



**HAL**  
open science

# Localisation faible de la lumière par un gaz d'atomes froids en présence d'un champ magnétique

Olivier Sigwarth

► **To cite this version:**

Olivier Sigwarth. Localisation faible de la lumière par un gaz d'atomes froids en présence d'un champ magnétique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT: . tel-00006473v2

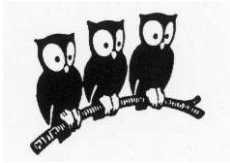
**HAL Id: tel-00006473**

**<https://theses.hal.science/tel-00006473v2>**

Submitted on 16 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE KASTLER-BROSSEL

**THESE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITE PARIS 6**

**Spécialité**

Physique Théorique

**Présentée par**

Olivier SIGWARTH

Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Localisation faible de la lumière par un gaz d'atomes  
froids en présence d'un champ magnétique

soutenue le 12 juillet 2004  
devant le jury composé de :

M. Dominique DELANDE	.....	Directeur de thèse
Mme Claire LHUILLIER	.....	Présidente du jury
M. Georg MARET	.....	Rapporteur
M. Gilles MONTAMBAUX	.....	Examineur
M. Bart van TIGGELEN	.....	Rapporteur

---

## Résumé

Cette thèse porte sur la localisation faible de la lumière par un gaz d'atomes froids en présence d'un champ magnétique. Plus précisément, elle est consacrée à l'augmentation cohérente de l'intensité diffuse dans la direction arrière, due à l'interférence entre chemins de diffusion multiple rencontrant les mêmes diffuseurs dans l'ordre inverse. Nous présentons des résultats théoriques rendant compte d'observations expérimentales récentes sur la forme et l'amplitude du profil d'intensité. En particulier, nous montrons qu'un champ magnétique peut en augmenter l'amplitude si les atomes possèdent un niveau fondamental dégénéré, à l'opposé de ce qui se produit pour des diffuseurs classiques. Nous discutons l'intérêt de ce résultat en vue de la localisation forte de la lumière.

## Abstract

This thesis addresses weak localization of light from a cold atomic cloud in the presence of a magnetic field. More precisely, it is devoted to the coherent enhancement of the backscattered intensity which is due to the interference between scattering paths visiting the same scatterers in reversed order. We show theoretical results accounting for recent experimental results on the shape and height of the intensity profile. In particular, applying a magnetic field can increase its amplitude when the atoms have a degenerate ground state, in sharp contrast with classical scatterers. We discuss the usefulness of this result in the perspective of strong localization of light.

---

*Edel sei der Mensch,  
Hilfreich und gut!  
Goethe, Das Göttliche*

## Remerciements

En commençant ce travail, mes premières lectures furent les deux thèses, fraîchement soutenues, de Thibaut Jonckheere et Cord Müller. Chacune contenait une liste de remerciements, dont la longueur contredisait ma courte expérience de la recherche en physique théorique. J'avais en tête l'image d'un travail essentiellement solitaire, bénéficiant à l'occasion de l'intérêt que quelques personnes voulaient bien lui porter. Presque trois ans après, il s'avère que ces "quelques" personnes sont nombreuses, et que leur contribution s'est avérée parfois cruciale.

Mes remerciements vont en premier lieu à Dominique Delande, qui a encadré ma thèse avec beaucoup de compétence et une grande disponibilité. Il a beaucoup fait pour que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions, et je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Georg Maret et Bart van Tiggelen qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, malgré leurs nombreuses occupations. Je remercie également Claire Lhuillier et Gilles Montambaux pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Je voudrais exprimer ma gratitude aux enseignants dont les cours m'ont fait découvrir les beautés de la physique, et le plaisir qu'on peut prendre à l'étudier : Serge Le Goff tout d'abord, puis René-Jean Champeau, Bernard Jancovici et Nicolas Pavloff, et un peu plus tard Bart van Tiggelen.

Je suis très reconnaissant à Nicolas Pavloff et Oriol Bohigas pour leurs conseils alors que je cherchais un sujet de thèse, et qui m'ont -entre autre- signalé l'équipe de Dominique.

Je tiens à remercier tous les membres de cette équipe, Thomas Wellens, Riccardo Sapienza, et plus particulièrement Benoit Grémaud. Durant mon monitorat à l'Université d'Evry, j'ai été encadré par Nicolas Billy et Laurent Hilico, et j'ai beaucoup apprécié de travailler en compagnie de Jean-Philippe Karr et de Senem Kilic.

Lorsque j'ai commencé ma thèse, j'ai pu bénéficier des lumières de Thibaut Jonckheere.

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué en collaboration étroite avec le groupe "Atomes Froids" de l'Institut Non-Linéaire de Nice. Je remercie en particulier Christian Miniatura, qui m'a mis plusieurs fois sur la

---

bonne piste alors que j'étais un peu perdu. Un grand merci également à Guillaume Labeyrie, qui a non seulement effectué toutes les expériences en présence d'un champ magnétiques rapportées dans cette thèse, mais a aussi détecté une erreur importante dans mes simulations numériques grâce à son sens physique et à sa persévérance. Je remercie aussi Robin Kaiser et David Wilkowski, ainsi que Yannick Bidet et Thierry Chanelière. Cette thèse a également bénéficié d'une collaboration avec Cord Müller et Robert Khun. Je remercie Predrag Cvitanovic de son invitation au Georgia Tech, pour un projet très différent de cette thèse. Vielen Dank an Thomas Bartsch für seine Gastfreundschaft, und für die Entdeckung des "Shakespeare Tavern". I also thank Turgay Uzer, Slaven Peles and Luz Vela for their warm welcome. Cette thèse a également eu des aspects techniques et administratifs. Grâce à Serge Begon, Corinne Poisson et Benoit Grémaud, les problèmes informatiques ont été surmontés. Les aspects administratifs ont été gérés avec beaucoup de compétence par Monique Bonnamy, Laetitia Morel et Christelle Sansa. Qu'ils soient tous ici chaleureusement remerciés.

Je remercie enfin mes amis et ma famille.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>2</b>
<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Diffusion multiple et rétrodiffusion cohérente</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Diffusion multiple, milieu effectif . . . . .	14
1.2.1 Libre parcours moyen . . . . .	15
1.2.2 Milieu effectif . . . . .	15
1.2.3 Approximation de diffusion . . . . .	16
1.3 Désordre et interférences . . . . .	18
1.3.1 Localisation d'Anderson . . . . .	18
1.3.2 Localisation faible . . . . .	19
1.3.3 Longueurs caractéristiques . . . . .	20
1.4 Rétrodiffusion cohérente . . . . .	21
1.4.1 Speckle et moyenne de configuration . . . . .	21
1.4.2 Principe de la rétrodiffusion cohérente . . . . .	21
1.4.3 Interférence à deux ondes . . . . .	24
1.4.4 Réciprocité et facteur d'augmentation . . . . .	26
1.4.5 Diffusion récurrente . . . . .	26
1.4.6 Diffusion simple . . . . .	26
1.4.7 Augmentation incohérente de l'intensité rétrodiffusée . . . . .	29
1.5 Rétrodiffusion cohérente de la lumière . . . . .	30
1.5.1 Canaux de polarisation . . . . .	30
1.5.2 Théorème de réciprocité . . . . .	31
1.5.3 Diffusion simple . . . . .	31
1.5.4 Résultats expérimentaux . . . . .	31
1.6 Cône CBS et champ magnétique . . . . .	33
1.6.1 Effet Faraday . . . . .	34

1.6.2	Impact sur le cône de rétrodiffusion . . . . .	35
1.6.3	Effet Cotton-Mouton . . . . .	38
1.6.4	Champ magnétique et localisation faible . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Atomes froids et rétrodiffusion cohérente</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	Pourquoi des atomes froids comme diffuseurs? . . . . .	42
2.2.1	Atomes froids et localisation d'Anderson . . . . .	42
2.2.2	Avantages des atomes sur les diffuseurs classiques . . . . .	43
2.2.3	Température des atomes . . . . .	43
2.3	Résultats expérimentaux . . . . .	44
2.3.1	Structures fine et hyperfine du spectre atomique . . . . .	44
2.3.2	Principe des expériences . . . . .	45
2.4	Modélisation théorique . . . . .	47
2.4.1	Diffusion par un atome . . . . .	50
2.4.2	Propagation d'un photon dans le nuage atomique . . . . .	58
2.4.3	Cône de rétrodiffusion cohérente . . . . .	64
2.5	Mécanismes de réduction des interférences . . . . .	73
2.5.1	Réciprocité . . . . .	73
2.5.2	Exemple illustrant $\mathcal{A}_{dir} \neq \mathcal{A}_{rev}$ . . . . .	73
2.5.3	Influence des transitions Raman . . . . .	74
2.5.4	Composante antisymétrique du tenseur de diffusion . . . . .	75
2.5.5	Peut-on restaurer les interférences? . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Diffusion de la lumière par un atome en présence d'un champ magnétique</b>	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	79
3.2	Opérateur de diffusion . . . . .	80
3.2.1	Hamiltonien du système . . . . .	80
3.2.2	Propagateur de l'état atomique excité . . . . .	81
3.2.3	Amplitude de diffusion . . . . .	81
3.2.4	Section efficace de diffusion . . . . .	82
3.2.5	Influence du pompage optique . . . . .	85
3.3	Section efficace différentielle . . . . .	87
3.3.1	Cas $J = 0$ ou $g = g_e$ . . . . .	90
3.3.2	Cas général . . . . .	90
3.3.3	Diagrammes de rayonnement . . . . .	91
3.3.4	Effet Hall photonique . . . . .	93
3.4	Rotation du dipôle . . . . .	95
3.4.1	Paramètres de Stokes . . . . .	96
3.4.2	Rotation du dipôle pour le $^{85}\text{Rb}$ . . . . .	97

<b>4</b>	<b>Propagation cohérente de la lumière dans un gaz d'atomes froids en présence d'un champ magnétique</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction . . . . .	99
4.2	Fonction de Green d'un photon . . . . .	100
4.2.1	Modes propres de propagation . . . . .	101
4.2.2	Indices du milieu . . . . .	103
4.2.3	Vitesse de groupe et biréfringence . . . . .	104
4.3	Propagateur du photon dans l'espace réel . . . . .	107
4.4	Effets magnéto-optiques . . . . .	109
4.4.1	Effet Faraday . . . . .	109
4.4.2	Effet Cotton-Mouton . . . . .	110
4.4.3	Cas général . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Calcul du cône de rétrodiffusion cohérente</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Intensités cohérente et incohérente . . . . .	114
5.2.1	Amplitudes des chemins direct et renversé . . . . .	114
5.2.2	Intensité incohérente . . . . .	115
5.2.3	Intensité cohérente . . . . .	116
5.2.4	Simulations Monte-Carlo . . . . .	117
5.3	Un exemple simple : $J = 0$ et $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}_{in}$ . . . . .	119
5.3.1	Diffusion simple . . . . .	120
5.3.2	Diffusion double : intensité incohérente . . . . .	121
5.3.3	Diffusion double : intensité cohérente . . . . .	125
5.3.4	Comparaison avec les diffuseurs classiques . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Augmentation de la rétrodiffusion cohérente avec un champ magnétique</b>	<b>133</b>
6.1	Introduction . . . . .	133
6.2	Choix de la configuration . . . . .	134
6.3	Etude à fort champ magnétique . . . . .	135
6.4	Étude à faible champ magnétique . . . . .	135
6.5	Simulations Monte-Carlo . . . . .	137
6.5.1	Influence des effets magnéto-optiques . . . . .	140
6.5.2	Influence des ordres élevés de diffusion . . . . .	141
6.5.3	Interprétation en termes de longueur de cohérence de phase . . . . .	142
6.5.4	Influence de la largeur spectrale de la sonde . . . . .	143
6.5.5	Transmission cohérente du nuage atomique . . . . .	144
6.6	Liens avec la physique de la matière condensée . . . . .	145



<b>7 Modifications de la forme du cône CBS par un champ magnétique</b>	<b>147</b>
7.1 Introduction . . . . .	147
7.2 Allure du cône en l'absence de champ magnétique . . . . .	148
7.3 Impact de la rotation du dipôle sur le cône CBS . . . . .	150
7.4 Impact du désaccord de la sonde . . . . .	155
<b>8 Conclusion et perspectives</b>	<b>159</b>
8.1 Localisation forte de la lumière . . . . .	159
8.1.1 Lien avec la restauration de la localisation faible . . . . .	159
8.1.2 Influence de la vitesse résiduelle des atomes . . . . .	160
8.1.3 Influence de l'intensité lumineuse . . . . .	161
8.1.4 Transition 0 – 1 des atomes de $^{88}\text{Sr}$ . . . . .	162
8.2 Localisation d'ondes de matière par un potentiel lumineux désordonné . . . . .	162
<b>A Opérateurs tensoriels irréductibles</b>	<b>165</b>
A.1 Définition et propriétés fondamentales . . . . .	165
A.2 Produits tensoriels d'opérateurs tensoriels irréductibles . . . . .	166
A.3 Coefficients de Clebsch-Gordan . . . . .	167
A.4 Définition des symboles $6j$ . . . . .	169
<b>B Développement de <math>\frac{d\sigma}{d\Omega}</math> en puissances de <math>(g - g_e)</math></b>	<b>171</b>
<b>C Restauration du contraste des interférences à grand champ magnétique</b>	<b>175</b>
C.1 Diffusion par un atome . . . . .	176
C.2 Propagateur du photon . . . . .	176
C.3 Restauration du contraste . . . . .	177
<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

# Introduction

Le thème général de cette thèse est la diffusion multiple d'une onde par un milieu désordonné. Derrière cette appellation technique se cachent des situations familières. Nous sommes entourés d'ondes en permanence : la lumière du soleil, les sons, les ondes électromagnétiques employées pour les télécommunications... et les milieux désordonnés dans lesquels elles se propagent ne font pas défaut : un nuage composé de gouttelettes d'eau, les immeubles d'une ville pour les ondes émises par un téléphone portable, ou encore la croûte terrestre pour les ondes sismiques. Des exemples moins communs, à part pour les physiciens, sont les électrons et les atomes qui peuvent aussi se comporter comme des ondes dans certaines circonstances, et être diffusés.

Après avoir traversé un milieu désordonné, une onde est déformée mais contient de l'information sur le milieu qu'elle a traversé. Ainsi, l'analyse de la lumière qui nous parvient d'étoiles lointaines nous renseigne sur la matière qui se trouve entre elles et nous. La diffusion multiple présente un grand intérêt pour l'étude de matériaux inertes ou vivants. D'autre part, la connaissance préalable du milieu diffusant nous permet d'observer les propriétés de l'onde qui s'y propage. En particulier, il est possible de diminuer, voire d'annuler la transmission de l'onde vers l'avant. Ceci est possible lorsque différents chemins de diffusion interfèrent destructivement partout, sauf dans certaines régions à l'intérieur du milieu diffusant (régime de localisation forte). Lorsqu'une onde de matière électronique se propage dans un métal, on peut ainsi observer une transition conducteur électrique-isolant [1]. Cet effet repose sur le caractère ondulatoire de l'électron, et sa mise en évidence expérimentale est compliquée, entre autre par la très courte durée de cohérence de celui-ci. Cependant, il doit être observable avec n'importe quel type d'onde. En particulier les ondes lumineuses [2], pour lesquelles aucune observation expérimentale non-ambigüe n'a encore été rapportée [3, 4, 5]. Les gaz d'atomes froids constituent de bons candidats pour une telle observation, qui nécessite que la lumière ait une longueur d'onde et un libre parcours moyen comparables. Les techniques expérimentales actuelles font

que cette condition peut être réalisée lorsque les atomes sont au voisinage de la condensation de Bose-Einstein. Malgré l'existence de résultats théoriques encourageants [6], l'observation expérimentale de la localisation forte de la lumière par un gaz d'atomes froids est encore problématique. En particulier, la structure interne des atomes, c'est à dire l'existence de sous-niveaux Zeeman dégénérés et la possibilité d'effectuer des transitions entre ces différents sous-niveaux, pourrait diminuer la force des interférences. Ceci a déjà été observé dans le régime de localisation faible [7, 8], où le libre parcours moyen est grand devant la longueur d'onde, mais où les interférences entre ondes visitant les mêmes diffuseurs en sens inverse subsistent. Elles se manifestent d'une part par la réduction de la constante de diffusion, et d'autre part par l'augmentation cohérente de l'intensité diffusée dans la direction arrière. L'impact observé de la structure interne des atomes concerne cette dernière : l'augmentation est beaucoup moins importante que prévu.

Dans le présent travail de thèse, nous montrons comment l'application d'un champ magnétique externe, brisant par effet Zeeman la dégénérescence du niveau fondamental des atomes, permet de restaurer un contraste optimal dans le régime de localisation faible. Ce résultat est d'autant plus spectaculaire que l'application d'un champ magnétique est un moyen connu de *réduire* le contraste des interférences avec des diffuseurs classiques [9, 10].

Ce travail de thèse se place dans le contexte émergent de la physique mésoscopique réalisée avec des atomes froids. De nombreux phénomènes intéressants liés à la diffusion multiple d'ondes électroniques sur des impuretés ont été observés dans des matériaux conducteurs. Mais il est difficile de contrôler l'état des électrons dans le matériaux ou leurs interactions mutuelles. D'autre part, il n'y a pas d'accès direct au phénomène se produisant à l'intérieur du matériau. Au contraire, l'utilisation d'atomes froids permet d'avoir un meilleur contrôle. Ils peuvent être utilisés soit comme onde, soit comme diffuseurs, la lumière jouant alors le rôle de milieu diffusant ou d'onde diffusée. Les interactions interatomiques et lumière-atomes sont bien connues, et il est possible d'avoir une information sur les phénomènes se produisant à l'intérieur du nuage atomique en analysant la lumière qu'il émet. De plus, les échelles de temps auxquelles ils se produisent sont plus favorables avec des atomes froids (durée de vie d'un état excité  $\sim 10^{-8}$  s) qu'avec des électrons ( $\sim 10^{-14}$  s).

Le chapitre 1 est une introduction générale à la diffusion multiple et à la rétrodiffusion cohérente. Dans le chapitre 2, nous abordons le cas particulier des diffuseurs atomiques. Nous présentons l'intérêt d'appliquer alors un champ magnétique extérieur. La partie originale de cette thèse est contenue dans les chapitres 3 à 8. Les chapitres 3 et 4 présentent les modifications

## INTRODUCTION

---

apportées par le champ magnétique sur les propriétés de diffusion et de propagation de la lumière dans le gaz d'atomes froids. Au chapitre suivant, nous indiquons comment calculer le contraste des interférences en présence du champ magnétique. Le chapitre 6 s'appuie sur les trois chapitres précédents pour montrer qu'il est possible de redonner à ce contraste sa valeur optimale. C'est le principal résultat de cette thèse. Le chapitre 7 discute d'autres effets du champ magnétique. Enfin, le dernier chapitre conclut ce travail et en présente quelques ouvertures, notamment en vue de l'observation de la localisation forte de la lumière.



# Chapitre 1

## Diffusion multiple et rétrodiffusion cohérente

*ceux qui sont guidés par les lumières de l'art  
connaissent la cause des choses [...]  
Aristote, Métaphysique*

### 1.1 Introduction

L'objet de ce premier chapitre est de présenter des notions générales sur la diffusion multiple d'une onde dans un milieu désordonné et la rétrodiffusion cohérente. On introduit le concept important de milieu effectif, qui sera traité plus en détail au chapitre 2, et celui de libre parcours moyen qui lui est lié. Ensuite, le transport d'ondes en milieu désordonné est brièvement présenté, en insistant sur le phénomène de localisation : de manière contre-intuitive, le désordre ne brouille pas les interférences. Celles-ci réduisent (localisation faible), voire annulent (localisation forte) la constante de diffusion. La rétrodiffusion cohérente est une manifestation de la localisation faible. Elle se traduit par une augmentation cohérente de l'intensité diffusée vers l'arrière. Nous la présentons tout d'abord de manière générale, puis plus spécifiquement pour les ondes lumineuses. Elle sera parfois désignée par l'acronyme CBS, venant de l'anglais "*coherent backscattering*".

La diffusion dans un milieu désordonné peut être décrite à trois niveaux. Le premier, qui est le plus familier, est le niveau macroscopique. Avec une bonne approximation, l'intensité associée à l'onde effectue un mouvement diffusif (marche au hasard). Au niveau mésoscopique, on tient compte des interférences entre chemins de diffusion. Les deux éléments importants qui

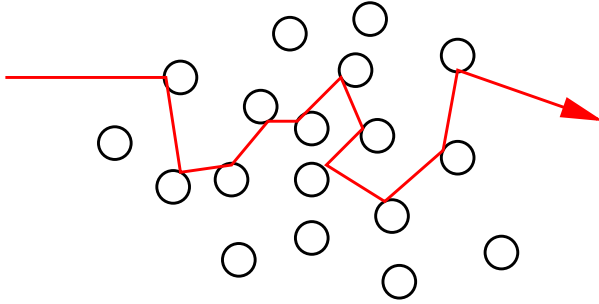


FIG. 1.1 – Exemple d'un chemin de diffusion multiple

entrent en jeu sont la diffusion de l'onde par un diffuseur (à partir du chapitre 2, ils seront physiquement représentés par des atomes), et la propagation entre deux diffuseurs. Enfin, au niveau microscopique, le comportement de l'onde est entièrement décrit par son interaction avec les composants élémentaires du milieu diffusant. Dans cette thèse, la démarche suivie consiste à s'appuyer sur les propriétés microscopiques de l'onde et du milieu diffusant pour obtenir une description mésoscopique ou macroscopique de la propagation de l'onde.

## 1.2 Diffusion multiple, milieu effectif

Lorsque une onde se propage dans un milieu matériel, elle interagit avec lui et s'en trouve modifiée. Cette interaction peut être décrite en terme de diffusion : l'onde rencontre un constituant élémentaire du milieu (atome, grain d'une poudre, impureté ou défaut du réseau cristallin, variation de densité...) appelé diffuseur. Si l'onde incidente rencontre plusieurs diffuseurs, l'onde sortante résulte de l'interférence de toutes les ondes diffusées. L'onde sortante peut alors s'écrire comme la somme d'ondes partielles. Pour chacune de ces ondes partielles, on peut distinguer le nombre de diffuseurs qu'elle a rencontré, appelé ordre de diffusion. L'intensité de l'onde sortante est :

$$I = \left| \sum_p a_p^{(0)} + \sum_p a_p^{(1)} + \dots + \sum_p a_p^{(n)} + \dots \right|^2 \quad (1.1)$$

où  $a_p^{(n)}$  représente l'amplitude d'une onde partielle diffusée  $n$  fois. Un chemin de diffusions lui est associé, qui est constitué des  $n$  diffuseurs dans l'ordre de visite par l'onde. On dit que les termes avec  $n = 1$  contribuent à la diffusion simple, et ceux avec  $n \geq 2$  à la diffusion multiple. Lorsque la contribution

des termes  $n \geq 2$  est au moins comparable à celle du terme  $n = 1$ , on se trouve dans le régime de diffusion multiple.

### 1.2.1 Libre parcours moyen

Une grandeur très importante pour décrire la propagation d'une onde dans un milieu diffusant est le libre parcours moyen de diffusion  $\ell$  : c'est la distance moyenne parcourue par l'onde entre deux évènements de diffusion<sup>1</sup>. Si  $n_d$  est la densité volumique des diffuseurs, et  $\sigma_d$  leur section efficace de diffusion, alors

$$\ell = \frac{1}{n_d \sigma_d} \quad (1.2)$$

La notion de libre parcours moyen s'effondre si  $n_d$  varie significativement à l'échelle de la longueur d'onde.

Lorsque la taille  $L$  du milieu diffusant est grande devant  $\ell$ , l'onde peut subir de nombreux évènements de diffusion : on se trouve alors dans le régime de diffusion multiple. Pour les ondes lumineuses, on dit que le milieu est optiquement épais. Au contraire, si  $\ell$  est petit devant  $L$ , le milieu est dit optiquement mince. Dans le cas d'une densité uniforme de diffuseurs, le rapport

$$b = \frac{L}{\ell} \quad (1.3)$$

mesure l'épaisseur optique du milieu.

### 1.2.2 Milieu effectif

Dans l'équation (1.1), si on calcule les amplitudes  $a_p^{(n)}$  en supposant que l'onde se propage dans un milieu homogène entre deux diffuseurs, on peut réarranger l'ordre des termes. Pour cela, on utilise le fait qu'il est impossible de distinguer une onde partielle qui n'a jamais été diffusée, d'une autre qui a été diffusée dans le mode incident après un chemin de diffusion quelconque. Additionner les amplitudes de ces ondes partielles est équivalent à ne considérer qu'une seule onde, non diffusée, se propageant avec une atténuation exponentielle. On dit qu'elle se propage dans un *milieu effectif*, incluant l'action des diffuseurs. Cette resommation partielle s'applique également à la propagation entre deux diffuseurs. Si le milieu diffusant est d'extension infinie, certains termes de (1.1) présentent des divergences, qui doivent se compenser. L'utilisation d'un milieu effectif est alors un moyen efficace et physiquement justifié de faire converger (1.1), bien que manquant

---

<sup>1</sup>Il est possible de définir d'autres libres parcours moyens : de transport, d'absorption. . .



de rigueur mathématique.

L'atténuation exponentielle par le milieu effectif traduit la diffusion d'une partie de l'onde dans d'autres modes que le mode cohérent. La longueur caractéristique d'extinction est alors le libre parcours moyen  $\ell$ . Une autre source d'extinction est l'absorption, qui traduit que l'interaction avec les diffuseurs transforme l'énergie de l'onde sous une autre forme. Par exemple, pour une onde électromagnétique, il peut s'agir d'un changement de fréquence ou d'une transformation en énergie mécanique du diffuseur. Nous n'étudierons que des systèmes dans lesquels l'absorption est négligeable.

### 1.2.3 Approximation de diffusion

Lorsque le milieu diffusant est optiquement épais et que l'onde subit un grand nombre de diffusions, un chemin de diffusion peut être décrit comme un chemin de marche au hasard entre les diffuseurs (figure 1.1). La diffusion multiple est alors traitée dans le cadre de la théorie de la diffusion <sup>2</sup>. L'intensité  $I$  de l'onde obéit alors à l'équation de diffusion [11]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D\Delta I \tag{1.4}$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien.  $D$  est appelée constante de diffusion, et relie les variations spatiales de  $I$  à ses variations temporelles. Cette équation ne décrit qu'approximativement la propagation de l'intensité, avec d'autant plus de précision que les chemins de diffusion sont longs.

Dans le cadre de cette théorie, on peut montrer les résultats suivants, qui nous serviront ultérieurement :

- Soit  $s$  la longueur totale d'un chemin de diffusion.  $N = s/\ell$  est son ordre de diffusion. La distance entre les deux diffuseurs extrêmes est de l'ordre de  $N^{1/2}\ell$ .
- Si le milieu diffusant est semi-infini, l'intensité totale des chemins de longueur totale  $s$  commençant et finissant à une distance  $\ell$  du bord est proportionnelle à  $s^{-3/2} \propto N^{-3/2}$ .
- Soit un milieu diffusant de longueur  $L$  possédant deux faces planes en  $z = 0$  et  $z = L$ . Une onde entrant dans le milieu en  $z = 0$  a une probabilité proportionnelle à  $1/L$  d'en sortir en  $z = L$ . Le coefficient

---

<sup>2</sup>La langue française utilise le même mot "diffusion" pour désigner deux choses différentes : l'évènement de diffusion (*scattering* en anglais) et l'évolution d'une particule effectuant une marche au hasard (*diffusion* en anglais). Cela vient de ce que le mouvement brownien d'une particule est expliqué par des diffusions successives de celle-ci. Si un ensemble de particules a un mouvement diffusif, les grandeurs qu'elles transportent (charge électrique, énergie cinétique. . . ) diffusent aussi.

## 1.2. DIFFUSION MULTIPLE, MILIEU EFFECTIF

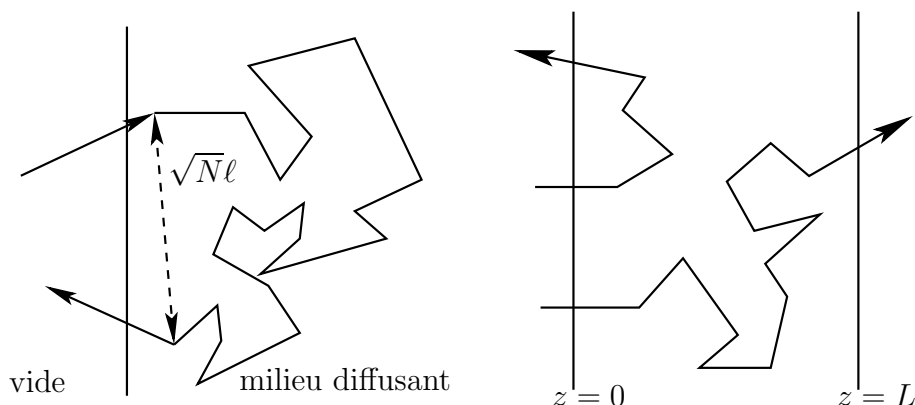


FIG. 1.2 – Approximation de diffusion. A gauche : un chemin de diffusion multiple. Si  $N$  est grand, la distance entre les diffuseurs extrêmes varie comme  $\sqrt{N}$ . A droite : dans un milieu de longueur  $L \gg \ell$ , l'onde entrant en  $z = 0$  a une plus forte probabilité de ressortir par la même face que par la face opposée. Le coefficient de transmission en intensité est proportionnel à  $1/L$ .

de transmission en intensité est donc inversement proportionnel à  $L$ . Ce résultat est bien connu en électricité : à température ordinaire, la conductance finie d'un métal, due au mouvement diffusif des électrons, varie aussi en  $1/L$ . C'est la loi d'Ohm.

On peut exprimer  $D$  en fonction du libre parcours moyen de diffusion et de la vitesse de propagation de l'énergie  $v_E$  :

$$D = \frac{1}{3}v_E\ell \quad (1.5)$$

Voyons sur un exemple l'impact de la valeur de  $D$  sur la propagation de la lumière. Imaginons qu'on ait créé une étincelle dans un milieu matériel. Si  $D$  est grande, cela veut dire que  $v_E$  et  $\ell$  le sont aussi et l'intensité lumineuse peut quitter rapidement la région où l'étincelle a été créée, en diffusant dans tout le matériau. Au contraire, si  $D$  est petite, l'intensité lumineuse mettra plus de temps à quitter sa région initiale. Dans la limite où  $D$  tend vers 0, l'intensité lumineuse ne diffuse plus et ne peut quitter l'endroit où elle a été créée que par un processus plus lent qu'une marche au hasard.

Dans le cadre de la théorie générale des phénomènes de transport, il est possible de décrire la propagation de l'intensité au-delà de l'approximation de diffusion [12, 13, 14, 15, 16].

## 1.3 Désordre et interférences

Dans un milieu périodique, les effets d'interférences jouent un rôle essentiel pour la propagation d'une onde. La diffraction de la lumière par un réseau, ou la théorie de Bloch d'un électron dans un cristal parfait en sont des exemples bien connus.

Lorsque le milieu est désordonné, ce n'est plus aussi simple. Dans la plupart des cas, l'accès à la connaissance détaillée du milieu est soit impossible, soit tellement difficile que les physiciens doivent se contenter d'en décrire les propriétés statistiques. Cela revient à étudier l'influence *en moyenne* des diffuseurs sur l'onde : le modèle physique inclut les diffuseurs et leurs propriétés intrinsèques, mais effectue une moyenne sur leurs degrés de liberté externes (position, vitesse). Or, moyenniser sur toutes les positions des diffuseurs revient à faire disparaître les interférences, car on superpose alors des figures d'interférences avec des interférences différents. Plusieurs théories de transport existent, dans lesquelles les effets d'interférences sont négligés. Par exemple, le modèle de Drude [17] pour la conduction électronique, ou la théorie du transfert radiatif [18] pour le transport de l'intensité lumineuse rendent compte avec succès d'un grand nombre d'observations.

### 1.3.1 Localisation d'Anderson

Mais en 1958, P. W. Anderson montre que dans un milieu suffisamment désordonné, les effets d'interférences peuvent être tellement forts qu'ils empêchent la propagation de l'onde [1] : celle-ci est *localisée* dans certaines régions à l'intérieur du milieu, et à l'extérieur desquelles son intensité décroît exponentiellement. Les interférences sont destructives presque partout, sauf dans ces régions, et la constante de diffusion de l'intensité est nulle. Cet effet porte le nom de localisation forte ou localisation d'Anderson. Il a été observé avec des ondes de matière électronique dans des semi-conducteurs [16, 19] - le désordre étant créé par des impuretés - sous forme d'une transition métal-isolant<sup>3</sup>.

Pour les systèmes tridimensionnels, l'apparition d'états localisés est donnée par le critère de Ioffe-Regel [21] :

$$k\ell \simeq 1 \tag{1.6}$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde. Cela signifie que la localisation d'Anderson se produit lorsque le libre parcours moyen est comparable à la longueur d'onde

---

<sup>3</sup>Il existe un autre mécanisme de localisation, dû à Mott, basé sur les interactions entre électrons [20]. Il intervient aussi dans ce cas.

### 1.3. DÉSORDRE ET INTERFÉRENCES

---

$$\lambda = 2\pi/k.$$

Aucune observation non-ambigüe de la localisation d'Anderson de la lumière n'a encore été rapportée [3, 4, 5]. Il y a deux raisons à cela : la première est qu'il est difficile de trouver ou de construire un milieu désordonné pour lequel le critère de Ioffe-Regel est vérifié. La deuxième, après que la première ait été surmontée, est qu'on caractérise la localisation d'Anderson par une transmission en intensité - tous modes confondus - qui décroît exponentiellement avec la longueur du milieu traversé<sup>4</sup>, qu'il est difficile de distinguer de l'absorption. Le choix d'un nuage d'atomes froids comme milieu diffusant permet de surmonter ces deux obstacles, mais d'autres difficultés apparaissent, qui seront discutées au chapitre 8.

#### 1.3.2 Localisation faible

Un régime plus facile d'accès est celui dit de localisation faible [22], caractérisé par

$$k\ell \gg 1 \quad (1.7)$$

Même sous cette condition, les interférences ne sont pas toutes détruites par la moyenne de configuration : les chemins de diffusion visitant les mêmes diffuseurs dans l'ordre inverse continuent d'interférer. En effet, la différence de phase entre deux tels chemins est :

$$\delta\phi = (\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1) \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{r}_N$  et  $\mathbf{r}_1$  sont les vecteurs position du dernier et du premier diffuseur, et  $\mathbf{k}_{in}$  et  $\mathbf{k}_{out}$  sont les vecteurs d'onde incident et sortant (Fig. 1.3).

Si les deux chemins sont fermés,  $\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ , il n'y a aucune source de déphasage entre-eux<sup>5</sup>. Ils interfèrent constructivement et contribuent à l'augmentation cohérente de la probabilité de retour à l'origine qui se traduit par une diminution de la constante de diffusion, et par conséquent de la transmission vers l'avant (d'où le nom de localisation faible). La seule condition pour que les interférences aient lieu est que la taille du milieu  $L$  soit inférieure à la longueur de cohérence  $\ell_\phi$  et/ou d'absorption  $\ell_a$  de l'onde.

Une observation récente de ce phénomène a été réalisée sur des ondes sismiques dans le Massif Central[23] : une onde sismique est créée en un point, et après un temps  $\tau$ , l'intensité de l'onde y est deux fois plus élevée qu'en des

---

<sup>4</sup>Dans le régime non-localisé, la loi d'Ohm s'applique : la transmission est inversement proportionnelle à la longueur du milieu.

<sup>5</sup>En fait, les deux chemins ne se croisent pas exactement sur le premier diffuseur. L'existence d'un petit volume entre celui-ci et le point de croisement entraîne que l'effet de localisation faible est très petit, d'ordre  $1/(k\ell)^2$  [22].

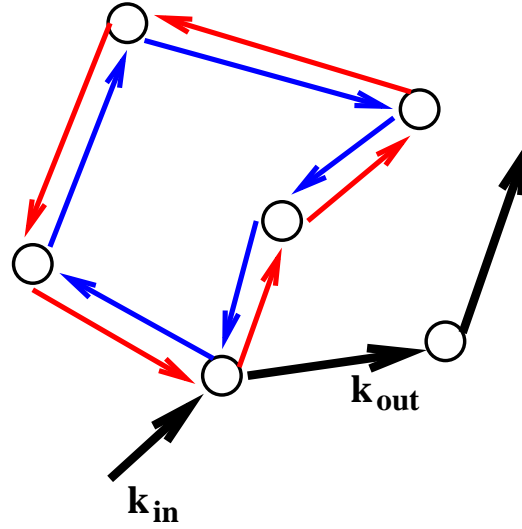


FIG. 1.3 – Les deux chemins contrapropageants interfèrent constructivement et augmentent la probabilité de retour à l’origine de l’onde. Par conséquent, la constante de diffusion est diminuée.

points distants de plus d’une demi longueur d’onde. La mesure de  $\tau$  fournit des informations sur  $\ell$  et sur la constante de diffusion.

### 1.3.3 Longueurs caractéristiques

Nous avons vu que différentes longueurs caractéristiques apparaissent dans le problème de diffusion multiple : la longueur d’onde  $\lambda$ , le libre parcours moyen  $\ell$ , la distance moyenne entre deux diffuseurs  $n_d^{-1/3}$ , la taille du système  $L$  et la longueur de cohérence ou d’absorption de l’onde  $\ell_{\phi,a}$ . Selon les valeurs qu’elles prennent les unes par rapport aux autres, on se trouve dans un régime différent. Dans toute la suite, nous nous placerons dans des conditions telles que :

$$\lambda \ll n_d^{-1/3} \ll \ell \ll L \ll \ell_{\phi,a} \quad (1.9)$$

Les deux inégalités à droite signifient qu’on considère le régime de diffusion multiple et qu’on ne néglige pas les interférences entre ondes partielles (ceci caractérise la physique mésoscopique). Les deux inégalités de gauche indiquent le régime de localisation faible, et que la distance moyenne entre deux diffuseurs est grande devant la longueur d’onde. Cette dernière hypothèse a une conséquence importante : deux chemins de diffusion visitant des diffuseurs différents ont une différence de phase  $\delta\phi \gg 2\pi$ . Lorsqu’on effectue la

## 1.4. RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

moyenne sur la position des diffuseurs (moyenne de configuration), le terme d'interférence entre ces deux chemins devient nul.

### 1.4 Rétrodiffusion cohérente

La rétrodiffusion cohérente est une manifestation de la localisation faible. Elle se traduit par l'augmentation cohérente de l'intensité diffusée dans la direction arrière.

#### 1.4.1 Speckle et moyenne de configuration

Lorsqu'on observe une onde diffusée par un milieu matériel fixe, on observe une figure de tavelures (speckle) due aux interférences entre tous les chemins de diffusion à l'intérieur du milieu. Si le milieu diffusant est un gaz ou un liquide, les diffuseurs se déplacent, et on peut observer le speckle à différents instants. La superposition de toutes ces observations correspond à l'intensité diffusée par le milieu après une moyenne sur la position des diffuseurs (intensité diffuse). Cette moyenne détruit les interférences entre chemins de diffusion différents, comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, mais les interférences entre chemins visitant les mêmes diffuseurs en sens inverse subsistent (figure 1.4).

#### 1.4.2 Principe de la rétrodiffusion cohérente

La figure 1.5 montre deux tels chemins : pour chacun d'eux, l'onde entre dans le milieu diffusant avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{in}$  et en ressort avec  $\mathbf{k}_{out}$ . La différence de phase entre eux est donnée par l'équation (1.8) : si  $\mathbf{k}_{out} = -\mathbf{k}_{in}$  alors  $\delta\phi$  est nul indépendamment de la position relative des diffuseurs. L'interférence entre ces deux chemins est constructive vers l'arrière et survit à la moyenne de configuration. Par contre, en dehors de la direction arrière,  $\delta\phi$  dépend de la position relative des deux diffuseurs aux extrémités des chemins et la moyenne de configuration brouille les interférences.

Autour de la direction arrière, on peut écrire l'intensité diffuse à l'aide des ondes partielles (en omettant l'ordre de diffusion) :

$$I = \left| \sum_p a_p \right|^2 \quad (1.10)$$

$$= \sum_p |a_p|^2 + \sum_{p,p' \neq p} a_p \overline{a_{p'}} \quad (1.11)$$

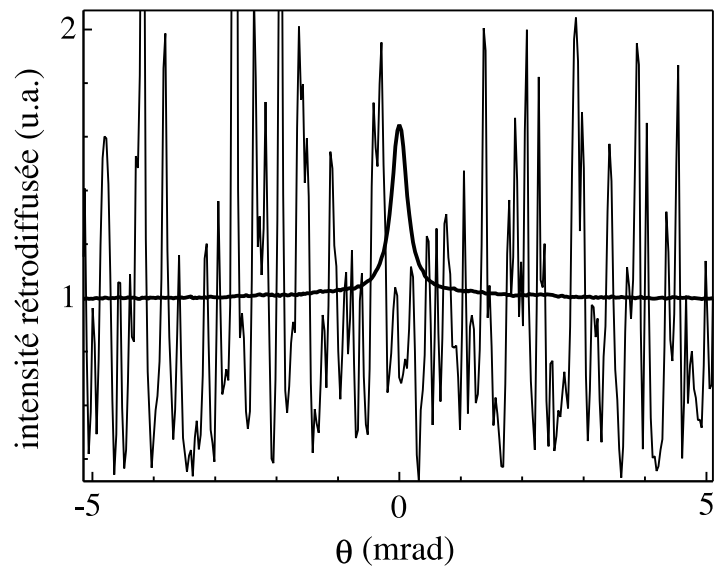


FIG. 1.4 – Observation de l'intensité autour de la direction de rétrodiffusion. Les deux courbes sont pour des ondes lumineuses diffusées par du téflon (Données : Groupe Atomes Froids, Institut Non Linéaire de Nice). La courbe présentant de nombreuses fluctuations est un enregistrement pour une position fixe des diffuseurs. Il s'agit d'une figure de speckle résultant des interférences de tous les chemins de diffusion. La deuxième courbe, beaucoup plus lisse, est la moyenne de plusieurs milliers de figures de speckle. On remarquera en particulier que son maximum ne coïncide pas avec un maximum de la courbe de speckle.

## 1.4. RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

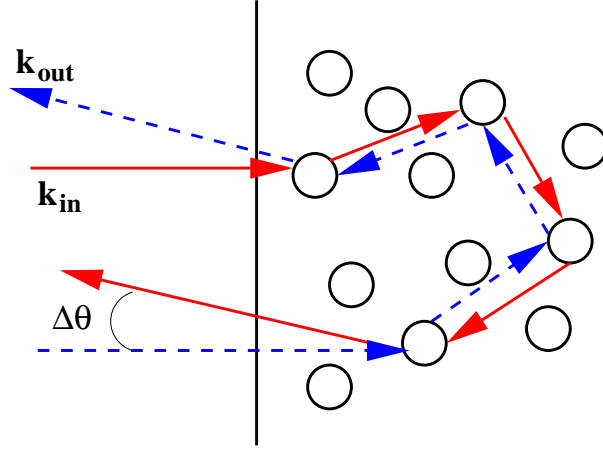


FIG. 1.5 – Deux chemins de diffusion visitant les mêmes diffuseurs interfèrent constructivement dans la direction arrière

où on a séparé la somme des intensités des ondes partielles, appelée intensité incohérente, des termes d'interférence. Ceux-ci contiennent deux contributions : celle où  $p'$  est le chemin renversé associé à  $p$ , et celle où  $p'$  et  $p$  visitent des diffuseurs différents :

$$I = \sum_p |a_p|^2 + \sum_p a_p \overline{a_{\bar{p}}} + \sum_{p, p' \notin \{p, \bar{p}\}} a_p \overline{a_{p'}} \quad (1.12)$$

où  $\bar{p}$  désigne le chemin renversé associé au chemin  $p$ . La figure 1.6 illustre ces trois contributions. Après la moyenne de configuration, seules les deux premières sont non-nulles. En effet, la distance entre deux diffuseurs appartenant au même chemin est comparable à  $\ell$ . La différence de phase entre chemins visitant des diffuseurs différents est donc de l'ordre de  $k\ell \gg 1$ . La moyenne de configuration annule donc leur interférence. Pour les chemins visitant les mêmes diffuseurs en sens inverse, la différence de phase (1.8) est d'ordre  $k\ell\Delta\theta$ . Nous en déduisons que la moyenne de configuration ne supprime pas leur interférence si

$$\Delta\theta \lesssim \frac{1}{k\ell} \quad (1.13)$$

Cette interférence qui subsiste provoque une augmentation de l'intensité diffuse autour de la direction arrière.



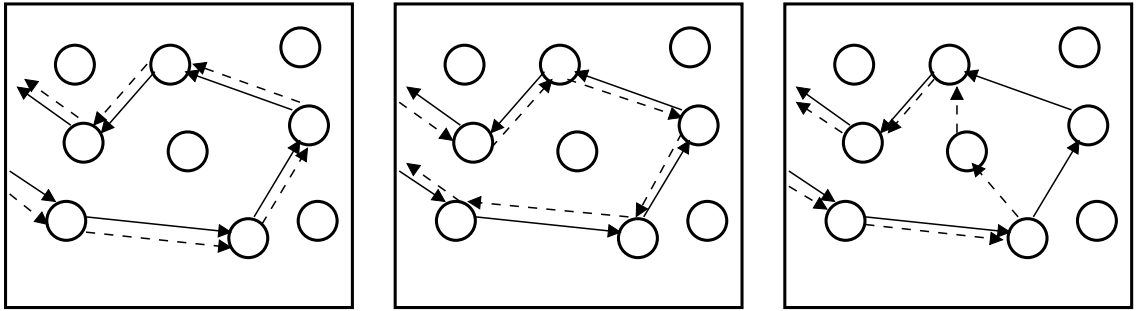


FIG. 1.6 – Les trois contributions à l'intensité diffuse vers l'arrière (la ligne pointillée représente l'amplitude complexe conjuguée associée au chemin) : l'intensité incohérente (à gauche), le terme d'interférence entre chemins renversés (milieu) et les autres termes d'interférences (à droite). Cette dernière contribution est annulée par la moyenne de configuration.

### 1.4.3 Interférence à deux ondes

Regardons de plus près la contribution d'un chemin de diffusion et du chemin renversé associé à l'intensité totale. On notera  $a_{dir}$  et  $a_{rev}$  respectivement leur amplitude. On se place dans le cas simple où  $a_{dir}$  et  $a_{rev}$  ont même phase, c'est à dire que le renversement du chemin ne modifie pas la phase de son amplitude. La contribution de ces chemins à l'intensité incohérente est :

$$I_{inc} = |a_{dir}|^2 + |a_{rev}|^2 \quad (1.14)$$

et au terme d'interférence (intensité cohérente) :

$$I_{coh} = 2\text{Re}(a_{dir}a_{rev}^*) = 2|a_{dir}||a_{rev}|\cos(kr_{\perp}\Delta\theta) \quad (1.15)$$

où  $k$  est la norme de  $\mathbf{k}_{in}$  et  $\mathbf{k}_{out}$ , et  $\Delta\theta$  est l'angle entre ces deux vecteurs (voir Fig. 1.5). Si on suppose que  $\Delta\theta$  est petit, alors  $\delta\phi = (\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot \mathbf{r} = kr_{\perp}\Delta\theta$  avec  $r_{\perp}$  la distance entre les diffuseurs extrêmes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}_{in}$ . La valeur typique de  $r_{\perp}$  est le libre parcours moyen de transport  $\ell_{tr}$  [24] définit par :

$$\ell_{tr} = \frac{\ell}{1 - \langle \cos \theta \rangle} \quad (1.16)$$

où  $\langle \cos \theta \rangle$  est la valeur moyenne du cosinus de l'angle que font les vecteurs d'onde avant et après un évènement de diffusion. Elle dépend du diagramme de rayonnement du diffuseur.  $\ell_{tr}$  représente la distance typique que doit parcourir l'onde pour que son vecteur d'onde change de direction. Pour des diffuseurs anisotropes,  $\ell_{tr}$  et  $\ell$  peuvent être très différents, mais dans la suite nous ne nous intéresserons uniquement à des diffuseurs de Rayleigh pour lesquels  $\ell_{tr} = \ell$ . Dans ce cas, après la moyenne de configuration, l'interférence

## 1.4. RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

est constructive autour de la direction arrière, dans une région de largeur angulaire  $\Delta\theta_c \simeq 1/(k\ell) \ll 1$ , et nulle ailleurs. La petitesse de la zone dans laquelle les effets d'interférences sont visibles explique, d'une part le succès des théories qui les négligent, et d'autre part qu'ils n'aient été observés que récemment [25, 26, 27].

Concluons ce paragraphe par une autre façon de présenter le cône de rétrodiffusion. Chaque paire de chemins renversés peut être vue comme un interféromètre d'Young, les diffuseurs extrêmes jouant le rôle des trous. Le cône résulte de la superposition incohérente de leurs figures d'interférence qui ont toutes une frange brillante en  $\Delta\theta = 0$ , mais des interfranges différents.

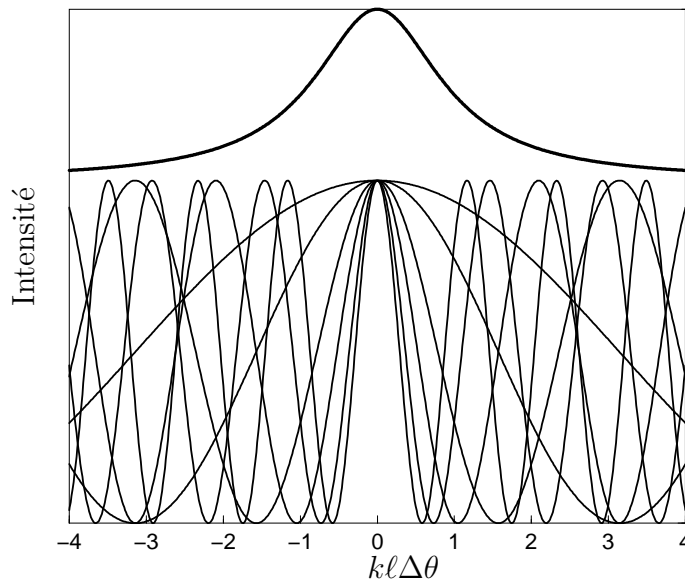


FIG. 1.7 – Une façon de voir le cône CBS : pour chaque chemin de diffusion, la paire des diffuseurs extrêmes se comporte comme des trous d'Young. La partie basse de la figure montre les figures d'interférences pour des trous d'Young avec différents espacements. Il s'agit de systèmes de franges, dont une est toujours brillante dans la direction de rétrodiffusion ( $\Delta\theta = 0$ ). Pour chaque espacement, l'interfrange est différent. La superposition incohérente de toutes ces figures d'interférences est montrée dans la partie haute : elle présente un maximum dans la direction de rétrodiffusion, et décroît en s'en éloignant. Les fortes variations spatiales d'intensité sont gommées par la moyenne.

#### 1.4.4 Réciprocité et facteur d'augmentation

Intéressons nous à présent au contraste des interférences. Il est maximal lorsque les amplitudes des chemins direct et renversé sont égales. C'est le cas pour les systèmes invariants par renversement du temps : il est alors équivalent de parcourir un chemin dans un sens ou dans l'autre. De manière plus générale, elles sont égales lorsqu'elles sont reliées par le théorème de réciprocité [28, 29, 30]. Il s'agit d'une conséquence de l'invariance par renversement du temps au niveau microscopique [31, 32], qui se traduit par la symétrie de la matrice  $S$  de diffusion. En optique, on peut l'exprimer de manière simplifiée par : "Si tu me vois, je te vois". L'invariance par renversement du temps implique la réciprocité, mais ne lui est pas équivalente. Par exemple, si le milieu diffusant est absorbant, l'invariance par renversement du temps est brisée, mais l'absorption étant la même sur les deux chemins, ils sont réciproques et ont même amplitude. La valeur maximale de l'intensité est alors

$$I_{max} = 4\langle |a_{dir}|^2 \rangle = 2I_{inc} \quad (1.17)$$

L'intensité à rétrodiffusion est double de celle calculée si on néglige les interférences. On définit le facteur d'augmentation  $\alpha = I_{max}/I_{inc} \leq 2$ , qui détermine la "hauteur" du cône et la force des interférences.

Lorsque les amplitudes des chemins renversés ne sont pas reliées par le théorème de réciprocité, une approche spécifique au système considéré est nécessaire.

#### 1.4.5 Diffusion récurrente

On parle de diffusion récurrente lorsqu'un chemin de diffusion visite plusieurs fois le même diffuseur. De tels chemins doivent être pris en compte pour une densité élevée de diffuseurs [33]. Dans la suite, nous ne considérerons que des faibles densités de diffuseurs, pour lesquelles la diffusion récurrente est négligeable : elle apporte une correction d'ordre  $1/(k\ell)$  à la diffusion non-récurrente.

#### 1.4.6 Diffusion simple

Du point de vue de la rétrodiffusion cohérente, les chemins de diffusion simple sont particuliers : leurs chemins direct et renversé sont identiques. Ils ne contribuent donc pas à l'augmentation cohérente de l'intensité. Dans tous les cas où la diffusion simple ne peut être éliminée, le facteur d'augmentation est toujours strictement inférieur à 2, même si les amplitudes des chemins

#### 1.4. RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

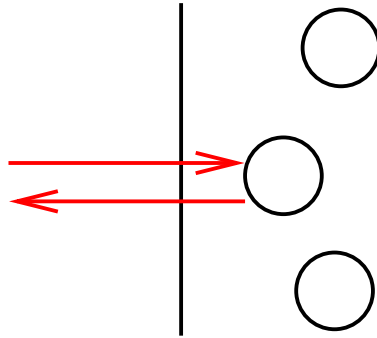


FIG. 1.8 – *Diffusion simple : les chemins direct et renversé sont confondus. Ces chemins ne contribuent pas au cône de rétrodiffusion.*

(de diffusion multiple) direct et renversé sont égales.

Dans la suite, nous distinguerons la contribution de la diffusion simple à l'intensité incohérente :  $I_{inc} = I_{inc}^{(1)} + I_{inc}^{(mul)}$ . Comme illustré sur la figure 1.9, le facteur d'augmentation devient :

$$\alpha = 1 + \frac{I_{coh}(\Delta\theta = 0)}{I_{inc}^{(1)} + I_{inc}^{(mul)}} \quad (1.18)$$

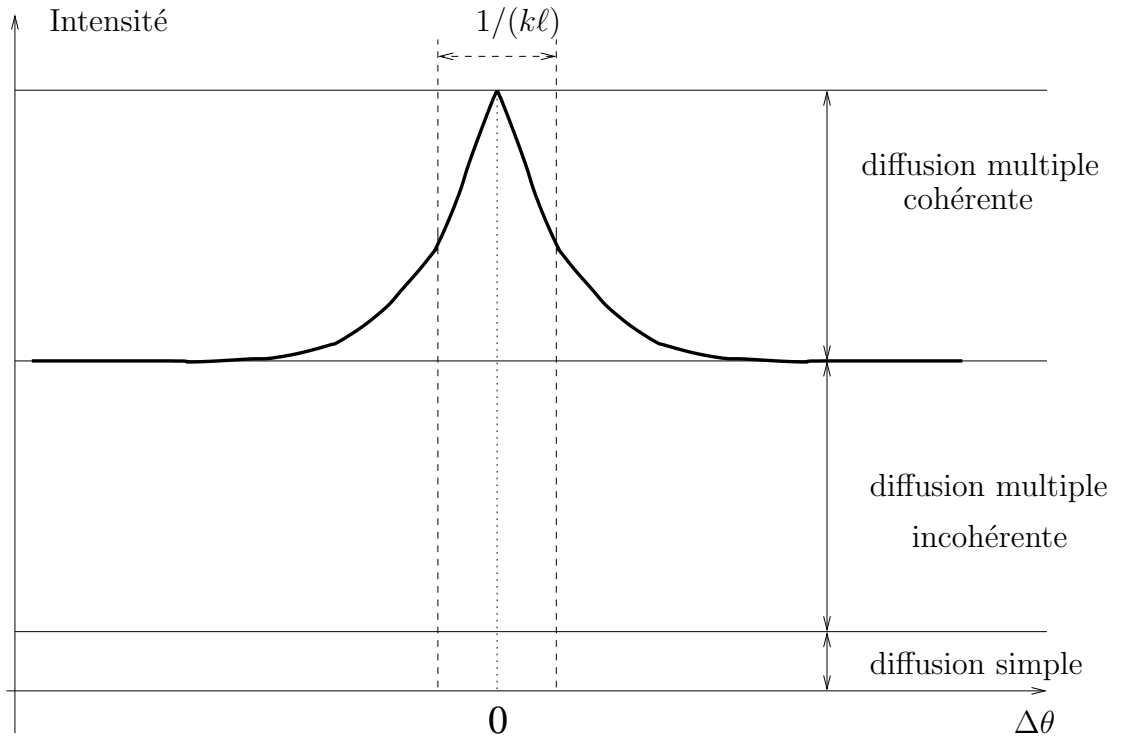


FIG. 1.9 – Allure du cône CBS (vue en coupe) en fonction de l'angle par rapport à la direction de rétrodiffusion. Autour de la direction de rétrodiffusion, l'intensité diffuse est la somme de trois contributions : la diffusion simple, la diffusion multiple incohérente et la diffusion multiple cohérente. Cette dernière provient des interférences entre chemins visitant les mêmes diffuseurs en sens inverse, et n'est importante que dans une région de largeur angulaire  $\sim 1/(k\ell) \ll 1$  autour de la direction de rétrodiffusion. Les deux autres contributions donnent la valeur de l'intensité diffuse loin de cette direction

## 1.4. RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

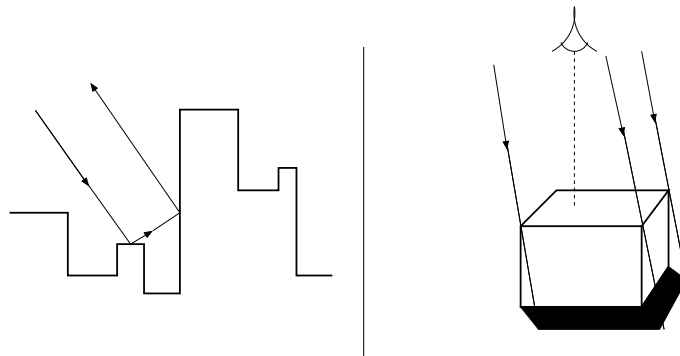


FIG. 1.10 – Effets géométriques pouvant participer à l'augmentation de l'intensité rétrodiffusée par une surface rugueuse. A gauche : la réflexion multiple : sur une surface lisse, la réflexion serait simple et dans la direction spéculaire uniquement. La rugosité de la surface permet à une partie de l'onde d'être réfléchi dans la direction arrière. A droite, l'effet d'ombre : certaines régions de la surface se trouvent dans l'ombre géométrique d'aspérités. Lorsqu'on mesure l'intensité diffuse dans une direction, ces régions apparaissent comme des zones sombres ne contribuant pas au signal : une partie de la surface apparente ne diffuse pas dans la direction d'observation. A rétrodiffusion, les zones d'ombres sont masquées, et toute la surface apparente participe au signal. Il en résulte un maximum de l'intensité diffuse dans cette direction.

