



HAL
open science

Représentations modulaires des algèbres de Hecke et des algèbres de Ariki-Koike

Nicolas Jacon

► **To cite this version:**

Nicolas Jacon. Représentations modulaires des algèbres de Hecke et des algèbres de Ariki-Koike. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2004. Français. NNT: . tel-00006383

HAL Id: tel-00006383

<https://theses.hal.science/tel-00006383>

Submitted on 6 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 69 - 2004

Année 2004

THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 25 Avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le 11 Juin 2004 par

Nicolas JACON

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Représentations modulaires des algèbres de Hecke et des algèbres de Ariki-Koike

Au vu des rapports de :

M. Susumu ARIKI,
M. Bernard LECLERC.

Devant la commission d'examen formée de :

M. Philippe CALDERO,
M. Meinolf GECK, Directeur de thèse,
M. Bernard LECLERC,
M. Raphaël ROQUIER,
M. Jacques THÉVENAZ, Président du Jury.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Meinolf Geck pour la façon dont il a encadré ce travail. Ses nombreux conseils, sa disponibilité et ses encouragements m'ont été d'une aide extrêmement précieuse tout au long des ces trois années.

Je suis très reconnaissant à Susumu Ariki et Bernard Leclerc qui ont accepté d'être rapporteurs pour cette thèse. Je les remercie en particulier pour les discussions enrichissantes que nous avons eues ainsi que pour les suggestions qu'ils m'ont adressées. Je remercie chaleureusement Philippe Caldero pour avoir patiemment répondu à mes questions et pour avoir accepté d'être membre de mon Jury. Merci également à Raphaël Rouquier et Jacques Thévenaz qui me font l'honneur de participer au Jury.

Je voudrais également remercier tous les membres de l'Institut Girard Desargues : en particulier Monique Gaffier et Sybil Caraboeuf pour leur disponibilité et leur gentillesse, Violaine Louvet et Thierry Dumont pour leur aide en Informatique. Un grand merci également aux thésards de l'UFR de Mathématiques et en particulier à mes collègues de bureau pour les bons moments passés ensemble : Fabrizio Caselli, David Hézard, Christophe de Monval, Chadi Nour et Séverine Verneyre. Merci aussi à Olivier Brunat, Sébastien Foulle, Gwenaëlle Genet, Jean-Baptiste Gramain et Ammar Mahmood.

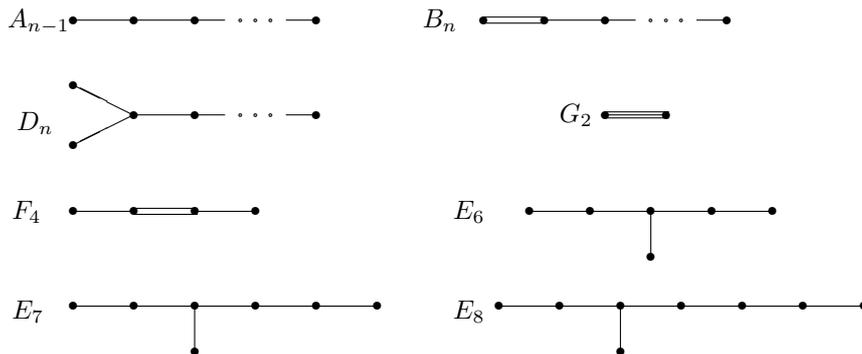
Enfin, il me reste à remercier mes amis et ma famille pour leur soutien pendant ces trois années.

Introduction

Les algèbres de Hecke sont apparues pour la première fois dans un article d'Iwahori en 1964 (voir [44]). Certaines de ces algèbres apparaissent naturellement dans la théorie des représentations des groupes finis. Plus précisément, soit A un anneau commutatif unitaire, W le groupe de Weyl d'un groupe de Chevalley G défini sur le corps fini à q éléments, S l'ensemble des réflexions simples de W et soit $(a_s)_{s \in S}$ une collection d'éléments de A . L'algèbre de Hecke $H_A := H_A(W, S, (a_s)_{s \in S})$ a pour base un ensemble indexé par les éléments de $W : \{T_w \mid w \in W\}$ et la multiplication entre les éléments de cette base peut être vue comme une déformation de la multiplication dans W par les éléments $(a_s)_{s \in S}$. Soit B un sous-groupe de Borel de G (l'exemple classique est le cas où $G = GL_n(q)$, W est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n et où B est le sous-groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures). Considérons le module de permutation $A[G/B]$, alors Iwahori a montré que :

$$H_A \simeq_A \text{End}_G(A[G/B]) \quad \text{où } a_s = q \cdot 1_A \text{ pour tout } s \in S.$$

Le but de ce travail est d'étudier les représentations des algèbres de Hecke. Nous considérons ici les groupes de Weyl finis c'est à dire les groupes de Coxeter dont le diagramme apparaît dans la liste ci-dessous :



Soit L un corps de caractéristique 0 ou $p > 0$ avec p "bon" nombre premier pour W . Soit H_L une algèbre de Hecke sur L à un paramètre, d'un groupe de Weyl fini W . Un des principaux problèmes dans l'étude des algèbres de Hecke est la détermination de l'ensemble des modules simples de H_L , noté $\text{Irr}(H_L)$.

Lorsque l'algèbre H_L est semi-simple, le théorème de déformation de Tits montre que les H_L -modules simples sont en bijection avec ceux de l'algèbre de groupe $L[W]$. On obtient même des formules explicites pour les caractères

INTRODUCTION

irréductibles (voir le livre de Geck-Pfeiffer [33]). Lorsque H_L n'est pas semi-simple, le problème est plus délicat et on parle alors de "représentations modulaires". Dans ce cas, la détermination de $\text{Irr}(H_L)$ est usuellement associée à la détermination de "l'application de décomposition". Cette application relie les modules simples d'une K -algèbre H_K semi-simple (qui sont en pratique connus) à ceux de H_L grâce à un processus de réduction modulaire. On obtient une application entre les groupes de Grothendieck de H_K et de H_L :

$$d : R_0(H_K) \rightarrow R_0(H_L)$$

La détermination de cette application de décomposition pour tout groupe de Weyl entraînerait des résultats intéressants. Par exemple, considérons la matrice associée à cette application (appelée matrice de décomposition). Les lignes de cette matrice sont indexées par les éléments de $\text{Irr}(H_K)$ tandis que les colonnes sont indexées par les éléments de $\text{Irr}(H_L)$. Alors, Dipper a montré que celle-ci apparaît comme sous matrice de la matrice de décomposition de $L[G]$ où G est un groupe de Chevalley de groupe de Weyl W .

Dans [27], Geck a décrit un ordre naturel sur les lignes et colonnes de la matrice de décomposition D associée à d en utilisant la a -fonction de Lusztig. Grâce à cet ordre, Geck et Rouquier dans [35] ont pu montrer qu'il existe un "ensemble basique canonique" $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$ en bijection avec $\text{Irr}(H_L)$ et que la sous-matrice de la matrice de décomposition formée sur les lignes de \mathcal{B} est unitriangulaire. Pour un bon ordre des lignes et colonnes de D grâce à la a -fonction de Lusztig, D est donc de la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ * & & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} \updownarrow \\ \mathcal{B} \\ \updownarrow \\ \text{Irr}(H_K) \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \text{Irr}(H_L) \\ \rightarrow \end{array}$$

La preuve de ces résultats implique la théorie de Kazhdan-Lusztig et en particulier certaines propriétés de l'algèbre asymptotique de Lusztig. La détermination de \mathcal{B} pour tout groupe de Weyl fini et tout algèbre de Hecke H_L semble être un problème très intéressant qui nous fournirait une description explicite de $\text{Irr}(H_L)$ et des propriétés de la matrice de décomposition. Le but de ce travail est, dans un premier temps, de résoudre ce problème.

On distingue habituellement deux familles pour les groupes de Weyl finis : celle des groupes de Weyl de type classique formée des types A_{n-1} , B_n et D_n pour $n \geq 1$ et celle des groupes de Weyl de type exceptionnel formée par G_2 , F_4 , E_6 , E_7 et E_8 . Lorsque L est de caractéristique 0, les matrices de décomposition pour les types G_2 , F_4 , E_6 et E_7 sont explicitement connues ; pour le type E_8 , Müller dans [63] a obtenu une "approximation" de cette matrice. La détermination de \mathcal{B} pour les types exceptionnels s'obtient alors facilement à

l'aide de l'étude de ces matrices et de l'ordre induit par la a -fonction de Lusztig. Lorsque W est de type classique, on ne connaît pas en général les matrices de décomposition. Cependant, dans [50], Lascoux, Leclerc et Thibon ont présenté un algorithme (l'algorithme de LLT) et ont conjecturé que celui-ci calcule les matrices de décomposition des algèbres de Hecke de type A_{n-1} . La preuve de cette conjecture a été apportée par Ariki dans [3] et reste l'un des résultats les plus importants de la théorie des algèbres de Hecke. Cette preuve permet d'établir une connection entre la théorie des représentations des algèbres de Hecke et la théorie des groupes quantiques.

En fait, les résultats d'Ariki portent sur une plus grande classe d'algèbres : les algèbres de Ariki-Koike. Ce type d'algèbres (aussi appelé algèbres cyclotomiques de type $G(l, 1, n)$) a été introduit indépendamment par Ariki et Koike dans [7] et par Broué et Malle dans [12] et peut être vu comme une déformation des groupes de réflexions complexes de la série $G(l, 1, n)$. Il a été conjecturé par Broué et Malle que ces algèbres sont reliées aux représentations modulaires des algèbres de blocs des groupes réductifs finis. Les algèbres de Hecke de type A_{n-1} et B_n sont des cas particuliers d'algèbres de Ariki-Koike. On dispose aussi d'une notion de matrice de décomposition pour ces algèbres et Ariki a montré que le calcul de celle-ci revient à calculer la base canonique au sens de Kashiwara-Lusztig d'un certain module sur une algèbre de Kac-Moody. Nous nous servons donc de ces résultats afin de déterminer l'ensemble basique canonique pour les types A_{n-1} et B_n . En particulier, nous retrouverons les résultats obtenus par Geck dans [33] pour le type A_{n-1} . Concernant le type D_n , Geck a montré dans [28] que l'ensemble basique canonique s'obtient facilement à partir de la caractérisation d'un ensemble analogue pour une algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux. Nous déterminerons donc \mathcal{B} pour le type D_n en utilisant ce résultat. Notons que le problème de déterminer $\text{Irr}(H_L)$ pour le type D_n est resté un problème ouvert jusqu'à très récemment et ce résultat permettra de fournir une solution à celui-ci (une autre solution a été proposée par Hu en 2003 dans [42] et, dans ce cas, on obtient une paramétrisation de $\text{Irr}(H_L)$ différente de celle trouvée ici). Nous obtiendrons donc une classification complète de \mathcal{B} pour les types classiques. Nous constaterons que les paramétrisations obtenues de $\text{Irr}(H_L)$ grâce à cette méthode sont relativement simples.

Comme il est noté ci-dessus, les algèbres de Hecke de type A_{n-1} et B_n sont des cas spéciaux d'algèbres de Ariki-Koike. Il est donc naturel de se demander si un "ensemble basique canonique" peut se définir dans ce cadre plus général. On ne dispose pas, pour l'instant, de bases de Kazhdan-Lusztig pour ces algèbres. Pourtant, on peut définir une a -fonction en faisant intervenir la structure d'algèbre symétrique sur les algèbres de Ariki-Koike (dans le cadre des algèbres de Hecke, cette définition est équivalente à celle obtenue à l'aide de la théorie de Kazhdan-Lusztig). En étudiant la a -fonction obtenue et en utilisant la caractérisation de la base canonique, nous obtiendrons ainsi l'existence d'un ensemble basique canonique pour ces algèbres en caractéristique 0 et montrerons que la paramétrisation de cet ensemble est donnée par une certaine classe de multipartitions définie par Foda, Leclerc, Okado, Thibon et Welsh dans [22] (nous remercions B. Leclerc et H. Miyachi pour avoir porté notre attention sur cet article). Une conséquence importante sera la détermination d'un algorithme purement combinatoire pour le calcul des matrices de décomposition des algèbres de Ariki-Koike. En particulier, cet algorithme généralisera l'algorithme de LLT qui n'était connu que pour le type A_{n-1} .

INTRODUCTION

Enfin, les algèbres de Hecke de type D_n ont aussi une généralisation en termes d'algèbres cyclotomiques : ce sont des cas spéciaux d'algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$. En utilisant la théorie de Clifford, nous montrerons que les résultats obtenus ci-dessus se retrouvent aussi pour certaines de ces algèbres. Tous ces résultats fournissent un indice de plus à l'existence d'une théorie de Kazhdan-Lusztig pour les algèbres cyclotomiques.

Ce travail est divisé en cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous définirons les objets utilisés et nous présenterons les différents théorèmes nécessaires à la démonstration des résultats exposés ici. Nous développerons plus particulièrement les deux points suivants : d'une part, les théorèmes d'existence d'ensembles basiques canoniques pour les algèbres de Hecke et la méthode obtenue pour déterminer $\text{Irr}(H_L)$ (appelée méthode de Geck-Rouquier) ; d'autre part, les liens entre les algèbres de Ariki-Koike et les algèbres quantiques en suivant des résultats de Ariki, Mathas et de Foda, Leclerc, Okado, Thibon et Welsh.

Dans le second chapitre, nous nous placerons dans le cadre des algèbres de Ariki-Koike. Nous donnerons tout d'abord la caractérisation de la a -fonction obtenue grâce aux résultats de Geck, Iancu et Malle. Ensuite, nous développerons des aspects combinatoires de la a -fonction puis nous démontrerons un théorème permettant de caractériser un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike en caractéristique 0. Le chapitre se termine par l'étude de certaines multipartitions appelées multipartitions Kleshchev qui apparaissent naturellement dans la théorie des représentations des algèbres de Ariki-Koike.

Dans le troisième chapitre, le but est de déterminer les ensembles basiques canoniques pour tous les groupes de Weyl en "bonne" caractéristique. Pour ceci, nous montrerons tout d'abord qu'il suffit de considérer le problème en caractéristique 0. Nous utiliserons ensuite les résultats obtenus précédemment afin de déterminer les ensembles basiques canoniques pour les algèbres de Hecke de type classique. Dans la troisième partie du chapitre, nous caractériserons ces ensembles pour les types exceptionnels en étudiant les matrices de décomposition connues.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéresserons aux algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$. Nous développerons tout d'abord quelques aspects de la théorie de Clifford et, en particulier, nous étudierons les relations entre les modules simples des algèbres de Ariki-Koike et ceux des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$. Ensuite, nous expliquerons comment obtenir l'existence d'un ensemble basique canonique pour les algèbres considérées ici. Ceci nous permettra d'obtenir une première classification pour les modules simples de ce type d'algèbres. Enfin, nous utiliserons ces résultats afin de déterminer une deuxième paramétrisation pour ces modules. Nous retrouverons en particulier certains résultats obtenus par Hu pour le type D_n .

Finalement, le cinquième chapitre expose un algorithme permettant de calculer les matrices de décomposition pour les algèbres de Ariki-Koike lorsque les paramètres sont des racines de l'unité. Nous présenterons ensuite sa programmation en GAP en l'illustrant de quelques exemples.

Table des matières

1	Préliminaires	13
1.1	Représentations modulaires des algèbres	13
1.1.A	Application de décomposition	14
1.1.B	Algèbres symétriques	16
1.2	Algèbres de Hecke	17
1.2.A	Définition et premières propriétés	17
1.2.B	Paramétrisation des modules simples pour les différents types	18
1.3	Algèbres de Ariki-Koike	22
1.3.A	Définition et résultats fondamentaux	22
1.3.B	Algèbres quantiques et bases canoniques	26
1.3.C	Paramétrisation d'Ariki et Mathas	28
1.3.D	Paramétrisation de Foda et al.	32
1.3.E	Conséquences sur les modules simples des algèbres de Hecke de type B_n	34
1.4	Caractérisation des modules simples des algèbres de Hecke à l'aide de la méthode de Geck-Rouquier	36
1.4.A	Bases de Kazhdan-Lusztig, éléments de Schur et a -fonctions de Lusztig	36
1.4.B	Paramétrisation de Geck-Rouquier pour les algèbres de Hecke de groupe de Weyl fini	37
1.4.C	Paramétrisation de Geck-Rouquier pour les algèbres de Hecke de groupes de Weyl étendus	40
2	L'ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike	43
2.1	a -valeurs des modules simples	44
2.1.A	Symboles	44
2.1.B	Éléments de Schur pour les algèbres de Ariki-Koike	45
2.1.C	a -fonction pour les algèbres de Ariki-Koike	47
2.2	Propriétés combinatoires	48
2.2.A	Notations et hypothèses	48
2.2.B	a -suites de résidus	50
2.2.C	a -graphe d'une l -partition de FLOTW	56
2.3	Existence et caractérisation d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike	62
2.3.A	Position du problème	62
2.3.B	Existence et caractérisation de l'ensemble basique canonique	63
2.4	Etude des multipartitions Kleshchev	70

2.4.A	Interprétations des multipartitions Kleshchev à l'aide de la a -fonction	70
2.4.B	Multipartitions Kleshchev et multipartitions de FLOTW	73
3	L'ensemble basique canonique pour les algèbres de Hecke	77
3.1	Le problème de la caractéristique positive	78
3.1.A	Factorisation de l'application de décomposition	78
3.1.B	Restriction du problème à la caractéristique 0	79
3.2	L'ensemble basique canonique pour les groupes de Weyl classique	80
3.2.A	Le type A_{n-1}	81
3.2.B	Le type B_n	82
3.2.C	Le type B_n à paramètres inégaux	84
3.2.D	Le type D_n	86
3.3	Ensemble basique canonique pour les types exceptionnels	87
3.3.A	Notations et remarques préliminaires	87
3.3.B	Le type G_2	89
3.3.C	Le type F_4	90
3.3.D	Le type E_6	91
3.3.E	Le type E_7	92
3.3.F	Le type E_8	93
4	Conséquences sur la théorie des représentations des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$	97
4.1	Etude des représentations des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$	98
4.1.A	Définition	98
4.1.B	Premières propriétés	98
4.1.C	Modules simples des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$	101
4.2	Ensemble basique canonique pour certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$	101
4.2.A	Restriction des $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples et applications de décomposition	102
4.2.B	Caractérisation de l'ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$	103
4.3	Une autre paramétrisation pour les modules simples de certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$	107
4.3.A	Multipartitions de FLOTW et graphe cristallin	107
4.3.B	Paramétrisation des $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples à l'aide des multipartitions Kleshchev	108
5	Calcul des matrices de décomposition pour les algèbres de Ariki-Koike	111
5.1	L'algorithme	111
5.2	Programmation de l'algorithme en GAP	113
5.2.A	Détermination des multipartitions de FLOTW	113
5.2.B	Détermination des a -suite de résidus	117
5.2.C	Programmation de la a -fonction	121
5.2.D	Calcul d'une base de $\overline{\mathcal{M}}$	124
5.2.E	Calcul de la Base canonique	130
5.2.F	Exemples	138

Table des Matières

Bibliographie	141
Index	145

Table des Matières

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de définir les notions permettant d'étudier les représentations des algèbres de Hecke et des algèbres de Ariki-Koike puis de présenter les principaux résultats connus concernant la théorie des représentations de ce type d'algèbres.

Dans la première partie, nous commencerons par étudier les représentations modulaires des algèbres dans un cadre général. La caractérisation de ces représentations est usuellement reliée à la détermination d'une application appelée "application de décomposition". Nous définirons donc cette notion dans cette partie (on pourra trouver une description plus détaillée dans [26, paragraphes 1 et 2]). Nous nous intéresserons ensuite plus particulièrement aux algèbres symétriques dont les algèbres de Hecke et les algèbres de Ariki-Koike sont des cas spéciaux. Dans la seconde partie, nous donnerons la définition des algèbres de Hecke de groupe de Weyl fini et nous utiliserons la section précédente afin de présenter des résultats classiques concernant la paramétrisation des modules simples pour ces algèbres. Dans la troisième partie, nous introduirons les principaux théorèmes permettant de déterminer les représentations des algèbres de Ariki-Koike. On suit ici Ariki [6] (où on pourra trouver les démonstrations de ces théorèmes) et Mathas [61]. Dans cette partie, la théorie des graphes cristallins et des bases canoniques de groupes quantiques joue un rôle capital. Nous rappellerons brièvement la définition de ces outils. On pourra trouver dans [45] une étude complète sur ce sujet. Enfin, la quatrième partie du chapitre énonce les conséquences de ces résultats sur la théorie des représentations des algèbres de Hecke. Nous introduirons tout d'abord la base de Kazhdan-Lusztig et la a -fonction de Lusztig suivant [28]. Enfin, nous énoncerons les résultats obtenus par Geck et Geck-Rouquier (dans [27], [28] et [35]). Ceux-ci permettent de fournir une paramétrisation canonique des modules simples d'algèbres de Hecke à un paramètre.

1.1 Représentations modulaires des algèbres

Dans cette partie, nous définissons la notion d'application de décomposition. Cet objet est habituellement utilisé pour l'étude des représentations d'algèbres sur des anneaux de valuation discrète (en particulier, dans la théorie des représentations modulaires des groupes finis). Ici, nous devons nous placer dans

un cadre plus général où cette application reste néanmoins bien définie. Nous présentons également quelques résultats classiques (le théorème de déformation de Tits, la réciprocity de Brauer...) valables dans ce contexte. Ensuite, nous énonçons quelques résultats concernant la théorie des représentations des algèbres symétriques.

Dans toute cette partie, on se donne A un anneau intègre commutatif et unitaire. On note K le corps des fractions de A et on suppose que A est intégralement clos dans K . On considère ici une A -algèbre associative H libre et de rang fini comme A -module. Enfin, on note $H_K := K \otimes_A H$.

1.1.A Application de décomposition

Soit $\theta : A \rightarrow L$ un homomorphisme d'anneau dans un corps L tel que L est le corps des fractions de $\theta(A)$. L'application θ est appelée une spécialisation et elle induit une structure de A -module sur L . Notons ainsi $H_L := L \otimes_A H$. On suppose que cette algèbre est déployée (c'est à dire, tout H_L -module simple est absolument simple).

Nous voulons maintenant décrire une application permettant de relier les modules de H_L et de H_K . Il est commode d'introduire celle-ci en terme de groupe de Grothendieck.

Définition 1.1.1 Soit $R = K$ ou L . Le groupe de Grothendieck des H_R -modules de type fini noté $R_0(H_R)$ est le groupe engendré par les expressions $[V]$ où V est un H_R -module de type fini et avec relations :

$$[V] = [V'] + [V''] \Leftrightarrow \text{on a une suite exacte } 0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0.$$

$R_0(H_R)$ est abélien avec base donnée par les classes d'isomorphismes des H_R -modules simples.

Il existe un anneau de valuation \mathcal{O} dans K (c'est à dire que pour tout élément $x \in K$, on a $x \in \mathcal{O}$ ou $x^{-1} \in \mathcal{O}$) avec unique idéal maximal $J(\mathcal{O})$ tel que $A \subset \mathcal{O}$ et tel que :

$$J(\mathcal{O}) \cap A = \ker(\theta).$$

Ceci est une conséquence d'un résultat général sur de tels anneaux (voir [37]) et du fait que $\ker(\theta)$ est un idéal premier. Soit k le corps résiduel de \mathcal{O} et soit $\pi : \mathcal{O} \rightarrow k$ la surjection canonique. Alors, L peut être vu comme un sous corps (en général strict) de k .

$$\begin{array}{ccccc} A & \subseteq & \mathcal{O} & \subseteq & K \\ \theta \downarrow & & \pi \downarrow & & \\ L & \subseteq & k & & \end{array}$$

On obtient un homomorphisme de groupe :

$$d_L^k : \begin{array}{ccc} R_0(H_L) & \rightarrow & R_0(H_k) \\ [V] & \mapsto & [k \otimes_L V] \end{array}$$

1.1. Représentations modulaires des algèbres

Comme H_L est déployée, cette application est un isomorphisme préservant la classe des modules simples (voir [33, lemme 7.3.4]). Par la suite, nous identifierons donc ces deux groupes et on pourra donc identifier les H_L -modules aux H_k -modules. On a maintenant la propriété suivante.

Proposition 1.1.2 (voir [33, paragraphe 7.4.2]) *Tout H_K -module peut se réaliser sur $H_{\mathcal{O}}$, c'est à dire, pour tout H_K -module V , il existe un $H_{\mathcal{O}}$ -module \widehat{V} tel que :*

$$K \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{V} = V.$$

Nous pouvons maintenant donner le théorème d'existence de l'application de décomposition dans cette situation.

Théorème 1.1.3 (voir [33, théorème 7.4.3]) *Soient $R_0(H_K)$ et $R_0(H_L)$ les groupes de Grothendieck des H_K -modules et des H_L -modules de type fini. On a une application :*

$$d_{\theta} : R_0(H_K) \rightarrow R_0(H_L),$$

bien définie par la condition suivante : pour $V \in \text{Irr}(H_K)$ et \widehat{V} le $H_{\mathcal{O}}$ -module associé de la proposition 1.1.2, on a :

$$d_{\theta}([V]) = [k \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{V}],$$

*où $k \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{V}$ est vu comme un élément de $R_0(H_L)$ grâce à l'isomorphisme d_L^k ci-dessus. L'application d_{θ} est appelée **application de décomposition** et ne dépend pas du choix de \mathcal{O} . De plus, pour tout $V \in \text{Irr}(H_K)$, il existe des nombres $d_{V,M} \in \mathbb{N}$ avec $M \in \text{Irr}(H_L)$ tels que :*

$$d_{\theta}([V]) = \sum_{M \in \text{Irr}(H_L)} d_{V,M} [M].$$

*Les nombres $d_{V,M}$ avec $V \in \text{Irr}(H_K)$ et $M \in \text{Irr}(H_L)$ sont appelés **nombre de décomposition** et la matrice $D_{\theta} := (d_{V,M})_{\substack{V \in \text{Irr}(H_K) \\ M \in \text{Irr}(H_L)}}$ la **matrice de décomposition**.*

Nous allons maintenant pouvoir donner les théorèmes classiques permettant d'étudier ces applications de décomposition. Tout d'abord, le théorème suivant donne une condition pour que la matrice de décomposition soit égale à l'identité.

Théorème 1.1.4 (Théorème de déformation de Tits, voir [33, théorème 7.4.6]) *Supposons que les algèbres H_K et H_L soient déployées et que H_L soit semi-simple alors l'algèbre H_K l'est aussi. De plus, l'application de décomposition d_{θ} est un isomorphisme préservant la classe des modules simples et donc D_{θ} est égale à l'identité.*

Le théorème suivant donne une interprétation des colonnes de la matrice de décomposition en terme de modules projectifs. Ce résultat nous servira en particulier dans la troisième partie de ce chapitre.

Théorème 1.1.5 (Réciprocité de Brauer, voir [33, théorème 7.5.2]) *On suppose que H_K est semi-simple déployée et que \mathcal{O} est un anneau de valuation discrète (ce qui est vérifié si, par exemple, A est régulier, voir [26]). Soit $D_{\theta} =$*

$(d_{V,M})_{\substack{V \in \text{Irr}(H_K) \\ M \in \text{Irr}(H_L)}}$ la matrice de décomposition associée à la spécialisation θ . Alors, pour tout $M \in \text{Irr}(H_L)$, il existe un $H_{\mathcal{O}}$ -module projectif indécomposable noté $P(M)$, couverture projective de M , tel que :

$$[P(M)_K] = \sum_{S \in \text{Irr}(H_K)} d_{S,M}[S]$$

où $P(M)_K := K \otimes_{\mathcal{O}} P(M)$.

Ces résultats vont pouvoir s'appliquer aux algèbres de Hecke et aux algèbres de Ariki-Koike dont nous allons parler un peu plus loin. Ces algèbres font partie de la classe des algèbres symétriques. Le but du prochain paragraphe est d'étudier certaines propriétés concernant ce type d'algèbres.

1.1.B Algèbres symétriques

Donnons tout d'abord la définition des algèbres symétriques.

Définition 1.1.6 On dit qu'une algèbre \mathfrak{H} sur un anneau commutatif B , libre et de rang fini comme B -module est une algèbre symétrique si il existe une fonction de trace $\tau : \mathfrak{H} \rightarrow B$ telle que la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} H \times H &\rightarrow B \\ (h, h') &\mapsto \tau(hh') \end{aligned}$$

est non dégénérée c'est à dire telle que le déterminant de la matrice $(\tau(b_i b'_j))_{b_i, b'_j \in \mathcal{B}}$ est une unité dans B pour toute B -base \mathcal{B} de H . On dit alors que τ est une fonction de trace symétrisante.

En particulier, un exemple important d'algèbre symétrique est donné par la classe des algèbres de groupes finis : soit G un groupe fini, B un anneau unitaire commutatif et $H = B[G]$, alors, pour $h = \sum_{g \in G} a(h)_g g \in H$ avec $a(h)_g \in B$, on peut vérifier que l'application τ définie par $\tau(h) = a(h)_1$ est une fonction de trace symétrisante.

Reprenons les notations indiquées dans le préambule de cette section. On suppose de plus que H est une algèbre symétrique sur A et que l'algèbre H_K est déployée. Alors, le théorème suivant permet de définir les éléments de Schur associés aux modules simples de H_K .

Théorème 1.1.7 (voir [33, théorème 7.2.6]) Sous les hypothèses ci-dessus, soit τ la fonction de trace symétrisante de H et soit τ^K la fonction induite sur H_K . On suppose que H_K est semi-simple déployée et pour $V \in \text{Irr}(H_K)$, on note χ_V le caractère associé. Alors, on a la propriété suivante.

$$\text{Pour tout } V \in \text{Irr}(H_K), \text{ il existe } s_V \in A \setminus \{0\}, \tau^K = \sum_{V \in \text{Irr}(H_K)} \frac{1}{s_V} \chi_V.$$

Pour $V \in \text{Irr}(H_K)$, l'élément s_V est appelé élément de Schur associé à V .

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre du paragraphe précédent : soit $\theta : A \rightarrow L$ une spécialisation sur L , corps des fractions de l'image de θ . On considère les algèbres H_K et H_L définies ci-dessus et on suppose que H_L est déployée. Alors, les éléments de Schur vont nous permettre de donner un critère de semi-simplicité pour l'algèbre H_L en utilisant la spécialisation θ .

Théorème 1.1.8 (Geck [25], Gyoja [39], voir [33, théorème 7.4.7]) *On garde les hypothèses du théorème précédent. Alors, on a*

$$H_L \text{ est semi-simple} \Leftrightarrow \text{Pour tout } V \in \text{Irr}(H_K), \theta(s_V) \neq 0.$$

Dans la prochaine section, nous allons nous intéresser aux algèbres de Hecke. Les résultats donnés dans cette section et ceux du paragraphe précédent vont s'appliquer ce qui va nous permettre de commencer l'étude des représentations pour ce type d'algèbres.

1.2 Algèbres de Hecke

Dans cette partie, nous commençons par donner la définition des algèbres de Hecke puis nous nous intéressons plus particulièrement aux paramétrisations des modules simples pour les types A_{n-1} , B_n et D_n .

Dans cette section, W désigne un groupe de Weyl, S l'ensemble de ses réflexions simples, v une indéterminée et $u := v^2$. On pose $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ et on note K le corps des fractions de A . Alors A est intégralement clos dans K .

1.2.A Définition et premières propriétés

Définissons tout d'abord les algèbres de Hecke dans un cadre général. Soit v_s ($s \in S$) des indéterminées tel que si $s, t \in S$ sont conjuguées dans W , alors $v_s = v_t$. Pour $s \in S$, on note $u_s = v_s^2$. On définit l'algèbre de Hecke générique sur $A_S = \mathbb{Z}[u_s^{\pm 1} \mid s \in S]$ à paramètres $\{u_s \mid s \in S\}$ et on note $H := H_{A_S}(W, S)$ la A_S -algèbre libre de rang fini comme A_S -module définie par :

- base : $\{T_w \mid w \in W\}$,
- relations : pour $s \in S$ et $w \in W$:

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{si } l(sw) > l(w), \\ u_s T_{sw} + (u_s - 1)T_w & \text{si } l(sw) < l(w). \end{cases}$$

où l est la fonction longueur usuelle sur W .

Cette algèbre peut être vue comme une déformation du groupe de Weyl W . On peut définir une fonction de trace symétrisante $\tau : H \rightarrow A_S$ tel que $\tau(T_w) = 0$ si $w \neq 1$ et $\tau(T_1) = 1$. Il suit que H est une algèbre symétrique, on pourra donc appliquer les résultats du paragraphe 1.1.B (voir pour plus de détails [33, chapitre 4]).

Dans la suite, nous travaillerons la plupart du temps avec des algèbres de Hecke à paramètres égaux. On suppose donc que pour tout $s \in S$, on a $v_s = v$, $u_s = u$ et que $A_S = A$. Soit alors $H := H_A(W, S)$. Considérons l'algèbre $H_K := K \otimes_A H$. On se place dans la situation du paragraphe 1.1.A : soit $\theta : A \rightarrow L$ spécialisation dans un corps L tel que L est le corps des fractions de $\theta(A)$. Nous allons également supposer que la caractéristique de L est soit nulle soit un bon nombre premier pour W . Les mauvais nombres premiers p pour W sont :

- $W = A_n$: aucun,
- $W = B_n, D_n$: $p = 2$,
- $W = G_2, F_4, E_6, E_7$: $p \in \{2, 3\}$,
- $W = E_8$: $p \in \{2, 3, 5\}$.

Alors, suivant [27], l'algèbre H_L est déployée. Soit alors \mathcal{O} un anneau de valuation discrète comme dans le paragraphe 1.1.A. On obtient une application de décomposition bien définie entre les groupes de Grothendieck de H_K et H_L :

$$d_\theta : R_0(H_K) \rightarrow R_0(H_L).$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la description des modules simples de H_K et de H_L . Considérons tout d'abord l'algèbre H_K . On sait que l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[W]$ est déployée (voir [33, théorème 6.3.8]) car W est un groupe de Weyl. Alors, suivant [33, théorème 9.3.5], H_K est déployée. Considérons la spécialisation suivante :

$$\begin{aligned} \theta : A &\rightarrow \mathbb{Q} \\ v &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Alors, H_L correspond à $\mathbb{Q}[W]$ qui est semi-simple d'après le théorème de Maschke (voir [43, paragraphe 1.9]). On utilise le théorème 1.1.4 de déformation de Tits et il suit que les modules simples de H_K sont en bijection avec ceux de $\mathbb{Q}[W]$. Au niveau des caractères irréductibles, le bijection s'obtient de la manière suivante. Soit $V \in \text{Irr}(H_K)$ et soit χ_V le caractère associé, alors, pour tout $w \in W$, on a $\chi_V(T_w) \in A$. La fonction $w \in W \mapsto \theta(\chi_V(T_w))$ définit alors le caractère du module simple de $\mathbb{Q}[W]$ en bijection avec V . Dans le prochain paragraphe, nous donnerons les expressions des modules simples de H_K pour les différents types.

Considérons maintenant une spécialisation quelconque θ tel que $\theta(u) = q \in L$. Lorsque l'algèbre H_L est semi-simple, le théorème de déformation de Tits implique que la matrice de décomposition associée est égale à l'identité. Nous pouvons donc nous demander dans quels cas cette algèbre n'est pas semi-simple. Pour ceci, d'après le théorème 1.1.8, il suffit de déterminer les éléments de Schur associés aux H_K -modules simples. Ces éléments de Schur ont été explicitement calculés par Steinberg pour le type A_{n-1} dans [66] et Hoefsmit pour les types B_n et D_n dans [41] (pour les types exceptionnels voir [33, appendice E]). On peut remarquer que pour $V \in \text{Irr}(H_K)$, $\theta(s_V) \neq 0$ implique que $\theta(u) = q$ est une racine de l'unité (où on rappelle que la caractéristique de L est nulle ou un "bon" nombre premier pour W , voir [28, paragraphe 4.8]). On obtient donc :

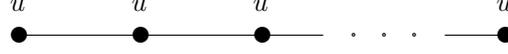
- Si $\theta(u)$ n'est pas une racine de l'unité, on a $D_\theta = Id$,
- Si $\theta(u)$ est une racine de l'unité, D_θ n'est pas l'identité en général. Les représentations pour ces types d'algèbres sont alors appelées représentations modulaires. Dans la troisième partie, nous énoncerons des résultats de Geck et Rouquier permettant d'affirmer que cette matrice à une forme triangulaire supérieure pour un "bon" ordre des lignes et des colonnes.

Nous allons maintenant étudier les paramétrisations des modules simples obtenues pour les différents groupes de Weyl dans le cas semi-simple et dans le cas modulaire.

1.2.B Paramétrisation des modules simples pour les différents types

Dans toute cette partie, on garde les notations adoptées dans la première section, en particulier θ est une spécialisation telle que $\theta(u) = q \in L$ où L désigne le corps des fractions de $\theta(A)$. On suppose que la caractéristique de L est nulle ou un "bon" nombre premier pour W .

Considérons tout d'abord le groupe de Weyl W de type A_{n-1} . Soit H , l'algèbre de Hecke associée avec le diagramme suivant.



Considérons l'algèbre H_K . Comme nous l'avons vu, d'après le théorème de déformation de Tits, c'est une algèbre semi-simple déployée et ses modules simples sont en bijection avec les modules simples du groupe symétrique c'est à dire avec les partitions de rang n .

Dans toute la suite du document, on dira que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est une partition de rang n si :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i = n.$$

On notera, de plus, Π_n^1 l'ensemble des partitions de n . On peut construire pour chaque partition λ de n , un H -module appelé **module de Specht**, libre, de rang fini et noté S^λ (sa construction est expliquée dans [16]).

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2.1 (*Dipper-James [16]*) *Les H_K -modules $S_K^\lambda := K \otimes_A S^\lambda$ sont simples et non isomorphes. On a alors :*

$$\text{Irr}(H_K) = \{S_K^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^1\}.$$

Supposons que q n'est pas une racine de l'unité. L'algèbre H_L est alors semi-simple et ses modules simples sont en bijection avec ceux de H_K . Plus précisément :

$$\text{Irr}(H_L) = \{S_L^\lambda := L \otimes_A S^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^1\}.$$

Supposons maintenant que q est une racine de l'unité et définissons l'entier suivant :

$$e := \min \{i \geq 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0\}.$$

Remarquons que si $q = 1$ alors $e = \infty$ si L est de caractéristique 0 et $e = p$ si L est de caractéristique $p > 0$. Dans tous les autres cas, e est l'ordre de q dans le groupe multiplicatif de L . Dans ce cas, la matrice de décomposition n'est pas l'identité en général et donc les modules S_L^λ sont réductibles en général.

On peut définir une forme bilinéaire H_L -invariante sur chaque module S_L^λ . On pose alors $D^\lambda := S_L^\lambda / \text{rad}(S_L^\lambda)$ où rad désigne le radical de cette forme. Avec ces notations, Dipper et James ([16]) ont montré la propriété suivante :

$$\text{Irr}(H_K) = \{D^\lambda \mid D^\lambda \neq 0\}.$$

Il reste à déterminer quelles sont les partitions λ pour lesquelles $D^\lambda \neq 0$. Pour cela, on introduit la définition suivante : soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une partition de n telle que $\lambda_r \neq 0$. Alors, on dit que λ est e -régulière si il n'existe pas de $1 \leq i \leq r$ tel que :

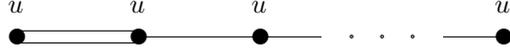
$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+e-1}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2.2 (Dipper-James [16]) Avec les hypothèses ci-dessus, on a :

$$D^\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ est } e\text{-régulière de rang } n.$$

Supposons maintenant que W est de type B_n avec diagramme suivant.



On a une paramétrisation naturelle des modules simples de H_K par les bipartitions de n : pour chaque bipartition (λ, μ) , Dipper, James et Murphy ([19]) ont construit un H -module de Specht, libre, de rang fini, noté $S^{(\lambda, \mu)}$. Si on désigne par Π_n^2 l'ensemble des bipartitions de rang n , on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 1.2.3 (Dipper-James-Murphy [19]) Les modules $S_K^{(\lambda, \mu)}$ sont simples et non isomorphes. On a alors :

$$\text{Irr}(H_K) = \left\{ S_K^{(\lambda, \mu)} \mid (\lambda, \mu) \in \Pi_n^2 \right\}.$$

Si q n'est pas une racine de l'unité, on obtient :

$$\text{Irr}(H_L) = \left\{ S_L^{(\lambda, \mu)} \mid (\lambda, \mu) \in \Pi_n^2 \right\}.$$

Supposons que q est une racine de l'unité et comme ci-dessus, notons :

$$e := \min \{ i \geq 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0 \}.$$

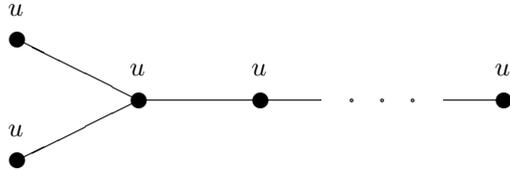
Alors, on peut, comme pour le type A , définir pour chaque bipartition (λ, μ) de n , un module $D^{(\lambda, \mu)}$ tel que l'ensemble des modules $D^{(\lambda, \mu)} \neq 0$ forme l'ensemble des modules simples de H_L . Le cas e impair a été résolu par Dipper et James et offre quelques similitudes avec le type A_{n-1} .

Théorème 1.2.4 (Dipper-James [17]) Avec les hypothèses ci-dessus, supposons e impair, alors :

$$D^{(\lambda, \mu)} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ et } \mu \text{ sont } e\text{-régulières et } |\lambda| + |\mu| = n.$$

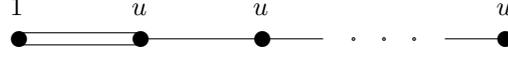
Le cas e pair a été résolu par Ariki et Mathas ([5] et [8]) et nécessite l'introduction des algèbres de Ariki-Koike, nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie de ce chapitre.

Enfin, supposons que W est de type D_n avec diagramme suivant.



Soit H' l'algèbre de Hecke de type D_n associée. Les modules simples de l'algèbre H'_K sont obtenus en utilisant la paramétrisation pour le type B_n . En effet, soit H algèbre de Hecke de type B_n sur A avec diagramme suivant.

1.2. Algèbres de Hecke



Soit $S = \{\sigma, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ l'ensemble des générateurs (en suivant les notations du paragraphe 1.2.A, on a $u_\sigma = 1$ et $u_{s_i} = u$ pour $i = 1, \dots, n-1$). On a alors les relations suivantes dans H :

$$(T_\sigma - 1)(T_\sigma + 1) = 0, \quad (T_{s_i} - u)(T_{s_i} + 1) = 0 \text{ si } i \geq 1,$$

$$T_\sigma T_{s_1} T_\sigma T_{s_1} = T_{s_1} T_\sigma T_{s_1} T_\sigma, \quad T_\sigma T_{s_i} = T_{s_i} T_\sigma \text{ si } i \geq 2,$$

$$T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i} \text{ si } |i - j| \geq 2, \quad T_{s_i} T_{s_{i-1}} T_{s_i} = T_{s_{i-1}} T_{s_i} T_{s_{i-1}} \text{ si } 2 \leq i \leq n-1.$$

Posons $T_{s'_1} = T_\sigma T_{s_1} T_\sigma$ et considérons la sous-algèbre H' de H engendrée par $\{T_{s'_1}, T_{s_1}, T_{s_2}, \dots, T_{s_{n-1}}\}$. On a les relations suivantes :

$$(T_{s'_1} - u)(T_{s'_1} + 1) = 0, \quad (T_{s_i} - u)(T_{s_i} + 1) = 0 \text{ si } i \geq 1,$$

$$T_{s'_1} T_{s_1} = T_{s_1} T_{s'_1}, \quad T_{s'_1} T_{s_2} T_{s'_1} = T_{s_2} T_{s'_1} T_{s_2}, \quad T_{s'_1} T_{s_i} = T_{s_i} T_{s'_1} \text{ si } i \geq 3,$$

$$T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i} \text{ si } |i - j| \geq 2, \quad T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} = T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}} \text{ si } i \geq 1.$$

Alors H' est l'algèbre de Hecke générique de type D_n comme ci-dessus. L'algèbre de Hecke H'_K est semi-simple déployée. Notons Res l'opération de restriction des modules de H à H' , on obtient une paramétrisation des modules simples de H'_K à partir de la paramétrisation classique de H_K (comme pour le type B_n à paramètres égaux, les modules simples de H_K sont des modules de Specht indexés par les bipartitions de n).

Pour $S_K^{(\lambda, \mu)} \in \text{Irr}(H_K)$, on a :

- si $\lambda \neq \mu$ alors $\text{Res}(S_K^{(\lambda, \mu)})$ est un H'_K -module simple que l'on note $V^{[\lambda, \mu]}$ et on a $\text{Res}(S_K^{(\lambda, \mu)}) \simeq \text{Res}(S_K^{(\mu, \lambda)})$,
- si $\lambda = \mu$ alors $\text{Res}(S_K^{(\lambda, \mu)})$ se décompose en deux H'_K -modules simples notés $V^{[\lambda, +]}$ et $V^{[\lambda, -]}$.

De plus, chaque H'_K -module simple s'obtient par ce procédé (voir par exemple [28]). On a donc :

$$\text{Irr}(H'_K) = \left\{ V^{[\lambda, \mu]} \mid (\lambda, \mu) \in \Pi_n^2, \lambda \neq \mu \right\} \cup \left\{ V^{[\lambda, +]}, V^{[\lambda, -]} \mid \lambda \in \Pi_{\frac{n}{2}}^1 \right\}.$$

On obtient évidemment la même paramétrisation pour les H_L -modules simples si q n'est pas une racine de l'unité.

Nous retrouverons par la suite cette idée de considérer une algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux pour obtenir des informations sur les algèbres de Hecke de type D_n . En particulier, lorsque q est une racine de l'unité, les résultats de la troisième partie nous permettront de déterminer une paramétrisation des modules simples.

Nous allons maintenant introduire quelques notions qui permettent de déterminer une paramétrisation complète des modules simples des algèbres de Hecke de type B_n dans le cas modulaire. Pour cela, nous introduisons les algèbres de Ariki-Koike.

1.3 Algèbres de Ariki-Koike

Les algèbres de Ariki-Koike ont été introduites par Ariki et Koike ([7]) afin de généraliser les algèbres de Hecke de type A_{n-1} et B_n . Ces algèbres sont aussi apparues, indépendamment, dans un article de Broué et Malle [12], comme un analogue aux algèbres de Hecke pour les groupes de réflexions complexes.

Dans cette partie, on adoptera les notations suivantes : soit $l \in \mathbb{N}$ et soient $\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}$, $l+1$ indéterminées (non nécessairement indépendantes). Soit $A = \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0^{-1}, \dots, \mathbf{u}_{l-1}, \mathbf{u}_{l-1}^{-1}]$. Soit K le corps des fractions de A . On suppose que A est intégralement clos dans K . On se donne également une spécialisation $\theta : A \rightarrow L$ dans un corps L , corps des fractions de $\theta(A)$ que l'on supposera (sauf indication contraire) de caractéristique 0.

1.3.A Définition et résultats fondamentaux

On considère l'algèbre de Ariki-Koike à paramètres $\{\mathbf{u}; \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}\}$:

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_{A,n}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}).$$

\mathcal{H}_n est une A -algèbre associative unitaire qui possède une présentation donnée par :

- générateurs : T_0, T_1, \dots, T_{n-1} ;
- relations :

$$\begin{aligned} (T_i - \mathbf{u})(T_i + 1) &= 0 && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ (T_0 - \mathbf{u}_0)(T_0 - \mathbf{u}_1) \dots (T_0 - \mathbf{u}_{l-1}) &= 0, \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n-2, \\ T_i T_j &= T_j T_i && \text{pour } |i-j| > 1, \\ T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0. \end{aligned}$$

Cette algèbre peut être vue comme une déformation du groupe de réflexion complexe $G(l, 1, n)$, produit en couronne d'un groupe cyclique d'ordre l avec le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Remarquons que pour $l=1$ et $l=2$, \mathcal{H}_n correspond à une algèbre de Hecke de type A_{n-1} et B_n respectivement.

