



HAL
open science

**INTERPRETATIONS PROBABILISTES
D'OPERATEURS SOUS FORME DIVERGENCE ET
ANALYSE DE METHODES NUMERIQUES
ASSOCIEES**

Miguel Martinez

► **To cite this version:**

Miguel Martinez. INTERPRETATIONS PROBABILISTES D'OPERATEURS SOUS FORME DIVERGENCE ET ANALYSE DE METHODES NUMERIQUES ASSOCIEES. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2004. Français. NNT : . tel-00006472

HAL Id: tel-00006472

<https://theses.hal.science/tel-00006472v1>

Submitted on 15 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Interprétations probabilistes d'opérateurs sous
forme divergence et analyse de méthodes
numériques probabilistes associées.**

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 29 juin 2004

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Provence

par

Miguel MARTINEZ

Composition du jury

| Président | nom | lieu. |
|--------------|--|--|
| Rapporteurs | LÉPINGLE Dominique VERETENNIKOV A. Yu | Université d'Orléans. Université de Leeds. |
| Examinateurs | PARDOUX Étienne PAGÈS Gilles | Université de Marseille. Université Paris VI. |
| Directeur | TALAY Denis | INRIA Sophia-Antipolis. |

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Denis TALAY sans qui ce travail n'aurait pas été possible. Sa patience éternelle, son obstination clairvoyante et son dynamisme ont été d'importants soutiens au cours de ces trois années et demi.

Monsieur Dominique LEPINGLE a spontanément accepté, malgré sa très lourde charge de travail, de rapporter cette thèse dans un court délai. Je lui suis très reconnaissant pour sa relecture attentive du manuscrit qui a permis d'en améliorer considérablement la rédaction. Ses travaux précurseurs sur le schéma d'Euler (E.D.S réfléchies et multivoques) font de lui un pionnier des méthodes numériques pour les processus irréguliers : je tiens à le remercier chaleureusement pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de soutenance de cette thèse.

Monsieur Alexander VERETENNIKOV m'a fait le double honneur d'accepter de rapporter cette thèse et de participer au jury. La richesse de ses travaux sur les relations entre les équations aux dérivées partielles et les processus stochastiques ainsi que sur la discrétisation des processus m'a grandement motivé. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté cette lourde tâche.

Je tiens également à remercier Messieurs Etienne PARDOUX et Gilles PAGÈS pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse. La puissance de leurs travaux reste pour moi une source intarissable d'inspiration.

Je saisis cette occasion pour remercier Monsieur Axel GRORUD, décédé brutalement cette année. L'intérêt qu'il a toujours porté aux idées que je lui présentais, son immense générosité demeureront pour moi un exemple.

Antoine LEJAY a joué un rôle extrêmement important dans ce travail de recherche. Une grande partie de cette thèse est directement inspirée de ses travaux. Je tiens à le remercier chaleureusement pour avoir accepté de travailler avec moi sur ce sujet passionnant.

Je remercie tout aussi chaleureusement la Fondation FINRISK-Zürich qui a accepté de financer la fin de cette thèse par le biais de Mme Rajna GIBSON.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Madame Sylvie MÉLÉARD pour m'avoir initié à la recherche et pour m'avoir présenté toute l'équipe OMEGA.

Je souhaite également remercier Mireille BOSSY, Jean-François COLLET, et Etienne TANRÉ pour les connaissances qu'ils m'ont apportées, leur disponibilité, leur gentillesse, et leur infinie patience à mon égard.

Je remercie tous les thésards du projet OMEGA - Ziyu ZHENG, Christophe BERTHELOT, Awa DIOP - et tout particulièrement Olivier BARDOU qui a accepté que l'on travaille ensemble sur la statistique des processus asymétrisés et qui a su partager avec moi les mêmes doutes. J'ai énormément apprécié sa convivialité, son dynamisme et son invincible curiosité scientifique. J'espère que cette collaboration se poursuivra.

J'ai une pensée pour Monsieur DONG et Madame LAPLACE qui m'ont fait découvrir la rigueur et la beauté des mathématiques et m'ont communiqué leur joie.

Je voudrais témoigner toute ma gratitude à Mathias ORTNER : son intuition débordante, sa compréhension profonde des probabilités ne m'empêcheront pas de le remercier ici pour son soutien quotidien et son amitié sans faille.

Enfin, je remercie Lucero, ma famille, mes amis, auprès de qui j'ai puisé l'énergie nécessaire à la réalisation de cette thèse.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Interprétation probabiliste | 11 |
| 1.1 | Introduction | 11 |
| 1.2 | Résultats analytiques sur le problème de Cauchy | 11 |
| 1.2.1 | Le problème de Cauchy | 12 |
| 1.2.2 | Existence d'une solution fondamentale au sens faible | 12 |
| 1.3 | Quelques outils stochastiques | 13 |
| 1.3.1 | Classification des processus de Dirichlet | 13 |
| 1.3.2 | Décomposition de Lyons-Zheng | 15 |
| 1.4 | Représentation stochastique du semi-groupe fondamental | 16 |
| 1.4.1 | Un théorème de représentation en dimension quelconque | 17 |
| 1.4.2 | Représentation du semi-groupe fondamental dans le cas unidimensionnel | 18 |
| 1.4.3 | Pourquoi le temps local ? | 22 |
| 1.5 | Conclusion | 28 |
| 2 | Schéma d'Euler | 29 |
| 2.1 | Introduction | 29 |
| 2.1.1 | Faire « disparaître » le temps local : la transformation de Zvonkin | 30 |
| 2.1.2 | Le schéma d'Euler | 31 |
| 2.1.3 | Principaux résultats | 32 |
| 2.2 | Résultats préliminaires | 32 |
| 2.2.1 | Le problème parabolique | 32 |
| 2.2.2 | Estimation pour les dérivées partielles de la solution pour une classe restreinte de conditions initiales | 33 |
| 2.2.3 | Aplatissement local de la condition initiale : interpolation polynômiale | 43 |
| 2.3 | Quelques résultats sur le schéma d'Euler | 48 |
| 2.4 | Vitesse de convergence de l'algorithme | 56 |
| 2.4.1 | Notations | 56 |
| 2.4.2 | Décomposition de l'erreur : mise en rapport des termes du premier ordre | 56 |
| 2.4.3 | Compensation des termes de premier ordre | 65 |
| 2.4.4 | Etude des restes | 66 |
| 2.4.5 | Erreur globale du schéma en fonction de la condition initiale | 68 |
| 2.4.6 | Graphique représentant les principaux termes intervenant dans la décomposition de l'erreur du schéma | 71 |
| 2.5 | Résultats numériques | 72 |
| 3 | Un nouveau schéma | 75 |
| 3.1 | Introduction | 75 |
| 3.2 | Removing the drift | 77 |
| 3.3 | Existence of a stochastic process | 79 |
| 3.3.1 | Using Dirichlet forms | 79 |
| 3.3.2 | Using the properties of the semi-group | 79 |
| 3.3.3 | Using the scale function and the speed measure | 80 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.4 | Properties of the semi-group | 80 |
| 3.5 | Convergence results | 81 |
| 3.6 | On diffusions with discontinuous coefficients | 83 |
| 3.7 | Approximation by diffusions with piecewise constant coefficients | 84 |
| 3.7.1 | SDE satisfied by the approximation | 84 |
| 3.8 | Numerical simulations | 86 |
| 3.8.1 | What is computed? | 86 |
| 3.8.2 | The algorithm | 87 |
| 3.8.3 | The random variables that should be simulated. | 88 |
| 3.8.4 | Coupling with other algorithms | 89 |
| 3.8.5 | Localization | 89 |
| 3.9 | Estimation of the error | 89 |
| 3.9.1 | The elliptic case | 89 |
| 3.9.2 | The parabolic case | 90 |
| 3.10 | Résultats numériques | 93 |
| 3.10.1 | Implémentation | 93 |
| 3.10.2 | Cas test n° 1 | 93 |
| 3.10.3 | Cas test n° 2 | 94 |
| 4 | Représentation probabiliste | 99 |
| 4.1 | Introduction | 99 |
| 4.1.1 | Présentation | 99 |
| 4.1.2 | Etudes réalisées dans la littérature | 100 |
| 4.2 | Resultats préliminaires | 100 |
| 4.2.1 | Cadre formel : problème de Cauchy-Neumann et formes de Dirichlet | 100 |
| 4.2.2 | Une nouvelle description de la forme de Dirichlet associée au semi-groupe fondamental | 104 |
| 4.3 | Estimées pour la densité | 109 |
| 4.3.1 | Borne supérieure | 109 |
| 4.3.2 | Le problème de la borne inférieure | 112 |
| 4.4 | Représentation probabiliste de la solution du problème de Poisson-Neumann | 115 |
| 4.4.1 | Convergence vers la mesure invariante | 115 |
| 4.4.2 | Résultat principal : énoncé et démonstration | 117 |
| 4.5 | Description of the process X in the one-dimensional case | 119 |
| 4.5.1 | Description of the process | 120 |
| 4.6 | Conclusion | 122 |
| 5 | Diffusions réfléchies à dérive singulière | 123 |
| 5.1 | Introduction | 123 |
| 5.2 | Résumé du résultat d'Engelbert et Schmidt | 124 |
| 5.3 | Le cas des D.R. | 125 |
| 5.3.1 | Introduction | 125 |
| 5.3.2 | Résultats préliminaires | 125 |
| 5.3.3 | Existence en loi d'une solution | 129 |
| 5.3.4 | Conditions nécessaires pour l'existence en loi d'une solution dans le cas des D.R. | 130 |
| 5.3.5 | Unicité | 132 |
| 5.4 | Le cas des D.R.D.S. | 135 |
| 5.5 | Le cas particulier d'une D.D.S. « discrète » | 138 |
| 5.5.1 | L'équation différentielle... | 138 |
| 5.5.2 | Résultats préliminaires | 139 |
| 5.5.3 | Changement de temps pour la construction... | 140 |
| 5.5.4 | Unicité : fin de la preuve du théorème 5.5.1 | 141 |
| 5.6 | Statistique des processus asymétriques | 143 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.6.1 | Introduction | 143 |
| 5.6.2 | Estimation of the skew coefficient α when the locus of the asymetry is known | 143 |
| 5.6.3 | Process with drift | 149 |
| 5.6.4 | Invariant measure of the process X | 150 |
| 5.7 | Estimation in the general case : work in progress with Olivier Bardou | 150 |
| 5.7.1 | Estimator of γ | 155 |
| 5.7.2 | Numerical results | 157 |
| A | Rappels : sommes de Riemann et fonctions à variation bornée | 161 |
| B | Estimation pour les solutions de problèmes paraboliques | 165 |
| B.1 | Notations | 168 |

Introduction générale

Cette thèse est consacrée à l'analyse de méthodes numériques probabilistes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles qui font intervenir un opérateur sous forme divergence.

Les opérateurs sous forme divergence sont utilisés pour la modélisation de phénomènes physiques très variés dont la dynamique dépend crucialement des propriétés du milieu ambiant. C'est le cas par exemple du problème de la diffusion de la chaleur dans la matière, de l'étude des champs électriques et magnétiques produits par un certain milieu (par exemple le cerveau), de l'analyse de la pression hydrostatique dans les milieux poreux (Loi de Darcy), etc.

Prenons par exemple le problème posé par la mesure de l'activité électrique (Eléctro-Encéphalographie (E.E.G.)) et magnétique (Magnéto-Encéphalographie (M.E.G.)) du cortex. Il apparaît (cf. la publication du projet Odyssey de l'INRIA [12] eq. (25)) que cette activité est mesurée par la solution u d'une E.D.P. elliptique qui s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}_{\text{MEG}}) \begin{cases} \nabla \cdot [a(x) \nabla u(x)] & = f(x) \text{ le point } x \text{ appartient au cerveau} \\ \langle \nabla u(x), \vec{\mathbf{n}}_x \rangle & = 0 \text{ à la surface de la boîte crânienne} \end{cases} \quad (1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 .

- f est la divergence de la source de courant primaire (cette fonction sera supposée connue),
- $\vec{\mathbf{n}}_x$ désigne la normale unitaire sortante à la boîte crânienne en x ,
- $a(x)$ désigne une matrice qui tient compte des coefficients de conductivité de la matière cérébrale (cortex, matière grise, matière blanche, etc.) au point x .

Il est raisonnable de penser que toutes les couches du cerveau participent à la diffusion et à la propagation de l'activité magnétique : cela se traduit en supposant l'hypothèse d'ellipticité forte pour le coefficient a : il existe λ et Λ deux constantes strictement positives telles que

$$\mathbf{H1} : \lambda |\xi|^2 \leq \langle a(x)\xi, \xi \rangle \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \text{cerveau} \quad (2)$$

Nous voyons donc que lorsque a est entièrement connu, si l'on fait abstraction des problèmes liés à la géométrie de la boîte crânienne, les résultats classiques sur la formulation variationnelle des E.D.P. elliptiques (cf. [18]) nous permettent d'affirmer que le problème $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$ possède une unique solution dans un certain espace (ici l'espace sera H^1 (cerveau)).

Ainsi, malgré toutes les difficultés liées à la géométrie des couches de matière qui forment le cerveau (on dispose maintenant de maillages pour des surfaces aussi complexes que le cortex cérébral) et lorsque a et f sont connues, la résolution approchée de cette équation par des méthodes numériques **déterministes** classiques (volumes finis, éléments finis, etc.) peut-être conduite avec succès.

Néanmoins, les méthodes numériques probabilistes pourraient être utiles : par exemple, quand on considère $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$ comme un problème inverse dont le but est d'identifier $a(x)$, l'algorithme développé par le projet Odyssey et d'autres projets à l'INRIA nécessitent, à chacune des itérations d'un algorithme d'optimisation, de calculer la solution d'une équation de type (1) en un petit nombre de points (là où ont été placés des capteurs) en vue de comparer les valeurs ainsi obtenues aux mesures expérimentales. Des méthodes de Monte-Carlo permettent d'effectuer ce calcul sans que l'on ait à résoudre le problème $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$ dans tout le domaine.

Pour mettre en oeuvre les méthodes de Monte-Carlo dans le contexte que nous venons de décrire, il faut franchir plusieurs étapes :

- la première consiste à associer à l'opérateur $A := \nabla \cdot [a \nabla u]$ un certain processus aléatoire X dont la loi est étroitement reliée à $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$ via une formule de type Feynman-Kac ;
- la seconde consiste à trouver un schéma de discrétisation pour le processus X et d'en analyser l'erreur.

Dans le cas du problème $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$, la première étape est rendue difficile par le fait que l'application a , qui représente la conductivité du milieu, est naturellement discontinue aux endroits où les différentes couches qui forment la matière cérébrale se superposent. Ces discontinuités rendent impossible l'application des résultats classiques de la théorie des processus : c'est la raison pour laquelle nous serons amenés dans ce travail à utiliser la théorie des formes de Dirichlet (cf. [15]).

Avant de nous attaquer au problème $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$, nous commençons tout d'abord à nous intéresser au problème de Cauchy (\mathcal{P}) associé à A dans tout l'espace \mathbb{R}^d (d est la dimension). Ce problème est plus simple que le problème $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$ car il n'y a plus de conditions aux bords :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u(t, x) - \nabla \cdot [a(x) \nabla u(t, x)] = 0 \text{ pour } (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = \phi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (3)$$

La fonction $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude de l'interprétation probabiliste du problème de Cauchy (\mathcal{P}) . La description du processus fournie par la théorie des formes de Dirichlet ne permet pas pour l'instant, dans ce cas trop complexe, de construire une méthode simple pour discrétiser le processus X sans faire d'hypothèses supplémentaires : en effet, le processus X n'est pas, en général, une semi-martingale mais un processus de Dirichlet admettant une décomposition de Lyons-Zheng. Sa description est donnée à partir d'une équation très non-linéaire. C'est la raison pour laquelle nous travaillerons exclusivement dans un cadre unidimensionnel et sous l'hypothèse que la fonction a est à variations bornées. Il est alors possible de décrire le processus X à l'aide d'une équation différentielle stochastique qui fait intervenir son propre temps local et dans ce cas, X est une semi-martingale.

Les Chapitres 3 et 4 sont tout deux consacrés à l'étude de méthodes numériques probabilistes construites à partir de la représentation probabiliste obtenue au Chapitre 2.

- A partir de cette représentation, il est naturel de proposer un schéma d'Euler dont nous étudions, au Chapitre 3, la vitesse de convergence faible.
- Il apparaît également que X est construit à partir de transformations simples (changement d'échelle et de temps) du Mouvement Brownien Asymétrique (M.B.A.). Cela nous permet de proposer un nouveau schéma de discrétisation, fondé cette fois-ci sur des approximations locales de X par des M.B.A.. Nous analysons l'erreur de ce nouveau schéma au Chapitre 4.

Au Chapitre 5, nous exhibons une représentation probabiliste pour les solutions du problème de Poisson avec conditions de Neumann associé à A : le problème $(\mathcal{P}_{\text{MEG}})$ est en fait un cas particulier de ces équations. Une nouvelle fois dans le cas unidimensionnel (intervalle), nous pouvons décrire le processus X associé à ce problème à l'aide d'une équation différentielle stochastique qui fait intervenir le temps local, mais à la différence du Chapitre 2, la solution de cette équation différentielle stochastique est réfléchie sur les bords de l'intervalle.

L'équation obtenue au Chapitre 5 nous amène naturellement à étudier, dans le Chapitre 6, les propriétés d'existence et d'unicité pour une certaine classe d'E.D.S. qui font intervenir le temps local (dérive singulière) et qui sont doublement réfléchies sur les bords d'un intervalle : les Diffusions Réfléchies à Dérive Singulière (D.R.D.S.). Nous établissons également dans ce chapitre des résultats pour l'estimation des paramètres pour les D.R.D.S..

Il reste encore beaucoup à faire pour passer des résultats obtenus pour le problème de Cauchy 1D au problème de Poisson-Neumann 3D et cette question constitue un défi particulièrement motivant pour l'analyse des méthodes de Monte-Carlo.

Chapitre 1

Interprétation probabiliste d'opérateurs sous forme divergence

1.1 Introduction

Dans cette partie nous nous attacherons à décrire de la manière la plus concise possible les résultats concernant les processus associés aux opérateurs sous forme divergence dont le coefficient est uniformément elliptique, mesurable et homogène. Nous présentons tout d'abord les résultats « analytiques » concernant la construction de la solution fondamentale **au sens faible** associée à l'opérateur. Nous énonçons ensuite les résultats qui permettent de décrire le processus de Markov associé au semi-groupe d'opérateurs généré par la solution fondamentale **au sens faible**. Pour finir nous traiterons plus spécifiquement du cas unidimensionnel qui va nous occuper tout au long de cette thèse. Dans ce cas, il s'avère que le processus de Markov que nous étudions est la solution faible d'une équation différentielle stochastique faisant intervenir le temps local (EDSTL). Si le coefficient de l'opérateur possède des discontinuités, il n'est plus possible d'utiliser la formule des temps d'occupation qui permettait, dans le cas d'un coefficient régulier, d'interpréter l'EDSTL comme une équation différentielle stochastique au sens classique. En travaillant sur le cas le plus simple d'un coefficient qui ne possède qu'une seule discontinuité, nous essaierons d'expliquer les raisons pour lesquelles le temps local apparaît naturellement dans l'équation.

1.2 Résultats analytiques sur le problème de Cauchy

Soit $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable matricielle satisfaisant la condition d'uniforme ellipticité : il existe λ et Λ deux constantes strictement positives telles que

$$\boxed{\mathbf{H1} : \lambda |\xi|^2 \leq \langle a(x)\xi, \xi \rangle_d \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d} \quad (1.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^d .

On considère l'opérateur différentiel A , associé à la fonction a et défini formellement par la formule

$$A = \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a \nabla \right] \quad (1.2)$$

1.2.1 Le problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy (\mathcal{P}) associé à l'opérateur A

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u(t, x) - Au(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = \phi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1.3)$$

où $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Définition 1.2.1. La fonction $u : (0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **solution faible** du problème de Cauchy (\mathcal{P}) si :

- $u \in L^\infty[\delta, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)] \cap L^2[\delta, T; W^1_{2,loc}(\mathbb{R}^d)]$ pour tout $\delta \in (0, T)$,
- $\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \{-u \partial_t \psi + a \partial_x u \partial_x \psi\} = 0 \quad \forall \psi \in C_0^{1,1}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$,
- $\phi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et u a la valeur initiale ϕ en $t = 0$, ce qui signifie que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \psi(x) dx$$

pour tout $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$.

Dans cette définition, le 0 en indice des espaces $C_0^{1,1}$ et C_0^1 signifie que les fonctions s'annulent à l'infini : cette restriction est faite pour assurer l'intégrabilité du produit $u(t, \cdot) \psi(\cdot)$ lorsque ϕ n'appartient que localement à $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.2.2. Il est possible de montrer que toute solution faible u du problème (\mathcal{P}) a un représentant continu sur $(0, T] \times \mathbb{R}^d$ (cf. [2]). Dans toute la suite, on fera toujours l'analogie entre u et son représentant continu. Ainsi, il n'y a pas d'ambiguïté pour parler de la valeur de u en chaque point de son domaine de définition.

On définit maintenant la classe de fonctions \mathcal{E}^2 qui intervient pour l'unicité des solutions faibles du problème (\mathcal{P}).

Définition 1.2.3. Une fonction $u : (0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à la classe \mathcal{E}^2 si et seulement si il existe un réel $\beta \geq 0$ tel que :

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta|x|^2} u^2(t, x) dx < +\infty$$

Le premier résultat important sur lequel nous allons appuyer notre étude est le

Théorème 1.2.4. (cf. Aronson [2])

Sous l'hypothèse **H1** et si ϕ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution faible $u \in \mathcal{E}^2$ sur $(0, T] \times \mathbb{R}^d$ au problème de Cauchy (\mathcal{P}).

1.2.2 Existence d'une solution fondamentale au sens faible

Le théorème qui suit est fondamental pour toute la suite.

Théorème 1.2.5. (cf. Aronson [2] et Roskosz [44])

Supposons que l'hypothèse **H1** est vérifiée.

Pour tout $(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d$, il existe une unique fonction $\Gamma(t, x; \cdot, \cdot) : (0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

- pour tout p et q tels que $2 < p, q \leq +\infty$ et $\frac{d}{2p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, $\Gamma(t, x; \cdot, \cdot) \in L^{q^*}[0, T; H^{1,p^*}(\mathbb{R}^d)]$ et

$$\|\|\Gamma(t, x; \cdot, \cdot)\|\|_{p^*, q^*} \leq C$$

où C est une constante qui ne dépend que de T , des constantes λ et Λ et des exposants p et q ,

- si on suppose que $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la solution faible du problème de Cauchy (\mathcal{P}) dans \mathcal{E}^2 admet la représentation

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(t, x; 0, \xi) \phi(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

pour tout $(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d$

- $\Gamma(t, x; \tau, \xi) = 0$ pour tout $\tau > t$.
- si u désigne la solution du problème de Cauchy (\mathcal{P}) donnée par le théorème 1.2.4,

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,y)} u(t, x) = \phi(y)$$

en tout point y de continuité de la fonction ϕ .

La fonction Γ sera appelée la **solution fondamentale au sens faible** associée à l'opérateur A .

La solution fondamentale au sens faible associée à l'opérateur A possède de nombreuses propriétés décrites dans la

Proposition 1.2.6.

- **Estimées d'Aronson** (cf. [2])

Il existe des constantes positives α_1, α_2 et C dépendantes uniquement de T des constantes λ et Λ et telles que :

$$C^{-1}g_1(t - \tau, x - \xi) \leq \Gamma(t, x; \tau, \xi) \leq Cg_2(t - \tau, x - \xi)$$

pour tout (t, x, τ, ξ) tel que $t > \tau$ et où g_1 , (resp. g_2) désigne la solution fondamentale au sens classique associée à l'opérateur $\alpha_1 \Delta$ (resp. $\alpha_2 \Delta$).

- **Equations de Chapman-Kolmogorov**

$\forall \eta \in (\tau, t)$,

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(t, x; \eta, \zeta) \Gamma(\eta, \zeta; \tau, \xi) d\zeta$$

- **Continuité fellerienne (Stroock [49])**

On définit la fonction $p : (0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par l'égalité

$$p(t, x, y) \triangleq \Gamma(t, x; 0, y) \quad (1.5)$$

pour tout $(t, x, y) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. La solution p engendre un unique semi-groupe de Feller sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ noté $\{P_t; 0 < t \leq T\}$, fortement continu, markovien, et défini par

$$P_t \phi(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} dy \phi(y) p(t, x, y) \quad \forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

- De plus (cf. [44] (2.6) p.96), pour tout x réel fixé et pour tout q tel que $q^* \in (2, +\infty]$, il existe une constante C_1 ne dépendant que de T , de q et des constantes λ et Λ , telle que

$$\|\partial_y p(\cdot, x, \cdot)\|_{1,q} \leq C_1(q) < +\infty \quad (1.6)$$

1.3 Quelques outils stochastiques

1.3.1 Classification des processus de Dirichlet

Un processus de Dirichlet est un processus qui peut s'écrire comme la somme d'une martingale locale et d'un processus dont la variation quadratique est identiquement nulle : cette définition est ambiguë et car il faut définir exactement la notion de variation quadratique.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $T > 0$ un réel fixé.

1.3.1.1 Processus de Dirichlet forts

Définition 1.3.1. On appelle subdivision d'arrêt de l'intervalle $[0, T]$ toute suite croissante de temps d'arrêts $\Pi_\tau \triangleq \{\tau_i : i \in \mathbb{N}\}$ stationnaire (i.e. à partir d'un certain rang la suite $\{\tau_i(\omega) : i \in \mathbb{N}\}$ est constante pour presque tout ω) avec $\tau_0 = 0$ et $\tau_\infty = T$. On note \mathbb{T} l'ensemble de toutes les subdivisions de temps d'arrêts de $[0, T]$ et pour tout τ dans \mathbb{T} , on note $|\Pi_\tau|$ et on appelle « pas de Π_τ » la valeur de $\mathbb{E} \left[\sup_{i \in \mathbb{N}} (\tau_{i+1} - \tau_i) \right]$.

Si X désigne un processus sur Ω et Π_τ une subdivision d'arrêt, nous notons :

$$Q_\tau(X) \triangleq \sum_{\tau_k \in \Pi_\tau} |X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}|^2 \quad (1.7)$$

Nous noterons \mathcal{Q} l'espace des processus \mathcal{F}_t -adaptés, à trajectoires continues sur $[0, T]$, et tels que $\{Q_\tau(X) : \Pi_\tau \in \mathbb{T}\}$ est bornée dans $L^1(\mathbb{P})$.

Définition 1.3.2. Si $X \in \mathcal{Q}$, on définit

$$\|X\|_{\mathcal{Q}} = \sup_{\Pi_\tau \in \mathbb{T}} \mathbb{E}[Q_\tau(X)]^{\frac{1}{2}} \quad (1.8)$$

On peut alors montrer la

Proposition 1.3.3. (cf. Bertoin [6])

$(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ est un espace de Banach.

Soit \mathcal{M}^2 l'espace des martingales de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Il est facile de constater que les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^2}$ coïncident sur \mathcal{M}^2 .

Soit \mathcal{Q}_0 le sous-espace vectoriel de \mathcal{Q} constitué des processus X de \mathcal{Q} tels que $\mathbb{E}[Q_\tau(X)]$ tend vers 0 quand $|\Pi_\tau|$ tend vers 0. On a alors la

Proposition 1.3.4. (cf. Bertoin [6])

\mathcal{Q}_0 est un sous espace fermé de \mathcal{Q} .

Nous pouvons introduire $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{M}^2 \oplus \mathcal{Q}_0$ dont les éléments sont dits **processus de Dirichlet forts**. On a la

Proposition 1.3.5. (cf. Bertoin [6])

$(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ est un espace de Banach.

Définition 1.3.6. Soit X un processus \mathcal{F}_t -adapté, à trajectoires continues sur $[0, T]$. Nous dirons que X est un **processus de Dirichlet local au sens fort** s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $(\xi^j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $\lim_{j \rightarrow +\infty} \xi^j = +\infty$ \mathbb{P} -presque sûrement
- Pour tout j fixé, le processus $X^{\xi^j} \triangleq \{X_{t \wedge \xi^j} : t \in [0, T]\}$ est un processus de Dirichlet fort. On dit alors d'une telle suite $(\xi^j)_{j \in \mathbb{N}}$ qu'elle est **réductrice** pour le processus de Dirichlet X .

1.3.1.2 Processus de Dirichlet faibles

De façon analogue, \mathcal{Q}^f désigne l'espace des processus continus adaptés tels que

$$\mathbb{E} \left[X^{*2} \right] < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{\Pi_\tau \in \mathbb{T}^f} \mathbb{E}[Q_\tau(X)] < +\infty$$

où \mathbb{T}^f désigne l'ensemble des subdivisions dyadiques de $[0, T]$ et $X^* = \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|$.

Introduisons $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^f}$ la norme définie par

$$\|X\|_{\mathcal{Q}^f}^2 = \mathbb{E} \left[X^{*2} \right] + \sup_{\Pi_\tau \in \mathbb{T}^f} \mathbb{E} [Q_\tau(X)].$$

Nous avons la

Proposition 1.3.7. (cf. Bertoin [6])

$(\mathcal{Q}^f, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^f})$ est un espace de Banach.

On pose alors \mathcal{D}^f l'espace des **processus de Dirichlet faibles** : $\mathcal{D}^f \triangleq \mathcal{M}^2 \oplus \mathcal{Q}_0^f$ où \mathcal{Q}_0^f est l'espace des processus de \mathcal{Q}^f tels que

$$\mathbb{E} [Q_\tau^f(X)] \xrightarrow{|\Pi_\tau| \rightarrow 0} 0.$$

$(\mathcal{D}^f, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^f})$ est alors un espace de Banach (cf. Bertoin [6]).

1.3.1.3 Processus de Dirichlet et décomposition de Fukushima

Dans toute la suite nous désignerons simplement par le terme **processus de Dirichlet** la classe des processus X continus, \mathcal{F}_t -adaptés, tels que X puisse se décomposer sous la forme

$$X = M + A \tag{1.9}$$

où M appartient à \mathcal{M}^{loc} et A est un processus tel que si $(\Pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de subdivisions **déterministes** de $[0, T]$ vérifiant $|\Pi_m| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0, \dots, m-1} |A_{t_{k+1}} - A_{t_k}| = 0 \tag{1.10}$$

où la limite est à prendre au sens de la convergence en probabilité sous \mathbb{P} .

La décomposition (1.9) s'appelle alors la « décomposition de Fukushima » du processus X . Cette décomposition est unique au sens de l'indistinguabilité des processus.

1.3.2 Décomposition de Lyons-Zheng

1.3.2.1 Les processus de Lyons-Zheng

Pour un processus $X \triangleq \{X_t : t \in [0, T]\}$ arbitraire, nous introduisons $\overline{X} \triangleq \{X_{T-t} : t \in [0, T]\}$ le processus du temps renversé.

Soient $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ deux filtrations. Un processus $Y = \{Y_t : t \in [0, T]\}$ est dit $(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t)$ -adapté si $(Y_t - Y_0)$ est \mathcal{F}_t -adapté et si $(\overline{Y}_t - \overline{Y}_0)$ est \mathcal{G}_t -adapté.

Si Y est continu et $(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t)$ -adapté, Y est appelé **processus de Lyons-Zheng** au sens fort (resp. au sens faible), s'il existe $M^i = \{M_t^i : t \in [0, T]\}$, $i = 1, 2$, $V = \{V_t : t \in [0, T]\}$ tels que :

$$Y_t = \frac{1}{2}M_t^1 + \frac{1}{2}M_t^2 + V_t, \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbb{P} - \text{ps} \tag{1.11}$$

avec :

- M^1 \mathcal{F}_t -martingale locale continue et $M_0^1 = 0$
- \overline{M}^2 \mathcal{G}_t -martingale locale continue et $\overline{M}_0^2 = 0$
- V processus à variations bornées
- Y est un processus de Dirichlet fort (resp. faible).

La décomposition (1.11) est alors appelée **décomposition de Lyons-Zheng** du processus Y . Une telle décomposition est unique.

Remarque 1.3.8. La situation typique pour la décomposition de Lyons-Zheng d'un processus X est de choisir pour $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle et pour $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ la « filtration du temps renversé » :

$$\mathcal{G}_t = \sigma(X_u; T - t \leq u \leq T) = \sigma(\overline{X}_u; 0 \leq u \leq t)$$

1.3.2.2 Un exemple élémentaire : la décomposition de Lyons-Zheng du mouvement brownien

Soit un mouvement brownien standard $B \triangleq \{B_t : t \geq 0\}$ construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x; x \in \mathbb{R})$. Nous noterons $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle.

Posons maintenant \overline{B} le processus défini par

$$\overline{B}_t = B_{T-t}, \quad t \in [0, T]$$

La théorie du renversement du temps pour les semi-martingales de diffusion (cf. [20]) permet d'affirmer qu'il existe un mouvement brownien $\overline{\beta}$ adapté par rapport à la « filtration du temps renversé »

$$\{\sigma(\overline{B}_u : 0 \leq u \leq t) : 0 \leq t \leq T\}$$

et tel que pour tout t fixé dans $[0, T]$,

$$B_t = \frac{1}{2}B_t + \frac{1}{2}\overline{B}_{T-t} = \frac{1}{2}B_t + \frac{1}{2}B_T + \frac{1}{2} \int_0^{T-t} d\overline{\beta}_u + \frac{1}{2} \int_0^{T-t} \frac{\partial_y g}{g}(T-u, \overline{B}_u) du \quad (1.12)$$

où g désigne la fonction de transition du mouvement brownien standard.

Puisque $\overline{B}_T = B_{T-T} = B_0 = 0$, il est clair que

$$\overline{B}_T = 0 = B_T + \int_0^T d\overline{\beta}_u + \int_0^T \frac{\partial_y g}{g}(T-u, \overline{B}_u) du$$

En utilisant ces égalités et en effectuant un changement de variable, l'équation (1.12) devient

$$B_t = \frac{1}{2}B_t + \frac{1}{2}\overline{B}_{T-t} = \frac{1}{2}B_t - \frac{1}{2} \int_{T-t}^T d\overline{\beta}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial_y g}{g}(u, B_u) du \quad (1.13)$$

Cette dernière égalité donne la décomposition de Lyons-Zheng du mouvement Brownien B .

1.3.2.3 Identification du mouvement brownien $\overline{\beta}$

Comment est construit le mouvement brownien $\overline{\beta}$ à partir du mouvement brownien initial B dans la décomposition de Lyons-Zheng (1.13) ?

Nous savons que \overline{B} vérifie :

$$\begin{aligned} \overline{B}_t &= B_T + \overline{\beta}_t + \int_0^t \frac{\partial_y g}{g}(T-s, \overline{B}_s) ds \\ &= B_T + \overline{\beta}_t - \int_0^t \frac{\overline{B}_s}{T-s} ds \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overline{\beta}_t = B_{T-t} - B_T + \int_0^t \frac{B_{T-s}}{T-s} ds \quad (1.14)$$

Cette formule explicite le mode de construction, à partir du mouvement brownien B , du mouvement brownien $\overline{\beta}$ dans la décomposition (1.13).

1.4 Représentation stochastique du semi-groupe fondamental

Le but de cette section est d'énoncer les résultats connus sur la représentation stochastique du semi-groupe $\{P_t; 0 < t \leq T\}$ dans le cas où l'on suppose que le coefficient matriciel a intervenant dans l'opérateur est « peu régulier ».

Définition 1.4.1. On note $(\mathbb{P}_x, X \equiv \{X_t; 0 \leq t \leq T\})$ la famille de processus de Markov de densité de transition p (définie dans la proposition 1.2.6).

Plus précisément, le couple (\mathbb{P}_x, X) est tel que :

- X désigne le processus canonique sur $C([0, T]; \mathbb{R}^d)$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, \mathbb{P}_x est une mesure probabilité sur $\mathcal{B}[C([0, T]; \mathbb{R}^d)]$ telle que

$$\begin{cases} \mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \\ \mathbb{P}_x[X_t \in \mathcal{O}] = \int_{\mathcal{O}} p(t, x, y) dy \end{cases} \quad (1.15)$$

pour tout ensemble Borélien $\mathcal{O} \in \mathcal{B}[\mathbb{R}^d]$ et pour tout $t \in (0, T]$.

On appelle alors (\mathbb{P}_x, X) une **diffusion correspondant à l'opérateur A** .

Ainsi, la fonction u définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ par

$$u : (t, x) \mapsto \mathbb{E}_x[\phi(X_t)] \quad (1.16)$$

donne une représentation de l'unique solution faible appartenant à \mathcal{E}^2 du problème de Cauchy (\mathcal{P}) .

1.4.1 Un théorème de représentation en dimension quelconque

1.4.1.1 Notations

Dans tout ce qui suit nous utiliserons les notations suivantes :

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ désigne la filtration naturelle engendrée par le processus X construit au début de cette section.
- $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ désigne la filtration naturelle du renversement du temps engendrée par le processus X :

$$\overline{\mathcal{F}}_t \triangleq \sigma(X_u; T - t \leq u \leq T) = \sigma(\overline{X}_u; 0 \leq u \leq t)$$

- \mathcal{M} désigne l'ensemble des martingales de carré intégrable et adaptées à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
- $\tilde{\mathcal{M}}$ désigne l'ensemble des martingales de carré intégrable et adaptées à la filtration naturelle du renversement de temps $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$.
- \mathcal{M}^{loc} désigne l'ensemble des martingales locales adaptées à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
- $\tilde{\mathcal{M}}^{loc}$ désigne l'ensemble des martingales locales adaptées à la filtration naturelle du renversement de temps $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$.

1.4.1.2 Le théorème de représentation

Théorème 1.4.2. Roskosz [44] théorème 2.2 p.96

Supposons que l'hypothèse **H1** est vérifiée.

Soit (\mathbb{P}_x, X) une diffusion correspondant à l'opérateur A .

Pour tout $\phi \in W_{p,loc}^1(\mathbb{R}^d)$ avec $p > 2 \vee d$, il existe un unique triplet (M^ϕ, N^ϕ, V^ϕ) qui satisfait les conditions suivantes :

- $M^\phi \in \mathcal{M}^{loc}$, $N^\phi \in \tilde{\mathcal{M}}^{loc}$ et V^ϕ est un processus de variation quadratique nulle et adapté à la filtration naturelle engendrée par X .
- le processus $\phi(X)$ admet une décomposition de Lyons-Zheng (sens faible) :

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) = M_t^\phi + A_t^\phi = \frac{1}{2}M_t^\phi + \frac{1}{2}\tilde{N}_t^\phi - \frac{1}{2}V_t^\phi \quad (1.17)$$

où $\tilde{N}_t^\phi = (N_{T-t}^\phi - N_T^\phi)$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

- en particulier $\phi(X)$ est un processus de Dirichlet faible.

- si de plus on suppose que $\phi \in W_p^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $t \in (0, T]$, on vérifie les égalités

$$\begin{cases} \langle M^\phi \rangle_t = \int_0^t a \nabla \phi \cdot \nabla \phi(X_u) du \\ \langle N^\phi \rangle_t = \int_0^t a \nabla \phi \cdot \nabla \phi(X_{T-u}) du \\ V_t^\phi = \int_0^t \frac{a(X_u) \nabla p(u, x, X_u)}{p(u, x, X_u)} \cdot \nabla \phi(X_u) du \end{cases} \quad (1.18)$$

D'autre part, les processus \tilde{N}^ϕ et M^ϕ possèdent une co-variation quadratique mutuelle. Plus précisément, si Π_m désigne une suite de subdivisions de $[0, T]$ telle que $|\Pi_m| \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow +\infty$, on vérifie que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0, \dots, m-1} \left(\tilde{N}_{t_{i+1}}^\phi - \tilde{N}_{t_i}^\phi \right) \left(M_{t_{i+1}}^\phi - M_{t_i}^\phi \right) = \langle M^\phi \rangle_T \quad (1.19)$$

où la limite est à prendre au sens de la convergence en probabilité sous \mathbb{P}_x .

1.4.2 Représentation du semi-groupe fondamental dans le cas unidimensionnel

Important : A partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous travaillerons uniquement sur le processus **unidimensionnel**.

Dans le cas unidimensionnel, il existe une batterie de théorèmes qui donnent une représentation du processus de Markov associé au semi-groupe $\{P_t; 0 < t \leq T\}$. Les plus satisfaisantes pour l'intuition sont celles qui s'expriment en termes de solutions d'équations différentielles stochastiques « générales ». Divers jeux d'hypothèses pour le coefficient a intervenant dans l'opérateur sont alors envisagés suivant les besoins. Nous nous contenterons ici de n'énoncer que les résultats les plus connus qui proviennent pour la plupart de [4].

Nous allons séparer l'énoncé de ces résultats en deux parties :

- les résultats au « sens fort » : c'est-à-dire ceux pour lesquels le processus de Markov associé au semi-groupe $\{P_t; 0 < t \leq T\}$ vérifie une équation différentielle stochastique au sens fort.
- les résultats au « sens faible » : ceux pour lesquels le processus de Markov associé au semi-groupe $\{P_t; 0 < t \leq T\}$ vérifie une équation différentielle stochastique au sens faible.

Les résultats au « sens fort » utilisent pour leur démonstration des méthodes propres au cadre unidimensionnel : les processus de Markov sont caractérisés par leur fonction d'échelle et leur mesure de vitesse.

En ce qui concerne les résultats au « sens faible », dans une très large mesure ce sont des conséquences de la théorie générale des formes de Dirichlet telle qu'elle est exposée dans la monographie de Fukushima-Oshima-Takeda [15].

1.4.2.1 Introduction

Soit A un opérateur sous forme divergence sur \mathbb{R} défini formellement par

$$A = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d}{dx} \right] \quad (1.20)$$

où σ désigne une fonction mesurable sur \mathbb{R} . On supposera qu'il existe une constante $\lambda > 1$ telle que

$$0 < \frac{1}{\lambda} \leq \sigma^2(x) \leq \lambda < +\infty \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R} \quad (1.21)$$

L'opérateur A est associé à une forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, W_2^1(\mathbb{R}))$ sur $L^2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sigma^2(x) f'(x) g'(x) dx \quad (1.22)$$

Un processus X est associé à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, W_2^1(\mathbb{R}))$ sur $L^2(\mathbb{R})$ si

- son semigroupe de transition est symétrique dans $L^2(\mathbb{R})$
- on a l'identité

$$W_2^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f(x) (f(x) - P_t f(x)) dx < +\infty \right\}$$

- pour f et g deux fonctions quelconques de $W_2^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g(x) (f(x) - P_t f(x)) dx = \mathcal{E}(f, g) \quad (1.23)$$

Il est bien connu qu'il existe un processus conservatif de Feller que l'on notera $(X, \mathbb{P}_x : x \in \mathbb{R})$ et qui est associé à $(\mathcal{E}, W_2^1(\mathbb{R}))$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Ce processus est unique en loi dans le sens suivant : s'il existe un autre processus $\{Z_t : t \geq 0\}$ vérifiant $Z_0 = x$, conservatif, symétrique associé à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, W_2^1(\mathbb{R}))$ sur $L^2(\mathbb{R})$ alors $\{Z_t : t \geq 0\}$ a même loi que X sous \mathbb{P}_x .

Remarque 1.4.3. *Nous pouvons démontrer que le processus ainsi construit est identique en loi au processus introduit précédemment et construit à partir de la solution fondamentale au sens faible de l'opérateur A . Nous ne montrerons pas cette correspondance car elle est généralement admise dans la littérature. Toutefois, dans le cas où l'on travaille dans un domaine compact, au chapitre 3, nous serons amenés à démontrer l'identité sur L^2 entre le semigroupe de Markov généré par une certaine forme de Dirichlet et le semigroupe de Markov généré par la solution fondamentale au sens faible associée à un certain opérateur. La méthode de démonstration serait exactement identique ici.*

La théorie des formes de Dirichlet (cf [4] p.433) nous permet alors d'affirmer que le processus $\{X, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}}\}$ associé à l'opérateur A admet une unique décomposition de type

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + N_t, \quad t \geq 0 \quad (1.24)$$

où le mouvement brownien B est construit spécifiquement de façon à ce que (1.24) soit vérifiée. N est alors une fonctionnelle additive continue de X qui est localement d'énergie nulle (au sens de Fukushima) sous la mesure $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_x [\cdot] dx$.

1.4.2.2 Les résultats "au sens fort"

Définition 1.4.4. *Une fonction ρ sur \mathbb{R}^+ positive, croissante, est dite **modérée** s'il existe une constante $\gamma > 1$ telle que $\rho(2x) \leq \gamma \rho(x)$ pour tout $x > 0$.*

On suppose qu'il existe une fonction croissante, positive et modérée, telle que

- $\int_{0+} \rho^{-2}(x) dx = \infty$
- $x^2 \rho^2(\sqrt{x})$ est une fonction croissante, convexe et modérée.

et telle que :

$$\boxed{\mathbf{H2} : |a(x) - a(y)| \leq \rho(|x - y|) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}} \quad (1.25)$$

Remarque 1.4.5. *L'hypothèse précédente est vérifiée par toutes les fonctions α Höldériennes d'ordre α pourvu que $\alpha \geq \frac{1}{2}$.*

On a alors le

Théorème 1.4.6. (cf. R.F. Bass et Z.-Q. Chen [4])

*On se place dans le cadre des hypothèses **H1** et **H2**. Soit $\{W_t; 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement brownien standard sur \mathbb{R} défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il existe un unique processus de Feller conservatif associé à l'opérateur A au sens de la section précédente,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + N_t, \quad t \geq 0 \quad (1.26)$$

et N est un processus d'énergie nulle (au sens de Fukushima) sous \mathbb{P}_x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.4.7. La condition **H2** est plus forte que la continuité de la fonction a . Il apparaît dans la démonstration du théorème 1.4.6 que cette condition est en fait utilisée pour garantir l'existence forte d'une solution pour les équations différentielles stochastiques de type

$$dY_t = \zeta(Y_t)d\tilde{W}_t$$

où $\{\tilde{W}_t; 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien. C'est la condition de Yamada-Watanabe.

La condition de Nakao, ζ bornée loin de 0 et localement de variation quadratique finie, est également une condition suffisante pour obtenir l'existence forte pour les solutions de telles E.D.S. sans terme de dérive (cf. [51]).

1.4.2.3 Les résultats “au sens faible”

Nous écrivons ici la version unidimensionnelle du théorème 1.4.2. A la différence du théorème 1.4.2, nous pouvons alors établir une formule plus agréable pour M^ϕ et \tilde{N}^ϕ en fonction de ϕ et de σ pour toute fonction ϕ dans $W_{p,loc}^1(\mathbb{R})$. Cela n'était pas le cas dans le cas multidimensionnel et c'est le sens de ce nouvel énoncé :

Théorème 1.4.8. (version unidimensionnelle du théorème 1.4.2)

Supposons que l'hypothèse **H1** est vérifiée.

Soit (\mathbb{P}_x, X) une diffusion correspondant à l'opérateur A . Il existe alors un unique couple (B, \overleftarrow{W}) de processus tel que :

- B est un \mathcal{F}_t -mouvement brownien
- \overleftarrow{W} est un $\overleftarrow{\mathcal{F}}_t$ -mouvement brownien
- pour tout $\phi \in W_{p,loc}^1(\mathbb{R})$ avec $p > 2$, nous pouvons définir $M^\phi \in \mathcal{M}^{loc}$, $N^\phi \in \tilde{\mathcal{M}}^{loc}$ et V^ϕ un processus de variation quadratique nulle et adapté à la filtration naturelle engendrée par X tels que :
 - le processus $\phi(X)$ admet la décomposition de Lyons-Zheng :

$$\begin{aligned} \phi(X_t) - \phi(X_0) &= \frac{1}{2}M_t^\phi + \frac{1}{2}\tilde{N}_t^\phi - \frac{1}{2}V_t^\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \sigma\phi'(X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_{T-t}^T \sigma\phi'(\overleftarrow{X}_s)d\overleftarrow{W}_s - \frac{1}{2}V_t^\phi \\ &= \int_0^t \sigma\phi'(X_s)dB_s + A_t^{[\phi]} \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $\tilde{N}_t^\phi = (N_{T-t}^\phi - N_T^\phi)$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

- $\phi(X)$ est un processus de Dirichlet.
- si l'on suppose de plus que $\phi \in W_p^1(\mathbb{R}^d)$, alors on vérifie que pour tout $t \in (0, T]$,

$$V_t^\phi = \int_0^t \frac{a(X_u)\partial_y p(u, x, X_u)}{p(u, x, X_u)} \phi'(X_u)du \quad (1.28)$$

D'autre part, les processus \tilde{N}^ϕ et M^ϕ possèdent une co-variation quadratique mutuelle. Plus précisément, si Π_m désigne une suite de subdivisions de $[0, T]$ telle que $|\Pi_m| \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow +\infty$, on vérifie que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0, \dots, m-1} \left(\tilde{N}_{t_{i+1}}^\phi - \tilde{N}_{t_i}^\phi \right) \left(M_{t_{i+1}}^\phi - M_{t_i}^\phi \right) = \langle M^\phi \rangle_T \quad (1.29)$$

où la limite est à prendre au sens de la convergence en probabilité sous \mathbb{P}_x .

Démonstration. Nous procédons par étapes :

Construction du mouvement brownien B

Soit $\phi \in W_p^1(\mathbb{R})$ avec $p > 2$. Le théorème de représentation des martingales 4.2 p.170 dans [22] (avec la remarque 4.3) permet d'affirmer qu'il existe un \mathcal{F}_t -mouvement brownien $\{B_t^\phi : t \geq 0\}$ tel que la martingale M^ϕ construite au théorème 1.4.2 s'écrive

$$M_t^\phi = \int_0^t \sigma \phi'(X_s) dB_s^\phi$$

Nous pouvons donc construire de cette manière une collection $\Sigma \triangleq \{B^\phi : \phi \in W_p^1(\mathbb{R}), p > 2\}$ de \mathcal{F}_t -mouvements browniens. Nous allons montrer que cette collection se réduit en fait à un unique mouvement brownien que nous noterons B .

Soient $p > 2$ et $p' > 2$ fixés. Soient $\phi \in W_p^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in W_{p'}^1(\mathbb{R})$ choisies arbitrairement. Alors $\phi - \psi \in W_{p \wedge p'}^1(\mathbb{R})$. Puisque $p \wedge p' > 2$, l'unicité de la décomposition (1.17) du théorème 1.4.2 nous permet d'affirmer que

$$M_t^\phi - M_t^\psi = M_t^{\phi - \psi} \quad t \in [0, T]$$

Autrement dit,

$$\int_0^t \sigma \phi'(X_s) dB_s^\phi - \int_0^t \sigma \psi'(X_s) dB_s^\psi = \int_0^t \sigma (\phi' - \psi')(X_s) dB_s^{\phi - \psi} \quad t \in [0, T]$$

En passant au crochet dans cette équation, nous trouvons facilement que

$$\int_0^t \sigma^2 \phi' \psi'(X_s) d\langle B^\phi, B^\psi \rangle_s = \int_0^t \sigma^2 \phi' \psi'(X_s) ds \quad t \in [0, T]$$

et cette égalité implique

$$\langle B^\phi, B^\psi \rangle_t = t \quad t \in [0, T]$$

Puisque B^ϕ et B^ψ sont des \mathcal{F}_t -mouvements browniens, cette dernière égalité implique directement

$$\langle B^\phi - B^\psi \rangle_t = 0 \quad t \in [0, T]$$

La proposition 1.12 p.125 de [40] nous permet donc de conclure

$$B^\phi - B^\psi \equiv 0 \tag{1.30}$$

Puisque ϕ et ψ ont été choisies arbitrairement dans les espaces $W_p^1(\mathbb{R})$, nous voyons que la collection Σ de mouvements browniens construite précédemment se réduit en fait à un unique \mathcal{F}_t -mouvement brownien. Par la suite nous noterons ce mouvement brownien B .

Passage des fonctions de $W_p^1(\mathbb{R})$ aux fonctions de $W_{p,loc}^1(\mathbb{R})$ dans la représentation de M^ϕ

Cela résulte de l'unicité de la décomposition de Fukushima dans le théorème 1.4.2 et d'un argument de localisation.

En effet, pour tout $\phi \in W_{p,loc}^1(\mathbb{R})$, nous construisons une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'approximations de ϕ telle que $\phi_n \in W_p^1(\mathbb{R})$ pour tout n fixé et

$$\phi_n = \phi \quad \text{sur } [-n, n]$$

Notons

$$\tau_n \triangleq \inf \left\{ t \geq 0 : |M_t^\phi| \geq n \right\} \wedge \inf \left\{ t \geq 0 : |X_t^\phi| \geq n \right\}$$

Grâce à la décomposition de $\phi(X)$ du théorème 1.4.2, nous avons

$$\phi(X_{t \wedge \tau_n}) - \phi(x) = M_{t \wedge \tau_n}^\phi + A_{t \wedge \tau_n}^\phi$$

et par construction de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en choisissant n de telle sorte que $|x| \geq n$,

$$\begin{aligned} \phi(X_{t \wedge \tau_n}) - \phi(x) &= \phi_n(X_{t \wedge \tau_n}) - \phi_n(x) \\ &= M_{t \wedge \tau_n}^{\phi_n} + A_{t \wedge \tau_n}^{\phi_n} \\ &= \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma \phi_n'(X_s) dB_s + A_{t \wedge \tau_n}^{\phi_n} \end{aligned}$$

au vu de ce qui précède.

L'unicité de la décomposition de Fukushima des processus de Dirichlet nous permet d'identifier les parties martingales. Par conséquent,

$$M_{t \wedge \tau_n}^{\phi} = \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma \phi_n'(X_s) dB_s = \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma \phi'(X_s) dB_s \quad (1.31)$$

par construction de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque le processus X est régulier et que M^{ϕ} est une martingale locale nous pouvons facilement vérifier que $\tau_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1.31), nous obtenons

$$M_t^{\phi} = \int_0^t \sigma \phi'(X_s) dB_s \quad t \geq 0$$

Conclusion

L'existence de \overline{W} se démontre de la même manière que l'existence de B . Le passage aux fonctions de $W_{p,loc}^1(\mathbb{R})$ pour la représentation des martingales N^{ϕ} s'effectue à l'aide de l'unicité de la décomposition (1.17) et d'un raisonnement par localisation. Cela achève la preuve du théorème. \square

Nous énonçons un résultat qui, dans le cas où X est une semi-martingale, permet de donner une autre représentation probabiliste à la fonctionnelle additive N du théorème 1.4.6.

Théorème 1.4.9. (R.F. Bass et Z.-Q. Chen [4] Théorème 3.6 p. 437)

Soit $\{X, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}}\}$ un processus de Feller continu, conservatif et associé à l'opérateur A au sens de la section précédente. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- X est une semi-martingale sous \mathbb{P}_x pour un x fixé dans \mathbb{R} .
- X est une semi-martingale sous \mathbb{P}_x pour tout x fixé dans \mathbb{R} .
- la dérivée au sens des distributions de la fonction σ est une mesure de Radon signée.

Si l'un de ces points est vérifié et si l'on note la mesure de Radon signée correspondant à la dérivée au sens des distributions de σ par $\sigma'(dx)$, alors il existe un mouvement brownien $\{B_t; t \geq 0\}$ construit sur l'espace de probabilité initial de telle sorte que X vérifie l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_{\mathbb{R}} \sigma^{-1}(y) L_t^y(X) \sigma'(dy), \quad t \geq 0 \quad (1.32)$$

où $\{L_t^x(X) : t \geq 0 : x \in \mathbb{R}\}$ est le temps local de X .

1.4.3 Pourquoi le temps local ?

1.4.3.1 Formule de Feynman-Kac

Nous avons vu que le processus X associé à un opérateur sous forme divergence est en fait solution d'une équation différentielle stochastique (1.32) qui fait intervenir le temps local de X lorsque le coefficient σ de l'opérateur possède une dérivée au sens des distributions qui est une mesure de Radon signée.

Dans ce qui suit on fera l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{H}(\sigma) : \begin{cases} \text{(i) } \sigma^2 \text{ est discontinue au point } 0 \\ \text{(ii) } \sigma^2 \text{ est de classe } C_b^\infty(]0, \infty[) \text{ et de classe } C_b^\infty(]-\infty, 0[) \\ \text{(iii) les limites à droite et à gauche des fonctions } (\sigma^2)^{(i)} \text{ existent et sont finies} \end{cases} \quad (1.33)$$

Nous noterons

$$\lim_{x \downarrow 0} \sigma^2(x) = a(0+); \quad \lim_{x \uparrow 0} \sigma^2(x) = a(0-)$$

les limites respectives de la fonction σ^2 à gauche et à droite de 0.

Il est alors possible de démontrer, via la formule des temps d'occupation, que sous l'hypothèse $\mathbf{H}(\sigma)$, l'équation différentielle stochastique (1.32) se réécrit sous la nouvelle forme

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t a'(X_s) ds + \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} L_t^0(X) \quad (1.34)$$

Dans cette équation, le processus $\{L_t^0(X); t \geq 0\}$ désigne le temps local à droite du processus X .

Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ la solution faible de l'équation différentielle stochastique (1.34). Nous faisons tout d'abord la

Remarque 1.4.10. \mathbb{P} -presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$ fixé, la fonction $y \mapsto L_t^y(X)$ est une fonction continue partout sur \mathbb{R} , sauf éventuellement au point 0. Cela est une conséquence du corollaire 1 p.32 de [53].

Au vu des résultats de la section précédente (cf. (1.16)), pour toute fonction ϕ dans $L^2(\mathbb{R})$, la fonction u définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ par

$$u : (t, x) \mapsto \mathbb{E}_x[\phi(X_t)] \quad (1.35)$$

donne une représentation de l'unique solution faible appartenant à \mathcal{E}^2 du problème de Cauchy (\mathcal{P}).

Toutefois, si l'on énonce ce résultat sans avoir en mémoire tout le travail mené précédemment, il est difficile de comprendre la nature du phénomène qui assure que la solution faible X de (1.34) soit bien associée (au sens de la première section de ce chapitre) à l'opérateur A . Le but de cette partie est d'effectuer un calcul illustratif qui permette de comprendre « plus intuitivement » le rôle joué par le temps local dans ce phénomène.

1.4.3.2 Un calcul illustratif

Dans toute la suite, le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ de deux fonctions f et g sera noté

$$(f(\cdot), g(\cdot))_2$$

Le processus X solution faible de (1.34) engendre au travers de la formule

$$P_t \phi(x) = \mathbb{E}_x[\phi(X_t)], \quad t \geq 0, \quad (1.36)$$

un semigroupe de Markov sur $L^2(\mathbb{R})$ que nous noterons $\{P_t : t \geq 0\}$.

Nous supposons dans le calcul que $\{P_t : t \geq 0\}$ est un semigroupe d'opérateurs auto-adjoints (symétriques) sur $L^2(\mathbb{R})$ et stable sur $W_2^1(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction $v \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, on définit la forme linéaire Av agissant sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ par la formule

$$\langle Av, \psi \rangle = - \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d}{dz} v, \frac{d}{dz} \psi \right)_2 \quad \text{pour toute fonction } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.37)$$

Vérifions que la formule (1.37) définit bien une distribution sur \mathbb{R} .

Par définition (cf. [24]), pour qu'une forme linéaire G sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ soit une distribution, il faut vérifier que pour tout compact K fixé dans \mathbb{R} , il existe un entier p_0 et une constante C (qui dépendent de K en général) tels que

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que } \text{supp } \psi \subset K, \text{ on ait } | \langle G, \psi \rangle | \leq C \max_{|\alpha| \leq p_0, x \in K} | \partial^\alpha \psi(x) | \quad (1.38)$$

où $\text{supp } \psi$ désigne le support de la fonction ψ .

Or cette inégalité est clairement vérifiée pour la forme linéaire Av agissant sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ par la formule (1.37) avec $p_0 = 1$ (il suffit d'utiliser le fait que σ^2 est une fonction uniformément bornée).

