



**HAL**  
open science

# Stabilisation en fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles

Matteo Barsuglia

► **To cite this version:**

Matteo Barsuglia. Stabilisation en fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris Sud - Paris XI, 1999. Français. NNT: . tel-00006570

**HAL Id: tel-00006570**

**<https://theses.hal.science/tel-00006570>**

Submitted on 23 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
N° d'ordre: 000

**UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD**  
**Centre d'Orsay**

**THÈSE**

présentée  
pour obtenir

le grade de DOCTEUR EN SCIENCES  
de l'Université d'Orsay

par

Matteo BARSUGLIA

Titre

*Stabilisation en fréquence du laser  
et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus  
pour le détecteur interférométrique  
d'ondes gravitationnelles VIRGO*

soutenue le 17 mai 1999 devant la Commission d'Examen

MM.: A. Aspect  
M. Davier  
A. Giazotto  
C.N. Man  
H. Heidmann  
F. Le Diberder



# Table des matières

<b>I</b>	<b>La détection interférométrique des ondes gravitationnelles et le projet VIRGO</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>La détection interférométrique des ondes gravitationnelles</b>	<b>13</b>
1.1	Les ondes gravitationnelles et la Relativité Générale . . . . .	13
1.2	Sources d'ondes gravitationnelles . . . . .	15
1.2.1	Sources astrophysiques . . . . .	16
1.3	La technique de détection interférométrique . . . . .	19
1.3.1	Remarques . . . . .	21
1.3.2	Les miroirs comme <i>masses libres</i> . . . . .	22
1.4	La sensibilité de l'interférométrie . . . . .	23
1.4.1	Définir un bruit . . . . .	24
1.4.2	Le bruit quantique . . . . .	25
1.4.3	Le bruit de photons . . . . .	25
1.4.4	Le bruit de photons de la frange noire . . . . .	27
1.4.5	Extraction du signal gravitationnel par détection synchrone . . .	28
1.4.6	La pression de radiation . . . . .	29
1.5	Dispositifs pour augmenter la sensibilité . . . . .	31
1.5.1	Les amplificateurs de chemin optique . . . . .	31
1.5.2	Le recyclage de la puissance . . . . .	31
1.6	Le bruit thermique . . . . .	33
1.7	Le bruit sismique . . . . .	36
1.7.1	Le bruit newtonien . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Le projet VIRGO</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	L'optique . . . . .	42
2.2.1	La source laser . . . . .	42
2.2.2	Le banc d'entrée . . . . .	42
2.2.3	Le Mode-Cleaner . . . . .	43
2.2.4	Les miroirs . . . . .	43
2.2.5	Le banc de détection du signal . . . . .	43
2.3	Les suspensions . . . . .	44
2.3.1	Structure du superatténuateur sismique . . . . .	44

2.4	Modulation et extraction du signal gravitationnel . . . . .	48
2.5	Le contrôle de l'interféromètre . . . . .	52
2.5.1	Choix des signaux . . . . .	53
2.5.2	Action sur les masses . . . . .	55
2.6	Le tube et le vide . . . . .	55
2.7	La sensibilité de VIRGO . . . . .	56
2.8	VIRGO et les autres détecteurs interférométriques dans le monde . . . . .	56
<b>II La stabilisation en fréquence du laser de VIRGO</b>		<b>59</b>
<b>3</b>	<b>Les spécifications de stabilité en fréquence du laser de VIRGO</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Le bruit de fréquence . . . . .	62
3.3	La modulation RF . . . . .	62
3.4	Démodulation . . . . .	63
3.5	Champs dans l'ITF . . . . .	65
3.6	Equations pour la porteuse et ses BA . . . . .	68
3.6.1	Reflectivité complexe des cavités Fabry-Perot . . . . .	68
3.6.2	Champ de recyclage . . . . .	70
3.6.3	Champs à la sortie de l'ITF . . . . .	72
3.7	Equations pour les bandes radio-fréquences et leurs BA . . . . .	74
3.8	Signaux démodulés et h équivalent . . . . .	77
3.8.1	Asymétrie de longueur . . . . .	77
3.8.2	Asymétrie de finesse . . . . .	78
3.8.3	Asymétrie de réflectivité des FP . . . . .	78
3.9	Evaluation des asymétries de l'ITF . . . . .	79
3.9.1	Asymétrie de longueur . . . . .	79
3.9.2	Asymétrie de finesse . . . . .	80
3.9.3	L'asymétrie de réflectivité des FP . . . . .	81
3.10	Les spécifications pour la stabilité en fréquence . . . . .	82
3.10.1	La courbe de sensibilité de VIRGO . . . . .	82
3.10.2	Stabilité en fréquence pour VIRGO . . . . .	84
3.11	Conclusions . . . . .	85
<b>4</b>	<b>La stabilisation de fréquence sur l'interféromètre</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.2	La technique de Pound-Drever et les signaux de l'interféromètre . . . . .	88
4.3	Signaux sur les photodiodes 2 et 5 . . . . .	89
4.3.1	Photodiode 2 . . . . .	90
4.3.2	Photodiode 5 . . . . .	92
4.4	Sensibilité de la détection du signal d'erreur . . . . .	93
4.4.1	Puissance DC sur la photodiode 2 . . . . .	94
4.4.2	Puissance DC sur la photodiode 5 . . . . .	95

4.4.3	Positions possibles pour la photodiode 2 . . . . .	97
4.5	Comparaison entre les photodiodes 2 et 5 . . . . .	98
4.6	La stabilité de la référence . . . . .	98
4.7	La préstabilisation . . . . .	99
4.8	Conclusions . . . . .	102
<b>5</b>	<b>La technique d'addition électronique des signaux d'erreur</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	L'addition électronique des signaux d'erreur . . . . .	104
5.3	L'interaction avec le contrôle des miroirs . . . . .	108
5.4	Le décalage du point de travail de la préstabilisation . . . . .	111
5.5	Conséquences du décalage du point de travail de la préstabilisation . . .	113
5.5.1	Le couplage entre le décalage et les fluctuations de puissance . .	114
5.5.2	Non linéarité du signal de Pound-Drever . . . . .	114
5.6	Spécifications pour les fonctions de transfert . . . . .	116
5.7	Topologies alternatives . . . . .	117
5.7.1	Elimination du décalage du point de travail de la préstabilisation	117
5.7.2	Utilisation du mode-cleaner . . . . .	118
<b>6</b>	<b>La stabilisation de fréquence pour l'interféromètre central</b>	<b>119</b>
6.1	Introduction . . . . .	119
6.2	Caractéristiques principales et sensibilité . . . . .	119
6.2.1	Les sources de bruit . . . . .	120
6.3	Spécifications pour le bruit de fréquence . . . . .	122
6.4	Le contrôle de l'interféromètre . . . . .	122
6.4.1	Spécification pour la frange noire . . . . .	125
6.4.2	Spécification pour la cavité de recyclage . . . . .	125
6.5	La matrice optique . . . . .	125
6.5.1	Différence de phase $\phi_-$ . . . . .	126
6.5.2	Phase dans la cavité de recyclage . . . . .	126
6.5.3	Matrice optique et choix des signaux . . . . .	126
6.6	Stratégie de contrôle pour les modes communs et la fréquence du laser .	127
6.6.1	Décalage du point de travail de la préstabilisation . . . . .	128
6.6.2	Stabilité en fréquence . . . . .	128
6.6.3	Suppression du bruit sismique . . . . .	129
6.6.4	Conception d'un filtre compensateur à deux chemins: le problème du "croisement" . . . . .	129
6.6.5	Séparations des polynômes . . . . .	129
6.6.6	Exemple d'application . . . . .	130
6.6.7	Performances . . . . .	131
6.7	Les Filtres numériques . . . . .	133
6.8	Conclusions et perspectives . . . . .	135

<b>III</b>	<b>Contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus : le prototype du Mode-Cleaner d'Orsay</b>	<b>137</b>
<b>7</b>	<b>Le mode-cleaner et son prototype</b>	<b>139</b>
7.1	Introduction: nécessité d'un mode-cleaner . . . . .	139
7.2	Propriétés d'un mode-cleaner . . . . .	141
7.2.1	Filtrage des défauts spatiaux . . . . .	142
7.2.2	Filtrage du bruit de position ( <i>beam jitter</i> ) . . . . .	142
7.2.3	Filtrage des fluctuations de fréquence et de puissance . . . . .	144
7.3	Modes d'une cavité triangulaire . . . . .	144
7.4	Le mode-cleaner de VIRGO . . . . .	147
7.5	Le contrôle du mode-cleaner de VIRGO . . . . .	149
7.5.1	Transmission . . . . .	149
7.5.2	Stabilité de fréquence du laser . . . . .	151
7.5.3	Stabilité de puissance du laser . . . . .	151
7.6	Le prototype . . . . .	152
7.7	Les contrôles locaux . . . . .	156
7.8	L'alignement . . . . .	157
7.9	Le spectre des modes . . . . .	158
7.9.1	La mesure de la finesse . . . . .	159
7.9.2	finesse en polarisation "s" . . . . .	162
<b>8</b>	<b>Le contrôle du prototype du Mode-Cleaner</b>	<b>165</b>
8.1	Introduction . . . . .	165
8.2	L'asservissement . . . . .	165
8.3	Le signal de Pound-Drever . . . . .	168
8.4	Asservissement de la fréquence laser sur la longueur du mode-cleaner . . . . .	170
8.5	La mesure du bruit sismique des masses libres . . . . .	171
8.6	Le bruit de fréquence . . . . .	176
8.7	Mesure de la fonction de transfert des actuateurs . . . . .	176
8.7.1	La fonction de transfert des amplificateurs des bobines . . . . .	177
8.7.2	La fonction de transfert mécanique . . . . .	177
8.8	Le contrôle longitudinal . . . . .	183
8.8.1	La conception du filtre compensateur . . . . .	183
8.9	Performances du contrôle . . . . .	189
8.10	Fluctuations de la puissance transmise . . . . .	189
8.11	Analyse du signal d'erreur . . . . .	192
8.12	Conclusions et Perspectives . . . . .	195
	<b>Conclusions</b>	<b>197</b>

<b>A Les cavités Fabry-Perot</b>	<b>199</b>
A.1 Puissance transmise, interval spectral libre et finesse . . . . .	200
A.2 Le champ réfléchi . . . . .	202
A.3 La phase du champ réfléchi . . . . .	203





# Introduction

Les ondes gravitationnelles sont des perturbations de la métrique de l'espace-temps qui se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière. Prédites par la théorie de la Relativité Générale, en 1916, les ondes gravitationnelles n'ont pas encore été détectées directement.

L'expérience franco-italienne VIRGO, au sein de laquelle ce travail de thèse a été effectué, a pour but la détection du rayonnement gravitationnel émis par des sources astrophysiques. Le détecteur est un interféromètre ayant deux bras de 3 km. Il est en cours de construction en Italie, dans la campagne autour de Pise.

Le passage d'une onde gravitationnelle provoque un faible "*étirement de l'espace*". Il peut être détecté en mesurant le déphasage induit entre les faisceaux laser qui se propagent dans les deux bras d'un interféromètre de Michelson. Le détecteur est ainsi composé de deux parties: les "*masses test*", qu'il faut isoler de tout bruit *de position*, et un moyen de mesure, à savoir un laser et une photodiode.

Les fluctuations de position des miroirs sont dues au *bruit sismique* et au *bruit thermique*. Le premier peut être atténué en suspendant les miroirs à des pendules. Ces derniers sont des "liens très souples" entre les miroirs et le monde extérieur: les déplacements du point de suspension (dus au bruit sismique) sont atténués pour des fréquences supérieures aux fréquences de résonance du système. Au dessus de cette valeur la distance entre les miroirs est très stable. Dans la région spectrale comprise entre quelques Hz et quelques centaines de Hz la sensibilité du détecteur est limitée par les mouvements thermiques des substrats des miroirs, et de leurs fils de suspension.

La détection, se fait par comptage de photons. Elle est donc affectée par le bruit correspondant (le "*bruit de photons*" ou "*shot noise*") qui révèle la nature quantique de la radiation lumineuse, et la statistique poissonnienne de la détection. Pour minimiser le bruit de photons, des lasers puissants sont utilisés et l'interféromètre est maintenu dans la condition d'interférence destructive (la "*frange noire*"). Ainsi presque toute la lumière incidente sur l'interféromètre revient en arrière vers le laser et peut être *recyclée*, en introduisant un miroir additionnel entre le laser et l'interféromètre. Cette "*cavité de recyclage*" permet d'augmenter la puissance interne et donc d'augmenter la sensibilité.

L'étirement de l'espace provoqué par les ondes gravitationnelles dépend de la longueur des bras, à la manière de l'allongement d'un fil élastique. Le déphasage "gra-

vitational” des photons est donc augmenté en utilisant de long bras et en les transformant en cavités Fabry-Perot. Ces dernières agissent comme des “*amplificateurs de déphasage*”.

Les bruits de la source de lumière n’engendrent en principe aucune fluctuation de phase, car ils sont “*vus*” de façon symétrique par les deux faisceaux qui interfèrent. Cependant, si l’interféromètre est légèrement asymétrique, la lumière devient elle aussi une source de bruit.

La première partie de cette thèse est consacrée à l’étude d’un des bruits de la lumière: les fluctuations de fréquence.

Nous évaluons d’abord l’influence des fluctuations de fréquence sur la sensibilité de VIRGO. Cela nous permet de déterminer des contraintes sur la stabilité de fréquence, afin de ne pas dégrader la sensibilité du détecteur. Dans ce but nous avons calculé la fonction de transfert de l’interféromètre pour les fluctuations de fréquence, et nous avons évalué les asymétries entre les bras. En particulier nous avons mis en évidence l’importance du terme d’asymétrie de réflectivité entre les deux cavités Fabry-Perot kilométriques, jusqu’à présent négligé dans VIRGO.

Les spécifications trouvées montrent qu’il faut gagner plusieurs ordres de grandeur sur la stabilité en fréquence des laser actuellement disponibles. Cela peut être réalisé avec une stabilisation active, par asservissement sur un étalon de fréquence stable. Avant de ce travail de thèse tous les efforts dans ce sens avaient été consacré à la *préstabilisation* du laser, c’est à dire à sa stabilisation sur une cavité Fabry-Perot rigide. L’expérience de *préstabilisation*, faite au Laboratoire de l’Accélérateur Linéaire, a montré une des meilleures stabilités en fréquence à court terme réalisée à ces jours. Cependant 4-5 ordres de grandeur restent à gagner pour atteindre les spécifications de VIRGO.

Le seul étalon permettant de remplir les contraintes de VIRGO sont les cavité kilométriques de l’interféromètre. Ceci nous a conduit à l’étude d’un “*deuxième étage*” de stabilisation, sur l’interféromètre, considéré comme étalon de fréquence. On a d’abord étudié les signaux à utiliser, puis on a exploré les stratégies de contrôle possibles. On a surtout étudié la “*technique d’addition électronique des signaux d’erreur*”, qui est la seule topologie compatible avec la conception actuelle de VIRGO.

Cette technique permet d’utiliser un unique actuateur pour la correction, en simplifiant le schéma optique de l’expérience. On a cependant mis en évidence deux problèmes liés à son utilisation: l’interaction avec la *préstabilisation* et celle avec le contrôle actif des miroirs à basse fréquence. Cela impose des contraintes très sévères sur la conception d’un système d’asservissement.

On a enfin déterminé un schéma de contrôle pour la phase préparatoire de l’interféromètre VIRGO, “*l’interféromètre central*”. Il s’agit d’un Michelson avec recyclage, de 6 mètres de longueur, qui doit servir pour tester la plupart des composants de VIRGO, pendant la construction des cavités kilométriques.

La deuxième partie de cette thèse a été consacrée à l'étude expérimentale du contrôle de cavités optiques suspendues. Celles-ci représentent le noyau de l'interféromètre VIRGO.

Pour contrôler une cavité optique, donc la maintenir en résonance avec la lumière incidente, il faut extraire des signaux *d'erreur* optiques, et après un filtrage approprié, envoyer une correction aux miroirs.

La différence fondamentale par rapport au contrôle d'une cavité rigide est liée à l'influence du bruit sismique, qui déplace la distance entre les miroirs de plusieurs microns. Cela rend beaucoup plus complexe l'alignement de la cavité, et sa caractérisation. L'action sur les masses, pour le maintien de la résonance doit tenir compte des fonctions de transfert "*mécaniques*" des suspensions, dont il faut une connaissance précise.

L'étude expérimentale a été effectuée sur une cavité Fabry-Perot de 30 m, conçue en tant que prototype du Mode-Cleaner de VIRGO. Ce dernier est une cavité de 144 m, située entre le laser et l'interféromètre, utilisée comme filtre géométrique et contre les fluctuations de position du faisceau laser.

Le prototype du Mode-Cleaner est une cavité triangulaire, formée par deux masses séparées par une distance de 30 m. Chaque masse est suspendue à un double pendule et contrôlée *localement* (c'est à dire par rapport au sol). On a d'abord caractérisé la cavité, en termes de finesse et spectre des modes.

Les fonctions de transfert mécaniques, et d'autres paramètres utiles au contrôle, ont été mesurés de façon interférométrique, en asservissant le laser sur la cavité en balancement libre. On a ensuite conçu un asservissement analogique, qui nous a permis le contrôle de la cavité, en agissant sur une des deux masses. On a analysé les résultats obtenus en boucle fermée, en terme des fluctuations de puissance transmise et de fluctuations de phase dans la cavité.

Les techniques de caractérisation et le système d'asservissement seront utilisés pour le mode-cleaner de VIRGO.

Le mode-cleaner d'Orsay est la première expérience de cavité suspendue au sein de la collaboration VIRGO. Les difficultés expérimentales rencontrées et l'expérience acquise représentent un point de départ important pour le contrôle des cavités de 3 km de VIRGO.



## Partie I

# La détection interférométrique des ondes gravitationnelles et le projet VIRGO



# Chapitre 1

## La détection interférométrique des ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont des perturbations de la métrique de l'espace-temps qui se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière. Le but de ce chapitre est d'introduire les ondes gravitationnelles dans le cadre de la Relativité Générale et de discuter la possibilité de leur détection avec des techniques interférométriques. Nous ne rentrerons pas dans les détails de la Relativité Générale, nous donnerons seulement des éléments sur la nature des ondes gravitationnelles, sur leur production par des sources astrophysiques et sur leurs effets mesurables.

### 1.1 Les ondes gravitationnelles et la Relativité Générale

Selon la Relativité Générale, la géométrie de l'espace-temps est déterminée par la distribution de matière-énergie. Cette affirmation trouve sa forme dans les équations d'Einstein [1]:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (1.1)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide,  $G$  la constante de gravitation universelle,  $G_{\alpha\beta}$  le tenseur d'Einstein (qui contient la métrique de l'espace-temps  $g_{\mu\nu}$ ), et  $T_{\alpha\beta}$  est le tenseur énergie-impulsion (qui contient la distribution de matière-énergie).

Les équations d'Einstein forment un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non-linéaires, et le calcul de la métrique est en général très compliqué. Toutefois, si les champs gravitationnels sont faibles, on peut écrire la métrique de l'espace-temps comme celle d'un espace plat de Minkowsky (l'espace de la Relativité Restreinte), perturbé faiblement par les effets gravitationnels. Dans le cadre de cette approximation, dite de *champ faible*, le tenseur métrique s'écrit alors:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$



où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowsky:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $h_{\mu\nu}$  est la perturbation gravitationnelle,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Dans ce cas particulier les équations d'Einstein dans le vide, avec un choix opportun de coordonnées, prennent la forme:

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.3)$$

dont les solutions peuvent s'écrire sous la forme d'ondes planes:

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{i(2\pi ft - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (1.4)$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde et  $f$  la fréquence de la perturbation gravitationnelle.

Les équations d'Einstein admettent donc comme solutions des ondes qui se propagent dans l'espace vide à la vitesse de la lumière et qui en modifient faiblement la métrique: les *ondes gravitationnelles*.

On peut montrer [1] que les ondes possèdent deux états de polarisation indépendants et qui sont transverses par rapport à la direction de propagation. Pour une onde qui se propage dans l'axe  $z$ , le tenseur de polarisation prend la forme:

$$\epsilon_{\mu\nu} = h_+ \epsilon_{\mu\nu}^+ + h_\times \epsilon_{\mu\nu}^\times \quad (1.5)$$

Avec:

$$\epsilon_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{\mu\nu}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Sources d'ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont générées par des distributions de masses accélérées, de la même façon que les ondes électromagnétiques sont générées par des charges accélérées.

Si les dimensions de la source d'ondes gravitationnelles sont petites par rapport à la distance entre celle-ci et le point d'observation, et par rapport à la longueur d'onde des ondes émises, on peut développer la distribution de masse en moments multipolaires. Pour les ondes électromagnétiques, le premier moment de multipole qui produit du rayonnement est le dipôle électrique. Par contre, à cause de la loi de conservation de l'impulsion pour un système isolé, le premier terme qui produit du rayonnement gravitationnel est le quadrupole.

L'amplitude  $h_{\mu\nu}$  due au moment quadrupolaire s'écrit:

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( Q_{\mu\nu}(t_{ret}) \right) \quad (1.6)$$

où  $Q_{\mu\nu}$  est le moment quadrupolaire de la source dans la *jauge TT*, calculé au temps retardé  $t_{ret} = t - r/c$ , et  $r$  est la distance entre la source et le point d'observation. La luminosité gravitationnelle s'écrit:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}_{\mu\nu} \ddot{Q}_{\mu\nu} \rangle \quad (1.7)$$

Considérons maintenant un corps de masse  $M$  et de dimension caractéristique  $R$ . Soit  $\epsilon$  le facteur d'asymétrie de la distribution de masse et  $T$  le temps caractéristique de variation du moment quadrupolaire. Ce dernier s'écrit  $Q \sim \epsilon M R^2$ , et la luminosité gravitationnelle est de la forme:

$$\mathcal{L} \sim \epsilon^2 \frac{G}{c^5} \frac{M^2 R^4}{T^6} \quad (1.8)$$

Si on écrit la masse de la source en fonction du rayon de Schwarzschild  $R_s = 2GM/c^2$ , et on introduit une vitesse caractéristique des déplacements de la distribution de masse  $v = R/T$ , on peut écrire l'équation 1.8 sous la forme:

$$\mathcal{L} \sim \epsilon^2 \frac{c^5}{G} \left( \frac{R_s}{R} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 \quad (1.9)$$

L'expression 1.9 montre que seuls les objets compacts (avec des dimensions de l'ordre du rayon de Schwarzschild), relativistes et asymétriques sont de forts émetteurs d'ondes gravitationnelles.

A partir de l'expression 1.6, on peut s'apercevoir aussi que la détection d'ondes gravitationnelles produites *en laboratoire* est impossible [37].

Considérons par exemple un système de deux masses de 1 tonne unies par une tige rigide de 2 m. Une rotation des deux masses autour d'une direction perpendiculaire à leur axe va produire des ondes gravitationnelles. Si la fréquence de rotation est 1  $kHz$ , l'amplitude des ondes émises est:

$$h \sim 10^{-33} \cdot \frac{1}{r} \quad (1.10)$$

Une valeur qui, comme on verra dans la suite, est de plusieurs ordres de grandeur inférieure à la sensibilité des détecteurs les plus avancés ( $h \sim 10^{-21}$   $f = 1 kHz$  pour VIRGO [5] [6] et LIGO [7]).

Les espoirs d'une première détection se tournent donc vers des sources astrophysiques.

### 1.2.1 Sources astrophysiques

Les paramètres importants pour la caractérisation d'une source astrophysique sont: l'amplitude et la fréquence des ondes émises et la statistique de la source (c'est à dire le nombre de sources dans une région de l'espace définie). Pour que les ondes soient détectées, leur amplitude doit être plus grande que le bruit de l'instrument de mesure et la fréquence d'émission doit être incluse dans la bande passante de l'appareil (pour les interféromètres à grande base sur Terre la bande passante va de 10  $Hz$  à quelques  $kHz$ ).

Les sources astrophysiques les plus significatives pour les interféromètres terrestres sont:

- **Supernovae**

Pendant la phase d'effondrement une bouffée (*burst*) d'ondes gravitationnelles peut être émise si la dynamique est non sphérique. Comme la physique de l'effondrement d'une étoile est très mal connue, les amplitudes et les formes des ondes émises par des supernovae varient de plusieurs ordres de grandeur selon les modèles théoriques. Selon certains modèles on devrait s'attendre à des amplitudes comprises entre  $h \sim 10^{-23} - 10^{-22}$  [2], et à une fréquence comprise entre 100  $Hz$  et 1  $kHz$  pour une distance de 20  $Mpc$  (amas de galaxie de la *Vierge*). La figure 1.1 montre un signal théorique produit par une supernova dans l'amas de galaxies de la *Vierge* [3].

La statistique est de quelques événements par siècle par galaxie, ce qui rend très rare la détection d'une supernova galactique, mais qui fait espérer une détection pour les ondes qui arrivent de l'amas de la *Vierge*, qui contient environ 2500 galaxies.

- **Coalescences d'étoiles binaires**

Selon des estimations théoriques, une grande partie des objets stellaires est sous la forme de systèmes binaires. Si les deux astres sont des corps compacts, comme un

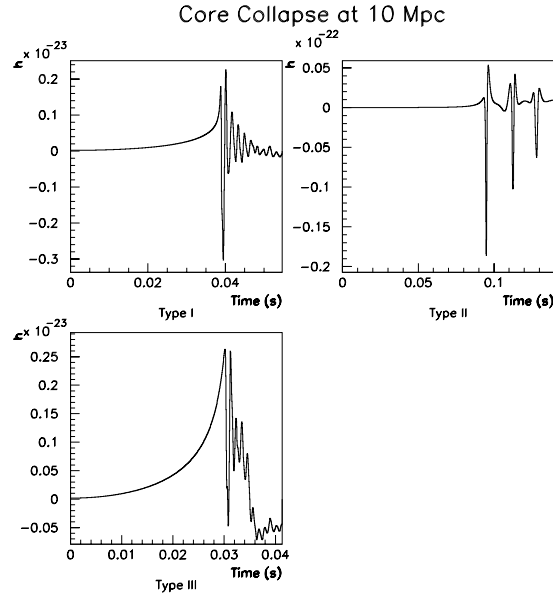


Figure 1.1: Trois formes de Signal d'ondes gravitationnelles produites par des Supernovae de type II à 10 Mpc

trou noir ou une étoile à neutrons, le système peut émettre une grande quantité d'énergie sous la forme de rayonnement gravitationnel. La période du système diminue donc, et les deux astres se mettent à spiraler. C'est le phénomène de la *coalescence*.

C'est d'ailleurs grâce à un système binaire (le pulsar binaire PSR1916+13) qu'on a eu la première évidence indirecte de l'existence des ondes gravitationnelles [4].

L'émission gravitationnelle est très faible pendant la vie normale du système, et la fréquence d'émission (qui est le double de la fréquence orbitale) trop basse pour être détectée par un interféromètre sur Terre ( $mHz$ ). Toutefois, pendant la phase finale (la *coalescence*), la distance entre les deux étoiles diminue, la fréquence orbitale et l'amplitude des ondes gravitationnelles augmente. L'interféromètre gravitationnel peut donc détecter les ondes émises pendant les dernières minutes.

Pour un système binaire de deux étoiles à neutrons de  $M = 1.4 M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  est la masse solaire) l'amplitude gravitationnelle est donnée par:

$$h \sim 10^{-23} \cdot \left( \frac{R}{10 \text{ Mpc}} \right)^{-1} \left( \frac{\mathcal{M}}{2^{-1/5} 1.4 M_{\odot}} \right)^{5/3} \left( \frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^{2/3} \quad (1.11)$$

où  $\mathcal{M}$  est définie comme:

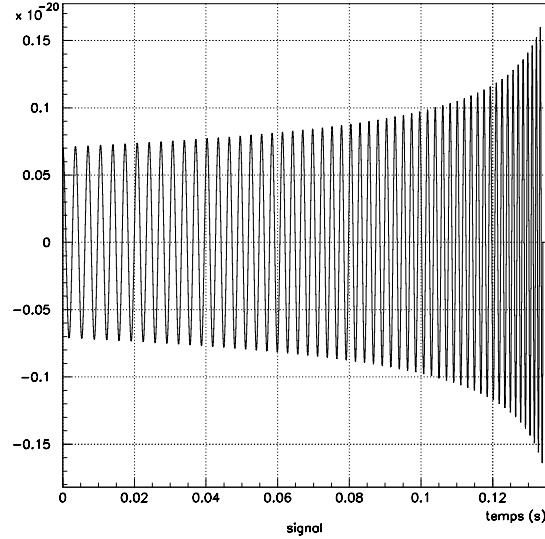


Figure 1.2: Derniers instants avant la coalescence de deux étoiles à neutrons de  $1.4 M_{\odot}$  à 20 Mpc. La fréquence du signal au temps  $t=0$  est 280 Hz

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} m^{2/5} \quad (1.12)$$

où  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  est la masse réduite, et  $m = m_1 + m_2$  la masse totale du système. et la fréquence d'émission augmente avec le temps selon la loi:

$$f \propto (t_c - t)^{-3/8} \quad (1.13)$$

où  $t_c$  est le temps de coalescence. La figure 1.2 montre un signal théorique produit par la coalescence de deux étoiles à neutrons.

- **Pulsar**

Les supernovae sont des sources *impulsives*, car le signal gravitationnel se manifeste durant un temps très court (pour une supernovae  $\sim 1$  ms). En revanche, les coalescences sont considérées par contre des sources *quasi – statiques*: le signal peut être intégrée pendant quelque minutes. Les pulsars peuvent émettre des ondes gravitationnelles de façon *continue*, si ils ont une asymétrie dans leur distribution de masse. L'avantage d'une source continue est ainsi la possibilité d'intégrer le signal sur un temps assez long et augmenter le rapport signal/bruit:

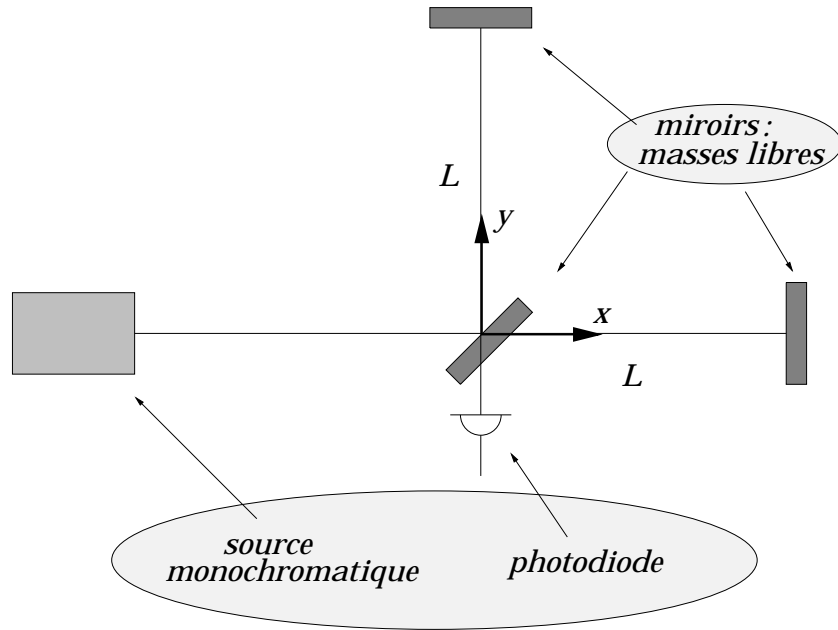


Figure 1.3: Un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles est composé de deux parties: les *les masses test* et un système de détection du déphasage induit par les ondes gravitationnelles, c'est à dire une photodiode et une source monochromatique de lumière

$$\frac{S}{N} \propto \sqrt{T} \quad (1.14)$$

où  $T$  est le temps d'intégration. Par exemple, une amplitude  $h \sim 10^{-27}$  (une valeur possible pour les amplitudes d'émission des pulsar du *Crabe* et *Véla* dans notre galaxie), peut être détectée par un interféromètre comme VIRGO en intégrant le signal sur quelques années.

### 1.3 La technique de détection interférométrique

Considérons un interféromètre (ITF) de Michelson, dont les miroirs sont des masses libres, illuminé par une source lumineuse monochromatique et une onde gravitationnelle qui traverse l'instrument perpendiculairement à son plan (voir figure 1.3). On peut considérer pour des raisons de simplicité que l'onde est polarisée  $+$  et que les bras de l'interféromètre sont sur les axes  $X$  et  $Y$ .

Un rayon lumineux qui se propage dans l'espace vide obéit à la condition:

$$ds^2 = 0 \quad (1.15)$$

avec

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.16)$$

Cette condition traduit le fait que les intervalles relativistes sont toujours nuls pour la lumière.

Le temps  $\tau_a$  nécessaire à la lumière pour aller de la séparatrice jusqu'au miroir terminal en direction  $x$  s'écrit en intégrant l'équation 1.16:

$$\int_0^{\tau_a} dt = \frac{1}{c} \int_0^L \sqrt{1 + h(t)} dx \approx \frac{1}{c} \int_0^L (1 + \frac{1}{2}h(t)) dx \quad (1.17)$$

où on a utilisée l'approximation

$$\sqrt{1 + h(t)} \approx 1 + \frac{1}{2}h(t)$$

pour  $|h(t)| \ll 1$  et où  $h(t) = h_{11}e^{2\pi i f_g t}$ , avec  $f_g$  fréquence de l'onde gravitationnelle.

On remarque que la substitution  $\tau_a = L/c$  dans la limite supérieure de l'intégrale de l'équation 1.17 ne tient pas compte de la perturbation gravitationnelle mais les corrections à ce terme sont négligeables.

On a donc:

$$\int_0^{\tau_a} dt = \frac{L}{c} + \frac{h_{11}}{4\pi i f_g} (e^{2\pi i f_g \frac{L}{c}} - 1) \quad (1.18)$$

Le même calcul peut être fait pour le temps de retour de la lumière (du miroir terminal à la séparatrice).

$$\int_{\tau_a}^{\tau_{ar}} dt = \frac{L}{c} + \frac{h_{11}}{4\pi i f_g} e^{2\pi i f_g \frac{L}{c}} (1 - e^{-2\pi i f_g \frac{L}{c}}) \quad (1.19)$$

donc le temps d'un aller-retour vaut:

$$\tau_{ar} = \frac{2L}{c} + \frac{h_{11}}{2\pi i f_g} (e^{2\pi i f_g \frac{L}{c}} - 1) \quad (1.20)$$

L'onde gravitationnelle module donc le temps employé par la lumière pour parcourir un aller-retour dans le bras  $X$  de l'interféromètre. Si la fréquence de l'onde est petite par rapport au temps  $t_0 = \frac{L}{c}$ , soit:

$$f_g \frac{L}{c} \ll 1 \quad (1.21)$$

On peut approximer l'équation 1.20 au premier ordre, et donc:

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c} \frac{h}{2} \quad (1.22)$$

Résultat qui peut être aussi interprété comme un changement ( $\Delta L = \Delta\tau \cdot c$ ) de la distance entre la séparatrice et le miroir terminal (dans leur repère *propre*), proportionnel à celle-ci, soit un étirement (*strain*) de l'espace, qui vaut:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{h}{2} \quad (1.23)$$

Si on considère le faisceau qui se propage dans la direction  $Y$ , on a exactement le même calcul, mais:

$$h(t) = -h_+ e^{2\pi i f_g t} \quad (1.24)$$

car:

$$\epsilon_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc les deux faisceaux sont retardés l'un par rapport à l'autre de la quantité:

$$\Delta t = h \frac{2L}{c} \quad (1.25)$$

ce qui revient à dire que, à cause de l'onde gravitationnelle, ils sont déphasés de la quantité:

$$\Delta\phi = 2\pi\nu\Delta t = 4\pi\nu \frac{L}{c} h \quad (1.26)$$

Si on fait interférer les deux faisceaux à la sortie de l'interféromètre, un déphasage entre les deux produit une variation de puissance, qui peut être détectée avec une photodiode.

### 1.3.1 Remarques

- Avec l'approximation:

$$f_g \frac{L}{c} \ll 1 \quad (1.27)$$



on a négligé la variation de phase de l'onde gravitationnelle pendant son aller-retour dans le bras de l'interféromètre. Quand le temps d'aller-retour de la lumière devient comparable ou supérieur à la période de l'onde gravitationnelle la réponse de l'interféromètre diminue, car l'effet du passage de l'onde est "moyenné" sur une ou plusieurs périodes. Cette condition impose donc une limite supérieure à la longueur des bras à la bande passante de notre instrument. Avec un chemin optique de l'ordre de 100 km (VIRGO,LIGO), la condition 1.27 donne  $f_g \ll 500 \text{ Hz}$ .

- Pour détecter le passage de l'onde gravitationnelle, on mesure le retard "gravitationnel" d'un faisceau lumineux après sa propagation entre deux masses libres. Un interféromètre détecte ce retard en comparant les déphasages des deux faisceaux qui se propagent dans les deux bras.

On pourrait aussi imaginer de comparer directement la phase du faisceau après un aller-retour, avec la phase non perturbée du laser. Le dispositif qui permet de réaliser cette mesure est une cavité Fabry-Perot (voir annexe A). Un des avantages de la technique interférométrique par rapport aux cavités Fabry-Perot, est dû au fait que le premier est un instrument *symétrique*: les bruits de la lumière sont donc "vus" de la même façon par les deux faisceaux dans les deux bras, et en principe l'instrument en est insensible.

- La réponse d'un interféromètre à des ondes qui ne sont pas perpendiculaires à son axe est montré dans la figure 1.4, où on a moyenné sur toutes les polarisations possibles. On remarque que la réponse est donc non-directionnelle, et qu'il y a seulement quatre points avec sensibilité nulle, sur le plan de l'instrument. La moyenne RMS (normalisée) de la sensibilité est environ 0.5. Cette caractéristique de non-directivité distingue profondément les télescopes gravitationnels des télescopes optiques, que l'on peut pointer sur une région précise du ciel.

### 1.3.2 Les miroirs comme masses libres

On a vu que l'effet du passage de l'onde gravitationnelle sur un système de deux masses libres est de changer la distance (dans le repère propre du système) entre les deux masses. Donc la force apparente qui agit sur le système est (cf. l'équation 1.23):

$$F = \frac{d\delta l^2}{dt^2} = \frac{1}{2}m\ddot{h}L \quad (1.28)$$

Dans la réalité, une configuration de masses libres peut être obtenue en suspendant les miroirs.

L'équation du mouvement devient alors:

$$m\ddot{\delta l} + \gamma\dot{\delta l} + k\delta l = \frac{1}{2}\ddot{h}L \quad (1.29)$$

où  $m$  est la masse du miroir,  $\gamma$  sa constante d'ammortissement (on fait l'hypothèse d'un amortissement visqueux, mais le même résultat est valable pour n'importe quel

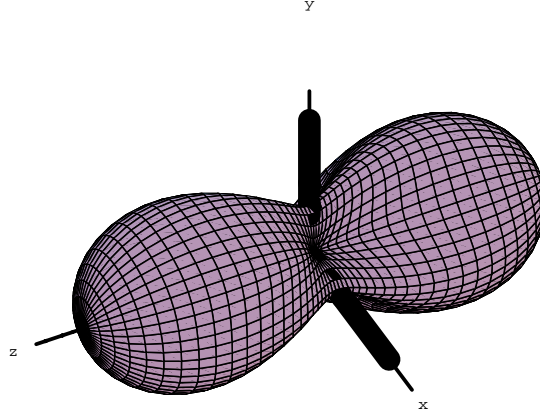


Figure 1.4: Réponse d'un interféromètre à une radiation gravitationnelle non polarisée. Les bras de l'ITF sont sur les axes  $X$  et  $Y$

type d'amortissement), et  $k = mg/l$  sa constante de raideur ( $l$  est la longueur du pendule)

On considère une onde gravitationnelle de la forme  $h(t) = h_0 e^{i\Omega t}$ , et une solution de l'équation du mouvement de la forme  $\delta l(t) = \delta_0 e^{i\Omega t}$ . En passant dans le domaine fréquentiel, la solution s'écrit:

$$\Delta l_0(\Omega) = \frac{-\frac{1}{2}\Omega^2 h_0 L}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\frac{\gamma\Omega}{m}} \quad (1.30)$$

où on a introduit la fréquence de résonance du pendule  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .  
Pour  $\Omega \gg \omega$  l'équation 1.30 se réduit à:

$$\Delta l_0(\Omega) = \frac{1}{2} h_0 L \quad (1.31)$$

donc à l'expression 1.23, valable pour des masses libres.

Pour des fréquences des ondes gravitationnelles supérieures à la fréquence de résonance du pendule, les masses peuvent être considérées comme libres.

## 1.4 La sensibilité de l'interférométrie

Nous séparerons les bruits qui affectent un interféromètre gravitationnel en deux catégories: les bruit *fondamentaux* et les bruit *technologiques*. Les bruits *fondamentaux* sont le *bruit quantique*, c'est à dire l'erreur sur la mesure de la position d'une masse libre,

dû au principe d'incertitude d'Heisenberg, et le *bruit thermique*, c'est à dire l'incertitude sur la position d'un oscillateur en équilibre thermique avec son environnement. Le premier dérive donc de la mécanique quantique, le deuxième de la thermodynamique.

Dans la pratique la limite quantique n'est jamais atteinte. La raison est qu'elle est masquée par le *bruit de photons*, décrit dans la suite.

Par *bruits technologiques*, on désigne par contre tous les bruits liés aux limitations technologiques de la machine (soit les performances du laser qu'on utilise, soit l'électronique, soit les technologies de construction des miroirs etc...).

Un cas particulier est le bruit sismique, qui n'est pas proprement d'origine technologique, mais il est lié au choix particulier de construire notre interféromètre sur la Terre plutôt que dans l'espace <sup>1</sup>.

Dans la suite de ce chapitre, on analysera les bruits fondamentaux et le bruit sismique. Dans le chapitre suivant, on étudiera les bruits technologiques dans le cas particulier de l'interféromètre VIRGO.

### 1.4.1 Définir un bruit

Par le terme *bruit*, on désigne une fluctuation aléatoire d'une grandeur physique autour de sa valeur moyenne (qu'on considère être sa valeur "vraie"). On caractérise un bruit par sa densité spectrale de puissance <sup>2</sup>

$$Q_A(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_{-T}^T A(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \quad (1.32)$$

où  $A(t)$  représente l'évolution temporelle de la grandeur physique considérée. La densité spectrale linéaire <sup>3</sup> s'écrit:

$$\tilde{Q}_A(f) = \sqrt{Q_A(f)} \quad (1.33)$$

et mesurée en  $[A]/\sqrt{Hz}$

Puisque l'amplitude des ondes gravitationnelles est mesurée avec la grandeur sans dimensions  $h$ , il est utile d'exprimer chaque densité spectrale de bruit avec la densité spectrale équivalente  $h_{noise}$ . Par exemple, si  $\tilde{x}$  est la densité spectrale linéaire d'un bruit de position quelconque (par exemple le bruit thermique), la densité spectrale équivalente est:

$$\tilde{h}_{noise} = \frac{\tilde{x}}{L} \quad (1.34)$$

---

<sup>1</sup>Les motivations scientifiques de construction d'un interféromètre spatial [8] sont justement liées à la possibilité de s'affranchir du bruit sismique, et donc d'augmenter la sensibilité aux très basses fréquences ( $\sim mHz$ )

<sup>2</sup>On peut caractériser un bruit avec sa *Fonction d'autocorrelation*, qui donne les mêmes informations que la densité spectrale de puissance, mais dans le domaine temporel (théorème de Parseval)

<sup>3</sup>Notre définition correspond à la *Single-sided spectral density*

où  $L$  est la longueur physique des bras de l'interféromètre.

La valeur *RMS* d'un bruit peut être calculée à partir de sa densité spectrale:

$$A_{rms} = \sqrt{\int_0^{\infty} Q_A(f) df} \quad (1.35)$$

### 1.4.2 Le bruit quantique

La mécanique quantique impose une limite sur la précision avec laquelle on peut déterminer la position d'une masse libre [9] [10]. Les miroirs sont des objets quantiques et on peut leur associer une fonction d'onde. Si on veut détecter un déplacement des miroirs, il faut donc comparer ce déplacement à la largeur de la fonction d'onde du miroir. En appliquant le principe d'incertitude à l'évolution d'une masse libre, on trouve:

$$\Delta x_{quan} \sim \sqrt{\frac{\hbar \tau}{M}} \quad (1.36)$$

où  $M$  est la masse,  $\hbar$  est la constante de Heisenberg, et  $\tau$  est le temps de mesure. Par exemple, la position d'une masse de 100 kg avec une mesure qui dure 1 sec, peut être déterminée au mieux avec une précision de  $\Delta x_{quan} \sim 10^{-18} m$ . Si on utilise un interféromètre de longueur  $L = 1 km$  pour déterminer la position de la masse, on aura un  $h_{quan}$  équivalent de:

$$h_{quan} \sim \frac{\Delta x_{quan}}{L} = 10^{-21} \quad (1.37)$$

La densité spectrale linéaire du bruit quantique se trouve à l'aide de la formule 1.32, et vaut

$$\tilde{h}_{quan} \sim \frac{1}{fL} \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \quad (1.38)$$

La limite quantique peut être obtenue aussi comme le point d'intersection entre deux bruits qui interviennent dans les mesures interférométriques: le bruit de comptage des photons et le bruit de pression de radiation. Dans la suite on expliquera leur nature, on verra que leur limite est le bruit quantique, et on verra aussi que le bruit de pression de radiation est dans la pratique toujours négligeable par rapport au bruit de photons.

### 1.4.3 Le bruit de photons

Le bruit de photons (ou *shot noise*) est lié à la nature corpusculaire de la lumière. La distribution des photons issus d'une source cohérente (comme un laser) qui arrivent sur

un détecteur, est *Poissonienne* [11]. Supposons que le détecteur compte en moyenne  $N$  photons, l'écart type de la distribution des photons comptés s'écrit donc:

$$\sigma_N = \sqrt{N} \quad (1.39)$$

et donc l'erreur relative est:

$$\epsilon = \frac{N}{\sigma_N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (1.40)$$

Si le laser a une puissance  $P$ , le nombre moyen de photons est  $N = P \cdot T/h\nu$ , où  $T$  est le temps de mesure. Donc la fluctuation du nombre de photons est directement liée à la puissance du laser:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{P \cdot T}{h\nu}} \quad (1.41)$$

où  $h$  est la constante de Planck et  $\nu$  la fréquence du laser utilisé.

Le principe d'incertitude de Heisenberg lie l'incertitude sur le nombre de photons d'un champ cohérent à l'incertitude sur leur phase [11]:

$$\Delta\phi \cdot \Delta N \sim 1 \quad (1.42)$$

Donc sur un comptage de  $N$  photons l'erreur sur la phase se trouve en combinant les équations 1.42 et 1.39:

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{h\nu}{PT}} \quad (1.43)$$

La densité spectrale linéaire du bruit de phase correspondante est donc

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2h\nu}{P}} \quad (1.44)$$

Pour un interféromètre de longueur  $L$  on a:

$$\tilde{h}_{shot\ noise} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{2h\nu}{P}} \quad (1.45)$$

Le résultat précédent à été trouvé en utilisant seulement la mécanique quantique et les propriétés de la radiation cohérente, il est indépendant de la façon dont on mesure le déphasage gravitationnel  $\Delta\phi$ .

Dans le paragraphe suivant on verra que la limite de la formule 1.45 correspond à la sensibilité d'un interféromètre de Michelson idéal, réglé sur la *frange noire*, et avec un contraste parfait. Pour un tel interféromètre, la puissance lumineuse en absence de signal est nulle et les photons responsables du bruit de photons sont les même photons qui transportent le signal gravitationnel.

#### 1.4.4 Le bruit de photons de la frange noire

La puissance à la sortie d'un interféromètre de Michelson est de la forme:

$$P_{out} = P \sin^2\left(\frac{\phi_g + \psi}{2}\right) \quad (1.46)$$

où  $P$  est la puissance du laser incidente sur la séparatrice,  $\phi_g = \frac{4\pi}{\lambda}hL$  le déphasage gravitationnel, et  $\psi$  le déphasage statique entre les deux faisceaux. On suppose que le contraste de l'interféromètre est parfait ( $C=1$ ).

En développant l'expression 1.46 au premier ordre en  $\phi_g$  on trouve:

$$P_{out} = P \left( \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{1}{2} \phi_g \sin \psi \right) \quad (1.47)$$

Le signal gravitationnel est alors :

$$P_g = \frac{1}{2} P \phi_g \sin \psi \quad (1.48)$$

et la densité spectrale linéaire du bruit de photons:

$$\delta \tilde{P}_{shot} = \sqrt{2h\nu P \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (1.49)$$

Le rapport signal sur bruit est donc:

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{h\nu}{P}} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \phi_g \quad (1.50)$$

qui est maximal pour  $\psi = 0$ , c'est à dire quand l'interféromètre est sur la frange noire (pas de puissance en sortie en absence de signal). On définit le  $\psi_g^{min}$  détectable celui qui correspond à  $S/N=1$ , donc:

$$\tilde{\psi}_g^{min} = \sqrt{\frac{2h\nu}{P}} \quad (1.51)$$

Et le  $\tilde{h}^{min}$  correspondant est donc:

$$\tilde{h}^{min} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{2h\nu}{P}} \quad (1.52)$$

### 1.4.5 Extraction du signal gravitationnel par détection synchrone

Dans la condition idéale de frange noire, au passage d'une onde gravitationnelle on détecte un signal au deuxième ordre en  $h$ , mais la puissance est nulle en absence de signal, donc le bruit de photons est aussi au deuxième ordre en  $h$ .

Si le contraste de l'interféromètre n'est pas parfait la puissance à la sortie de l'interféromètre s'écrit:

$$P_{out} = \frac{P}{2} \left( 1 - C \cos(\phi_g + \psi) \right) \quad (1.53)$$

où  $C$  est le contraste. L'interféromètre ne peut donc plus travailler sur la frange noire, car on a encore un signal au deuxième ordre en  $h$ , mais le bruit de photons est différent de zéro en absence de signal.

Pour maximiser la sensibilité il faut donc se déplacer du point d'interférence destructive, mais l'interféromètre devient alors sensible aux fluctuations de puissance du laser.

On peut montrer que dans le point de sensibilité optimale les fluctuations de puissance du laser génèrent un bruit en phase à la sortie de l'interféromètre qui s'écrit:

$$\tilde{\delta\phi} \approx (1 - C)^{1/4} \frac{\delta\tilde{P}}{P} \quad (1.54)$$

et si l'on veut que l'interféromètre soit encore limité par le bruit de photons on a la condition:

$$\frac{\delta\tilde{P}}{P} \leq \sqrt{\frac{2h\nu}{P}} \frac{1}{(1 - C)^{1/4}} \quad (1.55)$$

En considérant la valeur réaliste du défaut de contraste de  $1 - C = 10^{-4}$  [13], on trouve:

$$\frac{\delta\tilde{P}}{P} \leq 10^{-11} \frac{1}{\sqrt{Hz}} \quad (1.56)$$

Cette condition est impossible à réaliser à basse fréquence. Une détection *en continu* est également limitée par le bruit électronique  $1/f$ . Pour s'affranchir de ce dernier et des fluctuations de puissance du laser il est nécessaire déplacer la mesure à haute fréquence, avec une technique de modulation-démodulation synchrone.

La modulation en phase de la lumière permet de déplacer la mesure à des fréquences de plusieurs MHz, dans une région où le laser est limité par le bruit de photons. La technique consiste à faire passer le faisceau dans une cellule de Pockels, à laquelle il est appliqué une tension sinusoidale de haute fréquence. La cellule introduit alors un

déphasage proportionnel à la tension. Le signal gravitationnel, grâce à un mécanisme qui sera expliqué dans le chapitre suivant, est contenu dans l'enveloppe à la fréquence de modulation, et donc la détection est limitée par le bruit à cette même fréquence, soit le bruit de photons. Ensuite l'enveloppe est retirée par démodulation-synchrone.

### 1.4.6 La pression de radiation

En principe, en ayant un laser infiniment puissant, on pourrait s'affranchir du bruit de photons.

Cependant, quand la puissance devient très importante, l'interféromètre devient sensible aux fluctuations de la pression de radiation des photons qui arrivent sur les miroirs (fluctuations qui sont elles-mêmes dues à la distribution Poissonnienne de la radiation cohérente). On peut montrer que pour un miroir de masse  $M$ , la densité spectrale linéaire des fluctuations de position due à la pression de radiation est :

$$\tilde{x}(f)_{rad} = \frac{1}{2\pi^2 f^2 M} \frac{\sqrt{2h\nu P}}{c} \quad (1.57)$$

Si on considère un interféromètre, on aura du bruit de pression de radiation sur les miroirs des deux bras. Si les fluctuations sont parfaitement corrélées, l'effet total à la sortie de l'interféromètre est nul (car un bruit à la sortie est toujours le résultat d'un effet "différentiel" entre les deux bras).

Il a été montré [12] que les fluctuations dans les deux bras sont anti-corrélées. Le modèle est purement quantomécanique. Donc le bruit total (pour deux miroirs identiques, en négligeant la pression de radiation sur la séparatrice) à la sortie de l'interféromètre, du à la pression de radiation s'écrit :

$$\tilde{h}_{rad}(f) = \frac{1}{2\pi^2 f^2 LM} \sqrt{\frac{2hP}{c\lambda}} \quad (1.58)$$

On remarque que le bruit de pression de radiation augmente avec la puissance du laser, et il est proportionnel à l'inverse au carré de la fréquence d'analyse. La figure 1.5 montre le bruit de photons et le bruit de pression de radiation en fonction de la fréquence pour un interféromètre de Michelson. On remarque qu'il y a une puissance optimale (qui est fonction de la fréquence) pour laquelle :  $h_{shot}(P_{opt}) = h_{rad}(P_{opt})$ . En égalisant les expressions 1.58 et 1.45, on trouve :

$$P_{opt} = \frac{1}{2} M f^2 \lambda \pi c \quad (1.59)$$

Et si on remplace la puissance optimale dans les expressions 1.58 et 1.45 on trouve :

$$\tilde{h} = \frac{1}{\pi f L} \sqrt{\frac{2\hbar}{M}} \quad (1.60)$$



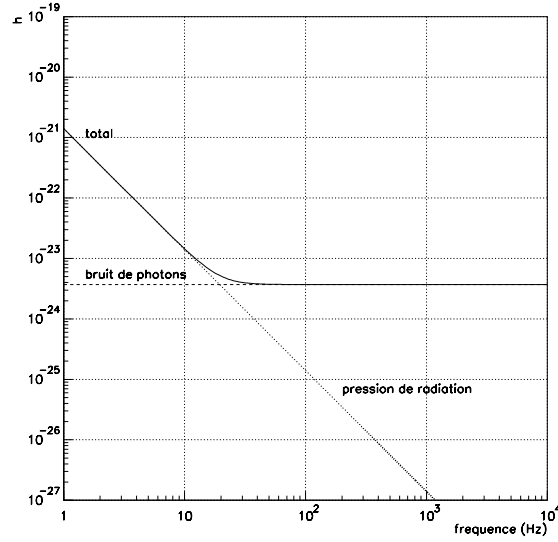


Figure 1.5: Comparaison entre les densités spectrales du bruit de photons et du bruit de radiation. Les paramètres utilisées sont:  $M=100$  kg,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ,  $L=3$  km,  $P=20$  MW

qui est la limite obtenue en appliquant le principe d'incertitude à la détermination de la position d'une masse libre.

Pour un jeu de paramètres typiques d'un interféromètre à grande base, comme VIRGO ( $M=100$  Kg,  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ), on obtient:

$$P_{opt} \approx f^2 \cdot 10^5 \text{ W} \quad (1.61)$$

Donc la puissance optimale à 10 Hz, par exemple (qui est la limite inférieure de la région de détection de VIRGO), est 10 MW. Cette puissance, comme on le verra par la suite, est très supérieure aux puissances possibles aujourd'hui pour les interféromètres gravitationnels. Actuellement la puissance prévue dans les bras de l'interféromètre VIRGO est autour de 30 kW, donc 300 fois plus petite de la puissance optimale à 10 Hz.

Les interféromètres sont donc limités par le bruit de photons, plutôt que par le bruit de pression de radiation <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Il ne faut pas confondre le bruit de pression de radiation d'origine quantique, avec le bruit de pression de radiation dû aux fluctuations de puissance du laser d'origine technologique. Ce dernier est très important dans l'analyse des bruits d'un interféromètre.

## 1.5 Dispositifs pour augmenter la sensibilité

L'équation 1.45 montre la sensibilité maximale pour un interféromètre de Michelson limité par le bruit de photons. Un interféromètre sur Terre ne peut pas avoir des bras plus longs de quelque kilomètre. En outre la technologie actuelle ne peut pas fournir une source laser avec les spécifications nécessaires pour la détection des ondes gravitationnelles avec des puissances supérieures à 10-20 W. La sensibilité maximum est donc :

$$\tilde{h} = \frac{\lambda}{4\pi L} \sqrt{\frac{2h\nu}{P}} \simeq 4 \cdot 10^{-21} \text{ 1}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (1.62)$$

Pour augmenter la sensibilité de l'interféromètre, on peut augmenter le chemin optique et la puissance du laser.

Pour augmenter le chemin optique en gardant le même longueur physique des bras, on peut remplacer les miroir terminaux du Michelson par des *cavités Fabry-Perot* ou des *lignes à retard*. Ensuite on peut augmenter la puissance dans l'interféromètre à égale puissance laser, avec la technique du *recyclage de la lumière*.

### 1.5.1 Les amplificateurs de chemin optique

Une ligne à retard (voir figure 1.6) est constituée par deux miroirs dans lesquels la lumière rebondit en avant et en arrière  $n$  fois. Le chemin optique est donc multiplié par  $n$ . Evidemment l'amplification de chemin optique produit une augmentation de la sensibilité de l'interféromètre si la période de l'onde gravitationnelle reste petite par rapport au temps de stockage de la lumière dans la cavité.

Les propriétés des cavités Fabry-Perot (voir fig 1.7) sont décrites en détail dans l'appendice A. On peut démontrer que, quand la cavité est résonante le chemin optique est multiplié par un facteur dépendant de la finesse de la cavité. Pour une cavité fortement sous couplée (voir appendice A) (comme les cavités de VIRGO), l'amplification vaut :

$$\simeq \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \quad (1.63)$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse de la cavité. Dans le cas de VIRGO,  $\mathcal{F} = 50$ , le chemin optique est donc amplifié d'un facteur 32. Même dans ce cas, il faut comparer le temps de stockage de la lumière avec la période de l'onde gravitationnelle. En général donc les cavités Fabry-Perot et les lignes à retard augmentent la sensibilité de l'interféromètre mais en diminuent la bande passante.

### 1.5.2 Le recyclage de la puissance

Si on garde l'interféromètre sur la frange noire, et on suppose que la transmission des miroirs terminaux est faible, presque toute la puissance lumineuse retourne vers

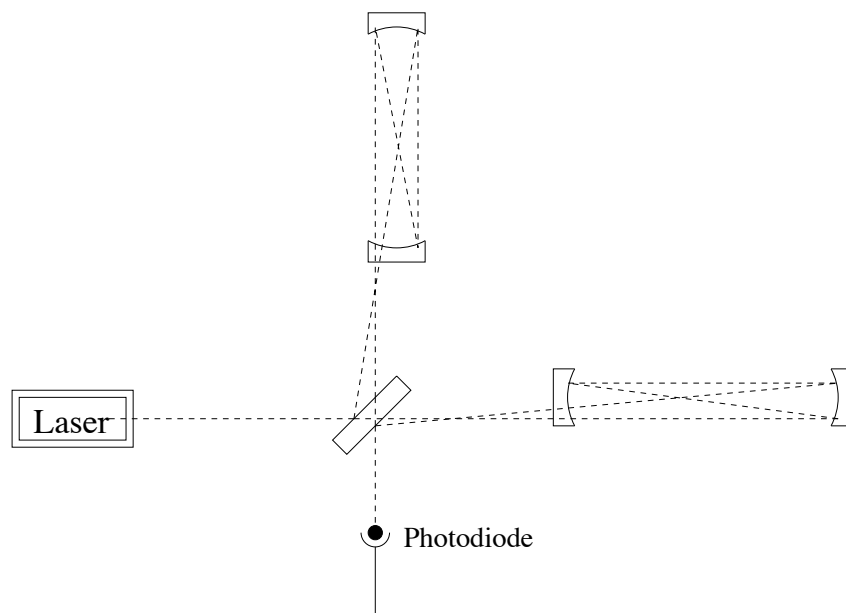
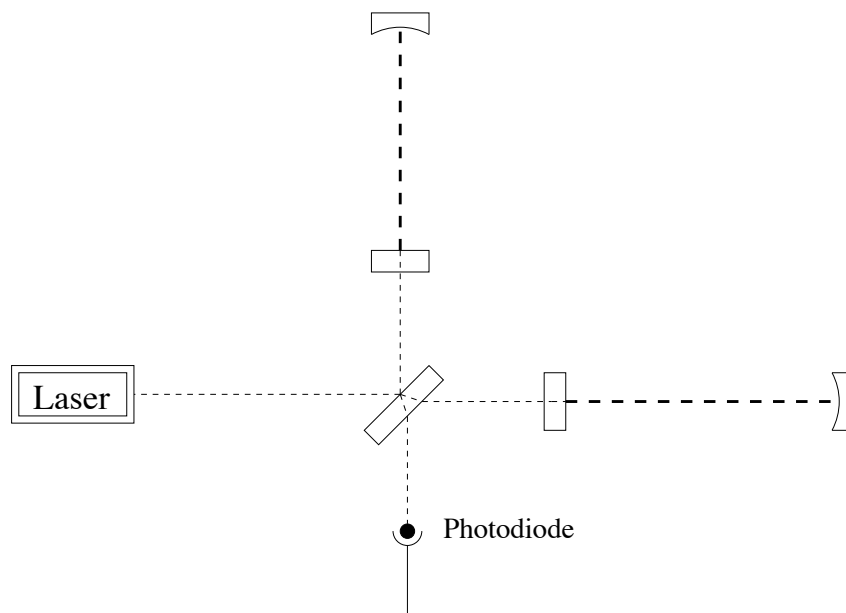
Figure 1.6: Interféromètre de Michelson avec des lignes à retard dans les bras ( $n = 2$ )

Figure 1.7: Interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot dans les bras

le laser. Si on place un miroir entre le laser et la séparatrice, on peut faire interférer constructivement la lumière incidente sur l'interféromètre et celle réfléchie par ce miroir de *recyclage*. On a ainsi transformé l'interféromètre en une cavité résonante, dont la puissance stockée est proportionnelle à la finesse de la cavité [14] [15]. Ce facteur d'amplification de la puissance intra-cavité est appelé *facteur de recyclage* ( $G_{rec}$ ), et donc le shot noise à la sortie de l'interféromètre diminue de  $\sqrt{G_{rec}}$ .

