxation) est construit dans le cadre de la thermodynamique des phénomènes irréversibles (T.P.I). Il s'appuie sur la relation fondamentale de GIBBS. La philosophie et la démarche qui ont conduit Cunat à élaborer ce modèle de comportement ont fait l'objet de plusieurs publications et travaux parmi lesquels nous citons : ([Cunat (1988)], [Aharoune (1991)], [Cunat (1991)], [Ayadi (1995)], [Loukil (1996)], [Toussaint (1997)], [Marceron (1999)], [Toussaint et al (2000)]). Nous nous limitons dans ce chapitre à un état de l'art succinct sur les avancées du modèle et les différentes hypothèses cinétiques, du choix du potentiel thermodynamique jusqu'aux lois d'évolution.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Potentiel thermodynamique et équations constitutives</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Cadre fixé par la TPI linéaire</b>	<b>18</b>
1.3.1	Hypothèse de linéarité thermodynamique	18
1.3.2	Hypothèse de linéarité cinétique	18
1.3.3	Découplage des processus (modes)	19
<b>1.4</b>	<b>Modélisation des temps de relaxation</b>	<b>19</b>
1.4.1	Temps de relaxation initial au voisinage de l'équilibre	19
1.4.2	Introduction des non linéarités : Extensions hors du cadre linéaire	20
1.4.3	Dépendance en température des temps de relaxation	22
1.4.4	Distribution des temps de relaxation	22
<b>1.5</b>	<b>Lois d'évolution du modèle</b>	<b>24</b>
1.5.1	Influence des paramètres	27
1.5.2	Un exemple de formulation non linéaire à deux spectres	31
1.5.3	Formulation intégrale	33
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

---

## 1.1 Introduction

L'outil de base utilisé ici repose sur la thermodynamique de la relaxation des milieux continus. Il a été développé au sein de l'équipe de recherche de mécanique des solides du LEMTA [Cunat (1985) & (1988)].

On admet que le comportement local au sein d'un volume élémentaire représentatif (VER) est déterminé par un potentiel thermodynamique  $\Psi(\gamma; \bar{z})$ , qui contient toute l'information sur le système : l'existence d'un tel potentiel, y compris en dehors de l'équilibre, est le postulat principal de ce travail. Il trouve ces fondements dans l'analyse thermodynamique lors du déroulement de la réaction chimique de [De Donder (1920)].  $\gamma$  représente le vecteur des variables d'état "accessibles" à l'expérimentateur pour contrôler le système. Localement ce vecteur s'identifie aux conditions aux limites imposées sur le VER (C.L.).  $\bar{z}$  est quant à lui le vecteur des variables internes qui gouverne l'avancement des évolutions microstructurales qui découlent des C.L.. Une telle hypothèse constitue, en fait, comme le souligne [Münster (1966)], une double généralisation de la relation fondamentale de GIBBS en ce sens qu'elle généralise cette relation à la fois aux systèmes ouverts et aux systèmes qui sont le siège de réactions chimiques en cours (selon la méthode dite ([De Donder (1920)]).

Pour traiter le milieu continu, on accepte cette définition locale du potentiel thermodynamique. La prise en compte des échanges entre différents VER permet de construire une théorie des champs qui trouve probablement sa limite lorsque les gradients locaux sur les grandeurs intensives deviennent trop importants pour pouvoir considérer que le volume élémentaire est bien représenté par une grandeur intensive moyenne.

La difficulté essentielle réside dans la définition et la représentation des variables dissipatives  $\bar{z}$  caractéristiques de l'état microstructural. Pour contourner cette difficulté, Cunat propose de recourir à la théorie statistique des fluctuations selon laquelle tout état hors équilibre peut être décrit comme une fluctuation par rapport à l'équilibre induit par les conditions aux limites imposées au V.E.R.. Selon [Prigogine (1968)] la production d'entropie est la même quel que soit le mode de régression emprunté par le système lorsque l'on reste au voisinage de l'équilibre. La notion de modes normaux permet de traiter l'évolution complexe de mécanismes couplés au moyen de combinaisons de mécanismes indépendantes les unes des autres.

En effet, au voisinage de l'équilibre, la thermodynamique des processus irréversibles linéaires est applicable. [Meixner (1949)] a montré que, dans ces conditions, il était toujours possible de choisir un changement de base des variables dissipatives qui découple les processus entre eux (de manière comparable à l'analyse modale). [Cunat (1988)] a alors montré que la théorie des fluctuations permet d'obtenir la distribution initiale du spectre des temps de relaxation qui lie un processus (ou mode) et le temps de relaxation qui lui est associé. Alors la connaissance d'un seul temps de relaxation (paramètre du modèle) permet de caractériser une distribution continue dès que l'on fixe son étendue sur l'échelle des temps (ou des énergies d'activation). Dans ces conditions les cinétiques sont gouvernées par des équations différentielles du premier ordre et caractérisées par leurs temps de relaxation.

L'extension aux situations plus éloignées de l'équilibre est obtenue en introduisant une dépendance temporelle des temps de relaxation. Le lien avec la connaissance détaillée des mécanismes à l'échelle microscopique est possible et souhaitable, mais n'est pas indispensable.

Le formalisme ainsi construit a été baptisé **D.N.L.R.** : Distribution of Non Linear Relaxations.

Le point de départ est l'écriture de l'énergie interne comme un potentiel de Gibbs

$$u = u(s, \epsilon, n_k) \quad (1.1)$$

soit

$$u = Ts + \sigma\epsilon + \sum_k \mu_k n_k \quad (1.2)$$

avec  $u$  l'énergie interne spécifique ;  $T$  la température ;  $s$  l'entropie spécifique ;  $\sigma$  la contrainte ;  $\epsilon$  la déformation ;  $\mu_k$  le potentiel chimique et  $n_k$  le nombre de moles des espèces en présence. L'écriture sous forme de puissance introduit la notion d'évolution :

$$\dot{u} = T\dot{s} + \sigma\dot{\epsilon} + \sum_k \mu_k \dot{n}_k \quad (1.3)$$

complétée par la relation de Gibbs-Duhem

$$0 = s\dot{T} + \dot{\sigma}\epsilon + \sum_k \dot{\mu}_k n_k \quad (1.4)$$

Pour un système fermé,  $\dot{n}_k$  traduit les réorganisations internes (pas d'échange de matière avec l'extérieur). L'utilisation de l'avancement de De Donder permet d'écrire

$$\dot{n}_k = \sum_l \nu_k^l \dot{z}^l \quad (1.5)$$

où  $\nu_k^l$  représente le coefficient de stoechiométrie de l'élément  $k$  dans la réaction interne  $l$ . On obtient ainsi

$$\dot{u} = T\dot{s} + \sigma\dot{\epsilon} + \sum_l \left( \sum_k \mu_k \nu_k^l \right) \dot{z}^l \quad (1.6)$$

soit

$$\dot{u} = T\dot{s} + \sigma\dot{\epsilon} - \sum_l A^l \dot{z}^l \quad (1.7)$$

avec

$$A^l = - \sum_k \mu_k \nu_k^l$$

l'affinité ou force de non équilibre interne de De Donder pour la réaction  $l$ .

De manière condensée, on a

$$\dot{u} = \underline{Y}\dot{\underline{y}} - \overline{A}\dot{\underline{z}} \quad (1.8)$$

où  $\underline{y}$  grandeurs de contrôle extensives et  $\underline{Y}$  grandeurs de contrôle duales intensives.

L'utilisation de transformées de Legendre permet de choisir le potentiel adapté aux situations rencontrées pour le contrôle des variables aux limites du VER. On écrit de manière générique  $\Psi = \Psi(\underline{\gamma}, \underline{\bar{z}})$  et  $\dot{\Psi} = \underline{\beta}\dot{\underline{\gamma}} - \overline{A}\dot{\underline{z}}$

## 1.2 Potentiel thermodynamique et équations constitutives

Nous nous plaçons dans le cadre de la formulation de GIBBS généralisée. Le potentiel thermodynamique <sup>(1)</sup> des systèmes hors équilibre donné par

$$\Psi = \Psi(\underline{\gamma}, \bar{z}) \quad (1.9)$$

est fonction des variables d'états et internes décrites respectivement par  $\underline{\gamma}$  et  $\bar{z}$  <sup>(2)</sup>

$$\dot{\Psi} = \underline{\beta} \dot{\underline{\gamma}} - \bar{A} \dot{\bar{z}} \quad (1.10)$$

L'équilibre thermodynamique est alors uniquement fixé par les variables de contrôle  $\underline{\gamma}$  qui déterminent ainsi le vecteur  $\bar{z}^{r,eq}$  <sup>(3)</sup> représentatif de la microstructure. Le jeu des variables  $\bar{A}$  (les affinités ou forces de non équilibre) associées à  $\bar{z}$  (degrés d'avancement des réorganisations internes) prend une valeur nulle à l'équilibre interne complet (ou vrai). Le produit scalaire  $\bar{A} \dot{\bar{z}}$  définit le terme énergétique associé à la production d'entropie induite par la dissipation :

$$T \frac{d_i S}{dt} = \sum_{j=1}^{q=dim(\bar{z})} A^j \frac{dz^j}{dt} = \bar{A} \dot{\bar{z}} \geq 0 \quad (1.11)$$

où  $T$  est la température,  $S$  l'entropie du système,  $A^j$  et  $z^j$  sont respectivement les composantes des vecteurs  $\bar{A}$  et  $\bar{z}$ .

A partir de la différentielle totale du potentiel thermodynamique, nous pouvons préciser les composantes des grandeurs duales aux variables  $(\underline{\gamma}, \bar{z})$  :

$$\beta_m = \frac{\partial \Psi(\underline{\gamma}; \bar{z})}{\partial \gamma_m} \quad (1.12)$$

$$A^k = - \frac{\partial \Psi(\underline{\gamma}; \bar{z})}{\partial z^k} \quad (1.13)$$

Les relations constitutives (équations d'état) donnent simplement la dépendance

$$\beta = \beta(\underline{\gamma}, \bar{z})$$

On peut écrire :

$$d\beta_m = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma_m \partial \gamma_l}(\underline{\gamma}; \bar{z}) d\gamma_l + \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma_m \partial z^i}(\underline{\gamma}; \bar{z}) dz^i \quad (1.14)$$

$$dA^k = - \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^k \partial \gamma_l}(\underline{\gamma}; \bar{z}) d\gamma_l - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^k \partial z^i}(\underline{\gamma}; \bar{z}) dz^i \quad (1.15)$$

<sup>1</sup>pour que l'énergie interne contienne toute l'information thermodynamique, c'est à dire qu'elle puisse être traitée comme un véritable potentiel,  $\underline{\gamma}$  doit correspondre aux grandeurs extensives uniquement (l'entropie  $s$ , le volume  $v$  ou la déformation  $\epsilon$ , le nombre de moles  $n_k$  de l'espèce  $k$  en présence

<sup>2</sup>la notation  $\underline{\gamma}$  est utilisée pour marquer le vecteur des variables accessibles à l'expérimentateur alors que  $\bar{y}$  concerne les variables de microstructure (à rapprocher des variables internes usuelles)

<sup>3</sup> $r$ =relaxé (l'équilibre thermodynamique est un cas particulier) correspond à  $\dot{A} = 0$  donc  $A$ =constante. eq : équilibre correspond à  $\dot{A} = 0$  et  $A=0$ .

avec  $n$  et  $q$  les dimensions respectives de  $\underline{\gamma}$  et  $\bar{z}$ .

Ces deux expressions peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$d\underline{\beta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) d\underline{\gamma} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \bar{z}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) d\bar{z} \quad (1.16)$$

$$d\bar{A} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z} \partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) d\underline{\gamma} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) d\bar{z} \quad (1.17)$$

ou sous forme incrémentale condensée :

$$\underline{\dot{\beta}} = \underline{a}^u \underline{\dot{\gamma}} + \bar{b} \bar{\dot{z}} \quad (1.18)$$

$$-\bar{A} = \bar{b}^T \underline{\dot{\gamma}} + \bar{g} \bar{\dot{z}} \quad (1.19)$$

avec :

$$\underline{a}^u = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \underline{\gamma}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) \quad (1.20)$$

$$\bar{b} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\gamma} \partial \bar{z}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) \quad (1.21)$$

$$\bar{g} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}}(\underline{\gamma}; \bar{z}) \quad (1.22)$$

$\underline{a}^u$  : est la matrice instantanée (**unrelaxed**) de TISZA couplant les variables d'état ( $\underline{\gamma}$ ) entre elles

$\bar{b}$  : est une matrice de couplage rectangulaire puisqu'elle couple les deux espaces : celui des variables d'état "contrôlables" ( $\underline{\gamma}$ ) et celui des variables de dissipations liées à la micro-structure ( $\bar{z}$ ).

$\bar{g}$  : est la matrice dans l'espace des dissipations couplant entre elles les variables internes ( $\bar{z}$ ).

Les deux relations constitutives incrémentales (1.18) et (1.19) peuvent s'écrire de manière synthétique comme suit :

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{\beta}} \\ -\bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}^u & \bar{b} \\ \bar{b}^T & \bar{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\dot{\gamma}} \\ \bar{\dot{z}} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Cette écriture matricielle très générale englobe les divers couplages rencontrés en physique. Le vecteur réponse peut être décomposé en deux catégories :

les réponses  $\underline{\dot{\beta}}$  (observables par l'expérimentateur) mesurées et les réponses cachées  $\bar{A}$  (affinité ou force thermodynamique de non équilibre) qui sont nulles à l'équilibre comme à l'état relaxé.

Ces réponses sont induites par deux types de perturbation : les commandes maîtrisées par l'expérimentateur  $\underline{\dot{\gamma}}$  et les variables gérées par le "milieu". En général, les termes de la dissipation ne sont pas connus. Pour décrire le voisinage de l'équilibre, on peut admettre que les coefficients des matrices de couplages sont des constantes. Cela constitue le cadre de la thermodynamique des phénomènes irréversibles linéaires (TPIL).



## 1.3 Cadre fixé par la TPI linéaire

Tout modèle doit rejoindre les hypothèses de la TPI linéaire au voisinage de l'équilibre. Il est possible de construire un cadre plus général en prenant appui sur cette situation limite. C'est la stratégie adoptée dans la mise en place du formalisme D.N.L.R..

### 1.3.1 Hypothèse de linéarité thermodynamique

Admettons donc comme hypothèse simplificatrice que les coefficients des matrices  $\bar{b}$  et  $\bar{g}$  soient des constantes, on obtient par intégration de (1.19) :

$$\bar{A}(t) - \bar{A}(0) = \int_0^t \bar{A} dt = -\bar{b}^T \int_0^t \dot{\underline{\gamma}} dt - \bar{g} \int_0^t \dot{\underline{z}} dt \quad (1.24)$$

Lorsque le système est initialement en équilibre interne, l'affinité est nulle par définition  $\bar{A}(0) = 0$ . on obtient alors :

$$\bar{A}(t) = -\bar{b}^T \Delta \underline{\gamma} - \bar{g} \Delta \underline{z} \quad (1.25)$$

avec :

$$\Delta \underline{\gamma} = \underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(0) \quad (1.26)$$

et

$$\Delta \underline{z} = \underline{z}(t) - \underline{z}(0) \quad (1.27)$$

Après relaxation complète ( $t = \infty$ ), le système atteint un nouvel état d'équilibre thermodynamique caractérisé par  $\bar{z}^{r,eq}$  et  $\bar{A}^{eq} = 0$ , soit :

$$\bar{A}^r(t) = -\bar{b}^T \Delta \underline{\gamma} - \bar{g}(\bar{z}^r - \bar{z}(0)) = 0 \quad (1.28)$$

$$\bar{b}^T \Delta \underline{\gamma} = -\bar{g}(\bar{z}^r - \bar{z}(0)) \quad (1.29)$$

La relation (1.25) devient alors :

$$\bar{A}(t) = \bar{g}(\bar{z}^r - \bar{z}(0)) - \bar{g}(\bar{z}(t) - \bar{z}(0)) \quad (1.30)$$

soit :

$$\bar{A} = -\bar{g}(\bar{z} - \bar{z}^r) \quad (1.31)$$

Notons que la matrice  $\bar{g}$  est définie symétrique et positive en raison d'une part de la nature potentielle de  $\Psi$  et d'autre part de la stabilité autour de l'équilibre.

### 1.3.2 Hypothèse de linéarité cinétique

C'est une hypothèse de nature cinétique qui postule l'existence d'une relation linéaire entre les forces et les flux :

$$\dot{\underline{z}} = \bar{L} \bar{A} = -\bar{L} \bar{g}(\bar{z} - \bar{z}^r) \quad (1.32)$$

$\bar{L}$  est la matrice de couplage d'ONSAGER. C'est une matrice symétrique et définie positive. Le second principe de la thermodynamique impose que le terme énergétique associé à la production d'entropie induite par la dissipation soit positif ou nul d'où :

$$T \frac{d_i S}{dt} = \bar{A} \dot{\underline{z}} = \bar{g}(\bar{z} - \bar{z}^r) \bar{L} \bar{g}(\bar{z} - \bar{z}^r) \geq 0 \quad (1.33)$$

Le terme  $(\bar{L}\bar{g})$  a la dimension inverse d'un opérateur temps de relaxation. Finalement le second principe impose simplement la positivité exclusive de ces temps caractéristiques.

$$\bar{L}\bar{g} = \bar{\tau}^{-1} > 0 \quad (1.34)$$

$$\dot{z} = -(\bar{z} - \bar{z}^r)\bar{\tau}^{-1} \quad (1.35)$$

### 1.3.3 Découplage des processus (modes)

[Meixner (1949)] a montré qu'il est toujours possible de diagonaliser l'opérateur temps de relaxation en effectuant un changement de base approprié qui conserve la production d'entropie. Avec cette nouvelle base, on définit des processus (ou modes) normaux, c'est à dire découplés les uns des autres. Pour assurer une compatibilité avec la théorie des fluctuations, Cunat retient une base dans laquelle  $\bar{L}$  est une matrice isotrope donnée par  $L\bar{\delta} \simeq \frac{1}{h}\bar{\delta}$  où h est la constante de Planck et  $\bar{\delta}$  la matrice identité [Ayadi (1995)], [Loukil (1996)]. On peut alors écrire pour chaque mode (processus)  $j$ <sup>(4)</sup> :

$$A^j = -g^{jj}(z^j - z^{j,r}) \quad (1.36)$$

et

$$\dot{z}^j = -L^{jj}g^{jj}(z^j - z^{j,r}) = -\frac{(z^j - z^{j,r})}{\tau^j} \quad (1.37)$$

avec :

$$\tau^j = \tau^{jj} = \frac{1}{L^{jj}g^{jj}}$$

## 1.4 Modélisation des temps de relaxation

### 1.4.1 Temps de relaxation initial au voisinage de l'équilibre

La relation (1.35) introduit la notion thermodynamique de temps de relaxation. Il nous reste à donner un sens physique à cet opérateur. Dans le cadre du modèle D.N.L.R., on se réfère à la théorie de l'état transitoire activé de type [Eyring (1936)]. Pour qu'un atome (ou groupe d'atomes) puisse surmonter la barrière d'activation il faut que l'environnement configurationnel soit favorable (formation d'un défaut par exemple), et que la fréquence de saut  $\nu$  permette à l'atome de basculer au niveau du col d'activation.

Le temps de relaxation peut alors être défini comme proportionnel à l'inverse du produit de la probabilité  $p^{j+}$  d'obtenir localement une configuration favorable à ce mouvement élémentaire et à l'inverse de la fréquence de saut atomique  $\nu^j$  :

$$\tau^j = \frac{1}{\nu^j p^{j+}} \quad (1.38)$$

On peut admettre une unique fréquence de saut  $\nu^j = \nu$  supposée, identique pour chaque mode  $j$  et calée sur les sauts atomiques. Dans le cadre de l'analyse modale, le sens physique des termes

<sup>4</sup>pas de sommation sur les indices répétés

d'activation ne peut plus être directement liés aux mécanismes atomiques, puisqu'ils décrivent les modes relatifs à l'ensembles des atomes du V.E.R. ; ainsi garder

$$\nu^j = \nu = \frac{k_B T}{h} \quad (1.39)$$

(fréquence de phonon de Debye ou translation de Guggenheim)

impliquera une entropie d'activation difficile à relier à la microstructure. Ce choix doit donc être considéré comme opérationnel en vue du calcul, sans introduire d'erreur dans le calcul des cinétiques pour autant ( $h$  est la constante de Planck, et  $k_B$  la constante de Boltzmann) tant que les véritables mécanismes élémentaires n'ont pas été mis à jour.

$p^{j+}$  est la probabilité d'atteindre la position énergétique du col pour le processus  $j$

$$p^{j+} = p^{jf} p^{jm} \quad (1.40)$$

$p^{jf}$  : probabilité d'avoir une configuration favorable.

$p^{jm}$  : probabilité de migration.

Suivant la théorie de l'état transitoire activé pour un système décrit par le potentiel d'énergie libre ( $\Psi = F(T, \underline{\epsilon}; \overline{overline{z}}$ )), la probabilité pour qu'un mode  $j$  acquiert le même niveau énergétique que le col repéré par  $+$  dans nos notations est :

$$p^{j+} = \exp\left(-\frac{\Delta F^{j+}}{RT}\right) \quad (1.41)$$

$\Delta F^{j+} = \Delta E^{j+} - T\Delta S^{j+}$  : énergie libre d'activation représentant la barrière à franchir pour toutes les particules du V.E.R. dans le mouvement d'ensemble associé au mode considéré.

$R$  : constante des gaz parfaits.

On peut donc formuler l'expression du temps de relaxation en fonction de l'énergie libre d'activation et de la température  $T$  :

$$\tau^{j,r}(T) = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta F^{j,+}}{RT}\right) = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta E^{j+} - T\Delta S^{j+}}{RT}\right) \quad (1.42)$$

Dans le cas anisotherme lorsque l'on admet un comportement de type Arrénius avec la température  $T(t)$  dépendant du temps ( $t$ ), on a :

$$\tau^{j,r}(T, t) = \frac{h}{k_B T(t)} \exp\left(\frac{\Delta F^{j,+}}{RT(t)}\right) = \frac{h}{k_B T(t)} \exp\left(\frac{\Delta E^{j+} - T(t)\Delta S^{j+}}{RT(t)}\right) \quad (1.43)$$

## 1.4.2 Introduction des non linéarités : Extensions hors du cadre linéaire

### Non linéarités temporelles - Principes

Lorsque l'on s'écarte trop de l'équilibre, les hypothèses de linéarités thermodynamique et cinétique ne sont plus raisonnables. Cependant, nous pouvons conserver la structure des équations précédentes dès lors que l'on admet une dépendance de  $\overline{g}$  (et/ou) de  $\overline{L}$  avec  $(\overline{z} - \overline{z}^r)$ . Dans ces conditions, l'opérateur temps de relaxation est lui-même dépendant de cet écart à l'équilibre :

$$(\overline{\tau})^{-1} = \overline{L} \overline{g} \quad (1.44)$$

On introduit ainsi une dépendance temporelle, c'est à dire en  $(\bar{z} - \bar{z}^r)$  du niveau de la barrière d'activation, voir figure (1.1)

$$\tau^j(t) = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta F^{j+}}{RT}\right) \exp\left[\frac{\Delta(\Delta F^{j+}(t))}{RT}\right] \quad (1.45)$$

Soit :

$$\Delta F^{j+}(t) = \Delta F^{j+}(T) + \Delta(\Delta F^{j+}(t)) \quad (1.46)$$

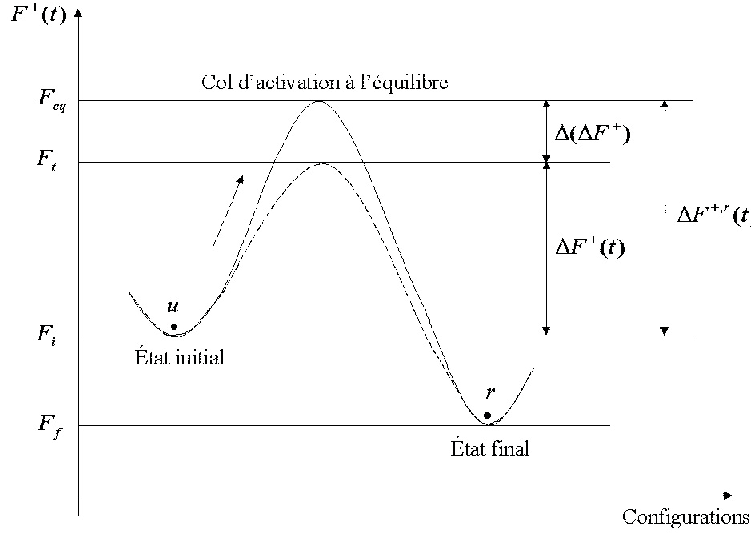


FIG. 1.1 – Variation du col d'activation

Nous obtenons ainsi :

$$\tau^j(T, t) = a^j(T, t) \tau^{j,r} \quad (1.47)$$

avec

$$a^j(T, t) = \exp\left[\frac{\Delta(\Delta F^{j+}(t))}{RT}\right] \quad (1.48)$$

$a^j(T, t)$  représente le facteur de glissement du temps de relaxation induit par la non linéarité des processus dissipatifs<sup>5</sup>.

$\tau^{j,r}$  représente le temps de relaxation de référence du processus  $j$  au voisinage immédiat de l'équilibre.

### Modélisation de non linéarité de nature coopérative

A chaque instant  $t$ , l'énergie d'activation  $\Delta F^{j+}(t)$  évoluera d'une quantité  $\Delta(\Delta F^{j+})$  (relation 1.46). Il faut préciser, à ce stade de modélisation, le contenu de ce terme non linéaire  $\Delta(\Delta F^{j+})$ . Plusieurs options sont possibles. En effet, on peut imaginer que chaque processus (ou mode) est affecté de manière individuelle par cette non linéarité intrinsèque. La question délicate reste la formulation des termes correctifs spécifiques à chaque mode  $j$ . En tout état de cause il faut

<sup>5</sup>Notons ici que nous admettons que ces glissements temporels  $a^j(T, t)$  n'induisent pas de couplages de nature à remettre en cause la séparation modale précédente.

préservant la décomposition modale. De manière alternative, puisque chacun de ces modes  $j$  représente une partie de la réponse globale, c'est à dire de l'ensemble des éléments constitutifs du V.E.R., on peut imaginer au contraire des effets non locaux liés à l'ensemble des réorganisations internes qui les affectent de manière commune (non linéarité de nature coopérative). C'est dans cette voie que les premières tentatives de modélisation ont été développées. En première approximation, nous retiendrons à titre d'exemple un développement au premier ordre par rapport à la variable "observable"  $\beta$  :

$$\Delta(\Delta F^+) = \underline{K}_\beta (\underline{\beta} - \underline{\beta}^r) \quad (1.49)$$

D'où :

$$a(T, t) = \exp\left(\frac{\underline{K}_\beta(\underline{\beta} - \underline{\beta}^r)}{RT}\right) \quad (1.50)$$

$\underline{K}_\beta$  : représente le facteur de non linéarité induit par l'écart à l'équilibre, c'est un paramètre du modèle. La forme pratique pour les sollicitations mécaniques sera présentée en fin de chapitre.

### 1.4.3 Dépendance en température des temps de relaxation

Compte tenu de la forme établie pour décrire le temps de relaxation propre à chaque mode, un changement de température peut, à priori, modifier le découplage de ces processus. Pour retrouver le principe d'équivalence temps-température, il est nécessaire d'admettre l'égalité  $\Delta E^{j+} = \Delta E^+$  quel que soit le processus  $j$ . En d'autres termes, un changement de température produit un glissement d'ensemble du spectre de relaxation le long de l'échelle des temps sans déformation [Cunat (1988)], [Loukil (1996)]. Cette hypothèse implique que l'origine de la distribution des temps de relaxation soit de nature entropique. En conséquence la connaissance de l'entropie d'activation du processus le plus lent détermine à elle seule l'ensemble du spectre de relaxation.

### 1.4.4 Distribution des temps de relaxation

La difficulté principale est maintenant liée au nombre et à l'impact relatif de chacun de ces modes de réorganisations internes, non identifiable directement à partir de mécanismes élémentaires. En effet, chaque mode résulte de combinaison de mécanismes ; on peut lui associer au moins trois paramètres :

- son poids relatif à l'écart global d'équilibre  $p_0^j$ ,
- son temps de relaxation au voisinage de l'équilibre  $\tau^{j,r}$ ,
- et le facteur de non linéarité évoqué précédemment  $\underline{K}_\beta$ .

Ainsi nous devons déterminer deux paramètres du modèle pour chacun des  $N$  processus distincts auxquels nous adjoindrons le facteur de glissement  $\underline{K}_\beta$  pour la prise en compte de non linéarités coopératives. Cunat propose une distribution initiale du spectre basée sur la théorie des fluctuations de [Prigogine (1968)], qui postule que tout chemin modal de régression possible pour une fluctuation devra produire la même quantité d'entropie. Ce théorème d'équipartition de l'entropie créée conduit au spectre de relaxation suivant [Cunat (1985) & (1988)] :

$$p_0^j = B\sqrt{\tau^{j,r}} \quad (1.51)$$

où  $B$  est une constante déterminée par la condition de normation (figure 1.2) :

$$\sum_j p_0^j = 1 \quad (1.52)$$

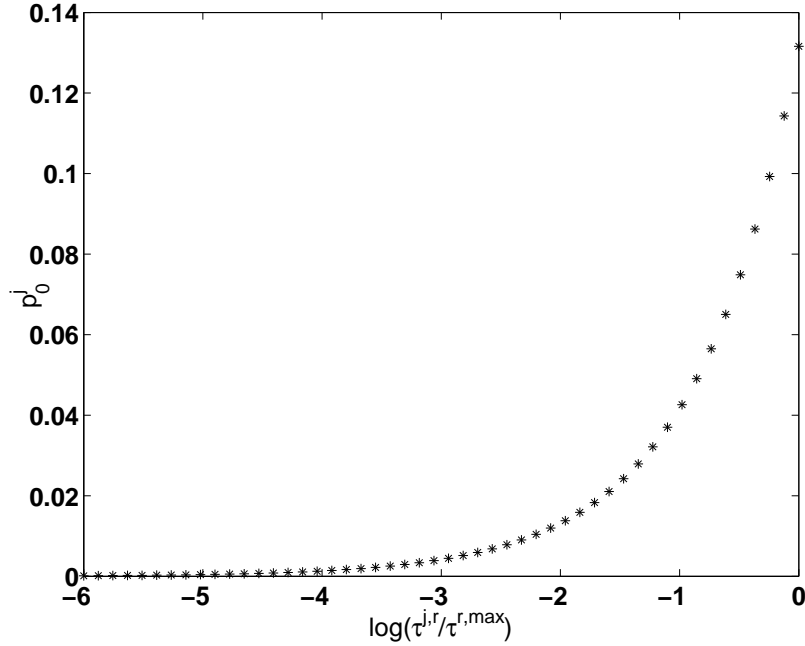


FIG. 1.2 – Distribution initiale des temps de relaxation

Numériquement, pour traduire un spectre continu, on discrétise la distribution initiale des processus en assurant l'équidistance sur l'échelle des énergies d'activation. Ainsi la seule connaissance du processus le plus lent, par exemple, détermine-t-elle l'ensemble du spectre de relaxation. Dans ces conditions, Cunat a montré qu'au delà de 50 constantes de temps, équi-réparties sur 6 décades de l'échelle logarithme du temps, la réponse temporelle simulée est identique à celle obtenue avec un spectre continu étalé depuis le temps de relaxation maximum  $\tau^{max}$  jusqu'au  $\tau^{vibration}$  atomique ( $\simeq \frac{h}{k_B T}$ ) pour les temps les plus courts. Ainsi les poids respectifs associés à chaque processus dissipatif, permettent-ils de caractériser les réponses instantanées et relaxées du matériau pour chaque mode <sup>(6)</sup> lorsque l'on admet :

$$(A_{mn}^u \dot{\gamma}_n)^j = p_0^j (A_{mn}^u \dot{\gamma}_n) \quad (1.53)$$

$$(A_{mn}^r \dot{\gamma}_n)^j = p_0^j (A_{mn}^r \dot{\gamma}_n)$$

Soulignons ici que l'on peut encore formellement écrire  $(\dot{\gamma}_n)^j = p_0^j \dot{\gamma}_n$  pour ces deux situations non dissipatives. On voit immédiatement que  $p_0^j$  joue le rôle de la variable de localisation de  $\underline{\gamma}$  (variable de commande) dans l'espace des processus. Ainsi lorsque l'on écrit,

$$\underline{\dot{\beta}} = \sum_j (\underline{\dot{\beta}})^j \quad (1.54)$$

on réalise l'opération d'homogénéisation dans cet espace. D'autres solutions possibles ont été étudiées par Mrabet (thèse en cours) ; si elles affinent les simulations, elles ne semblent pas de nature à remettre en cause les résultats obtenus avec l'expression (1.53)

<sup>6</sup>avec les règles de sommation sur les indices répétées

## 1.5 Lois d'évolution du modèle

En résumé nous pouvons dire que le modèle D.N.L.R. conduit à un système couplé de deux lois constitutives tensorielles résumées dans (1.23). La première loi constitutive

$$\dot{\underline{\beta}} = \underline{a}^u \dot{\underline{\gamma}} + \underline{b} \dot{\underline{z}}$$

permet de retrouver la plupart des lois de comportement rencontrées en physique. A titre d'exemple, lorsque le potentiel thermodynamique généralisé est donnée par :

$$\Psi = \Psi(T, \underline{\sigma}, \underline{E}, \underline{H}, \underline{n}, \dots) \quad (1.55)$$

la loi constitutive s'écrit sous la forme matricielle suivante [Loukil (1996)] par exemple :

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{\underline{\epsilon}} \\ \dot{\underline{P}} \\ \dot{\underline{M}} \\ \dot{\underline{\mu}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} CT^{-1} & \underline{\alpha} & \underline{\Phi} & \underline{\varphi} & \underline{\mu}_{,T} & \cdots \\ \underline{\alpha} & \underline{s} & \underline{\gamma} & \underline{\pi} & \underline{\mu}_{,\sigma} & \cdots \\ \underline{\Phi} & \underline{\gamma} & \underline{\kappa} & \underline{\xi} & \underline{\mu}_{,E} & \cdots \\ \underline{\varphi} & \underline{\pi} & \underline{\xi} & \underline{\chi} & \underline{\mu}_{,H} & \cdots \\ \underline{\mu}_{,T} & \underline{\mu}_{,\sigma} & \underline{\mu}_{,E} & \underline{\mu}_{,H} & \underline{\mu}_{,n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\text{Partie instantanée de la réponse}} \begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{\underline{\sigma}} \\ \dot{\underline{E}} \\ \dot{\underline{H}} \\ \dot{\underline{n}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} (S - S^r)_1 & \cdots & (S - S^r)_j & \cdots & (S - S^r)_N \\ (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^r)_1 & \cdots & (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^r)_j & \cdots & (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^r)_N \\ (\underline{P} - \underline{P}^r)_1 & \cdots & (\underline{P} - \underline{P}^r)_j & \cdots & (\underline{P} - \underline{P}^r)_N \\ (\underline{M} - \underline{M}^r)_1 & \cdots & (\underline{M} - \underline{M}^r)_j & \cdots & (\underline{M} - \underline{M}^r)_N \\ (\underline{\mu} - \underline{\mu}^r)_1 & \cdots & (\underline{\mu} - \underline{\mu}^r)_j & \cdots & (\underline{\mu} - \underline{\mu}^r)_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\text{Partie dissipative de la réponse}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau^1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau^j} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau^N} \end{bmatrix}$$

où, les variables de commande sont composées de la température  $T$ , du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ , du vecteur champ électrique  $\underline{E}$ , du vecteur champ magnétique  $\underline{H}$  et du vecteur constituants chimiques  $\underline{n}$ . Les variables observables sont composées des variables duales : l'entropie  $S$ , le tenseur des déformation  $\underline{\epsilon}$ , le vecteur polarisation électrique  $\underline{P}$ , le vecteur polarisation magnétique  $\underline{M}$  et le vecteur potentiel chimique  $\underline{\mu}$ .

La matrice de stabilité de Tisza (matrice de la réponse instantanée) est composée sur sa diagonale de la sous matrice de couplage entre variables d'état duales et pour le reste de la sous matrice de couplage entre les grandeurs d'état non duales.

L'originalité de l'approche D.N.L.R. basée sur la T.P.I. à variables internes porte essentiellement sur la forme du spectre de relaxation et l'introduction des non-linéarités (intrinsèque et coopératives) sous l'hypothèse fondamentale de l'existence d'un potentiel thermodynamique pour les milieux homogènes hors équilibre.

Le modèle D.N.L.R. permet ainsi la description de tous les comportements physiques (mécanique, électrique, magnétique, chimique, thermique, ...) et de leurs couplages respectifs. Il suffit de choisir les variables de commandes et les variables observables associées nécessaires à la compréhension du phénomène souhaité.

Pour les essais thermomécaniques à température, déformation et nombre de moles des espèces en présence contrôlables (connus) par l'expérimentateur, le potentiel thermodynamique adapté est l'énergie libre de Helmholtz (transformé de Legendre de l'énergie interne

$$U(s, \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{n}}; \bar{z}) = F - Ts$$

$$\Psi = F(T, \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{n}}; \bar{z}) \quad (1.57)$$

où  $T$  est la température,  $s$  l'entropie,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  le tenseur des déformations en HPP,  $\underline{\underline{n}}$  le vecteur représentatif des espèces chimiques échangées avec l'extérieur et  $\bar{z}$  le vecteur associé à l'avancement des réorganisations internes dans leur base modale.

La réponse purement mécanique pour un milieu isotrope s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{32} \\ \dot{\sigma}_{31} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{pmatrix} = [\underline{\underline{A}}^u] \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\epsilon}_{32} \\ \dot{\epsilon}_{31} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_{11}^r)_1 & \cdots & (\sigma_{11} - \sigma_{11}^r)_j & \cdots & (\sigma_{11} - \sigma_{11}^r)_N \\ (\sigma_{22} - \sigma_{22}^r)_1 & \cdots & (\sigma_{22} - \sigma_{22}^r)_j & \cdots & (\sigma_{22} - \sigma_{22}^r)_N \\ (\sigma_{33} - \sigma_{33}^r)_1 & \cdots & (\sigma_{33} - \sigma_{33}^r)_j & \cdots & (\sigma_{33} - \sigma_{33}^r)_N \\ (\sigma_{32} - \sigma_{32}^r)_1 & \cdots & (\sigma_{32} - \sigma_{32}^r)_j & \cdots & (\sigma_{32} - \sigma_{32}^r)_N \\ (\sigma_{31} - \sigma_{31}^r)_1 & \cdots & (\sigma_{31} - \sigma_{31}^r)_j & \cdots & (\sigma_{31} - \sigma_{31}^r)_N \\ (\sigma_{12} - \sigma_{12}^r)_1 & \cdots & (\sigma_{12} - \sigma_{12}^r)_j & \cdots & (\sigma_{12} - \sigma_{12}^r)_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau^j} \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau^N} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

ou encore sous la forme vectorielle :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \sum_{j=1}^N \underline{\dot{\sigma}}^j \quad (1.59)$$

$$\underline{\dot{\sigma}}^j = \underline{\underline{A}}^u \underline{\dot{P}}_0^j - \frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{a(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) \cdot \tau^{j,r}} \quad (1.60)$$

$$\underline{\sigma}^{j,r} = \underline{\underline{A}}^r \underline{\epsilon} P_0^j \quad (1.61)$$

Le temps de relaxation initial du mode  $j$  et le poids de ce dernier au voisinage de l'équilibre sont données par :

$$\tau^{j,r} = \frac{h}{K_B T} \exp\left(\frac{\Delta F^{+,j,r}}{RT}\right) \quad (1.62)$$

$$P_0^j = \frac{\sqrt{\tau^{j,r}}}{\sum_j \sqrt{\tau^{j,r}}} \quad (1.63)$$

Le facteur de glissement introduit la non linéarité car il permet de varier la position du spectre le long de l'échelle de temps, il peut être défini comme suit :

$$a(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) = \exp\left[K_\sigma \frac{|\sigma^{eq} - \sigma^{r,eq}|}{RT}\right] \quad (1.64)$$



où  $\sigma^{eq}$  et  $\sigma^{req}$  sont respectivement la contrainte équivalente actuelle et la contrainte équivalente à l'état relaxé.

Les principaux paramètres du modèle sont :

- $\underline{\underline{A}}^u$  et  $\underline{\underline{A}}^r$  les matrices de stabilités de Tisza non relaxée et relaxée ; une déformation imposée au VER exige que les matrices de stabilités de Tisza s'identifient aux tenseurs des constantes élastiques non relaxées et relaxées  $\underline{\underline{A}}^u$  et  $\underline{\underline{A}}^r$  ; pour un milieu isotrope à élasticité linéaire on a :

$$\underline{\underline{A}}^u = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)^u & \lambda^u & \lambda^u & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^u & (\lambda + 2\mu)^u & \lambda^u & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^u & \lambda^u & (\lambda + 2\mu)^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^u \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

$$\underline{\underline{A}}^r = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)^r & \lambda^r & \lambda^r & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^r & (\lambda + 2\mu)^r & \lambda^r & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^r & \lambda^r & (\lambda + 2\mu)^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^r \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé données en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de poisson  $\nu$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- $\Delta F_{max}^{+,r}$  : l'énergie libre d'activation au voisinage de l'équilibre pour le processus (mode) le plus lent. Elle permet d'obtenir le temps de relaxation le plus élevé et de définir le spectre initial.

$$\tau_{max}^r = \frac{h}{KT} \exp\left(\frac{\Delta F_{max}^{+,r}}{RT}\right) \quad (1.67)$$

- $K_\sigma$  le paramètre de non linéarité temporelle qui affecte globalement la position du spectre de relaxation le long de l'échelle de temps.

Cette formulation de base du modèle D.N.L.R. à 6 paramètres  $(E^u, \nu^u)$  ;  $(E^r, \nu^r)$  ;  $\Delta F_{max}^{+,r}$  ;  $K_\sigma$  sera appelé ultérieurement Version I.

L'équation (1.61) donne l'expression de l'état relaxé sous forme linéaire obéissant à la loi de Hooke. Des travaux concernant la modélisation de l'état relaxé sont actuellement en cours d'étude, selon la référence [Mrabet (2000)], l'état relaxé obéit à une relation non linéaire du même type que le modèle D.N.L.R., dans ce cas nous avons :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{j,r} = P_0^j \underline{\underline{A}}^r \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{j,r} - \underline{\underline{\sigma}}^{j,eq}}{a^r(\sigma^r) \tau^{j,rr}} \quad (1.68)$$

avec

$$a^r(\sigma^r) = \frac{\dot{\epsilon}_0}{|\dot{\epsilon}|} \exp \left[ \frac{K_\sigma^r |\sigma^r - \sigma^{eq}|}{RT} \right]$$

avec  $\dot{\epsilon}_0$  vitesse de référence ; cette dernière forme conduit à un état relaxé insensible à la vitesse de sollicitation, mais présentant une hystérèse lors des chargements cycliques. En choisissant  $\sigma^{eq} = 0$  nous obtenons

$$\dot{\sigma}^{j,r} = P_0^j \underline{A}^r \dot{\epsilon} - \frac{|\dot{\epsilon}|}{\dot{\epsilon}_0} \frac{\sigma^{j,r}}{\exp \left[ \frac{K_\sigma^r |\sigma^r|}{RT} \right] \tau^{j,rr}} \quad (1.69)$$

Cette modification de l'état relaxé conduit à un modèle à 9 paramètres (3 paramètres supplémentaires par rapport à la version I) : les paramètres  $\Delta F_{max}^{+,rr}$  et  $K_\sigma^r$  permettent de définir les temps de relaxation de  $\sigma^r$  vers  $\sigma^{eq} = 0$  et leurs évolutions au cours du temps. Le paramètre  $\dot{\epsilon}_0$  est quand à lui une vitesse de référence du même ordre que la vitesse de déformation imposée. Cette variante de la version I du modèle est appelée version (I-bis).

Une tentative de comparaison entre l'état relaxé D.N.L.R. avec l'expression de l'érouissage cinématique non linéaire de type [Armstrong et Frederick (1966)] du modèle N.L.K. (Non Linear Kinematics) de [Chaboche (1977)] a été réalisée dans le chapitre (4) : en comparant  $\sigma^r$  à  $\underline{X}$ . Dans le modèle N.L.K., le tenseur  $\underline{X}$  est défini à partir de

$$\dot{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}^{an} - D \underline{X} \dot{p} \quad (1.70)$$

et conduit également à une hystérèse.

### 1.5.1 Influence des paramètres

La version la plus simple du modèle D.N.L.R. (Equation (1.60)) comporte en traction pure 4 paramètres. Nous voulons illustrer à travers cet essai de traction monotone l'influence et la signification physique de chaque paramètre sur la courbe de traction. La courbe de référence est construite à partir des données du tableau 1.1. Nous analysons successivement les réponses simulées en modifiant un seul paramètre de "référence" à la fois. Les nouvelles valeurs seront indiquées sur les figures correspondantes.

$E^u (MPa)$	$E^r (MPa)$	$\Delta F_{max}^{+,r} (KJ/mol.at.)$	$K_\sigma (cm^3/mol.at.)$
80000	2500	100	-50

TAB. 1.1 – Paramètres du modèle version I

#### Influence du paramètre $E^u$

$E^u$  est le module d'Young "unrelaxed". Il affecte principalement la partie élastique de la courbe (cf figure 1.3).

### Influence du paramètre $E^r$

$E^r$  caractérise l'état relaxé aux temps longs ( $\dot{A}^r = 0$ ). Ce paramètre affecte principalement l'évolution de la contrainte en régime stationnaire. La limite élastique semble peu affectée (cf figure 1.4). Il faut noter ici que  $E^r \neq 0$  induit un écrouissage linéaire de type cinématique. Ainsi le tenseur des contraintes relaxées  $\underline{\sigma} = \underline{a}^r \underline{\epsilon}$  peut être globalement "associé" aux contraintes internes  $\underline{X}$  généralement utilisées pour décrire l'écrouissage cinématique [Lemaitre et Chaboche]. Toutefois notons dès à présent le modèle de type Prager lie  $\underline{X}$  à  $\underline{\epsilon}^p$  et non pas à  $\underline{\epsilon}$  comme l'induit la thermodynamique dont est issu le modèle D.N.L.R.

### Influence des paramètres $K_\sigma$ et de $\Delta F_{max}^{+,r}$

L'énergie d'activation maximale  $\Delta F_{max}^{+,r}$  et le paramètre de non-linéarité temporelle  $K_\sigma$  affectent tous les deux, le spectre des temps de relaxation. L'augmentation de l'énergie d'activation maximale correspond à un glissement du spectre des temps de relaxation vers les temps plus longs et  $K_\sigma$  affecte globalement la position du spectre de relaxation le long de l'échelle de temps (figures (1.5) et (1.6)). En conséquence, le régime stationnaire s'établit plus ou moins tardivement selon la valeur de ce paramètre : la "limite élastique" est très étroitement liée à ce paramètre qui joue ainsi un rôle important sur le régime transitoire.

Pour les essais cycliques d'autres paramètres ( $a_w$  et  $b_w$ ) ont été introduits de manière empirique par [Loukil (1996)] pour rendre compte de l'influence de l'énergie de déformation cumulée sur la variation du hauteur du col d'activation. L'expression (1.64) du facteur de glissement est modifiée. Elle devient :

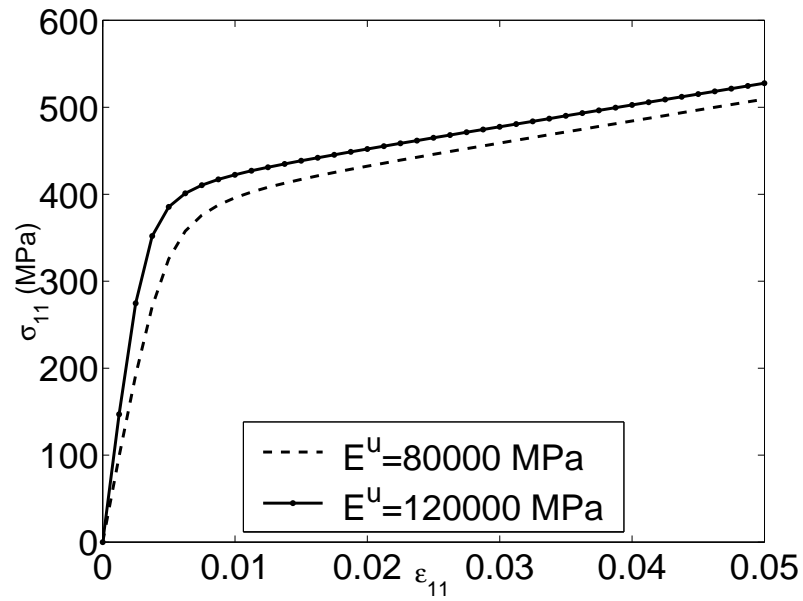
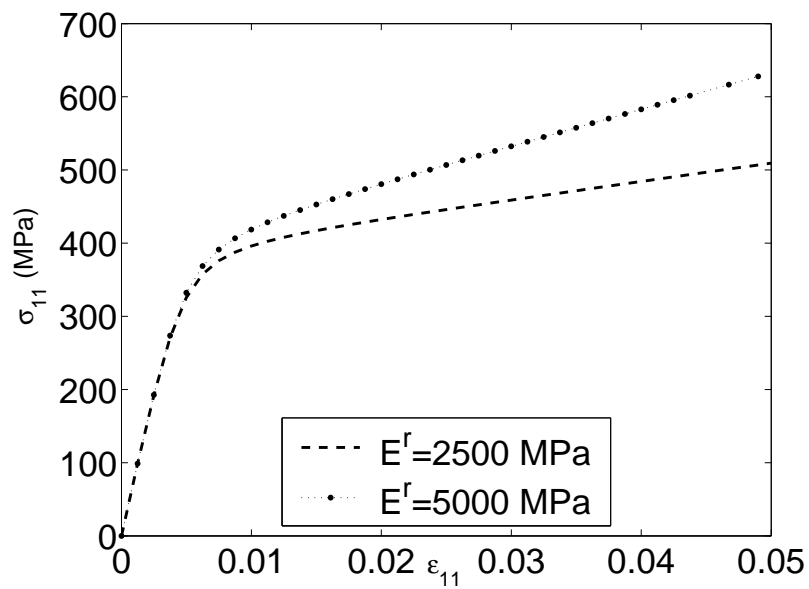
$$a(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) = \exp \left[ \mathbf{K}_\sigma \frac{|\sigma^{eq} - \sigma^{r eq}|}{RT} \right] \cdot \exp \left[ \frac{\Delta (\Delta F_w)}{RT} \right] \quad (1.71)$$

avec

$$\Delta (\Delta F_w) = \int_0^t (a_w - b_w \Delta (\Delta F_w)) (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) : \underline{\dot{\epsilon}} dt \quad (1.72)$$

Le facteur  $(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) : \underline{\dot{\epsilon}}$  sous l'intégrale, est le produit contracté entre l'écart de  $\underline{\sigma}$  et de  $\underline{\sigma}^r$  et la vitesse de déformation  $\underline{\dot{\epsilon}}$

Cette loi empirique, n'a pour l'instant aucune justification physique autre que de permettre au modèle de traduire les phénomènes d'adoucissement et de durcissement cycliques. Le rôle de ces deux paramètres va être étudié plus en détails dans le prochain chapitre consacré aux chargements cycliques. Indiquons simplement qu'ils induisent soit une élévation du col d'activation ce qui génère un durcissement, soit une diminution du col qui entraîne alors un adoucissement.

FIG. 1.3 – Influence du Module non relaxé  $E^u$ FIG. 1.4 – Influence du Module relaxé  $E^r$

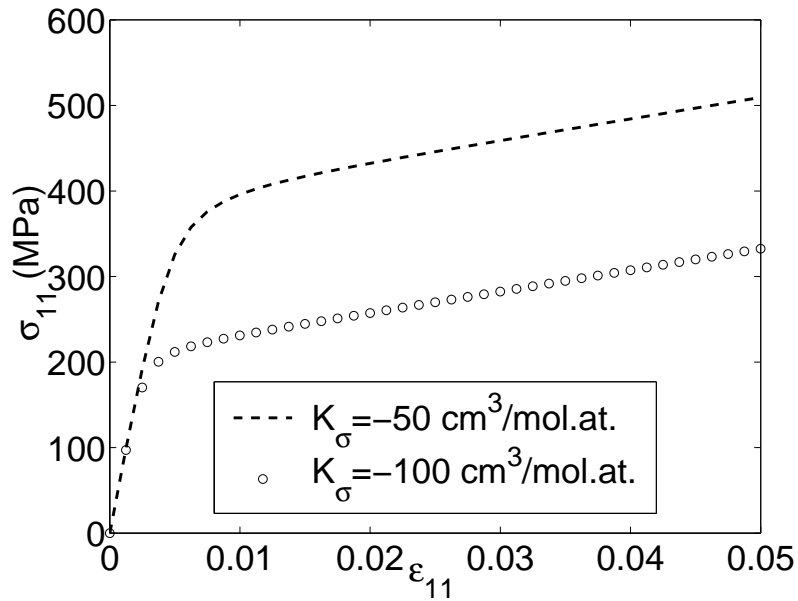


FIG. 1.5 – Influence du Paramètre de non linéarité  $K_{\sigma}$

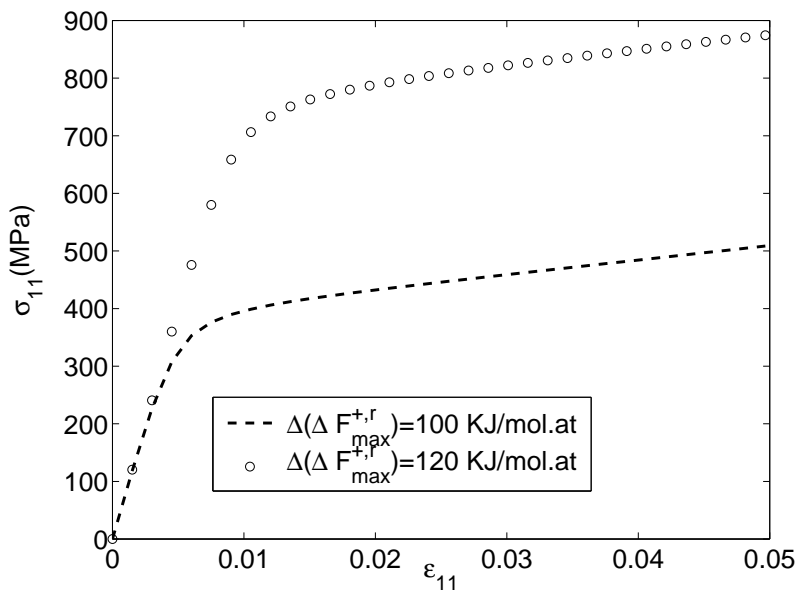


FIG. 1.6 – Influence du paramètre d'énergie d'activation maximale  $\Delta F^{r+,max}$

Soulignons dès à présent l'importance de l'identification qui permet à partir des essais expérimentaux, de retrouver les paramètres du modèle. En effet, une petite imprécision sur ces derniers peut entraîner des erreurs relativement importantes. Une étude de sensibilité devrait être effectuée en préalable à toute identification, de manière à dégager les trajets et les séquences de chargement qui découpent au mieux le rôle de chacun des paramètres.

## 1.5.2 Un exemple de formulation non linéaire à deux spectres

La formulation la plus simple (Version I) du modèle D.N.L.R., fondée sur l'existence d'un seul spectre de relaxation, s'est avérée insuffisante pour d'écrire le comportement cyclique de certains alliages à base de Nickel composés d'au moins deux phases  $\gamma$  et  $\gamma'$  ( $\gamma$  représente la matrice de la structure du matériaux et  $\gamma'$  les précipités dispersées à travers la matrice  $\gamma$ ). Pour tenir compte de la présence de deux régimes d'écoulement visqueux induits par ces deux phases, [Toussaint et al (2000)] ont établie une nouvelle formulation à deux spectres (Version II) introduisant ainsi deux familles de modes dissipatifs I et II.

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}}^u \cdot \dot{\underline{\epsilon}} - F_I \sum_j \left[ \frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\underline{A}}_I^r \cdot \underline{\epsilon} p_0^j}{\tau_I^j} \right]_I - (1 - F_I) \sum_k \left[ \frac{\underline{\sigma}^k - \underline{\underline{A}}_{II}^r \cdot \underline{\epsilon} p_0^k}{\tau_{II}^k} \right]_{II} \quad (1.73)$$

Cette réponse découle en fait de la combinaison de deux réponses élémentaires du modèle D.N.L.R. pondérées par la fraction  $F_I$  de telle sorte :

$$\dot{\underline{\sigma}} = F_I \dot{\underline{\sigma}}_I + \underbrace{F_{II}}_{(1-F_I)} \dot{\underline{\sigma}}_{II} \quad (1.74)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\underline{\sigma}}_I = \underline{\underline{A}}^u \cdot \dot{\underline{\epsilon}} - \sum_j \left[ \frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\underline{A}}_I^r \cdot \underline{\epsilon} p_0^j}{\tau_I^j} \right]_I \\ \dot{\underline{\sigma}}_{II} = \underline{\underline{A}}^u \cdot \dot{\underline{\epsilon}} - \sum_k \left[ \frac{\underline{\sigma}^k - \underline{\underline{A}}_{II}^r \cdot \underline{\epsilon} p_0^k}{\tau_{II}^k} \right]_{II} \end{cases} \quad (1.75)$$

$\underline{\underline{A}}^u$ ,  $\underline{\underline{A}}_I^r$  et  $\underline{\underline{A}}_{II}^r$  sont des matrices de rigidité fonctions des modules de Tisza ( $E^u$ ,  $E_I^r$ ,  $E_{II}^r$ ) et des coefficients de Poisson ( $\nu^u$ ,  $\nu_I^r$ ,  $\nu_{II}^r$ ) pour un solide isotrope.