D'autre part, pour toute fonction $v \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, nous définissons la forme linéaire Tv agissant sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ par la relation

$$\langle Tv, \psi \rangle = \frac{1}{2} \left(v, a' \frac{d}{dz} \psi \right)_2 + \frac{1}{2} \left(v, a \frac{d^2}{dz^2} \psi \right)_2 + \frac{1}{2} (a(0+) - a(0-)) v(0) \langle \delta_0, \frac{d}{dz} \psi \rangle \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.39)$$

où $v(0)$ est défini sans ambiguïté comme la valeur en 0 du représentant continu de v (pour l'existence d'un représentant continu, voir [9] Théorème VIII.2 p.122). Il est clair que la forme linéaire Tv vérifie la formule (1.38) avec $p_0 = 2$. Il en résulte que Tv est bien une distribution.

De plus, pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(v, a \frac{d^2}{dz^2} \psi \right)_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 v(z) a(z) \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) dz + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} v(z) a(z) \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) dz \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dz} [a \cdot v](z) \frac{d}{dz} \psi(z) dz - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz} [a \cdot v](z) \frac{d}{dz} \psi(z) dz \\ &\quad - \frac{1}{2} (a(0+) - a(0-)) v(0) \frac{d}{dz} \psi(0) \\ &= - \left(\frac{1}{2} a \frac{d}{dz} v, \frac{d}{dz} \psi \right)_2 - \frac{1}{2} \left(v, a' \frac{d}{dz} \psi \right)_2 - \frac{1}{2} (a(0+) - a(0-)) v(0) \langle \delta_0, \frac{d}{dz} \psi \rangle \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule d'intégration par parties de [9] p.131 pour les fonctions de $W^{1,1}(\text{supp } \psi)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle Tv, \psi \rangle &= -\frac{1}{2} \left(a \frac{d}{dz} v, \frac{d}{dz} \psi \right)_2 \\ &= \langle Av, \psi \rangle \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

ce qui veut exactement dire que $Av = Tv$ au sens des distributions.

Soit $\psi \in C_0^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R})$. En appliquant la formule d'Itô à la fonction ψ et au processus X on obtient :

$$\forall t \in]0, T], \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\psi(t, X_t)] &= \psi(0, x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \psi(s, X_s) ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[\frac{1}{2} \int_0^t \left\{ a'(X_s) \frac{\partial}{\partial z} \psi(s, X_s) + a(X_s) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(s, X_s) \right\} ds \right] \\ &\quad + \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial z} \psi(s, 0) dL_s^0(X) \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

En utilisant (1.41) et plusieurs fois le théorème de Fubini (justifié par le fait que toutes les

intégrales que l'on considère sont bien définies), on vérifie que pour toute fonction ϕ dans $W_2^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)}[\psi(T, X_T)] \right)_2 &= \left(\phi(\cdot), \psi(0, \cdot) \right)_2 + \int_0^T dt \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, X_t) \right] \right)_2 \\ &+ \int_0^T dt \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\frac{1}{2} \left\{ a'(X_t) \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, X_t) + a(X_t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, X_t) \right\} \right] \right)_2 \\ &+ \left(\phi(\cdot), \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right)_2 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)}[\psi(T, X_T)] \right)_2 &= \left(\phi(\cdot), \psi(0, \cdot) \right)_2 + \int_0^T dt \left(P_t \phi(\cdot), \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right)_2 \\ &+ \int_0^T dt \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\frac{1}{2} \left\{ a'(X_t) \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, X_t) + a(X_t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, X_t) \right\} \right] \right)_2 \\ &+ \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right)_2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)}[\psi(T, X_T)] \right)_2 &= \left(\phi, \psi(0, \cdot) \right)_2 + \int_0^T dt \left(P_t \phi(\cdot), \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right)_2 \\ &+ \int_0^T dt \frac{1}{2} \left(P_t \phi(\cdot), \left\{ a' \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, \cdot) + a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, \cdot) \right\} \right)_2 \\ &+ \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right)_2 \end{aligned}$$

Si t est fixé dans $[0, T]$, la fonction $x \mapsto P_t \phi(x)$ est une fonction de $W_2^1(\mathbb{R})$ qui admet un représentant continu. En utilisant alors la définition de la distribution $T(P_t \phi)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} \left(P_t \phi(\cdot), a' \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, \cdot) \right)_2 + \frac{1}{2} \left(P_t \phi(\cdot), a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(t, \cdot) \right)_2 \right\} \\ &= \int_0^T dt \langle T(P_t \phi(\cdot)), \psi(t, \cdot) \rangle - \frac{1}{2} (a(0+) - a(0-)) \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) P_t \phi(0) \quad (1.42) \end{aligned}$$

Grâce à l'égalité (1.40) (les distributions $T(P_s \phi)$ et $A(P_s \phi)$ sont équivalentes) et en utilisant la définition de la distribution $A(P_s \phi)$, l'égalité (1.42) devient

$$\begin{aligned} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)}[\psi(T, X_T)] \right)_2 &= \left(\mathbb{E}_{(\cdot)}[\phi(X_T)], \psi(T, \cdot) \right)_2 \\ &= \left(\phi, \psi(0, \cdot) \right)_2 \\ &+ \int_0^T dt \left(P_t \phi(\cdot), \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right)_2 \\ &- \int_0^T dt \frac{1}{2} \left(a \frac{d}{dz} P_t \phi(\cdot), \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, \cdot) \right)_2 \\ &- \frac{1}{2} (a(0+) - a(0-)) \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) P_t \phi(0) \\ &+ \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}_{(\cdot)} \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right)_2 \quad (1.43) \end{aligned}$$

Nous voulons maintenant vérifier que

$$\frac{1}{2}(a(0+) - a(0-)) \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) P_t \phi(0) = \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right)_2 \quad (1.44)$$

Pour vérifier cette égalité, nous allons introduire une mesure que l'on notera δ_0^+ et qui est en fait une pseudo-généralisation de la masse de Dirac. Le but recherché est d'intégrer des fonctions discontinues au point 0 sans ambiguïté.

Définition 1.4.11. On note δ_0^+ la forme linéaire agissant sur l'ensemble des fonctions f qui sont continues sur \mathbb{R} sauf au point 0 et définie par la relation

$$\delta_0^+(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_0^+(dx) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0+)$$

Soit la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} g_n(x) = 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty, 0[\\ g_n(x) = n \text{ pour tout } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ g_n(x) = 0 \text{ pour tout } x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases} \quad (1.45)$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g_n(x) dx = f(0+) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_0^+(dx)$$

Muni de cet outil, nous pouvons maintenant vérifier l'égalité (1.44). Grâce à la remarque 1.4.10, le temps local de X est continu partout sauf au point 0. Ainsi, puisque $\psi(T, 0) = \psi(0, 0) = 0$,

$$\begin{aligned} \left((\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right) &= \left(\phi(\cdot), -\mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T L_t^0(X) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dt \right] \right)_2 \\ &= \left(\phi(\cdot), -\mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_t^z(X) \delta_0^+(dz) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dt \right] \right)_2 \end{aligned}$$

et grâce au théorème de Lebesgue,

$$\left((\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\phi(\cdot), -\mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T dt \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) \int_{\mathbb{R}} L_t^a(X) g_n(a) da \right] \right)_2$$

En appliquant la formule des temps d'occupation et une intégration par parties, nous voyons que

$$\left((\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T dt \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) g_n(X_t) a(X_t) ds \right] \right)_2$$

Et en utilisant successivement le théorème de Fubini, le théorème de Lebesgue et le fait que le semi-groupe est auto-adjoint,

$$\begin{aligned} \left((\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dL_t^0(X) \right] \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) \left(\phi(\cdot), \mathbb{E}(\cdot) [g_n(X_t) a(X_t)] \right)_2 \\ &= \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(P_t \phi(\cdot), g_n(\cdot) a(\cdot) \right)_2 \\ &= a(0+) \int_0^T P_t \phi(0) \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, 0) dt \end{aligned}$$

La formule (1.44) est donc vérifiée.

On utilise le fait que la fonction ψ a été choisie initialement dans $C_0^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R})$ et donc $\psi(T, x) = \psi(0, x) = 0$. Ainsi, grâce à (1.44), l'égalité (1.43) devient

$$\int_0^T dt \left(P_t \phi(\cdot), \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \cdot) \right)_2 - \int_0^T dt \frac{1}{2} \left(a \frac{d}{dz} P_t \phi(\cdot), \frac{\partial}{\partial z} \psi(t, \cdot) \right)_2 = 0 \quad (1.46)$$

Nous avons donc vérifié que la fonction $x \mapsto P_t \phi(x) = \mathbb{E}_x [\phi(X_t)]$ vérifie le deuxième point de la définition 1.2.1 lorsque les fonctions ψ sont choisies dans $C_0^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R})$. On pourrait généraliser facilement ce résultat pour des fonctions tests dans $C_0^{1,1}((0, T) \times \mathbb{R})$ par un argument de densité, mais l'écriture rigoureuse de la démonstration serait un peu laborieuse : nous faisons donc le choix de ne pas expliciter ce calcul.

1.4.3.3 Fonctionnelles additives et mesure de Revuz

La théorie qui lie les mesures de Revuz et les fonctionnelles additives permet de comprendre plus complètement, *dans le cas où le processus X est une semi-martingale*, le phénomène qui permet d'identifier la fonctionnelle additive $\{N_t : t \geq 0\}$ dans l'équation (1.26) au processus

$$H \triangleq \left\{ \int_{\mathbb{R}} \sigma^{-1}(y) L_t^y [X] \sigma'(dy) : t \geq 0 \right\}$$

Pour démontrer que ces deux fonctionnelles sont en fait identiques, il suffit de démontrer qu'elles correspondent toutes deux à la même mesure de Revuz. Dans le cas où X est une semi-martingale, il est possible de démontrer que la mesure de Revuz $\nu(dx)$ associée à la fonctionnelle additive de $\{N_t : t \geq 0\}$ est donnée par la formule

$$\nu(dx) = \sigma(x) \sigma'(dx) \quad (1.47)$$

Sans en donner une preuve rigoureuse, nous nous contenterons de constater que, dans le cas où σ est une fonction très régulière, la fonctionnelle additive N du processus X s'écrit $N_t = \int_0^t \sigma(X_s) \sigma'(X_s) ds$ et par conséquent sa mesure de Revuz ne peut être que la mesure $\nu(dx)$ définie en (1.47).

La preuve du théorème 1.4.9 dans [9] fournit alors clairement la réponse à notre question :

nommons $\{\bar{L}_t^x : t \geq 0\}$ la fonctionnelle additive continue de X associée à la mesure $\sigma^2(x) \delta_x$.

Soit une mesure de Radon $\mu(dx)$ positive fixée. Le théorème 5.1.3 dans [15] nous permet d'affirmer que la fonctionnelle additive de X dont la mesure de Revuz est $\sigma^2(x) \mu(dx)$ est équivalente (au sens des processus) à $\int_{\mathbb{R}} \bar{L}_t^x \mu(dx)$.

Si nous remplaçons $\sigma^2(x) \mu(dx)$ dans le raisonnement ci-dessus par la mesure $\mu_0(dx) = \sigma^2(x) f(x) dx$ (où f est une fonction positive mesurable bornée), alors la fonctionnelle additive associée à μ_0 est équivalente à $U_t \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{L}_t^x dx$. Mais il est bien connu que $\mu_0(dx)$ est associée à la fonctionnelle additive $V_t \triangleq \int_0^t \sigma^2(X_s) f(X_s) ds$. Par conséquent, les processus U et V sont équivalents et pour toute fonction f mesurable positive et bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{L}_t^x dx = \int_0^t \sigma^2(X_s) f(X_s) ds = \int_0^t f(X_s) d\langle X \rangle_s \quad (1.48)$$

Cela montre que le processus $\{\bar{L}_t^x : t \geq 0\}$, construit comme étant la fonctionnelle additive de mesure de Revuz $\sigma^2(x) \delta_x$, ne peut être que le temps local à droite de la semi-martingale X .

Le même raisonnement, appliqué cette fois-ci en remplaçant $\mu(dx)$ par $\nu(dx)$, impose que la fonctionnelle additive $\{N_t : t \geq 0\}$ associée à $\nu(dx)$ est équivalente à H , ce qui est exactement ce que nous voulions vérifier.

1.5 Conclusion

Il existe donc plusieurs représentations probabilistes de la solution du problème de Cauchy (\mathcal{P}) (1.3) unidimensionnel : (1.27), (1.32) et celles-ci varient en fonction des hypothèses faites sur le coefficient a .

Parmi ces différentes représentations, une seule se prête facilement à une discrétisation permettant de développer une méthode de Monte-Carlo : (1.32). Le chapitre suivant a pour but d'analyser la vitesse de convergence du schéma d'Euler pour (1.32) dans le cas simple où σ n'est supposé discontinu qu'au point 0. Dans ce cas, (1.32) se réduit alors à (1.34).

Chapitre 2

Le schéma d'Euler

2.1 Introduction

Soit A un opérateur sous forme divergence sur \mathbb{R} défini formellement par

$$A = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d}{dx} \right] \quad (2.1)$$

où σ désigne une fonction mesurable sur \mathbb{R} . On supposera qu'il existe deux constantes λ et Λ telles que

$$0 < \lambda \leq \sigma^2(x) \leq \Lambda < +\infty \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Nous nous intéressons au problème parabolique \mathcal{P} suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u(t, x) - Au(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.3)$$

où f est une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$. On fera l'hypothèse suivante : la fonction σ intervenant dans la définition de l'opérateur A vérifie

$$\mathbf{H4} : \begin{cases} \text{(i) } \sigma^2 \text{ est discontinue au point } 0 \\ \text{(ii) } \sigma^2 \text{ est de classe } C_b^6([0, \infty[) \text{ et de classe } C_b^6(]-\infty, 0]) \\ \text{(iii) les limites à droite et à gauche des fonctions } (\sigma^2)^{(i)} \text{ existent et sont finies} \\ \text{pour tout } i \in \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

(2.4)

Nous noterons $a \triangleq \sigma^2$ et

$$\lim_{x \downarrow 0} \sigma^2(x) = a(0+); \quad \lim_{x \uparrow 0} \sigma^2(x) = a(0-)$$

les limites respectives de la fonction σ^2 à gauche et à droite de 0.

Soit l'équation différentielle stochastique avec temps local

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dB_t + \frac{1}{2}a'(X_t)dt + \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)}dL_t^0(X) \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

D'après la construction du chapitre précédent, nous savons que la solution u de (\mathcal{P}) est donnée par

$$u(t, x_0) = \mathbb{E}_{x_0} [f(X_t)] \quad (2.6)$$

Le but de ce chapitre est de proposer un algorithme numérique pour calculer des valeurs approchées de u à partir de la représentation (2.6).

Il nous faut affronter deux problèmes importants :

- la présence du temps local dans l'équation (2.5) et l'impossibilité de proposer un schéma de discrétisation simple.
- la présence d'une discontinuité en 0 pour les coefficients σ et b .

2.1.1 Faire « disparaître » le temps local : la transformation de Zvonkin

L'idée ici est d'appliquer une transformation de Zvonkin (cf. [33]) au processus X dans le but de faire disparaître le temps local de l'EDS.

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\beta = \frac{a(0+) - a(0-)}{2a(0+)} \quad (2.7)$$

On introduit la fonction “signe” notée sgn et définie par :

$$\begin{cases} \text{sgn}(x) = 1 \text{ pour tout } x > 0 \\ \text{sgn}(x) = -1 \text{ pour tout } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Soit h la fonction définie par

$$h(z) = z - \frac{\beta}{1-\beta}|z| \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Puisque $a(0-) \geq \lambda$ et $a(0+) \geq \lambda$, on vérifie que h est une bijection car $-1 < \frac{\beta}{1-\beta} < 1$.

En appliquant la formule d'Itô-Tanaka (cf. [40]), on obtient

$$\begin{aligned} h(X_t) &= h(x_0) + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t a'(X_s) ds \\ &\quad - \frac{\beta}{1-\beta} \left(\int_0^t \sigma(X_s) \text{sgn}(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{sgn}(X_s) a'(X_s) ds \right) \\ &= h(x_0) + \int_0^t \sigma \circ h^{-1} \circ h(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t a' \circ h^{-1} \circ h(X_s) ds \\ &\quad - \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^t \sigma \circ h^{-1} \circ h(X_s) \text{sgn} \circ h^{-1} \circ h(X_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^t \text{sgn} \circ h^{-1} \circ h(X_s) a' \circ h^{-1} \circ h(X_s) ds \end{aligned}$$

Ainsi le processus $Y \triangleq h(X)$ vérifie une EDS sans temps local mais dont les coefficients sont discontinus au point 0. En posant $\bar{x}_0 \triangleq h(x_0)$ et en utilisant les propriétés de la fonction “signe” on vérifie que

$$\begin{aligned} Y_t &= \bar{x}_0 + \int_0^t \sigma \circ h^{-1}(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t a' \circ h^{-1}(Y_s) ds \\ &\quad - \frac{\beta}{1-\beta} \left(\int_0^t \sigma \circ h^{-1}(Y_s) \text{sgn}(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{sgn}(Y_s) a' \circ h^{-1}(Y_s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Définissons les fonctions $\tilde{\sigma}$, \tilde{b} et \tilde{a} par

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) &\triangleq \sigma \circ h^{-1}(x) - \frac{\beta}{1-\beta} \sigma \circ h^{-1}(x) \text{sgn}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \tilde{a}(x) &\triangleq \tilde{\sigma}^2(x) \\ \tilde{b}(x) &\triangleq \frac{1}{2} a' \circ h^{-1}(x) - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{2} a' \circ h^{-1}(x) \text{sgn}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nous vérifions directement à partir de ces définitions qu'il existe $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\Lambda}$ deux constantes strictement positives telles que :

$$\tilde{\lambda} \leq \tilde{a}(x) \leq \tilde{\Lambda} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

Avec ces nouvelles notations le processus Y vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Y_t = \bar{x}_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s) dB_s + \int_0^t \tilde{b}(Y_s) ds \quad (2.12)$$

2.1.2 Le schéma d'Euler

Grâce à l'équation (2.12), on peut proposer un algorithme numérique naturel de simulation pour la solution du problème de Cauchy associé à A . Il s'agit d'introduire le schéma d'Euler associé à la solution de l'EDS (2.12).

Plus précisément, on définit $\{\bar{Y}_t; t \in [0, T]\}$ en posant $\bar{Y}_0 = \bar{x}_0 = h^{-1}(x_0)$ et pour tout $\frac{kT}{n} \leq t \leq \frac{(k+1)T}{n}$ avec $k \in \{0 \dots n-1\}$,

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_{\frac{kT}{n}} + \tilde{\sigma}\left(\bar{Y}_{\frac{kT}{n}}\right) \left(B_t - B_{\frac{kT}{n}}\right) + \tilde{b}\left(\bar{Y}_{\frac{kT}{n}}\right) \left(t - \frac{kT}{n}\right) \quad (2.13)$$

Dans toute la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- $t_k = \frac{kT}{n}$.
- $\bar{t}_k = T - t_k$.
- $\Delta B_k^{k+1} = (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$.
- Δt désigne le pas de temps $\frac{T}{n}$.
- $p_k(y) dy$ désigne la densité du schéma d'Euler au temps t_k , c'est-à-dire la densité de la variable aléatoire \bar{Y}_{t_k} .

Nous pouvons condenser l'écriture de (2.13). Introduisons

$$\eta(t) = \mathbf{E} \left[\frac{nt}{T} \right] \frac{T}{n}$$

où \mathbf{E} désigne la partie entière. (2.13) se réécrit :

$$\boxed{\bar{Y}_t = \bar{Y}_{\eta(t)} + \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{\eta(t)}) (B_t - B_{\eta(t)}) + \tilde{b}(\bar{Y}_{\eta(t)}) (t - \eta(t))} \quad (2.14)$$

Le processus $(\bar{Y}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est donc une semimartingale continue.

Nous appellerons schéma d'Euler associé à $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus $(\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$\boxed{\bar{X}_t = h^{-1}(\bar{Y}_t) \quad 0 \leq t \leq T} \quad (2.15)$$

Remarque 2.1.1. *Les coefficients intervenant dans la définition du schéma d'Euler ne vérifient pas les hypothèses classiques. En particulier le coefficient de diffusion est discontinu en 0.*

Néanmoins, le schéma d'Euler converge au moins au sens faible vers la solution de l'EDS (2.12). Ce résultat a été obtenu dans la thèse de Linqing Yan dans le cadre de l'étude du schéma d'Euler pour des EDS avec coefficients discontinus (cf. [52] Théorème 2.3.1 p.29). Cependant, à ma connaissance, aucune vitesse de convergence n'a encore été obtenue.

2.1.3 Principaux résultats

Introduisons les ensembles \mathcal{H}^0

$$\mathcal{H}^0 \triangleq \left\{ h \in C^3(\mathbb{R}), \quad h \in C^4(\mathbb{R}) \text{ p.p}, \quad h^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ et } h^{(i)}(0) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \right\} \quad (2.16)$$

et \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in C^3(\mathbb{R}), \quad h \in C^4(\mathbb{R}) \text{ p.p}, \quad h^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \right\} \quad (2.17)$$

Bien évidemment

$$\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}.$$

Pour des raisons techniques, nous serons amenés à distinguer deux cas :

- le cas particulier d'une condition initiale f appartenant à \mathcal{H}^0 : dans ce cas nous arrivons à obtenir de bonnes estimations pour les dérivées de la solution u du problème (\mathcal{P}) ,
- le cas plus général d'une condition initiale f appartenant à \mathcal{H} : dans ce cas, nous ne sommes pas arrivés à obtenir l'analogie des estimations précédentes. Nous approchons donc $f \in \mathcal{H}$ par une suite de fonctions dans \mathcal{H}^0 . Nous estimons le « coût » de cette approximation sur les estimations pour différentes normes dans le Théorème 2.2.12.

Le but de ce chapitre est donc de démontrer les

Théorème 2.1.1. *Supposons les hypothèses **H4** vérifiées.*

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ appartenant à \mathcal{H}^0 . Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus solution de (2.5) et $(\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ le schéma d'Euler associé à $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ construit dans la section 2.1.2.

Pour tout $\rho > 0$ fixé, il existe une constante $C(T, \rho)$ finie telle que

$$\left| \mathbb{E}f(X_T) - \mathbb{E}f(\bar{X}_T) \right| \leq C(T, \rho) (\Delta t)^{\frac{1}{2} - \rho} \quad (2.18)$$

Théorème 2.1.2. *Supposons les hypothèses **H4** vérifiées.*

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ appartenant à \mathcal{H} . Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus solution de (2.5) et $(\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ le schéma d'Euler associé à $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ construit dans la section 2.1.2.

Il existe une constante $C(T)$ finie telle que

$$\left| \mathbb{E}f(X_T) - \mathbb{E}f(\bar{X}_T) \right| \leq C(T) (\Delta t)^{\frac{1}{3}} \quad (2.19)$$

2.2 Résultats préliminaires

2.2.1 Le problème parabolique

Introduisons la fonction σ_+ (resp. σ_-), restriction de la fonction σ sur \mathbb{R}^+ (resp. sur \mathbb{R}^-).

Le problème (\mathcal{P}) est alors équivalent au problème de transmission parabolique (\mathcal{P}') :

$$(\mathcal{P}') \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x \left[\frac{1}{2} \sigma_+^2(x) \partial_x u(t, x) \right] = 0 & (t, x) \in]0, T] \times]0, +\infty[\\ \partial_t u(t, x) - \partial_x \left[\frac{1}{2} \sigma_-^2(x) \partial_x u(t, x) \right] = 0 & (t, x) \in]0, T] \times]-\infty, 0[\\ u(t, 0+) = u(t, 0-) \\ \boxed{a(0+) \partial_x u(t, 0+) = a(0-) \partial_x u(t, 0-)} \quad \text{conditions de transmission } (*) \\ u(0, x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.20)$$

Soit u la solution du problème (\mathcal{P}) (ou (\mathcal{P}')). Nous avons le résultat facile suivant :

Proposition 2.2.1. *La solution u se décompose de la façon suivante :*

$$u(t, x) = u_+(t, x)\mathbb{1}_{\{x \in [0, \infty[\}} + u_-(t, x)\mathbb{1}_{\{x \in]-\infty, 0\}]} \quad (2.21)$$

où u_+ (resp. u_-) désigne la solution du problème parabolique avec frontière (\mathcal{P}_+) (resp. (\mathcal{P}_-)) :

$$(\mathcal{P}_+) \begin{cases} \partial_t u_+(t, x) - \partial_x \left[\frac{1}{2} \sigma_+^2(x) \partial_x u_+(t, x) \right] = 0 & (t, x) \in]0, T] \times]0, \infty[\\ u_+(t, 0) = u(t, 0) & t \in]0, T] \\ u_+(0, x) = f(x) & x \in [0, \infty[\end{cases} \quad (2.22)$$

$$(\text{resp. } (\mathcal{P}_-)) \begin{cases} \partial_t u_-(t, x) - \partial_x \left[\frac{1}{2} \sigma_-^2(x) \partial_x u_-(t, x) \right] = 0 & (t, x) \in]0, T] \times]-\infty, 0[\\ u_-(t, 0-) = u(t, 0) & t \in]0, T] \\ u_-(0, x) = f(x) & x \in]-\infty, 0[\end{cases} \quad (2.23)$$

Introduisons a_+ un prolongement de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ arbitraire de la fonction σ_+^2 sur \mathbb{R} . Nous ferons l'hypothèse non contraignante que a_+ appartient encore à $\mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$.

On note alors $\{X_t^{x,+} : t \in [0, T]\}$ le processus solution forte de

$$X_t^{x,+} = x + \int_0^t \sqrt{a_+(X_s^{x,+})} dB_s + \int_0^t \frac{1}{2} a_+'(X_s^{x,+}) ds \quad (2.24)$$

où B désigne un mouvement brownien construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dans toute la suite nous noterons \tilde{u}_+ la fonction définie par

$$\tilde{u}_+(t, x) \triangleq \mathbb{E} [f(X_t^{x,+})] \quad (2.25)$$

Il est alors bien connu que \tilde{u}_+ est la solution d'un problème parabolique sous forme divergence « régulier » :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_+) \begin{cases} \partial_t \tilde{u}_+(t, x) - \partial_x \left[\frac{1}{2} a_+(x) \partial_x \tilde{u}_+(t, x) \right] = 0 & \text{pour } (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}_+(0, x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.26)$$

Soit x un réel **strictement positif**. On note τ_x^0 le premier temps d'atteinte de 0 pour le processus $X^{x,+}$:

$$\tau_x^0 = \inf \{t > 0 : X_t^{x,+} = 0\} \quad (2.27)$$

La formule de Feynman-Kac pour le problème (\mathcal{P}_+) nous assure que

$$u_+(t, x) = \mathbb{E} [f(X_t^{x,+}) \mathbb{1}_{\{\tau_x^0 \geq t\}} + u(t - \tau_x^0, 0) \mathbb{1}_{\{\tau_x^0 < t\}}] \quad (2.28)$$

Grâce à la propriété de Markov, en notant r_x la densité de la variable aléatoire τ_x^0 , on voit que

$$\begin{aligned} u_+(t, x) &= \mathbb{E} [f(X_t^{x,+})] - \mathbb{E} [f(X_t^{x,+}) \mathbb{1}_{\{\tau_x^0 < t\}} + u(t - \tau_x^0, 0) \mathbb{1}_{\{\tau_x^0 < t\}}] \\ &= \mathbb{E} [f(X_t^{x,+})] - \int_0^t \mathbb{E} [f(X_{t-\theta}^{0,+})] r_x(\theta) d\theta + \int_0^t u(t - \theta, 0) r_x(\theta) d\theta \\ &= \tilde{u}_+(t, x) - \int_0^t \mathbb{E} [f(X_\theta^{0,+})] r_x(t - \theta) d\theta + \int_0^t u(\theta, 0) r_x(t - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2.2 Estimation pour les dérivées partielles de la solution pour une classe restreinte de conditions initiales

2.2.2.1 Résultats préliminaires : rappels sur les lois des temps d'atteinte pour les diffusions

Soit $(Z_t^x)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R} solution d'une équation différentielle stochastique sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$:

$$dZ_t^x = \gamma(Z_t^x) dB_t + \mu(Z_t^x) dt; \quad Z_0 = x \quad (2.30)$$

où γ et μ sont des fonctions réelles telles qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \mu \text{ est de classe } C_b^{k+1}(\mathbb{R}), \text{ avec des dérivées bornées} \\ \gamma \text{ est de classe } C_b^{k+2}(\mathbb{R}), \text{ avec des dérivées bornées} \end{cases} \quad (2.31)$$

On suppose de plus qu'il existe ϵ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \gamma(x) \geq \epsilon$$

Soit les fonctions réelles s et Q définies par :

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{\gamma(z)} dz$$

$$Q(x) = \frac{\mu \circ s^{-1}(x)}{\gamma \circ s^{-1}(x)} - \frac{1}{2} \gamma' \circ s^{-1}(x)$$

Soit (R_t^ϱ) un processus de Bessel de dimension 3, avec une position initiale $R_0^\varrho = \varrho$:

$$R_t^\varrho = \sqrt{\left(\varrho + W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2 + \left(W_t^{(3)}\right)^2}$$

où $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ est un brownien standard de dimension 3.

On définit les applications suivantes :

$$\phi(x) = \int_0^x Q(v) dv \quad (2.32)$$

$$g(x) = Q'(x) + Q^2(x) \quad (2.33)$$

$$\Psi_Z(s, x, y) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^s g \left(y - \frac{s-u}{u} R_{\frac{s-u}{s-u}}^{x-y} \right) du \right\} \right] \quad (2.34)$$

$$\kappa(s, y) = \frac{y}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp \left(-\frac{y^2}{2s} \right) \quad (2.35)$$

Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$.

Nous avons le

Théorème 2.2.2. (cf. [47] pp. 91-95)

On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

- γ est de classe $C_b^{k+2}(\mathbb{R})$, avec des dérivées bornées.
- Q est de classe $C_b^{k+1}(\mathbb{R})$, avec des dérivées bornées.

et de plus

- $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \gamma(x) \geq \epsilon$.

Soit Z^x la solution de l'EDS (2.30). Alors $\tau_x^y = \inf \{s > 0 : Z_s^x \leq y\}$ admet une densité $\eta(s, x, y)$ de classe $C^k([0, T] \times D)$ et qui vérifie :

$$\boxed{\eta(s, x, y) = \Psi_Z(s, x, y) \kappa(s, y - x)} \quad (2.36)$$

De plus,

$$\boxed{\left| \Psi_Z(s, x, y) \right| \leq C} \quad (2.37)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \Psi_Z(s, x, y) \right| \leq C s \quad (2.38)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \Psi_Z(s, x, y) \right| \leq C \quad (2.39)$$

Grâce au théorème 2.2.2 et à l'hypothèse **H4**, nous voyons que pour tout $x > 0$ fixé, la densité r_x de la variable aléatoire τ_x^0 , s'écrit :

$$r_x(s) = \Psi_0(s, x) \kappa(s, x) \quad \forall s \geq 0 \quad (2.40)$$

où

$$\Psi_0(s, x) \triangleq \Psi_{X^+}(s, x, 0) \quad \forall s \geq 0$$

2.2.2.2 Estimation pour les dérivées partielles par rapport à la variable temporelle

Attention : nous noterons $\|\cdot\|_\infty^+$ la norme définie par :

$$\|g\|_\infty^+ \triangleq \sup_{x \in]0, +\infty[} |g(x)|$$

Nous commençons par la

Proposition 2.2.3. *Il existe une constante C telle que :*

$$\forall x > 0, \forall t > 0, \quad \int_0^t \frac{1}{\theta^{1/4}} r_x(t - \theta) d\theta \leq \frac{C}{t^{1/4}} \quad (2.41)$$

$$\forall x > 0, \forall t > 0, \quad \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta}} r_x(t - \theta) d\theta \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad (2.42)$$

Démonstration. Au vu de (2.37) et de (2.40), pour montrer (2.41) il suffit de montrer que

$$I \triangleq \int_0^t \frac{1}{\theta^{1/4}} \kappa(t - \theta, x) d\theta \leq \frac{C}{t^{1/4}} \quad (2.43)$$

De même, montrer (2.42) revient à estimer l'intégrale explicite :

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta}} \kappa(t - \theta, x) d\theta \quad (2.44)$$

Grâce à des changements de variables laborieux, nous constatons que cette intégrale vaut exactement :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/2t}$$

et par conséquent, (2.42) est démontrée.

Nous voudrions maintenant démontrer (2.43). Un calcul sous maple donne :

$$I = -2\sqrt{2} t^{3/4} \Gamma(3/4) \left(\frac{{}_1F_1\left([1/4], [1/2], -\frac{x^2}{2t}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)t} - \frac{\Gamma(3/4)x {}_1F_1\left([3/4], [3/2], -\frac{x^2}{2t}\right)}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} \right)$$

où ${}_1F_1$ désigne la fonction hypergéométrique généralisée avec $p = q = 1$ (cf. [32] p. 254).

Une simplification de cette expression donne :

$$I = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{x^2}{t}\right)^{1/4} 2^{1/4} (-1)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \frac{\text{Bessell}(-1/4, -\frac{x^2}{4t}) + i\text{Bessell}(1/4, -\frac{x^2}{4t})}{t^{1/4}} \quad (2.45)$$

où BesselI désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce (cf. [32] p.60 : $\text{BesselI}(v, z)$ est notée $I_\nu(z)$).

Or, à partir du résultat de l'exercice 9.6 p.59 de [32] (le passage des fonctions de Bessel modifiées aux fonctions de Bessel classiques s'effectuant grâce à la relation (10.02 p. 60)), nous déduisons les majorations :

$$\left| \text{BesselI}\left(-1/4, -\frac{x^2}{4t}\right) \right| \leq \frac{C}{2} \left(\frac{x^2}{4t}\right)^{-1/4}$$

et

$$\left| i\text{BesselI}\left(1/4, -\frac{x^2}{4t}\right) \right| \leq \frac{C}{2} \left(\frac{x^2}{4t}\right)^{1/4}$$

On constate donc à partir de (2.45) que :

$$|I| \leq \frac{C}{t^{1/4}}$$

et la proposition est démontrée. \square

Pour renforcer l'idée de dépendance entre u et la condition initiale f , nous noterons $u(t, x, f)$ plutôt que $u(t, x)$ la solution au point (t, x) du problème (\mathcal{P}) .

Proposition 2.2.4. *Pour toute fonction $f \in C_b^2(\mathbb{R})$,*

$$\|u(t, \cdot, f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (2.46)$$

Il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|u(t, \cdot, f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^2} \frac{C}{t^{1/4}} \quad (2.47)$$

De même, il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\|u(t, \cdot, f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1} \frac{C}{\sqrt{t}} \quad (2.48)$$

Démonstration. Grâce aux estimées d'Aronson, nous savons qu'il existe deux constantes c et C telles que

$$\|u(t, \cdot, f)\|_\infty \leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} |f(y)| g_c(t, x, y) dy \right\|_\infty$$

et on voit directement que

$$\|u(t, \cdot, f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1} \frac{C}{\sqrt{t}}$$

D'autre part, si C désigne une constante qui change éventuellement d'une ligne à l'autre :

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot, f)\|_\infty &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} |f(y)| g_c(t, \cdot, y) dy \right\|_\infty \\ &\leq C \|f\|_{L^2} \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} (g_c(t, \cdot, y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty \\ &\leq C \|f\|_{L^2} \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} g_c(t, \cdot, y) g_c(t, y, \cdot) dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty \\ &\leq C \|f\|_{L^2} \|g_c(2t, \cdot, \cdot)\|_\infty^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \frac{C}{t^{1/4}} \end{aligned}$$

\square

Nous introduisons les opérateurs différentiels \mathcal{L}_+ et \mathcal{L} définis sur $C^2(\mathbb{R})$ par les formules :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+ f = \frac{1}{2} a_+ f'' + \frac{1}{2} a'_+ f' & f \in C^2(\mathbb{R}) \\ \mathcal{L} f = \frac{1}{2} a f'' \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}-\{0\}\}} + \frac{1}{2} a' f' \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}-\{0\}\}} & f \in C^2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.49)$$

Remarque 2.2.5. Lorsque $f \in C^4(\mathbb{R})$ presque partout avec $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = 0$, $\mathcal{L}f$ est prolongeable sur \mathbb{R} par une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$, notée encore abusivement $\mathcal{L}f$. En particulier, $\mathcal{L}_+ \mathcal{L}f$ et $\mathcal{L} \mathcal{L}f$ sont alors des fonctions bien définies presque partout sur \mathbb{R} .

Nous avons la

Proposition 2.2.6. Il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $f^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ et $f'(0) = 0$, et pour tout $t \in]0, T]$, on ait les inégalités :

$$\|\partial_t u(t, \cdot, f)\|_\infty^+ \leq C \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty \right)$$

$$\|\partial_t u(t, \cdot, f)\|_\infty^+ \leq C \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_t u(t, \cdot, f)\|_\infty^+ \leq C \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Si l'on suppose de plus que $f''(0) = 0$, alors la fonction

$$t \mapsto \partial_t \mathbb{E}_0 [f(X_t)] = \partial_t u(t, 0)$$

est bien définie et continue sur $]0, T]$.

Démonstration.

Dans toute la démonstration C est une constante qui peut éventuellement changer d'une ligne à l'autre.

1ère partie :

Soit $x > 0$. Comme nous l'avons vu,

$$u(t, x) = u_+(t, x) = \mathbb{E} [f(X_t^{x,+})] - \int_0^t \mathbb{E} [f(X_\theta^{0,+})] r_x(t-\theta) d\theta + \int_0^t u(\theta, 0) r_x(t-\theta) d\theta$$

On s'intéresse tout d'abord au terme :

$$v(t, x) \triangleq \int_0^t \mathbb{E} [f(X_\theta^{0,+})] r_x(t-\theta) d\theta + \int_0^t u(\theta, 0) r_x(t-\theta) d\theta$$

Rappelons que $u(t, 0) = \mathbb{E}_0 [f(X_t)] = \mathbb{E} [f(X_t^0)]$. Grâce à la formule d'Itô, en utilisant le fait que $f'(0) = 0$, nous trouvons que :

$$\mathbb{E} [f(X_t^0)] = f(0) + \int_0^t \mathbb{E} [\mathcal{L}f(X_\theta^0)] d\theta$$

En particulier,

$$\partial_t \mathbb{E} [f(X_t^0)] = \mathbb{E} [\mathcal{L}f(X_t^0)] \quad (2.50)$$

et lorsque $f \in C^2(\mathbb{R})$ avec $f^{(i)} \in L^2(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ et $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$, la fonction $\mathcal{L}f$ est prolongeable sur \mathbb{R} par une fonction continue. Ainsi, $\partial_t u(t, 0, f) = u(t, 0, \mathcal{L}f)$ est donc continue et bien définie.

De même,

$$\mathbb{E} [f(X_\theta^{0,+})] = f(0) + \int_0^\theta \mathbb{E} [\mathcal{L}_+ f(X_\xi^{0,+})] d\xi$$

Ainsi,

$$v(t, x) = \int_0^t \int_0^\theta \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\xi^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\xi^0) \right] \right) d\xi r_x(t - \theta) d\theta \quad (2.51)$$

Puisque $x > 0$, il est clair au vu de (2.40) que $r_x(0) = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) &= 0 + \int_0^t \int_0^\theta \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\xi^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\xi^0) \right] \right) d\xi \partial_t r_x(t - \theta) d\theta \\ &= - \int_0^t \int_0^\theta \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\xi^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\xi^0) \right] \right) d\xi \partial_\theta r_x(t - \theta) d\theta \end{aligned}$$

et en intégrant par parties cette dernière égalité, nous trouvons

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) &= \int_0^t \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\theta^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\theta^0) \right] \right) r_x(t - \theta) d\theta \\ &\leq \int_0^t \left(\|\tilde{u}_+(\theta, x, \mathcal{L}_+ f)\|_\infty^+ + \|u(\theta, x, \mathcal{L} f)\|_\infty^+ \right) r_x(t - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

Donc, au vu de la proposition 2.2.4,

$$\begin{aligned} \|\partial_t v(t, \cdot)\|_\infty^+ &\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \int_0^t \frac{1}{\theta^{1/4}} r_x(t - \theta) d\theta \\ &\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \frac{1}{t^{1/4}} \quad \text{grâce au résultat de la proposition 2.2.3} \end{aligned}$$

Le terme $\tilde{u}_+(t, x) = \mathbb{E} [f(X_t^{x,+})]$ se traite de manière similaire : on applique la formule d'Itô, on dérive par rapport à t puis on utilise le résultat de la proposition 2.2.4. Ainsi,

$$\|\partial_t \tilde{u}_+(t, \cdot)\|_\infty^+ \leq \|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} \frac{C}{t^{1/4}}$$

Cela termine la démonstration de la première partie de la proposition.

2ème partie :

En reprenant les calculs à partir de (2.52), on a que :

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) &= \int_0^t \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\theta^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\theta^0) \right] \right) r_x(t - \theta) d\theta \\ &\leq \int_0^t \left(\|\tilde{u}_+(\theta, x, \mathcal{L}_+ f)\|_\infty^+ + \|u(\theta, x, \mathcal{L} f)\|_\infty^+ \right) r_x(t - \theta) d\theta \\ &\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^1} + \|\mathcal{L} f\|_{L^1}) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta}} r_x(t - \theta) d\theta \\ &\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^1} + \|\mathcal{L} f\|_{L^1}) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{grâce au résultat de la proposition 2.2.3} \end{aligned}$$

Le terme $\tilde{u}_+(t, x) = \mathbb{E} [f(X_t^{x,+})]$ se traite de manière similaire : on applique la formule d'Itô, on dérive par rapport à t puis on utilise le résultat de la proposition 2.2.4. Ainsi,

$$\|\partial_t \tilde{u}_+(t, \cdot)\|_\infty^+ \leq \|\mathcal{L}_+ f\|_{L^1} \frac{C}{\sqrt{t}}$$

Cela termine la démonstration de la proposition. □

Rappelons la définition de \mathcal{H}^0 (2.16) :

$$\mathcal{H}^0 \triangleq \left\{ h \in C^3(\mathbb{R}), \quad h \in C^4(\mathbb{R}) \text{ p.p.}, \quad h^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ et } h^{(i)}(0) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \right\}$$

En réitérant le même raisonnement, on démontre, grâce à la remarque 2.2.5, la nouvelle

Proposition 2.2.7. *Il existe une constante $C(T)$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^0$ et pour tout $t \in]0, T]$ on ait les inégalités :*

$$\|\partial_{tt}^2 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{\infty} + \|f^{(2)}\|_{\infty} + \|f^{(3)}\|_{\infty} + \|f^{(4)}\|_{\infty} \right)$$

$$\|\partial_{tt}^2 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_{tt}^2 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Démonstration. La preuve répète exactement les arguments de la démonstration de la proposition 2.2.6. L'application de la formule d'Itô est justifiée grâce à la remarque 2.2.5. \square

2.2.2.3 Estimation pour les dérivées partielles par rapport à la variable d'espace

Proposition 2.2.8. *Il existe une constante $C(T)$ telle que pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $f^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ et $f'(0) = 0$, et pour tout $t \in]0, T]$, on ait les inégalités :*

$$\|\partial_x u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{\infty} + \|f^{(2)}\|_{\infty} \right) \quad (2.53)$$

$$\|\partial_x u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}} \quad (2.54)$$

$$\|\partial_x u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.55)$$

Démonstration. Nous prouvons (2.54). Les inégalités (2.53) et (2.55) se démontrent par des arguments complètement analogues.

Nous reprenons la décomposition de u introduite dans la démonstration de la proposition 2.2.6 à savoir :

$$u(t, x) = \tilde{u}_+(t, x) + v(t, x) \quad (2.56)$$

A partir de (2.51) et des résultats du théorème 2.2.2, nous voyons que :

$$v(t, x) = \int_0^t \Phi(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta \quad (2.57)$$

avec

$$\Phi(t, \theta, x) = \Psi_0(t - \theta, x) \int_0^\theta \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\xi^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\xi^0) \right] \right) d\xi \quad (2.58)$$

En remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa(t - \theta, x) = -2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(t - \theta)}} \exp \left(-\frac{x^2}{2(t - \theta)} \right) \right] \quad (2.59)$$

il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \Phi(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta \\
&\quad - 2 \int_0^t \Phi(t, \theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) \right] d\theta \\
&= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta \\
&\quad + 2\Phi(t, 0, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \\
&\quad + 2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(t, \theta, x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) \right] d\theta \\
&= A_1 + A_2 + A_3
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\Phi(t, 0, x) = 0$$

et donc on a directement que $A_2 = 0$.

D'autre part, par définition de Φ et Ψ_0 , nous voyons que pour tout $t \in]0, T]$ et pour tout $\theta \in]0, t[$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, \theta, x) \right| &= \left| \int_0^\theta \left(\mathbb{E}[\mathcal{L}_+ f(X_\xi^{0,+})] - \mathbb{E}[\mathcal{L} f(X_\xi^0)] \right) d\xi \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0(t - \theta, x) \right| \\
&\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) (t - \theta) \int_0^\theta \frac{1}{\xi^{1/4}} d\xi \\
&\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) (t - \theta) \theta^{3/4}
\end{aligned}$$

et à partir de cette majoration il est facile de voir que

$$|A_1| \leq C(T) (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2})$$

En ce qui concerne A_3 , on fait le calcul suivant :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(t, \theta, x) \right| \leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \theta^{3/4} + C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \frac{1}{\theta^{1/4}}$$

et donc

$$|A_3| \leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \int_0^t \frac{1}{\theta^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) d\theta + C(T)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{\theta^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) d\theta &\leq \int_0^t \frac{1}{\theta^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} d\theta \\
&\leq C(T)
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$|\partial_x v(t, x)| \leq C(T) (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \quad (2.60)$$

En ce qui concerne le terme $\tilde{u}_+(t, x)$, les résultats classiques sur les EDP paraboliques (cf. Annexe B) nous assurent que :

$$|\partial_x \tilde{u}_+(t, x)| \leq C(T) \|f'\|_{L^2} \frac{1}{t^{1/4}} \quad (2.61)$$

Par conséquent, l'inégalité (2.54) est démontrée.

En utilisant la même méthode, nous prouvons les inégalités (2.53) et (2.55). \square

Corollaire 2.2.9. *Il existe une constante $C(T)$ telle que pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $f^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ et $f'(0) = 0$, et pour tout $t \in]0, T]$, on ait les inégalités :*

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{\infty} + \|f^{(2)}\|_{\infty} \right)$$

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que

$$\partial_t u = a' \partial_x u + a \partial_{xx} u \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$$

et les majorations des propositions 2.2.6 et 2.2.8. \square

Proposition 2.2.10. *Il existe une constante $C(T)$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^0$ et pour tout $t \in]0, T]$ on ait les inégalités :*

$$\|\partial_{xxx}^3 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{\infty} + \|f^{(2)}\|_{\infty} + \|f^{(3)}\|_{\infty} + \|f^{(4)}\|_{\infty} \right) \quad (2.62)$$

$$\|\partial_{xxx}^3 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}} \quad (2.63)$$

$$\|\partial_{xxx}^3 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.64)$$

Démonstration. Nous prouvons (2.63). Les inégalités (2.62) et (2.64) se démontrent par des arguments complètement analogues.

Tout comme pour la démonstration de la proposition 2.2.8, notre point de départ est la décomposition (2.56). A partir de (2.52), nous obtenons que :

$$\partial_t v(t, x) = \int_0^t \Upsilon(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta$$

avec

$$\Upsilon(t, \theta, x) = \Psi_0(t - \theta, x) \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_{\theta}^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_{\theta}^0) \right] \right) \quad (2.65)$$

En utilisant une nouvelle fois (2.59), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \Upsilon(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta \\ &\quad - 2 \int_0^t \Upsilon(t, \theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) \right] d\theta \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon(t, \theta, x) \kappa(t - \theta, x) d\theta \\ &\quad + 2 \Upsilon(t, 0, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \\ &\quad + 2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial \theta} \Upsilon(t, \theta, x) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) \right] d\theta \\ &= A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\Upsilon(t, 0, x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\theta^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\theta^0) \right] \right) = 0$$

grâce au fait que f appartient \mathcal{H}^0 et à la remarque 2.2.5. On a donc $A_2 = 0$.

D'autre part, par définition de Υ et Ψ_0 , nous voyons que pour tout $t \in]0, T]$ et pour tout $\theta \in]0, t[$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon(t, \theta, x) \right| &= \left| \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\theta^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\theta^0) \right] \right) \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0(t - \theta, x) \right| \\ &\leq C (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) (t - \theta) \frac{1}{\theta^{1/4}} \end{aligned}$$

et à partir de cette majoration il est facile de voir que

$$|A_1| \leq C(T) (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \frac{1}{t^{1/4}}$$

En ce qui concerne A_3 , on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \Upsilon(t, \theta, x) \right| \leq C(T) (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) + C \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\theta^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\theta^0) \right] \right)$$

et au vu de la proposition 2.2.6, on vérifie que pour tout $\theta > 0$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{L}_+ f(X_\theta^{0,+}) \right] - \mathbb{E} \left[\mathcal{L} f(X_\theta^0) \right] \right) \right| \leq C(T) (\|\mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} f\|_{L^2}) \frac{1}{\theta^{1/4}}$$

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq C (\|\mathcal{L}_+^2 f\|_{L^2} + \|\mathcal{L}_+ \mathcal{L} f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} \mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L}^2 f\|_{L^2}) \\ &\quad \times \int_0^t \frac{1}{\theta^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) d\theta + C(T) \end{aligned}$$

Et grâce au même calcul que précédemment,

$$\int_0^t \frac{1}{\theta^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\theta)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-\theta)}\right) d\theta \leq C(T)$$

En conclusion,

$$|\partial_x \partial_t v(t, x)| \leq C(T) (\|\mathcal{L}_+^2 f\|_{L^2} + \|\mathcal{L}_+ \mathcal{L} f\|_{L^2} + \|\mathcal{L} \mathcal{L}_+ f\|_{L^2} + \|\mathcal{L}^2 f\|_{L^2}) \quad (2.66)$$

En ce qui concerne le terme $\tilde{u}_+(t, x)$, les résultats classiques sur les EDP paraboliques (cf. Annexe B) nous assurent que :

$$|\partial_x \partial_t \tilde{u}_+(t, x)| \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}} \quad (2.67)$$

Par conséquent,

$$|\partial_x \partial_t u(t, x)| \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

Or,

$$\partial_x \partial_t u = \partial_x \{ \partial_x [a \partial_x u] \} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

et au vu des propositions 2.2.8 et 2.2.9, l'inégalité (2.63) est démontrée. \square

Corollaire 2.2.11. *Il existe une constante $C(T)$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^0$ et pour tout $t \in]0, T]$ on ait les inégalités :*

$$\begin{aligned} \|\partial_{x^4}^4 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ &\leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{\infty} + \|f^{(2)}\|_{\infty} + \|f^{(3)}\|_{\infty} + \|f^{(4)}\|_{\infty} \right) \\ \|\partial_{x^4}^4 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ &\leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}} \\ \|\partial_{x^4}^4 u(t, \cdot, f)\|_{\infty}^+ &\leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que

$$\partial_t \partial_t u = \partial_x [a \partial_x \{ \partial_x [a \partial_x u] \}] \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

et le résultat des propositions 2.2.8, 2.2.9 et 2.2.10. \square

2.2.2.4 Conclusion

Nous noterons $\|\cdot\|_{\infty}^-$ la norme définie par :

$$\|g\|_{\infty}^- \triangleq \sup_{x \in]-\infty, 0[} |g(x)|$$

Introduisons l'opérateur différentiel \mathcal{L}_- défini sur $C^2(\mathbb{R})$ par la formule :

$$\mathcal{L}_- g = \frac{1}{2} a_- g'' + \frac{1}{2} a'_- g' \quad g \in C^2(\mathbb{R}) \quad (2.68)$$

Evidemment, nous avons des résultats analogues aux propositions 2.2.4, 2.2.6, 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10, et 2.2.11 en remplaçant partout les indices $+$ par des indices $-$ correspondants.

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 2.2.1. *Si $f \in \mathcal{H}^0$ alors, pour tout $j \in \{0, \dots, 2\}$, $i \in \{0, \dots, 4\}$ tels que $2j + i \leq 4$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de f telle que*

$$\forall t \in]0, T], \quad \|\partial_t^j \partial_x^i u(t, \cdot, f)\|_{\infty} \leq C(T) \sum_{k=0}^{2j+i} \|f^{(k)}\|_{\infty}$$

$$\forall t \in]0, T], \quad \|\partial_t^j \partial_x^i u(t, \cdot, f)\|_{\infty} \leq \frac{C(T)}{t^{1/4}} \sum_{k=0}^{2j+i} \|f^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\forall t \in]0, T], \quad \|\partial_t^j \partial_x^i u(t, \cdot, f)\|_{\infty} \leq \frac{C(T)}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{2j+i} \|f^{(k)}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

2.2.3 Aplatissement local de la condition initiale : interpolation polynômiale

Malheureusement, nous ne savons pas majorer de façon satisfaisante les dérivées du problème parabolique (\mathcal{P}) lorsque la condition initiale f cesse d'appartenir à \mathcal{H}^0 (2.16) : le calcul est rendu difficile par l'apparition d'une intégrale singulière non-explicite que nous ne sommes pas arrivés à majorer de manière satisfaisante.

Il apparaît que disposer de bonnes estimations pour les dérivées du problème parabolique (\mathcal{P}) est une étape cruciale pour évaluer correctement la vitesse de convergence faible du schéma d'Euler. Pour remédier à cette difficulté, nous nous proposons dans cette section de remplacer localement f autour de 0 par une fonction constante. Bien évidemment cette manipulation a un coût que nous nous proposons justement d'étudier en détail : c'est le sens du théorème 2.2.12.

Rappelons la définition de l'ensemble \mathcal{H} (2.17) :

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in C^3(\mathbb{R}), \quad h \in C^4(\mathbb{R}) \text{ p.p.}, \quad h^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ pour } i = 1, \dots, 4 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{H}$ fixée. Notre but est d'approcher f par une fonction f_δ appartenant à l'ensemble \mathcal{H}^0 (2.16), c'est-à-dire par une fonction de \mathcal{H} dont les quatre premières dérivées s'annulent en 0.

Soit δ un réel tel que $0 < \delta < 1$. Nous définissons f_δ comme suit :

$$\begin{cases} f_\delta(x) = f(x) & x \in]-\infty, -2\delta[\\ f_\delta(x) = P_\delta^-(x) & x \in [-2\delta, -\delta[\\ f_\delta(x) = P_\delta^-(x) = P_\delta^+(x) = f(0) & x \in]-\delta, \delta[\\ f_\delta(x) = P_\delta^+(x) & x \in]\delta, 2\delta[\\ f_\delta(x) = f(x) & x \in]2\delta, +\infty[\end{cases} \quad (2.69)$$

Ici $P_\delta^-(x)$ et $P_\delta^+(x)$ sont deux polynômes d'interpolation choisis de telle sorte que :

$$\begin{cases} P_\delta^{-,(i)}(-2\delta) = f(-2\delta); & P_\delta^{+,(i)}(2\delta) = f^{(i)}(2\delta) \quad \text{pour } i = 1, \dots, 3 \\ P_\delta^-(-\delta) = f(0); & P_\delta^+(\delta) = f(0) \\ P_\delta^{-,(i)}(-\delta) = 0; & P_\delta^{+,(i)}(\delta) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 3 \end{cases} \quad (2.70)$$

où nous avons noté $P_\delta^{+,(i)}$ (resp. $P_\delta^{-,(i)}$) le polynôme dérivé i -ème de P_δ^+ (resp. P_δ^-).

Nous choisirons, par exemple pour $P_\delta^+(x)$, le polynôme défini par :

$$\begin{aligned} P_\delta^+(x) = & -\frac{1}{6} \frac{-\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 15\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 90\delta f'(2\delta) - 210(f(2\delta) - f(0))}{\delta^8} x^8 \\ & + \frac{1}{6} \frac{-11\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 168\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 4956\delta f'(2\delta) - 2400(f(2\delta) - f(0))}{\delta^7} x^7 \\ & - \frac{1}{6} \frac{-52\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 807\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 4956\delta f'(2\delta) - 11760(f(2\delta) - f(0))}{\delta^6} x^6 \\ & + \frac{-23\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 362\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 2247\delta f'(2\delta) - 5376(f(2\delta) - f(0))}{\delta^5} x^5 \\ & - \frac{5}{2} \frac{-15\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 239\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 1498\delta f'(2\delta) - 3612(f(2\delta) - f(0))}{\delta^4} x^4 \\ & + \frac{1}{2} \frac{-77\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 1240\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 7840\delta f'(2\delta) - 19040(f(2\delta) - f(0))}{\delta^3} x^3 \\ & - \frac{1}{6} \frac{-146\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 2373\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 15120\delta f'(2\delta) - 36960(f(2\delta) - f(0))}{\delta^2} x^2 \\ & + \frac{1}{3} \frac{-26\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 426\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 2733\delta f'(2\delta) - 6720(f(2\delta) - f(0))}{\delta} x \\ & - \frac{4}{3} \delta^3 f^{(3)}(2\delta) - 22\delta^2 f^{(2)}(2\delta) + 142\delta f'(2\delta) - 351f(2\delta) + 352f(0) \end{aligned}$$

Puisque f appartient à $C^4(\mathbb{R})$, nous savons, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $\xi \in]0, 2\delta[$:

$$f(2\delta) - f(0) = 2\delta f'(\xi)$$

En particulier, le polynôme $P_\delta^+(x)$ s'écrit :

$$P_\delta^+(x) = c_8 \frac{1}{\delta^7} x^8 + c_7 \frac{1}{\delta^6} x^7 + c_6 \frac{1}{\delta^5} x^6 + c_5 \frac{1}{\delta^4} x^5 + c_4 \frac{1}{\delta^3} x^4 + c_3 \frac{1}{\delta^2} x^3 + c_2 \frac{1}{\delta} x^2 + c_1 x + c_0$$

où les c_i désignent des constantes qui dépendent de f .

Tout d'abord nous constatons que :

$$\sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |f(x) - P_\delta^+(x)| \leq C\delta + \sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |f(x) - c_0|$$

Par définition de c_0 et grâce au théorème des valeurs intermédiaires,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |f(x) - c_0| &\leq \left| f(x) + \frac{4}{3}\delta^3 f^{(3)}(2\delta) + 22\delta^2 f^{(2)}(2\delta) - 142\delta f'(2\delta) + 351f(2\delta) - 352f(0) \right| \\ &\leq C\delta + \sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |f(x) - f(0)| + 351 |f(2\delta) - f(0)| \\ &\leq c\delta + C\|f'\|_\infty \delta \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |f(x) - P_\delta^+(x)| \leq C\delta$$

et en conclusion

$$\|f - f_\delta\|_\infty \leq C\delta \quad (2.71)$$

Le polynôme $P_\delta^{+, (1)}(x)$ s'écrit évidemment :

$$P_\delta^{+, (1)}(x) = 8c_8 \frac{1}{\delta^7} x^7 + 7c_7 \frac{1}{\delta^6} x^6 + 6c_6 \frac{1}{\delta^5} x^5 + 5c_5 \frac{1}{\delta^4} x^4 + 4c_4 \frac{1}{\delta^3} x^3 + 3c_3 \frac{1}{\delta^2} x^2 + 2c_2 \frac{1}{\delta} x + c_1$$

et par conséquent,

$$\sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |P_\delta^{+, (1)}(x)| \leq C^1$$

De même, nous démontrons que

$$\sup_{x \in [\delta, 2\delta]} |P_\delta^{+, (i)}(x)| \leq \frac{C^i}{\delta^{i-1}} \quad i = 1, \dots, 4$$

et

$$\sup_{x \in [-2\delta, \delta]} |P_\delta^{-, (i)}(x)| \leq \frac{C^i}{\delta^{i-1}} \quad i = 1, \dots, 4$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|P_\delta^{+, (1)}\|_{L^2(\delta, 2\delta]} &\leq C; & \|P_\delta^{-, (1)}\|_{L^2([-2\delta, \delta])} &\leq C \\ \|P_\delta^{+, (2)}\|_{L^2(\delta, 2\delta]} &\leq \frac{C}{\delta^{1/2}}; & \|P_\delta^{-, (2)}\|_{L^2([-2\delta, \delta])} &\leq \frac{C}{\delta^{1/2}} \\ \|P_\delta^{+, (3)}\|_{L^2(\delta, 2\delta]} &\leq \frac{C}{\delta^{3/2}}; & \|P_\delta^{-, (3)}\|_{L^2([-2\delta, \delta])} &\leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \\ \|P_\delta^{+, (4)}\|_{L^2(\delta, 2\delta]} &\leq \frac{C}{\delta^{5/2}}; & \|P_\delta^{-, (4)}\|_{L^2([-2\delta, \delta])} &\leq \frac{C}{\delta^{5/2}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|P_\delta^{+, (1)}\|_{L^1(\delta, 2\delta]} &\leq C\delta; & \|P_\delta^{-, (1)}\|_{L^1([-2\delta, \delta])} &\leq C\delta \\ \|P_\delta^{+, (2)}\|_{L^1(\delta, 2\delta]} &\leq C; & \|P_\delta^{-, (2)}\|_{L^1([-2\delta, \delta])} &\leq C \\ \|P_\delta^{+, (3)}\|_{L^1(\delta, 2\delta]} &\leq \frac{C}{\delta}; & \|P_\delta^{-, (3)}\|_{L^1([-2\delta, \delta])} &\leq \frac{C}{\delta} \end{aligned}$$

$$\|P_\delta^{+, (4)}\|_{L^1(]0, 2\delta])} \leq \frac{C}{\delta^2}; \quad \|P_\delta^{-, (4)}\|_{L^1(]-2\delta, \delta])} \leq \frac{C}{\delta^2}$$

A toute fonction $f \in \mathcal{H}$ nous pouvons associer la fonction f_δ définie en (2.69). La fonction f_δ est un aplatissement local autour de 0 de la fonction f qui appartient à \mathcal{H}^0 .