On peut démontrer que, en choisissant les paramètres optiques de l'interféromètre de façon appropriée, le facteur de recyclage maximum est:

$$G_{rec}^{max} \approx \frac{1}{A} \quad (1.64)$$

où  $A$  représente les pertes totales de l'interféromètre (dues au contraste imparfait, à la transmission des miroirs terminaux, aux pertes intrinsèques des miroirs par absorption et diffusion...).

Contrairement aux cavités Fabry-Perot dans les bras, la cavité de recyclage ne diminue pas la bande passante de l'interféromètre [14]. On peut donner un argument physique très simple de cette propriété: les champs dus aux signaux gravitationnels sortent tout de suite à travers la séparatrice, vers la photodiode de détection du signal. Ils ne sont pas *recyclés*, et donc ne sont pas filtrés par la cavité.

Les facteurs de recyclage prévus pour les interféromètres à grande base sont de l'ordre de 50-100 (VIRGO, LIGO), bien que la technique ait été démontrée pour des facteurs de recyclage de 450 avec des interféromètres suspendus [16] sans cavités Fabry-Perot dans les bras.

Pour un interféromètre avec cavité Fabry-Perot dans les bras (VIRGO-LIGO), et recyclage de la lumière, la sensibilité limitée par le bruit de photons s'écrit:

$$\tilde{h}(f) = \frac{\lambda}{4\pi L \frac{2}{\pi} \mathcal{F}} \sqrt{\frac{h\nu}{G_{rec}P}} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \simeq 2 \cdot 10^{-23} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{500 \text{ Hz}}\right)^2} \quad 1/\sqrt{Hz} \quad (1.65)$$

où on a utilisé les paramètres prévus pour VIRGO ( $G_{rec} = 40$ ,  $\mathcal{F} = 50$ ,  $L = 3 \text{ km}$ ,  $\lambda = 1 \mu m$ ), et où le terme dépendant de la fréquence est dû à l'effet de filtrage du signal gravitationnel dont on a parlé au paragraphe 1.3.1

## 1.6 Le bruit thermique

Si le bruit quantique est lié au problème de la mesure, au sens de la mécanique quantique, le bruit thermique est dû aux fluctuations dans la position d'un système qui est en équilibre thermodynamique avec son environnement.

D'une façon très générale, le théorème de *fluctuation et dissipation*, énoncé par Callen en 1951 [17], nous dit que chaque système mécanique soumis à dissipation (à cause par exemple de frottements internes ou visqueux), subit une force stochastique dépendant de la fréquence, de densité spectrale:

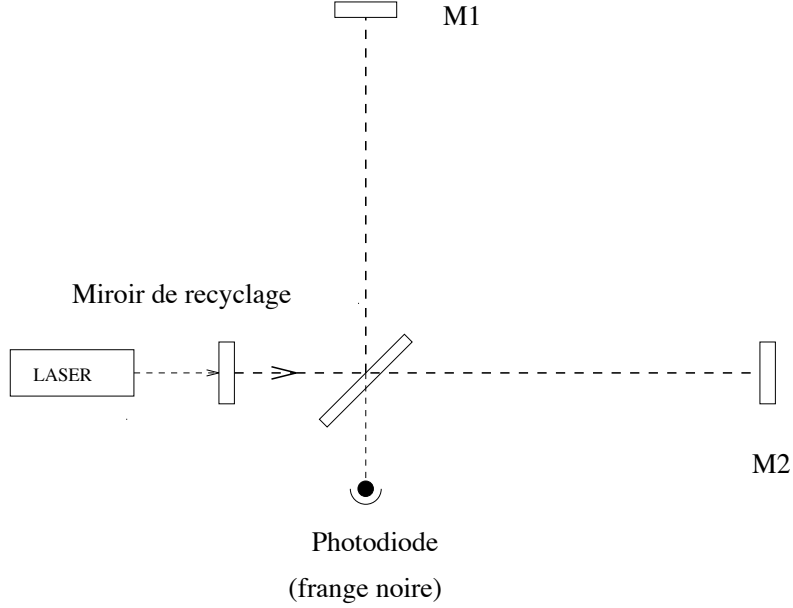


Figure 1.8: Interféromètre de Michelson avec recyclage de puissance

$$|\tilde{F}(\omega)|^2 = 4K_B T R(\omega) \quad (1.66)$$

où  $K_b$  est la constante de Boltzmann,  $T$  la température, et  $R(\omega)$  la partie réelle de l'impédance  $Z(\omega)$  du système, qui est définie de la façon suivante:

$$Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{v(\omega)} \quad (1.67)$$

où  $F(\omega)$  est une force sinusoïdale appliquée au système et  $v(\omega)$  est la vitesse sinusoïdale correspondante. La densité spectrale du bruit de position associé à la force stochastique est donc de la forme:

$$\tilde{x}^2(\omega) = \frac{4K_B T}{\omega^2} \text{Re} \left[ \frac{1}{Z(\omega)} \right] \quad (1.68)$$

Les miroirs et les suspensions d'un interféromètre gravitationnel sont des systèmes mécaniques dissipatifs, et donc soumis au bruit thermique.

Le système amorti le plus simple est un oscillateur mécanique en présence d'amortissement visqueux (par exemple un pendule dans l'air). L'équation du mouvement s'écrit:

$$F_{ext} = m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx \quad (1.69)$$

où  $k$  est la constante élastique de l'oscillateur,  $\gamma$  sa constante d'amortissement, et  $m$  sa masse. L'impédance est donc:

$$Z(\omega) = \gamma + im\omega + \frac{k}{i\omega} \quad (1.70)$$

et donc:

$$|\tilde{F}(\omega)|^2 = 4K_B T \gamma \quad (1.71)$$

Le bruit de position s'écrit:

$$\tilde{x}_{therm}^2 = 4K_B T \frac{\frac{\omega_0}{mQ}}{\frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (1.72)$$

où:

$$Q = \frac{m\omega_0}{\gamma} \quad (1.73)$$

est le *facteur de qualité* de l'oscillateur, et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  sa fréquence de résonance. Si on veut approximer les miroirs à des masses libres, il faut que la fréquence de résonance des suspensions soit inférieure à la région de détection de l'interféromètre (la fréquence de résonance est typiquement  $\sim 1 \text{ Hz}$ , et la région de détection commence à  $\sim 10 \text{ Hz}$ ). Donc, dans la région de détection, on a  $\omega \gg \omega_0$ , et le bruit thermique s'écrit donc:

$$\tilde{x}_{therm} = \sqrt{\frac{4K_B T \omega_0}{mQ}} \frac{1}{\omega^2} \quad (1.74)$$

Donc pour diminuer le bruit thermique il faut choisir des miroirs avec une grande masse, un  $Q$  très élevé et  $\omega_0$  faible.

Comme les suspensions et les miroirs d'un interféromètre gravitationnel sont sous vide, les processus de dissipations visqueux sont négligeables, et les dissipations sont liés surtout aux processus internes des matériaux (en général non visqueux) [37]. Il faut donc modifier le modèle d'un oscillateur visqueux en ajoutant par exemple une partie imaginaire dans la loi de Hooke (qui est un terme dissipatif dans la constante de raideur de l'oscillateur).

$$m\ddot{x} = -K \left( 1 + i\phi(\omega) \right) x \quad (1.75)$$

où  $\phi(\omega)$  est le terme lié aux processus de dissipation.

L'impédance est donc:

$$Z(\omega) = \frac{k\phi}{\omega} + im\omega + \frac{k}{i\omega} \quad (1.76)$$

et les fluctuations de positions s'écrivent:

$$\tilde{x}_{therm}^2 = 4K_B T \frac{\omega_0^2 \phi}{m\omega[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2]} \quad (1.77)$$

Plusieurs mesures montrent que dans une large région spectrale  $\phi$  est indépendant de la fréquence [18].

Dans ce cas, toujours pour  $\omega \gg \omega_0$  on a:

$$\tilde{x}_{therm} = \sqrt{\frac{4K_B T \phi \omega_0^2}{m}} \frac{1}{\omega^{5/2}} \quad (1.78)$$

et donc le bruit diminue comme  $\omega^{-5/2}$ .

Jusqu'à maintenant, on a considéré les suspensions considérés comme des pendules idéales (masse du fil = 0). Si on prend en compte la masse du fil on aura des vibrations du fil (les *modes de violon*), et il faut ajouter ce terme dans le calcul du bruit thermique.

Les miroirs sont aussi des oscillateurs eux mêmes, typiquement avec des fréquences de résonance de quelque kHz, ce terme est appelé le bruit thermique des *modes internes* des miroirs <sup>5</sup>.

Dans ce cas ce qui nous intéresse est la queue dans les basses fréquences ( $\omega \ll \omega_0$ ), qui dans le modèle du bruit thermique avec amortissement interne est proportionnelle à  $\omega^{-1}$ .

Pour donner quelques ordres de grandeur on peut considérer le cas des miroirs terminaux de VIRGO ( $m \sim 42 \text{ Kg}$ ,  $Q \sim 10^6$ ,  $l(\text{fils}) \sim 1m$ ). Le bruit thermique à 10 Hz est:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{modes \text{ internes}} &= 3 \cdot 10^{-22} \text{ } 1/\sqrt{Hz} \\ \tilde{h}_{pendule} &= 6 \cdot 10^{-21} \text{ } 1/\sqrt{Hz} \end{aligned} \quad (1.79)$$

## 1.7 Le bruit sismique

L'amplitude et le spectre du bruit sismique dépendent fortement de la géologie et des activités humaines autour du site de l'expérience.

---

<sup>5</sup>Un calcul exact du bruit thermique des modes internes des miroirs doit tenir compte de toutes les fréquences de résonance des miroirs [36]

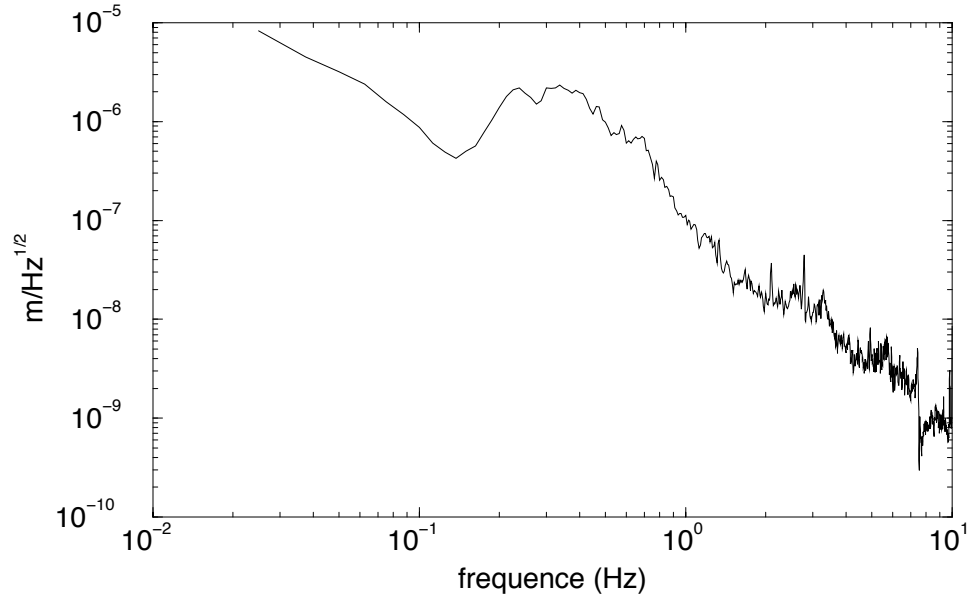


Figure 1.9: Spectre typique du bruit sismique

Il est possible de paramétriser la densité spectrale linéaire du bruit sismique avec l'expression :

$$\tilde{x}_{sism} = \frac{K}{f^2} m / \sqrt{Hz} \quad f \geq 1 \text{ Hz} \quad (1.80)$$

où  $K$  est une constante qui dépend du site. La figure 1.9 montre un spectre typique de bruit sismique <sup>6</sup>, pour lequel  $K \approx 10^{-7}$ .

Le bruit correspondant, pour un interféromètre avec bras de 3 km (VIRGO) est :

$$\tilde{h}_{sism} = \frac{\tilde{x}_{sism}}{L} = \frac{3 \cdot 10^{-10}}{f^2} 1/\sqrt{Hz} \quad (1.81)$$

Donc, si l'on veut une sensibilité  $h \sim 10^{-23}$  à 100 Hz (VIRGO, LIGO) il faut atténuer le bruit sismique de plusieurs ordres de grandeur. Le système le plus simple est de suspendre les miroirs de l'interféromètre à des pendules. L'équation du mouvement d'un pendule de masse  $m$  et longueur  $l$  (et donc de fréquence de résonance  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/l}$ ) est :

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}(x - x_{sus}) + (\text{un terme dissipatif}) \quad (1.82)$$

<sup>6</sup>Le spectre a été mesuré au Laboratoire VIRGO-INFN de S.Piero à Grado, près de Pise



où  $x$  est le mouvement du pendule, et  $x_{sus}$  est le mouvement du point de suspension.

Si la fréquence des mouvements du point de suspension est supérieure à la fréquence de résonance du pendule on a :

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_{sus}} \simeq -\frac{f_0^2}{f^2} \quad (1.83)$$

Le pendule est donc un filtre passe bas du deuxième ordre. On verra dans le chapitre consacré à VIRGO que pour atteindre les niveaux de sensibilité voulue il faut combiner plusieurs pendules.

Le bruit sismique peut être réintroduit dans l'interféromètre à travers la *lumière diffusée* [19] [20]. Pendant les aller-retour dans les bras, un certain nombre de photons peut s'éloigner du faisceau, frapper contre les parois du tube à vide, être réfléchis et se recombiner avec le faisceau principal. La phase des photons recombinés est modulé par le bruit sismique du tube, qui en général n'est pas suspendu. Certaines simulations montrent que le niveau du bruit de lumière diffusée est comparable aux bruits fondamentaux de l'interféromètre (bruit thermique et bruit de photons), et donc il faut des systèmes pour l'éliminer. Dans VIRGO on utilisera des déflecteurs dans le tube, qui empêchent que les photons se recombinent avec le faisceau principal après leur impact avec le tube.

### 1.7.1 Le bruit newtonien

Si en théorie on peut s'affranchir du bruit sismique en suspendant les masses test à des pendules de plus en plus perfectionnés, avec des fréquences de résonances de plus en plus basses, il existe une limite à la sensibilité d'un interféromètre terrestre due aux variations du champ gravitationnel statique. Les ondes sismiques provoquent des variations de la densité de masse, et donc une variation de la force de gravité autour des miroirs de l'interféromètre [21].

Ce bruit se couple directement au miroir et rend inutile la présence des suspensions et de n'importe quelle méthode d'atténuation sismique.

## Chapitre 2

# Le projet VIRGO

### 2.1 Introduction

Le projet VIRGO est une collaboration entre le Centre National de la Recherche Scientifique français et L'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare italien, qui prévoit la construction d'un interféromètre avec bras de 3 km dans la campagne autour de Pise, en Italie.

Le but de VIRGO est la détection des ondes gravitationnelles produites par des sources astrophysiques, dans la région de fréquence comprise entre 10 Hz et 10 kHz. L'utilisation des *superatténuateurs*, décrits dans la suite, permet l'élargissement de la fenêtre de détection jusqu'à 10 Hz, avec une sensibilité prévue de  $\tilde{h} \sim 6 \cdot 10^{-21} 1/\sqrt{Hz}$ , limitée par le bruit thermique. Cela augmente les chances de détection de signaux produits par la coalescence d'étoiles binaires, et éventuellement de signaux périodiques, comme les pulsars. La sensibilité prévue à 1 kHz est  $\tilde{h} \sim 6 \cdot 10^{-23} / \sqrt{Hz}$ , qui devrait permettre la détection de signaux impulsifs, comme les supernovae, en coïncidence avec d'autres détecteurs dans le monde.

Il s'agit d'un interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Perot dans les bras et recyclage de la lumière.

Tous les miroirs sont suspendus à des chaînes de pendules pour la réduction du bruit sismique, appelées *superatténuateurs*. La source de lumière est un laser Nd: Yag ( $\lambda = 1.06 \mu m$ ), stabilisé en puissance, fréquence et position avec des systèmes actifs (asservissements) et par filtrage passif, en utilisant une cavité triangulaire suspendue, appelée *mode-cleaner d'entrée*.

Le faisceau est modulé en phase pour que l'extraction du signal gravitationnel soit limitée par le bruit de photons. Ensuite il est envoyé dans l'interféromètre à travers *le banc d'entrée*, un banc suspendu qui contient les télescopes de focalisation du faisceau, et toutes les optiques qui nécessitent d'être suspendues.

La lumière qui interfère sur la séparatrice est reçue sur les photodiodes de détection après son passage par un autre banc suspendu (*le banc de détection*), qui contient les éléments de focalisation du faisceau sur les photodétecteurs et un *mode-cleaner de sortie*, utilisé pour filtrer géométriquement le faisceau et donc améliorer le contraste

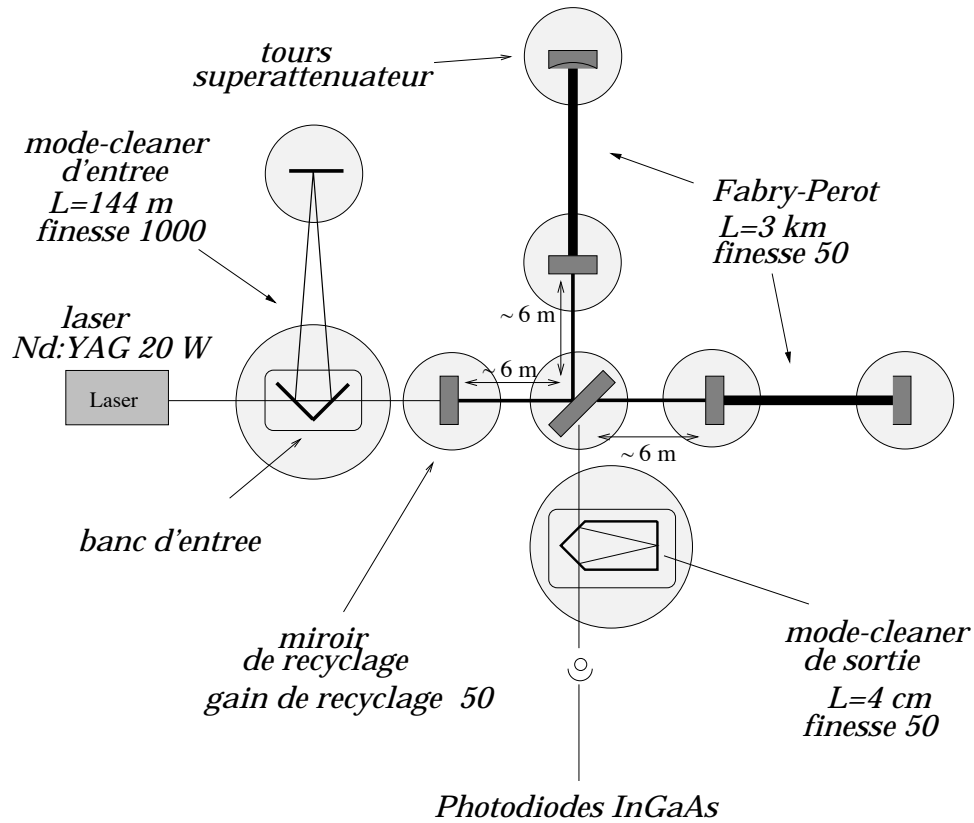


Figure 2.1: Schéma optique de VIRGO

de l'interféromètre. Le signal des photodiodes est démodulé de façon synchrone et les données sont enregistrées sur bande magnétique, après numérisation.

Le schéma optique du détecteur est montré dans la figure 2.1. La figure 2.2 montre une vue d'ensemble de l'interféromètre, avec les tours qui contiennent les *superatténuateurs sismiques* et le tube à vide.

La prise de donnée est prévue pour la mi 2002, après la construction des deux longs bras.

*L'interféromètre central* est une étape intermédiaire importante. Il s'agit d'un Michelson de 6 m avec recyclage, obtenu en remplaçant les miroirs d'entrée des longs Fabry-Perot avec des miroirs à haute réflectivité. La mise en marche de l'interféromètre central est prévue pour le milieu de l'an prochain. Il doit servir à tester la plupart des

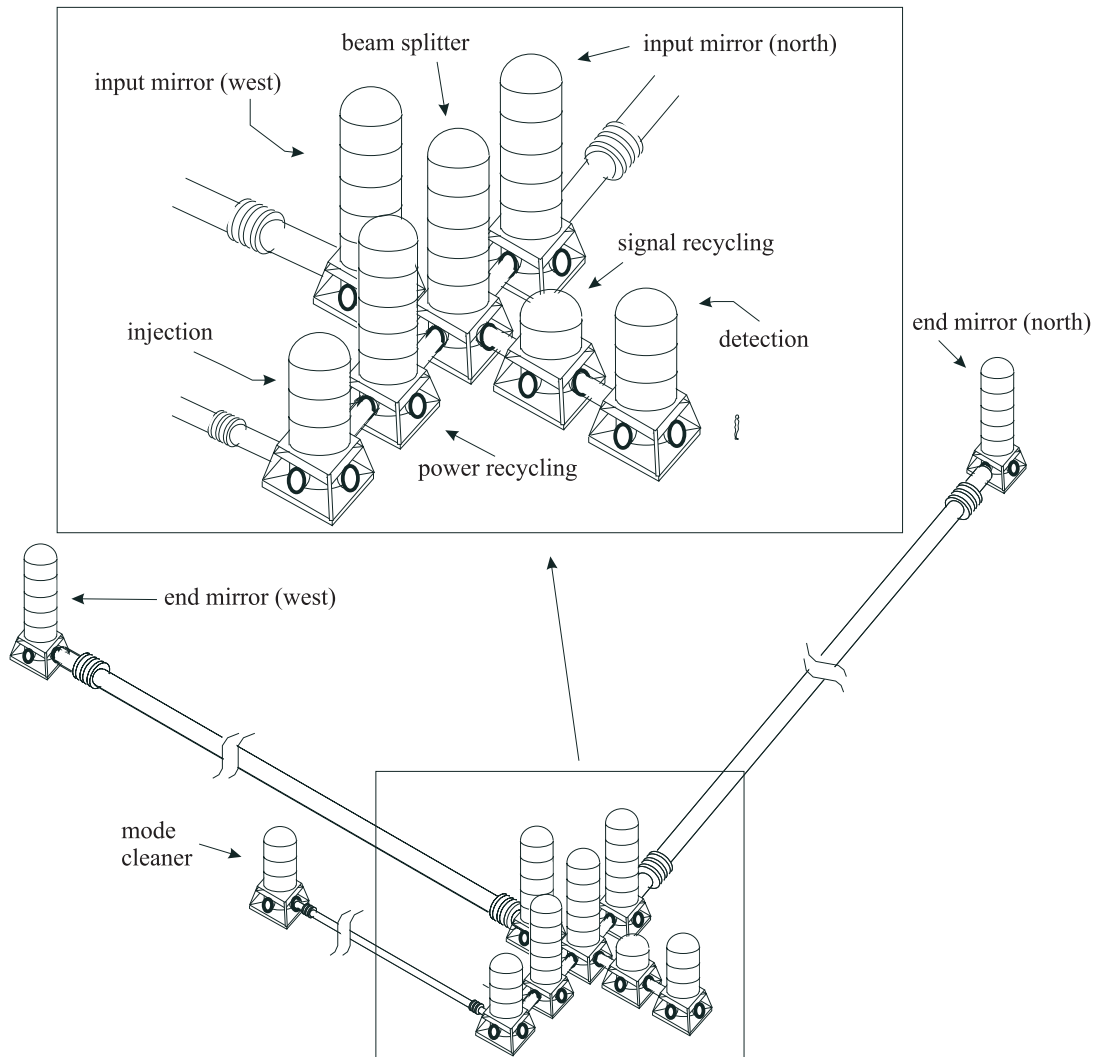


Figure 2.2: Vue d'ensemble du détecteur

composants de VIRGO: le laser, les superatténuateurs, les bancs d'entrée et de sortie, le mode-cleaner, et le système d'acquisition des données. Il servira enfin pour étudier les bruits de l'interféromètre, et le système de contrôle des miroirs et de la fréquence du laser.

## 2.2 L'optique

### 2.2.1 La source laser

La source de lumière de l'interféromètre est un laser Nd: YAG ( $\lambda = 1.06 \mu m$ ) avec une puissance de 20 W sur le mode fondamental. Le Nd: Yag a été préféré à d'autres sources (comme l'Argon, à 514 nm) pour ses caractéristiques de stabilité en fréquence et géométriques.

En l'état actuel, un laser Nd: YAG de 10 W monomode a été conçu et réalisé au sein de l'équipe VIRGO, et il fonctionnera sur l'interféromètre central. Le laser de 20 W sera réalisé en asservissant en phase deux lasers jumeaux de 10 W.

Le milieu amplificateur du laser est un barreau de Nd: YAG pompé par 10 diodes laser. La cavité optique est constituée de 4 miroirs, et le faisceau se propage à l'intérieur avec une géométrie en "X". Le laser est asservi en phase sur un laser Nd: YAG commercial (de 700 mW), avec la technique de *l'injection locking* [22]. Ce dernier est normalement appelé le *maître* et le laser de 10 Watt *l'esclave*. La configuration maître-esclave a été choisie pour obtenir un laser de haute puissance en fonctionnement monomode, avec des bonnes caractéristiques de stabilité en fréquence.

Le stabilisation en fréquence est réalisée en plusieurs étapes, qui seront décrites en détail dans la suite de la thèse. La puissance est stabilisée en agissant sur les diodes de pompage du maître. Le bruit de position du faisceau est par contre complètement réduit grâce au filtrage spatial du mode-cleaner d'entrée.

### 2.2.2 Le banc d'entrée

Le banc d'entrée est un banc optique sous vide, et suspendu à un superatténuateur sismique. Il contient trois types de composants optiques qui doivent être isolés des bruits sismique et acoustique:

- Le *dièdre* avec les deux miroirs plans d'entrée et sortie du mode-cleaner (cf. le paragraphe suivant)
- Le télescope d'adaptation du faisceau qui sort du mode-cleaner à l'interféromètre.
- La cavité de préstabilisation de fréquence (décrite dans la suite), qui est rigidement attachée sous le banc.

Le faisceau laser arrive sur le banc et il est envoyé sur un des miroirs du dièdre. Il résonne dans la cavité mode-cleaner et il sort par le deuxième miroir du dièdre. Il passe par le télescope qui élargit son diamètre pour l'adapter aux cavités Fabry-Perot

de l'interféromètre. Une petite partie du faisceau est prélevée grâce à une séparatrice et envoyée sur la cavité de préstabilisation de fréquence.

### 2.2.3 Le Mode-Cleaner

Le mode-cleaner est une longue cavité Fabry-Perot triangulaire de 144 m de longueur, et avec une finesse  $\mathcal{F} = 1000$ . Sa fonction est de filtrer les défauts spatiaux du faisceau, ainsi que son bruit de position.

La cavité est constituée de trois miroirs: les deux miroirs d'entrée et sortie sont reliés "*optiquement*" au dièdre qui se trouve sur le banc d'entrée. Le troisième miroir est suspendu à un superatténuateur sismique, dans une tour située à 144 m de distance.

Quand le  $TEM_{00}$  du laser est en résonance avec celui de la cavité mode-cleaner, les modes d'ordres supérieurs sont réfléchis et le seul  $TEM_{00}$  est transmis et rentre dans l'interféromètre. Les fluctuations du position du laser sont aussi vues par la cavité comme la présence de modes d'ordres supérieurs (dans la base de modes gaussiens de la cavité), et elles sont filtrées.

Le mode-cleaner diminue aussi les fluctuations de fréquence et de puissance du laser pour des fréquence supérieures à sa fréquence caractéristique.

Les détails sur la nécessité d'un tel dispositif et sur ses propriétés seront données au chapitre 6.

### 2.2.4 Les miroirs

Les 6 miroirs de l'interféromètre (les 4 des cavités Fabry-Perot, la séparatrice et le miroir de recyclage) sont des cylindres de silice de diamètre compris entre 35 et 12 cm, et de masse comprise entre 42 et 5 kg.

Puisque le laser doit passer à travers presque tous les miroirs, les substrats ont un coefficient d'absorbtion très bas (de l'ordre de 1 ppm). Cela empêche leur déformation thermique, donc la déformation du front d'onde (et par conséquent une dégradation du contraste). Il sont donc construits avec une silice spéciale, à bas contenu de OH, qui est l'agent responsable de l'absorbtion de la lumière IR dans le substrats.

Pour limiter la déformation du front d'onde, les substrats et les surfaces réfléchissantes des miroirs (*coatings*) sont de très bonne qualité (rugosité inférieure à 0.5 nm RMS, défaut de planéité inférieur à 25 nm RMS).

### 2.2.5 Le banc de détection du signal

Le faisceau à la sortie de l'interféromètre arrive sur un banc optique suspendu qui contient toutes les optiques nécessaires au filtrage spatial du faisceau et à sa focalisation sur les photodiodes.

Afin d'augmenter le contraste, le faisceau de sortie passe par une cavité optique monolithique d'environ 4 cm de longueur (*mode-cleaner de sortie*), et contrôlée thermiquement. L'autre avantage du mode-cleaner de sortie est de diminuer la puissance sur les photodiodes liées aux modes d'ordres supérieur du faisceau, et donc de diminuer le bruit de photons à signal égal (qui dépend seulement du mode fondamental).

Quand le faisceau est passé par le mode cleaner, il rejoint un système de 16 photodiodes InGaAs, avec un rendement optique  $\eta = 0.9$ . La puissance incidente sur les photodiodes après filtrage sera environs de 1 W, qui correspond à un défaut de contraste de  $1 - C = 10^{-3}$ .

Les photodiodes sont situées en dehors du vide, sur un banc optique attaché à la tour du banc de détection.

Entre la tour de détection et celle de la séparatrice il y a une tour utilisable pour héberger le miroir de *recyclage du signal* ou *double recyclage*. Cette technique [23], qui consiste à rendre l'interféromètre résonant pour certaines fréquences gravitationnelles ne sera pas utilisée initialement sur VIRGO, mais elle le sera éventuellement dans un deuxième temps.

## 2.3 Les suspensions

Les miroirs de VIRGO sont suspendus à un système de pendules en cascade appelé *superatténuateur sismique*, et montré dans la figure 2.3.

Sa fonction principale est d'atténuer le bruit sismique sur les miroirs et de rendre sensible l'interféromètre aux signaux gravitationnels à basse fréquence. A cause des inévitables couplages mécaniques entre les degrés de liberté de chaque miroir, il faut une atténuation non seulement dans l'axe du faisceau, mais sur les 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) de chaque miroir.

Les principes de base de l'atténuation sismique pour les différents degrés de liberté sont les suivants:

- L'atténuation dans le plan de l'interféromètre (et donc sur l'axe du faisceau) est réalisée simplement en combinant une série de pendules en cascade. La fonction de transfert totale est le produit des fonctions de transfert de chaque étage de pendule.
- L'atténuation verticale est réalisée en liant chaque étage de pendule à l'étage successif avec des ressorts métalliques disposés en anneaux et appelés *lames*. Les lames atténuent le bruit sismique pour des fréquences supérieures à leur fréquence de résonance.
- L'atténuation pour les rotations est réalisée en utilisant des masses avec des grands moments d'inertie et en attachant chaque fil très proche du centre de gravité de la masse correspondante, pour avoir des petits bras de levier pour l'application des torsions.

### 2.3.1 Structure du superatténuateur sismique

Chaque superatténuateur est contenu dans une tour de 10 m de hauteur, dans le vide. Il est composé des parties suivantes:

- **Le pré-isolateur**

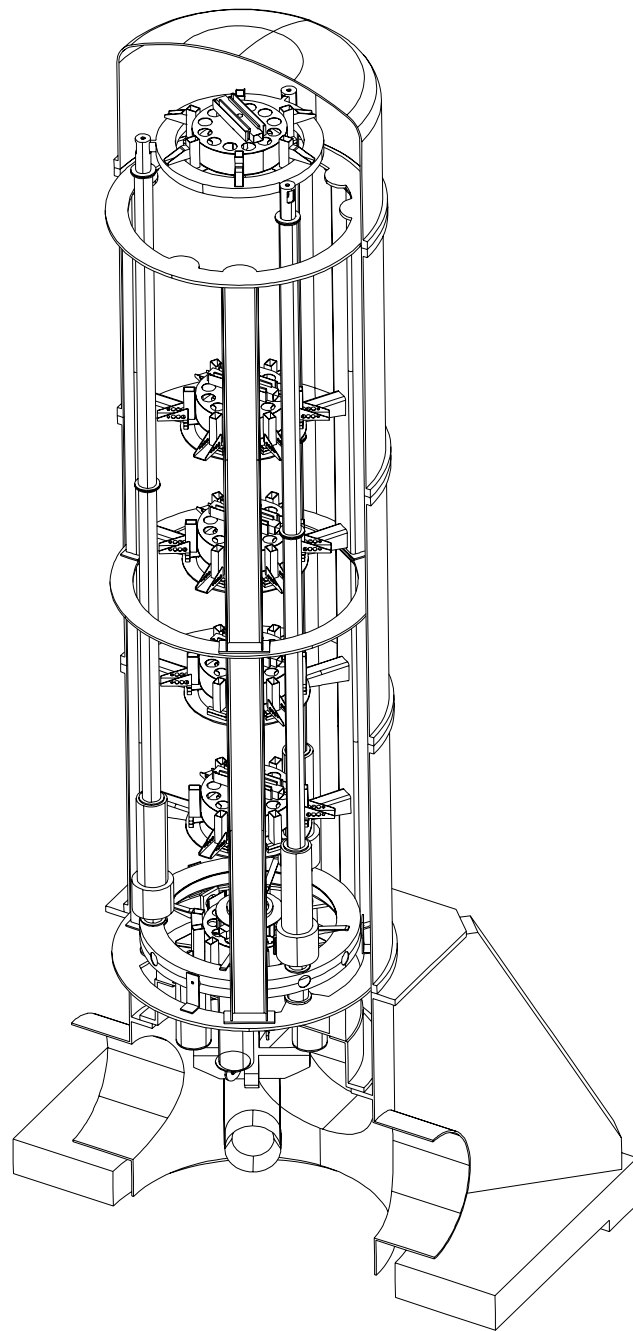


Figure 2.3: Schéma du superatténuateur sismique



Toute la chaîne est suspendue à un pendule inversé, qui est constitué de trois pieds d'environ 6 m de hauteur [24] [25]. Des joints flexibles à la bases des pieds rendent possibles les oscillations du pendule.

Sa fonction principale est de fournir une atténuation du bruit sismique, pour des fréquences supérieures à sa fréquence de résonance, qui s'écrit:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} \quad (2.1)$$

où  $k$  est la constante de raideur du pendule,  $m$  sa masse,  $g$  l'accélération de gravité et  $l$  sa longueur. Grâce à la compétition entre la gravité (qui tend à déplacer le pendule de sa position d'équilibre) et de la force de rappel du joint élastique, on peut rendre  $f_0$  très petit. Dans le cas de VIRGO  $f_0 = 30 \text{ mHz}$ . Donc pour  $f \geq 30 \text{ mHz}$  le bruit sismique est filtré par le pendule inversé avec une fonction de transfert  $\propto 1/f^2$ .

Ce système permet aussi de déplacer toute la chaîne et ainsi de corriger, avec des forces assez petites, les déplacements à long terme des miroirs, en agissant sur le sommet avec des actuateurs *bobine-aimant*.

- **Les filtres**

Au sommet du pendule inversé sont suspendus 5 cylindres d'aluminium avec un poids d'environ 100 kg chacun, appelés *filtres sismiques*. Chaque cylindre est lié aux cylindres successifs par un fil de longueur variable entre 1 m et 2 m. La figure 2.4 montre un des filtres sismiques utilisés; on peut y distinguer les lames métalliques disposées en cercle.

- **La marionnette**

Pour permettre leur alignement et leur contrôle longitudinal, les miroirs sont suspendus à un étage spécial appelé *marionnette* (voir figure 2.5), qui permet les déplacements du miroir dans les six degrés de liberté.

La marionnette est déplacée avec des systèmes bobine-aimant, les bobines étant placées sur l'étage supérieur, et les aimants étant sur la marionnette même.

La figure 2.6 montre la fonction de transfert simulée du superatténuateur, en horizontal et en vertical. Le couplage vertical-horizontal a été supposé de l'ordre de 1%. La fonction de transfert verticale a été mesurée récemment [26] et montre un bon accord avec la fonction de transfert mesurée.

Pour des fréquences  $f > 1 \text{ Hz}$  (donc supérieures à toute les fréquences de résonance des pendules de la chaîne), la fonction de transfert verticale du superatténuateur (entre le sol et le miroir) prend la forme:

$$|TF| \sim \frac{1}{f^{12}} \quad (2.2)$$

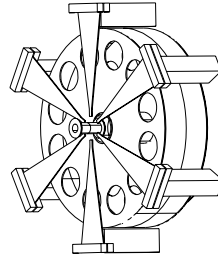


Figure 2.4: Un des filtres sismiques utilisés dans le superatténuateur. Sur la gauche sont visibles les *lames métalliques* utilisées pour l'atténuation du bruit sismique vertical

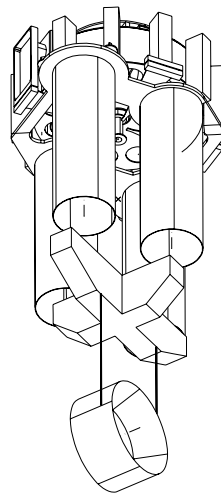


Figure 2.5: Vue de la partie finale du superatténuateur : le dernier filtre, la marionnette et la masse suspendue

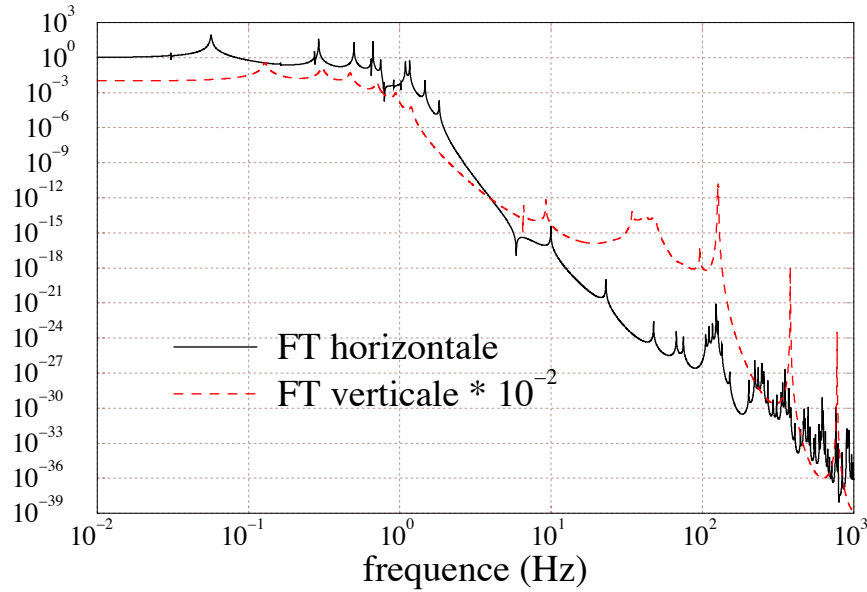


Figure 2.6: Fonctions de transfert simulées du superatténuateur

car il y a 6 étages de filtres verticaux.

(De la même façon en horizontal il y a 7 étages d'atténuation <sup>1</sup> et donc la fonction de transfert a une dépendance en  $1/f^{14}$ )

Cette dépendance  $1/f^{12}$  n'est valable qu'entre 1 Hz et 10 Hz, car les résonances internes des filtres tendent à diminuer l'effet d'atténuation. Malgré cela, le niveau d'atténuation obtenu, combiné avec la dépendance  $1/f^2$  du bruit sismique rend les performances du superatténuateur suffisantes: à 10 Hz le bruit sismique résiduel vaut  $\sim 10^{-26} m/\sqrt{Hz}$  et le bruit thermique domine dans le spectre de sensibilité de l'interféromètre.

## 2.4 Modulation et extraction du signal gravitationnel

Pour s'affranchir des fluctuations de puissance du laser, la lumière est modulée en phase à plusieurs MHz, et le signal gravitationnel est extrait par démodulation synchrone. La technique qui sera utilisée dans VIRGO est la *modulation frontale* (voir figure 2.7), qui consiste à moduler le laser en phase avec une cellule de Pockels, avant le miroir de recyclage, et à introduire une petite asymétrie entre les bras de l'interféromètre.

Décrivons d'abord le cas d'un Michelson simple, pour mettre en évidence le mécanisme d'extraction du signal gravitationnel.

<sup>1</sup>Car la marionnette agit aussi comme filtre horizontal

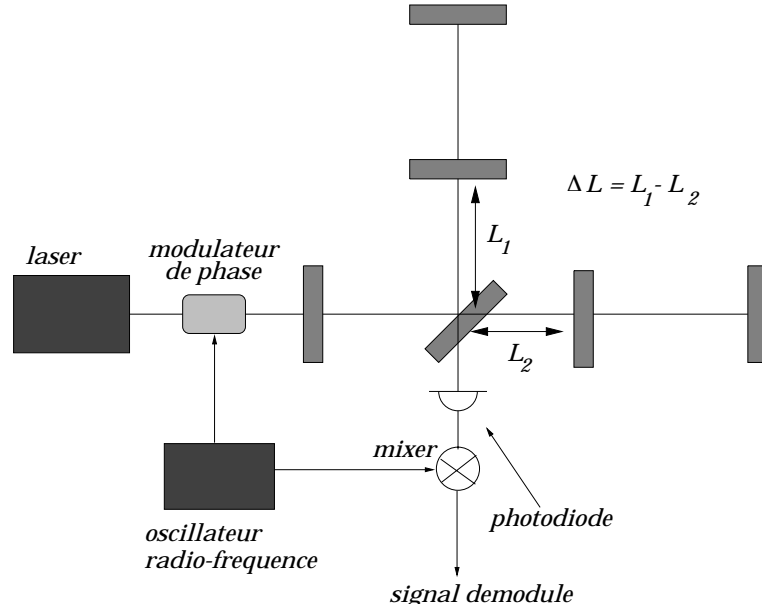


Figure 2.7: Technique de modulation frontale

Indiquons le champ du laser par :

$$E_{in} = E_0 e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

à la sortie de la celle de Pockels on a :

$$E_{in} = E_0 e^{i(\omega t + m \cos(\Omega t + \phi))} \quad (2.4)$$

où  $\Omega$  et  $m$  sont respectivement la fréquence et la profondeur de modulation. Si la profondeur de modulation est faible, on peut développer l'expression précédente en série de Bessel :

$$E_{in} = E_0 [J_0(m) e^{i\omega t} + iJ_1(m) e^{i(\omega+\Omega)t} + iJ_1(m) e^{i(\omega-\Omega)t}] \quad (2.5)$$

La modulation de phase équivaut donc à l'introduction dans l'interféromètre de deux bandes latérales de fréquence  $\omega_0 + \Omega$  et  $\omega_0 - \Omega$ , en opposition de phase.

On indique par  $A_0$  l'amplitude complexe de la porteuse,  $A_-$  l'amplitude complexe de la bande latérale gauche, et  $A_+$  l'amplitude complexe de la bande latérale droite.

A la sortie de l'interféromètre on aura donc le signal :

$$S \propto [A_0 e^{i\omega t} + A_- e^{i(\omega+\Omega)t} + A_+ e^{i(\omega-\Omega)t}]^2 \quad (2.6)$$

et par conséquent:

$$S \propto |A_0|^2 + |A_+|^2 + |A_-|^2 + 2Re\left[A_+A_-^*e^{2i\Omega t}\right] + 2Re\left[(A_-^*A_0 + A_0^*A_+)e^{i\Omega t}\right] \quad (2.7)$$

L'opération de démodulation consiste à faire passer le signal de la photodiode par un mélangeur (*mixer*), qui le multiplie par une *référence* à la fréquence de modulation. Si le signal de référence est en phase avec la modulation on parle de démodulation *en phase*. Autrement de démodulation *quadrature*. Ensuite le signal est filtré par un filtre passe-bas, pour éliminer l'enveloppe à haute fréquence.

La démodulation en phase s'écrit:

$$S_{ph} = \frac{1}{T} \int_T^{T+t} S \cos(\Omega t') dt' = Re[A_-^* A_0 + A_0^* A_+] \quad (2.8)$$

et la démodulation en quadrature:

$$S_q = \frac{1}{T} \int_T^{T+t} S \sin(\Omega t') dt' = -Im[A_-^* A_0 + A_0^* A_+] \quad (2.9)$$

où  $T = 1/\Omega$  est la période de modulation.

Pour expliquer le mécanisme d'extraction du signal gravitationnel considérons d'abord de cas d'un ITF de Michelson simple. Les champs à la sortie de l'interféromètre ont la forme générale:

$$E(\omega) = iE_0(\omega) \sin\left(\frac{\omega}{c} \Delta L\right) \quad (2.10)$$

où  $\Delta L$  est l'asymétrie de longueur entre les bras. Si la porteuse est sur la frange noire on a:

$$A_0 = 0 \quad (2.11)$$

et:

$$A_{\pm} = \pm E_0 J_1(m) \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta L\right) \quad (2.12)$$

Le signal démodulé est donc nul en absence d'onde gravitationnelle.

Le passage d'une onde gravitationnelle génère une porteuse non nulle qui, "bat" avec les bandes latérales, en générant un signal à la fréquence de modulation et *en quadrature*:

$$S_q = 2|E_0|^2 J_0(m) J_1(m) \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta L\right) \frac{\omega}{c} hL \quad (2.13)$$

Les avantages de la technique de modulation, par rapport à une détection "DC" sont les suivants:

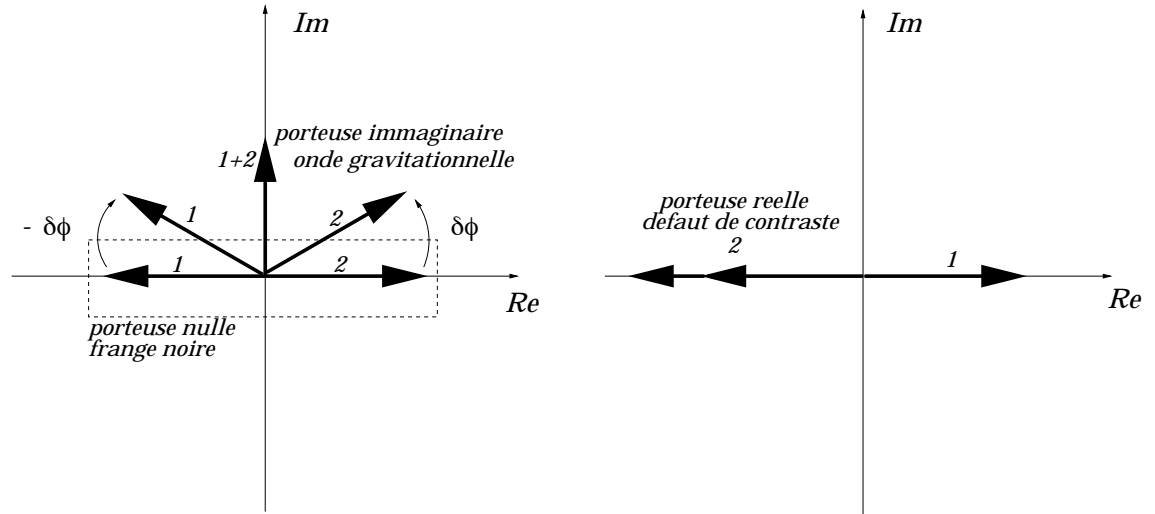


Figure 2.8: Différence entre un signal gravitationnel (porteuse imaginaire), et un défaut de contraste (porteuse réelle). (1) et (2) représentent les faisceaux dans les bras (1) et (2) de l'interféromètre

- Le signal gravitationnel est contenu dans une enveloppe à fréquence  $\Omega$ . A cette fréquence le bruit de la photodiode est le bruit de photons. La détection est donc limitée par ce dernier.
- La porteuse est nulle en absence de signal, donc le signal démodulé est insensible au bruit de puissance du laser. Si le contraste de l'interféromètre n'est pas parfait, il y a une porteuse statique qui “sort” de l'ITF, de la forme:

$$A_0 = E_0 J_0 \sqrt{\frac{1-C}{2}} \quad (2.14)$$

Le signal correspondant à ce champ est toutefois *en phase* avec le signal de modulation, par conséquent les fluctuations de puissance sont dans la “mauvaise” phase, et donc sont rejetées. La figure 2.8 explique la différence entre un signal gravitationnel (porteuse purement imaginaire) et un défaut de contraste (porteuse réelle).

Pour un ITF avec cavité de recyclage et FP le mécanisme est le même: les FP ne font qu'amplifier le déphasage gravitationnel, et le recyclage augmenter la puissance incidente sur la séparatrice.

D'autres techniques de modulation ont été proposées, mais l'avantage de la modulation frontale est lié au fait qu'elle ne nécessite l'introduction de composants optiques

dans la cavité de recyclage, qui pourrait dégrader le faisceau et générer des pertes. L'asymétrie statique  $\Delta L$  qu'il faut introduire, d'autre part, est limitée ( $\sim 1m$ ) et, comme on verra par la suite, ne dégrade pas la sensibilité du détecteur.

## 2.5 Le contrôle de l'interféromètre

Dans le chapitre précédent on a vu que dans VIRGO la solution au problème du bruit sismique est le *superatténuateur*, agissant comme un filtre passe-bas très raide.

Les fréquences de résonance de la chaîne ont été choisies particulièrement basses, le bruit est atténué, à 3 Hz, d'un facteur  $10^9$ . Déjà à cette fréquence la sensibilité de l'antenne n'est plus limitée par le bruit sismique, mais par le bruit thermique.

Les mouvements des miroirs de l'interféromètre sont donc extrêmement faibles pour des fréquences supérieures à quelques Hz.

Toutefois, pour des fréquences inférieures aux fréquences de résonance du superatténuateur le bruit sismique est intégralement transmis sur les miroirs. Sur des intervalles temporels de quelques secondes on aura des mouvements de l'ordre d'un micron. De plus, il existe des mouvements dus aux dilatations thermiques des composants mécaniques, et des lentes dérives des positions relatives des tours.

Les dérives à basse fréquence, mais surtout les oscillations résiduelles des masses, rendent impossible le maintien l'interféromètre dans des conditions d'interférence destructive, les cavités Fabry-Perot, et la cavité de recyclage en résonance avec la lumière laser. On a donc besoin d'un système de contrôle (global), qui en mesurant la position des miroirs avec une grande sensibilité et en agissant directement sur eux, puisse garder l'interféromètre dans les conditions de travail.

Ces conditions se traduisent dans le contrôle de 4 grandeurs:

- La phase dans les deux cavités Fabry-Perot  $\phi_1, \phi_2$
- La phase dans la cavité de recyclage  $\phi_r$
- La différence de phase entre les deux faisceaux sur la séparatrice  $\Delta\phi$

Chaque variation de phase peut être représentée en fonction des variations d'une longueur et de la fréquence laser  $\nu$ :

$$\delta\phi = \frac{2\pi\delta\nu}{c}L + \frac{2\pi\nu}{c}\delta L \quad (2.15)$$

Le laser est très stable, car il est préstabilisé sur une cavité Fabry-Perot rigide, et son bruit n'est pas donc suffisant pour déplacer les cavités de la condition de résonance.

Les variations de phase sont donc principalement dues aux mouvements sismiques des miroirs. Le problème du contrôle de l'interféromètre peut, en première approximation<sup>2</sup>, se réduire au contrôle de 4 longueurs, (montrées dans la figure 2.9):

---

<sup>2</sup>On verra par la suite qu'il est nécessaire d'agir aussi sur la fréquence du laser

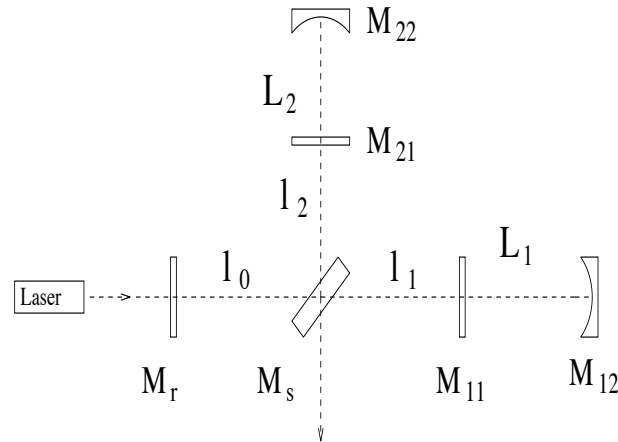


Figure 2.9: Les 4 longueurs caractéristiques qu'il faut contrôler:  $L_1, L_2, l_r = l_0 + (l_1 + l_2)/2, \Delta l = |l_1 - l_2|$

- La longueur des deux cavités Fabry-Perot  $L_1, L_2$
- La longueur de la cavité de recyclage  $l_r = l_0 + (l_1 + l_2)/2$
- L'asymétrie entre les bras de l'interféromètre  $\Delta l = |l_1 - l_2|$

Le fonctionnement du contrôle est conceptuellement simple : les déplacements des quatre longueurs de leur position optimale se traduisent en variations des champs dans l'interféromètre, qu'on peut détecter avec des photodiodes disposées de façon appropriée. Les signaux correspondants peuvent être utilisés comme *signaux d'erreur* dans un asservissement qui agit sur les positions des miroirs [38]. Le dispositif de contrôle devra donc avoir un gain très élevé de la DC jusqu'à quelques Hz, car les mouvements plus importants sont concentrés dans cette région spectrale. Le schéma de contrôle de l'interféromètre est montré dans la figure 2.10.

Ce schéma de contrôle concerne les mouvements *longitudinaux*, c'est à dire dans la direction du faisceau laser. Le bruit sismique à basse fréquence produit aussi des rotations des miroirs, qui dégradent l'alignement. Un asservissement similaire est donc nécessaire pour les compenser.

### 2.5.1 Choix des signaux

Le déplacement d'un miroir se traduit, *via* le champ de recyclage, en une variation des champs dans tous les points de l'ITF. Les signaux *d'erreur* des photodiodes sont tous couplés.

Comme il est nécessaire de contrôler 4 grandeurs indépendantes, il faut choisir 4 signaux indépendants, et ensuite les recombinaison, pour extraire 4 signaux d'erreur. Il a



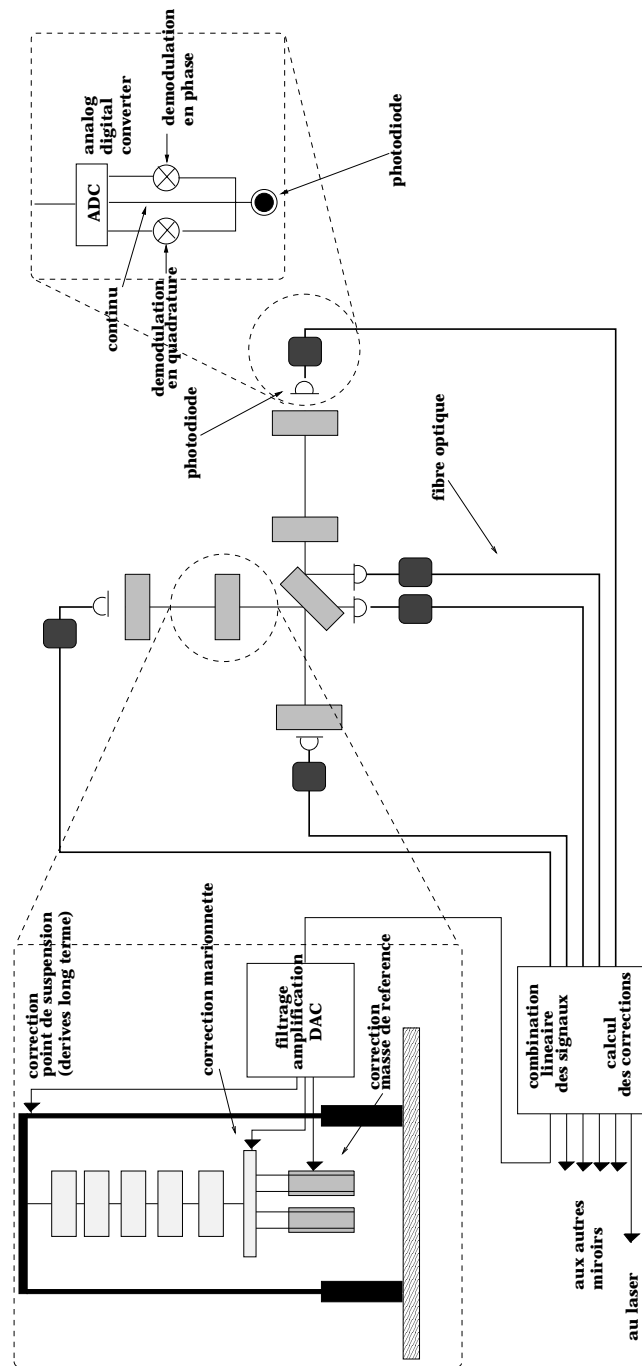


Figure 2.10: Le schéma de contrôle de VIRGO

été montré [27] que, avec la technique de la modulation frontale, ils existent 4 signaux indépendants seulement si les bandes latérales ne résonnent pas dans les FP. En pratique on choisit la fréquence de modulation de façon que les bandes latérales soient *anti-résonantes* dans les bras.

Une fois qu'on a choisi 4 signaux indépendants on peut les recombinaer et les envoyer, après un filtrage opportun, en contre réaction aux miroirs.

### 2.5.2 Action sur les masses

L'action sur les masses se fait à trois niveaux différents, en fonction de la dynamique et de la fréquence des corrections à appliquer:

- Point de suspension de la chaîne.

Pour compenser les dérives thermiques à long terme ( $f \leq 30 \text{ mHz}$ ) une action avec une grande dynamique est nécessaire. Ceci est réalisé en déplaçant le sommet du pendule inversé avec des bobines solidaires à la tour du superatténuateur qui agissent sur des aimants fixés au pendule.

- Marionnette

La marionnette est l'actuateur principal pour la correction des mouvement pendulaires des miroirs ( $f \sim 1 \text{ Hz}$ ).

L'action est faite par des bobines fixées sur le filtre au dessus de la marionnette, qui agissent sur des aimants qui lui sont solidaires.

- Masse de référence.

La fonction de transfert entre la force sur la marionnette et le déplacement du miroir est de la forme  $1/f^4$  au dessus des fréquences de résonance de la marionnette. Donc les déplacements à haute fréquence ont forcément une dynamique limitée.

Pour augmenter la bande passante de l'asservissement longitudinal une masse jumelle du miroir suspendue à la marionnette a été conçue, permettant le déplacement du miroir, toujours avec des systèmes bobines-aimants.

## 2.6 Le tube et le vide

Dès que le faisceau laser entre dans la tour du banc d'entrée, il se propage toujours dans le vide. En particulier entre les miroirs des deux longues cavités Fabry-Perot les faisceaux se propagent dans des tubes d'acier de 1.2 m de diamètre.

Le niveau de vide nécessaire est de  $10^{-9}$  mbar pour l'hydrogène,  $10^{-14}$  mbar pour les hydrocarbures et  $10^{-10}$  mbar pour les autres gaz. La contrainte pour l'hydrogène et pour les autres gaz provient du bruit provoqué par les fluctuations de l'indice de réfraction. La contrainte sur les hydrocarbures dérive du fait que ce type de composants peuvent

s'attacher aux miroirs et dégrader le revêtement réfléchissants, dégradant ainsi leur performances.

Ces niveaux de vide sont assurés par un système de pompage en plusieurs étapes, dont la partie finale est assurée par des pompes passives au Titane (les molécules de gaz tombent par hasard sur la surface de la pompe et y restent), qui fonctionnent en permanence.

Dans les longs tubes à vide, assemblés à partir de modules de 15 m de longueur, des déflecteurs (*baffles*) en acier seront installés, pour empêcher la recombinaison de la lumière diffusée avec le faisceau principal.

## 2.7 La sensibilité de VIRGO

La figure 2.11 montre la sensibilité prévue pour VIRGO et les contributions des différentes sources de bruit.