### 1.4.7 Augmentation incohérente de l'intensité rétrodiffusée

L'augmentation de l'intensité diffuse dans la direction arrière peut avoir pour origine des mécanismes non-cohérents. C'est le cas par exemple pour la diffusion d'une onde par un surface rugueuse. Si la longueur d'onde est petite devant les longueurs caractéristiques de variation de la surface, des effets purement géométriques interviennent. Deux d'entre eux, la réflexion multiple et l'effet d'ombre, sont illustrés sur la figure 1.10. Si la surface était lisse, la réflexion de l'onde serait spéculaire, et l'intensité rétrodiffusée serait non-nulle seulement au voisinage de l'incidence normale. Par contre, avec une surface rugueuse, l'onde peut être réfléchi plusieurs fois par les aspérités. Dans ce cas, il y a une intensité non-nulle dans la direction arrière quelque soit l'angle d'incidence.

L'effet d'ombre est lié à l'interception de l'onde par certaines aspérités, créant des zones d'ombre qui ne peuvent pas participer à la diffusion. Suivant la direction d'observation, elles sont plus ou moins masquées par les aspérités. En conséquence, l'intensité diffusée est maximale dans la direction où elles sont complètement masquées, c'est à dire dans la direction de rétrodiffusion.

De manière générale, les augmentations cohérente et incohérentes de l'inten-

sité diffuse dans la direction arrière se superposent. Il s'agit d'un problème très complexe, dont nous nous contentons ici de mentionner l'existence. Il se pose par exemple pour l'étude de la luminosité des planètes privées d'atmosphère, comme la Lune [34]. Si le milieu diffusant est un gaz, ces effets de surface sont négligeables.

## 1.5 Rétrodiffusion cohérente de la lumière

Après cet aperçu très général de la rétrodiffusion cohérente, nous abordons le cas des ondes lumineuses. Leur caractéristique essentielle est leur polarisation  $\epsilon$ . La plupart des expériences sont faites en éclairant le milieu diffusant avec une onde plane polarisée, et la polarisation du signal de rétrodiffusion est analysée.

### 1.5.1 Canaux de polarisation

On distingue usuellement quatre canaux de polarisation (Fig. 1.11) : deux canaux où les polarisations incidente et d'analyse sont linéaires, soit

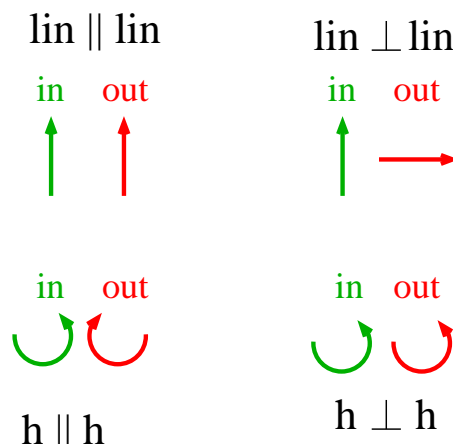


FIG. 1.11 – Les quatre canaux de polarisation habituellement considérés

parallèles, soit perpendiculaires ; et deux canaux où les polarisations sont circulaires, soit identiques ( $h \perp h$ ) soit orthogonales ( $h||h$ ). Les deux derniers canaux sont appelés canaux d'hélicité. Dans le canal  $h||h$ , seule la composante du signal de sortie ayant même hélicité que le signal d'entrée est analysée<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Les signaux d'entrée et de sortie se propageant dans des directions opposées, ils ont la même hélicité si leurs polarisations sont circulaires et orthogonales.

### 1.5.2 Théorème de réciprocité

Soit  $\mathcal{A}_{dir}(\mathbf{k}_1\boldsymbol{\epsilon}_1, \mathbf{k}_2\boldsymbol{\epsilon}_2)$  l'amplitude d'un chemin de diffusion.  $\mathbf{k}_1$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  sont le vecteur d'onde et la polarisation de l'onde incidente,  $\mathbf{k}_2$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  ceux de l'onde sortante. Le théorème de réciprocité relie cette amplitude à celle du chemin renversé de la façon suivante [29, 30] :

$$\mathcal{A}_{dir}(\mathbf{k}_1\boldsymbol{\epsilon}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2\boldsymbol{\epsilon}_2) = \mathcal{A}_{rev}(-\mathbf{k}_2\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \rightarrow -\mathbf{k}_1\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_1) \quad (1.19)$$

Les amplitudes des chemins direct et renversé sont égales si

1.  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$  : c'est à dire à rétrodiffusion
2. Les polarisations d'entrée et d'analyse sont conjuguées complexes l'une de l'autre. C'est le cas dans les canaux linéaire parallèle et d'hélicité conservée. Dans ces deux canaux, on peut s'attendre à un contraste maximal des interférences.

### 1.5.3 Diffusion simple

Le signal de diffusion simple dépend fortement du type de diffuseurs employés. De manière générale, on peut l'annuler ou le réduire très fortement lorsque les polarisations d'entrée et d'analyse sont orthogonales. Ceci se produit dans les canaux linéaire perpendiculaire et d'hélicité conservée.

Par exemple, la polarisation de la lumière diffusée par un diffuseur dont la taille est très petite devant la longueur d'onde (*diffuseur de Rayleigh*) est la projection de la polarisation incidente sur le plan perpendiculaire à la direction de diffusion [35]. Un diffuseur de Rayleigh diffuse vers l'arrière une polarisation identique à la polarisation incidente (figure 1.12).

Nous voyons que dans le canal  $h\|h$ , il est possible d'observer un facteur d'augmentation égal à 2.

### 1.5.4 Résultats expérimentaux

La rétrodiffusion cohérente de la lumière a été observée expérimentalement pour la première fois en 1984 [25, 26, 27] Le schéma de principe du montage expérimental est montré sur la figure 1.13 : La lumière incidente est approximativement une onde plane (faisceau laser dont le waist est supérieur à la taille du milieu diffusant), dont on fixe la polarisation. Le signal de rétrodiffusion est extrait à l'aide d'un séparateur de faisceaux, et analysé. Son image à l'infini est visualisée sur une caméra CCD.

Dans le canal  $h\|h$ , pour des sphères de polystyrène en suspension, on obtient le cône de la figure 1.14. Le facteur d'augmentation n'est pas tout à fait égal



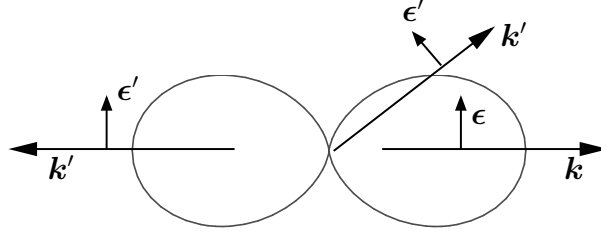


FIG. 1.12 – Diagramme de rayonnement d'un diffuseur de Rayleigh. La polarisation diffusée est la projection de la polarisation incidente sur le plan perpendiculaire à la direction de diffusion. Pour une polarisation incidente linéaire  $\epsilon$ , on a représenté l'intensité lumineuse diffusée en fonction de l'angle de diffusion. Dans la direction de la polarisation initiale, l'intensité diffusée est nulle. Celle-ci est maximale vers l'avant et vers l'arrière, où la polarisation initiale est conservée. Dans la direction arrière, on peut annuler la contribution de la diffusion simple en analysant la lumière avec une polarisation orthogonale à la polarisation incidente.

à 2 : cela est dû essentiellement à la diffusion simple qui n'est pas entièrement éliminée à cause des imperfections du polariseur et de l'analyseur [36].

On observe que le sommet du cône est pointu. Cela est dû aux grands ordres de diffusion. Nous avons vu dans le paragraphe 1.2.3, p.16, que pour les chemins d'ordre  $N \gg 1$ , la distance  $r_{\perp}$  entre les diffuseurs extrêmes est de l'ordre de  $\sqrt{N}\ell$ , et que leur intensité est d'ordre  $N^{-3/2}$ . Leur contribution moyenne au cône de rétrodiffusion est un cône arrondi de largeur angulaire  $\Delta\theta_N \simeq 1/(\sqrt{N}k\ell)$ . Lorsqu'on somme toutes ces contributions pour  $N$  de plus en plus grand, on additionne des cônes de plus en plus étroits, donnant un sommet pointu au cône total. Cela peut être montré dans l'approximation de diffusion, par calcul direct du cône total [37]. Nous nous contenterons ici de l'argument suivant : la forme du cône est donnée par une somme de la forme

$$\sum_{p \geq 1} \frac{\cos(\sqrt{p}k\ell\Delta\theta)}{p^{3/2}} \quad (1.20)$$

qui converge pour toute valeur de  $\Delta\theta$ , mais dont la dérivée par rapport à  $\Delta\theta$ ,

$$-k\ell \sum_{p \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{p}k\ell\Delta\theta)}{p} \quad (1.21)$$

admet des limites de signes opposés en  $\Delta\theta = 0$  à droite et à gauche. En effet, son comportement est similaire à celui de

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{t})}{t} dt = \frac{x}{|x|} \pi \quad (\forall x \neq 0) \quad (1.22)$$

## 1.6. CÔNE CBS ET CHAMP MAGNÉTIQUE

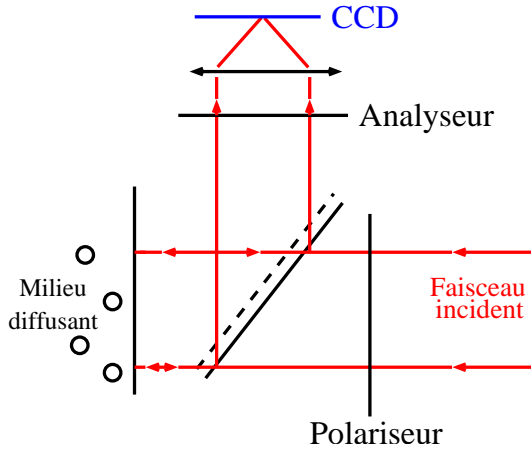


FIG. 1.13 – Schéma du montage expérimental pour observer le cône de rétrodiffusion cohérente. Le signal de rétrodiffusion est séparé du faisceau incident à l'aide d'une lame séparatrice semi-réfléchissante.

Expérimentalement, l'aspect pointu du sommet cône CBS a été vérifié avec une grande précision [38].

## 1.6 Cône CBS et champ magnétique

Nous avons vu que les amplitudes de deux chemins renversés sont égales lorsqu'elles sont reliées par le théorème de réciprocité, c'est à dire lorsqu'il est équivalent pour la lumière de parcourir l'un ou l'autre. Par contre, en présence d'un champ magnétique extérieur  $\mathbf{B}$ , le théorème de réciprocité devient [31, 30] :

$$\mathcal{A}_{dir}(\mathbf{k}_1\epsilon_1 \rightarrow \mathbf{k}_2\epsilon_2, \mathbf{B}) = \mathcal{A}_{rev}(-\mathbf{k}_2\bar{\epsilon}_2 \rightarrow -\mathbf{k}_1\bar{\epsilon}_1, -\mathbf{B}) \quad (1.23)$$

Cela traduit le changement de signe du champ magnétique par renversement du temps. Comme les chemins renversés sont soumis au même champ magnétique, et non pas à deux champs opposés, leurs amplitudes ne sont plus reliées par le théorème de réciprocité. Il n'y a plus de raisons pour qu'elles soient égales, et on s'attend à ce que la hauteur du cône CBS décroisse avec  $B$ .

Le mécanisme microscopique qui intervient est une modification de la phase de l'onde par le champ magnétique, qui dépend de son sens de propagation. Dans le cas des ondes lumineuses, le déphasage entre les deux chemins est dû à l'effet Faraday.

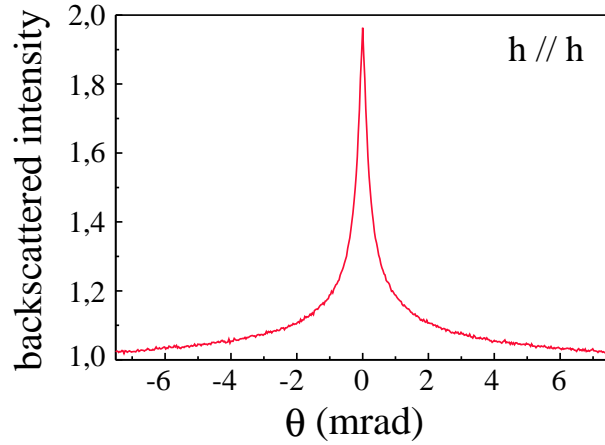


FIG. 1.14 – Cône de rétrodiffusion de la lumière sur des bille de polystyrène, dans le canal  $h||h$ . La hauteur du cône est proche de 2 (voir le texte pour l'explication de l'écart), et sa forme est pointue. Cette figure est extraite de la référence [36].

### 1.6.1 Effet Faraday

Lorsqu'une onde plane polarisée linéairement se propage parallèlement à  $\mathbf{B}$  dans un milieu matériel, la direction de la polarisation tourne d'un angle  $\theta$  autour de la direction de propagation d'un angle qui dépend du matériau, de la distance parcourue  $d$  et de l'intensité  $B$  du champ magnétique. Le sens de rotation ne dépend pas du sens de propagation : si on réfléchit l'onde pour qu'elle retransverse la matériau en sens inverse, l'angle de rotation est doublé [39]. Ceci est mis à profit dans les isolateurs optiques, où l'onde incidente passe à travers un polariseur linéaire. L'onde réfléchie possède une polarisation tournée de  $90^\circ$  par rapport à la polarisation incidente, et n'est pas transmise par le polariseur.

Dans la plupart des matériaux, il s'agit d'un effet faible qu'on peut approcher au premier ordre en  $B$  et  $d$  :  $\theta = V B d$ , où  $V$  est appelée constante de Verdet. D'un point de vue macroscopique, l'effet Faraday provient de la dépendance en  $\mathbf{B}$  du tenseur de susceptibilité diélectrique. Celui-ci doit vérifier les relations d'Onsager [31] et la conservation de l'énergie : le terme d'ordre 1 en  $\mathbf{B}$  est proportionnel à  $i\epsilon_{jkl}B_l$ , où  $\epsilon_{jkl}$  est le tenseur totalement antisymétrique tel que  $\epsilon_{123} = 1$  [39]. Le tenseur de susceptibilité diélectrique possède donc une composante antisymétrique. On montre alors que les modes propres de propagation sont les polarisations circulaires gauche et droite, et qu'il leur correspond des indices de réfraction différents. Une polarisation linéaire étant la somme de deux polarisations circulaires gauche et droite, elle se déforme

## 1.6. CÔNE CBS ET CHAMP MAGNÉTIQUE

lors de sa propagation dans le matériau, en tournant dans le sens de sa composante circulaire la plus rapide. Cet effet ne dépend pas du sens de propagation.

De manière générale, un photon d'hélicité <sup>7</sup>  $\sigma = \pm 1$  voit sa polarisation déphasée de  $\sigma V \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}$  si il se propage suivant  $\mathbf{r}$ .

### 1.6.2 Impact sur le cône de rétrodiffusion

Pour illustrer l'impact de l'effet Faraday sur le cône CBS, nous allons étudier la diffusion double de la lumière sur des diffuseurs de Rayleigh. Ces derniers possèdent la propriété d'émettre un rayonnement dont la polarisation  $\epsilon'$  ne dépend que de la polarisation incidente  $\epsilon$  et de la direction d'émission  $\mathbf{k}'$  :  $\epsilon' = \Delta_{\mathbf{k}'} \epsilon$  avec  $\Delta_{\mathbf{k}'}$  le projecteur sur le plan orthogonal à  $\mathbf{k}'$ . Nous négligeons la modification de leur diagramme de rayonnement liée au champ magnétique. Avant et après chaque diffusion, la lumière se propage dans un milieu dont la constante de Verdet est assez grande pour que l'effet Faraday soit significatif sur la distance d'un libre parcours moyen. On éclaire le milieu diffusant avec une lumière polarisée circulairement (sonde CBS), et on se place dans le canal  $h \parallel h$  d'hélicité préservée. Les notations sont précisées

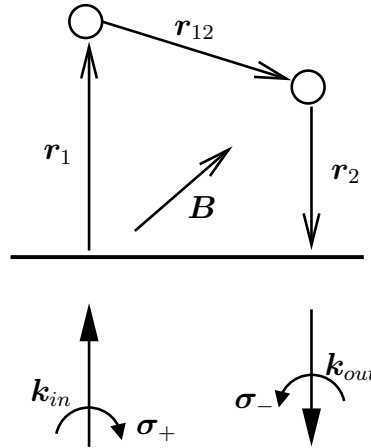


FIG. 1.15 – Schéma illustrant la diffusion double en présence d'un champ magnétique. Les vecteurs d'onde sont reliés par  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out} = \mathbf{0}$ .  $B$  a une direction quelconque par rapport à la lumière incidente.

<sup>7</sup>Il ne faut pas confondre polarisation circulaire et hélicité. La première est définie par rapport à une base fixe de vecteurs tandis que la seconde est définie dans une base liée au vecteur d'onde. Après une réflexion en incidence normale, la polarisation est conservée, mais l'hélicité est inversée.

## CHAPITRE 1. DIFFUSION MULTIPLE ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

sur la figure 1.15. Déterminons l'évolution de la polarisation le long du chemin direct : la polarisation circulaire  $\sigma_+$  entre dans le milieu diffusant et se propage suivant  $\mathbf{r}_1$  avant d'être diffusée. Puis la lumière se propage suivant  $\mathbf{r}_{12}$  avec une polarisation qu'on peut décomposer sur la base  $\{\sigma'_+, \sigma'_-\}$  des polarisations circulaires perpendiculaires à  $\mathbf{r}_{12}$ . Ensuite, elle est de nouveau diffusée et se propage suivant  $\mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{k}_{out}$  avant de sortir du milieu diffusant. La polarisation est alors analysée. L'amplitude du chemin direct est alors proportionnelle à

$$a_{dir} \propto e^{iV(|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_1| - |\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_2|)} (ae^{iV|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|} + be^{-iV|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|}) \quad (1.24)$$

où  $a$  et  $b$  sont les poids des modes propres de polarisation perpendiculaires à  $\mathbf{r}_{12}$ . Pour obtenir l'amplitude du chemin renversé, il faut changer de signe tous les vecteurs de position, et renverser leur ordre. Ici, il suffit d'échanger  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . On voit immédiatement que :

$$a_{rev} = a_{dir} e^{-2iV(|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_1| - |\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_2|)} \quad (1.25)$$

Il apparaît que la direction du champ magnétique influe sur la différence de phase entre les chemins renversés.

Si  $\mathbf{B}$  est parallèle au faisceau lumineux incident, le déphasage vaut  $-2VB(r_1 - r_2)$ , et l'intensité totale associée à ces positions des diffuseurs est :  $I = 2|a_{dir}|^2(1 + \cos(2VB(r_1 - r_2)))$ . Nous pouvons approcher la moyenne de configuration de  $I$  en calculant séparément celle de  $2|a_{dir}|^2$ , qui est l'intensité incohérente, et celle de  $\cos(2VB(r_1 - r_2))$ . Si la distance entre diffuseurs est répartie suivant une loi de Poisson  $P(r) = \exp(-r/\ell)/\ell$  et si ils rayonnent de manière isotrope, on peut montrer que

$$\langle \cos(2VB(r_1 - r_2)) \rangle = \frac{\arctan(2VB\ell)}{2VB\ell} \quad (1.26)$$

On en déduit une expression approchée du facteur d'augmentation (restreint à la diffusion double) :

$$\alpha = 1 + \frac{\arctan(2VB\ell)}{2VB\ell} \quad (1.27)$$

Un petit champ magnétique diminue  $\alpha$  d'un terme proportionnel à  $B^2$ , tandis qu'à grand  $B$ , le terme d'interférences tend vers 0 comme  $1/B$ .

Si  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire au faisceau incident, il n'y a pas de déphasage entre les chemins renversés, et le facteur d'augmentation n'est pas affecté

## 1.6. CÔNE CBS ET CHAMP MAGNÉTIQUE

---

par  $\mathbf{B}$ . Par contre, il modifie la forme du cône. En effet, écrivons le terme d'interférences :

$$\begin{aligned} I_{coh}(\mathbf{r}_{12}, \Delta\theta) &= 2\text{Re}[(ae^{iV|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|} + be^{-iV|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|})^2 e^{i(\mathbf{k}_{in}+\mathbf{k}_{out})\cdot\mathbf{r}_{12}}] \\ &= 2\text{Re}[ (|a|^2 + |b|^2 + a\bar{b}e^{i2V|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|} + \bar{a}be^{-i2V|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|}) e^{i(\mathbf{k}_{in}+\mathbf{k}_{out})\cdot\mathbf{r}_{12}} ] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Si  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out} = \pm 2V\mathbf{B}$ , alors  $I_{coh}$  passe par un extremum : il y a deux pics latéraux alignés avec le pic de rétrodiffusion, dans la direction du champ magnétique. Leur position angulaire est

$$\Delta\theta = \pm \frac{2VB}{k} \quad (1.29)$$

On peut comparer la hauteur de ces pics latéraux avec celle du pic central : si  $\mathbf{B}$  est assez intense, la moyenne de configuration annule les termes du type  $e^{\pm i2V|\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_{12}|}$  dans  $I_{inc}$  et  $I_{coh}$ . Alors

$$I_{inc} \simeq 2\langle |a|^2 + |b|^2 \rangle \quad (1.30)$$

$$I_{coh}(\Delta\theta = \pm 2VB/k) \simeq 2\text{Re}\langle a\bar{b} \rangle \quad (1.31)$$

$$\alpha(\Delta\theta = \pm 2VB/k) \simeq 1 + \frac{\text{Re}\langle a\bar{b} \rangle}{\langle |a|^2 + |b|^2 \rangle} \leq \frac{3}{2} \quad (1.32)$$

Ces pics secondaires sont liés à la différence de phase induite par l'effet Faraday entre les composantes de même hélicité des ondes contrapropageantes. Lorsque le champ magnétique est perpendiculaire à la direction des faisceaux entrant et sortant, il est possible de compenser cette différence de phase par un déplacement angulaire dans la direction de  $\mathbf{B}$ .

Ces résultats donnent une idée de l'influence de  $\mathbf{B}$  sur le cône CBS. La nature des diffuseurs ne modifie pas essentiellement les résultats présentés dans ce paragraphe : brouillage des interférences par l'effet Faraday et apparition de pics latéraux.

Les observations expérimentales du cône CBS en présence d'un champ magnétique sont peu nombreuses, notamment à cause de la difficulté de trouver un milieu diffusant avec une constante de Verdet assez grande, et de l'intensité de plusieurs Teslas, voire dizaines de Teslas, requise pour que le champ magnétique ait un effet visible. Dans [40], on rapporte l'observation des cônes latéraux. Elle a été faite à l'aide de bulles d'air (dont la taille est grande devant la longueur d'onde optique : ce sont des diffuseurs de Mie) emprisonnées dans un verre de grande constante  $V$ . Ce type de diffuseurs à tendance à préserver l'hélicité de l'onde incidente, aussi n'observe t'on qu'un seul pic latéral. La prédiction de l'existence de ces pics a été faite par les

## CHAPITRE 1. DIFFUSION MULTIPLE ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

mêmes auteurs [41]. Dans la configuration où  $\mathbf{B}$  est parallèle au vecteur d'onde incident, la décroissance du facteur d'augmentation a aussi été observée [10, 41].

Du point de vue théorique, les premières approches “naïves” étaient basées sur des modèles de changement d'hélicité [9]. L'idée est la suivante : toute polarisation peut s'exprimer à l'aide des polarisations circulaires gauche et droite dans la direction de propagation. Si l'onde subit un grand nombre de diffusions, il est équivalent de ne propager qu'une des composantes circulaires, qui change aléatoirement après chaque diffusion, et de faire la moyenne sur un grand nombre de chemins. Ce modèle prédit une décroissance exponentielle du terme d'interférences avec  $B$ , sauf dans le canal  $h \perp h$  où les amplitudes des chemins renversés sont égales. Il souffre de deux défauts. D'abord, il n'est valable que pour les grands ordres de diffusions car il faut que les vecteurs d'ondes et les polarisations puissent prendre des directions quelconques pour être considérées comme des variables aléatoires. Dans ce cas, la direction du champ magnétique est sans importance. Nous avons vu qu'au contraire elle conduit à des phénomènes différents selon qu'elle est parallèle ou perpendiculaire à la direction de la lumière incidente. Au passage, cela montre l'importance des courts chemins de diffusion, c'est à dire qui n'explorent pas le coeur du milieu diffusant, pour la rétrodiffusion cohérente. Ensuite, il néglige les corrélations entre polarisations incidente et diffusée. Des simulations numériques ont montré que ces corrélations font que, à l'exception des diffuseurs de Rayleigh dans le canal  $h||h$ , le terme d'interférence ne tend pas vers 0 lorsque  $B$  tend vers l'infini [42]. Une autre approche, similaire à celle utilisée en l'absence de  $\mathbf{B}$  [43, 44, 45], est aussi utilisée [46, 47]. Elle se base sur les équations de Maxwell et les relations constitutives du milieu diffusant, prenant en compte les effets magnéto-optiques. Son principe est de propager l'intensité (cohérente ou incohérente) et de tenir compte des modifications de la polarisation à l'aide des paramètres de Stokes [48] (voir aussi la section 3.4). Quelques différences subsistent entre ses prédictions et les résultats expérimentaux. En particulier, elle ne prédit pas l'existence des pics latéraux. Il est possible que cela vienne de la difficulté de cette théorie à prendre en compte l'interface, nécessaire pour l'observation du cône, entre le milieu diffusant et l'extérieur.

### 1.6.3 Effet Cotton-Mouton

L'effet Cotton-Mouton, aussi parfois appelé effet Voigt, est la modification de la polarisation d'une onde se propageant dans un milieu matériel, perpendiculairement à  $\mathbf{B}$ . Il s'agit d'un effet du second ordre en  $B$ , qui n'est

## 1.6. CÔNE CBS ET CHAMP MAGNÉTIQUE

---

habituellement sensible que dans cette direction où l'effet Faraday est nul. Les modes propres de propagation sont des polarisations linéaires orthogonales, dont l'une est parallèle à  $\mathbf{B}$ . Au cours de la propagation, ces modes propres subissent une différence de phase et d'extinction. Par conséquent, une polarisation linéaire qui fait un angle de  $45^\circ$  avec  $\mathbf{B}$  devient elliptique (différence de phase), et le grand axe de l'ellipse tourne (différence d'extinction). Cependant, cet effet est tellement faible qu'il est négligeable dans les expériences de rétrodiffusion cohérente réalisées jusqu'à présent avec des diffuseurs classiques, même pour des champs magnétiques de l'ordre de 20T [40].

D'autre part, l'effet Cotton-Mouton étant d'ordre 2 en  $B$ , il est pair, et inchangé par renversement du temps. A l'aide du théorème de réciprocity (1.23), on montre alors que l'effet Cotton-Mouton ne modifie pas la hauteur du cône CBS.

Du fait de sa petitesse et qu'il ne modifie pas le contraste des interférences, l'effet Cotton-Mouton n'a pas été pris en compte dans les calculs théoriques du cône de rétrodiffusion. Cependant, nous verrons au chapitre 4 que cet effet n'est pas du tout négligeable dans un nuage d'atomes froids.

### 1.6.4 Champ magnétique et localisation faible

En physique du solide, il existe un effet qui s'apparente à la chute du cône CBS en présence d'un champ magnétique. Il s'agit du phénomène de magnéto-résistance négative [22]. Dans la section 1.3, nous avons mentionné les chemins de diffusion fermés qui participent à la localisation faible, diminuant la constante de diffusion. Dans le cas d'ondes de matière électroniques se propageant dans un métal, cela se traduit par une augmentation cohérente de la résistance électrique par rapport à la valeur prévue par la loi d'Ohm. En appliquant un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on crée une différence de phase entre les deux chemins renversés (voir figure 1.3) proportionnelle au flux de  $\mathbf{B}$  à travers la boucle qu'ils forment (effet Aharonov-Bohm [49]). Il en résulte une chute du contraste des interférences, et une diminution de la résistance.

Pour la magnéto-résistance comme pour le cône CBS, le champ magnétique a pour effet de détruire les interférences entre chemins renversés. Cela vient essentiellement de ce que  $\mathbf{B}$  n'est pas invariant par renversement du temps. Ce sont cependant deux phénomènes différents. La rétrodiffusion cohérente concerne une onde qui entre et ressort du milieu diffusant par le même côté, tandis que la localisation faible dans les conducteurs mésoscopiques implique des chemins de diffusion fermés au coeur de l'échantillon.



CHAPITRE 1. DIFFUSION MULTIPLE ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

# Chapitre 2

## Atomes froids et rétrodiffusion cohérente

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons l'intérêt d'utiliser un nuage d'atomes froids comme milieu diffusant. Les expériences de rétrodiffusion cohérente avec des atomes de rubidium ont donné des résultats surprenants : la hauteur des cônes est beaucoup plus faible que pour des diffuseurs classiques [7]. Pour expliquer ceci, nous avons besoin de connaître deux processus importants : la diffusion de la lumière par un atome, et la propagation de la lumière dans le nuage atomique. Ce sont les deux maillons de base pour calculer l'amplitude d'un chemin de diffusion multiple, au long duquel ils se succèdent. Pour cela, nous adoptons une description particulière de la lumière, en termes de photons, mieux adaptée à l'interaction lumière-atome qu'une description ondulatoire, bien que les deux approches soient équivalentes : en pratique, le nuage atomique est éclairé par un laser de faible intensité, c'est à dire par un grand nombre de photons. Nous montrons alors que la structure interne des atomes (niveau fondamental dégénéré) a pour effet de diminuer le contraste d'interférence. Nous discutons ensuite les mécanismes physiques à l'origine de cette diminution.

## 2.2 Pourquoi des atomes froids comme diffuseurs ?

### 2.2.1 Atomes froids et localisation d'Anderson

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 1, les nuages d'atomes froids sont des candidats pour l'observation de la localisation forte de la lumière. La raison principale est qu'ils constituent un milieu fortement diffusant, condition nécessaire pour que les interférences dominent la propagation. De plus, le critère de Ioffe-Regel (1.6) peut être atteint au voisinage du seuil de la condensation de Bose-Einstein [50] : si la lumière est résonnante avec une transition atomique, la section efficace de diffusion est  $\sigma_d \propto \lambda^2$ , et  $\ell \propto 1/(n_d \lambda^2)$ . Le critère de Ioffe-Regel prend alors la forme :

$$n_d \lambda^3 \sim 1 \tag{2.1}$$

A basse température, la longueur de de Broglie  $\lambda_{dB}$  des atomes peut devenir comparable à  $\lambda$  et (2.1) est alors similaire à la condition de condensation de Bose-Einstein. Ce résultat appelle plusieurs remarques.

Tout d'abord, qu'il faut utiliser des atomes qui soient des bosons, comme le rubidium 85 ou 87 par exemple. Ensuite, il n'y a pas équivalence, ni même a priori de lien, entre la condensation de Bose-Einstein des atomes et la localisation d'Anderson de la lumière. L'équation (2.1) donne une condition assez vague sur la transition vers le régime localisé, portant sur l'ordre de grandeur de  $n_d \lambda^3$ . Il n'est donc pas évident qu'un condensat de Bose-Einstein soit nécessaire pour observer la localisation forte de la lumière. Enfin, le fait que les longueurs d'onde optique et de de Broglie soient comparables est accidentel et dû à la manière dont on prépare les condensats de Bose-Einstein. En sondant le nuage atomique avec une longueur d'onde optique différente de celle de préparation du condensat, on peut envisager d'avoir simultanément  $n_d \lambda_{dB}^3 < 1$  et  $n_d \lambda^3 \gg 1$

D'autre part, la géométrie du nuage atomique, une sphère ou un cigare, ne permet pas de définir une épaisseur du milieu. Il n'est donc pas possible de détecter la transition vers la localisation forte par des mesures de transmission. Cependant, il semble qu'il soit possible de le faire en étudiant la statistique du temps que met un photon pour sortir du nuage atomique. Ce résultat a été obtenu théoriquement, en utilisant un modèle d'atome à deux niveaux [6]. Dans la suite de ce chapitre, nous montrons que la prise en compte de la structure interne des atomes est essentielle dans le régime de localisation faible, pour des raisons qui restent probablement valables dans

## 2.2. POURQUOI DES ATOMES FROIDS COMME DIFFUSEURS ?

---

le régime de localisation forte. Elle affecte profondément le contraste des interférences, et dans les chapitres suivants, on indiquera une méthode pour y remédier.

### 2.2.2 Avantages des atomes sur les diffuseurs classiques

Les milieux fortement diffusants classiques sont constitués de diffuseurs de Mie, dont la taille est comparable à la longueur d'onde. Ils se présentent souvent sous forme de poudre, de particules en suspension ou de solides contenant des inhomogénéités. Dans tous les cas, il est extrêmement difficile de contrôler la taille et la forme de diffuseurs. Ce n'est pas le cas avec les atomes :

- Ils forment un échantillon monodisperse. En effet, bien qu'il y ait plusieurs isotopes dans la cellule de piégeage, la largeur spectrale des lasers utilisés pour la sonde CBS ou pour le refroidissement est suffisamment fine pour qu'un seul contribue significativement au signal CBS. Le fait que les diffuseurs n'aient pas tous la même taille et la même forme est une source de désaccord entre théorie et expérience : pour calculer efficacement l'amplitude de longs chemins de diffusion, la théorie est limitée à des diffuseurs identiques.
- Les atomes sont des diffuseurs fortement résonnants. Leur section efficace de diffusion  $\sigma_d$  est de l'ordre de  $\lambda^2$  à résonance, bien plus grande que leur surface géométrique. Le facteur de qualité est de l'ordre de  $10^8$ , nettement supérieur à celui des diffuseurs classiques.  $\sigma_d$  dépend sensiblement de la fréquence de la lumière incidente, et est donc accordable.
- Ce sont des diffuseurs ponctuels. Bien que les atomes soient froids, nous nous plaçons ici dans un régime où leur longueur d'onde de de Broglie reste très petite devant la longueur d'onde optique. Dans ce cas, leurs degrés de liberté externes peuvent être considérés comme des variables classiques. Cette hypothèse permet de les traiter assez simplement. Toutefois, ils devront certainement être quantifiés pour étudier la localisation forte de la lumière.

### 2.2.3 Température des atomes

Les atomes sont très diffusants au voisinage d'une résonance, lorsque la lumière incidente a une fréquence proche d'une transition atomique. La durée

## CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

d'une diffusion (*dwell time*) est alors déterminée par le temps de vie de l'état atomique excité  $1/\Gamma$ , de valeur typique 10 à 100 ns pour les atomes alcalins. Pour définir un chemin de diffusion, il est commode de pouvoir considérer les diffuseurs comme étant fixes pendant ce temps. Cela est également nécessaire pour que les chemins renversés correspondent à une même configuration des diffuseurs. Pour cela, il faut qu'un atome se déplace sur une distance petite devant la longueur d'onde. Si  $\mathbf{v}$  est la vitesse d'un atome, il faut vérifier la condition :

$$\frac{v}{\Gamma} \ll \lambda \quad (2.2)$$

Elle est généralement vérifiée dans les pièges magnéto-optiques (MOT, pour *magneto-optical trap*) : la vitesse des atomes est typiquement de quelques  $\text{cm.s}^{-1}$  alors que  $\Gamma\lambda$  est de l'ordre du  $\text{m.s}^{-1}$ . D'un point de vue spectral, (2.2) exprime que l'effet Doppler doit être négligeable :

$$kv \ll 2\pi\Gamma \quad (2.3)$$

où  $k$  est la norme du vecteur d'onde.

Ainsi, l'utilisation d'atomes froids est nécessaire si on veut observer la rétrodiffusion cohérente d'une onde lumineuse résonante avec une transition atomique. Cependant, l'influence de la vitesse résiduelle des atomes, qui est de diminuer la hauteur du cône CBS, a été observée [51].

Nous avons développé des arguments qui ne s'appliquent qu'à un seul évènement de diffusion. Pour les grands ordres de diffusion, le temps caractéristique n'est plus  $\Gamma^{-1}$ , mais  $N\Gamma^{-1}$  ( $N$  est l'ordre de diffusion) et le critère (2.2) devient

$$\frac{v}{\Gamma} \ll \frac{\lambda}{N} \quad (2.4)$$

qui est plus délicat à vérifier. Mais il s'avère que dans la plupart des cas que nous considérerons, le cône CBS est dominé par les petits ordres de diffusion.

### 2.3 Résultats expérimentaux

Les premiers cônes de rétrodiffusion sur des atomes froids ont été obtenus avec des atomes de  $^{85}\text{Rb}$  [7].

#### 2.3.1 Structures fine et hyperfine du spectre atomique

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques notions élémentaires de physique atomique [28].

## 2.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

---

Le Rubidium est un élément alcalin, se trouvant dans la première colonne de la classification périodique de Mendeleev. Les couches profondes ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6$ ) sont complètes, et la couche suivante  $5s$  est occupée par un seul électron. Cette structure électronique fait que son spectre est similaire à celui de l'atome d'hydrogène. L'électron périphérique peut accéder à des niveaux d'énergie plus élevés, qui correspondent à des états excités de l'atome. Il possède un moment cinétique orbital  $\mathbf{L}$  et un moment cinétique de spin  $\mathbf{S}$  qui sont faiblement couplés. Si on néglige ce couplage, un niveau atomique est caractérisé par son énergie et  $\mathbf{L}$ , et est dégénéré car il ne dépend pas du spin de l'électron. La prise en compte du couplage spin-orbite lève cette dégénérescence : un niveau atomique est maintenant caractérisé par son énergie et son moment cinétique  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Si  $J(J+1)$  est une valeur propre de  $\mathbf{J}^2$ , tous les niveaux caractérisés par un  $J \in \{|L-S|; L+S\}$  différent ont des énergies voisines mais différentes. Ils forment la structure fine du spectre atomique. Le rapport de leur différence d'énergie à leur énergie moyenne est de l'ordre du carré de la constante de structure fine  $\alpha \sim 1/137$ . Le noyau atomique possède aussi un moment cinétique  $\mathbf{I}$  qui est couplé au moment cinétique  $\mathbf{J}$  de l'électron. Ce couplage est bien plus faible que le couplage spin-orbite. Il ne donne pas moins une nouvelle structure au spectre atomique, dont les niveaux sont caractérisés par le moment cinétique total  $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$ . On désigne par  $F \in \{|J-I|; J+I\}$  le nombre quantique associé à  $\mathbf{F}^2$ . Tous les niveaux de  $F$  différent ont aussi une énergie différente, et forment la structure hyperfine du spectre atomique. Les niveaux d'énergie accessibles à l'atome de  $^{85}\text{Rb}$  sont représentés sur la figure 2.1.

### 2.3.2 Principe des expériences

Les atomes sont piégés et refroidis dans le MOT à l'aide de lasers proches de résonance avec la transition fermée  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de la raie D2. Comme l'état fondamental est  $F = 2$ , il faut amener les atomes dans l'état  $F = 3$  de  $5S_{1/2}$  par pompage optique. Pendant l'acquisition du signal CBS, on maintient le laser pompe qui empêche les atomes de se trouver dans l'état  $F = 2$ , mais le reste du piège est coupé. Cela restreint le temps d'acquisition du signal rétrodiffusé : en effet, les atomes se réchauffent en l'absence du piège. La durée d'une acquisition est de  $400 \mu\text{s}$ . Pour effectuer une moyenne de configuration, il faut plusieurs milliers d'acquisitions portant sur autant de nuages atomiques. Après chaque acquisition, les atomes doivent être refroidis à nouveau et recapturés dans le MOT. Les résultats sont présentés sur la figure 2.2.

On peut constater que dans tous les canaux, le signal de rétrodiffusion est

## CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

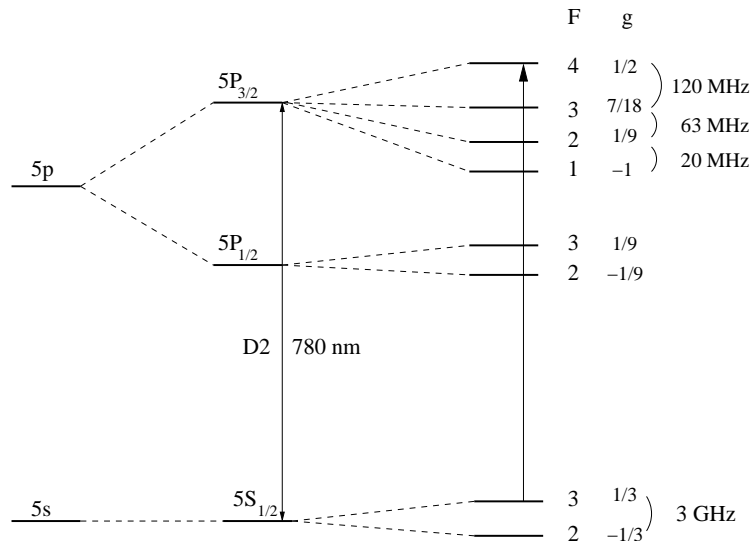


FIG. 2.1 – Structures fine et hyperfine des premiers niveaux excités de l'atome de  $^{85}\text{Rb}$ . Le niveau fondamental possède un moment cinétique  $F = 2$ . L'ensemble des transitions atomiques de  $5S_{1/2}$  vers  $5P_{3/2}$  forment la raie D2 du rubidium, à 780 nm. On donne pour chaque état hyperfin son moment cinétique et son facteur de Landé  $g$ , ainsi que l'écart en fréquence avec le niveau hyperfin le plus proche. La transition  $5S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 5P_{3/2}, F = 4$  est fermée, *i.e.* l'état  $5P_{3/2}, F = 4$  ne peut se désexciter radiativement que vers l'état  $5S_{1/2}, F = 3$ . Elle est utilisée pour les expériences sur le cône de rétrodiffusion cohérente rapportées dans cette thèse.

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

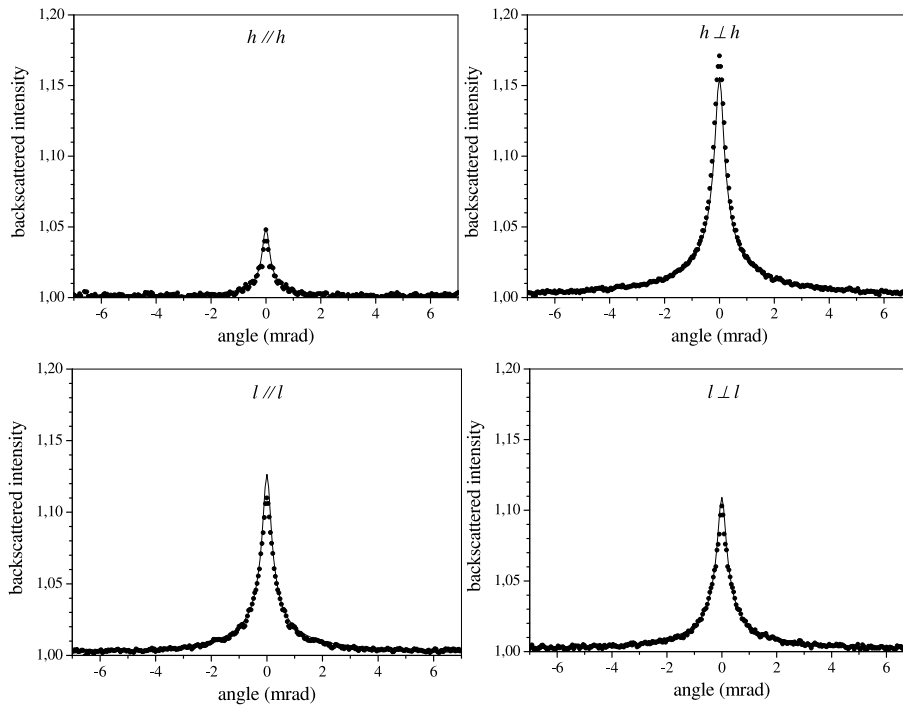


FIG. 2.2 – Cône CBS avec des atomes de rubidium. Dans tous les canaux, la hauteur du cône est réduite par rapport aux diffuseurs classiques, surtout dans le canal  $h\parallel h$ . Les points représentent les résultats expérimentaux, et la ligne continue est le cône théorique calculé avec une simulation Monte-Carlo (voir la suite du chapitre). La figure est extraite de la référence [52].

plus faible qu'avec des diffuseurs classiques. Le cas du canal  $h\parallel h$  est le plus dramatique : on y observait le cône le plus haut avec les diffuseurs classiques (Fig. 1.14), alors qu'il correspond au cône le plus petit avec les atomes. C'est à l'explication et aux conséquences de ce surprenant résultat que se consacre le reste du chapitre. Il reprend essentiellement les travaux de T. Jonckheere [53, 8] et C. Müller [54, 55], qui constituent le point de départ du travail présenté dans cette thèse.

## 2.4 Modélisation théorique

Pour décrire théoriquement la rétrodiffusion cohérente, nous nous appuyons sur les hypothèses suivantes, justifiées par les conditions expérimentales :

- Comme nous l'avons déjà mentionné, les atomes sont assez froids pour que l'on néglige l'effet Doppler, et assez chauds pour qu'ils se com-



## CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

portent comme des diffuseurs ponctuels dont les degrés de liberté externes sont des variables classiques. En particulier, l'énergie cinétique des atomes est grande devant leur énergie de recul.

- Une mesure du cône est une succession de cycles comportant chacun deux phases : la première de piégeage des atomes, et la deuxième d'acquisition du signal rétrodiffusé. Pendant cette acquisition, le piège est coupé et un faisceau sonde de faible intensité, quasi-résonnant avec une transition atomique, éclaire le nuage. Nous supposons que seule cette transition contribue de manière significative au signal CBS. Plus précisément, nous supposons qu'elle est fermée : seuls les deux niveaux atomiques qui la composent sont accessibles à l'atome. Celui dont l'énergie est la plus basse sera appelé "état fondamental", même s'il ne correspond pas au véritable état fondamental de l'atome. La faible intensité de la sonde nous permet de négliger les effets de saturation et de pompage optique. L'interaction lumière-atome sera traitée perturbativement, au premier ordre en intensité.
- Les bons nombres quantiques atomiques pour ce problème sont les valeurs propres  $j$  de  $\mathbf{J}^2$ , carré du moment cinétique total<sup>1</sup>, et  $m$  de  $J_z$ , sa projection sur l'axe de quantification. Dans son niveau fondamental, un atome se trouve dans un état  $|Jm\rangle$  bien défini. Nous faisons l'hypothèse raisonnable que les atomes produits par le MOT sont distribués de manière équiprobable dans les sous-états Zeeman du niveau fondamental. Elle est très importante lorsqu'on effectue des moyennes sur les degrés de liberté interne des atomes.
- Le nuage atomique est un milieu de faible densité ( $\sim 10^{10}$  atomes/cm<sup>3</sup>), où chaque diffuseur n'est sensible qu'au rayonnement de champ lointain des autres. On supposera donc que la lumière n'est diffusée que par un seul atome à la fois. De plus, on négligera la diffusion récurrente, c'est à dire les chemins de diffusion visitant plusieurs fois le(s) même(s) diffuseur(s). Ces hypothèses constituent l'approximation de diffusion indépendante (ISA, pour *independent scattering approximation*)[56]. Dans cette approximation, un chemin de diffusion est une suite d'évènements indépendants de diffusion et de propagation dans le nuage atomique, jusqu'à la sortie de celui-ci.

Nous comparerons nos résultats avec ceux des expériences dans les deux cas suivants :

1. Transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$  de la raie D2 du <sup>85</sup>Rb ( $\lambda = 780$ nm,  $\Gamma/(2\pi) = 5.9$ MHz). Le facteur de Landé du niveau  $J = 3$  est  $g = 1/3$ ,

---

<sup>1</sup>Nous désignons par  $\mathbf{J}$  le moment cinétique total de l'atome, même si celui-ci inclut un spin nucléaire comme c'est le cas pour le Rubidium.

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

et celui du niveau  $J_e = 4$  est  $g_e = 1/2$ .

2. Transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$  du  $^{88}\text{Sr}$  ( $\lambda = 461\text{nm}$ ,  $\Gamma/(2\pi) = 32\text{MHz}$ ). Le facteur de Landé du niveau excité est  $g_e = 1$ .

Dans le premier cas, le niveau fondamental est dégénéré : il y a  $2J + 1 = 7$  sous-niveaux Zeeman. Après avoir diffusé un photon, un atome de rubidium peut soit se trouver dans le même sous-niveau Zeeman qu'avant la diffusion - on dit alors qu'il a effectué une transition Rayleigh - soit se trouver dans un sous-niveau différent, ce qui correspond à une transition Raman (dégénérée). Bien sûr, lorsque le niveau fondamental n'est pas dégénéré, comme pour le  $^{88}\text{Sr}$ , seules les transitions Rayleigh se produisent. Mais, disons-le dès maintenant, les transitions Raman ne sont pas responsables de la chute du contraste des interférences.

D'autre part, nous considérerons deux types de géométrie pour le nuage atomique. La première correspond à un nuage semi-infini possédant une face plane, de densité atomique uniforme. Cette géométrie très idéalisée permet d'effectuer des calculs analytiques. Une modélisation plus réaliste du nuage atomique est donnée par une boule, de densité gaussienne maximale au centre  $n(\mathbf{r}) = n_0 e^{-r^2/2r_0^2}$ . Dans ce cas, il faut recourir à des méthodes numériques pour calculer le cône CBS.

Dans la suite de cette section, nous déterminons les deux éléments indis-

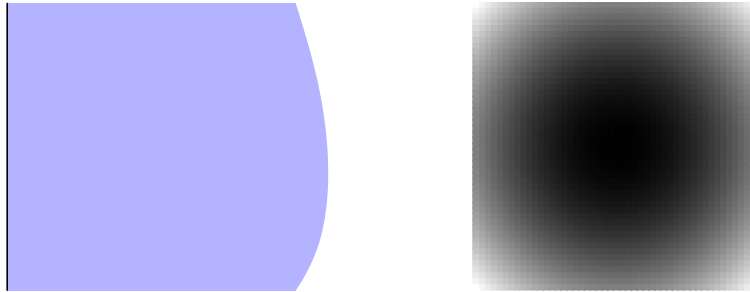


FIG. 2.3 – Les deux géométries que nous considérerons pour le nuage atomique. A gauche : milieu semi-infini, avec une face plane, et une densité uniforme. C'est un modèle idéalisé, qui permet des calculs analytiques. A droite : boule de densité gaussienne maximale au centre. Il s'agit d'une modélisation plus réaliste que la précédente, mais qui nécessite des calculs numériques.

pensables au calcul du cône CBS : la diffusion d'un photon par un atome, et la propagation d'un photon entre deux diffusions. Nous montrerons alors comment calculer le cône de rétrodiffusion cohérente, analytiquement ou numériquement.

### 2.4.1 Diffusion par un atome

La lumière est un champ électromagnétique. Si celui-ci se trouve à l'intérieur d'une boîte de volume  $V$  (volume de quantification), on peut le décomposer en modes propres, appelés photons, qui se comportent comme des oscillateurs indépendants. Chaque photon est caractérisé par un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et un état de polarisation  $\epsilon$ . Dans la jauge de Coulomb,  $\mathbf{k}$  et  $\epsilon$  sont orthogonaux. On introduit les opérateurs de création et d'annihilation  $a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger$  et  $a_{\mathbf{k}\epsilon}$ . Ils sont hermitiques conjugués l'un de l'autre, vérifient la relation de commutation  $[a_{\mathbf{k}\epsilon}, a_{\mathbf{k}'\epsilon'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\epsilon,\epsilon'}$  et  $a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger$  crée un photon à partir du vide :  $a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger|0\rangle = |\mathbf{k}\epsilon\rangle$ . L'hamiltonien du champ électromagnétique est alors :

$$H_{em} = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\epsilon} \quad (2.5)$$

dans le système d'unités naturelles  $\hbar = c = 1$  que nous utiliserons dans toute la suite.  $\omega_{\mathbf{k}} = k$  est la pulsation associée à un photon de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Elle sera notée simplement  $\omega$  dans la suite. On a choisi le vide de photons comme origine de l'énergie, ce qui cache un procédé de renormalisation car l'énergie du vide, bien que constante, est formellement infinie. Dans la suite, on supposera que  $V$  est grand, de sorte que :

$$\sum_{\mathbf{k}\epsilon} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\epsilon \perp \mathbf{k}} \quad (2.6)$$

De plus,  $V$  ne doit pas apparaître dans l'expression de grandeurs ayant une signification physique.

D'autre part, nous décrivons un atome par les deux niveaux, fondamental et excité, qui se couplent au champ électromagnétique par une transition dipolaire électrique. Si on choisit l'énergie du niveau fondamental pour origine des énergies, l'hamiltonien d'un atome s'écrit :

$$H_{at} = \omega_0 \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} |J_e m_e\rangle \langle J_e m_e| \quad (2.7)$$

où  $\omega_0/(2\pi)$  est la fréquence de la transition atomique.

Comme l'extension spatiale de l'atome est très petite devant la longueur d'onde de la lumière, l'interaction entre atome et photon peut être traitée dans l'approximation dipolaire électrique [57]. L'énergie potentielle d'interaction est :

$$U = -\mathcal{D} \cdot \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

où

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \mathcal{E}_\omega (\epsilon a_{\mathbf{k}\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \bar{\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \quad (2.9)$$

est le champ électrique transverse, avec  $\mathcal{E}_\omega = \sqrt{\omega/(2\epsilon_0 V)}$ . Il est évalué au centre de masse de l'atome.  $\mathcal{D}$  est l'opérateur dipolaire associé à la transition atomique, qui fait passer l'atome d'un niveau d'énergie à l'autre. Il s'agit d'un opérateur tensoriel irréductible<sup>2</sup> de rang 1, dont les composantes s'expriment simplement dans une base de vecteurs sphérique : si  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$  est une base cartésienne orthonormée, avec l'axe de quantification suivant  $\hat{\mathbf{z}}$ , on considère les vecteurs de base

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{e}_{-1} = \frac{\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \quad (2.10)$$

$\mathcal{D}$  s'y écrit

$$\mathcal{D} = \sum_{q=-1}^1 (-1)^q \mathcal{D}_q \mathbf{e}_{-q} \quad (2.11)$$

D'après le théorème de Wigner-Eckart (A.5), les éléments de matrice de  $\mathcal{D}_q$  sont :

$$\langle J_e m_e | \mathcal{D}_q | J m \rangle = \frac{\langle J_e || \mathcal{D} || J \rangle}{\sqrt{2J_e + 1}} \langle J 1 m q | J_e m_e \rangle \quad (2.12)$$

$$= d \langle J 1 m q | J_e m_e \rangle \quad (2.13)$$

Ils traduisent que si l'atome est dans son état fondamental  $|Jm\rangle$ , l'interaction avec un photon de polarisation  $\mathbf{e}_q$  le fait passer dans son état excité  $|J_e(m+q)\rangle$ . Au contraire, si l'atome se trouve initialement dans son état excité  $|J_e m_e\rangle$ , l'interaction avec le photon le fait passer dans son état fondamental  $|J(m_e - q)\rangle$ .