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 2.2.12.¹

Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$, il existe une constante $C(T)$, telle que pour tout $t \in]0, T]$, et pour tout $\delta \in]0, 1]$, on ait les inégalités :

$$\|f - f_\delta\|_\infty \leq C(T)\delta \quad (**)$$

Estimations sur la solution :

$$\|u(t, \cdot, f_\delta) - u(t, \cdot, f)\|_\infty \leq C(T)\delta \quad (**)$$

Estimations sur la dérivée partielle première par rapport à la variable de temps de la solution :

$$\|\partial_t u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + \frac{1}{\delta} \right)$$

$$\|\partial_t u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \frac{1}{\delta^{1/2}} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_t u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (**)$$

Estimations sur la dérivée partielle seconde par rapport à la variable de temps de la solution :

$$\|\partial_{tt}^2 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + \|f^{(3)}\|_\infty + \|f^{(4)}\|_\infty + \frac{1}{\delta^3} \right)$$

$$\|\partial_{tt}^2 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} + \frac{1}{\delta^{5/2}} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_{tt}^2 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} + \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (**)$$

Estimations sur la dérivée partielle première par rapport à la variable spatiale de la solution :

$$\|\partial_x u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + C \right)$$

$$\|\partial_x u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + C \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

¹Les inégalités marquées par un (**) seront celles que nous utiliserons ultérieurement pour la majoration de l'erreur faible du schéma d'Euler.

Enfin,

$$\|\partial_x u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \delta \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (**)$$

Estimations sur la dérivée partielle seconde par rapport à la variable spatiale de la solution :

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + \frac{1}{\delta} \right)$$

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \frac{1}{\delta^{1/2}} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (**)$$

Estimations sur la dérivée partielle d'ordre 3 par rapport à la variable spatiale de la solution :

$$\|\partial_{xxx}^3 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + \|f^{(3)}\|_\infty + \|f^{(4)}\|_\infty + \frac{1}{\delta^3} \right)$$

$$\|\partial_{xxx}^3 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} + \frac{1}{\delta^{5/2}} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_{xxx}^3 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} + \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (**)$$

Estimations sur la dérivée partielle d'ordre 4 par rapport à la variable spatiale de la solution :

$$\|\partial_{x^4}^4 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + \|f^{(3)}\|_\infty + \|f^{(4)}\|_\infty + \frac{1}{\delta^3} \right)$$

$$\|\partial_{x^4}^4 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} + \|f^{(4)}\|_{L^2} + \frac{1}{\delta^{5/2}} \right) \frac{1}{t^{1/4}}$$

$$\|\partial_{x^4}^4 u(t, \cdot, f_\delta)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} + \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (**)$$

2.3 Quelques résultats sur le schéma d'Euler

2.3.0.1 Régularité de la densité de la variable \bar{Y}_{t_k}

Nous avons la

Proposition 2.3.1. *Pour tout $k \geq 1$, la variable \bar{Y}_{t_k} possède une densité p_k par rapport à la mesure de Lebesgue. La fonction p_k appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Nous allons vérifier les hypothèses du lemme 2.1.5 p. 88 de [31]. Notons $\mu_k(dy)$ la loi de la variable aléatoire \bar{Y}_{t_k} . Soit ϕ une fonction dans $C_K^\infty(\mathbb{R})$. Nous désignerons par $g_{\Delta t}$ la densité d'une loi $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Nous avons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi'(\bar{Y}_{t_{k+1}})] &= \mathbb{E}\left[\phi'\left(\bar{Y}_{t_k} + \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{t_k})\Delta B_k^{k+1} + \tilde{b}(\bar{Y}_{t_k})\Delta t\right)\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi'(y + \tilde{\sigma}(y)z + \tilde{b}(y)\Delta t) g_{\Delta t}(z) dz \right) \mu_k(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\tilde{\sigma}(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\phi(y + \tilde{\sigma}(y)z + \tilde{b}(y)\Delta t) \right)' \Big|_{z=0} g_{\Delta t}(z) dz \right) \mu_k(dy) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\tilde{\sigma}(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\phi(y + \tilde{\sigma}(y)z + \tilde{b}(y)\Delta t) \right) \Big|_z g'_{\Delta t}(z) dz \right) \mu_k(dy) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\phi'(\bar{Y}_{t_{k+1}})]| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{\sigma}(y)|} \|\phi\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} g'_{\Delta t}(z) dz \right) \mu_k(dy) \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\Delta t) \|\phi\|_\infty \end{aligned}$$

où $\tilde{\lambda}$ est la constante définie en (2.11).

Ainsi, nous vérifions que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \phi'(y) \mu_{k+1}(dy) \right| \leq C(\Delta t) \|\phi\|_\infty$$

De la même façon, nous prouverions que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{d^\alpha}{dy^\alpha} \phi(y) \mu_{k+1}(dy) \right| \leq C_\alpha(\Delta t) \|\phi\|_\infty$$

pour tout indice α . Les hypothèses du lemme 2.1.5 p. 88 de [31] sont donc démontrées : le résultat de la proposition s'ensuit. \square

Proposition 2.3.2.

$$\mathbb{E}_{\bar{x}_0} [|\bar{Y}_T - \bar{x}_0|^2] \leq C(T) \tag{2.72}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule d'Itô à la fonction $x \mapsto x^2$ et au processus $(\bar{Y} - \bar{x}_0)$ puis d'utiliser le fait que les coefficients $\tilde{\sigma}$ et \tilde{b} sont bornés. \square

2.3.0.2 Temps d'occupation d'un intervalle

Soit $[l, r]$ un intervalle fixé de \mathbb{R} . Le but de cette section est de fournir des résultats concernant le temps d'occupation de l'intervalle $[l, r]$ par le schéma d'Euler en temps discret.

Nous commençons par le résultat technique suivant :

Lemme 2.3.3. *La fonction $s \mapsto \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right]$ est une fonction à variation bornée.*

Démonstration. étape 1 :

Supposons dans un premier temps que $\bar{x}_0 \neq r$ et $\bar{x}_0 \neq l$.

Dans ce cas, la fonction $s \mapsto \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right]$ est dérivable sur $]0, \Delta t]$ et sa dérivée est prolongeable par continuité en 0 : en effet, il est facile de voir que pour tout $0 < s \leq \Delta t$,

$$\mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right] = \mathbb{P} \left[\frac{l - \bar{x}_0 - \tilde{b}(\bar{x}_0)s}{\tilde{\sigma}(\bar{x}_0)\sqrt{s}} \leq B_1 \leq \frac{r - \bar{x}_0 - \tilde{b}(\bar{x}_0)s}{\tilde{\sigma}(\bar{x}_0)\sqrt{s}} \right] \quad (2.73)$$

Posons

$$\mathbf{l}(s, \bar{x}_0) \triangleq \frac{l - \bar{x}_0 - \tilde{b}(\bar{x}_0)s}{\tilde{\sigma}(\bar{x}_0)\sqrt{s}}; \quad \mathbf{r}(s, \bar{x}_0) \triangleq \frac{r - \bar{x}_0 - \tilde{b}(\bar{x}_0)s}{\tilde{\sigma}(\bar{x}_0)\sqrt{s}}$$

Il existe une constante $C(\bar{x}_0)$ telle que

$$|\partial_s \mathbf{l}(s, \bar{x}_0)| \leq \frac{C(\bar{x}_0)}{s^{3/2}}; \quad |\partial_s \mathbf{r}(s, \bar{x}_0)| \leq \frac{C(\bar{x}_0)}{s^{3/2}}$$

et ces inégalités impliquent, après dérivation dans la relation (2.73), l'existence d'une nouvelle constante, notée encore abusivement $C(\bar{x}_0)$, telle que :

$$\left| \partial_s \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right] \right| \leq \frac{C(\bar{x}_0)}{s^{3/2}} \exp \left(- \frac{|\mathbf{l}(s, \bar{x}_0)|^2 \wedge |\mathbf{r}(s, \bar{x}_0)|^2}{2} \right)$$

L'hypothèse **H4** et le fait que $\bar{x}_0 \neq r$ et $\bar{x}_0 \neq l$ impliquent alors directement que :

$$\lim_{s \downarrow 0} \left| \partial_s \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right] \right| = 0$$

La fonction $s \mapsto \mathbb{P} \left[\mathbf{l}(s, \bar{x}_0) \leq B_1 \leq \mathbf{r}(s, \bar{x}_0) \right]$ est donc dérivable sur $]0, \Delta t]$ et sa dérivée est prolongeable par continuité en 0 : cette fonction est donc prolongeable en 0 par une fonction à variation bornée sur $[0, \Delta t]$ fermé.

étape 2 :

Supposons maintenant que $\bar{x}_0 = r$ (le cas $\bar{x}_0 = l$ se traite de façon analogue).

Dans ce cas, pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{P}_r \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right] = \mathbb{P} \left[\frac{l - r - \tilde{b}(r)s}{\tilde{\sigma}(r)\sqrt{s}} \leq B_1 \leq \frac{-\tilde{b}(r)\sqrt{s}}{\tilde{\sigma}(r)} \right] \quad (2.74)$$

et dans ce cas nous posons

$$\mathbf{l}(s, r) \triangleq \frac{l - r - \tilde{b}(r)s}{\tilde{\sigma}(r)\sqrt{s}}; \quad \mathbf{r}(s, r) \triangleq \frac{-\tilde{b}(r)\sqrt{s}}{\tilde{\sigma}(r)}$$

Ces égalités impliquent que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_r \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right] &= \mathbb{P} \left[B_1 \leq \mathbf{l}(s, r) \right] - \mathbb{P} \left[B_1 \leq \mathbf{r}(s, r) \right] \\ &= \mathbb{P} \left[B_1 \leq \frac{l - r - \tilde{b}(r)s}{\tilde{\sigma}(r)\sqrt{s}} \right] - \int_0^s \frac{\tilde{b}(r)}{2\tilde{\sigma}^2(r)\sqrt{u}} \exp \left(- \frac{|\mathbf{r}(u, r)|^2}{2} \right) du \end{aligned}$$

Puisque $r \neq l$, grâce à ce que nous avons vu à l'étape précédente, il est facile de constater que la fonction $s \mapsto \mathbb{P} \left[B_1 \leq \mathbf{l}(s, r) \right]$ est dérivable sur $]0, \Delta t]$ et que sa dérivée est prolongeable par continuité en 0 : cette fonction est donc prolongeable en 0 par une fonction à variation bornée sur $[0, \Delta t]$ fermé.

D'autre part, la fonction $s \mapsto \int_0^s \frac{\bar{b}(r)}{2\bar{\sigma}^2(r)\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{r(u,r)^2}{2}\right) du$ est clairement à variation bornée sur $[0, \Delta t]$.

Par conséquent, puisque la fonction $s \mapsto \mathbb{P}_r \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right]$ est égale à la différence de deux fonctions à variation bornée sur $[0, \Delta t]$, nous pouvons la prolonger en 0 par une fonction à variation bornée sur $[0, \Delta t]$ fermé.

En conclusion, $s \mapsto \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right]$ est une fonction à variation bornée sur $[0, \Delta t]$.

étape 3 :

Pour montrer que $s \mapsto \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right]$ est une fonction à variation bornée sur $[0, T]$, il suffit de montrer c'est le cas sur tout intervalle de la forme $[t_k, t_{k+1}]$.

Or, pour tout $t_k \leq s \leq t_{k+1}$, nous savons, grâce à la propriété de Markov que

$$\mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right] = \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\mathbb{P}_{\bar{Y}_{t_k}} \left[\bar{Y}_{s-t_k} \in [l, r] \right] \right]$$

et donc nous pouvons nous ramener à l'étude de la fonction $\mathbb{P}_y \left[\bar{Y}_s \in [l, r] \right]$ sur $[0, \Delta t]$ lorsque $y \in \mathbb{R}$ est choisi de façon arbitraire. Grâce aux étapes 1 et 2 de la démonstration, nous déduisons ainsi le résultat du lemme. □

Théorème 2.3.4. *Il existe une constante $C(T)$, indépendante de l et r , telle que :*

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in [l, r] \right] \leq C(T) (r - l) + C(T) \Delta t \quad (2.75)$$

Démonstration. 1ère étape :

La première étape de la démonstration consiste à établir un critère de comparaison entre

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in [l, r] \right]$$

et

$$\int_0^T \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s) \right] ds$$

Grâce au résultat du lemme 2.3.3 et au vu des résultats énoncés dans l'Annexe A, nous avons que :

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in [l, r] \right] \leq \int_0^T \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s) \right] ds + O(\Delta t) \quad (2.76)$$

2ème étape :

La seconde étape de la démonstration réside dans une application de la formule des temps d'occupation pour l'intégrale en temps continu.

Nous avons que $\mathbb{P}_{\bar{x}_0}$ - ps :

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s) d\langle \bar{Y} \rangle_s \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(y) L_T^y(\bar{Y}) dy$$

Cette égalité et le théorème de Fubini impliquent que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [\mathbb{1}_{\{[l,r]\}}(\bar{Y}_s)] ds &\leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{[l,r]\}}(\bar{Y}_s) \sigma^2(\bar{Y}_{\eta(s)}) ds \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{[l,r]\}}(\bar{Y}_s) d\langle \bar{Y} \rangle_s \right] \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{[l,r]\}}(y) \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [L_T^y(\bar{Y})] dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda} (r-l) \sup_{y \in [l,r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [L_T^y(\bar{Y})] \tag{2.77}
\end{aligned}$$

Par conséquent, au vu de (2.76) et (2.77), le théorème sera démontré si nous arrivons à prouver que

$$\sup_{y \in [l,r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [L_T^y(\bar{Y})] < +\infty$$

3ème étape :

Grâce à la formule de Tanaka, nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{y \in [l,r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [L_T^y(\bar{Y})] &\leq \sup_{y \in [l,r]} \left\{ \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \bar{Y}_T - y \right| - \left| \bar{x}_0 - y \right| \right] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \text{sgn}(\bar{Y}_s - y) d\bar{Y}_s \right] \right\} \\
&\leq \sup_{y \in [l,r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \bar{Y}_T - \bar{x}_0 \right| \right] + \sup_{y \in [l,r]} \left| \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \text{sgn}(\bar{Y}_s - y) \tilde{b}(\bar{Y}_s) ds \right] \right| \\
&\leq \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \bar{Y}_T - \bar{x}_0 \right| \right] + T \|\tilde{b}\|_{\infty} \\
&\leq C(T) < +\infty
\end{aligned}$$

et le théorème est ainsi démontré. \square

Théorème 2.3.5. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux constantes $C(T, \epsilon)$ et $C(T)$, indépendantes de l et r , telles que :*

$$\boxed{\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_k}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] \leq C(T, \epsilon) \frac{(r-l)}{(\Delta t)^\epsilon} + C(T) (\Delta t)^{1/2}} \tag{2.78}$$

Démonstration. La preuve, bien que plus complexe, suit essentiellement les idées de la preuve du théorème 2.3.5.

1ère étape :

Nous devrions donc commencer par comparer les quantités

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_k}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] \quad \text{et} \quad \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-s}} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [\mathbb{1}_{\{[l,r]\}}(\bar{Y}_s)] ds$$

Pour des raisons techniques liées à l'intégrabilité des quantités que nous regardons nous allons plutôt comparer les quantités

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\bar{t}_k)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]]$$

et

$$\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [\mathbb{1}_{\{[l,r]\}}(\bar{Y}_s)] ds$$

En utilisant le lemme 2.3.3 et les résultats de l'Annexe A, nous constatons que :

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\bar{t}_k)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] \leq \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [\mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s)] ds + C(\Delta t)^{(1/2+\epsilon)} \quad (2.79)$$

2ème étape :

La seconde étape de la démonstration réside dans une application de la formule des temps d'occupation généralisée (cf. [40] p. 232) pour l'intégrale en temps continu.

Nous avons que $\mathbb{P}_{\bar{x}_0}$ - ps :

$$\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s) d\langle \bar{Y} \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(y) \left\{ \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \right\} dy$$

Cette égalité et le théorème de Fubini impliquent que

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [\mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s)] ds &\leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s) \sigma^2(\bar{Y}_{\eta(s)}) ds \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(\bar{Y}_s) d\langle \bar{Y} \rangle_s \right] \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{[l, r]\}}(y) \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \right] dy \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (r-l) \sup_{y \in [l, r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

Par conséquent, au vu de (2.76) et (2.80), nous voudrions prouver que

$$\sup_{y \in [l, r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \right] < +\infty$$

3ème étape :

Fixons $y \in [l, r]$. Introduisons pour chaque $t \in [0, T]$ le temps aléatoire

$$g_t^y = \sup \{s < t : \bar{Y}_s = y\} \quad (2.81)$$

Nous avons que :

$$\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) = \int_0^T \frac{1}{(T-g_s^y)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \quad \mathbb{P}_{\bar{x}_0} - \text{ps} \quad (2.82)$$

En effet, la mesure $dL_s^y(\bar{Y})$ est portée par l'ensemble

$$\mathcal{Z}^y \triangleq \{t \geq 0 : \bar{Y}_t = y\}$$

et $g_s^y = s$ pour tout s qui est limite à gauche de points de \mathcal{Z}^y . Les uniques points pour lesquels $g_s^y \neq s$ sont donc les points extrémaux à droite de l'ensemble $(\mathcal{Z}^y)^c$ qui sont en nombre dénombrable. Puisque $s \mapsto L_s^y(\bar{Y})$ est une fonction continue, la mesure $dL_s^y(\bar{Y})$ ne charge pas de points isolés et donc $g_s^y = s$ pour $dL_s^y(\bar{Y})$ - presque tout s . Ainsi, (2.82) est vérifiée.

Par application du théorème (4.2) p. 260 dans [40], nous voyons donc que le processus

$$\left\{ \int_0^t \frac{1}{(T-g_s^y)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) : t \in [0, T] \right\}$$

est le temps local de la semimartingale locale

$$\left\{ \frac{1}{(T - g_t^y)^{1/2-\epsilon}} (\bar{Y}_t - y) : t \in [0, T] \right\}$$

En particulier, par application de la formule d'Itô-Tanaka,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \right] &= \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \frac{1}{(T-g_T^y)^{1/2-\epsilon}} (\bar{Y}_T - y) \right| \right] \\ &\quad - \frac{1}{T^{1/2-\epsilon}} |\bar{x}_0 - y| \\ &\quad - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{(T-g_s^y)^{1/2-\epsilon}} (\bar{Y}_s - y) \right) d\bar{Y}_s \right] \\ &\triangleq A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

Majoration de $A_1 + A_2 + A_3$:

En appliquant une nouvelle fois le résultat du théorème (4.2) p. 260 dans [40], nous constatons que :

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \frac{1}{(T-g_T^y)^{1/2-\epsilon}} (\bar{Y}_T - y) \right| \right] \leq |\bar{x}_0 - y| \frac{1}{T^{1/2-\epsilon}} + \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \int_0^T \frac{1}{(T-g_s^y)^{1/2-\epsilon}} d\bar{Y}_s \right| \right] \\ &\leq -A_2 + \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{\eta(s)}) dB_s \right| \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \tilde{b}(\bar{Y}_{\eta(s)}) ds \right| \right] \\ &\leq -A_2 + 2\sqrt{T} \|\tilde{b}\|_\infty \\ &\quad + \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{\eta(s)}) dB_s \right|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

et nous avons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{\eta(s)}) dB_s \right|^2 \right]^{1/2} &= \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\left| \int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1-2\epsilon}} \tilde{\sigma}^2(\bar{Y}_{\eta(s)}) ds \right| \right]^{1/2} \\ &\leq \tilde{\Lambda} \left(\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1-2\epsilon}} ds \right)^{1/2} \\ &\leq C(T, \epsilon) \end{aligned}$$

Nous constatons donc que

$$|A_1 + A_2| \leq C(T, \epsilon) \quad (2.83)$$

En ce qui concerne A_3 , on voit très facilement que

$$|A_3| \leq C(T)$$

Par conséquent, il existe une constante $C(T, \epsilon)$ finie et indépendante de y telle que :

$$|A_1 + A_2 + A_3| \leq C(T, \epsilon)$$

Ainsi

$$\sup_{y \in [l, r]} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_0^T \frac{1}{(T-s)^{1/2-\epsilon}} dL_s^y(\bar{Y}) \right] \leq C(T, \epsilon) < +\infty \quad (2.84)$$

Conclusion :

En combinant (2.84), (2.77) et (2.79), nous trouvons que :

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\bar{t}_k)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] \leq C(T, \epsilon) (r-l) + C(\Delta t)^{(1/2+\epsilon)} \quad (2.85)$$

En divisant le tout par $(\Delta t)^\epsilon$, nous obtenons que

$$(\Delta t)^{1-\epsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\bar{t}_k)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] \leq \left(C(T, \epsilon) (r-l) + C(\Delta t)^{(1/2+\epsilon)} \right) \frac{1}{(\Delta t)^\epsilon}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_k}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] &\leq (\Delta t)^{1-\epsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\bar{t}_k)^{1/2-\epsilon}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} [\bar{Y}_{t_k} \in [l, r]] \\ &\leq C(T, \epsilon) \frac{(r-l)}{(\Delta t)^\epsilon} + C(\Delta t)^{1/2}, \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. \square

Corollaire 2.3.1. *Pour tout $\rho > 0$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de ρ , telle que :*

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{1/2-\rho}, (\Delta t)^{1/2-\rho} \right] \right] \leq C(T) (\Delta t)^{1/2-\rho} \quad (2.86)$$

Pour tout $\rho > 0$ et $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(T, \epsilon)$, indépendante de ρ , telle que :

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_{k+1}}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{1/2-\rho}, (\Delta t)^{1/2-\rho} \right] \right] \leq C(T, \epsilon) (\Delta t)^{1/2-\rho-\epsilon} \quad (2.87)$$

Démonstration. L'inégalité (2.86) est une conséquence immédiate du théorème 2.3.4 appliquée avec $l = -(\Delta t)^{1/2-\rho}$ et $r = (\Delta t)^{1/2-\rho}$.

En ce qui concerne l'inégalité (2.87), nous faisons le raisonnement suivant : grâce à l'inégalité (2.78) appliquée avec $l = -(\Delta t)^{1/2-\rho}$ et $r = (\Delta t)^{1/2-\rho}$, nous savons qu'il existe une constante $C(T, \epsilon)$, indépendante de ρ , telle que :

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_k}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{1/2-\rho}, (\Delta t)^{1/2-\rho} \right] \right] \leq C(T, \epsilon) (\Delta t)^{1/2-\rho-\epsilon}$$

Et à fortiori,

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_k}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{1/2-\rho}, (\Delta t)^{1/2-\rho} \right] \right] \leq C(T, \epsilon) (\Delta t)^{1/2-\rho-\epsilon}$$

A partir de cette majoration, nous trouvons facilement que

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_{k+1}}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{1/2-\rho}, (\Delta t)^{1/2-\rho} \right] \right] &\leq \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{t}_{k+1}}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{t}_k}} \right) \\ &\quad + C(T, \epsilon) (\Delta t)^{1/2-\rho-\epsilon} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe une constante $C(T)$ telle que :

$$S \triangleq \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} - \frac{1}{\sqrt{t_k}} \right) \leq C(T) (\Delta t)^{1/2}$$

et l'inégalité (2.87) sera démontrée. Mais S est une somme télescopique et cette inégalité est trivialement vérifiée. Le corollaire est donc démontré. \square

2.4 Vitesse de convergence de l'algorithme

2.4.1 Notations

Rappelons quelques notations :

- $\Delta B_k^{k+1} = (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$.
- Δt désigne le pas de temps $\frac{T}{n}$.
- $t_k = \frac{kT}{n}$.
- $\bar{t}_k = T - t_k$.
- $p_k(y) dy$ désigne la densité du schéma d'Euler au temps t_k , c'est à dire la densité de la variable aléatoire \bar{Y}_{t_k} .
- $g(z)dz$ désigne la densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$. En particulier, dans toute la suite nous utiliserons les identités $\int g(z)dz = 1$, $\int z g(z)dz = 0$ et $\int z^2 g(z)dz = 1$.

Nous introduisons les nouvelles notations suivantes :

- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto u^+(t, x)$ désigne une fonction de classe C^4 sur \mathbb{R} et égale à $x \mapsto u(t, x)$ sur \mathbb{R}^+ .
- De même, pour tout $t > 0$, $x \mapsto u^-(t, x)$ désigne une fonction de classe C^4 sur \mathbb{R} et égale à $x \mapsto u(t, x)$ sur \mathbb{R}^- .
- Nous noterons $\Gamma(y)$ la quantité définie par :

$$\Gamma(y) \triangleq \frac{-y - \tilde{b}(y)\Delta t}{\tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}} \quad (2.88)$$

2.4.2 Décomposition de l'erreur : mise en rapport des termes du premier ordre

L'erreur du schéma se décompose comme suit

$$\begin{aligned} \epsilon_T^{x_0} &= \left| \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [f \circ h^{-1}(\bar{Y}_T)] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [f \circ h^{-1}(Y_T)] \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_k, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k}))] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_{k+1}}))] \right| \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les égalités :

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ u(T, x) = \mathbb{E}_x [f(X_T)], & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et le fait que la somme est télescopique.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \epsilon_T^{x_0} &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-2} \left\{ \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_k, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k}))] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k}))] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k}))] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_{k+1}}))] \right\} \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_1, h^{-1}(\bar{Y}_{t_{n-1}}))] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(0, h^{-1}(\bar{Y}_T))] \right| \\ &\triangleq \left| \sum_{k=0}^{n-2} E_1^k + E_2^k \right| + R \quad (2.89) \end{aligned}$$

2.4.2.1 Décomposition de l'erreur temporelle

Nous commençons par étudier le terme

$$E_1^k = \int_{\mathbb{R}} [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \quad (2.90)$$

que nous décomposons en

$$\begin{aligned} E_1^k &= \int_0^\infty [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \\ &\triangleq E_1^{k,+} + E_1^{k,-} \end{aligned}$$

Nous avons le

Lemme 2.4.1. *On vérifie que*

$$\begin{aligned} E_1^{k,+} &= \int_0^\infty [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \\ &= - \int_0^{\Delta t} \int_0^\infty \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} a(\cdot) \partial_x u(\bar{t}_k + s, \cdot) p_k(\cdot) \Big|_{x=0+}^{+\infty} ds \end{aligned}$$

On a une égalité analogue lorsqu'on intègre sur $]-\infty, 0[$.

Démonstration. Pour tout $x > 0$, la fonction $s \mapsto u(s, x)$ est différentiable sur $]0, \infty[$. En particulier, à l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégrale et du théorème de Fubini, nous avons que :

$$\begin{aligned} E_1^{k,+} &= \int_0^\infty [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\Delta t} \partial_t u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) ds p_k(z) dz \\ &= \int_0^{\Delta t} \int_0^\infty \partial_t u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) p_k(z) dz ds \end{aligned}$$

Puisque u est solution du problème de transmission (\mathcal{P}'), nous pouvons intégrer par parties et nous obtenons que

$$\begin{aligned} E_1^{k,+} &= \int_0^{\Delta t} \int_0^\infty \partial_z [a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z))] ds p_k(z) dz \\ &= - \int_0^{\Delta t} \int_0^\infty \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} a(\cdot) \partial_z u(\bar{t}_k + s, \cdot) p_k(\cdot) \Big|_{x=0+}^{+\infty} ds \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi prouvé. \square

Ainsi le lemme 2.4.1 nous permet de faire apparaître les conditions du problème de transmission

parabolique (*) et on vérifie que

$$\begin{aligned}
E_1^k &= E_1^{k,+} + E_1^{k,-} \\
&= \int_{-\infty}^0 [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \\
&\quad + \int_0^{+\infty} [u(\bar{t}_k, h^{-1}(z)) - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] p_k(z) dz \\
&= - \int_0^{\Delta t} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\
&\quad + \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} a(0-) \partial_x u(\bar{t}_k + s, 0-) p_k(0) ds \\
&\quad - \int_0^{\Delta t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\
&\quad - \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} a(0+) \partial_x u(\bar{t}_k + s, 0+) p_k(0) ds
\end{aligned}$$

et au vu des conditions de transmission (*)

$$\begin{aligned}
E_1^k &= - \int_0^{\Delta t} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\
&\quad - \int_0^{\Delta t} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\
&\triangleq \mathcal{J}_1^{k,+} + \mathcal{J}_1^{k,-}
\end{aligned}$$

2.4.2.2 Décomposition de l'erreur en espace

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned}
E_2^k &= \left(\mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k}))] - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} [u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_{k+1}}))] \right) \\
&= - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\mathbb{E} \left[u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k} + \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{t_k}) \Delta B_k^{k+1} + \tilde{b}(\bar{Y}_{t_k}) \Delta t)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k})) \mid \bar{Y}_{t_k} \right] \right] \\
&= - \mathbb{E}_{\bar{x}_0} \left[\int_{\mathbb{R}} u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k} + \tilde{\sigma}(\bar{Y}_{t_k}) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(\bar{Y}_{t_k}) \Delta t)) \right. \\
&\quad \left. - u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(\bar{Y}_{t_k})) g(z) dz \right] \\
&\triangleq \int_{\mathbb{R}} U^k(\bar{t}_{k+1}, y) p_k(y) dy
\end{aligned} \tag{2.91}$$

En intégrant par parties et en utilisant la définition de $\Gamma(y)$ en (2.88) :

$$\begin{aligned}
U^k(\bar{t}_{k+1}, y) &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)}^z u\left(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}\left(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}x + \tilde{b}(y)\Delta t\right)\right) \\
&\quad - u\left(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(y)\right) dx \Big] g'(z) dz \\
&= - \int_{\Gamma(y), +\infty[} \left[\int_{\Gamma(y)}^z u\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}\left(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}x + \tilde{b}(y)\Delta t\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - u\left(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(y)\right) dx \right] g'(z) dz \\
&\quad - \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[\int_{\Gamma(y)}^z u\left(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta)\left(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}x + \tilde{b}(y)\Delta t\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - u\left(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(y)\right) dx \right] g'(z) dz \\
&= U_1^k(\bar{t}_{k+1}, y) + U_2^k(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

On s'intéresse maintenant au terme U_1^k que l'on décompose en :

$$\begin{aligned}
U_1^k(\bar{t}_{k+1}, y) &= U_1^k(\bar{t}_{k+1}, y)\mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} + U_1^k(\bar{t}_{k+1}, y)\mathbb{1}_{\{y < 0\}} \\
&\triangleq U_1^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_1^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned}$$

De même,

$$U_2^k(\bar{t}_{k+1}, y) \triangleq U_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_2^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y)$$

Pour $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
U_1^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) &= - \int_{\Gamma(y), +\infty[} \left[\int_{\Gamma(y)}^z u\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}\left(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}x + \tilde{b}(y)\Delta t\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - u\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}y\right) dx \right] g'(z) dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\Gamma(y)}^z u^+\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}\left(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}x + \tilde{b}(y)\Delta t\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - u^+\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}y\right) dx \right] g'(z) dz \\
&\quad + \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[\int_{\Gamma(y)}^z u^+\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}\left(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}x + \tilde{b}(y)\Delta t\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - u^+\left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}y\right) dx \right] g'(z) dz \\
&\triangleq U_{1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{1,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned}$$

De façon analogue on définit pour $y < 0$,

$$U_2^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) \triangleq U_{2,1}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{2,2}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y)$$

En appliquant la formule de Taylor à u^+ , on trouve que pour tout $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
U_{1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) &= - \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\Gamma(y)}^z u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) dx \right] g'(z) dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)}^z \partial_x u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right] dx g'(z) dz \\
&- \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)}^z \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^2 \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^2 dx g'(z) dz \\
&- \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)}^z \frac{1}{6} \partial_{xxx}^3 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^3 \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^3 dx g'(z) dz \\
&- \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)}^z \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\xi)^3 \partial_{x^4}^4 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \xi \left\{ \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right\} \right) \right) d\xi \\
&\quad \times \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^4 \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^4 dx g'(z) dz \\
&\triangleq U_{1,1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{1,1,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + \tilde{R}_1^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + \tilde{R}_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned}$$

Et de façon analogue on décompose $U_{2,1}^{k,-}$. On obtient ainsi

$$U_{2,1}^{k,-} \triangleq U_{2,1,1}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{2,1,2}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) + \tilde{R}_1^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) + \tilde{R}_2^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y)$$

Dans toute la suite nous noterons

$$\tilde{R}_1^{k,+} \triangleq \int_{\mathbb{R}} \tilde{R}_1^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) p_k(y) dy \quad (2.93)$$

$$\tilde{R}_1^{k,-} \triangleq \int_{\mathbb{R}} \tilde{R}_1^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) p_k(y) dy \quad (2.94)$$

et

$$\tilde{R}_2^{k,+} \triangleq \int_{\mathbb{R}} \tilde{R}_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) p_k(y) dy \quad (2.95)$$

$$\tilde{R}_2^{k,-} \triangleq \int_{\mathbb{R}} \tilde{R}_2^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) p_k(y) dy \quad (2.96)$$

En intégrant par parties, on a pour $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
U_{1,1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) &= -\partial_x u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \frac{1-\beta}{1-2\beta} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right\} g(z) dz \\
&= \partial_x u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \frac{1-\beta}{1-2\beta} \tilde{b}(y) \Delta t
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
U_{1,1,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) &= \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \left[\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right]^2 \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \left\{ \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right\}^2 g(z) dz \\
&= \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \left[\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right]^2 \tilde{\sigma}^2(y) \Delta t \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \left[\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right]^2 \tilde{b}^2(y) (\Delta t)^2 \\
&= \tilde{U}_{1,1,2}^{k,+} + \bar{R}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned}$$

Dans toute la suite nous noterons

$$\bar{R}^{k,+} = \int_{\mathbb{R}} \bar{R}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) p_k(y) dy \quad (2.97)$$

Et grâce à une nouvelle intégration par parties effectuée cette fois-ci contre la densité p_k de la variable \bar{Y}_{t_k} , on remarque que

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{+\infty} \left(U_{1,1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + \tilde{U}_{1,1,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) \right) p_k(y) dy \\
&= \Delta t \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz \\
&\quad - \Delta t \left[\frac{1}{2} a(0+) \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0+) p_k(0) \right] \\
&\triangleq J_1^{k,+} + J_2^{k,+}
\end{aligned}$$

De même on obtient que

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^0 \left(U_{2,1,1}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{2,1,2}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) \right) p_k(y) dy \\
&= \Delta t \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz \\
&\quad + \Delta t \left[\frac{1}{2} a(0-) \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0-) p_k(0) \right] \\
&\triangleq J_1^{k,-} + J_2^{k,-}
\end{aligned}$$

et les conditions de transmission du problème parabolique (*) nous assurent que

$$\Delta t \left[\frac{1}{2} a(0-) \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0-) p_k(0) \right] = \Delta t \left[\frac{1}{2} a(0+) \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0+) p_k(0) \right] \quad (2.98)$$

et donc $J_2^{k,+} + J_2^{k,-} = 0$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{+\infty} \left(U_{1,1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{1,1,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) \right) p_k(y) dy \\
& - \int_{-\infty}^0 \left(U_{2,1,1}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{2,1,2}^{k,-}(\bar{t}_{k+1}, y) \right) p_k(y) dy \\
&= J_1^{k,+} + J_1^{k,-}
\end{aligned}$$

En ce qui concerne $U_{1,2}^{k,+}$ on fait le calcul suivant,

$$\begin{aligned}
U_{1,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) &= \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \int_{\Gamma(y)}^z \left[u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \right] dx g'(z) dz \\
&= - \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \right] g(z) dz \\
&+ \left[u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, 0 \right) - u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \right] g(\Gamma(y)) \\
&= U_{1,2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{1,2,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned}$$

Ces termes sont à regrouper avec $U_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)$:

$$\begin{aligned}
U_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) &= - \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \int_{\Gamma(y)}^z \left[u \left(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta) \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \right] dx g'(z) dz \\
&= \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[u \left(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta) \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \right] g(z) dz \\
&\quad - \left[u \left(\bar{t}_{k+1}, 0 \right) - u \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \right] g(\Gamma(y)) \\
&= U_{2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{2,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)
\end{aligned}$$

Et on remarque que :

$$U_{2,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{1,2,2}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) = 0 \quad (2.99)$$

Les termes $U_{1,2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)$ et $U_{2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y)$ sont à regrouper en vue de faire apparaître les conditions de transmission du problème parabolique (*). On obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \left(U_{2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) + U_{1,2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}, y) \right) p_k(y) dy \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[u \left(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta) \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right] g(z) dz p_k(y) dy + 0 \\
&\leq \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[u \left(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta) \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) \right] g(z) dz p_k(y) dy \\
&+ C \int_{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}}^{+\infty} \mathbb{P} \{ N \in]-\infty, \Gamma(y)[\} p_k(y) dy \\
&\triangleq N^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) + O_{\text{pol}}(\Delta t)
\end{aligned}$$

On traite le terme $N^{k,+}(\bar{t}_{k+1})$ en faisant apparaître de manière artificielle le point 0 dans la décomposition :

$$\begin{aligned}
N^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) &= \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[u(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta)(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t)) \right. \\
&\quad \left. - u(\bar{t}_{k+1}, 0) \right] g(z) dz p_k(y) dy \\
&\quad - \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \left[u^+(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t)) \right. \\
&\quad \left. - u(\bar{t}_{k+1}, 0) \right] g(z) dz p_k(y) dy \\
&= N_1^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) + N_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1})
\end{aligned}$$

En réutilisant la formule de Taylor pour $N_1^{k,+}$ on obtient

$$\begin{aligned}
N_1^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) &= \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0-) \\
&\quad \times \left\{ (1-\beta)(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t) \right\} g(z) dz p_k(y) dy \\
&\quad + \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \partial_{xx}^2 u(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta)\xi(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t)) d\xi \\
&\quad \times (1-\beta)^2 \left[y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t \right]^2 g(z) dz p_k(y) dy \\
&= N_{1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) + R_{1,2}^{k,+}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
N_2^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) &= - \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0+) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1-\beta}{1-2\beta}(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t) \right\} g(z) dz p_k(y) dy \\
&\quad - \int_0^{(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)[} \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \partial_{xx}^2 u^+(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta}\xi(y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t)) d\xi \\
&\quad \times \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^2 \left[y + \tilde{\sigma}(y)\sqrt{\Delta t}z + \tilde{b}(y)\Delta t \right]^2 g(z) dz p_k(y) dy \\
&= N_{2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) + R_{2,2}^{k,+}
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions de transmission du problème parabolique (*), on remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{1-\beta}{1-2\beta} \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0+) &= \frac{a(0+) + a(0-)}{2a(0-)} \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0+) \\
&= \frac{a(0-)}{a(0+)} \frac{a(0+) + a(0-)}{2a(0-)} \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0-) \\
&= (1-\beta) \partial_x u(\bar{t}_{k+1}, 0-)
\end{aligned}$$

et on vérifie que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$N_{2,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) = N_{1,1}^{k,+}(\bar{t}_{k+1}) \quad (2.100)$$

En conclusion, il reste à étudier :

- la compensation des termes principaux apparaissant dans la décomposition de l'erreur temporelle et dans la décomposition de l'erreur en espace : la somme $\bar{J}_1^{k,+} + \bar{J}_1^{k,-} + J_1^{k,+} + J_1^{k,-}$.
- les termes de reste à savoir, R et $\bar{R}^{k,+}$, $\tilde{R}_1^{k,+}$, $\tilde{R}_2^{k,+}$, $R_{1,2}^{k,+}$, $R_{2,2}^{k,+}$ et $R_1^{k,+}$ dans le cas positif, et l'analogue de ces termes dans le cas négatif et que l'on note pareillement $\bar{R}^{k,-}$, $\tilde{R}_1^{k,-}$, $\tilde{R}_2^{k,-}$, $R_{1,2}^{k,-}$, $R_{2,2}^{k,-}$ et $R_1^{k,-}$.

2.4.3 Compensation des termes de premier ordre

Le but de cette section est d'étudier la vitesse de compensation des termes qui apparaissent dans l'erreur temporelle d'une part et l'erreur spatiale d'autre part. Plus précisément nous devons étudier la différence :

$$\begin{aligned}
\epsilon^{k,+} &\triangleq \bar{J}_1^{k,+} + J_1^{k,+} \\
&= \int_0^{\Delta t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz ds \\
&\quad - \Delta t \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z)) \partial_z p_k(z) dz
\end{aligned} \tag{2.101}$$

et la différence analogue $\epsilon^{k,-} \triangleq \bar{J}_1^{k,-} + J_1^{k,-}$ que nous analyserons de la même manière sans toutefois écrire l'ensemble des calculs.

Nous sommes donc confrontés au problème d'évaluer la différence des dérivées $\partial_x u$ prises en deux temps assez proches. Pour ce faire nous utilisons les résultats sur le problème de transmission parabolique.

$$\begin{aligned}
\epsilon^{k,+} &\triangleq \int_0^{\Delta t} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) [\partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) - \partial_z u(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] \partial_z p_k(z) dz ds \\
&= - \int_0^{\Delta t} \int_0^{+\infty} \partial_z \left[\frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) [\partial_z u^+(\bar{t}_{k+1} + s, h^{-1}(z)) \right. \\
&\quad \left. - \partial_z u^+(\bar{t}_{k+1}, h^{-1}(z))] \right] p_k(z) dz ds \\
&\quad - \int_0^{\Delta t} \left[\frac{1}{2} a(0+) [\partial_z u(\bar{t}_{k+1} + s, 0+) - \partial_z u(\bar{t}_{k+1}, 0+)] \right] p_k(0) ds \\
&\triangleq \epsilon_1^{k,+} + \epsilon_2^{k,+}
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}
|\epsilon_1^{k,+}| &= \left| \int_0^{\Delta t} \int_0^s \int_0^{+\infty} \partial_\theta \partial_z \left[\frac{1}{2} a(h^{-1}(z)) \partial_z u^+(\bar{t}_{k+1} + \theta, h^{-1}(z)) \right] p_k(z) dz ds \right| \\
&\leq \sup_{\theta \in [0, \Delta t]} \left\| \partial_{tt}^2 u^+(\bar{t}_{k+1} + \theta, \cdot) \right\|_{\infty}^+ (\Delta t)^2
\end{aligned}$$

Le terme $\epsilon_2^{k,+}$ se compense avec le terme analogue $\epsilon_2^{k,-}$ grâce aux conditions de transmission du problème parabolique.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
|\epsilon^{k,+} + \epsilon^{k,-}| &\leq |\epsilon_1^{k,+}| + |\epsilon_1^{k,-}| + |\epsilon_2^{k,+} + \epsilon_2^{k,-}| \\
&\leq |\epsilon_1^{k,+}| + |\epsilon_1^{k,-}| + 0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\epsilon^{k,+} + \epsilon^{k,-}| \leq C(T) \left(\sup_{\theta \in [0, \Delta t]} \left\| \partial_{tt}^2 u^+(\bar{t}_{k+1} + \theta, \cdot) \right\|_{\infty}^+ + \sup_{\theta \in [0, \Delta t]} \left\| \partial_{tt}^2 u^-(\bar{t}_{k+1} + \theta, \cdot) \right\|_{\infty}^- \right) (\Delta t)^2$$

et par définition de u^+ et u^- :

$$\boxed{|\epsilon^{k,+} + \epsilon^{k,-}| \leq C(T) \sup_{\theta \in [0, \Delta t]} \left\| \partial_{tt}^2 u(\bar{t}_{k+1} + \theta, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \tag{2.102}$$

2.4.4 Etude des restes

Dans cette section nous étudions l'ensemble des termes de reste à savoir, R et les restes $\overline{R}^{k,+}$, $\tilde{R}_1^{k,+}$, $\tilde{R}_2^{k,+}$, $R_{1,2}^{k,+}$, $R_{2,2}^{k,+}$ et $R_1^{k,+}$ dans le cas positif, et l'analogue de ces termes dans la cas négatif $\overline{R}^{k,-}$, $\tilde{R}_1^{k,-}$, $\tilde{R}_2^{k,-}$, $R_{1,2}^{k,-}$, $R_{2,2}^{k,-}$ et $R_1^{k,-}$.

2.4.4.1 Etude du reste R

Rappelons que

$$R = \left| \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(t_1, h^{-1}(\overline{Y}_{t_{n-1}}))] - \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(0, h^{-1}(\overline{Y}_T))] \right|$$

On décompose R de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R &= \left| \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(\Delta t, h^{-1}(\overline{Y}_{T-\Delta t}))] - \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(0, h^{-1}(\overline{Y}_T))] \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(\Delta t, h^{-1}(\overline{Y}_{T-\Delta t}))] - \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(0, h^{-1}(\overline{Y}_{T-\Delta t}))] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(0, h^{-1}(\overline{Y}_{T-\Delta t}))] - \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [u(0, h^{-1}(\overline{Y}_T))] \right| \\ &\stackrel{\Delta}{=} I_1 + I_2 \end{aligned}$$

On voit tout de suite que :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^{\Delta t} \mathbb{E}_{\overline{x}_0} \left[\left| \partial_s u(s, h^{-1}(\overline{Y}_T)) \right| \right] ds \\ &\leq \int_0^{\Delta t} \|\partial_s u(s, x)\|_{\infty} ds \end{aligned}$$

En ce qui concerne I_2 , on remarque que :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left| \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [f \circ (\overline{Y}_{T-\Delta t})] - \mathbb{E}_{\overline{x}_0} [f \circ h^{-1}(\overline{Y}_T)] \right| \\ &\leq C \|f^{(1)}\|_{\infty} \mathbb{E}_{\overline{x}_0} \left[\left| \overline{Y}_T - \overline{Y}_{T-\Delta t} \right| \right] \\ &\leq C(T) \|f^{(1)}\|_{\infty} (\Delta t)^{1/2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{R \leq \int_0^{\Delta t} \|\partial_s u(s, \cdot)\|_{\infty} ds + C(T) \|f^{(1)}\|_{\infty} (\Delta t)^{1/2}} \quad (2.103)$$

2.4.4.2 Etude des restes $\overline{R}^{k,+}$ et $\overline{R}^{k,-}$

On rappelle que

$$\overline{R}^{k,+} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u^+ \left(\overline{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \left[\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right]^2 \tilde{b}^2(y) (\Delta t)^2 p_k(y) dy$$

et on voit directement que

$$\boxed{\overline{R}^{k,+} \leq C(T) \left\| \partial_{xx}^2 u^+ (\overline{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \quad (2.104)$$

De même,

$$\boxed{\overline{R}^{k,-} \leq C(T) \left\| \partial_{xx}^2 u^- (\overline{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \quad (2.105)$$

2.4.4.3 Etude des restes $\tilde{R}_1^{k,+}$ et $\tilde{R}_1^{k,-}$

On rappelle que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1^{k,+} &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)} \frac{1}{6} \partial_{xxx}^3 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} y \right) \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^3 \\ &\quad \times \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^3 dx g'(z) dz p_k(y) dy \end{aligned}$$

En intégrant par parties par rapport à la variable z et en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}} z^3 g(z) dz = 0$, $\int_{\mathbb{R}} z^2 g(z) dz = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} z g(z) dz = 0$, voit qu'il existe une constante $C(T)$ telle que :

$$\boxed{\tilde{R}_1^{k,+} \leq C(T) \left\| \partial_{xxx}^3 u^+ (\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \quad (2.106)$$

De même,

$$\boxed{\tilde{R}_1^{k,-} \leq C(T) \left\| \partial_{xxx}^3 u^- (\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \quad (2.107)$$

2.4.4.4 Etude des restes $\tilde{R}_2^{k,+}$ et $\tilde{R}_2^{k,-}$

On rappelle que

$$\begin{aligned} R_2^{k,+} &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma(y)} \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\xi)^3 \partial_{x^4}^4 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \xi \left\{ \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right\} \right) \right) d\xi \\ &\quad \times \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^4 \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} x + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^4 dx g'(z) dz \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on constate que

$$\begin{aligned} R_2^{k,+} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\xi)^3 \partial_{x^4}^4 u^+ \left(\bar{t}_{k+1}, \frac{1-\beta}{1-2\beta} \left(y + \xi \left\{ \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right\} \right) \right) d\xi \\ &\quad \times \left(\frac{1-\beta}{1-2\beta} \right)^4 \left[\tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^4 dx g(z) dz \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\boxed{R_2^{k,+} \leq C(T) \left\| \partial_{x^4}^4 u^+ (\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \quad (2.108)$$

De même,

$$\boxed{R_2^{k,-} \leq C(T) \left\| \partial_{x^4}^4 u^- (\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty} (\Delta t)^2} \quad (2.109)$$

2.4.4.5 Etude des restes $R_{1,2}^{k,+}$, $R_{2,2}^{k,+}$ et $R_{2,2}^{k,-}$, $R_{1,2}^{k,-}$

Etudions maintenant les restes qui font apparaître le temps passé autour de 0 : $R_{1,2}^{k,+}$, $R_{2,2}^{k,+}$ et $R_{2,2}^{k,-}$, $R_{1,2}^{k,-}$.

$$\begin{aligned} R_{1,2}^{k,+} &= \int_0^{[\Delta t]^{\frac{1}{2}-\rho}} \int_{]-\infty, \Gamma(y)]} \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi)^2 \partial_{xx}^2 u \left(\bar{t}_{k+1}, (1-\beta) \xi \left(y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right) \right) d\xi \\ &\quad \times (1-\beta)^2 \left[y + \tilde{\sigma}(y) \sqrt{\Delta t} z + \tilde{b}(y) \Delta t \right]^2 g(z) dz p_k(y) dy \end{aligned}$$

Ainsi,

$$R_{1,2}^{k,+} \leq C(T) \left\| \partial_{xx}^2 u(\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty}^+ \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[0, [\Delta t]^{\frac{1}{2}-\rho} \right] \right] (\Delta t)^{1-2\rho} \quad (2.110)$$

De même,

$$R_{2,2}^{k,+} \leq C(T) \left\| \partial_{xx}^2 u^+(\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty}^+ \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[0, [\Delta t]^{\frac{1}{2}-\rho} \right] \right] (\Delta t)^{1-2\rho} \quad (2.111)$$

et

$$R_{1,2}^{k,-} \leq C(T) \left\| \partial_{xx}^2 u(\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty}^- \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-[\Delta t]^{\frac{1}{2}-\rho}, 0 \right] \right] (\Delta t)^{1-2\rho} \quad (2.112)$$

et

$$R_{2,2}^{k,-} \leq C(T) \left\| \partial_{xx}^2 u^-(\bar{t}_{k+1}, \cdot) \right\|_{\infty}^- \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-[\Delta t]^{\frac{1}{2}-\rho}, 0 \right] \right] (\Delta t)^{1-2\rho} \quad (2.113)$$

2.4.5 Erreur globale du schéma en fonction de la condition initiale

Nous avons donc pour tout $\rho > 0$ et toute fonction f dans \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \epsilon_T^{x_0} &\leq \int_0^{\Delta t} \|\partial_s u(s, \cdot, f)\|_{\infty} ds + C(T) \|f^{(1)}\|_{\infty} (\Delta t)^{1/2} \\ &+ C(T) (\Delta t)^{-2\rho} \left\{ \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \left\| \partial_{xx}^2 u(\bar{t}_{k+1}, \cdot, f) \right\|_{\infty} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}, (\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho} \right] \right] \right\} \\ &+ C(T) \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \left\| \partial_{xx}^2 u(\bar{t}_{k+1}, \cdot, f) \right\|_{\infty} \Delta t + C(T) \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \left\| \partial_{xxx}^3 u(\bar{t}_{k+1}, \cdot, f) \right\|_{\infty} \Delta t \\ &+ C(T) \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \left\| \partial_{x^4}^4 u(\bar{t}_{k+1}, \cdot, f) \right\|_{\infty} \Delta t + C(T) \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \sup_{\theta \in [0, \Delta t]} \left\| \partial_{tt}^2 u(\bar{t}_{k+1} + \theta, \cdot, f) \right\|_{\infty} \Delta t \\ &+ O_{\text{pol}}^{\rho}(\Delta t) \end{aligned} \quad (2.114)$$

2.4.5.1 Erreur globale du schéma lorsque la condition initiale appartient à \mathcal{H}^0 : démonstration du Théorème 2.1.1

Si la condition initiale f appartient à \mathcal{H}^0 , nous pouvons utiliser les résultats des théorèmes 2.2.1 et du corollaire 2.3.1. Nous obtenons ainsi, à partir de (2.114), que pour tout $\rho > 0$:

$$\epsilon_T^{x_0} \leq C(T) (\Delta t)^{\frac{1}{2}-3\rho} + C(T) (\Delta t) + O_{\text{pol}}^{\rho}(\Delta t)$$

et ce terme tend vers 0 lorsque l'on choisit $0 < \rho < \frac{1}{6}$. Cette dernière inégalité prouve le Théorème 2.1.1.

2.4.5.2 Erreur globale du schéma lorsque la condition initiale appartient à \mathcal{H} : démonstration du Théorème 2.1.2

Lorsque f appartient à \mathcal{H} , nous utilisons les résultats sur la régularisation de la condition initiale. Soit f_{δ} définie par (2.69) :

Nous avons que :

$$\begin{aligned}
\epsilon_T^{x_0} &= \left| \mathbb{E}_{x_0} [f(X_T)] - \mathbb{E}_{x_0} [f(\bar{X}_T)] \right| \\
&\leq \left| \mathbb{E}_{x_0} [f(X_T)] - \mathbb{E}_{x_0} [f_\delta(X_T)] \right| + \left| \mathbb{E}_{x_0} [f_\delta(X_T)] - \mathbb{E}_{x_0} [f_\delta(\bar{X}_T)] \right| \\
&\quad + \left| \mathbb{E}_{x_0} [f_\delta(\bar{X}_T)] - \mathbb{E}_{x_0} [f(\bar{X}_T)] \right| \\
&\leq I_1(\delta) + I_2(\delta) + I_3(\delta)
\end{aligned}$$

Majoration du terme I_1 :

Grâce aux estimations d'Aronson, nous avons que :

$$\begin{aligned}
I_1(\delta) &\leq \int_{\mathbb{R}} |f - f_\delta|(y) p(T, x_0, y) dy \\
&\leq \int_{-\delta}^{-\delta} |f - f_\delta|(y) p(T, x_0, y) dy + \int_{\delta}^{2\delta} |f - f_\delta|(y) p(T, x_0, y) dy \\
&\leq C\delta \int_{-\delta}^{2\delta} p(T, x_0, y) dy \\
&\leq \frac{C(T)\delta^2}{\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Majoration du terme I_2 :

En utilisant les majorations marquées (**) du théorème 2.2.12, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
I_2(\delta) &\leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) (\Delta t)^{1/2} + C(T) \Delta t^{1/2} \\
&\quad + C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) (\Delta t)^{-2\rho} \\
&\quad \times \left\{ \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_{t_k} \in \left[-(\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho}, (\Delta t)^{\frac{1}{2}-\rho} \right] \right] \right\} \\
&\quad + C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \Delta t \\
&\quad + C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} + \frac{1}{\delta^2} \right) \Delta t \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{t_{k+1}}} \Delta t \\
&\quad + O_{\text{pol}}^\rho(\Delta t)
\end{aligned}$$

En utilisant alors le résultat du corollaire 2.3.1 nous trouvons que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une constante $C(T, \varepsilon)$ telle que :

$$\begin{aligned}
I_2(\delta) &\leq C(T, \varepsilon) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) (\Delta t)^{1/2-3\rho-\varepsilon} \\
&\quad + C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} + \frac{1}{\delta^2} \right) \Delta t
\end{aligned}$$

Majoration du terme I_3 : Nous effectuons un calcul analogue à celui effectué pour I_1 .

$$\begin{aligned}
I_3(\delta) &\leq \int_{\mathbb{R}} |f \circ h^{-1} - f_\delta \circ h^{-1}|(y) p_n(y) dy \\
&\leq \int_{-2\delta}^{-\delta} |f - f_\delta| \circ h^{-1}(y) p_n(y) dy + \int_{\delta}^{2\delta} |f - f_\delta| \circ h^{-1}(y) p_n(y) dy \\
&\leq C\delta \int_{-2\delta}^{2\delta} p_n(y) dy \\
&\leq C(T)\delta \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_T \in [-2\delta, 2\delta] \right]
\end{aligned}$$

Conclusion :

En conclusion, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\epsilon_T^{x_0} &\leq C(T)\delta^2 + C(T, \varepsilon) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + C \right) (\Delta t)^{1/2-3\rho-\varepsilon} \\
&\quad + C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} + \|f^{(4)}\|_{L^1} + \frac{1}{\delta^2} \right) \Delta t + O_{\text{pol}}^\rho(\Delta t) \\
&\quad + C(T)\delta \mathbb{P}_{\bar{x}_0} \left[\bar{Y}_T \in [-2\delta, 2\delta] \right]
\end{aligned}$$

En fixant $\alpha > 0$ et $\delta = (\Delta t)^\alpha$ et en optimisant alors cette dernière égalité par rapport à α , nous trouvons que la valeur optimale est atteinte pour $\alpha = 1/4$.