On peut partager le spectre en trois régions:

- **Basses fréquences** ( $f < 2$  Hz): La sensibilité est limitée par le *mur* du bruit sismique, et la détection des ondes gravitationnelles est inaccessible au détecteur. Pour comprendre l'utilisation du terme *mur* on peut remarquer que dans l'intervalle 1-2 Hz la sensibilité augmente de 7-8 ordres de grandeurs.
- **Fréquences intermédiaires** ( $2$  Hz  $< f < 500$  Hz): La sensibilité est limitée par le bruit thermique et le bruit newtonien. Autour de 10 Hz le bruit thermique pendulaire des suspensions est le bruit dominant, avec une dépendance en  $1/f^{5/2}$ , alors que autour de 100 Hz le bruit thermique des miroirs devient plus important, avec une dépendance en  $1/f^{1/2}$ . On peut remarquer la première résonance des substrats à  $f \sim 6$  kHz et les résonances des modes violons des fils avec leur harmoniques.
- **Hautes fréquences** ( $f > 500$  Hz): La sensibilité est limitée par le bruit de photons. La puissance incidente sur la séparatrice est  $P_{rec} = P \cdot G_{rec} = 1$  kW on a (cf. léq. 1.65):

$$\tilde{h}_{photons} \simeq 2 \cdot 10^{-23} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{500 \text{ Hz}}\right)^2} 1/\sqrt{Hz} \quad (2.16)$$

## 2.8 VIRGO et les autres détecteurs interférométriques dans le monde

L'expérience la plus proche de VIRGO est le projet américain LIGO (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory). Il prévoit la construction de deux antennes de 4 km placées à une distance de 3000 km. Leur topologie optique (cavités Fabry-Perot

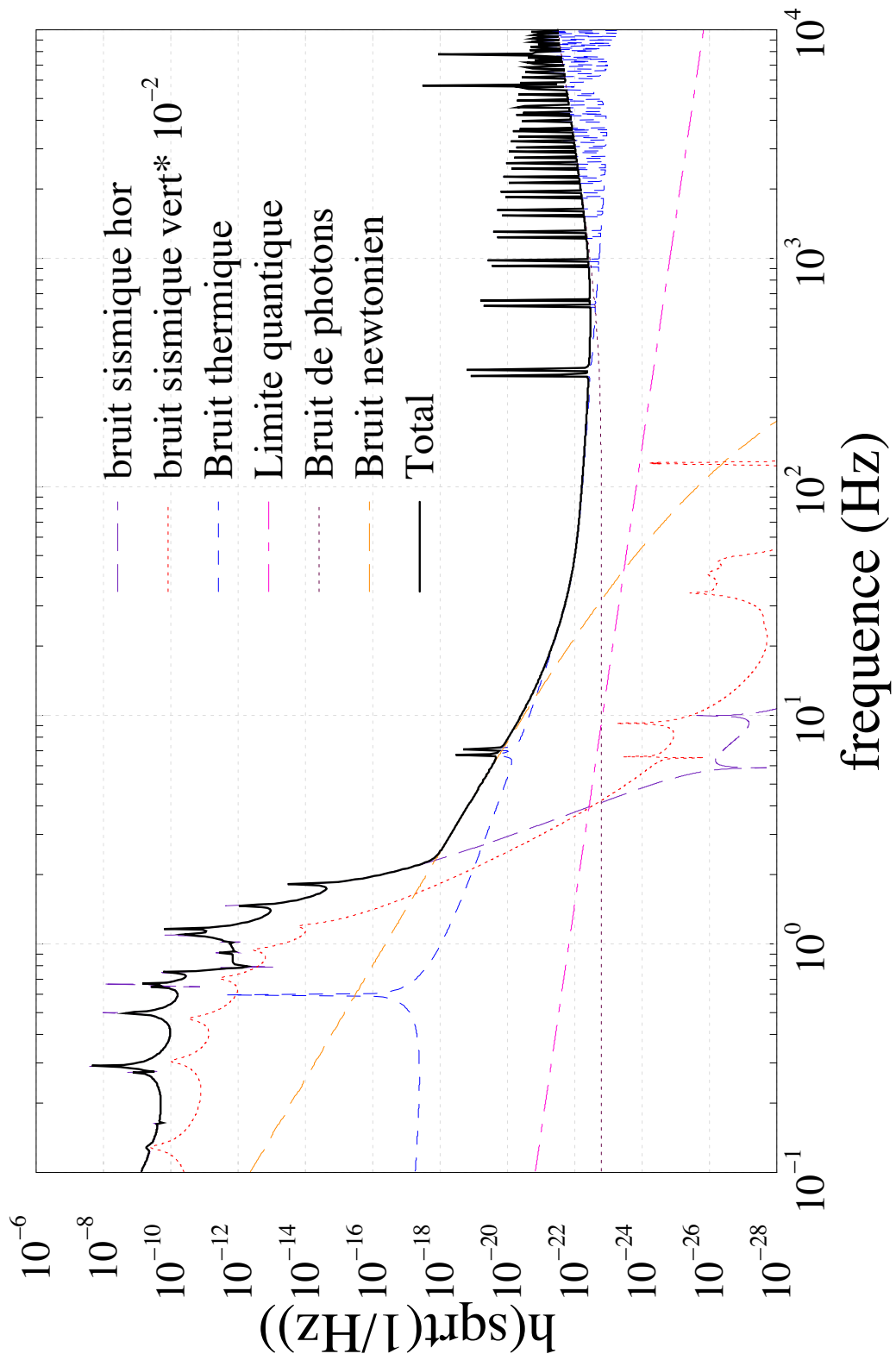


Figure 2.11: Courbe de sensibilité de VIRGO

et recyclage de la lumière) est la même que celle de VIRGO, mais les suspensions sont beaucoup plus simples, et cela rend la sensibilité à basse fréquence très inférieure à celle de VIRGO.

L'interféromètre anglo-allemand GEO (avec bras de 600 m) est la seule expérience qui n'utilise pas des cavités Fabry-Perot, mais des lignes à retard. La stratégie de GEO est d'avoir un énorme facteur de recyclage et d'utiliser la technique du recyclage de signal. Cela rend l'interféromètre très sensible dans une bande passante très étroite (autour de 300 Hz).

Le projet japonais TAMA a la même topologie que VIRGO et LIGO, mais des bras de 300 m. Des équipes japonaises sont aussi en train de développer un projet d'interféromètre cryogénique, avec les miroirs refroidis à quelques degrés Kelvin, pour diminuer le bruit thermique des substrats et des suspensions.

La présence de plusieurs antennes dans le monde est fondamentale pour les raisons suivantes:

- Réalisation de mesures *en coïncidence*, pour la détection des sources impulsives (comme les Supernovae)
- Réalisation de mesures de *triangulation*, pour la détermination de la position des sources dans le ciel.
- Détermination des paramètres de la radiation gravitationnelle (vitesse des ondes, spin du graviton, etc...).

## Partie II

# La stabilisation en fréquence du laser de VIRGO



## Chapitre 3

# Les spécifications de stabilité en fréquence du laser de VIRGO

### 3.1 Introduction

Les asymétries entre les bras de l'interféromètre (ITF) se couplent avec le bruit de fréquence du laser pour générer une fluctuation de phase à la sortie du détecteur.

Dans un ITF de Michelson simple, les faisceaux qui se propagent dans les deux bras accumulent une différence de phase  $\Delta\phi$  qui dépend de la fréquence de la lumière  $\nu$  et de la différence de longueur statique entre les bras  $\Delta L$ :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{c} \Delta L \nu \quad (3.1)$$

et donc, si  $\nu$  fluctue avec un bruit de densité spectrale linéaire  $\tilde{\delta\nu}$ , la différence de phase fluctue aussi, de la quantité:

$$\tilde{\delta\phi}_{freq} = \frac{4\pi}{c} \Delta L \tilde{\delta\nu} \quad (3.2)$$

D'autre part une onde gravitationnelle d'amplitude  $\tilde{h}$  produit une variation de phase:

$$\tilde{\delta\phi}_{og} = \frac{4\pi}{c} \nu \tilde{h} L \quad (3.3)$$

On peut donc comparer le bruit induit par les fluctuations de fréquence à la sensibilité du détecteur, en définissant un  $\tilde{h}$  équivalent, qui vaut:

$$\tilde{h}_{eq} = \frac{\tilde{\delta\nu}}{\nu} \frac{\Delta L}{L} \quad (3.4)$$

Dans ce cas, le terme de couplage entre bruit du laser et bruit de l'ITF est simplement l'asymétrie relative de longueur entre les bras; pour un ITF avec Fabry-Perot (FP) et recyclage, comme VIRGO, le calcul de l'asymétrie est évidemment plus compliqué, et en particulier il doit tenir compte des filtres en fréquence des cavités optiques.



L'asymétrie, dépend alors de la fréquence spectrale du bruit, et on parle plutôt de *fonction de transfert* de l'ITF pour le bruit de fréquence. En outre la modulation de phase de la lumière (cf. paragraphe 2.4) implique la présence de trois fréquences dans l'ITF, la porteuse et les deux bandes latérales RF; le bruit de fréquence à la sortie est donc une combinaison du bruit sur les trois fréquences.

Pendant ce travail de thèse nous avons déterminé la fonction de transfert pour VIRGO, en utilisant la ligne de calcul développée au sein du projet LIGO [28]. Le calcul analytique présente l'avantage, par rapport à une détermination purement numérique de la fonction de transfert, de mettre en évidence l'origine du bruit et des effets de filtrage fréquentiels de l'ITF.

Ensuite nous avons évalué les asymétries de l'ITF en fonction des paramètres optiques et géométriques (finesses, réflectivités des miroirs, asymétrie de longueur etc...). Cela a permis de déterminer précisément des contraintes, jusqu'à présent seulement estimées, sur la distribution spectrale du bruit de fréquence afin que ce dernier ne limite pas la sensibilité de VIRGO.

### 3.2 Le bruit de fréquence

Chaque composante spectrale du bruit de fréquence peut être décrite comme une faible modulation de la fréquence du laser autour d'une *valeur centrale*  $f_0$ :

$$f(\omega_a) = f_0 + \delta\nu \cos(\omega_a t) \quad (3.5)$$

$\delta\nu$  est l'amplitude du bruit et  $f_a = \omega_a/2\pi$  sa fréquence.

La phase correspondante est donc:

$$\phi(t) = 2\pi \int_0^t f(\omega_a) dt = 2\pi f_0 t + \frac{2\pi \delta\nu}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \quad (3.6)$$

Si on indique  $E_0 e^{i\omega_0 t}$  le champs du laser en absence du bruit on obtient:

$$E = E_0 e^{i\omega_0 t} e^{i \frac{2\pi \delta\nu}{\omega_a} \sin(\omega_a t)} \simeq E_0 e^{i\omega_0 t} \left( 1 + \frac{\pi \delta\nu}{\omega_a} e^{i\omega_a t} - \frac{\pi \delta\nu}{\omega_a} e^{-i\omega_a t} \right) \quad (3.7)$$

Le bruit est donc équivalent à la présence de deux fréquences supplémentaires, d'amplitude  $\pm \pi \delta\nu / \omega_a$  et de fréquence  $f_0 \pm f_a$ . Comme les fréquences spectrales du bruit qui nous intéressent sont situées dans la région de détection de VIRGO (10 Hz - 10 kHz), on parle de *bandes latérales audio* (BA).

### 3.3 La modulation RF

Comme on l'a expliqué au paragraphe 2.4, le laser est modulé en phase à plusieurs MHz, pour s'affranchir du bruit *technologique* de puissance du laser, le champs modulé  $E_{in}$ , pour des profondeurs de modulation faibles ( $m \ll 1$ ), s'écrit :

$$E_{in} = E e^{im\cos(\Omega t)} \simeq E \left( J_0(m) + iJ_1(m)e^{i\Omega t} + iJ_1(m)e^{-i\Omega t} \right) \quad (3.8)$$

où  $f_m = \Omega/2\pi$  est la fréquence de modulation . Comme la modulation est aux fréquences radio, les fréquences supplémentaires générées sont appelées *bandes latérales radio-fréquence* (Bandes RF).

Le champ entrant dans l'ITF se trouve en combinant l'équation précédente et l'équation 3.7:

$$E_{in} = E_0 e^{i\omega_0 t} \left( 1 + \frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{i\omega_a t} - \frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{-i\omega_a t} \right) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \times \left( J_0(m) + iJ_1(m)e^{i\Omega t} + iJ_1(m)e^{-i\Omega t} \right) \\ & = E_0 e^{i\omega_0 t} \left[ \underbrace{J_0(m)}_{\text{porteuse}} + \underbrace{J_0(m)\frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{i\omega_a t} - J_0(m)\frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{-i\omega_a t}}_{\text{audio porteuse}} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$+ \underbrace{iJ_1(m)e^{i\Omega t}}_{\text{RF droite}} + \underbrace{iJ_1(m)\frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{i(\Omega+\omega_a)t} - iJ_1(m)\frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{i(\Omega-\omega_a)t}}_{\text{audio RF droite}}$$

$$+ \underbrace{iJ_1(m)e^{-i\Omega t}}_{\text{RF gauche}} + \underbrace{iJ_1(m)\frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{-i(\Omega-\omega_a)t} - iJ_1(m)\frac{\pi\delta\nu}{\omega_a} e^{-i(\Omega+\omega_a)t}}_{\text{audio RF gauche}} \Big]$$

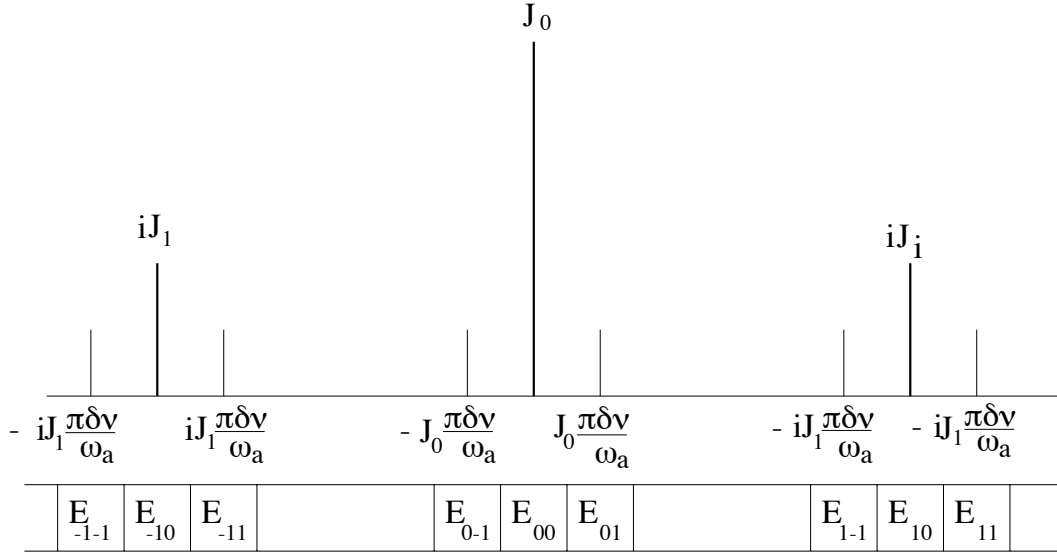
Il y a donc 9 fréquences, représentées dans la figure 3.1: la *porteuse* et ses BA, et les *bandes RF* et leurs BA. Dans la suite les champs correspondants seront indiqués avec la notation  $E_{ij}$  où  $E$  est le champ dans une position générique de l'ITF, le premier indice indique la position “RF” (-1 RF gauche, 0 porteuse, 1 RF droite) et le deuxième indice indique la position “audio” (-1 audio gauche, 0 position centrale, 1 audio droite).

### 3.4 Démodulation

L'ITF est constitué par d'éléments linéaires (vide et miroirs), donc chaque fréquence se propage indépendamment des autres. Le champs  $E$  à la sortie de l'ITF peut être donc calculé comme la somme de  $E_{ij}$ . ( $i=[-1,1]$   $j=[-1,1]$ ). Ce que nous mesurons est le signal issu d'une photodiode, qui est donc proportionnel au module au carré du champ  $E$ :

$$S = \alpha P = \alpha \left( \sum_{ij} E_{ij} \right) \left( \sum_{ij} E_{ij}^* \right) \quad (3.11)$$

Où  $\alpha$  est une constante de proportionnalité. Dans la suite, pour praticité, on considèrera  $\alpha=1$ . Les termes de la somme 3.11 qui nous intéressent sont ceux séparés par un

Figure 3.1: Bandes *audio* et *RF* qui entrent dans l'ITF

intervalle de fréquence  $\Omega \pm \omega_a$ , les autres étant éliminés par la démodulation. Le signal correspondant  $S_{mod}$  vaut:

$$\begin{aligned}
P_{mod} = & 2Re \left[ \underbrace{E_{10}E_{0-1}^* e^{i(\Omega+\omega_a)t} + E_{10}E_{01}^* e^{i(\Omega-\omega_a)t}}_{RF \times audio \text{ porteuse}} \right. \\
& + \underbrace{E_{-10}^* E_{01} e^{i(\Omega+\omega_a)t} + E_{-10}^* E_{0-1} e^{i(\Omega-\omega_a)t}}_{RF \times audio \text{ porteuse}} \\
& + \underbrace{E_{00}E_{-1-1}^* e^{i(\Omega+\omega_a)t} + E_{00}E_{-11}^* e^{i(\Omega-\omega_a)t}}_{porteuse \times audio \text{ RF}} \\
& \left. + \underbrace{E_{00}^* E_{11} e^{i(\Omega+\omega_a)t} + E_{00}^* E_{1-1} e^{i(\Omega-\omega_a)t}}_{porteuse \times audio \text{ RF}} \right] E_0 e^{i\omega_0 t}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Le signal démodulé *en phase* et *en quadrature* s'obtient en multipliant le signal modulé par une référence respectivement en phase et en quadrature avec la modulation, et en filtrant le signal résultant avec un filtre passe-bas, pour éliminer l'enveloppe radio-fréquence. Les opérations correspondantes sont:

$$\begin{aligned}
S_{ph} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P_{mod} \cos(\Omega t') dt' \quad \text{phase} \\
S_q &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P_{mod} \sin(\Omega t') dt' \quad \text{quadrature}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où  $T = 2\pi/\Omega$  est la période de la modulation. En utilisant l'équation 3.13 dans les équations précédentes, on trouve:

$$\begin{aligned} S_{ph} &= Re(\zeta) \\ S_q &= -Im(\zeta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

où:

$$\begin{aligned} \zeta &= \underbrace{E_{10}E_{0-1}^*e^{i\omega_a t} + E_{-10}E_{01}^*e^{-i\omega_a t} + E_{-10}^*E_{01}e^{i\omega_a t} + E_{01}^*E_{0-1}e^{-i\omega_a t}}_{RF \times audio \text{ porteuse}} \\ &+ \underbrace{E_{00}E_{-1-1}^*e^{i\omega_a t} + E_{00}E_{-11}^*e^{-i\omega_a t} + E_{00}^*E_{11}e^{i\omega_a t} + E_{00}^*E_{1-1}e^{-i\omega_a t}}_{porteuse \times audio \text{ RF}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comme  $Re(\zeta) = Re(\zeta^*)$  et  $Im(\zeta^*) = -Im(\zeta)$ , on a:

$$\begin{aligned} S_{ph} &= \left| \left( \underbrace{E_{01}(E_{-10}^* + E_{10}^*) + E_{0-1}^*(E_{10} + E_{-10})}_{RF \times audio \text{ porteuse}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underbrace{E_{00}(E_{-1-1}^* + E_{1-1}^*) + E_{00}^*(E_{11} + E_{-11})}_{porteuse \times audio \text{ RF}} \right) \right| \end{aligned} \quad (3.16)$$

de la même façon:

$$\begin{aligned} S_q &= \left| \left( \underbrace{E_{01}(E_{-10}^* - E_{10}^*) + E_{0-1}^*(E_{10} - E_{-10})}_{RF \times audio \text{ porteuse}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underbrace{E_{00}(E_{-1-1}^* - E_{1-1}^*) + E_{00}^*(E_{11} - E_{-11})}_{porteuse \times audio \text{ RF}} \right) \right| \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dans les deux équations précédentes on a éliminé la dépendance temporelle en  $\cos(\omega_a t)$  et  $\sin(\omega_a t)$ , car on est intéressés seulement à l'amplitude des signaux  $S_{ph}$  et  $S_q$ .

### 3.5 Champs dans l'ITF

La figure 3.2 montre un schéma de l'ITF, avec la disposition des champs et les principaux paramètres géométriques et optiques. On a indiqué par:

- $E_{in}$  le champ incident sur l'ITF.

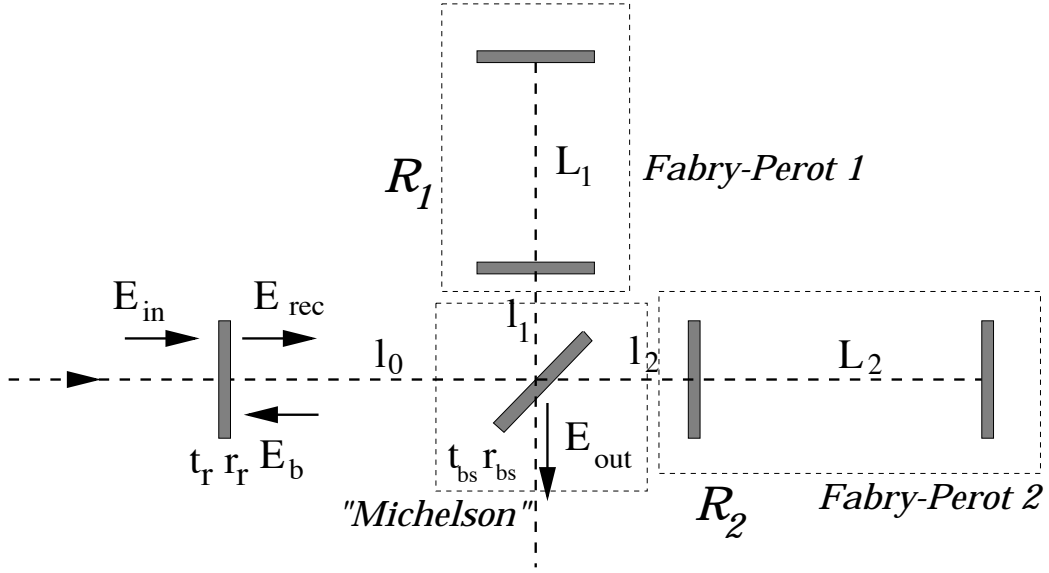


Figure 3.2: Schéma de l'interféromètre

- $E_{rec}$  le champ dans la cavité de recyclage, sur le miroir de recyclage et se propageant vers la séparatrice
- $E_b$  le champ dans la cavité de recyclage, sur le miroir de recyclage et se propageant vers le laser
- $E_{out}$  le champ transmis par la séparatrice à la sortie de l'ITF
- $L_1 = L_2 = 3 \text{ km}$  la longueur des deux FP
- $l_1 \sim l_2 \sim 6 \text{ m}$  la longueur des deux bras du Michelson
- $l_0 = 6 \text{ m}$  la distance entre le miroir de recyclage et la séparatrice
- $r_r = 0.9899$  et  $t_r \simeq \sqrt{1 - r_r^2}$  respectivement la réflectivité et la transmittivité du miroir de recyclage
- $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  la réflectivité complexe des FP
- $r_{bs} = t_{bs} = 1/\sqrt{2}$  respectivement la réflectivité et la transmittivité de la séparatrice

La convention adoptée pour les réflectivités des miroirs est montrée dans la figure 3.3. Le champ dans la cavité de recyclage  $E_{rec}$  pour une fréquence générique  $\omega$  s'écrit:

$$E_{rec} = t_r E_{in} - r_r E_b \quad (3.18)$$

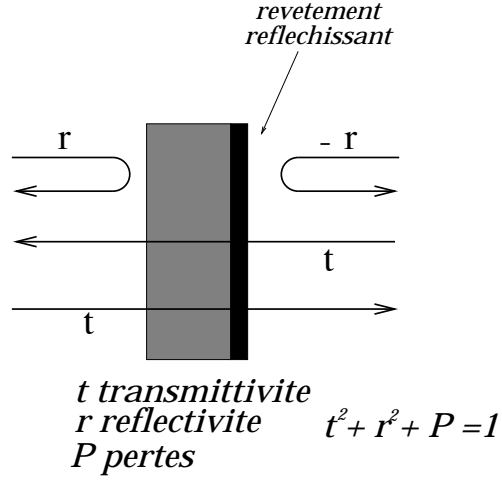


Figure 3.3: Convention pour les réflectivités des miroirs

où:

$$E_b = E_{rec} \frac{1}{2} e^{-2i\frac{\omega}{c}l_0} \left[ e^{-2i\frac{\omega}{c}l_1} \mathcal{R}_1 + e^{-2i\frac{\omega}{c}l_2} \mathcal{R}_2 \right] \quad (3.19)$$

donc:

$$E_{rec} = \frac{t_r E_{in}}{1 + \frac{1}{2} r_r e^{-2i\frac{\omega}{c}l_0} \left[ e^{-2i\frac{\omega}{c}l_1} \mathcal{R}_1 + e^{-2i\frac{\omega}{c}l_2} \mathcal{R}_2 \right]} \quad (3.20)$$

ou encore:

$$E_{rec} = \frac{t_r E_{in}}{1 + \frac{1}{2} r_r e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_1 + e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_2 \right]} \quad (3.21)$$

en ayant défini  $\Delta l = l_1 - l_2$  (l'asymétrie macroscopique entre les bras du Michelson), et  $l_r = l_0 + (l_1 + l_2)/2$  (la longueur de la cavité de recyclage).

Le champ à la sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{out} &= e^{-i\frac{\omega}{c}l_0} \left[ e^{-2i\frac{\omega}{c}l_1} \mathcal{R}_1 - e^{-2i\frac{\omega}{c}l_2} \mathcal{R}_2 \right] E_{rec} \\ &= e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} e^{i\frac{\omega}{c}l_0} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_1 - e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_2 \right] E_{rec} \end{aligned} \quad (3.22)$$

et, en remplaçant l'équation 3.21 dans l'équation précédente, il vient :

$$E_{out} = \frac{e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} e^{i\frac{\omega}{c}l_0} \frac{1}{2} \left[ e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_1 - e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_2 \right]}{1 + \frac{1}{2} r_r e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_1 + e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} \mathcal{R}_2 \right]} t_r E_{in} \quad (3.23)$$

### 3.6 Equations pour la porteuse et ses BA

Comme la porteuse est résonante dans la cavité de recyclage et sur la frange noire, on a:

$$\frac{\omega_0}{c} l_r = 0 \pmod{2\pi} \text{ recyclage} \quad (3.24)$$

$$\frac{\omega_0}{c} \Delta l = 0 \pmod{2\pi} \text{ frange noire} \quad (3.25)$$

Pour simplifier on peut supposer que, pour toutes les grandeurs *macroscopiques*<sup>1</sup> ( $l_1, l_2, l_0, L_1, L_2$ ), soit vérifiée la condition:

$$\frac{\omega_0}{c} l_i = 0 \pmod{2\pi} \quad (3.26)$$

#### 3.6.1 Reflectivité complexe des cavités Fabry-Perot

La réflectivité d'une cavité FP s'écrit (cf. Annexe A):

$$\mathcal{R} = \frac{r_1 - (1 - P_1) r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \quad (3.27)$$

où:

$$\phi = \frac{2\omega_a}{c} L \quad (3.28)$$

est la phase d'aller-retour dans la cavité:

Si les fréquences qui nous intéressent vérifient la condition:

$$\omega_a \ll \frac{c}{2L} \implies f_a \ll 8 \text{ kHz} \quad (3.29)$$

on peut utiliser l'approximation:

$$e^{-i\phi} \simeq 1 - i\phi = 1 - 2i\frac{\omega_a}{c} L \quad (3.30)$$

<sup>1</sup>Très supérieures à la longueur d'onde de la lumière.

donc on peut réécrire la 3.27 sous la forme:

$$\mathcal{R} = r_0 \frac{1 + \frac{(1 - P_1)r_2 i \phi}{r_1 - (1 - P_1)r_2}}{1 + \frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} i \phi} \quad (3.31)$$

où:

$$r_0 = \frac{r_1 - (1 - P_1)r_2}{1 - r_1 r_2} \quad (3.32)$$

est la réflectivité à la résonance. Les paramètres de VIRGO sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0.9391 \\ r_2 = 0.999975 \\ P_1 \simeq 10^{-5} \end{array} \right\} \Rightarrow r_0 = -0.9987 \sim -1$$

Etant donné que  $r_1 \simeq r_2 \simeq 1$  on a d'autre part:

$$\frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \sim \frac{1}{1 - r_1 r_2} \sim \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} = \frac{\mathcal{F}}{\pi} \quad (3.33)$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse de la cavité. Donc:

$$\frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \cdot i \frac{\omega_a}{c} L \simeq \frac{\mathcal{F}}{\pi} i \frac{\omega_a}{c} L = \frac{s}{s_c} \quad (3.34)$$

où l'on a défini:

$$s = i \omega_a \quad (3.35)$$

et:

$$s_c = 2\pi f_c = 2\pi \cdot \frac{c}{4\mathcal{F}L} \simeq 2\pi \cdot 500 \text{ Hz} \quad (3.36)$$

le **pôle des Fabry-Perot**. On a aussi, pour le numérateur de la 3.31:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - P_1)r_2}{r_1 - (1 - P_1)r_2} i \frac{\omega_a}{c} L &\simeq \frac{1 - r_1 r_2}{r_1 - (1 - P_1)r_2} \times \frac{(1 - P_1)r_2}{1 - r_1 r_2} i \frac{\omega_a}{c} L \\ &\simeq \frac{\mathcal{F}}{\pi} i \frac{\omega_a}{c} L \frac{1}{r_0} = \frac{s}{s_c R_0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Par conséquent on peut écrire la 3.31 sous la forme:

$$\mathcal{R} = r_0 \frac{1 + \frac{s}{s_c R_0}}{1 + \frac{s}{s_c}} \quad (3.38)$$



Comme  $r_0 \simeq -1$  on a :

$$\mathcal{R} \simeq -\frac{1 - \frac{s}{s_c}}{1 + \frac{s}{s_c}} \quad (3.39)$$

Sous ces hypothèses, les FP ont une fonction de transfert de module unité et sont donc des “*déphaseurs*” purs.

### Validité des approximations

La condition  $f_a \ll 8kHz$  a permis d’écrire la réflectivité complexe des Fabry-Perot sous la forme 3.38.

La validité de cette approximation est beaucoup plus large. La figure 3.4 montre la comparaison entre la phase exacte de la réflectivité complexe des FP et celle calculée grâce à l’équation 3.38. On peut donc utiliser le formalisme développé dans le paragraphe précédent dans tout l’intervalle de détection de VIRGO.

### 3.6.2 Champ de recyclage

Dans le calcul du champ de recyclage on négligera les effets des asymétries entre les deux bras de l’ITF, car il sont négligeables par rapport aux effets symétriques. On a donc :  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ . En remplaçant l’équation 3.38 dans 3.21 on trouve :

$$E_{rec} = \frac{t_r E_{in}}{1 + r_r e^{-2i \frac{\omega_a}{c} l_r} \frac{1 + \frac{s}{s_c}}{r_0 \frac{s_c r_0}{1 + \frac{s}{s_c}}}} \quad (3.40)$$

Une phase de propagation des BA dans le Michelson ( $2\omega_a l_r / c$ ) et une phase due aux FP interviennent dans le calcul du champ de recyclage . Comme la longueur optique des FP est très supérieure à celle du Michelson, on négligera la phase accumulée dans ce dernier <sup>2</sup>. Donc :

$$E_{rec}(\omega_0) = \frac{t_r E_{in}}{1 + r_r r_0 \frac{s_c r_0}{1 + \frac{s}{s_c}}} = \frac{t_r E_{in}}{1 + r_r r_0} \times \frac{1 + \frac{s}{s_c}}{1 + \frac{s}{s_{rec}}} \quad (3.41)$$

---

<sup>2</sup>La longueur optique des FP est une fonction de la fréquence d’analyse, comme on peut le noter dans la formule 3.38. Pour des fréquences au dessus du pôle des FP, les BA sont réfléchies, et donc le chemin optique dans le Michelson devient proportionnellement plus important. Toutefois, on peut montrer que pour les fréquences considérées ( $f \leq 10 kHz$ ), le déphasage dans le Michelson est toujours négligeable.

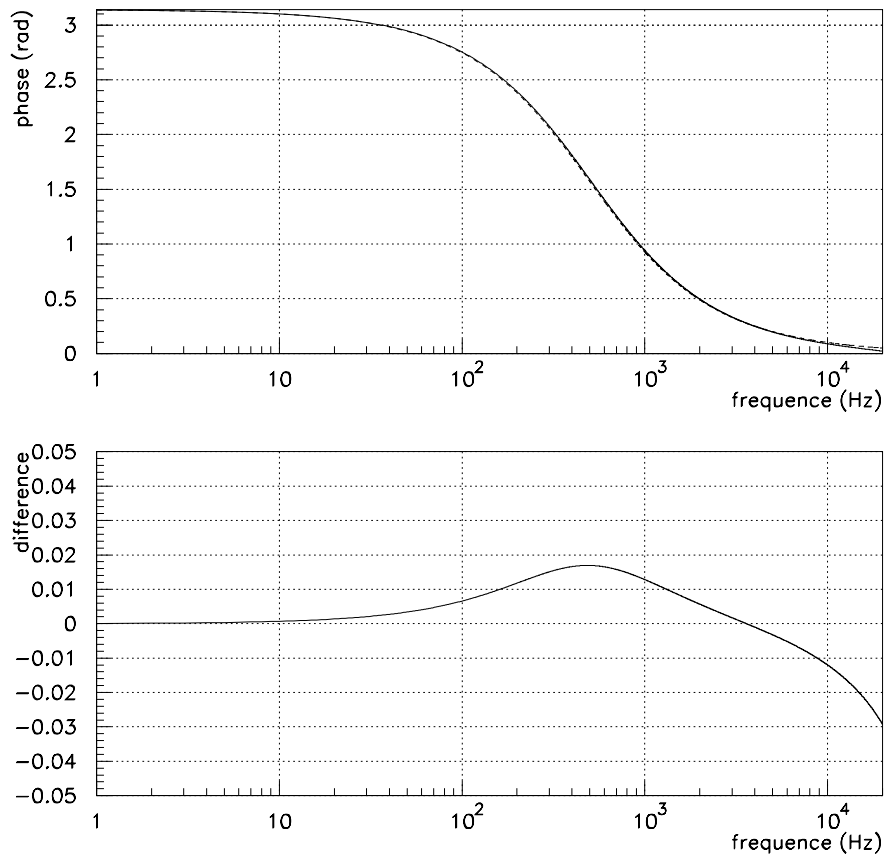


Figure 3.4: (Haut) Comparaison entre la phase exacte de la réflectivité complexe des Fabry-Perot et celle calculée avec l'approximation 3.38 : phase exacte (ligne continue), phase approximée (ligne avec tirets). (bas) différence entre la phase exacte et l'approximation.

où:

$$s_{rec} = 2\pi f_{rec} = 2\pi \frac{s_c}{1 + r_r r_0} \quad (3.42)$$

est le **pôle de la cavité de recyclage**. Avec les paramètres de VIRGO il vient  $s_{rec} \simeq 2\pi \cdot 5 \text{ Hz}$ .

Si l'on définit:

$$g_p = \frac{t_r}{1 + r_r r_0} = \sqrt{G_{rec}} \quad (3.43)$$

où  $G_{rec}$  est le gain de recyclage, on a:

$$E_{rec}(s) = g_p E_{in}(s) \frac{1 + \frac{s}{s_{rec}}}{1 + \frac{s}{s_{rec}}} \quad (3.44)$$

Les fréquences supérieures au pôle de la cavité de recyclage sont donc filtrées par un passe-bas. Toutefois en correspondance du pôle des FP les BA sont réfléchies par les cavités, qui deviennent des simples miroirs de réflectivité unité. Cela se traduit en la présence d'un zéro à 500 Hz, qui annule l'effet de filtrage du recyclage pour  $f > 500 \text{ Hz}$ .

### 3.6.3 Champs à la sortie de l'ITF

Dans le calcul du champ de la porteuse à la sortie de l'ITF on supposera l'existence de trois asymétries, qui seront traitées de façon indépendante.

#### Asymétrie de longueur

Les deux FP sont parfaitement identiques et la seule asymétrie est la différence de longueur  $\Delta l$  entre les bras du Michelson. On a donc:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = r_0 \frac{1 + \frac{s}{s_c}}{1 + \frac{s_c r_0}{s}} \quad (3.45)$$

et l'expression 3.23 devient:

$$E_{out}(s) = i r_0 \frac{1 + \frac{s}{s_c}}{1 + \frac{s_c r_0}{s}} \sin\left(\frac{\omega_a}{c} \Delta L\right) E_{rec} \simeq g_p E_{in} r_0 \frac{1 + \frac{s}{s_c r_0}}{1 + \frac{s}{s_{rec}}} \frac{i \omega_a}{c} \Delta L \quad (3.46)$$

que l'on peut écrire, en utilisant les équations 3.21 et 3.35, sous la forme:

$$E_{out}(s) = E_{in} g_p r_0 \frac{1 + \frac{s}{s_c r_0} \frac{s}{c} \Delta L}{1 + \frac{s}{s_{rec}}} \quad (3.47)$$

L'asymétrie de longueur crée une différence de phase entre les champs des BA dans les deux bras, qui les déplace de la condition d'interférence destructive, et donc génère un signal “*de porteuse*” en sortie de l'ITF. Ce champ est filtré par la cavité de recyclage.

### Asymétrie de finesse des FP

Les deux FP ont une asymétrie de finesse  $\Delta\mathcal{F}$ , et l'asymétrie de longueur des bras du Michelson est négligeable. On a donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \mathcal{F} + \frac{\Delta\mathcal{F}}{2} \\ \mathcal{F}_2 &= \mathcal{F} - \frac{\Delta\mathcal{F}}{2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse moyenne. L'asymétrie de la finesse entraîne une asymétrie:

$$\frac{\Delta s_c}{s_c} = \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \quad (3.49)$$

entre les pôles des deux cavités<sup>3</sup>, et donc:

$$\begin{aligned} s_{c1} &= s_c + \frac{\Delta s_c}{2} \\ s_{c2} &= s_c - \frac{\Delta s_c}{2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

En combinant les équations 3.38 et 3.23 on obtient:

$$E_{out}(s) = \frac{s}{s_c} (1 - r_0) \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{s_c}\right)^2} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} E_{rec} \quad (3.51)$$

L'asymétrie de finesse crée une différence de chemin optique entre les bras, donc les BA de la porteuse ne sont plus en interférence destructive. Comme cette asymétrie est intrinsèque des FP, l'effet diminue au dessus de 500 Hz.

En utilisant l'équation 3.21, pour le champ de recyclage, on a:

$$E_{out}(s) = g_p \frac{s}{s_c} (1 - R_0) \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{s_c}\right) \left(1 + \frac{s}{s_{rec}}\right)} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} E_{in} \quad (3.52)$$

De façon similaire au cas précédent, le champ des BA est filtré par la cavité de recyclage.

---

<sup>3</sup>Une asymétrie de longueur des FP est équivalente à une asymétrie de finesse, car les deux entraînent une asymétrie du chemin optique “*vu*” par les faisceaux dans les deux bras. L'asymétrie de la longueur des cavités est négligeable par rapport à celle de finesse, et donc on ne parlera que de cette dernière.

### Asymétrie de réflectivité des FP

Le chemin optique dans les FP et dans le Michelson est exactement le même pour les deux bras, et les FP ont une différence de réflectivité en amplitude  $\Delta r_0$ . Donc:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \left(r_0 + \frac{\Delta r_0}{2}\right) \frac{1 + \frac{s}{s_c(r_0 + \Delta r_0/2)}}{1 + \frac{s}{s_c}} \\ \mathcal{R}_2 &= \left(r_0 - \frac{\Delta r_0}{2}\right) \frac{1 + \frac{s}{s_c(r_0 - \Delta r_0/2)}}{1 + \frac{s}{s_c}}\end{aligned}\quad (3.53)$$

en utilisant la 3.38 et la 3.23 on trouve:

$$E_{out}(s) = \Delta r_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{s_c}} E_{rec} \quad (3.54)$$

et par conséquent:

$$E_{out}(s) = g_p \Delta r_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{s_{rec}}} E_{in} \quad (3.55)$$

L'asymétrie de réflectivité se traduit par un défaut de contraste de l'interféromètre. Il faut remarquer que, contrairement aux cas précédents, la porteuse, et ses bandes audio, sont *réelles*. On retrouve ici la différence, déjà expliquée au paragraphe 2.4, entre une différence de chemin optique (porteuse imaginaire), et un défaut de contraste (porteuse réelle).

On remarque aussi que, comme pour l'asymétrie de finesse, ici l'effet est lié aux Fabry-Perot, et il est donc filtrée au-dessus du pôle  $s_c$ .

## 3.7 Equations pour les bandes radio-fréquences et leurs BA

Pour permettre le contrôle des 4 longueurs caractéristiques de l'ITF (cf. paragraphe 2.5), la fréquence de modulation  $\Omega$  est choisie de façon à ce que les bandes RF ne résonnent pas dans les FP. Dans VIRGO elles seront complètement antirésonnantes, donc:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 1 \quad (3.56)$$

Pour permettre l'extraction du signal gravitationnel il faut que le bandes RF sortent de l'interféromètre, et donc qu'elles résonnent dans la cavité de recyclage. La condition de résonance dans la cavité de recyclage pour les bandes RF s'écrit donc:

$$\frac{\Omega}{c}l_r = \pi \pmod{2\pi} \quad (3.57)$$

Le champ à la sortie de l'ITF est:

$$E_{out}(\Omega + \omega_a) = \frac{t_r E_{in} \sin\left(\frac{\Omega + \omega_a}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r e^{-2i \frac{\omega_a}{c} l_r} \cos\left(\frac{\Omega + \omega_a}{c} \Delta l\right)} \quad (3.58)$$

Comme  $\omega_a \ll \Omega$  on peut faire les approximations:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\Omega + \omega_a}{c} \Delta l\right) &\simeq \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right) \\ \sin\left(\frac{\Omega + \omega_a}{c} \Delta l\right) &\simeq \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

et donc:

$$E_{out}(\Omega + \omega_a) = \frac{t_r E_{in} \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r e^{-2i \frac{\omega_a}{c} l_r} \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} \quad (3.60)$$

Comme on a la condition  $f_a \leq 10 \text{ kHz}$  (cf. paragraphe 3.29), *a fortiori* on a:

$$\omega_a \ll 12.5 \text{ MHz} \implies \frac{2\omega_a}{c} l_r \ll 1 \quad (3.61)$$

on peut donc utiliser l'approximation:

$$e^{-2i \frac{\omega_a}{c} l_r} \simeq 1 - 2i \frac{\omega_a}{c} l_r \quad (3.62)$$

par conséquent l'expression 3.60 dévient:

$$\begin{aligned}
E_{out}(\Omega + \omega_a) &= \frac{t_r \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r \left(1 - i \frac{\omega_a}{c} l_r\right) \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} E_{in} & (3.63) \\
&= \frac{t_r \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2i \frac{\omega_a}{c} l_r}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}} E_{in} \\
&= \frac{t_r \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{s_{rec}^{RF}}} E_{in}
\end{aligned}$$

où:

$$s_{rec}^{RF} = 2\pi f_{rec}^{RF} = 2\pi \frac{c}{4l_r} \frac{1}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} \quad (3.64)$$

est le pôle de la cavité de recyclage pour les bandes latérales. Avec les paramètres de VIRGO on obtient  $s_{rec}^{RF} \simeq 75 \text{ kHz}$ . Cette valeur est très supérieure aux fréquences qui nous intéressent. On peut donc négliger la présence du pôle. Finalement on a, pour le champ de sortie:

$$E_{out}(\Omega + \omega_a) = E_{out}(\Omega) = \frac{t_r E_{in} \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} E_{in} \quad (3.65)$$

Si l'on définit:

$$t_{RF} = \left| \frac{t_r \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right)} \right| \quad (3.66)$$

le *coefficient de transmission* des bandes RF à la sortie de l'ITF, on peut réécrire l'équation 3.66 sous la forme:

$$E_{out}(\Omega + \omega_a) = \frac{|\Omega|}{\Omega} \cdot t_{RF} E_{in}(\Omega + \omega_a) \quad (3.67)$$

### 3.8 Signaux démodulés et h équivalent

Une onde gravitationnelle produit un signal *en quadrature* à la sortie de l'ITF (cf. paragraphe 2.4), de la forme [14]:

$$S_q = 2G \frac{\omega_0}{s_c} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_c}\right)^2}} h \quad (3.68)$$

où:

$$G = |E_0|^2 J_0(m) J_1(m) g_p t_{RF} \quad (3.69)$$

On peut remarquer que:

- Le signal est filtré par le pôle des FP, à 500 Hz. Quand la période de l'onde est inférieure au temps de stockage de la lumière dans les cavités, le déphasage gravitationnel est “moyenné”, et donc diminue.
- Le seul effet du recyclage est celui d'augmenter la puissance dans l'ITF. Il n'y a aucun effet de filtrage lié à la présence de la cavité de recyclage.

Pour obtenir le  $\tilde{h}_{eq}$  il faut considérer seulement les signaux en quadrature dus aux termes d'asymétrie, qu'on peut réécrire, en tenant compte des expressions des champs des bandes RF (3.65), sous la forme:

$$S_q = \left| \underbrace{2(E_{01} - E_{0-1}^*)}_{RF \times audio \text{ porteuse}} - \underbrace{4Re(E_{00}) \frac{\pi \delta \nu}{\omega_a}}_{\text{porteuse} \times audio \text{ RF}} \right| E_0 J_1(m) t_{RF} \quad (3.70)$$

#### 3.8.1 Asymétrie de longueur

La porteuse est nulle donc le deuxième terme de l'équation 3.70 est aussi nul. Le signal est uniquement produit par le battement des BA de la porteuse avec les bandes RF. En utilisant l'équation 3.47 on obtient:

$$S_q = 4G \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_c R_0}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} r_0 \frac{\pi}{c} \delta \nu \Delta L \quad (3.71)$$

Le h équivalent s'écrit:



$$\tilde{h}(\Delta L) = \frac{\delta\nu}{\nu} \frac{\Delta L}{L} \frac{2\mathcal{F}}{\pi} |r_0| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{R_0 s_c}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \quad (3.72)$$

### 3.8.2 Asymétrie de finesse

Comme précédemment le deuxième terme de l'équation 3.70 est nul, et le signal en quadrature est du à un battement entre les BA de la porteuse et les bandes RF. L'équation 3.52 donne:

$$S_q = 4G \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_c}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \frac{\pi}{c} \frac{1}{s_c} \delta\nu \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \quad (3.73)$$

Le h équivalent est:

$$\tilde{h}(\Delta L) = \frac{\delta\nu}{\nu} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \frac{1 - R_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \quad (3.74)$$

comme les FP sont fortement sous-couplés on a  $r_0 \simeq -1$ , donc:

$$\tilde{h}(\Delta\mathcal{F}) = \frac{\delta\nu}{\nu} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \quad (3.75)$$

### 3.8.3 Asymétrie de réflectivité des FP

Dans ce cas la différence de réflectivité des FP crée un défaut de contraste. Donc les deux termes de l'équation 3.70 contribuent au signal. L'équation 3.55 donne:

$$S_q = 4G \Delta r_0 \left| \frac{1}{1 + \frac{s}{s_{rec}}} - 1 \right| \frac{\pi \delta\nu}{\omega_a} \quad (3.76)$$

et donc:

$$S_q = 4G \Delta r_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \frac{\pi}{s_{rec}} \delta\nu \quad (3.77)$$

L'origine de ce terme est spécialement lié à la présence de la cavité de recyclage, et mérite un approfondissement. Considérons d'abord le cas sans bruit de fréquence.

Une différence de réflectivité des cavités FP crée un défaut de contraste, et donc une porteuse réelle. Le signal démodulé qui en résulte est *en phase* avec la modulation, et donc n'influence pas le signal gravitationnel, qui est en revanche *en quadrature* avec la modulation. C'est d'ailleurs pour cette raison que les fluctuations de puissance du laser ne se transforment pas en bruit de phase à la sortie de l'ITF: elles génèrent un bruit sur la *mauvaise* phase par rapport au signal gravitationnel.

Analysons l'influence du bruit de fréquence. Ce dernier est une modulation de phase du faisceau laser. En absence de cavité de recyclage le champ modulé se propage jusqu'à la sortie de l'ITF et sur la photodiode de détection. Deux possibilités peuvent se présenter:

- L'ITF est parfaitement sur la frange noire  $\implies$  La modulation de phase se transforme totalement en une modulation en amplitude sur la *mauvaise* phase (cf. équation 3.70).
- Il y a un défaut de contraste  $\implies$  Le battement entre les BA de la porteuse compense exactement le battement entre les BA des bandes latérales et la porteuse. Donc le signal est nul sur les deux phases de démodulation. En d'autres termes, la modulation de phase reste une modulation de phase, et la photodiode y est donc insensible.

L'effet de la cavité de recyclage est de filtrer les BA de la porteuse, au-dessus de 5 Hz, et donc de laisser les BA des bandes RF interférer ("*battre*") avec la porteuse, pour générer un signal en quadrature (donc en phase avec le signal gravitationnel).

Le h équivalent s'écrit:

$$\tilde{h}(\Delta r_0) = \frac{\tilde{\delta\nu}}{\nu} \frac{\Delta r_0}{2} \frac{s_c}{s_{rec}} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \quad (3.78)$$

## 3.9 Evaluation des asymétries de l'ITF

### 3.9.1 Asymétrie de longueur

Comme on l'a expliqué au paragraphe 2.4, l'utilisation de la modulation frontale demande une asymétrie de longueur  $\Delta L$  entre les bras du Michelson. Le signal gravitationnel est en effet généré par un battement des bandes RF qui "sortent" de l'interféromètre avec la porteuse (créée par le passage d'une onde gravitationnelle). Il existe donc une asymétrie optimale, pour laquelle le coefficient de transmission  $t_{RF}$  des bandes RF, et

donc le signal gravitationnel, est maximum. D'après l'équation 3.66, cette condition s'écrit:

$$\cos\left(\frac{\Omega}{c}\Delta L\right) = r_r \quad (3.79)$$

La fréquence de modulation  $f_{mod} = \Omega/2\pi$  se trouve en imposant la condition de résonance des bandes latérales dans la cavité de recyclage:

$$\frac{2\pi f_{mod}}{c} 2l_r \simeq \pi \pmod{2\pi} \quad (3.80)$$

et comme  $l_r = 6 \text{ m}$  on obtient  $f_{mod} \simeq n \cdot 6.25 \text{ MHz}$  avec  $n$  impair. Pour différentes raisons, la fréquence de modulation utilisée dans VIRGO sera  $\simeq 6.25 \text{ MHz}$ , ce qui implique une asymétrie optimale:

$$\Delta L \sim 0.5 \text{ m} \quad (3.81)$$

### 3.9.2 Asymétrie de finesse

Une asymétrie de finesse peut avoir deux origines:

#### L'Asymétrie dans la réflectivité du miroir d'entrée des FP

L'asymétrie de réflectivité prévue pour les miroirs de VIRGO est [29] [30]:

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} \leq 10^{-4} \quad (3.82)$$

Comme on a:

$$\frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} = \frac{\Delta r_1}{1 - r_1} \quad (3.83)$$

l'asymétrie de finesse maximale est  $\sim 10^{-3}$ .

#### L'effet Fabry-Perot dans les substrats des miroirs d'entrée des FP

Les substrats des miroirs d'entrée forment des cavités FP, dont la réflectivité dépend des réflectivités des deux faces du substrat. L'épaisseur du substrat (donc la longueur de la cavité) ne peut pas être contrôlée avec une précision de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière. En outre les effets thermiques des substrats provoquent des dilatations qui ne sont pas cohérentes pour les deux miroirs. Il y a donc une asymétrie de réflectivité des miroirs d'entrée, même si les paramètres optiques sont précisément les mêmes. Il y aura par conséquent une asymétrie de finesse.

L'asymétrie maximale est trouvée quand le premier substrat est résonnant en tant que Fabry-Perot, et l'autre est anti-résonnant. Il a été montré que, dans ce cas, l'asymétrie de finesse s'écrit [31] :

$$\frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = 4 \cdot r_0 \quad (3.84)$$

où  $r_0$  est la réflectivité en amplitude du revêtement antireflet des substrats. La valeur prévue est  $r_0 \leq 10^{-2}$  [29] [30], donc :

$$\frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \sim 4\% \quad (3.85)$$

Pour symétriser les bras deux solutions sont possibles, cependant aucune de ces solutions n'est envisagée pour VIRGO :

- L'utilisation d'un angle (*wedge*) sur la face antireflet. Leur utilisation empêche à la lumière de résonner dans le substrat, et donc élimine complètement l'effet Fabry-Perot. Des considérations de lumière diffusée par les wedges ont motivé le choix de surfaces perpendiculaires à la direction des faisceaux.
- Le contrôle de l'épaisseur des substrats, avec un asservissement sur la température des tours. Cette solution n'a pas de contreindication, à l'exception d'une complication supplémentaire de l'expérience.

### 3.9.3 L'asymétrie de réflectivité des FP

La réflectivité à la résonance des FP s'écrit (cf l'équation 3.32) :

$$r_0 = \frac{r_1 - r_2(1 - P_1)}{1 - r_1 r_2} \quad (3.86)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les réflectivités respectivement du miroir d'entrée et du miroir de fond, et  $P_1$  sont les pertes du miroir d'entrée. Comme  $r_2 > 0.99995$  les pertes dépendent de façon critique des pertes du miroir d'entrée.

Les pertes des miroirs de VIRGO ont deux origines :

- L'absorption des substrats.  
L'utilisation d'une silice à basse teneur en OH limite cette contribution à un niveau  $\leq 1$  ppm.
- La diffusion des surfaces  
Les pertes par diffusion ont été mesurées sur des petites surfaces, et sont inférieures à 10 ppm. Aucune mesure sur l'uniformité des surfaces n'a été faite sur des fréquences spatiales comparables à la taille du faisceau.

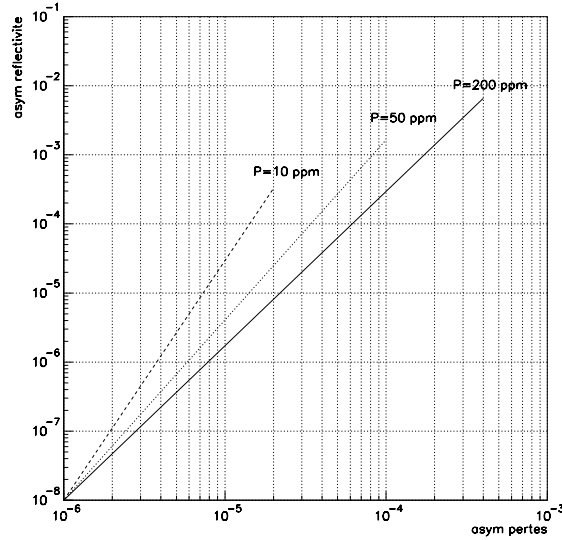


Figure 3.5: Asymétrie de réflectivité des cavités FP en fonction de l'asymétrie de la réflectivité sur le miroir d'entrée. Trois valeurs des pertes moyennes sont reportées

Nous avons calculé l'asymétrie de réflectivité des FP en fonction de l'asymétrie des pertes du miroir d'entrée. Le résultat est montré dans la figure 3.5, pour les valeurs de pertes moyennes  $P=10$  ppm,  $P=50$  ppm,  $P=200$  ppm.

Comme valeur conservative nous utiliserons 50 ppm de pertes moyennes et 30 ppm d'asymétrie entre les pertes, ce qui correspond à:

$$\Delta r_0 \sim 10^{-4} = 100 \text{ ppm} \quad (3.87)$$

## 3.10 Les spécifications pour la stabilité en fréquence

### 3.10.1 La courbe de sensibilité de VIRGO

Pour le calcul des spécifications de fréquence on utilise une courbe de sensibilité de VIRGO simplifiée, obtenue en considérant seulement les trois contributions principales du bruit dans la région de détection (10 Hz - 10 kHz): le bruit thermique du pendule, le bruit thermique des modes internes des miroirs, et le bruit de photons. La paramétrisation que l'on a utilisé est la suivante [32]:

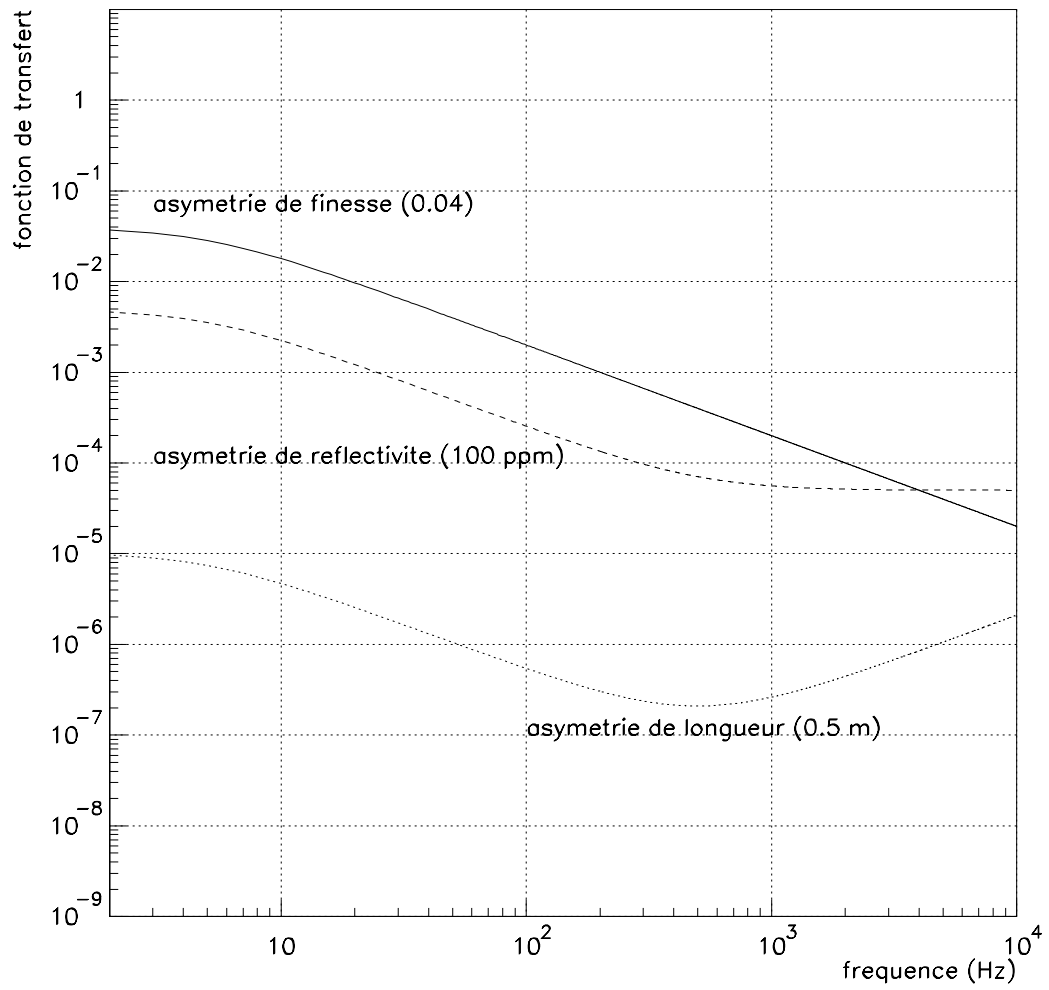


Figure 3.6: Fonctions de transfert pour les 3 termes d'asymétrie de l'ITF

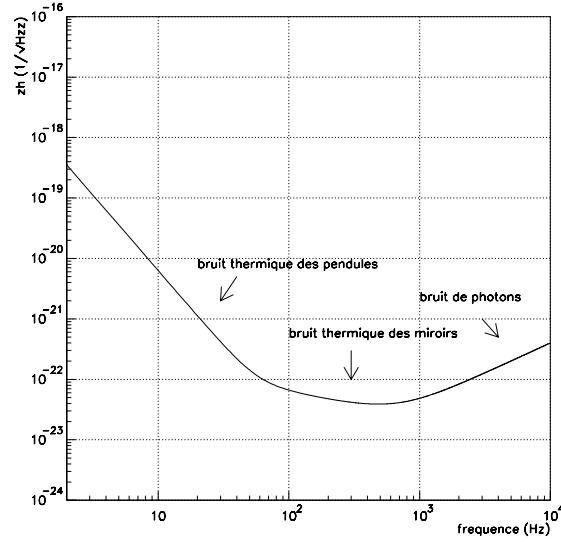


Figure 3.7: Courbe de sensibilité simplifiée de VIRGO

$$\tilde{h} \text{ (1/}\sqrt{\text{Hz)}} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_{pen} = \frac{2 \cdot 10^{-18}}{f^{5/2}} \\ \tilde{h}_{int} = \frac{6 \cdot 10^{-22}}{f^{1/2}} \\ \tilde{h}_{ph} = 2 \cdot 10^{-23} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{500 \text{ Hz}}\right)^2} \end{array} \right.$$

et donc:

$$\tilde{h} = \sqrt{\tilde{h}_{pend}^2 + \tilde{h}_{mirror}^2 + \tilde{h}_{shot}^2} \text{ 1/}\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.88)$$

La courbe de sensibilité de VIRGO est représentée sur la figure 3.7.

### 3.10.2 Stabilité en fréquence pour VIRGO

Les spécifications de stabilité en fréquence de VIRGO sont calculées en demandant que:

$$\tilde{h}_{eq} = \frac{1}{10} \tilde{h}_{VIRGO} \implies \frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{1}{10} \tilde{h}_{VIRGO} \frac{1}{T_{\delta\nu \rightarrow h}} \quad (3.89)$$

où  $T_{\delta\nu \rightarrow h}$  est la somme des trois fonctions de transfert entre le  $\tilde{h}_{eq}$  et le bruit de fréquence, calculées auparavant.

Les figures 3.6 et 3.8 montrent respectivement les fonction de transfert des 3 termes d'asymétrie et les contraintes sur correspondantes sur la stabilité en fréquence du laser. Les paramètres utilisés sont: 4% d'asymétrie de finesse, 0.5  $m$  d'asymétrie de longueur et  $10^{-4}$  (100 ppm) d'asymétrie dans la réflectivité en amplitude des cavités FP.

### 3.11 Conclusions

Le calcul de la fonction de transfert a montré l'origine physique et la dépendance en fréquence du bruit à la sortie de l'interféromètre, pour les trois asymétries de longueur, finesse et réflectivité. Ce dernier n'avait pas été inclus dans les évaluations des spécifications de stabilité du laser de VIRGO.

Les calculs montrés seront comparés avec une simulation numérique.

Si les miroirs d'entrée ont une asymétrie de réflectivité en amplitude de  $10^{-4}$ , le terme dominant du bruit sera l'asymétrie de finesse. Cependant des travaux sont en cours pour investiguer la possibilité que l'asymétrie de réflectivité soit plus élevée, à cause des pertes dues aux défauts des miroirs (rugosité, planéité, erreur sur les rayons de courbure, effets thermiques etc...). Dans ce cas le terme d'asymétrie de réflectivité pourrait devenir très dominant, surtout à haute fréquence, où il n'est pas filtré par la cavité de recyclage.