$\langle J_e || \mathcal{D} || J \rangle$  ne dépend que de  $J$  et  $J_e$ . Il est appelé élément de matrice réduit de  $\mathcal{D}$ . La dépendance en  $q$  de l'élément de matrice est contenue dans le coefficient de Clebsch-Gordan. Pour la suite, il est commode d'introduire l'opérateur dipolaire réduit

$$\mathbf{d} = \mathcal{D}/d \quad (2.14)$$

et

$$g_\omega = d\mathcal{E}_\omega \quad (2.15)$$

L'hamiltonien complet du système est :

$$H = H_{at} + H_{em} + U = H_0 + U \quad (2.16)$$

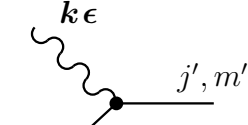
---

<sup>2</sup>L'annexe A rassemble les propriétés des opérateurs tensoriels irréductibles utilisées dans cette thèse

CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

Comme l'intensité de la sonde CBS est faible, on peut traiter  $U$  en perturbation par rapport à  $H_0$ .  $U$  fait passer l'atome d'un niveau d'énergie à l'autre par absorption ou émission d'un photon, suivant qu'on considère la partie de  $\mathbf{E}_\perp$  contenant l'opérateur de création ou d'annihilation. Le processus d'absorption est décrit par :

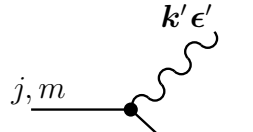


$$= \langle j'm'; 0 | U | jm; \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon} \rangle \quad (2.17)$$

$$= -ig_\omega \langle j'm' | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{d} | jm \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.18)$$

Le diagramme de Feynman se lit de gauche à droite (sens d'écoulement du temps). Une ligne droite représente un état atomique, et une ligne ondulée un état à un photon.

De même, l'émission d'un photon par l'atome est donnée par :



$$= \langle j'm'; \mathbf{k}'\boldsymbol{\epsilon}' | U | jm; 0 \rangle \quad (2.19)$$

$$= ig_\omega \langle j'm' | \bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \mathbf{d} | jm \rangle e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad (2.20)$$

Un évènement de diffusion se produit lorsqu'un photon interagit avec un atome initialement dans son état fondamental. Après diffusion, l'atome est toujours dans son état fondamental, mais a éventuellement changé de sous-niveau Zeeman, et le photon a pu changer de vecteur d'onde et de polarisation, mais pas de fréquence car l'énergie du système { atome + champ électromagnétique } se conserve. On passe donc de l'état  $|\psi\rangle = |Jm; \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}\rangle$  à  $|\psi'\rangle = |Jm'; \mathbf{k}'\boldsymbol{\epsilon}'\rangle$ . Ceci peut-être décrit par l'absorption du photon incident et l'émission du photon final par l'atome. Deux cas se présentent. Dans le premier, dit résonant, le photon incident est d'abord absorbé, et ensuite le photon sortant est émis. Dans le deuxième, dit anti-résonant, le photon sortant est émis par l'atome dans son état fondamental, puis le photon incident est absorbé.

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

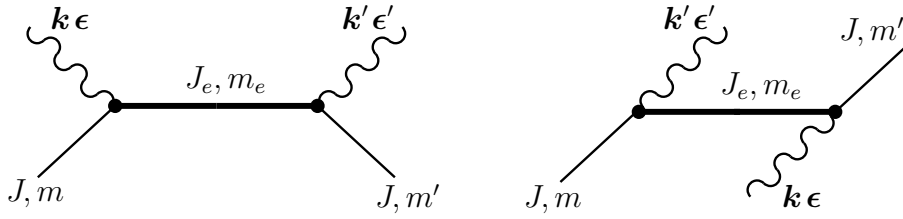


FIG. 2.4 – Diagrammes de Feynman des deux processus de diffusion. A gauche, le processus résonant avec absorption du photon incident suivi de l'émission du photon sortant. A droite, le processus anti-résonant au cours duquel l'absorption et l'émission se font dans l'ordre inverse. On a représenté l'évolution de l'atome dans son état excité par une ligne épaisse.

### Processus résonant ; propagateur de l'état excité

Dans l'amplitude de transition entre  $|\psi\rangle$  et  $|\psi'\rangle$  intervient le propagateur de l'état excité de l'atome (lignes épaisses de la figure 2.4). Il s'agit de la fonction de Green

$$\langle J_e m_e | G(E) | J_e m_e \rangle = \langle J_e m_e | \frac{1}{E - H} | J_e m_e \rangle \quad (2.21)$$

En première approximation, le comportement de  $G$  est dominé par  $G_0(E) = (E - H_0)^{-1}$ . Pour le terme résonant,  $G_0 = (\omega - \omega_0)^{-1}$  devient très grand lorsque  $\omega$  est proche de  $\omega_0$ , tandis que le terme antirésonant  $G_0 = (\omega - (2\omega + \omega_0))^{-1}$  est d'ordre  $\omega^{-1}$ . Comme le désaccord

$$\delta = \omega - \omega_0 \quad (2.22)$$

est petit devant  $\omega_0$ , nous négligerons les termes antirésonants dans toute la suite.

A présent, déterminons  $G$  pour le diagramme résonant. Dans le cadre de la théorie des collisions, on peut montrer qu'elle est donnée par la série de Born [58] :

$$G = G_0 + G_0 U G_0 + G_0 U G_0 U G_0 + \dots \quad (2.23)$$

Or, l'atome est dans son état excité au début comme à la fin de la propagation. Comme  $U$  fait changer de niveau à l'atome, seuls les termes contenant un nombre pair de fois  $U$  contribuent à  $G$ . De façon diagrammatique, cela peut s'écrire :

$$G = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (2.24)$$

CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

avec  $G_0 = \text{---}$ . On introduit alors la self-énergie  $\Sigma$  définie par la somme des diagrammes irréductibles (qui ne se scindent pas en deux lorsqu'on coupe une ligne de propagateur) [59] :

$$\Sigma = \blacksquare = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (2.25)$$

On réordonnant les termes de (2.24), on obtient :

$$G = \text{---} + \text{---} \blacksquare \text{---} + \text{---} \blacksquare \blacksquare \text{---} + \dots \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{\omega - \omega_0 - \Sigma} \quad (2.27)$$

Ainsi, les effets de l'interaction photon-atome sur  $G$  sont entièrement contenus dans  $\Sigma$ . Calculer exactement la self-énergie est une tâche ardue. Cependant, nous pouvons ici nous restreindre au calcul du premier terme de la série. En effet, il décrit un processus résonant : l'atome dans son état excité émet un photon, puis le réabsorbe alors qu'il est dans son état fondamental. Dans tous les termes suivants, l'atome émet au moins un photon alors qu'il se trouve dans son état fondamental. Il est important de remarquer que lorsqu'on se restreint au premier terme de  $\Sigma$ , l'expression obtenue pour  $G$  est non-perturbative. On trouve que  $\Sigma$  est un nombre complexe :  $\Sigma = \Delta\omega_0 - i\Gamma/2$ .  $\Delta\omega_0$  est la modification de la fréquence de la transition atomique par  $U$ . En pratique, seule  $\omega_0 + \Delta\omega_0$  est accessible expérimentalement et nous lui conserverons le nom  $\omega_0$ . La partie imaginaire de  $\Sigma$  est négative et rend compte de la possibilité pour un atome d'émettre un photon dans un mode vide du champ électromagnétique depuis son état excité. On peut montrer que  $\Gamma = d^2\omega_0^3/(3\pi\epsilon_0)$  [60]. Nous pouvons alors écrire :

$$G = \frac{1}{\delta + i\Gamma/2} \quad (2.28)$$

### Amplitude de diffusion

A présent, nous devons établir un lien entre les diagrammes de la figure 2.4 et les amplitudes de diffusion  $\langle \psi' | S | \psi \rangle$ . La matrice  $S$  décrit le phénomène de diffusion. Elle possède l'importante propriété d'unitarité, qui assure que les états initial et final ont même norme. Son expression comporte deux termes :

$$S = 1 - 2i\pi\delta(E_f - E_i)T \quad (2.29)$$

Le premier terme est l'identité, qui représente le cas où l'onde incidente n'est pas diffusée, et le deuxième terme contient l'opérateur de diffusion  $T = UGU$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

[59]. C'est ce terme qui décrit l'interaction entre le photon et l'atome. Le facteur  $\delta(E_f - E_i)$  assure que les états initial et final ont même énergie totale. Les diagrammes représentent les éléments de matrice de  $T$ . Précisons que  $T$  et  $S$  agissent sur l'espace produit des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental de l'atome et des états photoniques. Pour un évènement de diffusion, l'amplitude de transition est :

$$\langle \psi' | S | \psi \rangle = -2i\pi\delta(E_f - E_i)\langle \psi' | T | \psi \rangle \quad (2.30)$$

Nous pouvons à présent calculer les éléments de matrice de  $T$ .

$$\begin{aligned} \langle Jm'; \mathbf{k}'\boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon} \rangle &= \frac{g_\omega^2}{\delta + i\Gamma/2} \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} \langle Jm' | (\mathbf{d}\cdot\bar{\boldsymbol{\epsilon}}') | J_e m_e \rangle \langle J_e m_e | (\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{g_\omega^2}{\delta + i\Gamma/2} \langle Jm' | (\mathbf{d}\cdot\bar{\boldsymbol{\epsilon}}') P_e(\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $P_e$  est le projecteur sur l'état excité. La somme sur tous les états excités tient compte de ce que tous les processus ayant mêmes états initial et final interfèrent.

Pour la suite, il sera commode d'introduire l'opérateur  $\mathbf{t}$  défini par :

$$t_{ij} = \frac{g_\omega^2}{\delta + i\Gamma/2} d_i d_j = t(\omega) d_i d_j \quad (2.32)$$

alors l'amplitude de transition devient :

$$-2i\pi\delta(\omega' - \omega) \langle Jm' | (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}'\cdot\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \quad (2.33)$$

### Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion  $\sigma_d$  est une grandeur qui quantifie l'efficacité des atomes en tant que diffuseurs. Elle a la dimension d'une surface, et plus elle est grande, plus le diffuseur est efficace.  $\sigma_d$  est définie comme étant le rapport entre l'énergie diffusée par unité de temps par l'atome et le flux incident de photons. On distingue la section efficace totale  $\sigma_d$  qui concerne l'énergie diffusée dans tout l'espace, et la section efficace différentielle qui concerne l'énergie diffusée dans une seule direction. Cette dernière détermine le diagramme de rayonnement de l'atome.

En l'absence d'absorption, la section efficace totale est donnée par le théorème optique [59], qui est une conséquence de l'unitarité de la matrice  $S$ . Il relie  $\sigma_d$  à l'amplitude de diffusion vers l'avant ( $\mathbf{k}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}$  sont conservés lors de cette



CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

diffusion). Sa signification est que la partie de l'onde incidente qui n'est pas diffusée est transmise vers l'avant. Lorsque le diffuseur possède une structure interne, le théorème optique n'est valable qu'en moyenne :

$$\sigma_d = -2V \operatorname{Im}[\langle \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon} | \langle T \rangle_{int} | \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon} \rangle] \quad (2.34)$$

où  $\langle T \rangle_{int}$  est la valeur de  $T$  après avoir pris la moyenne sur les degrés de libertés internes de l'atome. Si on note  $\rho$  la matrice densité associée à ces degrés de liberté,  $\langle \dots \rangle_{int} = \operatorname{Tr}(\rho \dots)$  [61]. Comme de plus nous avons fait l'hypothèse que tous les atomes se trouvent dans leur état fondamental, où ils sont uniformément répartis entre les différents sous-niveaux Zeeman,  $\rho$  est proportionnel à l'identité :

$$\rho = \frac{1}{2J+1} \sum_{m=-J}^J |Jm\rangle \langle Jm| \quad (2.35)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{int} &= \frac{t(\omega) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}}{2J+1} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'_i \boldsymbol{\epsilon}_j \operatorname{Tr}(d_i d_j) \\ &= \frac{t(\omega) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}}{2J+1} \sum_{m,q,q'} (-1)^{q+q'} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'_{-q'} \boldsymbol{\epsilon}_{-q} \langle Jm | d_{q'} d_q | Jm \rangle \\ &= \frac{t(\omega) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}}{2J+1} \sum_{m,q} (-1)^q \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'_q \boldsymbol{\epsilon}_{-q} \langle J1mq | J_e m + q \rangle^2 \\ &= t(\omega) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \frac{2J_e + 1}{3(2J+1)} \sum_{m,q} (-1)^q \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'_q \boldsymbol{\epsilon}_{-q} \langle J J_e - m m + q | 1q \rangle^2 \\ &= t(\omega) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \frac{2J_e + 1}{3(2J+1)} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.36)$$

où on a exprimé  $\mathbf{d}$  dans la base (2.10). Dans cette base, le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{q=-1}^1 (-1)^q u_{-q} v_q \quad (2.37)$$

On a ensuite utilisé les éléments de matrice (2.12) de  $\mathbf{d}$ , puis les propriétés des coefficients de Clebsch-Gordan (Annexe A). Dans la suite, on notera  $M_{J,J_e} = (2J_e + 1) / (3(2J + 1))$ .

Et finalement :

$$\sigma_d = M_{J,J_e} \frac{6\pi}{k^2} \frac{1}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (2.38)$$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

### Section efficace différentielle

Le calcul de la section efficace différentielle nécessite celui de l'énergie rayonnée par l'atome dans une direction donnée. Celle-ci est proportionnelle à la probabilité qu'un photon soit diffusé dans cette direction. La probabilité de transition est le module au carré de l'amplitude (2.30). Il se pose un problème technique, car le carré d'une distribution de Dirac apparaît. On peut cependant réécrire :

$$[2\pi\delta(\omega' - \omega)]^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega' - \omega) e^{i(\omega' - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega' - \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \quad (2.39)$$

En interprétant la dernière intégrale divergente comme la durée totale de l'interaction [60], on définit une probabilité de transition par unité de temps :

$$w = 2\pi\delta(\omega' - \omega) |\langle Jm'; \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle|^2 \quad (2.40)$$

La densité d'états du champ électromagnétique étant  $V\omega^2/(2\pi)^3$ , l'énergie rayonnée dans la direction  $\mathbf{k}'$  par unité de temps et d'angle solide est :

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{V\omega^3}{(2\pi)^2} |\langle Jm'; \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle|^2 \quad (2.41)$$

Et le flux incident de photons étant égal à  $\omega/V$ , on en déduit la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2\omega^2}{(2\pi)^2} |\langle Jm'; \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle|^2 \quad (2.42)$$

Dans l'étude de la rétrodiffusion cohérente de la lumière, on ne contrôle pas les états initial et final de l'atome. Aussi, nous devons faire la moyenne sur les états initiaux et sommer sur les états finaux :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{V^2\omega^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2J+1} \sum_{m,m'} |\langle Jm'; \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle|^2 \\ &= \frac{V^2\omega^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2J+1} \sum_m \langle Jm | (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{t}^\dagger \cdot \boldsymbol{\epsilon}') (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle \\ &= \frac{3\sigma_d}{8\pi} \frac{1}{M_{J,J_e}} \langle (\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}') (\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}') (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \rangle_{int} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Une analyse en termes d'opérateurs tensoriels irréductibles permet de montrer que [55] :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &\equiv \frac{1}{M_{J,J_e}} \langle (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_4) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_3) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_2) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_1) \rangle_{int} = \\ &w_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_4) + w_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3) (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_4) + w_3(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_4) (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3) \end{aligned} \quad (2.44)$$

CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

$w_1$	$w_2$	$w_3$
$\frac{6J^2 + 17J + 10}{10(J+1)(2J+1)}$	$\frac{-4J(J+2)}{10(J+1)(2J+1)}$	$\frac{J(6J+7)}{10(J+1)(2J+1)}$

TAB. 2.1 – Coefficients  $w_i$  pour une transition  $J \rightarrow J+1$ . Pour un atome dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré, on retrouve  $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$ . Dans le cas général, les trois coefficients prennent des valeurs quelconques.

où les coefficients  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  s'expriment à l'aide de symboles  $6j$  dépendant de  $J$  et  $J_e$  (voir l'annexe A) :

$$w_1 = (2J_e + 1) \left( \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \right) \quad (2.45)$$

$$w_2 = \frac{3}{2}(2J_e + 1) \left( \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \right) \quad (2.46)$$

$$w_3 = \frac{3}{2}(2J_e + 1) \left( \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \right) \quad (2.47)$$

Ils vérifient l'égalité  $w_1 + w_2 + 3w_3 = 1$  qui traduit la conservation de l'énergie. Pour une transition  $J \rightarrow J+1$ , on donne leurs expressions dans la table 2.1 La section efficace différentielle devient :

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{3\sigma_d}{8\pi} (w_1 |\bar{\epsilon}' \cdot \epsilon|^2 + w_2 |\epsilon' \cdot \epsilon|^2 + w_3) \quad (2.48)$$

Dans le cas d'une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$ , on a  $w_1 = 1$  et  $w_2 = w_3 = 0$ . On retrouve le résultat bien connu du modèle de l'électron élastiquement lié. Dans le cas général,  $w_2$  et  $w_3$  ne sont pas nuls. Pour la transition qui nous intéresse,  $J = 3$  et  $J_e = 4$ ,

$$w_1 = \frac{23}{56} \quad w_2 = -\frac{3}{14} \quad w_3 = \frac{15}{56} \quad (2.49)$$

### 2.4.2 Propagation d'un photon dans le nuage atomique

Après avoir étudié l'interaction d'un photon avec un atome, nous nous intéressons à son interaction avec l'ensemble du nuage atomique. En particulier, nous allons déterminer comment sa propagation est affectée par la présence des atomes.

Ceux-ci occupent des positions  $\mathbf{r}_i$ ,  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . L'hamiltonien des atomes devient

$$\mathcal{H}_{at} = \sum_{i=1}^N H_{at}(\mathbf{r}_i) \quad (2.50)$$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

et le potentiel d'interaction entre photon et atomes :

$$\mathcal{U} = -d \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_i) \quad (2.51)$$

L'hamiltonien du système complet est :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{at} + H_{em} + \mathcal{U} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U} \quad (2.52)$$

Pour obtenir la fonction de Green  $G$  associée au photon, on fait la moyenne de la fonction de Green  $G_{tot}$  de l'ensemble {atomes + photons} sur les degrés de liberté atomique. La moyenne sur les degrés de liberté internes se fait en utilisant (2.35). Pour les degrés externes :

$$\langle \dots \rangle_{ext} = \frac{1}{V^N} \int \left( \prod_{i=1}^N d\mathbf{r}_i \right) \dots \quad (2.53)$$

Et  $G = \langle \langle G_{tot} \rangle_{int} \rangle_{ext}$ . Nous allons tout d'abord exprimer  $G_{tot}$  en fonction de  $G_0$ , fonction de Green associée à  $\mathcal{H}_0$ . Les atomes étant tous dans leur état fondamental,  $\mathcal{H}_{at} = 0$  et on a

$$G_0(E) = \frac{1}{E - H_{em}} = \frac{1}{\omega - k} \quad (2.54)$$

D'autre part, on a toujours :

$$G_{tot} = G_0 + G_0 \mathcal{U} G_0 + G_0 \mathcal{U} G_0 \mathcal{U} G_0 + \dots \quad (2.55)$$

Dans cette expression, seuls les termes qui laissent les atomes dans leur état fondamental contribuent, c'est à dire ceux contenant un nombre pair de fois  $\mathcal{U}$ . Nous allons réécrire (2.55) sous une forme diagrammatique :

$$G_{tot} = \text{---} + \sum_{i,j} \text{---} \circ_i \text{---} \circ_j \text{---} + \dots \quad (2.56)$$

où un trait plein représente  $G_0$  et un cercle l'action de  $U$  sur le  $i^{\text{ème}}$  atome. On introduit alors l'opérateur de transition  $T_i$  qui décrit la diffusion par l'atome  $i$  :

$$T_i = \times_i = \circ_i + \text{---} \circ_i \text{---} \circ_i \text{---} + \dots \quad (2.57)$$

Il permet d'arranger l'expression de  $G_{tot}$  :

$$G_{tot} = \text{---} + \sum_i \text{---} \times_i \text{---} + \sum_{i \neq j} \text{---} \times_i \times_j \text{---} + \dots \quad (2.58)$$

CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

Il est clair que dans le troisième terme,  $i$  doit désigner un diffuseur différent de  $j$  d'après la définition de  $T_i$ . Par contre, dans les termes suivants, deux diffuseurs non consécutifs peuvent être identiques.

Nous allons maintenant effectuer la moyenne sur les degrés de liberté atomiques.  $G_0$  ne dépend pas des atomes, et est donc insensible à la moyenne. D'autre part,  $T_i$  ne dépend de  $i$  que par  $\mathbf{r}_i$ . Si les atomes sont distribués uniformément dans le nuage atomique,  $\langle\langle T_i \rangle_{int}\rangle_{ext} = \otimes$  ne dépend plus de  $i$  (invariance statistique par translation). Si la densité du nuage n'est pas uniforme, on peut appliquer ce traitement localement à condition qu'elle ne varie pas significativement sur un libre parcours moyen. Le propagateur du photon s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 G = & \text{---} + N \text{---} \otimes \text{---} + N(N-1) \text{---} \otimes \text{---} \otimes \text{---} \\
 & + N(N-1)(N-2) \text{---} \otimes \otimes \otimes \text{---} + N(N-1) \text{---} \otimes \text{---} \otimes \text{---} \otimes \text{---} \\
 & \hspace{15em} + \dots \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

La ligne pointillée relie des diffuseurs identiques.

Comme lors du calcul du propagateur de l'état excité atomique, on introduit la self-énergie  $\Sigma$ , somme de tous les diagrammes irréductibles :

$$\Sigma = N \otimes + N(N-1) \otimes \text{---} \otimes \text{---} \otimes + \dots \quad (2.60)$$

On montre alors que :

$$G = \frac{1}{G_0^{-1} - \Sigma} = \frac{1}{\omega - k - \Sigma} \quad (2.61)$$

Encore une fois, toute la difficulté du calcul de  $G$  est passée dans celle du calcul de  $\Sigma$ . Cependant, comme le milieu atomique est dilué, il est possible de négliger la contribution de la diffusion récurrente, c'est à dire les diagrammes dans lesquels un photon est diffusé plusieurs fois par le même atome. Dans cette approximation, la self-énergie se réduit à son premier terme :

$$\Sigma = N \otimes \quad (2.62)$$

Pour connaître  $\Sigma$ , il suffit donc de calculer la valeur moyenne de l'opérateur de diffusion par un atome  $T$ . Lors du calcul de la section efficace d'un atome, nous avons vu que :

$$\langle \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | \langle T \rangle_{int} | \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle = M_{J,J_e} t(\omega) (\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \quad (2.63)$$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

La moyenne sur la position  $\mathbf{r}$  de l'atome donne :

$$\langle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \rangle_{ext} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (2.64)$$

On en déduit la valeur moyenne de l'opérateur de diffusion :

$$\langle T \rangle = \frac{M_{J,J_e}}{V} \frac{3\pi}{\omega^2} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \mathbf{1}_\epsilon \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (2.65)$$

et la self-énergie :

$$\Sigma = n_d M_{J,J_e} \frac{3\pi}{\omega^2} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \mathbf{1}_\epsilon \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \Sigma(\omega) \mathbf{1}_\epsilon \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (2.66)$$

$\mathbf{1}_\epsilon$  désigne l'identité dans l'espace des polarisations, et  $n_d$  est la densité volumique des atomes. Rappelons que si le nuage atomique n'a pas une densité uniforme, il s'agit de la densité locale.

Les pôles du propagateur fournissent l'équation de dispersion du milieu effectif dans lequel se propage le photon :

$$\omega = k + \Sigma(\omega) \quad (2.67)$$

Au premier ordre en densité, la solution de cette équation est :

$$\omega(k) = k + \Sigma(k) \quad (2.68)$$

L'indice optique  $n_r$  du milieu est donné par l'inverse de la vitesse de phase :

$$n_r \equiv \frac{k}{\omega} = 1 - \frac{\Sigma(k)}{k} \quad (2.69)$$

La partie réelle de  $\Sigma(k)$  contribue à l'indice de réfraction du milieu, tandis que sa partie imaginaire contribue à l'extinction de l'onde qui se propage.

Comme  $\Sigma$  est proportionnelle à l'identité dans l'espace des états photoniques, elle ne décrit que la propagation du mode initial du champ électromagnétique. Cela signifie que la partie imaginaire de  $\Sigma$  décrit l'extinction du mode initial. Comme la seule source d'extinction est la diffusion vers les autres modes du champ électromagnétique,  $\text{Im}\Sigma(k)$  est reliée au libre parcours moyen de diffusion  $\ell$ . Comme nous le verrons plus loin (équation (2.77))<sup>3</sup> :

$$\text{Im}\Sigma(k) = -n_d M_{J,J_e} \frac{3\pi}{k^2} \frac{1}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} = -\frac{1}{2\ell} \quad (2.70)$$

---

<sup>3</sup>Au passage, on peut vérifier qu'on a bien  $\sigma_d = 1/(n_d\ell)$

## CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

D'autre part,  $G$  ne saurait rendre compte des changements de vecteurs d'ondes et de polarisations liés à la diffusion. Si nous voulons calculer l'amplitude d'un chemin de diffusion, nous devons utiliser  $T$  et non pas sa valeur moyenne. Par contre, pour calculer les intensités cohérente et incohérente associées à ce chemin de diffusion, nous pourrions utiliser la section efficace différentielle (2.48) qui est proportionnelle à la valeur moyenne de  $T^\dagger T$ . Comme nous le verrons, cette deuxième méthode est à la fois efficace et élégante.

Enfin, nous pouvons nous demander pourquoi le caractère transverse de la lumière n'apparaît pas explicitement dans l'expression de  $G$ . En fait, les sources de photons (aussi bien la source laser de la sonde CBS que les atomes lors du processus de diffusion) émettent des photons dont la polarisation est perpendiculaire au vecteur d'onde. Puisque  $\Sigma$  est proportionnelle à l'identité,  $G$  décrit la propagation de ces photons sans changement de polarisation ou de vecteur d'onde. La transversalité est donc assurée. D'un point de vue plus technique, la matrice  $\mathbf{1}_\epsilon$  décrit le produit scalaire dans un espace à trois dimensions. Or, en toute rigueur, les polarisations ne sont définies que dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde [57]. Par conséquent, il aurait fallu écrire  $\Delta_{\mathbf{k}'}\Delta_{\mathbf{k}}$  au lieu de  $\mathbf{1}_\epsilon$ , avec  $\Delta_{\mathbf{v}}$  le projecteur sur le plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}$ . Tant que le milieu est optiquement isotrope, cela ne change rien, mais nous conserverons dorénavant ces projecteurs dans l'expression de  $\Sigma$  : ils nous permettent de tenir compte du changement de direction d'un photon après un événement de diffusion. Dans ce cas,  $G$  s'écrit :

$$G = \frac{1}{\omega - k - \Sigma(k)} \Delta_{\mathbf{k}} \quad (2.71)$$

Le propagateur du photon dans l'espace réel est la transformée de Fourier de  $G$  :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} G e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\omega - k - \Sigma(k)} \Delta_{\mathbf{k}} \quad (2.72)$$

En utilisant le fait que  $(\Delta_{\mathbf{k}})_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ , la partie angulaire de (2.72) devient :

$$\int d^2\hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\Delta_{\mathbf{k}})_{ij} = \left( \delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \int d^2\hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.73)$$

Dans le régime de localisation faible, caractérisé par  $kl \gg 1$ , les atomes ne sont sensibles qu'à la composante de champ lointain. On peut négliger les termes d'ordre supérieur à 1 en  $1/(kr)$  dans l'expression de  $G(\mathbf{r}, \omega)$ . Dans cette approximation, l'intégrale angulaire vaut :

$$\int d^2\hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Delta_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \Delta_{\mathbf{r}} \quad (2.74)$$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

Et le propagateur du photon est alors :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{V}{4\pi^2 i r} \Delta_{\mathbf{r}} \int_0^\infty dk \frac{k(e^{ikr} - e^{-ikr})}{\omega - k - \Sigma(k)} \quad (2.75)$$

Cette intégrale diverge lorsque  $k$  tend vers l'infini. Cela traduit que l'interaction entre deux atomes distants de moins d'une longueur d'onde ne se réduit pas à l'échange d'un photon résonnant. Il est possible de montrer que la partie divergente de cette intégrale vient du terme de contact décrit par la fonction delta transverse [57]. Pour obtenir la contribution au champ lointain, il suffit de calculer la partie régulière de cette intégrale par la méthode des résidus. Pour cela, on étend le domaine d'intégration de  $-\infty$  à  $+\infty$  : l'intégrale rajoutée est négligeable et est même compensée par un diagramme antirésonant. On ferme le contour d'intégration par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur du plan complexe pour la première exponentielle, et dans le demi-plan inférieur pour la seconde. Comme la partie imaginaire de  $\Sigma(k)$  est négative, la fonction à intégrer n'a de pôles que dans le demi-plan supérieur. Aussi la deuxième exponentielle ne contribue pas au résultat final :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega V}{2\pi r} e^{ikr(1-\Sigma(k)/k)} \Delta_{\mathbf{r}} \quad (2.76)$$

Exactement à résonance,  $\Sigma(k) = -i/(2\ell)$  et :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega V}{2\pi r} e^{ikr} e^{-r/2\ell} \Delta_{\mathbf{r}} \quad (2.77)$$

Si la densité du nuage atomique n'est pas uniforme, mais lentement variable,  $\Sigma$ , qui lui est proportionnelle, dépend de la position dans le nuage. L'expression de  $G(\mathbf{r}, \omega)$  se généralise :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega V}{2\pi r} e^{ikr} e^{-i \int_0^r \Sigma(k, r') dr'} \Delta_{\mathbf{r}} \quad (2.78)$$

Enfin, il faut remarquer que ces expressions de  $G(\mathbf{r}, \omega)$  sont fondées sur l'invariance statistique par translation, qui n'est valable que dans un milieu infini. En pratique, le nuage atomique est de taille finie, et un photon peut y entrer ou en sortir. A l'intérieur du nuage, pour la propagation d'un atome à l'autre, un photon ne voit pas qu'il se propage dans un milieu de taille finie et nos calculs sont valides. Par contre, pour les photons entrants et sortants, l'action du milieu effectif se réduit à l'influence de l'indice de réfraction : l'amplitude de l'onde est multipliée par  $e^{in_r k r}$ . La densité du nuage atomique est toujours suffisamment faible pour pouvoir négliger les effets de réfraction à son interface avec le milieu extérieur.



### 2.4.3 Cône de rétrodiffusion cohérente

Dans les deux sections précédentes, nous avons décrit les processus de propagation d'un photon dans le nuage atomique et de diffusion d'un photon par un atome. Nous avons à présent en mains les outils nécessaires pour calculer le cône de rétrodiffusion cohérente. La forme du cône CBS est donnée par le terme d'interférences (1.15) en fonction de l'angle  $\Delta\theta$  que fait la direction d'observation avec la direction de rétrodiffusion. Sa hauteur est déterminée par le facteur d'augmentation (1.18).

#### Amplitude d'un chemin de diffusion ; coefficient bistatique

Soit un photon  $|\mathbf{k}\epsilon\rangle$  entrant dans le nuage atomique. Il se propage en ligne droite jusqu'à ce qu'il soit diffusé par un atome. Après la diffusion, l'atome a éventuellement changé de sous-niveau Zeeman et le photon se propage dans un mode  $|\mathbf{k}_1\epsilon_1\rangle$ . Puis il est à nouveau diffusé et continue son chemin jusqu'à ce qu'il sorte du nuage atomique. Sa polarisation est alors analysée. L'amplitude d'un chemin de diffusion contenant  $p$  diffuseurs est :

$$a_{dir} = \vec{\epsilon}' G(\mathbf{r}_{out} - \mathbf{r}_p) t_{m_p m'_p} G(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p-1}) \dots G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) t_{m_1 m'_1} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{in}) \epsilon \quad (2.79)$$

avec  $t_{mm'} = \langle Jm' | \mathbf{t} | Jm \rangle$ . La diffusion étant élastique, le photon conserve la même pulsation tout au long du chemin. Si la sonde CBS est monochromatique, on peut omettre la dépendance en  $\omega$  du propagateur.  $\mathbf{r}_{in}$  et  $\mathbf{r}_{out}$  désignent les positions d'entrée et de sortie du photon dans le nuage atomique.

Le chemin renversé, qui visite les mêmes diffuseurs dans l'ordre inverse, a pour amplitude :

$$a_{rev} = \vec{\epsilon}' G(\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}_1) t_{m_1 m'_1} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \dots G(\mathbf{r}_{p-1} - \mathbf{r}_p) t_{m_p m'_p} G(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{out}) \epsilon \quad (2.80)$$

$a_{dir}$  et  $a_{rev}$  sont proportionnels à l'amplitude lumineuse issue des chemins direct et renversé. A ce facteur de proportionnalité près, l'intensité incohérente  $I_{inc}$  est obtenue en additionnant les modules au carré de  $a_{dir}$  et  $a_{rev}$ , puis en prenant la moyenne sur les degrés de liberté externes et internes des atomes. La première moyenne correspond à la moyenne de configuration, qui donne lieu à l'apparition du cône CBS. La deuxième traduit le fait que l'observation de la rétrodiffusion cohérente porte uniquement sur les photons : il n'y a aucun contrôle sur les états atomiques. La moyenne interne porte sur les opérateurs  $t_{mm'}$ , et la moyenne externe sur  $G(\mathbf{r})$ .

Plutôt que de calculer directement une intensité, on calcule la grandeur sans

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

dimension suivante, appelée coefficient bistatique, qui lui est proportionnelle :

$$\gamma^{(p)} = \lim_{A, N \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{A\mu} \left\langle \frac{d\sigma^{(p)}}{d\Omega} \right\rangle_{CBS} \quad (2.81)$$

$p$  désigne l'ordre de diffusion,  $A$  la surface éclairée du nuage atomique,  $\mu$  le cosinus de l'angle d'incidence du faisceau lumineux avec la face d'entrée. La moyenne CBS porte sur tous les degrés de liberté atomiques. Le coefficient bistatique n'a de sens que si le milieu diffusant présente une face plane à l'onde incidente. Dans la suite, nous travaillerons en incidence normale et nous prendrons  $\mu = 1$ . Dans les géométries où le milieu ne possède pas une face plane, nous calculerons des sections efficaces globales avec la même formule (2.81), avec  $\mu = 1$ . Nous conserverons la notation  $\gamma^{(p)}$  pour désigner ces section efficaces, et leur donnerons parfois le nom de coefficient bistatique par abus de langage.

### Diffusion simple

Pour fixer les idées, commençons par étudier les chemins de diffusion simple. Ils ne possèdent pas de chemin renversé distinct d'eux-mêmes, et ne participent pas aux interférences, mais contribuent au fond incohérent. Un photon décrivant un tel chemin entre dans le nuage atomique, et est diffusé une seule fois avant de ressortir dans la direction arrière. Soit  $z$  la distance parcourue par le photon entre son entrée dans le nuage et sa diffusion. On a alors :

$$|a_{dir}|^2(z) = e^{-2z/\ell} |\bar{\epsilon}' t_{mm'} \epsilon|^2 \quad (2.82)$$

Et, d'après (2.44), la moyenne interne est :

$$\langle |a_{dir}|^2(z) \rangle_{int} = e^{-2z/\ell} |t(\omega)|^2 M_{J,J_e} \mathcal{I}(\epsilon, \bar{\epsilon}', \epsilon', \bar{\epsilon}) \quad (2.83)$$

L'équation (2.48) nous fournit la section efficace différentielle pour la diffusion simple :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} &= N \frac{V^2 \omega^2}{4\pi^2} \langle |a_{dir}|^2(z) \rangle_{int} \\ &= \frac{3V}{8\pi\ell} e^{-2z/\ell} \mathcal{I}(\epsilon, \bar{\epsilon}', \epsilon', \bar{\epsilon}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

en tenant compte du fait qu'il y a  $N$  diffuseurs. On obtient  $\gamma_1$  par une moyenne de configuration :

$$\gamma^{(1)} = \frac{3}{2A} \mathcal{I}(\epsilon, \bar{\epsilon}', \epsilon', \bar{\epsilon}) \int_V \frac{e^{-2z/\ell}}{\ell} \quad (2.85)$$

## CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

$\gamma^{(1)}$  s'exprime donc comme le produit d'un nombre dépendant de la géométrie du nuage atomique, et de  $\mathcal{I}$  qui dépend du canal de polarisation et de la transition atomique. L'expression (2.44) de  $\mathcal{I}$  montre que la contribution de la diffusion simple à l'intensité incohérente est non-nulle dans tous les canaux de polarisations si  $w_2$  et  $w_3$  sont nuls, *i.e.* si  $J$  est non nul. Cette moyenne dépend de la géométrie du nuage atomique. Dans le cas idéal d'un milieu semi-infini dans la direction de la lumière incidente et infini dans les deux autres direction, et avec une densité uniforme :

$$\gamma^{(1)} = \frac{3}{4}(w_1|\bar{\epsilon}' \cdot \epsilon|^2 + w_2|\epsilon' \cdot \epsilon|^2 + w_3) \quad (2.86)$$

Pour une géométrie du nuage plus réaliste, par exemple une boule avec une densité gaussienne, il faut recourir à des méthodes numériques, de type Monte-Carlo. Il en sera question un peu plus loin dans cette section.

### Intensité incohérente

Dans le cas de la diffusion multiple, la moyenne interne porte sur tous les atomes du chemin de diffusion. Comme ceux-ci sont identiques et indépendants, le résultat de la diffusion simple constitue une brique élémentaire avec laquelle on peut construire le calcul à n'importe quel ordre de diffusion. En posant

$$\tilde{t}_{mm'} = \frac{1}{|t(\omega)|} t_{mm'} \quad (2.87)$$

et en utilisant (2.70),(2.77) et (2.79), l'intensité associée au chemin direct est :

$$|a_{dir}|^2 = \left( \frac{3V}{8\pi N M_{J,J_e} \ell} \right)^p \frac{4\pi^2}{V^2 \omega^2} \frac{e^{-r_{1,2}/\ell}}{r_{1,2}^2} \cdots \frac{e^{-r_{p-1,p}/\ell}}{r_{p-1,p}^2} e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell} \\ (\bar{\epsilon}' \tilde{t}_{m_p m'_p} \Delta_{\mathbf{r}_{p-1,p}} \cdots \tilde{t}_{m_2 m'_2} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} \epsilon) (\bar{\epsilon}' \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \cdots \Delta_{\mathbf{r}_{p-1,p}} \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger \epsilon') \quad (2.88)$$

où  $\mathbf{r}_{i,i+1}$  est le vecteur joignant le  $i^{\text{ème}}$  diffuseur au  $(i+1)^{\text{ème}}$ .

Effectuons la moyenne sur les degrés de liberté internes des atomes. Pour la diffusion simple, elle impliquait les polarisations incidente et d'analyse, et leurs complexes conjuguées via  $\mathcal{I}$  définie par (2.44). De même, pour la diffusion multiple, la moyenne interne sur le premier diffuseur implique la polarisation incidente et sa complexe conjuguée, et aussi le projecteur  $\Delta_{\mathbf{r}_{12}}$ . Pour rendre cela plus intuitif, nous utilisons à nouveau une représentation

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

diagrammatique, dont la base est la fonction  $\mathcal{I}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_{J,J_e}} \langle (\mathbf{x}_4 \tilde{t}^\dagger \mathbf{x}_3) (\mathbf{x}_2 \tilde{t} \mathbf{x}_1) \rangle_{int} &\equiv \mathcal{I}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\
&= w_1 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \text{---} \mathbf{x}_3 \end{array} + w_2 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \text{---} \mathbf{x}_3 \end{array} + w_3 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \text{---} \mathbf{x}_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{array} \right. \\
&= \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \text{---} \mathbf{x}_3 \end{array} \quad (2.89)
\end{aligned}$$

La moyenne interne de (2.88) se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\langle |a_{dir}|^2 \rangle_{int} &= \left( \frac{3V}{8\pi N\ell} \right)^p \frac{4\pi^2}{V^2 \omega^2} \frac{e^{-r_{1,2}/\ell}}{r_{1,2}^2} \dots \frac{e^{-r_{p-1,p}/\ell}}{r_{p-1,p}^2} e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell} \\
&\epsilon \begin{array}{c} \text{---} \Delta_{r_{1,2}} \text{---} \Delta_{r_{2,3}} \dots \Delta_{r_{p-1,p}} \text{---} \bar{\epsilon}' \\ \text{---} \Delta_{r_{1,2}} \text{---} \Delta_{r_{2,3}} \dots \Delta_{r_{p-1,p}} \text{---} \epsilon' \end{array} \quad (2.90)
\end{aligned}$$

Du fait de sa forme, le diagramme intervenant dans cette expression est appelé diagramme échelle (*ladder* en anglais). Nous le noterons  $L_p$ . Il se lit de la façon suivante. Le sens du temps est représenté de gauche à droite, et les rubans verticaux indiquent les instants de diffusion. La ligne du haut représente l'amplitude du chemin direct, le long duquel le photon se propage dans le sens du temps. Il entre avec une polarisation  $\epsilon$ , est diffusé, se propage vers le diffuseur suivant etc... La ligne du bas représente l'amplitude complexe conjuguée du chemin direct : un photon se propage avec la polarisation initiale  $\bar{\epsilon}$ , et visite un même diffuseur au même instant que le photon du haut.

L'évaluation de la moyenne interne revient à calculer  $L_p$ . En remarquant que

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \mathbf{x}_{2i} M_{ij} \mathbf{x}_{3j} \quad (2.91)$$

avec

$$M_{ij} = w_1 \mathbf{x}_{1i} \mathbf{x}_{4j} + w_2 \mathbf{x}_{4i} \mathbf{x}_{1j} + w_3 (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_4) \delta_{ij} \quad (2.92)$$

on peut exprimer  $L_p$  à l'aide de  $\mathcal{I}$ . Pour cela, on définit la fonction  $\mathcal{M}$  qui transforme une matrice  $M$  en  $M'$  telle que

$$M' = w_1 M + w_2 M^T + w_3 (\text{Tr} M) \mathbf{1} \quad (2.93)$$

où  $M^T$  désigne la matrice transposée de  $M$ .

L'expression du diagramme échelle s'obtient à l'aide de  $p$  itérations de  $\mathcal{M}$ . Posons  $M_{0ij} = \epsilon_i \bar{\epsilon}_j$  et  $M_k = \Delta_{r_{kk+1}} \mathcal{M}(M_{k-1}) \Delta_{r_{kk+1}}$  :

$$L_p = \bar{\epsilon}' \mathcal{M}(M_{p-1}) \epsilon \quad (2.94)$$

## CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

Cet algorithme de calcul de  $L_p$  se prête aussi bien au calcul analytique (tant que  $p$  n'est pas trop grand) qu'au calcul numérique.

Exprimons à présent le coefficient bistatique  $\gamma_L^{(p)}$  associé à la contribution de l'ordre de diffusion  $p$  à l'intensité incohérente. Celle-ci est la somme des intensités de tous les chemins de diffusion d'ordre  $p$ . Lorsqu'on effectue la moyenne de configuration, les diffuseurs prennent toutes les positions relatives possibles, dont deux correspondent aux chemins direct et renversé. Aussi  $\gamma_L^{(p)}$  est-il donné par la valeur moyenne de  $\langle |a_{dir}|^2 \rangle_{int}$  et non pas celle de  $\langle |a_{dir}|^2 \rangle_{int} + \langle |a_{rev}|^2 \rangle_{int}$ , qui est deux fois plus grande.

En utilisant (2.42) et (2.81), on obtient le coefficient bistatique pour l'intensité incohérente :

$$\gamma_L^{(p)} = \left( \frac{3}{8\pi\ell} \right)^p \frac{4\pi}{A} \int_{V^p} \left( \prod_{i=1}^p d\mathbf{r}_i \right) \frac{e^{-r_{1,2}/\ell}}{r_{1,2}^2} \cdots \frac{e^{-r_{p-1,p}/\ell}}{r_{p-1,p}^2} e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell} L_p \quad (2.95)$$

En effectuant un changement des variables  $\mathbf{r}_i$  vers les variables réduites  $\mathbf{r}_{i,i+1}$  exprimées en coordonnées sphériques et une variable libre  $\mathbf{r}_1$ , on peut réécrire :

$$\gamma_L^{(p)} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^p \frac{4\pi}{A} \int_{V^p} d\mathbf{r}_1 \left( \prod_{i=1}^{p-1} d\Omega_{i,i+1} dr_{i,i+1} P(r_{i,i+1}) \right) e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell} L_p \quad (2.96)$$

avec  $P(r) = \exp[-\int^r dr'/\ell(r')]/\ell(r)$ , qui représente la loi de probabilité des distances entre diffuseurs. Comme pour le coefficient bistatique de diffusion simple, la moyenne de configuration dépend de la géométrie du nuage atomique. Le calcul analytique est possible pour la diffusion double dans le cas d'un slab uniforme. Dans les autres cas, on peut évaluer l'intégrale multiple (2.96) par une méthode de Monte-Carlo.

L'intensité incohérente totale est la somme des intensités incohérentes dues à chaque ordre de diffusion. On peut lui associer un coefficient bistatique  $\gamma_L$  qui est la somme des  $\gamma_L^{(p)}$ .

### Intensité cohérente

Le terme d'interférences entre deux chemins renversés est

$$\text{Re}[a_{dir}\bar{a}_{rev}e^{i(\mathbf{k}_{in}+\mathbf{k}_{out})\cdot(\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_1)}] \quad (2.97)$$

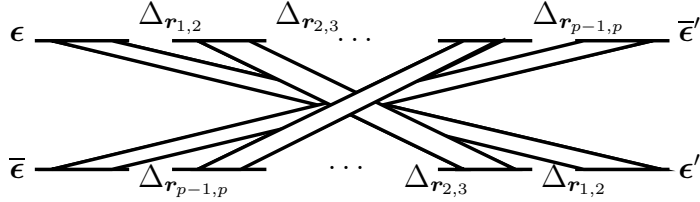
La moyenne interne ne porte que sur  $a_{dir}\bar{a}_{rev}$ . D'après (2.79) et (2.80), on a :

$$a_{dir}\bar{a}_{rev} = \left( \frac{3V}{8\pi N M_{J,J_e} \ell} \right)^p \frac{4\pi^2}{V^2 \omega^2} \frac{e^{-r_{1,2}/\ell}}{r_{1,2}^2} \cdots \frac{e^{-r_{p-1,p}/\ell}}{r_{p-1,p}^2} e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell} \\ (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \tilde{t}_{m_p m'_p} \Delta_{\mathbf{r}_{p-1,p}} \cdots \tilde{t}_{m_2 m'_2} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} \boldsymbol{\epsilon}) (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger \Delta_{\mathbf{r}_{p-1,p}} \cdots \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}') \quad (2.98)$$

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

où on a utilisé  $\Delta_{-r} = \Delta_r$ .

Une différence qui apparaît avec le calcul de l'intensité incohérente est que  $\tilde{t}_{m_i m'_i}^\dagger$  agit sur  $\Delta_{r_{i,i+1}}$  à gauche et sur  $\Delta_{r_{i-1,i}}$  à droite. Le calcul de la moyenne interne peut alors se mettre sous la forme diagrammatique :

$$a_{dir} \bar{a}_{rev} = \left( \frac{3V}{8\pi N \ell} \right)^p \frac{4\pi^2}{V^2 \omega^2} \frac{e^{-r_{1,2}/\ell}}{r_{1,2}^2} \dots \frac{e^{-r_{p-1,p}/\ell}}{r_{p-1,p}^2} e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell}$$

(2.99)

Le diagramme est appelé diagramme maximalelement croisé (*most crossed diagram*), ou diagramme croisé tout court, et est noté  $C_p$ . Il se lit de la même façon que le diagramme échelle : la ligne du haut représente l'amplitude du chemin direct, et la ligne du bas représente l'amplitude complexe conjuguée du chemin renversé : le photon remonte le temps et visite les diffuseurs dans le sens inverse du photon qui suit le chemin direct.

Comme l'ensemble {photons+atomes} est invariant par renversement du temps, on peut renverser temporellement la ligne du bas de  $C_p$  sans changer sa valeur. Examinons l'effet d'un tel renversement sur  $\mathcal{I}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  :

$$\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{array} = w_1 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \text{---} \mathbf{x}_3 \end{array} + w_2 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \diagup \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \diagdown \mathbf{x}_3 \end{array} + w_3 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_4 \end{array} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{array} \right. \quad (2.100)$$

Le retournement de la ligne du bas donne :

$$w_1 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \text{---} \mathbf{x}_4 \end{array} + w_2 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_4 \end{array} \right. + w_3 \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \diagup \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \diagdown \mathbf{x}_4 \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \text{---} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \text{---} \mathbf{x}_4 \end{array} \quad (2.101)$$

Le renversement temporel revient donc à échanger  $\mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_4$ , ainsi que  $w_2$  et  $w_3$ . On peut alors exprimer le diagramme croisé :

$$C_p = \begin{array}{c} \epsilon \text{---} \bar{\epsilon}' \\ \bar{\epsilon}' \text{---} \epsilon \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \Delta_{r_{1,2}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \epsilon \text{---} \bar{\epsilon}' \\ \bar{\epsilon}' \text{---} \epsilon \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \Delta_{r_{2,3}} \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline \Delta_{r_{p-1,p}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \epsilon \text{---} \bar{\epsilon}' \\ \bar{\epsilon}' \text{---} \epsilon \end{array} \quad (2.102)$$

Le calcul de  $C_p$  se calque sur celui de  $L_p$  en échangeant  $\epsilon'$  et  $\bar{\epsilon}$  d'une part, et  $w_2$  et  $w_3$  d'autre part.

CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

Le coefficient bistatique associé à l'intensité cohérente est :

$$\gamma_C^{(p)}(\Delta\theta) = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^p \frac{4\pi}{A} \operatorname{Re} \int_{V^p} d\mathbf{r}_1 \left[ \prod_{i=1}^{p-1} d\Omega_{i,i+1} dr_{i,i+1} P(r_{i,i+1}) \right] e^{-z_1/\ell} e^{-z_p/\ell} C_p e^{i(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1)} \quad (2.103)$$

A rétrodiffusion, on ne peut avoir égalité des intensités cohérente et incohérente que si  $C_p$  et  $L_p$  sont égaux. Cette condition est réalisée si :

- $\epsilon' = \bar{\epsilon}$ , condition que l'on connaissait déjà par le théorème de réciprocité.
- $w_2 = w_3$ , condition nouvelle qui n'est réalisée que lorsque le niveau fondamental n'est pas dégénéré ( $J = 0$ ,  $J_e = 1$ ) ou  $J = J_e \rightarrow \infty$ .

Nous en concluons que si le niveau fondamental est dégénéré, les interférences sont partiellement brouillées dans tous les canaux de polarisations.

### Cône de rétrodiffusion

Si on modélise de manière très idéalisée le nuage atomique par un slab uniforme, on peut déterminer  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma_L^{(2)}$  et  $\gamma_C^{(2)}$  analytiquement. Pour une transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$ , comme pour les atomes de Rubidium, on trouve les facteurs d'augmentation de la table 2.2. On s'aperçoit tout d'abord que le

	$\gamma^{(1)}$	$\gamma_L^{(2)}$	$\gamma_C^{(2)}(0)$	$\gamma_C^{(2)}(0)/\gamma_L^{(2)}$	$1 + \gamma_C^{(2)}(0)/(\gamma^{(1)} + \gamma_L^{(2)})$
$h  h$	0.040	0.131	0.028	0.22	1.17
$h \perp h$	0.509	0.215	0.154	0.72	1.21
$lin  lin$	0.348	0.179	0.108	0.60	1.20
$lin \perp lin$	0.200	0.167	0.075	0.44	1.20

TAB. 2.2 – Facteurs d'augmentation pour une transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$  dans le cas d'un milieu uniforme semi-infini. On observe que dans le canal  $h||h$ , la chute du cône CBS est essentiellement due au brouillage des interférences, et non pas à la contribution de diffusion simple.

facteur d'augmentation n'atteint jamais la valeur 2. Ceci est dû, d'une part à la diffusion simple qui contribue dans tous les canaux de polarisation, et d'autre part au brouillage des interférences : on a toujours  $\gamma_C^{(2)}(0) < \gamma_L^{(2)}$ . Pour le canal  $h||h$ , la faible valeur du facteur d'augmentation est liée à la petitesse du terme d'interférences. Dans le canal  $h \perp h$ , c'est au contraire la diffusion simple qui est principalement responsable de la petite hauteur du cône.

Il est aussi possible de calculer  $\gamma_C^{(2)}(\Delta\theta)$  exactement [55].

## 2.4. MODÉLISATION THÉORIQUE

---

Lorsque le milieu possède une géométrie plus compliquée, on a recours au calcul numérique. Les intégrales multiples qui interviennent dans les expressions des coefficients bistatiques sont calculées à l'aide d'une simulation Monte-Carlo [62]. Il s'agit de calculer la valeur moyenne de  $L_p$  et  $C_p$  sur un grand nombre de chemins de diffusion. Ces chemins contiennent  $p$  diffuseurs. La distance entre diffuseurs suit la loi de probabilité  $P(r) = \exp[-\int^r dr'/\ell(r')]/\ell(r)$ , et la direction relative entre deux diffuseurs est choisie de manière isotrope. Après un certain nombre de diffusions, ce procédé fait sortir le photon du milieu. Pour chaque chemin, on calcule les diagrammes échelle et croisé avec l'algorithme décrit par (2.94). Une approche naïve consisterait à envoyer un photon dans le nuage atomique, le laisser suivre un chemin de diffusion comme décrit ci-dessus, puis de calculer sa contribution aux coefficients bistatiques après qu'il soit sorti. L'inconvénient d'une telle méthode est que la plupart des photons sortent du nuage en-dehors du cône étroit qui entoure la direction de rétrodiffusion, et seule une fraction d'ordre  $1/(k\ell)^2 \ll 1$  contribue au cône CBS. Les expressions des  $\gamma^{(p)}$  suggèrent plutôt de laisser le photon suivre son chemin jusqu'au  $p^{\text{ème}}$  diffuseur, puis de le faire sortir du nuage dans la direction de rétrodiffusion. Si il sort avant d'arriver à ce diffuseur, on compte une contribution nulle aux coefficients bistatiques. Pour obtenir la contribution à  $\gamma_C^{(p)}$  dans la direction  $\mathbf{k}_{out}$ , il faut multiplier celle à rétrodiffusion par  $\exp[i(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1)]$ . Remarquons que pour calculer un chemin d'ordre  $p$ , on d'abord calculé un chemin de diffusion pour tous les ordres de 1 à  $p-1$ . La méthode des photons partiels [63] s'appuie sur ce constat pour calculer une contribution aux  $\gamma^{(i)}$  après la  $i^{\text{ème}}$  diffusion : lorsque le photon rencontre le premier diffuseur, on calcule une contribution à  $\gamma^{(1)}$  puis on le dirige vers un second diffuseur. Au cours de la propagation, soit le photon quitte le nuage atomique, et on ne calcule pas de nouvelle contribution à  $\gamma^{(1)}$ , soit il est diffusé une deuxième fois et on calcule une contribution aux  $\gamma^{(2)}$ . Et ainsi de suite.

Une modélisation réaliste de la géométrie du nuage d'atomes froids est la forme sphérique, avec une densité gaussienne maximale au centre du nuage  $n(r) = n_0 \exp[-r^2/2r_0^2]$ . La géométrie du nuage est alors entièrement déterminée par l'épaisseur optique maximale (le long d'un diamètre)

$$b \equiv -\ln \frac{I_{out}}{I_{in}} = n_0 \sigma_d \sqrt{2\pi} r_0 \quad (2.104)$$

où  $I_{in}$  est l'intensité du faisceau qui éclaire le nuage, et  $I_{out}$  l'intensité du mode cohérent transmis par le nuage. Pour un milieu homogène et d'épaisseur constante,  $b$  mesure cette épaisseur en unité du libre parcours moyen. Un critère pour se trouver dans le régime de diffusion multiple est d'avoir  $b > 1$ . L'épaisseur optique est mesurable expérimentalement. La simulation Monte-



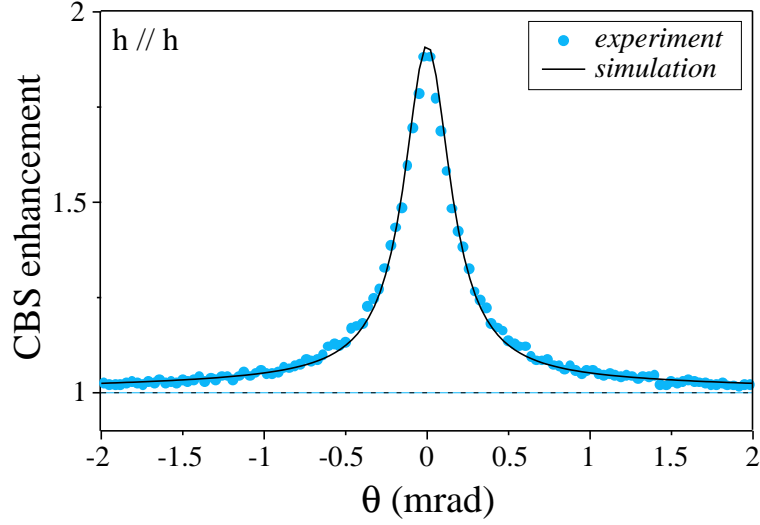


FIG. 2.5 – Cône CBS réalisé avec des atomes de strontium, dont le niveau fondamental n’est pas dégénéré. Les points représentent les mesures expérimentales, et la ligne continue correspond aux simulations Monte-Carlo. Figure extraite de la référence [64].