Par conséquent, pour tout $\mu > 0$ fixé, il existe une constante $C(T, \mu)$ telle que

$$\epsilon_T^{x_0} \leq C(T, \mu) (\Delta t)^{\frac{1}{2}-\mu} + C(T) (\Delta t)^{1/4} \mathbb{P} \left[\bar{Y}_T \in \left[-2(\Delta t)^{1/4}, 2(\Delta t)^{1/4} \right] \right] \quad (2.115)$$

Malheureusement, nous ne sommes pas arrivés à contrôler efficacement le dernier terme de cette majoration. En particulier, prouver la

Conjecture 2.4.2. *Il existe une constante $C(T)$ telle que*

$$\mathbb{P} \left[\bar{Y}_T \in \left[-2(\Delta t)^{1/4}, 2(\Delta t)^{1/4} \right] \right] \leq C(T) (\Delta t)^{1/4} \quad (2.116)$$

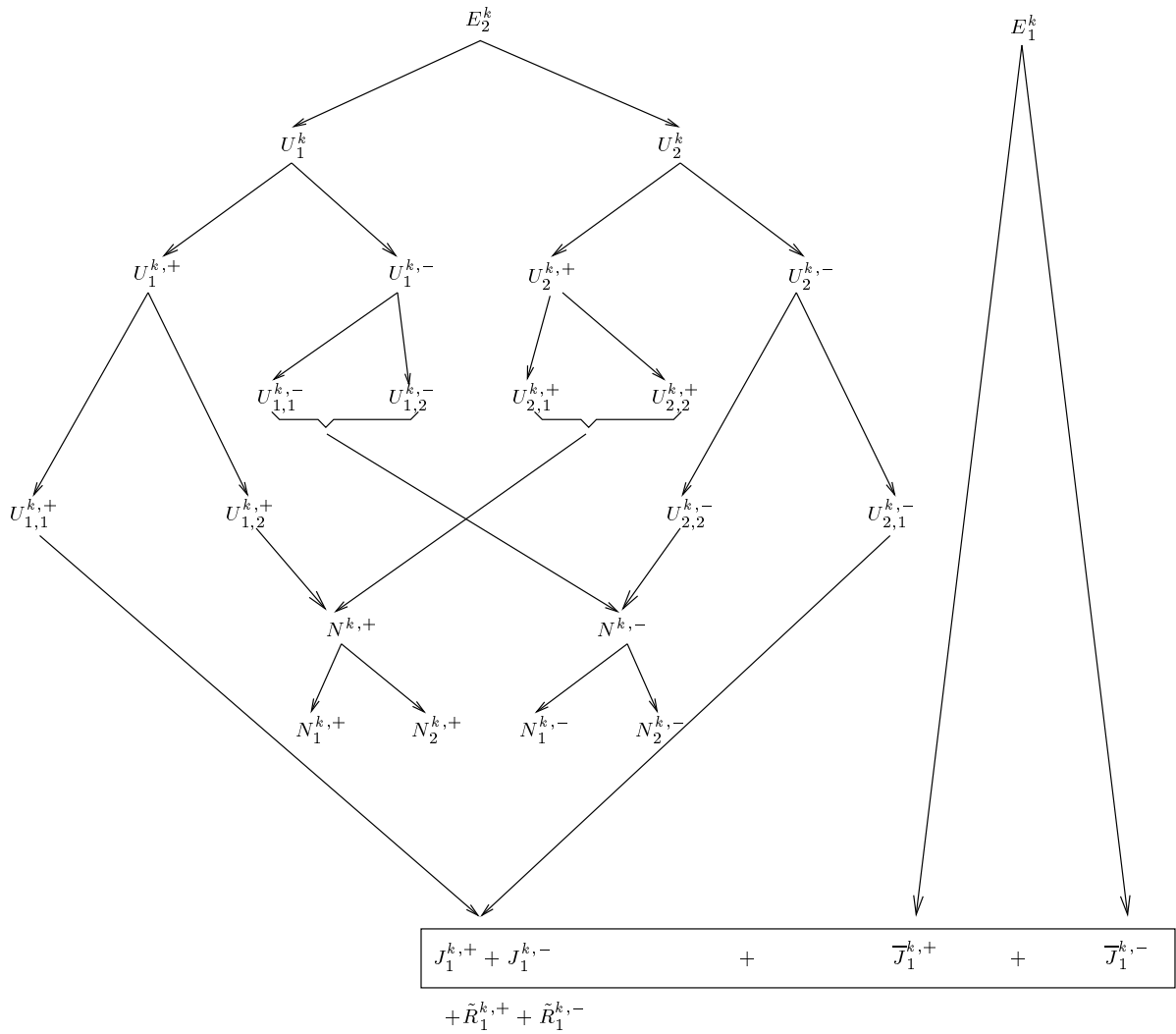
demeure un problème ouvert.

Néanmoins, en majorant trivialement $I_3(\delta)$ par $C(T)\delta$ puis en optimisant comme précédemment, nous arrivons tout de même à prouver le résultat du Théorème 2.1.2 :

il existe une constante $C(T)$ finie telle que

$$\boxed{\left| \mathbb{E}_{x_0} f(X_T) - \mathbb{E}_{x_0} f(\bar{X}_T) \right| \leq C(T) (\Delta t)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.117)$$

2.4.6 Graphique représentant les principaux termes intervenant dans la décomposition de l'erreur du schéma



2.5 Résultats numériques

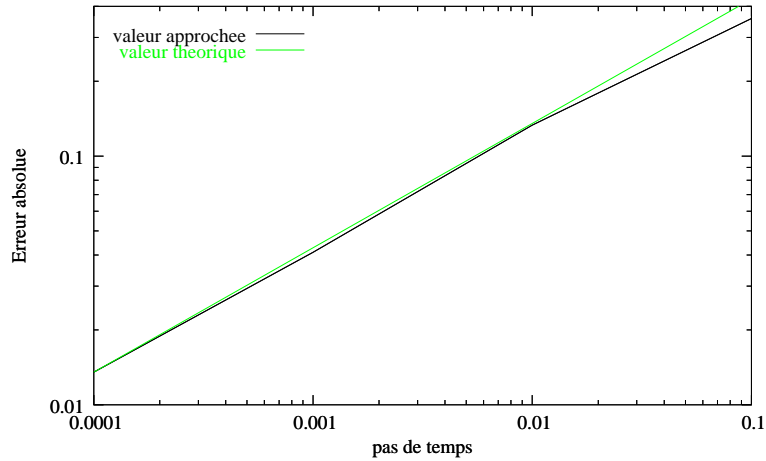
Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques afin de les confronter avec les résultats théoriques obtenus.

Les tests numériques que nous avons effectués portent sur le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ solution de

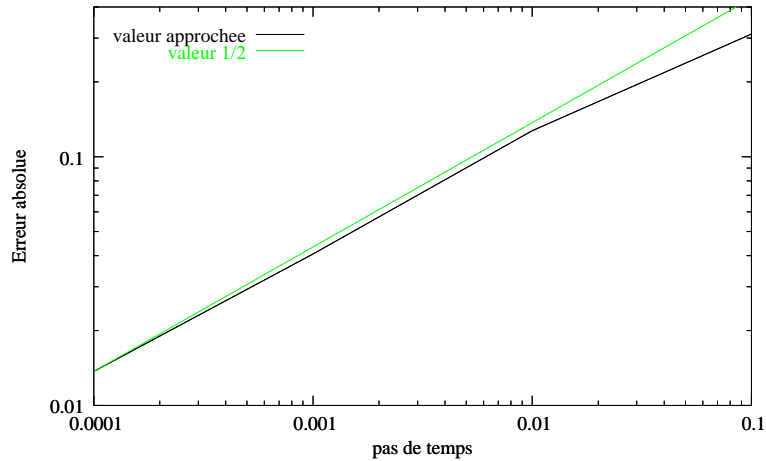
$$X_t = x_0 + \int_0^t \left\{ \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} \cdot (X_s) + 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(X_s) \right\} dB_s + \frac{1}{4} L_t^0(X) \quad (2.118)$$

Pour ce processus nous connaissons explicitement la valeur de la densité de transition et il est donc facile d'approcher très précisément la valeur de $\mathbb{E}[f(X_T)]$ dès que f est connue.

Nous concentrons nos tests numériques sur le comportement de l'erreur en fonction du pas de discrétisation Δt . Pour ce faire, on choisit un nombre de Monte-Carlo M suffisamment grand de façon à rendre suffisamment petite l'erreur statistique de l'algorithme devant l'erreur de discrétisation.



(a) Erreur absolue du schéma en fonction du pas de discrétisation dans le cas $f(x) = x^2$; $x_0 = 0.1$; $M = 10e7$.



(b) Erreur absolue du schéma en fonction du pas de discrétisation dans le cas $f(x) = x^2 + \sin(x)$; $x_0 = 0.1$; $M = 10e7$.

Nous constatons donc, en observant le premier graphique, que même si $x \mapsto x^2$ n'appartient pas à \mathcal{H}^0 , la vitesse de convergence du schéma d'Euler semble proche de $\sqrt{\Delta t}$: on pourrait penser que cela provient du fait que $x \mapsto x^2$ a toutes ses dérivées d'ordre plus grand ou égal à 3 qui sont nulles et que sa dérivée d'ordre 1 s'annule en 0 (point de discontinuité de σ). Mais la deuxième figure nous montre, cette fois à partir de l'exemple $x \mapsto x^2 + \sin(x)$ et bien que les dérivées d'ordre 1 et d'ordre 3 ne s'annulent plus en 0 dans ce cas, que la vitesse de convergence du schéma d'Euler semble rester proche de $\sqrt{\Delta t}$: cela nous conforte dans notre idée de croire en une extension possible du résultat du Théorème 2.1.1 pour des conditions initiales f appartenant à \mathcal{H} . Pour ce faire, il suffirait de prouver la conjecture 2.4.2 dont l'énoncé semble assez naturel. Malheureusement, cette question demeure ouverte.

Chapitre 3

Un schéma numérique pour les processus de diffusion unidimensionnels à coefficients discontinus

Le travail présenté ici a été réalisé avec Antoine Lejay que je tiens à remercier chaleureusement pour m'avoir proposé de travailler avec lui sur ses brillantes idées.

3.1 Introduction

The aim of this chapter is to provide a scheme to simulate the one-dimensional diffusion process generated by the differential operator

$$L = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left[a \frac{d}{dx} \right] + b \frac{d}{dx} \quad (3.1)$$

where, a , ρ and b are piecewise smooth functions that may have an infinite number of discontinuities on a countable set of points \mathcal{J} . We will suppose that \mathcal{J} has no cluster points and that functions a , ρ and b have everywhere left and right limits. The triplet (a, ρ, b) will be called the **characteristic** of L .

If a belongs to $C^1(\mathbb{R})$, L may be transformed into

$$L = \frac{a\rho}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{a'}{2} + b \right) \frac{d}{dx}$$

and even in this case, using an Euler scheme requires to compute the derivative of a and may be quite expensive from a numerical point of view. However, if $a = 1$, it has been proved in [52] that the Euler scheme converges but the speed of convergence still remains an open and challenging problem.

The scheme presented in this chapter is different of the Euler scheme and is rather a variation of the well-known random walk on spheres. The basic idea is the following : we use a piecewise constant approximation of the discontinuous coefficients. Given this approximation we use a method based on “local results” that allows us to compute the position of the particle at a given time t . This method is exact in the case of piecewise constant coefficients when $b = 0$ for it catches the correct behaviour of the diffusion process when it reaches a point in \mathcal{J} .

Let us explain our approach with a simple example : assume that $b = 0$ and suppose that $(a(x), \rho(x)) = (a_+, \rho_+)$ if $x \geq 0$ and that $(a(x), \rho(x)) = (a_-, \rho_-)$ if $x < 0$. Let u be the weak

solution of the parabolic problem associated with L :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - Lu(t, x) = 0; \quad u(0, x) = f(x) \quad (3.2)$$

It is well-known that this problem is equivalent to the following **transmission problem** :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{a(x)\rho(x)}{2}\Delta u(t, x) = 0 & \text{on } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^* \\ a_+ \nabla u(t, 0+) = a_- \nabla u(t, 0-) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Let us introduce Φ defined as follows :

$$\Phi(x) = \frac{x}{\sqrt{a_+ \rho_+}} \mathbb{1}_{x \geq 0} + \frac{x}{\sqrt{a_- \rho_-}} \mathbb{1}_{x \leq 0}$$

Since for any $t > 0$ the function u is of class C^2 on $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} - \{0\}$, it is easy to check that $v(t, x) := u(t, \Phi(x))$ is the solution of another transmission problem

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta v(t, x) = 0 & \text{on } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^* \\ \frac{\sqrt{a_+}}{\sqrt{\rho_+}} \nabla v(t, 0+) = \frac{\sqrt{a_-}}{\sqrt{\rho_-}} \nabla v(t, 0-) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Formally, this new transmission problem 3.4 is also equivalent to the parabolic problem

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \hat{L}v(t, x) = 0$$

where \hat{L} is the formal differential operator

$$\frac{1}{2}\Delta + \beta \delta_0 \nabla$$

with $\beta := \frac{\sqrt{a(0+)/\rho(0+)} - \sqrt{a(0-)/\rho(0-)}}{\sqrt{a(0+)/\rho(0+)} + \sqrt{a(0-)/\rho(0-)}} \in]-1, 1[$.

As shown in [38] and [37], this differential operator \hat{L} is the infinitesimal generator of the Skew Brownian Motion. This process may be constructed from a reflected Brownian motion simply by choosing the sign of each excursion using independent Bernoulli random variables of parameter $\frac{\beta+1}{2}$. Heuristically, this means that the particle chooses to go either on \mathbb{R}_+ or on \mathbb{R}_- with probability $(\beta + 1)/2$ when it reaches 0. Unfortunately, this description is not relevant due to the fact that there are infinitely many small excursions. Besides, it does not permit to understand the real behavior of the particle in function of a_{\pm} and ρ_{\pm} . However, numerical simulation of the Skew Brownian motion is easy, and using a simple and deterministic time change, it is possible to solve (3.2) using the probabilistic representation $u(t, x) = \mathbb{E}_x \left(f(\Phi^{-1}(Z_t^\beta)) \right)$, where Z^β is a Skew Brownian motion of parameter β .

Instead of working with PDEs, one may prefer to use the Itô-Tanaka formula just like in [33]. This can be achieved using a precise description of the process X related to L . As shown in [26], X solves the following SDE :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sqrt{a(X_s)\rho(X_s)} dB_s + \frac{a(0+) - a(0-)}{a(0+) + a(0-)} L_t^0(X)$$

where B is a Brownian motion and L^0 the symmetric local time at 0 of X .

Although this is not the first use the Skew Brownian motion in Monte Carlo methods (See [28]) or in modeling, neither has there been a systematic study of this process in this framework, nor a complete exposition of the interplay between the different coefficients.

The numerical method presented in this chapter follows the idea of [27], where diffusions with constant coefficients on the edges of a graph were simulated. As the infinitesimal generator gives locally the behavior of the particle, some properties of the Skew Brownian motion allowed, in this particular framework, to describe what happened at the nodes of the graph. These are the main reasons that explain our choice of approximating non-constant coefficients using piecewise constant coefficients rather than smoothing the coefficients around the points of the \mathcal{J} : indeed, this last procedure turns out to be unstable in practice and very expensive from a numerical point of view.

We will also give some results concerning the diffusion process generated by L under more general assumptions than in [26], mainly by describing it as the solution of some SDE involving the local time and beware of boundary conditions. As we will see, making use of space and time changes, in order to transform a one-dimensional process into a process which behaves locally like a Skew Brownian motion, provides a useful way of proving existence results for solutions of SDEs with local time.

For efficiency, one could also think of using the random walk proposed in [25] (after a proper change of the scale). This perspective is currently studied by P. Étoré.

Hypotheses

Let $\ell < r$ be two numbers that belong to $\overline{\mathbb{R}}$. Thus we may possibly have $\ell = -\infty$ and/or $r = +\infty$.

Assume that the coefficients a , ρ and b are defined on $[\ell, r]$ and satisfy for some constants $\lambda, \Lambda > 0$, assumption

$$\mathbf{H} : \begin{cases} a, \rho \text{ and } b \text{ are measurable,} \\ \text{for all } x \in [\ell, r], \rho(x) \in [\lambda, \Lambda] \text{ and } a(x) \in [\lambda, \Lambda], \\ \text{for all } x \in [\ell, r], |b(x)| \leq \Lambda \end{cases} \quad (3.5)$$

Let $\nu(dx)$ be the measure $\rho(x)^{-1}dx$ on (ℓ, r) and G denote the open set (ℓ, r) , with possibly, $G = \mathbb{R}$: for technical reasons, we restrict ourselves to the case where ℓ and r are simultaneously finite or infinite. In fact, all the results given in this article could be extended for $G = (\ell, +\infty)$ or $G = (-\infty, r)$.

We denote by $L^2(G)$ the space of measurable functions on G that are square integrable with respect to the Lebesgue measure. We also denote by $H^1(G)$ (resp. $H_0^1(G)$) the completion of the space of smooth functions (resp. smooth functions with compact support) on G with respect to the norm $\|f\|_{H^1(G)} := \sqrt{\|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(G)}^2}$.

Recall that for any connected interval G , all functions in the Sobolev space $H^1(G)$ have a continuous version since the dimension of the space is one. In all the following we will systematically identify a function in $H^1(G)$ with its continuous version.

3.2 Removing the drift

We assume at first that a , ρ and b are smooth.

– when G is finite, let $(L, \text{Dom}(L))$ be any one of the following differential operators :

$$\begin{cases} L \text{ is given by (3.1)} \\ \text{Dom}(L) = \{f \in \mathcal{C}^2(G; \mathbb{R}) \mid f(r) = f(\ell) = 0\} \end{cases}$$

for the Dirichlet boundary condition (b.c.) and

$$\begin{cases} L \text{ is given by (3.1)} \\ \text{Dom}(L) = \{f \in \mathcal{C}^2(G; \mathbb{R}) \mid f'(r) = f'(\ell) = 0\} \end{cases}$$

for the Neumann b.c..

– when $G = \mathbb{R}$, let $(L, \text{Dom}(L))$ be the differential operator

$$\begin{cases} L \text{ is given by (3.1)} \\ \text{Dom}(L) = C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \end{cases}$$

It is well known that for any of these cases $(L, \text{Dom}(L))$ is the infinitesimal generator of a continuous strong Markov process $(X, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ (See [8] for example) and this process is in addition solution to the Stochastic Differential Equation (SDE)

$$dX_t = \sqrt{\rho a}(X_t)dB_t + \left(\frac{a'}{2} + b\right)(X_t)dt.$$

If $b = 0$, $(L, \text{Dom}(L))$ can be associated to the symmetric bilinear form

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int a(x)u'(x)v'(x)dx$$

defined for u, v in $C_b^1(G; \mathbb{R})$ through

$$\mathcal{E}(u, v) = \int Lu(x)v(x)\rho^{-1}(x)dx \quad (3.6)$$

for $(u, v) \in \text{Dom}(L) \times C_b^1(G; \mathbb{R})$.

Since the symmetry will play an important role in most of the results given in this chapter we would like to be able transform (3.2) into an equivalent form without drift : as we will now see, this is possible thanks to the crucial fact that we are working on the one-dimensionnal space.

Let us explain one way of removing the drift by transforming a and ρ : let Ψ be the function

$$\Psi(x) = \int_0^x h(y)dy \text{ with } h(x) = 2 \int_0^x \frac{b(y)}{\rho(y)a(y)}dy. \quad (3.7)$$

If Ψ is given by (3.7) and is bounded, a simple calculation shows that

$$e^{-\Psi} \frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left(ae^{\Psi} \frac{d}{dx} \right) = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} \right) + b \frac{d}{dx}.$$

and we see that

$$e^{-\Psi} \frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left(ae^{\Psi} \frac{d}{dx} \right) \quad (3.8)$$

is a linear operator which is symmetric with respect to the measure $e^{-\Psi} \rho(dx)$ so we can start working using (3.6).

If G is bounded, then Ψ is bounded by a constant that depends only on λ, Λ and the Lebesgue measure $\text{meas}(G)$ of G and this procedure is valid.

If G is not bounded, then Ψ is not bounded and we cannot make this transformation without using further arguments. However, we claim that it is possible, at least locally, to replace in the previous computation Ψ with $\widehat{\Psi}$ defined for example by

$$\widehat{\Psi}(x) = \Psi(x) - \Psi(n) \text{ if } x \in [n, n+1] \text{ for all } n \in \mathbb{Z}.$$

and it is thus possible to repeat our argument and to transform L locally in a linear operator which is symmetric with respect to the measure $e^{-\widehat{\Psi}} \rho(dx)$.

Thus, instead of considering (a, ρ, b) as the characteristic of L , one should only consider L related with the new triplet $(e^{\widehat{\Psi}}a, e^{-\widehat{\Psi}}\rho, 0)$.

Note that the transform used here to remove the drift applies for non-smooth coefficients a, ρ and b since it is always possible to use a regularization procedure and pass to the limit : see regularisation results in Section 3.5.

3.3 Existence of a stochastic process

In dimension one, results on the existence and uniqueness of the stochastic process(es) generated by $(L, \text{Dom}(L))$ may be proved using (at least) three ways : using the properties of the density transition function, using the scale function and speed measure or using the Dirichlet form theory. We will see that all these approaches lead to the same process.

3.3.1 Using Dirichlet forms

We assume in a first time that $b = 0$. This will allow us to use the theory of symmetric Dirichlet forms. However, we have seen in Section 3.2 that this hypothesis is not a restriction.

Let \mathcal{E} be the bilinear form

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int_G a \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \text{ for all } u, v \in \text{Dom}(\mathcal{E})$$

on $L^2(G; \nu(dx))$. The domain $\text{Dom}(\mathcal{E})$ is

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\mathcal{E}) &= H^1([\ell, r]; \nu(dx)) \simeq H^1([\ell, r]) \text{ for the Neumann b.c.} \\ \text{Dom}(\mathcal{E}) &= H_0^1(G; \nu(dx)) \simeq H_0^1(G) \text{ for the Dirichlet b.c..} \end{aligned}$$

It is well known that $(\mathcal{E}, \text{Dom}(\mathcal{E}))$ is a regular, local Dirichlet form [15]. Hence, it generates a continuous strong Markov process $(X, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$. Besides the process is conservative if $G = \mathbb{R}$ or $\text{Dom}(\mathcal{E}) = H^1([\ell, r])$ (which corresponds to using the Neumann b.c.). Besides, if $G = (\ell, r)$ and $\text{Dom}(\mathcal{E}) = H_0^1(G)$, then $X_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}(\delta) + \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}(Y_t)$, where δ is the ‘‘point at infinity’’ of \mathbb{R} , Y is the process generated by $(\mathcal{E}, H_0^1(\mathbb{R}))$ with $a = \rho = 1$ outside G , and $\tau = \inf \{t \geq 0 : Y_t \notin G\}$.

Remarque 3.3.1. *As the dimension of the space is one, each point $x \in [\ell, r]$ is non-polar and has a positive capacity, and then all the statements of type ‘‘for quasi-every point of $[\ell, r]$ ’’ mean in fact ‘‘for every point of $[\ell, r]$ ’’.*

Remarque 3.3.2. *One could assume that the coefficients a and ρ are locally bounded. In this case, the process is not necessarily conservative, which means that it may explode in a finite time. This issue is discussed in [46].*

3.3.2 Using the properties of the semi-group

To the Dirichlet form $(\mathcal{E}, \text{Dom}(\mathcal{E}))$ may be associated a linear operator $(L, \text{Dom}(L))$ on $L^2(G; \nu(dx))$ defined through the relation

$$\mathcal{E}(u, v) = -\langle Lu, v \rangle_{L^2(G; \nu(dx))} \text{ for all } (u, v) \in \text{Dom}(L) \times \text{Dom}(\mathcal{E}).$$

In fact, it is possible to show that the operator L is the one given by (3.1) with domain

$$\begin{aligned} \text{Dom}(L) &= \{f \in H_0^1(G) : Lf \in L^2(G)\} \text{ for the Dirichlet b.c.,} \\ \text{Dom}(L) &= \{f \in H^1([\ell, r]) : Lf \in L^2(G)\} \text{ for the Neumann b.c..} \end{aligned}$$

This operator $(L, \text{Dom}(L))$ is the infinitesimal generator of a semi-group $(P_t)_{t > 0}$. We will see in Section 3.4 that P_t admits density transition function $p(t, x, y)$ and that some general estimates hold for it. These estimates (See (3.12) for example) are sufficient to assert the existence of a strong Feller, continuous process $(X, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$.

3.3.3 Using the scale function and the speed measure

Another way to define the stochastic process $(X, (\mathcal{F}_{t \geq 0}), (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ is using the scale function and the speed measure. Let us set for x in (ℓ, r) ,

$$h(x) = 2 \int_0^x \frac{b(y)}{\rho(y)a(y)} dy, \quad m(dx) = \frac{\exp(h(x))}{\rho(x)} dx \quad (3.9)$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{\exp(-h(y))}{a(y)} dy, \quad V(x) = \int_0^x m(x) dx. \quad (3.10)$$

For the Dirichlet b.c., we set $m(\{y\}) = +\infty$ for $y = \ell$ and $y = r$. For the Neumann b.c. $m(\{y\}) = 0$ at $y = r$ and $y = \ell$. On that particular topic, see for example [8] or [41]. We will see in Corollary 3.6.2 below that this process corresponds to the one already constructed using Dirichlet forms.

Unless when a is smooth the process X is in general not a semi-martingale. It is a Dirichlet process. Nevertheless, some stochastic calculus for X is possible using the theory of Dirichlet forms or time reversal technics : See [15, 42, 30] for example.

3.4 Properties of the semi-group

Let G be the open set $G = (\ell, r)$ or $G = \mathbb{R}$. For a function u in $H^1(G)$, we set $\Upsilon u(x) = u(x)$ if we are interested in the Dirichlet boundary condition (b.c.) or $\Upsilon u(x) = \frac{du(x)}{dx}$ if we are interested in the Neumann b.c.. Note that $\frac{du(x)}{dx}$ is a distribution in general and might not be well defined at all points but we use this operator as a notation.

Let us consider the parabolic Partial Differential Equation (PDE)

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\rho(x)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) + b(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \text{ on } [0, \infty) \times G, \\ \Upsilon u(t, x) = 0 \text{ on } (0, \infty) \times \{\ell, r\}, \\ u(0, x) = \phi(x), \quad x \in G. \end{cases} \quad (3.11)$$

Let us consider the parabolic PDE (3.11). Unless a , ρ and b are sufficiently smooth, the solution u is only a *weak solution* that can only be chosen in the space $C(0, T; L^2(G)) \cap L^2(0, T; H_0^1(G))$ in the case of Dirichlet b.c. and in $C(0, T; L^2(G)) \cap L^2(0, T; H^1([\ell, r]))$ in the case of Neumann b.c.. Such a solution exists and is unique if ϕ belongs to $L^2(G)$.

It is a standard result that $(L, \text{Dom}(L))$ is the infinitesimal generator of a semi-group $(P_t)_{t > 0}$ on $L^2(G; \nu(dx))$.

Proposition 3.4.1.

- For any $t > 0$, P_t has a non-negative density function $p(t, x, y)$ with respect to the measure ν . Besides,

$$u(t, x) = \int_G p(t, x, y) \phi(y) d\nu(y).$$

is a version of the solution of (3.11) which is continuous with respect to (t, x) on $(0, \infty) \times G$.

- The function $(t, x, y) \mapsto p(t, x, y)$ is $(\alpha/2, \alpha, \alpha)$ -Hölder continuous in (t, x, y) on every compact of $(0, \infty) \times G$, where α depends only on λ , Λ and the chosen compact.

Démonstration. The existence of a density for P_t is classical in the theory of PDEs. A proof of the second assertion may be found for example in [2]. \square

Proposition 3.4.2.

- If $G = \mathbb{R}$ or G is bounded and the Dirichlet b.c. are used, then there exist some constants C_1 and C_2 depending only on λ , Λ and T such that

$$p(t, x, y) \leq \frac{C_1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{C_2|x-y|^2}{t}\right) \quad (3.12)$$

for any $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. If $b = 0$, then the estimate (3.12) is uniform in T . This estimate is called the Aronson estimate¹.

- If G is bounded and the Neumann b.c. are used, then for any $T > 0$ and any $\theta > 1/2$, there exists some constants C_1, C_2 depending only on $\lambda, \Lambda, \theta, r, \ell$ and T such that

$$p(t, x, y) \leq \frac{C_1}{t^\theta} \exp\left(-\frac{C_2|x-y|^2}{t}\right). \quad (3.13)$$

for all $t \in (0, T]$ and all $x, y \in [\ell, r]$.

Démonstration. ²

A proof of (3.12) can be found for example in [2] and in [49].

Using the continuous injection from $H^1(G)$ into the set of continuous, bounded functions on G , it is clear that there exists a constant C (depending only on G) such that $\|f\|_{L^2(G; \nu(dx))}^{2+4/\kappa} \leq C\|f\|_{H^1(G)}\|f\|_{L^1(G)}^{4/\nu}$ for every $f \in H^1(G)$ and all $\kappa > 0$. This inequality together with assumption **H** yields that

$$\|f\|_{L^2(G; \nu(dx))}^{2+4/\kappa} \leq C \left(\mathcal{E}(f, f) + \|f\|_{L^2(G; \nu(dx))}^2 \right) \|f\|_{L^1(G; \nu(dx))}^{4/\kappa}$$

for all $f \in \text{Dom}(\mathcal{E})$. This is the *Nash inequality*. It is then possible to apply Theorem 3.25 in [10], which yields that there exist two constants K_1 and K_2 depending only on κ, r and ℓ such that

$$p(t, x, y) \leq \frac{K_1}{t^{\kappa/2}} \exp(-|\alpha y - \alpha x| - tK_2|\alpha|^2), \quad (3.14)$$

where $\alpha = (y_0 - x_0)/Kt_0$ for an arbitrary constant $K > 0$, a time $t_0 \in (0, 1]$ and fixed points $x_0, y_0 \in [\ell, r]$. For a choice of K large enough in function of K_2 (hence, K depends only on κ and G) and applying (3.14) with $x = x_0, y = y_0$ and $t = t_0$, we get (3.13) on the time interval $(0, 1]$. The Chapman-Kolmogorov equation can then be used to get (3.13) on any time interval $(0, T]$ for any $T > 0$. \square

3.5 Convergence results

Let $(a^n, \rho^n, b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of functions satisfying **H**. Let $(L^n, \text{Dom}(L^n))$ be the differential operator constructed previously, but with (a, ρ, b) replaced by (a^n, ρ^n, b^n) .

Proposition 3.5.1. *We assume that for some $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\frac{1}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{\rho^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p(G)} \frac{1}{\rho}, \quad \frac{b^n}{a^n \rho^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p(G)} \frac{b}{a\rho}.$$

- For any $\alpha > 0$ (and $\alpha = 0$ if G is bounded), the weak solutions u^n of the elliptic PDE

$$(\alpha - L^n)u^n = f$$

with the Dirichlet (resp. Neumann) boundary condition converge in $H^1(G)$ to the weak solution of

$$(\alpha - L)u = f$$

¹Note that however, D. Aronson proved these estimates in a rather general case, but it was initially proved simultaneously for operators of type $\nabla(a\nabla \cdot)$ by E. De Giorgi and J. Nash.

²A more detailed proof of this result for the case of Neumann b.c. can be found in the next Chapter (cf. Theorem 4.3.1)

The continuous version of $u^n(x)$ given by

$$\int_G g_\alpha^n(x, y) f(y) \rho^n(y)^{-1} dy$$

with $g_\alpha^n(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p^n(t, x, y) dt$ converges uniformly on each compact of G to the continuous version of $u(x)$ given by

$$\int_G g_\alpha(x, y) f(y) \rho^{-1}(y) dy$$

– The weak solution of the parabolic PDE

$$\frac{\partial u^n(t, x)}{\partial t} = L^n u^n(t, x)$$

with the initial condition $f \in L^2(G)$ converges in $L^2(0, T; \text{Dom}(\mathcal{E}))$ to the weak solution of the parabolic PDE

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Lu(t, x)$$

with the initial condition $f \in L^2(G)$. Moreover, the continuous version of $u^n(t, x)$ given by

$$\int_G p^n(t, x, y) f(y) \rho^n(y)^{-1} dy$$

converges uniformly on each compact of $\mathbb{R}_+^* \times G$ to the continuous version of $u(t, x)$ given by

$$\int_G p(t, x, y) f(y) \rho(y)^{-1} dy$$

Démonstration. Both convergence, in $H^1(G)$ for the solution of the elliptic problem and in $L^2(0, T; \text{Dom}(\mathcal{E}))$ for the solution of the parabolic problem, follow from the results Proposition may be found in [54] when $\rho = 1$, and is easily adapted to the case where $\rho \neq 1$.

The pointwise convergence of the solutions is a direct consequence of the convergence of the solution in $H^1(G)$ or in $L^2(0, T; \text{Dom}(\mathcal{E}))$, together with the Ascoli theorem, whose conditions are satisfied thanks to (3.12) or (3.13) : See for example [43] for a complete proof. \square

Proposition 3.5.2. *We assume that $G = \mathbb{R}$ or that $G = [r, \ell]$ and that the Neumann b.c. are used. Besides, let $G' = (r', \ell') \subset G$, and τ (resp. τ^n) be the first exit time from G' for X (resp. X^n). Under the hypotheses of Proposition 3.5.1, for any starting point x ,*

$$\mathbb{P}_x \circ (X^n, \tau^n)^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}_x \circ (X, \tau)^{-1}.$$

Démonstration. The convergence of X^n to X in finite-dimensional distribution follows from the convergence of the density transition function in (3.5.1), the estimates (3.12) or (3.13), and the Markov property (See for example the proof of the corresponding result in [43]).

For the tightness of $(\mathbb{P}_x \circ (X_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$, according to the Aldous criterion [1], it is sufficient to prove that for any sequence $(\tau^n, \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ such that τ^n is a \mathcal{F}_t^n -stopping time and δ_n is deterministic converging to 0,

$$\mathbb{P}_x (|X_{\tau^n + \delta_n}^n - X_{\tau^n}^n| > \eta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

for all $\eta > 0$.

Moreover, with (3.12) or (3.13),

$$\mathbb{P}_y (|X_{\delta_n}^n| > \eta) \leq \int_{G - (y - \eta, y + \eta)} \frac{C_1}{\delta_n^\theta} \exp\left(-\frac{C_2 |z - y|^2}{\delta_n}\right) dz.$$

where $\theta = 1/2$ (for $G = \mathbb{R}$) or $\theta > 1/2$ (for the Neumann b.c.). Thus, for n large enough so that $\eta^2/\delta_n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in G} \mathbb{P}_y(|X_{\delta_n}^n| > \eta) &\leq C_1 \delta_n^{1/2-\theta} \int_{|z| \geq \eta/\sqrt{\delta_n}} \exp(-C_2 z^2) dz \\ &\leq \frac{C_1}{C_2} \delta_n^{1/2-\theta} \exp(-C_2 \eta^2/\delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

The tightness of $(\mathbb{P}_x \circ (X^n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ follows immediately by application of the strong Markov property to $\mathbb{P}_x(|X_{\tau^n + \delta_n}^n - X_{\tau^n}^n| > \eta)$.

For the convergence of (X^n, τ^n) , let $\Theta(x) = \inf \{t \geq 0 : x(t) \notin G'\}$ for any continuous function $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Possibly $\Theta(x) = +\infty$ if $x(t)$ stays in G' . Then Θ is lower semi-continuous, that is $\Theta(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Theta(x^n)$ if for all $T > 0$, $\sup_{t \in [0, T]} |x(t) - x^n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Let x be a path such that there exists a sequence $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converging uniformly to x on $[0, T]$ for all $T > 0$ and $\Theta(x) < \liminf_{n \rightarrow \infty} \Theta(x^n)$. It is easily seen that this means that x remains in the closure of G' between the time $\Theta(x)$ and $\liminf_{n \rightarrow \infty} \Theta(x^n)$.

But one knows that this almost surely never happens for a trajectory of a one-dimensional, regular diffusion process (See [41, Lemma V.46.1, p. 273] for example). Thus, the set of discontinuity of Θ is a set of null measure for the distribution \mathbb{P}_x . As $\tau^n = \Theta(X^n)$, it follows that (X^n, τ^n) converges in distribution to (X, τ) . □

3.6 On diffusions with discontinuous coefficients

If $\ell > -\infty$ or $r < +\infty$ and we use the Dirichlet boundary conditions, then we extend the coefficients on \mathbb{R} with $\rho = a = 1$ and $b = 0$. Let \mathcal{J} be a (countable) set of points of (ℓ, r) , and we assume the following hypotheses :

$$\mathbf{H2} : \begin{cases} a, b \text{ and } \rho \text{ are right-continuous with left-limit,} \\ a, b \text{ and } \rho \text{ belongs to } C^1([\ell, r] - \mathcal{J}), \\ \mathcal{J} \text{ is at most countable,} \\ \text{there exists } \epsilon > 0 \text{ such that } |x - y| > \epsilon \text{ for any } x, y \in \mathcal{J}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Let us remark that with **H2**, the coefficients are of finite variation on $[\ell, r]$.

For a function f satisfying **H2**, we denote by $f'(x)$ the density of the part of its derivative which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure.

Proposition 3.6.1. – Assume that $G = \mathbb{R}$.

For any Brownian motion B constructed on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with its natural filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (completed to satisfy the usual conditions), $(L, \text{Dom}(L))$ is the infinitesimal generator of the unique strong solution X to the SDE

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{\rho(X_s) a(X_s)} dB_s + \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) dL_t^x(X) \quad (3.16)$$

with

$$\nu(dx) = \sum_{x \in \mathcal{J}} \beta(x) \delta_x + \left(\frac{a'(x) \rho(x)}{2} + b \right) dx \quad (3.17)$$

and

$$\beta(x) = \frac{a(x+) - a(x-)}{a(x+) + a(x-)} \quad (3.18)$$

– The operator $(L, \text{Dom}(L))$ with the Neumann b.c. at r and ℓ is the infinitesimal generator of the unique solution to (3.16) where ν and β are defined by (3.17) and (3.18) and in addition, $\nu(\{r\}) = -1$ and $\nu(\{\ell\}) = 1$.

Démonstration. The existence and the uniqueness of a strong solution to (3.16) follows from the results of J.-F. Le Gall in [25]. Thus, it is sufficient to prove that the process X generated by $(L, \text{Dom}(L))$ is a weak solution to (3.16).

◦ *Case of Neumann boundary condition.*³

◦ *If $G = \mathbb{R}$.* The previous computations can be used with a localization technique. But it is possible to avoid using Dirichlet forms theory. With the Itô-Tanaka formula (See for example [41, § IV.45, p. 102]) and the results from [25], $X = S^{-1}(Y)$ is a solution to (3.16) if Y is the strong solution of

$$Y_t = S(x) + \int_0^t e^{-\Psi(S^{-1}(Y_s))} \sqrt{\rho(S^{-1}(Y_s))/a(S^{-1}(Y_s))} dB_s$$

and the proof of Proposition 3.6.1 is now complete. \square

The next results follow from the Itô-Tanaka formula (See [41, § IV.45, p. 102] for example) applied to $S(X_t)$, where S is given by (3.10), and X is the solution to (3.16).

Corollaire 3.6.2. *The speed measure m and the scale function S of $(X, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ are given in (3.9) and (3.10).*

Remarque 3.6.3. *If $G = \mathbb{R}$, this result could also be proved by using a smooth approximation of the coefficients and the results of [14].*

3.7 Approximation by diffusions with piecewise constant coefficients

3.7.1 SDE satisfied by the approximation

To simplify the notations, we assume that $r > -\infty$ and we set for $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{J}^n = \{x_i\} \quad r = x_0^n < x_1^n < \dots$$

for some points $x_0^n, \dots, x_i^n, \dots$.

If $r = -\infty$ and $\ell = +\infty$, we are forced to pick a reference point on \mathbb{R} and to use doubly indexed sequences.

Thus, we set for $f = a, \rho$ and b ,

$$f^n(x) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{[x_k^n, x_{k+1}^n)}(x) f(x_k^n).$$

Hypothèse 1. *For any $n \in \mathbb{N}$, the points $x_0^n < x_1^n < \dots$ are chosen in order \mathcal{J}^n satisfies **H2**, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^n$ and*

$$\|a - a^n\|_\infty + \|\rho - \rho^n\|_\infty + \|b - b^n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Clearly, since $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^n$, a^n , ρ^n and b^n converge pointwise to a , ρ and b . Besides, a^n , ρ^n and b^n satisfy **H** and **H2**.

Using the occupation time density formula, it follows from Proposition 3.6.1 that the diffusion X^n is solution of the SDE

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t \sqrt{a^n \rho^n(X_s^n)} dB_s + \int_0^t b^n(X_s) ds + \sum_{k \geq 0} \tilde{\beta}_k^n L_t^{x_k^n}(X^n),$$

where B is a Brownian motion, and $L_t^x(X^n)$ is the symmetric local time of X^n at point x and time t .

³cf. section 4.5 of the next Chapter

Let Φ^n be the piecewise linear function

$$\Phi^n(x) = \sum_{k=0}^{k^n(x)-1} \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{\sqrt{a(x_k^n)\rho(x_k^n)}} + \frac{x - x_{k^n(x)}^n}{\sqrt{a(x_{k^n(x)}^n)\rho(x_{k^n(x)}^n)}},$$

where $k^n(x)$ is such that $x_{k^n(x)}^n \leq x < x_{k^n(x)+1}^n$. Then the symmetric Itô-Tanaka formula (See [41, § IV.45, p. 102] for example, see also [33] for a treatment of this case) applied to X^n yields that $Y^n = \Phi^n(X^n)$ is solution of the SDE

$$Y_t^n = Y_0^n + B_t + \int_0^t \frac{b^n}{\sqrt{a^n \rho^n}}(Y_s) ds + \sum_{k \geq 0} \beta_k^n L_t^{y_k^n}(Y^n), \quad (3.19)$$

where, $y_k^n = \phi(x_k^n)$ and if $k \neq 0$,

$$\beta_k^n = \frac{\sqrt{a(x_k^n+)/\rho(x_k^n+)} - \sqrt{a(x_k^n-)/\rho(x_k^n-)}}{\sqrt{a(x_k^n+)/\rho(x_k^n+)} + \sqrt{a(x_k^n-)/\rho(x_k^n-)}}.$$

Hence, the infinitesimal generator of Y^n is

$$L^{Y^n} = \frac{1}{2} \Delta + \frac{b^n}{\sqrt{a^n \rho^n}} \nabla \text{ on } (\ell, r) \setminus \mathcal{J}^n,$$

whose domain $\text{Dom}(L^{Y^n})$ contains the continuous, bounded functions f of class C_b^2 on $(\ell, r) \setminus \mathcal{J}^n$ such that $f(r) = 0$ (resp. $f(\ell) = 0$) if $r > -\infty$ (resp. $\ell < \infty$), and

$$\frac{1 + \beta_k^n}{2} f'(x_k^n+) = \frac{1 - \beta_k^n}{2} f'(x_k^n-).$$

3.7.1.1 The Skew Brownian Motion

Equation (3.19) shows that the process Y^n behaves around x_k^n like a *Skew Brownian Motion* of parameter $\frac{1+\beta_k^n}{2}$. Of course the Skew Brownian Motion of parameter 1 (resp. 0) is the positively (resp. negatively) reflected Brownian Motion (this is used to deal with the Neumann b.c.).

Let Z^θ be a Skew Brownian Motion of parameter $\theta \in [0, 1]$, and set

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : |Z^\theta| = \rho\}$$

for some $\rho > 0$. We will use in force the following construction of the Skew Brownian Motion, which may be found in [21] Problem 1, p.115 : a Skew Brownian Motion can be constructed by flipping the excursions of a Reflected Brownian Motion with a probability θ .

To be more precise, let R be a reflected Brownian Motion, and $\{(\ell^n, r^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ be the family of its excursion intervals. These intervals are such that $R_{\ell^n} = R_{r^n} = 0$, $R_t > 0$ on (ℓ^n, r^n) , $\cup_{n \in \mathbb{N}} (\ell^n, r^n) = \mathbb{R}^+$ and $(\ell^n, r^n) \cap (\ell^k, r^k) = \emptyset$ for $n \neq k$. Let e^n be the excursion attached to the interval n , that is $e_t^n = R_{(t-\ell^n) \wedge (r^n - \ell^n)}$ (note that these intervals (ℓ^n, r^n) may not be ordered, which implies that n is just understood as a label with *a priori* no meaning. To the excursion n , we associate an independent Bernoulli random variable σ_n of parameter θ with value in $\{-1, 1\}$. The process Z^θ constructed by setting

$$Z_t^\theta = \sigma_n e_{t-\ell^n} \quad \text{if } t \in [\ell^n, r^n],$$

is then a Skew Brownian Motion of parameter θ .

Let Z^θ be a Skew Brownian motion of parameter θ , and set $\tau = \inf \{t \geq 0 : |Z_t| = \rho\}$ for some $\rho > 0$. We will use in force the following property of the Skew Brownian motion :

Lemme 3.7.1. *The random variables τ and Z_τ^θ are independent. Moreover, the distribution of τ does not depend on θ (in particular, τ is equal in distribution to the first exit time of $[-\rho, \rho]$ for a Brownian motion), and $\mathbb{P}_0(Z_\tau = \rho) = \theta$.*

Démonstration. This is a direct consequence of the previous construction of the Skew Brownian motion. \square

3.8 Numerical simulations

In this Section, we give two algorithms to simulate either X_t for a given time t .

3.8.1 What is computed ?

Remarque 3.8.1. *As an infinitesimal generator acts locally, our algorithm can also be used to simulate some quantities related to PDE with a Dirichlet b.c. at one endpoint of G and a Neumann b.c. at the other endpoint.*

Our algorithm can be used to compute the following quantities :

- For any initial distribution μ and any $t > 0$, the transition, the probability density function $u^*(t, y) = \int_G \mu(dx)p(t, x, y)$, which is solution to the PDE

$$\frac{\partial u^*(t, y)}{\partial t} = L^* u^*(t, y) \text{ and } u^*(t, y) dy \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\text{weakly}} \mu.$$

For that, we use the approximation, for a given $\epsilon > 0$,

$$u^*(t, y) \simeq \frac{\rho(y)}{n2\epsilon} \text{Card} \{i = 1, \dots, n \mid Z^i \in [y - \epsilon, y + \epsilon]\}$$

where Z^i are n independent realizations of X_T with the initial measure μ .

- For any fixed $x \in (\ell, r)$ and any fixed $t > 0$, the solution $u(t, x)$ to the parabolic PDE (3.11) for any initial condition ϕ . For that, we use the approximation

$$u(t, x) \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(Z^i),$$

where the Z^i 's are as previously with the initial distribution $\mu = \delta_x$.

- For any fixed $x \in (\ell, r)$, the solution $u(x)$ to the elliptic PDE

$$Lu = 0 \text{ on } (\ell, r), \quad u(r) = u_r \text{ and } u(\ell) = u_\ell$$

for any $(u_r, u_\ell) \in \mathbb{R}^2$. For that, we use the approximation

$$u(x) \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_r(Y^i) \mathbb{1}_{\{Y^i=u_r\}} + u_\ell(Y^i) \mathbb{1}_{\{Y^i=u_\ell\}}),$$

where the Y^i 's are n independent realization of X_τ under \mathbb{P}_x .

Besides, if $\rho = 1$ and $b = 0$, then L is self-adjoint, and computing $\int_r^\ell \phi(x)p(t, x, y)dx$ is sufficient to compute the solution $u(t, x)$ for any $x \in (\ell, r)$, since $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ for all $t > 0$ and all $x, y \in (r, \ell)$.

Remarque 3.8.2. *It is possible to get some analytical expression of $p(t, x, y)$ (See [16]), but it leads to rather complicated expressions involving spectral decompositions.*

If (a, ρ) are piecewise constant and $b = 0$, then the numerical errors come from : (a) The approximations of series by keeping a finite number of terms (See Section 3.8.3 below); (b) The fact that we use a pseudo-random generator instead of independent random variables; (c) The Monte-Carlo error, that is the replacement of $\mathbb{E}(Y)$ by $N^{-1} \sum_{k=1}^N Y^i$, where Y is a random variables, and the Y^i 's are copies of independent random variables with the same distribution as Y .

The errors of type (a) and (b) are very small, and the error of type (c) occurs in all Monte Carlo methods and depends on the variance of Y .

For a general (a, ρ, b) , we may transform the diffusion into a diffusion with coefficients $(\tilde{a}, \tilde{\rho}, 0)$ and then use a piecewise constant approximation $(\tilde{a}^n, \tilde{\rho}^n, 0)$ of $(\tilde{a}, \tilde{\rho}, 0)$. An additional error comes from these approximations, which is discussed in Section 3.9 below.

Let X^n be the process generated by $(\tilde{a}^n, \tilde{\rho}^n, 0)$. We have seen in Section 3.7 that one can find a deterministic bijection Φ^n such that $Y_t^n = \Phi^n(X_t)$ is solution to the SDE

$$Y_t^n = Y_0^n + B_t + \sum_{k \geq 0} \beta_k^n L_t^{y_k^n}(Y^n).$$

The idea is now to simulate Y^n , and then to compute \tilde{X}^n by setting $\tilde{X}^n = (\Phi^n)^{-1}(Y^n)$.

Around each point x_k^n , then Y^n behaves like a Skew Brownian motion of parameter β_k^n . The justification of our algorithm relies on Lemma 3.7.1.

For each $x_k^n \in \mathcal{J}^n$, one picks two points $x_k^{n,-}$ and $x_k^{n,+}$ such that

$$x_{k-1}^n \leq x_k^{n,-} < x_k^n < x_k^{n,+} \leq x_{k+1}^n \text{ and } x_k^{n,+} - x_k^n = x_k^n - x_k^{n,-}.$$

Let us denote by \mathcal{K}^n the set $\mathcal{K}^n = \cup_{k \geq 0} \{x_k^{n,-}\} \cup \cup_{k \geq 0} \{x_k^{n,+}\}$. The sets \mathcal{K}^n and \mathcal{J}^n may have commons elements.

The idea is to perform a random walk on $\mathcal{J}^n \cup \mathcal{K}^n$ with a proper time tracking.

3.8.2 The algorithm

In this section, we give an algorithm to simulate Y_T for a given time $T > 0$, but this algorithm is easily simplified to simulate other quantities related with Y , for example (Y_τ, τ) .

Let us fix n , in all what follows we drop any reference to this integer.

We denote by B a Brownian motion and Z^β a Skew Brownian motion of parameter $\beta \in [-1, 1]$.

We denote by $\text{unif}()$ a function returning the value of an uniform random variable on $[0, 1]$. All the random variable simulated in this algorithm are assumed to be independent.

Input data : The starting point x and the time T .

Output data : A realization of $(\tau, Y_{T \wedge \tau})$, where τ is the first time the process hits one of the endpoints of $[r, \ell]$ at which there is a Dirichlet b.c..

The algorithm :

[INITIALIZATION] Set $t \leftarrow 0$ and $y \leftarrow x$.

[INFINITE LOOP]

if $y \in \mathcal{J}$

Assume that $y = x^k$

1. **if** x^k is one endpoint of $[r, \ell]$ corresponding to a Dirichlet b.c.
return (t, x^k) .

endif

2. For

$$Z_0^{\beta_k} = x^k \text{ and } \tau = \inf \{s \geq 0 : Z_s^{\beta_k} \in \{x_k^-, x_k^+\}\},$$

set $\gamma \leftarrow \mathbb{P}_{x^k}(T - t < \tau)$ (Note that γ does not depend on β_k).

3. **if** $\gamma > \text{unif}()$

Simulate a realization z of $Z_{T-t}^{\beta_k}$ given $\{\tau > T - t\}$.

Return (T, z) .

else

Simulate a realization (t', z) of $(\tau, Z_\tau^{\beta_k})$ given $\{\tau < T - t\}$.

Set $t \leftarrow t + t'$ and $y \leftarrow z$ and go back to the beginning of the loop.

endif

else

1. For $\tau = \inf \{s \geq 0 : B_s \in \mathcal{J}\}$, set $\gamma \leftarrow \mathbb{P}_y(T - t < \tau)$.

2. **if** $\gamma > \text{unif}()$

Simulate a realization z of B_{T-t} with $B_0 = y$ given $\{T - t < \tau\}$.

else

Simulate a realization (t', z) of (τ, B_τ) given $\{T - t > \tau\}$ with

$$\tau = \inf \{s \geq 0 : B_s \in \mathcal{J}\}.$$

endif

3. Set $t \leftarrow t + t'$ and $y \leftarrow z$ and go back to the beginning of the loop.

endif

3.8.3 The random variables that should be simulated.

Let $(B, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}})$ be a Brownian motion and Z^β be a Skew Brownian motion. Let $\tau_{a,b} = \inf \{t \geq 0\} B_t \in \{a, b\}$ for $a < b$. Using the scaling property, $\mathbb{P}_x \circ \tau_{a,b}^{-1}$ is equal to $\mathbb{P}_{(x-b)/(b-a)} \circ ((b-a)^2 \tau)^{-1}$. Hence, we set $\tau = \tau_{-1,1}$.

Mainly, we need to simulate τ or some random variables whose distribution is related to that of τ . From a numerical point of view, we use explicit expressions of the distribution functions for the random variables of interest. (For example, see [11] on the simulation of random variables).

The following formulae may be found for example in [7]. If $G(t, x) = \mathbb{P}_x(\tau < t)$. Then

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+x+4k}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-(1+x+4k)^2/2t} + \frac{1-x+4k}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-(1-x+4k)^2/2t} \right).$$

Besides, if $H(t, x) = \mathbb{P}_x(\tau < t) B_\tau = 1$, then

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+x+4k}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-(1+x+4k)^2/2t} + \frac{1-x+4k}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-(1-x+4k)^2/2t} \right).$$

The Bayes formula allows then to compute $\mathbb{P}_x(B_\tau = 1 \mid \tau < t)$. The series giving F and H converge very quickly and do not create numerical problems.

We also need $\mathbb{P}_x(B_t < y \mid t < \tau) = F(t, x, y) \mathbb{P}_x(t < \tau)$ with $F(t, x, y) = \mathbb{P}_x(B_t < y; t < \tau)$. Thus, $\frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y)$ is the density of the Brownian motion killed when exiting from $[-1, 1]$, which is given by

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-y-4k)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y+2+4k)^2}{2t}\right) \right).$$

or by, using the spectral decomposition,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 t}{8}\right) \times \sin\left(\frac{k\pi}{2}(x+1)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}(y+1)\right).$$

The series (3.20) is numerically suitable for small time, while (3.20) is numerically suitable for large time.

Let Z^θ be the Skew Brownian Motion of parameter $\theta \in (0, 1)$. We need to simulate a realization of Z_t^θ given $t < \tau_{-\rho, \rho}$ under \mathbb{P}_0 for some $\rho > 0$, where $\tau_{-\rho, \rho}$ is the first exit time from $[-\rho, \rho]$ for the Skew Brownian Motion Z^θ .

Lemme 3.8.3. *Let R be a reflected Brownian Motion. Then if $0 \leq y_0 \leq y_1 \leq \rho$,*

$$\mathbb{P}_0 [Z_t^\theta \in [y_0, y_1]; t < \tau_{-\rho, \rho}(Z^\theta)] = \theta \mathbb{P}_0 [R \in [y_0, y_1]; t < \tau_{-\rho, \rho}(R)] \quad (3.20)$$

if $-\rho \leq y_0 \leq y_1 \leq 0$,

$$\mathbb{P}_0 [Z_t^\theta \in [y_0, y_1]; t < \tau_{-\rho, \rho}(Z^\theta)] = (1 - \theta) \mathbb{P}_0 [R \in [-y_0, -y_1]; t < \tau_{-\rho, \rho}(R)] \quad (3.21)$$

where $\tau_\rho = \inf \{t \geq 0 : R_t = \rho\}$

In other words, to simulate Z_t^θ , one needs to simulate the position of a Reflected Brownian Motion R at time t and has to use a independent Bernoulli Random variable for the sign of Z_t^θ .

Démonstration. For a trajectory of the Skew Brownian Motion Z^θ , set $\{(\ell^n, r^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ as the excursions intervals of Z^θ . For each $n \in \mathbb{N}$, set $e_t^n = Z_{(t-\ell^n) \wedge (r^n - \ell^n)}^\theta$ if $t \in [\ell^n, r^n]$, which are the excursions of Z^θ . We assume that $0 \leq y_0 \leq y_1 \leq \rho$. Then,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0 [Z_t^\theta \in [y_0, y_1]; t < \tau_{-\rho, \rho}(R)] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_0 [|e_{t-\ell^n}^n| \in [y_0, y_1] : \\ &\quad \text{sgn}(e^n) = 1; \tau_{-\rho, \rho}(e^n) > t - \ell^n; \sup_{k \text{ s.t. } r^k \leq \ell^n} \sup_{s \in [0, r^k - \ell^k]} |e^k(s)| < \rho] \end{aligned}$$

where $\text{sgn}(e)$ is the sign of excursion e , and $\tau_{-\rho, \rho}(e)$ is the first time (possibly infinite) the excursion reaches $-\rho$ or ρ . By construction, the sign $\text{sgn}(e^n)$ of the excursion n is a Bernoulli random variable of parameter θ which is independent from any other random variables involved in this construction. Equality (3.20) follows then easily, and (3.21) is proved in a similar way. \square

3.8.4 Coupling with other algorithms

Of course, this algorithm can be coupled with other algorithms (such as the Euler scheme for example) if the coefficient is smooth enough outside some subset I of (ℓ, r) . Assume that the coefficients are smooth enough outside some interval (ℓ', r') . Then, one can pick some points r'' and ℓ'' such that $r < r'' < r'$ and $\ell' < \ell'' < \ell$. Hence, one can use the algorithm which is the most adapted to the situation to simulate X outside (ℓ', r') , until X hits r' or ℓ' . Then, the algorithm proposed here can be used to simulate X until it hit r'' or ℓ'' , and then use a proper way to deal with discontinuities.

3.8.5 Localization

If $G = \mathbb{R}$, it follows from the upper bound of the Aronson estimates (See Proposition 3.4.2) that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}_x \left(\sup_{s \in [0, t]} |X_s - x| \geq R \right) \leq C_1 \exp(-C_2 R^2 / t)$$

for some constants C_1, C_2 depending only on λ, Λ (See for example [49] for a proof). Thus, one can assume that the coefficients a, ρ and b are constant far enough from the starting point, or that the process should be killed when it reaches the edges of a finite interval rather than dealing with a process that lives on the whole space \mathbb{R} .

3.9 Estimation of the error

3.9.1 The elliptic case

Set the Dirichlet problem

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ on } [r, \ell], \\ u(r) = u_r \text{ and } u(\ell) = u_\ell, \end{cases} \quad (3.22)$$

We study the error on the solution when we replace (a, ρ, b) with (a^n, ρ^n, b^n) in (3.22) and when we suppose that

$$\sup_{x \in G} \left| (a^n, \rho^n, b^n)(x) - (a, \rho, b)(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Proposition 3.9.1. *There exists a constant C depending only on λ, Λ, r and ℓ such that*

$$\sup_{x \in G} |u(x) - u^n(x)| \leq C |u_r - u_\ell| \sup_{x \in G} |(a^n, \rho^n, b^n)(x) - (a, \rho, b)(x)|$$

Démonstration. L is the operator $L = \frac{1}{2}e^{-\Phi}\rho\frac{d}{dx}(e^{\Phi}a\frac{d}{dx})$ defined in (3.8). Let \widehat{a}^n and $\widehat{\rho}^n$ be approximations of $\widehat{a} = ae^{\Phi}$ and $\widehat{\rho} = \rho e^{-\Phi}$, such that \widehat{a}^n and $\widehat{\rho}^n$ converge uniformly to \widehat{a} and $\widehat{\rho}$.

Let u^n be the solution of (3.22) with L replaced by L^n , and u the solution of (3.22)

Then, using $v^n = u^n - u \in H_0^1(G)$ as a test function, one gets

$$\int_G \widehat{a}^n \left(\frac{dv^n}{dx} \right)^2 dx = \int_G (\widehat{a}^n - \widehat{a}) \frac{du}{dx} \frac{dv^n}{dx} dx.$$

As $xy \leq \lambda x^2/2 + 2\lambda^{-1}y^2$ for all $x, y \geq 0$, it follows that

$$\frac{\lambda}{2} \left\| \frac{dv^n}{dx} \right\|_{L^2(G)}^2 \leq 2\lambda^{-1} \|\widehat{a}^n - \widehat{a}\|_{\infty} \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^2(G)}^2.$$

Let ϕ be the linear function $\phi(x) = (u_r - u_\ell)(x - \ell)/(r - \ell) + u_\ell$. Then, $u - \phi$ belongs to $H_0^1(G)$, and then

$$\int_G a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{u_r - u_\ell}{r - \ell} \int_G a \frac{du}{dx} dx.$$

Hence, there exists some constant C , depending only on Λ, r, ℓ, u_r and u_ℓ such that

$$\int_G \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \leq C \left(\frac{u_r - u_\ell}{r - \ell} \right)^2.$$

As u^n and u satisfy the same boundary condition, v^n belongs to $H_0^1(G)$, and from the Poincaré inequality,

$$\|v^n\|_{L^2(G)}^2 \leq C \left\| \frac{dv^n}{dx} \right\|_{L^2(G)}^2.$$

Moreover, $H^1(G)$ can be continuously injected in the space of continuous functions on G . Thus, for some constant C' , $\sup_{x \in G} |v^n(x)|^2 \leq C' \|v^n\|_{H^1(G)}^2$. It follows that

$$\sup_{x \in G} |u^n(x) - u(x)| \leq C'' \|\widehat{a}^n - \widehat{a}\|_{\infty} \left| \frac{u_r - u_\ell}{r - \ell} \right|$$

for some constant C'' depending only on $r, \ell, u_r, u_\ell, \lambda$ and Λ .