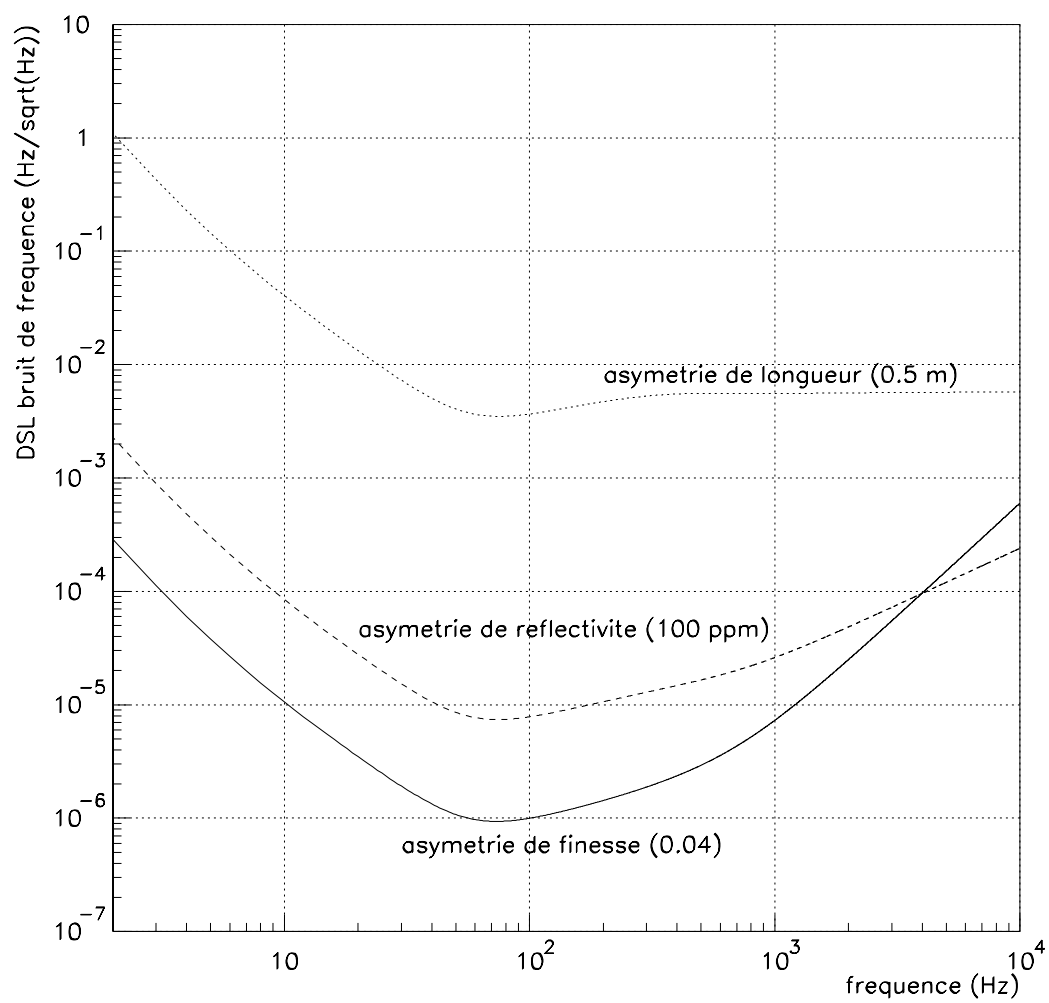


Figure 3.8: Spécifications pour la stabilité de fréquence du laser de VIRGO

## Chapitre 4

# La stabilisation de fréquence *sur* l'interféromètre

### 4.1 Introduction

Les contraintes de stabilité en fréquence que nous avons établies au chapitre précédent sont extrêmes:  $10^{-5} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 10 Hz, et  $10^{-6} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 100 Hz. Les lasers actuellement disponibles ont un bruit qui est environs 8 ordres de grandeur plus important.

On peut réduire le bruit du laser, en l'asservissant sur une cavité rigide ultrastable. Ce type d'expérience a été réalisée au Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire et ailleurs dans le monde, et montre qu'on peut obtenir des stabilités de  $1 \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 10 Hz et  $0.1 \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 100 Hz. Pour gagner les ordres de grandeur qui manquent il faut donc asservir ultérieurement le laser, ainsi *prestabilisé*, sur une cavité optique encore plus stable.

La stabilité relative de la cavité, en tant qu'étalon de fréquence est égale à sa stabilité relative en longueur:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta L}{L} \quad (4.1)$$

ce qui se traduit, à 10 Hz, en un bruit de position relatif de  $3 \cdot 10^{-20} 1/\sqrt{\text{Hz}}$ . Seules les bras de VIRGO ont la stabilité suffisante: il faut donc asservir le laser sur les cavité Fabry-Perot kilométriques.

Les deux bruits principaux qui interviennent dans un asservissement sont:

- Le bruit de la *détection* du signal d'erreur

Pour asservir le laser sur l'ITF il faut tout d'abord extraire un *signal d'erreur*, qui mesure la différence entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance des bras. Comme le signal est extrait avec une photodiode, les performances de la stabilisation sont limitées par le bruit de photons. Il faut donc choisir un signal avec un bruit de photons suffisamment faible, et avec une réponse optimale aux fluctuations de fréquence du laser.

- Le bruit de la *référence*

VIRGO est un interféromètre avec recyclage, tous les champs à l'intérieur du détecteur sont couplés: il faut plutôt parler d'un asservissement du laser sur l'interféromètre considéré dans son ensemble, plutôt qu'un asservissement sur les bras. Puisque dans l'intervalle spectral qui nous intéresse (10 Hz - 10 kHz) le bruit de position dominant est le bruit thermique, la stabilité de l'étalon est déterminée, en principe, par le bruit thermique de tous les miroirs.

Dans ce chapitre on discute le niveau de stabilité de fréquence qui peut être obtenu en asservissant le laser sur l'interféromètre, en fonction du bruit de la *détection* et de la *référence*. Les problèmes inhérents à l'asservissement lui-même seront traités par la suite.

## 4.2 La technique de Pound-Drever et les signaux de l'interféromètre

Le méthode de Pound-Drever [33] permet l'extraction, limitée par le bruit de photons, d'un *signal d'erreur* qui mesure la différence entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance d'une cavité optique. Comme on le verra dans la suite, le laser est *prestabilisé* sur une cavité rigide en utilisant cette technique. Le but est le même que celui de la modulation frontale, utilisée pour l'extraction du signal gravitationnel: s'affranchir du bruit de puissance du laser à basse fréquence. Le laser est donc modulé en phase à plusieurs MHz, et le faisceau réfléchi par la cavité est démodulé de façon synchrone (voir figure 4.1)

La fréquence de modulation est choisie de façon à ce que les bandes latérales ne résonnent pas dans la cavité. Elles sont directement réfléchies et ne "voient" pratiquement pas le Fabry-Perot, mais seulement un miroir de haute réflectivité. Si la porteuse résonne dans la cavité, la variation de phase  $\delta\psi$  du faisceau réfléchi, pour des petits écarts par rapport à la résonance, dépend linéairement de ces derniers:

$$\delta\psi \propto \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \frac{4\pi\delta\nu}{c} L \quad (4.2)$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse de la cavité,  $L$  sa longueur, et  $\delta\nu$  sont les fluctuations de fréquence.

L'extraction du signal d'erreur de l'interféromètre est conceptuellement une extension de la technique de Pound-Drever. Supposons que la fréquence du laser fluctue de  $\delta\nu$ , on a les conditions suivantes:

- La porteuse est résonnante dans les cavités FP de 3 km. La phase du champ réfléchi est donnée par l'équation 4.2.
- Les bandes latérales sont antiresonnantes dans les bras. Leur déphasage est donc pratiquement nul.

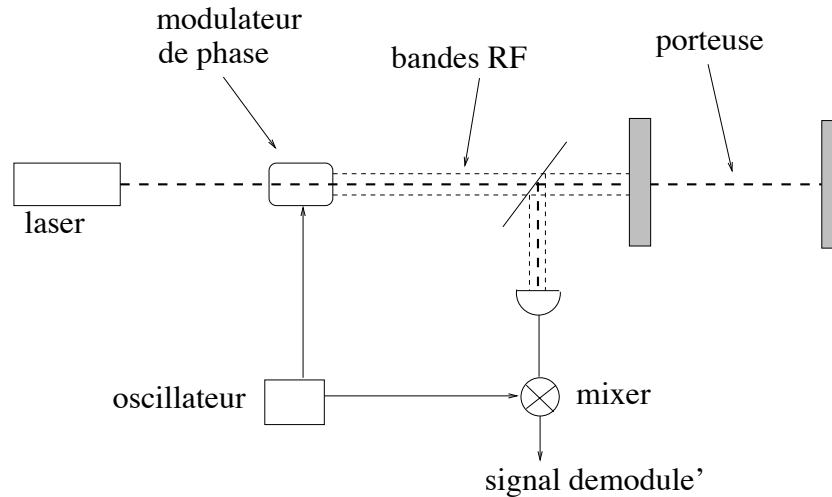


Figure 4.1: Technique de Pound-Drever, pour l'asservissement de la fréquence d'un laser sur une cavité optique

Les phases accumulées pendant la propagation dans le Michelson peuvent être négligées, car la longueur du Michelson est très inférieure à la longueur optique des Fabry-Perot. Par conséquent le déphasage des bandes latérales est négligeable par rapport au déphasage de la porteuse. La fluctuation de fréquence  $\delta\nu$  induit alors une variation de phase dans la cavité de recyclage, et donc un écart par rapport à la résonance du recyclage, qui est principalement dû à la porteuse: on est dans les mêmes conditions que celles de la technique de Pound-Drever.

Pour l'extraction du signal d'erreur on a donc deux possibilités (voir figure 4.2):

- L'utilisation du faisceau interne à la cavité de recyclage, et accessible via la photodiode qui reçoit le faisceau réfléchi par la deuxième face de la séparatrice, appelée "*photodiode 5*".
- L'utilisation du faisceau réfléchi par la cavité de recyclage, accessible par la photodiode qui reçoit le faisceau réfléchi par l'interféromètre vers le laser, appelée "*photodiode 2*".

### 4.3 Signaux sur les photodiodes 2 et 5

Les positions des photodiodes 2 et 5, et les principaux paramètres de l'ITF sont montrés dans la figure 4.2. Pour la dérivation de la réponse en fréquence des signaux démodulés on utilisera la technique utilisée au chapitre précédent pour le calcul du signal à la sortie de l'interféromètre:

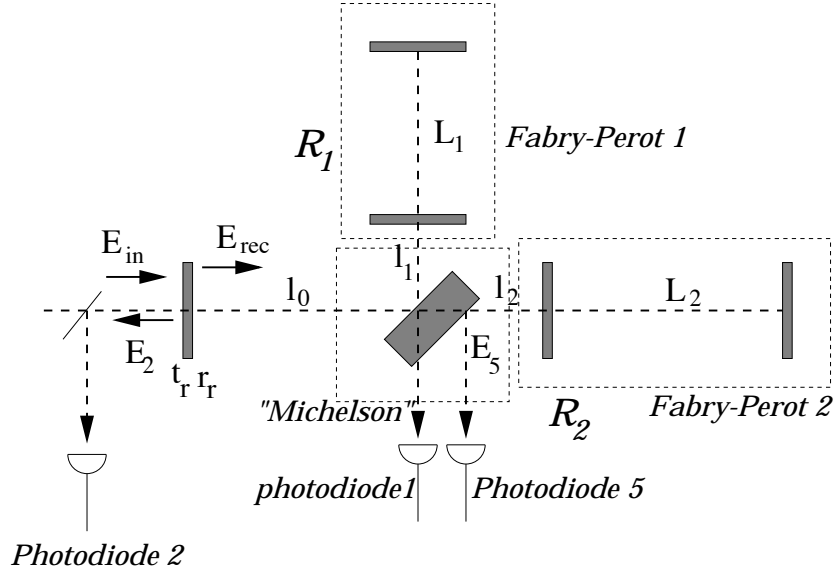


Figure 4.2: Position des photodiodes “2” et “5”.

- Le bruit de fréquence génère des bandes audio (BA) sur la porteuse et les bandes RF
- Les champs sont exprimés comme des fonctions complexes de la variable  $s = i\omega_a$ , où  $\omega_a$  est la fréquence d'analyse (donc la fréquence du bruit)
- Les puissances démodulées sont obtenues en multipliant les puissances par le signal de référence à la fréquence de modulation, *en phase* ou *en quadrature*.

### 4.3.1 Photodiode 2

Le champ pour une fréquence générique  $\omega$ , s'écrit:

$$E_2 = r_r E_{in} + E_{rec} \frac{1}{2} e^{\frac{2i\omega}{c} l_0} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c} \Delta l} R_1 + e^{i\frac{\omega}{c} \Delta l} R_2 \right] \quad (4.3)$$

qui, grâce à l'équation 3.21, devient:

$$E_2(\omega) = \frac{r_r + \frac{1}{2} e^{\frac{2i\omega}{c} l_0} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c} \Delta l} R_1 + e^{i\frac{\omega}{c} \Delta l} R_2 \right]}{1 + \frac{1}{2} r_r e^{\frac{2i\omega}{c} l_0} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c} \Delta l} R_1 + e^{i\frac{\omega}{c} \Delta l} R_2 \right]} E_{in}(\omega) \quad (4.4)$$

En imposant les conditions:

- Résonance de la porteuse dans les bras, résonance dans la cavité de recyclage, frange noire.
- Résonance des bandes RF dans la cavité de recyclage, antirésonance dans les bras.

et en négligeant les phases de propagation dans le Michelson, on trouve pour la porteuse (et ses BA):

$$E_2(\omega_0 \pm \omega_a) = r_p \frac{1 + \frac{s}{s_{rec}}}{1 + \frac{s_{rec} r_p}{s}} E_{in}(\omega_0) \quad (4.5)$$

où:

$$r_p = \frac{1 + r_0 r_r}{1 + r_r r_0} \quad (4.6)$$

est la réflectivité de la cavité de recyclage à la résonance pour la porteuse.

Pour les bandes RF (et leurs BA) on a:

$$E_2(\Omega \pm \omega_a) = \frac{r_r - \cos\left(\frac{\omega}{c} \Delta L\right)}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta L\right)} E_{in}(\Omega \pm \omega_a) = r_{RF} \quad (4.7)$$

$r_{RF}$  est donc la réflectivité de la cavité de recyclage à la résonance pour les bandes RF.

On peut montrer qu'une fluctuation de fréquence  $\delta\nu$  génère un signal en phase avec la fréquence de modulation, de la forme:

$$\begin{aligned} S_2 &= \underbrace{2 E_0 J_0(1 - r_p)}_{\text{champ porteuse}} \underbrace{E_0 J_1(m) r_{RF}}_{\text{champ bandes RF}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}}}_{\text{filtrage recyclage}} \frac{2\pi\delta\nu}{s_{rec}} \quad (4.8) \\ &= 2PJ_0(m)J_1(m)(1 - r_p)r_{RF} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \frac{\delta\nu}{f_{rec}} \end{aligned}$$

$S_2$  est donc proportionnel au produit des champs de la porteuse et des bandes RF réfléchis par la cavité de recyclage. Comme le signal est dû au déphasage de la porteuse dans la cavité de recyclage, il est filtré par le pôle  $f_{rec} = 5 \text{ Hz}$ . Le facteur  $1/f_{rec}$  est l'effet de l'amplification du déphasage dû à la fluctuation de fréquence, par les cavités FP et la cavité de recyclage.

### 4.3.2 Photodiode 5

Le champ, pour une fréquence générique  $\omega$  s'écrit:

$$E_5(\omega) = E_{rec} e^{\frac{i\omega}{c} l_0} e^{\frac{2i\omega}{c} l_1} \sqrt{\frac{q}{2}} \mathcal{R}_2 \quad (4.9)$$

où  $\sqrt{q}$  est la réflectivité en amplitude de la deuxième face de la séparatrice. Le facteur  $\sqrt{1/2}$  vient de la transmission du faisceau à travers la première face de la séparatrice.

Avec les mêmes conditions que l'on a utilisé pour la photodiode 2, on trouve pour la porteuse:

$$E_5(\omega_0) = \sqrt{\frac{q}{2}} g_p r_0 \frac{1 + \frac{s}{s_{rec}}}{1 + \frac{s_c r_0}{s}} E_{in}(\omega_0 + \omega_a) \quad (4.10)$$

et pour les bandes RF

$$E_5(\Omega \pm \omega_a) = \sqrt{\frac{q}{2}} g_{RF} E_{in}(\Omega \pm \omega_a) \quad (4.11)$$

où:

$$g_{RF} = \frac{t_r}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} L\right)} \quad (4.12)$$

est le gain de recyclage pour les bandes RF. Comme auparavant, le signal relatif aux fluctuations de fréquence est en phase avec la fréquence de modulation, et il vaut:

$$\begin{aligned} S_5 &= \underbrace{-2 E_0 J_0 g_p r_0 \sqrt{\frac{q}{2}}}_{\text{champ porteuse}} \underbrace{E_0 J_1(m) g_{RF} \sqrt{\frac{q}{2}}}_{\text{champ bandes RF}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}}}_{\text{filtrage recyclage}} \frac{s_c r_0 - s_{rec}}{s_{rec} s_c s_0} 2\pi \delta\nu \quad (4.13) \\ &= -2 P J_0(m) J_1(m) g_p g_{RF} r_0 \frac{q}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \frac{s_c r_0 - s_{rec}}{s_{rec} s_c s_0} 2\pi \delta\nu \end{aligned}$$

Puisque  $r_0 \simeq -1$  et  $s_{rec} \ll s_c$  on peut réécrire l'expression précédente sous la forme:

$$S_5 = 2 P J_0(m) J_1(m) g_p g_{RF} \frac{q}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{s_{rec}}\right)^2}} \frac{2\pi \delta\nu}{s_{rec}} \quad (4.14)$$

Les signaux 2 et 5 ont donc la même forme. Leur rapport est une constante, qui vaut:

$$\frac{S_5}{S_2} = \frac{g_p}{g_{RF}} \frac{q}{2} r_{RF} (1 - r_{car}) \quad (4.15)$$

#### 4.4 Sensibilité de la détection du signal d'erreur

Le rapport signal sur bruit (SNR), limité par le bruit de photons, est le rapport entre le courant démodulé généré par un bruit de fréquence  $\delta\tilde{\nu}$ , et le courant dû au bruit de photons:

$$\frac{\text{signal}}{\text{bruit}} = \frac{K \cdot S \cdot \delta\tilde{\nu}}{\sqrt{2P_{DC} S e}} \quad (4.16)$$

où  $K$  est la "sensibilité" de la photodiode aux fluctuations de fréquence, en Watts/Hertz,  $P_{DC}$  est la puissance DC,  $S$  est la sensibilité du photodétecteur (A/W), et  $e$  est la charge de l'électron. La sensibilité du signal aux fluctuations de fréquence se trouve en imposant que  $\text{SNR}=1$ , donc:

$$\delta\tilde{\nu} = \frac{\sqrt{2P_{DC} S e}}{K S} \quad (4.17)$$

Les valeurs de  $K_2$  et  $K_5$  peuvent être calculées directement à partir des expressions 4.9 et 4.14, en utilisant les paramètres optiques et géométriques de VIRGO (montrés dans le tableau 4.4)

Puissance laser	P	20 W
Fréquence de modulation	$\Omega$	$2\pi \cdot 6.27 \text{ MHz}$
Asymétrie	$\Delta L$	0.8 m
Profondeur de modulation	m	0.4
Reflectivité miroir de recyclage	$R_r$	0.98

Tableau 4.1: paramètres utilisés dans le calcul

$$K_2 = 4 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{5 \text{ Hz}}\right)^2}} A/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.18)$$

$$K_5 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{5 \text{ Hz}}\right)^2}} A/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.19)$$



La puissance DC sur les deux photodiodes a été décomposée en deux parties:

- La puissance sur le mode fondamental
- La puissance sur les modes d'ordre supérieur

#### 4.4.1 Puissance DC sur la photodiode 2

La puissance sur le  $TEM_{00}$  est la somme des puissances sur la porteuse et sur les deux bandes RF:

$$P_2^{00} = P_p + P_{RF} = P \left[ J_0(m)^2 R_p + J_1(m)^2 R_{RF} \right] \quad (4.20)$$

où  $P$  est la puissance du laser,  $J_0(m)$  et  $J_1(m)$  sont les fonctions de Bessel qui ont comme argument la profondeur de modulation  $m$ ,  $R_p$   $R_{RF}$  sont respectivement les reflectivités en puissance de la cavité de recyclage pour la porteuse et les bandes RF:

$$R_p = \left| \frac{r_r + r_0}{1 + r_r r_0} \right|^2 \quad (4.21)$$

$$R_{RF} = \left| \frac{r_r - \cos\left(\frac{\omega}{c} \Delta L\right)}{1 - r_r \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta L\right)} \right|$$

La cavité de recyclage peut être considérée comme une cavité FP formée par le miroir de recyclage et un *miroir équivalent*, qui est composé par le reste de l'interféromètre.

Quand la reflectivité du miroir de recyclage est égale à la reflectivité du miroir équivalent pour la porteuse, on dit qu'on est dans la configuration de *recyclage optimal*. Dans ce cas la cavité de recyclage est parfaitement *adaptée* (cf. Annexe A), et le gain du recyclage pour la porteuse est maximum. La puissance de la porteuse réfléchie par l'ITF est donc, en conditions idéales, nulle.

Pour avoir le maximum de puissance dans l'interféromètre, et donc diminuer le bruit de photons, VIRGO fonctionnera, dans la limite des incertitudes expérimentales, en cette configuration. La puissance DC sur la photodiode 2 au recyclage optimal est due seulement à la contribution des bandes latérales, et due à l'erreur sur la reflectivité du miroir de recyclage.

Dans les formules précédentes la reflectivité du *miroir équivalent* pour la porteuse est simplement égale à la reflectivité des FP: on suppose que les seules pertes soient dues à la puissance transmise, ou dissipée par les FP. En réalité cette contribution est négligeable par rapport aux pertes dues aux déformations du faisceau dans les FP.

Certaines simulations optiques [35] montrent que, à cause des imperfections des substrats, 2% de la puissance du mode fondamental se transforment en modes d'ordres supérieurs. Le gain maximal du recyclage s'obtient pour  $r_r^2 = 0.98$ , et vaut:

$$G_{rec}^{max} \sim \frac{1}{1 - 0.98} = 50 \quad (4.22)$$

On supposera être dans la condition de *recyclage optimal*, et que la réflectivité du miroir de recyclage est adaptée aux pertes de l'ITF avec une incertitude de l'ordre du 0.1 % [34].

La réflectivité du miroir équivalent pour les bandes latérales est donnée par:

$$r_{\simeq} \simeq \cos\left(\frac{\Omega}{c}\Delta L\right)r_{th} \quad (4.23)$$

où  $\cos\left(\frac{\Omega}{c}\Delta L\right)$  est le facteur dû à l'asymétrie du Michelson,  $r_{th}$  est un terme introduit pour tenir compte des pertes dues aux déformations thermiques. Comme on a supposé que les déformations thermiques sont principalement dues aux cavités FP, on a  $r_{th} \simeq 1$ .

La figure 4.3 montre la puissance  $P_2^{00}$  en fonction de la réflectivité du miroir de recyclage, pour  $r_{th} = 1$ . La figure 4.4 montre la même quantité pour trois différentes valeurs de  $r_{th}$ , équivalentes à des pertes de 1 %, 1.15 %, 1.5 %. On observe que si on se limite à un intervalle de 0.1% autour de  $R_r$  la puissance maximale transmise est  $\sim 200mW$ , quand la différence des pertes entre la porteuse et les bandes latérales est aussi maximale (1 %).

La puissance relative aux modes d'ordre supérieur est due à deux facteurs: la puissance directement réfléchiée par le miroir de recyclage due à une imparfaite adaptation du col (*waist*) du faisceau avec celui de la cavité de recyclage, et la puissance sur les modes d'ordre supérieur créée dans l'ITF, et transmise vers le laser à travers le miroir de recyclage.

Si on suppose d'avoir  $\approx 99$  % de lumière couplée avec la cavité de recyclage, la lumière réfléchiée vers le laser est  $\sim 200 mW$ .

Pour les modes d'ordre supérieur créés dans l'ITF, on suppose toujours que 2 % de la lumière dans la cavité de recyclage est convertie en modes d'ordre supérieur à cause des déformations thermiques du faisceau. On a donc :  $1 kW \times 0.02 = 20 W$  de modes d'ordre supérieur dans la cavité de recyclage, dont 10 W vers la frange noire, et 10 W vers le miroir de recyclage. La puissance transmise par le miroir de recyclage est donc  $10 W \times T_{rec} \approx 10 \times 0.02 = 200 mW$ .

La puissance totale relative aux modes d'ordre supérieur est donc:

$$P_{mn} \sim 200 mW + 200 mW = 400 mW \quad (4.24)$$

#### 4.4.2 Puissance DC sur la photodiode 5

La réflectivité de la deuxième face de la séparatrice a une valeur comprise entre  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . Dans nos calculs on utilisera la valeur  $AR = 5 \cdot 10^{-4}$ .

La puissance sur le  $TEM_{00}$  dans la cavité de recyclage est  $\sim 1kW$  (pour un gain de recyclage = 50) et donc la puissance DC sur la photodiode 5 est:  $500W \times 5 \cdot 10^{-4}$

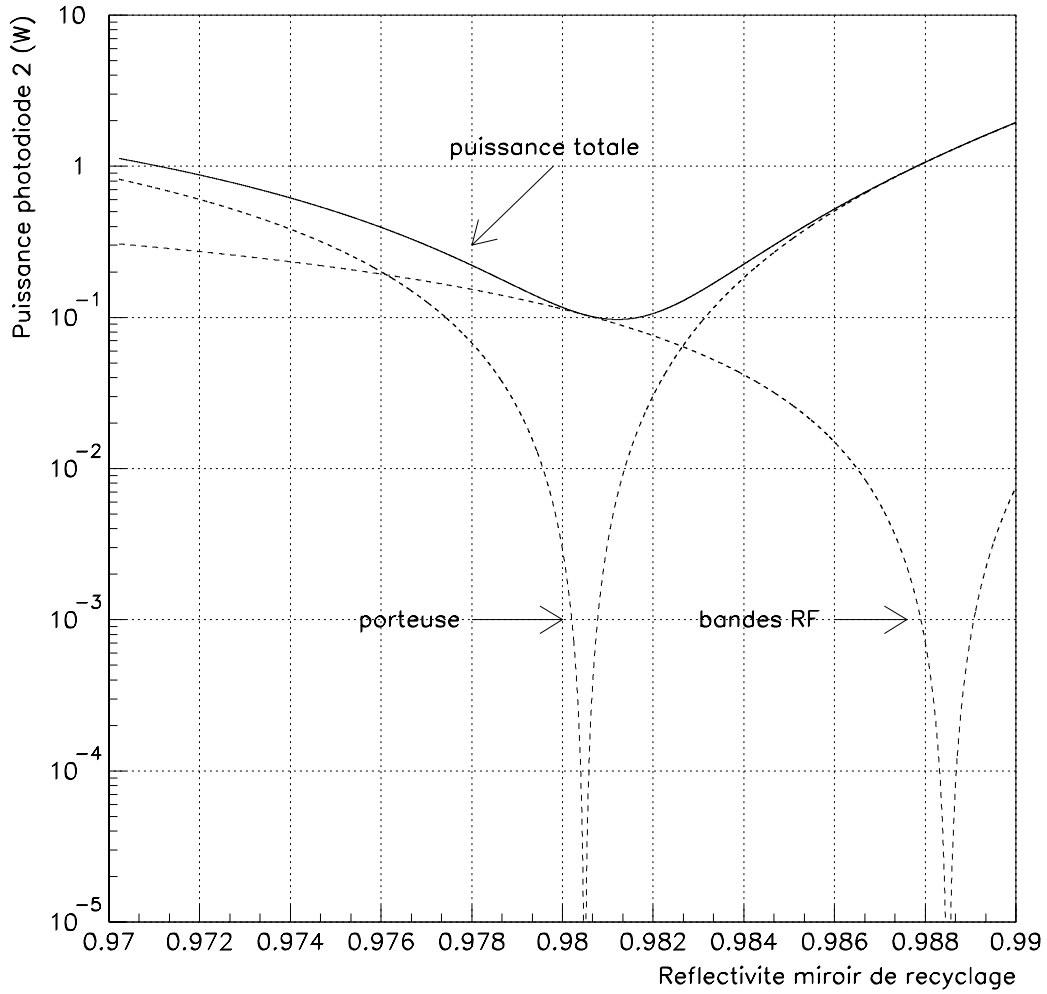


Figure 4.3: Puissance sur la photodiode 2 relative au mode fondamental en fonction de  $R_{rec}$ . La porteuse est au recyclage optimal pour  $R_{rec} = 0.9804$ , la réflectivité de l'ITF pour les bandes latérales est  $\cos(\frac{\Omega}{c}\Delta L)$ , qui équivaut à 1.15% de pertes

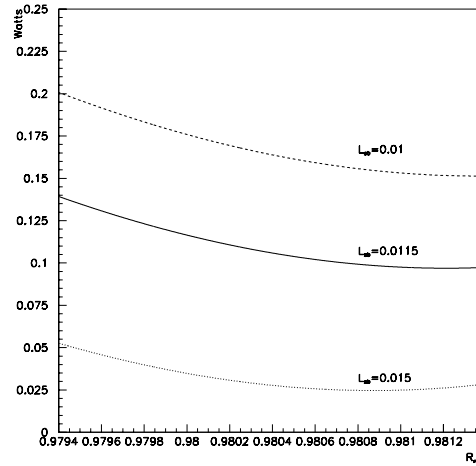


Figure 4.4: Puissance sur la photodiode 2 relative au  $TEM_{00}$  versus  $R_{rec}$  pour trois valeurs différentes des pertes des bandes latérales. Le cas intermédiaire est celui de la fig 4.3

= 250 mW. La puissance sur les modes d'ordre supérieur est 20 W dans la cavité de recyclage (pour 2% de pertes), donc sur la photodiode 5 il y a une puissance  $10W \times 5 \cdot 10^{-4} = 5mW$ . Donc:

$$P_5 = P^{00} + P^{mn} \approx P_{00} \approx 250 \text{ mW} \quad (4.25)$$

#### 4.4.3 Positions possibles pour la photodiode 2

Jusqu'à maintenant on a considéré la photodiode 2 comme un détecteur abstrait, qui reçoit le faisceau réfléchi par l'ITF, sans le situer dans un point précis. Comme on le verra dans la suite, la position du photodétecteur est très importante. On a étudié principalement deux possibilités:

- Entre le laser et le mode-cleaner (photodiode 2 *avant* le mode-cleaner)

Cette solution est intéressante pour deux raisons: 1) le mode-cleaner filtre les modes d'ordre supérieurs, en laissant sur la photodiode 2 seulement un pur  $TEM_{00}$ . La puissance réfléchiée par la cavité de recyclage peut être récupérée intégralement, avec par exemple un isolateur de Faraday placé sur le banc laser. Le désavantage de cette solution est le filtrage en fréquence du mode-cleaner du signal d'erreur.

- Entre le mode-cleaner et l'ITF (photodiode 2 *après* le mode-cleaner).

Cette solution permet de récupérer seulement une petite partie du faisceau, transmise par un miroir du banc d'entrée. L'utilisation d'un isolateur de Faraday est déconseillé car en ce point le faisceau est spatialement très propre. En outre le faisceau n'est pas filtré des modes d'ordre supérieur. L'avantage est de ne pas avoir l'effet de filtrage en fréquence du mode-cleaner.

La Table 4.2 résume les principales caractéristiques des deux choix.

Signal	puissance DC	Portion extraite	filtrage 500 Hz
2 avant MC	200 mW	100%	OUI
2 après MC	600 mW	0.01%	NON

Tableau 4.2: Caractéristiques des deux choix pour la photodiode 2: “avant MC” et “après MC”

## 4.5 Comparaison entre les photodiodes 2 et 5

Les sensibilités aux fluctuations de fréquence des trois photodiodes sont reportées dans la suite:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta\nu}_5 &\simeq 1.4 \cdot 10^{-8} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{5 \text{ Hz}}\right)} & (4.26) \\ \tilde{\delta\nu}_{2AP} &\simeq 10^{-7} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{5 \text{ Hz}}\right)} \\ \tilde{\delta\nu}_{2AV} &\simeq 10^{-9} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{5 \text{ Hz}}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{500 \text{ Hz}}\right)}\end{aligned}$$

La figure 4.5 montre une comparaison entre les demandes en stabilité de fréquence pour VIRGO et les sensibilités des photodiodes.

On observe que les signaux d'erreur des photodiodes 2 avant mode-cleaner et 5 ont une sensibilité suffisante pour la stabilisation du laser. La photodiode 2 après mode-cleaner pourrait être utilisée en prélevant  $\sim 1\%$  du faisceau réfléchi par l'interféromètre.

## 4.6 La stabilité de la référence

Comme les signaux 2 et 5 mesurent une phase dans la cavité de recyclage, ils sont sensibles au bruit de position des miroirs, qui pour des fréquences supérieures à 10 Hz, est dû au bruit thermique.

On peut observer que:

- Un bruit de position de la séparatrice génère des mouvements différentiels et donc les signaux 2 et 5, y sont insensibles.
- Un mouvement du miroir de recyclage génère des variations de phase dans la cavité de recyclage qui sont environs 30 fois inférieures aux variations induites par un déplacement des miroirs des FP

Le bruit thermique est donc principalement dû aux miroirs FP, et donc il est exactement le même que le bruit thermique de VIRGO.

Le bruit thermique, en terme de stabilité en fréquence de la référence, est montré dans la figure 4.5, et comparé aux spécifications de VIRGO.

## 4.7 La préstabilisation

Il a été montré que VIRGO a la stabilité suffisante comme étalon de fréquence pour le laser. Toutefois un etage de préstabilisation du laser est essentiel. Une cavité Fabry-Perot rigide est en effet une référence de fréquence très stable dans la région spectrale dans laquelle l'interféromètre est par contre très instable: pour des fréquences inférieures à 10 Hz.

Une expérience de stabilisation a été conduite au Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire [36]. Le laser a été asservi sur une cavité ULE (*Ultra Low Expansion*) ultras-table. La mesure du bruit absolu du laser était faite en utilisant deux cavités jumelles, la première utilisée comme étalon, et la deuxième comme analyseur. Le bruit obtenu est montré dans la figure 4.6

Pour des questions pratiques on a ajusté le bruit de fréquence du laser préstabilisé avec la fonction:

$$\tilde{\delta\nu} \approx \frac{0.6}{f^{0.6}} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.27)$$

Avant de rentrer dans l'interféromètre, le laser préstabilisé passe par la cavité mode-cleaner, Le bruit est donc filtré en fréquence, avec un pôle à 500 Hz. En connaissant le bruit du faisceau qui sort du mode-cleaner on peut calculer le gain dont on a besoin pour la stabilisation sur l'interféromètre:

$$G(f) = \frac{\tilde{\delta\nu}(f)}{\tilde{\delta\nu}_{prest}(f)} \quad (4.28)$$

où  $\tilde{\delta\nu}_{prest}(f)$  est le bruit du laser préstabilisé et filtré par le mode-cleaner, et  $\tilde{\delta\nu}(f)$  sont les spécifications du bruit de fréquence. Le gain correspondant est représenté dans la figure 4.7.

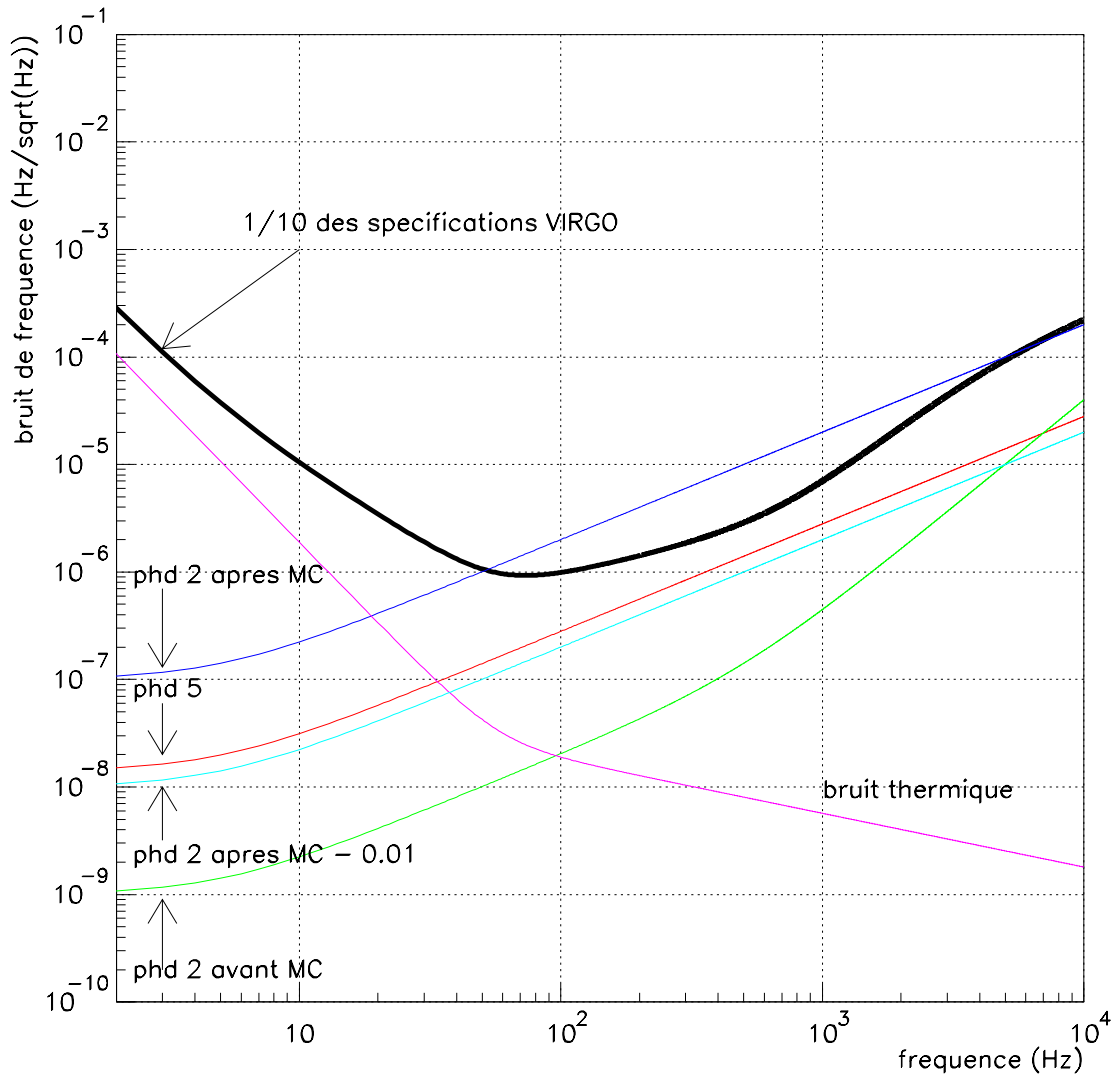


Figure 4.5: Sensibilité limitée par le bruit de photons des photodiodes 2 et 5, comparée aux spécifications sur le bruit de fréquence. Les spécifications montrées correspondent à un  $h_{eq}$  qui est 1/10 de la sensibilité de VIRGO.

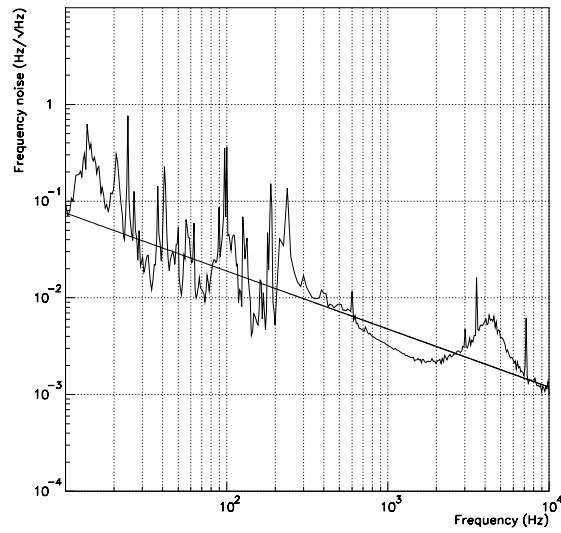


Figure 4.6: Bruit du laser préstabilisé

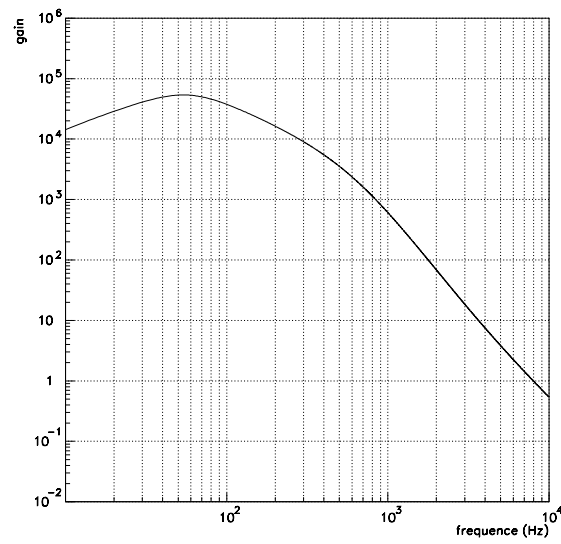


Figure 4.7: Demandes sur le gain de la stabilisation de fréquence sur l'interféromètre



## 4.8 Conclusions

L'interféromètre est une référence suffisamment stable pour asservir le laser.

Deux signaux ont la sensibilité suffisante: la photodiode 2 (avant mode-cleaner) et la 5. L'avantage de la 2 est une meilleure sensibilité en terme de bruit de photons. L'avantage de la 5 est d'être indépendante par rapport aux choix des paramètres optiques: en particulier il ne nécessite pas le *recyclage optimal*.

## Chapitre 5

# La technique d'addition électronique des signaux d'erreur

### 5.1 Introduction

Comme nous l'avons expliqué aux chapitres précédents, afin de satisfaire les demandes extrêmes en stabilité, on doit asservir la fréquence du laser sur la fréquence de résonance de la cavité de recyclage.

D'autre part on sait que les miroirs de l'ITF sont soumis au bruit sismique à basse fréquence: la longueur de la cavité de recyclage (et les autres longueurs caractéristiques de l'ITF, cf. fig 2.9), doit être contrôlée par un système d'asservissement actif, qui agit sur les miroirs mêmes.

Il y a donc deux asservissements concurrents qui utilisent le même signal d'erreur (le signal proportionnel à l'écart de phase par rapport à la résonance dans la cavité de recyclage), et qui fournissent une correction pour l'annuler:

- Le premier agit surtout à basse fréquence ( $f < 10 \text{ Hz}$ ) - sur les miroirs - et compense le bruit sismique. On l'appellera *chemin miroirs*, et on indiquera les grandeurs qui le concernent avec l'indice "m".
- Le deuxième agit surtout à haute fréquence ( $f > 10 \text{ Hz}$ ) - sur le laser - et stabilise en fréquence le laser. On l'appellera *chemin laser*, et on indiquera les grandeurs qui le concernent avec l'indice "l".

En résumant: à basse fréquence l'ITF "suit" le laser, et à haute fréquence le laser "suit" l'ITF.

Les interactions entre les deux chemins sont particulièrement importantes pour VIRGO, car on veut avoir une bonne sensibilité aux ondes gravitationnelles dès 10 Hz. Il faut donc, comme on l'a montré au chapitre précédent, une suppression du bruit du laser préréglé de  $10^5$  à cette fréquence. D'autre part l'asservissement sur les miroirs aura une bande passante de quelques dizaines de Hz [38]. Les intervalles de fréquence des deux asservissements se superposent donc autour de 10 Hz.

Avant ce travail de thèse cette interaction avait été négligée [36] [39]. Ici par contre on présente une analyse des deux systèmes de contrôle considérés comme un seul asservissement à *deux chemins*.

Une fois qu'on a un signal d'erreur suffisamment sensible pour stabiliser le laser, il faut un système qui corrige la fréquence et transfère physiquement la stabilité de l'ITF vers la source de lumière. Pour la correction de la fréquence laser, plusieurs techniques sont possibles. La topologie initialement proposée pour VIRGO consiste en une *addition électronique des signaux d'erreur* (AE) et elle a été déjà utilisée dans l'ITF de 30 m de Garching [40] et dans le 40 m de Caltech [41], mais à notre connaissance il n'existe pas de bibliographie détaillée sur le sujet.

Dans l'AE, le signal d'erreur provenant de l'ITF est sommé au signal de Pound-Drever de la préstabilisation (voir figure 5.1). Son avantage fondamental est donc d'utiliser pour la correction les mêmes actionneurs de la préstabilisation (PST). Toutefois la somme du signal de l'ITF au signal de la PST entraîne un décalage dans le point de travail de cette dernière, qui n'est donc plus parfaitement à la résonance avec la lumière laser.

On pourrait utiliser un système hybride, qui mélange l'AE et une action sur la cavité de PST, pour en changer la fréquence de résonance, avec un PZT monté sur un des ses miroirs. Cette possibilité présente le désavantage d'augmenter le bruit thermique de la cavité, et donc elle a été exclue.

Dans ce travail, on a principalement étudié l'AE comme technique de correction de fréquence, qui est, comme expliqué dans la suite, la seule topologie de contrôle compatible avec le design actuel de VIRGO. On a toutefois mis en évidence que l'utilisation de l'AE dans VIRGO est extrêmement difficile.

Le chapitre est organisé de la façon suivante:

- Description du schéma de stabilisation de fréquence avec la technique de l'Addition électronique des signaux d'erreur.
- Inclusion du *chemin miroirs* dans l'analyse de l'asservissement.
- Etude du problème de décalage du point de travail de la cavité de PST.
- Calcul des spécifications sur les fonctions de transfert en boucle ouverte pour les deux chemins et mise en évidence des problèmes de l'AE.
- Discussion sur utilisation de topologies alternatives.

## 5.2 L'addition électronique des signaux d'erreur

Le schéma de la technique est montré dans la figure 5.2. On peut résumer son fonctionnement dans les points suivants:

- La fréquence du laser stabilisé est comparée à la fréquence de résonance de la cavité de recyclage. On suppose que la cavité de recyclage est initialement en

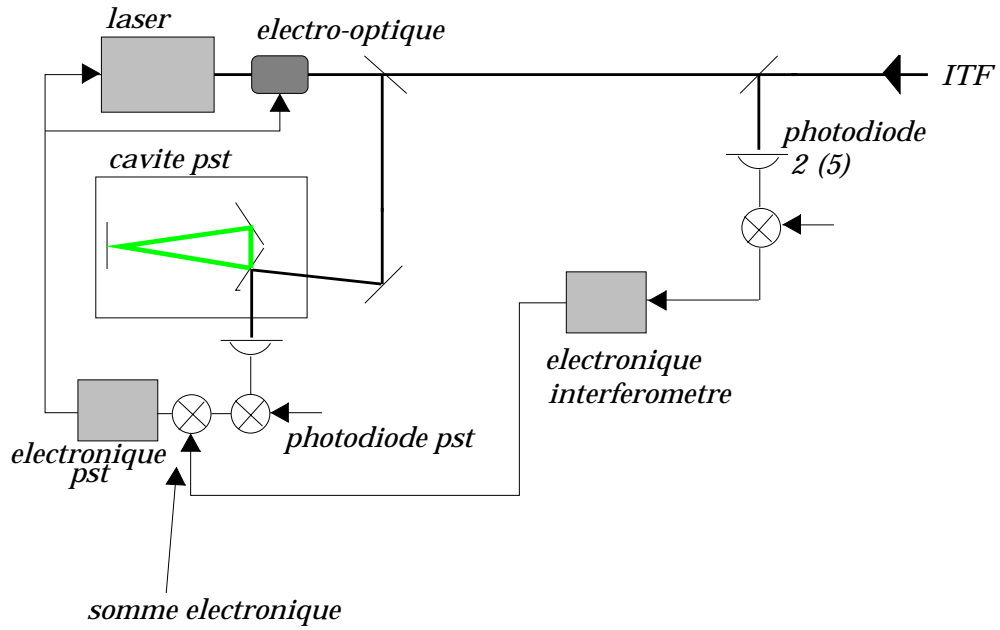


Figure 5.1: Technique d'addition électronique des signaux d'erreur

résonance avec le laser, et que les déviations de la condition de résonance soient représentées par des densités spectrales de bruit  $\tilde{\delta\nu}_s$  et  $\tilde{\delta L}$ <sup>1</sup>.

On suppose aussi que le bruit de déplacement des miroirs de l'interféromètre est le bruit thermique des miroirs, le bruit sismique étant supprimé par l'asservissement à basse fréquence, qui est considéré totalement indépendant dans cette analyse préliminaire.

Les deux bruits de fréquence et de longueur sont convertis en bruit de phase par les relations:

$$\tilde{\delta\phi} = K_l \tilde{\delta\nu}_s \quad (5.1)$$

$$\tilde{\delta\phi} = K_m \tilde{\delta L} \quad (5.2)$$

et donc:

$$\tilde{\epsilon} = K_m \tilde{\delta L} - K_l \tilde{\delta\nu}_s \quad (5.3)$$

représente l'écart de phase par rapport à la résonance.

<sup>1</sup>Dans la suite on utilisera le terme "bruit" pour "densité spectrale linéaire de bruit", et les grandeurs correspondantes seront marquées par un tilde.

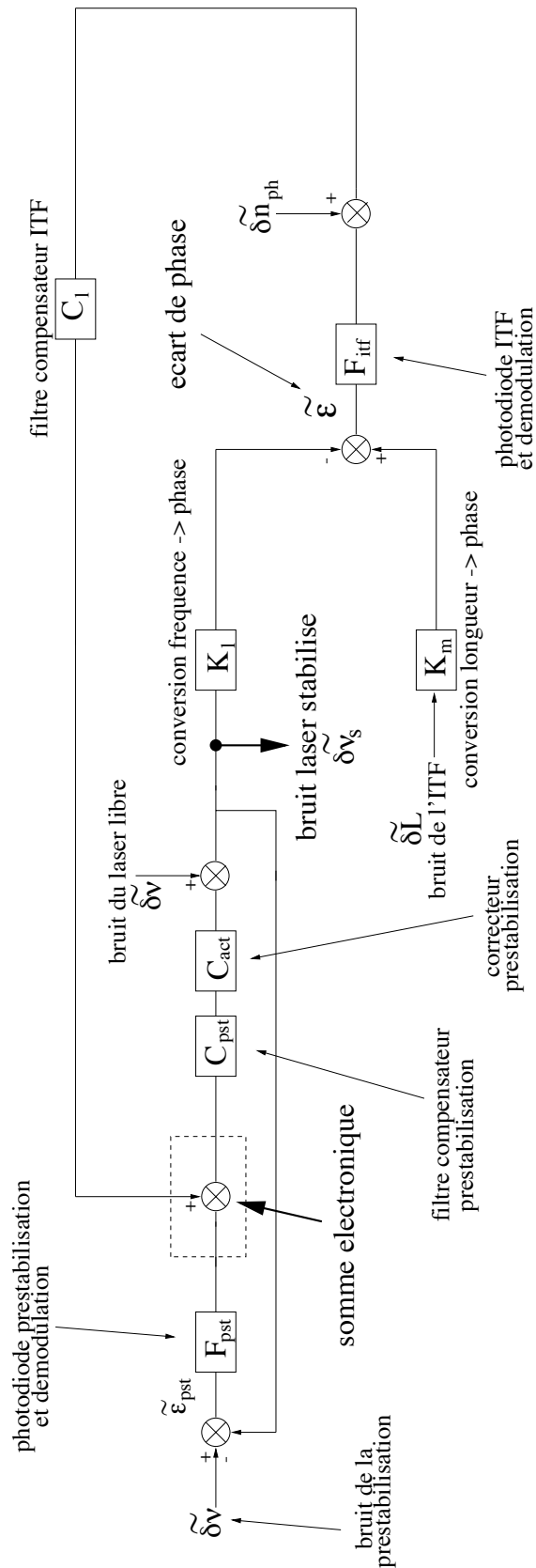


Figure 5.2: Schéma de la technique d'addition électronique

- L'écart de phase par rapport à la résonance est transformé en un *signal d'erreur* par la photodiode de l'interféromètre (2 ou 5). La fonction de transfert entre l'écart de phase et le signal d'erreur est notée  $F_{itf}$ . Pour raisons pratiques le filtrage par la cavité de recyclage (à 5 Hz) est inclu dans  $F_{itf}$ .
- Le signal d'erreur est filtré avec une fonction de transfert appropriée, notée  $C_l$ , qui sert de filtre *compensateur* pour l'asservissement.
- Le signal ainsi obtenu est sommé au signal de Pound-Drever de la préstabilisation. On indique par  $\delta\tilde{\nu}_L$  le bruit du laser libre,  $\delta\tilde{\nu}_{cav}$  le bruit de la cavité de préstabilisation,  $F_{pst}$  la fonction de transfert du signal de Pound-Drever de la préstabilisation,  $C_{pst}$  la fonction de transfert du filtre compensateur de la prestabilisation, et  $C_{act}$  la fonction de transfert des actuateurs du laser. On suppose que la préstabilisation a une bande passante de  $\sim 1MHz$ .
- Le signal provenant de l'ITF est donc converti par la préstabilisation en un signal de correction de fréquence.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système s'écrit:

$$G_l = F_{itf}C_lG_{pr}K_l \quad (5.4)$$

où  $G_{pr}$  représente la fonction de transfert entre le point de somme électronique et le bruit du laser stabilisé. Si on indique avec  $G_{bo} = F_{pst}G_{pst}C_{act}$  la fonction de transfert en boucle ouverte de la prestabilisation, on a donc:

$$G_{pr} = \frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} \frac{1}{F_{pst}} \quad (5.5)$$

Comme l'asservissement sur l'ITF a besoin d'une bande passante inférieure à 100 kHz (cf. figure 4.7), alors que la bande passante de la préstabilisation est  $\sim 1MHz$ , on peut supposer la condition:

$$|G_{bo}| \gg 1 \rightarrow \frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} \simeq 1 \quad (5.6)$$

est vérifiée dans l'intervalle de fréquences de travail. La fonction G prend donc la forme:

$$G_l = F_{itf}C_lK_l \frac{1}{F_{pst}} \quad (5.7)$$

L'erreur de l'asservissement est donc:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{G_l}{1+G_l} K_f \tilde{\nu}_{pst} + \frac{G_l}{1+G_l} K_m \tilde{\delta}l + \frac{G_l}{1+G_l} \frac{1}{F_{itf}} \tilde{\delta}n_{ph} \quad (5.8)$$

où  $\tilde{\nu}_{pst}$  est le bruit de fréquence du laser préstabilisé, qui, idéalement vaut :

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_l \frac{1}{1+G_{bo}} + \tilde{\nu}_{cav} \frac{G_{bo}}{1+G_{bo}} \quad (5.9)$$

mais qui dans notre analyse sera égal au bruit mesuré (cf. figure 4.6). Avec  $\tilde{\epsilon} = K_l \tilde{\delta}L - K_l \tilde{\delta}\nu_s$ , le bruit de fréquence du laser stabilisé s'écrit :

$$\tilde{\delta}\nu_s = \frac{G_l}{1+G_l} \frac{K_m}{K_l} \tilde{\delta}L + \frac{1}{1+G_l} \tilde{\nu}_{pst} + \frac{G_l}{1+G_l} \frac{1}{F_{itf}} \tilde{\delta}n_{ph} \quad (5.10)$$

Donc, quand le gain de boucle est élevé ( $|G| \gg 1$ ), il prend la forme :

$$\tilde{\delta}\nu_s \simeq \frac{K_m}{K_l} \tilde{\delta}L + \frac{\tilde{\nu}_{pst}}{G_l} + \frac{1}{F_{itf}} \tilde{\delta}n_{ph} \quad (5.11)$$

Le facteur de suppression du bruit du laser prestabilisé est égal à la fonction de transfert en boucle ouverte  $G_l$ , et le bruit du laser stabilisé reproduit le bruit de l'interféromètre.

Si on néglige l'interaction avec le contrôle des miroirs, la seule contrainte dans la conception de l'asservissement est d'avoir une suppression du bruit de fréquence suffisante, et une boucle stable, conditions complètement déterminées par un choix approprié de la fonction  $G_l$  et donc du filtre compensateur  $C_l$ .

### 5.3 L'interaction avec le contrôle des miroirs

Les signaux qui intéressent la stabilisation de fréquence (photodiode 2 et 5) sont principalement sensibles aux *modes communs* des cavités Fabry-Perot, car ils mesurent des déphasages dans la cavité de recyclage. On supposera avoir un système d'asservissement qui contrôle en même temps les mouvements communs des FP, et donc la fréquence de résonance de la cavité de recyclage, et la fréquence laser. Les autres degrés de liberté sont considérés indépendants. La figure 5.3 montre le schéma des deux asservissements.

On a donc deux chemins, le *chemin laser* qu'on vient de décrire, et le *chemin miroirs*, qui utilise le même signal d'erreur, et envoie une correction aux actionneurs qui contrôlent la longueur correspondante aux modes communs de l'ITF. On indique avec  $C_m$  la fonction de transfert du filtre compensateur pour le chemin miroir,  $B$  la fonction de transfert des actionneurs sur la longueur de la cavité (bobines sur la marionnette et bobines sur la masse de référence),  $M$  la fonction de transfert mécanique de la suspension.

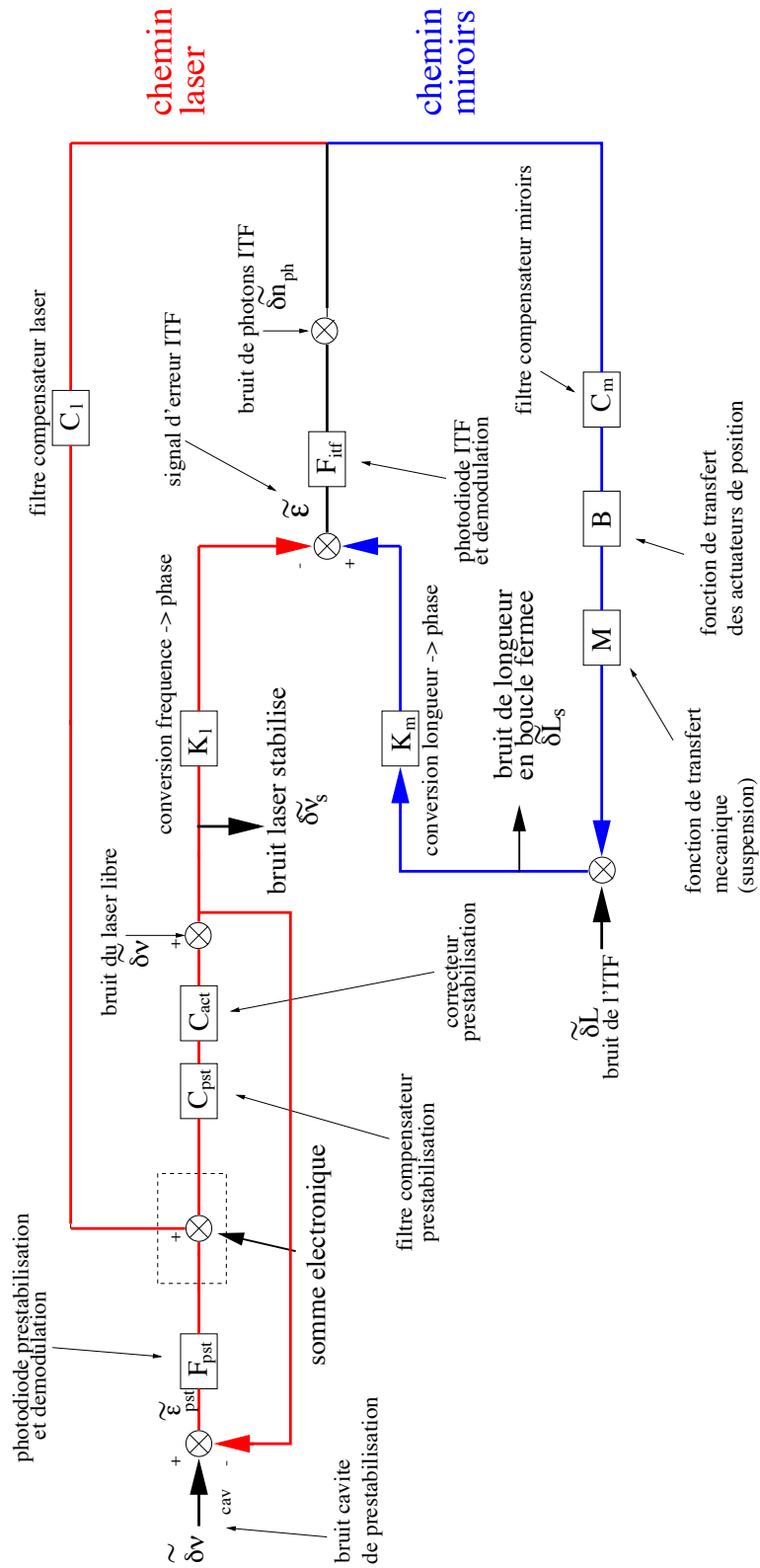


Figure 5.3: Asservissement sur les modes communs des cavités Fabry-Perot et sur la fréquence du laser



$\delta\tilde{L}$  est le bruit de l'interféromètre en boucle ouverte, dominé en basse fréquence par le bruit sismique et à partir de quelque Hz par le bruit thermique, et  $\delta\tilde{L}_s$  est le bruit de longueur en boucle fermée.

La fonction de transfert en boucle ouverte du chemin miroirs s'écrit:

$$G_m = F_{itf} C_m B M \quad (5.12)$$

et l'erreur, avec les deux chemins actifs, est:

$$\epsilon = \frac{G}{1+G} K_F \delta\tilde{\nu}_{pr} + \frac{G}{1+G} K_M \delta\tilde{L} + \frac{G}{1+G} \frac{1}{F_{ITF}} \delta\tilde{n}_{ph} \quad (5.13)$$

où  $G = G_l + G_m$ .

Le bruit de fréquence du laser stabilisé est:

$$\delta\tilde{\nu}_s = \frac{\tilde{\epsilon}_l}{K_l} = \frac{G}{G+1} K_l \delta\tilde{n}_{ph} + \frac{1}{1+G} \frac{K_m}{K_l} \delta\tilde{L} + \frac{1-G_m}{1+G} \delta\tilde{\nu}_{pst} \quad (5.14)$$

et la suppression du bruit du laser préstabilisé vaut donc:

$$\frac{\delta\tilde{\nu}_{pst}}{\delta\tilde{\nu}_s} = 1 + \frac{G_l}{1-G_m} \quad (5.15)$$

On peut donc partager le spectre en trois régions:

- Hautes fréquences ( $f \gg 10 \text{ Hz}$ ):  $|G_l| \gg 1$  et  $|G_m| \ll 1$

Les deux asservissements agissent de façon indépendante. Toute la correction est envoyée vers le laser et elle sert pour la stabilisation de fréquence. La suppression du bruit de fréquence est égale au gain du chemin laser  $G_l$ .

- Basses fréquences ( $f \leq 1 \text{ Hz}$ ):  $|G_l| \ll 1$  et  $|G_m| \gg 1$

Les deux asservissements agissent de façon indépendante. Le signal de correction est envoyé aux miroirs, et il sert pour compenser le bruit sismique. Il n'y a aucune action sur le laser.

- Fréquences intermédiaires ( $f \sim 10 \text{ Hz}$ ):  $|G_l| \gg 1$  et  $|G_m| \gg 1$ . Les deux asservissements sont actifs en même temps. La correction est envoyée simultanément au laser et aux miroirs.

Si on s'intéresse à la région autour de 10 Hz, on a donc les deux demandes:

a) Suppression du bruit du laser.

Dans cette région le facteur de suppression doit être  $\sim 10^5$ , comme le gain des deux boucles est très grand on a :

$$\frac{\tilde{\delta\nu}_{pst}}{\tilde{\delta\nu}_s} = \frac{G_l}{G_m} \quad (5.16)$$

il y a donc une réduction du facteur de suppression, qui manifeste la présence du chemin miroirs

b) Stabilité.

Afin que le système soit stable il faut que les deux fonctions de transfert  $G_l$  et  $G_m$  se croisent avec une différence de phase inférieure à  $\pi$ .