Étudions la structure de cette algèbre : pour un entier $1 \leq i \leq n-1$, notons s_i la transposition $(i, i+1)$. Soit $w \in \mathfrak{S}_n$ et soit $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ une expression réduite pour w (c'est à dire avec k minimal). On définit alors $T_w := T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_k}$. Ce terme ne dépend pas du choix de l'expression réduite par le lemme de Matsumoto (voir par exemple [33, théorème 1.2.2]). Pour $j = 1, \dots, n$, on considère également les éléments $L_j := \mathbf{u}^{1-j} T_{j-1} \dots T_1 T_0 T_1 \dots T_{j-1}$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 (Ariki-Koike [7]) \mathcal{H}_n est libre de rang fini sur A avec base $\{L_1^{a_1} L_2^{a_2} \dots L_n^{a_n} T_w \mid 0 \leq a_j < l, w \in \mathfrak{S}_n\}$.

Comme pour les algèbres de Hecke, on dispose ici d'une notion de module de Specht. Ces modules sont cette fois indexés par les l -partitions de rang n . Une l -partition (ou multipartition) $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ de rang n est un l -uplet

de partitions $\lambda^{(j)}$ tel que $\sum_{j=0}^{l-1} |\lambda^{(j)}| = n$. L'ensemble des l -partitions de rang n

sera noté Π_n^l .

Pour chaque l -partition $\underline{\lambda}$, on définit donc un \mathcal{H}_n -module de Specht noté $S^\underline{\lambda}$. Nous considérons ici les modules de Specht “classiques” comme dans [16]. Remarquons que certains auteurs (comme Ariki [5] et Mathas [62]) considèrent les modules de Specht duaux. Le passage d’un module de Specht $S^\underline{\lambda}$ à son dual se fait en considérant la multipartition conjuguée à $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ c’est à dire la multipartition $(\lambda^{(l-1)t}, \dots, \lambda^{(0)t})$ où, pour $i = 0, \dots, l-1$, $\lambda^{(i)t}$ est obtenue en échangeant les lignes et colonnes du diagramme de $\lambda^{(i)}$.

Exemple : La multipartition conjuguée à la 3-partition $(2.1, 3, 1.1)$ de rang 8 est $(2, 1.1.1, 2.1)$.

On suppose que l’on a pour tout $i \neq j$ et pour tout $d \in \mathbb{Z}$ tel que $|d| \leq n$:

$$u^d u_i \neq u_j.$$

Alors, suivant Ariki [6, paragraphe 13.2], on obtient une algèbre $\mathcal{H}_{K,n}$ semi-simple déployée. Les modules simples de cette algèbre sont, d’après le théorème de déformation de Tits, en bijection avec ceux du groupe de réflexion complexe de type $G(l, 1, n)$ c’est à dire avec les l -partitions de rang n (résultat obtenu par Ariki et Koike dans [7]). Plus précisément, Dipper, James et Mathas ont montré le théorème suivant.

Théorème 1.3.2 (*Dipper-James-Mathas [18]*) *L’ensemble des modules simples de $\mathcal{H}_{K,n}$ est donné par l’ensemble des modules $S_K^\underline{\lambda}$ où $\underline{\lambda}$ parcourt l’ensemble des l -partitions de rang n :*

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{K,n}) = \left\{ S_K^\underline{\lambda} \mid \underline{\lambda} \in \Pi_n^l \right\}.$$

Remarquons que pour $l = 1$ et $l = 2$, on retrouve la paramétrisation classique des modules simples d’algèbres de Hecke semi-simples de type A_{n-1} et B_n par les partitions et bipartitions de n .

Soit maintenant $\theta : A \rightarrow L$ une spécialisation dans L , le corps des fractions de l’image de θ . On suppose que L est de caractéristique 0 et que l’on a $\theta(u) = q \in L \subset \mathbb{C}$ et $\theta(u_i) = u_i \in L \subset \mathbb{C}$ pour $i = 0, \dots, l-1$. On obtient une algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{L,n}$ avec paramètres $\{q; u_0, \dots, u_{l-1}\}$.

Pour chaque module $S_L^\underline{\lambda} := L \otimes_A S^\underline{\lambda}$, on peut définir une $\mathcal{H}_{L,n}$ -forme bilinéaire et un radical associé noté $\text{rad}(S_L^\underline{\lambda})$. Alors, Dipper, James et Mathas ont montré que les modules $D^\underline{\lambda} := S_L^\underline{\lambda} / \text{rad}(S_L^\underline{\lambda})$ non nuls sont des modules absolument simples et qu’ils forment l’ensemble des modules simples de $\mathcal{H}_{L,n}$ (voir les articles de Graham-Lehrer [38] et Dipper-James-Mathas [18]). Ceci implique, en particulier, que $\mathcal{H}_{L,n}$ est déployée. On obtient ainsi l’existence d’une application de décomposition :

$$d_\theta : R_0(\mathcal{H}_{K,n}) \rightarrow R_0(\mathcal{H}_{L,n}).$$

Le théorème suivant implique que nous allons pouvoir utiliser les résultats énoncés lors de la première section.

Théorème 1.3.3 (*Bremke-Malle [10], Malle-Mathas [59]*) *\mathcal{H}_n est une algèbre symétrique avec fonction de trace symétrisante τ définie pour $w \in \mathfrak{S}_n$ et $0 \leq$*

$a_j < l$ de la manière suivante :

$$\tau(L_1^{a_1} \dots L_n^{a_n} T_w) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = \dots = a_n = 0 \text{ et } w = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Intéressons-nous maintenant plus en détails à $\mathcal{H}_{L,n}$. Pour ceci, notons $\Phi_n^l := \{\underline{\mu} \in \Pi_n^l \mid D^\mu \neq 0\}$. Tout d'abord, nous avons le critère de semi-simplicité suivant.

Théorème 1.3.4 (Ariki [1]) *L'algèbre $\mathcal{H}_{L,n}$ est semi-simple déployée si et seulement si on a :*

- Pour tout $i \neq j$ et pour tout $d \in \mathbb{Z}$ tel que $|d| \leq n$, on a :

$$q^d u_i \neq u_j,$$

$$- \prod_{i=1}^n (1 + q + \dots + q^{i-1}) \neq 0.$$

Ces deux conditions sont appelées les **conditions de séparation**. Dans ce cas, d'après le théorème de déformation de Tits, on a :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) = \left\{ S_L^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^l \right\}.$$

Pour le cas où l'algèbre $\mathcal{H}_{L,n}$ n'est pas semi-simple, les modules S_L^λ sont réductibles en général et la matrice de décomposition est non triviale en général. Le théorème suivant donne une première propriété concernant la matrice de décomposition. Pour ceci, on définit l'**ordre de dominance** sur l'ensemble des l -partitions de rang n : on dit que $\underline{\mu} = (\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(l-1)}) \in \Pi_n^l$ domine $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)}) \in \Pi_n^l$ et on écrit $\underline{\mu} \succeq \underline{\lambda}$ si on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq l-1$:

$$\sum_{k=0}^{j-1} |\mu^{(k)}| + \sum_{p=1}^i \mu_p^{(j)} \geq \sum_{k=0}^{j-1} |\lambda^{(k)}| + \sum_{p=1}^i \lambda_p^{(j)}.$$

Théorème 1.3.5 (Dipper-James-Mathas, voir [6, théorème 13.21]) *Soient $\underline{\lambda} \in \Pi_n^l$ et $\underline{\mu} \in \Phi_n^l$ alors :*

$$d_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}} \neq 0 \Rightarrow \underline{\mu} \succeq \underline{\lambda}.$$

Nous allons maintenant donner les expressions des l -partitions $\underline{\lambda}$ vérifiant $D^\lambda \neq 0$. Le théorème suivant permet de réduire le problème.

Théorème 1.3.6 (Dipper-Mathas [20]) *On note $Q = \{u_0, u_1, \dots, u_{l-1}\}$. On suppose que l'on a une partition Γ de Q :*

$$Q = Q_1 \amalg Q_2 \amalg \dots \amalg Q_s$$

telle que :

$$f_\Gamma(q, Q) = \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq s} \prod_{\substack{u_i \in Q_\alpha \\ u_j \in Q_\beta}} \prod_{-n < a < n} (q^a u_i - u_j)$$

1.3. Algèbres de Ariki-Koike

est un élément inversible. Alors $\mathcal{H}_{L,n}$ est Morita-équivalente à l'algèbre :

$$\mathcal{H}_{L,n}(\Gamma) := \bigoplus_{\substack{n_1, \dots, n_s > 0 \\ n_1 + \dots + n_s = n}} \mathcal{H}_{L,n_1}(Q_1) \otimes \mathcal{H}_{L,n_2}(Q_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{L,n_s}(Q_s)$$

où $\mathcal{H}_{L,n_i}(Q_i)$ ($i = 1, \dots, s$) désigne l'algèbre de Ariki-Koike sur L à paramètres q, Q_i .

Remarque 1.3.7 En particulier, dans le cas semi-simple, l'algèbre est Morita-équivalente à une somme directe de l produits tensoriels d'algèbres de Hecke de type A (ce résultat avait déjà été obtenu par Du et Rui [21]) et on retrouve la paramétrisation des modules simples d'Ariki par les l -partitions dans le cas semi-simple.

Le théorème 1.3.6 implique que l'étude des représentations de $\mathcal{H}_{L,n}$ est entièrement déterminée par l'étude des représentations des différentes algèbres $\mathcal{H}_{L,n_i}(Q_i)$ où, pour u_p et u_q dans Q_i , on a $\frac{u_p}{u_q} = q^a$ avec $-n < a < n$, et par l'étude du cas où tous les u_i sont nuls.

L'étude de ce deuxième cas a été faite dans [8], on a le théorème suivant.

Théorème 1.3.8 (Ariki-Mathas [8]) Soit $\mathcal{H}_{L,n}$ algèbre de Ariki-Koike telle que tous les paramètres u_i sont nuls. Alors :

- si q est une racine de l'unité d'ordre e , on a :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) = \left\{ D^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^l, \lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(l-1)} = (0), \lambda^{(0)} \text{ } e\text{-régulière} \right\},$$

- sinon :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) = \left\{ D^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^l, \lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(l-1)} = (0) \right\}.$$

Nous considérons donc maintenant l'algèbre $\mathcal{H}_{L,n}$ où chaque paramètre s'écrit comme une puissance de q :

$$u_i = q^{v_i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, l-1,$$

où les v_i ($0 \leq i \leq l-1$) sont des entiers tels que :

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1}.$$

D'après le théorème 1.3.4, $\mathcal{H}_{L,n}$ n'est pas semi-simple (pour n assez grand).

Nous supposons ¹ également dans toute la suite que q est une racine de l'unité d'ordre e et que $v_{l-1} < e$. Ceci nous permettra de déduire les résultats manquant pour la détermination des modules simples des algèbres de Hecke.

Les représentations modulaires des algèbres de Ariki-Koike ont été tout d'abord étudiées par Ariki et Ariki-Mathas et utilisent certains résultats concernant les algèbres quantiques, nous rappelons ces résultats dans le second paragraphe.

¹En fait, les résultats d'Ariki et de Mathas restent valables lorsque q n'est pas une racine de l'unité en posant $e = +\infty$.

1.3.B Algèbres quantiques et bases canoniques

Soit \mathfrak{h} un \mathbb{Z} -module libre avec base $\{h_i, d \mid 0 \leq i < e\}$ et soit $\{\Lambda_i, \delta \mid 0 \leq i < e\}$ une base duale pour la forme :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que $\langle \Lambda_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \delta, d \rangle = 1$ et $\langle \Lambda_i, d \rangle = \langle \delta, h_j \rangle = 0$ pour $0 \leq i, j < e$.

Pour $0 \leq i < e$, on définit les racines simples α_i de \mathfrak{h}^* par :

$$\alpha_i = \begin{cases} 2\Lambda_0 - \Lambda_{e-1} - \Lambda_1 + \delta & \text{si } i = 0, \\ 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1} & \text{si } i > 0, \end{cases}$$

où $\Lambda_e := \Lambda_0$. Les Λ_i (avec $i = 0, \dots, e-1$) sont appelés les poids fondamentaux.

Considérons l'algèbre de Kac-Moody $\mathcal{U}(\widehat{sl_e})$ de type $A_{e-1}^{(1)}$ (en fait, l'algèbre enveloppante de $\widehat{sl_e}$). Nous allons travailler avec la "quantification" de cette algèbre. Soit v une indéterminée. On considère l'algèbre quantique $\mathcal{U}_v := \mathcal{U}_v(\widehat{sl_e})$ de type $A_{e-1}^{(1)}$, c'est une algèbre associative unitaire sur $\mathbb{C}(v)$ avec générateurs e_i, f_j et k_h (où $0 \leq i, j < e$ et $h \in \mathfrak{h}$) soumise entre autre aux relations de Serre quantifiées (voir par exemple [6]).

Pour $0 \leq i, j < e$ et $k \in \mathbb{N}$, notons $e_i^{(k)} := \frac{e_i^k}{[k]_v!}$ et $f_i^{(k)} := \frac{f_i^k}{[k]_v!}$ où $[k]_v = [1]_1[2]_v \dots [k]_v$ et $[k]_v = \frac{v^k - v^{-k}}{v - v^{-1}}$, les puissances divisées de e_i et f_i . Nous noterons également, pour $(p, k) \in \mathbb{N}^2$: $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}_v := \frac{[p]_v!}{[p]_v! [p-k]_v!}$. Alors les relations sont données par :

$$\begin{aligned} k_0 &= 1, & k_h k_g &= k_{h+g}, & k_h e_i &= v^{\langle \alpha_i, h \rangle} e_i k_h, \\ k_h f_i &= v^{-\langle \alpha_i, h \rangle} f_i k_h, & e_i f_i - f_i e_i &= \delta_{i,j} \frac{k_{h_i} - k_{-h_i}}{v - v^{-1}}, \\ \sum_{k=0}^{1-\langle \alpha_i, h_j \rangle} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - \langle \alpha_i, h_j \rangle \\ k \end{bmatrix}_v e_i^{1-\langle \alpha_i, h_j \rangle - k} e_j e_i^k &= 0, \\ \sum_{k=0}^{1-\langle \alpha_i, h_j \rangle} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - \langle \alpha_i, h_j \rangle \\ k \end{bmatrix}_v f_i^{1-\langle \alpha_i, h_j \rangle - k} f_j f_i^k &= 0, \end{aligned}$$

pour $0 \leq i, j < e$ et $h \in \mathfrak{h}$.

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, nous allons considérer la forme de Kostant-Lusztig de \mathcal{U}_v que l'on notera $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$: c'est la \mathcal{A} -sous-algèbre de \mathcal{U}_v engendrée par les puissances divisées $e_i^{(s)}, f_j^{(s)}$ pour $0 \leq i, j < e, s > 0$ et par $k_{h_i}, k_d, k_{h_i}^{-1}, k_d^{-1}$ pour $0 \leq i < e$.

Soit $X = \bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta$, l'espace des poids et $X^+ = \bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathbb{N}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta$ l'espace des poids dominants de \mathcal{U}_v .

Soit \mathcal{M} un module intégrable de plus haut poids Λ : il existe alors un vecteur m_{Λ} de poids Λ dans \mathcal{M} tel que $\mathcal{M} = \mathcal{U}_v m_{\Lambda}$ et $e_i m_{\Lambda} = 0$ pour tout $0 \leq i < e$. Chaque élément $x \in \mathcal{M}$ s'écrit de façon unique sous la forme suivante :

$$x = \sum_{\Gamma \in X} x_{\Gamma}$$

1.3. Algèbres de Ariki-Koike

où x_Γ vérifie $k_h x_\Gamma = v^{\Gamma(h)} x$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et où pour tout $i \in \{0, 1, \dots, e-1\}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $e_i^{(p)} x_\Gamma = f_i^{(p)} x_\Gamma = 0$.

Pour $\Gamma \in X$, notons $x = x_\Gamma$, alors x s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{s \geq 0} f_i^{(s)} x_s$$

pour un nombre fini de $x_s \in \mathcal{M}$ vérifiant $e_i x_s = 0$ (voir [6, corollaire 4.8]). On définit alors les opérateurs de Kashiwara \tilde{e}_i et \tilde{f}_i par :

$$\tilde{e}_i x = \sum_{s \geq 1} f_i^{(s-1)} x_s \quad \text{et} \quad \tilde{f}_i x = \sum_{s \geq 0} f_i^{(s+1)} x_s.$$

Nous pouvons maintenant définir la base cristalline et le graphe cristallin d'un module intégrable. Nous citons également les propriétés fondamentales de ces objets dans la définition suivante.

Définition 1.3.9 (Kashiwara [48], voir aussi [6, chapitre 9]) Soit \mathcal{M} un module intégrable de plus haut poids Λ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{U}_v m_\Lambda$, \mathbf{A} l'anneau des fonctions rationnelles sur $\mathbb{C}[v]$ sans pôle en 0, soit aussi :

$$\mathcal{L} = \sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_k < e \\ k \geq 0}} \mathbf{A} \tilde{f}_{i_1} \dots \tilde{f}_{i_k} m_\Lambda,$$

$$\mathbf{B}_0 = \left\{ \tilde{f}_{i_1} \dots \tilde{f}_{i_k} m_\Lambda + v\mathcal{L} \mid 0 \leq i_1, \dots, i_k < e, k \geq 0 \right\} \setminus \{0\}.$$

Alors la paire $(\mathcal{L}, \mathbf{B}_0)$ est appelée une base cristalline de \mathcal{M} . \mathcal{L} est un \mathbf{A} -sous module libre de \mathcal{M} stable sous l'action de \tilde{e}_i et \tilde{f}_i . De plus, \mathbf{B}_0 est une base de $\mathcal{L}/v\mathcal{L}$ et on a :

$$\tilde{e}_i \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0 \cup \{0\} \quad \text{et} \quad \tilde{f}_i \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_0 \cup \{0\}.$$

Enfin, si b et b' sont dans \mathbf{B}_0 , alors $\tilde{f}_i b = b'$ si et seulement si $\tilde{e}_i b' = b$. On associe alors à $(\mathcal{L}, \mathbf{B}_0)$ un graphe appelé graphe cristallin et défini de la manière suivante.

- sommets : les éléments de \mathbf{B}_0 ,
- arêtes : $b \xrightarrow{i} b'$ si et seulement si $\tilde{f}_i b = b'$.

On peut maintenant définir la notion de base canonique qui jouera un rôle capital dans la suite du document.

Théorème 1.3.10 (Kashiwara, Lusztig, voir [6, théorème 9.8]) On considère l'involution de \mathcal{U}_A définie par :

$$\bar{v} = v^{-1}, \quad \bar{k}_h = k_{-h}, \quad \bar{e}_i = e_i, \quad \bar{f}_i = f_i.$$

pour $h \in \mathfrak{h}$ et $0 \leq i < e$. Cette involution est appelée "l'involution barre". Soit $\mathcal{M}_A = \mathcal{U}_A m_\Lambda$. On peut étendre l'involution barre aux éléments de \mathcal{M}_A en définissant $\bar{u} \cdot m_\Lambda := \bar{u} \cdot m_\Lambda$ pour tout $u \in \mathcal{U}_A$. Alors, il existe une unique base $\mathfrak{B}(\Lambda) = \{G(b)\}_{b \in \mathbf{B}_0}$ de \mathcal{M}_A telle que :

- Pour tout $b \in \mathbf{B}_0$, $\overline{G(b)} = G(b)$,

– Pour tout $b \in \mathbf{B}_0$, $G(b) \equiv b \pmod{v\mathcal{L}}$.
 $\mathfrak{B}(\Lambda)$ est appelée la *base canonique* de \mathcal{M} .

La base canonique $\mathfrak{B}(\Lambda)$ du module intégrable \mathcal{M} est une base de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ et pour toute spécialisation de v en $q \in L$, on obtient une base de $\mathcal{M}_{L,q} = L \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ en spécialisant la base canonique de v en q .

L'intérêt est que, ici, le sous-groupe de $R_0(\mathcal{H}_{K,n})$ engendré par les $[P(M)_K]$ où M parcourt l'ensemble des $\mathcal{H}_{L,n}$ -modules simples peut être vu comme un \mathcal{U}_v -module intégrable de plus haut poids ; il possède donc une base canonique et en spécialisant cette base en $v = 1$, on obtient une base de ce sous-groupe vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel. C'est le sujet du prochain paragraphe.

1.3.C Paramétrisation d'Ariki et Mathas

Nous allons tout d'abord introduire les définitions combinatoires nécessaires pour énoncer les résultats d'Ariki [3] et de Ariki-Mathas [8]. Ces définitions nous seront également utiles dans le deuxième et le troisième chapitre. On fixe pour cela q une racine de l'unité d'ordre e dans \mathbb{C} et des entiers $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1} < e$.

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ une l -partition de rang n . Le *diagramme de Young* de $\underline{\lambda}$ est l'ensemble :

$$[\underline{\lambda}] = \left\{ (a, b, c) \mid 0 \leq c \leq l-1, 1 \leq b \leq \lambda_a^{(c)} \right\}.$$

Ce diagramme est usuellement représenté sous forme d'un tableau comme dans l'exemple suivant.

Exemple : Pour $\underline{\lambda} = (4.2, 3.1)$, on obtient :

$$[\underline{\lambda}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Pour alléger les notations, nous identifierons parfois $\underline{\lambda}$ à son diagramme $[\underline{\lambda}]$. Les éléments de $\underline{\lambda}$ sont appelés les *boîtes* de λ . On définit maintenant la notion de *résidu* : soit $\gamma = (a, b, c)$ une boîte de $\underline{\lambda}$, son *résidu* relatif à l'ensemble $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$ est l'élément de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ défini par :

$$\text{res}(\gamma) \equiv (b - a + v_c) \pmod{e}.$$

Si γ est une boîte de résidu i , on dira que γ est une *i -boîte*.

Exemple : Pour $\underline{\lambda} = (4.2, 3.1)$ et le système $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4, on écrit les résidus des boîtes à l'intérieur de celle-ci :

$$\underline{\lambda} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 0 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Soient $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ deux l -partitions de n et $n+1$ telles que $[\underline{\lambda}] \subset [\underline{\mu}]$. Il existe alors une boîte γ telle que $[\underline{\mu}] = [\underline{\lambda}] \cup \{\gamma\}$. On note alors $\gamma = [\underline{\mu}]/[\underline{\lambda}]$ et on dit

que γ est une boîte ajoutable pour $\underline{\lambda}$ et une boîte supprimable pour $\underline{\mu}$.

Exemple : Pour $\underline{\lambda} = (4.2, 3.1)$, on obtient :

$$[\underline{\lambda}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \psi \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \right).$$

ψ est une boîte supprimable de $\underline{\lambda}$.

On peut introduire un ordre sur l'ensemble des boîtes d'une l -partition² : On dit que $\gamma = (a, b, c)$ est en dessous de $\gamma' = (a', b', c')$ si $c < c'$ ou si $c = c'$ et $a < a'$.

Cette ordre sera appelé l'ordre d'Ariki-Mathas (ou ordre AM) et les notions de boîte normale, de bonne boîte définies ci-dessous sont rapportées à cet ordre (dans le prochain paragraphe, nous introduirons un nouvel ordre sur l'ensemble des boîtes d'une l -partition).

Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition et soit γ une i -boîte, on dit que γ est une boîte normale de $\underline{\lambda}$ si, si ψ est une i -boîte ajoutable de $\underline{\lambda}$ qui est en-dessous de γ , il y a plus de i -boîtes supprimables entre ψ et γ que de i -boîtes ajoutables entre ψ et γ .

Si γ est la plus haute i -boîte normale de $\underline{\lambda}$, on dit que γ est une bonne boîte.

Exemple : Pour $\underline{\lambda} = (4.2, 3.1)$ et le système de paramètres $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine primitive de l'unité d'ordre 4, on obtient :

$$[\underline{\lambda}] = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \psi \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \right).$$

ψ est une 0-bonne boîte de $\underline{\lambda}$.

On définit maintenant la notion de l -partitions Kleshchev associées à un système $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$.

Définition 1.3.11 Les l -partitions Kleshchev sont définies récursivement de la façon suivante :

- $(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)$ est Kleshchev ;
- si $\underline{\lambda}$ est Kleshchev, elle est obtenue en rajoutant une bonne i -boîte à une l -partition Kleshchev.

Notons que, dans le cadre général, il n'existe pas de définition non récursive de ce type de l -partitions.

On notera $\Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^0$ l'ensemble des l -partitions Kleshchev avec système $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$ où q est une racine de l'unité d'ordre e . S'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$, nous le noterons simplement Λ^0 .

Exemple : Pour le système $\{q; q^0, q^1\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 2, les 2-partitions Kleshchev sont :

- $n = 1 : (1, \emptyset), (\emptyset, 1)$;

²La définition donnée ici est la duale de celle trouvée dans [5]. Cela vient du fait que nous considérons ici les modules de Specht classiques contrairement à Ariki qui utilise les modules de Specht duaux.

- $n = 2$: $(1, 1), (2, \emptyset)$;
- $n = 3$: $(1, 2), (2, 1), (2.1, \emptyset), (3, \emptyset)$;
- $n = 4$: $(1, 2.1), (2, 2), (3, 1), (2.1, 1), (4, \emptyset), (3.1, \emptyset)$.

Replaçons-nous maintenant dans le cadre des algèbres de Ariki-Koike. On a le théorème suivant.

Théorème 1.3.12 (Ariki, [5, Théorème 4.2]) *On rappelle que L est un corps de caractéristique 0. On considère $\mathcal{H}_{L,n}$, l'algèbre de Ariki-Koike avec paramètres $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$ sur L . On suppose que q est une racine de l'unité d'ordre e . Alors, on a :*

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) = \{D^\lambda \mid \lambda \in \Lambda^0\},$$

où $\Lambda^0 := \Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^0$ désigne l'ensemble des l -partitions Kleshchev.

Remarque 1.3.13 Notons que grâce à des résultats prouvés par Ariki et Mathas dans [8], Ariki a pu montrer dans [5] que ce résultat reste, en fait, valable en caractéristique quelconque si $q \neq 1$.

Ce théorème est prouvé en utilisant la théorie des bases canoniques. Nous allons maintenant voir le lien entre cette théorie et la théorie des représentations des algèbres de Ariki-Koike.

Soit \mathcal{F}_n le \mathbb{C} -espace vectoriel avec base donnée par les l -partitions de rang n . Sous l'identification $\lambda \leftrightarrow S_K^\lambda$, \mathcal{F}_n peut être identifié au groupe de Grothendieck $R_0(\mathcal{H}_{K,n})_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R_0(\mathcal{H}_{K,n})$ vu comme \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

On peut définir une structure de \mathcal{U}_v -module sur \mathcal{F} . Pour cela, on introduit les notations suivantes : soit λ une l -partition de n , μ une l -partition de $n+1$ tels que $[\mu]/[\lambda] = \gamma$ est une i -boîte, on note :

$$\begin{aligned} N_i^a(\lambda, \mu) &= \#\{i\text{-boîte ajoutable de } \underline{\mu} \text{ au-dessus de } \gamma\} \\ &\quad - \#\{i\text{-boîte supprimable de } \underline{\lambda} \text{ au-dessus de } \gamma\}, \\ N_i^b(\lambda, \mu) &= \#\{i\text{-boîte ajoutable de } \underline{\mu} \text{ au-dessous de } \gamma\}, \\ &\quad - \#\{i\text{-boîte supprimable de } \underline{\lambda} \text{ au-dessous de } \gamma\}, \\ N_i(\lambda) &= \#\{i\text{-boîte ajoutable de } \underline{\lambda}\} \\ &\quad - \#\{i\text{-boîte supprimable de } \underline{\lambda}\}, \\ N_d(\lambda) &= \#\{0\text{-boîte de } \underline{\lambda}\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.14 (Hayashi [6, théorème 10.6]) *On a une structure de \mathcal{U}_v -module sur \mathcal{F} avec action donnée par :*

$$\begin{aligned} e_i \underline{\lambda} &= \sum_{\text{res}([\lambda]/[\mu])=i} v^{-N_i^a(\lambda, \mu)} \underline{\mu}, & f_i \underline{\lambda} &= \sum_{\text{res}([\mu]/[\lambda])=i} v^{N_i^b(\mu, \lambda)} \underline{\mu}, \\ v^{h_i} \underline{\lambda} &= v^{N_i(\lambda)} \underline{\lambda}, & v^d \underline{\lambda} &= v^{-N_d(\lambda)} \underline{\lambda}, \end{aligned}$$

où $0 \leq i \leq e-1$. Cette action est appelée l'action d'Hayashi.

L'idée est maintenant d'étudier le \mathcal{U}_v -sous-module de \mathcal{F} engendré par la l -partition vide. Le théorème suivant est bien connu.

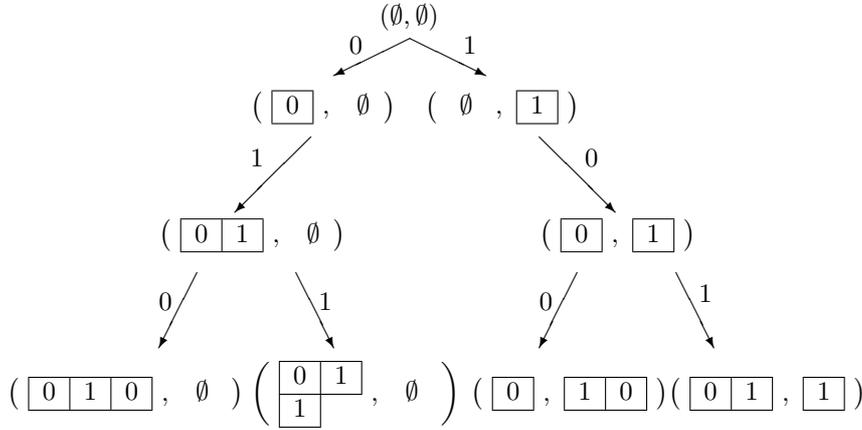
Théorème 1.3.15 (voir [47]) *Le \mathcal{U}_v -sous-module \mathcal{M} de \mathcal{F} engendré par la l -partition vide est un module irréductible de plus haut poids.*

Ce théorème permet d'appliquer la théorie des bases canoniques et des graphes cristallins des \mathcal{U}_v -modules de plus haut poids à \mathcal{M} . En particulier, si le corps L est de caractéristique 0, il va nous permettre de déterminer les nombres de décomposition de $\mathcal{H}_{L,n}$.

Ariki a montré que le graphe cristallin de \mathcal{M} est donné par :

- sommets : les l -partitions Kleshchev,
- arêtes : $\underline{\lambda} \xrightarrow{i} \underline{\mu}$ si et seulement si $\underline{\mu}$ est obtenue à partir de $\underline{\lambda}$ en lui ajoutant une bonne i -boîte.

Exemple : Ci-dessous, le graphe cristallin associé à cette structure de \mathcal{U}_v -module pour le système $\{q; q^0, q^1\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 2 :



On peut donc conclure que la base canonique \mathfrak{B} de \mathcal{M} s'indexe par les multipartitions Kleshchev :

$$\mathfrak{B} = \{G(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^0\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons maintenant l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{L,n}$ comme ci-dessus. Soit $R_1(\mathcal{H}_{L,n})$ le sous-groupe du groupe de Grothendieck $R_0(\mathcal{H}_{K,n})$ engendré par les classes des modules $P(M)_K$ où M parcourt l'ensemble des $\mathcal{H}_{L,n}$ -modules simples. Alors, sous l'identification $\underline{\lambda} \leftrightarrow S_K^\underline{\lambda}$, $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_1(\mathcal{H}_{L,n})_{\mathbb{C}}$ possède une structure de $\mathcal{U}(\widehat{sl_e})$ -module en spécialisant l'action d'Hayashi en $v = 1$ (ce résultat a été prouvé dans un premier temps par Date, Jimbo, Kuniba, Miwa et Okado dans [15]). On obtient le théorème suivant :

Théorème 1.3.16 (Ariki [3]) *$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_1(\mathcal{H}_{L,n})_{\mathbb{C}}$ est égale au $\mathcal{U}(\widehat{sl_e})$ -module engendré par la l -partition vide. En particulier, l'ensemble \mathfrak{B} spécialisé en $v = 1$ fournit une base de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_1(\mathcal{H}_{L,n})_{\mathbb{C}}$.*

Or, nous avons déjà une base de l'ensemble $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_1(\mathcal{H}_{L,n})_{\mathbb{C}}$: celle donnée par les classes des modules projectifs indécomposables $[P(M)_K]$ (voir le théorème 1.1.5 de réciprocité de Brauer). Lorsque L est un corps de caractéristique 0, le théorème suivant indique que les deux bases coïncident.

Théorème 1.3.17 (Ariki [6]) *On rappelle que L est un corps de caractéristique 0. Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition Kleshchev, alors, il existe un unique élément de la base canonique $G(\underline{\lambda})$ et des polynômes $d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \in \mathbb{Z}[v]$ tels que :*

$$G(\underline{\lambda}) = \sum_{\underline{\mu} \in \Pi_n^l} d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \underline{\mu} \quad \text{et} \quad G(\underline{\lambda}) \equiv \underline{\lambda} \pmod{v}$$

De plus, les polynômes $d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v)$ évalués en $v = 1$ donnent les nombres de décomposition $d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}$ de l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{L,n}$ à paramètre $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$.

Ce théorème a permis de confirmer et de généraliser une conjecture de Lus-coux, Leclerc et Thibon (voir [50] où le théorème est conjecturée pour $l = 1$ c'est à dire pour les algèbres de Hecke de type A_{n-1}). Il donne une caractérisation des colonnes pour les matrices de décomposition d'algèbres de Ariki-Koike lorsque q est une racine de l'unité. Il a également permis à Ariki de fournir une preuve au théorème 1.3.12 c'est à dire trouver une classification des modules simples d'algèbres de Ariki-Koike par les multipartitions Kleshchev.

Le problème de cette paramétrisation par les l -partitions Kleshchev est que l'on ne peut, à priori, pas obtenir de description non récursive de ce type de l -partitions.

Grâce à une idée similaire à Ariki et Mathas, et en utilisant des résultats de Jimbo, Misra, Miwa et Okado, Foda, Leclerc, Okado, Thibon et Welsh ont obtenu une bijection entre les l -partitions Kleshchev et une certaine classe de l -partitions définie, cette fois, non récursivement. C'est le thème du prochain paragraphe.

1.3.D Paramétrisation de Foda et al.

L'idée de Foda et al. ([22]) est de considérer une nouvelle structure de \mathcal{U}_v -module sur \mathcal{F} et, pour cela considérer un nouvel "ordre", que nous appellerons l'ordre de FLOTW, sur les boîtes des l -partitions. On rappelle ici que q est une racine de l'unité d'ordre e dans \mathbb{C} et que l'on se donne des entiers $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1} < e$.

On dit ici que $\gamma = (a, b, c)$ est au dessus de $\gamma' = (a', b', c')$ si :

$$b - a + v_c < b' - a' + v_{c'} \quad \text{ou si} \quad b - a + v_c = b' - a' + v_{c'} \quad \text{et} \quad c > c'.$$

Cet ordre permet de définir de même que pour l'ordre d'Ariki-Mathas, des fonctions $\overline{N}_i^a(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ et $\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ données de la même façon que $N_i^a(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ et $N_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ avec l'ordre ci-dessus. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 1.3.18 (Jimbo-Misra-Miwa-Okado [47]) *On a une structure de \mathcal{U}_v -module sur \mathcal{F} avec action :*

$$e_i \underline{\lambda} = \sum_{\text{res}([\underline{\lambda}]/[\underline{\mu}])=i} v^{-\overline{N}_i^a(\underline{\lambda}, \underline{\mu})} \underline{\mu}, \quad f_i \underline{\lambda} = \sum_{\text{res}([\underline{\mu}]/[\underline{\lambda}])=i} v^{\overline{N}_i^b(\underline{\mu}, \underline{\lambda})} \underline{\mu},$$

$$v^{h_i} \underline{\lambda} = v^{\overline{N}_i(\underline{\lambda})} \underline{\lambda}, \quad v^d \underline{\lambda} = v^{-N_d(\underline{\lambda})} \underline{\lambda},$$

où $0 \leq i \leq e - 1$. Nous appellerons cette action l'action de JMMO.

Le $\mathcal{U}_v(\widehat{sl}_e)$ -module $\overline{\mathcal{M}}$ obtenu engendré par la l -partition vide est, comme dans le cas de l'ordre d'Ariki-Mathas, isomorphe à un module irréductible de plus haut poids (et donc au $\mathcal{U}_v(\widehat{sl}_e)$ -module \mathcal{M} même si l'action des générateurs de Chevalley est différente). On peut montrer que le graphe cristallin associé est obtenu récursivement en ajoutant des bonnes i -boîtes pour l'ordre de FLOTW et que les analogues des l -partitions Kleshchev sont donnés par la classe de l -partitions suivantes.

Définition 1.3.19 (Foda-Leclerc-Okado-Thibon-Welsh [22]) On dit que la l -partition $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ est une l -partition de FLOTW associée au système $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$ avec q racine de l'unité d'ordre e si et seulement si :

1. pour tout $0 \leq j \leq l-2$ et $i = 1, 2, \dots$, on a :

$$\lambda_i^{(j)} \geq \lambda_{i+v_{j+1}-v_j}^{(j+1)}$$

et $\lambda_i^{(l-1)} \geq \lambda_{i+e+v_0-v_{l-1}}^{(0)}$;

2. pour tout $k > 0$, l'ensemble des résidus associé aux boîtes de la forme (a, k, c) avec $\lambda_a^{(c)} = k$ est strictement inclus dans $\{0, 1, \dots, e-1\}$.

On note $\Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^1$ l'ensemble des l -partitions de FLOTW associé au système $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le système $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$, on notera plus simplement Λ^1 .

Exemple : Soit $(\lambda, \mu) = (1.1.1, 2.1)$ et le système $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4, alors la première condition de 2-partitions de FLOTW est vérifiée, pour la seconde, on a :

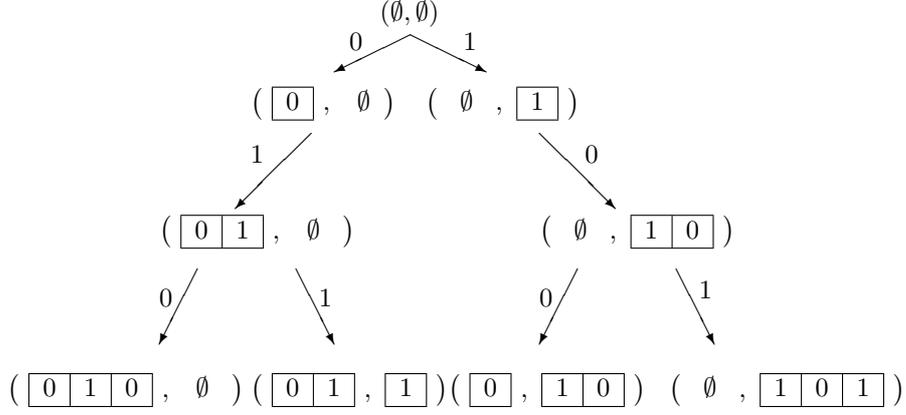
$$[(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})] = \left(\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \right).$$

Si on considère les parts de longueur 1, les boîtes de la forme $(a, 1, c)$ sur ces parts décrivent tout l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Donc la condition 2 n'est pas vérifiée et $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ n'est pas une 2-partition de FLOTW.

Le graphe cristallin associé s'obtient de la même manière que pour la paramétrisation d'Ariki-Mathas c'est à dire en considérant les bonnes boîtes selon l'ordre de FLOTW. Le graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$ est donc donnée par :

- sommets : les l -partitions de FLOTW ;
- Arêtes : $\underline{\lambda} \xrightarrow{i} \underline{\mu}$ si et seulement si $\underline{\mu}$ est obtenue à partir de $\underline{\lambda}$ en lui ajoutant une bonne i -boîte selon l'ordre de FLOTW.

Exemple : Ci-dessous, le graphe cristallin associé à cette structure de \mathcal{U}_v -module pour le système $\{q; q^0, q^1\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 2 :



Remarquons que pour ce système de paramètres et, plus généralement, pour les systèmes du type $\{q; q^0, q^{\frac{e}{2}}\}$ avec q racine de l'unité d'ordre e pair, (λ, μ) est une 2-partition de FLOTW si et seulement si (μ, λ) est une 2-partition de FLOTW.

Remarque 1.3.20 Comme les deux \mathcal{U}_v -modules \mathcal{M} et $\overline{\mathcal{M}}$ sont isomorphes, les graphes cristallins de \mathcal{M} et $\overline{\mathcal{M}}$ ne diffèrent que par leurs sommets.

Les éléments de la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$ sont donc indexés par les l -partitions de FLOTW. Remarquons que si on spécialise l'action de JMMO en $v = 1$, on obtient la même action que lorsqu'on spécialise l'action d'Hayashi en $v = 1$. Par unicité, la base canonique associée à l'action de JMMO spécialisée en $v = 1$ est égale à la base canonique associée à l'action d'Hayashi spécialisée en $v = 1$. En particulier, si L est de caractéristique 0, on obtient la base donnée par les classes $[P(M)_K]$ avec $M \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n})$ (sous l'identification $\underline{\lambda} \leftrightarrow S_K^\lambda$).

Par conséquent, on obtient donc une bijection entre les l -partitions Kleshchev de rang n et les l -partitions de FLOTW de rang n . Comme noté dans [22], une bijection κ entre ces 2 paramétrisations s'obtient en suivant une suite d'arêtes vers la multipartition vide dans le graphe cristallin associé à $\overline{\mathcal{M}}$ puis en suivant la suite inverse dans le graphe cristallin associé à \mathcal{M} .

L'exemple suivant montre que cette bijection n'est pas l'identité en général.

Exemple : Pour le système $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4 et $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\{4;0,2\}}^0 &= \{(\emptyset, 2.1), (1, 1.1), (1, 2), (1.1, 1), (1.1.1, \emptyset), (2, 1), (2.1, \emptyset), (3, \emptyset)\}, \\ \Lambda_{\{4;0,2\}}^1 &= \{(\emptyset, 2.1), (1, 1.1), (1, 2), (1.1, 1), (\emptyset, 3), (2, 1), (2.1, \emptyset), (3, \emptyset)\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner les conséquences de ces résultats sur les algèbres de Hecke de type B_n .

1.3.E Conséquences sur les modules simples des algèbres de Hecke de type B_n

Appliquons donc les résultats d'Ariki-Mathas et de Foda et al. pour en déduire une paramétrisation des modules simples des algèbres de Hecke H_L

lorsque W est de type B_n et lorsque le paramètre q est une racine d'ordre e de l'unité avec e pair.

Dans ce cas, l'algèbre H_L peut être vue comme une algèbre de Ariki-Koike avec paramètres $\{q; q^1, q^{\frac{e}{2}}\}$, on a donc :

$$\text{Irr}(H_L) = \left\{ D^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{\{e;1,\frac{e}{2}\}}^0, |\lambda| = n \right\}.$$

On obtient donc les modules simples de H_L lorsque L est de caractéristique 0. Ce résultat a pu être généralisé en caractéristique quelconque grâce aux travaux de Ariki et Mathas.

Théorème 1.3.21 (*Ariki, Ariki-Mathas voir [6]*) Soit H_L l'algèbre de Hecke de type B_n à paramètre q sur un corps L de caractéristique quelconque différente de 2 (qui est le seul "mauvais" nombre premier pour $W = B_n$). On pose :

$$e := \min \{i \geq 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0\}.$$

On suppose que e est pair, alors :

$$\text{Irr}(H_L) = \left\{ D^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{\{e;1,\frac{e}{2}\}}^0, |\lambda| = n \right\}.$$

On peut aussi utiliser la paramétrisation de Foda et al. On a vu qu'il y avait une bijection κ entre l'ensemble $\Lambda_{\{e;1,\frac{e}{2}\}}^0$ et l'ensemble $\Lambda_{\{e;1,\frac{e}{2}\}}^1$. Définissons $\tilde{D}^{\kappa(\lambda)} := D^\lambda$, on a donc :

Théorème 1.3.22 (*Foda-Leclerc-Okado-Thibon-Welsh [22]*) Soit H_L l'algèbre de Hecke de type B_n à paramètre q sur un corps L de caractéristique quelconque différente de 2. On pose :

$$e := \min \{i \geq 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0\},$$

On suppose que e est pair, alors :

$$\text{Irr}(H_k) = \left\{ \tilde{D}^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{\{e;1,\frac{e}{2}\}}^1, |\lambda| = n \right\}.$$

Ce dernier théorème permet d'obtenir une paramétrisation des modules simples de H_L par une classe de bipartitions ayant une définition relativement simple. Néanmoins cette paramétrisation est obtenue en utilisant l'indexation des modules D^λ non nulles par les bipartitions Kleshchev. Il pourrait être intéressant de montrer d'une manière plus directe que ces bipartitions interviennent dans la théorie des représentations des algèbres de Ariki-Koike.

Un deuxième problème consiste à déterminer les représentations modulaires des algèbres de Hecke de type D_n .

Afin de répondre à ces questions, nous allons énoncer des résultats généraux de Geck et Rouquier. Ces résultats donnent une autre approche pour la détermination des modules simples des algèbres de Hecke à un paramètre dans le cas modulaire.

1.4 Caractérisation des modules simples des algèbres de Hecke à l'aide de la méthode de Geck-Rouquier

La méthode présentée ici permet de déterminer une paramétrisation des modules simples des algèbres de Hecke dans le cas modulaire grâce à la a -fonction de Lusztig. Elle permet également de fournir des informations intéressantes sur la matrice de décomposition.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons les définitions équivalentes de la a -fonction : en termes de bases de Kazhdan-Lusztig et en termes d'éléments de Schur. Nous présentons ensuite les résultats de Geck et Rouquier concernant les algèbres de Hecke de groupe de Weyl fini (dans le deuxième paragraphe) puis les généralisations obtenues par Geck aux algèbres de Hecke étendues.

Dans cette section, nous notons H une algèbre de Hecke à un paramètre u (comme dans la deuxième section) d'un groupe de Weyl fini W sur l'anneau $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ où v est une indéterminée. On pose $u = v^2$. K est le corps des fractions de A , $\theta : A \rightarrow L$ une spécialisation dans L , corps des fractions de $\theta(A)$, de caractéristique 0 ou p avec p "bon" nombre premier pour W . On note H_K et H_L les algèbres de Hecke obtenues sur, respectivement, K et L .

1.4.A Bases de Kazhdan-Lusztig, éléments de Schur et a -fonctions de Lusztig

Définissons la base de Kazhdan-Lusztig de H , introduite dans [49] : pour cela, on considère la "base" classique de $H : \{T_w \mid w \in W\}$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.4.1 (*Kazhdan-Lusztig [49, théorème 1.1]*) *Pour tout $w \in W$, il existe un unique élément de H noté C_w tel que :*

$$\begin{aligned} C_w &= \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)-l(y)} P_{y,w}(u^{-1}) v^{l(w)-2l(y)} T_y \\ &= \sum_{y \leq w} (-1)^{l(y)-l(w)} P_{y,w}(u) v^{-l(w)+2l(y)} T_{y^{-1}}, \end{aligned}$$

où les $P_{y,w}(u)$ sont des polynômes en u de degré inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(l(w) - l(y) - 1)$ si $y < w$ et $P_{w,w} = 1$.