Les deux distributions des temps de relaxation sont données par les expressions suivantes

$$\tau_I^j = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta \mathbb{F}_I^{+,j,r}}{RT}\right) \exp\left[\Delta \left(\Delta \mathbb{F}_I^{+,j}(t)\right)\right] \quad (1.76)$$

$$\tau_{II}^k = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta \mathbb{F}_{II}^{+,k,r}}{RT}\right) \exp\left[\Delta \left(\Delta \mathbb{F}_{II}^{+,k}(t)\right)\right] \quad (1.77)$$

$\Delta \mathbb{F}_I^{+,j,r}$  et  $\Delta \mathbb{F}_{II}^{+,k,r}$  : sont les énergies d'activation au voisinage de l'équilibre pour les modes  $j$  et  $k$  :

$$\Delta \mathbb{F}_I^{+,j,r} = \Delta \mathbb{F}_{min,I}^{+,j} + \left(\Delta \mathbb{F}_{max,I}^{+,j} - \mathbb{F}_{min,I}^{+,j}\right) \frac{j-1}{N-1}$$

$$\Delta \mathbb{F}_{II}^{+,k,r} = \Delta \mathbb{F}_{min,II}^{+,k} + \left(\Delta \mathbb{F}_{max,II}^{+,k} - \mathbb{F}_{min,II}^{+,k}\right) \frac{k-1}{N-1}$$

$j$  (ou  $k$ ) désigne le  $j^{\text{ième}}$  (ou  $k^{\text{ième}}$ ) mode et  $N$  est le nombre total de modes (ou processus). Le terme de non linéarité temporelle  $\Delta \left(\Delta \mathbb{F}_I^{+,j}(t)\right)$  est donné par la somme de deux termes. Le premier caractérise l'écart à l'équilibre entre la contrainte  $\underline{\sigma}$  et la contrainte à l'état relaxé  $\underline{\sigma}_I^r$  associé au spectre  $\gamma$  par l'intermédiaire de la contrainte équivalent au sens de von-Mises  $J_2$  et le second introduit un couplage entre processus  $j$  et les processus  $k$ . Le paramètre de couplage  $C_I$  est une constante (paramètre) du matériau.

$$\Delta (\Delta \mathbb{F}_I^{+j}(t)) = K_{\sigma I} [J_2 (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I^r) + C_I J_2 (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_{II}^r)] \quad (1.78)$$

idem pour les modes k

$$\Delta (\Delta \mathbb{F}_{II}^{+k}(t)) = K_{\sigma II} [J_2 (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_{II}^r) + C_{II} J_2 (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I^r)] \quad (1.79)$$

La seule connaissance de l'énergie d'activation au voisinage de l'équilibre pour le mode le plus lent, permet d'obtenir le temps de relaxation le plus élevé, et de définir le spectre initial. En effet, la théorie des fluctuations donne le poids de chaque mode j (ou k) au voisinage de l'équilibre :

$$p_0^j = \frac{\sqrt{\tau_j^r}}{\sum_j \sqrt{\tau_j^r}} \quad \text{et} \quad p_0^k = \frac{\sqrt{\tau_k^r}}{\sum_k \sqrt{\tau_k^r}} \quad (1.80)$$

de sorte que

$$\underline{\sigma}_I^{j,r} = p_0^j \underline{A}_I^r \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}_{II}^{k,r} = p_0^k \underline{A}_{II}^r \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \quad (1.81)$$

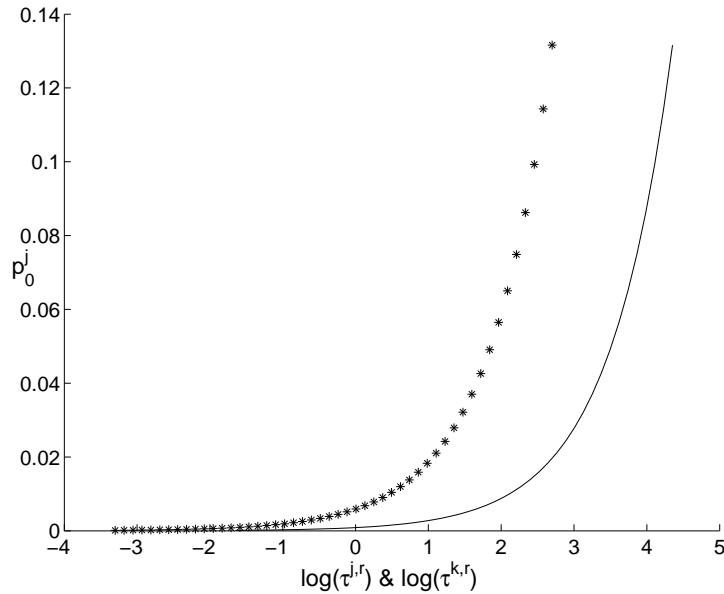


FIG. 1.7 – Distribution initiale des temps de relaxation des spectres I et II sur 6 décades et 50 modes

Nous recensons ainsi pour cette version du modèle 10 paramètres comme l'indique le tableau suivant :

$E^u ; \nu^u$	$E_I^r ; \nu_I^r$	$E_{II}^r ; \nu_{II}^r$	$F_I$
(MPa) ; su	(MPa) ; su	(MPa) ; su	su

TAB. 1.2 – Matrices de Tisza (isotrope)

$\mathbb{F}_{max}^{r,I}$	$\mathbb{F}_{max}^{r,II}$	$K_{\sigma}^I$	$K_{\sigma}^{II}$	$C_I$	$C_{II}$	(7)
J/mol. at.	J/mol. at.	$cm^3/mol. at.$	$cm^3/mol. at.$	su	su	

TAB. 1.3 – Paramètres cinétiques du modèle Version II

Cette formulation à deux spectres sera utilisée dans le chapitre 2 pour pallier les insuffisances de la version I du modèle D.N.L.R. à décrire le phénomène de "surécrouissage" cyclique.

### 1.5.3 Formulation intégrale

Partant de la formulation incrémentale de l'approche D.N.L.R. [Martin (2000)] a vérifié qu'il est possible d'obtenir une formulation intégrale qui est en fait la généralisation du principe de superposition de Boltzmann aux situations non linéaires :

Lorsque la perturbation  $\underline{\epsilon}$  est instantanée, pour chaque processus l'équation d'évolution (1.59) devient après perturbation :

$$\dot{\underline{\sigma}} = -\frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^{j,r} a} \quad \forall j, \quad \forall t > t_{\epsilon}. \quad (1.82)$$

$$\underline{\sigma}^j(t = t_{\epsilon}) = \underline{\sigma}_0^j = p_0^j \underline{a}^u \Delta \underline{\epsilon} \quad (1.83)$$

$$\underline{\sigma}^{j,r}(t \geq t_{\epsilon}) = \underline{\sigma}_0^j = p_0^j \underline{a}^r \Delta \underline{\epsilon} \quad (1.84)$$

$\Delta \underline{\epsilon}$  représente le saut de perturbation appliqué à l'instant  $t_{\epsilon}$ .

Après avoir préalablement introduit le concept de temps réduit  $t_R$ , qui intègre l'ensemble des variations des temps de relaxation au cours du temps, et qui est défini par :

$$t_R(t, t_{\epsilon}) = \int_{t_{\epsilon}}^t \frac{1}{a(\bar{z})} dt'. \quad (1.85)$$

L'intégration des équations (1.82) donne :

$$\underline{\sigma}^j(t) = \underline{\sigma}^j(t, t_{\epsilon}) = p_0^j \left\{ \underline{A}^r + [\underline{A}^u - \underline{A}^r] \exp\left(-\frac{t_R(t, t_{\epsilon})}{\tau^{j,r}}\right) \right\} \Delta \underline{\epsilon} \quad (1.86)$$

L'expression (1.86) montre que la réponse de chacun de ces processus à une perturbation dépend à la fois de l'instant d'observation ( $t$ ) et de l'instant d'application de cette perturbation ( $t_{\epsilon}$ ). Le retour vers l'équilibre se fait suivant une exponentielle du temps réduit  $t_R$ . Le temps réduit intégrant l'ensemble des non linéarités temporelles de nature coopérative. La généralisation de Boltzmann aux domaines non linéaires, nous conduit à écrire que la réponse  $\underline{\sigma}^j$  à plusieurs perturbations instantanées  $\Delta \underline{\epsilon}_i$ , appliquées respectivement aux instants  $t_i$ , est la somme des réponses  $\underline{\sigma}_i^j$  de chaque processus à chacune des perturbations prise individuellement. Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\underline{\sigma}^j(t) = \sum_i \underline{\sigma}_i^j = \sum_i p_0^j \left\{ \underline{A}^r + [\underline{A}^u - \underline{A}^r] \exp\left(-\frac{t_R(t, t_i)}{\tau^{j,r}}\right) \right\} \Delta \underline{\epsilon}_i \quad (1.87)$$



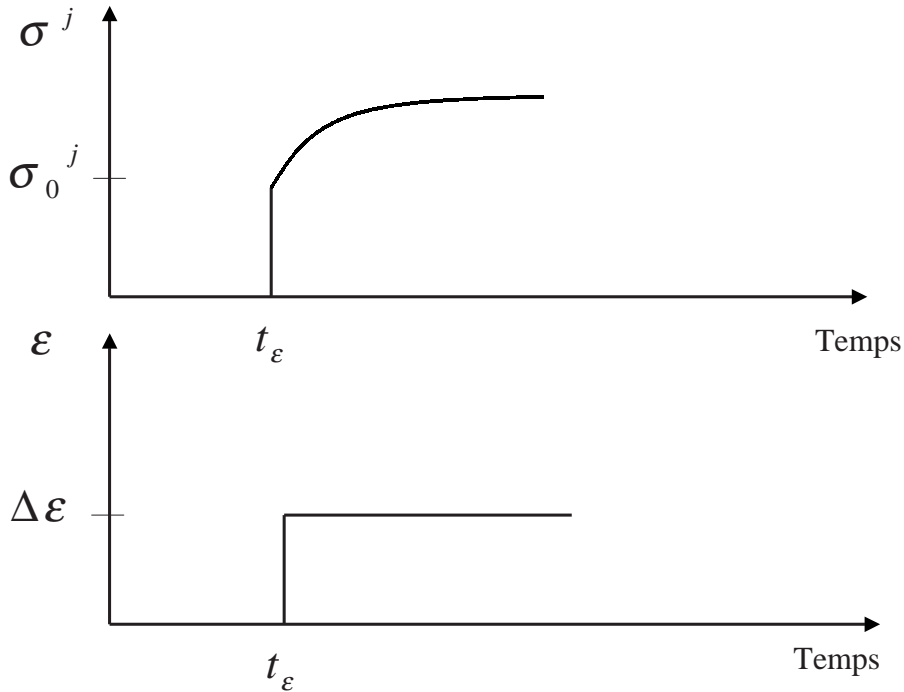


FIG. 1.8 – Formulation intégrale

Lorsque la perturbation évolue de manière continue dans le temps, le passage à la limite d'une somme discrète à une somme continue, nous conduit à l'expression générale intégrale du D.N.L.R. :

$$\underline{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^t \left\{ \underline{A}^r + \left( \sum_j p_0^j (\underline{A}^u - \underline{A}^r) \exp\left(-\frac{t_R(t, t')}{\tau^{j,r}}\right) \right) \right\} \dot{\underline{\varepsilon}}(t') dt' \quad (1.88)$$

avec :

$$t_R(t, t') = \int_{t'}^t \frac{dt}{a(\bar{z})}. \quad (1.89)$$

Notons la grande similitude avec l'approche endochronique de type [Valanis (1971)]. Les formulations intégrale et incrémentale vont être intégrées et validées numériquement dans un code industriel de calcul par éléments finis (cf Chapitre 3).

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé le formalisme mis en œuvre au sein de notre groupe de recherche pour d'écrire les lois de comportement. Nous partons d'une généralisation de l'équation de GIBBS au sens de De Donder. Ceci se traduit par le fait que l'on peut toujours se référer à un potentiel thermodynamique qui contient toute l'information sur le système et qui est descriptible par un ensemble de variables indépendantes même dans les situations de non équilibre. Nous admettons aussi l'existence d'une multitude (distribution) de processus thermodynamiques (ou modes de relaxation) gouvernés par des cinétiques non linéaires : ceci constitue le cadre du **formalisme D.N.L.R.** Son domaine d'application est très étendu. Il couvre aussi bien le comportement des matériaux diélectriques, que le comportement des matériaux magnétiques, ou

bien encore les propriétés mécaniques. C'est ce domaine spécifique qui nous intéresse ici. Dans ce cadre, nous avons formulé les équations constitutives du modèle sous la forme incrémentale la plus fréquemment utilisée pour les simulations numériques. Le passage à la forme intégrale est rendu possible en exploitant le concept de temps réduit pour aboutir à une expression généralisée du principe de superposition de Boltzmann en situations fortement non linéaires. Pour les essais purement mécaniques il suffit de connaître le tenseur des constantes élastiques, directement déterminé par les mesures classiques, le tenseur des constantes élastiques relaxées, plus difficile à appréhender directement à partir de l'expérience, et la dépendance temporelle des temps de relaxation. L'ensemble des équations sera rappelé dans le prochain chapitre sous forme de tableau lorsque nous présenterons des simulations de comportements variées.



# Chapitre 2

## Comportements cycliques qualitatifs des modèles fondés sur l'approche D.N.L.R.

**Résumé :** L'objet de ce chapitre est d'étudier les comportements qualitatifs des différentes versions du modèle. Nous testons ainsi le comportement du modèle D.N.L.R. sous chargements cycliques, notamment la mise en évidence des phénomènes d'adoucissement, de durcissement, de surécrouissage, de rochet (uniaxial et multiaxial), et de mémoire. Plusieurs simulations réalisées sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) donnent une idée de la pertinence du modèle à reproduire certains phénomènes physiques observés expérimentalement sur certains matériaux métalliques [Tanaka et al (1985)], [Lexcelent (1987)], [Pilvin (1990)], [Ferney (1994)].

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>2.2</b>	<b>Sollicitations cycliques à déformation imposée . . . . .</b>	<b>40</b>
2.2.1	Comportement sous sollicitations cycliques uniaxiales . . . . .	41
2.2.2	Comportement sous sollicitations cycliques multiaxiales . . . . .	47
<b>2.3</b>	<b>Sollicitations cycliques à contrainte imposée . . . . .</b>	<b>51</b>
2.3.1	Aptitude du modèle à décrire le phénomène de rochet . . . . .	51
2.3.2	Rochet uniaxial . . . . .	53
2.3.3	Rochet multiaxial . . . . .	55
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>73</b>

---

## 2.1 Introduction

L'étude du comportement cyclique des matériaux a connu un énorme succès avec le développement de l'outil informatique de plus en plus performant. Ce développement a suscité au sein de la communauté scientifique une exigence de plus en plus importante dans la précision des simulations numériques et en terme de temps de calcul. Un effort considérable a été récemment réalisé dans l'élaboration de modèle de comportement capable de simuler la tenue en service de structures soumises à des sollicitations cycliques complexes. Plusieurs de travaux, (par exemple [Krempl (1987)], [Chaboche (1989)] [Ohno (1990)]), représentent bien l'état de l'art dans le domaine du comportement cyclique des matériaux métalliques. Les équations constitutives de ces différents modèles, reproduisent bien, dans le cas unidirectionnel les données expérimentales. Cependant, la modélisation du comportement multi-axial devient une tâche plus difficile due à la complexité des réponses aux chargements non proportionnels. Dans le cas d'un chargement cyclique fortement non proportionnel (par exemple traction-torsion avec un angle de déphasage de  $90^\circ$ ), les variables internes (écrouissements cinématique et isotrope) deviennent complexes à cause des changements de direction de la vitesse de déformation anélastique. La plupart des modèles de plasticité ou de visco-plasticité ont des expressions mathématiques assez complexes pour décrire ces évolutions et un nombre considérable de paramètres à identifier.

Nous étudions, dans ce qui suit, le comportement cyclique qualitatif de trois versions (I, I-bis et II) de modèles de comportement construits sur la base de l'approche D.N.L.R. que nous avons présenté dans le chapitre 1. Deux types de sollicitation sont imposés :

- des sollicitations cycliques à déformation imposée : elles permettent dans le cas unidirectionnel de tester l'aptitude du modèle D.N.L.R. à reproduire qualitativement les phénomènes d'adoucissement cyclique, de durcissement cyclique et d'effet de mémoire. Dans le cas multidirectionnel, les trajets de chargement de traction-torsion doivent permettre la mise en place une classification relative au surécrouissage pour différents chargements cycliques employés.
- des sollicitations cycliques à contrainte imposée : elles permettent de prédire le phénomène d'accommodation à contrainte moyenne nulle et le phénomène de rochet si l'on réalise des essais cycliques à contrainte imposée autour d'une valeur moyenne non nulle (rochet 1D). Le rochet biaxial (rochet 2D) résulte, de la superposition par exemple, de deux chargements, un chargement primaire constant dans une première direction et un chargement secondaire cyclique, dans une autre direction (dans l'espace des contraintes où des déformations). Les chargements les plus étudiés expérimentalement sont du type traction constante (chargement primaire) et torsion alternée cyclique (chargement secondaire).

Les différents trajets de chargement définis ci-dessus vont faire l'objet d'une mise en œuvre numérique avec les différentes versions du modèle pour un (VER). Les réponses obtenues seront examinées et comparées qualitativement à celles existant dans la littérature. Nous rappelons dans le tableau (2.1) les différentes versions du modèle mises en œuvre pour un point matériel. Nous tentons avec ces différents modèles d'appréhender les différents phénomènes précédemment cités.

---

Lois d'évolution de la contrainte

Version I et I-bis

$$\begin{cases} \dot{\underline{\sigma}}^j = \underline{A}^u \dot{\underline{\epsilon}}^j P_0^j - \frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{a(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) \cdot \tau^{j,r}} \\ \dot{\underline{\sigma}} = \sum_{j=1}^N \dot{\underline{\sigma}}^j \end{cases}$$

Version II

$$\begin{cases} \dot{\underline{\sigma}}_I = \underline{A}^u \dot{\underline{\epsilon}} - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\underline{\sigma}_I^j - \underline{\sigma}_I^{j,r}}{\tau_I^j} \right] \\ \dot{\underline{\sigma}}_{II} = \underline{A}^u \dot{\underline{\epsilon}} - \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\underline{\sigma}_{II}^k - \underline{\sigma}_{II}^{k,r}}{\tau_{II}^k} \right] \\ \dot{\underline{\sigma}} = \underline{A}^u \dot{\underline{\epsilon}} - F_I \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\underline{\sigma}_I^j - \underline{\sigma}_I^{j,r}}{\tau_I^j} \right] - \underbrace{F_{II}}_{1-F_I} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\underline{\sigma}_{II}^k - \underline{\sigma}_{II}^{k,r}}{\tau_{II}^k} \right] \end{cases}$$


---

Loi d'évolution des contraintes à l'état relaxé

Version I

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = P_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}} \quad \text{état relaxé réversible}$$

Version I-bis

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = P_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{|\dot{\underline{\epsilon}}|}{\dot{\underline{\epsilon}}_0} \frac{\underline{\sigma}^{j,r}}{\exp\left[\frac{K_\sigma^r |\underline{\sigma}^r|}{RT}\right] \tau^{j,rr}} \quad \text{état relaxé irréversible}$$

Version II

$$\begin{cases} \dot{\underline{\sigma}}_I^{j,r} = P_0^j \underline{A}_I^r \dot{\underline{\epsilon}} \\ \dot{\underline{\sigma}}_{II}^{k,r} = P_0^k \underline{A}_{II}^r \dot{\underline{\epsilon}} \end{cases} \quad \text{deux spectres et un état relaxé réversible}$$


---

Evolution des temps de relaxation : fonction de glissement  $a(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) \equiv a(t, T)$

Version I et I-bis

$$\tau^j = \underbrace{\frac{h}{K_B T}}_{\tau^{j,r}} \exp\left(\frac{\Delta F^{+,j,r}}{RT}\right) \underbrace{\exp\left[K_\sigma \frac{|\underline{\sigma}^{eq} - \underline{\sigma}^r{}^{eq}|}{RT}\right]}_{a(t,T)} \quad (8)$$

Version II

$$\begin{cases} \tau_I^j = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta \mathbb{F}^{+,j,r}}{RT}\right) \exp\left[K_{\sigma\gamma} [J_2(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I^r) + C_I J_2(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_{II}^r)]\right] \\ \tau_{II}^k = \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta \mathbb{F}^{+,k,r}}{RT}\right) \exp\left[K_{\sigma II} [J_2(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_{II}^r) + C_{II} J_2(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_I^r)]\right] \end{cases}$$


---

Paramètres

Version I :  $\underline{A}^u$  ;  $\underline{A}^r$  ;  $\Delta F_{max}^r$  ;  $K_\sigma$

Version I-bis :  $\underline{A}^u$  ;  $\underline{A}^r$  ;  $\Delta F_{max}^r$  ;  $K_\sigma$  ;  $\Delta F_{max}^{rr}$  ;  $K_\sigma^r$  ;

Version II :  $\underline{A}^u$  ;  $\underline{A}_I^r$  ;  $\underline{A}_{II}^r$  ;  $\Delta F_{max}^{r,I}$  ;  $\Delta F_{max}^{r,II}$  ;  $K_\sigma^I$  ;  $K_\sigma^{II}$  ;  $C_I$  ;  $C_{II}$  ;  $F_I$

---

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif des différentes versions construites sur la base de l'approche D.N.L.R.

Deux paramètres supplémentaires  $a_w$  et  $b_w$  (pour les trois versions) sont introduits de manière "empirique" pour prendre en compte l'adoucissement ou le durcissement cyclique [Loukil (1996)]. Cette loi mathématique modifie l'expression du facteur de glissement des temps de relaxation.

Nous utilisons dans ce chapitre le jeu de paramètres de la version I identifié par Toussaint (1997) sur un VER à partir d'une base de données expérimentales de Calloch (1997) sur une éprouvette tubulaire en Acier 316L. Pour la version I-bis nous conserverons les paramètres de la version I. Quant aux deux paramètres supplémentaires, ils sont choisis de tel sorte qu'on ait la même réponse pour les deux versions. Les paramètres de la version II ont été identifiés par Toussaint (2000) sur un matériau à base de nickel (IN738LC) composé de deux phases  $\gamma$  et  $\gamma'$ .

Les tableaux de valeurs suivants résument le jeu de paramètres utilisés pour chacune des trois versions.

### Pour la version I

$E^u$ (MPa)	$E^r$ (MPa)	$\nu^u$	$\nu^r$	$\Delta F_{max}^{+,r}$ (KJ/mol.at.)	$K_\sigma$ (cm <sup>3</sup> /mol.at.)
205000	8300	0.3	0.495	86.4	-31.5

TAB. 2.2 – Paramètres de la version I du modèle D.N.L.R.

### Pour la version I-bis

$E^u$ (MPa)	$E^r$ (MPa)	$\nu^u$	$\nu^r$
205000	8300	0.3	0.495

$\Delta F_{max}^{+,r}$ (KJ/mol.at.)	$K_\sigma$ (cm <sup>3</sup> /mol.at.)	$\Delta F_{max}^{+,rr}$ (KJ/mol.at.)	$K_\sigma^r$ cm <sup>3</sup> /mol.at.
86.4	-31.5	100	-31.5

TAB. 2.3 – Paramètres de la version I-bis du modèle D.N.L.R.

### Pour la version II

$E^u$ (MPa)	$\nu^u$	$E_I^r$ (MPa)	$\nu_I^r$	$E_{II}^r$ (MPa)	$\nu_{II}^r$	$F_I$
157000	0.3	0.117	0.496	30.83	0.499	0.5

$\mathbb{F}_{max}^{+j}$ (J/mol. at.)	$\mathbb{F}_{max}^{+k}$ (J/mol. at.)	$k_\sigma^j$ (cm <sup>3</sup> /mol.at.)	$k_\sigma^k$ (cm <sup>3</sup> /mol. at.)	$C_I$	$C_{II}$
402 249	448 565	-253.61	-57.83	0.008	3.13

TAB. 2.4 – Paramètres de la version II du modèle D.N.L.R.

Pour les trois versions,  $a_w = 250$  (cm<sup>3</sup>/mol.at.) et  $b_w = 0.027$  (cm<sup>3</sup>/mol.at.)

## 2.2 Sollicitations cycliques à déformation imposée

Nous présentons d'abord le cas des sollicitations cycliques uniaxiales de traction-compression et de torsion alternée, permettant l'étude des effets d'adoucissement, de durcissement, et de mémoire. Nous verrons ensuite le cas de la traction-torsion avec différents angles de déphasage pour étudier le phénomène de surécrouissage.

### 2.2.1 Comportement sous sollicitations cycliques uniaxiales

Le premier effet que l'on observe sous chargement cyclique uniaxial à déformation imposée de traction-compression ou de torsion alternée, est l'effet Bauschinger. Cet effet se manifeste par la diminution de la limite d'élasticité en compression après un chargement initial en traction et réciproquement. La plupart des matériaux et des alliages manifestent des propriétés d'écrouissages variables durant le cyclage.

En général, si on réalise un essai à déformation imposée avec une valeur moyenne nulle, on relève deux types de comportement suivant le matériau étudié :

- soit une augmentation de contrainte maximale avec le nombre de cycles ; on dit que le matériau durcit, c'est le cas, par exemple, de l'acier 316L (figure 2.1).
- soit une diminution de la contrainte maximale avec le nombre de cycles ; on dit que le matériau s'adoucit (figure 2.2)

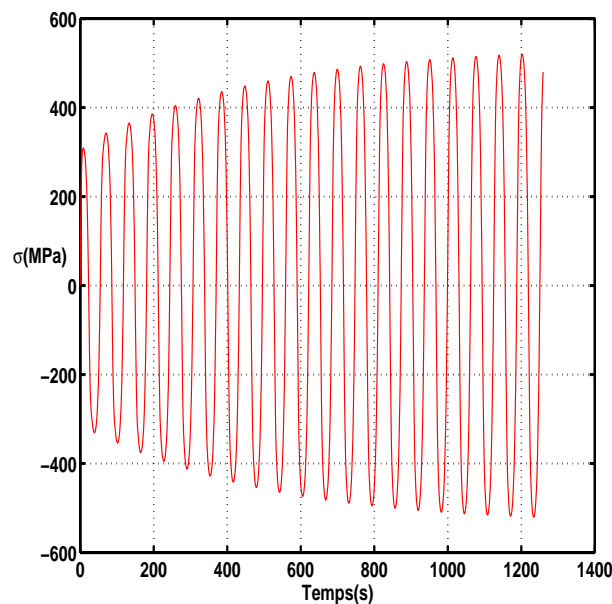


FIG. 2.1 – Durcissement - Augmentation progressive de la contrainte



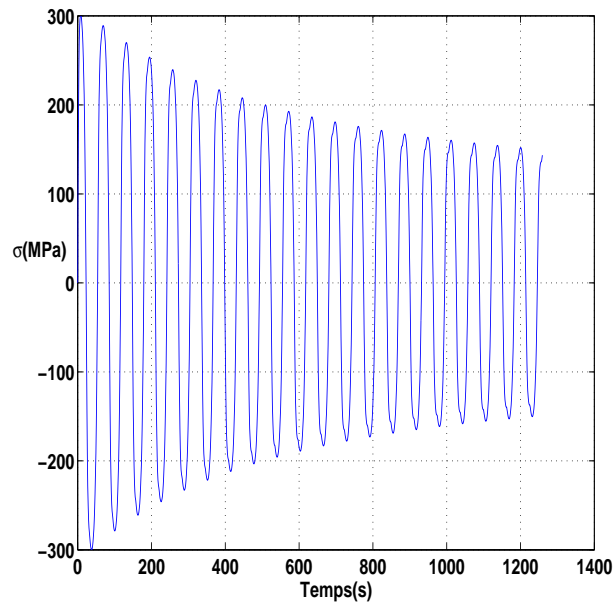


FIG. 2.2 – Adoucissement - Diminution progressive de la contrainte

Dans les deux cas, on observe une stabilisation après un certain nombre de cycles suite à une phase transitoire de durcissement ou d'adoucissement.

Si après stabilisation pour une amplitude de déformation donnée, on augmente cette dernière, on constate que le matériau continue de durcir (ou s'adoucir) pour se stabiliser à un niveau différent. Ce niveau de stabilisation de contrainte (phase H-2) est supérieur à celui que l'on aurait pour la même amplitude de déformation mais sans précyclage. Si, lors de la troisième séquence, on laisse suffisamment de temps, le matériau tend vers un niveau de contrainte égale à celui que l'on aurait observé pour le même amplitude sans précyclage. C'est l'effet mémoire (figure 2.3).

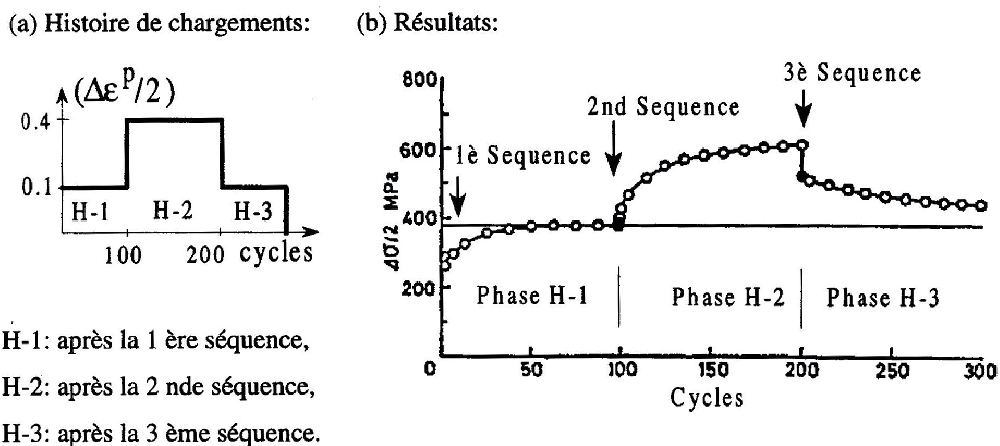


FIG. 2.3 – Effet d'adoucissement cyclique et de mémoire sous séquence de chargements à différentes amplitudes [Tanaka et al (1985)]

Il est à noter que, dans le cas de la déformation imposée, si le cyclage est réalisé avec une déformation moyenne non nulle, on peut expérimentalement observer une relaxation plus ou

moins totale de la contrainte moyenne au cours des cycles [Tanaka et al (1985)].

### Aptitude du modèle D.N.L.R. à rendre compte du phénomène de durcissement ou d'adoucissement cyclique

Avec le jeu de paramètres de la version I du modèle D.N.L.R., on réalise le calcul de manière à révéler la présence ou non de durcissement et/ou d'adoucissement cyclique. La modélisation de la variation de l'érouissage lors d'un chargement cyclique nécessite la prise en compte de l'énergie de déformation dans la cinétique de la relaxation. En d'autres termes, l'histoire de la charge doit intervenir explicitement dans la cinétique de la relaxation. Ceci est traduit pour le modèle D.N.L.R. [Loukil (1996)] par une expression du facteur de glissement commun à tous les modes par

$$a(t, T) = \exp \left( \underbrace{\frac{K_\sigma |(\sigma^{eq} - \sigma^{r,eq})|}{RT}}_{\frac{\Delta(\Delta\mathbb{F}_1^+(t))}{RT}} \right) \exp \left( \underbrace{\frac{\left( \int_0^t (a_w - b_w \Delta(\Delta\mathbb{F}_2^+(t))) (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r) : \underline{\dot{\epsilon}} dt \right)}{RT}}_{\frac{\Delta(\Delta\mathbb{F}_2^+(t))}{RT}} \right) \quad (2.1)$$

$\Delta(\Delta\mathbb{F}_1^+(t))$  variation de la hauteur du col d'activation due à l'écart à l'équilibre de la contrainte.

$\Delta(\Delta\mathbb{F}_2^+(t))$  variation de la hauteur du col d'activation prenant en compte l'énergie de déformation cumulée

La somme de ces deux variations définit la variation totale du col d'activation

$$\Delta(\Delta\mathbb{F}^+(t)) = \Delta(\Delta\mathbb{F}_1^+(t)) + \Delta(\Delta\mathbb{F}_2^+(t)) \quad (2.2)$$

Dans le cas d'un chargement cyclique, nous avons plusieurs possibilités suivant la valeur des paramètres  $a_w$  et  $b_w$ . Les figures (2.4) et (2.5) illustrent le rôle de ces deux paramètres empiriques. Elles montrent les résultats de simulation pour un chargement cyclique (traction-compression) à déformation imposée. Nous constatons que l'inversion du signe du paramètre  $a_w$  entraîne une inversion du comportement : le phénomène de durcissement (figure 2.4) est remplacé par un phénomène d'adoucissement (figure 2.5) : Une valeur positive de  $a_w$  implique que l'effet du cumul de la déformation se traduit par une augmentation progressive du col d'activation, alors qu'une valeur négative entraîne un adoucissement lié à la diminution progressive du col d'activation.  $b_w$  est le paramètre qui agit sur le nombre de cycles nécessaires pour obtenir l'état de stabilisation cyclique. Lorsque ce paramètre est nul, nous aurons des cycles qui ne se stabilisent jamais (figure 2.6).

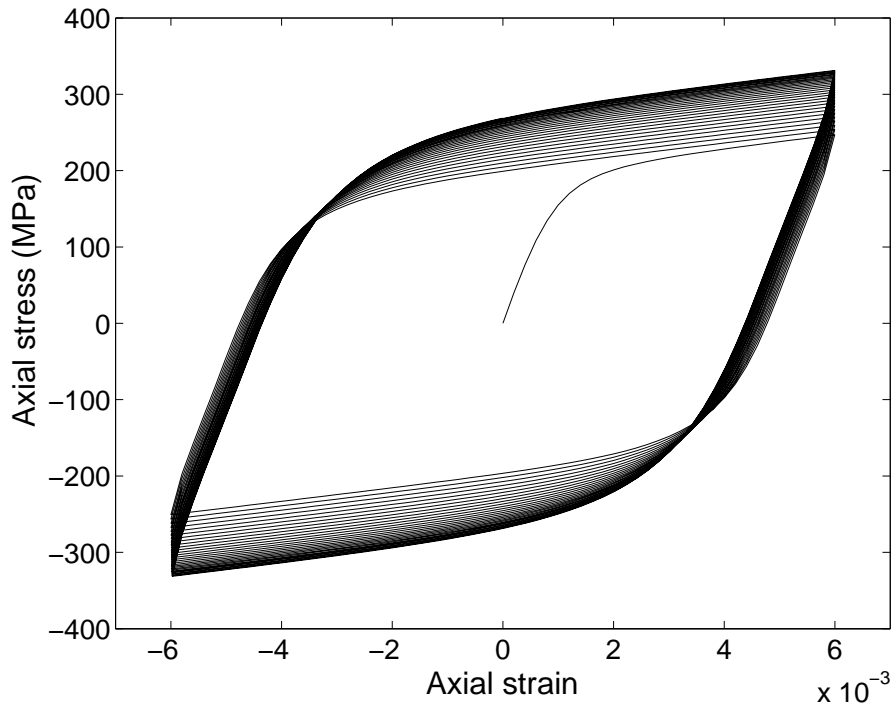


FIG. 2.4 –  $a_w$  positif - Durcissement

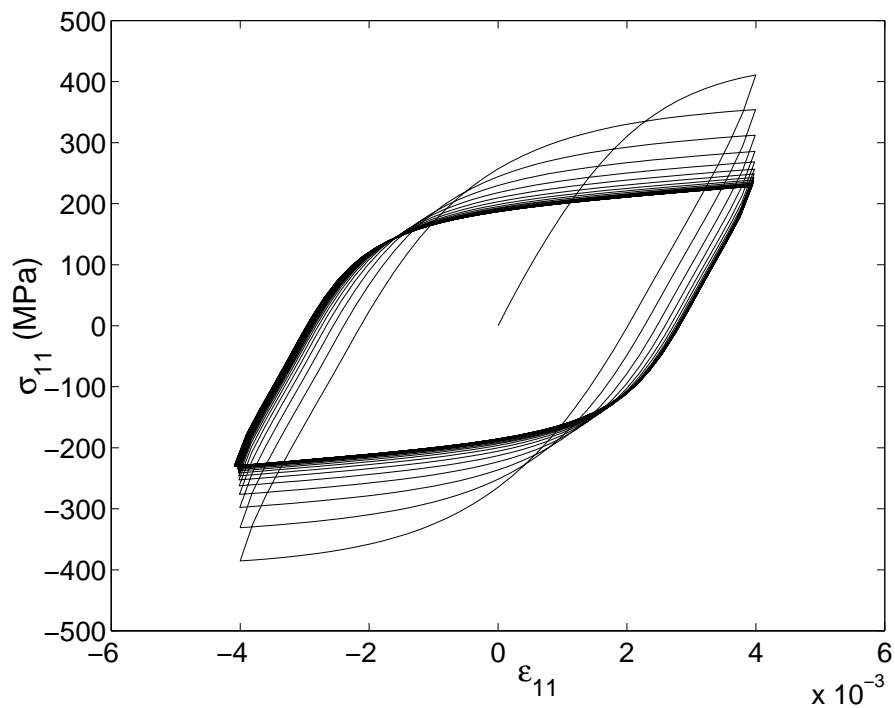
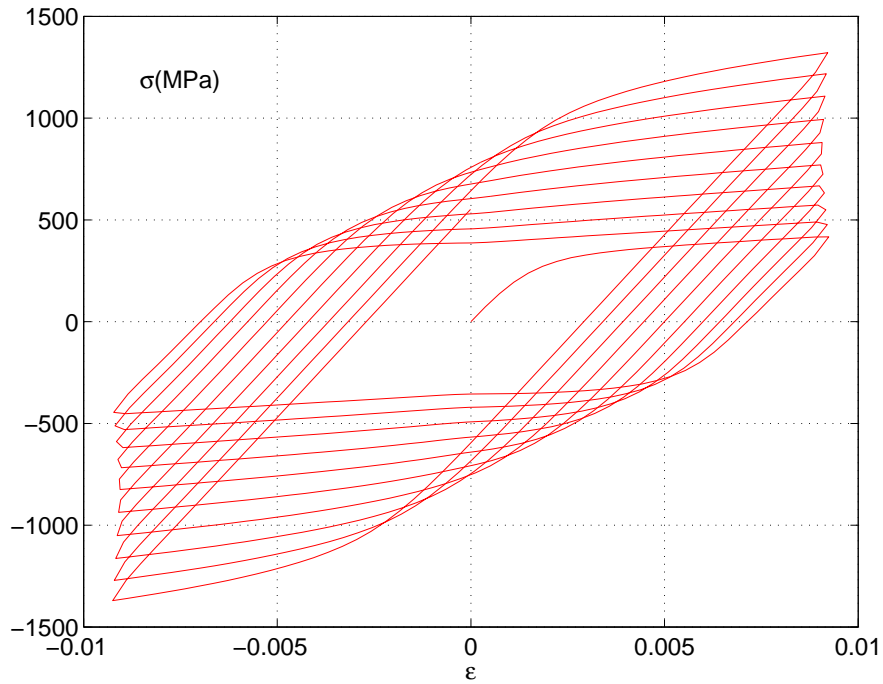


FIG. 2.5 –  $a_w$  négatif - Adoucissement

Pour les figures (2.4) et (2.5)  $a_w = \pm 250$  ( $cm^3/mol.at.$ ) et  $b_w = 0.0027$

FIG. 2.6 –  $b_w=0$  - pas de cycle stabilisé

### Effet de mémoire

L'effet de mémoire se traduit par un niveau de contrainte équivalente maximale, après deux séquences de chargement (traction - compression et torsion alternée), figure (2.3) avec une moyenne de déformation nulle ( $\bar{\epsilon} = 0$ ), supérieur à celui qui aurait été atteint si l'on avait effectué directement le cyclage de la seconde séquence (torsion) sur une éprouvette vierge. Cet effet a été observé expérimentalement par Tanaka et al (1985). Nous réalisons une simulation numérique de cette expérience en vue de reproduire qualitativement cette réponse. Les résultats de ces simulations avec les versions I (1 spectre et un état relaxé réversible) et II (deux spectres et état relaxé réversible) du modèle sont donnés sur les figures (2.7) et (2.8)

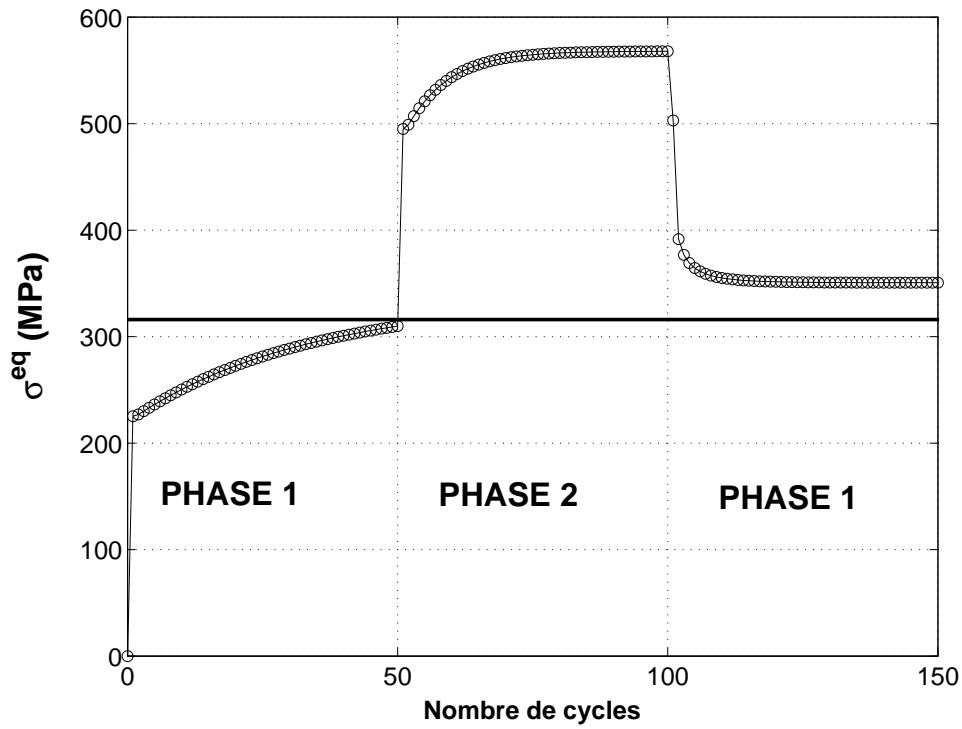


FIG. 2.7 – Effet mémoire - Simulation version I du modèle

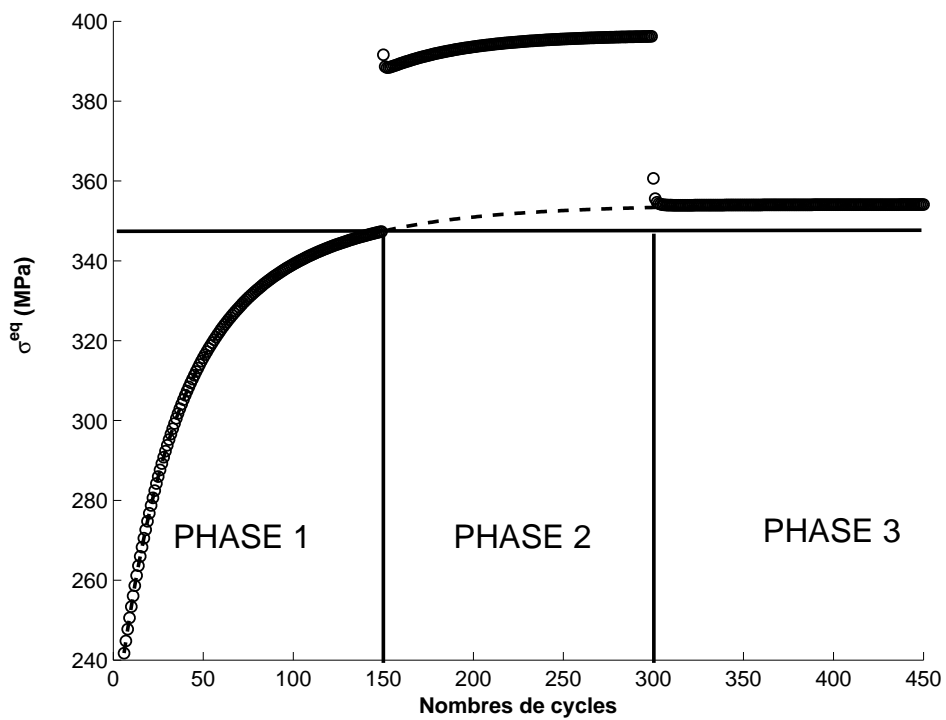


FIG. 2.8 – Effet mémoire - Simulation version II du modèle

- PHASE 1 & 3 : chargement en traction-compression à déformation imposée
- PHASE 2 : chargement en torsion alternée à déformation imposée.

Ces résultats (figures (2.7) et (2.8)) montrent un durcissement supplémentaire durant la phase 2 (torsion alternée). Ce durcissement est suivi d'un adoucissement lors de la troisième séquence (traction-compression). Pour la version II, nous simulons 450 cycles de la phase 1 (trait discontinu), ce dernier se stabilise au même niveau que la phase 3. D'un point de vue microstructural, la persistance des structures de dislocations (déplacement de défauts du réseau cristallin établies lors de la première séquence) explique l'effet mémoire observé. Les simulations qualitatives obtenues avec les versions I et II du modèle sont en accords avec les observations de [Tanaka et al (1985)] sur des éprouvettes soumises à deux séquences de chargement (traction-compression et torsion alternée) à déformation imposée avec une amplitude variant entre 0.1% et 0.4% en équivalence (figure 2.3).

## 2.2.2 Comportement sous sollicitations cycliques multiaxiales

Nous nous intéressons aux phénomènes d'écrouissage cyclique sous sollicitations multiaxiales. Nous regardons essentiellement le comportement sous sollicitations biaxiales de traction-torsion. Dans le cas de sollicitations cycliques multiaxiales pilotées en déformation, on caractérise l'écrouissage cyclique par l'évolution de la contrainte équivalente au cours des cycles. La forme du trajet de chargement dans l'espace des déformations influence considérablement l'écrouissage cyclique.

### Phénomène de surécrouissage

Le comportement des matériaux sous sollicitations cycliques multiaxiales a été abordé par un grand nombre d'équipes de recherche [Pilvin (1990), Benallal et al (1992), Sakane et al (1992), Abdul-Latif et al (1994), Calloch et Marquis (1997)...]. Le passage à des sollicitations multiaxiales permet de révéler d'autres phénomènes liés à la multiplicité des systèmes de glissement dans le comportement cyclique des matériaux soumis à ce type de chargement [Ferney (1994)]. Le surécrouissage observé fait partie de ces phénomènes. Il se traduit par le fait que l'évolution de la contrainte équivalente en fonction du nombre de cycles est fortement liée au type de trajets de chargement. Comme les travaux concernant ce sujet sont nombreux, nous nous limiterons uniquement aux cas des sollicitations de type traction-torsion avec différents angles de déphasage ( $TT\phi$ ) avec  $\phi$  allant de 0 à 90° et du trajet papillon.

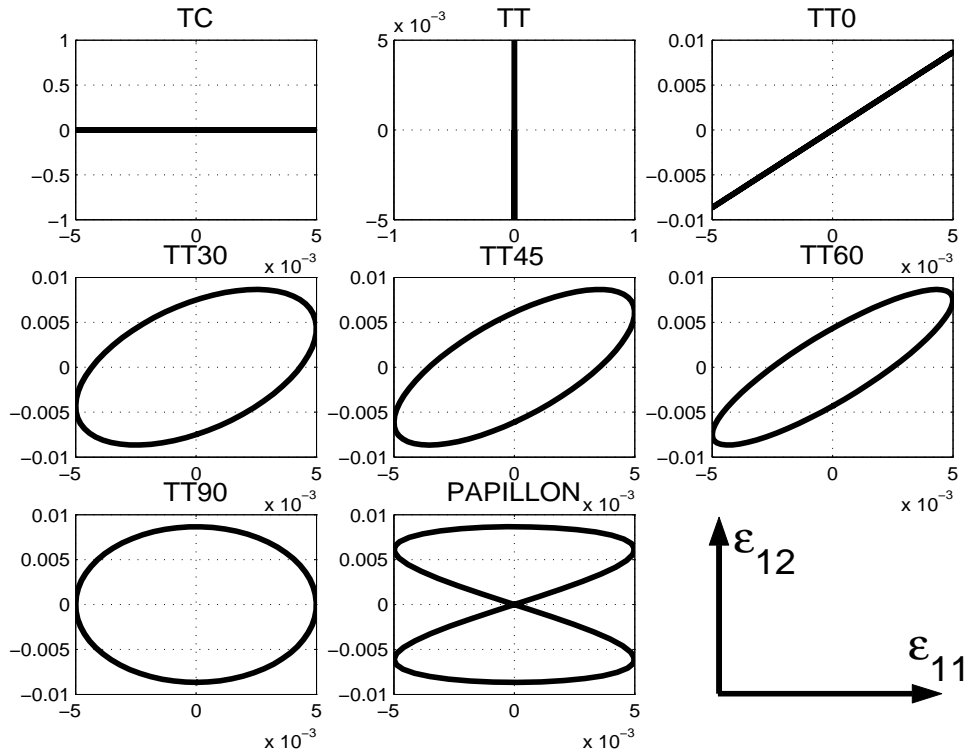


FIG. 2.9 – Trajets de chargement :  $\epsilon_{11}$  en abscisse et  $\epsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$  en ordonnée

Le champ de déformation est défini par :

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \epsilon_0 \sin(qwt) \\ \gamma(t) &= \gamma_0 \sin(wt - \phi) \\ \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Avec  $\epsilon(t)$  la déformation axiale,  $\gamma(t)$  représente la déformation de cisaillement,  $\epsilon_0$  et  $\gamma_0$  leurs amplitudes respectives,  $w$  est la fréquence des oscillations et  $\phi$  l'angle de phase entre les déformations imposées. Pour les différents types de chargements  $q = 1$ , excepté le chargement papillon où  $q = 2$ . L'angle  $\phi$  varie de  $0$  à  $90^\circ$ . Notons enfin que nous imposons une déformation équivalente maximale au sens de von-Mises identique pour ces différents types de chargement.

$$\epsilon_{max/cycle}^{eq} = Sup \left( \sqrt{\epsilon_{11}^2 + \frac{\gamma_{12}^2}{3}} \right) = 0.9\% \quad (2.3)$$

Ces essais permettent de mettre en place une classification relative au surécrouissage pour différents chargements cycliques employés. Cette classification met en relief le rôle déterminant de la forme du trajet de chargement sur le niveau d'écrouissage maximal [Pilvin (1990)], [Ferney (1994)], [Abdul-Latif (1996)], [Calloch (1997)], [Abdul-Latif et al(1) (2002)]. Nous présentons sur les deux figures suivantes (figures (2.10) et (2.11)) les classifications obtenues expérimentalement par Pilvin (1990) et numériquement par Abdul-Latif et al2 sur des matériaux métalliques. Il ressort de ces deux références que les trajets papillon et TT90 entraînent le maximum de surécrouissage comparés aux trajets unidirectionnels (TC,TT), et aux trajets à déphasage relativement faible (TT0, TT30).

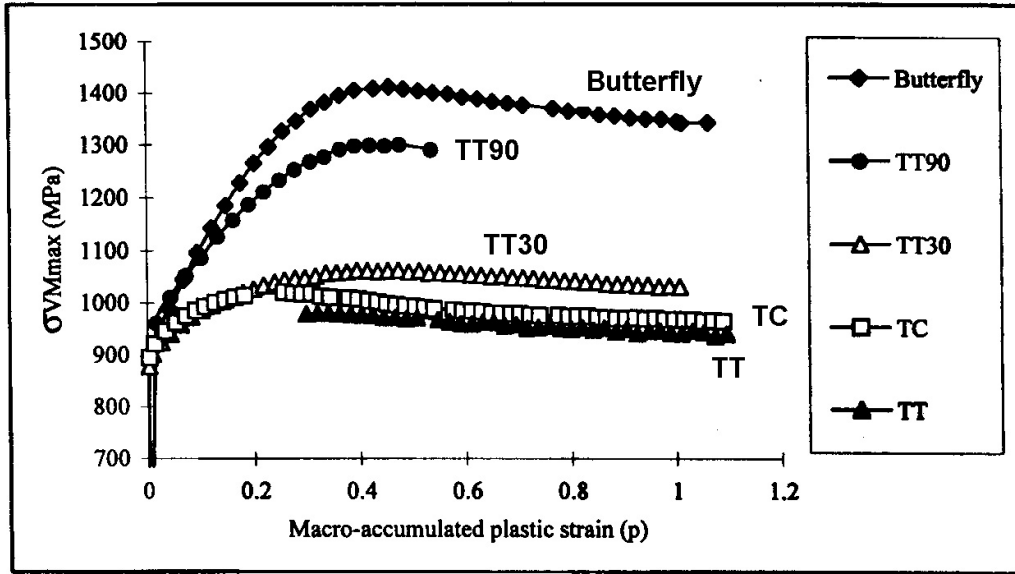


FIG. 2.10 – Résultats expérimentaux - Evolution de  $\sigma_{M_{ax}}^{EQV}$  en fonction de la déformation plastique cumulée ([Pilvin (1990)], [Ferney (1994)])

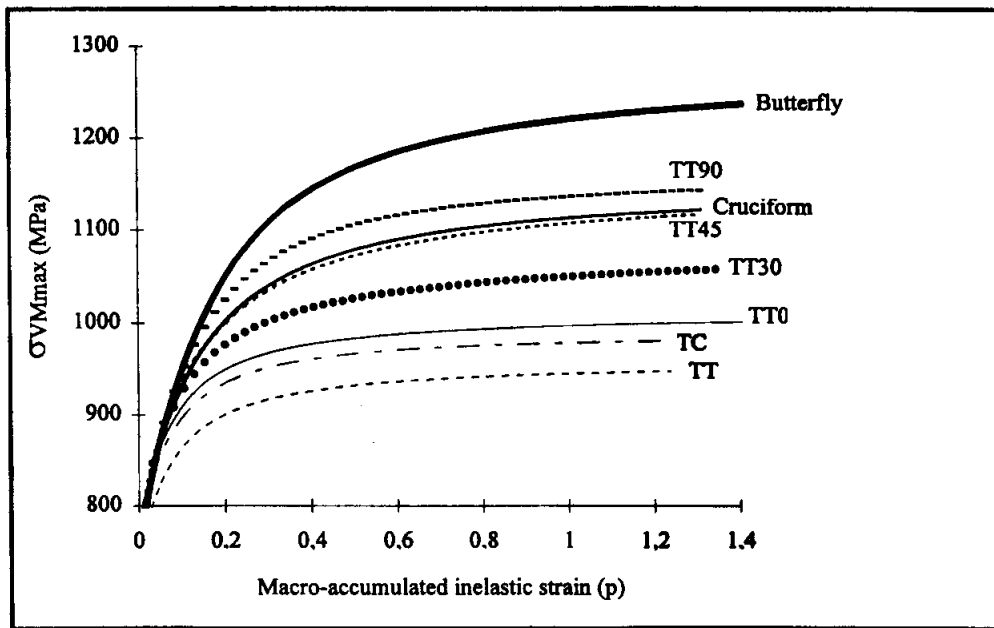


FIG. 2.11 – Réponse d'un modèle Micromécanique - Evolution de  $\sigma_{M_{ax}}^{EQV}$  en fonction de la déformation plastique cumulée ([Abdul-Latif et al(2) (1998)])

Dans ce qui suit, nous présentons les résultats obtenus avec le modèle D.N.L.R. version I (1 spectre et un état relaxé réversible) réduite à deux équations pour les deux directions considérées de traction et de cisaillement

$$\dot{\sigma}_{11} = E^u \dot{\epsilon}_{11} - \sum_{j=1}^{50} \frac{\sigma_{11}^j - E^r \epsilon_{11} P_0^j}{\tau^j} \quad (2.4)$$



$$\dot{\sigma}_{12} = 2\mu^u \dot{\epsilon}_{12} - \sum_{j=1}^{50} \frac{\sigma_{12}^j - 2\mu^r \epsilon_{12} P_0^j}{\tau^j} \quad (2.5)$$

L'évolution de la contrainte équivalente en fonction du nombre de cycles est quasiment identique pour chaque trajet : le modèle D.N.L.R., écrit sous cette forme simple (version I), ne permet pas de mettre en évidence le phénomène de surécrouissage.

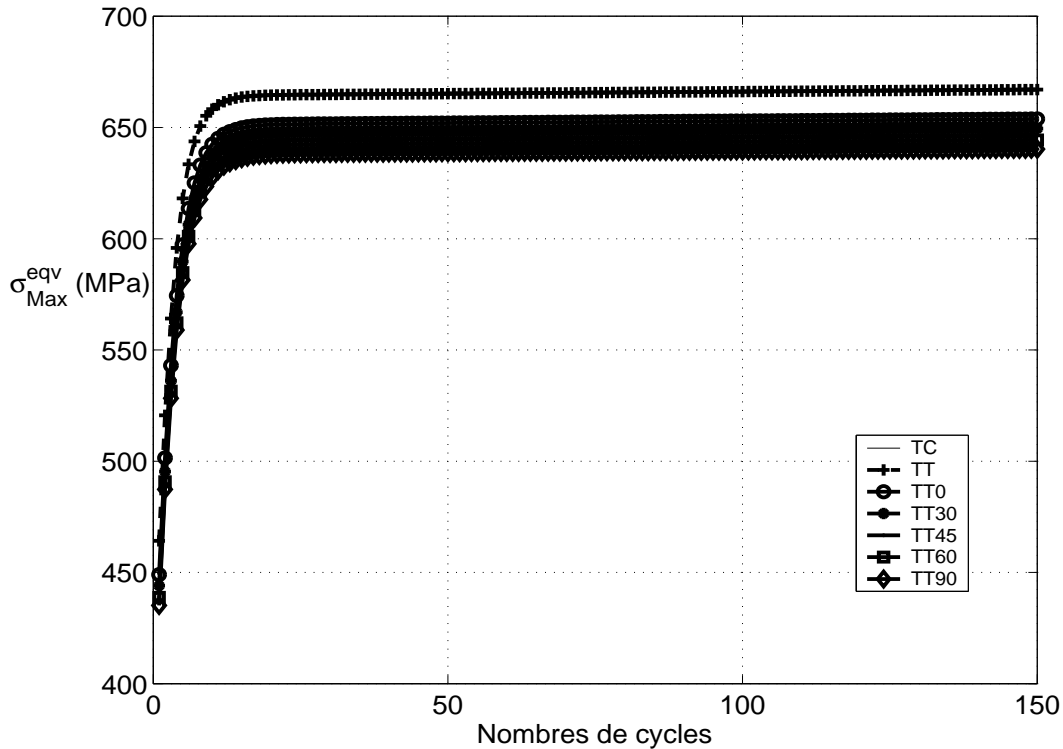


FIG. 2.12 – Réponse D.N.L.R. version I - Evolution de  $\sigma_{Max}^{EQV}$  en fonction du nombre de cycle

Pour palier les insuffisances de cette version I du modèle vis à vis du phénomène de surécrouissage, nous utilisons une version plus appropriée présentée comme la version II. La figure (2.13) montre que parmi les trajets considérés, les trajets papillon et TT90 donnent un écrouissage maximal (900 à 1000 MPa). Par rapport aux essais réalisés avec des chargements proportionnels (TC et TT0), un écrouissage supplémentaire de plus de 60% environ est constaté dans le cas de trajet de chargement circulaire (TT90). Les résultats obtenus avec la version II (2 spectres et un état relaxé réversible) figure (2.13) sont bien meilleurs comparés à ceux de la version I où tous les trajets sont quasiment confondus (figure (2.12)).