## 5.4 Le décalage du point de travail de la préstabilisation

En absence d'AE, l'erreur de PST est  $\simeq 0$ , car le bruit du laser libre est supprimé par le gain de la boucle de PST (cf. l'équation 5.9), et le bruit du laser préstabilisé reproduit le bruit de la cavité de PST.

En présence de l'AE l'erreur de la prestabilisation  $\epsilon_{pr}$  prend la forme:

$$\epsilon_{pr} = \delta\nu_{cav} - \delta\nu_s \quad (5.17)$$

Dans l'hypothèse où le gain de la boucle à deux chemins vérifie  $|G \gg 1|$ , le bruit du laser stabilisé est dominé par le bruit de l'ITF, et donc à basse fréquence par le bruit sismique des miroirs:

$$\tilde{\epsilon}_{pst} = \frac{G_l}{1 + G_m} \frac{K_m}{K_l} \tilde{\delta L} \quad (5.18)$$

On aura donc un décalage entre la fréquence de résonance de la cavité de préstabilisation et la fréquence du laser. En reprenant la division dans les trois régions du paragraphe précédent:

- Hautes fréquences ( $f \gg 10 \text{ Hz}$ ):  $|G_l| \gg 1$  et  $|G_m| \ll 1$

Le décalage est petit car le bruit  $\tilde{\delta L}$  de l'ITF est dominé par le bruit thermique

- Basses fréquences ( $f \leq 1 \text{ Hz}$ ):  $|G_l| \ll 1$  et  $|G_m| \gg 1$

Le décalage dépend du rapport  $G_l/G_m$ , et représente la fraction de bruit sismique introduit dans le chemin laser à basse fréquence. Il a des composantes spectrales à basse fréquence, et donc est une fluctuation lentement variable du point de travail de la préstabilisation.

- Fréquences intermédiaires ( $f \sim 10 \text{ Hz}$ ):  $|G_l| \gg 1$  et  $|G_m| \gg 1$ .

Le décalage est petit car à 10 Hz le bruit de l'ITF est déjà dominé par le bruit thermique.

Comme on verra dans le paragraphe suivant, le décalage du point de travail de la préstabilisation est la cause de certains bruits, qui limitent les performances de la préstabilisation. La grandeur qui joue est l'amplitude du décalage, qu'on peut calculer à partir de la densité spectrale de bruit de la façon suivante.

On calcule d'abord le décalage RMS:

$$\Delta\epsilon_{RMS} = \sqrt{\int_0^\infty |\tilde{\epsilon}(f)|^2 df} \quad (5.19)$$

et donc:

$$\Delta\epsilon_{RMS} = \sqrt{\int_0^\infty |\tilde{\nu}_{sis} \frac{G_L}{1+G_M}|^2 df} \quad (5.20)$$

en ayant défini les écarts de fréquence équivalents, dus au bruit sismique:  $\tilde{\nu}_{sis} = \tilde{\delta L} \cdot K_l/K_m = \tilde{\delta L} \cdot 3 \cdot 10^{11}$ .

Pour calculer le décalage RMS, il faut donc connaître le bruit sismique et les fonctions de transfert en boucle ouverte des deux chemins. Comme on ne connaît pas à priori les fonctions de transfert en boucle ouverte, on ne peut pas calculer l'intégrale.

La figure 5.4 présente le bruit sismique RMS  $\Delta L_{RMS}(f)$  sur les miroirs en fonction de la limite de l'intégration en fréquence [24]. La quantité représentée est:

$$\Delta L_{rms}(f) = \sqrt{\int_f^\infty |\tilde{\delta L}|^2 df} \quad (5.21)$$

On remarque que la contribution au déla de 2 Hz est négligeable. Pour obtenir un ordre de grandeur du décalage on peut donc supposer que le décalage à 2 Hz est nul, et qu'à 1 Hz il puisse être approximé par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{RMS} &= \sqrt{\int_0^\infty \left| \tilde{\nu}_{sis} \frac{G_L}{1+G_M} \right|^2 df} \\ &\sim \sqrt{\int_0^\infty \left| \tilde{\nu}_{sis} \frac{G_L}{G_M} \right|^2 df} \\ &\sim \Delta L_{RMS}(1 \text{ Hz}) \cdot \left| \frac{G_L(1 \text{ Hz})}{G_M(1 \text{ Hz})} \right| \end{aligned} \quad (5.22)$$

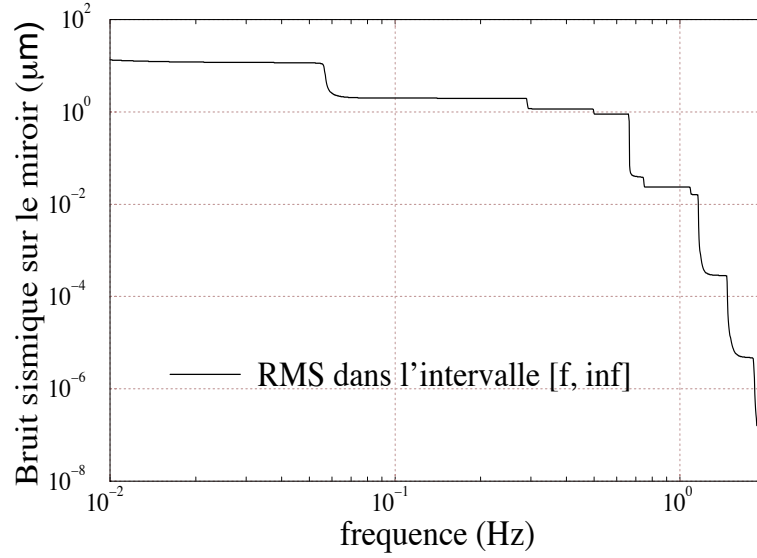


Figure 5.4: Déplacement *rms* d'un miroir suspendu au superatténuateur en fonction de la limite inférieure de l'intégration en fréquence

Cela nous permet d'avoir une spécification simple sur le module du rapport des deux fonctions de transfert à 1 Hz.

Pour calculer l'amplitude du décalage, on considère le bruit sismique comme un bruit gaussien avec des périodes caractéristiques d'une seconde. Si on considère que VIRGO devra fonctionner pour des périodes de l'ordre d'une année sans interruption, on a donc  $\sim 3 \cdot 10^7$  échantillons, ce qui correspond à une probabilité quasi-unité d'avoir un événement à 7 déviations standard. On supposera donc une valeur pic  $\Delta\epsilon_{pic}$ :

$$\Delta\epsilon_{pic} = \Delta\epsilon_{RMS} \cdot 7 \sim 7 \cdot 10^{-2} \mu m \quad (5.23)$$

## 5.5 Conséquences du décalage du point de travail de la préstabilisation

Le décalage du point de travail de la préstabilisation a deux conséquences fondamentales:

- Le couplage avec les fluctuations de puissance du laser.
- La non linéarité du signal de Pound-Drever.

Ces effets limitent la valeur maximale du décalage permis.

### 5.5.1 Le couplage entre le décalage et les fluctuations de puissance

Si la cavité de préstabilisation n'est pas à la résonance, le bruit de puissance du laser est converti en bruit de fréquence par l'asservissement de préstabilisation.

On peut écrire le signal de Pound-Drever de la préstabilisation sous la forme:

$$\delta\tilde{S} = K(P + \delta\tilde{P})(\Delta\nu + \delta\tilde{\nu}) \quad (5.24)$$

où  $K$  est une constante,  $P$  la puissance moyenne du laser,  $\delta\tilde{P}$  le bruit de puissance du laser,  $\delta\tilde{\nu}$  le bruit de fréquence, et  $\Delta\nu$  le décalage par rapport à la résonance. Donc les signaux dus respectivement au bruit de fréquence et au bruit de puissance sont:

$$\delta\tilde{S}_{fr} = KP\delta\tilde{\nu} \quad (5.25)$$

$$\delta\tilde{S}_p = K\delta\tilde{P}\Delta\nu \quad (5.26)$$

et donc le bruit de puissance, à cause de l'asservissement, devient un bruit de fréquence:

$$\delta\tilde{\nu} = \frac{\delta\tilde{P}}{P}\Delta\nu \quad (5.27)$$

Pour ne pas détériorer les performances de la préstabilisation il faut donc que:

$$\Delta\nu < \delta\tilde{\nu}_{pr} \frac{1}{\frac{\delta\tilde{P}}{P}} \quad (5.28)$$

où  $\delta\tilde{P}/P$  est le bruit mesuré du laser de VIRGO [42].

La figure 5.5 montre la mesure du bruit de puissance de VIRGO : un décalage de  $\Delta\nu = 10^4 Hz$  produit un niveau de bruit de fréquence du même ordre de grandeur que le bruit de la préstabilisation.

### 5.5.2 Non linéarité du signal de Pound-Drever

L'asservissement de la préstabilisation de fréquence se fonde sur l'hypothèse que le signal de Pound-Drever (PD) est linéaire. Si le point de travail, à cause du décalage, sort de la région de linéarité, les performances de réduction du bruit se dégradent:

- Effets de *up conversion* du bruit : Le bruit à basse fréquence se transforme, à cause de la non-linéarité du signal de Pound-Drever, en un bruit à fréquence plus élevée. Les fluctuations à des fréquences  $f < 10 Hz$  peuvent donc être converties en fluctuations dans l'intervalle de détection de VIRGO.

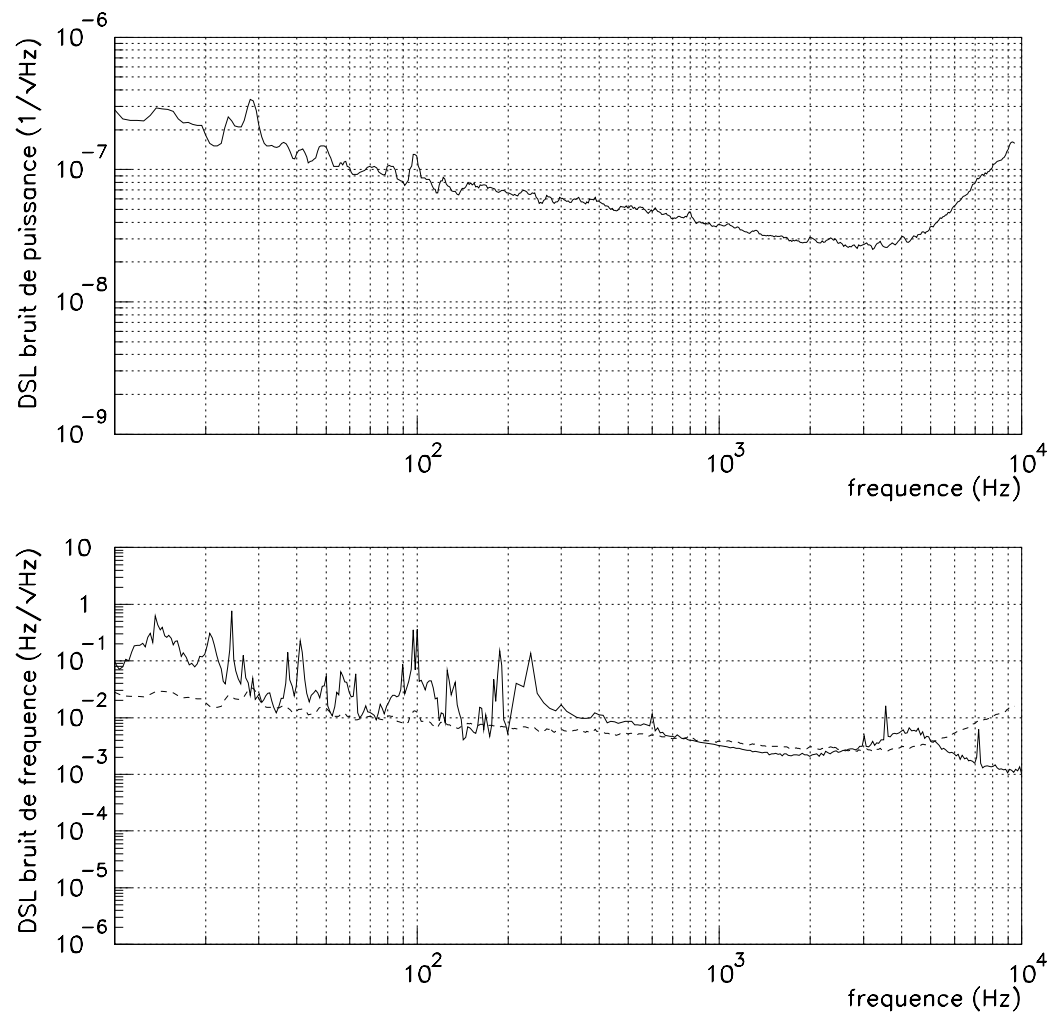


Figure 5.5: (haut) Mesure du bruit de puissance du laser de VIRGO. (bas) Comparaison entre le bruit de fréquence de la préstabilisation (ligne continue) et l'effet du couplage entre le bruit de puissance mesuré et un décalage de  $10^4$  Hz (ligne pointillée)

- Diminution du gain de l'asservissement : la "pente" du signal de Pound-Drever diminue dans la zone non-linéaire.

Le premier est le plus important et le moins contrôlable.

Le signal de PD est quasiment linéaire à l'intérieur de la demi largeur de raie d'une cavité FP ( $\Delta\nu_{HWHM}$ ), donc on demande que:

$$\Delta\nu < \Delta\nu_{HWHM} \quad (5.29)$$

la cavité de préstabilisation de VIRGO a une largeur de raie de 10 kHz en polarisation "s", qui correspond à une finesse  $\mathcal{F}_s \simeq 30000$ , et une largeur de 300 kHz en polarisation "p", qui correspond à une finesse de 1000. L'utilisation en haute finesse a été prévue pour avoir un niveau de bruit de photons inférieur au bruit thermique de la cavité. Toutefois nous avons démontré [43] qu'un niveau de bruit de photons équivalent à  $\tilde{\delta\nu} = 10^{-3} Hz/\sqrt{Hz}$  peut être atteint en utilisant la cavité de préstabilisation en polarisation "p", donc la finesse de 1000.

Avec une largeur de raie de 300 kHz, on est resté toujours dans la région linéaire du signal de Pound-Drever, donc on peut négliger cet effet. La limite supérieure pour le décalage du point de travail est donc  $10^4 Hz$ .

## 5.6 Spécifications pour les fonctions de transfert

On peut résumer les contraintes sur les fonctions de transfert des deux chemins de la façon suivante, schématisée par la figure 5.6:

- 1) Décalage du point de travail de la préstabilisation

Le rapport des modules des deux fonctions de transfert à 1 Hz doit vérifier:

$$\Delta\nu_{pic} = 7 \cdot 10^3 Hz \left| \frac{G_l}{G_m} \right| \leq 10^4 Hz \implies \left| \frac{G_l}{G_m} \right| \leq 1 \quad (5.30)$$

- 2) Suppression du bruit de fréquence

La contrainte sur le rapport des modules des fonctions des transferts pour les deux chemins à 10 Hz est:

$$\left| \frac{G_l}{G_m} \right| \geq 10^5 \quad (5.31)$$

- 3) Stabilité de la boucle d'asservissement

La différence entre les phases des deux fonctions de transfert au point de croisement ( $|G_l| = |G_m|$ ) doit être inférieure à  $\pi$

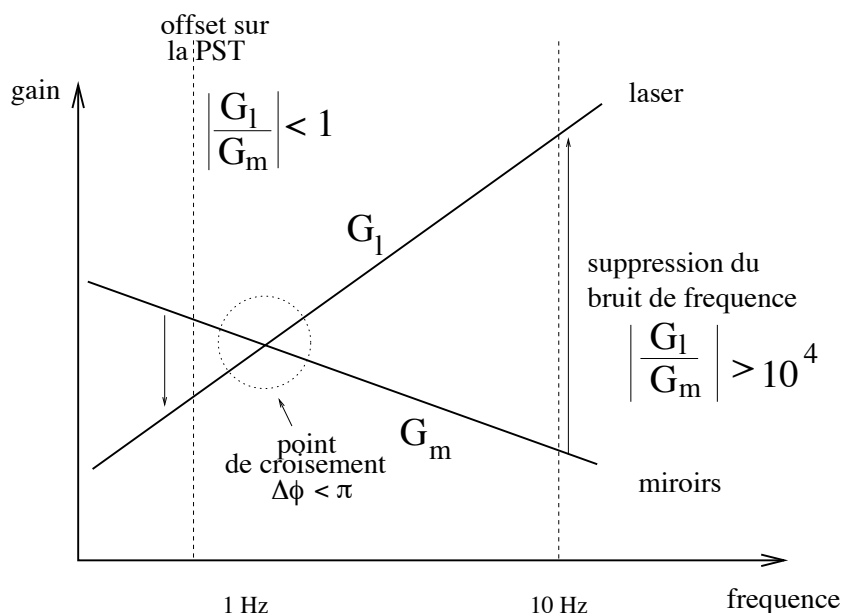


Figure 5.6: Schéma récapitulatif des demandes sur les fonctions de transfert en boucle ouverte pour les chemins laser et miroirs

Le rapport entre les fonctions de transfert des deux chemins doit donc augmenter de 4 ordres de grandeur entre 1 Hz et 10 Hz. En sachant qu'un pôle simple (donc une "pente"  $1/f$ ) équivaut à une phase  $-\pi/2$ , il est clair que la condition de stabilité est pratiquement impossible à remplir. Dans le chapitre suivant on montrera qu'une solution pour l'interféromètre central est possible mais extrêmement difficile car les contraintes dans ce cas sont beaucoup moins strictes.

## 5.7 Topologies alternatives

### 5.7.1 Elimination du décalage du point de travail de la préstabilisation

Le décalage du point de travail peut être éliminé avec la topologie montrée dans la figure 5.7, qui utilise un modulateur acousto-optique comme composant supplémentaire.

Le signal d'erreur de l'interféromètre est filtré et envoyé à l'acousto-optique qui se trouve sur le chemin préstabilisation. L'action de l'acousto-optique se traduit en un changement de la fréquence "vue" par la préstabilisation. Comme l'asservissement de la préstabilisation a un gain et une bande passante très importants le changement de fréquence est corrigé, pour maintenir le signal d'erreur nul. La correction est ainsi transférée sur le laser, qui est donc stabilisé sur l'interféromètre.

Cette technique a été testée expérimentalement avec succès dans d'autres laboratoires [16], mais son introduction dans la stratégie de stabilisation de fréquence de



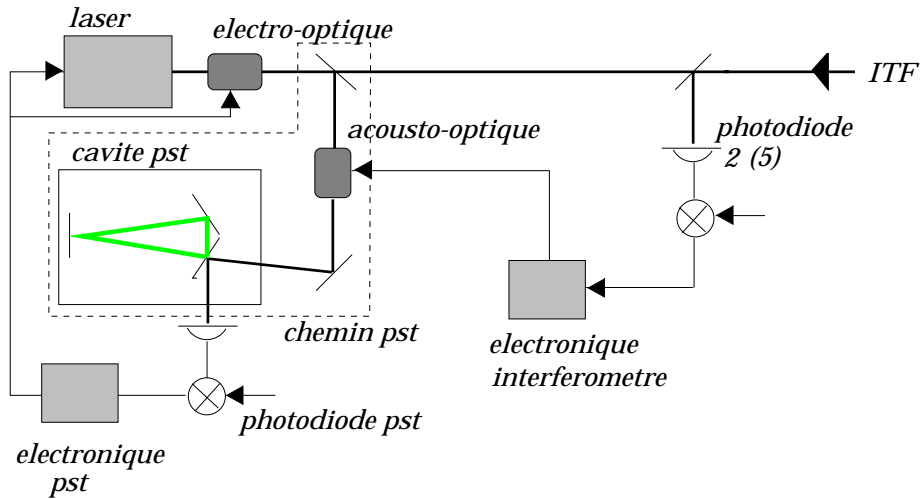


Figure 5.7: Elimination du décalage du point de travail de la préstabilisation avec un acousto-optique sur le *chemin préstabilisation*

VIRGO implique le changement du banc d'entrée et l'introduction d'un acousto-optique sous vide.

### 5.7.2 Utilisation du mode-cleaner

Le deuxième problème mis en évidence dans les paragraphes précédents est lié au gain trop important à 10 Hz. La solution est de partager le gain entre l'interféromètre et une référence de fréquence intermédiaire : le mode-cleaner. Cette solution a été étudié et proposée pour l'interféromètre LIGO [44] [45].

Le mode-cleaner n'a pas la stabilité suffisante pour la stabilisation du laser de VIRGO, à cause de son bruit thermique. Une évaluation grossière du bruit thermique du mode-cleaner, avec les contributions des modes internes du dièdre et du banc d'entrée correspond à une stabilité  $\delta\nu \sim 10^{-4} Hz/\sqrt{Hz}$  [6]. En outre la solution de référence prévoit l'utilisation d'un deuxième banc suspendu comme support pour le miroir de fond de la cavité, et l'utilisation de cristaux piézoélectriques collés aux substrats du miroir comme actionneurs pour contrôler la longueur de la cavité. Cette conception mécanique rend une estimation précise du bruit thermique extrêmement compliqué, et presque impossible.

Il est toutefois possible stabiliser le laser à un niveau  $\sim 10^{-3} - 10^{-4} Hz/\sqrt{Hz}$  à 10 Hz, et donc relaxer d'un facteur important les contraintes sur le gain de l'interféromètre.

## Chapitre 6

# La stabilisation de fréquence pour l'interféromètre central

### 6.1 Introduction

La construction de l'interféromètre VIRGO prévoit deux phases:

- La mise en œuvre de *l'interféromètre central*, à la fin de cette année. Il s'agit d'un Michelson avec recyclage, dont les bras sont de 6 mètres de long. Il doit servir à tester la majorité des composants optiques et mécaniques du détecteur : le laser, le banc d'entrée, le mode-cleaner, les suspensions, le banc de détection du signal, le système d'acquisition des données et le contrôle global.

En outre, le système de contrôle de l'interféromètre et de la fréquence laser sera testé dans une forme plus simple, grâce à l'absence des cavités Fabry-Perot kilométriques.

- Pendant cette phase, les tunnels et les tubes à vide de 3 kilomètres seront construits. A la mi 2002, l'ensemble de composants de VIRGO sera prêt, et l'interféromètre fonctionnera dans sa configuration finale.

Le but de ce chapitre est de décrire le problème de la stabilisation de fréquence pour l'interféromètre central.

On montrera la sensibilité en phase attendue et les spécifications de fréquence correspondantes. Ensuite on décrira un schéma de contrôle à deux chemins, pour la fréquence laser et la position des miroirs, qui utilise la technique d'addition électronique des signaux d'erreur.

### 6.2 Caractéristiques principales et sensibilité

Le schéma de l'interféromètre central est montré dans la figure 6.1. Ses caractéristiques principales (et les différences avec VIRGO) sont les suivantes :

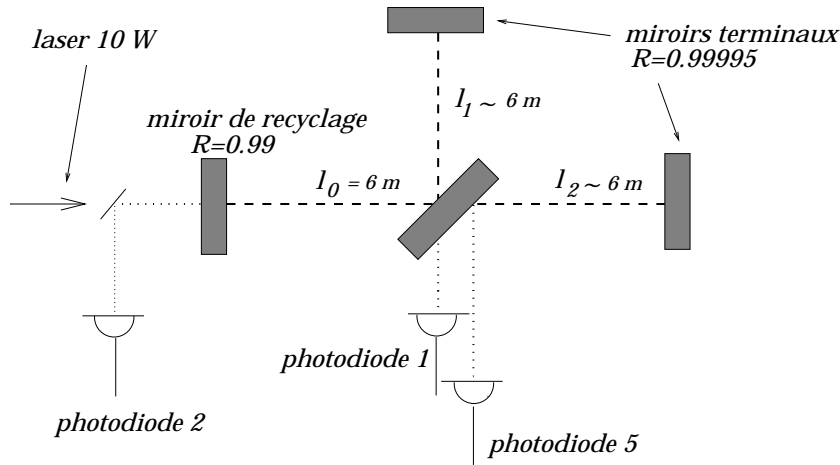


Figure 6.1: Schéma de l'interféromètre central

- Le laser a une puissance de 10 W (20 W pour VIRGO)
- Les cavités Fabry-Perot kilométriques sont remplacées par des miroirs à haute réflectivité ( $R=0.99995$ ). La longueur des bras de l'interféromètre est de 6 mètres et la longueur de la cavité de recyclage de 12 mètres. Une asymétrie entre les deux bras de  $\sim 0.5 - 1 m$  est introduite pour permettre l'extraction du signal avec la technique de la modulation frontale.
- Les miroirs terminaux et celui de recyclage ont un diamètre de 5 cm, il sont donc plus petits que les miroirs de VIRGO. Il seront encastrés dans des supports cylindriques de la même taille que les vrais miroirs, afin de pouvoir tester les suspensions dans des conditions similaires à celles de VIRGO.
- La puissance dans la cavité de recyclage est supposée être de l'ordre de  $1 \text{ kW}$ <sup>1</sup>, ce qui correspond à un gain de recyclage de 100. Dans notre analyse, on considérera que le miroir de recyclage a une réflectivité de  $R=0.99$  et des pertes de l'ordre de 1%.
- Les suspensions, les bancs d'entrée et de sortie, le mode-cleaner d'entrée et l'électronique d'acquisition et de contrôle de l'interféromètre sont les mêmes que dans VIRGO.

### 6.2.1 Les sources de bruit

- **Le bruit de photons**

<sup>1</sup>Une estimation précise des pertes n'a pas été faite.

Si la puissance sur la séparatrice est de 1 kW, le niveau de bruit de photons est le même que celui attendu pour VIRGO:

$$\tilde{\delta\phi}_{photons} = \sqrt{\frac{h\nu}{\eta P}} \simeq 2 \cdot 10^{-11} \text{ rad}/\sqrt{Hz} \quad (6.1)$$

où  $P = 1 \text{ kW}$  est la puissance sur la séparatrice,  $\eta = 0.9$  l'efficacité quantique des photodiodes,  $\nu = 3 \cdot 10^{14}$  la fréquence du laser, et  $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck.

- **Le bruit thermique**

L'influence du bruit thermique sur le bruit de phase est très inférieure à celle dans VIRGO. La présence des cavités Fabry-Perot amplifie en effet le déphasage gravitationnel, mais aussi tous les bruits “*de position*” des miroirs: le bruit sismique et le bruit thermique. En l'absence des cavités, et avec un même niveau de bruit thermique, le bruit de phase à la sortie de l'interféromètre est

$$\frac{2}{\pi} \mathcal{F} \simeq 32$$

fois inférieur à celui de VIRGO, où  $\mathcal{F}$  est la finesse des cavités Fabry-Perot. Toutefois les miroirs de l'interféromètre central seront composites, leur facteur de qualité sera donc dégradé, et le bruit thermique du aux miroirs sera plus élevé que celui de VIRGO [47]. Des mesures préliminaires montrent que le facteur de qualité des miroirs ,avec leurs supports, est compris entre 100 et 1000.

Le bruit thermique des suspensions est le même que celui de VIRGO. La composante principale est le bruit “*de pendule*”, avec une fréquence de résonance de 0.6 Hz, et un facteur de qualité de  $8 \cdot 10^5$ .

- **La pression de radiation**

L'autre bruit qui limite la sensibilité de l'interféromètre central sont les fluctuations de pression de radiation, dues au bruit *technologique* de puissance du laser. Il est important ne pas confondre ce bruit avec le bruit de puissance d'origine quantique, décrit au paragraphe 1.4.6.

Le bruit de pression de radiation dans l'interféromètre central est dominé par la contribution de la séparatrice, et s'écrit [46]:

$$\tilde{\delta L}_{rad} = \frac{2 \frac{\delta P}{P} P}{(2\pi)^2 f^2 M c} \quad (6.2)$$

où  $M = 5 \text{ kg}$  est la masse de la séparatrice,  $\delta P/P = 10^{-7} 1/\sqrt{Hz}$  les fluctuations mesurées de puissance du laser (Cf. figure 5.5),  $f$  la fréquence d'analyse et  $c$  la vitesse de la lumière. Avec ces données on a:

$$\delta\tilde{L}_{rad} = \frac{3 \cdot 10^{-15}}{f^2} m/\sqrt{Hz} \implies \delta\tilde{\phi}_{rad} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{f^2} rad/\sqrt{Hz} \quad (6.3)$$

La figure 6.2 montre la sensibilité en phase de l'interféromètre central.

### 6.3 Spécifications pour le bruit de fréquence

En l'absence des cavités Fabry-Perot, la source dominante d'asymétrie pour l'interféromètre central est la différence de longueur entre les bras. Un bruit de fréquence  $\delta\tilde{\nu}$  provoque alors un bruit de phase à la sortie:

$$\delta\tilde{\phi} = \frac{4\pi}{c} \Delta L \delta\tilde{\nu} \quad (6.4)$$

et les spécifications sur le bruit de fréquence s'écrivent donc:

$$\delta\tilde{\nu} \leq \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\Delta L} \frac{1}{3} \delta\tilde{\phi}_c \quad (6.5)$$

où  $\delta\tilde{\phi}_c$  est la sensibilité en phase envisagée de l'interféromètre <sup>2</sup>.

Le gain nécessaire pour la stabilisation de fréquence est:

$$G(f) = \frac{\delta\tilde{\nu}_{pst}}{\delta\tilde{\nu}} \quad (6.6)$$

où  $\delta\tilde{\nu}_{pst}$  représente le bruit du laser préstabilisé et filtré par le mode-cleaner (Cf. paragraphe 4.7). Les spécifications pour le bruit de fréquence  $\delta\tilde{\nu}$ , et le gain  $G(f)$  sont montrés dans la figure 6.3.

### 6.4 Le contrôle de l'interféromètre

La position des miroirs de l'interféromètre doit être contrôlée pour maintenir:

- La condition de frange noire.
- La cavité de recyclage en résonance avec la lumière laser.

---

<sup>2</sup>Comme l'interféromètre central est conçu pour l'étude des bruits, on a imposé des contraintes moins stricte que dans VIRGO, donc un facteur de sécurité de 3 (au lieu de 10), qui correspond à une dégradation de la sensibilité de 5%

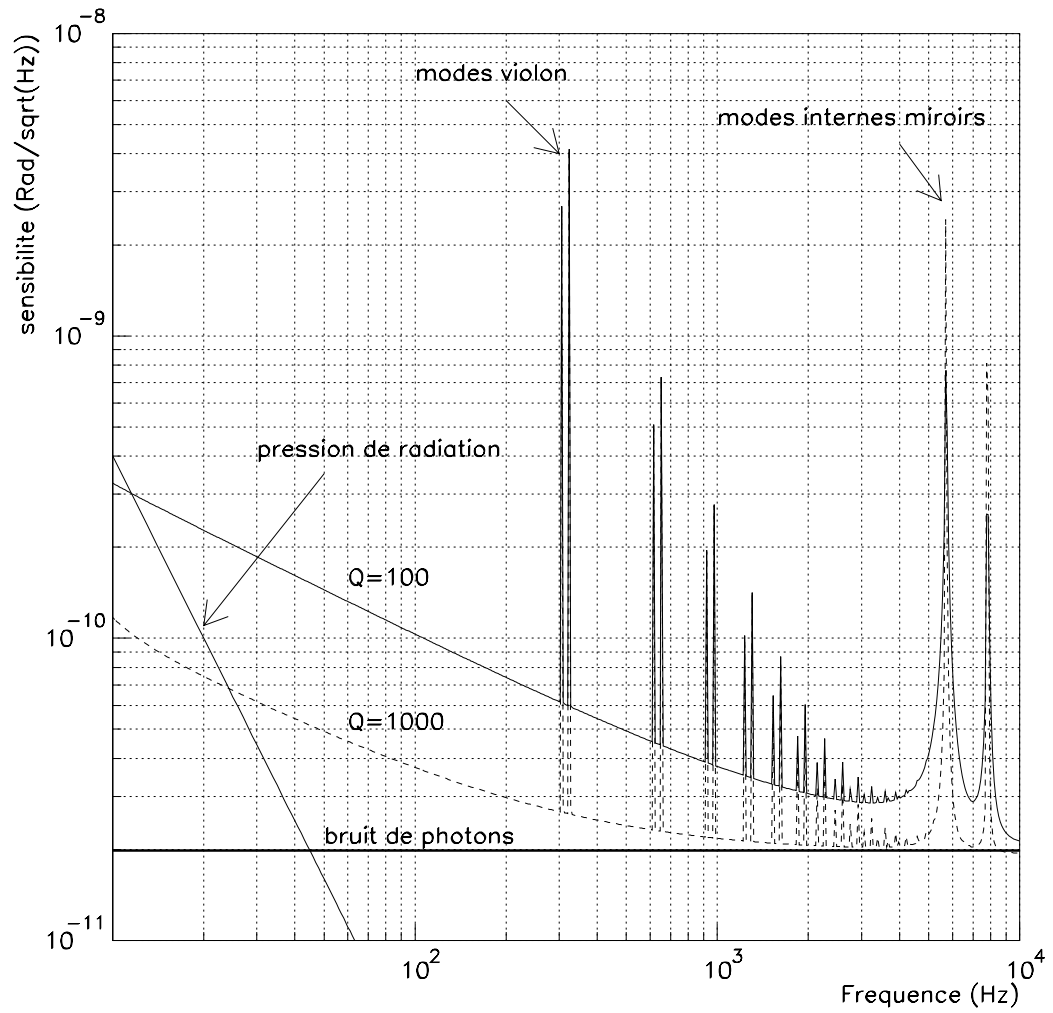


Figure 6.2: Sensibilité de l'interféromètre central. Le bruit thermique des miroirs a été calculé pour deux valeurs du facteur de qualité:  $Q=100$  et  $Q=1000$ .

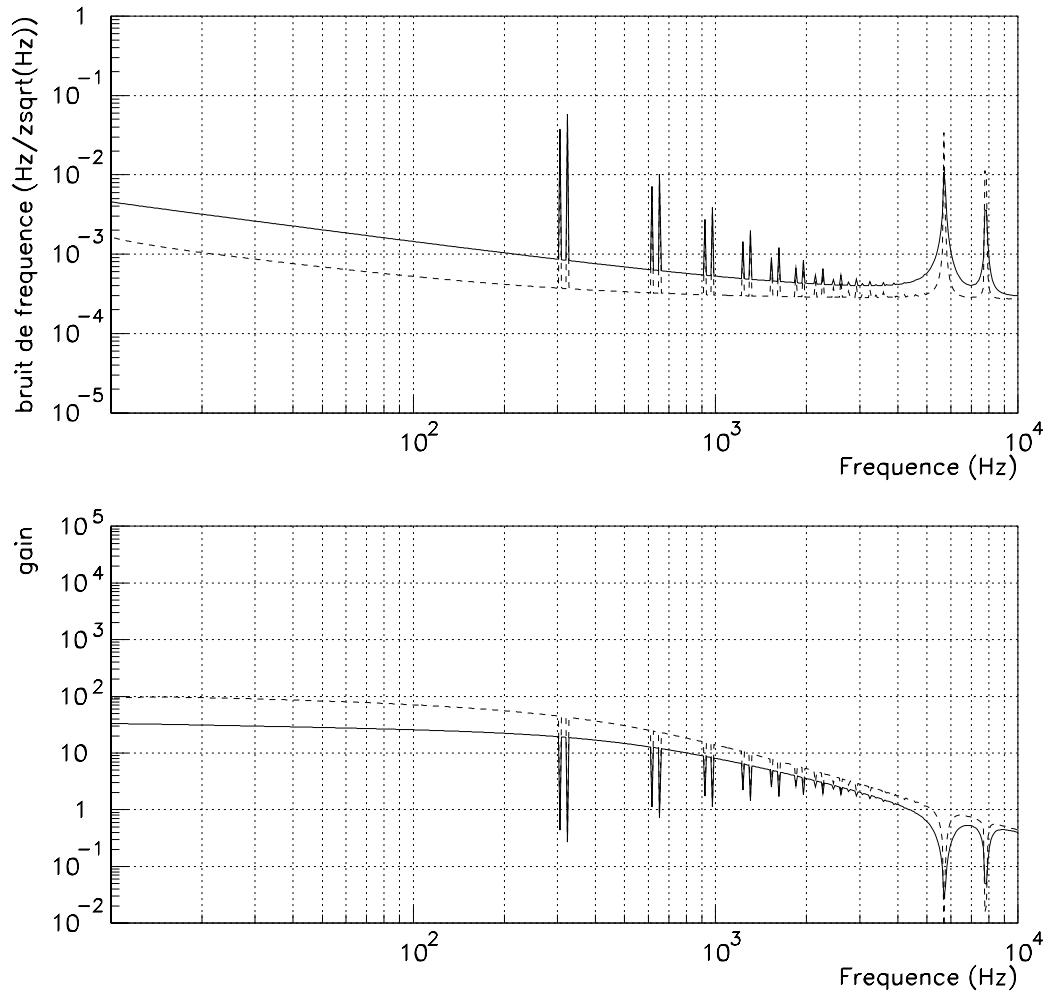


Figure 6.3: Spécifications pour le bruit de fréquence (*haut*), et pour le gain de l'étage de stabilisation de fréquence sur l'interféromètre (*bas*).  $Q=100$  (ligne continue),  $Q=1000$  (ligne pointillée). Dans les deux cas un facteur de sécurité de 3 a été inclus, et la contribution de la pression de radiation n'a pas été prise en compte.

### 6.4.1 Spécification pour la frange noire

La spécification sur la frange noire est due au couplage avec les fluctuations de puissance du laser. Le mécanisme est similaire à celui décrit au paragraphe 5.5.1. Un bruit de puissance  $\delta\tilde{P}/P$  génère un bruit de phase:

$$\delta\tilde{\phi} = \frac{\delta\tilde{P}}{P} \Delta\phi_- \quad (6.7)$$

où  $\Delta\phi_-$  est le décalage RMS par rapport à la frange noire.

Si on demande que la sensibilité en phase  $\delta\tilde{\phi}_c$  de l'interféromètre ne soit pas dégradée on trouve:

$$\Delta\phi_- \leq \frac{\delta\tilde{\phi}_c}{\frac{\delta\tilde{P}}{P}} \frac{1}{3} \quad (6.8)$$

où  $1/3$  représente le facteur de sécurité. Pour des fluctuations mesurées  $\frac{\delta\tilde{P}}{P} = 10^{-7} 1/\sqrt{Hz}$  (voir figure 5.5) on a:

$$\Delta\phi_- \leq 3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \quad (6.9)$$

### 6.4.2 Spécification pour la cavité de recyclage

Un écart de phase par rapport à la résonance entraîne une perte de puissance, donc une augmentation du bruit de photons.

Si on demande que la diminution de la puissance soit inférieure à 1%, la phase doit être contrôlée avec une précision de  $1/10$  de la demi-largeur de raie (cf. paragraphe 7.5). Donc:

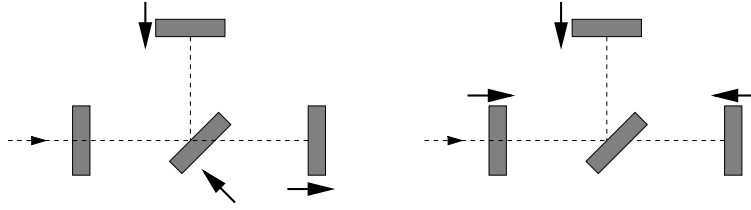
$$\Delta\phi_+ \leq \frac{1}{10} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad (6.10)$$

où  $\mathcal{F} = 300$  est la finesse de la cavité de recyclage, et  $\pi/2\mathcal{F}$  la demi-largeur à mi hauteur de la raie de la cavité.

## 6.5 La matrice optique

La différence de phase entre les faisceaux  $\phi_-$  et la phase dans la cavité de recyclage  $\phi_+$  sont liées aux mouvements des miroirs et à la variation de la fréquence du laser.



Figure 6.4: Modes différentiels (*gauche*) et modes communs (*droite*) des miroirs

### 6.5.1 Différence de phase $\phi_-$

La différence de phase entre les faisceaux dans les deux bras est due aux “*modes différentiels*”  $\delta L_-$  des miroirs (mouvement en opposition de phase des miroirs terminaux et mouvement de la séparatrice, Cf. fig. 6.4) ainsi qu’aux variations de la fréquence du laser  $\delta\nu$ , à travers le couplage avec l’asymétrie de longueur:

$$\phi_- = \frac{4\pi\nu}{c}\delta L_- + \frac{4\pi}{c}A\delta\nu \quad (6.11)$$

où  $\Delta L_-$  représente les *modes différentiels*, et A est l’asymétrie, c’est à dire la différence de longueur *macroscopique* entre les bras (0.5 m).

### 6.5.2 Phase dans la cavité de recyclage

La phase dans la cavité de recyclage est due aux “*modes communs*”  $\delta\phi_+$  des miroirs (mouvements en phase des miroirs terminaux et mouvement du miroir de recyclage, Cf. fig. 6.4) ainsi qu’aux variations de la fréquence du laser. Donc:

$$\phi_+ = \frac{4\pi\nu}{c}\delta L_+ + \frac{4\pi}{c}l_{rec}\delta\nu \quad (6.12)$$

où  $\Delta L_+$  représentent les *modes communs*, et  $l_{rec} = 12$  m est la longueur de la cavité de recyclage.

### 6.5.3 Matrice optique et choix des signaux

Pour contrôler  $\phi_-$  et  $\phi_+$ , il faut extraire deux *signaux d’erreur* et envoyer les corrections appropriées aux miroirs et au laser. Si les écarts de phase sont petits, les signaux des photodiodes en dépendent linéairement. On peut donc définir une *matrice optique*, qui relie les variations de phase aux signaux.

On choisit le signal de la photodiode 1 en quadrature, qui mesure la phase  $\phi_-$  et le signal en phase de la photodiode 2 (ou 5), qui mesure la phase  $\phi_+$ .

On peut montrer que les signaux s’écrivent:

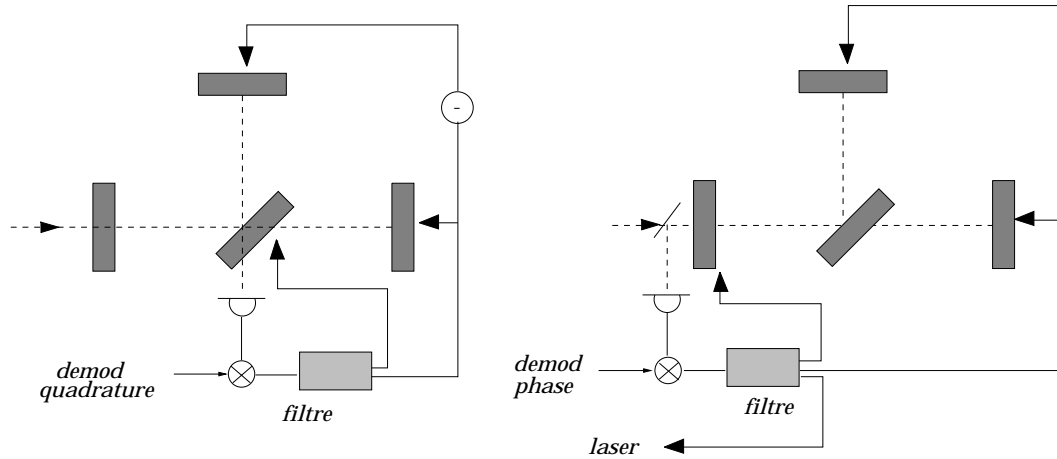


Figure 6.5: (*gauche*) asservissement pour  $\Delta\phi_-$  sur les modes différentiels, (*droite*) asservissement pour  $\Delta\phi_+$  sur les modes communs et la fréquence laser

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{pmatrix}$$

Comme on verra dans la suite, la phase  $\phi_+$  est contrôlée avec un asservissement à haut gain et haute bande passante, qui agit sur les modes communs et sur la fréquence laser. On fait l'hypothèse que le bruit du laser est complètement supprimé par cet asservissement, et que donc la phase  $\phi_-$  dépend seulement des modes différentiels. Par conséquent, on contrôle l'interféromètre avec deux asservissements indépendants: le premier agit sur les modes communs et la fréquence du laser, le deuxième agit sur les modes différentiels.

La figure 6.5 montre les schémas des deux boucles de contrôle.

## 6.6 Stratégie de contrôle pour les modes communs et la fréquence du laser

Comme notre but principal est de stabiliser la fréquence laser, on supposera que la phase  $\phi_-$  est contrôlée par un asservissement indépendant et que donc l'interféromètre est parfaitement sur la frange noire.

On présentera une stratégie de contrôle qui :

- Stabilise la fréquence du laser au niveau déterminé dans le paragraphe 6.3, à partir de quelques Hz, en agissant sur le laser avec la technique de l'addition électronique des signaux d'erreur.

- Contrôle la résonance dans la cavité de recyclage, en agissant sur le laser et les modes communs des miroirs. Donc amène l'écart de phase  $\Delta\phi_-$  au niveau déterminé dans les paragraphe 6.4.2

Il s'agit d'un asservissement à deux chemins, dont le schéma est le même que celui montré dans la figure 5.3.

### 6.6.1 Décalage du point de travail de la préstabilisation

Comme on se propose d'utiliser la technique d'addition électronique des signaux d'erreur, il faut calculer le décalage du point de travail de la préstabilisation en boucle ouverte, et ensuite le gain nécessaire pour le réduire à un niveau inférieur à 10 kHz (Cf. paragraphe 5.5.1).

L'amplitude du bruit sismique à 1 Hz est  $7 \cdot 10^{-2} \mu m$  (cf. paragraphe 5.4). La relation qui lie les écarts de fréquence aux variations de longueur:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta L}{L} \quad (6.13)$$

doit dans ce cas être appliquée à la cavité de recyclage de l'interféromètre central ( $L = 12 m$ ). On trouve donc, suivant la notation du chapitre précédent:

$$\Delta\epsilon_{pic} = 1.75 MHz \quad (6.14)$$

Par conséquent, afin d'assurer un décalage inférieur à 10 kHz il faut que :

$$\left| \frac{G_L(1 Hz)}{G_m(1 Hz)} \right| \leq \frac{1.75 MHz}{10 kHz} = 175 \quad (6.15)$$

où  $G_l$  et  $G_m$  sont respectivement les fonctions de transfert en boucle ouvert du chemin laser et du chemin miroirs (Cf. paragraphe 5.3).

### 6.6.2 Stabilité en fréquence

Le gain nécessaire pour la stabilisation de fréquence a été montré au paragraphe 6.3. Le point le plus critique pour la conception de l'asservissement est le gain en basse fréquence où les deux chemins se croisent. La contrainte à 10 Hz est:

$$\left| \frac{G_l(10 Hz)}{G_m(10 Hz)} \right| \geq 100 \quad (6.16)$$

où l'on a supposé que le gain  $G_m \gg 1$  à 10 Hz (Cf. paragraphe 5.3).

### 6.6.3 Suppression du bruit sismique

Le bruit sismique intégré dans l'intervalle  $[10 \text{ mHz}, \infty]$ , vaut  $\sim 10 \mu\text{m}$  (ff. fig 5.4), ce qui correspond à:

$$\Delta\phi_+ = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot 10 \mu\text{m} = 120 \text{ rad} \quad (6.17)$$

pour  $f \leq 1 \text{ Hz}$

Le gain en boucle ouverte nécessaire pour atteindre les spécifications sur la résonance de la cavité de recyclage (Cf. l'équation 6.10) vaut donc:

$$G \geq 10^6 \quad (6.18)$$

pour  $f \leq 1 \text{ Hz}$ . On verra que cette spécification n'amène pas des contraintes fortes sur la conception du filtre. Grâce à la présence du laser comme actuateur, le filtre peut avoir une très grande bande passante ( $\sim 100 \text{ kHz}$ ), car il n'y a aucune limitation due à la réponse mécanique des pendules. Cet asservissement peut donc avoir un gain très important à basse fréquence.

### 6.6.4 Conception d'un filtre compensateur à deux chemins: le problème du "croisement"

La stabilité est le problème principal pour la conception de ce filtre à deux chemins.

La stabilité du système est déterminée par les racines de la fonction de transfert en boucle fermée (cf. l'équation 5.13):

$$1 + G_l + G_m \quad (6.19)$$

Le système donc stable si les racines sont toutes à partie réelle négative. On peut démontrer que cette condition se traduit par une règle d'utilisation pratique: les deux fonctions de transfert, qui sont supposées une croissante et l'autre décroissante, doivent "*se croiser*" avec une phase au point de croisement inférieure à  $\pi$ , et la fonction de transfert totale doit "*franchir*" le gain unité avec une pente  $\sim 1/f$ . Comme les deux fonctions doivent avoir des pentes assez importantes au point de croisement, la conception est très complexe.

### 6.6.5 Séparations des polynômes

Pour résoudre le problème de la conception des fonctions de transfert pour les deux chemins, nous avons inversé le problème: au lieu de concevoir deux chemins et de s'assurer que la somme est stable, on part d'une somme stable, et on déduit les deux chemins successivement.

L'idée est d'utiliser une fonction de transfert en boucle ouverte totale  $G$  du type:

$$G(s) = G_l(s) + G_m(s) = F(s) \times 1 \quad (6.20)$$

où  $F(s)$  est une fonction de transfert stable. En d'autre termes, on demande que la somme des deux chemins, à part le facteur commun  $F(s)$ , soit égale à 1.

On part d'un polynôme  $P(s)$  d'ordre  $n$ , de la forme:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n_1} s^{s-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (6.21)$$

où  $a_1$  sont des coefficients réels, et  $s$  est la variable de Laplace. On construit ensuite les deux polynômes  $P_l(s)$  et  $P_m(s)$  en *séparant* en deux le polynôme  $P(s)$ :

$$\begin{aligned} P_l(s) &= \frac{a_n s^n + a_{n_1} s^{s-1} + \dots + a_{n-k} s^{n-k}}{P(s)} \\ P_m(s) &= \frac{a_{n-k-1} s^{n-k-1} + \dots + a_1 s + a_0}{P(s)} \end{aligned} \quad (6.22)$$

La somme des deux polynômes vaut:

$$P_l(s) + P_m(s) = 1 \quad (6.23)$$

en outre, si l'on note  $s_{cross}$  le point de croisement des deux fonctions, on a:

- pour  $s \ll s_{cross}$ :  $|P_m(s)/P_l(s)| \sim 1/s^{(n-k)}$
- pour  $s \gg s_{cross}$ :  $|P_l(s)/P_m(s)| \sim s^{(k+1)}$

On a donc deux fonction de transfert dont la somme est stable et leur rapport:

$$\left| \frac{P_l(s)}{P_m(s)} \right| \quad (6.24)$$

est une fonction croissante de la fréquence avec une pente qui augmente comme le degré du polynôme utilisé.

### 6.6.6 Exemple d'application

Dans ce paragraphe, on présentera un exemple d'application de la technique de séparation des polynômes. On est loin de vouloir présenter un étude systématique et rigoureux de cette technique, mais plutôt une solution possible au problème de la stabilisation de fréquence.

Le polynôme que l'on a choisi est de la forme:

$$P = \left(1 + \frac{s}{s_0}\right)^8 = \sum_{i=0}^8 a_i \left(\frac{s}{s_0}\right)^i \quad a_i = C_8^i \quad (6.25)$$

Avec  $s_0 = 2\pi \cdot 7 \text{ Hz}$ . On discutera dans la suite le choix de l'ordre du polynôme. Le pôle  $s_0$  permet d'avoir un point de croisement des deux filtres autour de 7 Hz.

On a construit les deux polynômes de la façon suivante:

$$P_l = \frac{a_8 \left(\frac{s}{s_0}\right)^8 + a_7 \left(\frac{s}{s_0}\right)^7 + a_6 \left(\frac{s}{s_0}\right)^6 + a_5 \left(\frac{s}{s_0}\right)^5}{P} \quad (6.26)$$

$$P_m = \frac{a_4 \left(\frac{s}{s_0}\right)^4 + a_3 \left(\frac{s}{s_0}\right)^3 + a_2 \left(\frac{s}{s_0}\right)^2 + a_1 \left(\frac{s}{s_0}\right)^1 + a_0}{P}$$

Si l'on note  $s_{cross}$  le point de croisement, on obtient:

- pour  $s \ll s_{cross}$ :  $|P_m/P_l| \sim 1/s^5$
- pour  $s \gg s_{cross}$ :  $|P_l/P_m| \sim s^4$

En outre, on choisit la fonction  $F(s)$  de la forme simple <sup>3</sup>:

$$F(s) = K \frac{1 + \frac{s}{s_z}}{s^2} \quad (6.27)$$

avec le gain  $K$  et le pôle  $s_z$  de façon à avoir une bande passante pour la fonction de transfert  $G_l + G_m$  autour de 100 kHz et un gain suffisant en basse fréquence.

La figure 6.6 montre les fonctions de transfert en boucle ouverte pour les deux chemins (module et phase), le facteur de suppression du bruit de fréquence, et la différence de phase entre les deux filtres.

### 6.6.7 Performances

La figure 6.7 montre une comparaison entre le facteur de suppression du bruit de fréquence obtenue avec le polynôme d'ordre 8 et les spécifications trouvées au paragraphe 6.3.

On peut résumer les performances du filtre avec les observations suivantes:

- Les spécifications de suppression du bruit de fréquence sont remplies pour des fréquences supérieures à quelques dizaines de Hz (en fonction du facteur de qualité des miroirs). Il n'y a aucun problème à haute fréquence (autour du 10 kHz)

---

<sup>3</sup>Un integrateur pur (K/s) ne garantit pas un gain suffisant à basse fréquence et une bande passante limitée à 100 kHz. Cette dernière condition est imposée pour garantir la validité des hypothèses concernant l'utilisation de la technique d'addition électronique des signaux d'erreur (cf. l'équation 5.6)

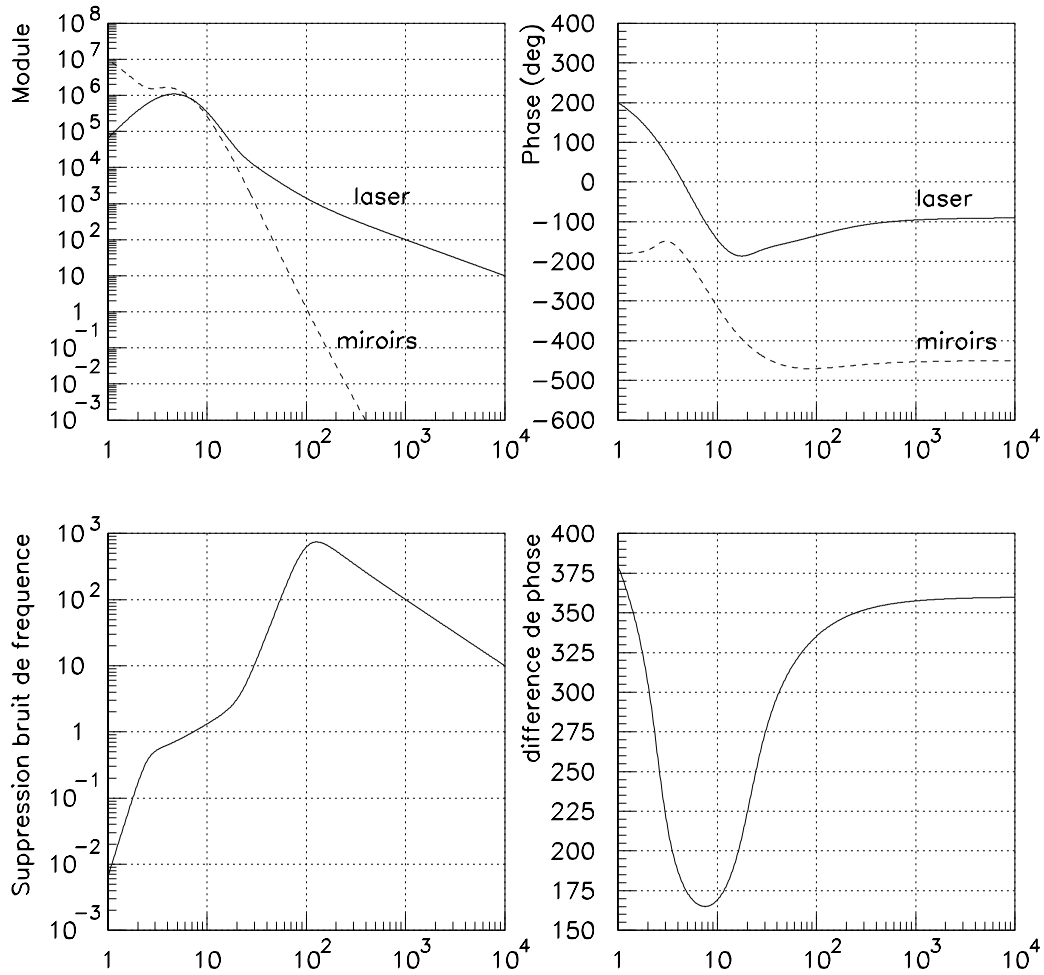


Figure 6.6: Fonction de transfert en boucle ouverte pour les deux chemins réalisées avec la technique de division des polynômes. (*haut gauche*) gain, (*haut droite*) phase, (*bas gauche*) facteur de suppression du bruit de fréquence, (*bas droite*) différence de phase des fonctions de transfert

- Les spécifications sur le décalage du point de travail de la préstabilisation sont pratiquement remplies. Le rapport  $|G_l/G_m|$  vaut  $7 \cdot 10^{-3}$  à 1 Hz, ce qui correspond à un décalage de 12 kHz.
- Le gain du chemin miroirs à 1 Hz est  $10^7$ , donc suffisant pour atteindre un niveau  $\Delta\phi_+ \leq 5 \cdot 10^{-4}$  rad d'écart de phase dans la cavité de recyclage.
- Le point critique de la conception du filtre est la différence de phase au point de croisement. Dans le cas présent on a une différence de  $165^\circ$ , donc seulement  $15^\circ$  inférieure à la limite permise de  $180^\circ$ . Si les fonctions de transfert des actuateurs des deux chemins sont mesurées avec une grande précision, une marge de phase assez réduite ne devrait pas représenter un problème pour la stabilité du filtre. On peut montrer que d'autre part la marge de phase est inversement proportionnelle à l'ordre du polynôme que l'on utilise, et donc aux performances du filtre en terme de suppression du bruit à basse fréquence.

## 6.7 Les Filtres numériques

La réalisation de filtres à deux chemins avec la technique de "séparation des polynômes" demande de pouvoir créer des fonctions de transfert du type:

$$P(s) = \frac{(s - z_1)^{\alpha_1} (s - z_2)^{\alpha_2} \dots (s - z_n)^{\alpha_n}}{(s - p_1)^{\beta_1} (s - p_2)^{\beta_2} \dots (s - p_n)^{\beta_n}} \quad (6.28)$$

et donc de placer des pôles et des zéros dans le plan complexe à basse fréquence avec précision.

Dans l'exemple montré, les zéros de  $P_l$  sont:

$$\begin{aligned} 0 & \text{ ordre } 5 & (6.29) \\ -27.3082 \\ -10.3459 \pm i \cdot 18.3277 \end{aligned}$$

et les zéros de  $P_m$  sont:

$$\begin{aligned} -0.8174 \pm i \cdot 2.3579 & (6.30) \\ -1.5826 \pm i \cdot 0.6676 \end{aligned}$$

L'implémentation de ce type de fonction de transfert est très complexe avec des filtres analogiques, et demande plutôt l'utilisation d'un système numérique.

Un système de filtrage numérique a été développé pour le contrôle du superatténuateur sismique. Des mesures sont en cours pour démontrer qu'il est capable de réaliser les fonctions de transfert demandées.



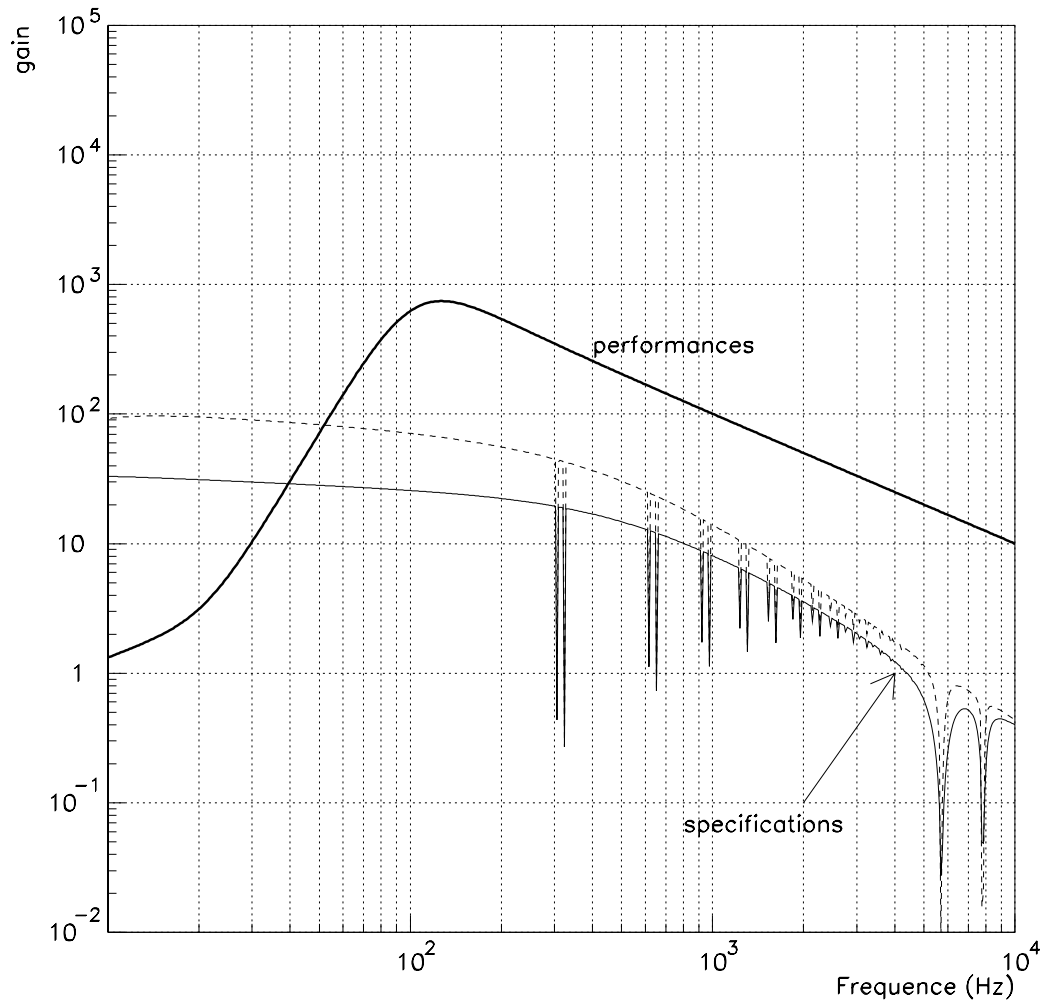


Figure 6.7: Comparaison entre les spécifications en terme de gain pour l'asservissement du laser sur l'interféromètre (ligne continue,  $Q=100$ ; ligne pointillée,  $Q=1000$ ), et les performances du filtre obtenu par séparation des polynômes (ligne épaisse)

## 6.8 Conclusions et perspectives

On a présenté un schéma possible de stabilisation de fréquence et de contrôle des modes communs des miroirs, pour l'interféromètre central.