Carlo se fait sans paramètre ajustable en tenant compte de la valeur mesurée de  $b$ .

La figure 2.2 montre la comparaison entre les simulations numériques (lignes continues), avec une moyenne sur  $10^7$  photons, et les mesures expérimentales pour une transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$  et  $b = 26$ . Les résultats expérimentaux sont bien reproduits, en particulier la forme et la largeur des cônes, ainsi que le faible facteur d’augmentation dans le canal  $h||h$ .

Si la structure interne n’est pas dégénérée,  $w_2 = w_3 = 0$ . Dans ce cas, on a égalité des intensités cohérente et incohérente pour chaque ordre de diffusion dans les canaux  $lin||lin$  et  $h||h$ . De plus, la contribution de la diffusion simple s’annule dans le canal  $h||h$ . On doit donc retrouver un facteur d’augmentation égal à 2 dans ce canal. L’expérience a été réalisée avec des atomes de Strontium [64], et la comparaison avec la théorie est présentée sur la figure 2.5, pour une épaisseur optique  $b = 2.9$ . Le facteur d’augmentation mesuré est 1.86, légèrement inférieur au facteur 2 attendu. Ceci est dû à la difficulté expérimentale d’annuler la diffusion simple : les défauts du polariseur et de l’analyseur, ainsi que la petite épaisseur optique, font que sa contribution n’est pas négligeable. Pour en tenir compte, le cône CBS théorique a été convolué par la fonction d’appareil du montage expérimental. C’est ce cône théorique convolué qui est montré sur la figure 2.5.

## 2.5 Mécanismes de réduction des interférences

Après avoir montré par le calcul que la structure interne brouille les interférences entre chemins réciproques, nous allons essayer d'en comprendre les raisons physiques.

### 2.5.1 Réciprocité

Lorsque les diffuseurs possèdent une structure interne, il faut en tenir compte dans l'expression du théorème de réciprocité. Dans le cas des atomes, il s'agit d'un moment cinétique non-nul qui change de signe par renversement du temps. Aussi le théorème de réciprocité s'écrit-il :

$$\mathcal{A}_{dir}(\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}, \{m_i\} \rightarrow \mathbf{k}'\boldsymbol{\epsilon}', \{m_f\}) = (-1)^{\sum(m_i - m_f)} \mathcal{A}_{rev}(-\mathbf{k}'\bar{\boldsymbol{\epsilon}}', \{-m_f\} \rightarrow -\mathbf{k}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \{-m_i\}) \quad (2.105)$$

où  $\{m\}$  représente l'ensemble des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental occupés par les atomes le long du chemin de diffusion. Si  $J = 0$ , on a  $m_i = m_f = 0$ , et les amplitudes directe et renversée sont égales dans les mêmes conditions que pour les diffuseurs classiques. Cependant, si  $J > 0$ , la plupart des chemins de diffusion ne vérifient pas  $\{m_f\} = \{-m_i\}$  et les chemins direct et renversé ne sont plus réciproques. Cela signifie seulement qu'on ne peut plus affirmer que leurs amplitudes sont égales.

### 2.5.2 Exemple illustrant $\mathcal{A}_{dir} \neq \mathcal{A}_{rev}$

Considérons des atomes pouvant effectuer une transition  $J = 1 \rightarrow J_e = 0$ , éclairés par une lumière de polarisation circulaire gauche. L'axe de quantification étant choisi parallèle à la direction de la lumière incidente, étudions un chemin de diffusion constitué de deux atomes, le premier dans l'état  $m_1 = -1$  et le second dans l'état  $m_2 = 0$ , et plaçons nous dans le canal  $h\|h$ . Les chemins direct et renversé sont représentés sur la figure 2.6. Sur le chemin direct, représenté à gauche, le premier atome diffuse le photon incident en retombant dans l'état  $m'_1 = 0$ . Si le photon diffusé se propage dans une direction orthogonale à l'axe de quantification, le deuxième atome peut le diffuser dans la direction de rétrodiffusion avec une polarisation circulaire droite. Dans le canal  $h\|h$ , ce chemin a une amplitude non-nulle. Par contre, sur le chemin renversé représenté à droite, le premier atome ne peut pas diffuser le photon incident. L'amplitude du chemin renversé est donc nulle et différente de l'amplitude du chemin direct.

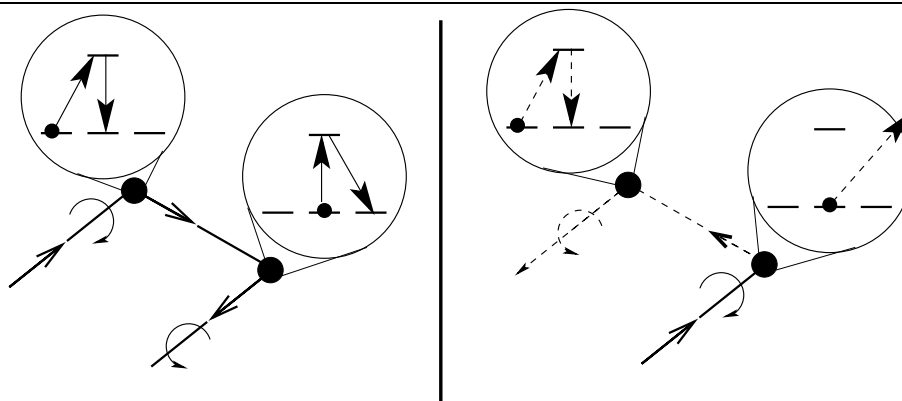


FIG. 2.6 – *A gauche : chemin direct. Ce chemin possède une amplitude non-nulle. A droite, sur le chemin renversé, le premier atome ne peut pas diffuser le photon incident. L'amplitude du chemin renversé est donc nulle. On a bien  $a_{dir} \neq a_{rev}$ .*

### 2.5.3 Influence des transitions Raman

Lorsque  $J = 0$ , les atomes ne peuvent effectuer que des transitions Rayleigh, c'est à dire sont dans le même sous-niveau Zeeman avant et après la diffusion. Ce n'est plus le cas lorsque  $J > 0$  : des transitions Raman sont possibles, et elles interviennent dans l'exemple ci-dessus d'inégalité des amplitudes directe et renversée. On peut se demander si elles sont responsables de la baisse des interférences. Observons tout d'abord un cas particulier : si le long d'un chemin de diffusion, tous les atomes sont initialement dans le sous-niveau Zeeman  $m_i = +1$  (ou  $+1/2$ ) et  $m_f = -1$  (ou  $-1/2$ ) après diffusion, alors d'après le théorème de réciprocité (2.105), les amplitudes directe et renversée sont égales pour  $J$  entier et opposées pour  $J$  demi-entier (dans les canaux de polarisations parallèles). Il s'agit d'un chemin de diffusion au cours duquel il n'y a que des transitions Raman, mais le contraste des interférences est optimal. Bien sûr, il y a plein d'autres chemins de diffusion, et il faut étudier l'effet des transitions Raman en moyenne. Pour cela, on peut calculer le facteur d'augmentation en omettant les contributions à l'intensité cohérente des chemins présentant au moins une diffusion Raman. C'est impossible expérimentalement, mais peut se faire dans les calculs théoriques. Le calcul de la moyenne interne pour l'intensité cohérente est modifié car on y impose  $m' = m$  (première ligne de (2.43)). Celui de l'intensité incohérente est inchangé : cela revient à considérer les transitions Raman comme une source de lumière incohérente. La figure 2.7 montre le cône de rétrodiffusion pour une transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$  dans le canal  $h \parallel h$ , pour un nuage sphérique de densité uniforme, et d'épaisseur optique  $b = 10$ .

## 2.5. MÉCANISMES DE RÉDUCTION DES INTERFÉRENCES

Si on néglige les transitions Raman, on obtient un facteur d'augmentation

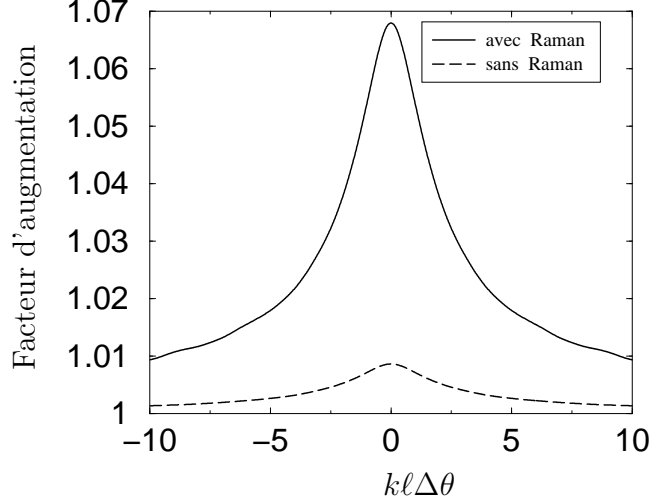


FIG. 2.7 – Influence des transitions Raman sur le cône CBS. On compare le cône CBS calculé en ne tenant pas compte des transitions Raman dans l'intensité cohérente (pointillés) au cône CBS total (ligne continue) dans le canal  $h||h$ . Dans ce canal, les chemins contenant au moins une diffusion Raman représentent 90% de l'intensité cohérente. Ils contribuent donc de manière essentielle au cône CBS.

dix fois plus petit que si on les prend en compte. Il apparaît donc que les transitions Raman participent de manière essentielle aux interférences. Pour innocenter totalement les transitions Raman de la chute du contraste des interférences, il reste à montrer que les transitions Rayleigh y ont aussi leur part.

### 2.5.4 Composante antisymétrique du tenseur de diffusion

Pour cela, plaçons nous dans un canal de polarisations parallèles  $\vec{\epsilon}' = \epsilon$  et étudions les amplitudes directe et renversée d'un chemin de diffusion double.

$$a_{dir} \propto \epsilon t_{m_2 m_2'} \Delta_{\mathbf{r}_{12}} t_{m_1 m_1'} \epsilon \quad (2.106)$$

$$a_{rev} \propto \epsilon t_{m_1 m_1'} \Delta_{\mathbf{r}_{12}} t_{m_2 m_2'} \epsilon \quad (2.107)$$

$$= \epsilon t_{m_2 m_2'}^T \Delta_{\mathbf{r}_{12}} t_{m_1 m_1'}^T \epsilon \quad (2.108)$$

Pour écrire la dernière ligne, on a utilisé la symétrie du projecteur.

On voit que  $a_{dir} = a_{rev}$  si la matrice de diffusion  $t_{mm'}$  est symétrique. Ce

n'est pas le cas en général, même si  $m' = m$ . En effet, les composantes  $xy$  et  $yx$  de  $t_{mm}$  sont :

$$t_{xy} = \frac{i}{2}(\langle J1m1|J_em + 1\rangle - \langle J1m(-1)|J_em - 1\rangle) \quad (2.109)$$

$$t_{yx} = -\frac{i}{2}(\langle J1m1|J_em + 1\rangle - \langle J1m(-1)|J_em - 1\rangle) \quad (2.110)$$

et les coefficients de Clebsch-Gordan  $\langle J1m1|J_em + 1\rangle$  et  $\langle J1m(-1)|J_em - 1\rangle$  ne sont pas égaux en général. Dans ce sens, les transitions Rayleigh participent aussi à la chute du facteur d'augmentation.

### 2.5.5 Peut-on restaurer les interférences ?

Ce chapitre a montré que la structure interne des atomes provoque une chute du contraste des interférences entre chemins renversés. Deux questions se posent :

- Cela a-t-il un impact pour l'observation de la localisation d'Anderson ?
- Peut restaurer le contraste des interférences ?

Il n'y a pas de réponse certaine à la première question. Le lien entre rétrodiffusion cohérente et localisation d'Anderson n'est pas bien connu. A priori, celle-ci est sensible aux interférences à l'intérieur du milieu diffusant, tandis que celle-là dépend surtout des conditions aux bords. Cependant, la localisation forte de la lumière a un impact sur le cône CBS [65]. D'autre part, la dégénérescence du niveau fondamental influe certainement sur la force des interférences : seuls les chemins de diffusion qui rencontrent les atomes dans les mêmes états initial et final peuvent interférer. Or, dans le régime de localisation forte, un atome subit de nombreux événements de diffusion et est visité plusieurs fois par le même chemin. Dans ce cas, si le niveau fondamental est dégénéré, la probabilité que deux chemins rencontrent cet atome dans le même sous niveau Zeeman est faible, et ils n'interféreront pas. Il semble donc que la structure interne atomique soit un obstacle à l'observation de la localisation d'Anderson de la lumière.

L'utilisation d'atomes de Strontium, dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré, semble prometteuse. Bien qu'on ne puisse pas utiliser les techniques de piégeage évaporatif (elles nécessitent  $J > 0$ ), il est possible de s'approcher de la transition vers un condensat de Bose-Einstein par des moyens entièrement optiques [66].

Une alternative est de restaurer les interférences, en brisant la dégénérescence du niveau fondamental. Ceci peut se faire à l'aide d'un champ magnétique, par effet Zeeman. Dans le cas d'une transition  $J \rightarrow J + 1$ , il est alors possible d'isoler la transition  $|JJ\rangle \rightarrow |(J + 1)(J + 1)\rangle$  à grand champ magnétique

## 2.5. MÉCANISMES DE RÉDUCTION DES INTERFÉRENCES

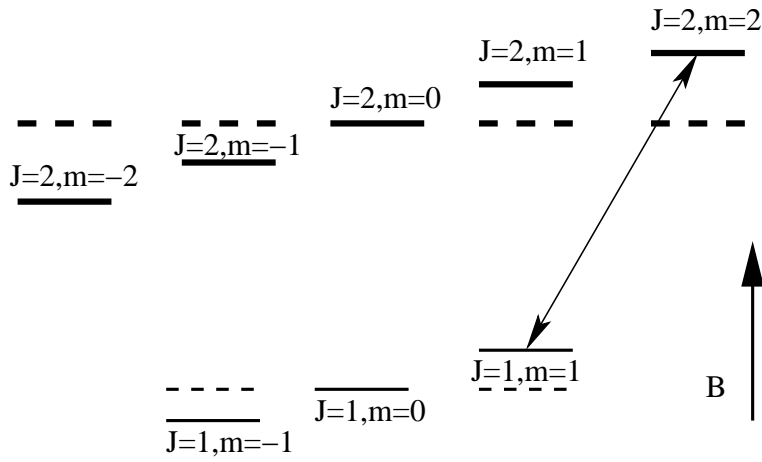


FIG. 2.8 – Les niveaux excité (traits épais) et fondamental (traits fins) voient leurs dégénérescences (pointillés) levées par l'action d'un champ magnétique, dont la direction est choisie comme axe de quantification. Pour une transition  $J \rightarrow J+1$ , il est possible à grand champ magnétique d'isoler une des transitions extrêmes.

en accordant la fréquence lumineuse de la sonde CBS. Seuls les atomes initialement dans l'état  $|JJ\rangle$  participent aux chemins de diffusion, et ils se comportent comme un atome à deux niveaux. On s'attend alors à ce que les interférences soient restaurées.

CHAPITRE 2. ATOMES FROIDS ET RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

# Chapitre 3

## Diffusion de la lumière par un atome en présence d'un champ magnétique

### 3.1 Introduction

L'étude de la rétrodiffusion cohérente en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'appuie sur les mêmes éléments fondamentaux qu'en l'absence de champ magnétique : diffusion par un atome et propagation dans le nuage atomique. Ils sont cependant beaucoup plus complexes, et nous consacrons un chapitre à chacun.

A cause de l'effet Zeeman, qui déplace les énergies de tous les états  $|Jm\rangle$  et  $|J_e m_e\rangle$ , les propriétés de diffusion d'un atome sont modifiées par  $\mathbf{B}$ . En effet, un photon de fréquence donnée ne peut plus être résonnant avec toutes les transitions entre sous niveaux-Zeeman : le choix d'une fréquence particulière privilégie certaines de ces transitions. Cela implique qu'en moyenne, la diffusion filtre certaines polarisations incidentes. D'autre part, si l'atome effectue une diffusion Raman, le photon émis n'a pas la même fréquence que le photon incident : la diffusion inélastique apparaît. Au cours d'un chemin de diffusion multiple, ces deux phénomènes se combinent de manière compliquée.

Dans ce chapitre, nous traitons la diffusion de la lumière par un seul atome. A partir de l'expression de l'opérateur de transition, nous déterminons la section efficace de diffusion et la mettons sous une forme simple. Le calcul de la section efficace différentielle est abordé, mais une expression simple n'a pu être trouvée que dans des cas particuliers. Enfin, nous discutons la



modification de la polarisation diffusée induite par  $\mathbf{B}$  (effet Hanle).

## 3.2 Opérateur de diffusion

### 3.2.1 Hamiltonien du système

Le champ magnétique agit sur les particules chargées : il exerce donc une influence sur les électrons de l'atome, mais pas sur les photons. Nous nous plaçons dans le régime de champ faible, pour lequel tout déplacement de niveau dû à  $\mathbf{B}$  est petit devant les écarts entre niveaux à champ nul (y compris entre niveaux hyperfins). Pour les atomes de Rubidium, dont la structure hyperfine est indiquée sur la figure 2.1, cela se traduit par  $B \ll 100$  G. En choisissant l'axe de quantification suivant  $\mathbf{B}$ , l'hamiltonien atomique (2.7) devient :

$$H_{at} = \omega_0 \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} |J_e m_e\rangle \langle J_e m_e| + \mu_B g_e B \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} m_e |J_e m_e\rangle \langle J_e m_e| + \mu_B g B \sum_{m=-J}^J m |J m\rangle \langle J m| \quad (3.1)$$

où  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr et  $g$  et  $g_e$  sont les facteurs de Landé des niveaux fondamental et excité. L'origine des énergies est la même que pour (2.7). Le champ magnétique déplace les états  $|J m\rangle$  et  $|J_e m_e\rangle$  de  $m\mu_B g B$  et  $m_e\mu_B g_e B$  respectivement : c'est l'effet Zeeman. La transition  $J-J_e$  considérée n'est isolée que si ce déplacement des sous-niveaux Zeeman est très faible devant l'écart  $\Delta$  entre niveaux hyperfins voisins. L'hypothèse de faible champ magnétique se traduit par

$$\mu_B B \ll \Delta \quad (3.2)$$

Le couplage  $U$  (2.8) entre photons et atome est inchangé : sous l'influence du champ électromagnétique, les atomes effectuent des transitions dipolaires électriques entre états de moments cinétiques fixés. Comme on éclaire l'atome avec une lumière de fréquence proche de  $\omega_0$ , la condition (3.2) nous permet de négliger les transitions entre états  $|J m\rangle$  ou entre états  $|J_e m_e\rangle$ . Les termes magnétiques de  $H_{at}$  et  $U$  sont alors découplés.

L'hamiltonien de l'ensemble {atome+lumière} en présence d'un champ magnétique externe est :

$$H = H_{em} + H_{at} + U = H_0 + U \quad (3.3)$$

où l'hamiltonien du champ électromagnétique  $H_{em}$  (2.5) et  $U$  ne dépendent pas de  $\mathbf{B}$ .

### 3.2.2 Propagateur de l'état atomique excité

La détermination de l'opérateur de transition se fait alors de la même manière qu'en champ magnétique nul : on détermine tout d'abord le propagateur d'un niveau excité  $|J_e m_e\rangle$ , puis on en déduit les éléments de matrice de  $T$ .

Le processus de diffusion peut toujours être décrit sous la forme des diagrammes résonant et antirésonant de la figure 2.4. La fonction de Green  $G_0(E)$  de l'état excité non perturbé vaut

$$(E - H_0)^{-1} = (\omega + \mu_B g B m - (2\omega + \mu_B g B(m - m') + \omega_0 + \mu_B g_e B m_e))^{-1} \quad (3.4)$$

pour le diagramme antirésonant, et  $(\omega + \mu_B g B m - \omega_0 - \mu_B g_e B m_e)^{-1}$  pour le diagramme résonant. La condition (3.2) nous permet de ne considérer que les diagrammes résonants. Le calcul du propagateur  $G(E) = (E - H)^{-1}$  est identique au cas  $\mathbf{B} = 0$  : la self-énergie ne dépend pas de  $\mathbf{B}$  car  $U$  et les termes magnétiques de  $H_0$  sont découplés. On trouve alors que le propagateur de l'état atomique excité est :

$$G_{mm_e}(E) = \frac{1}{\delta + \mu_B B(gm - g_e m_e) + i\Gamma/2} \quad (3.5)$$

où

$$\delta = \omega - \omega_0 \quad (3.6)$$

est le désaccord par rapport à la fréquence de résonance en champ magnétique nul. Une différence importante avec la situation en l'absence de champ magnétique est la dépendance de  $G$  en  $m$  et  $m_e$ , c'est à dire en les sous-niveaux Zeeman occupés par l'atome. Elle rend compte du désaccord effectif entre la fréquence du photon incident et la fréquence propre de la transition  $|Jm\rangle \rightarrow |J_e m_e\rangle$ .

### 3.2.3 Amplitude de diffusion

L'amplitude de diffusion est donnée par le diagramme résonnant (figure 2.4) en utilisant l'expression (3.5) du propagateur de l'état excité :

$$\langle Jm'; \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle = g_\omega^2 \sum_{m_e = -J_e}^{J_e} \frac{\langle Jm' | (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}') | J_e m_e \rangle \langle J_e m_e | (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle}{\delta + \mu_B B(gm - g_e m_e) + i\Gamma/2} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \quad (3.7)$$

La présence de  $m_e$  au dénominateur ne permet pas de simplifier davantage cette expression. Il est cependant utile d'introduire le paramètre sans dimension

$$\boxed{\phi = \frac{i\mu_B B}{\delta + i\Gamma/2}} \quad (3.8)$$

### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Il exprime que l'action de  $\mathbf{B}$  sur les propriétés atomiques dépend du désaccord  $\delta$ . Dans la suite, nous exprimerons la plupart des grandeurs (section efficace, facteur d'augmentation etc. . .) en fonction de  $\phi$ . Il n'est pas réel en général, sauf si  $\delta = 0$ . On peut réexprimer l'amplitude de transition :

$$\langle Jm'; \mathbf{k}' \boldsymbol{\epsilon}' | T | Jm; \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \frac{g_\omega^2}{\delta + i\Gamma/2} \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} \frac{\langle Jm' | (\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}') | J_e m_e \rangle \langle J_e m_e | (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle}{1 - i\phi(gm - g_e m_e)} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \quad (3.9)$$

Nous introduisons l'opérateur  $\mathbf{t}$  défini par

$$\mathbf{t}_{ij} = t(\omega) d_i \left( \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} \frac{|J_e m_e \rangle \langle J_e m_e|}{1 - i\phi(gm - g_e m_e)} \right) d_j \quad (3.10)$$

et les opérateurs de transition dans l'espace des polarisations :

$$t_{mm'} = \langle Jm' | \mathbf{t} | Jm \rangle \quad (3.11)$$

En terme des  $t_{mm'}$ , l'amplitude de diffusion vaut  $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}' t_{mm'} \boldsymbol{\epsilon}$ .

#### 3.2.4 Section efficace de diffusion

D'après le théorème optique (2.34), la section efficace de diffusion est proportionnelle à la partie imaginaire de l'amplitude diffusée vers l'avant, en moyenne. Pour la calculer, nous devons tout d'abord déterminer la moyenne interne de  $T$ . Pour le calcul de la moyenne interne, nous omettons le terme  $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}$  qui ne dépend que des degrés de liberté externes.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{int} &= \frac{1}{2J+1} \text{Tr} \left( \sum_{m=-J}^J |Jm\rangle \langle Jm| T \right) \quad (3.12) \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \langle T \rangle_{int} \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{t(\omega)}{2J+1} \sum_{m=-J}^J \langle Jm | \left( \sum_{m_e=-J_e}^{J_e} \frac{(\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}') | J_e m_e \rangle \langle J_e m_e | (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon})}{1 - i\phi(gm - g_e m_e)} \right) | Jm \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'expression des produits scalaires  $\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'$  et  $\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$  fait apparaître la somme :

$$\sum_{q, q'=-1}^1 (-1)^{q+q'} d_{q'} d_q \bar{\epsilon}'_{-q'} \epsilon_{-q} \quad (3.14)$$

en exprimant les polarisations et l'opérateur dipolaire réduit  $\mathbf{d}$  dans la base (2.10). A partir des vecteurs  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}'$  et  $\boldsymbol{\epsilon}$ , on peut construire trois opérateurs tensoriels irréductibles  $[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \boldsymbol{\epsilon}]^{(K)}$ ,  $K \in \{0, 1, 2\}$  qui représentent la trace ( $K = 0$ ), la

### 3.2. OPÉRATEUR DE DIFFUSION

---

partie antisymétrique ( $K = 1$ ) et la partie symétrique sans trace ( $K = 2$ ) du tenseur  $\bar{\epsilon}'_i \epsilon_j$  (voir l'annexe A). Les composantes de ces opérateurs tensoriels irréductibles sont données par

$$[\bar{\epsilon}' \epsilon]_Q^{(K)} = \sum_{q, q'=-1}^1 \langle 11q'q | KQ \rangle \bar{\epsilon}'_{q'} \epsilon_q \quad (3.15)$$

En inversant cette relation, on trouve aussi

$$\bar{\epsilon}'_{q'} \epsilon_q = \sum_{K, Q} \langle 11q'q | KQ \rangle [\bar{\epsilon}' \epsilon]_Q^{(K)} \quad (3.16)$$

Nous pouvons utiliser cette égalité dans (3.13). D'autre part, comme les éléments de matrice  $\langle J_e m_e | d_q | Jm \rangle$  et  $\langle Jm | d_{q'} | J_e m_e \rangle$  doivent être simultanément non-nuls, il faut nécessairement  $q' = -q$  et  $m_e = m + q$ . (3.13) se simplifie alors :

$$\bar{\epsilon}' \langle T \rangle_{int} \epsilon = \frac{t(\omega)}{2J+1} \sum_{m, q, K} (-1)^q \frac{\langle J1mq | J_e m + q \rangle^2 \langle 11 - qq | K0 \rangle}{1 - i\phi(gm - g_e(m + q))} [\bar{\epsilon}' \epsilon]_0^{(K)} \quad (3.17)$$

L'axe de quantification ayant été choisi dans la direction du champ magnétique, (3.15) nous donne les expressions des  $[\bar{\epsilon}' \epsilon]_0^{(K)}$  :

$$[\bar{\epsilon}' \epsilon]_0^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\epsilon}' \cdot \epsilon \quad (3.18)$$

$$[\bar{\epsilon}' \epsilon]_0^{(1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\epsilon}' \times \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{B}} \quad (3.19)$$

$$[\bar{\epsilon}' \epsilon]_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (3(\bar{\epsilon}' \cdot \hat{\mathbf{B}})(\epsilon \cdot \hat{\mathbf{B}}) - \bar{\epsilon}' \cdot \epsilon) \quad (3.20)$$

où  $\hat{\mathbf{B}}$  désigne le vecteur unitaire parallèle à  $\mathbf{B}$ . Le premier et le troisième terme peuvent se recombinaer pour exprimer l'amplitude de diffusion moyenne en fonction de  $\bar{\epsilon}' \cdot \epsilon$ ,  $(\bar{\epsilon}' \times \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{B}}$  et de  $(\bar{\epsilon}' \cdot \hat{\mathbf{B}})(\epsilon \cdot \hat{\mathbf{B}})$ . A l'aide de (A.15), on obtient :

$$\bar{\epsilon}' \langle T \rangle_{int} \epsilon = M_{J, J_e} \frac{3\pi}{V\omega^2} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} [\zeta \bar{\epsilon}' \cdot \epsilon + \eta (\bar{\epsilon}' \times \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{B}} + \xi (\bar{\epsilon}' \cdot \hat{\mathbf{B}})(\epsilon \cdot \hat{\mathbf{B}})] \quad (3.21)$$

Pour exprimer les coefficients  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\xi$ , posons

$$A(m, \phi) = \langle J J_e -m m+1 | 11 \rangle^2 (1 - i\phi((g - g_e)m + g_e)) \quad (3.22)$$

$$B(m, \phi) = \langle J J_e -m m-1 | 1 -1 \rangle^2 (1 - i\phi((g - g_e)m - g_e)) \quad (3.23)$$

$$C(m, \phi) = (1 - i\phi(g - g_e)m)^2 + \phi^2 g_e^2 \quad (3.24)$$

CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN  
PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

---

Alors :

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_{m=-J}^J \frac{A(m, \phi) + B(m, \phi)}{C(m, \phi)} \quad (3.25)$$

$$\eta = -\frac{i}{2} \sum_{m=-J}^J \frac{A(m, \phi) - B(m, \phi)}{C(m, \phi)} \quad (3.26)$$

$$\xi = -\zeta + \sum_{m=-J}^J \frac{\langle J J_e - m m | 10 \rangle^2}{1 - i\phi(g - g_e)m} \quad (3.27)$$

La signification physique de ces coefficients sera discutée dans la section 4.4. Lorsque  $\phi$  tend vers 0,  $\zeta$  tend vers 1, et  $\eta$  et  $\xi$  tendent vers 0 comme  $\phi$  et  $\phi^2$  respectivement. A l'aide de (A.16) et de (3.25), on peut montrer que  $\zeta$  et  $\xi$  sont paires en  $\phi$ , tandis que  $\eta$  est impaire.

Il y a deux situations particulières pour lesquelles les expressions (3.25) et suivantes se simplifient. Tout d'abord, si le niveau fondamental n'est pas dégénéré :  $J = 0$ . Les sommes ne contiennent qu'un seul terme. Ensuite, pour des valeurs quelconques de  $J$  et  $J_e$  mais avec  $g = g_e$ . Le dénominateur  $C(m, \phi)$  ne dépend plus de  $m$ , et  $A(m, \phi)$  et  $B(m, \phi)$  n'en dépendent plus que par les coefficients de Clebsch-Gordan. La règle de somme (A.17) permet alors de montrer que dans les deux cas, on trouve les mêmes expressions :

$$\zeta = \frac{1}{1 + (g_e \phi)^2} \quad (3.28)$$

$$\eta = -\frac{g_e \phi}{1 + (g_e \phi)^2} \quad (3.29)$$

$$\xi = \frac{(g_e \phi)^2}{1 + (g_e \phi)^2} \quad (3.30)$$

Cela traduit que lorsque  $g = g_e$ , la différence d'énergie entre  $|Jm\rangle$  et  $|J_e m\rangle$  ou  $|J_e m \pm 1\rangle$  est indépendante de  $m$ . Ces expressions nous seront utiles pour l'étude de la section efficace différentielle, ainsi qu'aux chapitres 4 et 5.

Revenons au cas général. Connaissant l'expression des coefficients  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\xi$ , la moyenne interne de l'opérateur de transition s'écrit :

$$\langle T \rangle_{int} = M_{J, J_e} \frac{3\pi}{V\omega^2} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \Delta_{\mathbf{k}'} \mathcal{T}^{J, J_e} \Delta_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \quad (3.31)$$

avec

$$\mathcal{T}^{J, J_e} = \begin{pmatrix} \zeta & \eta & 0 \\ -\eta & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta + \xi \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.2. OPÉRATEUR DE DIFFUSION

---

Contrairement à la situation en l'absence de champ magnétique, on ne peut pas omettre les projecteurs dans l'expression de  $\langle T \rangle_{int}$ , car la matrice  $\mathcal{T}^{J,J_e}$  peut faire tourner la polarisation en-dehors des plans orthogonaux à  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ .

D'après le théorème optique (2.34), la section efficace de diffusion pour la polarisation  $\epsilon$  est

$$\sigma_d = -M_{J,J_e} \frac{6\pi}{k^2} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{\zeta + \eta(\bar{\epsilon} \times \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{B}} + \xi |\epsilon \cdot \hat{\mathbf{B}}|^2}{\delta + i\Gamma/2} \right) \quad (3.33)$$

$\sigma_d$  dépend de la direction de la polarisation incidente, comme le montre l'exemple suivant. Dans le cas où  $\delta = 0$ ,  $\phi$  est réel. Si  $J = 0$  ou si  $g = g_e$ , les expressions (3.28) à (3.30) montrent que  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\xi$  sont réels aussi. Alors,

$$\sigma_d = M_{J,J_e} \frac{6\pi}{k^2} \frac{1 + (g_e\phi)^2 |\epsilon \cdot \hat{\mathbf{B}}|^2}{1 + (g_e\phi)^2} \quad (3.34)$$

Pour une onde polarisée parallèlement au champ magnétique, la section efficace est indépendante de  $B$ , tandis que pour une onde polarisée perpendiculairement au champ magnétique elle décroît en  $1/(1 + (g_e\phi)^2)$ . On pouvait prévoir ce résultat, car si  $J = 0$  ou  $g = g_e$ , la condition  $\delta = 0$  signifie que le photon incident est résonant avec les transitions  $|Jm\rangle \rightarrow |J_e m\rangle$  qui sont induites par une polarisation linéaire parallèle à l'axe de quantification. Par contre, il est désaccordé vis-à-vis des autres transitions lorsque  $B$  augmente. Ainsi, le fait que la fréquence du photon ne soit pas désaccordée de la même quantité avec toutes les transitions implique que l'atome ne diffuse pas toutes les polarisations avec la même efficacité.

#### 3.2.5 Influence du pompage optique

Dans cette section, nous avons effectué des moyennes sur les degrés de liberté internes des atomes. Pour cela, nous avons fait l'hypothèse importante que les atomes sont uniformément répartis dans les différents sous-niveaux Zeeman. Il s'agit d'une hypothèse raisonnable en l'absence de champ magnétique, et pour une faible intensité de la sonde CBS. Cependant, l'interaction lumière-atome peut faire évoluer la population des sous-niveaux Zeeman si chaque atome diffuse un grand nombre de photons de la sonde. Ce phénomène, appelé pompage optique, est particulièrement sensible en présence d'un champ magnétique. Il nous faut donc justifier ici notre hypothèse.

Rappelons tout d'abord ce qu'est d'abord le pompage optique. Considérons

### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

par exemple une transition  $J = 1/2 \rightarrow J_e = 3/2$  (figure 3.1). En l'absence de champ magnétique, on peut choisir l'axe de quantification parallèle à la direction de propagation. Supposons que la polarisation de la sonde soit circulaire gauche. Lors d'une diffusion, les atomes initialement dans l'état  $m = 1/2$  y retournent, tandis que ceux initialement dans l'état  $m = -1/2$  peuvent avoir pour état final  $m = -1/2$  ou  $m = 1/2$ . La population du sous-niveau  $m = -1/2$  diminue au profit de celle de  $m = 1/2$ . Si l'intensité de la sonde est élevée, ou si la durée de l'éclairement est longue, il viendra un moment où tous les atomes seront dans l'état  $m = 1/2$ . Cette variation de la population des états  $|\frac{1}{2}m\rangle$  au cours du temps est visible dans la transmission cohérente du faisceau sonde par le nuage atomique : la probabilité de diffuser un photon dépend du sous-niveau Zeeman dans lequel se trouve l'atome (via les coefficients de Clebsch-Gordan). Ainsi, l'intensité transmise évolue au cours du temps, jusqu'à ce que le nuage soit entièrement pompé dans l'état  $m = 1/2$ . Le mécanisme de pompage optique est d'autant plus efficace que l'intensité de la sonde est forte. Il est commode de la mesurer à l'aide du paramètre de saturation

$$s = \frac{2N_p g_\omega^2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.35)$$

où  $g_\omega$  est définie par (2.15) et  $N_p$  est le nombre de photons issus de la sonde CBS dans le nuage atomique. On peut montrer que le temps caractéristique sur lequel s'effectue le pompage optique est  $\tau_P = 1/(s\Gamma)$  [67]. En pratique, il faut un temps bien plus long pour obtenir un milieu pompé. En particulier, la diffusion multiple, qui implique des changements dans la polarisation de la lumière, est un facteur qui tend à diminuer l'impact du pompage optique. Dans les expériences de rétrodiffusion cohérente, l'intensité de la sonde est assez faible ( $s = 0.03$ ) et la durée d'une acquisition assez courte pour que cet effet soit négligeable. Si à présent on ajoute un champ magnétique extérieur parallèle au faisceau sonde, l'effet Zeeman lève la dégénérescence du niveau  $J = 1/2$ . Les fréquences des transitions  $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \rightarrow |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle$  et  $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \rightarrow |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$  sont différentes. Supposons que la fréquence du faisceau sonde soit accordée avec celle de cette deuxième transition. La population de l'état  $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$  diminue beaucoup plus vite qu'en l'absence de champ magnétique : bien que le taux de dépeuplement soit le même qu'en champ nul, le repeuplement à partir des autres niveaux est plus lent. Un second facteur est que la relaxation entre sous-niveaux Zeeman (par des collisions entre atomes, par exemple) est plus faible lorsqu'ils ne sont pas dégénérés. L'action de  $\mathbf{B}$  est donc d'accélérer le pompage optique. De manière générale, si la fréquence du faisceau sonde est accordée avec une seule transition  $|Jm\rangle \rightarrow |J_e m_e\rangle$ , cette transition est beaucoup plus probable que les autres, et l'état  $|Jm\rangle$  se vide au profit des états voisins. Une exception se produit si  $J_e = J + 1$ ,  $m = J$  et  $m_e = J_e$ .

### 3.3. SECTION EFFICACE DIFFÉRENTIELLE

---

Dans ce cas, en effet, l'état  $|J_e m_e\rangle$  ne peut se désexciter que dans l'état  $|Jm\rangle$ .

Enfin, de manière générale, une polarisation circulaire dans la base de quantification a pour effet de peupler les sous-niveaux Zeeman de  $|m|$  grand. Pour une transition  $J \rightarrow J + 1$ , une polarisation linéaire parallèle à l'axe de quantification peuple préférentiellement les sous-niveaux de petit  $|m|$ .

Dans la suite, nous étudierons deux situations de rétrodiffusion cohérente en présence d'un champ magnétique. La première concerne une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$ , pour laquelle il n'y a pas de pompage optique (le niveau fondamental n'est pas dégénéré). La seconde concerne la transition 3 – 4 du Rubidium, et le faisceau sonde sera accordé avec la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ , la polarisation incidente ayant une composante suivant l'axe de quantification et une composante circulaire. Le pompage optique ne joue alors pas de rôle sensible. Par contre, d'autres choix de fréquence du faisceau sonde nous obligeront à prendre en compte le pompage optique.

Il est donc justifié, pour les situations qui nous intéressent, de négliger le pompage optique. D'autres arguments dans ce sens seront donnés dans la section 6.5.5, p. 144.

### 3.3 Section efficace différentielle

Le champ magnétique modifiant l'opérateur de diffusion, il modifie aussi le diagramme de rayonnement de l'atome. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent (section 2.4.1, p. 57), la section efficace différentielle est proportionnelle à la moyenne interne de l'opérateur  $\mathbf{t}^\dagger \mathbf{t}$ . L'équation (2.42) n'est pas modifiée par la présence du champ magnétique, et comme on n'observe pas les états atomiques on en prend la moyenne.

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{V^2 \omega^2}{4\pi^2} \frac{1}{2J+1} \sum_{m, m'=-J}^J \langle Jm | (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}') | Jm' \rangle \langle Jm' | (\boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{t} \boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle \quad (3.36)$$

En notant

$$\sigma_0(\delta) = \sigma_d(\phi = 0) = M_{J, J_e} \frac{6\pi}{k^2} \frac{1}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (3.37)$$



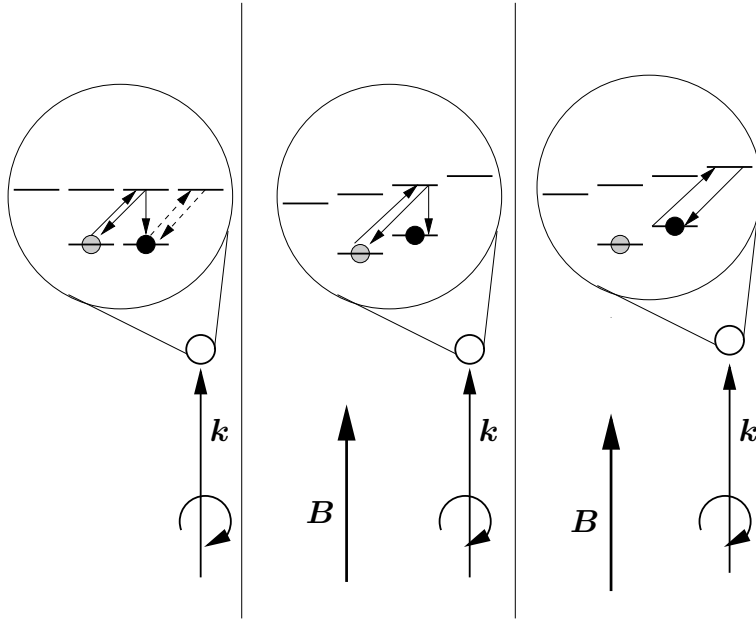


FIG. 3.1 – Illustration du pompage optique. Lorsque le niveau fondamental de l'atome est dégénéré, la moyenne interne dépend de la population des différents sous-niveaux Zeeman. Il est raisonnable de supposer que les atomes produits par le MOT sont distribués uniformément entre ces sous-niveaux, mais le pompage optique peut faire évoluer cette distribution au cours du temps. Le faisceau sonde a une polarisation circulaire gauche. A gauche :  $\mathbf{B} = 0$ . L'état  $m = -1/2$  se vide au profit de  $m = 1/2$ . Au milieu :  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}$ . La fréquence du faisceau sonde est accordée avec la transition  $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \rightarrow |\frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle$ . La population de l'état  $m = -1/2$  diminue plus vite qu'en l'absence de champ magnétique, car cet état diffuse préférentiellement la lumière, et n'est pas repeuplé par des transitions à partir de  $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ . A droite :  $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ . La lumière incidente est résonante avec la transition  $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \rightarrow |\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle$ . L'état  $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$  ne se vide pas car il est le seul état final possible après la diffusion, et l'état  $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$  se vide plus lentement qu'en l'absence de  $\mathbf{B}$ .

### 3.3. SECTION EFFICACE DIFFÉRENTIELLE

---

la section efficace totale en l'absence de champ magnétique, cela se réécrit :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi M_{J,J_e}} \frac{1}{2J+1} \sum_{m,m'=-J}^J \sum_{m_e,m'_e=-J_e}^{J_e} \\ &\frac{\langle Jm | (\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) | J_e m'_e \rangle \langle J_e m'_e | (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}') | Jm' \rangle \langle Jm' | (\mathbf{d} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}') | J_e m_e \rangle \langle J_e m_e | (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) | Jm \rangle}{(1 + i\bar{\phi}(gm' - g_e m'_e))(1 - i\phi(gm - g_e m_e))} \end{aligned} \quad (3.38)$$

où  $\phi$  est défini par (3.8). La présence des nombres quantiques magnétiques au dénominateur ne permet pas d'utiliser directement le formalisme des opérateurs tensoriels irréductibles pour évaluer cette somme. En effet, on peut montrer qu'elle s'exprime en termes des composantes  $[[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}']^{K_1} [\boldsymbol{\epsilon}']^{K_2}]_0^K$  avec  $K_1, K_2 \in \{0, 1, 2\}$  et  $K \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , dont les expressions sont trop compliquées pour apporter une nouvelle information utile. Au lieu de cela, nous transformons le dénominateur en un opérateur agissant au numérateur. Pour ce faire, nous remarquons que

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty dx e^{-ax} \quad (3.39)$$

et nous notons  $\mathcal{J}_z$  la composante suivant  $\mathbf{B}$  de l'opérateur moment cinétique de l'atome. Elle vérifie :

$$\mathcal{J}_z |Jm\rangle = m |Jm\rangle \quad \mathcal{J}_z |J_e m_e\rangle = m_e |J_e m_e\rangle \quad (3.40)$$

La section efficace différentielle s'exprime alors comme une transformée de Laplace

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi M_{J,J_e}} \frac{1}{2J+1} \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy e^{-(x+y)} \\ &\text{Tr}_g [e^{i\bar{\phi}gy\mathcal{J}_z} (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{d}) e^{-i\bar{\phi}g_e y\mathcal{J}_z} (\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d}) (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \mathbf{d}) e^{i\phi g_e x\mathcal{J}_z} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{d}) e^{-i\phi gx\mathcal{J}_z}] \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $\text{Tr}_g$  désigne la trace sur le niveau fondamental.

$\mathbf{d}$  étant un opérateur tensoriel irréductible, on utilise la propriété [58]

$$e^{-ia\mathcal{J}_z} d_q e^{ia\mathcal{J}_z} = e^{-iaq} d_q \quad (3.42)$$

et on introduit les vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  tels que

$$\mathbf{F}_q = e^{-iqg_e\phi x} \boldsymbol{\epsilon}_q \quad (3.43)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_q = e^{-iqg_e\bar{\phi}y} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_q \quad (3.44)$$

### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

La section efficace différentielle prend alors la forme

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi M_{J,J_e}} \frac{1}{2J+1} \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy e^{-(x+y)} \times \text{Tr}_g[(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})e^{i(y\bar{\phi} - x\phi)(g-g_e)\mathcal{J}_z}] \quad (3.45)$$

#### 3.3.1 Cas $J = 0$ ou $g = g_e$

Considérons tout d'abord le cas où l'exponentielle est égale à l'identité. Cela se produit si  $J = 0$  ou si  $g = g_e$ . La relation (2.44) nous montre que

$$\frac{1}{M_{J,J_e}(2J+1)} \text{Tr}_g[(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})] = \mathcal{I}(\mathbf{F}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}', \boldsymbol{\epsilon}', \bar{\mathbf{E}}) \quad (3.46)$$

Il reste ensuite à évaluer la transformée de Laplace de cette fonction pour obtenir la section efficace. Elle s'exprime à l'aide des coefficients  $w_i$  (2.44)-(2.48), qui caractérisent la transition considérée :

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi} (w_1 |\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \mathcal{T}^{0,1} \boldsymbol{\epsilon}|^2 + w_2 |\boldsymbol{\epsilon}' \mathcal{T}^{0,1} \boldsymbol{\epsilon}|^2 + w_3 (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \mathcal{T}^{0,1\dagger} \mathcal{T}^{0,1} \boldsymbol{\epsilon})) \quad (3.47)$$

Comme en l'absence de champ magnétique (équation (2.48)), l'information sur la structure interne est contenue dans les coefficients  $w_i$ . L'action du champ magnétique se trouve dans la matrice  $\mathcal{T}^{0,1}$  - dont les coefficients sont donnés par (3.28)-(3.32) - qui généralise le produit scalaire apparaissant pour  $\phi = 0$ . Malheureusement, ce résultat n'est valable que si  $g = g_e$ .

Dans le cas  $J = 0$ , le résultat est particulièrement simple, puisque  $w_1 = 1$  et  $w_2 = w_3 = 0$  :

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi} |\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \mathcal{T}^{0,1} \boldsymbol{\epsilon}|^2 \quad (3.48)$$

#### 3.3.2 Cas général

Dans le cas où  $J \neq 0$  et  $g \neq g_e$ ,  $\exp(i(y\bar{\phi} - x\phi)(g - g_e)\mathcal{J}_z)$  n'est pas une composante d'un opérateur tensoriel irréductible. Cela indique que le formalisme de ces opérateurs est mal adapté au calcul de la section efficace différentielle en présence d'un champ magnétique. D'ailleurs, si nous avons développé la même approche pour le calcul de  $\langle T \rangle_{int}$ , nous n'aurions pas pu trouver aussi facilement les coefficients des matrices  $\mathcal{T}^{J,J_e}$ . Cependant, ce formalisme permet d'obtenir une approximation de la section efficace différentielle valable au-delà du rayon de convergence

### 3.3. SECTION EFFICACE DIFFÉRENTIELLE

---

$[\max(|gm - g_e m_e|)]^{-1} \sim 1$  du développement en série entière de (3.38) en fonction de  $\phi$ . C'est à cette approximation que nous consacrons le reste de cette section.

On part du fait que  $\mathcal{J}_z$  est la composante 0 du moment cinétique, qui est un opérateur tensoriel irréductible. En développant l'exponentielle en série entière, le calcul de la section efficace différentielle se ramène à l'évaluation de la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(y\bar{\phi} - x\phi)(g - g_e))^n}{n!} \text{Tr}_g[(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})J_z^n] \quad (3.49)$$

Cette expression n'est pas perturbative en  $\phi$  car  $\bar{\mathbf{E}}$  et  $\mathbf{F}$  dépendent de  $\phi$ . La variable du développement est  $g - g_e$ . Pour la transition de l'atome de rubidium qui nous intéresse, on a  $g = 1/3$  et  $g_e = 1/2$ , soit  $g - g_e = -1/6$  : il est pertinent de le considérer comme un petit paramètre.

Le terme d'ordre 0 est donné par le cas  $g = g_e$ . Les termes suivants s'obtiennent par applications successives des relations (3.15) et (3.16). Leur expression générale est donnée dans l'annexe B, où le terme d'ordre 1 est explicitement calculé.

#### 3.3.3 Diagrammes de rayonnement

Le diagramme de rayonnement d'un atome est la répartition spatiale de l'intensité qu'il diffuse, sans contrôle sur la polarisation sortante. Cela revient à évaluer

$$\sum_{\boldsymbol{\epsilon}' \perp \mathbf{k}'} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle (|\mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}\rangle \rightarrow |\mathbf{k}'\boldsymbol{\epsilon}'\rangle) \quad (3.50)$$

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu qu'il est possible d'exprimer simplement la section efficace différentielle dans les cas  $J = 0$  et  $g = g_e$ . Si  $g \neq g_e$ , l'équation (3.47) reste valable tant que  $|(g - g_e)\phi| \ll 1$ . Nous allons dans un premier temps nous restreindre à ces cas, qui nous permettront de dégager les effets de  $\mathbf{B}$  sur le diagramme de rayonnement. Nous étudierons ensuite le cas général en évaluant numériquement (3.38).

On se place à présent dans une des situations mentionnées ci-dessus, où (3.47) s'applique. Comme pour la section efficace totale (3.33), la direction de la polarisation incidente  $\boldsymbol{\epsilon}$  par rapport à  $\mathbf{B}$  joue un rôle important. Si la polarisation incidente  $\boldsymbol{\epsilon}$  est parallèle à  $\mathbf{B}$ , les expressions (3.47) et (3.28) à (3.30) montrent que la section efficace différentielle ne dépend pas de  $\phi$  : le diagramme de rayonnement est identique à celui en champ magnétique nul.

### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Si au contraire l'onde incidente se propage parallèlement à  $\mathbf{B}$  avec une polarisation linéaire, alors le diagramme de rayonnement dépend de  $\phi$ , et présente une symétrie par rotation autour de  $\mathbf{B}$ . D'autre part, il existe toujours une base réelle de vecteurs de polarisation  $\{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}$  perpendiculaires à  $\mathbf{k}'$  de sorte que

$$\sum_{\epsilon'_{1,2} \perp \mathbf{k}'} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle (|\mathbf{k}\epsilon\rangle \rightarrow |\mathbf{k}'\epsilon'_{1,2}\rangle) = \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi} ((w_1+w_2)(|\epsilon'_1 \mathcal{T}^{0,1} \epsilon|^2 + |\epsilon'_2 \mathcal{T}^{0,1} \epsilon|^2) + 2w_3 \frac{1 + |g_e \phi|^2}{|1 + g_e^2 \phi^2|^2}) \quad (3.51)$$

Le terme en  $w_3$  ne dépend pas de la direction de diffusion, et contribue à rendre le diagramme de rayonnement plus isotrope. Il est nul seulement pour  $J = 0$ . La dépendance du diagramme de rayonnement en la direction de diffusion est donnée par le terme en  $(w_1 + w_2)$ , qui n'est jamais nul. Nous nous restreignons, sans perte de généralité, au cas  $J = 0$ . Pour d'autres valeurs de  $J$  et  $J_e$ , les diagrammes de rayonnement seront simplement plus arrondis.

Si  $\mathbf{k}'$  se trouve dans le plan  $(\epsilon, \mathbf{k})$ , faisant un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ ,

$$\sum_{\epsilon' \perp \mathbf{k}'} \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle (|\mathbf{k}\epsilon\rangle \rightarrow |\mathbf{k}'\epsilon'\rangle) = \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi} \frac{|\phi|^2 + \cos^2 \theta}{|1 + \phi^2|^2} \quad (3.52)$$

où on a choisi  $g_e = 1$ . La figure 3.2 montre les diagrammes de rayonnement correspondants à diverses valeurs de  $\phi$ .

L'influence du désaccord  $\delta$  entre la fréquence lumineuse et la fréquence atomique en champ nul est importante. Si ce désaccord est nul ( $\phi$  réel), on reste à résonance avec la transition  $|00\rangle \rightarrow |10\rangle$  qui n'est pas excitée par la polarisation incidente. Au fur et à mesure que  $B$  augmente, d'une part la section efficace diminue et d'autre part, le diagramme de rayonnement devient isotrope. Par contre, si le désaccord suit la transition  $|00\rangle \rightarrow |11\rangle$ , c'est à dire  $\delta = \mu_B B$ , la polarisation incidente excite cette transition et la section efficace tend vers une valeur finie à grand  $B$  ( $\sigma_0(\delta)$  (3.37) dépend implicitement de  $B$  via  $\delta$ ).  $\phi$  tend alors vers  $i$  et on constate que le diagramme de rayonnement est identique à celui pour  $\phi = 1$ . La figure 3.2 montre le diagramme de rayonnement pour  $\delta = \mu_B B = \Gamma/2$  correspondant à  $\phi = i/(1+i)$ .

De manière qualitative, les diagrammes de rayonnement des atomes avec  $J > 0$  sont moins anisotropes (plus arrondis) que ceux présentés sur la figure 3.2. Lorsque  $g \neq g_e$ , on peut utiliser (3.38) pour calculer le diagramme de rayonnement. Pour la transition 3 – 4 du Rubidium, avec  $g = 1/3$  et  $g_e = 1/2$ , on a représenté sur la figure 3.3 les diagrammes de rayonnement pour les mêmes valeurs de  $\phi$  que pour la figure 3.2. On constate quelques

### 3.3. SECTION EFFICACE DIFFÉRENTIELLE

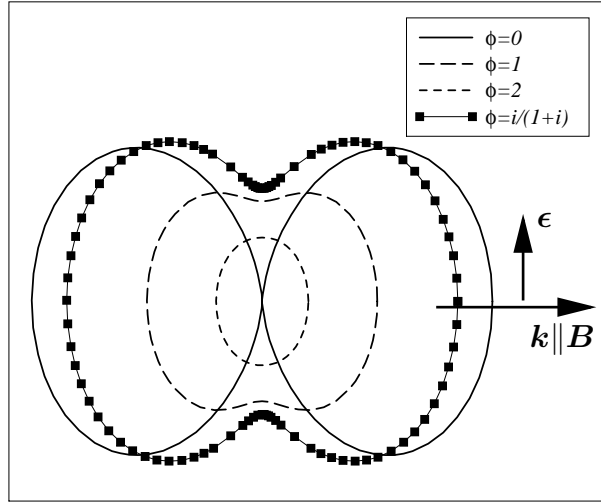


FIG. 3.2 – Diagrammes de rayonnement d’un atome (transition  $0 - 1$ ) soumis à une onde lumineuse polarisée linéairement se propageant parallèlement au champ magnétique. Si on augmente le champ magnétique tout en restant accordé en fréquence avec  $|00\rangle \rightarrow |10\rangle$  ( $\phi$  réel croissant), la section efficace diminue et le diagramme de rayonnement devient isotrope. Si on suit la transition  $|00\rangle \rightarrow |11\rangle$ , il reste partiellement anisotrope. La situation  $\delta = \mu_B B = \Gamma/2$  correspond à  $\phi = i/(1+i)$ . Pour  $\delta = \mu_B B \rightarrow \infty$ ,  $\phi$  tend vers  $i$  et le diagramme de rayonnement est identique à celui pour  $\phi = 1$ .

changements par rapport à l’approximation  $g = g_e$ . Ils sont quantitatifs si la lumière est résonante avec la transition atomique ( $\phi$  réel) : la section efficace décroît plus vite. Mais  $\mathbf{B}$  a toujours pour effet de rendre le diagramme de rayonnement plus isotrope, avec une forme elliptique. Si  $\delta = \mu_B B$ , la lumière est résonante avec la transition  $|33\rangle - |44\rangle$  si on tient compte des valeurs exactes des facteurs de Landé. Par contre, dans l’approximation  $g = g_e$ , cette valeur de  $\delta$  ne correspond à aucune transition atomique. On constate que pour  $\delta = \mu_B B = \Gamma/2$  ( $\phi = i/(1+i)$ ), il y a peu de différence entre les diagrammes de rayonnement exact et approché. Par contre, si  $\delta = \mu_B B \gg \Gamma$  ( $\phi = i$ ), la section efficace tend vers une valeur finie si on la calcule exactement, et vers 0 dans le calcul approché.