Les travaux de Pilvin (1990), Ferney (1994), Abdul-Latif (1996), Calloch (1996) et Abdul-Latif et al(1) (2002) montrent une classification légèrement différente de celle observée avec ce modèle D.N.L.R.(figures (2.11), (2.10)), Cette différence pourrait être due soit à un mauvais choix de paramètres de notre part ou soit à la forme empirique proposée par Loukil (1996) pour rendre compte le phénomènes de durcissement et d'adoucissement cyclique. En tout état de cause, cette série de simulations confirme la possibilité de reproduire le phénomène de surécrouissage avec les modèles construits avec l'approche D.N.L.R.

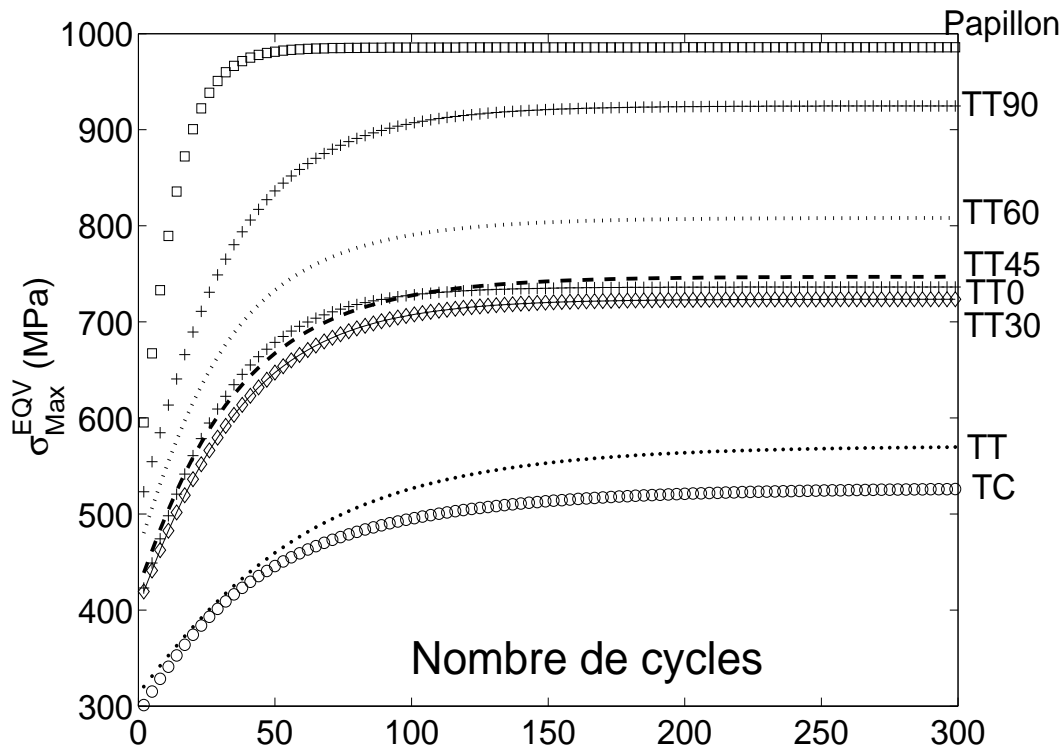


FIG. 2.13 – Réponse D.N.L.R.II - Evolution de  $\sigma_{Max}^{EQV}$  en fonction du nombre de cycle (2 spectres et un état relaxé réversible)

Ces résultats mettent en évidence le rôle spectaculaire de l'effet du trajet de chargement sur le comportement cyclique des matériaux métalliques. Selon certains auteurs ([Doquet (1989)], [Doquet et al (1990)], [Ferney (1994)] et [Calloch (1997)]), l'une des raisons expliquant le phénomène de surcrouissage induit par la non proportionnalité des chargements, serait liée à la multiplication des systèmes de glissement dans les grains.

## 2.3 Sollicitations cycliques à contrainte imposée

Nous présentons maintenant les principaux résultats concernant le comportement cyclique du modèle D.N.L.R. à contrainte imposée ; Nous étudions successivement le cas du rochet uniaxial (rochet 1D) et du rochet biaxial (rochet 2D).

### 2.3.1 Aptitude du modèle à décrire le phénomène de rochet

Les premiers travaux de modélisation du phénomène de rochet ont été réalisés par Dafalias et al (1976), Chaboche et al (1979) et Yoshida et al (1979). Motivés par ces travaux, plusieurs chercheurs ont essayé, dans les années 90, de proposer des modèles de comportement des matériaux capables de prédire l'effet de rochet dans des matériaux métalliques ([Voyiadjis et al(a) (1991)], [Hassan et al(II), (1992)], [Hassan et al(I), (1992)], [Ohno et al (1993)], [Chaboche (1994)], [Delobelle et al (1995)], [McDowell (1995)],

[Voyiadjis et al (1998)]. Cependant, dans certains cas, les modèles proposés sont incapables de décrire le phénomène de rochet pour des histoires de chargement données ([Corona et al (1996)],

[Bari, Hassan (2000)]. En revanche, une autre démarche a été récemment utilisée afin de modéliser ce phénomène. Il s'agit des modèles fondés sur l'approche micro-mécanique. Ils sont capables de décrire naturellement ce phénomène sans ajouter de paramètres supplémentaires. En effet, ces modèles basés sur la physique descendent, en général, à l'échelle des systèmes de glissement et prennent en compte, entre autre, l'influence du nombre de grains et de leurs orientations [Abdul-Latif (a) (2002)] et [Abdul-Latif (b) (2002)]. Le but de cette section est de confronter le modèle D.N.L.R. au rochet multiaxial difficile à modéliser.

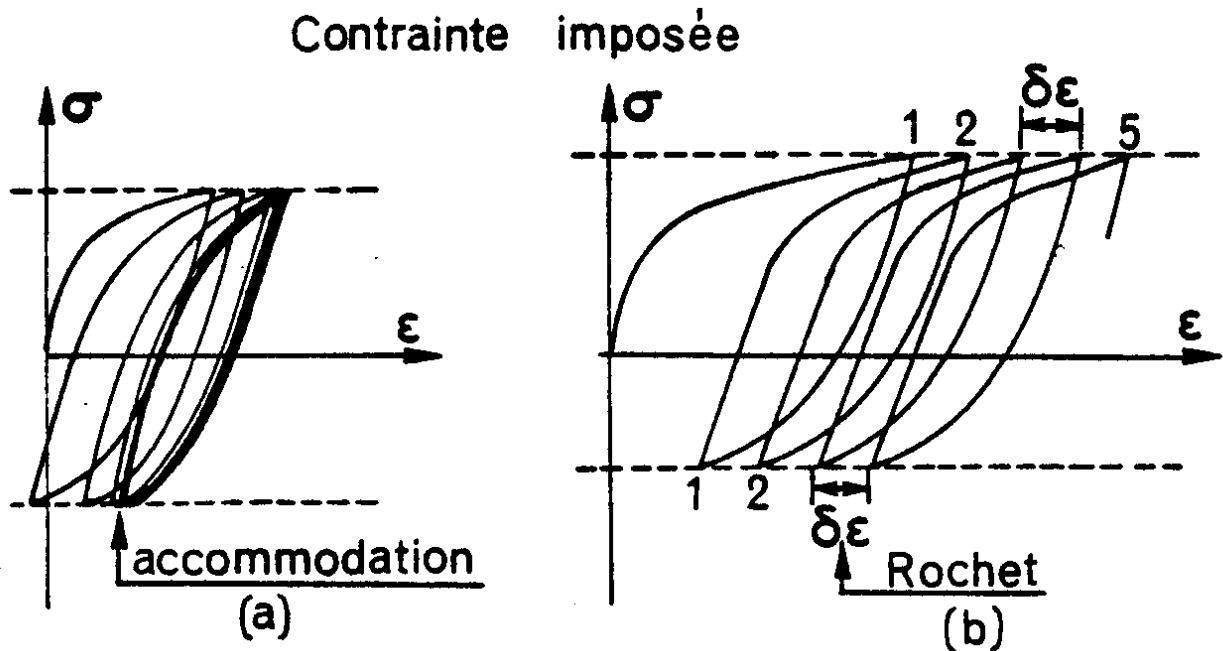


FIG. 2.14 – Phénomènes d'accommodation (a), de rochet (b)

En l'absence de fluage et pour un comportement uniquement élastoplastique, la définition de la déformation progressive ou effet de rochet est aisée. Il y a déformation progressive si un incrément de déformation se manifeste à chaque cycle sous l'effet de sollicitations cycliques. Lorsque le fluage entre en jeu et que par conséquent, les phénomènes dépendent du temps, une définition aussi simple n'est plus adéquate ([L'excellent (1987)]). Lorsque l'on réalise un essai à contrainte imposée non symétrique (par exemple essai cyclique de traction-compression), il peut y avoir accommodation, à savoir : le cycle stabilisé occupe une position fixe dans l'espace contrainte déformation, ou le plus souvent effet rochet, c'est à dire augmentation progressive de la déformation à chaque cycle (figure 2.14) : c'est le rochet 1D à contrainte imposée.

Une des sollicitations de rochet 2D consiste à superposer une déformation cyclique de torsion, à vitesse imposées ( $\pm \dot{\epsilon}_{12}$ ), entre déformations fixées ( $\pm \epsilon_{12}$ ), un très faible chargement statique primaire de traction  $\sigma_{11}$ . L'incrément  $\delta \epsilon_{11}$  caractérise la déformation progressive de rochet. Signalons à cet effet la sévérité de ce type de sollicitation (composantes statique et cyclique) vis-à-vis des modèles identifiés le plus souvent sous sollicitations uniaxiales ([Contesti (1985)], [Blanchard et al (1985)]).

Dans une première partie, nous simulons le comportement du modèle D.N.L.R. entre deux niveaux de contraintes symétriques et non symétriques (rochet uniaxial). Dans une deuxième par-

tie, une comparaison sera effectuée entre les résultats obtenus avec les modèles D.N.L.R. et les simulations réalisées par [Portier et al (2000)] avec le modèle N.L.K. (Non Linear Kinematics) de Chaboche sur différents trajets de chargement (Rochet multiaxial).

### 2.3.2 Rochet uniaxial

La simulation produite avec la version I du modèle D.N.L.R. entre deux niveaux de contraintes symétriques (figure 2.15) puis non symétriques (figure 2.16) permet de mettre en évidence sa capacité à reproduire le phénomène de Rochet 1D (figure 2.16). Le phénomène d'accommodation est aussi observé en diminuant la valeur de la contrainte moyenne (figure 2.17)  $\bar{\sigma}=20$  MPa au lieu de 100 MPa pour le rochet.

Ces résultats sont en conformité avec les expériences du rochet uniaxial de Goodman (1988) effectuées sur l'acier inoxydable de type A316 à température ambiante, en permettant de mettre en évidence d'une part l'état de stabilisation pour les contraintes moyennes faibles (accommodation ou adaptation), et d'autre part l'apparition du phénomène de rochet pour les contraintes moyennes élevées. Cependant, Chaboche et al (1991) ont étudié le comportement de l'INCONEL 718 à une température de  $550^{\circ}C$  et ont montré que ce matériau présente un phénomène de Rochet quelle que soit la valeur de la contrainte moyenne. Toutefois, l'accumulation de la déformation progressive reste lente.

Nous illustrons sur la figure (2.18) l'influence de la contrainte moyenne sur le rochet : plus la contrainte moyenne est élevée plus l'augmentation de la déformation progressive est importante.

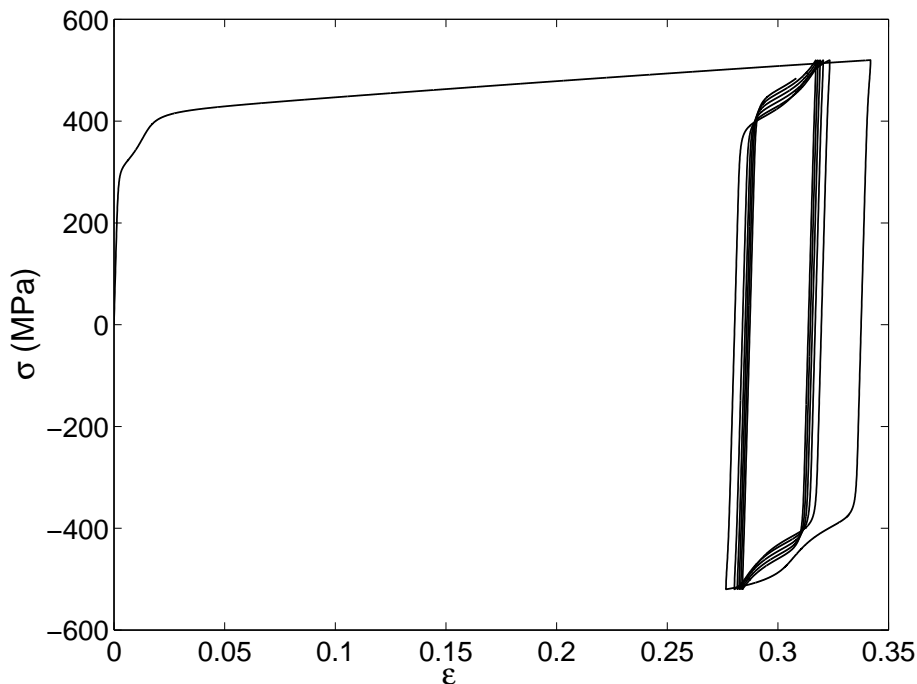


FIG. 2.15 – Contrainte symétrique ( $\bar{\sigma} = 0MPa$ )

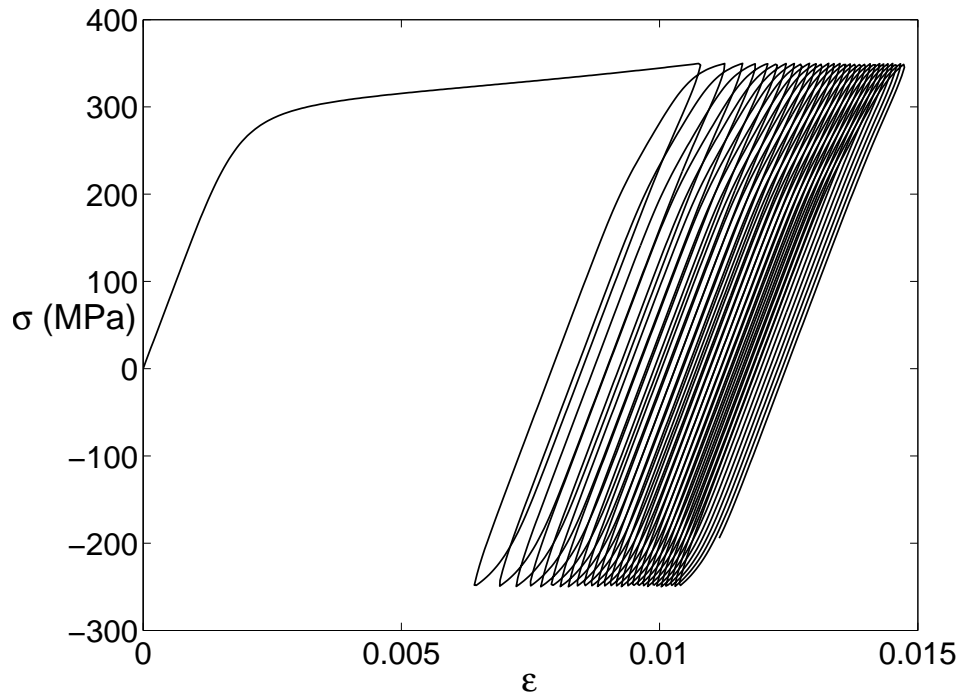


FIG. 2.16 – Contrainte non symétrique ( $\bar{\sigma} = 100MPa$ )

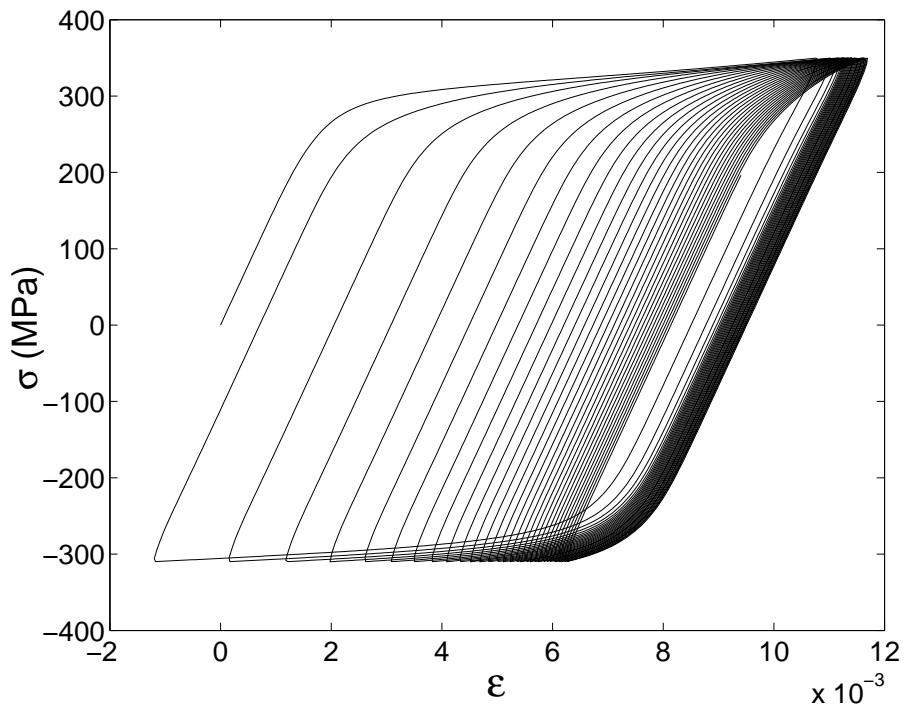


FIG. 2.17 – Contrainte non symétrique ( $\bar{\sigma} = 20MPa$ )

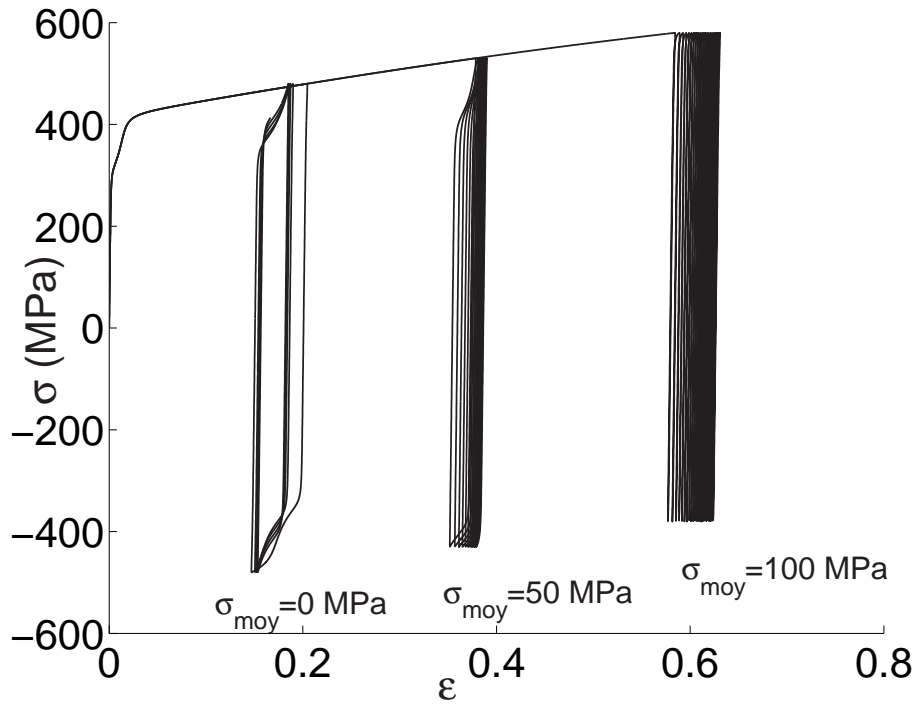


FIG. 2.18 – Influence de la contrainte moyenne

### 2.3.3 Rochet multiaxial

L'essai de rochet multiaxial consiste à imposer deux ou plusieurs chargements sur une éprouvette dans des directions différentes. On impose, par exemple, cycliquement une contrainte de traction et une déformation de cisaillement. La combinaison de ces deux types de chargement conduit à plusieurs formes de trajets parmi lesquels nous pouvons citer le trajet "papillon" imposé expérimentalement par Corona et al (1996) sur des éprouvettes en acier carbone (CS 1018 et CS 1026) et les simulations réalisées par Portier et al (2000) sur l'acier 316L. Ces dernières vont nous servir d'éléments de comparaisons. Dans ce travail nous imposons principalement deux types de trajets :

Le trajet 1 consiste en l'application d'une faible contrainte de traction ( $\sigma_{11} = 67.4 \text{ MPa}$ ) et en la superposition d'une déformation cyclique de cisaillement dont l'amplitude maximale est constante ( $\epsilon_{12} = 0.85\%$ )

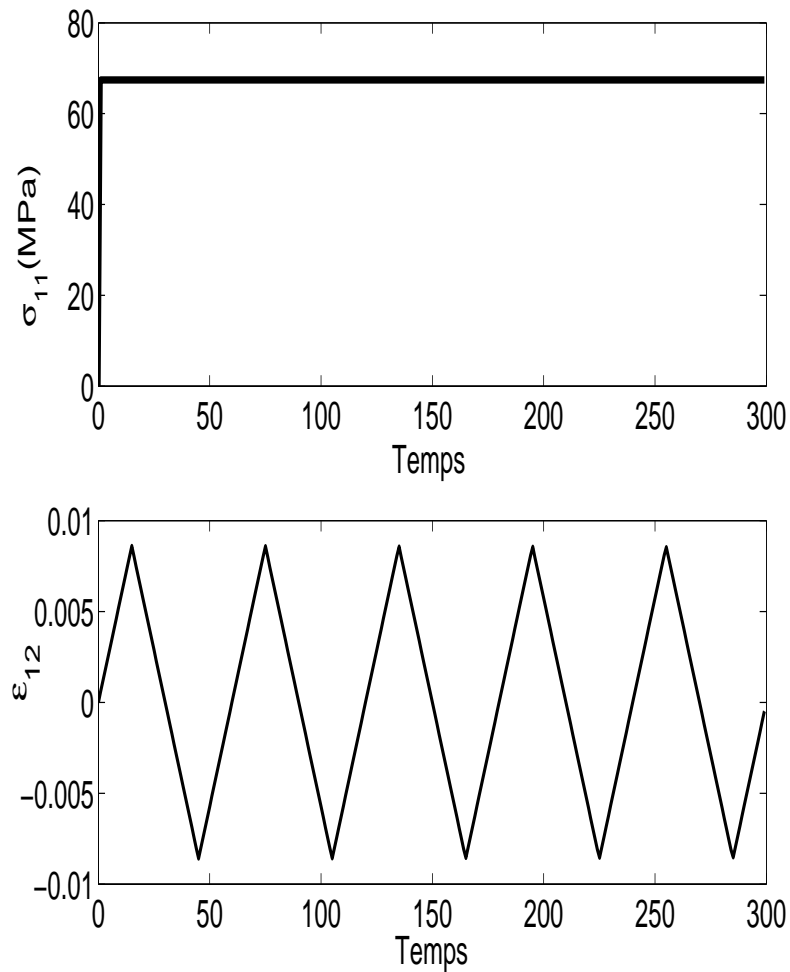


FIG. 2.19 – Trajet 1 - Description du chargement ( $\sigma_{11}, \epsilon_{12}$ )

La réponse du système est la déformation axiale  $\epsilon_{11}$  et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$ . Ce même trajet a déjà été réalisé expérimentalement par Shiratori et al (1979), sur des tubes en acier 316L puis numériquement par Basuroychowdhury et al (1998). Les résultats observés montrent un accroissement progressif de la déformation de traction  $\epsilon_{11}$  au cours du temps (rochet). Nous représentons sur la figure (2.20) l'évolution observée par ces derniers. En "rond" nous avons les résultats expérimentaux de Shiratori et al (1979) et en trait continu ceux obtenus par simulation numérique d'un modèle de comportement proposé par Voyiadjis et al (1998).

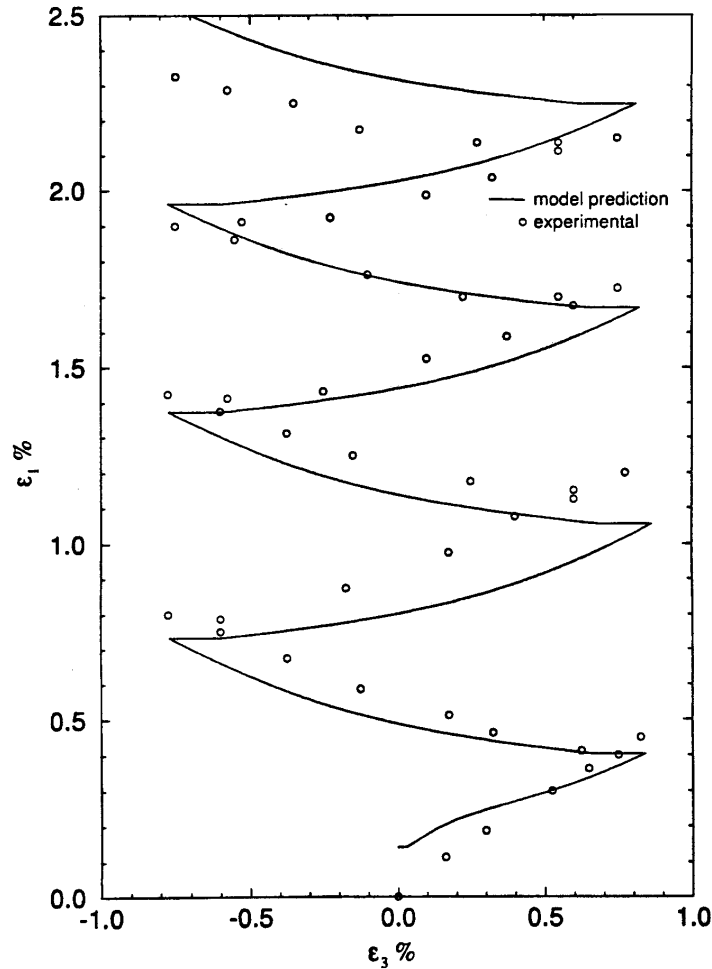


FIG. 2.20 – Trajet 1 - résultats obtenus par Basuroychowdhury et al (1998) comparés à l'étude expérimentale de Shiratori et al (1979).

Le chargement représenté sur la figure (2.19) est utilisé pour simuler le comportement du matériau par la version I (1 spectre et état relaxé réversible) du modèle. La réponse observée montre une saturation très rapide de la déformation de traction  $\epsilon_{11}$  au cours du temps. Cette réponse n'est pas satisfaisante pour décrire les résultats expérimentaux de Shiratori et al (1979) et /ou la simulation numérique de Basuroychowdhury et al (figure 2.21).

Afin d'améliorer ces résultats, nous simulons ce comportement par la version I-bis (1 spectre et état relaxé irréversible) où les résultats sont bien meilleurs : nous observons bien un accroissement progressif de la déformation  $\epsilon_{11}$  (figure 2.22).



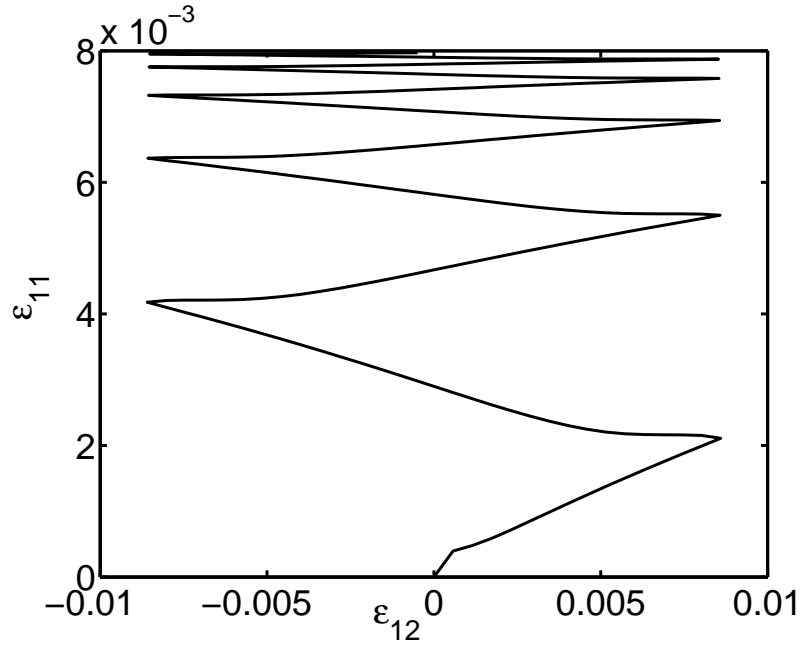


FIG. 2.21 – Trajet 1 - résultats obtenus avec la version I D.N.L.R. (1 spectre et état relaxé réversible)

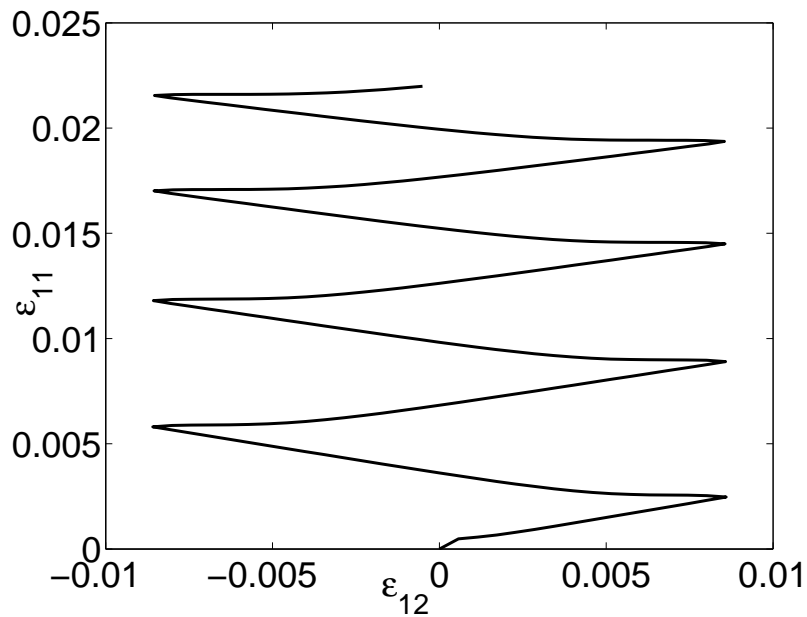


FIG. 2.22 – Trajet 1 - résultats obtenus avec la version I-bis D.N.L.R. (1 spectre et état relaxé irréversible)

La version I-bis présente une modélisation de l'état relaxé non linéaire tandis que, pour la version I, cet état relaxé obéit à la loi de Hooke  $\sigma^r = E^r \epsilon$ . Pour tenter d'expliquer cette saturation observée sur la figure (2.21), nous réalisons un essai de fluage  $\sigma_{11} = \sigma_0$  avec les versions I et I-bis. Les réponses observées par les deux versions (figure 2.23) montrent que :

- l'approche D.N.L.R. avec la modélisation de l'état relaxé purement Hookéenne  $\underline{\sigma}^r = \underline{\underline{A}}^r \underline{\underline{\epsilon}}$  ne peut conduire qu'au fluage primaire.
- le modèle D.N.L.R. est apte à simuler le fluage secondaire à partir de l'expression des lois d'évolutions de la contrainte à condition de choisir un état relaxé irréversible.

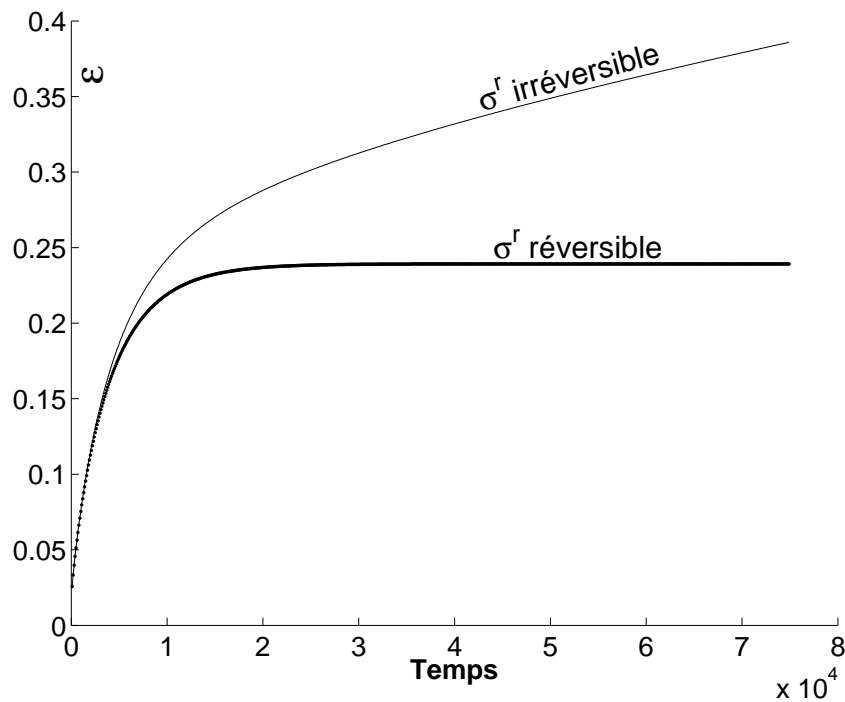


FIG. 2.23 – Essai de fluage avec les versions I ( $\sigma^r$  réversible) et I-bis ( $\sigma^r$  irréversible) du modèle

C'est cette saturation observée sur l'essai de fluage avec la version I, que nous retrouvons sur le rochet 2D.

Le deuxième trajet utilisé ici pour le rochet 2D, consiste comme pour le trajet 1, à superposer deux types de chargement : une contrainte normale cyclique d'amplitude constante et d'une déformation cyclique de cisaillement comme le montre la figure (2.24).

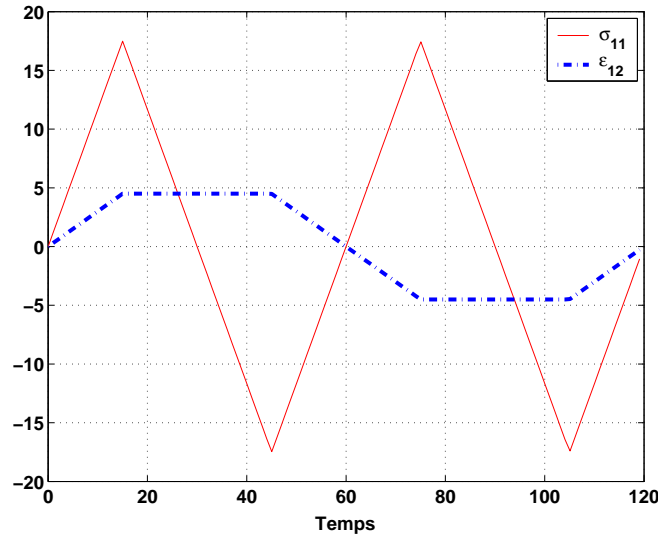


FIG. 2.24 – Trajet 2 - contrainte normale  $\sigma_{11}(MPa)$  et déformation de cisaillement  $\epsilon_{12}(*10^{-3})$  imposées

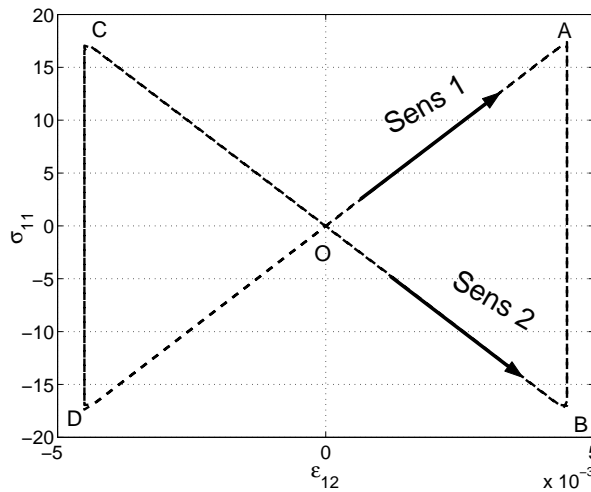


FIG. 2.25 – Trajet 2 - contrainte normale - déformation de cisaillement ( $\sigma_{11}(MPa) - \epsilon_{12}$ ) imposées

L'évolution de la contrainte normale de traction  $\sigma_{11}(MPa)$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\epsilon_{12}$  représente le trajet "papillon". Trois possibilités s'imposent :

- soit la contrainte normale  $\sigma_{11}$  et la déformation de cisaillement  $\epsilon_{12}$  évoluent en phase (sens 1) et la contrainte moyenne est nulle dans ce cas le "papillon" est centré en 0 et on l'appelle trajet 2A qu'on parcourt dans le sens (OABCD)
- soit la contrainte normale  $\sigma_{11}$  et la déformation de cisaillement  $\epsilon_{12}$  évoluent en phase (sens 1 toujours) et la contrainte moyenne est non nulle dans ce cas le "papillon" n'est pas centré en 0 et on l'appelle trajet 2B.
- ou soit la contrainte  $\sigma_{11}$  et la déformation  $\epsilon_{12}$  évoluent en opposition de phase (sens 2) et la contrainte moyenne est non nulle dans ce cas le papillon est centré en 0 et on l'appelle trajet 2C.

Ces trois trajets de chargements (trajet2A, trajet2B et trajet2C) ont été simulés par Portier et al (2000) pour tester cinq modèles de plasticité cyclique parmi lesquels nous pouvons citer le modèle N.L.K (Non Linear Kinematics) de Chaboche (1977 & 1989), le modèle BCG de Burllet et Cailletaud (1987), le modèle OW de Ohno et Wang (1993) et le modèle TANA de Tanaka (1994) (cf Annexe B) pour une présentation comparative de ces différents modèles).

Il ressort du travail de Portier et al (2000) que les trois autres modèles sont construites sur la base du modèle N.L.K. à écrouissage cinématique non linéaire de type [Armstrong et Frederick (1966)]. Ces modèles modifient l'écrouissage cinématique du modèle N.L.K. pour pouvoir décrire convenablement l'effet de rochet.

Nous ne disposons pas de bases de données expérimentales de Portier et al (2000) pour réaliser le processus d'identification des paramètres du modèle et comparer quantitativement notre approche aux autres. Cependant, avec le jeu de coefficients déterminé pour l'acier 316L sur des trajets de type papillon et trèfle, nous simulons ces différents trajets et les comparons avec les résultats obtenus par Portier et al (2000).

Les résultats obtenus avec le modèle N.L.K. sont représentés sur les figures (2.26), (2.27), (2.28), (2.29), (2.30).

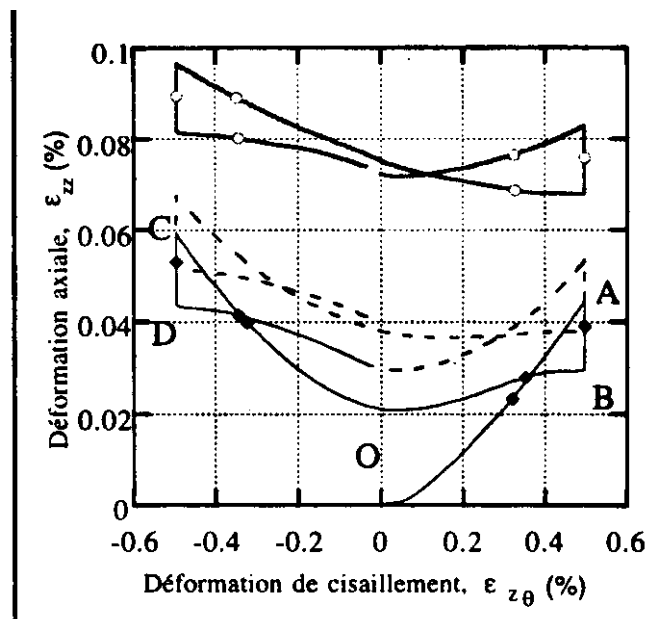


FIG. 2.26 – Réponse N.L.K. trajet2A : sens 1 contrainte moyenne nulle

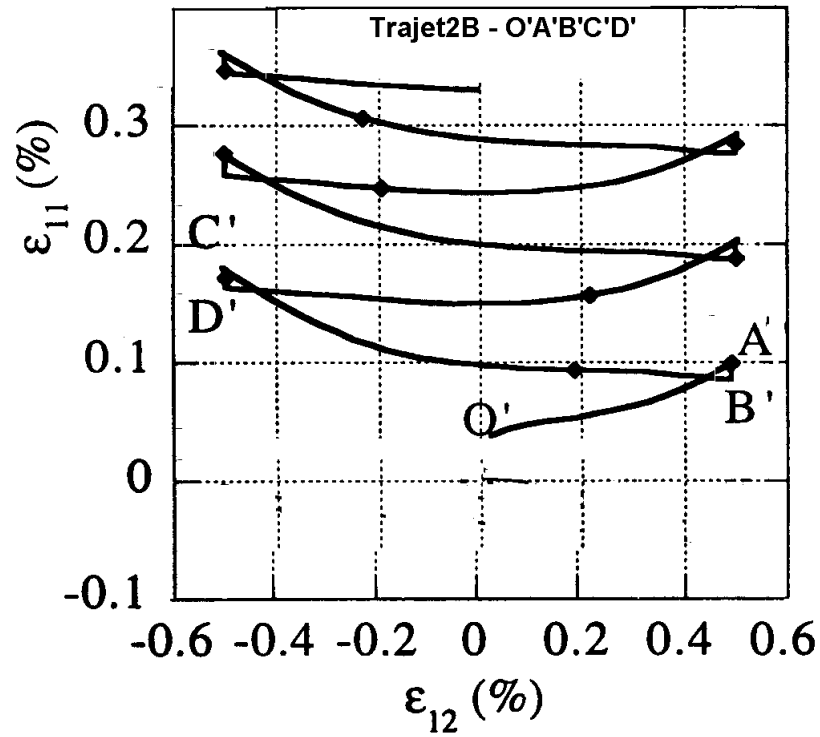


FIG. 2.27 – Réponse N.L.K. trajet2B : sens 1 contrainte moyenne non nulle

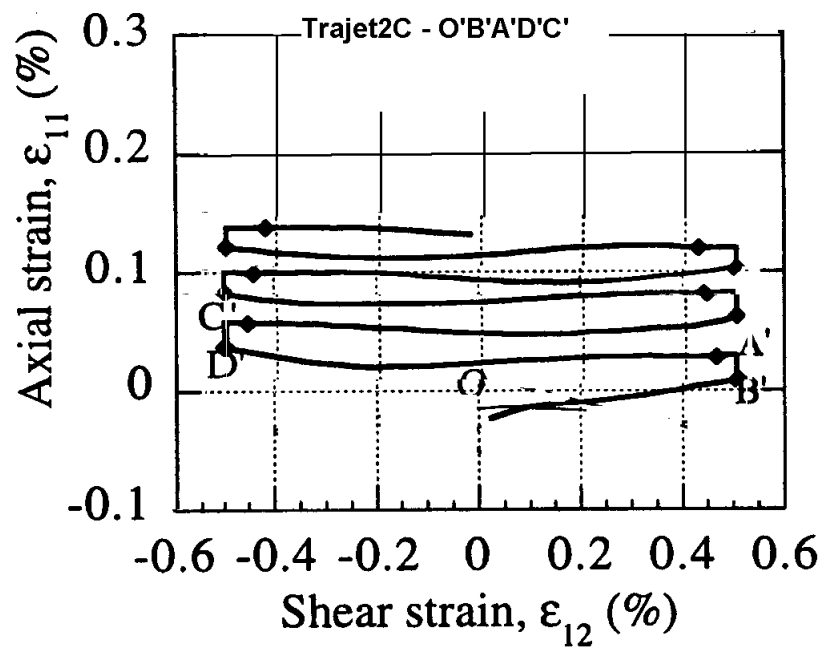


FIG. 2.28 – Réponse N.L.K. trajet2C : sens 2 contrainte moyenne non nulle

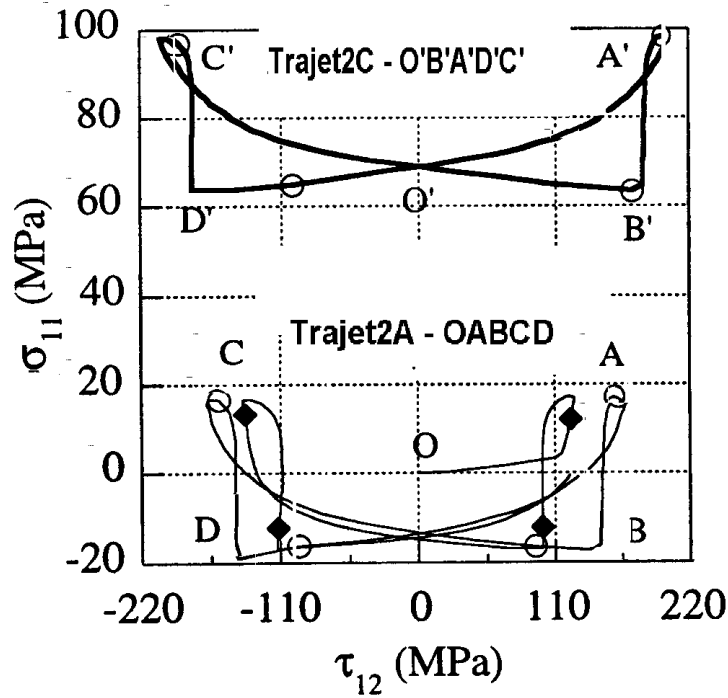


FIG. 2.29 – Réponse N.L.K. trajet 2A et trajet2C

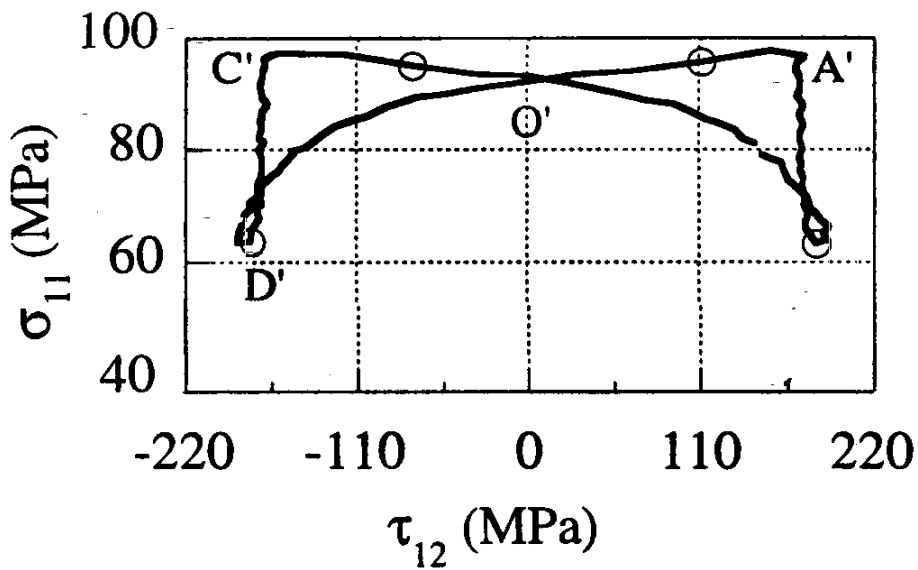


FIG. 2.30 – Réponse N.L.K. trajet2C : contrainte moyenne non nulle

La réponse de la version I-bis (1 spectre et état relaxé irréversible) du modèle pour ces types de chargement ( $\epsilon_{12}$ ,  $\sigma_{11}$  imposés) est la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  et la déformation de traction  $\epsilon_{11}$ . Nous comparons pour chaque trajet (trajet 2A, trajet 2B et trajet 2C), les évolutions :  $(\sigma_{11} - \epsilon_{11})$ ,  $(\sigma_{11} - \sigma_{12})$ ,  $(\epsilon_{11} - \epsilon_{12})$  et l'évolution de la déformation équivalente maximale par cycle ( $\epsilon_{Max}^{EQV}$ ,  $N_{cyc}$ ).

**Evolution de  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\epsilon_{11}$**

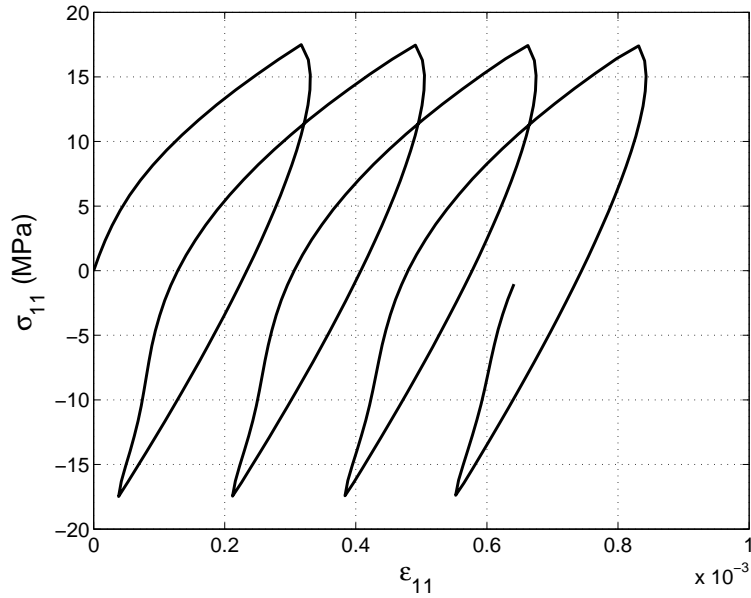


FIG. 2.31 – D.N.L.R. version I-bis trajet2A : sens 1 et contrainte moyenne nulle

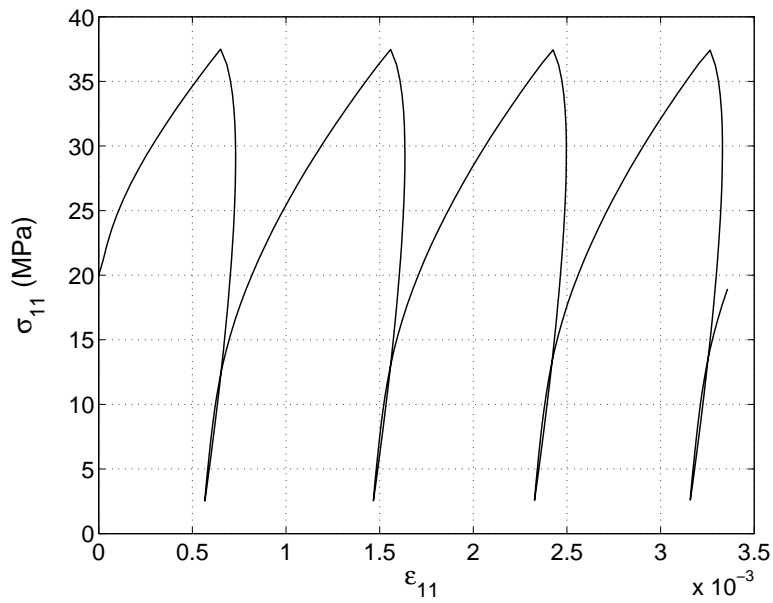


FIG. 2.32 – D.N.L.R. version I-bis trajet2B : sens 1 et contrainte moyenne non nulle

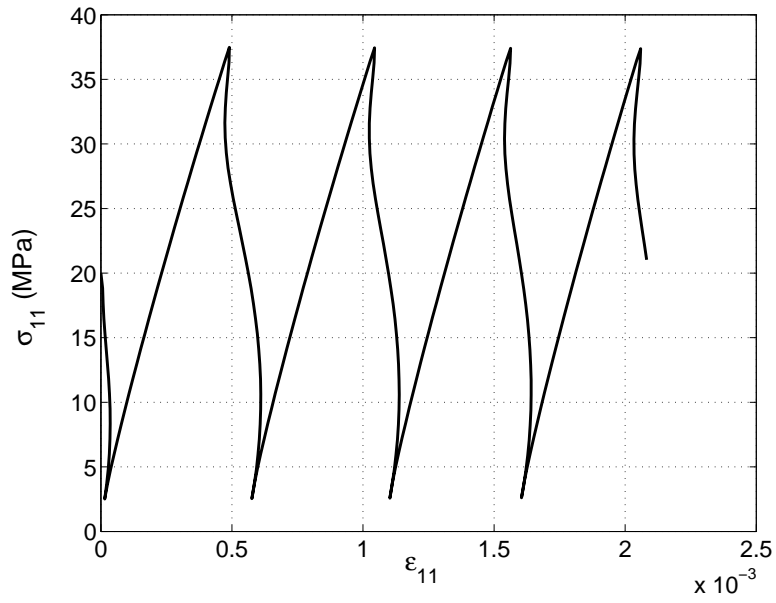


FIG. 2.33 – D.N.L.R. version I-bis trajet2C : sens 2 et contrainte moyenne non nulle

**Evolution de  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\sigma_{12}$**

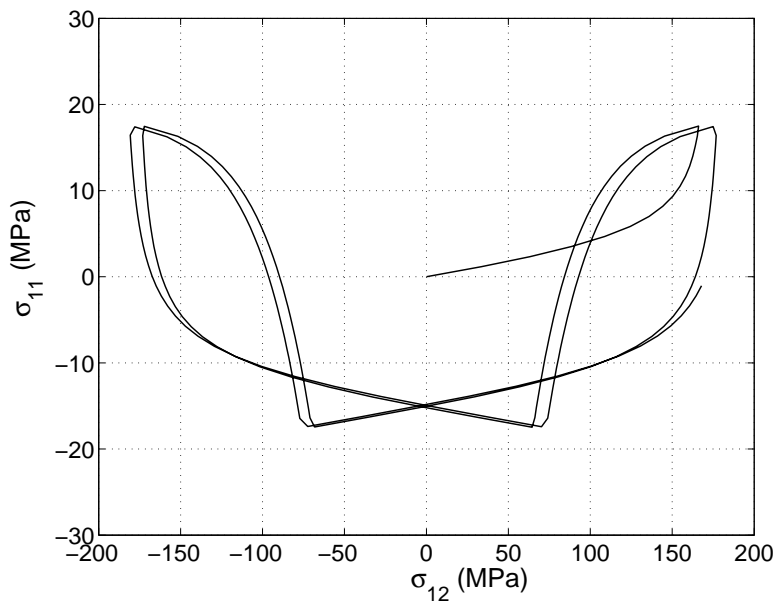


FIG. 2.34 – D.N.L.R. version I-bis trajet2A : sens 1 et contrainte moyenne nulle



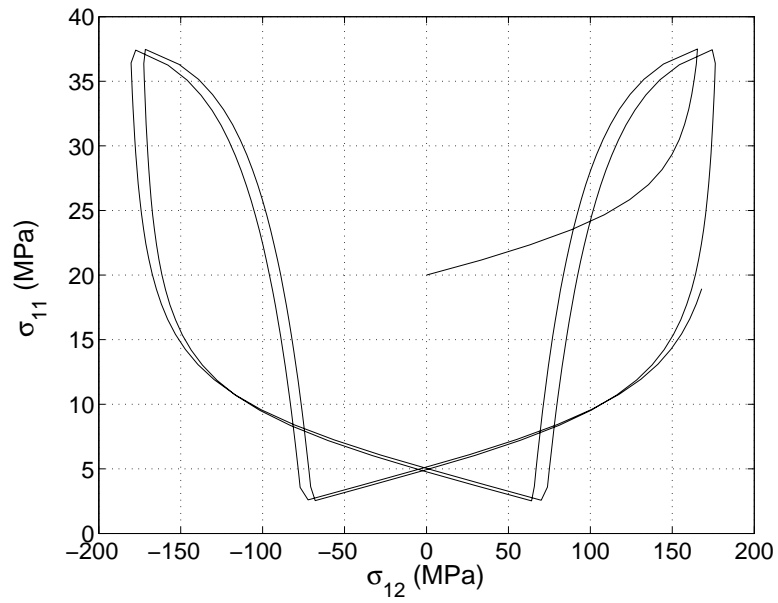


FIG. 2.35 – D.N.L.R. version I-bis trajet2B : sens 1 et contrainte moyenne non nulle

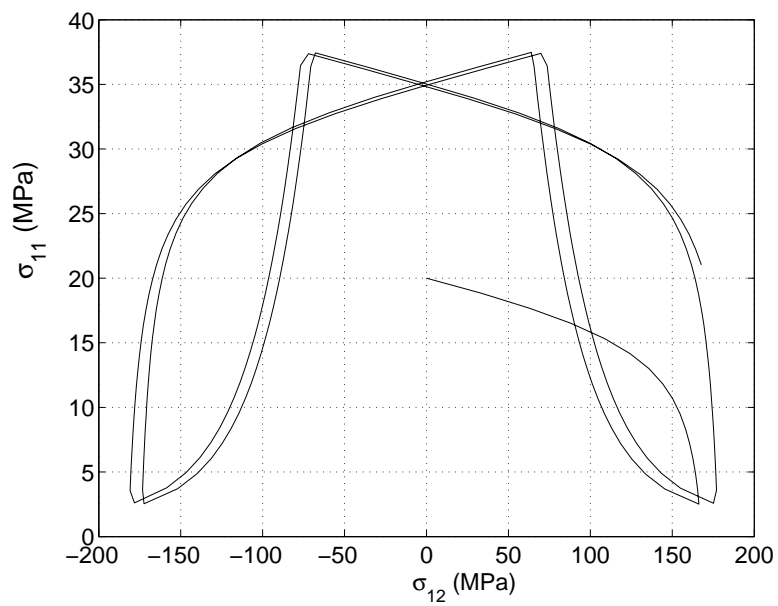
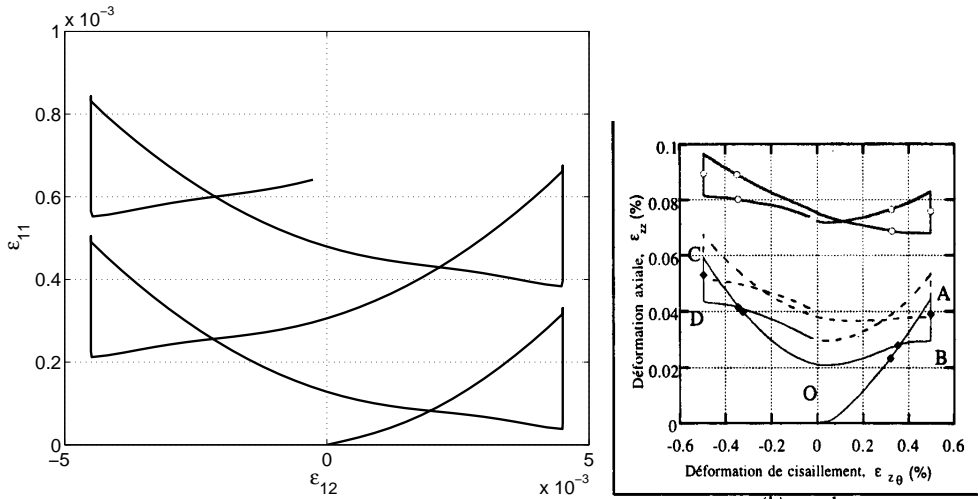
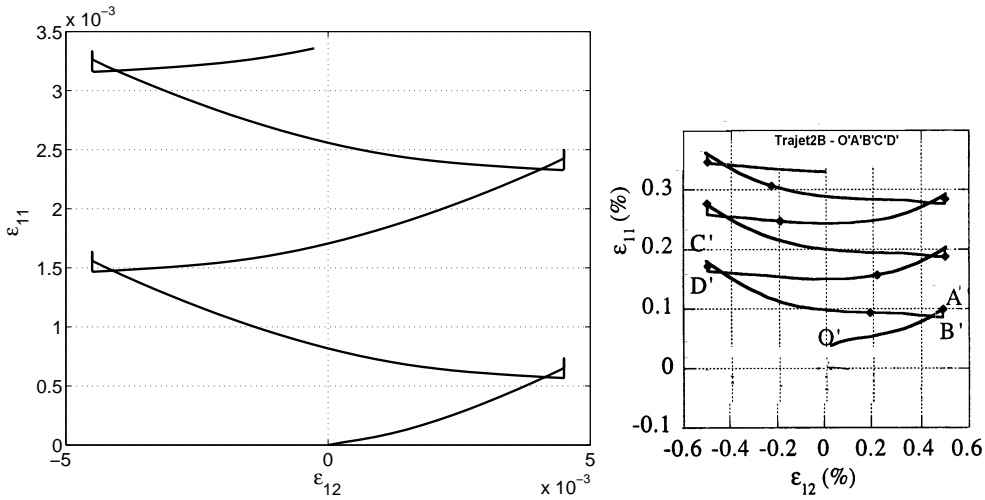


FIG. 2.36 – D.N.L.R. version I-bis trajet2C : sens 2 et contrainte moyenne non nulle

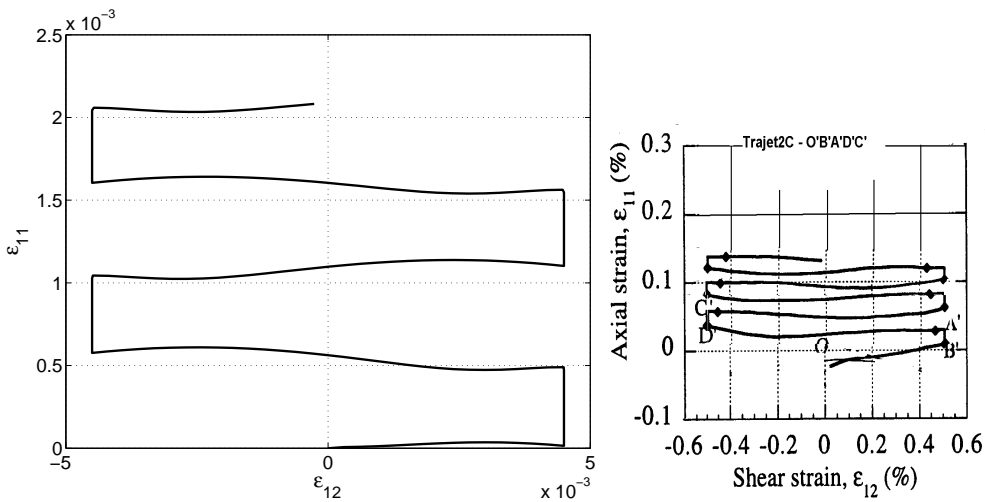
Evolution de  $\epsilon_{11}$  en fonction de  $\epsilon_{12}$



(a) trajet2A : Résultat D.N.L.R. version I-bis et N.L.K. par Portier et al (2000)



(b) trajet2B : Résultat D.N.L.R. version I-bis et N.L.K. par [Portier et al (2000)]



(c) trajet2C : Résultat D.N.L.R. version I-bis et N.L.K. par [Portier et al (2000)]

FIG. 2.37 – Version I-bis : évolution de  $\epsilon_{11}$  en fonction de  $\epsilon_{12}$

Les résultats observés avec la version I-bis du modèle montrent un accroissement progressif de la déformation de traction au cours du chargement (phénomène de rochet) pour les trois trajets. Cet accroissement varie en fonction du type de trajet employé. Pour le trajet 2B (figure 2.38), l'accroissement est plus important par rapport au trajet 2A (plus de 20%) du fait uniquement de la valeur non nulle de la contrainte moyenne (figure 2.38).