Avec la configuration optique actuelle, l'utilisation de la technique d'addition électronique des signaux d'erreur est la seule solution possible. Cela impose des contraintes très fortes sur les fonctions de transfert en boucle ouverte pour les deux chemins. Une solution possible est l'utilisation de filtres numériques, qui permettent une grande liberté et une grande souplesse dans la conception des fonctions de transfert.

On a étudié une méthode pour la génération des filtres, qui se base sur la *séparation des polynômes*, et qui permet d'avoir des asservissements intrinsèquement stables. La méthode permet, en utilisant des polynômes de degré assez élevée ( $\geq 8$ ) d'atteindre les spécifications pour des fréquences supérieures à quelques dizaines de Hz.

Cela est suffisant pour la première stabilisation de fréquence de l'interféromètre central, en sachant qu'il s'agit d'un instrument d'étude, et que sa sensibilité atteindra la valeur théorique seulement après une phase importante de test.

Cependant une étude expérimentale pour valider la technique présentée et la recherche de nouvelles solutions s'avèrent nécessaires pour atteindre la stabilité de fréquence requise.



## Partie III

# Contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus: le prototype du Mode-Cleaner d'Orsay



## Chapitre 7

# Le mode-cleaner et son prototype

Cette partie de la thèse concerne le travail expérimental sur une cavité optique suspendue, prototype du mode-cleaner de VIRGO.

Après une introduction sur les propriétés de filtrage d'une cavité optique suspendue et sur la nécessité d'un tel dispositif pour un interféromètre gravitationnel, on montrera les principales caractéristiques du mode-cleaner de VIRGO en approfondissant le problème du contrôle.

Dans la suite, on décrira le prototype de 30 m qui se trouve au Laboratoire de L'Accélérateur Linéaire, à Orsay. Le but principal de cette expérience est de contrôler la cavité dans la perspective du vrai mode-cleaner. De manière générale, l'objectif est d'étudier les difficultés liées aux asservissements avec cavités optiques suspendues. Celles-ci représentent en effet l'élément de base du détecteur VIRGO.

### 7.1 Introduction: nécessité d'un mode-cleaner

On peut montrer que, si un interféromètre (ITF) est parfaitement aligné, il est insensible aux fluctuations de position du faisceau laser incident (*beam jitter*), qui interviennent au deuxième ordre dans le calcul du bruit de phase du détecteur. Par contre, si l'ITF est désaligné, le bruit dépend au premier ordre des fluctuations du faisceau. L'exemple montré dans la figure 7.1 explique le mécanisme de ce couplage pour un Michelson simple:  $\tilde{a}$  représente les fluctuations latérales du faisceau incident,  $\delta\theta$  est le désalignement d'un des miroirs, et  $\delta L = 2\tilde{a}\delta\theta$  la différence de chemin optique entre les faisceaux dans les deux bras. La différence de phase est donc  $\delta\phi = 2\tilde{a}\tilde{\theta}\omega/c$ , où l'on a indiqué par  $\omega$  la fréquence du laser.

Cet effet peut être généralisé au cas d'un Michelson recyclé avec Fabry-Perot (FP) dans les bras, comme VIRGO. Le bruit de phase s'écrit alors [48] [49]:

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{1 - r_r r_0}{1 + r_r r_1} \right) \left[ \tilde{\theta}_{laser}(\delta x_1 - \delta x_2) + \tilde{a}_{laser}(\delta\theta_1 - \delta\theta_2) \right] \quad (7.1)$$

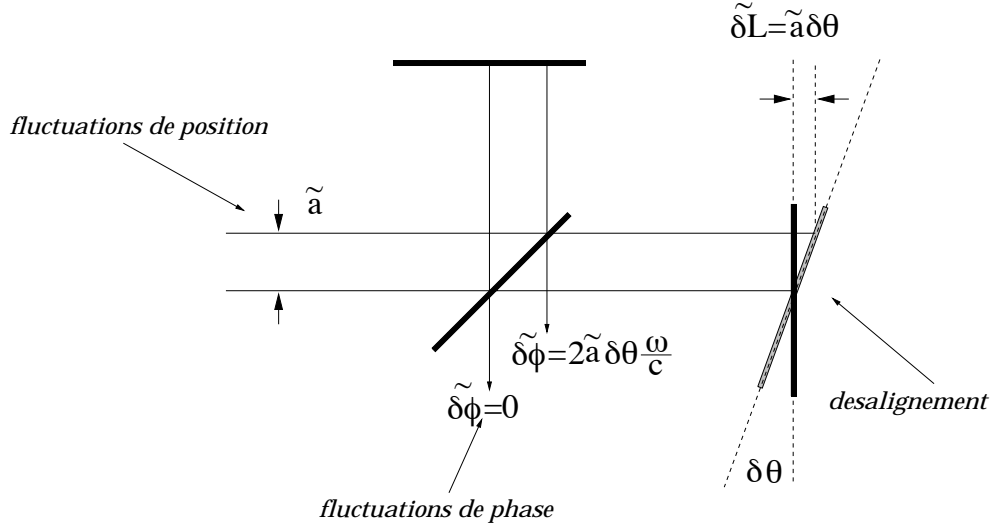


Figure 7.1: Schéma du mécanisme de génération du bruit de phase par le couplage entre les fluctuations de position du faisceau (beam jitter noise)- désalignement des miroirs. Les effets ont été intentionnellement amplifiés dans le dessin, et les changements d'orientation des faisceaux négligés

où l'on a indiqué par :

- $r_r$  la réflectivité en amplitude du miroir de recyclage
- $r_0$  et  $r_1$  les modules des réflectivité en amplitude à la résonance des cavités FP, respectivement pour le  $TEM_{00}$  et le  $TEM_{01}$
- $\tilde{\theta}_{laser}$  et  $\tilde{a}_{laser}$  respectivement les fluctuations angulaires et latérales du faisceau incident
- $(\delta x_1 - \delta x_2)$  et  $(\delta \theta_1 - \delta \theta_2)$  respectivement la différence des désalignements latéraux et angulaires des axes des deux cavités

Dans un ITF suspendu, les désalignements des miroirs sont statiques, ou à très basse fréquence, et ils sont provoqués par le bruit sismique, qui excite les degrés de liberté de rotation. Les fluctuations du faisceau incident sont par contre dues à des vibrations mécaniques du laser, avec des composantes spectrales dans l'intervalle spectral de détection de VIRGO.

L'origine du bruit de phase est donc un couplage entre les désalignement *statiques* ou *lentement variables* des miroirs, avec les fluctuations de position *rapides* du faisceau. En imposant qu'il soit inférieur au bruit de photons de l'ITF ( $\tilde{\delta\phi} \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ Rad}/\sqrt{Hz}$ ), et en utilisant l'équation 7.1, on trouve :

$$\tilde{\theta}_{laser}(\delta x_1 - \delta x_2) + \tilde{a}_{laser}(\delta \theta_1 - \delta \theta_2) \leq 5 \cdot 10^{-16} \text{ m}/\sqrt{Hz} \quad (7.2)$$

où l'on a utilisé les valeurs prévu pour VIRGO [6]:  $r_r = 0.9899$ ,  $r_0 \simeq r_1 \simeq 1$ .

Il a été montré [49] que dans l'expression précédente le terme dominant est le couplage entre les désalignements latéraux des axes des cavités, et les fluctuations angulaires du faisceau:

$$\tilde{\theta}_{laser}(\delta x_1 - \delta x_2)$$

qu'on peut quantifier de la façon suivante:

- La valeur mesurée des fluctuations angulaires du faisceau est  $\tilde{\theta}_{laser} \sim 10^{-8}$  rad/ $\sqrt{Hz}$  (à 100 Hz) [50].
- La précision sur l'alignement des miroirs de l'ITF est limitée par le gain des asservissements qui contrôlent les degrés de liberté angulaires. Si on considère la valeur optimiste  $\delta\theta \sim 10^{-9}$  rad RMS, le désalignement latéral correspondant des axes des Fabry-Perot est<sup>1</sup>:  $\delta x_1 - \delta x_2 \simeq 3 \cdot 10^{-6}$  m

Avec ces hypothèses, le bruit de phase vaut à 100 Hz  $\delta\tilde{\phi} \simeq 1.5 \cdot 10^{-9}$  rad/ $\sqrt{Hz}$ , donc 3 ordres de grandeurs supérieur au bruit de photons. Il faut donc un système de filtrage des fluctuations de position du faisceau dans l'intervalle de détection de VIRGO. L'idée d'utiliser une cavité optique suspendue a été proposée pour la première fois par Rudiger et al. [51].

## 7.2 Propriétés d'un mode-cleaner

Un mode-cleaner est une cavité Fabry-Perot non dégénérée utilisée en *transmission*.

La cavité est dite non dégénérée si les fréquences de résonance des modes d'ordre supérieur sont différentes de celle du fondamental. Si le mode fondamental résonne dans la cavité, la transmission est maximale pour ce dernier et décroît pour les autres modes selon la relation:

$$T_{mn} = T_{00} \frac{1}{1 + \left( \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \sin \left( \frac{2\pi \Delta\nu_{mn} L}{c} \right) \right)^2} \quad (7.3)$$

où  $\Delta\nu_{mn}$  est la différence entre la fréquence du fondamental et du mode  $TEM_{mn}$ ,  $\mathcal{F}$  la finesse de la cavité, et  $L$  sa longueur.

Pour une cavité plano-concave à deux miroirs (le cas le plus simple de cavité non dégénérée), on a:

$$\Delta\nu_{mn} = \frac{c}{2L} (m+n) \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{g} \quad (7.4)$$

où  $g = 1 - L/R$ , avec  $R$  le rayon de courbure du miroir concave.

---

<sup>1</sup>Les désalignements latéraux des axes des cavités Fabry-Perot de VIRGO sont déterminés par la relation  $a \simeq (R-L)\delta\theta_1 + R\delta\theta_2$  où  $R = 3.45$  km est le rayon de courbure du miroir de fond et  $L = 3$  km la longueur de la cavité,  $\delta\theta_1$  et  $\delta\theta_2$  les désalignements respectivement du miroir d'entrée et du miroir de fond



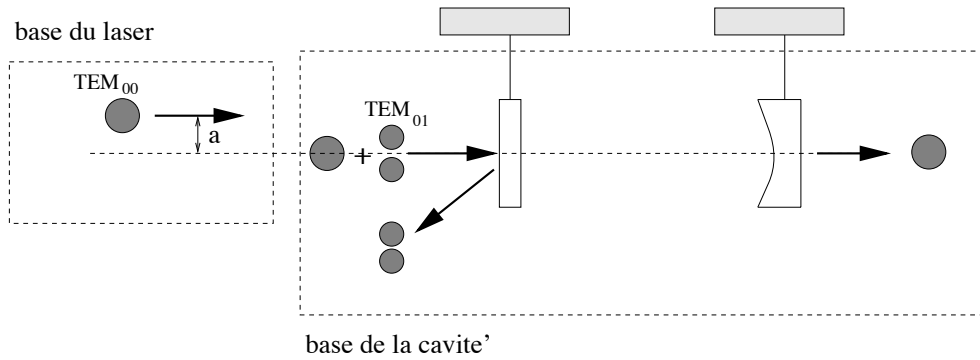


Figure 7.2: Effets de filtrage des fluctuations de position du faisceau par une cavité optique suspendue

### 7.2.1 Filtrage des défauts spatiaux

Afin que toute la lumière du laser se couple avec la cavité de recyclage il est nécessaire que la distribution spatiale du champ laser soit un  $TEM_{00}$ . Le passage par des nombreux composants optiques, notamment les modulateurs de phase, provoque des distorsions du faisceaux, donc la présence de modes d'ordre supérieur.

Afin que le mode-cleaner filtre les défaut spatiaux du faisceau, il est nécessaire que les fréquences d'un nombre élevé de modes d'ordre supérieur soit non dégénéré avec le fondamental.

### 7.2.2 Filtrage du bruit de position (*beam jitter*)

Le filtrage du bruit de position se base sur la combinaison des trois propriétés suivantes:

- 1) Un désalignement angulaire ou une translation du faisceau laser incident sur la cavité par rapport à son axe, est "vu" dans la base de modes de la cavité même comme la présence de modes d'ordre supérieur. Comme le montre le calcul suivant, si le faisceau incident est un pur  $TEM_{00}$ , une faible translation donne naissance à un couplage avec un  $TEM_{01} - TEM_{10}$  (voir figure 7.2).

On suppose que le faisceau incident est un parfait  $TEM_{00}$  translaté de  $x=a$  par rapport à l'axe de la cavité, et on indique par  $\psi(x)$  son champ dans la base des modes de la cavité.

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= AU_0(x-a) = A\left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\left(\frac{x-a}{w_0}\right)^2\right] \\
&\simeq A\left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4} \left(1 + 2a\frac{x}{w_0^2}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0}\right)^2\right] \\
&= U_0 + \frac{a}{w_0}U_1(x)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

où  $U_0$  et  $U_1$  sont les expressions de la partie spatiale du  $TEM_{00}$  et du  $TEM_{01}$  dans la base de Hermite-Gauss à une dimension. On a supposé que la translation est petite par rapport au col de la cavité, ce qui permet le développement au premier ordre.

On peut démontrer que [52] les désalignement angulaires se couplent aussi avec des modes du première ordre, mais *en quadrature* avec le fondamental:

$$\psi(x) \simeq AU_0 + i\frac{\theta}{\theta_\infty}AU_1 \tag{7.6}$$

où  $\theta$  est l'angle de désalignement et  $\theta_\infty$  est la divergence du faisceau.

- 2) Puisque les miroirs du mode-cleaner sont suspendus, l'axe de la cavité est très stable pour des fréquences supérieures à quelques Hz.
- 3) Les modes d'ordre supérieur sont filtrés par la cavité, si elle est résonnante pour le fondamental

Les fluctuations de la position du faisceau sont donc filtrées comme des défauts spatiaux, et comme l'axe de la cavité est déterminé par des miroirs isolé du bruit sismique, le faisceau transmis est un  $TEM_{00}$  stable par rapport à l'ITF, lui aussi composé par des miroirs isolés du bruit sismique.

Les caractéristiques de la cavité doivent être choisies de façon à minimiser les dégénérescences accidentelles des modes d'ordre supérieur avec le fondamental.

L'efficacité du filtrage dépend du facteur (cf. les équations 7.3 et 7.4):

$$\frac{2}{\pi} \mathcal{F} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \Delta\nu_{mn} L}{c}\right)$$

qui doit être le plus élevé possible pour les modes d'ordre bas, qui sont les premiers à apparaître dans les développements des faisceaux déformés où fluctuants en position. Donc la finesse doit être la plus élevée possible, et la cavité le moins dégénérée possible. Donc:

$$\frac{(m+n)\psi}{\pi} \neq \text{nombre entier} \tag{7.7}$$

### 7.2.3 Filtrage des fluctuations de fréquence et de puissance

Comme toute cavité Fabry-Perot, le mode-cleaner est un filtre passe-bas du premier ordre pour le bruit de puissance et le bruit de fréquence du laser, avec une fréquence de coupure égale au pôle de la cavité. Le facteur de suppression des fluctuations est donc :

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \quad (7.8)$$

où  $f$  est la fréquence d'analyse, et :

$$f_0 = \frac{c}{4L\mathcal{F}}$$

est le pôle de la cavité. Si l'on choisit la longueur et la finesse assez élevée, le pôle de la cavité est suffisamment bas pour filtrer les bruits du laser dans la région de détection de l'ITF.

## 7.3 Modes d'une cavité triangulaire

Le mode cleaner de VIRGO est une cavité en anneau, à trois miroirs. Cette géométrie est utilisée dans presque tous les ITF gravitationnels, pour éliminer le problème de l'interaction du faisceau réfléchi avec le laser.

Comme on le démontrera dans la suite, le spectre d'une cavité triangulaire est différent de celui d'une cavité linéaire, à cause de la brisure de symétrie cylindrique.

Cette propriété était déjà connue en littérature pour des cavités laser [53], mais, à notre connaissance, elle n'a jamais été considérée dans l'évaluation de l'efficacité de filtrage d'une cavité mode-cleaner [54] [55]. Nous avons donc calculé l'efficacité de filtrage du mode-cleaner de VIRGO en tenant compte de cette propriété.

Dans l'analyse suivante, on supposera que la lumière est linéairement polarisée "p" ou "s".

Considérons d'abord le cas d'une cavité linéaire.

La condition de résonance d'un FP est donnée par l'auto-consistance du champ électrique [56] dans la cavité<sup>2</sup>, c'est à dire que le déphasage de la lumière pour un aller-retour est un multiple de  $2\pi$  :

$$2kd - 2(m + n + 1)\arccos\sqrt{g} = 2\pi q \quad (7.9)$$

où  $k$  est le nombre d'onde,  $d$  la longueur de la cavité,  $g = 1 - d/L$ , et  $q$  est un entier. La fréquence du mode d'ordre  $k=m+n$  est donc :

---

<sup>2</sup>Dans ce calcul, pour des raisons de simplicité, on suppose que les réflexions des miroirs ne contribuent pas au déphasage du faisceau, et que la cavité est composée par un seul miroir courbe de rayon de courbure  $R$ .

$$\frac{\nu}{\nu_0} = q + \frac{1}{\pi}(m+n+1)\arccos\sqrt{g} \quad (7.10)$$

où  $\nu_0 = c/2d$  est l'intervalle spectral libre de la cavité. La différence de fréquence entre le mode  $TEM_{mn}$  et le  $TEM_{00}$  est:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = (m+n)\frac{1}{\pi}\arccos\sqrt{g} \quad (7.11)$$

Donc les modes avec le même  $m+n$  sont dégénérés.

Maintenant analysons la propagation d'un mode  $TEM_{mn}$  dans une cavité triangulaire<sup>3</sup>. Le premier numéro de mode est relatif au plan horizontal (donc le plan de la cavité) et le deuxième au plan vertical.

Il y a deux possibilités:

- La distribution du champ dans le plan de la cavité est symétrique par rapport à l'axe de propagation du faisceau  $\iff m$  est pair
- La distribution du champ est anti-symétrique  $\iff m$  est impair

Comme il est montré dans la figure 7.3, la différence entre les deux cas est purement géométrique: à cause des réflexions en anneau, deux modes avec le même  $m+n$ , sont déphasés de  $\pi$  l'un par rapport à l'autre. Ils ne peuvent donc pas résonner à la même fréquence.

On formalise cet effet en écrivant deux équations d'auto-consistance, pour les deux cas:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2kd - 2(m+n+1)\phi = 2\pi q \quad \text{Pour } m \text{ pair} \\ 2) \quad & \pi + 2kd - 2(m+n+1)\phi = 2\pi q \quad \text{Pour } m \text{ impair} \end{aligned} \quad (7.12)$$

où  $\phi = \arccos\sqrt{g}$ . Donc la différence entre la fréquence du mode  $m+n$  et le  $TEM_{00}$  est:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = (m+n)\frac{\phi}{\pi} \\ 2) \quad & \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2} + (m+n)\frac{\phi}{\pi} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Il y a deux peignes de modes, qui sont déplacés l'un par rapport à l'autre d'un intervalle spectral libre. La distribution de modes qui en résulte est montrée dans la figure 7.4. Le facteur de transmission est dans les deux cas:

---

<sup>3</sup>L'analyse peut être généralisée à une cavité avec un nombre impair de miroirs.

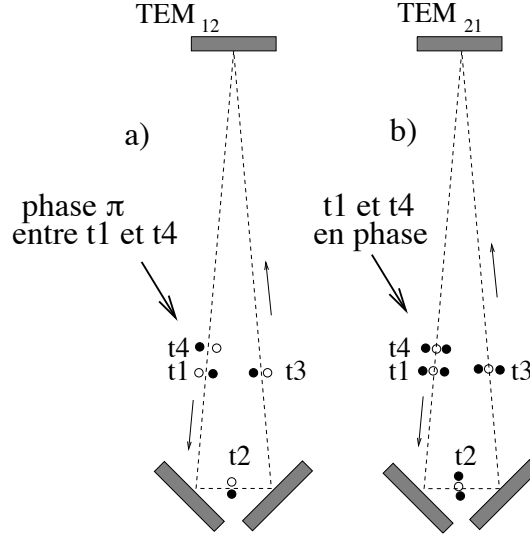


Figure 7.3: Propagation dans le plan de la cavité pour  $m+n=3$ , pour un faisceau avec distribution anti-symétrique (a) par rapport à l'axe de propagation du faisceau et symétrique (b)

$$\begin{aligned}
 1) \quad t_{mn} &= t_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi} \mathcal{F} \sin[(m+n)\phi]\right)^2}} \\
 2) \quad t_{mn} &= t_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi} \mathcal{F} \sin[(m+n)\phi + \pi/2]\right)^2}} \quad (7.14)
 \end{aligned}$$

Pour montrer l'importance de l'existence du double peigne de modes dans le spectre d'une cavité triangulaire, on a calculé l'efficacité de filtrage d'une cavité triangulaire en fonction du paramètre  $g=1-d/R$  (deux miroirs plans et un miroir concave de rayon de courbure  $R$ ). Comme on est principalement intéressé au filtrage du bruit de position du faisceau on a représenté seulement les modes jusqu'à l'ordre 3, et ensuite, pour chaque valeur de  $g$  on a construit le facteur de mérite:

$$\Gamma = \left( \sum_{m+n=1}^{m+n=3} (m+n+1)t_{mn} \right)_{sym} + \left( \sum_{m+n=1}^{m+n=3} (m+n+1)t_{mn} \right)_{asy} \quad (7.15)$$

où la première somme est faite sur les modes symétriques et la deuxième sur les modes antisymétriques. Le facteur  $m+n+1$  représente la dégénérescence des modes

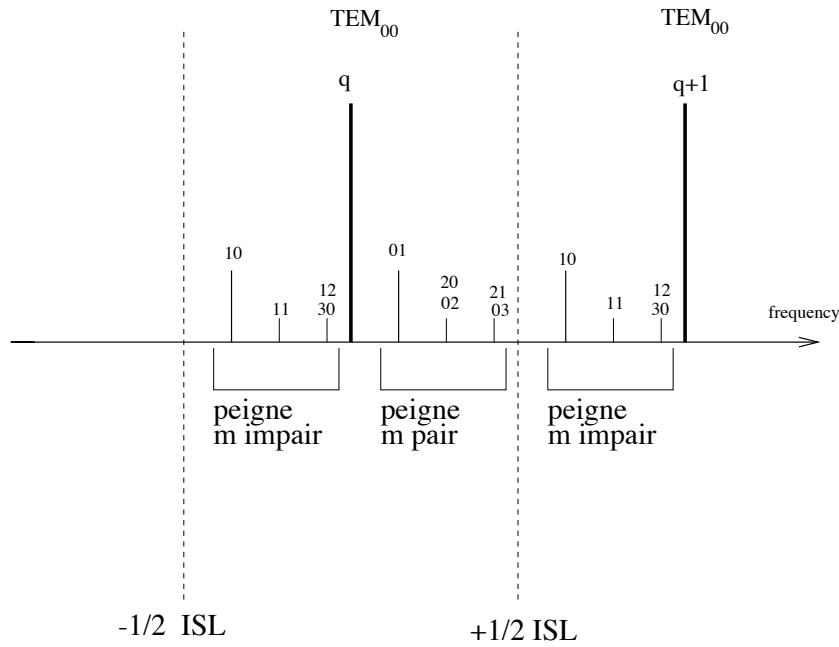


Figure 7.4: Spectre des modes pour une cavité triangulaire

d'ordre  $k$ . Le résultat obtenu est montré dans la figure 7.5. On remarque qu'en ajoutant le deuxième peigne l'efficacité du filtrage diminue partout, et que trois modes supplémentaires peuvent maintenant être dégénérés avec le fondamental: le  $TEM_{11}$  ( $g=0.5$ ) et les modes  $TEM_{12}$  et  $TEM_{30}$  ( $g=0.75$ )

## 7.4 Le mode-cleaner de VIRGO

Le mode-cleaner de VIRGO est une cavité en anneau en forme de triangle isocèle allongé. Deux miroirs plans définissent la base du triangle et un miroir concave le sommet.

Les deux miroirs plans, sont optiquement reliés à un dièdre de silice, qui se trouve sur le banc d'entrée de l'ITF. Le banc d'entrée est suspendu à un superatténuateur sismique. Le miroir courbe est situé à 144 m de distance, fixé à un autre banc optique suspendu <sup>4</sup>. Les coupleurs d'entrée et sortie sont les deux miroirs plans; le miroir concave a une réflectivité  $R_{max}$  et un rayon de courbure de 181 m. La réflectivité des miroirs plans est  $R=.9997$ , ce qui correspond à une finesse de 1000 en polarisation "s".

Le rayon de courbure et la finesse de la cavité ont été choisies de façon à avoir un filtrage satisfaisant des fluctuations de position du faisceau.

<sup>4</sup>Les superatténuateurs sismiques utilisés pour le banc d'entrée et le miroir courbe du mode-cleaner sont plus simples que les superatténuateurs normaux, car les spécifications pour le bruit sismique sont relâchées par rapport aux miroirs de l'ITF. Ils sont composés du pendule inversé, d'un filtre standard et de la marionnette.

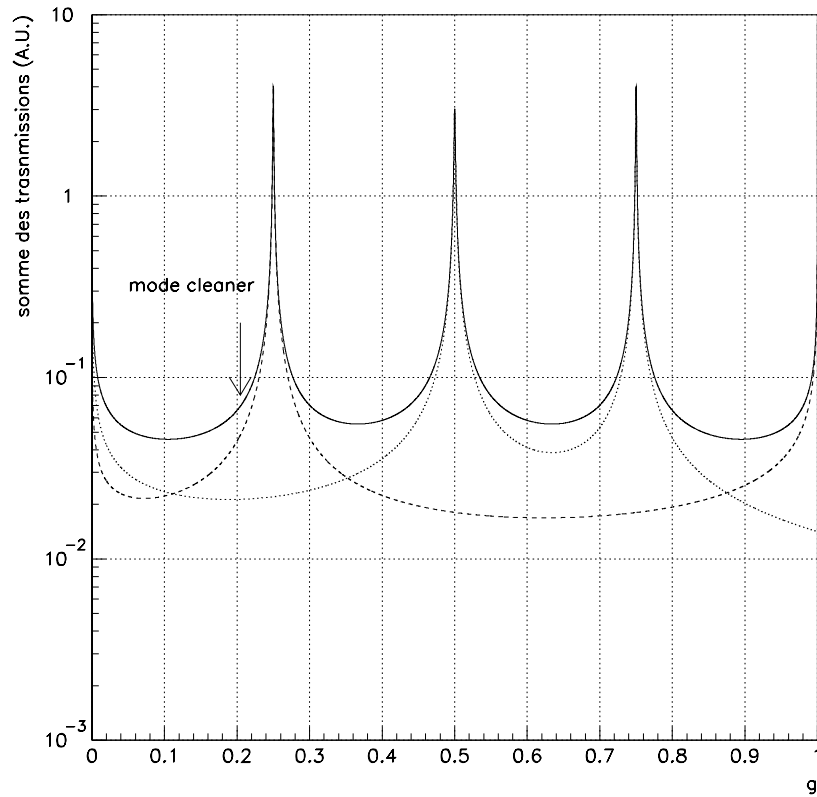


Figure 7.5: Facteur de mérite d'une cavité triangulaire en fonction de  $g$ , pour les modes jusqu'à l'ordre 3. Somme des deux peignes (ligne continue), peigne  $m$  pair (ligne avec tirets), peigne  $m$  impair (ligne pointillée). On a indiqué avec une flèche le facteur de mérite pour le mode-cleaner de VIRGO.

On a calculé la transmission des modes d'ordre supérieur par rapport au fondamental pour les deux peignes de modes (voir figure 7.6). On observe que:

- Les modes avec  $m + n \leq 10$  ont une transmission en puissance  $\leq 100$  ppm et sauf pour  $m + n = 10$  avec  $m$  impair, les modes jusqu'à  $m + n = 30$  ont une transmission  $\leq 1000$  ppm. Donc les défauts spatiaux du faisceau sont supprimés d'un facteur  $\sim 10^3$
- L'atténuation du bruit de position est pratiquement déterminée par la transmission en amplitude des modes  $TEM_{01}$  et  $TEM_{10}$ , donc il est filtré d'un facteur  $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ . Ces performances théoriques remplissent les spécifications pour VIRGO.

La longueur du mode-cleaner a été choisie selon les critères suivants:

- Avoir un pôle de la cavité suffisamment bas, de façon à filtrer les fluctuations de fréquence et de puissance du laser. Avec les paramètres choisis, on obtient un pôle  $f_0 = 500$  Hz, qui correspond à un filtrage de  $\sim 20$  à  $10$  kHz. Cela peut être obtenu aussi avec une finesse plus élevée. Une trop importante puissance stockée dans la cavité (qui est proportionnelle à la finesse), peut toutefois générer des effets thermiques et donc des distorsions des revêtements réfléchissants des miroirs.
- Le mode-cleaner doit transmettre les bandes latérales nécessaires à l'extraction du signal gravitationnel. Donc l'intervalle spectral libre de la cavité doit être un sous-multiple de la fréquence de modulation. Le choix de la fréquence de modulation est très critique, car il dépend d'un grand nombre de paramètres optiques et géométrique de l'ITF [57] [58]. Une longueur importante permet d'avoir un petit intervalle spectral libre et donc un plus grand choix sur la fréquence.

## 7.5 Le contrôle du mode-cleaner de VIRGO

Afin que le mode-cleaner puisse transmettre la lumière laser, il est nécessaire qu'il soit en résonance sur le mode fondamental. La cavité doit être donc contrôlée, avec un asservissement qui agit sur les miroirs (et éventuellement sur la fréquence laser), et qui compense les mouvements sismiques à basse fréquence.

Le système de contrôle doit garantir une bonne transmission du faisceau laser, et ne pas dégrader les propriétés de stabilité en fréquence et puissance du faisceau.

### 7.5.1 Transmission

La puissance transmise par la cavité s'écrit:

$$P = \frac{P_0}{1 + \left(\frac{\Delta L}{\Delta L_M}\right)^2} \quad (7.16)$$



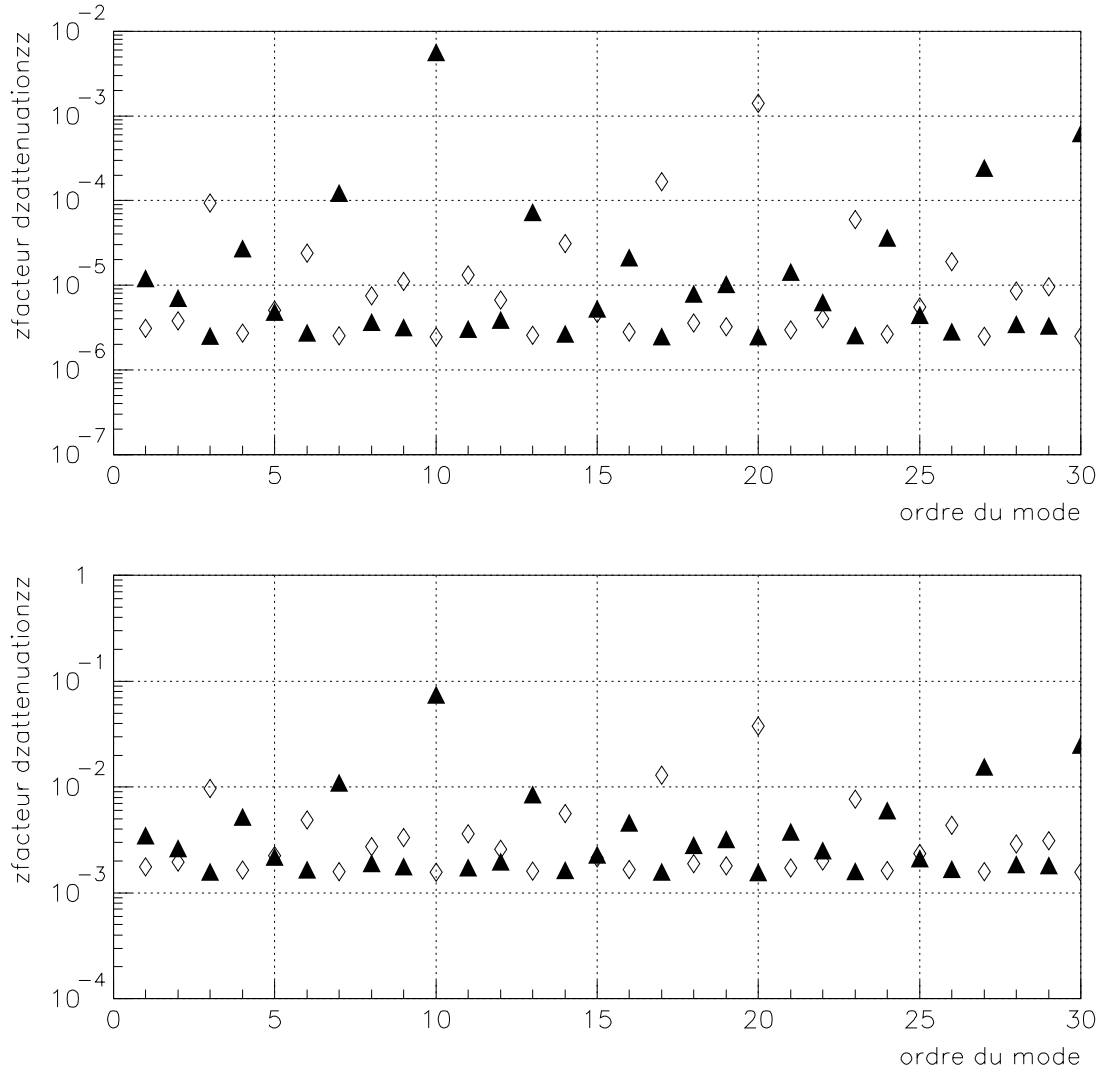


Figure 7.6: Transmission en puissance (haut) et en amplitude (bas) des modes du mode-cleaner de VIRGO, jusqu'à l'ordre  $m+n=30$ . La transmission du  $TEM_{00}$  est 1, les triangles représentent les modes *symétriques* ( $m$  pair), les rombes les modes *anti-symétriques* ( $m$  impair)

où  $\Delta L_M = \lambda/4\mathcal{F}$  est la demi largeur à mi hauteur de la raie de la cavité, et  $P_0$  est la puissance transmise à la résonance. Une contrainte sur une valeur maximale  $\Delta P/P$  des fluctuations de la puissance transmise induit la condition suivante:

$$\Delta L \leq \sqrt{\frac{\Delta P}{P}} \cdot \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \quad (7.17)$$

En choisissant  $\Delta P/P = 0.5\%$ , on a:

$$\Delta L \leq 2 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (7.18)$$

### 7.5.2 Stabilité de fréquence du laser

Les fluctuations de la position des miroirs provoquent un bruit de phase du faisceau dans la cavité, qui s'écrit:

$$\tilde{\phi} = \left(\frac{2}{\pi}\mathcal{F}\tilde{\delta L}\right) \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7.19)$$

où  $\tilde{\delta L}$  sont les fluctuations de position de la longueur de la cavité, et par conséquent  $\frac{2}{\pi}\mathcal{F}\tilde{\delta L}$  sont les fluctuations du chemin optique.

Les fluctuations de fréquence correspondantes sont  $\tilde{\delta\nu} = 2\pi f\tilde{\delta\phi}$ , où  $f$  est la fréquence d'analyse. Si on indique par  $\tilde{\delta\nu}_{pr}$  le bruit du laser préstabilisé, on obtient la condition:

$$\tilde{\delta L} \leq \tilde{\delta\nu}_{pr} \cdot \frac{\lambda}{8\pi\mathcal{F}f} \quad (7.20)$$

### 7.5.3 Stabilité de puissance du laser

Les fluctuations de longueur autour de la résonance génèrent un bruit de puissance au second ordre. Toutefois un petit déplacement statique ou lentement variable par rapport à la résonance, génère un couplage au premier ordre. La spécification que nous avons trouvée obtenue au paragraphe précédent pour le déplacement RMS est de  $\Delta L \simeq 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ , donc on peut considérer cette valeur comme écart typique par rapport à la résonance. Les fluctuations de puissance correspondantes sont:

$$\frac{\delta P}{P} = \left(\frac{\Delta L + \delta L}{\Delta L}\right)^2 \quad (7.21)$$

où  $\delta L$  représente les fluctuations de longueur "rapides" de la cavité et  $\Delta L$  le décalage statique par rapport à la résonance. Le terme de fluctuation de puissance au premier ordre s'écrit alors:

$$\frac{\delta\tilde{P}}{P} = 2\delta\tilde{L}\Delta L \left(\frac{4\mathcal{F}}{\lambda}\right)^2 \quad (7.22)$$

et, si on indique le bruit de puissance du laser avec  $\delta\tilde{P}_{pr}$ , on obtient la contrainte:

$$\delta\tilde{L}\Delta L \leq \frac{1}{2}\delta\tilde{P}_{pr} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\mathcal{F}}\right)^2 \quad (7.23)$$

La table 7.1 résume ces spécifications, où l'on a utilisé pour  $\delta\tilde{\nu}_{pr}$  et  $\delta\tilde{P}_{pr}$  les bruits mesurés [36] [42]

condition physique	spécification
RMS transmission $\leq 0.5\%$	$\Delta L \leq 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
fluct. fréquence MC $\leq$ fluct. fréquence du laser	$\delta L \leq 3 \cdot 10^{-9}/f \text{ m}/\sqrt{Hz}$
fluct. puissance MC $\leq$ fluct. puissance du laser	$\delta\tilde{L}\Delta L \leq 5 \cdot 10^{-23}/f^{0.8} \text{ m} \times \text{m}/\sqrt{Hz}$

Tableau 7.1: Spécifications sur les bruits de longueur du mode-cleaner

## 7.6 Le prototype

Le prototype du mode-cleaner est une cavité à trois miroirs (plan-plan-concave) de 30 m de longueur. Il a été conçu de façon à être le plus possible similaire au vrai mode-cleaner. La table 7.2 compare les principaux caractéristiques des deux cavités.

Le laser utilisé est un Nd:YAG (Lightwave mod.122-1064-300-f), avec une puissance de 300 mW, que l'on a préstabilisé en fréquence sur une cavité rigide ULE de 30 cm, du même type que celle de VIRGO.

Après son passage à travers un modulateur de phase piloté par un oscillateur à 6.25 MHz, le faisceau est divisé en deux parties: 70% arrivent sur un télescope pour l'adaptation du col du faisceau laser avec celui du mode-cleaner ( $w_L = 100 \mu\text{m} \rightarrow w_{MC} = 3.7 \text{ mm}$ ) ensuite rentre dans la cavité même. Les autres 30 % du faisceau sont envoyés sur la cavité de préstabilisation, à travers un autre télescope ( $w_L = 100 \mu\text{m} \rightarrow w_{PR} = 300 \mu\text{m}$ ).

Le laser est asservi en fréquence sur la cavité ULE avec la technique de Pound-Drever: le faisceau réfléchi par la cavité est envoyé sur une photodiode et ensuite démodulé. L'asservissement a une bande passante d'environ 1 MHz. La correction est faite avec trois actuateurs différents: un contrôle thermique, qui change la température du cristal du laser pour compenser les dérives à basse fréquence ( $< 0.1 \text{ Hz}$ ), un cristal piézoélectrique, qui module la longueur de la cavité laser pour compenser les fluctuations jusqu'à 10 kHz, et un cristal électrooptique hors cavité, qui agit sur la phase du faisceau

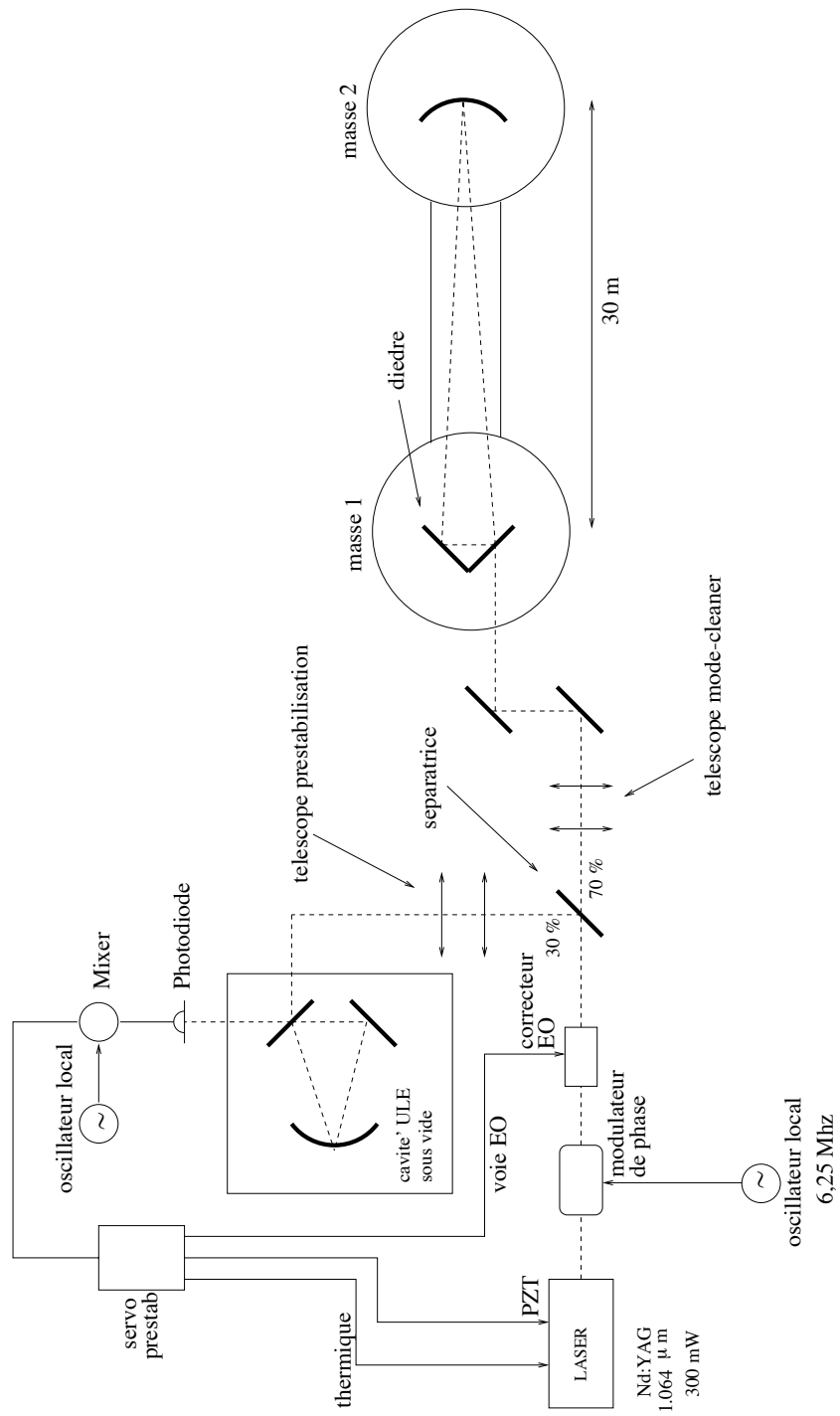


Figure 7.7: Schéma de l'expérience

	Prototype	mode-cleaner VIRGO
longueur	31.5 m	144 m
finesse (pol s)	$\simeq 1600^*$	1000
finesse (pol p)	$\simeq 120^*$	?
suspensions	2 étages	3 étages + pendule inversé
géométrie	triangulaire	triangulaire
masse 1	2 miroirs plans sur dièdre	2 miroirs plans sur dièdre
masse 2	miroir concave $R = 112^*$ m	miroir concave $R=181$ m
laser	Nd: YAG 200* mW	Nd: YAG 10 W
prestabilisation	cav. ULE non suspendue	cav. ULE suspendue
col du faisceau	3.7 mm	5 mm

Tableau 7.2: Comparaison entre les principales caractéristiques du prototype de mode-cleaner, et du mode-cleaner de VIRGO. Les données avec astérisque (\*) sont relatives à des mesures effectuées sur le prototype pendant la thèse

pour les corrections à haute fréquence. Ce système d'asservissement est le même que celui qui a été utilisé pour la mesure du bruit absolu de fréquence du laser, auquel on fait référence dans les chapitres précédents. La différence fondamentale avec l'expérience citée est que dans notre cas la cavité de prestabilisation n'est pas suspendue, mais est simplement posée sur un banc optique à l'intérieur d'une cuve à vide. La figure 7.7 montre un schéma de l'expérience.

La cavité mode-cleaner est composée de deux “masses”, à l'intérieur de deux cuves à vide, et reliées par un tube de 30 cm de diamètre. On appelle *masse 1* (MC1) celle qui contient les deux miroirs plans, montés sur un dièdre métallique. Le dièdre est posé sur un banc horizontal suspendu. On appelle *masse 2* (MC2), la masse qui contient le miroir concave, fixé à un substrat cylindrique suspendu (voir fig 7.8).

Les deux masses sont suspendues à un double pendule. Le premier étage est appelé *marionnette*, et il s'agit d'un dispositif similaire à celle utilisée dans VIRGO. On peut déplacer la marionnette, et donc le miroir suspendu dans les 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) avec 8 systèmes bobine-aimant: les bobines sont solidaires du sol, à travers la structure qui suspend la chaîne. Les aimants sont fixés à la marionnette. L'atténuation horizontale du bruit sismique est faite par le double pendule, alors que l'atténuation verticale est réalisée avec des lames métalliques qui sont sur la marionnette. On a donc un seul étage d'atténuation verticale.

Les fréquences des résonances horizontales de la chaîne sont 0.5 et 1 Hz, et la résonance verticale est de  $\sim 2$  Hz.

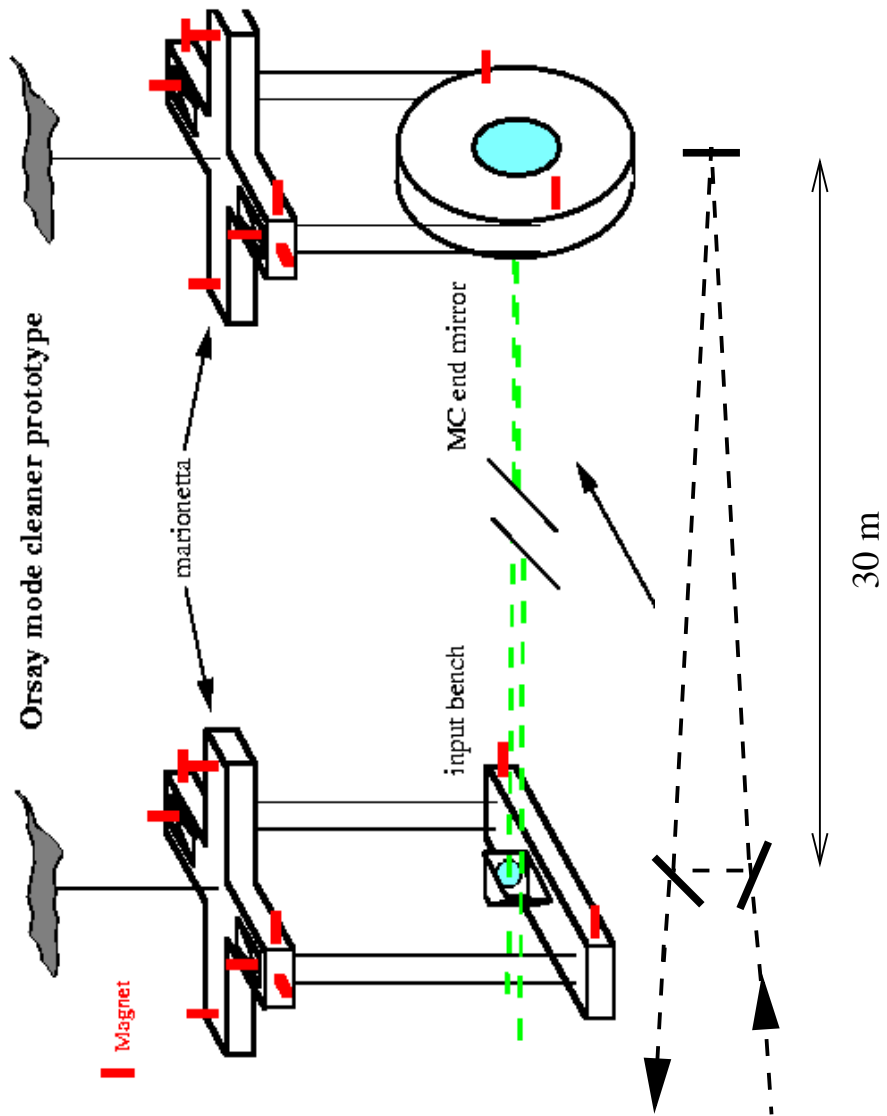


Figure 7.8: Schéma de la cavité Mode-cleaner

## 7.7 Les contrôles locaux

Contrairement au contrôle de la cavité proprement dit, dont les valeurs de référence sont *globaux*, comme la longueur de la cavité ou l'alignement relatif d'un miroir par rapport à l'autre, les contrôles locaux comparent les positions des deux masses par rapport au sol.

Leurs fonctions sont de deux types:

- **Amortir les résonances**

Cela est nécessaire pour trois raisons:

- a) Pendant la phase d'alignement de la cavité l'application des forces sur les masses excite leurs résonances, et donc provoque des mouvements excessifs, qui empêchent le déroulement de la procédure. Donc le  $Q$  des résonances doit être réduit sur tous les degrés de liberté.
- b) Pour son fonctionnement le système d'alignement global nécessite que la cavité soit en résonance <sup>5</sup>. Pendant cette phase, le bruit angulaire des masses doit être suffisamment bas pour permettre l'acquisition de l'asservissement longitudinal.
- c) L'acquisition de la résonance est d'autant plus difficile que les balancements des masses sont importants.

- **Mémoriser la position des masses**

L'alignement de la cavité est une procédure complexe, qu'il faut en principe répéter chaque fois que le contrôle global de la cavité est perdu. Il est donc nécessaire de mémoriser la position des masses par rapport à un repère local, afin de pouvoir revenir aux positions de travail dans un temps raisonnable.

Le fonctionnement du contrôle local peut être schématisé de la façon suivante:

- Les déplacements des masses sur les 6 degrés de liberté sont mesurés en observant la position de taches de référence sur la masse même, et les réflexions de deux lasers auxiliaires, avec une caméra CCD [60]. La caméra et les lasers sont situées en dehors de la cuve à vide, sur deux tables optiques.
- Un programme qui tourne sur un CPU dans un châssis VME lit les données de la caméra et calcule les déviations de la position de la masse par rapport à une position de référence, qu'on a précédemment établi.
- Les différences entre les valeurs de référence et les positions mesurées sont ensuite transférées à un autre programme qui calcule les corrections à appliquer à chaque bobine, afin d'amortir les résonances
- Les courants sont envoyés aux bobines.

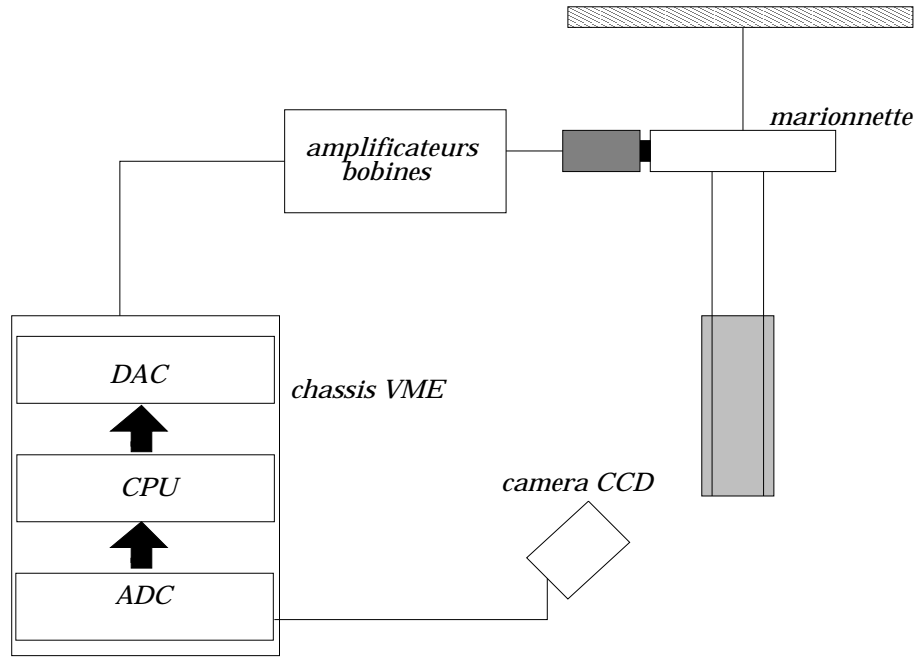


Figure 7.9: Schéma du fonctionnement des contrôles locaux

Le schéma du fonctionnement des contrôles locaux est montré dans la figure 7.9. Les bruits résiduels RMS sur les 6 degrés de liberté qu'on obtient avec les contrôles locaux actifs sont:

$$\Delta X \sim \Delta Y \sim \Delta Z \sim 0.5 \mu m$$

$$\theta_X \sim \theta_Y \sim 1 \mu rad$$

$$\theta_Z \sim 20 \mu rad$$

## 7.8 L'alignement

La procédure d'alignement de la cavité consiste à faire résonner le mode fondamental dans la cavité en partant d'une situation de complète indépendance de l'orientation des deux masses. On peut la diviser en trois étapes:

- Le pré-alignement

Le but du prealignement est de définir l'axe de la cavité. On utilise un laser He-Ne, situé juste derrière la MC2, qui passe à travers le miroir concave et se réfléchit

---

<sup>5</sup>L'alignement automatique de la cavité est réalisé avec la technique de *détection du front d'onde*, communément appelée "*technique Ward*" [59]. Cette méthode fonctionne seulement si la cavité est parfaitement à la résonance.



sur un miroir auxiliaire, au centre du dièdre. On aligne les deux masses de façon à faire résonner (avec une finesse très faible), l'He-Ne dans la cavité.

Quand on a trouvé l'alignement optimal, on peut enregistrer les positions des masses et se servir de ces données dans la suite. En général, cette phase est nécessaire seulement au début de l'expérience lorsque l'on fait des gros changements à l'appareillage expérimental.

- L'alignement grossier

On aligne le faisceau d'entrée Nd: YAG, en utilisant deux miroirs de renvoi montés sur des vis micro-métriques, de façon à voir la tache laser au centre du miroir concave. Ensuite on aligne les masses jusqu'à au moment où les taches laser sont au centre de tous les miroirs. Les corrections se font en regardant la lumière diffusée par les deux faisceau sur les deux masses, avec deux caméras équipées de filtres interférométriques pour la longueur d'onde du Nd: YAG.

- L'alignement fin

Quand les taches sont à l'intérieur des miroirs, le faisceau commence à interférer à l'intérieur de la cavité. On optimise alors le couplage avec le  $TEM_{00}$  en regardant la puissance transmise par le mode-cleaner avec une photodiode et une caméra CCD.

La procédure complète est donc réalisée une fois. A cause des dérives thermiques, l'alignement grossier est fait une fois par jour. Le couplage optimal avec le  $TEM_{00}$  (à 10 % près) est conservé pour une dizaine de minutes, après lesquelles il faut ré-aligner faiblement la cavité.

## 7.9 Le spectre des modes

La figure 7.10 montre le spectre des modes transmis par la cavité, obtenu en balayant la fréquence du laser sur un intervalle spectral libre à une vitesse supérieure à celle des déplacements sismiques. Pendant ces mesures, on a utilisé la polarisation "p", qui correspond, comme on verra dans la suite, à une finesse de 120. La masse était désalignée pour montrer la position des premiers 3+3 modes, à l'intérieur des deux peignes symétriques et antisymétriques. Les petites différences entre le spectre théorique et celui mesuré peuvent être expliqués par des non-linéarités de la rampe en fréquence, et une influence des balancements sismiques. La mesure de l'ISL ( $c/2L = 4.76$  MHz) permet de calibrer l'échelle des temps. La distance entre le mode  $TEM_{00}$  et le  $TEM_{01}$  est égale à 0.18 de l'ISL, donc:

$$g = 1 - \frac{L}{R} = 0.72$$

et donc le rayon de courbure mesuré du miroir concave est:  $R = 112$  m.

Dans la figure 7.11, on a reporté le facteurs d'atténuation des modes d'ordre supérieur, comme on a fait auparavant pour le mode-cleaner de VIRGO. Les calculs ont été faits pour la polarisation "s", et donc une finesse mesurée de 1600. On remarque la présence (inattendue dans la conception initiale du mode-cleaner) de deux modes du peigne antisymétriques (le  $TEM_{12}$  et le  $TEM_{30}$ ), qui sont moins atténués, car très proches du  $TEM_{00}$  (cf. figure 7.10).

### 7.9.1 La mesure de la finesse

Pour mesurer la finesse de la cavité en polarisation "p" on a utilisé la relation:

$$\mathcal{F} = \frac{ISL}{\Delta\nu} \quad (7.24)$$

où  $ISL$  est l'intervalle spectral libre de la cavité, et  $\Delta\nu$  est la largeur à mi-hauteur de la raie de résonance. Pour permettre la mesure, l'intervalle spectral libre de la cavité a été balayée en utilisant une rampe sur la fréquence du laser. En principe le rapport est indépendant de la vitesse de balayage, si on respecte les deux conditions suivantes:

- La vitesse de balayage de la fréquence laser (linéaire) est supérieure à la vitesse de balayage due aux balancements sismiques des miroirs (aléatoires). Dans le cas du mode-cleaner les mouvements sont concentrés autour de  $\sim 1Hz$  (résonances des pendules), avec une amplitude (conservative)  $A \sim 2\mu m$ , le terme dominant dans les mouvements des miroirs peut être écrit sous la forme:

$$x(t) = A\cos(2\pi ft) \quad (7.25)$$

donc la vitesse maximale des balancements sismiques est:

$$v_{max} = 2\pi fA \sim 12 \mu m/s \quad (7.26)$$

Donc on a la condition:

$$v_{rampe-laser} \gg 12 \mu m/s \quad (7.27)$$

- Le temps de traversement  $T_{tr}$  de la résonance doit être supérieur au temps de stockage de la lumière dans la cavité, pour permettre à la cavité de "se remplir" de lumière:

$$T_{stockage} \gg \tau = \frac{2L}{c} \frac{\mathcal{F}}{\pi} \quad (7.28)$$

et comme on a:

$$T_{tr} = \frac{\lambda}{2\mathcal{F}} / v_{laser} \quad (7.29)$$

on trouve:

$$V_{laser} \ll \frac{\lambda c \pi}{4L \mathcal{F}^2} \simeq \frac{7}{\mathcal{F}^2} m/s \quad (7.30)$$

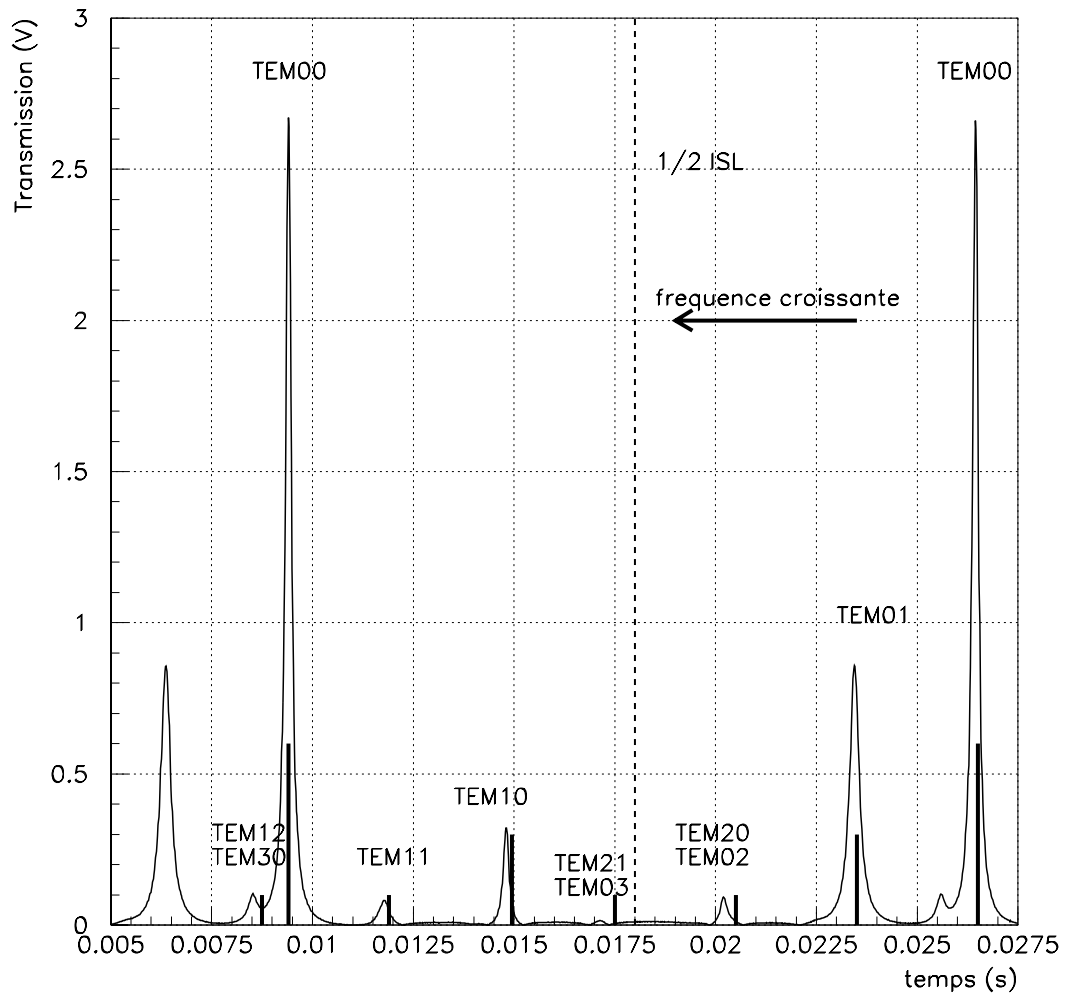


Figure 7.10: Spectre des modes du prototype de mode-cleaner. Les lignes verticales représentent les fréquences théoriques. Les décalages entre les fréquences mesurées et les fréquences théoriques sont expliqués par des non-linéarités de la rampe en fréquence, et par une influence des balancements sismiques

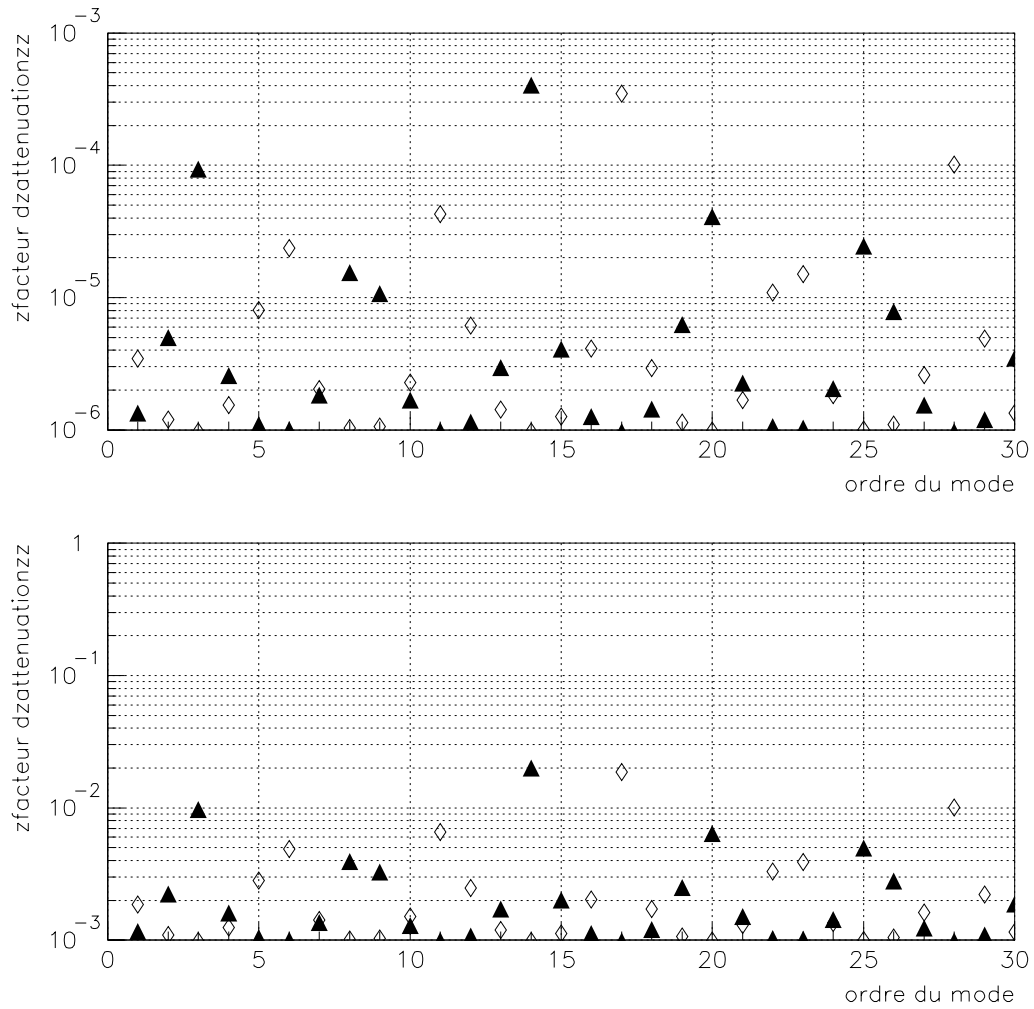


Figure 7.11: Transmission en puissance (haut) et amplitude (bas) du prototype de mode cleaner. Les triangles représentent des modes symétriques ( $m$  pair), et les losanges des modes antisymétriques ( $m$  impair). Les calculs ont été faits pour la polarisation “s”, qui correspond à une finesse mesurée de 1600

Pour la polarisation “p” on obtient donc les deux conditions:

$$12.5 \mu/s \ll v_{laser} \ll 700 \mu m/s \quad (7.31)$$

Dans les mesures effectuées, on a utilisé  $v_{laser} = 60 \mu m/s$ , et on trouve:  $\mathcal{F}_p = 120$ . Donc les largeurs de raie correspondantes, en longueur et en fréquence, sont:

$$\Delta\nu = \frac{c}{4L\mathcal{F}} \simeq 20 \text{ KHz}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda/2}{2\mathcal{F}} \simeq 4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Pour la polarisation “s”, la finesse attendue est  $\sim 1000$ , la condition sur le temps de traversement de la résonance impose  $v_{laser} \ll 7 \mu m/s$ . Le simple balancement sismique produit des vitesses de balayage supérieures à la vitesse limite, et des *effets transitoires* sur la puissance transmise par la cavité. On a donc utilisé une autre technique pour la mesure de la finesse.