To conclude the proof, it remains to see that

$$\begin{aligned} |\widehat{a}^n(x) - \widehat{a}(x)| &\leq C_1 \sup_{x \in G} |a^n(x) - a(x)| + C_2 \sup_{x \in G} |\rho^n(x) - \rho(x)| \\ &\quad + C_3 \sup_{x \in G} |b^n(x) - b(x)| \end{aligned}$$

for some constants C_1, C_2 and C_3 depending only λ, Λ, r and ℓ . □

3.9.2 The parabolic case

Let u be the solution of $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$ on $\mathbb{R}_+ \times G$, with the Dirichlet or Neumann b.c. on $\mathbb{R}_+ \times \{\ell, r\}$ and initial condition $\phi(x)$. Let also u^n be the solution of the similar problem where L is replaced by L^n .

Proposition 3.9.2. (i) Assume that $\rho \equiv 1$. Then for any open interval $(\ell', r') \subset G$, there exists a constant $K(\ell', r')$ depending on f, ℓ', r', r' and T such that

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times (\ell', r')} |u^n(t,x) - u(t,x)| \leq K(\ell', r') (\|a^n - a\|_{\infty} + \|b^n - b\|_{\infty}).$$

(ii) When $\rho \neq 0$, assume that $\varphi \in C_b^2(\overline{G})$. In this case, for any open interval $(\ell', r') \subset G$, there exists a constant $K(\ell', r')$ depending on f, ℓ', r', r' and T such that

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times (\ell', r')} |u^n(t,x) - u(t,x)| \leq K(\ell', r') (\|a^n - a\|_{\infty} + \|b^n - b\|_{\infty}).$$

Démonstration. (i)

For $T > 0$, we denote by $|\cdot|_{G',T}$ the norm

$$|h|_{G',T} = \left(\sup_{t \in [0,T]} \|h(t, \cdot)\|_{L^2(G')}^2 + \int_0^T \|\nabla h(t, \cdot)\|_{L^2(G')}^2 dt \right)^{1/2}$$

for any $h \in C(0, T; L^2(G')) \cap L^2(0, T; H^1(G'))$. The convergence relies on the following estimate (See [23]-[II. § 3, inequality (3) p. 75 with $r = q = \infty$] for example)

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times G'} |h(t, x)| \leq C |h|_{G',T} \quad (*) \quad (3.23)$$

for a constant C that depends only on T and G' .

We set $v^n = u^n - u$. Since u^n and v^n are solutions of parabolic problems with discontinuous coefficients satisfying assumptions **H** and **H2**, u^n and v^n belong to $C(0, T; L^2(G')) \cap L^2(0, T; H^1(G'))$ (see [23] chapter III) and v^n as well.

The idea of the proof is now to apply $(*)$: this means that we need to control $|v^n|_{G',T}$. Fortunately, controls for the norm $|\cdot|_{G',T}$ are easy to obtain using standard PDE arguments : first note that v^n is a weak solution to parabolic problem

$$\frac{\partial v^n(t, x)}{\partial t} = L^n v^n(t, x) + \frac{1}{2} \nabla \{ (a^n(x) - a(x)) \nabla u(t, x) \} \quad (3.24)$$

$$+ (b^n(x) - b(x)) \nabla u(t, x) dx. \quad (3.25)$$

- if G is finite, we can use v^n as a test function in (3.24). After integrating with respect to t , we see that we are in the same position as in the elliptic case and standard computations yield the desired result.
- if G is not finite, we fix $\ell' < r'$ and we choose a smooth function ξ with compact support such that $\xi(x) = 1$ on (ℓ', r') . Then, since any function v in $H^1(G)$ is locally bounded, $\nabla(v\xi) = \xi \nabla v + v \nabla \xi$. Thus, using $v^n \xi$ as a test function in (3.24) and the previous expansion of $\nabla(v\xi)$, we have reduced the problem to the previous case and the proposition is proved.

(ii)

In this case we use a probabilistic argument. It is easily seen that v^n is a weak solution to

$$\frac{\partial v^n(t, x)}{\partial t} = L^n v^n(t, x) + \frac{1}{2} \nabla \{ (a^n(x) - a(x)) \nabla u(t, x) \} \quad (3.26)$$

$$+ (b^n(x) - b(x)) \nabla u(t, x) dx + \int_G (\rho^n - \rho) \partial_t u(t, x) v^n(t, x) dx. \quad (3.27)$$

In regard of the fact that ρ is uniformly bounded from below by a strictly positive constant and using the same arguments as those used in our proof of (i), we know that we can assume G to be finite and in this case the result of (ii) will be true if we are able to get a uniform bound on G for $|\partial_t u(t, \cdot)|$ and if this bound is integrable w.r.t to t . Hence, if we can prove that

$$\sup_{x \in G} |\partial_t u(t, x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad (3.28)$$

then (ii) will be satisfied.

Since $u(t, x) = \mathbb{E}_x [\varphi(X_t)]$, and φ is assumed to belong to $C^2(G)$, we can apply Itô's formula and we get that :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \varphi(x) + \int_0^t \mathbb{E}_x [\varphi'(X_s) b(X_s)] ds + \int_0^t \mathbb{E}_x [\varphi''(X_s) \sigma^2(X_s)] ds \\ &\quad + \sum_{x_k \in \mathcal{J}} \varphi'(x_k) \mathbb{E}_x [L_t^{x_k}] \end{aligned}$$

so that

$$|\partial_t u(t, x)| \leq (\|b\|_\infty + \|\sigma^2\|_\infty) + \sum_{x_k \in \mathcal{J}} \varphi'(x_k) \partial_t \mathbb{E}_x [L_t^{x_k}]$$

The occupation-time formule implies that

$$\mathbb{E}_x [L_t^{x_k}] = \int_0^t c_k p(s, x, x_k) ds$$

where c_k is a constant depending only on $a(x_k +)$ and $a(x_k -)$. Now, using Aronson's estimate yields

$$\sup_{x \in G} |\partial_t \mathbb{E}_x [L_t^{x_k}]| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$$

for some constant C depending only on λ, Λ, T and c_k . Thus (3.28) is true⁴. □

⁴We were not able to treat the case $\rho \neq 1$ using only standard PDE arguments.

3.10 Résultats numériques

On considère l'opérateur $L = \frac{1}{2}\nabla(a\nabla)$. Ici, nous considérons que le coefficient a est régulier, sauf en 0 ou il est discontinu.

Soit Δ un pas fixé. On introduit une suite de points $\{x_k^\Delta\}_{k=-\infty, \dots, \infty}$, une approximation $a_k^\Delta(x)$ de a par

$$a^\Delta(x) = a(x_k^\Delta) \text{ si } x \in [x_k^\Delta, x_{k+1}^\Delta],$$

ainsi que l'opérateur $L^\Delta = \frac{1}{2}\nabla(a^\Delta\nabla)$ et le processus stochastique X^Δ qu'il engendre. Soit $\Phi^\Delta(x)$ la fonction

$$\Phi^\Delta(x) = \frac{x - x_k^\Delta}{\sqrt{a^\Delta(x)}} \text{ si } x \in [x_k^\Delta, x_{k+1}^\Delta].$$

Soit Y^Δ le processus stochastique défini par $Y^\Delta = \Phi^\Delta(X^\Delta)$. Posons $y_k^\Delta = \Phi^\Delta(x_k^\Delta)$. En fait, nous choisissons d'abord y_k^Δ de sorte que

$$y_k^\Delta = k\Delta, \quad k = -\infty, \dots, \infty,$$

ce qui veut dire que

$$x_0^\Delta = 0 \text{ and } \begin{cases} x_{k+1}^\Delta = x_k^\Delta + \sqrt{a^\Delta(x_k^\Delta)} & \text{if } k > 0, \\ x_{k-1}^\Delta = x_k^\Delta - \sqrt{a^\Delta(x_k^\Delta)} & \text{if } k < 0. \end{cases}$$

Le processus Y est solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$Y_t^\Delta = Y_0^\Delta + B_t + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k^\Delta L_0^{y_k}$$

avec

$$\beta_k^\Delta = \frac{\sqrt{a(x_k^\Delta)} - \sqrt{a(x_k^\Delta -)}}{\sqrt{a(x_k^\Delta)} + \sqrt{a(x_k^\Delta +)}}.$$

3.10.1 Implémentation

Pour l'algorithme, il suffit donc de calculer récursivement les valeurs de x_k^Δ , $a_k^\Delta = a^\Delta(x_k^\Delta)$ et β_k^Δ .

3.10.2 Cas test n° 1

3.10.2.1 Calcul des densités

On considère la fonction

$$a(x) = \begin{cases} 2 + \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ 5 + \sin(x + \pi) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Nous testons l'algorithme pour calculer

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] \text{ avec } t = 1, 0 \text{ et } x = 0, 5.$$

Par ailleurs, nous considérons les pas de temps $\Delta = 0, 1$, $\Delta = 0, 01$ et les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = \arctan(x + 1)$.

3.10.2.2 Vitesse de calcul

La difficulté est que le temps moyen mis pour sortir d'un intervalle $[x - \Delta, x + \Delta]$ par un mouvement brownien biaisé est de l'ordre de Δ^2 . Nous voyons dans le tableau 3.3 (voir aussi figure 3.3) que le nombre d'appel à la fonction donnant le temps de sortie ou la position à un instant donné inférieur au temps de sortie pour le mouvement brownien biaisé explose quand Δ devient petit. Nous voyons sur la figure 3.4 que le nombre moyen d'appels à cette fonction est bien proportionnel $1/\sqrt{\Delta}$.

3.10.3 Cas test n° 2

On considère la fonction

$$a(x) = \begin{cases} 2 + \sin(2\pi x) & \text{si } x < 0 \\ 3 + \sin(2\pi x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

| N | Δ | t | x | nom du fichier |
|-------|----------|-----|-----|----------------|
| 1000 | 0,05 | 1,0 | 0,0 | test1 |
| 10000 | 0,05 | 1,0 | 1,0 | test2 |

test1

| Taille eff. de l'éch. | Min | Max | Moyenne | Variance |
|-----------------------|-------|------|---------|----------|
| 1000 | -4.76 | 5.52 | 0.30 | 2.25 |

test2

| Taille eff. de l'éch. | Min | Max | Moyenne | Variance |
|-----------------------|-------|------|---------|----------|
| 9996 | -5.02 | 6.08 | 0.37 | 2.28 |

| Δ | Nb particules | Min | Max | Moyenne | Variance |
|----------|---------------|-------|------|---------|----------|
| 0,10 | 9989 | -4,50 | 7,92 | 1,37 | 3,34 |
| 0,09 | 9995 | -3,96 | 8,82 | 1,47 | 3,44 |
| 0,08 | 9996 | -3,90 | 8,79 | 1,49 | 3,42 |
| 0,07 | 9996 | -4,30 | 8,38 | 1,48 | 3,34 |
| 0,06 | 9997 | -4,25 | 8,29 | 1,50 | 3,43 |
| 0,05 | 9994 | -4,39 | 8,23 | 1,45 | 3,34 |
| 0,04 | 9759 | -4,03 | 8,18 | 1,45 | 3,37 |
| 0,03 | 10000 | -3,48 | 8,27 | 1,45 | 3,34 |
| 0,02 | 9989 | -4,50 | 7,92 | 1,37 | 3,34 |
| 0,01 | 9992 | -3,53 | 8,35 | 1,43 | 3,36 |

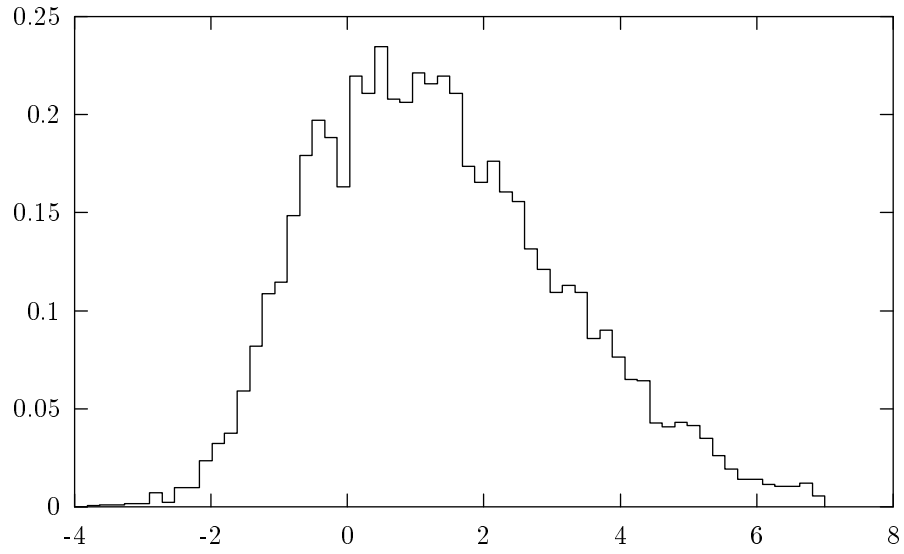
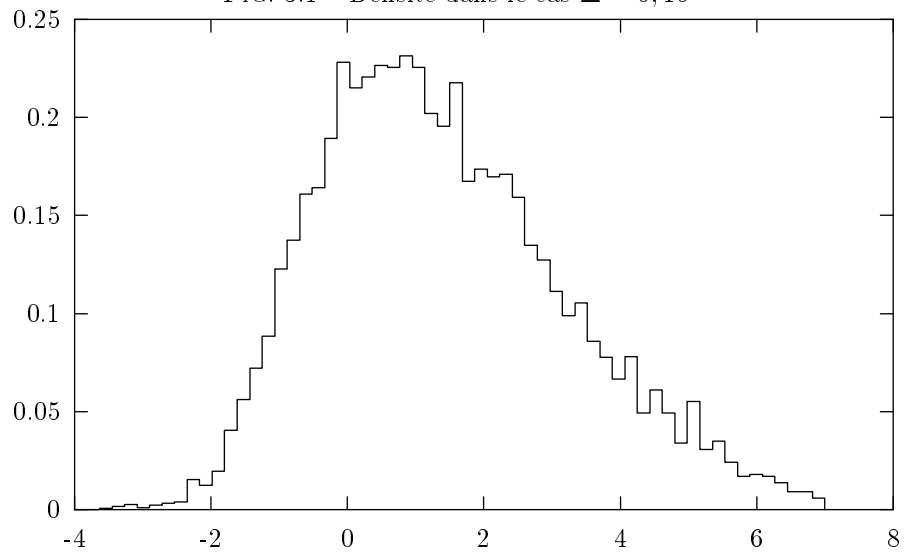
TAB. 3.1 – Quelques statistiques a propos de la position au temps $t = 1$ pour des particules partant de $x = 0,5$

| Δ | $f(x) = x^2$ | $f(x) = \arctan(x + 1)$ |
|----------|--------------|-------------------------|
| 0,10 | 5,225 | 0,945 |
| 0,09 | 5,599 | 0,967 |
| 0,08 | 5,642 | 0,975 |
| 0,07 | 5,543 | 0,979 |
| 0,06 | 5,687 | 0,978 |
| 0,05 | 5,452 | 0,970 |
| 0,04 | 5,469 | 0,968 |
| 0,03 | 5,453 | 0,972 |
| 0,02 | 5,296 | 0,964 |
| 0,01 | 5,401 | 0,966 |

TAB. 3.2 – Moyenne empirique approchant $\mathbb{E}_x[f(X_t)]$ pour $x = 0,5, t = 1,0$

| | | | | | |
|-----------|--------|--------|---------|---------|----------|
| Δ | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 |
| nb appels | 101,69 | 122,71 | 156,82 | 204,65 | 280,22 |
| Δ | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 |
| nb appels | 401,89 | 630,56 | 1114,73 | 2513,77 | 10049,24 |

TAB. 3.3 – Nombre moyen d'appels la fonction permettant de calculer de temps ou la position pour le SBM (partir d'un échantillon de taille 100)

FIG. 3.1 – Densité dans le cas $\Delta = 0,10$ FIG. 3.2 – Densité dans le cas $\Delta = 0,01$

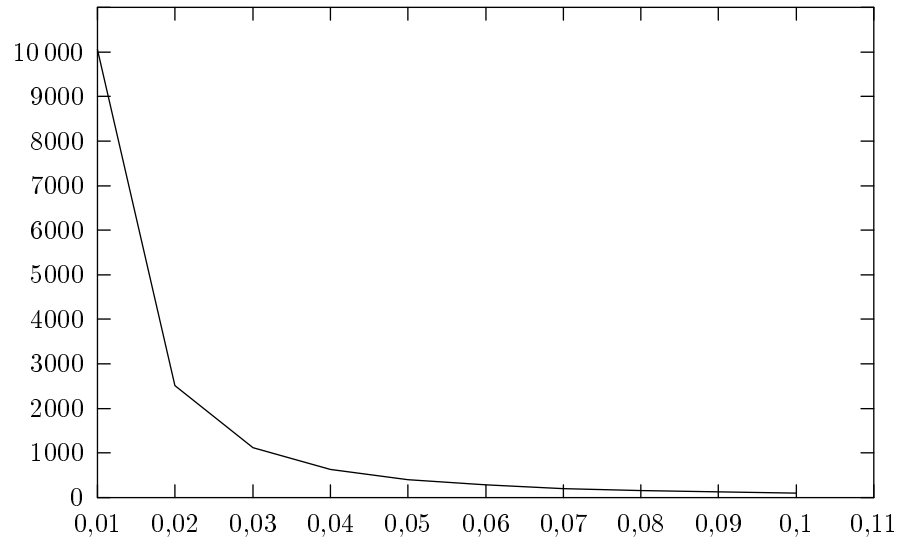


FIG. 3.3 – Nombre moyen d'appels la fonction permettant de calculer de temps ou la position pour le SBM en fonction de Δ

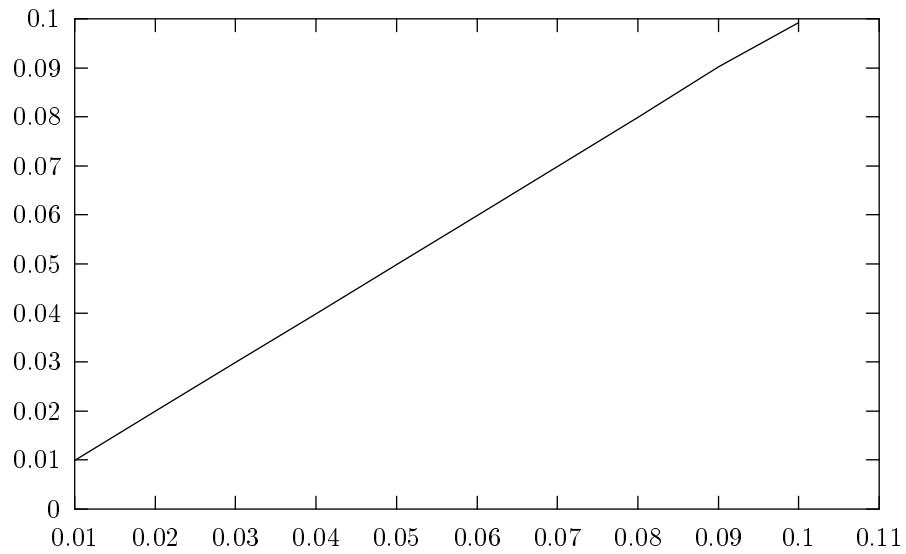


FIG. 3.4 – Abscisse : Δ ; ordonnée : $1/\sqrt{n}$ où n est le nombre moyen d'appels la fonction permettant de calculer de temps ou la position pour le SBM en fonction de Δ

Chapitre 4

Représentation probabiliste de la solution du problème de Poisson associé à un opérateur sous forme divergence dans un domaine compact

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation

Le but de ce chapitre est d'exhiber une représentation probabiliste à la solution du problème de Poisson associée à un opérateur sous forme divergence (OFD) strictement uniformément elliptique défini sur un domaine compact à frontière régulière. La condition de l'OFD sur le bord du domaine est de type Neumann. La représentation obtenue fera intervenir le processus associé à une certaine forme de Dirichlet symétrique et construite à partir de l'OFD.

Les travaux sur les formes de Dirichlet symétriques permettent d'associer naturellement une forme de Dirichlet à l'OFD. Cependant, les liens entre cette forme de Dirichlet et la solution fondamentale au sens faible du problème de Cauchy avec condition de Neumann ne sont pas si évidents. Pour identifier rigoureusement le semi-groupe généré par le problème de Cauchy avec le semi-groupe associé à la forme de Dirichlet – nous arrivons à identifier ces deux semi-groupes sur l'espace L^2 – nous utilisons la méthode très lourde qui consiste à régulariser la matrice de l'OFD et effectuer un passage à la limite. Une fois l'équivalence entre ces deux approches établie, nous adopterons systématiquement, comme cadre naturel d'étude, le point de vue « théorie des formes de Dirichlet » plutôt que le point de vue « problème de Cauchy au sens faible ».

En utilisant les résultats de Carlen-Kusuoka-Stroock [10], nous obtenons ainsi une borne supérieure sur la solution fondamentale au sens faible associée au problème de Cauchy avec condition de Neumann et cela dans le cas général où le coefficient de l'opérateur est seulement supposé mesurable. En faisant des hypothèses supplémentaires sur le domaine, nous explorerons également ce qu'il en est pour la borne inférieure. Enfin, dans le cas unidimensionnel, lorsque le domaine est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} et lorsque le coefficient de l'OFD est suffisamment régulier, nous vérifierons que le processus associé à l'OFD vérifie une certaine équation différentielle stochastique avec réflexion.

4.1.2 Etudes réalisées dans la littérature

Il existe plusieurs approches pour la construction du processus réfléchi associé à un opérateur sous forme divergence avec des conditions Neumann : la première consiste à partir de la formulation variationnelle du problème de Cauchy et de construire la solution fondamentale associée. Celle-ci engendre un semi-groupe de Markov. C'est l'approche privilégiée par Roskosz dans [45].

Cependant, l'approche la plus naturelle est sans doute celle qui permet de construire le processus grâce à la théorie des formes de Dirichlet comme cela est proposé dans l'article [36] où une méthode de construction par pénalisation est présentée.

Nous établissons l'équivalence entre ces deux approches en utilisant une méthode standard due à [46].

En ce qui concerne l'étude des problèmes de Poisson, nous pouvons citer les travaux précurseurs de Freidlin [13] dans le cas d'un domaine compact, ainsi que les articles de Pardoux et Veretenikov où les conditions de mélange pour les processus sont utilisées pour assurer une vitesse de convergence suffisante vers la mesure stationnaire [35], [34].

4.2 Resultats préliminaires

4.2.1 Cadre formel : problème de Cauchy-Neumann et formes de Dirichlet

Soit D un domaine non-vide, borné, de \mathbb{R}^n défini par :

$$D \triangleq \{x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x) > 0\} \quad \text{avec } \partial D \triangleq \{x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x) = 0\} \quad (4.1)$$

où $\Phi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ satisfait $|\nabla\Phi(x)| \geq 1$ pour tout $x \in \partial D$. Dans tout ce chapitre nous noterons leb la mesure de Lebesgue. Ainsi le volume d'un ensemble A de \mathbb{R}^d est $leb(A)$. Nous désignerons par $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ la fonction distance euclidienne dans D .

Soit $\{\vec{n}(x) : x \in \partial D\}$ la famille des normales unitaires à ∂D pointant vers l'extérieur. Nous noterons $d\sigma$ la mesure de surface définie sur ∂D et \overline{D} l'ensemble $D \cup \partial D$.

Nous noterons :

$$D_T \triangleq]0, T[\times D$$

Introduisons les espaces de fonctions suivants :

- $W_p^1(D)$ l'espace de Banach constitué des éléments u de $L^p(D)$ ayant toutes leurs dérivées partielles d'ordre 1 dans $L^p(D)$. Dans le cas particulier où $p = 2$, nous noterons cet espace $H^1(D)$.
- $W_p^{0,1}(D_T)$ l'espace de Banach constitué des éléments u de $L^p(D_T)$ ayant toutes leurs dérivées partielles spatiales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ d'ordre 1 dans $L^p(D_T)$.
- $W_{1,1}^p(D_T)$ l'espace de Banach constitué des éléments u de $L^p(D_T)$ ayant toutes leurs dérivées partielles (spatiales et temporelles) d'ordre 1 dans $L^p(D_T)$.

Nous introduisons également $\mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$ la classe des fonctions $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ mesurables symétriques à valeurs matricielles satisfaisant la condition d'uniforme ellipticité :

$$\boxed{\mathbf{H1} : \lambda|\xi|^2 \leq a \xi, \xi \cdot a \leq \Lambda|\xi|^2} \quad (4.2)$$

où λ et Λ désignent deux constantes strictement positives.

4.2.1.1 Problème de Cauchy avec conditions de Neumann : construction du semi-groupe fondamental

Considérons formellement l'opérateur

$$A = \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a \nabla \right]$$

Il est alors possible de construire une fonction de Neumann au sens faible (ou solution fondamentale au sens faible) associée à l'opérateur A muni d'une « condition au bord » de type Neumann sur le domaine D . Plus précisément, on a le

Théorème 4.2.1. ([19], [45] pp. 148-149)

Soit $a \in \mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$. Alors,

- Il existe un unique semi-groupe de Markov $\{P_t^D : t \geq 0\}$ d'opérateurs positifs sur $L^2(D)$ tels que :
 - $P_t^D \phi(\cdot) \in W_2^{0,1}(D_T)$ pour $\phi \in L_2(D)$
 - $P_t^D \phi \in H^1(D)$ pour presque tout $t > 0$
 - pour tout $\eta \in W_2^{1,1}(D_T)$ s'annulant pour $t = T$ et pour tout $\phi \in L_2(D)$,

$$\begin{aligned} \int_D \phi(x) \eta(0, x) dx &= - \int_{D_T} P_t^D \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x) dt dx \\ &+ \int_{D_T} \frac{1}{2} a^{i,j} D_i P_t^D \phi(x) D_j \eta(t, x) dt dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

- Il existe une fonction symétrique $p^D(t, x, y)$, $t > 0$, $x, y \in D$, appelée fonction de Neumann qui possède les propriétés suivantes :
 - il existe $C_1, C_2 > 0$ dépendant uniquement de λ, Λ, d telles que pour tout $t > 0$ fixé et $x \in D$,

$$\int_D |p^D(t, x, y)|^2 dy \leq C_1 \left(\min \left\{ t, C_2 \text{dist}(x, \partial D)^2 \right\} \right)^{-\frac{d}{2}} \quad (4.4)$$

- pour tout $\delta \in (0, T]$ et pour tout $K \subset D$ et tel que $\text{dist}(K, \partial D) > 0$, il existe $C_3 > 0$ ne dépendant que de $\lambda, \Lambda, d, \delta, T$ et de $\text{dist}(K, \partial D)$ tel que

$$\sup_{\delta \leq t \leq T, x, y \in K} p^D(t, x, y) \leq C_3 \quad (4.5)$$

- pour toute fonction $\phi \in L^2(D)$

$$P_t \phi(x) = \int_D \phi(y) p^D(t, x, y) dy, \quad x \in D \quad (4.6)$$

Nous dirons que le semi-groupe de Markov $\{P_t^D : t \geq 0\}$ ainsi construit est le **semi-groupe fondamental** associé à l'opérateur A .

Énonçons quelques propriétés du semigroupe fondamental :

Proposition 4.2.2. Principe du maximum (cf. [19] proposition 1)

Si $\phi \leq M$ presque partout, alors $P_t^D \phi \leq M$ presque partout pour tout $t > 0$.

Nous pouvons également établir une légère modification de l'égalité (4.3) :

Proposition 4.2.3. Pour toute fonction $\eta \in H^1(D)$ et pour toute fonction $\phi \in L^2(D)$,

$$(\phi - P_T^D \phi, \eta) = \int_0^T \int_D \frac{1}{2} a \nabla P_s^D \phi \cdot \nabla \eta dx ds, \quad \forall T > 0 \quad (4.7)$$

Démonstration. Soit ζ_ϵ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \zeta_\epsilon(t) &= 0 & t < 0 \\ \zeta_\epsilon(t) &= \frac{t}{\epsilon} & 0 \leq t \leq \epsilon \\ \zeta_\epsilon(t) &= 1 & t > \epsilon \end{cases} \quad (4.8)$$

On substitue à la fonction $\eta(t, x)$ dans (4.3) la nouvelle fonction $\tilde{\eta}(t, x) \triangleq \eta(t, x)\zeta_\epsilon(T-t)$. On constate que $\tilde{\eta} \in W_2^{1,1}(D_T)$ et $\tilde{\eta}(T, x) = 0$. L'égalité (4.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_D \phi(x)\tilde{\eta}(0, x) dx &= - \int_{D_T} P_t^D \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\eta}(t, x) dt dx \\ &+ \int_{D_T} \frac{1}{2} a^{i,j} D_i P_t^D \phi(x) D_j \tilde{\eta}(t, x) dt dx \\ &= \int_{D_T} P_t^D \phi(x) \eta(t, x) \frac{1}{\epsilon} 1_{\{(T-t) \in]0, \epsilon[\}} dt - \int_{D_T} P_t^D \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x) \zeta_\epsilon(T-t) dt dx \\ &+ \int_{D_T} \frac{1}{2} a^{i,j} D_i P_t^D \phi(x) D_j \eta(t, x) \zeta_\epsilon(T-t) dt dx \end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on voit que

$$\begin{aligned} \int_D \phi(x)\eta(0, x) dx &= \int_D P_T^D \phi(x) \eta(T, x) dx - \int_{D_T} P_t^D \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \eta(t, x) dt dx \\ &+ \int_{D_T} \frac{1}{2} a^{i,j} D_i P_t^D \phi(x) D_j \eta(t, x) dt dx \end{aligned}$$

Le résultat du lemme s'ensuit en fixant $\eta(t, x) = \eta(0, x)$ dans cette égalité. \square

Le semigroupe fondamental est un semigroupe de contraction sur $L^2(D)$: plus précisément, nous avons la

Proposition 4.2.4. (cf. [19] proposition 1)

Pour toute fonction $\phi \in \tilde{L}^2(D)$,

$$\|P_t^D \phi\|_2 \leq \|\phi\|_2 \quad (4.9)$$

Soit $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$ formé par les fonctions $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ mesurables symétriques et infiniment différentiables satisfaisant la condition d'uniforme ellipticité (4.2).

On a le résultat de convergence suivant :

Théorème 4.2.5. Méthode de régularisation (cf. [45] pp. 149-150)

Soit $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, notons $\{P_t^{n,D} : t \geq 0\}$ le semi-groupe fondamental associé à a^n au sens du théorème 4.2.1 et muni de sa fonction de Neumann $p^{n,D}(t, x, y)$.

Supposons que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ presque partout sur \mathbb{R}^d . Nous avons alors que

$$\begin{aligned} - P_t^{n,D} \phi(\cdot) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P_t^D \phi \text{ uniformément sur tout compact de } D_T \text{ pour toute fonction } \phi \in L_2(D). \\ - \forall (t, x) \in D_T, p^{D,n}(t, x, \cdot) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p^D(t, x, \cdot) \text{ uniformément dans tout compact de } D \\ - \forall (t, y) \in D_T, p^{D,n}(t, \cdot, y) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p^D(t, \cdot, y) \text{ uniformément dans tout compact de } D \end{aligned}$$

4.2.1.2 Processus associé au semi-groupe fondamental

Définition 4.2.6. On note $(\mathbb{P}_x, X \equiv \{X_t; 0 \leq t \leq T\})$ la famille de processus de Markov de densité de transition p^D (définie dans le théorème 4.2.1).

Plus précisément, le couple (\mathbb{P}_x, X) est tel que :

- X désigne le processus canonique sur $C([0, T]; D)$.
- pour tout $x \in D$, \mathbb{P}_x est une mesure probabilité sur $\mathcal{B}[C([0, T]; D)]$ telle que

$$\begin{cases} \mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1 \text{ pour tout } x \in D \\ \mathbb{P}_x[X_t \in \mathcal{O}] = \int_{\mathcal{O}} p^D(t, x, y) dy \end{cases} \quad (4.10)$$

pour tout ensemble Borélien $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(D)$ et pour tout $t \in (0, T]$.

On appelle alors (\mathbb{P}_x, X) une **diffusion correspondant à l'opérateur A avec conditions de Neumann**.

On a le théorème suivant :

Théorème 4.2.7. Roskosz [45] théorème 4.2 p.157

Supposons que l'hypothèse **H1** est vérifiée.

Soit $x \in D$ et (\mathbb{P}_x, X) une diffusion correspondant à l'opérateur A avec conditions de Neumann.

Pour toute fonction Lipchitzienne $\phi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique quadruplet $(M^\phi, N^\phi, V^\phi, K^\phi)$ qui satisfait les conditions suivantes :

- $M^\phi \in \mathcal{M}^{loc}$, $N^\phi \in \tilde{\mathcal{M}}^{loc}$, V^ϕ et K^ϕ sont des processus continus et adaptés à la filtration naturelle engendrée par X et

$$V_0^\phi = K_0^\phi = 0, \quad K_t^\phi = \int_0^t \mathbb{1}_{\partial D}(X_u) dK_u^\phi, \quad V_t^\phi = \int_0^t \mathbb{1}_D(X_u) dV_u^\phi \quad (4.11)$$

- le processus $\phi(X)$ admet une décomposition de Lyons-Zheng :

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) = M_t^\phi + A_t^\phi = \frac{1}{2}M_t^\phi + \frac{1}{2}\tilde{N}_t^\phi - \frac{1}{2}V_t^\phi + K_t^\phi \quad (4.12)$$

où $\tilde{N}_t^\phi = (N_{T-t}^\phi - N_T^\phi)$ pour tout $0 \leq t \leq T$.

- en particulier, $\phi(X)$ est un processus de Dirichlet dont la décomposition s'écrit :

$$\phi(X_t) = M_t^\phi + A_t^\phi = \phi(X_0) + M_t^\phi + \frac{1}{2} \left(-M_t^\phi + \frac{1}{2}\tilde{N}_t^\phi - \frac{1}{2}V_t^\phi \right) + K_t^\phi$$

- de plus, on vérifie les égalités

$$\begin{cases} \langle M^\phi \rangle_t = \int_0^t \mathbb{1}_D(X_u) a \nabla \phi \cdot \nabla \phi(X_u) du \\ \langle N^\phi \rangle_t = \int_0^t \mathbb{1}_D(X_{T-u}) a \nabla \phi \cdot \nabla \phi(X_{T-u}) du \\ V_t^\phi = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{t-\delta}^t \mathbb{1}_D(X_u) \frac{a(X_u) \nabla p(u, x, X_u)}{p(u, x, X_u)} \cdot \nabla \phi(X_u) du \end{cases} \quad (4.13)$$

- les processus \tilde{N}^ϕ et M^ϕ possèdent une co-variation quadratique mutuelle. Plus précisément, si Π_m désigne une suite de subdivisions de $[0, T]$ telle que $|\Pi_m| \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow +\infty$, on vérifie que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{t_k \in \Pi_m} \left(\tilde{N}_{t_{k+1}}^\phi - \tilde{N}_{t_k}^\phi \right) \left(M_{t_{k+1}}^\phi - M_{t_k}^\phi \right) = \langle M^\phi \rangle_T \quad (4.14)$$

où la limite est à prendre au sens de la convergence en probabilité sous \mathbb{P}_x .

4.2.1.3 Forme de Dirichlet associée au semi-groupe fondamental

Le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{P_t^D : t \geq 0\}$ est un opérateur auto-adjoint A (lemme 1.3.1 p.16 dans [15]) auquel il est possible d'associer une forme de Dirichlet fermée $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ par l'égalité (1.3.6) p.19 de [15].

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(f, f) &\equiv \frac{1}{2t} \int_D \int_D (f(y) - f(x))^2 p^D(t, x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{t} (f - P_t^D f, f) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Il est alors possible de démontrer (lemme 1.3.4 p.22 dans [15]) que le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} est le sous espace de $L^2(D)$ défini par

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \equiv \left\{ f \in L^2(D) : \sup_{t>0} \mathcal{E}_t(f, f) < +\infty \right\} \quad (4.16)$$

et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{E}_t(\phi, \phi) = \mathcal{E}(\phi, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad (4.17)$$

La forme bilinéaire \mathcal{E} est alors appelée « forme de Dirichlet associée à la fonction de transition symétrique $p^D(t, x, \cdot)$ sur l'espace $(D, \mathcal{B}(D))$ ».

Ce formalisme est très utile mais pour pouvoir en utiliser les outils, il est nécessaire de caractériser complètement la forme \mathcal{E} et en particulier de bien étudier son domaine de définition $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Pour ce faire, une première méthode possible consisterait à utiliser la définition formelle de \mathcal{E} et d'étudier quelle serait l'éventuelle limite de $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{E}_t(\phi, \phi)$. On utiliserait alors les résultats connus dans le cas où la matrice a de l'opérateur est régulière et on passerait à la limite en s'aidant du théorème 4.2.5. Malheureusement, il ne semble pas possible que cette approche puisse être menée à son terme car nous ne disposons pas d'un résultat permettant d'affirmer que

$$\sup_{t \in (0,1]} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{t} \left(\phi - P_t^{n,D} \phi, \phi \right) \leq c_\phi \quad (4.18)$$

Nous procédons donc autrement : nous considérons le semi-groupe engendré par une forme de Dirichlet « limite » dont nous avons l'intuition et nous montrons qu'il s'identifie bien, dans un certain espace, au semi-groupe fondamental construit au théorème 4.2.1. La correspondance se fait au travers d'une identification des résolvantes associées aux deux semi-groupes en présence.

4.2.2 Une nouvelle description de la forme de Dirichlet associée au semi-groupe fondamental

Notre but est de démontrer le résultat suivant :

$$\forall \phi \in H^1(D), \quad \mathcal{E}(\phi, \phi) = \int_D \frac{1}{2} a \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dx$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(D)$$

4.2.2.1 Une description de la forme de Dirichlet associée au semi-groupe fondamental dans le cas où le coefficient de l'opérateur est régulier

Soit a^n une matrice dans $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ et soit $\{P_t^{n,D} : t \geq 0\}$ le semi-groupe fondamental associé à a^n au sens du théorème 4.2.1. Comme dans la section précédente, on peut construire \mathcal{E}^n la forme de Dirichlet sur $L^2(D)$ associée à $\{P_t^{n,D} : t \geq 0\}$ et définie par

$$\mathcal{E}^n(\phi, \phi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\phi - P_t^{n,D} \phi, \phi \right) \quad \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) = \left\{ \phi \in L^2(D) : \sup_{t>0} \mathcal{E}_t^n(\phi, \phi) < +\infty \right\} \quad (4.19)$$

Dans toute la suite, nous noterons $\{R_\alpha^{n,D} : \alpha > 0\}$ la famille des résolvantes associée au semi-groupe $\{P_t^{n,D} : t \geq 0\}$,

$$R_\alpha^{n,D} \phi(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t^{n,D} \phi(x) \, dt \quad \forall \phi \in L^2(D) \quad (4.20)$$

Tout d'abord on a la

Proposition 4.2.8.

$$C^\infty(\overline{D}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad (4.21)$$

Plus précisément, pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\overline{D})$,

$$\mathcal{E}^n(\phi, \phi) = \int_D a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx \quad (4.22)$$

Démonstration. Soit $\phi \in C^\infty(\overline{D})$. Grâce au lemme 4.2.3 et en intégrant par parties

$$\begin{aligned} (\phi - P_t^{n,D} \phi, \phi) &= \int_0^t \int_D \frac{1}{2} a^n \nabla P_s^{n,D} \phi \cdot \nabla \phi dx ds \\ &= - \int_0^t \int_D \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a^n \nabla \phi \right] P_s^{n,D} \phi dx ds + \int_0^t \int_{\partial D} P_s^{n,D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= - \int_0^t \int_D \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a^n \nabla \phi \right] (P_s^{n,D} \phi - \phi) dx ds + \int_0^t \int_{\partial D} P_s^{n,D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma \\ &\quad - \int_0^t \int_D \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a^n \nabla \phi \right] \phi dx ds \\ &= \int_0^t \int_D \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a^n \nabla \phi \right] (\phi - P_s^{n,D} \phi) dx ds + \int_0^t \int_{\partial D} P_s^{n,D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma \\ &\quad + \int_0^t \int_D \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx ds - \int_0^t \int_{\partial D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\phi - P_t^{n,D} \phi, \phi) &= \int_0^t (\phi - P_s^{n,D} \phi, \phi) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_D \left(\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a^n \nabla \phi \right] - \phi \right) (\phi - P_s^{n,D} \phi) dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\partial D} P_s^{n,D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma \\ &\quad + \int_0^t \int_D \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx ds - \int_0^t \int_{\partial D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma \quad (4.23) \end{aligned}$$

D'autre part, le fait que a^n soit une matrice appartenant à $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ permet d'affirmer que pour tout $x \in \overline{D}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (P_t^{n,D} \phi(x) - \phi(x)) = 0 \quad (4.24)$$

On en déduit que

$$s \mapsto \int_D \left(\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} a^n \nabla \phi \right] - \phi \right) (\phi - P_s^{n,D} \phi) dx + \int_{\partial D} P_s^{n,D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\partial D} \phi \frac{1}{2} a^n \nabla \phi \cdot \vec{n} d\sigma$$

Cette fonction tend vers 0 lorsque s décroît vers 0. En utilisant ce résultat et (4.23) on conclut que

$$\mathcal{E}^n(\phi, \phi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi - P_t^{n,D} \phi, \phi) = \int_D a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx \quad (4.25)$$

ce qui est exactement le résultat recherché. \square

Notation : pour $\alpha \geq 0$ fixé, si $(S, \mathcal{D}(S))$ désigne une forme de Dirichlet sur $L^2(D)$, nous noterons S_α la nouvelle norme de $\mathcal{D}(S)$ définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(S), \quad S_\alpha(\phi, \phi) = \alpha(\phi, \phi) + S(\phi, \phi) \quad (4.26)$$

Soit le couple $(\tilde{\mathcal{E}}^n, H^1(D))$ défini par

$$\tilde{\mathcal{E}}^n(\phi, \phi) = \int_D a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx \quad \forall \phi \in H^1(D)$$

$(\tilde{\mathcal{E}}^n, H^1(D))$ est une forme de Dirichlet fermée. D'autre part, puisque $C^\infty(\overline{D})$ est dense dans $H^1(D)$ pour la norme naturelle de $H^1(D)$ et puisque la norme $\tilde{\mathcal{E}}_1^n$ et la norme naturelle de $H^1(D)$ sont équivalentes, il est clair que la forme $(\tilde{\mathcal{E}}^n, H^1(D))$ est une forme régulière possédant $C^\infty(\overline{D})$ comme sous-espace dense.

Puisque $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est également une forme de Dirichlet fermée sur $L^2(D)$, nous déduisons directement de la proposition 4.2.8 le

Corollaire 4.2.9. *$(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est une extension markovienne de la forme $(\tilde{\mathcal{E}}^n, H^1(D))$: les formules définissant \mathcal{E}^n et $\tilde{\mathcal{E}}^n$ coïncident sur $H^1(D)$ et*

$$H^1(D) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \tag{4.27}$$

Remarque 4.2.10. *L'adjectif markovien provient du fait que la forme $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ est associée au semi-groupe $\{P_t^{n,D} : t \geq 0\}$ qui est un semi-groupe de Markov.*

Démonstration. Soit $\phi \in H^1(D)$. Puisque $C^\infty(\overline{D})$ est $\tilde{\mathcal{E}}_1^n$ -dense dans $H^1(D)$, il est possible d'exhiber une suite de fonctions $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $C^\infty(\overline{D})$ telle que

$$\phi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{H^1(D)} \phi \tag{4.28}$$

L'uniforme ellipticité de la fonction a^n implique alors que $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour la norme $\tilde{\mathcal{E}}_1^n$ vers ϕ . Les formules définissant \mathcal{E}^n et $\tilde{\mathcal{E}}^n$ coïncident sur $C^\infty(\overline{D})$, donc $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge également pour la norme \mathcal{E}_1^n vers une limite φ . La fermeture de la forme $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ impose que φ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$. Nous avons donc que

$$\mathcal{E}_1^n(\phi_k - \varphi, \phi_k - \varphi) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

D'autre part, au vu de (4.25) et de (4.28),

$$\mathcal{E}_1^n(\phi_k, \phi_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int_D \phi^2 dx + \int_D a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx$$

Puisque \mathcal{E}_1^n est une norme sur $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$, ces deux convergences impliquent que

$$\int_D \phi^2 dx + \int_D a^n \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx = \tilde{\mathcal{E}}_1^n(\phi, \phi) = \mathcal{E}_1^n(\phi, \phi) = \mathcal{E}_1^n(\varphi, \varphi)$$

Ainsi, $\phi = \varphi$ dans $L^2(D)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$. Le corollaire 4.2.9 est ainsi démontré. \square

Nous pouvons alors conclure que les deux formes de Dirichlet considérées jusqu'à présent sont en fait identiques. On a le

Corollaire 4.2.11. *Les formes de Dirichlet $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ et $(\tilde{\mathcal{E}}, H^1(D))$ sont égales. En particulier,*

$$H^1(D) = \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \tag{4.29}$$

Démonstration. Le théorème 4.2.1 implique que $P_t^{n,D}\phi$ appartient à $H^1(D)$ pour tout $t > 0$. En particulier, la formule de définition des résolvantes (4.20) implique que pour tout $\alpha > 0$ fixé et pour toute fonction $\phi \in L^2(D)$, $R_\alpha^{n,D}\phi$ appartient à $H^1(D)$.

Ainsi,

$$R_\alpha^{n,D}[L^2(D)] \subset H^1(D) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$$

De plus, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\phi \in L^2(D)$,

$$\mathcal{E}_\alpha^n(R_\alpha^{n,D}\phi, v) = (\phi, v), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^n) \quad (4.30)$$

ce qui implique directement que $R_\alpha^{n,D}[L^2(D)]$ est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$ pour la norme associée à \mathcal{E}_α^n . En utilisant le résultat du corollaire 4.2.9, on trouve :

$$\mathcal{E}_\alpha^n(R_\alpha^{n,D}\phi, R_\alpha^{n,D}\phi) = \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^n(R_\alpha^{n,D}\phi, R_\alpha^{n,D}\phi) \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall \phi \in L^2(D) \quad (4.31)$$

Le résultat de la proposition s'ensuit en utilisant la densité de $R_\alpha^{n,D}[L^2(D)]$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{E}^n)$ et la fermeture des formes $(\mathcal{E}^n, \mathcal{D}(\mathcal{E}^n))$ et $(\tilde{\mathcal{E}}^n, H^1(D))$. \square

4.2.2.2 Convergence des résolvantes

Soit a une matrice symétrique telle que $a \in \mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$.

Soit $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ et telles que $a_n \rightarrow a$ dans $L^\infty(\overline{D})$. On note $(\mathcal{E}^n, H^1(D))$ les formes de Dirichlet respectivement associées au sens de la section précédente. On pose $(\mathcal{E}^\infty, H^1(D))$ la forme de Dirichlet définie pour toute fonction $\phi \in H^1(D)$ par l'égalité

$$\mathcal{E}^\infty(\phi, \phi) = \int_D \frac{1}{2} a \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dx \quad (4.32)$$

La forme de Dirichlet $(\mathcal{E}^\infty, H^1(D))$ est une forme coercive et régulière. On peut donc lui associer un semi-groupe de Markov de contraction fortement continu que l'on notera $\{P_t^{\infty,D} : t \geq 0\}$. Le but de cette section est d'étudier la relation entre $\{P_t^{\infty,D} : t \geq 0\}$ et le semi-groupe fondamental $\{P_t^D : t \geq 0\}$ associé à la matrice a par le théorème 4.2.1.

Dans toute la suite, nous noterons $\{R_\alpha^{\infty,D} : \alpha > 0\}$ la famille des résolvantes associée au semi-groupe $\{P_t^{\infty,D} : t \geq 0\}$ et définie par

$$R_\alpha^{\infty,D}\phi(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t^{\infty,D}\phi(x) dt \quad \forall \phi \in L^2(D) \quad (4.33)$$

De la même façon, nous noterons $\{R_\alpha^D : \alpha > 0\}$, la famille des résolvantes associée au semi-groupe $\{P_t^D : t \geq 0\}$.

Nous remarquons :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{P_t^{n,D} : t > 0\}$ est un semi-groupe de contraction :

$$\forall t > 0, \forall \phi \in L_2(D), \quad \|P_t^{n,D}\phi\|_2 \leq \|\phi\|_2 \quad (4.34)$$

– soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées dans $H^1(D)$, $\alpha \geq 0$ et $\epsilon > 0$ fixés. Pour n suffisamment grand nous avons

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_\alpha^n(f_n, g_n) - \mathcal{E}_\alpha^\infty(f_n, g_n)| &= |\mathcal{E}^n(f_n, g_n) - \mathcal{E}^\infty(f_n, g_n)| \\ &\leq |(\nabla f_n, \nabla g_n)| \|a_n - a\|_\infty \\ &\leq \epsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{H^1(D)} \|g_n\|_{H^1(D)} \end{aligned}$$

et donc

$$|\mathcal{E}_\alpha^n(f_n, g_n) - \mathcal{E}_\alpha^\infty(f_n, g_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (4.35)$$

– D'autre part, pour $\alpha > 0$ fixé, à partir de (4.31) et de (4.34), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|R_\alpha^{n,D} \phi\|_{L^2(D)} \leq \frac{C}{\alpha} \|\phi\|_{L^2(D)} \quad (4.36)$$

– En utilisant (4.36), le fait que $\mathcal{E}_\alpha^n (R_\alpha^{n,D} \phi, R_\alpha^{n,D} \phi) = (R_\alpha^{n,D} \phi, \phi)$ (cf. [15] p.19) et (4.35) on obtient qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 0, \forall \phi \in L_2(D), \quad \mathcal{E}_\alpha^\infty (R_\alpha^{n,D} \phi, R_\alpha^{n,D} \phi) \leq \frac{C \|\phi\|_2^2}{\alpha} \quad (4.37)$$

A partir de ces résultats nous pouvons prouver la

Proposition 4.2.12. $\forall \alpha > 0, \forall \phi \in L_2(D),$

$$R_\alpha^{n,D} \phi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_\alpha^{\infty,D} \phi \text{ fortement dans } (\mathcal{E}_\alpha^\infty, H^1(D)) \quad (4.38)$$

et par conséquent fortement dans $L_2(D)$.

Démonstration. Nous utilisons exactement les mêmes arguments que pour la preuve de la proposition 8 pp. 15-16 de la thèse de P. Seignourel [46].

Il suffit de montrer que de toute sous-suite $(R_\alpha^{n_k,D})_{k \in \mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-sous-suite telle que (4.38) est vraie.

D'après (4.36) et la compacité faible de la boule unité dans $L^2(D)$, on peut construire une sous-suite, que l'on notera encore abusivement $(R_\alpha^{n_k,D})_{k \in \mathbb{N}}$, et un élément $h \in L^2(D)$, tels que :

$$R_\alpha^{n_k,D} \phi \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} R_\alpha^{\infty,D} \phi \text{ faiblement dans } L^2(D) \quad (4.39)$$

Notre premier but est d'identifier h et $R_\alpha^{\infty,D} \phi$. Pour ce faire, nous allons tout d'abord montrer que $(R_\alpha^{n_k,D})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{E}_\alpha^\infty, H^1(D))$. Soient $j, k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha^\infty (R_\alpha^{j,D} \phi - R_\alpha^{k,D} \phi) &= \mathcal{E}_\alpha^j (R_\alpha^{j,D} \phi) + \mathcal{E}_\alpha^k (R_\alpha^{k,D} \phi) - 2\mathcal{E}_\alpha^j (R_\alpha^{j,D} \phi, R_\alpha^{k,D} \phi) + \text{reste} \\ &= (R_\alpha^{j,D} \phi, \phi) + (R_\alpha^{k,D} \phi, \phi) - 2(\phi, R_\alpha^{k,D} \phi) + \text{reste} \end{aligned} \quad (4.40)$$

où le reste tend vers 0 lorsque j et k tendent vers $+\infty$ en vertu de (4.37), de (4.35) et de (4.36).

La convergence faible de $R_\alpha^{n_k,D} \phi$ vers h implique alors, à partir de (4.40), que

$$\mathcal{E}_\alpha^\infty (R_\alpha^{j,D} \phi - R_\alpha^{k,D} \phi) \xrightarrow{j,k \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc montré le critère de Cauchy dans $(\mathcal{E}_\alpha^\infty, H^1(D))$ et par identification,

$$R_\alpha^{n_k,D} \phi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h \text{ fortement dans } (\mathcal{E}_\alpha^\infty, H^1(D)) \quad (4.41)$$

Il nous reste alors à montrer que $h = R_\alpha^{\infty,D} \phi$ dans $L^2(D)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que

$$\forall g \in H^1(D), \quad \mathcal{E}_\alpha^\infty (h, g) = \mathcal{E}_\alpha^\infty (R_\alpha^{\infty,D} \phi, g) \quad (4.42)$$

Nous remarquons que pour $g \in H^1(D)$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_\alpha^j (R_\alpha^{j,D} \phi, g) - \mathcal{E}_\alpha^\infty (h, g)| &\leq |\mathcal{E}_\alpha^j (R_\alpha^{j,D} \phi - h, g)| + |\mathcal{E}_\alpha^j (h, g) - \mathcal{E}_\alpha^\infty (h, g)| \\ &\leq C \mathcal{E}_\alpha^j (R_\alpha^{j,D} \phi - h) \left| \mathcal{E}_\alpha^j (g) \right|^{\frac{1}{2}} + |\mathcal{E}_\alpha^j (h, g) - \mathcal{E}_\alpha^\infty (h, g)| \end{aligned}$$

et ces deux termes tendent vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$ d'après (4.41) et (4.35).

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha^\infty (h, g) &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_\alpha^j (R_\alpha^{j,D} \phi, g) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} (\phi, g) \\ &= (\phi, g) \\ &= \mathcal{E}_\alpha^\infty (R_\alpha^{\infty,D} \phi, g) \end{aligned}$$

et (4.42) est démontrée ce qui prouve bien que $R_\alpha^{\infty,D} \phi = h$ dans $L^2(D)$. Cela achève la preuve de la proposition. \square

4.2.2.3 Conclusion : identification de la forme $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$

On a le

Théorème 4.2.1.

$$\forall \phi \in H^1(D), \quad \mathcal{E}(\phi, \phi) = \int_D \frac{1}{2} a \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dx \quad (4.43)$$

De plus,

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(D) \quad (4.44)$$

Démonstration. On observe :

$$\forall t > 0, P_t^{n,D} \phi \longrightarrow P_t^D \phi \quad \text{fortement dans } L_2(D) \quad (4.45)$$

et

$$\forall \alpha > 0, R_\alpha^{n,D} \phi \longrightarrow R_\alpha^D \phi \quad \text{fortement dans } L_2(D) \quad (4.46)$$

En effet, (4.45) se déduit du théorème 4.2.5 et du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Quant à (4.46), on l'obtient à partir (4.45) et de

$$\int_D \left| \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t^{n,D} \phi(x) dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t^D \phi(x) dt \right|^2 dx \leq \int_D \int_0^\infty e^{-2\alpha t} |P_t^{n,D} \phi - P_t^D \phi|^2(x) dt dx$$

Il reste à utiliser la proposition 4.2.12 et (4.43) est démontré.

Pour démontrer (4.44) on utilise les mêmes arguments que pour la preuve du corollaire 4.2.11. \square

4.3 Estimées pour la densité de transition du semi-groupe fondamental

4.3.1 Borne supérieure

Soit $(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H^1(D))$ la forme de Dirichlet associée au mouvement brownien réfléchi sur D (cf. exemple 4.5.3 p.167 de [15]) :

$$\forall \phi \in H^1(D), \quad \mathbf{D}(\phi, \phi) = \frac{1}{2} \int_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi \, dx$$

C'est une forme de Dirichlet régulière. Une conséquence de la section précédente est le résultat suivant qui est la clef nous permettant d'obtenir une borne supérieure pour la fonction de transition $p^D(t, x, y)$.

Proposition 4.3.1. *Pour toute fonction $\phi \in H^1(D)$,*

$$\mathcal{E}(\phi, \phi) \geq \lambda \mathbf{D}(\phi, \phi) \quad (4.47)$$

Proposition 4.3.2. Inégalité de Nash

Il existe une constante $A \in (0, \infty)$ et $\nu > 0$ telle que

$$\|f\|_2^{2+\frac{4}{\nu}} \leq A [\mathcal{E}(f, f) + \|f\|_2^2] \|f\|_1^{\frac{4}{\nu}} \quad \text{pour tout } f \in H^1(D) \quad (4.48)$$

Démonstration. Il est bien connu (cf. [5]) que si $\nu > \frac{(d-1+\gamma)}{\gamma}$, il existe $A^0 \in (0, +\infty)$ tel que

$$\|f\|_2^{2+\frac{4}{\nu}} \leq A^0 [\mathbf{D}(f, f) + \|f\|_2^2] \|f\|_1^{\frac{4}{\nu}} \quad \text{pour tout } f \in H^1(D) \quad (4.49)$$

Il suffit donc d'utiliser la proposition précédente. \square

Le théorème 3.25 de [10] nous permet d'énoncer le

Théorème 4.3.1. *Si $\nu > \frac{(d-1+\gamma)}{\gamma}$, alors pour tout t tel que $0 < t \leq 1$,*

$$p^D(t, x, y) \leq M(\nu) t^{-\frac{\nu}{2}} \exp(-|x-y|^2/Ct) \quad \text{pour tout } x \in D, \text{ pour tout } y \in D \quad (4.50)$$

Démonstration. Notre démonstration s'appuie entièrement sur le théorème 3.25 de [10], aussi nous introduisons les notations de ce théorème. Tout d'abord on définit $\mathcal{F}_b \equiv \mathcal{D}(\mathcal{E}) \cap L^\infty(D)$. Pour tout couple de fonctions $(f, g) \in \mathcal{F}_b \times \mathcal{F}_b$ on introduit la mesure $\Gamma_t^D(f, g)(dx)$ définie par

$$\Gamma_t^D(f, g)(dx) = \left(\frac{1}{2t} \int_D (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) p^D(t, x, y) dy \right) dx \quad (4.51)$$

Le théorème 3.7 de [10] affirme qu'il existe une mesure $\Gamma^D(f, f)$ qui est définie comme la limite faible de $\Gamma_t^D(f, f)$ lorsque t tend vers 0. De plus, $\mathcal{E}(f, f)$ est juste la masse totale de $\Gamma^D(f, f)$ associée à la mesure de Lebesgue sur D .