L'ensemble $\{C_w \mid w \in W\}$ forme une base de H appelée *base de Kazhdan-Lusztig* de H .

Cette base permet, entre autre, de construire des représentations d'algèbres de Hecke. Nous définissons maintenant la a -fonction de Lusztig grâce à cette base. Pour $(x, y) \in W^2$, il existe des éléments $h_{x,y,z} \in A$ tels que :

$$C_x C_y = \sum_{z \in W} h_{x,y,z} C_z.$$

Pour tout $z \in W$, il existe un entier $a(z) \geq 0$ tel que :

$$v^{a(z)} h_{x,y,z} \in \mathbb{Z}[v] \text{ pour tout couple } (x, y) \in W^2,$$

1.4. Caractérisation des modules simples des algèbres de Hecke à l'aide de la méthode de Geck-Rouquier

$$v^{a(z)-1}h_{x,y,z} \notin \mathbb{Z}[v] \text{ pour un couple } (x, y) \in W^2.$$

On a donc défini une fonction :

$$a : W \rightarrow \mathbb{N}.$$

Cette application est appelée a -fonction de Lusztig.

Utilisons les notations indiquées dans le préambule de cette section. On peut attacher à chaque module simple M de H_K ou de H_L une a -valeur notée a_M définie par :

$$C_w.M = 0 \text{ pour tout } w \in W \text{ avec } a(w) > a_M,$$

$$C_w.M \neq 0 \text{ pour un } w \in W \text{ avec } a(w) = a_M.$$

On a donc une application a de l'ensemble des modules simples de H_K ou de H_L dans \mathbb{N} .

La a -valeur des modules simples de H_K peut également se retrouver en considérant les éléments de Schur de H_K . Ces éléments ont été définis dans la première partie (théorème 1.1.7).

Théorème 1.4.2 (Lusztig [55]) *Pour tout $V \in \text{Irr}(H_K)$, l'élément de Schur s_V est de la forme suivante :*

$$s_V = f_V u^{-a_V} + \text{combinaison linéaire de plus grandes puissances de } u,$$

où a_V désigne la a -valeur associée au module simple V et $f_V \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

On obtient donc une autre définition pour la a -valeur d'un module simple. Ceci va nous permettre de donner une définition de la a -valeur dans la cadre des algèbres de Ariki-Koike à un paramètre. Nous reviendrons sur ce point dans le deuxième chapitre.

Nous avons maintenant les définitions et propriétés nécessaires à la présentation des résultats de Geck et Rouquier.

1.4.B Paramétrisation de Geck-Rouquier pour les algèbres de Hecke de groupe de Weyl fini

On reprend les notations du paragraphe précédent. On considère maintenant l'algèbre asymptotique de Lusztig. Elle a été introduite par Lusztig dans [54] : c'est une \mathbb{Z} -algèbre J , libre comme \mathbb{Z} -module, avec base $\{t_w \mid w \in W\}$ indexée par les éléments de W et avec multiplication donnée par :

$$\forall (x, y) \in W^2 \quad t_x t_y = \sum_{z \in W} \gamma_{x,y,z} t_z,$$

où $\gamma_{x,y,z}$ est égal au terme constant de $(-v)^{a(z)} h_{x,y,z-1}$ (voir le paragraphe précédent). L'identité est donnée par $\sum_d t_d$ où d parcourt l'ensemble des involutions de Duflo \mathcal{D} (voir [13] pour plus de détails).

Pour tout anneau commutatif unitaire B , on peut construire l'algèbre $J_B := B \otimes_{\mathbb{Z}} J$.

Dans [54], Lusztig a montré que l'application $\phi : H \rightarrow J_A$ définie par $C_w \mapsto \sum h_{w,d,z} t_z$ (somme sur les $z \in W$ et $d \in \mathcal{D}$ tels que $a(z) = a(d)$) est un homomorphisme de A -algèbres. On obtient alors des homomorphismes de K -algèbres et de L -algèbres :

$$\phi_K : H_K \rightarrow J_K \quad \text{et} \quad \phi_L : H_L \rightarrow J_L.$$

Ceux-ci déterminent naturellement des homomorphismes entre les groupes de Grothendieck :

$$(\phi_K)_* : R_0(J_K) \rightarrow R_0(H_K) \quad \text{et} \quad (\phi_L)_* : R_0(J_L) \rightarrow R_0(H_L).$$

Notons d_θ^H l'application de décomposition entre $R_0(H_K)$ et $R_0(H_L)$. On obtient de la même manière une application de décomposition entre $R_0(J_K)$ et $R_0(J_L)$. Notons-la d_θ^J . On a alors un diagramme commutatif (voir [27, lemme 2.3]) :

$$\begin{array}{ccc} R_0(J_K) & \xrightarrow{(\phi_K)_*} & R_0(H_K) \\ d_\theta^J \downarrow & & \downarrow d_\theta^H \\ R_0(J_L) & \xrightarrow{(\phi_L)_*} & R_0(H_L) \end{array}$$

Les algèbres J_K et J_L sont toutes les deux semi-simples, il suit que l'application d_θ^J est un isomorphisme préservant la classe des modules simples. De même, on peut montrer que l'application $(\phi_K)_*$ est aussi un isomorphisme préservant la classe des modules simples.

L'application $(\phi_K)_* \circ (d_\theta^J)^{-1} : R_0(J_L) \rightarrow R_0(H_K)$ est donc un isomorphisme préservant la classe des modules simples. Pour E un J_L -module simple, on note E_* le H_K -module vérifiant :

$$[E_*] := (\phi_K)_* \circ (d_\theta^J)^{-1}([E]).$$

On a alors le théorème suivant de Lusztig :

Théorème 1.4.3 (Lusztig [55]) *Pour tout H_L -module simple M , il existe un J_L -module $E(M)$ explicitement construit tel que :*

$$(\phi_L)_*([E(M)]) = [M] + \text{somme de } H_L\text{-modules simples } [M'] \text{ tels que } a_{M'} < a_M.$$

De plus, pour tout facteur de composition E de $E(M)$, on a $a_E = a_M$.

Soit maintenant $M \in \text{Irr}(H_L)$ et soit $E(M)$ le J_L -module associé comme dans le théorème précédent. Geck et Rouquier ([35, proposition 4.5]) ont montré que ce J_L -module est en fait un module simple et que des H_L -modules M et M' non isomorphes donnent des J_L -modules $E(M)$ et $E(M')$ non isomorphes. L'ensemble suivant est donc contenu dans $\text{Irr}(H_K)$:

$$\mathcal{B} = \{E(M)_* \mid M \in \text{Irr}(H_L)\}.$$

On a donc une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longleftrightarrow & \text{Irr}(H_L) \\ E(M)_* & \longleftrightarrow & M \end{array}$$

1.4. Caractérisation des modules simples des algèbres de Hecke à l'aide de la méthode de Geck-Rouquier

et pour tout $M \in \text{Irr}(H_L)$ (voir [27]), on a :

$$a_{E(M)_*} = a_M.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section qui caractérise la bijection ci-dessus (nous rappelons aussi la situation de départ).

Théorème 1.4.4 (Geck [27], Geck-Rouquier [35]) *Soit H une algèbre de Hecke sur $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ à un paramètre u d'un groupe de Weyl fini. Soit K le corps des fractions de A et soit $\theta : A \rightarrow L$ une spécialisation où :*

- L est le corps des fractions de l'image de θ ,
 - la caractéristique de L est soit nulle soit un bon nombre premier pour W .
- Soit également $\mathcal{O} \subset K$ un anneau de valuation discrète comme dans la section 1.1.A.*

Soit $M \in \text{Irr}(H_L)$ et soit $P(M)$ le $H_{\mathcal{O}}$ -module projectif indécomposable qui est une couverture projective de M (voir [14, section 6C]). Alors il existe un unique H_K -module simple V_M tel que $a_M = a_{V_M}$ et tel que :

$$[P(M)_K] = [V_M] + \sum_{\substack{S \in \text{Irr}(H_K) \\ a_S > a_{V_M}}} d_{S,M}[S].$$

De plus, l'application $M \mapsto V_M$ est injective donc la partie suivante appelée l'ensemble basique canonique est en bijection avec $\text{Irr}(H_L)$:

$$\mathcal{B} := \{V_M \mid M \in \text{Irr}(H_L)\}.$$

Remarque 1.4.5 Notons que l'énoncé du théorème ci-dessus ne fait intervenir que les a -valeurs des modules simples et pas l'algèbre asymptotique ni la base de Kazhdan -Lusztig.

Nous avons également une définition équivalente de cette partie \mathcal{B} en considérant cette fois "les lignes" de la matrice de décomposition.

Corollaire 1.4.6 (Geck-Rouquier [35]) *Avec les hypothèses du théorème précédent, on a :*

$$\mathcal{B} = \{V \in \text{Irr}(H_K) \mid d_{V,M} \neq 0 \text{ et } a_V = a_M \text{ pour un } M \in \text{Irr}(H_L)\}.$$

Alors, on a une unique bijection $\mathcal{B} \longleftrightarrow \text{Irr}(H_L)$, $V \longleftrightarrow \bar{V}$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées.

- Pour tout $V \in \mathcal{B}$, on a $d_{V,\bar{V}} = 1$ et $a_V = a_{\bar{V}}$.
- Si $V \in \text{Irr}(H_K)$ et $M \in \text{Irr}(H_L)$ sont tels que $d_{V,M} \neq 0$ alors $a_M \leq a_V$ avec égalité si et seulement si $V \in \mathcal{B}$ et $M = \bar{V}$.

Cette propriété nous donne des informations sur la matrice de décomposition associée qui sont énoncées dans le corollaire ci-dessous.

Corollaire 1.4.7 (Geck-Rouquier [35]) *Avec les notations du théorème précédent, on considère D_{θ} la matrice de décomposition, on ordonne les lignes de la matrice qui correspondent aux H_K -modules simples V_1, \dots, V_r de \mathcal{B} telles que :*

$$a_{V_1} \leq a_{V_2} \leq \dots \leq a_{V_r}.$$

Alors, la sous-matrice de D_θ indéxée sur les lignes de \mathcal{B} a une forme unitriangulaire :

$$D_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & * & & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition suivante est immédiate grâce au théorème 1.1.4 de déformation de Tits.

Proposition 1.4.8 *Si l'algèbre H_L est semi-simple, on a $\mathcal{B} = \text{Irr}(H_K)$.*

Nous allons maintenant voir que les propriétés de ce paragraphe restent valables pour les groupes de Weyl étendus :

1.4.C Paramétrisation de Geck-Rouquier pour les algèbres de Hecke de groupes de Weyl étendus

Dans cette partie, on suppose que W' est un groupe de Weyl fini avec S' l'ensemble des réflexions simples. En utilisant la théorie de Clifford, Geck a pu montrer que les résultats de la section précédente restent valables pour une plus grande classe d'algèbres de Hecke.

Soit Ω un groupe fini, $\text{Aut}(W', S')$ le groupe des automorphismes de W' qui laisse l'ensemble S' invariant. On suppose que l'on a un homomorphisme de groupe :

$$\pi : \Omega \rightarrow \text{Aut}(W', S').$$

On considère $W = W' \rtimes \Omega$ où, pour $\omega \in \Omega$ et $w' \in W'$, on a :

$$\omega w' \omega^{-1} = \pi(\omega)(w').$$

Le groupe W est alors appelé un **groupe de Weyl étendu**. On a une longueur définie sur W par :

$$\forall (w', \omega) \in W' \times \Omega \quad l(w'\omega) := l'(w')$$

où l' désigne la longueur usuelle sur W' . Soit H l'algèbre de Hecke associée à W , on a :

$$T_{w'} T_\omega = T_{w'\omega} \quad \text{et} \quad T_\omega T_{w'} = T_{\omega w'} \quad \text{pour } w' \in W' \text{ et } \omega \in \Omega.$$

Soit H' le sous-espace de H engendré par les éléments $T_{w'}$ pour $w' \in W'$.

Exemple : (voir [28]) Soit W' le groupe de Weyl de type D_n , alors il existe un groupe Ω d'ordre 2 tel que l'algèbre du groupe de Weyl étendu correspondant est une algèbre de Hecke de type B_n à paramètre $\{1, u\}$. Plus précisément, soit $S' := \{s'_1, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ les réflexions simples de W' . On considère l'automorphisme σ de W' définie par $\sigma(s'_1) = s_1$, $\sigma(s_1) = s'_1$ et $\sigma(s_i) = s_i$ pour $i \geq 2$.

1.4. Caractérisation des modules simples des algèbres de Hecke à l'aide de la méthode de Geck-Rouquier

Alors, le groupe W avec générateurs $S := \{\sigma, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ est un groupe de Weyl de type B_n et son algèbre de Hecke associée est une algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux $\{1, u\}$ comme dans le paragraphe 1.2.B.

Considérons maintenant les algèbres H_K, H'_K, H_L et H'_L . Nous avons tout d'abord une opération de restriction Res naturelle des H_L et H_K -modules aux H'_L et H'_K -modules.

Exemple : Lorsque W' est de type D_n , l'opération de restriction Res des H_K modules aux H'_K modules correspond à l'opération Res décrite dans le paragraphe 1.2.B.

D'autre part, il existe (voir paragraphe 1.1.A) des applications de décomposition bien définies :

$$\begin{aligned} d_\theta : R_0(H_K) &\rightarrow R_0(H_L), \\ d'_\theta : R_0(H'_K) &\rightarrow R_0(H'_L). \end{aligned}$$

On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R_0(H_K) & \xrightarrow{\text{Res}} & R_0(H'_K) \\ d_\theta \downarrow & & \downarrow d'_\theta \\ R_0(H_L) & \xrightarrow{\text{Res}} & R_0(H'_L) \end{array}$$

Une théorie analogue à celle développée dans les deux paragraphes précédents existe pour les algèbres de groupes de Weyl étendus. En particulier, comme noté dans [28], on peut définir une algèbre asymptotique de Lusztig dans cette situation. On peut aussi attacher à chaque H_K et H_L -module simple une a -valeur de la même manière que dans le paragraphe 1.4.A (en considérant les bases de Kazhdan-Lusztig ou, de façon équivalente, grâce aux éléments de Schur). Les a -valeurs des H_K et H'_K -modules sont maintenant reliées de la manière suivante.

Proposition 1.4.9 (voir [28, proposition 4.6]) *Avec les hypothèses précédentes, soit V' un H'_K -module simple apparaissant dans la restriction d'un H_K -module simple V , alors :*

$$a(V') = a(V).$$

Alors, on peut montrer que le théorème 1.4.4 reste valable pour les algèbres de Hecke étendues.

Théorème 1.4.10 (Geck [28, théorème 5.3]) *Avec les hypothèses de cette section, soit $M \in \text{Irr}(H_L)$ et soit $P(M)$ le $H_\mathcal{O}$ -module projectif indécomposable qui est une couverture projective de M . Alors, il existe un unique H_K -module simple V_M tel que $a_M = a_{V_M}$ et tel que :*

$$[P(M)_K] = [V_M] + \sum_{\substack{S \in \text{Irr}(H_K) \\ a_S > a_{V_M}}} d_{S,M}[S].$$

L'application $M \mapsto V_M$ est injective et donc la partie $\mathcal{B} := \{V_M \mid M \in \text{Irr}(H_L)\}$ est en bijection avec $\text{Irr}(H_L)$.

Dans la section précédente, nous avons vu qu'il existait une partie \mathcal{B}' telle que :

$$\mathcal{B}' \longleftrightarrow \text{Irr}(H'_L).$$

Pour H , nous avons, de même, l'existence d'une partie \mathcal{B} telle que :

$$\mathcal{B} \longleftrightarrow \text{Irr}(H_L).$$

La proposition suivante permet d'établir un lien entre ces deux parties de $\text{Irr}(H'_K)$ et $\text{Irr}(H_K)$.

Proposition 1.4.11 (Geck [28, théorème 5.5]) *Avec les hypothèses de cette section, on a :*

- \mathcal{B}' est l'ensemble des modules $V' \in \text{Irr}(H'_K)$ tel que $V' \subset \text{Res}(V)$ pour un $V \in \mathcal{B}$,
- \mathcal{B} est l'ensemble des modules $V \in \text{Irr}(H_K)$ tel que $V' \subset \text{Res}(V)$ pour un $V' \in \mathcal{B}'$.

Ainsi, \mathcal{B} et \mathcal{B}' se déterminent l'un l'autre grâce à l'étude de l'application Res . Ce dernier résultat va nous permettre de déterminer \mathcal{B} dans le cas où H est une algèbre de Hecke de type D_n . En effet, d'après l'exemple ci-dessus, on peut voir l'algèbre de type B_n à paramètre $\{1, u\}$ comme une algèbre étendue de H . Ceci nous permettra d'appliquer les résultats "bien connus" concernant les modules simples d'algèbres de Hecke de type B_n à la détermination de \mathcal{B} pour le type D_n .

Nous avons vu que la méthode de Geck et Rouquier faisait intervenir une fonction a dépendant des éléments de Schur associés aux modules simples. Considérons maintenant le cas des algèbres de Ariki-Koike : ce sont des algèbres symétriques, donc, dans le cas semi-simple, on peut associer à chacun de ses modules simples un élément de Schur et ainsi une a -fonction. Il est alors naturel de se demander si la méthode de Geck-Rouquier ne peut pas s'appliquer aussi pour ce type d'algèbres.

Le but du chapitre suivant est de considérer ce problème. Nous donnerons un analogue à la méthode de Geck-Rouquier pour les algèbres de Ariki-Koike ce qui permettra de donner une paramétrisation des modules simples d'algèbres de Ariki-Koike dans le cas modulaire.

Chapitre 2

L'ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il est possible d'attacher à chaque module simple d'algèbres de Hecke de groupe de Weyl fini ou étendu une a -valeur. On obtient ainsi un ordre sur ces modules simples qui permet de montrer que la matrice de décomposition a toujours une forme triangulaire.

En particulier, considérons le cas $W = D_n$ et la spécialisation θ telle que $\theta(u) = -1$. Alors, en effectuant des calculs sur GAP, Geck a pu conjecturer que les bipartitions intervenant dans la paramétrisation de l'ensemble basique canonique étaient les bipartitions $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\lambda^{(0)}$ et $\lambda^{(1)}$ sont 2-régulières ;
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_i^{(0)} \neq 0$ ou $\lambda_i^{(1)} \neq 0$, on a $\lambda_i^{(0)} \neq \lambda_i^{(1)}$;
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_i^{(0)} \neq 0$ ou $\lambda_i^{(1)} \neq 0$, on a $\min\{\lambda_i^{(0)}, \lambda_i^{(1)}\} \geq \max\{\lambda_{i+1}^{(0)}, \lambda_{i+1}^{(1)}\}$.

De plus, dans [9], Bessenrodt a pu montrer que la fonction génératrice de cette classe de bipartitions coïncidait avec celle des bipartitions Kleshchev (pour le choix adéquat de paramètres). Nous avons pu ensuite généraliser cette conjecture pour tout e et, suivant les conseils de Leclerc et Miyashi, pu établir que les bipartitions vérifiant cette conjecture étaient identiques aux bipartitions de FLOTW. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, ces bipartitions interviennent dans la description des modules simples des algèbres de Ariki-Koike. Nous nous intéresserons donc ici à ces algèbres. Le but est de donner un théorème analogue au théorème 1.4.4 pour cette classe d'algèbres en caractéristique 0 c'est à dire de prouver l'existence d'un ensemble basique canonique qui donne une interprétation de la matrice de décomposition à l'aide de la a -fonction de Lusztig. Malheureusement, on ne dispose pas de bases de Kazhdan-Lusztig pour ce type d'algèbres. Nous définissons donc la a -fonction en utilisant les éléments de Schur qui sont connus explicitement (la forme de ces éléments a été conjecturée par Malle [57] et calculée par Geck, Iancu et Malle dans [31]). Nous établissons ainsi quelques propriétés combinatoires qui, reliées avec le théorème d'Ariki et la caractérisation de la base canonique, nous permettront de conclure.

Ce chapitre est divisé en quatre sections. Dans la première, nous donnerons les définitions nécessaires à la présentation de la a -fonction pour les algèbres de Ariki-Koike. Dans la deuxième partie, nous établirons quelques propriétés combinatoires de la a -fonction. Puis, dans la troisième partie, nous donnerons le théorème principal du chapitre qui généralise le théorème 1.4.4 aux algèbres de Ariki-Koike. Enfin, dans la quatrième partie, nous démontrerons une propriété permettant d'interpréter les multipartitions Kleshchev en terme d'ensemble basique canonique et nous développerons un cas particulier d'algèbres de Ariki-Koike pour lequel il existe une bijection simple entre les différentes paramétrisations des modules simples.

2.1 a -valeurs des modules simples

Dans cette première section, nous commençons par introduire la notion de symboles ce qui nous permettra de décrire les éléments de Schur associés aux modules simples d'algèbres de Ariki-Koike semi-simples. Nous obtenons ensuite la valeur de la a -fonction pour ce type d'algèbres en suivant l'article de Broué et Kim [11].

2.1.A Symboles

Commençons par quelques notations, on suit ici [11]. Les symboles sont usuellement associés aux multipartitions. Ici, nous étendons cette définition aux multicompositions.

On dit que $\lambda = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ est une l -composition (ou multicomposition) de rang n si on a :

- pour tout $i = 0, \dots, l-1$, il existe $h^{(i)} \in \mathbb{N}$ et des entiers strictement positifs $\lambda_j^{(i)}$ (avec $j = 1, \dots, h^{(i)}$) tels que $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{h^{(i)}}^{(i)})$. Pour $i = 0, \dots, l-1$, l'entier $h^{(i)}$ est appelé la hauteur de $\lambda^{(i)}$;
- $\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{h^{(i)}} \lambda_j^{(i)} = n$.

Soit $\lambda = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ une l -composition et soient $h^{(i)}$ les hauteurs des compositions $\lambda^{(i)}$ ($i = 0, \dots, l-1$). Alors, la hauteur de $\underline{\lambda}$ est l'entier suivant :

$$h_{\underline{\lambda}} = \max\{h^{(0)}, \dots, h^{(l-1)}\}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le symbole ordinaire associé à $\underline{\lambda}$ et à k est le l -uplet suivant :

$$\mathbf{B} := (B^{(0)}, \dots, B^{(l-1)})$$

où, pour $i = 0, \dots, l-1$, on a :

$$B^{(i)} := (B_1^{(i)}, \dots, B_{h_{\underline{\lambda}}+k}^{(i)})$$

et où pour $j = 1, \dots, h_{\underline{\lambda}} + k$, on a :

$$B_j^{(i)} := \lambda_j^{(i)} - j + h_{\underline{\lambda}} + k$$

et $\lambda_j^{(i)} := 0$ si $j > h^{(i)}$. On note alors $h_{\mathbf{B}} := h_{\underline{\lambda}} + k$ la hauteur du symbole \mathbf{B} .

2.1. a -valeurs des modules simples

Soit maintenant une suite m de nombres rationnels positifs $m^{(i)}$ ($i = 0, \dots, l-1$) appelée système de charges :

$$m := (m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)}).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit le m -symbole $\mathbf{B}[m]'$ associé à $\underline{\lambda}$, m et k en ajoutant à chaque part $B_j^{(i)}$ du symbole ordinaire le nombre $m^{(i)}$. On a donc :

$$\mathbf{B}[m]' = (B'^{(0)}, \dots, B'^{(l-1)})$$

où, pour $i = 0, \dots, l-1$, on a :

$$B'^{(i)} := (B_1^{(i)}, \dots, B_{h_{\underline{\lambda}}+k}^{(i)})$$

et où pour $j = 1, \dots, h_{\underline{\lambda}} + k$, on a :

$$B_j^{(i)} := \lambda_j^{(i)} - j + h_{\underline{\lambda}} + k + m^{(i)}.$$

Remarquons que ce dernier ensemble est défini dans [11] en utilisant la notion de symbole chargé.

Exemple : Soient $l = 3$ et $m = (1, \frac{1}{2}, 2)$. On considère la 3-partition suivante :

$$\underline{\lambda} = ((4, 2), (0), (5, 2, 1)).$$

Soit $k = 0$. On a $h_{\underline{\lambda}} = 3$. Le symbole ordinaire associé est donné par :

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B^{(0)} & = & 6 & 3 & 0 \\ B^{(1)} & = & 2 & 1 & 0 \\ B^{(2)} & = & 7 & 3 & 1 \end{cases}$$

Le m -symbole est donné par :

$$\mathbf{B}[m]' = \begin{cases} B'^{(0)} & = & 7 & 4 & 1 \\ B'^{(1)} & = & 5/2 & 3/2 & 1/2 \\ B'^{(2)} & = & 9 & 5 & 3 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant étudier les éléments de Schur et la a -fonction associés aux modules simples d'algèbres de Ariki-Koike.

2.1.B Éléments de Schur pour les algèbres de Ariki-Koike

Soit $l \in \mathbb{N}$. Soit $A = \mathbb{Z}[u, u^{-1}, u_0, u_0^{-1}, \dots, u_{l-1}, u_{l-1}^{-1}]$, où $u, u_0, u_1, \dots, u_{l-1}$ sont $l+1$ indéterminées non nécessairement indépendantes. On suppose que A est intégralement clos dans son corps des fractions K . On considère ici l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{K,n}$ sur K à paramètres $\{u, u_0, \dots, u_{l-1}\}$. On suppose que l'on a pour tout $i \neq j$ et pour tout $d \in \mathbb{Z}$ tel que $|d| \leq n$:

$$u^d u_i \neq u_j.$$

Alors $\mathcal{H}_{K,n}$ est semi-simple déployée. On a donc (voir le théorème 1.3.2) :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{K,n}) = \{S_K^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^l\}.$$

Comme \mathcal{H}_n est une algèbre symétrique (voir le théorème 1.3.3), on peut associer à chaque module simple S_K^λ de $\mathcal{H}_{K,n}$ un élément de Schur :

$$s_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0^{-1}, \dots, \mathbf{u}_{l-1}, \mathbf{u}_{l-1}^{-1}],$$

comme dans le théorème 1.1.7.

La forme de ces éléments a été conjecturée dans [57] et calculée dans [31]. L'expression donnée ici, en fonction des symboles ordinaires, est exposée dans [11].

Introduisons tout d'abord quelques notations :

Soit $\mathbf{B} = (B^{(0)}, \dots, B^{(l-1)})$ un symbole ordinaire de hauteur $h_{\mathbf{B}}$ associé à une l -partition $\lambda = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ de rang n . On note :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}) &:= \prod_{\substack{0 \leq i < j < l \\ (\alpha, \beta) \in B^{(i)} \times B^{(j)} \\ \alpha > \beta \text{ if } i=j}} (\mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}_i - \mathbf{u}^\beta \mathbf{u}_j), \\ \theta_{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}) &:= \prod_{\substack{0 \leq i, j < l \\ \alpha \in B^{(i)} \\ 1 \leq k \leq \alpha}} (\mathbf{u}^k \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \\ \nu_{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}) &:= \prod_{0 \leq i < j < l} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)^{h_{\mathbf{B}}} \theta_{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}), \\ \sigma_{\mathbf{B}} &:= \binom{l}{2} \binom{h_{\mathbf{B}}}{2} + n(l-1), \\ \tau_{\mathbf{B}} &:= \binom{l(h_{\mathbf{B}}-1)+1}{2} + \binom{l(h_{\mathbf{B}}-2)+1}{2} + \dots + \binom{2}{2}, \\ |\mathbf{B}| &:= \sum_{\substack{0 \leq i < l \\ \alpha \in B^{(i)}}} \alpha. \end{aligned}$$

La forme des éléments de Schur est alors donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.1.1 (Geck-Iancu-Malle [31]) *Soit S^λ le module simple de \mathcal{H}_n associé à la l -partition λ et soit \mathbf{B} un symbole ordinaire associé à cette l -partition, alors l'élément de Schur de ce module simple est donné par :*

$$s_\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1}) = \left((\mathbf{u} - 1) \prod_{0 \leq i < l} \mathbf{u}_i \right)^{-n} (-1)^{\sigma_{\mathbf{B}} \mathbf{u}^{\tau_{\mathbf{B}} - |\mathbf{B}| + n}} \frac{\nu_{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1})}{\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{l-1})}.$$

Cette expression ne dépend pas du choix du symbole ordinaire.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat pour une algèbre de Ariki-Koike particulière. Ceci nous permettra de définir une a -fonction associée aux modules simples de cette algèbre.

2.1.C a -fonction pour les algèbres de Ariki-Koike

Soit l un entier positif, on définit le nombre complexe suivant :

$$\eta_l = \exp\left(\frac{2i\pi}{l}\right).$$

Soit $m = (m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)})$ un système de charges vérifiant pour tout $j = 0, \dots, l-1$:

$$lm^{(j)} \in \mathbb{N}.$$

Soit y une indéterminée et soit $A := \mathbb{Z}[\eta_l][y, y^{-1}]$. Alors, A est intégralement clos dans $R := \mathbb{Q}[\eta_l](y)$. On considère l'algèbre de Ariki-Koike \mathcal{H}_n sur A avec le choix suivant de paramètres :

$$\begin{aligned} u_j &= \eta_l^j(y)^{lm^{(j)}} \text{ pour } j = 0, \dots, l-1, \\ u &= y^l. \end{aligned}$$

On obtient une algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{R,n}$ sur R qui est semi-simple déployée. Par conséquent, nous pouvons utiliser les résultats du paragraphe précédent. En particulier, nous avons un élément de Schur associé à chaque module simple de $\mathcal{H}_{R,n}$ dans $\mathbb{Z}[\eta_l][y, y^{-1}]$.

Suivant maintenant le théorème 1.4.2, nous pouvons définir une a -fonction sur chaque module simple de $\mathcal{H}_{R,n}$: soit $\underline{\lambda} \in \Pi_n^l$ et soit $s_{\underline{\lambda}}$ l'élément de Schur associé. Alors, il existe $f_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{Z}[\eta_l] \setminus \{0\}$ et $b(S^{\underline{\lambda}}) \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$s_{\underline{\lambda}} = f_{\underline{\lambda}} y^{-b(S^{\underline{\lambda}})} + \text{combinaison linéaire de termes de plus haut degré.}$$

Alors la a -valeur de $S^{\underline{\lambda}}$ est définie comme étant le nombre rationnel suivant :

$$a(S^{\underline{\lambda}}) := \frac{b(S^{\underline{\lambda}})}{l}.$$

On la notera aussi $a(\underline{\lambda})$.

En utilisant la proposition 2.1.1, on peut donner une description explicite de ces valeurs.

Proposition 2.1.2 *Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition de n . Soit k un entier positif, soit \mathbf{B} le symbole ordinaire de hauteur h associé à $\underline{\lambda}$ et à k . Soit $\mathbf{B}[m]' = (B^{(0)}, \dots, B^{(l-1)})$ le m -symbole (où m est le système de charges), alors :*

$$a(\underline{\lambda}) = f(n, h, m) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in B^{(i)} \times B^{(j)} \\ a > b \text{ si } i=j}} \min\{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in B^{(i)} \\ 1 \leq k \leq a}} \min\{k, m^{(j)}\},$$

où :

$$\begin{aligned} f(n, h, m) &= n \sum_{j=0}^{l-1} m^{(j)} - \tau_{\mathbf{B}} + |\mathbf{B}| - n - h \sum_{0 \leq i < j < l} \min\{m^{(i)}, m^{(j)}\} \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ \alpha \in B^{(i)} \\ 1 \leq k \leq m^{(i)}}} \min\{k, m^{(j)}\}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme ne dépendant que de n , de m et de h .

Preuve :

En utilisant la proposition 2.1.1, il suit :

$$a(\underline{\lambda}) = n \sum_{j=0}^{l-1} m^{(j)} - \tau_{\mathbf{B}} + |\mathbf{B}| - n - h \sum_{0 \leq i < j < l} \min \{m^{(i)}, m^{(j)}\} +$$

$$+ \sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{B}^{(i)} \times \mathbf{B}^{(j)} \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} \min \{\alpha + m^{(i)}, \beta + m^{(j)}\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ \alpha \in \mathbf{B}^{(i)} \\ 1 \leq k \leq \alpha}} \min \{k + m^{(i)}, m^{(j)}\}.$$

Or, on a :

$$\sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ \alpha \in \mathbf{B}^{(i)} \\ 1 \leq k \leq \alpha}} \min \{k + m^{(i)}, m^{(j)}\} = \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ \alpha \in \mathbf{B}^{(i)} \\ 1 \leq k \leq \alpha + m^{(i)}}} \min \{k, m^{(j)}\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ \alpha \in \mathbf{B}^{(i)} \\ 1 \leq k \leq m^{(i)}}} \min \{k, m^{(j)}\}.$$

En considérant l'ensemble $\mathbf{B}[m]'$, on obtient :

$$a(\underline{\lambda}) = f(n, h, m) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a, b) \in \mathbf{B}'^{(i)} \times \mathbf{B}'^{(j)} \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in \mathbf{B}'^{(i)} \\ 1 \leq k \leq a}} \min \{k, m^{(j)}\}$$

où $f(n, h, m)$ ne dépend pas de la l -partition $\underline{\lambda}$. □

Remarque 2.1.3 La formule de a ci-dessus ne dépend pas du choix du symbole ordinaire (c'est à dire de $k \in \mathbb{N}$).

Dans la prochaine partie, nous allons établir quelques propriétés combinatoires concernant cette a -valeur.

2.2 Propriétés combinatoires

Dans cette partie, nous nous intéressons à quelques propriétés concernant la a -valeur d'une l -partition pour un système de charges particulier (qui correspond à une algèbre de Ariki-Koike semi-simple). Dans toute la suite, la a -fonction désigne la fonction donnée dans la proposition 2.1.2.

2.2.A Notations et hypothèses

On utilisera ici les définitions et les notations introduites dans la section précédente. De plus, nous étendons les définitions de boîtes et de résidus aux multicompositions de façon élémentaire.

Soient l et e deux entiers positifs. Soit $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ une l -composition de n , ses résidus seront relatifs à un ensemble $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$ où q est une racine de l'unité d'ordre e et où :

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1} < e.$$

Les boîtes à l'extrême droite des parts de $\underline{\lambda}$ sont appelées les boîtes de la frontière de $\underline{\lambda}$.

2.2. Propriétés combinatoires

Exemple : On suppose que $l = 2$, $v_0 = 0$, $v_1 = 2$ et que $e = 4$. Soit $\underline{\lambda} = (4.2.3, 3.5)$, le diagramme de $\underline{\lambda}$ est donné par :

$$\underline{\lambda} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ \hline 3 & \mathbf{0} & & \\ \hline 2 & 3 & \mathbf{0} & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \mathbf{0} & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & \mathbf{1} & \\ \hline \end{array} \right).$$

Les résidus des boîtes de la frontière de $\underline{\lambda}$ sont ici écrits en caractères gras.

Nous utiliserons aussi les notations suivantes : pour $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ des l -compositions de n et $n + 1$ et $k \in \{0, \dots, e - 1\}$, on notera :

- $\underline{\lambda} \xrightarrow[(j,p)]{k} \underline{\mu}$ si $\underline{\mu}$ est obtenue à partir de $\underline{\lambda}$ en ajoutant une k -boîte sur la part $\lambda_j^{(p)}$;
- plus simplement, on notera $\underline{\lambda} \xrightarrow{k} \underline{\mu}$ si $\underline{\mu}$ est obtenue à partir de $\underline{\lambda}$ en ajoutant une k -boîte.

Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition de rang n . Si il existe une suite d'éléments $i_s \in \{0, \dots, e - 1\}$ avec $s = 1, \dots, n$ et une suite de l -partitions $\underline{\lambda}_t$ avec $t = 1, \dots, n + 1$ telles que $\underline{\lambda}_1 = \emptyset$ et $\underline{\lambda}_{n+1} = \underline{\lambda}$ vérifiant pour tout $s = 1, \dots, n$:

$$\underline{\lambda}_s \xrightarrow{i_s} \underline{\lambda}_{s+1},$$

alors, on dira que la suite i_1, i_2, \dots, i_n est une suite de résidus pour $\underline{\lambda}$.

Pour utiliser la formule de la a -valeur de la proposition 2.1.2, nous devons fixer un système de charges. On considerera donc le système de charges suivant :

$$m = (m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)}),$$

où, pour $j = 0, \dots, l - 1$, on fixe :

$$m^{(j)} = v^{(j)} - \frac{je}{l} + \rho e,$$

où $\rho = -\min \{v^{(j)} - \frac{je}{l} \mid j = 0, \dots, l - 1\}$ si il existe j tel que $v^{(j)} - \frac{je}{l} < 0$ et $\rho = 0$ sinon, de sorte que pour tout $j = 0, \dots, l - 1$, on ait $m^{(j)} \geq 0$.

La a -fonction d'une multipartition considérée ici sera donc toujours donnée en fonction de ce système de charges.

Finalement, on introduit un préordre sur les boîtes ajoutables d'une l -composition $\underline{\lambda}$. On note :

$$\xi_1 >_a \xi_2$$

si la boîte ξ_1 s'ajoute sur une part $\lambda_{j_1}^{(i_1)}$, si la boîte ξ_2 s'ajoute sur une part $\lambda_{j_2}^{(i_2)}$ et si :

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + m^{(i_1)} > \lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + m^{(i_2)}.$$

Nous allons maintenant établir quelques propriétés concernant les multipartitions de FLOTW et leurs a -valeurs.

2.2.B a -suites de résidus

Dans la suite, on s'intéresse particulièrement aux l -partitions de FLOTW. Nous considérons donc l'ensemble $\Lambda^1 := \Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^1$ (voir la définition 1.3.19). On a tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *Soit $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$. Soit ξ une k -boîte supprimable sur une part $\lambda_{j_1}^{(i_1)}$, soit $\lambda_{j_2}^{(i_2)}$ une part de $\underline{\lambda}$, on suppose :*

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} \equiv \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - 1 \pmod{e},$$

alors :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)} \iff \lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + m^{(i_2)} + 1 \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + m^{(i_1)}.$$

Preuve :

Par hypothèse, il existe $t \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} = \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - 1 + te.$$

a) On suppose :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + m^{(i_2)} + 1 \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + m^{(i_1)},$$

on veut montrer :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)},$$

raisonnons par l'absurde en supposant donc :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} < \lambda_{j_1}^{(i_1)}.$$

On a :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} - i_2 \frac{e}{l} + 1 \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - i_1 \frac{e}{l}.$$

Il suit :

$$-1 + te - i_2 \frac{e}{l} + 1 \geq -i_1 \frac{e}{l},$$

c'est à dire :

$$te \geq (i_2 - i_1) \frac{e}{l}.$$

on distingue alors deux cas.

Si $i_1 \geq i_2$:

on a alors $t \geq 0$, d'où :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - 1,$$

donc :

$$j_1 - j_2 \geq v_{i_1} - v_{i_2}.$$

Utilisons alors la caractérisation des l -partitions de FLOTW :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_2 + v_{i_1} - v_{i_2}}^{(i_1)},$$

2.2. Propriétés combinatoires

on obtient :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)},$$

ce qui est absurde.

Si $i_1 < i_2$:

on a alors $t > 0$, d'où :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - 1 + e,$$

donc :

$$j_1 - j_2 \geq v_{i_1} - v_{i_2} + e.$$

Utilisons alors la caractérisation des l -partitions de FLOTW :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_2+v_{i_1}-v_{i_2}+e}^{(i_1)}.$$

On obtient :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)},$$

ce qui est absurde d'où le résultat.

b) On suppose maintenant :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + m^{(i_2)} + 1 < \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + m^{(i_1)},$$

on veut montrer :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} < \lambda_{j_1}^{(i_1)}.$$

On raisonne par l'absurde en supposant donc :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \lambda_{j_1}^{(i_1)},$$

comme ci-dessus, on a :

$$te < (i_2 - i_1) \frac{e}{l}.$$

On distingue alors deux cas.

Si $i_1 \geq i_2$:

on a alors $t < 0$, on obtient donc :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} \leq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - 1 - e,$$

d'où :

$$j_2 - (j_1 + 1) \geq v_{i_2} - v_{i_1} + e.$$

Or en utilisant la caractérisation des l -partitions de FLOTW, il suit :

$$\lambda_{j_1+1}^{(i_1)} \geq \lambda_{j_1+1+e+v_{i_2}-v_{i_1}}^{(i_2)},$$

donc :

$$\lambda_{j_1+1}^{(i_1)} \geq \lambda_{j_2}^{(i_2)},$$

mais, comme ξ est une boîte supprimable de la l -partition $\underline{\lambda}$:

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} > \lambda_{j_1+1}^{(i_1)},$$

d'où la contradiction.

Si $i_1 < i_2$:

on a alors $t \leq 0$, on obtient donc :

$$\lambda_{j_2}^{(i_2)} - j_2 + v_{i_2} \leq \lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + v_{i_1} - 1,$$

d'où :

$$j_2 - (j_1 + 1) \geq v_{i_2} - v_{i_1}.$$

Or, en utilisant la caractérisation des l -partitions de FLOTW, il suit :

$$\lambda_{j_1+1}^{(i_1)} \geq \lambda_{j_1+1+v_{i_2}-v_{i_1}}^{(i_2)},$$

donc :

$$\lambda_{j_1+1}^{(i_1)} \geq \lambda_{j_2}^{(i_2)},$$

mais, comme ξ est une boîte supprimable de la l -partition $\underline{\lambda}$:

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} > \lambda_{j_1+1}^{(i_1)}$$

d'où :

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} > \lambda_{j_2}^{(i_2)}$$

d'où la contradiction. □

Lemme 2.2.2 Soit $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$. Alors, il existe une boîte supprimable ξ_1 de résidu k située sur une part $\lambda_{j_1}^{(i_1)}$ de longueur maximale vérifiant la propriété suivante.

Si ξ_2 est une $k - 1$ -boîte située sur la frontière d'une part $\lambda_{j_2}^{(i_2)}$, on a :

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} > \lambda_{j_2}^{(i_2)}.$$

Preuve :

On considère les partitions $\lambda^{(l_1)} = \dots = \lambda^{(l_r)}$ telles que $\lambda_1^{(l_1)} = \dots = \lambda_1^{(l_r)}$ sont des parts maximales pour $\underline{\lambda}$. Soient k_1, \dots, k_r les résidus des boîtes supprimables ξ_1, \dots, ξ_r situés sur ces parts de longueurs $\lambda_1^{(l_1)}$.

On va montrer qu'il existe $1 \leq i \leq r$ tel qu'il n'y a pas de boîtes de résidu $k_i - 1$ sur la frontière d'une part de longueur $\lambda_1^{(l_1)}$.

On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe des boîtes sur la frontière de parts de longueurs $\lambda_1^{(l_1)}$ avec résidus $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_r - 1$.

Par hypothèse, il existe une partition $\lambda^{(l_{s_1})}$ avec une boîte sur la frontière d'une part $\lambda_p^{(l_{s_1})}$ de longueur $\lambda_1^{(l_1)}$ et de résidu $k_1 - 1$:

$$\lambda^{(l_{s_1})} = \begin{array}{|c|c|} \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & k_1 - 1 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & k_{s_1} \\ \hline \dots & \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array}$$

2.2. Propriétés combinatoires

En particulier, on a $s_1 \neq 1$ sinon les boîtes sur la frontière de parts de longueurs $\lambda_1^{(l_1)}$ sur $\lambda^{(l_{s_1})}$ décrivent l'ensemble $\{0, \dots, e-1\}$ en entier ce qui est impossible via la deuxième condition de l -partitions de FLOTW.

On fait le même raisonnement pour le résidu k_{s_1} : il existe $\lambda^{(l_{s_2})}$ de la forme suivante :

$$\lambda^{(l_{s_2})} = \begin{array}{|c|c|} \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & k_{s_1} - 1 \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \dots & k_{s_2} \\ \hline \dots & \\ \hline \dots & \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array}$$

En particulier $s_2 \neq s_1$ pour les mêmes raisons que ci-dessus et $s_2 \neq 1$ sinon les résidus sur la frontière des parts de longueurs $\lambda_1^{(l_1)}$ sur $\lambda^{(l_{s_1})}$ et $\lambda^{(l_{s_2})}$ décrivent l'ensemble $\{0, \dots, e-1\}$ en entier.

On continue ce procédé et on aboutit à une absurdité. En effet, par la deuxième condition de l -partitions de FLOTW, lors du dernier pas, on obtient la propriété suivante :

$$s_r \notin \{1, s_1, s_2, \dots, s_{r-1}\},$$

ce qui est impossible car $s_r \in \{1, \dots, r\}$ et les s_i sont distincts.

Donc, il existe une boîte de résidu k_i sur une part $\lambda_j^{(l_1)}$ de longueur maximale telle qu'il n'y a pas de boîte de résidu $k_i - 1$ sur une part de longueur $\lambda_j^{(l_1)}$, d'où le résultat. \square

Lemme 2.2.3 Soit $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$. Soit ξ_1 la k_1 -boîte supprimable de la proposition précédente.

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ les k -boîtes supprimables de la frontière de $\underline{\lambda}$ situées sur des parts $\lambda_{j_1}^{(i_1)} \geq \lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \dots \geq \lambda_{j_s}^{(i_s)}$.

Soient $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ les $k-1$ -boîtes de la frontière de $\underline{\lambda}$ situées sur des parts $\lambda_{p_1}^{(l_1)} \geq \lambda_{p_2}^{(l_2)} \geq \dots \geq \lambda_{p_r}^{(l_r)}$.

Soit $\underline{\lambda}'$ la l -partition obtenue en supprimant les boîtes ξ_u vérifiant $\lambda_{j_u}^{(i_u)} > \lambda_{p_1}^{(l_1)}$ pour $u \in \{1, \dots, s\}$. Alors, $\underline{\lambda}'$ est une l -partition de FLOTW de rang strictement inférieur à celui de $\underline{\lambda}$.

Preuve :

Le rang de $\underline{\lambda}'$ est bien strictement inférieur à celui de $\underline{\lambda}$ par le lemme précédent. Vérifions maintenant les conditions des l -partitions de FLOTW pour la l -partition $\underline{\lambda}'$.

Condition 1 :

Tout d'abord, il faut vérifier que si $\lambda_j^{(i)} = \lambda_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$ et si on enlève une boîte à $\lambda_j^{(i)}$, on enlève aussi une boîte à $\lambda_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$. On a :

$$\lambda_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)} - (j + v_{i+1} - v_i) + v_{i+1} = \lambda_j^{(i)} - j + v_i.$$

Donc, dans ce cas, le résidu sur la frontière de $\lambda_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$ est égale à k . De plus, la boîte associée est une boîte supprimable, sinon on a :

$$\lambda_{j+v_{i+1}-v_i+1}^{(i+1)} > \lambda_{j+1}^{(i)}.$$

Or, en utilisant la caractérisation des l -partitions de FLOTW :

$$\lambda_{j+1}^{(i)} \geq \lambda_{j+v_{i+1}-v_i+1}^{(i+1)},$$

d'où la contradiction.

Comme $\lambda_j^{(i)} = \lambda_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$, la k -boîte sur la frontière de $\lambda_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$ doit se supprimer. Donc la première condition des l -partitions de FLOTW reste vérifiée pour $\underline{\lambda}'$. Vérifions maintenant la seconde condition.