#### 3.3.4 Effet Hall photonique

Dans les milieux diffusants, il existe un effet connu sous le nom d’ “effet Hall photonique” [68, 69]. Lorsqu’un faisceau lumineux se propage vers l’avant dans un milieu matériel, perpendiculairement à un champ magnétique

### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

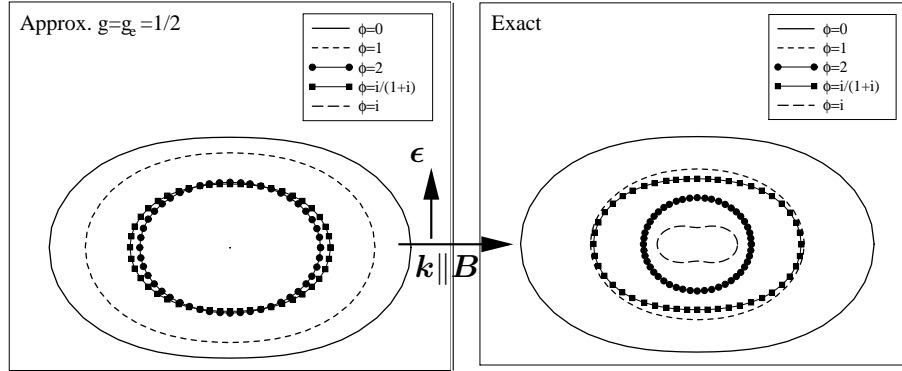


FIG. 3.3 – Diagrammes de rayonnement pour les atomes de Rubidium. A gauche : approximation (3.51), avec  $g = g_e = 1/2$ . A droite, calcul exact à partir de (3.38). Des différences avec la figure 3.2 apparaissent. Du fait de la structure interne, les diagrammes sont plus isotropes. Si  $\delta = 0$  ( $\phi$  réel), les différences entre le calcul exact et l'approximation  $g = g_e$  sont quantitatives : l'allure des diagrammes de rayonnement est identique. Par contre, si  $\delta = \mu_B B$ , ce n'est plus le cas lorsque  $B$  devient grand. En effet, cette valeur de  $\delta$  correspond à une lumière incidente résonante avec la transition  $|33\rangle - |44\rangle$  si on tient des compte des valeurs exactes des facteurs de Landé. Par contre, dans l'approximation  $g = g_e = 1/2$ , cette de valeur de  $\delta$  ne correspond à aucune transition atomique : lorsque  $B$  augmente, la fréquence de la lumière incidente se désaccorde de plus en plus des fréquences atomiques et la section efficace tend vers 0. On a représenté les cas  $\delta = \mu_B B = \Gamma/2$  ( $\phi = i/(1+i)$ ) et  $\delta = \mu_B B \rightarrow \infty$  ( $\phi = i$ ). Ce dernier cas est représenté par un point à l'origine sur la figure de gauche.

vertical, les flux de photons diffusés vers la gauche ou vers la droite - le long de la direction perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  et au faisceau incident - ne sont pas égaux. Cette différence de flux est analogue à la différence de tension observée dans l'effet Hall. Elle vient de la modification du diagramme de rayonnement des diffuseurs par le champ magnétique. Lorsqu'il s'agit de diffuseurs de Mie, dont la taille est au moins comparable à la longueur d'onde, l'effet Faraday à l'intérieur du diffuseur induit une anisotropie du diagramme de rayonnement qui permet d'expliquer l'effet Hall photonique par la diffusion simple de la lumière. Pour des diffuseurs de Rayleigh, assimilables à des diffuseurs ponctuels, la diagramme de rayonnement est symétrique par rotation autour du champ magnétique et l'effet s'explique par l'interférence des ondes émises par plusieurs diffuseurs. Cet effet est très faible et difficile à détecter [70]. Nous le négligerons par la suite, non seulement à cause de sa petitesse, mais aussi parce que, dans le calcul du cône CBS, il est annulé par la moyenne de configuration.

### 3.4 Rotation du dipôle

Le champ magnétique ne modifie pas seulement la répartition spatiale de l'intensité lumineuse diffusée par l'atome. La polarisation est aussi affectée. Cet effet est connu sous le nom d'effet Hanle [71]. Il peut se comprendre sur la base du modèle de l'électron élastiquement lié de Lorentz : en présence du champ magnétique, la force de Lorentz perturbe la trajectoire de l'électron, et modifie donc le vecteur moment dipolaire de l'atome. Pour l'étudier, nous analysons la polarisation émise dans la direction arrière par un atome. Celui-ci est éclairé par une onde lumineuse polarisée linéairement se propageant parallèlement à  $\mathbf{B}$ , et résonante avec la transition atomique en champ nul :

$$\delta = 0 \quad (3.53)$$

L'analyse se fait à l'aide d'un analyseur linéaire. Examinons tout d'abord

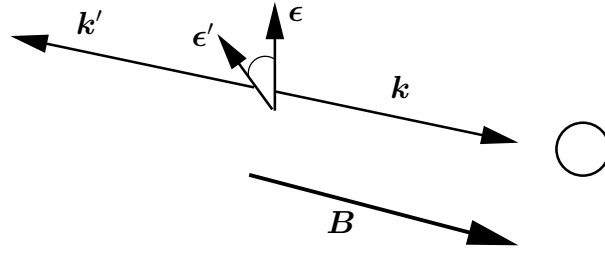


FIG. 3.4 – Schéma pour l'observation de la rotation du dipôle : une onde incidente polarisée linéairement et se propageant suivant  $\mathbf{B}$  éclaire un atome. On observe la polarisation du signal diffusé vers l'arrière à travers un analyseur linéaire.

le cas d'un atome dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré. D'après l'expression (3.47) de la section efficace différentielle, avec  $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$  pour une transition  $0 - 1$  (voir section 2.4.1, p. 58), la polarisation diffusée par l'atome est

$$\boldsymbol{\epsilon}_{diff} \propto \Delta_{\mathbf{k}'} \mathcal{T}^{0,1} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.54)$$

Si on choisit  $\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}}$ , cela donne :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{diff} \propto \frac{1}{1 + g_e^2 \phi^2} (\hat{\mathbf{x}} + g_e \phi \hat{\mathbf{y}}) \quad (3.55)$$

Comme  $\phi$  est réel, il s'agit d'une polarisation linéaire, tournée d'un angle

$$\theta_{dip} = \arctan(g_e \phi) \quad (3.56)$$



### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

par rapport à la polarisation incidente. Pour un observateur qui voit arriver vers lui le faisceau incident, la rotation est dans le sens anti-horaire lorsque  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  sont parallèles, et change de sens si on inverse le sens de  $\mathbf{B}$ . On choisit de définir  $\theta_{dip}$  positif si la rotation est dans le sens anti-horaire pour cet observateur.

Pour un atome dont le niveau fondamental est dégénéré, il faut prendre en compte toutes les transitions atomiques possibles. Dans la configuration choisie, les transitions Raman ne sont pas à prendre en considération. En effet, celles qui font passer l'atome de  $|Jm\rangle$  à  $|Jm \pm 2\rangle$  rayonnent une polarisation circulaire vers l'arrière, qui apparaît comme un fond lumineux uniforme à travers l'analyseur linéaire. Et celles qui le font passer à  $|Jm \pm 1\rangle$  ne contribuent pas, car il faut que l'état excité intermédiaire ait même nombre quantique magnétique qu'un des états initial ou final. Comme la polarisation incidente est orthogonale à  $\mathbf{B}$ , le premier cas n'est pas possible. Dans le second cas, l'intensité émise dans la direction arrière est nulle. Seules les transitions Rayleigh, qui émettent chacune une polarisation elliptique, contribuent au signal observé. Nous allons montrer que la superposition incohérente de ces polarisations elliptiques est équivalente à la superposition d'une onde polarisée linéairement et d'une onde non-polarisée. Ainsi, l'influence de  $\mathbf{B}$  sur la polarisation diffusée est encore une rotation.

#### 3.4.1 Paramètres de Stokes

Les paramètres de Stokes sont quatre grandeurs qui permettent de caractériser l'état de polarisation d'une onde lumineuse. Ils sont définis à l'aide des intensités mesurées après analyse de l'onde dans différents états de polarisation [48].

En représentation complexe, le champ électrique d'une onde plane monochromatique se propageant le long de l'axe des  $z$  peut s'écrire :

$$E_x(t) = a_1(t)e^{i\varphi_1(t)}e^{-i\omega t} \quad (3.57)$$

$$E_y(t) = a_2(t)e^{i\varphi_2(t)}e^{-i\omega t} \quad (3.58)$$

Une onde polarisée linéairement est caractérisée par  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Les paramètres de Stokes sont :

$$s_0 = \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle = I_x + I_y \quad (3.59)$$

$$s_x = \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle = I_x - I_y \quad (3.60)$$

$$s_y = 2\langle a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = I_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} - I_{\mathbf{x}-\mathbf{y}} \quad (3.61)$$

$$s_z = 2\langle a_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = I_{\mathbf{e}_1} - I_{\mathbf{e}_{-1}} \quad (3.62)$$

### 3.4. ROTATION DU DIPÔLE

---

où  $I_\epsilon$  est l'intensité mesurée après analyse de l'onde par la polarisation  $\epsilon$ . Pour une onde non-polarisée, seul  $s_0$  est non-nul, et pour une onde totalement polarisée,  $s_0^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$ . Une polarisation linéaire est caractérisée par  $s_z = 0$ .

Nous allons montrer que pour l'ensemble des polarisations émises par les transitions Rayleigh,  $s_z$  est nul, et  $s_x$  est non-nul. Pour cela, nous utilisons (3.38) en ne retenant que les termes avec  $m' = m$ , et avec  $\epsilon = \hat{x}$ . Pour calculer  $I_{e_1}$ , par exemple, on prendra  $\epsilon' = e_1$ . On trouve ainsi :

$$s_z = \frac{1}{2} \left( \sum_{m=-J}^J \frac{\langle J1m-1|J_e m-1\rangle^4}{1 + \phi^2(gm - g_e(m-1))^2} - \sum_{m=-J}^J \frac{\langle J1m1|J_e m11\rangle^4}{1 + \phi^2(gm - g_e(m+1))^2} \right) \quad (3.63)$$

En changeant  $m$  en  $-m$  dans l'une des deux sommes, et en appliquant alors (A.16), on obtient  $s_z = 0$ .

De même, on trouve pour  $s_x$  :

$$s_x = \text{Re} \sum_{m=-J}^J \frac{\langle J1m-1|J_e m-1\rangle^2 \langle J1m1|J_e m11\rangle^2}{(1 - i\phi(gm - g_e(m+1)))(1 + i\phi(gm - g_e(m-1)))} \neq 0 \quad (3.64)$$

La lumière diffusée par l'atome dans la direction arrière est donc partiellement polarisée, linéairement. Le calcul de la rotation de cette polarisation diffusée revient à chercher le maximum de la section efficace différentielle en faisant varier la polarisation linéaire  $\epsilon'$  dans (3.38). Nous rappelons que ce résultat est valable pour  $\delta = 0$ . Lorsque  $\delta$  est quelconque, la lumière émise vers l'arrière est toujours partiellement polarisée, mais elliptiquement.

#### 3.4.2 Rotation du dipôle pour le $^{85}\text{Rb}$

La courbe en trait plein de la figure 3.5 montre les résultats pour la transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$  de la raie D2 du Rubidium, dont les facteurs de Landé sont  $g = 1/3$  et  $g_e = 1/2$ . A titre de comparaison, on a également tracé les courbes obtenues en considérant le développement en puissance de  $(g - g_e)$  de la section efficace différentielle (3.38) à l'ordre 0 et à l'ordre 2<sup>1</sup>. L'ordre 0 coïncide avec la rotation du dipôle pour une transition 0 - 1.

La rotation du dipôle a aussi été mesurée expérimentalement, sur un nuage atomique de faible épaisseur optique  $b = 0.05$  mesurée à  $B = 0$ . Les points expérimentaux sont représentés par des cercles sur la figure 3.5. La condition de faible épaisseur optique est nécessaire pour pouvoir négliger le

---

<sup>1</sup>Pour  $\delta = 0$ ,  $\theta_{dip}$  est une fonction impaire de  $B$ . Le terme d'ordre 1 est alors nul.

### CHAPITRE 3. DIFFUSION DE LA LUMIÈRE PAR UN ATOME EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

signal de diffusion multiple vers l'arrière, et aussi pour négliger les effets de propagation de la lumière dans le nuage. En effet, nous avons vu dans la section 1.6 que dans cette configuration, l'effet Faraday fait tourner une polarisation linéaire autour du même axe que l'effet Hanle, d'un angle proportionnel à la distance parcourue. Il fausserait la mesure de  $\theta_{dip}$  s'il n'était pas négligeable. Nous verrons au chapitre 4 que c'est bien le cas pour une faible épaisseur optique.

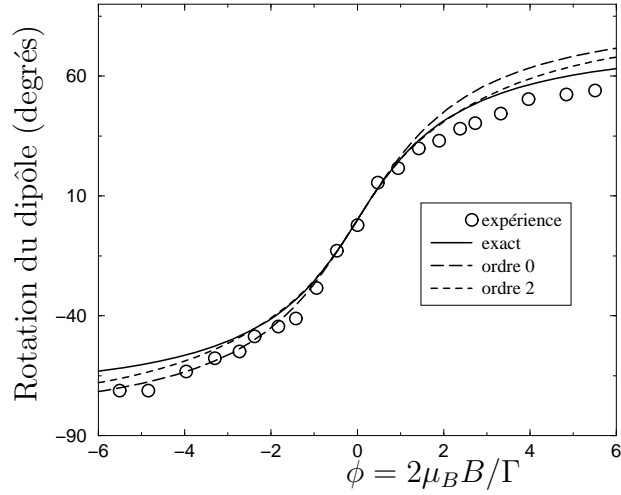


FIG. 3.5 – Angle de rotation de la polarisation diffusée vers l'arrière par rapport à la direction de la polarisation incidente. Les courbes pointillées et tiretées résultent des approximations du développement de la section efficace différentielle (3.38), en puissance de  $(g - g_e)$  à l'ordre 0 et à l'ordre 2. L'ordre 0 coïncide avec la rotation du dipôle pour une transition 0 – 1. La ligne continue représente le calcul exact à partir de (3.38) et les cercles sont les valeurs expérimentales mesurées avec des atomes de Rubidium, pour lesquels  $\phi = 1$  correspond à  $B = 2.1$  G.

Nous constatons que la rotation du dipôle pour les atomes de Rubidium se comporte à peu près comme pour une transition 0 – 1. Pour un meilleur accord numérique, le développement de (3.38) en puissance de  $(g - g_e)$  est une bonne approximation.

# Chapitre 4

## Propagation cohérente de la lumière dans un gaz d'atomes froids en présence d'un champ magnétique

### 4.1 Introduction

La présence d'un champ magnétique extérieur influe sur la propagation de la lumière dans un milieu matériel. En effet, le champ magnétique agit sur les constituants du matériau, et modifie leur interaction avec la lumière. Nous avons déjà mentionné dans la section 1.6 les effets Faraday et Cotton-Mouton qui affectent la polarisation de l'onde lumineuse : la présence du champ magnétique crée une direction privilégiée, rendant le milieu optiquement anisotrope. Dans une direction de propagation donnée, il y a deux états propres de polarisation qui se propagent sans déformation. Il leur correspond des indices de réfraction et des coefficients d'extinction différents. Toute polarisation peut s'exprimer dans la base de ces modes propres, dont les poids respectifs varient différemment au cours de la propagation. Ce qui entraîne une déformation de la polarisation initiale.

Plus spectaculairement, le champ magnétique peut aussi entraîner une déviation du faisceau lumineux. Dans un milieu homogène et uniforme, et tant que l'effet Cotton-Mouton est négligeable devant l'effet Faraday, la vitesse de groupe d'une onde polarisée circulairement possède une composante suivant  $\mathbf{B}$ . Si cette onde se propage dans une direction presque perpendiculaire au champ magnétique, sa direction de propagation subit une légère

déviations. Nous montrerons que cet effet est négligeable dans les situations que nous considérerons.

Tout comme au chapitre 2 (section 2.4.2, p. 58), la propagation du photon dans le milieu effectif est décrite à l'aide de la self-énergie  $\Sigma$ . Cette dernière rend compte, de manière unifiée, des effets évoqués ci-dessus. Autant d'informations dans une seule fonction a un prix : l'expression générale de  $\Sigma$  est assez compliquée et dépend du vecteur d'onde et de la polarisation de la lumière, ainsi que du champ magnétique. Des exemples nous permettront de donner une signification physique aux différents termes qui la composent.

Ce chapitre décrit donc la propagation de la lumière en se restreignant aux effets du champ magnétique sur la polarisation. Nous avons vu qu'ils avaient un impact sur le cône CBS pour les diffuseurs classiques, et nous devons les prendre en compte aussi pour les diffuseurs atomiques.

## 4.2 Fonction de Green d'un photon

La détermination de la fonction de Green d'un photon en présence d'un champ magnétique suit exactement la même méthode qu'à la section 2.4.2. Il s'agit de calculer la valeur moyenne de la fonction de Green de l'ensemble {photon + nuage atomique}, la moyenne portant sur tous les degrés de liberté des atomes, en prenant en compte la présence des termes magnétiques dans l'hamiltonien atomique (3.1). Ceci se fait en traitant perturbativement l'interaction entre lumière et matière. Au chapitre précédent, nous avons justifié que le potentiel d'interaction (2.8) entre la lumière et un atome n'est pas modifié par le champ magnétique externe. Par conséquent, l'interaction d'un photon avec l'ensemble du nuage atomique est toujours décrit par  $\mathcal{U}$  (2.51). Lors de la propagation d'un photon, les atomes sont tous dans leur état fondamental. Ils possèdent une énergie  $\mu_B B g m$  (on a choisi pour origine des énergies le niveau fondamental en champ magnétique nul), qui est nulle en moyenne sous l'hypothèse d'équiprobabilité de peuplement des sous-niveaux Zeeman. La fonction de Green non perturbée moyenne est

$$g_0 = \langle G_0 \rangle = \frac{1}{\omega - k} \quad (4.1)$$

La fonction de Green du photon est alors

$$G = g_0 + \langle G_0 \mathcal{U} G_0 \mathcal{U} G_0 \rangle + \dots \quad (4.2)$$

où seuls les termes contenant  $\mathcal{U}$  un nombre pair de fois sont non-nuls. On introduit l'opérateur de diffusion par l'atome  $i$ ,  $T_i$  défini par (2.57) et (3.9), et,

## 4.2. FONCTION DE GREEN D'UN PHOTON

---

en utilisant le fait que tous les évènements de diffusion sont indépendants et tous les atomes identiques et uniformément répartis dans l'espace (au moins localement), on retrouve l'équation (2.59), avec

$$\otimes = \langle \langle T \rangle_{int} \rangle_{ext} \quad (4.3)$$

où  $\langle T \rangle_{int}$  est donné maintenant par (3.31). On définit ensuite la self-énergie  $\Sigma$  comme dans (2.60). Elle contient toute l'information sur l'interaction lumière-atome, et traduit au niveau macroscopique les conséquences de cette interaction microscopique. La fonction de Green du photon s'écrit alors

$$G = \frac{1}{\omega - k - \Sigma} \quad (4.4)$$

Tout comme en l'absence de champ magnétique, on peut restreindre le développement de la self-énergie à son premier terme si la densité de diffuseurs est faible. On a alors l'expression suivante :

$$\Sigma = NM_{J,J_e} \frac{3\pi}{V\omega^2} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \Delta_{\mathbf{k}'} \mathcal{T}^{J,J_e} \Delta_{\mathbf{k}} \langle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \rangle_{ext} \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \Delta_{\mathbf{k}} \mathcal{T}^{J,J_e} \Delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (4.6)$$

où  $\ell_0$  est le libre parcours moyen en l'absence de champ magnétique, pour  $\delta$  nul,  $\Delta_{\mathbf{k}}$  le projecteur sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  et  $\mathcal{T}^{J,J_e}$  est définie par (3.32). Le facteur  $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  montre que  $G$  décrit la propagation d'un photon sans changement du vecteur d'onde, et traduit l'invariance statistique par translation du milieu. De même qu'à la section 2.4.2, on remarque que le caractère transverse de la polarisation n'apparaît pas explicitement dans (4.4). Mais les atomes n'émettent que des photons transverses, et les expressions de  $G$  et  $\Sigma$  montrent qu'ils le restent. On peut écrire en toute généralité :

$$G = \frac{1}{\omega - k - \Sigma} \Delta_{\mathbf{k}} \quad (4.7)$$

### 4.2.1 Modes propres de propagation

L'équation (4.4) a un sens simple dans une base des vecteurs de polarisation qui diagonalisent  $\Sigma$ . Cette base correspond aux modes propres, qui se propagent sans déformation. Les pôles de  $G$  donnent l'équation de dispersion pour le mode propre correspondant. Nous commençons par diagonaliser  $\Delta_{\mathbf{k}} \mathcal{T}^{J,J_e} \Delta_{\mathbf{k}}$ .

Pour cela, nous exprimons la direction de  $\mathbf{k}$  avec les angles  $\theta$  et  $\varphi$  des coordonnées sphériques d'axe  $\hat{\mathbf{z}} \parallel \mathbf{B}$ . Cette matrice ne dépend de  $\mathbf{k}$  que par les

projecteurs, et de  $\mathbf{B}$  que par les coefficients de  $\mathcal{T}^{J,J_e}$ .

$\mathbf{k}$  est vecteur propre, associé à la valeur propre 0. Cela traduit la transversalité de la polarisation par rapport au vecteur d'onde. Les deux autres valeurs propres sont

$$\Lambda_{\pm} = \zeta + \xi \frac{\sin^2 \theta}{2} \pm \sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}} \quad (4.8)$$

associées aux vecteurs propres

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\pm} = & \left( \eta \cos^2 \theta \cos \varphi + \xi \frac{\sin^2 \theta}{2} \sin \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}} \right) \hat{\mathbf{x}} \\ & + \left( \eta \cos^2 \theta \sin \varphi - \xi \frac{\sin^2 \theta}{2} \cos \varphi \pm \cos \varphi \sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}} \right) \hat{\mathbf{y}} \\ & - \eta \cos \theta \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (4.9) \end{aligned}$$

$\zeta$ ,  $\eta$  et  $\xi$  sont exprimées par (3.25) en fonction de  $\phi$  (3.8). Le fait que les modes propres dépendent de la direction de propagation, ainsi que leur valeurs propres, traduit l'anisotropie optique du nuage atomique.

Pour une meilleure lisibilité, ces vecteurs ne sont pas normés, et leur norme dépend aussi bien de  $\mathbf{B}$  que de  $\mathbf{k}$ . Leurs expressions posent problème dans deux cas où elles tendent vers le vecteur nul :

- Lorsque  $B$  tend vers 0, en utilisant le fait que  $\eta \sim \phi$  et  $\xi \sim \phi^2$ , on montre que  $\mathbf{V}_{\pm}$  tendent vers les polarisations circulaires perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ .
- Lorsque  $\mathbf{k}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  ( $\theta = \pi/2$ ), les composantes de  $V_+$  ou de  $V_-$  ont  $\cos \theta$  comme facteur commun. La simplification montre que le vecteur propre correspondant est alors parallèle à  $\mathbf{B}$ .

Si  $\sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}} = 0$  pour  $\eta$  et  $\xi$  non-nuls, alors  $\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_-$  et la self-énergie n'est pas diagonalisable. Cette situation n'est pas physique. Elle est due à l'approximation du premier ordre en densité, et ne peut se produire que si  $\phi$  est réel ( $\delta = 0$ ) et dans une direction de propagation très précise. Comme nous le verrons plus loin, il s'agit de la direction de propagation le long de laquelle les effets Faraday et Cotton-Mouton sont de même intensité. En pratique, la probabilité qu'un photon de la sonde CBS soit exactement à résonance est nulle, et un petit désaccord suffit à rendre  $\phi$  complexe.

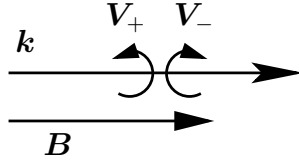
Les expressions des vecteurs propres étant assez compliquées, nous proposons deux exemples pour fixer les idées. Il s'agit d'étudier deux directions de propagation particulières : l'une parallèle ( $\theta = 0$ ) et l'autre perpendiculaire ( $\theta = \pi/2$ ) à  $\mathbf{B}$ . Il s'agit des situations typiques d'observation des effets

## 4.2. FONCTION DE GREEN D'UN PHOTON

---

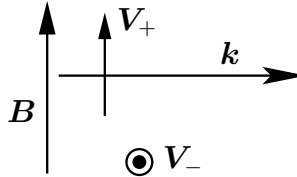
Faraday et Cotton-Mouton respectivement.

Pour l'effet Faraday,  $\theta = 0$  et  $\varphi = 0$  : on a alors



$$\mathbf{V}_{\pm} = \eta(\hat{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{y}}) \quad \Lambda_{\pm} = \zeta \pm i\eta \quad (4.10)$$

Les modes propres de propagation sont bien les polarisations circulaires, et des valeurs propres différentes leur sont associées. C'est le paramètre  $\eta$  qui est à l'origine de cette différence. Pour l'effet Cotton-Mouton,  $\theta = \pi/2$  et on peut choisir par exemple  $\varphi = 0$ . On trouve :



$$\mathbf{V}_{+} = \hat{\mathbf{z}} \quad \Lambda_{+} = \zeta + \xi; \quad \mathbf{V}_{-} = \hat{\mathbf{y}} \quad \Lambda_{-} = \zeta \quad (4.11)$$

Il s'agit bien de deux polarisations linéaires orthogonales, dont l'une est suivant  $\mathbf{B}$ . Leurs valeurs propres diffèrent du paramètre  $\xi$ . Ainsi, la self-énergie nous permet de rendre compte aussi bien de l'effet Faraday que de l'effet Cotton-Mouton. Ils sont décrits par  $\eta$  et  $\xi$  respectivement.

Enfin, remarquons que les modes propres ne sont pas orthogonaux en général. En effet, le milieu dans lequel se propage la lumière est diffusant, et nous avons vu au chapitre 2 que cela se traduit par une extinction du mode cohérent (section 2.4.2, équation (2.77)). L'énergie du mode cohérent n'étant pas conservée, la self-énergie n'est pas hermitique. En l'absence de champ magnétique, le milieu est optiquement isotrope et  $\Sigma$  est proportionnelle à  $\Delta_k$  : toutes les polarisations orthogonales à la direction de propagation sont des modes propres et le problème ne se pose pas. Mais en présence de  $\mathbf{B}$ , le milieu devient optiquement anisotrope et  $\Sigma$  est une matrice quelconque. Les modes propres sont orthogonaux lorsqu'on peut négliger l'un des deux paramètres  $|\eta|$  ou  $|\xi|$  devant l'autre. Cela correspond aux cas suivants :

- très faible ou très fort champ magnétique :  $\mu_B B \ll$  ou  $\gg \delta, \Gamma$ .
- grand désaccord :  $\delta \gg \mu_B B, \Gamma$ . C'est la situation de l'effet Faraday avec des diffuseurs classiques.

### 4.2.2 Indices du milieu

Dans la base des modes propres de propagation, les pôles du propagateur du photon donnent les relations de dispersion pour chacun d'eux :

$$\omega = k + \frac{1}{2\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \Lambda_{\pm} \quad (4.12)$$



Au premier ordre en densité, on obtient  $\omega(\mathbf{k})$  en remplaçant  $\omega$  par  $k$  dans les expressions de  $\ell_0$  et  $\delta$ .

L'indice optique du milieu est  $n_r = k/\omega(k)$

$$n_{r\pm} = 1 - \frac{1}{2k\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \Lambda_{\pm} \quad (4.13)$$

L'expression (4.8) de  $\Lambda_{\pm}$  montre que  $\zeta$  est une composante isotrope de l'indice, tandis que  $\eta$  et  $\xi$  contribuent à des termes qui dépendent de la direction de propagation. La différence d'indice entre les deux modes est en général un nombre complexe :

$$n_{r+} - n_{r-} = -\frac{1}{k\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}} \quad (4.14)$$

Ainsi, les deux modes propres ne se propagent pas avec la même vitesse de phase, et ne sont pas atténués avec la même longueur d'extinction. Le milieu dans lequel se propage la lumière est rendu optiquement anisotrope par le champ magnétique. Le libre parcours moyen  $\ell = 1/(n_d \sigma_d)$  dépend de la polarisation, comme le montre (3.33). Il s'agit d'une dépendance indirecte dans la direction de propagation car la polarisation lui est orthogonale.

### 4.2.3 Vitesse de groupe et biréfringence

Supposons qu'un paquet d'onde se propage dans le nuage atomique dans la direction  $\mathbf{k}$  avec une des polarisation  $\mathbf{V}_{\pm}$ . Alors le sommet du paquet d'onde se propage avec la vitesse de groupe <sup>1</sup>  $\mathbf{v}_g = \text{Re}(\nabla_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k}))$ .

$$\mathbf{v}_g = \text{Re} \left( 1 + \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{1}{2\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \right) \Lambda_{\pm} \right) \hat{\mathbf{k}} + \text{Re} \left( \frac{1}{2\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \nabla_{\mathbf{k}}(\Lambda_{\pm}) \right) \quad (4.15)$$

$\ell_0$  et  $\delta$  ne dépendent que du module de  $\mathbf{k}$ , et  $\Lambda_{\pm}$  dépend uniquement de sa direction. Aussi  $\nabla_{\mathbf{k}}\Lambda_{\pm}$  est un vecteur orthogonal à  $\mathbf{k}$ . Nous en déduisons qu'en général, le paquet d'onde ne se propage pas parallèlement au vecteur d'onde. Et chacune des polarisations propres se propage dans une direction différente : une lumière incidente non polarisée donne naissance à deux rayons lumineux à

---

<sup>1</sup>Nous ne nous intéressons ici qu'à la direction de la vitesse de groupe. Lorsque la fréquence de l'onde lumineuse est proche d'une fréquence de résonance d'un diffuseur, on se trouve dans le régime de dispersion anormale. L'énergie lumineuse se propage dans la direction de la vitesse de groupe, mais la norme de sa vitesse est différente. Ceci vient de ce que la durée d'interaction entre la lumière et un atome n'est pas négligeable devant le temps de propagation entre deux atomes [72].

## 4.2. FONCTION DE GREEN D'UN PHOTON

---

l'intérieur du milieu, qui correspondent aux modes propres. Ce phénomène, appelé biréfringence, est bien connu dans les milieux anisotropes [48]. Il a aussi été observé lorsque l'anisotropie est créée par un champ magnétique [73, 74]. Remarquons cependant que si la lumière se propage parallèlement à  $\mathbf{B}$ , il n'y a pas de biréfringence. En effet,  $\Lambda_{\pm}$  ne dépend que de  $\theta$ , et son gradient est colinéaire au vecteur des coordonnées sphériques  $\mathbf{e}_{\theta}$ . Comme ce vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v}_g$  possède une composante sur  $\mathbf{k}$  et une autre sur  $\mathbf{B}$ . D'autre part, le calcul explicite de

$$\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{e}_{\theta} \propto \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_{\pm}}{\partial \theta} \quad (4.16)$$

fait apparaître un facteur  $\cos \theta$ . Il n'y a pas non plus de biréfringence lorsque la propagation est perpendiculaire au champ magnétique.

Dans un milieu homogène, le paquet d'onde transporte de l'énergie : il se propage suivant le rayon lumineux, ou encore suivant le vecteur de Poynting. Ce dernier est perpendiculaire au champ électrique  $\mathbf{E}$  de l'onde lumineuse. Or les photons absorbés ou émis par un atome sont les photons du champ électrique *transverse*, c'est à dire du déplacement électrique  $\mathbf{D}$ . Les polarisations que nous propageons avec  $G$  sont celles de  $\mathbf{D}$ . Le champ magnétique externe rendant le milieu optiquement anisotrope,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  ne sont plus parallèles. Cela signifie que la direction du vecteur d'onde n'est plus la direction de propagation de l'énergie. Nous allons montrer qu'en fait la déviation est négligeable dans les situations où nous nous placerons. Nous en étudierons essentiellement deux : lorsque le nuage atomique est éclairé par un faisceau lumineux résonant avec la transition atomique ( $\delta = 0$ ), et lorsqu'il est résonant avec une transition  $|JJ\rangle \rightarrow |(J+1)(J+1)\rangle$ . La figure 4.1 illustre ces deux situations, et représente l'angle  $\aleph$  que font  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{v}_g$  en unité  $1/(2k\ell_0)$ . Dans le cas  $\delta = 0$ , on sait qu'un problème se pose lorsque la racine carrée dans l'expression de  $\Lambda_{\pm}$  s'annule. Il est lié aux pics que l'on voit sur la figure 4.1, en haut à gauche : l'écart entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{v}_g$  prend de très grandes valeurs dans un secteur angulaire étroit, qu'on choisit de négliger. Dans les autres cas,  $\aleph$  est toujours assez petit pour qu'après déplacement sur un libre parcours moyen, la différence de position dans la direction de  $\mathbf{v}_g$  et dans celle de  $\mathbf{k}$  soit inférieure à une longueur d'onde. On peut donc négliger la biréfringence, au moins dans ces situations, pour l'étude du cône CBS.

Par exemple, si  $\delta$  est nul,  $\phi$ ,  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\xi$  sont réels. La composante orthogonale à  $\mathbf{k}$  de la vitesse de groupe est

$$\text{Re} \left( \frac{-i}{2k\ell_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \zeta + \xi \frac{\sin^2 \theta}{2} \pm \sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}} \right] \right) \quad (4.17)$$

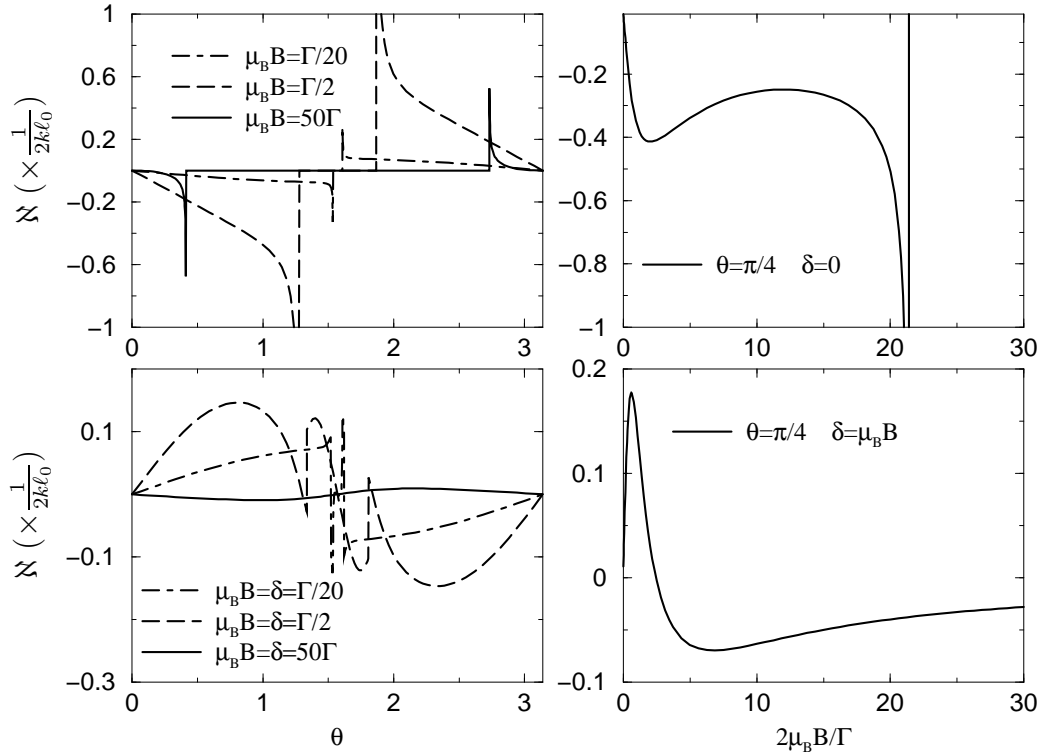


FIG. 4.1 – Angle de déviation  $\aleph$  entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et la direction de propagation de l'énergie lumineuse. Ses variations sont représentées pour la transition 3 – 4 du Rubidium.

En haut à gauche :  $\aleph$  en fonction de l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  pour différentes valeurs de  $B$ , pour  $\delta = 0$ . Les pics sont liés à l'annulation de la racine carrée dans l'expression (4.8) des valeurs propres de la self-énergie. Ces pics tendent vers l'infini, mais leur largeur angulaire est très faible : ce n'est visible que pour  $\mu_B B = \Gamma/2$ . Dans la suite, on choisit de négliger ces pics.  $\aleph$  est strictement nul dans une région centrée sur  $\theta = \pi/2$  et d'autant plus large que  $B$  est grand.

En haut à droite :  $\aleph$  en fonction du champ magnétique pour  $\theta = \pi/4$ , à  $\delta = 0$ . Lorsque le champ magnétique dépasse une certaine valeur, qui dépend de la valeur de  $\theta$ ,  $\aleph$  est nul.

En bas : idem courbes du haut, mais pour  $\delta = \mu_B B$ . Le faisceau lumineux est alors accordé en fréquence avec la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ . Dans ce cas,  $\aleph$  n'est jamais strictement nul, mais il ne présente pas de divergences. Bien que son évolution en fonction de  $\theta$  soit assez compliquée, il reste toujours petit devant  $1/(2k\ell_0)$ .

Lorsqu'un photon se propage sur un libre parcours moyen soit suivant  $\mathbf{k}$  soit suivant la direction de l'énergie, l'écart entre les deux positions finales est inférieur à  $\lambda$ . Pour l'étude du cône CBS, on peut donc négliger la biréfringence dans les deux situations  $\delta = 0$  et  $\delta = \mu_B B$ .

### 4.3. PROPAGATEUR DU PHOTON DANS L'ESPACE RÉEL

---

Sous la dérivée, seul le troisième terme possède une partie imaginaire pour  $\sin \theta$  assez petit. Autrement dit, à  $\phi$  donné,  $\mathbf{v}_g$  et  $\mathbf{k}$  ont même direction si  $\mathbf{k}$  à une direction assez éloignée de celle de  $\mathbf{B}$ . C'est ce que montrent les courbes du graphe en haut à gauche de la figure 4.1. On observe que plus  $\phi$  est grand, plus la zone où il n'y a pas de biréfringence est étendue. Ceci est dû à la prédominance de  $\xi$  sur  $\eta$  à grand  $\phi$ , comme on peut le voir dans le cas particulier des expressions (3.29) et (3.30).

La conclusion globale de ce paragraphe est que l'on peut négliger la biréfringence dans les situations que nous étudierons aux chapitres 5, 6 et 7. Dans la section suivante, cela va nous permettre d'exprimer simplement le propagateur d'un photon dans l'espace réel.

## 4.3 Propagateur du photon dans l'espace réel

Nous allons à présent exprimer le propagateur du photon dans l'espace réel. Il s'agit de la transformée de Fourier de  $G$  (4.7) :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} G e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} G e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.18)$$

Nous décomposons le calcul de cette intégrale en deux parties : tout d'abord nous évaluons l'intégrale angulaire portant sur la direction de  $\mathbf{k}$ , puis nous calculons l'intégrale sur  $k$ . En présence du champ magnétique, la self-énergie dépend de la direction de  $\mathbf{k}$ , et l'intégrale angulaire ne peut plus se faire comme dans la section 2.4.2. Nous faisons l'approximation suivante. Comme on peut négliger, dans les cas que nous étudierons par la suite, la biréfringence du milieu effectif, l'onde lumineuse se propage dans l'espace réel selon  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{k}$ . L'intégrale angulaire s'effectue alors comme une intégrale gaussienne autour des directions  $\pm\mathbf{r}$ . Ceci est justifié dans l'approximation  $kr \gg 1$  car  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$  est stationnaire dans ces directions.

Posons

$$\mathbf{r} = r(\cos \alpha \hat{\mathbf{z}} + \sin \alpha \cos \beta \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \sin \beta \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.19)$$

$$\mathbf{k} = k(\cos \theta \hat{\mathbf{z}} + \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.20)$$

où  $\theta$  et  $\varphi$  sont centrées sur  $\alpha$  et  $\beta$ . L'intégrale angulaire se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi-\beta}^{\pi-\beta} d\varphi \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \theta d\theta \frac{1}{\omega - k - \frac{\Gamma/2}{2\ell_0(\delta+i\Gamma/2)} \Delta_{\mathbf{k}} \mathcal{T}^{J,J_e} \Delta_{\mathbf{k}}} \Delta_{\mathbf{k}} \\
 & \quad \times (e^{-ikr(1-\theta^2/2-\varphi^2 \sin^2(\alpha)/2)} + e^{ikr(1-\theta^2/2-\varphi^2 \sin^2(\alpha)/2)}) \\
 & \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha d\theta \frac{1}{\omega - k - \frac{\Gamma/2}{2\ell_0(\delta+i\Gamma/2)} \Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{T}^{J,J_e} \Delta_{\mathbf{r}}} \Delta_{\mathbf{r}} \\
 & \quad \times (e^{-ikr(1-\theta^2/2-\varphi^2 \sin^2(\alpha)/2)} + e^{ikr(1-\theta^2/2-\varphi^2 \sin^2(\alpha)/2)}) \\
 & \simeq \frac{2\pi}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \frac{1}{\omega - k - \frac{\Gamma/2}{2\ell_0(\delta+i\Gamma/2)} \Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{T}^{J,J_e} \Delta_{\mathbf{r}}} \Delta_{\mathbf{r}} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $k$  se présente sous la même forme que dans la section 2.4.2, p. 63 et se fait d'une façon identique, avec les mêmes précautions. En introduisant la matrice  $\mathcal{N}$  des indices

$$\mathcal{N} = \mathbf{1} - \frac{\Sigma(\mathbf{k})}{k} \quad (4.22)$$

le propagateur du photon dans l'espace réel est

$$G(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\omega V}{2\pi r} e^{ikr\mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}} \quad (4.23)$$

Cette forme du propagateur est très semblable à celle obtenue en l'absence de champ magnétique (et coïncide heureusement avec elle si  $B = 0$ ). Pour prendre en compte la biréfringence, il aurait été possible de calculer le propagateur séparément pour chaque mode propre. C'est alors la direction de  $\mathbf{v}_g$  qui est centrée sur celle de  $\mathbf{r}$ , et la direction de  $\mathbf{k}$  en diffère d'un angle  $\aleph$  (voir section précédente). Le résultat final se déduit de celui que nous avons obtenu, en remplaçant les projecteurs sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{r}$  par des projecteurs sur le plan perpendiculaire à cette nouvelle direction. Comme la biréfringence sera négligeable dans les situations qui nous intéresseront, seule (4.23) est utilisée pour l'obtention des résultats présentés dans cette thèse.

D'autre part, en présence de  $\mathbf{B}$ ,  $\Sigma$  est une matrice avec une composante antisymétrique. Le propagateur n'est plus un opérateur symétrique. Prendre sa transposée revient à changer  $\eta$  en  $-\eta$ , ou encore  $B$  en  $-B$ . On a donc

$$G(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{B}) = G^T(\mathbf{r}, \omega, -\mathbf{B}) \quad (4.24)$$

Ceci est en rapport avec le théorème de réciprocité (1.23) : imaginons qu'un faisceau lumineux traverse successivement un polariseur linéaire  $\epsilon$ , le nuage

## 4.4. EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES

---

atomique et un analyseur linéaire  $\epsilon'$ . L'amplitude lumineuse est  $a_{dir} = \epsilon' G \epsilon$ . Si on fait passer la lumière en sens inverse, l'amplitude lumineuse est  $a_{rev} = \epsilon G \epsilon'$ . Les amplitudes de ces deux chemins renversés sont égales si  $G$  est symétrique, ce qui n'est vérifié qu'en l'absence de champ magnétique. L'action de  $\mathbf{B}$  sur la propagation est contenue dans  $\mathcal{N}$ , c'est à dire dans la self-énergie. Nous allons l'étudier dans la suite de ce chapitre.

### 4.4 Effets magnéto-optiques

On appelle effets magnéto-optiques les modifications qu'apporte un champ magnétique externe à la propagation de la lumière. Nous en avons déjà mentionné deux. La biréfringence, que nous négligeons, et le libre parcours moyen (longueur d'extinction) qui dépend de l'état de polarisation. Nous allons à présent aborder les effets Faraday et Cotton-Mouton, qui modifient la polarisation au cours de la propagation. Cela nous permettra de préciser la signification physique des coefficients  $\eta$  et  $\xi$ .

#### 4.4.1 Effet Faraday

Plaçons nous dans la configuration suivante, dite configuration "Faraday" : une polarisation linéaire se propage parallèlement au champ magnétique. Dans cette configuration la self-énergie prend la forme

$$\Sigma = \frac{1}{2\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \begin{pmatrix} \zeta & \eta & 0 \\ -\eta & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Les modes propres de propagation sont

$$\mathbf{V}_{\pm} = \eta \hat{\mathbf{x}} \pm \sqrt{-\eta^2} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.26)$$

associés aux valeurs propres

$$\Lambda_{\pm} = \zeta \pm \sqrt{-\eta^2} \quad (4.27)$$

Dans le cas d'une lumière résonante avec la transition atomique,  $\delta = 0$  et les deux coefficients  $\zeta$  et  $\eta$  sont réels et les modes propres sont les polarisations circulaires

$$\mathbf{V}_{\pm} = \hat{\mathbf{x}} \pm \frac{|\eta|}{\eta} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.28)$$

associées aux valeurs propres complexes

$$\Lambda_{\pm} = \zeta \pm i|\eta| \quad (4.29)$$

Le facteur  $e^{ikr\mathcal{N}}$  du propagateur (4.23) s'écrit alors, pour les modes propres,

$$e^{ikr} e^{-(\zeta \pm i|\eta|)r/(2\ell_0)} \quad (4.30)$$

Une polarisation linéaire peut s'exprimer comme combinaison des deux modes propres. Par exemple  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-)/2$ . L'action du propagateur sur cette polarisation est :

$$e^{ikr\mathcal{N}} \left( \frac{\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{ikr} e^{-\zeta r/(2\ell_0)} (e^{-i|\eta|r/(2\ell_0)} \mathbf{V}_+ + e^{i|\eta|r/(2\ell_0)} \mathbf{V}_-) \quad (4.31)$$

$$= e^{ikr} e^{-\zeta r/(2\ell_0)} \left[ \cos \left( \frac{|\eta|r}{2\ell_0} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sin \left( \frac{|\eta|r}{2\ell_0} \right) \frac{|\eta|}{\eta} \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (4.32)$$

Ainsi, la polarisation tourne d'un angle  $\eta r/(2\ell_0)$  autour du champ magnétique, à cause d'une différence de phase entre les deux modes propres induite par  $\mathbf{B}$ . Comme  $\eta$  est un nombre réel de signe opposé à  $\phi$  (voir (3.29)), cette rotation se fait dans le sens opposé à celle du dipôle (3.55). Son angle est proportionnel à la distance parcourue  $r$  et, au premier ordre en  $B$ , au champ magnétique.  $\eta$  décrit donc l'effet Faraday. Pour la transition 3 – 4 du Rubidium, on trouve une constante de Verdet

$$V = -\frac{3}{4} \frac{\mu_B}{\Gamma \ell_0} \sim -8.10^6 \text{ rad}/(\text{Tm}) \quad (4.33)$$

avec  $\ell_0 \simeq 100 \mu\text{m}$ . Cette valeur est supérieure de trois ordres de grandeurs à celle des matériaux classiques [75]. Pour  $\phi = 1$  ( $B = 2 \text{ G}$ ), et sur une distance  $\ell_0$ , une polarisation linéaire se propageant parallèlement à  $\mathbf{B}$  tourne de  $12^\circ$ . En pratique, il faut tenir compte de la largeur spectrale du laser, qui tend à diminuer  $V$ . Elle est de l'ordre de  $0.3\Gamma/(2\pi)$  dans les expériences menées à Nice, qui ont permis de mesurer  $V = -3.10^6 \text{ rad}/(\text{Tm})$  [76].

La polarisation est aussi atténuée, son coefficient d'extinction étant  $\ell_0/\zeta$ .

#### 4.4.2 Effet Cotton-Mouton

Pour étudier l'effet Cotton-Mouton, nous étudions une onde polarisée linéairement, se propageant perpendiculairement à  $\mathbf{B}$ . La self-énergie est

$$\Sigma = \frac{1}{2\ell_0} \frac{\Gamma/2}{\delta + i\Gamma/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta + \xi \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

#### 4.4. EFFETS MAGNÉTO-OPTIQUES

---

Ses vecteurs propres sont  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ , avec les valeurs propres  $\Lambda_{\pm} = \zeta + \xi/2 \pm \xi/2$ . Une polarisation initiale faisant un angle  $\alpha$  avec  $\mathbf{B}$  s'écrit  $\boldsymbol{\epsilon} = \cos \alpha \hat{\mathbf{z}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}$ . L'action de  $G(\mathbf{r}, \omega)$  sur  $\boldsymbol{\epsilon}$  la transforme en

$$\boldsymbol{\epsilon}' = e^{ikr} e^{-\zeta r/(2\ell_0)} (e^{-\xi r/(2\ell_0)} \cos \alpha \hat{\mathbf{z}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.35)$$

A résonance avec la transition atomique, la polarisation finale est toujours linéaire, mais la différence d'extinction entre les deux modes propres l'a faite tourner. C'est l'effet Cotton-Mouton, décrit par le coefficient  $\xi$ . Pour la transition 3 – 4 du Rubidium, si on choisit  $\alpha = 45^\circ$ , la polarisation tourne de  $4^\circ$  vers  $\hat{\mathbf{y}}$  au cours d'une propagation sur une distance  $\ell_0$  lorsque  $\phi = 1$  (c'est à dire  $B = 2$  G).

#### 4.4.3 Cas général

Si la direction de propagation et le désaccord  $\delta$  sont quelconques, la différence de phase et d'extinction entre les deux modes propres dépend des parties imaginaire et réelle de

$$\frac{\sqrt{-\eta^2 \cos^2 \theta + \xi^2 \frac{\sin^4 \theta}{4}}}{\delta + i\Gamma/2} \quad (4.36)$$

Si  $\delta$  est nul, cela dépend du signe du radicande. Tant que la direction de propagation est assez proche de celle de  $\mathbf{B}$ , il est négatif et les modes propres ont une différence de phase, mais pas de différence d'extinction. C'est le contraire si le radicande est positif. Donnons quelques ordres de grandeur : pour la transition 0 – 1 du Strontium, on a  $\phi = 1$  pour  $B = 11$  G, et  $g_e = 1$ . Pour cette valeur du champ magnétique, le radicande est positif si  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}$  font entre eux un angle compris entre  $65^\circ$  et  $90^\circ$ . L'effet Cotton-Mouton domine l'effet Faraday dans cette plage angulaire. Dans les milieux classiques, ce n'est le cas que dans un secteur de quelques  $10^{-4}$  rad autour du plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . Cette grande différence d'ordres de grandeurs est due au caractère résonant des atomes. Elle montre que l'effet Cotton-Mouton ne peut pas être négligé dans l'étude de la rétrodiffusion cohérente.

Si  $\delta$  est non-nul,  $\eta$  et  $\xi$  sont des nombres complexes. Ils participent tous deux à la fois à la différence de phase et à la différence d'extinction des modes propres. La fréquence d'un photon ne détermine pas seulement son libre parcours moyen de diffusion, comme en l'absence de champ magnétique, mais influe aussi sur la façon dont sa polarisation sera modifiée au cours de la propagation.



**En résumé :**

Les paramètres pertinents pour décrire la propagation cohérente de la lumière sont

- $\zeta$  : atténuation isotrope.
- $\eta$  : effet Faraday.
- $\xi$  : effet Cotton-Mouton.

La physique mésoscopique permet de relier ces grandeurs macroscopiques (elles sont directement accessibles expérimentalement) à des propriétés microscopiques de la transition atomique (équations (3.25) à (3.32)).

# Chapitre 5

## Calcul du cône de rétrodiffusion cohérente

### 5.1 Introduction

Après avoir décrit les briques élémentaires des chemins de diffusion que sont les opérateurs de diffusion et le propagateur des photons dans l'espace réel, nous pouvons les mettre en oeuvre pour calculer les amplitudes de ces chemins. A partir de celles-ci, nous pouvons calculer l'intensité diffuse autour de la direction arrière. Un changement important qui apparaît en présence du champ magnétique est la brisure de l'invariance par renversement du temps pour le système {atomes+photons}. En effet,  $\mathbf{B}$  change de signe par renversement du temps, ce qui change aussi le signe de la partie magnétique de l'hamiltonien atomique, et transforme  $G(\mathbf{r}, \omega)$  en sa transposée (voir chapitre 4). Dans ce cas, on ne peut plus ramener le calcul de l'intensité cohérente à celui de l'intensité incohérente en transformant un diagramme croisé en un diagramme échelle. La stratégie de calcul du cône CBS s'en trouve modifiée, et devra s'appuyer exclusivement sur les amplitudes de diffusion.

Si le niveau fondamental atomique est dégénéré, et que l'atome effectue une transition Raman au cours d'un événement de diffusion, passant du sous-niveau Zeeman  $m$  à  $m'$ , son énergie change d'une quantité  $\Delta E = g\mu_B B(m' - m)$ . L'énergie du photon diffusé change de la quantité opposée, par conservation de l'énergie totale. Ce changement de fréquence du photon est faible en valeur relative, car on suppose  $\mu_B B \ll \omega_0$ , mais il faut le comparer au désaccord  $\delta$  et à la largeur  $\Gamma$  de l'état excité. Si  $\Delta E$  est supérieur ou comparable à  $\delta$  et  $\Gamma$ , le changement de fréquence n'est pas négligeable et influe sur la suite du chemin de diffusion. La moyenne interne,

qui revient à sommer sur les transitions effectuées par l'atome, porte aussi sur la fréquence du photon diffusé et donc sur sa propagation et sur ses diffusions ultérieures. Elle ne concerne plus seulement un évènement de diffusion, mais toute la partie du chemin de diffusion qui suit le diffuseur auquel elle se rattache.

La présence du champ magnétique complique donc grandement le calcul de la moyenne interne pour un chemin de diffusion. Elle ne se ramène plus à celle de la section efficace différentielle d'un diffuseur. Dans ce chapitre, nous indiquons une manière de calculer les coefficients bistatiques, qui, en général, ne peut être exploitée que numériquement. Le cas particulier  $J = 0$ , pour lequel il n'y a pas de diffusion inélastique, est traité analytiquement à l'approximation de diffusion double dans un milieu uniforme et semi-infini.

## 5.2 Intensités cohérente et incohérente

### 5.2.1 Amplitudes des chemins direct et renversé

En présence de  $\mathbf{B}$ , les expressions (2.79) et (2.80) des amplitudes des chemins direct et renversé se généralisent en incluant la dépendance en fréquence du propagateur. On note  $\mathbf{r}_i$  la position du  $i^{\text{ème}}$  diffuseur,  $m_i$  et  $m'_i$  les sous niveaux Zeeman qu'il occupe avant et après diffusion et  $\omega_{i,j}$  la fréquence d'un photon se propageant du  $i^{\text{ème}}$  au  $j^{\text{ème}}$  diffuseur. Pour un chemin de diffusion d'ordre  $p$ , l'amplitude du chemin direct est :

$$a_{dir} = \bar{\epsilon}' G(\mathbf{r}_{out} - \mathbf{r}_p, \omega_{out}) t_{m_p m'_p} G(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p-1}, \omega_{p-1,p}) \dots \dots G(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \omega_{1,2}) t_{m_1 m'_1} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{in}, \omega_{in}) \epsilon \quad (5.1)$$

où les matrices de diffusion sont définies par (3.11).  $\omega_{in}$  désigne la pulsation du photon incident.  $\omega_{i,i+1}$  dépend des transitions atomiques effectuées par les  $i$  premiers diffuseurs :

$$\omega_{i,i+1} = \omega_{in} + g\mu_B B \sum_{k=1}^i (m_k - m'_k) \quad (5.2)$$

La pulsation du photon sortant,  $\omega_{out}$ , est obtenue en faisant  $i = p$ . De même, on écrit l'amplitude du chemin renversé :

$$a_{rev} = \bar{\epsilon}' G(\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}_1, \omega_{out}) t_{m_1 m'_1} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega_{2,1}) \dots \dots G(\mathbf{r}_{p-1} - \mathbf{r}_p, \omega_{p,p-1}) t_{m_p m'_p} G(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{out}, \omega_{in}) \epsilon \quad (5.3)$$

## 5.2. INTENSITÉS COHÉRENTE ET INCOHÉRENTE

La pulsation d'un photon se propageant entre les diffuseurs  $i + 1$  et  $i$  est

$$\omega_{i+1,i} = \omega_{in} + g\mu_B B \sum_{k=i+1}^p (m_k - m'_k) \neq \omega_{i,i+1} \quad (5.4)$$

Les deux chemins ont même pulsation d'entrée et même pulsation de sortie. Mais entre deux diffuseurs, les pulsations ne sont généralement pas identiques. Elles sont reliées par

$$\omega_{i,i+1} + \omega_{i+1,i} = \omega_{in} + \omega_{out} \quad (5.5)$$

### 5.2.2 Intensité incohérente

L'intensité incohérente est proportionnelle à la valeur moyenne de  $|a_{dir}|^2$ . En notant  $\tilde{t}_{mm'} = t_{mm'}/t(\omega)$ ,  $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  et  $\delta_{i,j} = \omega_{i,j} - \omega_0$ , on a :

$$\begin{aligned} |a_{dir}|^2 &= \left( \frac{3V(\Gamma^2/4)}{8\pi N M_{J,J_e} \ell_0} \right)^p \frac{4\pi^2}{V^2 \omega^2} \frac{1}{r_{1,2}^2 (\delta_{1,2}^2 + \Gamma^2/4)} \cdots \frac{1}{r_{p-1,p}^2 (\delta_{p-1,p}^2 + \Gamma^2/4)} \frac{1}{\delta_{in}^2 + \Gamma^2/4} \\ &\times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} e^{ikz_p \mathcal{N}(\omega_{out})} \tilde{t}_{m_p m'_p} \cdots \tilde{t}_{m_2 m'_2} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} e^{ikz_1 \mathcal{N}(\omega_{in})} \boldsymbol{\epsilon}) \\ &\times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger(\omega_{in})} \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \cdots \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger(\omega_{out})} \boldsymbol{\epsilon}') \quad (5.6) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{N}$  est la matrice des indices (4.22).