On introduit $\hat{\mathcal{F}} \equiv \{h + c : h \in \mathcal{F}_b \cap C_b(\bar{D}), c \in \mathbb{R}\}$ puis

$$\hat{\mathcal{F}}_\infty \equiv \left\{ \psi \in \hat{\mathcal{F}} : e^{-2\psi} \Gamma^D(e^\psi, e^\psi)(dx) \ll dx, e^{2\psi} \Gamma^D(e^{-\psi}, e^{-\psi})(dx) \ll dx \right\}$$

Pour finir on définit l'opérateur Γ sur $\hat{\mathcal{F}}_\infty$ par

$$\Gamma(\psi) \equiv \left(\left\| \frac{e^{-2\psi} \Gamma^D(e^\psi, e^\psi)(dx)}{dx} \right\|_\infty \vee \left\| \frac{e^{2\psi} \Gamma^D(e^{-\psi}, e^{-\psi})(dx)}{dx} \right\|_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.52)$$

Le théorème 3.25 dans [10] nous permet d'écrire

$$p^D(t, x, y) \leq M(\nu) t^{-\frac{\nu}{2}} \exp(-H(c_1 t; x, y)) \quad \text{pour tout } x \in D, \text{ pour tout } y \in D \quad (4.53)$$

où M et c_1 sont deux constantes qui ne dépendent que de ν et la fonction H est définie par

$$H(T; x, y) \equiv \sup \left\{ |\psi(y) - \psi(x)| - T\Gamma(\psi)^2 : \psi \in \hat{\mathcal{F}}_\infty \right\} \quad (4.54)$$

Puisque la définition de Γ est complexe dans le cadre où on étudie le semi-groupe fondamental associé à a (cela provient du fait que a n'est juste que mesurable), nous procédons par régularisation : soit $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ et telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ presque partout. Pour chaque n , on note alors $\Gamma^n, \Gamma^{n,D}, \Gamma_t^{n,D}$, et $\hat{\mathcal{F}}_\infty^n$ les objets construits précédemment et associés à a^n .

Soient x_0 et y_0 deux points fixés de \bar{D} et t_0 tel que $0 < t_0 \leq 1$. Soit \tilde{C} une constante telle que

$$\tilde{C} > c_1 \frac{3\Lambda}{2}$$

On pose alors

$$\alpha \triangleq \frac{y_0 - x_0}{\tilde{C} t_0} \quad \text{et} \quad \psi_0(x) \triangleq \langle \alpha, x \rangle$$

Il est clair que ψ_0 ainsi défini appartient à $\hat{\mathcal{F}}_\infty^n$ pour tout n fixé.

Soit $\phi \in C(\bar{D})$:

$$\begin{aligned} & \int_D \phi(x) e^{-2\psi_0(x)} \Gamma_t^{n,D}(e^{\psi_0}, e^{\psi_0})(dx) \\ &= \int_D \phi(x) e^{-2\psi_0(x)} \left(\frac{1}{2t} \int_D (e^{\psi_0(x)} - e^{\psi_0(y)})^2 p^{n,D}(t, x, y) dy \right) dx \\ &= \int_D \phi(x) \frac{1}{2t} \int_D p^{n,D}(t, x, y) dy dx - \int_D \phi(x) e^{-\langle \alpha, x \rangle} \frac{1}{t} \int_D e^{\langle \alpha, y \rangle} p^{n,D}(t, x, y) dy \\ & \quad + \int_D \phi(x) e^{-2\langle \alpha, x \rangle} \frac{1}{2t} \int_D e^{2\langle \alpha, y \rangle} p^{n,D}(t, x, y) dy \end{aligned}$$

En utilisant que

$$\mathcal{E}_t^n(f, g) = \frac{1}{t} \int_D f(x)g(x)dx - \frac{1}{t} \int_D \int_D f(x)g(y)p^{n,D}(t, x, y)dy dx, \quad \forall (f, g) \in H^1(D) \times H^1(D)$$

cette égalité devient

$$\begin{aligned} \int_D \phi(x) e^{-2\psi_0(x)} \Gamma_t^{n,D}(e^{\psi_0}, e^{\psi_0})(dx) &= \mathcal{E}_t^n(\phi, 1) - \frac{1}{t} \int_D \phi(x)dx \\ &\quad - 2 \mathcal{E}_t^n(\phi e^{-\langle \alpha, \cdot \rangle}, e^{\langle \alpha, \cdot \rangle}) + \frac{2}{t} \int_D \phi(x)dx + \mathcal{E}_t^n(\phi e^{-2\langle \alpha, \cdot \rangle}, e^{2\langle \alpha, \cdot \rangle}) - \frac{1}{t} \int_D \phi(x)dx \\ &= \mathcal{E}_t^n(\phi, 1) - 2 \mathcal{E}_t^n(\phi e^{-\langle \alpha, \cdot \rangle}, e^{\langle \alpha, \cdot \rangle}) + \mathcal{E}_t^n(\phi e^{-2\langle \alpha, \cdot \rangle}, e^{2\langle \alpha, \cdot \rangle}) \end{aligned}$$

et en utilisant la convergence (4.17), on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_D \phi(x) e^{-2\psi_0(x)} \Gamma_t^{n,D}(e^{\psi_0}, e^{\psi_0})(dx) &= - \int_D a^n \nabla(\phi e^{-\langle \alpha, \cdot \rangle}) \cdot \nabla(e^{\langle \alpha, \cdot \rangle}) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_D a^n \nabla(\phi e^{-2\langle \alpha, \cdot \rangle}) \cdot \nabla(e^{2\langle \alpha, \cdot \rangle}) dx \\ &= \int_D \langle a^n \alpha, \alpha \rangle \phi dx \end{aligned}$$

Nous déduisons donc de ce calcul que pour tout $t > 0$,

$$\left\| \frac{e^{-2\psi_0(x)} \Gamma_t^{n,D}(e^{\psi_0}, e^{\psi_0})(dx)}{dx} \right\|_{\infty} \leq \frac{3}{2} \Lambda |\alpha|^2$$

Un calcul analogue pour $e^{2\psi_0(x)} \Gamma_t^{n,D}(e^{-\psi_0}, e^{-\psi_0})(dx)$ permet d'en déduire qu'il existe une constante C indépendante de n et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^n(\psi_0) \equiv \left(\left\| \frac{e^{-2\psi_0} \Gamma^n(e^{\psi_0}, e^{\psi_0})(dx)}{dx} \right\|_{\infty} \vee \left\| \frac{e^{2\psi_0} \Gamma^n(e^{-\psi_0}, e^{-\psi_0})(dx)}{dx} \right\|_{\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |\alpha| \quad (4.55)$$

De fait, on peut choisir $C \triangleq \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\Lambda}$.

On déduit alors des inégalités (4.53) et (4.55) que

$$\begin{aligned} p^{n,D}(t, x, y) &\leq M(\nu) t^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left(-|\psi_0(y) - \psi_0(x)| + c_1 t \Gamma^n(\psi_0)^2\right) \\ &\leq M(\nu) t^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left(-|\psi_0(y) - \psi_0(x)| + c_1 t C^2 |\alpha|^2\right) \end{aligned}$$

En remplaçant α et ψ_0 par leur valeurs respectives dans cette dernière inégalité, on trouve que

$$p^{n,D}(t, x, y) \leq M(\nu) t^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left(-|\langle \alpha, y \rangle - \langle \alpha, x \rangle| + c_1 t \frac{C^2 |y_0 - x_0|^2}{\tilde{C}^2 t_0^2}\right)$$

On procède alors de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.3 dans [5] : en choisissant $x = x_0$, $y = y_0$ et $t = t_0$ dans cette dernière inégalité et en remplaçant α par sa valeur, on trouve que

$$\begin{aligned} p^{n,D}(t_0, x_0, y_0) &\leq M(\nu) t_0^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left(-\frac{|x_0 - y_0|^2}{\tilde{C} t_0} + c_1 \frac{C^2 |y_0 - x_0|^2}{\tilde{C}^2 t_0}\right) \\ &\leq M(\nu) t_0^{-\frac{\nu}{2}} \exp\left(-\frac{(\tilde{C} - c_1 C^2) |x_0 - y_0|^2}{\tilde{C}^2 t_0}\right) \end{aligned}$$

En se souvenant de nos choix respectifs pour \tilde{C} et C , on obtient que pour tout ν tel que $\nu > \frac{(d-1+\gamma)}{\gamma}$, il existe une constante C_1 strictement positive, (on peut choisir $C_1 = \frac{C-c_1\frac{3\Lambda}{2}}{C^2}$) telle que pour tout t tel que $0 < t \leq 1$,

$$p^{n,D}(t, x, y) \leq M(\nu) t^{-\frac{\nu}{2}} \exp(-C_1|x-y|^2/t) \quad \text{pour tout } x \in D, \text{ pour tout } y \in D$$

et les constantes $M(\nu)$ et C_1 ne dépendent que de ν de λ et de Λ . Ces constantes sont indépendantes de n et le résultat du théorème se déduit alors par convergence en utilisant le théorème 4.2.5. \square

4.3.2 Le problème de la borne inférieure

4.3.2.1 Introduction

Le théorème 7.2.2 p.302 de [15] permet d'associer à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ un processus de diffusion symétrique sur $(\overline{D}, \mathcal{B}(\overline{D}))$ que nous noterons X . Pour tout $x \in D$, X est construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x)$ et est tel que pour tout ouvert $O \in \mathcal{B}(\overline{D})$,

$$\mathbb{P}_x[X_t \in O] = P_t^D 1_O(x) = \int_O p^D(t, x, y) dy \quad (4.56)$$

Nous notons τ_O le premier instant de sortie de O par le processus X ,

$$\tau_O \triangleq \inf \{t \geq 0 : X_t \notin O\}$$

Soit $B \in \mathcal{B}(\overline{D})$. Nous avons alors que

$$\mathbb{P}_x[X_t \in B; \tau_O > t] \leq \mathbb{P}_x[X_t \in B] = \int_B p^D(t, x, y) dy$$

Ainsi, la mesure $\mathbb{P}_x[X_t \in dy; \tau_O > t]$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que nous noterons $\overline{p}^O(t, x, y)$ et cette densité est majorée par $p^D(t, x, y)$.

4.3.2.2 Estimation locale

Une première estimation pour la borne inférieure est fournie par le

Théorème 4.3.3. (cf. [2] p.670)

Soit D' un sous-ensemble convexe de D tel que la distance h entre D' et ∂D soit strictement positive. Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 dépendant seulement de h , de T , de λ et de Λ , telles que

$$\overline{p}^D(t, x, y) \geq c_1 t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}\right) \quad (4.57)$$

pour tout x et y appartenant à D' et t tel que

$$0 < t \leq \min \left\{ T, \frac{T}{8} \text{dist}^2(y, \partial D') \right\}$$

On voit que l'estimée de ce théorème fait intervenir de façon cruciale la distance entre y et le bord du domaine. Notre principal objectif va être de généraliser dans la mesure du possible cette estimée qui n'est pas optimale puisqu'elle correspond à la transition du processus « tué sur le bord de D » et non à la transition du processus réfléchi.

Il existe également une estimation du même type lorsque le processus est tué en sortant de boules dont le rayon dépend du temps. Nous avons la

Proposition 4.3.4. (cf. [4] proposition 6.7 p.180)

Il existe c_1, c_2 et c_3 tels que si $M = t^{\frac{1}{2}}$, $|x-y| \leq c_3 t^{\frac{1}{2}}$ et $x \in B(x_0, c_1 M)$, alors

$$\overline{p}^{B(x_0, c_1 M)}(t, x, y) \geq c_2 t^{-\frac{d}{2}} \quad \text{pour tout } t > 0 \quad (4.58)$$

Nous utiliserons le résultat de cette proposition dans la section suivante.

4.3.2.3 Vers une estimation globale

Nous procédons comme dans [5] pour obtenir une borne inférieure. Pour cela nous introduisons des conditions de connexité pour le domaine D qui apparaissent naturellement dans notre méthode de démonstration.

Définition 4.3.5. *Nous dirons qu'un ouvert D est (N, r) -uniformément connexe par boules s'il existe un entier N et un réel $r > 0$ tels que pour tout x et y appartenant à D , on peut choisir $x_1^U \dots x_N^U \in D$ tels que*

- $x \in B(x_1^U, r)$, $y \in B(x_N^U, r)$
- $|x_i^U - x_{i+1}^U| \leq r$
- $B_i = B(x_i^U, r) \subset D$

Nous appelons le segment brisé $U \equiv [x, x_1^U] \cup [x_1^U, x_2^U] \cup \dots \cup [x_N^U, y]$ ainsi construit un **segment de connexion entre x et y** correspondant au couple (N, r) . Un segment de connexion U est donc entièrement déterminé par l'ensemble $\{x_1^U, x_2^U, \dots, x_N^U\}$.

Nous appellerons $\mathcal{S}(x, y)$ l'ensemble des segments de connexion entre x et y correspondant à (N, r) .

Nous définissons la distance $d_{N,r}$ sur D par

$$d_{N,r}(x, y) \triangleq \inf_{U \in \mathcal{S}(x, y)} \sum_{i=0}^N |x_{i+1}^U - x_i^U| \quad \text{avec } x_0 = x \text{ et } x_{N+1} = y$$

Dans toute la suite on fait l'hypothèse suivante :

H1 : Il existe un entier N et un réel $r > 0$ tels que D est (N, r) -uniformément connexe par boules.

Le résultat principal de cette section est le

Théorème 4.3.2. *On suppose **H1** vérifiée. Il existe deux constantes positives c et C dépendantes uniquement de $d, \Lambda, \lambda, T, N, r$ telles que pour tout x et y appartenant à D et pour tout $t \in (0, T]$,*

$$p^D(t, x, y) \geq c t^{-\frac{d}{2}} \exp \left(-C \left\{ \frac{d_{N,r}^2(x, y)}{t} \vee \frac{t}{r^2} \vee 2 \vee \frac{t}{\text{dist}^2(x, \partial D) \wedge \text{dist}^2(y, \partial D)} \right\} \right)$$

Démonstration. Grâce à la proposition 4.3.4, et à une propriété de scaling (cf. la démonstration de (6.13) p.181 dans [4]), il existe $c_6 < 1$ et c_7 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $|z - a| \leq c_6 \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\overline{p}^{B(z, (t/n)^{\frac{1}{2}})} \left(\frac{t}{n}, z, a \right) \geq c_7 \left(\frac{t}{n} \right)^{-\frac{d}{2}} \quad (4.59)$$

Soit U un segment de connexion entre x et y .

Soit le nombre entier M défini par :

$$\mathbf{C1} : M \triangleq \mathbf{E} \left[\frac{16|U|^2}{c_6^2 t} \vee (c_6^2 + 8) \frac{t}{r^2} \vee 2 \vee \frac{(\frac{1}{4}c_6 + 1)t}{\text{dist}^2(x, \partial D) \wedge \text{dist}^2(y, \partial D)} \right] + 1$$

où \mathbf{E} désigne la partie entière.

La condition **C1** implique que :

$$\left(\frac{1}{4}c_6 + 1 \right) \left(\frac{t}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{r}{2}$$

Puisque D est (N, r) -uniformément connexe par boules, nous pouvons disposer M points sur U , notés v_1, \dots, v_M , tels que :

- $x \in B\left(v_1, \left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
 - $y \in B\left(v_M, \left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
 - $\forall i \in \{1, \dots, M\}, B\left(v_i, \left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D$
- La condition **C1** implique que :

$$B\left(x, \left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cup B\left(y, \left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D$$

Ainsi, nous pouvons choisir $v_1 = x$ et $v_M = y$.

D'autre part, puisque $B\left(v_i, \left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D$, nous en déduisons que pour tout $z \in B\left(v_i, c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ la boule $B\left(z, \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ est également incluse dans D .

La condition **C1** implique également que

$$\frac{|U|}{M} \leq \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En particulier, nous pouvons choisir les points v_1, \dots, v_M sur U tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}, |v_{i+1} - v_i| \leq \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, pour $i \in \{1, \dots, M\}$: si $z_i \in B\left(v_i, \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ et $z_{i+1} \in B\left(v_{i+1}, \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ alors

$$|z_{i+1} - z_i| \leq c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On a

$$\begin{aligned} p^D(t, x, y) &\geq \int_{B\left(x, \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \int_{B\left(v_2, \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \cdots \int_{B\left(v_{M-1}, \frac{1}{4}c_6 \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \bar{p}^{B\left(x, \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \left(\frac{t}{M}, x, z_1\right) \bar{p}^{B\left(z_1, \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \\ &\dots \bar{p}^{B\left(z_{M-2}, \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \left(\frac{t}{M}, z_{M-2}, z_{M-1}\right) \bar{p}^{B\left(z_{M-1}, \left(\frac{t}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} \left(\frac{t}{M}, z_{M-1}, y\right) dz_1 \dots dz_{M-1} \\ &\geq c_8^{M-1} \left(\frac{t}{M}\right)^{-(M-1)\frac{d}{2}} \left(\frac{t}{M}\right)^{(M-2)\frac{d}{2}} c_7^{M-2} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} p^D(t, x, y) &\geq c_8 \left(\frac{t}{M}\right)^{-\frac{d}{2}} \exp((M-2)\ln c_8 c_7) \\ &\geq c_8 t^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{16|U|^2}{c_6^2 t} \vee (c_6^2 + 8) \frac{t}{r^2} \vee 2 \vee \frac{\left(\frac{1}{4}c_6 + 1\right) t}{\text{dist}^2(x, \partial D) \wedge \text{dist}^2(y, \partial D)} \right)^{\frac{d}{2}} \times \\ &\quad \exp\left(-C \left\{ \frac{|U|^2}{t} \vee \frac{t}{r^2} \vee 2 \vee \frac{t}{\text{dist}^2(x, \partial D) \wedge \text{dist}^2(y, \partial D)} + 1 \right\}\right) \\ &\geq c t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-C \left\{ \frac{|U|^2}{t} \vee \frac{t}{r^2} \vee 2 \vee \frac{t}{\text{dist}^2(x, \partial D) \wedge \text{dist}^2(y, \partial D)} \right\}\right) \end{aligned}$$

En optimisant cette inégalité sur l'ensemble des choix possibles de U , on trouve le résultat escompté. \square

4.4 Représentation probabiliste de la solution du problème de Poisson-Neumann

4.4.1 Convergence vers la mesure invariante

Dans toute ce qui suit $|D|$ désigne le volume de l'ensemble D : $|D| \triangleq \text{leb}(D)$.

On se donne une suite régularisante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On suppose que cette suite est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ et $a_n \rightarrow a$ presque partout.

Soit $p^{D,n}$ la fonction de transition définie comme dans les sections précédentes c'est-à-dire que $p^{D,n}$ désigne la solution fondamentale du problème de Neumann associée à l'opérateur $\nabla \cdot [\frac{1}{2}a_n \nabla]$.

Avant de commencer, rappelons l'inégalité de Poincaré dans les domaines bornés. Cette inégalité est au coeur de tout ce qui suit.

Proposition 4.4.1. (*Inégalité de Poincaré-Wirtinger*)

Soit D un ouvert connexe de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq \infty$. Il existe alors une constante c_D telle que

$$\|\phi - \frac{1}{|D|} \int_D \phi(y) dy\|_p \leq c_D \|\nabla \phi\|_p \quad \forall \phi \in W^{1,p}(D) \quad (4.60)$$

Démonstration. Pour une démonstration, voir par exemple [9] p.194. □

Introduisons

$$h^{D,n}(t, x, y) \triangleq p^{D,n}(t, x, y) - \frac{1}{|D|} \quad (4.61)$$

On a la

Proposition 4.4.2. *Il existe deux constantes c_1 et c_2 indépendantes de n et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$0 \leq h^{D,n}(t, x, x) = p^{D,n}(t, x, x) - \frac{1}{|D|} \leq c_1 \exp(-c_2 t), \quad \forall x \in D \quad (4.62)$$

Démonstration. Soit $x \in D$ fixé.

On commence par remarquer :

$$\begin{aligned} h^{D,n}(t, x, x) &= \int_D p^{n,D}\left(\frac{t}{2}, x, y\right) p^{n,D}\left(\frac{t}{2}, y, x\right) dy - \frac{1}{|D|} \\ &= \int_D \left(p^{n,D}\left(\frac{t}{2}, x, y\right)\right)^2 dy - \frac{1}{|D|} \\ &= \int_D \left(p^{n,D}\left(\frac{t}{2}, x, y\right) - \frac{1}{|D|}\right)^2 dy \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que a_n appartient à $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ et donc que a_n est infiniment différentiable, on vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h^{D,n}(t, x, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_D p^{D,n}(t, x, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_D p^{D,n}\left(\frac{t}{2}, x, z\right) p^{D,n}\left(\frac{t}{2}, z, x\right) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_D \left(p^{D,n}\left(\frac{t}{2}, x, z\right)\right)^2 dz \end{aligned}$$

Grâce à la régularité de a_n nous pouvons dériver sous le signe d'intégration et ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h^{D,n}(t, x, x) &= \int_D p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right) \nabla_z \cdot \left[\frac{1}{2} a_n \nabla_z p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right) \right] dz \\ &= - \int_D \langle \nabla_z p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right), \frac{1}{2} a_n \nabla_z p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right) \rangle_d dz \\ &\leq - \frac{\lambda}{2} \int_D \langle \nabla_z p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right), \nabla_z p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right) \rangle_d dz \end{aligned}$$

En utilisant alors l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (4.60) puis en utilisant un raisonnement analogue à celui du début de la démonstration, on montre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h^{D,n}(t, x, x) &\leq - \frac{\lambda}{2c_D} \left(\int_D \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, y \right) - \frac{1}{|D|} \right]^2 dy \right) \\ &\leq - \frac{\lambda}{2c_D} \left[\int_D \left(p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, y \right) \right)^2 dy - \frac{1}{|D|} \right] \\ &= - \frac{\lambda}{2c_D} \left[p^{D,n}(t, x, x) - \frac{1}{|D|} \right] = - \frac{\lambda}{2c_D} h^{D,n}(t, x, x) \end{aligned}$$

et en intégrant cette inégalité entre $t_0 = 1$ et t , on obtient qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$h^{D,n}(t, x, x) \leq h^{D,n}(t_0, x, x) \exp(-c_2 t) \quad (4.63)$$

L'estimée supérieure du théorème 4.3.1 permet alors de conclure : il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$h^{D,n}(t, x, x) \leq c_1 \exp(-c_2 t) \quad (4.64)$$

□

On en déduit le

Théorème 4.4.3. *Il existe c_3 et c_4 deux constantes positives, dépendantes uniquement de D , et des constantes λ , Λ et d , telles que :*

pour tout $n \in \mathbb{N}^$, pour tout $t > 0$ et pour tout $(x, y) \in D \times D$,*

$$\left| p^{D,n}(t, x, y) - \frac{1}{|D|} \right| \leq c_3 \exp(-c_4 t) \quad (4.65)$$

Démonstration. Pour obtenir une estimation hors de la diagonale, nous appliquons la même méthode que dans l'article [5] :

$$\begin{aligned} \left| p^{D,n}(t, x, y) - \frac{1}{|D|} \right| &= \left| \int_D \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right) - \frac{1}{|D|} \right] \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, z, y \right) - \frac{1}{|D|} \right] dz \right| \\ &\leq \left(\int_D \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, z \right) - \frac{1}{|D|} \right]^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, y, z \right) - \frac{1}{|D|} \right]^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, x, x \right) - \frac{1}{|D|} \right]^{\frac{1}{2}} \left[p^{D,n} \left(\frac{t}{2}, y, y \right) - \frac{1}{|D|} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_3 \exp(-c_4 t) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le résultat de la proposition 4.4.2 pour la dernière inégalité. □

En utilisant le résultat de convergence du théorème 4.2.5, on démontre immédiatement le

Corollaire 4.4.1. *Il existe c_3 et c_4 deux constantes positives, dépendantes uniquement de D , et des constantes λ , Λ et d , telles que : pour tout $t > 0$ et pour tout $(x, y) \in D \times D$,*

$$|p^D(t, x, y) - \frac{1}{|D|}| \leq c_3 \exp(-c_4 t) \quad (4.66)$$

4.4.2 Résultat principal : énoncé et démonstration

4.4.2.1 Introduction

Soit a une matrice de $\mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$.

On note $H^{1,0}(D)$ l'espace des fonctions $\psi \in H^1(D)$ telles que $\int_D \psi(y) dy = 0$.

Introduisons également X le processus construit au Théorème 4.2.7.

Le Théorème 4.2.7 p. 147 de [15], nous assure que le processus X et équivalent à la diffusion symétrique associée à la forme de Dirichlet $(\mathcal{E}, H^1(D))$ (cf. Théorème 7.2.2 p.302 de [15]). Nous noterons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_x)_{x \in D})$ l'espace de probabilité sur lequel X est défini. Cet espace est construit de façon à ce que l'égalité (4.56) soit vérifiée.

Le but de cette section est de prouver le

Théorème 4.4.1. *Soit ϕ une fonction appartenant à $H^1(D) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.*

L'unique représentant continu, noté u_c , de la solution $u \in H^{1,0}(D)$ du problème de Neumann (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \nabla \cdot [\frac{1}{2}a \nabla u] = \phi - \frac{1}{|D|} \int_D \phi(y) dy & \text{dans } D \\ \langle a \nabla u, \vec{n} \rangle = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases} \quad (4.67)$$

peut être décrit grâce à la formule de représentation suivante : pour tout $x \in D$,

$$u_c(x) = - \int_0^\infty \left(\mathbb{E}_x [\phi(X_t)] - \frac{1}{|D|} \int_D \phi(y) dy \right) dt \quad (4.68)$$

Le problème (\mathcal{P}) s'interprète au sens variationnel : on cherche en fait une représentation probabiliste pour l'unique solution du problème suivant :

trouver $u \in H^{1,0}(D)$ telle que

$$- \int_D \frac{1}{2} a(y) \nabla u(y) \cdot \nabla v(y) dy = (\phi, v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(D) \quad (4.69)$$

Quitte à introduire $\tilde{\phi} \triangleq \phi - \frac{1}{|D|} \int_D \phi(y) dy$, on supposera dans toute la suite que

$$\frac{1}{|D|} \int_D \phi(y) dy = 0 \quad (4.70)$$

Pour tout $\alpha > 0$ fixé, nous posons $u^\alpha \in H^1(D)$ la fonction définie par

$$u^\alpha(x) \triangleq \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t^D \phi(x) dt \quad (4.71)$$

Nous voyons, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, que

$$u^\alpha \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{L^2(D)} \int_0^\infty P_t^D \phi dt \quad (4.72)$$

De plus, en utilisant (4.70), on vérifie facilement que

$$\int_D u^\alpha(y) dy = 0 \quad (4.73)$$

et par conséquent u^α appartient à $H^{1,0}(D)$.

4.4.2.2 Démonstration du théorème 4.4.1

Démonstration. Unicité de la solution du problème (P) :

Supposons que l'on dispose de deux solutions $u^1 \in H^{1,0}(D)$ et $u^2 \in H^{1,0}(D)$ pour le problème (P). Nous avons alors que

$$-\int_D \frac{1}{2} a(y) \nabla [u^1(y) - u^2(y)] \cdot \nabla v(y) dy = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(D)$$

et puisque $u^1 - u^2 \in H^1(D)$, cette égalité appliquée avec $v = u^1 - u^2$ et la coercivité de \mathcal{E} entraînent que

$$\|\nabla(u^1 - u^2)\|_2^2 = 0$$

Cette égalité combinée avec l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (4.60) et avec le fait que

$$\int_D (u^1 - u^2)(y) dy = 0$$

donne directement

$$u^1 = u^2 \quad \text{dans } L^2(D)$$

Cela montre l'unicité des solutions du problème (P) dans $H^{1,0}(D)$.

Existence et représentation de la solution :

Nous savons (cf. par exemple [15] lemme 1.3.3 p. 21) que pour tout $\alpha > 0$ fixé,

$$\alpha(u^\alpha, v) + \mathcal{E}(u^\alpha, v) = (\phi, v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(D) \quad (4.74)$$

Par conséquent, puisque u^α appartient à $H^1(D)$,

$$\alpha \|u^\alpha\|_2^2 + \mathcal{E}(u^\alpha, u^\alpha) = (\phi, u^\alpha) \quad (4.75)$$

La coercivité de la forme de Dirichlet \mathcal{E} et l'inégalité de Cauchy-Schwarz imposent alors que

$$\frac{\lambda}{2} \|\nabla u^\alpha\|_2^2 \leq \mathcal{E}(u^\alpha, u^\alpha) \leq \|\phi\|_2 \|u^\alpha\|_2$$

En appliquant alors l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (4.60) et en utilisant l'égalité (4.73), on trouve que

$$\frac{\lambda}{2} \|\nabla u^\alpha\|_2^2 \leq c_D \|\phi\|_2 \|\nabla u^\alpha\|_2$$

Ainsi,

$$\|\nabla u^\alpha\|_2 \leq \frac{2c_D}{\lambda} \|\phi\|_2 \quad (4.76)$$

De même, en reprenant les calculs à partir de (4.75) et en appliquant à nouveau l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (4.60), on constate que

$$\frac{\lambda}{2c_D} \|u^\alpha\|_2^2 \leq \|\phi\|_2 \|u^\alpha\|_2$$

Par conséquent,

$$\|u^\alpha\|_2 \leq \frac{2c_D}{\lambda} \|\phi\|_2 \quad (4.77)$$

En combinant les inégalités (4.76) et (4.77) on constate que la famille de fonctions $(u^\alpha)_{\alpha > 0}$ est uniformément bornée dans $H^1(D)$. Par conséquent, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et convergente vers 0 et une fonction $h \in H^1(D)$ telles que

$$u^{\alpha_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H^1(D)} h \quad (4.78)$$

En comparant ce résultat avec le résultat de convergence (4.72), on constate que

$$h(x) \triangleq \int_0^\infty P_t^D \phi(x) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [\phi(X_t)] dt \quad \text{dans } L^2(D) \quad (4.79)$$

et au vu de l'égalité (4.73), la convergence (4.78) entraîne que h appartient à $H^{1,0}(D)$.

En réécrivant (4.74) pour α_n fixé, puis en faisant tendre n vers $+\infty$, on constate à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue et de (4.79) que

$$-\mathcal{E}(-h, v) = (\phi, v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(D) \quad (4.80)$$

Cela signifie exactement que $-h$ est solution du problème (\mathcal{P}) .

Continuité de la fonction h :

Posons maintenant

$$h(x) \triangleq \int_0^\infty P_t^D \phi(x) dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_x [\phi(X_t)] dt \quad \forall x \in D \quad (4.81)$$

c'est-à-dire que nous renforçons l'égalité (4.79).

La continuité de la fonction h va résulter du théorème 4.2.5 : en effet, dans le cadre de ce théorème, nous savons que $P_t^{n,D} \phi(\cdot) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P_t^D \phi(\cdot)$ uniformément sur tout compact de D_T pour toute fonction $\phi \in L_2(D)$. Puisque les fonctions $(t, x) \mapsto P_t^{n,D} \phi(x)$ sont continues, cette convergence uniforme implique que la fonction

$$(t, x) \mapsto P_t^D \phi(x)$$

est continue sur tous les compacts inclus dans D_T et est donc continue sur D_T tout entier. Puisque cela est vrai pour tout T arbitrairement grand, la fonction $(t, x) \mapsto P_t^D \phi(x)$ est continue sur tout $]0, \infty[\times D$.

Ainsi, grâce au théorème de continuité de Lebesgue, pour montrer que h est une fonction continue, il suffit de montrer que :

$$|P_t \phi(x)| \leq g_\phi(t) \quad \forall x \in D$$

où la fonction g_ϕ est une fonction intégrable sur $]0, \infty[$ et indépendante de x .

Or, grâce au corollaire 4.4.1 et à (4.70) il est facile de voir que

$$\begin{aligned} |P_t \phi(x)| &= \left| \int_D \phi(y) p^D(t, x, y) dy \right| \\ &= \left| \int_D \phi(y) \left(p^D(t, x, y) - \frac{1}{|D|} \right) dy \right| \\ &\leq c_3 \exp(-c_4 t) \|\phi\|_{L^1(D)} \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons choisir $g_\phi : t \mapsto c_3 \exp(-c_4 t) \|\phi\|_{L^1(D)}$ intégrable sur $]0, \infty[$ et par conséquent h est une fonction continue. \square

4.5 Description of the process X in the one-dimensional case

We study the special case where the operator L possesses boundary conditions of Neumann type. More precisely, L is now defined as follows

$$\begin{cases} Lu = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} u \right) + b \frac{d}{dx} u \quad \text{in } [r, l] \\ u'(r) = 0; \quad u'(l) = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

where ρ , a and b are of class \mathcal{C}^1 in the subset $]r, l[$ of \mathbb{R} except on a finite set \mathcal{J} of n points lying in $]r, l[$ where these coefficients have only left and right limits. We set

$$\mathcal{J} = \{x_i \mid x_1 < x_2 < \dots < x_n\} \quad (4.83)$$

and $x_0 = r$ and $x_{n+1} = l$ in order to simplify our notations.

We define the following hypothesis :

$$\mathbf{H} : \begin{cases} \lambda \leq \rho \leq \Lambda; \quad \lambda \leq a \leq \Lambda \\ |b| \leq \Lambda \\ a, b \text{ and } \rho \text{ are right-continuous with left limits} \\ a, b \text{ and } \rho \text{ belong to } \mathcal{C}^1([r, l] - \mathcal{J}) \\ \mathcal{J} \text{ is finite} \\ \text{There exists } \epsilon > 0 \text{ such that } |x - y| \leq \epsilon \text{ for any } x, y \text{ in } \mathcal{J}. \end{cases}$$

Let us introduce the family of coefficients $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ defined as :

$$\beta_k = \frac{a(x_k+) - a(x_k-)}{a(x_k+) + a(x_k-)} \quad (4.84)$$

with $a(x_0-) = a(r-) = a(x_{n+1}+) = a(l+) = 0$ and $\rho(x_0-) = \rho(r-) = \rho(x_{n+1}+) = \rho(l+) = 1$.

Moreover, throughout this section, we suppose that assumption \mathbf{H} is satisfied.

4.5.1 Description of the process

Let us set

$$B(x) = \int_r^x \frac{2b(z)}{\rho(z)a(z)} dz, \quad x \in [r, l]$$

The operator L gives rise to the symmetric Dirichlet form $(\mathcal{E}, H^1([r, l]))$ with reference Hilbert space $L^2([r, l]; e^{B(z)} \rho^{-1}(z) dz)$ defined as follows :

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \int_r^l a(z) e^{B(z)} f'(z) g'(z) dz \quad \forall f, g \in H^1([r, l]) \quad (4.85)$$

Note that the Neumann boundary condition of L is taken into account in the choice of the real Hilbert space $H^1([r, l])$ for the domain of the form.

Since $\lambda \leq a \leq \Lambda$ and $\lambda \leq \rho \leq \Lambda$, it is possible to show that $(\mathcal{E}, H^1([r, l]))$ is a regular Dirichlet form with $\mathcal{C}^\infty([r, l])$ as a standard core (see example 1.6.1 p.52 of [15]). Hence, it is well-known that there is a continuous Feller process $(X, \mathbb{P}_x, x \in]r, l[)$ associated with \mathcal{E} and such a process is unique in distribution.

Let X^x denote the process X under \mathbb{P}_x conditioned such that $X_0^x = x$. Let us also introduce the function Id from $H^1([r, l])$ defined as $Id(x) = x$ on the closed interval $[r, l]$.

By applying Fukushima's decomposition with the function Id , we know that

$$X_t^x = x + M_t + N_t \quad (4.86)$$

where M is an MAF (Martingale Additive Functional) starting at $M_0 = 0$ and N is a CAF (Continuous Additive Functional) that has locally zero energy under the measure $\int_r^l \mathbb{P}_x(\cdot) e^{B(x)} \rho^{-1}(x) dx$ and that starts at $N_0 = 0$. This decomposition is unique up to equivalence.

Making use of our assumptions, we can get a more precise description of the process X . Let us introduce $\{\bar{L}_t^z(X) : t \geq 0\}$ the symmetric local time of X at point z . We proceed to show the

Théorème 4.5.1. *Suppose **H**.*

Then X under \mathbb{P}_x satisfies the following stochastic differential equation with local time :

$$\boxed{\begin{aligned} X_t = x + \int_0^t \sqrt{\rho(X_s)a(X_s)}dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \rho(X_s)a'(X_s) ds + \int_0^t b(X_s)ds \\ + \sum_{k=1}^n \beta_k \bar{L}_t^{x_k}(X) + \bar{L}_t^r(X) - \bar{L}_t^l(X) \end{aligned}} \quad (4.87)$$

where B is a Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$.

Démonstration. First of all, note that assumption **H** implies that the capacity induced by X is the same as the capacity induced by the Dirichlet form associated to the Reflected Brownian Motion in $[r, l]$. Therefore each point is non-polar for X .

Let us pick Id from $H^1([r, l])$. We have that

$$\mathcal{E}(Id, g) = \int_r^l \frac{1}{2} a(z) e^{B(z)} g'(z) dz \quad (4.88)$$

In particular, $e^{B(z)} a(z) dz$ is the positive Radon measure $\mu_{(Id)}(dz)$ defined in equality (3.2.14) p.110 of [15] and it is the Revuz measure associated with $\langle M \rangle$ seen as a CAF of X . Remember that \mathcal{E} is a Dirichlet form over $L^2([r, l]; e^{B(z)} \rho^{-1}(z) dz)$: as a consequence there exists a standard Brownian Motion $\{B_t : t \geq 0\}$ constructed on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ such that

$$M_t = \int_0^t \sqrt{\rho(X_s)a(X_s)}dB_s; \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t \rho(X_s)a(X_s)ds$$

Our hypothesis ensure that there exists a Radon measure $\nu(dz)$ on $\mathcal{B}([r, l])$ defined as the distributional derivative of the function $x \mapsto \frac{1}{2} e^{B(x)} a(x)$ on the set $[r, l]$: for any $g \in C^\infty([r, l])$ we have that

$$\mathcal{E}(Id, g) = \int_r^l \frac{1}{2} a(z) e^{B(z)} g'(z) dz = - \int_r^l g(z) \nu(dz) \quad (4.89)$$

Thus, We are in position to apply corollary 5.4.1 p.224 in [15]. and we obtain that N is the CAF whose Revuz measure is given by $\nu(dz)$.

For a given x in $[r, l]$, let $\{\tilde{L}_t^x(X) : t \geq 0\}$ denote the additive functional associated with the measure $\delta_{\{x\}}(dz)$. It follows from theorem 5.1.3 p.187 of [15] that for a given Radon measure $\mu(dz)$, the continuous additive functional of X associated with Revuz measure $\mu(dz)$ is $\int_r^l \tilde{L}_t^x(X) \mu(dx)$.

On another hand, since the Dirichlet form associated to X is constructed over the Hilbert space $L^2([r, l]; e^{B(z)} \rho^{-1}(z) dz)$, it is well known that for a given Borel measurable function g , the process $\{\int_0^t g(X_s) e^{-B(X_s)} \rho(X_s) ds : t \geq 0\}$ is a continuous additive functional possessing $g(x) dx$ as its Revuz measure.

Combining these two facts and making use of the equivalence between additive functionals that share a unique common Revuz measure, we deduce that for any Borel measurable function g ,

$$\int_r^l \tilde{L}_t^x(X) g(x) dx = \int_0^t g(X_s) e^{-B(X_s)} \rho(X_s) ds = \int_0^t \frac{1}{a(X_s)} e^{B(X_s)} g(X_s) d\langle M \rangle_s, \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s}$$

This last equality corresponds to the occupation time formula for the local time. Hence,

$$\left\{ L_t^z(X) := a(z) e^{B(z)} \tilde{L}_t^z(X) : t \geq 0; \quad z \in [r, l] \right\}$$

is the family of local time for the process X .

Therefore the additive functional N associated with the Radon measure $\nu(dz)$ is

$$N_t = \int_r^l L_t^z(X) a^{-1}(z) e^{-B(z)} \nu(dz)$$

Returning back to (4.86), the Fukushima decomposition of X under \mathbb{P}_x writes :

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{\rho(X_s) a(X_s)} dB_s + \int_r^l L_t^z(X) a^{-1}(z) e^{-B(z)} \nu(dz) \quad (4.90)$$

In particular, this last equality shows that X is a semimartingale¹.

Recall that $\nu(dz)$ is defined as the distributional derivative of the function

$$z \mapsto \frac{1}{2} e^{B(z)} a(z)$$

on the set $[r, l]$. The integration of the local time with respect to $\nu(dz)$ gives :

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{1}{2} \int_r^l L_t^z(X) a^{-1}(z) a'(z) dz + \frac{1}{2} \int_r^l L_t^z(X) B'(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{a(x_{k+1-})}{a(x_{k+1})} L_t^{x_{k+1}}(X) - \frac{a(x_{k+})}{a(x_k)} L_t^{x_k}(X) \\ &= \frac{1}{2} \int_r^l L_t^z(X) a^{-1}(z) a'(z) dz + \frac{1}{2} \int_r^l L_t^z(X) B'(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a(x_k+) - a(x_k-)}{a(x_k)} L_t^{x_k}(X) + \frac{1}{2} L_t^r(X) - \frac{1}{2} L_t^{l-}(X) \\ &:= N_t^1 + N_t^2 + N_t^3 + \overline{L}_t^r(X) - \overline{L}_t^l(X) \end{aligned}$$

Using the occupation time formula for N^1 and N^2 yields

$$N_t^1 = \frac{1}{2} \int_0^t a'(X_s) \rho(X_s) ds; \quad N_t^2 = \frac{1}{2} \int_0^t B'(X_s) a(X_s) \rho(X_s) ds = \int_0^t b(X_s) ds$$

For N^3 , we use (cf. [40] p.225) that :

$$\overline{L}_t^{x_k}(X) = L_t^{x_k}(X) - \int_0^t 1_{\{X_s = x_k\}} dN_s = L_t^{x_k}(X) - \frac{1}{2} \frac{a(x_k+) - a(x_k-)}{a(x_k)} dL_t^{x_k}(X), \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s.}$$

and an easy calculation yields

$$N_t^3 := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a(x_k+) - a(x_k-)}{a(x_k)} L_t^{x_k}(X) = \sum_{k=1}^n \beta_k \overline{L}_t^{x_k}(X), \quad \mathbb{P}_x - \text{a.s.}$$

This equality and the Fukushima decomposition of X show that X under \mathbb{P}_x is a solution of the stochastic differential equation (4.87) and the theorem is proved. \square

Remarque 4.5.1. *We will prove in the next chapter that whenever hypothesis **H** is satisfied, there is a unique solution in the distributional sense to the stochastic differential equation with local time (4.87). Hence, the distributions of X are totally determined by equation (4.87).*

4.6 Conclusion

Nous avons obtenu l'interprétation probabiliste du problème de Poisson (\mathcal{P}) (4.67). Dans le cas unidimensionnel, cette interprétation probabiliste s'exprime à l'aide du processus vérifiant (4.87). La simulation efficace de ce processus et la résolution numérique de l'équation de Poisson (\mathcal{P}) (4.67), par méthodes de Monte-Carlo ou par simulation ergodique, demeure un problème ouvert.

¹Note that this fact could not be retrieved directly using Corollary 5.4.2 of [15] : we could not prove that assumption (5.4.22) is fulfilled up to the boundaries $\{r\}$ and $\{l\}$ of the interval $[r, l]$.

Chapitre 5

Diffusions réfléchies à dérive singulière : existence, unicité faible et estimation

5.1 Introduction

Nous avons vu que l'équation (4.87) du chapitre précédent a une solution. Une question naturelle concerne l'unicité. En fait nous allons nous intéresser à une classe plus générale d'E.D.S. (voir (5.52)) pour lesquelles nous allons prouver des résultats concernant l'existence et l'unicité de solutions.

Ce chapitre a pour but de construire des Diffusions Réfléchies à Dérive Singulière (D.R.D.S.) (voir (5.52)). Pour ce faire, nous adapterons la technique classique initiée par Engelbert et Schmidt (cf [22]) et, par ailleurs, nous introduirons une nouvelle technique fondée sur un changement de temps différent de celui utilisé par Engelbert et Schmidt.

- Pour traiter le problème de la double réflexion et pour retrouver dans ce cadre les résultats qui avaient été obtenus par Engelbert et Schmidt dans [48] pour les Diffusions à Dérives Singulières (D.D.S.) non-réfléchies, on adapte la méthode de changement de temps. Notons que dans leur article [48], Engelbert et Schmidt évitent de traiter le cas des D.R.D.S. à cause des complications techniques liées à la présence d'une double barrière.

La méthode que nous utilisons ici est fondée sur l'utilisation d'un changement de temps construit naturellement à partir du mouvement brownien réfléchi et non plus à partir du mouvement brownien standard comme cela est fait dans le cas sans réflexion dans [48].

- Dans une seconde partie nous effectuons une nouvelle construction pour les solutions des D.D.S. non-réfléchies dans le cas où la mesure qui contrôle les singularités de la dérive est discrète : nous construisons les solutions des D.D.S. non-réfléchies non plus à partir du mouvement brownien comme cela est fait dans [48], mais plus naturellement à partir du mouvement brownien à dérive singulière correspondant. Cette méthode est une alternative à celle d'Engelbert et Schmidt présentée dans [48] et nous retrouvons partiellement leur résultat : malheureusement, il semble difficile de traiter dans ce cadre les cas où le coefficient de diffusion de la D.D.S. dégénère aux points où les singularités ont lieu. Notons que ce problème est totalement absent dans les démonstrations de [48] : en effet, la magie de la formule d'Itô-Tanaka permet de traiter d'un coup tout le problème des singularités dans le cas des D.D.S. non-réfléchies. Pour conclure il faut noter que notre construction s'adapte également pour le cas des D.R.D.S.
- Enfin, nous proposons une applications de ces méthodes pour proposer un estimateur efficace du coefficient d'assymétrie d'une D.R.D.S. (travail commun avec Olivier Bardou)

5.2 Résumé du résultat d'Engelbert et Schmidt : la technique de changement de temps pour les D.D.S. non réfléchies

Soit σ une fonction mesurable réelle et ν une mesure signée sur \mathbb{R} . On considère l'équation

$$\mathbf{F}(\sigma, \nu) : \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^y(X) \nu(dy) \quad (5.1)$$

où B est un mouvement brownien standard et $\{L_t^y : t \geq 0 \ y \in \mathbb{R}\}$ désigne le temps local à droite de la semimartingale X .

Dans l'article intitulé « On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift » ([48]), H.J. Engelbert et W. Schmidt énoncent des **conditions nécessaires et suffisantes** pour l'existence et l'unicité (au sens faible) de solutions à l'équation $\mathbf{F}(\sigma, \nu)$ dans le cas où la mesure ν est telle que :

$$\mathbf{H0} : \quad \nu(\{x\}) > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sous l'hypothèse **H0**, les conditions d'existence et d'unicité pour les solutions de $\mathbf{F}(\sigma, \nu)$ sont en fait équivalentes aux conditions d'existence et d'unicité pour les solutions de $\mathbf{F}(\sigma, \mathbf{0})$ (où $\mathbf{0}$ désigne la mesure nulle sur \mathbb{R}) et sont données par (cf. théorème 4 p. 152 dans [48]) :

$$(\mathbf{E} + \mathbf{U}) : \quad Z(\sigma) \triangleq \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = 0\} = I(\sigma) \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{dy}{\sigma^2(x+y)} = +\infty \right\}$$

La technique de démonstration est divisée en deux étapes :

- **Étape 1** : les auteurs traitent tout d'abord le cas des équations sans dérive $\mathbf{F}(\sigma, \mathbf{0})$: la condition $(\mathbf{E} + \mathbf{U})$ s'obtient grâce à une technique de changement de temps et les solutions de $\mathbf{F}(\sigma, \mathbf{0})$ sont construites à partir du mouvement brownien standard.
- **Étape 2** : les auteurs construisent les solutions de $\mathbf{F}(\sigma, \nu)$ à partir des solutions de $\mathbf{F}(\sigma, \mathbf{0})$ et d'une fonction G bijective, construite à partir de ν et dont le rôle est de faire apparaître le terme de dérive généralisé : ils constatent alors que les conditions $(\mathbf{E} + \mathbf{U})$ ne sont pas altérées par cette transformation dans le cas de l'hypothèse **H0**.

Les auteurs affirment qu'il n'existe en général pas de solutions à l'équation $\mathbf{F}(\sigma, \nu)$ lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\{x\}) < -1$. Ils évitent toutefois de traiter le cas $\nu(\{x\}) = -1$ pour éviter des « complications techniques ». En effet, s'il existe deux points r et l tels que $r < l$ et $\nu(\{r\}) = 1$ et $\nu(\{l\}) = -1$ alors on s'attend à ce que les solutions de $\mathbf{F}(\sigma, \nu)$ soient doublement réfléchies sur r et l . Notons $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$ plutôt que $\mathbf{F}(\sigma, \nu)$ dans ce cas particulier : il ne semble plus raisonnable de construire les solutions de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$ à partir du mouvement brownien standard : la fonction utilisée à l'étape 2 ne serait alors vraisemblablement pas bijective et il serait difficile de pouvoir conclure.

Dans ce chapitre nous essayons de répondre à cette question et nous reprenons l'ensemble des étapes de la démonstration d'Engelbert et Schmidt :

- L'étape 1 est remplacée par la construction des solutions de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \mathbf{0})$ grâce à la technique de changement du temps, mais cette fois-ci à partir du mouvement brownien doublement réfléchi sur $[r, l]$ et non plus à partir du mouvement brownien standard : les difficultés proviennent du fait que le mouvement brownien réfléchi n'est pas à accroissements indépendants et sont liées à la présence des temps locaux aux points r et l . On retrouve néanmoins la condition $(\mathbf{E} + \mathbf{U})$ d'Engelbert et Schmidt sauf pour les points r et l où il nous faut renforcer les hypothèses.
- L'étape 2 utilise la fonction G précédente, vue comme bijection de $[r, l]$ dans $[G(r), G(l)]$, et ne présente aucune difficulté.

5.3 Le cas des Diffusions Doublement Réfléchies (D.R.) sans dérive singulière : existence et unicité

5.3.1 Introduction

Soit σ une fonction réelle. Nous nous intéressons à l'équation différentielle stochastique :

$$\mathbf{F}_{r,l}(\sigma) : Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \bar{L}_t^r(Y) - \bar{L}_t^l(Y) \quad (5.2)$$

Remarque 5.3.1. Dans le cas où σ est une fonction Lipchitzienne, il est bien connu qu'il existe une unique solution à $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ (cf. [22] ou [29] pour le cas où la diffusion est réfléchie dans un domaine multi-dimensionnel). Notre but ici est de traiter le cas où σ est seulement supposée mesurable.

Définition 5.3.2. Un processus de diffusion Y à valeurs dans $([r, l], \mathcal{B}([r, l]))$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles, est appelé **solution faible** (ou **solution en loi**) de l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ si

- Y_0 est à valeurs dans $[r, l]$
- Y_t est à valeurs dans $[r, l]$ pour tout $t \geq 0$
- Y est une \mathcal{F}_t -semimartingale continue
- il existe un $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ mouvement brownien B tel que (5.2) soit vérifiée pour tout $t \geq 0$, \mathbb{P} -presque sûrement.

Définition 5.3.3. Nous dirons que la solution de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ est unique (en loi) si, lorsque Y^1 et Y^2 sont solutions de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ avec des conditions initiales respectives Y_0^1 et Y_0^2 possédant la même distribution initiale μ sur $[r, l]$, alors Y^1 et Y^2 possèdent la même loi image sur l'espace des fonctions continues de $[0, +\infty[$ dans $[r, l]$.

Pour une fonction réelle u arbitraire, nous introduisons les ensembles $I(u)$ et $Z(u)$ définis de la manière suivante :

$$I(u) \triangleq \left\{ x \in [r, l] : \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{u^2(x+y)} 1_{\{(x+y) \in [r, l]\}} dy = +\infty \quad \forall \epsilon > 0 \right\} \quad (5.3)$$

$$Z(u) \triangleq \{x \in [r, l] : u(x) = 0\} \quad (5.4)$$

Notre but est de démontrer le

Théorème 5.3.1. Soit σ une fonction réelle. Si $r \notin I(\sigma) \cup Z(\sigma)$, $l \notin I(\sigma) \cup Z(\sigma)$ alors $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ possède une unique solution faible si et seulement si

$$\boxed{I(\sigma) = Z(\sigma) \quad (\text{E} + \text{U})}$$

Remarque 5.3.4. La condition (E+U) est la condition d'Engelbert et Schmidt pour l'existence et l'unicité des diffusions non-réfléchies (cf. [48]).

5.3.2 Résultats préliminaires

Soit σ une fonction réelle fixée.

En premier lieu, remarquons que $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$ a une unique solution en loi. En effet, il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ qui vérifie les conditions habituelles et un \mathcal{F}_t -mouvement brownien $B = \{B_s : 0 \leq s < +\infty\}$ indépendant de la variable aléatoire Y_0 , tels qu'il existe une \mathcal{F}_t -semimartingale X vérifiant l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$:

$$\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1}) : \quad X_t = Y_0 + B_t + \overline{L}_t^r(X) - \overline{L}_t^l(X)$$

Cette dernière équation correspond au mouvement Brownien doublement réfléchi sur $[r, l]$: ainsi X est bien défini.

Par convention, pour une fonction f arbitraire continue à droite au point s , nous noterons $f(s+)$ la valeur de $\lim_{t \downarrow s, t \neq s} f(s)$.

On introduit pour $s \in [0, +\infty)$,

$$T_s \triangleq \int_0^{s+} \frac{du}{\sigma^2(X_u)} \quad (5.5)$$

Il est clair que le processus $(T_s)_{s \geq 0}$ est croissant, continu tant qu'il est fini, avec un saut possible à l'infini à un temps fini. De plus,

$$T_\infty \triangleq \lim_{s \rightarrow +\infty} T_s = +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.6)$$

On introduit le processus inverse continu à droite de T_s en posant pour $t \in [0, +\infty)$,

$$A_t = \inf \{s \geq 0; T_s > t\}; \quad A_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} A_t \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.7)$$

Ainsi, si $A_\infty < \infty$,

$$A_t = A_\infty \quad \forall t \geq T_{A_\infty^-}, \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.8)$$

De plus, pour tout $0 \leq t < T_{A_\infty^-}$

$$T_{A_t} = t, \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.9)$$

et pour tout $0 \leq s < A_\infty$,

$$A_{T_s} = s, \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.10)$$

Le processus $(A_t)_{t \geq 0}$ est continu à droite sur $[0, +\infty[$ et strictement croissant sur $[0, T_{A_\infty^-}[$.

Lemme 5.3.5. $I(\sigma)$ est un ensemble fermé de $[r, l]$.

Démonstration. Nous allons montrer que $I(\sigma)^c$ est un ensemble ouvert de $[r, l]$.

Soit $x_0 \in I(\sigma)^c$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que :

$$I(x_0, \epsilon) \triangleq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{\sigma^2(x_0 + y)} \mathbf{1}_{\{(x_0 + y) \in [r, l]\}} dy < +\infty \quad (5.11)$$

Soit $x \in [r, l]$ tel que $x \neq x_0$. En effectuant un changement de variable dans la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned} +\infty &> I(x_0, \epsilon) = \int_{-\epsilon + x_0 - x}^{\epsilon + x_0 - x} \frac{1}{\sigma^2(x + y)} \mathbf{1}_{\{(x + y) \in [r, l]\}} dy \\ &\geq \int_{-\min(\epsilon + x - x_0, \epsilon + x_0 - x)}^{\min(\epsilon + x - x_0, \epsilon + x_0 - x)} \frac{1}{\sigma^2(x + y)} \mathbf{1}_{\{(x + y) \in [r, l]\}} dy \end{aligned} \quad (5.12)$$

On en déduit que si x est tel que $0 < |x - x_0| < \epsilon$ alors $x \in I(\sigma)^c$.

Puisque x_0 a été choisi arbitrairement dans $I(\sigma)^c$, $I(\sigma)^c$ est un ensemble ouvert de $[r, l]$. \square

On considère le temps d'arrêt, $R \triangleq \inf \{s \geq 0; X_s \in I(\sigma)\}$. Pour pouvoir adapter les résultats d'EDS classiques aux EDS avec double réflexion $\mathbf{F}_{r,t}(\sigma)$, nous avons besoin d'établir le lien entre R et le processus A en surmontant quelques difficultés liées à la présence des temps locaux.

Proposition 5.3.6. *Si $r \notin I(\sigma)$ et $l \notin I(\sigma)$, alors*

$$R = A_\infty, \mathbb{P}\text{-ps}$$

*Démonstration.*¹

En vu de montrer tout d'abord que $R \leq A_\infty$, nous avons besoin d'un lemme qui est une conséquence directe de la formule des temps d'occupation.

Lemme 5.3.7. *Si f est une fonction mesurable positive, intégrable sur $[r, l]$, alors pour tout $x \in [r, l]$,*

$$\mathbb{P}_x \left[\int_0^t f(X_s) ds < +\infty; \forall t \in [0, +\infty) \right] = 1$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on constate que $\langle X \rangle_t = t$, on a donc

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X_s) ds &= \int_r^l f(y) L_t^y(X) dy \\ &\leq \max_{m_t \leq y \leq M_t} L_t^y(X) \int_r^l f(y) dy \quad \mathbb{P}_x\text{-presque sûrement} \end{aligned}$$

où on a posé $m_t \triangleq \min_{0 \leq s \leq t} X_s$ et $M_t \triangleq \max_{0 \leq s \leq t} X_s$. La famille des temps locaux $\{L_t^y(X) : y \in [r, l]\}$ est c-à-d-l-à-g avec des limites finies à gauche ([39] p.224). La dernière intégrale est finie par hypothèse. Cela achève la preuve du lemme. \square

Passons à la preuve de la proposition 5.3.6. Commençons par montrer que $R \leq A_\infty$.

On définit pour $n \geq 1$, la suite de temps d'arrêts

$$R_n = \inf \left\{ s \geq 0 : \rho(X_s, I(\sigma)) \leq \frac{1}{n} \right\} \quad (5.13)$$

où $\rho(x, I(\sigma)) = \inf \{|x - y| : y \in I(\sigma)\}$.

En utilisant le fait que $I(\sigma)$ est un ensemble fermé, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = R$, \mathbb{P} -ps. On pose

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} \sigma(x); & \rho(x, I(\sigma)) \geq \frac{1}{n} \\ 1; & \rho(x, I(\sigma)) < \frac{1}{n} \end{cases} \quad (5.14)$$

Grâce au lemme 5.3.7 nous savons que pour tout $s \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^{R_n \wedge s} \frac{du}{\sigma^2(X_u)} = \int_0^{R_n \wedge s} \frac{du}{\sigma_n^2(X_u)} \leq \int_0^s \frac{du}{\sigma_n^2(X_u)} < +\infty$$

En se plaçant sur l'ensemble $\{s < R\}$ et en laissant n tendre vers l'infini, on obtient

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_u)} < +\infty, \mathbb{P}\text{-ps}$$

et donc $T_s < +\infty$ sur $\{s < R\}$ ce qui veut dire que $R \leq A_\infty$ \mathbb{P} -ps.

Montrons maintenant que $R = A_\infty$. On observe d'abord que $I(\sigma) = \emptyset$ implique $R = +\infty$: dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer.

Si $I(\sigma) \neq \emptyset$ nous avons besoin du

¹La preuve de cette proposition est la partie délicate pour pouvoir adapter les résultats d'Engelbert et Schmidt.

Lemme 5.3.8. Soient $\{W, (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}\}$ un mouvement brownien standard, $f : [r, l] \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction mesurable et x un réel fixé dans $[r, l]$. On suppose qu'il existe un temps aléatoire τ vérifiant

$$\mathbb{P}[0 < \tau < +\infty] = 1, \quad \mathbb{P}\left[\int_0^\tau f(x + W_s) ds < +\infty\right] > 0 \quad (5.15)$$

Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\int_{-\epsilon}^\epsilon f(x + y) dy < +\infty \quad (5.16)$$

Démonstration. cf. [22] pp. 215-216. \square

Notons

$$\mathcal{L}_t \triangleq \overline{\mathcal{L}}_t^r(X) - \overline{\mathcal{L}}_t^r(X)$$

Nous avons

$$\int_0^{R+s} \frac{du}{\sigma^2(X_u)} \geq \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_{u+R})} = \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(Y_0 + B_R + \mathcal{L}_R + W_u + \mathcal{L}_{u+R} - \mathcal{L}_R)} \quad (5.17)$$

où $W_u = B_{R+u} - B_R$ est un mouvement brownien standard dans la filtration $(\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{R+s})_{s \geq 0}$. Remarquons que X_R est indépendant de W .

Puisque $r \notin I(\sigma)$, $l \notin I(\sigma)$, $X_R \in I(\sigma)$, et X est à trajectoires continues, on sait que

$$\xi \triangleq \inf \{s > 0 : X_{R+s} \in \{r\} \cup \{l\}\}$$

est un temps d'arrêt \mathbb{P} -presque sûrement **strictement positif** pour la filtration $(\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{R+s})_{s \geq 0}$. Ce temps d'arrêt est éventuellement infini \mathbb{P} -presque sûrement.