Condition 2 :

Le seul problème est lorsque, pour obtenir $\underline{\lambda}'$, on enlève une boîte ξ sur la frontière d'une part $\lambda_{j_1}^{(i_1)}$ et que, si on considère les parts de longueurs $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$ de $\underline{\lambda}$, l'ensemble des résidus de la frontière est égal à l'ensemble suivant :

$$\{0, \dots, e - 1\} \setminus \{k - 1\},$$

par exemple, lorsque $\underline{\lambda}$ est de la forme suivante avec $k = k_1$:

$$\left(\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k-1 & k \\ \hline \dots & k-2 & \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & k_2 & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k_2 & \dots \\ \hline \dots & k_2-1 & \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & k_3 & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array} & , \dots , & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k_r & \dots \\ \hline \dots & k_r-1 & \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & \dots & \\ \hline \dots & k & \\ \hline \dots & & \\ \hline \end{array} \\ \lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1 & & \lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1 & & \lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1 \end{array} \right)$$

On considère les boîtes de résidus k sur les parts de longueurs $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$. Elles sont supprimables, sinon, on aurait une boîte de résidu $k - 1$ sur une part de longueur $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$.

On a, de plus, $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1 > \lambda_{p_1}^{(l_1)}$ car il n'y a pas de boîte de résidu $k - 1$ sur des parts de longueurs $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$.

Donc, pour obtenir $\underline{\lambda}'$, toutes les boîtes de résidus k sur les parts de longueurs $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$ sont supprimées.

Alors l'ensemble des résidus des boîtes sur les parts de longueurs $\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$ est égal à l'ensemble suivant :

$$\{0, \dots, e - 1\} \setminus \{k\}.$$

2.2. Propriétés combinatoires

En reprenant l'exemple de $\underline{\lambda}$ ci-dessus, on obtient pour $\underline{\lambda}'$:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k-1 & \dots \\ \hline \dots & k_1-2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k_2 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k_2 & \dots \\ \hline \dots & k_2-1 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k_3 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array} , \dots , \begin{array}{|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k_r & \dots \\ \hline \dots & k_r-1 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & k+1 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1 \qquad \lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1 \qquad \lambda_{j_1}^{(i_1)} - 1$$

Donc la deuxième condition des l -partitions reste vérifiée. Donc $\underline{\lambda}$ vérifie bien les conditions des l -partitions de FLOTW. \square

Grâce à ce lemme, nous allons pouvoir faire correspondre à chaque l -partition de FLOTW une suite de résidus qui possédera des propriétés de minimalité selon la a -valeur.

Définition 2.2.4 : Soit $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$. D'après le lemme 2.2.2, il existe une boîte supprimable ξ_1 de résidu k sur une part $\lambda_{j_1}^{(i_1)}$ de longueur maximale, telle qu'il n'existe pas de $k-1$ -boîte sur la frontière d'une part de même longueur que celle de ξ_1 .

En particulier, si $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ sont les $k-1$ -boîtes de la frontière de $\underline{\lambda}$ situées sur des parts $\lambda_{p_1}^{(l_1)} \geq \lambda_{p_2}^{(l_2)} \geq \dots \geq \lambda_{p_r}^{(l_r)}$, on a, d'après le lemme 2.2.1 :

$$\lambda_{j_1}^{(i_1)} - j_1 + m^{(i_1)} - 1 > \lambda_{p_k}^{(l_k)} - p_k + m^{(l_k)} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Comme dans le lemme 2.2.3, on considère $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ les k -boîtes supprimables de la frontière de $\underline{\lambda}$ sur des parts $\lambda_{j_1}^{(i_1)} \geq \lambda_{j_2}^{(i_2)} \geq \dots \geq \lambda_{j_s}^{(i_s)}$ telles que :

$$\lambda_{j_s}^{(i_s)} > \lambda_{p_1}^{(l_1)}.$$

En particulier, on a, d'après le lemme 2.2.1 :

$$\lambda_{j_t}^{(i_t)} - j_t + m^{(i_t)} - 1 > \lambda_{p_k}^{(l_k)} - p_k + m^{(l_k)} \quad \text{pour } t = 1, \dots, s \text{ et } k = 1, \dots, r.$$

Soit $\underline{\lambda}'$ la l -partition obtenue en supprimant les boîtes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. D'après le lemme 2.2.3, $\underline{\lambda}'$ est une l -partition de FLOTW.

Alors, on définit récursivement la a -suite de résidus associée à $\underline{\lambda}$ et notée $a\text{-suite}(\underline{\lambda})$ par :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = a\text{-suite}(\underline{\lambda}'), \underbrace{k, \dots, k}_s.$$

En particulier, remarquons que avec les hypothèses ci-dessus, $\underline{\lambda}$ est obtenue à partir de $\underline{\lambda}'$ en ajoutant s boîtes de résidus k sur les plus grandes parts de $\underline{\lambda}$ où ces boîtes sont ajoutables ou, de façon équivalente, sur la plus grande part selon $<_a$.

Exemple : On considère le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec q une racine de l'unité d'ordre $e = 4$. Les 2-partitions de FLOTW sont les 2-partitions $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ vérifiant la propriété suivante.

– Pour tout i , on a :

$$\lambda_i^{(0)} \geq \lambda_{i+1}^{(1)}$$

et

$$\lambda_i^{(1)} \geq \lambda_{i+3}^{(0)},$$

– pour tout $k > 0$, l'ensemble des résidus associé aux boîtes de la forme (a, k, c) tel que $\lambda_a^{(c)} = k$ est strictement inclus dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

On considère la 2-partition $\underline{\lambda} = (2.2, 2.2.1)$ avec diagramme :

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right).$$

$\underline{\lambda}$ est bien une 2-partition de FLOTW.

Cherchons sa a -suite de résidu : on cherche k, s et $\underline{\lambda}'$ tels que :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = a\text{-suite}(\underline{\lambda}'), \underbrace{k, \dots, k}_s.$$

Les parts de longueurs maximales sont les parts de longueur 2 et les boîtes supprimables sur les parts de cette longueur sont de résidus 1 et 0.

Pour $k = 1$, on voit que l'on a une part de longueur 2 dont la boîte sur sa frontière est de résidu $k - 1 \equiv 0 \pmod{e}$.

On prend donc $k = 0$ et on peut vérifier que l'on a pas de parts de longueur 2 dont la boîte sur sa frontière est de résidu $k - 1 \equiv 3 \pmod{e}$. On supprime donc cette boîte.

Il n'y a pas d'autre 0-boîte supprimable sur $\underline{\lambda}$, donc :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = a\text{-suite}(2.1, 2.2.1), 0.$$

La 2-partition (2.1, 2.2.1) est bien une 2-partition de FLOTW.

Ensuite, les boîtes supprimables sur les parts de longueurs maximales sont de résidus 1 et il y en a 2, on obtient :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = a\text{-suite}(1.1, 2.1.1), 1, 1, 0.$$

On continue jusqu'à obtenir la 2-partition vide. On obtient finalement :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = 1, 0, 0, 3, 3, 2, 1, 1, 0.$$

2.2.C a -graphe d'une l -partition de FLOTW

Dans ce paragraphe, nous donnons une propriété fondamentale concernant la a -suite de résidus d'une l -partition de FLOTW.

Commençons par une définition qui suit de la définition 2.2.4 des a -suites de résidus :

Définition 2.2.5 Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition de FLOTW de rang n et soit s_1, s_2, \dots, s_n sa a -suite de résidus. Par construction, on a un graphe :

$$\emptyset \xrightarrow[(j_1, p_1)]{s_1} \underline{\lambda}^{(1)} \xrightarrow[(j_2, p_2)]{s_2} \underline{\lambda}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j_n, p_n)]{s_n} \underline{\lambda}^{(n)},$$

où \emptyset désigne la l -partition vide et où pour tout u tel que $1 \leq u \leq n$, la l -partition $\underline{\lambda}^{(u)}$ est obtenue à partir de $\underline{\lambda}^{(u-1)}$ en ajoutant une s_u -boîte sur la plus grande part selon l'ordre $<_a$.

Ce graphe est appelé le a -graphe de la l -partition $\underline{\lambda}$.

Exemple : On considère le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec q une racine de l'unité d'ordre $e = 4$ et la 2-partition $\underline{\lambda} = (2.2, 2.2.1)$ de a -suite :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = 1, 0, 0, 3, 3, 2, 1, 1, 0.$$

Alors le a -graphe associé à $\underline{\lambda}$ est donné par :

$$\begin{aligned} (\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[(1,1)]{1} (\emptyset, 1) \xrightarrow[(1,0)]{0} (1, 1) \xrightarrow[(2,1)]{0} (1, 1.1) \xrightarrow[(2,0)]{3} (1.1, 1.1) \xrightarrow[(3,1)]{3} (1.1, 1.1.1) \xrightarrow[(1,1)]{2} \\ \xrightarrow[(1,1)]{2} (1.1, 2.1.1) \xrightarrow[(1,0)]{1} (2.1, 2.1.1) \xrightarrow[(2,1)]{1} (2.1, 2.2.1) \xrightarrow[(2,0)]{0} (2.2, 2.2.1). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.6 *Le a -graphe d'une l -partition de FLOTW n'est composé que de l -partitions de FLOTW.*

Preuve :

Soit $\underline{\lambda}^{(n)}$ une l -partition de FLOTW et soit :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}^{(n)}) = \underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s},$$

où pour $j = 1, \dots, s-1$, on suppose $i_j \neq i_{j+1}$. Alors le a -graphe de $\underline{\lambda}$ est donné par :

$$\emptyset \xrightarrow[(j_1, p_1)]{i_1} \underline{\lambda}^{(1)} \dots \xrightarrow[(j_{a_1}, p_{a_1})]{i_1} \underline{\lambda}^{(a_1)} \dots \xrightarrow[(j_{a_1+a_2}, p_{a_1+a_2})]{i_2} \underline{\lambda}^{(a_1+a_2)} \dots \xrightarrow[(j_n, p_n)]{i_s} \underline{\lambda}^{(n)}$$

Par définition de la a -suite, les l -partitions $\underline{\lambda}^{(a_1)}, \underline{\lambda}^{(a_1+a_2)}, \dots, \underline{\lambda}^{(n)}$ sont des l -partitions de FLOTW. Supposons qu'il existe une l -partition $\underline{\mu}$ apparaissant dans le a -graphe de $\underline{\lambda}^{(n)}$ qui ne soit pas une l -partition de FLOTW. Alors, il existe r tel que :

$$\underline{\lambda}^{(\sum_{i=1}^{r-1} a_i)} \xrightarrow{i_r} \dots \xrightarrow{i_r} \underline{\mu} \xrightarrow{i_r} \dots \xrightarrow{i_r} \underline{\lambda}^{(\sum_{i=1}^r a_i)} \quad (1)$$

On peut supposer que toutes les l -partitions apparaissant dans le a -graphe entre $\underline{\lambda}^{(\sum_{i=1}^{r-1} a_i)}$ et $\underline{\mu}$ sont des l -partitions de FLOTW. Pour simplifier les notations, on pose $\underline{\nu} := \underline{\lambda}^{(\sum_{i=1}^{r-1} a_i)}$. Alors, on obtient les deux cas suivants.

- Soit il existe $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ tels que $\mu_j^{(i)} < \mu_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$. Ceci implique que l'on a ajouté une i_r -boîte sur la part $\nu_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$ et que $\nu_j^{(i)} = \nu_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)}$. On a alors :

$$\nu_j^{(i)} - j + m^{(i)} > \nu_{j+v_{i+1}-v_i}^{(i+1)} - (j + v_{i+1} - v_i) + m^{(i+1)}$$

Ceci implique que l'on n'ajoute pas de i_r -boîte sur la part $\nu_j^{(i)}$ dans le graphe (1). En particulier, $\underline{\lambda}^{(\sum_{i=1}^r a_i)}$ n'est pas une l -partition de FLOTW ce qui est une contradiction.

- Soit la deuxième condition des l -partitions de FLOTW n'est pas vérifiée pour $\underline{\mu}$. Ceci implique que dans le graphe (1), on a ajouté une i_r -boîte sur une part $\nu_j^{(i)}$ et que pour $\underline{\mu}$, l'ensemble des résidues sur la frontière des parts de longueur $\nu_j^{(i)} + 1$ est égal à $\{0, \dots, e-1\}$. Par construction du a -graphe, on conclut que $\underline{\lambda}^{(\sum_{i=1}^r a_i)}$ possède la même propriété et n'est donc pas une l -partition de FLOTW ; d'où la contradiction. \square

Nous allons maintenant nous intéresser aux a -valeurs des l -partitions de FLOTW. Pour cela, on introduit la notation suivante.

Soit $\underline{\lambda}$ une l -composition de n et soit k un résidu. Soit $\underline{\mu}$ une l -composition de $n+1$ telle que :

$$\underline{\lambda} \xrightarrow[(j,p)]{k} \underline{\mu}.$$

Alors, on note :

$$\underline{\lambda} \xrightarrow[(j,p)]{\text{opt}(k)} \underline{\mu},$$

si, pour toute l -composition de $n+1$ vérifiant :

$$\underline{\lambda} \xrightarrow[(j',p')]{k} \underline{\mu}',$$

on a :

$$\lambda_{j'}^{(p')} - j' + m^{(p')} \leq \lambda_j^{(p)} - j + m^{(p)}$$

Remarque 2.2.7 Remarquons, en particulier, que si :

$$\emptyset \xrightarrow[(j_1,p_1)]{s_1} \underline{\lambda}^{(1)} \xrightarrow[(j_2,p_2)]{s_2} \underline{\lambda}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j_n,p_n)]{s_n} \underline{\lambda}^{(n)}$$

est le a -graphe de la l -partition de FLOTW $\underline{\lambda}^{(n)}$, on a :

$$\emptyset \xrightarrow[(j_1,p_1)]{\text{opt}(s_1)} \underline{\lambda}^{(1)\text{opt}(s_2)} \xrightarrow[(j_2,p_2)]{\text{opt}(s_2)} \underline{\lambda}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j_n,p_n)]{\text{opt}(s_n)} \underline{\lambda}^{(n)}.$$

Ce graphe sera aussi appelé le a -graphe de $\underline{\lambda}$.

Définition 2.2.8 On introduit un ordre sur les l -compositions de même rang n comme suit.

2.2. Propriétés combinatoires

Soient $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ des l -compositions de n . Soient $\mathbf{B}_{\underline{\mu}}$ et $\mathbf{B}_{\underline{\nu}}$ deux symboles ordinaires de $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ de même hauteur. Soient $\mathbf{B}_{\underline{\mu}}[m]'$ et $\mathbf{B}_{\underline{\nu}}[m]'$ les m -symboles associés, alors on note :

$$\underline{\nu} \prec \underline{\mu},$$

si :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in \mathbf{B}'_{\underline{\mu}}(i) \times \mathbf{B}'_{\underline{\mu}}(j) \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in \mathbf{B}'_{\underline{\mu}}(i) \\ 1 \leq k \leq a}} \min \{k, m^{(j)}\} < \\ \sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in \mathbf{B}'_{\underline{\nu}}(i) \times \mathbf{B}'_{\underline{\nu}}(j) \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in \mathbf{B}'_{\underline{\nu}}(i) \\ 1 \leq k \leq a}} \min \{k, m^{(j)}\}.$$

En particulier, si $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ sont des l -partitions, on a par la proposition 2.1.2 :

$$\underline{\nu} \prec \underline{\mu} \iff a(\underline{\mu}) > a(\underline{\nu}).$$

La proposition suivante relie les propriétés énoncées dans cette partie avec l'ordre défini ci dessus et avec la a -valeur.

Proposition 2.2.9 *Soit $\underline{\lambda}$ une l -composition de n , soit \mathbf{B} un symbole ordinaire associé à $\underline{\lambda}$, soient β_1 et β_2 deux éléments de $\mathbf{B}[m]'$ associés à deux parts de $\underline{\lambda}$ (éventuellement nulles), on suppose que :*

$$\beta_1 < \beta_2.$$

Soit $s \in \mathbb{N}^$, on considère les l -compositions $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ de $n+s$ obtenues en ajoutant s boîtes aux parts associées à, respectivement, β_1 et β_2 . Soient $\mathbf{B}_{\underline{\mu}}$ et $\mathbf{B}_{\underline{\nu}}$ les deux symboles ordinaires de $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ de même hauteur que \mathbf{B} , $\mathbf{B}_{\underline{\mu}}[m]'$ et $\mathbf{B}_{\underline{\nu}}[m]'$ les m -symboles, alors :*

$$\underline{\nu} \prec \underline{\mu}.$$

En particulier, si $\underline{\mu}$ et $\underline{\nu}$ sont des l -partitions, on a :

$$a(\underline{\mu}) > a(\underline{\nu}).$$

Preuve :

On suppose que β_1 est sur une part du symbole $B^{(i_1)}$ et β_2 sur $B^{(i_2)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in \mathbf{B}'_{\underline{\mu}}(i) \times \mathbf{B}'_{\underline{\mu}}(j) \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in \mathbf{B}'_{\underline{\mu}}(i) \\ 1 \leq t \leq a}} \min \{t, m^{(j)}\} \\ & - \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in \mathbf{B}'_{\underline{\nu}}(i) \times \mathbf{B}'_{\underline{\nu}}(j) \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in \mathbf{B}'_{\underline{\nu}}(i) \\ 1 \leq t \leq a}} \min \{t, m^{(j)}\} \right) \\ & = \sum_{\substack{a \in B^{(i)} \\ 0 \leq i \leq l-1 \\ a \neq \beta_1 \text{ si } i=i_1}} (\min \{a, \beta_1 + s\} - \min \{a, \beta_1\}) - \sum_{\substack{0 \leq j \leq l-1 \\ \beta_1 < t \leq \beta_1 + s}} \min \{t, m^{(j)}\}, \end{aligned}$$

avec une formule identique pour $\underline{\nu}$.
Or, pour $a \in B^{(j)}$, $j = 0, \dots, l-1$:

$$\min \{a, \beta_1 + s\} - \min \{a, \beta_1\} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \beta_1, \\ a - \beta_1 & \text{si } \beta_1 \leq a < \beta_1 + s, \\ s & \text{si } a \geq \beta_1 + s. \end{cases}$$

Comme $\beta_1 < \beta_2$, il suit :

$$\sum_{\substack{a \in B^{(i)} \\ 0 \leq i \leq l-1 \\ a \neq \beta_1 \text{ si } i=i_1}} (\min \{a, \beta_1 + s\} - \min \{a, \beta_1\}) > \\ \sum_{\substack{a \in B^{(i)} \\ 0 \leq i \leq l-1 \\ a \neq \beta_2 \text{ si } i=i_2}} (\min \{a, \beta_2 + s\} - \min \{a, \beta_2\}).$$

De plus, il est clair que :

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq l-1 \\ \beta_1 < t \leq \beta_1 + s}} \min \{t, m^{(j)}\} \leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq l-1 \\ \beta_2 < t \leq \beta_2 + s}} \min \{t, m^{(j)}\},$$

d'où le résultat. □

On peut maintenant passer au résultat principal de cette section.

Proposition 2.2.10 *Soit $\underline{\lambda}^{(n)}$ une l -partition de FLOTW de rang n et soit s_1, s_2, \dots, s_n sa a -suite de résidus. Par construction (définition 2.2.5), on a une suite formée de l -partitions de FLOTW :*

$$(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[(j_1, p_1)]{\text{opt}(s_1)} \underline{\lambda}^{(1)} \xrightarrow[(j_2, p_2)]{\text{opt}(s_2)} \underline{\lambda}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j_n, p_n)]{\text{opt}(s_n)} \underline{\lambda}^{(n)}.$$

Alors, si on a une autre suite formée de l -compositions :

$$(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[(j'_1, p'_1)]{s_1} \underline{\mu}^{(1)} \xrightarrow[(j'_2, p'_2)]{s_2} \underline{\mu}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j'_n, p'_n)]{s_n} \underline{\mu}^{(n)},$$

on a $\underline{\lambda}^{(n)} \prec \underline{\mu}^{(n)}$ si $\underline{\lambda}^{(n)} \neq \underline{\mu}^{(n)}$.

Preuve :

On montre par récurrence sur $n - r$ que si l'on a 2 graphes :

$$\underline{\lambda}^{(r-1)} \xrightarrow[(j_r, p_r)]{\text{opt}(s_r)} \underline{\lambda}^{(r)} \xrightarrow[(j_{r+1}, p_{r+1})]{\text{opt}(s_{r+1})} \dots \xrightarrow[(j_n, p_n)]{\text{opt}(s_n)} \underline{\lambda}^{(n)}, \quad (1)$$

$$\underline{\mu}^{(r-1)} \xrightarrow[(j'_r, p'_r)]{s_r} \underline{\mu}^{(r)} \xrightarrow[(j'_{r+1}, p'_{r+1})]{s_{r+1}} \dots \xrightarrow[(j'_n, p'_n)]{s_n} \underline{\mu}^{(n)}, \quad (2)$$

on a $\underline{\lambda}^{(n)} \prec \underline{\mu}^{(n)}$ si $\underline{\lambda}^{(n)} \neq \underline{\mu}^{(n)}$.

Si $n - r = 0$:

Supposons $\underline{\lambda}^{(n)} \neq \underline{\mu}^{(n)}$. Soit $\mathbf{B}_{\underline{\mu}^{(n-1)}}$ le symbole ordinaire de $\underline{\mu}^{(n-1)}$. Soit $\mathbf{B}_{\underline{\mu}^{(n-1)}}[m]'$ le m -symbole.

2.2. Propriétés combinatoires

$\underline{\lambda}^{(n)}$ et $\underline{\mu}^{(n)}$ sont obtenues à partir de $\underline{\mu}^{(n-1)}$ en ajoutant une boîte ξ_1 et une boîte ξ_2 avec :

$$\xi_1 >_a \xi_2$$

Soient $\mathbf{B}_{\underline{\mu}^{(n)}}$ et $\mathbf{B}_{\underline{\lambda}^{(n)}}$ les deux symboles ordinaires de $\underline{\mu}^{(n)}$ et $\underline{\lambda}^{(n)}$, $\mathbf{B}_{\underline{\mu}^{(n)}}[m]'$ et $\mathbf{B}_{\underline{\lambda}^{(n)}}[m]'$ les m -symboles. On se trouve alors sous les hypothèses de la proposition 2.2.9. On a donc :

$$\underline{\lambda}^{(n)} \prec \underline{\mu}^{(n)}.$$

Si $n - r > 0$:

Soit k minimal tel que $(j'_k, p'_k) = (j_r, p_r)$ (si il n'existe pas de k tel que $(j'_k, p'_k) = (j_r, p_r)$, on choisira dans ce qui suit $k = n + 1$). On définit un graphe :

$$\lambda_{(j_r, p_r)}^{(r-1) \text{opt}(s_r)} \xrightarrow{s_{r+1}} \lambda_{(j'_{r+1}, p'_{r+1})}^{(r)} \dots \xrightarrow{s_n} \underline{\nu}^{(n)}, \quad (3)$$

où la suite de couples (j''_t, p''_t) est donnée par :

- pour $t < k$:
 - si $(j'_t, p'_t) = (j'_r, p'_r)$, on pose $(j''_t, p''_t) = (j_r, p_r)$,
 - si $(j'_t, p'_t) \neq (j'_r, p'_r)$, on pose $(j''_t, p''_t) = (j'_t, p'_t)$;
- pour $t \geq k$:
 - si $(j'_t, p'_t) = (j'_r, p'_r)$ ou $(j'_t, p'_t) = (j_r, p_r)$, on pose $(j''_t, p''_t) = (j_r, p_r)$ si le résidu associé à (j_r, p_r) est compatible avec la suite, sinon on pose $(j''_t, p''_t) = (j'_r, p'_r)$,
 - sinon, on pose $(j''_t, p''_t) = (j'_t, p'_t)$.

La suite (3) est formée de l -compositions et la l -composition $\underline{\nu}^{(n)}$ ne diffère de $\underline{\mu}^{(n)}$ que de 2 parts associées à (j_r, p_r) et (j'_r, p'_r) .

- Si $(j_r, p_r) = (j'_r, p'_r)$, on peut directement conclure par récurrence.
- Si $(j_r, p_r) \neq (j'_r, p'_r)$, pour simplifier les notations, on pose $\underline{\lambda} := \underline{\lambda}^{(n)}$, $\underline{\mu} := \underline{\mu}^{(n)}$ et $\underline{\nu} := \underline{\nu}^{(n)}$. Supposons $\underline{\lambda} \neq \underline{\mu}$, alors $\underline{\nu} \neq \underline{\mu}$, on se retrouve sous les hypothèses de la proposition 2.2.9 : soit $\underline{\gamma} = (\gamma^{(0)}, \dots, \gamma^{(l-1)})$ la l -composition définie par :

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(p)} &:= \mu_j^{(p)} && \text{si } (j, p) \neq (j'_r, p'_r), \\ \gamma_{j'_r}^{(p'_r)} &:= \nu_{j'_r}^{(p'_r)}. \end{aligned}$$

Alors, $\underline{\mu}$ est obtenue à partir de $\underline{\gamma}$ en ajoutant des boîtes sur $\gamma_{j'_r}^{p'_r}$ tandis que $\underline{\nu}$ est obtenue à partir de $\underline{\gamma}$ en ajoutant le même nombre de boîtes sur $\gamma_{j_r}^{p_r}$. On a :

$$\lambda_{j_r}^{(p_r)} - j_r + m^{(p_r)} > \lambda_{j'_r}^{(p'_r)} - j'_r + m^{(p'_r)}.$$

Il est facile de voir que ceci implique :

$$\gamma_{j_r}^{(p_r)} - j_r + m^{(p_r)} > \gamma_{j'_r}^{(p'_r)} - j'_r + m^{(p'_r)}.$$

Il suit que $\underline{\nu}$ et $\underline{\mu}$ sont obtenues en ajoutant le même nombre de boîtes sur des parts d'une l -composition associée à des éléments d'un m -symbole β_1 et β_2 tels que :

$$\beta_1 > \beta_2.$$

On conclut donc que :

$$\underline{\nu} \prec \underline{\mu},$$

et donc :

$$\underline{\lambda} \prec \underline{\mu}.$$

□

La proposition suivante est maintenant immédiate en utilisant la formule de la a -valeur :

Proposition 2.2.11 *Soit $\underline{\lambda}^{(n)}$ une l -partition de FLOTW de rang n , s_1, s_2, \dots, s_n sa a -suite de résidus. Par construction (définition 2.2.5), on a un graphe formé de l -partitions de FLOTW :*

$$(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[(j_1, p_1)]{\text{opt}(s_1)} \underline{\lambda}^{(1)} \xrightarrow[(j_2, p_2)]{\text{opt}(s_2)} \underline{\lambda}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j_n, p_n)]{\text{opt}(s_n)} \underline{\lambda}^{(n)}.$$

Alors, si on a un autre graphe formé de l -partitions :

$$(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow[(j'_1, p'_1)]{s_1} \underline{\mu}^{(1)} \xrightarrow[(j'_2, p'_2)]{s_2} \underline{\mu}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j'_n, p'_n)]{s_n} \underline{\mu}^{(n)},$$

on a $a(\underline{\lambda}^{(n)}) < a(\underline{\mu}^{(n)})$ si $\underline{\lambda}^{(n)} \neq \underline{\mu}^{(n)}$.

Dans la prochaine partie, nous donnons les conséquences de ce résultat sur la théorie des représentations des algèbres de Ariki-Koike.

2.3 Existence et caractérisation d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike

Nous revenons ici aux algèbres de Ariki-Koike. Le but de cette partie est de prouver l'existence d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike en caractéristique 0 possédant les mêmes propriétés que pour les algèbres de Hecke.

2.3.A Position du problème

Comme dans les sections précédentes, nous supposons que l et e sont deux entiers positifs. Rappelons les notations, nous fixons une suite d'entiers :

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1} < e.$$

Alors, pour $j = 0, \dots, l-1$, nous définissons les nombres rationnels suivants :

$$m^{(j)} := v_j - \frac{je}{l} + \rho e,$$

où $\rho = -\min \{v^{(j)} - \frac{je}{l} \mid j = 0, \dots, l-1\}$ si il existe j tel que $v^{(j)} - \frac{je}{l} < 0$ et $\rho = 0$ sinon. On considère alors le système de charges suivant :

$$m := (m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)}).$$

2.3. Existence et caractérisation d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike

Soit y une indéterminée, soit $\eta_e := \exp(\frac{2i\pi}{e})$ et soit $\eta_l := \exp(\frac{2i\pi}{l})$. On considère l'algèbre de Ariki-Koike \mathcal{H}_n de type $G(l, 1, n)$ sur $A = \mathbb{Z}[\eta_l][y, y^{-1}]$ avec les paramètres suivants.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \eta_l^j y^{lm^{(j)}} \text{ pour } j = 0, \dots, l-1, \\ \mathbf{u} &= y^l. \end{aligned}$$

Soit $R = \mathbb{Q}[\eta_l](y)$ et soit $\mathcal{H}_{R,n} := R \otimes_A \mathcal{H}_n$. Alors, $\mathcal{H}_{R,n}$ est une algèbre semi-simple déployée et donc :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{R,n}) = \{S_R^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^l\}.$$

Pour $\lambda \in \Pi_n^l$, on note $a(\lambda) := a(S_R^\lambda)$ la a -valeur de S_R^λ (voir la proposition 2.1.2).

On considère maintenant la spécialisation :

$$\theta : \mathbb{Z}[\eta_l][y, y^{-1}] \rightarrow L,$$

telle que $\theta(y) = \eta_{le} := \exp(\frac{2i\pi}{le})$ et telle que $L = \mathbb{Q}(\eta_{le})$. Nous obtenons ainsi une algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{L,n}$ déployée sur L avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{u}_j) &= \eta_l^j \eta_{le}^{lm^{(j)}} = \eta_e^{v_j} \text{ pour } j = 0, \dots, l-1, \\ \theta(\mathbf{u}) &= \eta_e, \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une application de décomposition :

$$d_\theta : R_0(\mathcal{H}_{R,n}) \rightarrow R_0(\mathcal{H}_{L,n}).$$

Nous nous retrouvons donc dans le cas abordé dans la section 1.3. Maintenant, nous allons prouver l'existence d'un ensemble canonique pour cette algèbre indexé par des modules simples de l'algèbre $\mathcal{H}_{R,n}$. Pour cela, nous allons utiliser les résultats de la section précédente et le théorème d'Ariki.

2.3.B Existence et caractérisation de l'ensemble basique canonique

Tout d'abord, considérons l'ordre de FLOTW donné dans le paragraphe 1.3.D, la proposition suivante montre que cet ordre est "compatible" avec l'ordre " $<_a$ " donné dans le paragraphe 2.2.A.

Proposition 2.3.1 *Soit $\lambda \in \Lambda^1$, une l -partition. Soient $\gamma = (a, b, c)$ et $\gamma' := (a', b', c')$ deux boîtes de λ de même résidu. Alors :*

$$b - a + m^{(c)} > b' - a' + m^{(c')} \iff \begin{array}{l} \gamma \text{ est en dessous de } \gamma' \\ \text{par rapport à l'ordre de FLOTW.} \end{array}$$

Preuve :

Comme γ et γ' ont même résidu, il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$b - a + v_c = b' - a' + v_{c'} + te.$$

Alors, on a :

$$b - a + m^{(c)} > b' - a' + m^{(c')} \iff (c - c') \frac{e}{l} < te,$$

donc, on a $t \geq 0$ et si $t = 0$, on a $c' > c$. Donc γ et en dessous de γ' par rapport à l'ordre de FLOTW. La réciproque est évidente. \square

Soit maintenant v une indéterminée et soit \mathcal{U}_v l'algèbre quantique de type $A_{e-1}^{(1)}$ comme dans le paragraphe 1.3.B. Soit $\overline{\mathcal{M}}$ le \mathcal{U}_v -module engendré par la l -partition vide avec l'action de JMMO (voir le paragraphe 1.3.D).

La proposition suivante nous donne l'action des puissances divisées $f_i^{(j)}$ ($i \in \{0, \dots, e-1\}$ et $j \in \mathbb{N}$) sur les multipartitions. La démonstration est analogue à la démonstration du cas de l'action d'Hayashi (voir par exemple [62, lemme 6.15] lorsque $l = 1$).

Proposition 2.3.2 *Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition, $i \in \{0, \dots, e-1\}$ et j un entier positif. Alors :*

$$f_i^{(j)} \underline{\lambda} = \sum v^{\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu})} \underline{\mu},$$

où la somme est prise sur les l -partitions $\underline{\mu}$ qui vérifient :

$$\underbrace{\lambda \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} \mu}_j,$$

et où :

$$\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \sum_{\gamma \in [\underline{\mu}]/[\underline{\lambda}]} \left(\begin{array}{c} \#\{i - \text{boîtes ajoutables de } \underline{\mu} \text{ en dessous de } \gamma\} - \\ \#\{i - \text{boîtes supprimables de } \underline{\lambda} \text{ en dessous de } \gamma\} \end{array} \right).$$

Preuve :

La démonstration se fait par induction sur j :

- Si $j = 1$, c'est la définition de l'action de JMMO.
- Si $j > 1$, soit $\underline{\mu}$ une l -partition vérifiant :

$$\underbrace{\lambda \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} \mu}_{(r_1, p_1) \dots (r_j, p_j)}_j.$$

On suppose que les boîtes γ_l associées à (r_l, p_l) pour $l = 1, \dots, j$ sont telles que pour tout $l = 1, \dots, j-1$, γ_l est sous γ_{l+1} . Pour $s = 1, \dots, j$, considérons les l -partitions $\underline{\mu}_s$ telles que $[\underline{\mu}]/[\underline{\mu}_s] = \gamma_s$.

Par induction, le coefficient de $\underline{\mu}_s$ dans $f_i^{(j-1)} \underline{\lambda}$ est $v^{\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s)}$. Donc, le

coefficient de $\underline{\mu}$ dans $f_i f_i^{(j-1)} \underline{\lambda}$ est $\sum_{s=1}^j q^{\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s) + \overline{N}_i^b(\underline{\mu}_s, \underline{\mu})}$.

On définit alors les nombres suivants :

$$\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}, \gamma_s) := \#\{i - \text{boîtes ajoutables de } \underline{\mu} \text{ en dessous de } \gamma_s\} - \#\{i - \text{boîtes supprimables de } \underline{\lambda} \text{ en dessous de } \gamma_s\},$$

2.3. Existence et caractérisation d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike

où $s = 1, \dots, j$. On a :

$$\begin{aligned} \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s) &= \sum_{t=1}^{s-1} \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s, \gamma_t) + \sum_{t=s+1}^j \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s, \gamma_t) \\ &= \sum_{t=1}^{s-1} \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}, \gamma_t) + \sum_{t=s+1}^j (\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}, \gamma_t) + 1) \\ &= \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) - \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s, \gamma_s) + j - s, \end{aligned}$$

et :

$$\overline{N}_i^b(\underline{\mu}_s, \underline{\mu}) = \overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu}_s, \gamma_s) - s + 1.$$

Donc le coefficient de $\underline{\mu}$ dans $f_i f_i^{(j-1)} \underline{\lambda}$ est $v^{\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu})} \sum_{s=1}^j v^{j+1-2s}$.

Finalement, on a $f_i f_i^{(j-1)} \underline{\lambda} = [j]_v f_i^{(j)} \underline{\lambda}$. Il suit que le coefficient de $\underline{\mu}$ dans $f_i^{(j)} \underline{\lambda}$ est $v^{\overline{N}_i^b(\underline{\lambda}, \underline{\mu})}$. \square

Cette proposition ainsi que les résultats prouvés dans la section précédente permettent de démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.3.3 *Soit $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$ une l -partition de FLOTW. Soit a -suite($\underline{\lambda}$) = $\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s}$ sa a -suite de résidus où pour $j = 1, \dots, s-1$, on suppose $i_j \neq i_{j+1}$. Alors, on a :*

$$f_{i_s}^{(a_s)} f_{i_{s-1}}^{(a_{s-1})} \dots f_{i_1}^{(a_1)} \underline{\emptyset} = \underline{\lambda} + \sum_{a(\underline{\mu}) > a(\underline{\lambda})} c_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(v) \underline{\mu},$$

où $c_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.

Preuve :

La proposition 2.2.11 implique que :

$$f_{i_s}^{(a_s)} f_{i_{s-1}}^{(a_{s-1})} \dots f_{i_1}^{(a_1)} \underline{\emptyset} = c_{\underline{\lambda}, \underline{\lambda}}(v) \underline{\lambda} + \sum_{a(\underline{\mu}) > a(\underline{\lambda})} c_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(v) \underline{\mu},$$

où $c_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(v) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Donc, on doit montrer que :

$$c_{\underline{\lambda}, \underline{\lambda}}(v) = 1.$$

Supposons que la dernière partie du a -graphe de $\underline{\lambda}$ soit donnée par :

$$\underline{\nu} \xrightarrow{i_s} \dots \xrightarrow{i_s} \underline{\lambda}.$$

$\underbrace{(r_1, p_1) \dots (r_{a_s}, p_{a_s})}_{a_s}$

Soit $\underline{\mu}$ une l -partition obtenue en supprimant a_s i_s -boîtes de $\underline{\lambda}$ et avec comme suite de résidus $\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_{s-1}, \dots, i_{s-1}}_{a_{s-1}}$. Supposons que $\underline{\mu} \neq \underline{\nu}$. Alors,

par construction de la a -suite de résidus de $\underline{\lambda}$, les boîtes γ_l associées aux (r_l, p_l) pour $l = 1, \dots, a_s$, sont les plus basses boîtes de $\underline{\lambda}$ (par rapport à l'ordre de FLOTW). Alors, il est clair que :

$$a(\underline{\mu}) < a(\underline{\nu}).$$

Ceci contredit la proposition 2.2.11. Il reste donc à montrer que :

$$\overline{N}_i^b(\underline{\nu}, \underline{\lambda}) = 0.$$

Il n'y a pas de boîte ajoutable à λ sous les γ_l et il n'y a pas de boîte supprimable à $\underline{\nu}$ sous les γ_l . Donc le résultat est clair. \square

Remarque 2.3.4 La proposition ci-dessus montre en particulier le résultat suivant : soit $\underline{\lambda}$ une l -partition de FLOTW de a -graphe :

$$\emptyset \xrightarrow[(j_1, p_1)]{s_1} \underline{\lambda}^{(1)} \xrightarrow[(j_2, p_2)]{s_2} \underline{\lambda}^{(2)} \dots \xrightarrow[(j_n, p_n)]{s_n} \underline{\lambda}^{(n)}.$$

Alors pour tout $p = 0, \dots, n-1$, la boîte $[\underline{\lambda}^{(p+1)} / \underline{\lambda}^{(p)}]$ est une boîte normale pour $\underline{\lambda}^{(p+1)}$. Remarquons néanmoins que ce n'est pas une bonne boîte en général.

On obtient maintenant le résultat suivant.

Corollaire 2.3.5 Pour $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$ tel que $a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = \underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s}$,

on note :

$$A(\underline{\lambda}) := f_{i_s}^{(a_s)} f_{i_{s-1}}^{(a_{s-1})} \dots f_{i_1}^{(a_1)} \emptyset.$$

Alors l'ensemble ci-dessous est une base de $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$ (voir le paragraphe 1.3.D) :

$$\{A(\underline{\mu}) \mid \underline{\mu} \in \Lambda^1\}.$$

Preuve :

D'après la proposition 2.3.3, pour tout $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$ de rang n , il existe des polynômes de Laurent $c_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(v)$ avec $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$ tels que :

$$A(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda} + \sum_{a(\underline{\mu}) > a(\underline{\lambda})} c_{\underline{\lambda}, \underline{\mu}}(v) \underline{\mu}.$$

Les $A(\underline{\lambda})$ sont donc linéairement indépendants dans $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$. De plus, comme les multipartitions de FLOTW indexent le graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$, par un argument de cardinalité, on conclut que les $A(\underline{\lambda})$ forment une base de $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$. \square

En particulier, ce résultat permet de donner une nouvelle caractérisation des multipartitions de FLOTW.

Corollaire 2.3.6 Pour tout $\underline{\lambda} \in \Pi_n^l$, on a $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$ si et seulement si il existe une suite de résidus $\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s}$ de $\underline{\lambda}$ telle que pour tout $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$ différente de $\underline{\lambda}$ possédant cette suite de résidus, on a $a(\underline{\lambda}) < a(\underline{\mu})$.

Preuve :

Le sens direct de l'équivalence est donné par la proposition 2.2.11 (il suffit de considérer comme suite de résidus la a -suite de résidus). Pour la réciproque, soit $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$ et soit $\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s}$ une suite de résidus de $\underline{\mu}$. D'après le corollaire 2.3.5, il existe des polynômes de Laurent $\delta_{\underline{\lambda}}(v)$ avec $\underline{\lambda} \in \Lambda^1$ tels que :

$$f_{i_s}^{(a_s)} f_{i_{s-1}}^{(a_{s-1})} \dots f_{i_1}^{(a_1)} \underline{\emptyset} = \sum_{\underline{\lambda} \in \Lambda^1} \delta_{\underline{\lambda}}(v) A(\underline{\lambda}).$$

Soit $A(\underline{\nu})$ l'élément minimal selon a tel que $\delta_{\underline{\nu}}(v) \neq 0$. Alors, la multipartition minimale selon a qui apparaît dans la décomposition de $f_{i_s}^{(a_s)} f_{i_{s-1}}^{(a_{s-1})} \dots f_{i_1}^{(a_1)} \underline{\emptyset}$ est $\underline{\nu}$ qui est une multipartition de FLOTW. \square

Remarquons que le corollaire ci-dessus est similaire à une conjecture énoncée par Dipper, James et Murphy dans [19]. Dans cet article, il est conjecturé que $\underline{\lambda}$ est une multipartition Kleshchev si et seulement si il existe une suite de résidus $\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s}$ de $\underline{\lambda}$ telle que pour tout $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$ différente de $\underline{\lambda}$ possédant cette suite de résidus, on ne peut pas avoir $\underline{\lambda} \triangleleft \underline{\mu}$ où \triangleleft désigne l'ordre de dominance.

La base construite ci-dessus va maintenant nous permettre de déterminer la forme des éléments de la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$. La preuve de la proposition suivante va aussi nous donner un algorithme, analogue à celui de Lascoux-Leclerc-Thibon, pour le calcul de ces éléments (ce sera le sujet du cinquième chapitre).

Proposition 2.3.7 *Les éléments de la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$ sont de la forme suivante :*

$$\underline{\mu} + \sum_{a(\underline{\lambda}) > a(\underline{\mu})} b_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \underline{\lambda}$$

où $\underline{\mu}$ est une multipartition de FLOTW et où $b_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \in v\mathbb{Z}[v]$ pour tout $\underline{\lambda} \in \Pi_n^l$ tel que $a(\underline{\lambda}) > a(\underline{\mu})$.

Réciproquement, pour toute multipartition $\underline{\mu}$ de FLOTW, il existe un élément de la base canonique de cette forme.

Preuve :

Considérons la base construite lors du corollaire 2.3.5 :

$$\{A(\underline{\mu}) \mid \underline{\mu} \in \Lambda^1\}.$$

Soit $\{G(\underline{\mu}) \mid \underline{\mu} \in \Lambda^1\}$ la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$. D'après la proposition 2.3.5, il existe des polynômes de Laurent $m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v)$ vérifiant :

$$G(\underline{\mu}) = \sum_{\underline{\nu} \in \Lambda^1} m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) A(\underline{\nu}).$$

Considérons l'involution barre de \mathcal{U}_A définie dans le théorème 1.3.10. Comme les opérateurs f_i ($i = 0, \dots, e-1$) sont invariants sous cette involution, les $A(\underline{\mu})$

le sont aussi. Par définition de la base canonique, les $G(\underline{\mu})$ le sont également. Il suit que pour tout $\underline{\nu} \in \Lambda^1$ et $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$, on a :

$$m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) = m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v^{-1}).$$

Soit $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$ et soit $\underline{\alpha}$ une des multipartitions minimales par rapport à la a -valeur vérifiant $m_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v) \neq 0$. Alors, le coefficient de $\underline{\alpha}$ dans $G(\underline{\mu})$ est :

$$b_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v) := \sum_{\underline{\nu} \in \Lambda^1} m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) c_{\underline{\nu}, \underline{\alpha}}(v).$$

On a :

- $m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) = 0$ si $a(\underline{\nu}) < a(\underline{\alpha})$;
- $c_{\underline{\nu}, \underline{\alpha}}(v) = 0$ si $a(\underline{\nu}) > a(\underline{\alpha})$ et si $a(\underline{\nu}) = a(\underline{\alpha})$ et $c_{\underline{\nu}, \underline{\alpha}}(v) \neq 0$ alors $\underline{\nu} = \underline{\alpha}$.

On obtient donc :

$$b_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v) = m_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v) \neq 0.$$

Maintenant, d'après le théorème 1.3.10, on a :

$$G(\underline{\mu}) \equiv \underline{\mu} \pmod{v}.$$

Donc, si $\underline{\mu} \neq \underline{\alpha}$, on a :

$$b_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v) \in v\mathbb{Z}[v].$$

Mais, on a :

$$m_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v) = m_{\underline{\mu}, \underline{\alpha}}(v^{-1}).$$

Alors $\underline{\mu} = \underline{\alpha}$ et $b_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}(v) = 1$. Finalement, on obtient :

$$G(\underline{\mu}) = A(\underline{\mu}) + \sum_{a(\underline{\nu}) > a(\underline{\mu})} m_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) A(\underline{\nu}).$$

Il suffit maintenant d'utiliser la décomposition des $A(\underline{\mu})$ (voir la preuve du corollaire 2.3.5) et on obtient :

$$G(\underline{\mu}) = \underline{\mu} + \sum_{a(\underline{\lambda}) > a(\underline{\mu})} b_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \underline{\lambda},$$

où $b_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \in v\mathbb{Z}[v]$ pour tout $\underline{\lambda} \in \Pi_n^l$ tel que $a(\underline{\lambda}) > a(\underline{\mu})$. □

Nous avons donc la forme explicite des éléments de la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$. En spécialisant ces éléments en $v = 1$, d'après le théorème d'Ariki (voir le théorème 1.3.17), on obtient les classes $[P(M)_K]$ (où M parcourt l'ensemble des $\mathcal{H}_{L,n}$ -modules simples) c'est à dire les colonnes de la matrice de décomposition de $\mathcal{H}_{L,n}$. De plus, considérons un élément $G(\underline{\mu}) = \underline{\mu} + \sum_{a(\underline{\lambda}) > a(\underline{\mu})} b_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \underline{\lambda}$ de la

base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$. On a alors :

$$G(\underline{\mu}) \equiv \underline{\mu} \pmod{v}.$$

Soit maintenant $G'(\underline{\nu})$ l'élément de la base canonique de \mathcal{M} vérifiant :

$$G(\underline{\mu})_{v=1} = G'(\underline{\nu})_{v=1}.$$

2.3. Existence et caractérisation d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike

Alors, on a :

$$G'(\underline{\nu}) \equiv \underline{\nu} \pmod{v},$$

où $\underline{\nu}$ est la multipartition Kleshchev obtenue en suivant une suite d'arêtes de $\underline{\mu}$ à \emptyset dans le graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$ puis en suivant la suite inverse dans le graphe cristallin de \mathcal{M} . On obtient donc, suivant le paragraphe 1.3.D :

$$\underline{\mu} = \kappa(\underline{\nu}).$$

Nous obtenons finalement un résultat analogue au théorème 1.4.4 de Geck-Rouquier pour les algèbres de Ariki-Koike en caractéristique 0 c'est à dire l'existence d'un ensemble basique canonique \mathcal{B} en bijection avec les modules simples de $\mathcal{H}_{L,n}$. De plus, la proposition ci-dessus nous donne la paramétrisation de cet ensemble par les multipartitions de FLOTW.

Nous résumons ces résultats dans le théorème suivant en rappelant les hypothèses.