### 7.9.2 finesse en polarisation “s”

On a vu au paragraphe précédent qu’en polarisation “s” il est impossible d’utiliser une rampe linéaire de la fréquence du laser, car le temps de traversement de la résonance serait trop court, et la cavité ne serait pas “remplie” de lumière. On ne peut pas alors, utiliser deux raies de résonance pour la mesure de la finesse. On a donc réalisé une mesure avec une seule raie, en exploitant l’information contenue dans les signaux transitoires. Ces effets sont générés par l’interférence des faisceaux dans la cavité, dont les miroirs sont en mouvement rapide. Quand le temps de traversement de la résonance est plus court que le temps de stockage, l’approximation quasi-statique utilisée en annexe A pour calculer les champs de la cavité n’est plus valide.

Avec le programme SIESTA [61], on a simulé la réponse du prototype de mode-cleaner. En changeant les paramètres <sup>6</sup>:

- Vitesse de balayage
- finesse de la cavité

on a remarqué, que seulement un couple particulier finesse-vitesse se superpose à la courbe mesurée.

Successivement, on a répété la simulation pour d’autres mesures, en trouvant une finesse en polarisation “s”:

$$\mathcal{F} \sim 1600 \pm 200 \quad (7.32)$$

Une des mesures effectuées, et la simulation SIESTA relative, est montrée dans la figure 7.12

---

<sup>6</sup>SIESTA est le programme de simulation de l’interféromètre VIRGO

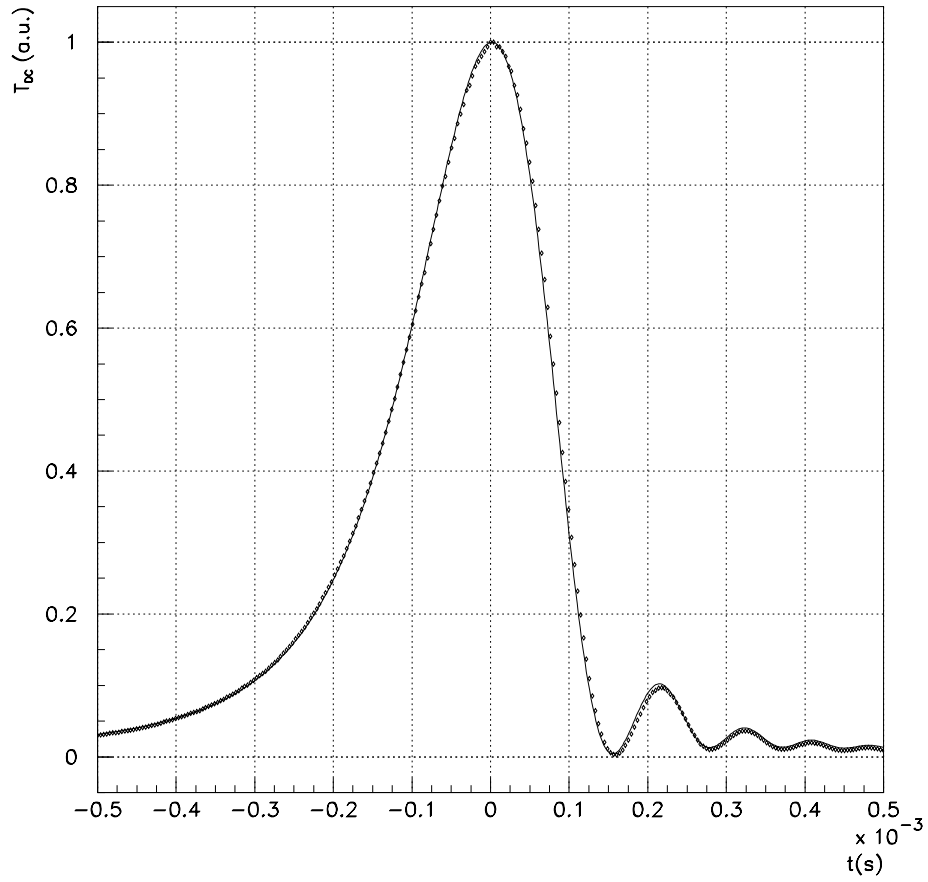


Figure 7.12: Raie de résonance en polarisation “s”: (*ligne continue*) simulation SIESTA, (*points*) mesure

Les finesses en polarisation “p” et “s” ont été successivement mesurée avec une autre technique, qui se base sur la mesure du pôle de la cavité. Les résultats obtenus [62] confirment les mesures montrées dans ce travail de thèse.

## Chapitre 8

# Le contrôle du prototype du Mode-Cleaner

### 8.1 Introduction

Dans ce chapitre, on décrit le contrôle longitudinal du prototype du mode-cleaner. La condition de résonance est maintenue en agissant sur la longueur de la cavité, à travers les bobines qui agissent sur la masse 2, selon le schéma montré en figure 8.2.

Comme les difficultés du contrôle augmentent avec la finesse de la cavité, on a choisi de contrôler la cavité d'abord en polarisation "p", et donc avec une finesse de 120. Le contrôle avec la haute finesse a été réalisé successivement avec un filtre compensateur du même type que celui que l'on a développé pendant cette thèse.

### 8.2 L'asservissement

Le fonctionnement du contrôle longitudinal du mode-cleaner (schématisé dans la figure 8.1) peut être résumé de la façon suivante:

- La fréquence du laser est comparée à la fréquence de résonance du mode-cleaner avec la technique de Pound-Drever. Une photodiode reçoit le faisceau réfléchi par la cavité, et le signal correspondant est démodulé à 6.25 MHz avec un mélangeur. La fonction de transfert entre l'écart entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance de la cavité  $\Delta\nu$  et le signal de Pound-Drever est notée H.
- Le signal de Pound-Drever est ensuite filtré et amplifié par un circuit électronique qui sert de *compensateur* pour l'asservissement, dont la fonction de transfert est notée G.
- La sortie du compensateur est envoyée aux amplificateurs des bobines situées derrière la masse 2: la tension appliquée se transforme en un courant dans les bobines. L'interaction du champ ainsi créé avec les aimants placés sur le miroir engendre une force sur la masse. La fonction de transfert entre la force obtenue



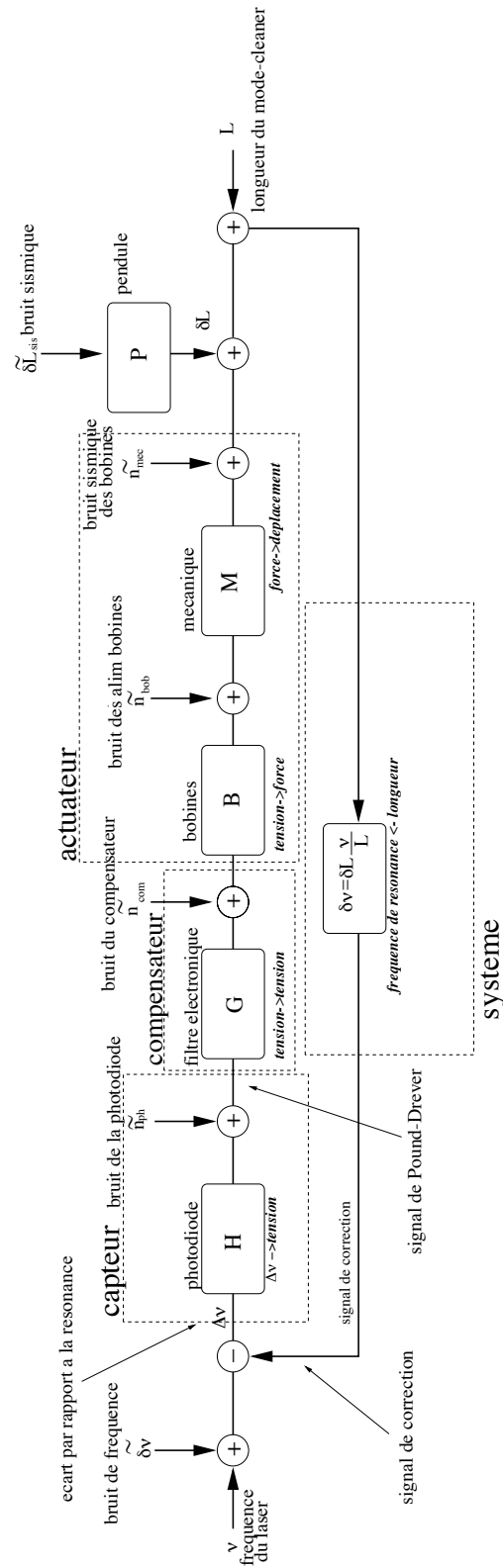


Figure 8.1: Schéma de l'asservissement pour le contrôle du mode-cleaner

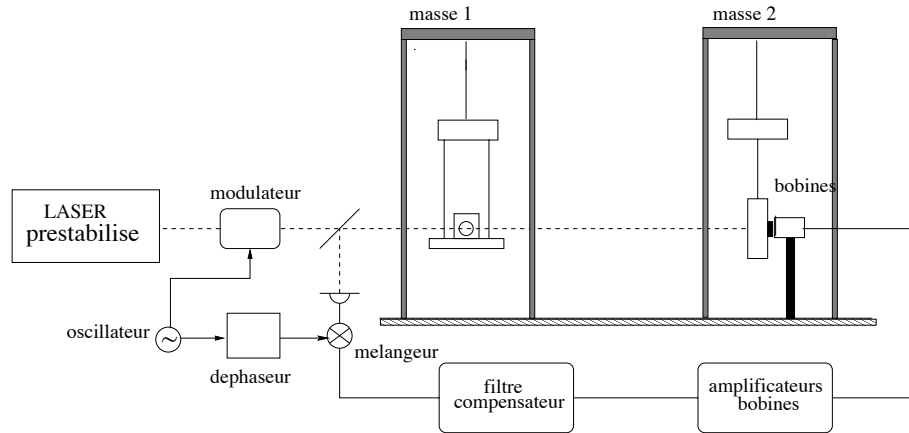


Figure 8.2: Contrôle longitudinal du mode-cleaner

et la tension appliquée est notée  $B$ . Le déplacement de la masse provoque donc une variation de la longueur du mode-cleaner. La fonction de transfert entre le déplacement de la masse et la force est notée  $M$ , et représente l'effet du double pendule sur la masse suspendue.

- Le variation de longueur ainsi obtenue se transforme donc en une variation de la fréquence de résonance de la cavité, qui compense le décalage  $\delta\nu$ .

On suppose que la longueur initiale du mode-cleaner correspond à une fréquence de résonance égale à la fréquence du laser. Les variations de la fréquence du laser et de la longueur de la cavité agissent donc comme des bruits autour de la condition de résonance  $\Delta\nu = 0$ . On note  $\tilde{\delta\nu}$  et  $\tilde{\delta L}$  les densités spectrales linéaires (DSL) de ces bruits, ce dernier correspond à la DSL du bruit sismique filtré par les suspensions de la cavité.

La DSL de l'erreur en boucle ouverte s'écrit donc :

$$\tilde{\Delta\nu}_{bo} = \sqrt{(\tilde{\delta\nu})^2 + \left(\tilde{\delta L} \frac{\nu}{L}\right)^2} \quad (8.1)$$

où la somme des carrés vient du fait que les deux bruits se somment de façon incohérente et le terme  $\frac{\nu}{L}\tilde{\delta L} = K \cdot \tilde{\delta L}$  représente les fluctuations de la fréquence de résonance induites par une variations de longueur de la cavité.

Le signal d'erreur en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta\nu}_{bf} &= \frac{1}{1+F} \times \\ &\times \sqrt{\left(\tilde{\delta\nu}\right)^2 + \left(\tilde{n}_{ph} \frac{1}{H}\right)^2 + \left(\tilde{n}_{com} \frac{1}{GH}\right)^2 + \left(\tilde{n}_{bob} \frac{1}{HGB}\right)^2 + \left(\tilde{n}_{mec} \frac{1}{HGBM}\right)^2} \end{aligned} \quad (8.2)$$

où on a noté  $F = MBGHK$  la fonction de transfert en boucle ouverte,  $\tilde{n}_{ph}$  est le bruit électronique du filtre compensateur,  $\tilde{n}_{el}$  est le bruit de la photodiode. Ce dernier est la somme du bruit électronique de la photodiode et du bruit de photons:

$$\tilde{n}_{ph} = \sqrt{(\tilde{n}_{ph})^2 + (\tilde{n}_{el})^2} \quad (8.3)$$

$\tilde{n}_{bob}$  est le bruit des alimentateurs des bobines et  $\tilde{n}_{mec}$  est le bruit sismique introduit dans la boucle par les bobines, qui sont solidaires au sol.

Dans la suite on s'occupera seulement du bruit en boucle ouverte et au bruit de photons. Les bruits électroniques (de la photodiode, de l'actuateur, et des amplificateurs des bobines) sont très inférieurs aux spécification de bruit qui nous intéressent. On peut montrer que le bruit sismique des bobines est au premier ordre nul, et en général négligeable pour nous objectifs [63].

### 8.3 Le signal de Pound-Drever

Le signal de Pound Drever (PD), et la transmission correspondante de la cavité sont montrés dans la figure 8.3. La phase de démodulation optimale est obtenue à l'aide d'un déphaseur situé entre l'oscillateur à 6.25 MHz, et le mélangeur. En pratique, pour obtenir la phase optimale, on maximise le signal.

Pour des petites valeurs du signal d'erreur  $\Delta\nu$ , le PD s'écrit sous la forme:

$$S_{PD}(s) = G_m S_{ph} A_0 A_{\pm} \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \frac{L}{c} 2\pi \Delta\nu \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{s_c}} \quad (8.4)$$

où  $A_0$  et  $A_{\pm}$  sont respectivement les amplitudes de la porteuse et des bandes latérales en réflexion,  $G_m$  est le gain du mélangeur,  $S_{ph}$  est la sensibilité de la photodiode (en V/W),  $\mathcal{F}$  est la finesse de la cavité,  $s_c$  est son pôle, et  $s = 2\pi f$ , où  $f$  est la fréquence d'analyse.

Donc la fonction de transfert  $H$  s'écrit:

$$H(s) = K_{PD} \frac{1}{1 + \frac{s}{s_0}} \quad (8.5)$$

où  $K_{PD} = G_{mixer} S_{ph} A_0 A_{\pm} \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \frac{L}{c} 2\pi$  est la sensibilité du signal en DC.

La mesure de  $K_{PD}$ , sorte de calibration de la photodiode, est faite directement, en mesurant le PD pour une valeur connue du signal d'erreur  $\Delta\nu$ . On sait que la tension

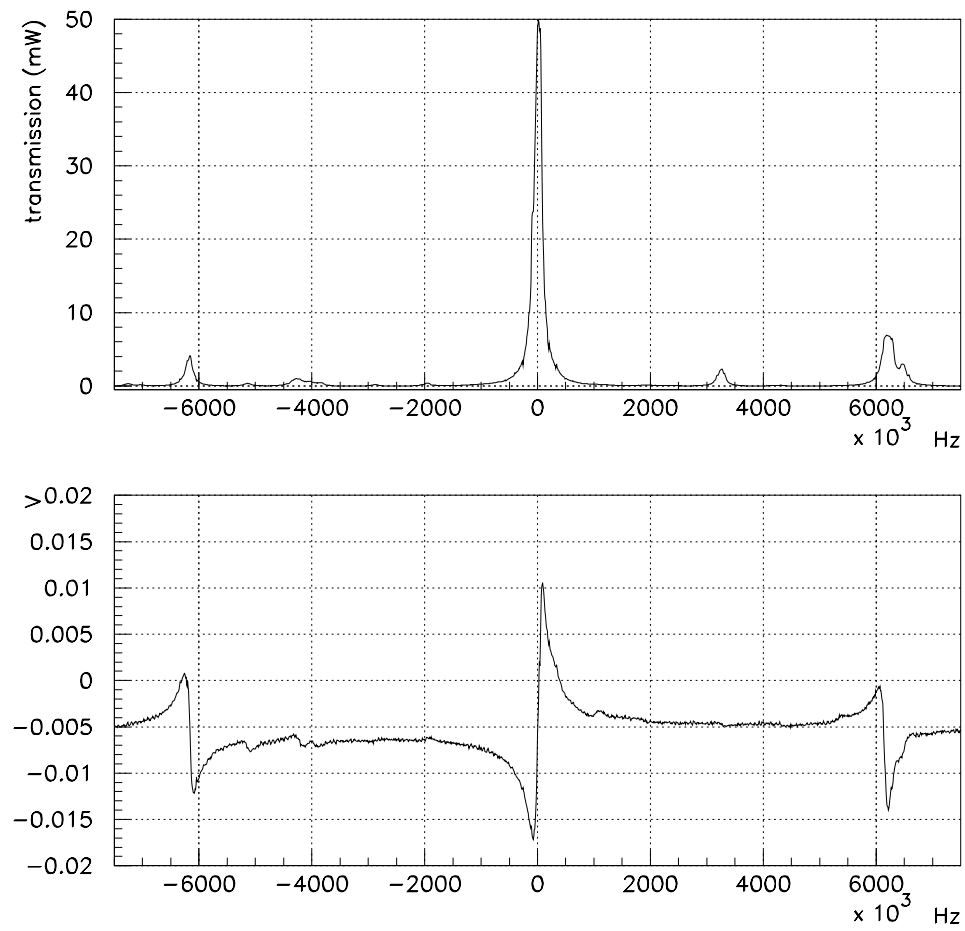


Figure 8.3: Transmission du mode-cleaner et signal de Pound-Drever. La porteuse est au centre et les bandes latérales à 6.25 MHz sont aux cotés

entre les deux extrêmes du signal correspond à la largeur à mi-hauteur de la cavité, et que la “pente” ainsi mesurée est la moitié de la pente dans la zone centrale. Donc:

$$K_{PD} = 2 \frac{\Delta V}{\Delta \nu_L} \quad (8.6)$$

où  $\Delta V$  est la distance en Volts entre les extrêmes, et  $\Delta \nu_L$  est la largeur à mi hauteur de la raie de résonance.

Pour des fréquences  $f \ll 20 \text{ kHz}$ , la réponse en fréquence du PD est plate. Comme le contrôle longitudinal de la cavité concerne essentiellement des fréquences inférieures à 1 kHz, on peut négliger le pôle du mode-cleaner dans l’analyse de l’asservissement.

## 8.4 Asservissement de la fréquence laser sur la longueur du mode-cleaner

Afin de déterminer les paramètres nécessaires pour l’analyse de l’asservissement, on est passé par une étape préliminaire: l’asservissement de la fréquence du laser libre sur la longueur du mode-cleaner. Dans ce cas, la référence de fréquence du laser n’est pas la cavité de préstabilisation, mais la cavité mode-cleaner en balancement libre. Le schéma de l’expérience est montré dans la figure 8.4.

Au lieu d’agir sur la longueur de la cavité, pour garder la résonance, on change la fréquence du laser: le PD est envoyé à la même électronique que celle que l’on utilise pour la préstabilisation de fréquence, qui pilote les trois acteurs thermique, PZT et EO.

L’utilisation de l’électronique utilisé dans la préstabilisation a été possible sans aucun changement; cela pour les raisons suivantes:

- La dynamique des actuateur du laser est largement suffisante pour suivre les mouvements de balancement sismique des miroirs. Le PZT est l’actuateur dont dépend la dynamique des corrections de fréquence dans la région spectrale qui nous intéresse (donc  $\sim 1 \text{ Hz}$ ).

La tension maximum applicable sur le PZT est 100 V et sa sensibilité est 5 MHz/V. La dynamique est donc  $\sim 500 \text{ MHz}$ , qui correspond à une variation de longueur du mode-cleaner de  $\simeq 25 \mu\text{m}$  (ou 50 ISL), valeur qui est largement supérieure aux déplacements attendus, de l’ordre de quelques  $\mu\text{m}$ .

- La réponse en fréquence PD du mode-cleaner est filtré à 20 kHz, tandis que l’électronique de la préstabilisation est conçue pour le PD de la préstabilisation, filtré à  $\sim 10 \text{ KHz}$ .

La fonction de transfert en boucle ouverte de cet asservissement est donc légèrement différente de celle d’origine. Toutefois, la bande passante du servo est de  $\sim 1 \text{ MHz}$ , et le gain en boucle ouverte à 10-20 KHz est très élevé: la différence entre les deux fonctions de transfert n’a aucun effet sur la stabilité du système.

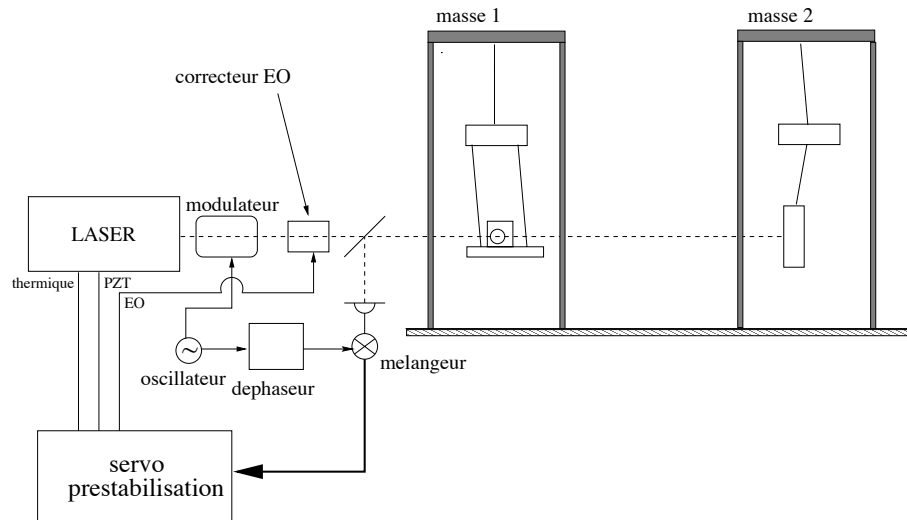


Figure 8.4: Schéma de l'expérience d'asservissement du laser sur la longueur du mode-cleaner

Cet asservissement est donc stable, avec un gain et une dynamique très élevés. Le laser a été asservi sans difficulté. On peut facilement vérifier que la cavité est en résonance en regardant la puissance transmise avec une photodiode et une caméra CCD. La figure 8.5 montre la puissance transmise par la cavité en fonction du temps quand le laser est asservi sur le mode-cleaner. Les fluctuations de la puissance transmise (de l'ordre de 5%), sont dues au bruit d'alignement et seront discutées dans le chapitre suivant.

## 8.5 La mesure du bruit sismique des masses libres

La mesure du bruit sismique des masses libres est importante, car elle permet de:

- Mesurer le bruit sismique en boucle ouverte du système. Cela permet de connaître avec précision le gain de l'asservissement nécessaire pour maintenir la résonance de la cavité.
- Valider les mesures du bruit sismique faites avec la caméra CCD des masses contrôlée localement (cf. paragraphe 7.7)
- Mesurer précisément les fréquences de résonance des masses sur le degré de liberté  $z$  (axe du faisceau)

La mesure a été faite en asservissant le laser sur le mode-cleaner, et en mesurant le signal de correction envoyé aux actuateurs du laser pour maintenir la résonance de la cavité.

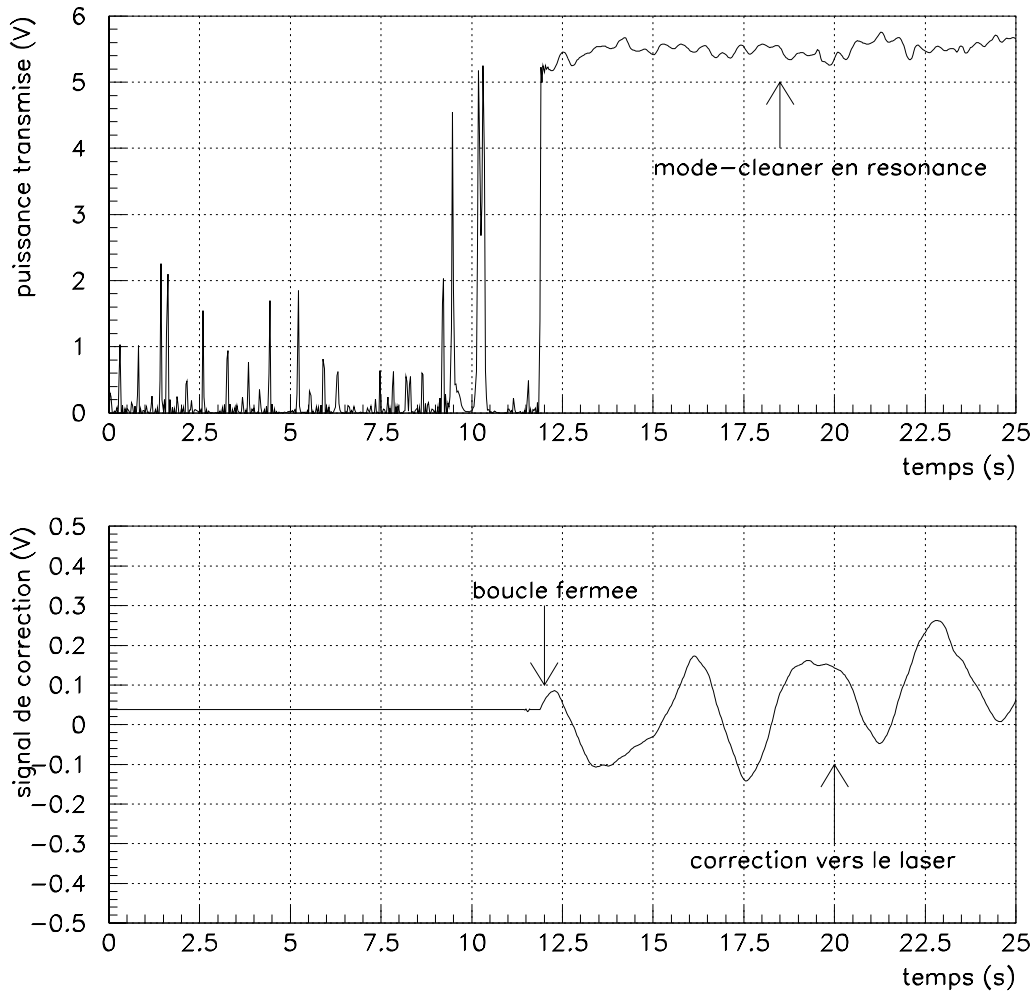


Figure 8.5: Puissance transmise par le mode-cleaner quand le laser est asservi sur la cavité, et signal de correction correspondant. La boucle a été fermée à  $t=12$  sec. On remarque que l'acquisition de la résonance est immédiate, grâce à la bande passante très importante de l'asservissement

La correction de fréquence envoyée au laser s'écrit:

$$C = -\frac{G}{1+G} \cdot \Delta\nu_{bo} \quad (8.7)$$

où  $G(f)$  est la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de la préstabilisation, et  $\tilde{\Delta\nu}_{BO}$  est la densité spectrale du bruit en boucle ouverte.

Si le gain en boucle ouverte est élevé ( $|G(f)| \gg 1$ ), condition qui est valable jusqu'à des fréquences de  $\sim 100 \text{ kHz}$  on a donc:

$$C \simeq -\Delta\nu_{bo} \quad (8.8)$$

En sachant que l'actuateur qui est responsable des corrections de fréquence dans la région qui nous intéresse (1 Hz - 10 kHz) est le PZT, on peut écrire:

$$C = V_{pzt} \cdot S_{pzt} \quad (8.9)$$

où  $S_{PZT} = 5 \text{ MHz/V}$  est la réponse du laser à une tension appliquée au PZT On trouve donc:

$$\Delta\nu_{bo} = V_{pzt} \cdot S_{pzt} = V_{pzt} \cdot 5 \cdot 10^6 \quad (8.10)$$

Comme notre but est de mesurer le bruit sismique, il est plus pratique exprimer le bruit en boucle ouverte en terme de bruit de longueur:

$$\Delta L = V_{pzt} \cdot S_{pzt} \cdot \frac{L}{\nu} = V_{pzt} 5 \cdot 10^{-7} \quad (8.11)$$

Les figures 8.6 et 8.7 montrent respectivement le spectre des mouvements relatifs des masses et les mouvements relatifs en fonction du temps. La mesure a été réalisée en changeant chaque fois l'état des contrôles locaux en  $z$ . On remarque:

- MC1 on - MC2 on : le bruit RMS est  $\sim 0.5 \mu m$ , ce qui confirme la mesure effectuée avec la caméra CCD (cf. paragraphe 7.7). La contribution majeure au bruit dérive d'un mauvais amortissement de la résonance à 0.5 Hz de la masse 1.
- MC1 on - MC2 off: le bruit RMS est  $\sim 3 \mu m$ .

Les contributions majeures au bruit dérivent des deux résonances à 540 mHz et 1.125 Hz

- MC1 off - MC2 on: le bruit RMS est  $\sim 5 \mu m$ .

Les contributions majeure au bruit dérivent des deux résonances à 540 mHz et 1.010 Hz



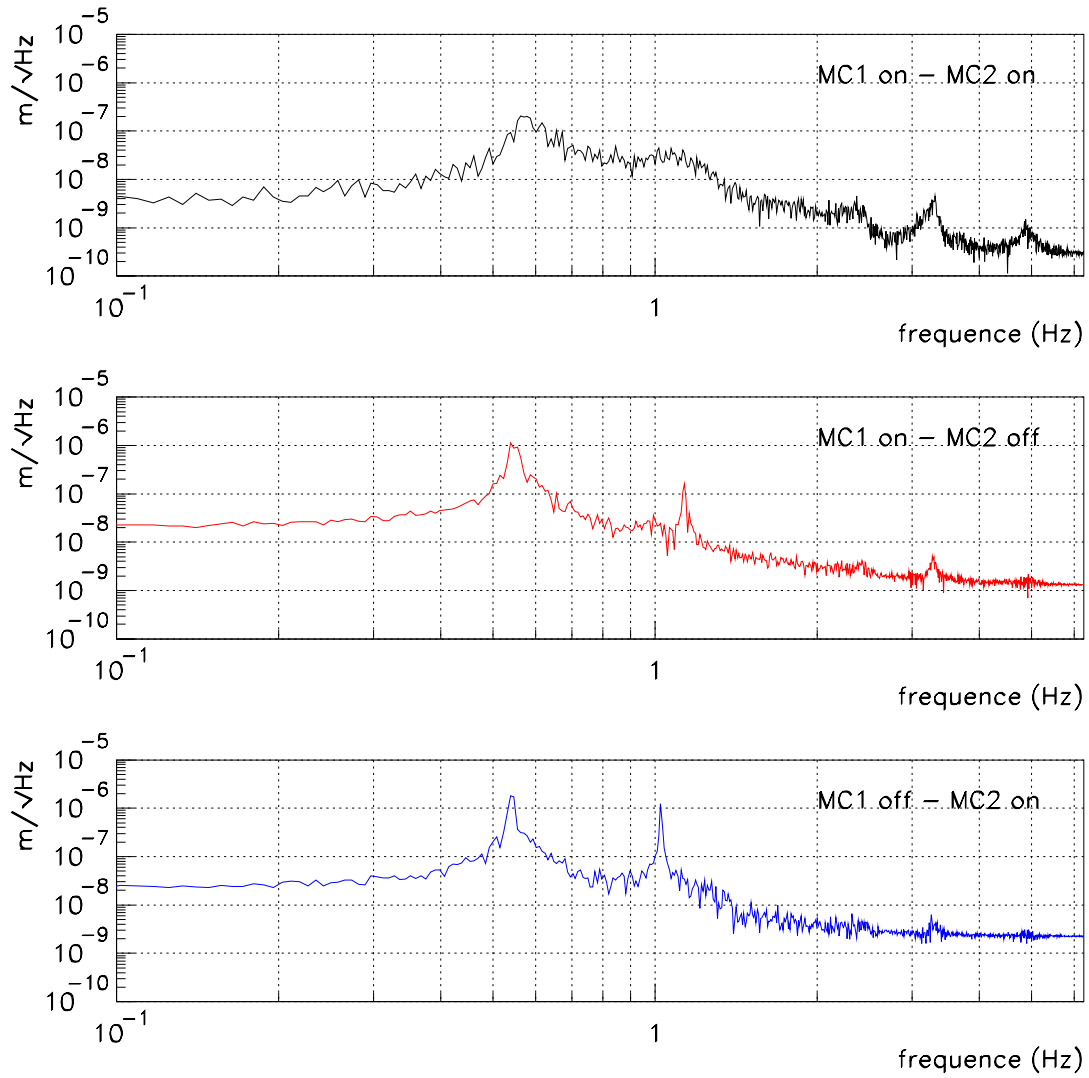


Figure 8.6: Spectre des mouvements relatifs des masses

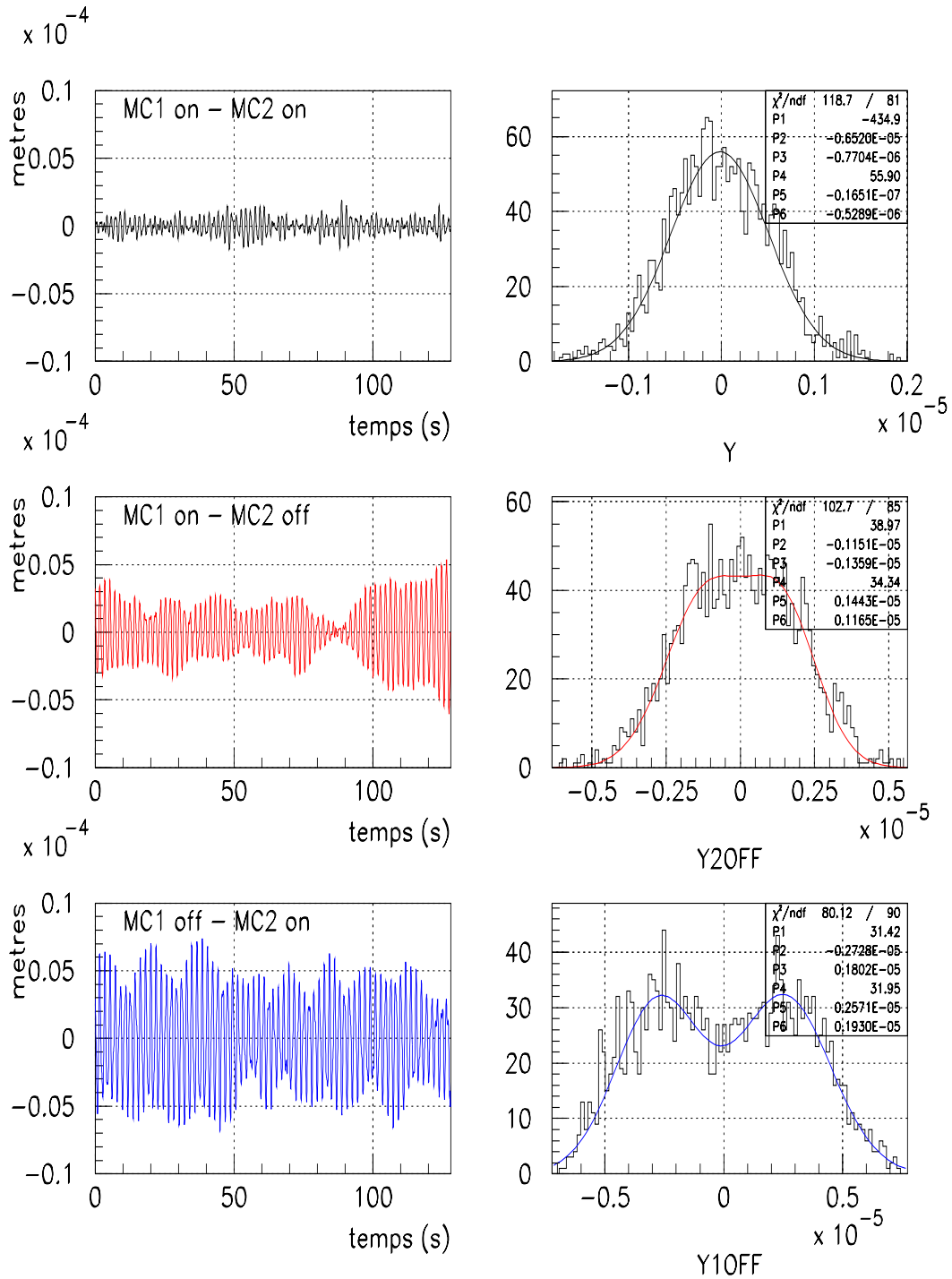


Figure 8.7: Déplacements des masses en fonction du temps, et distribution des déplacement. Chaque distribution a été ajustée avec deux gaussiennes pour montrer l'influence des composantes spectrales à 0.5 Hz et 1 Hz par rapport au bruit gaussien de fond

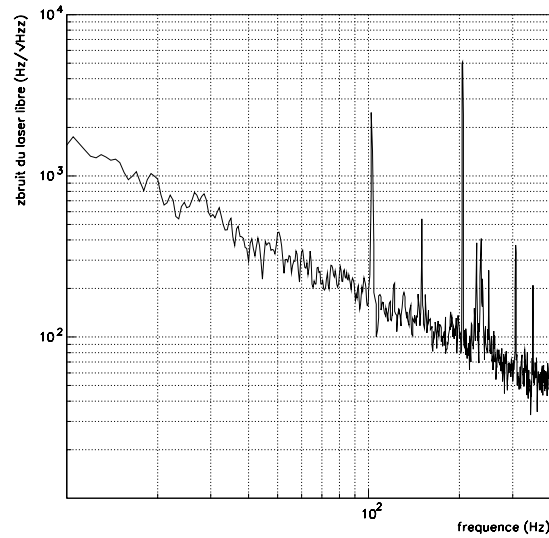


Figure 8.8: Bruit de fréquence du laser libre mesuré en asservissant le laser sur la cavité ULE

## 8.6 Le bruit de fréquence

On n'a pas le moyen de mesurer le bruit du laser prestabilisé, la mesure absolue dont on fait référence dans au paragraphe 4.7 a été faite avec des cavités rigides suspendues, et isolées acoustiquement avec une cuve. On peut seulement trouver une limite supérieure au bruit du laser prestabilisé, en mesurant le bruit du laser libre. La mesure a été faite en asservissant le laser sur la cavité de prestabilisation et en mesurant le signal de correction. La mesure est montrée dans la figure 8.8, et correspond à un bruit de densité spectrale linéaire:

$$\delta\nu\tilde{(f)} \simeq \frac{2 \cdot 10^4}{f} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (8.12)$$

## 8.7 Mesure de la fonction de transfert des actionneurs

La mesure de la fonction de transfert des actionneurs est la plus importante pour pouvoir concevoir le filtre compensateur de l'asservissement. On définit cette fonction comme le rapport:

$$A(s) = \frac{\delta L(s)}{V(s)} \quad (8.13)$$

où  $\delta L(s)$  représente la transformée de Laplace du déplacement de MC2, et  $V(s)$  est celle de la tension appliquée aux amplificateurs des bobines. Elle est donc le produit des fonctions B et M, définies au paragraphe 2:

$$A(s) = B(s)M(s) = \frac{\text{force}}{\text{tension}} \cdot \frac{\text{déplacement}}{\text{force}} \quad (8.14)$$

### 8.7.1 La fonction de transfert des amplificateurs des bobines

La fonction B(s) dépend de la conception des amplificateurs des bobines et des bobines elles mêmes.

La figure 8.9 montre la fonction de transfert entre le courant dans les bobines et la tension appliquée aux amplificateurs. Pour  $f < 5kHz$ , la réponse en fréquence est caractérisée par un un pôle à 18.5 Hz et un pôle à 1.5 kHz. La réponse DC est 0.2 A/V. La force générée par les bobines sur les aimants dépend du nombre de tours et de la géométrie du système. Dans notre cas  $F=0.7$  N/A. Pour une bobine on obtient donc :

$$B(s) = \frac{0.14}{\left(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 18.5}\right) \left(1 + \frac{s}{2\pi \cdot 1500}\right)} \frac{N}{V} \quad (8.15)$$

### 8.7.2 La fonction de transfert mécanique

Pour calculer la fonction de transfert mécanique on peut utiliser le modèle du pendule double unidimensionnel. La fonction de transfert entre la force appliquée sur la masse et le mouvement correspondant est caractérisée par 2 résonances et une antirésonance.

Ce modèle simple ne tient pas en compte des possibles résonances des fils, des résonances des supports des bobines, et en général de toutes les résonances mécaniques de la structure. Si on veut concevoir un asservissement avec une bande passante d'au moins 100 Hz, une connaissance de la fonction de transfert mécanique jusqu'à des fréquences de  $\sim 1 kHz$  est nécessaire, car la présence des éventuelles résonances mécaniques pourrait rendre instable l'asservissement.

On a mesuré la fonction A(s) avec deux méthodes différentes.

#### Mesure avec photodiode à quadrants

La première mesure de la fonction de transfert a été réalisée en utilisant le dispositif montré dans la figure 8.10. La masse 2 est excitée en envoyant un courant aux bobines sous la forme d'un bruit blanc. Le mouvement correspondant est mesuré avec une photodiode à quadrants, qui est sensible aux déplacements du faisceau du laser direct, normalement utilisé pour les contrôles locaux. La mesure obtenue est montrée dans la figure 8.11. Pendant cette mesure les contrôles locaux de la masse 2 étaient tous actifs sauf  $z$  (axe du faisceau).

On remarque que:

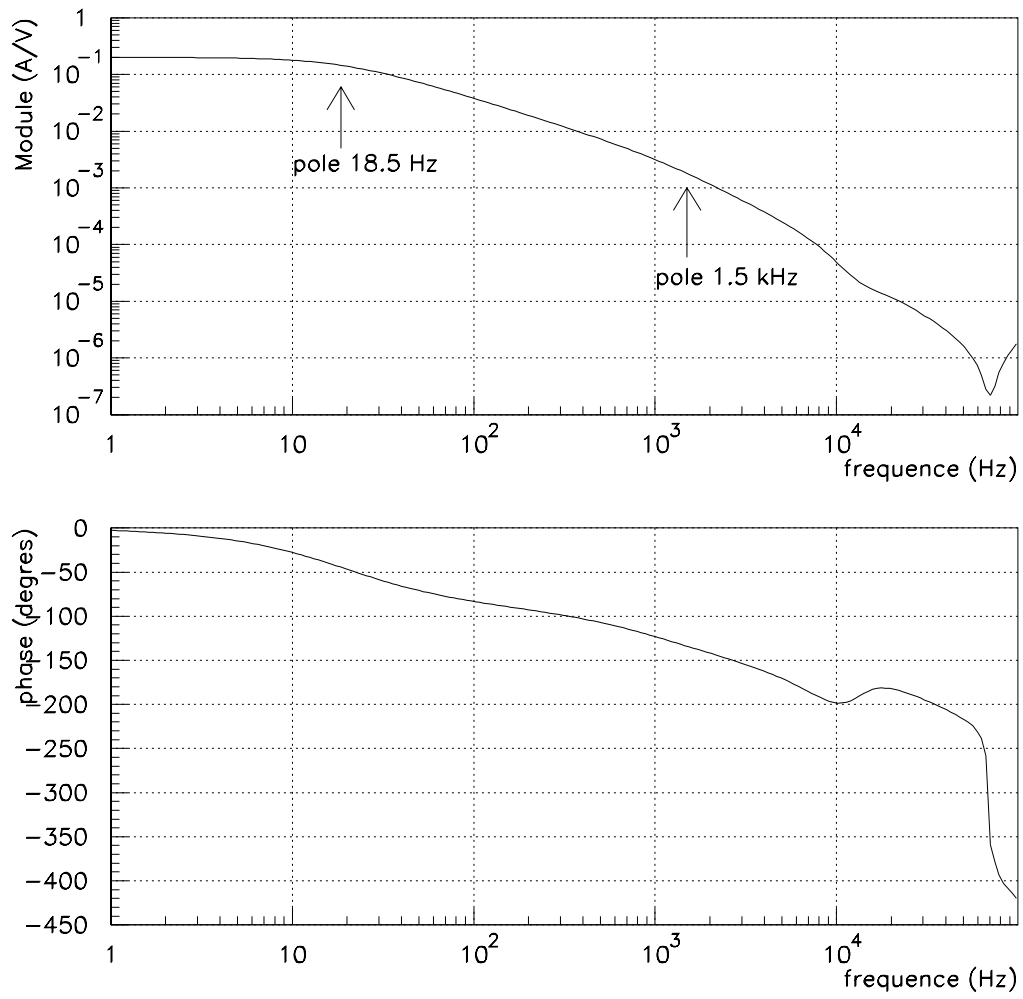


Figure 8.9: Fonction de transfert des amplificateur des bobines (A/V)

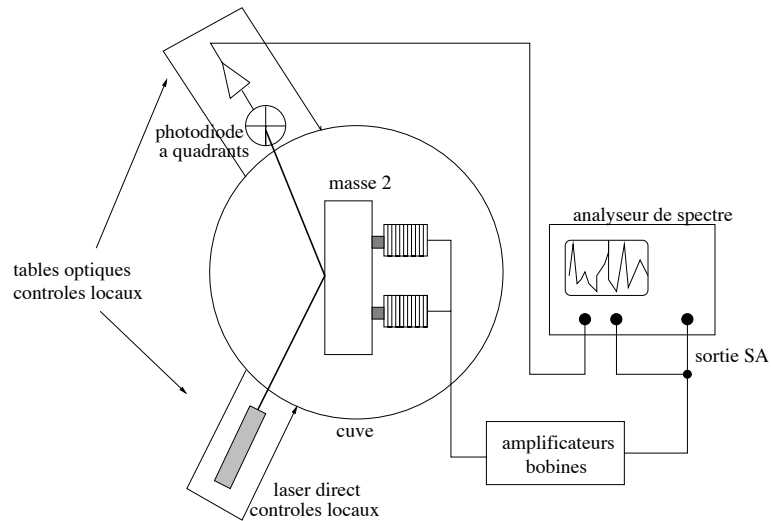


Figure 8.10: Méthode de mesure de la fonction de transfert avec photodiode à quadrants

- A basse fréquence, le comportement observé est celui attendu, avec les deux résonances à 540 mHz et 1 Hz, et l'antirésonance entre les deux.
- Entre 30 Hz et 100 Hz plusieurs résonances sont présentes.

Une mesure plus précise de la fonction de transfert (voir paragraphe suivant), faite en asservissant le laser sur le mode-cleaner, montre que les résonances observées n'appartiennent pas à la masse, mais qu'elles sont des artefacts de notre dispositif expérimental. L'origine la plus probable des résonances est la suivante: l'action des bobines sur la masse provoque une force de recul qui se propage dans la cuve, puis vers les tables optiques sur lesquelles sont posés le laser du contrôle local et la photodiode à quadrant. Cette force excite des résonances de la structure, et donc est la cause d'un déplacement du faisceau laser et de la photodiode à quadrants.

### Mesure avec asservissement du laser sur le mode-cleaner

Le principe utilisé est le même que pour la mesure des mouvements relatifs des masses: quand le laser est asservi sur le mode-cleaner on envoie une excitation aux bobines suffisante pour dominer le bruit en boucle ouverte, et on mesure le signal de correction correspondant envoyé aux PZT du laser. L'avantage de cette mesure est d'être complètement indépendante du bruit sismique du capteur, qui est la photodiode qui génère le signal de Pound-Drever.

D'après le paragraphe précédent le signal de correction vaut  $\delta\nu = -S_{pzt} \cdot V_{pzt}$ . Donc la fonction de transfert  $A(s)$  vaut:

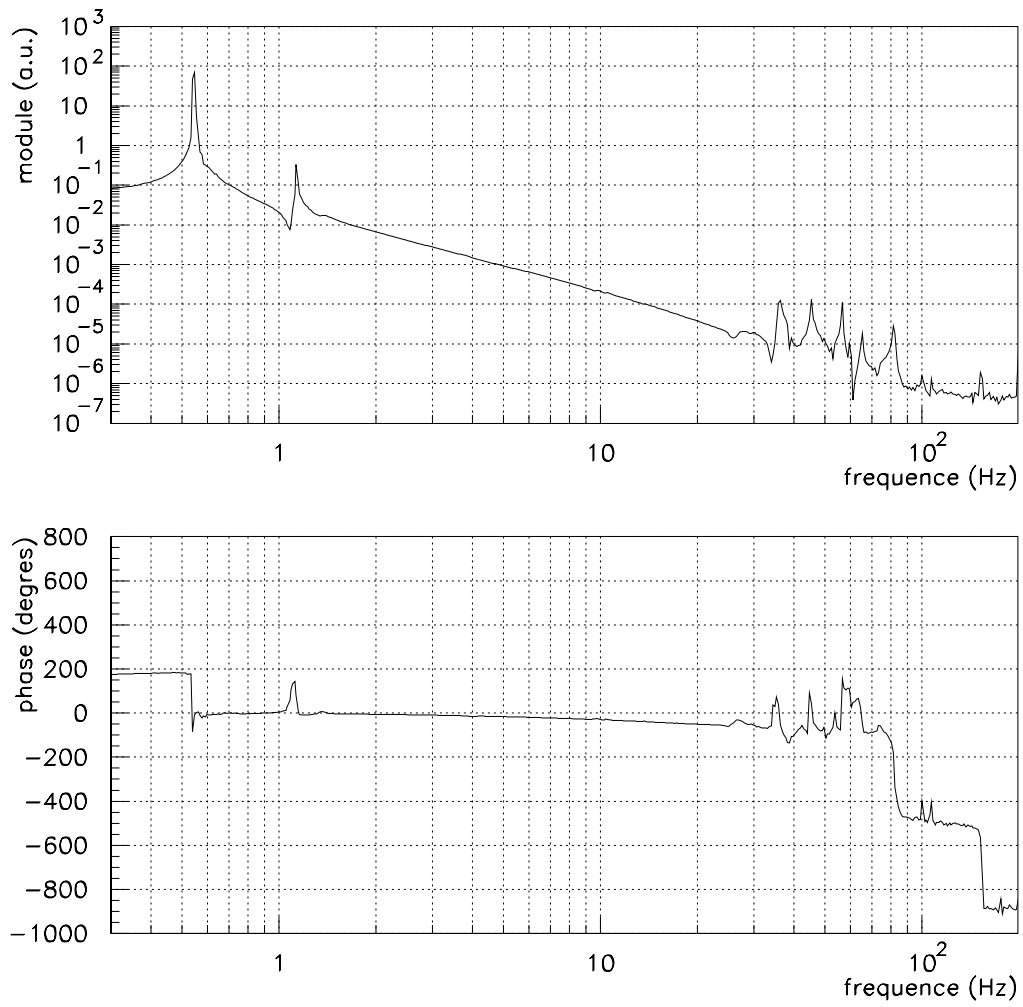


Figure 8.11: Mesure de la fonction de transfert avec photodiode à quadrants

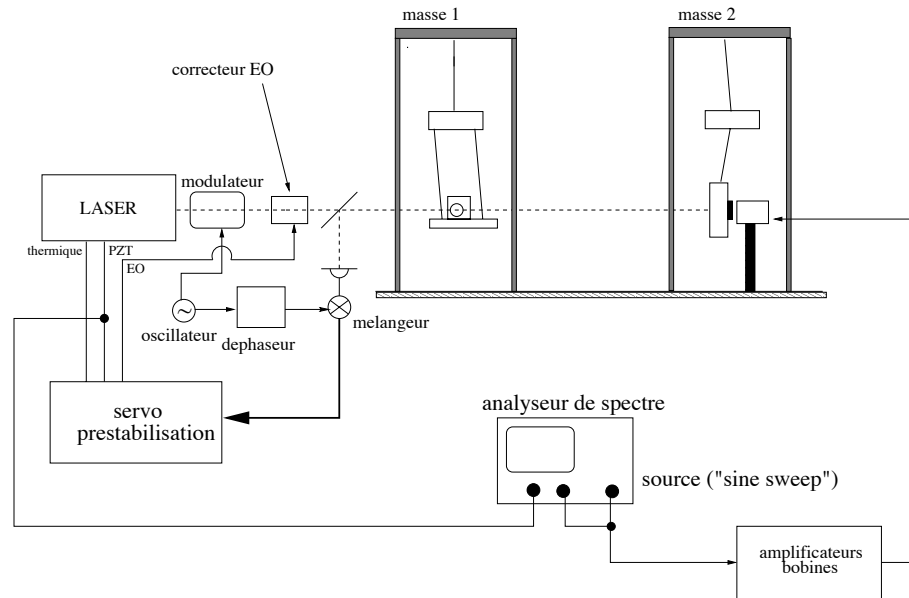


Figure 8.12: Mesure de la fonction de transfert mécanique en asservissant le laser sur le mode-cleaner

$$A(s) = \frac{\delta L(s)}{V(s)} = \frac{V(s)_{pzt}}{V(s)} \cdot S_{pzt} \frac{L}{\nu} \quad (8.16)$$

La méthode de mesure est montrée dans la figure 8.12. L'excitation envoyée aux bobines est produite par la source interne de l'analyseur de spectre. On a essayé deux types de mesure, en utilisant un bruit blanc, ou un sinus balayé (*sine sweep*). La mesure avec sinus balayé est faite de la façon suivante: l'excitation produite par l'analyseur est un sinus pur, d'amplitude comprise entre 5 mV et 5 V, la mesure est faite seulement à la fréquence d'excitation, pour un nombre de cycles décidé par l'expérimentateur. Quand la mesure est acquise à une certaine fréquence, le sinus se déplace.

La figure 8.13 montre la fonction de transfert mesurée avec cette méthode. Pendant la mesure le contrôle en  $z$  de MC2 était actif (Une mesure avec le contrôle en  $z$  éteint montre le même comportement à basse fréquence ( $f < 10Hz$ ) de la figure 8.11). On a montré la fonction de transfert avec contrôle de  $z$  actif car on a fait plusieurs essais de contrôle dans cette configuration.

Le comportement à basse fréquence correspond bien au comportement attendu: les deux résonances de la masse 2 sont amorties par les contrôles locaux, alors que l'antirésonance n'est évidemment pas amortie.

Jusqu'à quelques centaines de Hertz, on n'observe pas de résonance et l'allure de la fonction de transfert est du type  $1/f^3$  (à cause du double pôle de la fonction de transfert mécanique et du pôle à 18.5 Hz des amplificateurs des bobines). On a remarqué



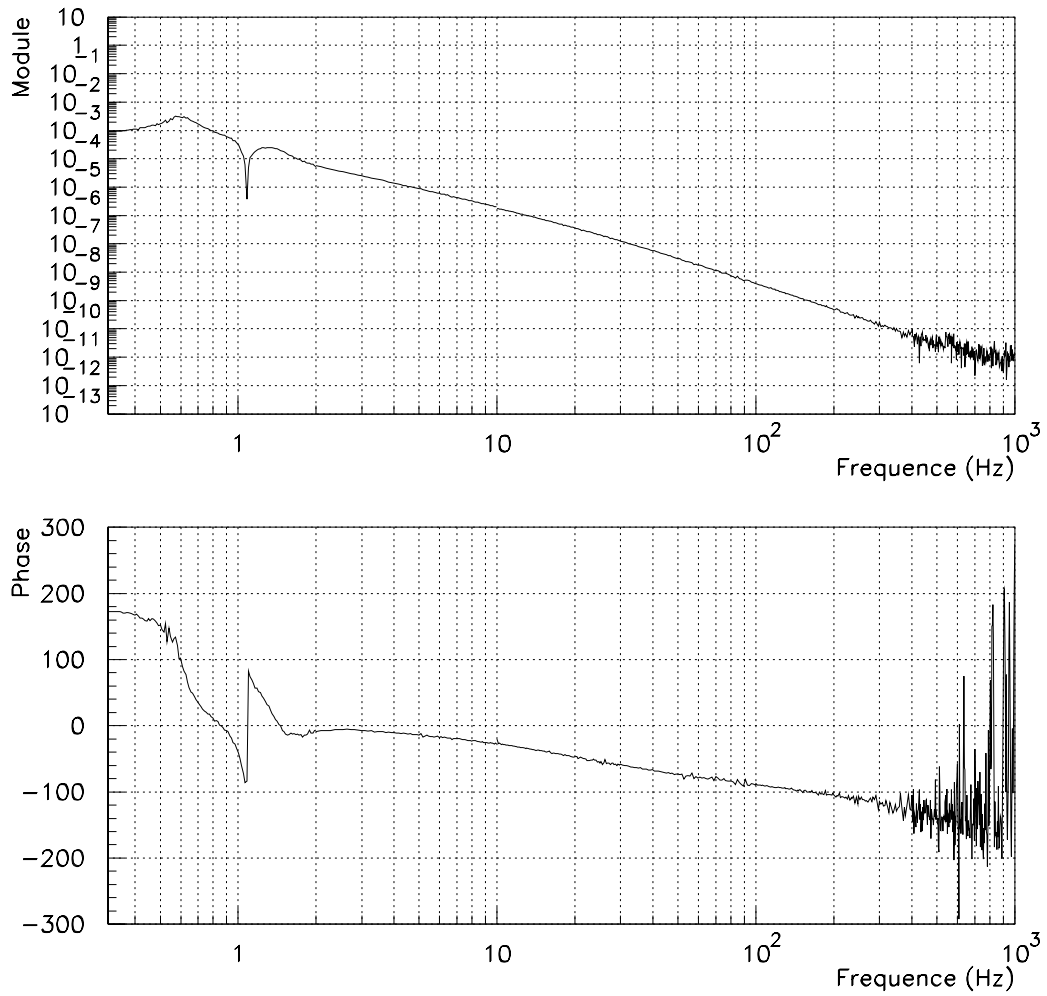


Figure 8.13: Mesure de la fonction de transfert de l'actuateur mesurée en asservissant le laser sur le mode-cleaner

la présence d'un petit déphasage entre la fonction de transfert mesurée et la fonction théorique. Dans l'état actuel l'origine physique de cet effet n'a pas été comprise.

Pour des fréquences  $\sim 1 \text{ kHz}$  on arrive au bruit de mesure.

Après la mesure de cette fonction de transfert, un filtre correcteur a été conçu, avec une bande passante d'environ 100 Hz, et on a essayé de fermer la boucle. L'asservissement montrait une grande instabilité à  $\sim 3.4 \text{ kHz}$ . Une mesure de la fonction de transfert dans cette région a permis de découvrir une résonance mécanique, qui est montré dans la figure 8.14.

## 8.8 Le contrôle longitudinal

Comme expliqué précédemment, la fonction principale du contrôle longitudinal est de maintenir la cavité en résonance avec la lumière laser en agissant sur la longueur de la cavité.