Par définition $\mathcal{L}_{R+u} - \mathcal{L}_R = 0$ pour $0 < u < \xi$. Le temps ξ s'écrit donc également

$$\xi = \inf \{s > 0 : X_R + W_s \in \{r\} \cup \{l\}\}$$

et ξ est un temps d'arrêt dans la filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0} \vee \mathfrak{J}(X_R)$.

Par définition, nous savons que $X_R \in I(\sigma)$. Par conséquent,

$$\int_{-\epsilon}^\epsilon \frac{1}{\sigma^2(X_R + y)} 1_{\{(X_R + y) \in [r, l]\}} dy = +\infty \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

La contraposée du lemme 5.3.8 implique que pour tout temps τ aléatoire tel que

$$\mathbb{P}[0 < \tau < +\infty] = 1$$

nous avons l'égalité

$$\mathbb{P}\left[\int_0^\tau \frac{ds}{\sigma^2(x + W_s)} 1_{\{(x + W_s) \in [r, l]\}} = +\infty\right] \Big|_{x=X_R} = 1 \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

En utilisant l'indépendance de X_R et de $\{W_t : t \geq 0\}$, cette dernière égalité implique que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^\tau \frac{ds}{\sigma^2(X_R + W_s)} 1_{\{(X_R + W_s) \in [r, l]\}} = +\infty \mid \mathfrak{J}(X_R)\right] = 1 \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

En passant à l'espérance de part et d'autre de cette dernière égalité, on trouve

$$\mathbb{P}\left[\int_0^\tau \frac{ds}{\sigma^2(X_R + W_s)} 1_{\{(X_R + W_s) \in [r, l]\}} = +\infty\right] = 1$$

En particulier, pour tout $s \in]0, \xi[$,

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_R + W_u)} = \int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_{R+u})} = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (5.18)$$

Plaçons-nous maintenant sur $\{\omega \in \Omega : A_\infty(\omega) \geq R(\omega)\}$ et raisonnons par l'absurde : supposons que

$$\mathbb{P}[A_\infty > R] > 0$$

D'après ce que nous venons de voir, sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega : A_\infty(\omega) > R(\omega)\}$ il est clair que pour tout $s \in]0, \xi \wedge (A_\infty - R)[$,

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_{R+u})} = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (5.19)$$

D'autre part, sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega : A_\infty(\omega) > R(\omega)\}$ la définition de A_∞ implique que pour tout s fixé dans $]0, A_\infty - R[$,

$$\int_0^s \frac{du}{\sigma^2(X_{R+u})} \leq \int_0^{R+s} \frac{du}{\sigma^2(X_u)} < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (5.20)$$

Donc pour tout $0 < s < \xi \wedge (A_\infty - R)$, on voit que la même intégrale est à la fois finie et infinie \mathbb{P} -presque sûrement sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega : A_\infty(\omega) > R(\omega)\}$. Cela n'est possible que si

$$\mathbb{P}[A_\infty > R] = 0$$

Ceci permet de conclure que $\{\omega \in \Omega : A_\infty(\omega) \geq R(\omega)\} = \{\omega \in \Omega : A_\infty(\omega) = R(\omega)\}$ à un ensemble négligeable prêt et la proposition est démontrée. \square

5.3.3 Existence en loi d'une solution

Les conditions d'existence d'une solution faible de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ sont données par le

Théorème 5.3.9. *Supposons que $r \notin I(\sigma)$ et $l \notin I(\sigma)$. Si*

$$I(\sigma) \subseteq Z(\sigma) \quad (\text{E}) \quad (5.21)$$

il existe une solution au sens faible à l'équation différentielle stochastique $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$.

Démonstration. ²

Soit X solution de l'EDS $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$. Nous noterons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité filtré sur lequel B a été construit. On vérifie que chaque A_t est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_\theta)_{\theta \geq 0}$.

On définit

$$N_t \triangleq B_{A_t}, \quad C_t \triangleq \mathcal{L}_{A_t}, \quad H_t \triangleq Y_0 + N_t + C_t = X_{A_t}, \quad \mathcal{G}_t \triangleq \mathcal{F}_{A_t}, \quad t \in [0, +\infty[\quad (5.22)$$

Puisque l'on a l'identité $A_{t \wedge T_s} = A_t \wedge s$, on vérifie facilement que $N \in \mathcal{M}^{c,loc}$. De plus,

$$\langle N \rangle_t = A_t \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad \mathbb{P}\text{-ps}$$

Montrons ensuite que le processus A vérifie l'identité

$$A_t = \int_0^t \sigma^2(H_v) dv \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.23)$$

²On retrouve les conditions d'Engelbert et schmidt : une fois la proposition 5.3.6 démontrée, la preuve ne présente pas de difficulté pour le cas réfléchi.

En effet, soit le temps aléatoire $\tilde{\tau} \triangleq \inf \{u \geq 0 : A_u = A_\infty\}$. Pour $t < \tilde{\tau}(\omega)$, (5.23) se vérifie aisément.

Si $\tilde{\tau}(\omega) = +\infty$, on a (5.23). Supposons que $\tilde{\tau}(\omega) < +\infty$. Pour $t \nearrow \tilde{\tau}(\omega)$, en utilisant le fait que $t \mapsto A_t(\omega)$ est une fonction continue sur $[0, \tilde{\tau}(\omega)[$, on obtient la validité de la formule (5.23) pour $t = \tilde{\tau}(\omega)$. Sur l'intervalle $[\tilde{\tau}(\omega), +\infty[$, grâce à la proposition 5.3.6, $A_t(\omega) = A_{\tilde{\tau}(\omega)}(\omega) = A_\infty(\omega) = R(\omega)$. Si $R(\omega) < +\infty$, alors en utilisant la condition (E),

$$H_{\tilde{\tau}(\omega)}(\omega) = Y_0(\omega) + B_{R(\omega)}(\omega) + \mathcal{L}_{R(\omega)}(\omega) \in I(\sigma) \subseteq Z(\sigma) \quad (5.24)$$

si bien que pour $\tilde{\tau}(\omega) \leq t < +\infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma^2(H_v) dv &= \int_0^R \sigma^2(H_v) dv + \int_R^t \sigma^2(H_v) dv \\ &= \int_0^{\tilde{\tau}} \sigma^2(H_v) dv + \int_{\tilde{\tau}}^t \sigma^2(H_R) dv \\ &= R + 0 \\ &= A_\infty = A_t \quad \mathbb{P} - \text{ps} \end{aligned}$$

Donc l'identité (5.23) est bien vérifiée pour tout $t \in [0, +\infty)$.

Le théorème de représentation des martingales nous permet d'affirmer qu'il existe un mouvement brownien $\{\tilde{W}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < +\infty\}$, un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}})$, et un processus $\rho = \{\rho_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ tels que :

$$N_t = \int_0^t \rho_v d\tilde{W}_v \quad \langle N \rangle_t = \int_0^t \rho_v^2 dv \quad (5.25)$$

En particulier, grâce à (5.23),

$$\tilde{\mathbb{P}}[\rho_t^2 = \sigma^2(H_t) \quad \text{pour presque tout } t \geq 0] = 1$$

On pose $W_t \triangleq \int_0^t \text{sgn}(\rho_v \sigma(H_v)) d\tilde{W}_v \quad t \in [0, +\infty)$. Grâce au théorème de Lévy, il est facile de voir que le processus W est un mouvement brownien et on peut donc écrire

$$H_t = Y_0 + N_t + C_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(H_v) dW_v + \mathcal{L}_{A_t} \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (5.26)$$

Au vu de l'égalité (5.26), il suffit pour que H soit solution faible de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ que le processus $C = \mathcal{L}_A$ puisse s'identifier au processus $\tilde{\mathcal{L}}$ défini par $\bar{L}^r(H) - \bar{L}^l(H)$: cela est une conséquence de l'exercice 1.27 p.235 de [40]. \square

Une question intéressante est de savoir si les conditions du théorème sont nécessaires pour l'existence d'une solution faible.

5.3.4 Conditions nécessaires pour l'existence en loi d'une solution dans le cas des D.R.

Proposition 5.3.10. *Supposons que $r \notin I(\sigma)$ et $l \notin I(\sigma)$. Alors la condition (E) est nécessaire pour l'existence d'une solution faible à l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$.*

Démonstration. ³

Supposons qu'il existe une solution Y à l'équation différentielle stochastique $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$.

³Le résultat de cette section reprend les arguments de la preuve d'Engelbert et Schmidt (cf. p.235-236 [22]) : il est nécessaire toutefois d'introduire le temps d'arrêt $\bar{\tau}$ pour éviter les problèmes liés à la présence de la double réflexion.

Posons M la martingale locale définie par

$$M_t \triangleq \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (5.27)$$

Il est clair que $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ et

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(Y_v) dv < +\infty \quad \forall t \in [0, +\infty), \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.28)$$

Grâce au théorème de représentation des martingales locales, il existe un mouvement brownien $\{W_s : 0 \leq s, +\infty\}$ tel que

$$M_t = W_{\langle M \rangle_t} \quad \forall t \in [0, +\infty), \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.29)$$

Comme dans l'introduction, on pose $T_s \triangleq \inf \{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\}$ et on a que $\langle M \rangle_\infty \wedge s = T_{\langle M \rangle_s}$.

On choisit une condition initiale $Y_0 = y_0$ dans

$$Z(\sigma)^c - (\{r\} \cup \{l\})$$

(où le complémentaire est à prendre dans l'ensemble $[r, l]$).

Notre objectif est de montrer que $y_0 \in I^c(\sigma)$ car alors on obtiendrait :

$$Z(\sigma)^c - (\{r\} \cup \{l\}) \subset I(\sigma)^c$$

et donc $I(\sigma) \subset Z(\sigma)$ puisque $(\{r\} \cup \{l\}) \cap I(\sigma) = \emptyset$.

Pour ce faire, en vertu du lemme 5.3.8, il suffit de vérifier l'existence d'un temps aléatoire τ tel que

$$\mathbb{P}[0 < \tau < +\infty] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{y_0} \left[\int_0^\tau \frac{1}{\sigma^2(W_v)} dv < +\infty \right] > 0$$

Il est clair que $\sigma(y_0) \neq 0$ et le processus Y n'est pas constant \mathbb{P} -ps.

D'autre part, puisque $r \notin I(\sigma)$ et $l \notin I(\sigma)$, il est clair que $r \neq y_0$ et $l \neq y_0$. Par conséquent

$$\bar{\tau} \triangleq \inf \{s \geq 0 : Y_s \in \{r\} \cup \{l\}\} \quad (5.30)$$

est \mathbb{P} -presque sûrement strictement positif.

Tout comme [22] p.334, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{s \wedge \langle M \rangle_{\bar{\tau}}} \frac{du}{\sigma^2(y_0 + W_u)} &= \int_0^{\langle M \rangle_{T_s} \wedge \langle M \rangle_{\bar{\tau}}} \frac{du}{\sigma^2(y_0 + W_u)} = \int_0^{T_s \wedge \bar{\tau}} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(y_0 + M_v)} \\ &= \int_0^{T_s \wedge \bar{\tau}} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(y_0 + M_v + \bar{L}_v^r(Y) - \bar{L}_v^l(Y))} \\ &= \int_0^{T_s \wedge \bar{\tau}} \frac{d\langle M \rangle_v}{1_{\{\sigma^2(Y_v) > 0\}} \sigma^2(Y_v)} \\ &= \int_0^{T_s \wedge \bar{\tau}} 1_{\{\sigma^2(Y_v) > 0\}} dv \\ &\leq T_s \wedge \bar{\tau} \end{aligned} \quad (5.31)$$

On en déduit donc que

$$\int_0^{s \wedge \langle M \rangle_{\bar{\tau}}} \frac{du}{\sigma^2(y_0 + W_u)} \leq T_s \wedge \bar{\tau} \quad (5.32)$$

Pour que (5.32) soit réellement utile par la suite, il convient de vérifier que

$$\mathbb{P}_{y_0} [\langle M \rangle_{\bar{\tau}} > 0] = 1 \quad (5.33)$$

Si $\langle M \rangle = 0$ sur $[0, \bar{\tau}]$ alors $M = 0$ sur $[0, \bar{\tau}]$ ce qui est impossible, puisque $M + y_0$ ne peut être solution de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ du fait que $y_0 \in Z(\sigma)^c$. Donc (5.33) est vraie.

On peut donc appliquer le lemme 5.3.8 avec le temps aléatoire D défini par

$$D \triangleq \begin{cases} s \wedge \langle M \rangle_{\bar{\tau}} & \text{si } T_s < +\infty \\ s & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.34)$$

et on obtient que $y_0 \in I(\sigma)^c$ grâce à l'inégalité (5.32) et au fait que $\mathbb{P}[T_s < +\infty] > 0$ parce que $y_0 \notin Z(\sigma)$. Cela achève la preuve du lemme. \square

5.3.5 Unicité

Remarque 5.3.11. ⁴ Dans le cas où $(\{r\} \cup \{l\}) \cap I(\sigma) = \emptyset$, la solution de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ construite au théorème 5.3.9 est non-constante jusqu'au premier temps d'atteinte $\tilde{\tau}$ de $I(\sigma)$:

$$\tilde{\tau} \triangleq \inf \{t \geq 0; Y_t \in I(\sigma)\} \quad (5.35)$$

En particulier, si $Y_0 = y_0 \in I(\sigma)^c$ alors la solution Y de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ construite au théorème 5.3.9 est non-constante \mathbb{P}_{y_0} -ps.

D'autre part, si $y_0 \in Z(\sigma) - (\{r\} \cup \{l\})$, alors $Y \equiv y_0$ est également une solution du problème. Ainsi il ne peut pas y avoir de résultat d'unicité en loi si $Z(\sigma) - (\{r\} \cup \{l\})$ est strictement plus grand que $I(\sigma)$.

Au vu du théorème 5.3.9 et de la remarque précédente, il suffit de montrer que $I(\sigma) \supseteq Z(\sigma) - (\{r\} \cup \{l\})$ est une condition suffisante pour l'unicité et puisque nos hypothèses sont telles que $(\{r\} \cup \{l\}) \cap Z(\sigma) = \emptyset$, cela revient à montrer que $I(\sigma) \supseteq Z(\sigma)$ est une condition suffisante pour l'unicité.

Par changement de temps, on va ramener $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ à $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$. L'unicité pour $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ découlera alors de l'unicité pour $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$.

Supposons que $I(\sigma) \supseteq Z(\sigma)$ et soit Y une solution de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ construite sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ avec Y_0 comme condition initiale. On définit alors M comme dans la formule (5.27) et

$$T_s \triangleq \inf \{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\} \quad (5.36)$$

T est un processus croissant, continu à droite et tel que

$$\{T_s < t\} = \{s < \langle M \rangle_t\} \quad (5.37)$$

On vérifie ainsi la validité des identités (5.28) et (5.29) où $\{W_t : t \geq 0\}$ désigne un $(\mathcal{F}_{T_s})_{s \geq 0}$ -mouvement brownien standard. On introduit le temps d'arrêt R défini par

$$R \triangleq \inf \left\{ s \geq 0 : Y_0 + W_s + \bar{L}_{T_s}^r(Y) - \bar{L}_{T_s}^l(Y) \in I(\sigma) \right\} \quad (5.38)$$

On introduit également τ défini grâce à la formule (5.35), à savoir

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : Y_t \in I(\sigma)\}$$

Soit

$$\tilde{X}_u \triangleq Y_{T_u}, \quad u \geq 0 \quad (5.39)$$

Supposons avoir montré que

$$\langle M \rangle_t = \inf \left\{ s \geq 0 : \int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(\tilde{X}_u)} = \int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} > t \right\} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.40)$$

⁴L'unicité est assez délicate à traiter, en particulier il nous faut vérifier la continuité de \tilde{X} défini en (5.39) : là encore l'hypothèse $(\{r\} \cup \{l\}) \cap I(\sigma) = \emptyset$ est déterminante.

Alors \tilde{X} vérifie $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$: en effet, pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_u &= Y_{T_u} = Y_0 + W_{\langle M \rangle_{T_u}} + \bar{L}_{T_u}^r(Y) - \bar{L}_{T_u}^l(Y) \\ &= Y_0 + W_t + \bar{L}_u^r(\tilde{X}) - \bar{L}_u^l(\tilde{X})\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve d'Engelbert et Schmidt (cf. [22] p.336), on démontre à partir de (5.40) que la solution Y que l'on s'est donnée à l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$ est en fait nécessairement construite à partir de \tilde{X} qui est solution de $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$: en effet, pour construire Y à partir de \tilde{X} , il suffit d'utiliser (5.40) puis de reprendre l'ensemble des arguments de la section 5.3.3 en remplaçant partout A par $\langle M \rangle$ et X par \tilde{X} . L'unicité en loi des solutions de $\mathbf{F}_{r,l}(\mathbf{1})$ implique alors l'unicité en loi des solutions de $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma)$.

Notre but est donc de vérifier (5.40). En passant à l'inverse, on voit que (5.40) est équivalent à

$$\int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} = T_s \quad \forall s \in [0, +\infty[, \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.41)$$

Au vu des définitions, montrer (5.41) est équivalent à montrer que

$$\int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} = T_s \quad \forall s \in [0, \langle M \rangle_\infty[, \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.42)$$

Or, au vu des résultats de [22] problème 4.5 p.174, il est clair que

$$\begin{aligned}\int_0^{s \wedge \langle M \rangle_\infty} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} &= \int_0^{\langle M \rangle_{T_s}} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} = \int_0^{T_s} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(Y_v)} \\ &= \int_0^{T_s} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(Y_v)} \\ &= \int_0^{T_s} 1_{\{\sigma^2(Y_v) > 0\}} \frac{d\langle M \rangle_v}{\sigma^2(Y_v)} \\ &= \int_0^{T_s} 1_{\{\sigma^2(Y_v) > 0\}} dv \\ &\leq T_s\end{aligned} \quad (5.43)$$

et pour $s \leq R \wedge \langle M \rangle_\infty$,

$$\int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} = T_s \quad \mathbb{P}\text{-ps}$$

Ainsi, pour obtenir (5.41), il suffit de montrer que

$$R = \langle M \rangle_\infty \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.44)$$

En fait, nous allons vérifier que

$$\begin{cases} R \geq \langle M \rangle_\infty & \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \\ R = \langle M \rangle_\tau & \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \end{cases} \quad (5.45)$$

Montrons d'abord que

$$\langle M \rangle_\tau = R \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (5.46)$$

Au vu des hypothèses et de la formule (5.28), il est clair que $t \mapsto \langle M \rangle_t$ est continu et \mathbb{P} -ps strictement croissant sur $[0, \tau]$: en particulier nous avons

$$R \geq \langle M \rangle_\tau \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement} \quad (5.47)$$

Au vu de (5.47), il suffit de montrer que

$$Y_0 + W_{\langle M \rangle_\tau} + \bar{L}_{T_{\langle M \rangle_\tau}}^r(Y) - \bar{L}_{T_{\langle M \rangle_\tau}}^l(Y) \in I(\sigma)$$

pour prouver (5.46).

Or, puisque T est un processus continu à droite et que $\langle M \rangle$ est un processus continu, $T_{\langle M \rangle}$ est un processus continu à droite sur $[0, \tau]$. Posons

$$S \triangleq \sup \{v \geq \tau : \langle M \rangle_v = \langle M \rangle_\tau\} = T_{\langle M \rangle_\tau}$$

où la dernière égalité provient du fait que $(T_s)_{s \geq 0}$ ait été choisi comme l'inverse à droite de $(\langle M \rangle_s)_{s \geq 0}$. Notons que S est éventuellement égal à τ et dans ce cas $T_{\langle M \rangle_\tau} = \tau$: l'identité (5.46) que nous voulons démontrer se vérifie alors facilement.

Nous nous plaçons donc dans le cas où $S > \tau$. Ainsi, $t \mapsto \langle Y \rangle_t$ est \mathbb{P} -presque sûrement constante sur $[\tau, S[$. Les hypothèses impliquent que $Y_\tau \neq r$ et $Y_\tau \neq l$. La formule des temps d'occupation nous assure que $s \mapsto \bar{L}_s^r(Y)$ et $s \mapsto \bar{L}_s^l(Y)$ sont des fonctions \mathbb{P} -presque sûrement constantes sur $[\tau, S[$ et par continuité elles sont également \mathbb{P} -presque sûrement constantes sur $[\tau, S]$.

Donc

$$Y_0 + W_{\langle M \rangle_\tau} + \bar{L}_{T_{\langle M \rangle_\tau}}^r(Y) - \bar{L}_{T_{\langle M \rangle_\tau}}^l(Y) = Y_0 + W_{\langle M \rangle_\tau} + \bar{L}_\tau^r(Y) - \bar{L}_\tau^l(Y) = Y_\tau$$

et par définition de τ et du fait que $I(\sigma)$ est un ensemble fermé nous pouvons affirmer que $Y_\tau \in I(\sigma)$. Ainsi (5.46) est démontrée.

Enfin, montrons que

$$R \geq \langle M \rangle_\infty \quad (\Leftrightarrow T_{\langle M \rangle_\infty} = \tau) \quad (5.48)$$

On fait le raisonnement suivant : sur l'ensemble $\{R < \langle M \rangle_\infty\}$ les définitions impliquent que $T_R < +\infty$. En laissant $s \searrow R$ dans (5.43), on obtient que sur $\{R < \langle M \rangle_\infty\}$

$$\int_0^{R^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} \leq T_R < +\infty$$

On ne peut aller plus loin dans l'adaptation de la preuve pp.335-336 dans [22] : cependant, si l'on continue de suivre les idées d'Engelbert et Schmidt et si l'on arrive à montrer que

$$\int_0^{R^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.49)$$

alors, tout comme dans la section antérieure, sur l'ensemble $\{R < \langle M \rangle_\infty\}$ la même intégrale sera \mathbb{P} -presque sûrement finie et \mathbb{P} -presque sûrement infinie. Cela imposera nécessairement que $\mathbb{P}[R < \langle M \rangle_\infty] = 0$ et (5.48) sera démontrée.

Or, on remarque que la proposition 5.3.6 fournit un résultat très semblable à ce que nous voulons. Plus précisément, posons $\tilde{X}_u = Y_{T_u}$. Supposons avoir démontré que

1. \tilde{X} est un processus continu

2. pour tout $t \geq 0$,

$$\bar{L}_{T_t}^r(Y) - \bar{L}_{T_t}^l(Y) = \bar{L}_t^r(\tilde{X}) - \bar{L}_t^l(\tilde{X}) \quad (5.50)$$

En reprenant les arguments de la démonstration de la proposition 5.3.6 et en remplaçant partout A par $\langle M \rangle$ nous voyons que si les points 1 et 2 sont vérifiés, (5.49) sera démontrée.

La formule (5.50) est une conséquence de l'exercice (1.27) p.235 dans [40]. Le point 2 se vérifie donc immédiatement. Passons à la démonstration du point 1 :

Lemme 5.3.12. *Le processus \tilde{X} défini par*

$$\tilde{X}_u = Y_{T_u} \quad u \geq 0 \quad (5.51)$$

est continu sur $[0, \langle M \rangle_\infty[$, \mathbb{P} -presque sûrement.

Démonstration. Soit $a \in [0, \langle M \rangle_\infty[$ un instant de saut du processus T . Si $t \mapsto \bar{L}_t^r(Y) - \bar{L}_t^l(Y)$ est \mathbb{P} -ps constant sur $]T(a^-), T(a)[$, alors le lemme est démontré. Il suffit donc de montrer que $Y_t \notin (\{r\} \cup \{l\})$ sur l'intervalle ouvert $]T(a^-), T(a)[$.

Or, $T(a^-) \neq T(a)$ veut dire que $t \mapsto \langle M \rangle_t$ est une fonction constante sur $]T(a^-), T(a)[$, ce qui, au vu de la formule (5.28), implique que presque partout sur $]T(a^-), T(a)[$, $\sigma^2(Y_t)$ est identiquement nul \mathbb{P} -presque sûrement.

Donc, en utilisant les hypothèses du théorème, $Y_v \in Z(\sigma) \subseteq I(\sigma)$ presque partout sur $]T(a^-), T(a)[$, \mathbb{P} -presque sûrement. Puisque $I(\sigma)$ est fermé et que Y est un processus continu, on en déduit que $Y_t \in I(\sigma)$ partout sur $]T(a^-), T(a)[$ et donc $Y_t \notin (\{r\} \cup \{l\})$ sur $]T(a^-), T(a)[$ car par hypothèse $(\{r\} \cup \{l\}) \cap Z(\sigma) = \emptyset$. Cela achève la preuve du lemme. \square

Ainsi, d'après ce que nous avons vu (5.49) puis (5.48) sont démontrées.

Cela achève la preuve du théorème 5.3.1.

5.4 Le cas des D.R.D.S.

Dans cette section nous nous intéressons à l'équation différentielle stochastique réfléchie à dérive singulière :

$$\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu) : Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \int_r^l L_t^y(Y) \nu(dy) + \bar{L}_t^r(Y) - \bar{L}_t^l(Y) \quad (5.52)$$

où la famille $\{L_t^y(Y) : y \in [r, l]; t \geq 0\}$ est la famille des temps locaux à droite de la semimartingale Y et $\nu(dx)$ est une mesure sur $[r, l]$ supposée telle que

$$-1 < \nu(\{x\}) \quad \forall x \in [r, l] \quad \text{et de plus } \nu(\{r\}) = \nu(\{l\}) = 0 \quad (5.53)$$

La mesure $\nu(dx)$ peut se prolonger sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en posant

$$\nu([-\infty, d]) = 0 \quad \forall d < r; \quad \nu([d, +\infty]) = 0 \quad \forall d > l$$

Nous associons à la mesure $\nu(dx)$ (vue comme mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) une fonction g définie comme l'unique solution de l'équation :

$$\begin{cases} g(x) = 1 - \int_0^x g(y) \nu(dy) & x \geq 0 \\ g(x) = 1 + \int_x^0 g(y) \nu(dy) & x < 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

D'après [48], g est une fonction localement à variations bornées et strictement positive. Soit

$$G(x) = \int_0^x g(y) dy \quad x \in \bar{\mathbb{R}} \quad (5.55)$$

G est strictement croissante et absolument continue. Soit H l'inverse de G qui est définie sur $]G(-\infty), G(+\infty)[$. H est également strictement positive et continue. Tout comme dans [48], nous étendons les fonctions H , g et le coefficient de diffusion σ sur tout $\bar{\mathbb{R}}$ en posant :

$$H(x) = -\infty \quad \text{pour } x \in [-\infty, G(-\infty)], \quad H(x) = +\infty \quad \text{pour } x \in [G(+\infty), +\infty]$$

et

$$g(-\infty) = g(+\infty) = \sigma(-\infty) = \sigma(+\infty) = 0$$

On a la

Proposition 5.4.1. *Le processus X est solution faible de l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$ si et seulement si le processus $G(X)$ est solution faible de l'équation sans dérive $\mathbf{F}_{G(r), G(l)}((g \circ H)(\sigma \circ H))$.*

Démonstration.

étape 1 : Montrons tout d'abord que si le processus X est solution de l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$ alors le processus $G(X)$ est solution de l'équation sans temps local $\mathbf{F}_{G(r),G(l)}(\sigma \circ H)$.

Appliquons la formule d'Itô-Tanaka à la fonction G et au processus X . Pour tout $t \geq 0$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
G(X_t) &= G(X_0) + \int_0^t g(X_s) \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t \frac{1}{2} g(X_s) d \left(\int_r^l L_s^y(X) \nu(dy) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^y(X) g(y) \nu(dy) + \int_0^t g(X_s) d\bar{L}_s^r(X) - \int_0^t g(X_s) d\bar{L}_s^l(X) \\
&= G(X_0) + \int_0^t g(X_s) \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t \frac{1}{2} g(X_s) d \left(\int_r^l L_s^y(X) \nu(dy) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_r^l L_t^y(X) g(y) \nu(dy) + \int_0^t g(r) d\bar{L}_s^r(X) - \int_0^t g(l) d\bar{L}_s^l(X) \\
&= G(X_0) + \int_0^t g(X_s) \sigma(X_s) dB_s + \int_r^l \frac{1}{2} \int_0^t g(X_s) dL_s^y(X) \nu(dy) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_r^l L_t^y(X) g(y) \nu(dy) + g(r) \bar{L}_t^r(X) - g(l) \bar{L}_t^l(X) \\
&= G(X_0) + \int_0^t g(X_s) \sigma(X_s) dB_s + g(r) \bar{L}_t^r(X) - g(l) \bar{L}_t^l(X)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $X = H \circ G(X)$, nous trouvons que pour tout $t \geq 0$:

$$G(X_t) = G(X_0) + \int_0^t g \circ H \circ G(X_s) \sigma \circ H \circ G(X_s) dB_s + g(r) \bar{L}_t^r(X) - g(l) \bar{L}_t^l(X)$$

Or,

$$g(r) \bar{L}_t^r(X) = \frac{1}{2} g(r) L_t^r(H \circ G(X)) = \frac{1}{2} g(r) H'_+ \circ G(r) L_t^{G(r)}(G(X)) = \bar{L}_t^{G(r)}(G(X))$$

et

$$g(l) \bar{L}_t^l(X) = \frac{1}{2} g(l) L_t^l(H \circ G(X)) = \frac{1}{2} g(l) H'_- \circ G(l) L_t^{G(l)-}(G(X)) = \bar{L}_t^{G(l)}(G(X))$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$

$$G(X_t) = G(X_0) + \int_0^t g \circ H \circ G(X_s) \sigma \circ H \circ G(X_s) dB_s + \bar{L}_t^{G(r)}(G(X)) - \bar{L}_t^{G(l)}(G(X))$$

Ainsi $G(X)$ vérifie l'équation $\mathbf{F}_{G(r),G(l)}((g \circ H)(\sigma \circ H))$ pour $t \geq 0$.

étape 2 :

Montrons maintenant que si le processus Y est solution de l'équation $\mathbf{F}_{G(r),G(l)}((g \circ H)(\sigma \circ H))$, alors le processus $H(Y)$ est solution faible de l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$.

Appliquons la formule d'Itô-Tanaka à la fonction H et au processus Y : pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
H(Y_t) &= H(Y_0) + \int_0^t (g \circ H)^{-1}(Y_s) (g \circ H)(Y_s) (\sigma \circ H)(Y_s) dB_s + C_t \\
&\quad + (g \circ H)^{-1}(r) \bar{L}_t^{G(r)}(Y) - (g \circ H)^{-1}(l) \bar{L}_t^{G(l)}(Y) \\
&= H(Y_0) + \int_0^t (\sigma \circ H)(Y_s) dB_s + C_t + \bar{L}_t^r(H(Y)) - \bar{L}_t^l(H(Y)) \tag{5.56}
\end{aligned}$$

où $\{C_t : t \geq 0\}$ est un certain processus à variations finies.

Nous allons identifier le processus C en appliquant une nouvelle fois la formule d'Itô-Tanaka au processus $\{H(Y_t) : t \geq 0\}$ et à la fonction G . Le résultat est connu car $G \circ H(Y) = Y$: il

nous sera alors possible d'identifier le processus C en utilisant le fait que Y vérifie l'équation $\mathbf{F}_{G(r),G(l)}((g \circ H)(\sigma \circ H))$. Plus précisément, grâce à l'équation vérifiée par la fonction g ,

$$\begin{aligned} Y_t = G \circ H(Y_t) &= Y_0 + \int_0^t (g \circ H)(Y_s)(\sigma \circ H)(Y_s)dB_s \\ &\quad + \int_0^t (g \circ H)(Y_s)dC_s - \int_{\mathbb{R}} g(y)L_t^y \nu(dy) + \bar{L}_t^{G(r)}(Y) - \bar{L}_t^{G(l)}(Y) \end{aligned}$$

Puisque Y est solution de $\mathbf{F}_{G(r),G(l)}((g \circ H)(\sigma \circ H))$, cette égalité implique que :

$$\int_0^t g \circ H(Y_s)dC_s = \int_{\mathbb{R}} g(y)L_t^y[H(Y)]\nu(dy) = \int_0^t g \circ H(Y_s) \int_r^l dL_s^y[H(Y)]\nu(dy) \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

Par conséquent,

$$C_t = \int_r^l L_t^y[H(Y)]\nu(dy) \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

Ainsi, après avoir posé $\{X_t \triangleq H(Y_t) : t \geq 0\}$, l'identité (5.56) devient

$$X_t = H(Y_0) + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_r^l L_t^y(X)\nu(dy) + \bar{L}_t^r(X) - \bar{L}_t^l(X) \quad (5.57)$$

et donc X est bien solution de l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$. La proposition est ainsi démontrée. \square

Nous pouvons alors conclure exactement comme pour le théorème 4 p.152 dans [48] et énoncer le

Théorème 5.4.1. *Soit σ une fonction réelle. Si $r \notin I(\sigma) \cup Z(\sigma)$, $l \notin I(\sigma) \cup Z(\sigma)$, alors il existe une unique solution faible à l'équation $\mathbf{F}_{r,l}(\sigma, \nu)$ si et seulement si*

$$\boxed{I(\sigma) = Z(\sigma) \quad (\mathbf{E} + \mathbf{U})}$$

Démonstration. La proposition 5.4.1 nous permet de nous ramener à l'étude des D.R.

Au vu du théorème 5.3.1, il suffit de montrer que

$$I(\sigma) = I((g \circ H)(\sigma \circ H)) \quad \text{et} \quad Z(\sigma) = Z((g \circ H)(\sigma \circ H))$$

Ces égalités sont démontrées dans [48] p.152. \square

5.5 Le cas particulier d'une D.D.S. « discrète » : liens avec le mouvement brownien asymétrique

Nous nous plaçons maintenant dans le cas d'une mesure $\overline{\nu}(dx)$ discrète.

$$\overline{\nu}(dx) \triangleq \sum_{i \in 1 \dots N} \alpha_i \delta_{\{a_i\}}(dx) \quad (5.58)$$

où N désigne un entier fixé et $\{a_1 < a_2 < \dots < a_N\}$ est une collection finie de nombres réels ordonnés. De plus, nous supposons que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad -1 < \alpha_i < 1$$

Pour une semimartingale $\{X_t : t \geq 0\}$ continue définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous introduisons $\{\overline{L}_t^a(X) : t \geq 0\}$ le temps local symétrique de la semimartingale X (voir [40] pour la définition du temps local symétrique).

5.5.1 L'équation différentielle stochastique avec temps local

Soit σ une fonction réelle. Posons les vecteurs $\alpha \triangleq (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ et $a \triangleq (a_1, \dots, a_N)$.

Nous nous intéressons à l'équation différentielle stochastique $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$:

$$\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma) : \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) B_s + \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \overline{L}_t^{a_i}(Y) \quad (5.59)$$

Y_0 désigne ici une variable aléatoire de distribution μ indépendante du mouvement brownien B . Nous supposons que μ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} .

Définition 5.5.1. *Un processus de diffusion Y à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles, est appelé **solution faible** (ou **solution en loi**) de l'équation $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ si*

- Y_0 est à valeurs réelles
- Y_t est à valeurs dans \mathbb{R} pour tout $t \geq 0$
- Y est une \mathcal{F}_t -semimartingale continue
- il existe un $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ mouvement brownien B tel que (5.59) soit vérifiée pour tout $t \geq 0$, \mathbb{P} -presque sûrement.

Définition 5.5.2. *Nous dirons que la solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ est unique (en loi) si, lorsque Y^1 et Y^2 sont solutions de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ avec des conditions initiales respectives Y_0^1 et Y_0^2 possédant la même distributon initiale μ sur \mathbb{R} , alors Y^1 et Y^2 possèdent la même loi image sur l'espace des fonctions continues de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Remarque 5.5.3. - Soit $\{L_t^a(Y) : t \geq 0\}$ le temps local à droite de la semimartingale Y . $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ est équivalent à

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) B_s + \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\alpha_i}{1 + \alpha_i} L_t^{a_i}(Y) \quad (5.60)$$

Par conséquent, grâce au théorème 4 dans [48] p.152, nous savons que $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ a une unique solution en loi pourvu que $I(\sigma) = Z(\sigma)$.

- dans toute la suite, les solutions des équations de type $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ seront appelées des mouvements browniens asymétriques.
- Si (5.59) est vérifiée, alors contrairement à la situation des sections 5.3 et 5.4, le processus Y n'est pas réfléchi.

Posons, avec les notations de la section précédente, les ensembles

$$I(\sigma) \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{-x}^x \frac{1}{\sigma^2(x+y)} dy = +\infty \quad \forall \epsilon > 0 \right\}$$

et

$$Z(\sigma) \triangleq \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = 0\}$$

Nous noterons **H1** et **H2** les hypothèses :

H1 : $I(\sigma) = Z(\sigma)$ (hypothèse correspondant à celle anciennement notée (E+U))

H2 : $\forall i \in \{1, \dots, N\}, a_i \notin I(\sigma) \cup Z(\sigma)$

Le résultat principal de cette section est le

Théorème 5.5.1. *Supposons que les hypothèses **H1** et **H2** sont vérifiées.*

Soit X une solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ construite sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Il existe un processus de changement de temps $\{T_t : t \geq 0\}$ croissant et \mathcal{F}_t -adapté, tel que $\{X_{T_t} : t \geq 0\}$ soit une solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{T_t})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Réciproquement, si Y est solution faible de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, il existe une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et X solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ tels qu'il existe un processus de changement de temps $\{T_t : t \geq 0\}$ croissant et \mathcal{F}_t -adapté, tel que

$$X_{T_t} = Y_t \quad \mathbb{P} - \text{ps}, \quad \forall t \geq 0$$

5.5.2 Résultats préliminaires

Soit σ une fonction réelle fixée.

Nous savons, grâce au théorème 4 dans [48] p.152 que $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ a une unique solution en loi. Par conséquent, il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et un \mathcal{F}_t -mouvement brownien $B = \{B_s : 0 \leq s < +\infty\}$ indépendant de la variable aléatoire Y_0 , tels qu'il existe une \mathcal{F}_t -semimartingale X vérifiant l'équation $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$:

$$\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1}) : \quad X_t = Y_0 + B_t + \sum_{1 \leq i \leq N} \alpha_i \bar{L}_t^{a_i}(X) \left(= Y_0 + B_t + \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\alpha_i}{1 + \alpha_i} L_t^{a_i}(X) \right)$$

On introduit pour $s \in [0, +\infty)$,

$$T_s \triangleq \int_0^{s+} \frac{du}{\sigma^2(X_u)} \quad (5.61)$$

Bien évidemment, toutes les égalités (5.6)(5.7)(5.8)(5.9) et (5.10) sont satisfaites dans ce cas.

Lemme 5.5.4. *$I(\sigma)$ est un ensemble fermé de \mathbb{R} .*

Démonstration. Voir la démonstration du lemme 5.3.5. □

On considère le temps d'arrêt, $R \triangleq \inf \{s \geq 0; X_s \in I(\sigma)\}$. Nous avons l'analogie de la proposition 5.3.6.

Proposition 5.5.5. *Supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $a_i \notin I(\sigma)$. Alors,*

$$R = A_\infty, \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

Démonstration. En vu de montrer tout d'abord que $R \leq A_\infty$, nous avons besoin du

Lemme 5.5.6. *Si f est une fonction mesurable positive, intégrable sur \mathbb{R} , alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}_x \left[\int_0^t f(X_s) ds < +\infty; \forall t \in [0, +\infty) \right] = 1$$

Démonstration. Il suffit de reprendre les arguments du lemme 5.3.7 et de remplacer l'intervalle $[r, l]$ qui intervient dans les bornes d'intégration par la droite réelle \mathbb{R} . \square

Grâce au lemme 5.5.6, la preuve de l'inégalité $R \leq A_\infty$ est alors identique à celle développée page 60.

Vérifions que $R \geq A_\infty$. On observe d'abord que $I(\sigma) = \emptyset$ implique $R = +\infty$ et dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer.

Si $I(\sigma) \neq \emptyset$ nous pouvons procéder comme dans la preuve de la proposition 5.3.6 avec ξ défini comme suit :

$$\xi \triangleq \inf \{s > 0 : X_{R+s} \in \cup_{i=1}^N \{a_i\}\}$$

Le fait d'avoir supposé que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ $a_i \notin I(\sigma)$ nous permet alors d'utiliser exactement les mêmes arguments que dans démonstration de la proposition 5.3.6. La proposition 5.5.5 est ainsi démontrée. \square

5.5.3 Changement de temps pour la construction de solutions à $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ à partir des solutions de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$

Théorème 5.5.7. *Supposons que :*

$$I(\sigma) \subseteq Z(\sigma) \quad (\text{E}) \tag{5.62}$$

Soit X une solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ construite sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Il existe un processus de changement de temps $\{T_t : t \geq 0\}$ croissant et \mathcal{F}_t -adapté, tel que $\{X_{T_t} : t \geq 0\}$ est solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{T_t})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Démonstration. Supposons que la condition (E) est vérifiée. On pose $\{Y_0 + B_s : 0 \leq s < \infty\}$ le mouvement brownien avec distribution initiale Y_0 construit de telle sorte que nous puissions exhiber un processus X solution de l'EDS $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$. Nous noterons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité filtré sur lequel B a été construit. D'après les résultats de la section précédente, on vérifie que chaque A_t est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_\theta)_{\theta \geq 0}$.

On définit

$$N_t \triangleq B_{A_t}, \quad C_t \triangleq \mathcal{L}_{A_t}(X), \quad H_t \triangleq Y_0 + N_t + C_t = X_{A_t}, \quad G_t \triangleq \mathcal{F}_{A_t}, \quad t \in [0, +\infty[\tag{5.63}$$

On vérifie facilement que $N \in \mathcal{M}^{c,loc}$. De plus,

$$\langle N \rangle_t = A_t \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad \mathbb{P}\text{-ps}$$

Grâce à la proposition 5.5.5, on montre, en utilisant les mêmes arguments que pour le théorème 5.3.9, que le processus A vérifie l'identité

$$A_t = \int_0^t \sigma^2(H_v) dv \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad \mathbb{P}\text{-ps} \tag{5.64}$$

Le théorème de représentation des martingales nous permet alors d'affirmer qu'il existe un mouvement brownien $\{\tilde{W}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < +\infty\}$, un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}})$, et un processus $\rho = \{\rho_t, \tilde{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ tels que :

$$N_t = \int_0^t \rho_v d\tilde{W}_v \quad \langle N \rangle_t = \int_0^t \rho_v^2 dv \tag{5.65}$$

En particulier,

$$\tilde{\mathbb{P}}[\rho_t^2 = \sigma^2(H_t) \text{ pour presque tout } t \geq 0] = 1$$

On pose $W_t \triangleq \int_0^t \text{sgn}(\rho_v \sigma(H_v)) d\tilde{W}_v \quad t \in [0, +\infty)$. Grâce au théorème de Lévy, il est facile de voir que le processus W est un mouvement brownien et on peut donc écrire

$$H_t = Y_0 + N_t + C_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(H_v) dW_v + \mathcal{L}_{A_t}(X) \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (5.66)$$

Au vu de l'égalité (5.66), pour que H soit solution faible de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$, il suffit que le processus $C = \mathcal{L}_A(X)$ puisse s'identifier au processus $\sum_{i \in \{1, \dots, N\}} \alpha_i L_t^{\alpha_i}(H)$. Il suffit pour cela d'appliquer le résultat de l'exercice (1.27) p.235 de [40]. \square

5.5.4 Unicité sous l'hypothèse H2 pour les D.D.S. dans le cas d'une mesure discrète : fin de la démonstration du théorème 5.5.1

Nous commençons par une remarque qui est l'analogie de la remarque 5.6 p.334 dans [22].

Remarque 5.5.8. Dans le cas où $\bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \{a_i\} \cap I(\sigma) = \emptyset$, la solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ construite au théorème 5.5.7 est non-constante jusqu'au premier temps d'atteinte $\tilde{\tau}$ de $I(\sigma)$:

$$\tilde{\tau} \triangleq \inf \{t \geq 0; Y_t \in I(\sigma)\} \quad (5.67)$$

En particulier, si $Y_0 = y_0 \in I(\sigma)^c$ alors la solution Y de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ construite au théorème 5.5.7 est non-constante \mathbb{P}_{y_0} -ps.

D'autre part, si $y_0 \in Z(\sigma) - \bigcup_{i \in \{1, \dots, N\}} \{a_i\}$, alors $Y \equiv y_0$ est également une solution du problème. Ainsi il ne peut pas y avoir de résultat d'unicité en loi si $Z(\sigma)$ est strictement plus grand que $I(\sigma)$.

On conclut cette étude en démontrant que, pourvu que les hypothèses **H1** et **H2** soient vérifiées, toute solution à $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ est nécessairement construite à partir d'une solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ et d'un changement de temps :

Démonstration. Supposons que $I(\sigma) \supseteq Z(\sigma)$ et soit Y une solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ avec Y_0 comme condition initiale.

Posons M la martingale locale définie par

$$M_t \triangleq \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (5.68)$$

Il est clair que $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^{c, loc}$ et

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(Y_v) dv < +\infty \quad \forall t \in [0, +\infty), \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.69)$$

Grâce au théorème de représentation des martingales locales, il existe un mouvement brownien $\{W_s : 0 \leq s, +\infty\}$ tel que

$$M_t = W_{\langle M \rangle_t} \quad \forall t \in [0, +\infty), \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.70)$$

$$T_s \triangleq \inf \{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > s\} \quad (5.71)$$

T est un processus croissant, continu à droite et tel que

$$\{T_s < t\} = \{s < \langle M \rangle_t\} \quad (5.72)$$

Soit le temps d'arrêt R défini par

$$R \triangleq \inf \{s \geq 0 : Y_0 + W_s + \mathcal{L}_{T_s}(Y) \in I(\sigma)\} \quad (5.73)$$

On introduit également τ grâce à la formule (5.67). Soit

$$\tilde{X}_u = Y_{T_u}, \quad u \geq 0$$

Supposons avoir démontré que

$$\langle M \rangle_t = \inf \left\{ s \geq 0 : \int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(Y_{T_u})} = \int_0^{s^+} \frac{du}{\sigma^2(\tilde{X}_u)} > t \right\} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \mathbb{P}\text{-ps} \quad (5.74)$$

Alors, il est facile de constater que \tilde{X} vérifie $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve d'Engelbert et Schmidt (cf. [22] p.336), on démontre à partir de (5.74) que la solution Y que l'on s'est donnée à l'équation $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$ est en fait nécessairement construite à partir de \tilde{X} qui est solution de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$: en effet, pour construire Y à partir de \tilde{X} , il suffit de reprendre l'ensemble des arguments de la section 5.5.3 en remplaçant partout A par $\langle M \rangle$ et X par \tilde{X} , et en utilisant (5.74). L'unicité en loi des solutions de $\mathbf{F}_a^\alpha(\mathbf{1})$ implique alors l'unicité en loi des solutions de $\mathbf{F}_a^\alpha(\sigma)$.

Notre but est donc de vérifier (5.74). Pour cela il suffit de réécrire exactement la même démonstration que celle développée dans la section 5.3.5 en utilisant les hypothèses **H1** et **H2**. Le théorème 5.5.1 est ainsi démontré. □

5.6 Statistique des processus asymétriques

Cette section est la présentation d'un travail réalisé en commun avec Olivier Bardou. Je tiens à remercier Olivier pour son dynamisme et sa profonde gentillesse.

5.6.1 Introduction

The skew Brownian motion arises in the modelling of discontinuous physical systems. Geophysical phenomena, nuclear reactors, polymers, composite structures are examples of such systems. However, if the estimation of Feller diffusion processes has been extensively studied, so far, no result is available for the estimation of skewed processes. This article is a first attempt to calibrate the skew coefficient of such processes. First, let us make precise what we call skew processes and skew coefficient.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ be a filtered probability space and let B be a \mathbb{F} -brownian motion. Our main tool is a continuous stochastic process reflected over an interval $[a, b]$ with $a < \gamma < b$. Such a process X^σ can be defined as the unique weak solution of the following stochastic differential equation :

$$X_t^\sigma = x + \int_0^t \sigma(X_s^\sigma) dB_s + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(X^\sigma) - K_t^{[a, b]}(X^\sigma), \quad x \in [a, b], \quad \alpha \in]0, 1[\quad (5.75)$$

where $K^{[a, b]}(X^\sigma) := L^a(X^\sigma) - L^b(X^\sigma)$ and the process $L^\gamma(X^\sigma)$ is the symmetric local time of the process X^σ (for more references about local times, see [40]). The function σ is supposed to be Lipschitz and bounded away from zero. This function is supposed to be known.

The coefficient α is called the **skew coefficient** and our main interest is in the estimation of this parameter from a single observation of the process X^σ in the long run. Thus, for the remainder of this paper, we shall consider the statistical model

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, (X_t^\sigma), C([a, b]), \mathcal{B}(C([a, b])), \mathbb{P}_\alpha, \alpha \in]0, 1[)$$

where \mathbb{P}_α is the law of the process X given α .

The existence of weak solutions of the SDE (5.75) without reflection ($K^{[a, b]}(X^\sigma) \equiv 0$) is known from [15]. As our estimation procedure relies on the ergodicity of the process X^σ , we introduce a reflection over a bounded interval by the mean of the process $K^{[a, b]}(X^\sigma)$. Our hypothesis ensure the existence and uniqueness of a weak solution to equation (5.75). This is sufficient for our purpose. Moreover, the hypothesis of a process living in a bounded domain seems suitable for practical purposes.

5.6.2 Estimation of the skew coefficient α when the locus of the asymmetry is known

In this first part, we shall suppose that the locus of the asymmetry γ is known.

5.6.2.1 Main Assumptions and Results

Set

$$M_T := \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(X_s^\sigma) \mathbb{1}_{[\gamma, b]} X_s^\sigma ds, \quad T > 0 \quad (5.76)$$

and

$$\hat{\alpha}_T := \frac{M_T \int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)}}{M_T \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) + (b - \gamma)}, \quad T > 0 \quad (5.77)$$

Our main result is the following theorem.

Théorème 5.6.1. *The random variable $\hat{\alpha}_T$ is a strongly consistent and asymptotically normal estimator of the coefficient α .*

This theorem will appear as a corollary of two propositions. The first one states an ergodic theorem for the process X^σ .

Proposition 5.6.1. *Let ν^1 and ν^σ be the densities respectively defined by*

$$d\nu^1(x) := \frac{1}{\alpha(b - \gamma) + (1 - \alpha)(\gamma - a)} (\alpha \mathbb{1}_{[\gamma, b]}(x) + (1 - \alpha) \mathbb{1}_{[a, \gamma]}(x)) dx \quad (5.78)$$

and

$$d\nu^\sigma(x) = \frac{\frac{d\nu^1(x)}{\sigma^2(x)}}{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu^1(x)}{\sigma^2(x)}}. \quad (5.79)$$

For any measurable function f in $L^1(\nu^\sigma)$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^\sigma) ds \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \int f d\nu^\sigma. \quad (5.80)$$

Remarque 5.6.1. *It is straightforward to check that the function σ^{-2} is in $L^1(\nu^1)$ from our hypothesis.*

The second proposition of interest provides a central limit theorem.

Proposition 5.6.2. *For any measurable function f in $L^1(\nu^\sigma)$,*

$$\sqrt{T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^\sigma) ds - \int f d\nu^\sigma \right) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{Law} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2), \quad (5.81)$$

where $\mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$ stands for the zero mean gaussian law with variance

$$\sigma_f^2 = 4 \int_{\mathbb{R}} \sigma(z)^2 \left(\int_z^b \frac{f(y) - \int f d\nu^\sigma}{\sigma(y)^2} dy \right)^2 d\nu^\sigma(y). \quad (5.82)$$

The next part of this paper is devoted to the proofs of these two propositions.

5.6.2.2 Proofs

In order to prove the proposition 5.6.1, we start by considering the case $\sigma \equiv 1$. Then we shall deduce the general case using a time change argument.

Lemme 5.6.2. *If the diffusion function σ is constant and equal to 1, then the process X^1 has a unique invariant measure with density ν^1 defined as in (5.78).*

Démonstration. If $\sigma \equiv 1$, the equation (5.75) reads

$$X_t^1 = x + B_t + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(X^1) - K_t^{[a, b]}(X^1), \quad x \in [a, b], \alpha \in]0, 1[, t \in [0, T]. \quad (5.83)$$

Choose p and q strictly positive and such that

$$\alpha := \frac{q}{p + q}.$$

Let $\varphi_{p, q}$ be the continuous function defined by

$$\varphi_{p, q}(y) := p(y - \gamma) \mathbb{1}_{(y \leq \gamma)} + q(y - \gamma) \mathbb{1}_{(y \geq \gamma)} + \gamma, \quad y \in \mathbb{R}.$$

This function has an inverse $\varphi_{p,q}^{-1}$:

$$\varphi_{p,q}^{-1}(y) = \frac{1}{p}(y - \gamma)\mathbb{1}_{(y \leq \gamma)} + \frac{1}{q}(y - \gamma)\mathbb{1}_{(y \geq \gamma)} + \gamma, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$L_t^\gamma(\varphi(X)) = \frac{1}{2} [\varphi'_+(\gamma)L_t^{\gamma+}(X) + \varphi'_-(\gamma)L_t^{\gamma-}(X)]. \quad (5.84)$$

In view of the Itô-Tanaka formula, we can state that the process $Y_t := \varphi_{p,q}(X_t^1)$ satisfies

$$Y_t = \varphi_{p,q}(x) + \int_0^t \rho(Y_s) dB_s + \beta L_t^\gamma(Y) - K_t^{[pa, qb]}(Y), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T], \quad (5.85)$$

where the function ρ is defined as

$$\rho(y) := p\mathbb{1}_{(y \leq \gamma)} + q\mathbb{1}_{(y \geq \gamma)}$$

the constant β is

$$\beta := \frac{q\alpha - p(1 - \alpha)}{q\alpha + p(1 - \alpha)},$$

and the process $K_t^{[pa, qb]}(Y)$ is defined as $L_t^{pa}(Y) - L_t^{qb}(Y)$. The process Y is reflected at points pa and qb . Equation (5.85) has a unique weak solution. This solution is associated to the following divergence form operator :

$$A = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d}{dx} \right) + \text{Neumann boundary conditions}$$

The process Y has a unique invariant measure : the uniform measure over the interval $[pa, qb]$. Consequently, the process $X^1 = \varphi_{p,q}^{-1}(Y)$ has also a unique invariant measure with density ν^1 . This ends the proof of lemma 5.6.2. \square

The following corollary is an immediate consequence of the former lemma.

Corollaire 5.6.3. *If the diffusion function σ is constant and equal to 1, then, for any measurable function f in $L^1(\nu^1)$,*

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^1) ds \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \int f d\nu^1. \quad (5.86)$$

Démonstration. The proof of this result is classical (see, e.g., [17]) as the main assumption needed in the proof, the strong Markov property, holds for the process X^1 . \square

Démonstration. Proof of proposition 5.6.1 We are now in position to demonstrate the proposition 5.6.1. We introduce the stopping time

$$\tau_t := \inf \left(s : \int_0^s \sigma^2(X_u^\sigma) du > t \right)$$

and the process $\tilde{Y}_t := X_{\tau_t}^\sigma$ which verifies

$$\tilde{Y}_t = x + \int_0^{\tau_t} \sigma(X_s^\sigma) dB_s + (2\alpha - 1)L_{\tau_t}^\gamma(X^\sigma) - K_{\tau_t}^{[a, b]}(X^\sigma). \quad (5.87)$$

The Dubins-Schwarz theorem states that there exists a Brownian motion W such that

$$\int_0^{\tau_t} \sigma(X_s^\sigma) dB_s = W_t, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{a.s.}$$

Moreover, $L_{\tau_t}^\gamma(X^\sigma) = L_t^\gamma(X_\tau^\sigma)$ (see [40] exercise (1.27) p. 235). Thus, the equation (5.87) can be written as

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &= x + W_t + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(X_\tau^\sigma) - K_t^{[a, b]}(X_\tau^\sigma) \\ &= x + W_t + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(\tilde{Y}) - K_t^{[a, b]}(\tilde{Y}).\end{aligned}$$

This is the equation (5.83). It is known that such an equation has a unique weak solution. And we have already demonstrated that this solution has a unique invariant measure. Therefore, the lemma (5.6.2) applies.

Let us recall the definition of the density ν^σ :

$$d\nu^\sigma(x) = \frac{\frac{d\nu^1(x)}{\sigma^2(x)}}{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu^1(x)}{\sigma^2(x)}},$$

and let us consider a measurable function f in $L^1(\nu^\sigma)$. We are interested in the convergence of the random variable

$$\frac{1}{\tau_T} \int_0^{\tau_T} f(X_s^\sigma) ds.$$

An easy change of variables allows to rewrite it

$$\frac{1}{\tau_T} \int_0^{\tau_T} f(X_s^\sigma) ds = \frac{\int_0^T f(\tilde{Y}_s) \frac{ds}{\sigma^2(\tilde{Y}_s)}}{\int_0^T \frac{ds}{\sigma^2(\tilde{Y}_s)}}.$$

Then, applying corollary 5.6.3, we can state that

$$\frac{1}{\tau_T} \int_0^{\tau_T} f(X_s^\sigma) ds \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \int f d\nu^\sigma.$$

As the process $(\tau_t)_{t \geq 0}$ is strictly increasing we can conclude the proof and assert that

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^\sigma) ds \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \int f d\nu^\sigma.$$

□

So far, we have proved the strong law of large numbers. We now turn to the proof of the central limit theorem.

Démonstration. Proof of proposition 5.6.2

Once more, consider the function

$$\varphi_{p,q}(y) = p(y - \gamma)\mathbb{1}_{(y \leq \gamma)} + q(y - \gamma)\mathbb{1}_{(y \geq \gamma)} + \gamma, \quad y \in \mathbb{R}.$$

We now fix the parameters $p = \alpha$ and $q = 1 - \alpha$ such that

$$q\alpha - p(1 - \alpha) = 0.$$

is trivially satisfied.

The process $\hat{Y}_t := \varphi_{\alpha, 1-\alpha}(X_t^\sigma)$ satisfies

$$d\hat{Y}_t = \rho(\hat{Y}_t)dB_t - dK_t^{[\alpha\alpha, qb]}(\hat{Y}), \quad t \in [0, T], \quad \hat{Y}_0 = \varphi_{\alpha, 1-\alpha}(x), \quad (5.88)$$

where

$$\rho(y) := \sigma \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}^{-1}(y) (\alpha\mathbb{1}_{(y \leq \gamma)} + (1 - \alpha)\mathbb{1}_{(y \geq \gamma)}),$$

and $K_t^{[pa, qb]}(\hat{Y}) := L_t^{\alpha a}(\hat{Y}) - L_t^{qb}(\hat{Y})$. Consider a measurable function f in $L^1(\nu^\sigma)$ and the Poisson problem

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(y)^2 \frac{d^2 u}{dy^2}(y) &= -f \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}^{-1}(y) + \int f d\nu^\sigma, & y \in (pa, qb) \\ \frac{du}{dy}(y) &= 0, & y = pa \text{ or } qb. \end{cases} \quad (5.89)$$

This problem has a solution twice differentiable with first derivative continuous, namely

$$u(x) := 2 \int_{\alpha a}^x \left(\int_z^{qb} \frac{f \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}^{-1}(y) - \int f d\nu^\sigma}{\rho(y)^2} dy \right) dz, \quad x \in [pa, qb].$$

By Itô's formula

$$\begin{aligned} u(\hat{Y}_T) &= u(\hat{Y}_0) + \frac{1}{2} \int_0^T \rho(\hat{Y}_s)^2 \frac{d^2 u}{dy^2}(\hat{Y}_s) ds + \int_0^T \rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) dB_s \\ &\quad - \int_0^T \rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) dK_s^{[pa, qb]}(\hat{Y}) \\ &= u(\hat{Y}_0) - \int_0^T f \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}^{-1}(\hat{Y}_s) ds + T \int f d\nu^\sigma + \int_0^T \rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) dB_s \\ &= u(\hat{Y}_0) - T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^\sigma) ds - \int f d\nu^\sigma \right) + \int_0^T \rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) dB_s \end{aligned}$$

Thus,

$$\sqrt{T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^\sigma) ds - \int f d\nu^\sigma \right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) dB_s - \frac{1}{\sqrt{T}} \left(u(\hat{Y}_T) - u(\hat{Y}_0) \right).$$

We aim to apply the Central Limit Theorem for stochastic integrals in order to prove the convergence in law. The bracket of the stochastic integral appearing in the expression is

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) \right)^2 ds.$$

We are now going to express this integral in terms of the process X^σ and apply the result of proposition 5.6.1 to check its almost sure convergence :

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &:= \text{a.s.} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho(\hat{Y}_s) \cdot \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) \right)^2 ds \\ &= \text{a.s.} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}(X_s^\sigma) \cdot \frac{du}{dy} \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}(X_s^\sigma) \right)^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\rho \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}(z) \cdot \frac{du}{dy} \circ \varphi_{\alpha, 1-\alpha}(z) \right)^2 d\nu^\sigma(z) \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} \sigma(z)^2 \left(\int_z^b \frac{f(y) - \int f d\nu^\sigma}{\sigma(y)^2} dy \right)^2 d\nu^\sigma(z) < +\infty. \end{aligned}$$

The assumptions of the Central Limit Theorem for Brownian martingales are verified (see [3]) and therefore

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \rho(\hat{Y}_s) \frac{du}{dy}(\hat{Y}_s) dB_s \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{Law} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2).$$

Moreover, as the function u is continuous over the compact $[pa, qb]$, it is bounded and so

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \left(u(\hat{Y}_T) - u(\hat{Y}_0) \right) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Finally, we apply Slutsky's lemma to deduce the convergence in law

$$\sqrt{T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(X_s^\sigma) ds - \int f d\nu^\sigma \right) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{Law} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2).$$

□

We have now all the elements to prove the main theorem of this paper.