Théorème 2.3.8 Soit $\mathcal{H}_{L,n}$ l'algèbre de Ariki-Koike sur $L := \mathbb{Q}(\eta_e)$ telle que :

$$\theta(\mathbf{u}) = \eta_e \quad \theta(\mathbf{u}_i) = \eta_e^{v_i} \quad i = 0, \dots, l-1,$$

où $\eta_e = \exp(\frac{2i\pi}{e})$, où $\eta_e = \exp(\frac{2i\pi}{le})$ et où $0 \leq v_0 \leq \dots \leq v_{l-1} < e$. Alors, on a les propriétés suivantes :

(i) Soit $M \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n})$, on pose

$$a_M = \min \{a(\underline{\mu}) \mid \underline{\mu} \in \Pi_n^l, d_{S_R^\mu, M} \neq 0\},$$

alors, il existe un unique $\underline{\mu} \in \Pi_n^l$ tel que $a(\underline{\mu}) = a_M$ et $d_{S_R^\mu, M} \neq 0$, on le note $\underline{\mu}_M$.

(ii) L'application $M \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) \mapsto \underline{\mu}_M \in \Pi_n^l$ est injective. On note alors :

$$\mathcal{B} = \{S_R^{\underline{\mu}_M} \mid M \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n})\}.$$

\mathcal{B} est appelé l'ensemble basique canonique de $\mathcal{H}_{L,n}$ et on obtient une bijection

$$j : \begin{array}{ccc} \text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ M & \longmapsto & S_R^{\underline{\mu}_M}. \end{array}$$

(iii) On a :

$$\mathcal{B} = \{S_R^\lambda \mid \lambda \in \Lambda^1, |\lambda| = n\},$$

où $\Lambda^1 := \Lambda_{\{e, v_0, \dots, v_{l-1}\}}^1$ désigne l'ensemble des multipartitions de FLOTW.

(iv) On a :

$$j : \begin{array}{ccc} \text{Irr}(\mathcal{H}_{L,n}) & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ D^\mu & \longmapsto & S_R^{\kappa(\mu)}. \end{array}$$

où κ est la bijection entre Λ^0 et Λ^1 définie ci-dessus.

Remarque 2.3.9 La définition de la a -valeur pour les $\mathcal{H}_{L,n}$ modules simples ci-dessus est cohérente avec la définition de la a -valeur pour les algèbres de Hecke en terme de bases de Kazhdan-Lusztig (voir le paragraphe 1.4.A).

Remarquons que, comme pour le cas des algèbres de Hecke, ce théorème nous montre que la sous-matrice de la matrice de décompositions D_θ formée sur les lignes de \mathcal{B} est unitriangulaire. On a donc, pour un bon ordre des lignes et colonnes de la matrice selon la a -valeur :

$$D_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ & * & & \end{pmatrix}$$

A partir de la donnée de la matrice de décomposition D_θ , l'ensemble basique canonique peut se déterminer de la manière suivante : on attache à chaque ligne de D_θ sa a -valeur et on réordonne les lignes suivant celle-ci, de la ligne ayant la plus petite a -valeur à la ligne ayant la plus grande. Pour chaque colonne, on considère ensuite le premier coefficient non nul. Le module simple indexant la ligne correspondante appartient alors à l'ensemble basique canonique.

Nous avons donc montré qu'il existe un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike et que cet ensemble est paramétré par les l -partitions de FLOTW. Cet ensemble, étant en bijection avec les modules simples de ces algèbres, est aussi en bijection avec l'ensemble des l -partitions Kleshchev. Malheureusement l'application j du théorème 2.3.8(iv) (voir aussi le paragraphe 1.3.D) semble délicate à déterminer explicitement.

Dans la prochaine partie, nous nous intéressons aux multipartitions Kleshchev. Le but est d'étudier les liens entre ce type de multipartitions et certains objets utilisés dans ce chapitre à savoir la a -fonction et les multipartitions de FLOTW.

2.4 Etude des multipartitions Kleshchev

Dans cette section, nous commençons par donner une interprétation des multipartitions Kleshchev en termes de a -fonctions. Ensuite, nous étudions un cas particulier d'algèbres de Ariki-Koike pour lequel il existe une bijection très simple entre l'ensemble des l -partitions Kleshchev et des l -partitions de FLOTW et donc avec \mathcal{B} .

2.4.A Interprétations des multipartitions Kleshchev à l'aide de la a -fonction

Dans le paragraphe 2.3.A, nous avons considéré une algèbre de Ariki-Koike semi-simple associée à un système de charges particulier $m := (m^{(0)}, \dots, m^{(l-1)})$ qui se spécialisait en une algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{L,n}$ sur $L = \mathbb{Q}(\eta_\epsilon)$ avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{u}_j) &= \eta_\epsilon^{v_j} \text{ pour } j = 0, \dots, l-1, \\ \theta(\mathbf{u}) &= \eta_\epsilon, \end{aligned}$$

2.4. Etude des multipartitions Kleshchev

où les v_i ($i = 0, \dots, l-1$) sont des entiers vérifiant :

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1} < e.$$

Le but de ce paragraphe est d'étudier le même type de situation mais pour un système de charges différents. Pour $j = 0, \dots, l-1$, nous considérons donc le système de charges m tel que :

$$m^{(j)} = v_j - \frac{je}{l} + 2(l-j)(n+1)e.$$

Soit donc y une indéterminée et soit $\mathcal{H}_{R,n}$ l'algèbre de Ariki-Koike sur $R = \mathbb{Q}[\eta](y)$ avec le choix suivant de paramètres :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \eta_l^j y^{lm^{(j)}} \text{ pour } j = 0, \dots, l-1, \\ \mathbf{u} &= y^l. \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'algèbre $\mathcal{H}_{R,n}$ est semi-simple déployée et elle se spécialise en $\mathcal{H}_{L,n}$ lorsque y se spécialise en $\eta_l e$.

Nous nous retrouvons dans la situation du paragraphe 2.1.C : nous pouvons donc définir pour chaque module de Specht $S_R^\lambda \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{R,n})$ une a -valeur suivant la proposition 2.1.2. Afin d'éviter toute confusion avec la a -valeur associée au système de charges de la section précédente, nous la noterons $a_0(\lambda)$. Nous allons maintenant voir que cette a -valeur est "compatible" avec l'ordre de dominance (voir la définition dans le paragraphe 1.3.A).

Lemme 2.4.1 *Soit λ une l -partition et soit $\mathbf{B}[m]' = (B'^{(1)}, \dots, B'^{(l-1)})$ un m -symbole de hauteur h . On suppose $h \leq n$, alors :*

$$i < j \Rightarrow B_k'^{(i)} > B_p'^{(j)} \quad \forall k, p.$$

Preuve :

Il suffit de montrer la propriété pour $j = i+1$. On a :

$$\begin{aligned} B_k'^{(i)} &= \lambda_k^{(i)} + v_i - \frac{ie}{l} + 2(l-i)(n+1)e - k \\ B_p'^{(i+1)} &= \lambda_p^{(i+1)} + v_{i+1} - \frac{ie}{l} + 2(l-i)(n+1)e - 2(n+1)e - \frac{e}{l} - p. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(i)} - k &\geq -h \geq -n, \\ \lambda_p^{(i+1)} - p &\leq n-1. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer :

$$-n + v_i > n-1 + v_{i+1} - \frac{e}{l} - 2(n+1)e.$$

Comme $v_i - v_{i+1} > -e$, le résultat est évident. □

Proposition 2.4.2 *Pour toutes l -partitions λ et μ de rang n , on a :*

$$\lambda \triangleright \mu \Rightarrow a_0(\lambda) < a_0(\mu).$$

Preuve :

Soit $\underline{\nu}$ une l -partition de rang n et soit $\mathbf{B}[m]' = (B'^{(1)}, \dots, B'^{(l-1)})$ un m -symbole de hauteur h tel que $h \leq n$. Considérons la formule de la a -valeur de la proposition 2.1.2. On a :

$$a_0(\underline{\nu}) = f(n, h, m) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in B'^{(i)} \times B'^{(j)} \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} - \sum_{\substack{0 \leq i, j < l \\ a \in B'^{(i)} \\ 1 \leq k \leq a}} \min \{k, m^{(j)}\}.$$

On note $\gamma^\underline{\nu}$ la composition suivante :

$$\gamma^\underline{\nu} = (B_1'^{(1)}, \dots, B_h'^{(1)}, B_1'^{(2)}, \dots, B_h'^{(2)}, \dots, B_1'^{(l-1)}, \dots, B_h'^{(l-1)}).$$

Suivant le lemme précédent, $\gamma^\underline{\nu} = (\gamma_1^\underline{\nu}, \dots, \gamma_{lh}^\underline{\nu})$ est en fait une partition. On a alors :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq j < l \\ (a,b) \in B'^{(i)} \times B'^{(j)} \\ a > b \text{ si } i=j}} \min \{a, b\} = \sum_{i=1}^{lh} (i-1) \gamma_i^\underline{\nu}.$$

Soient maintenant $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ deux l -partitions de rang n tels que $\underline{\lambda} \triangleright \underline{\mu}$. Considérons les m -symboles de $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$, on peut supposer qu'ils ont même hauteur h et que $h \leq n$. Considérons alors les deux partitions $\gamma^\underline{\lambda}$ et $\gamma^\underline{\mu}$. Il est clair que l'on a :

$$\gamma^\underline{\lambda} \triangleright \gamma^\underline{\mu},$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{lh} (i-1) \gamma_i^\underline{\mu} > \sum_{i=1}^{lh} (i-1) \gamma_i^\underline{\lambda}.$$

D'autre part, d'après la démonstration de la proposition précédente, si $\alpha \in B'^{(i)}$ et si $i > j$, on a :

$$\min \{\alpha, m^{(j)}\} = \alpha.$$

Pour $j = 0, \dots, l-1$, on a donc :

$$\min \{k, m^{(j)}\} = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq k \leq \alpha, \alpha \in B'^{(i)}, i > j, \\ k & \text{si } 1 \leq k \leq m^{(j)}, \alpha \in B'^{(i)}, i \leq j, \\ m^{(j)} & \text{si } m^{(j)} < k \leq \alpha, \alpha \in B'^{(i)}, i \leq j. \end{cases}$$

Considérons alors $\mathbf{B}^\underline{\lambda}[m]' := (B'^{\underline{\lambda}(0)}, \dots, B'^{\underline{\lambda}(l-1)})$ et $\mathbf{B}^\underline{\mu}[m]' := (B'^{\underline{\mu}(0)}, \dots, B'^{\underline{\mu}(l-1)})$ les m -symboles de $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$. A $0 \leq j \leq l-1$ fixé, on obtient :

$$\sum_{\substack{0 \leq i < l \\ a \in B'^{\underline{\lambda}(i)} \\ 1 \leq k \leq a}} \min \{k, m^{(j)}\} \geq \sum_{\substack{0 \leq i < l \\ a \in B'^{\underline{\mu}(i)} \\ 1 \leq k \leq a}} \min \{k, m^{(j)}\}.$$

Il suit donc :

$$a_0(\underline{\lambda}) < a_0(\underline{\mu}).$$

□

En utilisant le théorème 1.3.5, le résultat suivant est immédiat :

Théorème 2.4.3 Soit $\mathcal{H}_{L,n}$ l'algèbre de Ariki-Koike de type $G(l, 1, n)$ sur $\mathbb{Q}(\eta_e)$ avec le choix suivant de paramètres :

$$\theta(\mathbf{u}) = \eta_e \quad \text{et} \quad \theta(\mathbf{u}_i) = \eta_e^{v_i} \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, l-1,$$

où $\eta_e := \exp(\frac{2i\pi}{e})$, $\eta_e = \exp(\frac{2i\pi}{le})$ et où $0 \leq v_0 \leq \dots \leq v_{l-1} < e$. Pour $\underline{\mu} \in \Lambda^0$, on note $P^\mu := P(D^\mu)$. Alors, pour tout $\underline{\mu} \in \Lambda^0$, on a :

$$[P_R^\mu] = [S_R^\mu] + \sum_{\substack{\underline{\nu} \in \Pi_n^l \\ a_0(\underline{\nu}) > a_0(\underline{\mu})}} d_{\underline{\nu}, \underline{\mu}} [S_R^\nu].$$

En particulier, on peut, comme dans la section précédente, définir un “ensemble basique canonique” en bijection avec les modules simples de $\mathcal{H}_{L,n}$, cet ensemble étant paramétré par les l -partitions Kleshchev. Dans le prochain paragraphe, nous allons continuer à nous intéresser aux multipartitions Kleshchev en les étudiant dans le cadre d'algèbres de Ariki-Koike particulières.

2.4.B Multipartitions Kleshchev et multipartitions de FLOTW

Soient e, l et n des entiers positifs, on se donne une suite d'entiers positifs :

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{l-1} < e,$$

qui vérifient :

$$\text{pour tout } c \in \{0, \dots, l-2\}, \quad v_{c+1} - v_c \geq n.$$

Notons tout d'abord que cette condition n'implique pas nécessairement que $\mathcal{H}_{L,n}$ est semi-simple. Considérons l'ensemble des l -partitions Kleshchev $\Lambda^0 := \Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^0$ et l'ensemble des l -partitions de FLOTW $\Lambda^1 := \Lambda_{\{e; v_0, \dots, v_{l-1}\}}^1$. Nous allons montrer que l'application suivante induit une bijection entre Λ^0 et Λ^1 .

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n & \rightarrow & \mathcal{F}_n \\ (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)}) & \mapsto & (\lambda^{(l-1)}, \dots, \lambda^{(0)}) \end{array}$$

Pour cela, considérons l'ordre suivant sur l'ensemble des boîtes supprimables et ajoutables d'une l -partition : soient $\gamma = (a, b, c)$ et $\gamma' = (a', b', c')$. Alors, γ est sous γ' si :

$$c > c' \quad \text{ou si} \quad c = c' \quad \text{et} \quad a < a'.$$

Cet ordre sera appelé l'ordre AM'. On obtient ainsi (comme pour l'ordre AM et l'ordre de FLOTW) des notions de boîtes normales et de bonnes boîtes pour cet ordre.

Considérons l'ensemble $f(\Lambda^0)$, grâce la définition des multipartitions Kleshchev, on voit que les l -partitions de $f(\Lambda^0)$ sont obtenues récursivement de la façon suivante :

- $\emptyset \in f(\Lambda^0)$;
- Si $\underline{\lambda}$ est une l -partition de $f(\Lambda^0)$, elle est obtenue en rajoutant une bonne i -boîte à une l -partition de $f(\Lambda^0)$ selon l'ordre AM'.

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)})$ une l -partition de FLOTW de rang n . Supposons que $\gamma = (a, b, c)$ est une i -boîte supprimable de $\underline{\lambda}$ et que $\gamma' := (a', b', c')$ est une i -boîte ajoutable sous γ par rapport à l'ordre de FLOTW. Soit $\underline{\mu} := (\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(l-1)})$ la l -partition obtenue en ajoutant γ' à $\underline{\lambda}$.

- Si $\mu_a^{(c)} - a + v_c < \mu_{a'}^{(c')} - a' + v_{c'}$. Supposons que $c > c'$. On a $v_c - v_{c'} \geq n$ donc :

$$\mu_a^{(c)} - a - (\mu_{a'}^{(c')} - a') < -n.$$

Mais on a aussi :

$$\mu_a^{(c)} - a \geq 1 - |\mu^{(c)}| \text{ et } \mu_{a'}^{(c')} - a' \leq |\mu^{(c')}| - 1,$$

alors :

$$\mu_a^{(c)} - a - (\mu_{a'}^{(c')} - a') \geq 1 - n.$$

On obtient une contradiction. Donc, on a $c \leq c'$ et si $c = c'$, on a $a' < a$. Alors $\gamma' = (a', b', c')$ est sous γ par rapport à l'ordre AM'.

- Si $\mu_a^{(c)} - a + v_c = \mu_{a'}^{(c')} - a' + v_{c'}$ alors $c > c'$. Donc, on obtient $v_c - v_{c'} \geq n$. En utilisant les inégalités ci-dessus, on obtient une contradiction. Donc ce cas est impossible.

Donc γ' est une i -boîte ajoutable sous γ par rapport à l'ordre AM'.

Réciproquement, on suppose maintenant que γ' est une boîte ajoutable sous γ par rapport à l'ordre AM'.

- Si $c < c'$ alors $v_{c'} - v_c \geq n$. Donc, on a :

$$\mu_a^{(c)} - a - (\mu_{a'}^{(c')} - a') \leq n - 1 < v_{c'} - v_c.$$

Donc γ' est sous γ par rapport à l'ordre de FLOTW.

- Si $c = c'$ et $a > a'$ alors, on a :

$$\mu_a^{(c)} - a < \mu_{a'}^{(c')} - a'.$$

Donc γ' est sous γ par rapport à l'ordre de FLOTW.

Supposons maintenant que γ est une bonne i -boîte par rapport à l'ordre de FLOTW. Soit γ' une i -boîte ajoutable sous γ par rapport à l'ordre AM'. Alors, en utilisant le résultat ci-dessus, γ' est sous γ par rapport à l'ordre de FLOTW. Soit η une i -boîte ajoutable entre γ' et γ par rapport à l'ordre AM'. Alors, η est sous γ par rapport à l'ordre de FLOTW. En utilisant une démonstration similaire à celle ci-dessus, on voit que η est au-dessus de γ' par rapport à l'ordre de FLOTW. Réciproquement, si η est une i -boîte ajoutable entre γ' et γ par rapport à l'ordre de FLOTW, il est facile de voir que η est une i -boîte ajoutable entre γ' et γ par rapport à l'ordre AM'.

Une démonstration analogue s'effectue lorsque η est une i -boîte supprimable. Ceci implique que γ est une bonne i -boîte par rapport à l'ordre de AM'.

Ainsi, on a $\Lambda^1 \subset f(\Lambda^0)$ et comme $|\Lambda^1| = |f(\Lambda^0)|$, il suit $\Lambda^1 = f(\Lambda^0)$. On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 2.4.4 *Supposons que pour tout $c \in \{0, \dots, l-2\}$, on a :*

$$v_{c+1} - v_c \geq n.$$

Alors, l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \Lambda^0 & \rightarrow & \Lambda^1 \\ (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-1)}) & \mapsto & (\lambda^{(l-1)}, \dots, \lambda^{(0)}) \end{array}$$

est une bijection.

On peut aisément vérifier que ce résultat n'est pas valable dans le cas général (voir les exemples du paragraphe 1.3.D).

Finalement, dans ce chapitre, nous avons obtenu l'existence d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike en caractéristique 0 comme pour les algèbres de Hecke de groupe de Weyl fini. De plus, le théorème 2.3.8(iii) nous donne une caractérisation explicite de cet ensemble. Dans le prochain chapitre, nous allons utiliser ces résultats pour déterminer une caractérisation de l'ensemble basique canonique pour les algèbres de Hecke de groupes de Weyl fini.

CHAPITRE 2 : ENSEMBLE BASIQUE CANONIQUE POUR LES ALGEBRES DE
ARIKI-KOIKE

Chapitre 3

L'ensemble basique canonique pour les algèbres de Hecke

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux algèbres de Hecke à un paramètre de groupe de Weyl fini. Nous avons vu dans le premier chapitre une première méthode pour obtenir les modules simples de ces algèbres dans le cas modulaire. Elle consiste à quotienter les modules de Specht par un sous-module obtenu à l'aide d'une forme bilinéaire. Grâce à cette méthode, les modules simples ont été déterminés pour les types A_{n-1} et B_n . Récemment, Hu (dans [42]) a résolu le problème pour le type D_n à partir des résultats d'Ariki. Pour ce type et pour le type B_n , la paramétrisation des modules simples est obtenue à partir des multipartitions Kleshchev et est donc récursive.

Une deuxième méthode pour la détermination des modules simples, énoncée également dans le premier chapitre, consiste à utiliser la a -fonction de Lusztig pour déterminer un "ensemble basique canonique" en bijection avec les modules simples de l'algèbre de Hecke non semi-simple. La détermination de cet ensemble a été obtenue par Geck pour le type A_{n-1} dans [27] en utilisant certains résultats de Dipper et James. Pour ce type, on obtient une paramétrisation identique à celle obtenue par la première méthode. Il reste à déterminer l'ensemble basique canonique pour les types B_n et D_n . C'est le but de ce chapitre. Pour cela, nous utiliserons les résultats prouvés dans le chapitre précédent et en particulier la caractérisation de l'ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike. Nous obtenons également cet ensemble pour le type A_{n-1} grâce à cette méthode.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Le but de la première section est de restreindre le problème à celui de déterminer \mathcal{B} en caractéristique 0. Nous pourrons ensuite utiliser les résultats donnés dans le chapitre précédent afin de déterminer l'ensemble basique canonique pour tous les groupes de Weyl en caractéristique 0 ou p avec p "bon" nombre premier pour W . Dans la deuxième partie, nous déterminerons les ensembles basiques canoniques pour les groupes de Weyl classiques : les types A_{n-1} , B_n et D_n . Pour ces deux derniers types, nous distinguerons les cas où le paramètre est une racine de l'unité d'ordre pair ou impair. Dans la deuxième section, nous étudierons les types exceptionnels.

En utilisant les matrices de décomposition déterminées en caractéristique 0 par Müller (voir [63] et [64]), Geck (voir [23] et [24]) et Geck-Lux (voir [32]), nous donnerons ainsi l'ensemble basique canonique pour ces types.

3.1 Le problème de la caractéristique positive

Dans cette section, nous commençons par citer un résultat général concernant la détermination de l'application de décomposition pour les algèbres de Hecke lorsque le paramètre se spécialise dans un corps de caractéristique $p > 0$. Ce résultat montre que la matrice de décomposition peut être obtenue en deux étapes : tout d'abord en spécialisant dans un corps de caractéristique 0 puis en passant de la caractéristique 0 à la caractéristique p . Ensuite, nous montrons, grâce à ce résultat, que pour déterminer l'ensemble basique canonique pour une algèbre de Hecke d'un groupe de Weyl fini en "bonne" caractéristique, il suffit de déterminer cet ensemble en caractéristique 0.

Dans cette section, H désigne l'algèbre de Hecke d'un groupe de Weyl fini W sur $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. On pose $u = v^2$ et on note K le corps des fractions de A . Alors, A est intégralement clos dans K .

3.1.A Factorisation de l'application de décomposition

Nous suivons ici les articles de Geck [26] et [29]. Soit $\theta_p : A \rightarrow L$ un homomorphisme d'anneau dans L , corps des fractions de $\theta_p(A)$. On suppose que L est de caractéristique $p > 0$ où p est un "bon" nombre premier pour W (voir le paragraphe 1.2.A). On note :

$$e := \min \{i \geq 2 \mid 1 + \theta_p(u) + \theta_p(u)^2 + \dots + \theta_p(u)^{i-1}\}.$$

En suivant la section 1.2, comme H_L est déployée, on obtient une application de décomposition bien définie :

$$d_{\theta_p} : R_0(H_K) \mapsto R_0(H_L)$$

Soit $\mathfrak{p} := \text{Ker}(\theta_p)$. Supposons $e \in \mathbb{N}$ (si $e = \infty$, d_{θ_p} est l'application triviale) et considérons le $e^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique $\Phi_e(u) \in \mathbb{Z}[u]$. Il est clair que $\Phi_e(u) \in \mathfrak{p}$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_e(u) &= \Phi_{2e}(v) && \text{si } e \text{ est pair,} \\ \Phi_e(u) &= \Phi_e(v)\Phi_{2e}(v) && \text{si } e \text{ est impair.} \end{aligned}$$

En choisissant une racine de $\theta_p(u)$ appropriée dans L , on peut donc supposer que $\Phi_{2e}(v) \in \mathfrak{p}$. Soit alors $\mathfrak{q} \subset A$ l'idéal premier engendré par $\Phi_{2e}(v)$. On a $A/\mathfrak{q} \simeq \mathbb{Z}[\eta_{2e}]$ où η_{2e} désigne une racine primitive de l'unité d'ordre $2e$. A/\mathfrak{q} est intégralement clos dans son corps des fractions $R := \mathbb{Q}[\eta_{2e}]$ (voir [14, proposition 4.5]). On obtient un homomorphisme $\theta : A \mapsto A/\mathfrak{q}$. Comme R est le corps des fractions de $\theta(A)$ et comme H_R est déployée, on obtient une application de décomposition bien définie :

$$d_{\theta} : R_0(H_K) \mapsto R_0(H_R).$$

3.1. Le problème de la caractéristique positive

De même, l'application canonique $\pi : A/\mathfrak{q} \mapsto A/\mathfrak{p}$ induit une application de décomposition :

$$d_\theta^p : R_0(H_R) \mapsto R_0(H_L).$$

On obtient alors la proposition suivante.

Proposition 3.1.1 (*Factorisation de l'application de décomposition, Geck [26], Geck-Rouquier [34]*) Avec les hypothèses de cette section, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} R_0(H_K) & \xrightarrow{d_{\theta_p}} & R_0(H_L) \\ & \searrow d_\theta & \nearrow d_\theta^p \\ & R_0(H_R) & \end{array}$$

Soit D_θ et D_{θ_p} les matrices de décompositions associées à, respectivement, d_θ et d_{θ_p} , alors, le théorème ci-dessus implique qu'il existe une matrice D' de taille $r \times s$ où $r = |\text{Irr}(H_R)|$ et $s = |\text{Irr}(H_L)|$ tel que :

$$D_{\theta_p} = D_\theta D'.$$

D' est appelée la matrice d'ajustement (voir [46] où cette matrice est introduite dans le cas des groupes de Weyl de type A_{n-1})

3.1.B Restriction du problème à la caractéristique 0

Reprenons les mêmes notations que lors du paragraphe précédent. Considérons tout d'abord l'algèbre H_L et l'application de décomposition associée d_{θ_p} où on rappelle que L est un corps de caractéristique p , "bon" nombre premier pour W . D'après le théorème 1.4.4, il existe un ensemble basique canonique $\mathcal{B}^p \subset \text{Irr}(H_K)$ en bijection avec $\text{Irr}(H_L)$.

De même, si on considère l'algèbre H_R et l'application de décomposition d_θ , on obtient l'existence d'un ensemble basique canonique $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$ en bijection avec $\text{Irr}(H_R)$.

Nous avons maintenant le théorème suivant.

Théorème 3.1.2 (*Geck-Rouquier, [34, théorème 3.3]*) On rappelle que la caractéristique de L est "bonne", alors, avec les notations de cette section, on a :

$$|\text{Irr}(H_L)| = |\text{Irr}(H_R)|.$$

En particulier, on a :

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}^p|.$$

Remarquons qu'un raffinement de ce résultat à été prouvé par Geck dans [29] sous l'hypothèse, plus forte, que $\text{car}(L) := p$ ne divise pas $|W|$ en utilisant [8], [34] et des calculs explicites en GAP.

Le théorème suivant montre que \mathcal{B}^p se déduit à partir de la donnée de \mathcal{B} .

Théorème 3.1.3 *Rappelons que la caractéristique de L est bonne, alors, avec les hypothèses de cette section, on a :*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^p.$$

Preuve :

Nous commençons par ordonner les lignes des matrices de décomposition correspondantes aux H_K -modules simples V_1, V_2, \dots, V_m telles que :

$$a_{V_1} \leq a_{V_2} \leq \dots \leq a_{V_m}.$$

On suppose que l'on a :

$$\mathcal{B} = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}.$$

alors, pour un “bon” ordre des colonnes, D_θ a la forme suivante :

$$D_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ & * & & \end{pmatrix}$$

Soit $D_\theta = (d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}}$ et soit $D' = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$. Pour $1 \leq i \leq m$, on note $v_i := (d_{i,j})_{1 \leq j \leq r}$ et pour $1 \leq j \leq r$, on note $u_j := (a_{t,j})_{1 \leq t \leq r}$. Supposons qu'il existe $1 \leq j \leq r$ tel que l'on ait pour tout $1 \leq i \leq m$:

$$v_i \cdot u_j = 0$$

L'ensemble $\{v_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ forme une base de \mathbb{R}^r . On obtient alors pour tout $1 \leq i \leq m$:

$$v_i \cdot u_j = 0.$$

Il existe alors une colonne nulle dans D_{θ_p} ce qui est absurde. Il suit que pour tout $1 \leq j \leq r$, on a $V_j \in \mathcal{B}^p$. Comme $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}^p|$, il suit :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^p.$$

□

On conclut donc que pour déterminer l'ensemble basique canonique associé à un groupe de Weyl et à une spécialisation en caractéristique $p > 0$ où p est un bon “nombre” premier pour W , il suffit de déterminer cet ensemble en caractéristique 0.

3.2 L'ensemble basique canonique pour les groupes de Weyl classique

Dans cette section, nous considérons les groupes de Weyl de type A_{n-1} , B_n et D_n . Pour ces 2 premiers types, les algèbres de Hecke associées sont des

3.2. L'ensemble basique canonique pour les groupes de Weyl classique

cas particuliers d'algèbres de Ariki-Koike. Nous allons donc pouvoir utiliser les résultats du chapitre précédent afin de déterminer les ensembles basiques canoniques.

La détermination de l'ensemble basique canonique pour le type D_n s'obtient grâce à la caractérisation de cet ensemble pour une algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux puis en utilisant les résultats de Geck énoncés dans le paragraphe 1.4.C.

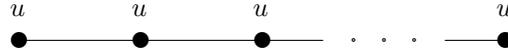
Dans tout cette section, on note, comme dans le premier chapitre, $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ où v est une indéterminée, $u = v^2$, K le corps des fractions de A et $\theta : A \rightarrow L$ une spécialisation sur un corps L (voir le paragraphe 1.1.A) telle que la caractéristique de L est nulle ou un bon nombre premier pour W et telle que $\theta(u) = q$. On note :

$$e := \min\{i \geq 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0\}$$

Soit H l'algèbre de Hecke du groupe de Weyl W sur A et H_K, H_L , les algèbres de Hecke associées sur, respectivement, K et L .

3.2.A Le type A_{n-1}

Soit W groupe de Weyl de type A_{n-1} et soit H l'algèbre de Hecke de W avec diagramme suivant.



Selon les notations de la section 1.3, cette algèbre est une algèbre de Ariki-Koike sur A à paramètre u avec $l = 1$ et $u_0 = 1$.

On veut déterminer l'ensemble $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$. Par le théorème 1.4.4, on a $S_K^\lambda \in \mathcal{B}$ pour $\lambda \in \Pi_n^1$ si et seulement si il existe un $H_{\mathcal{O}}$ -module projectif indécomposable $P^\mu := P(D^\mu)$ tel que :

$$[P_K^\mu] = [S_K^\lambda] + \sum_{a(\nu) > a(\mu)} d_{\nu, \mu} [S_K^\nu].$$

Pour tout $\nu \in \Pi_n^1$, $a(\nu)$ désigne la a -valeur du module S_K^ν . La forme de cette valeur a a été déterminée par Steinberg. On a pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Pi_n^1$:

$$a(\lambda) = \sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i.$$

Cette formule se retrouve aisément à partir de la proposition 2.1.2 avec le choix de paramètres adéquate.

On obtient maintenant le théorème suivant qui donne une caractérisation de l'ensemble basique canonique pour le type A_{n-1} . Ce résultat a été obtenu par Geck dans [27] en utilisant des résultats de Dipper et James et notamment la "compatibilité" entre l'ordre de dominance et l'ordre induit par la a -fonction. On retrouvera ceci pour le type B_n . Nous donnons ici une démonstration différente en utilisant les résultats du chapitre 3.

Théorème 3.2.1 (Geck, Dipper-James) *Supposons que W est de type A_{n-1} . Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B} = \{S_K^\lambda \mid \lambda \text{ partition } e\text{-régulière, } |\lambda| = n\}.$$

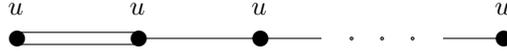
Preuve :

On utilise le théorème 2.3.8 pour le choix de paramètres ci-dessus. On obtient la caractérisation de l'ensemble basique canonique en caractéristique 0. Le résultat en caractéristique positive s'obtient ensuite par le théorème 3.1.3. \square

On passe maintenant à la détermination de l'ensemble basique canonique pour le type B_n .

3.2.B Le type B_n

Soit W groupe de Weyl de type B_n et soit H l'algèbre de Hecke de W avec diagramme suivant.



On veut déterminer l'ensemble $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$. Soit (λ, μ) une bipartition de rang n telle que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ (quitte à ajouter des parts nulles à une partition, on peut supposer que λ et μ ont même hauteur r). La a -valeur du module de Specht $S_K^{(\lambda, \mu)}$ est alors donnée par la formule suivante.

$$a(\lambda, \mu) := a(S_K^{(\lambda, \mu)}) = -\frac{1}{6}r(r-1)(4r+5) + \sum_{i=1}^r (i-1)(\lambda_i + \mu_i + 1) + \sum_{i,j=1}^r \min\{\lambda_i + 1 + r - i, \mu_j + r - j\}.$$

Nous allons maintenant distinguer 2 cas.

a- On suppose que e est impair. Dans ce cas, nous allons appliquer les résultats de Dipper et James. D'après le théorème 1.2.4, on a :

$$\text{Irr}(H_L) = \{D^{(\lambda, \mu)} \mid \lambda \text{ et } \mu \text{ partitions } e\text{-régulières, } |\lambda| + |\mu| = n\}.$$

Pour $\underline{\lambda}$ une 2-partition e -régulière et $\underline{\mu} \in \Pi_n^2$, nous notons $d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}$ le nombre de décomposition correspondant. Alors, dans ce cas, Dipper et James ont montré que les nombres de décompositions de H sont entièrement déterminés par la donnée des nombres de décompositions pour une algèbre de Hecke de type A_{n-1} .

Pour $0 < m \leq n$, on note $H(\mathfrak{S}_m)$ l'algèbre de Hecke générique de type A_{m-1} . L'application θ détermine une application de décomposition entre les groupes de Grothendieck des algèbres de Hecke $H_K(\mathfrak{S}_m)$ et $H_L(\mathfrak{S}_m)$. Pour λ une partition e -régulière de rang m et μ une partition de rang m , on note $d_{\mu, \lambda}$ le nombre de décomposition correspondant.

Alors, si $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ est une 2-partition e -régulière et si $\underline{\mu} = (\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ est une 2-partition de même rang, on a, suivant [17, théorème 5.8] :

$$d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}} = \begin{cases} d_{\mu^{(0)}, \lambda^{(0)}} d_{\mu^{(1)}, \lambda^{(1)}} & \text{si } |\mu^{(0)}| = |\lambda^{(0)}| \text{ et } |\mu^{(1)}| = |\lambda^{(1)}|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2. L'ensemble basique canonique pour les groupes de Weyl classique

Supposons maintenant que $d_{\mu^{(0)}, \lambda^{(0)}} \neq 0$ et $d_{\mu^{(1)}, \lambda^{(1)}} \neq 0$. Alors, en suivant [62, théorème 3.43] (résultat de Dipper et James), on a

$$\mu^{(0)} \trianglelefteq \lambda^{(0)} \quad \text{et} \quad \mu^{(1)} \trianglelefteq \lambda^{(1)}.$$

De plus $d_{\lambda^{(0)}, \lambda^{(0)}} = d_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(1)}} = 1$. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 (Geck [28]) *Supposons que W est de type B_n et que e est impair. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B} = \{S_K^{(\lambda, \mu)} \mid \lambda \text{ et } \mu \text{ partitions } e\text{-régulières, } |\lambda| + |\mu| = n\}.$$

Preuve :

Soit $\underline{\mu} = (\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ une 2-partition e -régulière de rang n . Grâce aux résultats énoncés ci-dessus, la couverture projective $P^{\underline{\mu}}$ de $D^{\underline{\mu}}$ vérifie la propriété suivante :

$$[P_K^{\underline{\mu}}] = [S_K^{\underline{\mu}}] + \sum_{\substack{\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \\ \lambda^{(0)} \trianglelefteq \mu^{(0)} \\ \lambda^{(1)} \trianglelefteq \mu^{(1)}}} d_{\lambda, \underline{\mu}} [S_K^{\lambda}].$$

En utilisant la formule de la a -fonction ci-dessus, il suit :

$$\lambda^{(0)} \trianglelefteq \mu^{(0)} \text{ et } \lambda^{(1)} \trianglelefteq \mu^{(1)} \Rightarrow a(\underline{\lambda}) \geq a(\underline{\mu}).$$

On obtient alors :

$$[P_K^{\underline{\mu}}] = [S_K^{\underline{\mu}}] + \sum_{a(\underline{\lambda}) \geq a(\underline{\mu})} d_{\lambda, \underline{\mu}} [S_K^{\lambda}],$$

d'où le résultat en caractéristique 0 en utilisant la caractérisation de \mathcal{B} du théorème 1.4.4. L'expression de \mathcal{B} lorsque L est de caractéristique p avec p "bon" nombre premier pour W s'obtient grâce au théorème 3.1.3.

b- Supposons maintenant que e est pair. Nous allons utiliser les résultats du chapitre précédent.

On fixe $l = 2$, $v_0 := 1$ et $v_1 := \frac{e}{2}$ et on considère le système de charges associé $m := (m^{(0)}, m^{(1)})$ comme dans le paragraphe 2.3.A. On a :

$$m^{(0)} = 1 \quad \text{et} \quad m^{(1)} = 0.$$

Alors, l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{K,n}$ associée sur $K := \mathbb{Q}(v)$ a les paramètres suivants :

$$\mathbf{u}_0 = u,$$

$$\mathbf{u}_1 = -1,$$

$$\mathbf{u} = u.$$

On obtient l'algèbre de Hecke H_K de type B_n . Si on spécialise l'indéterminée u en η_e , racine de l'unité d'ordre e , on obtient l'algèbre H_L . Il suit le théorème suivant :

Théorème 3.2.3 *Supposons que W est de type B_n et que e est pair. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B} = \{S_K^{(\lambda, \mu)} \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e; 1, \frac{e}{2}\}}^1\}.$$

De plus, $(\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e; 1, \frac{e}{2}\}}^1$ si et seulement si on a la propriété suivante.

– Pour tout $i = 1, 2, \dots$, on a :

$$\lambda_i \geq \mu_{i-1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

et

$$\mu_i \geq \lambda_{i+1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

– Pour tout $k > 0$, l'ensemble des résidus associé aux boîtes de la forme (a, k, c) tel que $\lambda_a^{(c)} = k$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, e-1\}$.

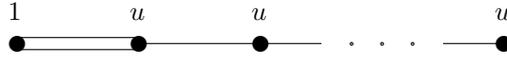
Preuve :

On utilise le théorème 2.3.8 pour le choix de paramètres ci-dessus. On obtient la caractérisation de l'ensemble basique canonique en caractéristique 0. Le résultat en caractéristique positive s'obtient ensuite par le théorème 3.1.3. □

Nous avons donc caractérisé l'ensemble basique canonique lorsque W est un groupe de Weyl de type B_n . Pour déterminer cet ensemble pour $W = D_n$, nous allons nous intéresser à une algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux dont nous allons déterminer l'ensemble basique canonique. Les preuves seront ici très similaires aux preuves de ce paragraphe.

3.2.C Le type B_n à paramètres inégaux

Soit W groupe de Weyl de type B_n et soit H l'algèbre de Hecke de W avec diagramme suivant.



On veut déterminer l'ensemble $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$. Soit (λ, μ) une bipartition de rang n telle que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$. La a -valeur du module de Specht $S_K^{(\lambda, \mu)}$ est alors donnée par la formule suivante.

$$a(\lambda, \mu) := a(S_K^{(\lambda, \mu)}) = -\frac{1}{6}r(r-1)(2r-1) + \sum_{i=1}^r (i-1)(\lambda_i + \mu_i) + \sum_{i,j=1}^r \min\{\lambda_i + r - i, \mu_j + r - j\}.$$

Nous allons maintenant distinguer 2 cas.

a- On suppose que e est impair. Dans ce cas, nous allons appliquer les résultats de Dipper et James comme dans le paragraphe précédent. On a :

$$\text{Irr}(H_L) = \{D^{(\lambda, \mu)} \mid \lambda \text{ et } \mu \text{ partitions } e\text{-régulières, } |\lambda| + |\mu| = n\}.$$

En gardant les notations ci-dessus, si $\underline{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ est une 2-partition e -régulière et si $\underline{\mu} = (\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ est une 2-partition de même rang, on a :

$$d_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}} = \begin{cases} d_{\mu^{(0)}, \lambda^{(0)}} d_{\mu^{(1)}, \lambda^{(1)}} & \text{si } |\mu^{(0)}| = |\lambda^{(0)}| \text{ et } |\mu^{(1)}| = |\lambda^{(1)}|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2. L'ensemble basique canonique pour les groupes de Weyl classique

Supposons maintenant que $d_{\mu^{(0)}, \lambda^{(0)}} \neq 0$ et $d_{\mu^{(1)}, \lambda^{(1)}} \neq 0$ alors on a :

$$\mu^{(0)} \leq \lambda^{(0)} \quad \text{et} \quad \mu^{(1)} \leq \lambda^{(1)}.$$

De plus $d_{\lambda^{(0)}, \lambda^{(0)}} = d_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(1)}} = 1$. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 3.2.4 *Supposons que W est de type B_n et que e est impair. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B} = \{S_K^{(\lambda, \mu)} \mid \lambda \text{ et } \mu \text{ partitions } e\text{-régulières} \mid |\lambda| + |\mu| = n\}.$$

Preuve :

Soit $\underline{\mu} = (\mu^{(0)}, \mu^{(1)})$ une 2-partition e -régulière de rang n . Grâce aux résultats énoncés ci-dessus, la couverture projective de $D^{\underline{\mu}}$ vérifie la propriété suivante :

$$[P_K^{\underline{\mu}}] = [S_K^{\underline{\mu}}] + \sum_{\substack{\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \\ \lambda^{(0)} \leq \mu^{(0)} \\ \lambda^{(1)} \leq \mu^{(1)}}} d_{\lambda, \underline{\mu}} [S_K^{\lambda}].$$

On a :

$$\lambda^{(0)} \leq \mu^{(0)} \text{ et } \lambda^{(1)} \leq \mu^{(1)} \Rightarrow a(\lambda) \geq a(\underline{\mu}).$$

On obtient alors :

$$[P_K^{\underline{\mu}}] = [S_K^{\underline{\mu}}] + \sum_{a(\lambda) \geq a(\underline{\mu})} d_{\lambda, \underline{\mu}} [S_K^{\lambda}].$$

D'où le résultat en caractéristique 0 en utilisant la caractérisation de \mathcal{B} du théorème 1.4.4. L'expression de \mathcal{B} lorsque L est de caractéristique p avec p "bon" nombre premier pour W s'obtient grâce au théorème 3.1.3. □

b- Supposons maintenant que e est pair. Nous allons utiliser les résultats du chapitre précédent.

On fixe $l = 2$, $v_0 := 0$ et $v_1 := \frac{e}{2}$ et on considère le système de charges associé $m := (m^{(0)}, m^{(1)})$ comme dans le paragraphe 2.2.A. On a :

$$m^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad m^{(1)} = 0.$$

Alors, l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{K,n}$ associée sur K a les paramètres suivants :

$$\mathbf{u}_0 = 1,$$

$$\mathbf{u}_1 = -1,$$

$$\mathbf{u} = u.$$

On obtient l'algèbre de Hecke H_K de type B_n à paramètres inégaux. Si on spécialise l'indéterminée u en η_e , racine de l'unité d'ordre e , on obtient l'algèbre H_L . Il suit le théorème suivant :

Théorème 3.2.5 *Supposons que W est de type B_n et que e est pair. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B} = \{S_K^{(\lambda, \mu)} \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e, 0, \frac{e}{2}\}}^1\}.$$

De plus, $(\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e, 0, \frac{e}{2}\}}^1$ si et seulement si on a la propriété suivante.

– Pour tout $i = 1, 2, \dots$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq \mu_{i+\frac{\varepsilon}{2}} \\ \text{et} \quad \mu_i &\geq \lambda_{i+\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

– Pour tout $k > 0$, l'ensemble des résidus associé aux boîtes de la forme (a, k, c) tel que $\lambda_a^{(c)} = k$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, e-1\}$.

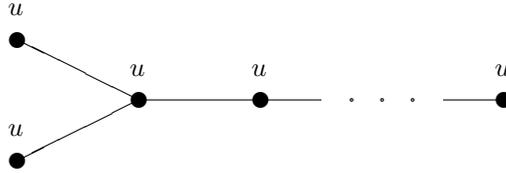
Preuve :

On utilise le théorème 2.3.8 pour le choix de paramètres ci-dessus. On obtient la caractérisation de l'ensemble basique canonique en caractéristique 0. Le résultat en caractéristique positive s'obtient ensuite par le théorème 3.1.3. \square

Nous allons maintenant pouvoir en déduire l'ensemble basique canonique pour le type D_n .

3.2.D Le type D_n

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les résultats de Geck du paragraphe 1.4.C. Soit W' groupe de Weyl de type D_n et soit H' l'algèbre de Hecke de W' avec diagramme suivant.



On veut déterminer l'ensemble basique canonique $\mathcal{B}' \subset \text{Irr}(H'_K)$. Nous avons vu dans la paragraphe 1.4.C (voir l'exemple) que la donnée de l'ensemble basique canonique \mathcal{B} pour l'algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux H du paragraphe précédent induit la caractérisation de \mathcal{B}' de la manière suivante.

$$S_K^{(\lambda, \mu)} \in \mathcal{B} \iff \begin{cases} V^{[\lambda, \mu]} = V^{[\mu, \lambda]} \in \mathcal{B}' & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ V^{[\lambda, +]} \in \mathcal{B}' \text{ et } V^{[\lambda, -]} \in \mathcal{B}' & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Où (λ, μ) est une bipartition de rang n et $S_K^{(\lambda, \mu)} \in \text{Irr}(H_K)$.

De plus, la a -valeur d'un H'_K -module simple est obtenue en utilisant la proposition 1.4.9 et la donnée des a -valeurs pour H_K . Plus précisément, en utilisant les notations du paragraphe 1.2.B, pour (λ, μ) une bipartition de rang n , on a :

$$a(V^{[\lambda, +]}) = a(V^{[\lambda, -]}) = a(S_K^{(\lambda, \lambda)}) \text{ si } \lambda = \mu,$$

$$a(V^{[\lambda, \mu]}) = a(V^{[\mu, \lambda]}) = a(S_K^{(\lambda, \mu)}) \text{ si } \lambda \neq \mu.$$

Il suit donc les théorèmes suivants :

Théorème 3.2.6 *Supposons que W' est de type D_n et que e est impair. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B}' = \left\{ V^{[\lambda, \mu]} \mid \lambda \neq \mu, \lambda \text{ et } \mu \text{ partitions } e - \text{régulières, } |\lambda| + |\mu| = n \right\}$$

3.3. Ensemble basique canonique pour les types exceptionnels

$$\bigcup \left\{ V^{[\lambda, \pm]} \mid \lambda \text{ partition } e\text{-régulière}, 2|\lambda| = n \right\}.$$

Pour le cas e pair, si $(\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e;0,\frac{e}{2}\}}^1$ avec $\lambda = \mu$, alors, par la condition 2, λ doit être $\frac{e}{2}$ -régulière. Réciproquement toute bipartition (λ, λ) avec λ $\frac{e}{2}$ -régulière est une bipartition de $\Lambda_{\{e;0,\frac{e}{2}\}}^1$. On en déduit :

Théorème 3.2.7 *Supposons que W' est de type D_n et que e est pair. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{B}' = \left\{ V^{[\lambda, \mu]} \mid \lambda \neq \mu, (\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e;0,\frac{e}{2}\}}^1, |\lambda| + |\mu| = n \right\}$$

$$\bigcup \left\{ V^{[\lambda, \pm]} \mid \lambda \text{ partition } \frac{e}{2}\text{-régulière}, 2|\lambda| = n \right\}.$$

De plus, $(\lambda, \mu) \in \Lambda_{\{e;0,\frac{e}{2}\}}^1$ si et seulement si :

– Pour tout $i = 1, 2, \dots$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq \mu_{i+\frac{e}{2}} \\ \text{et} \quad \mu_i &\geq \lambda_{i+\frac{e}{2}}. \end{aligned}$$

– Pour tout $k > 0$, l'ensemble des résidus associé aux boîtes de la forme (a, k, c) tel que $\lambda_a^{(c)} = k$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, e-1\}$.