Le trajet 2C diffère du trajet 2B par un déphasage de  $\pi$  entre la contrainte imposée et la déformation imposée. En effet, la vitesse de contrainte est de signe opposée à la vitesse de cisaillement. La réponse observée est différente de celle du trajet 2B du fait à cause de la non proportionnalité du chargement.

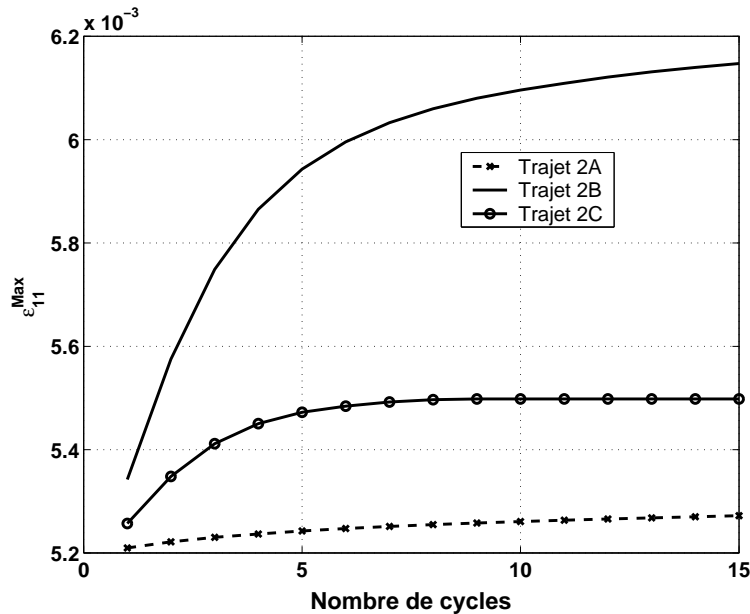


FIG. 2.38 – D.N.L.R. version I-bis : Evolution de la déformation équivalente maximale en fonction du nombre de cycles

Au vu de ces résultats, nous pouvons conclure que le modèle D.N.L.R. utilisé ici est capable de décrire qualitativement le phénomène de rochet 2D "classique". Cependant, nous n'avons pas encore étudié l'influence du sens de parcours du trajet de chargement. Pour cela, nous nous inspirons des travaux de Corona et al (1996) repris par Portier (1999) et Portier et al (2000). En effet, ils ont montré que l'écroutissage cinématique non linéaire de type [Armstrong et Frederick (1966)], permet d'avoir une bonne modélisation de la déformation progressive biaxiale pour un acier carbone (CS 1020) en pression interne constante et traction-compression cyclique. Par contre, les essais présentant une légère variation de la pression, le modèle donne du rochet négatif pour un certain sens de trajet de chargement et du rochet positif pour l'autre sens tandis que l'expérience donne toujours du rochet positif.

Ces essais que nous décrivons sur la figure (2.39), ont été réalisés par Portier et al (2000) sur des éprouvettes tubulaires soumises à des sollicitations biaxiales de type traction-cisaillement. Ils permettent de mettre en défaut un modèle qui donne de bons résultats pour des essais classiques de rochet 2D.

Nous décidons de réaliser le même type d'essais en traction-torsion dans le but de tester les différentes versions du modèle. Ces essais consistent à imposer une contrainte de traction  $\sigma_{11}$

et une déformation  $\epsilon_{12}$  de telle sorte que le trajet obtenu décrit un "papillon" dans l'espace  $(\sigma_{11}, \epsilon_{12})$  comme précédemment (trajet2A). Le trajet de chargement est décrit dans le sens 1 (OABCD) ou le sens 2 (OBADC), voir figure (2.24). Chacun des essais est constitué de trois phases successives. La première phase consiste à imposer un trajet papillon à contrainte moyenne nulle ( $\sigma_m = 0$ ) afin de dissocier l'effet de rochet pur et l'effet d'érouissage du matériau. Lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau_{12}$  est stabilisée, nous effectuons le même trajet à contrainte moyenne positive (c'est la deuxième phase). Au bout d'un certain nombre de cycles sans attendre la stabilisation du rochet, nous annulons la contrainte moyenne pour observer l'évanescence du rochet.

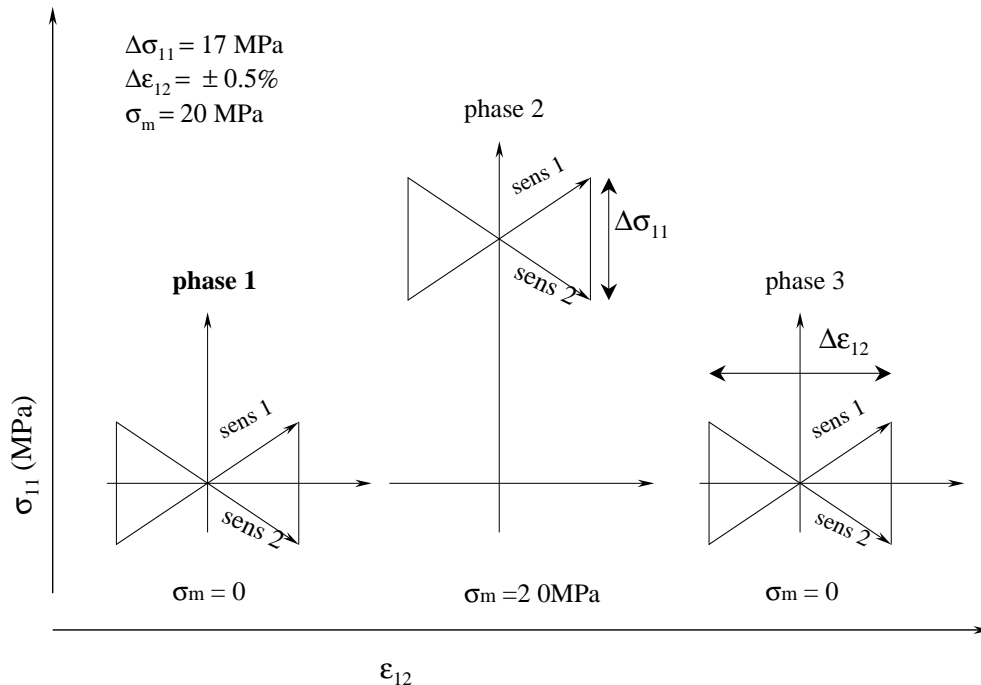


FIG. 2.39 – Description du trajet papillon

Ces essais ont permis à Portier et al (2000) de "discriminer" certains des modèles du comportement qui par ailleurs rendaient bien compte du phénomène de rochet classique. Les résultats obtenus expérimentalement et numériquement sur l'acier 316L avec les modèles NLK, BCG, OW, TANA, et OW-TANA (cf annexe B par la présentation de ces modèles du comportement phénoménologiques) sont représentés sur la figure (2.40)

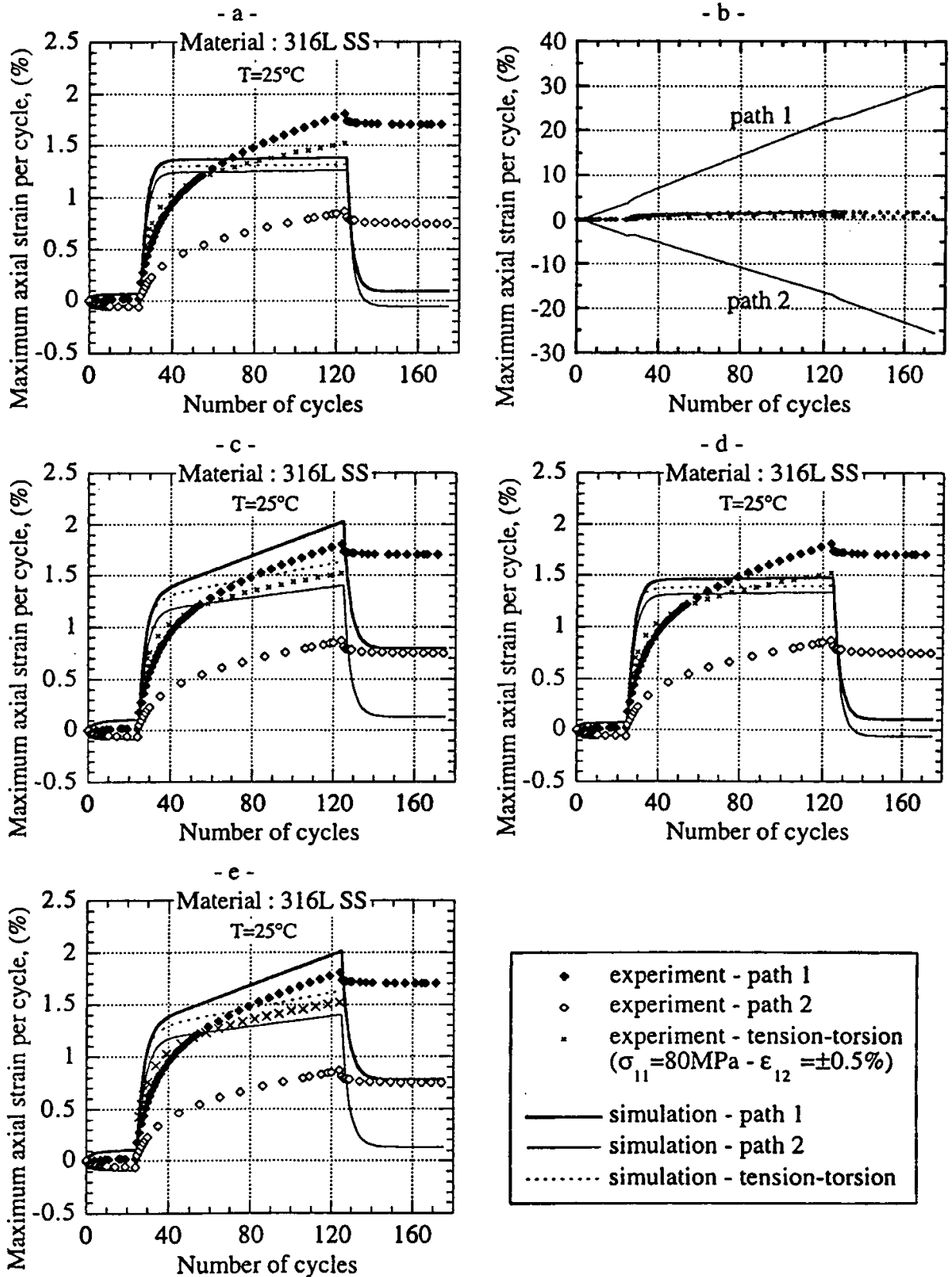


FIG. 2.40 – Etude comparative des modèles NLK (a), BCG (b), OW (c), TANA (d), OW-TANA (e) par Portier et al (2000)

De plus, le modèle proposé par Abdul-Latif (b) (2002), fondé sur l'approche micromécanique, permet de reproduire avec succès les réponses expérimentales pour les deux phases (figure 2.41).

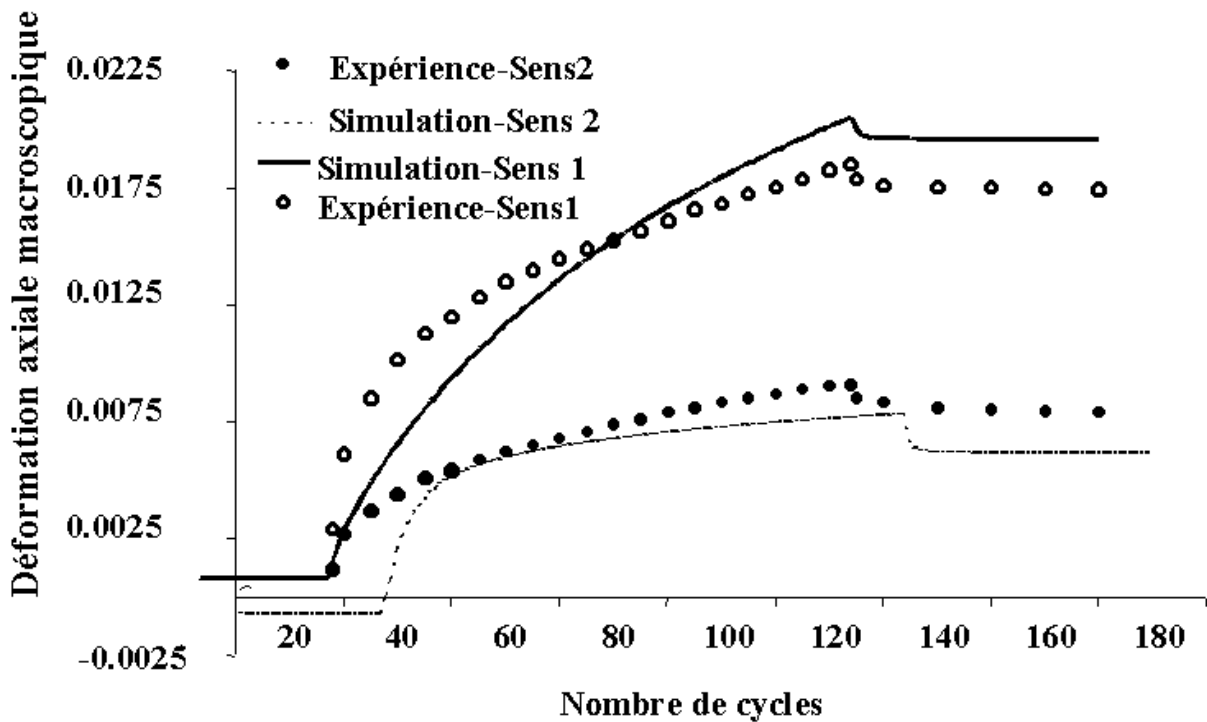


FIG. 2.41 – Comparaison entre la simulation du modèle à 400 grains proposé par Abdul-Latif (b) (2002) et l'expérience - en trait continu la simulation des deux sens et en trait discontinu l'expérience

Le même type d'essai en traction-torsion a été réalisé avec les trois versions du modèle D.N.L.R. et avec toujours le même jeu de paramètres. Les résultats obtenus montrent que :

- la version I (1 spectre et un état relaxé réversible) du modèle D.N.L.R. ne reproduit pas le changement de sens de parcours du trajet de chargement, c'est à dire qu'on obtient quasiment la même réponse pour la phase 2 et la phase 3 quel que soit le sens de parcours du trajet papillon (figure 2.42). Cette réponse est aussi observée avec le modèle N.L.K. (figure 2.40 (a))

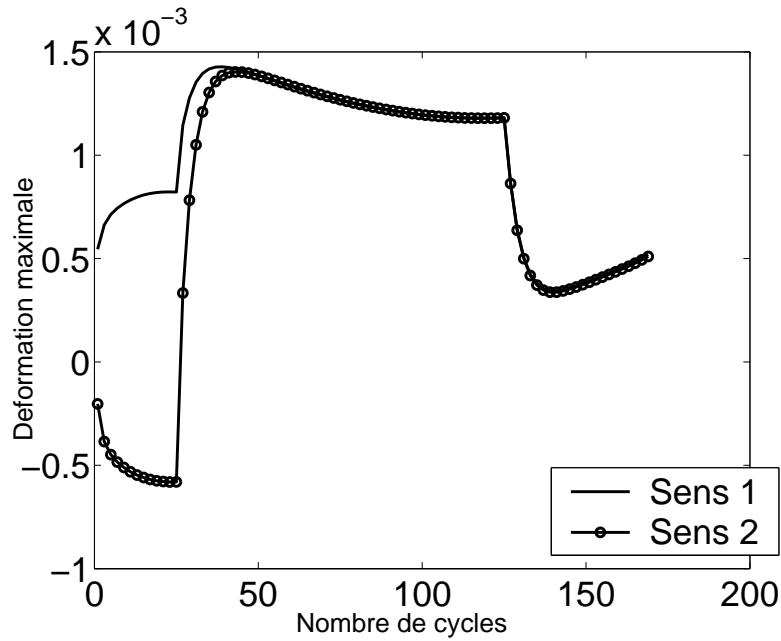


FIG. 2.42 – Version I du modèle D.N.L.R. (1 spectre et un état relaxé réversible)

- la réponse de la version I-bis (1 spectre et un état relaxé irréversible) améliore la réponse de la version I durant la première phase (figure 2.43), mais produit du rochet négatif quand on change le sens de parcours du trajet papillon, c'est quasiment la réponse observée avec le modèle BCG (figure 2.40 (b))

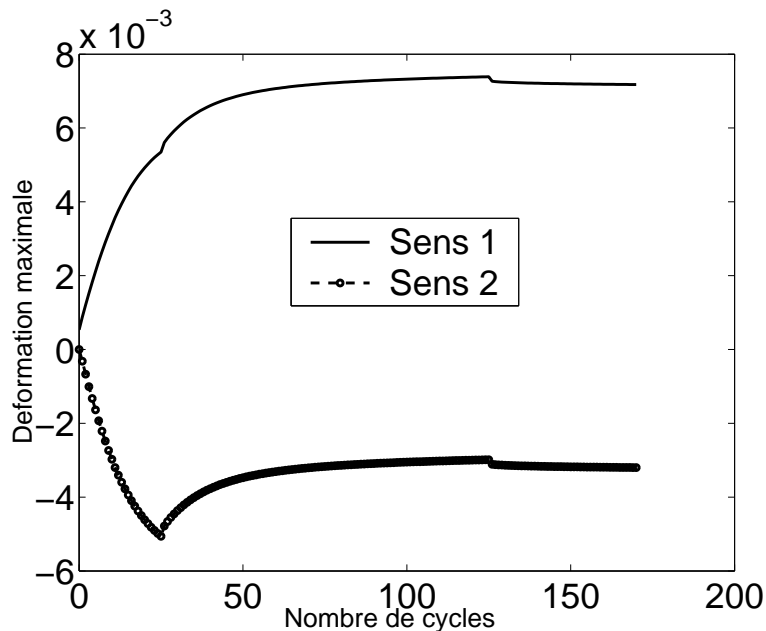


FIG. 2.43 – Version I-bis du modèle D.N.L.R.

- la réponse de la version II (2 spectres et un état relaxé réversible) du modèle est la meilleure comparée à ces dernières (figure 2.44), elle donne la même allure que les réponses observées avec les modèles OW et OW-TANA (figures 2.40 (c) et (e)).

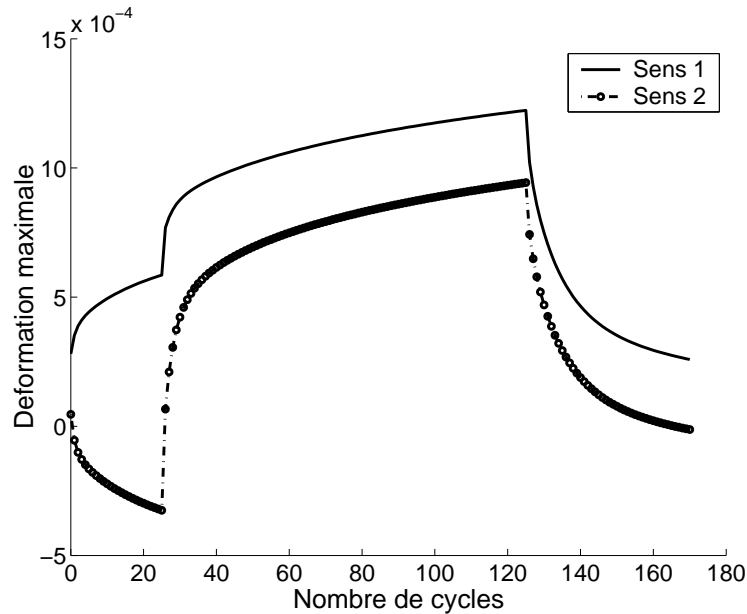


FIG. 2.44 – Version II du modèle D.N.L.R.

Il est important de noter que les versions de base (version I et I-bis) du modèle D.N.L.R. permettent de rendre compte du phénomène de rochet 1D et 2D. Cependant, dès qu'il s'agit de trajets complexes où il est question de prendre en compte l'influence du sens de parcours des trajets de chargement, elles s'avèrent insuffisantes. Afin de remédier à cela, nous recourons à la troisième version (version II), qui par rapport à la version I est constituée de deux spectres de temps de relaxations mais utilise un état relaxé réversible et qui donne pour l'instant des résultats satisfaisants.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous étudions qualitativement le comportement cyclique des modèles construits avec l'approche D.N.L.R.. Trois versions sont testées. La version de base à 6 paramètres qui est performante pour les chargements cycliques unidirectionnels (adoucissement, durcissement, effet mémoire et rochet 1D). La deuxième version avec un état relaxé insensible à la vitesse de déformation, qui présente une hystérèse lors de chargements cycliques simples. Cette version (version I-bis) à 8 paramètres permet de palier aux insuffisances de la première version à décrire le rochet 2D classique (essai de fluage cyclique de [Shiratori et al (1979)]). En effet, la version I du modèle ne permet pas de décrire le fluage secondaire d'où la saturation cyclique observée à la figure (2.21). Cette dernière modélisation s'est avérée insuffisante pour décrire les phénomènes de surécrouissage cyclique et de rochet multiaxial, par exemple (papillon). La troisième version plus élaborée (version II) à 11 paramètres présentant deux spectres de temps de relaxation, conduit à des résultats meilleurs. Rappelons que toutes ces simulations ont été menées à l'échelle d'un VER en conservant un unique jeu de paramètre pour chaque modèle. Ne disposant pas de base de données expérimentales pour ces différents essais, nous ne pouvons pas réaliser l'identification de paramètres du modèle afin de valider quantitativement les différentes versions du modèle D.N.L.R..



Il ne serait pas surprenant qu'il faille en fait introduire dans la version II des états relaxés irréversibles pour rendre compte de toutes les expériences, notamment l'effet mémoire évoqué au début de ce chapitre. Le travail doit être poursuivi d'analyse.

Quoi qu'il en soit, nous pensons avoir établi que la formulation D.N.L.R. était une véritable formulation tridimensionnelle, apte à reproduire le comportement induit par des trajets et séquences de chargement complexes.

Il est donc maintenant naturel d'introduire ce schéma dans un code de calcul industriel. Ce sera l'objet de la deuxième partie du mémoire que nous allons aborder.

## **Deuxième partie**

### **Mise en œuvre et validation numériques**



# Chapitre 3

## Intégration et validation du modèle D.N.L.R. dans un code d'éléments finis.

**Résumé :** Un des objectifs de ce travail, est de valider l'intégration du modèle D.N.L.R. dans un code industriel d'éléments finis (Msc.Marc). Après un rappel succinct de la méthode des éléments finis, nous donnons dans ce chapitre, les différentes étapes de la mise en œuvre numérique des équations constitutives du modèle. Une méthode "astucieuse" est utilisée pour augmenter le pas de temps et ainsi accélérer considérablement le calcul. Nous validons ensuite cette intégration, en reproduisant, d'une part, des résultats de simulations obtenus grâce à la programmation directe (Fortran) et d'autre part, des résultats expérimentaux.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.2</b>	<b>Généralités sur la méthode des éléments finis (E.F.) . . . . .</b>	<b>78</b>
3.2.1	Formulation du problème (forme intégrale) . . . . .	78
3.2.2	Technique des éléments finis . . . . .	80
<b>3.3</b>	<b>Algorithme simplifié d'une analyse de contraintes par éléments finis</b>	<b>85</b>
<b>3.4</b>	<b>Intégration du modèle D.N.L.R. dans le code E.F. . . . .</b>	<b>86</b>
<b>3.5</b>	<b>Description de l'algorithme . . . . .</b>	<b>86</b>
3.5.1	Calcul de la contrainte relaxée . . . . .	87
3.5.2	Calcul des temps de relaxation . . . . .	87
3.5.3	Calcul de la première approximation de la contrainte . . . . .	87
3.5.4	Calcul de la contrainte anélastique . . . . .	87
3.5.5	Calcul de la déformation anélastique : Technique d'accélération du temps de calcul . . . . .	87
3.5.6	Calcul de la contrainte totale . . . . .	89
<b>3.6</b>	<b>Validation du modèle par éléments finis . . . . .</b>	<b>89</b>
3.6.1	Choix de l'élément . . . . .	89
3.6.2	Essai de traction monotone . . . . .	90
3.6.3	Essais de traction-cisaillement de type papillon et trèfle - Valida- tion VEF / Expérience . . . . .	91
<b>3.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>96</b>

---

## 3.1 Introduction

Le problème posé dans ce chapitre concerne la validation de l'implémentation du modèle D.N.L.R. dans un code industriel de calcul par éléments finis (Msc.Marc). Cette validation passe par l'intégration des relations constitutives dans le code E.F. Nous nous plaçons dans le cadre des petites perturbations et de la mécanique du premier gradient et employons la méthode des éléments finis en déplacement (déformation imposée) associée à une méthode incrémentale pour simuler nos essais. Classiquement, la méthode incrémentale se décompose en deux étapes :

- **étape locale** où la loi de comportement du matériau est intégrée
- **étape globale** où l'équilibre de la structure est évalué, un résidu est construit à partir de l'équation d'équilibre et du champ des contraintes issu de l'étape locale.

Dans le cadre de ce travail, nous intervenons au niveau local, c'est à dire, l'intégration des lois de comportement issues de l'approche D.N.L.R. dans le code E.F.

L'intégration d'une nouvelle loi de comportement nécessite l'élaboration d'un certain nombre de sous programmes "subroutines" permettant de définir les paramètres du matériau et le schéma d'intégration choisi. La validation du modèle sous chargement cyclique non proportionnel est aussi abordée.

L'outil utilisé pour implémenter et valider le modèle est le code industriel d'Éléments Finis (Msc.Marc). Ce code dispose d'une interface graphique (Mentat) qui nous facilite la modélisation E.F.. La méthode d'intégration disponible dans le code est celle de Newton-Raphson avec ces variantes.

## 3.2 Généralités sur la méthode des éléments finis (E.F.)

La mécanique a pour objet la prédiction du comportement et du fonctionnement des structures. Pour atteindre cette objectif, les scientifiques font appel aux lois de la physique et à certains outils prévisionnels. La méthode des E.F. fait partie de ces outils. Cette méthode est constituée de deux grandes étapes, une première étape de formulation d'un problème physique sous forme intégrale et une deuxième étape de résolution proprement dite technique des éléments finis.

### 3.2.1 Formulation du problème (forme intégrale)

Pour appréhender la déformation des matériaux, les déplacements des points matériels constituant un solide déformable sont représentés mathématiquement par un champ défini en chaque point et à chaque instant :  $(M, t) \rightarrow \underline{u}(M, t)$ , auquel il lui correspond un champ de vecteurs des déformations représenté par un tenseur noté habituellement  $\underline{\underline{\epsilon}}(M, t)$  (représentation des déformations dans différentes directions). Si l'on suppose que les déformations sont petites, le tenseur des déformations (symétrique par définition) est relié au champ des déplacements via la relation suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(M, t) = \frac{(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u})}{2} \quad (3.1)$$

où  $\nabla$  représente l'opérateur gradient et l'exposant  $T$  le transposé. L'écriture sous la forme de tenseur symétrique permet de représenter l'état tridimensionnel des déformations en un point de la matière avec 6 composantes uniquement.

Ce champ de déformations est le dual de la présence d'un champ de contraintes repartit dans tout

le milieu continu déformable. Ce champ de contraintes représente à l'échelle macroscopique la moyenne de toutes les interactions entre les particules microscopiques au sein de la matière. Il vérifie les équations du mouvement (Principe Fondamental de la Dynamique) en chaque point et à chaque instant  $t$  :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \underline{\gamma} \quad \forall M \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \quad (3.2)$$

où  $\underline{f}$  est un champ de repartition des efforts,  $\rho$  la masse volumique du corps  $\Omega$  et  $\underline{\gamma}$  le champ l'accélération locale.

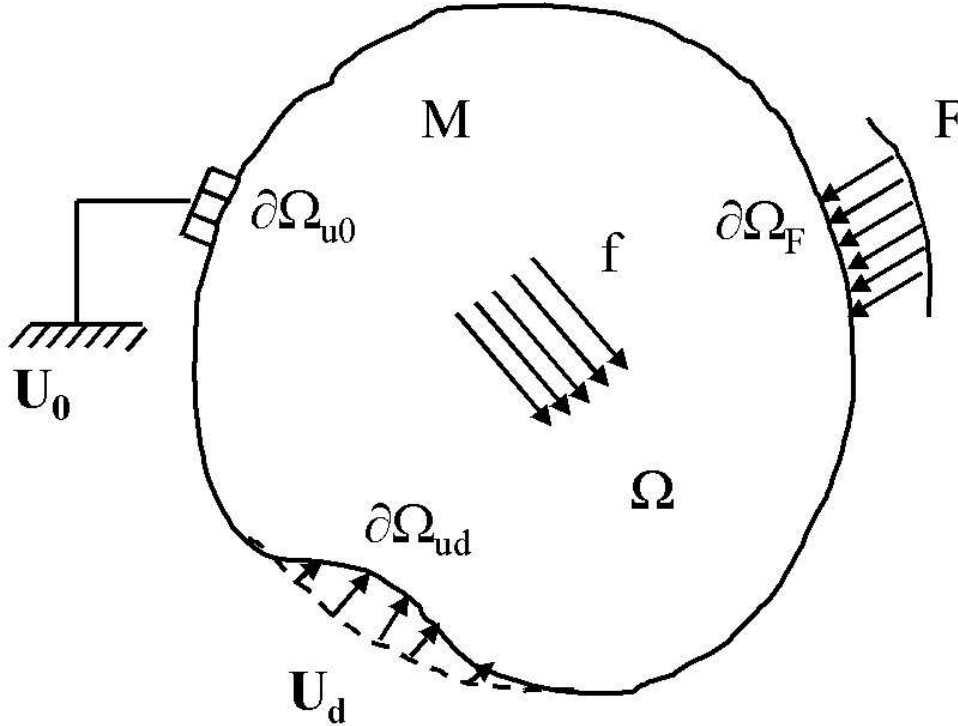


FIG. 3.1 – Modélisation des efforts et des conditions aux limites

En chaque point de la frontière  $\partial\Omega_F$  où le milieu extérieur impose les efforts ( $F$ ), le vecteur contraintes vérifie la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F} \quad \forall M \in \partial\Omega_F \quad \text{et} \quad \forall t \quad (3.3)$$

En revanche, en chaque point de la surface où les déplacements sont imposés nuls ou non nuls, le champ vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= 0 \quad \forall \quad M \in \partial\Omega_{u0} \quad \forall t \\ \underline{u} &= \underline{u}_d(t) \quad \forall \quad M \in \partial\Omega_{ud} \quad \forall t \end{aligned} \quad (3.4)$$

A ce stade, toutes les équations de la mécanique sont écrites, mais pour résoudre le problème il faut y ajouter le comportement du matériau, c'est à dire la relation qui lie le champ des contraintes au champ des déformations et/ou au champ des vitesses de déformations. La complexité de la loi de comportement utilisée est directement liée à la connaissance du matériau et à la "qualité" de prédiction que l'on souhaite obtenir à l'aide de la simulation. Cette loi de comportement peut être écrite de manière simple dans le cas de l'élasticité linéaire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.5)$$

où  $\underline{\underline{\epsilon}}$  est le champ des déformations.

En résolvant le système d'équations (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5), les champs de déplacement et de contrainte sont complètement déterminés. Si pour des cas simples, des solutions analytiques existent, dans la majeure partie des situations, le problème est insoluble. La difficulté vient de cette formulation dite "forte" qui se présente sous la forme d'équations différentielles. Pour surmonter cet handicap, on peut proposer une alternative sous une forme intégrale qui se prête mieux au calcul numérique. En supposant les champs suffisamment continus, les équations du mouvement (3.1) et (3.2) sont équivalentes au P.P.V. (Principe des Puissances Virtuelles) qui s'exprime de la manière suivante :

$\forall \underline{\underline{u}}^*$  et  $\forall t$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\partial\Omega_F + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_u} \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\partial\Omega_u = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\underline{u}}^* d\Omega \quad (3.6)$$

avec

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(M, t) = \frac{(\nabla \underline{\underline{u}}^* + \nabla^T \underline{\underline{u}}^*)}{2}; \quad \partial\Omega_u \equiv \partial\Omega_{u0} + \partial\Omega_{ud}$$

où le champ des réactions aux appuis imposés au bord  $\partial\Omega_u$  est  $\underline{\underline{R}}$ . Le champ virtuel  $\underline{\underline{u}}^*$  est appelé par les mathématiciens fonction "test". Du point de vue physique le champ virtuel permet de "tester" les efforts en comparant les puissances qu'ils développent dans un champ de vitesse quelconque. Comme les efforts mécaniques et les accélérations sont en équilibre (en égalité), les puissances développées dans le même champ sont ainsi égales.

En injectant la loi de comportement (3.5) dans cette relation et en choisissant un champ virtuel qui s'annule sur les bords où l'on impose des déplacements nuls  $\partial\Omega_{u0}$  ou non nuls  $\partial\Omega_{ud}$  ( $\underline{\underline{u}}^*$ ) noté  $\delta \underline{\underline{u}}$ , nous obtenons une formulation du problème mécanique où le seul champ de déplacement inconnu apparaît (Formulation en déplacement) :

$\forall \delta \underline{\underline{u}}$  et  $\forall t$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} : \delta \underline{\underline{\epsilon}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \underline{\underline{F}} \cdot \delta \underline{\underline{u}} d\partial\Omega_F + \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} \cdot \delta \underline{\underline{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{\gamma}} \cdot \delta \underline{\underline{u}} d\Omega \quad (3.7)$$

Cette formulation intégrale est plus propice aux développements numériques, elle est appelée formulation "faible" car les différentes quantités intervenants doivent être intégrables. Le Principe des Puissances Virtuelles est une simple égalité scalaire mais qui "contient" autant d'information que les équations d'équilibre (équations différentielles) car le champ virtuel est quelconque. Remarquons que dans le cadre d'un problème statique, le terme de droite est nul.

### 3.2.2 Technique des éléments finis

La technique des éléments finis consiste à découper le domaine  $\Omega$  en un pavage continu d'éléments simples (triangles ou quadrangles en 2D, brique en 3D par exemple). L'assemblage de ces éléments doit permettre d'assurer la continuité de la géométrie et des champs discrétisés (le déplacement par exemple). L'utilisation d'un pavage continu permet de définir chaque point du milieu continu physique. Les points matériels sont repérés dans un élément grâce aux coordonnées de points particuliers appelés nœuds (en général, coins de l'élément ou milieux des côtés) auxquels sont associés des fonctions polynomiales d'interpolation géométriques notées :  $\mathcal{N}_i$ .

Les variables de position sont soit les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , soit des coordonnées paramétriques  $(r, s, t)$  définis sur un élément de référence (figure 3.2)

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^m N_i(r, s, t) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Le degré des polynômes d'interpolation géométrique  $N_i$  définit la qualité de l'approximation géométrique. Par exemple, si le polynôme est de degré 1 en  $(r,s,t)$ , les bords des éléments sont droits et une erreur est commise si l'on utilise de tels éléments pour discrétiser un bord courbe. En augmentant le degré d'interpolation, on améliore alors la représentation géométrique du milieu.

Sur chaque élément décrivant le milieu continu, le champ de déplacements se présente aussi sous la forme d'un polynôme. Par une écriture judicieuse, les coefficients du polynôme représentent le déplacement aux nœuds de l'éléments que l'on appelle degré de liberté (figure 3.2)

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^n N_i(r, s, t) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

La qualité de l'interpolation en déplacement dépend directement du nombre de nœuds sur chaque élément. Sur la base de cette représentation, la résolution par la méthode des éléments finis consiste à calculer les déplacements aux nœuds de façon à vérifier au mieux les équations de la physique (PPV).

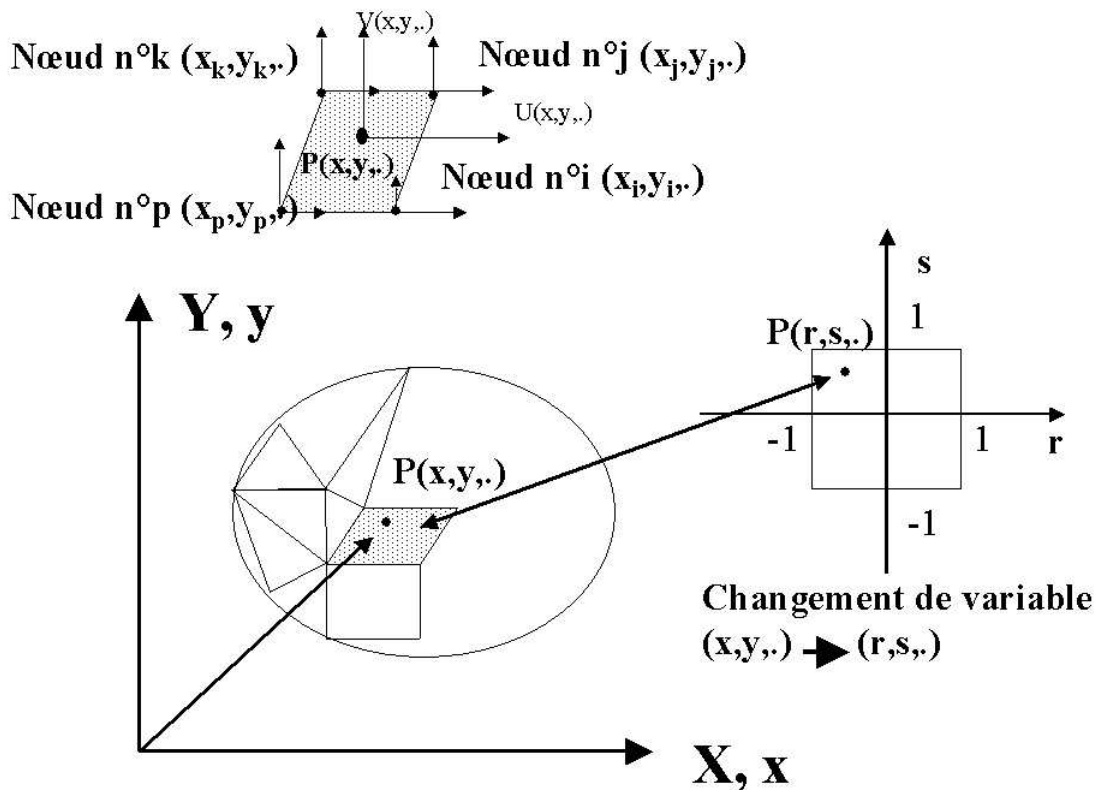


FIG. 3.2 – Discrétisation 2D par des éléments finis



Dans la méthode la plus classique, le champ virtuel possède la même forme que le champ de déplacement réel. Le champ est par conséquent représenté par les déplacements virtuels en chaque nœud du maillage :

$$\delta \underline{u} = \sum_{i=1}^n N_i(r, s, t) \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta v_i \\ \delta w_i \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Avec l'expression (3.9) du champ de déplacements, les déformations en chaque point de l'élément sont définies par la seule connaissance des déplacements aux nœuds. Dans l'expression qui suit, le tenseur des déformations est écrit sous la forme d'un vecteur (liste des composantes du tenseur) et il est relié à tous les déplacements aux nœuds  $\{q^{el}\}$ <sup>(9)</sup> par la relation :

$$\{\epsilon\} = [B(\mathcal{N}_i, N_i)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} = [B(\mathcal{N}_i, N_i)] \{q^{el}\} \quad (3.11)$$

où la matrice  $[B(\mathcal{N}_i, N_i)]$ <sup>(10)</sup> est définie en chaque point de l'élément. Le champ virtuel des déformations est relié au champ des déplacements virtuels par une expression similaire à (3.11). Compte tenu de (3.5) et (3.11), on a l'expression suivante du champ de contraintes.

$$\{\sigma\} = [E] [B(\mathcal{N}_i, N_i)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} = [E] [B(\mathcal{N}_i, N_i)] \{q^{el}\} \quad (3.12)$$

Comme nous pouvons le constater dans les relations (3.9), (3.11) et (3.12), le découpage de la structure par éléments finis nous a permis d'appréhender tous les champs de déplacements, de déformations et de contraintes par la seule connaissance des déplacements aux nœuds. Si l'on se contraint à construire un maillage qui assure la continuité du champ de déplacement (pas de trou, pas de recouvrement des éléments, les côtés de deux éléments voisins ont leurs nœuds coïncidents), les intégrales sur le domaine sont remplacés par une sommation d'intégrale sur chaque élément. Le Principe des Puissances Virtuelles s'écrit alors sous une forme discrétisée :

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{nel} [\delta q^{el}] \int_{\Omega^{el}} \{B^T(\mathcal{N}_i, N_i)\} \cdot [E] \cdot [B(\mathcal{N}_i, N_i)] d\Omega^{el} \{q^{el}\} + \\ & [\delta q^{el}] \left( \int_{\partial\Omega_F^{el}} [F] \cdot \{N_i\} d\partial\Omega_F^{el} + \int_{\Omega^{el}} [f] \cdot \{N_i\} d\Omega^{el} \right) \\ & = \sum_{i=1}^{nel} \left( [\delta q^{el}]^T \int_{\Omega^{el}} \rho \{N_i\} \cdot \{N_i\} d\Omega^{el} \{q^{el}\} \right) \quad \forall \{q^{el}\} \quad \forall t \end{aligned} \quad (3.13)$$

<sup>9</sup> $\{q^{el}\}$  désigne ici le vecteur  $\underline{q}^{el}$

<sup>10</sup> $[y]$  est une notation matricielle, elle est équivalente à  $\underline{y}$

avec  $q_i = 0$  sur  $\partial\Omega_{u0}$  et  $q_i = u_d$  sur  $\partial\Omega_{ud}$

où "nel" est le nombre total d'éléments ; le terme de droite de l'égalité précédente est la puissance virtuelle des accélérations. Les deux points sur le vecteur  $\{q^{el}\}$  représente la dérivée seconde par rapport au temps des déplacements aux nœuds. En statique ce terme de droite est nul et le champ de déplacement est indépendant du temps. Le terme

$$\int_{\Omega^{el}} [B^T(\mathcal{N}_i, N_i)] \cdot [E] \cdot [B(\mathcal{N}_i, N_i)] d\Omega^{el} \quad (3.14)$$

est appelé matrice de rigidité élémentaire, la somme suivante

$$\int_{\partial\Omega_F^{el}} [F] \cdot \{N_i\} d\partial\Omega_F^{el} + \int_{\Omega^{el}} [f] \cdot \{N_i\} d\Omega^{el} \quad (3.15)$$

est appelée vecteur des forces élémentaires et l'intégrale

$$\int_{\Omega^{el}} \rho \{N_i\} \cdot \{N_i\} d\Omega^{el} \quad (3.16)$$

est la matrice élémentaire des masses.

La sommation sur chaque élément peut être réécrite sous une forme matricielle où l'on assemble les matrices de rigidité élémentaires et les vecteurs de forces élémentaires pour obtenir finalement la relation matricielle suivante :

$$- [\delta q] [K^s] \{q\} + [\delta q] [F^s] = [\delta q] [M^s] \{\ddot{q}\} \quad \forall \{\delta q\} \quad \forall t \quad (3.17)$$

avec  $q_i = 0$  sur  $\partial\Omega_{u0}$  et  $q_i = u_d$  sur  $\partial\Omega_{ud}$

où  $[K^s]$  est la matrice de rigidité de la structure,  $\{F^s\}$  le vecteur des forces appliquées sur la structure et  $[M^s]$  la matrice des masses de la structure. Cette équation devant être vérifiée quel que soit le champ virtuel, nous obtenons l'équation matricielle suivante :

$$- [K^s] \{q\} + [F^s] = [M^s] \{\ddot{q}\} \quad \forall t \quad (3.18)$$

avec  $q_i = 0$  sur  $\partial\Omega_{u0}$  et  $q_i = u_d$  sur  $\partial\Omega_{ud}$

De multiples algorithmes numériques pour résoudre ce système d'équations (en dynamique comme en statique) sont aujourd'hui disponibles dans les bibliothèques de sous programmes livrés avec les compilateurs C ou Fortran ainsi que dans les logiciels de calcul formel.

La résolution de (3.18) fournit l'évolution des déplacements en chaque nœuds au cours du temps. Dans le cas statique le champ de déplacement est donc connu en chaque nœud par la résolution du simple problème linéaire :

$$[K^s] \{q\} = [F^s] \quad \forall t \quad (3.19)$$

avec  $q_i = 0$  sur  $\partial\Omega_{u0}$  et  $q_i = u_d$  sur  $\partial\Omega_{ud}$

Les relations (3.11) et (3.12) servent alors à calculer les déformations et les contraintes en chaque point de la structure que ce soit en statique ou en dynamique.

**Remarques :** La technique est présentée dans le cas d'un problème linéaire et tridimensionnel. Le matériau peut être homogène ou hétérogène et le comportement isotrope ou anisotrope. En revanche il n'est pas possible d'appréhender l'évolution de la plasticité ou de l'endommagement dans le matériau car la loi (3.5) n'est pas adaptée.

Dans de nombreuses situations des hypothèses simplificatrices sur le champ des contraintes (contrainte plane) ou des déformations (déformation plane) peuvent aussi être imposées. Dans ces problèmes, la discrétisation est faite dans un plan de coupe et les éléments sont bidimensionnels (triangles ou quadrangles).

La résolution numérique de l'équation (3.17) avec ou sans le terme dynamique est classique ; toutes les bibliothèques de développement en Fortran ou C proposent aux utilisateurs des algorithmes performants et adaptés à la taille des problèmes à résoudre. En effet, la taille du problème est souvent le plus gros obstacle dans la résolution. Il faut avoir un ordinateur possédant suffisamment de mémoire, et le logiciel doit être capable de gérer efficacement des vecteurs et des matrices de très grandes tailles.

### 3.3 Algorithme simplifié d'une analyse de contraintes par éléments finis

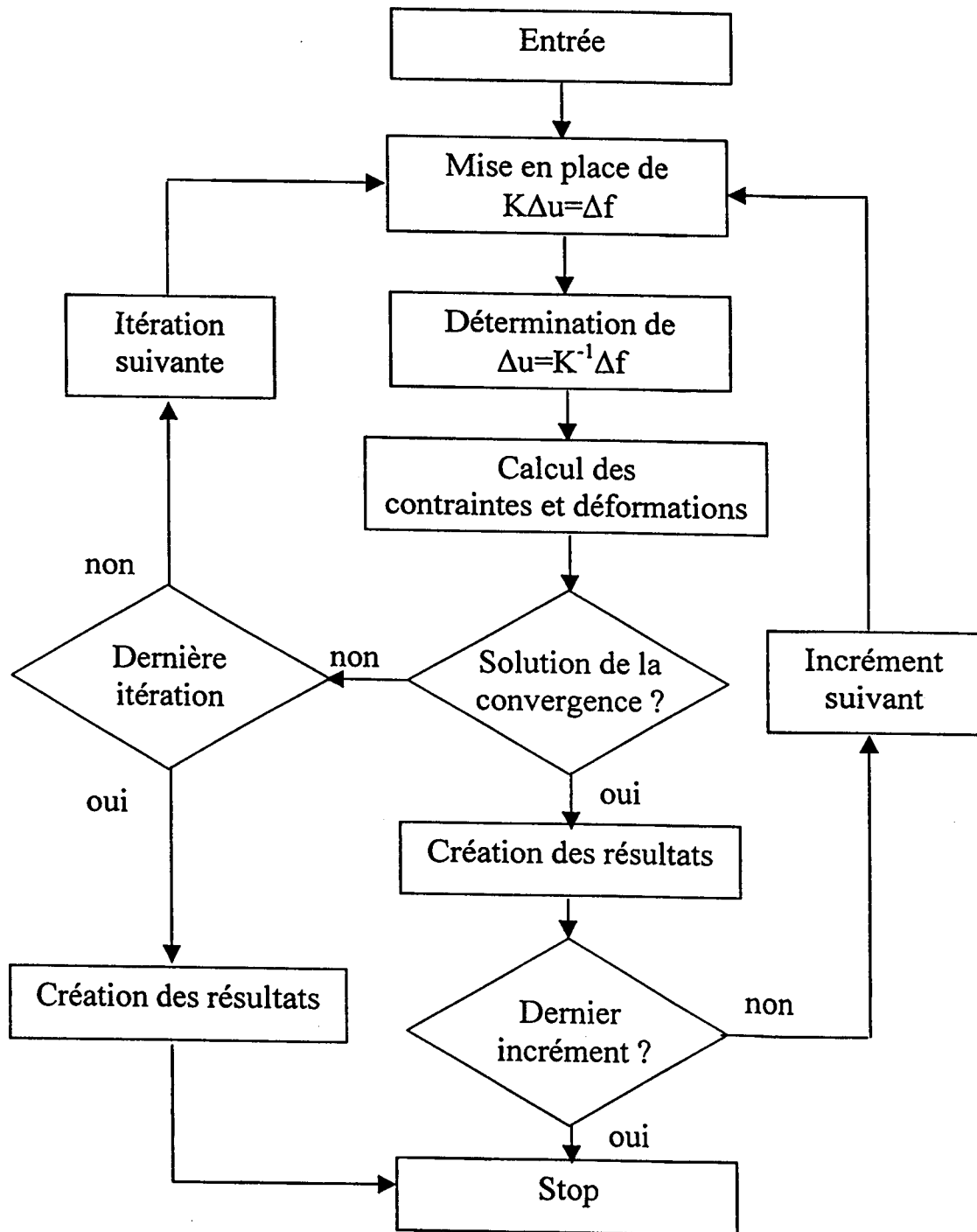


FIG. 3.3 – Organigramme du schéma de résolution numérique par éléments finis.

### 3.4 Intégration du modèle D.N.L.R. dans le code E.F.

D'une manière générale, un calcul de structure par éléments finis avec des relations de comportement anélastiques non linéaires peut conduire à des distorsions numériques induites par les procédures d'intégration et des instabilités engendrées par la propagation des erreurs de troncature. Par ailleurs, le caractère hautement non linéaire de ces modèles les rend très coûteux à traiter du point de vue informatique. Leur intégration numérique et la résolution des équations d'équilibre de la structure nécessitent des temps de calcul et des occupations de mémoire très importantes, en particulier dans le cas des chargements cycliques.

Bien que la précision du calcul de structure complet dépende de plusieurs facteurs : conditions aux limites, taille des éléments, pas de chargement..., il reste que l'intégration locale des relations de comportement est le facteur principal de la qualité des résultats numériques ainsi que du coût de calcul numérique, [Ortiz et al (1985)], [Simo et al (1987)].

Dans notre cas, nous avons utilisé le schéma d'intégration numérique d'Euler (explicite).

$$\dot{y} = \Phi(y, t) \quad (3.20)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \Phi(y_n, t_n) + O(\Delta t^2)$$

Ce dernier peut devenir coûteux car la résolution exige un pas assez petit de l'ordre du dixième du temps de relaxation le plus court selon [Kovacs (1963)]. Cependant, la structure du modèle D.N.L.R. permet d'utiliser des pas d'intégration qui peuvent devenir relativement élevés, et ceci du fait de la faible influence rapidement atteinte des temps de relaxation les plus courts sur la précision des résultats.

Pour pouvoir intégrer les lois de comportement D.N.L.R. dans le logiciel d'élément finis, nous utilisons un sous programme utilisateur du code [Msc-Marc] définie pour les matériaux anélastiques. Pour cela, il faut décomposer la déformation totale en déformation purement élastique et anélastique :

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^{an} \quad (3.21)$$

La loi de comportement de la version I (1 spectre et un état relaxé réversible) du modèle s'écrit en effet :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{a}^u \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{\dot{\sigma}}^{an} = \underline{a}^u \underline{\dot{\epsilon}} \quad (3.22)$$

soit pour chaque processus :

$$\underline{\dot{\sigma}}^j = \underline{a}^u p_0^j \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{\dot{\sigma}}^{j,an} = \underline{a}^u p_0^j \underline{\dot{\epsilon}} \quad (3.23)$$

avec

$$\underline{\dot{\sigma}}^{j,an} = -\frac{(\underline{\sigma}^{j,an} - p_0^j \underline{a}^r \underline{\epsilon})}{\tau^j} = -\underline{a}^u \underline{\epsilon}^{j,an} \quad (3.24)$$

La contrainte est donc obtenue par intégration numérique au cours du temps par la démarche incrémentale décrite ci-après.

### 3.5 Description de l'algorithme

Nous nous plaçons au  $i^{\text{ème}}$  incrément du temps, le vecteur déformation totale  $\underline{\epsilon}_{(i)}$  est connu, et nous cherchons le vecteur contrainte  $\underline{\sigma}_{(i)}$ . Les vecteurs contrainte  $\underline{\sigma}_{(i-1)}$  et déformations  $\underline{\epsilon}_{(i-1)}^{an}$  de l'itération précédente ont été conservés à chaque nœud

### 3.5.1 Calcul de la contrainte relaxée

L'état relaxé est entièrement déterminé en fonction du vecteur déformation  $\underline{\epsilon}_{(i)}$ , quelle que soit la modélisation ; par exemple, pour une modélisation élastique, la contrainte relaxée sera calculée par :

$$\underline{\sigma}_{(i)}^r = \underline{a}^r \underline{\epsilon}_{(i)} \quad (3.25)$$

$\underline{a}^r$  : représente le tenseur élastique de l'état relaxé (équation (1.66) du chapitre 1)

### 3.5.2 Calcul des temps de relaxation

Les temps de relaxation sont réactualisés selon la non linéarité introduite dans le col d'activation en fonction des grandeurs connues.

Les temps de relaxation à l'itération  $i$  sont donc obtenus par :

$$\tau_{(i)}^j = a(t, T) \tau_{(i)}^{j,r} \quad (3.26)$$

$a(t, T)$  est le facteur de glissement.

$\tau_{(i)}^{j,r}$  : est le temps de relaxation initial du mode  $j$  à l'incrément  $i$ . Il est uniquement défini par la donnée du temps de relaxation du processus le plus lent  $\tau^{max,r}$  et est calculé une seule fois dans le sous-programme intégré dans le code.

### 3.5.3 Calcul de la première approximation de la contrainte

Nous faisons l'approximation suivante :

$$\underline{\epsilon}_{(i0)}^e = \underline{\epsilon}_{(i)} - \underline{\epsilon}_{(i-1)}^{an} \quad (3.27)$$

La contrainte peut être approchée par :

$$\underline{\sigma}_{(i0)} = \underline{a}^u \underline{\epsilon}_{(i0)}^e = \underline{a}^u (\underline{\epsilon}_{(i)} - \underline{\epsilon}_{(i-1)}^{an}) \quad (3.28)$$

Nous utilisons cette approximation du fait que nous ne connaissons pas encore  $\underline{\epsilon}_{(i)}^{an}$

### 3.5.4 Calcul de la contrainte anélastique

Il s'agit en fait du calcul de la partie dissipative de la réponse :

$$\dot{\underline{\sigma}}_{(i)}^{an} = - \sum_j^N \frac{\sigma_{i-1}^j - p_0 \sigma_i^j}{a(t, T) \tau_{(i)}^{j,r}} \quad (3.29)$$

$N$  est le nombre total de modes (ou processus), en général  $N$  vaut 50.