Tout comme la pulsation  $\omega_{i,j}$ , la norme du vecteur d'onde,  $k$ , est modifiée par  $\mathbf{B}$ , d'une quantité de l'ordre de  $\mu_B B$ . La différence de phase qui en résulte pour le propageur est de l'ordre de

$$\frac{\mu_B B \ell}{\hbar c} \lesssim 10^{-4} \ll 1 \quad (5.7)$$

où on a exceptionnellement utilisé les unités du système international. L'inégalité de gauche est valable pour les conditions dans lesquelles nous nous placerons avec les atomes de Rubidium. Les variations de  $k$  avec  $B$  sont donc négligeables et ne seront pas prises en compte dans la suite. Remarquons cependant qu'il s'agit là d'une commodité, et qu'il serait facile de les inclure si nécessaire.

La moyenne interne d'un opérateur  $O$  s'effectue pour chaque atome  $i$  en prenant la trace

$$\frac{1}{2J+1} \text{Tr} \left( \sum_{m_i=-J}^J |Jm_i\rangle \langle Jm_i| O \right) \quad (5.8)$$

CHAPITRE 5. CALCUL DU CÔNE DE RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

Pour  $|a_{dir}|^2$ , cela se traduit par prendre la somme sur tous les  $m_i$  et  $m'_i$ , et diviser par  $(2J + 1)^p$ .

$$\begin{aligned} \langle |a_{dir}|^2 \rangle_{int} &= \left( \frac{3(\Gamma^2/4)}{8\pi n_d M_{J,J_e} (2J + 1) \ell_0} \right)^p \frac{4\pi^2}{V^2 \omega^2} \sum_{m_1 m'_1} \cdots \sum_{m_p m'_p} \\ &\quad \frac{1}{r_{1,2}^2 (\delta_{1,2}^2 + \Gamma^2/4)} \cdots \frac{1}{r_{p-1,p}^2 (\delta_{p-1,p}^2 + \Gamma^2/4)} \frac{1}{\delta_{in}^2 + \Gamma^2/4} \\ &\quad \times (\bar{\epsilon}' e^{ikz_p \mathcal{N}(\omega_{out})} \tilde{t}_{m_p m'_p} \cdots \tilde{t}_{m_2 m'_2} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} e^{ikz_1 \mathcal{N}(\omega_{in})} \epsilon) \\ &\quad \times (\bar{\epsilon} e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger(\omega_{in})} \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \cdots \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger(\omega_{out})} \epsilon') \quad (5.9) \end{aligned}$$

Le coefficient bistatique  $\gamma_L^{(p)}$  s'obtient en calculant la moyenne de configuration de la section efficace différentielle associée à l'intensité incohérente. Celle-ci diffère de  $\langle |a_{dir}|^2 \rangle_{int}$  par un facteur  $V^2 \omega^2 / (2\pi)^2$  (cf. équation (2.42)). Finalement, en utilisant la définition (2.81) du coefficient bistatique :

$$\begin{aligned} \gamma_L^{(p)} &= \left( \frac{3(\Gamma^2/4)}{8\pi M_{J,J_e} (2J + 1) \ell_0} \right)^p \frac{4\pi}{A} \sum_{m_1 m'_1} \cdots \sum_{m_p m'_p} \int_{V^p} \prod_{i=1}^p d^3 \mathbf{r}_i \\ &\quad \frac{1}{r_{1,2}^2 (\delta_{1,2}^2 + \Gamma^2/4)} \cdots \frac{1}{r_{p-1,p}^2 (\delta_{p-1,p}^2 + \Gamma^2/4)} \frac{1}{\delta_{in}^2 + \Gamma^2/4} \\ &\quad \times (\bar{\epsilon}' e^{ikz_p \mathcal{N}(\omega_{out})} \tilde{t}_{m_p m'_p} \cdots \tilde{t}_{m_2 m'_2} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} e^{ikz_1 \mathcal{N}(\omega_{in})} \epsilon) \\ &\quad \times (\bar{\epsilon} e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger(\omega_{in})} \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \cdots \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger(\omega_{out})} \epsilon') \quad (5.10) \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées réduites  $\mathbf{r}_{i,i+1}$ , cela se réécrit

$$\begin{aligned} \gamma_L^{(p)} &= \left( \frac{9(\Gamma^2/4)}{8\pi (2J_e + 1) \ell_0} \right)^p \frac{4\pi}{A} \sum_{m_1 m'_1} \cdots \sum_{m_p m'_p} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\delta_{i,i+1}^2 + \Gamma^2/4} \int_{V^p} d\mathbf{r}_1 \prod_{i=1}^{p-1} d\Omega_{i,i+1} dr_{i,i+1} \\ &\quad \times (\bar{\epsilon}' e^{ikz_p \mathcal{N}(\omega_{out})} \tilde{t}_{m_p m'_p} \cdots \tilde{t}_{m_2 m'_2} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} e^{ikz_1 \mathcal{N}(\omega_{in})} \epsilon) \\ &\quad \times (\bar{\epsilon} e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger(\omega_{in})} \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \cdots \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger(\omega_{out})} \epsilon') \quad (5.11) \end{aligned}$$

Dans le cas général, cette expression est très compliquée et ne peut être évaluée que numériquement.

### 5.2.3 Intensité cohérente

L'intensité cohérente dans la direction de rétrodiffusion est proportionnelle à la moyenne de  $\text{Re}(a_{dir} \overline{a_{rev}})$ . Le calcul du coefficient bistatique  $\gamma_C^{(p)}$  qui

## 5.2. INTENSITÉS COHÉRENTE ET INCOHÉRENTE

lui est associée est similaire à celui de  $\gamma_L^{(p)}$ . En utilisant (5.1) et (5.3), on trouve :

$$\begin{aligned}
\gamma_C^{(p)}(\Delta\theta) &= \left( \frac{9(\Gamma^2/4)}{8\pi(2J_e + 1)\ell_0} \right)^p \frac{4\pi}{A} \text{Re} \sum_{m_1 m'_1} \dots \sum_{m_p m'_p} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{(\delta_{i,i+1} + i\Gamma/2)(\delta_{i+1,i} - i\Gamma/2)} \\
&\quad \times \int_{V^p} d\mathbf{r}_1 \prod_{i=1}^{p-1} d\Omega_{i,i+1} dr_{i,i+1} e^{i(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1)} \\
&\quad \times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' e^{ikz_p \mathcal{N}(\omega_{out})} \tilde{t}_{m_p m'_p} \dots \tilde{t}_{m_2 m'_2} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}(\omega_{1,2})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1} e^{ikz_1 \mathcal{N}(\omega_{in})} \boldsymbol{\epsilon}) \\
&\quad \times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger(\omega_{in})} \tilde{t}_{m_p m'_p}^\dagger \dots \tilde{t}_{m_2 m'_2}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger(\omega_{2,1})} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{m_1 m'_1}^\dagger e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger(\omega_{out})} \boldsymbol{\epsilon}')
\end{aligned} \tag{5.12}$$

La différence de fréquence entre les photons se propageant en sens inverse entre deux diffuseurs fait que  $\gamma_C^{(p)}(\Delta\theta)$  est explicitement différent de  $\gamma_L^{(p)}$ . Cela nous indique que pour restaurer le contraste des interférences, il faut se placer dans une situation où  $\delta_{i,i+1} = \delta_{i+1,i}$ , c'est à dire qui favorise les transitions Rayleigh.

### 5.2.4 Simulations Monte-Carlo

Même pour un milieu de forme géométrique simple, il est difficile d'évaluer les coefficients bistatiques analytiquement, ne serait-ce que pour la diffusion double. Le calcul numérique est la seule alternative pour les calculer dans le cas général. La méthode de Monte-Carlo que nous utilisons est fondée sur le calcul de  $a_{dir}$  et  $a_{rev}$ . Elle fonctionne de la manière suivante :

- Un photon entre dans le nuage atomique avec la fréquence  $\omega_{in}$  et la polarisation  $\boldsymbol{\epsilon}$ . Sa fréquence est choisie selon une loi de probabilité qui dépend du profil spectral de la sonde CBS. Il se propage sur une distance  $r$  qui suit la distribution  $P(r) = \exp[-\int^r dr' / \ell(r')] / \ell(r)$  où  $\ell(r) = 1/(n_d(r)\sigma_d)$  est le libre parcours moyen de diffusion local. Il dépend de la position si la densité du nuage atomique varie, et sa dépendance en  $\boldsymbol{\epsilon}$  et  $\phi$  vient de  $\sigma_d$ , qui est exprimée par (3.33). Contrairement à la situation en l'absence de champ magnétique, cette loi de probabilité n'apparaît pas explicitement dans (5.11) et (5.12) (voir chapitre 2, p. 68 et 70). La propagation se fait avec l'opérateur  $\exp[ikr\mathcal{N}]$ .
- Après avoir parcouru cette distance  $r$ , le photon est diffusé par un atome. Les états initial  $|Jm_i\rangle$  et final  $|Jm'_i\rangle$  de l'atome sont choisis au hasard, selon une loi de probabilité uniforme. La diffusion est effectuée avec l'opérateur  $\tilde{t}_{m_i m'_i}$ , qui transforme la polarisation incidente

## CHAPITRE 5. CALCUL DU CÔNE DE RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

- en la polarisation diffusée. L'amplitude ainsi calculée est multipliée par  $1/(\delta_{in} + i\Gamma/2)$ .
- La fréquence du photon est modifiée de  $g\mu_B B(m_i - m'_i)$ .
  - Une contribution au coefficient bistatique de diffusion simple est calculée : le photon est propagé vers la sortie du nuage dans la direction de rétrodiffusion. On obtient ainsi l'amplitude d'un chemin de diffusion simple. Son module carré donne une contribution à  $\gamma^{(1)}$ .
  - Le photon diffusé se propage vers un deuxième diffuseur. La direction de propagation est choisie suivant une loi de probabilité isotrope. La distance obéit à la même loi  $P(r)$  qu'avant la diffusion, en tenant compte du changement de fréquence et de polarisation.
  - La seconde diffusion s'effectue de la même façon que la première.
  - L'amplitude du chemin direct et une demi contribution à  $\gamma_L^{(2)}$  sont calculées ( $|a_{dir}|^2/2$ ).
  - Une contribution à  $\gamma_C^{(2)}$  est calculée : un photon identique au photon incident entre dans le nuage, et effectue le même chemin en sens inverse. Les diffuseurs se trouvent au même endroit, et effectuent les mêmes transitions atomiques. Cela donne l'amplitude du chemin renversé. On en déduit une contribution à  $\gamma_C^{(2)}(\Delta\theta)$  et l'autre moitié de la contribution à  $\gamma_L^{(2)}$  ( $|a_{rev}|^2/2$ ).
  - Le photon se propage vers un troisième diffuseur. . .

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il sorte du nuage atomique.

En effectuant la moyenne sur un grand nombre de photons (entre  $10^6$  et  $10^9$ ), on obtient une valeur convergée pour les coefficients bistatiques d'ordres les plus bas. La taille finie du milieu fait que les chemins d'ordres élevés de diffusion sont peu probables, et peu d'entre eux sont trouvés par la simulation. Les valeurs trouvées pour leurs coefficients bistatiques sont au mieux une indication de leur ordre de grandeur.

A champ magnétique nul, cette simulation donne les mêmes résultats que celle décrite dans la section 2.4.3. Elle est cependant moins performante, car elle doit effectuer les deux moyennes interne et externe, tandis que la première ne portait que sur la moyenne externe.

Lorsque le champ magnétique augmente, le module des amplitudes de diffusion devient très sensible au choix des  $m_i$  ou des directions de propagation : le choix d'une transition atomique proche ou loin de résonance avec le photon incident le rend grand ou petit ; et du choix de la direction dépend en partie celui du libre parcours moyen. Cela signifie que lorsque  $B$  augmente, la simulation effectue une moyenne sur une grandeur de plus en plus fluctuante, et d'autant plus que l'ordre de diffusion est élevé. C'est un inconvénient pour sa convergence. Cependant, comme la section efficace totale de diffusion di-

minue lorsque  $B$  augmente, l'épaisseur optique effective du nuage diminue aussi, et les grands ordres de diffusion sont négligeables. On peut évaluer l'incertitude d'origine statistique sur les valeurs des coefficients bistatiques à l'aide de leur écart-type. Si on considère la somme de ces coefficients, qui se rapporte à l'intensité diffuse totale, il est inférieur à 1% en champ magnétique nul, et inférieur à 5% pour les plus grands champ magnétiques utilisés, qui sont de l'ordre de 40 G (*i.e.*  $\phi \simeq 20$ ) pour la transition 3 – 4 du Rubidium.

### 5.3 Un exemple simple : $J = 0$ et $\mathbf{B} \parallel \mathbf{k}_{in}$

Lorsque l'état fondamental de l'atome n'est pas dégénéré, il n'y a pas de changements de fréquence possible pour le photon. Cette circonstance facilite beaucoup le calcul des coefficients bistatiques. Comme la moyenne ne porte plus que sur les degrés de liberté externes, il est faisable analytiquement pour des géométries simples. Nous allons considérer le facteur d'augmentation<sup>1</sup> dans l'approximation de diffusion double dans un milieu de densité uniforme, semi-infini dans la direction du champ magnétique. Le faisceau lumineux incident est parallèle à  $\mathbf{B}$ , et sa fréquence est accordée sur celle de la transition atomique :

$$\delta = 0 \quad \text{et } \phi \text{ est réel.} \quad (5.13)$$

Dans toute la suite, on supposera  $g_e = 1$ .

Il est bien connu qu'un diffuseur classique ponctuel possède les mêmes propriétés vis-à-vis de la lumière qu'un atome ne pouvant effectuer qu'une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$ . Cependant, les diffuseurs classiques ont généralement des fréquences de résonance très éloignées des fréquences optiques. Il est alors justifié de négliger la modification du diagramme de rayonnement du diffuseur par un champ magnétique. Ils sont placés dans un milieu qui possède des propriétés magnéto-optiques. Si leur densité volumique est faible, leur seul impact sur le milieu effectif est l'apparition du libre parcours moyen de diffusion comme longueur d'extinction.

Dans cette section, la lumière est résonante avec la transition atomique, exploitant le caractère fortement résonant des atomes. Ceux-ci ne sont pas placés dans une matrice : ils constituent à la fois les diffuseurs et le milieu effectif possédant des propriétés magnéto-optiques. Il s'agit donc d'une situation très différente de celle rencontrée avec les diffuseurs classiques. En particulier, les effets magnéto-optiques sont beaucoup plus importants. Leur

---

<sup>1</sup>La forme du cône sera étudiée au chapitre 7.



CHAPITRE 5. CALCUL DU CÔNE DE RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

---

prise en compte ne peut pas se restreindre au premier ordre en  $B$  (effet Faraday). D'autre part, il n'est pas possible de négliger la modification des propriétés de diffusion des atomes par  $\mathbf{B}$ , dont une manifestation importante est la rotation du dipôle (section 3.4).

### 5.3.1 Diffusion simple

Le coefficient bistatique de diffusion simple s'obtient en faisant  $p = 1$ ,  $J = 0$ ,  $J_e = 1$  et  $\delta = 0$  dans (5.11). On obtient :

$$\gamma^{(1)} = \frac{3}{2\ell_0 A} \int_V d^3\mathbf{r} |\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' e^{ikr\mathcal{N}} \mathcal{T}^{0,1} e^{ikr\mathcal{N}} \boldsymbol{\epsilon}|^2 \quad (5.14)$$

où  $\mathcal{T}^{0,1}$  est définie par (3.32) et (3.28)-(3.29) en fonction de  $\phi$  (3.8). Le terme sous l'intégrale ne dépend que de la coordonnée  $z$  du diffuseur. L'intégration sur les deux autres degrés de liberté donne :

$$\gamma^{(1)} = \frac{3}{2\ell_0} \int_0^\infty dz |\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' e^{ikz\mathcal{N}} \mathcal{T}^{0,1} e^{ikz\mathcal{N}} \boldsymbol{\epsilon}|^2 \quad (5.15)$$

Si  $\boldsymbol{\epsilon}$  est une polarisation circulaire, c'est un vecteur propre de  $G(\mathbf{r}, \omega)$  (4.23) et de  $\mathcal{T}^{0,1}$ .  $\gamma^{(1)}$  est alors proportionnel à  $|\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}|^2$ . Dans le canal  $h\|h$ , le coefficient bistatique de diffusion simple est nul. Pour le canal  $h \perp h$ , on utilise

$$e^{ikz\mathcal{N}} \mathbf{e}_{\pm 1} = e^{ikz} e^{-\frac{z}{2\ell_0(1+\phi^2)}} e^{\pm i\frac{\phi z}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \mathbf{e}_{\pm 1} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{T}^{0,1} \mathbf{e}_{\pm 1} = \frac{1 \pm i\phi}{1 + \phi^2} \mathbf{e}_{\pm 1} \quad (5.17)$$

et on trouve  $\gamma^{(1)} = 3/4$ . Ce résultat est indépendant du champ magnétique. Dans les canaux de polarisations linéaires, la propagation dans la direction de  $\mathbf{B}$  donne lieu à l'effet Faraday : la polarisation incidente tourne d'un angle  $-\phi z/(2\ell_0(1+\phi^2))$ . Au cours de la diffusion, elle subit une nouvelle rotation, due à l'effet Hanle, d'un angle  $\arctan \phi$  (section 3.4). Sur le chemin du retour, l'effet Faraday s'applique à nouveau. Les coefficients bistatiques dans les canaux linéaires s'expriment alors sous la forme

$$\text{lin}\|\text{lin} : \gamma^{(1)} = \frac{3}{2\ell_0(1+\phi^2)} \int_0^\infty dz e^{-\frac{2z}{\ell_0(1+\phi^2)}} \cos^2 \left[ \arctan \phi - \frac{\phi z}{\ell_0(1+\phi^2)} \right] \quad (5.18)$$

$$\text{lin} \perp \text{lin} : \gamma^{(1)} = \frac{3}{2\ell_0(1+\phi^2)} \int_0^\infty dz e^{-\frac{2z}{\ell_0(1+\phi^2)}} \sin^2 \left[ \arctan \phi - \frac{\phi z}{\ell_0(1+\phi^2)} \right] \quad (5.19)$$

Leurs valeurs sont données dans la table 5.1, où sont aussi rappelées les valeurs des coefficients bistatiques dans les canaux d'hélicité. Le champ magnétique faisant tourner les polarisations, le coefficient bistatique de diffusion simple diminue dans le canal  $lin \parallel lin$  et augmente dans le canal  $lin \perp lin$ . A petit  $\phi$ , on remarque qu'il y a compétition entre les deux rotations Faraday et du dipôle, qui agissent en sens opposé.

canal	$h \parallel h$	$h \perp h$	$lin \parallel lin$	$lin \perp lin$
$\gamma^{(1)}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8} \frac{2+\phi^2}{1+\phi^2}$	$\frac{3}{8} \frac{\phi^2}{1+\phi^2}$

TAB. 5.1 – Coefficients bistatiques de diffusion simple pour une transition 0 – 1 dans un milieu uniforme semi-infini. Le faisceau lumineux est à résonance avec la transition atomique, et sa direction incidente est parallèle à  $\mathbf{B}$ . Les canaux d'hélicité conservent la symétrie d'invariance par rotation autour de  $\mathbf{B}$  et ne dépendent pas de  $B$ . Dans les canaux de polarisations linéaires, l'effet Faraday et la rotation du dipôle induisent une dépendance en  $B$  de  $\gamma^{(1)}$ . La somme des coefficients bistatiques des deux canaux linéaires est constante.

### 5.3.2 Diffusion double : intensité incohérente

A l'aide de la formule générale (5.11), le coefficient bistatique de diffusion double pour l'intensité incohérente s'écrit

$$\gamma_L^{(2)} = \frac{9}{16\pi\ell_0^2} \int d\Omega_{1,2} dr_{1,2} \int_{|z_{1,2}|}^{\infty} dz_1 |\bar{\epsilon}' e^{ikz_2\mathcal{N}} \mathcal{T}^{0,1} e^{ikr_{1,2}\mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \mathcal{T}^{0,1} e^{ikz_1\mathcal{N}} \epsilon|^2 \quad (5.20)$$

Considérons une polarisation incidente linéaire : elle subit l'effet Faraday en se propageant vers le premier diffuseur, puis la rotation du dipôle lors de la diffusion. Elle est ensuite projetée sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{r}_{1,2}$ , et se propage en direction du second diffuseur. Il faut distinguer deux cas, selon le signe de

$$\chi = -\phi^2 \cos^2 \theta_{1,2} + \phi^4 \frac{\sin^4 \theta_{1,2}}{4} \quad (5.21)$$

Si ce terme est négatif, les modes propres de propagation sont des polarisations elliptiques non orthogonales qui subissent une différence de phase. La polarisation ne reste pas linéaire en général. S'il est positif, les modes propres sont des polarisations linéaires qui sont atténuées différemment. La polarisation reste linéaire, mais tourne autour de sa direction de propagation. Nous allons examiner deux cas limites pour lesquels le signe de  $\chi$  est constant. Cela se produit à champ magnétique faible, pour  $\phi \ll 1$ , et à champ magnétique fort  $\phi \gg 1$ .

### Champ magnétique faible

$\chi$  est toujours négatif, sauf dans une région angulaire d'ordre  $\phi/2$  autour de  $\theta_{1,2} = \pm\pi/2$ . On choisit de négliger la diffusion dans cette région, ce qui revient à négliger l'effet Cotton-Mouton. Seul l'effet Faraday est pris en compte : les modes propres de propagation sont les polarisations circulaires, et la polarisation reste linéaire entre les deux diffuseurs. Elle tourne d'un angle  $-\phi r_{1,2} |\cos \theta_{1,2}|/2$  autour de sa direction de propagation. Au niveau du second diffuseur, la polarisation subit une rotation de  $\arctan \phi \simeq \phi$  autour de  $\mathbf{B}$ . Lors de la propagation vers la sortie du milieu, elle subit une dernière rotation à cause de l'effet Faraday. Il est alors possible de poser simplement le calcul de  $\gamma_L^{(2)}$ . Il a été effectué avec le logiciel de calcul symbolique *Maple*<sup>TM</sup>. Les résultats sont présentés dans la table 5.2. A faible champ magnétique, les coefficients bistatiques varient quadratiquement avec  $B$ .

canal	$\gamma_L^{(2)}$
$h \parallel h$	$\frac{15}{128} + \left( \frac{507}{1280} - \frac{9}{16} \ln 2 \right) \phi^2$
$h \perp h$	$\frac{9}{8} \ln 2 - \frac{57}{128} - \left( \frac{27}{16} \ln 2 - \frac{1467}{1280} \right) \phi^2$
$lin \parallel lin$	$\frac{9}{8} \ln 2 - \frac{99}{256} - \left( \frac{153}{32} \ln 2 - \frac{6891}{2560} \right) \phi^2$
$lin \perp lin$	$\frac{15}{256} + \left( \frac{81}{32} \ln 2 - \frac{2943}{2560} \right) \phi^2$

TAB. 5.2 – Coefficients bistatiques de diffusion double pour l'intensité incohérente, dans la limite de champ magnétique faible. Dans ce cas, la rotation du dipôle intervient à la diffusion, et l'effet Faraday lors de la propagation. Les coefficients bistatiques varient quadratiquement avec  $B$ . Les termes entre parenthèses sont positifs :  $\gamma_L^{(2)}$  décroît avec  $B$  dans les canaux  $h \perp h$  et  $lin \parallel lin$ , et augmente dans les deux autres canaux.

### Champ magnétique fort

Si  $\phi \gg 1$ ,  $\chi$  est positif sauf au voisinage immédiat de la direction de  $\mathbf{B}$ , dans une région de largeur angulaire d'ordre  $1/\sqrt{\phi}$ . On néglige la diffusion dans cette zone par le premier diffuseur. La propagation entre les deux diffuseurs est alors dominée par l'effet Cotton-Mouton. Par contre, la propagation vers le premier diffuseur, et du second diffuseur vers la sortie du milieu se font parallèlement à  $\mathbf{B}$ , et seul l'effet Faraday y intervient. Un résultat remarquable, lié à la symétrie d'invariance du système par rotation autour de

$\mathbf{B}$ , est que le coefficient bistatique ne dépend pas du canal de polarisation dans la limite de grand champ magnétique. En effet, considérons une polarisation incidente linéaire. Les effets du champ magnétique se manifestent uniquement sous la forme de rotations liées à l'effet Faraday, à la rotation du dipôle (qui est saturée à  $90^\circ$ ) et à l'atténuation différentielle des modes propres entre les deux diffuseurs. La polarisation émise par le deuxième diffuseur est donc une polarisation linéaire. En se propageant vers la sortie du milieu, elle va tourner d'un angle dont l'ordre de grandeur est  $\phi \gg 1$ . En effet, les deux diffuseurs se trouvent à une distance de la face d'entrée du milieu de l'ordre du libre parcours moyen pour une polarisation perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ , c'est à dire  $\ell_0(1 + \phi^2)$ . Sur cette distance, l'effet Faraday fait tourner une polarisation linéaire d'un angle  $-\phi/2$ . Comme cet angle est très grand devant  $2\pi$ , un changement de la profondeur du second diffuseur de l'ordre de  $1/\phi$  en valeur relative modifie complètement la polarisation qui sort du milieu, en n'apportant qu'une modification faible à la polarisation diffusée par le deuxième atome. Cette grande sensibilité fait qu'après la moyenne de configuration, le coefficient bistatique ne dépend pas de la polarisation d'analyse. Le système étant invariant par rotation autour de  $\mathbf{B}$ , le coefficient bistatique ne dépend pas non plus de la direction de la polarisation linéaire incidente. On en déduit que toute combinaison linéaire réelle de deux polarisations linéaires conduit au même coefficient bistatique. Comme de plus une polarisation linéaire reste linéaire tout au long du chemin de diffusion, ce résultat s'étend aux combinaisons linéaires complexes. Ainsi, le coefficient bistatique de diffusion double pour l'intensité incohérente est indépendant des polarisations d'entrée et d'analyse. Le raisonnement précédent se généralise aux ordres de diffusion supérieurs.

Pour la diffusion double, on trouve

$$\gamma_L^{(2)} = \frac{9}{32} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta_{1,2} d\theta_{1,2}}{1 + \cos \theta_{1,2} - \cos^3 \theta_{1,2}} \simeq 0.1514 \quad (5.22)$$

### Cas général

Si  $\phi$  n'est ni très grand, ni très petit, la situation se présente comme une superposition des deux cas précédents, le passage de l'un à l'autre se faisant par le terme  $\sqrt{\chi}$ . La présence de cette racine carrée dans l'expression des vecteurs propres et des valeurs propres du propagateur rend impossible un calcul complètement analytique de  $\gamma_L^{(2)}$ . L'intégration sur les variables  $Z$ ,  $r_{1,2}$  et  $\varphi_{1,2}$  se fait sans difficulté notable à l'aide de *Maple*<sup>TM</sup>. Par contre, l'intégrale portant sur  $\theta_{1,2}$  doit être évaluée numériquement. L'allure des coefficients bistatiques en fonction de  $\phi$  est montrée sur la figure 5.1.

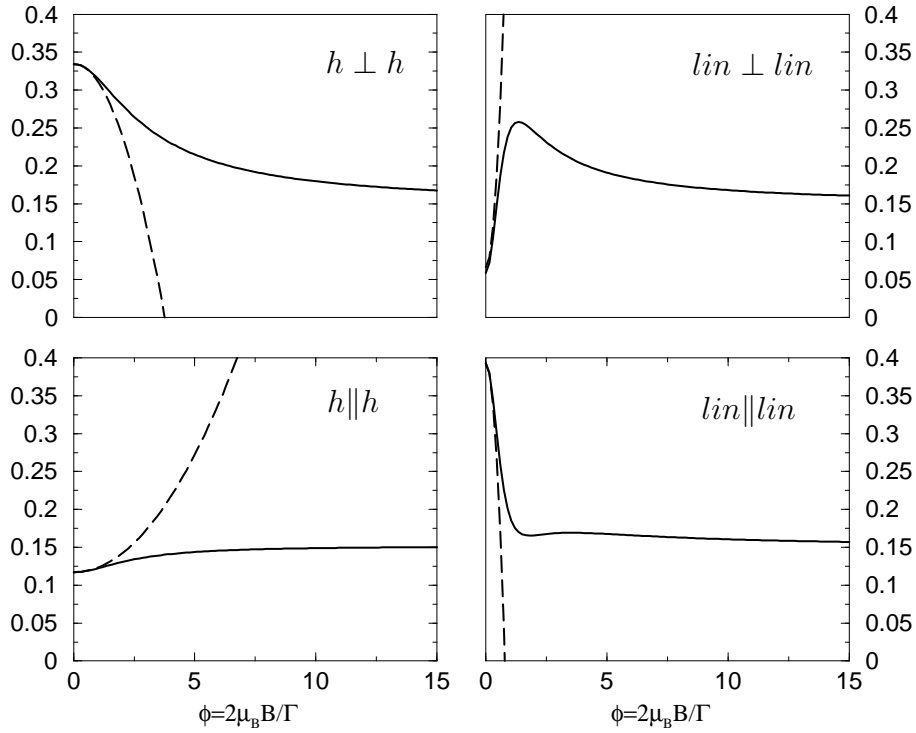


FIG. 5.1 – Coefficients bistatiques de diffusion double pour l'intensité incohérente, dans les quatre canaux de polarisation usuels, en fonction de  $\phi$ , pour une excitation résonante d'une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$ . Le champ magnétique est parallèle au faisceau lumineux incident. En trait plein : les coefficients bistatiques, calculés comme indiqué dans le texte. Lorsque  $\phi$  tend vers l'infini, les coefficients bistatiques tendent bien tous vers la même valeur proche de 0.15. En trait pointillé, on a représenté leurs valeurs approchées pour  $\phi \ll 1$  (développement au second ordre en puissance de  $\phi$ ).

### 5.3.3 Diffusion double : intensité cohérente

Le coefficient bistatique de diffusion double pour l'intensité cohérente dans la direction arrière se déduit de la formule générale 5.12 :

$$\begin{aligned} \gamma_C^{(2)} = \frac{9}{16\pi\ell_0^2} \int d\Omega_{1,2} dr_{1,2} \int_{|z_{1,2}|}^{\infty} dz_1 & (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' e^{ikz_2\mathcal{N}} \mathcal{T}^{0,1} e^{ikr_{1,2}\mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \mathcal{T}^{0,1} e^{ikz_1\mathcal{N}} \boldsymbol{\epsilon}) \\ & \times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} e^{-ikz_2\mathcal{N}^\dagger} \mathcal{T}^{0,1\dagger} e^{-ikr_{1,2}\mathcal{N}^\dagger} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \mathcal{T}^{0,1\dagger} e^{-ikz_1\mathcal{N}^\dagger} \boldsymbol{\epsilon}') \end{aligned} \quad (5.23)$$

Avant de calculer  $\gamma_C^{(2)}$ , faisons quelques remarques sur les amplitudes des chemins direct et renversé en diffusion double.

En l'absence de champ magnétique, elles sont égales<sup>2</sup>. En effet, si  $\phi = 0$  l'opérateur  $\mathcal{T}^{0,1}$  est l'identité, et les amplitudes des chemins sont toutes deux proportionnelles à  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \boldsymbol{\epsilon}$ . Ce n'est plus vrai en général en présence de  $\mathbf{B}$ . Par exemple, nous avons vu que l'action d'un petit champ magnétique sur une polarisation incidente linéaire est décrite par trois rotations successives : une autour de  $\mathbf{B}$  (effet Faraday+dipôle), une autour de la droite joignant les deux diffuseurs, et de nouveau une rotation autour de  $\mathbf{B}$ . Pour le chemin renversé, ces trois rotations sont effectuées dans l'ordre inverse, avec les mêmes angles. Or, les deux rotations autour de  $\mathbf{B}$  ont des angles différents si les deux diffuseurs ne se trouvent pas dans un même plan perpendiculaire au champ magnétique, et les rotations d'axes différents ne commutent pas. Les deux chemins renversés n'ont donc pas la même amplitude.

#### Canaux d'hélicité

Dans les canaux d'hélicité, la situation est similaire à celle décrite dans la section 1.6. Elle est illustrée sur la figure 5.2. La polarisation incidente est  $\mathbf{e}_1$  (2.10). Si on note

$$a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_{-1} = \Delta_{\mathbf{B}} \mathcal{T}^{0,1} G(\mathbf{r}_{1,2}, \omega) \mathcal{T}^{0,1} \mathbf{e}_1 \quad (5.24)$$

la polarisation de sortie de sortie du chemin direct s'écrit

$$\boldsymbol{\epsilon}_{dir} = e^{-i\frac{\phi z_1}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \left[ a e^{-i\frac{\phi z_2}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \mathbf{e}_1 + b e^{i\frac{\phi z_2}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \mathbf{e}_{-1} \right] \quad (5.25)$$

et celle du chemin renversé :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{rev} = e^{-i\frac{\phi z_2}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \left[ a e^{-i\frac{\phi z_1}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \mathbf{e}_1 + b e^{i\frac{\phi z_1}{2\ell_0(1+\phi^2)}} \mathbf{e}_{-1} \right] \quad (5.26)$$

---

<sup>2</sup>Ceci est vrai uniquement pour la diffusion double.

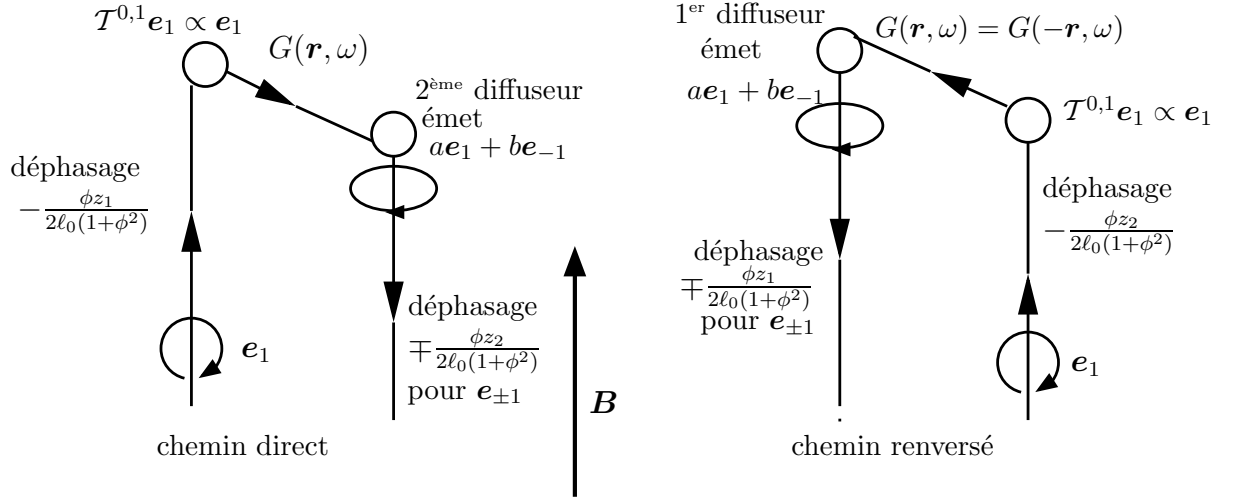


FIG. 5.2 – Chemins renversés dans les canaux d’hélicité. Le chemin direct est représenté à gauche, et le chemin renversé à droite. Lorsqu’une polarisation  $e_1$  entre dans le milieu diffusant, elle se propage sans déformation, mais acquiert une phase proportionnelle à la distance parcourue et dépendant du champ magnétique  $B$ . Cette phase n’est pas la même sur les deux chemins renversés. Par contre, la polarisation  $e_1$  est diffusée, propagée vers le diffuseur suivant, et diffusée une deuxième fois de la même manière sur les deux chemins. Le second diffuseur de chaque chemin émet une polarisation  $ae_1 + be_{-1}$ . Au cours de la propagation vers la sortie,  $e_1$  et  $e_{-1}$  acquièrent des phases différentes. Dans le canal  $h\parallel h$ , on analyse la polarisation de sortie avec  $e_{-1}$ , et il y a une différence de phase proportionnelle à  $(z_2 - z_1)$  entre les deux chemins. Au contraire, dans le canal  $h \perp h$ , la polarisation d’analyse est  $e_1$  et la différence de phase est nulle.

Dans le canal  $h\parallel h$ , l’analyse se fait avec la polarisation  $e_{-1}$  et il apparaît un déphasage  $-\frac{\phi(z_2-z_1)}{2\ell_0(1+\phi^2)}$  entre les amplitudes des chemins renversés. La distance entre les diffuseurs étant de l’ordre de  $\ell_0(1+\phi^2)$ , le déphasage est de l’ordre de  $\phi$ . A grand champ magnétique, le contraste des interférences tend vers 0 dans le canal  $h\parallel h$ .

Au contraire, dans le canal  $h \perp h$ , où la polarisation d’analyse est  $e_1$ , les amplitudes des chemins renversés sont toujours égales. Cependant, ces amplitudes sont décroissantes avec  $B$ , comme le montre la figure 5.1.  $\gamma^{(1)}$  étant constant, le facteur d’augmentation diminue avec  $B$ , et tend vers une valeur supérieure à 1.

Enfin, remarquons qu’à résonance, la valeur des coefficients bistatiques

dans les canaux d'hélicité ne dépendent pas de la polarisation incidente  $\mathbf{e}_1$  ou  $\mathbf{e}_{-1}$ . En effet,  $\phi$  est invariant sous l'ensemble des deux transformations {conjugaison complexe +  $\delta \rightarrow -\delta$ }. Il en est de même pour  $\mathcal{T}^{0,1}$ , matrice de diffusion de l'amplitude lumineuse par un atome, et qui est proportionnelle à la self-énergie  $\Sigma$  (4.5) décrivant sa propagation. On en déduit que les coefficients bistatiques pour une polarisation incidente  $\mathbf{e}_1$  et un désaccord  $\delta$  sont égaux à ceux avec la polarisation incidente  $\mathbf{e}_{-1}$  et le désaccord  $-\delta$ . A résonance,  $\delta = 0$  et les coefficients bistatiques sont égaux.

### Canaux linéaires

Ces résultats dans les canaux d'hélicité nous permettent d'étudier les canaux linéaires à grand champ magnétique. En effet, dans un milieu semi-infini, l'intensité diffuse totale dans une direction ne dépend pas de la polarisation incidente. Cela est vérifié ordre par ordre, et séparément pour les intensités incohérente et cohérente. On a donc les égalités

$$\gamma_{L_{h\parallel h}}^{(2)} + \gamma_{L_{h\perp h}}^{(2)} = \gamma_{L_{lin\parallel lin}}^{(2)} + \gamma_{L_{lin\perp lin}}^{(2)} \quad (5.27)$$

$$\gamma_{C_{h\parallel h}}^{(2)} + \gamma_{C_{h\perp h}}^{(2)} = \gamma_{C_{lin\parallel lin}}^{(2)} + \gamma_{C_{lin\perp lin}}^{(2)} \quad (5.28)$$

Or, nous avons vu qu'à grand champ magnétique, tous les  $\gamma_L^{(2)}$  et  $\gamma_{C_{h\perp h}}^{(2)}$  sont égaux, et que  $\gamma_{C_{h\parallel h}}^{(2)}$  est nul. On a donc

$$\gamma_{C_{lin\parallel lin}}^{(2)} + \gamma_{C_{lin\perp lin}}^{(2)} = \gamma_{L_{lin\parallel lin}}^{(2)} \quad (5.29)$$

Si on choisit la direction de la polarisation d'entrée suivant  $\hat{\mathbf{x}}$ , et si on note  $\boldsymbol{\epsilon}_{dir}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_{rev}$  les polarisations linéaires finales des chemins direct et renversé, on peut écrire

$$\langle (\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{dir})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{rev}) \rangle + \langle (\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{dir})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{rev}) \rangle = \gamma_{C_{lin\parallel lin}}^{(2)} + \gamma_{C_{lin\perp lin}}^{(2)} = \langle \boldsymbol{\epsilon}_{dir} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{rev} \rangle = \gamma_{L_{lin\parallel lin}}^{(2)} \quad (5.30)$$

Les polarisations  $\boldsymbol{\epsilon}_{dir,rev}$  ne sont pas normées pour tenir compte de l'atténuation au cours de la propagation. L'égalité de droite montre qu'elles font entre elles un angle dont le cosinus a une valeur moyenne non-nulle. Par contre, l'étude de l'intensité incohérente du paragraphe précédent nous a révélé que leur angle avec une direction donnée peut prendre n'importe quelle valeur. On en déduit

$$\langle (\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{dir})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{rev}) \rangle = \langle (\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{dir})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{rev}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\epsilon}_{dir} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{rev} \rangle \quad (5.31)$$

Et finalement, pour un grand champ magnétique :

$$\gamma_{C_{lin\parallel lin}}^{(2)} = \gamma_{C_{lin\perp lin}}^{(2)} = \frac{1}{2} \gamma_{L_{lin\parallel lin}}^{(2)} \quad (5.32)$$



## CHAPITRE 5. CALCUL DU CÔNE DE RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

Les coefficients bistatiques des deux canaux linéaires prennent les mêmes valeurs pour de grands champs magnétiques. Dans cette limite, leurs facteurs d'augmentation sont donc identiques.

### Valeurs des coefficients bistatiques

Nous venons de voir qu'à grand  $B$ , les coefficients bistatiques associés à l'intensité cohérente tendent vers différentes limites. Leurs valeurs numériques sont présentées dans la table 5.3.

On peut montrer que le comportement de  $\gamma_{C_{h\parallel h}}^{(2)}$  à grand champ magnétique est :

$$\gamma_{C_{h\parallel h}}^{(2)} \underset{\phi \rightarrow \infty}{\sim} \frac{9}{20\phi} \quad (5.33)$$

Ce résultat est à comparer avec celui obtenu au chapitre 1 pour des diffuseurs classiques (section 1.6.2, p. 36) : dans les deux cas,  $\gamma_{C_{h\parallel h}}^{(2)}$  décroît comme  $1/\phi$ . Cependant, il s'agit de deux situations différentes : seul l'effet Faraday est pris en compte pour les diffuseurs classiques, alors que c'est l'effet Cotton-Mouton qui domine pour les atomes. Dans ce dernier cas, le libre parcours moyen de diffusion dépend de la direction de propagation. A grand champ magnétique, il vaut  $\ell_0/\sin^2 \theta_{1,2}$  dans la direction  $\mathbf{r}_{1,2}$ .

A petit champ magnétique, on peut faire la même analyse que pour l'intensité incohérente, en négligeant l'effet Cotton-Mouton. Le fait que le contraste diminue lorsque  $B$  augmente ne signifie pas forcément que  $\gamma_C^{(2)}$  décroît : si  $\gamma_L^{(2)}$  augmente, il suffit que  $\gamma_C^{(2)}$  augmente moins vite. Les expressions de  $\gamma_C^{(2)}$  pour  $\phi \ll 1$  sont également données dans la table 5.3. Pour les valeurs intermédiaires de  $\phi$ , on effectue les intégrales (5.23) analytiquement, sauf celle portant sur  $\theta_{1,2}$  qui doit être faite numériquement. La figure 5.3 montre les variations des  $\gamma_C^{(2)}$  en fonction de  $\phi$ .

### Facteur d'augmentation

Connaissant les coefficients bistatiques de diffusion simple et de diffusion double, on peut déterminer le facteur d'augmentation du cône CBS dans l'approximation de diffusion double

$$\alpha = 1 + \frac{\gamma_C^{(2)}}{\gamma^{(1)} + \gamma_L^{(2)}} \quad (5.34)$$

Ils sont représentés sur la figure 5.4, ainsi que  $1 + \gamma_C^{(2)}/\gamma_L^{(2)}$  qui fournit une information sur la force des interférences. Dans les quatre canaux de polarisations, le facteur d'augmentation diminue avec  $\phi$ . Ceci est dû à la chute du

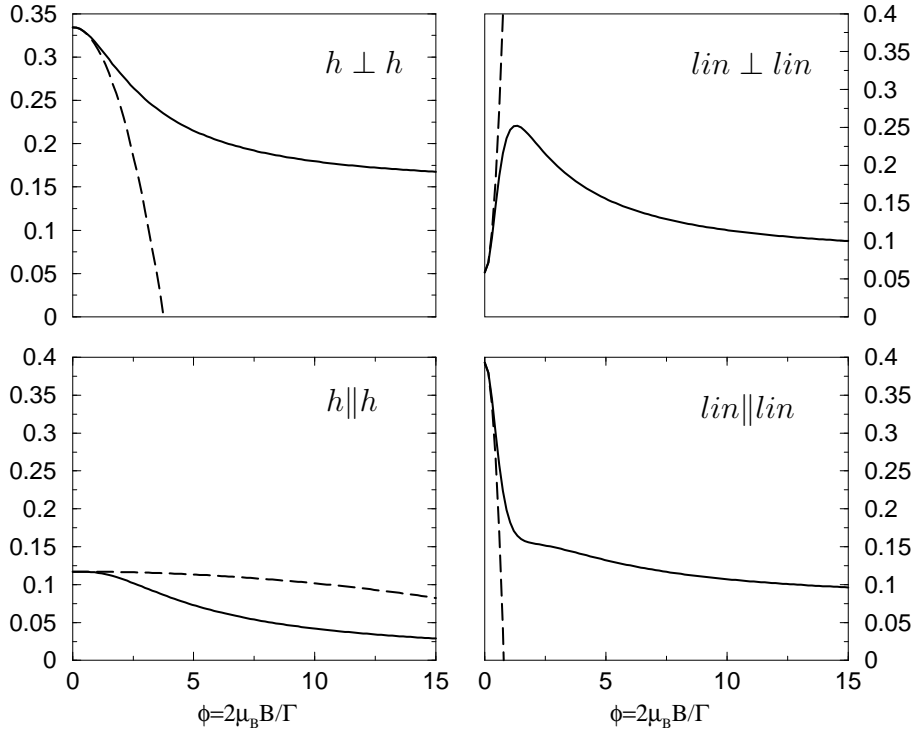


FIG. 5.3 – Coefficients bistatiques de diffusion double pour l'intensité cohérente, dans les quatre canaux de polarisation usuels, en fonction de  $\phi$ , pour une excitation résonante d'une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$ . Le champ magnétique est parallèle au faisceau lumineux incident. En trait plein : les coefficients bistatiques. A part dans le canal  $h \parallel h$ , ils ne tendent pas vers 0 lorsque le champ magnétique tend vers l'infini. Sur chacun des chemins direct et renversé, la direction ou la phase d'une polarisation peut beaucoup varier, mais de manière partiellement corrélée avec les variations correspondantes sur l'autre chemin. En trait pointillé, on a représenté leurs valeurs approchées pour  $\phi \ll 1$ .

CHAPITRE 5. CALCUL DU CÔNE DE RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE

canal	$\gamma_C^{(2)}$ pour $\phi \ll 1$	$\gamma_C^{(2)}$ pour $\phi \gg 1$
$h \parallel h$	$\frac{15}{128} + \left( \frac{1497}{1280} - \frac{27}{16} \ln 2 \right) \phi^2$	$\sim \frac{9}{20\phi}$
$h \perp h$	$\frac{9}{8} \ln 2 - \frac{57}{128} - \left( \frac{27}{16} \ln 2 - \frac{1467}{1280} \right) \phi^2$	$\sim 0.1514$
$lin \parallel lin$	$\frac{9}{8} \ln 2 - \frac{99}{256} - \left( \frac{171}{32} \ln 2 - \frac{7881}{2560} \right) \phi^2$	$\sim 0.0757$
$lin \perp lin$	$\frac{15}{256} + \left( \frac{63}{32} \ln 2 - \frac{1953}{2560} \right) \phi^2$	$\sim 0.0757$

TAB. 5.3 – Coefficients bistatiques de diffusion double pour l'intensité cohérente à rétrodiffusion, pour une excitation résonante d'une transition 0 – 1.

contraste des interférences dans les canaux parallèles. Dans le canal  $lin \perp lin$ , non seulement le contraste des interférences diminue, mais la contribution de la diffusion simple à l'intensité rétrodiffusée augmente. Il en résulte une chute rapide de la hauteur du cône. Dans le canal  $h \perp h$ , le contraste des interférences est toujours optimal, mais la contribution du signal de diffusion double à l'intensité totale diminue, alors que celle du signal de diffusion simple est constante. Le facteur d'augmentation baisse légèrement.

### 5.3.4 Comparaison avec les diffuseurs classiques

Des diffuseurs atomiques effectuant une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$  ayant des propriétés qui se rapprochent de celles des diffuseurs classiques, nous comparons les facteurs d'augmentation trouvés dans le paragraphe précédent avec ceux rapportés pour les diffuseurs classiques [41, 42].

Rappelons brièvement ce qui diffère entre les deux situations. Les diffuseurs atomiques sont très résonants : leurs propriétés de diffusion de la lumière sont modifiées par le champ magnétique (section 3.4) et les effets magnéto-optiques lors de la propagation cohérente de la lumière entre deux diffuseurs sont très importants et il faut en tenir compte sans approximation. Au contraire, les diffuseurs classiques sont comparativement peu résonants. Le champ magnétique ne modifie pas leur propriétés de diffusion de la lumière. Ces diffuseurs sont placés dans un milieu possédant des propriétés magnéto-optiques, qu'on peut décrire en se restreignant au premier ordre en  $B$  : seul l'effet Faraday entre en ligne de compte.

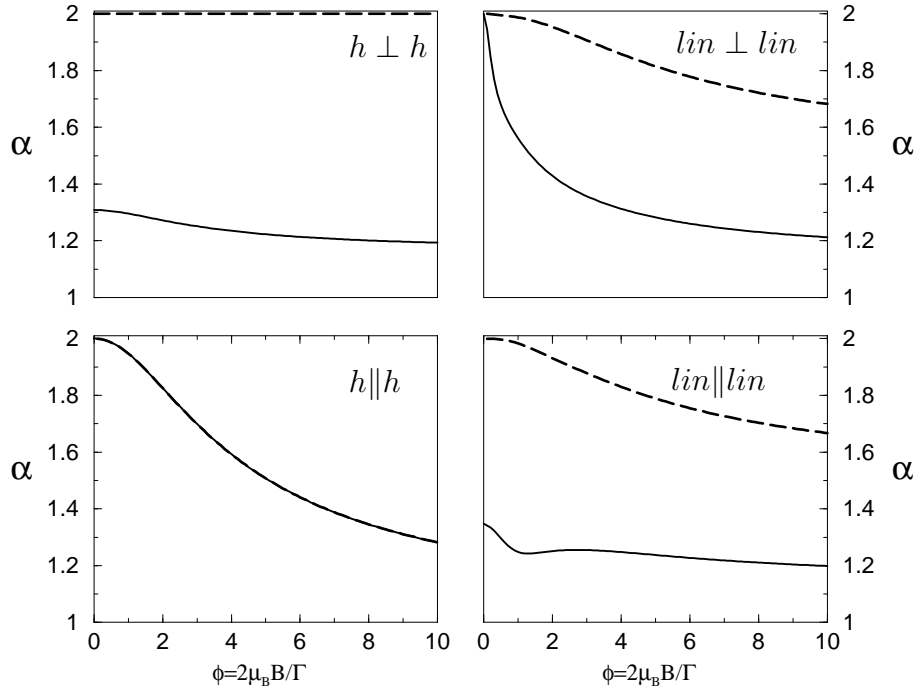


FIG. 5.4 – Facteurs d’augmentation  $\alpha$  en fonction de  $\phi$  à l’approximation de diffusion double, pour une excitation résonante d’une transition  $J = 0 \rightarrow J_e = 1$ . Le champ magnétique est parallèle au faisceau lumineux incident. Les traits pleins représentent  $\alpha$  (défini dans le texte). Les traits pointillés représentent  $1 + \gamma_C^{(2)} / \gamma_L^{(2)}$ . Dans le canal  $h \parallel h$ , ces deux courbes sont confondues car la diffusion simple ne contribue pas à l’intensité diffusée vers l’arrière. La chute de la hauteur du cône CBS est uniquement due à la chute du contraste des interférences.

Dans le canal  $h \perp h$ , au contraire, le contraste est toujours optimal, mais la diffusion simple fait légèrement chuter la hauteur du cône. Dans les canaux linéaires, le contraste des interférences diminue lentement mais ne s’annule pas, et  $\gamma^{(1)}$  varie avec  $\phi$ . Sa forte augmentation dans le canal  $lin \perp lin$  entraîne une décroissance rapide de  $\alpha$ . Dans le canal  $lin \parallel lin$ ,  $\gamma^{(1)}$  diminue avec  $\phi$ , mais le contraste des interférences aussi. Il en résulte une légère baisse de la hauteur du cône.

## CHAPITRE 5. CALCUL DU CÔNE DE RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE

---

Considérons tout d'abord les situations où l'effet Faraday est responsable du comportement du facteur d'augmentation pour les diffuseurs atomiques. On s'attend alors à ce que ce comportement soit identique à celui observé avec des diffuseurs classiques. Cela se produit dans trois situations. Tout d'abord à grand  $B$  dans les canaux de polarisation linéaires : l'effet Faraday se produisant entre la face d'entrée du milieu diffusant et le premier/dernier diffuseur fait que le facteur d'augmentation est indépendant du canal de polarisation. Ce résultat est également observé avec les diffuseurs classiques. Toujours à grand champ magnétique, dans le canal  $h \parallel h$ , il est responsable de la chute de l'intensité cohérente qui tend vers 0. Ceci est aussi observé avec les diffuseurs classiques. Enfin, à petit champ magnétique, on observe une chute du facteur d'augmentation dans tous les canaux. Ceci n'est pas vrai pour les diffuseurs classiques : le facteur d'augmentation augmente dans le canal  $lin \perp lin$ . Cette différence de comportement vient de l'approximation de diffusion double que nous avons faite pour les atomes, alors que les résultats publiés sur ces diffuseurs classiques concernent tous les ordres de diffusion. Dans l'approximation de diffusion double, pour  $B = 0$ , le facteur d'augmentation atteint sa valeur maximale 2, et il ne peut que baisser lorsque  $B$  varie. Au contraire, si on tient compte de tous les ordres de diffusion, le facteur d'augmentation en champ nul est inférieur à 2, et rien ne s'oppose à ce qu'il augmente avec  $B$ .

Dans les autres cas, on s'attend à obtenir des comportements différents du facteur d'augmentation. Cela se produit notamment dans le canal  $h \perp h$ , où il décroît légèrement avec  $B$  pour les atomes, alors qu'il reste constant pour les diffuseurs classiques.

Dans cette section, nous avons vu le rôle important que jouent les effets magnéto-optiques, en particulier l'effet Faraday lors de la propagation entre la face d'entrée/sortie du milieu et les diffuseurs. Cela vient de ce que le champ magnétique est parallèle aux faisceaux lumineux incident et rétrodiffusé. Dans les mêmes conditions, si on avait considéré des atomes avec un niveau fondamental dégénéré, le rôle de l'effet Faraday aurait été identique : il aurait contribué à brouiller les interférences entre chemins renversés, dans les trois canaux autres que  $h \perp h$ .