Nous obtenons donc les caractérisations des ensembles basiques canoniques pour tous les groupes de Weyl classiques. Remarquons en particulier que pour le type B_n et D_n , on obtient une paramétrisation non récursive des modules simples contrairement à la paramétrisation de Ariki pour le type B_n et Hu pour le type D_n (cette dernière paramétrisation sera évoquée lors du chapitre suivant). Nous allons maintenant passer à la détermination des ensembles basiques canoniques pour tous les groupes de Weyl de type exceptionnel.

3.3 Ensemble basique canonique pour les types exceptionnels

Dans cette partie, nous considérons les groupes de Weyl de type G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8 . Le but est de déterminer l'ensemble basique canonique des algèbres de Hecke associées. Nous gardons ici les notations de la section précédente.

3.3.A Notations et remarques préliminaires

Pour les algèbres de Hecke de groupes de Weyl de type A_{n-1}, B_n et D_n , nous avons vu que les matrices de décomposition sont non triviales lorsque le paramètre u se spécialisait en une racine de l'unité (c'est à dire lorsque l'algèbre de Hecke spécialisée est non semi-simple). Pour les algèbres de Hecke de groupe de Weyl W de type exceptionnel, les cas non triviaux sont aussi lorsque le paramètre u se spécialise en une racine de l'unité. Plus précisément :

On considère le polynôme de Poincaré de H défini par $P_W := \sum_{w \in W} u^{l(w)}$ où l désigne la fonction longueur usuelle sur W . Pour $d \in \mathbb{N}$, on note Φ_d le d ème polynôme cyclotomique.

Alors, l'algèbre H_L est non semi-simple si et seulement si le paramètre u se spécialise en une racine primitive de l'unité d'ordre e et si Φ_e divise P_W (voir [23])¹.

Le tableau suivant nous donne les polynômes cyclotomiques qui apparaîtront par la suite.

$\Phi_1(u)$	$u - 1$
$\Phi_2(u)$	$u + 1$
$\Phi_3(u)$	$u^2 + u + 1$
$\Phi_4(u)$	$u^2 + 1$
$\Phi_5(u)$	$u^4 + u^3 + u^2 + 1$
$\Phi_6(u)$	$u^2 - u + 1$
$\Phi_7(u)$	$u^6 + u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1$
$\Phi_8(u)$	$u^4 + 1$
$\Phi_9(u)$	$u^6 + u^3 + 1$
$\Phi_{10}(u)$	$u^4 - u^3 + u^2 - u + 1$
$\Phi_{12}(u)$	$u^4 - u^2 + 1$
$\Phi_{14}(u)$	$u^6 - u^5 + u^4 - u^3 + u^2 - u + 1$
$\Phi_{15}(u)$	$u^8 - u^7 + u^5 - u^4 + u^3 - u + 1$
$\Phi_{18}(u)$	$u^6 - u^3 + 1$
$\Phi_{20}(u)$	$u^8 - u^6 + u^4 - u^2 + 1$
$\Phi_{24}(u)$	$u^8 - u^4 + 1$
$\Phi_{30}(u)$	$u^8 + u^7 - u^5 - u^4 - u^3 + u + 1$

Lors des prochains paragraphes, nous donnerons les polynômes de Poincaré associés à chaque groupe de Weyl correspondant et il suffira alors de considérer les cas où le paramètre se spécialise en un élément q tel que, si on note $e = \min\{i \geq 2 \mid 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} = 0\}$, on a Φ_e divise P_W .

Enfin, considérons un H_K -module simple V et son élément de Schur s_V (voir le théorème 1.1.7). Alors, le e -défaut de V est le plus grand entier α vérifiant la propriété suivante :

$$\Phi_e(u)^\alpha \text{ divise } s_V(u) \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}].$$

L'intérêt de cette notion est qu'elle permet, comme dans le cas des groupes finis, de diagonaliser les matrices de décomposition par blocs (voir [23] pour plus de détails). En particulier, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 (Geck [23]) *Si V est un H_K -module simple de e -défaut 0, alors V forme un bloc à lui seul. En particulier, il existe $M \in \text{Irr}(H_L)$ tel que si $P(M)$ est sa couverture projective, on a $[P(M)_K] = [V]$.*

En conclusion, si V est un H_K -module simple de e -défaut 0 alors V appartient nécessairement à l'ensemble basique canonique. Cette remarque permet de

¹Ce résultat est aussi valable pour les groupes de Weyl classiques et est équivalent au résultat du théorème 1.1.8.

caractériser entièrement l'ensemble basique canonique \mathcal{B} pour tous les groupes de Weyl de type exceptionnel en caractéristique 0. Pour cela, nous procédons de la manière suivante.

- Si V est un H_K -module simple de e -défaut 0 alors $V \in \mathcal{B}$,
- En étudiant les blocs déterminés par Müller dans [63] (pour les types E_7 et E_8 pour certaines valeurs de e), par Geck dans [24] (pour le type E_6), par Geck et Lux dans [32] (pour le type F_4) on obtient les éléments de \mathcal{B} qui sont dans ces blocs,
- En étudiant les blocs de défaut 1 déterminés par Geck dans [23] pour les types E_6 et E_7 , on obtient les éléments de \mathcal{B} qui sont dans ces blocs.

Notons finalement que, grâce au théorème 3.1.3, il suffit de considérer le problème en caractéristique 0 pour obtenir la caractérisation de \mathcal{B} en "bonne" caractéristique. Dans la suite de cette section, nous donnons donc les ensembles basiques canoniques sans justification en utilisant ces remarques.

Pour les notations des modules simples de H_K , nous suivons le livre de Lusztig [53] et celui de Geck-Pfeiffer [33] (il y a une autre notation pour ces modules utilisée notamment dans [63] grâce à la b -fonction, on peut trouver dans [33] la relation entre les 2 notations).

3.3.B Le type G_2

Soit W de type G_2 avec diagramme :



Le polynôme de Poincaré de W est :

$$P_W = \Phi_2(u)^2 \Phi_3(u) \Phi_6(u).$$

Il faut donc considérer les cas $e = 2$, $e = 3$ et $e = 6$. L'algèbre H_K possède 6 modules simples non isomorphes : quatre de dimension une : le module index noté 1_a , le module signe noté 1_b et deux autres modules notés 1_c et 1_d . On a ensuite deux modules simples de dimensions deux notés 2_a et 2_b (sous les notations de Müller [64], 2_a correspond à X_1 et 2_b à X_2). Le tableau suivant nous donne les a -valeurs de ces modules :

H_K -modules simples	a -valeur
1_a	0
$1_c, 1_d, 2_a, 2_b,$	1
1_b	6

Alors le tableau suivant nous donne l'ensemble basique canonique associé aux différentes valeurs de e :

Valeur de e	\mathcal{B}
$e = 2$	$1_a, 2_a, 2_b$
$e = 3$	$1_a, 1_c, 1_d, 2_a, 2_b$
$e = 6$	$1_a, 1_c, 1_d, 2_a, 2_b$

Remarque 3.3.2 Le groupe de Weyl de type G_2 est un cas particulier du groupe de type $I_2(m)$ (en prenant $m = 6$). Müller a déterminé dans [64] les matrices de décomposition pour les algèbres de Hecke associées à ce type en caractéristique 0.

3.3.C Le type F_4

Soit W de type F_4 avec diagramme :



Le polynôme de Poincaré de W est le suivant :

$$P_W = \Phi_2^4(u)\Phi_3^2(u)\Phi_4^2(u)\Phi_6^2(u)\Phi_8(u)\Phi_{12}(u).$$

Il faut donc considérer les cas $e = 2, 3, 4, 6, 8$ et $e = 12$. L'algèbre H_K possède 15 modules simples non isomorphes. Le tableau ci-dessous nous donne ces modules suivant les notations de [53] ainsi que leurs a -valeurs :

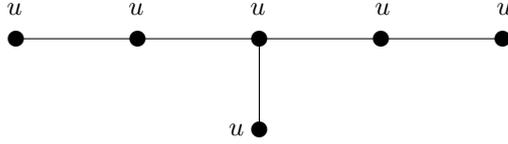
H_K -modules simples	a -valeur
1_1	0
$2_1, 2_3, 4_2$	1
$9_1,$	2
$8_1, 8_3$	3
$1_2, 1_3, 4_1, 4_3, 4_4, 6_1, 6_2, 9_2, 9_3, 12, 16$	4
$8_2, 8_4$	9
9_4	10
$2_2, 2_4, 4_5$	13
1_4	24

Alors le tableau suivant nous donne l'ensemble basique canonique associé aux différentes valeurs de e , on suit ici [32] où les matrices de décomposition sont entièrement déterminées en caractéristique 0 :

Valeur de e	\mathcal{B}
$e = 2$	$1_1, 2_1, 2_3, 4_2, 4_1, 9_1, 12, 16.$
$e = 3$	$1_1, 2_1, 2_3, 4_1, 4_2, 8_3, 8_1, 16, 9_1, 9_2, 9_3, 9_4, 6_1, 6_2, 12.$
$e = 4$	$1_2, 1_3, 9_2, 9_3, 6_2, 8_1, 8_2, 8_3, 8_4, 16, 1_1, 6_1, 9_1, 4_2, 12, 2_1, 4_4, 4_3, 2_3.$
$e = 6$	$1_2, 1_3, 4_1, 9_1, 9_4, 6_1, 6_2, 4_2, 4_3, 4_4, 4_5, 16, 1_1, 12, 2_1, 9_3, 2_3, 9_2, 8_1, 8_3.$
$e = 8$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1_4\}.$
$e = 12$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1_4\}.$

3.3.D Le type E_6

Soit W de type E_6 avec diagramme :



Le polynôme de Poincaré de W est le suivant :

$$P_W = \Phi_2^4(u)\Phi_3^3(u)\Phi_4^2(u)\Phi_5(u)\Phi_6^2(u)\Phi_8(u)\Phi_9(u)\Phi_{12}(u).$$

Il faut donc considérer les cas $e = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ et $e = 12$. L'algèbre H_K possède 25 modules simples non isomorphes. Le tableau ci-dessous nous donne ces modules suivants les notations de [53] ainsi que leurs a -valeurs :

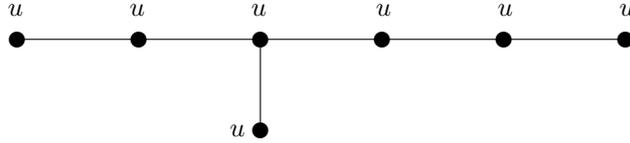
H_K -modules simples	a -valeur
1_p	0
6_p	1
$20_p,$	2
$15_q, 15_p, 30_p$	3
64_p	4
60_p	5
$24_p, 81_p$	6
$10_s, 20_s, 60_s, 80_s, 90_s$	7
$81'_p$	10
$60'_p$	11
$24'_p$	12
$64'_p$	13
$15'_q, 15'_p, 30'_p$	15
$20'_p$	20
$6'_p$	25
$1'_p$	36

Alors le tableau suivant nous donne l'ensemble basique canonique associé aux différentes valeurs de e :

Valeur de e	Ensemble basique canonique
$e = 2$	$1_p, 6_p, 20_p, 30_p, 15_q, 64_p, 60_p, 80_s$
$e = 3$	$1_p, 6_p, 20_p, 15_p, 30_p, 15_q, 64_p, 81_p, 80_s, 90_s, 60_s, 81'_p, 60_p,$
$e = 4$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{81'_p, 15'_p, 15'_q, 20'_p, 6'_p, 1'_p\}$
$e = 5$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{6'_p, 1'_p\}$
$e = 6$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{6'_p, 1'_p, 20'_p, 15'_q, 24'_p\}$
$e = 8$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_p\}$
$e = 9$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_p\}$
$e = 12$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_p\}$

3.3.E Le type E_7

Soit W de type E_7 avec diagramme :



Le polynôme de Poincaré de W est le suivant :

$$P_W = \Phi_2^7(u)\Phi_3^3(u)\Phi_4^2(u)\Phi_5(u)\Phi_6^3(u)\Phi_7(u)\Phi_8(u)\Phi_9(u)\Phi_{10}(u)\Phi_{12}(u)\Phi_{14}(u)\Phi_{18}(u).$$

Il faut donc considérer les cas $e = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14$ et $e = 18$. L'algèbre H_K possède 60 modules simples non isomorphes. Le tableau ci-dessous nous donne ces modules suivants les notations de [53] ainsi que leurs a -valeurs :

H_K -modules simples	a -valeur
1_a	0
$7'_a$	1
27_a	2
$21'_b, 56'_a, 35_b, 21_a$	3
$120_a, 105'_a, 15'_a$	4
$189'_b$	5
$168_a, 105_b, 210_a$	6
$189'_c, 315'_a, 280_b, 70'_a, 280'_a, 35'_a$	7
$405_a, 216'_a, 189_a$	8
$378'_a$	9
$210_b, 420_a, 336'_a, 84_a$	10
$512'_a, 512_a, 105_c$	12
$210'_b, 420'_a, 336_a, 84'_a$	13
378_a	14
$105'_c, 405'_a, 216_a, 189'_a$	15
$315_a, 280'_b, 70_a, 280_a, 35_a,$	16
189_c	20
$168'_a, 210'_a, 105'_b$	21
189_b	22
$120'_a, 105_a, 15_a$	25
$56_a, 35'_b, 21'_a$	30
21_b	36
$27'_a$	37
7_a	46
$1'_a$	63

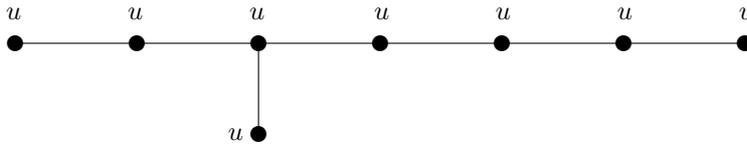
Alors le tableau suivant nous donne l'ensemble basique canonique associé aux différentes valeurs de e :

3.3. Ensemble basique canonique pour les types exceptionnels

Valeur de e	Ensemble basique canonique
$e = 2$	$56'_a, 120_a, 280_b, 1_a, 7'_a, 35_b, 27_a, 189'_b, 105'_a, 315'_a$.
$e = 3$	$1_a, 105_b, 280_b, 21_a, 168_a, 35_b, 210_b, 120_a, 210_a, 420_a, 15'_a, 7'_a, 21'_b, 70'_a, 105'_a, 84'_a, 56'_a, 512'_a, 336'_a, 280'_a, 189'_c, 216'_a, 27_a, 216_a, 189'_b, 378'_a, 189_a, 378_a, 315'_a, 405_a, 405'_a, 315_a$.
$e = 4$	$11_a, 70_a, 189_a, 56'_a, 105_b, 315_a, 210_a, 405_a, 70'_a, 21'_b, 35'_a, 405'_a, 189'_b, 120_a, 336_a, 315'_a, 210_b, 35_b, 21_a, 27_a, 378_a, 105_c, 216'_a, 7'_a, 15'_a, 378'_a, 210'_b, 105'_a, 189'_c, 280_b$.
$e = 5$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a, 56'_a, 7_a, 27'_a, 21_b, 21'_a\}$.
$e = 6$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{27'_a, 189_c, 56'_a, 1'_a, 7_a, 15_a, 12_b, 21'_a, 35'_b, 70_a, 84'_a, 105_a, 168'_a, 210'_a, 21_b, 105'_b, 105'_c\}$.
$e = 7$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a, 15_a\}$.
$e = 8$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{21'_b, 1'_a, 7_a, 27_a\}$.
$e = 9$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a, 7'_a\}$.
$e = 10$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a, 35'_b, 7'_a\}$.
$e = 12$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a, 21'_b\}$.
$e = 14$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a\}$.
$e = 18$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_a\}$.

3.3.F Le type E_8

Soit W de type E_8 avec diagramme :



Le polynôme de Poincaré de W est le suivant :

$$P_W = \Phi_2^8(u) \Phi_3^4(u) \Phi_4^4(u) \Phi_5^2(u) \Phi_6^4(u) \Phi_7(u) \Phi_8^2(u) \Phi_9(u) \Phi_{10}^2(u) \Phi_{12}^2(u) \Phi_{14}(u) \Phi_{15}(u) \Phi_{18}(u) \Phi_{20}(u) \Phi_{24}(u) \Phi_{30}(u).$$

Il faut donc considérer les cas $e = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24$ et $e = 30$.

L'algèbre H_K possède 112 modules simples non isomorphes. Le tableau ci-dessous nous donnent ces modules suivants les notations de [53] ainsi que leurs a -valeurs :

CHAPITRE 3 : L'ENSEMBLE BASIQUE CANONIQUE POUR LES ALGEBRES DE HECKE

H_K -modules simples	a -valeur
1_x	0
8_z	1
35_x	2
$112_z, 84_x, 28_x$	3
$210_x, 160_z, 50_x$	4
560_z	5
$567_x, 700_x, 400_z, 300_x$	6
$1400_z, 1344_z, 448_z, 1008_z, 56_z$	7
$1400_x, 1575_x, 1050_x, 175_x, 350_x$	8
3240_z	9
$2268_x, 972_x, 1296_z, 2240_x, 1400_{zz}, 840_z$	10
$4096_z, 4096_x$	11
$525_x, 4200_x, 3360_z, 840_x$	12
$4536_z, 2800_z, 700_{xx}, 2100_x$	13
$2835_x, 6075_x$	14
$4200_z, 5600_z, 3200_x, 2400_z$	15
$4480_y, 7168_w, 3150_y, 4536_y, 4200_y, 5670_y, 1344_w, 2016_w, 5600_w, 420_y, 1134_y, 1400_y, 2688_y, 1680_y, 168_y, 448_w, 70_y$	16
2100_y	20
$4200'_z, 5600'_z, 3200'_x, 2400'_z$	21
$6075'_x, 2835'_x$	22
$4536'_z$	23
$4200'_x, 3360'_z, 840'_x$	24
$2800'_z, 700'_{xx}, 2100'_x$	25
$4096'_x, 4096'_z$	26
$2240'_x, 1400'_{zz}, 840'_z$	28
$2268'_x, 972'_x, 1296'_z$	30
$3240'_z$	31
$1400'_x, 1575'_x, 1050'_x, 175'_x, 350'_x,$	32
$525'_x$	36
$1400'_z, 1344'_x, 1008'_z, 448'_z, 56'_z$	37
$700'_x, 400'_z, 300'_x$	42
$567'_x$	46
$560'_z$	47
$210'_x, 160'_z, 50'_x$	52
$112'_z, 84'_x, 28'_x$	63
$35'_x$	74
$8'_z$	91
$1'_x$	120

Alors le tableau suivant nous donne l'ensemble basique canonique associé aux différentes valeurs de e :

3.3. Ensemble basique canonique pour les types exceptionnels

Valeur de e	Ensemble basique canonique
$e = 2$	$1344_x, 2240_x, 3200_x, 112_z, 160_z, 400_z, 4096'_z, 4096'_x, 1_x, 35_x, 8_z, 50_x, 84_x, 700_x, 210_x, 1400_x, 567_x, 1050_x, 1400_z, 4200_x.$
$e = 3$	$2268'_z, 567'_x, 3240'_z, 1296'_z, 3240'_z, 1008'_z, 1575'_z, 1_x, 28_x, 35_x, 50_x, 84_x, 172_x, 210_x, 300_x, 350_x, 700_{xx}, 700_x, 1050_x, 1344_x, 1400_x, 2100_x, 4200_y, 2240_x, 4480_y, 3200_x, 4200_x.$
$e = 4$	$28_x, 300_x, 700_{xx}, 840_x, 160_z, 300_x, 1344_w, 840'_x, 700_{xx}, 972_x, 84_x, 700_x, 2100_z, 4200'_x, 2100_x, 2268_x, 5600_w, 4200_x, 1344_x, 2240'_x, 8_z, 560_z, 840_z, 1400_{zz}, 4200'_z, 4536_z, 2240_x, 3200'_x, 56_z, 1008_z, 1400_z, 3240_z, 4200_z, 4536'_z, 1_a, 35_x, 50_x, 175_x, 210_x, 350_x, 525_x, 1575_x, 567_x, 3150_y, 4480_y, 2835_x, 5670_y, 6075_x, 112_z, 400_z, 2800_z, 3360_z.$
$e = 5$	$35_x, 210'_x, 560'_z, 160'_z, 8_z, 56_z, 112_z, 448_w, 448_z, 1344_w, 1008_z, 2016_w, 1296_z, 7168_w, 4096_z, 4096'_z, 4536_z, 1_x, 4536'_z, 28_x, 84_x, 168_y, 1134_y, 972_x, 972'_x, 1344_x, 2688_y, 2268_x, 4536_y, 4096_x, 4096'_x.$
$e = 6$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{972'_x, 567'_x, 1008'_z, 1344'_x, 3200'_x, 112'_z, 160'_z, 400'_z, 1'_x, 28'_x, 35'_x, 50'_x, 84'_x, 168_y, 175'_x, 210'_x, 300'_x, 350'_x, 525_x, 525'_x, 700_{xx}, 700'_{xx}, 700'_x, 840'_x, 1050'_x, 2100_y, 2100'_x, 4200'_x, 8'_z, 56'_z, 448'_z, 560'_z, 840'_z, 1400'_z, 2400'_z, 4200'_z, 5600_z, 5600'_z\}.$
$e = 7$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{50'_x, 8'_z, 400'_z\}.$
$e = 8$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{8'_z, 1344_x, 28'_x, 300_x, 112'_z, 84_x, 1'_x, 35'_x, 175'_x, 525'_x, 160'_z\}.$
$e = 9$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x, 28'_z, 160'_z, 112'_z, 8'_z, 35'_x\}.$
$e = 10$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{50'_x, 35'_x, 1'_x, 28'_x, 84'_x, 942'_x, 8'_z\}.$
$e = 12$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x, 35'_x, 50'_x, 525'_x, 112'_z, 400'_z\}.$
$e = 14$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x, 8'_z\}.$
$e = 15$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x, 8'_z\}.$
$e = 18$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x, 84'_x, 8'_z\}.$
$e = 20$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x\}.$
$e = 24$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x\}.$
$e = 30$	$\text{Irr}(H_K) \setminus \{1'_x\}.$

Remarque 3.3.3 En fait, on ne connaît pas explicitement les matrices de décomposition pour ce type mais Müller dans [63] a déterminé en caractéristique 0 pour chaque e un ensemble de modules projectifs en bijection avec les modules projectifs indécomposables. Il suffit alors de vérifier que les modules de a -fonctions minimales apparaissant dans la décomposition des modules projectifs sont distincts. L'ensemble basique canonique est alors donné par l'ensemble de ces modules de a -valeurs minimales. On peut vérifier que c'est le cas ici.

Nous avons donc déterminé l'ensemble basique canonique pour tous les groupes de Weyl de type exceptionnel. Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à un type d'algèbres qui généralise les algèbres de Hecke de type D_n .

CHAPITRE 3 : L'ENSEMBLE BASIQUE CANONIQUE POUR LES ALGÈBRES DE
HECKE

Nous nous demanderons si les résultats obtenus précédemment ne peuvent pas être prouvés pour ce nouveau type d'algèbres.

Chapitre 4

Conséquences sur la théorie des représentations des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé l'ensemble basique canonique pour tous les groupes de Weyl finis en caractéristique 0. En particulier, cet ensemble a été déterminé pour le type D_n grâce à la caractérisation de l'ensemble basique canonique pour une algèbre de Hecke de type B_n à paramètres inégaux en utilisant des éléments de la théorie de Clifford. De la même façon que les algèbres de Hecke de type A_{n-1} et B_n se généralisent en algèbre de Ariki-Koike (aussi appelées algèbres cyclotomiques de type $G(l, 1, n)$), les algèbres de Hecke de type D_n ont une généralisation en terme d'algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$ qui sont des déformations des groupes de réflexions complexes de la série $G(l, l, n)$.

La théorie des représentations de ce type d'algèbres a été étudiée par Ariki dans [2] dans le cas semi-simple. Ces représentations sont reliées avec celles des algèbres de Ariki-Koike grâce à la théorie de Clifford. Il est donc naturel de se demander si, comme pour le cas des algèbres de Hecke de type D_n , l'existence d'un ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike non semi-simple induit l'existence d'un ensemble analogue pour le type $G(l, l, n)$.

Le but de ce chapitre est de traiter exactement ce problème. Pour cela, nous étudierons tout d'abord les représentations des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$ en suivant l'article d'Ariki ([2]) et celui de Broué et Kim ([11]). Nous présenterons également quelques résultats classiques obtenus par la théorie de Clifford. Dans la deuxième partie, nous démontrerons l'existence d'un ensemble basique canonique pour une algèbre cyclotomique de type $G(l, l, n)$ non semi-simple et nous donnerons sa caractérisation à l'aide des multipartitions de FLOTW. En particulier, ce résultat donne une généralisation des résultats obtenus par Geck pour les algèbres de Hecke de groupe de Weyl étendu. Enfin, dans la troisième partie, nous utiliserons les résultats prouvés précédemment afin de déterminer une deuxième paramétrisation pour ces algèbres cyclotomiques de

type $G(l, l, n)$ non semi-simple grâce aux multipartitions Kleshchev.

4.1 Etude des représentations des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Nous commençons par donner la définition des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$.

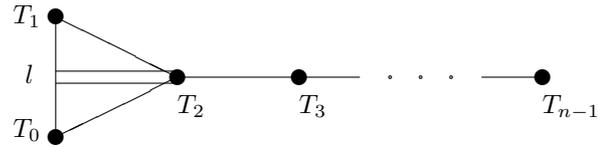
4.1.A Définition

Soit y une indéterminée et soient l et n deux entiers positifs. On pose $u := y^l$. Pour $n > 2$, l'algèbre cyclotomique \mathcal{H}'_n de type $G(l, l, n)$ est la $\mathbb{Z}[y, y^{-1}]$ -algèbre définie par :

- générateurs : T_0, T_1, \dots, T_{n-1} ,
- relations :

$$\begin{aligned}
 (T_i - u)(T_i + 1) &= 0 && \text{pour } 0 \leq i \leq n-1, \\
 T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n-2, \\
 T_0 T_2 T_0 &= T_2 T_0 T_2, \\
 (T_1 T_0 T_2)^2 &= (T_2 T_1 T_0)^2, \\
 T_0 T_j &= T_j T_0 && \text{pour } j > 2, \\
 T_i T_j &= T_j T_i && \text{pour } i > 0 \text{ et } j > i+1, \\
 \underbrace{T_0 T_1 T_0 T_1 \dots}_{l \text{ termes}} &= \underbrace{T_1 T_0 T_1 T_0 \dots}_{l \text{ termes}}.
 \end{aligned}$$

Ces 6 dernières relations “de tresses” sont usuellement représentées par le diagramme suivant :



Alors, suivant [2, proposition 1.4] , \mathcal{H}'_n est libre et de rang fini comme A -module. De plus, suivant [59], cette algèbre est une algèbre symétrique.

Pour $l = 2$, notons que l'on obtient une algèbre de Hecke de type D_n . Nous allons maintenant étudier les représentations irréductibles de ce type d'algèbre en suivant les résultats d'Ariki [2] dans le cas semi-simple. Pour cela, nous commençons par étudier les relations entre \mathcal{H}'_n et les algèbres de Ariki-Koike. C'est le sujet du prochain paragraphe.

4.1.B Premières propriétés

Soient l un entier positif, y une indéterminée, $u := y^l$. Afin de pouvoir introduire la notion d'application de décomposition pour les algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$ (ce que nous ferons dans la deuxième section), nous devons

4.1. Etude des représentations des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

nous assurer que nous travaillons sur des corps suffisamment “gros” pour que les algèbres considérées ici soient déployées. On pose donc $A_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}[y, y^{-1}]$ et on considère l’algèbre cyclotomique $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ sur $A_{\mathbb{C}}$. Alors, $A_{\mathbb{C}}$ est intégralement clos dans son corps des fractions $\mathbb{C}(y)$

Soit $\eta_l := \exp(\frac{2i\pi}{l})$. On considère l’algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ de type $G(l, 1, n)$ avec système de paramètres $\{u; 1, \eta_l, \dots, \eta_l^{l-1}\}$. $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ est la $A_{\mathbb{C}}$ -algèbre associative unitaire présentée par :

- générateurs : $\widetilde{T}_0, T_1, \dots, T_{n-1}$,
- relations : les relations de tresses symbolisées par le diagramme suivant :



et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\widetilde{T}_0^l - 1) &= 0, \\ (T_i - u)(T_i + 1) &= 0 \quad \text{si } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

On a le résultat suivant qui nous donne une connection entre $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ et $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$.

Proposition 4.1.1 (Ariki [2, proposition 1.6]) *La sous-algèbre de $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ engendrée par $\{T_0 := \widetilde{T}_0^{-1} T_1 \widetilde{T}_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$ est isomorphe à l’algèbre $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ sur $A_{\mathbb{C}}$. De plus, $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ est $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -graduée par rapport à $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ avec graduation :*

$$\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n} = \bigoplus_{j=0}^{l-1} \widetilde{T}_0^j \mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n},$$

(voir [14, section 11] pour la définition d’une algèbre $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -graduée).

Exemple : Posons $l = 2$, alors l’algèbre $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ est une algèbre de Hecke de type B_n à paramètre $\{1, u\}$ comme dans le paragraphe 3.2.C. L’algèbre $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ correspond alors à une algèbre de type D_n .

Notons que l’on peut construire un premier automorphisme g sur $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ par conjugaison par \widetilde{T}_0 .

$$\text{Pour } i = 0, \dots, l-1, \text{ on a } g(T_i) := \widetilde{T}_0^{-1} T_i \widetilde{T}_0.$$

Maintenant, les résultats ci-dessus vont nous permettre d’étudier les représentations de $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ et de $\mathcal{H}_{A_{\mathbb{C}}, n}$ en utilisant la théorie de Clifford.

Pour cela, considérons une spécialisation $\theta : A_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ alors \mathbb{C} est le corps des fractions de $\theta(A_{\mathbb{C}})$. On obtient des algèbres cyclotomiques de type $G(l, 1, n)$ (c’est à dire de Ariki-Koike) $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ qui sont déployées d’après le paragraphe 1.3.A et des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$: $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ et $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$. On sait que $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ est déployée (voir par exemple l’article de Malle [58]). Il est clair que $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ est également déployée. Notons aussi que tous les résultats prouvés dans le second chapitre s’applique de façon évidente pour $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$.

Etudions plus en détail les relations entre les modules simples de $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$ et entre ceux de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ et $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$. Pour cela, posons $F := \mathbb{C}(y)$ ou \mathbb{C} .

Alors $\mathcal{H}_{F,n}$ est $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -graduée par rapport à $\mathcal{H}'_{F,n}$. On peut donc définir des opérateurs d'induction et de restriction notés Ind et Res entre les $\mathcal{H}_{F,n}$ -modules et les $\mathcal{H}'_{F,n}$ -modules.

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés sur les modules simples de $\mathcal{H}_{F,n}$ et $\mathcal{H}'_{F,n}$ qui nous seront utiles par la suite.

Tout d'abord, on peut construire un automorphisme f de $\mathcal{H}_{F,n}$ défini sur la graduation de $\mathcal{H}_{F,n}$ de la façon suivante.

$$\text{Pour } j = 0, \dots, l-1 \text{ et } h \in \mathcal{H}'_{F,n}, \text{ on a } f(\widetilde{T_0^j} h) = \eta_l^j \widetilde{T_0^j} h.$$

Alors, si V est un $\mathcal{H}_{F,n}$ -module simple, on peut construire une nouvelle structure de module sur V en composant l'action originelle par f . Ce nouveau module sera noté V^f . Notons que ce résultat s'applique également pour les $\mathcal{H}'_{F,n}$ -modules et l'automorphisme g défini ci-dessus. Si V et W sont deux $\mathcal{H}_{F,n}$ -modules simples (resp. deux $\mathcal{H}'_{F,n}$ -modules simples), on dira que V et W sont conjugués si il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $V = W^{f^\alpha}$ (resp. $V = W^{g^\alpha}$).

Alors, on a le résultat suivant issu de la théorie de Clifford.

Proposition 4.1.2 (voir [14, section 11] et [11, proposition 1.40]) Soit V un $\mathcal{H}_{F,n}$ -module simple et N un $\mathcal{H}'_{F,n}$ -module simple dans $\text{Res}(V)$ alors :

$$\text{Res}(V) = N \oplus N^g \oplus \dots \oplus N^{g^{o(g,N)-1}},$$

où $o(g, N) = \min \{k \in \mathbb{N}^* \mid N^{g^k} \simeq N\}$. De plus, tous les $\mathcal{H}'_{F,n}$ -modules simples apparaissent dans les restrictions des $\mathcal{H}_{F,n}$ -modules simples.

Considérons maintenant l'automorphisme f de $\mathcal{H}_{F,n}$. Pour tout $\mathcal{H}_{F,n}$ -module simple V , on a :

$$\text{Res}(V) = \text{Res}(V^f) = \dots = \text{Res}(V^{f^{o(f,V)-1}}).$$

Nous allons utiliser la proposition suivante.

Proposition 4.1.3 (Genet [36]) Pour tout $\mathcal{H}_{F,n}$ -module simple V , on a :

$$\text{Ind}(\text{Res}(V)) = \bigoplus_{i=0}^{l-1} V^{f^i}.$$

Pour tout $\mathcal{H}_{F,n}$ -module simple V et $\mathcal{H}'_{F,n}$ -module simple N apparaissant dans $\text{Res}(V)$, on a :

$$\text{Ind}(N) = \dots = \text{Ind}(N^{g^{o(g,N)-1}}).$$

On obtient ainsi :

$$\text{Ind}(\text{Res}(V)) = o(g, N)\text{Ind}(N).$$

De plus, on a :

$$\text{Ind}(N) = V \oplus V^f \oplus \dots \oplus V^{f^{o(f,V)-1}}.$$

On obtient ainsi la proposition suivante :

Proposition 4.1.4 Soit V un $\mathcal{H}_{F,n}$ -module simple et N un $\mathcal{H}'_{F,n}$ -module simple apparaissant dans $\text{Res}(V)$, alors :

$$o(g, N)o(f, V) = l.$$

Nous allons maintenant nous placer dans le cas semi-simple.

4.1.C Modules simples des algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Nous gardons les hypothèses du paragraphe précédent. On considère ici les algèbres $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ et $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ qui sont semi-simples déployées. Alors, on sait que les modules simples de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ sont donnés par des modules de Specht paramétrés par les l -partitions de n :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}) = \left\{ S_{\mathbb{C}(y)}^\lambda \mid \lambda \in \Pi_n^l \right\}.$$

Dans [2], Ariki a déterminé l'ensemble des modules simples de $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ en étudiant les restrictions des $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ -modules simples et en décrivant l'action de l'automorphisme g sur les $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ -modules. La classification obtenue est la suivante.

On a une action naturelle du groupe cyclique $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des l -partitions de rang n engendrée par l'application suivante :

$$\iota : (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l-1)}) \mapsto (\lambda^{(l-1)}, \lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-2)}).$$

Pour λ une l -partition, on note $\tilde{\lambda}$ la classe d'équivalence obtenue via l'action ci-dessus. On note alors :

$$r := r(\lambda) = \frac{l}{\text{Cardinal de } \tilde{\lambda}}.$$

Alors, le $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ -module $S_{\mathbb{C}(y)}^\lambda$ se restreint en r modules simples de $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ non isomorphes. Ces modules simples seront notés $V(\tilde{\lambda}, i)$ avec $i = 1, \dots, r$. On a donc :

$$\text{Res}(S_{\mathbb{C}(y)}^\lambda) = V(\tilde{\lambda}, 1) \oplus \dots \oplus V(\tilde{\lambda}, r).$$

Ariki a montré que deux modules de Specht indexés par des l -partitions de classes distinctes se restreignent en sommes de $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ -modules simples non isomorphes. On obtient donc :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}) = \left\{ V(\tilde{\lambda}, i) \mid \lambda \in \Pi_n^l, i = 1, \dots, r(\lambda) \right\}.$$

Exemple : Pour $l = 2$, nous avons remarqué en début de chapitre que $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ correspond à une algèbre de Hecke de type D_n . Dans ce cas, chaque bipartition de type (λ, λ) de rang n forme une classe d'équivalence à elle seule. Les $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ -modules simples de type $S_{\mathbb{C}(y)}^{(\lambda, \lambda)}$ se restreignent donc en deux $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ -modules simples. Les autres classes sont composées de deux éléments (λ, μ) et (μ, λ) qui sont des bipartitions de n avec $\lambda \neq \mu$. Donc, les $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ -modules simples de type $S_{\mathbb{C}(y)}^{(\lambda, \mu)}$ avec $\lambda \neq \mu$ se restreignent en un module simple et on a $\text{Res}(S_{\mathbb{C}(y)}^{(\lambda, \mu)}) \simeq \text{Res}(S_{\mathbb{C}(y)}^{(\mu, \lambda)})$. On retrouve donc la classification des modules simples pour les algèbres de Hecke de type D_n à paramètres égaux du paragraphe 1.2.B.

4.2 Ensemble basique canonique pour certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Soient l et e deux entiers positifs tels que l divise e . Soit y une indéterminée et soit $u = y^l$. Comme dans la section précédente, soit $\mathcal{H}_{Ac,n}$ l'algèbre de Ariki-

Koike à paramètres $\{u, 1, \eta_l, \dots, \eta_l^{l-1}\}$ sur $A_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}[y, y^{-1}]$. Soit aussi $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}}, n}$ l'algèbre cyclotomique de type $G(l, l, n)$ sur $A_{\mathbb{C}}$ à un paramètre u .

Le but de cette section est d'étudier l'algèbre cyclotomique de type $G(l, l, n)$ lorsque le paramètre u se spécialise en une racine de l'unité d'ordre e . En particulier, nous allons montrer qu'un ensemble basique canonique est bien défini dans ce cas. De plus, nous allons déterminer la paramétrisation de cet ensemble et étudier sa relation avec l'ensemble basique canonique pour les algèbres de Ariki-Koike. Notons que lorsque $l = 2$, les algèbres considérées ici sont des algèbres de Hecke de type B_n et D_n et ces résultats ont donc été prouvés (voir les paragraphes 1.4.C et 3.2.D).

4.2.A Restriction des $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples et applications de décomposition

D'après les remarques effectuées au début du paragraphes 4.1.B, si on considère une spécialisation $\theta : A_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, on a deux applications de décomposition bien définies :

$$\begin{aligned} d_{\theta} &: R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}) \rightarrow R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}), \\ d'_{\theta} &: R_0(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}) \rightarrow R_0(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}). \end{aligned}$$

Notons aussi que l'application Res induit des applications entre les groupes de Grothendieck que nous notons, de façon à alléger les notations, de la même manière :

$$\begin{aligned} \text{Res} &: R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}) \rightarrow R_0(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}), \\ \text{Res} &: R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}) \rightarrow R_0(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}). \end{aligned}$$

Nous voulons maintenant définir un ensemble basique canonique pour l'algèbre $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$. Pour ceci, il faut pouvoir attacher à chaque module simple de $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ une a -valeur.

Remarquons que l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$ est une algèbre de Ariki-Koike de la forme du paragraphe 2.1.C en posant $m^{(j)} = 0$ pour tout $j = 0, \dots, l-1$. La proposition 2.1.2 donne donc la formule de la a -valeur pour les modules simples de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$.

En suivant la proposition 1.4.9, il est naturel de définir la a -valeur pour les $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ -modules simples de la manière suivante :

Proposition 4.2.1 *Si U est un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ -module simple qui apparaît dans la restriction d'un $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$ -module simple V , alors, on pose :*

$$a(U) := a(V).$$

Cette valeur est bien définie et est appelée la a -valeur de U .

Preuve :

Supposons que U soit un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ -module qui apparaît dans la restriction de deux $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$ -modules simples $S_{\mathbb{C}(y)}^{\underline{\lambda}}$ et $S_{\mathbb{C}(y)}^{\underline{\mu}}$. Alors, suivant les résultats du paragraphe précédent, $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ appartiennent à la même classe d'équivalence. Il existe donc $s \in \{0, \dots, l-1\}$ tel que :

$$\underline{\mu} = (\lambda^{(s)}, \lambda^{(s+1)}, \dots, \lambda^{(l-1)}, \lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(s-1)}).$$

4.2. Ensemble basique canonique pour certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Comme noté ci-dessus, les a -valeurs de $S_{\mathbb{C}(y)}^\lambda$ et $S_{\mathbb{C}(y)}^\mu$ s'obtiennent à partir de la proposition 2.1.2 en fixant $m^{(j)} = 0$ pour $j = 0, \dots, l-1$. Il est clair que dans ce cas, la a -valeur est invariante par permutation circulaire et donc que l'on a :

$$a(S_{\mathbb{C}(y)}^\lambda) = a(S_{\mathbb{C}(y)}^\mu).$$

Donc la valeur $a(U)$ est bien définie. □

Alors, on obtient le théorème suivant :

Proposition 4.2.2 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}) & \xrightarrow{Res} & R_0(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}) \\ d_\theta \downarrow & & \downarrow d'_\theta \\ R_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}) & \xrightarrow{Res} & R_0(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}) \end{array}$$

De plus, soit $(d_{V,M})_{V \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}), M \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},n})}$ et $(d'_{W,N})_{W \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}), N \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n})}$ les nombres de décomposition associés à d_θ et d'_θ , alors, pour tout $V \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n})$ et $M \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},n})$, on a :

$$d_{V,M} = d_{V^f, M^f}.$$

Et pour tout $W \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n})$ et $N \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n})$, on a :

$$d'_{W,N} = d'_{W^g, N^g}.$$

Preuve :

En suivant [28], ces résultats sont prouvés en utilisant la caractérisation des applications de décomposition (voir [26, paragraphe 2]). □

4.2.B Caractérisation de l'ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$

Nous allons tout d'abord attacher à chaque $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$ -module M une a -valeur de la manière suivante :

Proposition 4.2.3 *Si M est un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$ -module simple qui apparaît dans la restriction d'un $\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}$ -module simple N , alors, on pose :*

$$a(M) := a(N).$$

Cette valeur est bien définie et est appelée la a -valeur de M .

Preuve :

Si M est un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$ -module simple qui apparaît dans la restriction de deux $\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}$ -modules simples N et N' , alors, suivant les résultats de la section précédente, N et N' sont conjugués. Il existe donc $k \in \{0, \dots, o(f, N) - 1\}$ tel que $N' = N^{f^k}$. Supposons maintenant que $d_{V,N} \neq 0$ pour un $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ -module V . En utilisant la proposition 4.2.2, on a $d_{V^{f^k}, N^{f^k}} \neq 0$. Ensuite, d'après la proposition 4.2.1, on a :

$$a(V^{f^k}) = a(V).$$

Il suit donc :

$$\min \{a_V \mid d_{V,N} \neq 0\} = \min \{a_V \mid d_{V,Nf^k} \neq 0\}.$$

On utilise maintenant le théorème 2.3.8(i). On obtient finalement $a_N = a_{Nf^k}$ et donc la a -valeur de M est bien définie. \square

On peut maintenant donner le théorème principal de ce chapitre qui donne l'existence d'un ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$ et décrit son lien avec l'ensemble basique canonique de $\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}$.

Théorème 4.2.4 *Soient e et l deux entiers positifs tels que l divise e . Soient $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$ l'algèbre cyclotomique de type $G(l, l, n)$ à paramètre u une indéterminée où $y = u^l$, θ une spécialisation sur \mathbb{C} telle que $\theta(u) = \eta_e := \exp(\frac{2i\pi}{e})$ et soit $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$ l'algèbre de type $G(l, l, n)$ obtenue via cette spécialisation.*

On considère $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ l'algèbre de Ariki-Koike à paramètres $\{u, 1, \eta_l, \dots, \eta_l^{l-1}\}$. Soit $\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}$ l'algèbre spécialisée. Par le théorème 2.3.8, il existe un ensemble basique canonique $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n})$ en bijection avec $\text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C},n})$. Alors, on a les propriétés suivantes.

(i) *Pour tout $M \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n})$, il existe un unique $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ -module simple V_M apparaissant dans la restriction d'un $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y),n}$ -module de \mathcal{B} tel que :*

$$d'_\theta([V_M]) = [M] + \sum_{a_N < a_M} d'_{V_M, N}[N].$$

Donc, si on note :

$$\mathcal{B}' = \{V_M \mid M \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n})\} \subset \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}),$$

l'ensemble \mathcal{B}' est en bijection avec $\text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n})$. Cet ensemble est appelé l'ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n}$.

(ii) *On a pour tout $M \in \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C},n})$:*

$$o(g, V_M) = o(g, M).$$

(iii) *On a :*

$$V_M \in \mathcal{B}' \iff \text{il existe } W \in \mathcal{B} \text{ tel que } V_M \subset \text{Res}(W).$$

Preuve :

Soit $V \in \mathcal{B}$ et soit W un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y),n}$ -module simple qui apparaît dans la restriction de V , alors :

$$\text{Res}([V]) = [W] + [W^g] + \dots + [W^{g^{o(g,W)-1}}].$$

On a :

$$\text{Res}([V]) = \text{Res}([V^f]) = \dots = \text{Res}([V^{f^{o(f,V)-1}}]).$$

On utilise maintenant la commutativité du diagramme de la proposition 4.2.2 et on obtient :

$$\text{Res}(d_\theta([V])) = \text{Res}(d_\theta([V^f])) = \dots = \text{Res}(d_\theta([V^{f^{o(f,V)-1}}])).$$

4.2. Ensemble basique canonique pour certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Soient M_{f^i} les $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples tels que pour $i = 0, \dots, o(f, V) - 1$, on a :

$$d_\theta([V^{f^i}]) = [M_{f^i}] + \sum_{a_N < a_{M_{f^i}}} d_{V^{f^i}, N}[N].$$

En identifiant les modules de a -valeur a_V , il suit :

$$\text{Res}([M]) = \text{Res}([M_f]) = \dots = \text{Res}([M_{f^{o(f, V)-1}}]).$$

On peut donc supposer que pour tout $i \in \{0, \dots, o(f, V) - 1\}$, il existe $j \in \{0, \dots, o(f, V) - 1\}$ tel que :

$$[M_{f^i}] = [M^{f^j}].$$

De plus, $o(f, M) \geq o(f, V)$ car les M_{f^i} sont nécessairement non isomorphes. Soit maintenant N un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ -module simple qui apparaît dans la restriction de M . On a :

$$\text{Res}([M]) = [N] + \dots + [N^{g^{o(g, N)-1}}].$$

De plus :

$$\text{Res}(d_\theta([V])) = d'_\theta([W]) + d'_\theta([W^g]) + \dots + d'_\theta([W^{g^{o(g, W)-1}}]),$$

alors :

$$\text{Res}(d_\theta([V])) = [N] + \dots + [N^{g^{o(g, N)-1}}] + \text{termes plus petits par rapport à la } a - \text{valeur.}$$

Par la proposition 4.2.2, si $d_{W, N^{g^i}} \neq 0$, on a $d_{W^g, N^{g^{i+1}}} \neq 0$. Donc :

$$o(g, N) \geq o(g, W),$$

or, on a :

$$o(g, N)o(f, M) = l \quad \text{et} \quad o(g, W)o(f, V) = l.$$

Ceci implique :

$$o(g, N) = o(g, W) \quad \text{et} \quad o(f, V) = o(f, M).$$

Donc, pour tout $i = 0, \dots, o(g, N) - 1$, il existe $j \in \{0, \dots, o(g, N) - 1\}$ tel que :

$$d'_\theta([W^{g^i}]) = [N^{g^j}] + \text{termes plus petits par rapport à la } a - \text{valeur.}$$

Supposons maintenant que pour un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ -module simple N , il existe deux $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ -modules W et W' tels que :

$$d'_\theta([W]) = [N] + \text{termes plus petits par rapport à la } a - \text{valeur,}$$

$$d'_\theta([W']) = [N] + \text{termes plus petits par rapport à la } a - \text{valeur.}$$

Alors, on a $W \subset \text{Res}(V)$ et $W' \subset \text{Res}(V')$ pour deux $\mathcal{H}_{\mathbb{C}(y), n}$ -modules simples V et V' . Il existe alors deux $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples M et M' tels que :

$$d_\theta([V]) = [M] + \text{termes plus petits par rapport à la } a - \text{valeur,}$$

$$d_\theta([V']) = [M'] + \text{termes plus petits par rapport à la } a - \text{valeur.}$$

On a $M' = M^{f^k}$ pour $k \in \{0, \dots, o(f, M) - 1\}$ mais alors $V' = V^{f^j}$ pour un $j \in \{0, \dots, o(f, M) - 1\}$, il suit :

$$\text{Res}(V) = \text{Res}(V'),$$

donc :

$$W = W'.$$

□

On a donc prouvé l'existence d'un ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$. On retrouve en particulier les résultats obtenus par Geck dans le paragraphe 1.4.C. Il reste à déterminer la paramétrisation de \mathcal{B}' .