### 3.5.5 Calcul de la déformation anélastique : Technique d'accélération du temps de calcul

Connaissant la vitesse de contrainte anélastique donnée en (3.29), il suffit d'inverser cette expression

$$\dot{\underline{\epsilon}}_{(i)}^{\text{an}} = -\underline{a}^u \dot{\underline{\epsilon}}_{(i)}^{\text{an}} \quad (3.30)$$

pour obtenir l'incrément de la déformation anélastique :

$$\Delta \underline{\epsilon}_{(i)}^{\text{an}} = -(\underline{a}^u)^{-1} \dot{\underline{\epsilon}}_{(i)}^{\text{an}} \Delta t = -(\underline{a}^u)^{-1} \sum_j^N \frac{\sigma_{i-1}^j - P_0^j \sigma_i^r}{a(t, T) \tau_{(i)}^{j,r}} \Delta t \quad (3.31)$$

La relation (3.31) pose souvent des problèmes de convergence (division par zéro) si on ne choisit pas, un pas de temps dix fois plus petit que le temps de relaxation le plus court. En effet, le facteur de glissement,

$$a(t, T) = \exp \left[ K_\sigma \frac{|\sigma^{eq} - \sigma^{r eq}|}{RT} \right] \quad (3.32)$$

peut être infiniment petit pour les temps de relaxation très faibles ( $K_\sigma$  négatif).

Par exemple, pour un essai de traction monotone à déformation imposée avec les quatres paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= 5.10^{-4} (s^{-1}) \\ E^u &= 80000 (MPa) \\ E^r &= 2500 (MPa) \\ \Delta F_{max}^{+r} &= 100 (KJ/mol. at.) \\ K_\sigma &= -50 (cm^3/mol. at.) \end{aligned}$$

Il faut imposer un pas de temps d'au plus  $10^{-5}$  s pour pouvoir converger avec la technique d'intégration choisie (Euler explicite), ce qui est très coûteux de l'ordre de 3 heures de temps pour des station de calcul de type Sun Ultra 5 et pour un temps de chargement de 120 secondes. En effet, vue la performance actuelle de nos ordinateurs et la complexité du programme, il faut environ  $1/1000^{\text{ème}}$  de seconde pour réaliser un incrément. Sachant qu'il faut  $120 * 10^5$  incréments pour ce calcul, il faut  $(120 * 10^5 * 10^{-3})$  soit 200 minutes pour exécuter tout le programme sur un seul point de gauss, ce qui est considérablement lent.

Pour contourner cette difficulté, nous avons opté pour un pas de temps variable (adaptatif) en fonction de l'avancement des modes dissipatifs par cette méthode. L'idée est de "court-circuiter" les temps de relaxation les plus faible, de l'ordre du centième du pas de temps, en leur donnant la valeur de ce pas. Pour un spectre de 50 modes étalé sur 6 décades, la simulation montre que, moins d'une dizaine de temps de relaxation est modifiée. L'algorithme utilisé est décrit ci-dessous :

Si  $\tau_j \ll \Delta t$  (i.e temps de relaxation du mode j très faible par rapport au pas de temps)

alors  $\Delta t := \tau_j$  (i.e on affecte à  $\tau_j$  la valeur du pas  $\Delta t$ )

on a donc  $\Delta \underline{\epsilon}_{(i)}^{\text{an}} = -(\underline{a}^u)^{-1} \sum_j^N (\sigma_{i-1}^j - P_0^j \sigma_i^r)$

TAB. 3.1 – Algorithme de la technique d'accélération du temps de calcul

La très faible contribution des processus les plus rapides (temps de relaxation très faible) permet de fixer un pas de temps relativement plus élevé ( $10^{-2}$  s) sans grande conséquence sur les résultats numériques (écart imperceptible sur la courbe de l'ordre de 0.5%). Nous gagnons ainsi

un facteur 1000 sur le pas de temps et donc sur le temps de calcul. Pour un calcul qui dure 3 heures avec un pas fixe, nous le réduisons avec cette méthode à une dizaine de seconde sans grande conséquence sur la qualité des résultats numériques.

Cette accélération du calcul va nous permettre de réaliser des chargements cycliques et simuler efficacement le comportement cyclique des structures.

### 3.5.6 Calcul de la contrainte totale

La loi de comportement permet donc d'obtenir l'incrément du vecteur contrainte.

$$\Delta \underline{\sigma}_{(i)} = \underline{a}^u \left( \Delta \epsilon_{(i)}^{tot} - \Delta \epsilon_{(i)}^{an} \right) \quad (3.33)$$

Remarquons qu'il faut garder en mémoire  $\epsilon_{(i-1)}^{an}$  (6 composantes) et  $\sigma_{i-1}^j$  à chaque processus (6\*N\*composantes). Donc dans le cas d'un spectre de 50 temps de relaxation, il faudra gérer et contrôler à chaque incrément 306 données et ceci à chaque point de gauss, sachant que durant un incrément il peut y avoir plusieurs itérations au niveau global pour trouver l'équilibre de la structure ; d'où la complexité du programme.

L'ensemble de ces équations est traduit en plusieurs sous programmes "subroutines" écrits en Fortran. Ces sous-programmes constituent l'étape locale du calcul de structure par éléments finis, qui relie la contrainte à la déformation.

## 3.6 Validation du modèle par éléments finis

La validation de l'intégration du modèle D.N.L.R. dans le code a été effectuée en calculant la réponse d'un élément de volume (VEF : Volume Élémentaire Fini) soumis à différentes sollicitations (monotone ou cyclique). Trois essais ont été réalisés :

- un essai de traction monotone,
- un essai traction-cisaillement de type papillon,
- une sollicitation cyclique traction-cisaillement de type trèfle.

Ces deux derniers revêtent un caractère particulier du fait de leur non proportionnalité, ils sont difficiles à mettre en œuvre mais permettent de vérifier l'aptitude de l'outil utilisé à reproduire des chargements multiaxiaux complexes. Les résultats obtenus sont comparés soit à des résultats expérimentaux soit à d'autres résultats numériques issus soit de calculs menés à l'aide du logiciel SiDoLo soit une autre simulation. Ainsi, nous pouvons apprécier la pertinence du modèle pour ce type de sollicitation.

### 3.6.1 Choix de l'élément

Ces trois essais ont été réalisés sur un parallélépipède isoparamétrique (même fonction d'interpolation pour la position géométrique des nœuds et leur champ de déplacements) à 8 nœuds. Les fonctions d'interpolation sont tri-linéaires et se déduisent du cas bidimensionnel. On a ici :

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{8}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i) \quad (3.34)$$



$r_i$ ,  $s_i$  et  $t_i$  prenant les valeurs +1 ou -1 suivant le noeud considéré (voir figure 3.2). La formulation de l'élément est basée sur les relations suivantes (en se référant aux relations (3.8), (3.9)) : avec (r,s,t) le système de coordonnées paramétriques.

### Définition géométrique

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)z_i
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### Champs des déplacements

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)v_i \\
 w &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} (1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)w_i
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

## 3.6.2 Essai de traction monotone

Durant ses travaux de recherche, [Loukil (1996)] a montré l'aptitude d'un modèle particulièrement simple construit sur la base D.N.L.R. (version I) à décrire qualitativement les faits expérimentaux observés lors d'un chargement uniaxial monotone. Nous avons repris ses essais pour un objet tri-dimensionnel pour valider l'intégration du modèle dans le code. Les paramètres du modèle sont donnés dans le tableau suivant :

$E^u (MPa)$	$E^r (MPa)$	$\nu^u$	$\nu^r$	$\Delta F_{max}^{+,r} (KJ/mol.at.)$	$K_\sigma (cm^3/mol.at.)$
80000	2500	0.3	0.495	100	-50

TAB. 3.2 – Paramètres du modèle version I

La vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}_{11} = 5.10^{-4} s^{-1}$ ) est maintenue constante durant 100 secondes, ce qui nous donne une déformation maximale de 5% (Hypothèse des petites perturbations). Les

vitesses de déformation dans la direction de 2 et 3 sont données par la relation :

$$\dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{33} = -\nu^u \dot{\epsilon}_{11}$$

Nous représentons sur la figure (3.4) l'évolution de la contrainte  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\epsilon_{11}$ . Nous constatons que les résultats obtenus à partir de la version incrémentale intégrée dans le code et les résultats de [Loukil (1996)] sont en parfait accord.

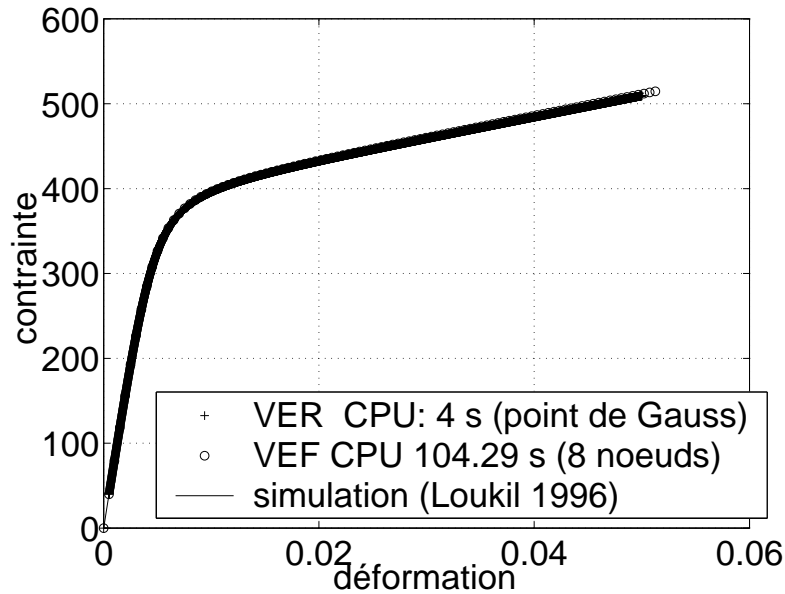


FIG. 3.4 – Validation du modèle sur un essai de traction

Le pas de temps est fixé à 0.1 seconde et le temps CPU global est environ égal à 105 secondes pour 1000 incréments ce qui correspond à 0.1 seconde par incrément. Le temps de calcul est donc relativement court, sachant qu'une programmation directe, où l'on ne tient compte que de l'étape locale sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER), prend 4 secondes : on passe donc de 4 secondes pour le comportement local au nœud de Gauss à 105 secondes pour le comportement local et global de l'élément volumique à 8 nœuds.

### 3.6.3 Essais de traction-cisaillement de type papillon et trèfle - Validation VEF / Expérience

La validation est ici encore faite sur le parallélépipède isoparamétrique à 8 nœuds, défini précédemment, soumis à des sollicitations suivant deux directions :

- une direction de traction ( $\dot{\epsilon}_{11} = f(t)$ )
- une direction de cisaillement ( $\dot{\gamma}_{12} = g(t)$ )

Ces deux directions sont non proportionnelles et la représentation de  $g(t)$  en fonction de  $f(t)$  donne suivant le cas un "papillon" ou un "trèfle".

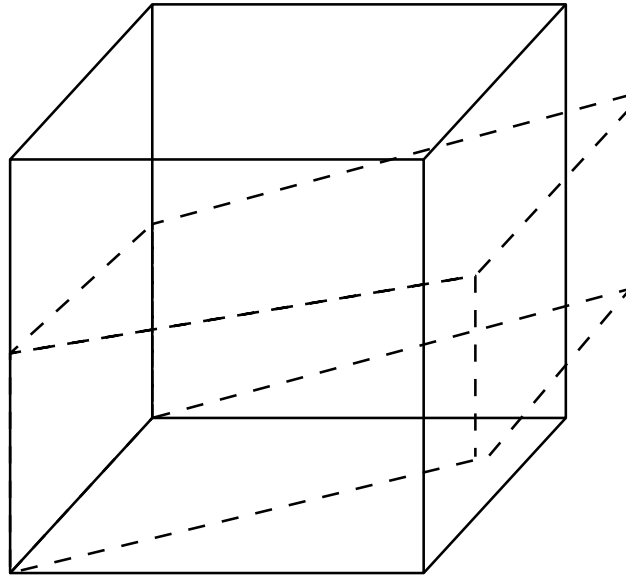


FIG. 3.5 – Description de l'élément de volume et de sa déformée

### Description des sollicitations

Le choix de ces sollicitations est orienté par les travaux de [Calloch (1997)] effectués au LMT de Cachan, qui établissent une base de données pour ce type de chargement. Nous présentons dans ce tableau les deux types de sollicitations imposées :

Chargement papillon	Chargement trèfle
$\epsilon_{11} = 0.8\epsilon_0 \sin(2\omega t)$ $\gamma_{12} = 0.8\sqrt{3}\epsilon_0 \sin(\omega t)$	$\epsilon_{11} = \epsilon_0 \sin(2\omega t) \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$ $\gamma_{12} = \sqrt{3}\epsilon_0 \sin(2\omega t) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

TAB. 3.3 – Définition des chargements Papillon et trèfle

Les paramètres du modèle D.N.L.R. (version I) ont déjà été identifiés par [Toussaint (1997)] avec le logiciel [SiDoLo (v2.1)] à partir des essais expérimentaux réalisés par [Calloch (1997)] sur une éprouvette tubulaire en acier inoxydable austénitique 316 L soumise à des chargements cycliques non proportionnels de types traction-cisaillement.

$E^u (MPa)$	$E^r (MPa)$	$\nu^u$	$\nu^r$	$\Delta F_{max}^{r,+} (KJ/mol.at.)$	$K_\sigma (cm^3/mol.at.)$
205000	8300	0.3	0.495	86.4	-31.5

TAB. 3.4 – Paramètres du modèle D.N.L.R. identifiés par [Toussaint (1997)]

Nous avons vu dans le paragraphe précédent l'influence et la signification physique de chacun de ces paramètres. Pour les essais cycliques, deux autres paramètres supplémentaires ( $a_w$  et  $b_w$ ) provenant d'une loi empirique [Loukil (1996)] ont été introduits pour traduire l'adoucissement et le durcissement cycliques. Le terme de non linéarité temporelle  $\Delta (\Delta F^{r,+}(t))$  se trouve modifié et est donné par la somme de deux termes. Le premier caractérise l'écart à l'équilibre

$$\Delta (\Delta F_1^{r,+}(t)) = K_\sigma |\sigma^{eq} - \sigma^{r,eq}| \quad (3.37)$$

et le second prend en compte l'énergie de déformation cumulée :

$$\Delta (\Delta F_2^{r,+}(t)) = \int_0^t (a_w - b_w \Delta (\Delta F_2^{r,+}(t))) (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^r) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dt \quad (3.38)$$

### Résultats trajet papillon

Comme pour le chargement de traction, les simulations E.F. sur un VEF et les simulations directes sur un VER donnent le même résultat. La comparaison directe avec l'expérience montre que malgré la simplicité du modèle réalisé ici, les résultats obtenus pour le premier cycle de chargement papillon sont satisfaisants (figure. 3.6).

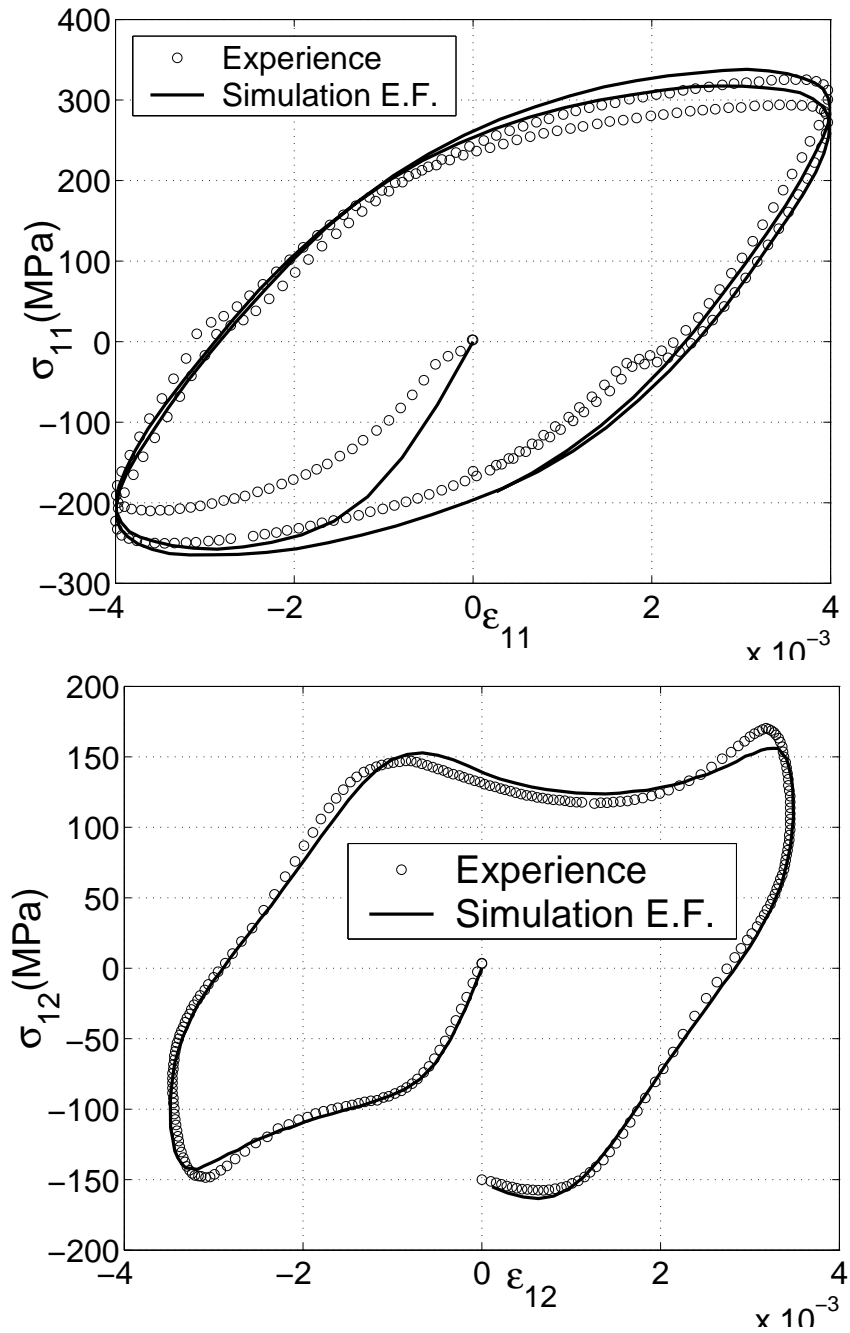


FIG. 3.6 – Validation E.F. du modèle D.N.L.R. : Sollicitation "Papillon"

En trait continu nous avons la réponse observée avec le calcul par E.F. sur l'élément cubique à 8 nœuds . En "rond" nous avons l'expérience. La figure suivante montre l'évolution les écarts constatés, pour les contraintes de traction et de cisaillement, entre la simulation et l'expérience au court du temps. Ces écarts sont importants au début du chargement, mais ne dépasse pas, en valeur absolue, 35% pour la traction et 15 % pour le cisaillement.

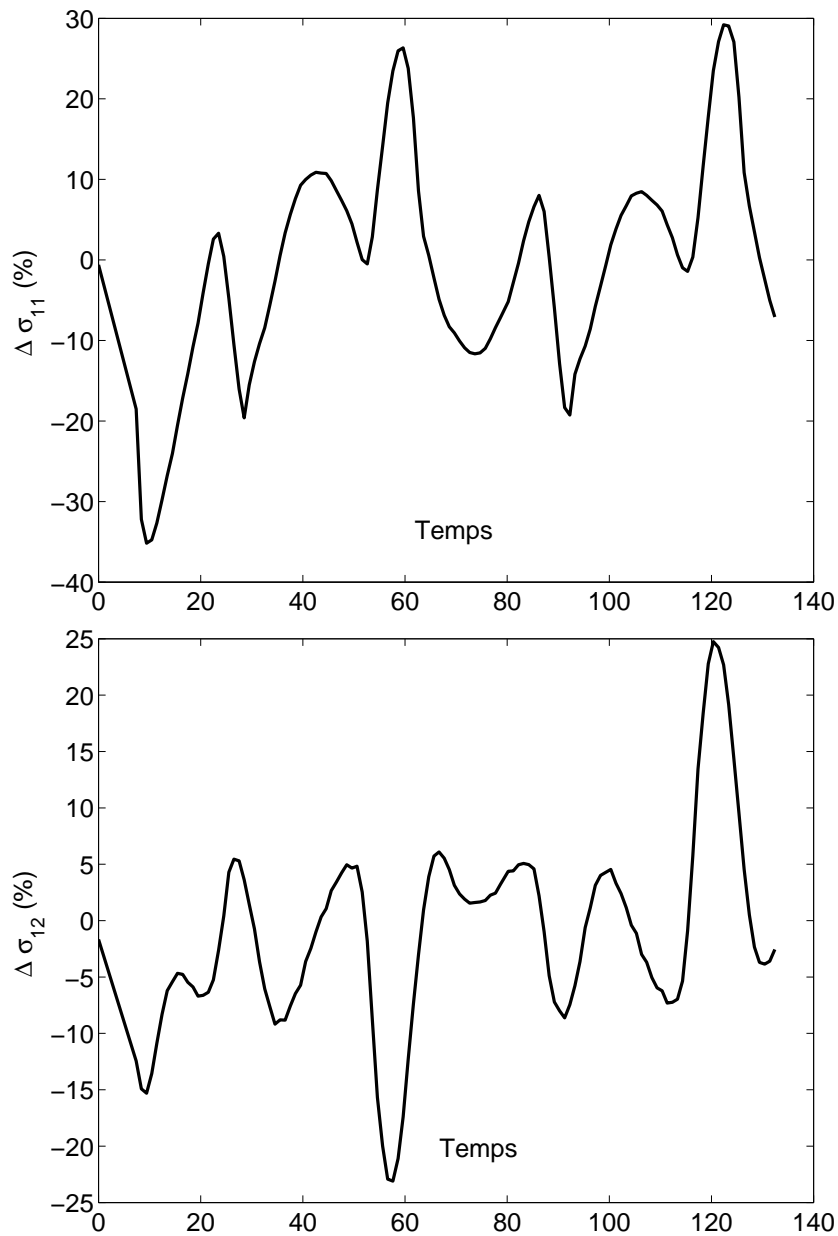


FIG. 3.7 – Evolution de l'écart entre l'expérience et la simulation pour le chargement papillon - traction et cisaillement

### Résultats trajet trèfle

Pour le trajet trèfle, nous avons simulé le comportement jusqu'à la stabilisation de la contrainte (environ cinquante cycles) et le dernier cycle est comparé au cycle stabilisé des essais expérimentaux (figure. 3.8).

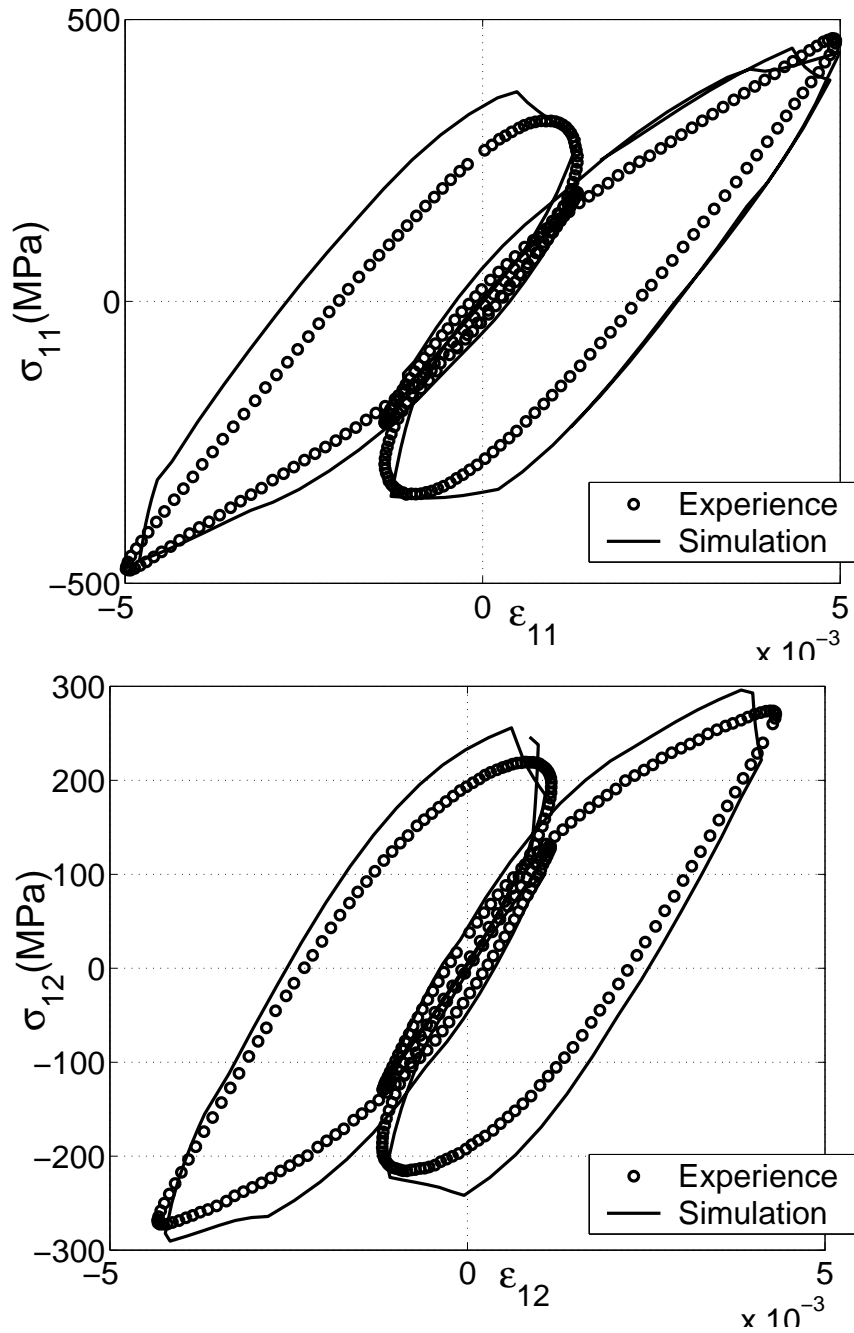


FIG. 3.8 – Validation E.F. du modèle D.N.L.R. : Sollicitation "Trèfle"

L'écart maximum entre l'expérience et la simulation du trajet trèfle est du même ordre que pour le trajet papillon.

### 3.7 Conclusion

L'intégration des équations constitutives du modèle dans un code industriel d'élément finis a été réalisée avec succès. Les résultats numériques coïncident bien avec les résultats expérimentaux et/ou avec d'autres simulations pour différents trajets de chargement (traction monotone,

papillon et trèfle). La technique d'intégration à pas adaptatif utilisée ici a permis un gain considérable en terme de temps de calculs. Nous tenterons dans le prochain chapitre de situer le modèle D.N.L.R. par rapport au modèle N.L.K (Non linear Kinematics) en terme de "facilité" de mise en œuvre numérique et "gain" en temps de calcul.





# Chapitre 4

## Etude comparative : D.N.L.R. et N.L.K

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous menons une étude comparative entre le modèle D.N.L.R. et le modèle N.L.K. (Non Linear Kinematics). Après avoir validé l'intégration du modèle N.L.K. dans le code E.F. (Msc.Marc), pour différents trajets de chargements, nous avons entrepris une étude comparative des deux modèles sur le comportement d'une plaque percée soumise à des sollicitations de type traction. Nous montrons également comment reproduire les surfaces de charges avec l'approche D.N.L.R. par la méthode de l'offset. Cette étude comparative nous a permis de confronter les rôles joués par l'état relaxé du modèle D.N.L.R. et l'écroutissage cinématique de type [Armstrong et Frederick (1966)].

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>4.2</b>	<b>Présentation du modèle N.L.K.</b> . . . . .	<b>100</b>
4.2.1	Formulation élastoplastique . . . . .	100
<b>4.3</b>	<b>Intégration du modèle N.L.K dans le code E.F.</b> . . . . .	<b>102</b>
4.3.1	Description de l'algorithme d'intégration . . . . .	103
<b>4.4</b>	<b>Etude comparative</b> . . . . .	<b>107</b>
4.4.1	Validation sur un essai de traction : VER/VEF . . . . .	108
4.4.2	Essai de validation sous chargements cycliques non proportionnels : VEF/Expérience . . . . .	110
<b>4.5</b>	<b>Application : Etude du comportement d'une plaque trouée</b> . . . . .	<b>112</b>
<b>4.6</b>	<b>Modélisation qualitative des surfaces de charge.</b> . . . . .	<b>116</b>
4.6.1	Cas d'un matériau isotrope . . . . .	117
4.6.2	Cas d'un matériau orthotrope . . . . .	119
4.6.3	Critère de Hill . . . . .	121
<b>4.7</b>	<b>Réflexion sur l'état relaxé</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>4.8</b>	<b>Identification</b> . . . . .	<b>126</b>
<b>4.9</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>128</b>

---

## 4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de situer le modèle D.N.L.R. par rapport à d'autres modèles phénoménologiques existant dans la littérature. Nous présentons tout d'abord le modèle classique N.L.K. pour ensuite l'intégrer dans le code E.F.. Nous effectuons alors une validation de l'intégration numérique, puis menons une étude comparative sur quelques essais mécaniques. Nous examinons notamment le cas d'une plaque percée soumise à une sollicitation de type traction. Nous testerons les capacités du modèle D.N.L.R. à élaborer des surfaces de charge initiales de type von-Mises (isotrope) et Hill (anisotrope), notions qui n'entrent pas dans la stratégie D.N.L.R. comme point de passage obligé, alors qu'elle est la pierre angulaire du fonctionnement 3D du modèle N.L.K.. Et enfin nous conduirons une étude comparative plus précise entre l'érouissage cinématique du modèle N.L.K et l'état relaxé du modèle D.N.L.R..

## 4.2 Présentation du modèle N.L.K.

L'étude comparative des cadres thermodynamiques utilisés pour les deux formulations de lois de comportement des modèles N.L.K. et D.N.L.R. a déjà fait l'objet d'un chapitre de la thèse de [Toussaint (1997)]. Nous nous limiterons ici à rappeler les équations constitutives du modèle N.L.K dans le cadre d'une formulation élastoplastique. Le cadre thermodynamique pour la formulation des lois de comportement du modèle N.L.K est rappelé en annexe A.

### 4.2.1 Formulation élastoplastique

Ce modèle classique repose sur l'existence d'une surface de charge de type von-Mises et de la décomposition de l'érouissage en un érouissage isotrope et un érouissage cinématique. Les variables d'érouissage cinématique et isotrope correspondent respectivement à la taille et à la position du domaine d'élasticité (figure 4.1) :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J_2(\underline{S} - \underline{X}) - R - k \leq 0 \quad (4.1)$$

où  $k$  est le rayon initial du domaine d'élasticité et  $J_2(\underline{S} - \underline{X})$  est le deuxième invariant du tenseur défini par la relation :

$$J_2(\underline{S} - \underline{X}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{S} - \underline{X}) : (\underline{S} - \underline{X})} \quad (4.2)$$

où  $\underline{S}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}tr\underline{\sigma}.\underline{1} \quad (4.3)$$

On suppose dans ce modèle que la vitesse des déformations plastiques est normale au domaine d'élasticité. Elle s'écrit alors :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \underline{n} \quad (4.4)$$

où

$$\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{S} - \underline{X}}{J_2(\underline{S} - \underline{X})} \quad (4.5)$$

désigne la normale à la surface de charge et  $\lambda$  le multiplicateur plastique obtenu à partir de la condition de consistance (cf annexe (A)).

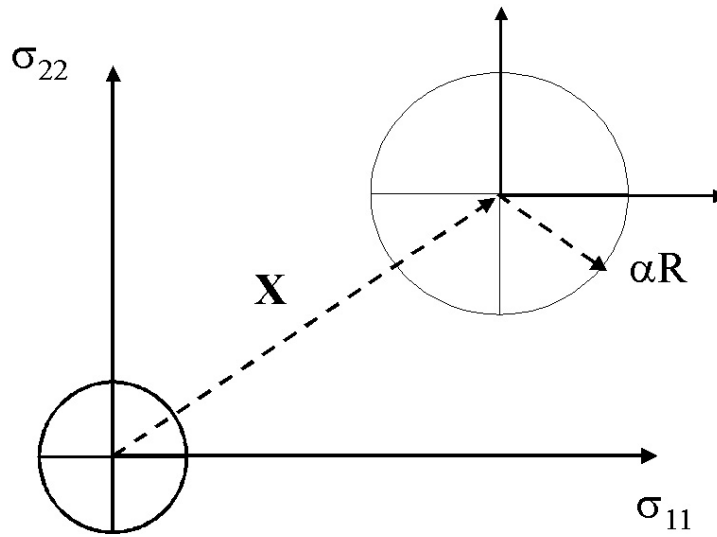


FIG. 4.1 – Définition graphique de  $X$  et de  $R$   $\left(\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Les lois d'érouissages qui furent les premières proposées sont celles [Prager (1956)] et de [Ziegler (1959)]. Cependant, elles se sont vite révélées insuffisantes à cause du caractère linéaire de l'érouissage qu'elles prévoient. En effet, l'expérience révèle que l'érouissage cinématique est non linéaire et est assez bien représenté par la loi d'érouissage de type cinématique non linéaire proposée par [Armstrong et Frederick (1966)]. Celle ci a été ensuite modifiée et améliorée par [Marquis (1979)] par la prise en compte du durcissement cyclique (ou de l'adoucissement). L'expression de la variable cinématique que nous allons utiliser par la suite est la suivante :

$$\underline{\dot{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\dot{\epsilon}}^p - \gamma \phi(p) \underline{X} \dot{p} \quad (4.6)$$

avec

$$\phi(p) = \phi_0 + (1 - \phi_\infty) \exp(-wp)$$

Malgré les améliorations apportées sur l'érouissage cinématique non linéaire, celui ci fournit une description insuffisante lorsque le domaine de variation des déformations est important, il conduit par ailleurs à un effet de rochet souvent trop important par rapport aux observations expérimentales. Le domaine de validité peut être élargi en introduisant plusieurs variables d'érouissages cinématiques, chacune arrivant à saturation à des niveaux différents de plasticité cumulée. Selon [Chaboche et al (1979)] et [Chaboche (1987)], nous pouvons généraliser ces lois à plusieurs variables cinématiques et nous obtenons alors en lieu et place l'expression (4.6) :

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^2 \underline{X}_i \quad (4.7)$$

$$\underline{\dot{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \underline{\dot{\epsilon}}^{an} - \gamma_i \phi_i(p) \underline{X}_i \dot{p}$$

où l'indice  $i$  fait référence à la  $i^{\text{ème}}$  variable d'érouissage cinématique.

### La loi d'écrouissage isotrope

L'expression de la variable isotrope est la suivante :

$$\dot{R} = b(Q - R) \dot{p} \quad (4.8)$$

où  $Q$  est la valeur asymptotique de  $R$ . Le paramètre  $b$  règle la vitesse de croissance ou de décroissance du rayon du domaine élastique et la non linéarité de l'écrouissage isotrope.

### Identification des paramètres matériau

L'identification des coefficients caractéristiques du matériau  $C, \gamma, \phi_0, \phi_\infty$ , se fait en chargement traction-compression à partir des boucles d'hystérésis, pour des amplitudes de déformation différentes.  $w$  correspond à la vitesse de stabilisation de la variable cinématique. On identifie  $\phi_0$  sur des boucles d'hystérésis intermédiaires. Pour l'identification des coefficients de lois d'écrouissage isotrope,  $Q$  et  $b$ , on utilise la boucle d'hystérésis stabilisée en traction compression pour  $Q$  ainsi que des boucles d'hystérésis intermédiaires pour  $b$ .

Le modèle que nous venons de présenter est le modèle de base pour notre travail comparatif en élastoplasticité. Nous allons maintenant l'intégrer dans le code de calcul par éléments finis dans le but de comparer les simulations E.F. avec D.N.L.R. et simulations E.F. avec le modèle N.L.K. pour les chargements cycliques de types papillon et trèfle précédemment évoqués.

## 4.3 Intégration du modèle N.L.K dans le code E.F.

Dans le but de comparer les modèles D.N.L.R. et N.L.K., nous intégrons ce dernier dans le code industriel d'éléments finis, avant de valider cette intégration pour un élément volumique soumis à des chargements cycliques non proportionnels. La mise en œuvre numérique des équations constitutives du modèle N.L.K. dans le code se fera comme pour le modèle D.N.L.R., à travers des sous programmes utilisateurs. Dans ces derniers, nous devons résoudre numériquement les différentes équations constitutives du modèle de telle sorte qu'à chaque pas de temps nous donnons l'incrément de la contrainte en fonction de la déformation. Ceci revient pour ce modèle à déterminer à chaque instant l'évolution de la déformation élastique.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. L'ensemble des équations intégrées dans le code est résumé ci-dessous :

Le domaine élastique est représenté par l'expression de la fonction de charge :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J_2(\underline{S} - \underline{X}) - R - k \leq 0 \quad (4.9)$$

où

$\underline{X}$  est le tenseur d'écrouissage cinématique

$R$  la force thermodynamique représentant l'écrouissage isotrope

$\underline{S}$  est le déviateur du tenseur des contraintes

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4.10)$$

La déformation est décomposée en une partie purement élastique et une partie purement anélastique

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{an} \quad (4.11)$$

La loi élastique est donnée par la loi de Hooke

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (4.12)$$

La vitesse de déformation anélastique est obtenue à partir des équations du modèle

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{an} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{S_{ij} - X_{ij}}{J_2(\underline{S} - \underline{X})} \quad (4.13)$$

où la vitesse de déformation cumulée est donnée par la loi puissance empirique

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\underline{S} - \underline{X}) - k - R}{K} \right\rangle^n \quad (4.14)$$

La loi d'évolution de l'érouissage cinématique à deux centres est obtenue en remplaçant dans l'expression (4.7) le facteur  $\phi(p)\gamma_i$  par  $D_i$  indépendant de  $p$ . Ceci revient à annuler le paramètre  $w$  qui correspond à la vitesse de stabilisation de la variable cinématique.

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^2 \underline{X}_i \quad (4.15)$$

$$\dot{\underline{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\epsilon}^{an} - D_i \underline{X}_i \dot{p}$$

L'expression de la variable isotrope donnée en (4.8) est équivalente à l'expression suivante plus facile à mettre en œuvre :

$$R = Q[1 - \exp(-bp)] \quad (4.16)$$

Nous recensons ainsi 9 paramètres pour le modèle N.L.K. dont :

- Deux paramètres d'élasticité  $E$  et  $\nu$
- Sept paramètres pour l'érouissage  $n, k, K, C_i, D_i, Q, b$

Les significations physiques de ces différents paramètres sont données Dans la section (4.2.1). Dans le cas d'un érouissage cinématique non linéaire à  $N$  centres, il faut ajouter  $2 * (N - 1)$  paramètres. Par exemple, pour un érouissage cinématique à deux centres le nombre de paramètres passe de 9 à 11. Notons que le modèle D.N.L.R. de base renferme 6 paramètres  $(E^u, \nu^u); (E^r, \nu^r); \Delta F^{r,max}; K_\sigma$ .

### 4.3.1 Description de l'algorithme d'intégration

On se propose dans ce qui suit de présenter la démarche pratique de l'intégration des relations constitutives du modèle N.L.K.. On désigne respectivement par  $t_i, t_f$ , et  $\Delta t$  le début, la fin, et la durée du pas de temps. On suppose connus le tenseur taux de déformation  $\dot{\epsilon}_{ij}^t$ , le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}^t$ , et le vecteur des variables internes  $V_{int}^t (X_{ij}^t, R^t)$  à l'instant  $t$ ; on évalue ces mêmes quantités à la fin du pas c'est à dire à l'instant  $t + \Delta t$  ( $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}, V_{int}^{t+\Delta t}$  désignent les variables de sortie de la "subroutine").

Les algorithmes d'intégrations ont généralement la structure suivante ;

### Prédiction élastique

Elle constitue la première étape dans le processus d'intégration, dans laquelle on suppose un comportement purement élastique :

Si ( $f \leq 0$ ) alors, le comportement élastique présupposé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}^e \\ \dot{V}_{int} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

L'intégration aisée de cette relation fournit (en supposant  $\dot{\sigma}_{ij}$  et  $C_{ijkl}$  constant dans l'intervalle de temps), une contrainte de prédiction donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{pred} = \sigma_{ij}^t + C_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}^e\Delta t \\ V_{int}^{t+\Delta t} = V_{int}^t \end{cases} \quad (4.18)$$

Cette étape permet de caractériser la charge ou la décharge en calculant la valeur de la surface de charge  $f$ . Si  $f$  est négative, alors l'hypothèse du comportement élastique est avérée et l'intégration est terminée, avec

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^{pred} \quad (4.19)$$

Sinon,  $f$  est strictement positive, ce qui contredit l'hypothèse d'élasticité et donc une correction anélastique s'impose.

### Correction anélastique

Il s'agit d'évaluer, à partir de la fonction seuil ( $f$  positive), la vitesse de déformation anélastique et le vecteur des variables internes :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p(f, V_{int}^t) \\ \dot{V}_{int} = \dot{V}_{int}(f, V_{int}^t) \end{cases} \quad (4.20)$$

L'intégration de ces dernières équations permet de déterminer l'incrément de la déformation élastique et l'évolution des variables internes.

Le choix de la technique d'intégration s'avère important, et les algorithmes doivent remplir un certain nombre d'exigences notamment la précision, la convergence, la stabilité, la satisfaction du critère dans le cas de la plasticité et surtout un coût raisonnable en terme de temps de calcul. Pour ce faire, plusieurs méthodes explicites, implicites et semi-implicites ont été adaptées à la plasticité [Ortiz et al (1985)], [Simo et al (1987)], et à la viscoplasticité [Benallal (1986)] [Chaboche et al(c) (1996)]. Nous utilisons pour ce travail, la méthode explicite de Euler définie dans le chapitre 3. Le pas de temps est choisi constant et suffisamment faible (de l'ordre de  $10^{-3}$  s) pour limiter le nombre d'itérations lors d'un incrément et converger rapidement vers la solution.

$$\begin{cases} \Delta\epsilon_{ij}^e = \Delta\epsilon_{ij} - \Delta\epsilon_{ij}^p \\ \sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + C_{ijkl}\Delta\epsilon_{kl}^e \\ V_{int}^{t+\Delta t} = V_{int}^t + \dot{V}_{int}\Delta t \end{cases} \quad (4.21)$$

**Schéma d'intégration**

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J_2(\underline{S} - \underline{X}) - R - k \quad (4.22)$$

Si  $f < 0$  ou ( $f=0$  et  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$ ) alors

Elasticité isotrope

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} &= \sigma_{ij}^t + \Delta \sigma_{ij} \\ \Delta \sigma_{ij} &= 2\mu \Delta \epsilon_{ij}^e + \lambda \text{tr}(\Delta \epsilon_{ij}^e) \delta_{ij} \\ \epsilon_{ij}^{an,t+\Delta t} &= \epsilon_{ij}^{an,t} \\ X_{ij}^{t+\Delta t} &= X_{ij}^t \\ R^{t+\Delta t} &= R^t \\ p^{t+\Delta t} &= p^t \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sinon Correction anélastique

**Correction plastique**

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^{an} &= \frac{3}{2} \dot{p} \frac{S_{ij} - X_{ij}}{J_2(\underline{S} - \underline{X})} \\ \dot{p} &= \left\langle \frac{J_2(\underline{S} - \underline{X}) - k - R}{K} \right\rangle^n \\ \dot{X}_{ij} &= \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_{ij}^{an} - D X_{ij} \dot{p} \\ \dot{R} &= \gamma(Q - R) \dot{p} \end{aligned} \quad (4.24)$$



d'où

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^{t+\Delta t} &= \sigma_{ij}^t + \Delta\sigma_{ij} \\
 \Delta\sigma_{ij} &= 2\mu\Delta\epsilon_{ij}^e + \lambda tr(\Delta\epsilon_{ij}^e)\delta_{ij} \\
 \epsilon_{ij}^{an,t+\Delta t} &= \epsilon_{ij}^{an,t} + \Delta\epsilon_{ij}^{an} \\
 X_{ij}^{t+\Delta t} &= X_{ij}^t + \Delta X_{ij} \\
 R^{t+\Delta t} &= R^t + \Delta R \\
 p^{t+\Delta t} &= p^t + \Delta p
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

L'intégration numérique de l'équation (4.24) se ramène à la résolution d'une équation au point fixe. Elle nous permet de trouver les incréments de la déformation inélastique  $\Delta\epsilon_{ij}^{an}$ , de la déformation inélastique cumulée  $\Delta p$ , de l'écroutissage cinématique  $\Delta X_{ij}$ , et de l'écroutissage isotrope  $\Delta R$ . Ces différentes valeurs permettent de déterminer la contrainte et l'ensemble des variables internes à l'instant  $t + \Delta t$ .

L'ensemble de ces équations et algorithmes est traduit en programme (Fortran) et implémenté dans le code industriel d'éléments finis.

Pour valider cette intégration nous comparons les réponses du modèle N.L.K. obtenues par un calcul direct aux réponses du même modèle obtenues par un calcul éléments finis via notre "subroutine".

Les résultats présentés sur la figure (4.2) montrent une superposition quasi parfaite entre les résultats obtenus par un calcul direct sur un point matériel et par simulation E.F. sur un V.E.F. cubique à 8 noeuds. Les résultats correspondent à différents types de chargement : traction monotone, chargement papillon, et chargement trèfle.

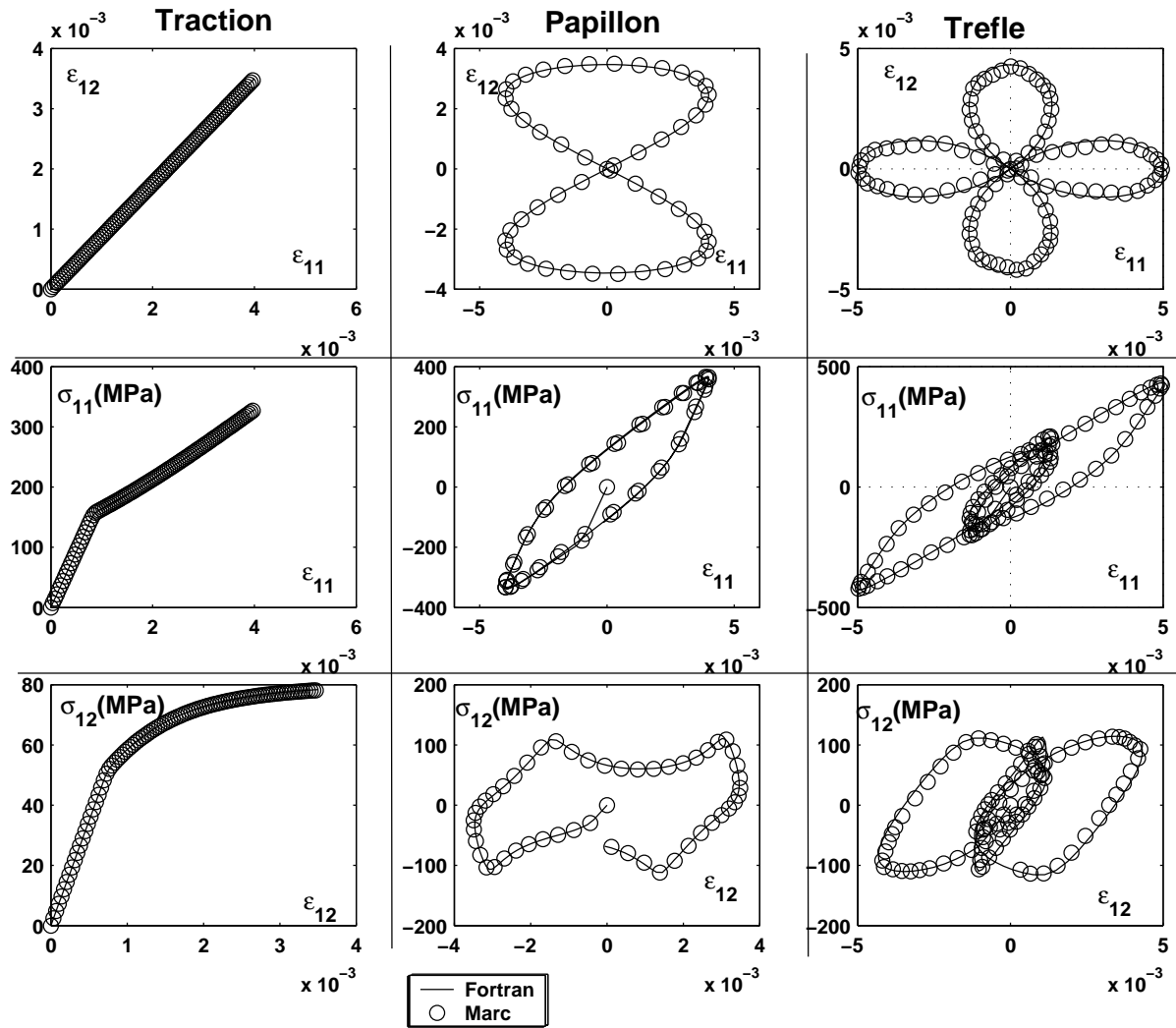


FIG. 4.2 – Validation du modèle N.L.K

Les paramètres du modèle N.L.K. utilisés pour cette validation sont :  $E=185000$  (MPa),  $\nu=0.33$ ,  $C_1=162400$  (MPa),  $C_2=6750$  (MPa),  $K=151$ ,  $k=82$  (MPa),  $D_1=2800$ ,  $D_2=25$ ,  $Q=60$  (MPa),  $b=8$ ,  $n=24$ .

## 4.4 Etude comparative

Après avoir validé l'intégration des modèles D.N.L.R. et N.L.K. dans le code E.F., nous comparons ces deux modèles notamment en terme de temps de calcul, pour différents types d'essais.

Modèle D.N.L.R.	Modèle N.L.K.
<p>Taux de déformation anélastique</p> $\dot{\epsilon}_{ij}^{an} = A^{u-1} \sum_m \frac{\sigma_{kl}^m - \sigma_{kl}^{r,m}}{\tau^m}$ <p>(défini à partir de <math>\underline{\sigma}</math>)</p> <p>Contrainte relaxée du mode m</p> $\sigma_{ij}^{m,r} = A_{ijkl}^r \epsilon_{kl} p_0^m$ <p>(linéaire en <math>\underline{\epsilon}</math>)</p> <p>Temps de relaxation du mode m</p> $\tau^m = \frac{h}{k_\beta T} \exp\left(\frac{\Delta F_r^{m+}}{RT}\right) \exp\left(\frac{k_\sigma  \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^r }{RT}\right)$ <p>Poids du mode m</p> $P_0^m = B \sqrt{\tau_r^m} \sum_m P_0^m = 1$ <p>Partition de la déformation</p> $\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij}^t + \dot{\epsilon}_{ij}^{an}$ <p>Loi de Hooke</p> $\Delta \sigma_{ij} = A_{ijkl}^u \dot{\epsilon}_{kl}^e \Delta t$	<p>Taux de déformation anélastique</p> $\dot{\epsilon}_{ij}^{an} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{S_{ij} - X_{ij}}{J_2(\underline{S} - \underline{X})}$ <p>(défini à partir du déviateur de <math>\underline{\sigma}</math>)</p> <p>Ecrouissage cinématique</p> $\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_{ij}^{an} - D X_{ij} \dot{p}$ <p>(non linéaire en <math>\underline{\epsilon}^{an}</math>)</p> <p>Vitesse de déformation cumulée</p> $\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\underline{S} - \underline{X}) - k - R}{K} \right\rangle^n$ <p>Ecrouissage isotrope</p> $\dot{R} = \gamma(Q - R)\dot{p}$ <p>Partition de la déformation</p> $\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij}^t + \dot{\epsilon}_{ij}^{an}$ <p>Loi de Hooke</p> $\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \Delta t$

TAB. 4.1 – Tableau récapitulatif des modèles D.N.L.R. et N.L.K. retenus pour la comparaison

#### 4.4.1 Validation sur un essai de traction : VER/VEF

Nous avons, à partir d'un essai de traction réalisé par Loukil (1996) avec le modèle D.N.L.R. (version I), identifié les paramètres des différents modèles en utilisant [SiDoLo (v2.1)], en conservant volontairement la même valeur pour les coefficients des deux matrices de rigidité correspondant aux deux modèles i.e., le couple de valeurs  $(E^u, \nu^u)$  pour le modèle D.N.L.R. et  $(E, \nu)$  pour le modèle N.L.K. sont identiques. Les paramètres des deux modèles sont donnés dans les tableaux suivants :

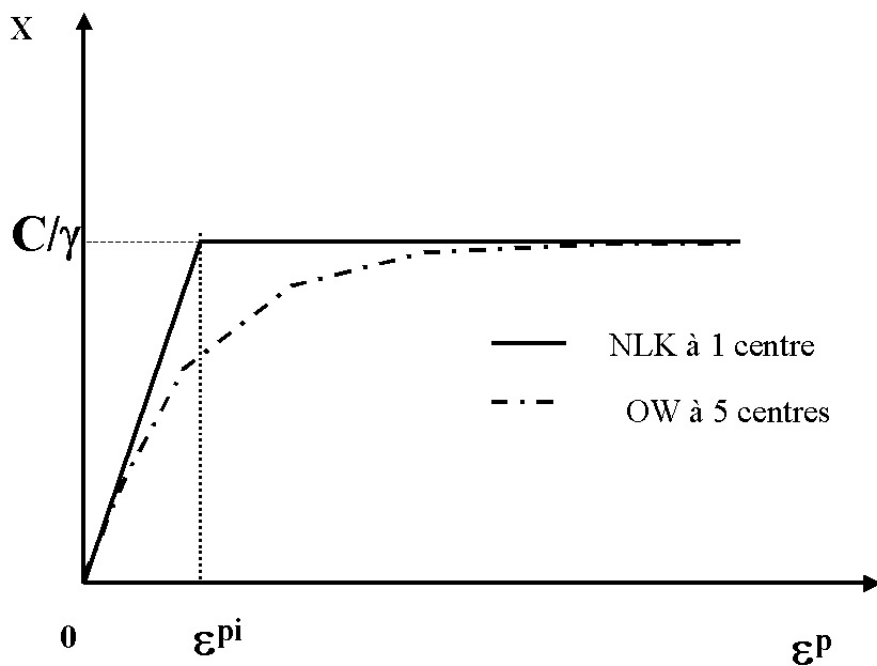
$E^u (MPa)$	$E^r (MPa)$	$\nu^u$	$\nu^r$	$\Delta F_{max}^{+,r} (KJ/mol.at.)$	$K_\sigma (cm^3/mol.at.)$
80000	2500	0.3	0.495	100	-50

TAB. 4.2 – Paramètres du modèle D.N.L.R. version I (1 spectre et état relaxé réversible et linéaire et  $a_w = 0$  et  $b_w = 0$ )

$E(MPa)$	$\nu$	$n$	$k(MPa)$	$K$	$C_1(MPa)$	$C_2(MPa)$	$D_1$	$D_2$	$Q(MPa)$	$b$
80000 MPa	0.3	22	274	8	8700	2378	590	186	207	20

TAB. 4.3 – Paramètres du modèle N.L.K. à deux centres (écrouissage cinématique non linéaire)

Le choix de l'écrouissage cinématique à deux centres est guidé par les travaux de Portier (1999), qui prédisait un comportement monotone asymptotique de  $X$  vers  $\frac{C}{\gamma}$  (figure 4.3). D'où la nécessité d'introduire plusieurs variables cinématiques pour obtenir une évolution linéaire par morceau de  $X$ .

FIG. 4.3 – Evolution de la variable d'écrouissage cinématique  $X$  en traction monotone

La simulation numérique a été réalisée sur un seul élément fini cubique à 8 noeuds soumis à une traction monotone suivant la direction (11). La vitesse de déformation ( $\dot{\epsilon}_{11} = 5 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ ) est maintenue constante durant 100 secondes, ce qui nous donne une déformation maximale de 5% (hypothèse en petites perturbations). Les vitesses de déformation dans les directions (22) et (33) sont données par la relation :

$$\dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{33} = -\nu^u \dot{\epsilon}_{11}$$

Nous représentons sur la figure (4.4) l'évolution de contrainte  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\epsilon_{11}$  pour les deux modèles :

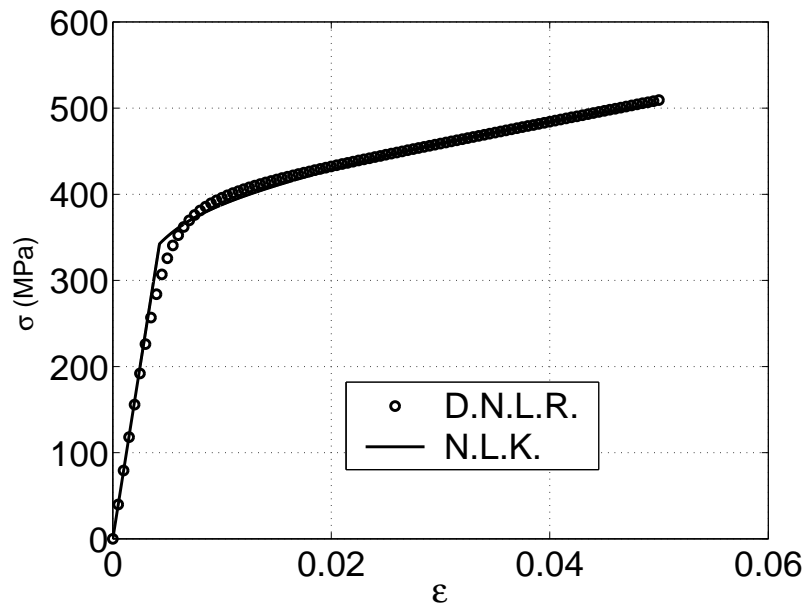


FIG. 4.4 – Etude comparative sur une courbe de traction monotone. D.N.L.R. - modèle à l'état relaxé linéaire. N.L.K. - modèle à 2 centres et écrouissages cinématiques non linéaires

Nous avons une assez bonne superposition des deux courbes, l'écart qui apparaît au niveau de la contrainte de seuil est dû au fait que nous avons volontairement identifié tous les paramètres du modèle N.L.K. excepté le module d'Young et le coefficient de Poisson que nous avons gardé identiques pour les deux modèles. Ceci fait apparaître une différence entre les deux modèles : dans le modèle d'écrouissage, il existe une notion de fonction seuil (fonction de charge) au delà de laquelle la dissipation apparaît tandis que dans le modèle D.N.L.R. la dissipation apparaît dès le début du chargement.