Démonstration. Proof of theorem 5.6.1 Remember the definition of the estimator $\hat{\alpha}_T$:

$$\hat{\alpha}_T := \frac{M_T \int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)}}{M_T \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) + b},$$

with

$$M_T := \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(X_s^\sigma) \mathbb{1}_{(X_s^\sigma \geq \gamma)} ds, \quad T > 0.$$

From proposition 5.6.1, we know that the process M converges almost surely.

$$M_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma.$$

This limit can be restated as a function of α :

$$\begin{aligned} \int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \sigma^2(x) \mathbb{1}_{(x \geq \gamma)} \frac{d\nu^1(x)}{\sigma^2(x)}}{\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu^1(x)}{\sigma^2(x)}} \\ &= \frac{\alpha b}{\alpha \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} + (1 - \alpha) \int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)}}. \end{aligned}$$

Thus, we can conclude to the strong consistency of the estimator $\hat{\alpha}_T$. To prove the asymptotic normality, we have to rewrite $\hat{\alpha}_T$ in a slightly different way :

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha) &= \sqrt{T} \frac{M_T \int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \alpha M_T \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) - \alpha b}{M_T \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) + b} \\ &= \frac{\sqrt{T} \left((1 - \alpha) \int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} + \alpha \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) \left(M_T - \int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma \right)}{M_T \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) + b} \end{aligned}$$

Using the results of the propositions 5.6.1 and 5.6.2, we know that, from one hand,

$$M_T \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma,$$

and from the other hand,

$$\sqrt{T} \left(M_T - \int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma \right) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{Law} \mathcal{N}(0, \tau^2),$$

with

$$\tau^2 := 4 \int_{\mathbb{R}} \sigma(z)^2 \left(\int_z^b \frac{\sigma^2(y) \mathbb{1}_{(y \geq \gamma)} - \int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma}{\sigma(y)^2} dy \right)^2 d\nu^\sigma(y).$$

Therefore, applying Slutsky's lemma again, we can conclude that our estimator is asymptotically normal :

$$\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha) \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\text{Law}} \mathcal{N}(0, \kappa^2)$$

with variance

$$\kappa^2 := \left(\frac{\left((1 - \alpha) \int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} + \alpha \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) \tau}{\int_\gamma^{+\infty} \sigma^2 d\nu^\sigma \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{\sigma^2(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{\sigma^2(x)} \right) + b} \right)^2.$$

This ends the proof of our main theorem. \square

5.6.3 Process with drift

We now turn to the general case of skew processes with drift. Let X , be the unique weak solution of the stochastic differential equation :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(X) - K_t^{[a, b]}(X), \quad x \in [a, b], \alpha \in]0, 1[. \quad (5.90)$$

The function b is supposed to be Lipschitz, and, once more, the functions b and σ are supposed to be known.

A scale function of the process is

$$s(y) := \int_a^y \exp\left(-2 \int_a^z \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right) dy, \quad a \leq y \leq b.$$

As the function s is twice differentiable, the Itô-Tanaka formula applied to this function and the process X leads to the following representation for the process $X^s := s(X)$.

$$X_t^s = s(x) + \int_0^t (\sigma s') \circ s^{-1}(X_u^s) dB_u + (2\alpha - 1)L_t^{s(\gamma)}(X^s) - \int_0^t s' \circ s^{-1}(X_u^s) dK_u^{[a, b]}(X).$$

Now, let us define the function $\sigma^s := (\sigma s') \circ s^{-1}$ and the process

$$K_t^{[s(a), s(b)]}(X^s) := \int_0^t s' \circ s^{-1}(X_u^s) dK_u^{[a, b]}(X).$$

Therefore, one can easily check that the process X^s verifies the following SDE in the weak sense :

$$X_t^s = s(x) + \int_0^t \sigma^s(X_u^s) dB_u + (2\alpha - 1)L_t^{s(\gamma)}(X^s) - K_t^{[s(a), s(b)]}(X^s),$$

where the process $K^{[s(a), s(b)]}(X^s)$ induces a relection over the interval $[s(a), s(b)]$. As the process X is reflected over the interval $[s(a), s(b)]$ this equation is precisely the SDE 5.75 studied in the first part of this paper. Following exactly the same demonstration, it is then a trivial matter to prove that

Théorème 5.6.2. *The estimator of the parameter α defined by*

$$\hat{\alpha}_T := \frac{M_T \int_a^\gamma \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)}}{M_T \left(\int_a^\gamma \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)} - \int_\gamma^b \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)} \right) + s(b)}, \quad T > 0$$

where

$$M_T := \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma s')^2(X_u) \mathbb{1}_{(X_u \geq \gamma)} du, \quad T > 0$$

is strongly consistent and asymptotically normal.

Démonstration. The scale function s is a strictly increasing function so that,

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\sigma s')^2 \circ s^{-1}(X_u^s) \mathbb{1}_{(X_u^s \geq s(\gamma))} du = \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma s')^2(X_u) \mathbb{1}_{(X_u \geq \gamma)} du.$$

□

5.6.4 Invariant measure of the process X

From the former result, it is possible to give an expression for the unique invariant measure of the process X .

Proposition 5.6.3. *The process X admits a unique invariant measure with density*

$$\mu(dx) \propto (\alpha p(x) \mathbb{1}_{[\gamma, b]}(x) + (1 - \alpha)p(x) \mathbb{1}_{[a, \gamma]}(x)) dx$$

with

$$p(x) \propto \frac{\exp\left(2 \int_a^x \frac{b(z)}{\sigma^2(z)} dz\right)}{\sigma(x)^2}, \forall x \in [a, b].$$

5.7 Estimation in the general case : work in progress with Olivier Bardou

We are now going to explain how one can construct an efficient estimator of the parameter γ as a minimum contrast estimator. First, we need an easy lemma about time changed diffusion processes.

Lemme 5.7.1. *If the process X satisfies the following SDE*

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(X) - K_t^{[a, b]}(X), \quad (5.91)$$

for $\theta \in [a, b]$, we define the random time change

$$\check{\tau}_t^\theta := \inf \left\{ s \geq 0 : \int_0^s \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} ds > t \right\}.$$

Then, $\check{X}_t^\theta := X_{\check{\tau}_t^\theta}$ satisfies the SDE

$$\check{X}_t^\theta = \check{X}_0^\theta + \int_0^t b(\check{X}_s^\theta) ds + \int_0^t \sigma(\check{X}_s^\theta) dW_s + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(\check{X}^\theta) - K_t^{[\theta, b]}(\check{X}^\theta)$$

if $\gamma \geq \theta$ and

$$\check{X}_t^\theta = \check{X}_0^\theta + \int_0^t b(\check{X}_s^\theta) ds + \int_0^t \sigma(\check{X}_s^\theta) dW_s - K_t^{[\theta, b]}(\check{X}^\theta)$$

if $\gamma \leq \theta$, where W is a new standard brownian motion and $\check{X}_0^\theta := \inf_{s \geq 0} \{X_s \geq \theta\}$.

In particular, the process $\check{X}_t^\theta := X_{\check{\tau}_t^\theta}$ is reflected along the two-sided interval $[\theta, b]$.

Démonstration. From the definition of the stopping time $\check{\tau}_t^\theta$, it is clear that

$$\begin{aligned} - \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} ds &= \int_0^t \mathbb{1}_{(X_{\check{\tau}_s^\theta} \geq \theta)} d\check{\tau}_s^\theta = t, \\ - \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dB_s &= \int_0^t \mathbb{1}_{(X_{\check{\tau}_s^\theta} \geq \theta)} dB_{\check{\tau}_s^\theta} \text{ is a standard brownian motion } W_t \text{ from Dubbins-Schwarz theorem.} \end{aligned}$$

Moreover, by construction, $\check{X}_t^\theta \geq \theta$, almost surely, for all $t \geq 0$. Thus,

$$\begin{aligned}
 \check{X}_t^\theta - \theta &= \left| \check{X}_t^\theta - \theta \right| \text{ as } \check{X}_t^\theta \geq \theta \\
 &= \left| \check{X}_0^\theta - \theta \right| + \int_0^t \text{sgn}(\check{X}_s^\theta - \theta) d\check{X}_s^\theta + L_t^\theta(\check{X}^\theta) \text{ from Tanaka formula} \\
 &= \left| \check{X}_0^\theta - \theta \right| + \int_0^t \mathbb{1}_{(\check{X}_s^\theta \geq \theta)} d\check{X}_s^\theta + L_t^\theta(\check{X}^\theta) \text{ because } \check{X}_t^\theta \geq \theta \\
 &= \check{X}_0^\theta - \theta + \int_0^t \mathbb{1}_{(X_{\check{\tau}_s^\theta} \geq \theta)} dX_{\check{\tau}_s^\theta} + L_t^\theta(\check{X}^\theta) \text{ because } \check{X}_0^\theta \geq \theta
 \end{aligned}$$

Thus, we obtain the first representation

$$\check{X}_t^\theta = \check{X}_0^\theta + \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dX_s + L_t^\theta(\check{X}^\theta)$$

We now make use of the expression (5.91) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dX_s &= \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} b(X_s) \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} ds + \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \sigma(X_s) \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dB_s \\
 &\quad + (2\alpha - 1) \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dL_s^\gamma(X) - \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dK_s^{[a, b]}(X).
 \end{aligned}$$

Considering the first two integrals and our preliminary remarks, we have, from one hand

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} b(X_s) \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} ds &= \int_0^t b(X_{\check{\tau}_s^\theta}) \mathbb{1}_{(X_{\check{\tau}_s^\theta} \geq \theta)} d\check{\tau}_s^\theta \\
 &= \int_0^t b(\check{X}_s^\theta) ds,
 \end{aligned}$$

and, from the other,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \sigma(X_s) \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dB_s &= \int_0^t \sigma(X_{\check{\tau}_s^\theta}) \mathbb{1}_{(X_{\check{\tau}_s^\theta} \geq \theta)} dB_{\check{\tau}_s^\theta} \\
 &= \int_0^t \sigma(\check{X}_s^\theta) dW_s.
 \end{aligned}$$

Consider now the term

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dL_s^\gamma(X) &= \int_0^t \mathbb{1}_{(X_{\check{\tau}_s^\theta} \geq \theta)} dL_{\check{\tau}_s^\theta}^\gamma(X) \\
 &= \int_0^t \mathbb{1}_{(\check{X}_s^\theta \geq \theta)} dL_s^\gamma(\check{X}^\theta).
 \end{aligned}$$

It is the clear, from the property of the local time that

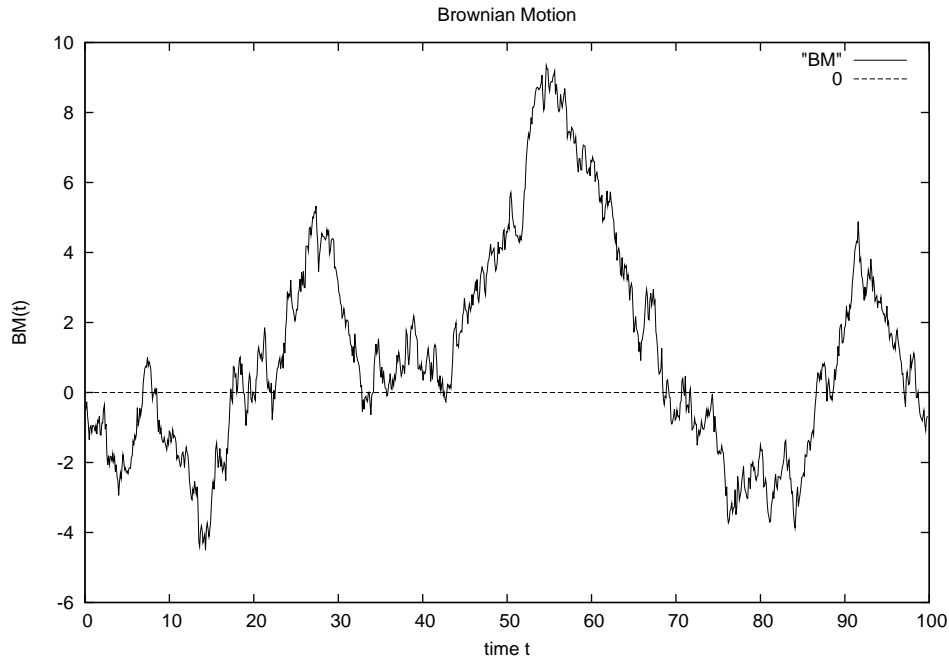
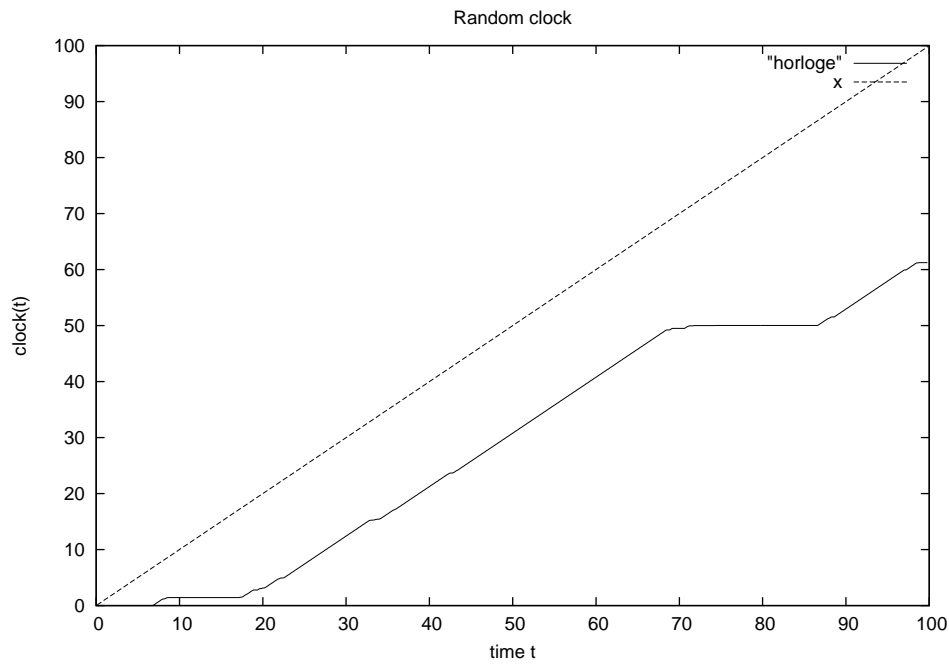
$$\begin{aligned}
 - \int_0^t \mathbb{1}_{(\check{X}_s^\theta \geq \theta)} dL_s^\gamma(\check{X}^\theta) &= 0 \text{ if } \gamma \leq \theta, \\
 - \int_0^t \mathbb{1}_{(\check{X}_s^\theta \geq \theta)} dL_s^\gamma(\check{X}^\theta) &= L_t^\gamma(\check{X}^\theta) \text{ if } \gamma \geq \theta.
 \end{aligned}$$

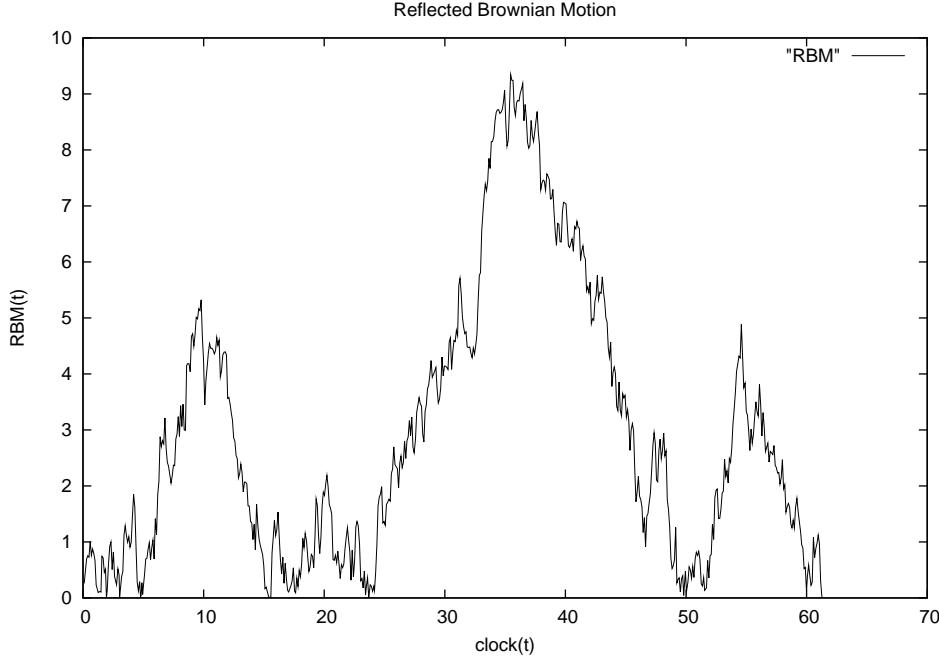
For the same reasons, we also have

$$\int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{(X_s \geq \theta)} dK_s^{[a, b]}(X) = K_t^{[\theta, b]}(\check{X}^\theta).$$

And the proof is complete. \square

The graphics 5.1, 5.2 and 5.3 illustrate the former construction for a brownian motion. In such a case, one can find an alternative demonstration, based on the same ideas, in [21] or [50].

FIG. 5.1 – Brownian motion X_t FIG. 5.2 – Random time change $t \mapsto \int_0^t \mathbb{1}_{(X_s \geq 0)} ds$


 FIG. 5.3 – Reflected brownian motion \check{X}_t^θ

Remarque 5.7.2. *Of course, defining the time change*

$$\hat{\tau}_t^\theta := \inf \left\{ s \geq 0 : \int_0^s \mathbb{1}_{(X_s \leq \theta)} ds > t \right\},$$

it is easily seen that the process $\hat{X}_t^\theta := X_{\hat{\tau}_t^\theta}$ will satisfies the following SDE

$$\hat{X}_t^\theta = \hat{X}_0^\theta + \int_0^t b(\hat{X}_s^\theta) ds + \int_0^t \sigma(\hat{X}_s^\theta) dW_s + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(\hat{X}^\theta) - K_t^{[a, \theta]}(\hat{X}^\theta)$$

if $\gamma \leq \theta$ and

$$\hat{X}_t^\theta = \hat{X}_0^\theta + \int_0^t b(\hat{X}_s^\theta) ds + \int_0^t \sigma(\hat{X}_s^\theta) dW_s - K_t^{[a, \theta]}(\hat{X}^\theta)$$

if $\gamma \geq \theta$, where W is a new standard brownian motion and $\hat{X}_0^\theta := \inf_{s \geq 0} \{X_s \leq \theta\}$.

In particular, the process $\text{hat}X_t^\theta := \hat{X}_{\hat{\tau}_t^\theta}$ is reflected along the two-sided interval $[a, \theta]$.

Remarque 5.7.3. *As*

$$\hat{W}_t = \int_0^{\hat{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{X_s \leq \theta} dB_s$$

and

$$\check{W}_t = \int_0^{\check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{X_s \leq \theta} dB_s$$

We see that

$$\langle \hat{W}_t, \check{W}_t \rangle_t = \int_0^{\hat{\tau}_t^\theta \wedge \check{\tau}_t^\theta} \mathbb{1}_{X_s = \theta} ds = 0$$

For convinience, we define the right inverses of the random time changes $\hat{\tau}_t^\theta$ and $\check{\tau}_t^\theta$

$$\hat{f}(t, \theta) = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s \leq \theta} ds$$

and

$$\check{f}(t, \theta) = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s \geq \theta} ds$$

We now prove an interesting lemma concerning the regularity of the random time changes.

Lemme 5.7.4. *For all $t \geq 0$, the random functions $\theta \mapsto \check{\tau}_t^\theta$ and $\theta \mapsto \hat{\tau}_t^\theta$ are differentiable and*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\tau}_t^\theta &= -\frac{L_t^\theta(\hat{X}^\theta)}{\sigma^2(\hat{X}_t^\theta)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \check{\tau}_t^\theta &= -\frac{L_t^\theta(\check{X}^\theta)}{\sigma^2(\check{X}_t^\theta)} \end{aligned}$$

Démonstration. We prove the lemma for the map $\theta \mapsto \check{\tau}_t^\theta$. The demonstration is similar in the other case.

For $\theta \in]a, b[$ and $t > 0$, we have from the occupation time formula :

$$\begin{aligned} \check{f}(t, \theta) &= \int_0^t \mathbb{1}_{X_s \geq \theta} ds \\ &= \int_\theta^{+\infty} \frac{L_t^y(X)}{\sigma^2(X_t)} dy \end{aligned}$$

From the first expression, we see that $t \mapsto \check{f}(t, \theta)$ is differentiable for all fixed $\theta \in]a, b[$ with

$$\frac{\partial}{\partial t} \check{f}(t, \theta) = \mathbb{1}_{X_t \geq \theta}$$

and from the second, that $\theta \mapsto \check{f}(t, \theta)$ for all fixed $t > 0$ with

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \check{f}(t, \theta) = -\frac{L_t^y(X)}{\sigma^2(X_t)}$$

Moreover, by definition, the map $t \mapsto \check{\tau}_t^\theta$ is the right inverse of $t \mapsto \check{f}(t, \theta)$. Thus we have :

$$\check{f}(t, \check{\tau}_t^\theta) = t, \quad \forall t > 0.$$

Thus we can make use of the implicit functions theorem and we see that $\theta \mapsto \check{\tau}_t^\theta$ is differentiable and

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \check{\tau}_t^\theta = -\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \check{f}(\check{\tau}_t^\theta, \theta)}{\frac{\partial}{\partial t} \check{f}(\check{\tau}_t^\theta, \theta)}$$

But from the definitions, we have that :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \check{f}(\check{\tau}_t^\theta, \theta) &= \mathbb{1}_{X_{\check{\tau}_t^\theta} \geq \theta} \\ &= \mathbb{1}_{\check{X}_t^\theta \geq \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

because \check{X}^θ is a process reflected on $[\theta, b]$. On the other hand

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \check{f}(\check{\tau}_t^\theta, \theta) &= -\frac{L_{\check{\tau}_t^\theta}^\theta(X)}{\sigma^2(X_{\check{\tau}_t^\theta})} \\ &= -\frac{L_t^\theta(\check{X}^\theta)}{\sigma^2(\check{X}_t^\theta)} \end{aligned}$$

and the lemma is proved. $\check{f}_T^\theta := \check{f}(t, \theta)$ □

5.7.1 Estimator of γ

We are now ready to construct the estimator $\hat{\gamma}_t$ of the parameter γ . Keeping the same notations, we now define, for $a < \theta < b$, the empirical means

$$\check{M}_T^\theta := \frac{1}{\check{f}_T^\theta} \int_0^{\check{f}_T^\theta} (\sigma s')^2 (\check{X}_s^\theta) \mathbb{1}_{(\check{X}_s^\theta \geq \frac{\theta+b}{2})} ds$$

and

$$\hat{M}_T^\theta := \frac{1}{\hat{f}_T^\theta} \int_0^{\hat{f}_T^\theta} (\sigma s')^2 (\hat{X}_s^\theta) \mathbb{1}_{(\hat{X}_s^\theta \geq \frac{\theta+a}{2})} ds$$

where s is the scale function

$$s(y) := \int_a^y \exp \left(-2 \int_a^z \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \right) dy, \quad a \leq y \leq b$$

and $\check{f}_T^\theta := \check{f}(T, \theta)$ and $\hat{f}_T^\theta := \hat{f}(T, \theta)$.

Unsurprisingly, we also define the corresponding estimators

$$\check{\alpha}_t^\theta := \frac{\check{M}_t^\theta \int_\theta^{\frac{b+\theta}{2}} \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)}}{\check{M}_t^\theta \left(\int_\theta^{\frac{b+\theta}{2}} \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)} - \int_{\frac{b+\theta}{2}}^b \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)} \right) + s(b)}$$

and

$$\hat{\alpha}_t^\theta := \frac{\hat{M}_t^\theta \int_a^{\frac{a+\theta}{2}} \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)}}{\hat{M}_t^\theta \left(\int_a^{\frac{a+\theta}{2}} \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)} - \int_{\frac{a+\theta}{2}}^\theta \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)} \right) + s(\theta)}$$

Finally, the estimator of the parameter γ is defined as

$$\hat{\gamma}_t := \operatorname{argmin}_{a \leq \theta \leq b} U_t(\theta)$$

with $U_t(\theta) := |\check{\alpha}_t^\theta - \hat{\alpha}_t^\theta|$.

The aim of this section is to explain the reasons that allow us to think that the following conjecture should be true :

Conjecture 5.7.1. *The random variable $\hat{\gamma}_t$ is a strongly consistent estimator of the parameter γ .*

To simplify the notations, let us define

$$I(u, v) := \int_u^v \frac{dx}{(\sigma^2 s')(x)}.$$

Recall that the invariant density of the process X is :

$$\mu(dx) \propto (\alpha p(x) \mathbb{1}_{[\gamma, b]}(x) + (1 - \alpha) p(x) \mathbb{1}_{[a, \gamma]}(x)) dx$$

with

$$p(x) \propto \frac{\exp \left(2 \int_a^x \frac{b(z)}{\sigma^2(z)} dz \right)}{\sigma(x)^2}, \quad \forall x \in [a, b].$$

and we have that :

$$\frac{L_T^y(X)}{T} \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{a.s.} \sigma^2(y) p(y), \quad \forall y \in [a, b].$$

Let us define

$$J(u, v) := \int_u^v \frac{L_T^y(X)}{\sigma^2(y)} dy$$

and

$$K(u, v) := \int_u^v L_T^y(X) s'(y)^2 dy$$

We have the alternative expressions :

$$\check{M}_T^\theta = \frac{K(\frac{\theta+b}{2}, b)}{J(\theta, b)}$$

and

$$\hat{M}_T^\theta = \frac{K(\frac{\theta+a}{2}, \theta)}{J(a, \theta)}$$

From the results of the previous section, we check that

$$\check{M}_t^\theta \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{a.s.}} \check{M}_\infty^\theta \triangleq \frac{\int_{\frac{\theta+b}{2}}^b (\sigma s')^2(y) p(y) dy}{\int_\theta^b p(y) dy}$$

and

$$\hat{M}_t^\theta \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{a.s.}} \hat{M}_\infty^\theta \triangleq \frac{\int_{\frac{\theta+a}{2}}^\theta (\sigma s')^2(y) p(y) dy}{\int_a^\theta p(y) dy}$$

From the previous equations, it is now easy to check that U_T can be written :

$$U_T(\theta) = |\check{\alpha}_T^\theta - \hat{\alpha}_T^\theta|$$

with

$$\hat{\alpha}_t^\theta := \frac{K(\frac{\theta+a}{2}, \theta) I(a, \frac{\theta+a}{2})}{K(\frac{\theta+a}{2}, \theta) (I(a, \frac{\theta+a}{2}) - I(\frac{\theta+a}{2}, \theta)) + s(\theta) J(a, \theta)}$$

and

$$\check{\alpha}_t^\theta := \frac{K(\frac{\theta+b}{2}, b) I(\theta, \frac{\theta+b}{2})}{K(\frac{\theta+b}{2}, b) (I(\theta, \frac{\theta+b}{2}) - I(\frac{\theta+b}{2}, b)) + s(b) J(\theta, b)}$$

Moreover, for all $\theta \in]a, b[$, $U_T(\theta)$ converges almost surely towards the deterministic function

$$U(\theta) := |\check{\alpha}_\infty^\theta - \hat{\alpha}_\infty^\theta|$$

with

$$\check{\alpha}_t^\theta \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{a.s.}} \check{\alpha}_\infty^\theta \triangleq \frac{\int_{\frac{\theta+b}{2}}^b (\sigma s')^2(y) p(y) dy I(\theta, \frac{\theta+b}{2})}{\int_{\frac{\theta+b}{2}}^b (\sigma s')^2(y) p(y) dy (I(\theta, \frac{\theta+b}{2}) - I(\frac{\theta+b}{2}, b)) + s(b) \int_\theta^b p(y) dy}$$

and

$$\hat{\alpha}_t^\theta \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{a.s.}} \hat{\alpha}_\infty^\theta \triangleq \frac{\int_{\frac{\theta+a}{2}}^\theta (\sigma s')^2(y) p(y) dy I(a, \frac{\theta+a}{2})}{\int_{\frac{\theta+a}{2}}^\theta (\sigma s')^2(y) p(y) dy (I(a, \frac{\theta+a}{2}) - I(\frac{\theta+a}{2}, \theta)) + s(\theta) \int_a^\theta p(y) dy}$$

We get that $\forall \theta \in [a, b]$:

$$U_T(\theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{a.s.}} U(\theta) \triangleq \left| \hat{\alpha}_\infty^\theta - \check{\alpha}_\infty^\theta \right|$$

This function is nonnegative and we check that whenever $\alpha \neq \frac{1}{2}$,

$$U(\gamma) = 0$$

Our aim is now to study the variations of U_T and U in order to prove the convergence of our argmin estimator.

5.7.2 Numerical results

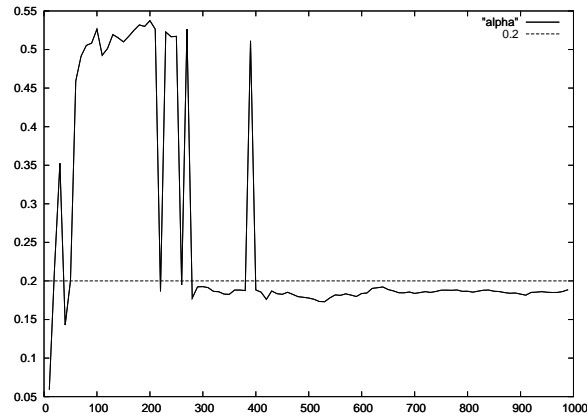
Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques afin de les confronter avec les résultats théoriques obtenus.

Les tests numériques que nous avons effectués portent sur le Mouvement Brownien Asymétrique Réfléchi (Reflected Skew Brownian Motion) de paramètre α . Plus précisément, $(B_t^\alpha)_{0 \leq t \leq T}$ est la solution de

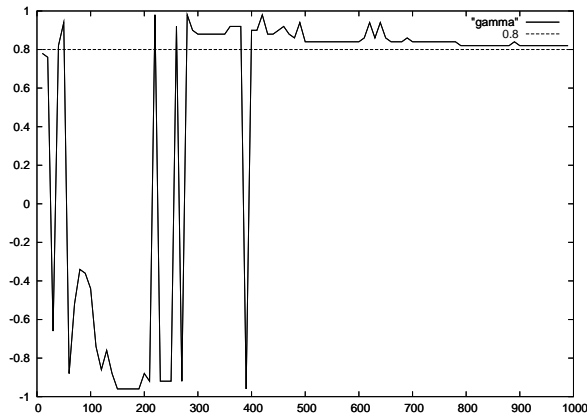
$$B_t^\alpha = x_0 + B_t + (2\alpha - 1)L_t^\gamma(B^\alpha) - K_t^{[a,b]}(B^\alpha) \quad (5.92)$$

Nous concentrons notre étude sur le comportement de l'erreur en fonction du temps. Pour ce faire, nous avons simulé B^α à l'aide d'un schéma d'Euler que nous avons symétrisé en a et b de façon à rendre compte de la reflexion. Nous avons choisi comme pas de discrétisation $\Delta t = 0.001$.

Nous présentons une série de résultats obtenus dans le cas $a = -1$ et $b = 1$.



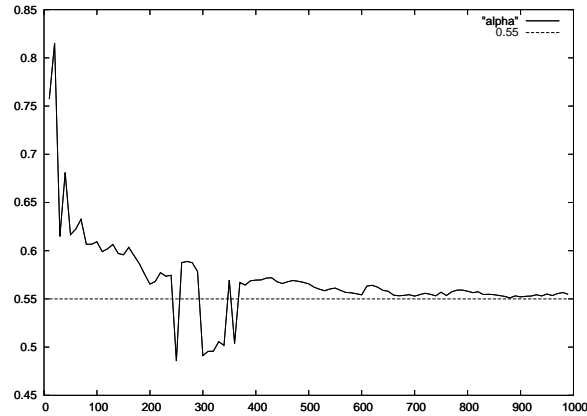
(a) Estimation du paramètre $\alpha = 0.2$: graphe de la fonction $t \mapsto \hat{\alpha}_t$ entre $t = 0$ et $t = 1000$



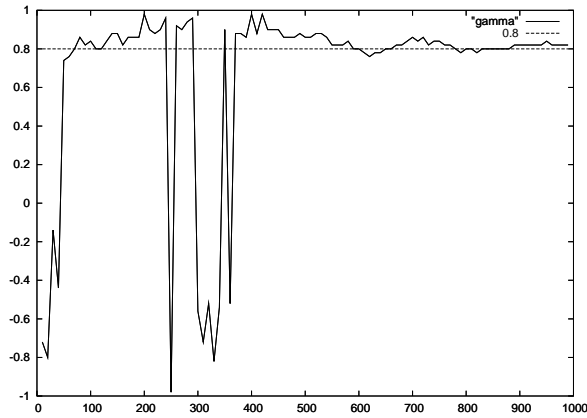
(b) Estimation du paramètre $\gamma = 0.8$: graphe de la fonction $t \mapsto \hat{\gamma}_t$ entre $t = 0$ et $t = 1000$

Lorsque α vaut exactement $1/2$, il est impossible de détecter γ car B^α n'est plus qu'un Mouvement Brownien doublement réfléchi : en particulier, il n'y a alors plus d'asymétrie. Ainsi, il est légitime de penser que plus α est proche de la valeur critique $1/2$, plus il devient difficile d'estimer correctement la lieu de l'asymétrie γ car celle-ci est de moins en moins « visible ».

Nous présentons les résultats que nous avons obtenus lorsque $\alpha = 0.55$:

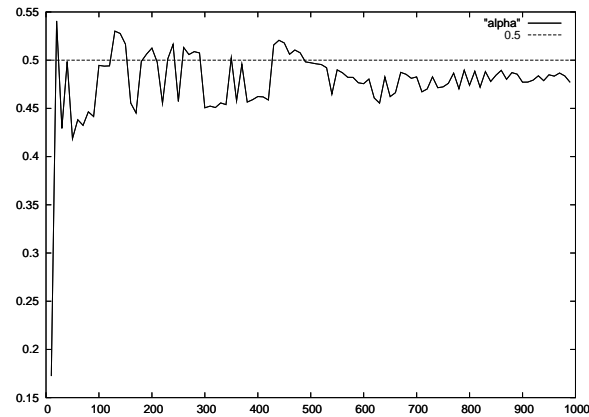


(c) Estimation du paramètre $\alpha = 0.55$: graphe de la fonction $t \mapsto \hat{\alpha}_t$ entre $t = 0$ et $t = 1000$

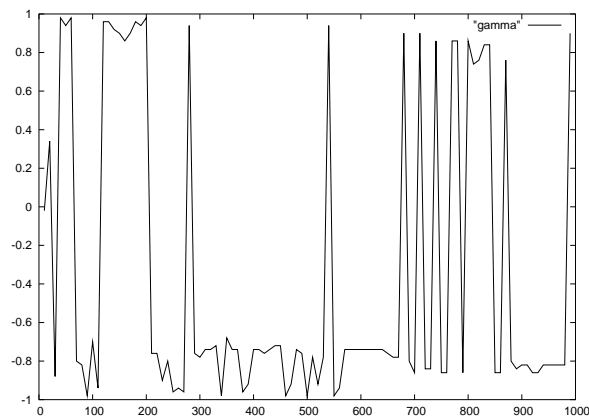


(d) Estimation du paramètre $\gamma = 0.8$: graphe de la fonction $t \mapsto \hat{\gamma}_t$ entre $t = 0$ et $t = 1000$

Bien entendu, lorsque $\alpha = 0.5$, il n'y a plus de raison de chercher à estimer γ et nous voyons que $\hat{\gamma}_T$ prend des valeurs arbitraires :



(e) Estimation du paramètre $\alpha = 0.5$: graphe de la fonction $t \mapsto \hat{\alpha}_t$ entre $t = 0$ et $t = 1000$



(f) Graphe de la fonction $t \mapsto \hat{\gamma}_t$ entre $t = 0$ et $t = 1000$ lorsque $\alpha = 0.5$

Ces résultats nous confortent dans l'idée que la vitesse de convergence de $\hat{\gamma}_T$ dépend cruciallement de la valeur de α .

Annexe A

Rappels : sommes de Riemann et fonctions à variation bornée

Proposition A.0.5. Soit ϕ une fonction croissante définie sur l'intervalle $[0, T[$ de \mathbb{R} . Nous avons l'inégalité :

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \int_0^T \phi(t) dt \quad (\text{A.1})$$

De même, si ϕ est une fonction décroissante définie sur l'intervalle $[0, T]$ de \mathbb{R} ,

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \int_0^T \phi(t) dt + 2\frac{T}{n} \sup_{t \in [0, T]} |\phi(t)| \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. Premier cas :

Soit ϕ une fonction croissante définie sur l'intervalle $[0, T[$ de \mathbb{R} . Pour tout t tel que $\frac{kT}{n} \leq t < \frac{(k+1)T}{n}$,

$$\phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \phi(t)$$

Ainsi,

$$\int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) dt = \frac{T}{n} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} \phi(t) dt$$

Par conséquent,

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} \phi(t) dt = \int_0^T \phi(t) dt$$

Deuxième cas :

Soit ϕ une fonction décroissante définie sur l'intervalle $[0, T]$ de \mathbb{R} . Pour tout t tel que $t \in \left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]$,

$$\phi\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) \leq \phi(t)$$

Ainsi,

$$\int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} \phi\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) dt = \frac{T}{n} \phi\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) \leq \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} \phi(t) dt$$

et par conséquent,

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} \phi(t) dt = \int_0^T \phi(t) dt$$

En particulier,

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) + \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\phi\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) - \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \right) \leq \int_0^T \phi(t) dt$$

et nous obtenons que :

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) + \frac{T}{n} (\phi(T) - \phi(0)) \leq \int_0^T \phi(t) dt$$

Ainsi

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \int_0^T \phi(t) dt + \frac{T}{n} (\phi(0) - \phi(T))$$

□

Corollaire A.0.6. Soit ϕ une fonction positive, à variation bornée, définie sur l'intervalle $[0, T[$ de \mathbb{R} . Remarquons qu'éventuellement $\phi(T) = \infty$.

Nous avons l'inégalité :

$$\boxed{\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \int_0^T \phi(t) dt + 2 \frac{T}{n} \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi(t)|} \quad (\text{A.3})$$

Démonstration. Puisque ϕ est à variation bornée, il existe une deux fonctions croissantes ϕ^+ et ϕ^- telles que

$$\phi = \phi^+ - \phi^-$$

et ces deux fonctions peuvent être choisies telles que leurs supports soient disjoints de telle sorte que

$$\sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi^+(t)| + \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi^-(t)| \leq \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi(t)|$$

Plaçons nous sur l'intervalle de temps $[0, T - \frac{T}{n}[$. Les résultats de la proposition précédente nous assurent que :

$$\begin{aligned} \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) &= \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \phi^+\left(\frac{kT}{n}\right) - \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \phi^-\left(\frac{kT}{n}\right) \\ &= \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \phi^+\left(\frac{kT}{n}\right) + \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-2} (-\phi^-)\left(\frac{kT}{n}\right) \\ &\leq \int_0^{T - \frac{T}{n}} \phi^+(t) dt + \int_0^{T - \frac{T}{n}} (-\phi^-)(t) dt + 2 \frac{T}{n} \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi^-(t)| \\ &= \int_0^{T - \frac{T}{n}} \phi(t) dt + 2 \frac{T}{n} \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi(t)| \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) &= \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) + \frac{T}{n} \phi\left(\frac{(n-1)T}{n}\right) \\ &\leq \int_0^{T - \frac{T}{n}} \phi(t) dt + 2 \frac{T}{n} \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi(t)| \end{aligned}$$

et puisque ϕ est supposée positive,

$$\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(\frac{kT}{n}\right) \leq \int_0^T \phi(t) dt + 2\frac{T}{n} \sup_{t \in [0, T - \frac{T}{n}]} |\phi(t)|$$

qui est bien l'inégalité annoncée. □

Annexe B

Rappels : estimations pour les solutions des EDPs paraboliques classiques

Soit (Z_t^x) à valeurs dans \mathbb{R} solution d'une équation différentielle stochastique sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$:

$$dZ_t^x = \gamma(Z_t^x)dB_t + \mu(Z_t^x)dt; \quad Z_0 = x \quad (\text{B.1})$$

où γ et μ sont des fonctions réelles telles que :

$$\mathbf{HB} : \begin{cases} \mu \text{ est de classe } C_b^5(\mathbb{R}), \text{ avec des dérivées bornées} \\ \gamma \text{ est de classe } C_b^6(\mathbb{R}), \text{ avec des dérivées bornées} \\ \text{il existe } \epsilon \text{ tel que } \gamma(x) \geq \epsilon, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

La formule de Feynman-Kac nous assure que la fonction $(t, x) \mapsto \mathbb{E}[f(Z_t^x)]$ est la solution au sens classique du problème parabolique

$$\mathcal{P}(\gamma, \mu) \begin{cases} \partial_t u(t, x) - \frac{1}{2}\gamma(x)\partial_{xx}^2 u(t, x) - \mu(x)\partial_x u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

et nous avons une estimation pour la solution fondamentale $\Gamma_{\gamma, \mu}(t, x, y)$ du problème parabolique $\mathcal{P}(\gamma, \mu)$. En effet, dans [23] (cf. IV §13 p. 376) il est montré qu'il existe deux constantes m et M positives telles que :

$$\Gamma_{\gamma, \mu}(t, x, y) \leq m \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-M \frac{|x-y|^2}{2t}\right)$$

Cette estimation est vraie dès que γ et μ sont supposées h\"olderiennes d'ordre $\alpha > 0$. Sous les hypothèses **HB** nous avons encore l'existence de deux nouvelles constantes c et C telles que

$$\Gamma_{\gamma, \mu + \gamma'\gamma}(t, x, y) \leq c \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-C \frac{|x-y|^2}{2t}\right) \quad (\text{B.4})$$

A partir de cette estimée, nous pouvons montrer la

Proposition B.0.7. *Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec $f^{(1)} \in L^2(\mathbb{R})$ alors la solution $u : (t, x) \mapsto \mathbb{E}[f(Z_t^x)]$ du problème $\mathcal{P}(\gamma, \mu)$ est telle que :*

$$\|\partial_x u(t, x)\|_\infty \leq C(T) \|f^{(1)}\|_\infty \quad (\text{B.5})$$

où $C(T)$ est une constante indépendante de f .

De même,

$$\|\partial_x u(t, x)\|_\infty \leq C(T) \|f^{(1)}\|_{L^2} \frac{1}{t^{1/4}} \quad (\text{B.6})$$

où $C(T)$ est une constante indépendante de f .

Enfin,

$$\|\partial_x u(t, x)\|_\infty \leq C(T) \|f^{(1)}\|_{L^1} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (\text{B.7})$$

où $C(T)$ est une constante indépendante de f .

Démonstration. Introduisons la dérivée du flot du processus $(Z_t^x)_{t \geq 0}$ que nous notons $(\partial_x Z_t^x)_{t \geq 0}$. Il est bien connu que :

$$\partial_x \mathbb{E}[f(Z_t^x)] = \mathbb{E}[f'(Z_t^x) \partial_x Z_t^x]$$

et $(\partial_x Z_t^x)_{t \geq 0}$ est l'unique solution de l'EDS :

$$d(\partial_x Z_t^x) = \gamma'(Z_t^x) \partial_x Z_t^x dB_t + \mu'(Z_t^x) \partial_x Z_t^x dt; \quad \partial_x Z_0^x = 1 \quad (\text{B.8})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, x) &= \mathbb{E} \left[f'(Z_t^x) \exp \left(\int_0^t \gamma'(Z_s^x) dB_s + \int_0^t \mu'(Z_s^x) ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f'(Z_t^x) \exp \left(\int_0^t \gamma'(Z_s^x) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\gamma')^2(Z_s^x) ds + \int_0^t \left(\mu'(Z_s^x) + \frac{1}{2} (\gamma')^2(Z_s^x) \right) ds \right) \right] \end{aligned}$$

et au vu des hypothèses **HB**, il existe $C(T)$ indépendante de f telle que :

$$|\partial_x u(t, x)| \leq C(T) \mathbb{E} \left[|f'| (Z_t^x) \exp \left(\int_0^t \gamma'(Z_s^x) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\gamma')^2(Z_s^x) ds \right) \right]$$

Or, $t \mapsto \exp \left(\int_0^t \gamma'(Z_s^x) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\gamma')^2(Z_s^x) ds \right)$ est une martingale exponentielle et le théorème de Girsanov nous permet d'affirmer qu'il existe une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ telle que :

$$\mathbb{E} \left[|f'| (Z_t^x) \exp \left(\int_0^t \gamma'(Z_s^x) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\gamma')^2(Z_s^x) ds \right) \right] = \tilde{\mathbb{E}} [|f'| (Z_t^x)]$$

et le processus $(Z_t^x)_{t \geq 0}$ vérifie la nouvelle EDS :

$$dZ_t^x = \gamma(Z_t^x) dW_t + (\mu + \gamma' \gamma)(Z_t^x) dt; \quad Z_0 = x$$

où $\left\{ W_t \triangleq B_t - \int_0^t \gamma'(Z_s^x) ds : t \geq 0 \right\}$ est un nouveau mouvement brownien sous $\tilde{\mathbb{P}}$.

Nous voyons donc qu'il existe une constante $C(T)$ indépendante de f telle que :

$$|\partial_x u(t, x)| \leq C(T) \tilde{\mathbb{E}} [|f'| (Z_t^x)] = \int_{\mathbb{R}} |f'(y)| \Gamma_{\gamma', \mu + \gamma' \gamma}(t, x, y) dy$$

Au vu de l'inégalité (B.4), nous sommes en droit de reprendre les arguments donnés dans la démonstration de la proposition 2.2.4. Nous trouvons ainsi le résultat annoncé. \square

Corollaire B.0.8. Si $f \in C_b^4(\mathbb{R})$ -presque partout sur \mathbb{R} , $f \in C_b^3(\mathbb{R})$ et f a toutes ses dérivées dans L^2 :

$$\|\partial_x \partial_t u(t, x)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_\infty + \|f^{(2)}\|_\infty + \|f^{(3)}\|_\infty \right) \quad (\text{B.9})$$

où $C(T)$ est une constante indépendante de f .

De même,

$$\|\partial_x \partial_t u(t, x)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^2} + \|f^{(2)}\|_{L^2} + \|f^{(3)}\|_{L^2} \right) \frac{1}{t^{1/4}} \quad (\text{B.10})$$

où $C(T)$ est une constante indépendante de f .

Enfin,

$$\|\partial_x \partial_t u(t, x)\|_\infty \leq C(T) \left(\|f^{(1)}\|_{L^1} + \|f^{(2)}\|_{L^1} + \|f^{(3)}\|_{L^1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (\text{B.11})$$

où $C(T)$ est une constante indépendante de f .

Démonstration. Puisque $u(t, x) = \mathbb{E}[f(Z_t^x)]$, la formule d'Itô implique que :

$$\partial_t u(t, x) = \mathbb{E}[\mathcal{L}f(Z_t^x)]$$

où $\mathcal{L}f = \frac{1}{2}\gamma f^{(2)} + \mu f^{(1)}$.

Le résultat de la proposition découle alors du résultat de la proposition B.0.7 appliquée à la fonction $\mathcal{L}f$. \square

B.1 Notations

- D désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^d possédant une frontière suffisamment régulière ∂D pour assurer la validité des théorèmes énoncés ci-après.
- Pour tout $y \in \partial D$, $\vec{n}(y)$ désigne le vecteur unitaire normal rentrant à la frontière en y .
- $D_T \equiv (0, T) \times D$.
- $|\cdot|$ désigne la norme Euclidienne sur \overline{D} .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^d .
- $d(x, y)$ désigne la distance Euclidienne entre x et y dans \mathbb{R}^d .
- $\mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurable a définies sur \overline{D} , à valeurs dans l'espace des matrices symétriques, et telles que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, pour tout $x \in \overline{D}$,

$$\lambda |\xi|^2 \leq \langle a(x) \xi, \xi \rangle \leq \Lambda |\xi|^2 \quad (\text{B.12})$$

- $\mathcal{A}^\infty(\lambda, \Lambda)$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{A}(\lambda, \Lambda)$ constitué des fonctions de classe C^∞ .
- $L^2(D)$ (ou $L_2(D)$) désigne l'espace fonctionnel des fonctions ϕ vérifiant $\int_D \phi^2(y) dy < +\infty$.
- (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de $L^2(D)$.
- $H^1(D)$ désigne comme d'habitude l'espace

$$H^1(D) \equiv \left\{ \phi \in L^2(D) : \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^2(D), \quad 1 \leq i \leq d \right\} \quad (\text{B.13})$$

- On notera $\mathcal{G}(D)$ l'espace défini par

$$\mathcal{G}(D) \equiv \left\{ \phi \in L^2_{loc}(D) : \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^2(D), \quad 1 \leq i \leq d \right\} \quad (\text{B.14})$$

Bibliographie

- [1] D. Aldous. Stopping times and tightness. *Ann. Probability*, 6(2) :335–340, 1978.
- [2] D.G. Aronson. Non-negative solutions of linear parabolic equations. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.*, 22 :607–694, 1968.
- [3] I.V. Basawa and B.L.S. Prakasa Rao. *Statistical inference for stochastic processes*. Probability and Mathematical Statistics. London, 1980.
- [4] R.F. Bass and Z.-Q. Chen. Stochastic differential equations for Dirichlet processes. *Probab. Theory Relat. Fields*, 121(3) :422–446, 2001.
- [5] R.F. Bass and P. Hsu. Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains. *Ann. Probab.*, 19(2) :486–508, 1991.
- [6] J. Bertoin. Les processus de Dirichlet en tant qu’espace de Banach. (Dirichlet processes as Banach spaces). *Stochastics*, 18 :155–168, 1986.
- [7] A.N. Borodin and P. Salminen. *Handbook of Brownian motion - facts and formulae*. Probability and Its Applications. Birkhuser., 1996.
- [8] L. Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.
- [9] Brézis, H. *Analyse fonctionnelle. Thorie et applications*. Collection Mathematiques Appliquees pour la Maitrise. Masson, 1983.
- [10] E.A. Carlen, S. Kusuoka, and D.W. Stroock. Upper bounds for symmetric Markov transition functions. *Ann. Inst. Henri Poincar, Probab. Stat.* 23, Suppl., 245-287, 1987.
- [11] L. Devroye. *Nonuniform random variate generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [12] O. Faugeras and Projet Odyssey 1999. The inverse eeg and meg problems : The adjoint state approach i : The continuous case. Technical report, Rapport de recherche de l’INRIA- Sophia Antipolis, 1999.
- [13] M. Freidlin. *Functional integration and partial differential equations*, volume 109 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [14] M.I. Freidlin and A.D. Wentzell. Necessary and sufficient conditions for weak convergence of one-dimensional Markov processes. In *The Dynkin Festschrift*, volume 34 of *Progr. Probab.*, pages 95–109. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.
- [15] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*. de Gruyter Studies in Mathematics. 19. Walter de Gruyter., 1994.
- [16] B. Gaveau, M. Okada, and T. Okada. Second order differential operators and Dirichlet integrals with singular coefficients. I. Functional calculus of one-dimensional operators. *Tohoku Math. J. (2)*, 39(4) :465–504, 1987.
- [17] I.I. Gihman and A.V. Skorohod. *The theory of stochastic processes II. Transl. from the Russian by S. Kotz. Repr. of the 1st ed. 1975*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1983.
- [18] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order. 2nd ed.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224. Springer-Verlag, 1983.

- [19] A.K. Gushchin. Some properties of a generalized solution of the second boundaryvalue problem for a parabolic equation. *Math. USSR, Sb.* 26(1975), 225-244 (1976)., 1976.
- [20] U.G. Haussmann and E. Pardoux. Time reversal of diffusions. *Ann. Probab.*, 14 :1188–1205, 1986.
- [21] K. Ito and H.P.jun. McKean. *Diffusion processes and their sample paths. 2nd printing, corrected.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 125. Springer-Verlag, 1974.
- [22] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus. 2nd ed.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1991.
- [23] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type.* American Mathematical Society, 1968.
- [24] Olivier Lafitte. *Distributions et Applications.* Ecole des mines de Paris.
- [25] J.-F. Le Gall. One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. In *Stochastic analysis and applications (Swansea, 1983)*, volume 1095 of *Lecture Notes in Math.*, pages 51–82. Springer, Berlin, 1984.
- [26] A. Lejay. *Méthodes probabilistes pour l'Homogénéisation des opérateurs sous-forme divergence : cas linéaire et semi-linéaire.* PhD thesis, Université de Provence, 2000.
- [27] A. Lejay. On the decomposition of excursions measures of processes whose generators have diffusion coefficients discontinuous at one point. *Markov Process. Related Fields*, 8, 2002.
- [28] A. Lejay. Simulating a diffusion on a graph. Application to reservoir engineering. *Monte Carlo Methods Appl.*, 9, 2003.
- [29] P.-L. Lions and A.S. Sznitman. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Commun. Pure Appl. Math.*, 37 :511–537, 1984.
- [30] T. Lyons and L. Stoica. The limits of stochastic integrals of differential forms. *Ann. Probab.*, 27(1) :1–49, 1999.
- [31] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.
- [32] F. W. J. Olver. *Asymptotics and special functions.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. Computer Science and Applied Mathematics.
- [33] Y. Ouknine. Le “skew-Brownian motion” et les processus qui en drivent. (The ‘skew Brownian motion’ and the processes derived from this). *Teor. Veroyatn. Primen.*, 35(1) :173–179, 1990.
- [34] E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov. On the Poisson equation and diffusion approximation. I. *Ann. Probab.*, 29(3) :1061–1085, 2001.
- [35] E. Pardoux and A. Yu. Veretennikov. On Poisson equation and diffusion approximation. II. *Ann. Probab.*, 31(3) :1166–1192, 2003.
- [36] E. Pardoux and R. J. Williams. Symmetric reflected diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 30(1) :13–62, 1994.
- [37] N.I. Portenko. Stochastic differential equations with generalized drift vector. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 24 :332–347, 1979.
- [38] N.I. Portenko. Stochastic differential equations with generalized drift vector. *Theory Probab. Appl.*, 24 :338–353, 1980.
- [39] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. A new approach.
- [40] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, 1994.
- [41] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.

- [42] A. Rozkosz. Stochastic representation of diffusions corresponding to divergence form operators. *Stochastic Process. Appl.*, 63(1) :11–33, 1996.
- [43] A. Rozkosz. Weak convergence of diffusions corresponding to divergence form operators. *Stochastics Stochastics Rep.*, 57(1-2) :129–157, 1996.
- [44] A. Rozkosz and L. Slominski. Extended convergence of dirichlet processes. *Stochastic and Stochastic Reports*, 65 :79–109, 1998.
- [45] A. Rozkosz and L. Slominski. Stochastic representation of reflecting diffusions corresponding to divergence form operators. *Stud. Math.*, 139(2) :141–174, 2000.
- [46] P. Seignourel. *Processus en milieu aléatoire ou irrégulier*. PhD thesis, Paris 6, 1999.
- [47] P. Seumen Tonou. *Méthodes numériques probabilistes pour la résolution d'équations du transport et pour l'évaluation d'options exotiques*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 1997.
- [48] Stochastic differential systems, Proc. IFIP-WG 7/1 Work. Conf., Marseille-Luminy/France 1984, Lect. Notes Control Inf. Sci. 69, 143-155, editor. *On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift.*, 1985.
- [49] D.W. Stroock. Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators. I : Aronson's estimate for elliptic operators in divergence form. *Séminaire de probabilités XXII, Strasbourg/France, Lect. Notes Math. 1321, 316-347 (1988).*, 1988.
- [50] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 233. Springer-Verlag, 1979.
- [51] Workshop on Evolution Equations, Roscoff (France). *Singular Stochastic Differential Equations*, 2003.
- [52] L. Yan. *Convergence of the Euler Scheme for Stochastic Differential Equations with Irregular Coefficients*. PhD thesis, Purdue University, 2000.
- [53] M. Yor. Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. In *Temps locaux*. Astérisque, 1977.
- [54] V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleïnik. G -convergence of parabolic operators. *Uspekhi Mat. Nauk*, 36(1(217)) :11–58, 248, 1981.

L'analyse et l'approximation de solutions des Equations Différentielles Stochastiques (E.D.S.) possédant des coefficients discontinus est un sujet qui n'a pas été traité de façon pleinement satisfaisante. Ce problème devient particulièrement motivant lorsque l'on cherche à approcher numériquement, par des méthodes de Monte-Carlo, les solutions de certaines Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P.) qui font également intervenir des coefficients discontinus. C'est par exemple le cas, bien connu en physique, des E.D.P. avec Opérateur sous Forme Divergence (O.F.D) que nous étudions dans ce mémoire : les discontinuités traduisent alors les irrégularités du milieu dans lequel évolue le système étudié.

Cette thèse propose de nouveaux résultats pour l'analyse et l'approximation de solutions d'E.D.S. qui sont reliés à un O.F.D. dont les coefficients sont discontinus. Dans le cas unidimensionnel et lorsque l'O.F.D. présente un coefficient ne possédant qu'une seule discontinuité, une généralisation de la formule de Feynman-Kac nous permet de proposer un schéma naturel de discrétisation dont nous analysons la vitesse de convergence faible pour une classe de fonctions test régulières.

Il s'avère que l'analyse des transformations simples du Mouvement Brownien Asymétrique (M.B.A.) (régularisation, changement d'échelle, de temps, etc.) fournit une approche intéressante pour étudier les problèmes liés à la présence des discontinuités. Cette approche nous permet de proposer un nouvel algorithme de simulation dont nous étudions l'erreur.

Grâce à la théorie des formes de Dirichlet nous exhibons une formule de représentation pour les solutions du problème elliptique avec conditions de Neumann dans un domaine borné en dimension quelconque. Dans le cas unidimensionnel, le processus sous-jacent appartient alors à une certaine classe d'E.D.S. doublement réfléchies dont nous étudions les conditions d'existence et d'unicité. Nous proposons également des estimateurs pour certains paramètres reliés aux assymétries intervenant dans ces modèles.