Corollaire 4.2.5 *En gardant les hypothèses du théorème précédent, on a :*

$$\mathcal{B}' = \left\{ V(\tilde{\lambda}, i) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda^1_{\{e; 0, \frac{e}{l}, \dots, \frac{(l-1)e}{l}\}}, i = 1, \dots, \frac{l}{\text{Cardinal de la classe } \tilde{\lambda}}, |\underline{\lambda}| = n \right\}.$$

Cet ensemble est en bijection avec $\text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n})$.

Preuve :

Par le théorème 2.3.8(iv), l'ensemble basique canonique pour $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ est le suivant :

$$\mathcal{B} = \left\{ S_{\mathbb{C}(y)}^{\underline{\lambda}} \mid \underline{\lambda} \in \Lambda^1_{\{e; 0, \frac{e}{l}, \dots, \frac{(l-1)e}{l}\}}, |\underline{\lambda}| = n \right\}.$$

Donc par la proposition précédente, pour déterminer \mathcal{B}' , il suffit de considérer les $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ -modules simples apparaissant dans les restrictions des éléments de \mathcal{B} . On obtient donc l'ensemble ci-dessus. □

Exemple : Pour $l = 2$, c'est à dire lorsque l'algèbre $\mathcal{H}'_{A_{\mathbb{C}, n}}$ est une algèbre de Hecke de type D_n , nous obtenons :

$$\mathcal{B}' = \left\{ V(\tilde{\lambda}, i) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda^1_{\{e; 0, \frac{e}{2}\}}, i = 1, \dots, \frac{2}{\text{Cardinal de la classe } \tilde{\lambda}} \right\},$$

c'est à dire, en reprenant les notations du paragraphe 3.2.D des modules simples pour les algèbres de Hecke de type D_n :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \left\{ V^{[\lambda, \mu]} \mid \lambda \neq \mu, (\lambda, \mu) \in \Lambda^1_{\{e; 0, \frac{e}{2}\}}, |\lambda| + |\mu| = n \right\} \\ &\cup \left\{ V^{[\lambda, \pm]} \mid \lambda \text{ partition } \frac{e}{2} - \text{régulière}, 2|\lambda| = n \right\}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les résultats du théorème 3.2.7.

Nous avons donc obtenu une première paramétrisation pour les modules simples de l'algèbre $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ en utilisant la paramétrisation des modules simples de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ par les multipartitions de FLOTW vu dans le second chapitre. On peut maintenant se demander si l'on peut obtenir une deuxième paramétrisation en utilisant les multipartitions Kleshchev. C'est le sujet de la dernière section de ce chapitre.

4.3. Une autre paramétrisation pour les modules simples de certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

4.3 Une autre paramétrisation pour les modules simples de certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Dans cette section, nous gardons toutes les notations et hypothèses adoptées dans la section précédente. Nous considérons ici la paramétrisation des modules simples de l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ de type $G(l, 1, n)$ par les multipartitions Kleshchev. Le but est de caractériser les restrictions $\text{Res}(D^\lambda)$ avec $D^\lambda \in \text{Irr}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n})$ et $\lambda \in \Lambda^0$. Pour cela, il semble nécessaire d'étudier en détail l'application j du théorème 2.3.8(iv) et donc la bijection κ entre Λ^0 et Λ^1 . Cette bijection étant caractérisée à l'aide du graphe cristallin des \mathcal{U}_v -modules \mathcal{M} et $\overline{\mathcal{M}}$, nous commençons par démontrer certaines propriétés des multipartitions de FLOTW dans ce graphe cristallin.

4.3.A Multipartitions de FLOTW et graphe cristallin

a) Tout d'abord, considérons l'ordre de FLOTW donné dans le paragraphe 1.3.D. L'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ est ici à paramètres $v_j = \frac{j^e}{l}$ pour $j = 0, \dots, l-1$ (l divisant e) et le système de charges est donc $m = (0, \dots, 0)$. Alors, d'après la proposition 2.3.1, si $\gamma = (a, b, c)$ et $\gamma' = (a', b', c')$ sont deux boîtes d'une l -partition et si γ et γ' ont le même résidu, on a la propriété suivante :

$$b - a > b' - a' \iff \begin{array}{l} \gamma \text{ est en dessous de } \gamma' \\ \text{par rapport à l'ordre de FLOTW.} \end{array}$$

Ainsi, la notion de bonne boîte $\gamma = (a, b, c)$ d'une l -partition ne dépend que de a et b et pas de c . La proposition suivante est alors immédiate.

Proposition 4.3.1 *Soit λ une multipartition de FLOTW. On suppose qu'un "chemin" reliant \emptyset à λ dans le graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$ est donné par :*

$$\emptyset \xrightarrow{i_1} \lambda^{(1)} \xrightarrow{i_2} \lambda^{(2)} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} \lambda^{(n-1)} \xrightarrow{i_n} \lambda.$$

Alors, il existe des multipartitions de FLOTW $h_p(\lambda)$ avec $p = 0, \dots, l-1$ (non nécessairement distinctes) telles que un "chemin" reliant \emptyset à $h_p(\lambda)$ dans le graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$ est de la forme suivante :

$$\emptyset \xrightarrow{i_1 + \frac{pe}{l}} h_p(\lambda^{(1)}) \xrightarrow{i_2 + \frac{pe}{l}} h_p(\lambda^{(2)}) \dots \xrightarrow{i_{n-1} + \frac{pe}{l}} h_p(\lambda^{(n-1)}) \xrightarrow{i_n + \frac{pe}{l}} h_p(\lambda).$$

De plus, on a $h_p(\lambda) = \iota^p(\lambda)$ où ι est définie dans le paragraphe 4.1.C.

Remarque 4.3.2 Considérons le graphe cristallin de \mathcal{M} indexé par les multipartitions Kleshchev. Soit $\mu \in \Lambda^0$. Supposons que le chemin reliant \emptyset à μ dans le graphe cristallin de \mathcal{M} est donné par :

$$\emptyset \xrightarrow{i_1} \mu^{(1)} \xrightarrow{i_2} \mu^{(2)} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} \mu^{(n-1)} \xrightarrow{i_n} \mu.$$

Alors, suivant la remarque 1.3.20 et la proposition ci-dessus, il existe des multipartitions $h_p(\mu) \in \Lambda^0$ avec $p = 0, \dots, l-1$ telles que un "chemin" reliant \emptyset à

$h_p(\underline{\mu})$ dans le graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$ est de la forme suivante :

$$\emptyset \xrightarrow{i_1 + \frac{pe}{l}} h_p(\underline{\mu}^{(1)}) \xrightarrow{i_2 + \frac{pe}{l}} h_p(\underline{\mu}^{(2)}) \dots \xrightarrow{i_{n-1} + \frac{pe}{l}} h_p(\underline{\mu}^{(n-1)}) \xrightarrow{i_n + \frac{pe}{l}} h_p(\underline{\mu}).$$

Cependant, on a $h_p(\underline{\lambda}) \neq \iota^p(\underline{\lambda})$ en général.

Remarquons qu'une proposition analogue a été montrée dans [42] par Hu pour $l = 2$ pour l'ordre AM en utilisant les propriétés du graphe cristallin de \mathcal{M} .

b) Considérons l'application ι du paragraphe 4.1.C :

$$\iota : (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l-1)}) \mapsto (\lambda^{(l-1)}, \lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(l-2)}).$$

Soit $\underline{\mu}$ une l -partition. On suppose que, sous l'action ι , le cardinal de la classe d'équivalence de $\underline{\mu}$ est égal à p . Alors, $\underline{\mu}$ est de la forme suivante :

$$\underline{\mu} = (\mu^{(0)}, \dots, \mu^{(p-1)}, \mu^{(0)}, \dots, \mu^{(p-1)}, \dots, \mu^{(0)}, \dots, \mu^{(p-1)}).$$

La proposition suivante est maintenant immédiate.

Proposition 4.3.3 *Soit $\underline{\mu}$ une l -partition de FLOTW. Alors on a équivalence entre les 2 assertions suivantes :*

- (i) *Le cardinal de la classe d'équivalence de $\underline{\mu}$ est égal à p .*
- (ii) *Avec les notations de la proposition 4.3.1, on a $h_{kp}(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda}$ pour $k = 1, \dots, \frac{l}{p} - 1$ et si s n'est pas un multiple de p , $h_s(\underline{\lambda}) \neq \underline{\lambda}$.*

Ces résultats vont maintenant nous permettre d'étudier les restrictions des $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples dans $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$.

4.3.B Paramétrisation des $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples à l'aide des multipartitions Kleshchev

Dans le théorème 4.2.4, nous avons vu qu'il existe un ensemble basique canonique $\mathcal{B}' \subset \text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n})$ en bijection avec $\text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n})$, le même théorème nous donne de plus la paramétrisation de cet ensemble.

Considérons M un $\mathcal{H}_{\mathbb{C}, n}$ -module simple, d'après le théorème 1.3.12, on a $M = D^\lambda$ pour une multipartition Kleshchev $\underline{\lambda} \in \Lambda^0_{\{e; \frac{e}{l}, \dots, \frac{(l-1)e}{l}\}}$. D'après le théorème 2.3.8, on a :

$$[S_{\mathbb{C}}^{\kappa(\underline{\lambda})}] = [D^\lambda] + \sum_{\substack{\underline{\mu} \in \Lambda^0 \\ a(\underline{\mu}) < a(\underline{\lambda})}} d_{S_{\mathbb{C}(y)}^{\kappa(\underline{\lambda})}, D^\mu} [D^\mu],$$

où κ est la bijection entre $\Lambda^0_{\{e; 0, \frac{e}{l}, \dots, \frac{(l-1)e}{l}\}}$ et $\Lambda^1_{\{e; 0, \frac{e}{l}, \dots, \frac{(l-1)e}{l}\}}$ définie en considérant les graphe cristallins de \mathcal{M} et de $\overline{\mathcal{M}}$. De plus, si $S_{\mathbb{C}(y)}^{\kappa(\underline{\lambda})}$ se restreint sur $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}(y), n}$ en une somme de r modules simples, alors D^λ se restreint sur $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ en une somme de r modules simples. En utilisant la proposition 4.3.3, on obtient le théorème suivant.

4.3. Une autre paramétrisation pour les modules simples de certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$

Théorème 4.3.4 Soit $\underline{\mu}$ une l -partition Kleshchev. Alors, on a équivalence entre les 2 assertions suivantes :

- (i) $D^\underline{\mu}$ se restreint sur $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ en une somme de $r := r(\underline{\mu})$ modules simples $M(\underline{\mu}, i)$ ($i = 1, \dots, r$) avec r divise l .
- (ii) Avec les notations de la remarque 4.3.2, on a $h_{\frac{k \cdot l}{r}}(\underline{\mu}) = \underline{\mu}$ pour $k = 1, \dots, r-1$ et si j n'est pas un multiple de $\frac{l}{r}$, $h_j(\underline{\mu}) \neq \underline{\mu}$.

Remarque 4.3.5 En particulier, si $h_k(\underline{\mu}) = \underline{\mu}$ pour tout $k = 1, \dots, l-1$, alors $l = r$ et $D^\underline{\mu}$ se restreint en une somme de l modules simples sur $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$. Si $h_k(\underline{\mu}) \neq \underline{\mu}$ pour $k = 1, \dots, l-1$, alors $r = 1$ et $\text{Res}(D^\underline{\mu})$ est un $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ -module simple.

Ainsi, on obtient une deuxième classification pour les $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}$ -modules simples en utilisant les multipartitions Kleshchev.

Corollaire 4.3.6 Avec les notations du théorème précédent, on a :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}'_{\mathbb{C}, n}) = \left\{ M(\underline{\mu}, i) \mid \underline{\mu} \in \Lambda_{\{e; 0, \frac{e}{l}, \dots, \frac{(l-1)e}{l}\}}^0, i = 1, \dots, r(\underline{\mu}) \right\}.$$

Finalement, nous terminons ce chapitre en détaillant les conséquences de ces résultats pour le type D_n où nous retrouvons les résultats obtenus par Hu. Nous prenons donc $l = 2$ et nous considérons ici l'algèbre $H'_\mathbb{C}$ de type D_n à paramètres η_e , une racine de l'unité d'ordre e pair dans \mathbb{C} (voir la section 3.2). Soit aussi $H_\mathbb{C}$ algèbre de Hecke de type B_n à paramètre $\{1, \eta_e\}$ (voir le paragraphe 3.2.C). Les modules simples de $H_\mathbb{C}$ sont indexés par les bipartitions Kleshchev $\Lambda_{\{e; 0, \frac{e}{2}\}}^0$ et on a une opération de restriction entre les $H_\mathbb{C}$ -modules et les $H'_\mathbb{C}$ -modules. On obtient alors le théorème suivant (voir aussi la remarque 4.3.5).

Théorème 4.3.7 (Hu [42]) Soit $\underline{\mu} \in \Lambda_{\{e; 0, \frac{e}{2}\}}^0$ alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Si $h_1(\underline{\mu}) \neq \underline{\mu}$ alors $M(\underline{\mu}, 1) := \text{Res}(D^\underline{\mu})$ est simple.
- (ii) Si $h_1(\underline{\mu}) = \underline{\mu}$ alors $\text{Res}(D^\underline{\mu})$ est une somme de deux H'_L -modules simples $M(\underline{\mu}, 1)$ et $M(\underline{\mu}, 2)$.
- (iii) L'ensemble

$$\left\{ M(\underline{\mu}, 1), M(\underline{\mu}, 2) \mid \underline{\mu} \in \Lambda_{\{e; 0, \frac{e}{2}\}}^0, h_1(\underline{\mu}) = \underline{\mu} \right\} \\ \cup \left\{ M(\underline{\mu}, 1) \mid \underline{\mu} \in \Lambda_{\{e; 0, \frac{e}{2}\}}^0, h_1(\underline{\mu}) \neq \underline{\mu} \right\}$$

forme l'ensemble des modules simples de $H'_\mathbb{C}$.

Exemple : Suivant [42], prenons $e = 4$ et $n = 4$, le tableau suivant donne l'ensemble des multipartitions Kleshchev et des multipartitions de FLOTW, deux multipartitions $\underline{\lambda} \in \Lambda^0$ et $\underline{\mu} \in \Lambda^1$ étant sur la même ligne si et seulement si $\underline{\mu} = \kappa(\underline{\lambda})$.

CHAPITRE 4 : CONSEQUENCES SUR LA THEORIE DES REPRESENTATIONS DES ALGEBRES CYCLOTOMIQUES DE TYPE $G(l, l, n)$

2-partition Kleshchev	2-partition de FLOTW
$(4, \emptyset)$	$(4, \emptyset)$
$(3, 1, \emptyset)$	$(3, 1, \emptyset)$
$(2, 2, \emptyset),$	$(2, 2, \emptyset)$
$(2, 1.1, \emptyset)$	$(2, 1, 1)$
$(3, 1)$	$(3, 1)$
$(2, 1, 1)$	$(2, 2)$
$(1.1.1, 1)$	$(1.1.1, 1)$
$(2, 2)$	$(\emptyset, 4)$
$(1.1, 2)$	$(1, 1, 2)$
$(1, 3)$	$(1, 3)$
$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$
$(1.1, 1, 1)$	$(1, 2, 1)$
$(1, 2, 1)$	$(\emptyset, 3, 1)$
$(\emptyset, 2, 2)$	$(\emptyset, 2, 2)$
$(1, 1.1, 1)$	$(1, 1.1, 1)$

Suivant ce tableau et les résultats ci-dessus, le $H_{\mathbb{C}(y)}$ -module $D^{(2,1,1)}$ se restreint sur $H'_{\mathbb{C}(y)}$ en deux $H'_{\mathbb{C}(y)}$ -modules simples et tous les autres $H_{\mathbb{C}(y)}$ -modules se restreignent en un seul module simple. On peut également remarquer que :

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(D^{(4,\emptyset)}) &\simeq \text{Res}(D^{(2,2)}), & \text{Res}(D^{(3,1,\emptyset)}) &\simeq \text{Res}(D^{(1,2,1)}), \\
 \text{Res}(D^{(1,1,1,1)}) &\simeq \text{Res}(D^{(2,1,1,\emptyset)}), & \text{Res}(D^{(1,1,2)}) &\simeq \text{Res}(D^{(2,1,1)}), \\
 \text{Res}(D^{(1,1,1,1)}) &\simeq \text{Res}(D^{(1,1,1,1)}), & \text{Res}(D^{(2,2,\emptyset)}) &\simeq \text{Res}(D^{(\emptyset,2,2)}), \\
 \text{Res}(D^{(3,1)}) &\simeq \text{Res}(D^{(1,3)}).
 \end{aligned}$$

Les modules suivants forment donc l'ensemble des $H'_{\mathbb{C}(y)}$ modules simples et ils sont non isomorphes.

$$\begin{aligned}
 &M((2, 1, 1), 1), M((2, 1, 1), 2), M((4, \emptyset), 1), M((3, 1, \emptyset), 1), M((2, 2, \emptyset), 1) \\
 &M((1, 1, 1, 1), 1), M((3, 1), 1), M((1, 1.1, 1), 1), M((1, 1, 2), 1).
 \end{aligned}$$

Chapitre 5

Calcul des matrices de décomposition pour les algèbres de Ariki-Koike

Le but de ce chapitre est de donner un algorithme pour le calcul de la matrice de décomposition des algèbres de Ariki-Koike. Dans [67], Uglov a déjà décrit un algorithme. Celui-ci consiste à calculer la base canonique d'un \mathcal{U}_b -module contenant $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$ et d'en déduire la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$.

Dans le cas particulier des algèbres de Hecke de type A_{n-1} , l'algorithme de Lascoux-Leclerc-Thibon (voir [50]), plus efficace que l'algorithme de Uglov, permet de calculer "directement" la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$. On pourra trouver dans [4] une présentation de celui-ci ainsi que de ses variations. L'algorithme exposé ici est une généralisation de ce résultat. Il consiste à suivre le preuve de la proposition 2.3.7 en calculant les éléments de la base canonique associés à $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$. Nous suivrons ici le schéma de l'algorithme de LLT (voir aussi le livre de Mathas [61, paragraphe 6.25]).

La deuxième partie du chapitre donne la programmation en GAP (voir [65]) de cet algorithme en utilisant le package Chevie ([30])¹. Ce programme permet entre autre d'énumérer les multipartitions de FLOTW associées à un système $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$, de donner les a -valeurs des modules simples d'une algèbre de Ariki-Koike et de calculer les matrices de décomposition "classiques" et "cristallines". Nous donnerons ensuite quelques exemples de matrices de décomposition calculées à l'aide de ce programme.

5.1 L'algorithme

Tout d'abord, rappelons les notations. Soit $L = \mathbb{Q}(\eta_e)$ où $\eta_e = \exp(\frac{2i\pi}{le})$. Soit $\eta_e = \exp(\frac{2i\pi}{e})$ et soient v_i ($i = 0, \dots, l-1$) des entiers tels que :

$$0 \leq v_0 \leq \dots \leq v_{l-1} < e.$$

¹Ce package n'est ici utilisé que pour obtenir une présentation "agréable" des matrices de décomposition.

On considère l'algèbre de Ariki-Koike $\mathcal{H}_{L,n}$ sur L à paramètres $\{\eta_e; \eta_e^{v_0}, \dots, \eta_e^{v_{l-1}}\}$.

Soit \mathcal{F} l'espace de Fock, on note $\overline{\mathcal{M}}$ le \mathcal{U}_v -module engendré par la multipartition vide avec l'action de JMMO. Soit Λ_1 l'ensemble des l -partitions de FLOTW avec système de paramètres $\{\eta_e; \eta_e^{v_0}, \dots, \eta_e^{v_{l-1}}\}$. Soit aussi la base canonique de $\overline{\mathcal{M}}$:

$$\mathfrak{B} = \{G(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1\}.$$

Le but est de calculer les éléments $G(\underline{\lambda})$ de façon récursive. Pour cela, nous allons suivre la démonstration de la proposition 2.3.7 :

Première étape :

Pour chaque l -partition $\underline{\lambda}$ de Λ_1 , on construit sa a -suite de résidus (voir la définition 2.2.4). Soit :

$$a\text{-suite}(\underline{\lambda}) = \underbrace{i_1, \dots, i_1}_{a_1}, \underbrace{i_2, \dots, i_2}_{a_2}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{a_s}.$$

On construit alors les éléments :

$$A(\underline{\lambda}) = f_{i_s}^{(a_s)} f_{i_{s-1}}^{(a_{s-1})} \dots f_{i_1}^{(a_1)} \underline{\emptyset}.$$

L'ensemble $\{A(\underline{\lambda}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_1\}$ forme une base de $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$ (où $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$).

Deuxième étape :

On calcule les éléments de la base canonique par récurrence :

- Soit $\underline{\lambda}$ une l -partition de Λ_1 de a -valeur maximale (à priori, $\underline{\lambda}$ n'est pas unique). On a alors :

$$G(\underline{\lambda}) = A(\underline{\lambda}).$$

- Soit $\underline{\mu}$ une l -partition de Λ_1 . On suppose, par induction, que l'on a calculé tous les éléments $G(\underline{\nu})$ avec $a(\underline{\mu}) < a(\underline{\nu})$. Il existe alors des polynômes de Laurent $\alpha_{\underline{\nu}, \underline{\mu}}(v)$ tels que :

$$G(\underline{\mu}) = A(\underline{\mu}) - \sum_{a(\underline{\nu}) > a(\underline{\mu})} \alpha_{\underline{\nu}, \underline{\mu}}(v) G(\underline{\nu}) \quad (1).$$

On note :

$$A(\underline{\mu}) = \underline{\mu} + \sum_{a(\underline{\lambda}) > a(\underline{\mu})} c_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \underline{\lambda}.$$

Où $c_{\underline{\mu}, \underline{\lambda}}(v) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. Comme $\overline{G(\underline{\mu})} = G(\underline{\mu})$ et $\overline{A(\underline{\nu})} = A(\underline{\nu})$ pour $\underline{\nu} \in \Lambda_1$ (voir le théorème 1.3.10), on veut :

$$\alpha_{\underline{\nu}, \underline{\mu}}(v) = \alpha_{\underline{\nu}, \underline{\mu}}(v^{-1}).$$

On utilise maintenant les propriétés de la base canonique : soit $\underline{\nu} \in \Lambda_1$ une des l -partitions de a -valeur minimale telle que :

$$c_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) \notin v\mathbb{Z}[v].$$

S'il n'y a pas de telles partitions, alors $G(\underline{\mu}) = A(\underline{\mu})$ par unicité de la base canonique. Sinon, par existence de la base canonique, $\underline{\nu}$ est nécessairement une l -partition de Λ_1 . Notons :

$$c_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) = a_i v^i + a_{i-1} v^{i-1} + \dots + a_0 + \dots + a_{-i} v^{-i},$$

où i est un entier positif. On définit :

$$\alpha_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) = a_{-i}v^i + a_{-i+1}v^{i-1} + \dots + a_0 + \dots + a_{-i}v^{-i}.$$

On a alors $\alpha_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v^{-1}) = \alpha_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v)$. On remplace alors dans (1) $A(\underline{\mu})$ par $A(\underline{\mu}) - \alpha_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v)G(\underline{\nu})$ et on réitère le procédé jusqu'à ce que $c_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) \in v\mathbb{Z}[v]$ pour tout $\underline{\nu}$ tel que $a(\underline{\nu}) > a(\underline{\mu})$.

Les éléments obtenus satisfont les propriétés de la base canonique :

- Ces éléments sont indexés par les éléments du graphe cristallin de $\overline{\mathcal{M}}$ c'est à dire par Λ_1 .
- Pour tout $\underline{\mu} \in \Lambda_1$, on a $\overline{G(\underline{\mu})} = G(\underline{\mu})$ car $\alpha_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) = \alpha_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v^{-1})$ pour tout $\underline{\nu} \in \Lambda_1$.
- Pour tout $\underline{\mu} \in \Lambda_1$, on a $G(\underline{\mu}) \equiv \underline{\mu} \pmod{v}$ car $c_{\underline{\mu}, \underline{\nu}}(v) \in v\mathbb{Z}[v]$ pour tout $\underline{\nu}$ tel que $a(\underline{\nu}) < a(\underline{\mu})$ et $c_{\underline{\mu}, \underline{\mu}}(v) = 1$.

Nous allons maintenant donner la programmation de cet algorithme en GAP :

5.2 Programmation de l'algorithme en GAP

Dans la première partie, nous donnons un programme permettant de citer l'ensemble des l -partitions de FLOTW associés à un système de paramètres. Nous donnons aussi des fonctions qui nous seront utiles par la suite.

5.2.A Détermination des multipartitions de FLOTW

Etant donnée une l -partition "lambda", le programme suivant construit son tableau de Young. Le résultat est donné sous forme d'une liste de triplets $[a, b, c]$ où a est la ligne de la boîte correspondante, b sa colonne et c le numéro de la partition (voir le paragraphe 1.3.C).

```
DiagramMultiPartition:=function(lambda,l)
local d,i,j,k;
d:=[];
  for k in [1..l] do
    for i in [1..Length(lambda[k])] do
      for j in [1..lambda[k][i]] do
        Add(d,[i,j,k]);
      od;
    od;
  od;
return Set(d);
end;
```

Exemple : Pour la 2-partition (2,1,1), on obtient :

```
#gap> DiagramMultiPartition([[2,1],[1]],2);
#[ [ 1, 1, 1 ], [ 1, 1, 2 ], [ 1, 2, 1 ], [ 2, 1, 1 ] ]
```

Le programme suivant donne la liste des boîtes de la frontière de “lambda” en utilisant les mêmes conventions.

```
DiagramMultiPartitionfrontiere:=function(lambda,l)
local d,i,k;
d:=[];
for k in [1..l] do
for i in [1..Length(lambda[k])] do
Add(d,[i,lambda[k][i],k]);
od;
od;
return Set(d);
end;
```

Exemple : Pour la 2-partition (2.1,1), on obtient :

```
#gap> DiagramMultiPartitionfrontiere([[2,1],[1]],2);
#[ [ 1, 1, 2 ], [ 1, 2, 1 ], [ 2, 1, 1 ] ]
```

On associe maintenant à chaque boîte écrit sous la forme $[a, b, c]$ comme ci-dessus son résidu par rapport à $\{q; q^{v_0}, \dots, q^{v_{l-1}}\}$. Celui-ci sera donné sous la forme q^{res} où la définition de res est donnée dans le paragraphe 1.3.C. Les paramètres seront écrits sous la forme d’une liste “parametre” $[v_0, v_1, \dots, v_{l-1}]$, q sera une racine de l’unité.

```
ResidueDiagram:=function(l,parametre,q,boite)
return q^(boite[2]-boite[1]+parametre[boite[3]]);
end;
```

Exemple : Lorsque l’algèbre de Ariki-Koike est à paramètre $\{q; q^0, q^1\}$ où q est une racine de l’unité d’ordre 4 et lorsque la boîte est $[1, 2, 1]$:

```
#gap> ResidueDiagram(2,[0,1],E(4), [ 1, 2, 1 ]);
#E(4)
```

La fonction suivante prend en argument une partition “mu” et un entier j . Elle renvoie la $j^{\text{ième}}$ part de “mu” (si j est plus grand que la hauteur de “mu”, elle renvoie 0).

```
Place:=function(liste,j)
if j>Length(liste) then return 0;
else return liste[j];
fi;
end;
```

Exemple : Pour la partition (2.1), $j = 3$ et $j = 1$, on obtient :

```
#gap> Place([2,1],3);
#0
#gap> Place([2,1],1);
#2
```

On teste maintenant la première condition des l -partitions de FLOTW (voir la définition 1.3.19) : étant donnés une l -partition “multipartition”, un système de paramètres “parametre” avec même convention que ci-dessus et une racine de l’unité d’ordre e , le programme renvoie 1 si “multipartition” vérifie la première condition et 0 sinon.

```

Condition1:=function(l,parametre,multipartition,e)
  local j,i,k;
  j:=1;
  while j<l do
    i:=1;
    while i<Length(multipartition[j+1])+1 do
      if Place(multipartition[j],i)<Place(multipartition[j+1],
        i+parametre[j+1]-parametre[j])
      then i:=Length(multipartition[j+1])+2;
      else i:=i+1;
      fi;
      od;
      if i=Length(multipartition[j+1])+2 then j:=l+2;
      else j:=j+1;
      fi;
    od;
  if j=l then
    k:=1;
    while k<Length(multipartition[1])+1 do
      if Place(multipartition[j],k)<Place(multipartition[1],
        k+parametre[1]-parametre[j]+e)
      then return 0;
      else k:=k+1;
      fi;
    od;
  fi;
  if j=l+2 then return 0;
  else return 1;
  fi;
end;

```

Exemple : Lorsque l'algèbre de Ariki-Koike est à paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ et $q = -1$, pour les 2-partitions $(2,1,1)$ et $(2,1.1,1)$, on obtient :

```

#gap> Condition1(2, [0,1], [[2,1], [1]], 2);
#1
#gap> Condition1(2, [0,1], [[2,1,1], [1]], 2);
#0

```

Avant de donner une fonction testant la seconde condition, nous avons des fonctions préliminaires : la fonction suivante donne l'ensemble des résidus de la frontière d'une l -partition "lambda" sur des parts de longueurs a .

```

Ensembleresidus:=function(l,parametre,lambda,q,a)
  local i,d,diag;
  i:=1;
  d:=[];
  diag:=DiagramMultiPartitionfrontiere(lambda,l);
  for i in [1..Length(diag)] do
    if diag[i][2]=a then
      Add(d,ResidueDiagram(l,parametre,q,diag[i]));
    fi;
  od;
end;

```

```

    fi;
i:=i+1;
od;
return Set(d);
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition $(2.1, 1, 1)$, le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec q racine primitive de l'unité d'ordre 4 et pour les parts de longueurs 1, on obtient :

```

#gap> Ensembleresidus(2, [0,1], [[2,1], [1,1]], E(4), 1);
#[ 1, -E(4), E(4) ]

```

La fonction suivante donne la plus grande part d'une l -partition "lambda".

```

Grandmax:=function(l,lambda)
local i,d;
d:=0;
i:=1;
for i in [1..l] do
    d:=Maximum(d,Place(lambda[i],1));
od;
return d;
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition $(2.1, 5.2.1)$, on obtient :

```

#gap> Grandmax(2, [[2,1], [5,2,3]]);
#5

```

On teste maintenant la seconde condition des l -partitions de FLOTW, avec les mêmes conventions que ci-dessus, la fonction suivante retourne 1 si la condition 2 est vérifiée, 0 sinon.

```

Condition2:=function(l,parametre,multipartition,e)
local i,j,p,q;
q:=E(e);
p:=Grandmax(l,multipartition);
i:=1;
while i in [1..p] do
    j:=Ensembleresidus(l,parametre,multipartition,q,i);
    if Length(j)=e then i:=p+2;
    else i:=i+1;
    fi;
od;
if i=p+1 then return 1;
else return 0;
fi;
end;

```

Exemple : Pour les 2-partitions $(2.1.1, 1)$ et $(2.1, 1)$, le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ et $q = -1$, on obtient :

```
#gap> Condition2(2,[0,1],[[2,1,1],[1]],2);
#0
#gap> Condition2(2,[0,1],[[2,1],[1]],2);
#1
```

Finalement, la fonction suivante renvoie l'ensemble des l -partitions de FLOTW associé à un système de paramètres "parametre", une racine de l'unité d'ordre e et un rang n . Le résultat est sous forme de liste de l -partitions.

```
FLOTW:=function(l,parametre,n,e)
  local i,ensemble,d;
  ensemble:=PartitionTuples(n,l);
  d:=[];
  i:=1;
  for i in [1..Length(ensemble)] do
    if Condition1(l,parametre,ensemble[i],e)=0 then i:=i+1;
    else if Condition2(l,parametre,ensemble[i],e)=0
      then i:=i+1;
    else Add(d,ensemble[i]);i:=i+1;
    fi;
  fi;
  od;
  return Set(d);
end;
```

Exemple : L'ensemble des 2-partitions de FLOTW de rang 6 avec paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec $q = -1$ est donné par :

```
#gap> FLOTW(2,[0,1],6,2);
#[ [ [ ], [ 6 ] ], [ [ 1 ], [ 4, 1 ] ], [ [ 1 ], [ 5 ] ],
#[ [ 2 ], [ 3, 1 ] ], [ [ 2 ], [ 4 ] ], [ [ 2, 1 ], [ 3 ] ],
#[ [ 3 ], [ 2, 1 ] ], [ [ 3, 1 ], [ 2 ] ], [ [ 4 ], [ 2 ] ],
#[ [ 4, 1 ], [ 1 ] ], [ [ 5 ], [ 1 ] ], [ [ 6 ], [ ] ] ]
```

5.2.B Détermination des a -suite de résidus

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.2.B, il est possible d'attacher à chaque multipartition de FLOTW une suite de résidus appelée a -suite possédant des propriétés de minimalité selon la a -fonction.

Le but de ce paragraphe est de donner un programme permettant d'associer à chaque multipartition de FLOTW, sa a -suite de résidus.

On commence par donner une fonction décrivant les "candidats" possibles pour commencer la a -suite de résidus d'une l -partition "lambda" c'est à dire les boîtes supprimables sur les parts de longueurs maximales. La fonction donne aussi l'ensemble des boîtes (non nécessairement supprimables) sur ces parts. Le résultat est donné sous la forme d'un doublet $[d, h]$ où d est la liste des boîtes supprimables sur les parts de longueurs maximales et h la liste des boîtes de la frontière sur ces parts.

```
Candidat:=function(l,lambda)
  local i,j,d,p,e;
  i:=1;
```

```

d:=[];
e:=[];
p:=Grandmax(l,lambda);
while i<l+1 do
  j:=1;
  if Place(lambda[i],1)<p then i:=i+1;
    else while lambda[i][j]=Place(lambda[i],j+1)
      do j:=j+1;
        Add(e,[j-1, lambda[i][j-1],i]);
      od;
    Add(d,[j, lambda[i][j],i]);
    Add(e,[j, lambda[i][j],i]);
    i:=i+1;
  fi;
od;
return [d,e];
end;

```

Exemple : On considère la 4-partition (3.2, 3.1, 3.3.2, 2.1) :

```

#gap> Candidat(4,[[3,2],[3,1],[3,3,2],[2,1]]);
#[ [ [ 1, 3, 1 ], [ 1, 3, 2 ], [ 2, 3, 3 ] ],
# [ [ 1, 3, 1 ], [ 1, 3, 2 ], [ 1, 3, 3 ], [ 2, 3, 3 ] ] ]

```

Soit “lambda” une l -partition et soient un système de paramètres “parametre” et q une racine primitive de l’unité. Le programme suivant donne la boîte du lemme 2.2.2 c’est à dire une boîte supprimable sur une part de longueur maximale, de résidu k , telle qu’il n’y a pas de boîtes de résidu $k - 1$ sur des parts de même longueur. Si il y a plusieurs choix, le programme renvoie la boîte la plus basse selon l’ordre de FLOTW. Le résultat est donné sous la forme d’un triplet $[a, b, c]$ correspondant à cette boîte.

```

Boiteoptimale:=function(l,q,lambda,parametre)
local i,j,d,p,r,s;
d:=Candidat(l,q,lambda);
p:=Length(d[1]);
s:=Length(d[2]);
r:=0;
i:=1;
while i<p+1 do
  j:=1;
  while j<s+1 do
    if ResidueDiagram(l,parametre,q,d[1][i])=
      ResidueDiagram(l,parametre,q,d[2][j])*q
      then j:=s+2;
    else j:=j+1;
    fi;
  od;
  if j=s+1 then r:=d[1][i];i:=p+2;
  else i:=i+1;
  fi;
end;

```

```

od;
return r;
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition (2, 2) et le système de paramètres $\{q; q^0, q^3\}$ avec q racine primitive de l'unité d'ordre 4 :

```

#gap> Boiteoptimale(2,E(4),[[2],[2]],[0,3]);
#[ 1, 2, 2 ]

```

Etant donné un entier a , la fonction suivante renvoie la liste de toutes les boîtes sur la frontière des parts de longueur a . Utilisant les mêmes notations que ci-dessus, le résultat est donné sous la forme d'une liste de boîtes.

```

Boitefront:=function(l,multipartition,a)
local i,d,k;
d:=[];
for k in [1..l] do
for i in [1..Length(multipartition[k])] do
if multipartition[k][i]=a
then Add(d,[i,multipartition[k][i],k]);
fi;
od;
od;
return Set(d);
end;

```

Exemple : Pour la 3-partitions (3.2.2, 2.1, 6.5.2) et $a = 2$:

```

#gap> Boitefront(3,[[3,2,2],[2,1],[6,5,2]],2);
#[ [ 1, 2, 2 ], [ 2, 2, 1 ], [ 3, 2, 1 ], [ 3, 2, 3 ] ]

```

Pour une l -partition "lambda", le programme suivant renvoie la l -partition obtenue en supprimant toutes les boîtes supprimables de résidu "res" sur les parts de longueur a . Le résultat est écrit sous forme d'un doublet $[\mu, d]$ où "mu" est la l -partition ainsi obtenue et d le nombre de boîtes supprimées.

```

Supprime:=function(l,q,lambda,res,a,parametre)
local i,d,k,e,mul;
mul:=Copy(lambda);
d:=0;
e:=DiagramMultiPartition(lambda,l);
k:=Boitefront(l,lambda,a);
for i in [1..Length(k)] do
if ResidueDiagram(l,parametre,q,k[i])=res then
if
a>Place(lambda[k[i][3]],[k[i][1]]+1)
then mul[k[i][3]][k[i][1]]:=a-1;
d:=d+1;
fi;
fi;
od;
return [mul,d];
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition (2,2.2.2), le système $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine primitive de l'unité d'ordre 4 et pour le résidu 1, on obtient :

```
#gap> Supprime(2,E(4),[[2],[2,2,2]],E(4),2,[0,2]);
#[ [ [ 1 ], [ 2, 2, 1 ] ], 2 ]
```

Maintenant, avec les mêmes notations, le programme suivant renvoie la l -partition obtenue en supprimant les boîtes de résidu “res” sur des parts supérieures aux parts des boîtes de la frontière de “lambda” ayant pour résidu “res-1” (voir l'énoncé du lemme 2.2.3).

```
asq:=function(l,q,parametre,lambda,res)
local k,p,i,mul,d,a,s;
d:=0;
mul:=Copy(lambda);
p:=Boiteoptimale(l,q,lambda,parametre);
a:=p[2];
while a>0 do
  k:=Boitefront(l,lambda,a);
  for i in [1..Length(k)] do
    if ResidueDiagram(l,parametre,q,k[i])*q=res then
      return [mul,res,d];
    fi;
  od;
s:=Supprime(l,q,mul,res,a,parametre);
mul:=s[1];d:=d+s[2];a:=a-1;od;
return [mul,res,d];
end;
```

Exemple : Pour la 2-partition (4.3.2,4.4.4) et pour le système $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4, en prenant “res= q^3 ”, on obtient :

```
#gap> asq(2,E(4),[0,2],[[4,3,2],[4,4,4]],E(4)^3);
#[ [ [ 3, 3, 1 ], [ 4, 4, 3 ] ], -E(4), 3 ]
```

La fonction suivante donne la a -suite de résidu d'une l -partition “lambda”. Le résultat est donné sous la forme d'une liste de listes :

$$[[[i_1, a_1], [i_2, a_2], \dots, [i_k, a_k]], \text{nu}]$$

où i_1, \dots, i_k sont les résidus et a_1, \dots, a_k le nombre de boîtes supprimées ayant ces valeurs pour résidus. Ici, les premières boîtes supprimées se trouvent au début de la liste. “nu” est la multipartition obtenue en supprimant toutes les boîtes c'est à dire la l -partition vide.

```
asequence:=function(q,parametre,lambda,n)
local l,res,mul,i,j,d,p,e;
l:=Length(lambda);
mul:=Copy(lambda);
d:=0;
e:=0;
j:=[];
while e<n do
```

```

p:=Boiteoptimale(1,q,mul,parametre);
res:=ResidueDiagram(1,parametre,q,p);
i:=asq(1,q,parametre,mul,res);
mul:=i[1];d:=i[3];Add(j,[res,d]);e:=e+i[3];
od;
return [j,mul];
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition (3,2, 2,1) de rang $n = 8$ avec paramètres $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 3, on obtient :

```

#gap> asequence(E(3),[0,2],[[3,2],[2,1]],8);
#[ [ [ E(3)^2, 1 ], [ 1, 2 ], [ E(3), 2 ], [ E(3)^2, 2 ],
#[ 1, 1 ] ],[ [ 0, 0 ], [ 0, 0 ] ] ]

```

Enfin, le programme “ordreflotw” prend en argument deux boîtes “boite1” et “boite2”. Il renvoie la boîte la plus basse selon l'ordre de FLOTW.

```

ordreflotw:=function(boite1,boite2,parametre)
if boite1[2]-boite1[1]+parametre[boite1[3]]<
    boite2[2]-boite2[1]+parametre[boite2[3]]
    then return boite1;
else if boite1[2]-boite1[1]+
    parametre[boite1[3]]=boite2[2]-boite2[1]
    +parametre[boite2[3]] then
    if boite1[3]>boite2[3] then return boite1;
    else return boite2;
    fi;
else return boite2;
fi;
end;

```

Exemple : Pour les boîtes [2, 1, 3] [3, 2, 2] et le système $\{q; q^0, q^2, q^3\}$, on obtient :

```

#gap> ordreflotw([2,1,3],[3,2,2],[0,2,3]);
#[ 3, 2, 2 ]

```

5.2.C Programmation de la a -fonction

Le but de cette partie est de programmer la a -fonction avec les notations du paragraphe 2.1.B (voir en particulier la proposition 2.1.2). Pour cela, nous devons introduire la notion de symbole.

La fonction suivante prend en argument une l -partition “lambda” et un entier h . Elle renvoie le symbole ordinaire de hauteur h associé sous la forme d'une liste, comme pour les l -partitions.

```

symbole:=function(l,lambda,h)
local i,j,mul;
mul:=Copy(lambda);
for i in [1..l] do

```

```

    for j in [1..h] do
        mul[i][j]:=Place(lambda[i],j)-j+h;
    od;
    od;
    return mul;
end;

```

Exemple : Pour $h = 2$ et la 2-partition $(2, 1)$:

```

#gap> symbole(2,[[2,1],[1]],2);
#[ [ 3, 1 ], [ 2, 0 ] ]

```

Etant donnés deux entiers l et h , le programme suivant calcule la fonction τ_B du paragraphe 2.1.B.

```

tau:=function(l,h)
local i,k;
i:=1;
k:=0;
while l*(h-i)+1>=2 do
    k:=NrCombinations([1..l*(h-i)+1],2)+k;i:=i+1;
od;
return k;
end;

```

Enfin, la fonction suivante calcule la a -fonction selon la proposition 2.1.2. Elle prend en argument une l -partition “lambda”, des entiers n , h et e et un système de paramètres “parametre”.

```

afonction1:=function(l,multipartition,n,h,parametre,e)
local i,j,k,p,s,c,B,a1,a2,a3,a4,v,w,x,y,z,i1,i2,B1,afonction,
                                                    poids,t;
poids:=[];
for t in [1..Length(parametre)] do
poids[t]:=parametre[t]-(t-1)*e/l+e;
od;
B:=symbole(l,multipartition,h);
B1:=0;
for i1 in [1..l] do
    for i2 in [1..h] do
        B1:=B1+B[i1][i2];
    od;
od;

a1:=0;
for i in [1..l] do
    a1:=a1+poids[i];
od;
a2:=0;
for j in [1..l] do
    for k in [j+1..l] do
        a2:=a2+Minimum(poids[k],poids[j]);
    od;
od;

```

5.2. Programmation de l'algorithme en GAP

```

    od;
od;
a3:=0;
for p in [1..l] do
  for s in [p..l] do
    for c in [1..h] do
      for v in [1..h] do
        if s=p then if B[p][c]>B[s][v] then a3:=a3+
                                Minimum(B[p][c]+poids[p],
                                B[s][v]+poids[s]);
                                else a3:=a3;fi;
        else a3:=a3+Minimum(B[p][c]+poids[p],B[s][v]+poids[s]
                                );fi;
      od;
    od;
  od;
od;
a4:=0;
for w in [1..l] do
  for x in [1..l] do
    for z in [1..h] do
      for y in [1..B[x][z]] do
        a4:=a4+Minimum(y+poids[x],poids[w]);
      od;
    od;
  od;
od;
afonction:=n*a1-tau(l,h)+B1-n-h*a2+a3-a4;
return afonction;
end;

```

La a -fonction étant indépendante de la hauteur du symbole h , nous pouvons donner un autre programme ne prenant pas en argument la hauteur :

```

afonction2:=function(l,multipartition,n,parametre,e)
local i,p;
p:=0;
for i in [1..Length(multipartition)] do
  p:=Maximum(p,Length(multipartition[i]));
od;
return afonction1(l,multipartition,n,p,parametre,e);
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition (2,1,1) et le système de paramètres $\{q; q^0, q^2\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4 et on obtient :

```

#gap> afonction2(2,[[2,1],[1]],4,[0,2],4);
#3

```

Nous ordonnons maintenant l'ensemble des l -partitions de FLOTW selon la a -fonction (ces fonctions nous servirons aussi par la suite).

```
func:=function(v,w) return v[2]<w[2];end;
func2:=function(v,w) return v[3]<w[3];end;
func3:=function(w,v) return v[2]>w[2];end;
```

Le programme suivant donne donc la liste ordonnée des l -partitions de FLOTW. Le résultat est mis sous la forme d'une liste : $[[\mu_1, a_1], [\mu_2, a_2], \dots]$ où les “ μ_j ” sont les l -partitions de FLOTW et “ a_j ” leurs a -valeurs.

```
FLOTW2:=function(l,parametre,n,e)
local k,liste,i;
liste:=FLOTW(l,parametre,n,e);
k:=[];
for i in [1..Length(liste)] do
  Add(k,[liste[i],afonction2(l,liste[i],n,parametre,e)]);
od;
Sort(k,func);
return k;
end;
```

Exemple : Le même exemple que ci-dessus donne :

```
#gap> FLOTW2(2,[0,1],6,2);
#[ [[ [ ], [ 6 ] ], 0 ], [ [ [ 6 ], [ ] ], 0 ],
# [ [ [ 1 ], [ 5 ] ], 1 ], [ [ [ 5 ], [ 1 ] ], 1 ],
# [ [ [ 2 ], [ 4 ] ], 2 ], [ [ [ 4 ], [ 2 ] ], 2 ],
# [ [ [ 1 ], [ 4, 1 ] ], 3 ], [ [ [ 4, 1 ], [ 1 ] ], 3 ],
# [ [ [ 2 ], [ 3, 1 ] ], 4 ], [ [ [ 2, 1 ], [ 3 ] ], 4 ],
# [ [ [ 3 ], [ 2, 1 ] ], 4 ], [ [ [ 3, 1 ], [ 2 ] ], 4 ] ]
```

5.2.D Calcul d'une base de $\overline{\mathcal{M}}$

Le but de cette partie est de programmer la base de $\overline{\mathcal{M}}$ donnée dans le corollaire 2.3.5. Nous programmons en particulier la fonction de i -induction f_i . Ensuite, nous nous servons de la programmation de la a -suite de résidus de la troisième partie pour programmer la base du corollaire 2.3.5.