Les temps de calcul sont relativement équivalents de l'ordre d'une centaine de seconde. Nous avons imposé pour les deux modèles un pas de temps adaptatif qui varie entre  $10^{-3}$  s et  $10^{-2}$  s avec un pas initial de  $10^{-3}$  s. Le calcul avec le modèle D.N.L.R. a mis 104 secondes pour faire 10000 incréments, et celui du modèle N.L.K 99.9 secondes pour le même nombre d'incrément.

#### 4.4.2 Essai de validation sous chargements cycliques non proportionnels : VEF/Expérience

Nous avons, dans les chapitres précédents, montré la possibilité du modèle D.N.L.R. à reproduire le comportement d'un V.E.R soumis à des trajets de chargement non proportionnel de type "papillon" et "trèfle". A partir de cette même base de données expérimentales, nous allons identifier les paramètres du modèle N.L.K., pour l'acier 316L, et ainsi comparer qualitativement ces deux modèles.

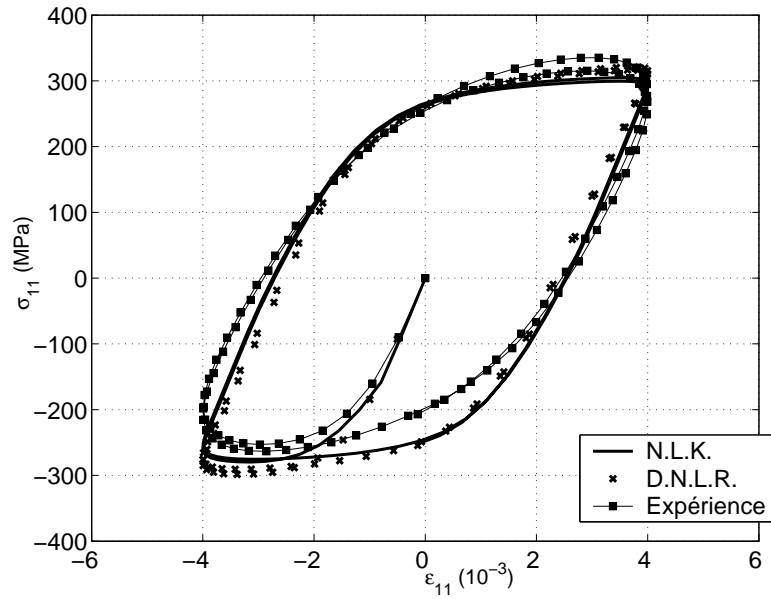


FIG. 4.5 – Traction

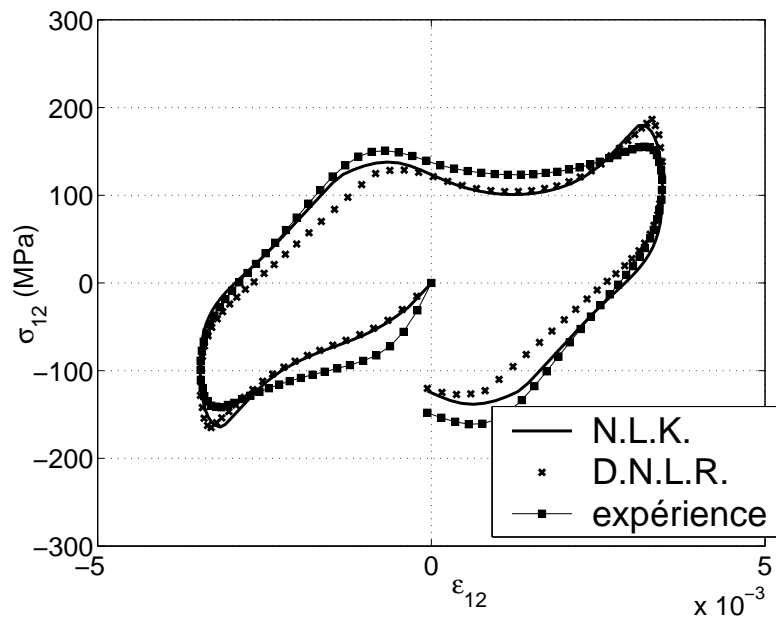


FIG. 4.6 – Cisaillement

11 paramètres du modèle N.L.K. :  $E=205000$  (MPa);  $\nu = 0.3$ ;  $C_1=283500$  (MPa);  $C_2=2552$  (MPa);  $D_1=2590$ ;  $D_2=25$ ;  $K=77.7$ ;  $k=75.5$  (MPa);  $Q=60$  (MPa);  $b=8$ ;  $n=22$ .

6 paramètres du modèle D.N.L.R. version I :  $E^u=205000$  (MPa);  $E^r=8300$  (MPa);  $\nu^u = 0.3$ ;  $\nu^r = 0.495$ ;  $\Delta F_{max}^{+,r}=86400$  (KJ/mol at);  $K_\sigma=-31.5$  ( $cm^3/molat$ ). (Tableau (2.2) - chapitre (2)) avec  $a_w = 0$  et  $b_w = 0$  puisqu'il n'y a pas de chargement cyclique.

On observe que les deux types de modèle permettent de reproduire la réponse du matériau pour ce type de chargement de manière satisfaisante (figures 4.5 et 4.6).

Nous avons ainsi pu vérifier, à travers ces simulations, la capacité des modèles intégrés dans un processus de calcul par éléments finis à prédire divers essais expérimentaux pour des chargements multidirectionnels et non proportionnels. Nous proposons d'étudier dans le paragraphe suivant, le comportement d'une plaque trouée au centre lorsqu'elle est soumise à une traction monotone, pour mieux apprécier ces temps de calcul.

## 4.5 Application : Etude du comportement d'une plaque trouée

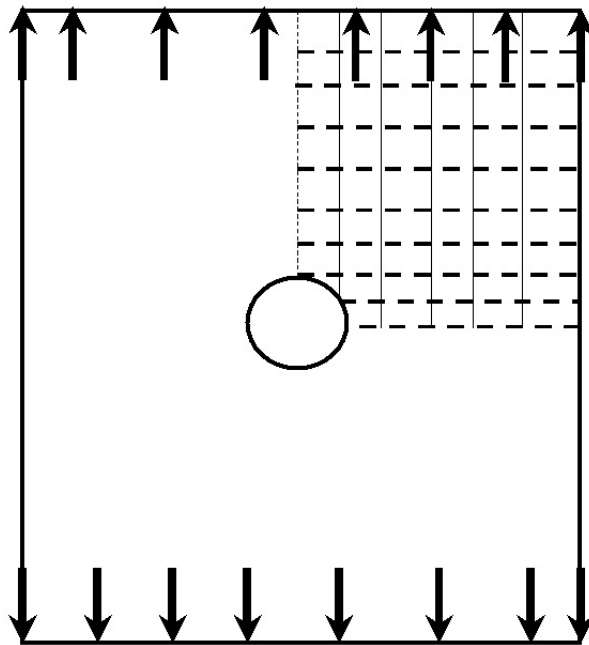


FIG. 4.7 – Plaque trouée

La plaque rectangulaire est soumise à des conditions aux limites en déplacement de signe inverse sur les deux côtés. La vitesse de déplacement imposée est constante en fonction du temps. Nous étudions, pour des raisons de symétrie seulement le quart de plaque (figure 4.8). La plaque est subdivisée en 100 éléments rectangulaires à 4 noeuds (QUAD 4). L'analyse est de type contrainte plane, la matrice des contraintes a trois composantes non nulles ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ). L'étude comparative des deux modèles D.N.L.R. et N.L.K intégrés dans le code de calcul par éléments finis est réalisée au niveau de trois points distincts ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  de la plaque) et selon les trois directions  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  (figure (4.8)). Les temps de calcul obtenus sont donnés dans le tableau (4.4)

	CPU D.N.L.R.(s)	CPU N.L.K.(s)
Mise en données :	0.25	0.09
Mise en place $K\Delta u = \Delta f$ :	102.79	100.06
Détermination de $\Delta u = K^{-1}\Delta f$ :	74.69	73.18
Calculs des déformations et contraintes :	4.39	3.86
Création des résultats :	108.13	76.17
Calculs divers :	15.08	10.33
Temps total :	305.33	263.69

TAB. 4.4 – Détails du temps de calcul des modèles D.N.L.R. et N.L.K.

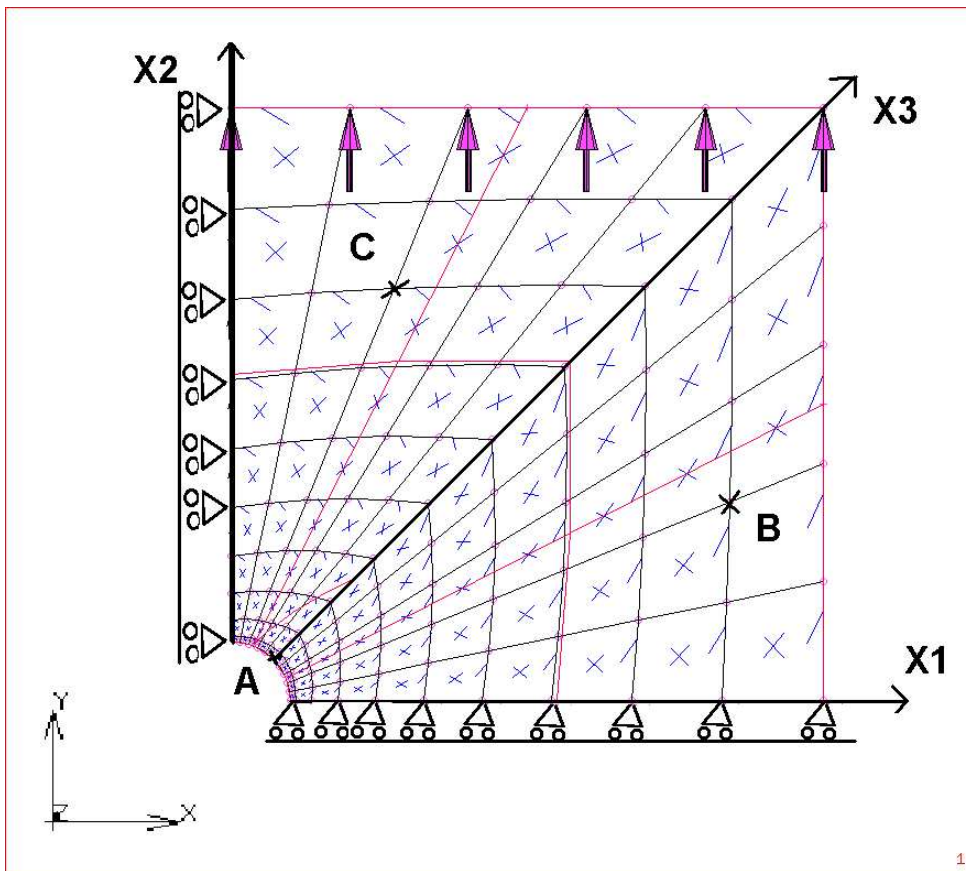


FIG. 4.8 – Quart de plaque : Maillage et conditions aux limites

Les évolutions des champs de déformations et de contraintes aux points (A, B, C de la figure 4.8) choisis arbitrairement et les évolutions de la déformation et de la contrainte équivalente le long des axes  $X_1$  (axe des abscisses),  $X_2$  (axe des ordonnées), et  $X_3$  (axe  $y = x$ ) pour les deux modèles sont représentées sur les figures suivantes (4.9), (4.10), (4.11), (4.12).



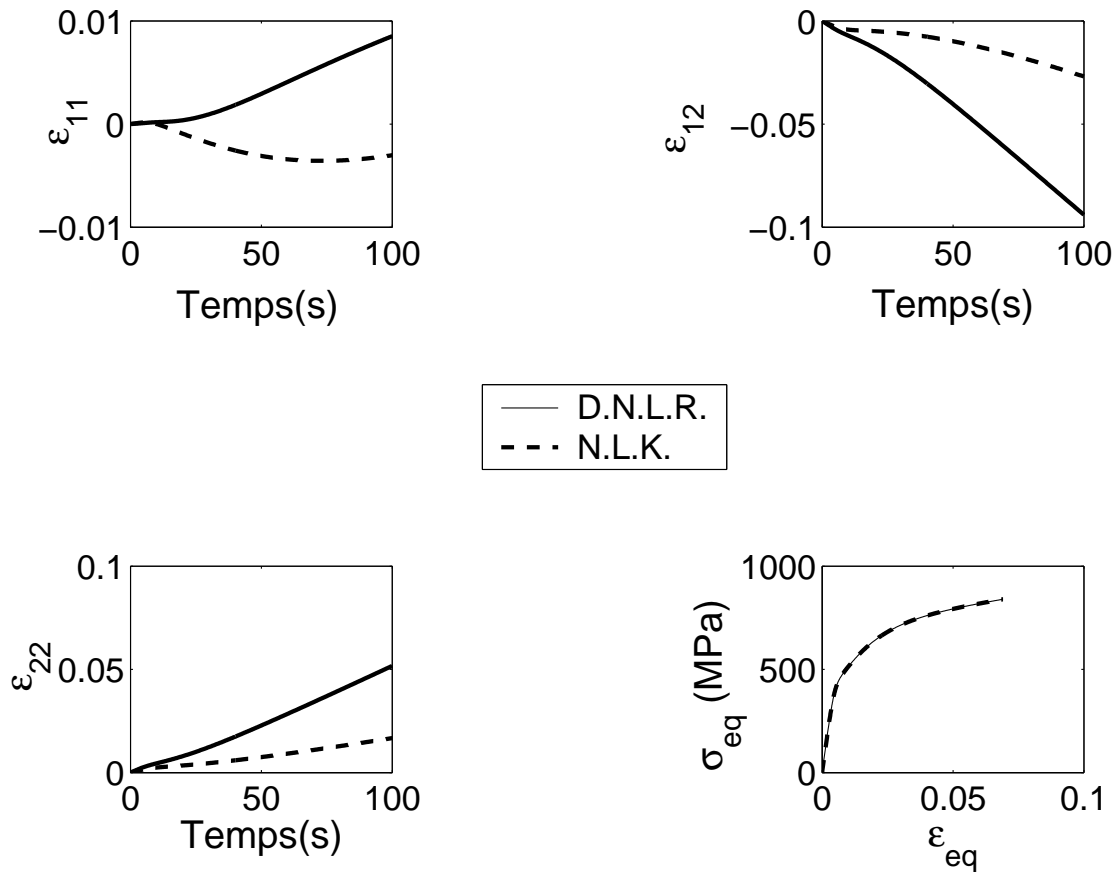


FIG. 4.9 – Evolutions des champs de déformation et de contrainte au voisinage du trou (point A)

Nous constatons au voisinage du trou (point *A*), que les déformations observées dans les directions (11), (22) et (12) pour les deux modèles se superposent au début du calcul, mais évoluent différemment au cours du chargement. L'explication de cette différence tient pour l'essentiel à la différence de niveau de complexité des deux modèles : le modèle D.N.L.R. version I est de type écrouissage cinématique linéaire à 6 paramètres (état relaxé réversible et linéaire) alors que la version N.L.K. retenue met en œuvre 2 écrouissages cinématiques non linéaires à 11 paramètres. Par ailleurs, pour le modèle N.L.K., la déformation anélastique n'apparaît qu'au delà du seuil de plasticité ( $f \geq 0$ ), contrairement au modèle D.N.L.R. où la déformation anélastique est proportionnelle à la partie dissipative du modèle et qui apparaît dès l'amorce du chargement. Nous remarquons aussi, une superposition, des contraintes de traction [direction (11)] aux points *B* et *C* (figures (4.10) et (4.11)).

Les évolutions de la contrainte et de la déformation équivalentes des deux modèles sont identiques sur les trois axes  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  (figure 4.12)

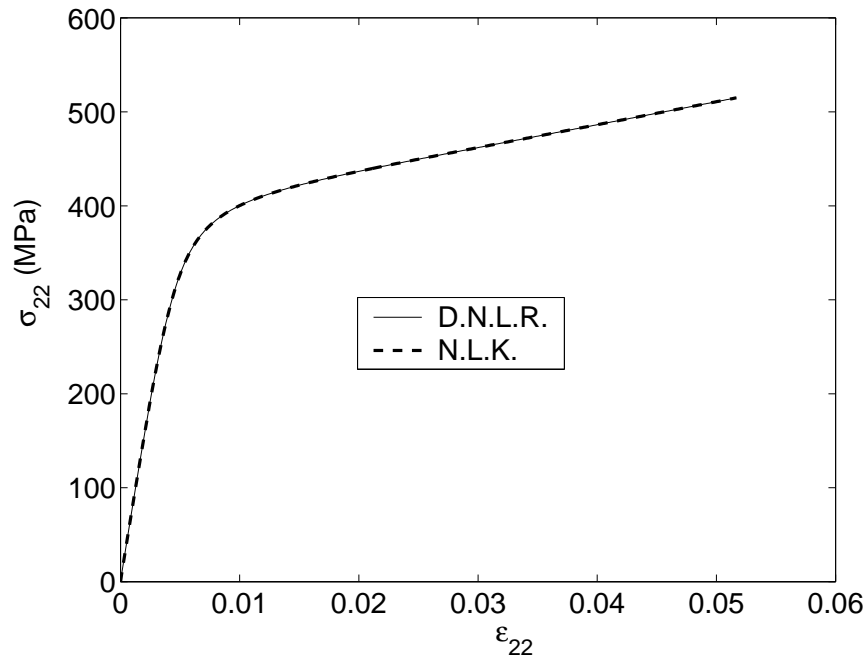


FIG. 4.10 – Evolution la contrainte  $\sigma_{22}$  en fonction de la déformation  $\epsilon_{22}$  point B

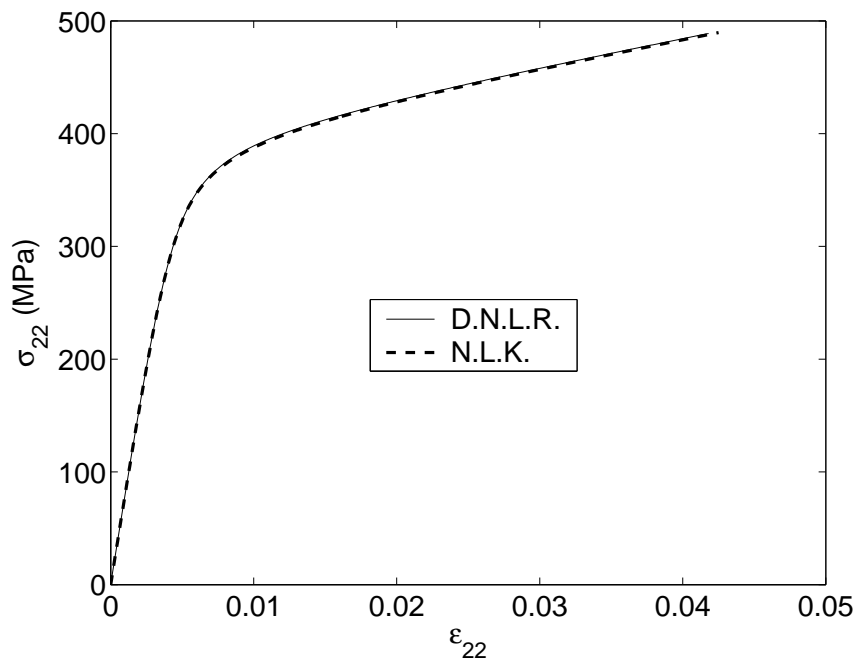


FIG. 4.11 – Evolution la contrainte  $\sigma_{22}$  en fonction de la déformation  $\epsilon_{22}$  point C

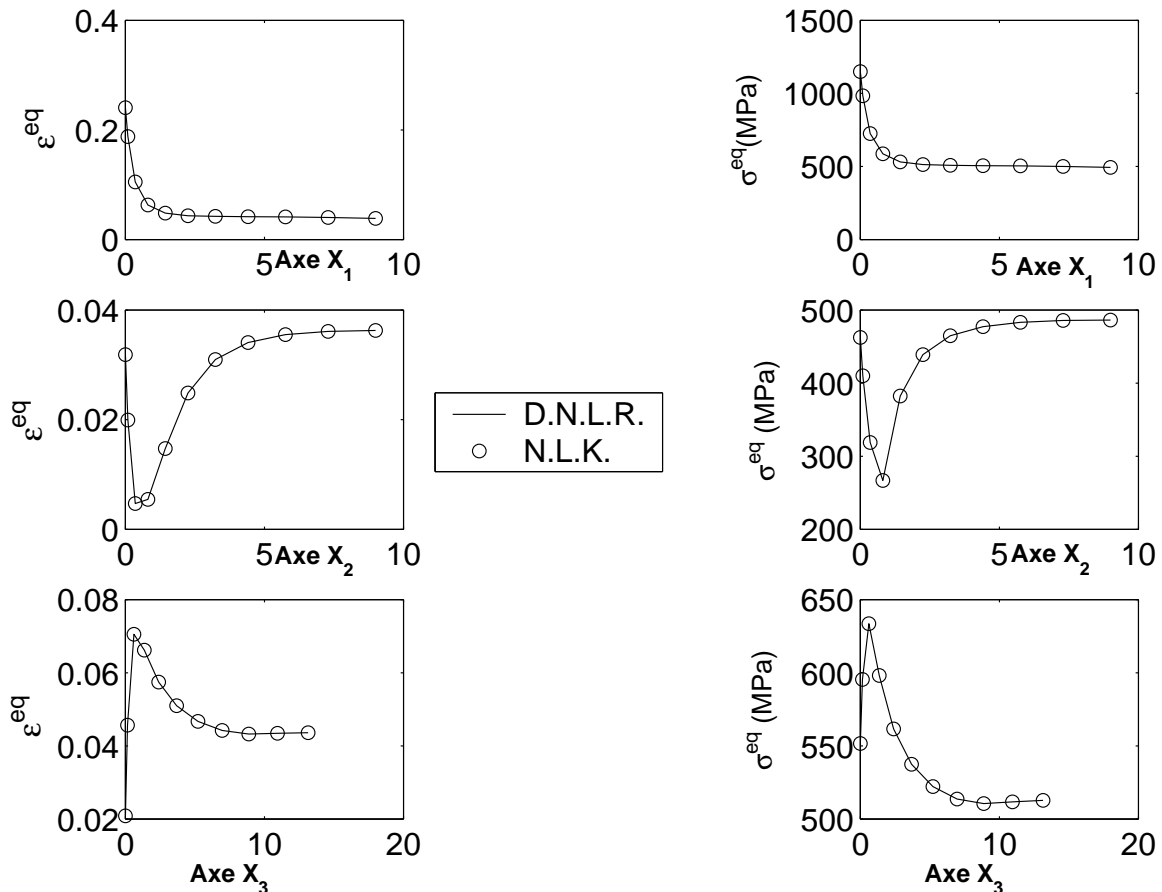


FIG. 4.12 – Evolutions de la déformation et de la contrainte équivalente le long des axes  $X_1$ ,  $X_2$ , et  $X_3$

Les modèles de comportement D.N.L.R. & N.L.K. donnent des résultats concordants pour les contraintes et déformations dans la plaque. Les temps de calcul sont également très proches.

## 4.6 Modélisation qualitative des surfaces de charge.

La notion de seuil de plasticité n'est pas présente dans le modèle D.N.L.R.. Ainsi, pour pouvoir approcher la surface de charge initiale il faudra, détecter cette limite élastique à posteriori.

Il existe, comme le souligne [Loukil (1996)] dans sa thèse, plusieurs méthodes et techniques de détection de la limite élastique :

- La méthode de limite de proportionnalité, où la limite élastique est déterminée dès que la courbe contrainte-déformation s'éloigne d'une droite.
- La méthode d'extrapolation arrière, qui définit une limite supérieure de plasticité, elle correspond au début de saturation plastique.
- La méthode offset, la limite élastique passe par le choix, à priori, d'une valeur de l'offset (déformation plastique résiduelle). Ce choix pose des problèmes expérimentaux délicats : une valeur très élevée de l'offset perturbe les caractéristiques plastiques du matériau. Par ailleurs, l'offset doit être supérieur à la valeur du bruit mesuré sur la déformation. Cette méthode facile à mettre en œuvre, est la plus utilisée, elle présente un compromis entre les deux méthodes précédentes.

C'est cette dernière méthode, qui consiste d'une part à choisir judicieusement la valeur de l'offset et d'autre part à réaliser à chaque incrément de calcul, le test sur la limite élastique suivant toutes les directions, que nous utilisons.

Dans le cas d'un essai de bi-traction, on dit que la limite d'élasticité est atteinte dans une direction si :

Pour

$$|\epsilon_{ij}| > \text{offset}$$

nous avons :

$$|\sigma_{ij}| < C_{ijkl} (|\epsilon_{ij}| - \text{offset})$$

Nous imposons, dans le cas d'un essai de bi-traction, les trajets de chargement radiaux définis par :

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} = \tan \theta \quad (4.26)$$

$$\sigma_{33} = 0 ; \sigma_{ij} = 0, \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, i \neq j$$

Sachant que nous allons "contrôler" les paramètres  $\epsilon^{\dot{e}q}$  et  $\theta$ , il nous faut déterminer les différentes vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}_{ij}$  nécessaires pour le déroulement du calcul. Nous avons dans le cas de la bi-traction

$$\dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$$

On pose

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}_{11}} \\ \beta &= \frac{\dot{\epsilon}_{33}}{\dot{\epsilon}_{11}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

#### 4.6.1 Cas d'un matériau isotrope

Dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement élastique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

En remplaçant les équations (4.26) et (4.27) dans (4.28), nous obtenons :

$$\dot{\sigma}_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{E\dot{\epsilon}_{11}}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4.29)$$

et nous en déduisons  $\alpha$  et  $\beta$

$$\alpha = \frac{\tan \theta - \nu}{1 - \nu \tan \theta} \quad \beta = \frac{\nu}{\nu - 1}(1 + \alpha) \quad (4.30)$$

Rappelons l'expression de la vitesse de déformation équivalente au sens de von-Mises

$$\dot{\epsilon}^{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{33})^2 + (\dot{\epsilon}_{33} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + 6(\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{13}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2)}$$

d'où :

$$\dot{\epsilon}_{11} = \pm \frac{3\dot{\epsilon}^{eq}}{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta - \alpha\beta}$$

Ce qui peut s'écrire encore :

$$\dot{\epsilon}_{11} = \pm \frac{3\dot{\epsilon}^{eq}|1 - \tan \theta|}{2(1 + \nu)\sqrt{1 + \tan^2 \theta - \tan \theta}} \quad (4.31)$$

Le choix du signe de  $\dot{\epsilon}_{11}$  se fait en fonction de  $(1 - \nu \tan \theta)$ . En effet, les vitesses de contrainte valent :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \arctan\left(\frac{1}{\nu}\right) - \pi; \arctan\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\}, \quad \dot{\sigma}_{11} = \frac{E\dot{\epsilon}_{11}}{1 - \nu \tan \theta} = \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\tan \theta} \quad (4.32)$$

Donc connaissant la déformation équivalente et l'angle  $\theta$  (variable), nous pouvons détecter la limite d'élasticité dans toutes les directions de l'espace des contraintes et modéliser la surface de charge initiale. La surface de charge obtenue avec le modèle D.N.L.R. version I (avec  $a_w = 0$  et  $b_w = 0$ ). On remarque qu'elle est très voisine de l'ellipse de von-Mises dans l'espace des contraintes  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  (figure (4.13)).

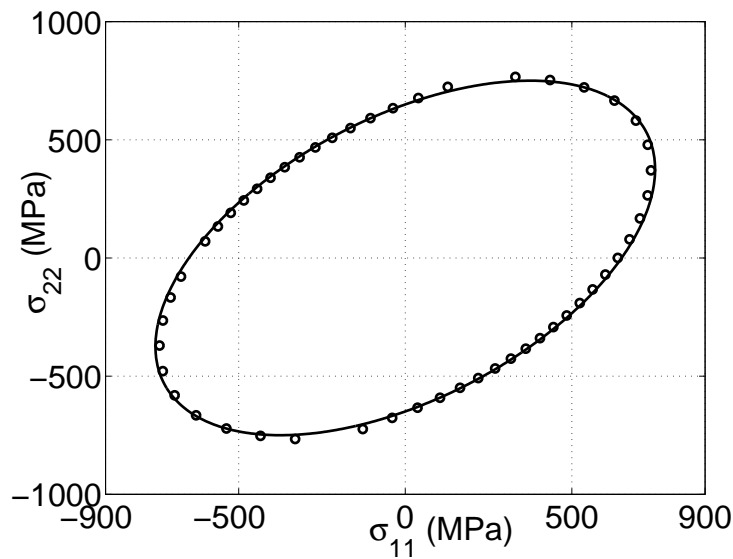
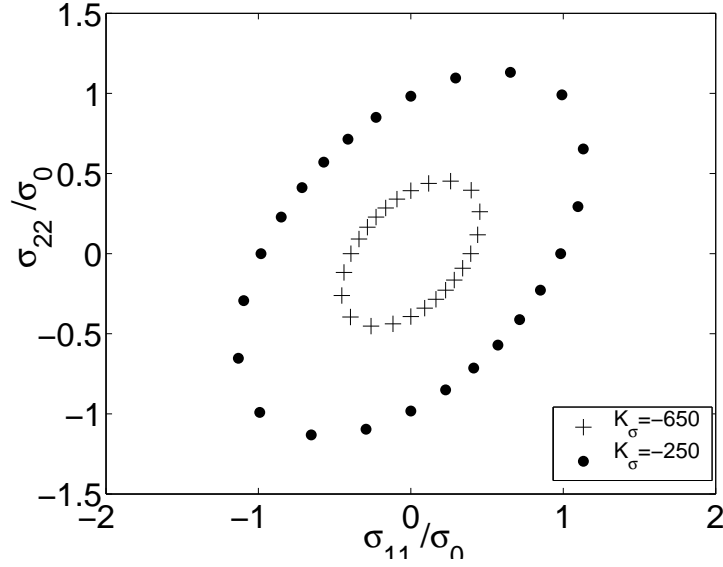


FIG. 4.13 – Surface de charge initiale du modèle D.N.L.R.


 FIG. 4.14 – Influence de  $K_\sigma$  sur la surface de charge initiale.

Dans le cas d'un essai de traction-torsion, la surface de charge est représentée dans l'espace des contraintes, par une autre ellipse dont les axes principaux sont :  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$ . Nous constatons que la variation de la fonction de glissement  $a(t)$ , introduite par [Cunat (1988)] pour traduire la non linéarité de nature coopérative du modèle, par l'intermédiaire de la variation du paramètre de non linéarité lié au volume d'activation  $K_\sigma$  (équations 1.50), entraîne une dilatation isotrope de la surface de charge (écrouissage isotrope - figure (4.14)). Il a été vérifié par Loukil (1996) que le facteur de glissement induit des distorsions de la surface limite compatibles avec les observations sur l'endommagement lorsque l'on introduit des effets non linéaires associés à la composante hydrostatique du tenseur des contraintes en plus du second invariant du déviateur. Il a également montré comment l'histoire de chargement préalable conditionne les surfaces de charge, leurs glissements et leurs distorsions.

#### 4.6.2 Cas d'un matériau orthotrope

Dans le cas d'un matériau orthotrope, la loi de comportement élastique s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

avec les constantes de rigidité égales à :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}; \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}; \quad C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}$$

$$C_{21} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}; \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}; \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{31} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}; \quad C_{32} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}; \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

où

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

avec pour nos simulations  $E_1 = 230000(MPa)$ ,  $E_2 = 2500(MPa)$ ,  $E_3 = 2500(MPa)$ ,  $\nu_{12} = 0.29$ ,  $\nu_{13} = 0.45$ ,  $\nu_{23} = 0.2$ .

En inversant la dérivée de l'équation (4.33), et en remplaçant les équations (4.26) et (4.27) dans (4.33), nous obtenons la relation faisant intervenir les souplesses (hors cisaillement) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \theta \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \quad (4.34)$$

Ce qui nous permet, connaissant  $\dot{\epsilon}_{11} = f(\dot{\epsilon}^{eq})$  au sens de von-Mises, de déduire :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \arctan\left(\frac{-S_{11}}{S_{12}}\right) - \pi; \arctan\left(\frac{-S_{11}}{S_{12}}\right) \right\}, \quad \dot{\sigma}_{11} = \frac{\dot{\epsilon}_{11}}{S_{11} + S_{12} \tan \theta} = \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\tan \theta} \quad (4.35)$$

et

$$\alpha = \frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}_{11}} = \frac{S_{12} + S_{22} \tan \theta}{S_{11} + S_{12} \tan \theta}$$

$$\beta = \frac{\dot{\epsilon}_{33}}{\dot{\epsilon}_{11}} = \frac{S_{13} + S_{32} \tan \theta}{S_{11} + S_{12} \tan \theta} \quad (4.36)$$

avec les constantes de souplesse égalent à :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1}; \quad S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_1}$$

$$S_{21} = S_{12}; \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_2}$$

$$S_{31} = S_{13}; \quad S_{32} = S_{23}; \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

Les résultats observés dans le cas d'un matériau orthotrope montrent une dilatation et une rotation par rapport à la surface de charge d'un matériau isotrope (figure 4.15).

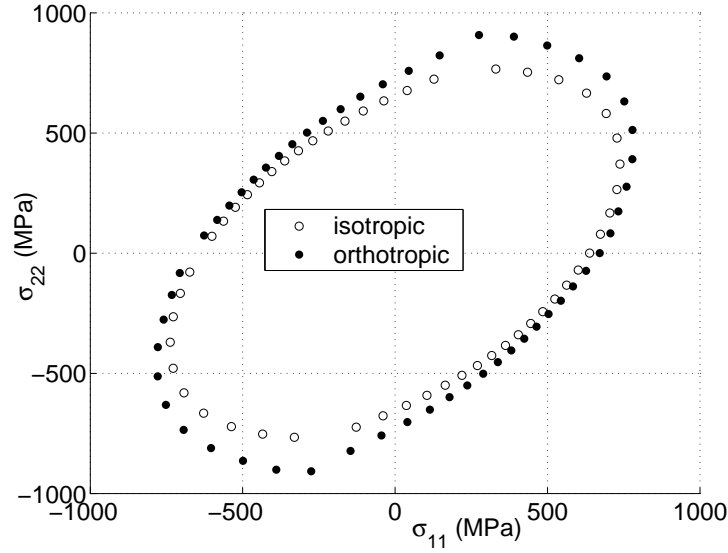


FIG. 4.15 – Modélisation de surface de charge : isotrope et orthotrope avec la version I du D.N.L.R.

### 4.6.3 Critère de Hill

Il correspond à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écroutissage du matériau. Les intersections de ces trois plans sont les axes principaux d'anisotropie qui sont pris comme repère pour l'écriture du critère, soit  $(0, x_1, x_2, x_3)$ . Ce critère se déduit de l'expression générale ci dessus :

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{23}^2 = 1 \quad (4.37)$$

avec  $F, G, H, L, M, N$ , les six paramètres scalaires qui caractérisent l'état d'écroutissage anisotrope. On peut les déterminer à l'aide de trois expériences de traction simple et de trois expériences de cisaillement, ou les calculer à partir de la matrice de rigidité  $\underline{\underline{C}}$  :

$$\begin{aligned} C_{11} &= F + H & C_{22} &= F + G & C_{33} &= G + H \\ C_{12} &= -F & C_{23} &= -G & C_{31} &= -H \\ C_{44} &= N/2 & C_{55} &= M/2 & C_{66} &= L/2 \end{aligned}$$

Dans le cas de la bitraction (absence totale de cisaillement) d'un matériau orthotrope, le critère de Hill se résume à l'équation d'une ellipse dans le plan  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  :

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22})^2 + H(\sigma_{11})^2 = 1 \quad (4.38)$$

Les paramètres du modèle utilisés précédemment permettent d'obtenir les trois coefficients :  $F = 116179 \text{ (MPa}^{-2}\text{)}$ ,  $G = -113657 \text{ (MPa}^{-2}\text{)}$ ,  $H = 114161 \text{ (MPa}^{-2}\text{)}$

Pour un milieu anisotrope plus général, on procède de la même manière, en introduisant des couplages de type traction-cisaillement dans les matrices de rigidité et de souplesse.

Le principal résultat de cette étude est (i) d'établir "l'égalité" de capacité des deux types de modèle à reproduire le comportement mécanique dans des situations complexes et (ii) de montrer leur "équivalence" en terme de temps de calcul dans un code E.F.

Nous examinons maintenant les similitudes qui semblent exister entre l'état relaxé D.N.L.R. et



l'écouissage cinématique N.L.K.. En effet, en l'absence d'élasticité à l'état relaxé, ( $E^r = 0$ ) on "perd" l'effet Bauschinger, exactement comme lorsque l'on se contente uniquement de l'écouissage isotrope dans le modèle N.L.K.. Dans ce qui suit, nous tentons donc de comparer l'état relaxé D.N.L.R. à l'écouissage cinématique non-linéaire de type Armstrong et Frederick (1966) et [Chaboche (1977)]

## 4.7 Réflexion sur l'état relaxé

L'analyse spectrale D.N.L.R. conduit, comme nous l'avons déjà écrit (chapitre 1), à une vitesse de contrainte pour chaque mode définie par :

$$\dot{\underline{\sigma}}^j = \underline{\underline{A}}^u \underline{\underline{\epsilon}}^j p_0^j - \frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \quad (4.39)$$

soit

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{A}}^u \underline{\underline{\epsilon}} - \sum_j \left[ \frac{\underline{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \right] \quad (4.40)$$

La contrainte relaxée  $\underline{\sigma}^{j,r}$  du mode j peut être définie par une expression linéaire qui la lie à la déformation imposée (loi de Hooke) : C'est la version I du modèle

$$\underline{\sigma}^{j,r} = (\underline{\underline{A}}^r p_0^j) \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{soit} \quad \dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = (\underline{\underline{A}}^r p_0^j) \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (4.41)$$

Lors de cyclages, bien entendu, l'état relaxé ne présentera aucune hystérèse, cette écriture peut être apparentée à l'écouissage cinématique linéaire de Prager

$$\dot{\underline{X}} = C \dot{\underline{\epsilon}}^{an}$$

La relation entre état relaxé et contrainte cinématique apparaît avec la décomposition

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^{an}$$

qui conduit à

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = (\underline{\underline{A}}^r p_0^j) \dot{\underline{\epsilon}}^e + (\underline{\underline{A}}^r p_0^j) \dot{\underline{\epsilon}}^{an} = \dot{\underline{\sigma}}^{j,r^e} + \dot{\underline{\sigma}}^{j,r^{an}}$$

On a donc

$$\dot{\underline{X}} = \dot{\underline{\sigma}}^{j,r^{an}}$$

soit

$$C \equiv \underline{\underline{A}}^r p_0^j$$

On comprend dès lors pourquoi la comparaison du modèle D.N.L.R. à 1 spectre (version I) n'a pu être effectuée avec le modèle N.L.K. qu'en introduisant au moins 2 centres dans le modèle N.L.K.. La différence entre  $\dot{\underline{\sigma}}^{j,r}$  et  $\dot{\underline{X}}$  tient donc essentiellement à  $(\underline{\underline{A}}^r p_0^j) \dot{\underline{\epsilon}}^e$  qui devient négligeable, dès lors que la vitesse de déformation élastique  $\dot{\underline{\epsilon}}^e$  sera négligeable devant la vitesse de déformation plastique  $\dot{\underline{\epsilon}}^{an}$ . L'objectif sera de modifier l'expression (4.41) et de l'écrire sous la forme d'un écouissage cinématique non linéaire de la forme :

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r^{an}} \equiv \underline{X}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\underline{\epsilon}}^{an} - D_i(p) \underline{X}_i \dot{p} \quad (4.42)$$

dès lorsque l'on voudra introduire une composante de type écrouissage cinématique non linéaire dans l'approche D.N.L.R.. Pour ce faire, nous décomposons donc, comme pour le modèle N.L.K., la déformation imposée en une déformation purement élastique  $\underline{\epsilon}^e$  et une déformation purement anélastique  $\underline{\epsilon}^{an}$ .

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^{an} \quad (4.43)$$

Dans le cas d'un chargement unidirectionnel à vitesse de imposée, déformation l'équation (4.40) peut être écrite de la manière suivante,

$$\dot{\sigma}_{11} = E^u \dot{\epsilon}_{11} - \sum_j \left[ \frac{\sigma_{11}^j - \sigma_{11}^{j,r}}{\tau^j} \right] = E^u \dot{\epsilon}_{11}^e \quad (4.44)$$

Nous déduisons des équations (4.44) et (4.43) l'expression de la déformation anélastique du modèle D.N.L.R. dans la direction (11) :

$$\dot{\epsilon}_{11}^{an} = \frac{1}{E^u} \sum_j \left[ \frac{\sigma_{11}^j - \sigma_{11}^{j,r}}{\tau^j} \right] \quad (4.45)$$

En première approximation nous pouvons modéliser l'état relaxé comme une fonction linéaire de la déformation anélastique (en négligeant la partie élastique). Cette formulation est identique à l'écrouissage cinématique linéaire de type Prager comme nous venons déjà de le souligner

$$\underline{\sigma}^{j,r} = (\underline{A}^r p_0^j) \underline{\epsilon}^{an} + (\underline{A}^r p_0^j) \underline{\epsilon}^e \simeq (\underline{A}^r p_0^j) \underline{\epsilon}^{an} \quad (4.46)$$

La contrainte relaxée évolue alors linéairement en fonction de la partie anélastique de la déformation. Son évolution en fonction de la déformation totale est très faible au début du chargement jusqu'à un seuil qui correspond à la limite d'élasticité initiale du matériau puis accroît de manière linéaire (figures 4.16 et 4.17).

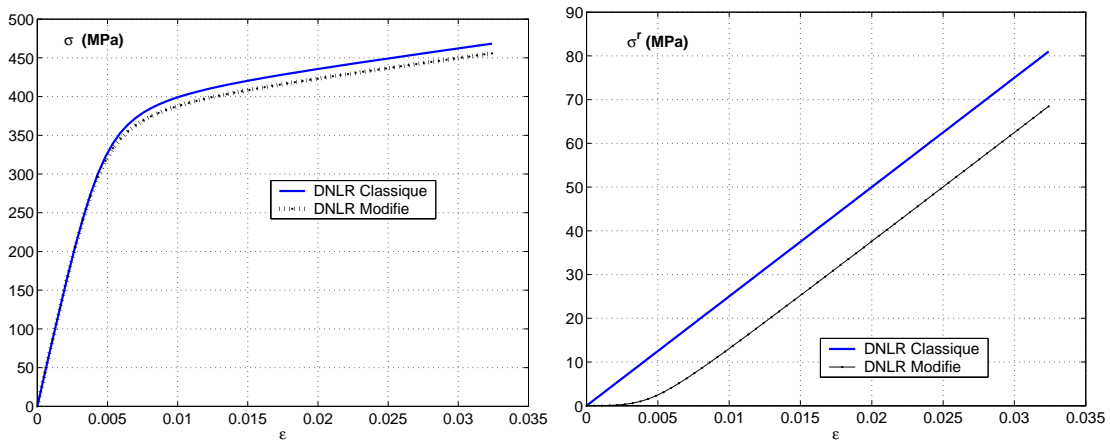


FIG. 4.16 – Chargement monotone : Evolution de  $\sigma_{11}$  et de  $\sigma_{11}^r$  en fonction de la déformation totale

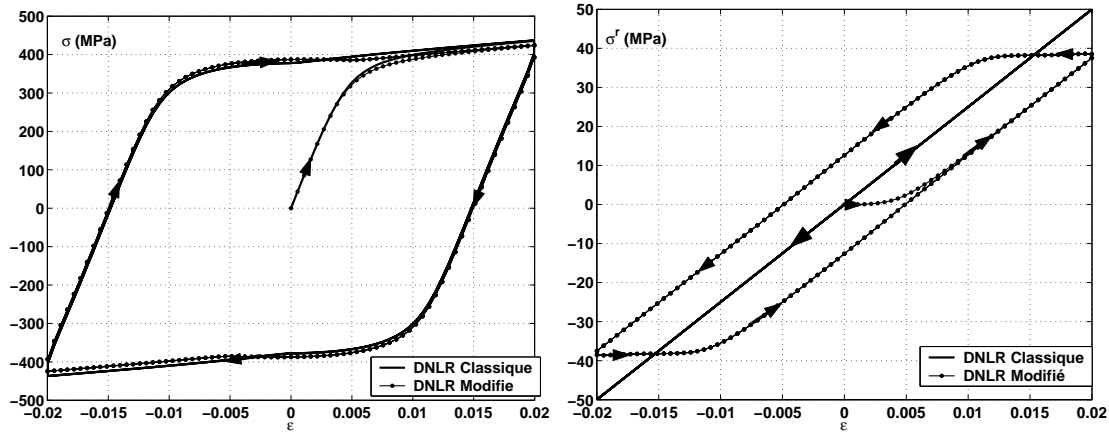


FIG. 4.17 – Chargement cyclique : Evolution de  $\sigma_{11}$  et de  $\sigma_{11}^r$  en fonction de la déformation totale

Nous constatons sur les figures (4.16) et (4.17), que le fait de modéliser l'état relaxé en tenant compte uniquement que de la partie anélastique de la déformation, n'a pas une grande conséquence sur l'évolution de la contrainte. Cependant l'évolution de la contrainte relaxée a considérablement changé (présence d'hystérèse lors du chargement cyclique).

En deuxième approximation, nous avons modélisé un état relaxé non linéaire par rapport à la déformation anélastique identique à l'écroissage cinématique de type Armstrong et Frederick (1966), Chaboche (1977) & (1997).

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = p_0^j \underline{\underline{A}}^r \dot{\underline{\epsilon}}^{an} - D(p) \underline{\underline{\sigma}}^{j,r} \dot{p} \quad (4.47)$$

avec  $p$  la déformation plastique cumulée et  $\dot{p}$  sa vitesse définie au sens de von-Mises comme suit :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\epsilon}}^{an} : \dot{\underline{\epsilon}}^{an}}$$

Nous introduisons trois variables supplémentaires ( $D_\infty$ ,  $D_0$  et  $\varpi$ ) qui nous permettent de définir le facteur  $D(p)$

$$D(p) = D_\infty + (D_0 - D_\infty) e^{-\varpi p}$$

Cette modélisation fait apparaître un phénomène d'adoucissement sur la courbe  $\sigma^r(\epsilon)$  de la contrainte relaxée (4.18). Cet adoucissement est très faible et affecte très peu la courbe  $\sigma(\epsilon)$  de la contrainte vraie.

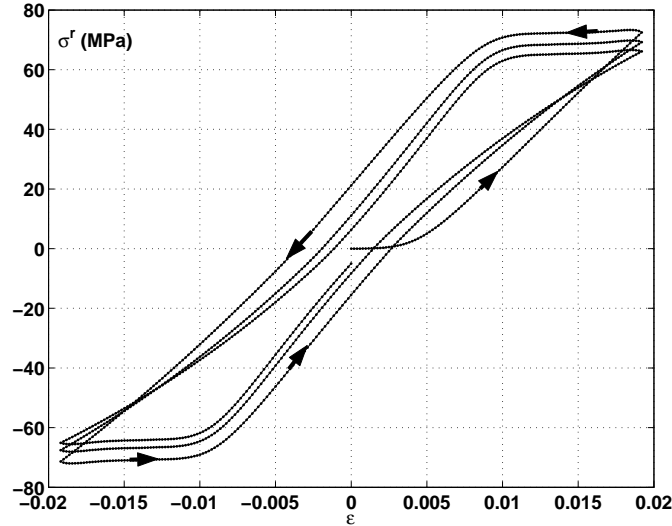


FIG. 4.18 – D.N.L.R. modifié : Evolution de la contrainte relaxée (Adoucissement)

Cette modélisation "dérivée" de la formulation usuelle de l'écroutissage cinématique ne peut qu'être vue comme formulation empirique dont les fondements thermodynamiques réels restent à établir dans le cadre D.N.L.R.. Il est indispensable pour cela de la rapprocher des développements récents [Mrabet (2000)] déjà évoqués au chapitre 2 (version I-bis du modèle). En effet, ce dernier écrit :

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{\underline{\sigma}^{j,r}}{\tau_r^j}$$

avec

$$\tau_r^j = a^r(\underline{\sigma}^r) \tau^{j,rr} = \underbrace{\frac{\dot{\underline{\epsilon}}_0}{|\dot{\underline{\epsilon}}|} \exp\left[\frac{K_\sigma^r |\underline{\sigma}^r - \underline{\sigma}^{eq}|}{RT}\right]}_{a^r(\underline{\sigma}^r)} \underbrace{\frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{\Delta F^{jr}}{RT}\right)}_{\tau^{j,rr}}$$

Les deux modélisations sont représentées ci-dessous :

$$\dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{\underline{\sigma}^{j,r}}{\tau_r^j}; \quad \dot{\underline{\sigma}}^{j,r} = p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}}^{an} - D(p) \underline{\sigma}^{j,r} \dot{p}$$

et la comparaison directe conduit à :

$$\begin{aligned} p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}}^{an} - D(p) \underline{\sigma}^{j,r} \dot{p} &\equiv p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{\underline{\sigma}^{j,r}}{\tau_r^j} \\ p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}}^{an} - D(p) \underline{\sigma}^{j,r} \dot{p} &\equiv p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}}^e + p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}}^{an} - \frac{\underline{\sigma}^{j,r}}{\tau_r^j} \\ -D(p) \underline{\sigma}^{j,r} \dot{p} &\equiv p_0^j \underline{A}^r \dot{\underline{\epsilon}}^e - \frac{\underline{\sigma}^{j,r}}{\tau_r^j} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Si on néglige la contribution élastique, l'expression (4.48) conduit à :

$$D(p) \dot{p} \cong \frac{1}{\tau_r^j} \quad (4.49)$$

Soit

$$(D_\infty + (D_0 - D_\infty)e^{-\varpi p}) \dot{p} \cong \frac{k_B T}{h} \frac{|\dot{\epsilon}|}{\dot{\epsilon}_0} \exp \left[ -\frac{K_\sigma^r |\underline{\sigma}^r - \underline{\sigma}^{eq}|}{RT} \right] \exp \left( -\frac{\Delta F^{jr}}{RT} \right)$$

En chargement monotone et croissant,  $\dot{p}$  et  $|\dot{\epsilon}|$  sont confondus, si l'on néglige  $\dot{\epsilon}^e$  devant  $\dot{\epsilon}^{an}$ . On peut donc rapprocher directement  $-\varpi p$  et  $-\frac{K_\sigma^r |\underline{\sigma}^r - \underline{\sigma}^{eq}|}{RT}$  : dans un cas on introduit un terme énergétique exprimé à partir de la déformation plastique et dans l'autre cas, on a un terme équivalent, mais exprimé à partir de la contrainte relaxée.

Cette courte discussion illustre la différence entre contrainte relaxée et contrainte interne d'origine cinématique.

Nous identifions maintenant un nouveau jeux de paramètres à partir de la simulation du modèle N.L.K. afin de rapprocher la contrainte  $\sigma_{DNL R}$  de la contrainte  $\sigma_{N.L.K}$  et la contrainte relaxée  $\sigma_{DNL R}^r$  de l'érouissage cinématique non linéaire  $X_{N.L.K}$ .

## 4.8 Identification

L'identification des paramètres a été réalisées à l'aide du logiciel de simulation et d'identification de paramètre [SiDoLo (v2.1)]. Les deux modèles sont rappelés sur le tableau (4.7) et les paramètres pour chacun des modèles dans les tableaux (4.5) et (4.3)

$E^u(MPa)$	$E^r(MPa)$	$\nu^u$	$\nu^r$
73782.2	5562.3	0.3	0.495

$\Delta F_{max}^{+,r}(KJ/mol.at.)$	$K_\sigma(cm^3/mol.at.)$	$D_0$	$D_\infty$	$\varpi$
105.6	-48.3	288.3	134.9	2.12

TAB. 4.5 – Paramètres du modèle D.N.L.R. modifié (9 coefficients)

$E(MPa)$	$\nu$	n	k(MPa)	K	$C_1(MPa)$	$C_2(MPa)$
71961.1	0.3	23.0	279.0	6.7	8930.1	2318.7

$D_1$	$D_2$	Q(MPa)	b
524.7	182.9	196.5	20.1

TAB. 4.6 – Paramètres du modèle N.L.K. (11 coefficients)

Modèle D.N.L.R. Modifié 9 paramètres	Modèle N.L.K. 11 paramètres
Taux de déformation anélastique	Taux de déformation anélastique
$\dot{\epsilon}_{11}^{an} = \frac{1}{E^u} \sum_j \frac{\sigma_{11}^j - \sigma_{11}^{j,r}}{\tau_j}$	$\dot{\epsilon}_{11}^{an} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{S_{11} - X_{11}}{J_2(\underline{S} - \underline{X})}$
Contrainte relaxée du mode j	Ecrouissage cinématique
$\dot{\sigma}_{11}^{j,r} = E^r \dot{\epsilon}_{11}^{an} p_0^j - D(p) \sigma_{11}^{j,r} \dot{p}$	$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_{11}^{an} - D_i X_{11} \dot{p}$
Vitesse de déformation cumulée	Vitesse de déformation cumulée
$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{11}^{an} \cdot \dot{\epsilon}_{11}^{an}}$	$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\underline{S} - \underline{X}) - k - R}{K} \right\rangle^n$
Poids du mode j	Ecrouissage isotrope
$P_0^j = B \sqrt{\tau_r^j} \sum_j P_0^j = 1$	$\dot{R} = \gamma(Q - R) \dot{p}$
Partition de la déformation	Partition de la déformation
$\dot{\epsilon}_{11}^e = \dot{\epsilon}_{11}^t + \dot{\epsilon}_{11}^{an}$	$\dot{\epsilon}_{11}^e = \dot{\epsilon}_{11}^t + \dot{\epsilon}_{11}^{an}$
Loi de Hooke	Loi de Hooke
$\Delta \sigma_{11} = E^u \dot{\epsilon}_{11}^e \Delta t$	$\Delta \sigma_{11} = E \dot{\epsilon}_{11}^e \Delta t$

TAB. 4.7 – Tableau récapitulatif des modèles D.N.L.R. modifié et N.L.K.

Les paramètres identifiés à partir de la simulation du modèle N.L.K. (tableau. 4.5) ont permis d'obtenir des allures comparables entre l'écrouissage cinématique  $X_{N.L.K}$  et la contrainte à l'état relaxé  $\sigma_{DNL.R}^r$ . Les phénomènes d'adoucissement déjà notés sur la courbe  $\sigma^r(\epsilon)$  (figure. 4.18) ne semble pas affecter la courbe de traction  $\sigma(\epsilon)$ . Pour pouvoir reproduire ces phénomènes, il faut donc toujours rajouter un deuxième facteur de glissement avec deux paramètres supplémentaires lorsque l'on utilise la formulation empirique de Loukil (1996) (cf chapitre. 2). Les résultats de simulation des modèles D.N.L.R. modifié (9 paramètres + 2 supplémentaires  $a_w$  et  $b_w$ ) et N.L.K. à deux centres (11 paramètres par modèle) confirment bien la superposition des deux réponses en contrainte (figure 4.19(a)), des deux déformations anélastiques (figure 4.19(c) (d)), et de la contrainte relaxée et l'écrouissage cinématique (figure 4.19(b)) recherchée par la mise en parallèle des deux formalismes au niveau des états relaxés et d'écrouissages cinématiques non linéaires.

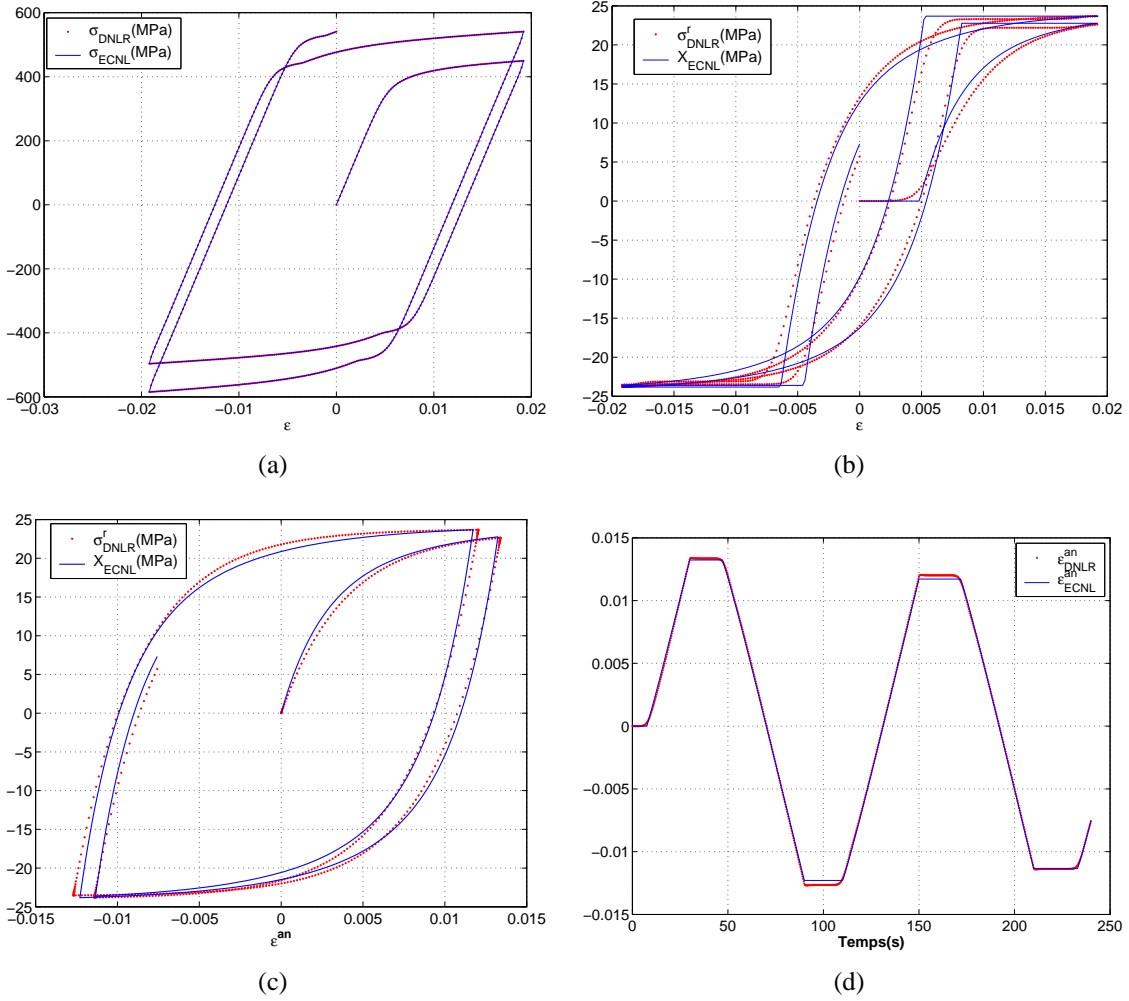


FIG. 4.19 – Résultats de simulations avec les modèles D.N.L.R.modifié et N.L.K.