### 8.8.1 La conception du filtre compensateur

L'asservissement doit maintenir la cavité en résonance, on demande donc que les mouvements relatifs des masses en boucle fermée soient inférieurs à la largeur à mi-hauteur de la raie de la cavité:

$$\Delta L \ll \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \sim 10^{-9} \text{ m} \quad (8.17)$$

Le mode-cleaner de VIRGO aura une isolation sismique bien meilleure que celle du prototype, avec un RMS sur chaque miroir inférieur au  $\mu\text{m}$ , avec les contrôles locaux éteints. On a donc décidé de se placer dans les mêmes conditions, en ayant au moins le contrôle local en  $z$  de la masse 1 actif. Cela réduit le RMS à  $\sim 2 \mu\text{m}$  sans contrôle en  $z$  pour la masse 2, et  $0.5 \mu\text{m}$  avec contrôle sur la masse 2. Le bruit sismique est concentré entre 0.5 Hz et 1 Hz, donc le gain à 1 Hz doit être:

$$G(1 \text{ Hz}) \gg \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-9}} = 2000 \quad (8.18)$$

En outre, pour que le filtre soit stable, la fonction de transfert en boucle ouverte doit "franchir" le gain unité avec une pente  $\sim 1/f$ , et pour cela il faut compenser la pente  $1/f^3$  de la fonction mécanique (pour  $f > 18.5 \text{ Hz}$ ) avec deux zéros avant le gain unité <sup>1</sup>.

Une fois que la fonction de transfert en boucle ouverte a un module inférieur à l'unité, il est nécessaire de rétablir une pente plus importante pour filtrer le bruit

---

<sup>1</sup>La condition rigoureuse pour la stabilité d'un système en contre réaction est que la fonction de transfert en boucle fermée doit avoir tous les pôles à partie réelle négative [64]. Pour la conception des filtres il s'avère efficace d'utiliser plutôt le critère pratique que l'on vient de citer. En général il implique la condition sur les racines de la fonction de transfert en boucle fermée.

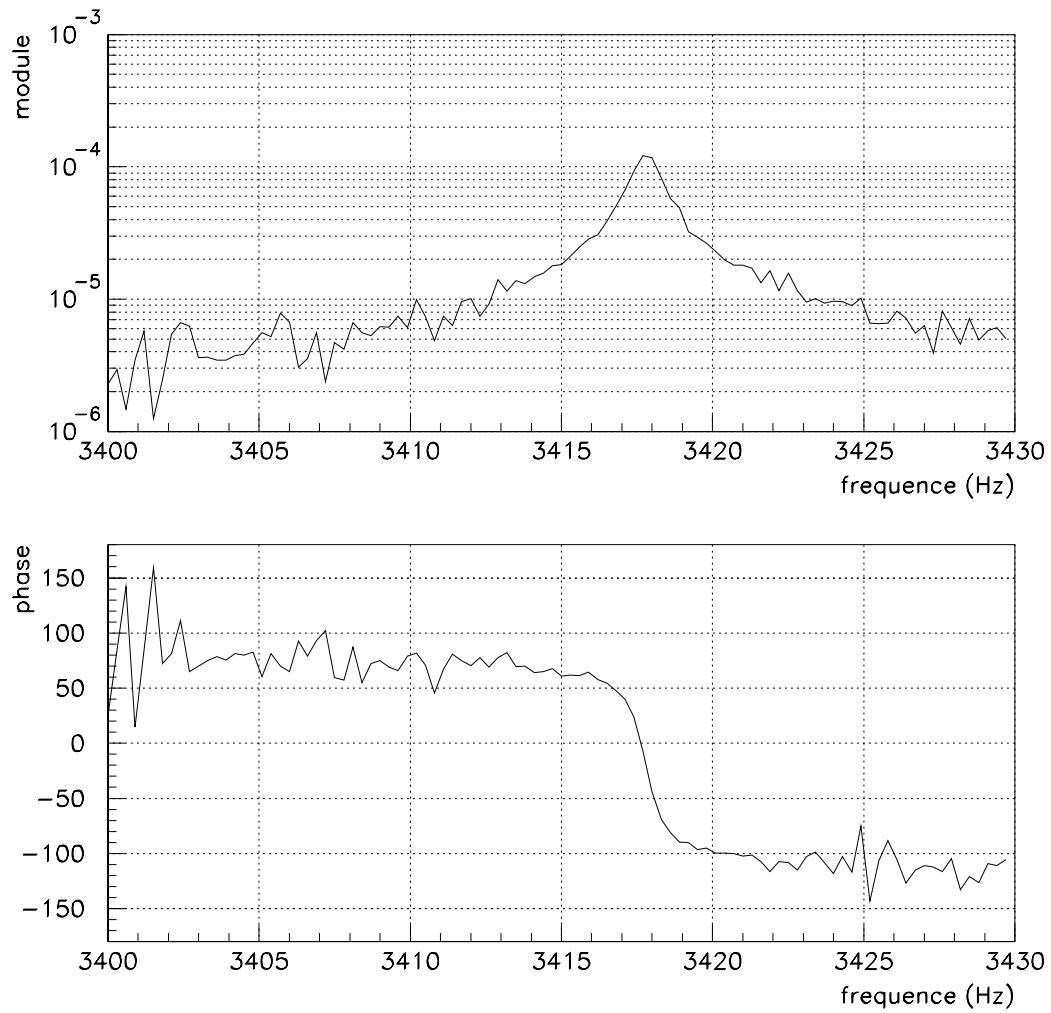


Figure 8.14: Zoom de la fonction de transfert de l'actuateur autour de la résonance à 3.4 kHz. La résonance a un facteur de qualité suffisamment élevé, donc peut être visible malgré le bruit de mesure qui est autour

électronique du filtre correcteur, et éviter aussi d'exciter des résonances mécaniques à haute fréquence.

Le gain unitaire a été choisi autour de 100 Hz. Cela impose, pour avoir une marge de phase satisfaisant d'avoir une pente  $1/f$  au moins entre l'intervalle de fréquences  $1/3 \times 100 \text{ Hz} \simeq 30 \text{ Hz}$ , et  $3 \times 100 \text{ Hz} = 300 \text{ Hz}$ .

Les fonctions de transfert en boucle ouverte et du compensateur que l'on a conçu sont montrées dans la figure 8.15. Le correcteur a été réalisé avec des filtres actifs, réalisés avec des amplificateurs opérationnels. La fonction de transfert mesurée est montrée dans la figure 8.16. La figure 8.17 montre le produit des deux fonctions de transfert mesurées de l'actuateur et du compensateur analogique entre 10 Hz et 1 kHz. Comme la fonction de transfert du signal de Pound-Drever est simplement un facteur de gain, le produit des deux fonctions de transfert est proportionnel à la fonction de transfert en boucle ouverte de la boucle. Dans la figure 8.17, le gain a été donc ajusté pour avoir une fréquence de gain unitaire de 100 Hz. A partir du schéma 8.15 et des courbes 8.17, 8.16 on remarque que:

- La marge de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est  $\sim 40^\circ$ . La marge de gain est au moins 30 dB à gauche et 6 dB à droite.
- Le gain à 10 Hz est 30, comme la pente de la courbe entre 1 Hz et 10 Hz avec intégrateur est  $1/f^3$ , le gain en boucle ouverte à 1 Hz est  $\sim 3 \cdot 10^4$ . Sans intégrateur on a un gain à 1 Hz de  $\sim 3 \cdot 10^3$ . En outre, le gain de boucle est amplifié par les résonances  $z$  de la MC2. Cela en principe devrait faciliter la tâche de l'asservissement aux basses fréquences. En réalité, en n'agissant que sur une masse, on ne compense pas le bruit sismique induit par la résonance  $z$  de l'autre. Un schéma de contrôle "*balance*", qui partage donc la correction entre les deux masses de la cavité, devrait aider à supprimer complètement la contribution majeure du bruit sismique, en agissant avec un gain élevé sur toutes les résonances  $z$  du système.

Tel schéma est impossible pour le mode-cleaner de VIRGO, où l'une des deux masses est le banc d'entrée de l'interféromètre. En effet, une action sur le banc d'entrée déplacerait l'axe du faisceau qui entre dans l'interféromètre. Comme le but du prototype est de tester des stratégies de contrôle pour le vrai mode-cleaner, nous nous sommes limité à un contrôle avec la seule masse 2.

- La compensation de la résonance à 3.4 kHz a été ajoutée après les premiers essais de contrôle. On a en effet observé que la résonance à 3.4 kHz était systématiquement excitée par l'asservissement et cela rendait la boucle instable.
- Pour avoir plus de gain en basse fréquence, un intégrateur pur (pôle sur l'origine) est ajouté une fois que l'accrochage est obtenu. Cette procédure évite que les offsets électroniques saturer le circuit avant que la boucle ne soit fermée.

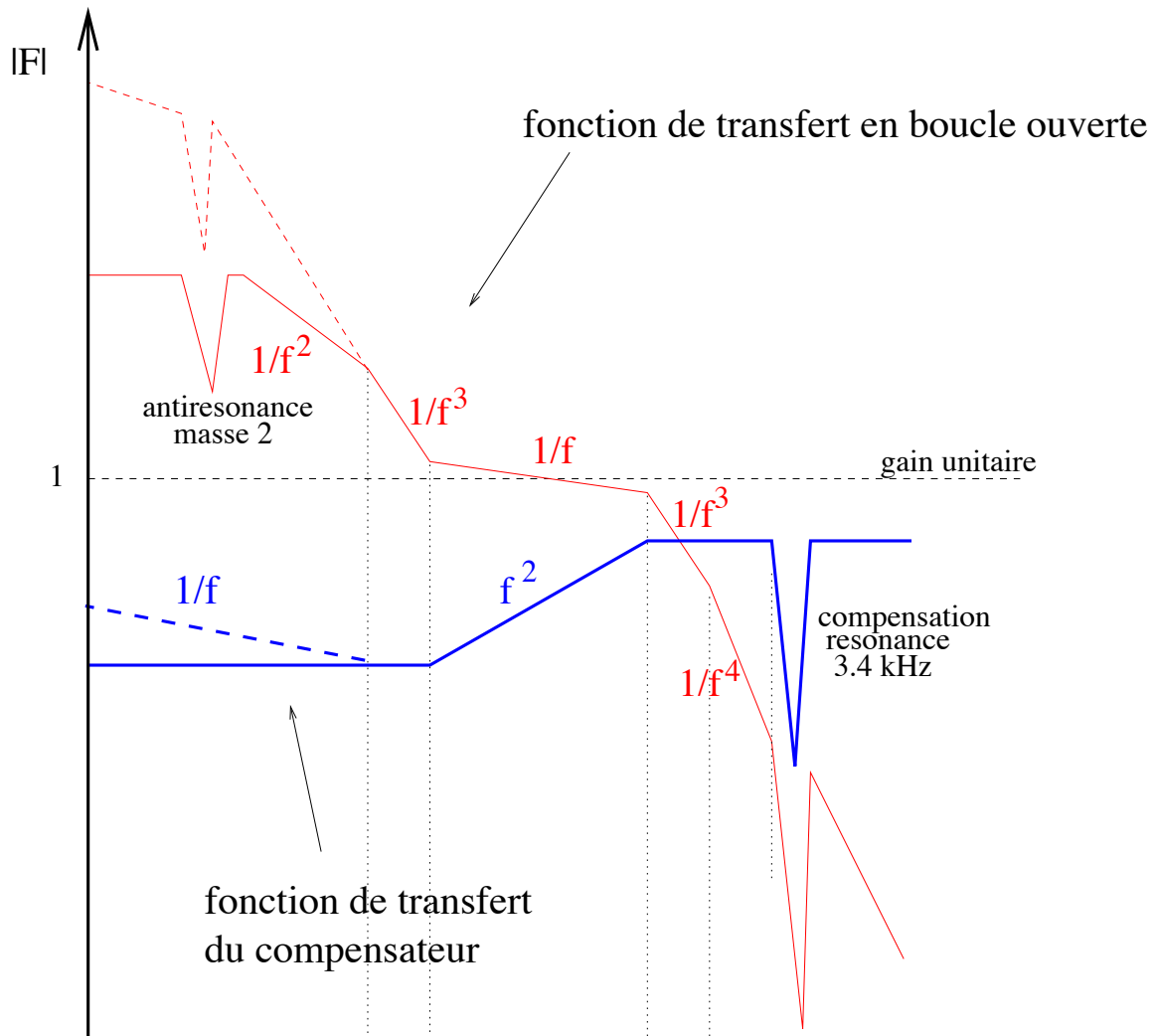


Figure 8.15: Fonction de transfert en boucle ouverte, et fonction de transfert du filtre compensateur. Un intégrateur pur (pôle sur l'origine) est ajoutée une fois que la condition de résonance est acquise. Cela permet d'avoir un gain plus important aux basses fréquences, sans que les décalages électroniques saturant les circuits en phase d'acquisition de la résonance. Dans ce schéma la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée quand le contrôle  $z$  de MC2 actif. Les résonances  $z$  de la MC2 sont donc amorties

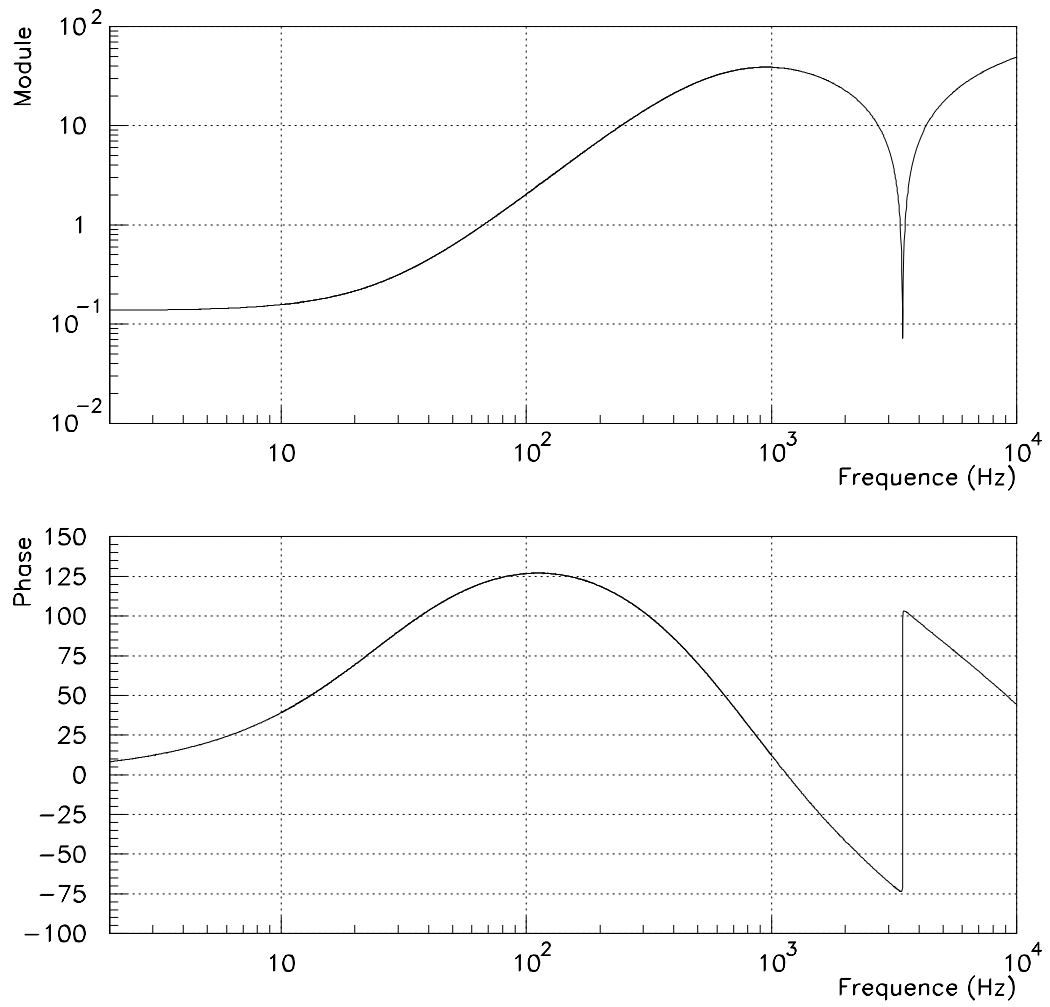


Figure 8.16: Fonction de transfert mesurée du compensateur analogique.

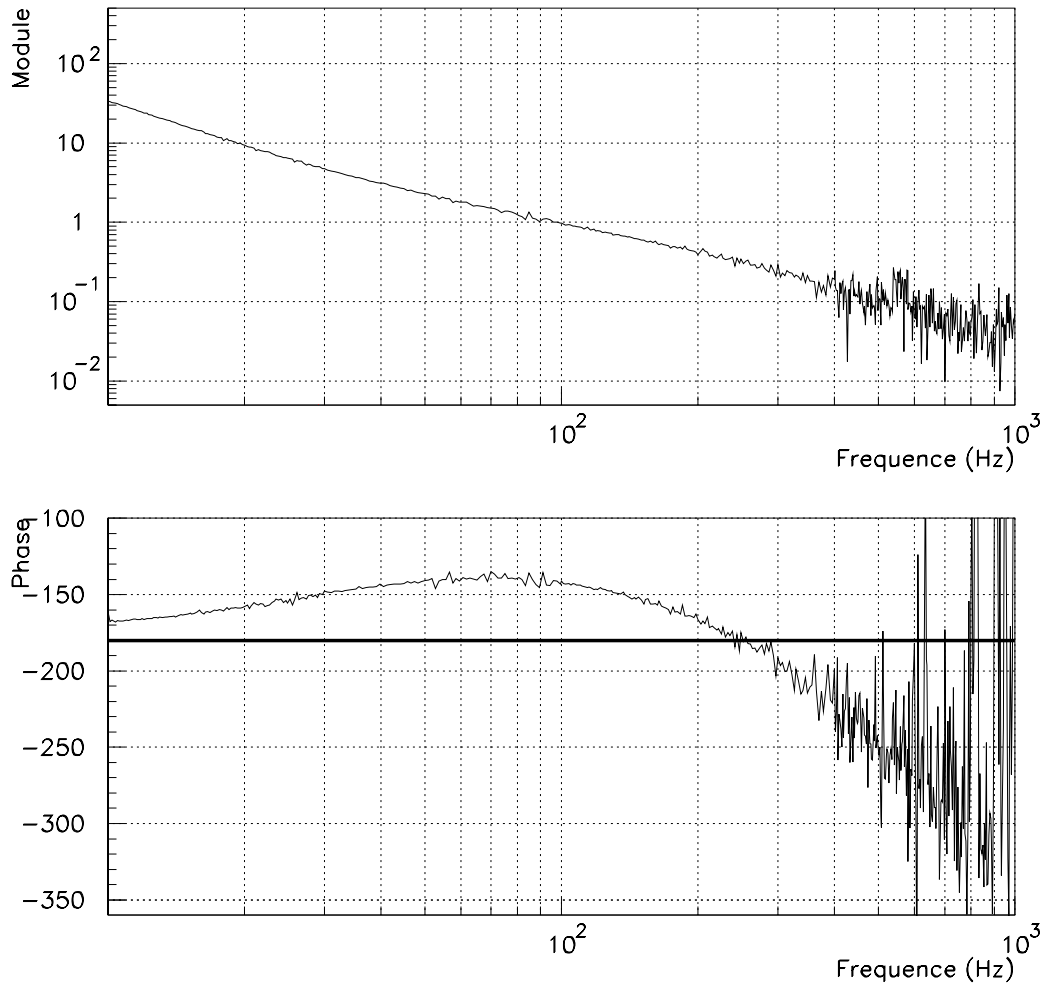


Figure 8.17: Produit des fonctions de transfert mesurées de l'actuateur et du compensateur analogique. La ligne horizontale représente la phase  $-180^\circ$ , donc l'intervalle de fréquences au dessus de la ligne est la région de stabilité du filtre. Le gain de la fonction de transfert a été ajusté de façon à avoir une fréquence de gain unité à 100 Hz

## 8.9 Performances du contrôle

Avec le filtre ainsi conçu la condition de résonance est acquise et maintenue de façon systématique. Les performances du filtre peuvent être évaluées selon les critères suivants:

- **Bruit en boucle fermée**

Le signal d'erreur en boucle fermé en fonction du temps est montré dans la figure 8.18. On a utilisé la calibration décrite dans le paragraphe 8.3 pour la conversion Volts  $\rightarrow$  mètres. Le bruit RMS est  $\Delta L \simeq 4 \cdot 10^{-11}$ . On remarque la présence d'un décalage de calibration électronique, qui ne devrait pas perturber le système.

Comme le bruit en boucle ouverte est  $\sim 0.5 \mu m$  RMS, on a un gain effectif de  $\sim 10^4$ . On remarque que le bruit est dominé par des composantes à haute fréquence, qui ne sont pas atténuées par le gain de boucle. Une analyse détaillée du signal d'erreur sera faite dans la suite du chapitre.

- **Robustesse par rapport au changement des paramètres**

Le gain de l'asservissement peut être changé de quelque dB sans provoquer une perte de la résonance. La figure 8.19 montre la puissance transmise en fonction du temps pendant  $\sim 20$  minutes. On remarque la présence de dérives qui dégradent l'alignement de la cavité. Cependant l'asservissement reste stable malgré ces variations importantes.

## 8.10 Fluctuations de la puissance transmise

La figure 8.20 montre la puissance transmise en fonction du temps comparée aux les fluctuations pour une cavité sans bruit d'alignement. Ces dernières ont été calculées en utilisant la relation suivante:

$$P = P_{max} \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \sin^2(\phi)} \quad (8.19)$$

où  $\phi = \delta L \frac{2\pi\nu}{c}$  est le déphasage par rapport à la résonance et  $\delta L$  est le bruit en boucle fermée montrée dans la figure 8.18. Les fluctuations de la puissance transmise sont un ordre de grandeur supérieures à celles produites par les écarts de phase par rapport à la résonance en boucle fermée.

On peut expliquer ces fluctuations par:

- Le bruit sismique angulaire.
- Le couplage entre la correction en  $z$  sur la masse 2 et les degrés de liberté de rotation.



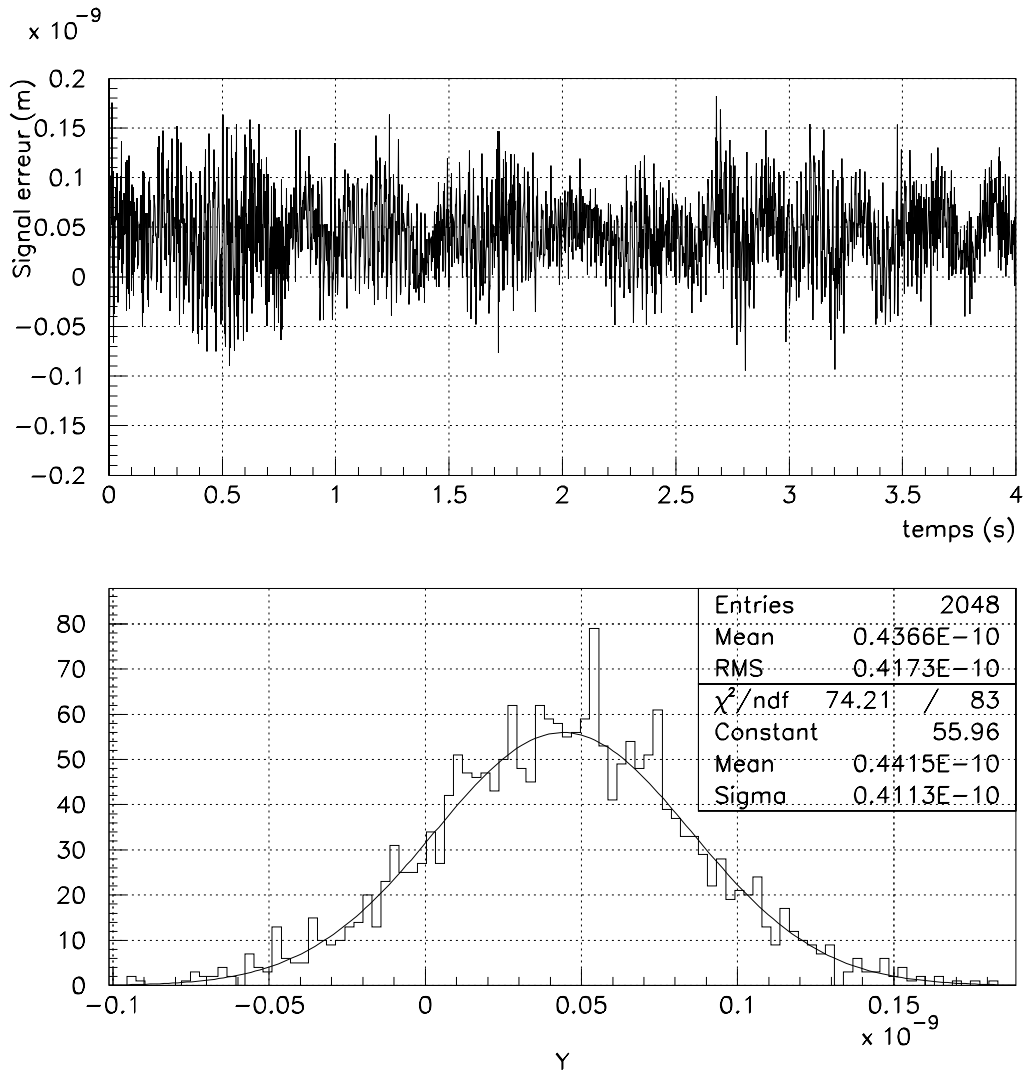


Figure 8.18: Signal d'erreur en boucle fermée

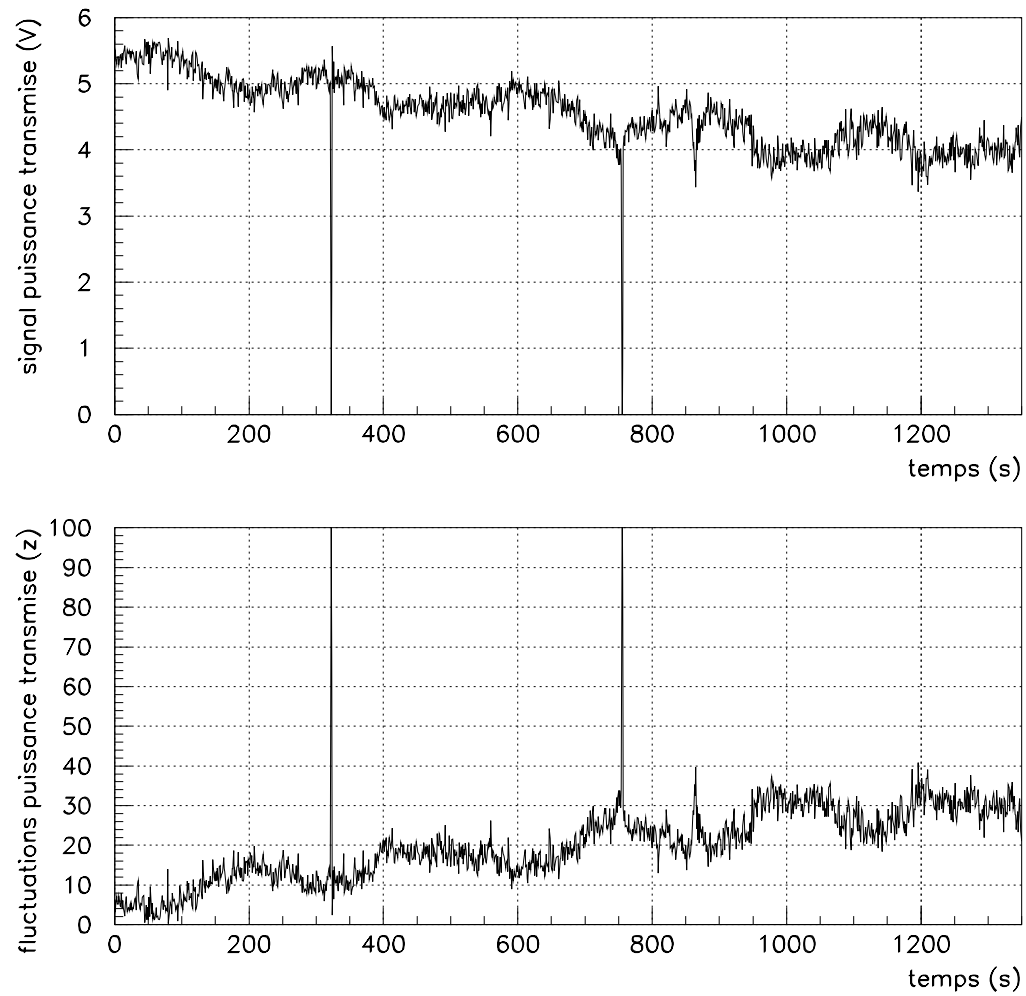


Figure 8.19: Puissance transmise en fonction du temps (haut). Perte de puissance en % par rapport à la valeur optimale de l'alignement. Les deux lignes verticales à  $t=320$  s et  $t=750$  s représentent des pertes de la résonance

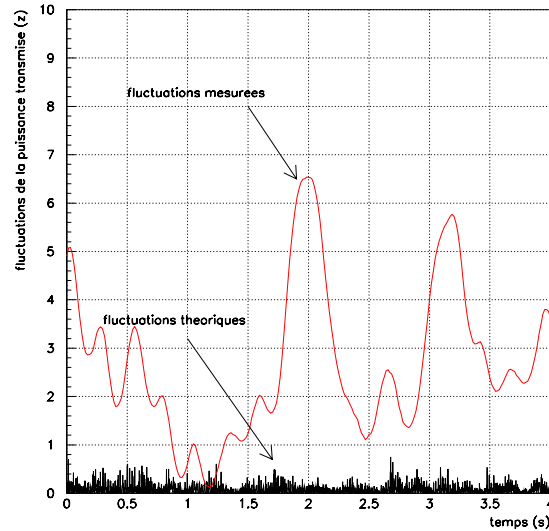


Figure 8.20: Puissance transmise en fonction du temps

Comme le bruit observé est du même ordre de grandeur dans les deux cas du mode-cleaner asservi sur le laser et du laser asservi sur le mode-cleaner, on en déduit que les fluctuations sont principalement dues à du bruit sismique angulaire.

On peut montrer que le terme principal dans les couplages avec les modes  $TEM_{01}$  ( $TEM_{10}$ ) dérive des fluctuations  $\theta_x$  ( $\theta_y$ ) de la masse 2, qui provoquent une translation de  $\theta \cdot R$  de l'axe de la cavité, où  $R$  est l'axe de courbure du miroir concave. Une fluctuation de 1% de la puissance transmise correspond à un bruit angulaire de  $\sim 3.5 \mu rad$ , ce qui est compatible avec le bruit de  $1 - 2 \mu rad$  RMS, mesuré avec les contrôles locaux, sur les deux degrés de liberté  $\theta_x$   $\theta_y$ .

Un contrôle *global* de l'alignement est donc nécessaire, afin de diminuer les fluctuations de puissance et de compenser les dérives à long terme.

## 8.11 Analyse du signal d'erreur

La figure 8.21 montre le spectre du signal d'erreur entre 10 Hz et 400 Hz dans les deux conditions (a) = avec laser libre et (b) = laser préstabilisé. Dans les deux cas le gain unité de l'asservissement était autour de 100 Hz.

Le rapport des deux signaux d'erreur est montré dans la figure 8.22. C'est un moyen intéressant pour comprendre les différentes sources de bruit sur le signal d'erreur.

On peut remarquer que dans le cas (a), le bruit dominant est le bruit de fréquence du laser libre. Le bruit mesuré précédemment (cf l'équation 8.8) été corrigé par le gain

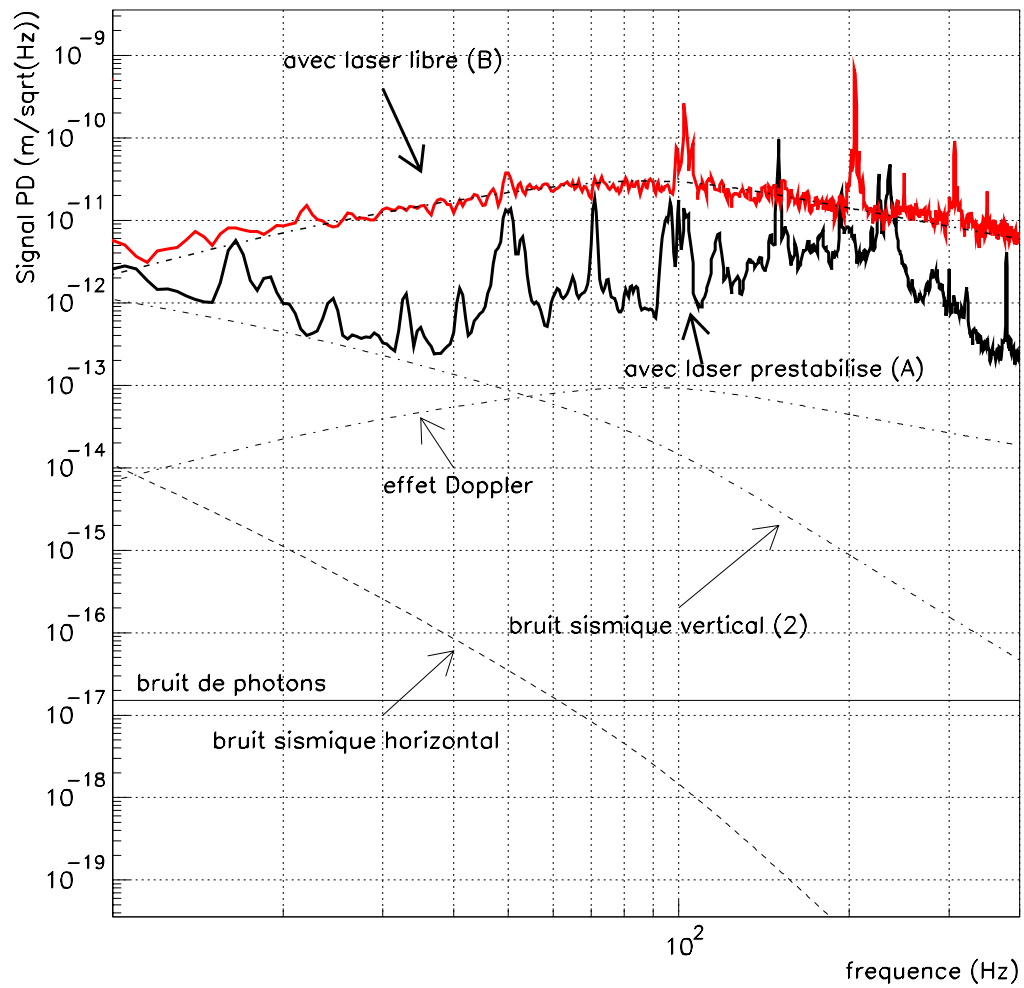


Figure 8.21: Spectre du signal d'erreur en boucle fermée entre 10 Hz et 400 Hz (haut), rapport entre le spectre avec préstabilisation et le spectre sans préstabilisation (bas)

de boucle et superposé à la courbe (B). La correspondance entre les deux mesures est très bonne, ce qui indique que notre moyen de calibration du signal d'erreur (décrit au paragraphe 8.3) est satisfaisant. Dans le cas B le bruit dominant est à l'état actuel inconnu. L'influence des bruits suivants sur le signal d'erreur a été examinée:

- **Bruit sismique**

Pour la densité spectrale de bruit sismique on a utilisé le modèle:

$$\tilde{\delta L}(f) \sim \frac{K}{f^2} m/\sqrt{Hz} \quad (8.20)$$

Comme l'atténuation sismique horizontale est constituée par deux étages de pendules avec une fréquence de résonance de  $\sim 1Hz$ , le bruit sismique  $\tilde{\delta L}_H$  sur les miroirs est:

$$\tilde{\delta L}_H \sim \frac{K}{f^6} m/\sqrt{Hz} \quad (8.21)$$

L'atténuation sismique verticale est par contre constituée par un seul étage de pendule, avec une fréquence de résonance de 2 Hz. Donc, dans la région qui nous intéresse:

$$\tilde{\delta L}_V \sim 2\alpha \cdot \frac{K}{f^4} m/\sqrt{Hz} \quad (8.22)$$

ou  $\alpha$  est le couplage vertical-horizontale, que l'on va considérer de l'ordre du 10%.

Le bruit sismique dans la salle de l'expérience n'a pas été mesuré. Il a été considéré, comme hypothèse de travail, un niveau de bruit  $K = 10^{-5}$ , ce qui correspond à une forte activité humaine.

On remarque donc que le bruit sismique horizontal n'est pas responsable du bruit sur le signal d'erreur.

Par contre un niveau de bruit sismique vertical de  $10^{-5}$  est compatible avec le signal d'erreur mesuré dans la région 10-50 Hz, et pour des fréquences supérieures, si on inclut la possibilité d'avoir des résonances internes des *lames* de la marionnette.

- **Effet Doppler**

L'effet Doppler entre le laser préstabilisé et le mode-cleaner s'écrit:

$$\tilde{\delta L}_D = \frac{2\pi f L}{c} \tilde{\delta L} \quad (8.23)$$

où  $f$  est la fréquence d'analyse,  $L$  la longueur de la cavité, et  $\delta\tilde{L}$  est le bruit sur la distance relative entre la cavité et la préstabilisation. Comme le mode-cleaner est isolé sismiquement et que le laser ne l'est pas, le terme  $\delta\tilde{L}$  est de l'ordre du bruit sismique non atténué.

L'effet Doppler est donc compatible avec le signal d'erreur mesuré si on admet la possibilité que certaines résonances de la table optique de la préstabilisation soient excitées, avec un facteur de qualité compris entre 10 et 100.

- **Bruit de photons**

Le bruit de photons pour un niveau de 50 mW de puissance continue sur la photodiode a été représenté dans la figure 8.21. Il est donc complètement négligeable dans l'intervalle spectrale d'intérêt.

- **Bruit de fréquence du laser**

Les mesures sur le laser préstabilisé montrent un bruit qui est quatre ordres de grandeur inférieur au bruit du laser libre. Le rapport entre les deux signaux d'erreur (A) et (B) est par contre limité à  $> 10^{-2}$ . Dans le cas de la mesure 4.6 la cavité était suspendue, alors que nous avons utilisé une cavité simplement posé sur un banc optique. Une possible influence du bruit sismique sur le bruit du laser préstabilisé n'est pas à exclure.

On remarque (cf figure 8.22), qu'en correspondance des deux fréquences 176 Hz et 240 Hz le signal d'erreur en boucle fermée pour le laser stabilisé est plus grand de celui avec laser libre. Ces deux résonances sont donc liées à la prestabilisation. Probablement il s'agit de résonances mécaniques des composants de la table de la préstabilisation, excitées par le bruit sismique ou le bruit acoustique.

## 8.12 Conclusions et Perspectives

Le mode-cleaner a été contrôlé en polarisation "p" (finesse de 120) avec un filtre analogique.

- Les résultats obtenus en terme de robustesse et suppression du bruit sismique sont satisfaisants: la cavité reste en résonance pour des temps de l'ordre de 30 minutes, limités par les dérives dans l'alignement. Le bruit RMS en boucle fermée est  $\sim 4 \cdot 10^{-11} m$ .
- La cause principale des fluctuations de la puissance transmise (quelques %) est le bruit d'alignement. Un système de contrôle global de l'alignement (technique de "Ward") est donc nécessaire.
- L'asservissement du laser sur la longueur du mode-cleaner s'est révélé un moyen valide et rapide pour la caractérisation de la cavité et la conception du filtre compensateur

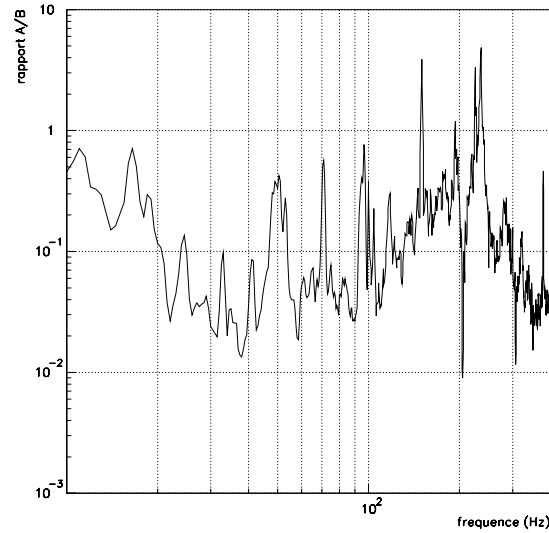


Figure 8.22: Rapport entre les signaux d'erreur en boucle fermée avec laser préstabilisé (A) et avec laser libre (B)

- Le bruit dans le signal d'erreur n'a pas été totalement compris, mais une possibilité est l'influence du bruit sismique vertical, qui est très peu atténué par un seul étage de *lames métalliques*

Le contrôle sur la haute finesse a été obtenu avec un filtre analogique du même type de celui utilisé pendant cette thèse. Les mêmes filtres seront utilisés pour le mode-cleaner de VIRGO, où la meilleure isolation sismique devrait faciliter le contrôle.

L'étude d'un système d'alignement global est en cours.

# Conclusions

La première partie de ce travail de thèse constitue une étude générale du problème de la stabilisation de fréquence dans VIRGO.

Les spécifications sur la stabilité de fréquence ont été déterminées grâce au calcul de la fonction de transfert de l'interféromètre, et à une évaluation des asymétries entre les deux bras du détecteur. En particulier nous avons mis en évidence l'importance de l'asymétrie de réflectivité des cavités Fabry-Perot, jusqu'à présent négligée pour VIRGO.

Les calculs présentés dans cette thèse montrent qu'avec une asymétrie de réflectivité de  $10^{-4}$  (due aux pertes par diffusion et absorption dans les miroirs d'entrée) et une asymétrie de finesse de  $4 \cdot 10^{-2}$  (due aux effets *Fabry-Perot* dans les miroirs d'entrée) les spécifications sur le bruit de fréquence les plus sévères sont dues aux asymétries de finesse. Cependant, un niveau d'asymétrie de réflectivité si faible demande une étude approfondie des influences des défauts "*géométriques*" des miroirs (rugosité, planéité, erreurs sur les rayons de courbure . . . ) sur l'asymétrie de réflectivité. Une telle étude n'est possible que par simulation numérique. Des travaux pour inclure l'ensemble de ces effets dans le calcul de l'asymétrie et d'autres simulations visant à valider les fonctions de transfert évaluées dans cette thèse font l'objet d'investigations en cours.

Nous avons ensuite calculé les réponses de deux signaux pouvant être utilisés afin de stabiliser le laser sur l'interféromètre: la photodiode "2" (faisceau réfléchi par l'interféromètre) et la photodiode "5" (champ dans la cavité de recyclage). Nous avons montré que les deux photodiodes ont une sensibilité suffisante pour stabiliser le laser.

A travers l'étude de la technique proposée à l'origine pour VIRGO (l'addition électronique des signaux d'erreur), nous avons dégagé les deux problèmes principaux auxquels doit se confronter chaque topologie de stabilisation de fréquence sur l'interféromètre:

- l'interaction avec la préstabilisation,
- l'interaction avec le contrôle des miroirs à basse fréquence (le "*locking*" de l'interféromètre).

Nous avons montré par conséquent que la conception d'une topologie de contrôle basée uniquement sur l'addition électronique des signaux d'erreur est très délicate. Un schéma de stabilisation plus complexe, voire l'utilisation du mode-cleaner comme



référence de fréquence intermédiaire est envisageable. Toutefois une solution pour la stabilisation de l'*interféromètre central* ne nécessitant pas de modification de son dessin a été proposée, et sera testée prochainement sur le site VIRGO.

Notre étude a montré que les exigences pour la stabilisation en fréquence ont un caractère global, en particulier nous avons montré qu'il est impossible de le dissocier le problème du contrôle des miroirs à basse fréquence (le "*locking*" de l'interféromètre). En outre les spécifications sur le bruit de la source laser dépendent de façon critique des défauts des miroirs et de la physique de l'interféromètre à travers les effets de filtrage en fréquence de ses cavités.

La deuxième partie de cette thèse concerne le travail expérimental de contrôle du prototype de mode-cleaner d'Orsay.

En premier lieu, nous avons développé un asservissement analogique, agissant sur une des deux masses. Ce dispositif nous a permis de maintenir cette cavité à miroir suspendus en résonance. Ce type d'asservissement sera initialement utilisé pour le mode-cleaner de VIRGO.

Le contrôle complet de la cavité nous a permis de montrer la validité de la technique de contrôle local *hors vide* (avec caméra CCD). Ce résultat revêt une importance particulière étant donné que cette technique est prévue non seulement pour les miroirs du mode-cleaner mais aussi pour toutes les masses suspendues de VIRGO.

Avec ce protocole expérimental nous avons pu vérifier la présence d'un "double peigne" de modes dans le spectre de la cavité mode-cleaner en tant que cavité triangulaire et ainsi la prendre en compte dans l'effet de filtrage du bruit de position par la cavité Fabry Perot. En outre, des effets transitoires ont été observés dans la cavité ce qui nous a permis de faire une étude préliminaire des possibilités qu'ils offrent pour la mesure de la finesse et de la vitesse relative des miroirs.

Enfin, nous avons montré que le maintien de la résonance par action sur la fréquence laser est une technique efficace pour la mesure des fonctions de transfert mécaniques des miroirs.

Les résultats présentés dans cette thèse ne représentent qu'une partie du problème du contrôle incluant l'alignement automatique. En revanche cette étude représente la première expérience de contrôle de cavité suspendue au sein de la collaboration VIRGO.

## Annexe A

# Les cavités Fabry-Perot

Le but de cette appendice est rappeler les propriétés principales des cavités Fabry-Perot (FP), utilisée souvent dans l'exposition de la thèse.

considérons la cavité FP formée par les miroirs  $M_1$  et  $M_2$ , séparés par la distance  $L$ . Indiquons avec  $t_i$ ,  $r_i$  et  $P_i$  respectivement les transmittivités en amplitude, les réflectivités en amplitude et les pertes des deux miroirs. Ces quantités sont liées par la relation:

$$t_i^2 + r_i^2 + P_i = T_i + R_i + P_i = 1 \quad (\text{avec } i = 1, 2) \quad (\text{A.1})$$

Si  $E_0$  est un faisceau monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , on a les équations suivantes pour les champs dans la cavité (voir figure A.1):

$$E_{in} = t_1 E_0 - r_1 E_b$$

$$E_b = -r_2 e^{2i\phi} E_{in}$$

$$E_t = t_2 e^{i\phi} E_{in}$$

$$E_r = r_1 E_0 + t_1 E_b$$

où  $\phi = 2\pi L/\lambda$  est la phase accumulée par le faisceau au long d'un chemin  $M_1 \rightarrow M_2$ <sup>1</sup>

On peut donc déduire les expressions explicites pour les champs interne ( $E_{in}$ ), transmis ( $E_t$ ) et réfléchi ( $E_r$ ):

$$E_{in}(\phi) = E_0 \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}} \quad (\text{A.2})$$

$$E_r(\phi) = E_0 \frac{r_1 - r_2 (r_1^2 + t_1^2) e^{2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}} = E_0 \frac{r_1 - r_2 (1 - P_1) e^{2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}} \quad (\text{A.3})$$

---

<sup>1</sup>On a utilisé pour les réflectivités des miroirs la convention:  $r < 0$  si le faisceau se réfléchit sur la face avec revêtement (coating), et  $r > 0$  si le faisceau se réfléchit sur la face sans revêtement réfléchissant

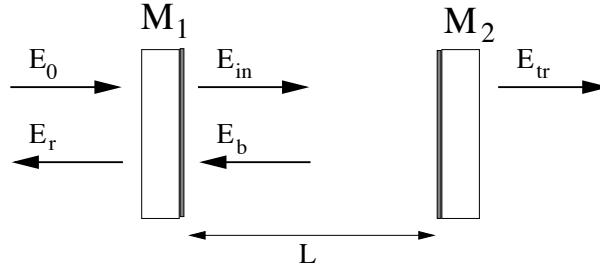


Figure A.1: Champs dans la cavité FP

$$E_t(\phi) = E_0 \frac{t_1 t_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}} \quad (\text{A.4})$$

la cavité est *en résonance* quand sa longueur est telle que la lumière incidente interfère constructivement avec la lumière interne, donc pour:

$$\phi = 0 \quad (\text{mod } \pi) \quad (\text{A.5})$$

les expressions des champs deviennent dans ce cas:

$$E_{in}(0) = E_0 \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \quad (\text{A.6})$$

$$E_r(0) = E_0 \frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2)}{1 - r_1 r_2} \quad (\text{A.7})$$

$$E_t(0) = E_0 \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \quad (\text{A.8})$$

### A.1 Puissance transmise, interval spectral libre et finesse

De l'expression du champ transmis par la cavité on peut dériver la puissance transmise:

$$P_t(\phi) = P_0 \frac{\left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2}\right)^2}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \phi} \quad (\text{A.9})$$

La fonction:

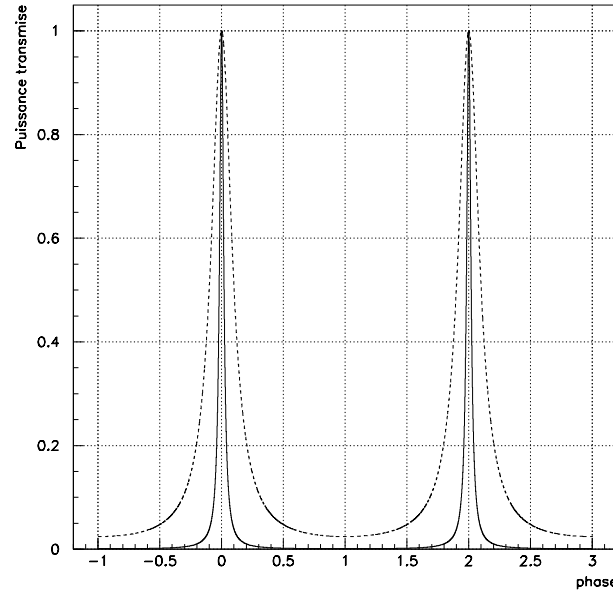


Figure A.2: *Courbe d'Airy*: Puissance transmise en fonction de l'écart par rapport à la résonance (mesure en unités de  $\pi$ ). La ligne continue correspond à une finesse de 50, la ligne avec tirets à une finesse de 10

$$A(\phi) = \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \sin^2 \phi} \quad (\text{A.10})$$

est dite *courbe d'Airy*, et elle est montrée dans la figure A.2. La distance entre deux résonances successives est dite *interval spectral libre* (ISL), on a:

$$\Delta f = \frac{c}{2L} \quad \text{distance en fréquence} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2} \quad \text{distance en longueur} \quad (\text{A.12})$$

Le rapport entre l'ISL et la largeur à mi hauteur de la cavité est appelé *finesse* ( $\mathcal{F}$ ) de la cavité, et il s'écrit:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (\text{A.13})$$

donc plus la finesse est élevée, plus la raie de résonance de la cavité est étroite.

Pendant la thèse on utilise souvent la relation qui exprime la distance en fréquence et en longueur correspondante à la demi largeur à mi hauteur de la cavité (HWHM). A l'aide des A.11 A.12 on trouve:

$$(\Delta L)_{HWHM} = \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \quad (\text{A.14})$$

$$(\Delta f)_{HWHM} = \frac{c}{4L\mathcal{F}} \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Le champ réfléchi

Définit la réflectivité complexe d'une cavité comme:

$$R = \frac{E_r}{E_0} \quad (\text{A.16})$$

la réflectivité complexe à la résonance est donc:

$$R(0) = \frac{r_1 - r_2(1 - P_1)}{1 - r_1 r_2} \quad (\text{A.17})$$

on peut avoir trois cas possibles:

- $r_1 - r_2(1 - P_1) = 0$  **couplage optimal**

Le champ réfléchi à la résonance est nul. Dans ce cas la lumière réfléchie directement par le miroir d'entrée de la cavité  $M_1$  interfère destructivement avec la lumière qui est transmise par ce même miroir vers l'extérieur. Si les pertes du miroir d'entrée sont nulles ( $P_1 = 0$ ) cette condition se vérifie quand  $r_1 = r_2$

- $r_1 - r_2(1 - P_1) < 0$  **cavité sous couplée**

L'amplitude du champ réfléchi à la résonance est négative (donc entre le champ incident et le champ réfléchi il y a un déphasage de  $\pi$ ). Cette condition se vérifie, pour  $P_1 = 0$ , quand  $r_1 < r_2$ .

- $r_1 - r_2(1 - P_1) > 0$  **cavité sur couplée**

L'amplitude du champ réfléchi à la résonance est positive, donc le champ réfléchi et le champ incident sont en phase. Cette condition se vérifie, si  $P_1 = 0$ , pour  $r_1 > r_2$

Un exemple de cavité sous-couplée sont les bras de l'ITF VIRGO, tandis que la cavité de recyclage est conçue pour être couplée optimalement.

### A.3 La phase du champ réfléchi

La phase du champ réfléchi en fonction de l'écart  $\phi$  s'écrit:

$$\psi_{ref} = Arg\left(\frac{r_1 - r_2(1 - P_1)e^{2i\phi}}{1 - r_1r_2e^{2i\phi}}\right) \quad (\text{A.18})$$

A la résonance on a  $\phi = 0$  donc  $\psi_{ref} = \pi$ . Pour des écart petits  $\delta\phi$  par rapport à la résonance la dérivée de  $\psi_{ref}$  par rapport à  $\phi$  prend la forme:

$$\frac{d\psi_{ref}}{d\phi} \simeq r_2 \frac{\left((1 - P_1) - r_1^2\right)}{(1 - r_1r_2)(r_1 + (1 - P_1)r_2)} \quad (\text{A.19})$$

Dans le cas particulier  $r_2, r_1 \simeq 1$  et  $P_1 \simeq 0$  on a:

$$\frac{d\psi_{ref}}{d\phi} \simeq \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \quad (\text{A.20})$$

Donc la phase du champ réfléchi, pour des déphasages petits autour de la résonance, est amplifiée d'un facteur proportionnel à la finesse de la cavité: c'est l'effet utilisé par VIRGO et les autres interféromètres gravitationnels pour augmenter le chemin optique du détecteur.



# Bibliographie

- [1] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.Wheeler, "Gravitation", W.H. Freeman and Company, S.Francisco, 1973
- [2] S.Bonazzola and J.-A. Marck, "Astrophysical sources of gravitational radiation", *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **45**, 655 (1994)
- [3] Zwerger, T. & Muller, E., *Astron.Astrophys.*, **320**, 209 (1997)
- [4] J.M. Weisberg and J.H.Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1348 (1984)
- [5] collaboration VIRGO, "VIRGO proposal", 1989
- [6] collaboration VIRGO, "VIRGO Final design", 1995
- [7] collaboration LIGO, "A laser interferometry gravitational wave observatory", proposal pour la *National Science Foundation*, 1989
- [8] LISA study team, "LISA Laser interferometer Space Antenna", Pre-Phase A Report, publication du Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching 1998
- [9] C.M.Caves "Quantum-mechanical noise in an interferometer", *Phys. Rev. D*, **23**, 1693 (1981)
- [10] C.M.Caves et al., "On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator", *Review of Modern Physics*, **52**, 341 (1980)
- [11] R. Loudon, "The quantum theory of light", Univ. Scientific Press, 1985
- [12] C.M.Caves, "Quantum mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 75 (1980)
- [13] Agnès Dominjon, "Recherche des ondes gravitationnelles avec l'interféromètre VIRGO : étude et conception de l'ensemble de détection du signal", Thèse de Doctorat de l'Université de Savoie, Annecy 1996
- [14] J.-Y.Vinet et al., "Optimization of long-baseline optical interferometers for gravitational-wave detection", *Phys. Rev. D*, **38**, 433 (1988)



- [15] Peter Fritschel et al, "Demonstration of recycling technique in a Michelson Interferometer with Fabry-Perot cavities", *Applied Optics*, **31**, 1412 (1992)
- [16] P.Fritschel et al., "High power interferometric phase measurement limited by quantum noise et application to detection of gravitational waves", *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 3181 (1998)
- [17] H.B. Callen et al. "Irreversibility and generalized noise", *Physical Review*, **83**, 34 (1951)
- [18] Peter R. Saulson, "Thermal noise in mechanical experiments", *Phys. Rev. D*, **42**, 2437 (1990)
- [19] J.Y.Vinet et al., "Scattered light noise in gravitational wave interferometric detectors: Coherent effects", *Phys. Rev. D*, **54**, 1276 (1996)
- [20] J.Y.Vinet et al., "Scattered light noise in gravitational wave interferometric detectors: A statistical approach", *Phys. Rev. D*, **56**, 6085 (1997)
- [21] M.Beccaria et al., "Relevance of Newtonian noise for the VIRGO interferometer sensitivity", *Class. Quantum Grav.*, **15**, 1 (1998)
- [22] R. Barillet et al., "An injection-locked Nd: YAG laser for the interferometric detection of gravitational waves", *Rev. Sci. Instrum.*, **7**, 162 (1996)
- [23] G. Heinzel "Advanced optical techniques for laser-interferometric gravitational-wave detectors", Thèse de Doctorat, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching (1999)
- [24] G.Losurdo, "Ultra-Low Frequency Inverted Pendulum for the VIRGO Test Mass Suspension", Scuola Normale Superiore di Pisa, Thèse de Doctorat, 1999
- [25] G.Losurdo et al., "An inverted pendulum pre-isolator stage for VIRGO suspension control, soumis à *Rev. Sci. Instrum.*, 1999
- [26] F.Frasconi, Présentation à la conférence "Les rencontres de Moriond", Les Arcs, 1999
- [27] M. Barsuglia, "Il sistema di controllo longitudinale per un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali: analisi del problema e primi risultati sperimentali, Tesi di laurea in fisica, Pisa 1995
- [28] D.Sigg et al., "Frequency Response of the Ligo Interferometer", LIGO internal note LIGO T-970084-00-D, 1997
- [29] Collaboration VIRGO, "VIRGO final design", dans le chapitre "Large Mirrors", Mai 1997.
- [30] J.-M. Mackowsky, communication personnelle

- [31] Francois Bondu, "Asymmetry in VIRGO interferometer due to Perot-Fabry effect in corner mirrors: Analytical calculation", non publié, November 1996
- [32] G. Cagnoli et al., "The VIRGO sensitivity curve", note interne VIRGO VIR-NOT-PER-1390-084, 1997
- [33] R.W.P.Drever et al., "Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator", Applied Physics B, **31**, 97 (1983)
- [34] A la suite d'une discussion with L.Pinard, du groupe VIRGO de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, qui est responsable de la fabrication des miroirs.
- [35] P.Hello, "Modèle physique et simulation de l'antenne interférométrique gravitationnelle VIRGO", Thèse de Doctorat de l'Université de Paris XI, Orsay 1990
- [36] F.Bondu "Etude du bruit thermique et stabilisation de fréquence du laser du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO", Thèse de Doctorat de l'Université de Paris XI, Orsay 1996
- [37] Peter R. Saulson "Interferometric gravitational wave detectors", World Scientific, 1994
- [38] B.Caron et al., "A preliminary study of the locking of an interferometer for gravitational wave detection", Astroparticle Physics, **6**, 245 (1997)
- [39] A.Brillet, C.N.Man "Double servo-loop for the laser frequency stabilization", note interne VIRGO, NTS95-033, 1995
- [40] D. Shoemaker et al., "Noise behavior of the 30-m prototype gravitational-wave detector", Phys. Rev. D, **38**, 423, 1988
- [41] S. Wakamura et al., "Improved multistage wide band laser frequency stabilization, LIGO internal note LIGO-P960008-10-D, 1996
- [42] Mathew Taubmann, "VIRGO power stabilisation", Note interne du groupe VIRGO Laser-optique, Orsay, 1997
- [43] M. Barsuglia, "Shot noise limited sensitivity for the prestabilisation with the low finesse", VIRGO optics-group internal note, 1998
- [44] P.Fritschel, "Frequency stabilization: servo configuration and subsystem interface specification", note interne LIGO, LIGO-T970088-00-D, 1997
- [45] P.Fritschel et al., "Mode-Cleaner length-frequency control design", note interne LIGO, LIGO-T970218-01-D, 1997
- [46] W.Winkler, "Fluctuating light pressure in recycled interferometers", document GEO, non publié, 1997

- [47] Groupe VIRGO, “Central interferometer commissioning plan”, document VIRGO, 1999
- [48] F. Barone et al., “Effects of misalignments and beam jitters in interferometric gravitational-wave detectors”, *Physics Letters A*, **217**, 97 (1996)
- [49] P.Hello, “Couplings in interferometric gravitational wave detectors”, Mémoire d’habilitation a diriger des recherches, Orsay 1997, pag.29
- [50] F. Cleva et al., “VIRGO laser source”, in Proceedings of “2nd Edoardo Amaldi conference on gravitational waves and their detection”, CERN-Genève, 1997
- [51] A. Rudiger et al., “A mode selector to suppress fluctuations in laser beam geometry”, *Optica Acta*, **28**, 641 (1981)
- [52] D.Z.Anderson, “Alignment of resonant optical cavities”, *Applied Optics*, **23**, 2944 (1984)
- [53] C. Mathis et al., “Resonances and instabilities in a bidirectional ring laser”, *Physica D*, **96**, 242 (1996)
- [54] G.H.Nguyen, “Etude des capacités de filtrage d’une cavité résonnante suspendue”, Thèse de Doctorat de l’Université Paris VII, Orsay 1994
- [55] R.Adhikari et al., “Input optics preliminary design”, note interne LIGO, LIGO-T970144-00-D, 1997
- [56] H.Kogelnik and T.Li, “Laser beams and resonators”, *Applied Optics* **10**, 1150 (1966)
- [57] C.N.Man “List of modulation frequencies and towers positioning for the central and VIRGO interferometer”, note interne VIRGO, VIR-NOT-LAS-1390-103, 1997
- [58] M.Barsuglia, “Modulation frequency choice”, VIRGO locking meeting, 25 février 1997, Annecy
- [59] E. Morrison et al., “Automatic alignment of optical interferometers”, *Applied Optics*, **33**, 5041 (1994)
- [60] H.Heitmann, Ch.Drezen, “Measurement of position and orientation of optical elements in interferometric gravity wave detectors”, *Rev. Sci. Instrum.* **68**, 3197 (1997)
- [61] L.Derome et al., “SIESTA, a time domain, general purpose simulation program for the VIRGO experiment”, submitted to *Astroparticle Physics*
- [62] F.Bondu, communication personnelle
- [63] H.Heitmann, “Longitudinal control of the VIRGO mode-cleaner, note interne du groupe VIRGO laser-optique, Orsay 1997

- [64] K. Ogata, "Modern control engineering", Prentice-Hall International, 1997