Nous commençons par donner quelques fonctions intermédiaires : étant donné un système de paramètres “paramètre”, une racine de l'unité “ q ”, une l -partition “ μ ” et un résidu “ res ”, le programme suivant donne l'ensemble des boîte ajoutables à “ μ ” de résidu “ res ”.

```
Addable:=function(l,parametre,q,mu,res)
local i,j,liste,d;
liste:=[];
for i in [1..Length(mu)] do
  if ResidueDiagram(l,parametre,q,[1,Place(mu[i],1)+1,i])=res
    then Add(liste,[1,Place(mu[i],1)+1,i]);
  fi;
  j:=2;
  while j in [2..Length(mu[i])+1] do
    if Place(mu[i],j)=Place(mu[i],j-1) then j:=j+1;
    else if
      ResidueDiagram(l,parametre,q,[j,Place(mu[i],j)+1,i])=res
```

```

        then Add(liste,[j,Place(mu[i],j)+1,i]);
            j:=j+1;
    else j:=j+1;
    fi;fi;od;
od;
return liste;
end;

```

Exemple : Pour le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec $q = -1$, les boîtes ajoutables de résidus 1 de la 2-partition (2.1, 1) sont données par :

```

#gap> Addable(2,[0,1],-1,[[2,1],[1]],1);
#[ [ 1, 3, 1 ], [ 2, 2, 1 ], [ 3, 1, 1 ], [ 1, 2, 2 ],
#[ 2, 1, 2 ] ]

```

On programme maintenant une fonction analogue pour les boîtes supprimables.

```

Removable:=function(l,parametre,q,mu,res)
local i,j,liste;
liste:=[];
i:=1;
while i<=Length(mu) do
j:=1;
while j<Length(mu[i])+1 do
if mu[i][j]>Place(mu[i],j+1) then
if ResidueDiagram(l,parametre,q,[j,Place(mu[i],j),i]=res
then Add(liste,[j,Place(mu[i],j),i]);
fi;
fi;
j:=j+1;
od;
i:=i+1;
od;
return liste;
end;

```

Exemple : Pour le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec $q = -1$, les boîtes supprimables de résidus -1 de la 2-partition (2.1, 1) sont données par :

```

#gap> Removable(2,[0,1],-1,[[2,1],[1]],-1);
#[ [ 1, 2, 1 ], [ 2, 1, 1 ], [ 1, 1, 2 ] ]

```

La fonction suivante ajoute la boîte “boite” à la l -partition “mu” :

```

Addboite:=function(l,mu,boite)
local mul;
mul:=Copy(mu);
mul[boite[3]][boite[1]]:=Place(mul[boite[3]],boite[1])+1;
return mul;
end;

```

Exemple : La boîte [1, 3, 1] ajoutée à la 2-partition (2.1, 1) donne le résultat suivant :

```
#gap> Addboite(2, [[2,1], [1]], [1,3,1]);
#[ [ 3, 1 ], [ 1 ] ]
```

Nous programmons cette fois une fonction qui ajoute les “a1” boîtes de “listeboite” à “mu”.

```
Addplus:=function(l,mu,listeboite,a1)
local j,nu;
j:=a1;
nu:=Copy(mu);
while j>0 do
  nu:=[Addboite(l,nu[j],listeboite[j])];
  j:=j-1;
od;
return nu;
end;
```

Exemple : Les boîtes [1, 3, 1] et [2, 2, 1] ajoutées à la 2-partition (2.1, 1) donne le résultat suivant :

```
#gap> Addplus(2, [[2,1], [1]], [[1,3,1], [2,2,1]], 2);
#[ [ [ 3, 2 ], [ 1 ] ] ]
```

On programme maintenant la fonction $\overline{N}_i^b(\lambda, \mu)$ du paragraphe 1.3.D. Ici “liste” correspond à la liste des boîtes que l’on ajoute à partir de “lambda” pour obtenir “mu”.

```
Nib:=function(d,lambda,mu,parametre,q,res,liste)
local i,j,k,baj,bre,resu,boite,l;
k:=Length(liste);
resu:=0;
baj:=Addable(d,parametre,q,mu,res);
bre:=Removable(d,parametre,q,lambda,res);
for i in [1..k] do
  boite:=liste[i];
  for j in [1..Length(baj)] do
    if ordreflotw(boite,baj[j],parametre)=boite
      then resu:=resu+1;
    fi;
  od;
  for l in [1..Length(bre)] do
    if ordreflotw(boite,bre[l],parametre)=boite
      then resu:=resu-1;
    fi;
  od;
od;
return resu;
end;
```

Exemple : On considère la 3-partition (3.2, 1.1.1, 5.4.1). On ajoute la boîte [3, 1, 1] pour obtenir (3.2.1, 1.1.1, 5.4.1). Alors :

```
#gap> Nib(3,[[3,2],[1,1,1],[5,4,1]],[[3,2,1],[1,1,1],[5,4,1]],
#[1,1,2],E(3),E(3),[[3,1,1]]);
#1
```

Nous introduisons maintenant une indéterminée v .

```
v:=X(Rationals);v.name:="v";
```

Etant donné une l -partition “lambda” (notée λ), un résidu “res= q^{i_1} ”, un entier “a1”, un polynôme de Laurent “coeff” (notée α) le programme suivant calcule, selon les notations du paragraphe 1.3.B, l’expression :

$$\alpha \times f_{i_1}^{(a_1)} \cdot \lambda$$

Le résultat est donné sous forme d’une liste $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_k, y_k]]$ où les y_i ($i = 1, \dots, k$) sont les l -partitions apparaissant dans l’expression $\alpha \times f_{i_1}^{(a_1)} \cdot \lambda$ avec coefficient x_i ($i = 1, \dots, k$).

```
iinduction:=function(l,parametre,res,a1,lambda,coeff,v,q)
local i,liste2,liste,li,final,j;
li:=[];
liste2:=Addable(l,parametre,q,lambda,res);
if a1>Length(liste2) then return [];fi;
liste:=Combinations(liste2,a1);
for i in [1..Length(liste)] do
li:=Concatenation(li,Addplus(l,[lambda],liste[i],a1));
od;
final:=[];
for j in [1..Length(li)] do
Add(final,[coeff*v^Nib(l,lambda,li[j],
parametre,q,res,liste[j]),li[j]]);
od;
return final;
end;
```

Exemple : On calcule $f_1^{(2)} \cdot (1, \emptyset)$ lorsque le système de paramètres est $\{q; q^0, q^1\}$ avec $q = -1$.

```
#gap> iinduction(2,[0,1],-1,2,[[1],[ ]],1,v,-1);
#[ [ v^0, [ [ 2 ], [ 1 ] ] ], [ v^2, [ [ 1, 1 ], [ 1 ] ] ],
# [ v, [ [ 2, 1 ], [ ] ] ] ]
```

Le programme suivant simplifie une liste “liste” du même type que le résultat de la fonction précédente.

```
simplification:=function(liste)
local i,j,p,z,lis,li2;
lis:=[];
i:=1;
li2:=Copy(liste);
if Length(liste)=0 then return [];
else
while i<Length(liste)+1 do
```

```

z:=li2[i][1];
p:=li2[i][2];
if p=0 then i:=i+1;
else
  for j in [i+1..Length(liste)] do
    if liste[j][2]=p then z:=z+liste[j][1];li2[j][2]:=0;
    fi;
  od;
Add(lis,[z,p]);
i:=i+1;
fi;
od;
return lis;
fi;
end;

```

Exemple :

```

#gap>simplification([[v,[2,2]],[1,[2,2]],[1,[2,1]],[v+5,[2,1]],
#[v,[2,2]],[1,[2,2,1]]]);
#[ [ 2*v + 1, [ 2, 2 ] ], [ v + 6, [ 2, 1 ] ],
#[ 1, [ 2, 2, 2 ] ] ]

```

On écrit maintenant une fonction analogue à “induction”. Elle prendra cette fois en argument une liste de doublets : $[[b1, \mu], [b2, \nu], \dots]$. On calcule :

$$\alpha \times f_{i1}^{(a1)} \cdot (b1 \times \mu + b2 \times \nu + \dots)$$

```

inductioneten:=function(l,parametre,res,a1,liste,v,q)
local i,n,li,resu;
li:=[];
n:=Length(liste);
for i in [1..n] do
  li:=Concatenation(li,iinduction(l,parametre,res
                                ,a1,liste[i][2],liste[i][1],v,q));
od;
resu:=simplification(li);
return resu;
end;

```

Exemple : On calcule $f_0^{(1)} \cdot ((1, \emptyset, \emptyset) + v(\emptyset, 1, \emptyset))$ lorsque le système de paramètres est $\{q; q^0, q^0, q^0\}$ avec $q = -1$.

```

#gap> inductioneten(3,[0,0,0],1,1,[[1],[1],[ ]],[ ]),
#gap> [v,[[ ],[1],[ ]]],v,-1);
#[ [ v + v^(-1), [ [ 1 ] ], [ [ 1 ] ], [ [ ] ] ],
#[ v^0, [ [ 1 ] ], [ [ ] ], [ [ 1 ] ] ],
# [ v, [ [ ] ], [ [ 1 ] ], [ [ 1 ] ] ] ]

```

On programme maintenant la l -partition vide :

```

multivide:=function(d)
local i,l;

```

```

l:=[];
  for i in [1..d] do
    Add(l, []);
  od;
return l;
end;

```

Etant donnée une l -partition de FLOTW notée “multiflotw” de rang n avec un système de paramètres “parametre”, la fonction suivante calcule l’élément A (“multiflotw”) du corollaire 2.3.5 grâce à la fonction a -sequence qui détermine la a -suite de résidus associée à “multiflotw”.

```

aliste:=function(multiflotw,parametre,q,l,v,n)
local i,aseq,provi;
aseq:=Reversed(asequence(q,parametre,multiflotw,n)[1]);
provi:=[[1,multivide(1)]];
for i in [1..Length(aseq)] do
  provi:=inductioneten(l,parametre,
                      aseq[i][1],aseq[i][2],provi,v,q);
od;
return provi;
end;

```

Exemple : Pour la 2-partition de FLOTW (2.2,2.2.1) associée au système $\{q; q^0, q^1\}$ avec q racine primitive de l’unité d’ordre 4, on obtient :

```

#gap> aliste([[2,2],[2,2,1]],[0,1],E(4),2,v,9);
#[ [ v^0, [ [ 2, 2 ], [ 2, 2, 1 ] ] ],
# [ v, [ [ 2, 1 ], [ 2, 2, 2 ] ] ],
# [ v, [ [ 2, 2, 1, 1 ], [ 1, 1, 1 ] ] ],
# [ v^2, [ [ 2, 1, 1, 1, 1 ], [ 1, 1, 1 ] ] ],
# [ v^2, [ [ 2, 2 ], [ 1, 1, 1, 1, 1 ] ] ],
# [ v^3, [ [ 2, 1 ], [ 1, 1, 1, 1, 1, 1 ] ] ] ]

```

Maintenant, nous rajoutons la a -valeur de chaque l -partition dans la a -liste d’une l -partition de FLOTW “multiflotw”.

```

aliste2:=function(multiflotw,parametre,e,l,v,n)
local al,i;
al:=aliste(multiflotw,parametre,E(e),l,v,n);
for i in [1..Length(al)] do
  Add(al[i],afonction2(l,al[i][2],n,parametre,e));
od;
return al;
end;

```

Exemple :

```

#gap> aliste2([[2,1],[1]],[0,1],2,2,v,4);
#[ [ v^0, [ [ 2, 1 ], [ 1 ] ] ], 3 ] ]

```

Enfin, nous ordonnons les éléments des A (multiflotw) selon la a -fonction :

```

ordonaliste2:=function(multiflotw,parametre,e,l,v,n)
local k;
k:=aliste2(multiflotw,parametre,e,l,v,n);
Sort(k,func2);
return k;
end;

```

Exemple :

```

#gap> ordonaliste2([[2],[ ]],[0,1],2,2,v,2);
#[ [ v^0, [ [ 2 ], [ ] ], 0 ], [ v, [ [ 1 ], [ 1 ] ], 1 ],
# [ v^2, [ [ 1, 1 ], [ ] ], 2 ] ]

```

5.2.E Calcul de la Base canonique

Nous allons maintenant utiliser l'algorithme de la première section pour obtenir les éléments de la base canonique du module de plus haut poids $\overline{\mathcal{M}}$. Nous donnons tout d'abord quelques fonctions préliminaires.

La fonction suivante prend en argument une liste "liste" de type :

$$[[a_1, b_1, c_1], [a_2, b_2, c_2], \dots, [a_k, b_k, c_k]],$$

où, pour $i = 1, \dots, k$, a_i est un polynôme de Laurent, b_i une l -partition de a_i valeur c_i (comme ci-dessus) et un polynôme de Laurent "coeff". Le résultat est la liste "liste" où les a_i sont multipliées par "coeff".

```

multi:=function(liste,coeff,v)
local i,li;
li:=Copy(liste);
for i in [1..Length(liste)] do
  li[i][1]:=coeff*(li[i][1]);
od;
return li;
end;

```

Exemple :

```

#gap> multi([ [ v^0, [ [ 2 ], [ ] ], 0 ], [ v, [ [ 1 ], [ 1 ] ],
# 1 ], [ v^2, [ [ 1, 1 ], [ ] ], 2 ] ], [ v^2, [ [ 1, 1 ],
# [ ] ], 2 ] ],v,v);
# [ [ v, [ [ 2 ], [ ] ], 0 ], [ v^2, [ [ 1 ], [ 1 ] ], 1 ],
# [ v^3, [ [ 1, 1 ], [ ] ], 2 ] ]

```

Etant donné un polynôme de Laurent g de la forme suivante :

$$a_i v^i + a_{i-1} v^{i-1} + \dots + a_0 + \dots + a_{-i} v^{-i}$$

La fonction "barinv" ci-dessous retourne le polynôme de Laurent suivant (voir la section précédente) :

$$a_{-i} v^i + a_{-i+1} v^{i-1} + \dots + a_0 + \dots + a_{-i} v^{-i}$$

```

inversete:=function(g,v)
local f,h;
f:=Copy(g);
h:=Copy(g);
if f=0*v^0 then return f;fi;
if Degree(f)=0 then f:=f-LeadingCoefficient(f)*v^(Degree(f));fi;
  while f <> 0*v^0 and f<>0 do
    h:=h+LeadingCoefficient(f)*v^(-Degree(f));
    f:=f-LeadingCoefficient(f)*v^(Degree(f));
  od;
#h:=h+g;
return h;
end;

barinv:=function(f,v)
local g;
g:=f;
while Degree(g)>0 do
  g:=g-LeadingCoefficient(g)*v^(Degree(g));
od;
g:=inversete(g,v);
return g;
end;

```

Exemple : Pour le polynôme $v^4 + 2 + v^{-2}$, on obtient :

```

#gap> barinv(v^4+2*v^0+v^(-2),v);
#v^2 + 2 + v^(-2)

```

La fonction suivante est analogue à la fonction “simplification” sauf que la liste en argument est une liste de triplets.

```

simplification2:=function(liste)
local i,j,p,z,lis,li2;
lis:=[];
i:=1;
li2:=Copy(liste);
if Length(liste)=0 then return [];
else
while i<Length(liste)+1 do
  z:=li2[i][1];
  p:=li2[i][2];
  if p=0 then i:=i+1;
  else
    for j in [i+1..Length(liste)] do
      if liste[j][2]=p then z:=z+liste[j][1];li2[j][2]:=0;
      fi;
    od;
    Add(lis,[z,p,li2[i][3]]);
    i:=i+1;
  fi;
end;

```

```
od;return lis;
fi; end;
```

On peut maintenant déterminer la base canonique grâce à l'algorithme de la première section. On garde les mêmes notations que précédemment. La liste "Ensmulti" correspond à la liste des l -partitions de FLOTW associée au système "parametre".

Le résultat est donné sous forme d'une liste de triplets $[\lambda, a, \text{dec}]$ où " λ " est une l -partition de FLOTW, " a " est sa a -valeur et " dec " la décomposition de l'élément de la base canonique associée. Cet élément est écrit sous la forme de triplets comme pour le résultat de la fonction "aliste2".

```
Basecanonique:=function(parametre,e,l,v,n,Ensmulti)
local Ensmulti,i,coeff,k,loc,j,z,elem,r;
for i in [1..Length(Ensmulti)] do
  Add(Ensmulti[i],ordonaliste2(Ensmulti[i][1],parametre,e,l,v,n));
od;
i:=Length(Ensmulti)-1;
  while i>0 do
    k:=2;
    loc:=Ensmulti[i][3];
    while k<=Length(loc) do
      if Degree(loc[k][1])-EuclideanDegree(loc[k][1])<0 then

        z:=loc[k][2];
        coeff:=barinv(loc[k][1],v);
        r:=i;
        while Ensmulti[r][1]<>z do
          if r=Length(Ensmulti) then
            return [Ensmulti,z,
                    Length(Ensmulti),0,"erreur"];fi;
          r:=r+1;
        od;
        elem:=Ensmulti[r][3];
        loc:=simplification2(Concatenation(loc,
                                           multi(elem,(-coeff),v)));

        k:=k+1;
      else if Value(loc[k][1],0)=0
        then k:=k+1;
      else z:=loc[k][2];
        coeff:=barinv(loc[k][1],v);
        r:=i+1;
        while Ensmulti[r][1]<>z do
          if r=Length(Ensmulti)
            then return [Ensmulti,z,r-i,0,"erreur"];
          fi;
          r:=r+1;
        od;
        elem:=Ensmulti[r][3];
        loc:=simplification2(Concatenation(loc,
                                           multi(elem,(-coeff),v)));

```

5.2. Programmation de l'algorithme en GAP

```

        k:=k+1;
        fi;fi;
    od;
    Ensmulti[i][3]:=loc;
    i:=i-1;
od;
return Ensmulti;
end;

```

Exemple : Pour le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec $q - 1$ et pour $n = 3$:

```

#gap> Basecanonique([0,1],2,2,v,3,FLOTW2(2,[0,1],3,2));
#[ [ [ [ ], [ 3 ] ], 0,
#   [ [ v^0, [ [ ], [ 3 ] ], 0 ], [ v, [ [ 2 ], [ 1 ] ], 1 ],
#   [ v, [ [ 1, 1 ], [ 1 ] ], 3 ],
#   [ v^2, [ [ ], [ 1, 1, 1 ] ], 6 ] ] ]
#
# [ [ [ 3 ], [ ] ], 0, [ [ v^0, [ [ 3 ], [ ] ], 0 ],
#   [ v, [ [ 1 ], [ 2 ] ], 1 ],
#   [ v, [ [ 1 ], [ 1, 1 ] ], 3 ],
#   [ v^2, [ [ 1, 1, 1 ], [ ] ], 6 ] ] ],
# [ [ [ 1 ], [ 2 ] ], 1, [ [ v^0, [ [ 1 ], [ 2 ] ], 1 ],
#   [ v, [ [ ], [ 2, 1 ] ], 2 ],
#   [ v^2, [ [ 1 ], [ 1, 1 ] ], 3 ] ] ],
# [ [ [ 2 ], [ 1 ] ], 1,
#   [ [ v^0, [ [ 2 ], [ 1 ] ], 1 ], [ v, [ [ 2, 1 ], [ ] ], 2 ],
#   [ v^2, [ [ 1, 1 ], [ 1 ] ], 3 ] ] ] ]

```

La fonction suivante évalue l'élément de la base canonique en $v = 1$ pour obtenir les nombres de décompositions :

```

decomposition:=function(parametre,e,l,n,flotw)
local i,resu,v,j,liste;
i:=1;
v:=X(Rationals);
v.name:="v";
resu:=Basecanonique(parametre,e,l,v,n,flotw);
for i in [1..Length(resu)] do
    liste:=resu[i][3];
    for j in [1..Length(liste)] do
        resu[i][3][j]:=[Value(liste[j][1],1),liste[j][2],
                        liste[j][3]];
    od;
od;
return resu;
end;

```

Exemple : Pour le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec $q - 1$ et pour $n = 3$:

```

#gap> decomposition([0,1],2,2,3,FLOTW2(2,[0,1],3,2));
#[ [ [ [ ], [ 3 ] ], 0,
#   [ [ 1, [ [ ], [ 3 ] ], 0 ], [ 1, [ [ 2 ], [ 1 ] ], 1 ],

```

CHAPITRE 5 : CALCUL DES MATRICES DE DECOMPOSITIONS DES ALGEBRES
DE ARIKI-KOIKE

```
#      [ 1, [ [ 1, 1 ], [ 1 ] ], 3 ], [ 1, [ [ ],
#      [ 1, 1, 1 ] ], 6 ] ] ],
# [ [ [ 3 ], [ ] ], 0,
# [ [ 1, [ [ 3 ], [ ] ], 0 ], [ 1, [ [ 1 ], [ 2 ] ], 1 ],
# [ 1, [ [ 1 ], [ 1, 1 ] ], 3 ], [ 1, [ [ 1, 1, 1 ],
# [ ] ], 6 ] ] ],
# [ [ [ 1 ], [ 2 ] ], 1,
# [ [ 1, [ [ 1 ], [ 2 ] ], 1 ], [ 1, [ [ ], [ 2, 1 ] ], 2 ],
# [ 1, [ [ 1 ], [ 1, 1 ] ], 3 ] ] ],
# [ [ [ 2 ], [ 1 ] ], 1, [ [ 1, [ [ 2 ], [ 1 ] ], 1 ],
# [ 1, [ [ 2, 1 ], [ ] ], 2 ], [ 1, [ [ 1, 1 ], [ 1 ] ], 3 ] ] ] ]
```

Les fonctions “Crystal” et “Matricedecompo” renvoient une liste de triplets $[a, b, c, d]$ où a est la liste des l -partitions, b les a -valeurs associées, c les l -partitions de FLOTW et d les éléments de la base canonique associés dans le cas quantique et non quantique.

```
Crystal:=function(parametre,e,l,n)
local ensemble,ensemble1,ensemble2,avaleurs,decompo,base,long,
      ensemble4,flotw2,i,j,p,liste,lala,k,la,m,li,flotw,v;
v:=X(Rationals);
v.name:="v";
ensemble:=PartitionTuples(n,l);
long:=Length(ensemble);
flotw2:=[];
li:=[];
flotw:=[];
ensemble1:=[];
ensemble2:=[];
ensemble4:=[];
avaleurs:=[];
for i in [1..long] do
      Add(ensemble1,[ensemble[i],
      afunction2(1,ensemble[i],n,parametre,e)]);
od;
Sort(ensemble1,func3);
for i in [1..long] do
      Add(ensemble4,ensemble1[i][1]);
      Add(avaleurs,ensemble1[i][2]);
      if Condition1(1,parametre,ensemble1[i][1],e)
      +Condition2(1,parametre,ensemble1[i][1],e)=2
      then Add(flotw2,ensemble1[i]);
      Add(ensemble2,[ensemble1[i][1],i]);
      Add(flotw,ensemble1[i][1]);
      fi;
od;
decompo:=[];
Base:=Basecanonique(parametre,e,l,v,n,Copy(flotw2));
for j in [1..Length(ensemble2)] do
      m:=ensemble2[j][2];
      liste:=[];
```

5.2. Programmation de l'algorithme en GAP

```

lala:=Base[j][3];
for i in [1..long] do
  Add(liste,0);
od;
for k in [1..Length(lala)] do
  m:=j;
  la:=Base[j][3][k][2];
  while ensemble4[m]<>la do
    m:=m+1;
  od;
  p:=Base[j][3][k][1];
  if p=0*v^0 then liste[m]:=0;
    else if p=v^0 then liste[m]:=1;
      else liste[m]:=Base[j][3][k][1];
        fi;
    fi;
  od;
Add(li,liste);
od;
return [ensemble4,avaleurs,flotw,li];
end;

Matricedecompo:=function(parametre,e,l,n)
local ensemble,ensemble1,ensemble2,avaleurs,decompo,base,long,
  ensemble4,flotw2,i,j,p,liste,lala,k,la,m,li,flotw,v;
v:=X(Rationals);
v.name:="v";
ensemble:=PartitionTuples(n,1);
long:=Length(ensemble);
flotw2:=[];
li:=[];
flotw:=[];
ensemble1:=[];
ensemble2:=[];
ensemble4:=[];
avaleurs:=[];
for i in [1..long] do
  Add(ensemble1,[ensemble[i],
    fonction2(1,ensemble[i],n,parametre,e)]);
  od;
Sort(ensemble1,func3);
for i in [1..long] do
  Add(ensemble4,ensemble1[i][1]);
  Add(avaleurs,ensemble1[i][2]);
  if Condition1(1,parametre,ensemble1[i][1],e)
    +Condition2(1,parametre,ensemble1[i][1],e)=2
    then Add(flotw2,ensemble1[i]);
      Add(ensemble2,[ensemble1[i][1],i]);
      Add(flotw,ensemble1[i][1]);
    fi;
  fi;
end;

```

```

od;
decompo:=[];
Base:=decomposition(parametre,e,l,n,Copy(flotw2));
for j in [1..Length(ensemble2)] do
  m:=ensemble2[j][2];
  liste:=[];
  lala:=Base[j][3];
  for i in [1..long] do
    Add(liste,0);
  od;
  for k in [1..Length(lala)] do
    m:=j;
    la:=Base[j][3][k][2];
    while ensemble4[m]<>la do
      m:=m+1;
    od;
    p:=Base[j][3][k][1];
    if p=0*v^0 then liste[m]:=0;
      else if p=v^0 then liste[m]:=1;
        else liste[m]:=Base[j][3][k][1];
          fi;
        fi;
    od;
  Add(li,liste);
od;
return [ensemble4,avaleurs,flotw,li];
end;

```

Exemple : Pour q racine de l'unité d'ordre 4, $l = 1$ et $n = 4$:

```

#gap> Matricedecompo([0],4,1,4);
#[ [ [ [ 4 ] ], [ [ 3, 1 ] ], [ [ 2, 2 ] ], [ [ 2, 1, 1 ] ],
#   [ [ 1, 1, 1, 1 ] ] ], [ 0, 1, 2, 3, 6 ],
# [ [ [ 4 ] ], [ [ 3, 1 ] ], [ [ 2, 2 ] ], [ [ 2, 1, 1 ] ] ],
# [ [ 1, 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 1, 0, 0 ],
#   [ 0, 0, 0, 1, 1 ] ] ]

```

Les fonctions suivantes permettent d'écrire ces résultats sous forme de matrices :

```

ConcatenationStringList:=function(arg)
local res, a,l, delim;
l:=arg[1];
if Length(arg)=2 then delim:=arg[2];else delim=",";fi;
if Length(l)=0 then return ""; fi;
res:=ShallowCopy(l[1]);
for a in l{[2..Length(l)]} do Append(res,delim);
Append(res,a);
od;
return String(res);
end;

```

```

PartitionTupleToString:=
  p->ConcatenationStringList(List(p,IntListToString),".");

Essai1:=function(parametre,e,l,n)
local liste, i,j,k,long,loc;
liste:= Matricedecompo(parametre,e,l,n);
loc:=TransposedMat(liste[4]);
for i in [1..Length(loc)] do
  loc[i]:=Concatenation([ PartitionTupleToString(liste[1][i])
                        , "|" ,loc[i]);
od;
return loc;
end;

Essai2:=function(parametre,e,l,n)
local liste, i,j,k,long,loc;
liste:= Crystal(parametre,e,l,n);
loc:=TransposedMat(liste[4]);
for i in [1..Length(loc)] do
  loc[i]:=Concatenation([ PartitionTupleToString(liste[1][i]),
                        "|" ,loc[i]);
od;
return loc;
end;

DisplayFockBasis:=function(n,fbase)
local i,j;
for i in [1..Length(fbase)] do
  for j in [1..2*n-Length(fbase[i][1])] do
    Print(" ");
od;
Print(fbase[i][1]," ");
if fbase[i][2]<100 then
  Print(" ");
fi;
if fbase[i][2]<10 then
  Print(" ");
fi;
Print(fbase[i][2]," ");
for j in [3..Length(fbase[i])] do
  if fbase[i][j]=0 then
    Print(".");
  else
    Print(fbase[i][j]);
  fi;
od;
Print("\n");
od;
end;

```

Finalement, les deux fonctions suivantes donnent les matrices de décomposition “cristallines” et “classiques”.

```
MatrixDecomposition:=function(parametre,e,l,n)
return DisplayFockBasis(n,Essai1(parametre,e,l,n));
end;

CristalMatrixDecomposition:=function(parametre,e,l,n)
return PrintArray(Essai2(parametre,e,l,n));
end;
```

5.2.F Exemples

Pour le système de paramètres $\{q; q^0, q^1\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4 et pour $n = 4$, on obtient :

```
#gap> MatrixDecomposition([0,1],4,2,4);
# 4. | 1.....
# 3.1 | .1.....
# .4 | ..1.....
# 31. | 1..1.....
# 2.2 | .1..1.....
# 22. | ....1.....
# 1.3 | 1.1..1.....
# 21.1 | .....1.....
# 211. | ...1...1....
# 2.11 | .....1...
# .31 | ..1..1.....
# 11.2 | 1..1..1..1..
# 1.21 | .....1.
# 111.1 | ...1...1.1..
# 11.11 | ....1.....1
# .22 | ....1.....
# 1111. | .....1....
# .211 | .....1..1..
# 1.111 | .....1
# .1111 | .....1..
```

Pour le système de paramètres $\{q; q^0, q^1, q^3\}$ avec q racine de l'unité d'ordre 4 et pour $n = 4$, on obtient :

```
#gap> MatrixDecomposition([0,1,3],4,3,4);
# ..4 | 1.....
# 4.. | .1.....
# 1..3 | ..1.....
# .4. | ...1.....
# .1.3 | ....1.....
# 3..1 | 11...1.....
# ..31 | 1....1.....
# 3.1. | .....1.....
# .3.1 | .....1.....
# 2..2 | ..1....1.....
```

5.2. Programmation de l'algorithme en GAP

```

# .2.2 | 1..1.....1.....
# 1.3. | .1.1.....1.....
# ..22 | .....1.....
# 1.1.2 | ..1.....1...1.....
# 2.2. | .....1.....1.....
# 1..21 | .....1.....
# 31.. | .1...1.....
# 2.1.1 | ...1.....1.....
# 2..11 | 1....11.....1.....
# 11..2 | .....1.....
# 1.2.1 | 11.1.1...11.....1.....
# .1.21 | 1....1...1.....1.....
# 21..1 | .....1.....
# 22.. | .....1.....
# .2.11 | .....1.....
# .31. | ...1.....1.....
# 21.1. | .....1.....
# .11.2 | .....1.....
# 11.2. | .1...1...1.....1.....
# .21.1 | ...1.....11.....1.....
# 1.1.11 | 1....11...1.....1.11.....
# 2.11. | .....1.....
# 1.21. | .....1.....
# 11.1.1 | .....1...1...
# ..211 | .....1.....1.....
# .22. | .....1.....
# 1.11.1 | .....1...1.....1..
# 11..11 | .....1.....1..
# .11.11 | .....1.....11.....
# 1..111 | .....1.....1..1.....
# .1.111 | .....1.....1
# 211.. | .....1.....1.....
# 111..1 | .....1.....
# 11.11. | .....1.....1..
# 111.1. | .....1.....1.1.....
# .211. | .....1.....1.....
# .111.1 | .....1.....
# 1.111. | .....1.....
# ..1111 | .....1.....
# 1111.. | .....1.....
# .1111. | .....1.....

```

CHAPITRE 5 : CALCUL DES MATRICES DE DECOMPOSITIONS DES ALGEBRES
DE ARIKI-KOIKE

Bibliographie

- [1] S. ARIKI *On the semisimplicity of the Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$* . J. Algebra, 169 : 216-225, 1994.
- [2] S. ARIKI, *Representation theory of a Hecke algebra of $G(r, p, n)$* . J. Algebra, 177 : 164-185, 1995.
- [3] S. ARIKI, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$* . J. Math. Kyoto Univ., 36, no.4 : 789-808, 1996.
- [4] S. ARIKI, *Lectures on cyclotomic Hecke algebras*. Quantum groups and Lie theory (Durham, 1999) London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 290 : 1-22, 2001.
- [5] S. ARIKI, *On the classification of simples modules for Cyclotomic Hecke algebras of type $G(m, 1, n)$ and Kleshchev multipartitions*. Osaka J. Math., 38 : 827-837, 2001.
- [6] S. ARIKI, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*. Univ. Lecture Series, 26, AMS, 2002.
- [7] S. ARIKI, K. KOIKE *A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations*. Adv. Math., 106, no.2 : 216-243, 1994.
- [8] S. ARIKI, A. MATHAS, *The number of simple modules of the Hecke algebras of type $G(r, 1, n)$* . Math. Z., 233, no.2 : 601-623, 2000.
- [9] C. BESSENRODT, *On pairs of partitions with steadily decreasing parts*. J. Combin. Theory Ser.A, 99, no.1 : 162-174, 2002.
- [10] K BREMKE, G. MALLE, *Reduced words and a length function for $G(e, 1, n)$* . Indag. Math., 8, no.4 : 453-469, 1997.
- [11] M. BROUÉ, S. KIM, *Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques*. Adv. Math., 172, no.1 : 53-136, 2002.
- [12] M. BROUÉ, G. MALLE, *Zyklotomische Heckealgebren*. Astérisque, 212 : 119-189, 1993.
- [13] C.W. CURTIS, *Representations of Hecke algebras. Orbites unipotentes et représentations*. Astérisque, 168, no.9 : 13-60, 1988.
- [14] C. CURTIS, I. REINER, *Methods of Representation Theory vol.1*. Wiley. New York, 1990.
- [15] E. DATE, M. JIMBO, A. KUNIBA, T. MIWA, M. OKADO, *Paths, Maya diagrams and representations of $\widehat{\mathfrak{sl}}(r, C)$* . Adv. Stud. Pure Math., 19 : 149-191, 1989.
- [16] R. DIPPER, G. JAMES, *Representations of Hecke algebras of general linear groups*. Proc. London Math Soc., 52 : 20-52, 1986.

Bibliographie

- [17] R. DIPPER, G. JAMES, *Representations of Hecke algebras of type B_n* . J. Algebra, 146-2 : 454-481, 1992.
- [18] R. DIPPER, G. JAMES, E. MATHAS, *Cyclotomic q -Schur algebras*. Math. Z., 229-3 : 385-416, 1998.
- [19] R. DIPPER, G. JAMES, E. MURPHY, *Hecke algebras of type B_n at roots of unity*. Proc. L.M.S, 70 : 505-528, 1995.
- [20] R. DIPPER, A. MATHAS, *Morita equivalences of Ariki-Koike algebras*. Math. Z., 240, no. 3 : 579-610, 2002
- [21] J. DU, H. RUI, *Ariki-Koike algebras with semisimple bottoms*. Math. Z., 234, no. 4 : 807-830, 2000.
- [22] O. FODA, B. LECLERC, M. OKADO, J-Y THIBON, T. WELSH, *Branching functions of $A_{n-1}^{(1)}$ and Jantzen-Seitz problem for Ariki-Koike algebras*. Adv. Math., 141, no. 2 : 322-365, 1999.
- [23] M. GECK, *Brauer trees of Hecke algebras*. Comm. Algebra, 20, no. 10 : 2937-2973, 1992.
- [24] M. GECK, *The decomposition numbers of the Hecke algebra of type E_6* . Comp. Math., 61, no. 204 : 889-899, 1993.
- [25] M. GECK, *Beiträge zur Darstellungstheorie von Iwahori-Hecke Algebren*. Aachener Beitr. Math., vol.11, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, 1995.
- [26] M. GECK, *Representations of Hecke algebras at roots of unity*. Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98. Astérisque No. 252 : 33-55, 1993.
- [27] M. GECK, *Kazhdan-Lusztig cells and decomposition numbers*. Representation theory (electronic journal), 2 : 264-277, 1998.
- [28] M. GECK, *On the representation theory of Iwahori-Hecke algebras of extended finite Weyl groups*. Representation theory (electronic journal), 4 : 370-397, 2000.
- [29] M. GECK, *On the number of simple modules of Iwahori-Hecke algebras of finite Weyl groups*. Bul. Stiit. Univ. Baia Mare, Ser. B, 16 : 235-246, 2000.
- [30] M. GECK, G. HISS, F. LÜBECK, G. MALLE, G. PFEIFFER, *CHEVIE - A system for computing and processing generic character tables*. Universität Heidelberg : 1995.
- [31] M. GECK, L. IANCU, G. MALLE, *Weights of Markov traces and generic degrees*. Indag. Math., 11 : 379-397, 2000.
- [32] M. GECK, K. LUX, *The decomposition numbers of the Hecke algebra of type F_4* . Manuscripta Math., 70, no. 3 : 285-306, 1991.
- [33] M. GECK, G.PFEIFFER, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, 2000.
- [34] M. GECK, R.ROUQUIER, *Centers and simple modules for Iwahori-Hecke algebras*, in Finite reductive groups, related structures and representations (M. Cabanes, ed.), Progress in Math. 141, Birkhäuser, Boston : 251-272, 1997.
- [35] M. GECK, R.ROUQUIER, *Filtrations on projective modules for Iwahori-Hecke algebras*. Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), de Gruyter, Berlin : 211-221, 2001.

Bibliographie

- [36] G. GENET, *On the decomposition matrices for graded algebras*. J. Algebra, 274 : 523-542, 2004.
- [37] D.M. GOLDSCHMIDT, *Lectures on character theory*. Publish or Perish, Berkeley, 1980.
- [38] J. GRAHAM, G. LEHRER, *Cellular algebras*. Invent. Math., 123 : 1-34, 1996.
- [39] A. GYOJA, *Modular representation theory over a ring of higher dimension with applications to Hecke algebras*. J. Algebra, 174 : 553-572, 1995.
- [40] T. HAYASHI, *q-analogues of Clifford and Weyl algebras*. Comm. Math. Phys., 127 : 129-144, 1990.
- [41] P. N. HOEFSMIT, *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN pairs of classical type*. Thèse de doctorat, University of British Columbia, Vancouver, 1974.
- [42] J. HU, *Crystal bases and simple modules for Hecke algebra of type D_n* . J. Algebra, 267 : 7-26, 2003.
- [43] I. M. ISAACS, *Character theory of finite groups*. Dover Pub. inc., 1976.
- [44] N. IWAHORI, *On a structure of Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 10 : 215-236, 1964.
- [45] J.C JANTZEN, *Lectures on quantum groups*. Graduate Studies in Math., 6, AMS, Providence, RI, 1996.
- [46] G.D JAMES, *The irreducible representations of the finite general linear groups*. Proc. London Math. Soc., 52 : 236-268, 1986.
- [47] M. JIMBO, K. MISRA, T. MIWA, M. OKADO, *Combinatorics of representations of $U_q(\widehat{sl}(n))$ at $q = 0$* . Comm. Math. Phys., 136 : 543-566, 1991.
- [48] M. KASHIWARA, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebra*. Duke J. Math., 63 : 465-516, 1991.
- [49] D. A. KAZHDAN, G. LUSZTIG, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*. Invent. Math., 53 : 165-184, 1979.
- [50] A. LASCoux, B. LECLERC, J-Y. THIBON, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*. Comm. Math. Phys. 181, no. 1 : 205-263, 1996.
- [51] G. LUSZTIG, *On a theorem of Benson and Curtis*. J. Algebra, 71 : 490-498, 1981.
- [52] G. LUSZTIG, *Left cells in Weyl groups*. Lie Group Representations, Lecture Notes in Math., vol. 1024, Springer-Verlag : 99-111, 1983.
- [53] G. LUSZTIG, *Characters of reductive groups over a finite field*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, 107, 1984.
- [54] G. LUSZTIG, *Left cells in Weyl groups 2*. J. Algebra, 109 : 536-548, 1987.
- [55] G. LUSZTIG, *Left cells in Weyl groups 3*. J. Fac Sci. Univ. Tokyo 34 : 223-243, 1987.
- [56] G. LUSZTIG, *Leading coefficients of character values of Hecke algebras*. The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), Proc. Sympos. Pure Math., 47, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence : 235-262, 1987.
- [57] G. MALLE, *Unipotente Grade imprimitiver komplexer Spiegelungsgruppen*. J.Algebra, 177 : 768-826, 1995.

Bibliographie

- [58] G. MALLE, *On the rationality and fake degrees of characters of cyclotomic algebras*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 6, no. 4 : 647–677, 1999.
- [59] G. MALLE, A. MATHAS, *Symmetric cyclotomic Hecke algebras*. J. Algebra, 205 : 275-293, 1998.
- [60] A. MATHAS, *Simple modules of Ariki-Koike algebras*. Group representations : cohomology, group actions and topology (Seattle, WA, 1996), Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, 63 : 383-396, 1998.
- [61] A. MATHAS, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*. University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, 15, 1999.
- [62] A. MATHAS, *The representation theory of the Ariki-Koike and cyclotomic q -Schur algebras*. Adv. Studies Pure Math. to appear.
- [63] J. MÜLLER *Zerlegungszahlen für generische Iwahori-Hecke Algebren von exzeptionellem Typ*. thèse de doctorat, Aachen, 1995.
- [64] J. MÜLLER *Decomposition numbers for generic Iwahori-Hecke algebras of non-crystallographic type*. J. Algebra, 125-149, 189, 1997.
- [65] M. SCHÖNERT et al., *GAP - Groups, Algorithms and Programming*. Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, Germany, fourth ed., 1994.
- [66] R. STEINBERG *A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field*. Tran. Amer. Math. Soc., 274-282, 71, 1951.
- [67] D. UGLOV, *Canonical bases of higher-level q -deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials*. Physical combinatorics (Kyoto, 1999), 249-299, Progr. Math., 191, 2000.

Index

- action
 - de JMMO, 32
 - d'Hayashi, 30
- a -fonction de Lusztig, 37
- a -graphe, 57
- algèbre
 - asymptotique, 37
 - cyclotomique de type $G(l, l, n)$, 98
 - de Ariki-Koike, 22
 - de Hecke, 17
 - de Kac-Moody de type $A_{e-1}^{(1)}$, 26
 - quantique, 26
 - symétrique, 16
- algorithme de Lascoux-Leclerc-Thibon, 111
- anneau de valuation, 14
- application de décomposition, 15
- a -suite de résidus, 55
- a -valeur
 - associée aux algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$, 102, 103
 - associée aux algèbres de Ariki-Koike, 47
 - associée aux algèbres de Hecke, 37
 - de type A_{n-1} , 81
 - de type B_n , 82
 - de type B_n à paramètres inégaux, 84
 - de type D_n , 86
- base
 - canonique, 28
 - cristalline, 27
 - de Kazhdan-Lusztig, 36
- boîte, 28
 - ajoutable, 29
 - bonne, 29
 - normale, 29
 - supprimable, 29
- condition de séparation, 24
- conjuguée
 - d'une multipartition, 23
 - d'un module, 100
- couverture projective, 16
- défaut d'un module, 88
- déployée, 14
- diagramme de Young, 28
- élément de Schur, 16
 - pour les algèbres de Ariki-Koike, 46
 - pour les algèbres de Hecke, 37
- ensemble basique canonique
 - pour les algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$, 104
 - pour les algèbres de Ariki-Koike, 69
 - pour les algèbres de Hecke, 39
- factorisation de l'application de décomposition, 79
- fonction de trace symétrisante, 16
- frontière d'une multicomposition, 48
- graphe cristallin, 27
- groupe
 - de Grothendieck, 14
 - de Weyl étendu, 40
- hauteur, 44
 - d'une composition, 44
 - d'une multicomposition, 44
 - d'un symbole, 44
- involution barre, 27
- matrice

- d'ajustement, 79
- de décomposition, 15
- mauvais nombres premiers, 17
- module de Specht, 19, 20, 23
- m -symbole, 45
- multicomposition, 44
- multipartition, 22
 - de FLOTW, 33
 - Kleshchev, 29
- ordre
 - de dominance, 24
 - AM', 73
 - d'Ariki-Mathas, 29
 - de FLOTW, 32
- partition, 19
 - e -régulière, 19
- polynôme
 - cyclotomique, 88
 - de Poincaré, 88
- puissances divisées, 26
- réciprocité de Brauer, 15
- résidu, 28
- rang
 - d'une multipartition, 22
 - d'une partition, 19
- spécialisation, 14
- suite de résidus, 49
- symbole ordinaire, 44
- système de charges, 45
- théorème
 - d'Ariki, 32
 - de déformation de Tits, 15
- théorie de Clifford, 99

RÉSUMÉ en Français

Soit W un groupe de Weyl fini et soit H l'algèbre de Hecke correspondante, définie sur l'anneau $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ où v est une indéterminée. Soit K le corps des fractions de A et soit $\theta : A \rightarrow L$ une spécialisation dans un corps L de "bonne" caractéristique. Dans une série d'articles récents, M.Geck et R.Rouquier ont présenté une méthode pour déterminer l'ensemble des H_L -modules simples $\text{Irr}(H_L)$. Celle-ci consiste à construire un "ensemble basique canonique" $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$ défini grâce à la a -fonction de Lusztig et en bijection avec $\text{Irr}(H_L)$. Le but de ce travail est de déterminer explicitement \mathcal{B} pour tout groupe de Weyl et pour toute spécialisation puis d'étendre la méthode ci-dessus aux algèbres de Ariki-Koike. Comme conséquences, nous obtenons un algorithme pour le calcul des matrices de décompositions des algèbres de Ariki-Koike et une caractérisation des modules simples pour certaines algèbres cyclotomiques de type $G(l, l, n)$.

TITRE en Anglais

Modular representations of Hecke algebras and Ariki-Koike algebras.

RÉSUMÉ en Anglais

Let W be a finite Weyl group and let H be the associated Hecke algebra defined over the ring $A := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ where v is an indeterminate. Let K be the field of fractions of A and let $\theta : A \rightarrow L$ be a specialisation in a field L . We assume that the characteristic of L is "good". Then, using Lusztig's a -function, M.Geck and R.Rouquier have defined a "canonical basic set" $\mathcal{B} \subset \text{Irr}(H_K)$ which leads to the determination of the set $\text{Irr}(H_L)$. The aim of this work is to find explicitly this set for all W and for all θ and to extend these results to the case of Ariki-Koike algebras. As consequences, we obtain an algorithm for the computation of the decomposition matrices for Ariki-Koike algebras and a characterisation of the simple modules for some cyclotomic Hecke algebras of type $G(l, l, n)$.

DISCIPLINE

Mathématiques Pures

MOTS-CLÉS

Algèbres de Hecke, Algèbres de Ariki-Koike, matrice de décomposition, ensemble basique canonique, a -fonction de Lusztig, algorithme de Lascoux-Leclerc-Thibon, base canonique, groupe quantique, théorème d'Ariki.

INTITULÉ ET ADRESSE DE L'UFR OU DU LABORATOIRE

Institut Girard Desargues
Université Claude Bernard Lyon 1
Bâtiment Braconnier (ex-101)
21 avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne cedex
France