Paramètres D.N.L.R. : ( $E^u = 72600MPa$ ,  $E^r = 6000MPa$ ,  $\nu^u = 0.33$ ,  $\nu^r = 0.49$   $\Delta F_{max}^{+,r} = 120KJ/mol.at.$ ,  $K_\sigma = -100cm^3/mol.at.$ ,  $D_0 = 315$ ,  $D_\infty = 212$ ,  $\varpi = 1.2$ )

Paramètres N.L.K. : ( $E = 71962MPa$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $n=22$ ,  $k=279.15$ ,  $K=6.78$ ,  $C_1 = 8930.17MPa$ ,  $C_2 = 2318.78MPa$ ,  $D_1 = 524.75$ ,  $D_2 = 182.90$ ,  $Q=196.50 MPa$ ,  $b=20.0$ )

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé un modèle de comportement fondé sur une approche de thermodynamiques irréversibles prenant appui sur une généralisation de la relation fondamentale de Gibbs conformément à la méthode de De Donder. Ce modèle permet de reproduire différents types de comportement moyennant un nombre de paramètres raisonnable (6) comparé à (9) au moins pour le modèle N.L.K.. Sa forme semi-explicite le rend mathématiquement et numériquement facile à mettre en oeuvre. Il faut toute fois prêter une attention particulière au temps de

relaxation faibles ([Kovacs (1963)]), néanmoins la connaissance de l'état relaxé permet d'éviter une intégration numérique pénalisante pour les modes dissipatifs correspondants à ces temps courts.

La comparaison avec le modèle N.L.K. montre des temps de calcul comparables aussi bien pour un V.E.R. que pour un structure (plaque percée). Il faudra certainement le tester pour des problèmes faisant intervenir un nombre d'élément plus important.

Les modèles de type D.N.L.R. n'intègrent pas la notion de seuil comme élément de base, toutefois ils permettent de reproduire les surfaces de charge qui sont associées aux comportements simulés. On retrouve ainsi des courbes très proches des ellipses de von-Mises pour des milieux isotropes à histoires de chargement simples. Pour les milieux orthotropes les simulations prévoient une rotation des surfaces de von-Mises conforme aux observations expérimentales.





# Chapitre 5

## Application de la M.A.G.I.T. au modèle D.N.L.R.

**Résumé :** Le thème abordé dans ce chapitre est l'utilisation de la méthode à grand incrément de temps appelé M.A.G.I.T. ou L.A.T.I.N (Large Increment Time Integration) pour intégrer les équations constitutives du modèle D.N.L.R. au niveau du VER. Cette méthode développée par Ladevèze (1984) consiste à partager l'ensemble des équations d'un problème en deux groupes : un groupe constitué d'équations linéaires et un autre constitué d'équations non linéaires. Cette décomposition est, selon son auteur, très efficace pour l'étude complète du comportement d'une structure. Nous l'avons adaptée et appliquée au modèle D.N.L.R. avec succès, son efficacité en terme de temps de calcul reste cependant à parfaire.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>132</b>
<b>5.2</b>	<b>Méthode de Newton-Raphson</b>	<b>132</b>
<b>5.3</b>	<b>Méthode à grand incrément de temps</b>	<b>134</b>
5.3.1	Definitions et principes	134
5.3.2	Construction de l'algorithme	135
5.3.3	Étape locale	136
5.3.4	Étape globale	136
5.3.5	Convergence de l'algorithme	137
5.3.6	Choix des Opérateurs de projection	138
<b>5.4</b>	<b>Application de la M.A.G.I.T. au D.N.L.R.</b>	<b>139</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>146</b>

---

## 5.1 Introduction

La méthode à grand incrément de temps est selon son auteur [Ladeveze (1984)], en rupture complète avec les méthodes incrémentales classiques de types Newton-Raphson. Elle diffère de ces dernières puisqu'elle n'utilise pas d'incrément. L'intervalle d'étude  $[0, T]$  n'a pas à être discrétisé en incréments  $\Delta t$ . C'est une méthode itérative qui part d'une approximation parfois grossière des variables en tout point  $M$  de la structure  $(\Omega)$  et à tout instant  $t \in [0, T]$ . A chaque itération une amélioration est apportée à la solution jusqu'à convergence vers la solution finale en tout point  $M$  de  $(\Omega)$  sur tout l'intervalle  $[0, T]$ . La méthode est bâtie autour de trois principes :

- P1** séparation des difficultés, en décomposant les équations du problème d'évolution en deux groupes ;
- un groupe d'équations locales en variables d'espaces non linéaires : lois de comportement par exemple
  - un groupe d'équation linéaires, éventuellement globales en variables d'espaces : équations d'équilibres et conditions aux limites.
- P2** approche itérative à deux étapes où l'on construit, à chaque itération, alternativement une solution du premier groupe d'équations et du second groupe d'équations
- P3** utilisation d'approximation temps-espace ad-hoc à contenu mécanique, pour le traitement global définit sur  $\Omega \otimes [0, T]$

Le principe **P1** est naturellement satisfait dans le cadre de la méthode de l'état local qui conduit à des relations de l'état local qui ne dépendent que du point  $M$  considéré. Ceci conduit à des relations de comportement locales mais non-linéaires, et des équations d'équilibres globales mais linéaires.

Pour satisfaire le principe **P2** et **P3** une famille très générale d'algorithmes à deux directions de recherche existe dans la littérature [Boisse et al (1990)], [Cognard et al (1990)]. Ces algorithmes ont pour but de trouver la solution du problème qui est l'intersection des deux groupes construits en **P1**.

L'objectif de ce chapitre est de rappeler succinctement les différentes techniques d'intégration et d'utiliser la méthode à grand incrément de temps pour intégrer les équations constitutives du modèle D.N.L.R. au niveau du VER. Ceci nous conduira d'une part, à comparer cette méthode complexe à mettre en œuvre et d'autre part à évaluer le gain en terme de temps de calcul qu'elle peut offrir vis à vis de la stratégie D.N.L.R..

## 5.2 Méthode de Newton-Raphson

Les méthodes de bisection et d'interpolation linéaire proposent chacune une manière respective d'obtenir, étape par étape, une valeur approchée d'un zéro réel à localiser. L'objectif de ces différentes méthodes est de résoudre des équations non linéaires de la forme :

$$f(U) = a \tag{5.1}$$

$a^{(1)}$  est la valeur "cible" pour  $f(U)$  et l'on cherche la valeur de  $U$  correspondante. La méthode est basée sur l'utilisation de la tangente en un point de la courbe de la fonction  $f$ . Plus précisément, le choix d'une première valeur  $U_0$  approchée de la valeur "cible" réelle à localiser,

---

<sup>11</sup> $a=0$  en général

détermine un premier point  $(U_0, f(U_0))$  sur la courbe qui sera considéré comme un premier point de la tangence. Cette valeur  $U_0$  est appelée "amorce" du procédé itératif de Newton-Raphson. L'abscisse  $U_1$  du point d'intersection de la première tangente avec l'axe des  $U$  sera considérée comme une deuxième valeur approchée de la "cible". A son tour, cette valeur permettra de considérer un deuxième point de tangence  $(U_1, f(U_1))$ . A nouveau, l'abscisse  $U_2$  d'intersection de la deuxième tangente avec l'axe des  $U$  sera considérée comme une troisième valeur approchée de la "cible". En poursuivant ce procédé itérativement, on obtiendra, sous certaines conditions, une séquence de différentes valeurs  $U_1, U_2, U_3, \dots$  qui vont se rapprocher de plus en plus de la valeur de  $U$  correspondant à la valeur "cible" de  $f$

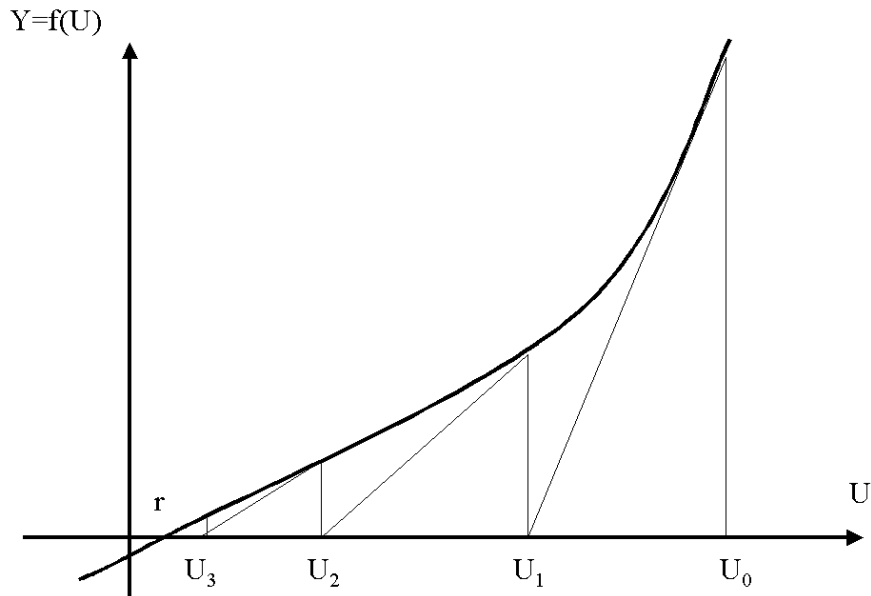


FIG. 5.1 – Algorithme de Newton

Pour déterminer successivement les abscisses  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , des points d'intersection des différentes tangentes avec l'axe des  $U$ , nous avons besoin de connaître l'équation de chaque tangente. Si la fonction  $f$  est dérivable au point  $(U_k, y_k)$ , la pente de la tangente à la courbe passant par ce point est directement donnée par :

$$y = f'(U_k)(U - U_k) + f(U_k)$$

L'abscisse du point d'intersection de la  $k^{\text{ième}}$  tangente avec l'axe des  $U$  est évidemment la racine de l'équation :

$$a = f'(U_k)(U - U_k) + f(U_k)$$

En résolvant, pour  $U$ , cette équation, on obtient :

$$U = U_k + \frac{a - f(U_k)}{f'(U_k)} \quad (5.2)$$

Or, la valeur de  $U$  est précisément la prochaine approximation  $U_{k+1}$  qui est prise en charge dans ce procédé itératif. On en déduit donc :

$$U_{k+1} = U_k + \frac{a - f(U_k)}{f'(U_k)} \quad (5.3)$$

Ces itérations sont arrêtées lorsque la différence entre deux valeurs successives de la suite est, en valeur relative, inférieure à une valeur fixée par la précision  $\epsilon \ll 1$  :

$$\frac{|U_{k+1} - U_k|}{U_{k+1}} < \epsilon$$

Cette inéquation est appelée inéquation de récurrence de Newton-Raphson. Cette manière de procéder à l'établissement des valeurs  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , est appelée méthode de Newton-Raphson <sup>(12)</sup>.

Cette méthode qui s'appuie sur la tangente pour choisir le prochain incrément sur  $U$ , conduit à une accélération notable du calcul par rapport à une dichotomie qui explorerait  $f(U)$  avec des incréments constants. Elle trouve ces limites lorsque le problème possède plusieurs solutions et nécessite la connaissance analytique de  $f$  et  $f'$ .

### Remarque :

Dans le cas de l'étude du comportement non linéaire d'un matériau, la méthode de Newton-Raphson utilise la matrice de rigidité  $K_t$ , comme la matrice des tangentes. Si elle converge avec un nombre réduit d'incrément, elle est assez coûteuse du fait du calcul à chaque itération de la matrice  $K_t$  et de son inverse (décomposition). Il peut être plus intéressant d'utiliser d'autres variantes avec  $K_t = K_0$  constant au cours des itérations, ce qui rend le calcul moins coûteux. On peut citer dans ce cas les méthodes de **Newton-Raphson modifiée**. Cette méthode consiste à garder au cours des itérations la matrice tangente de début d'incrément. Une seule décomposition est donc nécessaire. Si cette méthode évite le calcul de la matrice de rigidité à chaque itération, elle nécessite un nombre d'itérations plus important et les convergences sur l'incrément risquent d'être très lentes.

## 5.3 Méthode à grand incrément de temps

L'idée est de séparer les équations du problèmes en deux ensembles :

- ensemble constitué des éléments vérifiant les équations **linéaires**
- ensemble constitué des éléments vérifiant les équations **non linéaires**.

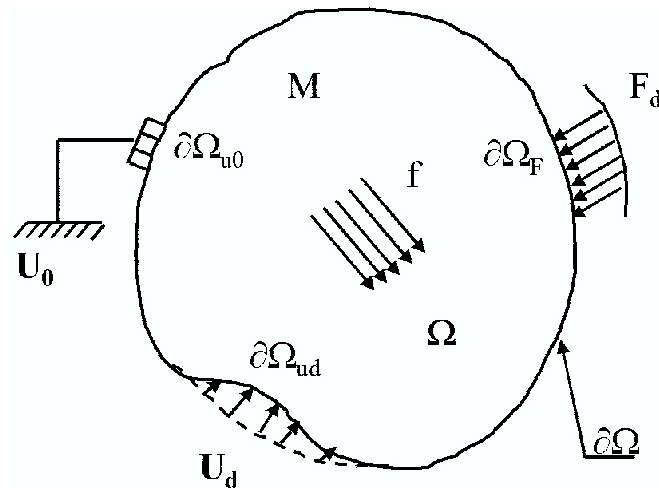
La solution exacte du problème est l'intersection de ces deux ensembles. On construit donc un algorithme itératif à deux étapes, qui consiste à réaliser la **projection** successive entre ces deux ensembles de manière à converger vers la solution exacte.

### 5.3.1 Définitions et principes

Un solide  $\mathbb{S}$  occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  soumis pendant un intervalle de temps  $[0, T]$ , à des efforts de type surfacique  $F_d$ , de type volumique  $f_v$  et des déplacements prescrits sur une partie de sa frontières (figure 5.2).

---

<sup>12</sup>Raphson a publié cette méthode en 1690, soit presque 50 ans avant que Newton lui-même ne l'ait publiée. Bien que Newton l'ait développée en 1671, il ne l'a, quant à lui, publiée qu'en 1736. Voilà pourquoi cette méthode porte les deux noms.

FIG. 5.2 – Représentation graphique de efforts appliqués sur un solide  $\mathbb{S}$ 

Soit  $M$  un point quelconque du solide  $\mathbb{S}$ ; on désigne par  $s$  l'ensemble des couples contraintes  $\sigma(M, t)$ , taux de déformation  $\dot{\epsilon}(M, t)$  pour tout point  $M$  du solide  $\mathbb{S}$  et pour  $t$  de  $[0, T]$ . On définit alors le champ  $s$  tel que  $s = (\sigma(M, t); \dot{\epsilon}(M, t)) \forall M$  et  $t$  (le choix du champ est bien entendu fonction du modèle de comportement). La solution du problème général de la mécanique consiste à déterminer le champ  $s$  vérifiant les 3 conditions suivantes :

- les conditions aux limites
- les équations d'équilibre
- la loi de comportement

Les conditions aux limites et les équations d'équilibre définissent les champs statiquement admissibles. L'approche de la solution selon la M.A.G.I.T. commence par la construction des deux ensembles suivants :

- l'ensemble  $A_d$  des champs statiquement admissibles, vérifiant simultanément les conditions aux limites et les équations d'équilibre. Ces équations sont définies une fois pour l'ensemble du solide, et sont présentées, dans la plupart des cas, sous forme linéaire. C'est l'**étape globale**.
- l'ensemble  $\Gamma$  des champs qui vérifient la loi de comportement indépendamment des conditions aux limites et des équations d'équilibre. Ces équations sont non linéaires et locales c'est à dire qu'elles doivent être vérifiées localement en tout point du solide. C'est l'**étape locale**.

Bien entendu la solution réelle qui doit satisfaire les trois types de conditions se trouve à la "confluence" des champs globaux et locaux ainsi construits.

### 5.3.2 Construction de l'algorithme

Le découpage des équations selon un ensemble d'équations globales et un ensemble d'équations locales, nous conduit à construire un algorithme itératif à deux étapes que nous pouvons schématiser ainsi.

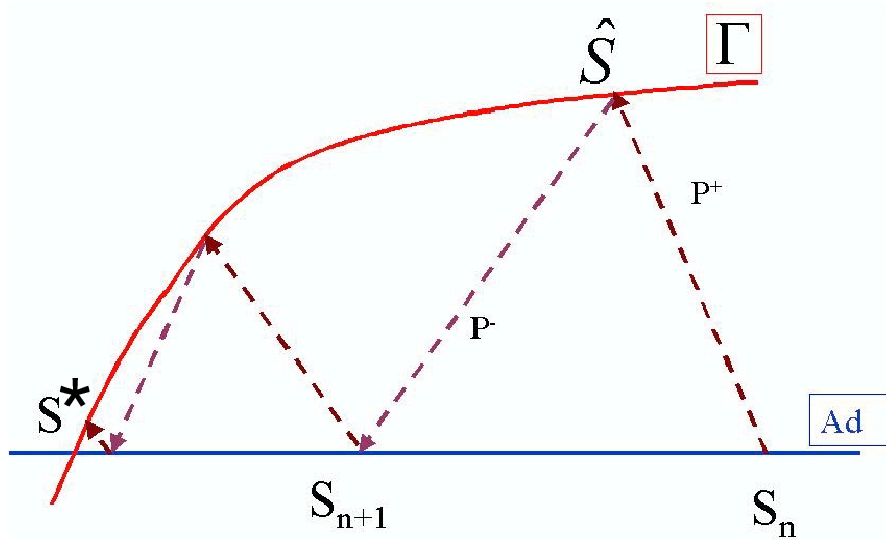


FIG. 5.3 – Schématisation de la M.A.G.I.T -  $S$  domaine des champs statiquement admissible -  $\hat{S}$  domaines des champs compatibles avec la loi de comportement -  $S^*$  solution du problème

$A_d$  est représenté par une droite et  $\Gamma$  par une courbe du fait de sa non linéarité. Soit  $s_n = (\sigma_n, \dot{\epsilon}_n)$  un champ admissible appartenant à  $A_d$  obtenu à la  $n^{\text{ième}}$  itération. L'obtention du champ  $s_{n+1} = (\sigma_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1})$  se fait en deux étapes : une étape locale à l'aide d'un opérateur de projection ( $P^+$ ) suivie d'une étape globale à l'aide du projecteur ( $P^-$ ).

### 5.3.3 Étape locale

Cette étape est la détermination du champ local  $\hat{s} = (\hat{\sigma}, \hat{\dot{\epsilon}})$  appartenant à  $\Gamma$  obtenu en projetant le champ  $s_n = (\sigma_n, \dot{\epsilon}_n)$  de  $A_d$  selon une direction  $P^+$  sur l'ensemble  $\Gamma$ .  $\hat{s}$  vérifie donc les équations de la loi de comportement. Les équations traduisant cette étape pour une loi de comportement simple, sont définies par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \hat{\dot{\epsilon}}(M, t) - \dot{\epsilon}_n(M, t) = P^+(M, t) \cdot (\hat{\sigma}(M, t) - \sigma_n(M, t)) \\ \hat{\dot{\epsilon}}(M, t) = A(\hat{\sigma}(M, \tau), \tau \leq t) \end{cases} \quad (5.4)$$

La première équation traduit la projection assurant le passage entre ces deux ensembles et la deuxième est la loi de comportement. L'inconnue de cette étape est le champ local  $\hat{s}$  de  $\Gamma$ . La résolution de ces équations se fait en tout point  $M$  du solide  $S$ , de manière indépendante. Ce sont des équations locales. L'opérateur  $P^+$  qui dépend de  $\hat{s}$  est aussi une inconnue de cette étape. Le caractère non linéaire de cette étape provient donc non seulement de la loi de comportement, mais également de l'équation de projection.

### 5.3.4 Étape globale

Cette étape est relative à la détermination du champ statiquement admissible  $s_{n+1} = (\sigma_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1})$  de  $A_d$ , selon la direction  $P^-$ , le champ local  $\hat{s}$  a été obtenu à l'étape précédente. Les équations de cette étape s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{n+1}(M, t) - \hat{\epsilon}(M, t) = P^-(M, t) \cdot (\sigma_{n+1}(M, t) - \hat{\sigma}(M, t)) \\ (\dot{\epsilon}_{n+1}(M, t), \sigma_{n+1}(M, t)) \in A_d \end{cases} \quad (5.5)$$

Même si l'opérateur  $P^-$  dépend de  $\hat{s}$ , il ne constitue pas une inconnue de cette étape puisque  $\hat{s}$  est connu. Cette étape de retour aux équations globales est linéaire. On comprend mieux dès à présent pourquoi la méthode M.A.G.I.T. est complètement différente des méthodes incrémentales traditionnelles. En effet, la méthode Newton-Raphson consiste à découper l'intervalle de temps d'étude en petit incrément  $[t_i, t_{i+1}]$  puis à déterminer la solution de proche en proche sur chaque incrément. Au contraire avec la méthode M.A.G.I.T. dès la première itération c'est une solution approchée sur tout l'intervalle de temps d'étude qui est déterminée. Les systèmes d'équations différentielles sont définies sur l'intervalle d'étude  $[0, T]$ .

L'efficacité des algorithmes à grand incrément de temps proviendrait de la séparation des difficultés. Lors de l'étape locale les équations sont traitées individuellement en chaque point, mais elles sont non linéaires. Lors de l'étape globale, les équations sont linéaires mais ne peuvent pas être résolues indépendamment.

### 5.3.5 Convergence de l'algorithme

Etant donné que la solution exacte du problème est l'intersection de l'ensemble  $A_d$  et de l'ensemble  $\Gamma$ , pour évaluer la qualité de la solution approchée à la  $n^{\text{ième}}$  itération, il suffit de définir une norme caractérisant la distance entre les champs  $s_n$  de  $A_d$  et  $\hat{s}$  de  $\Gamma$ . Lorsque l'on se rapproche de l'intersection, cette distance tend naturellement vers zéro. Il n'est pas possible de définir une norme commune aux deux ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$ , c'est pourquoi on introduit deux champs appartenant à  $\Gamma$ ,  $s_c$  et  $s_s$  calculés à partir du champ  $s_n$  et  $A_d$  tels que :

$$s_c = \left( \hat{\epsilon}_c(M, t), \hat{\sigma}_c(M, t) \right) \in \Gamma$$

$$\hat{\epsilon}_c(M, t) = \dot{\epsilon}_n(M, t)$$

$$s_s = \left( \hat{\epsilon}_s(M, t), \hat{\sigma}_s(M, t) \right) \in \Gamma$$

$$\hat{\sigma}_s(M, t) = \dot{\sigma}_n(M, t)$$

On définit alors une norme sur  $\Gamma$

$$\|s_1\|_{\Gamma} = \sqrt{\int_0^T \int_{\Omega} Tr[\sigma \cdot \dot{\epsilon}] d\Omega dt} \quad (5.6)$$

et enfin on définit une erreur relative par :

$$E(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \quad (5.7)$$

avec



$$\begin{aligned} u(t) &= \sup \|s_c - s_s\|_{\Gamma} \\ v(t) &= \sup \left\| \frac{1}{2}(s_c + s_s) \right\|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (5.8)$$

On est donc en mesure de déterminer quantitativement la qualité de la solution approchée, sans pour autant connaître cette solution. L'erreur relative est utilisée pour stopper les itérations. C'est une erreur globale en loi de comportement puisqu'elle est calculée sur tout l'intervalle de temps d'étude et sur toute la structure étudiée.

Comme on peut s'en douter l'efficacité des algorithmes à grand incrément de temps est fortement conditionnée par le choix des opérateurs de projections  $P^+$  et  $P^-$ . Il est vrai que toute expression assurant le passage convient du moment que l'on a convergence.

### 5.3.6 Choix des Opérateurs de projection

Il existe plusieurs versions de la M.A.G.I.T. en fonction du choix des opérateurs de projection. Nous en présentons deux pour différents types de lois de comportement.

#### Version 1 de la M.A.G.I.T.

Elle est construite pour les lois de comportement dites "simples" de la forme :

$$\hat{\epsilon}(M, t) = A(\hat{\sigma}(M, \tau), \tau \leq t)$$

Les opérateurs de projection sont donnés par :

$$\begin{cases} P^+(M, t) = 0 \\ P^-(M, t) = -\hat{K}_t^{-1}(M, t) \cdot \frac{d}{dt} \end{cases} \quad (5.9)$$

Soit pour l'étape locale

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}(M, t) - \dot{\epsilon}_n(M, t) = P^+(M, t) \cdot (\hat{\sigma}(M, t) - \sigma_n(M, t)) \\ \hat{\epsilon}(M, t) = A(\hat{\sigma}(M, \tau), \tau \leq t) \end{cases} \quad (5.10)$$

Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}(M, t) = \dot{\epsilon}_n(M, t) \\ \hat{\epsilon}(M, t) = A(\hat{\sigma}(M, \tau), \tau \leq t) \end{cases} \quad (5.11)$$

Et pour l'étape globale :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{n+1}(M, t) - \hat{\epsilon}(M, t) = P^- \cdot [\sigma_{n+1}(M, t) - \hat{\sigma}(M, t)] \\ (\dot{\epsilon}_{n+1}(M, t), \sigma_{n+1}(M, t)) \in A_d \end{cases} \quad (5.12)$$

ou encore :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{n+1}(M, t) = \hat{\epsilon}(M, t) - \hat{K}_t^{-1}(M, t) \cdot \frac{d}{dt} \cdot [\sigma_{n+1}(M, t) - \hat{\sigma}(M, t)] \\ (\dot{\epsilon}_{n+1}(M, t), \sigma_{n+1}(M, t)) \in A_d \end{cases} \quad (5.13)$$

où  $\hat{K}_t^{-1}$  est le tenseur des souplesses associé au champ  $\hat{s} = (\hat{\epsilon}(M, t), \hat{\sigma}(M, t))$  tel que :

$$\hat{\sigma}(M, t) = \hat{K}_t \cdot \hat{\epsilon}(M, t)$$

### Version 2 de la M.A.G.I.T.

C'est une version développée dans le but d'accélérer la convergence. Seule l'expression de  $P^+$  change.

$$\begin{cases} P^+(M, t) = +\hat{K}_t^{-1}(M, t) \cdot \frac{d}{dt} | \\ P^-(M, t) = -\hat{K}_t^{-1}(M, t) \cdot \frac{d}{dt} | \end{cases} \quad (5.14)$$

Et nous obtenons pour l'étape locale :

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}(M, t) = \dot{\epsilon}_n(M, t) + \hat{K}_t^{-1}(M, t) \cdot \frac{d}{dt} \cdot [\hat{\sigma}(M, t) - \sigma_n(M, t)] \\ \hat{\epsilon}(M, t) = A(\hat{\sigma}(M, \tau), \tau \leq t) \end{cases} \quad (5.15)$$

L'étape globale reste inchangé :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{n+1}(M, t) = \hat{\epsilon}(M, t) - \hat{K}_t^{-1}(M, t) \cdot \frac{d}{dt} \cdot [\sigma_{n+1}(M, t) - \hat{\sigma}(M, t)] \\ (\dot{\epsilon}_{n+1}(M, t), \sigma_{n+1}(M, t)) \in A_d \end{cases} \quad (5.16)$$

## 5.4 Application de la M.A.G.I.T. au D.N.L.R.

L'idée est donc de séparer l'ensemble des équations constitutives du modèle D.N.L.R. en deux groupes, un groupe  $Ad$  constitué d'équations "dites" linéaires qui assureront la compatibilité avec les conditions aux limites et les conditions d'équilibre et un groupe  $\Gamma$  constitué d'équations non linéaires qui vérifient la loi de comportement. La solution exacte du problème est l'intersection des deux ensembles. Les équations constitutives du modèle D.N.L.R. sont

$$\begin{cases} \underline{\dot{\sigma}}^j & = P_0^j \underline{\underline{A}}^u \underline{\dot{\epsilon}} - \frac{\underline{\sigma}^j - P_0^j \underline{\underline{A}}^r \underline{\epsilon}}{\tau^j} \\ \underline{\dot{\sigma}} & = \sum_j \underline{\dot{\sigma}}^j \\ \sum_j P_0^j & = 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Elles peuvent, par exemple, être décomposées selon les deux groupes suivants :

$$\begin{cases} \underline{\dot{\sigma}}^j & = P_0^j \underline{\underline{A}}^u (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^{an}) \in \mathbf{A}_d \\ \underline{\dot{\epsilon}}^{an} & = \underline{\underline{A}}^{u-1} \sum_j \frac{\underline{\sigma}^j - P_0^j \underline{\underline{A}}^r \underline{\epsilon}}{\tau^j} \in \Gamma \end{cases} \quad (5.18)$$

La résolution du système différentiel (5.18) doit donner  $\underline{\sigma}^j$  et  $\underline{\epsilon}^{an}$ . Nous choisissons, arbitrairement, à partir de ces deux ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$  les processus-champs :

$$S_n = (\underline{\sigma}_n^j, \underline{\epsilon}_n^{an}) \in A_d$$

et

$$\hat{S} = (\hat{\sigma}^j, \hat{\epsilon}^{an}) \in \Gamma$$

Nous construisons autour de ces deux ensembles un algorithme itératif à deux étapes. Il consiste à réaliser la projection successive entre ces deux ensembles de manière à converger vers la solution exacte (figure 5.3). Les opérateurs de projection  $P^+$  et  $P^-$  pour les versions 1 et 2 de la M.A.G.I.T. découlent directement de la loi de comportement par la forme des expressions suivantes :

### Pour la version 1

Les opérateurs de projections sont données par :

$$\begin{cases} P^+(M, t) = 0 \\ P^-(M, t) = -\frac{d\underline{\epsilon}^{an}}{d\underline{\sigma}^j} = -A^{u-1} \sum_j \frac{1}{\tau^j} \end{cases} \quad (5.19)$$

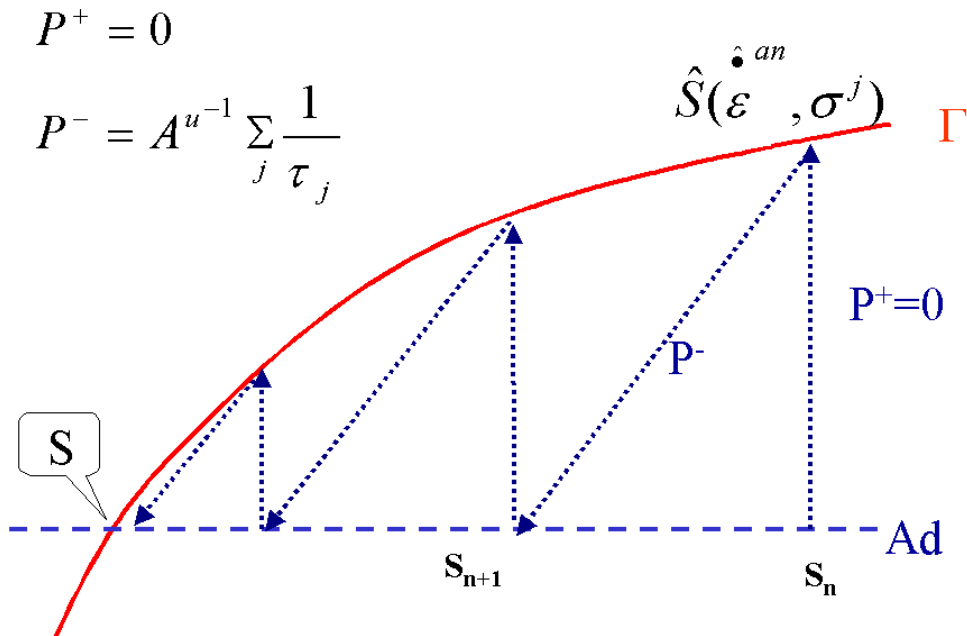


FIG. 5.4 – Schéma de la M.A.G.I.T version 1

La première étape consiste à projeter le champ  $s_n = (\underline{\sigma}_n^j, \underline{\epsilon}_n^{an})$ , connu, appartenant à  $A_d$  défini sur l'intervalle d'étude  $[0, T]$ , sur  $\Gamma$  par l'intermédiaire de l'opérateur de projection  $P^+$ . Ce qui

se traduit mathématiquement par deux équations où l'inconnue est le champ  $\hat{s} \left( \hat{\sigma}^j, \hat{\underline{\epsilon}}^{an} \right)$  :

La première équation traduit la projection de  $s_n$  sur  $\Gamma$  par rapport à  $P^+$  :

$$\hat{s} = P^+(s_n) \iff \hat{\underline{\epsilon}}^{an} - \underline{\dot{\epsilon}}_n^{an} = P^+ \cdot (\hat{\sigma}^j - \underline{\sigma}_n^j)$$

Comme  $P^+=0$ , nous avons.

$$\hat{\underline{\epsilon}}^{an} = \underline{\dot{\epsilon}}_n^{an}$$

La deuxième équation est une relation qui lie  $\hat{\sigma}^j$  à  $\hat{\underline{\epsilon}}^{an}$ . Puisque  $\hat{s} \in \Gamma$  et que  $\Gamma$  représente la loi de comportement, cette relation est donc la loi de comportement définie comme suit :

$$\hat{s} \in \Gamma \iff \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = -A^{u-1} \sum_j \left( \frac{\hat{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \right)$$

L'étape locale s'écrit alors :

$$\begin{cases} \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = \underline{\dot{\epsilon}}_n^{an} \\ \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = -A^{u-1} \sum_j \left( \frac{\hat{\sigma}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \right) \end{cases} \quad (5.20)$$

Cette étape est non linéaire car les  $\tau^j$  dépendent des  $\hat{\sigma}^j$ . La résolution de ce système différentiel nous donne le champ  $\hat{s} = (\hat{\sigma}^j, \hat{\underline{\epsilon}}^{an}) \in \Gamma$  que nous projetons à nouveau sur  $A_d$  par l'intermédiaire de  $P^-$ . Ce qui se traduit à nouveau par un système d'équations où l'inconnue est le champ  $s_{n+1} = P^-(\hat{s})$

l'équation de projection de  $\hat{s}$  sur  $A_d$  est donnée par :

$$s_{n+1} = P^-(\hat{s}) \iff \underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an} - \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = P^- \cdot (\underline{\sigma}_{n+1}^j - \hat{\sigma}^j)$$

La deuxième équation est une relation qui lie  $\underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an}$  à  $\underline{\dot{\sigma}}_{n+1}^j$  puisque  $s_{n+1} \in A_d$ . Cette relation est donnée par :

$$s_{n+1} = (\underline{\sigma}_{n+1}^j, \underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an}) \in A_d \iff \underline{\dot{\sigma}}_{n+1}^j = P_0^j \underline{A}^u (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an})$$

$\underline{\dot{\epsilon}}$  est la vitesse de déformation totale, elle est parfaitement connue pour un essai à déformation contrôlée. l'étape globale s'écrit alors :

$$\begin{cases} \underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an} - \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = P^- \cdot (\underline{\sigma}_{n+1}^j - \hat{\sigma}^j) \\ \underline{\dot{\sigma}}_{n+1}^j = P_0^j \underline{A}^u (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an}) \end{cases} \quad (5.21)$$

Dans cette étape les  $\tau^j$  dépendent des  $\hat{\sigma}^j$ , mais ces derniers sont connus à partir de l'étape précédente. La résolution de ce système d'équations linéaires donne le champ  $s_{n+1} = (\underline{\sigma}_{n+1}^j, \underline{\dot{\epsilon}}_{n+1}^{an}) \in A_d$ .

L'écart entre  $s_{n+1}$  et  $\hat{s}$  est évalué après chaque résolution des deux systèmes. Nous construisons ainsi un schéma itératif qui tend naturellement vers la solution exacte du problème qui est l'intersection de deux ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$ . Il faut cependant imposer une condition d'arrêt sinon le calcul risque de diverger. Pour cette version nous arrêtons les itérations quand l'écart maximal entre  $\hat{\sigma}$  et  $\sigma_{n+1}$  est inférieur à 0.1 %

$$Ec = \text{Max}_{[0,T]} \frac{\|\hat{\sigma} - \sigma_{n+1}\|}{\left\| \frac{1}{2} (\hat{\sigma} + \sigma_{n+1}) \right\|} \quad (5.22)$$

Entre la première et la deuxième itération l'écart passe de 74 % (figure 5.5), à 3.7 % (figure 5.6). A la troisième itération nous avons une superposition quasi parfaite entre  $\sigma_{n+1}$  et  $\hat{\sigma}$  (Ec= 0.02 %). Le temps (cpu time) utilisé par la machine pour réaliser ces trois itérations est égal à 8.1 secondes là où la méthode incrémentale (avec pas adaptatif) ne met que 0.2 seconde.

Ainsi, notre choix des ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$  ainsi que des projecteurs  $P^+$  et  $P^-$  nous conduit à une méthode pénalisante par rapport à l'analyse incrémentale utilisée jusqu'ici. La version 2 qui suit tente d'améliorer cette situation défavorable en terme de temps de calcul.

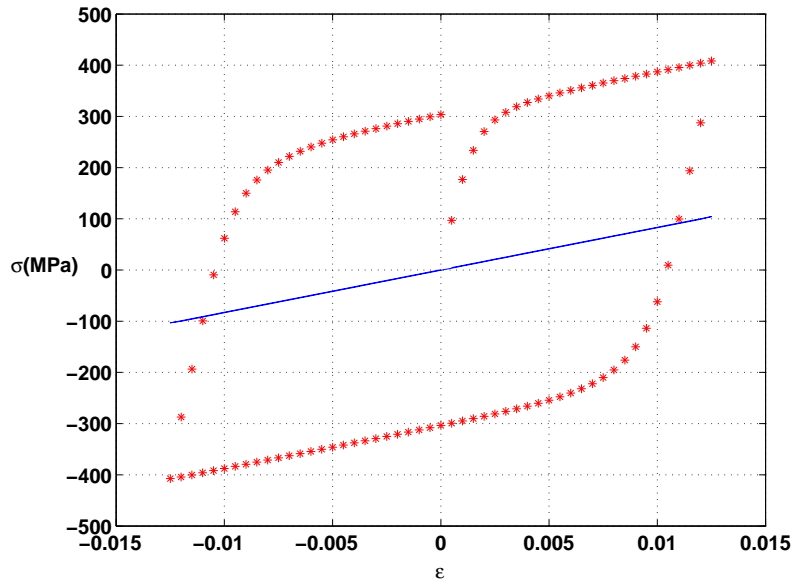


FIG. 5.5 – Première itération de la version 1 de la M.A.G.I.T.

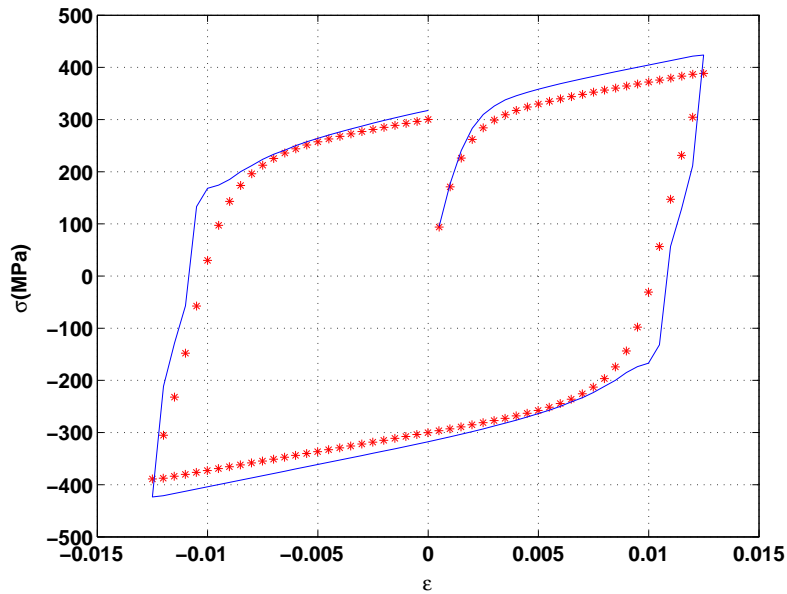


FIG. 5.6 – Deuxième itération de la version 1 de la M.A.G.I.T.

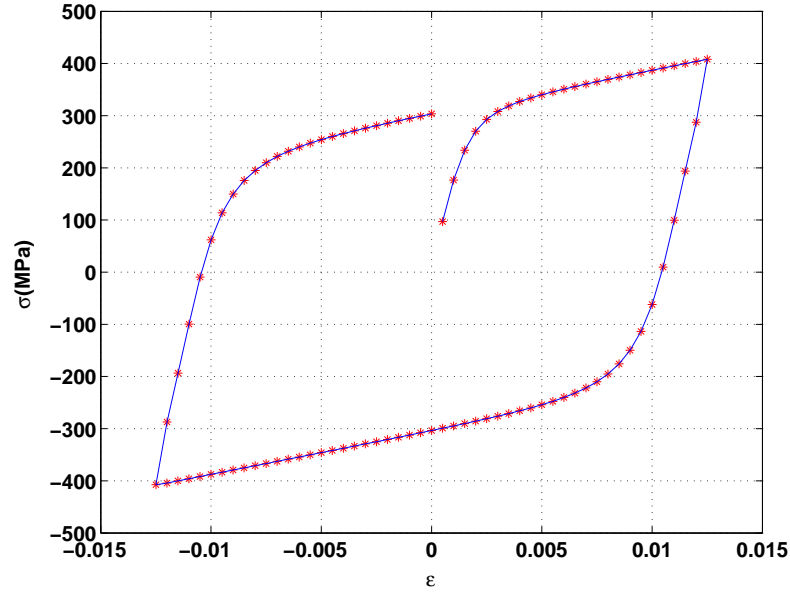


FIG. 5.7 – Troisième itération de la version 1 de la M.A.G.I.T.

## Pour la version 2

Les ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$  sont conservés, mais cette fois les opérateurs de projections sont donnés par :

$$P^+(M, t) = -P^-(M, t) = \frac{d\hat{\underline{\epsilon}}^{an}}{d\sigma^j} = \underline{\underline{A}}^{u-1} \sum_j \frac{1}{\tau^j} \quad (5.23)$$

Le schéma d'intégration reste identique à la version 1. Seule l'expression  $P^+(M, t)$  change. A partir d'un champ initial  $s_n = (\underline{\sigma}_n^j, \hat{\underline{\epsilon}}_n^{an})$  appartenant à  $A_d$ , il faut trouver  $\hat{s} = (\hat{\underline{\sigma}}^j, \hat{\underline{\epsilon}}^{an})$  appartenant à  $\Gamma$  projeté de  $s_n$  par  $P^+$ .

$$\hat{s} = P^+(s_n) \iff \hat{\underline{\epsilon}}^{an} - \hat{\underline{\epsilon}}_n^{an} = P^+(\hat{\underline{\sigma}}^j - \underline{\sigma}_n^j)$$

et aussi

$$\hat{s} \in \Gamma \iff \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = -A^{u-1} \sum_j \left( \frac{\hat{\underline{\sigma}}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \right)$$

L'étape locale s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\epsilon}}^{an} - \hat{\underline{\epsilon}}_n^{an} = P^+ \cdot (\hat{\underline{\sigma}}^j - \underline{\sigma}_n^j) = A^{u-1} \sum_j \frac{\hat{\underline{\sigma}}^j - \underline{\sigma}_n^j}{\tau^j} \\ \hat{\underline{\epsilon}}^{an} = A^{u-1} \sum_j \left( \frac{\hat{\underline{\sigma}}^j - \underline{\sigma}^{j,r}}{\tau^j} \right) \end{array} \right. \quad (5.24)$$

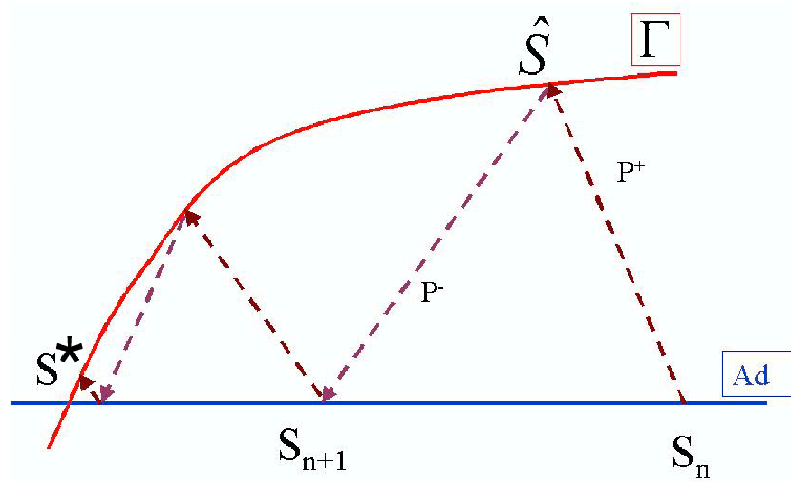


FIG. 5.8 – Schéma de la M.A.G.I.T version 2

Nous projetons le champ  $\hat{s} = (\hat{\sigma}^j, \hat{\epsilon}^{an}) \in \Gamma$  sur  $A_d$  par l'intermédiaire de  $P^-$ , nous terminons la première phase du processus itératif. Ceci est traduit par un système d'équations où l'inconnue est le champ  $s_{n+1} = P^-(\hat{s})$  :

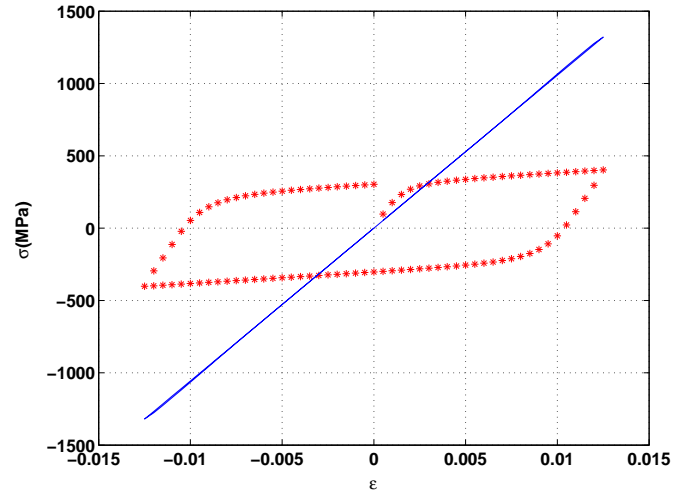
$$s_{n+1} = (\underline{\sigma}_{n+1}^j, \underline{\epsilon}_{n+1}^{an}) \in A_d \iff \underline{\sigma}_{n+1}^j = P_0^j \underline{A}^u (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_{n+1}^{an})$$

$$s_{n+1} = P^-(\hat{s}) \iff \underline{\epsilon}_{n+1}^{an} - \hat{\epsilon}^{an} = P^-(\underline{\sigma}_{n+1}^j - \hat{\sigma}^j)$$

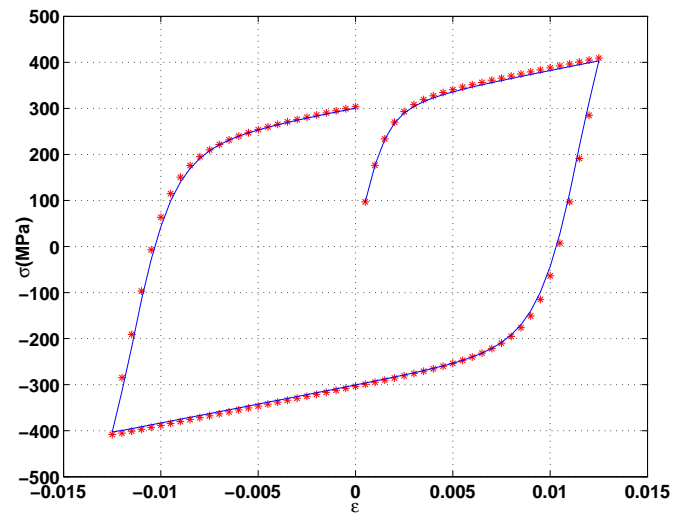
L'étape globale s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}_{n+1}^{an} - \hat{\epsilon}^{an} = P^-(\underline{\sigma}_{n+1}^j - \hat{\sigma}^j) = -A^{u-1} \sum_j \frac{(\underline{\sigma}_{n+1}^j - \hat{\sigma}^j)}{\tau^j} \\ \underline{\sigma}_{n+1}^j = P_0^j \underline{A}^u (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_{n+1}^{an}) \end{cases} \quad (5.25)$$

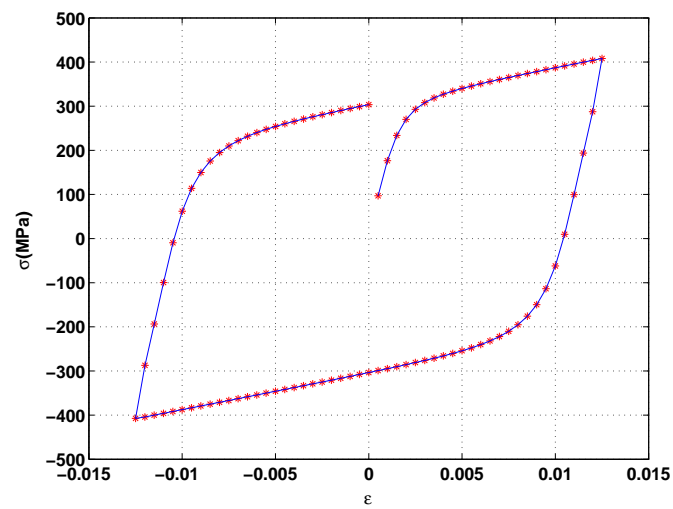
De même que pour la version 1, la résolution de ce système d'équation permet d'obtenir  $s_{n+1}$  qui doit être égale à  $\hat{s}$  à 0.1% près. Il s'avère que la version 2 n'améliore pas vraiment la situation constatée avec la version 1 en terme de temps de calcul. Par contre, au niveau de la convergence et de la précision du calcul, nous constatons, dès la deuxième itération, que la solution de la version 2 (figure 5.9) est meilleure que celle de la version 1.



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.9 – Version 2 : itération 1, 2 et 3



Si nous comparons les temps de calcul pour un modèle D.N.L.R. donné en version M.A.G.I.T et en version incrémentale, nous observons que la version M.A.G.I.T est environ 1000 fois plus rapide que la version incrémentale sans accélération de pas de temps. Par contre, si nous adjoignons un pas adaptatif à la version incrémentale, elle devient environ 7 fois plus rapide que la version M.A.G.I.T quel que soit le nombre de cycle à simuler (figure. 5.10). Ceci peut être expliqué par le fait que la méthode incrémentale est une méthode d'intégration qui n'oblige pas à stocker en mémoire les résultats des itérations précédentes. Par contre la version à grand incrément de temps qui dans sa formulation générale paraît efficace, nous oblige, sur le plan numérique, à stocker dans la mémoire informatique, l'itération précédente pour la comparer avec l'itération actuelle. Dans le cadre retenu nous avons en effet :

- 4 équations matricielle (50 modes x 6 composantes) dont 2 fortement non linéaires à intégrer.
- une infinité de variables à stocker entre deux itérations

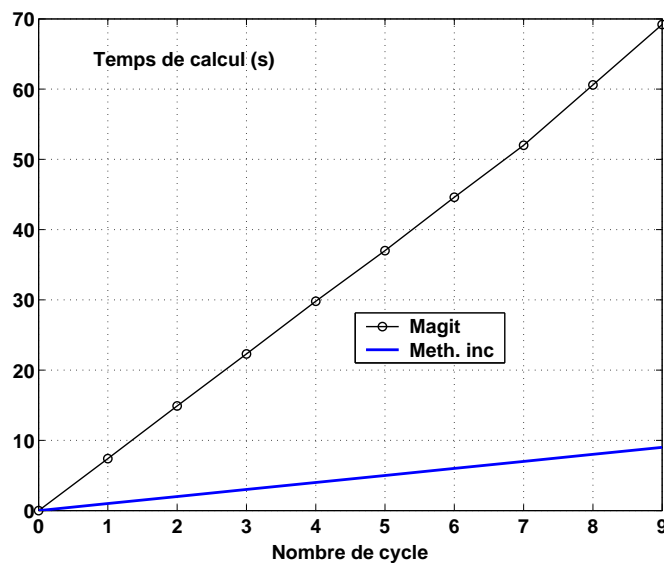


FIG. 5.10 – Evolution du temps de calcul en fonction des cycles

## 5.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons essayé d'obtenir un gain en temps de calcul dans la résolution des équations D.N.L.R. en empruntant la voie originale tracée par Ladevèze. Il s'avère que notre choix des ensembles  $A_d$  et  $\Gamma$  et des projecteurs  $P^+$  et  $P^-$  s'il améliore considérablement le temps de calcul incrémental lorsque l'incrément est constant, ne saurait rivaliser véritablement avec les performances atteintes grâce à notre astuce fondée sur un pas adaptable lié au poids relatifs des modes.

## **Conclusion et perspectives**



# Conclusion et perspectives

Ce travail porte sur l'intégration de lois de comportement mécanique issues de la formulation D.N.L.R. dans un code de calcul par éléments finis. Ce formalisme, fondé sur la thermodynamique de la relaxation des milieux continus, "exploite" la théorie des fluctuations et l'analyse modale de la dissipation qui en découle. Il établit un lien entre les concepts de la thermodynamique dissipative des milieux continus et la physique des déformations à l'échelle microscopique dont les cinétiques sont thermodynamiquement activées.

Nous avons tout d'abord rappelé le cadre thermodynamique général dans lequel le formalisme a été développé et l'établissement des lois de comportement pour les mécaniciens notamment le comportement des matériaux élastoplastiques ou viscoplastiques. Trois formulations possibles (version I, version I-bis, et version II) ont été présentées. La première formulation (version I) est la version de base à 4 paramètres pour un chargement unidirectionnel d'un matériau isotrope et 6 paramètres pour un chargement multidirectionnel. Elle a permis de souligner la signification physique et l'influence de chacun de ces paramètres sur la courbe de traction. La deuxième formulation est la version I-bis, une variante qui diffère par l'existence d'une contrainte à l'état relaxé non linéaire présentant une hystérèse lors de chargements cycliques ; elle présente une certaine analogie avec l'écroutissage cinématique non linéaire de type Armstrong et Frederick. Cette version nécessite 7 paramètres. La troisième est une formulation à deux spectres de temps de relaxation, elle a été proposée par Toussaint et al (2000) pour modéliser le comportement mécanique de matériaux présentant deux régimes de viscosité. Cette version possède 10 paramètres. La présentation détaillée du formalisme et de ces différentes formulations fait l'objet du premier chapitre. Il ressort de cette première analyse que la modélisation de la réponse des matériaux peut nécessiter l'utilisation de plusieurs spectres de relaxation couplés pour décrire la partie visqueuse et que l'état relaxé doit être en régime stationnaire à affinité constante.

Les objectifs visés dans ce travail ont été multiples :

1. étudier qualitativement les aptitudes du modèle à simuler le comportement cyclique des matériaux,
2. intégrer et valider les équations constitutives du modèle dans un code de calcul par éléments finis,
3. situer les performances numériques du modèle en le comparant à d'autres existants dans la littérature,
4. utiliser la méthode à grand incrément de temps dans le but d'améliorer les performances numériques du modèle en terme de temps de calcul.

Concernant le premier objectif, nous avons étudié dans le **chapitre II**, le comportement cyclique du modèle D.N.L.R. avec les trois versions décrites dans le chapitre I. Il ressort de cette étude que : (i) les trois versions sont capables de prédire les phénomènes d'adoucissement et de durcissement cyclique moyennant une loi empirique et deux paramètres supplémentaires ( $a_w$

et bw ) [Loukil (1996)], (ii) les effets de mémoire et de rochet classique peuvent être simulés par les trois versions avec des qualités de réponses différentes, (iii) seule la version II est capable pour l'instant de prédire les phénomènes de surécrouissage et de rochet multiaxial avec des trajets de chargements complexes présentant plusieurs phases (chargement papillon). Nous n'avons pas pu réaliser, dans ce chapitre, une étude paramétrique du comportement cyclique du modèle, permettant une interprétation physique de ces différents phénomènes. Ceci constitue une première voie pour la suite de ce travail. Une deuxième perspective serait de mener, après une étude de sensibilité des paramètres, une campagne d'identification dans le but de valider quantitativement le modèle D.N.L.R. sous chargement cyclique.

Pour ce qui concerne l'introduction des équations constitutives du modèle dans un code industriel de calcul par éléments finis. Nous avons, dans le **chapitre III**, contourné, avant tout, une difficulté numérique liée au modèle, c'est à dire que la structure du modèle impose un schéma d'intégration qui nécessite un pas de temps très faible, de l'ordre du dixième du temps de relaxation le plus court. Nous avons mis en place une technique à pas adaptatif qui, sans grande conséquence sur la précision du calcul (erreur relative < 0.5%), a permis de gagner un facteur 1000 sur le temps de calcul. La validation de cette intégration s'est faite sur un VER à 8 nœuds. Nous disposons d'une base de données expérimentales sur des chargements non proportionnels de type traction-torsion à déformation imposée. Les résultats obtenus par simulation numérique avec le code E.F., sont en accords avec les résultats expérimentaux. Les résultats obtenus sont donc encourageants même si la validation ne s'est faite que sur un seul élément simple avec l'hypothèse des petites perturbations. Il serait intéressant d'envisager comme troisième perspective d'apprécier la pertinence du modèle sur une structure complète et en grande déformation, notamment en terme de temps de calcul et de place mémoire.

Le **chapitre IV** est consacré à l'étude comparative des modèles D.N.L.R. et N.L.K. (Non Linear Kinematics). Les deux approches sous jacentes sont différentes, mais aboutissent à des résultats similaires. Le modèle D.N.L.R., postule l'existence d'un seul potentiel thermodynamique pour décrire tout le comportement du VER, tandis que le modèle N.L.K., repose sur l'existence d'un potentiel thermodynamique qui permet décrire la relation d'état entre les variables duales. En outre les lois d'évolution font appel à un pseudo potentiel des vitesses qui a pour objet d'apporter un formalisme complémentaire décrivant les processus dissipatifs. Nous avons intégré le modèle N.L.K. dans le code de calcul, et l'avons validé pour les mêmes types de chargement que le modèle D.N.L.R. (papillon et trèfle). L'étude comparative réalisée sur une plaque percée soumise à de la traction nous a donné des résultats comparables et des temps de calcul similaires. Une réflexion sur l'état relaxé et l'érouissage cinématique non linéaire est brièvement entamée en fin de chapitre. Elle a permis de dresser un tableau des similitudes entre la variable d'érouissage cinématique N.L.K. et la contrainte à l'état relaxé.

Nous avons, dans le but d'améliorer les performances du modèle en terme de temps de calcul, utilisé dans le dernier chapitre (**chapitre V**) la méthode à grand incrément de temps (MAGIT) pour résoudre l'ensemble des équations du modèle. Cette tentative n'a pas donné les résultats escomptés. En effet, si on compare la résolution avec la méthode MAGIT et la résolution avec la version incrémentale avec un pas adaptatif que nous avons mis en place, cette dernière est 7 fois plus rapide.