# Chapitre 6

## Augmentation de la rétrodiffusion cohérente avec un champ magnétique

### 6.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons montré que la structure interne des atomes est la cause de la chute du facteur d'augmentation de rétrodiffusion cohérente. Pour une transition  $J = 3 \rightarrow J_e = 4$ , cette chute est particulièrement spectaculaire dans le canal d'hélicité conservée, où le facteur d'augmentation passe de 2 à 1.05. Elle est due à la perte de contraste des interférences entre chemins réciproques. Nous avons évoqué l'idée de restaurer ce contraste en brisant la dégénérescence du niveau fondamental et en isolant la transition  $|J = 3, m_J = 3\rangle \rightarrow |J_e = 4, m_{J_e} = 4\rangle$ . Cependant, cela ne va pas de soi. D'une part, le théorème de réciprocité ne relie pas les amplitudes des chemins renversés en présence du champ magnétique. Nous ne pourrions donc pas employer cet outil puissant pour établir la restauration d'interférences maximales. Cela n'est pas vraiment un inconvénient, car, de toute façon, il n'est pas utilisable lorsque les atomes possèdent une structure interne. D'autre part, nous avons vu dans les chapitres 1 et 5 que la présence d'un champ magnétique externe diminue la hauteur du cône CBS (sections 1.6.2 et 5.3.3), aussi bien pour des diffuseurs classiques que pour des diffuseurs atomiques résonants dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans une situation différente. D'une part, isoler la transition  $|J = 3, m_J = 3\rangle \rightarrow |J_e = 4, m_{J_e} = 4\rangle$  nécessite d'accorder la fréquence lumineuse sur la fréquence de cette transition, qui varie

## CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

avec  $B$ . On a donc  $\delta \propto B$ , au lieu de  $\delta = 0$  comme au chapitre précédent. D'autre part, nous verrons dans la section 6.2 que le champ magnétique doit être choisi perpendiculaire au faisceau lumineux incident, et non pas parallèle. Dans ces conditions, nous montrons qu'il est possible d'augmenter le contraste des interférences, et qu'à la limite  $\mu_B B \gg \Gamma$ , les intensités cohérente et incohérente sont égales à rétrodiffusion. Ce résultat peut être vu comme la neutralisation de la structure interne des diffuseurs par le champ magnétique. Enfin, nous indiquons une situation analogue qui se présente en physique du solide.

### 6.2 Choix de la configuration

Nous voulons étudier le facteur d'augmentation pour la transition 3 – 4 du Rubidium, en présence d'un champ magnétique et avec une sonde CBS dont la fréquence est accordée sur celle de la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ . Par rapport à la fréquence atomique  $\omega_0$ , cela correspond à un désaccord

$$\delta = \mu_B B \tag{6.1}$$

Il nous faut déterminer pour quel canal de polarisation et quelle direction du champ magnétique l'augmentation de la hauteur du cône CBS sera le plus nettement visible. A priori, cette augmentation est maximale lorsque la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$  est le mieux isolée, c'est à dire pour  $\mu_B B \gg \Gamma$ . Dans ce cas, la sonde est très désaccordée avec les autres transitions, et seuls les atomes dans l'état  $|33\rangle$  participent à la diffusion. La polarisation qu'ils émettent est la projection de  $\mathbf{e}_1$  (2.10) sur le plan perpendiculaire à la direction de diffusion. Ainsi, du premier au dernier diffuseur d'un chemin de diffusion, la polarisation émise est  $\mathbf{e}_1$ , quelque soit la direction de  $\mathbf{B}^1$  et le canal de polarisation. On en déduit que le facteur d'augmentation à grand champ magnétique dépend peu des polarisations d'entrée et d'analyse. La plus forte augmentation sera observée dans le canal où la hauteur du cône est la plus faible en champ magnétique nul, c'est à dire le canal  $h||h$ . Cependant, si  $\mathbf{B}$  est parallèle au faisceau incident, le signal de rétrodiffusion à grand champ magnétique est nul dans ce canal. Nous nous plaçons donc dans la configuration suivante :

- $\mathbf{B}$  est perpendiculaire au faisceau lumineux incident ;
- le canal de polarisation est  $h||h$ .

---

<sup>1</sup>Attention :  $\mathbf{B}$  définit l'axe de quantification, donc  $\mathbf{e}_1$

## 6.3 Etude à fort champ magnétique

Nous allons tout d'abord montrer qu'à grand champ magnétique, le contraste des interférences est bien restauré. Nous nous appuyons sur le fait que pour  $\mu_B B \gg \Gamma$ , les sous-niveaux Zeeman de chacun des états fondamental et excité sont très séparés. La transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$  est alors isolée et fermée, car le sous-niveau  $|44\rangle$  ne peut se désexciter que vers le sous-niveau  $|33\rangle$ . La lumière incidente étant résonante avec cette transition, *le comportement effectif des atomes est celui d'atomes à deux niveaux*, sans dégénérescence du niveau fondamental. En particulier, toutes les diffusions sont élastiques. De plus, les atomes ne peuvent absorber et émettre que la polarisation  $\mathbf{e}_1$  (2.10).

Au cours de la propagation cohérente de la lumière entre deux diffuseurs, l'interaction lumière-atome qui donne lieu à l'indice de réfraction ne peut ne fait intervenir que la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ . Il en résulte que  $\Delta_{\mathbf{r}}\mathbf{e}_1$ , projection de  $\mathbf{e}_1$  sur le plan perpendiculaire à la direction de propagation  $\mathbf{r}$ , est un mode propre de propagation. Le second mode propre lui est orthogonal et se propage dans le nuage atomique sans atténuation. Cela signifie qu'après la première diffusion, une seule polarisation se propage dans le milieu. Cette propriété, et le fait que les atomes se comportent comme des atomes à deux niveaux du point de vue de la diffusion, font qu'il n'y a alors plus de différence à parcourir un chemin de diffusion dans un sens ou dans l'autre. L'égalité des amplitudes des chemins direct et renversés est rétablie. Dans la limite de grand champ magnétique, on restaure donc le contraste des interférences de rétrodiffusion cohérente. Une démonstration plus technique est proposée dans l'annexe C.

Dans toute la suite du chapitre, nous nous placerons dans la configuration mentionnée à la fin de la section précédente, à savoir le canal de polarisation  $h\parallel h$ ,  $\mathbf{B}$  perpendiculaire au faisceau lumineux incident et le désaccord  $\delta = \mu_B B$  de façon à ce que la lumière soit à résonance avec la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ .

## 6.4 Étude à faible champ magnétique

Dans cette section, nous allons montrer que même à faible champ magnétique, le contraste des interférences et la hauteur du cône augmentent. Pour cela, nous déterminons analytiquement la diffusion double dans un milieu uniforme semi-infini, dans l'approximation  $\mu_B B \ll \Gamma$ . Cela nous per-



## CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

met de négliger les effets magnéto-optiques<sup>2</sup>, et de propager un photon avec le propagateur en champ magnétique nul (2.77). Les matrices de diffusion  $\tilde{t}_{mm'}$  sont développées au second ordre en  $\tilde{B} = 2\mu_B B/\Gamma$ , en remarquant que  $\phi = \tilde{B} + i\tilde{B}^2$  à cet ordre.  $\tilde{B} = 1$  correspond à  $B = 2.1$  G. On utilise alors les expressions (5.11) et (5.12) des coefficients bistatiques avec les simplifications mentionnées ci-dessus. Les calculs ont été effectués avec *Maple*<sup>TM</sup>. Pour la transition 3 – 4 du Rubidium, on trouve :

$$\gamma^{(1)} = 0.040 - 0.044\tilde{B}^2 \quad (6.2)$$

$$\gamma_L^{(2)} = 0.131 - 0.345\tilde{B}^2 \quad (6.3)$$

$$\gamma_C^{(2)} = 0.028 - 0.056\tilde{B}^2 \quad (6.4)$$

Soit un facteur d'augmentation de diffusion double

$$\alpha = 1.166 + 0.048\tilde{B}^2 \quad (6.5)$$

et une augmentation du contraste

$$\frac{\gamma_C^{(2)}}{\gamma_L^{(2)}} = 0.217 + 0.143\tilde{B}^2 \quad (6.6)$$

Bien que le coefficient bistatique d'intensité cohérente diminue avec  $B$ , le contraste et le facteur d'augmentation sont croissants.

Dans la limite de faible champ magnétique, il n'est pas nécessaire que les facteurs de Landé des deux niveaux atomiques soient différents pour observer une augmentation de la hauteur du cône CBS. Ceci est confirmé par les résultats ci-dessous, pour lesquels on a pris  $g = g_e = 1/2$  (on considère toujours un milieu diffusant uniforme et semi-infini). L'accord en fréquence avec les transitions  $|3m\rangle - |4(m+1)\rangle$  est alors assuré pour  $\delta = \mu_B B/2$ . L'approximation supplémentaire de négliger le changement de fréquence du photon après diffusion nous permet d'effectuer la moyenne interne des coefficients bistatiques en utilisant la section efficace différentielle (3.47). Le calcul des coefficients bistatiques se ramène alors à celui d'un diagramme échelle ou croisé, comme en l'absence de champ magnétique (section 2.4.3). Le procédé itératif décrit par (2.94) permet de calculer ces diagrammes, en considérant désormais

$$\mathcal{M} : M \rightarrow M' = w_1 \mathcal{T}^{0,1} M \mathcal{T}^{0,1\dagger} + w_2 (\mathcal{T}^{0,1} M \mathcal{T}^{0,1\dagger})^T + w_3 \text{Tr}(\mathcal{T}^{0,1} M \mathcal{T}^{0,1\dagger}) \mathbf{1} \quad (6.7)$$

---

<sup>2</sup>Cela sera justifié dans la section suivante

## 6.5. SIMULATIONS MONTE-CARLO

---

avec  $\mathcal{T}^{0,1}$  définie par (3.32) et (3.28)-(3.30), et les  $w_i$  par (2.44). On trouve alors, au deuxième ordre en  $\tilde{B}$

$$\gamma^{(1)} = \frac{9}{224} + \frac{9}{448}g_e^2\tilde{B}^2 = 0.040 + 0.005\tilde{B}^2 \quad (6.8)$$

$$\gamma_L^{(2)} = \frac{29679}{401408} + \frac{513}{6272}\ln 2 - \left(\frac{101499}{401408} + \frac{2673}{25088}\ln 2\right)g_e^2\tilde{B}^2 = 0.131 - 0.082\tilde{B}^2 \quad (6.9)$$

$$\gamma_C^{(2)} = \frac{1203}{100352} + \frac{297}{12544}\ln 2 - \left(\frac{1173}{50176} + \frac{891}{25088}\ln 2\right)g_e^2\tilde{B}^2 = 0.028 - 0.012\tilde{B}^2 \quad (6.10)$$

Le rapport des intensités cohérente et incohérente augmente avec  $B$  :

$$\frac{\gamma_C^{(2)}}{\gamma_L^{(2)}} = 0.217 + 0.044\tilde{B}^2 \quad (6.11)$$

ainsi que le facteur d'augmentation :

$$\alpha = 1.166 + 0.004\tilde{B}^2 \quad (6.12)$$

Cette augmentation est nettement plus faible que pour des facteurs de Landé différents. Comme le montrent (6.6) et (6.11), cela vient pour une part d'une moindre augmentation du contraste, mais surtout d'une plus grande contribution de la diffusion simple.

## 6.5 Simulations Monte-Carlo

Lorsque le champ magnétique n'est ni très petit, ni très grand, il n'y a pas d'approximation simple possible et les coefficients bistatiques doivent être calculés numériquement, avec la simulation Monte-Carlo décrite au chapitre 5 (section 5.2.4, p. 117). Il est alors possible de prendre en compte une modélisation plus réaliste du nuage atomique qu'un milieu uniforme et semi-infini. Nous présentons des résultats pour un nuage atomique de forme sphérique, de densité gaussienne maximale au centre et d'épaisseur optique  $b = 31$ . Ce choix correspond à la situation expérimentale dans laquelle des mesures ont été réalisées en 2003 à l'Institut Non Linéaire de Nice. Sur la figure 6.1, les facteurs d'augmentation théoriques sont comparés avec ceux mesurés dans cette expérience. Celle-ci est effectuée à densité atomique constante, et l'épaisseur optique  $y$  est mesurée en champ magnétique nul et à désaccord nul.

CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION  
COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

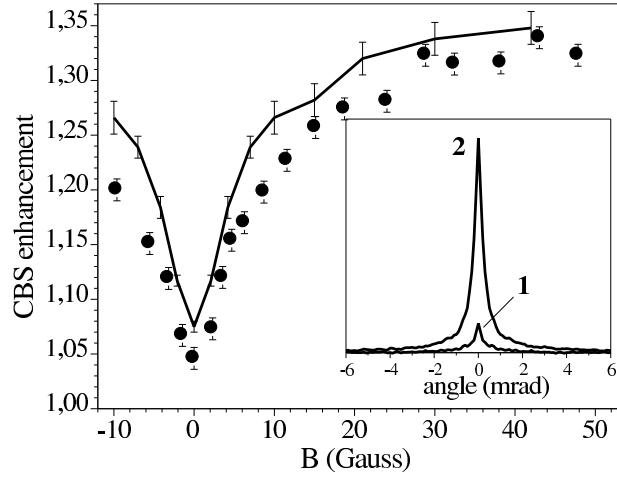


FIG. 6.1 – Facteur d’augmentation du cône CBS sur des atomes de Rubidium en fonction du champ magnétique. Il est déterminé dans le canal  $h||h$ , pour  $\mathbf{B}$  perpendiculaire au faisceau incident. Les cercles représentent les points expérimentaux, et la ligne continue les valeurs calculées (aucun paramètre ajustable). On observe qu’il augmente bien avec le champ magnétique, passant d’une valeur proche de 1.05 en l’absence de champ à une valeur proche de 1.35 pour  $B = 40$  G. Les incertitudes sur les valeurs théoriques varient de 0.01 pour  $B = 0$  à 0.04 à partir de 15 G. En particulier, le creux observé pour  $B = 15$  G sur la courbe théorique est dû aux fluctuations inhérentes au calcul Monte-Carlo. L’insert montre deux sections de cônes mesurés à  $B = 0$  G (1) et à  $B = 43$  G (2). La forme plus pointue du cône (2) est un signe que des ordres de diffusion plus élevés y contribuent. Figure extraite de [77].

La figure 6.1 illustre le résultat principal de cette thèse : le facteur d’augmentation est bien une fonction croissante du champ magnétique. Sa valeur passe de 1.05 en champ magnétique nul à près de 1.35 vers 40 G. L’accord entre théorie (ligne continue) et expérience (cercles) est satisfaisant. Cela montre que la simulation Monte-Carlo contient les mécanismes physiques essentiels qui interviennent dans la restauration du contraste. Dans la suite, nous nous appuyerons sur ses résultats pour les élucider. En effet, la simulation numérique permet de calculer des grandeurs inaccessibles expérimentalement. Par exemple, la contribution de chaque ordre de diffusion à l’intensité rétrodiffusée, ou bien celle du terme d’interférence.

Sur la figure 6.2(a), on a tracé le rapport des intensités cohérente et in-

## 6.5. SIMULATIONS MONTE-CARLO

cohérente (diffusion simple exclue). Il est croissant avec  $B$ , et, bien que cela ne soit pas montré sur la figure, tend vers 1 pour  $B$  grand. Ceci confirme que le contraste des interférences est bien restauré. Pour des champs magnétiques supérieurs à 40 G, le temps de calcul nécessaire pour obtenir un écart-type inférieur à 5% sur l'intensité diffuse devient très long, car les amplitudes des chemins fluctuent beaucoup. Pour vérifier que le rapport  $I_{coh}/I_{inc}$  tend bien vers 1 à grand  $B$ , nous avons fait un calcul pour  $B = 1000$  G. Bien que l'incertitude sur chacune des intensités incohérente et cohérente soit de l'ordre de 5%, leurs valeurs calculées coïncident avec trois chiffres significatifs. Comme ce sont des grandeurs corrélées (elles sont calculées le long des mêmes chemins de diffusion), il est légitime de supposer que l'incertitude sur leur écart relatif est bien plus faible que celle sur leur valeur absolue. La figure 6.2(b) montre l'évolution des contributions de la diffusion simple,

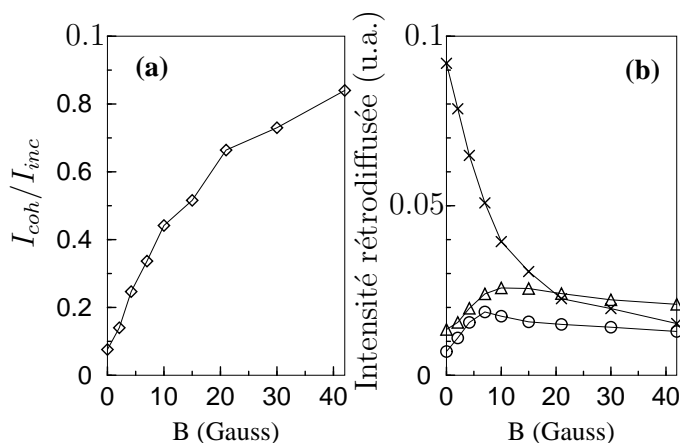


FIG. 6.2 – Résultats des simulations numériques. (a) : rapport des intensités cohérente et incohérente (sans diffusion simple). Ce rapport est croissant avec  $B$ , mettant en évidence la restauration progressive du contraste. (b) : intensité rétrodiffusée de diffusion simple (triangles), diffusion multiple incohérente (croix) et diffusion multiple cohérente (cercles). L'intensité cohérente varie peu, tandis que l'intensité incohérente est fortement diminuée. Une interprétation simple est que  $B$  permet de sélectionner les chemins qui contribuent le plus à  $I_{coh}$ .

et des diffusions multiples cohérente et incohérente en fonction de  $B$ . L'intensité incohérente décroît, ce qui s'explique par la diminution de la section efficace de diffusion avec le champ magnétique. L'épaisseur optique du nuage diminue, et avec elle la contribution de la diffusion multiple. Au contraire, l'intensité cohérente croît jusque vers 8 G ( $\tilde{B} \sim 4$ ), puis décroît lentement. La croissance à petit champ magnétique n'est pas en contradiction avec le

## CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

calcul analytique de la section précédente, car la géométrie du milieu diffusant est différente. Cette augmentation de  $I_{coh}$  traduit l'efficacité de la levée de dégénérescence pour restaurer le contraste. Il y a cependant compétition avec la diminution de l'intensité de diffusion multiple, et  $I_{coh}$  décroît - plus lentement que  $I_{inc}$  - au-delà de 8 G. A fort champ magnétique,  $I_{coh}$  et  $I_{inc}$  tendent vers la même valeur, mais sont dominées par l'intensité de diffusion simple. Ce dernier point n'est pas générique : pour une épaisseur optique plus grande, la diffusion simple est dominée par la diffusion multiple.

### 6.5.1 Influence des effets magnéto-optiques

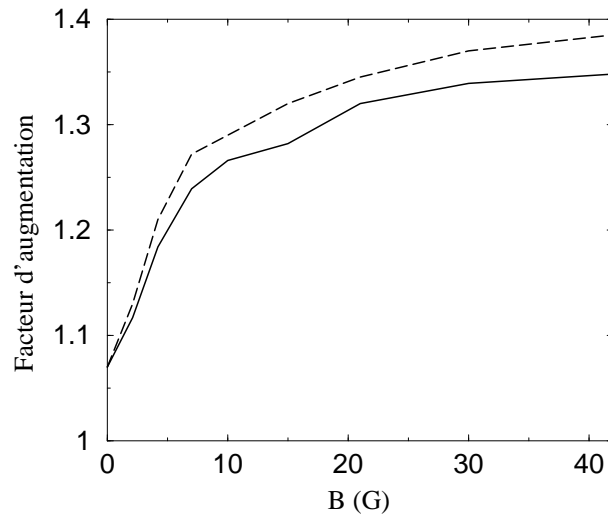


FIG. 6.3 – Influence des effets magnéto-optiques sur le facteur d'augmentation. La ligne pleine est la courbe théorique de la figure 6.1 (calcul Monte-Carlo). La ligne pointillée est le résultat du calcul du facteur d'augmentation en négligeant les effets magnéto-optiques. Ils abaissent légèrement sa valeur, mais ne jouent aucun rôle qualitatif dans son évolution en fonction de  $B$ .

Pour étudier l'impact des effets magnéto-optiques sur le facteur d'augmentation, un moyen simple consiste à ne pas les prendre en compte dans la simulation Monte-Carlo et comparer le résultat avec la figure 6.1. Ne pas prendre les effets magnéto-optiques signifie que les états de polarisations propres se propagent sans différence de phase ni d'extinction. Néanmoins, il faut tenir compte de l'anisotropie optique du milieu induite par  $\mathbf{B}$  pour assurer la conservation de l'énergie : le libre parcours moyen de diffusion dépend de l'état de polarisation. Chaque polarisation se propage alors sans

## 6.5. SIMULATIONS MONTE-CARLO

---

déformation avec son libre parcours moyen comme longueur d’extinction. Tous les autres paramètres de la simulation Monte-Carlo sont laissés inchangés. L’évolution du facteur d’augmentation calculé de cette façon est présentée sur la figure 6.3 par la courbe en trait pointillé. Pour comparaison, la courbe en trait plein est la courbe théorique de la figure 6.1. Pour des champs magnétiques inférieurs à 4 G ( $\mu_B B \lesssim \Gamma$ ), l’impact des effets magnéto-optiques est négligeable. Pour des champs plus importants, ils ont pour effet de diminuer légèrement le facteur d’augmentation. Cependant, ils ne sont pas nécessaires à une analyse qualitative de la restauration du contraste. En particulier, à fort champ magnétique, un seul mode propre peut se propager dans le milieu après la première diffusion. Cela fait disparaître tous les effets liés à une différence de phase ou d’atténuation entre modes propres<sup>3</sup>. C’est donc la modification des propriétés de diffusion des atomes qui est le phénomène physique à l’origine de l’augmentation de la hauteur du cône.

### 6.5.2 Influence des ordres élevés de diffusion

En l’absence de champ magnétique, l’intensité cohérente est dominée par la diffusion double, tandis que les ordres élevés de diffusion contribuent significativement à l’intensité incohérente. Ceci est illustré par la première ligne de la table 6.1. A grand champ magnétique, la restauration du contraste

Ordre de diffusion		2	3	4	5
$I_{\text{coh}}/I_{\text{inc}}$	B=0G	0.21	0.08	0.04	0.02
	B=30G	0.81	0.75	0.69	0.38

TAB. 6.1 – *Contraste des interférences pour différents ordres de diffusion. Pour chaque ordre, les contributions à  $I_{\text{inc}}$  et  $I_{\text{coh}}$  sont calculées. Le tableau montre leurs rapports pour les ordres de diffusion 2 à 5 en l’absence de champ magnétique (ligne du haut), et à 30 G ( $\tilde{B} \sim 15$ ).*

fait que les ordres élevés de diffusion contribuent autant à  $I_{\text{coh}}$  qu’à  $I_{\text{inc}}$ . Comme l’épaisseur optique du nuage diminue lorsque  $\mathbf{B}$  augmente, la question se pose de savoir si leur contribution est importante. La ligne pointillée sur la figure 6.4 représente le facteur d’augmentation restreint à la diffusion double. Les ordres de diffusion supérieurs sont négligés. Cette approximation surestime la hauteur du cône à petit champ magnétique, et la sous-estime à grand champ magnétique. Ceci montre que les ordres élevés contribuent

---

<sup>3</sup>Une conséquence est que, contrairement à ce qui se produit avec des diffuseurs classiques dans cette configuration (voir chapitre 1, section 1.6.2), le cône CBS ne possède pas de pics latéraux.

## CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

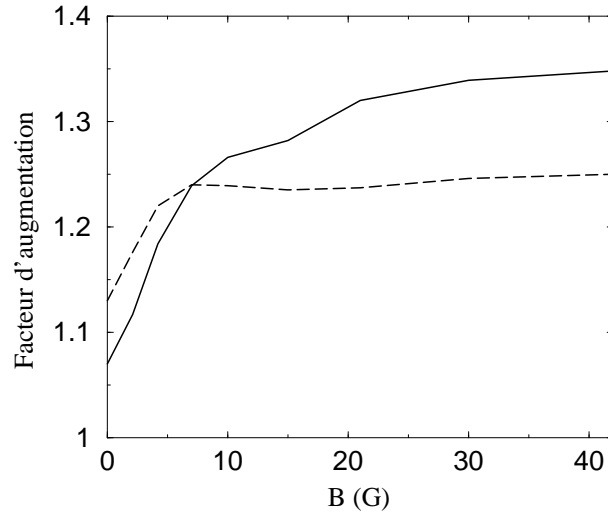


FIG. 6.4 – Influence des grands ordres de diffusion sur le facteur d’augmentation. On compare le facteur d’augmentation calculé en incluant tous les ordres de diffusion significatifs (ligne continue, identique à celle de la figure 6.1) avec celui obtenu en ne tenant compte que des diffusions simple et double (ligne pointillée), effets magnéto-optiques inclus. Le rôle des grands ordres de diffusion évolue avec le champ magnétique : à petit  $B$ , ils contribuent surtout à l’intensité incohérente et la hauteur du cône est faible. A grand  $B$ , par contre, ils contribuent autant à  $I_{coh}$  qu’à  $I_{inc}$ . Ils augmentent la hauteur du cône.

bien au cône CBS. Un autre signe dans ce sens est l’allure pointue des cônes expérimentaux (insert de la figure 6.1). Le calcul Monte-Carlo indique qu’à 42 G, les sept premiers ordres contribuent significativement. Les chemins de diffusion d’ordre dix ont des intensités inférieures de six ordres de grandeur à celles de diffusion double.

### 6.5.3 Interprétation en termes de longueur de cohérence de phase

La longueur de cohérence de phase  $\ell_\phi$  est une notion importante en physique mésoscopique : elle détermine l’échelle de longueur sur laquelle les effets d’interférence sont sensibles. Plus elle est grande, et plus le contraste des interférences est élevé. Dans le cas des atomes froids, la dégénérescence de leur niveau fondamental est une source de perte de cohérence de phase entre chemins de diffusion renversés. Cela donne lieu à une valeur finie de  $\ell_\phi$ . L’augmentation du contraste lorsqu’on applique un champ magnétique doit

## 6.5. SIMULATIONS MONTE-CARLO

---

se manifester par une croissance de  $\ell_\phi$  avec  $B$ . Les simulations Monte-Carlo nous permettent d'accéder à  $\ell_\phi$  de la façon suivante. Pour deux chemins renversés de longueur  $L_d$ , le terme d'interférence  $I_{coh}$  est relié à l'intensité incohérente  $I_{inc}$  par [78]

$$I_{coh} \simeq I_{inc} e^{-L_d/\ell_\phi} \quad (6.13)$$

Il y a égalité dans l'approximation de diffusion. Pour tous les chemins de diffusion d'ordre  $p$ , cela se traduit par

$$\gamma_C^{(p)} \simeq \gamma_L^{(p)} e^{-p/N_{coh}} \quad (6.14)$$

où  $N_{coh}$  est une grandeur sans dimension proportionnelle à  $\ell_\phi$ . Pour chaque valeur de  $B$ , on calcule les coefficients bistatiques pour les premiers ordres de diffusion, et on en déduit la valeur de  $N_{coh}$ . Sur la figure 6.5, on a représenté l'évolution de  $N_{coh}$ , donc de  $\ell_\phi$ , en fonction de  $B$ . Les disques correspondent aux valeurs calculées numériquement :  $\ell_\phi$  croît linéairement, au moins dans la plage de champ magnétique que nous avons étudiée.

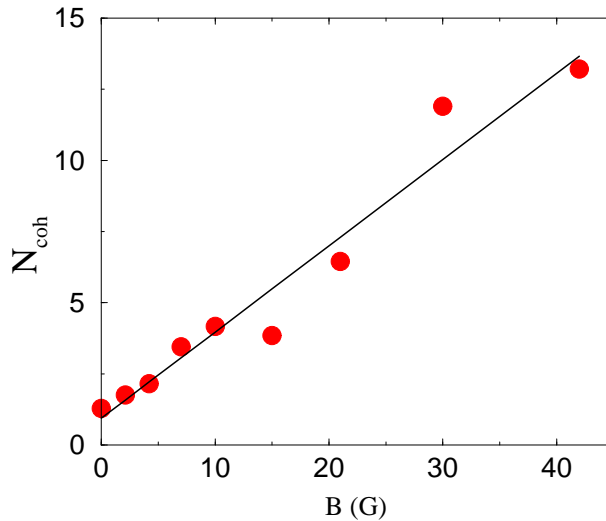


FIG. 6.5 – Augmentation de  $N_{coh}$ , grandeur proportionnelle à la longueur de cohérence (voir texte), avec  $B$ . Les disques correspondent aux valeurs calculées numériquement. La droite en trait plein en est un ajustement linéaire. La longueur de cohérence augmente linéairement avec  $B$ .

### 6.5.4 Influence de la largeur spectrale de la sonde

Dans la plupart de ses nombreuses applications, la lumière émise par un laser peut être considérée comme monochromatique, car sa largeur spectrale



## CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

---

est très petite devant les autres fréquences en présence. En physique atomique, ce n'est pas toujours le cas : il faut la comparer avec la largeur de raie du niveau excité. La sonde utilisée dans les expériences est une source laser dont le spectre a un profil lorentzien de largeur à mi-hauteur proche de  $0.3\Gamma$ . Un photon désaccordé de  $\Gamma/2$  par rapport à la fréquence de la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$  a une probabilité deux fois plus petite d'être diffusé qu'un photon résonant. Cela signifie aussi que son libre parcours moyen est deux fois plus grand : pour lui l'épaisseur optique du nuage est divisée par deux. Cet effet diminue le nombre d'ordres de diffusions participant au cône. Par là, il restreint aussi l'augmentation de sa hauteur. En supposant que la sonde CBS a une largeur spectrale nulle, on trouve un facteur d'augmentation proche de 1.44 à 42 G (avec un écart-type de 0.05).

Il est indispensable de tenir compte du spectre de la sonde pour obtenir un accord quantitatif entre les simulations Monte-Carlo et les expériences.

### 6.5.5 Transmission cohérente du nuage atomique

Dans la section 3.2.5, nous avons donné des arguments théoriques justifiant que le pompage optique est négligeable pour la situation considérée dans ce chapitre. Nous indiquons ici des résultats expérimentaux qui sont compatibles avec cette affirmation. Des mesures de la transmission cohérente du nuage ont été effectuées à Nice. Les résultats sont présentés sur la figure 6.6. Lorsque la fréquence du laser sonde est accordé sur la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ , aucune évolution temporelle de l'intensité transmise n'est observée. Ceci indique que la population des sous-niveaux Zeeman varie peu. Les valeurs mesurées de la transmission (disques) sont bien reproduites par la simulation Monte-Carlo (ligne continue). Celle-ci prend en compte le diamètre et la largeur spectrale de la sonde (mesurés expérimentalement). Par contre, lorsqu'on maintient  $\delta = 0$ , l'intensité transmise varie au cours du temps et tend vers une valeur d'autant plus grande que  $B$  est grand. Cette valeur est représentée par des croix, et n'est pas du tout reproduite par la courbe théorique pour  $B > 10$  G. C'est la preuve que, dans certaines conditions, le pompage optique agit efficacement dans le milieu, même en présence de diffusion multiple. Ce n'est heureusement pas le cas dans la situation où l'on reste accordé avec la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ .

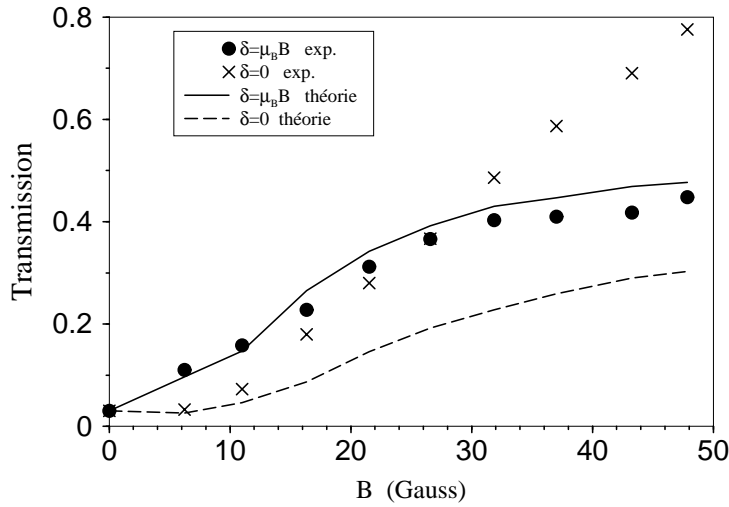


FIG. 6.6 – Transmission cohérente de la sonde à travers le nuage atomique (en fraction de l'intensité incidente) en fonction du champ magnétique transverse. Lorsque la sonde est accordée avec la transition  $|33\rangle \rightarrow |44\rangle$ , la courbe théorique (ligne continue) rend bien compte des mesures expérimentales (disques noirs). De plus, on constate expérimentalement que l'intensité transmise ne varie pas au cours du temps. Par contre, lorsque la sonde reste accordée avec la transition atomique ( $\delta = 0$ ), l'intensité transmise augmente avant d'atteindre une valeur stationnaire. C'est cette valeur de la transmission qui est représentée par des croix. La courbe théorique (ligne pointillée), qui ne tient pas compte du pompage optique, n'en rend compte que pour des champs magnétiques inférieurs à 10 G.

## 6.6 Liens avec la physique de la matière condensée

A la fin du chapitre 1, nous avons montré qu'il existe un lien entre la destruction du cône CBS sur des diffuseurs classiques par  $\mathbf{B}$  et la magnéto-résistance négative de certains systèmes mésoscopiques (section 1.6.4). Une fois de plus, il est possible de faire un parallèle entre la physique des solides et la physique atomique.

Considérons un conducteur contenant des impuretés paramagnétiques. A température finie, leur spin varie au cours du temps à cause des fluctuations thermiques. La diffusion multiple d'une onde de matière électronique par de telles impuretés rend sa composante de spin aléatoire. Les interférences entre ondes électroniques diffusées sont alors réduites. Ce phénomène est

## CHAPITRE 6. AUGMENTATION DE LA RÉTRODIFFUSION COHÉRENTE AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE

---

l'équivalent de la diminution du contraste due à la structure interne des atomes. Si on applique un champ magnétique tel que  $g_i\mu_B B \gg k_B T$ , où  $g_i$  est le facteur gyromagnétique de l'impureté,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température, le spin des impuretés s'oriente suivant  $\mathbf{B}$ . Les fluctuations de la composante de spin de la fonction d'onde sont supprimées et les interférences restaurées. La (jolie) mise en évidence expérimentale de ce phénomène est décrite dans [79].

Dans cette situation, comme pour les atomes, c'est la structure interne des diffuseurs qui est à l'origine d'une chute de contraste. Le champ magnétique permet de geler les degrés de liberté internes et de restaurer les interférences donnant lieu à la localisation faible. Il y a une différence cependant : pour les diffuseurs paramagnétiques, l'effet du champ magnétique est de peupler un seul état de spin (à basse température), alors que pour les diffuseurs atomiques tous les états Zeeman sont uniformément peuplés, et c'est la matrice de diffusion qui est modifiée. Il serait sans doute possible de réaliser un nuage atomique dans lequel les atomes sont (presque) tous dans le même état  $|33\rangle$ . Cela se ferait *sans champ magnétique*, par pompage optique. Toutefois, les amplitudes des chemins renversés ne sont alors égales que pour la diffusion double, pas pour les ordres de diffusion supérieurs [81]. Par contre, on pourrait pomper optiquement les atomes dans l'état  $|33\rangle$  dans un premier temps, puis appliquer un champ magnétique externe. On augmenterait ainsi le nombre d'atomes participant à la diffusion de la lumière. La diffusion multiple jouerait alors un rôle plus important, et le facteur d'augmentation prendrait des valeurs plus importantes que celles rapportées ici.

# Chapitre 7

## Modifications de la forme du cône CBS par un champ magnétique

### 7.1 Introduction

L'influence du champ magnétique sur le cône de rétrodiffusion porte aussi bien sur sa hauteur que sur sa forme. Par exemple, nous avons vu au chapitre 1 qu'un champ perpendiculaire à la lumière incidente fait apparaître des pics secondaires en plus du pic de rétrodiffusion (section 1.6.2), et au chapitre 6 l'aspect plus pointu de ce pic (section 6.5, p. 138). Dans ce chapitre, nous allons étudier certains changements de forme du cône, en particulier l'apparition d'anisotropies. Avec des diffuseurs atomiques, quelques gauss sont suffisants pour modifier son allure. Nous montrerons que certains de ces changements ne sont dûs qu'à la modification des propriétés de diffusion, ce qui illustre à nouveau le peu d'influence des effets magnéto-optiques sur le cône CBS lorsque la sonde est proche de résonance avec une transition atomique. Cependant, loin de résonance, les atomes se comportent comme des diffuseurs classiques et on s'attend à retrouver l'impact de l'effet Faraday. Nous discuterons la possibilité de traiter cette situation avec le formalisme développé dans les chapitres 3 et 4.

## 7.2 Allure du cône en l'absence de champ magnétique

En l'absence de champ magnétique, le nuage atomique ne contient pas de direction privilégiée. Les longs chemins de diffusion explorent toutes les directions avec une probabilité égale, et leur contribution au cône est isotrope. Cette contribution concerne essentiellement son sommet. Les ailes sont au contraire dominées par la diffusion double : plus l'ordre de diffusion est élevé, et plus la région angulaire autour de la direction arrière dans laquelle les interférences sont importantes est étroite (section 1.5.4, p. 32). Les chemins de diffusion double n'explorent qu'une seule direction de propagation, et leur contribution moyenne n'est pas nécessairement isotrope. Cela dépend du canal de polarisation. Par exemple, si le milieu diffusant est semi-infini et que le faisceau incident est perpendiculaire à sa face d'entrée, avec une polarisation circulaire, il y a invariance de l'ensemble {lumière + atomes} par rotation autour du vecteur d'onde incident. Dans ce cas, si la polarisation d'analyse est aussi circulaire, le cône est également invariant par rotation et a une base circulaire. Si les polarisations incidente et d'analyse sont linéaires, il n'y a plus de raison pour que cette invariance soit conservée. On montre cependant que les bissectrices des directions de ces polarisations sont des axes de symétrie : si on renverse le temps, le milieu diffusant est globalement invariant, mais les polarisations d'entrée et d'analyse sont échangées. Une symétrie par rapport à l'une de leurs bissectrices permet de restaurer le système initial. La figure 7.1 montre les lignes de niveaux du cône dans le canal  $lin \perp lin$  pour le  $^{88}\text{Sr}$  (à gauche, épaisseur optique  $b \sim 2$ ) et le  $^{85}\text{Rb}$  (à droite, épaisseur optique  $b \sim 5$ ). Les mesures expérimentales sont comparées aux calculs théoriques (en bas). Ces derniers ne sont pas issus d'une simulation Monte-Carlo, mais du calcul analytique du cône CBS en milieu uniforme semi-infini à l'approximation de diffusion double [54]. Comme les ailes du cône sont dominées par la diffusion double, cela fait peu de différence. On constate qu'au voisinage du centre, les lignes de niveaux sont circulaires, ce qui traduit l'isotropie de la contribution des grands ordres de diffusion. Le cône possède bien deux axes de symétrie perpendiculaires et orientés à  $45^\circ$  par rapport à la polarisation incidente. Pour la transition  $0 - 1$  du Strontium, la forme du cône est proche d'un trèfle à quatre feuilles. La structure interne tend à l'arrondir en forme de coussin : l'anisotropie est nettement moins marquée. Ceci est dû au terme isotrope en  $w_3$  dans l'expression (2.48) de la section efficace différentielle.

## 7.2. ALLURE DU CÔNE EN L'ABSENCE DE CHAMP MAGNÉTIQUE

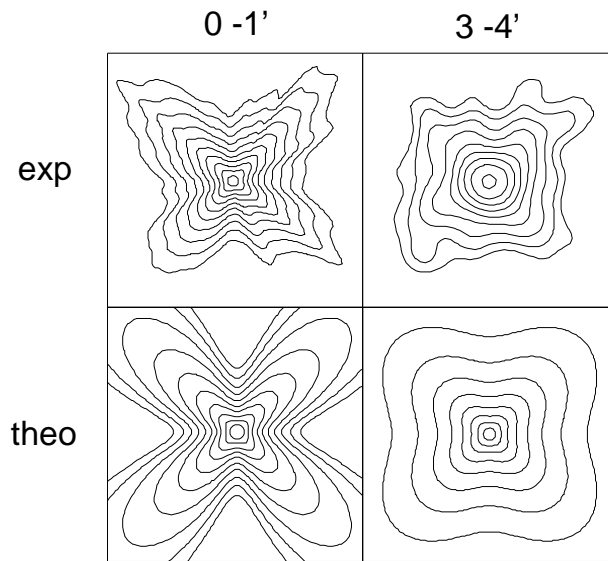


FIG. 7.1 – Lignes de niveaux du cône CBS dans le canal  $lin \perp lin$  en l'absence de champ magnétique pour une transition atomique non-dégénérée (à gauche) et dégénérée (à droite). Les polarisations incidente et d'analyse sont parallèles aux bords de la feuille. Les mesures expérimentales (en haut) sont comparées au calcul théorique (en bas), limité par simplicité à la diffusion double en milieu uniforme semi-infini. Les cônes possèdent bien deux axes de symétrie orthogonaux, et faisant un angle de  $45^\circ$  avec la polarisation d'analyse (voir texte). Au voisinage du sommet, les lignes de niveaux sont circulaires (isotropie des grands ordres de diffusion). Le rôle de la structure interne est de réduire les anisotropies. Les épaisseurs optiques expérimentales sont  $b \sim 2$  pour la transition  $0-1$ , et  $b \sim 5$  pour la transition  $3-4$ . Figure extraite de la référence [80].

### 7.3 Impact de la rotation du dipôle sur le cône CBS

Un champ magnétique externe modifie les propriétés de diffusion des atomes, ainsi que la propagation de la lumière. Pour étudier l'influence de la rotation du dipôle (section 3.4) sur le cône CBS, nous considérons un champ magnétique parallèle au faisceau incident, dont la fréquence est résonante avec la transition atomique.

$$\delta = 0 \tag{7.1}$$

Nous nous plaçons dans le canal où l'anisotropie du cône CBS est la plus marquée, le canal  $lin \perp lin$ .

L'argument que nous avons donné dans la section précédente pour expliquer les axes de symétrie du cône n'est plus valable en l'état : il était fondé sur l'invariance par renversement du temps du milieu diffusant. En présence du champ magnétique, il faut que le milieu diffusant soit invariant par la composition du renversement du temps et de l'inversion du sens de  $\mathbf{B}$ . Cela n'est vrai que pour les atomes dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré. Pour les autres, ce n'est pas vrai car changer  $\mathbf{B}$  en  $-\mathbf{B}$  modifie les énergies des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental. Néanmoins, on peut supposer qu'à petit champ magnétique la symétrie reste approchée.

La figure 7.2 montre des coupes des cônes selon leurs axes de symétrie (simulations Monte-Carlo) pour  $\phi = 2$ . A gauche, pour une transition  $0 - 1$  et à droite pour une transition  $3 - 4$ . Le cône n'a plus la même largeur dans ces deux directions. Il prend alors la forme d'une croix ou d'une ellipse. Pour expliquer ceci, nous proposons le modèle suivant. Il considère la diffusion double sur des atomes effectuant une transition  $0 - 1$ , en négligeant les effets magnéto-optiques. Seule la rotation du dipôle  $\theta_{dip} = \arctan(\phi)$  autour de  $\mathbf{B}$  est prise en compte (voir section 3.4). Nous étudierons l'impact de la structure interne un peu plus loin. La possibilité de négliger les effets magnéto-optiques sera justifiée par les résultats obtenus. La restriction à la diffusion double est justifiée, car c'est elle qui domine la forme du cône pour les atomes de Rubidium, et aussi car les anisotropies décroissent avec l'ordre de diffusion. Nous faisons ensuite une approximation forte : les deux diffuseurs se trouvent dans un même plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  et à la direction du faisceau incident. Elle traduit que les diffuseurs se trouvent tous deux à une distance proche d'un libre parcours moyen de la face d'entrée du milieu. Cependant, leur différence de profondeur est cause de la chute de la hauteur du cône (l'effet Faraday n'est alors pas le même sur les deux chemins renversés).

### 7.3. IMPACT DE LA ROTATION DU DIPÔLE SUR LE CÔNE CBS

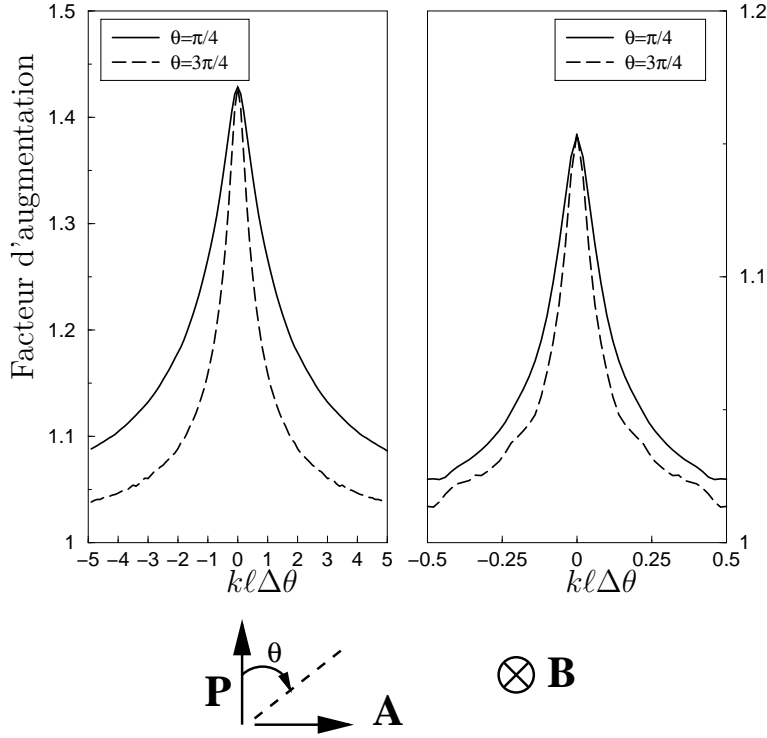


FIG. 7.2 – Coupe de cônes CBS théoriques (simulations Monte-Carlo) selon leurs axes de symétrie pour  $\phi = 2$  ( $\mu_B B = \Gamma$  et  $\delta = 0$ ), dans le canal  $lin \perp lin$ .  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{A}$  désignent les polarisations d'entrée et d'analyse. A gauche : transition 0 – 1 du Strontium. Le milieu diffusant est supposé semi-infini et de densité uniforme. A droite : transition 3 – 4 du Rubidium. Le milieu diffusant est une boule de densité gaussienne. Dans les deux cas, le champ magnétique a pour effet de donner une largeur différente au cône CBS le long de ses axes de symétrie. Lorsque  $\mathbf{B}$  et le vecteur d'onde incident sont parallèles ( $B > 0$ ), le cône est plus large pour  $\theta = +45^\circ$  que pour  $\theta = -45^\circ$ .



## CHAPITRE 7. MODIFICATIONS DE LA FORME DU CÔNE CBS PAR UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Cette approximation sera justifiée ultérieurement par les résultats auxquels elle conduit, et nous l'utilisons car elle permet un calcul analytique simple. Considérons à présent une polarisation incidente  $\mathbf{P}$ . Le premier diffuseur rayonne une onde dans une direction faisant un angle  $\Psi$  avec  $\mathbf{P}$ , vers le second diffuseur. Celui-ci émet une onde dans la direction de rétrodiffusion, où elle est analysée avec une polarisation  $\mathbf{A}$  faisant un angle  $\beta$  avec  $\mathbf{P}$  (figure 7.3). La dépendance angulaire du terme d'interférences entre chemins renversés est alors

$$I_{coh}(\Psi) = \sin^2(\theta_{dip} - \Psi) \sin^2(\theta_{dip} + \Psi - \beta) \quad (7.2)$$

Elle est invariante par la transformation  $\Psi \rightarrow \beta - \Psi$ , ce qui traduit la

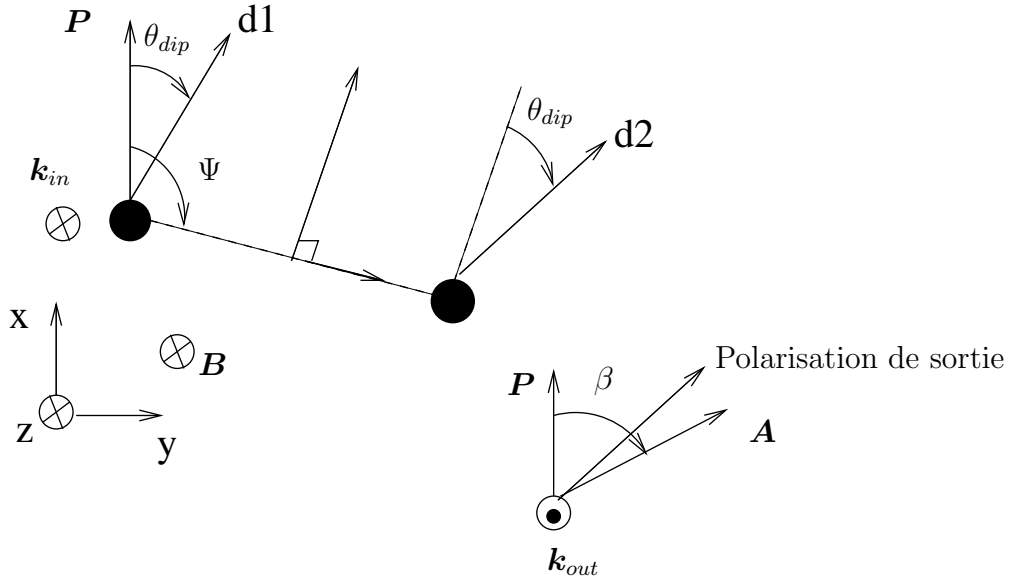


FIG. 7.3 – Schema illustrant le modèle simplifié pour l'influence de la rotation du dipôle sur la forme du cône CBS. Une polarisation  $\mathbf{P}$  entre dans le nuage atomique avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{in} \parallel \mathbf{B}$ , est diffusée dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  et sort dans la direction de rétrodiffusion. Au niveau de chaque diffuseur, la polarisation tourne de  $\theta_{dip}$  autour de  $\mathbf{B}$  (voir texte). La polarisation de sortie est analysée par l'analyseur  $\mathbf{A}$  faisant un angle  $\beta$  avec  $\mathbf{P}$ .

symétrie par rapport aux bissectrices des polarisations. Sa représentation par une courbe polaire est composée de deux paires de lobes le long de ces axes de symétries. Chaque paire est constituée de deux lobes symétriques, et le rapport des intensités entre chaque paire est  $R = \tan^4(\beta/2 - \theta_{dip})$ . Dans la plupart des cas, une paire de lobes domine l'autre, donnant ainsi une forme en croix ou elliptique au cône. Lorsqu'on fait varier  $(\beta/2 - \theta_{dip})$ , soit en

### 7.3. IMPACT DE LA ROTATION DU DIPÔLE SUR LE CÔNE CBS

---

faisant varier le champ magnétique, soit en tournant l'analyseur, l'intensité du lobe dominant décroît tandis que celle du petit lobe croît, jusqu'à ce que  $\beta/2 - \theta_{dip} = \pi/4$ . Les deux paires de lobes ont alors même intensité, et une symétrie d'ordre quatre est restaurée. Au-delà de cette valeur, leurs rôles sont échangés. Le grand axe du cône subit alors une rotation de  $90^\circ$ . Dans le canal  $lin \perp lin$  ( $\beta = \pi/2$ ), cela se produit pour  $B = 0$  (figure 7.1, où le cône a une symétrie d'ordre 4). Dans ce modèle, la relation entre  $B$  et la valeur  $\beta_f$  de l'angle entre les polarisations pour laquelle les paires de lobes sont équilibrées est

$$\beta_f = 2\theta_{dip} + \pi/2 \quad (7.3)$$

Si nous avons négligé la rotation du dipôle et tenu compte de l'effet Faraday, nous aurions une relation du même type, mais  $\theta_{dip}$  serait remplacé par un angle de rotation Faraday. Cette rotation s'effectuant dans le sens opposé, elle aurait pour effet d'échanger les grand et petit axes du cône. Nous avons donc là un moyen de déterminer quel effet domine dans la modification de la forme du cône.

Mais tout d'abord, nous devons évaluer l'effet de la structure interne sur ces résultats. Chaque atome peut effectuer soit une transition Rayleigh, soit une transition Raman. Si chacun fait une transition Rayleigh, on peut répéter l'argument ci-dessus en remplaçant  $\theta_{dip}$  par sa valeur calculée pour les atomes de Rubidium dans la section 3.4. Si au contraire chaque atome effectue une transition Raman, la contribution au cône est isotrope car la polarisation de sortie est circulaire pour chacun des chemins renversés. Le dernier cas, qui pose problème, est celui où un atome effectue une transition Rayleigh et l'autre une transition Raman. Dans ce cas, la polarisation de sortie de l'un des chemins est linéaire, tandis qu'elle est circulaire pour l'autre. Il en résulte que leur contribution au cône CBS est anisotrope, mais ne dépend pas de l'angle  $\beta$  de la même façon que celle d'un chemin avec deux transitions Rayleigh. En particulier, elle ne possède pas la symétrie axiale par rapport aux bissectrices lorsque  $B$  est non-nul. Une analyse sans difficultés techniques, mais assez laborieuse, permet de montrer que cette perte de symétrie est négligeable et que les chemins Rayleigh-Raman contribuent peu par rapport aux Rayleigh-Rayleigh tant que le champ magnétique reste assez faible ( $B \lesssim 2$  G). Elle se fonde sur l'expression (5.12) du coefficient bistatique pour l'intensité cohérente, en négligeant les effets de propagation et en se restreignant au type de transitions considérées pour chaque diffuseur. Le point important est que pour un petit champ magnétique, l'analyse faite pour une transition  $0 - 1$  est directement transposable aux atomes dont la structure interne est dégénérée. L'équation (7.3) reste valable à condition d'employer la rotation du dipôle pour la transition  $3 - 4$ .

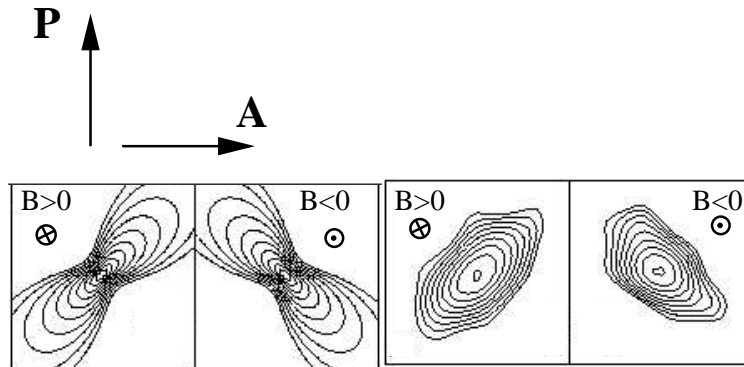


FIG. 7.4 – Cônes de rétrodiffusion cohérente dans le canal  $lin \perp lin$ .  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{A}$  sont les polarisations incidente et d’analyse respectivement. A gauche : modèle théorique pour une transition 0 – 1, pour deux valeurs opposées du champ magnétique. Une paire de lobes a disparu, et le cône n’a plus la même largeur suivant ses axes de symétrie. Le changement de signe de  $B$  inverse les rôles des deux paires de lobes. A droite : mesures expérimentales pour  $B = 8$  G et  $B = -8$  G. Le même phénomène est visible, et le modèle en rend bien compte. La différence de forme des cônes théoriques et expérimentaux a plusieurs causes : la structure interne des atomes, qui le rend plus isotrope, la géométrie du milieu diffusant et l’influence des ordres de diffusion supérieurs à deux pour les cônes expérimentaux (épaisseur optique  $b \sim 5$  pour  $B = 0$  G). Cependant, nous ne nous intéressons ici qu’à l’orientation du cône CBS. Ces résultats sont en accord avec les simulations Monte-Carlo de la figure 7.2.

La figure 7.4 montre des cônes expérimentaux (à droite) et calculés suivant le modèle ci-dessus (sans tenir compte des effets magnéto-optiques). Le sens du grand axe est sans ambiguïté déterminé par la rotation du dipôle. Ce sont donc les effets de diffusion qui l’emportent sur les effets de propagation.

L’équation (7.3) permet de déterminer quantitativement cette domination. En effet, la valeur de  $\beta_f$  est abaissée par l’effet Faraday, et l’écart entre la valeur mesurée expérimentalement et celle prédite par le modèle donne l’ordre de grandeur de l’impact de l’effet Faraday. Sur la figure 7.5, les points expérimentaux (triangles) sont très bien reproduits par l’équation (7.3). Cet excellent accord entre notre modèle simple et l’expérience est dû à la faible épaisseur optique utilisée dans les expériences. Les photons parcourent moins d’un libre parcours moyen en entrant dans le nuage avant d’être diffusés, et la rotation Faraday avant et après la diffusion est petite comparée à la rotation du dipôle.

## 7.4. IMPACT DU DÉSACCORD DE LA SONDE

---

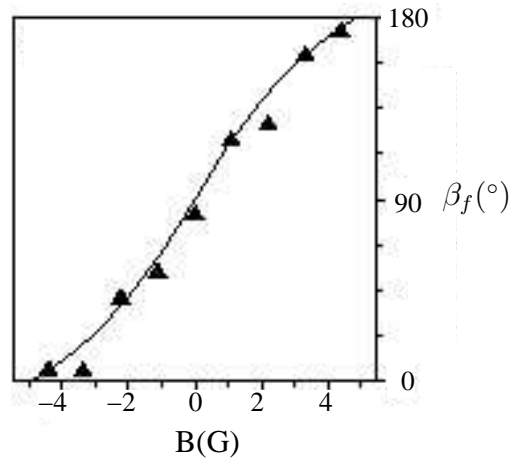


FIG. 7.5 – Angle  $\beta_f$  pour lequel les lobes du cône ont la même longueur, fonction de  $B$ . Les triangles sont les points expérimentaux, et la courbe est la valeur théorique (équation (7.3)). Cet excellent accord entre l'expérience, réalisée à épaisseur optique faible, et le modèle simple montre que c'est la modification du diagramme de rayonnement qui est à l'origine des anisotropies du cône, et pas l'effet Faraday. Figure extraite de la référence [83].

La modification des propriétés de diffusion de l'atome est à l'origine de la modification de la forme du cône. Comme nous l'avons déjà vu lors de la restauration du contraste des interférences, les effets magnéto-optiques sont négligeables. Ceci constitue une grande différence avec les diffuseurs classiques, et illustre les possibilités que recèlent les atomes froids dans la diffusion multiple de la lumière.

## 7.4 Impact du désaccord de la sonde

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des situations pour lesquelles la fréquence lumineuse est accordée avec une transition atomique. Cela était dicté par le résultat que nous souhaitions atteindre, comme la restauration des interférences, mais aussi par des contraintes de validité du formalisme utilisé. D'un autre côté, travailler avec une lumière très désaccordée par rapport à la fréquence atomique  $\omega_0$  permettrait de se placer dans des conditions proches de celles rencontrées avec des diffuseurs classiques. En effet, si la fréquence d'un photon est très éloignée des fréquences de résonance, il n'est pas sensible aux petits écarts entre niveaux fins ou hyperfins. En d'autres termes, le photon n'interagit pas assez longtemps avec l'atome pour sonder sa structure interne. Les atomes de Rubidium, dont l'état fondamental

## CHAPITRE 7. MODIFICATIONS DE LA FORME DU CÔNE CBS PAR UN CHAMP MAGNÉTIQUE

est  $5s^{-1}$ , se comportent alors comme des atomes ne pouvant effectuer qu'une transition  $0 - 1$  en diffusant un photon hors-résonance. Leurs propriétés de diffusion sont alors identiques à celles d'un diffuseur ponctuel classique ou d'un électron élastiquement lié (modèle de Lorentz).

Un grand désaccord signifie que  $\delta$  est grand devant l'écart entre niveaux des structures fine et hyperfine, ce qui n'est pas incompatible avec l'approximation de résonance  $\delta \ll \omega_0$  que nous avons faite aux chapitres 2 et 3. Pour les diffuseurs classiques, l'effet Faraday se produit dans les conditions

$$\Gamma \ll \mu_B B \ll \delta \quad (7.4)$$

Cependant, il n'est pas possible d'utiliser le propagateur (4.23) sous ces conditions, car la biréfringence n'est pas négligeable. En effet, elles conduisent à

$$\phi \sim i\mu_B B / \delta \quad |\phi| \ll 1 \quad (7.5)$$

Au premier ordre en  $B$ , la self-énergie (4.5) est une matrice hermitienne dont les termes non-diagonaux sont proportionnels à  $\phi$ . Les modes propres de propagation sont alors les polarisations circulaires. Ils se propagent avec un libre parcours moyen  $\ell = \ell_0 4\delta^2 / \Gamma^2$ , et les valeurs propres de la self-énergie qui leur sont associées sont

$$\Lambda_{\pm} = 1 \pm \frac{\mu_B B}{\delta} \cos \theta \quad (7.6)$$

Ils se propagent alors avec une différence de phase par unité de longueur

$$\delta\varphi = 2\frac{\mu_B B}{\delta^2} \cos \theta \quad (7.7)$$

On retrouve bien toutes les caractéristiques de l'effet Faraday décrites à la section 1.6.1 pour les diffuseurs classiques, mais l'expression des  $\Lambda_{\pm}$  montre que la différence entre la direction du vecteur d'onde et celle de l'énergie est grande (section 4.2.3). Sur une distance d'un libre parcours moyen, l'écart en position est

$$\frac{\mu_B B}{\pi\Gamma} \lambda \gg \lambda \quad (7.8)$$

En particulier, l'étude des pics secondaires décrits au chapitre 1 (p. 37) nécessite de calculer exactement le propagateur d'un photon dans l'espace réel, en tenant compte de la biréfringence. Cela n'est pas nécessaire dans les systèmes classiques car les propriétés magnéto-optiques du milieu effectif  $y$  sont indépendants des diffuseurs : les premières fixent l'angle entre le vecteur

#### 7.4. IMPACT DU DÉSACCORD DE LA SONDÉ

---

d'onde et la direction de propagation de l'énergie, et les seconds le libre parcours moyen. Si ils sont indépendants, on peut rendre leur produit aussi petit qu'on veut. Remarquons enfin que la condition (7.4) est difficilement compatible en pratique avec la diffusion multiple dans un nuage d'atomes froids. En effet, si on impose  $\delta = 10\mu_B B = 100\Gamma/2$ , le libre parcours moyen est  $10^4$  fois plus grand qu'en l'absence de champ et de désaccord. Pour observer de la diffusion multiple, il faudrait créer un nuage d'épaisseur optique supérieure à 10000. Dans les expériences menées à Nice, le nuage de Rubidium a une épaisseur optique inférieure à 100.

CHAPITRE 7. MODIFICATIONS DE LA FORME DU CÔNE CBS PAR  
UN CHAMP MAGNÉTIQUE

---

# Chapitre 8

## Conclusion et perspectives

*Les rêves n'ont pas grand sens.*

Sturla Sigvatsson

L'objet de ce travail de thèse est l'étude de l'impact d'un champ magnétique sur la localisation faible et la rétrodiffusion cohérente de la lumière par un gaz d'atomes froids. Le résultat principal est la possibilité de restaurer le contraste des interférences entre chemins renversés, en brisant la dégénérescence du niveau fondamental atomique par effet Zeeman et en isolant une transition atomique. Dans ce dernier chapitre, nous montrons l'intérêt potentiel de ce résultat pour l'observation de la localisation forte de la lumière dans un gaz d'atomes froids. Dans cette perspective, nous discutons brièvement d'autres effets qu'il faut prendre en considération, liés au long temps de piégeage des photons dans le nuage atomique. Nous évoquons également une alternative, qui consiste à travailler avec des atomes dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré. Enfin, nous abordons la possibilité d'échanger les rôles entre lumière et atomes : localiser des ondes de matière cohérentes à l'aide d'un potentiel lumineux désordonné.

### 8.1 Localisation forte de la lumière

#### 8.1.1 Lien avec la restauration de la localisation faible

Pour atteindre le régime de localisation d'Anderson, il faut que la lumière soit fortement diffusée et que les chemins de diffusion interfèrent fortement entre-eux. La première condition est remplie par les diffuseurs atomiques, qui sont très résonants, et pour lesquels le critère de Ioffe-Regel (1.6) peut être vérifié. Cependant, les chemins de diffusion qui interfèrent rencontrent des atomes dans le même état initial et les laissent dans le même état final. Si le



niveau fondamental des atomes est dégénéré, le nombre de chemins de diffusions qui interfèrent est réduit, et les interférences sont moins fortes. Il est possible que la structure interne des atomes soit un obstacle à l'observation de la localisation forte de la lumière. Pour y remédier, il faut soit lever la dégénérescence, soit travailler avec des atomes dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré. Cette dernière possibilité sera traitée à la fin de cette section. Il faut cependant remarquer que l'impact de la structure interne sur la localisation forte est un problème ouvert, et qu'il est impossible actuellement d'affirmer s'il est faible ou important.

Au chapitre 6, nous avons décrit une façon de briser la dégénérescence du niveau fondamental qui restaure les interférences entre chemins renversés. En fait, seuls les atomes dans l'état  $|33\rangle$  participent à la diffusion, et ils ne peuvent effectuer qu'une transition fermée. De plus, une seule polarisation est absorbée ou émise. Il est alors clair que la structure interne des atomes ne peut plus jouer le rôle négatif que nous avons décrit ci-dessus. Il est même possible de faire mieux en plaçant au préalable tous les atomes dans l'état  $|33\rangle$  par pompage optique. Ainsi, le mécanisme de restauration des interférences proposé dans cette thèse pourrait favoriser l'observation de la localisation forte de la lumière par des atomes froids de Rubidium.

Les deux sections suivantes abordent deux effets sensibles dans le régime de localisation faible, qui pourraient intervenir dans l'obtention de la localisation forte de la lumière par des atomes froids.

### 8.1.2 Influence de la vitesse résiduelle des atomes

Dans le chapitre 2, nous avons étudié l'influence de l'effet Doppler sur un événement de diffusion. Pour des températures de l'ordre de celles qui règnent dans le MOT ( $\sim 100 \mu\text{K}$  pour les atomes de Rubidium), elle est négligeable. Cependant, après un très grand nombre de diffusions, l'accumulation de petits décalages en fréquence devient importante. Or, dans le régime de localisation forte, la lumière reste longtemps confinée dans une région d'étendue finie. Elle y est donc diffusée un très grand nombre de fois, et sa fréquence évolue dans le temps. Comme la distribution de vitesse des atomes est isotrope, il s'agit d'une évolution diffusive : l'écart quadratique moyen à la fréquence initiale varie comme la racine carrée du nombre  $p$  de diffusions :

$$\langle \delta\omega^2 \rangle^{1/2} \simeq \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} p^{1/2} k v_{\text{rms}} \quad (8.1)$$

où  $v_{\text{rms}}$  est la vitesse quadratique moyenne des atomes. Dans les conditions du pièges magnéto-optique, il suffit de 250 diffusions par des atomes de Ru-

bidium pour que la fréquence se soit écartée de  $\Gamma$  de sa valeur initiale. Des photons initialement résonants se trouvent alors hors-résonance, ne sont plus diffusés efficacement et ne participent plus à la localisation forte. Mais, si on tient compte de la largeur spectrale du laser sonde, des photons initialement peu désaccordés peuvent devenir résonants. Il n'est donc pas clair dans quelle mesure ce phénomène de diffusion de fréquence, lié au mouvement résiduel des atomes, pourra affecter l'observation de la localisation d'Anderson de la lumière.

Son influence a cependant été observée lors d'expériences de piégeage de radiation (dans le régime de localisation faible) [82] : il s'agit d'évaluer la statistique des temps de sortie d'un photon du nuage atomique. Si les diffuseurs sont fixes, on montre qu'il s'agit d'une loi de Poisson, avec une constante de temps qui dépend de  $\Gamma$  et de l'épaisseur optique. Des écarts à cette loi sont observés, qui sont dûs à la redistribution de la fréquence des photons. La méthode de détection de la localisation forte proposée dans [6] est basée sur la distribution des temps de sortie des photons du nuage atomique, et pourrait être affectée par ce phénomène. De plus, l'effet de la vitesse résiduelle des atomes a été observé sur la hauteur du cône CBS [51]. En faisant varier la température du nuage atomique, on fait varier le déphasage par effet Doppler entre chemins renversés, ce qui entraîne une chute (si la température augmente) du contraste des interférences et de la hauteur du cône.

Mentionnons enfin l'effet de la vitesse de recul des atomes : à chaque diffusion, un photon perd un peu de son énergie qui est transmise sous forme d'énergie cinétique à l'atome. Ce phénomène entraîne une dérive de la fréquence lumineuse. Pour la transition 3 – 4 du Rubidium, il faut environ un millier de diffusions pour amener un photon initialement résonant à se désaccorder de  $\Gamma$ .

### 8.1.3 Influence de l'intensité lumineuse

Dans le régime de localisation forte, l'intensité lumineuse à l'intérieur d'une région de localisation résulte de l'interférence de plusieurs ondes. Localement, elle peut être très intense. Le comportement des atomes en tant que diffuseurs et milieu effectif est alors très différent de ce que nous avons vu jusqu'à présent. Le milieu effectif devient optiquement non-linéaire et les atomes peuvent diffuser plusieurs photons à la fois. L'impact de cet effet sur la rétrodiffusion cohérente a été étudié expérimentalement avec des atomes de Strontium [84] : le facteur d'augmentation diminue lorsque l'intensité de la sonde CBS augmente. Une étude théorique [85], qui se restreint à la diffusion de deux photons par deux atomes, montre que les chemins où deux photons sont diffusés ensemble et inélastiquement par le même atome n'ont

pas la même amplitude si ils sont parcourus dans un sens où dans l'autre. Il semble donc que l'effet d'une forte intensité soit de diminuer le contraste des interférences. Ce résultat n'est bien sûr établi que dans le régime de localisation faible, mais illustre les difficultés qui pourront se présenter pour atteindre celui de localisation forte.

#### 8.1.4 Transition 0 – 1 des atomes de $^{88}\text{Sr}$

Pour contourner le problème de la structure interne posé par les atomes de Rubidium, l'idée naturelle est d'utiliser des atomes dont le niveau fondamental n'est pas dégénéré, comme ceux de  $^{88}\text{Sr}$ . Nous avons déjà vu qu'ils permettent d'observer un facteur d'augmentation proche de deux dans les expériences de rétrodiffusion. La principale difficulté est de les refroidir suffisamment pour atteindre le régime de localisation forte. En effet, il est possible de les piéger dans le MOT à une température proche de 1 mK sur la transition 0 – 1 à 461 nm, mais l'absence de structure Zeeman du niveau fondamental ne permet pas de les refroidir davantage en utilisant les techniques habituelles de refroidissement évaporatif dans un piège magnétique. Il est cependant possible de refroidir davantage les atomes de Strontium par des moyens entièrement optiques : il existe une autre transition 0 – 1, avec le même état fondamental que la première, mais un état excité dont la largeur naturelle est très faible, 7 kHz [66]. Le refroidissement sur cette transition permet d'obtenir des températures de l'ordre de  $1\ \mu\text{K}$ , proches de la condensation de Bose-Einstein. Le point difficile est que cette nouvelle largeur naturelle du niveau excité est plus petite que l'énergie de recul de l'atome lors de l'émission spontanée d'un photon : un atome est hors-résonance après avoir diffusé un photon. Ceci est gênant pour un refroidissement efficace, mais pas pour l'observation des phénomènes de localisation, car le faisceau sonde peut avoir une fréquence différente de celle des lasers de piégeage. Une température de 400 nK et une densité dans l'espace des phases de  $10^{-2}$  ont déjà été obtenues, mais, à notre connaissance, aucune expérience de localisation de la lumière n'a encore été faite dans ces conditions.

## 8.2 Localisation d'ondes de matière par un potentiel lumineux désordonné

Les progrès récents dans le domaine de l'optique atomique et de la manipulation de condensats de Bose-Einstein permettent d'envisager dans un futur proche l'observation de la localisation d'ondes de matière atomique

## 8.2. LOCALISATION D'ONDES DE MATIÈRE PAR UN POTENTIEL LUMINEUX DÉSORDONNÉ

---

générée par le désordre. Par rapport au travail présenté dans cette thèse, il s'agit d'invertir les rôles de la lumière et des atomes. En 2002, la transition superfluide-isolant de Mott a été observée [86], avec un condensat de Bose-Einstein placé dans un potentiel lumineux périodique. Lorsque la profondeur des puits de potentiel augmente, les atomes se localisent dans ces puits et perdent leur cohérence de phase. En particulier, il faut fournir une énergie non-nulle pour faire passer un atome d'un puits à l'autre, ce qui n'est pas le cas dans le régime superfluide. Il s'agit d'une localisation engendrée par les interactions interatomiques (problème à  $N$  corps).

La transition conducteur-isolant d'Anderson pourrait être réalisée à l'aide d'un seul atome placé dans une figure de speckle lumineux.

Depuis quelques années, il est devenu possible de réaliser des expériences de physique fondamentale avec des atomes froids, sur des effets jusqu'alors observés en physique de la matière condensée. Les avantages des atomes froids sur les systèmes électroniques résident dans la facilité d'observation et un meilleur contrôle des interactions.



# Annexe A

## Opérateurs tensoriels irréductibles

Une partie de cette annexe reprend les résultats de l'appendice C de la référence [58].

### A.1 Définition et propriétés fondamentales

#### Définition

Un *opérateur tensoriel* est un ensemble d'opérateurs qui se transforment linéairement les uns dans les autres par rotation. Il est dit *irréductible* si l'espace dans lequel il est défini est irréductible par rapport aux rotations. Si la dimension de cet espace est  $d = 2k + 1$ ,  $k$  pouvant être entier ou demi-entier, l'opérateur tensoriel irréductible est dit de rang  $k$  et possède  $2k + 1$  composantes. On le note  $\mathbf{T}^{(k)}$ , et ses composantes  $T_q^{(k)}$  avec  $q \in \{-k, -k + 1, \dots, k - 1, k\}$ .

Les opérateurs tensoriels irréductibles de rang 0 sont appelés opérateurs scalaires, et ceux de rang 1 opérateurs vectoriels.

#### Relations de commutation avec le moment cinétique

Les relations de commutation ci-dessous des  $T_q^{(k)}$  avec les composantes de  $\mathbf{J}$  définissent les composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductible :

$$[J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)} \quad (\text{A.1})$$

$$[J_z, T_q^{(k)}] = q T_q^{(k)} \quad (\text{A.2})$$

On montre alors que si les composantes cartésiennes d'un vecteur de l'espace ordinaire sont  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$ , alors les composantes standard sont

$$V_{+1} = -\frac{V_x + iV_y}{\sqrt{2}} \quad V_0 = V_z \quad V_{-1} = \frac{V_x - iV_y}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.3})$$

### Conjugaison hermitique

$$\mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)\dagger} \text{ si} \quad S_q^{(k)} = (-1)^q T_{-q}^{(k)\dagger} \quad (\text{A.4})$$

Pour  $k$  demi-entier,  $(-1)^q$  signifie  $e^{i\pi q}$ .

### Propriété fondamentale : théorème de Wigner-Eckart

Les éléments de matrice des composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductibles sont donnés par :

$$\langle JM | T_q^{(k)} | J' M' \rangle = \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2J+1}} \langle J || \mathbf{T}^{(k)} || J' \rangle \langle J' k M' q | JM \rangle \quad (\text{A.5})$$

$\langle J || \mathbf{T}^{(k)} || J' \rangle$  est par définition l'élément de matrice réduit.  $\langle J' k M' q | JM \rangle$  est un coefficient de Clebsch-Gordan, dont les propriétés sont présentées plus bas dans cette annexe.

Dans l'annexe B, on utilise les éléments de matrice réduits des opérateurs tensoriels irréductibles de rang 1  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{J}$  :

$$\langle J_e || \mathbf{d} || J \rangle = \sqrt{2J_e + 1} \quad (\text{A.6})$$

$$\langle J || \mathbf{J} || J' \rangle = \delta_{JJ'} \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Produits tensoriels d'opérateurs tensoriels irréductibles

Les résultats présentés dans cette section sont valables pour des opérateurs tensoriels de rang entier.

### Définitions

Soient  $\mathbf{T}^{(k)}$  et  $\mathbf{U}^{(l)}$  deux opérateurs tensoriels irréductibles. On note  $\mathbf{T}^{(k)} \otimes \mathbf{U}^{(l)}$  l'ensemble des  $(2k+1)(2l+1)$  opérateurs  $T_{q_1}^{(k)} U_{q_2}^{(l)}$ . Il s'agit d'un opérateur tensoriel, généralement réductible.

### A.3. COEFFICIENTS DE CLEBSCH-GORDAN

---

$\mathbf{V}^{(K)} \equiv [\mathbf{T}^{(k)}\mathbf{U}^{(l)}]^{(K)}$ , le produit tensoriel d'ordre  $K$ , est l'opérateur tensoriel irréductible de rang  $K$  de composantes

$$V_Q^{(K)} = \sum_{q_1 q_2} \langle k l q_1 q_2 | K Q \rangle T_{q_1}^{(k)} U_{q_2}^{(l)} \quad (\text{A.8})$$

Si  $k = l$ , on définit le produit scalaire

$$\mathbf{T}^{(k)} \cdot \mathbf{U}^{(k)} = \sum_q (-1)^q T_q^{(k)} U_{-q}^{(k)} = (-1)^k \sqrt{2k+1} V_0^{(0)} \quad (\text{A.9})$$

Par exemple, si on considère deux vecteurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  de l'espace ordinaire, le produit tensoriel  $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$  est un opérateur tensoriel agissant dans un espace de dimension 9, réductible par rapport aux rotations. Il y a trois sous-espaces irréductibles de dimension 1, 3 et 5 respectivement. Par rapport à la matrice  $V_i W_j$ , ils correspondent à la décomposition en trace, partie antisymétrique et partie symétrique sans trace :

$$V_i W_j = \frac{1}{3} V_p W_p \delta_{ij} + \frac{1}{2} [V_i W_j - V_j W_i] + \frac{1}{2} \left[ V_i W_j + V_j W_i - \frac{2}{3} V_p W_p \delta_{ij} \right] \quad (\text{A.10})$$

En termes de vecteurs, les opérateurs  $[\mathbf{V}\mathbf{W}]^{(0)}$  et  $[\mathbf{V}\mathbf{W}]^{(1)}$  sont proportionnels au produit scalaire et au produit vectoriel de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$ .

#### Eléments de matrice réduits

Si  $\mathbf{T}^{(k)}$  et  $\mathbf{U}^{(l)}$  agissent sur le même système, on a la formule générale :

$$\begin{aligned} \langle J' || [\mathbf{T}^{(k)}\mathbf{U}^{(l)}]^{(K)} || J \rangle &= (-1)^{K+J+J'} \sqrt{2K+1} \\ &\times \sum_{J''} \left\{ \begin{matrix} k & l & K \\ J & J' & J'' \end{matrix} \right\} \langle J' || \mathbf{T}^{(k)} || J'' \rangle \langle J'' || \mathbf{U}^{(l)} || J \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où le terme entre accolades est un symbole  $6j$  de Wigner, défini plus bas dans cette annexe.

## A.3 Coefficients de Clebsch-Gordan

### Définition

L'état d'un système possédant un moment cinétique  $\mathbf{j}$  peut être décrit dans une base de  $(2j+1)$  vecteurs propres communs à  $\mathbf{j}^2$  et  $j_z$ , notés  $|jm\rangle$ . Cet espace des états est irréductible par rapport aux rotations, et les vecteurs



$|jm\rangle$  en forment une base de dimension  $2j + 1$ . Lorsqu'on additionne deux moments cinétiques  $\mathbf{j}_1$  et  $\mathbf{j}_2$ , on peut utiliser deux bases pour les nouveaux vecteurs d'état :

- les  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  vecteurs  $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$  qui sont les produits tensoriels des vecteurs de base associés à  $\mathbf{j}_1$  et  $\mathbf{j}_2$
- les vecteurs  $|JM\rangle$  qui sont les  $(2J + 1)$  vecteurs de la base standard associée à  $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$  pour  $J \in \{|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2\}$ .

Les premiers sont les vecteurs de base d'une représentation réductible, produit tensoriel de deux représentations irréductibles de dimensions  $2j_1 + 1$  et  $2j_2 + 1$ , tandis que les seconds sont les vecteurs de base d'une famille de représentations irréductibles de dimension  $2J + 1$ . La formule (A.8) montre que les coefficients de Clebsch-Gordan sont les coefficients de passage d'une base à l'autre :

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \quad (\text{A.12})$$

### Principales propriétés

- Les coefficients de Clebsch-Gordan sont réels.
- Règles de sélection :  
 $m_1 + m_2 = M$  et  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ , sinon le coefficient est nul.
- Règles d'échange des moments cinétiques :

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | JM\rangle \quad (\text{A.13})$$

$$= (-1)^{j_1 - J + m_2} \sqrt{\frac{2J + 1}{2j_1 + 1}} \langle J j_2 M - m_2 | j_1 m_1\rangle \quad (\text{A.14})$$

$$= (-1)^{j_2 - J - m_1} \sqrt{\frac{2J + 1}{2j_2 + 1}} \langle j_1 J - m_1 M | j_2 m_2\rangle \quad (\text{A.15})$$

$$= (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_1 j_2 - m_1 - m_2 | J - M\rangle \quad (\text{A.16})$$

- Relations d'orthogonalités :

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J' M'\rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (\text{A.17})$$

$$\sum_{J, M} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | JM\rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (\text{A.18})$$

## A.4 Définition des symboles $6j$

Lorsqu'on additionne trois moments cinétiques  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{j}''$ , on peut procéder essentiellement de deux manière pour évaluer leur somme  $\mathbf{J}$ .

- On peut tout d'abord additionner  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{j}'$ , puis  $\mathbf{j}''$  :  $\mathbf{j}' + \mathbf{j} = \mathbf{g}'$  et  $\mathbf{J} = \mathbf{g}' + \mathbf{j}''$ . Les vecteurs de bases sont

$$|(j'j)g', j''; JM\rangle = \sum_{m, m', m'', \mu'} |jj'j''mm'm''\rangle \langle j'jm'm|g'\mu'\rangle \langle g'j''\mu'm''|JM\rangle \quad (\text{A.19})$$

- Ou on peut d'abord additionner  $\mathbf{j}$  avec  $\mathbf{j}''$ , puis  $\mathbf{j}'$  :  $\mathbf{j} + \mathbf{j}'' = \mathbf{g}''$  et  $\mathbf{j}' + \mathbf{g}'' = \mathbf{J}$ . Dans ce cas, les vecteurs de bases sont

$$|j', (jj'')g''; JM\rangle = \sum_{m, m', m'', \mu''} |jj'j''mm'm''\rangle \langle jj''mm''|g''\mu''\rangle \langle j'g''m'\mu''|JM\rangle \quad (\text{A.20})$$

Les deux systèmes de base devant être physiquement équivalents, on passe de l'un à l'autre par une transformation unitaire. Les coefficients  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \right\}$ , appelés symboles  $6j$ , sont reliés aux coefficients de cette transformation par

$$\begin{aligned} & \langle j', (jj'')g''; JM | (j'j)g', j''; J'M' \rangle \\ &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \sqrt{(2g'+1)(2g''+1)} (-1)^{j+j'+j''+J} \left\{ \begin{matrix} j' & j & g' \\ j'' & J' & g'' \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Cette définition d'apparence compliquée confère des propriétés de symétrie importantes aux symboles  $6j$  : ils sont invariants par permutation de deux colonnes, ou par échange de deux éléments de la première ligne avec ceux qui leur correspondent dans la deuxième ligne.

### Relation fondamentale en fonction des coefficients de Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} & \sum_{M_1, M_2, M_3, m_1, m_2} (-1)^{J_1+J_2+J_3+M_1+M_2+M_3} \\ & \langle J_1 J_2 M_1 - M_2 | j_3 - m_3 \rangle \langle J_2 J_3 M_2 - M_3 | j_1 - m_1 \rangle \langle J_3 J_1 M_3 - M_1 | j_2 - m_2 \rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3' - m_3' \rangle \\ &= \delta_{j_3, j_3'} \delta_{m_3, m_3'} (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \right\} \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

## ANNEXE A. OPÉRATEURS TENSORIELS IRRÉDUCTIBLES

---

## Annexe B

# Développement de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ en puissances de $(g - g_e)$

Dans cette annexe, nous développons le calcul de la section efficace différentielle qui a été abordé dans la section 3.3. Nous y avons montré que

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi M_J} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy e^{-(x+y)} \frac{(i(y\bar{\phi} - x\phi)(g - g_e))^n}{n!} \times \text{Tr}_g[(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})J_0^n] \quad (\text{B.1})$$

## Expression générale

Le terme  $n = 0$  est donné par l'équation (3.47). Pour  $n \geq 1$ , nous allons exprimer  $(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})J_0^n$  à l'aide de ses composantes standard. Exprimons tout d'abord  $(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})$ . Deux utilisations de la formule (A.8) nous donnent

$$(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d}) = \sum_{q, q', K, Q, K', Q'} (-1)^{q+q'} \langle 11 -q -q' | KQ \rangle \langle 11 q q' | K' q' \rangle [\bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\epsilon}']_Q^{(K)} [\mathbf{d}\mathbf{d}]_{Q'}^{(K')} \quad (\text{B.2})$$

En utilisant les propriétés des coefficients de Clebsch-Gordan, notamment (A.16) et (A.17), on trouve

$$(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{d}) = \sum_{K, Q} (-1)^{K-Q} [\bar{\mathbf{E}} \boldsymbol{\epsilon}']_Q^{(K)} [\mathbf{d}\mathbf{d}]_{-Q}^{(K)} \quad (\text{B.3})$$

ANNEXE B. DÉVELOPPEMENT DE  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  EN PUISSANCES DE  $(g - g_e)$

En procédant de même pour  $(\bar{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})$ , puis pour le produit de ces deux expressions, on obtient

$$(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\epsilon' \cdot \mathbf{d})(\bar{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}) = \sum_{K, K', L, m} (-1)^{L-m} [[\bar{\mathbf{E}}\epsilon']^{(K)}[\bar{\epsilon}'\mathbf{F}]^{(K')}]_m^{(L)} [[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K)}[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K')}]_{-m}^{(L)} \quad (\text{B.4})$$

En appliquant ensuite  $n$  fois la formule (A.8), on trouve finalement :

$$(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\epsilon' \cdot \mathbf{d})(\bar{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})J_0^n = \sum_{K, K', L, Q} (-1)^{L-Q} [[\bar{\mathbf{E}}\epsilon']^{(K)}[\bar{\epsilon}'\mathbf{F}]^{(K')}]_{-Q}^{(L)} O_Q^{(L_n)}(K, K', L, n) \quad (\text{B.5})$$

avec

$$O_Q^{(L_n)}(K, K', L, n) = \sum_{L_1 \dots L_{n-1}} (\langle L_1 Q_0 | L_1 Q \rangle \dots \langle L_{n-1} Q_0 | L_n Q \rangle) [\dots [[[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K)}[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K')}]^{(L)} \mathbf{J}]^{(L_1)} \dots \mathbf{J}]_Q^{(L_n)} \quad (\text{B.6})$$

Dans cette expression, il faut que  $L_{i+1} \neq L_i$  afin que le produit des coefficients de Clebsch-Gordan soit non-nul.

Prendre la trace revient à sélectionner la composante scalaire de cet opérateur, en faisant  $L_n = 0$  et  $Q = 0$ . Exprimons la à l'aide des éléments réduits :

$$\frac{1}{2J+1} \text{Tr}_g [(\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d})(\epsilon' \cdot \mathbf{d})(\bar{\epsilon}' \cdot \mathbf{d})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})J_0^n] = \sum_{K, K', L} \frac{(-1)^L}{\sqrt{2J+1}} [[\bar{\mathbf{E}}\epsilon']^{(K)}[\bar{\epsilon}'\epsilon]^{(K')}]_0^{(L)} \langle J || O^{(0)}(K, K', L, n) || J \rangle \quad (\text{B.7})$$

Les éléments de matrice réduits se calculent par applications successives de la formule (A.11).

## Contribution du terme $n = 1$

A titre d'exemple, calculons le terme du premier ordre. Le calcul de la trace impose  $L_1 = 0$ . Or  $\mathbf{J}$  est un opérateur tensoriel irréductible de rang 1. Seuls les termes avec  $L = 1$  contribuent à  $O^{(0)}(K, K', L, 1)$ .

$[[\bar{\mathbf{E}}\epsilon']^{(K)}[\bar{\epsilon}'\epsilon]^{(K')}]^{(1)}$  est un vecteur  $\mathbf{V}_{KK'}$  qu'on peut exprimer comme suit en

appliquant (3.15) et (3.16) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{01} &= -\frac{i}{\sqrt{6}}(\overline{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}')(\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \times \mathbf{F}) \\
\mathbf{V}_{10} &= -\frac{i}{\sqrt{6}}(\overline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\epsilon}')(\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \cdot \mathbf{F}) \\
\mathbf{V}_{11} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}((\overline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\epsilon}') \times (\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \times \mathbf{F})) \\
\mathbf{V}_{12} &= \frac{i}{2\sqrt{30}}[2(\overline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\epsilon}')(\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \cdot \mathbf{F}) - 3[\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \cdot (\overline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\epsilon}')] \mathbf{F} - 3[\mathbf{F} \cdot (\overline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\epsilon}')] \overline{\boldsymbol{\epsilon}'}] \\
\mathbf{V}_{21} &= \frac{i}{2\sqrt{30}}[2(\overline{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}')(\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \times \mathbf{F}) - 3[\overline{\mathbf{E}} \cdot (\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \times \mathbf{F})] \boldsymbol{\epsilon}' - 3[\boldsymbol{\epsilon}' \cdot (\overline{\boldsymbol{\epsilon}'} \times \mathbf{F})] \overline{\mathbf{E}}] \\
\mathbf{V}_{22} &= -\frac{i}{2\sqrt{10}}[(\overline{\mathbf{E}} \times \mathbf{F}) + (\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{F})(\overline{\mathbf{E}} \times \overline{\boldsymbol{\epsilon}'}) + (\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\boldsymbol{\epsilon}'}) (\boldsymbol{\epsilon}' \times \mathbf{F}) + (\overline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F})(\boldsymbol{\epsilon}' \times \overline{\boldsymbol{\epsilon}'})]
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$O^{(0)}(K, K', L, 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}[[[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K)}[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K')}]^{(L)} \mathbf{J}]^{(0)} \quad (\text{B.8})$$

En utilisant (A.11) et les valeurs des éléments de matrice réduits de  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{d}$  donnés dans l'annexe A, on montre que

$$\begin{aligned}
\langle J || [[[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K)}[\mathbf{d}\mathbf{d}]^{(K')}]^{(L)} \mathbf{J}]^{(0)} || J \rangle &= (-1)^{K+K'} \sqrt{J(J+1)(2K+1)(2K'+1)(2J_e+1)^2} \delta_{1,L} \\
&\times \left\{ \begin{matrix} 1 & K & K' \\ J & J & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & K \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & K' \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \\
&\quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

Et la contribution de l'ordre 1 à la section efficace différentielle est

$$\begin{aligned}
c_1(\phi, \boldsymbol{\epsilon}', \boldsymbol{\epsilon}) &= \frac{3\sigma_0(\delta)}{8\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-(x+y)} (i(y\bar{\phi} - x\phi)(g - g_e)) \\
&\times \sum_{K, K'} (-1)^{K+K'} (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{V}_{KK'}) \sqrt{3J(J+1)(2J+1)(2K+1)(2K'+1)(2J_e+1)} \\
&\times \left\{ \begin{matrix} 1 & K & K' \\ J & J & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & K \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & K' \\ J & J & J_e \end{matrix} \right\} \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Le processus peut-être continué jusqu'à n'importe quelle valeur de  $n$ . Les grandes valeurs de  $n$  présentent cependant peu d'intérêt car obtenir leur contribution demande autant, sinon plus, d'efforts que le travail direct sur (3.38).

ANNEXE B. DÉVELOPPEMENT DE  $\frac{D\sigma}{D\Omega}$  EN PUISSANCES DE  
 $(G - G_E)$

---

## Annexe C

# Restauration du contraste des interférences à grand champ magnétique

Nous montrons qu'à grand champ magnétique, le contraste des interférences est bien restauré. Pour cela, nous nous appuyons sur le fait que pour  $\mu_B B \gg \Gamma$ , seuls les atomes dans l'état  $|33\rangle$  participent à la diffusion, et qu'ils se comportent comme des antennes n'émettant et ne recevant que la polarisation  $\mathbf{e}_1$ . De plus, l'atome retombe dans son état initial après diffusion, et le photon diffusé à même fréquence que le photon incident. On note

$$\tilde{t}_{mm'} = \frac{t_{mm'}}{t(\omega)} \quad (\text{C.1})$$

où  $t_{mm'}$  et  $t(\omega)$  sont définis par (3.10) et (3.11), et  $\mathcal{N}$  la matrice des indices (4.22). Les coefficients bistatiques (5.11) et (5.12) prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \gamma_L^{(p)} &= \left( \frac{9(\Gamma^2/4)}{8\pi(2J_e + 1)\ell_0((\mu_B B)^2 + \Gamma^2/4)} \right)^p \frac{4\pi}{A} \int_{V^p} d\mathbf{r}_1 \prod_{i=1}^{p-1} d\Omega_{i,i+1} dr_{i,i+1} \\ &\times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' e^{ikz_p \mathcal{N}} \tilde{t}_{33} \dots \tilde{t}_{33} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{33} e^{ikz_1 \mathcal{N}} \boldsymbol{\epsilon}) \\ &\times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger} \tilde{t}_{33}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \dots \tilde{t}_{33}^\dagger e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger} \boldsymbol{\epsilon}') \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \gamma_C^{(p)}(\Delta\theta = 0) &= \left( \frac{9(\Gamma^2/4)}{8\pi(2J_e + 1)\ell_0((\mu_B B)^2 + \Gamma^2/4)} \right)^p \frac{4\pi}{A} \text{Re} \int_{V^p} d\mathbf{r}_1 \prod_{i=1}^{p-1} d\Omega_{i,i+1} dr_{i,i+1} \\ &\times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' e^{ikz_p \mathcal{N}} \tilde{t}_{33} \dots \tilde{t}_{33} e^{ikr_{1,2} \mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{33} e^{ikz_1 \mathcal{N}} \boldsymbol{\epsilon}) \\ &\times (\bar{\boldsymbol{\epsilon}} e^{-ikz_p \mathcal{N}^\dagger} \tilde{t}_{33}^\dagger \dots \tilde{t}_{33}^\dagger e^{-ikr_{1,2} \mathcal{N}^\dagger} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \tilde{t}_{33}^\dagger e^{-ikz_1 \mathcal{N}^\dagger} \boldsymbol{\epsilon}') \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$



ANNEXE C. RESTAURATION DU CONTRASTE DES  
INTERFÉRENCES À GRAND CHAMP MAGNÉTIQUE

---

Ils ne diffèrent que par le terme de la ligne inférieure, qui est le complexe conjugué de l'amplitude directe pour  $\gamma_L^{(p)}$  et de l'amplitude renversée pour  $\gamma_C^{(p)}$ . A rétrodiffusion, les intensités cohérente et incohérente sont égales si ces deux termes sont égaux :

$$\bar{\epsilon}' e^{ikz_p \mathcal{N}} \tilde{t}_{33} \dots \tilde{t}_{33} e^{ikr_{12} \mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}_{12}} \tilde{t}_{33} e^{ikz_1 \mathcal{N}} \epsilon = \bar{\epsilon}' e^{ikz_1 \mathcal{N}} \tilde{t}_{33} e^{ikr_{12} \mathcal{N}} \Delta_{\mathbf{r}_{12}} \tilde{t}_{33} \dots \tilde{t}_{33} e^{ikz_p \mathcal{N}} \epsilon \quad (\text{C.4})$$

Pour établir cette égalité, nous allons exprimer  $\mathcal{N}$  et  $\tilde{t}_{33}$ .

## C.1 Diffusion par un atome

Lorsqu'un photon est diffusé par un atome, seule la composante selon  $\mathbf{e}_1$  de sa polarisation excite la transition atomique. Et la polarisation émise est  $\mathbf{e}_1$ . On peut donc écrire que l'action de  $\tilde{t}_{33}$  sur une polarisation  $\epsilon$  est celle d'un projecteur sur  $\mathbf{e}_1$  :

$$\tilde{t}_{33} \epsilon \propto \mathbf{e}_1 (\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \epsilon) \quad (\text{C.5})$$

## C.2 Propagateur du photon

Lorsque  $\mu_B B \gg \Gamma$ , les coefficients  $\zeta$ ,  $\eta$  et  $\xi$  (équations (3.25)-(3.27)) prennent les valeurs<sup>1</sup>

$$\zeta = -i \frac{B}{6} \quad \eta = -\frac{B}{6} \quad \xi = i \frac{B}{6} \quad (\text{C.6})$$

On montre alors que  $\Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{e}_1$  est un vecteur propre de propagation dans la direction  $\mathbf{r}$ , associé à la valeur propre  $\Lambda_- = -iB(1 + \cos^2 \theta)/6$ , ce qui correspond à un libre parcours moyen  $\ell = 6\ell_0/(1 + \cos^2 \theta)$ . L'autre mode propre lui est orthogonal, et est associé à la valeur propre  $\Lambda_+ = 0$ . Ceci signifie qu'une polarisation  $\mathbf{V}_+$  n'interagit pas avec les atomes, et se propage dans le nuage atomique sans atténuation. Ce résultat était prévisible, car le lien entre propagation et diffusion est étroit. La self-énergie qui intervient dans  $\mathcal{N}$  dépend de la moyenne des  $\tilde{t}_{mm'}$ . Dans les circonstances présentes, cette moyenne est dominée par  $\tilde{t}_{33}$ , qui est un projecteur sur  $\mathbf{e}_1$ .

Finalement, si une polarisation  $\epsilon = c\Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{e}_1 + d\mathbf{V}_+$  se propage dans la direction  $\mathbf{r}$ , on a

$$e^{ikr \mathcal{N}} \epsilon = e^{ikr} (c e^{-r(1+\cos^2 \theta)/(12\ell_0)} \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{e}_1 + d\mathbf{V}_+) \quad (\text{C.7})$$

---

<sup>1</sup>Le facteur  $1/6$  n'est pas la différence des facteurs de Landé. Il dépend des coefficients de Clebsch-Gordan.

### C.3 Restauration du contraste

En introduisant le libre parcours moyen  $\ell_{i,j} = 6\ell_0/(1 + \cos^2 \theta_{i,j})$ , la condition (C.4) devient :

$$\begin{aligned} & (\vec{\epsilon}' \cdot \mathbf{e}_1) e^{-z_p/2\ell_{out}} (\mathbf{e}_{-1} \Delta_{\mathbf{r}_{p-1,p}} \mathbf{e}_1) \dots e^{-r_{1,2}/2\ell_{1,2}} (\mathbf{e}_{-1} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \mathbf{e}_1) e^{-z_1/(2\ell_{in})} (\mathbf{e}_{-1} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \\ & = (\vec{\epsilon}' \cdot \mathbf{e}_1) e^{-z_1/2\ell_{out}} e^{-r_{1,2}/2\ell_{1,2}} (\mathbf{e}_{-1} \Delta_{\mathbf{r}_{1,2}} \mathbf{e}_1) \dots (\mathbf{e}_{-1} \Delta_{\mathbf{r}_{p,p-1}} \mathbf{e}_1) e^{-z_p/2\ell_{in}} (\mathbf{e}_{-1} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Les deux membres diffèrent par un facteur  $\exp((z_p - z_1)(1/\ell_{in} - 1/\ell_{out})/2)$ . Or, dans la direction de rétrodiffusion,  $\theta_{out} = \pi - \theta_{in}$ , et  $\ell_{in} = \ell_{out}$ . On en déduit l'égalité des amplitudes des chemins renversés pour tous les ordres de diffusion, et quel que soit le canal de polarisation. Le contraste des interférences est donc bien rétabli par un grand champ magnétique. Cependant, la diffusion simple donne une contribution non-nulle au signal de rétrodiffusion. Le facteur d'augmentation ne pourra pas atteindre la valeur maximale 2.

Une remarque s'impose ici : les valeurs des facteurs de Landé n'interviennent pas explicitement dans le raisonnement ci-dessus. Il importe cependant qu'elles soient distinctes pour les deux niveaux fondamental et excité, sinon il n'est pas possible d'isoler une transition : toutes les transitions  $|Jm\rangle \rightarrow |(J+1)(m+1)\rangle$  auraient la même fréquence de résonance. Cela modifierait la manière d'effectuer la moyenne interne : on ne pourrait plus se restreindre à  $m = m' = 3$ , et les opérateurs  $\tilde{t}_{mm'}$  ne seraient plus des projecteurs de rang 1.

ANNEXE C. RESTAURATION DU CONTRASTE DES  
INTERFÉRENCES À GRAND CHAMP MAGNÉTIQUE

---

# Bibliographie

- [1] P. W. Anderson, “Absence of diffusion in certain random lattices”, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [2] P. W. Anderson, “The question of classical localization : a theory of white paint?”, Phil. Mag. B **52**, 505 (1985).
- [3] D. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, R. Righini, “Localization of light in a disordered medium”, Nature **390**, 671 (1997).
- [4] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer et G. Maret, “Localization or classical diffusion of light ?” Nature **398**, 206 (1999). (Commentaire sur [3]).
- [5] D. Wiersma, J. G. Rivas, P. Bartolini, A. Lagendijk et R. Righini, Nature **398**, 207 (1999). (Réponse à [4]).
- [6] E. Mandonnet, *Etude théorique d'un gaz de Bose ultra-froid : 1. Diffusion et localisation de la lumière 2. Condensation de Bose-Einstein en dimensionnalité réduite*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2000).
- [7] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C.A. Müller, Ch. Miniatura and R. Kaiser, “Coherent backscattering of light by cold atoms”, Phys. Rev. Lett. **83**, 5266 (1999).
- [8] T. Jonckheere, C.A. Müller, R. Kaiser, Ch. Miniatura and D. Delande, “Multiple scattering of light by atoms in the weak localization regime”, Phys. Rev. Lett. **85**, 4269 (2000).
- [9] F. C. MacKintosh, S. John, “Coherent backscattering of light in the presence of time-reversal-noninvariant and parity-nonconserving media”, Phys. Rev. B **37**, 1884 (1988).
- [10] F. A. Erbacher, R. Lenke, G. Maret, “Multiple light scattering in magneto-optically active media”, Europhys. Lett. **21**, 551 (1993).
- [11] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media* (Academic, New York, 1978), Vol. 1.
- [12] E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard and G. Maret, “Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media”, J. Phys. (France) **49**, 77 (1988).

- 
- [13] M. B. van der Mark, M. P. van Albada and A. Lagendijk, “Light scattering in strongly scattering media : multiple scattering and weak localization”, *Phys. Rev. B* **37**, 3575 (1988).
- [14] T. M. Nieuwenhuizen and J. M. Luck, “Skin layer of diffusive media”, *Phys. Rev. E* **48**, 569 (1993).
- [15] J. S. Langer and T. Neal, “Breakdown of the concentration expansion for the impurity resistivity of metals”, *Phys. Rev. Lett* **16**, 984 (1966).
- [16] B. Kramer, A. McKinnon, “Localization :theory and experiment”, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469 (1993).
- [17] P. Drude, “Zur Elektronentheorie” *Ann. d. Physik* **1**, 566 et **3**, 369 (1900) et **7**, 687 (1902).
- [18] S. Chandrasekhar, *Radiative transfer* (Dover, New-York, 1960).
- [19] F. Ladieu, M. Sanquer, “Interferences in disordered mesoscopic insulators”, in E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard et J. Zinn-Justin (eds.), *Mesosopic quantum physics*, Les Houches 1994 (Elsevier, Amsterdam, 1995).
- [20] N. Mott, *Metal-Insulator Transitions*, (Taylor and Francis, 1990).
- [21] A. Ioffe, A. Regel, “Non-crystalline, amorphous, and liquid electronic semi-conductors”, *Progr. Semicond.* **4**, 237 (1960).
- [22] S. Chakravarty, A. Schmid, “Weak localization : the quasiclassical theory of electrons in a random potential”, *Phys. Rep.* **140**, 193 (1986).
- [23] E. Larose, L. Margerin, B. A. van Tiggelen, M. Campillo, “Observation of weak localization of seismic waves”, *arxiv : cond-mat/0403173*.
- [24] H. C. van de Hulst, *Light scattering from small particles* (Dover, New York, 1981).
- [25] Y. Kuga et A. Ishimaru, “Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles ”, *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 831 (1984).
- [26] M. P. van Albada et A. Lagendijk, “Observation of weak localization of light in a random medium”, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2692 (1985).
- [27] P. E. Wolf et G. Maret, “Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media”, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
- [28] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique Quantique*, vol. 3 de *Physique Théorique* (Éditions Mir, Moscou, 1975).
- [29] D. S. Saxon, “Tensor scattering matrix for the electromagnetic field”, *Phys. Rev.* **100**, 1771 (1955).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [30] B. A. van Tiggelen and R. Maynard, “Reciprocity and coherent backscattering of light”, in R. Burridge, G. Papanicolaou and L. Pastur, editors, *Waves in random and other complex media*, p. 247-271 (Springer Verlag, Berlin, 1997).
- [31] L. Onsager, “Reciprocal relations in irreversible processes II”, *Phys. Rev.* **38**, 2265 (1931).
- [32] H. B. G. Casimir, “On Onsager’s principle of microscopic reversibility”, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 343 (1945).
- [33] D. S. Wiersma, M. P. van Albada, B. A. van Tiggelen et A. Lagendijk, “Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4193 (1995).
- [34] B. W. Hapke, R. M. Nelson et W. D. Smythe, “The opposition effect of the Moon : the contribution of coherent backscattering”, *Science* **260**, 509 (1993).
- [35] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1975).
- [36] G. Labeyrie, C. A. Müller, D. S. Wiersma, C. Miniatura, R. Kaiser, “Observation of coherent backscattering of light by cold atoms”, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 672 (2000).
- [37] E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard, “Coherent backscattering of light by disordered media : analysis of the peak line shape”, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1471 (1986).
- [38] D. S. Wiersma, M. P. van Albada, “An accurate technique to record the angular distribution of backscattered light”, *Rev. Sci. Instrum.* **66**, 5473 (1995).
- [39] L. Landau et E. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus*, vol. 8 de *Physique Théorique* (Mir, Moscou, 1969).
- [40] R. Lenke, R. Lehner and G. Maret, “Magnetic-field effects on coherent backscattering of light in case of Mie spheres”, *Europhys. Lett.* **52**, 620 (2000).
- [41] R. Lenke and G. Maret, “Magnetic field effects on coherent backscattering of light”, *Eur. Phys. J. B* **17**, 171 (2000).
- [42] A. S. Martinez, R. Maynard, “Faraday effect and multiple scattering of light”, *Phys. Rev. B* **50**, 3714 (1994).
- [43] V. D. Ozrin “Exact solution for coherent backscattering of polarized light from a random medium of Rayleigh scatterers”, *Waves in Random Media* **2**, 141 (1992).

- 
- [44] E. E. Gorodnichev, S. L. Dudarev and D. B. Rogozkin, “Coherent wave backscattering by random medium. Exact solution of the albedo problem”, *Phys. Lett. A* **144**, 48 (1990).
- [45] E. Amic, J. M. Luck and T. M. Nieuwenhuizen, “Multiple Rayleigh scattering of electromagnetic waves”, *J. Phys. I France* **7**, 445 (1997).
- [46] B. A. van Tiggelen, R. Maynard and T. M. Nieuwenhuizen, “Theory for multiple light scattering from Rayleigh scatterers in magnetic fields”, *Phys. Rev. E* **53**, 2881 (1996).
- [47] D. Lacoste and B. A. van Tiggelen, “Coherent backscattering of light in a magnetic field”, *Phys. rev. E* **61**, 4556 (2000).
- [48] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, 1980).
- [49] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [50] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [51] G. Labeyrie, communication privée.
- [52] G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, C. Miniatura and R. Kaiser, “Coherent backscattering of light by cold atoms : Theory meets experiment”, *Europhys. Lett.*, **61**, 327-333 (2003).
- [53] T. Jonckheere, *Diffusion d’ondes dans un milieu atomique : chaos quantique et diffusion multiple*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2001); [http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/04/10/index\\_fr.html](http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/04/10/index_fr.html)
- [54] C. Müller, *Localisation faible de la lumière dans un gaz d’atomes froids : rétrodiffusion cohérente et structure quantique interne*, Thèse de doctorat, Universités de Nice-Sophia Antipolis et de Munich (2001); [http://www.ub.uni-muenchen.de/elektronische\\_dissertationen/physik/Mueller\\_Cord.pdf](http://www.ub.uni-muenchen.de/elektronische_dissertationen/physik/Mueller_Cord.pdf)
- [55] C. A. Müller, T. Jonckheere, C. Miniatura, D. Delande, “Weak localization of light by cold atoms : the impact of quantum internal structure”, *Phys. Rev. A* **64**, 053804 (2001).
- [56] A. Lagendijk and B. A. van Tiggelen, “Resonant multiple scattering of light”, *Phys. Rep.* **270**, 143 (1996).
- [57] C. Cohen-Tannoudji, G. Grynberg, J. Dupont-Roc, *Introduction à l’électrodynamique quantique* (InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1987).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [58] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, tome 2 (Dunod, Paris, 1964).
- [59] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).
- [60] C. Cohen-Tannoudji, G. Grynberg, J. Dupont-Roc, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1988).
- [61] U. Fano, "Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques", *Rev. Mod. Phys.* **29**, 74 (1957).
- [62] G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, C. Miniatura, R. Kaiser, "Coherent backscattering of light by an inhomogeneous cloud of cold atoms", *Phys. Rev. A* **67**, 033814 (2003).
- [63] R. Lenke and G. Maret, "Multiple scattering of light : coherent backscattering and transmission", in W. Brown, editor, *Scattering and colloidal systems* (Gordon and Breach Science Publishers, 2000).
- [64] Y. Bidel *et al.*, "Coherent light transport in a cold Strontium cloud", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 203902 (2002).
- [65] F.J.P. Schuurmans, M. Megens, D. Vanmaekelbergh, and A. Lagendijk, "Light scattering near the localization transition in macroporous GaP networks", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2183 (1999).
- [66] H. Katori, T. Ido, Y. Isoya, and M. Kuwata-Gonokami, "Magneto-Optical Trapping and Cooling of Strontium Atoms down to the Photon Recoil Temperature", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1116 (1999).
- [67] C. Cohen-Tannoudji, "Théorie quantique du cycle de pompage optique. Vérification expérimentale des nouveaux effets prévus", *Ann. Phys. (Paris)* **7**, 423 (1962).
- [68] B. A. van Tiggelen, "Transverse diffusion of light in Faraday-active media", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 422 (1995).
- [69] G.L.J.A. Rikken and B.A. van Tiggelen, "Observation of Magneto-Transverse Light Diffusion", *Nature* **381**, 54 (1996).
- [70] D. Lacoste, F. Donatini, S. Neveu, J.A. Serughetti and B.A. van Tiggelen, "Photonic Hall Effect in Ferrofluids : Theory and Experiments", *Phys. Rev. E* **62**, 3934 (2000).
- [71] W. Hanle, "Über magnetische Beeinflußung der Polarisierung der Resonanzfluoreszenz", *Z. Phys.* **30**, 93 (1924).
- [72] B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, M. P. van Albada, A. Tip, "Speed of light in random media", *Phys. Rev. B* **45**, 12333 (1992).



- 
- [73] G.L.J.A. Rikken and B.A. van Tiggelen, “The Direction of Optical Energy Flow in a Transverse Magnetic Field”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 847 (1997).
- [74] R. Schlessler and A. Weis, “Light beam deflection by cesium vapor in a transverse magnetic field”, *Opt. Lett.* **14**, 1015 (1992).
- [75] Pour le verre Faraday utilisé dans [40, 41] (verre FR5 fabriqué par Hoya),  $V \simeq -1.4 \cdot 10^3 \text{ rad}/(\text{Tm})$  à 30 K.
- [76] G. Labeyrie, Ch. Miniatura and R. Kaiser, “Large Faraday rotation of resonant light in a cold atomic cloud”, *Phys. Rev. A* **64**, 033402 (2001).
- [77] O. Sigwarth *et al.*, “Increasing coherent backscattering with a magnetic field”, *arxiv* : `cond-mat/0401455`.
- [78] E. Akkermans and G. Montambaux, “Coherent effects in the multiple scattering of light in random media”, in B. van Tiggelen, S. Skipetrov (Editeurs), *Wave scattering in complex media : from theory to applications* (Kluwer Academic Publishers, 2003).
- [79] S. Washburn and R. Webb, “Aharonov-Bohm effect in normal metal. Quantum coherence and Transport.”, *Adv. Phys.* **35**, 375 (1986).
- [80] D. Wilkowski *et al.*, “Coherent backscattering of light by resonant atomic dipole transitions”, *J.O.S.A B* **21**, 183 (2004).
- [81] D. V. Kupriyanov *et al.*, “Spectral Dependence of Coherent Backscattering of Light in a Narrow-Resonance Atomic System”, *Phys. Rev. A* **69**, 033801 (2004).
- [82] G. Labeyrie *et al.*, “Slow Diffusion of Light in a Cold Atomic Cloud”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 223904 (2003).
- [83] G. Labeyrie *et al.*, “Hanle effect in coherent backscattering”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 163901 (2002).
- [84] T. Chaneliere, D. Wilkowski, Y. Bidet, R. Kaiser, C. Miniatura, “Saturation induced coherence loss in coherent backscattering of light”, *arxiv* : `physics/0309095`.
- [85] T. Wellens, B. Grémaud, D. Delande, C. Miniatura, “Coherent backscattering of light by atoms in the saturated regime”, *arxiv* : `quant-ph/0403057`.
- [86] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, “Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a Gas of Ultracold Atoms”, *Nature* **415**, 39 (2002).