---

En résumé, l'objectif de ce travail était centré sur l'intégration et la validation du modèle D.N.L.R. dans un code de calcul par éléments finis. La technique d'accélération du calcul mise en place nous permet de simuler un très grand nombre de cycles en très peu de temps et situe de fait les modélisations D.N.L.R. comme des alternatives efficaces aux approches traditionnelles pour le calcul de structures. Nous avons également montré comment les modélisations D.N.L.R. permettaient d'appréhender des chargements complexes non proportionnels.



# **Annexes**





# Annexe A

## Rappels de thermodynamique des processus irréversibles classique

Le corps de ce travail de thèse a été bâti autour d'une approche thermodynamique qui à l'image de De Donder pour la chimie, intègre les évolutions microstructurales dans la relation de Gibbs. Ainsi, l'équilibre local (au sein du VER) n'existe pas forcément et c'est ce qui rend les variables microstructurales indépendantes des variables observables et explique les phénomènes de relaxation. Lorsque l'équilibre local est atteint, elles perdent leur statut de variables indépendantes et sont complètement fixées par les conditions aux limites imposées sur le VER. Ainsi, même pour un système fermé n'échangeant que de la chaleur et du travail mécanique avec l'extérieur, l'énergie interne s'écrit

$$u(s, \epsilon, n_k) = Ts + \sigma\epsilon + \sum_k \mu_k n_k \quad (\text{A.1})$$

soit

$$\dot{u} = T\dot{s} + \sigma\dot{\epsilon} + \sum_k \mu_k \dot{n}_k \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{n}_k = \sum_l \nu_k^l \dot{z}^l \quad \text{et} \quad A^l = - \sum_k \mu_k \nu_k^l \quad (\text{A.3})$$

on a

$$\dot{u} = T\dot{s} + \sigma\dot{\epsilon} - \sum_l A^l \dot{z}^l \quad (\text{A.4})$$

soit

$$u = u(s, \epsilon; z^l)$$

$z^l$  joue le rôle des variables microstructurales fixées pour l'équilibre local par  $A^l = 0$ , par contre en régime stationnaire de non équilibre  $\dot{A}^l = 0$  et  $\dot{z}^l = f(\dot{s}, \dot{\epsilon})$ .

La thermodynamique des processus irréversibles classique (TPI) est quant à elle appliquée aux états des systèmes proches de l'équilibre. On suppose que l'équilibre existe à l'intérieure de petits domaines. La méthode de l'état local suppose que l'on peut attacher à chaque élément de volume en mouvement, considéré comme isolé, un ensemble de  $n$  variables thermodynamiques qui caractérisent l'état du système à un instant donné. Elle implique que toute évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre ; par conséquent, le temps au bout duquel les variables purement thermodynamiques, perturbées par le mouvement, retrouvent leur équilibre est faible par rapport aux évolutions cinématique et mécanique. Le retour à l'équilibre fait donc intervenir deux échelles de temps :

- une échelle de temps rapide, assurant une relaxation vers un équilibre thermodynamique local,
- une échelle lente, permettant les évolutions cinématique et mécanique

La TPI classique se propose d'étudier l'évolution des phénomènes entre ces deux échelles, c'est à dire l'évolution de variables thermodynamiques lorsque la transformation est suffisamment lente pour que l'équilibre local soit réalisé à chaque instant.

## A.1 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie : à chaque instant la dérivée particulaire de l'énergie totale d'un système est la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système et du taux de chaleur  $Q$  reçue par le système. Autrement dit, la variation d'énergie d'un système est due uniquement aux flux de chaleur et de travail qui le traversent. Le premier principe s'écrit donc :

$$\dot{U} + \dot{E}_c + \dot{E}_p = Q + P_e \quad (\text{A.5})$$

avec

$U$  énergie interne

$E_c$  énergie cinétique

$E_p$  énergie potentielle

$Q$  puissance calorifique reçue par le système

$P_e$  puissance des efforts extérieurs

Dans les cas qui nous intéressent, généralement, l'énergie potentielle reste inchangée :

$$\dot{E}_p = 0 \quad (\text{A.6})$$

Soit un domaine  $D$  de frontière  $\partial D$ , intérieur au milieu matériel étudié :

- soit  $U$  son énergie interne et  $u$  l'énergie interne spécifique :

$$U = \int_D \rho u dV \quad (\text{A.7})$$

avec  $\rho$  : masse volumique

- soit  $E_c$  son énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \quad (\text{A.8})$$

avec  $\vec{v}$  : champ de vitesse dans le domaine

- soit  $Q$  le taux de chaleur reçue par le système

$Q$  est la somme d'un terme volumique et d'un terme surfacique de conduction à travers la frontière  $\partial D$

$$Q = \int_D r dV - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_D (r - \text{div} \vec{q}) dV \quad (\text{A.9})$$

En appliquant le théorème de la divergence,  $r$ ,  $\vec{q}$  et  $\vec{n}$  sont respectivement la densité volumique de chaleur reçue, le flux de chaleur reçue par conduction, et la normale extérieure à la frontière  $\partial D$

– soit  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs :

$$P_e = \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{v} dS \quad (\text{A.10})$$

où  $\vec{f}$  et  $\vec{T}$  sont respectivement les densités volumique et surfacique des efforts extérieurs. L'équilibre des puissances virtuelles [Germain (1973)] permet d'écrire :

$$P_a = P_e + P_i$$

avec  $P_a$  la puissance virtuelle des quantités d'accélération et  $P_i$  la puissance virtuelle des efforts mécaniques intérieurs, données par :

$$P_a = \int_D \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{v} dV = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \right] \quad (\text{A.11})$$

$$P_i = - \int_D \sigma : \dot{\epsilon} dV \quad (\text{A.12})$$

où  $\sigma$  et  $\dot{\epsilon}$  sont respectivement le tenseur des contraintes et le tenseur des vitesses de déformation en un point du domaine  $D$ . On a donc

donc

$$P_e = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \right] + \int_D \sigma : \dot{\epsilon} dV \quad (\text{A.13})$$

En reportant (A.6), (A.7), (A.8), (A.9) et (A.13) dans (A.5), on obtient :

$$\int_D \rho \dot{u} dV = \int_D (r - \text{div} \vec{q}) dV + \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \right] + \int_D \sigma : \dot{\epsilon} dV - \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \right] \quad (\text{A.14})$$

Ans

$$\int_D (\rho \dot{u} - r + \text{div} \vec{q} - \sigma : \dot{\epsilon}) dV = 0 \quad (\text{A.15})$$

d'où en utilisant le lemme fondamentale de la physique des milieux continus [Germain (1973)] : pour toute fonction  $f(M)$  définie et continue dans  $D$

$$\int_D f(M) dV = 0 \quad \forall D \Rightarrow f(M) = 0 \quad \text{dans } D,$$

on obtient la forme locale

$$\rho \dot{u} - r + \text{div} \vec{q} - \sigma : \dot{\epsilon} = 0 \quad (\text{A.16})$$

qui s'écrit encore

$$\rho \dot{u} = (-\text{div} \vec{q} + r) + \sigma : \dot{\epsilon} \quad (\text{A.17})$$

Cette dernière expression est l'expression locale du premier principe de la thermodynamique. Néanmoins ce principe ne nous donne aucune information sur les possibilités de transformation. Nous savons par expérience que certaines transformations sont possibles tandis que d'autres sont impossibles. Par exemple la transformation d'un matériau sain à un matériau endommagé est possible. La transformation inverse est impossible. Le dommage est un processus irréversible. Notons que ce bilan sur l'énergie interne est nettement moins riche d'information que lorsque l'on écrit  $\dot{u}$  dans le cadre de relation de Gibbs généralisée qui incorpore la deuxième loi de la thermodynamique

$$\dot{u} = T \dot{s} + \sigma \dot{\epsilon} - \sum_l A^l \dot{z}_l \quad (\text{A.18})$$

## A.2 Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique indique les possibilités de transformation. La variation d'entropie  $S$  fixe le sens de la réaction. Ce principe stipule :

$$\dot{S} - \frac{Q}{T} \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

relation que Prigogine préfère écrire

$$\dot{S} = \dot{S}_e + \dot{S}_i$$

avec  $\dot{S}_e = -\frac{Q}{T}$  et  $\dot{S}_i \geq 0$

En considérant la forme globale (A.9), cette inégalité peut s'écrire :

$$\int_D \rho \dot{s} dV \geq \int_D \frac{r}{T} dV - \int_{\partial D} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS \quad (\text{A.20})$$

ou  $s$ , représente l'entropie spécifique du milieu telle que :

$$S = \int_D \rho s dV$$

soit en appliquant le théorème de la divergence :

$$\int_D \left[ \rho \dot{s} - \frac{r}{T} + \text{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) \right] dV \geq 0$$

Donc localement, nous avons, en utilisant le lemme fondamental :

$$\rho \dot{s} - \frac{r}{T} + \text{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

En remplaçant  $r$  par son expression tirée de l'expression locale du premier principe (A.16) :

$$r = \rho \dot{u} + \text{div} q - \sigma : \dot{\epsilon}$$

et en remarquant que :

$$\text{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\text{div} q}{T} - \vec{q} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T^2}$$

et en multipliant l'inéquation (A.21) par  $T > 0$ , les premiers et seconds principes peuvent s'écrire :

$$\rho (T \dot{s} - \dot{u}) + \sigma : \dot{\epsilon} - \vec{q} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{T} \geq 0 \quad (\text{A.22})$$

A chaque instant (hypothèse de l'état local), la connaissance du potentiel thermodynamique permet de calculer les grandeurs d'état. Nous avons utilisé, dans ce qui précède, l'énergie interne. On peut utiliser d'autres potentiels ; en particulier, l'énergie libre spécifique  $\psi$  définie par :

$$\psi = u - Ts$$

Par dérivation, on exprime le premier terme de l'inégalité (A.22)

$$\dot{\psi} = \dot{u} - \dot{T}s - T\dot{s}$$

soit

$$T\dot{s} - \dot{u} = -(\dot{\psi} + \dot{T}s)$$

l'inégalité (A.22) s'écrit alors : inégalité de Clausius-Duhem (A.23)

$$-\rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) + \sigma : \dot{\epsilon} - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}T}}{T} \geq 0 \quad (\text{A.23})$$

Cette inégalité est fondamentale pour les lois de comportement ; on dira qu'une loi de comportement est thermodynamiquement admissible si elle vérifie cette inégalité qui traduit simplement la positivité de la production d'entropie.

### A.3 Variables observables et variables internes en formulation classique

Les variables thermodynamiques ou variables d'états sont, soit des variables observables, soit des variables internes. Pour les milieux matériellement simples, deux variables observables sont généralement définies :

- la température
- la déformation totale  $\epsilon$

Dans le cas où des phénomènes dissipatifs interviennent, on aura recours à des variables "cachées" dites internes, non accessibles par des mesures directes. Elles représentent l'état interne de la matière (densité de dislocations, microstructure,...). Ces variables internes "cachées" seront notées  $\alpha_j$ . D'autres variables, comme la déformation plastique  $\epsilon^p$ , sont définies par rapport à une variable observable : la déformation totale. Elles sont ainsi mesurées indirectement. Une nouvelle variable interne est donc implicitement définie : la déformation élastique  $\epsilon^e$ . On suppose dans le cadre de la théorie de la plasticité en petites déformations, qu'il y a partition de la déformation en déformation purement élastique et en déformation purement plastique. Les caractéristiques d'élasticité (module de Young et coefficient de Poisson) du matériau sont indépendantes de l'écroutissage ; on écrit alors

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (\text{A.24})$$

A chaque variable (observable ou interne) correspond, au vu de la forme différentielle du potentiel résultant du premier principe, une variable associée.

### A.4 Variables associées - Lois d'état en formulation classique

En utilisant les remarques citées dans le section précédente (A.3), recherchons maintenant certaines variables associées. Le potentiel énergie libre spécifique  $\psi$  dépend des variables observables ( $T$  et  $\epsilon$ ) et internes ( $\epsilon^p$  et  $\alpha_j$ ) :

$$\psi = \psi(T; \epsilon; \epsilon^p; \alpha_j) \quad (\text{A.25})$$

Pour que  $\psi$  bénéficie d'une véritable statut de fonction potentielle contenant toute l'information thermodynamique  $T$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon^p$  et  $\alpha_j$  doivent être les variables indépendantes qui contiennent la plénitude de l'information sur le système.

En élastoplasticité, les déformations n'interviennent que sous la forme de leur partition, soit

$$\psi = \psi(T; \epsilon - \epsilon^p; \alpha_j) = \psi(T; \epsilon^e; \alpha_j) \quad (\text{A.26})$$

On peut écrire  $\dot{\psi}$  sous la forme générale suivante :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \quad (\text{A.27})$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (\text{A.28})$$

En remplaçant les expressions (A.27) et (A.28) dans l'inégalité de Clausius-Duhem (A.23), on aboutit à l'inégalité suivante :

$$-\rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + s \dot{T} \right) + \sigma : \dot{\epsilon} - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}T}}{T} \geq 0 \quad (\text{A.29})$$

soit

$$\left( \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \right) : \dot{\epsilon}^e + \sigma : \dot{\epsilon}^p - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}T}}{T} \geq 0 \quad (\text{A.30})$$

Cette inégalité fait apparaître deux types de termes :

1.  $\left( \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \right) : \dot{\epsilon}^e - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T}$  liés à des effets non dissipatifs réversibles
2.  $\sigma : \dot{\epsilon}^p - \rho \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}T}}{T} \geq 0$  liés au processus irréversibles

Lorsque les termes irréversibles sont nuls (pas de déformation plastique, pas de variation des variables internes  $\alpha_j$ , température homogène), on peut annuler indépendamment les autres termes de l'inégalité. Imaginer une transformation élastique à température constante, l'inégalité de Clausius-Duhem doit être vérifiée quelle que soit la vitesse de déformation élastique,  $\dot{\epsilon}^e \neq 0$  cela implique :

$$\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} = 0 \quad (\text{A.31})$$

d'où

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \quad (\text{A.32})$$

On peut également imaginer une transformation thermique à  $\dot{T} \neq 0$  qui impose :

$$s + \rho \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad (\text{A.33})$$

d'où

$$s = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (\text{A.34})$$

Par analogie avec les relations précédentes, on définit les variables forces thermodynamiques associées aux variables internes  $\alpha_j$  par :

$$A_j = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \quad (\text{A.35})$$

ainsi que  $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}T}$  comme variable associé à  $\frac{\vec{q}}{T}$ .

Les relations (A.32), (A.34), (A.35), constituent les lois d'état :

- l'entropie  $s$  et le tenseur des contraintes  $\sigma$  ayant été définis par ailleurs, la donnée du potentiel thermodynamique  $\psi(\epsilon^e; T)$  fournira la théorie de la thermoélasticité couplée ou non ;
- par contre, les variables  $A_j$  associées aux variables internes  $\alpha_j$  n'ayant pas encore été introduites, c'est la donnée d'un potentiel  $\Psi(\dots; \alpha_j)$  qui les définit ;
- $s, \sigma, A_j$ , et  $\vec{g}$  constituent les variables associées. Le vecteur formé par ces variables est le gradient de la fonction  $\psi$  dans l'espace des variables  $T, \epsilon^e, \alpha_j$ , et  $\frac{\vec{q}}{T}$ .

## A.5 Potentiel de dissipation - Lois complémentaires

Nous avons vu que le potentiel thermodynamique permet de décrire les relations d'état entre les variables observables et leurs variables associées. Mais pour les variables internes, il ne permet que la définition de leur variable associée. L'objet du potentiel de dissipation est d'apporter un formalisme complémentaire d'écrivant les processus dissipatifs.

Compte tenu, des lois d'état, l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit aux termes dissipatifs qui doivent être positifs :

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_{th} = \sigma : \dot{\epsilon}^p - \sum_{j=1}^n A_j \dot{\alpha}_j - \frac{\vec{q}}{T} \overrightarrow{\text{grad}T} \geq 0 \quad (\text{A.36})$$

avec la dissipation intrinsèque (mécanique) définie par :

$$\Phi_i = \sigma : \dot{\epsilon}^p - \sum_{j=1}^n A_j \dot{\alpha}_j$$

et la dissipation thermique

$$\Phi_{th} = -\frac{\vec{q}}{T} \overrightarrow{\text{grad}T}$$

D'après la loi de conduction de Fourier :

$$\vec{q} = -k \overrightarrow{\text{grad}T}$$

avec  $k$ , est le coefficient de conductivité thermique caractéristique du milieu.

La positivité de la dissipation thermique est assurée. Il ne restera donc qu'à assurer la positivité de  $\Phi_i$ , pour que la loi soit thermodynamiquement admissible. Nous remarquons que  $\Phi$  est la somme de produit entre des variables forces (intensives) et des variables flux (extensives) :

$$\sigma \leftrightarrow \dot{\epsilon}^p$$



$$A_j \leftrightarrow -\dot{\alpha}_j$$

$$\vec{g} = \overrightarrow{grad}T \leftrightarrow -\frac{\vec{q}}{T}$$

cela signifie que  $\Phi$  peut se mettre sous la forme très générale :

$$\Phi = \sum_{\beta=1}^n X_{\beta} Y_{\beta}$$

Nous devons maintenant trouver des lois permettant d'exprimer  $X_{\beta}$  et  $Y_{\beta}$ .

Pour traiter ce problème on doit postuler l'existence d'un pseudo-potential de dissipation. Pour exprimer ce dernier nous raisonnons par analogie. En effet, en travaillant sur la déformation plastique  $\epsilon^p$ , on peut montrer que :

$$\epsilon^p = \lambda \overrightarrow{grad}f$$

avec  $f$  joue le rôle d'un potentiel de dissipation plastique donnée par :

$$f(\sigma^d, \sigma^y) = 0$$

où  $\sigma^d$  est le deuxième invariant du déviateur des contraintes et  $\sigma^y$  est la limite d'élasticité en traction simple. On aboutit alors à la règle de normalité :

$$\epsilon^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{A.37})$$

Par analogie, nous généraliserons la règle de normalité à tous les processus dissipatifs. Nous postulerons donc l'existence d'un pseudo-potential de dissipation convexe  $\Phi$  et sa transformée de Legendre-Fenchel  $\Phi^*$ .

Ainsi les variables forces seront les composantes de  $\overrightarrow{grad}\Phi$ , vecteur normal au graphe de  $\Phi$  dans l'espace des variables flux.

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon^p}; \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} \quad (\text{A.38})$$

$$A_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}_j}; \quad -\dot{\alpha}_j = \frac{\partial \Phi^*}{\partial A_j} \quad (\text{A.39})$$

$$\overrightarrow{grad}T = -\frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}; \quad -\frac{\vec{q}}{T} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \overrightarrow{grad}T} \quad (\text{A.40})$$

Les relations (A.38), (A.39) et (A.40) constituent les lois complémentaires.

Les propriétés que doit vérifier le potentiel  $\Phi$  ( et son dual  $\Phi^*$ ) pour que le second principe soit automatiquement vérifié :

- être une fonction convexe
- être non négatif
- et être nul à l'origine

On utilise généralement le potentiel  $\Phi^*$  et les relations d'évolutions des variables flux. Cette règle de normalité est suffisante pour vérifier a priori le second principe ; elle n'est pas nécessaire. Les matériaux standards généralisés sont ceux pour lesquels cette règle s'applique. Le matériau standard est celui pour lequel seule la relation (A.38) s'applique. C'est cette relation qui conduit à la loi de plasticité ou de viscoplasticité. La relation (A.39) exprime la loi d'évolution des variables internes ; la relation (A.40) conduit à la loi de Fourier pour la thermostatique. Toute la difficulté de la modélisation des phénomènes réside dans la détermination de l'expression analytique du potentiel thermodynamique  $\Psi$  et du potentiel de dissipation  $\Phi$  ou de son dual  $\Phi^*$  et dans leur identification, d'après des expériences caractéristiques. En fait, les valeurs de  $\Phi$  ou  $\Phi^*$  sont quasiment inaccessibles à la mesure car elles représentent une énergie le plus souvent dissipée sous forme de chaleur. Les variables flux et les variables duales se prêtent bien mieux à la mesure et c'est sur leur relation que porte la modélisation et l'identification.

**Cas des phénomènes dissipatifs instantanés :** lorsque le comportement est indépendant des vitesses, on considère la fonction "critère convexe"  $f(\sigma, A_j)$  ayant pour fonction indicatrice  $\Phi^*$  [Lemaitre et Chaboche (1985)] :

$$\Phi^* = 0 \quad \text{si } f < 0 \quad (\dot{\epsilon}^p = 0)$$

$$\Phi^* = \infty \quad \text{si } f = 0 \quad (\dot{\epsilon}^p \neq 0)$$

Une démonstration, qui n'est pas donnée ici, permet de montrer que :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad \text{si } f = 0 \quad \text{et } \dot{f} = 0 \quad (\text{A.41})$$

où  $F$  est une fonction potentiel égale à  $f$  dans le cas des théories "associées" et  $\dot{\lambda}$  un multiplicateur déterminé par la condition de consistance  $\dot{f} = 0$ . Par opposition au cas de la plasticité associée où l'on confond la surface de charge avec une surface équipotentielle, le schéma de la plasticité non associée nécessite l'emploi d'une surface potentiel  $F$  (constante) qui donne la direction de l'écoulement dans l'espace des forces généralisées.

Les équations d'écrivant la normalité (lois complémentaire) sont alors remplacées par :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} & \text{ou} & \quad \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ -\alpha_j &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial A_j} & \text{ou} & \quad -\dot{\lambda} \alpha_j = \frac{\partial f}{\partial A_j} \\ -\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial(\text{grad}T)} & \text{ou} & \quad -\frac{\vec{q}}{T} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \text{grad}T} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

La plupart des modèles de comportement classiques sont construits dans ce cadre qui sert ainsi de "garde-fou" vis à vis des deux lois de la thermodynamique.



# Annexe B

## Modèles de comportement phénoménologiques

Les modèles de comportement phénoménologiques sont divers et variés, nous nous limitons dans cette annexe, à rappeler les équations constitutives de certains des modèles évoqués dans le mémoire : le modèle BCG proposé par Burlet & Cailletaud (1987), le modèle OW de Ohno & Wang (1993) et le modèle TANA de Tanaka (1994). Tous ces modèles reposent sur l'existence d'une surface de charge de type von-Mises et la décomposition de l'érouissage en un érouissage cinématique et un érouissage isotrope. La différence fondamentale entre ces différents modèles réside dans l'expression des variables d'érouissages. Nous présentons d'abord les équations constitutives communes à ces différents modèles, puis déclinons les évolutions des uns par rapport aux autres. Tous ces modèles reposent sur le modèle à érouissage cinématique non linéaire (N.L.K.) et des variantes se distinguent par l'expression des variables d'érouissage.

La partition de la déformation en une déformation purement élastique et une autre plastique conduit à :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^p \quad (\text{B.1})$$

avec la déformation élastique obtenue à partir de l'expression de la loi de Hooke pour un matériau isotrope

$$\underline{\underline{\epsilon}}^e = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\underline{1}} - \frac{\nu}{1+\nu} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) : \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{B.2})$$

avec le module de cisaillement défini par

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. La surface de charge est définie par l'expression suivante :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, R, \underline{\underline{X}}) = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - k \quad (\text{B.3})$$

où  $k$  est le rayon initial du domaine élastique, et  $J_2$  est le second invariant du tenseur défini par la relation :

$$J_2 = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}})} \quad (\text{B.4})$$

où  $\underline{\underline{S}}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}} \quad (\text{B.5})$$

$\underline{\underline{X}}$  et  $R$  sont les variables d'écouissage cinématique et isotrope et correspondent respectivement à la position et à la taille du domaine d'élasticité.

On suppose dans ces différents modèles que la vitesse des déformations plastiques est normale au domaine d'élasticité, d'où son expression :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})} \quad (\text{B.6})$$

rappelons pour mémoire que le modèle D.N.L.R. s'écrit

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \underline{\underline{A}}^{-1} \sum_j \frac{(\underline{\underline{\sigma}}^j - \underline{\underline{\sigma}}^{j,r})}{\tau^j}$$

## B.1 Modèle BCG de Burlet & Cailletaud (1987)

Afin d'améliorer la description de la déformation progressive du modèle N.L.K., Burlet & Cailletaud ont introduit un écouissage non linéaire avec un terme de rappel.

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = \frac{2}{3} C \phi(p) \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p - \gamma (\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{n}}) \underline{\underline{n}} \dot{p}$$

avec  $\underline{\underline{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$  la normale à la surface de plasticité.

Il a été vérifié par Portier (1999), que ce modèle conduit à l'accommodation en quelques cycles du fait de la colinéarité des deux termes de l'écouissage. [Geyer (1994)] a proposé une modélisation qui est une combinaison de ce modèle d'écouissage cinématique de type, [Armstrong et Frederick (1966)] par l'intermédiaire d'un paramètre  $\delta$  compris entre 0 et 1 :

$$\underline{\underline{\dot{X}}}_i = \frac{2}{3} C_i \phi(p) \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p - \gamma_i \left( \delta_i \underline{\underline{X}}_i + (1 - \delta_i) (\underline{\underline{X}}_i : \underline{\underline{n}}) \underline{\underline{n}} \right) \dot{p} \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\phi(p) = 1 + (\Psi - 1) e^{-\omega p} \quad (\text{B.8})$$

lorsque  $\delta = 1$ , nous obtenons la loi d'évolution de l'écouissage cinématique non linéaire du modèle classique, tandis que  $\delta = 0$  nous obtenons l'expression proposée par Burlet et Cailletaud.

La variable d'écouissage isotrope reste identique à celle utilisée dans le modèle N.L.K.

$$\dot{R} = b (Q_\infty - R) \dot{p} \quad (\text{B.9})$$

Le modèle possède 11 paramètres :  $k, Q_\infty, b, \Psi, \omega, C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$

## B.2 Modèle OW de Ohno et Wang (1993)

Le modèle proposé par Ohno et Wang repose sur le modèle à écrouissage cinématique non linéaire d'Armstrong-Frederick et introduit une modification dans l'expression de la variable d'écrouissage cinématique non linéaire pour limiter la trop forte déformation progressive engendrée par le modèle N.L.K.. Ohno et Wang ont proposé de modifier cette loi en agissant sur le terme de restauration dynamique (deuxième terme de l'équation (4.7) du chapitre 4). Dans un premier modèle (OW1), ce terme de rappel n'est activé que lorsque la variable cinématique atteint une valeur critique  $r = \frac{C}{\gamma}$ . Celui-ci s'écrit alors :

$$\underline{\dot{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\dot{\epsilon}}^p - \gamma H(g) \langle \underline{\dot{\epsilon}}^p : \underline{k} \rangle \underline{X}$$

avec

$$g(\underline{X}) = \bar{X}^2 - I^2$$

où  $\bar{X}$  est le module de  $\underline{X}$  et  $\bar{X} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{X} : \underline{X}}$  et  $I = \frac{C}{\gamma}$

$\underline{k}$  est la direction de  $\underline{X}$  et  $\underline{k} = \frac{\underline{X}}{\bar{X}}$

$H$  est la fonction de Heaviside et  $\langle \cdot \rangle$  sont les crochets de Mac Cauley.

Ici, le terme de restauration dynamique n'est actif que si  $g = 0$ .

Ce modèle a été ensuite généralisé (modèle OW2) en autorisant la restauration dynamique à l'intérieur de la surface ( $g = 0$ ). Cette restauration est activée non linéairement et devient plus importante lorsque  $\underline{X}$  s'approche de son état limite. Ceci s'écrit dans le cas d'un écrouissage à plusieurs centres :

$$\underline{\dot{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \underline{\dot{\epsilon}}^p - \gamma_i \phi(p) \left( \frac{\bar{X}_i}{I_i} \right)^{m_i} \langle \underline{\dot{\epsilon}}^p : \underline{k}_i \rangle \underline{X}_i \quad (\text{B.10})$$

$$\phi(p) = \phi_\infty + (1 - \phi_\infty) e^{-\omega p} \quad (\text{B.11})$$

L'écrouissage isotrope reste identique au modèle N.L.K. :

$$\dot{R} = b(Q_\infty - R) \dot{p} \quad (\text{B.12})$$

Le modèle est à 11 paramètres :  $k, Q_\infty, b, \phi_\infty, \omega, C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2, m_1, m_2,$

## B.3 Modèle TANA de Tanaka (1994)

Tanaka reprend les équations du modèle N.L.K. classique et modifie l'expression de la variable d'écrouissage isotrope  $R$  pour tenir compte de l'effet de non proportionnalité du trajet de chargement. Il introduit un tenseur du second ordre (5\*5)  $\underline{C}$  appelé "tenseur structural". Pour cela, il s'appuie sur des observations de structures de dislocations réalisées par Nishino et al (1986). Il définit ainsi le tenseur structural  $\underline{C}$  par l'équation suivante :

$$\underline{\dot{C}} = c_c \left[ \left( \frac{\underline{\dot{E}}^p}{\|\underline{\dot{E}}^p\|} \otimes \frac{\underline{\dot{E}}^p}{\|\underline{\dot{E}}^p\|} \right) - \underline{C} \right] \dot{p} \quad (\text{B.13})$$

où  $p$  est la déformation plastique cumulée,  $c_c$  un paramètre matériau et  $\underline{\dot{E}}^p$  est un vecteur à cinq composantes définies comme suit :

$$\underline{\dot{E}}^p = \begin{cases} E_1 &= \epsilon_{11}^p \\ E_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\epsilon_{11}^p}{2} + \epsilon_{22}^p \right] \\ E_3 &= 2 \frac{\epsilon_{12}^p}{\sqrt{3}} \\ E_4 &= 2 \frac{\epsilon_{23}^p}{\sqrt{3}} \\ E_5 &= 2 \frac{\epsilon_{31}^p}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

où  $\epsilon_{11}^p, \epsilon_{12}^p, \epsilon_{22}^p, \epsilon_{23}^p, \epsilon_{31}^p$  sont les cinq composantes indépendantes du tenseur des déformations plastiques.

Soit  $\underline{u}$  le vecteur ( $5 * 1$ ) défini par :  $\underline{u} = \frac{\underline{\dot{E}}^p}{\|\underline{\dot{E}}^p\|}$

Tanaka définit alors son paramètre de non proportionnalité  $A$  à l'aide du tenseur  $\underline{C}$  et de ce vecteur  $\underline{u}$ , de la façon suivante :

$$A = \sqrt{\frac{\text{Tr}(\underline{C}^T \underline{C}) - \underline{u} \underline{C}^T \underline{C} \underline{u}}{(\text{Tr} \underline{C}^T \underline{C})}} \quad (\text{B.15})$$

Il a cherché à modéliser l'effet d'amplitude (ou l'effet de mémoire de la pré-déformation plastique maximale). Il définit une surface index (ou surface mémoire) dans l'espace des déformations plastiques et deux variables supplémentaires  $\underline{Y}$  et  $q$ . Elles déterminent respectivement le centre et la taille de cette surface index. Elles sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\underline{Y}} &= r_y (\underline{E}^p - \underline{Y}) (\dot{p}) \\ q &= \|\underline{E}^p - \underline{Y}\| \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Tanaka propose aussi une nouvelle loi d'évolution de la variable d'écroutissage isotrope pour tenir compte du caractère non proportionnel du trajet de chargement. En outre, pour rendre compte de l'effet d'amplitude, cette variable dépend également de la variable  $q$  définie précédemment. La loi d'évolution de la variable d'écroutissage isotrope  $Q$  s'écrit alors :

$$Q = A (q_N(q) - q_P(q)) + q_P(q) \quad (\text{B.17})$$

où  $q_N(q)$  et  $q_P(q)$  sont respectivement les valeurs asymptotiques pour les trajets non proportionnels ( $A=1$ ) et les trajets proportionnels ( $A=0$ ). Elles sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} q_P(q) &= a_P q + a_P (1 - e^{-c_p q}) \\ q_N(q) &= a_N q + a_N (1 - e^{-c_n q}) \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

L'évolution de la variable isotrope  $R$  est alors donnée par la relation suivante :

$$\dot{R} = d_H (Q_\infty - R) \dot{p} \quad (\text{B.19})$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}_1 + \underline{\underline{X}}_2 \quad (\text{B.20})$$

$\underline{\underline{C}}$  Tenseur structural

$A$  Paramètre de non-proportionnalité

$Q$  Variable d'écroutissage

$\underline{u}$  Vitesse de déformation anélastique normalisée

$\underline{y}$  Position du centre de la surface de charge

$\mathbf{q}$  Taille de  $\underline{y}$

Modèle à 16 paramètres :  $k, \phi_\infty, \omega, C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2, d_H, a_p, b_p, c_p, a_N, b_N, c_N, c_c, r_y$





## **Références bibliographiques**



# Bibliographie

---

## A

---

- [Abdul-Latif et al (1994)] Abdul-Latif, A., Clavel, M., Ferney, V., Saanouni, K., *"On the modeling of nonproportional cyclic plasticity of waspoloy," ASME Journal of Engineering materials and technology, Vol 116, pp 35-44, (1994).*
- [Abdul-Latif (1996)] Abdul-Latif, A. *"Constitutive equations for cyclic plasticity of waspa-loy," Int. Journal of plasticity Vol 12, pp 967-985, (1996).*
- [Abdul-Latif et Saanouni (1996)] Abdul-Latif, A., Saanouni, K. *"micromechanical modeling of cycle fatigue under complex loadings-Part II Applications," Int. Journal of plasticity Vol 12, pp 1123-1149, (1996).*
- [Abdul-Latif et al(2) (1998)] Abdul-Latif, A., Dingli, J. P., Saanouni, K. *"Modeling of complex cyclic inelasticity in heterogeneous polycrystalline microstructure," mechanics of materials Vol 30, pp. 287-305, (1998).*
- [Abdul-Latif et al(3) 1999)] AAbdul-Latif, A., Ferney, V., Saanouni, K. ( *"Fatigue damage initiation in waspaloy under complex cyclic loading," Journal of Engineering materials and technology Vol 121, pp. 278-285, (1999).*
- [Abdul-Latif (a) (2002)] Abdul-Latif, A. *"On the Mutliaxial Ratcheting of Polycrystals," Plasticity, Damage and Fracture at Macro, Micro and Nano Scales, pp.465, Ed. by Akhter S. Khan and O. Lopez-Pamier, Neat Press, January 3-9, (2002), (Aruba).*
- [Abdul-Latif (b) (2002)] Abdul-Latif, A., *"Multiscale Modeling : Aggregate of Grains and Its Influence on the Inelastic Behavior in Polycrystalline Microstructure," vol. 1, pp.139, 4th International Conference on New Challenges in Mesomechanics, August 26-30, Aalborg University, (2002), (Denmark).*
- [Abdul-Latif et al(1) (2002)] Abdul-Latif, A., Dingli, J. P., Saanouni, K. *"Elastic-inelastic Self-consistent model for polycrystals," Journal of Applied Mechanics Vol 69, pp. 1-8, (2002).*
- [Aharoune (1991)] Aharoune, A., *"Thermodynamique de la relaxation structurale de phases*

*amorphes en regime anisotrope," Thèse I.N.P. Lorraine, (1991).*

[Aharoune et al1 (1993)] Aharoune, A., Kuhnast F. A., Cunat, C. "*Correlation between DNLR model and AES model to describe relaxation phenomena study starting from anisothermal DSC measurements for amorphous alloy (Se, Te, Ge) near glass transition," 2nd International Discussion Meeting on relaxation in complex System, (1993), (Alicante, Espagne).*

[Aharoune et al2 (2001)] Aharoune, A., Marceron-Balland P., Cunat, C. "*The DNLR Approach and relaxation Phenomena. Part I & II - Application : Volume Recovery of PVAc," Mechanics of time-dependent Materials Vol 5, pp. 345-377, (2001).*

[Armstrong et Frederick (1966)] Amstrong, P.J., Frederick, C.O "*A mathematical representation of the multiaxial Baushinger effect," CEGB report R.B/B/N 731, (1966).*

[Ayadi (1995)] Ayadi, Z., "*Contribution à la modélisation du comportement mécanique des polymères à partir d'une approche thermodynamique de la de la relaxation des milieux continus.Application aux expériences de fluage/recouvrance," Thèse I.N.P. Lorraine, (1995).*

---

**B**

---

[Basuroychowdhury et al (1998)] Basuroychowdhury, I., et Voyiadjis, G, Z. "*A Multiaxial cyclic plasticity model for non-proportional loading cases," International Journal of Plasticity Vol 14 pp 855-870, (1998).*

[Bari, Hassan (2000)] Bari,S., Hassan, T. "*Anatomy of coupled constitutive models for ratcheting simulation," Int. Journal of plasticity Vol 16, pp 381-409, (2000).*

[Benallal (1986)] Benallal, A. "*Structure analysis in quasi-satic elastoviscoplasticity," Eng. Comp Vol 3 n°4, pp. 323-330, (1986).*

[Blanchard et al (1985)] Blanchard, P., Tortel, J., "*Inelastic Analysis and Life prediction in High Temperature Environment," Preprints of the 5th International seminar (SMIRT), (1985).*

[Boisse et al (1990)] Boisse, P., Bussy, P., Ladevèze ; P. "*A new approach in non linear mechanics : The Large Time Increment Method," Internatinal Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 29, pp. 647-663., (1990).*

[Burlet & Cailletaud (1987)] Burlet, H., Cailletaud, G. "*Modelling of cyclic plasticity in finite element codes". Proc. of Constitutive Laws for Engineering Materials : Theory and application, 1157., (1987).*

---

**C**

---

- 
- [Calloch et al(1996)] Calloch, S., Marquis, D. *"Triaxial tension-compression loadings in cyclic elastoplasticity, Experimental and numerical aspects,"* in : T Abe, T. Tsuta (Eds). *Third Asia-Pacific Symposium on Advances in Engineering plasticity and its Applications* pp. 135-141., (1996).
- [Calloch (1997)] Calloch, S. (1997) *"Essais Triaxiaux Non-Proportionnels et Ingénierie des modèles de plasticité Cyclique,"* Thèse ENS CACHAN, (1996).
- [Calloch et al (1997)] Calloch, S., Marquis, D. *"Additonal Hardening due tension-torsion non propotionnal loadings, Influence of the loading path shape,"* STP 1280, ASTM, pp. 113-130., (1997)
- [Chaboche (1977)] Chaboche, J.L., *"Sur l'utilisation des variables d'états interne pour la description de la viscoplasticité cyclique avec endomagement" Problèmes non linéaires de mécanique . Cracovie. pages 137-159 ,Symp Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, (1977).*
- [Chaboche et al (1979)] Chaboche, J.L., Dang-Van, K., Cordier, G., (1979) *"Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardenning of 316 Stainless steel". In : Proceedings of the 5th Int., Conference on SMiRT, Div. L, Berlin Germany.*
- [Chaboche (1987)] Chaboche, J.L., *"Cyclic plasticity modelings and ratcheting effects," Proceedings of Constitutive laws for Engeneering Materials, Theory and Applications., (1987)*
- [Chaboche (1989)] Chaboche, J.L., *"Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity". Int Journal of plasticity,vol 5 p. 247. (1989).*
- [Chaboche et al(a) (1989)] Chaboche, J.L., Nouailhas, D., *"Constitutive modeling of ratcheting effects : part I, experimental facts and properties of classical models," ASME J. Eng. Materials Techno , vol. 111 pp. 384-392., (1989).*
- [Chaboche (1991)] Chaboche, J.L., *"On some modifications of kinematic hardening to improve the description or ratcheting effects," Int J. Plasticity vol 7 pp. 661-678., (1991).*
- [Chaboche et al(b) (1991)] Chaboche, J.L., Nouailhas, D., Pacou, D., Paulmier, P., *"Modeling of the cyclic response and ratcheting effects on inconnel -718 alloy," Eur. J; Mech ; A/solids, vol 10 pp. 101-112., (1991).*
- [Chaboche (1994)] Chaboche, J.L., *"Modeling of Ratcheting : evaluation of various ap-  
proches," European Journal of mechanics, A/Solids vol 13 pp 501-518., (1994).*
- [Chaboche et al(c) (1996)] Chaboche, J.L., Cailletaud, G. *"Intégration methods for complex plastic constitutive equations," Comput. Met. Appl. Mech ENG vol 133 125-155,*

- (1996).
- [Chaboche (1997)] Chaboche, J.L., "*Thermodynamic formulation of constitutive equation and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers,*" *Int. J. Solids Structures* vol 34 2239-2254, (1997).
- [Clavel et al (1989)] Clavel, M., Pilvin, P., Rahouadj, R., "*Analyse microstructurale de la déformation plastique sous sollicitations non proportionnelles dans un alliage base nickel,*" *C.R. Acad. Sciences Paris, t.309, Série II, pp. 689-694., (1989)*
- [Cognard et al (1990)] Cognard, J.Y., Ladevèze, P., "*The Large Time Increment Method applied to cyclic loadings,*" *Proceedings IUTAM "Creep in structures IV", Cracow, (1990).*
- [Contesti (1985)] Contesti, E., "*Lois de comportement des aciers inoxydables en chargements combinés plasticité fluage en uni-axial et biaxial,*" *Rapport GRECO-GIS Grandes déformations et endommagement. (GDE) Etude 2B., (1985)*
- [Corona et al (1996)] Corona, E., Hassan, T., Kyriakides, D., "*On the performance of kinematic hardening rules in predicting a class of biaxial ratcheting histories,*" *Int. Journal of plasticity* Vol 12 pp 117-145., (1996)
- [Cunat (1985)] Cunat C., "*Approche statistique des propriétés thermodynamiques des états liquides et vitreux. Relaxation des liquides et transition vitreuse. Influence des associations chimiques,*" *Thèse d'état, Université de Nancy I, (1985)*
- [Cunat (1988)] Cunat.C, "*Thermodynamic treatment of relaxation in freezing systems Universality of the fluctuation distribution law for relaxation time,*" *Zeit. Für Phys. Chem. Neue Folge, Vol 157, p.419., (1988)*
- [Cunat (1991)] Cunat C. "*A thermodynamic theory of relaxation based on a distribution of non linear processes,*" *J. of Non Crystalline Solids, Vol. 131 & 133, pp. 196 & 812., (1991)*
- [Cunat (1996)] Cunat. C., "*Lois constitutives de matériaux complexes stables ou vieillissants- Apports de la thermodynamique de la relaxation* *Rev Gén Therm 35, 680-685, Elsevier, Paris., (1996)*
- [Cunat (2001)] Cunat. C., "*The DNLN Approach and Relaxation Phenomena. Part I - Historical Account and DNLN Formalism* *Mechanics of Time- Dependent Materials Vol 5 pp 39-65., (2001) .*

---

[Dafalias et al (1976)] Dafalias, Y.F., Popov E.P., "*Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity*," *Journal of applied Mechanics* Vol 43 pp 645-650., (1976).

[De Donder (1920)] De Donder T., "*Leçons de thermodynamique et de chimie physique*," Gauthier - Villars, Paris., (1920).

[Delobelle (1993)] Delobelle, P., "*Synthesis of the elastoviscoplastic behavior and modelization of an austenitic stainless steel over a large temperature range, under uniaxial and biaxial loading : Part I behavior*," *Int, Journal of plasticity* Vol 9 pp 65-85., (1993).

[Delobelle et al (1995)] Delobelle, P., Robinet, P., Bocher, L., "*Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel*," *Int, Journal of plasticity* Vol 11 pp 295-330., (1995).

[Dieng et al (2000)] Dieng, L., Haboussi, M., Cunat, C. "*Sur un modèle de comportement basé sur une analyse modale de la dissipation : Application au calcul par Eléments finis*." *Actes des JSTMM 2000 : Approches multi-échelles pour l'étude du comportement mécanique des matériaux de structure*. pp. (29) 1-7., (2000).

[Dieng et al (2001)] Dieng, L., Haboussi, M., Cunat, C. "*Mise en œuvre numérique de lois de comportement issues d'une analyse modale de la dissipation*," *Congrès Français de Mécanique Nancy*, (2001).

[Doquet (1989)] Doquet, V., "*Comportement et endommagement de deux ciers à structures CC et CFC, en fatigue oligocyclique, sous chargement multiaxial non proportionnel*," *Thèse de Doctorat, ENSMP*, (1989)

[Doquet et al (1990)] Doquet, V., Pineau A, G., "*Extra-hardening due to cyclic non-proportional loading of an austenitic stainless steel*," *Scripta Metallurgica et Materelia*, vol. 24, p. 433. (1990)

---

**E**

[Eyring (1936)] Eyring H., "*Viscosité, plasticity and diffusion as examples of absolute reaction rates*," *J. Chem. Phys.*,4, 283., (1936)

---

**F**

[Ferney (1994)] Ferney, V., "*Etude de l'érouissage cyclique sous sollicitations complexes. Cas d'alliages à durcissement structural*". *Thèse de Doctorat, UTC*., (1994)

[Fortunier et al.(1996)] Fortunier, R., Sperandio, Escaravage., "*Loi de comportement de Chaboche. Identification des paramètres élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques de l'acier EDF-SPH entre 20° et 600°C*." *Lyon : Framatome*, 46 p., *Note technique NOVTUDD N° 90011*., (1996)

---

**G**



[Germain (1973)] Germain, P., "*Mécanique des milieux continus*," Masson, Paris, (1973)

[Geyer (1994)] Geyer, P., "*Modélisation des phénomènes de déformation progressive par le modèle élastoplastique de Chaboche modifié par Burlet et Cailletaud*," Rapport - EDF., (1994)

[Goodman (1988)] Goodman, A. M., "*Development of constitutive equation for computer analysis of stainless steel components*," Nucl. Eng. Des. Vol 83 pp 349-354., (1988)

[Grandidier (2001)] Grandidier, J. C., "*Calcul par éléments finis des matériaux et structures en polymère*," Apollor-Inpl (2001)

---

**H**

[Hassan et al(I), (1992)] Hassan, T., Corona, E., Kyriakides, S., "*Ratcheting in cyclic plasticity, part I : Uniaxial behaviour*," Int, Journal of plasticity Vol 8 pp 91-116, (1992)

[Hassan et al(II), (1992)] Hassan, T., Corona, E., Kyriakides, S., "*Ratcheting in cyclic plasticity, part II : Multiaxial behaviour*," Int, Journal of plasticity Vol 8 pp 117-146., (1992)

[Hassan et al(a) (1994a)] Hassan, T., Kyriakides, S., "*Ratcheting of cyclically hardening and softening materials, part I : Uniaxial behaviour*," Int, Journal of plasticity Vol 10 pp 149-184., (1994)

[Hassan et al(b)(1994b)] Hassan, T., Kyriakides, S., "*Ratcheting of cyclically hardening and softening materials, part II : Multiaxial behaviour*," Int, Journal of plasticity Vol 10 pp 185-212. (1994).

---

**K**

[Kovacs (1963)] Kovacs A.J., "*Transition vitreuse dans les polymères amorphes. Etude phénoménologique*. Fortschr.Hochpolym. Fortsch ; Bd 3, S.394-507., (1963)

[Krempf (1987)] Krempf, E., "*Models of viscoplasticity - Some comments on Equilibrium (Back) stress and drag Stress*," Acta. Mech., Vol 69, p. 25. (1987)

---

**L**

[Ladeveze (1984)] Ladeveze, P., "*Sur une nouvelle algorithmes en mécanique des structures*," Rapport interne N°44 - L.M.T. -E.N.S. Cachan, (1984)

[Ladeveze (1985)] Ladeveze, P., "*Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*," Compte rendu académique des sciences - Paris, 300, série II pp 41-44., (1985)

[Ladeveze (1989)] Ladeveze, P., "*M.A.G.I.T. pour l'analyse de structure à comportement nonlinéaire décrit par variables internes*," Compte rendu académique des sciences

---

- Paris, 309, série II N° 11 pp 1095-1099., (1989)

[Lemaitre (1985)] Chaboche J. L. Lemaitre, J., "*Mécanique des matériaux solides*," 2 ed., Dunod, (1985).

[Lexcelent (1987)] Lexcelent, C., "*Quelques aspects thermomécaniques des lois de comportement des alliages métalliques : corrélation fluage-diffusion, analyse thermodynamique, effet de rochet traction-torsion*," Thèse de l'Université de Franche-Comte - Besançon, (1987)

[Loukil (1996)] Loukil, M., "*Modélisation des surfaces de plasticité à partir d'une approche de la thermodynamique de la relaxation des milieux continus*," Thèse I.N.P. Lorraine (1996)

---

M

[Msc-Marc] Document "*Msc.marc et Mentat Manuel d'utilisation*" Vol A-E, Version 2000-2001.

[Marceron (1999)] Marceron, P., "*Sur le rôle des potentiels généralisés et thermodynamique de la relaxation. Application au comportement mécanique des polymères*" Thèse I.N.P. Lorraine, (1999).

[Marquis (1979)] Marquis. D., "*Modélisation et identification de l'écroutissage anisotrope des métaux*" thèse de Doctorat université paris VI., (1979).

[Martin (2000)] Martin. B., "*Simulation of physical ageing of PVAc by means of an integral DNLR formulation*" communication privée.

[McDowell (1995)] McDowell, D.L., "*Stress state dependence of cyclic ratcheting behaviour of two rail steels*," *Int. Journal of plasticity* Vol 11 pp 397-421., (1995).

[Meixner (1949)] Meixner, V., "*Thermodynamische Thèorie der elastischen relaxation*," *Z. Naturforschg. 4a*, 494-600., (1949).

[Mrabet (2000)] Mrabet, K., "*Carctérisation expérimentale et modélisation de l'état relaxé pour le PEHD en traction*," *Actes des JSTMM 2-3 novembre 2000 tunisie*. 28, 1-8., (2000).

[Münster (1966)] Münster.A, "*Thermodynamique des processus irréversibles*," Ed. I.N.S.T.N. et P.U.F., (1966) (Paris)

---

N

[Nishino et al (1986)] Nishino, S., Hamada, N., Sakane, M., Matsumura, N., Tokizane, M., "*Microstrutural study of cyclic strain hardening behavior in biaxial stress states at*

*elevated temperature," Fatigue Frac. Engng. Mater. Struct., (1986) vol. 9, pp. 65-77.)*

---

O

- [Ohno (1982)] Ohno, N., "A constitutive model of cyclic plasticity with a non hardening strain region," *ASME Journal of Appl. Mech., Vol 49, pp.721-727., (1982).*
- [Ohno (1990)] Ohno, N. "Recent topics in constitutive modeling of cyclic plasticity and viscoplasticity," *Appl. Mech. Rev., Vol 43, pp. 283-295., (1990).*
- [Ohno et al (1993)] Ohno, N., Wang, J-D. "Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I : Formulation and basic features for ratcheting behavior," *Int. J. of plasticity., Vol 15, pp. 375-390., (1993)*
- [Ohno (1998)] Ohno, N. "Constitutive modeling of cyclic plasticity with emphasis on ratcheting," *Int. J. Mech. Sci, Vol 40, pp. 251-261., (1998)*
- [Ohno et al (1998)] Ohno, N., Abdel-Karim, M. "Ratcheting characteristics of 316FR steel at high temperature, part I : Strain-controlled ratcheting experiments and simulations," *Int. J. of plasticity., Vol 14, pp. 355-372., (1998)*
- [Ortiz et al (1985)] Ortiz, M., Popov, E.P.,(1985) "Accuracy and stability of intégration algorithms for élastoplastic constitutive relations," *Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 21, pp. 1561-1576., (1985).*

---

P

- [Pilvin (1990)] Pilvin,P. "Approches multiechelles pour la prévision du comportement anélastique des métaux," *Thèse de Doctorat univ. Paris VI., (1990)*
- [Portier (1999)] Portier, L. (1999) "Contribution à l'étude de la déformation progressive des structures : étude expérimentale et étude comparative de lois de comportement," *Thèse de doctorat de E.N.S. Cachan- paris VI., (1999).*
- [Portier et al (2000)] Portier, L., Calloch, S., Marquis, D., Geyer, P. "Ratcheting under tension-torsion loadings : experiment and modelling," *Int.Journal of plasticity, vol 16 pp. 303-335., (2000).*
- [Prager (1956)] Prager, W., "A new method of analysing stress and strain in work hardening plastic solids," *J ; Appl. Mech. Vol 23(4) pp. 493-496., (1956).*
- [Prigogine (1968)] Prigogine "Introduction à la thermodynamique des processus irréversible," *Paris : Dunod (1968).*

---

R

---

[Rémond & Stehly (2001)] Rémond, Y., Stehly, M., "On numerical simulation of viscoplastic and viscoelastic constitutive laws with the large time increment method," *Mechanics of time-Dependent Materials*, Kluwer Acad. Publish., Vol 6(2) pp. 147-170., (2002).

[Rakotovelofy (1998)] Rakotovelofy, A., M. "Contribution à la validation des méthodes de prévision du rochet thermique dans les structures métalliques," *Thèse INSA Lyon*, (1998).

---

S

[Saanouni (1990)] Saanouni, K. "Mécanique des solides déformables endommageables," *cours MM30, UTC*, (1990).

[Shiratori et al (1979)] Shiratori, E., Ikegami, K., Yoshida, F. "Analysis of stress-strain relations of use of an anisotropic hardening potential," *J. Mech. Physics Solids* Vol 27 pp213-229, (1979).

[SiDoLo (v2.1)] *SiDoLo Logiciel de Simulation et d'identification des paramètres. notice d'utilisation. notice d'utilisation.*

[Sidoroff (1984)] Sidoroff, F. "Mécanique et thermodynamique des milieux continus" *Cours de troisième année à l'école centrale de LYON et de DEA*, (1984).

[Simo et al (1987)] Simo, J.C., Ju J.W. "Stress and Strain Based Continuum Damage Models Part I : Formulation. Part II : Computational Aspects," *Int. J. Solids Struc.*, vol 23(7), pp. 821-864, (1987).

[Stehly (2000)] Stehly, M., "Sur la modélisation et la simulation numérique de lois de comportement viscoélastiques-viscoplastiques en vue de leurs applications aux pièces et structures en polymères," *Thèse de Doctorat de l'université de Louis Pasteur*, (2000).

---

T

[Tanaka et al (1985)] Tanaka, E., Murakami S. Ooka M. "Effect of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity," *Acta Mechanica* Vol 57 pp.167-182, (1985).

[Tanaka (1994)] Tanaka, E., "A non proportionality parameter and a viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening" *Eur. J. Mech., A/solids* Vol 13 p. 155, (1994).

[Toussaint (1997)] Toussaint, E.F. "Thermodynamique non linéaire des processus irréversibles et comportement mécanique des matériaux. Modélisation et interprétation microphysique," *Thèse I.N.P. Lorraine*, (1997).

[Toussaint et al (2000)] Toussaint, E.F.; Ayadi, Z.; Pilvin, P.; Cunat, C. "Modeling of the mechanical behavior of a nickel alloy by a time-dependent thermodynamic approach to relaxations of continuous media," *Mechanics of time-dependent materials*, vol 5 pp. 125, (2000).

---

V

---

[Valanis (1971)] Valanis, K.C. "A theory of viscoplasticity without a yield surface. Part I General theory," *Archives of Mechanics*, vol 23(4) pp. 517-533, (1971).

[Valanis et al (1975)] Valanis, K.C., Wu H. C. "Endochronic representation of cyclic creep and relaxation of metals," *J. of Applied Mechanics*, vol- pp. 67-73,(1975).

[Valanis (1975)] Valanis, K.C. "on the foundations of the endochronic theory of viscoplasticity," *Archives of Mechanics*, vol 27(n° 5-6) pp. 857-868, (1975).

[Voyiadjis et al(a) (1991)] Voyiadjis, G.,Z., Sivakumar, S.M "A robust Kinematic hardening rule for cyclic plasticity with ratchetig effect part I : theoretical formulation," *Acta Mechanica Vol 90 pp. 105-123, (1991).*

[Voyiadjis et al(b) (1991)] Voyiadjis, G.,Z., Sivakumar, S.M "A robust Kinematic hardening rule for cyclic plasticity with ratchetig effect part II : Application of non proportional loading cases," *Acta Mechanica Vol 107 pp. 117-136, (1991)*

[Voyiadjis et al (1998)] Voyiadjis, G.,Z., Basuroychowdhury, I.N. "A plasticity model for multiaxial cyclic loading and ratcheting," *Acta Mechanica Vol 126 pp. 19-35, (1998)*

---

Y

---

[Yoshida et al (1979)] Yoshida, F., Tajima, N., Ikegami, K., Shiratori, E. "plastic theory of mechanical ratcheting. *Bulletin of te JSME vol 21 pp.349-397,*" *Acta Mechanica Vol 126 pp. 19-35, (1979)*

---

Z

---

[Ziegler (1959)] Ziegler, H. "A modification of prager's hardening rule," *Quarterly of Applied Mechanics Vol 17, pp. 55-65, (1959)*

**Titre :** *Sur un modèle de comportement mécanique avec analyse modale de la dissipation intrinsèque : mise en œuvre et validation numériques.*

## Résumé

L'approche D.N.L.R. (Distribution of Non Linear Relaxation) repose sur la théorie des fluctuations et l'analyse modale de la dissipation. Elle permet la description d'un grand nombre de comportements physiques. L'objectif de ce travail consiste à valider le modèle mécanique sur des chargements cycliques complexes et à intégrer les équations constitutives dans un code d'éléments finis (Msc-Marc). La formulation thermodynamique sous-jacente traite la dissipation à l'aide de réorganisations internes, dont la cinétique est fortement non linéaire. Nous avons mis en place, dans le schéma d'intégration, des procédures numériques qui accélèrent le calcul. Il s'agit de la technique de pas variable qui s'avère performante lorsque qu'on compare le modèle D.N.L.R. au modèle N.L.K. (Non Linear Kinematics), *a priori* plus favorable sur ce plan puisque le nombre de variables internes est nettement plus réduit. La méthode à grand incrément de temps (MAGIT) bien adaptée pour le calcul des cycles conduit à des temps de calcul similaires au schéma avec accélération du pas d'intégration.

**Mots-clés:** Analyse Modale, Chargement Cyclique Non Proportionnel, Dissipation, Éléments Finis, Intégration Numérique, Relaxation.

**Title :** *On a mechanical behaviour model involving a modal analysis of the intrinsic dissipation : implementation and numerical validations.*

## Abstract

The DNLN approach (distribution of non linear relaxation) relies upon the fluctuation theory and the modal analysis of dissipation. It allows the description of a wide range of physical behaviours. The goal of the present work consists of a validation of the mechanical model for complex cyclic loadings and the implementation of the constitutive equations into a finite element code (Msc-Marc). The underlying thermodynamical formulation treats the dissipation thanks to internal reorganisations, the kinetics of which is strongly non-linear. We have established numerical procedures within the integration scheme, that do speed up the calculation. It consists in the variable step technique, which proves to be efficient compared to the NLK model (non linear kinematics), although being *a priori* more favourable regarding this aspect, since the number of internal variables is strongly reduced. The method using large time increments (LATIN) planned for the calculation of cycles leads to calculation times similar to the scheme involving an acceleration of the integration step.

**Keywords:** Modal Analysis, Non Proportional And Cyclic Load, Dissipation, Finite Element, Numerical Integration, Relaxation.

